



**HAL**  
open science

# Modélisation du comportement poromécanique des sols sujets à érosion interne par suffusion

Quentin Rousseau

► **To cite this version:**

Quentin Rousseau. Modélisation du comportement poromécanique des sols sujets à érosion interne par suffusion. Génie civil. École centrale de Nantes, 2021. Français. NNT : 2021ECDN0002 . tel-03273944

**HAL Id: tel-03273944**

**<https://theses.hal.science/tel-03273944v1>**

Submitted on 29 Jun 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE DE DOCTORAT DE

L'ÉCOLE CENTRALE DE NANTES

ÉCOLE DOCTORALE N° 602  
*Sciences pour l'Ingénieur*  
Spécialité : Génie Civil

Par

**Quentin ROUSSEAU**

**Modélisation du comportement poromécanique des sols sujets à érosion interne par suffusion**

Thèse présentée et soutenue à Nantes, le 12 Janvier 2021

Unité de recherche : UMR 6183, Institut de recherche en génie civil et mécanique (GeM)

## Rapporteurs avant soutenance :

Stéphane BONELLI     Directeur de recherche, INRAE, Aix en Provence  
Luc DORMIEUX        Professeur, École Nationale des Ponts et Chaussées, Marne la Vallée

## Composition du Jury :

Présidente :        Hélène DUMONTET    Professeure des universités, Sorbonne Université, Paris

Examineurs :     Rachel GELET            Maître de conférences, Université de Nantes  
                          Luc SIBILLE              Maître de conférences HDR, Université Grenoble Alpes

Dir. de thèse :     Giulio SCIARRA        Professeur des universités, École Centrale de Nantes  
Co-dir. de thèse : Didier MAROT            Professeur des universités, Université de Nantes





# Remerciements

Avant d'embarquer le lecteur curieux dans les pages de ce manuscrit, quelques mots de remerciements se doivent d'être adressés. Les premiers iront à l'équipe qui a encadré cette thèse. Giulio Sciarra, Didier Marot et Rachel Gelet, je souhaite ici vous témoigner de ma plus sincère gratitude. Merci d'avoir dirigé ces recherches tout en m'accordant votre confiance.

Je souhaite ensuite remercier Hélène Dumontet, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Je remercie également Luc Sibille, pour avoir examiné ce travail, et pour l'avoir suivi dans le cadre des comités de suivi de thèse. Nos échanges à ces occasions ont toujours été sources de nouvelles idées pour ces recherches. Je souhaite finalement remercier Stéphane Bonelli et Luc Dormieux, qui ont accepté la tâche de rapporter ce mémoire. Les discussions suite à ma soutenance de thèse ont ouvert de nouvelles voies pour persévérer dans la modélisation de la suffusion.

Ces quelques années passées à l'École Centrale Nantes et au GeM auront été agrémentées par de nombreuses rencontres. Je souhaite remercier Patrice Cartraud, pour avoir participé aux comités de suivi de thèse, ainsi que pour nos échanges et ses conseils enrichissants sur l'homogénéisation périodique. Je remercie Ahmed Loukili et toute l'équipe MEO pour la place que vous m'avez accordée. Que ce soit du point de vue scientifique ou pédagogique, l'environnement de travail dans cette équipe m'aura permis de m'épanouir pleinement. Un grand merci à tous mes collègues doctorants et post-doctorants pour l'ambiance dans les couloirs, au café, au RU, *etc* : Siddhartha, Sara, Yuliang, Rana, Pravin, Marinelle, Reda, Aliénor, Mohammed, Georgios, Guillemette, Alexandros, Faten, Filippo, Carol, Kexin, Sonia, Eftymios, Andriana, Philipp ... La liste est évidemment trop longue pour être certain ne pas en oublier ! Je remercie également l'équipe IEG pour leur accueil systématiquement chaleureux lors de mes passages en terres nazairiennes. Merci finalement à Samadrita Karmakar pour sa contribution à ces travaux de thèse.

Au cours d'un parcours universitaire, il y a des camarades qui deviennent des amis : Alban, Jorel, Romain, Thomas, et bien d'autres ... merci à vous tous.

Trois (voire quatre !) années, auraient pu paraître longues. Mais pourtant, que le temps passe vite quand on est si bien entouré ! A ce titre j'aimerais remercier chaleureusement les copains JJ, pour tous ces magnifiques moments passés en votre compagnie, depuis maintenant plus d'une décennie.

Quelques mots pour ma famille : mon frère, mes parents, beaux parents, grands parents, oncles, tantes et cousins. Je vous remercie pour votre soutien indéfectible depuis toujours. Comme je l'ai déjà dit, l'accomplissement dont témoigne ce manuscrit, c'est aussi et surtout le votre. J'aimerais avoir ici un mot pour chacun d'entre vous mais il faudrait pour cela rajouter un chapitre entier !

En souhaitant que le point final de ces remerciements initie de nouveaux chapitres, je finirai cette page par remercier Célia, qui plus que quiconque a traversé ces années à mes côtés.

# Table des matières

Table des figures	viii
Liste des tableaux	ix
Résumé	xi
Abstract	xiii
Introduction générale : érosion interne et suffusion	1
<b>1 Littérature, des expérimentations aux modélisations</b>	<b>5</b>
1.1 La suffusion et les sols concernés . . . . .	5
1.1.1 Le phénomène . . . . .	5
1.1.2 La sensibilité d'un sol . . . . .	6
1.2 Sollicitation hydraulique et suffusion . . . . .	7
1.3 Comportement mécanique et suffusion . . . . .	10
1.4 La suffusion modélisée . . . . .	12
1.4.1 Modélisations microscopiques . . . . .	12
1.4.2 Modélisations macroscopiques . . . . .	15
1.4.3 Homogénéisation . . . . .	19
<b>I Modélisation macroscopique</b>	<b>21</b>
<b>2 Modélisation poromécanique d'un milieu suffusif</b>	<b>23</b>
2.1 Cinématique . . . . .	24
2.1.1 Configuration de référence et configuration courante, déformations . . . . .	24
2.1.2 Vitesses et accélérations . . . . .	25
2.1.3 Bilans de masse . . . . .	26
2.2 Puissance des efforts extérieurs . . . . .	28
2.3 Thermodynamique . . . . .	30
2.3.1 Le premier principe : bilan d'énergie interne . . . . .	30
2.3.2 Le second principe : croissance entropique . . . . .	31
2.3.3 L'inégalité de Clausius-Duhem . . . . .	32
2.4 Lois de comportement . . . . .	35
2.4.1 Comportement squelettique . . . . .	35
2.4.2 Couplage entre diffusion hydraulique et suffusion . . . . .	39

