



Reconstruction 3D de sources de chaleur volumiques à partir des champs de température de surface mesurés par thermographie InfraRouge

Marie-Marthe Groz

► To cite this version:

Marie-Marthe Groz. Reconstruction 3D de sources de chaleur volumiques à partir des champs de température de surface mesurés par thermographie InfraRouge. Thermique [physics.class-ph]. Université de Bordeaux, 2019. Français. NNT : 2019BORD0135 . tel-03270759

HAL Id: tel-03270759

<https://theses.hal.science/tel-03270759>

Submitted on 25 Jun 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX
École Doctorale des Sciences Physiques et de l'Ingénieur

par

Marie-Marthe GROZ

pour obtenir le grade de

Docteur

Spécialité : Mécanique

Reconstruction 3D de sources de chaleur volumiques à partir des champs de température de surface mesurés par thermographie InfraRouge

Après avis de :

M.	A. CHRYSOCHOOS, Professeur, Université de Montpellier	Rapporteur
M.	D. MAILLET, Professeur émérite, Université de Lorraine	Rapporteur

Le 17 septembre 2019, devant la commission d'examen formée de :

Mme	A. MENDIOROZ, Professeur, Université du Pays Basque	Présidente
M.	A. CHRYSOCHOOS, Professeur, Université de Montpellier	Rapporteur
M.	D. MAILLET, Professeur émérite, Université de Lorraine	Rapporteur
Mme	E. ABISSET-CHAVANNE, Professeur, Arts&Métiers ParisTech	Examinatrice
M.	C. PRADÈRE, Directeur de Recherche, CNRS	Directeur
Mme	A. MEZIANE, Professeur, Université de Bordeaux	Co-Encadrante
Mme	B. LEVASSEUR, Responsable d'Étude CND, DGA	Invitée

Résumé

L'évaluation et le contrôle non destructifs (E.C.N.D.) des matériaux et des structures sont une problématique industrielle très importante dans les domaines du transport, de l'aéronautique et du spatial, et dans le milieu médical. La thermographie infrarouge active est une technique d'E.C.N.D. qui consiste à apporter une excitation extérieure afin d'entraîner une élévation de température dans le matériau, puis à évaluer le champ de température résultant à la surface. Cependant, les excitateurs optiques utilisés (lampes flash, halogène, laser) agissent uniquement sur la surface du matériau. Plusieurs systèmes de conversion d'énergie peuvent en revanche mener à l'apparition de sources volumiques : on peut citer en particulier les phénomènes de thermo-acoustique, de thermo-induction, de thermomécanique ou de thermochimie. Par exemple, une excitation par ondes ultrasonores peut entraîner des sources thermiques volumiques si le matériau est viscoélastique ou s'il y a présence de défaut. La reconstruction de ces sources est donc la première étape permettant de remonter aux paramètres responsables de l'échauffement. Caractériser une source thermique consiste à reconstruire sa géométrie et la puissance qu'elle génère. Cependant, l'identification de sources thermiques volumiques par la mesure des champs de température de surface est un problème mathématiquement mal posé. Le caractère diffusif de la température en est le principal responsable. Dans ce travail, la reconstruction 3D des sources volumiques à partir du champ de température résultant à la surface, mesuré par InfraRouge, est étudié. Tout d'abord, une analyse du problème physique permet de spécifier les limites de la reconstruction. En particulier, un critère sur la résolution spatiale atteignable est défini et une limitation de reconstruction pour les sources en profondeur est mise en lumière. Ensuite, une méthode de reconstruction par approche probabiliste est proposée et comparée aux méthodes d'inversions existantes. Le temps d'exécution et la sensibilité au bruit de mesure sont étudiés pour chacune de ces méthodes. Des applications numériques et expérimentales seront enfin présentées pour illustrer les résultats.

Mots-clés : Contrôle Non Destructif, Thermographie InfraRouge, Méthodes Inverses

Abstract

Non Destructive Testing (N.D.T.) of materials and structures is a very important industrial issue in the fields of transport, aeronautics and space and in the medical domain. Active infrared thermography is a N.D.T. method that consists in providing an external excitation to cause an elevation of temperature field in the material and then to evaluate the resulting temperature field at the surface. However, thermal exciters used (flash lamps, halogen, lasers) act only on the surface of the sample. Several energy conversion systems can on the other hand lead to the generation of volumetric sources : the phenomena of thermo-acoustic, thermo-induction, thermomechanic or thermochemistry can be cited. For instance, ultrasonic waves can generate volumetric heat sources if the material is viscoelastic or if there is a defect. The reconstruction of these sources is the initial process for the quantification of parameters responsible of the heating. Characterizing a heat source means reconstructing its geometry and the supplied power. For example, a defect in a structure and / or the viscoelasticity of a material can be detected and quantified by this technique if it acts directly on temperature field. However, identification of volumetric heat sources from surface temperature fields is a mathematical ill-posed problem. The main cause of that is the diffusive nature of the temperature. In this work, the 3D reconstruction of the volumetric heat sources from the resulting surface temperature field, measured by InfraRed, is studied. First, an analysis of the physical problem enables to specify the limits of the reconstruction. In particular, a criterion on achievable spatial resolution is defined and a reconstruction limitation for in-depth sources is highlighted. Then, a probabilistic approach for the reconstruction is proposed and compared to existing inverse methods. The computation time and noise sensitivity are studied for each of these methods. Numerical and experimental applications will thus be presented to illustrate the results.

Keywords : Non-Destructive Testing, InfraRed Thermography, Inverse Problems

Avant-propos

Cette thèse a été effectuée à l'Université de Bordeaux (UB), au sein de l'Institut de Mécanique et d'Ingénierie (I2M). Elle a été co-financée par la Direction Générale de l'Armement (DGA) française et la région Nouvelle-Aquitaine.



Remerciements

En préambule à ce travail, je souhaiterais adresser mes remerciements à toutes les personnes qui m’ont apporté leur aide et leur soutien pendant ces trois années.

J’exprime mes plus sincères remerciements à mes encadrants. J’ai été heureuse de pouvoir compter sur une équipe d’encadrants aussi compétente tant sur le niveau professionnel que personnel. Je tiens à remercier mon directeur de thèse Christophe Pradère pour son aide précieuse, son soutien, son humour et sa profonde humanité. Je remercie Anissa Meziane pour sa grande disponibilité, ses conseils, son analyse précieuse sur tous les problèmes rencontrés et son éternelle bonne humeur. Je remercie également Emmanuelle Abisset-Chavanne qui a rejoint l’équipe lors de ma dernière année de thèse, et qui m’a beaucoup aidée à développer l’approche bayésienne. La conspiration pour diriger le monde via Bayes a démarré ! Je remercie également Alain Sommier pour tous les échanges et discussions, et pour tout le temps qu’il a pris pour réfléchir aux manips, à les mettre sur pieds et à les faire tourner. C’était un très grand plaisir de travailler avec vous.

Je tiens aussi à remercier tous les membres du jury. Je remercie en particulier André Chrysochoos et Denis Maillet qui ont accepté le rôle de rapporteur pour mon manuscrit de thèse et Arantza Mendioroz qui a accepté le rôle de Présidente du Jury. Je remercie également ma tutrice D.G.A. Bénédicte Levasseur pour nos divers échanges pendant l’avancement de ma thèse.

Je remercie également tous mes collègues de l’I2M. Mon sujet de thèse étant interdisciplinaire, j’appartenais à deux équipes du laboratoire : l’équipe APY (Acoustique Physique) et TREFLE (Transfert Fluide Energétique). J’ai apprécié travailler dans ces deux équipes : l’ambiance et les relations au sein de chacune de ces équipes étaient très agréables. Ainsi, je remercie Olivier Poncelet et Wahbi Jomaa de m’y avoir accueillie. J’aimerais remercier tous mes collègues pour les discussions et les bons moments vécus : merci à Thomas Brunet, Bertrand Audoin et Michel Castaings avec qui j’ai partagé des heures d’enseignement à Matmeca et qui étaient toujours disponibles en cas de besoin. Merci aussi à Marie Touzet, Pierre Lubin, Pierre Fabrie et Marc Phalippou pour leur confiance et les échanges concernant ces enseignements. Je remercie également les bons moments passés avec mes collègues : merci à Cathy pour toutes les discussions, merci à Sandrine Guit, Béatrice Desoudin, Virginie Guénard, Catherine Fonfride, Elise Keou, Muriel Bore. Merci aussi à Christine Biateau, Jérémy Guitard, Mathieu Renier, Marie-Fraise Ponge, Samuel Rodriguez, Eric Ducasse, Isabelle Aubert, Alain Sommier, Stéphane Chevalier, Jean-Christophe Batsale et Jean-Luc Battaglia.

Je tiens aussi à remercier tous les doctorants et post-doctorants pour leur sympathie, les repas partagés, les parties de Molkky, les parties de Tarot, les repas ”internationaux”, les discussions anodines autour de la machine à café qui permettent de se détendre : merci à Léna Verchère, Louise Le Ridant, Francois Bruno, Olivier Lombard, Victor Gayoux, Ludovic Alhaïtz, Arthur Racot, Julien Bourbon, Pierre Plumel, Justine Bertrand, Sarah Benart, Jordan Santangelo, Enrico Panettieri, Torquato Garulli, Aurore Nicolas, Timothée

Gentieu, Emmanuel Siryabe, Alexis Viel, Hamza Hafidi Alaoui, Abdulaye Ba, Mohammed Biskri, H  l  ne Pichard, Aditya Krishna, Shreedhar Puliyakote, Mahfoud Taleb Ali et Yabin Yin.

Merci aussi à tous les doctorants, post-doctorants et stagiaires avec qui j'ai partagé le bureau. Merci pour tous les fou-rires, les potins, les discussions sérieuses et moins sérieuses, les moments d'humour et les moments de soutien. Pour le bureau côté APY je remercie Abdulaye Ba, Karim Saidoun et Benoît Tallon qui finissaient leur thèse quand je suis arrivée. Merci à Yabin Yin, Valentin Serey, Fiona Somoreau, Dorra Nouira ainsi qu'aux stagiaires qui ont animé les étés Walid Amrane, Elise Maillot, Alan Tronchon, Adrien Santoire, Anthony Blot, Sarah Tessier, Marwanne Dherbecourt, Julien et Enguerran.

Pour le côté TREFLE je remercie tous les visiteurs éclairés de la salle de manip (que voulez-vous, on fait de l'InfraRouge, on rayonne tous ;-)) : je cite en particulier Mohammed Bensalem, Moncef Lehtihet, Hamza Aouali, Valentin Tramu, Lucie Lindingre, Mélanie et bien-sûr Emmanuelle Abisset-Chavanne, Alain Sommier, Stéphane Chevalier, Christophe Pradère, Jean-Luc Battaglia et Jean-Christophe Batsale.

En dehors de l'université, je salue également mes amis qui m'ont soutenue pendant ces trois années : merci à Léna et Victor, Fiona, Valentin, Mickaël et Emilie, Guillaume, Félix, Xavier, Joan, Claire M. et Laurent, Francois et Lucile, Aurore, Jeff et Sophie, Julie, Corentin, Louis-Marie et Claire G. pour les soirées "Pizzazaki" (mélange savant entre Pizza et Miyazaki), les JDR, les aprem et soirées jeux de sociétés, les sorties plages et kayak, les soirées pubs, les spectacles à l'Opéra de Bordeaux pour les diverses représentations (Opéra ou Ballet), les soirées "spi" et les repas "doctorants-ex-enseirbiens". Merci à Ségolène et Alain pour les nombreuses invitations, merci à Théophile. Et merci à Gwenaëlle, Audrey, Chloé et Lynn pour les retrouvailles entre "les vieilles du lycée". Enfin, un grand merci au groupe de "fraternité de quartier" : Catherine et Paul A., Catherine G., Clotilde et Germain G., Monique et Jacques R., Marick et Hervé B.

Je remercie également toute ma famille : mes parents, mes frères et ma soeur pour leur soutien sans faille et leur humour. Merci à mes oncles et tantes. Merci à mon parrain Rémi d'avoir fait le déplacement et assisté à ma soutenance. Merci à ma marraine Blandine pour son soutien. Merci aussi à Denise, une amie de la famille, très proche par la pensée malgré la distance qui nous éloigne (c'est que le Québec, c'est loin!).

Pour terminer, je suis enchantée d'avoir effectué et achevé cette thèse. Ce n'est pas mentir que de dire qu'une thèse est un travail de longue haleine, avec des "hauts" et des "bas", mais le sujet que j'ai traité était passionnant, effectué dans une atmosphère très agréable. Ainsi, je terminerai ces propos par une citation tirée de l'opéra "Les Brigands" de Jacques Offenbach qui traduit mes pensées : *"C'est un peu vif, mais si c'était à refaire, je le referais ! V'là mon caractère."*

Table des matières

Nomenclature	x
1 Introduction générale	1
2 État de l’art	5
Introduction	6
2.1 Contexte	7
2.1.1 La thermographie infrarouge	8
2.1.2 Les principaux types d’excitateurs utilisés en thermique	9
2.1.3 Les sources thermiques volumiques	18
2.2 Systèmes de conversion d’énergie	20
2.2.1 L’induction	21
2.2.2 La thermomécanique	24
2.3 Méthodes inverses	29
2.3.1 Définition et mise en place des problèmes inverses	29
2.3.2 Application à la reconstruction de sources thermiques	32
Conclusion et positionnement du travail de thèse	42
3 Analyse du problème théorique et critère de résolution	43
Introduction	44
3.1 Méthodologie de l’inversion	45
3.1.1 Étude du problème direct en 1D	47
3.1.2 Généralisation au problème 3D	50
3.1.3 Problème inverse	52
3.2 Mise en évidence d’un critère dépendant du nombre de Fourier	54
3.2.1 Influence du nombre de Fourier en 1D	54
3.2.2 Influence de l’excitation temporelle utilisée	63
3.2.3 Généralisation au problème 3D	65
3.3 Cas particulier : la profilométrie thermique	72
3.3.1 Principe de la méthode	72
3.3.2 Méthode inverse	74
3.3.3 Génération des sources thermiques	75
3.3.4 Balayage spatial	77
3.3.5 Applications et résultats	79
Conclusion	88

4	Problème réel bruité : régularisation et probabilités	89
	Introduction	90
4.1	Traitement du bruit	91
4.1.1	Inversion en présence de bruit	91
4.1.2	Étude paramétrique de l'influence du bruit	93
4.1.3	Traitement du bruit par S.V.D. du champ de température	98
4.2	Algorithme d'inversion avec régularisation	102
4.2.1	Fonctions de régularisation	102
4.2.2	Choix du paramètre de régularisation	107
4.2.3	Application de la régularisation sur un exemple 1D et 3D	110
4.3	Reconstruction de sources : méthode probabiliste	116
4.3.1	Approche bayésienne	116
4.3.2	Étude et généralisation de la méthode 1D	123
4.4	Généralisation et perspectives	128
4.4.1	Généralisation 3D de la méthode probabiliste	129
4.4.2	Points forts et limitations de chaque méthode	131
4.4.3	Perspectives pour la reconstruction de sources volumiques	133
	Conclusion	136
5	Applications numériques et expérimentales	137
	Introduction	138
5.1	Présentation du problème	139
5.2	Application numérique	140
5.2.1	Mise en place du problème thermique	140
5.2.2	Reconstruction de la source volumique	143
5.2.3	Étude sur l'influence du nombre de Fourier	149
5.3	Application expérimentale	155
5.3.1	Mise en place du problème thermique	156
5.3.2	Problème 2D : profondeur supposée connue	161
5.3.3	Problème 3D : profondeur supposée inconnue	171
	Conclusion	179
6	Conclusion et perspectives	181
6.1	Conclusion sur le travail réalisé	182
6.2	Perspectives	184
	Annexes	186
A	Calcul de la solution analytique : problème Dirac	187
A.1	Passage dans les domaines de Fourier et Laplace	188
A.2	Résolution du problème	189
B	Calcul des fonctions de transfert 1D	193
B.1	Transformation de Laplace et quadripôles thermiques : rappels	193
B.2	Transfert 1D dans une plaque d'épaisseur finie généré par une source surfacique plane interne de chaleur	195

B.3	Transfert 1D dans un milieu infini ou semi-infini ou infini généré par une source surfacique plane interne de chaleur	198
B.3.1	Cas d'un milieu infini	198
B.3.2	Cas d'un milieu semi-infini	199
C	Abaque des temps optimaux d'acquisition pour la reconstruction de sources	201
D	Informations système des ordinateurs utilisés	203

Nomenclature

Opérateurs mathématiques	Définitions	Unités
$:$	Double produit tensoriel contracté	
$\cdot^*$	Variables adimensionnées	
χ	Fonction caractéristique	
$\ \cdot\ _2$	Norme euclidienne	
$\ \cdot\ _1$	Norme L_1	

Abréviations	Définitions
E.C.N.D.	Évaluation et Contrôle Non Destructifs
S.H.M.	Structural Health Monitoring
IR	Infra-Rouge
I.R.T.	InfraRed Thermography
P.F.D.	Principe Fondamental de la Dynamique
M.C.O.	Moindres Carrés Ordinaires
SNR	Signal to Noise Ratio (Ratio Signal à Bruit)
1D, 2D, 3D	Une Dimension, Deux Dimensions, Trois Dimensions
S.V.D.	Décomposition en Valeurs Singulières (Singular Value Decomposition)
MCMC	Monte-Carlo par Chaînes de Markov

Symboles grecs	Définitions	Unités
λ	Longueur d'onde	m
ρ	Masse volumique	kg.m ⁻³
π	Constante d'Archimède	
θ	Température	K
Ω	Répartition réelle de la source thermique	
Ω_{th}	Source reconstruite sans bruit	
Ω_b	Source reconstruite avec bruit	
β	Coefficient d'absorption optique	
$\alpha_{Tk}, \alpha_{L_1}, \alpha_{T_{SVD}}$	Coefficients de régularisation (Tikhonov, L_1 et par troncature du spectre)	
Γ	Covariance du bruit de mesure	

Lettres romaines	Définitions	Unités
x, y et z	Coordonnées cartésiennes	m
r	Vecteur contenant les coordonnées cartésiennes	m
t	Temps	s
C_p	Chaleur spécifique	J.K ⁻¹ .kg ⁻¹
L_x, L_y et L_z	Dimensions du matériau selon x, y, z	m
a_x, a_y et a_z	Coefficients de diffusion selon les directions x, y et z	m ² .s ⁻¹
Fo_x, Fo_y et Fo_z	Nombres de Fourier selon les directions x, y et z	
Q	Distribution de densité d'énergie	J.m ⁻¹
t_0	Temps initial de l'expérience	s
t_f	Temps final de l'expérience	s
I	Matrice opérateur contenant le modèle	
U, S, V	Décomposition en valeurs singulières de la matrice I	
M	Modes de la S.V.D.	
s_i	Valeurs singulières	
m	Nombre de lignes de la matrice opérateur I	
n	Nombre de colonnes de la matrice opérateur I	
n_t	Nombre de pas de temps	
n_x, n_y, n_z	Nombre de points de discrétisation selon x, y et z	
n_ϕ	Nombre optimal de points-sources recherchés	
J	Fonction de régularisation	
P_Ω	Probabilité de répartition de la source Ω	
E	Évidence correspondant aux données (température)	K
H	Hypothèse : position et intensité de la source	
Lk	Likelihood : probabilité connaissant l'hypothèse H	

CHAPITRE **1**

Introduction générale

Ce travail de thèse s'inscrit dans le domaine de l'Évaluation et du Contrôle Non Destructifs (noté E.C.N.D.), très important dans les secteurs industriels du transport, de l'aéronautique et du spatial, ou encore dans les domaines de la biologie et du médical. En effet, l'évaluation d'un matériau, d'une structure ou d'un milieu biologique permet de connaître ses caractéristiques et son contrôle permet d'y détecter des défauts ou des anomalies. Dans les milieux industriels des transports, la mise en circulation de structures fragiles ou défectueuses peut alors être évitée. Une inspection de structures en service ou du milieu biologique doit évidemment laisser la structure ou le milieu biologique intacts, d'où la nécessité d'une évaluation et d'un contrôle non destructifs.

De nombreuses techniques d'E.C.N.D. sont aujourd'hui utilisées, exploitant différents phénomènes physiques tels que l'optique, l'électromagnétisme, l'acoustique, la thermodynamique, etc. Dans ce travail de thèse, c'est l'utilisation de la thermique comme moyen d'E.C.N.D. qui sera principalement abordée.

La thermographie infrarouge active est un moyen largement utilisé en E.C.N.D. Elle consiste à exciter le milieu étudié à l'aide d'un apport d'énergie extérieur, puis à recueillir la température résultante à la surface. Depuis la moitié du XIX^{ème} siècle, ces mesures de température étaient essentiellement faites à l'aide de thermocouples : les données, ponctuelles, étaient par conséquent peu nombreuses par expérience. Depuis une vingtaine d'année, l'essor des caméras thermiques a permis d'augmenter considérablement le nombre de données par expérience, car les mesures effectuées sont faites sur l'ensemble de la surface visible par la caméra. Cependant, un des inconvénients de l'E.C.N.D. thermique est que

l'excitation et la mesure sont **surfaciques**. En effet, les excitateurs aujourd'hui utilisés en E.C.N.D. thermique sont généralement des lampes flash, des halogènes ou des laser, qui n'agissent qu'à la surface du matériau, rendant l'accès aux informations dans le volume du matériau difficile. Plusieurs systèmes de conversion d'énergie peuvent en revanche mener à l'apparition de sources volumiques dans un matériau : les phénomènes de thermo-acoustique, de thermo-induction, de thermomécanique ou de thermochimie peuvent être en particulier cités. Par exemple, une excitation par ondes ultrasonores peut entraîner des sources thermiques volumiques dans un matériau si celui-ci est viscoélastique ou s'il contient un défaut.

Ainsi, pour caractériser ce défaut, ou tout élément responsable de l'échauffement, la première étape consiste à caractériser la source thermique volumique à partir des données surfaciques de température fournies par la caméra IR. Cette phase de caractérisation de ces sources thermiques à partir du champ de température résultant mesuré à la surface du milieu étudié constitue l'objectif de cette thèse. Il s'agit d'un problème mathématiquement mal posé, principalement en raison du caractère diffusif de la température. Les méthodes de reconstruction existantes sont aujourd'hui confrontées à deux limitations : le bruit de mesure, inévitable lors de l'expérience, et la profondeur. En effet, plus le niveau de bruit est élevé et/ou plus la source est profonde, plus la reconstruction est erronée. Dans ce travail, un critère physique expliquant la raison de la limitation en profondeur ainsi qu'une méthode de reconstruction peu sensible au bruit de mesure sont proposés.

Cette thèse de doctorat est organisée comme suit : le chapitre 2 constitue l'état de l'art. Les principaux types d'excitateurs utilisés en thermique et leurs applications pour l'E.C.N.D. sont présentés. La définition d'une source thermique volumique est donnée et les différents systèmes de conversion d'énergie sont passés en revue. Le principe et le fonctionnement des méthodes inverses sont explicités et les méthodes existantes pour la reconstruction de sources volumiques sont mises en avant.

Le chapitre 3 propose une méthode de reconstruction basée sur la réponse thermique à une excitation impulsionnelle. Une analyse de cette méthode est effectuée dans le cas théorique, permettant de mettre en évidence un critère de reconstruction dépendant du nombre de Fourier. Il est en effet montré dans ce chapitre que le nombre de Fourier dans la direction de la profondeur est un paramètre déterminant pour la reconstruction des sources thermiques. La dernière partie de ce chapitre présente un cas particulier de la méthode de reconstruction. Cette dernière peut en effet se développer de manière à former

un profilomètre thermique sans contact.

L'étude du problème dans le cas réel, en particulier en présence de bruit de mesure, est effectuée au chapitre 4. L'influence du bruit de mesure sur les mesures et son impact sur la méthode d'inversion décrite au chapitre 3 sont explicités. En premier lieu, des techniques de traitement du bruit afin de le minimiser sont présentées. Ensuite, deux méthodes pour reconstruire les sources en présence de bruit sont décrites. La première méthode est basée sur celle présentée au chapitre 3, mais nécessite des techniques de régularisation pour stabiliser l'inversion. La seconde méthode est développée dans ce chapitre de manière à s'affranchir des techniques de régularisation. Il s'agit d'une méthode probabiliste qui se base sur l'approche bayésienne. La comparaison de ces méthodes est effectuée à la fin de ce chapitre et les perspectives envisagées pour la suite sont présentées.

Des applications numériques et expérimentales sont menées dans le chapitre 5. La première partie du chapitre consiste à générer des sources thermiques de manière numérique à l'aide du logiciel de calcul par élément finis COMSOL Multiphysics. L'exemple étudié est celui de sources induites par la propagation d'ondes ultrasonores dans un milieu viscoélastique. La seconde partie traitera des données expérimentales où les sources thermiques sont générées par effet Joule.

La conclusion et les perspectives de cette thèse sont rédigées dans le chapitre 6.

CHAPITRE 2

État de l'art

Table des matières

Introduction	6
2.1 Contexte	7
2.1.1 La thermographie infrarouge	8
2.1.2 Les principaux types d'excitateurs utilisés en thermique	9
2.1.3 Les sources thermiques volumiques	18
2.2 Systèmes de conversion d'énergie	20
2.2.1 L'induction	21
2.2.2 La thermomécanique	24
2.3 Méthodes inverses	29
2.3.1 Définition et mise en place des problèmes inverses	29
2.3.2 Application à la reconstruction de sources thermiques	32
Conclusion et positionnement du travail de thèse	42

Introduction

"Quis, Quid, Ubi, Quibus auxiliis, Cur, Quomodo, Quando" sont les sept questions qui définissent les circonstances d'une situation [1]. Elles constituent l'hexamètre de Quintilien, rhéteur latin du I^{er} siècle après J-C (de son vrai nom Marcus Fabius Quintilianus). Répondre à ces questions, pouvant se traduire par "Qui, Quoi, Où, Par quels moyens, Pourquoi, Comment, Quand" permet d'appréhender le contexte de la situation et de mieux la comprendre.

Cette méthode est devenue un outil utilisé dans de nombreux domaines. Appliquées à une enquête policière par exemple, ces questions deviennent : qui est le coupable ? Quel est le crime ? Où a-t-il été commis ? Par quels moyens ? Quel est le mobile ? De quelle manière ? À quel moment ? Dans le domaine scientifique, ces mêmes questions sont utilisées et adaptées à chaque problème afin d'en mesurer le niveau de connaissance que l'on possède. Laissons entrer l'accusé : l'interrogatoire (scientifique ?!) va débiter.

Le but du projet est de caractériser des sources thermiques volumiques présentes au sein d'un matériau. Les sept questions définissant les circonstances peuvent alors s'écrire :

- *Quid* : qu'est-ce qu'une source thermique ? Que signifie ici caractériser ?
- *Cur* : pourquoi caractériser ces sources thermiques ? Dans quel but ?
- *Quis* : qui cette étude va t'elle concerner ? Quelles vont être les applications ?
- *Quibus auxiliis* : quels sont les moyens nécessaires pour les caractériser ?
- *Quomodo* : comment les caractériser ?
- *Quando* : quand faut-il les caractériser ?
- *Ubi* : où peuvent elles être caractérisées ? Dans quels matériaux ? À quelle profondeur ?

Les trois dernières questions constituent le cœur du sujet et seront traitées et débattues tout au long du manuscrit, en particulier dans les chapitres 3 et 4. Les premières questions permettent quant à elles de comprendre et de mettre en place la problématique, et vont par conséquent être détaillées dans ce chapitre.

2.1 Contexte

Les industries aérospatiales et des transports s’orientent vers une utilisation massive de matériaux légers et résistants, tels que les composites. Le développement de matériaux ayant une durée de vie extrêmement longue est en effet un des objectifs prioritaires. Ainsi, afin de garantir une durée de vie en service, il est nécessaire de maîtriser les propriétés thermo-mécaniques de ces matériaux ainsi que leur évolution au cours de leur utilisation. De la même manière, la détection de défauts au sein d’une structure est primordiale afin d’éviter les accidents. Des inspections régulières des structures sont donc nécessaires. Pour y arriver, les méthodes d’Évaluation et de Contrôle Non Destructifs (E.C.N.D.) sont largement utilisées.

Comme leur nom l’indique, les méthodes d’E.C.N.D. sont utilisées principalement pour deux raisons : la caractérisation et le contrôle des matériaux. La caractérisation d’un matériau mène à la connaissance de celui-ci afin de trouver, ou récupérer, ses données intrinsèques. Par exemple, on peut chercher à connaître la masse volumique, la viscoélasticité, ou encore les caractéristiques thermiques d’un matériau. Parallèlement, contrôler une structure consiste à vérifier l’intégrité de celle-ci : il peut s’agir de chercher une fissure ou toute autre anomalie.

Le *Structural Health Monitoring* (S.H.M.), ou contrôle de santé des structures, est une approche complémentaire aux méthodes d’E.C.N.D. qui a pour objectif de maintenir et prolonger la durée de vie des infrastructures, de détecter et prédire leurs défaillances. Contrairement aux méthodes classiques d’E.C.N.D. qui nécessitent la plupart du temps une mise en arrêt de la structure le temps du contrôle, le S.H.M. cherche à intégrer les capteurs de manière permanente à la structure [2–4], permettant de la contrôler à tout moment.

Les méthodes d’E.C.N.D. et de S.H.M. sont très nombreuses, exploitant des phénomènes physiques tels que l’optique, la thermodynamique, l’électromagnétisme, l’acoustique, ou encore la thermique. Cependant, il est important de souligner que malgré ce caractère pluridisciplinaire, il n’existe pas de méthode optimale ou unique : chacune des méthodes a ses avantages et ses inconvénients. Dans ce travail, c’est l’utilisation de la thermique comme moyen d’E.C.N.D. qui sera principalement abordée.

2.1.1 La thermographie infrarouge

La Thermographie InfraRouge (I.R.T.) doit son origine à Sir William Herschel [5], astronome du roi George III d'Angleterre. En 1800, il a cherché à étudier la chaleur apportée par la lumière. Avec un prisme optique, il a décomposé la lumière blanche du soleil et a mesuré la température de chaque couleur à l'aide d'un thermomètre dont le réservoir avait été noirci. Il a remarqué que le violet était la couleur la plus froide et que la température augmentait pour toutes les couleurs de l'arc-en-ciel de manière continue jusqu'au rouge, la couleur la plus chaude. Il découvrit à ce moment-là qu'au-delà du rouge, il existait une zone plus chaude que toutes les autres. Il décida de la nommer infrarouge, du latin *infra* : "dessous" donc en-dessous du rouge. La figure 2.1 donne le spectre de la lumière blanche en fonction des longueurs d'ondes λ .

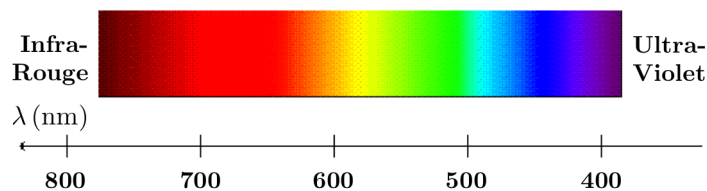


FIGURE 2.1 – Spectre de la lumière blanche.

Ce n'est cependant qu'à partir de la seconde moitié du XIX^e siècle que se développeront les capteurs infrarouges, permettant alors de définir la bande de fréquences du rayonnement infrarouge. Le mot thermographie vient du grec "*thermos*" signifiant "chaud" et "*graphein*" signifiant "dessiner, écrire". La définition donnée par l'Association française de normalisation (Afnor) est la suivante :

La thermographie infrarouge est une technique permettant d'obtenir, au moyen d'un appareillage approprié, l'image thermique observée dans un domaine spectral de l'infrarouge. (Définition Afnor [6]).

Les caméras thermiques utilisées aujourd'hui ne mesurent pas directement la température, mais la luminance du champ thermique observé. Cependant, cette cartographie obtenue peut se convertir sous forme d'un thermogramme. De nos jours, sur les caméras IR les plus performantes, il est possible de détecter des différences de température de l'ordre de 10 mK.

Les méthodes d'E.C.N.D. par I.R.T., explicitées par [7–10], peuvent se scinder en deux catégories : la thermographie passive et la thermographie active.

- **La thermographie passive** permet d'observer les effets thermiques de surfaces. Elle met en évidence les transferts de chaleur par conduction et rayonnement thermiques sur la structure étudiée *sans apporter d'énergie supplémentaire*. Elle est généralement utilisée pour le contrôle de l'isolation thermique des bâtiments ou des installations électriques [11, 12]. La figure 2.2 donne deux exemples de cette technique : en (a) la thermographie d'un système électrique permet de visualiser un fusible défectueux, tandis qu'en (b) l'image thermique du bâtiment permet de contrôler l'isolation de celui-ci.

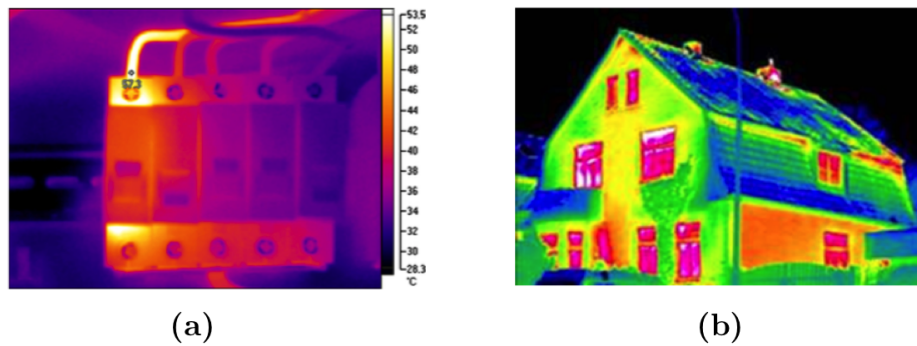


FIGURE 2.2 – Thermographie passive d'un système électrique (image issue de [11]) (a) et d'une maison (image issue de [12]) (b).

- **La thermographie active** nécessite l'apport d'une excitation extérieure afin de provoquer l'apparition de sources thermiques. L'analyse du champ de température à la surface de la structure étudiée permet de mettre en évidence les défauts (fissures, délaminages...) ou bien de caractériser les propriétés du matériau.

Les méthodes d'E.C.N.D. par I.R.T. ont de nombreux avantages [13–15] : elles sont, entre autres, non destructives, non intrusives, sans contact, rapides et facilement adaptables en fonction des besoins industriels. Dans le paragraphe suivant, les principales méthodes d'excitation utilisées en thermique pour la thermographie active sont présentées.

2.1.2 Les principaux types d'excitateurs utilisés en thermique

Dans le domaine de la thermique et plus particulièrement de la thermographie active, les excitateurs utilisés pour l'E.C.N.D. sont surfaciques. Parmi les principaux, on peut citer les méthodes d'excitation par flash, lock-in ou encore à l'aide d'un laser. Ces méthodes, présentées par la suite, ont été développées pour la caractérisation thermique de grandeurs

thermophysiques dans la profondeur tels que la conductivité, la diffusivité, l'effusivité thermiques ou encore la chaleur massique, mais peuvent aussi être utilisées pour le contrôle non-destructif des milieux étudiés.

Méthodes Flash

Les méthodes Flash consistent à exciter la surface d'un matériau par une impulsion photothermique de courte durée (type Dirac). Parmi les méthodes Flash se distinguent deux catégories en fonction de si l'on mesure le champ de température sur la face excitée de l'échantillon ou sur la face opposée : on parle de méthode Flash face avant et *a contrario* de méthode Flash face arrière.

a) Flash face arrière

Un des exemples d'E.C.N.D. bien connu dans le monde de la thermique utilisant le Flash face arrière est la méthode proposée en 1961 par W. J. Parker *et al.*. Ils ont proposé une technique permettant de mesurer la diffusivité thermique par méthode Flash face arrière [16]. L'analyse du champ de température mesuré sur la face arrière du matériau va permettre l'estimation de la diffusivité thermique du matériau. Cette approche s'applique à l'ensemble des matériaux solides et opaques à la longueur d'onde d'excitation du flash. La figure 2.3 illustre le principe de cette méthode.

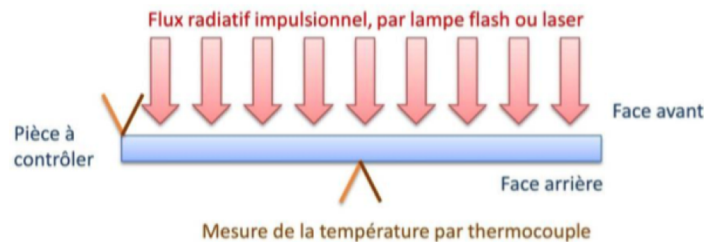


FIGURE 2.3 – Schéma du principe de la méthode Flash de Parker (figure issue de [17]).

Les hypothèses considérées dans la méthode de Parker sont que le flux d'excitation est uniforme sur l'ensemble de la surface et de courte durée (excitation de type Dirac). Ensuite, le matériau est considéré adiabatique, autrement dit les pertes convectives sont considérées négligeables. Sous ces conditions, le maximum de sensibilité à la diffusivité thermique est atteint au temps de demi-montée $t_{1/2}$ du thermogramme, comme illustré par la figure 2.4.

La méthode proposée par Parker consiste à déterminer la diffusivité thermique du matériau à l'aide de la formule (2.1) :

$$a = 0.139 \frac{e^2}{t_{1/2}} \quad (2.1)$$

où a est la diffusivité du matériau ($\text{m}^2.\text{s}^{-1}$) et e son épaisseur (m).

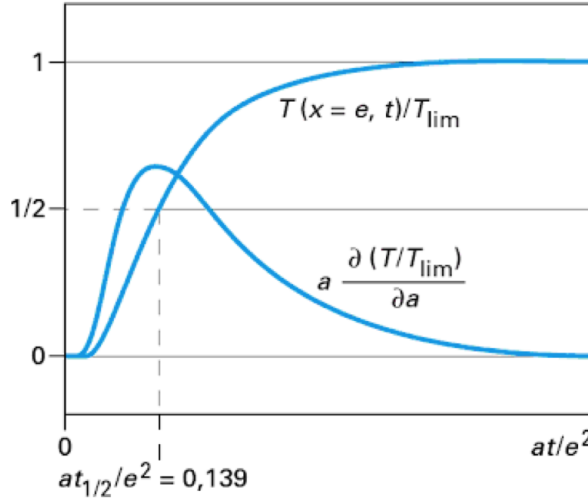


FIGURE 2.4 – Thermogramme en face arrière, courbe de sensibilité réduite et temps de demi-montée [18].

La méthode de Parker est l'une des plus anciennes méthodes de caractérisation de la diffusivité thermique sans contact par Flash face arrière. Elle est toujours largement utilisée en raison de sa simplicité de mise en œuvre et sa grande robustesse. Cependant, les hypothèses qu'elle nécessite ne sont pas toujours réalisables : en particulier les conditions aux limites adiabatiques sont rarement vérifiées. D'autres méthodes ont été proposées par la suite pour palier à ces difficultés. La méthode des temps partiels avec pertes convectives proposée par Degiovanni [19] ou encore l'approche des développements asymptotiques proposée par Mourand [20] en sont des exemples.

b) Flash face avant

Les méthodes d'excitation par Flash face avant suivent le même principe que celles par face arrière. Elles sont utilisées quand, par exemple, la face arrière du matériau n'est pas accessible. Dans ce cas, l'excitation et les mesures se font sur la même surface de

l'échantillon. Sous les mêmes conditions (excitation de type Dirac, uniformité spatiale de l'excitation et conditions aux limites adiabatiques), l'évolution de champ de température en fonction du temps suit, en échelle logarithmique, une décroissance linéaire aux temps courts et atteint une asymptote horizontale aux temps longs, comme illustré par la figure 2.5.

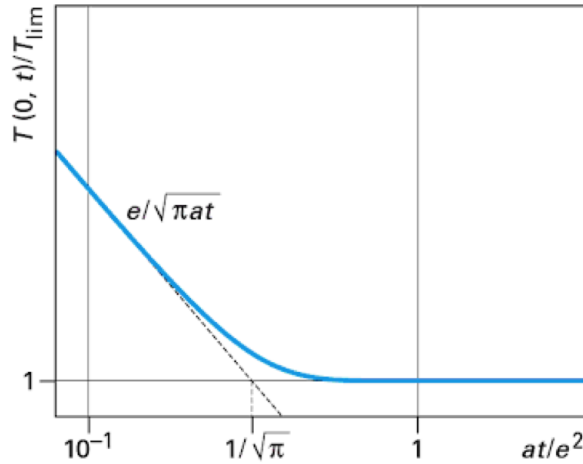


FIGURE 2.5 – Réponse au flash face avant en échelle logarithmique et définition d'un temps caractéristique à l'intersection des deux asymptotes [18].

La caractérisation du coefficient de diffusion par flash avant consiste à se servir du temps caractéristique t_c obtenu par le croisement des deux comportements asymptotiques [21]. Il est défini par l'équation (2.2) :

$$t_c = \frac{e^2}{a}. \quad (2.2)$$

Cette méthode est très facile à mettre en œuvre. Cependant, tout comme la méthode de Parker, elle comporte certains inconvénients. En effet, elle ne prend pas en compte les pertes thermiques par convection, et surtout, l'estimation des asymptotes n'est pas toujours facile à déterminer en raison du bruit de mesure.

Les excitations par Flash peuvent aussi être utilisées pour détecter des défauts dans le matériau. On peut par exemple citer les travaux de D. Balageas [22], de J.M. Roche [23], ou encore de X. Maldague [24] qui ont développé des méthodes pour détecter et imager des défauts en profondeur à l'aide d'une excitation Flash face avant.

Méthode "Lock-In"

La méthode Lock-In est une technique qui a été proposée pour la première fois par G. Busse en 1979 [25] en opto-acoustique pour la détection de défauts à différentes profondeurs dans de l'aluminium. Comme illustré sur la figure 2.6, la face avant du matériau est excitée thermiquement à l'aide de deux lampes halogènes. Chaque lampe est reliée à un générateur basse fréquence qui permet de créer une modulation sinusoïdale périodique. L'excitation thermique résultante prend donc la forme d'un sinus centré sur une composante moyenne. La caméra infrarouge qui mesure l'évolution du champ de température résultant sur la face avant du matériau est elle aussi synchronisée avec le générateur.

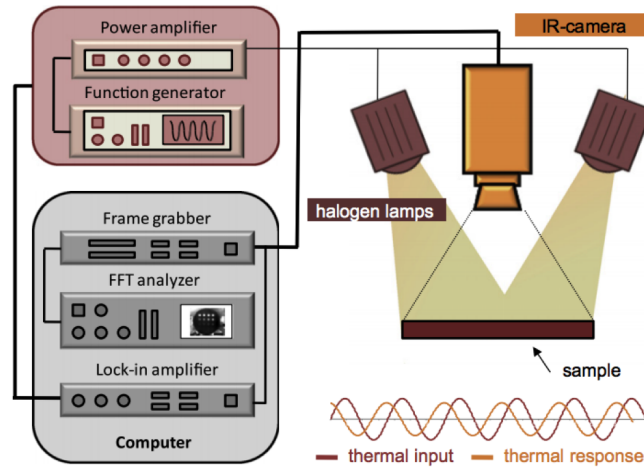


FIGURE 2.6 – Principe d'une mesure thermographique de type "Lock-in" [26].

L'un des avantages de la méthode Lock-in est qu'elle est très peu sensible au bruit de mesure. En effet, de par le caractère périodique de l'excitation, les mesures effectuées peuvent être moyennées sur un grand nombre de périodes.

En revanche, cette méthode peut être longue à mettre en œuvre. Le lock-in permet en effet de caractériser des défauts dans la profondeur. Or, la longueur de pénétration thermique dépend directement de la fréquence de modulation de l'excitation thermique [21]. En effet, la profondeur μ_d (m) du défaut peut être calculée à l'aide de la formule suivante :

$$\mu_d = c \sqrt{\frac{a}{\pi f}} \quad (2.3)$$

où c est une constante, a ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$) la diffusivité thermique du matériau et f (Hz) la fréquence d'excitation.

La figure 2.7 montre les résultats obtenus par R. Montanini sur un échantillon de plexiglas contenant des défauts (trous) à différentes profondeurs.

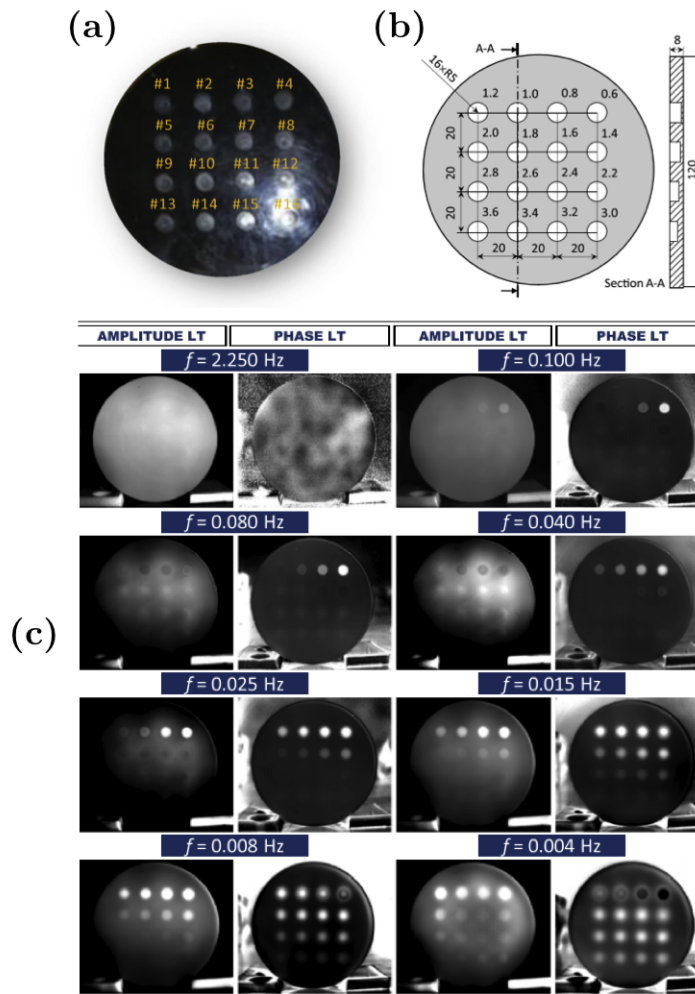


FIGURE 2.7 – Échantillon de plexiglas contenant plusieurs trous (numérotés de 1 à 16) situés à différentes profondeurs (a). Cartographie de chaque trou (b). Résultats suite aux mesures obtenues avec la méthode Lock-in Thermography (LT) (c) [26].

Comme on peut l'observer, avec une fréquence non adaptée ($f = 2.25 \text{ Hz}$) les défauts ne sont pas visibles. Pour une fréquence élevée, ce sont les défauts les plus proches de la surface qui seront détectés, tandis que les fréquences faibles permettront de sonder la profondeur du matériau, ce qui est cohérent avec l'équation (2.3).

Ainsi, pour pouvoir détecter des défauts à toutes les profondeurs, il faut effectuer plusieurs fois l'expérience en balayant la fréquence d'excitation, ce qui peut s'avérer long si le matériau est épais.

Excitation par laser

Les lasers sont aussi régulièrement utilisés pour exciter thermiquement les surfaces des matériaux. Leur avantage est que l'on peut les focaliser de manière à exciter une petite partie de la surface, contrairement aux lampes plus classiques qui excitent le matériau sur un large domaine spatial. De la même manière que précédemment, plusieurs types d'excitation peuvent être employées, comme l'excitation impulsionnelle ou modulée. Il est aussi possible de déplacer le laser pour balayer la surface d'étude.

a) *Flying Spot*

En 1998, J.C. Krapez propose en effet de déplacer la source laser à vitesse constante pour détecter les fissures transverses se trouvant sur une pièce métallique [27, 28]. Le dispositif expérimental proposé, illustré par la figure 2.8, consiste à déplacer le faisceau laser à la surface de l'échantillon par le biais d'un système de miroirs de balayage. Une caméra infrarouge permet ensuite de mesurer le champ de température résultant. Cette méthode est aussi appelée Flying Spot.

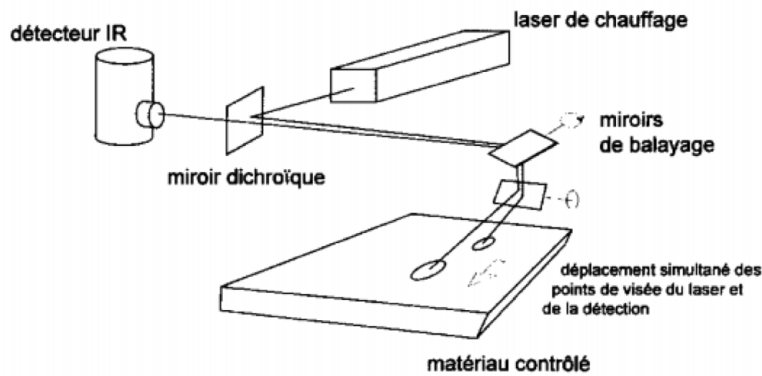


FIGURE 2.8 – Schéma du principe du Flying Spot [27].

Lors du passage du laser sur une fissure, un gradient de température apparaît. La fissure peut en effet se modéliser comme une résistance thermique. L'un des inconvénients de cette méthode est qu'une irrégularité de surface, comme une rayure par exemple, va être détectée comme une fissure car leurs signatures thermiques sont similaires. La solution proposée par Krapez est alors de balayer la surface en effectuant un aller-retour. Le gradient au niveau de la fissure va augmenter en raison de l'accumulation de chaleur, ce qui ne sera pas le cas pour la rayure. De cette manière, en effectuant la soustraction des mesures obtenues

entre l'aller et le retour, la signature thermique de la rayure sera supprimée, mais pas celle de la fissure. Cette technique est appelée Flying Spot Normalisé. La figure 2.9 illustre les résultats obtenus entre la méthode Flying Spot et la méthode Flying Spot Normalisé pour la détection d'une fissure accolée à une rayure.

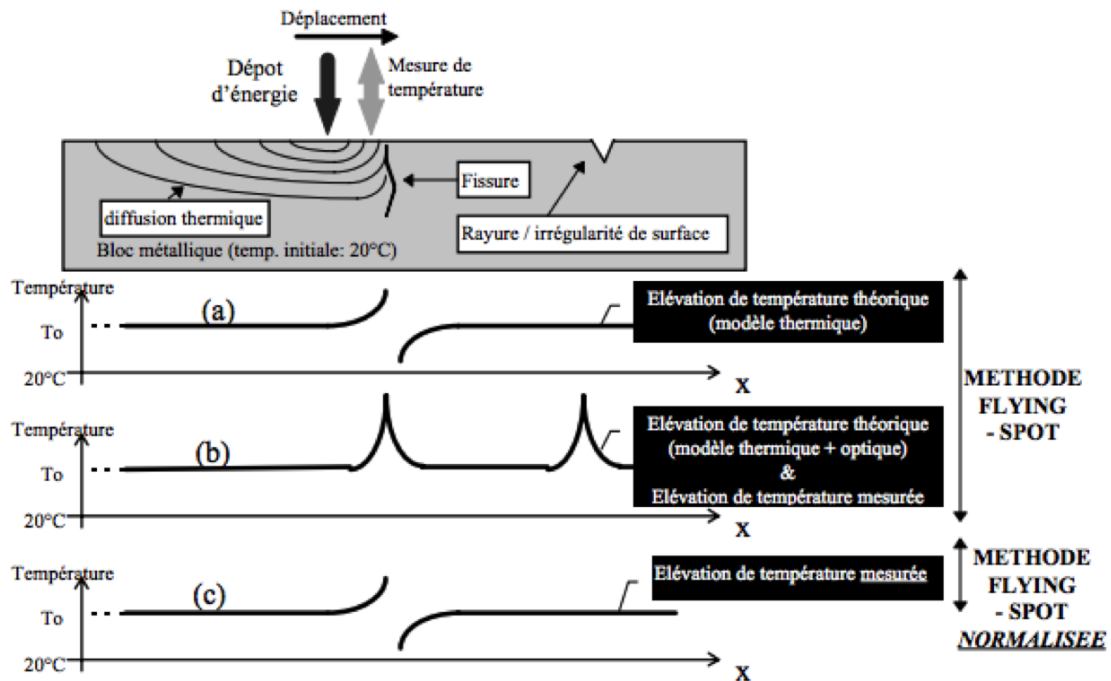


FIGURE 2.9 – Signature thermique d'une fissure verticale à la surface de mesure (a). Signature thermique d'une fissure et d'une rayure (b). Signature thermique d'une fissure et d'une rayure après traitement de Flying Spot normalisé (c) [29].

L'inconvénient de cette méthode est qu'elle est uniquement qualitative : les fissures sont détectées, mais pas caractérisées. De plus, la mise en œuvre est assez délicate dans le sens où il est difficile de synchroniser avec précision le laser et la caméra infrarouge.

b) Méthode de la gaussienne

Le laser peut aussi être utilisé de manière pulsée. Au début des années 2000, P. Bison *et al.* [30, 31] propose une méthode utilisant une excitation impulsionnelle laser pour mesurer des diffusivités thermiques dans le plan de couches minces. Le dispositif expérimental développé par Bison permet de créer une source thermique surfacique de forme gaussienne [31].

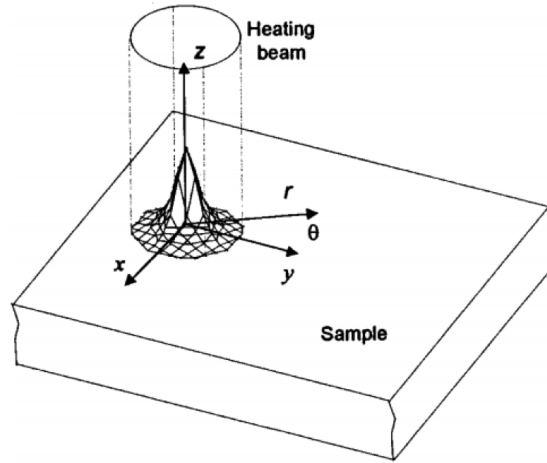


FIGURE 2.10 – Schéma d'une excitation laser impulsionnelle [32].

L'étude du rayon de la gaussienne permet de déterminer les diffusivités thermiques dans le plan.

Concernant la caractérisation quantitative des fissures, en 2016, N.W. Peach-May *et al.* développent une technique qui consiste à utiliser une excitation pulsée permettant de calculer la résistance thermique des fissures. Le principe de la méthode consiste à envoyer excitation thermique de type Dirac par un faisceau de forme gaussienne à proximité du plan vertical contenant la fissure, comme illustré par la figure 2.11 en (a).

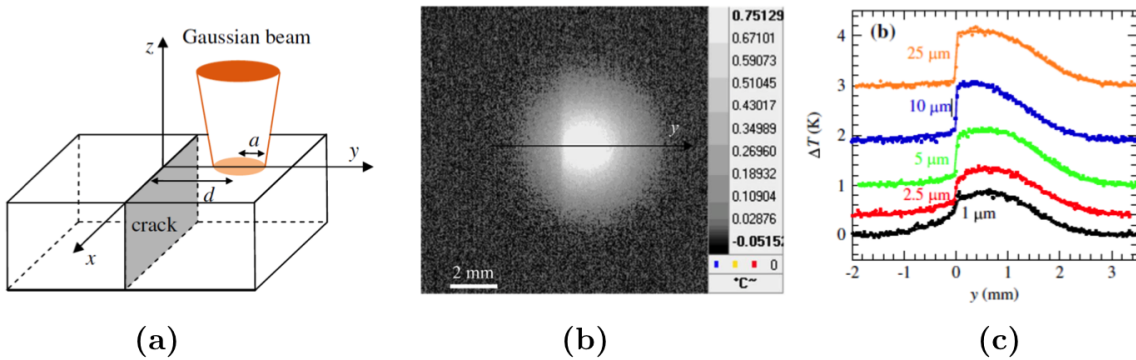


FIGURE 2.11 – Schéma du principe permettant de quantifier une fissure à l'aide d'un faisceau laser de rayon a excitant la surface du matériau à une distance d de la fissure (a). Illustration du champ thermique résultant (b). Profil selon l'axe y de la température pour des tailles de fissures allant de $1\ \mu\text{m}$ à $25\ \mu\text{m}$ (c) [33].

La connaissance de la formule analytique de la réponse thermique résultante permet de caractériser l'ouverture de la fissure. En effet, lorsque le laser se rapproche de la fissure, son profil gaussien présente une discontinuité qui est directement liée à la résistance thermique de celle-ci. Une régression du profil gaussien obtenu à partir de la formule analytique connue et de la mesure effectuée permet en effet de l'estimer. La réponse thermique obtenue ainsi que les profils de température selon l'axe y résultants sont illustrés en (b) et (c) sur la figure 2.11.

Les modes d'excitation utilisés pour l'E.C.N.D. en thermique sont nombreux et sont pertinents pour mesurer des données intrinsèques du matériau tels que les coefficients de diffusion, ou encore pour détecter des défauts sur ou proche de la surface. En revanche, l'inconvénient majeur est que ces techniques excitent uniquement la surface des matériaux. La caractérisation de données volumiques ou de défauts qui se trouvent en profondeur (fissures, délaminages...) est donc difficile à effectuer.

Plusieurs systèmes, faisant intervenir divers phénomènes physiques, permettent de créer des sources thermiques volumiques au sein d'un matériau. Les paragraphes suivants, et en particulier la partie §2.2, permettent d'avoir un aperçu de ces techniques.

2.1.3 Les sources thermiques volumiques

La température mesurée à l'aide de la thermographie infrarouge est toujours issue d'une source de chaleur. La définition de ces sources est donc nécessaire pour pouvoir comprendre le phénomène ainsi que la problématique étudiés.

Une source thermique volumique Ω , aussi appelée source interne, est définie par la puissance qu'elle génère par unité de volume dans le milieu en fonction du temps [34]. Elle s'exprime en W m^{-3} et se traduit par une dissipation ou une conversion d'énergie dans le matériau, menant à une élévation de température dans ce milieu. Plusieurs systèmes de conversion d'énergie, présentés par le paragraphe §2.2, peuvent mener à l'apparition de ces sources thermiques.

Les sources étudiées dans cette thèse sont *volumiques* : les caractériser consiste à les localiser, à déterminer leurs géométries dans le milieu ainsi que leur répartition de puissances (que l'on va appeler ici intensités) en chacun des points. La figure 2.12 illustre le principe de la caractérisation de ces sources : une (ou plusieurs) source thermique volumique est présente au sein d'un matériau. La chaleur résultante va diffuser dans tout

le matériau. La caméra IR peut alors mesurer le champ de température à la surface en fonction du temps. À partir de ces données et de la connaissance des propriétés thermiques du milieu, l'objectif (représenté à droite sur la figure) est de retrouver toutes les caractéristiques de la source via des méthodes inverses. Un aperçu de quelques méthodes inverses est effectué au paragraphe §2.3.

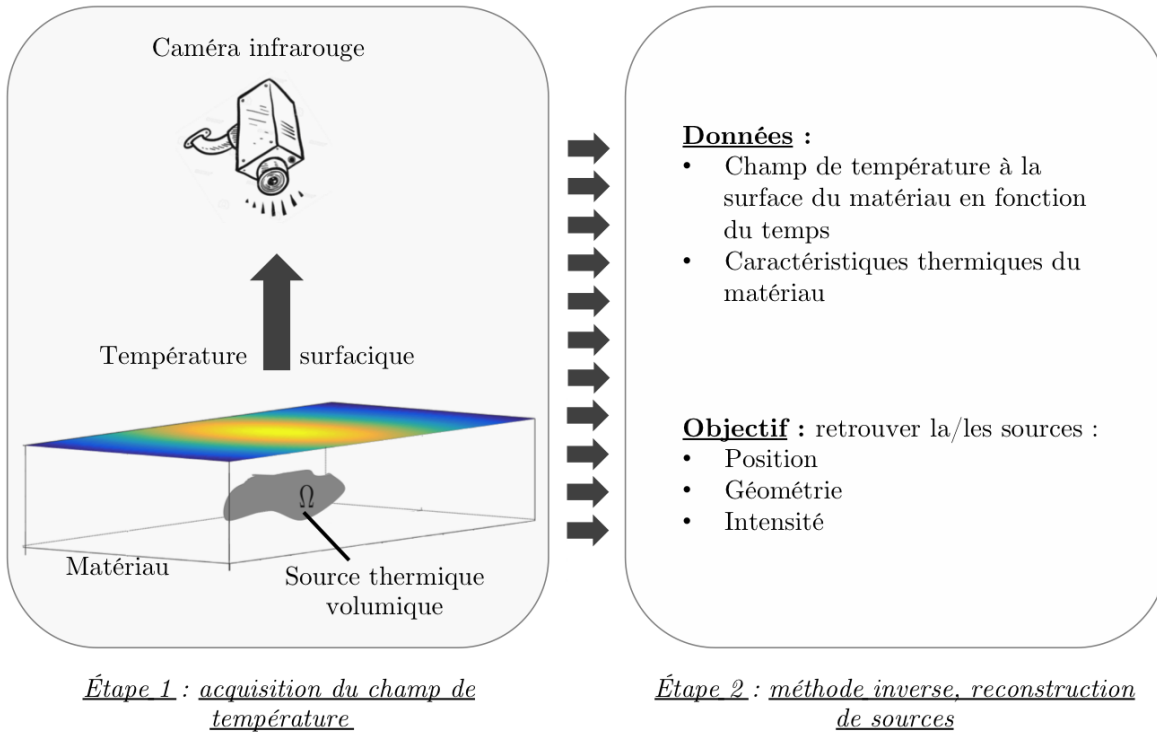


FIGURE 2.12 – Schéma explicatif du principe de reconstruction de sources thermiques volumiques.

Comme cela va être détaillé au paragraphe suivant (§2.2), les sources thermiques peuvent résulter de la présence d'un défaut, d'un changement de phase, de la viscoélasticité du milieu... Ainsi, si la source thermique vient d'un défaut, la connaissance de ses propriétés (intensité, géométrie...) permettra de remonter aux caractéristiques du défaut. Si la source est issue de la viscoélasticité, on pourra remonter aux propriétés mécaniques et ainsi de suite. De ce fait, la caractérisation des sources thermiques est la première étape dans l'E.C.N.D. des milieux étudiés.

2.2 Systèmes de conversion d'énergie

Le principe de conservation de l'énergie stipule que l'énergie totale d'un système isolé est invariante au cours du temps. Autrement dit, on ne peut pas la produire à partir de rien : on ne peut que l'échanger ou la transformer d'une forme à une autre. Ce que résume la maxime d'Antoine de Lavoisier, célèbre chimiste du XVIII^e siècle [35] : *"Rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme."* Les sept principales formes d'énergies ainsi que quelques types de conversions sont détaillés par la figure 2.13.

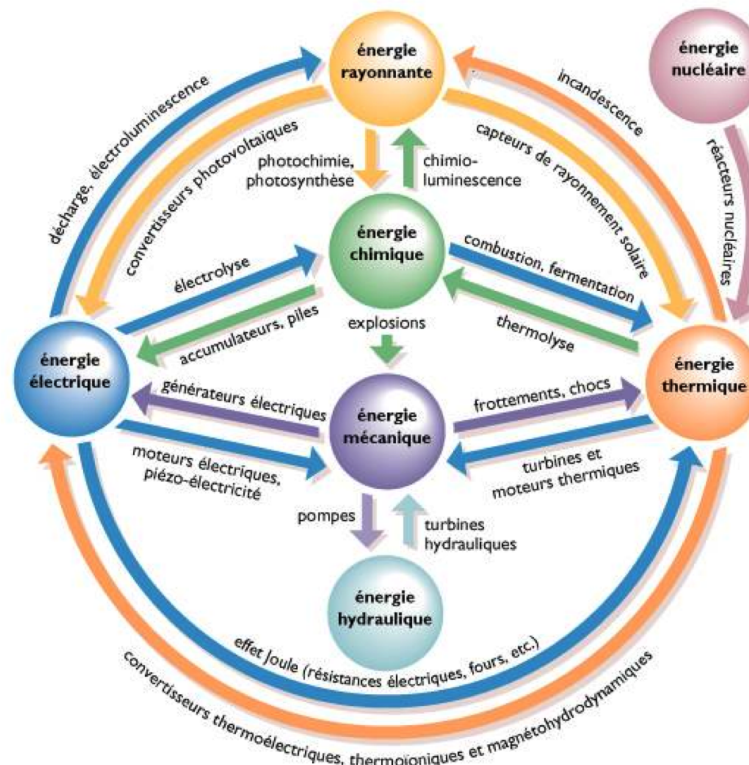


FIGURE 2.13 – Conversions des sept formes principales d'énergies et leurs convertisseurs. Dessin de Xavier Hüe - Archives Larousse [36].

- **L'énergie nucléaire** est stockée au cœur des atomes. Elle est directement issue des liaisons entre les protons et les neutrons contenus dans le noyau des atomes.
- **L'énergie rayonnante**, aussi appelée radiative, repose sur le principe du rayonnement électromagnétique, lui-même basé sur les déplacements de photons. Elle peut-être émise par le soleil ou une lampe par exemple.
- **L'énergie chimique** est associée aux liaisons entre les atomes, qui constituent les molécules.

- **L'énergie mécanique** peut se décomposer elle-même en deux catégories : l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.
- **L'énergie hydraulique**, comme son nom l'indique, est fournie par le mouvement de l'eau : les cascades, les courants marins et la marée en sont des exemples.
- **L'énergie électrique** est due aux déplacements des électrons. Les piles et les alternateurs fournissent ce type d'énergie.
- **L'énergie thermique** est causée par l'agitation des molécules et des atomes au sein de la matière.

Comme explicité précédemment, chacune de ces énergies peut se convertir d'une forme à l'autre. L'objectif de la thèse est de caractériser les sources thermiques : on va donc se focaliser sur les systèmes permettant de mener à l'énergie thermique. Il est impossible de tous les citer (il en existe une multitude) : seuls quelques exemples vont donc être explicités par la suite.

2.2.1 L'induction

Le chauffage par induction est une application directe de deux lois physiques : la loi de Lenz-Faraday et l'effet Joule. La forme locale de la loi de Lenz-Faraday s'appelle l'équation dite de "Maxwell-Faraday", proposée par le mathématicien et physicien écossais James Clerk Maxwell [37]. Elle s'écrit :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.4)$$

où $\vec{E}$ est le champ électrique, $\vec{B}$ le champ magnétique et t le temps. La formule (2.4) constitue l'une des quatre équations de Maxwell et est posée comme un postulat de l'électromagnétisme. De la même manière que pour la loi de Lenz-Faraday, l'effet Joule peut s'écrire sous forme locale :

$$p = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (2.5)$$

avec p la puissance par unité de volume, $\vec{j}$ la densité de courant et $\vec{E}$ le champ électrique.

Ainsi, toute substance conductrice de l'électricité plongée dans un champ magnétique variable (qui peut être créée par une bobine inductrice ou un inducteur) est le siège de courants électriques induits, ce qui est traduit par l'équation (2.4). Ces courants induits sont appelés courants de Foucault [38]. Le déplacement des électrons formant ces courants dissipe de la chaleur par effet Joule (*c.f.* équation (2.5)) dans le milieu où ils ont été créés.

En résumé, les trois phénomènes physiques suivants entrent en jeu successivement :

- Transfert de l'énergie par voie électromagnétique de l'inducteur vers le matériau à chauffer.
- Transformation de cette énergie électrique en chaleur par effet Joule.
- Diffusion par conduction thermique de la chaleur au sein du matériau.

La seule contrainte pour qu'il y ait naissance d'une source thermique est que le matériau ou une partie du matériau étudié soit conducteur à l'électricité.

Les courants de Foucault ont une longueur de pénétration δ (m), aussi appelée "effet de peau", définie par :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu\sigma f}} \quad (2.6)$$

où μ est la perméabilité magnétique (H.m^{-1}), σ la conductivité électrique (S.m^{-1}) et f la fréquence d'excitation (Hz). Ainsi, l'échauffement par effet Joule n'aura lieu que sur cette petite épaisseur δ , qui dépend des propriétés du matériau et de la fréquence d'excitation. Pour avoir un ordre de grandeur, l'épaisseur de peau pour de l'Aluminium Al 2014 est d'environ 0.34 mm à une fréquence de 100 kHz, tandis que pour les métaux ferromagnétiques, elle est d'environ 0.04 mm à la même fréquence. En revanche, pour des Polymères Renforcés en Fibre de Carbone (PFRC), l'épaisseur de peau est beaucoup plus élevée : elle avoisine en effet les 50 mm pour une fréquence de 100 kHz [39].

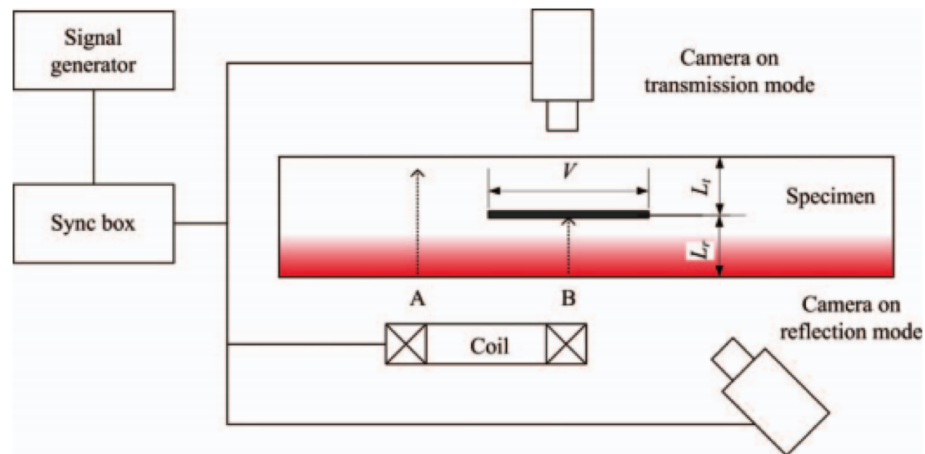


FIGURE 2.14 – Schéma du dispositif pour la détection de défauts par couplage thermographie - induction [39].

Des méthodes d'E.C.N.D. par couplage induction-thermographie et en particulier la détection de défauts dans des alliages métalliques sont, par exemple, détaillés par [39, 40]. À titre d'exemple, la figure 2.14 illustre le dispositif utilisé en thermo-induction. Le matériau est excité thermiquement à l'aide d'une bobine, entraînant l'apparition d'une source thermique étendue (représentée en rouge sur la figure) sur une des faces avec une profondeur δ . La caméra peut être placée d'un côté ou de l'autre du matériau, ce qui permet d'observer la réponse thermique résultante en face avant ou en face arrière.

Si l'épaisseur de peau est faible, le problème se résout de la même manière que pour une excitation Flash. L'avantage de cette technique par rapport à l'excitation par lampe Flash est que l'apparition des courants de Foucault, qui sont répartis sur toute la surface supérieure du matériau, entraînent forcément une répartition spatiale uniforme de l'excitation. Dans ce cas, les réponses thermiques en face avant et face arrière peuvent se calculer à partir du modèle 1D analytique. En l'absence de défaut, les solutions obtenues en face avant et face arrières sont données respectivement par les équations (2.7) et (2.8) [41] :

$$T(t) = \frac{Q}{\rho C_p L} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp \left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \alpha t \right) \right] \quad (2.7)$$

$$T(t) = \frac{Q}{\rho C_p L} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \alpha t \right) \right] \quad (2.8)$$

où Q représente l'énergie (J.m^{-2}), ρ la masse volumique (kg.m^{-3}), C_p la chaleur spécifique ($\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$), L l'épaisseur du matériau (m), α le coefficient de diffusion thermique ($\text{m}^2.\text{s}^{-1}$) et t le temps (s).

La figure 2.15 trace les réponses thermiques obtenues par Y. He *et al* [39] pour différents positions de défauts (épaisseur et profondeur variables). En (a) se trouve le tableau synthétisant les paramètres de chacun des cinq cas effectués. Les réponses thermiques mesurées en face arrière sont tracées en (b), et pour la face avant en (c). Comme on peut l'observer, la présence d'un défaut entraîne un décalage dans la réponse thermique. Pour déterminer la profondeur du défaut, la méthode TSR (*Thermal Signal Reconstruction*) est utilisée [42]. Elle consiste à utiliser le logarithme temporel de l'évolution de la température en face avant et de la comparer avec la réponse théorique analytique (sans défaut). L'étude de la dérivée première permet de repérer la profondeur du défaut. Cette méthode est cependant très sensible au bruit.

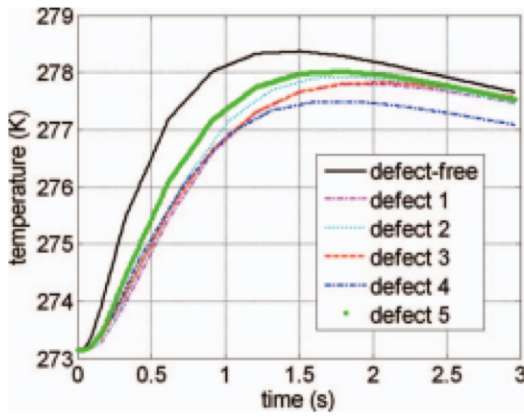
Une méthode plus robuste a été proposée en 2003 par S.M. Shepard. Il propose en effet

dans [43] d'effectuer une régression polynomiale logarithmique du thermogramme mesuré et d'en calculer la dérivée seconde pour pouvoir déterminer les paramètres des défauts avec une plus grande précision que la méthode TSR classique.

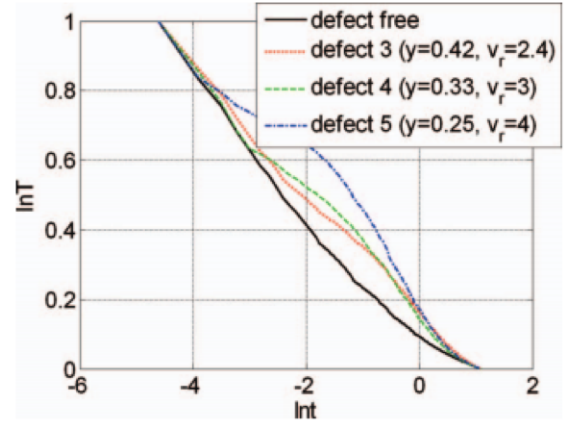
TABLE IV. Parameters of different inner defects.

Defect no.	V (mm)	L_t (mm)	L_r (mm)	$y = L_r/L$	$v_t = V/L_t$	$v_r = V/L_r$
1	6	1.5	3.5	0.58	4	1.71
2	6	2	3	0.50	3	2
3	6	2.5	2.5	0.42	2.4	2.4
4	6	3	2	0.33	2	3
5	6	3.5	1.5	0.25	1.71	4

(a)



(b)



(c)

FIGURE 2.15 – Tableau recensant les paramètres des différents défauts (se référer à la figure 2.14) (a). Réponse thermique en face arrière (b). Réponse thermique en face avant, échelle logarithmique (c) [39].

