



**HAL**  
open science

# Propagation d'ondes de Lamb dans un guide d'ondes à interface périodique

Maxime Bavencoffe

► **To cite this version:**

Maxime Bavencoffe. Propagation d'ondes de Lamb dans un guide d'ondes à interface périodique. Acoustique [physics.class-ph]. Université du Havre, 2009. Français. NNT : 2009LEHA0020 . tel-03240657

**HAL Id: tel-03240657**

**<https://theses.hal.science/tel-03240657>**

Submitted on 28 May 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse

## Propagation d'ondes de Lamb dans un guide d'ondes à interface périodique

Présentée à  
L'Université du Havre

Pour obtenir  
Le grade de docteur

Discipline  
Sciences pour l'Ingénieur

Spécialité  
Acoustique

Par  
Maxime Bavencoffe

Soutenue le 27 novembre 2009

### Jury

Mme	M. COMMANDRE	Professeur des Universités (Ecole Centrale de Marseille), Rapporteur
M.	D. ROYER	Professeur des Universités (Université de Paris 7), Rapporteur
M.	B. BONELLO	Chargé de Recherche CNRS (Université de Paris 6)
M.	M. DESCHAMPS	Directeur de Recherche CNRS (LMP de Bordeaux)
Mme	A-C. HLADKY	Directrice de Recherche CNRS (IEMN de Lille)
M.	J-L. IZBICKI	Professeur des Universités (Université du Havre)
M.	B. MORVAN	Maître de Conférences (Université du Havre)

### Invités

Mme	C. POTEL	Professeur des Universités (Université du Maine)
M.	J. VASSEUR	Professeur des Universités (Université d'Artois)

Laboratoire Ondes et Milieux Complexes, Groupe Ondes Acoustiques  
LOMC FRE CNRS 3102



*Un physicien moderne étudie la physique  
quantique les lundis, mercredis et vendredis  
et médite sur la théorie de la relativité  
gravitationnelle les mardis, jeudis et  
samedis. Le dimanche, il prie ... pour que  
quelqu'un trouve la corrélation entre les  
deux.*

*Norbert Wiener*

*Pour trouver une aiguille dans une botte de  
foin, c'est facile : brûlez la botte et  
l'aiguille apparaîtra.*

*Pierre Dac*

*Le peu que je sais, c'est à mon ignorance  
que je le dois.*

*Sacha Guitry*





*A mon Géo Trouvetou de Frère,*



# Remerciements

Ce travail de thèse a fait l'objet d'une cotutelle entre deux laboratoires de la Fédération Acoustique du Nord Ouest (FANO FR CNRS 3110) : l'Institut d'Electronique, de Microélectronique et de Nanotechnologie (IEMN UMR CNRS 8520) d'une part et le Laboratoire Ondes et Milieux Complexes (LOMC FRE CNRS 3102) d'autre part.

Je remercie Monsieur Marc Deschamps pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury. Je remercie également Madame Mireille Commandré et Monsieur Daniel Royer qui ont accepté d'examiner ce mémoire. Enfin, je souhaite remercier Madame Catherine Potel et Messieurs Bernard Bonello et Jérôme Vasseur pour leur participation au jury de cette thèse.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Madame Anne-Christine Hladky et à Messieurs Jean-Louis Izbicki et Bruno Morvan pour l'encadrement de cette thèse, leurs encouragements et la confiance qu'ils m'ont témoignée depuis mon stage d'ingénieur à l'Institut Supérieur d'Electronique et du Numérique (ISEN) de Lille.

Je remercie vivement Messieurs Emmanuel Moulin et Olivier Bou-Matar qui m'ont fait profité de leur expérience dans le domaine des matériaux visco-élastiques. Un grand merci à Monsieur Pascal Mosbah pour toutes les améliorations et personnalisations qu'il a apporté au logiciel ATILA<sup>®</sup> ainsi qu'à Monsieur Philippe Saint-Martin pour l'usinage des échantillons.

Mes remerciements s'adressent également à l'ensemble des membres présents et passés de l'équipe Acoustique du département ISEN de l'IEMN et de l'équipe Ondes Acoustiques du LOMC pour leur accueil amical, leur bonne humeur et leurs conseils avisés.

Je suis très reconnaissant à Madame Catherine Priester pour m'avoir initié à la modélisation numérique en Physique et m'avoir encouragé à faire une thèse.

Je remercie ma famille, mes proches, mes amis et anciens camarades de promotion de l'ISEN pour leur soutien, leur compréhension, leur aide et leurs encouragements. En particulier, je dédis ce manuscrit à ma Mamy, ma Mounette et mon frère Alexis.

Merci enfin à IBM T30 et DELL XPS, chers et braves compagnons d'infortune, qui ont supporté les longues heures de calculs de MATLAB<sup>®</sup> et d'ATILA<sup>®</sup> ainsi que les nombreux caprices de WORD<sup>®</sup>.







# Sommaire

<b>Introduction .....</b>	<b>15</b>
<b>Chapitre 1 Ondes de Lamb dans une plaque plane infinie .....</b>	<b>23</b>
1.1 Equations du mouvement .....	24
1.1.1 Relation fondamentale de la dynamique .....	24
1.1.2 Tenseur des déformations .....	25
1.1.3 Tenseur des contraintes .....	26
1.1.4 Loi de Hooke .....	26
1.1.5 Equation dynamique de Lamé .....	27
1.1.6 Equation des ondes .....	27
1.2 Ondes de Lamb dans une couche élastique infinie placée dans le vide.....	29
1.2.1 Expression des déplacements .....	29
1.2.2 Expression des contraintes .....	31
1.2.3 Modes de Lamb .....	31
1.2.3.1 Etude des solutions avec $\sigma_{xz}$ impair et $\sigma_{zz}$ pair .....	31
1.2.3.2 Etude des solutions avec $\sigma_{xz}$ pair et $\sigma_{zz}$ impair .....	33
1.2.3.3 Courbes de dispersion.....	34
1.3 Energie transportée par une onde .....	36
1.4 Ondes de Lamb et relation de phonon .....	40
1.4.1 Relation de phonon .....	40
1.4.2 Influence de la périodicité spatiale du réseau .....	41
1.5 Les éléments finis et le code ATILA® .....	42
1.5.1 Equations et conditions aux limites .....	43
1.5.2 Formulation variationnelle et discrétisation .....	43
1.5.3 Prise en compte des pertes .....	46
1.6 Conclusion .....	46
1.7 Bibliographie .....	47
<b>Chapitre 2 De la plaque plane infinie à la plaque infinie à motif périodique ...</b>	<b>51</b>
2.1 Une plaque infinie à motif périodique.....	52
2.1.1 Description des matériaux périodiques.....	52
2.1.1.1 Réseau, cellule élémentaire et vecteur de base .....	52
2.1.1.2 Vecteur d'onde, nombre d'onde .....	53
2.1.2 Réseau réciproque et zone de Brillouin.....	53
2.1.3 Présentation des grandeurs physiques recherchées .....	54
2.2 Etude numérique .....	54
2.2.1 Relation de Bloch-Floquet .....	54
2.2.2 Eléments finis et pseudo-analyse modale .....	55
2.2.2.1 Application des conditions de périodicité aux valeurs nodales du déplacement : cas d'une structure 1D.....	55
2.2.2.2 La structure étudiée .....	58
2.2.3 Les courbes de dispersion.....	59
2.3 Analyse des courbes de dispersion .....	60
2.3.1 Deux types de gaps .....	61
2.3.2 Gap et sens de propagation .....	62
2.3.3 Influence de la profondeur des rainures .....	64
2.4 De $\omega(k)$ à $k(\omega)$ : mise en évidence des modes évanescents .....	66
2.4.1 Un nouveau système linéaire .....	66
2.4.2 Mise en œuvre de la méthode.....	68
2.4.3 Validation de la méthode.....	69
2.5 Analyse des courbes de dispersion dans l'espace complexe .....	71
2.5.1 Courbes de dispersion dans l'espace complexe .....	71
2.5.2 A la fréquence centrale du gap .....	72
2.5.3 Influence de la profondeur des rainures .....	74
2.5.4 Théorie des modes couplés .....	75
2.5.5 Influence des pertes .....	79
2.6 Conclusion .....	83



2.7	Bibliographie .....	84
<b>Chapitre 3</b>	<b>Couplage de deux modes de Lamb sur un réseau de longueur finie</b>	<b>89</b>
3.1	Une plaque finie à motif périodique .....	90
3.1.1	La structure étudiée .....	90
3.1.2	Des matériaux viscoélastiques.....	91
3.1.2.1	Les atténuateurs .....	91
3.1.2.2	Les « Perfectly Matched Layers » .....	98
3.1.3	Mode d'excitation de la structure et zone d'étude.....	104
3.1.4	Précisions sur le maillage .....	104
3.2	Analyse harmonique .....	105
3.2.1	Obtention des coefficients de réflexion et de transmission en énergie des ondes se propageant dans la plaque .....	105
3.2.2	Atténuation et gap .....	108
3.2.3	Influence des paramètres géométriques du réseau.....	109
3.2.3.1	Influence du nombre de rainures .....	109
3.2.3.2	Influence de la profondeur des rainures .....	111
3.3	Atténuation et ondes évanescentes .....	112
3.3.1	Régression non linéaire .....	112
3.3.2	Influence du nombre de rainures .....	114
3.4	Conclusion.....	115
3.5	Bibliographie .....	115
<b>Chapitre 4</b>	<b>Etude expérimentale .....</b>	<b>119</b>
4.1	Présentation de l'échantillon expérimental.....	120
4.1.1	Du motif sinusoïdal au motif triangulaire .....	120
4.1.1.1	Comparaison des densités spectrales de puissance.....	120
4.1.1.2	Modification des courbes de dispersion.....	123
4.1.1.3	Modification des coefficients de transmission et de rétroconversion.....	125
4.1.2	Caractéristiques de l'échantillon .....	126
4.2	Description de l'étude expérimentale .....	128
4.2.1	Dispositif expérimental .....	128
4.2.2	Réception .....	129
4.2.3	Traitement des résultats expérimentaux.....	130
4.2.4	Emission .....	130
4.2.4.1	Signal d'excitation.....	130
4.2.4.2	Interface transducteur/plaque .....	131
4.3	Propagation avant le réseau.....	138
4.3.1	Identification des modes .....	139
4.3.1.1	Avant le gap intra-bande .....	139
4.3.1.2	Dans le gap intra-bande .....	140
4.3.1.3	Après le gap intra-bande .....	142
4.3.2	Aspect quantitatif.....	143
4.4	Propagation sous le réseau .....	144
4.4.1	Avant le gap intra-bande.....	145
4.4.2	Dans le gap intra-bande .....	148
4.4.3	Après le gap intra-bande .....	150
4.5	Conclusion.....	153
4.6	Bibliographie .....	153
<b>Conclusion .....</b>		<b>157</b>
<b>Annexe .....</b>		<b>161</b>
A.1	Cas d'un réseau cristallin linéaire monoatomique .....	161
A.2	Cas d'un réseau cristallin linéaire diatomique .....	163





# Introduction

En 1917, Sir Horace Lamb présentait ses travaux sur la propagation d'ondes dans une plaque élastique infinie [1] sans se douter que ceux-ci connaîtraient de très nombreux prolongements et autant d'applications. L'étude de ces « ondes de plaques », ou « ondes de Lamb », a été poursuivie notamment par I.A. Viktorov [2] et B.A. Auld [3].

Les ondes guidées, telles que les ondes de Lamb, ont la particularité de se propager sur de longues distances comparées à leur longueur d'onde. Aussi, elles sont d'un grand intérêt pour le Contrôle Non Destructif (CND) [4], en particulier pour le contrôle de structures planes ou cylindriques de grandes dimensions (canalisations, structures aéronautiques ...). Les caractéristiques des ondes de Lamb étant directement liées aux propriétés des matériaux dans lesquels elles se propagent, il est possible, par exemple, de déterminer un défaut d'homogénéité d'un matériau en mesurant une atténuation ou bien détecter et localiser un défaut en observant une réflexion. La formation d'une onde de Lamb résulte de la réflexion d'ondes élémentaires (longitudinale et transversale dans un solide isotrope) sur les interfaces délimitant le guide d'ondes. Il est donc naturel que ces ondes soient également sensibles à la nature des surfaces du guide. En particulier, si ces surfaces sont rugueuses, une atténuation d'amplitude des ondes au cours de leur propagation peut en découler [5-7]. La profondeur des rugosités (*i.e.* l'écart moyen arithmétique par rapport à la ligne moyenne) est bien sûr un paramètre important. L'écart entre les crêtes de la rugosité en est un autre. En effet, l'influence de la rugosité ne sera pas la même si les longueurs caractéristiques de la rugosité sont du même ordre de grandeur que la longueur d'onde de l'onde de Lamb ou si celles-ci sont très inférieures. Généralement, la rugosité résulte de l'usinage par enlèvement de matière à l'aide d'arêtes coupantes d'outils de tournage, de fraises, de meules ... L'état de surface est alors constitué de stries ou sillons périodiques ou pseudo périodiques. Ces guides d'ondes ont fait l'objet de nombreuses études, notamment sur la détection de corrosion [5-7] ou sur le collage entre deux matériaux [8-11]. Dans ce cas, même si les ondes de Rayleigh ou de Scholte [12-14] sont employées préférentiellement pour évaluer l'état d'une interface, il n'est pas possible d'étudier de telles ondes pour qualifier le collage de l'assemblage. Les ondes de Lamb, usuellement utilisées pour caractériser un défaut localisé dans l'épaisseur [15-18], sont par contre mieux adaptées à cette étude : elles peuvent être générées sur la face opposée à la surface collée et leur propagation dans l'assemblage peut être analysée sur cette même face. Ces applications ont motivé des études en amont avec des approches multi-échelles [19-22] ou multi-modales [23] visant à modéliser les structures présentant une rugosité d'interface.

Ces études ont montré en particulier que, pour comprendre l'interaction de la rugosité de surface avec les ondes de Lamb, deux paramètres sont primordiaux : la périodicité spatiale de la rugosité et son amplitude. La question de la propagation d'ondes élastiques dans une structure périodique s'est donc posée.

Il y a plus de 50 ans, L. Brillouin [24] avait déjà initié cette étude. Il a montré que le phénomène de périodicité induit l'existence de deux types de bandes fréquentielles. L'une permet la propagation d'ondes : la « bande passante ». L'autre,

## Introduction

dénommée « bande interdite », provoque l'atténuation des ondes [25-27]. Toutefois, comme le spécifie S. Banerjee [28; 29], la compréhension de ces zones fréquentielles n'est pas seulement d'un intérêt académique, mais a trait à des applications telles que le filtrage hautement sélectif, le multiplexage et le démultiplexage.

Depuis 1987, les cristaux photoniques font l'objet d'importantes recherches en électromagnétisme [30; 31]. Ceux-ci sont structurés de telle façon que le comportement de la lumière est contrôlé. En organisant un système périodique (dans une, deux ou trois dimensions) dans le cristal, des bandes interdites sont créées, et, dans ces bandes de fréquences, la lumière ne sera pas transmise mais réfléchi entièrement par le cristal. Par analogie avec l'électromagnétisme, les structures périodiques présentant des bandes interdites (ou *gap*) pour les ondes acoustiques sont appelées « cristaux phononiques » [32]. La structure de bandes gouverne l'ensemble des propriétés du cristal phononique. Ces cristaux phononiques peuvent être mis en application, par exemple, pour atténuer le bruit dans une conduite [33] ou, en plus haute fréquence, pour synthétiser des coupleurs ou des résonateurs [34], des démultiplexeurs [35] ... L'étude des cristaux phononiques a pour perspectives de nombreuses applications potentielles telles que le guidage d'ondes [36], la création de super lentilles acoustiques par réfraction négative [37], ou encore l'élaboration d'une « cape d'invisibilité » au sens des ondes acoustiques (ou *cloaking*) [38; 39].

Le sujet des cristaux phononiques n'est abordé, en tant que tel, que depuis 2007 au sein de l'ex-Laboratoire d'Acoustique Ultrasonore et d'Electronique (LAUE UMR CNRS 6068), devenu Groupe Ondes Acoustiques (GOA) du Laboratoire Ondes et Milieux Complexes (LOMC FRE CNRS 3102). Il résulte de la fusion et de l'évolution de tout ou partie des champs de recherche précédemment développés au LAUE, tels que les interfaces rugueuses, la diffusion multiple ou l'acoustique physique. La thèse de Damien Leduc [40] a notamment montré que les surfaces rugueuses qu'il a étudiées possèdent des densités spectrales de puissance (DSP) montrant deux ou trois longueurs caractéristiques. Une première étude d'une plaque possédant sur une interface un réseau périodique a alors été réalisée. La périodicité  $\Lambda$  du réseau induit un effet de repliement des courbes de dispersion des ondes de Lamb à l'intérieur de la première zone de Brillouin [41]. De ce fait, dans cette zone, des croisements de courbes de dispersion sont obtenus. La présence de bandes interdites correspond alors à un couplage possible entre modes. Ce couplage induit des conversions à l'origine de l'atténuation observée sur le mode incident [42; 43]. Cette opération de recherche a été fortement liée au Groupe de Recherche Ultrasons (GDR-US CNRS 2501) et donne lieu actuellement à une double collaboration avec deux laboratoires de la Fédération Acoustique du Nord Ouest (FANO FR CNRS 3110) : le Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM UMR CNRS 6613), d'une part, et l'Institut d'Electronique, de Microélectronique et de Nanotechnologie (IEMN UMR CNRS 8520), d'autre part. Une approche modale de la propagation d'ondes guidées dans une plaque présentant une surface périodique a été menée par Catherine Potel, Claude Depollier et Michel Bruneau du LAUM [44; 45]. Depuis janvier 2004, un modèle simplifié de plaque striée périodique est élaboré par éléments finis avec Anne-Christine Hladky de l'IEMN.

Le présent travail de thèse s'inscrit dans le cadre de FANO. Il fait suite aux travaux de thèse de Damien Leduc et est co-encadré par Jean-Louis Izbicki et Bruno Morvan d'une part, et Anne-Christine Hladky, d'autre part. L'objectif poursuivi est l'étude du couplage de modes de vibration en présence d'une interface périodique et

## Introduction

l'étude de l'influence de l'existence de bandes interdites sur l'atténuation des ondes de Lamb. Cette étude est en premier lieu numérique : la méthode des éléments finis est utilisée à l'aide du code ATILA<sup>®</sup> [46]. Une étude expérimentale visant à valider qualitativement les résultats obtenus est ensuite menée. Un travail parallèle, réalisé par Tony Valier-Brazier [47; 48] au LAUM, encadré par Catherine Potel et Michel Bruneau, aborde la question de l'atténuation des ondes transverses horizontales et des ondes de Lamb dans une plaque présentant une interface périodique par une approche multimodale qui est complémentaire de l'approche développée ici.

Dans le premier chapitre, les aspects théoriques de la propagation des ondes de Lamb dans une plaque plane infinie sont abordés. Quelques propriétés fondamentales de ces ondes sont présentées, en particulier les courbes de dispersion. La structure étudiée, une plaque présentant un réseau gravé sur une des interfaces, est ensuite présentée et des résultats obtenus antérieurement sont très brièvement rappelés. La propagation des ondes dans une telle structure peut être suivie par une méthode numérique. Aussi, quelques éléments de la théorie des éléments finis sont donnés. Par ailleurs, des précisions nécessaires à l'exploitation des résultats théoriques, numériques et expérimentaux des prochains chapitres sont introduites.

Le second chapitre est consacré à l'étude numérique d'une plaque dont l'une des interfaces est striée de façon périodique. Celui-ci commence donc par la description des matériaux périodiques et la définition du vocabulaire *ad hoc*. Une première étude numérique permet d'obtenir les courbes de dispersion du guide d'ondes et de mettre en évidence deux types de bandes interdites. Il s'ensuit une étude de l'influence des paramètres de la périodicité du guide d'ondes sur ces bandes interdites. Enfin, une méthode permettant à la fois d'obtenir les courbes de dispersion et de mettre en évidence des modes évanescents est décrite, validée et employée.

Dans le troisième chapitre, le guide d'ondes considéré est une plaque comportant un réseau limité de motifs périodiques. L'objectif est d'établir un lien entre l'atténuation des ondes se propageant dans une telle structure et les caractéristiques d'une bande d'arrêt observée dans le cas d'une plaque infinie à motif périodique. Enfin, une relation entre l'atténuation des ondes propagatives dans un réseau limité et l'existence de modes évanescents, établie au chapitre précédent, est présentée.

L'objectif du quatrième chapitre est d'appuyer les résultats numériques, obtenus au troisième chapitre, par une étude expérimentale. En premier lieu, les modifications géométriques apportées au guide d'ondes du fait de considérations techniques sont exposées. Il s'ensuit une description du dispositif expérimental et des traitements des données acquises. Les résultats issus de ces traitements sont ensuite analysés.

La conclusion résume les acquis obtenus au cours de ce travail et propose des pistes de réflexion sur les suites à donner.

## Introduction

- [1] H. Lamb, "On Waves in an Elastic Plate," *Proc. R. Soc. A*, vol. 93, p. 114-128, 1917.
- [2] B.A. Auld. *Acoustic fields and waves in solids*. Wiley, 1973.
- [3] I.A. Victorov. *Rayleigh and Lamb waves*. Plenum Press, 1967.
- [4] H. Kuttruff. *Ultrasonics : Fundamentals and Applications*. Elsevier Applied Science, 1991.
- [5] D.E. Chimenti, and O.I. Lobkis, "The effect of rough surfaces on guided waves in plates," *Ultrasonics*, vol. 36, p. 155-162, 1998.
- [6] O.I. Lobkis, and D.E. Chimenti, "Elastic guided waves in plates with surfaces roughness. II. Experiments," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 102, p. 150-159, 1997.
- [7] O.I. Lobkis, and D.E. Chimenti, "Elastic guided waves in plates with surfaces roughness. I. Model calculation," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 102, p. 143-149, 1997.
- [8] C.C.H. Guyott, P. Cawley, and R.P. Adams, "The non-destructive testing of adhesively bonded structure: a review," *J. Adhesion*, vol. 20, p. 129-159, 1986.
- [9] Y. Bar-Cohen, A.K. Mal, and C.C. Yin, "Ultrasonic evaluation of adhesive bonding," *J. Adhesion*, vol. 29, p. 257-274, 1989.
- [10] R.P. Digby, and D.E. Packham, "Pretreatment of aluminium: topography, surface chemistry and adhesive bond durability," *Int. J. Adhesion and Adhesives*, vol. 15, p. 61-71, 1995.
- [11] G.W. Critchlow, and D.M. Brewis, "Review of surface pretreatments for aluminium alloys," *Int. J. Adhesion and Adhesive*, vol. 16, p. 255-275, 1996.
- [12] A.A. Maradudin, and D.L. Mills, "The attenuation of Rayleigh surface waves by surface roughness," *Annals of Physics*, vol. 100, p. 262-309, 1976.
- [13] J.R. Chamuel, "Transient Scholte wave transmission along rough liquid/solid interfaces," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 83, p. 1336-1344, 1988.
- [14] A.A. Tarasenko, L. Jastrabik, and N.A. Tarasenko, "Effect of roughness on the elastic surface wave propagation," *Eur. Phys. J. Appl. Phys.*, vol. 24, p. 3-12, 2003.
- [15] D.N. Alleyne, and P. Cawley, "Optimisation of Lamb wave inspection techniques," *NDT&E Intern.*, vol. 25, p. 11-22, 1992.
- [16] D.N. Alleyne, and P. Cawley, "The interaction of Lamb waves with defects," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.*, vol. 39, p. 381-397, 1992.
- [17] S.I. Rokhlin, "Diffraction of Lamb waves by a finite crack in an elastic layer," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 67, p. 1157-1165, 1982.
- [18] M. Castaings, E. Le Clezio, and B. Hosten, "Modal decomposition method for modeling the interaction of Lamb waves with cracks," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 112, p. 2567-2582, 2002.
- [19] A.H. Nayfeh, "Acoustic waves in ducts with sinusoidally perturbed walls and mean flow," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 57, p. 1036-1039, 1975.
- [20] A.H. Nayfeh, "Sound waves in two-dimensional ducts with sinusoidal walls," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 56, p. 768-770, 1974.
- [21] R.F. Salant, "Acoustic propagation in waveguides with sinusoidal walls," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 53, p. 504-507, 1973.
- [22] J.C. Samuels, "On Propagation of Waves in Slightly Rough Ducts," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 31, p. 319-325, 1959.
- [23] C. Potel, and M. Bruneau, "Modes coupling due to nonhomogeneously shaped walls in duct acoustics," *J. Sound Vib.*, vol. 313, p. 738-759, 2008.
- [24] L. Brillouin. *Wave propagation in periodic structures*. Mineola, NY: Dover Publications, 1953.

## Introduction

- [25] A. El-Bahrawy, "Stopbands and Passbands for symmetric Rayleigh-Lamb modes in a plate with corrugated surfaces," *J. Sound Vib.*, vol. 170, p. 145-160, 1994.
- [26] S. Sandstrom, "Stopbands in a corrugated parallel plate waveguide," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 79, p. 1293-1298, 1986.
- [27] J. Vasseur, J.O. Deymier, P.A. Frantziskonis, G. Hong, B. Djafari-Rouhani, and L. Dobrzynski, "Experimental evidence for the existence of absolute acoustic band gaps in two-dimensional periodic composite media," *J. Phys.: Condens. Matter*, vol. 10, p. 6051-6064, 1998.
- [28] S. Banerjee, and T. Kundu, "Elastic wave propagation in sinusoidally corrugated waveguides," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 119, p. 2006-2017, 2006.
- [29] S. Banerjee, and T. Kundu, "Symmetric and anti-symmetric Rayleigh-Lamb modes in sinusoidally corrugated waveguides: An analytical approach," *Int. J. Solid. Struct.*, vol. 43, p. 6551-6567, 2006.
- [30] E. Yablonovitch, "Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics and Electronics," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, p. 2059 - 2062, 1987.
- [31] S. John, "Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, p. 2486-2489, 1987.
- [32] S. Yang, J.H. Page, Z. Liu, M.L. Cowan, C.T. Chan, and P. Sheng, "Ultrasound Tunneling through 3D Phononic Crystals," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 88, p. 104301, 2002.
- [33] P.M. Morse, "The Transmission of Sound Inside Pipes," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 11, p. 205-210, 1939.
- [34] D. Royer, and E. Dieulesaint. *Elastic Waves in Solids*. Springer, 2000.
- [35] Y. Pennec, B. Djafari-Rouhani, J. Vasseur, P.A. Deymier, and A. Khelif, "Tunable filtering and demultiplexing in phononic crystals with hollow cylinders," *Phys. Rev. E*, vol. 69, p. 046608(6), 2004.
- [36] A. Khelif, A. Choujaa, S. Benchabane, B. Djafari-Rouhani, and V. Laude, "Guiding and bending of acoustic waves in highly confined phononic crystal waveguides," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 84, p. 4400-4402, 2004.
- [37] B. Morvan, A.C. Hladky-Hennion, J. Vasseur, J. Groby, B. Dubus, A. Tinel, and B. Djafari-Rouhani. "Negatively refracted transverse waves : study of the ultrasonic field at the exit of an elastic phononic crystal," *Proc. IEEE Ultrasonics Symp.*, 2009.
- [38] S.A. Cummer, B. Popa, D. Schurig, D.R. Smith, J. John Pendry, M. Rahm, and A. Starr, "Scattering Theory Derivation of a 3D Acoustic Cloaking Shell," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 100, p. 024301, 2008.
- [39] S.A. Cummer, and D. Schurig, "One path to acoustic cloaking," *New J. Phys.*, vol. 9, p. 45, 2007.
- [40] D. Leduc, *Propagation d'ondes de Lamb en présence d'une interface rugueuse*. Thèse de l'Université du Havre, 2005.
- [41] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. Wiley, 1998.
- [42] D. Leduc, B. Morvan, A.C. Hladky-Hennion, P. Pareige, and J.L. Izbicki, "Lamb wave propagation in a plate with a grooved surface with several spatial periodicities," *Ultrasonics*, vol. 44, p. e1359-63, 2006.
- [43] M. Bavencoffe, A.C. Hladky-Hennion, B. Morvan, D. Leduc, and J.L. Izbicki, "Decoherence of Lamb waves by a rough interface," *Proc. IEEE Ultrasonics Symp.*, vol. 2, p. 1280-1283, 2005.
- [44] C. Potel, D. Leduc, B. Morvan, C. Depollier, A.C. Hladky-Hennion, J.L. Izbicki, P. Pareige, and M. Bruneau, "Lamb wave attenuation in a rough plate. I.



## Introduction

- Analytical and experimental results in an anisotropic plate," *J. Appl. Phys.*, vol. 104, p. 074908-074910, 2008.
- [45] C. Potel, D. Leduc, B. Morvan, C. Depollier, A.C. Hladky-Hennion, J.L. Izbicki, P. Pareige, and M. Bruneau, "Lamb wave attenuation in a rough plate. II. Analytical and numerical results in a fluid plate," *J. Appl. Phys.*, vol. 104, p. 074909-074906, 2008.
- [46] ATILA Finite Element Code for Piezoelectric and Magnetostrictive Transducer Modeling, Version 6.0.2, User's Manual, Acoustics Laboratory, ISEN, 2002.
- [47] T. Valier-Brasier, C. Potel, and M. Bruneau, "Modes coupling of shear acoustic waves polarized along a one-dimensional corrugation on the surfaces of an isotropic solid plate," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 93, p. 164101(3), 2008.
- [48] T. Valier-Brasier, C. Potel, and M. Bruneau, "On the modeling of modes coupling in dissipative fluid-filled waveguide with corrugated surfaces," *J. Appl. Phys.*, vol. 106, p. 034913(8), 2009.





# Chapitre 1 Ondes de Lamb dans une plaque plane infinie

*Dans un solide infini, homogène et isotrope, deux types d'ondes élastiques peuvent se propager : les ondes longitudinales (ou ondes de compression, engendrant des vibrations colinéaires à la direction de propagation), et les ondes transversales (ou ondes de cisaillement, engendrant des vibrations normales à la direction de propagation). Si le solide est limité par une surface libre, ces ondes interagissent avec cette frontière et subissent une réflexion avec conversion d'ondes longitudinales en ondes transversales et réciproquement. Ces ondes sont alors guidées par la surface du solide semi-infini et constituent les composantes d'une onde de surface ou onde de Rayleigh [1]. Celle-ci est polarisée elliptiquement dans le plan sagittal et son amplitude s'atténue sur quelques longueurs d'onde dans la profondeur du milieu.*

*Dans le cas d'un solide élastique limité par deux surfaces parallèles libres, tel qu'une plaque infinie placée dans le vide, les ondes cheminent en se réfléchissant alternativement sur les deux surfaces. Ces ondes guidées en volume ont été découvertes par Sir Horace Lamb [2]. Les ondes de Lamb ont la particularité de se propager sur de longues distances sans atténuation et leurs propriétés sont liées à celles du matériau [3; 4]. Ainsi, puisque ces ondes peuvent être altérées par les défauts du solide, elles sont souvent utilisées pour le Contrôle Non Destructif (CND) en vue notamment de caractériser la fiabilité de structures, leur tenue en service et la présence de défauts [5].*

*Ce premier chapitre est consacré aux aspects théoriques de la propagation des ondes de Lamb dans une plaque plane infinie. Cette étude débute par des rappels sur la mécanique des milieux continus, l'élasticité linéaire et l'acoustique [6]. Le cas particulier des ondes de Lamb est ensuite traité [3; 4]. Quelques propriétés fondamentales de ces ondes ainsi que des précisions nécessaires à l'exploitation des résultats théoriques, numériques et expérimentaux sont ensuite présentées.*

## 1.1 Equations du mouvement

A partir de ce chapitre, la notation d'Einstein ainsi que les conventions d'écriture suivantes seront employées :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \dot{f} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \ddot{f} \\ \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{,x_i} \\ \vec{u} \equiv \underline{u} \end{cases} \quad (1.1.1)$$

### 1.1.1 Relation fondamentale de la dynamique

Soit un élément de volume d'un milieu élastique homogène de masse volumique  $\rho$  (Figure 1). L'équation du mouvement dans la direction  $(Ox)$  s'écrit :

$$\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z} + f_x = \rho \ddot{u}_x \quad (1.1.2)$$

où  $\sigma_{ji}$  représente les composantes du tenseur des contraintes,  $f$  la densité de force,  $\rho$  la masse volumique et  $u_x$  le déplacement mesuré par rapport à la configuration de référence.

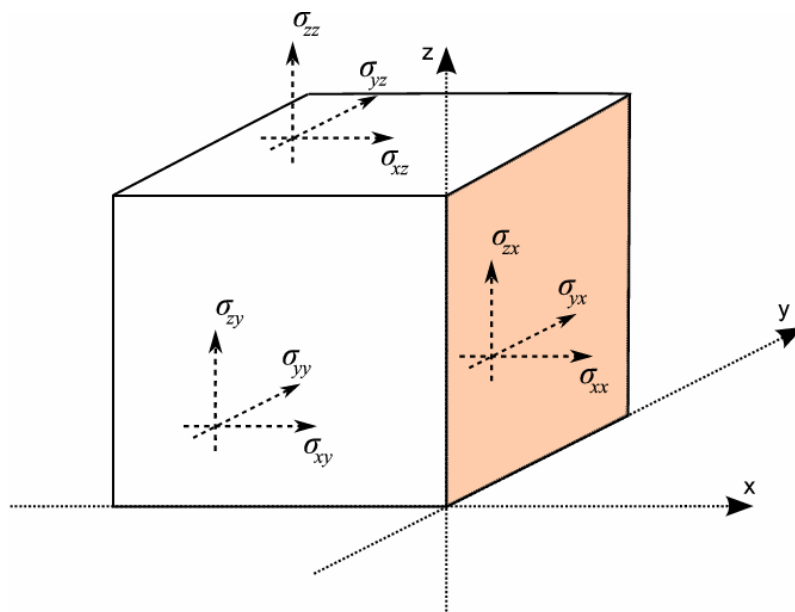


Figure 1 Contraintes dans la direction  $(Ox)$  pour un élément de volume.

A trois dimensions, les équations du mouvement dans un référentiel cartésien  $(Oxyz)$  s'écrivent sous la forme :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (1.1.3)$$

### 1.1.2 Tenseur des déformations

Dans le cas de petites déformations, ce tenseur est le tenseur de Green, dérivé du champ de déplacement. Les composantes  $\varepsilon_{ij}$  de ce tenseur sont obtenues en considérant un point  $A$  d'un solide, repéré par le vecteur  $\underline{a}(x, y, z)$ , et un point  $B$  très proche, repéré par le vecteur  $\underline{a} + \delta\underline{a}$  de coordonnées  $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$ . Après déformation du solide, le point  $A$  se déplace de sa position initiale d'une quantité  $\underline{u}(u_x, u_y, u_z)$ . Quant au point  $B$ , celui-ci se déplace d'un vecteur  $\underline{u} + \delta\underline{u}$  de coordonnées  $(u_x + \delta u_x, u_y + \delta u_y, u_z + \delta u_z)$  tenant compte de toutes les déformations en longueur ou en rotation.

Du fait que les variations relatives de distances sont faibles, un développement au premier ordre permet d'écrire les composantes du déplacement relatif en fonction des composantes du vecteur  $\delta\underline{a}$  :

$$\begin{pmatrix} \delta x_u \\ \delta y_u \\ \delta z_u \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u_{x,x} & u_{x,y} & u_{x,z} \\ u_{y,x} & u_{y,y} & u_{y,z} \\ u_{z,x} & u_{z,y} & u_{z,z} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} = M_D \cdot \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} \quad (1.1.4)$$

La matrice  $M_D$  des dérivées partielles peut se mettre alors sous la forme :

$$M_D = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} - \chi_3 & \varepsilon_{13} + \chi_2 \\ \varepsilon_{21} + \chi_3 & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} - \chi_1 \\ \varepsilon_{31} - \chi_2 & \varepsilon_{32} + \chi_1 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (1.1.5)$$

avec :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.1.6)$$

et :

$$\chi_k = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) = \frac{1}{2} \underline{\nabla} \wedge \underline{u} \quad (1.1.7)$$

$\chi_k$  désigne les composantes du vecteur :

$$\underline{\chi} = \frac{1}{2} \underline{\nabla} \wedge \underline{u} \quad (1.1.8)$$

Le tenseur des déformations est un tenseur symétrique d'ordre 2 servant à décrire l'état d'une déformation locale résultant des contraintes (efforts internes). L'état de déformation d'un solide est décrit par un champ de tenseur, c'est-à-dire que le tenseur des déformations est défini en tout point du solide. Les composantes de ce champ de déformation sont notées  $\varepsilon_{ij}$ , avec :

- les termes diagonaux  $\varepsilon_{ii}$ , les allongements relatifs dans la direction  $i$  et traduisant un changement de forme et de volume :

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \text{trace}(M_D) = \underline{\nabla} \cdot \underline{u} \quad (1.1.9)$$

- les autres termes  $\varepsilon_{ij}$ , les demies variations de l'angle droit (notées  $\gamma$ , en supposant un petit volume de matière cubique avant déformation) et traduisant des mouvements de cisaillement. Les composantes du vecteur  $\underline{\chi}$  sont associées à des effets de rotation du solide qui n'entraînent pas de déformation. Les neuf

composantes du tenseur des déformations se réduisent à six composantes car, d'après la relation (1.1.6),  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ .

### 1.1.3 Tenseur des contraintes

Lorsqu'un corps élastique est déformé par des actions extérieures, des forces internes ont tendance à le ramener dans son état initial : ce sont les contraintes. Ces contraintes peuvent être représentées à l'aide du vecteur  $\vec{T}$  représentant une force par unité de surface et tel que :

$$T_i = \sigma_{ij} \cdot \alpha_j \quad (1.1.10)$$

avec  $\alpha_j$  les cosinus directeurs de la normale  $\vec{n}$  à la surface sur laquelle s'applique la contrainte. Ce tenseur est symétrique, aussi :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (1.1.11)$$

### 1.1.4 Loi de Hooke

Pour un milieu élastique, soumis à des petites déformations, la déformation est proportionnelle à la contrainte et la loi de l'élasticité linéaire est :

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1.1.12)$$

Comme il a été montré précédemment, les tenseurs des déformations et des contraintes sont symétriques. Il est alors possible d'écrire la relation sous la forme :

$$\sigma_n = c_{nm} \varepsilon_m \quad (1.1.13)$$

en tenant compte de la notation présentée au Tableau 1 :

$ij$	11	22	33	23	31	12
$m$	1	2	3	4	5	6

**Tableau 1** Correspondance entre la valeur de l'indice  $m$  et celle du couple d'indices  $ij$ .

et de :

$$\begin{cases} \varepsilon_m = \varepsilon_{ij} & \text{pour } m = 1, 2, 3 \\ \frac{\varepsilon_m}{2} = \varepsilon_{ij} & \text{pour } m = 4, 5, 6 \end{cases} \quad (1.1.14)$$

Dans le cas d'un milieu homogène et isotrope, la matrice  $[c_{nm}]$  peut se simplifier de la manière suivante :

$$[c_{nm}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \quad (1.1.15)$$

Dans la pratique, les constantes élastiques  $c_{11}$ ,  $c_{12}$  et  $c_{44}$  s'écrivent en fonction des coefficients  $\lambda$  et  $\mu$  de Lamé [4] :

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (1.1.16)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker :

$$\begin{cases} i = j \Rightarrow \delta_{ij} = 1 \\ i \neq j \Rightarrow \delta_{ij} = 0 \end{cases} \quad (1.1.17)$$

Ainsi, l'expression (1.1.16) permet d'écrire l'équation (1.1.12) sous la forme de la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.1.18)$$

Par ailleurs, les coefficients de Lamé peuvent être exprimés en fonction du module  $E$  d'Young et du coefficient  $\nu$  de Poisson :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.1.19)$$

### 1.1.5 Equation dynamique de Lamé

En insérant l'expression des contraintes selon la loi de Hooke (1.1.18) dans l'équation du mouvement unidirectionnel (1.1.2), celle-ci devient :

$$(\lambda + \mu)(u_{x,x} + u_{y,y} + u_{z,z}) + \mu(u_{x,xx} + u_{x,yy} + u_{x,zz}) + f_x = \rho \ddot{u}_x \quad (1.1.20)$$

L'équation (1.1.20), dite équation dynamique de Lamé, s'écrit de manière réduite sous forme vectorielle :

$$(\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \underline{u}) + \mu \Delta \underline{u} + \underline{f} = \rho \ddot{\underline{u}} \quad (1.1.21)$$

### 1.1.6 Equation des ondes

D'après le théorème de Helmholtz, tout vecteur  $\underline{F}$  de l'espace satisfaisant à la condition aux limites de Sommerfeld peut se décomposer sous la forme :

$$\underline{F} = \nabla \varphi + \nabla \wedge \underline{\psi} \quad (1.1.22)$$

avec :

$$\nabla \wedge (\nabla \varphi) = \underline{0} \quad (1.1.23)$$

et :

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \underline{\psi}) = 0 \quad (1.1.24)$$

où  $\varphi$  est un potentiel scalaire et  $\underline{\psi}$  un potentiel vecteur défini à un gradient près.

De ce fait, le vecteur déplacement  $\underline{u}$  peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{u} = \nabla \varphi + \nabla \wedge \underline{\psi} \quad (1.1.25)$$

Dans cette formulation,  $\varphi$  traduit la déformation liée à la dilatation (avec changement local de volume) et  $\underline{\psi}$  la déformation liée au cisaillement (sans changement de volume).

L'utilisation de la condition de jauge de Coulomb :

$$\nabla \cdot \underline{\psi} = 0 \quad (1.1.26)$$

permet d'écrire la divergence et le laplacien vectoriel du vecteur déplacement présents dans l'expression (1.1.21) respectivement sous la forme :

$$\nabla \cdot \underline{u} = \Delta \varphi + \nabla \cdot (\nabla \wedge \underline{\psi}) = \Delta \varphi \quad (1.1.27)$$

$$\Delta \underline{u} = \Delta (\nabla \varphi) + \Delta (\nabla \wedge \underline{\psi}) = \nabla (\Delta \varphi) + \Delta (\nabla \wedge \underline{\psi}) \quad (1.1.28)$$



Afin de simplifier l'expression (1.1.28), les identités suivantes, valables respectivement pour un champ vectoriel  $\underline{V}$  et un champ  $U$  scalaire arbitraires, sont employées :

$$\underline{\Delta}\underline{V} = \underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{V}) - \underline{\nabla}\wedge(\underline{\nabla}\wedge\underline{V}) \quad (1.1.29)$$

$$\underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\wedge\underline{V}) = 0 \quad (1.1.30)$$

$$\underline{\nabla}\wedge(\underline{\nabla}U) = 0 \quad (1.1.31)$$

Partant de l'équation (1.1.28), il est alors possible d'écrire :

$$\underline{\Delta}(\underline{\nabla}\wedge\underline{\psi}) = \underline{\nabla}\left[\underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\wedge\underline{\psi})\right] - \underline{\nabla}\wedge\left[\underline{\nabla}\wedge(\underline{\nabla}\wedge\underline{\psi})\right] \quad (1.1.32)$$

$$\underline{\Delta}(\underline{\nabla}\wedge\underline{\psi}) = -\underline{\nabla}\wedge\left[\underline{\Delta}\underline{\psi} + \underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{\psi})\right] = \underline{\nabla}\wedge(\underline{\Delta}\underline{\psi}) \quad (1.1.33)$$

Compte tenu de la condition de jauge (1.1.26), l'expression du laplacien vectoriel du vecteur déplacement s'écrit :

$$\underline{\Delta}\underline{u} = \underline{\nabla}(\underline{\Delta}\phi) + \underline{\nabla}\wedge(\underline{\Delta}\underline{\psi}) \quad (1.1.34)$$

L'équation du mouvement (1.1.21), dans le cas où les forces volumiques sont nulles, devient, après avoir fait les substitutions nécessaires :

$$\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\underline{\nabla}(\underline{\Delta}\phi) + \frac{\mu}{\rho}\underline{\nabla}\wedge(\underline{\Delta}\underline{\psi}) = \underline{\nabla}\ddot{\phi} + \underline{\nabla}\wedge\ddot{\underline{\psi}} \quad (1.1.35)$$

En appliquant l'opérateur divergence aux deux membres de cette équation et en utilisant la relation (1.1.24), il apparaît que :

$$\underline{\nabla}\cdot\left(\underline{\nabla}\ddot{\phi} - \frac{\lambda+2\mu}{\rho}\underline{\nabla}(\underline{\Delta}\phi)\right) = 0 \quad (1.1.36)$$

Par ailleurs, le rotationnel de l'expression entre parenthèses est aussi nul du fait de l'équation (1.1.23). Or, si le rotationnel et la divergence d'un vecteur sont nuls dans tout l'espace, ce vecteur est identiquement nul [7]. Donc :

$$\underline{\nabla}\ddot{\phi} - \frac{\lambda+2\mu}{\rho}\underline{\nabla}(\underline{\Delta}\phi) = 0 \quad (1.1.37)$$

En appliquant de même l'opérateur rotationnel à l'équation (1.1.35) et en tenant compte de la relation (1.1.23), il en résulte que :

$$\underline{\nabla}\wedge\left(\underline{\nabla}\wedge\ddot{\underline{\psi}} - \frac{\mu}{\rho}\underline{\nabla}\wedge(\underline{\Delta}\underline{\psi})\right) = 0 \quad (1.1.38)$$

Comme la divergence de l'expression entre parenthèses est aussi nulle, il est possible d'écrire que :

$$\underline{\nabla}\wedge\ddot{\underline{\psi}} - \frac{\mu}{\rho}\underline{\nabla}\wedge(\underline{\Delta}\underline{\psi}) = 0 \quad (1.1.39)$$

Les équations (1.1.37) et (1.1.39) correspondent aux équations d'ondes usuelles dans les trois dimensions de l'espace :

$$\begin{cases} c_L^2 \underline{\Delta}\phi = \ddot{\phi} \\ c_T^2 \underline{\Delta}\underline{\psi} = \ddot{\underline{\psi}} \end{cases} \quad (1.1.40)$$

Les coefficients  $c_L$  et  $c_T$  désignent respectivement les vitesses des ondes longitudinales et transversales dans un milieu élastique homogène :

$$\begin{cases} c_L = \left( \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2} \\ c_T = \left( \frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2} \end{cases} \quad (1.1.41)$$

## 1.2 Ondes de Lamb dans une couche élastique infinie placée dans le vide

Il s'agit d'étudier la propagation d'ondes ultrasonores dans une lame mince de quelques longueurs d'onde acoustique. Cette plaque plane infinie, homogène, d'épaisseur  $2h$ , de densité  $\rho$ , de module d'Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu$  est représentée à la Figure 2.

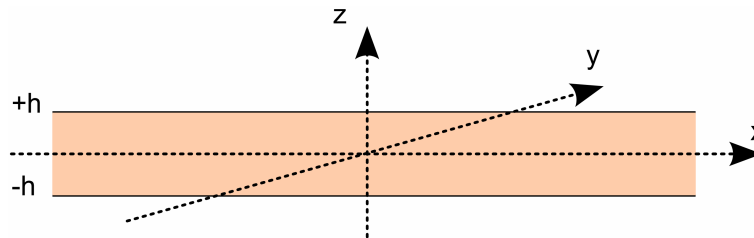


Figure 2 Schéma d'une plaque plane infinie d'épaisseur  $2h$ .

De part et d'autre de cette couche élastique le vide est supposé si bien que les conditions aux limites sont celles des surfaces libres. L'axe  $(Oz)$  est perpendiculaire à l'épaisseur de la couche élastique. Le plan  $(Oxy)$  est le plan médian de la plaque. Du fait de l'invariance de la structure selon l'axe  $(Oy)$ , le champ de déplacement  $\underline{u}$  est supposé indépendant de la coordonnée  $y$ . Ceci caractérise les ondes de Lamb mais aussi, par exemple, les ondes transverses horizontales. Celles-ci ne seront pas considérées dans la suite.

### 1.2.1 Expression des déplacements

La propagation d'une onde plane ultrasonore le long de l'axe  $(Ox)$  est étudiée. En appliquant la décomposition de Helmholtz au vecteur  $\underline{u}$ , celui-ci peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{u} = \underline{u}_L + \underline{u}_T \quad (1.2.1)$$

avec :

$$\begin{cases} \underline{u}_L = \underline{\nabla} \varphi \\ \underline{u}_T = \underline{\nabla} \wedge \underline{\psi} \end{cases} \quad (1.2.2)$$

Ceci implique les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \underline{\nabla} \wedge (\underline{u}_L) = 0 \\ \underline{\nabla} \cdot (\underline{u}_T) = 0 \end{cases} \quad (1.2.3)$$

Ainsi, le vecteur  $\underline{u}$  est la composition d'un vecteur déplacement longitudinal  $\underline{u}_L$  et d'un vecteur déplacement transversal  $\underline{u}_T$ .

## Chapitre 1 : Ondes de Lamb dans une plaque plane infinie

Du fait que le champ de déplacement  $\underline{u}$  est supposé indépendant de la coordonnée  $y$ , les potentiels  $\varphi$  et  $\psi$  sont invariants par translation dans la direction  $y$  et leurs dérivées partielles par rapport à la variable  $y$  sont nulles.

De ce fait, et à l'aide des équations (1.2.2) et (1.2.3),  $\underline{u}_L$  et  $\underline{u}_T$  s'écrivent respectivement :

$$\underline{u}_L = \begin{cases} x_L = \varphi_{,x} \\ y_L = 0 \\ z_L = \varphi_{,z} \end{cases} \quad (1.2.4)$$

et :

$$\underline{u}_T = \begin{cases} x_T = -\psi_{y,z} \\ y_T = 0 \\ z_T = \psi_{y,x} \end{cases} \quad (1.2.5)$$

d'où :

$$\underline{u} = \begin{cases} X = x_L + x_T = \varphi_{,x} - \psi_{y,z} \\ Y = 0 \\ Z = z_L + z_T = \varphi_{,z} + \psi_{y,x} \end{cases} \quad (1.2.6)$$

Par la suite la notation  $\psi_y \equiv \psi$  sera appliquée.

Les solutions du système d'équations (1.1.40) correspondant à des ondes harmoniques se déplaçant dans la direction ( $Ox$ ) ont pour expressions complexes :

$$\begin{cases} \varphi = g(z) \cdot e^{j(kx - \omega t)} \\ \psi = f(z) \cdot e^{j(kx - \omega t)} \end{cases} \quad (1.2.7)$$

avec  $\omega$  la pulsation et  $k$  la composante du vecteur d'onde le long de l'axe  $x$ .

Les expressions (1.2.4) et (1.2.5) impliquent alors respectivement les équations suivantes :

$$\begin{cases} g_{,zz} - \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c_L^2} \right) g = 0 \\ f_{,zz} - \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c_T^2} \right) f = 0 \end{cases} \quad (1.2.8)$$

Les équations du système (1.2.8) acceptent respectivement des solutions de la forme :

$$\begin{cases} g(z) = c \cdot e^{-\gamma_L z} + d \cdot e^{\gamma_L z} \\ f(z) = a \cdot e^{-\gamma_T z} + b \cdot e^{\gamma_T z} \end{cases} \quad (1.2.9)$$

avec :

$$\begin{cases} \gamma_L^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_L^2} = k^2 - k_L^2 \\ \gamma_T^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_T^2} = k^2 - k_T^2 \end{cases} \quad (1.2.10)$$

De ce fait, les potentiels  $\varphi$  et  $\psi$  s'écrivent :

$$\begin{cases} \varphi = (D \cdot ch(\gamma_L z) + C \cdot sh(\gamma_L z)) \cdot e^{j(kx - \omega t)} \\ \psi = (B \cdot ch(\gamma_T z) + A \cdot sh(\gamma_T z)) \cdot e^{j(kx - \omega t)} \end{cases} \quad (1.2.11)$$

### 1.2.2 Expression des contraintes

La plaque étant dans le vide, aucune contrainte n'est exercée sur sa surface. Les composantes du tenseur des contraintes, exercées dans la direction normale à l'interface, sont notées respectivement  $\sigma_{zz}$  pour la composante normale et  $\sigma_{xz}$  pour la composante tangentielle (Figure 1). Leurs expressions en fonction des composantes du vecteur déplacement  $\underline{u}$  sont respectivement :

$$\sigma_{xz} = \mu (Z_{,x} + X_{,z}) \quad (1.2.12)$$

et :

$$\sigma_{zz} = \lambda (X_{,x} + Z_{,z}) + 2\mu \cdot Z_{,z} \quad (1.2.13)$$

En utilisant l'expression des coordonnées de  $\underline{u}$  en fonction des potentiels  $\varphi$  et  $\psi$  (1.2.6) dans les équations (1.2.12) et (1.2.13), celles-ci s'écrivent :

$$\sigma_{xz} = \mu (\psi_{,xx} - \psi_{,zz} + 2\varphi_{,xz}) \quad (1.2.14)$$

et :

$$\sigma_{zz} = \lambda (\varphi_{,xx} + \varphi_{,zz}) + 2\mu (\varphi_{,zz} + \psi_{,xz}) \quad (1.2.15)$$

Les conditions aux frontières doivent exprimer la nullité des contraintes normale et tangentielle aux interfaces ( $z = \pm h$ ). D'où :

$$\begin{cases} (\sigma_{xz})_{z=\pm h} = 0 \\ (\sigma_{zz})_{z=\pm h} = 0 \end{cases} \quad (1.2.16)$$

### 1.2.3 Modes de Lamb

Les conditions (1.2.16) ne sont satisfaites simultanément pour  $z = \pm h$  que si les contraintes  $\sigma_{xz}$  et  $\sigma_{zz}$  sont des fonctions paires et impaires de  $z$ . Les solutions des équations (1.2.11) sont nécessairement de parités différentes. Deux cas se présentent :

$$\begin{cases} \varphi = D \cdot ch(\gamma_L z) \cdot e^{j(kx - \omega t)} \\ \psi = A \cdot sh(\gamma_T z) \cdot e^{j(kx - \omega t)} \end{cases} \quad (1.2.17)$$

ou :

$$\begin{cases} \varphi = C \cdot sh(\gamma_L z) \cdot e^{j(kx - \omega t)} \\ \psi = B \cdot ch(\gamma_T z) \cdot e^{j(kx - \omega t)} \end{cases} \quad (1.2.18)$$

#### 1.2.3.1 Etude des solutions avec $\sigma_{xz}$ impair et $\sigma_{zz}$ pair

Soit le système d'équations (1.2.17). Dans ce cas, les vecteurs  $\underline{u}_L$  (1.2.4) et  $\underline{u}_T$  (1.2.5) s'écrivent respectivement :

$$\underline{u}_L = \begin{cases} x_L = -jkD \cdot ch(\gamma_L z) \cdot e^{j(kx - \omega t)} \\ y_L = 0 \\ z_L = \gamma_L D \cdot sh(\gamma_L z) \cdot e^{j(kx - \omega t)} \end{cases} \quad (1.2.19)$$

et :

$$\underline{u}_T = \begin{cases} x_T = -\gamma_T A \cdot ch(\gamma_T z) \cdot e^{j(kx - \omega t)} \\ y_T = 0 \\ z_T = -jkA \cdot sh(\gamma_T z) \cdot e^{j(kx - \omega t)} \end{cases} \quad (1.2.20)$$

De ce fait, les composantes du vecteur  $\underline{u}$  (1.2.6) sont :

$$\underline{u} = \begin{cases} X = [-A\gamma_T \cdot ch(\gamma_T z) - jkD \cdot ch(\gamma_L z)] \cdot e^{j(kx - \omega t)} \\ Y = 0 \\ Z = [-jkA \cdot sh(\gamma_T z) + \gamma_L D \cdot sh(\gamma_L z)] \cdot e^{j(kx - \omega t)} \end{cases} \quad (1.2.21)$$

Cette solution générale est symétrique en  $X$  et antisymétrique en  $Z$  :

$$\begin{cases} X(-z) = X(z) \\ Z(-z) = -Z(z) \end{cases} \quad (1.2.22)$$

Cela se traduit par un mouvement de plaque représenté ci-dessous (Figure 3).

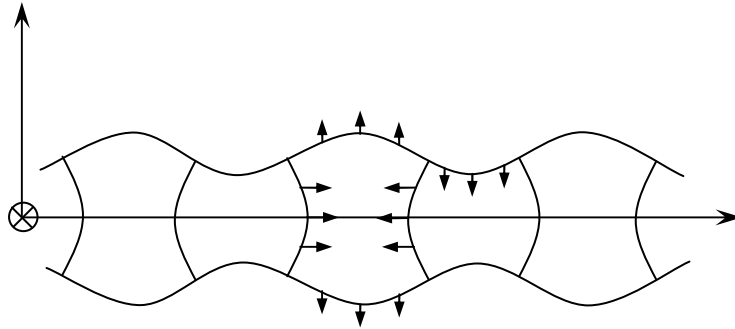


Figure 3 Déformation symétrique d'une plaque.