2.4.3	Diffusion thermique . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Poro-élasto-plasticité : application à la suffusion</b>	<b>43</b>
3.1	Formulation du modèle . . . . .	44
3.1.1	Généralités sur la théorie de l'élasto-plasticité . . . . .	44
3.1.2	Le modèle parent : « Sinfonietta-Classica » . . . . .	47
3.1.3	La suffusion comme un écrouissage en porosité . . . . .	52
3.1.4	Un état caractéristique paramétré par la porosité . . . . .	56
3.2	Simulations sur un point matériel . . . . .	57
3.2.1	Position du problème sur un point matériel . . . . .	59
3.2.2	Conditions drainées . . . . .	64
3.2.3	Conditions oedométriques . . . . .	69
3.3	Implémentation aux éléments finis . . . . .	74
3.3.1	The FEniCS Project . . . . .	74
3.3.2	Position du problème . . . . .	76
3.3.3	Simulations . . . . .	85
<b>II</b>	<b>Homogénéisation quasi-périodique</b>	<b>91</b>
<b>4</b>	<b>Introduction</b>	<b>93</b>
<b>5</b>	<b>Formulation du problème vrai</b>	<b>95</b>
5.1	Topologie et cinématique du milieu poreux quasi périodique . . . . .	96
5.2	Microstructure évolutive : méthode des courbes de niveaux . . . . .	97
5.2.1	Milieu quasi-périodique et description implicite des hétérogénéités . . . . .	97
5.3	Équations de conservation pour le milieu poreux . . . . .	101
5.3.1	Conservation de la masse . . . . .	102
5.3.2	Conservation de la masse de particules solides . . . . .	102
5.3.3	Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	103
5.4	Lois de comportement de la phase fluide . . . . .	104
5.4.1	Principe des puissances virtuelles . . . . .	104
5.4.2	Premier principe de la thermodynamique . . . . .	105
5.4.3	Second principe de la thermodynamique . . . . .	105
5.4.4	Inégalité de Clausius-Duhem . . . . .	106
5.4.5	Lois de comportement . . . . .	107
5.5	Passage dans l'espace sans dimension . . . . .	107
5.5.1	Lois de bilan sur $\tilde{\Omega}^f$ . . . . .	108
5.5.2	Conditions d'interface . . . . .	110
<b>6</b>	<b>Homogénéisation quasi-périodique</b>	<b>113</b>
6.1	Hypothèses de séparation des échelles, développements asymptotiques . . . . .	114
6.2	Traîtement des ensembles de définition . . . . .	115
6.2.1	Prolongement des champs mécaniques . . . . .	115
6.2.2	Redéfinition de l'interface et des conditions aux limites . . . . .	115
6.3	Hypothèses en ordre de grandeur . . . . .	120
6.4	Cas 1 . . . . .	120

6.4.1	Cascade d'équations dans le domaine $Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$ . . . . .	121
6.4.2	Conditions aux limites . . . . .	123
6.4.3	Formulation du problème sur la cellule . . . . .	125
6.4.4	Équations à l'ordre suivant et problème macroscopique . . . . .	128
6.4.5	Comparaison avec le modèle macroscopique et conclusions . . . . .	135
6.5	Cas 2 . . . . .	137
6.5.1	Cascade d'équations dans le domaine $Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$ . . . . .	137
6.5.2	Bilan de la masse . . . . .	137
6.5.3	Conditions aux limites . . . . .	139
6.5.4	Formulation du problème sur la cellule . . . . .	140
6.5.5	Équations à l'ordre suivant et problème macroscopique . . . . .	143
6.5.6	Etude pour un cas simple . . . . .	155
6.5.7	Conclusions . . . . .	169
<b>7</b>	<b>Conclusions générales et perspectives</b> . . . . .	<b>171</b>
7.1	Contributions à la modélisation macroscopique de l'érosion interne par suffusion . . . . .	171
7.2	Analyse par homogénéisation périodique du phénomène de suffusion . . . . .	172
7.3	Perspectives . . . . .	173
<b>A</b>	<b>Réarrangement de l'inégalité de Clausius-Duhem</b> . . . . .	<b>181</b>
<b>B</b>	<b>Autour de « Sinfonietta-Classica »</b> . . . . .	<b>183</b>
B.1	Dérivation du modèle . . . . .	183
B.2	Dilatance . . . . .	187
<b>C</b>	<b>Quelques résultats utiles</b> . . . . .	<b>189</b>
C.1	Théorèmes de transport et de flux divergence généralisés . . . . .	189
C.2	Alternative de Fredholm . . . . .	189
C.3	Lemmes de van Noorden et Bringedal . . . . .	190
C.4	Révision du second lemme de van Noorden . . . . .	190
C.5	Interchanger intégration et dérivation (divergence) . . . . .	192
C.6	Interchanger intégration et dérivation (gradient) . . . . .	193
C.7	Interchanger intégration et dérivation temporelle . . . . .	195
C.7.1	Cas particulier où $g$ est constant sur $Y_0$ . . . . .	196
<b>D</b>	<b>Problèmes variationnels discretisés</b> . . . . .	<b>197</b>



# Table des figures

1.1	Différentes étapes du processus de suffusion et couplage possible entre comportement mécanique du sol et développement de la suffusion. D'après Sibille [4] . . . . .	6
1.2	Classification granulométriques, d'après Laffleur <i>et al.</i> [5] . . . . .	7
1.3	Évolution de la masse érodée en fonction (a) du temps (b) du gradient hydraulique. D'après Sterpi [18]. $\mu_e$ indique le pourcentage de fines perdues . . . . .	8
1.4	Chargement hydraulique évolutif d'après Chang et Zhang [20] . . . . .	9
1.5	Masse érodée et perméabilité d'un sol pendant la suffusion. D'après Chang et Zhang [20] . . . . .	9
1.6	Déformation d'un sol au cours de l'érosion. D'après Chang et Zhang [20] . . . . .	10
1.7	Influence de la pression de confinement sur le taux d'érosion. D'après Bendahmane <i>et al.</i> [19] . . . . .	10
1.8	Gradients critiques en fonction du ratio de contrainte, d'après Chang et Zhang [7] . . . . .	11
1.9	Réponse d'échantillons (a) reconstitués et (b) érodés sous conditions triaxiales drainées . . . . .	12
1.10	Réponses volumiques d'échantillons érodés en conditions triaxiales drainées, d'après Chang et Zhang [20] . . . . .	13
1.11	Réponses (a) en contrainte et (b) volumiques d'un sol lâche avant et après suffusion, d'après Ke et Takahashi [22] . . . . .	13
1.12	Réponses (a) en contrainte et (b) volumiques d'un sol en cours d'érosion, d'après Muir Wood <i>et al.</i> [23] . . . . .	14
1.13	Réponses en contrainte (à gauche) et volumiques (à droite) d'un échantillon au cours de l'érosion, d'après Scholtès <i>et al.</i> [24] . . . . .	15
1.14	Représentation cellulaire du milieu poreux selon Bouddour <i>et al.</i> [47] . . . . .	19
3.1	Surface de charge et direction d'écoulement plastique . . . . .	50
3.2	Angle de frottement caractéristique en fonction de $\phi^{er}$ . . . . .	57
3.3	Illustration du passage de comportement contractant à dilatant (cas $Z_i > Z_{er}$ ) . . . . .	58
3.4	Illustration du passage de comportement dilatant à contractant (cas $Z_i < Z_{er}$ ) . . . . .	58
3.5	Comparaison comportementale entre matériaux érodés et leurs analogues sains. À gauche, un matériau dense ; à droite, un matériau lâche . . . . .	70
3.6	Comparaison de l'indice des vides des matériaux érodés et de leurs analogues sains . . . . .	71
3.7	Sol suffusif comparé à un son analogue sain ; conditions oedométriques . . . . .	75
3.8	Dilatance en fonction du ratio de contrainte en conditions axisymétriques . . . . .	76
3.9	vue en coupe longitudinale du maillage du cylindre . . . . .	86
3.10	perspective de $\mathcal{D}_r^h$ (réalisée avec Paraview [86] (logiciel libre, licence BSD)) . . . . .	87
3.11	Résultats de simulation aux éléments finis sur matériaux érodés et leurs analogues sains. A gauche, un matériau dense ; à droite, un matériau lâche . . . . .	90

---

5.1	Milieu quasi-périodique . . . . .	98
5.2	Illustration des différents termes de la fonction courbe de niveau . . . . .	101
6.1	vue de $Y_{0h}$ (réalisée avec Paraview [86] (logiciel libre, licence BSD)) . . . . .	161
6.2	Cartographie colorimétriques des résultats de simulations aux éléments finis . . . . .	162
6.3	Distributions de $\pi_h^{(i)}$ , $\iota_h$ , $\nu_h^{(i)}$ et de $\vartheta_h$ sur $\Gamma_{0h}$ . . . . .	163
6.4	Distributions de quelques quantités d'intérêt sur $\Gamma_{0h}$ . . . . .	164
6.5	Cartographie colorimétriques des composantes de $\varphi_h$ . . . . .	166