2.2.2 La thermomécanique

On parle de couplage thermomécanique lorsque les problèmes de mécanique et de thermiques sont liés entre eux. Par exemple quand on chauffe une pièce, elle se dilate et donc se déforme. Si la pièce ne peut se déformer librement, il y a création de contraintes. Une sollicitation thermique peut donc provoquer une contrainte ou une déformation mécanique. À l'inverse, la déformation mécanique d'un matériau peut entraîner l'échauffement d'une partie ou de la totalité de celui-ci. Ainsi, une sollicitation mécanique peut engendrer un effet thermique [44].

La mise en équation d'un problème mécanique peut se faire à l'aide du Principe Fondamental de la Dynamique (P.F.D.) proposé par Isaac Newton en 1687 [45, 46]. L'équilibre mécanique peut s'écrire, sous forme locale, par :

$$\operatorname{div} \sigma + \rho \vec{g} = \rho \vec{\gamma} \quad (2.9)$$

où ρ est la masse volumique du matériau (kg.m^{-3}), $\vec{g}$ l'accélération due à la pesanteur (m.s^{-2}), σ le tenseur des contraintes (Pa) et $\vec{\gamma}$ le champ d'accélération (m.s^{-2}). À cette loi d'équilibre s'ajoutent les lois de comportements liées au matériau. Les lois de comportement lient les paramètres. Par exemple, la contrainte du matériau σ peut, en fonction du phénomène étudié, s'exprimer en fonction de la déformation ε , de la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ et de la température :

$$\sigma = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T) \quad (2.10)$$

En injectant l'équation (2.10) dans l'équation (2.9), on peut directement voir que la thermique peut modifier le comportement mécanique du matériau.

L'équation de la chaleur, quant à elle, peut se déterminer à l'aide des principes de la thermodynamique [44]. La forme locale du premier principe s'écrit :

$$\rho \dot{e} = \sigma : \dot{\varepsilon} - \operatorname{div} \vec{q} \quad (2.11)$$

où ρ est la masse volumique (kg.m^{-3}), e l'énergie interne (J), σ le tenseur de contrainte (Pa), $\dot{\varepsilon}$ la vitesse de déformation et $\vec{q}$ le flux de chaleur (W). L'énergie interne du matériau s'écrit elle-même en fonction des variables d'état (température, déformation, variables d'écrouissage...) [44].

Un matériau subissant une contrainte mécanique peut se déformer élastiquement et/ou plastiquement, ce qui d'après l'équation (2.11), va pouvoir engendrer des effets thermiques et donc *a fortiori* l'apparition de sources thermiques. De nombreux travaux se servant de la thermique pour étudier des phénomènes mécaniques ont déjà été effectués, comme par exemple les mécanismes de fatigue sur les soudures développés par T. Ummenhofer *et al.* [47], l'étude de propagation des fissures [47–52] ou encore sur la localisation de contraintes mécaniques, proposée par A. Chrysochoos *et al.* [53, 54]. Parmi les différentes méthodes existantes se trouve aussi la vibro ou sono-thermographie, présentée par la suite.

La vibro et sono-thermographie

Les méthodes d'excitations par ondes acoustiques peuvent se scinder en deux catégories en fonction de leur fréquence : les méthodes ultrasonores (entre 20 kHz et 10 MHz) et les méthodes vibratoires (de 100 Hz à 20 kHz). Ces méthodes ont été introduites à la fin des années 1970 comme un nouveau moyen d'E.C.N.D. pour détecter les défauts tels que les fissures ou les délaminages [55–58] dans les matériaux. Contrairement aux méthodes thermiques d'E.C.N.D. plus classiques qui réalisent une excitation thermique en surface à l'aide de sources de chaleur extérieures (lampes, diode laser...) [16, 59–61], les ondes acoustiques permettent de créer des sources de chaleur volumiques à l'intérieur du matériau.

Dans les matériaux viscoélastiques, une partie de l'énergie mécanique injectée par les ondes (ultra)sonores est dégradée sous forme de chaleur par dissipation viscoélastique, qui peut alors être imagée par thermographie infrarouge. Il a été montré dans [62] que le terme de dissipation viscoélastique est défini par :

$$\sigma : \partial_t \varepsilon^v \quad (2.12)$$

où ∂_t représente la dérivée par rapport au temps, ":" est le double produit tensoriel contracté, σ le tenseur des contraintes et ε^v la part viscoélastique du tenseur de déformation. Ce terme donné par (2.12) est directement transformé en chaleur.

En présence de défaut (fissure, délaminage...), les ondes acoustiques vont introduire de la friction et/ou avoir pour conséquences d'augmenter la concentration de contraintes au niveau de ce défaut. L'excitation mécanique engendrée va alors se convertir et devenir une source thermique interne, située à l'endroit-même du défaut.

Les sources volumiques de chaleur créées en vibro et sonothermographie ont l'avantage de générer un signal thermique qui vient directement de l'intérieur de la structure. La quantité de chaleur produite par les sources et la diffusion de cette chaleur dépendent directement des propriétés mécaniques et thermiques du matériau. En conséquence, l'analyse par thermographie infrarouge du champ thermique induit par les sources thermiques volumiques constitue une approche pertinente pour l'évaluation des propriétés mécaniques et/ou thermiques du matériau ou pour la détection de défauts. [63–67] sont quelques exemples de travaux dans ce domaine.

Par exemple, les travaux réalisés par S. Rodriguez *et al.* [64] sur l'expérience des plaques

de Chladni permettent de bien illustrer ces techniques. Au début du XIX^e siècle, Ernst Chladni [68] étudie les vibrations des structures. L'expérience de Chladni consiste à prendre une plaque et à la fixer en son centre sur un support. Les bords de la plaque, posée horizontalement, sont libres. Du sable est alors réparti de manière homogène sur la plaque, puis celle-ci est mise en vibration. E. Chladni avait utilisé un archet qu'il avait frotté verticalement sur le bord de la plaque. Sous l'excitation de l'archet, la plaque vibre, et le sable migre alors vers les lignes nodales permettant de voir les modes vibratoires de la plaque. La modification de la position du point d'excitation, ainsi que forcer un (ou plusieurs) point de déplacement nul en positionnant un doigt sur la plaque, permet de choisir un mode vibratoire particulier.

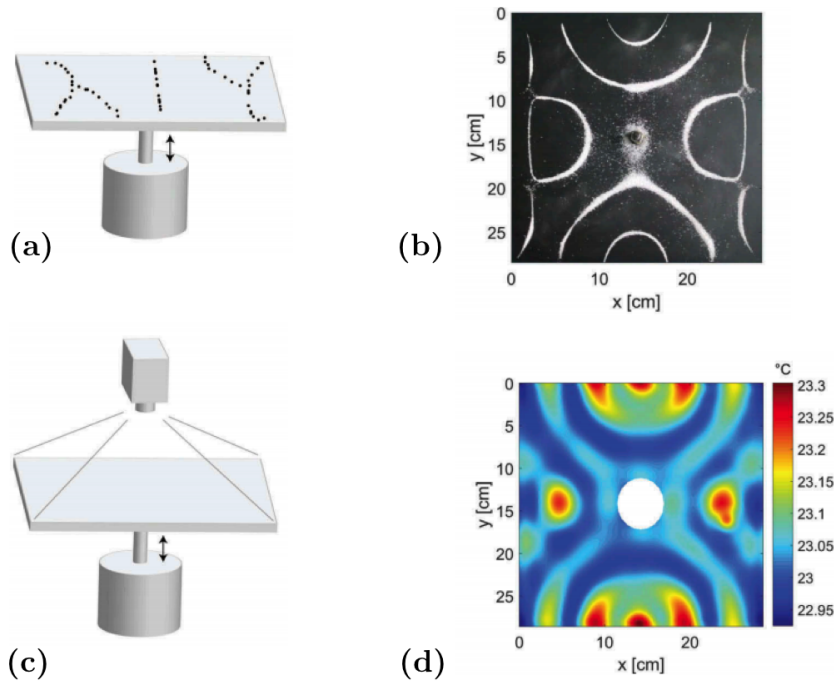


FIGURE 2.16 – Dispositif classique de l'expérience de Chladni sur les plaques (a). Résultats observés pour l'expérience classique de Chladni (avec du sel) à une fréquence de 1 080 Hz (b). Dispositif thermique proposé pour l'expérience (c). Champ de température mesuré après 80 s, pour une fréquence de 1 080 Hz [64].

L'étude proposée par S. Rodriguez *et al.* consiste à reprendre cette expérience, mais en l'étudiant à l'aide d'une caméra IR pour mesurer le champ de température résultant à la surface. Dans ces travaux, la plaque est excitée à l'aide d'un pot vibrant, permettant de choisir la fréquence, et donc le mode vibratoire. La figure 2.16 illustre les dispositifs expérimentaux (Chladni classique et Chladni thermique) ainsi que les résultats obtenus.

Comme expliqué précédemment, l'apparition des sources thermiques est due à la dissipation viscoélastique de l'énergie fournie par l'excitation acoustique dans la plaque. Les résultats obtenus et illustrés par la figure 2.16 ont permis d'affirmer qu'il y a un lien entre les champs de déplacement et de température. Le deuxième objectif de ces travaux était de reconstruire les sources à partir du champ de température mesuré. Pour ce faire, une méthode inverse basée sur un modèle 2D transitoire complet a été utilisé. Les sources, volumiques, sont considérées constantes dans l'épaisseur. L'équation qui traduit le phénomène peut alors s'écrire :

$$\frac{S}{\rho C_p} = \frac{\partial T}{\partial t} - a_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - a_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{2h}{\rho C_p e} (T - T_0) \quad (2.13)$$

où S correspond à la répartition de sources recherchée, ρ est la masse volumique (kg.m^{-3}), C_p la chaleur spécifique ($\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$), a_x et a_y sont les coefficients de diffusion ($\text{m}^2.\text{s}^{-1}$) selon les axes x et y , e l'épaisseur de la plaque (m), h le coefficient d'échange thermique ($\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$) et T_0 la température de l'air ambiant (K). L'estimation des sources se fait alors à l'aide d'une approche nodale, développée par [69], à l'aide de l'équation (2.13). Les résultats obtenus sont illustrés par la figure 2.17. La comparaison entre les deux figures permet de voir que la répartition de sources reconstruites suit bien la géométrie attendue.

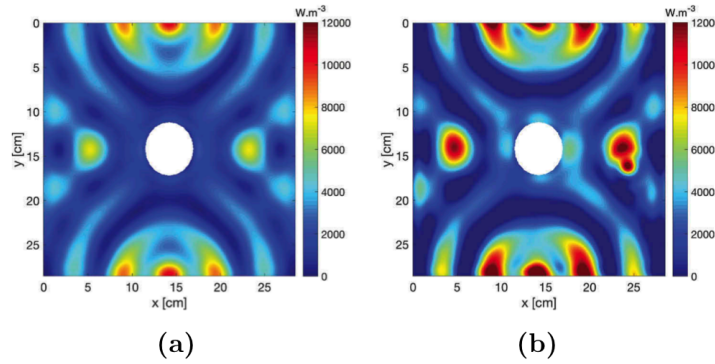


FIGURE 2.17 – Reconstruction de sources théoriques (a). Reconstruction de sources à partir des données mesurées (b) [64].

Dans ce paragraphe, différents systèmes de conversion d'énergie menant à l'apparition de sources thermiques ont été présentés. L'analyse du champ de température résultant à la surface permet, via des méthodes inverses, de remonter aux informations recherchées (caractérisation de défauts ou de paramètres du matériau). Le paragraphe §2.3 va présenter le principe des méthodes inverses, ainsi que les méthodes utilisées aujourd'hui pour la reconstruction de sources thermiques.

2.3 Méthodes inverses

2.3.1 Définition et mise en place des problèmes inverses

La résolution d'un problème inverse consiste à déterminer les causes d'un phénomène à partir de l'observation (expérimentale ou non) de ses effets [70]. Généralement, la résolution de ce problème nécessite de connaître ou de déterminer un modèle du phénomène étudié. Ce modèle permet de donner les effets à partir des causes, supposées connues : il s'agit du problème direct [71]. La figure 2.18 illustre le principe de la résolution des problèmes direct et inverse.

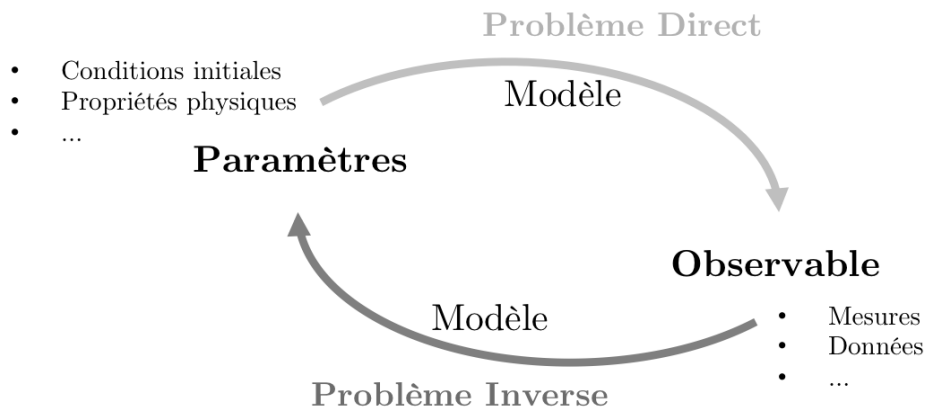


FIGURE 2.18 – Schéma du principe des méthodes inverses.

Dans le problème direct, tous les paramètres sont connus, et à l'aide du modèle, il est possible de prédire les conséquences, soit l'observable du phénomène. Le problème inverse, comme son nom l'indique, consiste à inverser ce problème direct.

Les problèmes inverses se retrouvent dans de nombreux domaines [72], comme par exemple la sismologie (localiser l'origine d'un tremblement de terre à partir de mesures des stations sismiques [73, 74]), la chimie (détermination des constantes de réaction ou des changements de phases [75–77]), le domaine pétrolier (recherche de nappes de pétrole [78, 79]), le domaine médical (imagerie par rayons X, IRM [80])... Ces problèmes sont également très présents dans le domaine de la thermique.

La formulation théorique d'un problème inverse peut s'écrire :

$$A(p) = d \tag{2.14}$$

où d correspond à l'observable, p aux paramètres et A à l'opérateur qui permet de relier les paramètres à l'observable. Autrement dit, A représente le modèle du phénomène physique étudié. L'objectif du problème inverse est donc de retrouver p connaissant A et d .

Problème bien posé et incertitudes

Au début du XX^e siècle, le mathématicien français Jacques Hadamard introduit la notion de problème bien posé [81]. Comme cela sera détaillé au chapitre 4, la solution d'un problème bien posé doit satisfaire trois conditions : l'existence, l'unicité et la stabilité.

Dans les problèmes inverses en thermique, la preuve de l'existence et l'unicité de la solution peut être difficile à effectuer, mais c'est la dernière condition (stabilité) qui pose le plus souvent problème. En effet, le souci majeur rencontré dans les problèmes inverses est que l'équation (2.14) est un modèle mathématique et théorique. Or, l'observable d et le modèle A sont sensibles à différents facteurs pouvant mener à des erreurs sur le résultat recherché p . D'après D. Maillet *et al.* [82, 83], lors de la résolution du problème inverse, on peut recenser six causes d'erreurs ε_i dans l'estimation des paramètres p :

- ε_1 : **erreur numérique dans le calcul direct**. La compilation du problème direct peut entraîner une erreur numérique dans le calcul direct modélisé de la mesure. Cette erreur va donc se répercuter sur le calcul de la solution du problème inverse.
- ε_2 : **erreur de modèle**. La résolution du problème direct se fait à l'aide d'un modèle du phénomène. Ce modèle est basé sur des hypothèses et peut ne pas tenir compte de tous les paramètres qui jouent un rôle dans le phénomène étudié. La compilation de ce modèle peut donc apporter un biais à la solution du problème direct, se traduisant par une erreur par rapport à la solution réelle.
- ε_3 : **erreur due au bruit de mesure**. Les mesures brutes obtenues dans une expérience sont toujours bruitées. Ce bruit de mesure peut se traduire par une fluctuation aléatoire, entraînant une erreur par rapport à la solution recherchée.
- ε_4 : **erreur due au capteur**. Les mesures brutes observées sont traduites par un capteur (comme une caméra IR ou un thermocouple en thermique) et vont être converties en valeurs expérimentales de manière à ce qu'elles puissent être utilisées pour le problème inverse. Cette conversion intrinsèque au capteur peut entraîner une erreur sur la solution recherchée.

- ε_5 : **erreur due aux paramètres "supposés connus"**. Dans certains cas, tous les paramètres ne sont pas recherchés lors de l'inversion : certains sont supposés connus. Si un de ces paramètres supposé connu est mal estimé, il va entraîner une erreur lors du problème inverse.
- ε_6 : **erreur due à la régularisation**. Dans la plupart des méthodes inverses, il est nécessaire d'effectuer une régularisation du problème pour stabiliser l'inversion (ce point sera approfondi au chapitre 4). Cette régularisation va entraîner un biais dans la solution finale.

Soit ε l'erreur commise entre la solution réelle et celle proposée à l'issue du problème direct. Cette erreur peut résulter de toutes les erreurs $\varepsilon_{i, i \in [1:5]}$ mentionnées précédemment. L'erreur ε_6 va être quant à elle traitée ultérieurement (*cf.* chapitre 4). Par la suite, cette erreur ε va être abusivement associée à l'erreur due au bruit de mesure (ε_3), mais il faut rester conscient qu'elle peut provenir de tous les autres cas présentés. Ainsi, l'observable est toujours entaché d'erreur, et peut donc s'écrire :

$$d_o = d_{th} + \varepsilon \quad (2.15)$$

où d_o correspond à l'observable bruitée, d_{th} à l'observable théorique, solution de l'équation (2.14) et ε au bruit de mesure. Expérimentalement, on n'a accès qu'à d_o . L'équation (2.14) n'est donc plus une égalité mais une approximation, ce qui pose problème car dans la plupart des cas, la condition de stabilité n'est pas respectée. Cela veut dire que la moindre perturbation apportée dans l'équation (2.14) va entraîner une grande erreur sur la solution p .

Régularisation et approche probabiliste

Suite à ce résultat, on a longtemps pensé que si l'une ou l'autre des conditions requises par Hadamard n'était pas respectée, les problèmes inverses en thermique ne pouvaient pas être résolus puisque les solutions obtenues seraient inexploitables [84, 85]. Cependant, avec l'apparition des méthodes de régularisation, comme par exemple celle de Tikhonov [86, 87] à la fin des années 1960, la régularisation par l'utilisation de temps futurs proposée par Beck [88] ou encore la régularisation itérative d'Alifanov [89–91], il est apparu qu'il était possible d'obtenir une solution pertinente, ou du moins exploitable, pour les problèmes inverses mal posés à condition d'utiliser des techniques de régularisation [92].

Ces découvertes ont apporté un nouvel essor dans l'étude des problèmes inverses en thermique. En effet, depuis ces dernières décennies, de très nombreuses études sur les problèmes inverses ont été effectuées, comme en témoignent les livres et articles scientifiques parus sur le sujet. En raison du très grand nombre de méthodes, il est impossible d'en faire une liste exhaustive, mais les exemples [70, 87, 88, 93–105] peuvent être cités. Ces techniques sont cependant en constante évolution [84].

En parallèle de ces méthodes de régularisation, les méthodes d'inversion par traitement statistique des données ont été développées [106], notamment avec les travaux de Franklin [107] en 1960, puis ceux des frères Geman sur le traitement d'images [108]. L'approche bayésienne pour la résolution des problèmes inverses s'est depuis beaucoup développée [109–115], grâce aux progrès informatiques. Contrairement aux méthodes de régularisation évoquées précédemment qui sont déterministes, l'inférence bayésienne est une méthode probabiliste : le résultat proposé est une estimation de la solution. En effet, l'objectif est de trouver le ou les paramètres p qui ont la meilleure probabilité connaissant d . Cette méthode, basée sur le théorème des probabilités conditionnelles de Bayes [116], sera détaillée au chapitre 4.

Pour résoudre un problème par approche bayésienne, il est nécessaire d'avoir suffisamment d'informations pour pouvoir calculer les distributions de probabilités nécessaires au calcul. Cela signifie qu'il est nécessaire de posséder, ou le cas échéant de calculer, un nombre exhaustif de possibilités au début du problème [117]. Cette méthode peut donc s'avérer coûteuse à mettre en œuvre. Elle est cependant de plus en plus utilisée dans de nombreux domaines, car elle permet de quantifier et de prendre en compte les incertitudes et les erreurs de mesures.

2.3.2 Application à la reconstruction de sources thermiques

Le problème de reconstruction de sources thermiques volumiques est un problème très mal posé (*cf.* chapitre 4), principalement en raison du caractère diffusif de la température. Dans le chapitre 3, il va être montré que pour la reconstruction de sources, il est possible d'exprimer l'équation (2.14) sous forme discrète :

$$\mathbf{A} p = d \quad (2.16)$$

où $\mathbf{A}$ est une matrice, et où d et p sont des vecteurs. La résolution du problème inverse à

partir de l'équation (2.16) devrait alors s'écrire :

$$p = \mathbf{A}^{-1}d. \quad (2.17)$$

Cependant, dans le cas des reconstructions de sources, l'équation (2.17) n'est pas vérifiée car $\mathbf{A}$ n'est pas carrée. En effet, on dispose généralement de plus d'informations que d'inconnues. En notant m son nombre de colonnes (nombre de mesures) et n son nombre de lignes (nombre d'inconnues), cela se traduit par $m > n$: le problème est qualifié de sur-déterminé et $\mathbf{A}^{-1}$ n'existe pas. Le problème d'inversion doit donc se voir comme un problème de minimisation : l'objectif devient alors de trouver p qui minimise le résidu R , défini par :

$$R = d - \mathbf{A}p \quad (2.18)$$

Il existe un très grand nombre de méthodes inverses qui permettent de résoudre ce problème : toutes les méthodes utilisant la régularisation ou les méthodes statistiques citées précédemment en sont un infime exemple. Un état de l'art des méthodes inverses ne sera donc pas fait ici. Cependant les plus curieux peuvent se référer aux ouvrages suivants : [70, 72, 76, 84, 88, 93, 98, 101, 102, 110, 115, 118] qui sont quelques exemples permettant d'avoir un aperçu assez général des méthodes inverses. Par la suite, seules la méthode de résolution par moindres carrés et celle par Décomposition en Valeurs Singulières seront mentionnées car utilisées dans le corps de la thèse.

La méthode des Moindres Carrés Ordinaires (M.C.O.) est en effet fréquemment utilisée dans les problème de minimisation : elle consiste à calculer le carré de la norme euclidienne du résidu R afin de le minimiser [119] :

$$R^2 = \|d - \mathbf{A}p\|_2^2 = \sum_{i=1}^m (d_i - (\mathbf{A}p)_i)^2. \quad (2.19)$$

La solution au sens des M.C.O. de l'équation (2.16) s'écrit alors [120] :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} p = \mathbf{A}^T d, \quad (2.20)$$

ce qui mène à :

$$p = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T p. \quad (2.21)$$

Par construction, quelle que soit la matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ est une matrice de Gram [121] : elle est donc carrée et symétrique. De plus, elle est inversible si $\mathbf{A}$ est de rang maximal. Dans le cas contraire, autrement dit si tous ses vecteurs colonnes ne sont pas linéairement

indépendants, alors $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ n'est pas une matrice inversible [122]. L'équation (2.21) ne peut donc pas s'appliquer dans ce cas.

Afin de pouvoir résoudre l'équation (2.20), la Décomposition en Valeurs Singulières (S.V.D.) est utilisée (*cf.* chapitre 3). Elle permet d'effectuer une inversion généralisée de la matrice $\mathbf{A}$, aussi appelée la pseudo-inversion de Moore-Penrose [123, 124]. Cette méthode est robuste car elle permet d'inverser l'équation (2.20) même dans le cas où la matrice $\mathbf{A}$ n'est pas de rang maximal.

La thèse présentée ici s'inscrit dans la suite des travaux effectués par A. Castelo, A. Mendioroz, A. Salazar *et al.* de l'université du Pays Basque espagnol [125] et de R. Celorrio de l'université de Saragosse [126]. Plusieurs publications ont en effet été effectuées depuis 2013 [58, 120, 127–130]. Dans ces travaux, des défauts présents dans un plan vertical à la surface du matériau étaient excités à l'aide d'ondes acoustiques modulées (lock-in) ou pulsées (burst), créant une source thermique à l'endroit même du défaut : la caractérisation du défaut s'effectuant par la caractérisation de la source thermique résultante. Le principe de ces méthodes ainsi que quelques résultats majeurs seront explicités par la suite.

Plus récemment, une méthode faisant intervenir le concept d'ondes virtuelles a été développée par P. Burgholzer *et al.* [131, 132] dans le but de remonter aux conditions initiales (flux thermiques, valeurs de températures...) à partir d'un champ de température de surface. Cette méthode sera, elle aussi, brièvement présentée dans ce chapitre.

Résultats avec excitation Lock-In

La première méthode proposée [127, 130] consiste à reconstruire des sources thermiques volumiques (issues de la présence de défauts) à l'aide d'une excitation acoustique modulée (type lock-in : *cf.* paragraphe §2.1.2). La réponse thermique résultante d'une telle excitation est donnée par :

$$T_{f_k} = \frac{1}{4\pi K} \iint_{\Omega} \frac{e^{-q_{f_k}|r-r'|}}{|r-r'|} I_{f_k} \Omega(r') ds' \quad k = 1, 2, \dots, k_{max} \quad (2.22)$$

où T_{f_k} correspond à la réponse thermique à la fréquence de modulation f_k , q_k est le vecteur d'onde à la fréquence f_k , r le vecteur contenant les coordonnées cartésiennes, Ω la répartition de sources recherchées, I_{f_k} l'intensité qui ne dépend que de la fréquence de modulation, K la conductivité et D la diffusivité thermique.

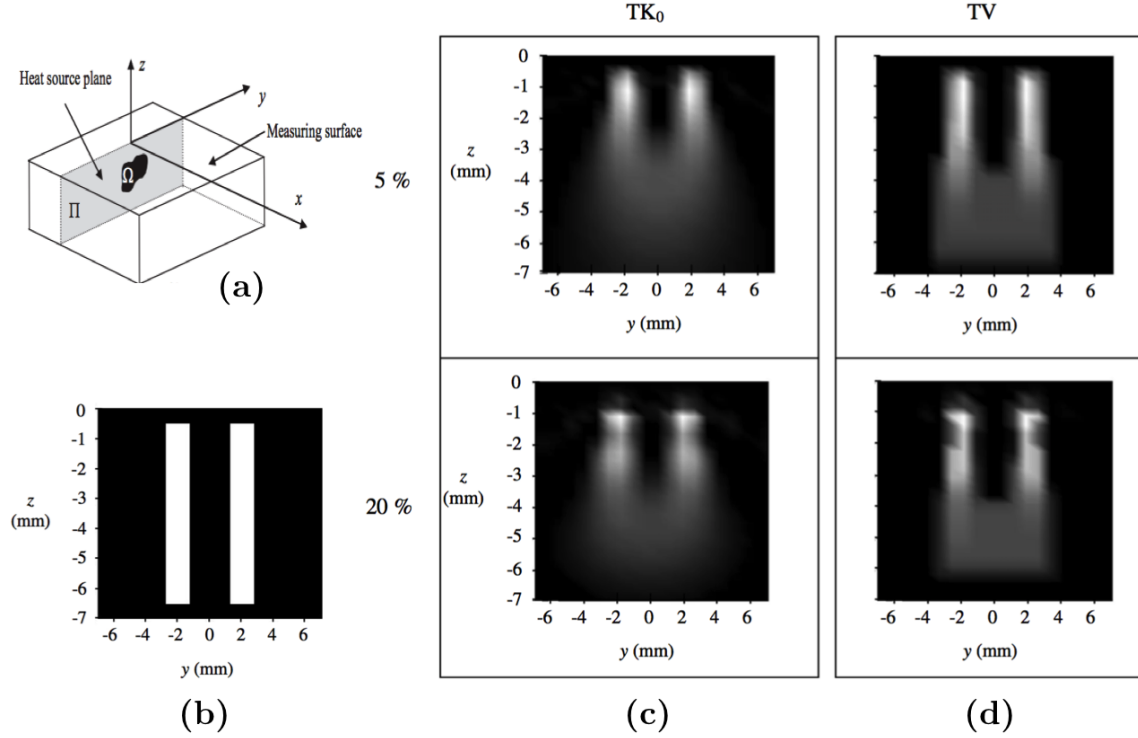


FIGURE 2.19 – Représentation du problème contenant un plan source Π vertical à la surface de mesure contenant la source Ω (a). Représentation du plan source théorique, contenant deux sources rectangulaires identiques et parallèles (b). Reconstruction obtenue après inversion avec régularisation de Tikhonov pour un bruit de mesure de 5% (haut) et 20% (bas) (c). Reconstruction obtenue après inversion avec régularisation Variation Totale pour un bruit de mesure de 5% (haut) et 20% (bas) (d) [130].

Comme mentionné au paragraphe §2.1.2, la longueur de pénétration thermique dépend de la fréquence de modulation f_k choisie. Ainsi, pour pouvoir caractériser le défaut sur toute la profondeur du plan étudié, il est nécessaire d'effectuer l'expérience plusieurs fois avec des fréquences de modulation différentes. De plus, en raison du caractère mal posé du problème, des termes de régularisation (Tikhonov et Variation Totale) sont ajoutés. Le problème à résoudre peut alors s'écrire sous forme matricielle où l'objectif est de rechercher la répartition de sources Ω liées à leurs intensités (dépendant de la fréquence) I_{f_k} qui minimisent le résidu R défini par l'équation (2.23) :

$$R^2 = \sum_{k=1}^{k_{max}} \|I_{f_k} A_{f_k} \Omega - T_{f_k}\|_2^2 + \alpha_{TK} TK(\Omega) + \alpha_{TV} TV(\Omega) \quad (2.23)$$

où A_{f_k} est une matrice opérateur issue de l'équation (2.22), T_{f_k} la température mesurée à

la surface du matériau, α_{TV} et α_{Tk} les facteurs de régularisation correspondants aux fonctions de régularisation de Tikhonov (Tk) et de Variation Totale (TV). Afin de retrouver à la fois l'intensité I_{f_k} et la géométrie Ω de la source, la méthode itérative connue sous le nom de "Gauss-Seidel non-linéaire par blocs" est alors utilisée [120].

La figure 2.19 illustre les résultats obtenus sur un exemple de deux sources rectangulaires parallèles réparties sur un plan perpendiculaire à la surface de mesure, en prenant d'un côté la régularisation de Tikhonov (c) et de l'autre celle de Variation Totale (d). Le matériau considéré pour cette expérience numérique est de l'acier AISI 304 ($D = 4 \text{ mm}^2\text{s}^{-1}$, $K = 16 \text{ W mK}^{-1}$), et les fréquences d'excitation utilisées sont les suivantes : 0.05, 0.1, 0.2, 0.8, 1.6, 3.2, 6.4 et 12.8 Hz.

Les résultats illustrés sur la figure 2.19 permettent de voir que la régularisation par Variation Totale semble meilleure que celle de Tikhonov concernant la reconstruction de la forme des sources. Cependant, quelle que soit la régularisation effectuée proche de la surface, les sources sont bien reconstruites, et les deux sources bien distinctes. En revanche, ce n'est pas le cas pour les points en profondeur où les sources sont confondues, étalées et floues.

Une autre expérience souligne cet effet de profondeur. La figure 2.20 illustre les résultats obtenus pour la reconstruction d'une source carrée de longueur L enfouie pour différentes profondeurs, variant de $0.3L$ à $3L$, pour un bruit de 5%. La source réelle est délimitée par un contour en ligne rouge. Par souci de simplicité, les résultats sont tracés sur un unique graphe.

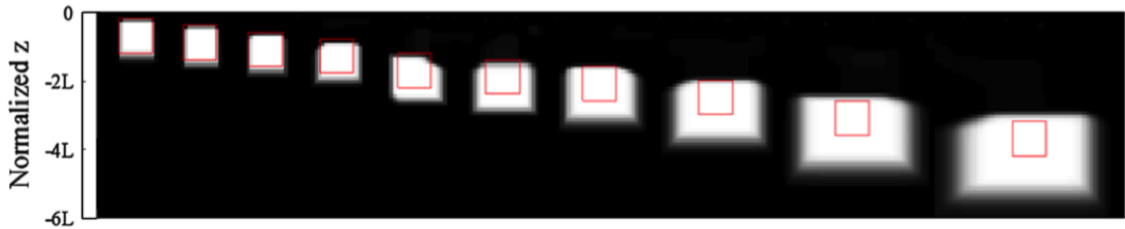


FIGURE 2.20 – Reconstruction d'une source thermique de forme carrée à différentes profondeurs pour une excitation acoustique modulée (lock-in) [133].

Pour les sources peu profondes, les reconstructions obtenues sont quasiment sans erreurs par rapport aux sources théoriques. En revanche, plus la source est profonde, plus

la reconstruction est mauvaise. L'hypothèse avancée dans [133] pour expliquer cette erreur est que les informations permettant de reconstruire les sources les plus profondes sont transportées par les fréquences les plus faibles uniquement : toutes les informations transportées par les fréquences les plus élevées sont perdues en raison de la profondeur. Ce manque d'informations entraîne une mauvaise reconstruction des sources.

Résultats avec excitation Burst

Une autre méthode proposée par A. Mendioroz *et al.* [129] consiste à utiliser une excitation acoustique sous forme de burst temporel de durée τ . La réponse thermique d'une source Ω excitée par une telle excitation est donnée par l'équation (2.24) pour $0 \leq \tau$ et par l'équation (2.25) pour $\tau < t$:

$$T(r_{z=0}, t) = \iint_{\Omega} \frac{Q(r)}{2\pi K|r - r'|} \operatorname{Erfc} \left[\frac{|r - r'|}{\sqrt{4Dt}} \right] ds' \quad 0 \leq t \leq \tau \quad (2.24)$$

$$T(r_{z=0}, t) = \iint_{\Omega} \frac{Q(r)}{2\pi K|r - r'|} \left\{ \operatorname{Erfc} \left[\frac{|r - r'|}{\sqrt{4Dt}} \right] - \operatorname{Erfc} \left[\frac{|r - r'|}{\sqrt{4D(t - \tau)}} \right] \right\} ds' \quad \tau < t \quad (2.25)$$

où r correspond au vecteur contenant les coordonnées cartésiennes, t est le temps, Q la répartition de sources recherchées, K la conductivité, D la diffusivité et τ la durée d'excitation. Erfc est la fonction d'erreur complémentaire. De la même manière que dans le paragraphe précédent, le problème peut s'écrire sous la forme d'une minimisation où l'objectif est de minimiser le résidu R^2 défini par :

$$R^2 = \left\| \begin{pmatrix} A_r \\ \eta A_t \end{pmatrix} [Q] - \begin{pmatrix} T_r \\ \eta T_t \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \|AQ - T\|_2^2 \quad (2.26)$$

où A_r et A_t sont les matrices opérateurs issues des équations (2.24) et (2.25), η est un facteur de pondération qui prend en compte le nombre de données, et T_r et T_t sont les températures mesurées à la surface du matériau (respectivement pour $0 \leq t \leq \tau$ et $\tau < t$). Toujours en raison du caractère mal posé (condition de stabilité non respectée) du problème d'inversion, des termes de régularisation ont été ajoutés à l'équation (2.26) : les fonctions de Tikhonov, Lasso et Total Variation ont en effet été conjointement implémentés [129], menant à :

$$R^{2(i)} = \|AQ - T\|_2^2 + \alpha_{L_1}^{(i)} L_1(Q) + \alpha_{Tk}^{(i)} Tk(Q) + \alpha_{TV}^{(i)} TV(Q). \quad (2.27)$$

Le choix des paramètres de régularisation $\alpha_{L_1}, \alpha_{TV}, \alpha_{Tk}$ est toujours délicat, comme ce sera détaillé au chapitre 4. Ces paramètres permettent en effet de stabiliser l'inversion, mais ajoutent un biais (et donc une erreur) à la solution. Il faut donc choisir ces facteurs de manière à stabiliser suffisamment le signal sans ajouter trop d'erreurs à la solution.

Pour la méthode Burst, le processus choisi consiste à prendre une valeur initiale commune α assez élevée et de réduire chaque valeur $\alpha_{L_1}, \alpha_{TV}, \alpha_{Tk}$ à une vitesse différente à chaque itération i . Le choix de ces paramètres a été fait suite à une étude paramétrique : le problème inverse a été appliqué sur une source carrée de largeur 1 mm située à une profondeur variant de 0.1 à 6 mm, pour des burst variants de 0.5 à 10 s. Ainsi, les facteurs de régularisation sont définis par :

$$\alpha_{Tk}^i = 0.01^{i-1} \alpha \quad (2.28)$$

$$\alpha_{TV}^i = 0.6^{i-1} \alpha \quad (2.29)$$

$$\alpha_{L_1}^i = 0.7^{i-1} \alpha \quad (2.30)$$

Le critère d'arrêt est choisi lorsque le résidu R est de l'ordre du niveau de bruit de la mesure (*cf.* critère de Morozov [99]).

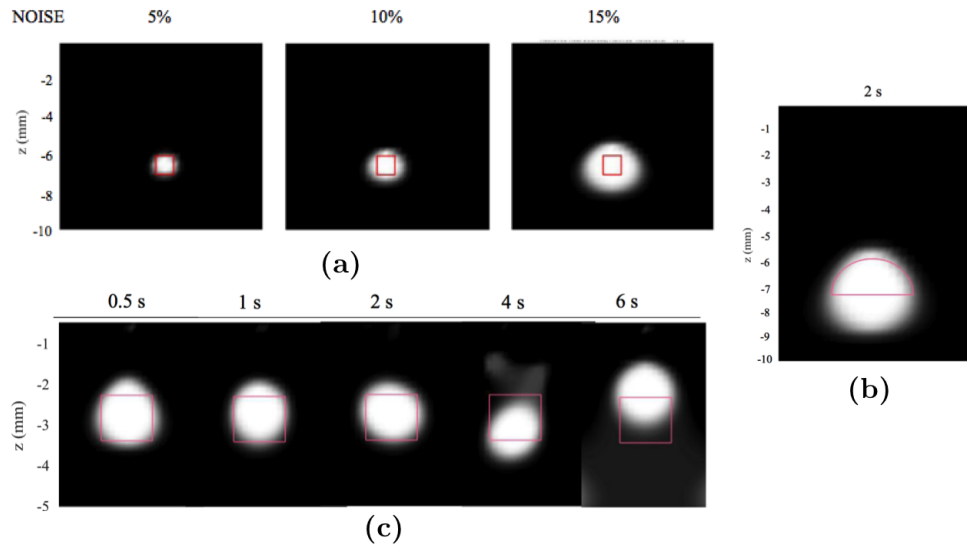


FIGURE 2.21 – Reconstruction de sources carrées identiques sur des données numériques pour des niveaux de bruit différents (a). Reconstruction obtenue pour une source semi-circulaire profonde avec une excitation burst de 2 s (b). Reconstruction obtenue pour des burst variant de 0.5 à 6 s sur des données expérimentales de sources carrées de même profondeur (c) [129].

La figure 2.21 donne les reconstructions obtenues pour des sources carrées situées à une même profondeur avec des durées de burst différents **(c)**, ainsi qu'une source semi-circulaire profonde **(b)** pour une burst de 2 s. Pour chaque expérience, la durée totale de mesure est de 4τ .

La position des sources est assez bien retrouvée avec les excitations burst, mais pas la forme : au lieu des carrés attendus, ce sont des formes très arrondies qui sont reconstruites. Cette erreur est due aux différents facteurs de régularisation. De plus, les burst courts semblent apporter de meilleures informations, surtout concernant la position : en effet, pour les burst longs (au-delà de 3 s), les sources reconstruites sont mal positionnées. Enfin, de même que pour une excitation lock-in, les sources profondes sont mal reconstruites.

La méthode par excitation burst à l'avantage d'être **beaucoup plus rapide** que la méthode lock-in : en effet, une seule mesure est nécessaire ici. En contrepartie, elle est plus sensible au bruit de mesure, il est en effet montré sur la figure 2.21 en **(a)** que plus le bruit est important, plus les sources sont mal reconstruites.

Ces deux méthodes permettent de reconstruire avec justesse des sources enfouies, mais une limitation importante à ces deux méthodes (burst et lock-in) semble être la profondeur : une source profonde est toujours mal reconstruite. La méthode lock-in est lente à mettre en œuvre, tandis que la méthode burst est rapide mais fortement sensible au bruit de mesure. De plus, le choix des paramètres de régularisation a été effectué de manière empirique : la décroissance des paramètres décrits par les équations (2.28) à (2.30) n'a pas d'explication théorique et se pose la question de la reproductibilité en fonction du matériau, de l'excitation ou de tout autre paramètre.

Résultats avec la méthode des ondes virtuelles

Une méthode de reconstruction 3D a été développée récemment par P. Burgholzer *et al.*, en 2017 [131, 132]. Cette méthode couple la thermographie infrarouge et le concept d'ondes virtuelles. L'équation de propagation des ondes qui décrit, par exemple, la pression acoustique peut s'écrire :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p(r, t) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} p_0(r) \delta(t) \quad (2.31)$$

où ∇^2 est l'opérateur Laplacien, c la vitesse du son (m.s^{-1}), p la pression (Pa), r le vecteur

des coordonnées cartésiennes, p_0 la répartition de pression initiale et δ la fonction Dirac. De la même manière, l'équation de la chaleur peut s'écrire :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \right) T(r, t) = -\frac{1}{\alpha} T_0(r) \delta(t) \quad (2.32)$$

où T est la température (K), α la diffusivité thermique ($\text{m}^2.\text{s}^{-1}$) et $T_0(r)$ le champ de température initial (K). Dans la méthode proposée par Burgholzer, une onde virtuelle est définie à partir de l'équation (2.31) en prenant comme condition initiale celle de l'équation (2.32) :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) T_{virt}(r, t) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} T_0(r) \delta(t) \quad (2.33)$$

où c est un coefficient pris arbitrairement à 1.

La résolution des équations (2.32) et (2.33) dans le domaine de Fourier ainsi que le passage dans le domaine réel permet d'arriver au système matriciel :

$$T = \mathbf{K} T_{virt} \quad (2.34)$$

où T et T_{virt} sont respectivement les vecteurs contenant la température mesurée et le signal virtuel en fonction du temps, et $\mathbf{K}$ est la matrice opérateur qui est issue des équations (2.32) et (2.33) couplées dans le domaine de Fourier [131].

La reconstruction des conditions initiales se fait alors en deux temps : premièrement, une inversion à l'aide de la S.V.D. pour retrouver T_{virt} connaissant T et $\mathbf{K}$ à partir de l'équation (2.34). Comme le problème est mal posé, une régularisation est nécessaire : la méthode choisie dans ce travail est de régulariser par troncature du spectre de la S.V.D. (T.S.V.D.), ici effectuée dans le domaine de Fourier. Suite à cette première étape, la méthode de reconstruction d'image F-SAFT (*Frequency Synthetic Aperture Focusing Technique*) [134, 135] est utilisée pour retrouver la condition initiale $T_0(r)$ à partir du signal acoustique T_{virt} .

La figure 2.22 illustre les résultats obtenus sur un exemple de trois sources de formes gaussiennes situées sur un plan à différentes profondeurs. En (b) est donné le champ de température résultant en fonction du temps, en (c) la première inversion par S.V.D. donnant le champ de vitesse virtuelle T_{virt} et en (d) la reconstruction par méthode acoustique F-SAFT permettant de retrouver les sources (conditions initiales) à partir du signal

virtuel. Le SNR pour cette simulation est défini à 2000.

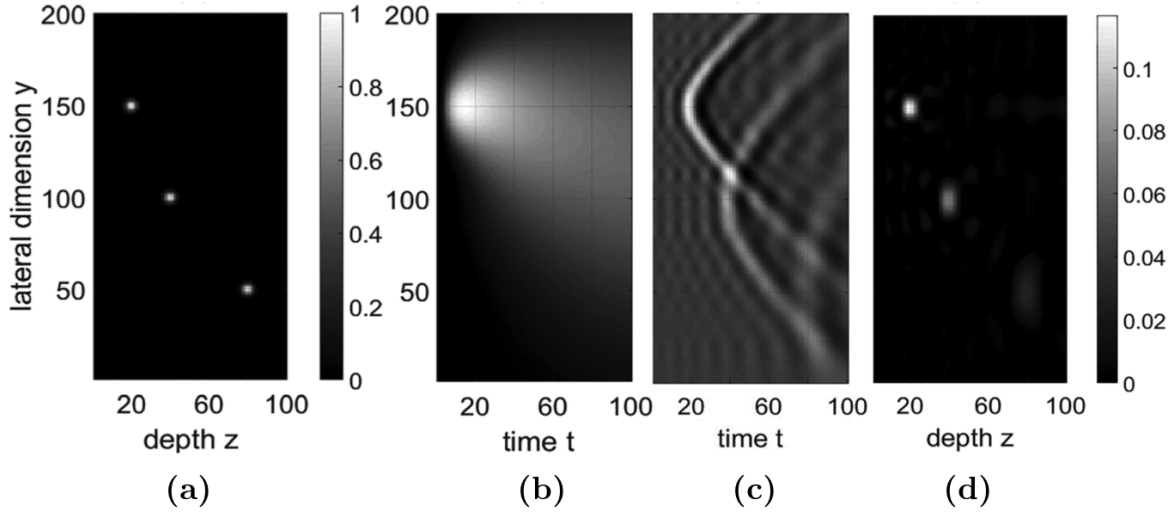


FIGURE 2.22 – Plan perpendiculaire à la surface de mesure illustrant la répartition de température initiale $T_0(y, z)$, constituée de trois taches gaussiennes (a). Champ de température sur la ligne de surface $T(y, t)$ en $z = 0$ (b). Signal virtuel T_{virt} (c) et reconstruction des conditions initiales après inversion (d) [131].

Les positions de chacune des sources sont bien retrouvées. En revanche, plus les sources sont profondes, plus elles sont floues et étalées. Même la première source, la plus proche de la surface, est reconstruite plus étalée qu'elle ne l'est en théorie. Les amplitudes des températures reconstruites sont elles aussi erronées, un facteur 10 subsiste entre la théorie et le résultat obtenu.

Cette méthode permet de traiter le problème de manière acoustique, mais le passage entre thermique et acoustique (*id est* de la figure (b) à (c)) reste délicat. La méthode pour y parvenir est en effet très proche de la méthode inverse utilisée pour l'excitation burst : la régularisation, nécessaire pour l'inversion, entraîne une erreur pour le calcul du signal virtuel. Cette erreur va donc se propager lors de la deuxième étape menant à la reconstruction des conditions initiales.

Conclusion et positionnement du travail de thèse

Une source thermique résulte d'une conversion d'énergie pouvant venir de différents types de phénomènes mis en jeu. De manière simplifiée, la caractériser signifie retrouver sa géométrie et son intensité. Comme cela a été mentionné dans ce chapitre, une source thermique peut venir de la présence d'un défaut, ou bien de la viscoélasticité du matériau, ou encore d'une réaction chimique... Caractériser une source thermique est donc la première étape menant à l'E.C.N.D. des milieux étudiés. En effet, une fois la source caractérisée, il est possible de remonter aux caractéristiques du défaut, ou du matériau ou même aux propriétés chimiques... en fonction de l'origine de la source étudiée. Les moyens nécessaires pour y parvenir sont : un système permettant de mesurer la température (caméra IR, thermocouple...) ainsi qu'un ordinateur pour pouvoir effectuer les méthodes inverses.

Les méthodes de reconstructions qui existent aujourd'hui permettent de reconstruire des données volumiques (sources, conditions initiales...) à partir de données surfaciques (champs de température). Cependant, deux limitations principales ressortent de ces travaux : la profondeur et le bruit de mesure. En effet, quelles que soient les méthodes utilisées, les sources profondes sont mal retrouvées : elles sont floutées, étalées et leurs intensités sous-estimées. Enfin le bruit de mesure, inévitable lors des expériences, est un facteur problématique lors de l'inversion. Les régularisations effectuées permettent d'approcher la solution, mais le choix des paramètres de régularisation est délicat car il faut trouver le bon compromis qui permet de stabiliser l'inversion sans ajouter un biais, et donc une erreur, trop considérable. Le type d'excitation utilisé (modulé, burst, impulsionnel...) ne semble pas être un facteur déterminant pour la reconstruction : les méthodes mènent en effet à des résultats similaires. Chacune de ces méthodes a ses avantages et inconvénients : les méthodes qui utilisent une excitation pulsée sont, entre autres, rapides mais très sensibles au bruit, à l'inverse des méthodes à excitation modulée qui sont moins sensibles au bruit mais plus lentes à mettre en œuvre.

Dans cette thèse, il est proposé de reconstruire les sources thermiques volumiques à l'aide d'une excitation impulsionnelle (de type Dirac). La réponse thermique impulsionnelle a en effet l'avantage d'être complètement déterminée analytiquement. Dans ce travail, l'objectif recherché est double :

- Expliquer à l'aide d'un critère physique la raison de la limitation en profondeur.
- Proposer une méthode de reconstruction peu sensible au bruit de mesure, et qui ne nécessite pas de régularisation.

CHAPITRE 3

Analyse du problème théorique et critère de résolution

Table des matières

Introduction	44
3.1 Méthodologie de l'inversion	45
3.1.1 Étude du problème direct en 1D	47
3.1.2 Généralisation au problème 3D	50
3.1.3 Problème inverse	52
3.2 Mise en évidence d'un critère dépendant du nombre de Fourier	54
3.2.1 Influence du nombre de Fourier en 1D	54
3.2.2 Influence de l'excitation temporelle utilisée	63
3.2.3 Généralisation au problème 3D	65
3.3 Cas particulier : la profilométrie thermique	72
3.3.1 Principe de la méthode	72
3.3.2 Méthode inverse	74
3.3.3 Génération des sources thermiques	75
3.3.4 Balayage spatial	77
3.3.5 Applications et résultats	79
Conclusion	88

Introduction

Une méthode de caractérisation de sources thermiques volumiques présentes au sein d'un matériau est présentée dans ce chapitre. La méthode propose d'utiliser le modèle de la réponse thermique impulsionnelle d'une source ponctuelle, autrement appelée Dirac spatial et temporel. Le choix de ce modèle ainsi que son formalisme sont expliqués en première partie de ce chapitre. L'implémentation des problèmes direct et inverse seront explicités.

Une étude sur les paramètres principaux du modèle permet de définir les domaines d'utilisation de la méthode. Plus particulièrement, un critère dépendant du nombre de Fourier est mis en exergue, permettant de connaître les limites physiques de la méthode en amont du problème. Ce critère permet de connaître la taille limite des sources reconstituables en fonction des données.

Enfin, à la fin de ce chapitre, un cas particulier de cette méthode est développé. Il est en effet montré que la méthode de reconstruction de sources volumiques peut s'étendre pour former un profilomètre thermique sans contact. Ce système, applicable dans plusieurs domaines (industriels, bio-médical...), permet de réaliser une microscopie thermique de systèmes particuliers.

3.1 Méthodologie de l'inversion

Dans la majorité des problèmes d'inversion, il est nécessaire de savoir traiter le problème direct. Dans notre cas, la réponse thermique impulsionnelle θ_{Dirac} , c'est à dire la réponse en température (Kelvin) en un point $r = (x, y, z)$ et à un instant t , à une source ponctuelle de chaleur située en un point $r' = (x', y', z')$ délivrant, à un instant antérieur t' , une impulsion de quantité de chaleur de 1 Joule au sein d'un milieu homogène infini, éventuellement anisotrope, mais de propriétés thermophysiques non thermodépendantes, s'exprime analytiquement par l'équation (3.1) [136] :

$$\theta_{\text{Dirac}} = \frac{1}{\rho C_p} G_{3D}(r, t/r', t'), \quad (3.1)$$

où ρ (kg.m^{-3}) et C_p ($\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$) sont la masse volumique et la chaleur spécifique du matériau tandis que G_{3D} (m^{-3}) est la fonction de Green 3D du matériau. En coordonnées rectangulaires, celle-ci s'exprime à l'aide du produit des fonctions de Green 1D, notées ici G_x , G_y et G_z dans les trois directions d'espace [136] :

$$G_{3D}(r, t/r', t') = G_x(r, t/r', t') \cdot G_y(r, t/r', t') \cdot G_z(r, t/r', t'). \quad (3.2)$$

Comme le domaine étudié est ici infini dans les trois directions, chaque fonction de Green 1D (m^{-1}) s'exprime explicitement de la même façon, ici avec des fonctions Gaussiennes spatio-temporelles, et la réponse thermique impulsionnelle devient :

$$\theta_{\text{Dirac}} = \frac{1}{\rho C_p} \frac{\exp\left(-\frac{(x-x')^2}{4a_x(t-t')}\right)}{\sqrt{4\pi a_x(t-t')}} \frac{\exp\left(-\frac{(y-y')^2}{4a_y(t-t')}\right)}{\sqrt{4\pi a_y(t-t')}} \frac{\exp\left(-\frac{(z-z')^2}{4a_z(t-t')}\right)}{\sqrt{4\pi a_z(t-t')}} \quad (3.3)$$

où a_x , a_y et a_z ($\text{m}^2.\text{s}^{-1}$) sont les coefficients de diffusion selon chacune des directions x , y ou z de l'espace. Notons que chacune des fonctions de Green 1D ci-dessus G_q , pour $q = x$, y ou z peut s'écrire :

$$G_q(q, t/q', t') = \frac{1}{\sqrt{2a_q(t-t')}} N(u_q) \text{ où } u_q = \frac{q-q'}{\sqrt{2a_q(t-t')}} \text{ et } N(u_q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u_q^2}{2}\right), \quad (3.4)$$

où $N(\cdot)$ est la loi normale centrée et réduite.

Si l'on considère maintenant une source volumique quelconque $g(r, t)$, en watts.m^{-3} , nulle avant un certain temps, la réponse (forcée) en température en tout point r de l'espace

et à l'instant t s'écrit comme le produit de convolution temporel suivant [136] :

$$\theta(r, t) = \frac{1}{\rho C_p} \int_{t'=0}^t \int_{R^3} G_{3D}(r, t/r', t') g(r', t) dv, \quad (3.5)$$

où dv représente le volume élémentaire dans l'intégrale spatiale.

Nous allons supposer que la source g est une impulsion de Dirac à l'instant $t = 0$, de densité surfacique d'énergie Q_0 (en J.m^{-2}), et uniforme dans un plan (x, y) situé à la cote z_0 . Cette source est donc séparable et s'écrit alors, en utilisant deux distributions de Dirac $\delta(\cdot)$, l'une spatiale $\delta(z - z_0)$ (en m^{-1}) et l'autre temporelle $\delta(t)$ (en s^{-1}) et s'écrit :

$$g(r, t) = Q_0 \cdot \delta(z - z_0) \cdot \delta(t) \quad (3.6)$$

La substitution de cette équation (3.6) dans l'intégrale quadruple (3.5) fournit l'expression de la réponse "1D" à tout instant et en tout point d'un plan situé à la cote z :

$$\theta_{1D}(z, t) = \frac{Q_0}{\rho C_p} G_z(z, t/z_0, 0) = \frac{Q_0}{\rho C_p} \frac{1}{4\sqrt{\pi a_z t}} \exp\left(-\frac{(z - z_0)^2}{4a_z t}\right). \quad (3.7)$$

Remarquons que pour obtenir cette réponse, nous avons utilisé le fait que les intégrales de la loi normale $N(\cdot)$ sur R sont égales à l'unité ainsi que la propriété d'échantillonnage des deux distributions de Dirac $\delta(\cdot)$. Notons aussi que, si le milieu est non pas infini dans les trois directions, mais uniquement dans deux directions (x et y) et seulement semi-infini dans la troisième (z), la fonction de Green 1D est différente de celle utilisée en (3.7), et la réponse en température de la source (3.6), où cette fois z_0 est la profondeur par rapport au plan $z = 0$, s'écrit [136] :

$$\theta_{1D}(z, t) = \frac{Q_0}{\rho C_p} G_z(z, t/z_0, 0) = \frac{Q_0}{\rho C_p} \frac{1}{4\sqrt{\pi a_z t}} \left[\exp\left(-\frac{(z - z_0)^2}{4a_z t}\right) + \exp\left(-\frac{(z + z_0)^2}{4a_z t}\right) \right]. \quad (3.8)$$

L'expression de la fonction de Green (3.8) est démontrée en Annexe A et B de ce mémoire, dans le cas $z_0 = 0$. Notons enfin que, si le milieu est non pas infini dans les trois directions, mais uniquement dans deux directions (x et y) et fini dans la troisième (z), c'est-à-dire qu'il s'agit d'une plaque plane d'épaisseur L_z , la fonction de Green 1D diffère également de celle utilisée en (3.7), et la réponse en température de la source (3.6), où z_0 est la profondeur par rapport à la face $z = 0$, s'écrit [136] :

$$\theta_{1D}(z, t) = \frac{Q_0}{\rho C_p L_z} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \exp\left(-a_z m^2 \pi^2 t / L_z^2\right) \cos(m\pi z / L_z) \cos(m\pi z_0 / L_z) \right]. \quad (3.9)$$

Dans la suite de ce mémoire, nous avons utilisé l'équation (3.7) comme modèle de réponse en température à une source interne impulsionnelle de chaleur uniforme dans un plan. Ce type d'excitation présente ici deux avantages : ils conduisent à des réponses en température (3.7) à (3.9) facilement simulables de manière analytique et de plus ces solutions sont séparables en espace.

3.1.1 Étude du problème direct en 1D

Pour le problème 1D, on considère un matériau linéaire, représenté par la figure 3.1, qui possède une source de chaleur impulsionnelle uniforme, localisée dans le plan $z = z_0$.

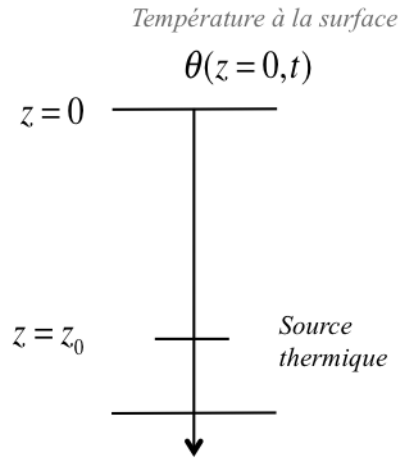


FIGURE 3.1 – Représentation du problème 1D.

L'équation (3.7), base du problème direct, peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$\theta_{1D}(z^*, t^*) = \frac{Q_0}{\rho C_p L_z} \frac{1}{\sqrt{4\pi Fo_z t^*}} \exp\left(-\frac{(z^* - z_0^*)^2}{4Fo_z t^*}\right). \quad (3.10)$$

où t^* , z_0^* et z^* sont des variables sans dimensions définies comme suit :

$$t^* = \frac{t}{t_f} \quad ; \quad z^* = \frac{z}{L_z} \quad ; \quad z_0^* = \frac{z_0}{L_z} \quad (3.11)$$

Fo_z est le nombre de Fourier (selon la direction z) défini par :

$$Fo_z = \frac{a_z t_f}{L_z^2}, \quad (3.12)$$

où t_f et L_z sont respectivement la durée de l'expérience et la longueur du matériau. Ce

nombre, nommé d'après Joseph Fourier, est un nombre sans dimension qui permet de caractériser les transferts thermiques. Ce nombre est issu de la définition par Fourier du vecteur densité de flux (aussi connue sous le nom de Loi de Fourier). Physiquement, il correspond à la part du flux de chaleur transmise au matériau par rapport à la chaleur stockée par ce même matériau.

L'équation (3.10) est la réponse thermique à une source plane unique et instantanée. Si la source impulsionnelle est étendue et que son temps de déclenchement $t = 0$ est indépendant de la profondeur z (impulsions synchrones dans chaque plan z), sa fonction de Green s'écrit :

$$g(r, t) = Q(z) \delta(t), \quad (3.13)$$

où $Q(z)$ représente cette fois une distribution volumique d'énergie (J.m^{-3}). Le champ de température résultant dans le matériau par l'équation se calcule donc par la quadrature (3.13) et se calcule donc de la même façon que (3.7) et l'on obtient :

$$\theta(z, t) = \frac{1}{\rho C_p} \int_{t'=0}^t \int_{z'=-\infty}^{\infty} G_z(z, t/z', t') Q(z') \delta(t') dz' dt \quad (3.14)$$

$$= \frac{1}{\rho C_p} \int_{z'=-\infty}^{\infty} \frac{Q(z')}{\sqrt{4\pi a_z t}} \exp\left(-\frac{(z-z')^2}{4a_z t}\right) dz' \quad (3.15)$$

Cette réponse est ici une convolution en espace.

NB : Ceci n'est vrai que si le milieu est infini en z et de même pour la source. Si ce n'est pas le cas (milieu semi-infini ou plaque d'épaisseur finie, G_z doit être calculée comme en (3.8) ou (3.9), en effectuant l'intégration en z de la source (membre central de l'équation (3.15)), avec :

$$g(r, t) = Q(z) H(z) \delta(t) \text{ ou } g(r, t) = Q(z) (H(z) - H(z - L_z)) \delta(t). \quad (3.16)$$

où $H(\cdot)$ est la fonction (échelon) de Heaviside, entre 0 et $+\infty$ ou entre 0 et L_z .

L'équation (3.15) s'écrit en variables indépendantes adimensionnelles de la façon suivante :

$$\theta(z^*, t^*) = \frac{1}{\rho C_p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(z'^*)}{\sqrt{4\pi F o_z t^*}} \exp\left(-\frac{(z^* - z'^*)^2}{4F o_z t^*}\right) dz'^* \quad (3.17)$$

De la même manière, si la source n'est pas instantanée (Dirac temporel), mais excitée sur un intervalle de temps fixé, la réponse thermique s'obtient par la convolution tempo-

relle de l'équation (3.17) avec la fonction représentative de l'excitation temporelle [34].

La première étape de l'algorithme "Dirac" consiste à discrétiser l'ensemble du matériau 1D et de considérer chaque point de discrétisation comme une source ponctuelle, possédant une densité d'énergie $Q(z^*) = Q_0 \Omega(z^*)$. Q_0 correspond à la valeur maximale de la densité d'énergie et $Q(z^*)$ sur l'épaisseur du matériau et $\Omega(z^*)$ représente sa distribution, variant de 0 (pas de source) à 1 (source d'intensité maximale).

D'après la formule de Riemann, l'équation (3.17) se discrétise alors en la formule suivante :

$$\theta(z^*, t^*) = \sum_{k=1}^n \Omega_k \theta_{1D}(z^* - z'_k, t^*) \Delta z', \quad (3.18)$$

où n correspond au nombre de nœuds de discrétisation, et Ω_k est l'écriture simplifiée de $\Omega(z'_k)$, qui est l'écriture de la paramétrisation de la fonction $\Omega(z^*)$ sur une base de fonctions "chapeau". Puisque la caméra infrarouge ne mesure que le champ de température à la surface du matériau, on a $z^* = 0$ et le problème peut donc s'écrire sous forme d'égalité matricielle donnée par l'équation (3.19). $\theta_{(i)}$ est un vecteur contenant le champ de température à la surface (en un point pour le problème 1D) au temps t_i :

$$\left(\begin{array}{cccc} \mathbf{I}_{1D}^{(1)} & \mathbf{I}_{1D}^{(2)} & \dots & \mathbf{I}_{1D}^{(n)} \end{array} \right) [\Omega] = \left[\begin{array}{c} \theta_{(1)} \\ \theta_{(2)} \\ \vdots \\ \theta_{(m)} \end{array} \right] \Leftrightarrow \mathbf{I} \Omega = \theta. \quad (3.19)$$

$\mathbf{I}$ est une matrice "opérateur" de taille $m \times n$ et θ un vecteur de taille m , où m et n sont respectivement le nombre de pas de temps utilisés ainsi que le nombre de points de discrétisation en z du matériau. n peut être vu comme le nombre de sources "ponctuelles" possibles présentes dans le matériau.

Ici, il est important de s'arrêter sur la notion de "point-source". L'équation (3.10) donne la réponse thermique temporelle d'une source impulsionnelle **ponctuelle**. L'astuce utilisée pour l'algorithme numérique mène cependant à une approximation de ce modèle. Tous les points numériques dans la somme de Riemann correspondent en fait à l'intégrale de l'équation (3.10) sur chaque segment de longueur $\Delta z'$. Les "points-sources" numériques sont donc en réalité des segments (voxels en 3D) de longueur $\Delta z'$. Or, d'après la formulation de Riemann donnée par l'équation (3.18), l'intensité modélisée de chaque point-source

Ω_k dépend directement de la taille du segment. Ainsi, plus $\Delta z'$ (respectivement le voxel en 3D) sera petit, plus les "points-sources" modélisés seront petits avec une intensité petite.

L'équation (3.19) est l'écriture d'un problème linéaire. L'objectif est donc de trouver l'inconnue Ω par le biais d'une méthode inverse.

3.1.2 Généralisation au problème 3D

L'algorithme pour obtenir le problème 3D est basé sur le problème 1D. Les nombres de Fourier relatifs à chaque direction spatiale sont introduits : Fo_x , Fo_y , Fo_z . Tout comme pour le problème 1D, l'équation (3.3) devient :

$$\theta_{3D}(x^*, y^*, z^*, t^*) = \frac{Q(x'^*, y'^*, z'^*)}{8\rho C_p L_x L_y L_z} \frac{\exp\left(-\frac{(x^* - x'^*)^2}{4Fo_x t^*}\right)}{\sqrt{\pi Fo_x t^*}} \frac{\exp\left(-\frac{(y^* - y'^*)^2}{4Fo_y t^*}\right)}{\sqrt{\pi Fo_y t^*}} \frac{\exp\left(-\frac{(z^* - z'^*)^2}{4Fo_z t^*}\right)}{\sqrt{\pi Fo_z t^*}}. \quad (3.20)$$

Dans le cas du problème 3D, l'ensemble du matériau est discrétisé et chaque point de discrétisation est considéré comme une source potentielle, possédant une densité d'énergie $Q(x'^*, y'^*, z'^*) = Q_0 \Omega(x'^*, y'^*, z'^*)$. Le problème s'écrit toujours sous forme matricielle, donnée par l'équation (3.21). La température mesurée par la caméra infrarouge est un champ 2D en fonction du temps. Pour l'écriture du problème, chaque $\theta_{(i)}$ est un vecteur contenant la température 2D réorganisée sous forme 1D, à chaque temps t_i :

$$\left(\begin{array}{cccc} \mathbf{I}_{3D}^{(1)} & \mathbf{I}_{3D}^{(2)} & \dots & \mathbf{I}_{3D}^{(n)} \end{array} \right) [\Omega] = \begin{bmatrix} \theta_{(1)} \\ \theta_{(2)} \\ \vdots \\ \theta_{(m)} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{I} \Omega = \theta. \quad (3.21)$$

$\mathbf{I}$ est toujours une matrice de taille $m \times n$ et θ un vecteur de taille m où n est le nombre de points de discrétisation du matériau 3D. Cependant, ici, $m = n_s \cdot n_t$, où n_t est le nombre de pas de temps et n_s le nombre de points à la surface du matériau. Physiquement, n_s peut être par exemple le nombre de pixels de la caméra infrarouge. La forme des matrices du problème 3D et 1D est identique. La seule différence est la taille des matrices Ω et $\mathbf{I}$: cela va donc potentiellement entraîner, pour le problème 3D, un temps d'exécution plus long à la fois lors du calcul direct puis lors de l'inversion.

Implémentation optimale de la matrice opérateur en 3D

Pour le problème 1D, chaque point de la matrice opérateur $\mathbf{I}$ décrite précédemment doit se calculer à l'aide de la formule (3.10), puisque chacune des ses valeurs est indépendante des autres. Pour le problème 3D, en revanche, cette méthode est à proscrire. En effet, calculer chacun des points de $\mathbf{I}$ avec l'aide de l'équation (3.20) serait non seulement extrêmement coûteux en temps de calcul, mais aussi redondant car en 3D, elle est composée de plusieurs sous-matrices qui se répètent. Pour illustrer ce phénomène, la figure 3.2 donne le profil de la matrice $\mathbf{I}$ obtenue pour le cas où $n_x = 3$, $n_y = 4$, $n_z = 5$ et $n_t = 10$.

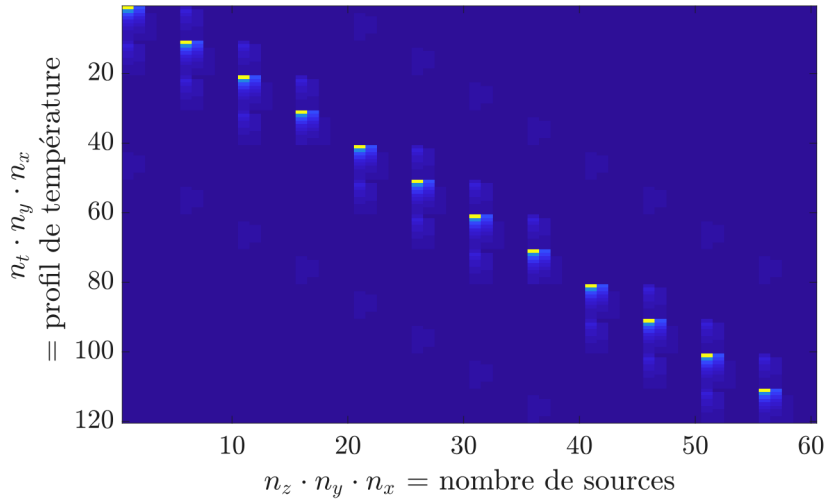


FIGURE 3.2 – Profil type de la matrice opérateur $\mathbf{I}$ en 3D : cas test pour $n_x = 3$, $n_y = 4$, $n_z = 5$ et $n_t = 10$.

Dans le cas du problème 3D, la matrice opérateur peut en effet s'écrire sous la forme d'une matrice de Toeplitz [137] symétrique par bloc :

$$\mathbf{I}_{3D} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{n_x} \\ A_2 & A_1 & \ddots & A_{n_x-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ A_{n_x} & A_{n_x-1} & \cdots & A_1 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

où chaque élément A_i est une matrice de taille $n_t n_y$ par $n_z n_y$. n_z et n_y correspondent au nombre de points de discrétisation en z et y , et n_t au nombre de pas de temps. Toutes les

matrices A_i sont elles mêmes symétriques par blocs, définies par :

$$A_i = \begin{pmatrix} A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{in_y} \\ A_{i2} & A_{i1} & \ddots & A_{in_y-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ A_{in_y} & \cdots & \cdots & A_{i1} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

où chaque bloc A_{ij} est de taille $n_t \times n_z$. La matrice globale $\mathbf{I}$ est donc bien de taille $n_x n_y n_t \times n_z n_y n_x$. Ainsi, au lieu de calculer tous les points séparément, il suffit de calculer la première ligne (par bloc) de chaque matrice A_i à l'aide de la formule (3.20) pour reconstruire la matrice entière. Le gain de temps en procédant de cette manière est considérable. En effet, pour le problème 3D, le nombre de calculs économisé est de $(n_x n_y)^2 n_z$.

3.1.3 Problème inverse

Le problème à inverser est donné par les équations (3.19) et (3.21) :

$$\mathbf{I} \Omega = \theta. \quad (3.24)$$

En pratique, $\mathbf{I}$ n'est pas carrée. Son nombre de lignes est largement supérieur à son nombre de colonnes. Par conséquent, $\mathbf{I}$ n'est pas inversible. L'algorithme utilisé pour le problème étudié est donc basé sur la méthode de pseudo-inversion de Moore-Penrose [123, 124] qui affirme que toute matrice réelle ou complexe est pseudo-inversible. Quelle que soit la matrice $\mathbf{I}$, sa pseudo-inverse existe, est unique et est de même taille que $\mathbf{I}^T$. La pseudo-inverse de $\mathbf{I}$ est obtenue via la **Décomposition en Valeurs Singulières (S.V.D.)**. Cette méthode a vu le jour entre 1873 et 1874 par Eugenio Beltrami, mathématicien-physicien italien et Camille Jordan, mathématicien français [138–140], puis a été développée jusqu'au XX^e siècle par de nombreux mathématiciens tels que James Joseph Sylvester [141] et Émile Picard [142].

Le principe de la S.V.D. est de décomposer la matrice $\mathbf{I}$ de taille $m \times n$ en un produit de trois matrices comme détaillé par l'équation (3.25) et illustré par la figure 3.3 :

$$\mathbf{I} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T \quad (3.25)$$

où $\mathbf{U}$ est une matrice orthogonale de taille $m \times m$, $\mathbf{V}$ orthogonale de taille $n \times n$ et $\mathbf{S}$ une matrice "diagonale" de taille $m \times n$. Les éléments diagonaux de $\mathbf{S}$ sont appelés

valeurs singulières. Elles sont positives et classées de la plus grande à la plus petite telle que $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n \geq 0$ [120, 143]. Puisque $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ sont orthogonales, on a : $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T$, $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^T$. Comme on peut l'observer sur la figure 3.3, si $m > n$, les derniers modes de la matrice $\mathbf{U}$ sont inutiles puisque la partie inférieure de $\mathbf{S}$ est nulle.

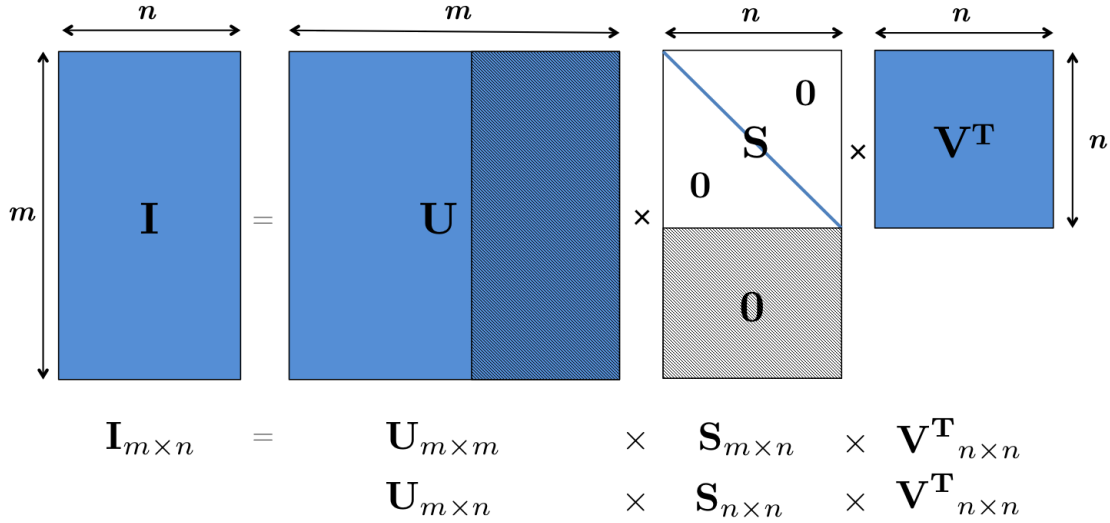


FIGURE 3.3 – Schéma de la S.V.D. appliquée à la matrice opérateur $\mathbf{I}$.