Après substitution des expressions (1.2.17) dans (1.2.14) et (1.2.15) et en appliquant les conditions aux limites (1.2.16), un système linéaire homogène de deux équations à deux inconnues est constitué :

$$\begin{cases} (\sigma_{xz})_{z=\pm h} = 0 \\ (\sigma_{zz})_{z=\pm h} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [(k^2 + \gamma_T^2) \cdot sh(\gamma_T h)] \cdot A + [2jk\gamma_L \cdot sh(\gamma_L h)] \cdot D = 0 \\ [-2jk\gamma_T \cdot ch(\gamma_T h)] \cdot A + [(k^2 + \gamma_T^2) \cdot ch(\gamma_L h)] \cdot D = 0 \end{cases} \quad (1.2.23)$$

Pour que ce système admette des solutions non triviales, il faut que le déterminant  $\Delta$  correspondant soit nul :

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4k^2 \gamma_T \gamma_L \cdot ch(\gamma_T h) \cdot sh(\gamma_L h) - (\gamma_T^2 + k^2) \cdot sh(\gamma_T h) \cdot ch(\gamma_L h) = 0 \quad (1.2.24)$$

La relation (1.2.24) peut être réécrite sous la forme :

$$\frac{th(\gamma_T h)}{th(\gamma_L h)} = \frac{4k^2 \gamma_T \gamma_L}{(k^2 + \gamma_T^2)^2} \quad (1.2.25)$$

Les solutions de cette équation, dite de dispersion, correspondent aux modes de Lamb symétriques.

En remplaçant  $\gamma_T$  et  $\gamma_L$  par leurs expressions (1.2.10), en élevant au carré et, enfin, en divisant par  $k^4$  l'équation (1.2.25), celle-ci prend la forme suivante :

$$\left(2 - \frac{v_\phi^2}{c_T^2}\right)^4 = 16 \cdot \left(1 - \frac{v_\phi^2}{c_L^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{v_\phi^2}{c_T^2}\right) \cdot \left(\frac{th(\gamma_L h)}{th(\gamma_T h)}\right)^2 \quad (1.2.26)$$

avec  $v_\phi = \omega/k$  l'expression de la vitesse de phase des ondes.

Cette équation n'est rien d'autre que l'équation de Rayleigh dans le cas d'un solide semi-infini, *i.e.*  $\lambda \ll h$  :

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left(\frac{th(\gamma_L h)}{th(\gamma_T h)}\right) = 1 \quad (1.2.27)$$

Dans ce cas, la vitesse de phase des ondes de Lamb approche la vitesse de Rayleigh.

### 1.2.3.2 Etude des solutions avec $\sigma_{xz}$ pair et $\sigma_{zz}$ impair

Soit le système d'équations (1.2.18). Dans ce cas, les vecteurs  $\underline{u}_L$  (1.2.4) et  $\underline{u}_T$  (1.2.5) s'écrivent respectivement :

$$\underline{u}_L = \begin{cases} x_L = -jkC \cdot sh(\gamma_L z) \cdot e^{j(kx - \omega t)} \\ y_L = 0 \\ z_L = \gamma_L C \cdot ch(\gamma_L z) \cdot e^{j(kx - \omega t)} \end{cases} \quad (1.2.28)$$

et :

$$\underline{u}_T = \begin{cases} x_T = -\gamma_T B \cdot sh(\gamma_T z) \cdot e^{j(kx - \omega t)} \\ y_T = 0 \\ z_T = -jkB \cdot ch(\gamma_T z) \cdot e^{j(kx - \omega t)} \end{cases} \quad (1.2.29)$$

De ce fait, les composantes du vecteur  $\underline{u}$  (1.2.6) sont :

$$\underline{u} = \begin{cases} X = [-B\gamma_T \cdot sh(\gamma_T z) - jkC \cdot sh(\gamma_L z)] \cdot e^{j(kx - \omega t)} \\ Y = 0 \\ Z = [-jkB \cdot ch(\gamma_T z) + \gamma_L C \cdot ch(\gamma_L z)] \cdot e^{j(kx - \omega t)} \end{cases} \quad (1.2.30)$$

Cette solution générale est antisymétrique en  $X$  et symétrique en  $Z$  :

$$\begin{cases} X(-z) = -X(z) \\ Z(-z) = Z(z) \end{cases} \quad (1.2.31)$$

Cela se traduit par un mouvement de plaque représenté ci-dessous (Figure 4).

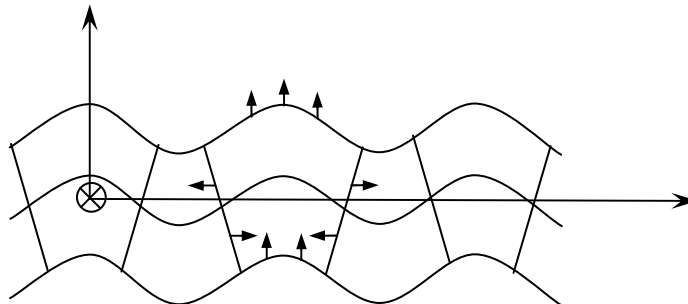


Figure 4 Déformation antisymétrique d'une plaque.

Après substitution des expressions (1.2.18) dans (1.2.14) et (1.2.15) et en appliquant les conditions aux limites (1.2.16), un système linéaire homogène de deux équations à deux inconnues est constitué :

$$\begin{cases} (\sigma_{xz})_{z=\pm h} = 0 \\ (\sigma_{zz})_{z=\pm h} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [(k^2 + \gamma_T^2) \cdot ch(\gamma_T h)] \cdot B + [2jk\gamma_L \cdot ch(\gamma_L h)] \cdot C = 0 \\ [-2jk\gamma_T \cdot sh(\gamma_T h)] \cdot B + [(k^2 + \gamma_T^2) \cdot sh(\gamma_L h)] \cdot C = 0 \end{cases} \quad (1.2.32)$$

Pour que ce système admette des solutions non triviales, il faut que le déterminant  $\Delta$  correspondant soit nul :

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4k^2\gamma_T\gamma_L \cdot sh(\gamma_T h) \cdot ch(\gamma_L h) - (\gamma_T^2 + k^2) \cdot ch(\gamma_T h) \cdot sh(\gamma_L h) = 0 \quad (1.2.33)$$

La relation (1.2.33) peut être réécrite sous la forme :

$$\frac{th(\gamma_L h)}{th(\gamma_T h)} = \frac{4k^2\gamma_T\gamma_L}{(k^2 + \gamma_T^2)^2} \quad (1.2.34)$$

A l'instar de la relation (1.2.25), les solutions de cette équation de dispersion correspondent aux modes de Lamb antisymétriques.

### 1.2.3.3 Courbes de dispersion

La résolution des équations caractéristiques (1.2.25) et (1.2.34) par la méthode de Newton-Raphson permet de déterminer en fonction de la pulsation  $\omega$  les nombres d'onde  $k$  des modes symétriques et antisymétriques excités.

Le matériau utilisé pour modéliser les plaques est l'aluminium dont les caractéristiques sont rappelées dans le Tableau 2 ci-dessous :

<i>Masse volumique (<math>\rho</math>)</i>	<i>Coefficient de Poisson (<math>\nu</math>)</i>	<i>Module d'Young (<math>E</math>)</i>	<i>Vitesse des ondes longitudinales (<math>c_L</math>)</i>	<i>Vitesse des ondes transversales (<math>c_T</math>)</i>
2700 kg/m <sup>3</sup>	0,344	71,4.10 <sup>9</sup>	6432 m/s	3136 m/s

**Tableau 2 Propriétés de l'aluminium.**

Les solutions réelles symétriques et antisymétriques des équations (1.2.25) et (1.2.34) sont tracées dans le plan  $(f, k)$  pour une épaisseur  $2h = 5 \text{ mm}$  (Figure 5).

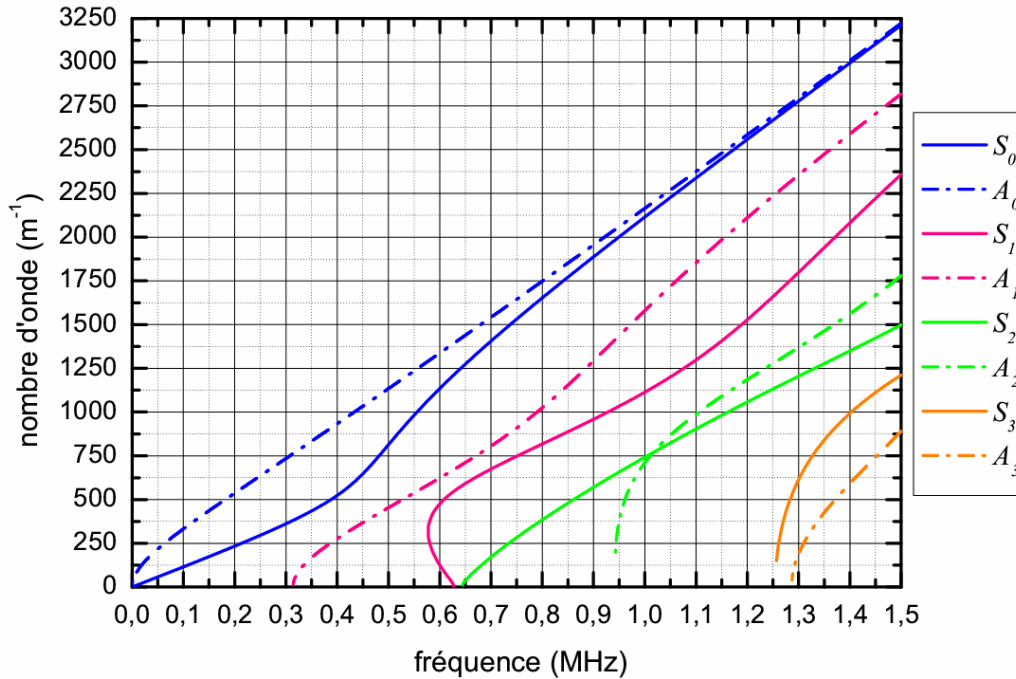


Figure 5 Courbes de dispersion d'une plaque plane infinie d'aluminium,  $2h = 5 \text{ mm}$  .

La Figure 5 présente les courbes de dispersion théoriques pour une plaque d'aluminium plane infinie de  $5 \text{ mm}$  d'épaisseur. Huit modes sont observés : les modes symétriques  $S_0$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  et les modes antisymétriques  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  .

Une autre représentation des courbes de dispersion consiste à tracer celles-ci dans le plan  $(f \cdot 2h, v_\varphi)$  où  $v_\varphi = \omega/k$  est la vitesse de phase des ondes de Lamb et  $f \cdot 2h$  le produit fréquence  $\times$  épaisseur (Figure 6). Lorsque la valeur de ce produit avoisine zéro, seuls les modes symétriques et antisymétriques d'ordre zéro sont respectivement solutions des équations de dispersion (1.2.25) et (1.2.34). Ces modes n'ont pas de fréquence de coupure : ils existent quelle que soit la fréquence, contrairement aux modes d'ordre supérieur. Ceux-ci sont d'autant plus nombreux que le produit  $f \cdot 2h$  augmente. Pour certaines valeurs particulières du produit  $f \cdot 2h$ , les équations (1.2.25) et (1.2.34) possèdent la même solution. Il y a alors intersection entre les courbes des modes symétriques et antisymétriques. Ce phénomène se produit pour les modes dont la vitesse de phase est supérieure à celle de l'onde longitudinale dans la plaque (*i.e.*  $v_\varphi > c_L$ ).



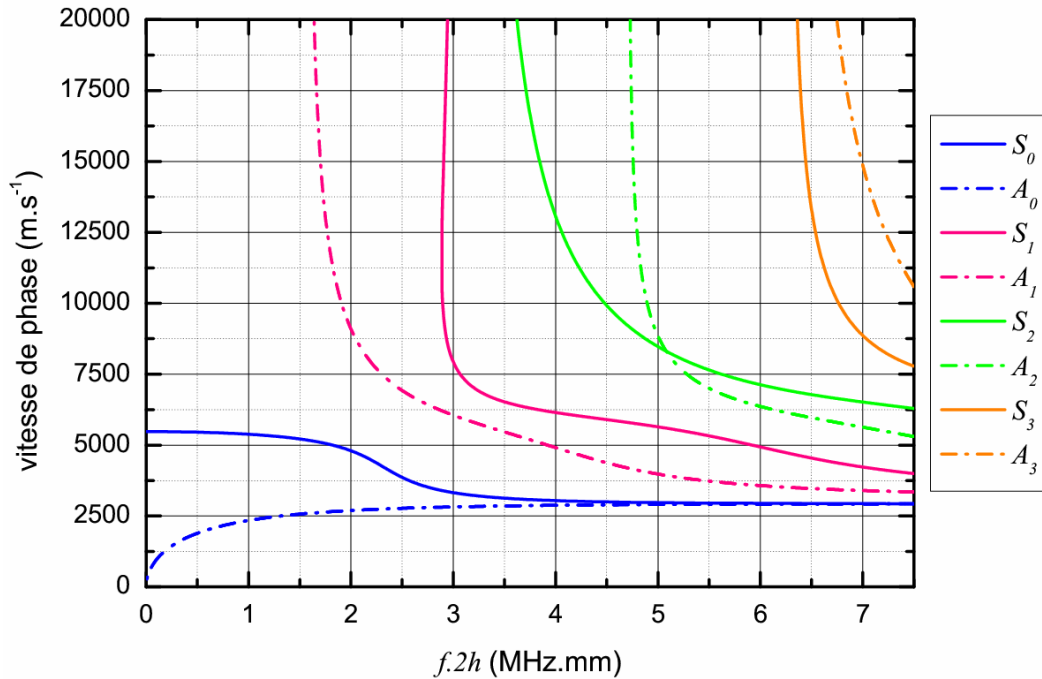


Figure 6 Vitesse de phase des ondes de Lamb dans une plaque d'aluminium.

### 1.3 Energie transportée par une onde

Le passage d'une vibration acoustique dans un solide s'accompagne d'un transport d'énergie. La loi de conservation de l'énergie indique que l'énergie incidente d'une onde est égale à la somme des énergies réfléchi et transmise en présence d'une interface. Aussi, afin de réaliser un bilan quantitatif, l'énergie transportée par une onde doit être déterminée.

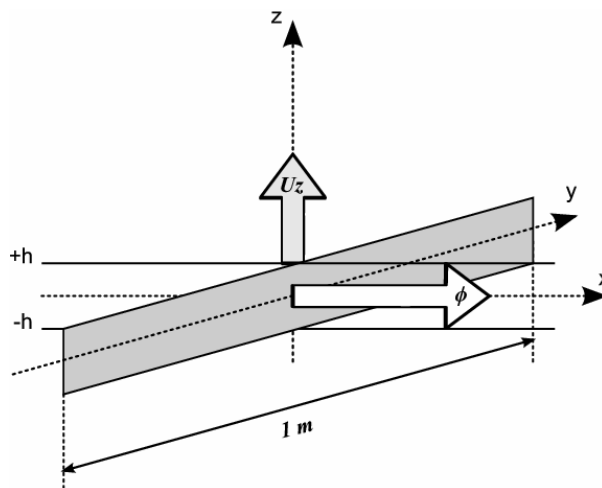


Figure 7 Flux du vecteur de Poynting à travers une section d'une plaque plane de largeur  $l = 1 m$ .

## Chapitre 1 : Ondes de Lamb dans une plaque plane infinie

L'énergie transportée par une onde le long de la direction de propagation ( $Ox$ ) est identifiée par la valeur  $\phi$  du flux du vecteur de Poynting à travers une section de la plaque d'un mètre de long selon la direction ( $Oy$ ), comme présenté à la Figure 7.

$$\phi = \int_{-h}^{+h} \int_0^1 P_x dz dy \quad (1.3.1)$$

avec

$$P_x = \Re \left( -\frac{v_i^* \cdot \sigma_{ix}}{2} \right) \quad (1.3.2)$$

où  $P_x$  est la moyenne temporelle du flux du vecteur de Poynting le long de la direction ( $Ox$ ),  $v_i^*$  représente les composantes complexes conjuguées de la vitesse particulaire et  $\sigma_{ij}$  symbolise les composantes complexes du tenseur des contraintes.  $\Re$  signifie la partie réelle. Du fait que  $v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} \equiv \dot{u}_i$ , la relation (1.3.2) peut prendre la forme :

$$P_x = \Re \left( -\frac{\dot{u}_i^* \cdot \sigma_{ix}}{2} \right) \quad (1.3.3)$$

Les déplacements dans la plaque liés aux ondes de Lamb sont la somme de deux contributions transversales et de deux contributions longitudinales (Figure 8).

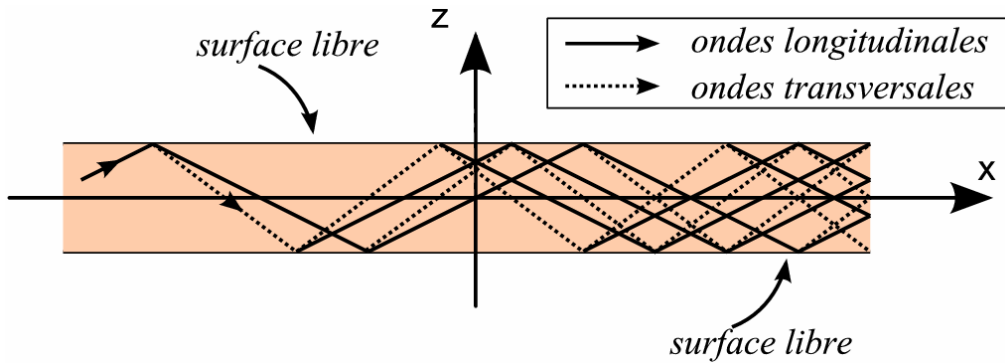


Figure 8 Formation d'une onde de Lamb.

Dans chacun des cas, l'une des contributions est montante et l'autre descendante. La somme complexe  $u_i$  de quatre termes suivante est ainsi obtenue :

$$u_i = \sum_{m=1}^4 U_{im} e^{j(kx + k_m z - \omega t)} \quad i = x, z \quad (1.3.4)$$

avec  $U_{im}$  les amplitudes des déplacements des ondes.

Les composantes du vecteur d'onde  $\underline{k}_m$  sont définies d'après (1.2.10) comme suit :

$$\begin{cases} \underline{k}_1 = -j\gamma_L \\ \underline{k}_2 = j\gamma_L \\ \underline{k}_3 = -j\gamma_T \\ \underline{k}_4 = j\gamma_T \end{cases} \quad (1.3.5)$$

A partir de l'expression (1.3.4), il est possible de réécrire les expressions des déplacements et des contraintes utilisées pour calculer l'expression du flux du vecteur

de Poynting. Ainsi, les composantes complexes du tenseur des contraintes intervenant dans le calcul de  $P_x$  s'écrivent sous la forme d'une somme de quatre termes :

$$\begin{cases} \underline{\sigma}_{xx} = \sum_{m=1}^4 j \underline{U}_{mx} \cdot [(\lambda + 2\mu)k + \lambda \underline{k}_m \underline{Q}_m] \cdot e^{j(kx + \underline{k}_m z - \omega t)} \\ \underline{\sigma}_{zx} = \sum_{m=1}^4 j \mu \underline{U}_{mx} \cdot [k \underline{Q}_m + \lambda \underline{k}_m] \cdot e^{j(kx + \underline{k}_m z - \omega t)} \end{cases} \quad (1.3.6)$$

avec  $\underline{Q}_m = \frac{U_{mz}}{U_{mx}}$ ,  $m = 1, 2, 3, 4$ .

De même, les composantes complexes de la vitesse particulière s'écrivent :

$$\begin{cases} \underline{\dot{u}}_x = -j\omega \sum_{m=1}^4 \underline{U}_{mx} \cdot e^{j(kx + \underline{k}_m z - \omega t)} \\ \underline{\dot{u}}_z = -j\omega \sum_{m=1}^4 \underline{U}_{mx} \underline{Q}_m \cdot e^{j(kx + \underline{k}_m z - \omega t)} \end{cases} \quad (1.3.7)$$

En reportant dans (1.3.2) les expressions (1.3.6) et (1.3.7), celle-ci devient :

$$P_x = \frac{\rho\omega}{2} \sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 \underline{U}_{mx}^* \underline{U}_{nx} \cdot \left[ \begin{array}{l} k \cdot (c_L^2 + c_T^2 \underline{Q}_m^* \underline{Q}_n) + \\ \underline{k}_n \cdot ((c_L^2 - 2c_T^2) \underline{Q}_n + c_T^2 \underline{Q}_m^*) \end{array} \right] \cdot e^{j(\underline{k}_n - \underline{k}_m^*)z} \quad (1.3.8)$$

L'expression du flux du vecteur de Poynting (1.3.1) devient alors :

$$\phi = \rho\omega h \sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 \underline{U}_{mx}^* \underline{U}_{nx} \cdot \left[ \begin{array}{l} k \cdot (c_L^2 + c_T^2 \underline{Q}_m^* \underline{Q}_n) + \\ \underline{k}_n \cdot ((c_L^2 - 2c_T^2) \underline{Q}_n + c_T^2 \underline{Q}_m^*) \end{array} \right] \cdot \frac{\sin((\underline{k}_n - \underline{k}_m^*) \cdot h)}{(\underline{k}_n - \underline{k}_m^*) \cdot h} \quad (1.3.9)$$

L'expression (1.3.9) montre que le flux du vecteur de Poynting dépend des composantes du déplacement. Soit  $\zeta$  un coefficient reliant le module du déplacement normal calculé à la surface du guide avec le flux du vecteur de Poynting [4; 8] :

$$\zeta = \frac{|U_z(z = \pm h)|}{\sqrt{\phi}} \quad (1.3.10)$$

La Figure 9 représente l'évolution du coefficient  $\zeta$  en fonction du produit fréquence  $\times$  épaisseur. Celle-ci montre que chaque mode, hormis les modes  $S_0$  et  $A_0$ , possède une ou plusieurs zones fréquentielles pour lesquelles la vibration normale en surface est trop faible pour que ce mode puisse être détecté à l'aide d'un vélocimètre laser.

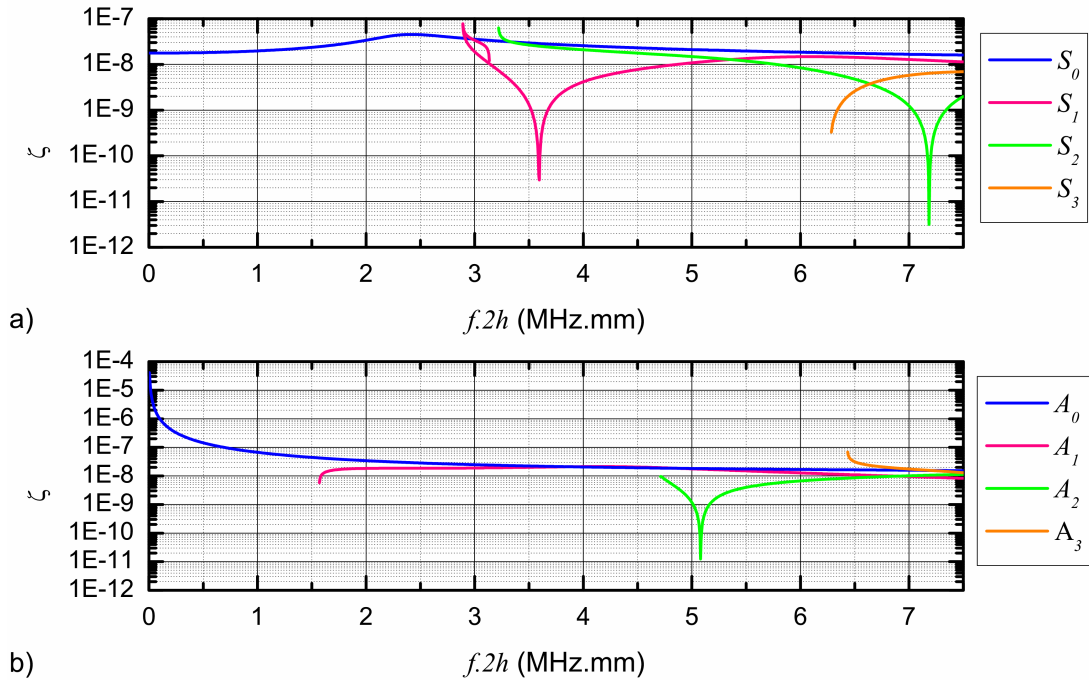


Figure 9 Variation du coefficient  $\zeta$  en fonction du produit  $f \cdot 2h$   
 a) modes symétriques b) modes antisymétriques.

Par la suite, une structure rugueuse finie d'aluminium (Figure 10) sera étudiée de manière soit numérique, soit expérimentale.

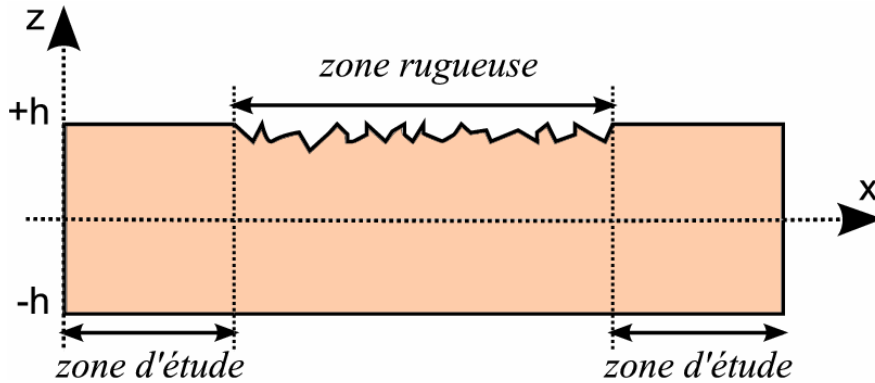


Figure 10 Schéma d'une plaque rugueuse étudiée.

Dans les deux cas, la mesure du champ de déplacement normal à la surface en  $z = -h$  existant de part et d'autre de la zone rugueuse (zone d'étude - Figure 10) permet d'obtenir la valeur du flux du vecteur de Poynting  $\phi_{mesure}$  traversant chacune de ces portions planes de la plaque étudiée à l'aide du coefficient  $\zeta$  de la relation (1.3.10) :

$$\phi_{mesure} = \left( \frac{|U_z^{mesure}(z = \pm h)|}{\zeta} \right)^2 \quad (1.3.11)$$

Ainsi, il sera possible de calculer les coefficients en énergie de transmission et de réflexion de l'onde à travers le réseau rugueux et d'établir des bilans d'énergie.

Concernant l'étude numérique de la structure présentée à la Figure 10, celle-ci sera réalisée à l'aide de la méthode des éléments finis à travers le code ATILA<sup>®</sup>.

## 1.4 Ondes de Lamb et relation de phonon

Par la suite, une plaque présentant un réseau périodique (Figure 11) sera considérée et excitée à l'aide d'une onde de Lamb.

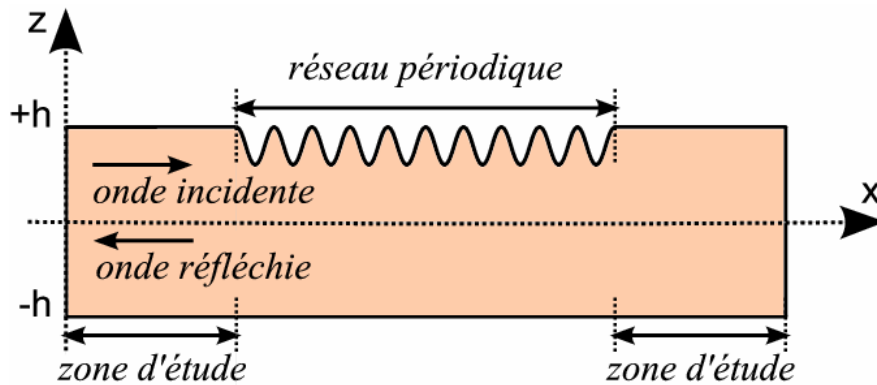


Figure 11 Schéma de la structure périodique étudiée.

Leduc *et al.* [9] ont montré que lorsque le guide d'ondes présente une périodicité, une relation mettant en jeu les phonons associés d'une part aux ondes incidentes et réfléchies et, d'autre part, au réseau peut être écrite. Plus précisément, il a été montré que l'onde réfléchie correspond soit au mode incident soit à un mode converti.

### 1.4.1 Relation de phonon

Le concept de relation de phonon a été introduit en physique du solide pour expliquer les vibrations élastiques des réseaux cristallins. Ce concept de phonon se retrouve lors de l'étude de la diffraction de la lumière par des ondes ultrasonores [10]. Comme un photon est une particule liée à une onde électromagnétique, un phonon est une particule liée à une onde acoustique.

Pour comprendre la notion de phonon de réseau en acoustique, un parallèle peut être fait avec la diffraction des rayons \$X\$ par un cristal périodique qui peut être décrite par l'équation [6] :

$$\underline{p}_d = \underline{p} + n \cdot \underline{G} \quad (1.4.1)$$

où \$\underline{p}\_d\$ est la quantité de mouvement du photon diffracté, \$\underline{p}\$ la quantité de mouvement du photon incident, \$\underline{G}\$ un vecteur du réseau réciproque du cristal et \$n\$ un entier. Le phénomène présenté dans ce chapitre est comparable [9] : à l'onde incidente est associé un phonon incident, à l'onde réfléchie-convertie un phonon réfléchi et au réseau un phonon de réseau. Il y a conservation de la quantité de mouvement lors de la collision : la quantité de mouvement associée au phonon incident (\$\underline{p}\_{inc}\$) est égale à la somme des

quantités de mouvement associées au phonon réfléchi ( $\underline{p}_{conv}$ ) et au phonon de réseau ( $\underline{p}_\Lambda$ ) :

$$\underline{p}_{inc} = \underline{p}_{conv} + \underline{p}_\Lambda \quad (1.4.2)$$

Le nombre d'onde est relié à la quantité de mouvement par la relation :

$$\underline{p} = \hbar \cdot \underline{k} \quad (1.4.3)$$

où  $\hbar$  est la constante de Planck normalisée.

Le phonon de réseau se propage sous le réseau dans le même sens que l'onde incidente. Par contre, le phonon associé au mode réfléchi se propage en sens opposé. Cela implique une relation entre les nombres d'onde :

$$k_{inc} + k_{conv} = n \cdot \frac{2\pi}{\Lambda} \quad (1.4.4)$$

où  $\Lambda$  est la périodicité du réseau et  $k_{inc}$  et  $k_{conv}$  sont respectivement les nombres d'onde des ondes incidentes et converties.

### 1.4.2 Influence de la périodicité spatiale du réseau

Le mode incident étant le mode  $S_0$ , la relation (1.4.4) devient, pour  $n = 1$  :

$$k_{S_0} = \frac{2\pi}{\Lambda} - k_{conv} \quad (1.4.5)$$

De nouvelles courbes peuvent être tracées pour prédire les conversions de mode possibles. La Figure 12 regroupe les courbes de dispersion théoriques de la plaque plane infinie d'aluminium tracées pour des valeurs négatives du nombre d'onde afin de rendre compte des possibles ondes réfléchies-converties ( $k_{conv}$ ). Les pointillés rouges représentent les valeurs de  $k_{S_0}$ , obtenues par la relation (1.4.5) pour différentes valeurs de la périodicité  $\Lambda$  du réseau.

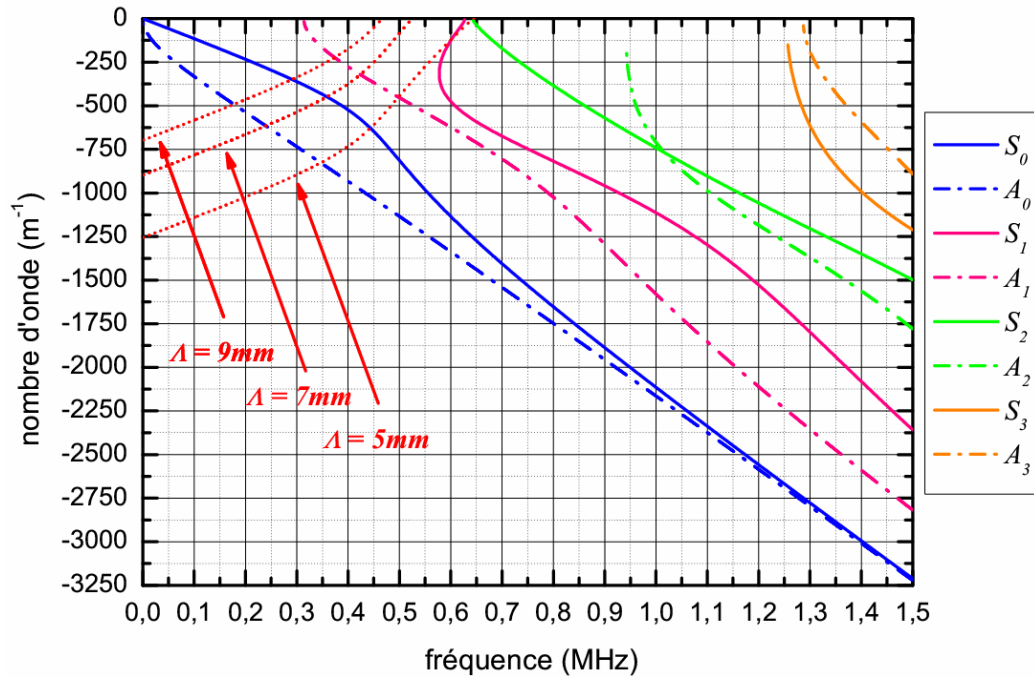


Figure 12 Courbes de dispersion théoriques d’une plaque plane infinie d’aluminium,  $2h = 5 \text{ mm}$ .  
Les courbes obtenues à partir de la relation de phonon leur sont superposées.

Les intersections entre ces deux familles de courbes donnent les modes convertis possibles pour un réseau donné. Par exemple, si la périodicité spatiale est de  $\Lambda = 7 \text{ mm}$ , il y a une intersection avec le mode  $A_0$  à la fréquence  $f = 239 \text{ kHz}$  et une intersection avec le mode  $S_0$  à la fréquence  $f = 359 \text{ kHz}$ . Pour ce réseau, un couplage entre le mode  $S_0$  incident et un mode  $A_0$  réfléchi-converti est attendu à la fréquence  $f = 239 \text{ kHz}$ . De même, à la fréquence  $f = 359 \text{ kHz}$ , un couplage entre le mode  $S_0$  incident et un mode  $S_0$  réfléchi-converti devrait se produire.

Du fait de la difficulté d’étudier analytiquement la propagation d’une onde de Lamb dans une plaque comportant une surface présentant un réseau périodique, la méthode des éléments finis sera par la suite utilisée.

## 1.5 Les éléments finis et le code ATILA<sup>®</sup>

Le code éléments finis ATILA<sup>®</sup> [11] a été développé pour permettre la modélisation de transducteurs piézoélectriques rayonnant dans un fluide. Il peut être utilisé pour effectuer l’analyse statique, modale ou harmonique de structures élastiques, piézoélectriques ou magnétostrictives, immergées ou non.

Les rappels relatifs à la méthode des éléments finis décrits dans cette partie ont été présentés en détail dans la thèse de *J.N. Decarpigny* [12]. Ils sont volontairement reproduits de manière condensée et restreints à la formulation par éléments finis dans le domaine fréquentiel appliquée au cas d’un domaine solide élastique fermé.

Par ailleurs, comme il est d’usage avec la méthode des éléments finis, le plan des figures en deux dimensions sera désormais le plan ( $Oxy$ ).

### 1.5.1 Equations et conditions aux limites

Soit un corps élastique  $\Omega_e$  limité par une frontière  $\Gamma$  orientée vers l'extérieur (Figure 13).

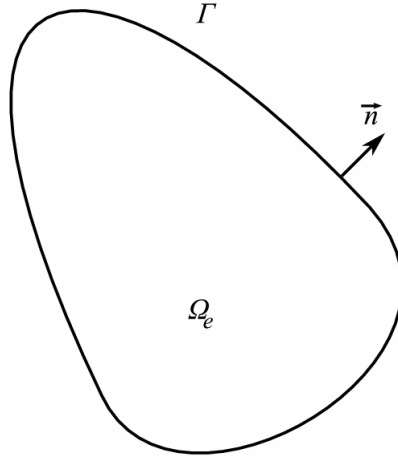


Figure 13 Géométrie du solide élastique considéré.

Les équations à résoudre sont la loi de Hooke (1.1.12) et la relation fondamentale de la dynamique (1.1.3) appliquées au domaine  $\Omega_e$ . En considérant que les variables physiques du problème ont une dépendance temporelle en  $e^{-j\omega t}$ , l'équation (1.1.3) s'écrit sous la forme :

$$-\rho\omega^2 u_i = \sigma_{ij,j} \quad (1.5.1)$$

Les équations (1.1.12) et (1.5.1) peuvent être combinées pour exprimer l'équation du mouvement en fonction des composantes du vecteur déplacement  $\underline{u}$  :

$$-\rho\omega^2 u_i = c_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl,j} = c_{ijkl} \cdot (u_{k,jl} + u_{l,jk}) \quad (1.5.2)$$

A ces équations peuvent être associées des conditions aux limites de type déplacement  $\underline{u}^0$  imposé en tout point de la surface  $\Gamma_u$  (condition de type Dirichlet) :

$$u_i = u_i^0 \quad (1.5.3)$$

ou de type densité surfacique de force  $\underline{f}^0$  imposée en tout point de la surface  $\Gamma_f$  (condition de type Neumann) :

$$\sigma_{ij} n_j = f_i^0 \quad (1.5.4)$$

où  $\underline{n}$  est un vecteur unitaire normal à la surface, orienté vers l'extérieur.

Afin de satisfaire à ces deux conditions, la surface  $\Gamma$  doit être incluse dans  $\Gamma_f \cup \Gamma_u$ . De plus, le solide est supposé soumis à aucune force volumique à distance.

### 1.5.2 Formulation variationnelle et discrétisation

L'équation (1.5.2) et les conditions aux limites (1.5.3) et (1.5.4) sont respectivement l'équation d'élasticité et les conditions aux limites associées à la quantité stationnaire  $L_e$  définie par [13-15] :



$$L_e = \iiint_{\Omega_e} \frac{1}{2} [\varepsilon_{ij} c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \rho \omega^2 u_i^2] d\Omega_e - \iint_{\Gamma_f \cup \Gamma_u} u_i n_j \sigma_{ij} d\Gamma \quad (1.5.5)$$

Les termes de l'intégrale de volume peuvent être associés à l'énergie élastique de déformation et à l'énergie cinétique. L'intégrale de surface représente le travail des forces extérieures. D'après le théorème de Ritz, la minimisation de  $L_e$  implique la vérification de l'équation (1.5.2) et des conditions aux limites (1.5.3) et (1.5.4).

Lors de la résolution d'un problème à l'aide de la méthode des éléments finis [12-17], le problème est discrétisé en découpant fictivement le domaine étudié par des lignes ou des surfaces en éléments interconnectés en un nombre fini de points, appelés nœuds, situés à leurs frontières. L'ensemble des éléments constitue le maillage (Figure 14).

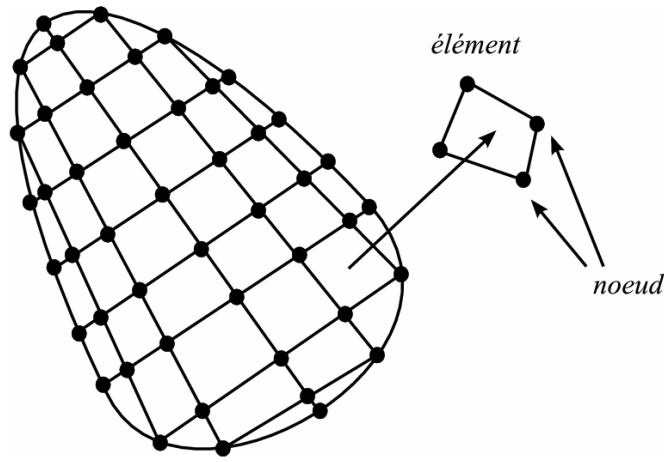


Figure 14 Maillage par éléments finis du solide élastique considéré.

Le déplacement  $\underline{u}$  en un point quelconque situé à l'intérieur d'un élément  $e$  est relié aux valeurs nodales du déplacement  $\underline{U}^e$  à l'aide de fonctions d'interpolation :

$$\underline{u} = [N_u^e] \underline{U}^e \quad (1.5.6)$$

où  $[N_u^e]$  est une matrice formée à partir des fonctions d'interpolation de l'élément  $e$ .

Au sein du code ATILA<sup>®</sup>, l'interpolation utilisée est quadratique et les éléments constitués sont isoparamétriques (nœuds aux bornes et au milieu des segments). Ainsi, pour un de ces éléments quadrilatères, les quatre coins et les milieux des quatre côtés en forment les huit nœuds. Les fonctions d'interpolation sont des polynômes en  $x$  et  $y$  dont les coefficients constants sont définis par les relations :

$$N_i^e(x_j, y_j) = \delta_{ij} \quad (1.5.7)$$

avec les indices  $i$  et  $j$  variant de 1 à 8. Ainsi, la relation (1.5.6) devient :

$$\underline{u} = \left[ [N_1^e] \dots [N_8^e] \right] \cdot \begin{bmatrix} [U_1^e] \\ \vdots \\ [U_8^e] \end{bmatrix} \quad (1.5.8)$$

Par ailleurs, le tenseur condensé des déformations  $\underline{\varepsilon}$  associé à ce même point quelconque situé à l'intérieur de l'élément  $e$  s'écrit :

$$\underline{\varepsilon}^e = [B_u^e] \underline{U}^e \quad (1.5.9)$$

où  $[B_u^e]$  est une matrice formée à partir des dérivées des fonctions d'interpolation.

Le report des équations (1.5.6) et (1.5.9) dans la quantité  $L_e$  pour l'ensemble des éléments du maillage conduit à l'expression :

$$L_e = \sum_e \left\{ \frac{1}{2} {}^t \underline{U}^e \left( [K_{uu}^e] - \omega^2 [M^e] \right) \underline{U}^e - {}^t \underline{U}^e \underline{F}^e \right\} \quad (1.5.10)$$

avec :

$$[K_{uu}^e] = \iiint_{\Omega_e} {}^t [B_u^e] [c] [B_u^e] d\Omega_e \quad (1.5.11)$$

$$[M^e] = \iiint_{\Omega_e} \rho {}^t [N_u^e] [N_u^e] d\Omega_e \quad (1.5.12)$$

et :

$$\underline{F}^e = \iint_{\Gamma_f^e} [N_u^e] f^0 d\Gamma_f^e \quad \text{ou} \quad \underline{F}^e = \iint_{\Gamma_n^e} [N_u^e] [\sigma] \underline{n} d\Gamma_n^e \quad (1.5.13)$$

suivant le type de surface auquel appartient l'élément  $e$ .

$[K_{uu}^e]$  et  $[M^e]$  sont respectivement la matrice élémentaire de rigidité mécanique et la matrice élémentaire de masse cohérente du solide élastique et  $\underline{F}^e$  est le vecteur élémentaire des forces nodales appliquées.  $[c]$  est le tenseur des constantes élastiques et  $[\sigma]$  le tenseur des contraintes. Par ailleurs, l'exposant  ${}^t$  désigne la transposée du vecteur ou de la matrice qui le suit.

La minimisation de l'expression (1.5.10) par rapport aux valeurs nodales de  $\underline{u}$  conduit au système linéaire d'équations :

$$\{ [K_{uu}] - \omega^2 [M] \} \underline{U} = \underline{F} \quad (1.5.14)$$

où  $[K_{uu}]$  et  $[M]$  sont respectivement la matrice de rigidité mécanique et la matrice de masse cohérente du solide élastique. Ces matrices et les vecteurs  $\underline{U}$  et  $\underline{F}$  résultent de l'assemblage des matrices et vecteurs élémentaires décrits précédemment.

Généralement  $\underline{U}$  tient lieu de vecteur des inconnues (déplacement) du système (1.5.14) et  $\underline{F}$  de vecteur de chargements (forces) imposés. Trois types d'analyses sont considérés :

- l'analyse statique, obtenue en posant  $\omega = 0$  et  $\underline{F} \neq \underline{0}$  : elle correspond à la réponse du solide élastique à une sollicitation statique.
- l'analyse harmonique, obtenue en posant  $\omega \neq 0$  et  $\underline{F} \neq \underline{0}$  : elle correspond à la réponse du solide élastique à une sollicitation à la pulsation  $\omega$ . La résolution de l'équation (1.5.14) fournit le champ de déplacement de la structure. Par ailleurs, la force  $\underline{F}$  peut être remplacée dans le second membre du système (1.5.14) par un champ de déplacement connu  $\underline{U}_0$  faisant office de chargement.
- l'analyse modale, obtenue en posant  $\omega \neq 0$  et  $\underline{F} = \underline{0}$  : la résolution de l'équation (1.5.14) devient une recherche des valeurs propres  $\omega_p$  et vecteurs propres  $\underline{U}_p$  associés respectivement aux pulsations et modes de résonance du solide élastique.

### 1.5.3 Prise en compte des pertes

La description des dissipations d'énergie d'origine mécanique dans un problème linéaire se fait généralement par l'utilisation de constantes élastiques complexes. En considérant que les variables physiques du problème ont une dépendance temporelle en  $e^{-j\omega t}$ , les composantes du tenseur des compliances s'écrivent :

$$s_{ij} = s'_{ij} + js''_{ij} \quad (1.5.15)$$

Pour assurer au matériau un caractère passif, les parties imaginaires introduites doivent vérifier certaines inégalités, discutées notamment par *Holland* [18]. Dans le cas d'un matériau élastique isotrope, ces relations se résument à :

$$\begin{cases} s''_{11} \geq 0 \\ s''_{44} \geq 0 \\ s''_{11} \geq |s''_{12}| \\ s''_{11} \cdot (s''_{11} + s''_{12}) \geq 2(s''_{12})^2 \end{cases} \quad (1.5.16)$$

Les notations complexes adoptées pour le module d'Young et le coefficient de Poisson sont respectivement :

$$E = E' - jE'' \quad (1.5.17)$$

et :

$$\nu = \nu' + j\nu'' \quad (1.5.18)$$

avec  $E'$ ,  $E''$  et  $\nu'$  des constantes positives.

Les relations suivantes sont alors obtenues :

$$\begin{cases} s_{11} = \frac{1}{E} \\ s_{12} = \frac{-\nu}{E} \\ s_{44} = \frac{2(1+\nu)}{E} \end{cases} \quad (1.5.19)$$

Celles-ci entraînent les deux inégalités :

$$\frac{-E''(1+\nu')}{E'} \leq \nu'' \leq \frac{E''}{E'} \cdot \frac{1-2\nu'}{2} \quad (1.5.20)$$

Les propriétés des matériaux étant complexes, la matrice de rigidité pour le domaine élastique, définie à l'équation (1.5.11), et le champ de déplacement deviennent donc complexes. La quantité variationnelle (1.5.10) associée au système élastique s'écrit alors :

$$L_e = \sum_e \left\{ \frac{1}{2} {}^t\tilde{U}^{*e} \left( [K_{uu}^e] - \omega^2 [M^e] \right) \tilde{U}^e - {}^t\tilde{U}^{*e} \tilde{F}^e \right\} \quad (1.5.21)$$

où l'astérisque désigne le conjugué de toute quantité complexe.

## 1.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré au rappel de quelques notions théoriques nécessaires pour l'étude des ondes guidées dans des plaques planes infinies, homogènes et isotropes. Notamment, les courbes de dispersion permettront par comparaison aux résultats

numériques et expérimentaux d'identifier les modes présents et la connaissance de l'énergie transportée par une onde de Lamb permettra de réaliser des bilans d'énergie. Dans le cas d'une interface périodique, la relation de phonon a été rappelée. Elle joue un rôle essentiel dans la prévision du couplage modal. La méthode des éléments finis a de plus été présentée. Elle sera par la suite exploitée pour la mise en œuvre d'analyses modales et harmoniques.

### 1.7 Bibliographie

- [1] L. Rayleigh, "On Waves Propagated along the Plane Surface of an Elastic Solid," *Proc. London Math. Soc.*, vol. 17, p. 4-11, 1885.
- [2] H. Lamb, "On Waves in an Elastic Plate," *Proc. R. Soc. A*, vol. 93, p. 114-128, 1917.
- [3] I.A. Victorov. *Rayleigh and Lamb waves*. Plenum Press, 1967.
- [4] B.A. Auld. *Acoustic fields and waves in solids*. Wiley, 1973.
- [5] D.N. Alleyne, and P. Cawley, "The interaction of Lamb waves with defects," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.*, vol. 39, p. 381-397, 1992.
- [6] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. Wiley, 1998.
- [7] L. Landau, and E. Lifchitz. *Théorie de l'élasticité*. Mir Moscou, 1967.
- [8] B. Morvan, N. Wilkie-Chancellor, H. Duflo, A. Tinel, and J. Duclos, "Lamb wave reflection at the free edge of a plate," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 113, p. 1417-1425, 2003.
- [9] D. Leduc, A.C. Hladky-Hennion, B. Morvan, J.L. Izbicki, and P. Pareige, "Propagation of Lamb waves in a plate with a periodic grating: Interpretation by phonon," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 118, p. 2234-2239, 2005.
- [10] M. Born, and E. Wolf. *Principles of optics*. Pergamon Press, 1984.
- [11] ATILA Finite Element Code for Piezoelectric and Magnetostrictive Transducer Modeling, Version 6.0.2, User's Manual, Acoustics Laboratory, ISEN, 2002.
- [12] J. Decarpigny, *Application de la méthode des éléments finis à l'étude de transducteurs piézoélectriques*. Thèse d'état de l'Université des Sciences et Techniques de Lille, 1984.
- [13] O.C. Zienkiewicz, and R.L. Taylor. *The finite element method*. McGraw-Hill, 1989.
- [14] G. Dhatt, and G. Touzot. *Introduction à la méthode des éléments finis*. Collection Université de Compiègne, 1982.
- [15] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, and J.Z. Zhu. *The finite element method its basis & fundamentals*. Elsevier, 2006.
- [16] K. Bathe. *Finite element procedures in engineering analysis*. Englewood Cliffs, 1982.
- [17] J.L. Batoz, and G. Dhatt. *Modélisation des structures par éléments finis*. Hermes, 1990.
- [18] R. Holland, "Representation of dielectric, elastic, and piezoelectric losses by complex coefficients," *IEEE Trans. Sonics Ultrason.*, vol. 14, p. 18-20, 1967.







## Chapitre 2 De la plaque plane infinie à la plaque infinie à motif périodique

*L'étude de la propagation d'une onde guidée ultrasonore de type Lamb dans une plaque dont l'une des surfaces est rugueuse commence par la définition de la géométrie de la rugosité envisagée.*

*L'expression de « surface rugueuse » traduit une faible perturbation de cette surface. Ceci induit généralement pour la dite surface une géométrie aléatoire. De manière classique, une première approche de ce problème consiste à considérer un profil avec une géométrie périodique. Usuellement, le motif périodique a une forme sinusoïdale afin de ne considérer qu'une seule périodicité spatiale [1-5].*

*Comme spécifié dans le chapitre 1, les ondes de Lamb qui se propagent dans une plaque plane infinie se décomposent en modes symétriques et antisymétriques. Ceux-ci sont caractérisés de manière analytique par les courbes de dispersion : la vitesse de propagation et le nombre de modes présents dans la plaque dépendent de la fréquence.*

*Dans ce chapitre, le cas d'une plaque dont l'une des interfaces est striée de façon périodique est abordé. Aussi, des notions spécifiques aux matériaux périodiques sont en premier lieu exposées. Il s'ensuit une étude numérique de la propagation des ondes de Lamb dans le guide d'ondes considéré. Les courbes de dispersion qui en résultent sont ensuite analysées et l'influence des paramètres de la périodicité du guide d'ondes est étudiée. Enfin, une autre méthode permettant à la fois d'obtenir les courbes de dispersion et de mettre en évidence des modes évanescents est présentée.*



## 2.1 Une plaque infinie à motif périodique

Comme son nom l'indique, une plaque infinie à motif périodique est un matériau périodique au même titre qu'un cristal idéal. De ce fait, la dite plaque possède les mêmes propriétés vibrationnelles qu'un cristal.

### 2.1.1 Description des matériaux périodiques

#### 2.1.1.1 Réseau, cellule élémentaire et vecteur de base

Un matériau périodique est défini comme étant la répétition à l'infini suivant une, deux ou trois directions de l'espace d'un motif donné.

Un tel matériau est entièrement décrit par un réseau et une maille élémentaire, appelée aussi cellule élémentaire. Le réseau est défini par une base de vecteurs, dont la dimension est le nombre de directions de périodicité. Ces vecteurs, appelés vecteurs de base du réseau, permettent de reconstituer le matériau périodique entier par translations successives. Pour un matériau périodique suivant trois directions de l'espace, appelé matériau périodique 3D, les vecteurs de base sont notés  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$  et  $\underline{c}$ . Pour un matériau périodique suivant deux directions de l'espace, appelé matériau périodique 2D, infini ou fini dans la troisième direction, il faut deux vecteurs de base pour reconstituer le matériau, notés  $\underline{a}$  et  $\underline{b}$ . Enfin, pour un matériau périodique dans une seule direction de l'espace, appelé matériau périodique 1D, infini ou fini dans les deux autres directions, un seul vecteur de base suffit, noté  $\underline{a}$ . Les normes de ces vecteurs sont appelées les pas du réseau. La cellule élémentaire est le plus petit volume ou la plus petite surface qui permet, par translations successives suivant les vecteurs de base du réseau, de reconstituer l'ensemble du matériau périodique. La Figure 15 présente un matériau périodique, son réseau, ses vecteurs de base et sa cellule élémentaire associés.

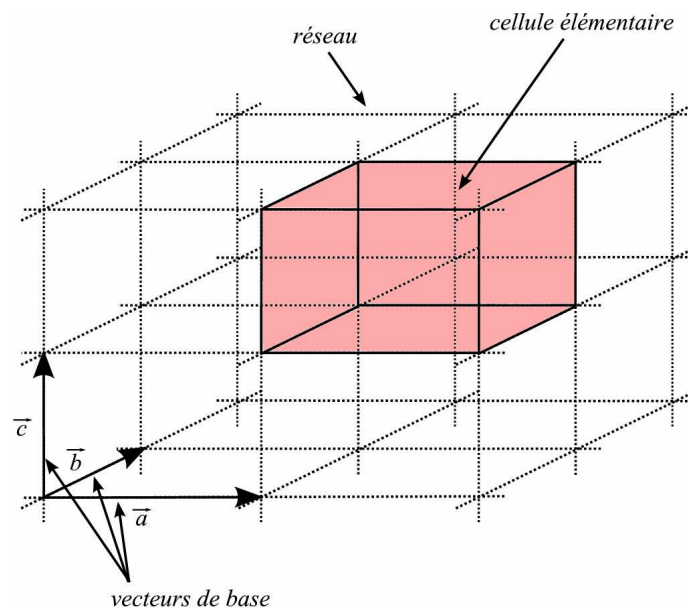


Figure 15 Description d'un matériau périodique, du réseau, des vecteurs de base et de la cellule élémentaire.

### 2.1.1.2 Vecteur d'onde, nombre d'onde

Une onde acoustique plane et harmonique dans un milieu est repérée par un vecteur d'onde  $\vec{k}$  définissant la direction de propagation de l'onde dans le milieu. Le nombre d'onde  $k$  est la norme du vecteur d'onde, qui est égale à :

$$k = \|\vec{k}\| = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.1.1)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde.

Si le matériau est infini dans une seule direction, le vecteur d'onde  $\vec{k}$  est pris suivant cette direction. Dans le cas où il est infini dans deux ou trois directions,  $\vec{k}$  est repéré dans un plan respectivement par un seul angle  $\theta$  (Figure 16.a) ou par deux angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  (Figure 16.b).

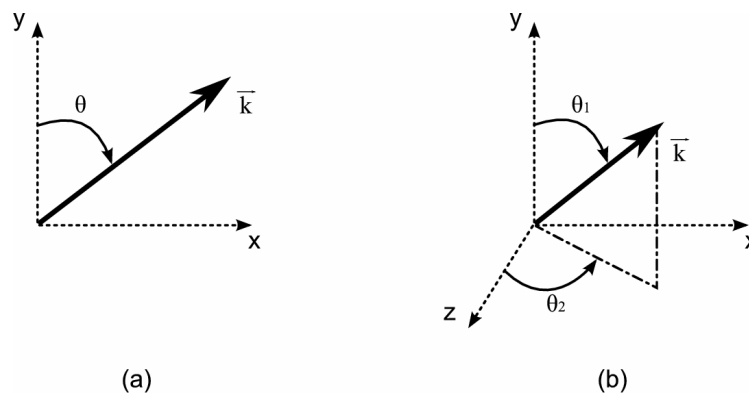


Figure 16 Définition des angles du vecteur d'onde dans un réseau 2D (a) et 3D (b).

### 2.1.2 Réseau réciproque et zone de Brillouin

Le réseau réciproque joue un rôle fondamental dans la plupart des études des structures périodiques. Dans le cas d'un matériau périodique à une dimension, le réseau réciproque correspond à l'ensemble de tous les vecteurs d'onde  $\vec{k}$  donnant une onde plane de périodicité égale à celle du réseau.

Soit  $\vec{a}$  le vecteur de base d'un réseau 1D direct, le vecteur de base du réseau réciproque est défini par le vecteur  $\hat{a}$  tel que :

$$\|\hat{a}\| = \frac{2\pi}{\|\vec{a}\|} \quad (2.1.2)$$

et :

$$\hat{a} \cdot \vec{a} = 2\pi \quad (2.1.3)$$

De là, tout vecteur  $\vec{k}$  du réseau réciproque s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire :

$$\vec{k} = n \cdot \hat{a} \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z} \quad (2.1.4)$$

Le cristal réel est un réseau d'atomes ou de molécules, plus généralement de motifs. Le réseau réciproque est, lui, un réseau de points indépendant du motif existant dans le cristal réel.