# Liste des tableaux

3.1	Paramètres des échantillons testés sous conditions triaxiales axisymétriques drainées	64
5.1	Lois de conservation sans dimensions . . . . .	112
6.1	Hypothèses en ordre de grandeur (ODG) et notations . . . . .	121



# Résumé

Les écoulements d'infiltration dans les sols sont susceptibles d'engendrer des processus d'érosion interne. Dans les sols grenus sans cohésion, la « suffusion » est une érosion interne se caractérisant par trois phénomènes simultanés et indissociables : l'arrachement, le transport et la filtration des grains solides les plus fins au travers du réseau de pores. Puisqu'il existe une forte corrélation entre la majorité des avaries au sein d'ouvrages hydrauliques en terre (barrage, digues et canaux d'irrigation) et les phénomènes d'érosion interne, ces derniers sont au coeur d'enjeux économiques et sociétaux notables. En centrant l'intérêt sur l'érosion interne par suffusion, l'objectif de ces travaux de thèse est de contribuer à l'élaboration d'un outil clé pour l'ingénieur face à ces problèmes : un modèle de comportement poromécanique considérant un couplage entre réponse hydromécanique et suffusion. La thermodynamique des milieux poreux est employée en vue d'analyser le couplage entre suffusion, écoulement et état mécanique. Un modèle de comportement est proposé en accord avec ce couplage complexe. D'un côté, l'effet de la suffusion sur le comportement mécanique du sol est modélisé *via* l'extension d'un modèle élasto-plastique existant en introduisant la porosité induite par suffusion comme variable d'écrouissage. A titre de validation, la réponse du modèle élasto-plastique est analysée puis comparée à des résultats expérimentaux issus de la littérature. D'un autre côté, la pertinence du modèle de couplage macroscopique entre diffusion hydraulique et érosion interne est éprouvée par une analyse à deux échelles, *via* la théorie de l'homogénéisation (quasi) périodique.

**Mots clés :** Suffusion, poromécanique, lois de comportement, élasto-plasticité, homogénéisation, microstructure évolutive



# Abstract

Seepage flows within soils are prone to induce internal erosion processes. Concerning cohesionless granular soils, “suffusion” is a kind of internal erosion characterized by three simultaneous processes : detachment, transport and interlocking of the fine particles of the soil through the pore network. As a strong correlation exists between internal erosion and most of the incidents occurring within hydraulic structures (dams, dykes and irrigation channels), these processes are directly involved in some major economic and society concerns. By focusing on suffusion, the main objective of this research is to contribute to the development of a engineering tool to face the abovementioned problems: a poromechanical model that couples suffusion and the hydromechanical behaviour of the considered soil. The thermodynamics of porous media is employed to analyze the coupling between suffusion, seepage flow and mechanical state. A poromechanical model is proposed in agreement. On the one hand, the effect of suffusion on the mechanical behaviour of the soil is modelled by extending an existing soil elasto-plastic model considering the suffusion induced porosity as a hardening variable. The model is then validated with respect to experimental results available in the literature. On the second hand, the macroscopic constitutive model coupling suffusion and seepage flow is tested considering a multi-scale analysis using the (quasi) periodic homogenization theory.

**Keywords :** Suffusion, poromechanics, constitutive laws, elasto-plasticity, homogenization, changing microstructure



# Introduction générale : érosion interne et suffusion

Protection contre les inondations et submersions, stockage et distribution de l'eau, production d'électricité, tourisme et loisirs *etc.* Ainsi sont les fonctions des ouvrages qualifiés « d'ouvrages hydrauliques » [1] tels que les digues, barrages et canaux. Ces structures, réalisées en remblais ou en enrochements sont poreuses par nature. Dès lors, elles ne sont pas imperméables et permettent malgré tout à l'eau de se déplacer au travers de leurs réseaux de pores. Les écoulements ainsi développés sont qualifiés « d'interstitiels » ou « d'infiltration ». De tels écoulements d'eau à l'intérieur des pores peuvent induire le détachement puis le transport des grains composant le squelette granulaire du matériau constituant l'ouvrage. Une fois transportés, ces grains peuvent se déposer en aval de l'écoulement, que ce soit à l'intérieur ou même à l'extérieur de l'ouvrage. L'érosion interne [2] est définie comme la combinaison de ces trois phénomènes. A l'échelle de la structure, l'érosion interne peut avoir des conséquences dramatiques, à savoir la perte de sa capacité à assurer sa fonction (de production d'hydro-électricité ou de protection contre les crues par exemple) ou même la rupture. Dans un tout autre contexte, des phénomènes d'érosion interne se produisent également lors de l'extraction d'hydrocarbures. Dès lors, du sable est extrait du réservoir conjointement à l'hydrocarbure recherché [3]. Le contrôle de cette production est un enjeu majeur : le sable ainsi soustrait peut endommager les engins de production d'hydrocarbures ou bien obstruer le puit d'extraction. Les conséquences de tels phénomènes peuvent alors être (i) l'augmentation des coûts de production, (ii) un ralentissement du taux de production ou même (iii) la « mort » du puit d'extraction.

La communauté scientifique et technique traitant des problématiques liées à l'érosion interne admet communément l'existence de quatre types d'érosion interne différents dont nous retrouvons les définitions dans l'ouvrage édité par Bonelli [2] :

- i L'érosion de conduit, correspondant à l'érosion de la surface interne d'un conduit présent dans le massif de remblai.
- ii L'érosion de contact, opérant à l'interface entre un sol fin et un sol grossier ; le sol fin est érodé au niveau de l'interface.
- iii L'érosion régressive : l'érosion d'un volume de sol en aval de l'écoulement, se poursuivant par un développement de l'aval vers l'amont.
- iv La suffusion, consistant en une érosion sélective des grains les plus fins du sol au travers du réseau de pores du squelette granulaire constitué de grains plus grossiers.

Ce travail de recherche se concentre principalement sur la suffusion. Cette érosion interne particulière modifie la structure du squelette granulaire du sol concerné. De ce fait, la suffusion altère les

propriétés hydrauliques et mécaniques du matériau sur lequel elle agit. Du point de vue hydraulique, cette altération se traduit principalement par l'évolution de la perméabilité du sol. À l'échelle structurale, cette variation de perméabilité peut induire la redistribution des pressions interstitielles. Cette redistribution des pressions interstitielles induit alors celle des contraintes effectives, pouvant causer des tassements, voire une rupture par glissement. Si la suffusion se développe de manière hétérogène, alors l'écoulement interstitiel peut évoluer vers un écoulement préférentiel. D'un point de vue purement mécanique, et au regard des essais expérimentaux réalisés en laboratoire et présentés dans la littérature, les conséquences de la suffusion peuvent être multiples. Dans un premier temps, la typologie comportementale du sol érodé évolue : d'un côté, si le sol sain se comporte initialement comme un sol dense, alors une fois érodé, son comportement se rapprochera de celui d'un matériau lâche. D'un autre côté, ce changement de typologie s'accompagne parfois d'une perte de résistance du sol ainsi que du développement de déformations. A l'échelle de l'ouvrage, le développement des déformations peut se traduire par des tassements parfois importants. Combiné à une perte de résistance du sol, ce phénomène peut conduire à la rupture de l'ouvrage lors d'un événement hydraulique important (crue, tempête, *etc*). D'un autre côté, les configurations hydriques et mécaniques du sol ont une influence considérable sur la cinétique de la suffusion. Par exemple, pour un sol donné et pour une même sollicitation hydraulique, le taux d'érosion peut varier considérablement à mesure que l'état de contrainte isotrope et déviatorique évolue. A l'inverse, pour un sol donné soumis à un état de contrainte fixe, la cinétique d'érosion est pilotée par la sollicitation hydraulique ainsi que l'histoire de cette dernière.