Si seules les p premières valeurs singulières sont différentes de zéro ($p < n$), la S.V.D. peut alors être encore plus réduite et l'équation (3.25) peut s'écrire :

$$\mathbf{I} = \mathbf{U}_p \mathbf{S}_p \mathbf{V}_p^T. \quad (3.26)$$

Ainsi, la pseudo-inversion de l'équation (3.24) donne le résultat recherché, donné par l'équation (3.27) :

$$\Omega = \mathbf{V}_p \mathbf{S}_p^{-1} \mathbf{U}_p^T \theta. \quad (3.27)$$

Enfin, puisque $\mathbf{S}_p^{-1}$ est diagonale avec des termes strictement positifs, l'équation (3.27) peut s'écrire [120] :

$$\Omega = \sum_{k=1}^p \frac{\mathbf{U}_{:,k}^T \theta}{s_k} \mathbf{V}_{:,k}. \quad (3.28)$$

3.2 Mise en évidence d'un critère dépendant du nombre de Fourier

3.2.1 Influence du nombre de Fourier en 1D

Un exemple du problème 1D est représenté sur la figure 3.4. La source thermique Ω étudiée est constituée de trois "points-source" situés à trois profondeurs différentes. Sur la figure 3.4, l'intensité (normalisée) de la source la plus proche de la surface est de 0.5, celle de la source du milieu est de 1 et la dernière est de 0.75. Ici, $L_z = 0.01$ m et $Fo_z = 0.1$.

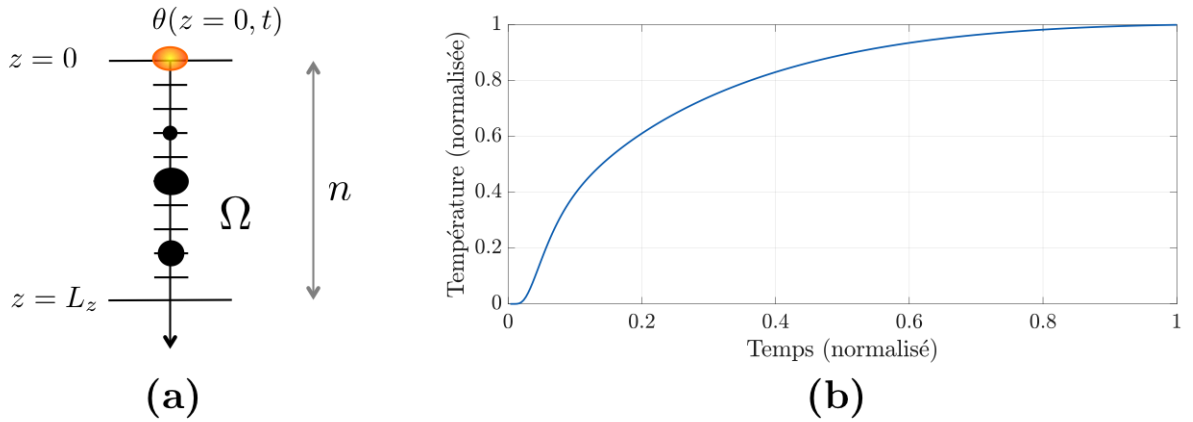


FIGURE 3.4 – Problème 1D étudié : trois points-sources d'intensité respectives 0.5, 1 et 0.75 (a) et température résultante normalisée à la surface (b).

Dans cette partie, les données utilisées pour l'inversion sont numériques, obtenues directement via l'exécution du problème direct détaillé précédemment. Comme mentionné précédemment, l'inversion est basée sur la S.V.D. de la matrice opérateur $\mathbf{I}$. Cette matrice est définie sur la discrétisation du matériau (ou partie du matériau) où chaque nœud de discrétisation est une source thermique potentielle (Source Dirac spatio-temporelle à $t = 0$). Cette matrice est donc indépendante de la distribution réelle de la source. Dans la suite, il est montré que l'étude de $\mathbf{S}$ (matrice des valeurs singulières) est capitale pour optimiser l'algorithme d'inversion.

$\mathbf{I}$ et $\mathbf{S}$ sont de même taille $m \times n$, où m correspond au nombre de pas de temps (compris entre t_0 et t_f) et n au nombre de nœuds de discrétisation. Dans l'algorithme, ces deux paramètres doivent être choisis par l'opérateur. Comme le problème inverse étudié peut-être vu comme une minimisation par moindres carrés, on doit avoir $m > n$. Techni-

quement, le pas de temps est limité par la fréquence d'acquisition de la caméra infrarouge (f_{ac}) : ce nombre ne peut donc pas être supérieur à $M = t_f * f_{ac}$. Ainsi, m doit être choisi entre 1 et M . En revanche, la discrétisation de la profondeur n n'est pas soumise à ces limitations. Ici, les limitations pourraient être d'ordre numérique : plus n est grand (et donc par conséquent m aussi), plus l'exécution du programme d'inversion sera longue (particulièrement la compilation de la S.V.D. qui est assez lourde, comme explicité dans le paragraphe précédent). Une limite de l'algorithme pourrait donc être purement informatique, c'est-à-dire dépendante de la puissance de l'ordinateur (R.A.M. et autre...).

Cependant, il est apparu qu'il existe une autre limite, d'ordre physique, beaucoup plus restrictive que la limite numérique. Cette limite est déterminée par le nombre de Fourier.

Pour commencer, deux discrétisations du problème donné par la figure 3.4 ont été effectuées, la première avec $n = 20$, la seconde avec $n = 50$. Les résultats de ces deux inversions sont illustrés par la figure 3.5. Dans les deux cas, le nombre de pas de temps à été pris à $m = 300$. Visuellement, n représente le nombre de "points-sources" potentiels présents dans le matériau. Si $n = 20$, cela veut dire qu'on recherche au maximum 20 sources dans le matériau, tandis que si $n = 50$, on recherche au maximum 50 sources dans le même matériau. Puisque la profondeur dans le matériau est la même dans les deux cas, cela veut dire que plus n est grand, plus on peut reconstruire des sources petites.

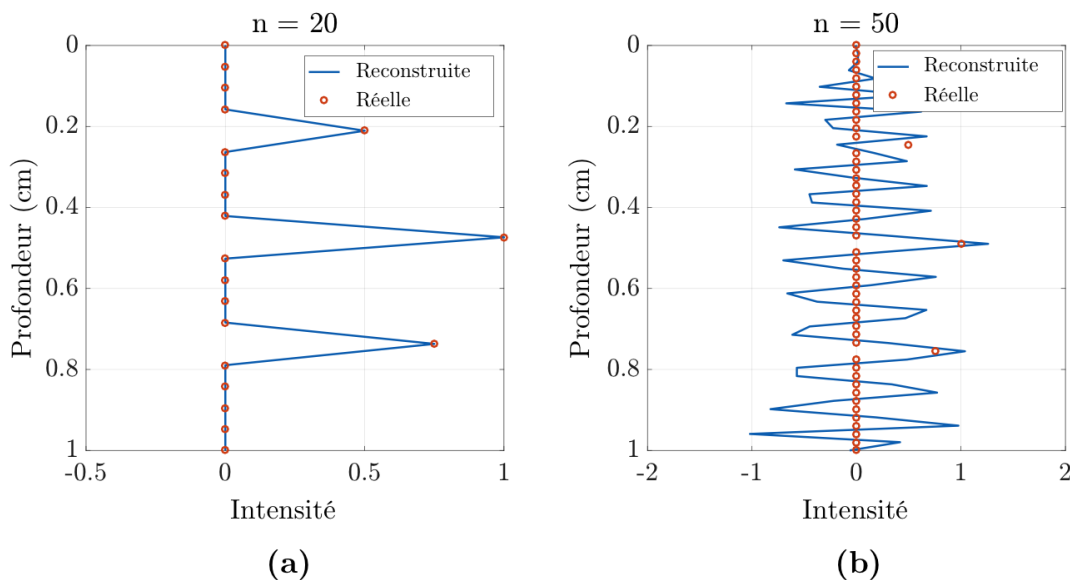


FIGURE 3.5 – Reconstruction des sources pour $n = 20$ (a) et $n = 50$ (b).

Pour les paramètres choisis, si $n = 20$, les trois sources sont parfaitement reconstruites. En revanche, pour $n = 50$, les sources ne sont plus retrouvées. Il semble donc y avoir une limite à ne pas dépasser dans le choix de n . Notons Ω la source réelle et Ω_{th} la source reconstruite par inversion. L'algorithme d'inversion a été effectué une centaine de fois pour n variant de 1 à 100. Pour chaque discrétisation, l'erreur commise entre la reconstruction et la source réelle est tracée sur la figure 3.6.

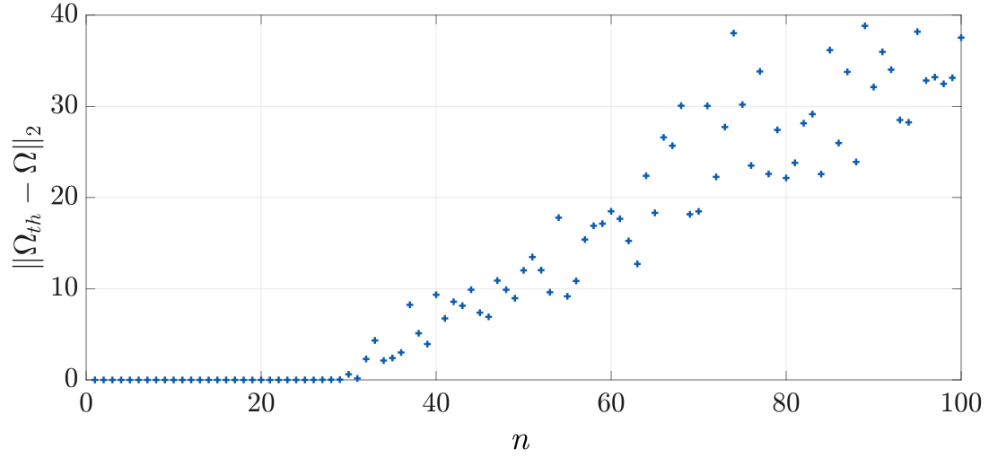
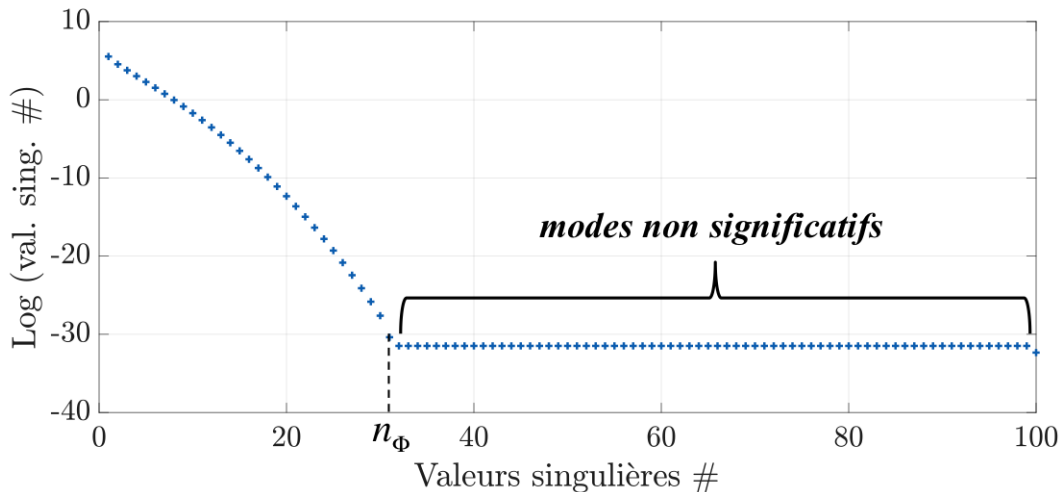


FIGURE 3.6 – Erreur commise entre la source reconstruite et la source réelle en fonction du nombre de points de discrétisation.

Pour $n < 30$, les erreurs obtenues sont nulles, signifiant que les reconstructions sont fidèles à la réalité. En revanche, à partir de $n = 30$, l'erreur augmente rapidement en fonction du nombre de points de discrétisation, ce qui veut dire que les reconstructions obtenues sont erronées. Ainsi, pour un problème donné, il existe donc un nombre maximal n_{opt} de sources restructuribles. Autrement dit, pour un nombre de pas de temps et une profondeur de matériau donnés, il n'est pas possible de reconstruire des "segments-sources" de longueur plus petite que l_{opt} , avec $l_{opt} = L_z/n_{opt}$.

Pour que l'algorithme d'inversion soit opérationnel et efficace, il est donc important de connaître ce nombre optimal n_{opt} . Pour ce faire, une étude sur les valeurs singulières de la matrice opérateur $\mathbf{I}$ est proposée. On part des mêmes paramètres que précédemment et le nombre de discrétisation est sciemment pris élevé : $n = 100$. La S.V.D. de la matrice opérateur $\mathbf{I}$ est alors effectuée. La figure 3.7 montre l'évolution du logarithme des valeurs singulières obtenues.


 FIGURE 3.7 – Valeurs singulières de la matrice opérateur $\mathbf{I}$.

Les valeurs singulières décroissent de façon exponentielle jusqu'à un certain point à partir duquel elles deviennent constantes. Chaque valeur singulière s_k est associée à ses vecteurs propres $\mathbf{U}_{\cdot,k}$ et $\mathbf{V}_{\cdot,k}$, et forment ce qu'on appelle un mode. Chaque mode k apporte une information pondérée par sa valeur singulière. Plus s_k est élevée, plus le mode est important. Sur la figure 3.7, les modes situés après les n_ϕ premiers sont tous pondérés par la même valeur singulière extrêmement faible. Ces modes ne contribuent donc quasiment pas à la construction de la matrice $\mathbf{I}$: ils sont peu significatifs pour le problème direct. Or, lors du processus d'inversion décrit par l'équation (3.28), chaque mode est multiplié par l'**inverse** de leur valeur singulière associée. Tous ces derniers modes qui ne jouent pas un rôle important deviennent alors des modes principaux et écrasent l'apport des n_ϕ premiers modes.

Pour aller plus loin, les différents modes associés aux valeurs singulières ont été tracés. Chaque mode i peut être représenté par une matrice "espace-temps" $\mathbf{M}_i = \mathbf{U}_{\cdot,i}(\mathbf{V}_{\cdot,i})^T$. Certains sont illustrés sur la figure 3.8.

On remarque tout d'abord que chaque mode apporte une information différente. Le premier mode est prépondérant près de la surface pour les temps courts et peu influent pour les nœuds les plus profonds et aux temps longs. Plus le mode est élevé, plus il va importer aux temps longs et en profondeur. Ensuite, on remarque qu'à partir de n_ϕ , la logique de la forme des modes est rompue et ne semble plus décrire aucune physique. Ainsi, ces résultats confortent notre choix de ne garder que les n_ϕ premiers modes.

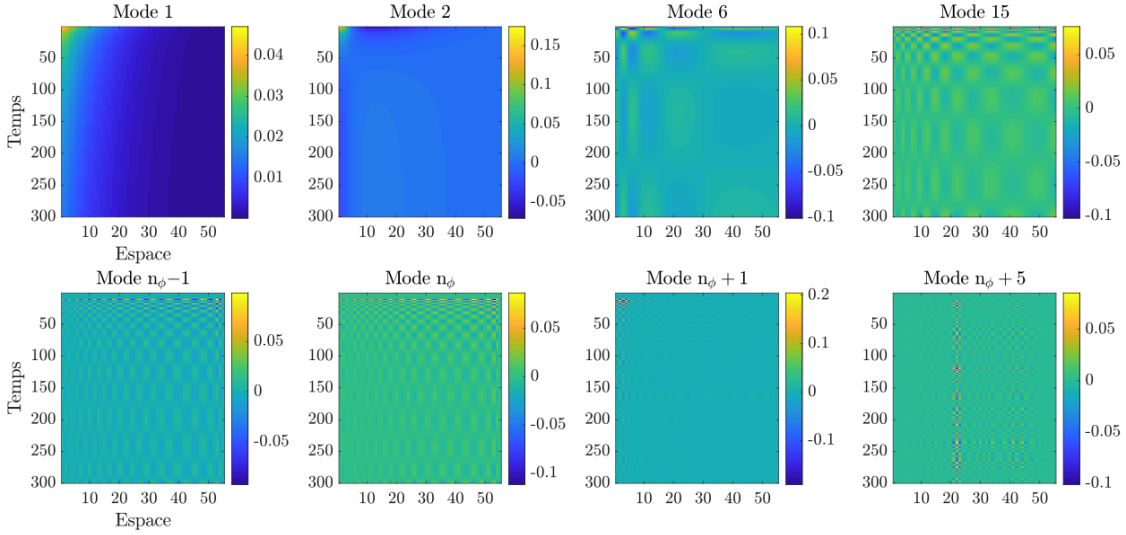
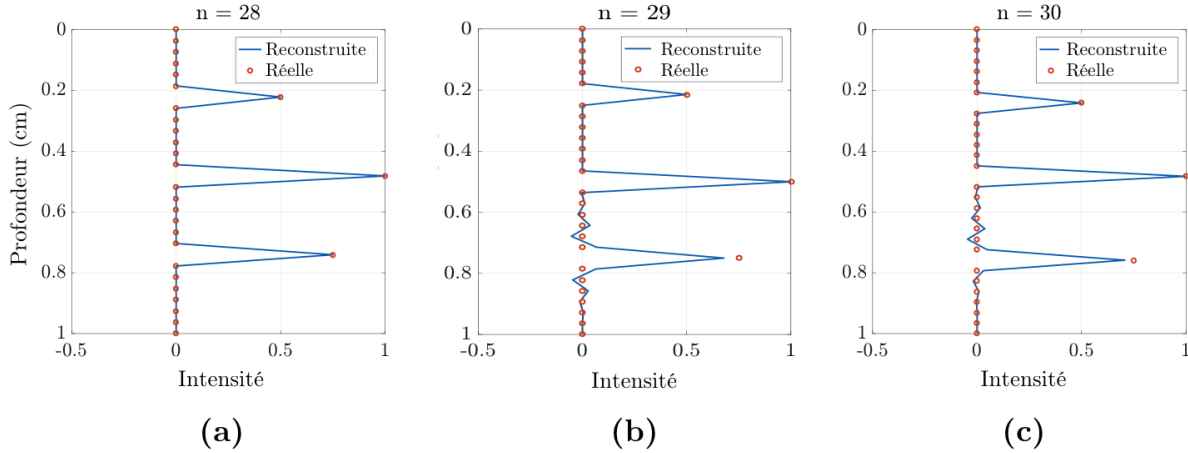


FIGURE 3.8 – Représentation des modes 1, 2, 6, 15, $n_\phi - 1$, n_ϕ , $n_\phi + 1$ et $n_\phi + 5$ de la matrice $\mathbf{I}$.

Ensuite, il est apparu qu'il existe une corrélation directe entre n_ϕ et n_{opt} , le nombre maximal de sources que l'on peut reconstruire parfaitement. On a en effet $n_\phi \approx n_{opt}$, ce qui peut se voir par exemple entre les figures 3.6 et 3.7. En réalité, plusieurs simulations ont montré que n_{opt} est toujours légèrement inférieur à n_ϕ . Cependant, pour l'ensemble des cas, n_{opt} n'est jamais inférieur à $n_\phi - 4$. Pour les paramètres d'entrée donnés précédemment, la figure 3.7 donne $n_\phi = 30$. D'après le critère donné précédemment, on devrait donc avoir n_{opt} compris entre 26 et 30. L'inversion du problème précédent a été testé avec trois cas différents : $n = 28$, $n = 29$ et $n = n_\phi = 30$. Les résultats sont tracés sur la figure (3.9).

Pour $n = 28$, les trois sources et leurs intensités sont parfaitement reconstruites. En revanche, pour $n = 29$ ou $n = 30$, des pics oscillants parasites apparaissent autour de la source la plus profonde, et l'intensité de la source la plus profonde n'est pas parfaitement retrouvée. On a donc ici $n_{opt} = 28$. En fait, plus n augmente, avec $n > n_{opt}$, plus la reconstruction de sources fait apparaître des oscillations parasites et s'éloigne de la solution réelle. Il est donc judicieux de prendre n le plus proche possible de n_{opt} .

On a donc maintenant un critère robuste et fiable permettant de déterminer le nombre maximal de sources reconstituables en profondeur dans un matériau connu. Du point de vue physique, ce critère permet de déterminer la taille minimale de source que l'on peut reconstruire via l'algorithme d'inversion.


 FIGURE 3.9 – Reconstruction pour $n = 28$ (a), $n = 29$ (b) and $n = 30$ (c).

Afin d'avoir une vue généralisée du problème, une étude paramétrique a été effectuée pour observer l'influence des paramètres d'entrée sur le critère. n_ϕ a été calculé pour chaque nombre de Fourier (Fo_z) et pour chaque nombre de pas de temps (m). La figure 3.10 donne les résultats obtenus.

Il apparaît que n_ϕ dépend fortement du nombre de Fourier. Pour un nombre de Fourier inférieur à 0.001 ou supérieur à 1, il sera impossible de reconstruire plus d'une dizaine de sources à l'aide de l'algorithme d'inversion. Si la manipulation le permet, il est donc important de choisir les paramètres (par exemple t_f) de telle sorte à avoir Fo_z compris entre 0.01 et 0.5 afin de se placer dans les meilleures conditions pour pouvoir reconstruire un maximum de sources lors de l'inversion.

Le nombre de pas de temps joue un rôle un peu moins important que le nombre de Fourier sur le critère. Plus le nombre de pas de temps augmente, plus on pourra reconstruire de sources. Cependant, cette croissance n'est pas linéaire. Au-delà d'un certain seuil, le nombre de pas de temps n'influe quasiment plus sur le nombre de sources reconstruites. Par exemple, pour les nombres de Fourier compris entre 0.001 et 1, il n'y a pas de différence entre 800 et 1000 pas de temps.

Ainsi, la méthode de caractérisation par excitation Dirac possède deux avantages. Le premier est qu'elle permet de reconstruire plusieurs sources distinctes, même si elles sont positionnées les unes au-dessus des autres. Le second est qu'elle permet de reconstruire des sources avec des intensités différentes. De plus, il est important de noter que le critère

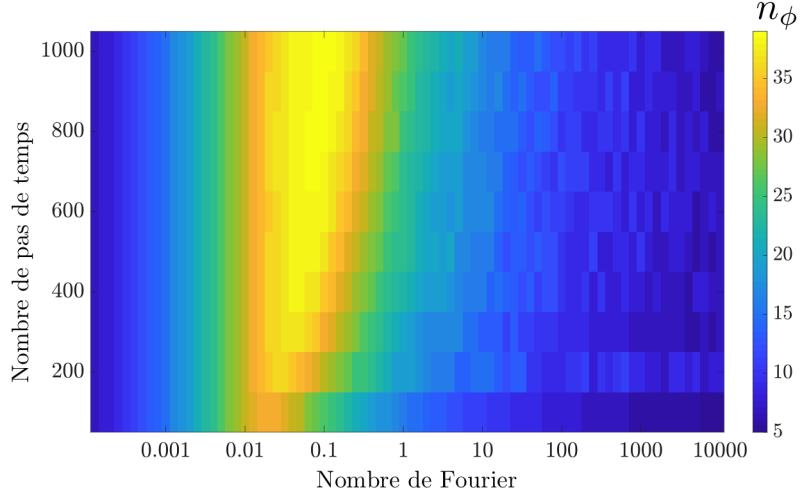


FIGURE 3.10 – Critère sur n_ϕ en fonction des nombres de Fourier et de pas de temps pour modèle Dirac.

donné par la figure 3.10 est universel, dans le sens où il ne dépend ni du matériau, ni de son épaisseur. Ce critère dépend uniquement du nombre de Fourier, qui peut se calculer pour n'importe quel matériau, et du nombre de pas de temps, qui est numérique et est limité uniquement par la fréquence d'acquisition de la caméra infrarouge. Ce critère peut donc se voir comme une abaque, permettant de choisir les paramètres optimaux afin de reconstruire au mieux les sources thermiques, ce qui constitue une avancée par rapport aux travaux de [127–130]. L'annexe C recense en particulier les paramètres optimaux pour plusieurs types de matériaux pour différentes épaisseurs. Par exemple, pour un matériau en acier d'une épaisseur de 1 cm et de diffusivité de $12 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, les temps d'acquisition optimaux de mesure sont compris entre $8.33 \times 10^{-2} \text{ s}$ et 4.17 s . En revanche, s'il s'agit d'un matériau composite de diffusivité $4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, les temps d'acquisitions doivent être compris entre 0.25 s et 12.5 s .

Étude de l'influence de chaque mode à n_ϕ donné

L'étude précédente permet de choisir le nombre optimal de points de discrétisation en profondeur. Une fois ce nombre n_ϕ choisi, on peut implémenter la matrice $\mathbf{I}$ à l'aide de l'équation (3.26), en prenant une discrétisation de n_ϕ points en profondeur. On dispose donc de n_ϕ modes pour l'algorithme d'inversion. La reconstruction des sources s'effectue alors à l'aide de l'équation (3.28), qui s'écrit ici :

$$\Omega_{th}^{(n_r)} = \sum_{k=1}^{n_r} \frac{\mathbf{U}_{:,k}^T \theta}{s_k} \mathbf{V}_{:,k}. \quad (3.29)$$

Si on prend $n_r = n_\phi$, l'ensemble des modes de la matrice opérateur sont pris en compte et la solution est déterminée à l'aide de la somme de chacun de ses modes. Le premier mode donne un résultat auquel s'ajoute les informations données par le deuxième mode et ainsi de suite jusqu'au n_ϕ -ème mode. On peut alors étudier l'évolution de la reconstruction en fonction du nombre de mode n_r pris en compte pour la reconstruction. On a de fait $1 \leq n_r \leq n_\phi$.

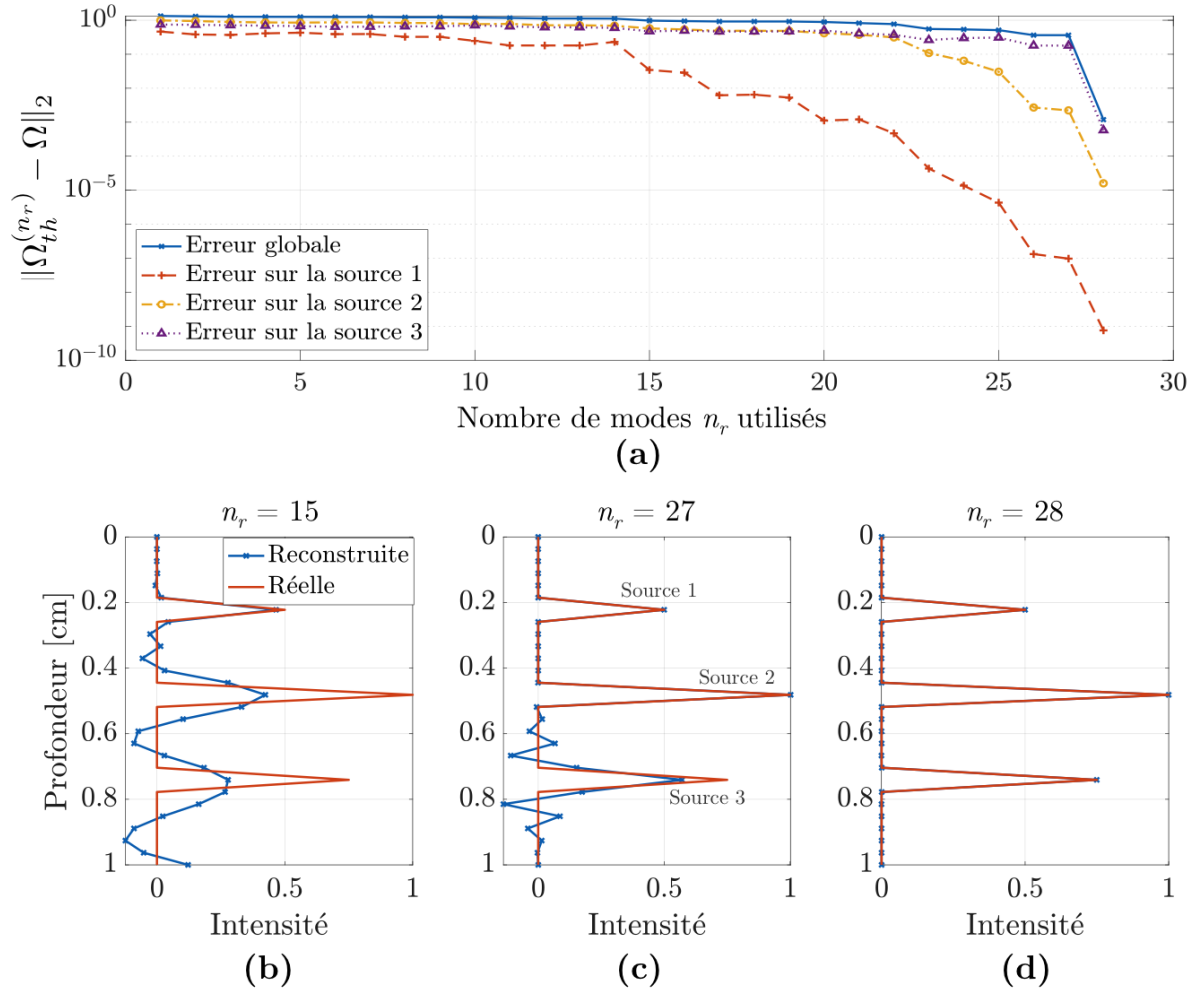


FIGURE 3.11 – Norme de l'erreur commise entre la source reconstruite et la source réelle en fonction du nombre de modes utilisés pour la reconstruction (a). Illustration des reconstructions obtenues en prenant les 15 premiers modes (b), 27 premiers modes (c) et tous les modes (d).

La figure 3.11 donne en (a) l'erreur globale obtenue entre la reconstruction obtenue $\Omega_{th}^{(n_r)}$ et la répartition de source réelle Ω en fonction du nombre de modes n_r utilisés pour l'inversion. Sur ce même graphe sont aussi détaillées les erreurs en chacun des trois

points sources en fonction du nombre de modes n_r pris pour l'inversion. Ces sources sont numérotées de 1 à 3, la première étant la source la plus proche de la surface et la troisième la source la plus profonde. Sur la même figure 3.11, les reconstructions sont illustrées à différents stades de l'algorithme, c'est-à-dire pour certains nombres de modes n_r utilisés : en **(b)** pour $n_r = 15$, en **(c)** pour $n_r = 27$ et en **(d)** pour $n_r = 28 = n_\phi$.

L'étude de l'erreur globale, représentée en bleue sur le graphe **(a)**, permet d'avoir un aperçu général sur la pertinence de la reconstruction. Au départ (*i.e* avec très peu de modes), cette erreur globale est élevée, traduisant une mauvaise reconstruction du vecteur source : les modes n'apportent pas suffisamment d'informations. Plus le nombre de modes utilisés augmente, plus l'erreur diminue, traduisant une convergence de l'algorithme vers une solution unique. De plus, les derniers modes semblent très importants, car l'erreur globale diminue beaucoup plus vite avec l'ajout des derniers modes qu'avec les premiers. Enfin, le dernier mode n_ϕ semble jouer un rôle particulier puisque l'erreur diminue fortement avec l'ajout de celui-ci.

Les erreurs calculées sur chacune des sources, tracées en rouge (source 1), jaune (source 2) et violet (source 3), permettent de visualiser l'influence des modes de la S.V.D. en fonction de la profondeur. En effet, il apparaît que l'algorithme reconstruit en premier les sources les plus proches de la surface et termine par les plus profondes. L'erreur obtenue sur la source la plus proche de la surface diminue beaucoup plus rapidement que celles des sources les plus profondes : à partir de $n_r = 15$, l'erreur sur la source 1 est de l'ordre de 10^{-2} , soit environ cent fois moins que les erreurs sur les sources 2 et 3. La reconstruction obtenue avec $n_r = 15$, tracée en **(b)** le prouve : la source 1 est bien reconstruite, ce qui n'est pas le cas des deux autres. D'après le graphe **(a)**, on peut voir que la source 2, moyennement profonde, sera assez bien reconstruite à partir du 23-ème mode puisque l'erreur obtenue diminue fortement à partir de $n_r = 23$. La source 3 nécessite quant à elle la totalité des modes de la S.V.D. pour pouvoir être reconstruite. En effet, pour $n_r = 27$, les deux sources les plus proches de la surfaces sont retrouvées **(c)**, mais la dernière n'est pas encore parfaitement reconstruite. Lorsque tous les modes sont pris en compte, toutes les sources sont retrouvées, comme on peut le voir sur le graphe **(d)**.

En conclusion, l'abaque en fonction du nombre de Fourier présenté précédemment permet de connaître le nombre de sources restructuribles en profondeur pour un problème donné. Cette connaissance permet d'implémenter l'algorithme de manière optimisée, en particulier pour la définition de la matrice opérateur **I**. De cette matrice sont issus les

modes propres permettant de retrouver la distribution de sources en profondeur à partir du champ de température mesuré à la surface. Chacun de ces modes est nécessaire : les premiers vont permettre de reconstruire les sources proches de la surface, les suivants les sources les plus profondes.

3.2.2 Influence de l'excitation temporelle utilisée

Le critère établi dans la partie précédente est donné pour une excitation Dirac. Cependant, si la source thermique est trop profonde ou si le coefficient de diffusion est trop faible, la température résultante n'atteindra jamais la surface. L'excitation Dirac (impulsion) n'est donc pas appropriée pour ces cas de figure. La même étude a donc été effectuée, mais cette fois sur une réponse à l'échelon (fonction Heaviside).

Au lieu d'une excitation impulsionnelle à $t = 0$, le matériau est soumis à une excitation tout le long de la mesure, entre t_0 et t_f . De cette manière, on est assuré que la température atteindra la surface du matériau, à condition de choisir t_f adapté. L'avantage de la réponse à l'échelon est que la réponse temporelle, donnée par l'équation (3.30), est obtenue directement via l'intégrale temporelle de la réponse au Dirac. La méthodologie utilisée pour l'algorithme du problème inverse est la même que celle présentée pour l'excitation Dirac.

$$\theta_{\text{Heaviside}}(x, y, z, t) = \int_{t_0}^t \left[\frac{Q(x', y', z')}{8\rho C_p} \frac{\exp\left(-\frac{(x-x')^2}{4a_x\tau}\right)}{\sqrt{\pi a_x\tau}} \frac{\exp\left(-\frac{(y-y')^2}{4a_y\tau}\right)}{\sqrt{\pi a_y\tau}} \frac{\exp\left(-\frac{(z-z')^2}{4a_z\tau}\right)}{\sqrt{\pi a_z\tau}} \right] d\tau \quad (3.30)$$

De la même manière que pour l'excitation Dirac, l'étude des valeurs singulières de la matrice opérateur permet d'obtenir des informations concernant le nombre de modes pertinents pour la reconstruction de sources. La figure 3.12 compare les valeurs singulières obtenues pour l'excitation Dirac et pour celle à l'échelon, pour les mêmes paramètres que ceux cités dans la partie précédente.

On peut remarquer tout d'abord que l'évolution des valeurs singulières est la même quelle que soit l'excitation : leur décroissance est exponentielle dans les deux cas jusqu'à un certain point où elles ne varient plus. Pour l'excitation échelon, cependant, les valeurs singulières sont un peu plus élevées que pour le modèle Dirac, mais la coupure se fait plus tôt, ce qui se traduit par un nombre de modes pertinents plus faible.

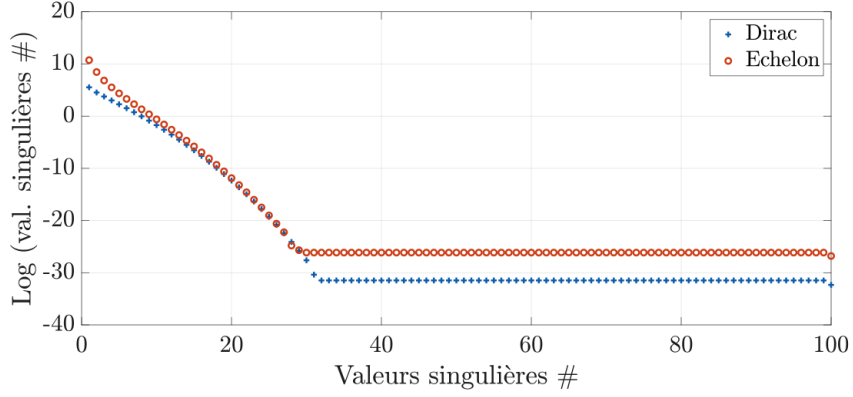


FIGURE 3.12 – Comparaison entre les valeurs singulières de la matrice opérateur du modèle Dirac et du modèle Échelon.

Afin de connaître l'influence du nombre de Fourier pour l'excitation à l'échelon, la même étude paramétrique que pour le modèle Dirac a été effectuée : les résultats sont présentés par la figure 3.13.

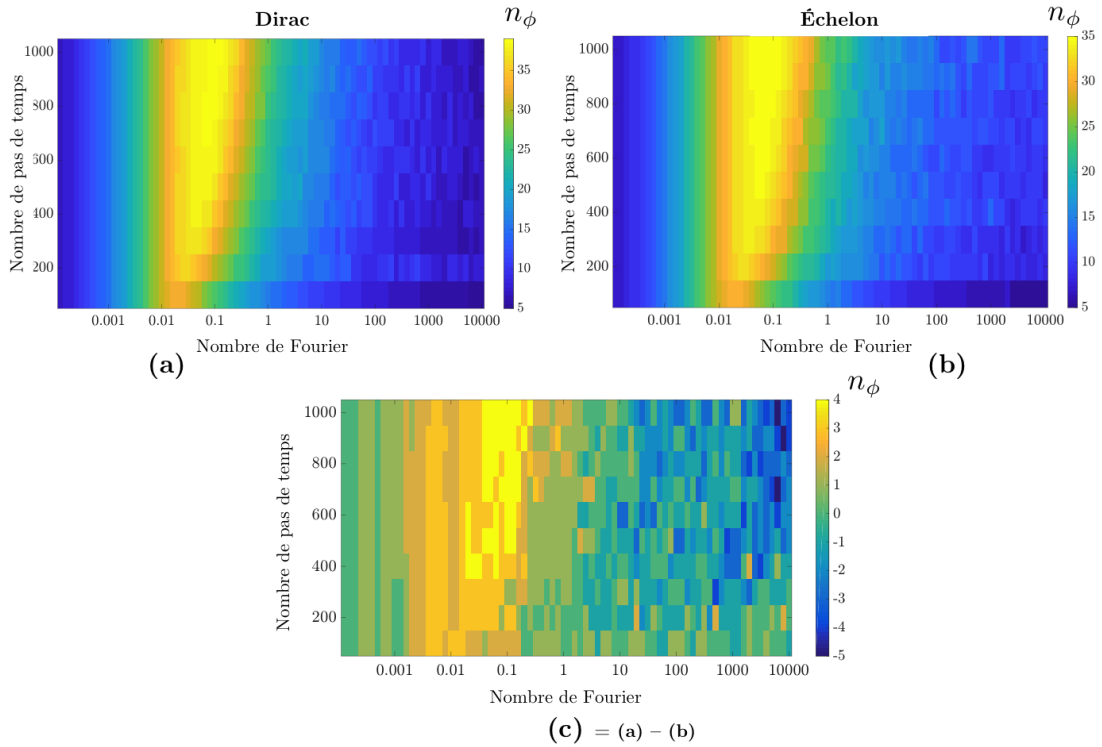


FIGURE 3.13 – Critère sur n_ϕ en fonction du nombre de Fourier et du nombre de pas de temps pour l'excitation Dirac (a), à l'échelon (b) et différence entre ces deux critères (c).

Le critère obtenu ici suit la même tendance que celui obtenu pour l'excitation Dirac (b). Les n_ϕ maximums sont retrouvés pour les même nombres de Fourier, à savoir entre Fo_z compris entre 0.01 et 1. Afin de bien visualiser les similitudes entre l'excitation Dirac et celle à l'échelon, la différence entre leur deux critères respectifs est représentée en (c).

Les résultats observés permettent d'affirmer que, théoriquement, la méthode par excitation Dirac est légèrement meilleure que celle à l'échelon. Cependant, le nombre de sources reconstituables supplémentaires via la méthode Dirac n'excède pas 4.

3.2.3 Généralisation au problème 3D

Critère de Fourier selon x et y

Pour le problème 3D, tous les nombres de Fourier (Fo_x , Fo_y and Fo_z) entrent en jeu. Puisque les directions x et y sont symétriques, l'étude du problème représenté par la figure 3.14 est suffisante pour avoir accès au critère en 3D. Une source thermique Ω est répartie sur le plan π d'équation ($x = 0$), perpendiculaire à la surface de mesure. La température résultante est mesurée à la surface du matériau (en $z = 0$).

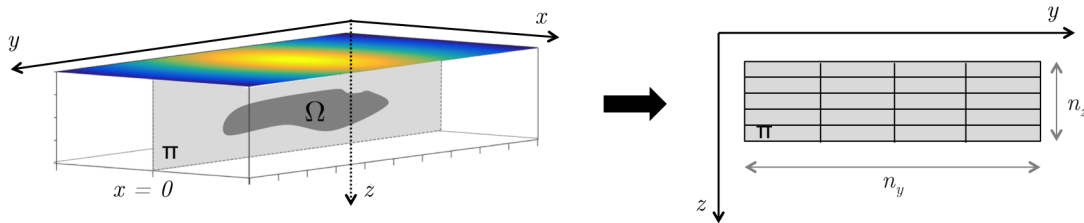


FIGURE 3.14 – Représentation du problème 3D et discrétisation du plan π .

Le plan π est discrétisé selon les directions y et z , avec respectivement n_y et n_z points de discrétisation. Comme montré par le problème 1D, n_z est limité et peut être déterminé via la S.V.D. de la matrice opérateur. La figure 3.15 trace les valeurs singulières obtenues pour $Fo_z = 0.1$, $Fo_y = 1.10^{-3}$ et $L_y = 2L_z$. Les autres paramètres restent quant à eux inchangés.

Contrairement au problème 1D, les valeurs singulières évoluent par paliers décroissants. Chaque palier contient exactement n_y valeurs singulières. Tout comme dans le problème 1D, les dernières valeurs singulières atteignent un seuil et rendent donc les modes correspondants peu significatifs. Le nombre de paliers correspond au n_ϕ déterminé par le

problème 1D. Cette répartition des valeurs singulières peut s'expliquer par la répétabilité par blocs dans la matrice opérateur $\mathbf{I}$. La limitation ne vient donc pas de n_y mais bien de n_z .

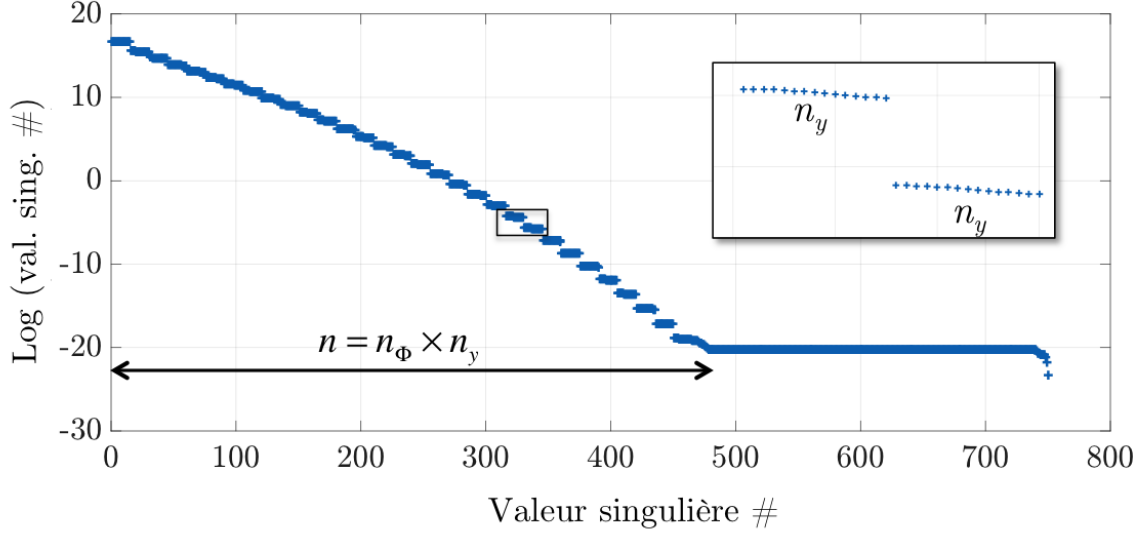


FIGURE 3.15 – Valeurs singulières de la matrice opérateur en 3D.

En raison du grand nombre de paramètres, il est difficile de représenter les résultats de l'étude paramétrique en totalité. Cependant, plusieurs observations ont été faites. Tout d'abord, l'évolution du critère en fonction de Fo_z est la même que pour le problème 1D. Ensuite, contrairement à ce qui aurait pu être attendu en raison de la séparabilité donnée par l'équation (3.20), l'évolution du critère en fonction de Fo_y et du nombre de pas de temps n'est pas la même que celle avec Fo_z . Cette évolution est représentée par la figure 3.16 en (a), pour Fo_z choisi à 0.1. Sur la même figure, en (b), le même critère est représenté, mais pour un nombre de pas de temps fixé à $n_t = 300$, avec Fo_y et Fo_z variables.

Le premier résultat qui apparaît est que la reconstruction d'une source 3D est optimale pour les plus petites valeurs de Fo_y . Plus Fo_y augmente, moins on peut reconstruire de sources en profondeur. Un Fo_y élevé peut traduire une forte diffusion selon la direction y . Ainsi, la température résultante d'une source enfouie va rapidement s'étaler à la surface si Fo_y est élevé. Cela peut se traduire par le fait que plus Fo_y est élevé, plus l'image de la source en surface sera "floue", rendant la reconstruction de source plus difficile. En revanche, pour Fo_y faible, la température mesurée à la surface sera plus focalisée puisque la diffusion en y est lente. Dans ce cas, la reconstruction sera plus facile à effectuer.

Ensuite, dans le problème 3D, la figure 3.16 en (b) montre bien que le critère en fonction du nombre de Fourier selon la direction de la profondeur Fo_z suit la même évolution que pour le problème 1D. Les nombres de Fourier en z compris entre 0.01 et 0.5 sont ceux qui permettent d'avoir la meilleure résolution en profondeur.

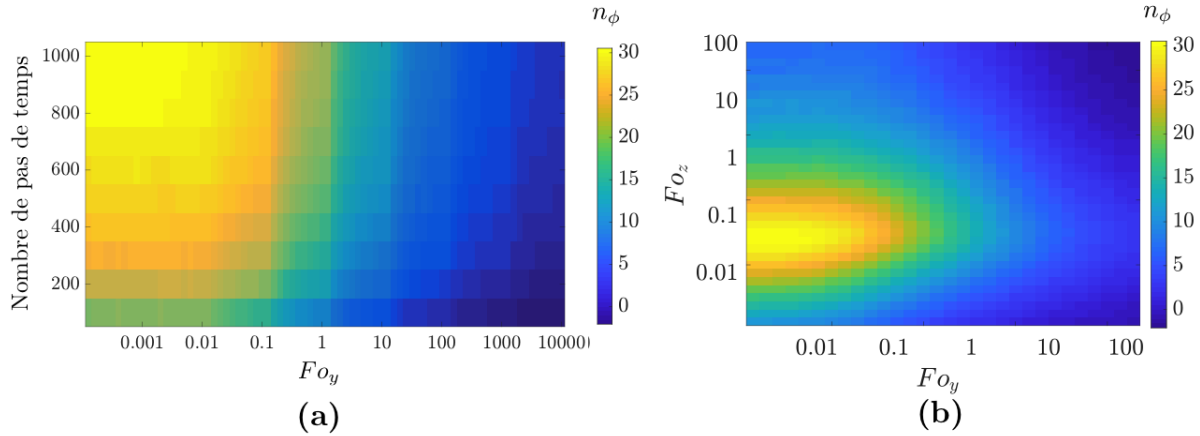


FIGURE 3.16 – Critère sur n_ϕ en fonction de Fo_y et du nombre de pas de temps pour $Fo_z = 0.1$ (a) et en fonction de Fo_y et Fo_z pour $n_t = 300$ (b) pour une excitation Dirac du problème 3D.

Pour conclure, la reconstruction d'une source 3D dépend fortement des paramètres physiques du problème, et en particulier des différents nombres de Fourier. La reconstruction sera optimale pour des faibles nombres de Fourier selon x et y , et un nombre de Fourier compris entre 0.01 et 0.5 pour la direction de la profondeur z . La qualité de la reconstruction dépend de chacun de ces paramètres. Encore une fois, cela donne un critère universel et objectif pour le nombre de sources que l'on peut reconstruire. Ainsi, quel que soit le matériau, ce critère permet de déterminer, à partir de ses caractéristiques thermiques, la taille minimale de source que l'on peut reconstruire.

Application sur un exemple 3D

Afin de visualiser l'impact du critère sur l'algorithme de reconstruction par SVD, l'exemple présenté par la figure 3.17 est étudié dans cette partie. Le plan $\pi(x = 0)$, vertical à la surface de mesure contient plusieurs sources. Dans cet exemple, toutes les sources ont la même intensité, normalisée à 1. Les dimensions de la plaque L_x, L_y et L_z sont toutes normalisées de manière à faire varier x et y sur l'intervalle $[-0.5; 0.5]$, et z sur l'intervalle $[0; 1]$. Les nombres de Fourier Fo_x, Fo_y et Fo_z selon chacune des directions x, y et z sont alors introduits.

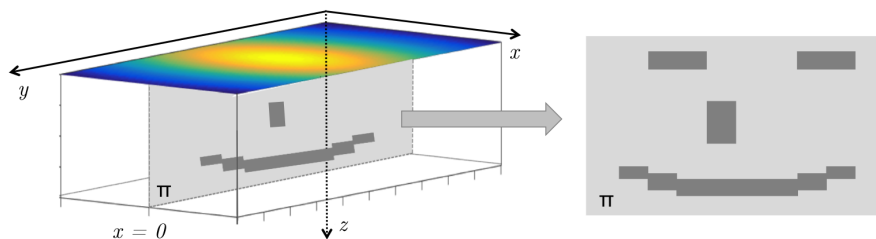


FIGURE 3.17 – Exemple 3D étudié : sources réparties sur le plan π , d'équation $(x = 0)$, vertical à la surface de mesure.

Comme explicité dans le paragraphe §3.1.3, plus le nombre d'inconnues recherchées augmente (et en particulier si les nombres n_x et n_y sont importants), plus le temps d'exécution de l'algorithme sera élevé. Pour cet exemple, afin d'avoir un temps de calcul raisonnable on prend $n_x = n_y = 20$, $n_z = 25$ et $n_t = 300$. Avec ces données, l'exécution du programme prend environ 10 secondes.

Les critères présentés aux paragraphes §3.2.1 et §3.2.3 montrent que les nombres de Fourier jouent un rôle primordial dans la reconstruction de sources. Plusieurs cas sont testés par la suite. À chaque fois, les résultats obtenus sont illustrés à l'aide d'une figure contenant quatre images :

- En (a) : représentation du champ de température à la surface au temps $t_f/10$.
- En (b) : représentation du champ de température à la surface au temps t_f .
- En (c) : représentation du plan source réel.
- En (d) : représentation de la reconstruction du plan source obtenu après inversion.

Pour chaque simulation réalisée, le champ de température est normalisé de manière à avoir une évolution comprise entre 0 et 1.

Première simulation : $Fo_x = Fo_y = 0.1$ et $Fo_z = 0.1$. Les résultats sont illustrés par la figure 3.18.

Deuxième simulation : $Fo_x = Fo_y = 0.01$ et $Fo_z = 0.1$. Les résultats sont illustrés par la figure 3.19.

Troisième simulation : $Fo_x = Fo_y = 0.01$ et $Fo_z = 0.05$. Les résultats sont illustrés par la figure 3.20.

Le critère donné par la figure 3.16 permet de comparer et vérifier les résultats obtenus pour chacun des trois cas testés. La première des simulations travaille avec des nombres de

Fourier qui, d'après le critère présenté précédemment, ne permettent pas de reconstruire plus de 20 sources en profondeur (au maximum). La reconstruction obtenue en figure 3.18 le confirme : même si les sources les plus proches de la surface sont retrouvées, ce n'est plus le cas pour les plus profondes.

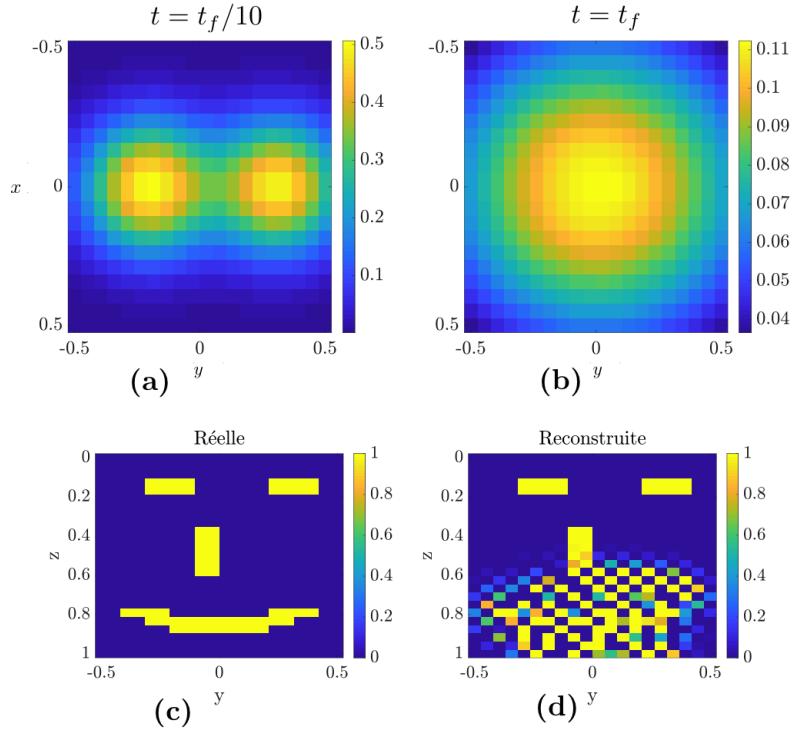


FIGURE 3.18 – Résultats pour $Fo_x = Fo_y = 0.1$ et $Fo_z = 0.1$.

Toujours d'après ce critère, les nombres de Fourier de la deuxième simulation ($Fo_y = 0.01$ et $Fo_z = 0.1$) permettent de reconstruire une trentaine de sources en profondeur, ce qui est confirmé par la figure 3.19 : l'ensemble des sources sont parfaitement reconstruites. Avec ces nombres de Fourier, on peut noter la différence entre les champs de température mesurés à la surface du matériau pour les mêmes temps entre cette simulation et la précédente. La diffusion est en effet plus lente en x et y .

Enfin, la dernière simulation travaille avec les mêmes nombres de Fourier en x et y que pour la première simulation, mais le nombre de Fourier en z est ici deux fois plus petit ($Fo_z = 0.05$). On se trouve à la limite de reconstruction : les sources les plus profondes sont mieux reconstruites que pour la première simulation, mais il subsiste quelques erreurs. Parallèlement, on peut remarquer que pour les mêmes temps, entre cette simulation et la première, les sources diffusent autant, mais la température est plus élevée.

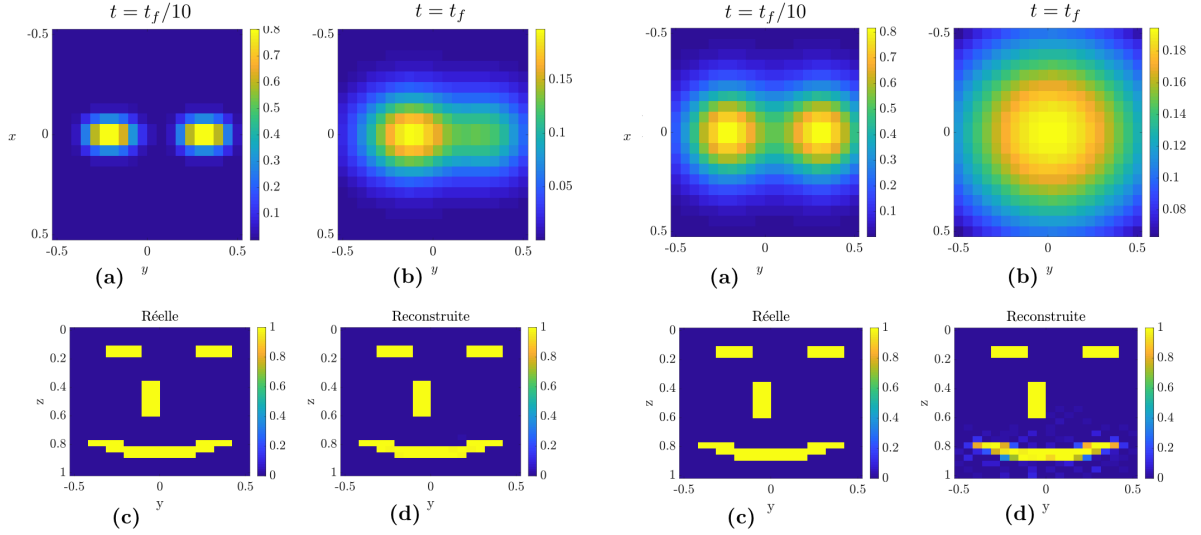


FIGURE 3.19 – Résultats pour $Fo_x = Fo_y = 0.01$ et $Fo_z = 0.1$. FIGURE 3.20 – Résultats pour $Fo_x = Fo_y = 0.1$ et $Fo_z = 0.05$.

Discussion sur le temps d'exécution de la S.V.D.

Le temps d'exécution de l'algorithme permettant de calculer la S.V.D., et par conséquent la solution, est un point important à relever. En effet, la complexité de l'algorithme permettant de calculer la S.V.D. complète d'une matrice est aujourd'hui en $\mathcal{O}(mn^2)$ [144], si $m > n$. Comme expliqué au début de ce chapitre, si les dernières valeurs propres sont nulles, on peut réduire le calcul de la S.V.D. en ne calculant que les p premiers modes non nuls, et dans ce cas, la complexité de l'algorithme devient en $\mathcal{O}(mn)$.

Pour le cas 1D, on a $m = n_t$ et $n = n_z$. Le temps de calcul de la S.V.D. de la matrice opérateur est donc de l'ordre de $\mathcal{O}(n_t n_z)$. Ici, il est important de souligner que le temps de calcul d'un algorithme dépend fortement de la machine utilisée. La RAM (mémoire vive), le type et le nombre de processeur... sont des éléments qui varient d'un ordinateur à l'autre et qui entraînent des temps d'exécution différents. Dans cette partie, les calculs qui permettent de donner les ordres de grandeurs ont été effectués sur l'ordinateur nommé ici Mac16, dont les informations systèmes sont données en Annexe D. Dans le chapitre 5, une comparaison du temps de calcul pour des exemples 3D sera effectuée sur plusieurs ordinateurs (avec des puissances différentes) afin de voir sur un cas concret l'influence de la puissance de la machine sur le temps d'exécution.

La figure 3.21 trace l'ordre de grandeur des temps de calculs (pour une machine du même type que Mac16) en fonction du nombre de points sources recherchés (n_z) pour

différents nombres de mesures de température en temps ($n_t \in \{10, 300, 500, 1000\}$).

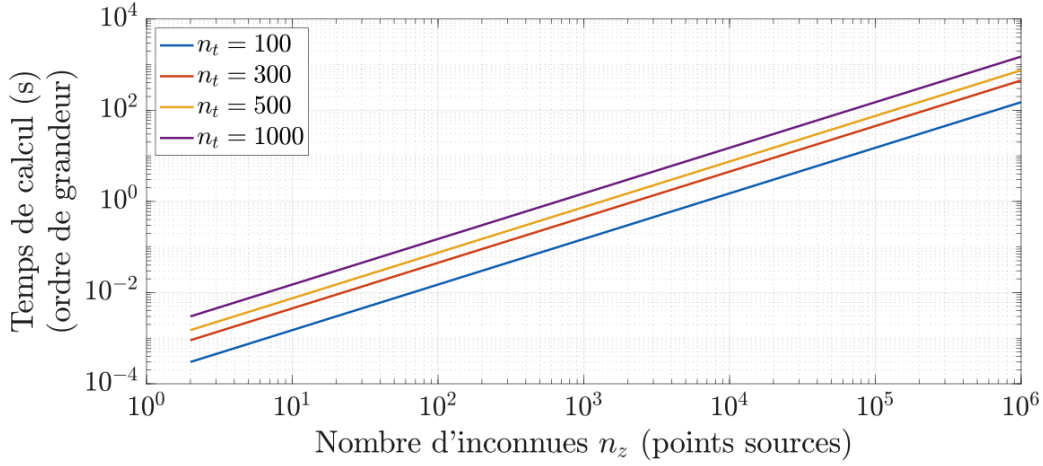


FIGURE 3.21 – Ordre de grandeur du temps de calcul de la S.V.D. pour les cas 1D.

Pour un nombre d'inconnues n_z inférieur à 1000, le temps de calcul de la S.V.D. est inférieur à la seconde, même pour un nombre de pas de temps élevé ($n_t = 1000$.) Comme attendu, plus n_z augmente, plus le temps de calcul est élevé, mais pour le cas 1D, le calcul de la S.V.D. est rapide.

Pour le cas 3D, les mesures de températures sont surfaciques et les sources recherchées volumiques, ce qui se traduit par $m = n_t \cdot n_x \cdot n_y$ et $n = n_x \cdot n_y \cdot n_z$. Le nombre d'inconnues recherchées n est donc beaucoup plus important que pour le problème 1D. Le temps de calcul de la S.V.D. est donc de l'ordre de $\mathcal{O}(mn) = \mathcal{O}(n_t n_x n_y \cdot n_x n_y n_z) = \mathcal{O}(n_t (n_x n_y)^2 n_z)$. En comparant ce résultat du problème 3D avec le problème 1D, on s'aperçoit qu'il y a un rapport $(n_x n_y)^2$ entre les deux. La figure 3.21 ayant étudié l'influence du nombre de pas de temps sur le temps de calcul de la S.V.D. et pour éviter de surcharger l'étude, on prend $n_t = 300$ pour ce cas 3D. La figure 3.22 trace le temps de calcul de la S.V.D. du problème 3D en fonction du nombre d'inconnues recherchées.

Pour un cas simple, c'est à dire une répartition $(n_x, n_y, n_z) = (10, 10, 100)$, le temps de calcul est de l'ordre de la seconde, soit 100 fois plus long que le problème 1D équivalent. Plus le nombre d'inconnues augmente, et en particulier plus on cherche des inconnues sur une surface importante (ou que l'on cherche une plus grande précision), plus le temps de calcul devient important. Par exemple, pour un échantillonnage $(n_x, n_y, n_z) = (1000, 100, 10)$, le temps de calcul de la S.V.D. est de l'ordre de 10^5 secondes, soit un peu moins de... **28**

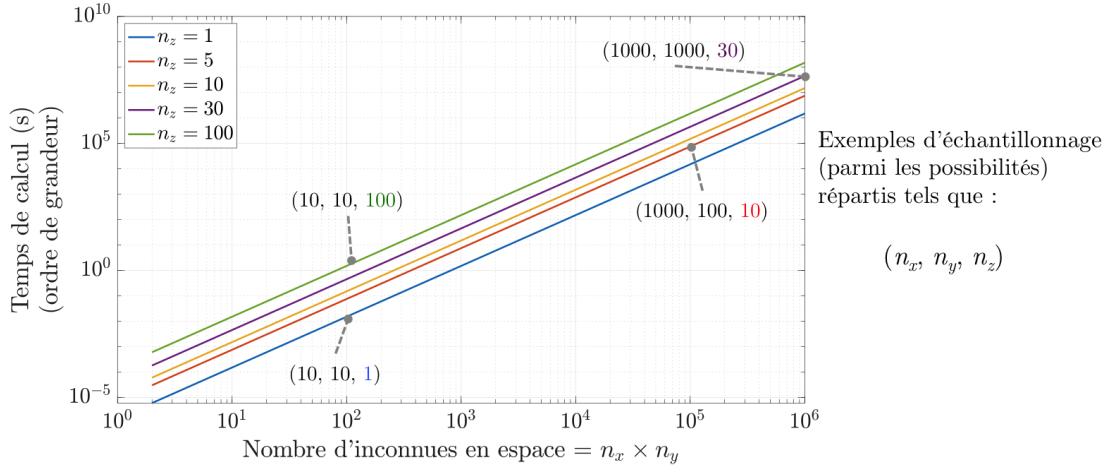


FIGURE 3.22 – Ordre de grandeur du temps de calcul de la S.V.D. pour les cas 3D.

heures (pour un ordinateur de type Mac16). Ainsi, pour n élevé (et donc particulièrement pour le problème 3D) l'inversion va être longue à calculer.

3.3 Cas particulier : la profilométrie thermique

L'algorithme présenté dans les deux sections précédentes est une méthode générale permettant de caractériser des sources thermiques volumiques, présentes au sein d'un matériau homogène. Cette méthode globale peut cependant s'adapter afin de s'en servir dans le cadre de la profilométrie. Un profilomètre est un instrument qui sert à mesurer le relief d'une surface, dans le but d'en évaluer la rugosité ou la micro-géométrie. Les deux principaux dispositifs aujourd'hui utilisés sont les profilomètres à contact, basés sur le contact physique entre une pointe en diamant et la surface à mesurer [145], et les profilomètres optiques sans contact [146] qui permettent de mesurer l'altitude entre le capteur et la surface étudiée. Dans cette partie, un profilomètre thermique sans contact est proposé.

3.3.1 Principe de la méthode

L'objectif recherché est de faire de la microscopie thermique multispectrale de milieux biologiques ainsi que de la profilométrie sans contact de pièces industrielles. Concrètement, cela correspond à mesurer le relief d'une surface, qui peut être l'interface entre deux milieux d'un matériau, ou encore l'interface entre deux milieux biologiques.

Le principe de la méthode, schématisé par la figure 3.23, consiste à créer une source thermique ponctuelle en un point de cette interface. La température résultante $\theta(z = 0, x, t)$ à la surface est mesurée à l'aide d'une caméra IR. L'algorithme d'inversion présenté au début de ce chapitre peut s'adapter dans le but de retrouver la position de la source, et par conséquent l'épaisseur $e(x)$ entre ce point source et la surface du matériau. Pour connaître le profil complet de l'interface, il suffit de recommencer le processus en chaque point de celle-ci.

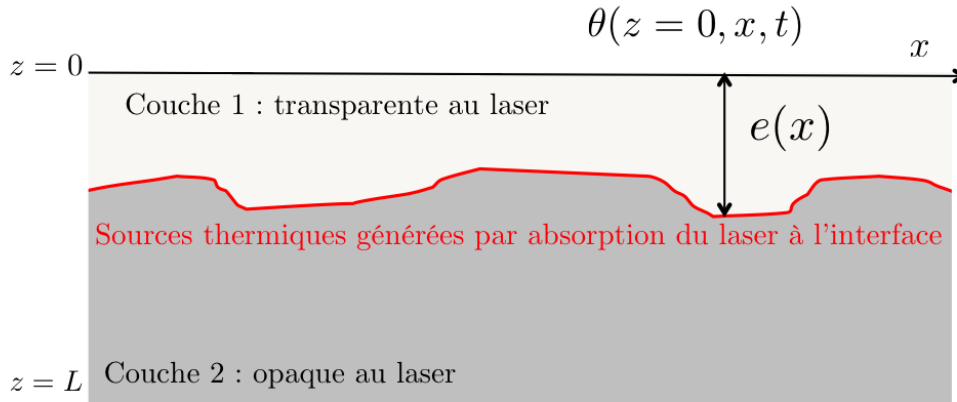


FIGURE 3.23 – Principe du profilomètre thermique.

Les sources thermiques vont être créées à l'aide d'un faisceau laser multispectral, qui constitue le "palpeur thermique". La seule véritable contrainte est d'avoir un laser dont la longueur d'onde est semi-transparente à la couche du matériau de surface de l'échantillon (couche 1 sur la figure 3.23). En revanche la couche enfouie pour laquelle on cherche à déduire le profil doit être absorbante à une des longueurs d'onde du laser, ce qui permet de créer la source thermique à l'interface entre les deux couches.

Sur la figure 3.23, la surface du matériau étudié est supposée parfaitement plane, mais si ce n'est pas le cas (présence de rugosité...), la méthode reste valable à condition de connaître le profil de cette surface de mesure (quitte à le mesurer le cas échéant).

Dans le domaine industriel comme dans le domaine bio-médical, ce système peut évaluer l'épaisseur de plusieurs couches superposées, comme illustré figure 3.24. La seule contrainte est que pour étudier l'interface i , il faut trouver une longueur d'onde de telle sorte que toutes les couches situées entre la surface et l'interface i soient semi-transparentes à cette longueur d'onde, et qu'elle soit absorbée à l'interface i . Dans ce cas, on peut obtenir

le profil 3D de matériaux hétérogènes.

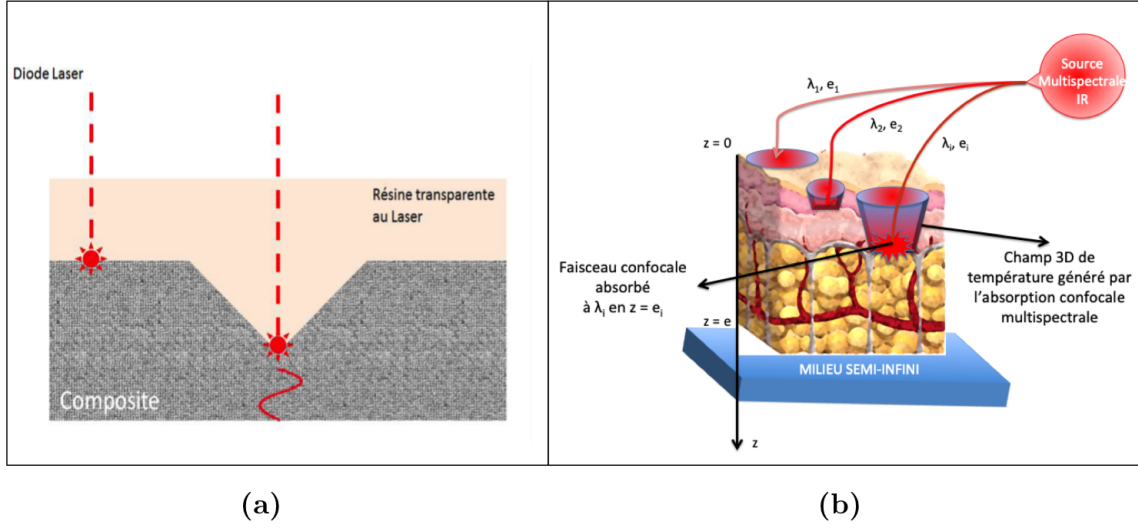


FIGURE 3.24 – Principe de la profilométrie sans contact en milieu industriel (a), et du microscopique thermique multispectral en milieu bio-médical (b).

3.3.2 Méthode inverse

La méthode de reconstruction de source présentée au début de ce chapitre ne suppose aucune information *a priori* sur les sources : elle permet en effet de retrouver plusieurs sources en profondeur. Cependant, dans le cas de la profilométrie thermique, on sait qu'il n'y a qu'une seule source en profondeur, et on cherche uniquement sa position selon l'axe z . Tel qu'il est défini, l'algorithme d'inversion permet aussi d'avoir cette information, cependant, on peut le simplifier pour l'optimiser connaissant cette hypothèse.

Chaque impact laser, représenté sur la figure 3.24, crée une source thermique ponctuelle impulsionnelle à l'interface entre la couche transparente au laser et celle absorbante. Pour commencer, considérons qu'il n'y a qu'un seul impact effectué sur l'échantillon, au point (x', y', z') . La température en tout point du matériau est alors donnée par l'équation (3.3). Puisqu'il n'y a qu'un point-source à déterminer, la température surfacique au droit de l'impact est :

$$\theta_{x'y'0}(t) = \theta(x = x', y = y', z = 0, t) = \frac{Q}{8\rho C_p} \frac{\exp\left(-\frac{z'^2}{4a_z t}\right)}{\sqrt{a_x a_y a_z (\pi t)^3}} \quad (3.31)$$

On peut remarquer que l'équation (3.31) est très proche de la température 1D donnée par l'équation (3.7) à la différence près que la diffusion en x et y est ici prise en compte. Cela vient du fait que le modèle choisi est 3D. Au lieu de prendre uniquement la température au droit de l'impact, on peut aussi moyenner (en espace) la température à la surface du matériau : la formule (3.31) serait alors légèrement modifiée mais la méthode d'inversion reste la même.

La température $\theta_{x'y'0}(t)$ est mesurée à l'aide d'une caméra infrarouge. L'objectif est de déterminer le paramètre z' , qui correspond à l'épaisseur recherchée. On peut donc isoler z' en réécrivant l'équation (3.31) :

$$-\log \left(\sqrt{a_x a_y a_z (\pi t)^3} \theta_{x'y'0}(t) \right) = \frac{z'^2}{4a_z t} - \log \left(\frac{Q}{8\rho C_p} \right). \quad (3.32)$$

En posant $Y(t) = -\log \left(\rho C_p \sqrt{a_x a_y a_z (\pi t)^3} \theta_{x'y'0}(t) \right)$ et $X(t) = 1/t$, l'équation (3.32) devient une droite d'expression (3.33). z' peut alors être déterminé en calculant son coefficient directeur :

$$Y(t) = \frac{z'^2}{4a_z} X(t) - \log \left(\frac{Q}{8\rho C_p} \right). \quad (3.33)$$

Inversement, si on connaît l'épaisseur, en changeant légèrement l'équation (3.32), on peut remonter au coefficient de diffusion a_z . On peut d'ailleurs remarquer que la méthode proposée ici permet aussi de mesurer l'énergie déposée par le laser Q à l'aide de la valeur de l'ordonnée à l'origine dans l'équation (3.33).

3.3.3 Génération des sources thermiques

Le laser est focalisé par le biais d'un objectif de microscope. En réalité, l'absorption optique dans la couche "semi-transparente" n'est jamais parfaitement nulle. Par conséquent, une petite partie de l'énergie initiale du laser est absorbée par le matériau, créant alors un petit échauffement lors de son passage. En effet, l'énergie déposée en tout point z du matériau suit une loi de type Beer-Lambert définie par :

$$Q(z) = \beta I_0 (1 - R) e^{-\beta z}. \quad (3.34)$$

où I_0 est l'énergie optique incidente du laser par unité de longueur, β le coefficient d'absorption optique de la couche étudiée et R le coefficient de réflexion en énergie.