La maille élémentaire de Wigner-Seitz du réseau réciproque définit la première zone de Brillouin. Autrement dit, la première zone de Brillouin est l'ensemble des points

du plan pouvant être atteints depuis l'origine sans traverser aucun plan de Bragg. La notion de zone de Brillouin est généralisable : la  $n^{\text{ième}}$  zone de Brillouin est l'ensemble des points atteints à partir de l'origine en traversant  $(n-1)$  plans de Bragg. Par abus de langage, la première zone de Brillouin est couramment appelée zone de Brillouin (ZdB).

La notion de zone de Brillouin est nécessaire pour décrire les propriétés vibrationnelles d'un matériau périodique, notamment à l'aide des courbes de dispersion. En annexe, ces propriétés sont présentées de manière simple à travers les cas d'un réseau cristallin linéaire monoatomique et d'un réseau cristallin linéaire diatomique.

### 2.1.3 Présentation des grandeurs physiques recherchées

Les matériaux périodiques ont des propriétés remarquables tirées des courbes de dispersion. Classiquement, pour une direction donnée, la pulsation  $\omega$  est représentée en fonction du nombre d'onde  $k$ . A partir de ces courbes, les vitesses de phase et de groupe peuvent être déduites.

Ces courbes permettent de caractériser les modes de propagation dans le matériau : ondes longitudinales ou transversales, ondes de Lamb, ondes de Rayleigh, ... Elles permettent, en outre, de déterminer les bandes passantes et interdites pour chaque type d'onde. Les pentes à l'origine des premières branches sont les célérités limites des ondes lorsque la longueur d'onde tend vers l'infini. Dans certains cas, il est possible de déterminer les propriétés homogénéisées du matériau périodique, appelées propriétés effectives, à partir des célérités obtenues dans la limite des grandes longueurs d'onde.

La pulsation  $\omega$  étant une fonction périodique du vecteur d'onde, les valeurs du nombre d'onde  $k$  solutions de l'équation de dispersion ayant une signification physique pour les ondes élastiques sont contenues dans la première zone de Brillouin [6] :

$$\omega(k) = \omega(k + 2\pi/\Lambda) \quad (2.1.5)$$

Celle-ci est construite dans le réseau réciproque et est définie pour des valeurs du nombre d'onde comprises dans l'intervalle  $[-\pi/\Lambda; \pi/\Lambda]$ . De manière classique, les diagrammes de dispersion sont représentés dans une demi-zone de Brillouin (*i.e.*  $k \in [0; \pi/\Lambda]$ ), l'autre demi-zone (*i.e.*  $k \in [-\pi/\Lambda; 0]$ ) étant symétrique par rapport à 0.

Par ailleurs, la première zone de Brillouin possède toutes les symétries du réseau, ce qui permet de réduire encore plus le domaine d'étude.

## 2.2 Etude numérique

Pour une structure périodique, le domaine des solutions de l'équation de dispersion est restreint aux valeurs du nombre d'onde comprises dans la première zone de Brillouin.

Du fait de ses symétries, une structure périodique est assimilable à la répétition à l'infini suivant une ou plusieurs directions de l'espace d'un même motif. Le théorème de Bloch-Floquet permet alors de réduire l'étude à une cellule élémentaire.

### 2.2.1 Relation de Bloch-Floquet

Une onde acoustique incidente plane, monochromatique, se propage dans un matériau périodique 1D (la Figure 17) et s'exprime sous la forme :

$$F(t, x, y) = F(x, y) \cdot e^{-j\omega t} \quad (2.2.1)$$

où  $\omega$  est la pulsation et  $F(x, y)$  une fonction d'espace (pression, déplacement, ...).

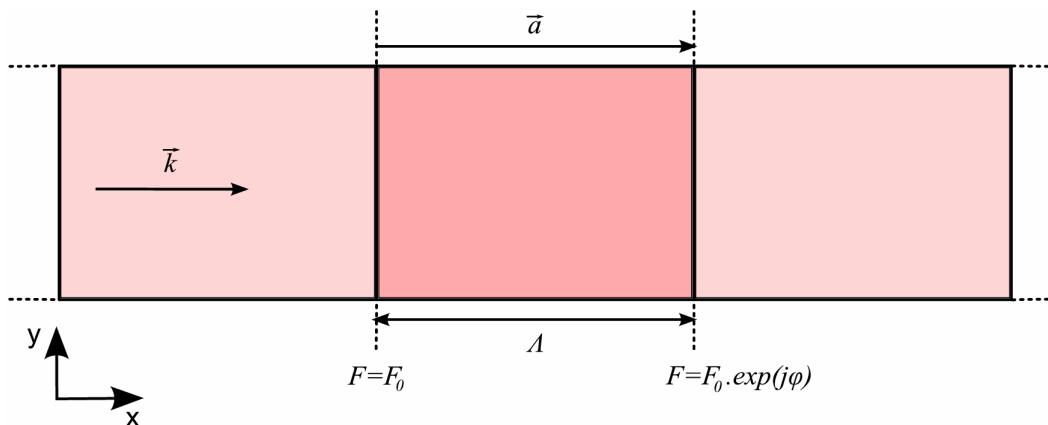
Puisque le réseau est considéré comme infini et périodique dans la direction  $(Ox)$ , la fonction d'espace  $F(x, y)$  doit nécessairement vérifier la relation de Bloch-Floquet [6] :

$$F(x + n\|\underline{a}\|, y) = F(x, y) \cdot e^{jn\varphi} \quad (2.2.2)$$

où  $n$  est un entier et  $\varphi$  est le déphasage défini par le produit scalaire du vecteur d'onde avec le vecteur de base du réseau  $\underline{a}$  :

$$\varphi = \underline{k} \cdot \underline{a} = k \cdot \|\underline{a}\| = k \cdot \Lambda \quad (2.2.3)$$

En particulier, la relation de phase (2.2.2) est valable pour deux points séparés par le pas du réseau et, *a fortiori*, pour les points d'une même cellule élémentaire. Ainsi, il est possible de restreindre le domaine d'étude à la cellule élémentaire.



**Figure 17 Présentation de la cellule élémentaire d'un matériau 1D.**

## 2.2.2 Éléments finis et pseudo-analyse modale

L'obtention des courbes de dispersion découle de la recherche des valeurs propres  $\omega_p$  de l'équation :

$$\{[K_{uu}] - \omega^2 [M]\} \underline{U} = 0 \quad (2.2.4)$$

avec  $[K_{uu}]$  la matrice élémentaire de rigidité,  $[M]$  la matrice élémentaire de masse et  $\underline{U}$  le vecteur des valeurs nodales du champ de déplacement.

La méthode développée par *P. Langlet* [7] permet, en appliquant les conditions de périodicité aux valeurs nodales du déplacement, de passer de l'équation des éléments finis :

$$\{[K_{uu}] - \omega^2 [M]\} \underline{U} = \underline{F} \quad (2.2.5)$$

à l'équation (2.2.4).

### 2.2.2.1 Application des conditions de périodicité aux valeurs nodales du déplacement : cas d'une structure 1D

Le matériau périodique 1D est la répétition à l'infini suivant une direction de l'espace du même motif. Le théorème de Bloch-Floquet permet de réduire la modélisation à une cellule élémentaire, qui fait seule l'objet du maillage par éléments finis. Cette cellule est présentée à la Figure 18.

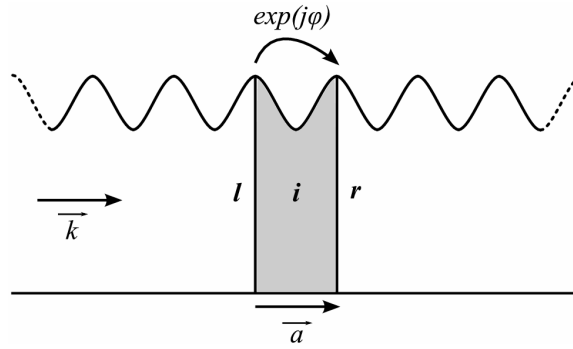


Figure 18 Description de la structure périodique 1D étudiée.

Les lignes délimitant la cellule élémentaire sont notées  $l$  (*left* - ligne de gauche) et  $r$  (*right* - ligne de droite). Le domaine interne de la cellule est noté  $i$ . Les vecteurs des valeurs nodales du déplacement  $\underline{U}$  et des forces extérieures  $\underline{F}$  se décomposent en trois parties :

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} \underline{U}^l \\ \underline{U}^r \\ \underline{U}^i \end{bmatrix} \quad (2.2.6)$$

et :

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} \underline{F}^l \\ \underline{F}^r \\ \underline{F}^i \end{bmatrix} \quad (2.2.7)$$

Le vecteur d'onde  $\underline{k}$  est colinéaire au vecteur de base du réseau  $\underline{a}$ .

Dans la cellule élémentaire maillée, la périodicité est prise en compte à l'aide d'une relation de phase spécifique entre des points distants d'un nombre entier de fois le pas du réseau. Ces relations de phase sont appliquées aux valeurs nodales du déplacement et aux valeurs nodales des forces extérieures et définissent les conditions aux limites entre les cellules adjacentes. Ainsi, les composantes du vecteur des valeurs nodales du déplacement  $\underline{U}$  doivent vérifier :

$$\underline{U}^r = \underline{U}^l \cdot e^{j\varphi} \quad (2.2.8)$$

De même, les composantes du vecteur des valeurs nodales des forces extérieures  $\underline{F}$  doivent vérifier :

$$\underline{F}^r = -\underline{F}^l \cdot e^{j\varphi} \quad (2.2.9)$$

Dans les expressions (2.2.8) et (2.2.9),  $\varphi = \underline{k} \cdot \underline{\Lambda}$  d'après (2.2.3).

L'équation (2.2.8) implique une relation matricielle entre le vecteur  $\underline{U}$  et le vecteur réduit  $\tilde{\underline{U}}$  composé des valeurs nodales du déplacement sur la ligne de gauche  $l$  et dans le domaine interne  $i$  :

$$\underline{U} = [P_U] \tilde{\underline{U}} = \begin{bmatrix} [P_{ul}] & 0 \\ 0 & [I^i] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}^l \\ \underline{U}^i \end{bmatrix} \quad (2.2.10)$$

avec :

$$\begin{bmatrix} P_{U^l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I^l] \\ e^{j\varphi} \cdot [I^l] \end{bmatrix} \quad (2.2.11)$$

où  $[I^l]$  et  $[I^i]$  sont les matrices identité dont la taille est le nombre de degrés de liberté associés respectivement à la ligne  $l$  et au domaine interne  $i$ .

De même, la relation (2.2.9) implique une relation matricielle entre le vecteur  $\tilde{F}$  et le vecteur réduit  $\tilde{\tilde{F}}$  composé des valeurs nodales des forces extérieures sur la ligne  $l$  et dans le domaine interne  $i$  :

$$\tilde{F} = [P_F] \tilde{\tilde{F}} = \begin{bmatrix} [P_{F^l}] & 0 \\ 0 & [I^i] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{F}^l \\ \tilde{F}^i \end{bmatrix} \quad (2.2.12)$$

avec :

$$\begin{bmatrix} P_{F^l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I^l] \\ -e^{j\varphi} \cdot [I^l] \end{bmatrix} \quad (2.2.13)$$

Compte tenu des relations (2.2.11) et (2.2.13) et en multipliant l'équation (2.2.4) par la matrice  ${}^t[P_U]^*$ , le système à résoudre devient :

$${}^t[P_U]^* \{ [K_{uu}] - \omega^2 [M] \} [P_U] \tilde{\tilde{U}} = {}^t[P_U]^* \cdot [P_F] \tilde{\tilde{F}} \quad (2.2.14)$$

D'où :

$$\{ [\tilde{K}] - \omega^2 [\tilde{M}] \} \tilde{\tilde{U}} = {}^t[P_U]^* \cdot [P_F] \tilde{\tilde{F}} \quad (2.2.15)$$

avec :

$$[\tilde{K}] = {}^t[P_U]^* \cdot [K_{uu}] \cdot [P_U] \quad (2.2.16)$$

et :

$$[\tilde{M}] = {}^t[P_U]^* \cdot [M] \cdot [P_U] \quad (2.2.17)$$

Du fait que les forces extérieures appliquées aux nœuds internes à la cellule sont nulles (*i.e.*  $\tilde{F}^i = 0$ ), la relation (2.2.15) devient :

$$\{ [\tilde{K}] - \omega^2 [\tilde{M}] \} \tilde{\tilde{U}} = 0 \quad (2.2.18)$$

avec :

$${}^t[P_U]^* \cdot [P_F] \tilde{\tilde{F}} = 0 \quad (2.2.19)$$

Les matrices  $[\tilde{K}]$  et  $[\tilde{M}]$  peuvent se décomposer en différents sous domaines de la façon suivante :

$$[\tilde{K}] = \begin{bmatrix} [\tilde{K}^{ll}] & [\tilde{K}^{li}] \\ {}^t[\tilde{K}^{li}] & {}^t[\tilde{K}^{ii}] \end{bmatrix} \quad (2.2.20)$$

et :

$$[\tilde{M}] = \begin{bmatrix} [\tilde{M}^{ll}] & [\tilde{M}^{li}] \\ {}^t[\tilde{M}^{li}] & {}^t[\tilde{M}^{ii}] \end{bmatrix} \quad (2.2.21)$$

En utilisant les indices  $\alpha$  et  $\beta$ , pouvant être égaux indifféremment à  $l$  ou à  $i$ , les sous matrices des équations (2.2.20) et (2.2.21) s'écrivent :

$$[\tilde{K}^{\alpha\beta}] = {}^t [P_{U^\alpha}]^* \cdot [K_{uu}^{\alpha\beta}] \cdot [P_{U^\beta}] \quad (2.2.22)$$

et :

$$[\tilde{M}^{\alpha\beta}] = {}^t [P_{U^\alpha}]^* \cdot [M_{uu}^{\alpha\beta}] \cdot [P_{U^\beta}] \quad (2.2.23)$$

D'où :

$$[\tilde{K}] = \begin{bmatrix} K_{uu}^{ll} + K_{uu}^{rl} + e^{j\varphi} K_{uu}^{lr} + e^{-j\varphi} K_{uu}^{rl} & K_{uu}^{li} + e^{-j\varphi} K_{uu}^{ri} \\ K_{uu}^{il} + e^{j\varphi} K_{uu}^{ir} & K_{uu}^{ii} \end{bmatrix} \quad (2.2.24)$$

$$[\tilde{M}] = \begin{bmatrix} M^{ll} + M^{rl} + e^{j\varphi} M^{lr} + e^{-j\varphi} M^{rl} & M^{li} + e^{-j\varphi} M^{ri} \\ M^{il} + e^{j\varphi} M^{ir} & M^{ii} \end{bmatrix} \quad (2.2.25)$$

Le vecteur d'onde  $k$  étant fixé, le déphasage  $\varphi$  se déduit directement de la relation (2.2.3). Les matrices  $[\tilde{K}]$  et  $[\tilde{M}]$  sont obtenues à partir de  $[P_U]$  et sont hermitiennes, du fait que le milieu considéré est sans perte. Les valeurs propres  $\omega_p$  sont donc réelles. Pour chacune de ces valeurs, les vecteurs propres  $\tilde{U}_p$  du système linéaire (2.2.18) sont alors calculés.

Ainsi, même si cette méthode, implémentée au sein du code éléments finis ATILA<sup>®</sup>, n'induit pas une analyse modale *stricto sensu*, celle-ci permet d'obtenir pour un nombre d'onde donné les fréquences propres et les modes propres de la structure étudiée. Les courbes de dispersion peuvent dès lors être tracées pour des valeurs de  $k \in [-\pi/\Lambda; \pi/\Lambda]$ .

### 2.2.2.2 La structure étudiée

La structure représentée sur la Figure 19 est étudiée par analyse modale à l'aide du logiciel ATILA<sup>®</sup>. Il s'agit d'une cellule élémentaire de la plaque d'aluminium infinie à motif sinusoïdal périodique. Les paramètres géométriques de la simulation sont rappelés sur la Figure 19.

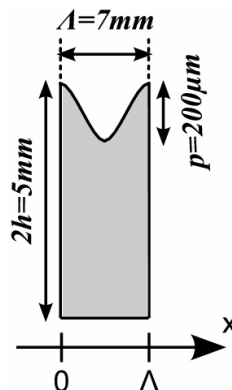


Figure 19 Schéma de la structure étudiée par analyse modale.

Comme le montre la Figure 12 du chapitre 1, des conversions de modes sont possibles à basses fréquences si la valeur de la période  $\Lambda$  est choisie dans le même

ordre de grandeur que les valeurs des longueurs d'onde des modes  $S_0$  et  $A_0$ . Par ailleurs, le rapport  $p/(2h)$  est ici inférieur à 4 %. Tant que  $p/(2h) < 10\%$ , l'hypothèse de petites perturbations de la surface est supposée respectée.

### 2.2.3 Les courbes de dispersion

La figure suivante (Figure 20) met en parallèle deux types de courbes de dispersion. La Figure 20.a présente les courbes de dispersion théoriques pour une plaque d'aluminium plane infinie de  $2h = 5\text{ mm}$  d'épaisseur obtenues au chapitre 1. La Figure 20.b, quant à elle, est le résultat d'une analyse modale effectuée sur la cellule élémentaire présentée par la Figure 19. Ainsi, les courbes de dispersion d'une plaque d'aluminium infinie à périodicités sinusoïdales sont obtenues. Ces deux représentations sont effectuées pour des valeurs de  $k$  comprises dans la première zone de Brillouin dont le bord se situe à  $k = \pi/\Lambda = 448,8\text{ m}^{-1}$ .

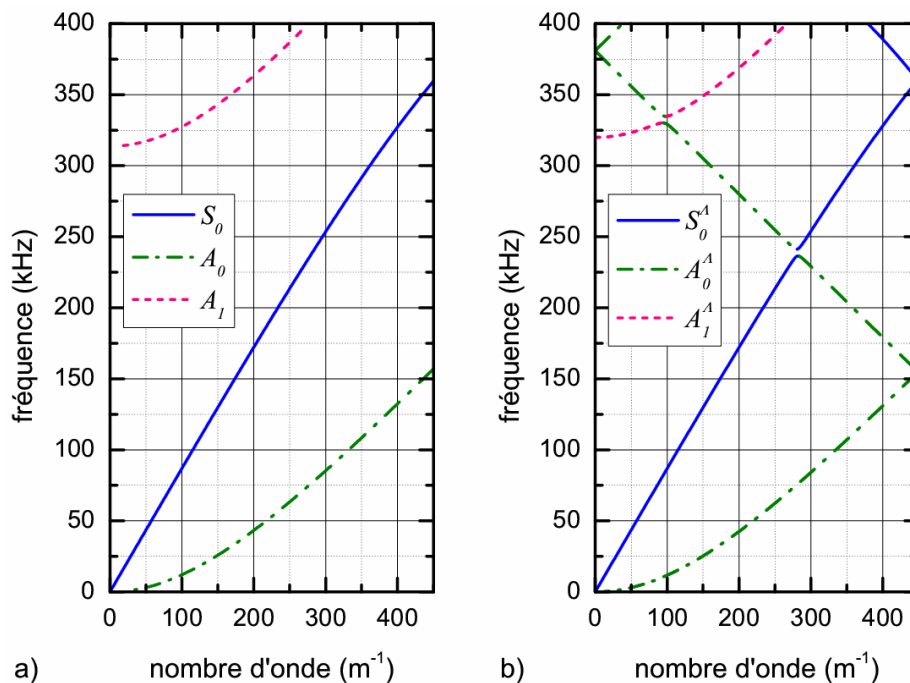


Figure 20 Courbes de dispersion a) cas d'une plaque plane infinie de  $2h = 5\text{ mm}$  d'épaisseur b) cas d'une plaque infinie à périodicités sinusoïdales,  $2h = 5\text{ mm}$ ,  $\Lambda = 7\text{ mm}$ ,  $p = 200\text{ }\mu\text{m}$ .

La Figure 20.a présente trois modes de Lamb : le mode symétrique  $S_0$  et les deux premiers modes antisymétriques  $A_0$  et  $A_1$ . Par comparaison avec la Figure 20.a, trois modes sont identifiés sur la Figure 20.b : les modes  $S_0^A$ ,  $A_0^A$  et  $A_1^A$ . L'indice  $^A$  indique qu'il s'agit de modes se propageant dans la plaque à périodicités sinusoïdales. Cependant, comme le montre la Figure 21, ces modes ont des caractéristiques proches de celles des modes de Lamb. Celle-ci présente la superposition des courbes de dispersion d'une plaque plane infinie (en bleu) avec celles d'une plaque infinie à périodicités sinusoïdales « étendues » dans tout le réseau réciproque (en rouge). Les courbes rouges étant similaires aux bleues, l'identification des modes est possible.



Toutefois, ces courbes ne se recouvrent pas totalement. Ces modes représentés à la Figure 20.b seront dénommés par la suite « *pseudo-modes de Lamb* ».

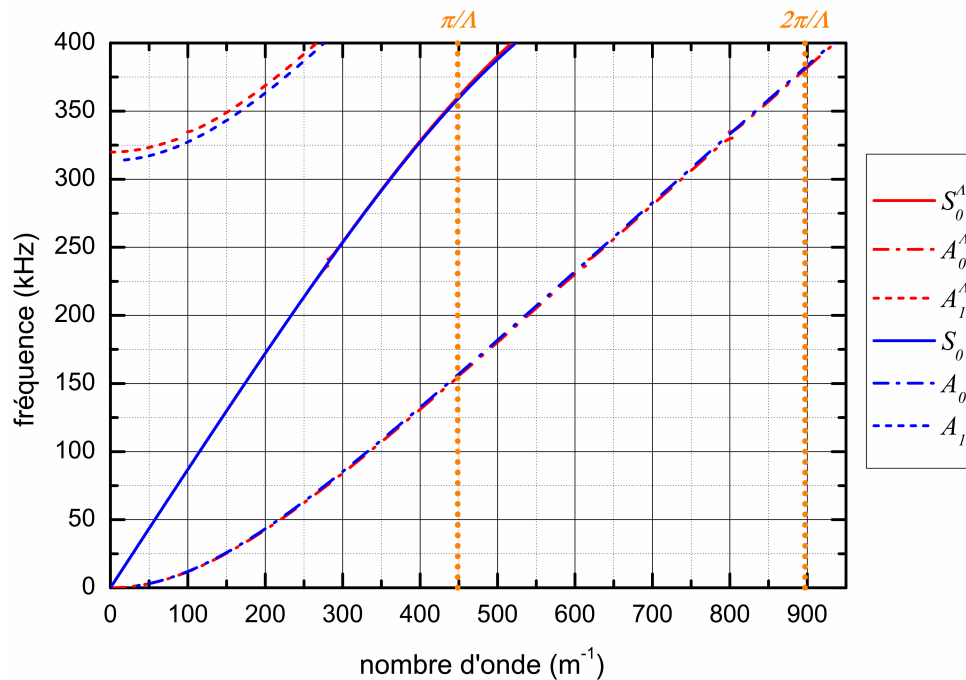


Figure 21 Superposition des courbes de dispersion d'une plaque plane infinie de  $2h = 5 \text{ mm}$  d'épaisseur (en bleu) avec celles d'une plaque infinie à périodicités sinusoïdales « étendues » dans tout le réseau réciproque (en rouge),  $2h = 5 \text{ mm}$ ,  $\Lambda = 7 \text{ mm}$ ,  $p = 200 \mu\text{m}$ .

### 2.3 Analyse des courbes de dispersion

La structure périodique du guide implique que les courbes de dispersion des ondes de Lamb se replient à  $k = \pm\pi/\Lambda$  et  $k = 0$ . D'après ces courbes, les modes de vibration du guide sont localisés dans des gammes de fréquences appelées « bandes passantes » et séparées par des domaines fréquentiels pour lesquels aucune onde propagative n'existe. De telles régions sont appelées « bandes interdites » ou « *gaps* » (Figure 22 – A, B, C, D).

Il existe deux types de bandes interdites : les bandes d'arrêt (points A et B – Figure 22), à la limite de la zone de Brillouin, et les mini bandes d'arrêt (points C et D - Figure 22), à l'intérieur de la zone de Brillouin. Le terme de mini bande d'arrêt a été initialement introduit en électromagnétisme pour caractériser des bandes interdites faisant intervenir deux modes de natures différentes [8].

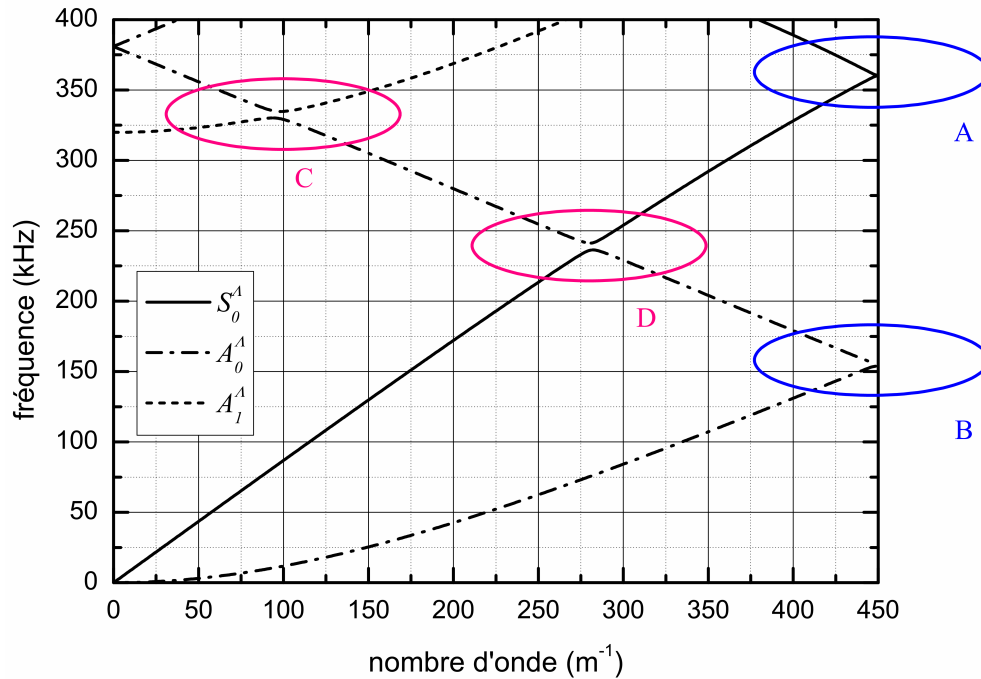


Figure 22 Courbes de dispersion dans la première zone de Brillouin pour une plaque infinie à périodicités sinusoïdales,  $2h = 5 \text{ mm}$ ,  $\Lambda = 7 \text{ mm}$ ,  $p = 200 \text{ }\mu\text{m}$ .

### 2.3.1 Deux types de gaps

Les points A et B (Figure 22) correspondent à des bandes d'arrêt, ou gaps en bord de bande. Celles-ci sont dues à la formation d'un anti-croisement lors du repliement d'une courbe de dispersion d'un mode de Lamb en bord de zone de Brillouin. Cet état correspond à une conversion entre un mode incident donné (le mode  $A_0^\Lambda$  pour le point B et le mode  $S_0^\Lambda$  pour le point A) et le même mode se propageant dans la direction opposée. La Figure 23.a présente le gap bord de bande  $A_0^\Lambda/A_0^\Lambda$ .

Les points C et D (Figure 22) sont pour leur part des mini bandes d'arrêt, ou gaps intra-bande. Ils sont en effet le résultat de l'ouverture d'une bande interdite au croisement des courbes de dispersion de deux modes de Lamb différents. Ces anti-croisements traduisent une conversion entre deux modes différents : le point C est dû à la conversion entre les modes  $A_0^\Lambda$  et  $A_1^\Lambda$  ; de même, le point D illustre celle entre les modes  $A_0^\Lambda$  et  $S_0^\Lambda$ . La Figure 23.b présente le gap bord de bande  $S_0^\Lambda/A_0^\Lambda$ .

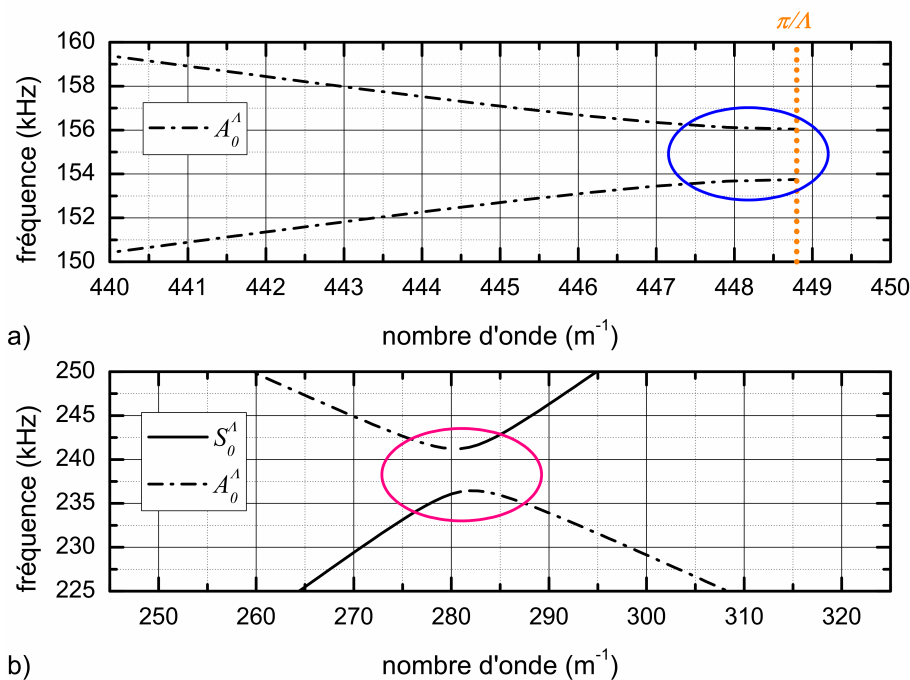


Figure 23 Détails a) cas d'une bande interdite b) cas d'une mini bande interdite.

### 2.3.2 Gap et sens de propagation

La Figure 24 présente plus en détails le point B (Figure 22 et Figure 23.a) et confirme l'existence d'une mini bande d'arrêt au repliement des courbes de dispersion du mode  $A_0^A$ . Ce gap survient entre 153 kHz et 156 kHz et sa fréquence centrale est  $f_{gap} = 155 \text{ kHz}$ . Cette bande interdite sépare deux branches. La branche supérieure (ou repliée) regroupe des points correspondant à des ondes dont le sens de propagation est dans le sens des  $x$  négatifs. Pour ces points l'onde associée a des vitesses de groupe et de phase de signes opposés : il s'agit d'une onde rétropropagative. Les points appartenant à la branche inférieure correspondent à une onde dont le sens de propagation est dans le sens des  $x$  positifs. Aux limites du gap, la vitesse de groupe est nulle ( $\partial\omega/\partial k = 0$ ) impliquant *de facto* un phénomène stationnaire.

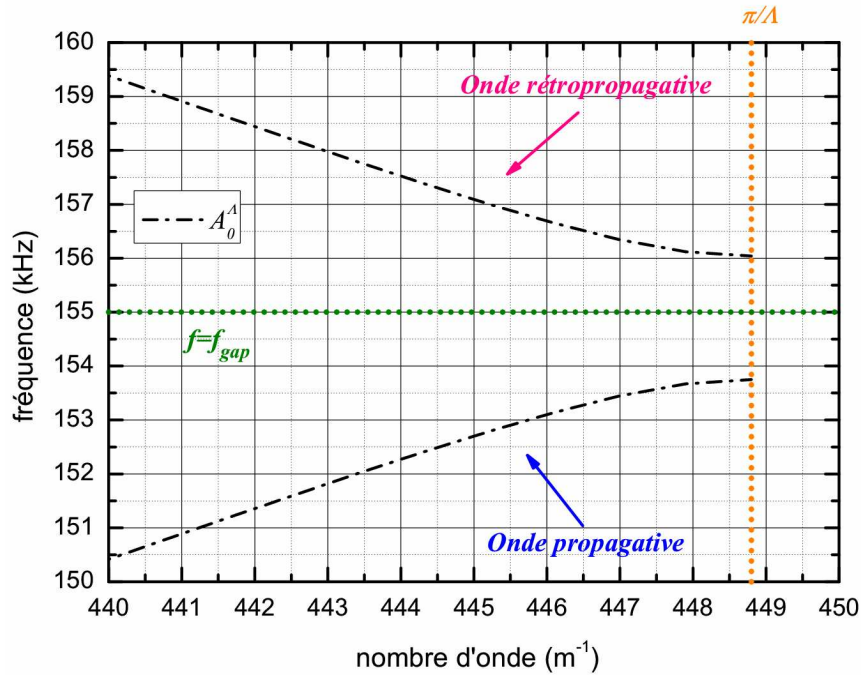


Figure 24 Détail des courbes de dispersion pour une plaque infinie à périodicités sinusoïdales : gap bord de bande  $A_0^\Lambda/A_0^\Lambda$ .

La Figure 25, quant à elle, présente plus en détails le point D (Figure 22 et Figure 23.b) et confirme l'existence d'une mini bande d'arrêt au croisement des courbes de dispersion des modes  $S_0^\Lambda$  et  $A_0^\Lambda$ . Ce gap survient entre 236 kHz et 241 kHz et sa fréquence centrale est  $f_{gap} = 239 \text{ kHz}$ . Cette bande interdite sépare deux branches. Sur chacune des branches à pente positive, les points appartiennent au mode  $S_0^\Lambda$  propagatif. Les points des branches à pente négative correspondent au mode  $A_0^\Lambda$  rétropropagatif. Quant aux limites du gap ( $\partial\omega/\partial k = 0$ ), celles-ci impliquent un phénomène stationnaire.

Par conséquent il y a continuité sur chaque branche entre le mode  $S_0^\Lambda$  et le mode  $A_0^\Lambda$ . Cela signifie qu'une onde de type  $S_0$  coexiste dans un réseau infini de périodicités sinusoïdales avec une onde de type  $A_0$ . De plus, ces ondes ont des sens de propagation opposés.

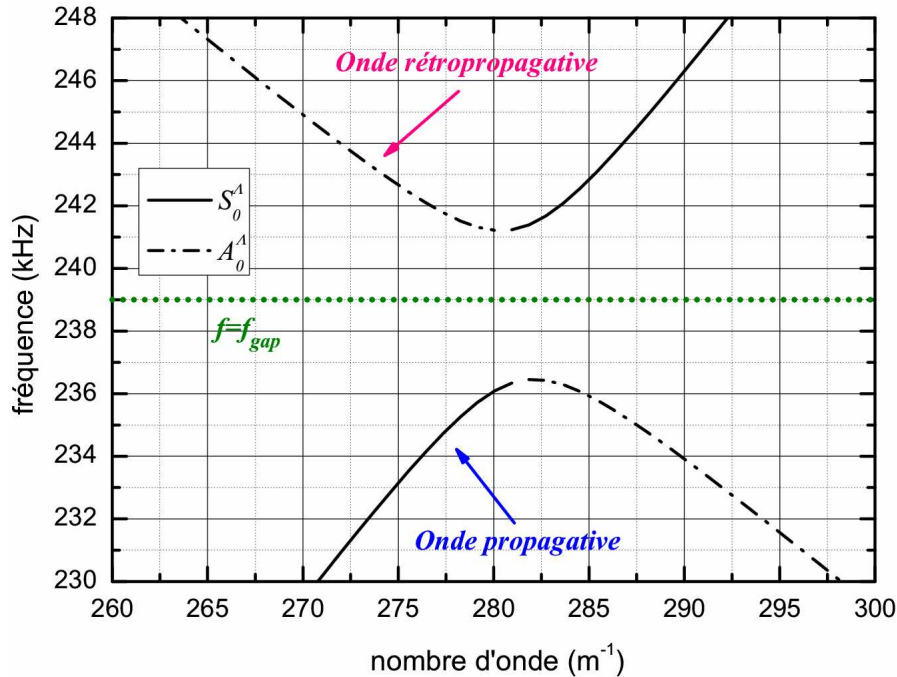


Figure 25 Détail des courbes de dispersion pour une plaque infinie à périodicités sinusoïdales : gap intra-bande  $S_0^\Lambda/A_0^\Lambda$ .

### 2.3.3 Influence de la profondeur des rainures

La géométrie des rainures se réduit à deux paramètres : la largeur  $\Lambda$  et la profondeur  $p$  de celles-ci. Afin de connaître l'influence de chacun de ces paramètres sur les courbes de dispersion, plusieurs analyses modales sont réalisées. Celles-ci ont été effectuées avec la profondeur des rainures  $p$  variant de  $0 \mu m$  à  $500 \mu m$  par pas de  $50 \mu m$  et vérifiant ainsi l'hypothèse des petites perturbations de la surface (*i.e.*  $0\% \leq p/(2h) \leq 10\%$ ). Dans chaque cas, la valeur de la largeur fréquentielle du gap à l'anti-croisement entre les courbes de dispersion des modes considérés a été relevée.

Ainsi, la Figure 26 présente l'influence de la profondeur des rainures sur la largeur du gap  $A_0^\Lambda/A_0^\Lambda$  pour un profil périodique infini. Pour les valeurs de  $p$  considérées à  $\Lambda = 7 mm$ , la variation de la largeur de la bande d'arrêt  $A_0^\Lambda/A_0^\Lambda$  est régie par une relation linéaire avec un très fort coefficient de corrélation ( $R_f = 0.9996$ ). Cette constatation est confirmée pour  $\Lambda = 5 mm$  et  $\Lambda = 9 mm$ .

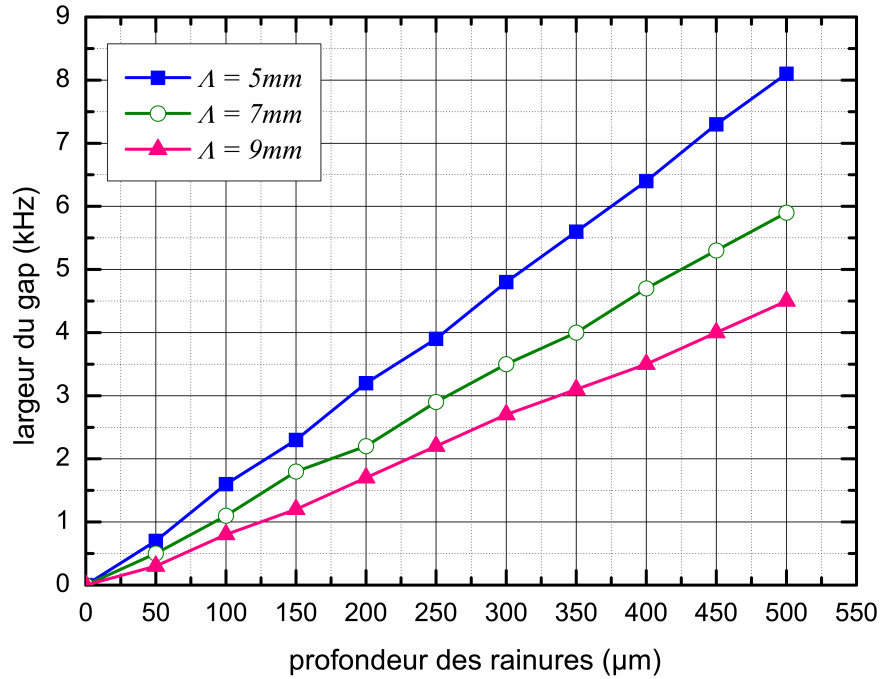


Figure 26 Variation de la largeur du gap  $A_0^\Lambda/A_0^\Lambda$  en fonction de la profondeur  $p$  et de la largeur  $\Lambda$  des rainures,  $2h = 5 \text{ mm}$ .

De même, la Figure 27 présente l'influence de la profondeur des rainures sur la largeur du gap  $S_0^\Lambda/A_0^\Lambda$  pour un profil périodique infini. Pour les valeurs de  $p$  considérées à  $\Lambda = 7 \text{ mm}$ , la variation de la largeur de la mini bande d'arrêt  $S_0^\Lambda/A_0^\Lambda$  est régie par une relation linéaire avec un très fort coefficient de corrélation ( $R_f = 0.9995$ ). Cette constatation est confirmée pour  $\Lambda = 5 \text{ mm}$  et  $\Lambda = 9 \text{ mm}$ .

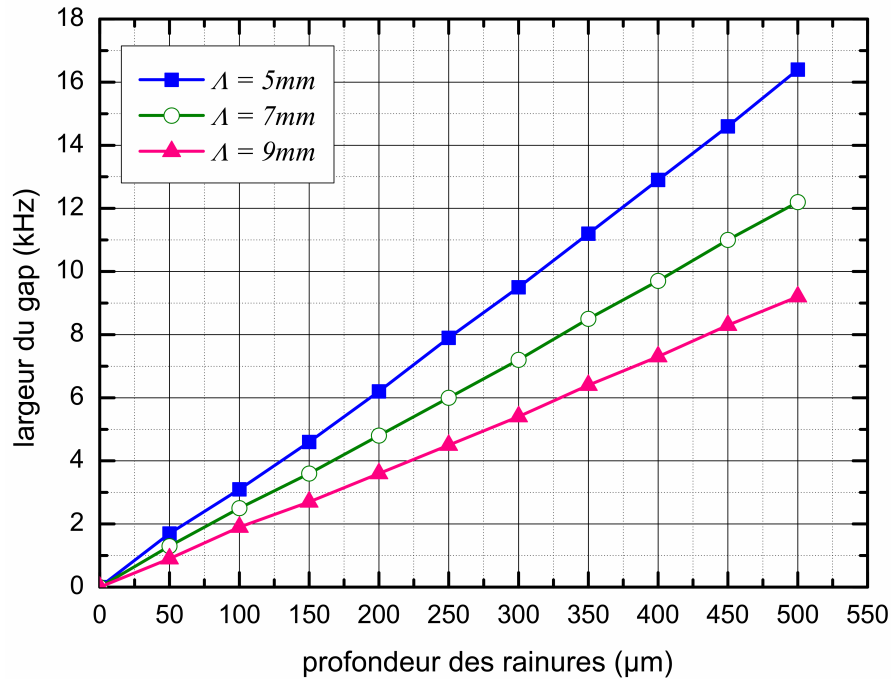


Figure 27 Variation de la largeur du gap  $S_0^\Lambda/A_0^\Lambda$  en fonction de la profondeur  $p$  et de la largeur  $\Lambda$  des rainures,  $2h = 5\text{ mm}$ .

Ainsi donc, plus profondes sont les rainures, plus large est la bande interdite. De plus, dans le cas des gaps étudiés, l'évolution de leur largeur fréquentielle en fonction de la profondeur des rainures est linéaire.

Que ce soit celles d'une plaque plane infinie ou d'une plaque infinie à périodicités sinusoïdales (Figure 20), les courbes de dispersion présentées jusqu'ici n'ont impliqué que des valeurs du nombre d'onde  $k$  réelles. Dans les gaps, aucune onde propagative n'existe. Toutefois, il existe dans ces zones des valeurs complexes du nombre d'onde correspondant à des modes évanescents.

## 2.4 De $\omega(k)$ à $k(\omega)$ : mise en évidence des modes évanescents

Alors que l'analyse modale d'un motif élémentaire de la structure permet d'obtenir pour une valeur réelle du nombre d'onde donnée l'ensemble des fréquences possibles, une autre méthode permet, quant à elle, de calculer à une fréquence donnée l'ensemble des valeurs complexes du nombre d'onde. Cette méthode, basée sur l'utilisation des matrices de transfert, a d'abord été utilisée par *D.J. Mead* [9-11] puis a notamment été appliquée par *M.S. Bennett* [12-14] au cas des structures périodiques. Plus récemment, *D. Duhamel* [15] l'a étendue au cas d'un guide d'ondes périodique.

### 2.4.1 Un nouveau système linéaire

Dans ce modèle, une seule cellule de la structure périodique est modélisée par éléments finis. Pour une valeur fixe  $\omega_0$  de la pulsation de vibration, l'équation des éléments finis (2.2.5) peut s'écrire sous la forme :

$$\{[K_{uu}] - \omega_0^2 [M]\} \underline{U} = \underline{F} \Leftrightarrow [D] \underline{U} = \underline{F} \quad (2.4.1)$$

où  $\underline{U}$  représente le vecteur des valeurs nodales du champ de déplacement et  $\underline{F}$  le vecteur des valeurs nodales du champ de force.

La matrice  $[D]$ , matrice de rigidité dynamique, peut être décomposée en coordonnées de couplage gauche ( $l$ ), coordonnées de couplage droit ( $r$ ) et coordonnées internes ( $i$ ) comme suit :

$$\begin{bmatrix} D^{ll} & D^{li} & D^{lr} \\ D^{il} & D^{ii} & D^{ir} \\ D^{rl} & D^{ri} & D^{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{U}^l \\ \underline{U}^i \\ \underline{U}^r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{F}^l \\ \underline{F}^i \\ \underline{F}^r \end{Bmatrix} \quad (2.4.2)$$

Cette décomposition du maillage en éléments de couplage gauche, éléments de couplage droit et éléments internes est illustrée par la Figure 28.

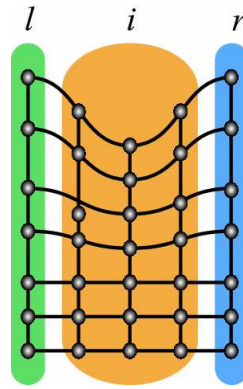


Figure 28 Illustration de la décomposition du maillage en éléments de couplage gauche ( $l$ ), éléments de couplage droit ( $r$ ) et éléments internes ( $i$ ) - cas d'un motif élémentaire sinusoïdal.

Pour une propagation en onde libre, les forces internes  $F^i$  sont nulles. Ainsi, à partir de l'équation (2.4.2), les déplacements internes s'écrivent sous la forme :

$$\underline{U}^i = -[D^{ii}]^{-1} \{D^{il} \underline{U}^l + D^{ir} \underline{U}^r\} \quad (2.4.3)$$

La substitution de (2.4.3) dans (2.4.2) permet d'obtenir :

$$\begin{bmatrix} D^{ll} - D^{li} [D^{ii}]^{-1} D^{il} & D^{lr} - D^{li} [D^{ii}]^{-1} D^{ir} \\ D^{rl} - D^{ri} [D^{ii}]^{-1} D^{il} & D^{rr} - D^{ri} [D^{ii}]^{-1} D^{ir} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{U}^l \\ \underline{U}^r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{F}^l \\ \underline{F}^r \end{Bmatrix} \quad (2.4.4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{U}^l \\ \underline{U}^r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{F}^l \\ \underline{F}^r \end{Bmatrix}$$

Cette dernière équation relie les forces et déplacements relevés sur les côtés droit et gauche d'une cellule élémentaire du guide. Aussi, pour la  $j^{\text{ième}}$  cellule, la relation (2.4.4) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{U}_j^l \\ \underline{U}_j^r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{F}_j^l \\ \underline{F}_j^r \end{Bmatrix} \quad (2.4.5)$$

Moyennant les considérations suivantes :

$$\underline{F}_j^r = -\underline{F}_{j+1}^l \quad \underline{U}_j^r = \underline{U}_{j+1}^l \quad (2.4.6)$$



la relation (2.4.5) devient :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}_j^l \\ \tilde{U}_{j+1}^l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{F}_j^l \\ -\tilde{F}_{j+1}^l \end{Bmatrix} \quad (2.4.7)$$

L'équation (2.4.7) peut être réorganisée sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{U}_{j+1}^l \\ \tilde{F}_{j+1}^l \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -B^{-1}A & B^{-1} \\ DB^{-1}A - C & -DB^{-1} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}_j^l \\ \tilde{F}_j^l \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \tilde{U}_{j+1}^l \\ \tilde{F}_{j+1}^l \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \tilde{U}_j^l \\ \tilde{F}_j^l \end{Bmatrix} \quad (2.4.8)$$

Dans cette équation,  $[T]$  est une matrice de transfert qui relie le côté droit (d'indice  $j+1$ ) de la cellule au côté gauche (d'indice  $j$ ).

De plus, du fait que la relation de Bloch-Floquet (2.2.2) peut s'appliquer à n'importe quelle quantité vectorielle, les deux vecteurs d'état de la relation (2.4.8) vérifient l'égalité suivante :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{U}_{j+1}^l \\ \tilde{F}_{j+1}^l \end{Bmatrix} = e^{jk\Lambda} \begin{Bmatrix} \tilde{U}_j^l \\ \tilde{F}_j^l \end{Bmatrix} \quad (2.4.9)$$

La soustraction de (2.4.8) par (2.4.9) induit un nouveau système linéaire :

$$\left[ T - e^{jk\Lambda} I \right] \begin{Bmatrix} \tilde{U}_j^l \\ \tilde{F}_j^l \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.4.10)$$

Les valeurs propres de ce système permettent d'obtenir, à une pulsation de vibration donnée, les valeurs de  $k$ .

Par ailleurs, les vecteurs propres donnent les vecteurs des valeurs nodales des champs de déplacement et de force des éléments de couplage gauche du maillage (Figure 28). A l'aide des équations (2.4.3) et (2.4.9), le vecteur  $\tilde{U}$  des valeurs nodales du champ de déplacement pour l'ensemble des nœuds du maillage pour le mode propre considéré est ainsi complètement déterminé.

## 2.4.2 Mise en œuvre de la méthode

Dans le cadre d'une analyse harmonique d'une structure élastique dans le vide, après avoir modélisé une cellule élémentaire du guide d'ondes et imposé un champ de déplacement (ou de force) comme excitation, le code ATILA<sup>®</sup> calcule les données du champ de déplacement pour l'ensemble des nœuds du maillage à une fréquence donnée.

Ainsi, lors d'une analyse harmonique, les vecteurs  $\tilde{U}$  et  $\tilde{F}$  des valeurs nodales des champs de déplacement et de force de l'équation (2.4.1) sont respectivement obtenues et connues pour une fréquence donnée. A l'aide d'un logiciel tel que MATLAB<sup>®1</sup>, ces vecteurs sont ensuite décomposés de la manière suivante :

<sup>1</sup> MATLAB<sup>®</sup> est un langage de calcul scientifique et un environnement interactif pour le développement d'algorithmes, la visualisation et l'analyse de données ou encore le calcul numérique.

$$\begin{aligned}
 \tilde{U} &= \begin{Bmatrix} \tilde{U}^l \\ \tilde{U}^r \\ \tilde{U}^i \end{Bmatrix} \\
 \tilde{F} &= \begin{Bmatrix} \tilde{F}^l \\ \tilde{F}^r \\ \tilde{F}^i \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

Les indices indiquent si, par rapport aux éléments du maillage, il s'agit des valeurs nodales de gauche ( $l$ ), de droite ( $r$ ) ou internes ( $i$ ).

De même, les éléments de la matrice  $[D]$  sont décomposés et les éléments de la matrice de transfert  $[T]$  sont calculés. Le système (2.4.10) est ensuite résolu et les valeurs du nombre d'onde  $k$  obtenues.

Ce processus est réitéré pour chaque valeur de la pulsation  $\omega$  considérée. Les courbes de dispersion  $k(\omega)$  sont ensuite tracées et réduites à des valeurs de  $k \in [-\pi/\Lambda; \pi/\Lambda]$ .

### 2.4.3 Validation de la méthode

La structure étudiée est analogue à celle présentée à la section 2.2.2.2. Le calcul des valeurs propres de l'équation (2.4.10) pour différentes valeurs de  $\omega$  permet d'obtenir des valeurs de  $k(\omega)$  complexes. Afin de valider la méthode, les valeurs de la partie réelle de ces nombres d'onde sont superposées à la Figure 29 aux courbes de dispersion d'une plaque d'aluminium infinie à périodicités sinusoïdales obtenues par analyse modale (Figure 20.b). La Figure 30 montre en détail la correspondance entre ces deux types de courbes au voisinage des bandes interdites. La Figure 30.a présente le gap bord de bande  $A_0^\Delta/A_0^\Delta$  et la Figure 30.b, le gap intra-bande  $S_0^\Delta/A_0^\Delta$ . En accord avec *C. Kittel* [16], les valeurs réelles du gap bord de bande ne dépassent pas la première zone de Brillouin (Figure 30.a).

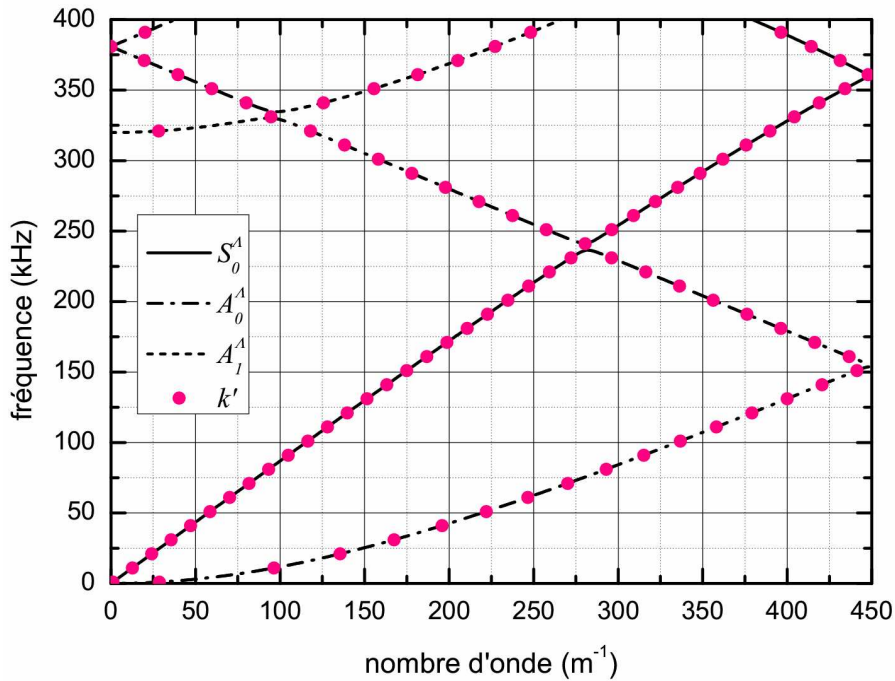


Figure 29 Courbes de dispersion pour une plaque infinie à périodicités sinusoïdales : validation des valeurs de  $k'$ ,  $2h = 5 \text{ mm}$ ,  $\Lambda = 7 \text{ mm}$ ,  $p = 200 \text{ }\mu\text{m}$ .

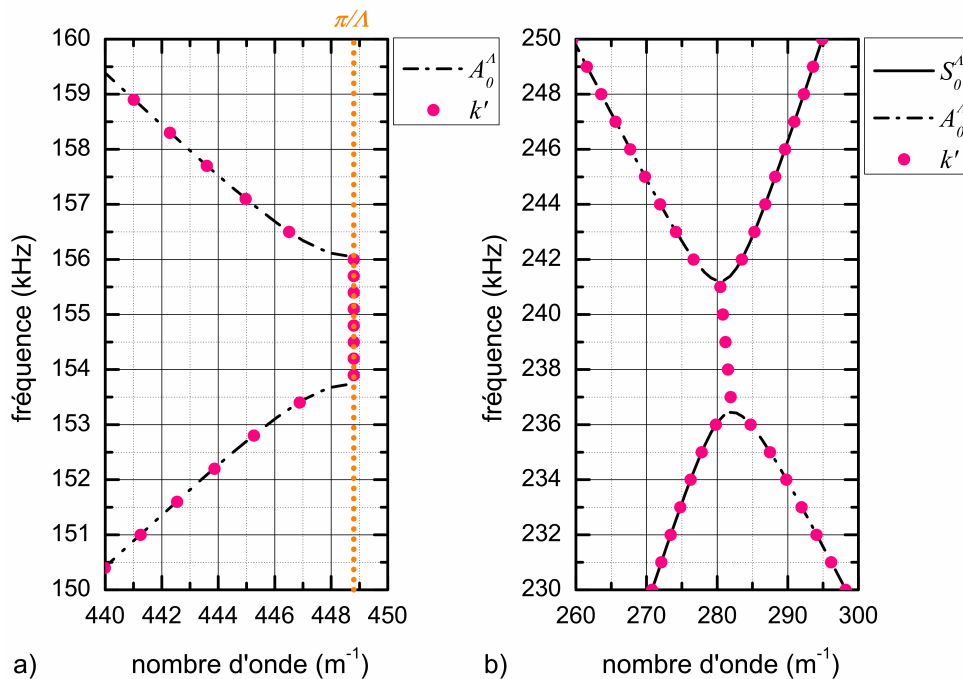


Figure 30 Comparaison des courbes  $\omega(k)$  avec la partie réelle des courbes  $k(\omega)$   
 (a) cas du gap bord de bande  $A_0^A/A_0^A$  (b) cas du gap intra-bande  $S_0^A/A_0^A$ .

La Figure 29 et la Figure 30 permettent donc de comparer les résultats des deux méthodes, c'est-à-dire les courbes  $\omega(k)$  avec les courbes  $\Re(k(\omega))$ . Celles-ci sont semblables. Toutefois, la seconde approche permet de connaître la valeur du nombre d'onde lorsque la fréquence est dans le gap.

## 2.5 Analyse des courbes de dispersion dans l'espace complexe

La structure étudiée est analogue à celle présentée à la section 2.2.2.2. A partir des valeurs de  $k(\omega)$  complexes calculées à partir de la méthode de la section 2.4.1, il est possible de tracer les courbes de dispersion dans l'espace  $(k', k'', f)$ .

### 2.5.1 Courbes de dispersion dans l'espace complexe

La Figure 31 et la Figure 32 présentent des détails de ces courbes de dispersion au voisinage respectivement du gap bord de bande  $A_0^\Delta/A_0^\Delta$  et du gap intra-bande  $S_0^\Delta/A_0^\Delta$ . Les courbes rose et bleue sont les projections des courbes de dispersion sur les plans  $(k', f)$  et  $(k'', f)$ . Au voisinage d'un gap, les valeurs de la partie imaginaire du nombre d'onde sont non nulles et symétriques par rapport à  $k'' = 0 \text{ m}^{-1}$ . De ce fait, dans cette gamme fréquentielle, les valeurs de  $k'$  correspondent à un mode dégénéré.