Phénomène couplé par essence, la suffusion a fait l'objet d'un effort de recherche significatif durant les dernières décennies, tant sur le plan expérimental que théorique. C'est dans cette dynamique scientifique que s'inscrit cette thèse de doctorat. L'objectif principal de ces travaux est de fournir une modélisation du comportement poromécanique des sols sujets à érosion interne. Pour mener à bien cet objectif, la stratégie définie se décompose en deux volets.

- I La modélisation macroscopique des milieux poreux suffusifs. Cette modélisation macroscopique vise à contribuer au transfert d'un modèle d'érosion interne vers les champs d'application de l'ingénierie géotechnique.
  - i Positionner le problème de la suffusion au regard de la cinématique des milieux poreux. Ici, l'approche retenue sera essentiellement Lagrangienne.
  - ii Écrire les principes de la thermodynamique en considérant la cinématique propre des milieux suffusifs dans le but de déduire une forme originale de l'inégalité de Clausius-Duhem.
  - iii Exprimer un jeu de restrictions qui devra être vérifié par les lois de comportement du milieu poreux suffusif.
  - iv Proposer un jeu de lois de comportement pour le milieu poreux suffusif, en s'appuyant sur la thermodynamique ainsi que sur la théorie de la pro-plasticité.
  - v Réaliser des simulations pour évaluer les performances du modèle.
- II L'analyse multi-échelle par homogénéisation périodique d'un problème de suffusion. Cette analyse vise à examiner si l'approche macroscopique présente une justification microscopique robuste basée sur une physique simple et connue à l'échelle grain/pores. Elle se décompose elle aussi en plusieurs étapes :

- 
- i Ecriture de la topologie du problème en considérant le caractère évolutif de la microstructure du milieu suffusif. L'évolution sus-mentionnée sera suivie par la méthode des courbes de niveaux.
  - ii Formalisation d'un problème de suffusion à l'échelle grain/pores.
  - iii Formulation d'hypothèses en ordres de grandeur.
  - iv Application de la procédure d'homogénéisation périodique.
  - v Dédution des modèles homogénéisés.

Dans un premier temps, le lecteur est invité à suivre une revue de littérature concernant les travaux académiques réalisés sur la suffusion. La première partie de cette thèse se concentre sur la modélisation macroscopique d'un sol suffusif. Dans le chapitre 2, la thermodynamique des processus irréversibles sera employée pour déduire un jeu de lois constitutives permettant de cerner le comportement poromécanique des sols suffusifs, en incluant les couplages inhérents à ces milieux. Le chapitre 3 est dédié à la formulation d'un modèle de poro-plasticité permettant d'appréhender les effets de la suffusion sur le comportement mécanique du sol. Des simulations sur un point matériel ainsi que sur des domaines finis seront réalisées pour exposer les capacités et les limites du modèle ainsi développé.

La seconde partie de cette thèse est dédiée à l'analyse multi-échelle par homogénéisation quasi-périodique. Après un bref chapitre 4 introductif, le chapitre 5 vise à proposer un problème « vrai », posé à l'échelle microscopique. Ce problème vrai s'appuie sur une description topologique riche d'un milieu poreux hétérogène dont la microstructure évolue. L'originalité de cette approche réside dans l'appréhension de l'évolution microstructurale *via* la méthode des courbes de niveau. Ce problème vrai constitue la matière première de la procédure d'homogénéisation réalisée dans le chapitre 6. Dans ce chapitre, deux modèles homogénéisés différents seront obtenus et comparés. Enfin, nous conclurons des liens existants entre le modèle issu de la poromécanique macroscopique et ceux issus de l'homogénéisation. La force de ces liens sera éprouvée afin de conclure quant à la justesse de l'approche globale proposée dans cette thèse.



# Chapitre 1

## Littérature, des expérimentations aux modélisations

### Table des matières

---

<b>1.1</b>	<b>La suffusion et les sols concernés</b>	<b>5</b>
1.1.1	Le phénomène	5
1.1.2	La sensibilité d'un sol	6
<b>1.2</b>	<b>Sollicitation hydraulique et suffusion</b>	<b>7</b>
<b>1.3</b>	<b>Comportement mécanique et suffusion</b>	<b>10</b>
<b>1.4</b>	<b>La suffusion modélisée</b>	<b>12</b>
1.4.1	Modélisations microscopiques	12
1.4.2	Modélisations macroscopiques	15
1.4.2.1	Contexte pétrolier	15
1.4.2.2	Contexte géotechnique	17
1.4.3	Homogénéisation	19

---

## 1.1 La suffusion et les sols concernés

### 1.1.1 Le phénomène

Comme évoqué dans le chapitre introductif, la suffusion est une érosion interne caractérisée par l'arrachement, le transport et le dépôt, sous l'effet d'un écoulement, des grains les plus fins du squelette solide du sol concerné [2]. La figure 1.1, issue de Sibille [4] représente schématiquement les différentes étapes d'un processus de suffusion. D'abord, sous l'effet de l'écoulement, les grains les plus fins sont détachés et transportés, puis éventuellement filtrés par le squelette solide encore en place. S'ensuit une modification de la microstructure pouvant altérer le comportement du squelette et conduire à une réorganisation de ce dernier. Les déformations ainsi développées peuvent rendre érodables de nouveaux grains fins et le cycle recommence. Parallèlement, l'évolution microstructurale peut conduire à un effondrement de l'empilement granulaire.

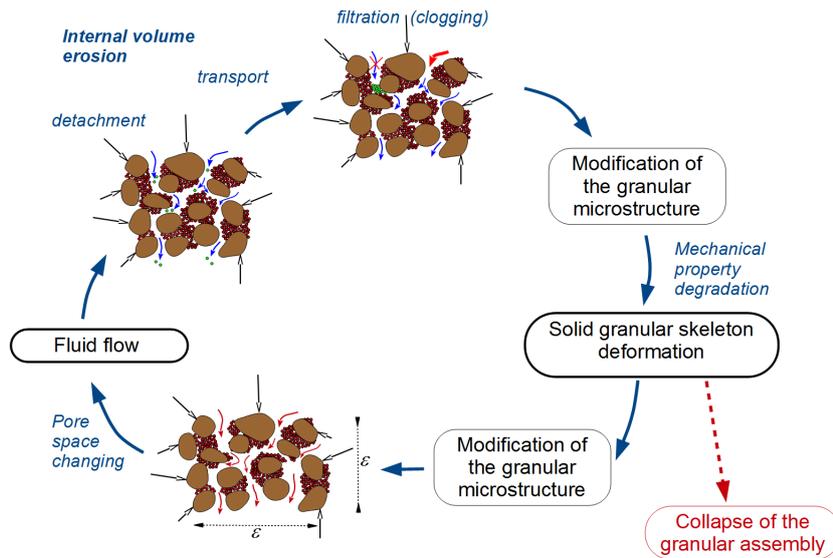


FIGURE 1.1 – Différentes étapes du processus de suffusion et couplage possible entre comportement mécanique du sol et développement de la suffusion. D’après Sibille [4]

### 1.1.2 La sensibilité d’un sol

L’initiation et le développement de la suffusion sont intimement liés à la nature du sol concerné. En effet, pour que cette érosion interne soit significative, il est nécessaire que le réseau de pores soit suffisamment développé pour permettre le transport des fines détachées sur une distance non négligeable. L’ouverture du réseau de pores dépend d’un certain nombre de facteurs. A titre d’exemple, la granulométrie [5] du sol, l’angularité des grains [6] et l’état de contrainte effective [7] ont une influence considérable sur cette ouverture. Ceci implique deux conséquences :

- i La suffusion n’opère pas pour tout empilement granulaire.
- ii La suffusion n’opère pas pour tout état de contrainte effective.