Dans la suite du problème, on va considérer négligeable la réflexion du faisceau, on

prend donc $R = 0$. Le coefficient d'absorption d'un matériau semi-transparent est quasiment nul tandis que celui d'un matériau opaque est très important. Comme le traduit l'équation (3.34), l'intensité de la source thermique due au passage du laser décroît exponentiellement en fonction de la profondeur. En revanche, à l'interface entre un milieu semi-transparent et un milieu opaque, le facteur d'absorption de ce dernier est tellement important que la totalité de l'énergie du laser est transformée en énergie thermique, comme représenté sur la figure 3.25.

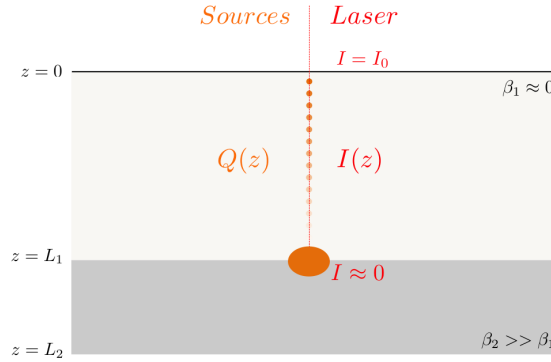


FIGURE 3.25 – Schéma de la génération de sources thermiques dans un matériau composé d'une couche supérieure semi-transparente au laser et d'une couche inférieure opaque au laser.

Pour étudier l'influence de ces sources thermiques de faible intensité présentes dans le milieu semi-transparent, étudions le cas théorique d'un matériau composé de deux couches homogènes d'épaisseur 1 mm chacune, la première semi-transparente au laser et la seconde opaque (*cf.* figure 3.25). On prend comme paramètre $L_1 = 1$ mm, $L_2 = 2$ mm et $I_0 = 1$. Le matériau est supposé isotrope de diffusivité $a = 10^{-7}$. Le coefficient d'absorption β_1 est choisi de manière à ce qu'on ait une perte d'intensité de 2% en $z = L_1$. β_2 est considéré infini. La figure 3.26 permet d'observer et de comparer les résultats obtenus entre le cas théorique (pas de dépôt d'énergie dans la couche supérieure) et le cas avec dépôt partiel dans toute la couche semi-transparente selon la loi de type Beer-Lambert. Par souci de clarté, puisque $Y(t)$ est inversement proportionnel au temps, on propose d'étudier l'évolution de $1/Y(t)$ pour pouvoir bien observer les différences entre les deux résultats.

Aux temps courts, il y a une différence non négligeable entre le modèle théorique et celui avec absorption/pertes. Cependant, cette différence s'atténue rapidement et devient négligeable pour les temps longs. Ce résultat s'explique par le fait qu'aux temps courts, la température due aux sources thermiques peu profondes est dominante par rapport à

la température de la source la plus profonde (et la plus intense). En effet, bien que peu intenses, ces sources sont suffisamment proches de la surface pour amener une élévation significative de la température. En revanche, aux temps longs, les sources proches de la surface ont une action négligeable, et seule la température due à la source la plus intense est significative.

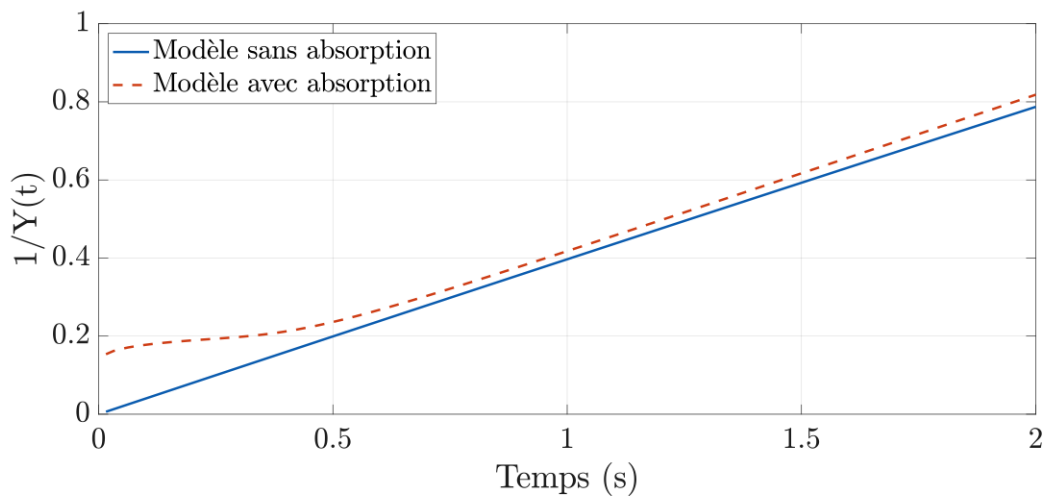


FIGURE 3.26 – Étude de l'évolution de $1/Y(t)$ en fonction du temps pour le cas sans absorption dans la couche semi-transparente (bleu) et le cas avec absorption (en pointillé rouge).

Ainsi, pour déterminer au mieux l'épaisseur de la couche semi-transparente, il faut judicieusement choisir l'intervalle de temps et éviter de prendre les mesures aux temps courts.

3.3.4 Balayage spatial

Un système de déplacement laser de type miroir galvanométrique, donné par la figure 3.27 permet de balayer l'échantillon étudié en x et y pour pouvoir obtenir le profil complet de la surface mesurée. Ce système permet notamment de réaliser une infinité de formes de déplacements spatiaux [17], comme illustré figure 3.28. On peut balayer l'échantillon en déplaçant le laser de façon continue avec une vitesse constante selon une direction donnée (a), en déplaçant chaque impact de laser d'une distance fixe de manière à former une grille (b) ou encore en déplaçant le laser de manière aléatoire (c). Inversement, on peut imaginer que l'échantillon soit mobile et que l'ensemble {laser, microscope, caméra} soit fixe.

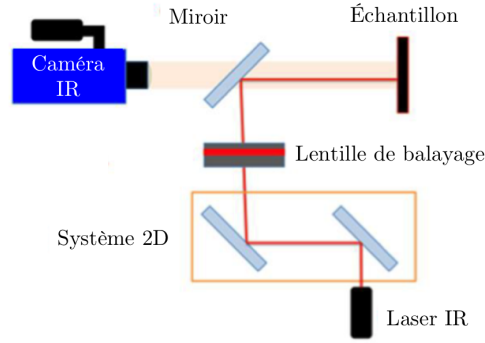


FIGURE 3.27 – Schéma du système de déplacement laser permettant de balayer toute la surface de l'échantillon.

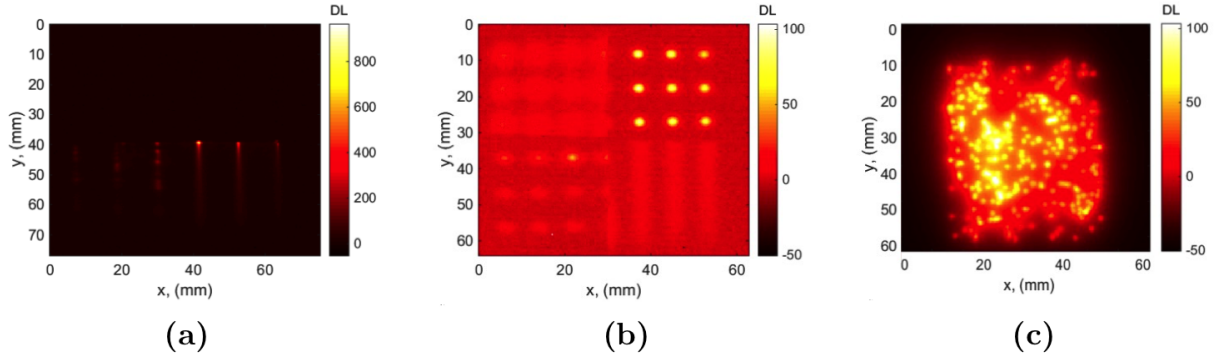


FIGURE 3.28 – Balayage dans le cas d'un "Constant Velocity Flying Spot" (CVFS) (a), "Grid Pulsed Flying Spot" (GPFS) (b) et "Random Pulsed Flying Spot" (RPFS) (c) [17].

Cas du balayage à vitesse constante

Afin de pouvoir étudier l'influence de la vitesse de balayage du laser sur le champ de température, il est nécessaire de s'intéresser au temps d'acquisition de la mesure. Pour le cas d'un Dirac (impact laser ponctuel), la température maximale enregistrée à la surface du matériau est obtenue au temps t_{max} , calculé via la dérivée de la fonction (3.31) :

$$t_{max} = \frac{(z')^2}{2a_z}. \quad (3.35)$$

Notons τ le temps entre deux impacts lasers successifs. Deux cas de figures se distinguent alors en fonction de la valeur de τ .

- Si $\tau \geq t_{max}$, chaque impact laser peut être traité indépendamment à condition de

travailler sur l'intervalle de temps $[t_0 ; t_{max}]$, où t_0 correspond au temps de l'impact du laser, et t_{max} définie par l'équation (3.35).

- Si $\tau < t_{max}$, alors la température résultante à la surface du matériau située au droit de chaque impact laser est influencée par les impacts voisins, particulièrement aux temps longs (en raison de la diffusion selon les axes x et y). Pour pouvoir traiter chaque impact de manière indépendante, il faut alors restreindre le temps d'acquisition sur l'intervalle de temps $[t_m ; t_M]$, avec t_M choisi au plus proche du point d'inflexion de la courbe de température (recherche du maximum de la dérivée temporelle de la fonction donnée par (3.31)). Dans les faits, t_M correspond quasiment au temps de "demi-montée" $t_{1/2}$ défini par Parker [16].

Pour éviter d'être trop perturbé par la température résultante de l'impact précédent, il est conseillé de ne pas commencer les mesures à t_0 mais un peu plus tard (sauf pour le premier impact). Les mesures peuvent commencer au temps t_m tel que $\theta(t_m) = \varepsilon \theta(t_M)$ avec ε un pourcentage choisi par l'opérateur.

Dans la pratique, pour ne pas être influencé par la température des sources thermiques voisines, il est conseillé de travailler soit à vitesse de balayage de laser lente, soit de balayer la surface en espaçant chaque impact d'une distance suffisante, et décaler ensuite la grille jusqu'à balayage complet de l'interface.

3.3.5 Applications et résultats

Le profilomètre thermique proposé ici peut être utilisé dans de nombreux milieux. Dans le domaine industriel, il peut s'appliquer comme une technique d'E.C.N.D. afin d'effectuer une tomographie de milieux multicouches, tels que les composites.

Les matériaux composites sont constitués d'une matrice et de fibres, comme illustré par la figure 3.29 (a) pour le cas d'un multicouche. Un exemple de matériau composite largement utilisé, car il est très résistant et léger, est le C.F.R.P. (*Carbon Fiber Reinforced Polymer*) (b). On le retrouve dans de nombreux domaines (c), (d) tels que l'aéronautique et le spatial, l'automobile, mais aussi dans les équipements sportifs (kayaks, vélos...) et médicaux (fauteuils roulants, prothèses...).

Pour la plupart des structures en C.F.R.P., un traitement de surface est effectué pour obtenir une surface lisse, ce qui donne l'éclat brillant comme c'est le cas sur le violon et la pale représentés en figure 3.29. Le plus souvent, il s'agit d'une résine appliquée sur la

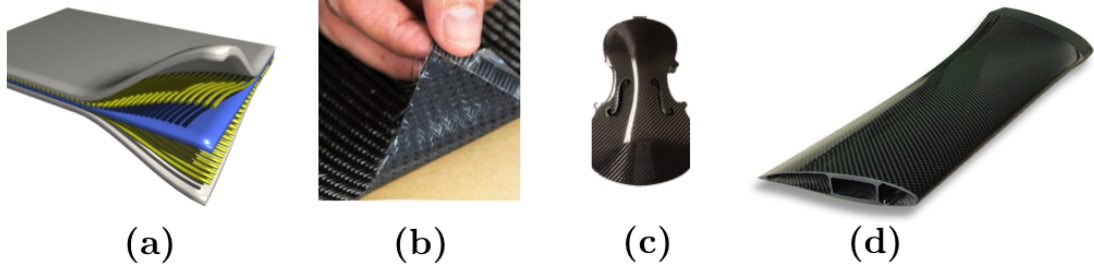


FIGURE 3.29 – Multicouche : exemple d'un matériau composite (a) [147]. Composite carbone epoxy (b). Violon en carbone epoxy (c) [148]. Pale réalisée en préimprégné et autoclave (d) [149].

surface. L'épaisseur de la couche de résine varie donc légèrement en fonction de la rugosité de la surface du composite.

Exemple sur un cas synthétique

Pour illustrer la méthode de profilométrie thermique, un cas synthétique a été modélisé : un matériau constitué de deux couches homogènes est choisi : la couche inférieure est composée d'un matériau rugueux (type carbone epoxy), la couche supérieure composée d'une résine, appliqué sur le matériau pour obtenir une surface lisse. Pour cet exemple, on modélise la surface de l'interface par une fonction sinus en 2D, ce qui traduit la rugosité du matériau par la formation de "bosses" et de "creux". L'amplitude de variation des sinus est choisi à 1 mm. L'épaisseur de la couche de résine est de 1 mm en moyenne : elle varie donc entre 0.5 et 1.5 mm en raison de la rugosité de la couche inférieure. La résine est considérée ici comme un matériau isotrope, avec un coefficient de diffusion $a = 1.10^{-7} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$.

Un laser va balayer chaque pixel de ce matériau (de bas en haut et de la gauche vers la droite) avec une vitesse constante choisie de telle manière à ce que $0 < \tau < t_{max}$. La surface étudiée est un carré de 5 cm de côté. Pour la simulation, la surface est discrétisée en une grille de 32 par 32, ce qui donne une résolution d'environ 1,5 mm en surface. La couche inférieure est considérée opaque, la couche supérieure semi-transparente à la longueur d'onde du laser utilisé. L'énergie déposée à l'interface entre les deux couches est donc considérée constante, de valeur fixée ici à $7.5 \times 10^{-8} \text{ J.m}^2$. Une caméra thermique située au-dessus de l'échantillon va mesurer la température résultante à la surface du matériau.

En chaque pixel de la surface, la méthode proposée précédemment permet de retrouver

l'épaisseur de la couche de résine en ce point. La figure 3.30 illustre les résultats obtenus pour deux points distincts.

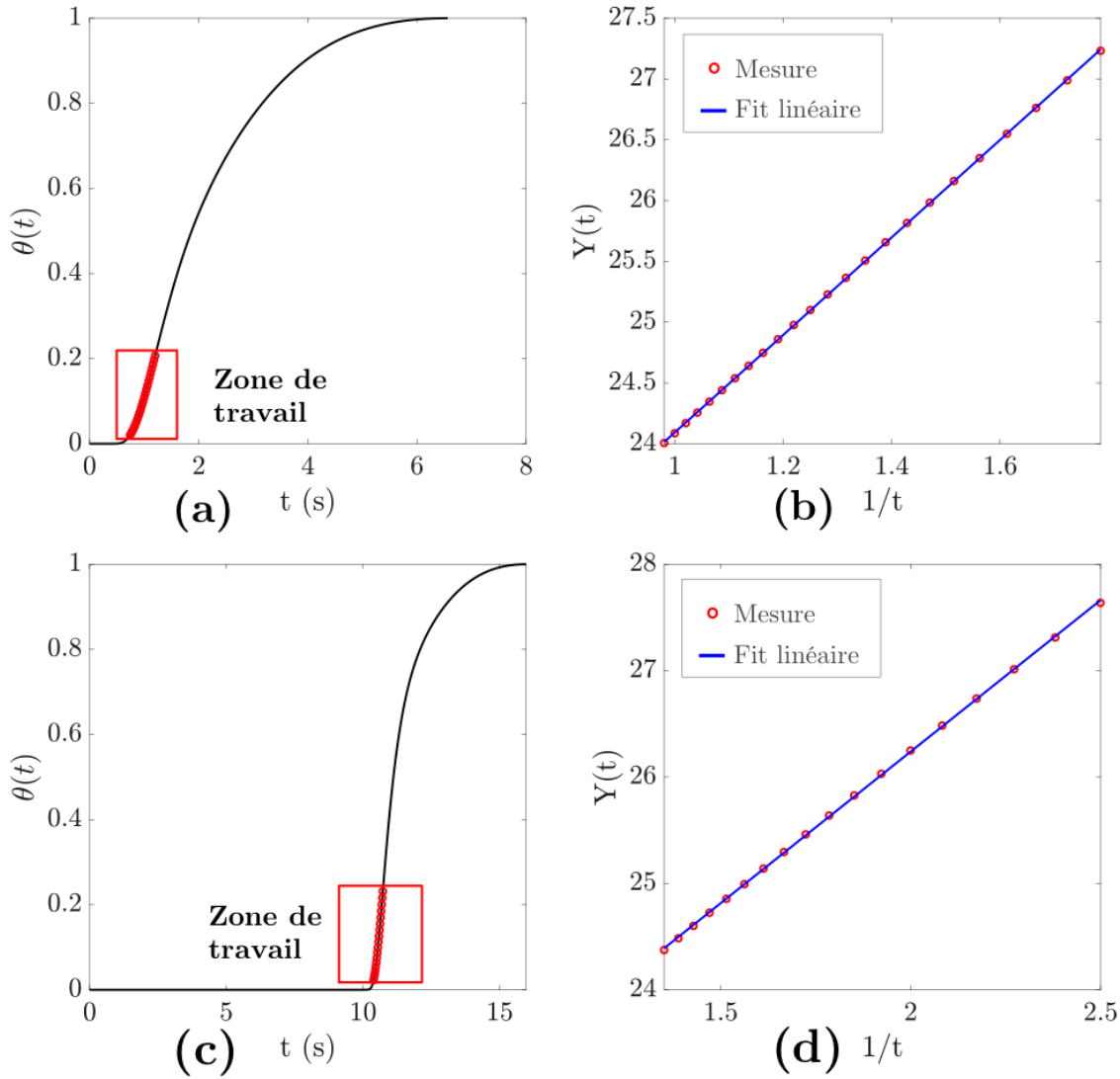


FIGURE 3.30 – Champ de température sur le 10ème pixel en fonction du temps ainsi que la zone de mesure utilisée pour la méthode inverse (a). Évolution de $Y(t)$ correspondant (b). Champ de température du 500ème pixel en fonction du temps ainsi que la zone de mesure utilisée pour la méthode inverse (c). Évolution de $Y(t)$ correspondant (d).

Le graphe (a) correspond à l'évolution de la température en fonction du temps pour le 10ème pixel balayé par le laser. Comme expliqué précédemment, pour ne pas être perturbé par les pixels voisins, il faut travailler avec une partie restreinte du champ mesuré, comme illustré par le carré rouge. L'évolution de $Y(t)$, issu de la température mesurée sur la zone de travail et représentée en (b), suit bien une loi linéaire en fonction de $1/t$. Le calcul du

coefficient directeur de la droite obtenue permet de connaître l'épaisseur recherchée. Les graphes (c) et (d) correspondent aux mêmes résultats mais pour le 500ème point balayé par le laser. La température augmente beaucoup plus tard puisque le point est excité plus tardivement par le laser.

La figure 3.31 donne les résultats obtenus sur l'ensemble du matériau étudié. En (a) est représenté le maximum d'amplitude de température pour chaque pixel et en (b) son temps correspondant. On peut voir que ces données permettent d'avoir un premier aperçu de la topographie de l'interface étudiée. En effet, les amplitudes de températures les plus élevées correspondent à des épaisseurs petites à l'inverse des points "froids" qui correspondent à de plus grandes épaisseurs. On peut remarquer que pour le temps du maximum, la tendance est inversée : la température des points les plus profonds arrive plus tardivement à la surface en raison de la plus grande distance à parcourir. Le gradient observé en (b) est dû au balayage laser : les points les plus à gauche sont excités aux temps courts par le laser tandis que ceux à droite sont excités beaucoup plus tard.

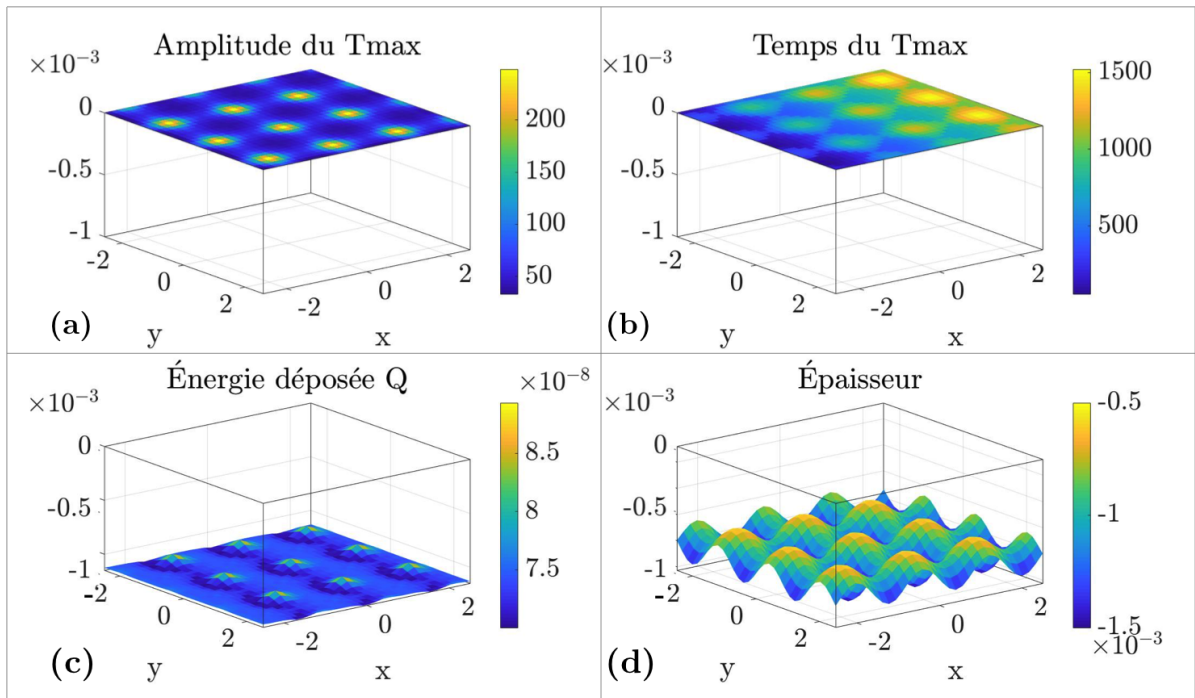


FIGURE 3.31 – Valeur du maximum de température en chaque point de la surface (a). Temps correspondant au maximum d'amplitude (b). Valeurs de l'énergie absorbée Q en chacun des points de l'interface (issues de l'ordonnée à l'origine) (c). Épaisseur du matériau (issue du coefficient directeur) (d).

Les graphes (c) et (d) donnent respectivement les valeurs de l'énergie déposée Q et

l'épaisseur de la couche supérieure, ou autrement dit le profil de l'interface. À première vue, le profil de l'interface semble être bien reconstruit : on retrouve en effet la rugosité en forme de sinus attendue, avec une épaisseur de résine variant de 0.5 à 1.5 mm. Concernant l'énergie déposée, elle devrait être constante en tout point de l'interface égale à $7.5 \times 10^{-7} \text{ J.m}^2$. Or, on remarque que ce n'est pas le cas dans la reconstruction, et plus particulièrement pour les points les plus profonds.

Afin de visualiser la pertinence des résultats, la figure 3.32 trace l'erreur absolue, en pourcentage, obtenue en chacun des points, pour l'énergie **(a)** et pour l'épaisseur **(b)**.

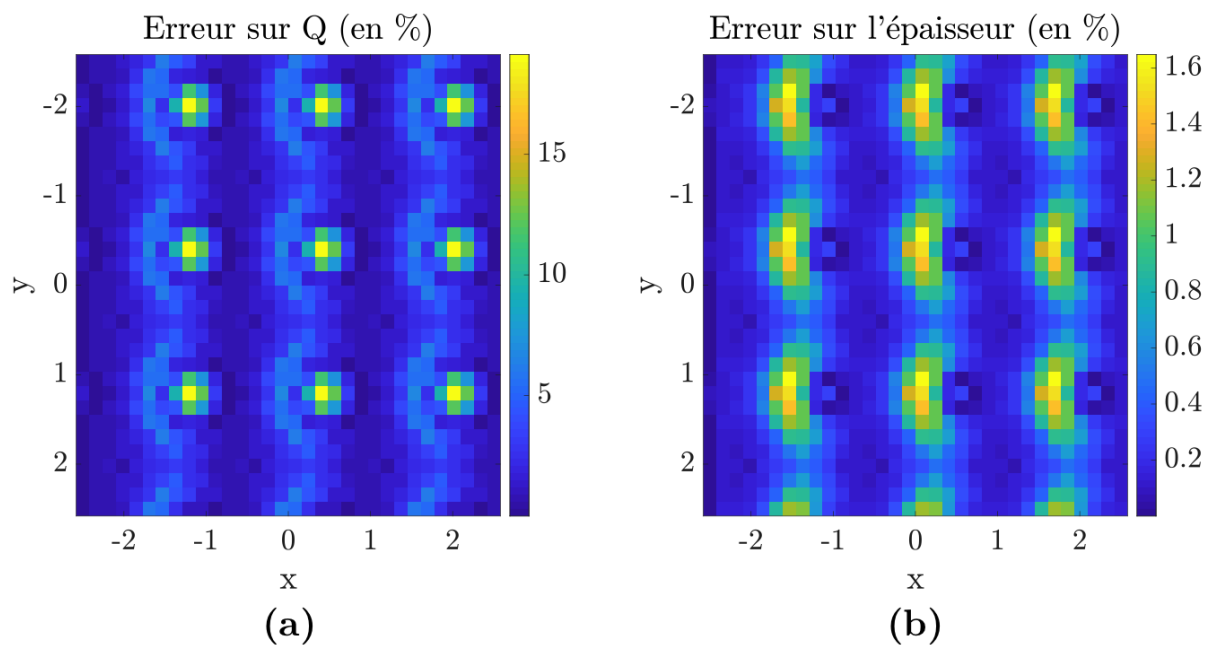


FIGURE 3.32 – Erreur relative sur l'énergie Q **(a)**. Erreur relative sur l'épaisseur **(b)**.

On peut remarquer que les erreurs les plus grandes sont commises pour les points les plus profonds. Ce résultat peut s'expliquer par le caractère diffusif de la température. En effet, dans cet exemple, les sources les plus profondes sont entourées par des sources plus proches de la surface. La température de ces sources arrivent plus rapidement à la surface que celle des sources les plus profondes avec une intensité beaucoup plus grande, et diffusent dans toutes les directions. L'erreur observée pour les points les plus profonds résulte donc de l'influence de ces sources voisines. Cependant, les erreurs commises sont suffisamment faibles (1.6% au maximum sur l'épaisseur contre 15% sur l'énergie) pour permettre de valider la méthode et faire confiance aux résultats.

Résultats sur un cas expérimental

Pour finir, cette méthode de profilométrie thermique sans contact a été testée sur un cas expérimental. Une pièce industrielle en composite (type carbone epoxy), recouverte d'une couche de résine, est représentée par la figure 3.33. La zone délimitée par les rubans adhésifs contient un défaut : la surface de la couche de carbone n'est pas lisse mais contient un renforcement. La zone va donc être balayée par un laser afin d'en effectuer le profil.

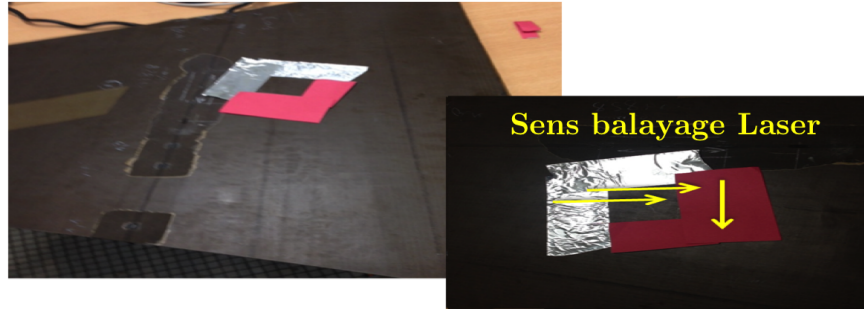


FIGURE 3.33 – Pièce industrielle contenant un défaut.

La zone étudiée forme un rectangle de dimensions $3.8 \times 1.5 \text{ cm}^2$. Le coefficient de diffusion de la résine est de $5.10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$. Le laser balaye la pièce de gauche à droite et du haut vers le bas à l'aide du système de déplacement représenté par la figure 3.28. La durée du balayage laser est de 5.3 secondes. La figure 3.34 donne les maxima d'amplitudes mesurées ainsi que leurs temps (en secondes) correspondants.

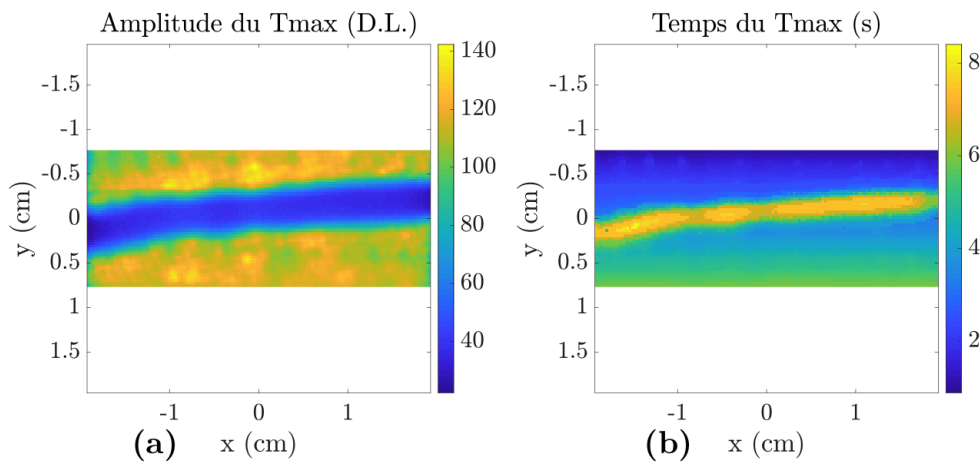


FIGURE 3.34 – Valeur du maximum de température (en D.L.) en chaque point de la surface (a). Temps correspondant au maximum d'amplitude (normalisé) (b).

De la même manière que pour le cas synthétique, l'étude de ces données (amplitudes maximales et leurs temps correspondants) permet d'avoir un premier aperçu du profil étudié. La présence du renforcement dans la couche de carbone est en effet bien mise en évidence et se traduit par des amplitudes plus faibles en **(a)**, obtenue à des temps plus longs en **(b)**.

Chaque pixel de la caméra étant de taille $290 \times 290 \mu\text{m}^2$, l'intervalle de temps d'excitation τ entre deux points voisins est de 7.7×10^{-4} secondes. Or, d'après la figure 3.34 **(b)**, les temps correspondants au maximum d'amplitudes t_{max} varient entre 1 et 8 secondes. On se trouve donc dans le cas où $\tau < t_{max}$: pour chaque pixel, il faut définir les temps t_m et t_M pour effectuer les mesures sur la zone de travail $[t_m, t_M]$ (c.f. exemple du cas synthétique). À titre d'exemple, la figure 3.35 donne en **(a)** le champ de température en fonction du temps au pixel (20, 40) avec la zone de travail utilisée pour les calculs, et en **(b)** l'évolution de $Y(t)$ sur cette zone.

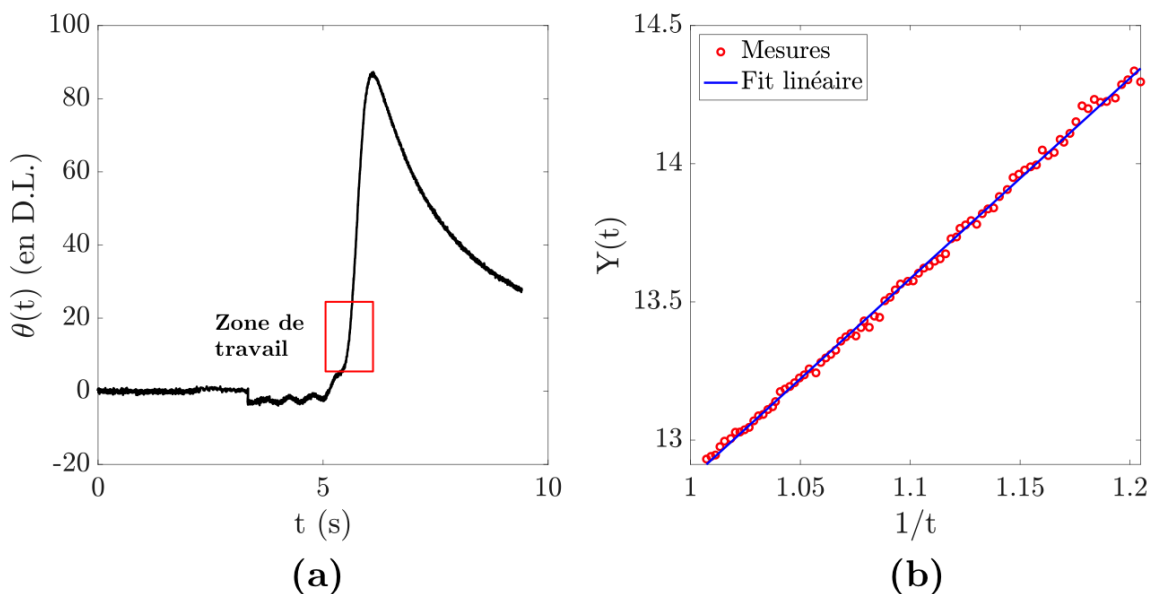


FIGURE 3.35 – Valeur de l'énergie déposée par le laser.

On remarque que l'évolution de Y en fonction de $1/t$ est bien linéaire. Les fluctuations visibles en **(b)** sont dues à la présence de bruit de mesure (qui était absent pour le cas synthétique). Cependant comme la zone de travail est toujours positionnée sur l'intervalle où la température subit la plus grande élévation (pente la plus importante), le bruit de mesure est minimal à cet endroit et l'erreur engendrée est donc négligeable.

Ainsi, en chaque point (pixel) de la surface, l'épaisseur de la couche de résine et la quantité d'énergie déposée par le laser sont calculées à l'aide de la méthode proposée dans cette partie. La figure 3.36 donne l'épaisseur (profil) retrouvée en chacun des points.

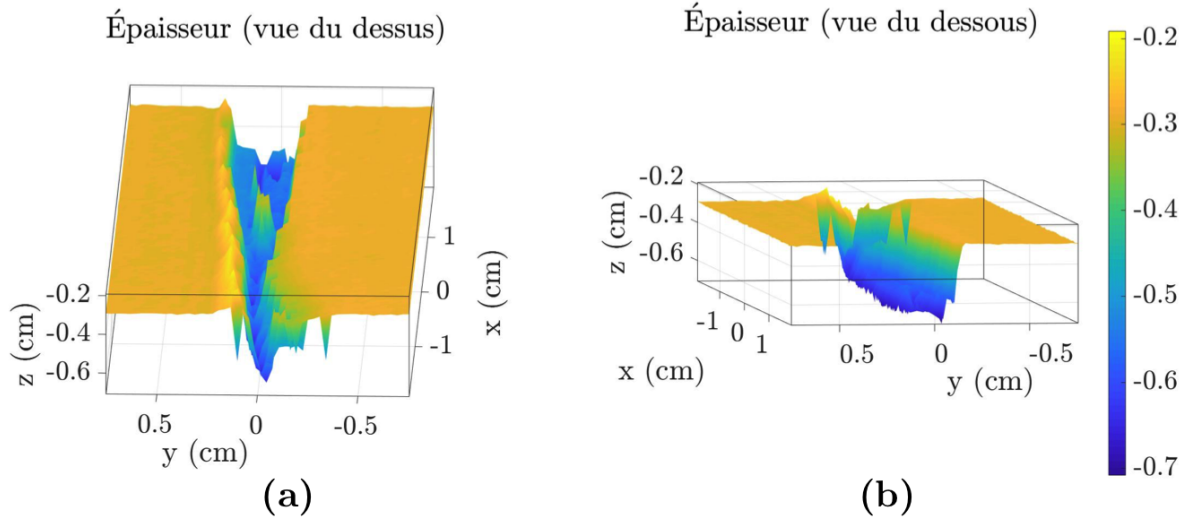


FIGURE 3.36 – Épaisseur de résine (ou profil de l'interface) : vue du dessus (a) et vue du dessous (b).

Le profil de la pièce est bien retrouvé : l'épaisseur moyenne de la couche supérieure est de 3 mm sauf à l'endroit du renforcement où l'épaisseur est quasiment doublée.

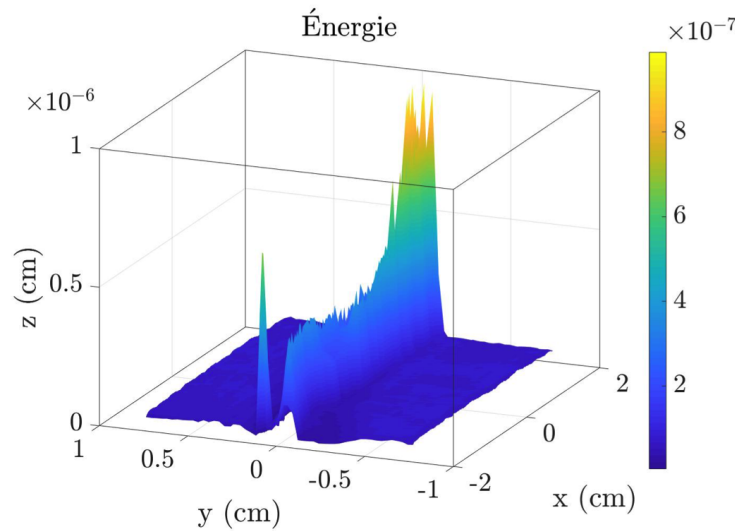


FIGURE 3.37 – Valeur de l'énergie déposée par le laser.

La figure 3.37 trace l'énergie déposée par le laser en chaque point de l'interface. En théorie, puisque la couche supérieure est semi-transparente au laser, elle devrait être constante en tout point. On remarque que c'est le cas pour les épaisseurs constantes. Cependant, elle est plus élevée au niveau du défaut (qui correspond à une profondeur plus élevée). On retrouve la même erreur que pour le cas synthétique : le calcul de l'énergie des points les plus profonds est perturbé par la température résultante des points voisins, moins profonds.

En conclusion, la méthode de profilométrie thermique sans contact présentée dans cette partie est rapide et robuste au bruit. Elle permet d'estimer l'épaisseur de chaque couche d'un matériau à condition de disposer d'une source de type laser multispectrale. Il est aussi possible d'estimer la quantité d'énergie déposée par le laser à l'interface mais l'erreur effectuée sur celle-ci peut être importante si les variations de profondeurs sont importantes. En revanche, l'erreur effectuée sur l'épaisseur, et donc le profil du milieu étudié, est très faible.

Conclusion

Une méthode de caractérisation de sources thermiques volumiques a été présentée : à partir du champ de température mesurée à la surface du matériau, on peut retrouver la géométrie et l'intensité d'une ou plusieurs sources volumiques enfouies dans le matériau. L'avantage du modèle Dirac utilisé réside dans sa séparabilité en espace : par conséquent l'étude du problème 1D permet d'étudier le problème de manière simplifiée sans pour autant en réduire les hypothèses.

Une étude sur les modes propres, issus de la décomposition en valeurs singulières de la matrice contenant le modèle, a permis de dévoiler un critère dépendant du nombre de Fourier. L'abaque résultante de ce critère permet de déterminer les limites de reconstruction, et par conséquent les domaines d'utilisations de la méthode. Il a été montré que la plus grande limitation à laquelle la méthode est confrontée dépend du nombre de Fourier selon la profondeur.

Enfin, il a été montré que cette méthode de reconstruction de sources peut s'adapter pour former un profilomètre thermique sans contact, que ce soit pour les pièces industrielles ou pour les milieux biologiques à petite échelle. À l'aide d'une source multi-spectrale (laser ou autre), il est possible de retrouver l'épaisseur ou même le profil de plusieurs couches superposées d'un matériau.

Problème réel bruité : régularisation et probabilités

Table des matières

Introduction	90
4.1 Traitement du bruit	91
4.1.1 Inversion en présence de bruit	91
4.1.2 Étude paramétrique de l'influence du bruit	93
4.1.3 Traitement du bruit par S.V.D. du champ de température	98
4.2 Algorithme d'inversion avec régularisation	102
4.2.1 Fonctions de régularisation	102
4.2.2 Choix du paramètre de régularisation	107
4.2.3 Application de la régularisation sur un exemple 1D et 3D	110
4.3 Reconstruction de sources : méthode probabiliste	116
4.3.1 Approche bayésienne	116
4.3.2 Étude et généralisation de la méthode 1D	123
4.4 Généralisation et perspectives	128
4.4.1 Généralisation 3D de la méthode probabiliste	129
4.4.2 Points forts et limitations de chaque méthode	131
4.4.3 Perspectives pour la reconstruction de sources volumiques	133
Conclusion	136

Introduction

Dans le chapitre précédent, la méthode de reconstruction de sources thermiques par excitation Dirac a été présentée pour le cas théorique. Cette étude a permis de définir les limites théoriques du modèle. En particulier un critère dépendant du nombre de Fourier a été mis en évidence.

En pratique, les données de température mesurées par la caméra infrarouge sont toujours bruitées. Dans ce chapitre, une étude paramétrique en fonction du bruit sur l'algorithme d'inversion est effectuée. Elle montre que la méthode présentée telle quelle dans le chapitre 3 est inexploitable tellement elle est sensible à la moindre perturbation. Plusieurs solutions pour remédier à ce problème sont alors présentées. La première méthode consiste à "débruiter" la mesure par application d'une S.V.D. sur le champ de température. Bien qu'efficace pour diminuer le bruit, ce processus ne le fait pas disparaître complètement. Il est alors nécessaire d'ajouter des termes de régularisation à l'algorithme d'inversion pour le stabiliser. Différentes méthodes de régularisation vont alors être étudiées et comparées afin de choisir la plus adaptée au problème.

En parallèle de ces méthodes de régularisation, une méthode de reconstruction de sources thermiques par approche probabiliste a été développée. Contrairement à l'algorithme d'inversion, cette méthode a pour avantage d'être peu sensible au bruit de mesure. En dernière partie de ce chapitre, les deux méthodes sont comparées et permettent d'avoir un aperçu détaillé des avantages et inconvénients de chacune d'entre elles.

4.1 Traitement du bruit

4.1.1 Inversion en présence de bruit

L'équation (4.1) que l'on cherche à inverser est une *équation de Fredholm du premier type* [150], nommée d'après le mathématicien suédois Ivar Fredholm.

$$\theta(r^*, t^*) = \int_{\text{matériau}} Q(r'^*) \theta_{3D}(r^* - r'^*, t^*) dr'. \quad (4.1)$$

Ces équations sont présentes dans de nombreux problèmes inverses et sont réputées pour leurs caractères mal posés. La définition d'un problème **bien posé** nous vient du mathématicien français Jacques Hadamard [81], qui dès l'année 1923 affirme que le modèle mathématique d'un phénomène physique doit répondre aux trois conditions suivantes :

- La solution doit exister.
- La solution doit être unique.
- La solution doit être stable.

Si au moins une de ces conditions n'est pas respectée, le problème est alors qualifié de mal posé et la recherche de solution peut ne pas aboutir. Dans les faits, la plupart des problèmes inverses sont mal posés : ils ne vérifient pas l'une au l'autre des conditions, voire aucune d'entre elles. Plusieurs raisons, explicitées dans [71], peuvent en être la cause :

- Si une solution existe, il est tout à fait possible qu'un autre jeu de données amène au même résultat
- Si un problème possède plusieurs solutions, il faut choisir l'une d'entre elles. Il est alors nécessaire d'apporter une ou plusieurs informations complémentaire(s), qui ne sont pas toujours connues.
- Le manque de stabilité est le problème le plus récurrent, souvent parce que les données disponibles sont bruitées, donc légèrement différentes des données théoriques.

Le problème inverse de reconstruction de sources étudié ici répond bien aux deux premières exigences (existence et unicité). En revanche, la condition de stabilité n'est pas respectée. Une des méthodes pour étudier cette stabilité est d'observer les valeurs singulières de la matrice opérateur $\mathbf{I}$: plus elles sont proches de zéro, plus le problème est mal posé. Si, en plus, leur décroissance suit une loi puissance telle que $s_i \approx i^{-n}$, avec n strictement positif, le problème est qualifié de "moyennement" mal posé. En revanche si

leur décroissance suit une loi exponentielle telle que $s_i \approx e^{-i}$ (ce qui est le cas ici), alors il est "fortement" mal posé.

Ce critère en fonction des modes de la S.V.D. vient du fait que le processus d'inversion fait intervenir l'**inverse** des valeurs singulières (*cf.* équation (3.28)). Ainsi, lors de l'inversion, les modes de la S.V.D. sont pondérés par des valeurs singulières qui croissent exponentiellement entre chaque mode. Ce qui veut dire qu'une perturbation, aussi petite soit-elle, sera amplifiée et deviendra dominante dans le processus d'inversion, d'où le manque de stabilité.

Dans la pratique, les données mesurées par la caméra infrarouge (ici les champs de température) sont toujours bruitées. Cela se traduit par l'apparition d'une petite perturbation ε telle que :

$$\theta_{mes} = \theta_{th} + \varepsilon \quad (4.2)$$

où θ_{mes} et θ_{th} sont respectivement la température mesurée et théorique. La figure 4.1 trace par exemple l'évolution de la température obtenue pour le cas 1D présenté dans le chapitre §3 par la figure 3.4. La ligne bleue continue correspond à la température théorique (normalisée) tandis que les points rouges correspondent à l'évolution de la température bruitée, avec un ratio signal à bruit ($SNR = \text{Signal to Noise Ratio}$) de 50. Pour les études théorique, SNR est défini par $\theta_{mes} = \theta_{th} + \frac{\varepsilon_1}{SNR} \max(\theta_{th})$, avec ε_1 compris entre -1 et 1 .

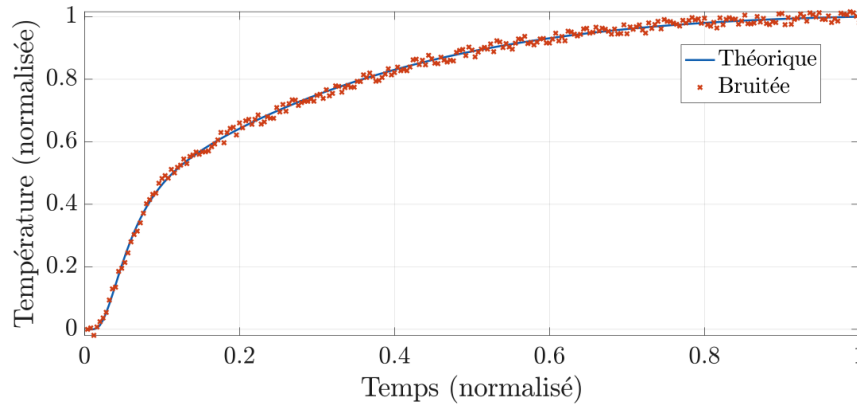


FIGURE 4.1 – Comparaison entre la température théorique et bruitée ($SNR = 50$) pour l'exemple 1D des 3 sources (*cf.* chapitre 3, paragraphe §3.2.1).

Comme le problème est très mal posé, cette petite perturbation apportée par le bruit est néfaste pour la recherche de solution du problème inverse, comme le montre la figure

4.2. En présence de bruit, la solution diverge : ni la position ni l'intensité des sources ne sont correctement reconstruites. De plus, l'amplitude des intensités retrouvées devient infinie (facteur 10^9).

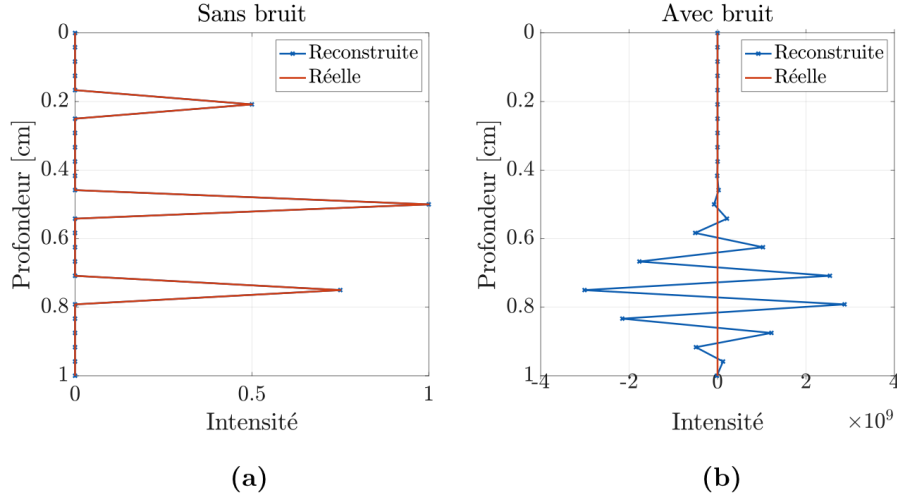


FIGURE 4.2 – Reconstruction des sources avec la température théorique (a) et avec la température bruitée (b) par la méthode exposée au chapitre 3.

4.1.2 Étude paramétrique de l'influence du bruit

Une étude paramétrique en fonction du niveau de bruit a été effectuée afin d'observer l'influence de celui-ci dans le processus d'inversion. La même répartition de source que celle présentée dans la partie précédente est prise comme cas d'étude. La température résultante théorique θ_{th} a alors été calculée analytiquement à l'aide de l'équation (??). Ensuite, différents champs de température bruités θ_{mes} sont créés numériquement à partir de la température théorique. Le bruit implémenté est de type "bruit blanc", qui est généralement celui observé dans les mesures thermiques. Les rapports "signaux à bruit" implémentés vont de 10 (très bruité) à 100 000 (extrêmement peu bruité) : il s'agit des ratios minimum et maximum qui sont rencontrés expérimentalement en thermique.

Dans la suite de cette étude, les notations suivantes sont utilisées :

- Ω : source réelle.
- Ω_{th} : source reconstruite avec la température théorique (sans bruit).
- Ω_{b_i} : source reconstruite avec la température bruitée ($SNR = i$).

Pour chaque niveau de bruit (SNR donné), l'algorithme de reconstruction de sources est exécuté n fois, n correspondant au nombre de modes de la S.V.D.. La première reconstruction est effectuée en ne prenant que le premier mode de la S.V.D., la deuxième reconstruction utilise les deux premiers modes et ainsi de suite. Pour chaque reconstruction de sources pour un niveau de bruit b_i et un nombre de modes n_r donnés, le coefficient $C\left(\Omega_{b_i}^{(n_r)}\right)$ défini par l'équation (4.3) est calculé :

$$C\left(\Omega_{b_i}^{(n_r)}\right) = \frac{\left\|\Omega_{th}^{(n_r)} - \Omega\right\|_2}{\left\|\Omega_{b_i}^{(n_r)} - \Omega\right\|_2}. \quad (4.3)$$

L'évolution du coefficient $\left\|\Omega_{th}^{(n_r)} - \Omega\right\|_2$ (numérateur) en fonction du nombre de modes utilisés, étudiée au chapitre 3 paragraphe §3.2.1, a montré que non seulement tous les modes étaient nécessaires pour la reconstruction des sources, mais aussi que les derniers modes permettent de reconstruire les sources les plus profondes. Le coefficient $C\left(\Omega_{b_i}^{(n_r)}\right)$ permet donc de comparer l'erreur commise entre la reconstruction bruitée et celle théorique (non bruitée), et ce, pour chaque nombre de modes n_r utilisés. Si $C\left(\Omega_{b_i}^{(n_r)}\right)$ est proche de 1, alors $\Omega_{th}^{(n_r)}$ et $\Omega_{b_i}^{(n_r)}$ sont presque identiques et le bruit n'a quasiment pas d'influence. En revanche, plus $C\left(\Omega_{b_i}^{(n_r)}\right)$ tend vers 0, plus la reconstruction est mauvaise. Cette étude va donc permettre de voir les modes influencés par le bruit de mesure.

Un schéma de type Bernoulli a été lancé sur chaque reconstruction de source exécutée. Concrètement, cela correspond au protocole suivant :

- (a) Définir un niveau de bruit : $\text{SNR} = k$
- (b) Implémenter une température bruitée $\theta_{mes,k}$ aléatoire basée sur $\text{SNR} = k$.
- (c) Pour chaque nombre de mode n_r , exécuter l'algorithme de reconstruction de source avec $\theta_{mes,k}$ et calculer le coefficient $C\left(\Omega_{b_k}^{(n_r)}\right)$ obtenu.
- (d) Recommencer (b) et (c) mille fois.
- (e) Pour chaque n_r , moyenner les mille coefficients $C\left(\Omega_{b_k}^{(n_r)}\right)$ obtenus : il ne reste donc plus que n coefficients moyens $\bar{C}\left(\Omega_{b_k}^{(n_r)}\right)$.
- (f) Recommencer (a), (b), (c), (d) et (e) avec un nouveau SNR.

Le fait d'effectuer mille fois chaque reconstruction, comme le préconise le (d), permet que la reconstruction ne dépende que du ratio SNR. En effet, l'étude ne doit pas travailler sur une température bruitée particulière mais bien sur l'ensemble des possibilités de bruit

pour un SNR donné, ce qui est quasiment le cas après avoir effectué 1 000 tests. La figure 4.3 trace les coefficients moyennés $\bar{C}(\Omega_{b_k}^{(n_r)})$ obtenus.

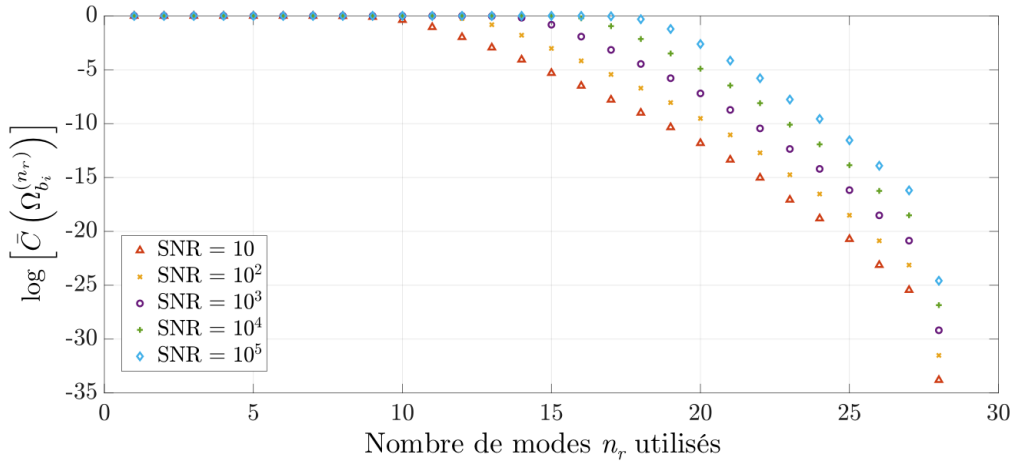


FIGURE 4.3 – Moyenne des $C(\Omega_{b_k}^{(n_r)})$ obtenus sur 1 000 essais pour différents niveaux de bruit en fonction du nombre de modes pris pour la reconstruction.

Il apparaît que les premiers modes de la S.V.D. ne sont quasiment pas perturbés par le bruit : quel que soit le niveau de bruit, $\bar{C} \approx 1$ pour les premiers modes. En revanche, pour chaque SNR, il existe un seuil à partir duquel le coefficient C diminue exponentiellement vers zéro en fonction du nombre de modes pris pour la reconstruction. Plus le SNR est faible, plus ce seuil arrive tôt. Autrement dit, plus le bruit est élevé, plus le nombre de modes perturbés par ce bruit est important. Il faut aussi noter que même avec un niveau de bruit quasi inexistant ($\text{SNR} = 10^5$), la reconstruction est mauvaise, ce qui, non seulement confirme le caractère mal posé du problème, mais souligne aussi la nécessité de connaître en profondeur les conséquences du SNR d'une mesure pour pouvoir exploiter au mieux l'algorithme d'inversion.

Notons M_k le numéro du mode à partir duquel C diminue drastiquement vers zéro pour $\text{SNR} = k$, autrement dit le premier mode dominé par le bruit. Il semble que M_k augmente linéairement en fonction du logarithme du SNR (puisque les SNR choisis augmentent selon une loi puissance). En effet, chaque courbe semble être décalée de la précédente par un même coefficient constant. Afin de vérifier cette hypothèse, il faut tracer M_k en fonction de SNR pour un nombre suffisamment élevé de k . En théorie, M_k pourrait être déterminé en cherchant le premier mode n_p tel que $\bar{C}(\Omega_{b_k}^{(n_p)}) < 1$. En réalité, même pour les premiers modes $\bar{C}$ n'est quasiment jamais égal à 1. On peut cependant considérer que tant que $\bar{C} > 0.99$, le bruit n'a pas d'influence sur la reconstruction. Le coefficient M_k peut donc

être calculé en cherchant le premier mode n_p tel que $\bar{C}(\Omega_{b_k}^{(n_p)}) < 0.99$ pour chaque SNR. Les résultats obtenus pour quinze niveaux de bruit distincts répartis de manière logarithmique entre 10 et 10^5 sont illustrés par la figure 4.4.

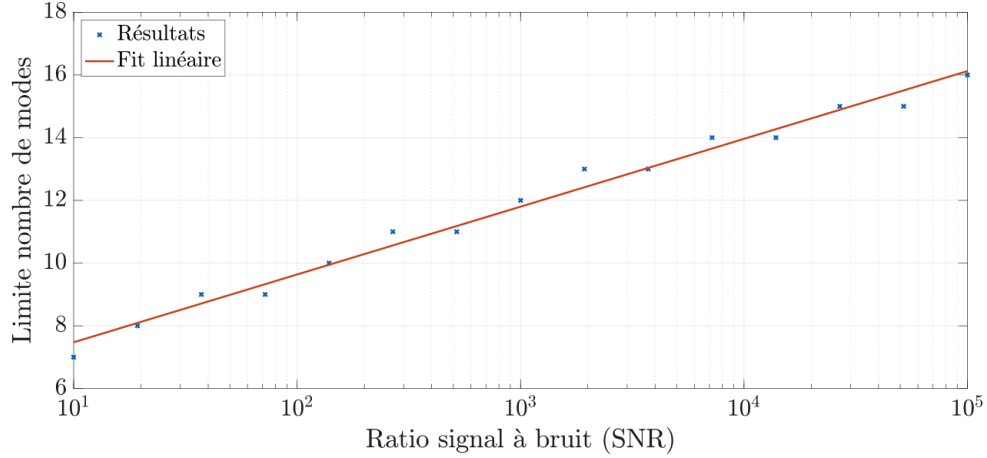


FIGURE 4.4 – Nombre de modes indépendants du bruit pour l'inversion en fonction du ratio signal à bruit

Le nombre de modes indépendants du bruit évolue bien linéairement en fonction du logarithme du ratio signal à bruit. On peut l'écrire :

$$M_k = p_1 \ln(\text{SNR}) + p_2 \quad (4.4)$$

où p_1 et p_2 sont des coefficients qui dépendent du modèle, et par conséquent du nombre de Fourier. Sur l'exemple illustré par la figure 4.4, le coefficient de corrélation vaut $R^2 = 0.98$, ce qui permet de valider le modèle défini par l'équation (4.4). Afin de déterminer l'évolution de ces coefficients en fonction de ce dernier, une étude paramétrique a été effectuée. La figure 4.5 trace les résultats obtenus.

Pour tous les nombres de Fourier, l'évolution du nombre de modes non dominés par le bruit suit bien la loi proposée par l'équation (4.4). Cependant, les coefficients p_1 et p_2 ne sont pas constants en fonction du nombre de Fourier, comme on peut l'observer en (c). En effet, l'écart entre chaque courbe n'est pas constant en fonction de Fo (b). Il apparaît que le bruit est plus limitant pour les nombres de Fourier extrêmes (0.01 et 1). $Fo \approx 10^{-1}$ semblent en revanche être les nombres de Fourier pour lesquels l'inversion est plus "résistante" au bruit. La figure 4.5 (a) peut se voir comme un abaque pour le problème de reconstruction de sources par méthode Dirac.

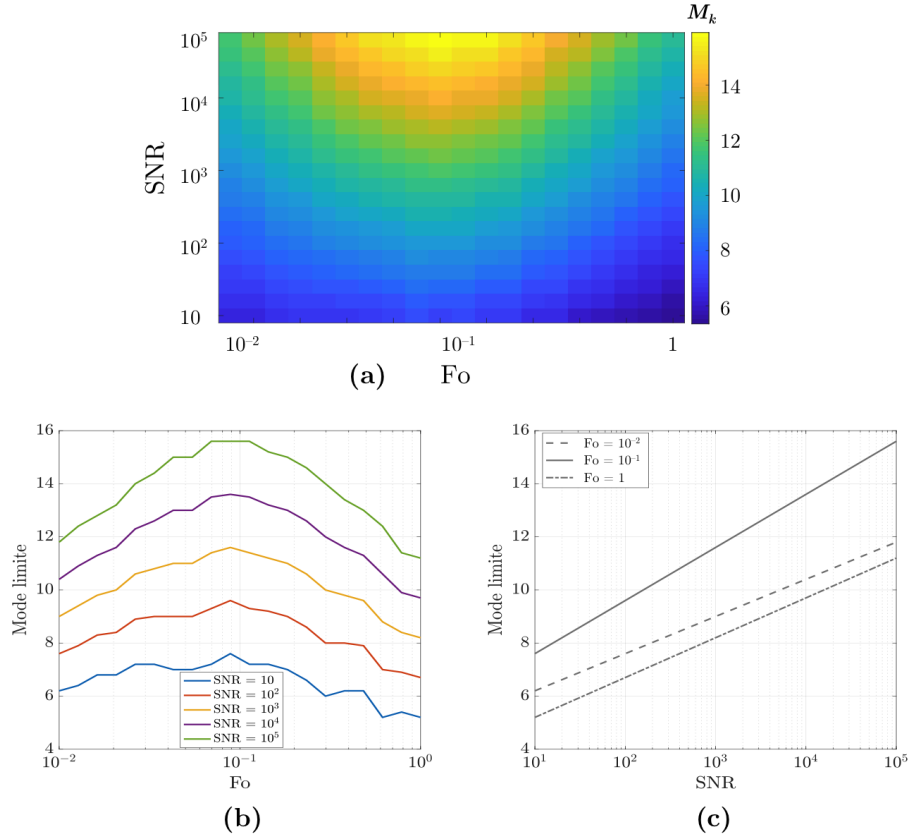


FIGURE 4.5 – Abaque des nombres de modes non perturbés par le bruit en fonction du SNR et du nombre de Fourier **(a)**. Représentation 2D en fonction du nombre de Fourier, pour cinq niveaux de bruit différents **(b)**, et en fonction de SNR pour trois nombres de Fourier différents **(c)**.

Le bruit est donc un véritable problème pour l'algorithme de reconstruction de sources. En effet, même pour un niveau de bruit extrêmement faible, les derniers modes de la S.V.D. sont dominés par le bruit. Or tous les modes sont nécessaires pour la reconstruction de source, comme explicité au chapitre 3. Afin de pouvoir contourner ce problème, deux méthodes sont proposées :

- Traiter le bruit "en amont" du problème inverse, *i.e.* "débruiter" la température mesurée par la caméra IR.
- Effectuer l'algorithme d'inversion en ajoutant des paramètres de régularisation afin de stabiliser le problème.

Concernant le traitement du bruit, une méthode fréquemment utilisée est d'effectuer plusieurs fois l'expérience et de moyenner les champs de températures obtenus, faisant

ainsi disparaître le bruit de mesure. Il faut cependant attendre la relaxation complète de la température entre deux expériences. En fonction du matériau (en particulier si le coefficient de diffusion est faible), ce temps d'attente peut être très long, rendant la méthode de reconstruction de sources peu pertinente. Il est aussi possible d'utiliser une excitation de type Lock-In, comme présenté au chapitre 2, mais cette méthode reste tout de même chronophage.

Une seconde méthode consiste à "fiter" le champ de température obtenu avec des fonctions génériques (polynomiales, gaussiennes ou autres). Les diverses tentatives effectuées lors de cette étude n'ont cependant pas été convaincantes : quelle que soit la méthode tentée ("fit" par parties, régression, splines...), elle n'améliorait pas le problème inverse. Par exemple, un fit de type polynomial, même réalisé par parties, ajoutait des fluctuations au champ de température, ce qui engendrait un biais par rapport à la solution. De même pour les fits de type gaussien. Toutes ces méthodes testées ajoutaient plus de biais qu'elles n'en enlevaient en débruitant la mesure.

Une autre méthode consiste à effectuer une S.V.D. sur le champ de température espace-temps mesuré. Cette méthode n'est pas réalisable sur le problème 1D (pas de variable d'espace : le champ de température est mesuré en un seul point en fonction du temps), mais peut s'effectuer pour tout champ de température mesurée sur une surface.

4.1.3 Traitement du bruit par S.V.D. du champ de température

Le traitement du bruit par S.V.D. est une méthode qui est souvent utilisée dans le traitement d'images [151]. Elle peut s'appliquer sous la condition d'avoir une mesure avec au minimum deux dimensions. Le débruitage pour le cas 1D est donc exclu puisque le champ de température n'est que temporel. En revanche, si l'on mesure la température en fonction du temps sur toute la surface du matériau, le champ mesuré peut se décomposer en une mesure espace-temps ou même espace-espace si l'on travaille à temps fixé.

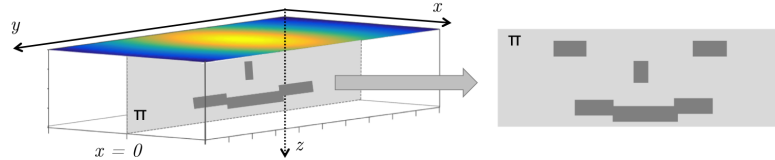


FIGURE 4.6 – Illustration de l'exemple étudié : sources thermiques présentes sur un plan π perpendiculaire à la surface de mesure

Dans toute cette partie, l'exemple illustré par la figure 4.6 est étudié pour présenter la méthode. Toutes les sources thermiques se trouvent sur le même plan π d'équation $x = 0$, perpendiculaire à la surface de mesure. Le champ de température résultant, mesuré sur toute la surface du matériau, peut se voir comme une matrice 3D espace-espace-temps. En effet, à chaque temps, une surface de température est mesurée. En notant respectivement n_x et n_y le nombre de pixels selon les dimensions x et y , et n_t le nombre de pas de temps, le champ de température mesuré peut alors se ranger dans une matrice 3D, notée T_{3D} , de taille $n_x \times n_y \times n_t$. Il est possible de réorganiser la matrice T_{3D} espace-espace-temps en une matrice en deux dimensions T_{2D} espace-temps de taille $n_s = n_x n_y \times n_t$. Une S.V.D. peut ainsi s'appliquer à la matrice T_{2D} .

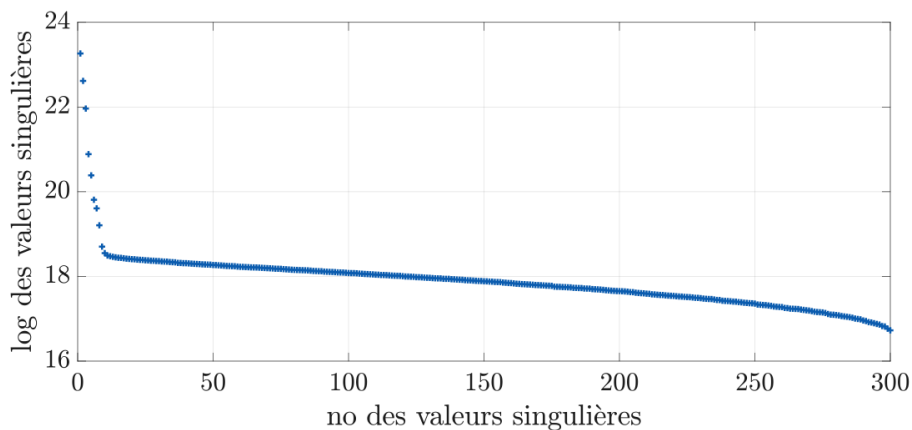


FIGURE 4.7 – Évolution des valeurs singulières de la matrice T_{2D} bruitée et théorique.

De la même manière que pour le problème inverse, l'étude de l'évolution des valeurs singulières obtenues, tracée sur la figure 4.7 permet de voir que les premiers modes sont beaucoup plus fortement pondérés que les derniers. En échelle logarithmique, la courbe formée par les valeurs singulières peut s'assimiler à un "L". Notons ψ le numéro de la valeur singulière la plus proche du "coin" formant la courbure du L. Si on reconstruit la matrice T_{2D} uniquement avec les ψ premiers modes, le champ de température est fortement débruité autant dans le domaine spatial que dans le domaine temporel. Les reconstructions des champs de températures obtenues sont données sur la figure 4.8. Il est à noter que toutes les températures ont été normalisées pour cette étude. En (a) est tracée la température théorique, en (b) la bruitée et en (c) la reconstruction en ne prenant que les ψ premiers modes de la S.V.D., et ce pour un temps fixé. En comparant ces trois graphes, on s'aperçoit que la S.V.D. est efficace pour débruiter spatialement le champ de température.

Afin de voir si la S.V.D. permet aussi de débruiter dans le domaine temporel, les figures (d) et (e) tracent l'évolution en fonction du temps des pixels 1 et 2, tous les deux répertoriés sur la figure (a). Le choix de ces pixels n'est pas anodin : en effet, le pixel 1 correspond au pixel qui subit la plus grande variation de température (car juste au dessus d'une source thermique) tandis que le pixel 2 va être plus sensible au bruit en raison de sa plus faible variation de température subie. Le pixel 1 est en effet peu sensible au bruit : les trois courbes (théorique, bruitée et S.V.D.) sont quasiment superposées. L'effet de la S.V.D. n'est donc pas vraiment visible sur ce pixel. En revanche, ce n'est pas le cas pour le pixel 2. Le fait d'effectuer une S.V.D. sur le champ de température bruité et de le reconstruire en ne prenant que les premiers modes permet donc de réduire de manière significative celui-ci et de se rapprocher de la température théorique.

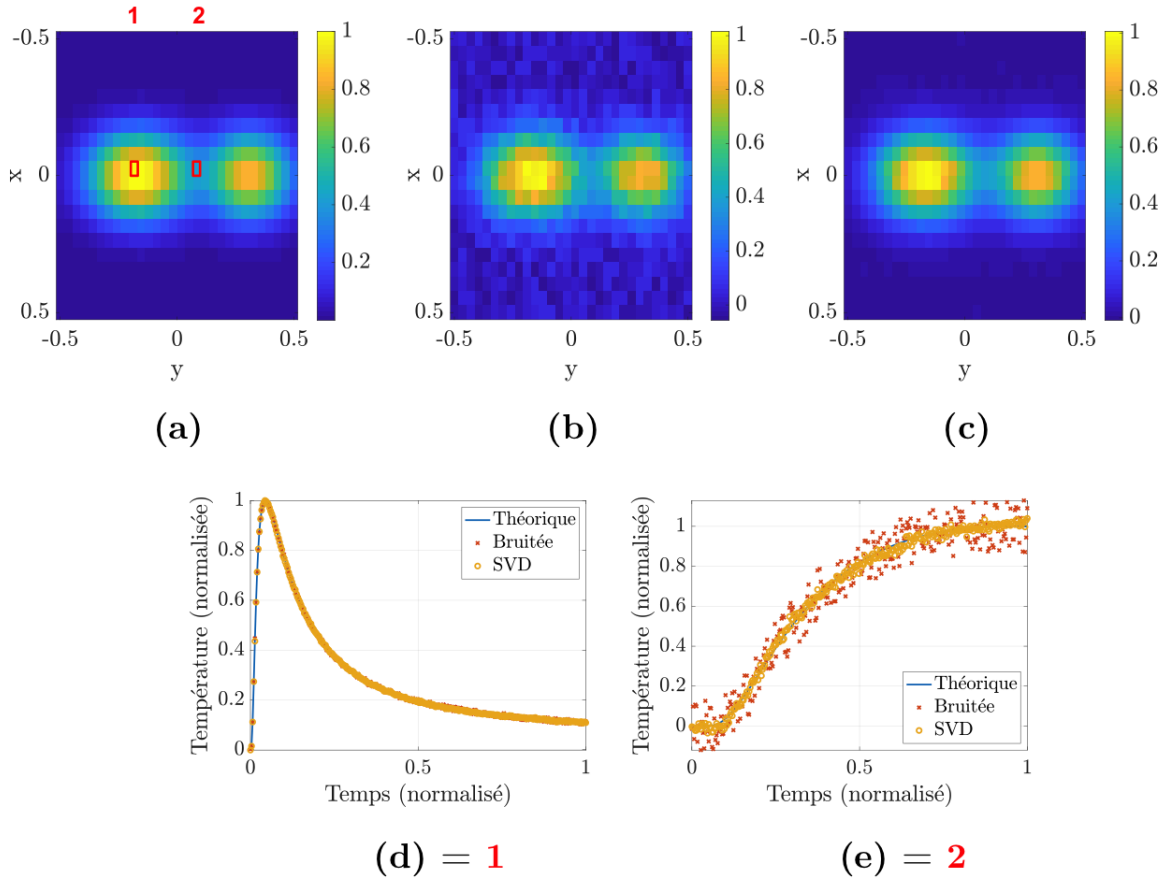


FIGURE 4.8 – Champ de température à la surface du matériau pour un temps fixé : cas théorique (a), cas bruité (b) et cas débruité par S.V.D. (c). Et évolution de la température en fonction du temps au pixel 1 (d) et au pixel 2 (e), tous les deux répertoriés sur la figure (a).

Ainsi, reconstruire le champ de température bruité avec un nombre de modes restreints de la S.V.D. permet de réduire le bruit, à la fois spatialement et temporellement. Cependant, pour débruiter au mieux les données mesurées, le nombre de modes à utiliser est important. En effet, il s'avère que pour débruiter au mieux le champ de température tout en gardant le maximum d'informations, il faut prendre exactement les ψ premiers modes de la S.V.D. pour reconstruire la matrice T_{2D} . Ainsi, si plus de modes sont conservés, le bruit sera plus présent et *a contrario*, prendre moins de modes entraînera une mauvaise reconstruction du champ de température. La figure 4.9 donne les résultats obtenus si, au lieu de prendre $\psi = 9$ modes, seuls les 4 premiers sont pris pour reconstruire le champ de température. Pour la reconstruction spatiale, représentée en (a), la différence est minime par rapport à la reconstruction précédente. En revanche, la reconstruction temporelle est mauvaise, comme on peut le voir en (b). La température obtenue est trop écartée des solutions théoriques et bruitées : il manque des informations pour pouvoir s'en approcher. Ces informations sont en effet apportées par les modes suivants.