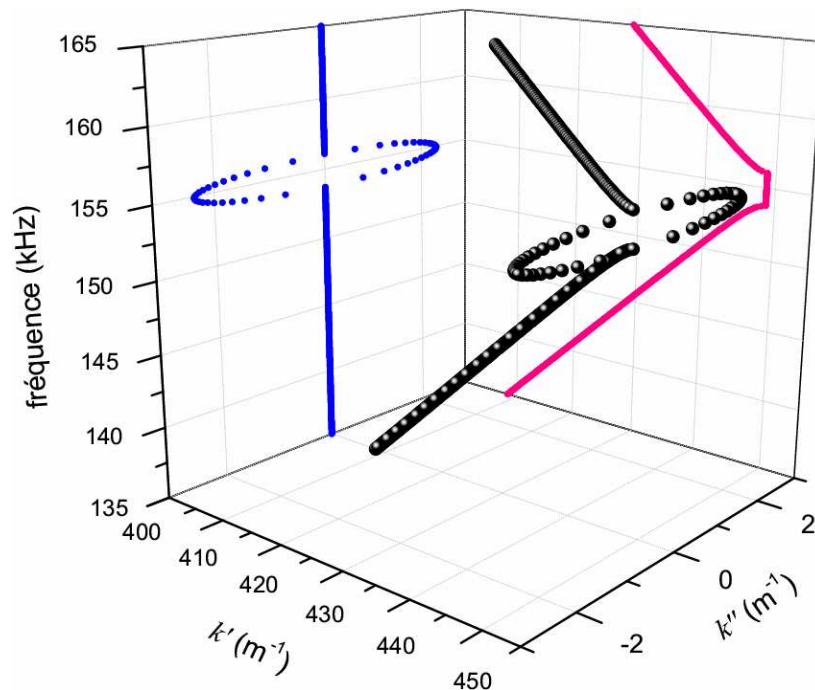


Figure 31 Détail des courbes de dispersion pour une plaque infinie à périodicités sinusoïdales dans l'espace  $(k', k'', f)$  : cas du gap bord de bande  $A_0^\Delta/A_0^\Delta$ ,  $2h = 5 \text{ mm}$ ,  $\Lambda = 7 \text{ mm}$ ,  $p = 200 \text{ }\mu\text{m}$ .

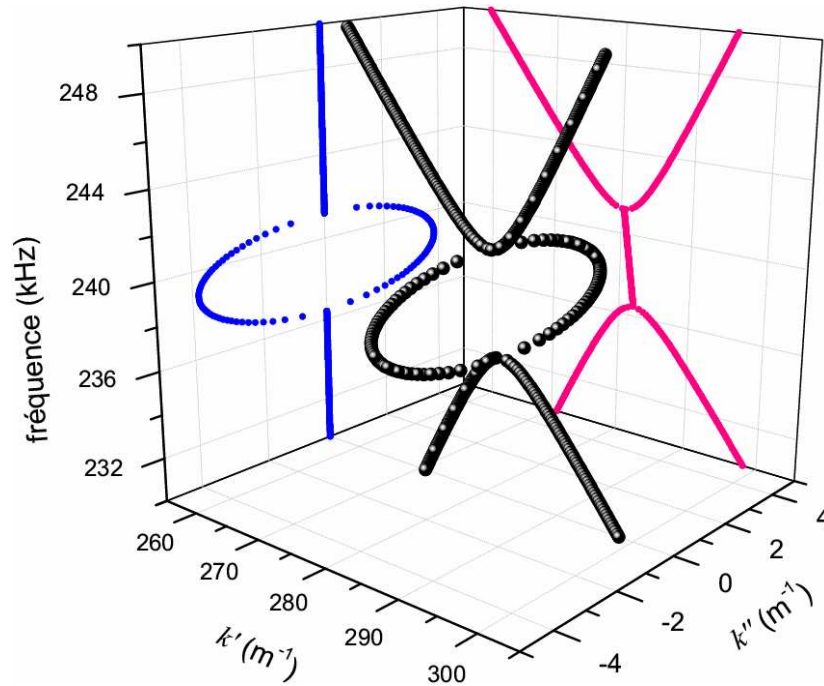


Figure 32 Détail des courbes de dispersion pour une plaque infinie à périodicités sinusoïdales dans l'espace  $(k', k'', f)$  : cas du gap intra-bande  $S_0^\Lambda/A_0^\Lambda$ ,  $2h = 5 \text{ mm}$ ,  $\Lambda = 7 \text{ mm}$ ,  $p = 200 \mu\text{m}$ .

### 2.5.2 A la fréquence centrale du gap

La Figure 33 est la projection sur les plans  $(k', f)$  et  $(k'', f)$  du gap  $A_0^\Lambda/A_0^\Lambda$  présenté à la Figure 31. De même, la Figure 34 est la projection sur les plans  $(k', f)$  et  $(k'', f)$  du gap  $S_0^\Lambda/A_0^\Lambda$  (Figure 32). Dans les deux cas, dans la gamme fréquentielle du gap, seuls des nombres d'onde complexes (*i.e.*  $k = k' + jk''$ ) existent. Pour  $f = f_{\text{gap}}$ , la valeur de  $k''$  est maximale. De plus, les valeurs de  $k'$  connectent les valeurs extrémales des deux branches visibles à la Figure 33.a et à la Figure 34.a.

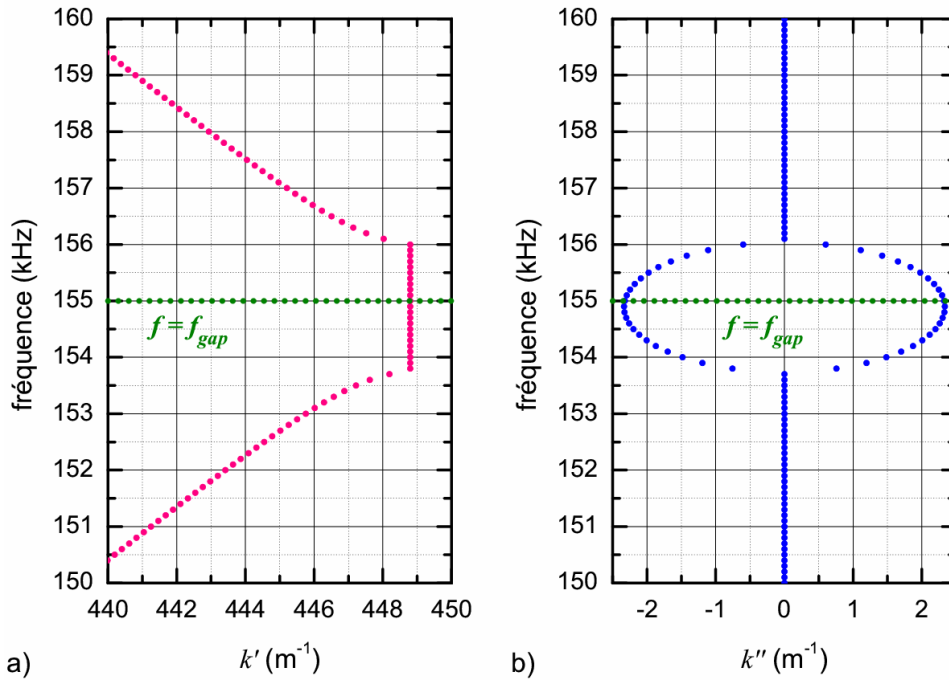


Figure 33 Détail des courbes de dispersion pour une plaque infinie à périodicités sinusoïdales projetés sur les plans  $(k', f)$  et  $(k'', f)$  : cas du gap bord de bande  $A_0^\wedge/A_0^\wedge$ .

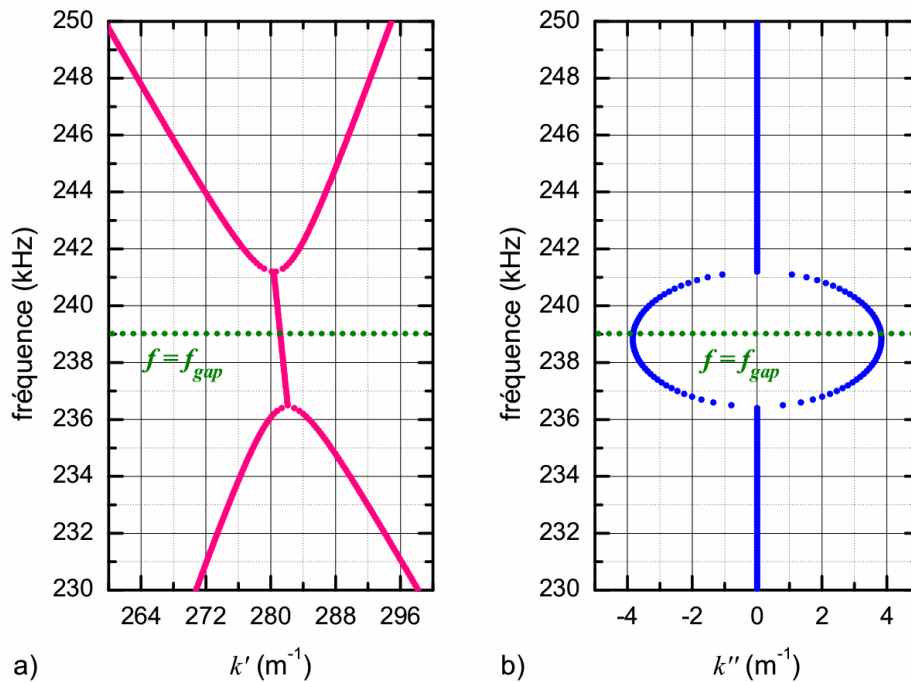


Figure 34 Détail des courbes de dispersion pour une plaque infinie à périodicités sinusoïdales projetés sur les plans  $(k', f)$  et  $(k'', f)$  : cas du gap intra-bande  $S_0^\wedge/A_0^\wedge$ .

### 2.5.3 Influence de la profondeur des rainures

A l'instar de la partie 2.3.3, l'influence de chacun des paramètres de la géométrie des rainures sur les nouvelles courbes de dispersion pour le gap bord de bande  $A_0^\Lambda/A_0^\Lambda$  et le gap intra-bande  $S_0^\Lambda/A_0^\Lambda$  est étudiée.

Les analyses harmoniques ont été réalisées avec la profondeur des rainures  $p$  variant de  $p=0\ \mu m$  à  $p=500\ \mu m$  par pas de  $p=50\ \mu m$ . Dans chaque cas, la valeur maximale de  $k''$ , notée  $k''_{max}$ , du gap à l'anti-croisement entre les courbes de dispersion des modes considérés a été relevée. Ainsi, la Figure 35 présente, dans le cas du gap  $A_0^\Lambda/A_0^\Lambda$ , l'influence de la profondeur des rainures sur la valeur de  $k''_{max}$  pour un profil périodique infini. Pour les valeurs de  $p$  considérées à  $\Lambda=7\ mm$ , la variation de la valeur de  $k''_{max}$  de la bande d'arrêt  $A_0^\Lambda/A_0^\Lambda$  est régie par une relation linéaire avec un très fort coefficient de corrélation ( $R_f=0.9999$ ). Cette constatation est confirmée pour  $\Lambda=5\ mm$  et  $\Lambda=9\ mm$ .

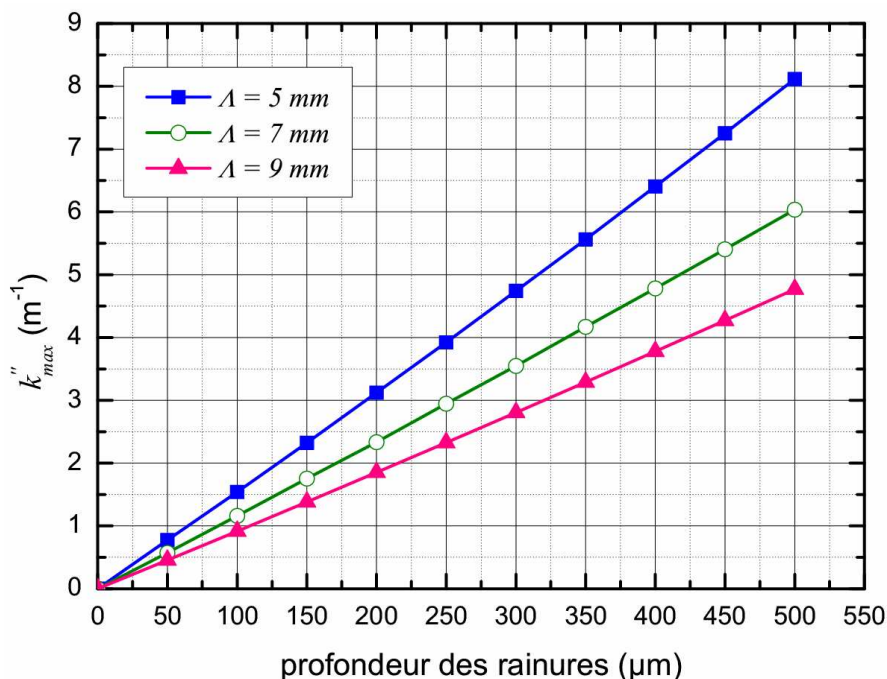


Figure 35 Variation de la valeur maximale de  $k''$  dans le gap  $A_0^\Lambda/A_0^\Lambda$  en fonction de la profondeur  $p$  et de la largeur  $\Lambda$  des rainures,  $2h = 5\ mm$ .

De même, la Figure 36 présente l'influence de la profondeur des rainures sur la valeur de  $k''_{max}$  du gap  $S_0^\Lambda/A_0^\Lambda$  pour un profil périodique infini. Pour les valeurs de  $p$  considérées à  $\Lambda=7\ mm$ , la variation de la valeur de  $k''_{max}$  de la mini bande d'arrêt  $S_0^\Lambda/A_0^\Lambda$  en fonction de la profondeur des rainures est régie par une relation linéaire avec un très fort coefficient de corrélation ( $R_f=0.9999$ ). Cette constatation est confirmée pour  $\Lambda=5\ mm$  et  $\Lambda=9\ mm$ .

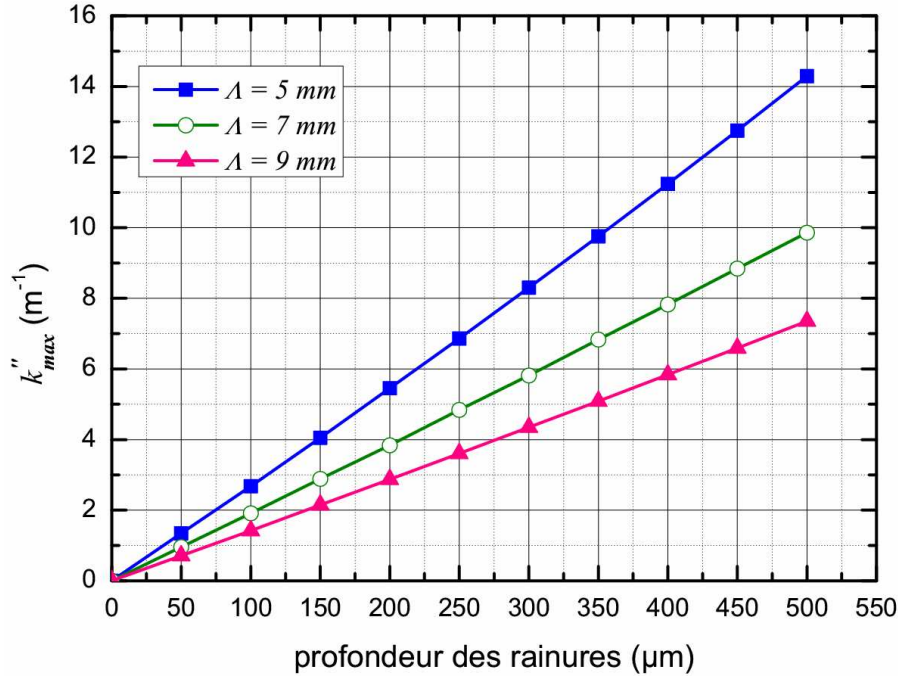


Figure 36 Variation de la valeur maximale de  $k''$  dans le gap  $S_0^\Lambda/A_0^\Lambda$  en fonction de la profondeur  $p$  et de la largeur  $\Lambda$  des rainures,  $2h = 5 \text{ mm}$ .

Ainsi donc, plus profondes sont les rainures, plus importante est la valeur de  $k''_{\max}$ . Du fait que la partie imaginaire du nombre d'onde est associée à l'atténuation d'une onde propagative, plus la valeur de  $k''_{\max}$  est importante et plus forte est l'atténuation de cette onde.

### 2.5.4 Théorie des modes couplés

En bord de zone, le mode incident  $A_0^\Lambda$  se rétroconvertit en lui-même. Une parenté existe donc entre ce résultat et la théorie des modes couplés exposée en annexe du tome 2 de la référence [17]. Dans celle-ci, il s'agit de traiter la rétroconversion d'une onde longitudinale en elle-même par un réseau périodique. Il est intéressant de se poser la question de la transposition de certains résultats au cas du couplage des pseudo-ondes de Lamb  $A_0^\Lambda/A_0^\Lambda$ . Dans le paragraphe suivant, certains résultats de cette théorie, provenant du tome 2 de la référence [17], sont rappelés brièvement afin d'être utilisés par la suite.

Dans une plaque plane, à une fréquence donnée, le champ de déplacement peut s'écrire comme une combinaison linéaire de modes de Lamb :

$$u(x, z, t) = \sum_m A_m \cdot u_m(z) \cdot e^{i(\alpha x - k_m x)} \quad (2.5.1)$$

où  $A_m$  est un coefficient qui dépend du mode  $m$ .

Si une interface est perturbée dans la direction  $x$ , le champ de déplacement s'écrit alors :

$$u(x, z, t) = \sum_m A_m(x) \cdot u_m(z) \cdot e^{i(\alpha x - k_m x)} \quad (2.5.2)$$

Dans le cas d'une perturbation variant lentement à l'échelle de la longueur d'onde ( $\lambda_m = 2\pi/k_m$ ), il est démontré [17] que :



$$\frac{dA_n}{dx} = -i \frac{k_n}{|k_n|} \sum_m \sum_q \xi_{nm}^{(q)} A_m(x) \cdot e^{i(k_n - k_m - qG)x} \quad (2.5.3)$$

avec :

$$\xi_{nm}^{(q)} = \frac{\omega}{4} \int u_n^* \cdot u_m \cdot \rho_q dydz \quad (2.5.4)$$

le coefficient de couplage des modes  $n$  et  $m$ . La variation d'épaisseur du guide d'ondes est traduite localement par une variation périodique de masse volumique  $\rho_q$  dont la périodicité est celle du réseau ( $G$ ).

Le couplage maximum se produit pour  $k_n - k_m = qG$ , qui correspond à la relation de phonon vue au chapitre 1. En dehors de la fréquence pour laquelle ce couplage est maximum, à son voisinage, le couplage existe et la relation suivante est écrite [4; 18] :

$$\Delta k = k_n - k_m - qG \quad (2.5.5)$$

Dans le cas présent, seulement deux ondes sont considérées telles que  $k_1 = -k_2 = k$ . De plus, pour  $q = 1$  :

$$\xi_{12} = [\xi_{21}]^* \quad (2.5.6)$$

Le coefficient de couplage est alors noté  $\kappa$ , tel que :

$$\kappa = \xi_{12} \quad (2.5.7)$$

Dans ces conditions, l'équation (2.5.3) permet d'écrire le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dx} = -i\kappa A_2 e^{i\Delta kx} \\ \frac{dA_2}{dx} = i\kappa^* A_1 e^{-i\Delta kx} \end{cases} \quad (2.5.8)$$

Le paramètre de désaccord  $\delta$  est défini par :

$$\delta = \frac{\Delta k}{2} = k - \frac{G}{2} \quad (2.5.9)$$

et le système suivant est considéré :

$$\begin{cases} R(x) = A_1(x) \cdot e^{-i\delta x} \\ S(x) = A_2(x) \cdot e^{i\delta x} \end{cases} \quad (2.5.10)$$

D'où, à partir de (2.5.8) :

$$\begin{cases} \frac{dR(x)}{dx} = -i\delta \cdot R(x) - i\kappa \cdot S(x) \\ \frac{dS(x)}{dx} = i\delta \cdot S(x) + i\kappa^* \cdot R(x) \end{cases} \quad (2.5.11)$$

Les fonctions  $R(x)$  et  $S(x)$  sont recherchées sous la forme :

$$\begin{cases} R(x) = b_1 \cdot e^{i\gamma x} \\ S(x) = b_2 \cdot e^{i\gamma x} \end{cases} \quad (2.5.12)$$

Le système homogène suivant est alors obtenu :

$$\begin{cases} b_1(\gamma + \delta) + \kappa b_2 = 0 \\ b_1 \kappa^* + b_2(\gamma - \delta) = 0 \end{cases} \quad (2.5.13)$$

qui n'admet de solutions non nulles que si :

$$\gamma^2 = \delta^2 - |\kappa|^2 \quad (2.5.14)$$

Le champ de déplacement total peut ainsi être déduit et s'écrit sous la forme :

$$u(x) = c_1(z) e^{i(\omega x - \beta_1 x)} + c_2(z) e^{i(\omega x - \beta_2 x)} \quad (2.5.15)$$

avec :

$$\begin{cases} \beta_1 = k - \gamma - \delta \\ \beta_2 = -k - \gamma + \delta \end{cases} \quad (2.5.16)$$

Le cas des ondes évanescentes correspond à  $\gamma^2 < 0$ . Dans ce cas, les constantes de propagation s'écrivent, en utilisant la relation (2.5.9) :

$$\beta = \pm \frac{G}{2} \pm i \sqrt{|\kappa|^2 - \delta^2} \quad (2.5.17)$$

Le centre de la bande interdite correspond à  $\delta = 0$  et survient à  $\omega_0 = \frac{G}{2} \cdot v_\phi = \pi \cdot \frac{v_\phi}{\Lambda}$ . De plus, à la fréquence centrale du gap, l'évanescence est maximale et donc  $|\kappa|$  correspond à  $k''_{\max}$ .

Les bords de la bande interdite sont alors donnés par :

$$\delta = \pm k''_{\max} \quad (2.5.18)$$

et :

$$\Delta\omega = 2k''_{\max} v_\phi \quad (2.5.19)$$

En supposant les ondes non dispersives dans la gamme de fréquences du gap, il découle de (2.5.19) que :

$$\Delta\omega \cdot \Lambda = \text{constante} \quad (2.5.20)$$

et donc que :

$$k''_{\max} \cdot \Lambda = \text{constante} \quad (2.5.21)$$

Des représentations synthétisant la Figure 26 et la Figure 35 en utilisant les relations (2.5.20) et (2.5.21) sont données respectivement à la Figure 37 et à la Figure 38 et montrent la validité de la transposition.

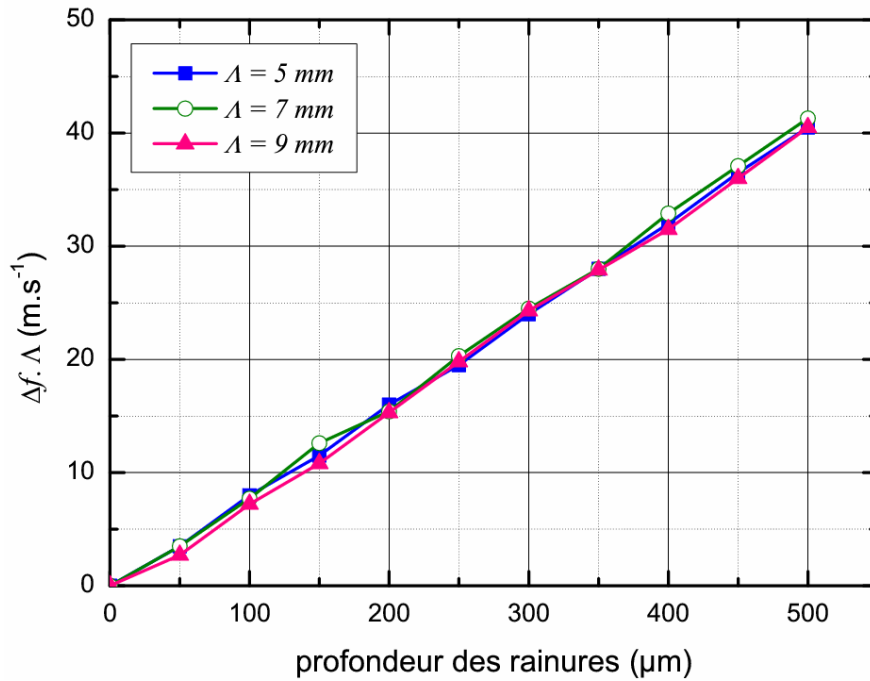


Figure 37 Variation du produit  $\Delta f \cdot \Lambda$  en fonction de la profondeur  $p$ .

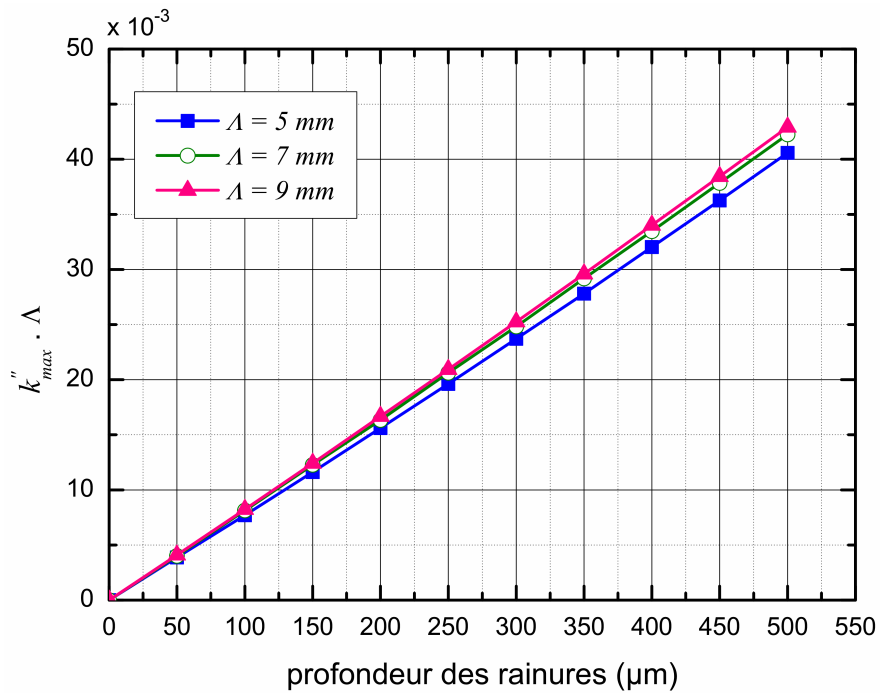


Figure 38 Variation du produit  $k''_{\max} \cdot \Lambda$  en fonction de la profondeur  $p$ .

Plus la profondeur des rainures augmente, et plus les courbes se différencient : ceci est lié à une augmentation de la largeur du gap. De ce fait, l'hypothèse des modes non dispersifs, sous-jacente à la théorie des modes couplés exposée, est de moins en moins valable.

De plus, une courbe analogue à celle présentée par *D. Royer* [17] est présentée ci-dessous (Figure 39). Elle provient des courbes de la Figure 33 superposées dans le plan  $(\delta, \beta - \pi/\Lambda)$ . La différence avec [17] se traduit par une déformation de l'évolution des valeurs de la partie imaginaire, circulaire dans le cas non dispersif et qui devient, dans le cas du couplage des pseudo-modes de Lamb, elliptique.

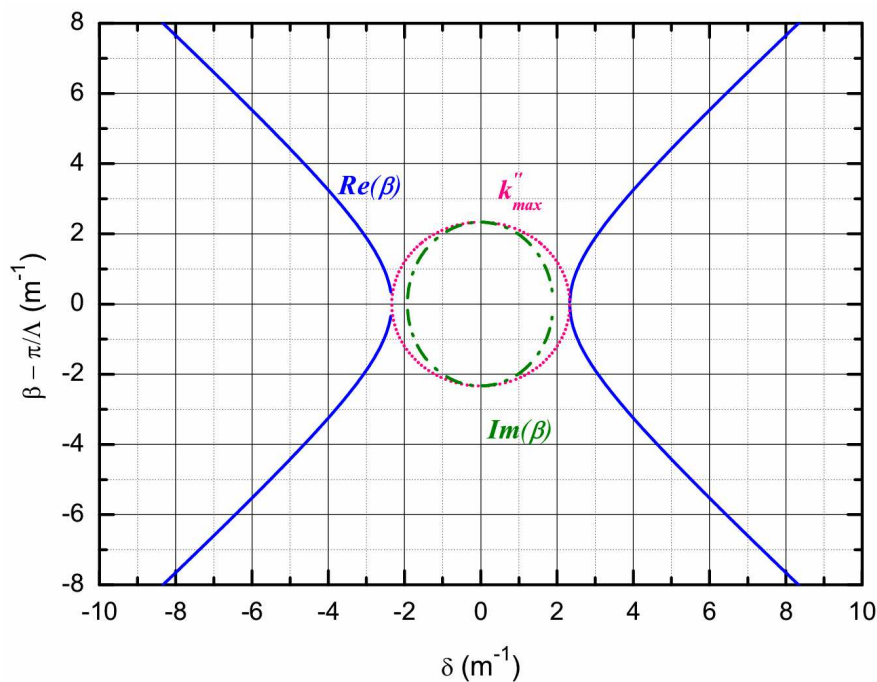


Figure 39 Détail des courbes de dispersion pour une plaque infinie à périodicités sinusoïdales dans le plan  $(\delta, \beta - \pi/\Lambda)$  : cas du gap bord de bande  $A_0^\Lambda/A_0^\Lambda$ .

### 2.5.5 Influence des pertes

Un autre avantage de la méthode exposée à la section 2.4.1 est de pouvoir autoriser le calcul des valeurs propres lorsque des pertes sont considérées dans le matériau, celles-ci apparaissant généralement sous forme de constantes de matériaux complexes [19]. En effet, sans considérer les pertes, le calcul des courbes de dispersion  $\omega(k)$ , décrit à la section 2.2.2.1, conduit à la recherche des valeurs propres d'une matrice hermitienne, valeurs propres qui sont donc réelles. Considérer des pertes conduit à la recherche de valeurs propres complexes, puisque la matrice est alors complexe. Grâce à la méthode décrite au paragraphe 2.4.1, il est donc possible de suivre l'évolution des courbes de dispersion  $k(\omega)$  en fonction des pertes introduites au niveau du module d'Young, dans le code ATILA<sup>®</sup>, sous la forme :

$$E = E' + jE'' \quad (2.5.22)$$

avec :

$$E'' = \alpha \cdot E' \quad (2.5.23)$$

Si pour les matériaux polymères et composites, les pertes considérées sont de l'ordre de 20 %, dans l'aluminium ou l'acier elles ne dépassent pas le pourcent. A titre d'exemple, l'évolution du gap bord de bande  $S_0^\wedge/A_0^\wedge$  en fonction des pertes est illustrée à la Figure 40 pour des valeurs de  $\alpha$  comprises entre 0 et 0,01. Pour chaque valeur de  $\alpha$  considérée à la Figure 40, les projections des courbes de dispersion sur les plans  $(k', f)$  et  $(k'', f)$  (respectivement en bleu et en rose) sont représentées.

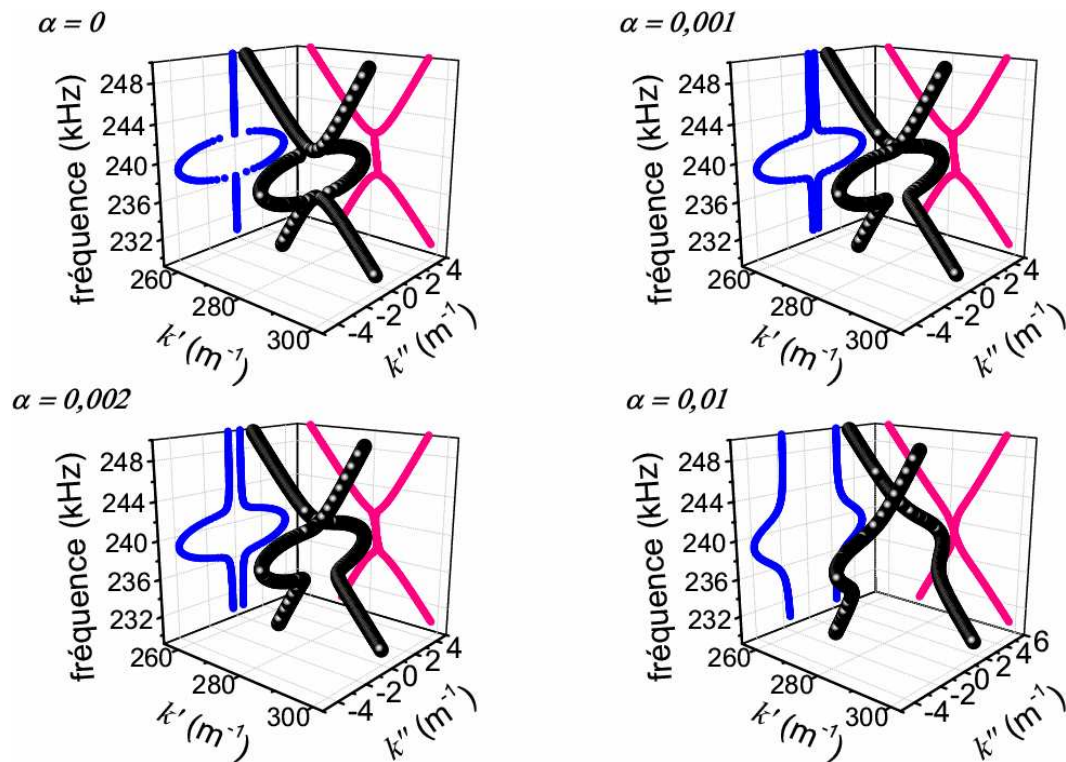


Figure 40 Evolution du gap intra-bande  $S_0^\wedge/A_0^\wedge$  en fonction des pertes,  $2h = 5 \text{ mm}$ ,  $\Lambda = 7 \text{ mm}$ ,  $p = 200 \mu\text{m}$ .

L'introduction de pertes a pour effet d'apporter une dissymétrie dans les courbes de dispersion : plus les pertes dans le matériau augmentent et plus les branches constituant le gap s'écartent.

La Figure 41 et le Figure 42 reprennent respectivement les projections des courbes de dispersion dans les plans  $(k', f)$  et  $(k'', f)$  de la Figure 40. Au niveau de la partie réelle du nombre d'onde, dès qu'il y a des pertes, des valeurs de  $k'$  différentes sont obtenues dans le gap. Les parties imaginaires des nombres d'onde, qui étaient égales en valeur absolue et de signes opposés en l'absence de pertes, prennent des valeurs non symétriques. Ceci est d'autant plus accentué que les pertes dans le matériau augmentent.

Chapitre 2 : De la plaque plane infinie à la plaque infinie à motif périodique

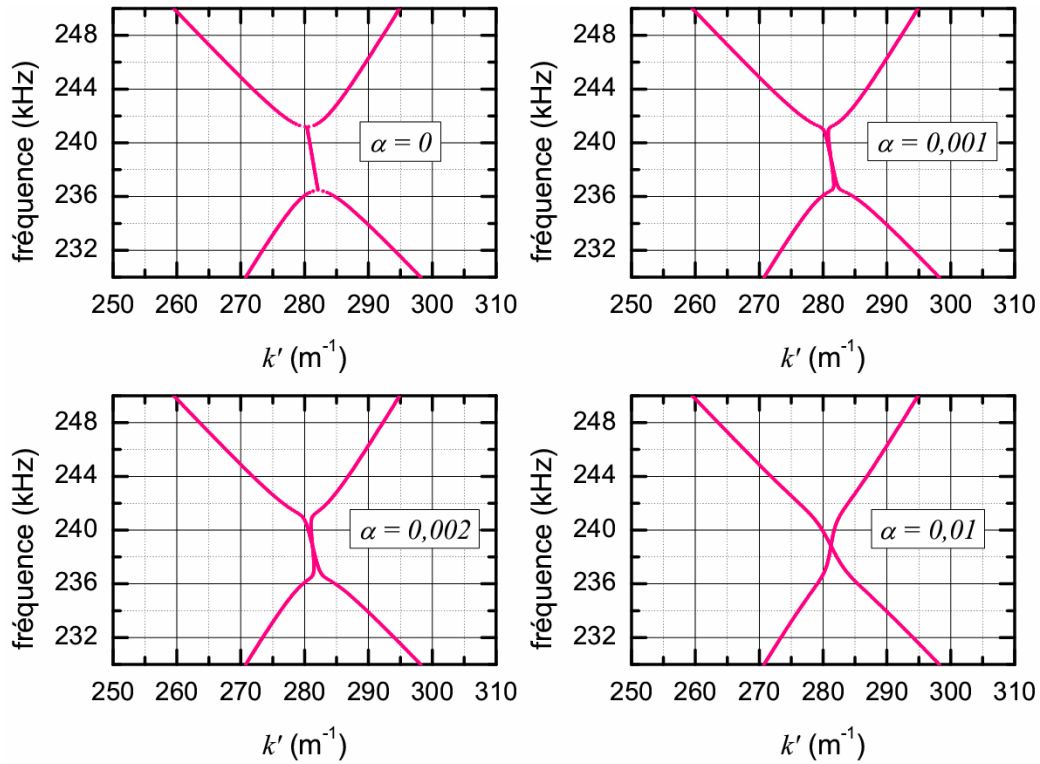


Figure 41 Projections des courbes de dispersion sur le plan  $(k', f)$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

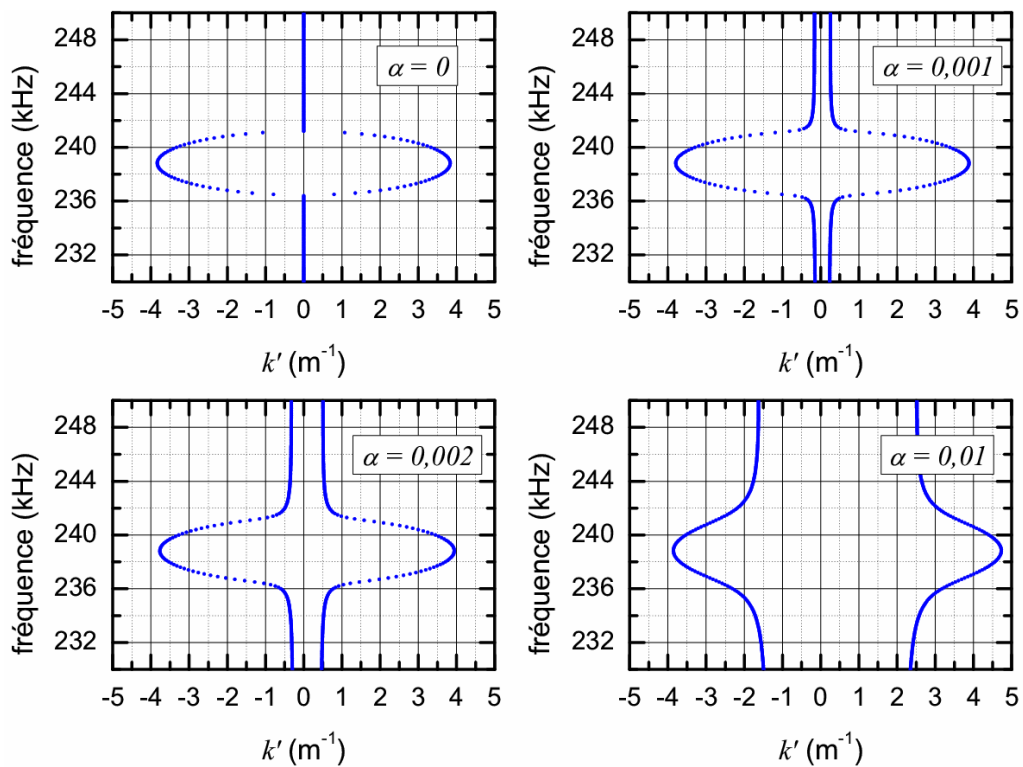


Figure 42 Projections des courbes de dispersion sur le plan  $(k'', f)$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

La Figure 43 représente, à la fréquence centrale du gap, l'évolution des valeurs réelles des nombres d'onde des modes  $S_0^\Lambda$  et  $A_0^\Lambda$  en fonction des pertes considérées ( $\alpha$ ). Même si la différence entre les valeurs des nombres d'onde est inférieure à 1 %, celle-ci entraîne néanmoins la levée de la dégénérescence des modes présents dans le gap.

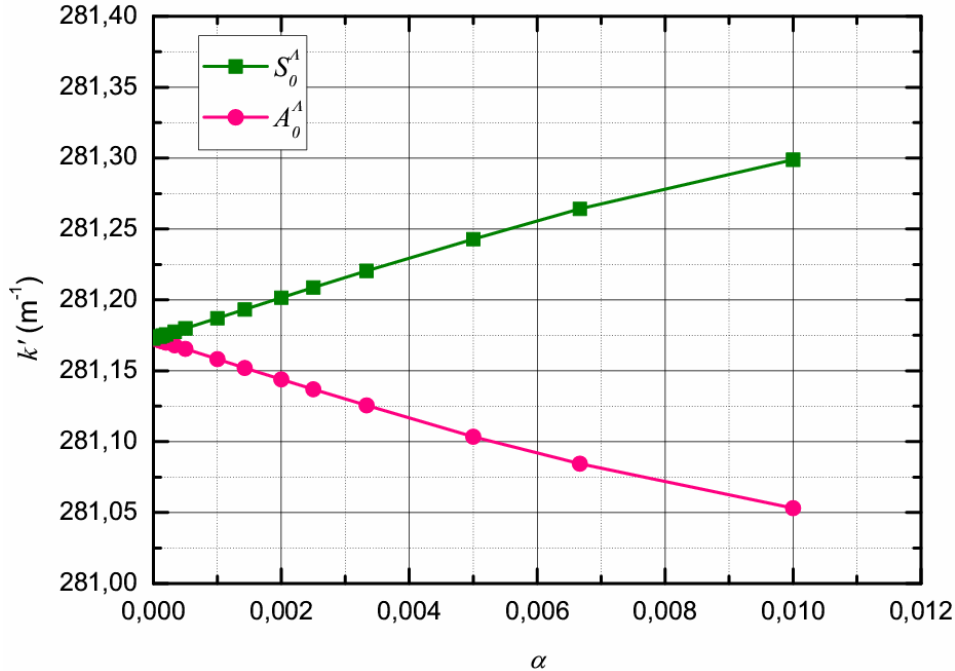


Figure 43 Variation des valeurs réelles du nombre d'onde à la fréquence centrale du gap  $S_0^\Lambda/A_0^\Lambda$  en fonction des pertes.

La Figure 44 représente, à la fréquence centrale du gap, l'évolution de la somme des valeurs imaginaires des nombres d'onde des modes  $S_0^\Lambda$  et  $A_0^\Lambda$  ( $\sum k'' = k''_{S_0^\Lambda} + k''_{A_0^\Lambda}$ ) en fonction des pertes considérées. Cette évolution est linéaire et croissante et confirme la levée de la dégénérescence des modes présents dans le gap.

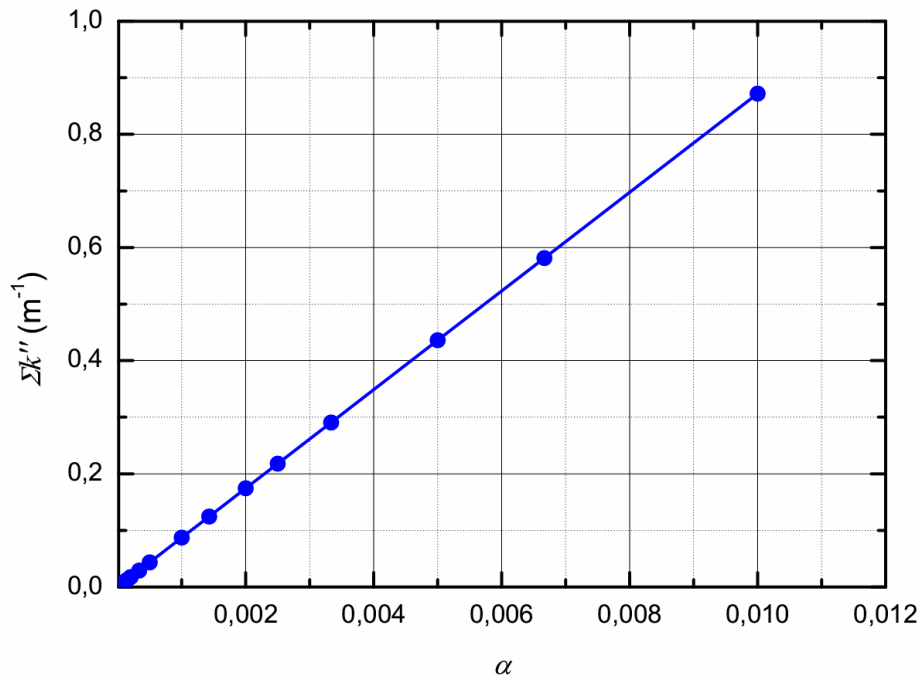


Figure 44 Variation de la somme des valeurs imaginaires des nombres d'onde des modes  $S_0^\Lambda$  et  $A_0^\Lambda$  à la fréquence centrale du gap  $S_0^\Lambda/A_0^\Lambda$  en fonction des pertes.

L'introduction de pertes influence beaucoup plus les parties imaginaires que les parties réelles des vecteurs d'onde.

Dans le gap, les modes présents comportent une composante longitudinale et une composante transversale. En rendant complexe le module d'Young pour introduire des pertes dans le matériau, une dissymétrie est créée au niveau des composantes longitudinales et transversales des ondes. Ceci entraînerait une action différente sur chacun des modes présents en fonction de leur prédominance transversale ou longitudinale. Cette hypothèse reste à vérifier.

## 2.6 Conclusion

L'étude d'une plaque d'aluminium infinie à périodicités sinusoïdales a été réalisée à l'aide de la méthode des éléments finis.

Une analyse modale d'un motif élémentaire de ce guide d'ondes a permis d'en obtenir les courbes de dispersion. Celles-ci, tracées pour des valeurs du nombre d'onde comprises dans la première zone de Brillouin, ont révélé la présence de deux types de gaps : les gaps intra-bande (à l'intérieur de la zone de Brillouin) et les gaps bord de bande (à la limite de la zone de Brillouin). Un gap à l'intérieur de la zone de Brillouin a notamment été mis en exergue. Au voisinage de celui-ci, un pseudo mode de Lamb symétrique  $S_0^\Lambda$  coexiste avec un pseudo-mode de Lamb antisymétrique  $A_0^\Lambda$  [20; 21].

Une analyse harmonique du même motif a permis de tracer les courbes de dispersion dans l'espace  $(k', k'', f)$  et ainsi de faire apparaître les valeurs de la partie



imaginaire du nombre d'onde. Celles-ci sont non nulles dans les gaps. De plus, la valeur maximale de la partie imaginaire du nombre d'onde est atteinte à la fréquence centrale du gap. La partie imaginaire du nombre d'onde pouvant être reliée à l'atténuation d'une onde propagative, cette atténuation est maximale à la fréquence centrale du gap [22]. L'introduction de pertes dans le matériau entraîne la levée de la dégénérescence des modes présents dans le gap. Par ailleurs, dans le cas du gap bord de bande  $A_0^\wedge/A_0^\wedge$ , un lien avec la théorie des modes couplés a été établi. Il a permis de justifier certains résultats numériques.

## 2.7 Bibliographie

- [1] J.C. Samuels, "On Propagation of Waves in Slightly Rough Ducts," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 31, p. 319-325, 1959.
- [2] R.F. Salant, "Acoustic propagation in waveguides with sinusoidal walls," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 53, p. 504-507, 1973.
- [3] A.H. Nayfeh, "Sound waves in two-dimensional ducts with sinusoidal walls," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 56, p. 768-770, 1974.
- [4] S. Banerjee, and T. Kundu, "Symmetric and anti-symmetric Rayleigh-Lamb modes in sinusoidally corrugated waveguides: An analytical approach," *Int. J. Solid. Struct.*, vol. 43, p. 6551-6567, 2006.
- [5] S. Banerjee, and T. Kundu, "Elastic wave propagation in sinusoidally corrugated waveguides," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 119, p. 2006-2017, 2006.
- [6] L. Brillouin. *Wave propagation in periodic structures*. Mineola, NY: Dover Publications, 1953.
- [7] P. Langlet, *Analyse de la propagation des ondes acoustiques dans les matériaux périodiques à l'aide de la méthode des éléments finis*. Thèse de l'Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 1993.
- [8] J.M. Lourtioz. *Photonic crystals : towards nanoscale photonic devices*. Springer, 2005.
- [9] D.J. Mead, "A general theory of harmonic wave propagation in linear periodic systems with multiple coupling," *J. Sound Vib.*, vol. 27, p. 235-260, 1973.
- [10] D.J. Mead, "Wave propagation and natural modes in periodic systems: I. Mono-coupled systems," *J. Sound Vib.*, vol. 40, p. 1-18, 1975.
- [11] D.J. Mead, "Wave propagation and natural modes in periodic systems: II. Multi-coupled systems, with and without damping," *J. Sound Vib.*, vol. 40, p. 19-39, 1975.
- [12] M.S. Bennett, and M.L. Accorsi, "Free wave propagation in periodically ring stiffened cylindrical shells," *J. Sound Vib.*, vol. 171, p. 49-66, 1994.
- [13] M.L. Accorsi, and M.S. Bennett, "A finite element based method for the analysis of free wave propagation in stiffened cylinders," *J. Sound Vib.*, vol. 148, p. 279-292, 1991.
- [14] M.S. Bennett, *Free wave propagation in orthogonally stiffened cylinders*. PhD, University of Connecticut, 1989.
- [15] D. Duhamel, B.R. Mace, and M.J. Brennan, "Finite element analysis of the vibrations of waveguides and periodic structures," *J. Sound Vib.*, vol. 294, p. 205-220, 2006.
- [16] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. Wiley, 1998.
- [17] D. Royer, and E. Dieulesaint. *Elastic Waves in Solids*. Springer, 2000.

- [18] O.R. Asfar, and M.H. Bataineh, "Band structure of a parallel-plate waveguide filter having phase-shifted square-wave corrugations," *Waves in Random and Complex Media*, vol. 18, p. 361-370, 2008.
- [19] R. Holland, "Representation of dielectric, elastic, and piezoelectric losses by complex coefficients," *IEEE Trans. Sonics Ultrason.*, vol. 14, p. 18-20, 1967.
- [20] M. Bavencoffe, B. Morvan, A.C. Hladky-Hennion, O. Bou-Matar, and J.L. Izbicki, "Development of a suitable PML for an harmonic study of a 1D phononic crystal," *Proc. Acoustics'08*, vol. 94, p. 70, 2008.
- [21] M. Bavencoffe, A.C. Hladky-Hennion, B. Morvan, and J.L. Izbicki, "Attenuation of Lamb waves in the vicinity of a forbidden band in a phononic crystal," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, vol. 56, p. 1960-1967, 2009.
- [22] M. Bavencoffe, B. Morvan, A.C. Hladky-Hennion, and J.L. Izbicki. "Characterization of evanescent ultrasonic waves in a band gap of a 1D phononic crystal," *Proc. IEEE Ultrasonics Symp.*, 2009.







## Chapitre 3 Couplage de deux modes de Lamb sur un réseau de longueur finie

*L'étude d'une plaque infinie à motif périodique a été effectuée au chapitre précédent. Il a été mis en évidence que les courbes de dispersion des modes se propageant dans une telle structure présentent des bandes d'arrêt et des bandes passantes. De plus, même si aucun mode propagatif n'existe dans une bande d'arrêt, des valeurs complexes du nombre d'onde ont pu être calculées. Or, lorsque le nombre d'onde est complexe, la partie imaginaire de celui-ci est responsable de l'atténuation de l'onde propagative.*

*L'objectif de ce chapitre est d'établir un lien entre les caractéristiques d'une bande d'arrêt observée dans le cas d'une plaque infinie à motif périodique et l'atténuation des ondes se propageant dans une plaque comportant un nombre limité de motifs périodiques. Cette atténuation a déjà été observée expérimentalement dans le cas d'interfaces rugueuses comportant plusieurs périodicités [1]. Aussi, l'atténuation des ondes se propageant dans la structure finie est étudiée numériquement à l'aide de la méthode des éléments finis. L'influence des paramètres géométriques du réseau est ensuite développée et le lien entre bande d'arrêt et atténuation est mis en évidence. Enfin, un lien entre l'atténuation des ondes propagatives et l'existence de modes évanescents est établi.*

### 3.1 Une plaque finie à motif périodique

Afin d'étudier l'atténuation des ondes de Lamb fréquence par fréquence au voisinage d'un gap, une plaque comportant un réseau limité de périodicités sinusoïdales est considérée.

#### 3.1.1 La structure étudiée

La structure finie étudiée est représentée à la Figure 45 et se décompose en trois parties.

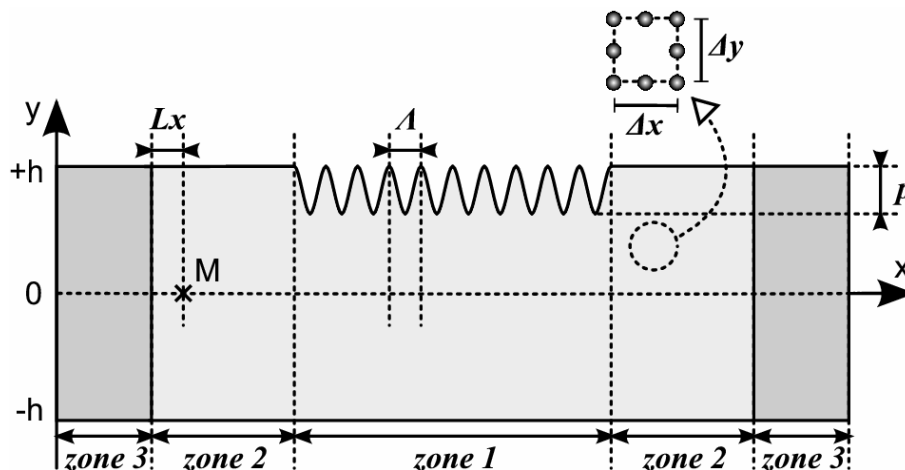


Figure 45 Schéma de la plaque finie à motif périodique avec détail du maillage éléments finis.

La première zone, située au centre (zone 1 - Figure 45), contient le réseau de stries limité à  $N$  périodes. Le motif périodique est sinusoïdal de profondeur  $p = 200 \mu m$  et de largeur  $\Lambda = 7 mm$ .

Deux sections de plaque vierge de  $65 mm$  de long et de  $5 mm$  d'épaisseur (zone 2 - Figure 45) encadrent ce réseau. Le matériau utilisé pour la structure est l'aluminium dont les propriétés ont été exposées au chapitre 1. Par ailleurs, le choix a été fait d'étudier des rugosités creusées dans la plaque et non pas en surépaisseur par rapport aux zones lisses afin de simplifier l'usinage d'échantillons pour l'étude expérimentale exposée dans le prochain chapitre.

L'étude harmonique de la propagation d'ondes guidées dans cette structure limitée pose un problème. En effet, la réflexion des ondes propagatives en bouts de plaque va donner naissance à des phénomènes de stationnarité. Du fait que l'intérêt de ce chapitre porte sur les amplitudes des ondes transmises et réfléchies sur le réseau, il est donc impératif d'éviter toute réflexion sur les extrémités de la structure. Aussi, afin de se prémunir de l'établissement d'ondes stationnaires dans la plaque, il est nécessaire d'atténuer au maximum les ondes aux extrémités de la plaque pour limiter leur retour après réflexion sur le bord. Ainsi, la plaque est encadrée par des atténuateurs représentés par la zone 3 sur la Figure 45. Deux approches différentes ont été envisagées pour la réalisation de ces milieux absorbants particuliers.

### 3.1.2 Des matériaux viscoélastiques

Deux types d'artifices numériques ont été étudiés : les atténuateurs décrits par *E. Moulin* [2; 3] et les PML (« *Perfectly Matched Layers* ») formalisés par *O. Bou-Matar* [4].

#### 3.1.2.1 Les atténuateurs

##### Formalisme

Le cas d'une plaque plane de longueur finie est ici envisagé. Afin d'atténuer au maximum les ondes incidentes à son extrémité, une partie de la plaque modélisée est constituée d'un matériau viscoélastique.

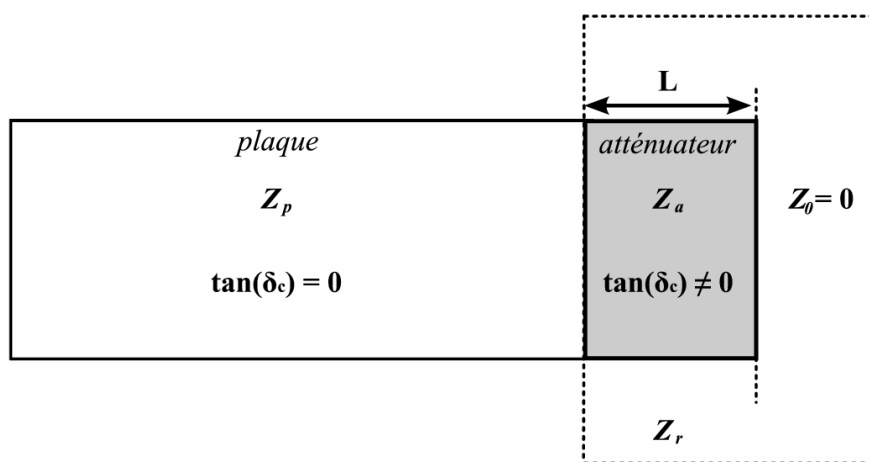


Figure 46 Atténuateur en extrémité de plaque.