En ce qui concerne la première conséquence, la littérature a montré que parmi les trois distributions granulaires suivantes : linéairement graduée, lacunaire et concave ; seulement les deux dernières sont sensibles à la suffusion (voir figure 1.2, d’après Lafleur *et al.* [5]). Les granulométries sensibles à la suffusion sont régulièrement qualifiées « d’internalement instables ». Différentes études de la susceptibilité à la suffusion au regard de sa distribution granulométrique ont abouti à une variété notable de critères géométriques d’initiation de la suffusion. Les critères de Kenney et Lau [8], Wan et Fell [9] ainsi que de Li et Fannin [10] constituent une liste non exhaustive de critères pouvant être employés pour déterminer l’existence d’un risque de suffusion. Cependant, ces critères ne prennent pas en compte l’angularité des grains. Dans une étude ultérieure, Marot *et al.* [6] ont comparé la sensibilité à la suffusion de sables argileux aux granulométries similaires mais dont les fractions grossières présentent des angularités différentes. Il a alors été montré que la sensibilité à la suffusion augmente à mesure que l’angularité de la fraction grossière du sol augmente. Cependant, savoir si un sol est sensible à la suffusion n’est pas suffisant pour anticiper si oui ou non la suffusion va s’y développer. En effet, ce phénomène est indissociable d’un écoulement d’eau et il est nécessaire de comprendre les liens entre les sollicitations hydrauliques et la suffusion.

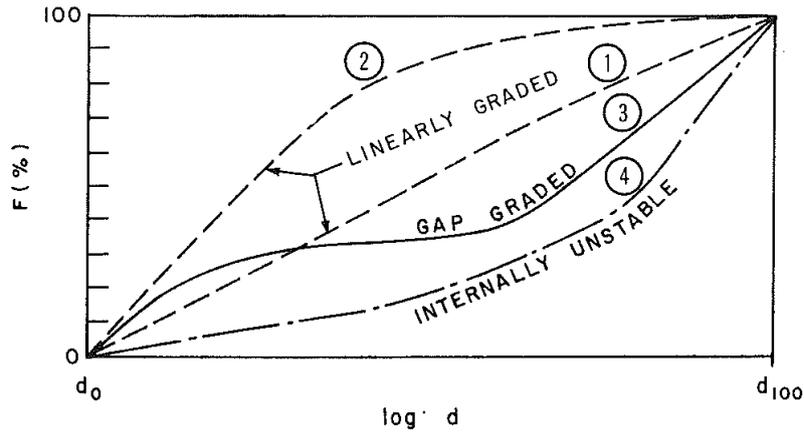


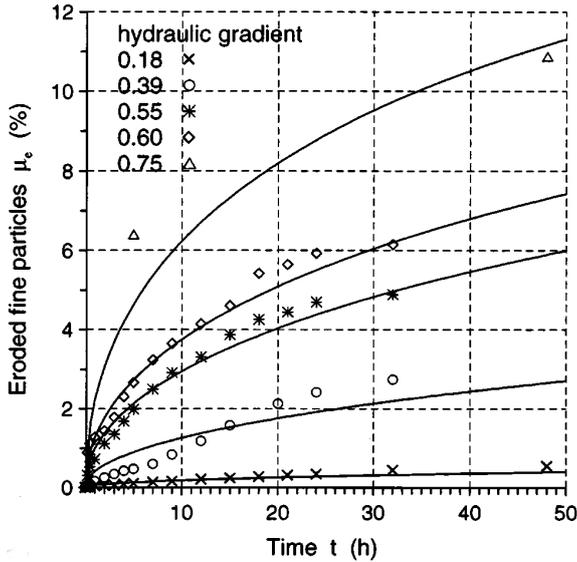
FIGURE 1.2 – Classification granulométrique, d'après Lafleur *et al.* [5]

## 1.2 Sollicitation hydraulique et suffusion

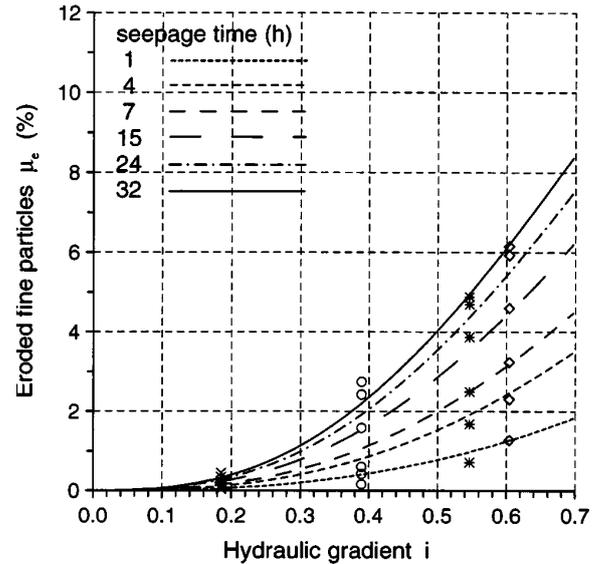
La suffusion est régulièrement perçue comme la réponse d'un sol donné à une sollicitation hydraulique. En effet, sans écoulement, le transport des grains est impossible. Dans une démarche de caractérisation du phénomène à l'échelle d'un ouvrage hydraulique, la communauté scientifique s'est d'abord attelée à identifier des seuils de sollicitation au delà desquels la suffusion s'initie. Cette idée de seuil s'inspire des origines de la mécanique des sols proposée par Terzaghi [11] et s'intéressant entre autres choses aux risques de boulangerie. Dans ces travaux, Terzaghi propose d'identifier un gradient hydraulique « critique » au delà duquel le risque de boulangerie est avéré. Concernant la suffusion, trois approches sont usuellement retenues pour définir un seuil de sollicitation hydraulique. Elles consistent respectivement à définir :

- i un gradient hydraulique critique, voir par exemple Skempton et Brogan [12]
- ii une contrainte de cisaillement hydraulique critique, voir par exemple Reddi *et al.* [13]
- iii une vitesse porale critique, voir par exemple Perzlsmaier *et al.* [14]

A partir de ces quelques approches, un ingénieur est capable d'estimer si la sollicitation hydraulique exercée sur un ouvrage dépasse un seuil critique. Cependant, la détermination de ce seuil reste une question ouverte. En effet, par exemple, évaluer avec précision la contrainte de cisaillement exercée par le fluide sur le squelette granulaire, à partir de quantités macroscopiques (perméabilité et gradient de charge hydraulique par exemple) sans se munir d'outils micromécaniques relève de l'exploit. Les modèles existants se basent sur une géométrie porale d'une simplicité extrême. Par exemple Reddi *et al.* approximent la géométrie porale par un tube [13]. De plus, si ces approches permettent à l'ingénieur de déterminer le risque de suffusion, elles ne sont pas en mesure de fournir une quelconque estimation de la cinétique de développement de la suffusion. Finalement, à l'aide de modèles physiques à échelle réduite et exploités en centrifugeuse, Marot *et al.* [15] ont montré que les paramètres seuils sont sujets aux effets d'échelle. Pour un même sol, le gradient hydraulique critique augmente à mesure que la dimension caractéristique de l'échantillon augmente. De plus, les travaux de Rochim *et al.* [16] ont montré que ces seuils dépendent de l'histoire de la sollicitation hydraulique. Ces conclusions permirent de rouvrir la discussion scientifique sur les besoins d'une nouvelle classification de la sensibilité d'un sol à la suffusion. Dans la foulée, Marot *et al.* [17]



(a) Évolution de la masse érodée en fonction du temps pour différents gradients hydrauliques



(b) Évolution de la masse érodée en fonction du gradient hydraulique pour différentes durées d'écoulement

FIGURE 1.3 – Évolution de la masse érodée en fonction (a) du temps (b) du gradient hydraulique. D'après Sterpi [18].  $\mu_e$  indique le pourcentage de fines perdues

ont proposé une méthode d'évaluation de la susceptibilité à la suffusion, basée cette fois-ci sur l'énergie dissipée par le fluide au cours d'un essai de suffusion. Cette méthode basée sur l'énergie, présente l'avantage majeur de fournir des résultats qui ne sont pas sensibles aux effets d'échelle et à l'histoire du chargement hydraulique. Dans la section 1.4, nous verrons comment les approches en seuils hydrauliques et l'approche basée sur l'énergie ont nourri le développement des modélisations récentes de la suffusion.