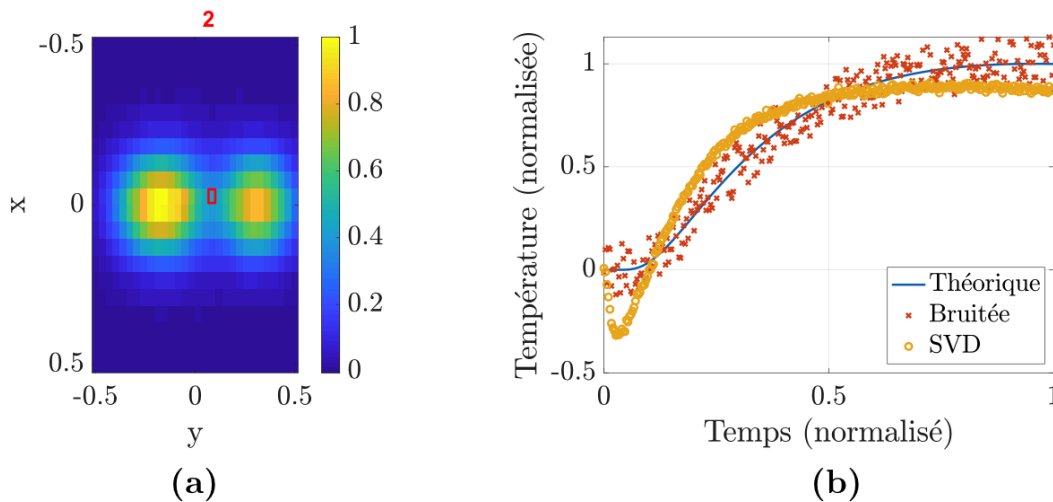


FIGURE 4.9 – Reconstruction du champ de température obtenu avec 4 modes : champ surfacique à temps fixé (a) et évolution temporelle au pixel 2 (b).

En conclusion, à condition de reconstruire le champ de température avec le nombre de modes adéquat, la méthode de débruitage est efficace pour diminuer le bruit, à la fois dans le domaine spatial et temporel. Cependant, cette méthode ne le fait pas disparaître complètement. Dans le cadre du problème inverse, cette méthode est donc une première étape, mais n'est pas suffisante pour stabiliser le problème. Il est nécessaire d'effectuer une régularisation pour pouvoir compiler l'algorithme d'inversion.

4.2 Algorithme d'inversion avec régularisation

Mathématiquement, en présence du bruit, l'équation (3.24) n'est plus valable : l'égalité stricte devient une approximation :

$$\mathbf{I}\Omega \approx \theta_{mes}, \quad (4.5)$$

et l'inversion peut se voir comme un problème de minimisation par les moindres carrés. L'inconnue Ω est recherchée de telle sorte à minimiser le résidu R défini par :

$$R^2 = \|\mathbf{I}\Omega - \theta_{mes}\|_2^2 \quad (4.6)$$

On peut remarquer que s'il n'y a pas de bruit, alors $R = 0$ dans l'équation (4.6) et on retrouve bien l'équation (3.24). La régularisation d'un problème de minimisation par les moindres carrés se fait par l'introduction d'un terme de pénalisation dans le résidu R tel que [152] :

$$R^2 = \|\mathbf{I}\Omega - \theta_{mes}\|_2^2 + \alpha J(\Omega) \quad (4.7)$$

où α est un scalaire appelé "coefficient de régularisation" et $J(\Omega)$ une fonction dépendante de l'inconnue recherchée Ω . Plus le coefficient de régularisation est élevé, plus l'inversion sera stable. Mais en contrepartie, le terme de pénalisation ajoute un biais au problème initial. Ainsi, plus le terme de régularisation est important, plus la solution recherchée est éloignée. Toute la difficulté réside donc dans le choix des paramètres de régularisation afin d'avoir le meilleur compromis entre stabilité et véracité de la solution.

Plusieurs types de régularisations sont possibles en fonction du choix de J . Parmi les plus connues on retrouve :

- La régularisation par norme L_2 (régularisation de Tikhonov)
- La régularisation par troncature du spectre de la S.V.D. (T.S.V.D.)
- La régularisation par norme L_1 (méthode Lasso)

4.2.1 Fonctions de régularisation

Régularisation de Tikhonov

La régularisation par norme L_2 a été proposée en 1963 par le mathématicien russe Andreï Nikolaïevitch Tikhonov [86]. Elle consiste à prendre le carré de la norme L_2 pour fonction $J(\Omega)$ associée à un coefficient α_{Tk} . Le problème (4.7) devient alors :

$$R^2 = \|\mathbf{I}\Omega - \theta_{mes}\|_2^2 + \alpha_{Tk}\|\Omega\|_2^2 \quad (4.8)$$

où la norme L_2 , aussi appelée norme euclidienne, est définie en 2D par :

$$L_2(\Omega) = \|\Omega\|_2 = \sqrt{\iint |\Omega|^2 \, dS} \quad (4.9)$$

Grâce à la formulation de Riemann et à l'équation (3.28), la formule (4.8) peut alors s'écrire :

$$R^2 = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \sqrt{\alpha_{Tk}} \mathbf{Id} \end{bmatrix} \Omega - \begin{bmatrix} \theta_{mes} \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad (4.10)$$

où $\mathbf{Id}$ correspond à la matrice identité. Comme explicitée dans [152], et à l'aide de la décomposition en valeurs singulières décrite par l'équation (3.26), la résolution du problème de minimisation (4.10) avec régularisation de Tikhonov devient :

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \frac{s_i^2}{s_i^2 + \alpha_{Tk}} \frac{\mathbf{U}_{:,i}^T \theta_{mes}}{s_i} \mathbf{V}_{:,i}. \quad (4.11)$$

La comparaison entre la solution théorique, donnée par l'équation (3.28), et la solution régularisée de Tikhonov, donnée par l'équation (4.11), permet de voir que la régularisation de Tikhonov a pour effet de pondérer chaque mode i de la S.V.D. par un coefficient c_{Tk} défini par :

$$c_{Tk}(i) = \frac{s_i^2 + \alpha_{Tk}}{s_i^2} = 1 + \frac{\alpha_{Tk}}{s_i^2} \quad (4.12)$$

D'après l'équation (4.12), pour chaque mode i , deux cas se distinguent en fonction de la valeur du coefficient α_{Tk} :

Premier cas : $\alpha_{Tk} \leq s_i^2$. On a alors $c_{Tk} \approx 1$. Le mode i n'est donc quasiment pas influencé par ce coefficient de pondération.

Deuxième cas : $\alpha_{Tk} \gg s_i^2$. Ce qui correspond à $c_{Tk} \gg 1$. Le mode i est d'autant plus amplifié que le rapport entre α_{Tk} et s_i^2 est élevé.

L'effet de la régularisation de Tikhonov sur les valeurs singulières, et donc *a fortiori* sur les modes de la S.V.D., est illustré par la figure 4.10 pour différentes valeurs de α_{Tk} sur le modèle 1D. On observe bien que cette régularisation a pour effet d'amplifier uniquement les dernières valeurs singulières. Ensuite, plus α_{Tk} est élevé, plus le nombre de valeurs

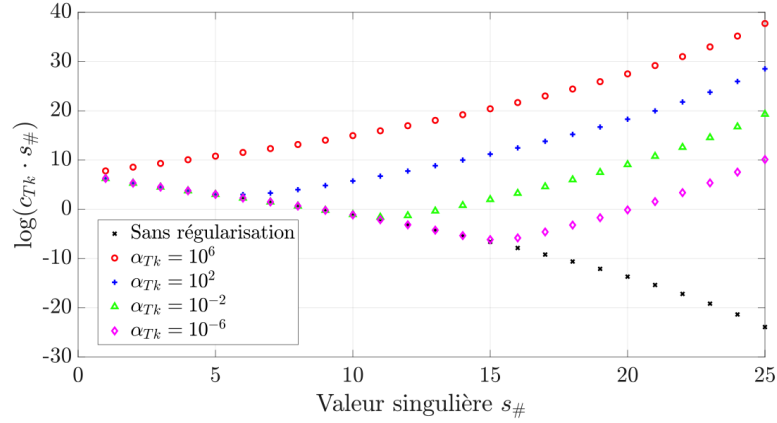


FIGURE 4.10 – Effet de la régularisation de Tikhonov sur les valeurs singulières pour différentes valeurs de α_{T_k} .

singulières amplifiées augmente : en fait, la première valeur singulière s_i qui sera impactée par la régularisation de Tikhonov sera celle qui sera la plus proche de la valeur limite v_{lim} définie par :

$$v_{lim} = \sqrt{\alpha_{T_k}} \quad (4.13)$$

Puisque l'inversion fait intervenir l'**inverse** des valeurs singulières, tous les modes qui ont été artificiellement amplifiés par la régularisation auront moins d'influence lors de l'inversion. La perturbation apportée par le bruit sera donc contenue et le problème inverse stabilisé, permettant d'approcher au mieux la solution recherchée.

Régularisation par troncature du spectre

La régularisation par troncature du spectre de la S.V.D. (notée T.S.V.D.) peut se définir à l'aide de celle de Tikhonov. Elle peut en effet s'écrire :

$$R^2 = \|\mathbf{I}\Omega - \theta_{mes}\|_2^2 + \alpha_{T_{SVD}} \|\Omega\|_2^2 \quad (4.14)$$

Cependant, ici le paramètre de régularisation $\alpha_{T_{SVD}}$ n'est pas un scalaire mais un vecteur de même taille que Ω . Chacun de ses coefficients est défini de manière binaire :

$$\alpha_{T_{SVD}}(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } s_i > v_{lim} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.15)$$

ce qui correspond à :

$$c_{T_{\text{SVD}}}(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } s_i > v_{\text{lim}} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.16)$$

Ainsi, comme l'inversion fait intervenir l'inverse des coefficients $c_{T_{\text{SVD}}}$, au lieu de pénaliser les modes les plus faibles de la S.V.D., comme le fait la régularisation de Tikhonov, celle par T.S.V.D. ne les prend plus du tout en compte (d'où la notion de troncature). La régularisation effectuée par T.S.V.D. est donc beaucoup plus forte que celle de Tikhonov dans le sens où elle ne lisse pas la solution avec les derniers modes de la S.V.D..

Dans le problème de reconstruction de sources étudié ici, la matrice opérateur $\mathbf{I}$ a été optimisée de telle sorte que tous les modes de la S.V.D. soient nécessaires pour trouver la solution (*cf.* chapitre §3). Chaque mode permet de reconstruire une profondeur donnée. Si les derniers modes ne sont pas pris en compte, il ne sera plus du tout possible de reconstruire les sources les plus profondes. La régularisation par T.S.V.D. n'est donc pas la plus adaptée pour ce problème.

Régularisation par norme L_1

La régularisation par la norme L_1 , aussi connue sous le nom de méthode Lasso [153], s'écrit :

$$R^2 = \|\mathbf{I}\Omega - \theta_{\text{mes}}\|_2^2 + \alpha_{L_1} \|\Omega\|_1 \quad (4.17)$$

Contrairement aux méthodes de Tikhonov et de T.S.V.D., la fonction de régularisation $J(\Omega) = L_1(\Omega)$ n'est pas quadratique. Pour pouvoir effectuer une minimisation au sens des moindres carrés, l'astuce détaillée dans [94] est utilisée afin d'approcher la norme L_1 par une forme quadratique :

$$L_1(\Omega) = \|\Omega\|_1 = \iint |\Omega| \, dS \approx \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \iint \frac{|\Omega_i|^2}{\sqrt{\varepsilon + |\Omega_{i-1}|^2}} \, dS \quad (4.18)$$

où ε est une constante d'ordre de grandeur de l'erreur machine ayant pour seul but d'éviter la division par zéro.

En insérant la formulation de la norme L_1 définie par l'équation (4.18) dans le problème

(4.17), le résidu $R_{(i)}$ est obtenu, pour chaque itération (i) :

$$R_{(i)}^2 = \sum_{j=1}^m \left((\mathbf{I}\Omega)_j - \theta_{mes,j} \right)^2 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_{L_1}}{\sqrt{\varepsilon + |\Omega_{k,(i-1)}|^2}} \Omega_{k,(i)}^2 \quad (4.19)$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \sqrt{\alpha_{L_1}} \mathbf{J}_{(i)} \end{bmatrix} \Omega - \begin{bmatrix} \theta_{mes} \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad (4.20)$$

$$= \|\mathbf{I}\mathbf{J}\| \Omega - [\theta_{mes,J}] \|_2^2 \quad (4.21)$$

où $\mathbf{J}_{(i)}$ est une matrice diagonale qui dépend de la solution $\Omega_{(i-1)}$ de l'itération précédente. Elle est définie par :

$$\mathbf{J}_{(i)} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon + |\Omega_{1,(i-1)}|^2}} \right)^{1/2} & & & \\ & \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon + |\Omega_{2,(i-1)}|^2}} \right)^{1/2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon + |\Omega_{n,(i-1)}|^2}} \right)^{1/2} \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Comme on peut le voir dans la définition cette matrice, chaque itération utilise les résultats de la source $\Omega_{(i)}$ de l'itération précédente. Pour la première itération, il est donc nécessaire de définir la matrice $\mathbf{J}_{(1)}$. Le choix de cette initialisation importe peu, puisque dès la première itération elle va être corrigée en fonction des données de l'inversion. Il est cependant déconseillé de prendre la matrice nulle puisque cela voudrait dire que la première itération n'est pas régularisée. Dans cette étude, on prend $\mathbf{J}_{(1)} = \mathbf{Id}$, la matrice identité.

En utilisant la décomposition en valeurs singulière présentée par (3.25), le problème de minimisation par moindres carrés donné par (4.21) peut alors s'écrire :

$$\mathbf{I}_{\mathbf{J}_{(i)}}^T \mathbf{I}_{\mathbf{J}_{(i)}} \Omega_{(i)} = \mathbf{I}_{\mathbf{J}_{(i)}}^T \theta_{mes,J} \quad (4.23)$$

$$\left(\mathbf{I}^T \mathbf{I} + \alpha_{L_1} \left(\mathbf{J}_{(i)} \right)^2 \right) \Omega_{(i)} = \mathbf{I}^T \theta_{mes} \quad (4.24)$$

$$\left(\mathbf{V}\mathbf{S}^T \mathbf{S}\mathbf{V}^T + \alpha_{L_1} \left(\mathbf{J}_{(i)} \right)^2 \right) \Omega_{(i)} = \mathbf{V}\mathbf{S}\mathbf{U}^T \theta_{mes} \quad (4.25)$$

À chaque itération (i), en posant $\mathbf{I}_{L_1} = \left(\mathbf{V}\mathbf{S}^T\mathbf{S}\mathbf{V}^T + \alpha_{L_1} \left(\mathbf{J}_{(i)} \right)^2 \right)$ et $\theta_{L_1,mes} = \mathbf{V}\mathbf{S}\mathbf{U}^T\theta_{mes}$, le problème à résoudre est une simple équation linéaire définie par :

$$\mathbf{I}_{L_1} \Omega_{(i)} = \theta_{L_1,mes} \quad (4.26)$$

La matrice $\mathbf{I}_{L_1}$ est entièrement déterminée puisqu'elle ne fait intervenir que les données de la S.V.D. de la matrice opérateur du problème de base, ainsi que la solution $\Omega_{(i-1)}$ de l'itération précédente (donc connue). De plus, de par sa construction, cette matrice est carrée et inversible. La résolution du problème (4.26) peut donc se faire via n'importe quel algorithme d'inversion.

Contrairement aux régularisations de Tikhonov et de troncature du spectre de la S.V.D., la régularisation L_1 permet de pénaliser chaque position de la source Ω (nœud de discrétisation) avec un paramètre différent. En effet, la matrice $\mathbf{J}_{(i)}$, définie par l'équation (4.22), fait intervenir la distribution de sources obtenue à l'itération précédente. Chaque coefficient k de la matrice $\mathbf{J}_{(i)}$ va pondérer la position k de la source $\Omega_{(i)}$. Telle qu'elle est définie, la régularisation par norme L_1 pénalise fortement les zones "nulles" (pas de source thermique) et à l'inverse, elle pondère faiblement les zones non nulles (présence de source). En effet, le coefficient diagonal k de $\mathbf{J}_{(i)}$ tend vers l'infini si la position k de la source $\Omega_{(i-1)}$ trouvée à l'itération précédente tend vers zéro et reste faible dans le cas contraire.

La régularisation par norme L_1 favorise une solution contenant un maximum de valeurs nulles, ce qui se traduit par de forts contrastes d'intensités sur la reconstruction de source à l'inverse de la régularisation de Tikhonov qui tend à lisser la solution.

4.2.2 Choix du paramètre de régularisation

Pour le problème inverse, quel que soit le type de régularisation effectué, le choix du paramètre α est extrêmement important. Un paramètre trop petit ne va pas suffisamment stabiliser le signal tandis qu'un paramètre trop élevé va apporter un biais trop grand et s'écarter du problème initial. Il existe plusieurs moyens permettant de choisir ce paramètre : les méthodes UPRE (Unbiased Predictive Risk Estimator), GCV (Generalized Cross Validation), L-Curve et Discrepancy Principle, détaillées et comparées dans [94, 154–157], en sont des exemples.

La première méthode proposée ici consiste à se servir des résultats de l'étude sur le bruit présentée au paragraphe 4.1.2. Grâce à l'abaque effectuée, à partir du nombre de

Fourier et du niveau de bruit (SNR), on connaît le numéro de premier mode dominé par le bruit. Tous les modes suivants le sont donc également. Il faut donc choisir le coefficient α de telle manière à ce qu'il soit négligeable pour les premiers modes et important à partir du mode limite, soit :

$$\alpha = s_{lim}^2 \quad (4.27)$$

La seconde méthode proposée se base sur le critère de Picard [100]. Les premières études sur le critère pour des données discrètes ont été effectuées en 1979 par Varah [158, 159]. Ce critère consiste à étudier l'évolution du coefficient $|\mathbf{U}_{:,i}^T \theta|$ en fonction du mode i et des valeurs singulières. En effet, d'après le chapitre 3, l'inconnue recherchée Ω est :

$$\Omega = \sum_{i=1}^p \frac{\mathbf{U}_{:,i}^T \theta}{s_i} \mathbf{V}_{:,i}. \quad (4.28)$$

Par souci de simplicité, notons $U_i = \mathbf{U}_{:,i}$. En présence de bruit, $\theta = \theta_{mes}$. On peut alors noter, d'après l'équation (4.2) :

$$U_i^T \theta_{mes} = U_i^T \theta_{th} + U_i^T \varepsilon \approx \begin{cases} U_i^T \theta_{th} & \text{si } |U_i^T \theta_{th}| > |U_i^T \varepsilon| \\ U_i^T \varepsilon & \text{si } |U_i^T \theta_{th}| < |U_i^T \varepsilon| \end{cases} \quad (4.29)$$

Ainsi, les modes de la S.V.D. fortement influencés par le bruit sont ceux pour lesquels $|U_i^T \theta_{th}|$ sont petits, et donc ceux qui correspondent aux plus petites valeurs singulières. Puisque dans le problème de reconstruction de sources étudié ici, les valeurs singulières diminuent de manière exponentielle, le bruit va immédiatement dominer pour ces modes-là. Afin d'illustrer cette assertion, les "graphes de Picard" (Picard plot) sont tracés par la figure 4.11 pour la température théorique **(a)** et celle bruitée **(b)** de l'exemple 1D. Ce type de graphe consiste à tracer l'évolution des valeurs singulières s_i , des coefficients $|U_i^T \theta|$ et $|U_i^T \theta|/s_i$ afin de pouvoir comparer ces données.

Pour la température théorique (non bruitée) le coefficient $|U_i^T \theta_{th}|$ diminue à peu près de la même manière que les valeurs singulières s_i . Le coefficient $|U_i^T \theta_{th}|/s_i$, quant à lui, est quasiment constant, inférieur à 1. Pour la température bruitée, on retrouve bien le comportement attendu, explicité par l'équation (4.29) : pour les premiers modes, le coefficient $|U_i^T \theta_{mes}|$ se comporte comme s'il n'y avait pas de bruit. Cependant, à partir d'un certain seuil, le bruit devient dominant et le coefficient $|U_i^T \theta_{mes}|$ ne diminue plus et devient à peu près constant, de valeur quasi-constante de l'ordre de grandeur de $|U_i^T \varepsilon|$. Puisque les valeurs singulières diminuent exponentiellement, le coefficient $|U_i^T \theta_{mes}|/s_i$ n'est plus constant à partir de ce seuil et augmente alors exponentiellement.

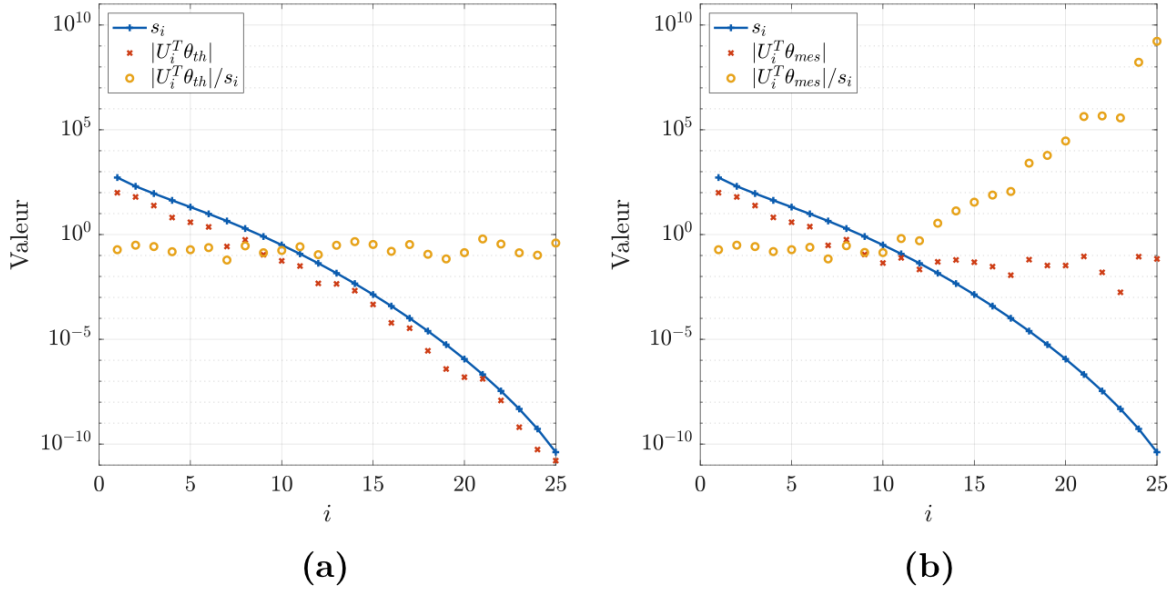


FIGURE 4.11 – Graphe de Picard (Picard plot) pour la température théorique (a) et pour la température bruitée (b) de l'exemple 1D (*cf.* chapitre 3, §3.2.1).

Grâce à cette étude, un critère fiable, permettant de déterminer la limite à partir de laquelle les modes de la S.V.D. deviennent dominés par le bruit, est défini. En effet, il suffit de chercher le premier mode critique i_c tel que :

$$\frac{|U_{i_c}^T \theta_{mes}|}{s_{i_c}} > 1 \quad (4.30)$$

Le coefficient de régularisation optimal α_{opt} pour effectuer le problème inverse est donc celui qui est défini à l'aide de la valeur singulière critique :

$$\alpha_{opt} = s_{i_c}^2 \quad (4.31)$$

Ce coefficient α_{opt} ne dépend pas du type de régularisation choisi. En effet, il permet simplement de déterminer les modes dominés par le bruit, ce qui est indépendant de la régularisation. Le rôle de la fonction de régularisation J est de favoriser une solution par rapport à une autre. Comme mentionné précédemment, $J = Tk$ va chercher à lisser la solution tandis que $J = L_1$ amène à des contrastes forts.

4.2.3 Application de la régularisation sur un exemple 1D et 3D

Dans le paragraphe précédent, différents types de régularisation permettant de stabiliser l'inversion ont été présentés. La méthodologie de chaque méthode a été explicitée pour le cas général, mais le choix du paramètre de régularisation a été illustré à l'aide d'un exemple 1D (en particulier le graphe de Picard). Dans cette partie, deux exemples sont traités, le premier 1D et le second 3D afin de visualiser l'effet de chaque type de régularisation sur la solution et de montrer la validité de la méthode pour un cas 3D.

Application sur un cas 1D

Les résultats présentés dans cette partie sont issus de calculs effectués sur le problème 1D, détaillé dans le chapitre §3 par la figure 3.4. Le niveau de bruit pour cet exemple est pris tel que $\text{SNR} = 100$. En raison du bruit de mesure, une régularisation est nécessaire pour stabiliser l'inversion. Trois solutions sont calculées dans cet exemple : la première en utilisant la régularisation de Tikhonov, la seconde en utilisant la régularisation par norme L_1 et la dernière en cumulant les deux. Dans chacun des cas, le paramètre de régularisation est choisi à l'aide de la formule 4.30.

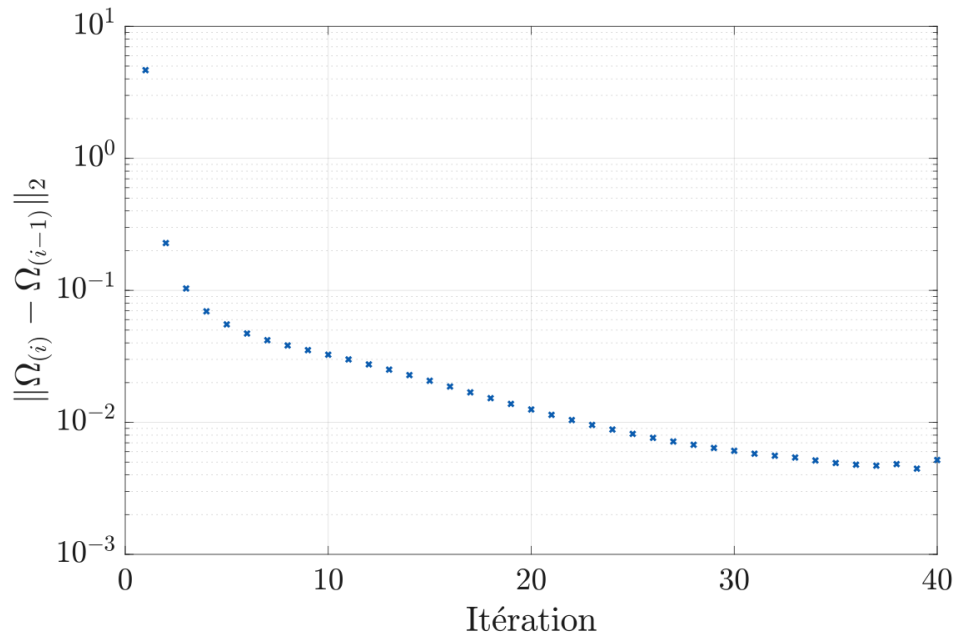


FIGURE 4.12 – Étude de la norme des différences des solutions obtenues $\|\Omega_{(i)} - \Omega_{(i-1)}\|_2$ entre chaque itération de la régularisation L_1 .

Comme cité précédemment, la régularisation par norme L_1 permet de pénaliser chaque nœud de Ω et favorise ainsi les forts contrastes d'intensité, ce qui est précisément recherché ici. Puisque la régularisation par norme L_1 se fait par itération, il faut définir un critère d'arrêt. Une des méthodes est d'étudier la norme de la différence des solutions obtenues entre deux itérations, définie par $\|\Omega_{(i)} - \Omega_{(i-1)}\|_2$ et de s'arrêter lorsqu'elle devient plus petite qu'un seuil. La figure 4.12 illustre l'évolution de cette norme sur l'exemple étudié.

On observe que la différence entre deux reconstructions est importante sur les premières itérations, mais rapidement cette différence diminue pour les itérations suivantes (échelle logarithmique), ce qui veut dire que la solution proposée par la régularisation L_1 converge rapidement vers une solution unique. Entre l'itération 20 et 40 par exemple, la solution change peu à chaque itération (norme obtenue entre 2 itérations de l'ordre de 10^{-2}). Afin d'observer ce résultat, les reconstructions obtenues à l'itération 20 et à l'itération 40 sont illustrées sur la figure 4.13. Les reconstructions obtenues par régularisation de Tikhonov et par régularisation de Tikhonov ajoutée à celle de L_1 sont aussi représentées pour pouvoir les comparer. La source réelle, que l'on souhaite retrouver, est représentée par la ligne continue rouge.

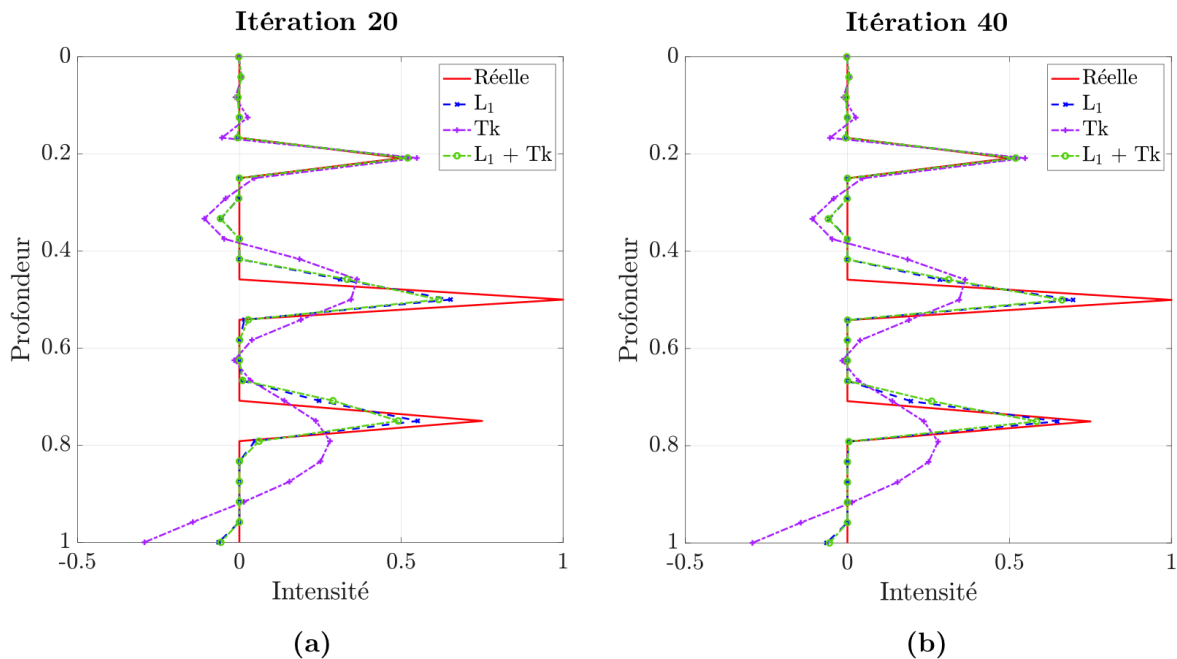


FIGURE 4.13 – Comparaison des reconstructions de sources pour différentes régularisations : Tikhonov seule, norme L_1 seule et Tikhonov couplée à la norme L_1 : à l'itération 20 (a) et à l'itération 40 (b).

Quelle que soit la régularisation effectuée, la source la plus proche de la surface est bien reconstruite. En revanche, ce n'est pas le cas pour les deux sources les plus profondes. Comme attendu, la reconstruction obtenue avec la régularisation de Tikhonov (Tk) est lissée : les deux sources les plus profondes sont "étalées" : la solution proposée forme une courbe de type gaussienne. Le maximum d'intensité, sous estimé, ne correspond pas toujours à la position de la source. De plus, la position de la source la plus profonde est mal retrouvée. Il est important de noter que la méthode de Tikhonov n'étant pas itérative, la reconstruction tracée sur les deux graphes **(a)** et **(b)** est la même : elle a juste été tracée pour pouvoir la comparer aux autres solutions.

La reconstruction obtenue par régularisation L_1 s'approche bien de la solution réelle : à l'itération 20 comme à la 40, les positions de chaque source sont bien retrouvées. Comme attendu, la régularisation de type L_1 respecte bien les contrastes. En outre la différence entre l'itération 20 et 40 est minime : seule l'intensité de la source la plus profonde est un peu mieux retrouvée à l'itération 40. On peut donc définir un critère d'arrêt en étudiant la norme $\|\Omega_{(i)} - \Omega_{(i-1)}\|_2$ et définir une tolérance minimale acceptée. Dans le cas étudié ici, on pourrait prendre 10^{-2} .

Enfin, cumuler la régularisation de Tikhonov avec celle de la norme L_1 n'a pas d'intérêt ici : elle n'améliore pas la reconstruction par rapport à la norme L_1 seule, comme on peut l'observer sur la figure 4.13. En effet, la reconstruction effectuée (représentée en vert sur la figure) est quasiment la même que celle de la régularisation L_1 seule : on peut même observer qu'à chaque itération l'intensité retrouvée est sensiblement moins bonne, particulièrement pour la source la plus profonde.

Application sur un cas 3D

Les résultats présentés dans cette partie sont issus de calculs effectués sur le problème 3D illustré par la figure 4.6 où les sources sont réparties sur un plan (π) perpendiculaire à la surface de mesure. Dans cette étude, les paramètres sont choisis tels que : $Fo_z = 0.1$, $Fo_y = Fo_x = 0.01$, $n_t = 300$, $n_y = 12$, $n_x = 10$ et $n_z = 15$ de manière à se placer dans la zone optimale du critère de Fourier (cf. chapitre 3). Enfin, le niveau de bruit pour cet exemple est pris tel que $SNR = 100$.

De la même manière que pour le cas 1D, une régularisation est nécessaire pour stabiliser l'inversion. Deux solutions sont calculées ici : la première avec régularisation de Tikhonov et la seconde avec régularisation par norme L_1 . Le calcul en cumulant les deux

régularisations n'a pas été effectué ici puisque, d'après les résultats obtenus sur le cas 1D, cela n'apporte pas d'amélioration par rapport à la norme L_1 seule. Comme explicité au paragraphe précédent, les fonctions de régularisation sont liées à un paramètre qui permet de les pondérer. La figure 4.14 donne les graphes de Picard obtenus sur cet exemple 3D pour le cas théorique (température non bruitée) et le cas bruité.

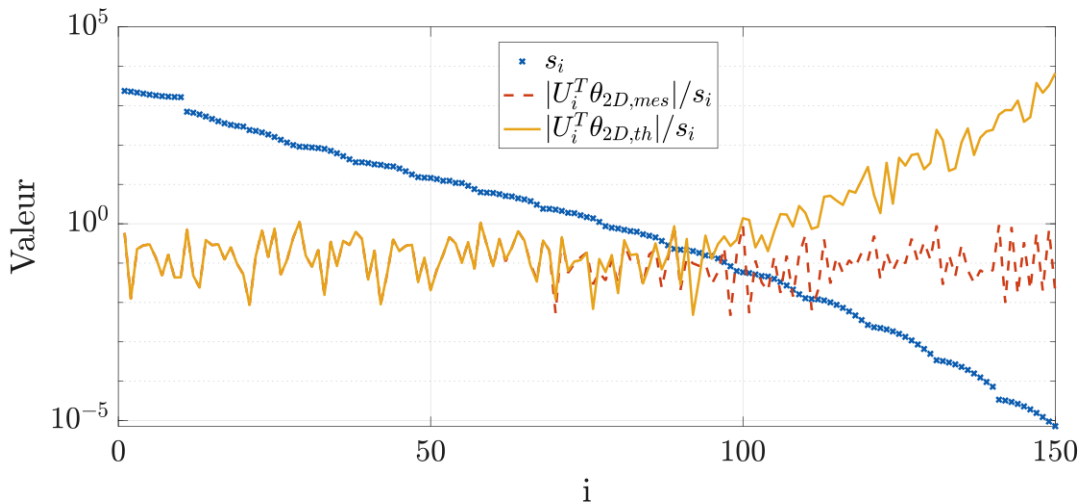


FIGURE 4.14 – Graphe de Picard pour les températures théorique et bruitée sur l'exemple 3D étudié.

Contrairement au cas 1D, l'évolution du facteur théorique $|U_i^T \theta_{2D,th}| / s_i$ oscille fortement. En effet, dans le cas 1D, il est quasiment constant (*cf.* figure 4.11 (a)). Cependant, ces oscillations s'effectuent autour d'une valeur moyenne constante. Pour les premiers modes, l'évolution du facteur bruité $|U_i^T \theta_{2D,mes}| / s_i$ est strictement la même que celui théorique. En revanche, à partir d'un certain mode, il augmente exponentiellement, moyennant les oscillations parasites. Ainsi, en faisant abstraction de ces oscillations, les comportements des facteurs $|U_i^T \theta_{2D,k}| / s_i$ sont les mêmes que pour le cas 1D. Le choix du paramètre de régularisation s'effectue donc selon la même procédure que pour le cas 1D. Ici, il est donc pris $\alpha_{opt} = s_{90}^2$. Le choix du nombre d'itérations pour la régularisation par norme L_1 s'effectue de la même manière que pour le cas 1D et est pris ici à 25.

La présence accrue des oscillations par rapport au cas 1D peut s'expliquer par le fait que la température est mesurée sur toute la surface du matériau et non pas en un point unique. Les variations de températures mesurées sont par conséquent beaucoup plus importantes. La figure 4.15, qui donne le vecteur du champ de température normalisé de surface $\theta_{2D,mes}$, permet de visualiser cet effet. Les données de température sont rangées en

fonction du temps pour tous les pixels de la surface balayés selon la direction y puis selon x , comme détaillé au chapitre 3.

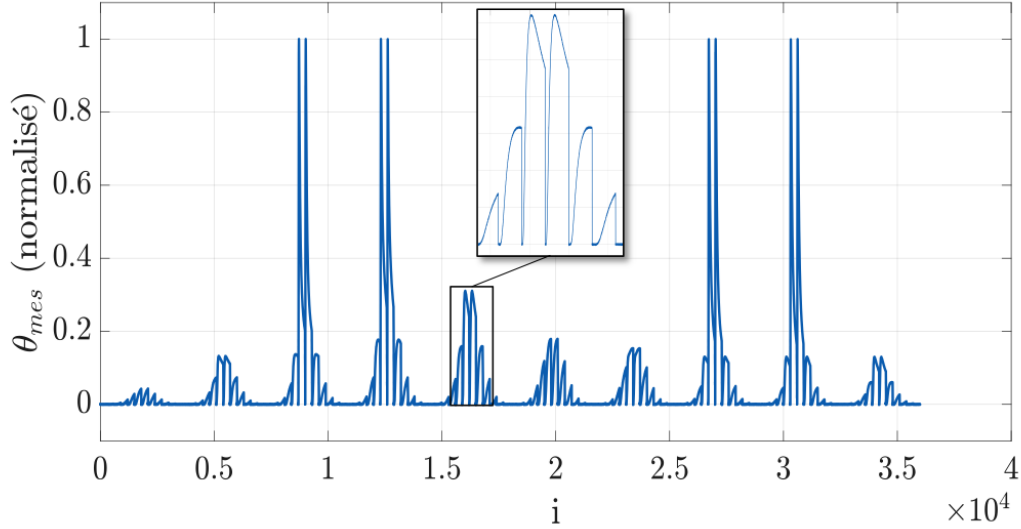


FIGURE 4.15 – Vecteur θ_{mes} contenant le champ de température normalisé de surface, spatial et temporel, où les données sont rangées en fonction du temps pour tous les pixels balayés selon y puis selon x (cf. §3.1.2 du chapitre 3).

Les solutions obtenues avec chacune des régularisations sont illustrées sur la figure 4.16. La répartition réelle des sources est donnée en **(a)**, la solution obtenue avec régularisation de Tikhonov est illustrée en **(b)** et celle avec norme L_1 en **(c)**. Tout d'abord, quelle que soit la régularisation effectuée, la partie supérieure (les yeux du smiley) est bien reconstruite. En revanche, la différence est nette pour les sources profondes : la bouche du smiley est complètement floutée (intensités lissées) sur la solution obtenue avec régularisation de Tikhonov tandis qu'elle est beaucoup plus distincte avec la régularisation par norme L_1 .

Ainsi, les méthodes de régularisation par Tikhonov et par norme L_1 ont été testées et comparées sur deux exemples : le premier 1D et le second 3D. Il est apparu que la régularisation de Tikhonov n'est pas la plus adaptée. Comme elle pénalise tous les nœuds (ou points sources) du vecteur Ω de la même manière, la régularisation a tendance à lisser la solution. Or les solutions recherchées sont des sources de type Dirac, ce qui veut dire qu'entre deux points voisins du vecteur Ω , il peut y avoir une forte et brutale variation d'intensité. La régularisation par Tikhonov a tendance à lisser ce saut d'intensité. La régularisation par norme L_1 semble donc la méthode à privilégier pour reconstruire au mieux les sources thermiques.

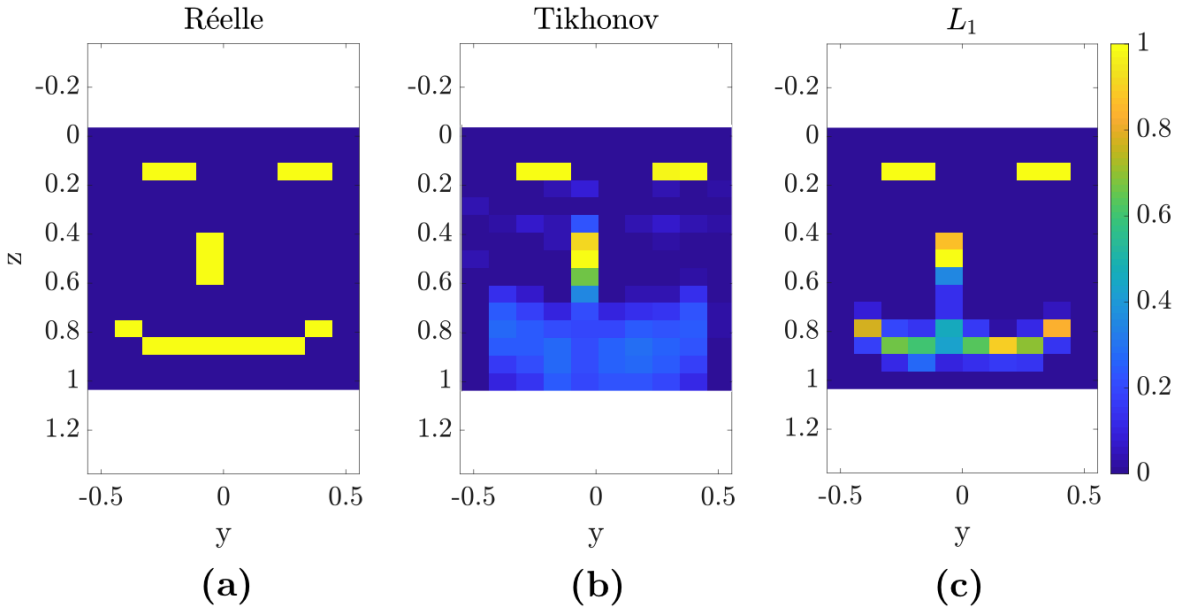


FIGURE 4.16 – Répartition réelle des sources sur le plan (π) (a). Reconstruction obtenue après régularisation : de Tikhonov (b) et par norme L_1 (c).

En conclusion, pour le problème de reconstruction de sources par méthode Dirac, le traitement du bruit est indispensable. En effet, en raison du caractère très mal posé du problème inverse, la moindre perturbation (apportée ici par le bruit de mesure) va mener à une divergence de la solution. Dans ce chapitre, une solution a été proposée pour remédier à ce problème : le traitement du bruit. La première étape est d'effectuer une opération "débruitage" en amont de l'inversion, par la méthode dite de S.V.D. du champ de température, permettant de réduire le bruit spatial et temporel de la mesure. Comme cette méthode ne permet pas de supprimer totalement le bruit, il est alors nécessaire d'ajouter des termes de régularisation dans l'algorithme d'inversion. Ces termes vont avoir pour effet de stabiliser le problème, ce qui est l'objectif recherché. Cependant, plus la régularisation est forte, plus on s'écarte du problème initial. La régularisation doit donc être choisie judicieusement de manière à stabiliser le problème tout en restant suffisamment proche du problème initial. Ainsi, la régularisation peut être vue comme un artifice mathématique qui permet de pénaliser ou favoriser certaines solutions, et entraîne par conséquent un biais au problème initial.

Une autre technique, basée sur une méthode probabiliste et moins sensible au bruit, est alors proposée dans la suite de ce chapitre en vue de la reconstruction de sources volumiques.

4.3 Reconstruction de sources : méthode probabiliste

Le problème de reconstruction de sources, étudié ici, peut s'appréhender de deux manières : soit il peut se résoudre par une approche dite **classique**, soit par une approche dite **probabiliste** :

- L'approche classique consiste à déterminer une solution à partir des données connues, issues par exemple des paramètres matériaux, de la physique ou autre. L'algorithme d'inversion présenté précédemment (avec ou sans régularisation) se sert des données de températures mesurées ainsi que des caractéristiques du matériau pour finalement déterminer la géométrie et l'intensité des sources thermiques responsable de l'échauffement.
- L'approche probabiliste consiste à estimer la géométrie et l'intensité des sources thermiques à l'aide des lois de probabilité. Les méthodes probabilistes évaluent, parmi le champ des possibilités, la probabilité que la solution ait telle géométrie ou telle intensité, connaissant la température mesurée. La solution retenue est alors celle qui possède la probabilité la plus haute.

La méthode probabiliste proposée dans cette partie repose sur l'approche bayésienne.

4.3.1 Approche bayésienne

L'inférence bayésienne est une méthode statistique qui permet de calculer les probabilités de diverses causes hypothétiques à partir de données observées, ou connues. Elle est directement issue du théorème de Bayes, un mathématicien britannique. À sa mort en 1761, Thomas Bayes laisse à Richard Price ses travaux, qui décide alors de publier l'article [116] en 1763. L'énoncé de ce théorème s'écrit :

$$P(H | E) = \frac{P(E | H) \cdot P(H)}{P(E)} \quad (4.32)$$

Chaque paramètre de l'équation (4.32) est défini par :

- E : *evidence*, correspond aux données. Dans le cas du problème étudié, il s'agit de la température mesurée.
- H : *hypothesis*, correspond à l'hypothèse qu'on cherche à estimer (ici position et intensité de la source).
- $P(E)$: *model evidence*, est un facteur qui est le même pour toutes les hypothèses H testées.

- $P(H)$: *prior*, est la probabilité de l'hypothèse H **avant** d'avoir la donnée E , c'est à dire qu'on ne suppose aucune donnée connue.
- $P(E|H)$: *likelihood*, est la probabilité d'observer les données E connaissant l'hypothèse H .
- $P(H|E)$: *posterior*, est la probabilité de l'hypothèse H **connaissant** la donnée E . C'est la probabilité que l'on cherche à connaître.

Pour pouvoir déterminer la probabilité recherchée, $P(H|E)$, il est donc nécessaire de calculer la *prior* et la *likelihood* pour chaque hypothèse testée. Les méthodes pour calculer chacune de ces entités sont détaillées dans [82, 95, 115].

La *likelihood* permet d'indiquer la compatibilité entre la répartition de sources testée et la mesure observée. De son côté, la *prior* peut s'interpréter comme une connaissance partielle, ou *a priori*, de la cause. Dans le cas de la reconstruction de sources, elle va traduire l'équiprobabilité des positions recherchées : toutes les positions ont autant de chances de contenir une source. Ce type de *prior* est qualifié de *noninformative*. L'étude et l'interprétation de ce genre de *prior* dans l'approche bayésienne est détaillé par [160].

Pour rappel, l'objectif du problème de reconstruction de sources consiste à déterminer l'inconnue Ω à partir de l'équation suivante :

$$\mathbf{I}\Omega + \varepsilon = \theta_{mes} \quad (4.33)$$

où ε correspond au bruit de mesure dont on suppose connue la densité de probabilité (et en particulier sa covariance Γ). D'après [95], la *posterior* peut alors s'écrire :

$$P(\Omega | \theta_{mes}) \propto \chi(\Omega) \exp \left(-\frac{1}{2\Gamma^2} \|\theta_{mes} - \mathbf{I}\Omega\|_2^2 \right) \quad (4.34)$$

où χ correspond à la fonction caractéristique définie sur le domaine Ω . Afin de visualiser le fonctionnement de l'approche bayésienne, un cas simple est détaillé par l'exemple suivant.

Exemple : approche de Bayes sur le cas d'une source ponctuelle

Prenons le cas d'une source ponctuelle positionnée à une profondeur z_0 d'un matériau 1D comme illustrée sur la figure 4.17. La température résultante, mesurée à la surface, est ensuite bruitée afin d'étudier la robustesse de la méthode pour différent niveaux de bruit. Comme explicité dans le chapitre 3, θ_{mes} est un vecteur de taille m (nombre de pas

de temps), $\mathbf{I}$ une matrice de taille m par n (nombre de sources à reconstruire). À titre indicatif, dans l'exemple proposé ici, $m = 100$ et $n = 25$.

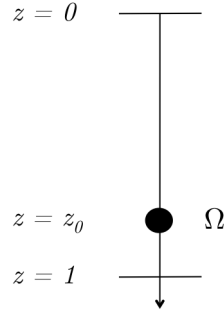


FIGURE 4.17 – Schéma de l'exemple étudié pour l'approche bayésienne.

Hypothèse importante : dans cet exemple, on suppose connus :

- L'intensité de la source : $I = 1$
- Le nombre de point source : 1.

Dans ce cas, la seule inconnue recherchée est donc la position de la source. Cette hypothèse est très réductrice et rarement (sinon jamais) vérifiée en pratique. Cependant, elle a été volontairement choisie pour expliciter de manière simple le fonctionnement de la méthode probabiliste utilisée. Les cas réels avec des sources multiples, étendues ou d'intensités différentes seront traités par la suite.

La stratégie proposée repose sur une itération temporelle. Les étapes de l'algorithme sont les suivantes :

- Initialiser P_Ω à 1 (vecteur de taille n rempli de 1)
- Pour chaque pas de temps i allant de 1 à m
 - Poser $T_i = \theta_{mes}(i)$
 - Pour chaque position j allant de 1 à n
 - Calculer toutes les *likelihood* définies par :

$$Lk(i, j) = \exp\left(-\frac{1}{2\Gamma^2}\|T_i - \mathbf{I}(i, j)\|_2^2\right) \quad (4.35)$$

→ Définir toutes les *prior* par :

$$Pr(i, j) = 1 \quad (4.36)$$

→ Une fois toutes les *likelihood* et *prior* définies, calculer les *posterior* :

$$P_{post}(i, j) = Pr(i, j) \cdot Lk(i, j) \quad (4.37)$$

→ Calculer la répartition de probabilité pour le vecteur Ω :

$$P_{\Omega}(j) = P_{\Omega}(j) \cdot P_{post}(i, j) \quad (4.38)$$

→ Fin

→ Fin

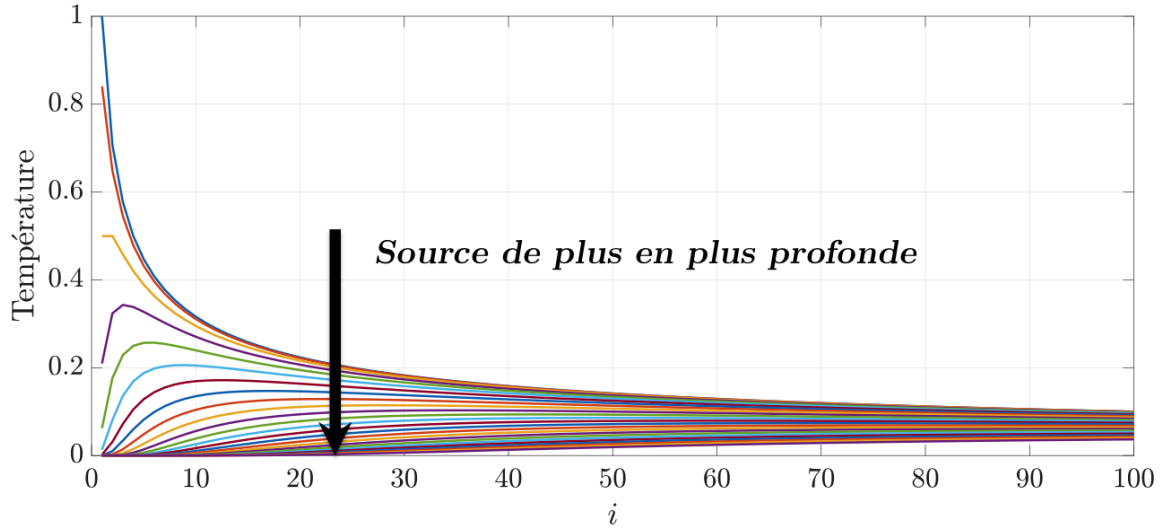


FIGURE 4.18 – Profils des températures théoriques mesurées à la surface pour chaque position de source ayant la même intensité.

Chaque coefficient j du vecteur P_{Ω} correspond à la probabilité qu'il y ait une source thermique à la position j du vecteur Ω . Au départ, toutes les positions sont potentiellement des sources, d'où l'initialisation à 1 à la fois de P_{Ω} , mais aussi de toutes les *prior* définies par l'équation (4.36). À chaque pas de temps, le rôle de la *likelihood* est de se demander : "s'il y a une source à la position j , est ce que c'est cohérent avec la température mesurée ?". Si la réponse est positive, de par la définition donnée par l'équation (4.35)

avec l'intervention de l'exponentielle, la *likelihood* va prendre une valeur proche de 1, et dans le cas contraire, elle sera proche de 0.

Pour chaque pas de temps, la méthode renvoie une solution P_Ω qui correspond à la répartition probable des sources sur le domaine étudié. Aux temps courts, elle va donc permettre de retrouver les sources les plus proches de la surface, tandis que les sources les plus profondes seront repérées aux temps longs. Cela est mis en évidence sur la figure 4.18 où le profil des températures obtenues pour chaque position de source est représenté en fonction du nombre d'itérations (toutes les données ont été normalisées de telle sorte à étudier les variations de températures entre 0 et 1). On observe qu'à l'itération $i = 1$, seules les températures des quatre sources les plus proches de la surface sont différentiables. Plus le temps augmente, plus les températures des sources les plus profondes augmentent et se différencient les unes des autres, tandis que les températures des sources proches de la surface se confondent.

Puisque, d'après l'équation (4.38), il prend en compte la répartition de sources obtenues au temps précédent, le résultat obtenu à la fin de l'algorithme P_Ω donne la répartition de sources qui approche au mieux le champ de température mesuré θ_{mes} dans sa totalité. Afin de comprendre le rôle des paramètres de l'algorithme par approche bayésienne, la figure 4.19 trace, à chaque pas de temps i , en **(a)** la *likelihood*, et en **(b)** la probabilité cumulée P_Ω obtenues pour l'exemple étudié, avec un SNR de 100.

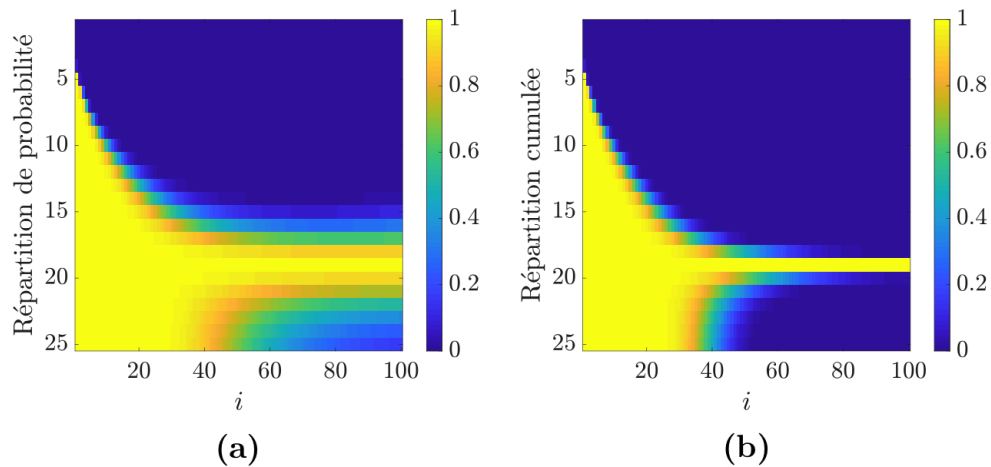


FIGURE 4.19 – Répartition de probabilité obtenue à chaque pas de temps : illustration des *likelihoods* **(a)** et des probabilités cumulées P_Ω **(b)** obtenues sur l'exemple.

On remarque que pour les premières itérations, toutes les sources les plus profondes sont encore probables : les *likelihood* valent 1 pour ces positions, tout comme la probabilité cumulée P_Ω . Ce résultat est cohérent avec la figure 4.18. En effet, les premières itérations correspondent aux temps courts, où les températures des sources les plus profondes ne sont pas dissociables. En revanche, les *likelihood* des sources les plus proches de la surface sont nulles : la probabilité qu'il y ait une source à ces positions est nulle. Plus le temps augmente, plus il est possible de différencier les sources profondes. Enfin, à partir de l'itération 40, il n'y a plus que la source réelle qui a une probabilité de 1.

La figure 4.20 trace les résultats obtenus à l'issu de l'algorithme pour trois niveaux de bruit : SNR = 10 (a), SNR = 50 (b) et SNR = 100 (c).

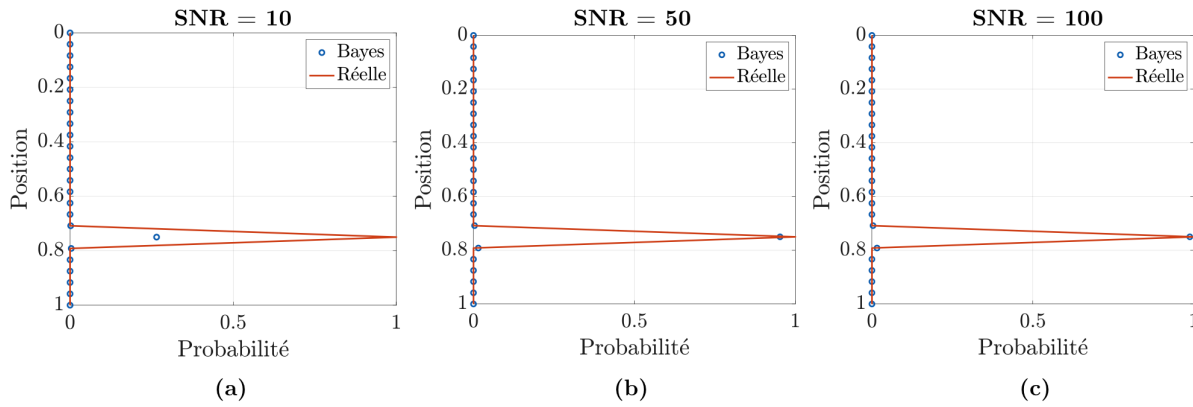


FIGURE 4.20 – Probabilité de la répartition de sources retrouvée par méthode bayésienne, pour SNR = 10 (a) et SNR = 50 (b) et SNR = 100 (c) sur le champ de température.

Quel que soit le niveau de bruit, la position de la source est parfaitement retrouvée. Là où il n'y a pas de sources, la probabilité retrouvée est de zéro, tandis que là où se trouve la source, la probabilité est beaucoup plus élevée. Pour un SNR égal à 50 ou 100, les probabilités que la source soit à la position z_0 recherchée valent respectivement 0.95 et 0.99, ce qui est tout à fait acceptable. Si le niveau de bruit est très important, SNR = 10, la probabilité retrouvée est beaucoup plus faible (0.30). La fiabilité du résultat semble plus contestable. Cependant, comme les probabilités des autres positions sont à zéro, dont les voisines, la position de la source est trouvée de manière indéniable. La faible valeur de probabilité provient du fort niveau de bruit.

Hypothèse allégée : Supposons maintenant que l'intensité de la source soit inconnue. On recherche donc conjointement la position et l'intensité d'une source ponctuelle.

Dans ce cas, un paramètre lié à l'intensité est ajouté à l'algorithme précédent. Ce paramètre peut être enregistré sous forme d'un vecteur qui échantillonne de manière linéaire les intensités possibles (par exemple de 0.1 à 1.) À chaque pas de temps, les *likelihood* et *posterior* ne sont plus des vecteurs mais des matrices. La figure 4.21 donne le résultat obtenu pour le cas d'une source positionnée en $z_0 = 0.8$ avec une intensité de 0.5 pour un SNR de 50.

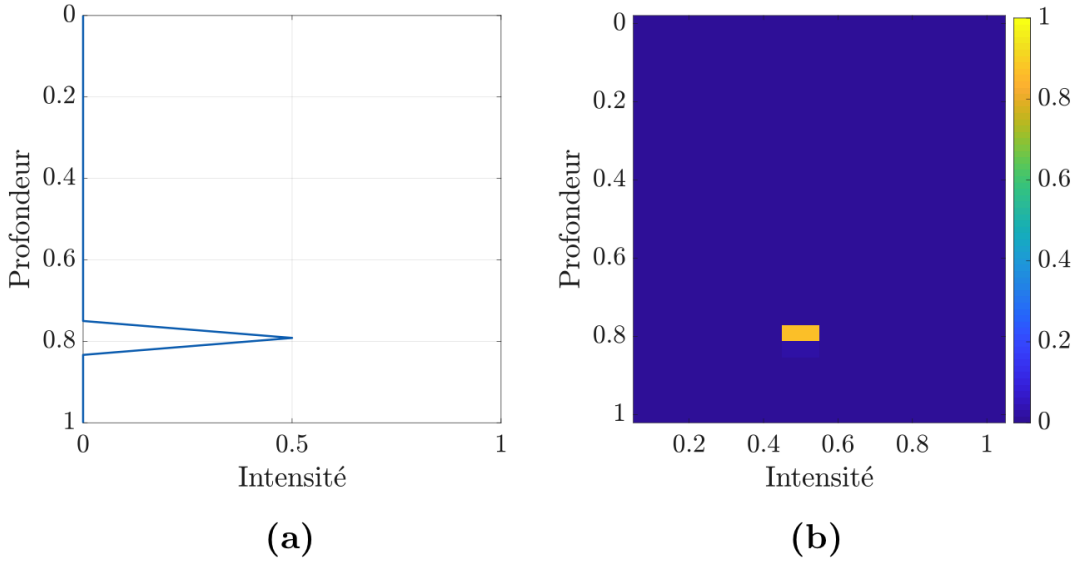


FIGURE 4.21 – Reconstruction de la position et de l'intensité d'une source ponctuelle : source réelle (a) et répartition de la probabilité obtenue (b).

On observe que la position de la source ainsi que son intensité sont parfaitement retrouvées. La probabilité qu'elle soit en position 0.8 avec une intensité de 0.5 est de 0.8. Toutes les autres combinaisons ont une probabilité quasi-nulle. Ainsi, la méthode probabiliste permet de retrouver la position et l'intensité d'une source à partir d'un profil de température, même si cette mesure est fortement bruitée.

Il est intéressant de noter que l'approche bayésienne utilisée ici n'est *pas* une inversion au sens strict. Cette méthode consiste simplement à comparer la température mesurée avec les températures théoriques, répertoriées dans la matrice $\mathbf{I}$, de chaque position de source possible. À l'issue de ces comparaisons, la solution retenue est celle qui va correspondre le mieux aux données observées.

4.3.2 Étude et généralisation de la méthode 1D

Dans la partie précédente, une méthode par approche bayésienne pour reconstruire les sources thermiques a été présentée, puis testée sur un cas trivial. Dans cette section, une évaluation des performances de cette méthode probabiliste est réalisée en fonction du bruit et des données d'entrée. Ensuite, la méthode va être développée afin de pouvoir reconstruire un profil de sources quelconques.

Étude de sensibilité

L'algorithme par approche bayésienne est exécuté de telle sorte que les sources les plus profondes sont estimées aux temps longs. La durée de l'expérimentation, ou tout du moins l'intervalle de temps pris en compte, est donc un paramètre de première importance. En effet, il faut que toutes les températures répertoriées dans la matrice $\mathbf{I}$ puissent être différentiables. En d'autres termes, l'intervalle de temps retenu doit être suffisamment grand pour que la température de la source la plus profonde (en supposant qu'il y ait une source) arrive à la surface. Mais en contrepartie, aux temps longs, toutes les températures convergent vers la même valeur (*cf.* figure 4.18). Toutes les températures sont alors indifférenciées, rendant toutes les positions de sources équiprobables. Ces données sont donc inutiles pour l'algorithme par approche bayésienne. Notons t_{opt} le temps optimal de la mesure. Il est défini tel que :

$$t_{opt} = \frac{L^2}{2a_z} \quad (4.39)$$

Il s'agit du temps caractéristique au bout duquel la température de la source la plus profonde est mesurable par la caméra IR.

Le nombre de pas de temps, autrement dit le nombre de mesures de température, est aussi un paramètre important. En effet, d'après la formule (4.39) le temps caractéristique permettant de dissocier les sources dépend du carré de leur distance. Les positions décelables par l'étude de la température de surface sont tracées en fonction du temps sur la figure 4.22, en échelle normalisée. Les sources les plus proches de la surface sont rapidement décelables. De plus, comme l'illustre la figure 4.18, leur profils de températures sont très différents, ce qui permet de les identifier en peu de temps. En revanche, plus les sources sont profondes, plus il faut attendre pour les déceler. En outre, leur profils de température sont peu différentiables. Un nombre important de pas de temps est donc nécessaire pour les repérer. Ainsi, le nombre de pas de temps, c'est-à-dire la fréquence d'acquisition de la caméra IR, doit être choisi suffisamment élevé pour pouvoir repérer toutes les sources.

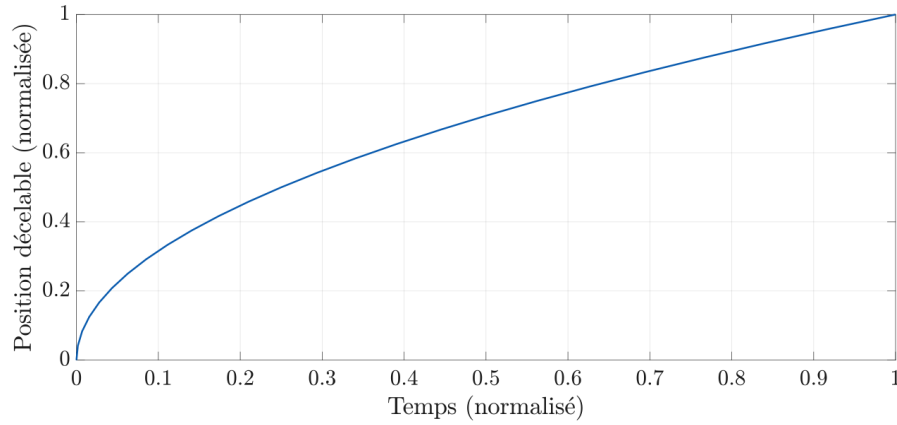


FIGURE 4.22 – Position des sources décelables par étude du champ de température de surface en fonction du temps.

Enfin, une étude en fonction du bruit a été effectuée. Les solutions obtenues précédemment et illustrées sur la figure 4.20 ont permis d’observer que plus le SNR est élevé, plus la fiabilité de la solution est importante (probabilité avoisinant la valeur 1). La figure 4.23 donne l’erreur commise entre la répartition de probabilité obtenue et celle théorique **(a)**, et la valeur de la probabilité obtenue à la position z_0 **(b)** pour des SNR variant de 10 à 10^5 . La focalisation sur le point z_0 n’est pas anodine puisque nous avons vu que les autres positions sont parfaitement estimées (probabilité ≈ 0) et qu’elle semble être la position la plus critique à évaluer.

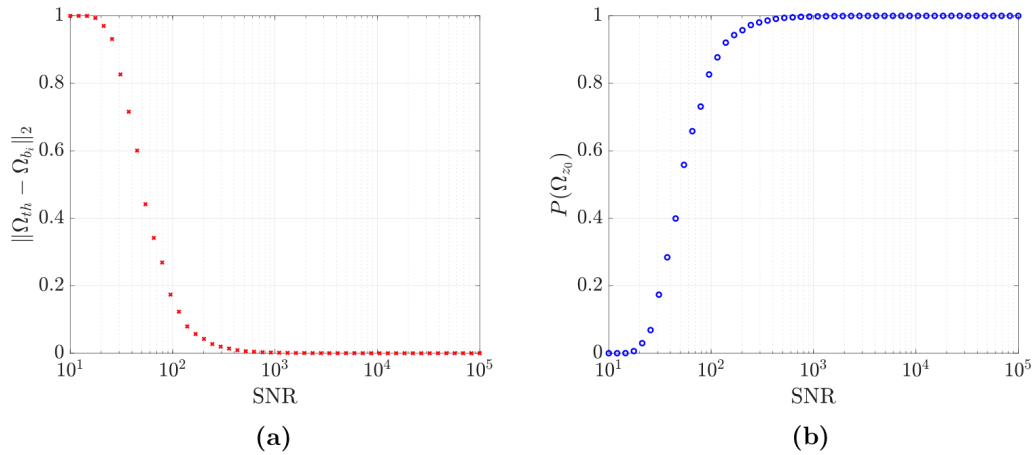


FIGURE 4.23 – Norme de l’erreur commise entre la reconstruction et la théorie **(a)** et valeur de la probabilité obtenue en z_0 **(b)** en fonction du niveau de bruit.

Ces deux graphes sont fortement liés, puisque s'il y a une erreur entre l'estimation et la solution réelle, cette erreur aura lieu en majorité au point z_0 . D'après les résultats observables, l'erreur diminue exponentiellement entre $\text{SNR} = 10$ et $\text{SNR} = 1000$. À partir de $\text{SNR} = 1000$, l'erreur est faible et constante quel que soit le niveau de bruit. La probabilité observée au point z_0 suit la même tendance : pour $\text{SNR} = 10$, la probabilité est faible, mais elle augmente exponentiellement jusqu'à $\text{SNR} = 1000$ (échelle logarithmique). Pour tous les niveaux de bruits inférieurs (correspondant aux SNR supérieurs), la probabilité est maximale (valeur = 1). On peut cependant considérer que dès $\text{SNR} = 100$, l'erreur obtenue est suffisamment faible pour pouvoir retrouver la source de manière adéquate.

Concrètement, cela veut dire que la méthode par approche bayésienne est hautement fiable, et peu sensible au bruit. Le niveau de bruit obtenu expérimentalement est rarement inférieur à $\text{SNR} = 50$, et dans l'hypothèse où ce serait le cas, il est toujours possible de traiter les données en amont de la reconstruction pour les débruiter au maximum, comme explicité au début de ce chapitre.

Généralisation 1D multi-sources de même intensité

Dans le cas réel, l'**hypothèse importante** d'unicité considérée précédemment est rarement vérifiée. De plus, si on sait par avance qu'il n'existe qu'une seule source, peu importe son intensité, l'approche bayésienne serait peu justifiée, car il existe des méthodes plus simples et plus directes pour la caractériser, comme la méthode proposée à la fin du chapitre 3.

Soit n le nombre de sources potentielles. Supposons pour l'instant que toutes les intensités sont identiques (normalisées à 1 pour simplifier). Le nombre de solutions possibles N_Ω est alors déterminé par la somme des coefficients binomiaux :

$$N_\Omega = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad (4.40)$$

Si on suit la même logique que pour l'exemple précédent, il faudrait, à chaque pas de temps, comparer la température avec les 2^n possibilités de sources. Pour $n = 25$, on a :

$$2^{25} = 33\,554\,432 \approx 10^7 \quad (4.41)$$

ce qui, rien que pour l'exemple présenté avec 100 pas de temps, mènerait à plus d'un

milliard de *likelihood* à effectuer. Même en optimisant l'algorithme, le nombre de calculs est phénoménal. Cette méthode est donc évidemment à proscrire.

Pour ce type de problème, les méthodes de Monte-Carlo par Chaînes de Markov (MCMC) sont fréquemment utilisées [95, 161]. Historiquement, elles sont apparues au milieu du XIX^e siècle pour la physique statistique et se sont rapidement développées grâce aux progrès de l'informatique [162–164]. Ces méthodes stochastiques permettent de simuler une distribution à l'aide d'une chaîne de Markov. De manière simplifiée, le problème est le suivant : comme mentionné précédemment, le nombre de possibilités est faramineux. Il ne faut donc pas toutes les tester. Au départ, une répartition de source aléatoire est proposée. Parmi les répartitions "voisines" de cette dernière, la solution retenue sera celle qui sera la plus probable. De proches en proches, la méthode va converger vers la solution qui correspond le mieux aux données. Les méthodes MCMC peuvent cependant être assez lourdes, le nombre de cas testés reste toujours important.

La méthode présentée par la suite propose de s'affranchir des méthodes MCMC en se servant du caractère cumulatif des champs de température. Si T_1 et T_2 sont respectivement la température résultante des source S_1 et S_2 , alors la température résultante de $S_1 + S_2$ est $T = T_1 + T_2$. Comme explicité précédemment, les sources les plus proches de la surfaces sont repérées aux temps courts, les plus profondes aux temps longs.

Le principe est alors le suivant : au cours du temps, dès que la position d'une source est repérée, on soustrait sa contribution (théorique) au champ de température mesuré, et l'algorithme continue avec ces nouvelles données, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'intervalle de temps soit écoulé. L'algorithme présenté précédemment peut alors se généraliser selon le schéma suivant :

- Initialiser P_Ω à 1
- Pour chaque pas de temps i allant de 1 à m
 - Calculer le nombre de sources décelables N_d à ce pas de temps.
 - Si une source a été trouvée à $i-1$, noter d sa position et recalculer le nouveau champ de température :

$$\theta_{mes} = \theta_{mes} - \mathbf{I}(\cdot, d) \quad (4.42)$$

- Poser $T_i = \theta_{mes}(i)$.
- Pour j allant de $d+1$ à N_d calculer toutes les *likelihood* avec la nouvelle

valeur T_i :

$$Lk(i, j) = \exp \left(-\frac{1}{2\Gamma^2} \|T_i - \mathbf{I}(i, j)\|_2^2 \right) \quad (4.43)$$

→ Calculer la répartition de probabilité pour le vecteur P_Ω

→ Fin

→ Fin

L'algorithme retrouve les sources les unes après les autres en partant de la surface. Ainsi, si au temps i il trouve une source à la position d , cela veut dire qu'il n'y a pas de sources entre la position 1 et $d - 1$ (s'il y en avait, elles auraient été retrouvées et "supprimées" aux temps précédent). Ainsi, pour les temps suivants, dans le seul but d'optimiser le temps de calcul de l'algorithme, il suffit de chercher des sources à partir de la position $d + 1$ pour les itérations suivantes. De la même manière, on sait que le nombre de sources décelables augmente en fonction du temps (*cf.* figure 4.22). Il n'est donc pas utile de chercher toutes les sources à chaque pas de temps, mais uniquement jusqu'à la source la plus profonde décelable N_d .