Pour simplifier le problème, la présence de pertes dans les éléments situés en bout de plaque, nommés atténuateurs, se traduit par l'introduction d'une partie imaginaire non nulle aux constantes élastiques  $c_{nm}$  du matériau de telle sorte que :

$$c_{nm} = c'_{nm} + jc''_{nm} \quad (3.1.1)$$

De plus, l'hypothèse est faite de l'existence d'un scalaire  $m$  tel que :

$$c''_{nm} = m \cdot c'_{nm} \quad (3.1.2)$$

Dans le cas particulier d'un matériau isotrope, la présence de pertes est caractérisée par un scalaire  $\delta$  non nul appelé angle de perte et défini par la relation suivante :

$$\tan(\delta) = \frac{E''}{E'} \quad (3.1.3)$$

avec  $E = E' + jE''$  le module d'Young complexe du matériau.

Par analogie avec le cas isotrope, un angle de perte  $\delta_c$  est défini pour les constantes élastiques  $c_{nm}$  tel que :

$$\tan(\delta_c) = m \quad (3.1.4)$$

Il s'ensuit alors que :

$$c_{nm} = (1 + j \tan(\delta_c)) c'_{nm} \quad (3.1.5)$$

Les propriétés de cet atténuateur vont donc dépendre de deux paramètres : sa longueur  $L$  et son angle de perte  $\delta_c$  (Figure 46). Aussi, l'atténuation des ondes sera d'autant plus efficace que les pertes dans le matériau et la distance de propagation seront importantes.



De prime abord, il semble judicieux de choisir un atténuateur avec les paramètres  $L$  et  $\tan(\delta_c)$  les plus élevés. Toutefois, ce raisonnement est insuffisant car ce serait négliger la réflexion des ondes incidentes sur l'interface entre la plaque et l'atténuateur. La Figure 46 présente les différentes impédances relatives à la structure :  $Z_p$ ,  $Z_a$  et  $Z_r$ . L'impédance acoustique de la plaque,  $Z_p$  s'exprime de la manière suivante :

$$Z_p = \rho_p \cdot v_p \quad \text{avec} \quad v_p = \sqrt{\frac{c_{11}^p}{\rho_p}} \quad (3.1.6)$$

avec  $\rho_p$  la masse volumique du matériau de la plaque et  $v_p$  la vitesse des ondes longitudinales dans le matériau de la plaque.

L'impédance acoustique  $Z_a$  est relative au matériau constituant l'atténuateur. Elle dépend des propriétés choisies pour le matériau constituant l'atténuateur. Aussi, afin de simplifier le problème, les caractéristiques suivantes sont utilisées :

$$\begin{cases} \rho_a = \rho_p \\ c_{11}^a = c_{11}^p \cdot (1 + j \tan(\delta_c)) \end{cases} \quad (3.1.7)$$

avec  $(\rho_p, c_{11}^p)$  sont les caractéristiques du matériau constituant la plaque et  $(\rho_a, c_{11}^a)$  celles du matériau constituant l'atténuateur.

De cette façon, le matériau de l'atténuateur est le même que celui de la plaque avec simplement l'adjonction de pertes. En appliquant la relation (3.1.6), il en découle que :

$$v_a = v_p \cdot \sqrt{1 + \tan(\delta_c)} \quad (3.1.8)$$

et que :

$$Z_a = Z_p \cdot \sqrt{1 + j \tan(\delta_c)} \quad (3.1.9)$$

avec :

$$k_a = \omega \cdot \sqrt{\frac{\rho_p}{c_{11}^p \cdot (1 + j \tan(\delta_c))}} \quad (3.1.10)$$

où  $k_a$  est la norme du vecteur d'onde de l'onde considérée et  $Z_0$  est l'impédance acoustique de l'air.

Enfin,  $Z_r$  désigne l'impédance équivalente vue au niveau de l'interface plaque/atténuateur :

$$Z_r = Z_a \frac{Z_0 \cos(k_a L) + j Z_a \sin(k_a L)}{Z_a \cos(k_a L) + j Z_0 \sin(k_a L)} \quad (3.1.11)$$

Comme l'impédance acoustique de l'air est très faible par rapport aux autres impédances acoustiques considérées, celle-ci est supposée nulle. La relation (3.1.11) devient alors :

$$Z_r = j Z_a \tan(k_a L) \quad (3.1.12)$$

Il existe donc une rupture d'impédance à l'interface plaque/atténuateur.

Pour concevoir l'atténuateur, il est dès lors nécessaire de trouver un compromis entre atténuation des ondes et rupture d'impédance. Pour cela, le coefficient de réflexion  $R$  à l'interface plaque/atténuateur pour les ondes planes longitudinales en incidence normale est choisi comme critère d'optimisation. En utilisant les impédances acoustiques  $Z_p$  et  $Z_r$ , ce coefficient de réflexion s'écrit :

$$R = \frac{Z_r - Z_p}{Z_r + Z_p} \quad (3.1.13)$$

A partir des relations (3.1.9), (3.1.12) et (3.1.13), il est possible de déterminer l'expression du coefficient de réflexion  $R$  en fonction des paramètres de l'atténuateur  $L$  et  $\tan(\delta_c)$  :

$$R = \frac{j \tan(k_a L) \sqrt{1 + j \tan(\delta_c)} - 1}{j \tan(k_a L) \sqrt{1 + j \tan(\delta_c)} + 1} \quad (3.1.14)$$

Déterminer l'atténuateur optimum revient alors à trouver les valeurs de  $L$  et de  $\tan(\delta_c)$  qui minimisent la valeur de  $R$ .

Pour la conception de ce type d'atténuateur, seul le coefficient de réflexion des ondes longitudinales en incidence normale a été minimisé. Le problème de la détermination du coefficient de réflexion des ondes de Lamb est en effet beaucoup plus complexe. La résolution du problème n'est donc que partielle.

#### Validation

Afin de valider les performances de l'atténuateur décrit précédemment, le cas d'une plaque plane finie d'épaisseur  $2h = 5 \text{ mm}$  excitée selon son épaisseur (Figure 47) par une onde de Lamb est considéré. Cette plaque est encadrée par deux atténuateurs dont les paramètres vont être déterminés afin de minimiser la réflexion des ondes.

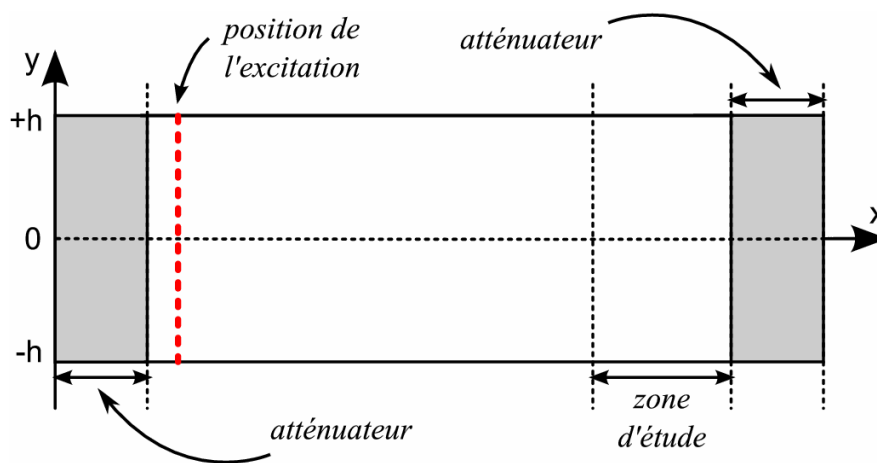


Figure 47 Schéma de la plaque plane finie encadrée par deux atténuateurs.

Pour cette étude deux types d'onde de Lamb sont étudiés : le mode symétrique  $S_0$  à la fréquence  $f = 160 \text{ kHz}$  et le mode antisymétrique  $A_1$  à  $f = 400 \text{ kHz}$ . Dans chaque cas, les paramètres de l'atténuateur optimum sont d'abord déterminés. La Figure 48 et la Figure 49 représentent l'évolution du coefficient de réflexion en fonction de la longueur  $L$  de l'atténuateur et de la tangente de l'angle de perte  $\tan(\delta_c)$ . Celles-ci montrent plusieurs minima pour les valeurs du coefficient de réflexion  $R$ . Plusieurs couples de paramètres sont donc possibles pour l'atténuateur optimum. Toutefois, le couple de paramètres retenu est celui permettant à la fois de limiter la taille du maillage éléments

finis au maximum et d'avoir l'angle de perte le plus important. D'après la Figure 48, les paramètres de l'atténuateur optimum sont :

$$\begin{cases} L = 19,3 \text{ mm} \\ \tan(\delta_c) = 0,7761 \end{cases} \quad (3.1.15)$$

dans le cas de l'excitation par une onde  $S_0$  à la fréquence  $f = 160 \text{ kHz}$ . La Figure 49 montre que ces paramètres valent :

$$\begin{cases} L = 7,7 \text{ mm} \\ \tan(\delta_c) = 0,7761 \end{cases} \quad (3.1.16)$$

dans le cas de l'excitation par une onde  $A_1$  à la fréquence  $f = 400 \text{ kHz}$ .

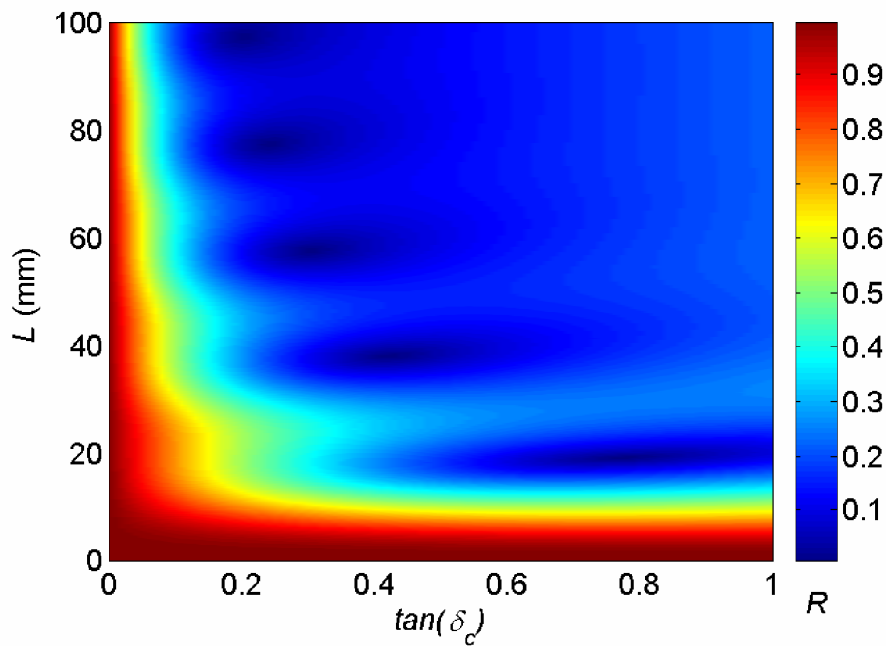


Figure 48 Evolution du coefficient de réflexion en fonction des caractéristiques de l'atténuateur, cas de l'excitation par un mode  $S_0$ .

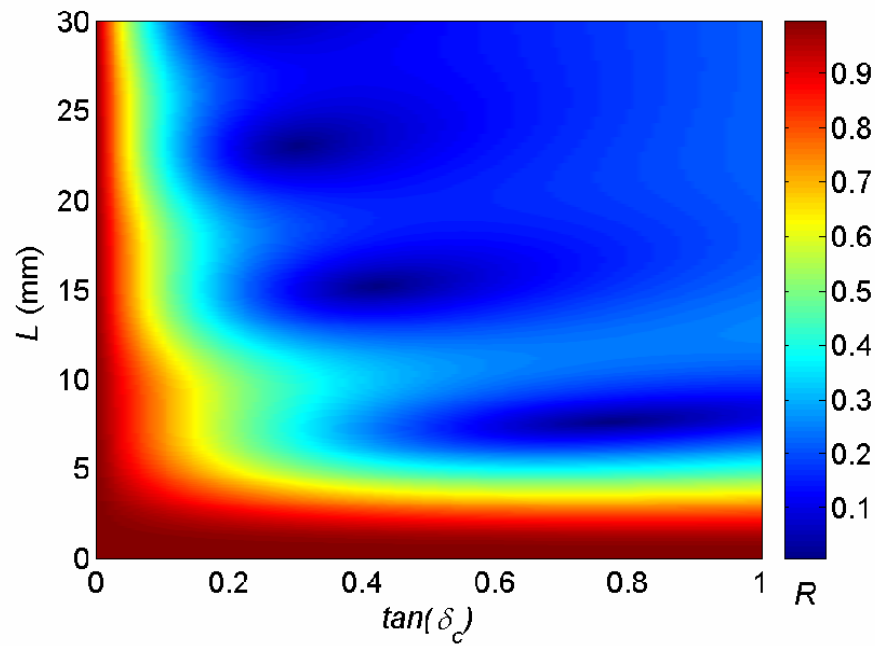


Figure 49 Evolution du coefficient de réflexion en fonction des caractéristiques de l'atténuateur, cas de l'excitation par un mode  $A_1$ .

La Figure 50 présente l'évolution en fonction de la fréquence des paramètres de l'atténuateur optimum dans le cas de l'excitation par un mode  $S_0$ . Dans la gamme de fréquences considérée ( $f = [120 \text{ kHz}; 300 \text{ kHz}]$ ), la valeur de la longueur de l'atténuateur diminue en fonction de la fréquence alors que la valeur de  $\tan(\delta_c)$  reste constante. Le même constat est effectué avec la Figure 51 dans le cas de l'excitation par un mode  $A_1$  avec  $f = [320 \text{ kHz}; 400 \text{ kHz}]$ .

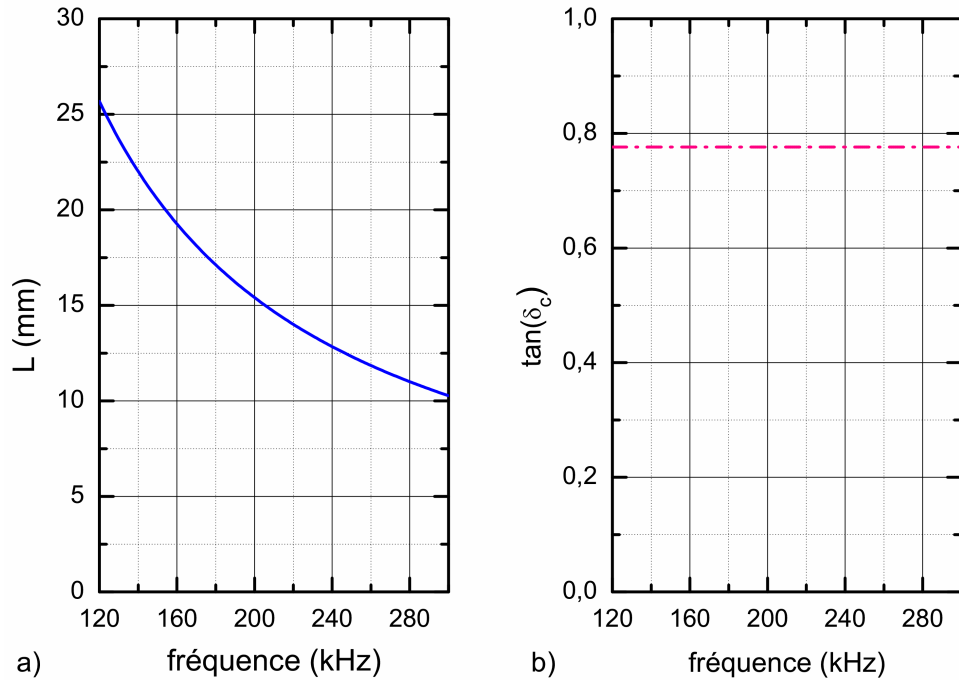


Figure 50 Evolution des paramètres de l'atténuateur optimum en fonction de la fréquence, cas de l'excitation par un mode  $S_0$ .

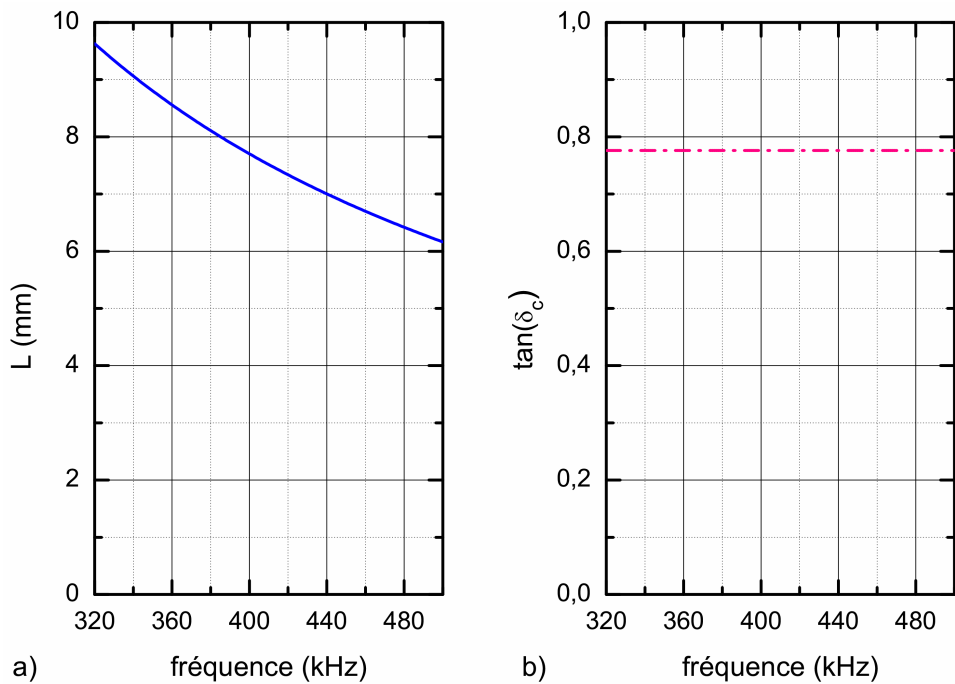


Figure 51 Evolution des paramètres de l'atténuateur optimum en fonction de la fréquence, cas de l'excitation par un mode  $A_1$ .

L'analyse harmonique de la structure pour des fréquences allant de  $120\text{kHz}$  à  $300\text{kHz}$  par pas de  $1\text{kHz}$  permet d'obtenir le champ de déplacement normal sous la plaque (zone d'étude - Figure 47). A partir de ces résultats, les flux des vecteurs de Poynting des modes traversant la plaque vierge sont calculés. La Figure 52 représente l'évolution du coefficient de réflexion en énergie du mode  $S_0$  en fonction de la fréquence lorsque la plaque est excitée par une onde de type  $S_0$ . Dans le cas de la Figure 52.a, les paramètres de l'atténuateur optimum sont déterminés à chaque fréquence, contrairement au cas de la Figure 52.b où les paramètres de l'atténuateur sont définis à la fréquence  $f = 160\text{kHz}$ .

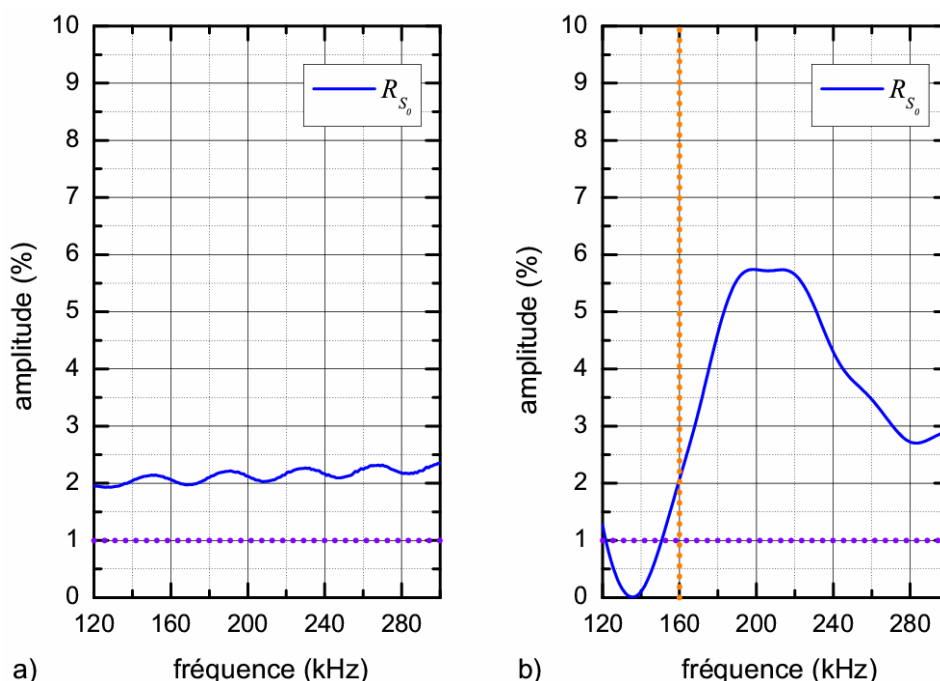


Figure 52 Evolution du coefficient de réflexion en énergie de l'onde  $S_0$  en fonction de la fréquence lorsque la plaque est excitée par une onde  $S_0$  (a) les paramètres de l'atténuateur optimum sont déterminés à chaque fréquence (b) les paramètres de l'atténuateur optimum sont déterminés pour  $f = 160\text{kHz}$ .

Dans la gamme de fréquences considérée, seuls les deux modes  $S_0$  et  $A_0$  peuvent exister. En l'occurrence, tant à la Figure 52.a qu'à la Figure 52.b, seules se propagent une onde incidente  $S_0$  et une onde réfléchi  $S_0$ . Toutefois, dans les deux cas, la valeur de  $R_{S_0}$  est globalement supérieure à l'erreur numérique (*i.e.*  $R_{S_0} > 1\%$ ).

A l'instar de la Figure 52, la Figure 53 représente l'évolution des coefficient de réflexion et de transmission en énergie des modes propagatifs en fonction de la fréquence lorsque la plaque est excitée par une onde de type  $A_1$ . Dans le cas de la Figure 53.a, les paramètres de l'atténuateur optimum sont déterminés à chaque fréquence, contrairement au cas de la Figure 53.b où les paramètres de l'atténuateur sont définis à la fréquence  $f = 400\text{kHz}$ .

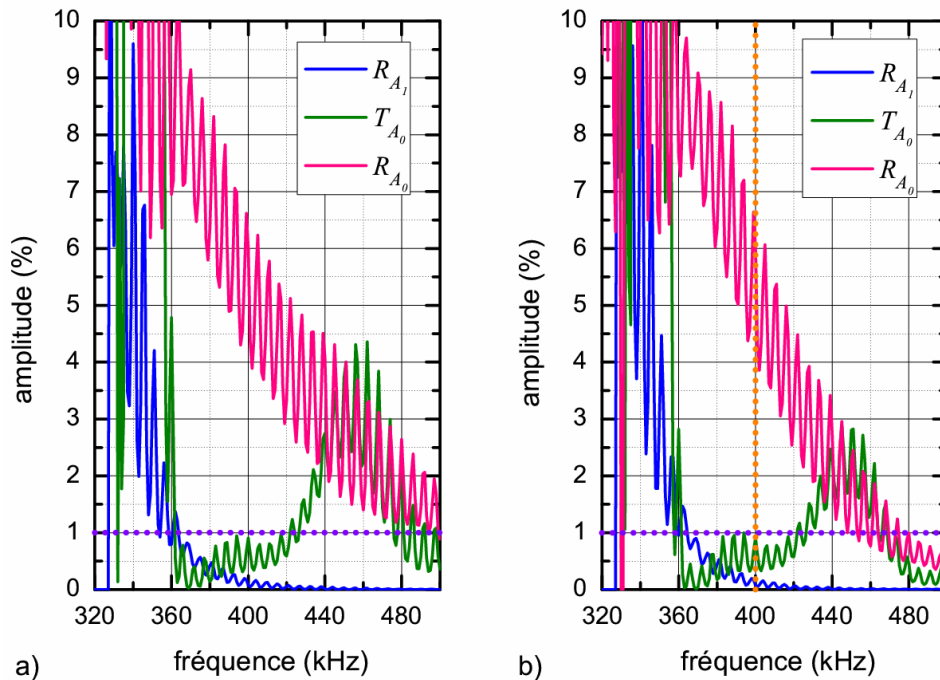


Figure 53 Evolution des coefficients en énergie des modes propagatifs en fonction de la fréquence lorsque la plaque est excitée par une onde  $A_1$  (a) les paramètres de l'atténuateur optimum sont déterminés à chaque fréquence (b) les paramètres de l'atténuateur optimum sont déterminés pour  $f = 400 \text{ kHz}$ .

Dans la gamme de fréquences considérée seuls les modes  $S_0$ ,  $A_0$  et  $A_1$  peuvent exister. En l'occurrence, tant à la Figure 53.a qu'à la Figure 53.b, une onde incidente  $A_1$ , une onde incidente  $A_0$ , une onde réfléchie  $A_1$  et une onde réfléchie  $A_0$  se propagent. Toutefois, dans les deux cas, les valeurs des coefficients  $T_{A_0}$  et  $R_{A_0}$  sont globalement supérieures à l'erreur numérique (*i.e.*  $T_{A_0} > 1\%$  et  $R_{A_0} > 1\%$ ).

Enfin, même si les paramètres de l'atténuateur optimum sont définis à une fréquence donnée, ils sont utilisables numériquement pour d'autres fréquences proches.

### 3.1.2.2 Les « Perfectly Matched Layers »

La méthode des PML (« *Perfectly Matched Layers* ») a été initialement introduite par *J. Bérenger* [5] pour la résolution de problèmes transitoires en électromagnétisme. Elle consiste à accoler au domaine d'intérêt des couches absorbantes dans lesquelles les ondes sont atténuées. Pour construire des couches absorbantes, il est possible d'introduire dans celles-ci un modèle physique contenant un terme d'amortissement. Le principal inconvénient de cette méthode est que les ondes « voient » le changement d'impédance entre le milieu physique et la couche, ce qui induit une réflexion parasite. La nouveauté des couches PML est qu'elles sont parfaitement adaptées, de sorte qu'aucune réflexion n'est produite à l'entrée dans les couches. Ce modèle est toutefois complètement artificiel dans le sens où de telles couches ne peuvent être réalisées à partir de modèles physiques d'absorption.

Le formalisme élaboré par *O. Bou-Matar* [4] à partir, notamment, des références [5-8] est présenté dans le cadre d'un problème harmonique de la propagation d'une onde acoustique à travers un guide d'ondes solide.

Formalisme

Le cas d'une plaque plane de longueur finie est ici envisagé. Afin d'atténuer au maximum les ondes incidentes à son extrémité, une partie de la plaque modélisée est constituée de PML.

Pour déterminer les paramètres du PML, la propagation d'une onde acoustique à travers un guide d'ondes solide est considérée.

Soit  $\underline{u} = (u_x, u_y)$  le champ de déplacement. En faisant l'hypothèse du régime harmonique

(i.e.  $\frac{\partial}{\partial t} \equiv j\omega$ ), le système d'équations suivant peut être considéré :

$$\begin{cases} \rho\omega^2 u_x + \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( c_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( c_{66} \frac{\partial u_y}{\partial x} + c_{66} \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right) = 0 \\ \rho\omega^2 u_y + \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( c_{66} \frac{\partial u_y}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( c_{12} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right) = 0 \end{cases} \quad (3.1.17)$$

Le changement de variables suivant est ensuite effectué :

$$\begin{cases} x \rightarrow \bar{x} = \int_0^x S_x(x') dx' \\ y \rightarrow \bar{y} = \int_0^y S_y(y') dy' \end{cases} \quad (3.1.18)$$

Ceci implique :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{1}{S_x(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow \frac{1}{S_y(y)} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \end{cases} \quad (3.1.19)$$

Le système (3.1.17) peut alors être réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} \rho\omega^2 u_x + \left( \frac{1}{S_x(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{c_{11}}{S_x(x)} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{c_{12}}{S_y(y)} \cdot \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{1}{S_y(y)} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{c_{66}}{S_x(x)} \cdot \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{c_{66}}{S_y(y)} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right) = 0 \\ \rho\omega^2 u_y + \left( \frac{1}{S_x(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{c_{66}}{S_x(x)} \cdot \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{c_{66}}{S_y(y)} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + \frac{1}{S_y(y)} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{c_{12}}{S_x(x)} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{c_{22}}{S_y(y)} \cdot \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right) = 0 \end{cases} \quad (3.1.20)$$

Les coefficients  $c_{ij}$  sont considérés constants par tranche. Il est alors possible d'écrire :



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{c_{ij}}{S_{x,y}} \cdot \frac{\partial u_{x,y}}{\partial x} \right) = \frac{c_{ij}}{S_{x,y}} \cdot \frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{c_{ij}}{S_{x,y}} \cdot \frac{\partial u_{x,y}}{\partial y} \right) = \frac{c_{ij}}{S_{x,y}} \cdot \frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial y^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{c_{ij}}{S_{x,y}} \cdot \frac{\partial u_{x,y}}{\partial y} \right) = \frac{c_{ij}}{S_{x,y}} \cdot \frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{c_{ij}}{S_{x,y}} \cdot \frac{\partial u_{x,y}}{\partial x} \right) = \frac{c_{ij}}{S_{x,y}} \cdot \frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial y \partial x} \end{array} \right. \quad (3.1.21)$$

Le système (3.1.20) peut alors être réécrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \omega^2 u_x + \left[ \left( \frac{c_{11}}{S_x^2(x)} \cdot \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{c_{12}}{S_x(x) \cdot S_y(y)} \cdot \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} \right) + \left( \frac{c_{66}}{S_x(x) \cdot S_y(y)} \cdot \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{c_{66}}{S_y^2(y)} \cdot \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \right] = 0 \\ \rho \omega^2 u_y + \left[ \left( \frac{c_{66}}{S_x^2(x)} \cdot \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{c_{66}}{S_x(x) \cdot S_y(y)} \cdot \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} \right) + \left( \frac{c_{12}}{S_x(x) \cdot S_y(y)} \cdot \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{c_{22}}{S_y^2(y)} \cdot \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) \right] = 0 \end{array} \right. \quad (3.1.22)$$

Le système (3.1.22) est équivalent au système (3.1.17) si le changement de variables suivant est effectué :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{11} \rightarrow \frac{c_{11}}{S_x^2(x)} \\ c_{12} \rightarrow \frac{c_{12}}{S_x(x) \cdot S_y(y)} \\ c_{22} \rightarrow \frac{c_{22}}{S_y^2(y)} \\ c_{66} \rightarrow \frac{c_{66}}{S_x^2(x)} \\ c_{66} \rightarrow \frac{c_{66}}{S_y^2(y)} \\ c_{66} \rightarrow \frac{c_{66}}{S_x(x) \cdot S_y(y)} \end{array} \right. \quad (3.1.23)$$

Ceci implique qu'il faut alors nécessairement avoir :

$$S_x(x) = S_y(y) \quad (3.1.24)$$

L'expression de la fonction  $S_x(x)$  est empruntée aux *C-PML* (Convolution Perfectly Matched Layers) :

$$S_x(x) = K_x(x) + \frac{\sigma_x(x)}{\alpha_x(x) + j\omega} \quad (3.1.25)$$

avec  $\omega$  la pulsation de vibration à laquelle les PML sont réalisés.

Dans cette équation,  $K_x(x)$  rend compte de l'atténuation des ondes évanescentes,  $\alpha_x(x)$  exprime la causalité et  $\sigma_x(x)$  l'absorption. Ces paramètres ont pour expression respective :

$$\sigma_x(x) = 1 + \sigma_{x_{max}} \left( \frac{x - x_0}{L} \right)^{n_1 + n_2} \quad \text{avec} \quad \sigma_{x_{max}} = (1 + n_1 + n_2) \frac{C_{max} \cdot 0,8}{\Delta x} \quad (3.1.26)$$

$$\alpha_x(x) = \alpha_{x_{max}} \left( \frac{L - x}{L} \right)^{n_3} \quad \text{avec} \quad \alpha_{x_{max}} = 2\pi f_c \quad (3.1.27)$$

$$K_x(x) = 1 + K_{x_{max}} \left( \frac{x - x_0}{L} \right)^{n_1} \quad \text{avec} \quad K_{x_{max}} = \frac{\omega_{max}}{c_0} \quad (3.1.28)$$

avec  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = n_3 = 1$  et  $C_{max} = 100$ .

La longueur  $L$  des PML est divisée en intervalles réguliers  $\Delta x$  avec  $x_0$  pour origine. Le paramètre  $f_c$  est équivalent à la fréquence de coupure d'un filtre passe haut et a pour but d'éliminer les longueurs d'ondes trop grandes pour les PML.  $c_0$  est la vitesse des ondes longitudinales et  $\omega_{max}$  est relié à la valeur maximale des fréquences considérées ( $\omega_{max} = 2\pi f_{max}$ ). Par la suite, la propagation des ondes évanescentes dans les PML sera négligée (*i.e.*  $K_{x_{max}} = 0$ ).

Une fois la fonction  $S_x(x)$  déterminée, les coefficients élastiques des PML  $c_{ij}^{PML}$  sont calculés :

$$c_{ij}^{PML} = \frac{c_{ij}}{S_x^2(x)} \quad (3.1.29)$$

### Validation

Afin de valider les performances des PML décrits précédemment, le cas d'une plaque plane finie d'épaisseur  $2h = 5 \text{ mm}$  excitée selon son épaisseur (Figure 54) par une onde de Lamb est considéré. Cette plaque est encadrée par deux PML dont les paramètres vont être déterminés afin de minimiser la réflexion des ondes.

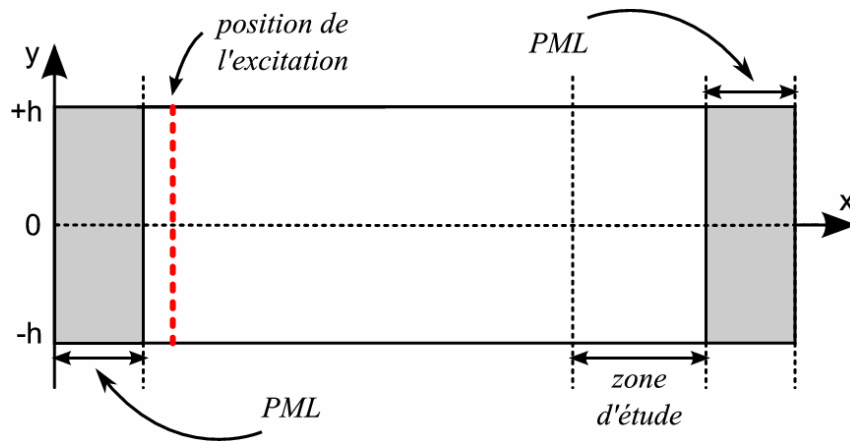


Figure 54 Schéma de la plaque plane finie encadrée par deux PML.

Pour cette étude deux types d'onde de Lamb sont étudiés : le mode symétrique  $S_0$  à la fréquence  $f = 160 \text{ kHz}$  et le mode antisymétrique  $A_1$  à  $f = 400 \text{ kHz}$ . Dans chaque cas, les paramètres des PML sont déterminés pour  $L = 50 \text{ mm}$ .

L'analyse harmonique de la structure pour des fréquences allant de  $120 \text{ kHz}$  à  $300 \text{ kHz}$  par pas de  $1 \text{ kHz}$  permet d'obtenir le champ de déplacement normal sous la plaque (zone d'étude - Figure 54). A partir de ces résultats, il est possible de calculer les flux des vecteurs de Poynting des modes traversant la plaque vierge. La Figure 55 représente l'évolution du coefficient de réflexion en énergie du mode  $S_0$  en fonction de la fréquence lorsque la plaque est excitée par une onde de type  $S_0$ . Les paramètres des PML sont déterminés à la fréquence  $f = 160 \text{ kHz}$ .

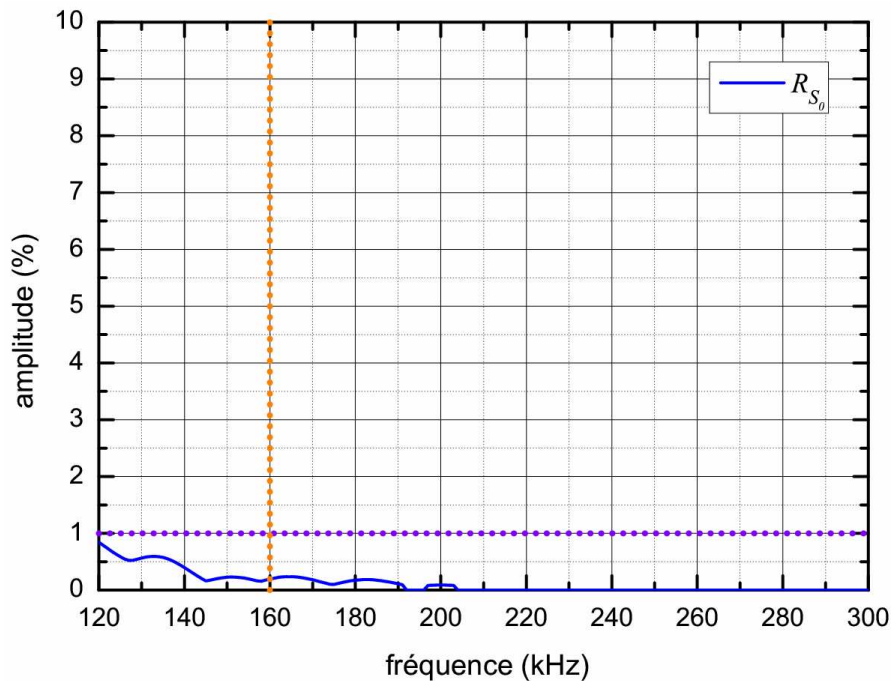


Figure 55 Evolution du coefficient de réflexion en énergie de l'onde  $S_0$  en fonction de la fréquence lorsque la plaque est excitée par une onde  $S_0$ .

Dans la gamme de fréquences considérée seuls les deux modes  $S_0$  et  $A_0$  peuvent exister. En l'occurrence, seules se propagent une onde incidente  $S_0$  et une onde réfléchie  $S_0$ . Quelle que soit la fréquence, la valeur de  $R_{S_0}$  est inférieure à l'erreur numérique (i.e.  $R_{S_0} < 1\%$ ).

A l'instar de la Figure 55, la Figure 56 représente l'évolution des coefficients de réflexion et de transmission en énergie des modes propagatifs en fonction de la fréquence lorsque la plaque est excitée par une onde de type  $A_1$ . Les paramètres des PML sont déterminés à la fréquence  $f = 400\text{ kHz}$ .

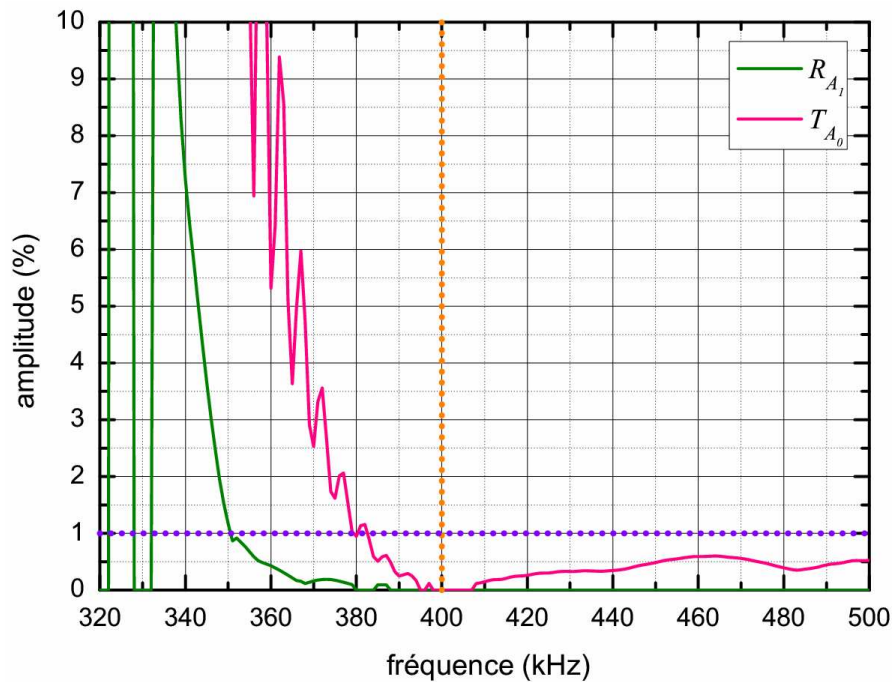


Figure 56 Evolution des coefficients en énergie des modes propagatifs en fonction de la fréquence lorsque la plaque est excitée par une onde  $A_1$ .

Dans la gamme de fréquences considérée seuls les modes  $S_0$ ,  $A_0$  et  $A_1$  peuvent exister. En l'occurrence, une onde incidente  $A_1$ , une onde incidente  $A_0$  et une onde réfléchie  $A_1$  se propagent. Pour des fréquences supérieures à celle pour laquelle les PML ont été conçus, les valeurs des coefficients  $T_{A_0}$  et  $R_{A_1}$  sont inférieures à l'erreur numérique (i.e.  $R_{S_0} < 1\%$ ).

En comparant la Figure 52 avec la Figure 55 et la Figure 53 avec la Figure 56, il apparaît qu'avec les PML les valeurs des coefficients en énergie des ondes transmises et réfléchies sont plus rapidement inférieures à l'erreur numérique. De plus, pour des fréquences supérieures à la fréquence de conception des PML, les valeurs des coefficients en énergie des ondes transmises et réfléchies sont inférieures à l'erreur numérique. Aussi, pour ces raisons, les PML seront employés par la suite.

### 3.1.3 Mode d'excitation de la structure et zone d'étude

L'excitation est appliquée dans la zone 2 à la distance  $Lx = 2.35\text{ mm}$  du bord du PML de gauche (Figure 45). Par ailleurs, le maillage a été conçu afin d'avoir une ligne horizontale au centre de l'épaisseur des portions de plaque vierge (zone 2 - Figure 45). Ce choix est justifié dans ce qui suit.

Dans le cas d'une plaque vierge infinie, une onde symétrique a un déplacement selon  $x$  non nul au centre de la plaque, contrairement à une onde antisymétrique. Aussi, au voisinage du gap  $S_0^\wedge/A_0^\wedge$ , une onde symétrique  $S_0$  peut être générée en appliquant un déplacement selon la direction ( $Ox$ ) au nœud représenté par le point  $M$  sur la Figure 45 ( $y_M = 0$ ). Cette onde est unique puisque dans la bande de fréquences étudiée, il n'existe pas d'autre mode symétrique. De cette façon, une onde incidente  $S_0$  se propage dans la zone 2 avant d'atteindre la zone 1.

De plus, d'après le chapitre 2, au voisinage du gap  $S_0^\wedge/A_0^\wedge$ , une onde type  $S_0$  coexiste dans un réseau infini de périodicités sinusoïdales avec une onde de type  $A_0$ . Les sens de propagation de ces ondes sont opposés. Or, une onde antisymétrique a un déplacement selon  $x$  nul au centre de la plaque. Aussi, réduire l'excitation à un seul point ne perturbera pas la propagation d'une éventuelle onde rétropropagative de type  $A_0$ .

*A contrario*, l'étude d'un gap impliquant un seul mode, tel que le gap bord de bande  $S_0^\wedge/S_0^\wedge$ , sera perturbée par l'excitation. Aussi, l'étude se restreindra par la suite au voisinage du gap  $S_0^\wedge/A_0^\wedge$ , c'est-à-dire à une gamme fréquentielle allant de  $f = 160\text{ kHz}$  à  $f = 320\text{ kHz}$ .

### 3.1.4 Précisions sur le maillage

Le Tableau 3 présente les valeurs limites de longueurs d'onde des deux modes propagatifs pour la gamme de fréquences étudiée.

	$f = 160\text{ kHz}$	$f = 320\text{ kHz}$
$\lambda_{S_0}$	33.9 mm	16.1 mm
$\lambda_{A_0}$	13.8 mm	8.1 mm

Tableau 3 Gamme de valeurs des longueurs d'onde des modes propagatifs pour des fréquences comprises entre 160 kHz et 320 kHz.

Le maillage est construit à l'aide d'éléments isoparamétriques et une interpolation quadratique est utilisée sur chacun des côtés de ces éléments [9-15]. Des études précédentes [16] ont démontré que la dimension la plus importante d'un élément doit être plus petite que le quart de la longueur d'onde afin de décrire convenablement les variations du champ :

$$\max(\Delta x, \Delta y) \leq \frac{\lambda_{\min}}{4} \quad (3.1.30)$$

Dans le cas présent, l'inégalité (3.1.30) est complètement satisfaite. En effet, les dimensions  $\Delta x = 0.5\text{ mm}$  et  $\Delta y = 0.625\text{ mm}$  du maillage des zones 1 et 2 (Figure 45) respectent le critère suivant :

$$\max(\Delta x, \Delta y) \leq \frac{\lambda_{\min}}{12} \quad (3.1.31)$$

## 3.2 Analyse harmonique

Concernant les résultats présentés par la suite dans ce chapitre, il a été vérifié que la valeur de la distance  $L_x$  qui sépare le PML du point d'excitation (Figure 45) n'a pas d'influence sur ceux-ci. Par ailleurs, ces résultats auraient été les mêmes en appliquant le champ de force approprié plutôt qu'un champ de déplacement.

### 3.2.1 Obtention des coefficients de réflexion et de transmission en énergie des ondes se propageant dans la plaque

L'analyse harmonique de la structure (Figure 45) pour des fréquences allant de  $160\text{ kHz}$  à  $320\text{ kHz}$  par pas de  $1\text{ kHz}$  permet d'obtenir le champ de déplacement normal sous la plaque avant et après le réseau de rainures (zone 2 à  $y = -h$  - Figure 45). Les composantes réelles et imaginaires de ce champ de déplacement, obtenues à la fréquence centrale du gap ( $f_{\text{gap}} = 239\text{ kHz}$ ) pour  $2h = 5\text{ mm}$ ,  $p = 200\text{ }\mu\text{m}$ ,  $\Lambda = 7\text{ mm}$  et  $N = 20$  rainures, sont représentées à la Figure 57. L'unité est arbitraire pour l'amplitude représentée en ordonnée.

Pour chaque fréquence, une transformée de Fourier spatiale est appliquée sur les données collectées. La Figure 58 représente les résultats de la transformée de Fourier spatiale (TFS) à la fréquence centrale du gap ( $f_{\text{gap}} = 239\text{ kHz}$ ) pour  $2h = 5\text{ mm}$ ,  $p = 200\text{ }\mu\text{m}$ ,  $\Lambda = 7\text{ mm}$  et  $N = 20$  rainures. L'unité est arbitraire pour l'amplitude représentée en ordonnée. Chacun des pics les plus significatifs (notés  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$ ) de la Figure 58 peut être relié à un mode propagatif. La direction de propagation d'un mode propagatif est donnée par le signe du nombre d'onde associé à son pic de TFS. Ainsi, les ondes rétropropagatives ont des nombres d'onde négatifs (pic  $\alpha$  - Figure 58) tandis que les modes incidents et transmis ont des nombres d'onde positifs (pics  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  - Figure 58).

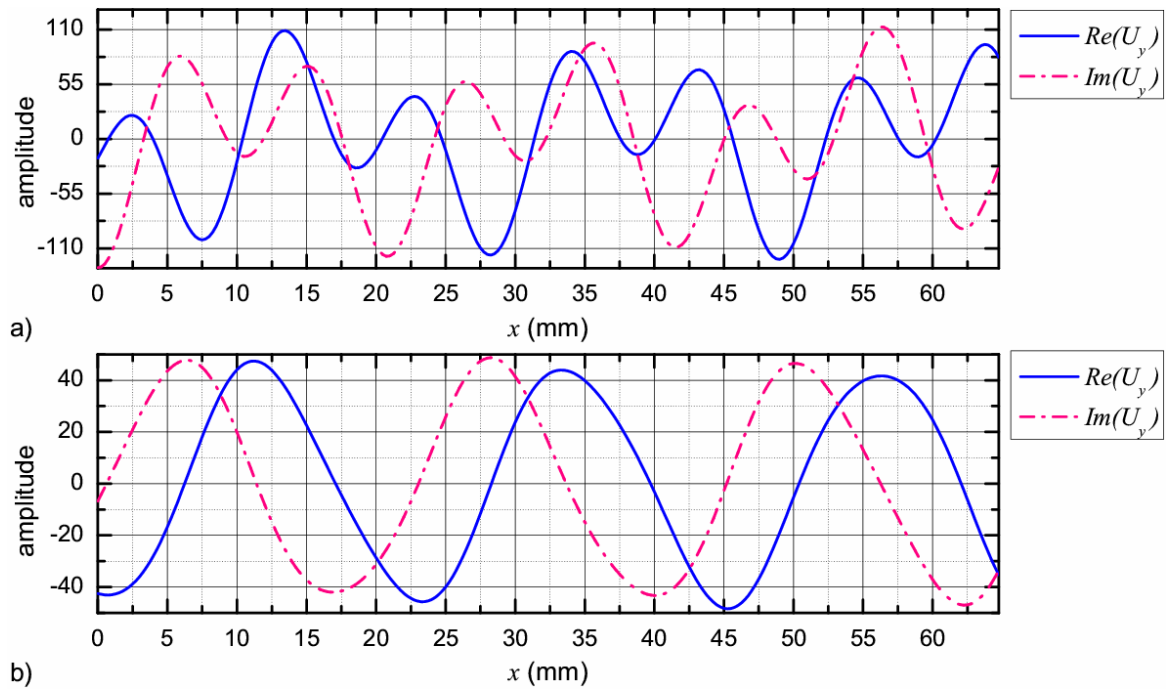


Figure 57 Représentation du champ de déplacement normal sous la plaque (a) avant le réseau (b) après le réseau.

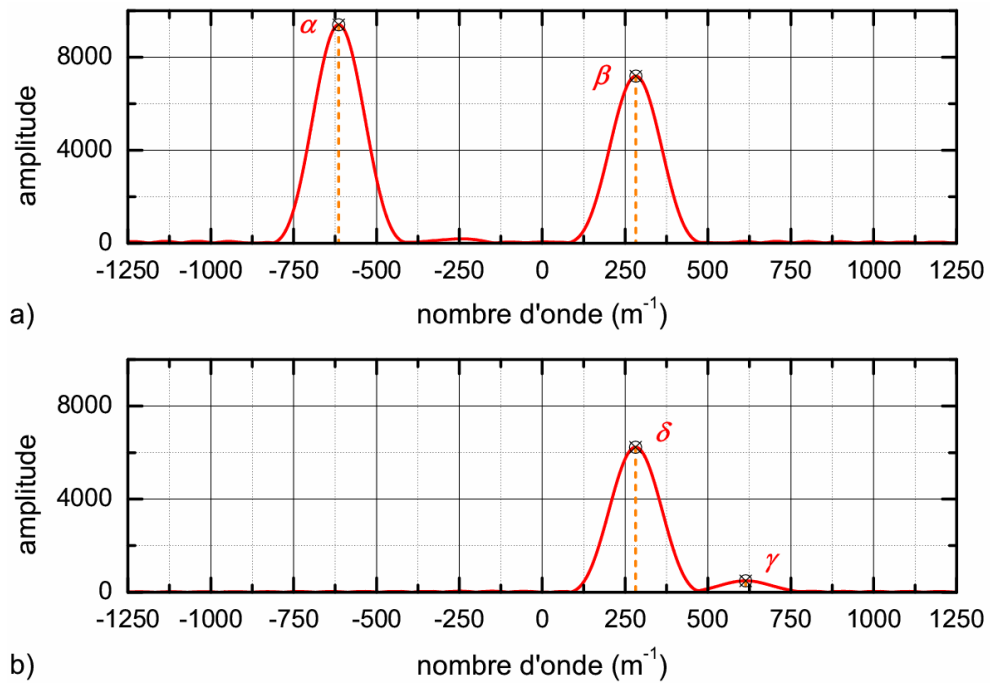


Figure 58 Résultats de la transformée de Fourier spatiale (a) avant le réseau (b) après le réseau.

Par ailleurs, il est possible d'identifier les modes représentés par chacun des pics de TFS de la Figure 58 en comparant les abscisses de ces pics aux courbes de dispersion d'une plaque plane infinie. Ainsi, comme le montrent la Figure 59 et la Figure 60, les pics  $\alpha$  et  $\delta$  correspondent au mode  $A_0$  et les pics  $\beta$  et  $\gamma$  au mode  $S_0$ . Il est à noter que l'amplitude d'un mode est proportionnelle à l'amplitude maximale du pic de TFS qui lui est associé.

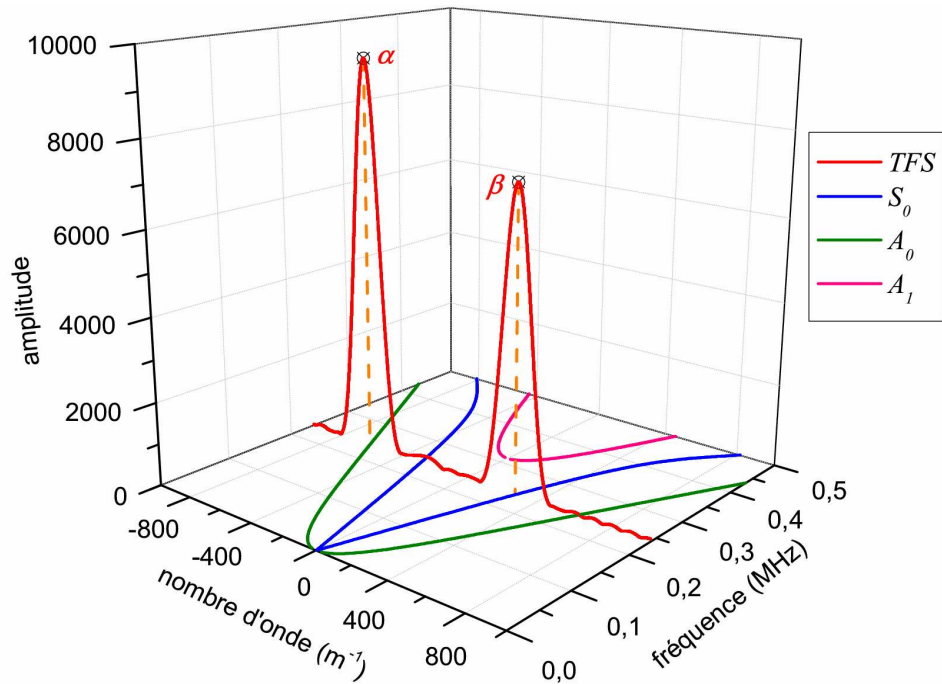


Figure 59 Identification des pics  $\alpha$  et  $\beta$  à l'aide des courbes de dispersion d'une plaque plane infinie.



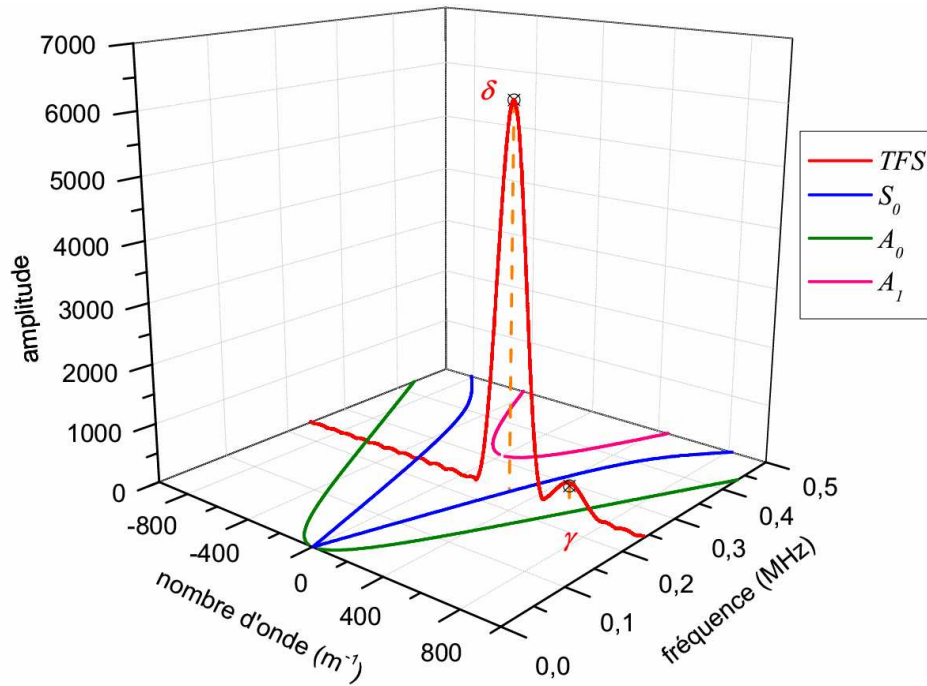


Figure 60 Identification des pics  $\delta$  et  $\gamma$  à l'aide des courbes de dispersion d'une plaque plane infinie.