Le développement et la cinétique de la suffusion ont également fait l'objet de recherches expérimentales. Les essais réalisés par Sterpi [18] ont révélé (voir figure 1.3) que la cinétique de suffusion est clairement dépendante de l'intensité du gradient hydraulique et de la durée d'écoulement. Pour un gradient hydraulique fixé, la quantité de particules fines érodées augmente fortement en début d'essai puis le taux d'érosion diminue au cours du temps. Selon Sterpi [18], la décroissance de ce taux d'érosion est exponentielle. De plus, pour une durée d'essai fixe, la quantité de fines érodées augmente considérablement avec le gradient hydraulique. Cette augmentation n'est pas linéaire. Sterpi [18] approxime cette augmentation *via* une fonction exponentielle croissante. Les résultats de ces essais ont trouvé un écho particulier avec l'étude paramétrique conduite par Bendahmane *et al.* [19] qui retrouvent des tendances similaires. Cependant, ces résultats ont été obtenus pour des chargements hydrauliques relativement simples. Dès lors que l'histoire du chargement se complexifie, la compréhension de la cinétique de suffusion se fait plus délicate. Chang et Zhang [20] ont étudié la réponse suffusive d'un échantillon soumis à un gradient hydraulique croissant au cours du temps (voir figure 1.4). Ces travaux montrent que la cinétique de suffusion peut se décomposer en plusieurs phases (voir figures 1.5 et 1.6). Pour de faibles gradients hydrauliques, le sol est stable et la suffusion ne s'initie pas. Dès lors que le gradient hydraulique excède une première valeur critique  $i_{start}$ , l'érosion s'initie et s'accompagne de variation brutale de perméabilité. En parallèle, le sol se

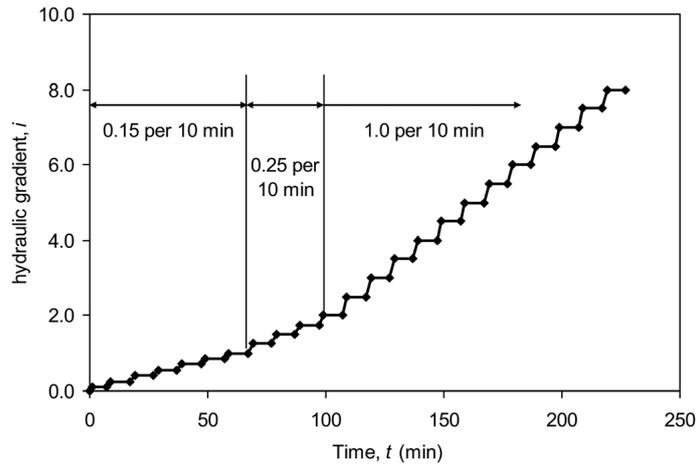
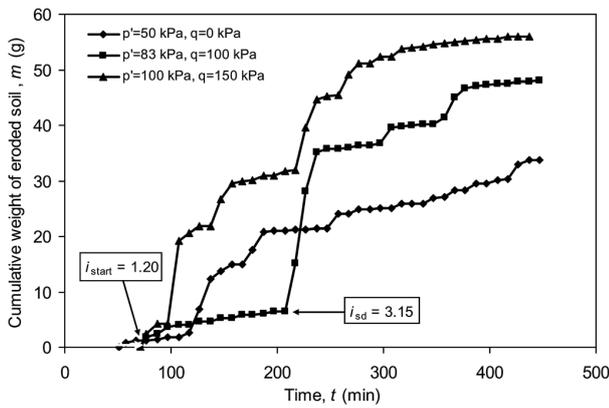
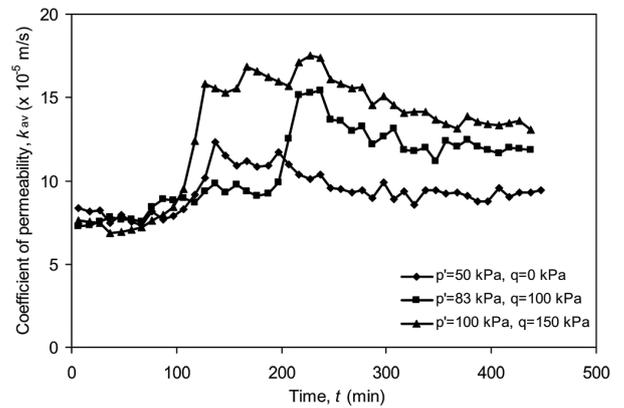


FIGURE 1.4 – Chargement hydraulique évolutif d’après Chang et Zhang [20]



(a) Evolution de la masse érodée au cours du temps



(b) Evolution de la perméabilité au cours du temps

FIGURE 1.5 – Masse érodée et perméabilité d’un sol pendant la suffusion. D’après Chang et Zhang [20]

déforme de manière raisonnable mais toutefois non-négligeable. La fin de cette phase et le début de la suivante sont caractérisés par une augmentation soudaine de la quantité de fines érodées, une nouvelle augmentation de la perméabilité et une augmentation majeure des déformations dans le squelette. Le gradient hydraulique marquant la transition entre ces deux phases est noté  $i_{sd}$ . Une fois cette phase achevée, la perméabilité diminue progressivement et le sol se déforme très peu à mesure que la masse érodée se stabilise. Cette dernière phase est caractérisée par un colmatage significatif des couches basses de l’échantillon. En plus de ces résultats cruciaux, les essais réalisés par Chang et Zhang montrent que l’initiation et la cinétique de suffusion sont toutes deux dépendantes de l’état de contrainte perçu par le sol. Ces résultats corroborent ceux obtenus par Bendahmane *et al.* [19]. Par ailleurs, il est maintenant clair qu’un sol suffusif se déforme à mesure que la masse érodée devient importante. Ces résultats soulèvent alors la question du couplage entre la suffusion et le comportement mécanique du sol.