Une source ponctuelle est localisée lorsque sa probabilité est forte et que celle de chacune de ses voisines est faible, voire nulle (formation d'un "pic" : *cf.* figure 4.20). Une méthode pour la repérer est donc d'étudier la dérivée de la répartition P_Ω à chaque pas de temps : le pic va se traduire par un changement de signe dans cette dernière.

À chaque fois que l'algorithme détecte une source, il supprime sa contribution **théorique** du champ de température mesuré pour pouvoir détecter de potentielles sources plus profondes. Par conséquent, le bruit de mesure associé à cette source subsiste. Ce biais n'est cependant pas gênant puisque la méthode est robuste au bruit.

La figure 4.24 illustre les résultats obtenus avec cet algorithme sur un exemple 1D contenant plusieurs sources. Le SNR du champ de température est pris à 50. On peut observer en **(a)** que les positions des sources sont toutes retrouvées, et que leurs probabilités varient entre 0.87 et 0.98, garantissant la fiabilité du résultat. Sur le graphe de droite **(b)** sont tracés les profils de température avant et après la reconstruction. En effet, dès qu'une source est détectée, l'algorithme soustrait sa contribution au profil de température mesuré. À la fin de l'algorithme, si toutes les sources ont bien été retrouvées, il ne doit subsister que le bruit de mesure. C'est bien ce qui est observé sur cet exemple. Une méthode pour vérifier la pertinence du résultat est donc d'étudier ce résidu : s'il est de l'ordre de grandeur

du bruit, alors, la solution est cohérente. Sinon, cela veut dire qu'une ou plusieurs sources ont été mal reconstruites.

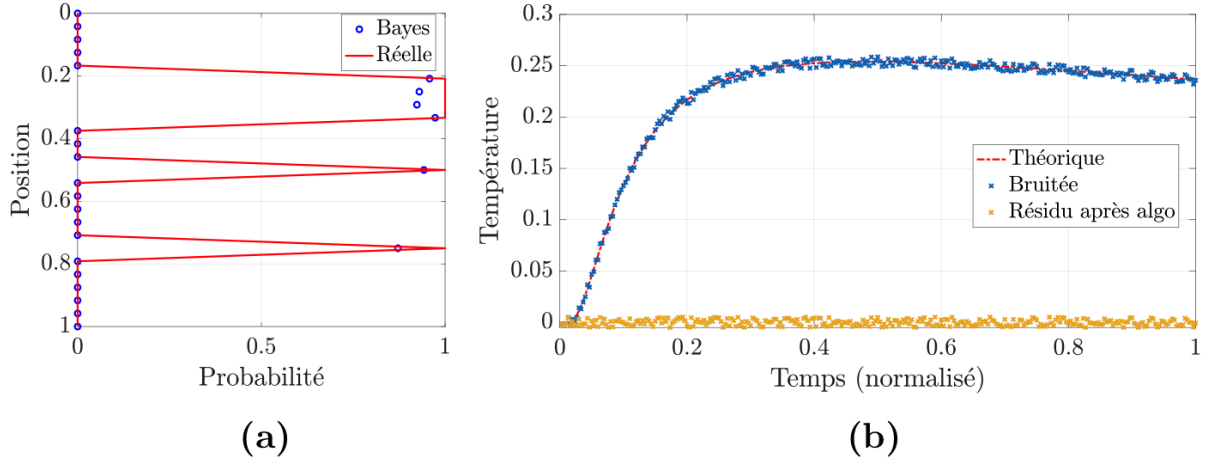


FIGURE 4.24 – Application de la méthode par approche bayésienne sur un exemple multi-sources 1D : comparaison de la répartition obtenue avec le cas réel (a) et profil des champs de température (bruités et théoriques) ainsi que du résidu de température obtenu à la fin de l'algorithme (b).

En conclusion, une méthode utilisant l'approche bayésienne a été présentée dans ce paragraphe pour la reconstruction de sources thermiques. Cette méthode, développée ici sur le problème 1D, est très peu sensible au bruit de mesure et reconstruit les sources thermiques à l'aide des probabilités. Elle utilise le caractère cumulatif (principe de superposition) des champs de température pour retrouver des sources étendues (ou situées les unes au dessous des autres), permettant ainsi de s'affranchir des méthodes MCMC, classiquement utilisées en inférence bayésienne. Le programme qui reconstruit les sources est par conséquent très rapide à exécuter.

4.4 Généralisation et perspectives

Dans ce paragraphe, des exemples et quelques perspectives sont proposés pour la généralisation de cette approche au problème 3D. Cette méthode est en effet **en cours de résolution** et n'est **pas encore finalisée**. Une comparaison des deux méthodes présentées dans ce chapitre (déterministe et probabiliste) est ensuite effectuée afin de souligner les avantages et inconvénients respectifs de chacune d'entre elles. Une discussion sur les perspectives envisagées pour la reconstruction de sources volumiques clôture cette partie.

4.4.1 Généralisation 3D de la méthode probabiliste

On cherche à généraliser la méthode probabiliste pour reconstruire des sources 3D (étendues selon les trois directions spatiales x , y et z). On suppose pour l'instant que leurs intensités sont identiques. Dans le matériau 3D, chaque source thermique diffuse dans toutes les directions. Cependant, à la surface, la température résultante est d'abord perçue au droit de la source. Puisque l'algorithme par approche bayésienne reconstruit les sources niveau par niveau, et supprime immédiatement la contribution d'une source dès qu'elle est estimée, l'idée est de décomposer le problème 3D en un ensemble de problèmes 1D traités simultanément.

En chaque point de la surface du matériau (correspondant à un pixel de la caméra IR), une température en fonction du temps peut être mesurée. À chaque pas de temps, l'algorithme de Bayes 3D va considérer simultanément chacun des points de surface et "sonder" le matériau en les supposant indépendants. Toutes les sources situées à un même niveau vont arriver au même temps à la surface et donc être estimées au même moment. La seule nuance ici est qu'en chaque pixel, le modèle utilisé dans la *likelihood* est la réponse thermique 3D, où les positions x' et y' de la source sont supposées connues (position du pixel étudié). De plus, une fois une source estimée, il faut supprimer sa contribution sur *l'ensemble* de la surface, et non pas uniquement au droit de la source.

Un exemple, illustré par la figure 4.25, est traité ici pour montrer les premiers résultats obtenus par cette méthode. Dans cette étude, les sources thermiques sont disposées sur un plan (π) perpendiculaire à la surface de mesure. Les sources ont toutes la même intensité, normalisée à 1, que l'on suppose connue. Seules les positions des sources sont recherchées dans cet exemple.

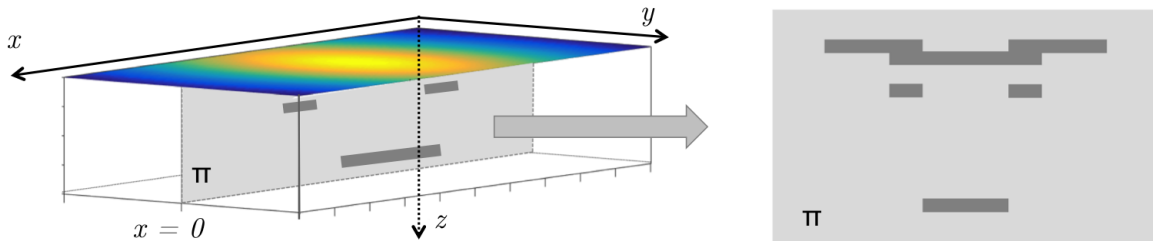


FIGURE 4.25 – Profil des sources réparties dans un plan vertical à la surface de mesure.

Le matériau est considéré ici isotrope, d'épaisseur 1 cm. Les nombres de Fourier sont

pris tels que $Fo_x = Fo_y = 10^{-1}$. Le niveau de bruit sur ce cas numérique est défini par $SNR = 100$. Sur ce cas d'école, en chacun des 10 pixels de la surface, 20 sources en profondeur sont recherchées.

La figure 4.26 illustre les résultats obtenus sur un exemple de sources réparties sur un plan perpendiculaire à la surface de mesure (suivant le même principe que sur la figure 4.6). En (a) se trouve la répartition de sources réelle, et en (b) l'estimation retrouvée par l'algorithme bayésien.

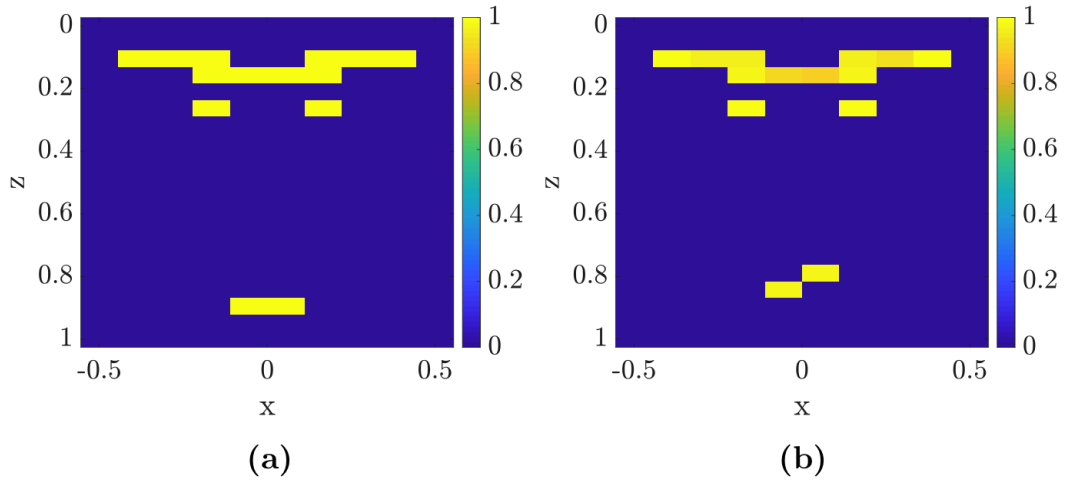


FIGURE 4.26 – Répartition réelle des sources (a). Estimations des positions des sources données par méthode probabiliste (b).

Le temps d'exécution de l'algorithme pour cet exemple a été de 0.02s sur l'ordinateur Mac16 dont les informations systèmes sont données en annexe D (contre 0.37s pour le même exemple avec la méthode classique). On peut observer que les sources les plus proches de la surface sont parfaitement reconstruites. En revanche, pour les sources plus profondes, la position retrouvée est légèrement mésestimée comme elles sont reconstruites plus proche de la surface qu'elles ne le sont. Le fait que les deux sources les plus profondes ne sont pas retrouvées à la même profondeur sur le graphe (b) (alors que le problème est symétrique) est due à la présence de bruit.

Concernant le cas plus général où les sources ne sont pas forcément de même intensité, l'idée est pour l'instant de travailler comme pour le problème 1D, c'est à dire de chercher l'intensité et la position en même temps. Chaque *likelihood* est alors une matrice en deux dimensions (une dimension pour la position, l'autre pour l'intensité).

4.4.2 Points forts et limitations de chaque méthode

Comme explicité précédemment, le problème de reconstruction de sources thermiques peut s'aborder soit de manière déterministe via l'approche classique, soit de manière probabiliste via l'approche bayésienne. Le principe et quelques exemples de chacune de ces méthodes ont été présentés dans les paragraphes §4.2 et §4.3. Dans cette partie, ces deux méthodes sont comparées et leurs avantages et inconvénients respectifs soulignés.

La première différence entre ces deux algorithmes réside dans le temps d'exécution du programme. La mise en place de chaque méthode est identique (définition du problème direct et donc du modèle). La différence commence au moment de l'inversion. Pour la méthode déterministe, le calcul de la S.V.D. de la matrice $\mathbf{I}$ est une des étapes qui conditionne le temps d'exécution du programme. La complexité de la S.V.D. est en $\mathcal{O}(n_t(n_y n_x)^2 n_z)$. À ce temps de calcul s'ajoute le temps d'exécution de la régularisation. La complexité de l'algorithme bayésien, quant à lui, est en $\mathcal{O}(n_t n_z)$. Pour un problème 1D, il n'y a pas de différence : le calcul est quasiment instantané. En revanche, la méthode bayésienne sera beaucoup plus rapide que la méthode classique pour les problèmes 3D.

Au niveau de la justesse de la reconstruction, la figure 4.27 illustre les résultats obtenus sur différents exemples et souligne les limites de chacune des méthodes. Toutes les sources sont de même intensité sur ces exemples. Le niveau de bruit est défini par $\text{SNR} = 100$.

Pour des cas simples (source unique étendue, ou plusieurs sources distinctes comme en figure 4.13), la méthode classique reconstruit la position des sources sans erreur. En revanche, les intensités ne seront pas correctement estimées ((a) et (c)). De plus, pour des cas complexes (plusieurs sources rapprochées et en particulier si la source la plus proche de la surface est importante comparées aux plus profondes), les sources les plus profondes seront mal retrouvées (*cf.* figure (e)). Cette erreur est due au terme de régularisation. Comme explicité au paragraphe §4.2, ce terme était nécessaire pour stabiliser l'inversion. Cependant, il ajoute un biais au problème initial : le problème résolu ne correspond plus au problème initial.

L'approche probabiliste n'est pas confrontée aux mêmes limites. En premier lieu, elle est peu sensible au bruit, comme explicité à la partie §4.3, et ne nécessite aucun terme de régularisation. Des sources étendues proches de la surface sont parfaitement reconstruites (b). Le cas complexe d'une source étendue et de sources ponctuelles mais profondes ne

présente pas de difficultés. Puisque la méthode retrouve les sources "point par point" et supprime leur contribution au cours de l'algorithme, la reconstruction est parfaite **(f)**. En revanche, la principale difficulté rencontrée par la méthode probabiliste réside dans la recherche de sources étendues et profondes. En effet, comme illustré en **(d)**, la méthode bayésienne a tendance à trouver une première source plus proche de la surface qu'elle ne l'est en réalité, entraînant par la suite de nouvelles erreurs. Ces erreurs sont accentuées lorsque l'intensité des sources sont différentes et que le programme cherche ces dernières en parallèle des positions.

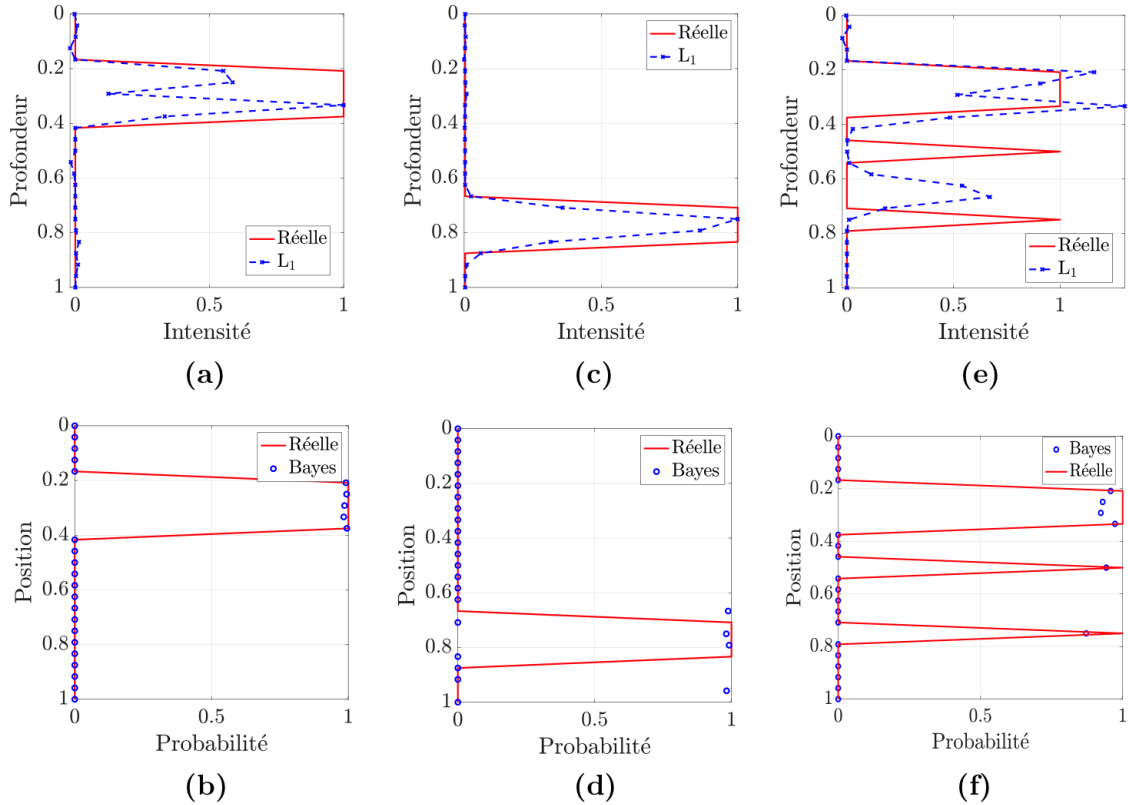


FIGURE 4.27 – Reconstruction d’une source étendue proche de la surface par approche classique **(a)** et par approche bayésienne **(b)**. Reconstruction d’une source étendue profonde par approche classique **(c)** et bayésienne **(d)**. Reconstruction de plusieurs sources par approche classique **(e)** et bayésienne **(f)**.

En effet, si deux sources proches sont d’intensités différentes, l’algorithme par approche bayésienne va avoir tendance à reconstruire une unique source d’intensité la moyenne des deux sources. Cette erreur vient du fait que l’algorithme favorise la reconstruction de point-sources de par sa construction. Pour plus de clarté, les principaux résultats sont résumés dans le tableau 4.1.

	Déterministe	Probabiliste
Complexité	$\mathcal{O}(n_t(n_y n_x)^2 n_z)$	$\mathcal{O}(n_t n_z)$
Sensibilité au bruit	Très forte (régularisation nécessaire)	Faible
Reconstruction	Sources profondes non reconstruites si présence de sources étendues proches de la surface	Sources profondes étendues mésestimées
Intensité des sources	Mésestimées	Mésestimées si différentes entre les sources

TABLEAU 4.1 – Comparaison entre les méthodes de reconstruction de sources thermiques par approche déterministe et par approche probabiliste.

En conclusion, la méthode déterministe est aujourd’hui fonctionnelle à condition que le profil des sources ne soit pas trop complexe. Elle permet de retrouver la géométrie et la position des sources étendues. Cependant, son temps d’exécution est très important en comparaison à la méthode probabiliste. Enfin, sa forte dépendance au bruit rend nécessaire l’ajout de termes de régularisation, qui apporte forcément un biais à la solution recherchée.

Concernant la méthode probabiliste, sa faible sensibilité au bruit couplée à son rapide temps d’exécution la rend attractive. Elle possède aujourd’hui plusieurs limitations : des erreurs de reconstructions peuvent en effet avoir lieu lorsque les sources sont profondes et étendues, ou que les intensités des sources sont différentes.

4.4.3 Perspectives pour la reconstruction de sources volumiques

Dans le paragraphe précédent, la mise en avant des avantages et inconvénients de chacune des deux méthodes a montré que la méthode probabiliste était prometteuse. Cependant, ses limitations sont aujourd’hui bien réelles et elle nécessite d’être développée de manière à pouvoir l’utiliser sur des problèmes 3D quelconques.

Couplage des méthodes déterministe et probabiliste ?

Une première possibilité serait de coupler les deux méthodes pour reconstruire au mieux les sources volumiques. L’un des inconvénients de la méthode déterministe est son temps de calcul. Plus le domaine étudié est grand, plus le nombre d’inconnues à retrouver est élevé. Or le temps de calcul de la méthode déterministe augmente de manière quadratique

avec le nombre d'inconnues (du moins selon les directions x et y). La méthode probabiliste, quant à elle, est rapide à calculer, mais peut surestimer la position et ou l'intensité d'une source.

Une première méthode envisagée est de coupler les deux méthodes : une première estimation est calculée par méthode probabiliste sur l'ensemble du domaine. Cette solution permet de cibler la zone où se trouve les sources. La méthode déterministe est alors utilisée sur cette zone restreinte, ce qui permet de réduire son temps de calcul. À l'issue de ce calcul, une répartition de source est proposée. Il est alors possible de vérifier la validité du résultat obtenu à l'aide de la méthode probabiliste en calculant la probabilité de cette solution connaissant le champ de température de surface.

Développement de l'approche probabiliste

Comme mentionné précédemment, les sources profondes et étendues sont mal reconstruites par l'approche probabiliste. Ce résultat vient du fait que les profils des températures des sources profondes sont peu différentiables. Cependant, en étudiant le résidu de la température obtenu après l'algorithme, l'erreur est repérable.

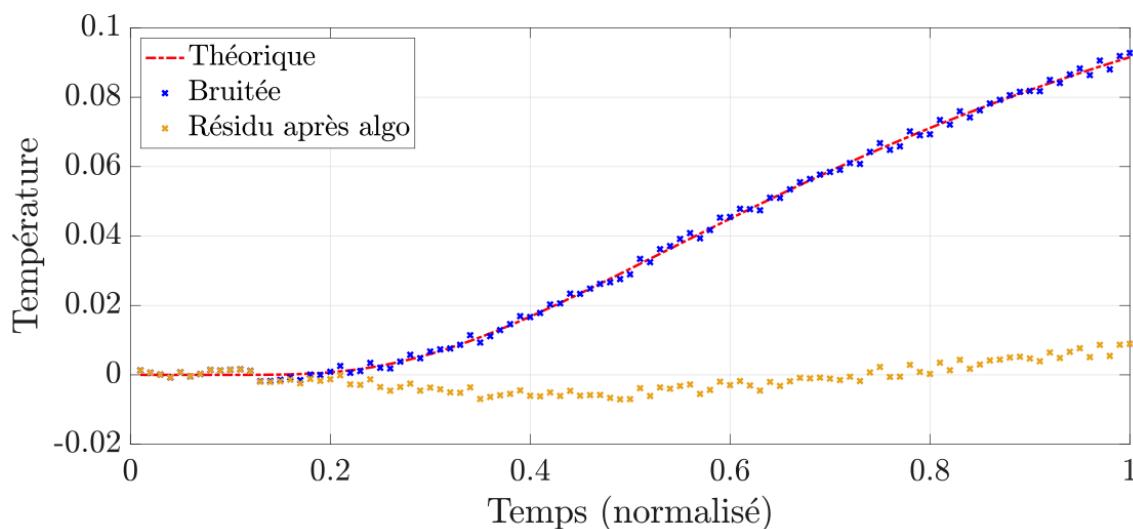


FIGURE 4.28 – Températures théorique et mesurée ainsi que le résidu après l'algorithme bayésien pour la reconstruction d'une source profonde étendue (*cf.* figure 4.27 (d)).

La figure 4.28 donne les températures théorique et mesurée ainsi que le résidu après l'application de l'algorithme bayésien pour la reconstruction de l'exemple présenté par la

figure 4.27 (d). On remarque que le résidu ne se comporte pas comme du bruit blanc : il oscille en passant par les négatifs autour de $t = 0.4$ puis augmente jusqu'à $t = 1$. Le résidu négatif signifie qu'une source a été "surévaluée" : soit avec une intensité plus forte, soit à une position plus proche de la surface (ou les deux).

Comme, à chaque pas de temps, les positions des sources décelables sont connues, il est possible de déterminer la source erronée (*i.e.* la source que l'algorithme avait trouvé mais qui n'est pas correctement reconstruite). L'algorithme bayésien peut donc être à nouveau relancé avec cette nouvelle information de manière à ce qu'il corrige son erreur.

Conclusion

Le bruit de mesure est une difficulté importante pour la reconstruction des sources thermiques. Une étude paramétrique en fonction du bruit a montré que la méthode présentée dans le chapitre 3 est inexploitable du fait de sa sensibilité à la moindre perturbation. En effet, plus le niveau de bruit est important, plus les modes les plus faibles de la S.V.D. sont dominés par le bruit, faisant diverger la solution. Il existe un lien direct entre le SNR, le nombre de Fourier et le nombre de modes indépendants du bruit.

Traiter le bruit en effectuant une S.V.D. du champ de température est une méthode efficace pour filtrer le bruit mais n'est pas suffisante pour stabiliser l'inversion. Il est nécessaire d'ajouter des termes de régularisation pour pouvoir exploiter l'algorithme d'inversion et retrouver correctement les sources thermiques.

Une autre solution consiste à ne plus appréhender le problème de manière déterministe, comme dans l'algorithme d'inversion, mais de l'approcher de manière probabiliste en se servant de l'inférence bayésienne. Contrairement à l'algorithme d'inversion, cette méthode est extrêmement peu sensible au bruit de mesure et est prometteuse pour retrouver avec justesse les profils des sources thermiques présentes au sein d'un matériau.

CHAPITRE 5

Applications numériques et expérimentales

Table des matières

Introduction	138
5.1 Présentation du problème	139
5.2 Application numérique	140
5.2.1 Mise en place du problème thermique	140
5.2.2 Reconstruction de la source volumique	143
5.2.3 Étude sur l'influence du nombre de Fourier	149
5.3 Application expérimentale	155
5.3.1 Mise en place du problème thermique	156
5.3.2 Problème 2D : profondeur supposée connue	161
5.3.3 Problème 3D : profondeur supposée inconnue	171
Conclusion	179

Introduction

Le chapitre 4 a permis de présenter deux méthodes pour la reconstruction de sources thermiques volumiques au sein d'un matériau à partir du champ de température **bruité** mesuré à la surface. Ces deux méthodes, la première déterministe, la seconde probabiliste, ont été étudiées et comparées sur des données **simulées**, calculées à partir de la solution **analytique** d'un problème purement thermique. Le modèle utilisé pour reconstruire les sources était donc le même que celui du problème direct et loin des systèmes de conversion d'énergies. Dans ce chapitre, afin de vérifier la validité des résultats présentés dans les chapitres précédents, ces deux méthodes sont utilisées sur des données qui ne sont pas obtenues avec le modèle analytique, et qui sont en adéquation avec les problèmes multiphysiques liés aux systèmes de conversion d'énergie.

Ici, parmi le grand nombre de systèmes de conversion d'énergie nous avons choisi l'acoustique et l'effet Joule. En effet, la première partie de ce chapitre consiste à utiliser des données numériques calculées à l'aide du logiciel de simulation par éléments finis COMSOL Multiphysics. L'exemple traité est celui de sources thermiques générées par la propagation d'ondes ultrasonores dans un milieu viscoélastique. La deuxième partie utilise des données expérimentales, où les sources thermiques sont générées par effet Joule.

Chacun des résultats présentés dans les chapitres précédents seront étudiés. En particulier, la validité du critère dépendant du nombre de Fourier, l'efficacité de la méthode de "débruitage" du champ de température de surface à l'aide d'une S.V.D. ainsi que les avantages respectifs de chacune des méthodes seront examinés.

5.1 Présentation du problème

L'objectif des deux méthodes présentées dans le chapitre 4 consiste à reconstruire des sources thermiques volumiques enfouies dans un matériau à partir du champ de température de surface. Pour ce faire, chacune de ces méthodes utilise un modèle basé sur la solution analytique de la réponse thermique impulsionnelle d'une source ponctuelle.

Dans ce chapitre, les données d'entrées du problème inverse, à savoir les champs de température de surface, sont obtenues par d'autres moyens que par le modèle analytique du problème inverse. Deux exemples sont en effet traités : le premier numérique à l'aide d'un logiciel de calcul par éléments finis, le second expérimental. Le bruit de mesure, les erreurs dues aux capteurs, les artefacts numériques et toutes les causes d'erreurs explicitées au chapitre 2 sont des facteurs qui entraînent un biais par rapport au modèle de base de la méthode employée pour reconstruire les sources.

L'objectif de ce chapitre est d'appliquer les deux méthodes et de vérifier la validité des résultats présentés dans les chapitres précédents afin de montrer que le modèle utilisé reste valable malgré ces différences.

La méthode par approche déterministe va utiliser les régularisations de Tikhonov et/ou par norme L_1 , nécessaires en raison de la différence de modèles. La méthode probabiliste par approche bayésienne, étant encore en phase de développement pour retrouver conjointement les positions et les intensités des sources en 2D et 3D, est utilisée en supposant toutes les sources de même intensité.

5.2 Application numérique

L'exemple traité dans cette partie est celui de sources thermiques induites par la propagation d'ondes ultrasonores dans un milieu viscoélastique. Les champs de température sont calculés à l'aide du logiciel de calcul par éléments finis COMSOL Multiphysics.

5.2.1 Mise en place du problème thermique

La méthodologie et la mise en place du problème de sonothermographie menant aux champs de température sont détaillées par T. Kouadio *et al.* [62] et B. Hosten *et al.* [63] et ne seront par conséquent pas répétées ici. De manière succincte, l'étude se fait en deux temps : un premier calcul, purement mécanique, mène à la répartition volumique de la dissipation viscoélastique due à la propagation de l'onde acoustique dans le milieu étudié. Ensuite, un calcul thermique est effectué à partir de ces résultats (la répartition de dissipation constitue les sources thermiques) permettant d'avoir accès au champ de température en tout point du milieu, et *a fortiori* en surface du matériau.

Dans cette partie, la simulation a été effectuée sur une plaque de PVC (Polychlorure de Vinyle), dont les caractéristiques principales sont données par le tableau 5.1. La fréquence des ondes ultrasonores qui se propagent dans la plaque est fixée à 28 500 Hz.

Plaque de PVC		
Masse volumique ρ	1 170	kg.m ⁻³
Chaleur spécifique C_p	1 000	J.kg ⁻¹ .K ⁻¹
Coefficient de diffusion a	8.547×10^{-8}	m ² .s ⁻¹
Dimensions $L_x \times L_y \times L_z$	$0.020 \times 0.115 \times 0.0025$	m ³
Ondes Ultrasonores		
Fréquence	28 500	Hz

TABEAU 5.1 – Paramètres de la simulation numérique.

Le champ de dissipation viscoélastique obtenu dans la plaque est illustré par la figure 5.1. En (a) est représentée la répartition de cette dissipation dans tout le volume, et en (b) sur la ligne de coupe selon l'axe z , centrée en x et y .

La dissipation viscoélastique est présente dans tout le volume. Cependant, elle n'est pas uniforme mais périodique selon l'axe de propagation des ondes (axe y sur la figure 5.1).

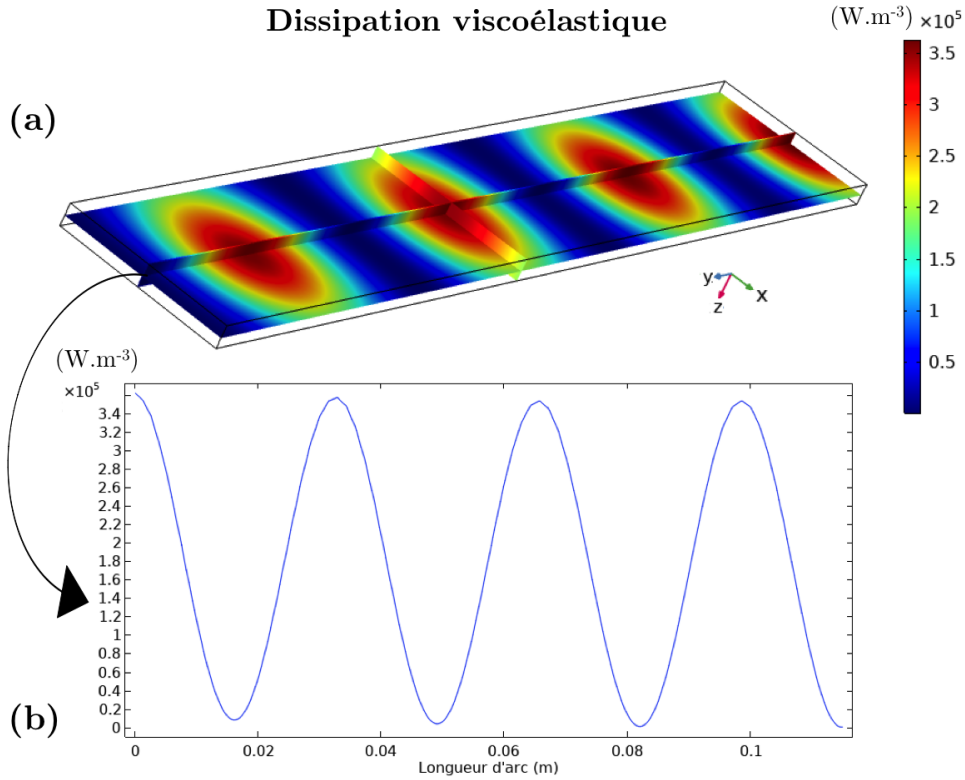


FIGURE 5.1 – Répartition de la dissipation viscoélastique dans la plaque de PVC (a). Valeurs de la dissipation sur la ligne de coupe selon l’axe y , en $x = L_x/2$ et $z = L_z/2$ (b).

Les valeurs de dissipation suivent une loi de type sinusoïdale selon l’axe x , où les maxima et minima coïncident respectivement avec les maxima et minima de déplacement [62, 63]. En revanche, la dissipation viscoélastique est constante dans la profondeur, comme illustré par la figure 5.2.

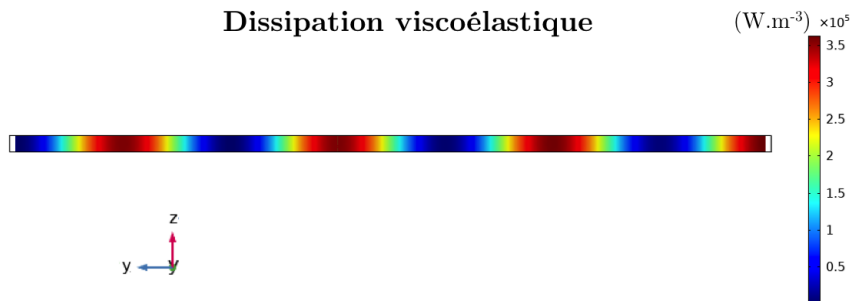


FIGURE 5.2 – Répartition de la dissipation viscoélastique selon la profondeur.

Comme explicité au chapitre 2, la dissipation viscoélastique est directement liée à la source thermique. La figure 5.1 correspond donc à la répartition des sources thermiques (en W.m^{-3}) responsables de l'échauffement de la plaque.

Les sources thermiques générées se répètent de manière périodique selon la direction y de propagation des ondes. Dans cet exemple, l'étude va donc être effectuée sur une zone réduite de manière à ne se focaliser que sur une source volumique. Pour éviter les effets de bords (qui ne sont pour l'instant pas traités par les méthodes), les données d'entrée du problème thermique sont légèrement modifiées : un seuillage sur le champ de dissipation est réalisé de manière à ce que les valeurs plus petites que 3×10^5 soient mises artificiellement à zéro. La figure 5.3 donne le champ de dissipation (qui correspond aux sources thermiques) résultant.

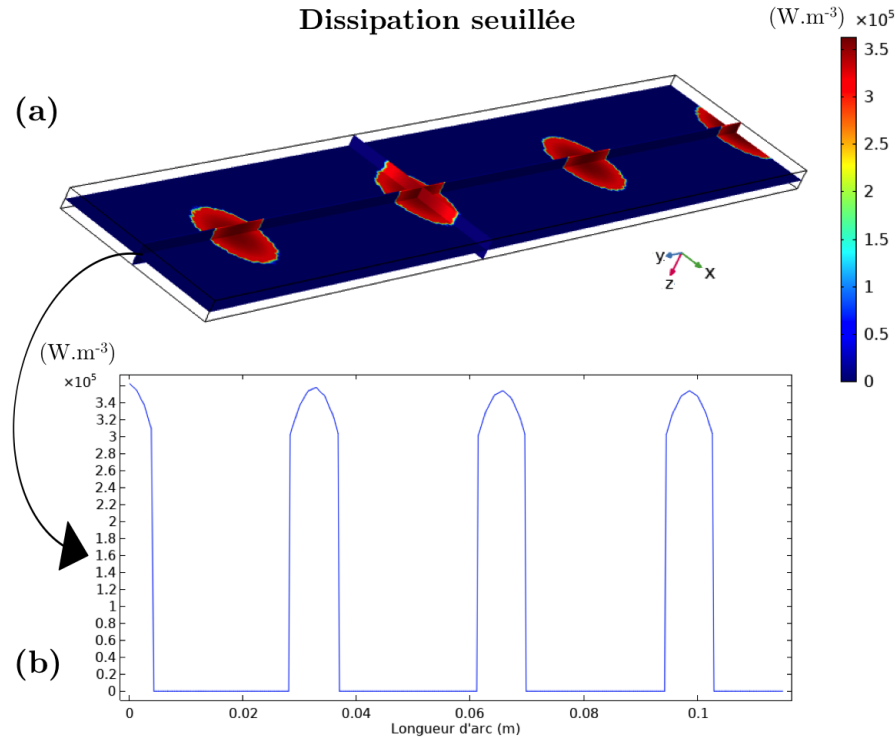


FIGURE 5.3 – Répartition volumique de la dissipation viscoélastique seuillée dans la plaque de PVC (a). Valeurs de la dissipation seuillée sur la ligne de coupe selon l'axe y , en $x = L_x/2$ et $z = L_z/2$ (b).

Puisque les ondes ultrasonores sont envoyées en continu, les sources thermiques sont elles-aussi générées en continu. La réponse thermique est donc celle à l'échelon. Le modèle utilisé pour effectuer l'inversion est par conséquent basé sur la réponse thermique tem-

porelle à l'échelon, et non pas celle impulsionnelle (Dirac), mais cela n'entraîne aucune conséquence ou changement pour la reconstruction, comme explicité au §3.2.2 du chapitre 3. Concernant les conditions aux limites, la plaque est supposée adiabatique dans cette simulation. La figure 5.4 donne le champ de température résultant à la surface de la plaque. La zone réduite sur laquelle l'étude va être effectuée est représentée par un encadré gris.

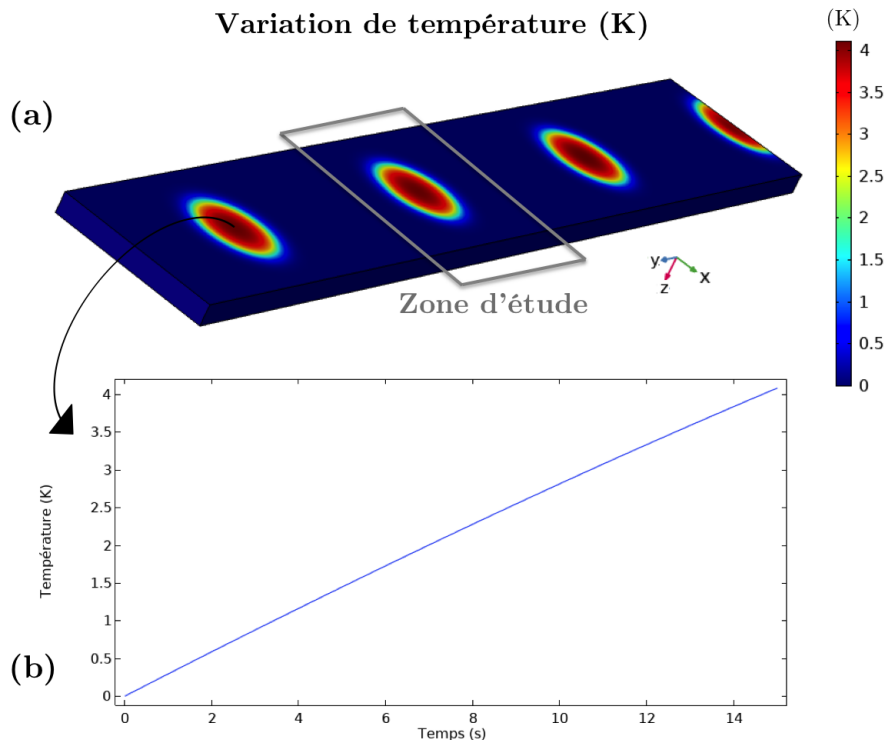


FIGURE 5.4 – Répartition surfacique du champ de température sur la plaque de PVC à $t = 15$ s (a). Évolution de la température en fonction du temps sur le point soumis à la plus grande variation de température (b).

Le volume étudié est donc un parallélépipède de dimensions $16.9 \times 20 \times 2.5 \text{ mm}^3$ où l'objectif est de reconstruire la source thermique dans ce volume à partir du champ de température mesuré à sa surface.

5.2.2 Reconstruction de la source volumique

L'épaisseur de la plaque de PVC étudiée ici est de 2.5 mm. Le coefficient de diffusion est le même selon toutes les directions car la plaque est isotrope, il est égal à $8.547 \times 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ (cf. tableau 5.1). D'après le chapitre 3, les nombres de Fourier jouent un rôle très important en ce qui concerne la reconstruction de sources. Le nombre de Fourier optimal dans la

direction de la profondeur Fo_z est aux alentours de 0.1. En ce qui concerne les nombres de Fourier selon les deux autres directions (x et y), ils doivent être de préférence plus petits. Pour rappel, le nombre de Fourier est défini par :

$$Fo_i = \frac{a t_f}{L_i^2} \quad (5.1)$$

où a est le coefficient de diffusion de matériau ($\text{m}^2.\text{s}^{-1}$), t_f l'intervalle de temps de la mesure (s), et L_i la dimension du matériau selon la direction i (m). La largeur et la longueur de la plaque étant plus grandes que son épaisseur, et puisqu'elle est isotrope, Fo_z sera par conséquent plus grand que Fo_x et Fo_y . C'est donc Fo_z qui va déterminer l'intervalle de temps t_f à utiliser. Dans un premier temps, on prends $t_f = 15$ s ce qui mène à $Fo_z = 0.2$ d'après l'équation (5.1).

Dans cette étude numérique, la discrétisation du volume étudié (et en particulier le nombre de "pixels" à la surface du volume) est définie par l'opérateur. Dans ce cas d'étude, on pose $n_x = 20$, $n_y = 22$ et $n_z = 15$ de manière à avoir une matrice opérateur de taille suffisamment petite afin de limiter le temps de calcul du programme. Cela donne une résolution de 1 mm en x , 0.77 mm en y et de $167 \mu\text{m}$ en z . L'intervalle de temps entre chaque mesure est fixée à 0.04 s, menant à $n_t = 376$. La matrice opérateur est donc de taille $165\,440 \times 6\,600$. Pour l'inversion, les données du champ de température mesuré à la surface sont ordonnées dans un vecteur θ_{mes} en fonction du temps pour tous les pixels balayés selon la direction y puis x , comme illustré par la figure 5.5.

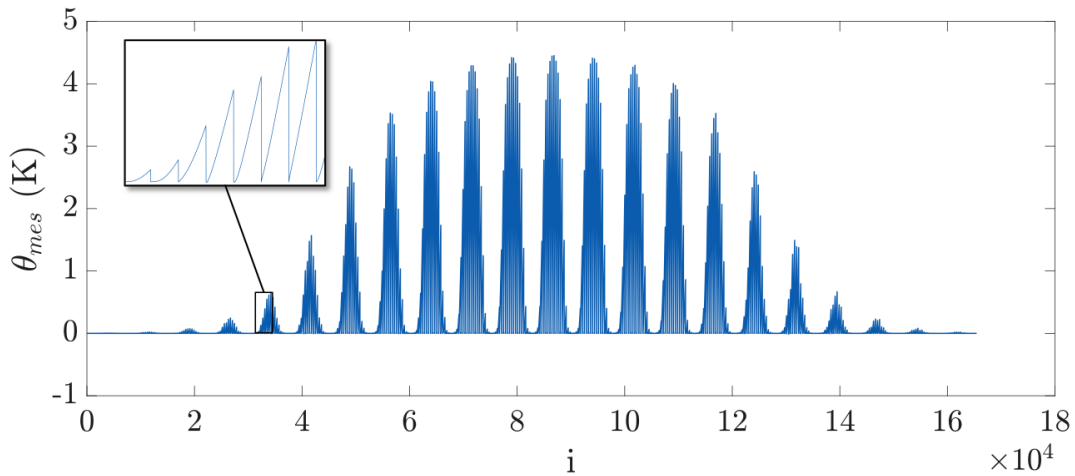


FIGURE 5.5 – Vecteur θ_{mes} contenant le champ de température spatio-temporel de surface.

Puisque le modèle utilisé pour l'inversion diffère du modèle qui a permis d'obtenir le champ de température, une régularisation est nécessaire afin de stabiliser l'inversion. Comme explicité au chapitre 4 §4.2, l'étude du diagramme de Picard est une méthode qui permet de choisir au mieux le paramètre de régularisation. En théorie, l'évolution du facteur $|U_i^T \theta_{mes}/s_i|$ est en moyenne constante sur tous les modes (modulo les oscillations dues au champ 2D de température). En présence de perturbation (bruit de mesure, erreur de modèle...) ce facteur est en moyenne constant sur les premiers modes mais il augmente vers l'infini à partir d'un certain mode i_c . Le paramètre de régularisation α_{opt} est alors choisi tel que (*cf.* chapitre 4) :

$$\alpha_{opt} = s_{i_c}^2 \quad (5.2)$$

L'évolution de ce facteur pour l'exemple numérique étudié ici est représentée par la figure 5.6. Contrairement au cas théorique du chapitre 4 illustré par la figure 4.14, la limite entre les deux phases de ce facteur (constante et augmentation vers l'infini) est difficile à déceler, car le changement ne s'effectue pas de manière brutale.

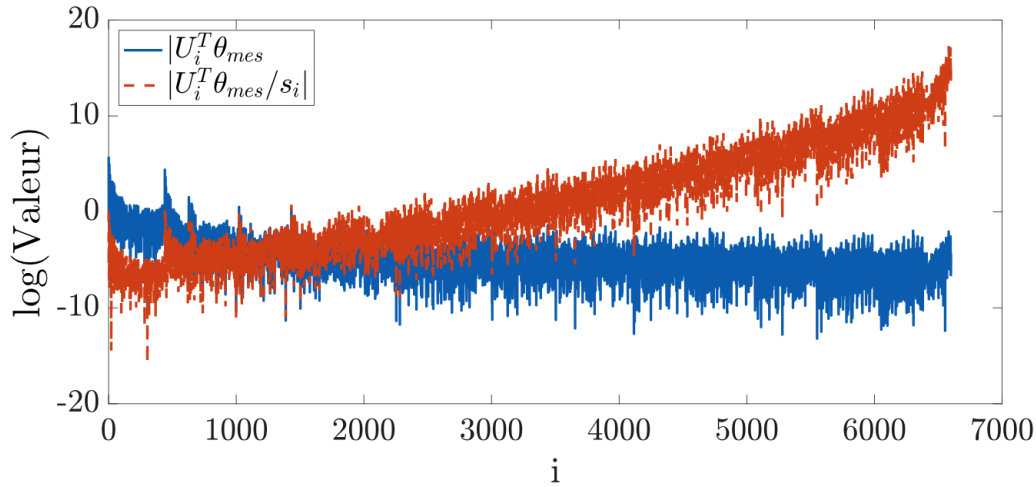


FIGURE 5.6 – Graphe de Picard pour déterminer le paramètre de régularisation.

Pour repérer au mieux ce mode limite, l'évolution du facteur $|U_i^T \theta_{mes}|$ est tracée sur la même figure 5.6. Le mode limite est repéré par le croisement des deux courbes (en valeur moyenne). Le numéro du mode limite est donc $i_c = 1050$. Le coefficient de régularisation α_{reg} est alors défini par l'équation (5.3) :

$$\alpha_{reg} = s_{1050}^2 \quad (5.3)$$

La méthode déterministe avec régularisation par norme L_1 (cf. chapitre 4 §4.2) est alors appliquée en prenant tous les paramètres définis précédemment (discrétisation, intervalle de temps, régularisation...) pour reconstruire la source thermique volumique. La solution obtenue est illustrée par la figure 5.7.

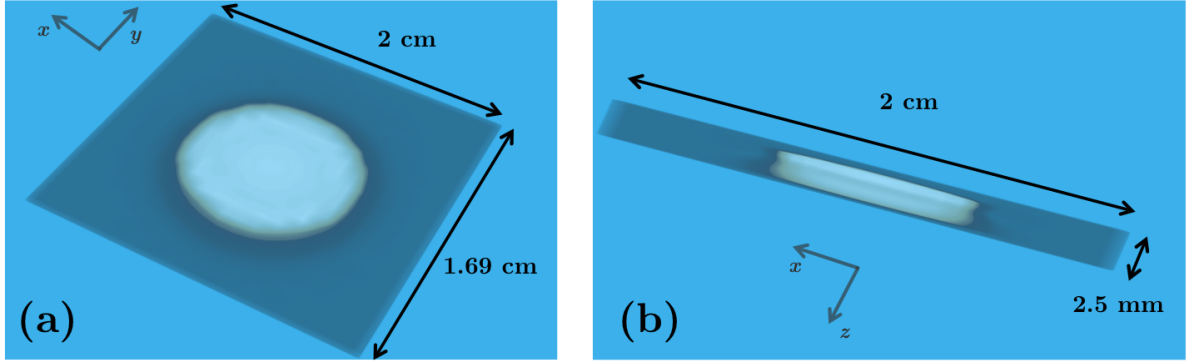


FIGURE 5.7 – Reconstruction de la source volumique par méthode déterministe avec régularisation par norme L_1 : vue de face (a) et vue de profil (b).

À première vue, la source semble bien reconstruite. La solution obtenue donne une source cylindrique positionnée au centre la plaque. Pour avoir une meilleure visualisation des intensités retrouvées, la figure 5.8 représente les solutions obtenues sur différentes lignes de coupe. En (a) est représenté un schéma de la plaque avec les différentes lignes de coupe (quatre horizontales et une verticale). Les solutions obtenues sur les lignes de coupe horizontales sont tracées en (b) et sur la ligne verticale en (c). La source étant symétrique en x et y , l'étude en fonction de y et z suffit en effet pour avoir un aperçu global des résultats.

Le graphe (b) permet d'étudier la solution obtenue sur des lignes de coupe horizontales à différentes profondeurs et de la comparer avec la solution théorique. Tout d'abord, on peut remarquer que la solution obtenue sur la ligne de coupe à la surface ($z = 0$) est singulière : l'intensité de la source reconstruite est négative. Cette erreur est due à la condition adiabatique imposée dans le modèle menant au champ de température. Le modèle utilisé pour la reconstruction ne gère pas (pour l'instant) les conditions aux limites, entraînant par conséquent une erreur de reconstruction sur les bords du domaine. La solution obtenue sur la ligne située juste en-dessous de la surface ($z = 0^+$) est alors représentée, permettant de voir que la reconstruction calculée est quasiment parfaite. La forme et les intensités retrouvées coïncident avec la source théorique. Le profil sinusoïdal de l'intensité est, lui aussi, parfaitement retrouvé.

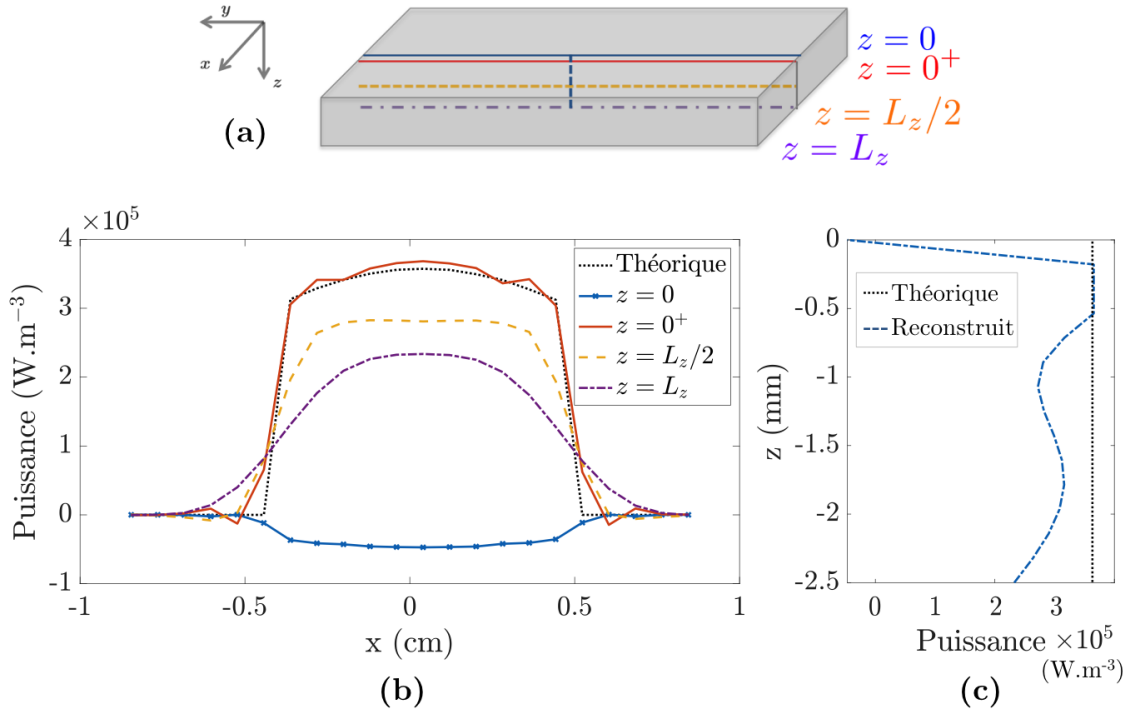


FIGURE 5.8 – Schéma de la plaque étudiée et des lignes de coupe utilisées **(a)**. Reconstruction obtenue avec la régularisation par norme L_1 sur les lignes de coupe suivant y **(b)** et suivant z **(c)**.

Cependant, il apparaît que plus la distance avec la surface augmente, plus l'intensité retrouvée diminue et est sous-estimée par rapport à la source réelle : sur la ligne de coupe située sur le plan milieu de la plaque ($z = L_z/2$), la puissance reconstruite est de $3 \times 10^5 \text{ W.m}^{-3}$, et de $2.2 \times 10^5 \text{ W.m}^{-3}$ sur le plan ($z = L_z$) de la face arrière (contre $3.5 \times 10^5 \text{ W.m}^{-3}$ en théorie). Ensuite, plus la distance avec la profondeur augmente, plus la forme de la source est étalée, se traduisant par le fait que la reconstruction des variations d'intensité est de moins en moins bien retrouvée loin de la surface.

Pour aller plus loin, le graphe **(c)** permet d'étudier l'évolution de l'intensité retrouvée en fonction de la profondeur à l'aide de la ligne de coupe verticale illustrée par le schéma **(a)**. Comme remarqué précédemment sur le graphe **(b)**, l'intensité est bien sous-estimée pour les sources les plus profondes. Cependant, la décroissance n'est pas linéaire en fonction de la profondeur : elle semble s'effectuer par paliers décroissants. Cette perte d'intensité est probablement due à la régularisation : en effet, comme vu au chapitre 4, elle a pour effet de pondérer les derniers modes issus de la S.V.D. de manière à atténuer leur influence. Or,

les derniers modes sont ceux qui permettent de reconstruire les sources les plus profondes (cf. figure 3.11 du chapitre 3). La pondération de ces modes entraîne par conséquent une mauvaise estimation de l'intensité de la source.

La solution présentée précédemment a été calculée à l'aide de la régularisation par norme L_1 . Pour étudier la différence entre les types de régularisation, une solution est à nouveau calculée en prenant cette fois la régularisation de Tikhonov (cf. §4.2). Afin de les comparer, les deux solutions sont tracées et superposées sur les mêmes lignes de coupe que précédemment sur la figure 5.9. En (a) sont données les solutions sur les lignes de coupe horizontales et en (b) sur la ligne de coupe verticale.

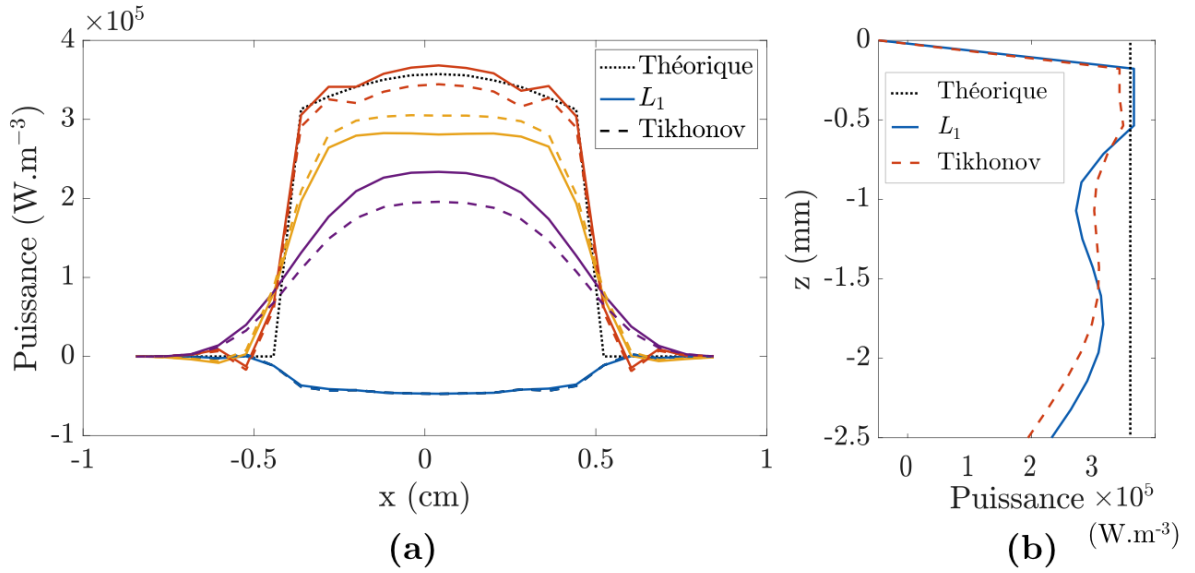


FIGURE 5.9 – Comparaison des résultats obtenus entre les solutions avec régularisation de Tikhonov et par norme L_1 sur les lignes de coupe suivant y (a) et suivant z (b).

Dans cet exemple numérique, il apparaît que les deux solutions obtenues, la première avec régularisation L_1 (lignes continues), la seconde Tikhonov (lignes discontinues), ne diffèrent pas beaucoup. La forme (position, géométrie) reconstruite est la même dans les deux cas. La différence se joue sur l'intensité. En moyenne, l'intensité retrouvée par la régularisation de Tikhonov est légèrement plus faible (donc sous-estimée) que celle par norme L_1 . La décroissance par palier selon la profondeur (b) est présente sur les deux solutions, cependant, le passage entre chaque palier est plus lisse avec la régularisation par Tikhonov.

5.2.3 Étude sur l'influence du nombre de Fourier

Afin de voir l'influence du nombre de Fourier sur la reconstruction obtenue, deux autres solutions ont été calculées en prenant des paramètres différents. Le nombre de Fourier dépend du coefficient de diffusion, de la longueur de la plaque, et de l'intervalle de temps sur lequel est effectuée l'étude. Ce dernier est l'unique paramètre sur lequel on peut jouer pour modifier le nombre de Fourier.

Dans le cas précédent, l'intervalle de temps était fixé à $t_f = 15$ s, menant à un nombre de Fourier de 0.2 selon la direction z . Dans cette partie, deux études sont effectuées : la première avec $t_f = 1.5$ s, menant à $Fo_z = 0.02$, la seconde avec $t_f = 1500$ s, menant à $Fo_z = 20$. Tous les autres paramètres sont identiques à l'étude précédente (n_t, n_y, n_x, n_z). Ainsi, le pas de temps entre deux mesures est de 0.004 s pour la première étude et de 4 s pour la seconde. Puisque la durée totale de l'expérience n'est pas la même entre les études, les champs de température résultants à la surface sont différents. Ils sont illustrés par la figure 5.10 pour chacun des cas.

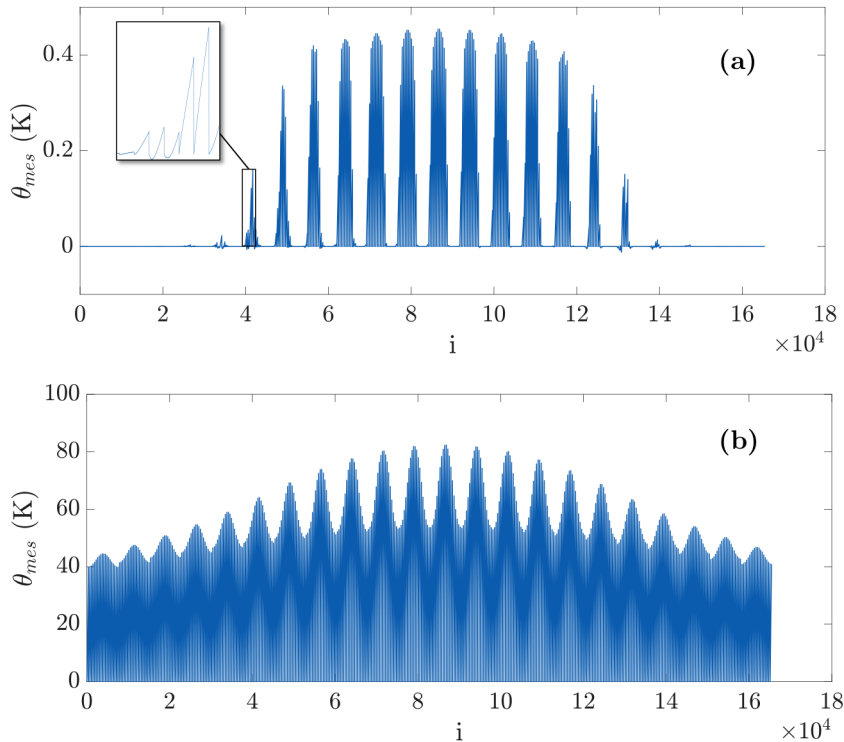


FIGURE 5.10 – Vecteur θ_{mes} contenant le champ de température spatio-temporel de surface pour $Fo_z = 0.02$ (a) et pour $Fo_z = 20$ (b).

En comparant ces données avec celles de la figure 5.5 de l'étude précédente, on peut remarquer que l'élévation de température est, pour le premier cas (intervalle de temps de 1.5 s) beaucoup plus faible et que l'étalement est plus restreint, tandis qu'il est beaucoup plus étalé et élevé pour l'étude effectuée sur un intervalle de temps long de 1 500 s. Ces résultats sont cohérents avec le fait que la diffusion de la température est très faible aux temps courts et très importante aux temps longs. Il faut aussi noter que dans ce cas numérique, la plaque est supposée adiabatique, n'entraînant aucune perte de chaleur à la surface, ce qui explique la forte élévation de température.

Pour chacune des deux études, la même procédure que dans la partie précédente est appliquée pour le choix des paramètres de régularisation. Les solutions obtenues sont données sur la figure 5.11. Dans cette partie, la régularisation appliquée ici est celle par Tikhonov. Sur la première ligne (graphes (a) et (b)) est rappelée la solution du cas précédent ($Fo_z = 0.2$), sur la deuxième ((c) et (d)) est illustrée la solution obtenue pour $Fo_z = 0.02$ et en dernier ((e) et (f)) est représentée la solution obtenue pour $Fo_z = 20$.

D'après le chapitre 3, le nombre de Fourier optimal selon la direction de la profondeur est aux alentours de 0.1. Plus on s'écarte de cette valeur, plus la reconstruction est mauvaise. Les résultats illustrés par la figure 5.11 semblent le confirmer. La meilleure reconstruction est obtenue pour $Fo_z = 0.2$. Pour $Fo_z = 0.02$ ((c) et (d)), seule la partie supérieure de la source (proche de la surface) est reconstruite : en profondeur elle est mal, voire pas du tout, reconstruite. De même, la reconstruction avec $Fo_z = 20$ ((e) et (f)) est mauvaise : des sources thermiques sont retrouvées dans la totalité de la plaque, avec une décroissance d'intensité selon la profondeur.

Afin de mieux visualiser les résultats, en particulier l'intensité des sources retrouvées pour chacun des cas, la figure 5.12 trace les solutions obtenues pour les trois nombres de Fourier sur des lignes de coupe : horizontales ($z = 0^+$ et $z = L_z/2$) en (a) et verticale en (b). La solution obtenue pour $Fo_z = 0.02$ est représentée par les lignes en pointillés réguliers, celle pour $Fo_z = 0.2$ par les lignes continues et celle pour $Fo_z = 20$ par des lignes continues irrégulières. Sur le graphe (a), les solutions obtenues sur la ligne de coupe située à la surface du matériau ($z = 0^+$) sont tracées en bleu, celles sur la ligne de coupe du plan milieu ($z = L_z/2$) en rouge.

Concernant la reconstruction pour $Fo_z = 0.02$, le graphe (b) permet de confirmer que la source est reconstruite uniquement sur une épaisseur fine proche de la surface. En effet,

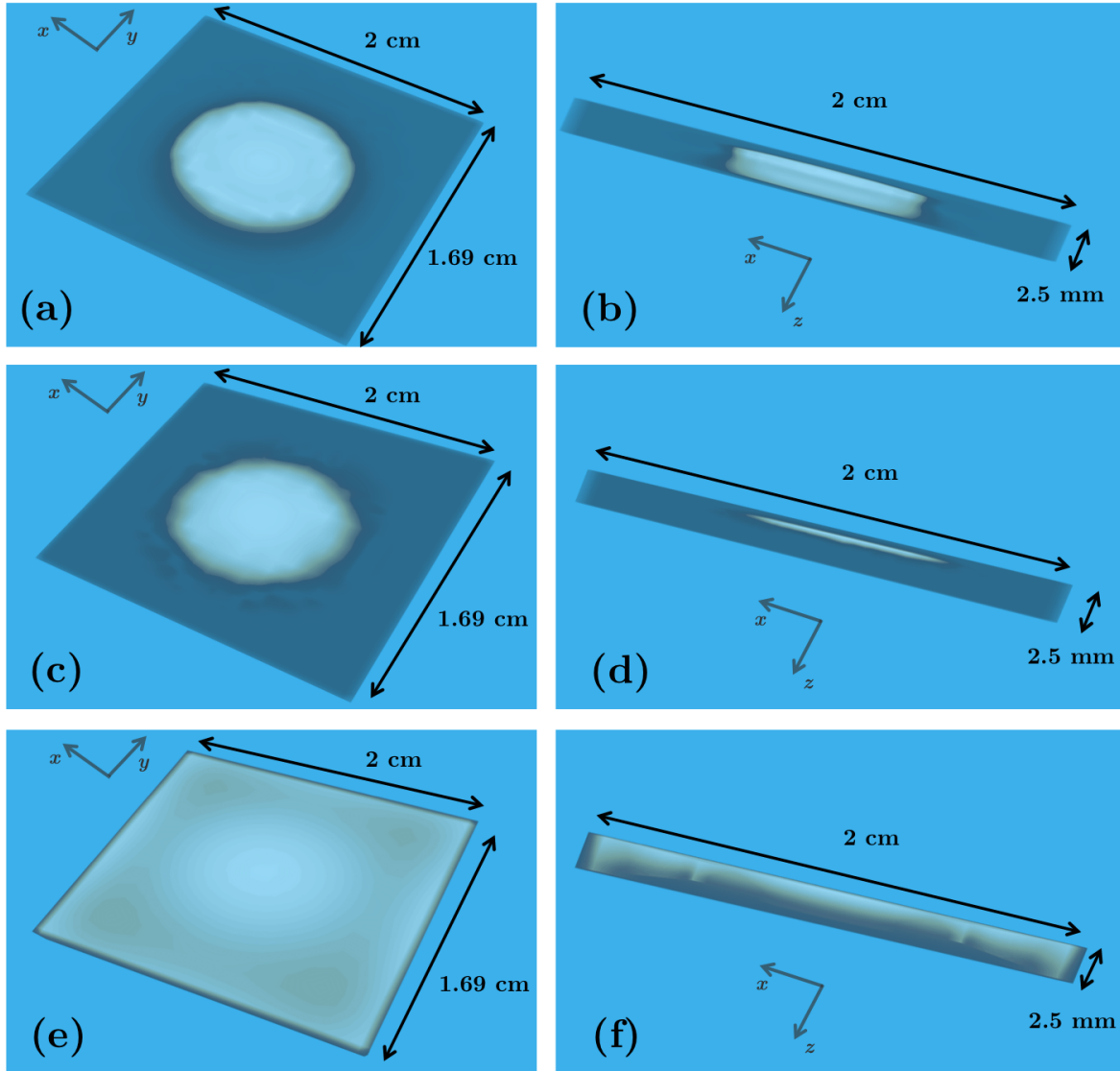


FIGURE 5.11 – Reconstruction obtenue pour un nombre de Fourier en z de 0.2 : vue de face (a) et de profil (b). Reconstruction obtenue pour un nombre de Fourier en z de 0.02 : vue de face (c) et de profil (d). Reconstruction obtenue pour un nombre de Fourier en z de 20 : vue de face (e) et de profil (f).

les sources les plus profondes ne sont pas retrouvées : l'intensité obtenue est à zéro (pas de source) dès $z = -1$ mm. Ce résultat est d'autant plus visible sur le graphe (a) : la forme de la source est bien reconstruite à la surface, même si l'intensité est légèrement sous-estimée ($3 \times 10^5 \text{ W.m}^{-3}$ au lieu de $3.5 \times 10^5 \text{ W.m}^{-3}$), alors qu'elle est nulle en tout point de la ligne horizontale ($z = L_z/2$) située au centre de la plaque.

Pour cet exemple où $Fo_z = 0.02$, t_f est égal à 1.5 s. Comme explicité précédemment, le nombre de Fourier optimal selon la profondeur est aux alentours de 0.1. D'après l'équation (5.1), avec le coefficient de diffusion de $8.547 \times 10^{-8} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, il faudrait une épaisseur d'environ... **1 mm**, ce qui correspond à l'épaisseur de source reconstruite pour cette expérience.

Pour la solution avec $Fo_z = 20$, des sources sont retrouvées en tout point du volume, comme cela peut être observé sur le graphe (a).

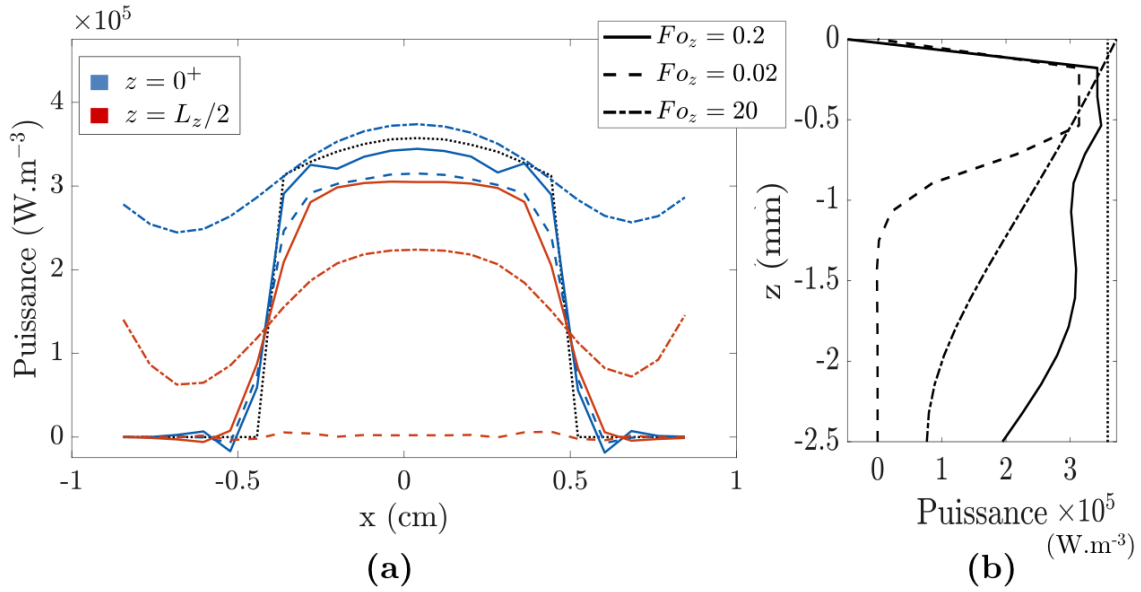


FIGURE 5.12 – Résultats obtenus pour $Fo_z = 0.02, 0.2$ et 20 sur des lignes de coupe suivant x (a) et suivant z (b).

À la surface, l'intensité de la source est bien retrouvée, mais sa forme géométrique ne l'est pas. En particulier, les sauts d'intensité aux points $x = \pm 0.5$ cm, correspondants aux bords de la source réelle, ne sont pas retrouvés. À la place, des sources d'intensité non négligeables (aux alentours de $3 \times 10^5 \text{ W.m}^{-3}$) sont proposées. Le profil des sources retrouvées pour ce nombre de Fourier est de type sinusoïdal en intensité, où les maxima d'intensités sont situés aux bords de la plaque et à l'endroit de la position réelle de la source. L'intensité de ces sources diminue linéairement en fonction de la profondeur, comme cela peut être observé sur le graphe (b).

Ainsi, le choix de l'intervalle de temps (qui mène au nombre de Fourier) est très important pour la reconstruction de sources. Un nombre de Fourier dans la direction de la profondeur trop petit ou trop élevé entraîne une mauvaise reconstruction des sources. Pour

les nombres de Fourier trop petits, l'erreur s'explique par le fait que, comme l'intervalle de temps est très court, la température mesurée à la surface ne permet pas d'apporter suffisamment d'informations pour les points les plus profonds, entraînant une mauvaise reconstruction loin de la surface. Pour les nombres de Fourier trop grands dans le sens de la profondeur, l'erreur peut s'expliquer par le fait qu'aux temps longs, la diffusion selon les directions x et y est importante : le champ de température est par conséquent très étendu, rendant difficile la reconstruction des sources dans le volume.

Dans cette étude, les reconstructions sont effectuées à l'aide d'un modèle analytique, qui ne prend pas en compte les conditions aux limites. Le modèle est en effet basé sur la réponse thermique dans un milieu semi-infini. Or, ici, la plaque est supposée adiabatique. Aux temps courts, la différence peut être considérée négligeable : les résultats obtenus pour $Fo_z = 0.02$ et $Fo_z = 0.2$ ne seront donc que peu modifiés avec la prise en compte des conditions aux limites.

Aux temps longs, en revanche, la différence devient importante. L'influence du nombre de Fourier pour les temps longs n'est pas remise en cause sur la reconstruction (*cf.* chapitre 3) mais il est possible que la prise en compte des conditions aux limites améliorent légèrement la solution obtenue pour $Fo_z = 20$, particulièrement sur les bords de la plaque. En effet, sur le graphe (e) de la figure 5.11 et sur le graphe (a) de la figure 5.12, on peut voir que des sources d'intensités élevées sont retrouvées sur les bords de la plaque pour $Fo_z = 20$, ce qui n'est pas le cas pour les deux autres reconstructions effectuées avec des nombres de Fourier plus faibles. Il serait donc intéressant d'intégrer l'influence des conditions aux limites dans le modèle utilisé pour l'inversion et de comparer les résultats obtenus avec ceux du modèle aujourd'hui utilisé.