A partir de ces résultats, et à l'aide de la méthode décrite au chapitre 1 à la section 1.3, il est possible de calculer les flux des vecteurs de Poynting des modes  $S_0$  et  $A_0$  traversant les portions de plaque vierge. Ainsi, les flux  $\phi_{inc}^{S_0}$ ,  $\phi_{trans}^{S_0}$  et  $\phi_{retro}^{A_0}$  sont obtenus et représentent respectivement le flux du vecteur de Poynting de l'onde  $S_0$  incidente, de l'onde  $S_0$  transmise et de l'onde  $A_0$  réfléchie. Il est dès lors possible de calculer les coefficients en énergie de transmission du mode  $S_0$  et de rétroconversion du mode  $A_0$ , respectivement :

$$T_{S_0} = \frac{\phi_{trans}^{S_0}}{\phi_{inc}^{S_0}} \quad (3.2.1)$$

et :

$$R_{A_0} = \frac{\phi_{retro}^{A_0}}{\phi_{inc}^{S_0}} \quad (3.2.2)$$

### 3.2.2 Atténuation et gap

La Figure 61.a rappelle le gap  $S_0^\Lambda / A_0^\Lambda$  obtenu dans le cas d'une plaque infinie à motif périodique sinusoïdal ( $2h = 5 \text{ mm}$  et  $\Lambda = 7 \text{ mm}$ ). En parallèle, l'évolution des valeurs des coefficients  $T_{S_0}$  et  $R_{A_0}$  en fonction de la fréquence pour un réseau de  $N = 20$  rainures est présentée à la Figure 61.b.

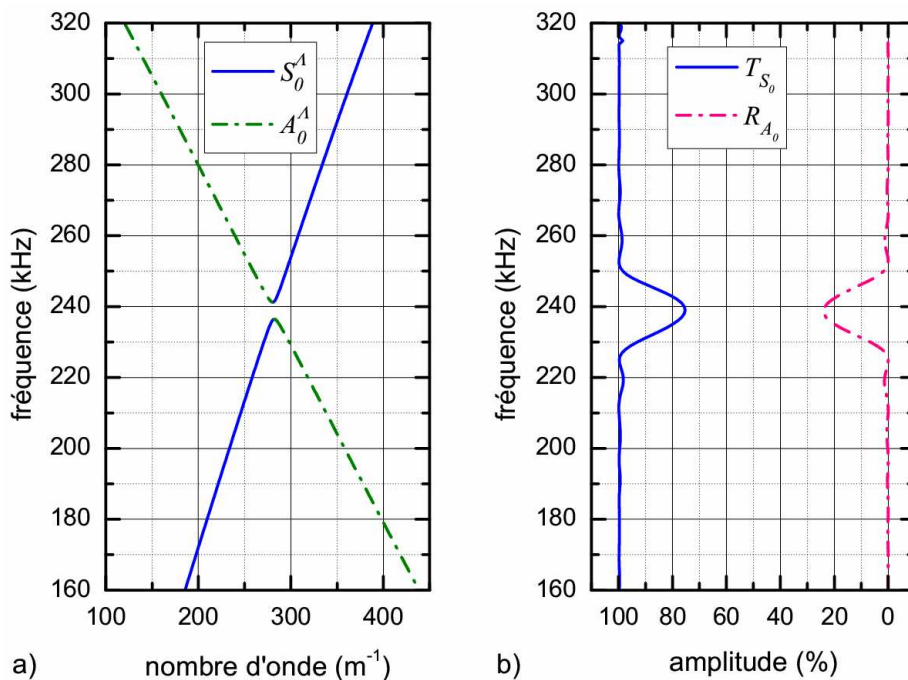


Figure 61 (a) Courbes de dispersion d'une plaque infinie à motif périodique sinusoïdal,  $2h = 5\text{ mm}$ ,  $\Lambda = 7\text{ mm}$ ,  $p = 200\text{ }\mu\text{m}$  (b) Evolution en fonction de la fréquence des coefficients en énergie de transmission et de rétroconversion pour un réseau de  $N = 20$  rainures.

Les courbes de la Figure 61.b montrent deux types d'extrema à la fréquence centrale du gap ( $f_{gap} = 239\text{ kHz}$ ). En effet, à cette fréquence, la courbe du coefficient  $T_{S_0}$  présente un minimum alors que celle du coefficient  $R_{A_0}$  atteint son maximum. Ceci exprime l'existence d'un couplage entre les modes  $S_0$  et  $A_0$  dans le gap. En effet, de l'énergie est transférée d'un mode à l'autre : 24% de l'énergie transportée par le mode  $S_0$  est convertie en mode  $A_0$  à  $f = f_{gap}$ . D'autre part, l'estimation de la conservation de l'énergie ( $T_{S_0} + R_{A_0} = 1$ ) est vérifiée avec une erreur inférieure à 1%. Le coefficient  $R_{A_0}$  peut donc être qualifié de coefficient de rétroconversion.

### 3.2.3 Influence des paramètres géométriques du réseau

#### 3.2.3.1 Influence du nombre de rainures

La Figure 62 représente l'influence du nombre de rainures sur les coefficients  $T_{S_0}$  et  $R_{A_0}$  à la fréquence centrale du gap. A cette fréquence, lorsque le nombre de rainures croît, la valeur du coefficient  $T_{S_0}$  décroît non linéairement jusqu'à 0% alors que la valeur du coefficient  $R_{A_0}$  augmente jusqu'à 100%. Ainsi, lorsque la plaque ne présente aucune rainure, la totalité de l'énergie de l'onde incidente est évidemment transmise alors que pour  $N = 115$  rainures, l'onde  $S_0$  est considérée comme étant complètement convertie en une onde  $A_0$ , puisque  $T_{S_0} < 1\%$ . Les résultats présentés ici peuvent être étendus au cas d'un réseau semi-infini. Si le réseau était infini, alors on observerait périodiquement des croissances et des décroissances des énergies associées à chaque mode [17].

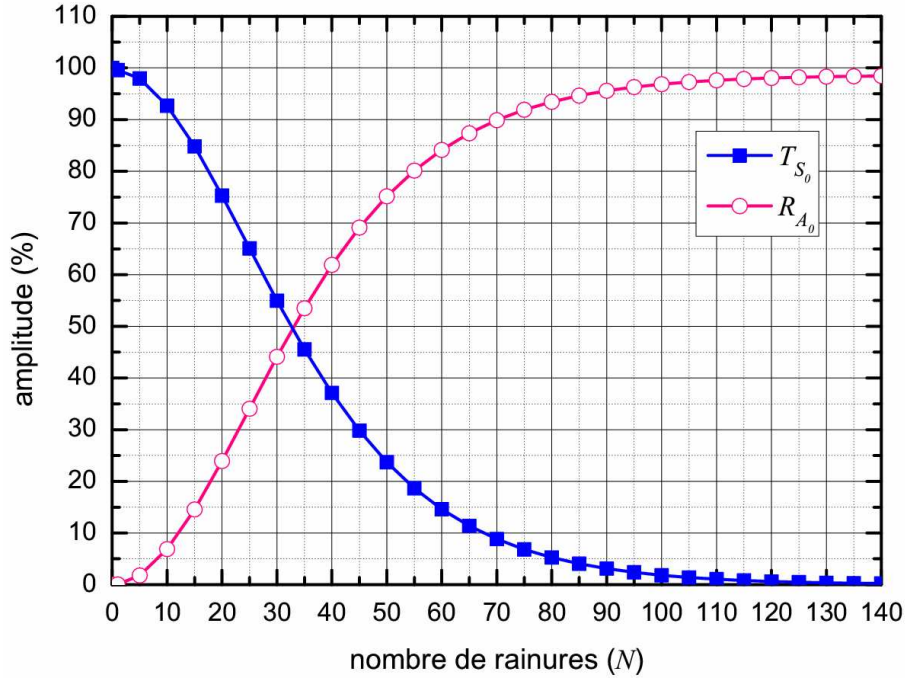


Figure 62 Variation en fonction du nombre de rainures des coefficients en énergie de transmission et de rétroconversion à la fréquence centrale du gap,  $2h = 5 \text{ mm}$ ,  $\Lambda = 7 \text{ mm}$ ,  $p = 200 \text{ }\mu\text{m}$ .

La Figure 63 présente l'influence du nombre de rainures sur le coefficient  $R_{A_0}$  en fonction de la fréquence. Tout comme dans le cas de la Figure 62, lorsque le nombre de rainures augmente, la valeur maximale du coefficient  $R_{A_0}$ , obtenue à  $f = f_{gap}$ , croît non linéairement. Toutefois, les courbes de cette figure, ainsi que celles de la Figure 61.b, présentent des pics secondaires qui révèlent l'aspect fini du réseau étudié [17]. De plus, la largeur des pics des courbes de ces deux figures est plus grande que la largeur fréquentielle du gap ( $[236 \text{ kHz}; 241 \text{ kHz}]$ ). Ceci est aussi une conséquence de l'emploi d'une structure limitée.

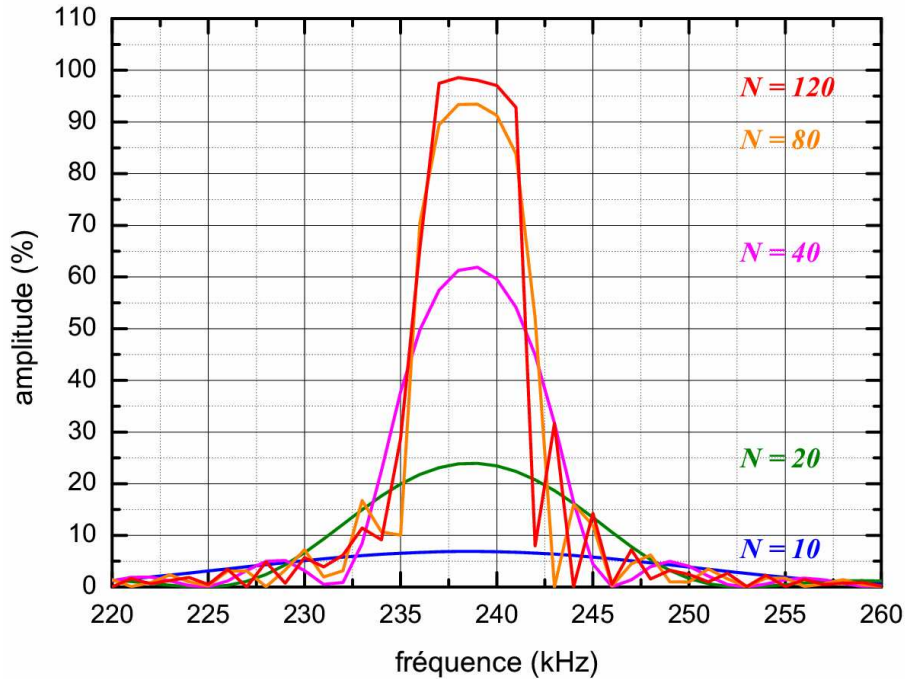


Figure 63 Evolution du coefficient en énergie de rétroconversion en fonction de la fréquence et du nombre de rainures ( $N$ ),  $2h = 5 \text{ mm}$ ,  $\Lambda = 7 \text{ mm}$ ,  $p = 200 \text{ }\mu\text{m}$ .

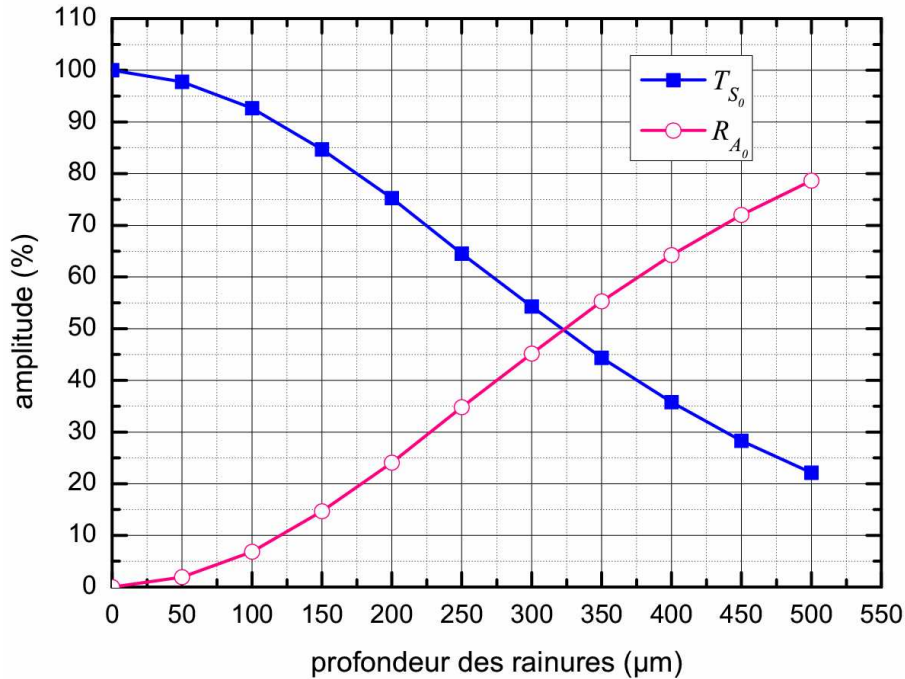
D'autre part, comme le montre la Figure 63, lorsque le nombre de rainures augmente, entre  $N=10$  et  $N=120$  la largeur des pics des courbes du coefficient  $R_{A_0}$  décroît. De plus, le couplage entre les modes  $S_0$  et  $A_0$  est plus fort à la fréquence centrale du gap. Par conséquent, le coefficient de conversion  $R_{A_0}$  dépend à la fois de la fréquence et du nombre de rainures.

Au voisinage de la fréquence centrale du gap, le couplage entre les modes est légèrement plus faible qu'à  $f = f_{gap}$ . Ainsi, du fait que le coefficient de conversion est maximal à  $f = f_{gap}$  pour  $N=115$  rainures (Figure 62), pour des fréquences autour de  $f = f_{gap}$ , ce maximum est atteint pour  $N > 115$  rainures. Ceci explique le fait que la courbe du coefficient  $R_{A_0}$ , pour  $N=120$  rainures, n'a plus une forme purement gaussienne.

### 3.2.3.2 Influence de la profondeur des rainures

L'influence de la profondeur des rainures est étudiée pour des valeurs allant de  $p = 50 \text{ }\mu\text{m}$  à  $p = 500 \text{ }\mu\text{m}$  par pas de  $50 \text{ }\mu\text{m}$ . Autrement dit, la perturbation de surface considérée est comprise entre 1% et 10% de l'épaisseur de la plaque.

Pour chacune des valeurs de  $p$  considérées, à la fréquence centrale du gap, les valeurs des coefficients  $T_{S_0}$  et  $R_{A_0}$  sont calculées et représentées à la Figure 64.



**Figure 64** Variation en fonction de la profondeur des rainures des coefficients en énergie de transmission et de réflexion à la fréquence centrale du gap,  $2h = 5 \text{ mm}$ ,  $\Lambda = 7 \text{ mm}$ ,  $N = 20$  rainures.

Cette figure montre que plus les rainures sont profondes et plus le couplage est important : la valeur du coefficient  $T_{S_0}$  décroît non linéairement alors que la valeur du coefficient  $R_{A_0}$  augmente.

Pour chacune des valeurs de la profondeur des rainures considérées, la somme  $T_{S_0} + R_{A_0}$  est égale à 1 avec moins de 1% d'erreur. De ce fait, exceptés les modes  $S_0$  et  $A_0$ , aucun autre mode ne transporte d'énergie à travers le guide d'ondes à la fréquence  $f = f_{gap}$ .

Le chapitre 2 a mis en évidence l'existence dans les bandes d'arrêt d'une partie imaginaire non nulle pour le nombre d'onde. De plus, l'atténuation d'une onde propagative est imputable au fait que son nombre d'onde est complexe. Aussi, est-il possible d'approximer la décroissance de la courbe du coefficient  $T_{S_0}$  de la Figure 62 par une exponentielle du type  $e^{-k'' \cdot x}$  ?

### 3.3 Atténuation et ondes évanescentes

#### 3.3.1 Régression non linéaire

L'analyse harmonique de la structure (Figure 45) à la fréquence centrale du gap ( $f_{gap} = 239 \text{ kHz}$ ) permet d'obtenir le champ de déplacement normal sous la plaque avant et après le réseau de rainures (zone 2 à  $y = -h$  - Figure 45). Une transformée de Fourier spatiale est alors appliquée sur les données collectées. Du fait que l'amplitude d'un

mode est proportionnelle à l'amplitude maximale du pic de TFS qui lui est associé, il est possible de calculer le coefficient suivant :

$$\Gamma_{S_0} = \frac{A_{S_0}^{trans}}{A_{S_0}^{inc}} \quad (3.3.1)$$

où  $A_{S_0}^{inc}$  est l'amplitude de l'onde incidente  $S_0$  et  $A_{S_0}^{trans}$  l'amplitude de l'onde transmise  $S_0$ . Ce coefficient rend compte, par rapport à l'amplitude de l'onde incidente, de la transmission de l'onde  $S_0$  pour un réseau composé de  $N$  rainures.

Aussi, en faisant varier le nombre  $N$  de rainures, il est possible d'étudier l'évolution des valeurs de  $\Gamma_{S_0}$  à la fréquence centrale du gap. La Figure 65 représente, pour  $2h = 5 \text{ mm}$  et  $\Lambda = 7 \text{ mm}$ , la variation des valeurs de  $\Gamma_{S_0}$  à la fréquence centrale du gap  $S_0^\Lambda / A_0^\Lambda$  en fonction de la position  $x$  dans le réseau avec  $x = N \cdot \Lambda$  et  $N \in [0; 140]$ . Ces valeurs sont calculées dans trois cas :  $p = 50 \mu\text{m}$ ,  $p = 200 \mu\text{m}$  et  $p = 400 \mu\text{m}$ . Le pas d'échantillonnage des courbes est égal à la périodicité  $\Lambda$  du réseau. Pour des raisons de temps de calcul, la valeur maximale de  $x$  correspond à un réseau de 100 rainures.

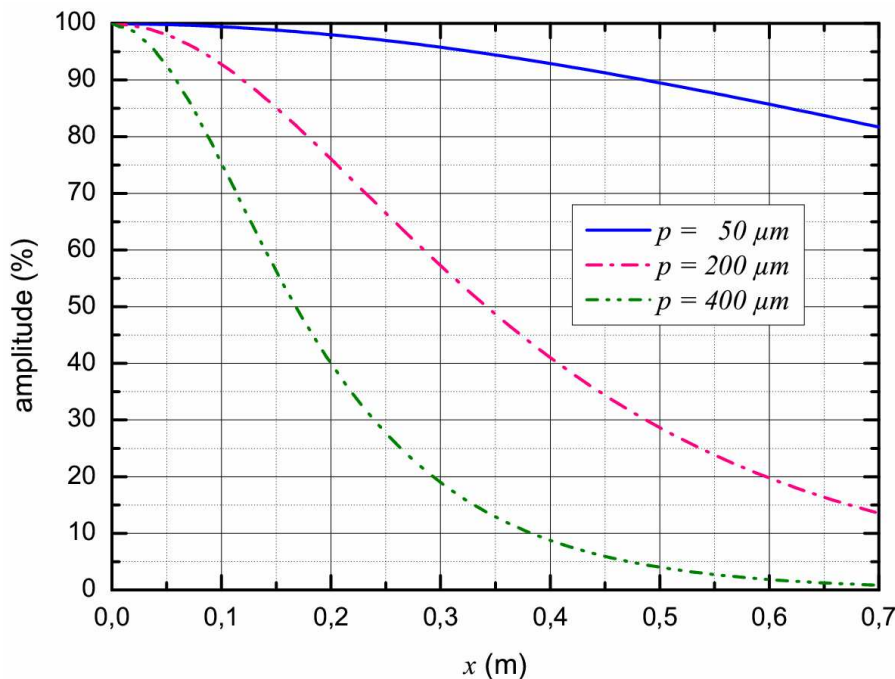


Figure 65 Influence du nombre de rainures sur le coefficient en amplitude de transmission à la fréquence centrale du gap pour différentes valeurs de la profondeur des rainures ( $p$ ),  $2h = 5 \text{ mm}$ ,  $\Lambda = 7 \text{ mm}$ .

Chacune des courbes de la Figure 65 peut être approximée par une fonction exponentielle du type  $\exp(-k_{LIM}'' x)$ .

Comme l'a révélé la Figure 62, il existe un nombre de rainures seuil à partir duquel le réseau peut être considéré comme semi-infini ( $T_{S_0} < 1\%$ ). De ce fait, il convient d'étudier l'influence du nombre de rainures sur la valeur de  $k_{LIM}''$ .



### 3.3.2 Influence du nombre de rainures

Pour chaque valeur de  $p$  considérée, les courbes de dispersion généralisées pour un réseau infini sont établies et la valeur de la partie imaginaire du nombre d'onde à la fréquence centrale du gap  $S_0^\Lambda/A_0^\Lambda$  est relevée. Ces valeurs sont notées  $k_{INF}''$ .

Pour une valeur de la profondeur des rainures donnée, la régression exponentielle est effectuée de  $N = N_{\min}$  rainures à  $N_{\max} = 100$  rainures. Ainsi, pour chacun des trois cas considérés, la Figure 66 représente les valeurs de  $k_{LIM}''$  déduites de la Figure 65 sur l'intervalle  $[N_{\min}; 100]$ . Les pointillés représentent, pour chaque valeur de la profondeur des rainures considérée, les valeurs de  $k_{INF}''$ . Ces lignes jouent le rôle d'asymptotes pour les valeurs de  $k_{LIM}''$ . Aussi, dans chaque cas, il existe une valeur seuil du nombre de rainures à partir de laquelle le comportement de la structure finie peut être déduite de celui-ci d'une structure infinie.

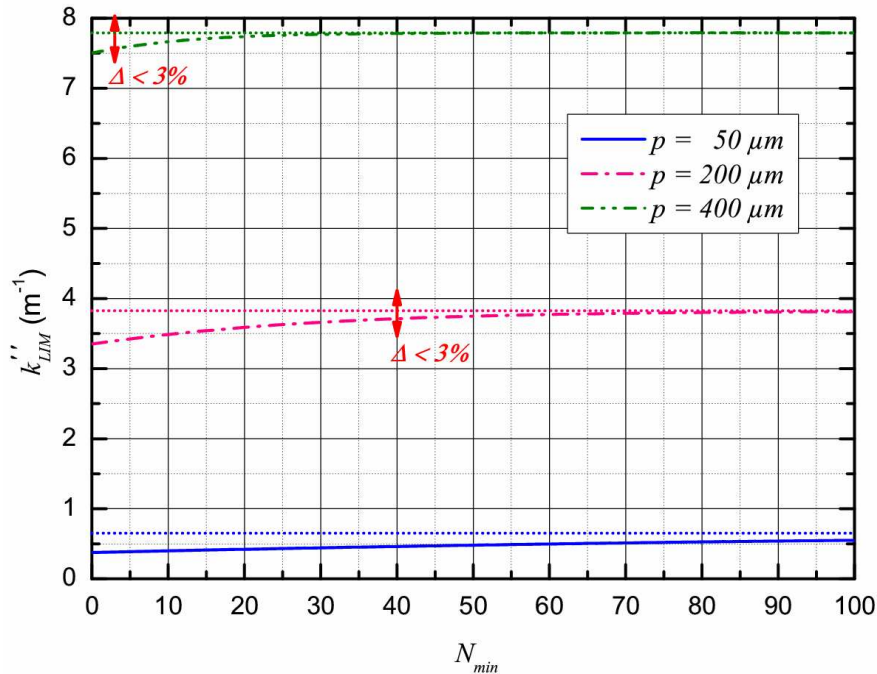


Figure 66 Variation de la valeur de  $k''$  issue de la régression exponentielle effectuée sur l'intervalle  $[N_{\min}; 100]$  en fonction de  $N_{\min}$  pour différentes valeurs de la profondeur des rainures ( $p$ ),  $2h = 5 \text{ mm}$ ,  $\Lambda = 7 \text{ mm}$ .

Soit  $\Delta$ , le ratio défini comme suit et permettant de quantifier l'accord entre les valeurs de  $k_{LIM}''$  et de  $k_{INF}''$  :

$$\Delta = \frac{k_{INF}'' - k_{LIM}''}{k_{INF}''} \quad (3.3.2)$$

Ainsi, pour  $p = 400 \mu\text{m}$ , il existe une différence  $\Delta < 3\%$  entre les valeurs de  $k_{LIM}''$  et de  $k_{INF}''$  si le réseau est composé de plus de 3 rainures. De même, pour  $p = 200 \mu\text{m}$ , il faut considérer plus de 40 rainures. Néanmoins, pour  $p = 50 \mu\text{m}$ , les valeurs de  $\Delta$  sont

strictement supérieures à 3% , même si 100 rainures sont considérées. En conséquence, plus les rainures sont profondes, plus la valeur de  $N_{\min}$  est petite.

Autrement dit, plus les rainures sont profondes, moins il faut de rainures pour qu'un réseau limité de périodicités sinusoïdales ait des propriétés déduites de celles d'un réseau infini.

## 3.4 Conclusion

L'étude d'une plaque d'aluminium finie présentant un réseau de rainures à périodicité sinusoïdale a été réalisée à l'aide la méthode des éléments finis.

L'analyse harmonique de la structure pour des fréquences voisines d'un gap intra-bande a permis de mettre en évidence un couplage entre un mode propagatif et un mode rétroconverti. De plus, ce couplage est maximum à la fréquence centrale du gap. L'étude de l'influence du nombre de rainures ou de la profondeur des rainures sur ce couplage, à la fréquence centrale du gap, a révélé que plus les rainures sont nombreuses ou profondes et plus le couplage est important. Par ailleurs, cette étude a montré l'existence d'un nombre de rainures à partir duquel le réseau peut être considéré comme semi-infini ( $T_{s_0} < 1\%$ ) [18; 19].

D'autre part, le lien entre la partie imaginaire du nombre d'onde et la décroissance de l'amplitude des ondes se propageant dans un réseau limité de périodicités sinusoïdales a été mis en évidence. A partir d'un nombre seuil de motifs, l'atténuation des ondes se propageant dans un réseau limité de périodicités sinusoïdales est reliée à l'onde évanescence existant dans un réseau infini de périodicités sinusoïdales. Dans ces conditions, un réseau périodique fini a des propriétés déduites de celles d'un réseau infini [20].

## 3.5 Bibliographie

- [1] D. Leduc, B. Morvan, A.C. Hladky-Hennion, P. Pareige, and J.L. Izbicki, "Lamb wave propagation in a plate with a grooved surface with several spatial periodicities," *Ultrasonics*, vol. 44, p. e1359-63, 2006.
- [2] E. Moulin, *Contribution à l'étude de la génération d'ondes de Lamb par transducteurs piézoélectriques intégrés. Application à la modélisation de matériaux sensibles*. Thèse de l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, 1999.
- [3] E. Moulin, J. Assas, C. Delebarre, and D. Osmond, "Modeling of Lamb waves generation by integrated transducers in composite plates, using a coupled Finite Element - Normal Modes expansion method," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 107, p. 87-94, 2000.
- [4] O. Bou-Matar, V. Preobrazhensky, and P. Pernod, "Two-dimensional axisymmetric numerical simulation of supercritical phase conjugation of ultrasound in active solid media," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 118, p. 2880-2890, 2005.



- [5] J. Berenger, "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves," *J. Comput. Phys.*, vol. 114, p. 185-200, 1994.
- [6] W.C. Chew, and Q.H. Liu, "Perfectly matched layers for elastodynamics : a new absorbing boundary condition," *J. Comput. Acoust.*, vol. 4, p. 72-79, 1996.
- [7] M. Kuzuoglu, and R. Mittra, "Frequency dependence of the constitutive parameters of causal perfectly matched anisotropic absorbers," *IEEE Microw. Guided Wave Lett.*, vol. 6, p. 447-449, 1996.
- [8] J.A. Roden, and S.D. Gedney, "Convolution PML (CPML): An efficient FDTD implementation of the CFS-PML for arbitrary media," *Microw. Opt. Tech. Lett.*, vol. 27, p. 334 - 339, 2000.
- [9] J. Decarpigny, *Application de la méthode des éléments finis à l'étude de transducteurs piézoélectriques*. Thèse d'état de l'Université des Sciences et Techniques de Lille, 1984.
- [10] O.C. Zienkiewicz, and R.L. Taylor. *The finite element method*. McGraw-Hill, 1989.
- [11] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, and J.Z. Zhu. *The finite element method its basis & fundamentals*. Elsevier, 2006.
- [12] G. Dhatt, and G. Touzot. *Introduction à la méthode des éléments finis*. Collection Université de Compiègne, 1982.
- [13] K. Bathe. *Finite element procedures in engineering analysis*. Englewood Cliffs, 1982.
- [14] J.L. Batoz, and G. Dhatt. *Modélisation des structures par éléments finis*. Hermes, 1990.
- [15] ATILA Finite Element Code for Piezoelectric and Magnetostrictive Transducer Modeling, Version 6.0.2, User's Manual, Acoustics Laboratory, ISEN, 2002.
- [16] A.C. Hladky-Hennion, and J. Decarpigny, "Analysis of the scattering of a plane acoustic wave by a doubly periodic structure using the finite element method: Application to Alberich anechoic coatings," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 90, p. 3356-3367, 1991.
- [17] D. Royer, and E. Dieulesaint. *Elastic Waves in Solids*. Springer, 2000.
- [18] M. Bavencoffe, B. Morvan, A.C. Hladky-Hennion, O. Bou-Matar, and J.L. Izbicki, "Development of a suitable PML for an harmonic study of a 1D phononic crystal," *Proc. Acoustics'08*, vol. 94, p. 70, 2008.
- [19] M. Bavencoffe, A.C. Hladky-Hennion, B. Morvan, and J.L. Izbicki, "Attenuation of Lamb waves in the vicinity of a forbidden band in a phononic crystal," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, vol. 56, p. 1960-1967, 2009.
- [20] M. Bavencoffe, B. Morvan, A.C. Hladky-Hennion, and J.L. Izbicki. "Characterization of evanescent ultrasonic waves in a band gap of a 1D phononic crystal," *Proc. IEEE Ultrasonics Symp.*, 2009.





## Chapitre 4 Etude expérimentale

*L'étude numérique d'une plaque comportant un réseau limité de périodicités sinusoïdales a permis d'établir un lien entre les paramètres géométriques du réseau et l'atténuation des ondes de Lamb. Cette atténuation résulte d'un couplage de modes.*

*Des études précédentes ont mis en évidence de manière expérimentale l'existence de bandes interdites et de bandes passantes notamment dans le cas d'une plaque finie présentant un réseau de rainures gravées sur chaque interface [1] ou encore dans le cas d'un réseau phononique constitué par un réseau carré d'inclusions cylindriques en fer dans une matrice de cuivre déposé sur une plaque de silice [2].*

*Ce chapitre a pour but d'étudier expérimentalement la transmission d'un mode de Lamb à travers un réseau. Comme au chapitre précédent, les modes propagatifs seront identifiés en dehors du réseau mais aussi sous celui-ci. Il s'agit d'observer le couplage des modes sous le réseau et de caractériser la nature de ces modes à la fois dans une bande interdite et au voisinage de celle-ci.*

*Dans un premier temps, l'échantillon expérimental réalisé sera décrit. Le dispositif expérimental sera ensuite détaillé. Enfin, les résultats expérimentaux obtenus en dehors du réseau et sous celui-ci seront analysés.*

## 4.1 Présentation de l'échantillon expérimental

La réalisation d'un réseau de périodicités sinusoïdales n'est pas envisageable pour des raisons techniques. Aussi, dans ce chapitre, un changement de géométrie du motif périodique est considéré. Avant de présenter les résultats expérimentaux, il faut d'abord vérifier que ce changement de réseau n'affecte pas fondamentalement les résultats des études numériques précédentes.

### 4.1.1 Du motif sinusoïdal au motif triangulaire

#### 4.1.1.1 Comparaison des densités spectrales de puissance

Pour des raisons techniques d'usinage, il s'avère plus aisé de réaliser un échantillon présentant un réseau de stries triangulaires à sa surface. Dans les chapitres précédents, l'influence d'une périodicité spatiale associée à un réseau sinusoïdal a été mise en évidence. Concernant un motif triangulaire, ce dernier est composé d'une périodicité spatiale dominante (composante fondamentale ou premier harmonique) et de périodicités spatiales secondaires (harmoniques impairs d'ordre supérieur). La Figure 67 montre un réseau sinusoïdal (Figure 67.a) et sa densité spectrale de puissance (DSP) calculée pour un réseau de 10 stries sinusoïdales de profondeur  $p = 200 \mu m$  et de périodicité  $\Lambda = 7 mm$  (Figure 67.b). L'amplitude du pic observé est proportionnelle à la profondeur  $p$ . De même, la Figure 68.b représente la DSP d'un réseau de stries triangulaires de même profondeur et de même périodicité. En ordonnée, les amplitudes sont représentées en unité arbitraire.

L'amplitude des pics de la Figure 68.b correspondant aux harmoniques supérieurs décroît en  $1/n^2$ ,  $n$  étant l'ordre de l'harmonique. De plus, l'amplitude du pic fondamental a diminué de 18,6% par rapport l'amplitude du pic de la DSP du profil sinusoïdal : l'énergie de la DSP est répartie sur les harmoniques supérieurs.

## Chapitre 4 : Etude expérimentale

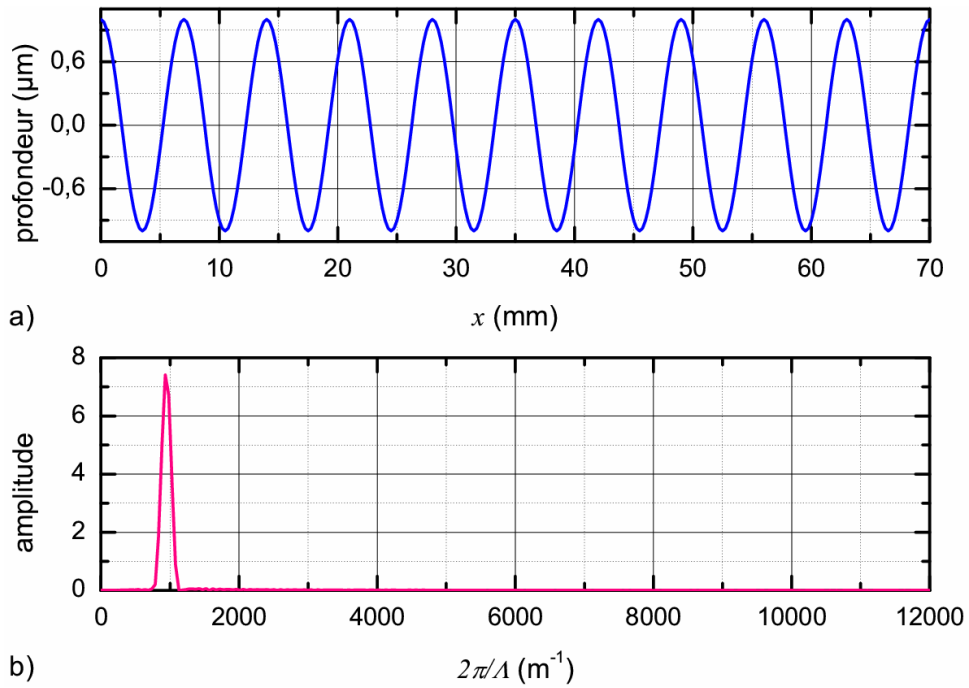


Figure 67 Représentation a) du profil sinusoïdal,  $\Lambda = 7 \text{ mm}$ ,  $p = 200 \text{ }\mu\text{m}$  b) de la densité spectrale de puissance associée.

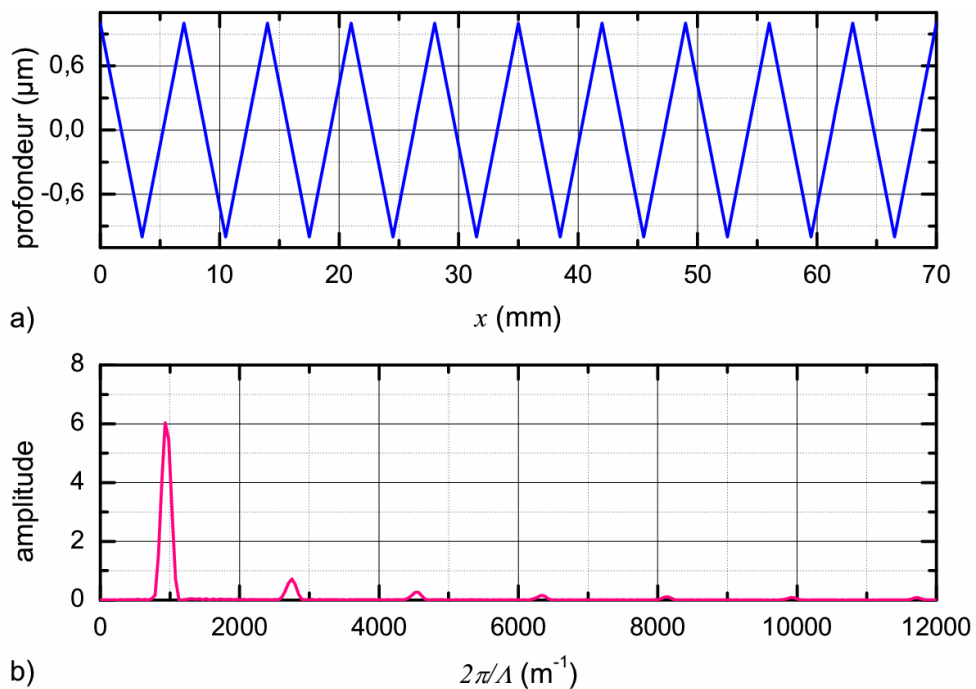


Figure 68 Représentation a) du profil triangulaire,  $\Lambda = 7 \text{ mm}$ ,  $p = 200 \text{ }\mu\text{m}$  b) de la densité spectrale de puissance associée.

La présence d'harmoniques supérieurs dans la DSP du profil triangulaire entraîne nécessairement des couplages de modes supplémentaires. En effet, ces modes supplémentaires peuvent vérifier la relation (1.4.4) du chapitre 1. Comme spécifié au chapitre 2, ces couplages de modes vont entraîner l'apparition de bandes interdites au voisinage de fréquences telles que :

$$k_{inc} + k_{conv} = n \cdot \frac{2\pi}{\Lambda} \quad (3.3.3)$$

avec  $k_{inc}$  et  $k_{conv}$  respectivement les nombres d'onde des ondes incidentes et converties. La Figure 69 illustre la relation (3.3.3). Seule la conversion d'un mode incident  $S_0$  en un mode  $A_0$  est considérée et représentée pour les quatre premiers harmoniques impairs (pointillés rouges).

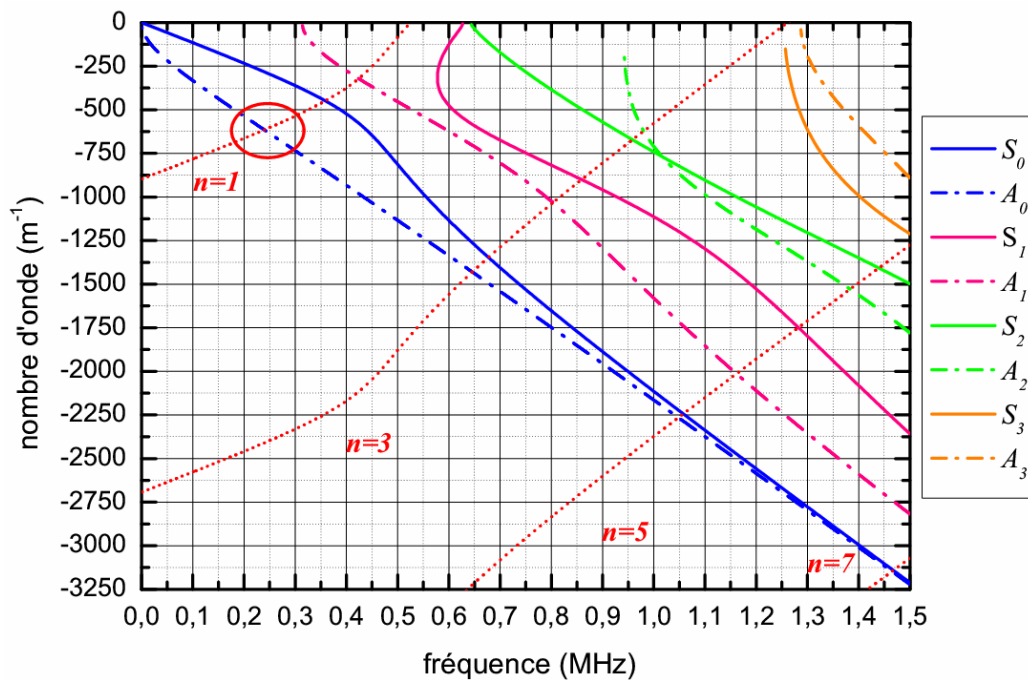


Figure 69 Courbes de dispersion théoriques d'une plaque plane infinie d'épaisseur  $2h = 5 \text{ mm}$  . Les pointillés rouges résultent de la relation de phonon appliquée à la conversion d'un mode  $S_0$  incident en un mode  $A_0$  ,  $\Lambda = 7 \text{ mm}$  .

Sur cette figure, une intersection liée à la présence de la périodicité fondamentale à la fréquence  $f = 239 \text{ kHz}$  est observée (cercle rouge). Celle-ci correspond à une conversion possible entre les modes  $S_0$  et  $A_0$  . Concernant les harmoniques supérieurs, la première intersection ( $n = 3$ ) n'apparaît qu'à la fréquence  $f = 645 \text{ kHz}$  , très supérieure à la fréquence centrale du gap  $S_0^\Lambda / A_0^\Lambda$  étudié. Il est donc possible de supposer que les harmoniques supérieurs n'auront pas d'influence sur les résultats expérimentaux.

Afin de valider l'approximation du premier harmonique, l'influence de ce changement de motif tant sur les courbes de dispersion que sur les courbes des coefficients de transmission et de rétroconversion en énergie est étudié.

### 4.1.1.2 Modification des courbes de dispersion

La Figure 70 représente les courbes de dispersion dans la première zone de Brillouin d'une plaque infinie à périodicités sinusoïdales obtenues au chapitre 2 ( $2h = 5 \text{ mm}$ ,  $p = 200 \mu\text{m}$ ,  $\Lambda = 7 \text{ mm}$ ). Sur celles-ci, les courbes de dispersion d'une plaque infinie à périodicités triangulaires ( $2h = 5 \text{ mm}$ ,  $p = 200 \mu\text{m}$ ,  $\Lambda = 7 \text{ mm}$ ) ont été superposées et, pour une meilleure visibilité, restreintes à quelques points (en bleu).

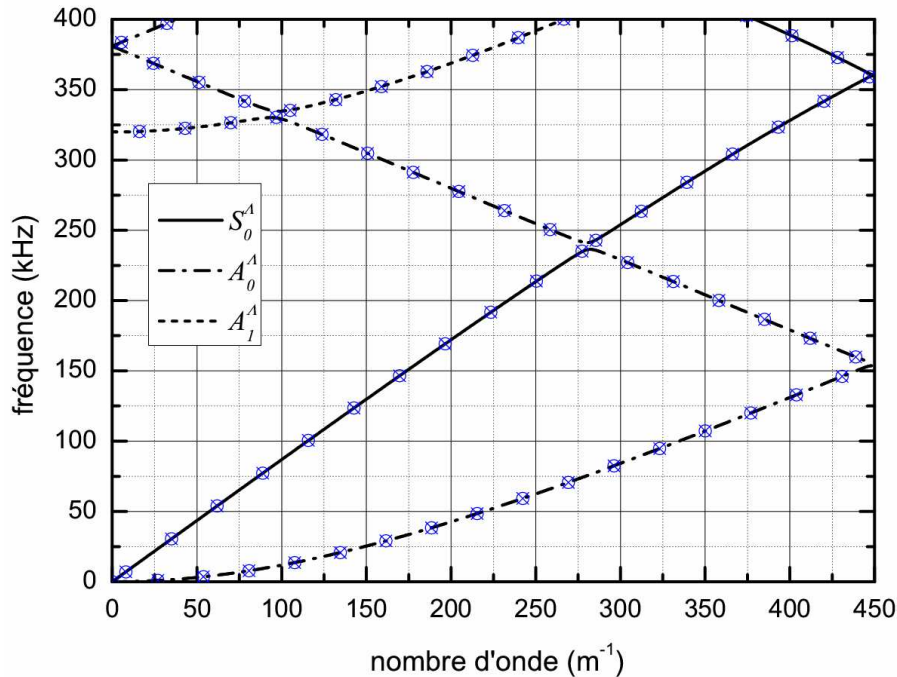


Figure 70 Courbes de dispersion dans la première zone de Brillouin pour une plaque infinie à périodicités sinusoïdales (en noir) et triangulaires (en bleu),  $2h = 5 \text{ mm}$ ,  $\Lambda = 7 \text{ mm}$ ,  $p = 200 \mu\text{m}$ .

Même si ces deux types de courbes semblent se confondre, il existe de légères différences au voisinage des bandes d'arrêt. La Figure 71 et la Figure 72 présentent des agrandissements de la Figure 70 respectivement au voisinage du gap bord de bande  $A_0^A/A_0^A$  et du gap intra-bande  $S_0^A/A_0^A$ .



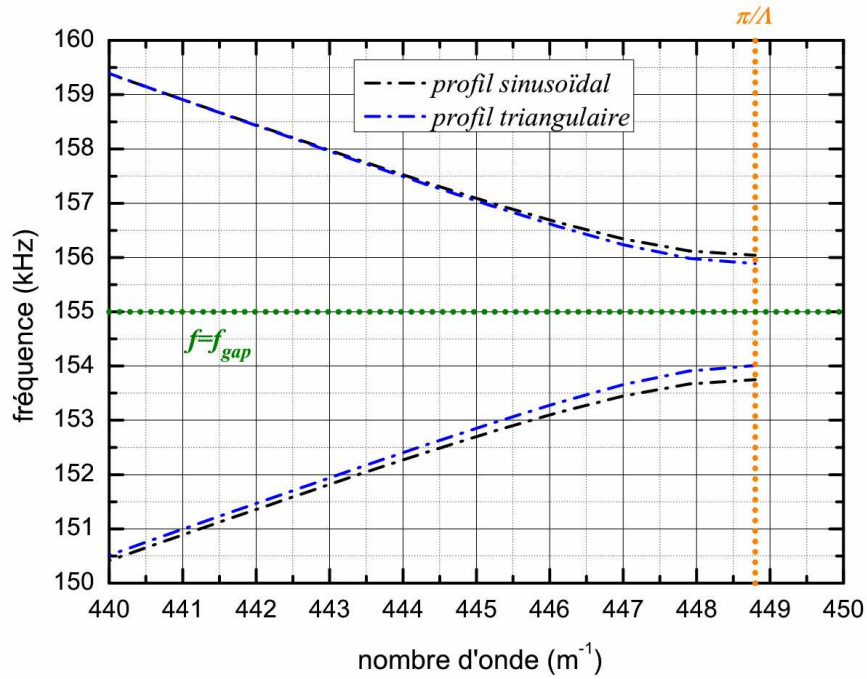


Figure 71 Détail des courbes de dispersion pour une plaque infinie à périodicités sinusoidales (en noir) et triangulaires (en bleu) : gap bord de bande  $A_0^\Lambda/A_0^\Lambda$ ,  $2h = 5 \text{ mm}$ ,  $\Lambda = 7 \text{ mm}$ ,  $p = 200 \mu\text{m}$ .

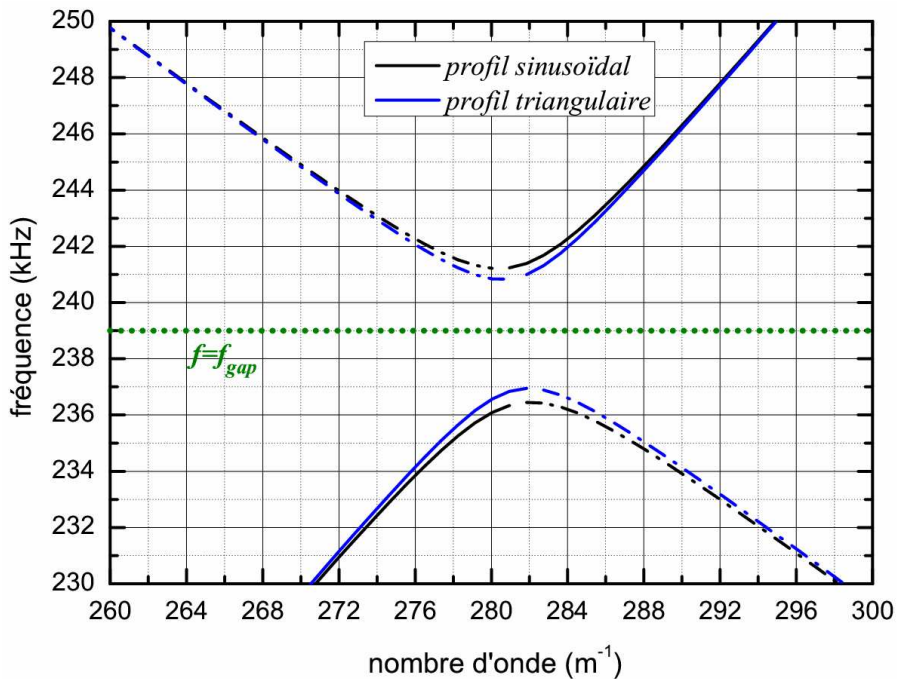


Figure 72 Détail des courbes de dispersion pour une plaque infinie à périodicités sinusoidales (en noir) et triangulaires (en bleu) : gap intra-bande  $S_0^\Lambda/A_0^\Lambda$ ,  $2h = 5 \text{ mm}$ ,  $\Lambda = 7 \text{ mm}$ ,  $p = 200 \mu\text{m}$ .

Lors du passage d'un motif sinusoïdal à un motif triangulaire, la largeur fréquentielle des gaps se resserre mais reste centrée sur la même fréquence  $f_{gap}$ . La fréquence centrale du gap est la même dans les deux cas du fait que le pic de la DSP est à la même fréquence spatiale pour les deux réseaux. Dans le cas du gap  $S_0^\wedge/A_0^\wedge$ , la largeur de celui-ci diminue de 18,8 % par rapport au cas du réseau sinusoïdal. Cette diminution relative correspond au rapport des pics des composantes fondamentales des DSP calculées précédemment. Ceci est en accord avec les propriétés des bandes interdites obtenues au chapitre 2 : la largeur des bandes interdites est proportionnelle à la profondeur des rainures.

#### 4.1.1.3 Modification des coefficients de transmission et de rétroconversion

La Figure 73 présente, dans le cas d'une onde incidente  $S_0$ , les courbes des coefficients de rétroconversion et de transmission en énergie pour un réseau de  $N = 20$  rainures. Les courbes en pointillé correspondent à un réseau sinusoïdal ( $T_{S_0}^{sinus}$ ) et les courbes en trait plein, à un réseau triangulaire ( $T_{S_0}^{triangle}$ ).

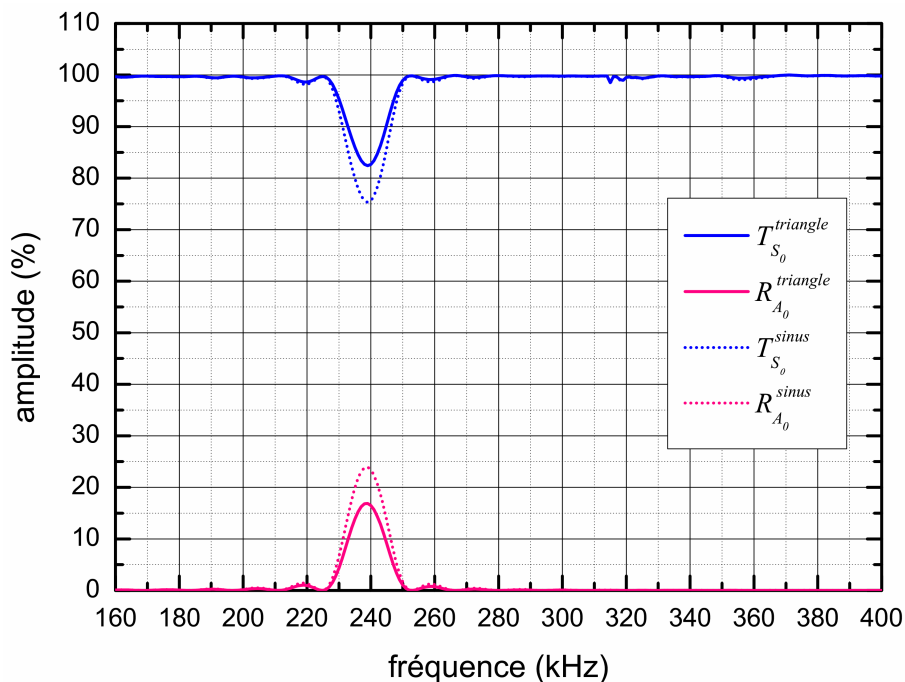


Figure 73 Evolution en fonction de la fréquence des coefficients en énergie de transmission et de rétroconversion pour un réseau sinusoïdal (pointillé) et pour un réseau triangulaire (trait plein),  $N = 20$  rainures,  $2h = 5 \text{ mm}$ ,  $\Lambda = 7 \text{ mm}$ ,  $p = 200 \text{ }\mu\text{m}$ .

Comme dans le cas d'un réseau sinusoïdal, à la fréquence centrale du gap, la courbe du coefficient  $T_{S_0}^{triangle}$  présente un minimum alors que celle du coefficient  $R_{A_0}^{triangle}$  atteint son maximum et la conservation de l'énergie est vérifiée avec une erreur inférieure à 1%. Toutefois, les valeurs des extrema ont diminué :  $\max(R_{A_0}^{sinus}) = 24\%$  alors que

$\max(R_{A_0}^{\text{triangle}}) = 17\%$  . Ceci est la conséquence, dans le cas d'un motif triangulaire, de la présence d'harmoniques supérieurs dans la DSP.

Par la suite, les expériences seront réalisées avec un réseau triangulaire. Cependant, pour des raisons liées à l'expérimentation, les paramètres de la géométrie du profil sont amenés à être modifiés.

### 4.1.2 Caractéristiques de l'échantillon

Pour avoir un coefficient de rétroconversion expérimentalement bien mesurable, il est nécessaire d'avoir un couplage important. Comme l'a montré le chapitre 3, plus les rainures sont profondes ou nombreuses et plus le couplage est important. Ainsi, pour rester dans l'hypothèse des petites perturbations de surface et conserver  $p/(2h) = 4\%$  , il n'est pas possible de modifier la valeur de  $p$  et donc le nombre de rainures du réseau est augmenté. Les contraintes d'usinage imposent un nombre maximum de rainures  $N = 30$ .

D'autre part, les performances du transducteur interviennent dans le choix de la gamme fréquentielle d'étude. Celui-ci est un transducteur PANAMETRICS<sup>®</sup> dont la fréquence centrale est  $f_c = 0,5\text{ MHz}$  . La réponse fréquentielle de ce transducteur est représentée à la Figure 74. La bande passante à  $-6\text{ dB}$  a été mesurée :  $Bw = [320\text{ kHz}; 800\text{ kHz}]$  . Aussi, au vu des paramètres du motif ( $2h = 5\text{ mm}$  ,  $p = 200\text{ }\mu\text{m}$  ,  $\Lambda = 7\text{ mm}$ ), la gamme fréquentielle du gap  $S_0^\Lambda/A_0^\Lambda$  ( $[237\text{ kHz}; 241\text{ kHz}]$ ) est trop basse par rapport à la bande passante du transducteur à notre disposition.