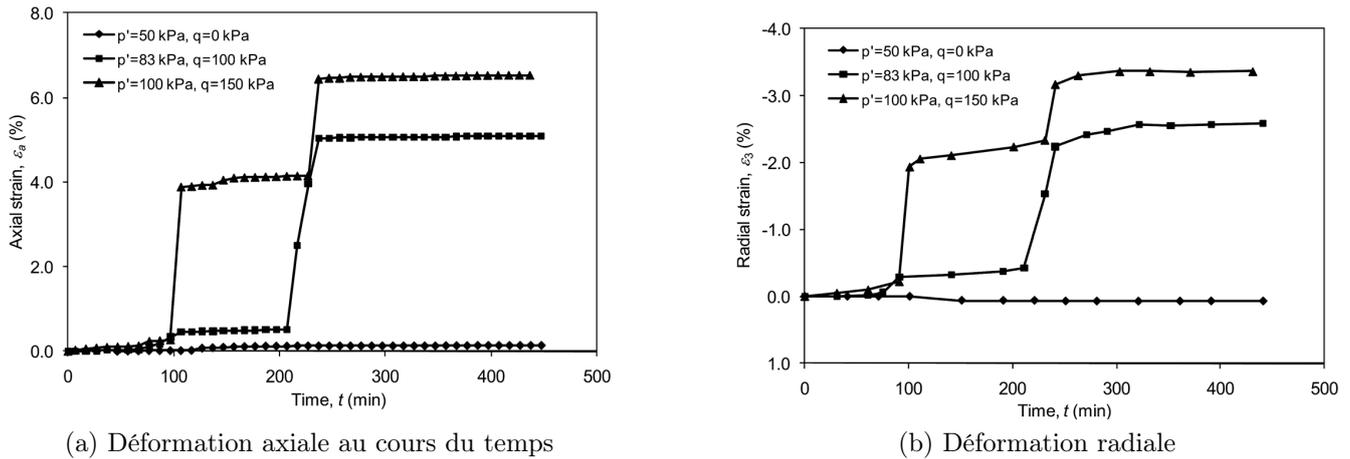
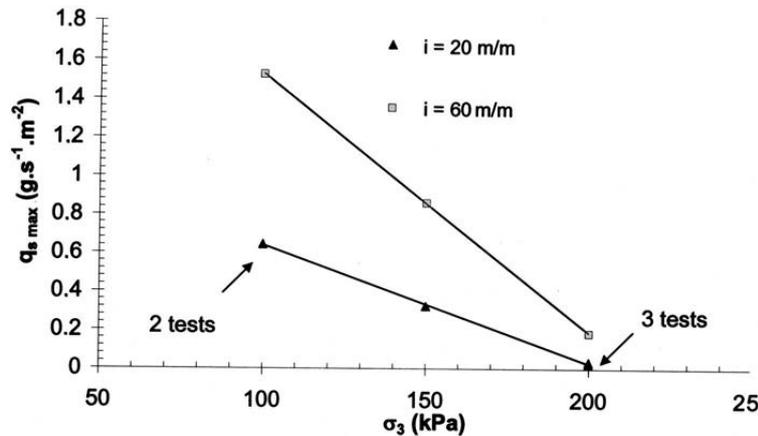


FIGURE 1.6 – Déformation d'un sol au cours de l'érosion. D'après Chang et Zhang [20]

FIGURE 1.7 – Influence de la pression de confinement sur le taux d'érosion. D'après Bendahmane *et al.* [19]

### 1.3 Comportement mécanique et suffusion

Comme évoqué en amont, il a été montré [20, 19], que l'initiation et le développement de la suffusion dépendent de l'état de contrainte isotrope perçu par le sol. En particulier, Bendahmane *et al.* [19] ont montré que, pour un chargement hydraulique donné, le taux d'érosion décroît linéairement lorsque la pression de confinement augmente (voir figure 1.7). Cet effet est attribué à un resserrement du réseau de pore, rendant plus difficiles le détachement et le transport des grains les plus fins. Pour considérer l'effet d'états de contrainte plus complexes que des contraintes isotropes, Chang et Zhang, dans d'autres travaux [7], ont étudié l'influence du ratio de contrainte sur les gradients critiques  $i_{start}$  et  $i_{sd}$  (voir figure 1.8). Le ratio de contrainte est défini comme le rapport entre la contrainte équivalente de von Mises  $q$  et la pression moyenne effective de confinement  $p'$ . Le gradient critique  $i_{start}$  tend à augmenter lorsque le ratio de contrainte augmente. Cependant, pour de grandes valeurs de ce ratio, cette tendance s'inverse et  $i_{start}$  amorce une décroissance. Ce phénomène est attribué à la dilatance du sol. Pour des fortes valeurs du ratio de contrainte, le sol devient dilatant et le réseau de pores s'ouvre, facilitant l'érosion des particules fines. Concer-

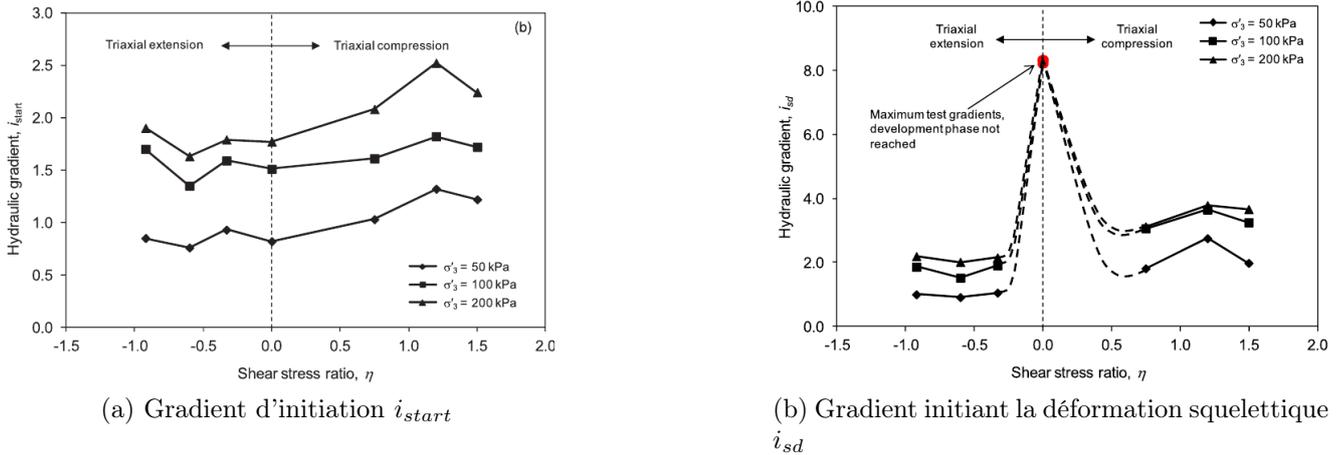
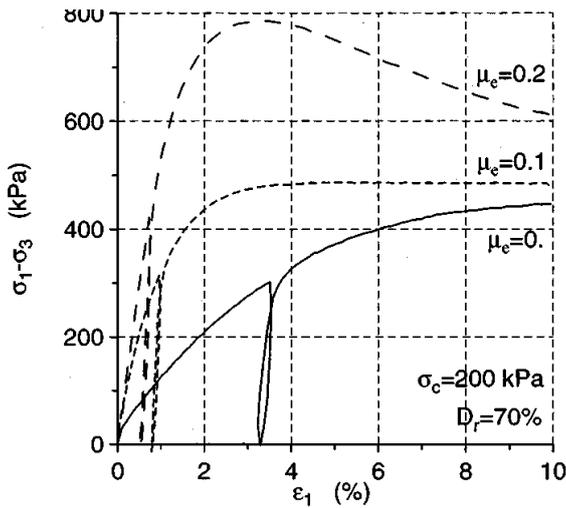
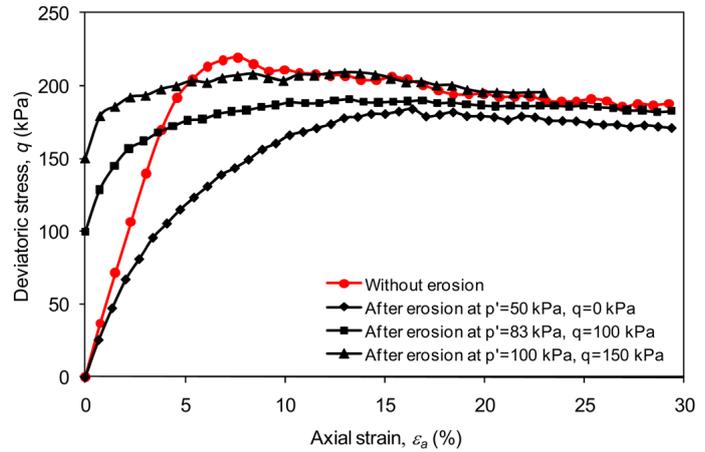