Conclusion sur les résultats numériques

Un exemple numérique de sources thermiques générées par la propagation d'ondes ultrasonores dans un milieu viscoélastique a été étudié dans cette partie. Les sources thermiques ont été reconstruites à l'aide du modèle analytique défini dans le chapitre 3 et le chapitre 4. Le champ de température de surface a , quant à lui, été calculé avec le logiciel de calcul par éléments finis COMSOL Multiphysics afin de vérifier l'applicabilité de la méthode d'inversion malgré la différence de modèle.

Les résultats présentés ont permis de confirmer la validité du critère dépendant des nombres de Fourier explicités au chapitre 3. Le choix de l'intervalle de temps (dont dépend le nombre de Fourier) est, en effet, très important : un nombre de Fourier trop grand ou trop petit va mener à une mauvaise reconstruction de sources ou une reconstruction partielle sur une épaisseur plus petite respectivement. Enfin, sur cet exemple numérique, une comparaison entre la solution obtenue avec régularisation de Tikhonov et celle avec la norme L_1 a été effectuée. La différence entre les deux solutions se joue sur l'intensité dans cet exemple. L'influence majeure observée est que, comme elle pondère les derniers modes du modèle utilisé pour l'inversion, la régularisation entraîne une sous-estimation de l'intensité des sources les plus profondes.

5.3 Application expérimentale

L'expérience effectuée dans cette partie utilise l'effet Joule : un fil de Chromel (Nickel-Chrome), parcouru par un courant transmis par un générateur, joue le rôle de source thermique. Le principe de la méthode consiste à insérer ce fil de Chromel dans un matériau en PVC (Polychlorure de Vinyle) formant une figure géométrique particulière. Le champ de température résultant à la surface est mesuré à l'aide d'une caméra IR. La figure 5.13 illustre le dispositif expérimental correspondant.

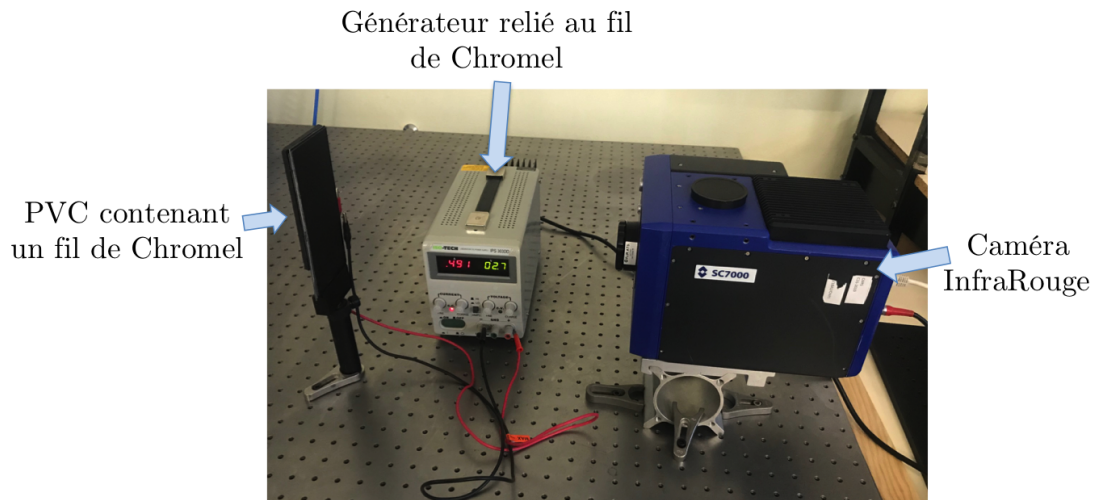


FIGURE 5.13 – Dispositif expérimental.

Les paramètres du générateur, de la plaque de PVC considérée isotrope, de la caméra IR et du fil sont donnés par le tableau 5.2.

Fil de Chromel			Caméra IR		
Diamètre	200	μm	Fréquence d'acquisition f_{ac}	200	Hz
			Taille du pixel	290×290	μm^2
Plaque de PVC			Générateur		
Masse volumique ρ	1 180	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	Tension U	3.5	V
Chaleur spécifique C_p	1 000	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	Intensité I	1.13	A
Coefficient de diffusion a	1×10^{-7}	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	Puissance $P = U \cdot I$	3.955	W

TABLEAU 5.2 – Paramètres du générateur, de la plaque de PVC, de la caméra IR et du fil de Chromel.

5.3.1 Mise en place du problème thermique

L'expérience a été réalisée en disposant le fil de Chromel de manière à générer une forme géométrique s'apparentant à un "M" sur la face arrière d'une plaque de PVC d'1 mm d'épaisseur. La face avant, où seront effectuées les mesures, a été peinte en noir. Afin d'éviter les pertes thermiques dans l'air du côté de la plaque où se trouve le fil, une épaisseur de mousse a été collée, fixant par la même occasion le fil chauffant. La figure 5.14 donne en (a) le schéma de l'échantillon, et en (b) et (c) des photos de l'échantillon réel. Les deux extrémités du fil de Chromel sont sortantes pour pouvoir y placer des pinces crocodiles et y faire passer le courant électrique.

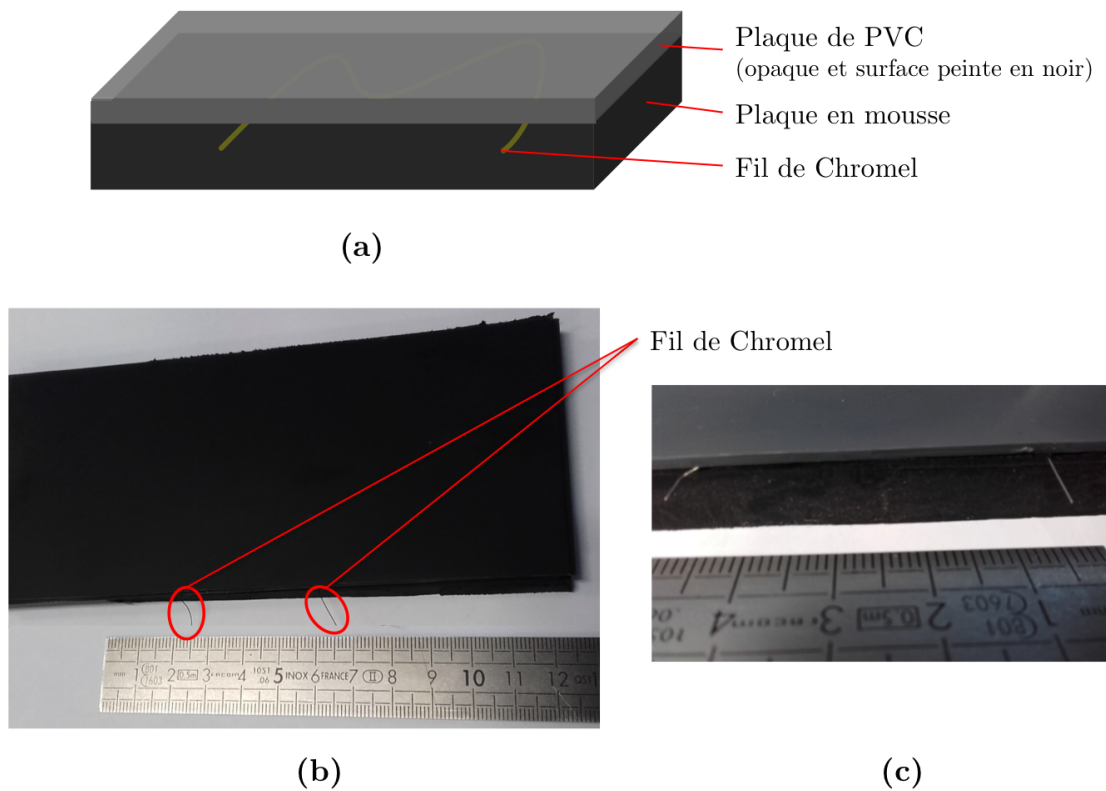


FIGURE 5.14 – Schéma de l'échantillon constitué d'une plaque en PVC d'épaisseur 1 mm, d'un fil de Chromel collé sur sa face arrière et d'une épaisseur de mousse (a). Échantillon réel : vue du dessus (b) et vue de profil (c).

Le fil de Chromel se trouve sur une zone réduite de la plaque, comme cela peut se remarquer en particulier sur le graphe (b). De cette manière, la plaque peut être considérée semi-infinie dans le plan de la surface. Comme la caméra ne mesure qu'une zone réduite à la surface de la plaque (zone où se trouve le fil), il n'y aura pas d'effets de bords.

Discussion sur la puissance thermique générée par le fil

La puissance électrique imposée par le générateur dans le fil de Chromel est de 3.955 W. La longueur du fil dans cette expérience est d'environ 7 cm. En supposant que la totalité de l'énergie électrique est transformée en énergie thermique par effet Joule, la puissance par unité de volume générée par le fil se calcule par l'équation (5.4) :

$$Q_{vol} = \frac{P}{V} \quad (5.4)$$

où P est la puissance (W), et V le volume du fil (m^3). En supposant que le fil est cylindrique, son volume se calcule par :

$$V = \pi R^2 L \quad (5.5)$$

où R (m) est le diamètre et L (m) la longueur du fil. À l'aide des paramètres donnés par le tableau 5.2, on obtient $V = 2.2 \times 10^{-9} \text{ m}^3$, ce qui mène à une puissance volumique Q_{vol} de $1.8 \times 10^9 \text{ W.m}^{-3}$.

En réalité, la puissance thermique générée est plus faible. Tout d'abord, l'épaisseur de colle dans laquelle se trouve le fil (qui permet de coller la mousse à la plaque de PVC) contient elle aussi une résistance thermique et peut jouer le rôle d'isolant. Ensuite, des pertes thermiques peuvent avoir lieu car l'épaisseur de mousse collée en face arrière de la plaque de PVC est assez fine. La puissance thermique volumique Q_{vol} est donc inférieure à 10^9 W.m^{-3} .

Étude du champ de température mesuré à la surface

Dans cette expérience, le fil est traversé par le courant électrique pendant une durée d'environ 7 s. La figure 5.15 donne le signal mesuré par la caméra à $t = 0$ s (**a**), à $t = 2$ s en (**b**), à $t = 7.2$ s en (**c**) et à $t = 70$ s en (**d**). Les mesures sont données en D.L. (*Digital Level*).

À $t = 0$, c'est à dire au tout début de l'expérience, seul du bruit est mesuré par la caméra IR (**a**). En effet, la diffusion de la température n'a pas encore eu lieu. À $t = 2$ s, la température résultante de la source thermique est mesurée à la surface (**b**) : la figure géométrique formée par le fil est bien visible et la diffusion selon les axes x et y semble assez faible. En théorie, tous les points sources formés par le fil sont de même intensité. De plus, comme le fil est placé sur un plan parallèle à la surface de mesure (sources identiques à même profondeur), l'élévation de température au droit du fil devrait être identique en tous points. On peut remarquer en (**b**) et (**c**) que c'est le cas, sauf en deux endroits où

l'élévation de température est plus élevée : en haut du "M" avant la courbure à gauche et en bas à droite au pied du "M". Ces résultats laissent supposer que l'intensité des sources en ces points est plus élevée.

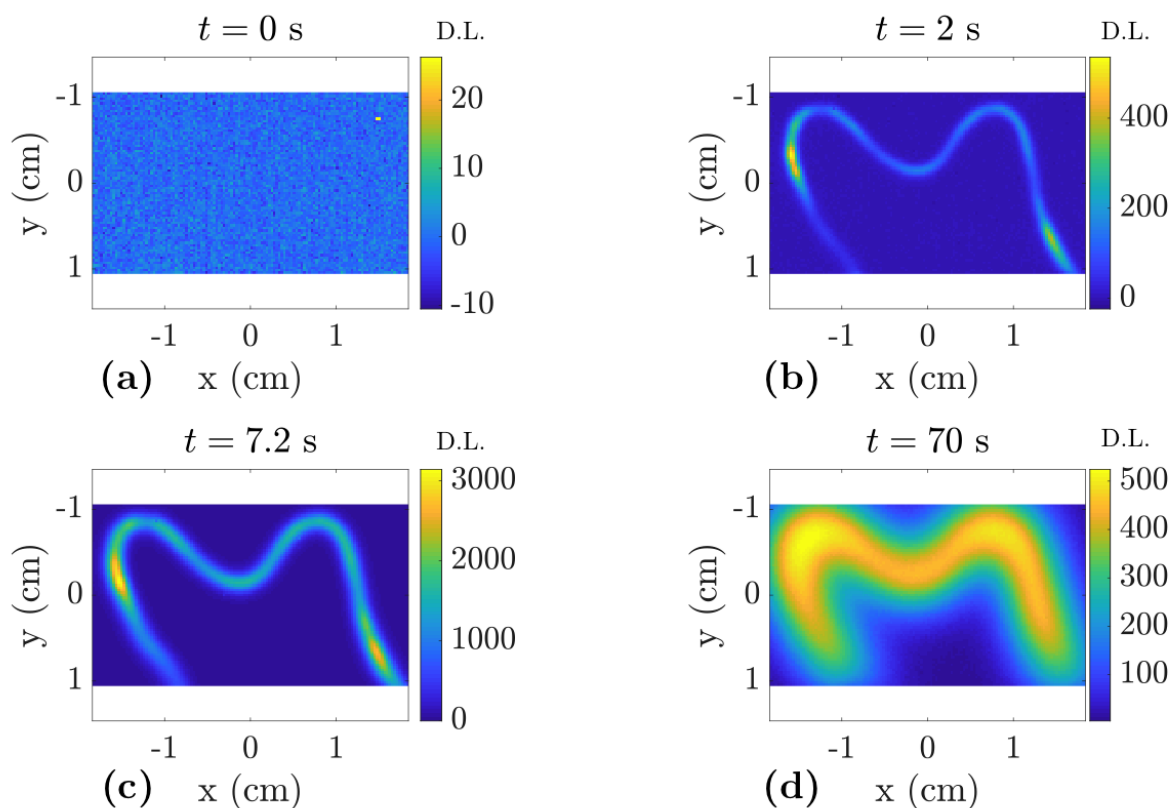


FIGURE 5.15 – Signal mesuré par la caméra IR (en D.L) à $t = 0$ s (a), à $t = 2$ s (b), à $t = 7.2$ s (c) et à $t = 70$ s (d).

Le temps $t = 7.2$ s correspondant au temps du maximum de D.L. enregistré. On peut remarquer en (c) que la variation maximale de D.L est de 3000 (environ 20 degrés), soit environ 7.5 fois plus importante qu'à $t = 2$ s, et que la diffusion selon x et y est plus prononcée. À partir de ce temps là, la température ne fait plus que diminuer et se diffuser dans tout le matériau. En effet, depuis quelques secondes, le fil n'est plus parcouru par le courant électrique, ce qui veut dire qu'il n'y a plus de source thermique active dans le matériau. Le signal mesuré en (d) le confirme : à la fin de l'expérience ($t = 70$ s), le maximum de D.L. mesuré est de 500. De plus, la température a fortement diffusé selon toutes les directions.

Choix de l'intervalle de temps pour l'inversion

Comme explicité précédemment (*cf.* §5.2), le choix de l'intervalle de temps (dont dépend le nombre de Fourier) est très important pour pouvoir reconstruire au mieux les sources thermiques. Il faut en effet le choisir de manière à avoir Fo_z , dont la définition est rappelée par l'équation (5.1), autour de 0.1. L'épaisseur de la plaque étant de 1 mm, cela mènerait à $t_f = 1$ s.

Cependant, la fréquence d'acquisition de la caméra dans cette expérience est de 200 Hz, soit 200 images par seconde. Pour avoir suffisamment d'informations en temps, on prend $t_f = 2$ s, permettant d'avoir 400 pas de temps. Le nombre de Fourier correspondant est $Fo_z = 0.2$, ce qui est suffisamment proche du nombre de Fourier optimal. Puisque la durée d'excitation du générateur est de l'ordre de 7 secondes, la réponse en température entre $t = 0$ et $t_f = 2$ s est la réponse à l'échelon.

Traitement des signaux bruités par S.V.D.

Le signal mesuré par la caméra IR à la surface du matériau est bruité, comme on peut le voir en particulier sur la figure 5.15 (a). Comme explicité dans la section §4.1.3 du chapitre 4, l'application d'une S.V.D. espace-temps au champ de température permet de débruiter significativement le signal à la fois spatialement et temporellement.

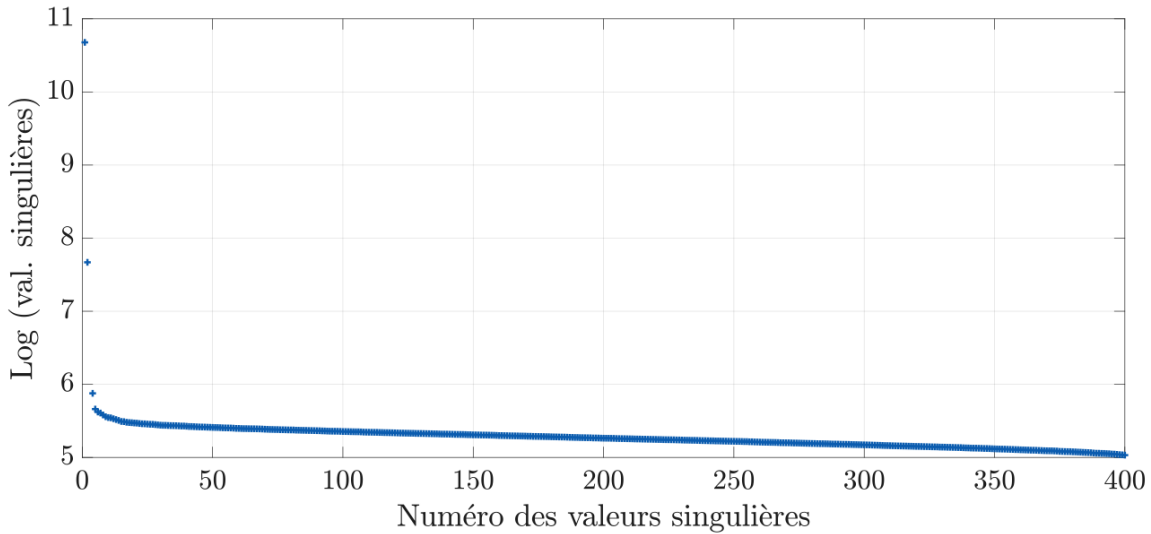


FIGURE 5.16 – Évolution du logarithme des valeurs singulières de la matrice espace-temps du champ de température mesuré à la surface entre t_0 et t_f .

Cette méthode est alors appliquée sur le signal brut du champ de température (entre $t_0 = 0\text{ s}$ et $t_f = 2\text{ s}$). L'étude de l'évolution des valeurs singulières, donnée par la figure 5.16, permet de choisir le nombre de modes à conserver pour reconstruire le signal. En effet, les trois premières valeurs singulières se détachent des autres.

Le signal est donc reconstruit en ne prenant que les trois premiers modes de la S.V.D. obtenue. Afin d'observer le résultat obtenu à la fois en spatial et en temporel, la figure 5.17 permet de comparer les signaux avant et après débruitage. La comparaison des images (a) et (b) permet de voir l'influence de la S.V.D. sur le bruit spatial, tandis que les graphes tracés en (c) permettent d'observer son influence sur le bruit temporel.

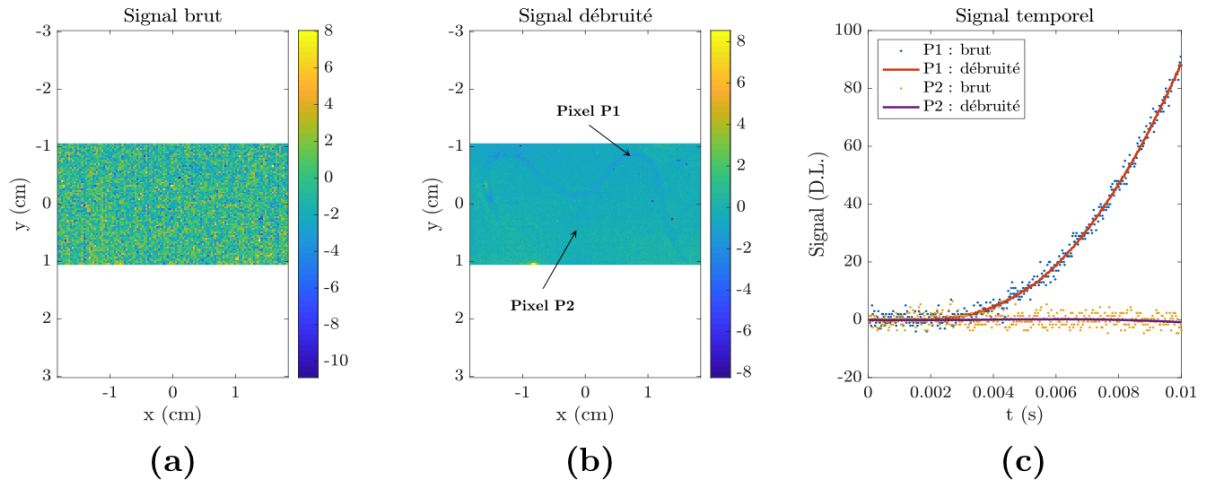


FIGURE 5.17 – Image obtenue à $t = 0.05\text{ s}$: brut (a) et après S.V.D. (b). Signaux bruts et débruités aux pixels P1 et P2 en fonction du temps (c).

La figure 5.17 (a) correspond au signal brut mesuré à $t = 0.05\text{ s}$. L'élévation de température liée à la chauffe du fil est ici noyée dans le bruit de mesure. La figure 5.17 (b) correspond aux mêmes données, mais débruitées par S.V.D. La variation de D.L. est identique entre ces deux graphes, mais le signal est significativement débruité après S.V.D. : en effet, la présence du fil est maintenant discernable alors qu'elle ne l'était pas sur le signal brut.

De même, la figure 5.17 (c) trace l'évolution en fonction du temps des signaux mesurés aux points (pixels) P1 et P2, repérés sur l'image (b). Le pixel P1 correspond à un point situé au dessus du fil, tandis que le point P2 est situé loin des sources thermiques. Les

signaux bruts sont tracés avec des points et les signaux débruités par S.V.D. par des lignes continues. Comme attendu, l'application de la S.V.D. permet aussi de réduire le bruit sur le signal temporel. Ainsi, comme explicité au chapitre 4, l'application d'une S.V.D. au champ brut de température et sa reconstruction avec un nombre de modes restreints permet de débruiter significativement, spatialement et temporellement, le bruit de mesure.

Dans cet exemple, le fil de Chromel est collé sur la face arrière de la plaque de PVC. La profondeur des sources thermiques est alors constante (à 1 mm d'épaisseur). Par la suite, deux études vont être effectuées : la première va aborder le problème en supposant la profondeur du fil connue (problème 2D), tandis que la deuxième étude cherchera aussi la profondeur du fil, supposée inconnue (problème 3D).

5.3.2 Problème 2D : profondeur supposée connue

La première étude consiste à supposer la profondeur z des sources connue et à retrouver leurs positions selon les directions x et y à partir du champ de température mesuré à la surface du matériau. Il s'agit donc d'un problème 2D. Dans cette partie, chacune des deux méthodes (déterministe et probabiliste) sera utilisée pour la reconstruction des sources thermiques. Une comparaison des résultats obtenus entre les deux méthodes sera effectuée.

Reconstruction par méthode déterministe

La zone d'étude sur laquelle la température est mesurée en fonction du temps (à l'aide de la caméra IR) est un rectangle de dimensions $3.65 \times 2 \text{ cm}^2$, divisé en 126×72 pixels (la taille du pixel étant de $290 \mu\text{m}^2$). Les paramètres du modèle sont donc $n_t = 400$, $n_y = 72$ et $n_x = 126$. La taille de la matrice opérateur à inverser serait donc $n_t n_y n_x \times n_y n_x \approx 10^7 \times 10^4$. Pour éviter d'avoir un temps de calcul trop long (*cf.* chapitre 3, §3.2.3), le domaine est divisé en 18 parties égales de taille 21×24 , comme illustré par la figure 5.18.

Sur chacun des dix-huit domaines, la matrice opérateur est donc de taille $201\,600 \times 504$. Chacun de ces domaines est traité de manière complètement indépendante. Cette division est possible car les sources thermiques sont peu étendues et que l'intervalle de temps est court (2 secondes), limitant par conséquent la diffusion dans le plan. Ainsi, une source présente dans une zone va peu influencer le champ de température résultant à la surface de la zone d'à côté. Le seul cas problématique dans cette division est lorsque les sources thermiques sont à la frontière entre deux zones. Des effets de bords pourront alors apparaître.

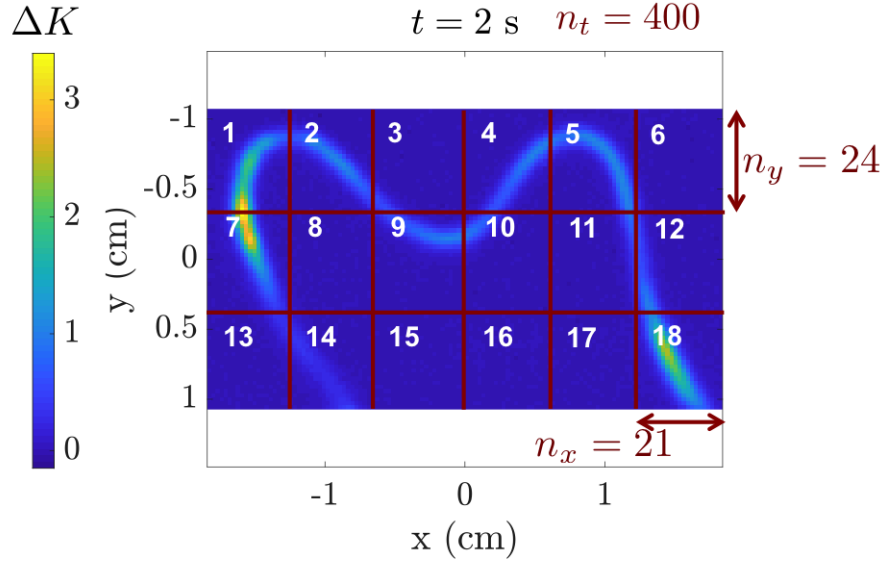


FIGURE 5.18 – Division spatiale du problème et ses paramètres correspondants.

N.B. : un autre découpage possible pour réduire la taille du domaine (mais qui n'est pas fait ici) serait de travailler par Region Of Interest (R.O.I.). L'élévation de température permet en effet de cibler les zones avec présence de sources : les zones où il n'y a pas d'élévation de température pourraient dans ce cas être supprimées de l'étude.

Le programme de reconstruction des sources thermiques par méthode déterministe peut se découper en trois parties :

1. Initialisation et implémentation de la matrice opérateur $\mathbf{I}$.
2. Calcul de la S.V.D. de la matrice opérateur $\mathbf{I}$.
3. Inversion avec régularisation.

L'avantage de diviser l'espace en part égales est que la matrice opérateur $\mathbf{I}$ est la même pour tous les domaines. Ainsi, l'implémentation (1.) et le calcul de la S.V.D. (2.) de la matrice opérateur ne s'effectue qu'une seule fois au lieu de dix-huit dans cet exemple : elle est réutilisée sur chaque zone. Seule la partie inversion (3.) est propre à chaque domaine puisqu'elle dépend du champ de température de surface.

Le bruit de mesure étant homogène sur l'ensemble de la surface, le paramètre de régularisation peut être, lui aussi, réutilisé sur tous les domaines : il suffit donc de le

déterminer sur la première zone. La figure 5.19 donne en (a) le champ de température mesuré sur la zone 1 (repérée par la figure 5.18), réorganisé sous forme de vecteur, et en (b) le diagramme de Picard correspondant afin déterminer le paramètre de régularisation.

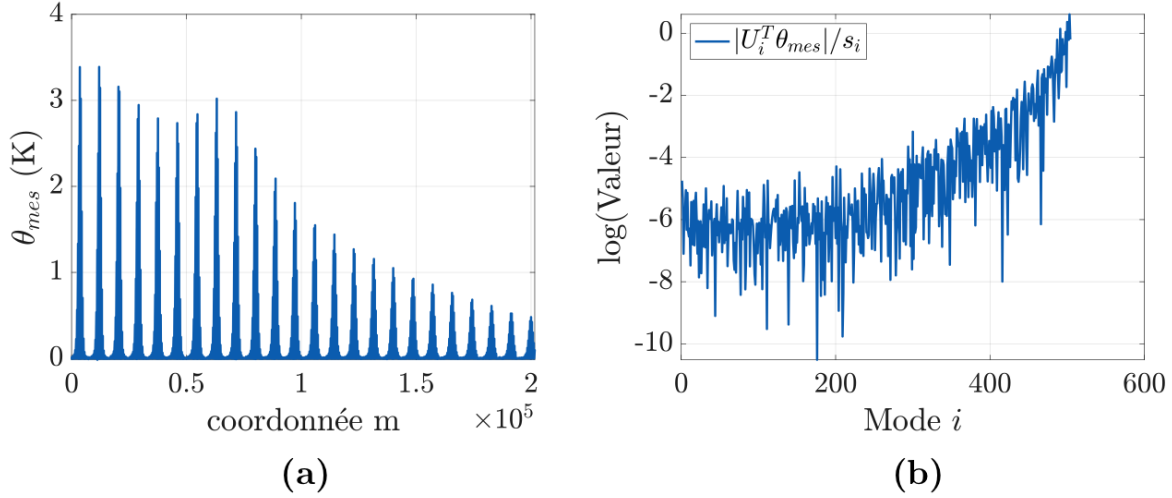


FIGURE 5.19 – Vecteur θ_{mes} contenant le champ de température spatio-temporel (a) et diagramme de Picard (b) sur la zone 1 (cf. figure 5.18 pour la numérotation des zones).

Le graphe (a) permet de voir que l'élévation maximale de température mesurée sur cette zone est de 3 degrés environ. Concernant le graphe (b), sur les 200 premiers modes, le facteur $|U_i^T \theta_{mes}|/s_i$ est constant en moyenne, tandis qu'il augmente exponentiellement (modulo les oscillations) à partir de ce mode. Le paramètre α_{reg} de régularisation est donc fixé pour tous les domaines par l'équation (5.6) :

$$\alpha_{reg} = s_{200}^2. \quad (5.6)$$

Deux solutions sont alors calculées : la première avec la régularisation par norme L_1 , la seconde avec la régularisation de Tikhonov (cf. §4.2). Les solutions obtenues sur chacun des dix-huit domaines sont juxtaposées pour reconstruire le domaine complet. Les résultats obtenus sont illustrés par la figure 5.20.

Les solutions (c'est à dire la position et l'intensité des sources thermiques) proposées par la régularisation de Tikhonov ou par norme L_1 sont, à première vue, sensiblement les mêmes : une intensité de sources à peu près constante tout le long du fil est retrouvée, sauf aux deux endroits (en haut à gauche et en bas à droite du "M") correspondants à une plus grande élévation de température où l'intensité retrouvée est plus importante. Cependant,

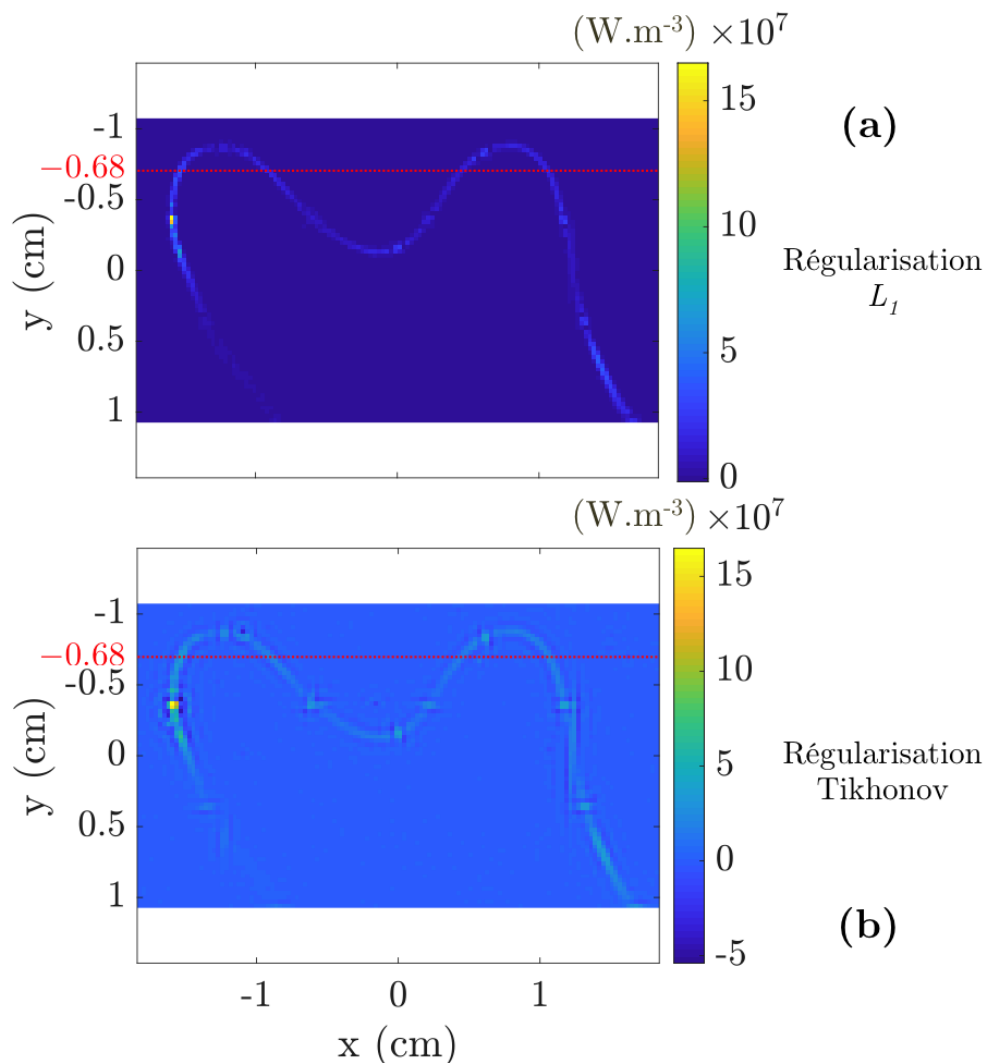


FIGURE 5.20 – Reconstruction des sources thermiques par méthode déterministe : régularisation L_1 (a) et régularisation de Tikhonov (b).

la reconstruction obtenue avec régularisation L_1 semble plus nette (plus de contraste) que celle obtenue avec la régularisation de Tikhonov. Pour bien visualiser la différence entre ces deux types de régularisation, la figure 5.21 trace les solutions obtenues pour chacune d'entre elles sur la ligne horizontale d'équation $y = -0.68$ cm, repérée en pointillés rouges sur la figure 5.20.

La solution obtenue avec la régularisation de Tikhonov présente des fluctuations parasites, particulièrement aux abords des sources thermiques. Ces fluctuations sont absentes dans la solution obtenue avec la régularisation par norme L_1 : cette dernière est donc plus

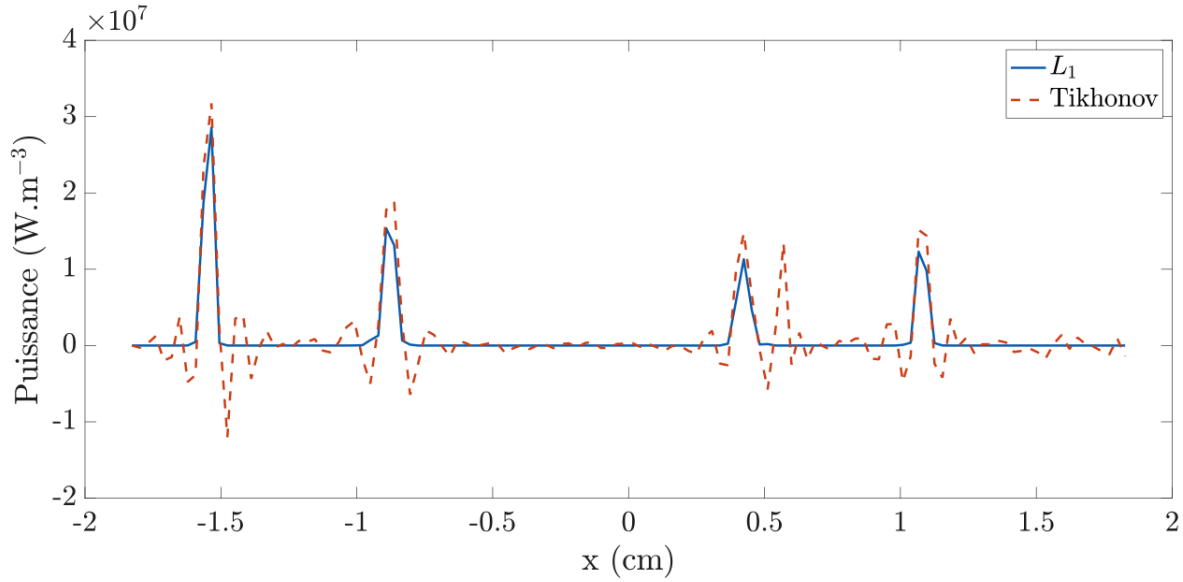


FIGURE 5.21 – Comparaison des solutions obtenues avec la régularisation par Tikhonov et par norme L_1 sur la ligne $y = -0.68$ cm.

adaptée pour le problème étudié. Ces résultats sont bien conformes avec ceux présentés au chapitre 4 pour une reconstruction en présence de bruit de mesure.

Ensuite, de manière prévisible, quelle que soit le type de régularisation effectuée, on retrouve des "nœuds" dans la reconstruction des sources localisés aux endroits où se trouvent les intersections de chaque domaine. Ces nœuds sont des erreurs dues à la division de l'espace de travail (*cf.* figure 5.18) et au fait que chaque domaine est traité indépendamment des autres. L'intensité d'une source à la frontière de deux (ou quatre) domaines est par conséquent surévaluée par chacun des domaines, ce qui se traduit par une intensité plus forte. Ces erreurs sont cependant moins prononcées avec la régularisation par norme L_1 (figure 5.20 (a)) qu'avec celle de Tikhonov (figure 5.20 (b)).

Le diamètre du fil reconstruit est l'ordre du pixel, soit $290 \mu\text{m}$, alors qu'il est en réalité de $200 \mu\text{m}$. Concernant l'intensité, il est difficile de connaître l'énergie réelle de la source thermique générée par le fil de Chromel (soit l'intensité des sources thermiques) : en effet, la puissance imposée par le générateur n'est pas complètement transformée par effet Joule, et même si la mousse placée à l'arrière permet de diminuer ce phénomène, il subsiste des pertes thermiques.

Reconstruction par approche probabiliste avec hypothèse d'intensité constante

Pour la méthode probabiliste, tous les pixels de la surface (contenant une température en fonction du temps) sont traités simultanément et considérés comme des problèmes 1D indépendants où l'objectif est de reconstruire la source en profondeur à l'aide de la température au point de surface. La division du domaine comme illustré sur la figure 5.18 n'a donc ici pas lieu d'être. Puisque dans cet exemple, on suppose la profondeur des sources thermiques connues, l'algorithme de la méthode probabiliste présenté au §4.3.2 du chapitre 4 va être simplifié : la recherche d'une position en profondeur n'est pas effectuée. Ainsi, à chaque pas de temps, on calcule une *likelihood* par pixel qui permet de comparer la valeur de la température mesurée au pixel avec celle du modèle théorique, donnée par l'équation (5.7) :

$$\theta_{th}(t) = \int_{t_0}^t \left[\frac{Q}{\rho C_p} \frac{\exp\left(-\frac{L_z^2}{4a\tau}\right)}{\sqrt{\pi a \tau^3}} \right] d\tau \quad (5.7)$$

où ρ est la masse volumique de la plaque de PVC (kg.m^3), C_p sa chaleur spécifique (J.kg.K^{-1}), a son coefficient de diffusion (m.s^{-2}), L_z la position en profondeur où se situe la source thermique, et Q l'intensité (puissance) testée (W.m^{-3}). L'équation (5.7) correspond à la solution analytique de la réponse thermique à l'échelon mesurée au droit d'une source située à la profondeur L_z , pour un modèle 3D.

Hypothèse : Pour cette étude, on suppose que les intensités des sources thermiques générées par le fil sont identiques et constantes en tous points.

Sous cette hypothèse, le problème peut s'écrire de manière à ne rechercher que la position des sources thermiques (et pas leurs intensités). Pour ce faire, on normalise les champs de température : celui mesuré (spatio-temporel) et celui théorique donné par l'équation (5.7) afin d'avoir une évolution comprise entre 0 et 1. L'intervalle de temps est le même que pour la méthode déterministe, soit entre $t = 0$ et $t_f = 2 \text{ s}$. Toutes les valeurs de température sont ainsi pondérées par la valeur maximale de température, repérée au temps t_f . Il est important de noter que les profils de température en chaque pixel sont conservés : les deux zones où l'élévation de température était maximale varient maintenant entre 0 et 1 tandis que les autres zones ont une variation plus faibles (entre 0 et 0.3 à peu près).

L'algorithme de reconstruction par approche probabiliste est alors appliqué et la solution obtenue est illustrée par la figure 5.22 (a) : elle représente la probabilité de la présence

de source en chaque point du plan. En **(b)** est rappelée la solution obtenue par la méthode déterministe avec régularisation L_1 , permettant de comparer les résultats.

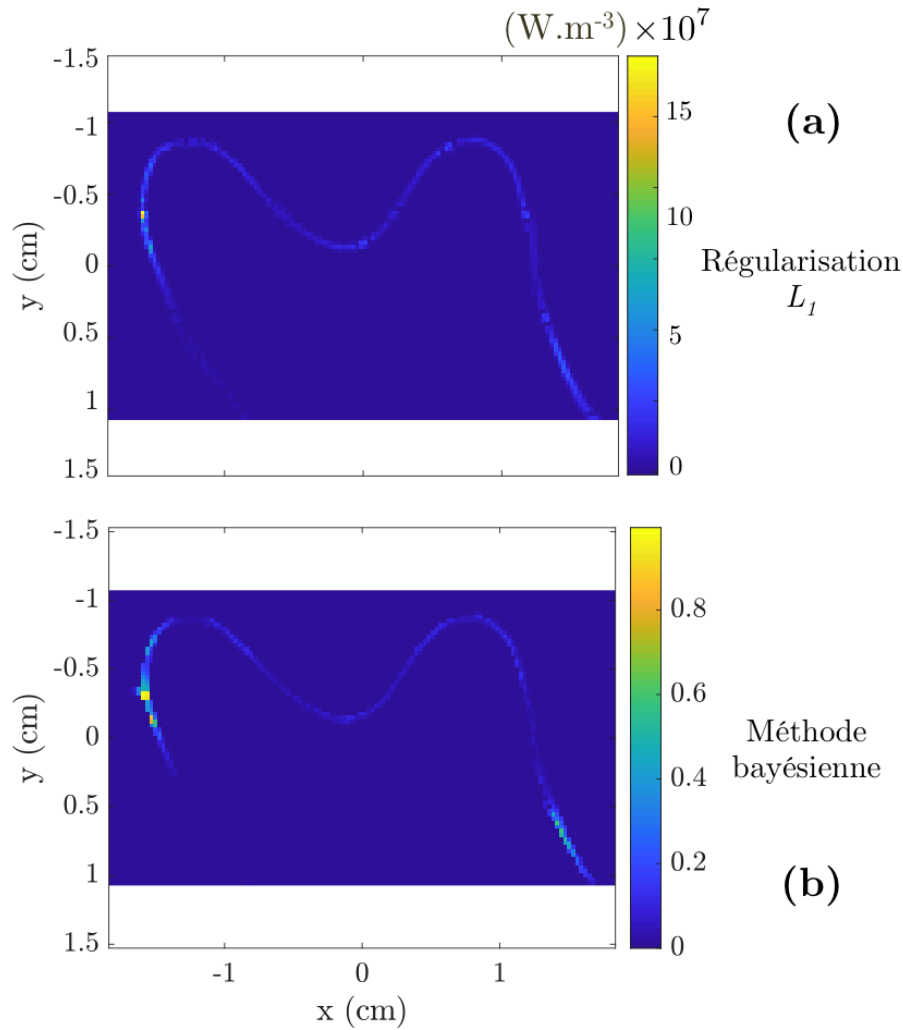


FIGURE 5.22 – Probabilités de répartition des sources retrouvées par approche bayésienne **(a)**. Reconstruction des sources par méthode déterministe avec régularisation L_1 **(b)**.

Tout d’abord, on peut remarquer que les positions des sources retrouvées par l’approche bayésienne sont les mêmes que celles données par la méthode déterministe. En effet, les probabilités obtenues sont non nulles uniquement sur les positions correspondant à la présence de sources. Par contre, les valeurs obtenues sont faibles, sauf en deux zones où elles approchent la valeur maximale de 1. Les valeurs des probabilités étant difficilement repérables sur la figure 5.22, la solution contenant la répartition des probabilités est réorganisée sous forme de vecteur et illustré par la figure 5.23. Sur cette dernière, les

amplitudes sont clairement visibles : les probabilités obtenues sont de l'ordre de 0.1 sauf sur les deux zones mentionnées précédemment où les intensités sont plus élevées.

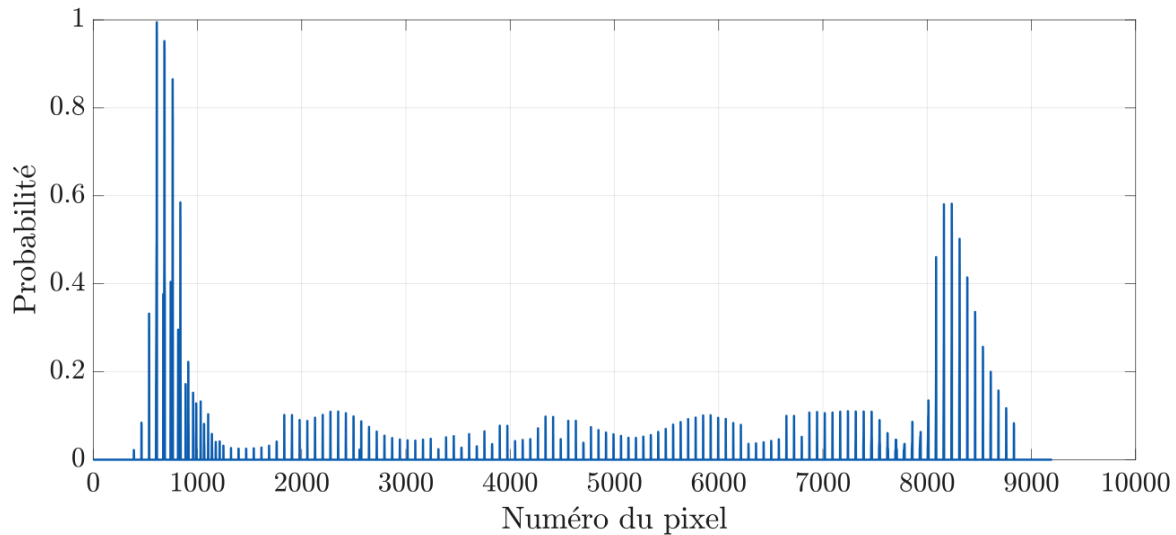


FIGURE 5.23 – Probabilités de répartition des sources retrouvées par approche bayésienne, réorganisées sous forme de vecteur.

Les valeurs faibles (0.1) s'expliquent par le fait que les intensités des sources ne sont pas identiques en tous points du fil. En effet, il a été observé dans les paragraphes précédents qu'en deux zones particulières, l'intensité de certaines sources est plus élevée. Or, la reconstruction par approche probabiliste a été effectuée en supposant les intensités identiques. Normaliser les champs de température par la valeur maximale obtenue (ce qui a été le cas pour cette étude) entraîne le fait que l'intensité de référence est celle de la source la plus intense. Les probabilités les plus élevées correspondent donc aux intensités les plus proches de cette dernière. Les variations de probabilités observées traduisent donc les différences d'intensités entre les sources.

De la même manière que pour l'étude déterministe, la solution est tracée sur la ligne de coupe $y = -0.68$ cm (repérée sur la figure 5.20) afin de voir la répartition de probabilité obtenue qui traduit la position des sources sur cette ligne. Elle peut être observée sur la figure 5.24, par une ligne continue bleue. Afin de comparer les résultats, la solution obtenue par la méthode déterministe avec régularisation par norme L_1 est représentée sur le même graphe par une ligne discontinue rouge. Le profil des sources retrouvées est le même, quelle que soit la méthode utilisée : les positions des sources thermique reconstruites sont en effet semblables.

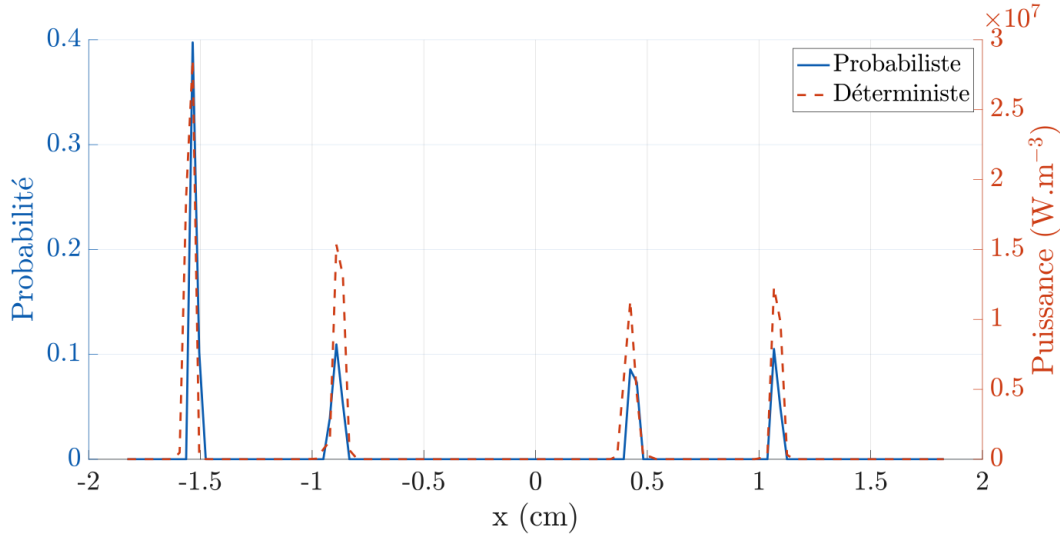


FIGURE 5.24 – Comparaison des solutions obtenues par la méthode probabiliste et ma méthode déterministe sur la ligne de coupe $y = -0.68$ cm.

Comparaison des temps d'exécution entre les deux méthodes

Le tableau 5.3 permet de comparer les temps d'exécution de chacune des deux méthodes sur cet exemple 2D. Les calculs ont été effectués sur l'ordinateur PC 128, dont les informations systèmes sont données en Annexe D. Le chargement des données ainsi que le débruitage par S.V.D. sont des opérations effectuées à la fois par la méthode déterministe et la méthode probabiliste : elles sont exécutées en moins de 6 secondes.

Concernant la méthode déterministe, sur cet exemple 2D, l'implémentation de la matrice opérateur de la zone réduite (un dix-huitième du domaine total) est une étape rapide qui s'effectue en moins d'une seconde. Le calcul de la S.V.D. de cette matrice prend ici 5s, ce qui est un temps raisonnable au vu de la taille de la matrice. Les régularisations (Tikhonov ou par norme L_1) doivent s'effectuer **dix-huit fois** puisqu'elles s'effectuent sur chacun des domaines, ce qui mène à un temps total d'exécution du programme de 13 secondes si c'est la régularisation par Tikhonov qui est effectuée ou d'une minute si c'est celle par norme L_1 .

Concernant la méthode probabiliste, le calcul de la matrice opérateur ainsi que les processus d'inversion ne sont pas effectués : seuls les calculs des *likelihood* menant aux probabilités sont exécutés. Le temps total nécessaire pour mener à la solution est d'environ 6 secondes.

	Méthode Déterministe	Méthode Probabiliste
Chargement des données de température	5.2 s	5.2 s
Débruitage du champ de température par S.V.D.	0.2 s	0.2 s
Implémentation de la matrice opérateur	0.85 s	∅
Calcul de la S.V.D. de la matrice opérateur	5.09 s	∅
Régularisation Tikhonov sur chaque domaine	0.1 s	∅
Régularisation L_1 sur chaque domaine	2.72 s	∅
Calcul de la répartition de probabilité	∅	0.27 s
Temps total	13 s (Tikhonov) 60 s (norme L_1)	6 s

TABLEAU 5.3 – Temps d'exécution en fonction de la méthode utilisée. (Calculs effectués sur l'ordinateur PC 128 : cf. Annexe D).

La méthode probabiliste est donc dix fois plus rapide que la méthode déterministe qui utilise la régularisation par norme L_1 (qui est à privilégier ici pour obtenir de bons résultats car les sources ici sont très peu étendues). Ces différences s'expliquent par le fait que la méthode probabiliste utilise un modèle 1D de champ de température et est peu sensible au bruit. Ainsi, contrairement à la méthode déterministe qui nécessite l'implémentation de la matrice opérateur qui contient le modèle des champs de température 2D, le calcul de la S.V.D. et la régularisation, la méthode probabiliste effectue seulement une boucle en temps pour comparer les valeurs des températures de chaque pixel avec le modèle 1D.

Conclusion pour le problème 2D

Pour ce problème 2D, la méthode déterministe avec régularisation par norme L_1 , bien que plus longue à exécuter, permet d'obtenir des résultats plus nets et plus contrastés que celle avec régularisation de Tikhonov. La méthode probabiliste testée sur a été implémenté en supposant les intensités de chaque sources identiques. Elle permet de retrouver avec la même précision la position des sources thermiques que la méthode déterministe avec régularisation L_1 et est beaucoup plus rapide à exécuter.

5.3.3 Problème 3D : profondeur supposée inconnue

Dans cette partie, le problème traité est le même que celui du paragraphe précédent, à la différence qu'ici aucune hypothèse sur la profondeur n'est effectuée (position du fil thermique dans la profondeur supposée inconnue). L'objectif est donc de retrouver, à partir du champ de température de surface, le profil 3D du fil de Chromel.

Le fil de Chromel est collé sur la face arrière de la plaque de PVC (d'épaisseur 1 mm). Pour bien retrouver l'effet 3D, la méthode des images est utilisée : la plaque est alors considérée d'épaisseur 2 mm avec le fil situé non pas sur sa face arrière mais sur le plan milieu. Ainsi, au moment de la reconstruction, on devrait retrouver le fil de Chromel centré sur le plan milieu de la plaque dans la direction de la profondeur.

Reconstruction 3D par méthode déterministe

Les paramètres pris pour cette étude sont les mêmes que ceux du cas 2D (nombre de Fourier, intervalle de temps), et le domaine est décomposé de la même manière (*cf.* figure 5.18). Cependant, ici, les zones d'études ne sont pas 2D mais 3D. D'après le critère illustré par la figure 3.16 dans le chapitre 3, le nombre de discrétisation maximal en z pour les nombres de Fourier choisis est aux alentours de 20. Le nombre de points de discrétisation pris en z (direction de la profondeur) est ici fixé à 16 de manière à avoir un nombre de points proche de cette limite tout en restant suffisamment faible pour limiter le temps de calcul du problème inverse. La résolution en profondeur est par conséquent de $125\ \mu\text{m}$. La matrice opérateur $\mathbf{I}$ de chaque domaine dans cette étude est donc de taille $n_t n_y n_x \times n_z n_y n_x = 201\,600 \times 8\,064$.

Sur chacun des dix-huit domaines, la solution calculée par le programme est un cube (matrice 3D) de dimensions $n_z \times n_y \times n_x$ qui contient des valeurs proches de zéro aux points qui ne contiennent pas de sources et des valeurs qui correspondent à l'intensité de la source aux points qui en contiennent. La juxtaposition de tous les domaines forme le volume total, soit la plaque étudiée. La figure 5.25 illustre les résultats obtenus. En (a) et (b) est représentée la solution obtenue avec la régularisation de Tikhonov, et en (c) et (d) celle avec régularisation par norme L_1 .

La différence entre les deux types de régularisation est clairement visible ici, particulièrement dans la direction de la profondeur z . En effet, l'étude et la comparaison des graphes (a) et (c), permet de voir que les sources reconstruites par régularisation de Ti-

khonov s'étendent jusqu'à la face arrière de la plaque, alors que celles reconstruites par la norme L_1 sont bien positionnées et centrées au milieu de la plaque, sur un plan situé à 1 mm de profondeur. Dans les directions x et y , les mêmes tendances que pour le problème 2D sont retrouvées. De manière générale, la solution proposée avec la régularisation par norme L_1 est beaucoup plus nette et moins étalée que celle par Tikhonov.

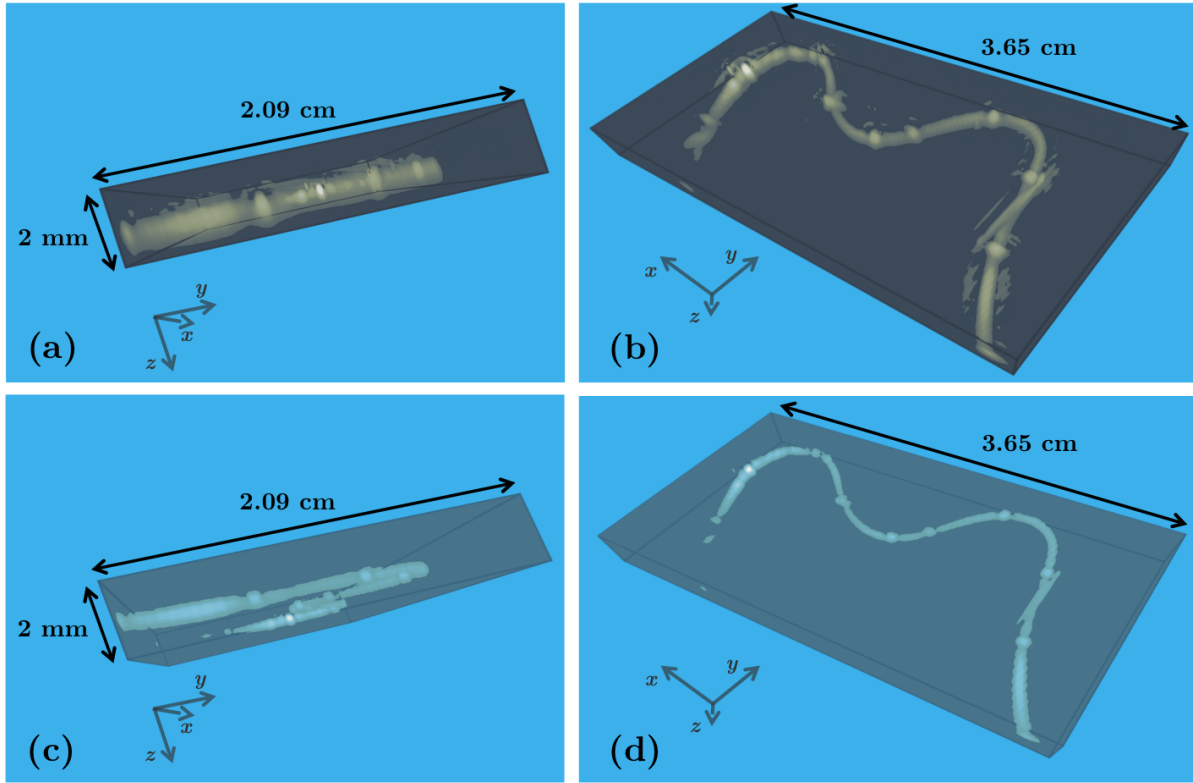


FIGURE 5.25 – Reconstruction 3D des sources thermiques (fil de Chromel) par méthode déterministe. Régularisation de Tikhonov : vue de profil (a) et vue de face (b). Régularisation par norme L_1 : vue de profil (c) et vue de face (d).

Afin de visualiser plus précisément les différences entre les deux solutions obtenues, ces dernières sont tracées par la figure 5.26 sur deux lignes de coupe particulières, représentées sur le schéma (a). Le graphe (b) trace les solutions obtenues sur la ligne de coupe horizontale $y = -0.68$ cm. On retrouve sensiblement les mêmes résultats que pour le problème 2D, donné par la figure 5.21, ce qui montre que la régularisation agit de la même manière selon les directions x et y qu'il s'agisse d'un problème 2D ou 3D. Autrement dit, l'ajout de la dimension en profondeur n'influence pas la résolution dans le plan xy pour le problème déterministe.

Le graphe (c) de la figure 5.26 trace les solutions obtenues sur la ligne de coupe verticale $x = -1.45$ cm avec les deux types de régularisation. La régularisation de Tikhonov propose une solution lissée, qui s'étend vers la profondeur de la plaque, tandis que la régularisation par norme L_1 propose une solution avec de forts contrastes, centrée en $z = -1$ mm.

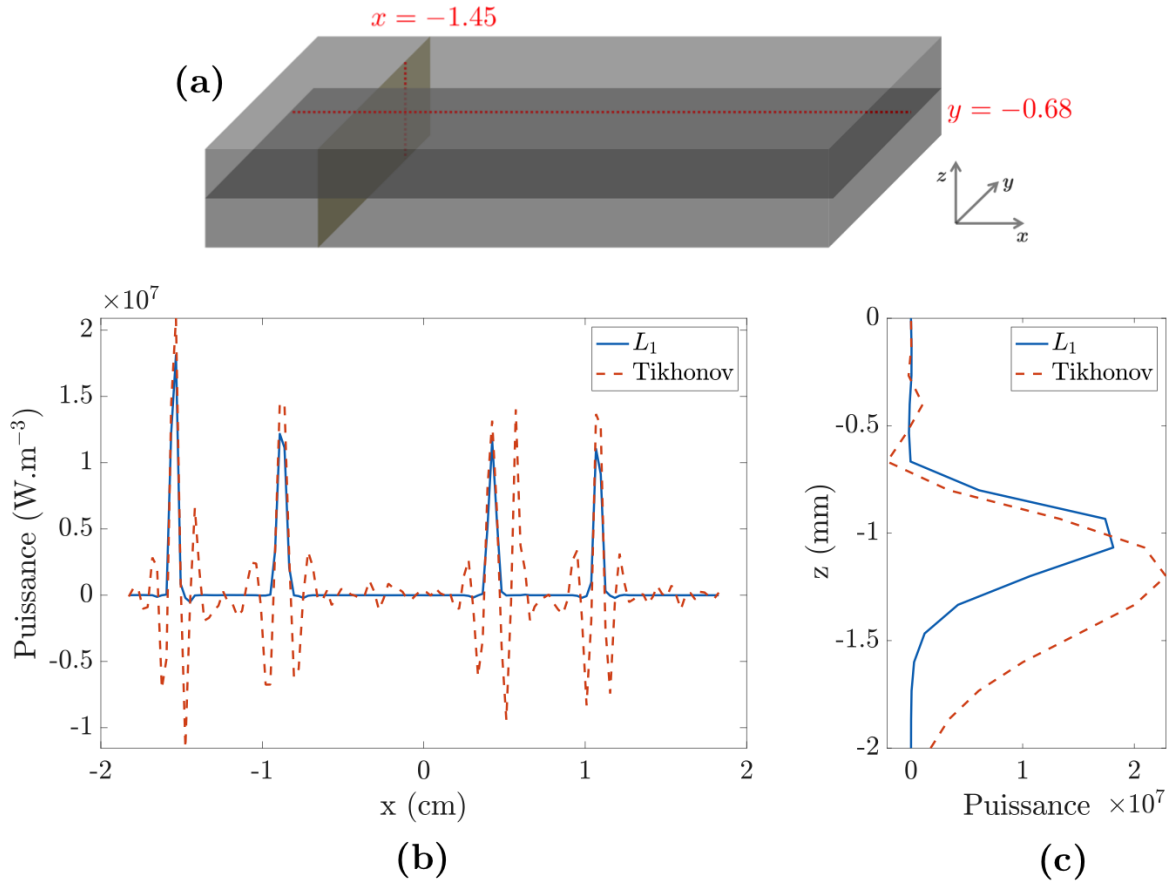


FIGURE 5.26 – Schéma de la plaque avec les deux lignes de coupe : horizontale ($y = -0.68$ cm) et verticale ($x = -1.45$ cm) (a). Comparaison des solutions obtenues avec la régularisation par Tikhonov et par norme L_1 sur la ligne de coupe horizontale (b) et verticale (c).

Enfin, tout comme pour le problème 2D, la présence de nœuds, dus à la division spatiale effectuée, est retrouvée ici. Pour diminuer ces erreurs dues aux effets de bords, un traitement est effectué aux frontières de chaque domaine sur la solution avec régularisation par norme L_1 : dans chaque zone, la valeur des points situés aux frontières est moyennée avec celle de leurs voisins de manière à homogénéiser la solution. Le résultat obtenu, illustré par la figure 5.27, montre que les nœuds sont moins visibles.

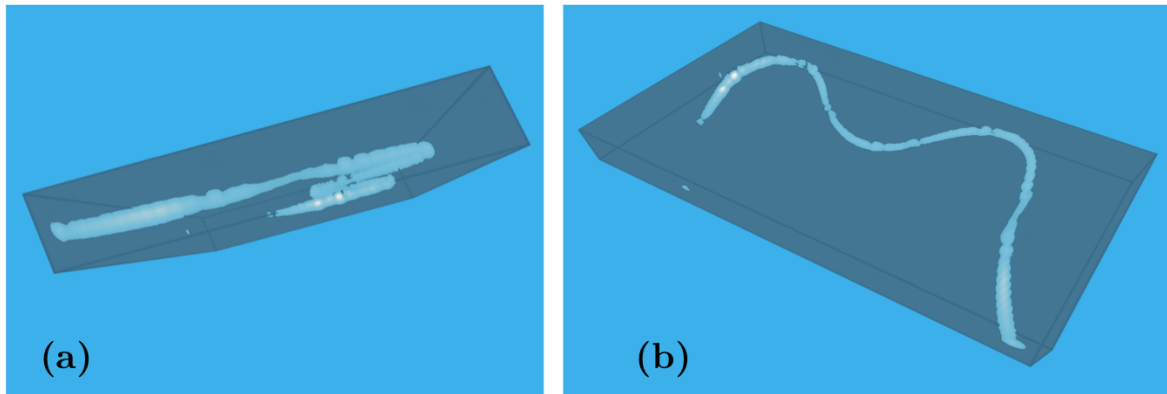


FIGURE 5.27 – Reconstruction 3D des sources thermiques après traitement des effets de bords sur la solution avec régularisation par norme L_1 : vue de profil (a) et de face (b).

Discussion sur le temps d'exécution du programme

Pour ce problème 3D, le calcul n'a pas été effectué sur la machine Mac16 car le temps d'exécution du programme serait trop long (il serait de l'ordre de deux jours d'après nos estimations). En revanche, le calcul a été effectué sur trois machines différentes, dont les informations systèmes sont données en Annexe D. Le tableau 5.4 permet de comparer les temps d'exécution des différentes parties du programme en fonction des ordinateurs utilisés.

	Mac16	PC 128	PC 256	PC 128b
Implémentation de la matrice opérateur	133 s	10 s	20.1 s	8.9 s
Calcul de la S.V.D.	Non effectué	24 min	7.1 min	17 min
Régularisation L_1	Non effectué	17 min	6.1 min	10 min
Temps total (séquentiel)	Non effectué	5 h 45	2 h	3 h 20

TABEAU 5.4 – Temps d'exécution en fonction des ordinateurs utilisés (*cf.* Annexe D).

De manière prévisible, l'ordinateur le plus performant (PC 256) est celui qui permet d'avoir le temps d'exécution du programme le plus rapide (2h de calcul en séquentiel). Le deuxième ordinateur le plus performant (PC 128b) effectue le calcul en 3 h 20 tandis que

le troisième exécute le programme en 5 h 45. La partie la plus coûteuse en temps de calcul est la partie régularisation par norme L_1 puisqu'il s'agit d'une méthode itérative. En effet, contrairement à l'implémentation et au calcul de la S.V.D qui ne s'effectue qu'une seule fois, la régularisation L_1 doit se faire sur chacun des dix-huit domaines. En séquentiel, ces calculs sont effectués les uns après les autres, multipliant par dix-huit le temps de calcul de cette partie du programme.

Une manière de réduire le temps d'exécution serait de paralléliser le calcul de la régularisation, en l'effectuant simultanément sur chaque domaine. Cette opération est possible puisque chacune des zones est supposée indépendante des autres. Cette méthode permettrait de réduire significativement le temps d'exécution du programme de reconstruction de sources volumiques par méthode déterministe.

Premiers résultats obtenus avec l'approche probabiliste

De la même manière que pour le problème 2D, la méthode probabiliste appliquée ici va supposer que l'intensité des sources thermiques est la même sur tous les points du fil de Chromel. On va supposer que la puissance des sources générées est de 10^7 W.m^{-3} . Cette valeur est choisie d'après les résultats obtenus par la méthode déterministe (*cf.* figure 5.26).

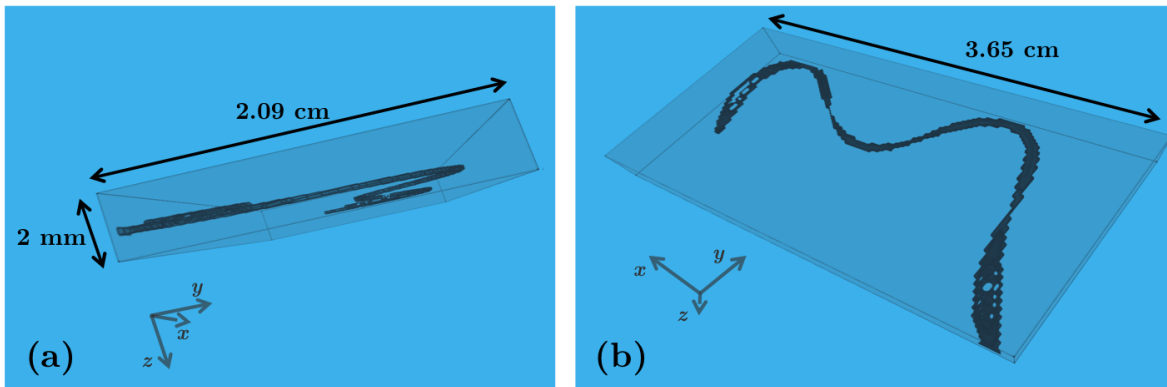


FIGURE 5.28 – Résultats obtenus par l'approche bayésienne (probabilités de présence de sources thermiques) : vue de profil (a) et vue de face (b).

L'algorithme de reconstruction de sources par méthode bayésienne, détaillé au chapitre 4, est alors appliqué et le résultat obtenu est illustré par la figure 5.28. La solution donnée par le programme est une matrice 3D qui représente le volume de la plaque, où chaque point de la matrice contient la probabilité de la présence d'une source en ce point avec une intensité de 10^7 .

La profondeur des sources est en moyenne bien retrouvée avec cette méthode : le fil est reconstruit sur le plan parallèle à la surface, au centre de la plaque. Concernant la reconstruction selon les directions x et y , le fil est reconstruit plus épais qu'il ne l'est en réalité : particulièrement sur les zones où la variation de température est plus importante (*cf.* paragraphes précédents). Cette erreur est due au fait que l'algorithme considère l'intensité constante en tout point du fil. On peut d'ailleurs remarquer en **(a)** que sur ces zones, le fil est reconstruit à une position légèrement plus haute.

Afin d'avoir les valeurs de probabilités obtenues, la solution est réorganisée sous forme de vecteur, nommé P_r , et tracée sur la figure 5.29. Les données sont rangées dans P_r plan (xy) par plan (xy) en partant de la surface vers la face arrière de la plaque. Sur chaque plan, les données sont balayées en y puis en x .

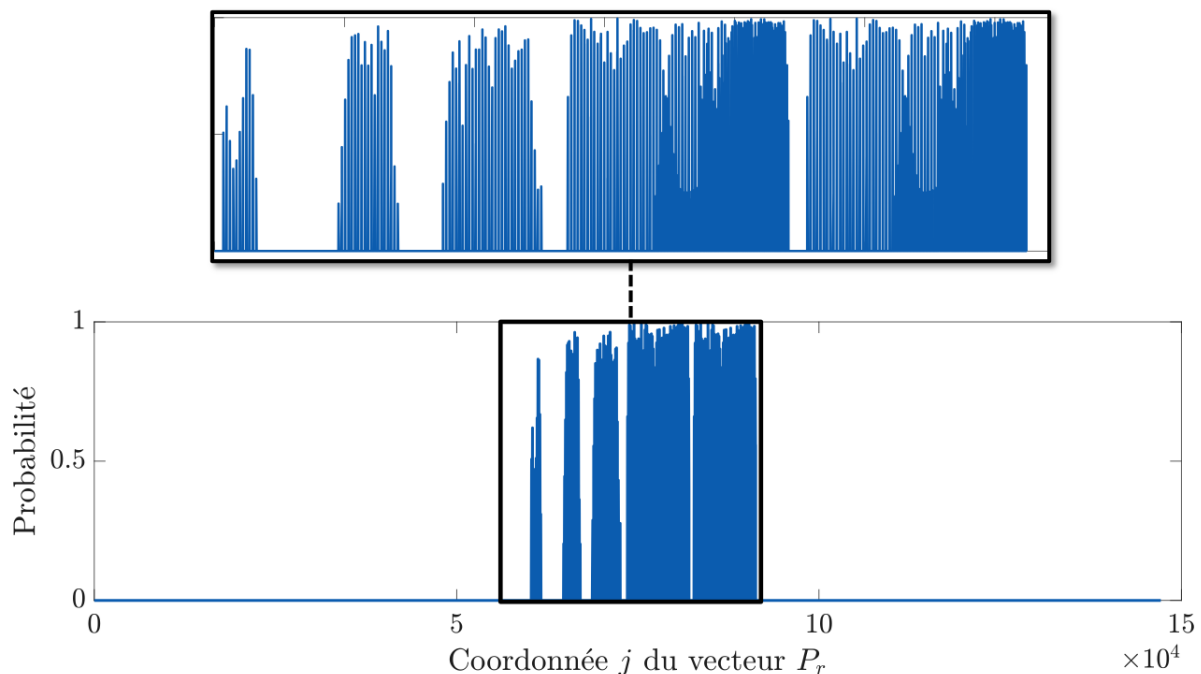


FIGURE 5.29 – Vecteur P_r contenant les probabilités obtenues par approche bayésienne.

Les probabilités obtenues sont nulles sur tous les plans, sauf sur les trois plans centrés autour de $z = -1$ mm. Un zoom est effectué sur la zone correspondante à ces plans. Sur ces derniers, les valeurs des probabilités obtenues sont élevées : elles sont pour la plupart comprises entre 0.8 et 1.