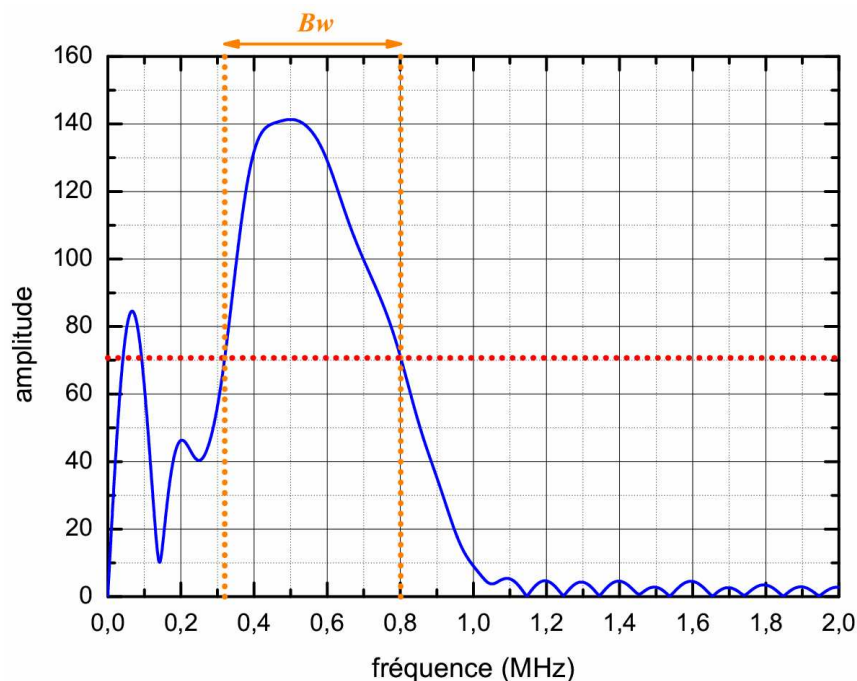


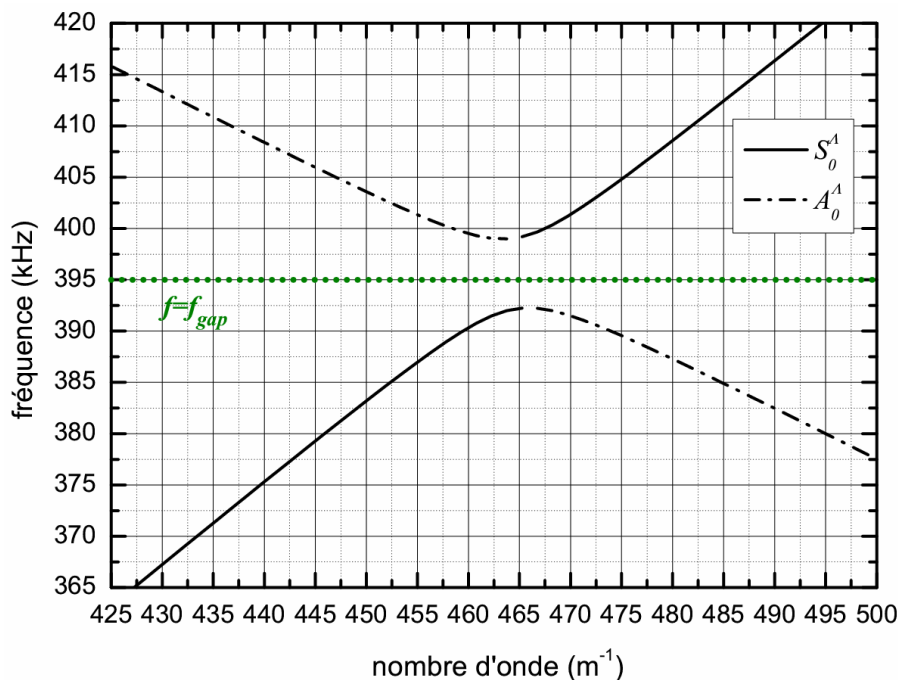
Figure 74 Réponse fréquentielle du transducteur : mise en évidence de la bande passante ( $Bw$ ).

## Chapitre 4 : Etude expérimentale

Afin de générer correctement un mode  $S_0$ , la gamme fréquentielle est transposée. A cette fin, une plaque d'épaisseur  $3\text{ mm}$  est utilisée. La fréquence centrale du gap devrait alors avoisiner la fréquence  $f = 5 \cdot 239/3 = 398\text{ kHz}$ .

Enfin, avec une fraise de  $86,9^\circ$ , des rainures de  $\Lambda = 4,2\text{ mm}$  et  $p = 120\text{ }\mu\text{m}$  sont usinées ( $p/(2h) = 4\%$ ).

La Figure 75 représente le gap  $S_0^\Lambda/A_0^\Lambda$  pour une plaque infinie à périodicités triangulaires avec  $2h = 3\text{ mm}$ ,  $p = 120\text{ }\mu\text{m}$  et  $\Lambda = 4,2\text{ mm}$ . Ce gap survient entre  $392\text{ kHz}$  et  $399\text{ kHz}$  et sa fréquence centrale est  $f_{gap} = 395\text{ kHz}$ .



**Figure 75** Détail des courbes de dispersion pour une plaque infinie à périodicités triangulaires : gap intra-bande  $S_0^\Lambda/A_0^\Lambda$ ,  $2h = 3\text{ mm}$ ,  $\Lambda = 4,2\text{ mm}$ ,  $p = 120\text{ }\mu\text{m}$ .

La Figure 76 représente l'échantillon expérimental étudié dans ce chapitre. Celui-ci est réalisé dans une plaque d'aluminium dont les caractéristiques sont rappelées dans le Tableau 4 suivant :

Masse volumique ( $\rho$ )	Coefficient de Poisson ( $\nu$ )	Module d'Young ( $E$ )	Vitesse des ondes longitudinales ( $c_L$ )	Vitesse des ondes transversales ( $c_T$ )
$2700\text{ kg/m}^3$	0,344	$71,4 \cdot 10^9$	6432 m/s	3136 m/s

**Tableau 4** Propriétés de l'aluminium.

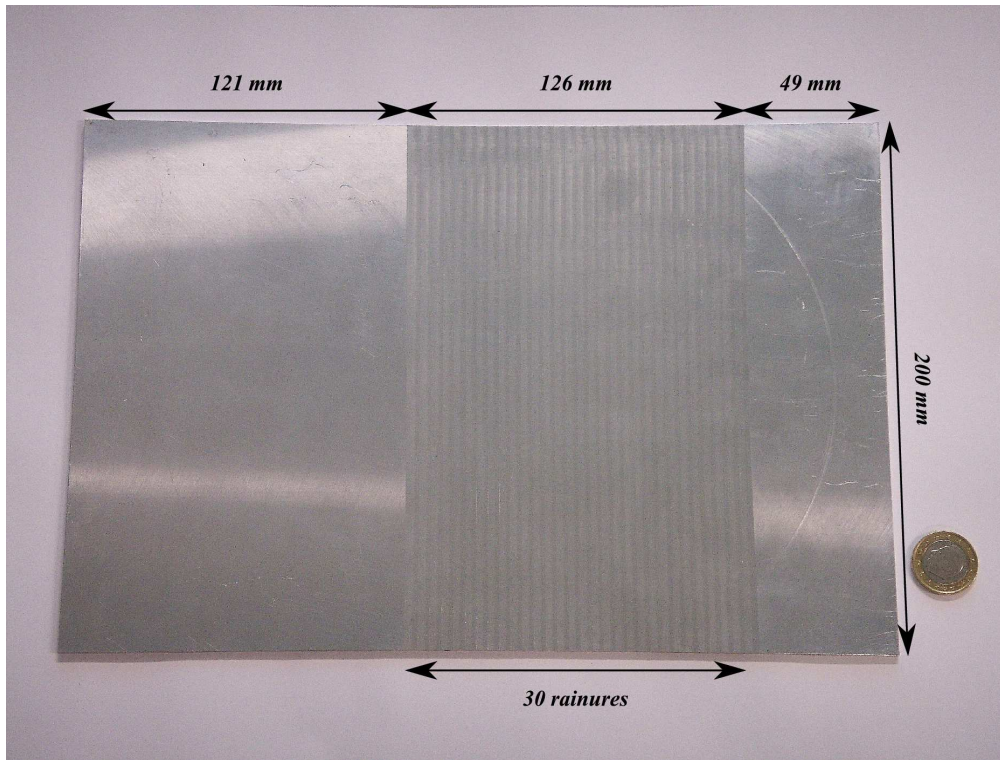


Figure 76 Echantillon expérimental étudié,  $2h = 3 \text{ mm}$  ,  $\Lambda = 4,2 \text{ mm}$  ,  $p = 120 \mu\text{m}$  .

## 4.2 Description de l'étude expérimentale

Il s'agit d'étudier expérimentalement les phénomènes au voisinage du gap  $S_0^\Lambda / A_0^\Lambda$  . Il est donc nécessaire dans la gamme de fréquences considérée de générer un mode  $S_0$  unique, sans autre mode parasite.

### 4.2.1 Dispositif expérimental

Les études expérimentales ont été menées sur un guide placé dans l'air. L'ensemble du dispositif utilisé pour l'émission et la réception des signaux est décrit sur la Figure 77.



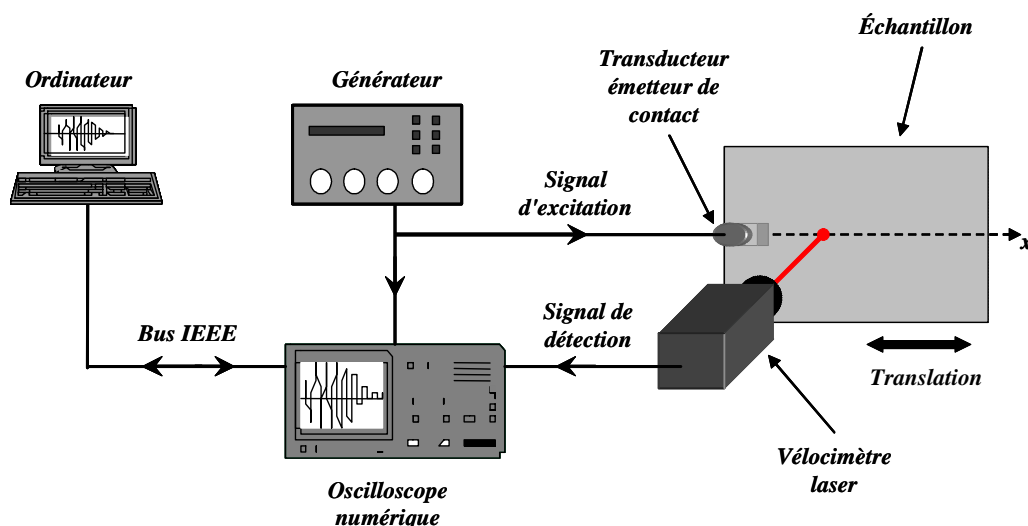


Figure 77 Dispositif expérimental.

### 4.2.2 Réception

Afin de s'affranchir des problèmes de couplage entre le transducteur et l'échantillon d'une part, et, d'autre part, de réaliser des mesures automatisées, la détection laser est utilisée. Celle-ci permet la mesure du déplacement normal à la surface de la plaque. Le vélocimètre laser utilisé est du type POLYTEC® OFV-505. Cette mesure est effectuée en divers endroits régulièrement espacés sur la longueur de la plaque afin de suivre la propagation des différentes ondes. Le principe de fonctionnement de ce dispositif est basé sur la modification de la phase du faisceau laser lors de son interaction avec une onde élastique guidée dans la plaque. Le vélocimètre mesure cette phase en comparant le signal réfléchi au signal émis par le laser (référence). Il délivre alors une tension proportionnelle à la composante normale de la vitesse des particules.

Le coefficient de proportionnalité entre la tension mesurée et la vitesse particulaire est de  $25 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$  (la vitesse particulaire est de l'ordre du  $\text{mm} \cdot \text{s}^{-1}$ ). Pour ce calibre, la fréquence maximale d'utilisation est de  $1,5 \text{ MHz}$ . Après intégration de la vitesse particulaire, la tension de sortie du vélocimètre est proportionnelle à l'amplitude du déplacement normal.

Pour des raisons de stabilité du système laser, la tête laser est fixe et l'ensemble émetteur/plaque est mobile et translaté pas à pas parallèlement au vélocimètre dans la direction de propagation ( $Ox$ ). De cette manière, le déplacement normal en fonction de la position des ondes guidées dans la structure est relevé par pas de  $100 \mu\text{m}$ .

A chaque point de mesure, le signal temporel reçu est codé sur 10 bits et est visualisé sur un oscilloscope numérique LECROY® 9400. Celui-ci permet, outre l'acquisition du signal, le filtrage du bruit. Seule la partie du signal visualisée dans la fenêtre de travail est prise en compte pour les différents traitements qui suivront. Dans le cas d'une fréquence d'échantillonnage de  $100 \text{ MHz}$  et une durée du signal de  $100 \mu\text{s}$ , le nombre d'échantillons acquis dans la plaque étudiée est typiquement de 10000 points. Dans le but d'améliorer le rapport signal sur bruit, le signal numérisé est moyenné sur 200 acquisitions successives. Le micro-ordinateur enregistre ensuite le signal échantillonné temporellement par l'oscilloscope  $s(x, t)$ , pour chaque position de mesure.

Par ailleurs, le micro-ordinateur assure aussi le pilotage de l'oscilloscope et des translations de l'ensemble plaque/émetteur.

### 4.2.3 Traitement des résultats expérimentaux

Pour identifier les différents modes éventuellement présents, une double transformée de Fourier du signal expérimental  $s(x,t)$  est effectuée : l'une temporelle et l'autre spatiale. L'ensemble de ce traitement, appelé « *Surface Wave Analysis Method* » [3], est illustré à la Figure 78.

Ainsi, pour chaque position  $x$ , la transformée de Fourier temporelle du signal  $s(x,t)$  est calculée. Les données obtenues se situent dans l'espace  $(x, f)$  et sont représentées par la fonction  $S(x, f)$ . Pour chaque fréquence  $f$ , une transformée de Fourier spatiale est appliquée sur cette fonction  $S(x, f)$ . La fonction  $Y(k, f)$  qui résulte de cette dernière manipulation est située dans l'espace dual nombre d'onde–fréquence, appelé aussi « espace tout–fréquence ».

Le module  $|Y(k, f)|$  peut enfin être représenté en niveaux de couleurs. Celui-ci est proportionnel à l'amplitude du déplacement normal du mode de Lamb considéré [4].

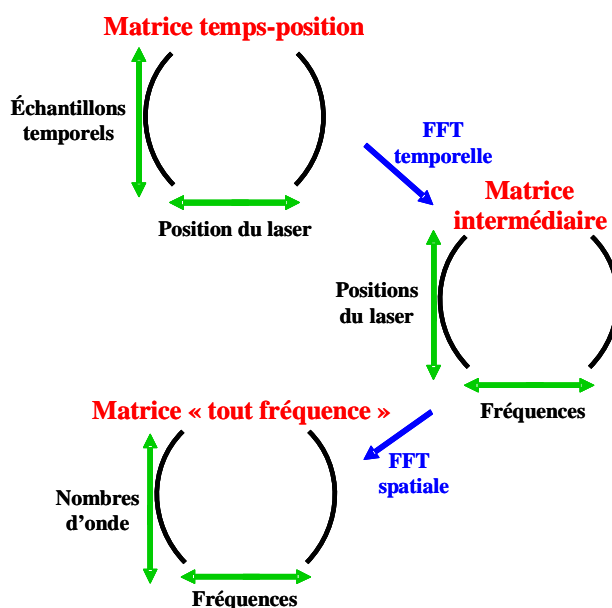


Figure 78 Traitement des signaux acquis.

### 4.2.4 Emission

#### 4.2.4.1 Signal d'excitation

L'émission est assurée par l'ensemble constitué d'un générateur de signaux et d'un transducteur émetteur de contact. Un générateur HEWLETT-PACKARD<sup>®</sup> 33120A délivre un train d'ondes sinusoïdales (ou « burst ») d'amplitude  $10V_{pp}$  (crête à crête) au transducteur piézoélectrique. Celui-ci convertit le signal électrique en un signal ultrasonore dans sa bande passante.

La tension délivrée par le générateur comprend  $n=10$  périodes  $T$  (Figure 79), modulée en amplitude par une sinusoïde de période  $2\tau = 2nT$  :

$$V_{GBF}(t) = \begin{cases} A \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{\tau}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T}\right) & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.3.4)$$

avec  $\tau = nT$  la durée du signal et  $A$  l'amplitude.

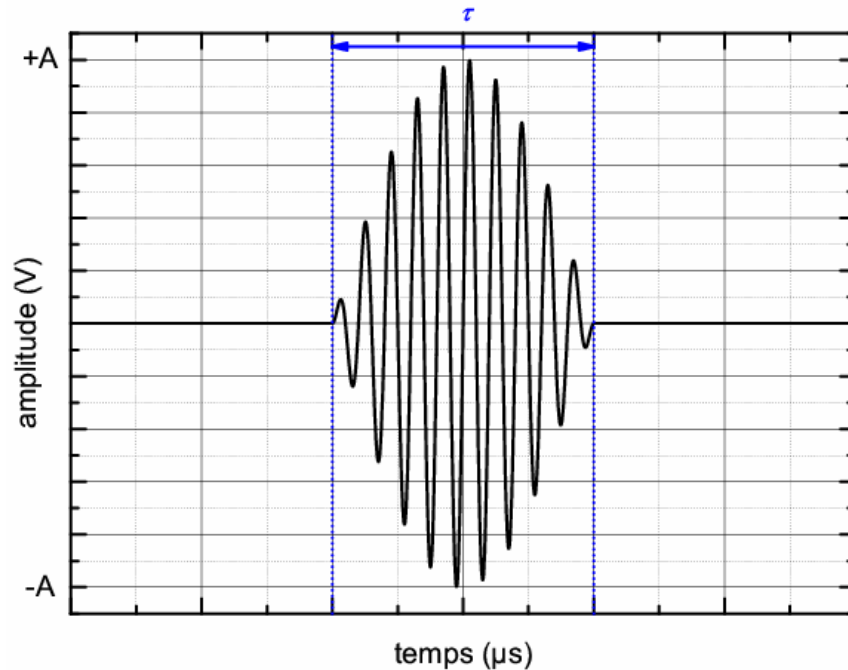


Figure 79 Exemple de signal d'excitation pour  $n = 10$  périodes.

#### 4.2.4.2 Interface transducteur/plaque

Deux possibilités ont été retenues pour générer les ondes de Lamb dans la plaque : soit le transducteur est couplé à un sabot de plexiglas et placé sur la face non rugueuse de la plaque, soit il est simplement accolé en bout de plaque. Dans ces deux cas, le contact avec la plaque est optimisé à l'aide d'un gel visqueux servant à l'amélioration du couplage acoustique.

##### Cas de la génération des ondes de Lamb à l'aide d'un sabot

La méthode du coin solide est utilisée [5]. Le transducteur émetteur est monté sur un sabot (appelé coin) d'inclinaison  $\theta_i$  (Figure 80). Pour sélectionner le mode à générer, l'angle d'incidence  $\theta_i$  est choisi grâce à la relation de Snell-Descartes :

$$\theta_i = \arcsin\left(\frac{v_{\varphi}^{Sabot}}{v_{\varphi}^{Lamb}}\right) \quad (3.3.5)$$

où  $v_{\varphi}^{Lamb}$  est la vitesse de phase de l'onde de Lamb générée, de longueur d'onde  $\lambda_{Lamb}$ , obtenue à l'aide des courbes de dispersion et  $v_{\varphi}^{Sabot}$  la vitesse de phase des ondes



longitudinales dans le matériau constituant le sabot, de longueur d'onde  $\lambda_{Sabot}$ . En l'occurrence, la vitesse du plexiglas est de  $v_{\phi}^{Sabot} = 2720 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

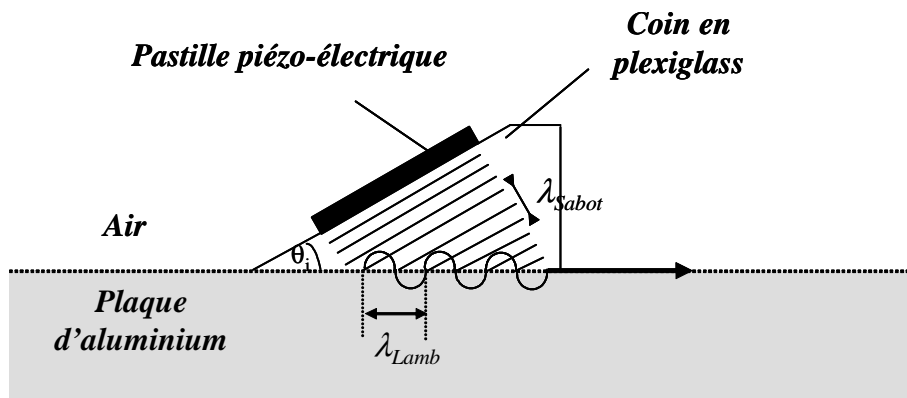


Figure 80 Génération d'une onde de Lamb par la méthode du coin.

A un mode de Lamb choisi correspond un sabot avec un angle  $\theta_i$  donné. Les courbes de la Figure 81 permettent de sélectionner l'angle du sabot. Ces courbes s'obtiennent en utilisant les courbes de dispersion d'une plaque plane d'aluminium (section 1.2.3 - chapitre 1) et l'équation (3.3.5).

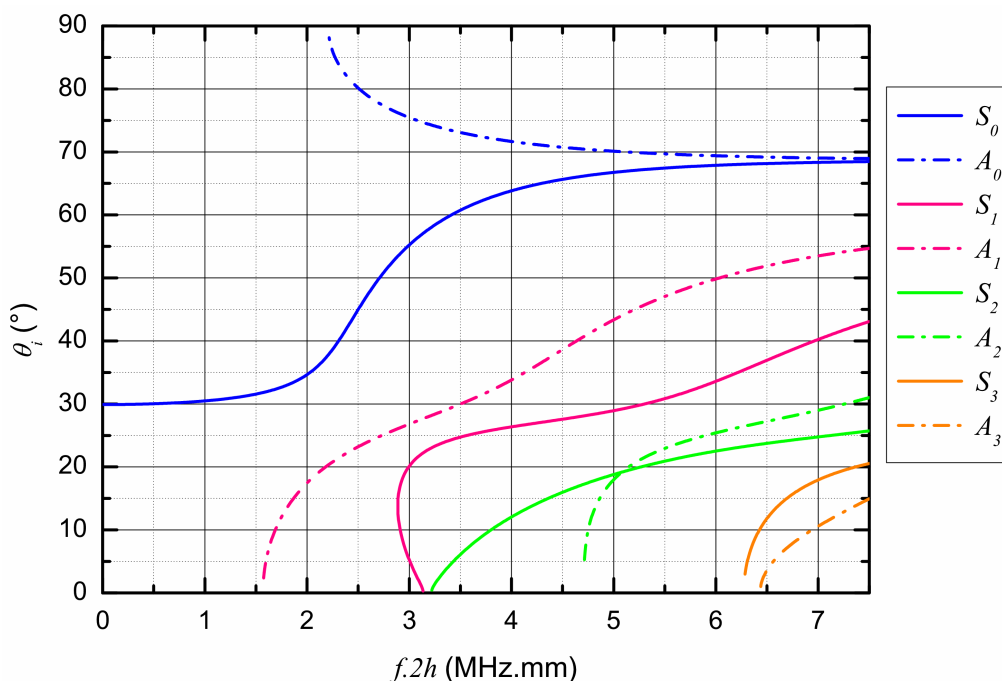


Figure 81 Courbes de dispersion angulaire des ondes de Lamb dans une plaque plane d'aluminium.

Toutefois, à cause de la directivité du transducteur et des réflexions multiples dans le sabot, la plaque est excitée dans une gamme angulaire centrée sur l'angle géométrique déterminé ci-dessus. En conséquence, le mode de Lamb est généré selon une gamme de nombres d'onde dans la bande de fréquences du signal d'excitation.

## Chapitre 4 : Etude expérimentale

Un sabot avec un angle  $\theta_i = 30^\circ$  a été utilisé afin de générer une onde  $S_0$  à la fréquence  $f = 350 \text{ kHz}$  sur une plaque vierge d'aluminium de  $3 \text{ mm}$ . La Figure 82 représente le dispositif expérimental dans lequel le transducteur de contact utilisé est positionné sur un bloc usiné et maintenu par un petit dispositif mécanique (Figure 83). Les déplacements normaux à la surface de la plaque sont relevés sur une distance de  $100 \text{ mm}$  à partir de  $35 \text{ mm}$  du transducteur (Figure 84). Les traitements décrits à la section 4.2.3 sont ensuite appliqués aux données recueillies expérimentalement. La Figure 85 représente le résultat de la transformée de Fourier temporelle et spatiale dans le plan « tout-fréquence ». Le champ incident ( $k > 0$ ) est constituée d'une onde  $S_0$  prédominante et d'une onde  $A_0$ . Ces deux ondes sont réfléchies ( $k < 0$ ) à l'extrémité de la plaque.



Figure 82 Photographie du dispositif expérimental avec le système sabot+transducteur.

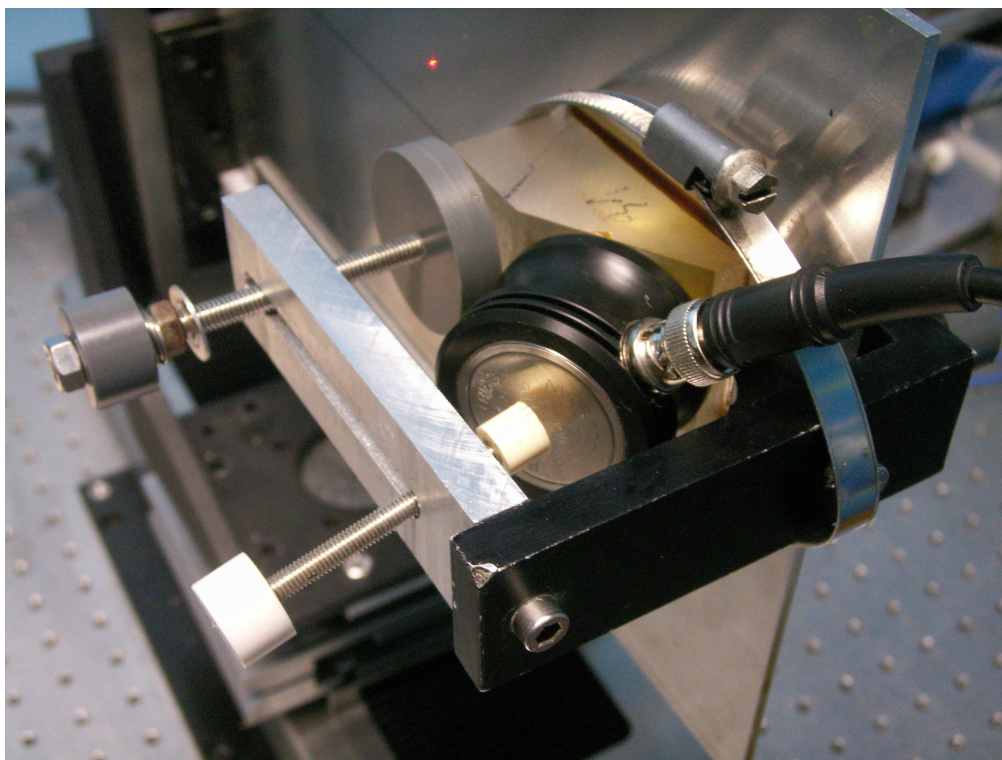


Figure 83 Détail du montage du système sabot+transducteur.

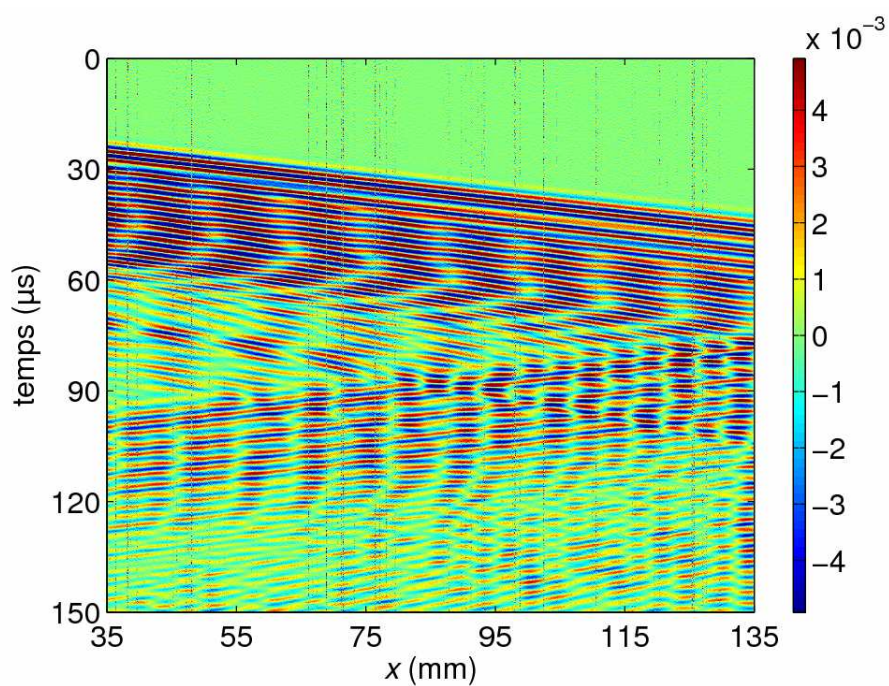
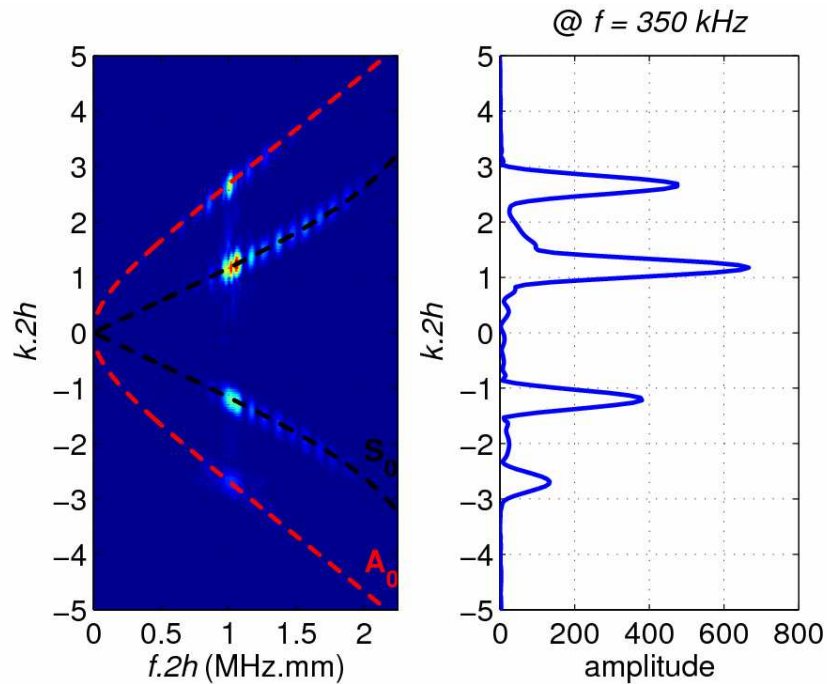


Figure 84 Image spatio-temporelle des déplacements normaux sur une plaque vierge pour  $f = 350 \text{ kHz}$ .





**Figure 85** Représentation « tout-fréquence » des déplacements normaux sur une plaque vierge pour  $f = 350\text{kHz}$ . Les courbes de dispersion théoriques des modes  $S_0$  (en noir) et  $A_0$  (en rouge) dans le cas d'une plaque plane infinie sont superposées.

Cas de la génération des ondes de Lamb avec le transducteur en bout de plaque

Le montage est présenté à la Figure 86. La Figure 87 présente en détail le système de maintien du transducteur de contact sur l'extrémité de la plaque.

La Figure 88 représente les déplacements normaux à la surface de la plaque relevés sur une distance de  $100\text{ mm}$  à partir de  $15\text{ mm}$  du transducteur. La Figure 89 représente dans le plan « tout-fréquence » le résultat de la transformée de Fourier temporelle et spatiale. Le champ incident ( $k > 0$ ) est constitué d'une onde  $S_0$  prédominante et d'une onde  $A_0$ . Ces deux ondes sont réfléchies ( $k < 0$ ) à l'extrémité de la plaque.

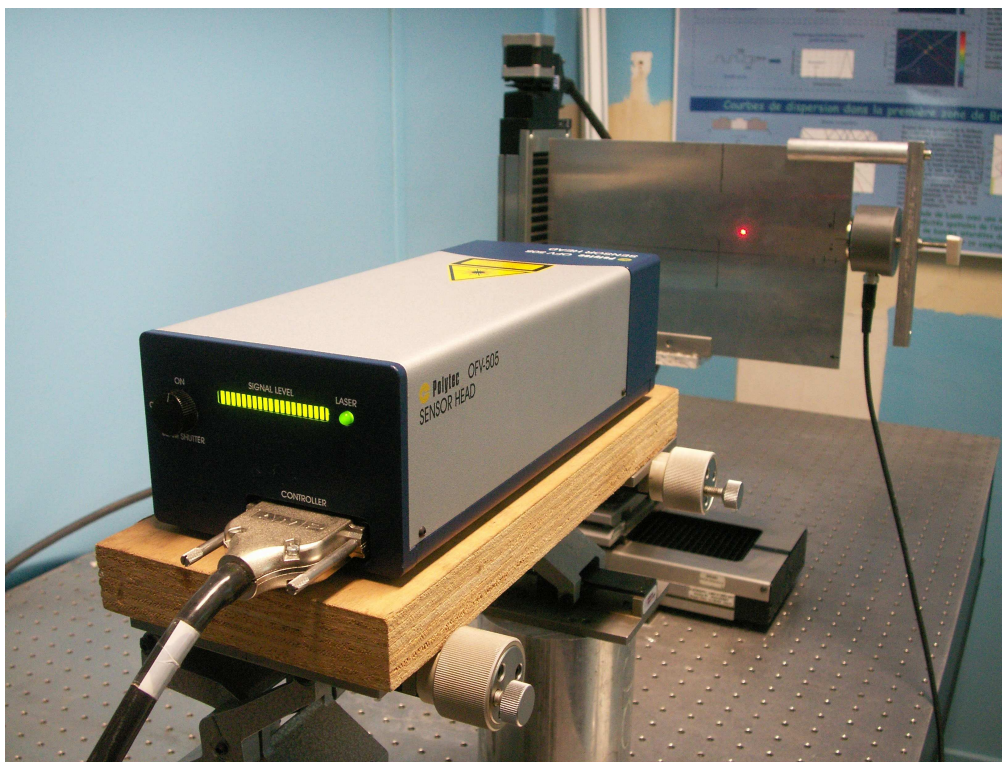


Figure 86 Photographie du dispositif expérimental avec le transducteur émetteur en bout de plaque.

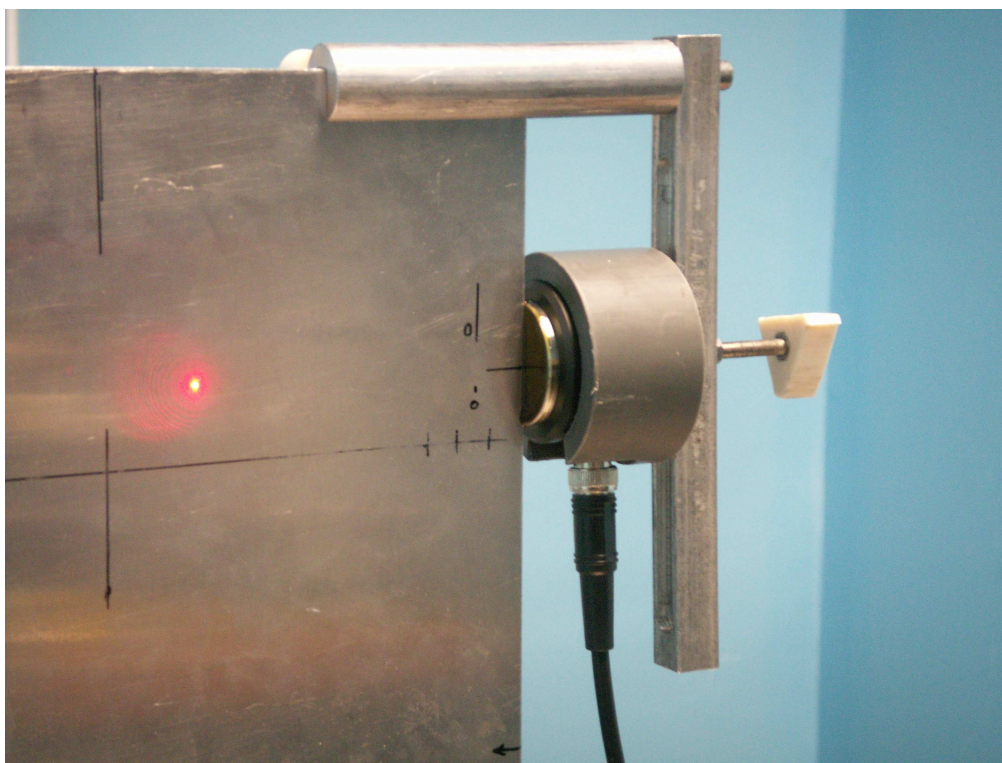


Figure 87 Détail du montage avec le transducteur en bout de plaque.

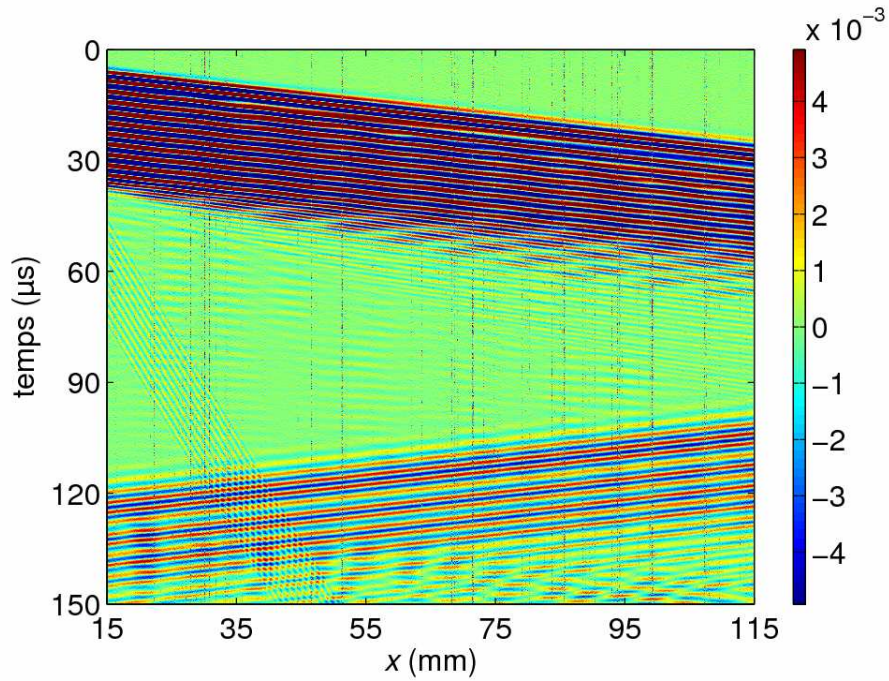


Figure 88 Image spatio-temporelle des déplacements normaux sur une plaque vierge pour  $f = 350 \text{ kHz}$ .

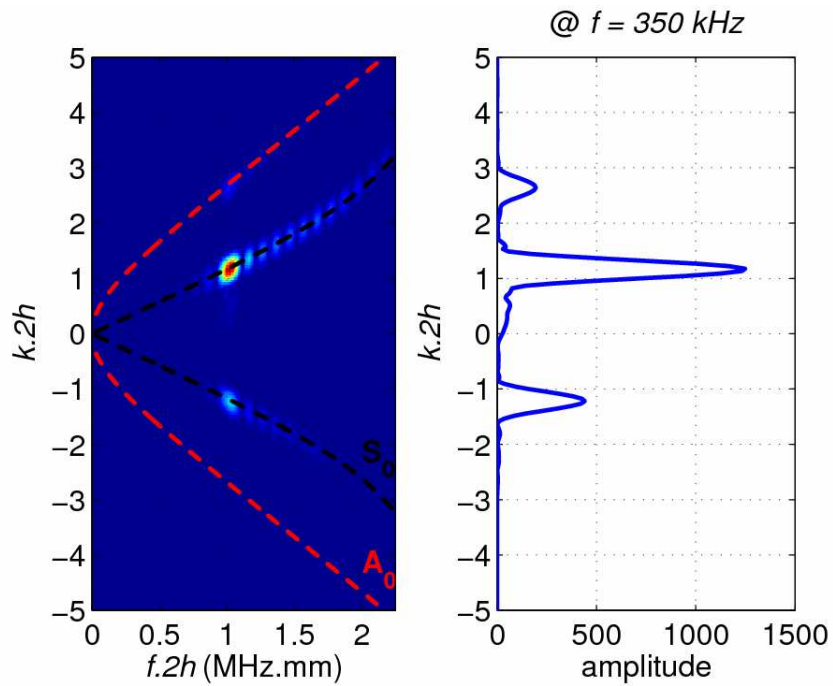


Figure 89 Représentation « tout-fréquence » des déplacements normaux sur une plaque vierge pour  $f = 350 \text{ kHz}$ . Les courbes de dispersion théoriques des modes  $S_0$  (en noir) et  $A_0$  (en rouge) dans le cas d'une plaque plane infinie sont superposées.



Choix du système d'excitation

Afin de comparer les deux systèmes d'excitation présentés précédemment, la Figure 90 représente une coupe à la fréquence d'excitation  $f = 350 \text{ kHz}$  de la Figure 85 (en rose) et de la Figure 89 (en bleu). Seules les ondes incidentes ( $k > 0$ ) sont retenues. La génération en bout de plaque permet l'excitation du mode  $S_0$  avec une amplitude près de deux fois plus importante que celle du mode  $S_0$  généré par la méthode du coin.

Un autre avantage de la génération en bout de plaque est de minimiser l'amplitude du mode parasite  $A_0$  incident. Ce dernier n'est plus détectable. De ce fait, le filtrage temporel n'est pas crucial : si, dans le cas d'une plaque comportant un réseau limité de périodicités triangulaires, un mode  $A_0$  apparaît sur les représentations « tout-fréquence » avec un nombre d'onde négatif, ce sera le fait du réseau et non celui d'une réflexion en bout de plaque.

De ce fait, la génération des ondes de Lamb se fera par la suite avec le transducteur en bout de plaque.

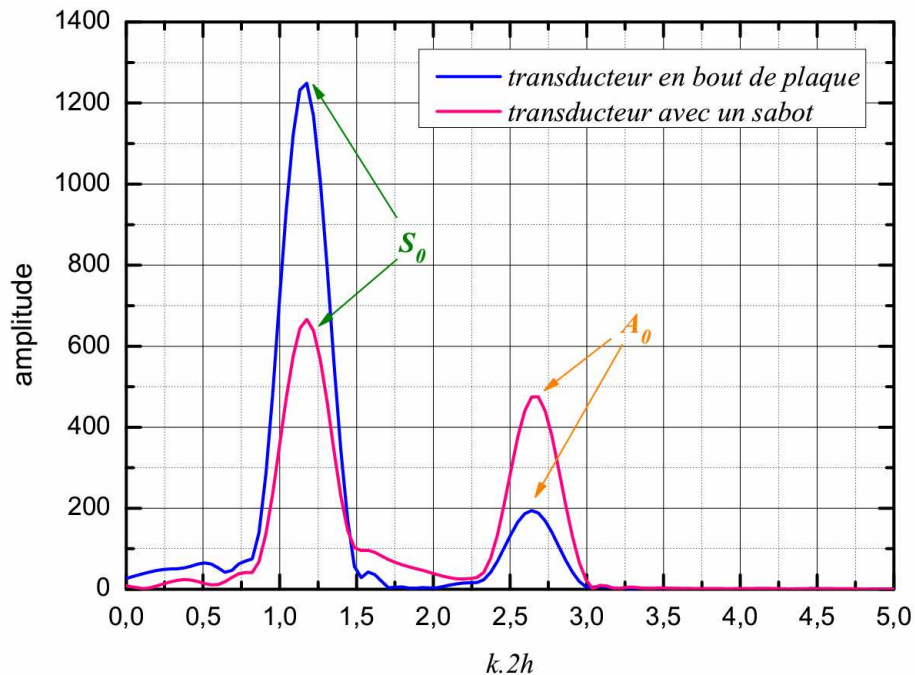


Figure 90 Représentation à  $f = 350 \text{ kHz}$  des composantes des ondes incidentes obtenues lorsque le transducteur est en bout de plaque (en bleu) et lorsqu'il est associé à un sabot (en rose).

### 4.3 Propagation avant le réseau

Dans cette première étude, les déplacements sont relevés par le vélocimètre à partir de  $15 \text{ mm}$  du transducteur. Les relevés sont effectués par pas de  $100 \mu\text{m}$  sur une distance de  $106 \text{ mm}$ . Les fréquences d'excitation utilisées sont  $350 \text{ kHz}$ ,  $396 \text{ kHz}$ ,  $400 \text{ kHz}$  et  $450 \text{ kHz}$  de façon à explorer l'ensemble des fréquences de la bande interdite et de son

voisinage. Le traitement décrit à la section 4.2.3 est appliqué aux résultats obtenus pour chaque fréquence.

### 4.3.1 Identification des modes

#### 4.3.1.1 Avant le gap intra-bande

La Figure 91 représente l'évolution temporelle des déplacements en surface avant le réseau. La plaque est excitée par une onde de Lamb de type  $S_0$  à la fréquence  $f = 350 \text{ kHz}$ . Les ondes incidentes se propagent dans le sens des  $x$  croissants (de la gauche vers la droite) et les ondes réfléchies en sens inverse.

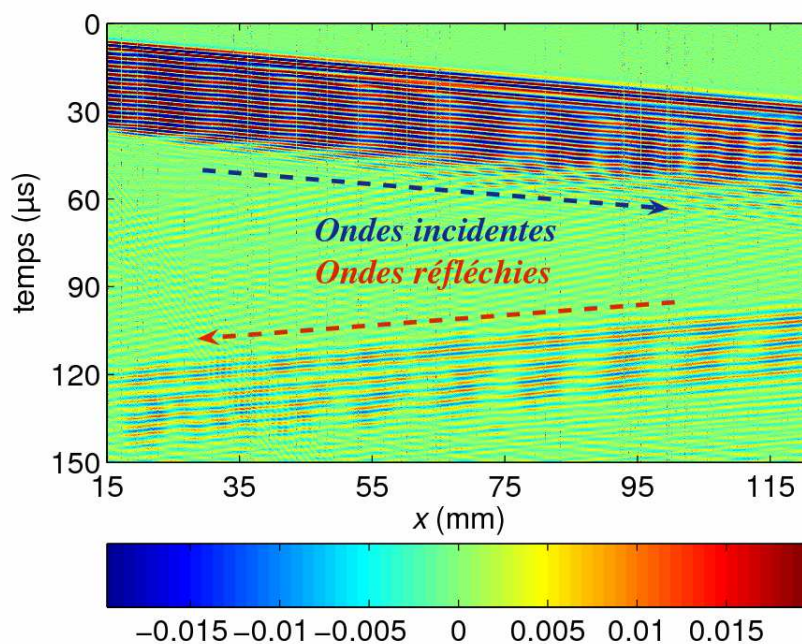
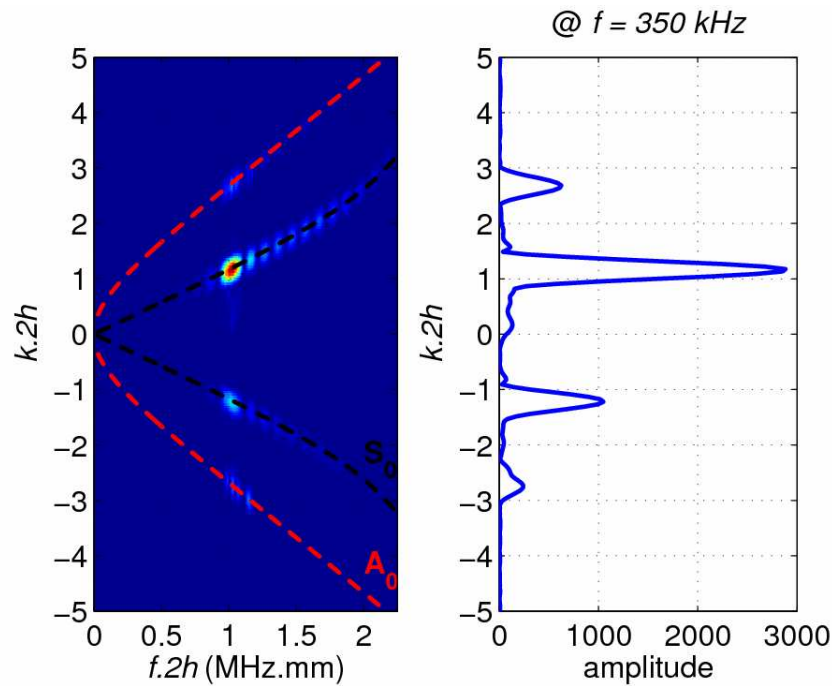


Figure 91 Image spatio-temporelle des déplacements normaux avant le réseau pour  $f = 350 \text{ kHz}$ .

Les transformations décrites à la section 4.2.3 sont ensuite appliquées au signal expérimental  $s(x,t)$  de la Figure 91. La Figure 92 représente le module de la transformée de Fourier temporelle et spatiale du signal expérimental. La représentation utilisée est le plan « tout-fréquence » dans laquelle les ondes incidentes ont un nombre d'onde positif et les ondes réfléchies, un nombre d'onde négatif. Du fait que les déplacements en surface sont relevés avant le réseau, l'identification des modes s'effectue à l'aide des courbes de dispersion théoriques d'une plaque plane infinie. Deux modes sont ainsi identifiés : le mode  $A_0$  et le mode  $S_0$  (prédominant). Les signaux réfléchis proviennent de l'extrémité de la plaque.

Par ailleurs, sur cette représentation, il est aisé de déterminer le signe de la vitesse de phase ( $v_\varphi = \omega/k$ ) et les sens de propagation des ondes  $A_0$  et  $S_0$ .





**Figure 92** Représentation « tout-fréquence » des déplacements normaux avant le réseau pour  $f = 350 \text{ kHz}$ . Les courbes de dispersion théoriques des modes  $S_0$  (en noir) et  $A_0$  (en rouge) dans le cas d'une plaque plane infinie sont superposées.

Du fait de la durée limitée du train d'ondes utilisé pour l'excitation, des lobes secondaires sont présents. Ceux-ci suivent la courbe de dispersion théorique du mode  $S_0$  même pour des fréquences en dehors de la bande passante du transducteur. Cette remarque est valable pour toutes les représentations « tout-fréquence » de ce chapitre.

#### 4.3.1.2 Dans le gap intra-bande

La Figure 93 représente l'évolution temporelle des déplacements normaux en surface avant le réseau en fonction de la position. La plaque est excitée par une onde de Lamb de type  $S_0$  à la fréquence  $f = 396 \text{ kHz}$ . Sur cette figure, une interaction entre l'onde incidente et le réseau est observée. Celle-ci se manifeste par l'apparition d'un signal réfléchi. Ce signal est caractérisé dans le plan « tout-fréquence » (Figure 94). L'apparition d'une tache correspondant à une onde  $A_0$  se propageant suivant les  $x$  décroissants  $y$  est effectivement relevée. Comme précédemment, deux modes sont identifiés : le mode  $A_0$  et le mode  $S_0$  (prédominant).

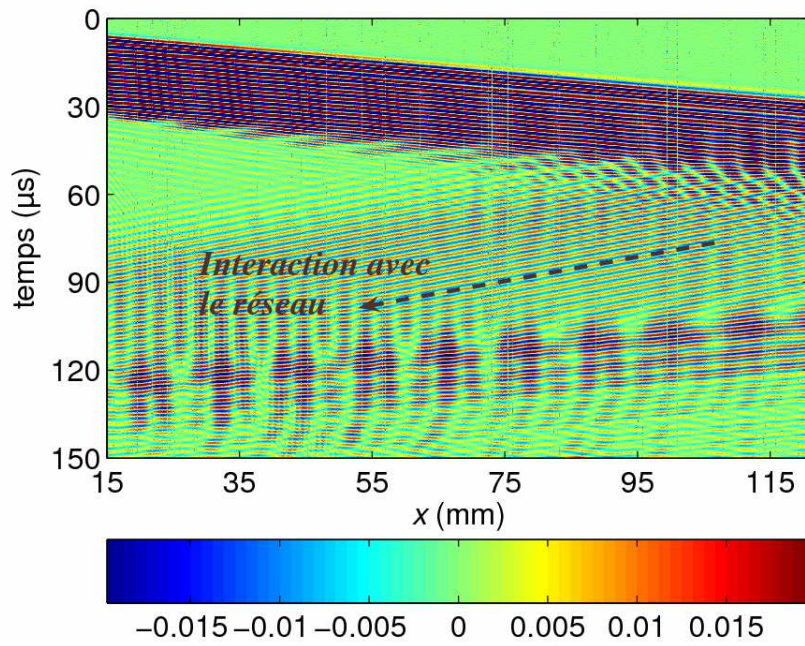


Figure 93 Image spatio-temporelle des déplacements normaux avant le réseau pour  $f = 396 \text{ kHz}$ .

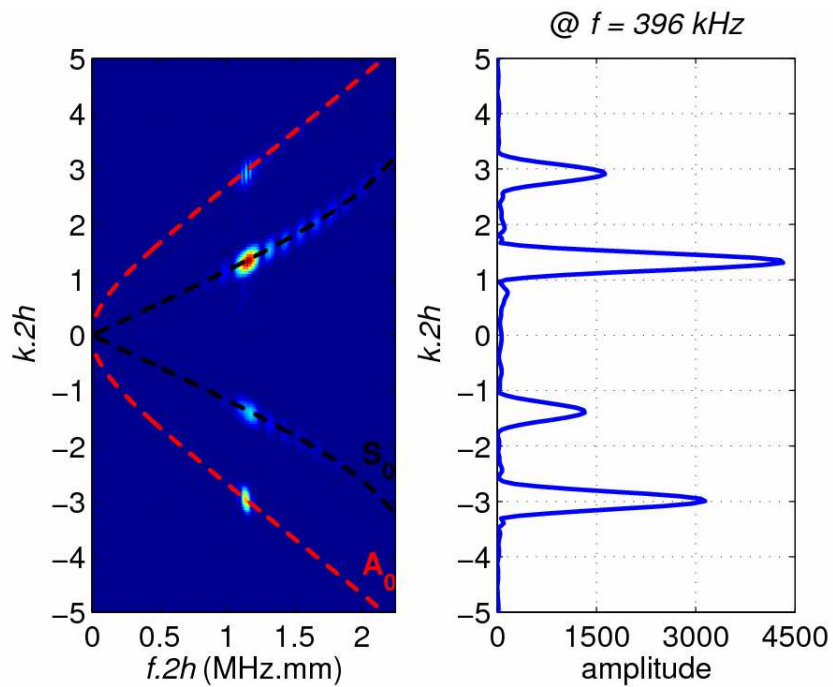


Figure 94 Représentation « tout-fréquence » des déplacements normaux avant le réseau pour  $f = 396 \text{ kHz}$ . Les courbes de dispersion théoriques des modes  $S_0$  (en noir) et  $A_0$  (en rouge) dans le cas d'une plaque plane infinie sont superposées.

### 4.3.1.3 Après le gap intra-bande

La Figure 95 représente l'évolution temporelle des déplacements en surface avant le réseau en fonction de la position. La plaque est excitée par une onde de Lamb de type  $S_0$  à la fréquence  $f = 450 \text{ kHz}$ . Cette figure ne montre pas de réflexion par le réseau.

La Figure 96 représente le module de la transformée de Fourier temporelle et spatiale du signal expérimental de la Figure 95.

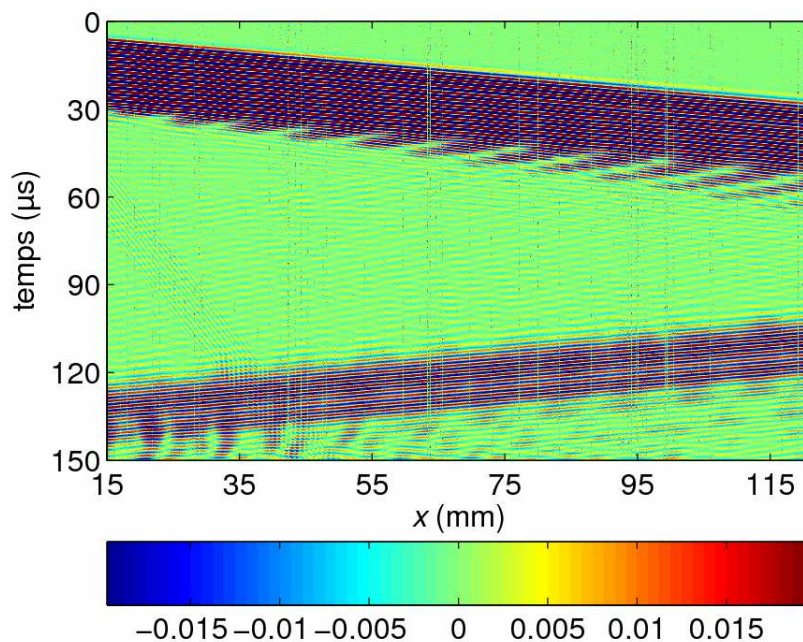
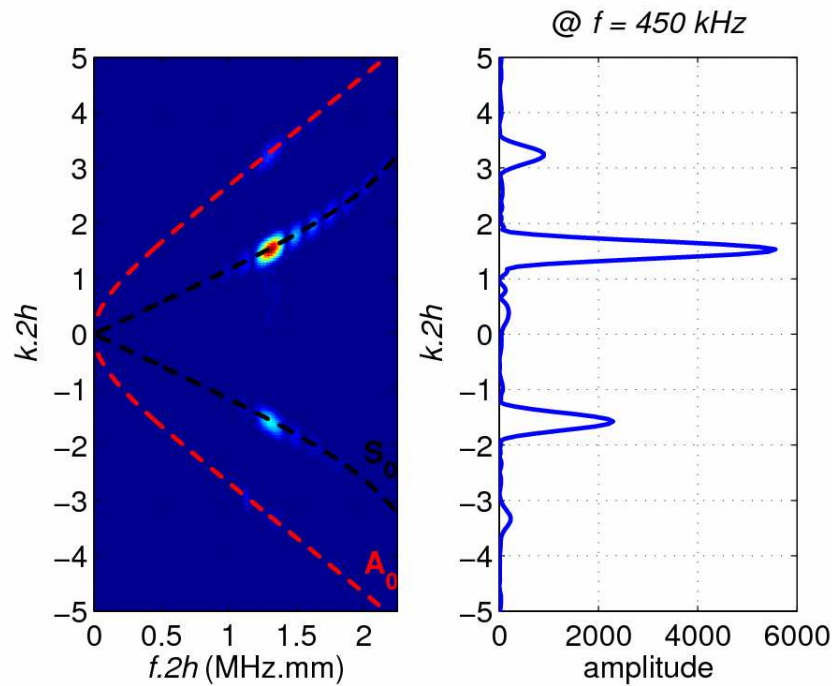


Figure 95 Image spatio-temporelle des déplacements normaux avant le réseau pour  $f = 450 \text{ kHz}$ .



**Figure 96** Représentation « tout-fréquence » des déplacements normaux avant le réseau pour  $f = 450 \text{ kHz}$ . Les courbes de dispersion théoriques des modes  $S_0$  (en noir) et  $A_0$  (en rouge) dans le cas d'une plaque plane infinie sont superposées.

En définitive, un couplage existe entre le réseau et l'onde incidente pour des fréquences incluses dans le gap. Ce couplage se manifeste par l'apparition d'une onde  $A_0$  rétroconvertie (Figure 94). D'un point de vue qualitatif, l'expérience montre bien que c'est pour des fréquences comprises dans la bande interdite qu'un couplage se produit entre les modes  $S_0$  et  $A_0$ .

#### 4.3.2 Aspect quantitatif

En premier lieu, sur chacune des représentations « tout-fréquence » précédentes (Figure 92, Figure 94, Figure 96) des coupes à différentes fréquences sont effectuées et les amplitudes des pics des ondes  $A_0$  rétroconverties et  $S_0$  incidentes sont obtenues. D'après la section 3.2.1 (chapitre 3), il est alors possible de calculer le coefficient de rétroconversion en énergie de l'onde  $A_0$ , noté  $R_{A_0}$ .

La Figure 97 représente l'évolution en fonction de la fréquence du coefficient en énergie de rétroconversion. Sur cette figure, les résultats de quatre expériences sont superposés permettant de couvrir ainsi une gamme de fréquences suffisante autour du gap.

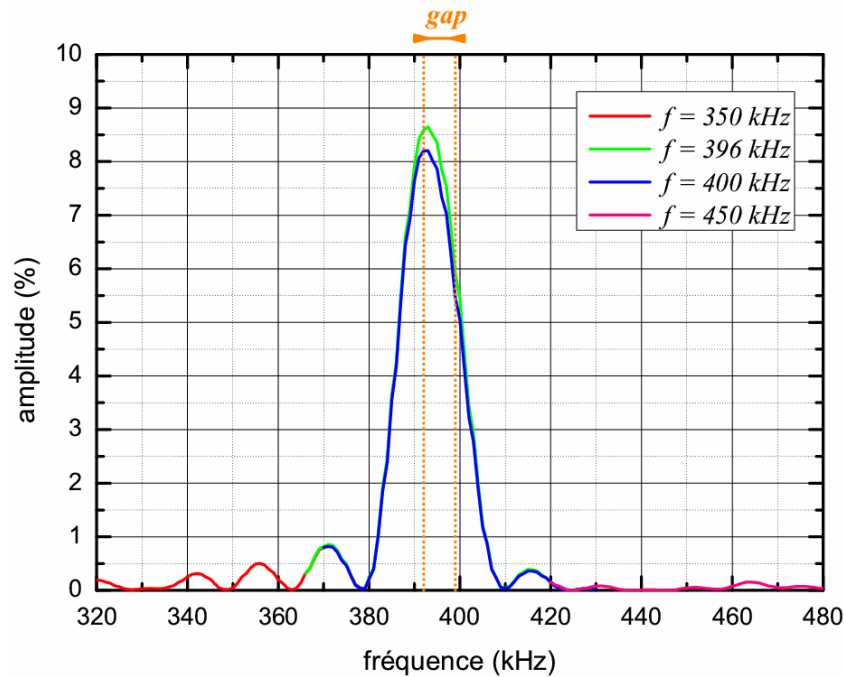


Figure 97 Evolution du coefficient en énergie de rétroconversion  $R_{A_0}$  pour un réseau de  $N = 30$  rainures,  $2h = 3 \text{ mm}$ ,  $\Lambda = 4,2 \text{ mm}$ ,  $p = 120 \mu\text{m}$ .

Les signaux associés aux ondes propagatives sont faibles : de l'ordre de  $20 \text{ mV}$  pour les signaux incidents et du millivolt pour les signaux rétroconvertis (Figure 95). Aussi, il est remarquable d'obtenir des résultats expérimentaux en si bon accord avec les résultats numériques présentés à la Figure 61.b du chapitre 3. Le coefficient de rétroconversion en énergie de l'onde  $A_0$  atteint son maximum dans le gap. Sa valeur,  $R_{A_0} \approx 8,5 \%$ , est inférieure à celle donnée par le calcul numérique ( $\max(R_{A_0}^{\text{triangle}}) = 17 \%$  - Figure 73). Ceci s'explique qualitativement par le fait que dans l'expérience le problème est à trois dimensions. En effet, le transducteur émetteur a une taille limitée et le faisceau incident s'étale à la surface de l'échantillon. Il en est de même des ondes issues de la conversion de l'onde incidente. Ainsi, une part importante de l'énergie n'est pas accessible expérimentalement. Ce phénomène a déjà été observé dans d'autres situations physiques [6]. Dans certains cas simples, il est possible de tenir compte de l'ouverture du faisceau mais, ici, le phénomène de conversion se produit à chaque rainure du réseau et la correction à effectuer pour prendre en compte l'étalement du faisceau devient ardue.

#### 4.4 Propagation sous le réseau

Dans cette seconde étude, les déplacements sont relevés par le vélocimètre sous le réseau ( $N = 30$  rainures) à partir de  $106 \text{ mm}$  du transducteur. Les relevés sont effectués par pas de  $100 \mu\text{m}$  sur une distance de  $126 \text{ mm}$ . Les fréquences d'excitation utilisées sont  $350 \text{ kHz}$ ,  $396 \text{ kHz}$  et  $450 \text{ kHz}$ , correspondant à des fréquences situées respectivement avant, pendant et après le gap. Le traitement décrit à la section 4.2.3 est appliqué aux résultats obtenus pour chaque fréquence.



#### 4.4.1 Avant le gap intra-bande

La Figure 98 représente l'évolution temporelle des déplacements en surface sous le réseau en fonction de la position. La plaque est excitée par une onde de Lamb de type  $S_0$  à la fréquence  $f = 350 \text{ kHz}$ .

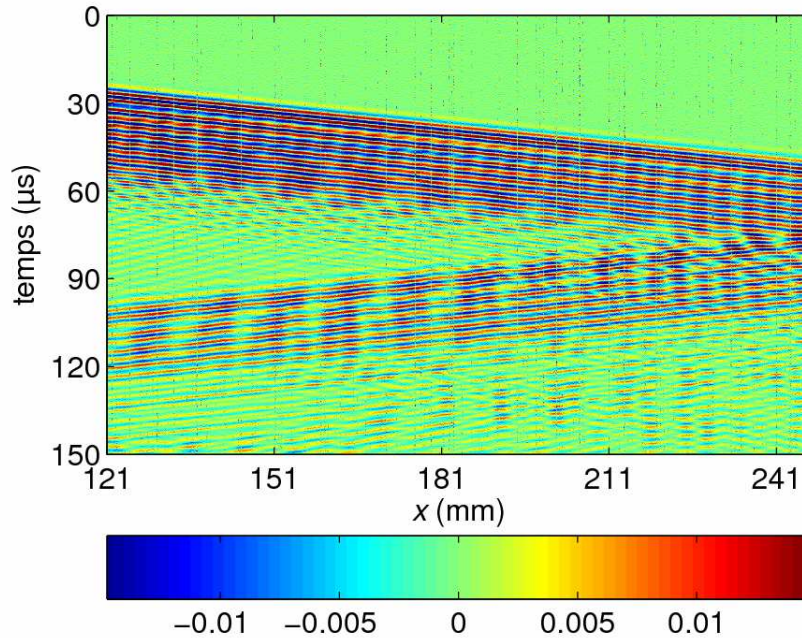
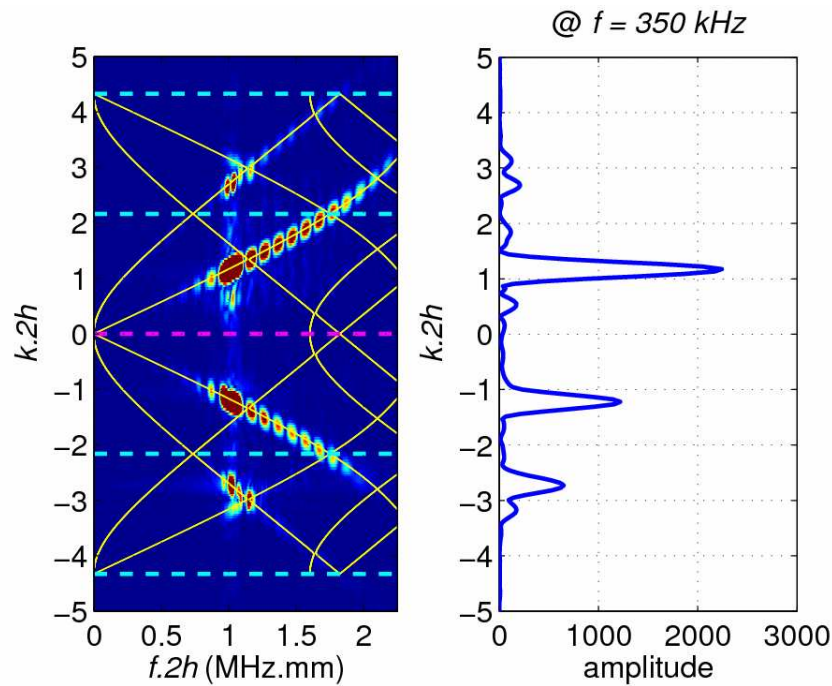


Figure 98 Image spatio-temporelle des déplacements normaux sous le réseau pour  $f = 350 \text{ kHz}$ .

La Figure 99 représente le module de la transformée de Fourier temporelle et spatiale du signal expérimental. La représentation utilisée est le plan « tout-fréquence ». Les déplacements en surface sont relevés sous le réseau. Afin de caractériser les modes présents, les courbes de dispersion d'une plaque infinie à périodicités triangulaires sont superposées. Les taches expérimentales sont bien situées sur ces courbes. L'identification des modes peut alors être effectuée. Deux pseudo-modes de Lamb sont ainsi identifiés : le mode  $A_0^\Lambda$  et le mode  $S_0^\Lambda$  (section 2.2.3 - chapitre 2). Les pointillés bleus symbolisent les frontières de la première et de la seconde zone de Brillouin.



**Figure 99** Représentation « tout-fréquence » des déplacements normaux sous le réseau pour  $f = 350 \text{ kHz}$ . Les courbes de dispersion d’une plaque infinie à périodicités triangulaires (en jaune) sont superposées.

Outre le signal correspondant à la fréquence centrale d’excitation, des taches secondaires, principalement en hautes fréquences ( $f \cdot 2h > 1 \text{ MHz} \cdot \text{mm}$ ), sont observées. Celles-ci suivent également les courbes de dispersion théoriques. Expérimentalement, les amplitudes des signaux relevés par le vélocimètre sont plus importantes en hautes fréquences qu’en basses fréquences. Ceci est lié à la bande passante du transducteur, plus sensible aux fréquences supérieures à sa fréquence centrale qu’aux fréquences inférieures (Figure 74) ; et au fait que la directivité du capteur ultrasonore est meilleure en hautes fréquences et donc que le faisceau acoustique s’étale géométriquement moins en hautes fréquences qu’en basses fréquences sur la plaque.

Pour les ondes  $A_0^\wedge$  incidentes ( $k > 0$ ), les vitesses de phase et de groupe de ces ondes sont de même signe. De même pour les ondes  $A_0^\wedge$  réfléchies ( $k < 0$ ). Le même constat peut être établi pour les ondes  $S_0^\wedge$  sauf en ce qui concerne les taches centrées à  $k \cdot 2h = \pm 3,1$ .

La Figure 100 est un détail de la Figure 99 focalisé sur une de ces taches du mode  $S_0^\wedge$ . D’après cette figure, pour  $k \cdot 2h = \pm 3,1$ , la vitesse de phase de l’onde  $S_0^\wedge$  et sa vitesse de groupe sont de signes opposés. Ceci est confirmé par la Figure 101 qui représente l’image spatio-temporelle du signal réfléchi obtenu en effectuant sur le détail de la Figure 100 le traitement inverse de celui exposé à la section 4.2.3.

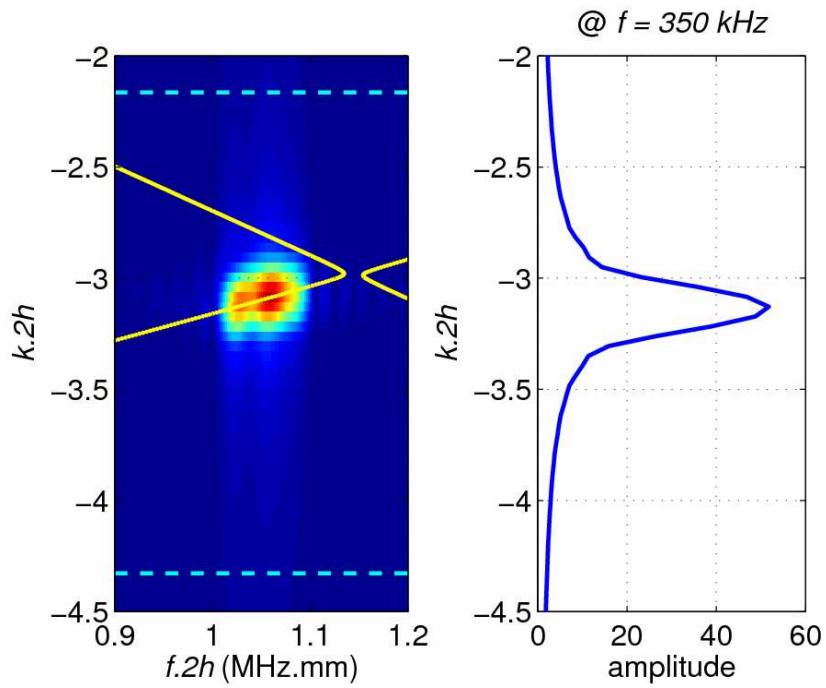


Figure 100 Détail de la représentation « tout-fréquence » des déplacements normaux sous le réseau pour  $f = 350 \text{ kHz}$  .

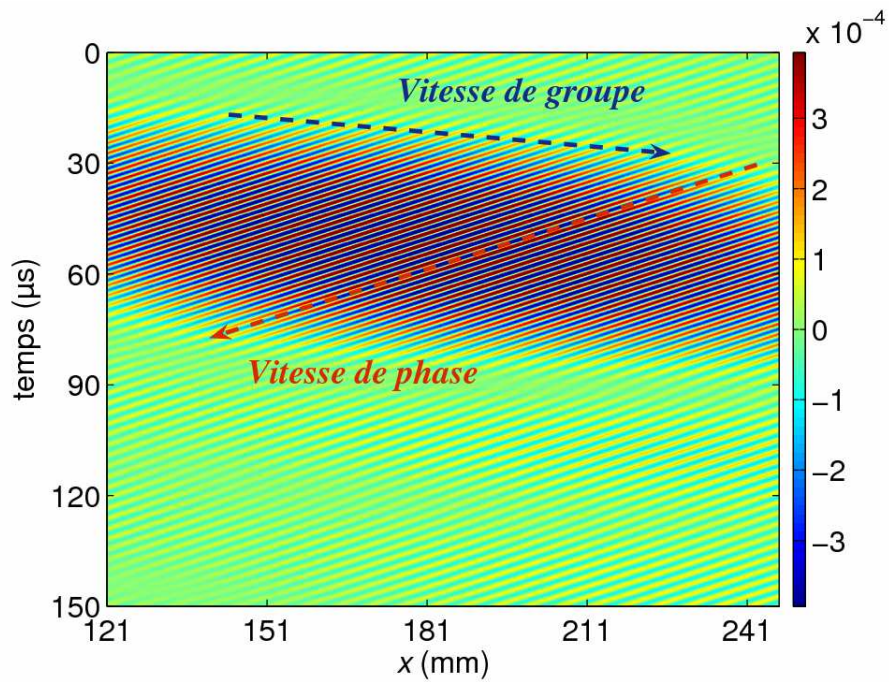


Figure 101 Image spatio-temporelle du signal réfléchi se propageant dans la plaque sous le réseau pour  $f = 350 \text{ kHz}$  .



Considérant un point quelconque du paquet d'ondes situé entre  $20 \mu s$  et  $90 \mu s$ , celui-ci se déplace au cours du temps selon les  $x$  décroissants. La vitesse de phase de ce point est donc négative. Toutefois, l'ensemble du paquet d'ondes se propage de la gauche vers la droite. Le paquet d'ondes représenté sur la Figure 101 a une vitesse de phase et une vitesse de groupe de signes opposés.

Le résultat obtenu montre que sous le réseau les modes observés ne correspondent pas aux modes de Lamb classiques d'une plaque plane infinie : un mode composite  $S_0^\wedge$  est observé avec des vitesses de groupe et de phase de signes opposés.

### 4.4.2 Dans le gap intra-bande

La Figure 102 représente l'évolution temporelle des déplacements en surface sous le réseau en fonction de la position. La plaque est excitée par une onde de Lamb de type  $S_0$  à la fréquence  $f = 396 kHz$ . Cette figure montre bien des signaux réfléchis par chacune des rainures du réseau. La fréquence d'excitation étant comprise dans la bande interdite, ces réflexions sont liées au couplage de l'onde incidente avec le réseau.

La Figure 103 représente le module de la transformée de Fourier temporelle et spatiale du signal expérimental de la Figure 102. Comme prévu par le calcul numérique, les valeurs extrémales d'amplitude du mode converti sont obtenues pour des fréquences comprises dans la bande interdite. La Figure 104 est un détail de la Figure 103 focalisé sur la tache centrée à  $k \cdot 2h = -3$ .

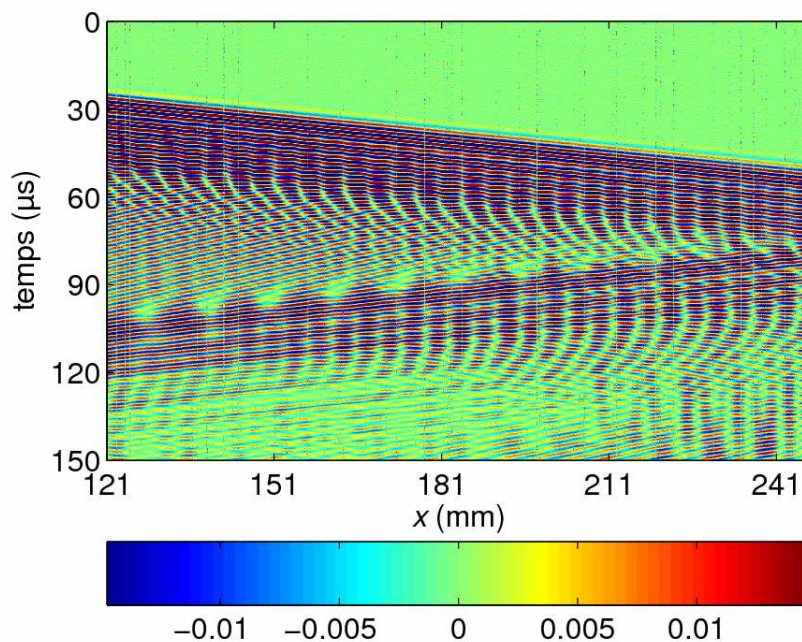


Figure 102 Image spatio-temporelle des déplacements normaux sous le réseau pour  $f = 396 kHz$ .

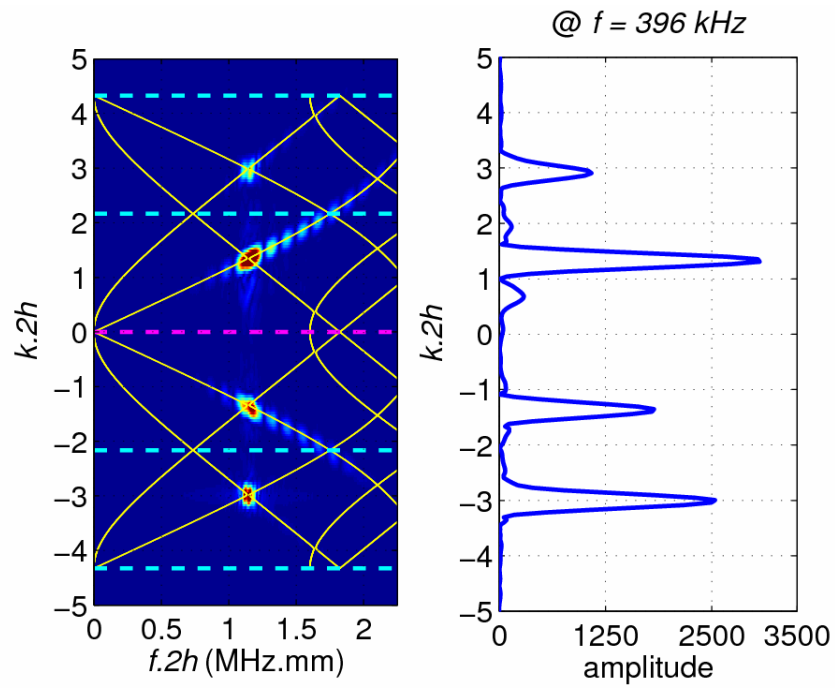


Figure 103 Représentation « tout-fréquence » des déplacements normaux sous le réseau pour  $f = 396 \text{ kHz}$ . Les courbes de dispersion d'une plaque infinie à périodicités triangulaires (en jaune) sont superposées.

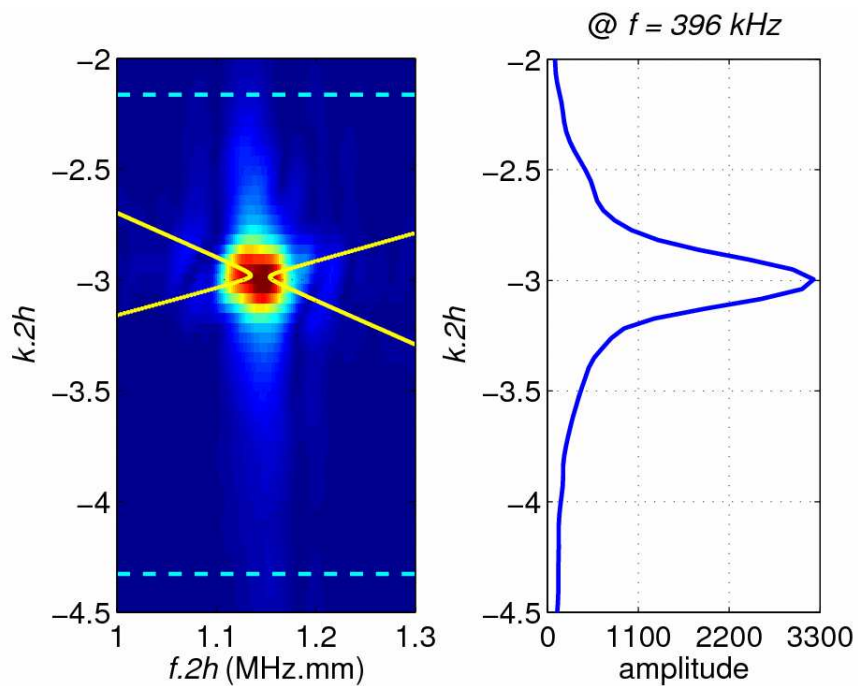


Figure 104 Détail de la représentation « tout-fréquence » des déplacements normaux sous le réseau pour  $f = 396 \text{ kHz}$ .

Dans le gap, les deux pseudo-modes coexistent. Aussi, l'image spatio-temporelle du détail de la Figure 104, issue d'une double transformée de Fourier inverse, n'apporterait aucune information valable du fait qu'il n'est pas possible de séparer leurs différentes contributions.

#### 4.4.3 Après le gap intra-bande

La Figure 105 représente l'évolution temporelle des déplacements en surface sous le réseau en fonction de la position. La plaque est excitée par une onde de Lamb de type  $S_0$  à la fréquence  $f = 450 \text{ kHz}$ . La Figure 106 représente le module de la transformée de Fourier temporelle et spatiale du signal expérimental. La représentation utilisée est le plan « tout-fréquence ».

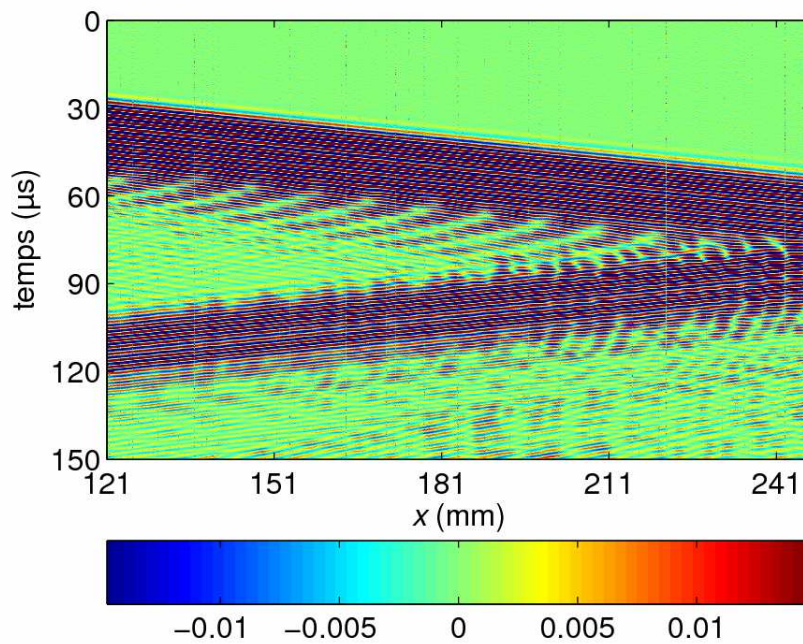
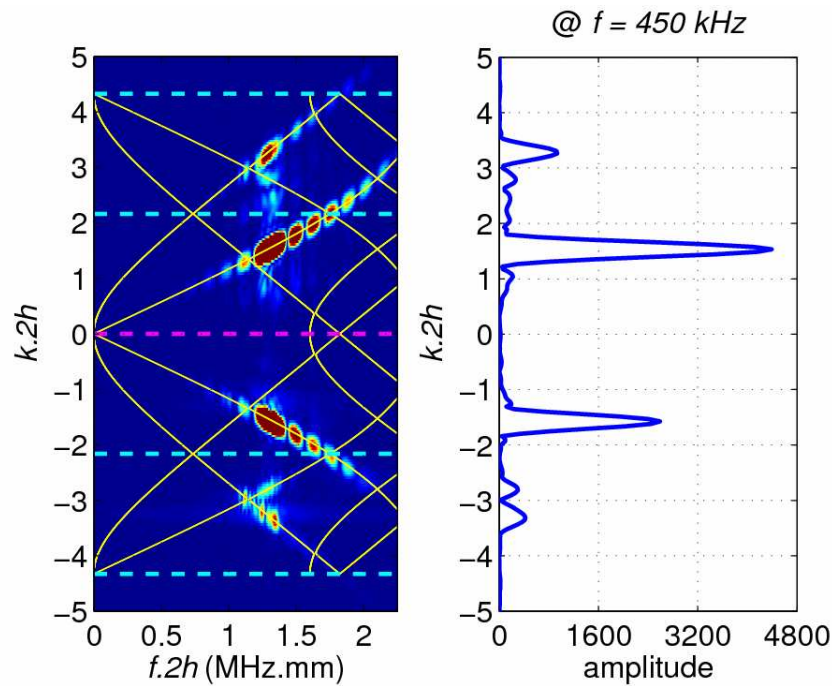


Figure 105 Image spatio-temporelle des déplacements normaux sous le réseau pour  $f = 450 \text{ kHz}$ .



**Figure 106** Représentation « tout-fréquence » des déplacements normaux sous le réseau pour  $f = 450 \text{ kHz}$ . Les courbes de dispersion d'une plaque infinie à périodicités triangulaires (en jaune) sont superposées.

Tout comme à la Figure 99, les ondes  $A_0^\Delta$  incidentes et réfléchies ont des vitesses de phase et de groupe de même signe. Il en va de même pour les ondes  $S_0^\Delta$ , excepté les taches au voisinage de  $k \cdot 2h = \pm 2,9$ . La Figure 107 est un détail de la Figure 106 réduit à l'une de ces tache du mode  $S_0^\Delta$ . D'après cette figure, pour  $k \cdot 2h = \pm 2,9$ , la vitesse de phase de l'onde  $S_0^\Delta$  associée et sa vitesse de groupe sont de signes opposés. La Figure 108, image spatio-temporelle du détail issue d'une double transformée de Fourier inverse, vient soutenir cette affirmation. A l'instar de la Figure 101, le paquet d'ondes situé entre  $20 \mu\text{s}$  et  $80 \mu\text{s}$  a une vitesse de phase et une vitesse de groupe de signes opposés. Celui-ci correspond à un mode composite  $S_0^\Delta$  se propageant sous le réseau.



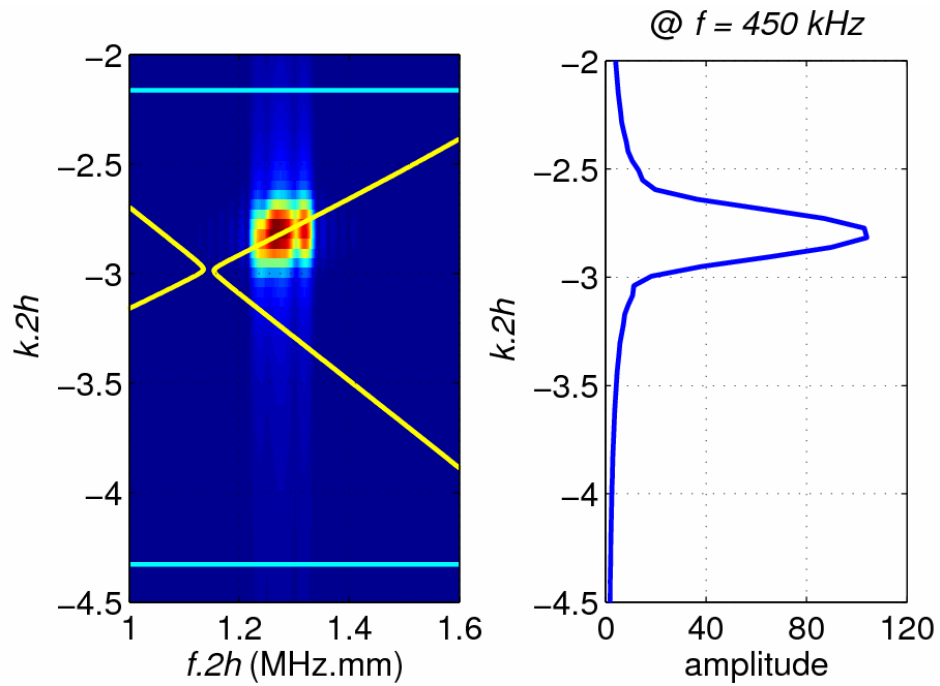


Figure 107 Détail de la représentation « tout-fréquence » des déplacements normaux sous le réseau pour  $f = 450$  kHz .

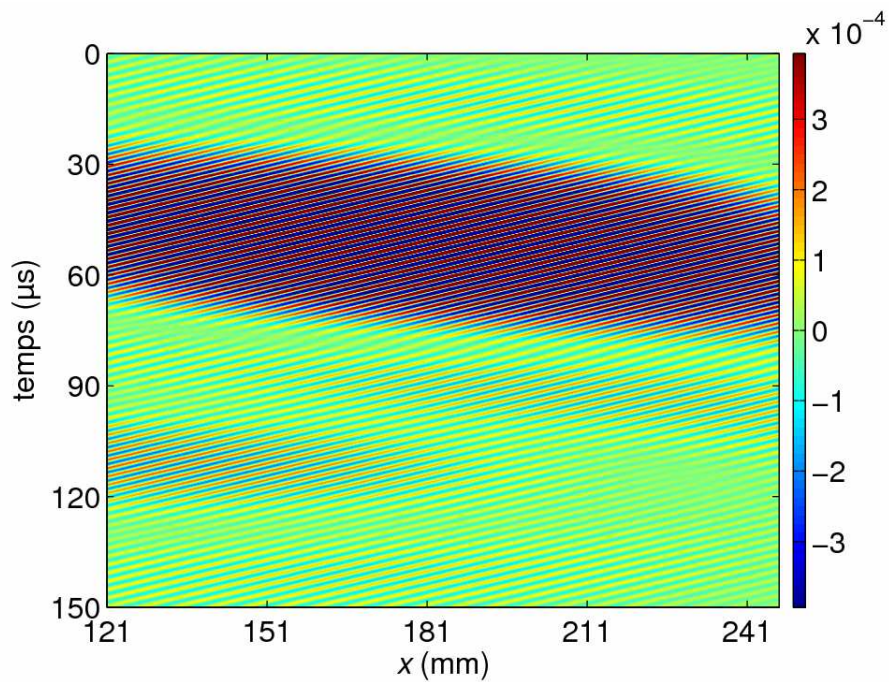


Figure 108 Image spatio-temporelle du signal réfléchi se propageant dans la plaque sous le réseau pour  $f = 450$  kHz .

En définitive, un mode composite est présent sous le réseau. Celui-ci donnera naissance au mode  $S_0$  transmis une fois le réseau traversé.

### 4.5 Conclusion

L'approximation du premier harmonique permet d'envisager un réseau triangulaire comme un bon substitut d'un réseau sinusoïdal. L'étude expérimentale d'une plaque d'aluminium finie présentant un réseau de rainures à périodicité triangulaire a ainsi été réalisée. Celle-ci a confirmé que pour des fréquences voisines d'un gap intra-bande il existe un couplage entre un mode propagatif et un mode rétropropagatif. De plus, ce couplage est maximum à la fréquence centrale du gap ( $R_{A_0} \approx 8,5\%$ ).

Par ailleurs, l'étude des données acquises sous le réseau a permis d'identifier une onde rétropropagative et de suivre son évolution fréquence par fréquence. L'existence de pseudo-modes de Lamb a été mise en évidence. Il est donc possible d'observer la formation du couplage au niveau du gap intra-bande.

### 4.6 Bibliographie

- [1] T. Kundu, S. Banerjee, and K.V. Jata, "An experimental investigation of guided wave propagation in corrugated plates showing stop bands and pass bands," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 120, p. 1217-1226, 2006.
- [2] B. Bonello, C. Charles, and F. Ganot, "Lamb waves in plates covered by a two-dimensional phononic film," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 90, p. 021909(3), 2007.
- [3] D.N. Alleyne, and P. Cawley, "A two-dimensional Fourier transform method for measurement of propagating multimode signals," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 89, p. 1159-1168, 1991.
- [4] L. Martinez, B. Morvan, and J.L. Izbicki, "Space-time-wave number-frequency  $Z(x, t, k, f)$  analysis of SAW generation on fluid filled cylindrical shells," *Ultrasonics*, vol. 42, p. 383-389, 2004.
- [5] F. Luppe, J.M. Conoir, M. Ech-Cherif El Kettani, O. Lenoir, J.L. Izbicki, J. Duclos, and B. Poirée. "Plane evanescent waves and interface waves", in *Acoustic interactions with submerged elastic structures*. World Scientific, 2001.
- [6] B. Morvan, N. Wilkie-Chancellier, H. Duflo, A. Tinel, and J. Duclos, "Lamb wave reflection at the free edge of a plate," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 113, p. 1417-1425, 2003.









# Conclusion

Au cours de ce travail de thèse, la propagation d'ondes de Lamb à travers un guide d'ondes à interface périodique a été étudiée tant de manière numérique qu'expérimentale.

Dans un premier temps, une plaque d'aluminium infinie à périodicités sinusoïdales a été modélisée à l'aide de la méthode des éléments finis. A partir de la méthode de P. Langlet, l'analyse modale d'un motif élémentaire a permis d'obtenir les courbes de dispersion de ce guide d'ondes. Celles-ci ont mis en évidence la présence de deux types de bandes interdites dans la première zone de Brillouin : les gaps intra-bande (à l'intérieur de la zone) et les gaps bord de bande (à la limite de la zone). Une étude paramétrique a montré que, pour une périodicité des rainures donnée, la largeur des gaps évolue linéairement avec la profondeur des rainures dans la limite de l'hypothèse des petites perturbations.

L'analyse harmonique du même motif a permis, à l'aide de la méthode de la matrice de transfert, de tracer les courbes de dispersion dans l'espace  $(k', k'', f)$ . Ces courbes ont révélé que les valeurs de la partie imaginaire du nombre d'onde sont non nulles dans les gaps. Dans ces gaps, des modes évanescents existent, dont les nombres d'onde ont la même partie réelle et des parties imaginaires opposées. De plus, la valeur maximale de la partie imaginaire du nombre d'onde est atteinte à la fréquence centrale du gap. Une étude paramétrique a montré que, pour une périodicité des rainures donnée, cette valeur de  $k''$  évolue linéairement avec la profondeur des rainures dans la limite de l'hypothèse des petites perturbations. Toutefois, l'introduction de pertes dans le matériau entraîne la levée de la dégénérescence de ces modes évanescents au sens où les valeurs de  $k'$  sont différentes ; de plus, les valeurs de  $k''$  ne sont plus égales en valeur absolue.

Dans un second temps, une plaque d'aluminium finie présentant un réseau de rainures à périodicité sinusoïdale a été étudiée numériquement. Pour permettre l'analyse harmonique de cette structure finie, un outil numérique a été employé : les PML (« *Perfectly Matched Layers* »). Le formalisme des PML d'O. Bou-Matar a été implémenté de manière à fournir des paramètres optimum pour les couches absorbantes et des données directement utilisables avec le code éléments finis ATILA<sup>®</sup>. Pour des fréquences voisines d'un gap intra-bande, cette analyse harmonique a permis de mettre en évidence un couplage entre un mode propagatif et un mode rétroconverti qui présente une amplitude maximale à la fréquence centrale du gap. Une étude paramétrique, effectuée à la fréquence centrale du gap, a montré que plus les rainures sont nombreuses ou profondes et plus le couplage entre le mode propagatif et le mode rétroconverti est important. Néanmoins, il existe un nombre de rainures à partir duquel le réseau peut être considéré comme semi-infini : l'énergie du mode incident est entièrement communiquée au mode converti.

Afin de comprendre la décroissance de l'amplitude des ondes se propageant dans un réseau limité à une fréquence dans le gap, ou dans son voisinage, un lien avec la

## Conclusion

partie imaginaire du nombre d'onde calculée pour un réseau infini a été établi. Cette étude a dévoilé qu'à partir d'un nombre seuil de motifs, l'atténuation des ondes est reliée à l'existence d'une onde évanescente existant dans un réseau infini de périodicités sinusoïdales.

L'étude expérimentale d'une plaque d'aluminium finie présentant un réseau de rainures à périodicité triangulaire a été réalisée. Celle-ci a confirmé que, pour des fréquences voisines d'un gap intra-bande, un couplage entre un mode propagatif et un mode rétropropagatif existe et qu'il est maximum à la fréquence centrale du gap. Sous le réseau, les ondes propagatives ont été caractérisées. Il s'agit de pseudo-modes de Lamb. Ceux-ci sont à l'origine des modes de Lamb observés en dehors du réseau. Le chapitre 3 a montré que la répartition de l'énergie incidente dans les modes transmis ou rétroconvertis dépend fortement du nombre de dents. Dans le cas expérimentalement envisagé, la transmission en mode  $S_0$  est favorisée par rapport à la rétroconversion en mode  $A_0$ . Le pseudo-mode  $S_0^\wedge$  a, pour certaines fréquences, une vitesse de phase et une vitesse de groupe de signes opposés. Pour une fréquence appartenant à la bande interdite ou à son voisinage, deux pseudo-modes de Lamb coexistent :  $S_0^\wedge$  et  $A_0^\wedge$ . Pour les fréquences situées au voisinage de la bande interdite, ces pseudo-modes peuvent être séparés et sont contrapropagatifs. Dans le gap, cette séparation n'est plus possible. Le couplage entre les modes est alors maximum. Bien que la profondeur du réseau de surface considéré soit petite devant l'épaisseur de la plaque ( $p/(2h) < 4\%$ ), la conversion de mode qui en résulte est mesurable ( $R_{A_0} \approx 8,5\%$ ). La structure de bandes est donc accessible expérimentalement et en bon accord avec l'étude numérique.

Les perspectives de cette thèse sont multiples. En premier lieu, la définition et l'étude d'un coefficient de couplage devrait permettre de prévoir l'existence de bandes interdites (fréquences centrales et largeurs fréquentielles), et d'obtenir de manière inverse la structure de bandes.

Ensuite, il serait intéressant d'étudier l'influence de l'existence de pertes dans le matériau afin de montrer la séparation des pseudo-modes de Lamb. Une structure en matériau polymère pourrait être étudiée, car ces matériaux sont absorbants aux fréquences envisagées.

En vue d'applications CND (corrosion, état de surface, ...), l'introduction de plusieurs périodicités spatiales dans la rugosité est nécessaire. A la place d'un profil de surface périodique, un profil pseudo-aléatoire serait alors étudié, plus représentatif de la réalité.

D'autres perspectives sont envisageables telles que l'étude de l'influence de défauts dans le réseau périodique ou multi-périodique sur les bandes interdites. Ceci devrait permettre de créer des bandes passantes dans des bandes interdites, et/ou réciproquement. Le but serait, outre la mise en œuvre d'un effet tunnel, de maîtriser la structure de bandes via le contrôle de la DSP de la surface.





# Annexe

Les propriétés vibrationnelles des matériaux périodiques sont ici présentées de manière analytique à travers les cas d'un réseau cristallin linéaire monoatomique et d'un réseau cristallin linéaire diatomique.

## A.1 Cas d'un réseau cristallin linéaire monoatomique

Il s'agit ici de la première modélisation d'un solide élastique à une dimension. Néanmoins, certains concepts introduits ici seront utiles dans la suite.

La Figure 109 représente un réseau cristallin linéaire monoatomique. La maille élémentaire, de dimension  $\Lambda$ , contient un atome de masse  $M$ .

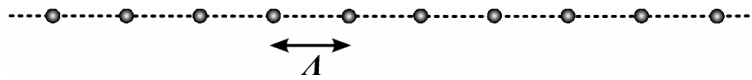


Figure 109 Réseau cristallin linéaire monoatomique.

Dans ce réseau, la force causée sur un atome  $s$  par le déplacement de l'atome  $s+p$  est supposée proportionnelle à la différence  $u_{s+p} - u_s$  de leurs déplacements. Par souci de simplification, seules sont considérées les interactions entre les atomes voisins les plus proches, c'est-à-dire  $p = \pm 1$ . De ce fait, la force totale exercée sur un atome  $s$  provient des atomes  $s \pm 1$  et s'écrit :

$$F_s = C(u_{s+1} - u_s) + C(u_{s-1} - u_s) \quad (\text{A.1.1})$$

avec  $C$  la constante de rappel entre les atomes voisins les plus proches. Cette expression est une fonction linéaire des déplacements et a la forme de la loi de Hooke. Conséquence de l'équation (A.1.1), l'équation du mouvement de l'atome  $s$  est :

$$M \cdot \ddot{u}_s = C \cdot (u_{s+1} + u_{s-1} - 2u_s) \quad (\text{A.1.2})$$

où  $M$  est la masse d'un atome.

En ne considérant que les solutions sinusoïdales, dites harmoniques,  $\ddot{u}_s = -\omega^2 u_s$  et l'équation (A.1.2) donne :

$$-M \cdot \omega^2 u_s = C \cdot (u_{s+1} + u_{s-1} - 2u_s) \quad (\text{A.1.3})$$

Cette équation ne contient que des combinaisons linéaires des déplacements. Elle admet pour solutions des ondes propagatives de la forme :

$$u_{s \pm 1} = u \cdot \exp[i(s \pm 1)k\Lambda] \quad (\text{A.1.4})$$

où  $\Lambda$  est la distance interatomique et  $k$  le nombre d'onde.

L'équation (A.1.3) se réduit alors à :

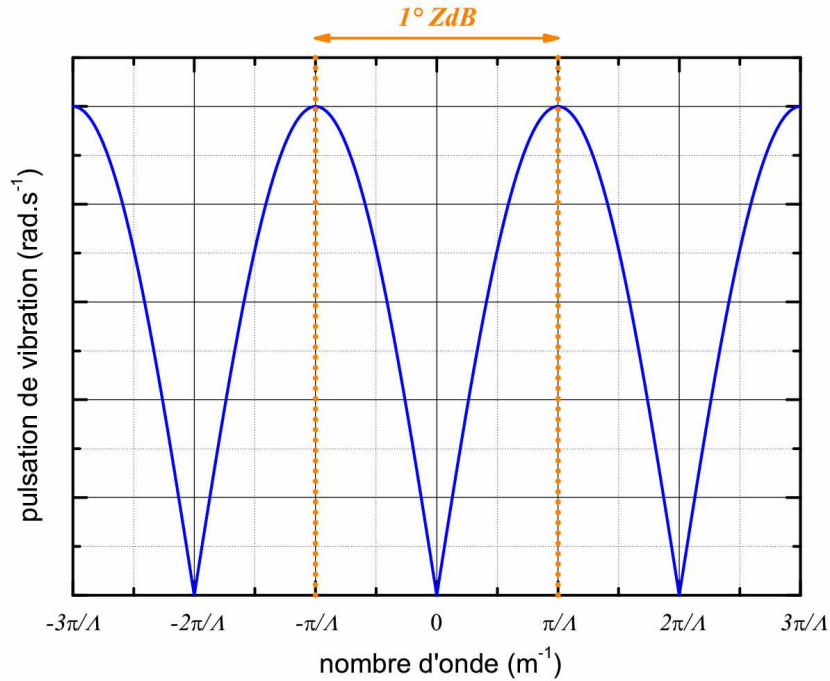
$$-\omega^2 Mu \cdot \exp[isk\Lambda] = Cu \left\{ \exp[i(s+1)k\Lambda] + \exp[i(s-1)k\Lambda] - 2 \cdot \exp[isk\Lambda] \right\} \quad (\text{A.1.5})$$

$$\Leftrightarrow \omega^2 M = -C \left\{ \exp[ik\Lambda] + \exp[-ik\Lambda] - 2 \right\}$$

Grâce à l'identité  $2 \cdot \cos(pk\Lambda) = e^{ipk\Lambda} + e^{-ipk\Lambda}$ , la relation liant  $\omega$  et  $k$  est obtenue :

$$\omega^2 = \left( \frac{2C}{M} \right) (1 - \cos(k\Lambda)) \Leftrightarrow \omega = \left( \frac{4C}{M} \right)^{1/2} \left| \sin\left( \frac{k\Lambda}{2} \right) \right| \quad (\text{A.1.6})$$

Cette relation de dispersion est représentée sur la Figure 110.



**Figure 110** Courbes de dispersion d'un réseau cristallin linéaire monoatomique. La première zone de Brillouin (1° ZdB) a pour limites  $k = \pm\pi/\Lambda$ .

D'après la relation (A.1.4), le rapport des déplacements de deux atomes successifs est donné par :

$$\frac{u_{s+1}}{u_s} = e^{ik\Lambda} \quad (\text{A.1.7})$$

Aussi, pour des valeurs de  $k\Lambda$  comprises dans l'intervalle  $[-\pi; \pi]$ , l'exponentielle prend toutes les valeurs indépendantes possibles. Le domaine des valeurs indépendantes peut être spécifié par :

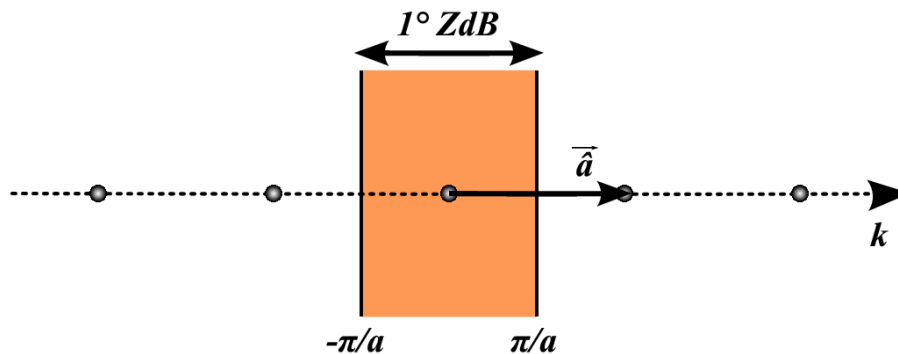
$$-\pi \leq k\Lambda \leq \pi \Leftrightarrow \frac{-\pi}{\Lambda} \leq k \leq \frac{\pi}{\Lambda} \quad (\text{A.1.8})$$

En effet, les valeurs de  $k$  extérieures à cette zone reproduisent simplement les vibrations du réseau déjà décrites par les valeurs de  $k$  comprises entre  $\pm\pi/\Lambda$ . Ceci est vraiment différent du comportement d'un milieu élastique continu. En effet, dans ce cas la limite continue impose :

$$\lim_{\Lambda \rightarrow 0} k = \pm\infty \quad (\text{A.1.9})$$

De plus, dans l'intervalle (A.1.8), les valeurs de  $k$  peuvent être tant positives que négatives car les ondes se propagent vers la droite ou vers la gauche. Ceci explique la

symétrie des courbes de dispersion pour des valeurs de  $k$  comprises entre  $\pm\pi/\Lambda$ . Ce domaine de valeurs de  $k$  est la première zone de Brillouin du réseau linéaire (Figure 111).



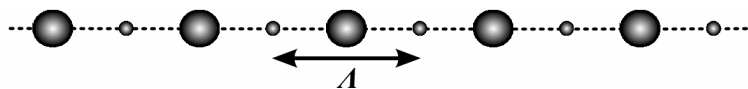
**Figure 111 Réseau réciproque du réseau cristallin linéaire monoatomique. Le vecteur fondamental du réseau réciproque est  $\hat{a}$ , de longueur  $2\pi/\Lambda$ . La première zone de Brillouin ( $1^{\circ}$  ZdB) a pour limites  $k = \pm\pi/\Lambda$ .**

De manière générale, la première zone de Brillouin correspond à la maille élémentaire du réseau réciproque. Autrement dit, la zone de Brillouin est le plus petit volume entièrement compris entre les plans médiateurs des vecteurs du réseau réciproque tracés à partir de l'origine. Ce réseau réciproque est un réseau de l'espace de Fourier associé au réseau cristallin réel. Ainsi, à toute structure cristalline sont associés deux réseaux : le réseau cristallin et le réseau réciproque. Une figure de diffraction d'un cristal est une carte du réseau réciproque du cristal ; au contraire, une image au microscope électronique est une carte de la structure cristalline réelle.

Qu'advient-il notamment des courbes de dispersion lorsque la maille élémentaire est plus complexe ? Afin d'introduire les effets de la complexification de la maille élémentaire sur les propriétés vibratoires du réseau cristallin, le cas d'un réseau cristallin linéaire diatomique est étudié.

## A.2 Cas d'un réseau cristallin linéaire diatomique

La Figure 112 représente un réseau cristallin linéaire diatomique. La maille élémentaire, de dimension  $\Lambda$ , est supposée contenir deux types d'atomes distants de  $\Lambda/2$  et de masse respective  $m$  et  $M$  (avec  $m < M$ ).



**Figure 112 Réseau cristallin linéaire diatomique.**

Dans ce réseau, la force causée sur un atome  $s$  par le déplacement de l'atome  $s+p$  est supposée proportionnelle à la différence  $u_{s+p} - u_s$  de leurs déplacements. Par soucis de simplification, seules sont considérées les interactions entre les atomes voisins les plus



## Annexe

proches, c'est-à-dire  $p = \pm 1$ . De ce fait, la force totale exercée sur un atome  $s$  provient des atomes  $s \pm 1$  et s'écrit :

$$F_s = C(u_{s+1} - u_s) + C(u_{s-1} - u_s) \quad (\text{A.2.1})$$

avec  $C$  la constante de rappel entre les atomes voisins les plus proches. Cette expression est une fonction linéaire des déplacements et a la forme de la loi de Hooke. Conséquence de l'équation (A.2.1), les équations du mouvement, pour chaque type d'atome, s'écrivent :

$$M \cdot \ddot{u}_{2n} = C \cdot (u_{s+1} + u_{s-1} - 2u_s) \quad (\text{A.2.2})$$

et :

$$m \cdot \ddot{u}_{2n+1} = C \cdot (u_s + u_{s+2} - 2u_{s+1}) \quad (\text{A.2.3})$$

Des solutions sous forme d'ondes progressives en  $e^{-j\omega t}$  avec  $u_n = u_{n-2} \cdot e^{jk\Lambda}$  sont recherchées. Ainsi, le système homogène d'équations couplées suivant est obtenu :

$$\begin{cases} C \cdot (1 + e^{-jk\Lambda}) \cdot u_{s+1} + (M\omega^2 - 2C) \cdot u_s = 0 \\ (2C - m\omega^2) \cdot u_{s+1} + C \cdot (1 + e^{jk\Lambda}) \cdot u_s = 0 \end{cases} \quad (\text{A.2.4})$$

Ce système accepte une solution non nulle si son déterminant est nul, c'est-à-dire si :

$$-\omega^4 + 2\omega^2 \cdot [\omega_0^2 + \Omega_0^2] + 2\omega_0^2 \Omega_0^2 \cdot (1 + \cos(k\Lambda)) - 4\omega_0^2 \Omega_0^2 = 0 \quad (\text{A.2.5})$$

avec :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{m}} \quad (\text{A.2.6})$$

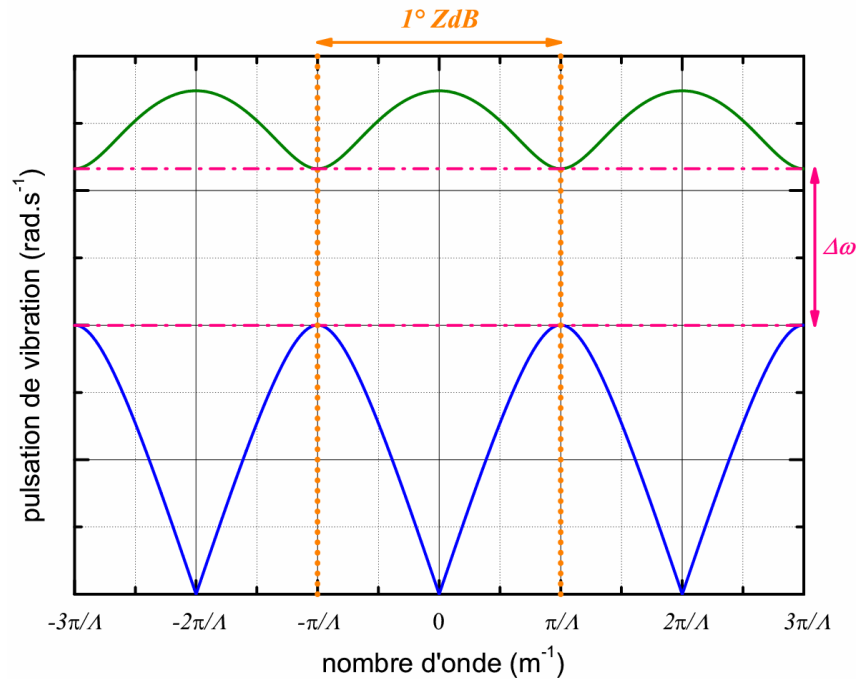
et :

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{C}{M}} \quad (\text{A.2.7})$$

Ainsi, il existe deux solutions à l'équation (A.2.5) :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega_0^2 \pm \sqrt{\omega_0^4 + \Omega_0^4 + 2\omega_0^2 \Omega_0^2 \cos(k\Lambda)}} \quad (\text{A.2.8})$$

Les solutions  $\omega(k)$  de (A.2.8) sont reportées sur la Figure 113.



**Figure 113** Courbes de dispersion d'un réseau cristallin linéaire diatomique. La première zone de Brillouin ( $1^{\circ}$  ZdB) a pour limites  $k = \pm\pi/\Lambda$ . Les courbes de dispersions sont séparées par une bande de pulsations interdite de largeur  $\Delta\omega$ .

La solution (A.2.8) avec le signe négatif passe par l'origine  $(0,0)$  et correspond donc à la branche basse bleue de la Figure 113. Il est important de noter que pour  $k\Lambda \ll 1$ , c'est-à-dire pour de grandes longueurs d'onde devant la distance inter-atomique, la courbe de dispersion est confondue avec celle décrivant la propagation dans des milieux élastiques continus, d'où le terme de branche acoustique. De plus, près du centre de la zone de Brillouin, les déplacements de deux atomes identiques sont tels que  $u_s/u_{s+2} \approx 1$  signifiant que les deux atomes de la maille élémentaire vibrent donc dans le même sens.

La solution de (A.2.8) avec le signe positif correspond à la branche haute verte de la Figure 113 et est appelée branche optique. Près du centre de la zone de Brillouin, les déplacements de deux atomes voisins sont maintenant dans le rapport  $u_s/u_{s+1} \approx -M/m$ . Les deux atomes de la maille élémentaire vibrent donc en opposition de phase, le centre de gravité de deux atomes successifs restant fixe. Dans les cristaux ioniques, ces modes peuvent être excités par une onde électromagnétique et sont responsables du comportement optique de ces cristaux, d'où le terme de branche optique.

Toutefois, il n'existe pas de solution réelle pour  $k$  entre  $\omega = \sqrt{2C/m}$  et  $\omega = \sqrt{2C/M}$ . De ce fait, aucune onde propagative de la forme  $e^{jkx}$  n'existe entre ces deux pulsations. Les solutions  $\omega(k)$  sont donc séparées par une bande interdite de largeur  $\Delta\omega = \sqrt{2C/m} - \sqrt{2C/M}$ .