La figure 5.30 donne les valeurs des probabilités obtenues sur les mêmes lignes de coupe, horizontale et verticale, que celles représentées par le graphe (a) de la figure 5.26. La solution obtenue avec la méthode déterministe avec régularisation par norme L_1 est rappelée ici pour pouvoir comparer les résultats.

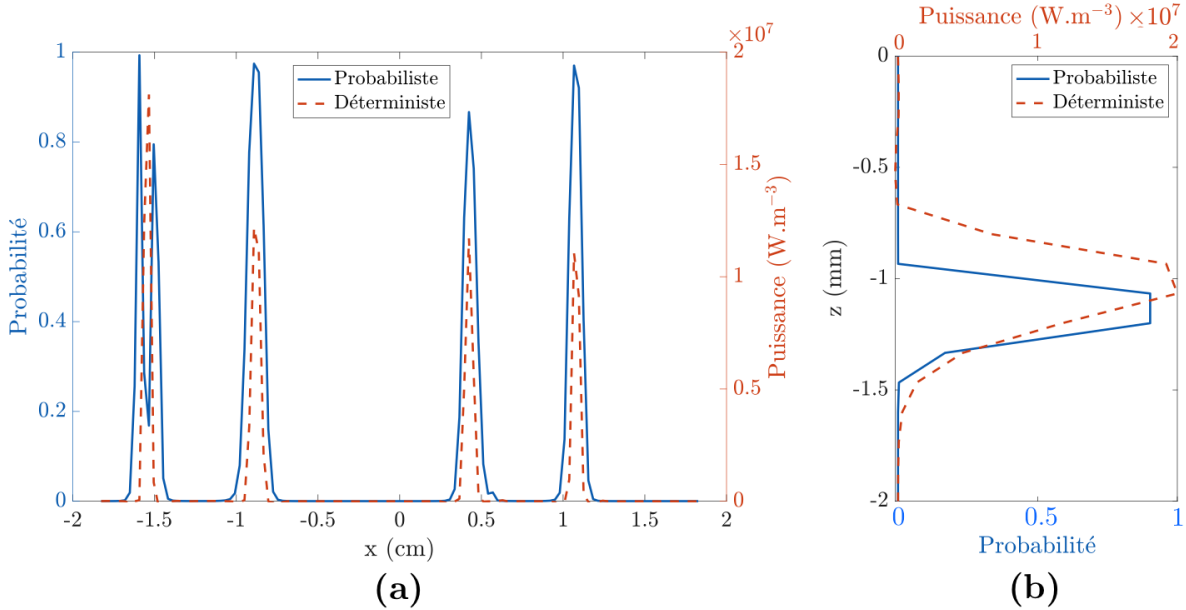


FIGURE 5.30 – Comparaison des solutions obtenues par la méthode probabiliste et la méthode déterministe avec régularisation par norme L_1 sur la ligne horizontale $y = -0.68$ cm (a) et sur la ligne verticale $x = -1.45$ cm (b), repérées par la figure 5.26.

Les probabilités obtenues par la méthode bayésienne sont très élevées sur les positions des sources et nulles sur les positions ne contenant pas de sources thermiques. Sur la figure 5.30 (a), les sources sont retrouvées pour les mêmes positions quelle que soit la méthode utilisée. Une différence est cependant notable au point $x = -1.5$ cm : la méthode bayésienne reconstruit deux sources situées de part et d'autre de la source reconstruite par la méthode déterministe. Cette erreur est due au fait que la source située au point $x = -1.5$ cm est d'intensité plus élevée que 10^7 . Par conséquent, l'algorithme probabiliste confond cette source d'intensité élevée avec deux sources voisines d'intensités 10^7 W.m^{-3} .

Concernant la reconstruction des sources selon l'axe z (dans l'épaisseur de la plaque), la figure 5.30 (b) montre que la méthode probabiliste positionne le fil légèrement plus en profondeur que la méthode déterministe. L'épaisseur du fil reconstruit est en revanche sensiblement la même, quelle que soit la méthode utilisée.

Enfin, un point important à souligner est le temps d'exécution du programme. Le calcul, lancé sur l'ordinateur Mac16 (le moins puissant des ordinateurs testés) a duré **8.35 secondes**. D'après les résultats affichés par le tableau 5.4, dans le meilleur des cas, le temps nécessaire pour obtenir la solution avec la méthode déterministe est de 2 heures si le calcul est effectué en séquentiel. S'il est parallélisé, ce temps de calcul peut être réduit, mais il reste néanmoins plus long que celui de l'algorithme par approche probabiliste, principalement en raison du temps nécessaire pour calculer la S.V.D. de la matrice opérateur (*cf.* tableau 5.4 et §3.2.3). La méthode par approche bayésienne est donc incontestablement plus rapide que celle par approche déterministe.

Conclusion sur les résultats expérimentaux

Les résultats obtenus par la méthode déterministe ont montré que la régularisation par norme L_1 est plus adaptée que celle par Tikhonov pour cet exemple expérimental, confirmant les résultats du chapitre 4. L'inconvénient majeur de cette méthode est le temps de calcul nécessaire pour la reconstruction volumique des sources : plusieurs heures sont nécessaires pour la reconstruction d'un échantillon de quelques centimètres cubes. La méthode probabiliste permet quant à elle de reconstruire les sources dans ce volume en quelques secondes, la rendant plus attractive que la méthode déterministe. Cependant, les sources reconstruites sont légèrement mésestimées et quelques erreurs subsistent car les intensités des sources ne sont pas les mêmes.

Les perspectives envisagées sont de coupler les deux méthodes en attendant de développer la méthode probabiliste, comme explicité à la fin du chapitre 4.

Conclusion

Deux exemples, le premier numérique et le second expérimental ont été traités dans ce chapitre afin de vérifier la validité des résultats présentés dans les chapitres 3 et 4. Le premier exemple consistait à générer des sources par la propagation d'ondes acoustiques dans un matériau viscoélastique tandis que la seconde en générait par effet Joule. L'ensemble des résultats présentés dans les chapitres précédents, soit le débruitage du champ de température à l'aide d'une S.V.D., le critère dépendant du nombre de Fourier et les avantages respectifs de chacune des méthodes, ont été vérifiés.

La méthode déterministe de reconstruction de sources avec régularisation permet de retrouver la forme et l'intensité (puissance générée) des sources pour des problèmes 2D ou 3D, mais les intensités sont légèrement sous-estimées, particulièrement dans la profondeur, en raison de la régularisation qui pondère les modes les plus faibles du modèle. Le temps d'exécution du programme est particulièrement long : plusieurs heures sont nécessaires pour reconstruire des sources dans un volume de quelques centimètres cubes avec une précision d'une centaine de microns.

La méthode de reconstruction par approche probabiliste est aujourd'hui sous forme d'ébauche, et nécessite d'être développée pour pouvoir l'utiliser de manière complètement indépendante. Cependant, les premiers résultats obtenus permettent de mettre en évidence son potentiel : les positions des sources sont aussi bien retrouvées que par la méthode déterministe, en seulement quelques secondes. La méthode par approche bayésienne est en effet très rapide et ne nécessite pas de régularisation car elle est peu sensible au bruit de mesure.

Les perspectives envisagées sont, en attendant de développer la méthode par approche bayésienne, de coupler les méthodes pour reconstruire de manière plus optimale les sources volumiques, comme explicité en fin de chapitre 4. En parallèle, le modèle utilisé pour reconstruire les sources thermique pourra être développé de manière à prendre en compte des conditions limites (milieu fini, pertes thermiques, effet de bords...).

CHAPITRE 6

Conclusion et perspectives

Table des matières

6.1	Conclusion sur le travail réalisé	182
6.2	Perspectives	184

6.1 Conclusion sur le travail réalisé

Ce travail de thèse s'est inscrit dans le domaine de l'Évaluation et du Contrôle Non Destructifs. Le sujet se focalise sur la caractérisation de sources thermiques volumiques présentes au sein d'un matériau à partir du champ de température mesuré à la surface.

L'état de l'art effectué au chapitre 2 recense les différents excitateurs utilisés pour le C.N.D. en thermique. La présentation des principaux systèmes de conversion d'énergie a mis en évidence la possibilité de générer des sources volumiques au sein d'un matériau plutôt qu'à la surface. Puisque ces sources thermiques peuvent être issues de différents phénomènes, les caractériser est la première étape menant au C.N.D. des milieux étudiés. En effet, une fois la source caractérisée, il est possible de remonter aux paramètres responsables de l'origine de la source étudiée (présence de défaut, viscoélasticité, changement de phase...). Les deux limitations principales qui ressortent des travaux existants sont la profondeur et le bruit de mesure.

L'analyse théorique de la méthode de reconstruction basée sur la réponse thermique à une excitation impulsionnelle présentée au chapitre 3 a permis de dévoiler un critère dépendant du nombre de Fourier. L'abaque résultante de ce critère permet de déterminer les limites de reconstruction, et par conséquent les domaines d'utilisations de la méthode. Un profilomètre thermique sans contact, que ce soit pour les pièces industrielles ou pour les milieux biologiques à petite échelle a été développé à partir de la méthode proposée dans ce chapitre. À l'aide d'une source multi-spectrale (laser), il est possible de retrouver le profil de matériaux multicouches, tels que les composites ou les milieux biologiques.

Le bruit de mesure est une difficulté importante pour la reconstruction des sources thermiques, car le problème est mathématiquement mal posé. Une étude paramétrique en fonction du bruit a montré que la méthode présentée dans le chapitre 3 est inexploitable du fait de sa sensibilité à la moindre perturbation. En effet, plus le niveau de bruit est important, plus les modes les plus faibles de la S.V.D. du modèle sont dominés par le bruit, faisant diverger la solution. Il existe un lien direct entre le SNR, le nombre de Fourier et le nombre de modes indépendants du bruit. Traiter le bruit en effectuant une S.V.D. du champ de température est une méthode efficace pour filtrer le bruit mais n'est pas suffisante pour stabiliser l'inversion. La première solution proposée est d'ajouter des termes de régularisation dans la méthode explicitée au chapitre 3. La seconde solution consiste à ne plus appréhender le problème de manière déterministe, comme dans l'algorithme d'inver-

sion, mais de l'approcher de manière probabiliste en se servant de l'inférence bayésienne. Contrairement à l'algorithme d'inversion, cette méthode est extrêmement peu sensible au bruit de mesure et est prometteuse pour retrouver avec justesse les profils des sources thermiques présentes au sein d'un matériau.

L'application de ces deux méthodes sur des cas numériques et expérimentaux a été effectuée au chapitre 5 afin de valider les résultats. La méthode déterministe de reconstruction de sources avec régularisation permet de retrouver les sources, mais les intensités sont légèrement sous-estimées, particulièrement dans la direction de la profondeur, en raison de la régularisation qui pondère les modes les plus faibles du modèle. Le temps d'exécution du programme est, de plus, particulièrement long : plusieurs heures sont nécessaires pour reconstruire des sources dans un volume de quelques centimètres cubes avec une résolution de quelques centaines de microns. La méthode de reconstruction par approche probabiliste est aujourd'hui en phase de développement pour les problèmes 2D et 3D : elle nécessite d'être développée pour pouvoir l'utiliser de manière complètement indépendante pour pouvoir retrouver conjointement l'intensité et la forme des sources. Cependant, les premiers résultats obtenus permettent de mettre en évidence son potentiel : les positions des sources sont aussi bien retrouvées que par la méthode déterministe, en seulement quelques secondes, contre plusieurs heures pour la méthode déterministe. La méthode par approche bayésienne est en effet très rapide et ne nécessite pas de régularisation car elle est peu sensible au bruit de mesure.

Pour conclure, les principaux éléments apportés dans ce travail de thèse sont les suivants :

- Un critère et un abaque dépendants du nombre de Fourier ont été mis en évidence. Ce critère permet d'anticiper la qualité de la reconstruction des sources et d'expliquer la limitation liée à la profondeur.
- Deux méthodes de reconstruction, la première déterministe, la seconde probabiliste, ont été analysées et développées à l'aide du modèle analytique de la réponse thermique à une excitation impulsionnelle. Il a été montré que ces deux méthodes sont applicables sur des problèmes réels avec des sources non impulsionnelles et des configurations qui ne sont pas celles du modèle.
- La méthode probabiliste, développée pour les problèmes 1D, est basée sur l'inférence bayésienne mais s'affranchit des méthodes de type MCMC pour chercher les sources

en se servant de la connaissance physique du modèle (superposition des champs de température). Elle est donc très rapide à exécuter. Elle est de plus très peu sensible au bruit de mesure ce qui la rend attractive et prometteuse pour la reconstruction de sources volumiques.

6.2 Perspectives

Les perspectives envisagées sont, à très court terme, de développer le modèle utilisé de manière à prendre en compte les conditions limites. Le modèle développé ici utilise en effet la réponse thermique à une excitation Dirac dans un milieu considéré semi-infini où les pertes thermiques sont négligées. La prise en compte des conditions de bords, des pertes thermiques et des autres paramètres jusque-là négligés dans le modèle n'entraînera pas de fortes modifications dans les résultats présentés dans cette thèse : le critère dépendant du nombre de Fourier et l'influence de bruit de mesure resteront inchangés. Cependant, le modèle complet sera plus proche de la réalité et permettra de réduire les erreurs, particulièrement sur les bords des domaines.

Ensuite, en attendant de développer la méthode probabiliste, l'idée est de coupler les méthodes pour reconstruire de manière plus optimale les sources volumiques, comme explicité en fin de chapitre 4. L'utilisation conjointe de ces deux méthodes aura pour effet de réduire la zone de recherche dans l'algorithme de reconstruction par méthode déterministe, diminuant par conséquent le temps nécessaire à l'exécution du programme. La solution obtenue pourra de plus être validée à l'aide de la méthode probabiliste. L'objectif est d'exploiter au maximum la méthode par approche bayésienne pour réduire la place de la méthode déterministe dans la reconstruction et ainsi éviter la régularisation qui est chronophage et qui apporte un biais à la solution. Ainsi une perspective importante de ce travail réside dans le développement de cette approche, afin de reconstruire conjointement l'intensité et la géométrie des sources 3D thermiques.

La méthode de profilométrie thermique présentée à la fin du chapitre 3 fait l'objet d'un dépôt de Brevet. Un dépôt de logiciel englobant les différentes techniques de méthodes inverses développées par notre équipe, dont fait partie la méthode de reconstruction de sources volumiques par approche bayésienne présentée dans ce manuscrit, est en cours de réflexion. Les applications industrielles de ces méthodes sont nombreuses : concernant la profilométrie sans contact, la méthode permet d'avoir de manière quasi-instantanée une cartographie 3D complète de milieux hétérogènes avec une résolution très fine. Elle peut

donc être utilisée pour la détection de fissures, délaminages, défauts dans les matériaux composites (qui sont de plus en plus utilisés dans les industries de l'aéronautique et du spatial). Cette technique peut aussi être utilisée pour faire de la microscopie thermique de milieux biologiques.

La reconstruction de sources thermiques volumiques consiste en la première étape de l'E.C.N.D. des milieux étudiés : la connaissance de la géométrie et de l'intensité de la source permet de remonter aux paramètres responsables de la génération de celle-ci. En effet, comme explicité au chapitre 2, différents systèmes de conversion d'énergie peuvent mener à la génération de sources thermiques volumiques. Par exemple, une fissure présente dans un matériau métallique excitée par induction, un matériau soumis à des tests de fatigue (excitation mécanique cyclique), un matériau composite viscoélastique excité par des ondes acoustiques, vont mener à la génération de sources thermiques volumiques. La connaissance du profil complet de ces sources, obtenu par la méthode de reconstruction développée ici, permettra de caractériser la fissure, les défauts d'une éprouvette ou encore à la viscoélasticité, paramètres responsables de l'échauffement. Ainsi ce travail s'inscrit dans une démarche long terme autour de la caractérisation volumique de matériaux par la thermique.

Calcul de la solution analytique : problème Dirac

Prenons le cas d'une plaque de dimensions $L_x \times L_y \times L_z$ de masse volumique ρ . Soit α_x , α_y et α_z ses coefficients de diffusion selon chacun des axes x , y et z . Supposons qu'à l'instant $t = 0$, une source de chaleur q_0 (en Joule) correspondant à une densité de flux impulsionnelle en temps soit activée ($x' = 0, y' = 0, z' = 0$) dans le domaine défini ici par $-L_x/2 \leq x \leq L_x/2$; $-L_y/2 \leq y \leq L_y/2$ et $0 \leq z \leq L_z$. Afin de simplifier les conditions aux limites, la plaque est supposée adiabatique. Le problème 3D associé peut s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} = \alpha_x \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \alpha_y \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \alpha_z \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial z^2} \\ -\lambda_x \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial x} \Big|_{x=\pm L_x/2} = 0 \\ -\lambda_y \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{y=\pm L_y/2} = 0 \\ -\lambda_z \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = q_0 \cdot \delta(x, y, t) \\ -\lambda_z \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0, L_z} = 0 \\ T(x, y, z, t=0) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

où $\delta(x, y, t) = \delta(x)\delta(y)\delta(t)$ est le produit de trois distributions de Dirac qui s'exprime en $\text{m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ et $\lambda_i = \alpha_i \rho C_p$ la conductivité thermique selon la direction i .

A.1 Passage dans les domaines de Fourier et Laplace

Une manière de résoudre l'équation (A.1) est de passer dans les domaines de Laplace et de Fourier. En effet, l'application au champ de température $T(x, y, z, t)$ d'une transformée de Laplace en temporel et de deux transformées de Fourier-cosinus en espace donne :

$$\theta(a_n, b_m, z, p) = \int_{-L_x/2}^{L_x/2} \int_{-L_y/2}^{L_y/2} \int_{t=0}^{+\infty} T(x, y, z, t) e^{-pt} \cos(b_m y) \cos(a_n x) dt dy dx \quad (\text{A.2})$$

où $a_n = 2n\pi/L_x$, $n \in \mathbb{N}$ et $b = 2m\pi/L_y$, $m \in \mathbb{N}$ représentent les fréquences spatiales de Fourier. De même, l'application de ces mêmes transformées à l'équation (A.1) donne :

$$\begin{aligned} \int_{-L_x/2}^{L_x/2} \int_{-L_y/2}^{L_y/2} \int_{t=0}^{+\infty} \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} e^{-pt} \cos(b_m y) \cos(a_n x) dt dy dx = \\ \int_{-L_x/2}^{L_x/2} \int_{-L_y/2}^{L_y/2} \int_{t=0}^{+\infty} \left[\left(\alpha_x \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \alpha_y \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \alpha_z \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right) \cdot \right. \\ \left. e^{-pt} \cos(b_m y) \cos(a_n x) \right] dt dy dx \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Deux calculs préliminaires, détaillés par les équations (A.4) et (A.5), sont nécessaires pour la résolution de l'équation (A.3) :

Premier calcul :

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^{+\infty} \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} e^{-pt} dt &= \left[T(x, y, z, t) \cdot e^{-pt} \right]_{t=0}^{+\infty} - \int_{t=0}^{+\infty} T(x, y, z, t) (-pe^{-pt}) dt \\ &= p \int_{t=0}^{+\infty} T(x, y, z, t) e^{-pt} dt \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Deuxième calcul :

$$\int_{-L_x/2}^{L_x/2} \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial x^2} \cos(a_n x) dx = -a_n^2 \int_{-L_x/2}^{L_x/2} T(x, y, z, t) \cos(a_n x) dx \quad (\text{A.5})$$

Suite à ces résultats, l'équation (A.3) peut alors s'écrire :

$$p \cdot \theta(a_n, b_m, z, p) = -\alpha_x a_n^2 \theta(a_n, b_m, z, p) - \alpha_y b_m^2 \theta(a_n, b_m, z, p) + \alpha_z \frac{d^2 \theta(a_n, b_m, z, p)}{dz^2} \quad (\text{A.6})$$

Ainsi, dans les domaines de Fourier-Fourier-Laplace, le problème (A.1) est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2\theta(a_n, b_m, z, p)}{dz^2} - \left(\frac{\alpha_x}{\alpha_z} a_n^2 + \frac{\alpha_y}{\alpha_z} b_m^2 + \frac{p}{\alpha_z} \right) \theta(a_n, b_m, z, p) = 0 \\ -\lambda_z \frac{d\theta(a_n, b_m, z, p)}{dz} \Big|_{z=0} = q_0 \\ -\lambda_z \frac{d\theta(a_n, b_m, z, p)}{dz} \Big|_{z=L_z} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.7})$$

avec q_0 au membre de droite de la seconde équation de A.7 la densité d'énergie en Joules, qui résulte de l'identité suivante :

$$q_0 = \int_{t=0}^{+\infty} \int_{-L_x/2}^{L_x/2} \int_{-L_y/2}^{L_y/2} q_0 \exp(-pt) \cos(a_n x) \cos(b_m y) \delta(x) \delta(y) \delta(t) dy dx dt \quad (\text{A.8})$$

A.2 Résolution du problème

L'équation (A.7) est une simple équation différentielle du second degré à coefficients constants. En posant ω tel que :

$$\omega^2 = \frac{\alpha_x}{\alpha_z} a_n^2 + \frac{\alpha_y}{\alpha_z} b_m^2 + \frac{p}{\alpha_z} \quad (\text{A.9})$$

alors la solution générale du système d'équation (A.7) est :

$$\theta(a_n, b_m, z, p) = A \cosh(\omega z) + B \sinh(\omega z) \quad (\text{A.10})$$

Les conditions aux limites de l'équation (A.7) donnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda_z \frac{d\theta(a_n, b_m, z, p)}{dz} \Big|_{z=0} = q_0 = -\lambda_z B \omega \\ -\lambda_z \frac{d\theta(a_n, b_m, z, p)}{dz} \Big|_{z \rightarrow +\infty} = 0 = -\lambda_z (A \omega \sinh(\omega L_z) + B \omega \cosh(\omega L_z)) \end{array} \right. \quad (\text{A.11})$$

ce qui mène à $B = -\frac{q_0}{\omega \lambda_z}$ et $A = \frac{q_0}{\lambda_z \omega \tanh(\omega L_z)}$.

Ainsi, grâce aux résultats (A.9), (A.10) et (A.11), la solution générale du problème

dans les espaces de Laplace et Fourier s'écrit :

$$\theta(a_n, b_m, z, p) = \frac{q_0}{\lambda_z \omega} \frac{\cosh(\omega(L_z - z))}{\sinh(\omega L_z)} \quad (\text{A.12})$$

Pour inverser la solution analytique, c'est à dire retourner dans le domaine réel, la propriété suivante est utilisée :

Propriété de translation : $\mathcal{L} [e^{-kt} f(t)] = F(p + k)$, où $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$

Donc, en prenant $k = \alpha_x a_n^2 + \alpha_y b_m^2$, et en appliquant la propriété de translation, l'équation (A.12) devient :

$$\theta(x, y, z, t) = \frac{q_0}{\rho C_p} \mathcal{L}^{-1} [\bar{F}_z(p, z)] \theta_n^x(t) \theta_m^y(t) \quad (\text{A.13})$$

avec

$$\bar{F}_z(p, z) = \frac{1}{\sqrt{p \alpha_z}} \frac{\cosh((L_z - z) \sqrt{p / \alpha_z})}{\sinh(L_z \alpha_z)} \quad (\text{A.14})$$

$$\theta_n^x(t) = \exp(-a_n^2 \alpha_x t) \quad (\text{A.15})$$

$$\theta_m^y(t) = \exp(-b_m^2 \alpha_y t) \quad (\text{A.16})$$

L'inversion de la double transformée de Fourier présente en (A.13) s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t) = \frac{q_0}{\rho C_p} \mathcal{L} [\bar{F}_z(p, z)] \frac{1}{L_x L_y} & \left[\theta_0^x(t) \theta_0^y(t) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n^x(t) \theta_0^y(t) \right. \\ & \left. + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \theta_0^x(t) \theta_m^y(t) + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \theta_n^x(t) \theta_m^y(t) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Par comparaison avec les équations (3.1) et (3.2), on en déduit l'expression de la fonction de Green 1D dans la direction z pour un milieu d'épaisseur finie dans cette direction, avec de plus son identification grâce à l'équation (3.8) dans le chapitre 3, dans le cas particulier où la profondeur de l'excitation impulsionnelle unitaire et ponctuelle est $z_0 = 0$:

$$G_z(z, t / z_0 = 0, 0) = \mathcal{L} [\bar{F}_z(p, z)] = \frac{1}{L_z} \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \exp(-\alpha_z m^2 \pi^2 t / L_z^2) \cos(m \pi z / L_z) \right) \quad (\text{A.18})$$

De même, le 3ème terme du membre de droite de (A.17), qui commence par $1/(L_x L_y)$ est égal au produit des fonctions de Green 1D : $G_x(x, t / x_0 = 0, 0) G_y(y, t / y_0 = 0, 0)$.

Nous nous intéressons maintenant au terme en z de l'équation (A.13).

2) Propriétés aux temps courts (cas d'un milieu semi-infini)

Nous nous intéressons maintenant au comportement de la fonction de Green 1D en z du milieu d'épaisseur finie en z , c'est-à-dire l'original de $\bar{F}_z$ lorsque cette épaisseur L_z tendait vers l'infini. Pour ce faire on écrit $\bar{F}_z$ sous la forme :

$$\bar{F}_z(p, z) = \frac{L_z}{\alpha_z} \frac{1}{s} \frac{\cosh(1 - z^*)s}{\sinh(s)} \quad \text{avec} \quad s = L_z \sqrt{\frac{p}{\alpha_z}} \quad \text{et} \quad z^* = \frac{z}{L_z} \quad (\text{A.19})$$

Lorsque L_z tend vers l'infini, il en est de même de s et les deux fonctions hyperboliques dans (A.19) sont équivalentes à leur composante exponentielle positives. On obtient donc :

$$\bar{F}_z(p, z) \approx_{s \rightarrow +\infty} \frac{L_z}{\alpha_z} \frac{1}{s} \frac{\cosh(1 - z^*)s}{\sinh(s)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_z}} \frac{1}{\sqrt{p}} \exp(-u\sqrt{p}) \quad \text{avec} \quad u = z/\sqrt{\alpha_z}. \quad (\text{A.20})$$

L'original de cette fonction est analytique, ce qui permet de trouver la fonction de Green d'un milieu semi-infini pour un chauffage sans perte sur son unique face :

$$F_z(z, t) = \frac{1}{\alpha_z} \frac{1}{\pi t} \exp\left(-\frac{u^2}{4t}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi \alpha_z t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4\alpha_z t}\right) \quad (\text{A.21})$$

Cette fonction de Green correspond exactement à celle qui figure dans l'équation (3.7) du chapitre 3, en prenant $z_0 = 0$.

ANNEXE *B*

Calcul des fonctions de transfert 1D

Dans cette annexe sont proposés les calculs des fonctions de transfert 1D pour une source surfacique plane située à une profondeur, ou à une cote, quelconque. Les cas d'une plaque d'épaisseur finie, semi-infinie ou infinie seront traités.

B.1 Transformation de Laplace et quadripôles thermiques : rappels

On suppose un transfert 1D au sein d'un milieu où la température θ est fonction de la coordonnée z et du temps t et on considère une tranche de ce milieu, définie par l'intervalle $[z_{in}, z_{out}]$, d'épaisseur Δz . Cette tranche, représentée par la figure B.1 est constituée d'un matériau homogène de conductivité thermique λ , de masse volumique ρ , de diffusivité a et de chaleur spécifique c qui sont supposés constantes (pas de thermodépendance).

On suppose également qu'il n'y a pas de source de chaleur au sein de la tranche et que sa température initiale est nulle. Sous ces conditions, l'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad \text{pour} \quad z_{in} < z < z_{out} \quad \text{et} \quad t > 0 \quad (\text{B.1})$$

et la condition initiale :

$$\theta = 0 \quad \text{at} \quad t = 0 \quad \text{for} \quad z_{in} < z < z_{out}. \quad (\text{B.2})$$

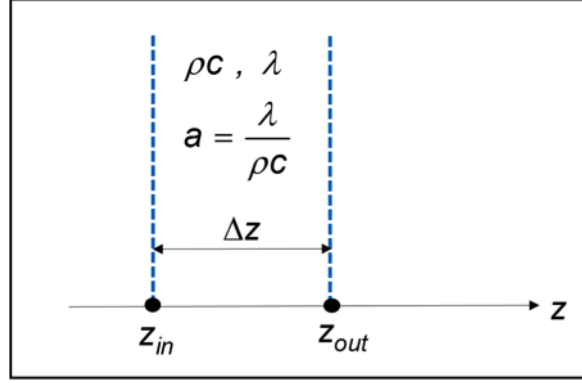


FIGURE B.1 – Tranche de matériau homogène en transfert 1D.

La densité de flux φ (W.m^{-2}) et le flux de chaleur Φ (W), pour une surface plane d'aire S (m^2) normale à l'axe z sont introduites :

$$\varphi(z, t) = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad \text{et} \quad \Phi = S\varphi. \quad (\text{B.3})$$

Remarquons que les signes de et de dépendent de l'orientation choisie pour l'axe x . Les transformées de Laplace de la température, de la densité de flux et du flux sont définies :

$$\bar{\psi}(z, p) = \int_0^t \psi(z, t) \exp(-pt) dt \quad \text{pour} \quad \psi = \theta, \phi \text{ ou } \Phi. \quad (\text{B.4})$$

Dans ces conditions, les vecteurs température-flux dans le domaine de Laplace, aux deux extrémités de la tranche obéissent à l'équation matricielle et vectorielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}(z_{in}, p) \\ \bar{\Phi}(z_{in}, p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\Delta z, p) & B(\Delta z, p) \\ C(\Delta z, p) & D(\Delta z, p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}(z_{out}, p) \\ \bar{\Phi}(z_{out}, p) \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

avec :

$$\begin{cases} A = D = \cosh(\Delta z \sqrt{p/a}) ; & B = \frac{1}{\lambda S \sqrt{p/a}} \sinh(\Delta z \sqrt{p/a}) \\ C = \lambda S \sqrt{p/a} \sinh(\Delta z \sqrt{p/a}) ; & a = \lambda / \rho c \quad \text{et} \quad \Delta z = z_{out} - z_{in} \geq 0 \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Notons que si l'on considère le cas où $S = 1 \text{ m}^2$, la relation (B.5) est valable en remplaçant, à chaque extrémité de la tranche, les vecteurs température-flux de Laplace $\bar{\theta} - \bar{\Phi}$ par les vecteurs température-densité de flux de Laplace $\bar{\theta} - \bar{\varphi}$.

Si on appelle $M(\Delta z)$ la matrice 2×2 présente dans (B.5), son déterminant est égal à l'unité :

$$\text{Det}(\mathbf{M}(\Delta z)) = AD - BC. \quad (\text{B.7})$$

Les équations (B.5) and (B.6) sont strictement équivalentes au système (B.1)-(B.2). Remarquons que l'équation quadripolaire (B.5) est valide quelles que soient les conditions aux limites en z_{in} et z_{out} .

B.2 Transfert 1D dans une plaque d'épaisseur finie généré par une source surfacique plane interne de chaleur

Nous considérons maintenant le cas spécifique de la plaque représentée en figure B.2, où $z_{in} = 0$, et $z_{out} = L$, avec une source interne impulsionnelle de chaleur $g(z_0, t) = Q_0 \delta(z - z_0) \delta(t)$ (W.m^{-3}) dissipée en z dans le plan z_0 . Ici, Q_0 est ramenée à l'unité de surface et s'exprime en J.m^{-2} . On suppose de plus que les deux faces de la plaque sont thermiquement isolées du milieu environnant.

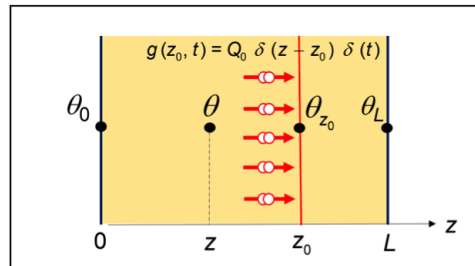


FIGURE B.2 – Plaque plane avec source de chaleur plane séparable (temps/espace) uniforme et impulsionnelle à la profondeur z_0 .

On écrit la relation (B.5) pour chacune des tranches déterminées par les intervalles $[0, z_0]$ et $[z_0, L]$:

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}(0, p) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(z_0, p) & B(z_0, p) \\ C(z_0, p) & D(z_0, p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}(z_0^-, p) \\ \bar{\varphi}_0(z_0^-, p) \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}(z_0^+, p) \\ \bar{\varphi}_0(z_0^+, p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(L - z_0, p) & B(L - z_0, p) \\ C(L - z_0, p) & D(L - z_0, p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}(L, p) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

On suppose qu'il n'y a pas de résistance d'interface en z_0 , ce qui entraîne une égalité des températures de part et d'autre de la source, et on fait un bilan thermique à partir des deux densités de flux correspondantes, $\varphi(z_0^-, t)$ et $\varphi(z_0^+, t)$, qui ne diff rent que de l'intensité $Q_0\delta(t)$ (en W.m^{-2}) de la source surfacique. Ceci peut s'écrire vectoriellement dans l'espace de Laplace :

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}(z_0^-, p) \\ \bar{\varphi}_0(z_0^-, p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\theta}(z_0^+, p) \\ \bar{\varphi}_0(z_0^+, p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ Q_0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

La substitution de (B.10) et (B.9) dans (B.8) conduit à l'égalité suivante, en utilisant un indice inférieur 1 pour la matrice quadripolaire présente dans (B.8) et 2 dans celle de (B.9) :

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}(0, p) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}(L, p) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ Q_0 \end{bmatrix} \right) \quad (\text{B.11})$$

Il s'agit d'un système de 2 équations à 2 inconnues, les températures de Laplace des deux faces, dont la solution est la suivante, en utilisant les propriétés des fonctions hyperboliques :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\theta}(0, p) = \frac{AD_1 - B_1C}{C} Q_0 = \frac{A_2}{C} Q_0 \\ \bar{\theta}(L, p) = \frac{D_1}{C} Q_0 \\ A = A_1A_2 + B_1C_2 \\ C = A_2C_1 + D_1C_2 \end{array} \right. \quad (\text{B.12})$$

Dans le cas où l'observation de la température θ se fait à une profondeur z inférieure à celle, z_0 , de la source, on écrit la relation quadripolaire sur la tranche $[0, z]$, dont les quatre coefficients sont indexés par l'indice 3 correspondant à l'épaisseur $\Delta z = z$:

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}(0, p) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}(z, p) \\ \bar{\varphi}_0(z, p) \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\theta}(z, p) = D_3 \bar{\theta}(0, p) \quad (\text{B.13})$$

En utilisant la première équation de (B.12), la température de Laplace observée en z est alors :

$$\bar{\theta}(z, p) = \frac{D_3A_2}{C} Q_0 = \frac{\cosh(z\sqrt{p/a}) \cosh((L - z_0)\sqrt{p/a})}{\lambda\sqrt{p/a} \sinh(L\sqrt{p/a})} Q_0 \quad (\text{B.14})$$

Dans le cas où l'observation de la température θ se fait à une profondeur z supérieure

à celle, z_0 , de la source, on écrit la relation quadripolaire sur la tranche $[z, L]$, dont les 4 coefficients sont indexés par l'indice 4 correspondant à l'épaisseur $\Delta z = L - z$:

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}(z, p) \\ \bar{\varphi}(z, p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_4 & B_4 \\ C_4 & D_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}(L, p) \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\theta}(z, p) = A_4 \bar{\theta}(0, p) \quad (\text{B.15})$$

En utilisant la deuxième équation (B.12), la température de Laplace observée en z est alors :

$$\bar{\theta}(z, p) = \frac{A_4 D_1}{C} Q_0 = \frac{\cosh((L - z)\sqrt{p/a}) \cosh(z_0\sqrt{p/a})}{\lambda\sqrt{p/a} \sinh(L\sqrt{p/a})} Q_0 \quad (\text{B.16})$$

L'expression (B.16) est la même que l'expression (B.14), en remplaçant $L - z$ par z et z_0 par $L - z_0$.

Donc, pour une épaisseur de plaque z donnée, la réponse 1D en température à une position donnée dépend de la profondeur de cette observation par rapport à la face définissant la tranche qui ne contient pas la source et de la profondeur de la source par rapport à l'autre face.

Si la source est située en $z_0 = 0$, l'équation (B.16) simule la même réponse en température que celle trouvée dans l'équation (A.16) de l'annexe A, avec $\bar{\theta} = \frac{Q_0}{\rho c} \bar{F}_z(p, z)$.

Notons que :

- les équations (B.14) et (B.16), écrites dans l'espace de Laplace, peuvent être inversées numériquement pour retrouver leurs originaux dans l'espace temporel. On dispose maintenant d'algorithmes numériques performants, comme celui de Gaver Stehfest, où un retour de Laplace par Fourier [34] ou en utilisant l'algorithme Invlap de de Hoog, disponible sous Matlab.
- l'ajout de pertes convectives caractérisées par un coefficient d'échange sur chacune des faces de la plaque ne pose aucun problème : il suffit de rajouter une matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0; h_0 & 1 \end{bmatrix}$ devant le premier terme du membre de droite de (B.8) et une matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0; h_L & 1 \end{bmatrix}$ derrière le dernier terme du membre de droite de (B.9).
- les équations (B.14) et (B.16) ont également un original commun, voir l'équation (3.9) dans le chapitre 3 et l'équation (6.121) du livre de Ozisik [136].

B.3 Transfert 1D dans un milieu infini ou semi-infini ou infini généré par une source surfacique plane interne de chaleur

B.3.1 Cas d'un milieu infini

Nous nous intéressons maintenant au comportement de la fonction de la réponse en z du milieu d'épaisseur finie en z , c'est-à-dire l'original de $\bar{\theta}(z, p)$, lorsque cette épaisseur L tend vers l'infini. Pour ce faire on symétrise les positions des deux faces de la plaque en faisant un changement de repère : $z' = z - L/2$, c'est-à-dire en prenant l'origine du repère non pas sur une des deux faces isolées, mais au centre de la plaque. La forme de (B.14) qui correspond au cas $z \leq z_0$ et donc $z' \leq z'_0$ est alors la suivante :

$$\bar{\theta}(z, p) = \frac{\cosh\left((z' - L/2)\sqrt{p/a}\right) \cosh\left((L/2 - z_0)\sqrt{p/a}\right)}{\lambda\sqrt{p/a} \sinh\left(L\sqrt{p/a}\right)} Q_0 \quad (\text{B.17})$$

$$= \frac{L}{\lambda} \frac{\cosh\left((z'^* - 1/2)s\right) \cosh\left((1/2 - z_0'^*)s\right) \sqrt{p/a}}{s \sinh(s)} Q_0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} s = L\sqrt{p/a} \\ z'^* = z'/L \\ z_0'^* = z'_0/L \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

Lorsque L tend vers l'infini, il en est de même de s et les trois fonctions hyperboliques dans (B.18) sont équivalentes à leurs composantes exponentielle positives. On obtient donc :

$$\bar{\theta}(z, p) \approx_{s \rightarrow +\infty} \frac{L}{\lambda} \frac{\exp\left((z'^* + 1/2)s\right) \exp\left((1/2 - z_0'^*)s\right) \sqrt{p/a}}{\exp(s)} Q_0 \quad (\text{B.19})$$

$$\approx \frac{Q_0}{2\lambda\sqrt{p/a}} \exp\left(-(z_0 - z)\sqrt{p/a}\right) \quad (\text{B.20})$$

L'original de cette fonction est analytique, ce qui permet de retrouver la fonction de transfert d'un milieu semi-infini pour un chauffage sans perte sur son unique face :

$$\bar{\theta}(z, p) = \frac{Q_0}{2\sqrt{\lambda\rho c}} \frac{1}{\sqrt{p}} \exp\left(-(u\sqrt{p})^2\right) \quad \text{avec} \quad u = (z - z_0/\sqrt{a}) \quad (\text{B.21})$$

ce qui mène à :

$$\theta(z, t) = \frac{Q_0}{2\sqrt{\lambda\rho c}} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{u^2}{4t}\right) \quad (\text{B.22})$$

et donc :

$$\theta(z, t) = \frac{Q_0}{\sqrt{4\pi at}} \exp\left(-\frac{(z - z_0)^2}{4at}\right) \quad (\text{B.23})$$

On retrouve exactement la même réponse en partant de la forme (B.16) de $\bar{\theta}(z, p)$ qui correspond au cas $z \geq z_0$ et donc $z' \geq z'_0$ et en effectuant le même passage à la limite. Cette équation (B.23) est la même que l'équation (3.7) du chapitre 3, où apparaît la fonction de Green 1D en z pour un milieu infini.

B.3.2 Cas d'un milieu semi-infini

Pour obtenir la réponse d'un milieu semi-infini soumis à une source impulsionnelle située à une profondeur z_0 par rapport à son unique face, il suffit de considérer le milieu infini correspondant et de symétriser l'ensemble par rapport au plan $z = 0$, c'est-à-dire de placer une source située à la cote $-z_0$. Par symétrie, chacun des deux milieux semi-infini est alors isolé en $z = 0$, et la réponse de chacun en z est alors la superposition des réponses des deux sources :

$$\theta(z, t) = \frac{Q_0}{4\sqrt{\pi at}} \left[\exp\left(-\frac{(z - z_0)^2}{4at}\right) + \exp\left(-\frac{(z + z_0)^2}{4at}\right) \right]. \quad (\text{B.24})$$

Cette équation (B.24) est la même que l'équation (3.8) où apparaît la fonction de Green 1D en z pour un milieu semi-infini.

Abaque des temps optimaux d'acquisition pour la reconstruction de sources

Le critère dépendant du nombre de Fourier explicité dans le chapitre 3 permet de choisir les paramètres optimaux pour la reconstruction de sources thermiques. En particulier, pour une épaisseur et un matériau donné, le temps d'acquisition optimal de la mesure est donné par :

$$t_{ac} = \frac{Fo \cdot L^2}{\alpha}, \quad (C.1)$$

où Fo est le nombre de Fourier selon la direction de la profondeur, L l'épaisseur du matériau et α son coefficient de diffusion. Le critère donné par la figure 3.10 montre que l'on doit travailler pour un nombre de Fourier compris entre 0.01 et 0.5 pour reconstruire au mieux les sources. La formule (C.1) permet alors de donner un intervalle de temps compris entre $[T_{min}, T_{max}]$, correspondant aux temps d'acquisition optimaux de la mesure pour la reconstruction de sources.

Pour avoir quelques exemples, le tableau C.1 donne un abaque des temps optimaux d'acquisition de la mesure pour différents matériaux, avec diverses épaisseurs.

	Diffusivité $\times 10^{-6} \text{ (m}^2 \cdot \text{s}^{-1})$	Épaisseur (m)	Temps minimal (s)	Temps maximal (s)
Acier	12	0.001	8.33×10^{-4}	4.17×10^{-2}
Aluminium	98.8	0.001	1.01×10^{-4}	5.06×10^{-3}
Argent	173	0.001	5.78×10^{-5}	2.89×10^{-3}
Bois	0.08	0.001	0.125	6.25
Composite	4	0.001	2.5×10^{-2}	0.125
Cuivre	117	0.001	8.55×10^{-5}	4.27×10^{-3}
Fer	22.8	0.001	4.39×10^{-4}	2.19×10^{-2}
PVC	0.1	0.001	0.1	5
Silicium	87	0.001	1.14×10^{-4}	5.75×10^{-3}
Verre	0.50	0.001	0.02	1.00
Acier	12	0.01	8.33×10^{-2}	4.17
Aluminium	98.8	0.01	1.01×10^{-2}	0.51
Argent	173	0.01	5.78×10^{-3}	0.29
Bois	0.08	0.01	12.5	625
Composite	4	0.01	0.25	12.5
Cuivre	117	0.01	8.55×10^{-3}	0.43
Fer	22.8	0.01	4.39×10^{-2}	2.19
PVC	0.1	0.01	10	500
Silicium	87	0.01	1.14×10^{-2}	0.57
Verre	0.50	0.01	2.00	100
Acier	12	0.1	8.33	417
Aluminium	98.8	0.1	1.01	50.61
Argent	173	0.1	0.58	28.9
Bois	0.08	0.1	1 250	62 500
Composite	4	0.1	25	1 250
Cuivre	117	0.1	0.85	42.7
Fer	22.8	0.1	4.39	219
PVC	0.1	0.1	1 000	5×10^4
Silicium	87	0.1	1.14	57.5
Verre	0.50	0.1	200	10 000

TABLEAU C.1 – Abaque des temps d’acquisition optimaux pour la reconstruction de sources sur différents matériaux

ANNEXE *D*

Informations système des ordinateurs utilisés

Le temps d'exécution des programmes, et plus particulièrement de la méthode d'inversion par S.V.D. et régularisation, dépend fortement du type de machine utilisée. Le tableau [D.1](#) donne les informations système des quatre ordinateurs utilisés.

	Ordinateur 1	Ordinateur 2	Ordinateur 3	Ordinateur 4
Nom	Mac16	PC 128	PC 256	PC 128b
Système d'exploitation	Mac OS X	PC Windows	PC Windows	PC Windows
Processeur	3.1 GHz Intel Core i7	Intel(R) Xeon(R) W-2155 CPU @ 3.30 GHz 3.31 GHz	Intel(R) Xeon(R) Silver 4114 CPU @ 2.20 GHz 2.19 GHz	Intel(R) Xeon(R) E5-1630 CPU @ 3.70 GHz 3.70 GHz
Mémoire RAM	16 Go	128 Go	256 Go	128 Go
Type de système	64 bits	64 bits	64 bits	64 bits

TABLEAU D.1 – Comparaison des systèmes des différents ordinateurs utilisés

Bibliographie

- [1] Robertson, D. A note on the classical origin of "circumstances" in the medieval confessional. *Studies in Philology* **43**, 6–14 (1946). → p. 6
- [2] Farrar, C. R. & Worden, K. An introduction to structural health monitoring. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **365**, 303–315 (2006). → p. 7
- [3] Serey, V. *Sélectivité modale d'ondes ultrasonores dans des guides d'ondes de section finie à l'aide d'éléments piézoélectriques intégrés pour le SHM*. Ph.D. thesis, Université de Bordeaux ; Université de Sherbrooke (Québec, Canada) (2018). → p. 7
- [4] Worden, K., Farrar, C. R., Manson, G. & Park, G. The fundamental axioms of structural health monitoring. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **463**, 1639–1664 (2007). → p. 7
- [5] Herschel, W. *The Scientific Papers of Sir William Herschel*, vol. 1 (Cambridge University Press, 2013). → p. 8
- [6] <http://www.afnor.org>. → p. 8
- [7] Maldague, X. P. Introduction to ndt by active infrared thermography. *Materials Evaluation* **60**, 1060–1073 (2002). → p. 8
- [8] Usamentiaga, R. *et al.* Infrared thermography for temperature measurement and non-destructive testing. *Sensors* **14**, 12305–12348 (2014). → p. 8
- [9] Wiecek, B. Review on thermal image processing for passive and active thermography. In *2005 IEEE Engineering in Medicine and Biology 27th Annual Conference*, 686–689 (IEEE, 2006). → p. 8
- [10] Avdelidis, N. A look on thermography : from passive to active ndt & e surveys. In *Thermosense XXIX*, vol. 6541, 654115 (International Society for Optics and Photonics, 2007). → p. 8
- [11] Jadin, M. S. & Taib, S. Recent progress in diagnosing the reliability of electrical equipment by using infrared thermography. *Infrared physics & technology* **55**, 236–245 (2012). → p. 9
- [12] Bagavathiappan, S., Lahiri, B., Saravanan, T., Philip, J. & Jayakumar, T. Infrared thermography for condition monitoring – a review. *Infrared Physics & Technology* **60**, 35–55 (2013). → p. 9
- [13] Kaplan, H. *Practical applications of infrared thermal sensing and imaging equipment*, vol. 75 (SPIE press, 2007). → p. 9
- [14] Maldague, X. *et al.* Theory and practice of infrared technology for nondestructive testing (2001). → p. 9
- [15] Moore, P. & Maldague, X. Ndt handbook on infrared technology asnt handbook series (2001). → p. 9
- [16] Parker, W., Jenkins, R., Butler, C. & Abbott, G. Flash method of determining thermal diffusivity, heat capacity, and thermal conductivity. *Journal of Applied Physics* **32**, 1679–1684 (1961). → p. 10, 26, 79

-
- [17] Gaverina, L. *Caractérisation thermique de milieux hétérogènes par excitation laser mobile et thermographie infrarouge*. Ph.D. thesis, Université de Bordeaux (2017). → p. [10](#), [77](#), [78](#)
 - [18] Hay, B. *Mesure de la diffusivité thermique par la méthode flash* (Ed. Techniques Ingénieur, 2004). → p. [11](#), [12](#)
 - [19] Degiovanni, A. Diffusivité et méthode flash. *Revue générale de thermique* **185**, 420–442 (1977). → p. [11](#)
 - [20] Mourand, D., Gounot, J. & Batsale, J.-C. New sequential method to process noisy temperature response from flash experiment measured by infrared camera. *Review of scientific instruments* **69**, 1437–1440 (1998). → p. [11](#)
 - [21] Ibarra Castanedo, C. Quantitative subsurface defect evaluation by pulsed phase thermography : depth retrieval with the phase (2005). → p. [12](#), [13](#)
 - [22] Balageas, D., Roche, J.-M. & Leroy, F.-H. Les images de coefficients de la méthode tsr (thermographic signal reconstruction) : un moyen simple et efficace de détecter et imager les défauts. In *Annual Conference Société Française de Thermique* (2013). → p. [12](#)
 - [23] Roche, J., Leroy, F. & Balageas, D. Information condensation in defect detection using tsr coefficients images. In *The 12th International Conference on Quantitative InfraRed Thermography (QIRT 2014)* (2015). → p. [12](#)
 - [24] Maldague, X. & Marinetti, S. Pulse phase infrared thermography. *Journal of applied physics* **79**, 2694–2698 (1996). → p. [12](#)
 - [25] Busse, G. Optoacoustic phase angle measurement for probing a metal. *Applied Physics Letters* **35**, 759–760 (1979). → p. [13](#)
 - [26] Montanini, R. Quantitative determination of subsurface defects in a reference specimen made of plexiglas by means of lock-in and pulse phase infrared thermography. *Infrared Physics & Technology* **53**, 363–371 (2010). → p. [13](#), [14](#)
 - [27] Krapez, J.-C. Résolution spatiale de la caméra thermique à source volante. *International journal of thermal sciences* **38**, 769–779 (1999). → p. [15](#)
 - [28] Krapez, J.-C. Spatial resolution of the flying spot camera with respect to cracks and optical variations. In *AIP Conference Proceedings*, vol. 463, 377–379 (AIP, 1999). → p. [15](#)
 - [29] Legrandjacques, L., Krapez, J., Lepoutre, F. & Balageas, D. Detection d’une fissuration débouchante a l’aide d’une camera photothermique. *OFFICE NATIONAL D ETUDES ET DE RECHERCHES AEROSPATIALES ONERA-PUBLICATIONS-TP* (1998). → p. [16](#)
 - [30] Bison, P., Cernuschi, F. & Grinzato, E. In-depth and in-plane thermal diffusivity measurements of thermal barrier coatings by ir camera : evaluation of ageing. *International Journal of thermophysics* **29**, 2149–2161 (2008). → p. [16](#)
 - [31] Bison, P., Cernuschi, F. & Capelli, S. A thermographic technique for the simultaneous estimation of in-plane and in-depth thermal diffusivities of tbcs. *Surface and Coatings Technology* **205**, 3128–3133 (2011). → p. [16](#)
 - [32] Cernuschi, F., Russo, A., Lorenzoni, L. & Figari, A. In-plane thermal diffusivity evaluation by infrared thermography. *Review of scientific instruments* **72**, 3988–3995 (2001). → p. [17](#)
 - [33] Pech-May, N., Oleaga, A., Mendioroz, A. & Salazar, A. Fast characterization of the width of vertical cracks using pulsed laser spot infrared thermography. *Journal of Nondestructive Evaluation* **35**, 22 (2016). → p. [17](#)
 - [34] Maillet, D. *Thermal quadrupoles : solving the heat equation through integral transforms* (John Wiley & Sons Inc, 2000). → p. [18](#), [49](#), [197](#)
 - [35] Taton, R. *Histoire générale des sciences*, vol. 1 (Presses universitaires de France, 1957). → p. [20](#)

- [36] http://www.larousse.fr/encyclopedie/images/Conversions_de_lenergie/1010093.
→ p. 20
- [37] Maxwell, J. C. *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell...*, vol. 2 (University Press, 1890).
→ p. 21
- [38] Hall, S. *et al.* Foucault : Power, knowledge and discourse. *Discourse theory and practice : A reader* **72**, 81 (2001). → p. 21
- [39] He, Y., Pan, M. & Luo, F. Defect characterisation based on heat diffusion using induction thermography testing. *Review of Scientific Instruments* **83**, 104702 (2012). → p. 22, 23, 24
- [40] Louaayou, M., Naït-Saïd, N. & Louai, F. Z. 2d finite element method study of the stimulation induction heating in synchronic thermography ndt. *NDT & E International* **41**, 577–581 (2008).
→ p. 23
- [41] Carslaw, H. S. & Jaeger, J. C. *Conduction of heat in solids. Oxford : Clarendon Press, 1959, 2nd ed.* (1959). → p. 23
- [42] Shepard, S. M. Advances in pulsed thermography. In *Thermosense XXIII*, vol. 4360, 511–516 (International Society for Optics and Photonics, 2001). → p. 23
- [43] Shepard, S. M. Temporal noise reduction, compression and analysis of thermographic image data sequences (2003). US Patent 6,516,084. → p. 24
- [44] Ranc, N. *Couplage thermomécanique* (Ed. Techniques Ingénieur, 2003). → p. 24, 25
- [45] Newton, I. *Philosophiae naturalis principia mathematica*, vol. 1 (G. Brookman, 1833). → p. 25
- [46] Verlinde, E. On the origin of gravity and the laws of newton. *Journal of High Energy Physics* **2011**, 29 (2011). → p. 25
- [47] Ummenhofer, T. & Medgenberg, J. On the use of infrared thermography for the analysis of fatigue damage processes in welded joints. *International Journal of Fatigue* **31**, 130–137 (2009). → p. 25
- [48] Berthel, B., Chrysochoos, A., Wattrisse, B. & Galtier, A. Infrared image processing for the calorimetric analysis of fatigue phenomena. *Experimental Mechanics* **48**, 79–90 (2008). → p. 25
- [49] Morabito, A., Chrysochoos, A., Dattoma, V. & Galietti, U. Analysis of heat sources accompanying the fatigue of 2024 t3 aluminium alloys. *International Journal of Fatigue* **29**, 977–984 (2007).
→ p. 25
- [50] Boulanger, T., Chrysochoos, A., Mabru, C. & Galtier, A. Calorimetric analysis of dissipative and thermoelastic effects associated with the fatigue behavior of steels. *International Journal of Fatigue* **26**, 221–229 (2004). → p. 25
- [51] Plekhov, O., PALIN-LUC, T., Saintier, N., Uvarov, S. & Naimark, O. Fatigue crack initiation and growth in a 35crmo4 steel investigated by infrared thermography. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* **28**, 169–178 (2005). → p. 25
- [52] Plekhov, O., Saintier, N., Palin-Luc, T., Uvarov, S. & Naimark, O. Theoretical analysis, infrared and structural investigations of energy dissipation in metals under cyclic loading. *Materials Science and Engineering : A* **462**, 367–369 (2007). → p. 25
- [53] Chrysochoos, A. & Louche, H. An infrared image processing to analyse the calorific effects accompanying strain localisation. *International journal of engineering science* **38**, 1759–1788 (2000).
→ p. 25
- [54] Chrysochoos, A. Infrared thermography applied to the analysis of material behavior : a brief overview. *Quantitative InfraRed Thermography Journal* **9**, 193–208 (2012). → p. 25
- [55] Carlomagno, G. & Berardi, P. G. Unsteady thermotopography in non-destructive testing. In *Proc. 3rd Biannual Exchange, St. Louis/USA*, vol. 24, 26 (1976). → p. 26

-
- [56] Henneke, E. G., Reifsnider, K. L. & Stinchcomb, W. W. Thermography : an ndi method for damage detection. *JOM* **31**, 11–15 (1979). → p. 26
 - [57] Reifsnider, K., Henneke, E. G. & Stinchcomb, W. The mechanics of vibrothermography. In *Mechanics of nondestructive testing*, 249–276 (Springer, 1980). → p. 26
 - [58] Salazar, A. *et al.* Characterization of delaminations by lock-in vibrothermography. In *Journal of Physics : Conference Series*, vol. 214, 012079 (IOP Publishing, 2010). → p. 26, 34
 - [59] Shepard, S. M. Flash thermography of aerospace composites. In *IV Conferencia Panamericana de END Buenos Aires*, vol. 7 (2007). → p. 26
 - [60] Krapez, J., Balageas, D., Deom, A. & Lepoutre, F. Early detection by stimulated infrared thermography. comparison with ultrasonics and holo/shearography. In *Advances in Signal Processing for Nondestructive Evaluation of Materials*, 303–321 (Springer, 1994). → p. 26
 - [61] Schlichting, J., Ziegler, M., Maierhofer, C. & Kreutzbruck, M. Flying laser spot thermography for the fast detection of surface breaking cracks. In *18th World Conference on Nondestructive Testing, Durban* (2012). → p. 26
 - [62] Kouadio, T. *Thermographie infrarouge de champs ultrasonores en vue de l'évaluation et du contrôle non destructifs de matériaux composites*. Ph.D. thesis, Université Sciences et Technologies-Bordeaux I (2013). → p. 26, 140, 141
 - [63] Hosten, B. *et al.* Sonothermography in composite materials : Finite element modeling and experimental validation. *NDT & E International* **51**, 120–126 (2012). → p. 26, 140, 141
 - [64] Rodriguez, S., Meziane, A. & Pradère, C. Thermal chladni plate experiments to reveal and estimate spatially dependent vibrothermal source. *Quantitative InfraRed Thermography Journal* 1–9 (2018). → p. 26, 27, 28
 - [65] Rantala, J., Wu, D. & Busse, G. Amplitude-modulated lock-in vibrothermography for nde of polymers and composites. *Research in Nondestructive Evaluation* **7**, 215–228 (1996). → p. 26
 - [66] Renshaw, J., Chen, J. C., Holland, S. D. & Thompson, R. B. The sources of heat generation in vibrothermography. *NDT & E International* **44**, 736–739 (2011). → p. 26
 - [67] Holland, S. D. Thermographic signal reconstruction for vibrothermography. *Infrared Physics & Technology* **54**, 503–511 (2011). → p. 26
 - [68] Chladni, E. F. F. *Entdeckungen uber die Theorie des Klanges* (Weidmanns erben und Reich, 1787). → p. 27
 - [69] Ravey, C., Pradere, C., Regnier, N. & Batsale, J.-C. Study of phase change and supercooling in micro-channels by infrared thermography. *Experimental Heat Transfer* **29**, 266–283 (2016). → p. 28
 - [70] Tarantola, A. *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*, vol. 89 (siam, 2005). → p. 29, 32, 33
 - [71] Kern, M. Problèmes inverses : aspects numériques (2002). → p. 29, 91
 - [72] Charles, C. Introduction aux problèmes inverses. *Notes de Statistique et d'Informatique* (2014). → p. 29, 33
 - [73] Bube, K. P. & Burridge, R. The one-dimensional inverse problem of reflection seismology. *SIAM review* **25**, 497–559 (1983). → p. 29
 - [74] Keilis-Borok, V. & Yanovskaja, T. Inverse problems of seismology (structural review). *Geophysical Journal International* **13**, 223–234 (1967). → p. 29
 - [75] Katz, M. A. & Rubinsky, B. An inverse finite-element technique to determine the change of phase interface location in one-dimensional melting problems. *Numerical Heat Transfer* **7**, 269–283 (1984).

→ p. 29

- [76] Dai, Z. & Samper, J. Inverse problem of multicomponent reactive chemical transport in porous media : formulation and applications. *Water Resources Research* **40** (2004). → p. 29, 33
- [77] Bock, H. G. Numerical treatment of inverse problems in chemical reaction kinetics. In *Modelling of chemical reaction systems*, 102–125 (Springer, 1981). → p. 29
- [78] Bedrikovetsky, P. *Mathematical theory of oil and gas recovery : with applications to ex-USSR oil and gas fields*, vol. 4 (Springer Science & Business Media, 2013). → p. 29
- [79] Isakov, V. On inverse problems in secondary oil recovery. *European Journal of Applied Mathematics* **19**, 459–478 (2008). → p. 29
- [80] Liu, T., Spincemaille, P., De Rochefort, L., Kressler, B. & Wang, Y. Calculation of susceptibility through multiple orientation sampling (cosmos) : a method for conditioning the inverse problem from measured magnetic field map to susceptibility source image in mri. *Magnetic Resonance in Medicine : An Official Journal of the International Society for Magnetic Resonance in Medicine* **61**, 196–204 (2009). → p. 29
- [81] Hadamard, J. *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*, vol. 37 (Yale University Press, 1923). → p. 30, 91
- [82] Mailliet, D., Jarny, Y. & Petit, D. Problèmes inverses en diffusion thermique : Outils spécifiques de conduction inverse et de régularisation. *Techniques de l'ingénieur-Transferts thermiques* (2011). → p. 30, 117
- [83] Jarny, Y. & Mailliet, D. Problèmes inverses et estimation de grandeurs en thermique. *Ecole d'hiver METTI* **99**, 1–51 (1999). → p. 30
- [84] Orlande, H. R. Inverse problems in heat transfer : new trends on solution methodologies and applications. In *2010 14th International Heat Transfer Conference*, 379–398 (American Society of Mechanical Engineers, 2010). → p. 31, 32, 33
- [85] Orlande, H. R., Fudym, O., Mailliet, D. & Cotta, R. M. *Thermal measurements and inverse techniques* (CRC Press, 2011). → p. 31
- [86] Tikhonov, A. N. On the solution of ill-posed problems and the method of regularization. In *Doklady Akademii Nauk*, vol. 151, 501–504 (Russian Academy of Sciences, 1963). → p. 31, 102
- [87] Tikhonov, A. N. & Arsenin, V. I. *Solutions of ill-posed problems*, vol. 14 (Vh Winston, 1977). → p. 31, 32
- [88] Beck, J. V., Blackwell, B. & Clair Jr, C. R. S. *Inverse heat conduction : Ill-posed problems* (James Beck, 1985). → p. 31, 32, 33
- [89] Alifanov, O. M., Artiukhin, E. A. & Rumiantsev, S. V. *Extreme methods for solving ill-posed problems with applications to inverse heat transfer problems* (Begell house New York, 1995). → p. 31
- [90] Jarny, Y., Ozisik, M. & Bardon, J. A general optimization method using adjoint equation for solving multidimensional inverse heat conduction. *International journal of heat and mass transfer* **34**, 2911–2919 (1991). → p. 31
- [91] Alifanov, O. Mathematical and experimental simulation in designing and testing heat-loaded engineering objects. In *Inverse Problems in Engineering : Theory and Practice*, vol. 1, 13–21 (2002). → p. 31
- [92] Murio, D. A. *The mollification method and the numerical solution of ill-posed problems* (John Wiley & Sons, 2011). → p. 31
- [93] Woodbury, K. A. *Inverse engineering handbook* (Crc press, 2002). → p. 32, 33
- [94] Vogel, C. R. *Computational methods for inverse problems*, vol. 23 (Siam, 2002). → p. 32, 105,

- [95] Kaipio, J. & Somersalo, E. *Statistical and computational inverse problems*, vol. 160, 49–112 (Springer Science & Business Media, 2006). → p. 32, 117, 126
- [96] JARNY, Y., MAILLET, D. & PETIT, D. Méthodes inverses appliquées à la convection forcée en thermique (2015). → p. 32
- [97] Calvetti, D. & Somersalo, E. *An introduction to Bayesian scientific computing : ten lectures on subjective computing*, vol. 2 (Springer Science & Business Media, 2007). → p. 32
- [98] Ozisik, M. N. *Inverse heat transfer : fundamentals and applications* (Routledge, 2018). → p. 32, 33
- [99] Morozov, V. A. *Methods for solving incorrectly posed problems* (Springer Science & Business Media, 2012). → p. 32, 38
- [100] Hansen, P. C. The discrete picard condition for discrete ill-posed problems. *BIT Numerical Mathematics* **30**, 658–672 (1990). → p. 32, 108
- [101] Alifanov, O. M. *Inverse heat transfer problems* (Springer Science & Business Media, 2012). → p. 32, 33
- [102] Kurpisz, K. & Nowak, A. *Inverse thermal problems* (Computational mechanics, 1995). → p. 32, 33
- [103] Trujillo, D. M. & Busby, H. R. *Practical inverse analysis in engineering*, vol. 7 (CRC press, 1997). → p. 32
- [104] Sabatier, P. C. Applied inverse problems. In *Applied Inverse Problems*, vol. 85 (1978). → p. 32
- [105] Beck, J. V. & Arnold, K. J. *Parameter estimation in engineering and science* (James Beck, 1977). → p. 32
- [106] Demoment, G. & Idier, J. Approche bayesienne pour la resolution des problemes inverses en imagerie. In *Problemes inverses : de l'experimentation a la modelisation*, vol. 22, 59–77 (Observatoire francais des techniques avancees, 1999). → p. 32
- [107] Franklin, J. N. Well-posed stochastic extensions of ill-posed linear problems. *Journal of mathematical analysis and applications* **31**, 682–716 (1970). → p. 32
- [108] Geman, S. & Geman, D. Stochastic relaxation, gibbs distributions, and the bayesian restoration of images. In *Readings in computer vision*, 564–584 (Elsevier, 1987). → p. 32
- [109] Orlande, H. R., Colaço, M. J. & Dulikravich, G. S. Approximation of the likelihood function in the bayesian technique for the solution of inverse problems. *Inverse Problems in Science and Engineering ; Formerly Inverse Problems in Engineering* **16**, 677–692 (2008). → p. 32
- [110] Tan, S., Fox, C. & Nicholls, G. Inverse problems (course notes for physics 707). *University of Auckland, Auckland, New Zealand* (2006). → p. 32, 33
- [111] Wang, J. & Zabaras, N. Using bayesian statistics in the estimation of heat source in radiation. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **48**, 15–29 (2005). → p. 32
- [112] Winkler, R. L. *An introduction to Bayesian inference and decision/by Robert L. Winkler*. 519.2 W5. (1972). → p. 32
- [113] Lee, P. M. *Bayesian statistics* (Arnold Publication, 1997). → p. 32
- [114] Gamerman, D. & Lopes, H. F. *Markov chain Monte Carlo : stochastic simulation for Bayesian inference* (Chapman and Hall/CRC, 2006). → p. 32
- [115] Stuart, A. M. Inverse problems : a bayesian perspective. *Acta numerica* **19**, 451–559 (2010). → p. 32, 33, 117

- [116] Bayes, T. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. 1763. *MD computing : computers in medical practice* **8**, 157 (1991). → p. 32, 116
- [117] Demoment, G., Idier, J., Giovannelli, J.-F. & Mohammad-Djafari, A. *Problèmes Inverses Traitement Signal L'image* (Ed. Techniques Ingénieur, 2001). → p. 32
- [118] Bertero, M. & Boccacci, P. *Introduction to inverse problems in imaging* (CRC press, 1998). → p. 33
- [119] Maillat, D., Jarny, Y. & Petit, D. Problèmes inverses en diffusion thermique : Formulation et résolution du problème des moindres carrés. *Techniques de l'ingénieur-Transferts thermiques* (2011). → p. 33
- [120] Castelo Varela, A. Characterization of vertical cracks using lock-in vibrothermography (2017). → p. 33, 34, 36, 53
- [121] Horn, R. A. & Johnson, C. R. *Matrix analysis* (Cambridge university press, 2012). → p. 33
- [122] Hazewinkel, M. *Encyclopaedia of Mathematics : Volume 6 : Subject Index-Author Index* (Springer Science & Business Media, 2013). → p. 34
- [123] Moore, E. H. On the reciprocal of the general algebraic matrix. *Bull. Am. Math. Soc.* **26**, 394–395 (1920). → p. 34, 52
- [124] Penrose, R. A generalized inverse for matrices. In *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*, vol. 51, 406–413 (Cambridge University Press, 1955). → p. 34, 52
- [125] <http://www.ehu.eus/en/en-home>. → p. 34
- [126] <http://www.unizar.es/>. → p. 34
- [127] Mendioroz, A., Castelo, A., Celorrio, R. & Salazar, A. Characterization of vertical buried defects using lock-in vibrothermography : I. direct problem. *Measurement Science and Technology* **24**, 065601 (2013). → p. 34, 60
- [128] Mendioroz, A., Castelo, A., Celorrio, R. & Salazar, A. Characterization and spatial resolution of cracks using lock-in vibrothermography. *NDT & E International* **66**, 8–15 (2014). → p. 34, 60
- [129] Mendioroz, A., Celorrio, R., Cifuentes, A., Zatón, L. & Salazar, A. Sizing vertical cracks using burst vibrothermography. *NDT & E International* **84**, 36–46 (2016). → p. 34, 37, 38, 60
- [130] Celorrio, R., Mendioroz, A. & Salazar, A. Characterization of vertical buried defects using lock-in vibrothermography : Ii. inverse problem. *Measurement Science and Technology* **24**, 065602 (2013). → p. 34, 35, 60
- [131] Burgholzer, P., Thor, M., Gruber, J. & Mayr, G. Three-dimensional thermographic imaging using a virtual wave concept. *Journal of Applied Physics* **121**, 105102 (2017). → p. 34, 39, 40, 41
- [132] Waters, S., Burgholzer, P., Mendioroz, A. & Saez de Ocariz, I. 3d reconstruction of tilted cracks using infrared thermography and the virtual wave concept (2018). → p. 34, 39
- [133] Mendioroz, A., Castelo, A., Celorrio, R. & Salazar, A. Defect characterization from lock-in vibrothermography data. *International Journal of Thermophysics* **36**, 1208–1216 (2015). → p. 36, 37
- [134] Lévesque, D., Blouin, A., Néron, C. & Monchalain, J.-P. Performance of laser-ultrasonic f-saft imaging. *Ultrasonics* **40**, 1057–1063 (2002). → p. 40
- [135] Busse, L. Three-dimensional imaging using a frequency-domain synthetic aperture focusing technique. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control* **39**, 174–179 (1992). → p. 40
- [136] Ā-zisik, M. N., Özışık, M. N. & Özışık, M. N. *Heat conduction* (John Wiley & Sons, 1993). → p. 45, 46, 197

-
- [137] Gray, R. M. *et al.* Toeplitz and circulant matrices : A review. *Foundations and Trends® in Communications and Information Theory* **2**, 155–239 (2006). → p. 51
 - [138] Stewart, G. W. On the early history of the singular value decomposition. *SIAM review* **35**, 551–566 (1993). → p. 52
 - [139] Beltrami, E. Sulle funzioni bilineari. *Giornale di Matematiche ad Uso degli Studenti Delle Università* **11**, 98–106 (1873). → p. 52
 - [140] Jordan, C. Sur la réduction des formes bilinéaires. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* **78**, 614–617 (1874). → p. 52
 - [141] Sylvester, J. J. Sur la reduction biorthogonale d'une forme lineo-linéaire a sa forme canonique. *Comptes Rendus* **108**, 651–653 (1889). → p. 52
 - [142] Picard, É. Sur un theoreme general relatif aux equations integrales de premiere espece et sur quelques problemes de physique mathematique. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)* **29**, 79–97 (1910). → p. 52
 - [143] Bamford, M. Méthode flash et thermographie infrarouge pour la cartographie de propriétés thermophysiques : Application à la caractérisation en thermomécanique. *Flash method and infrared thermography for the mapping of thermophysical properties : applications for the thermomechanical characterization-Doctorate Thesis, Université de Bordeaux* **1** (2007). → p. 53
 - [144] Trefethen, L. N. & Bau III, D. *Numerical linear algebra*, vol. 50 (Siam, 1997). → p. 70
 - [145] Sayers, M. W. The little book of profiling : basic information about measuring and interpreting road profiles (1998). → p. 72
 - [146] Whitefield, R. Noncontact optical profilometer. *Applied optics* **14**, 2480–2485 (1975). → p. 72
 - [147] <https://www.amp-composite.com/le-composite>. → p. 80
 - [148] <http://dnr.composites.free.fr/spip.php?rubrique6>. → p. 80
 - [149] <http://www.fmc-composites.com/industrie>. → p. 80
 - [150] Fredholm, I. Sur une classe d'équations fonctionnelles. *Acta mathematica* **27**, 365–390 (1903). → p. 91
 - [151] Wall, M. E., Rechtsteiner, A. & Rocha, L. M. *Singular value decomposition and principal component analysis*, 91–109 (Springer, 2003). → p. 98
 - [152] Varela, A. C. *Characterization of vertical cracks using lock-in vibrothermography*. Ph.D. thesis, Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea (2017). → p. 102, 103
 - [153] Tibshirani, R. Regression shrinkage and selection via the lasso. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Methodological)* **58**, 267–288 (1996). → p. 105
 - [154] Hanke, M. & Hansen, P. C. Regularization methods for large-scale problems. *Surv. Math. Ind* **3**, 253–315 (1993). → p. 107
 - [155] Hansen, P. C. *Rank-deficient and discrete ill-posed problems : numerical aspects of linear inversion*, vol. 4 (Siam, 2005). → p. 107
 - [156] Hansen, P. C. & O'Leary, D. P. The use of the l-curve in the regularization of discrete ill-posed problems. *SIAM Journal on Scientific Computing* **14**, 1487–1503 (1993). → p. 107
 - [157] Thompson, A. M., Brown, J. C., Kay, J. W. & Titterton, D. M. A study of methods of choosing the smoothing parameter in image restoration by regularization. *IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence* **326–339** (1991). → p. 107
 - [158] Varah, J. A practical examination of some numerical methods for linear discrete ill-posed problems. *SIAM Review* **21**, 100–111 (1979). → p. 108

- [159] Varah, J. M. Pitfalls in the numerical solution of linear ill-posed problems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* **4**, 164–176 (1983). → p. [108](#)
- [160] Syversveen, A. R. Noninformative bayesian priors. interpretation and problems with construction and applications. *Preprint statistics* **3**, 1–11 (1998). → p. [117](#)
- [161] Carlin, B. P. & Chib, S. Bayesian model choice via markov chain monte carlo methods. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Methodological)* **57**, 473–484 (1995). → p. [126](#)
- [162] Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H. & Teller, E. Equation of state calculations by fast computing machines. *The journal of chemical physics* **21**, 1087–1092 (1953). → p. [126](#)
- [163] Gelfand, A. E. & Smith, A. F. Sampling-based approaches to calculating marginal densities. *Journal of the American statistical association* **85**, 398–409 (1990). → p. [126](#)
- [164] Derin, H., Elliott, H., Cristi, R. & Geman, D. Bayes smoothing algorithms for segmentation of binary images modeled by markov random fields. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 707–720 (1984). → p. [126](#)