FIGURE 1.8 – Gradients critiques en fonction du ratio de contrainte, d'après Chang et Zhang [7]

nant le gradient critique de déformation squelettique,  $i_{sd}$ , un maximum semble exister pour un ratio de contrainte nul. Ceci est attribué par Chang et Zhang à la grande distance qui sépare alors l'état de contrainte correspondant de la surface de rupture sur sol. D'un autre côté, pour un même sol,  $i_{sd}$  est d'autant plus important que la porosité est faible. Finalement, en changeant la microstructure du sol, la suffusion peut avoir des conséquences sur le comportement mécanique du squelette solide. Afin d'investiguer le rôle du contenu en particules fines d'un échantillon sur sa réponse mécanique, des essais triaxiaux en conditions drainées ont été réalisés par Sterpi [18] sur des échantillons reconstitués considérant des contenus en fines différents et censés représenter un sol érodé à différents degrés. De ces essais, il apparaît que le sol devient de plus en plus résistant à mesure que la suffusion progresse. En comparant (voir figure 1.9) les essais triaxiaux drainés réalisés sur des échantillons réellement érodés au préalable [20], on peut conclure que le comportement d'un sol suffusif n'est pas celui d'un sol reconstitué à niveau de fines équivalent. En effet, la résistance d'un sol réellement érodé est ici plus faible. Ceci signifie que la seule connaissance du pourcentage de fines courant n'est pas suffisante pour estimer le comportement mécanique d'un sol érodé. D'autre part, une observation cruciale peut être faite au regard des résultats présentés dans la figure 1.9b. Il semble que pour un matériau se comportant initialement comme un matériau dense, (caractérisé par un pic de résistance suivi d'un adoucissement vers une résistance résiduelle associée à un comportement volumique dilatant), la suffusion a pour effet principal de modifier cette typologie comportementale. Le matériau ainsi érodé présente alors un comportement typiquement lâche. L'échantillon montre alors une tendance durcissante monotone et asymptotique vers un état de contrainte résiduelle. Son comportement volumique est essentiellement contractant (voir figure 1.10). La valeur de la contrainte résiduelle semble ici constante, suffusion ou non. Ce résultat a fait l'objet de travaux de recherche approfondis dans le cadre de la thèse de doctorat de Aboul Hosn [21] concernant l'effet de la suffusion sur le comportement mécanique des sols concernés. Ces travaux ont abouti à la conclusion que l'effet de la suffusion sur les sols denses doit être interprété comme une perte de densité. Cependant, cet effet est contrebalancé par les éventuels tassements opérés par le sol au cours de la suffusion. Ces tassements sont le fruit de réarrangements granulaires et peuvent engendrer un regain de densité et de résistance du sol. Dans le cas des sols lâches, la perte de densité est associée principalement à une légère chute de la ré-



(a) Comportement mécanique sous sollicitations triaxiales de sols reconstitués selon Sterpi [18]



(b) Comportement mécanique sous sollicitations triaxiales de sols érodés selon Chang et Zhang [20]

FIGURE 1.9 – Réponse d'échantillons (a) reconstitués et (b) érodés sous conditions triaxiales drainées

sistance résiduelle, sans changement de typologie comportementale. Ces résultats expérimentaux corroborent ceux proposées par Ke et Takahashi [22] (voir figure 1.11). En effet, dans ces travaux, des échantillons lâches ont été testés en appareil triaxial sous conditions drainées avant et après suffusion. Ke et Takahashi montrent alors que l'échantillon observe une perte de résistance due à l'érosion. Néanmoins, s'il était lâche avant suffusion, il le demeure une fois érodé.

## 1.4 La suffusion modélisée

Nous avons pu constater depuis la littérature que la suffusion s'accompagne régulièrement de tassements. De plus, la tendance à la contractance d'un sol érodé peut conduire à des tassements supplémentaires lors de la vie du sol *post*-suffusion. Ces tassements ainsi que les pertes de résistance concomitantes peuvent causer des désordres dans les ouvrages hydrauliques. Disposer d'un modèle de comportement est un des verrous à lever pour permettre à l'ingénieur d'estimer ces tassements et pertes de résistance, afin de s'assurer de la pérennité d'un ouvrage hydraulique. Avec cette perspective pour cible, plusieurs tentatives de modélisation ont été réalisées par la communauté académique de mécanique des milieux poreux.

### 1.4.1 Modélisations microscopiques

En proposant une modélisation des interactions entre grains, la méthode des éléments discrets semble indiquée pour modéliser les processus de suffusion à l'échelle microscopique. Une première tentative de modélisation a été proposée par Muir Wood *et al.* [23]. Les auteurs ont alors constitué des échantillons de sol avec des granulométries linéaires. Ensuite, afin de simuler un processus d'érosion interne, les grains les plus fins sont éliminés progressivement du squelette granulaire par un *deus ex machina*. Cette élimination se fait de façon à atteindre une fraction de fines cible. Cependant, les grains sont ici soustraits sans égard pour leurs restrictions cinématiques ou

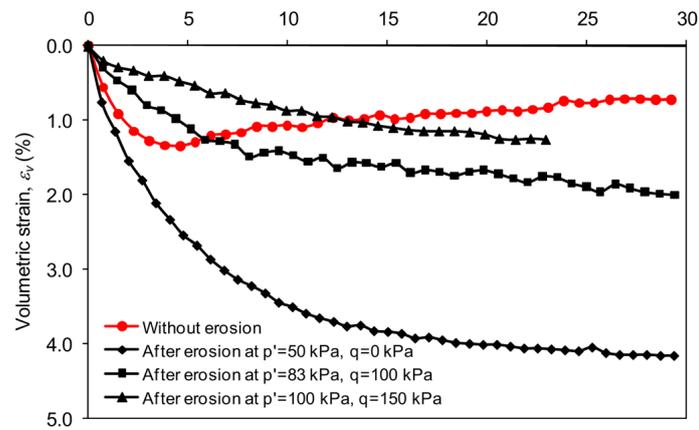
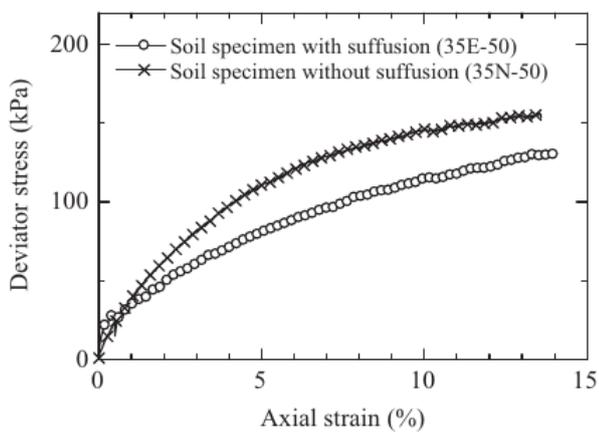
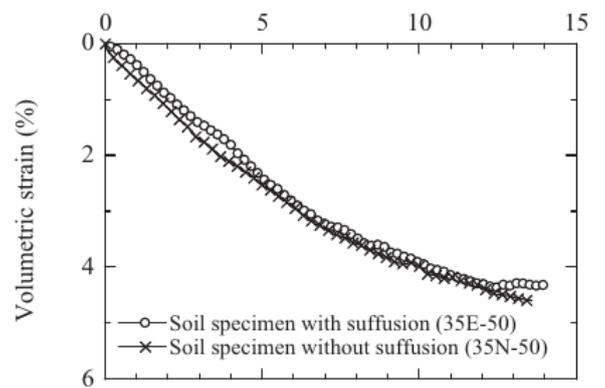


FIGURE 1.10 – Réponses volumiques d'échantillons érodés en conditions triaxiales drainées, d'après Chang et Zhang [20]



(a) Réponse en contrainte d'un sol avant et après érosion



(b) Comportement volumique d'un sol avant et après érosion

FIGURE 1.11 – Réponses (a) en contrainte et (b) volumiques d'un sol lâche avant et après suffusion, d'après Ke et Takahashi [22]

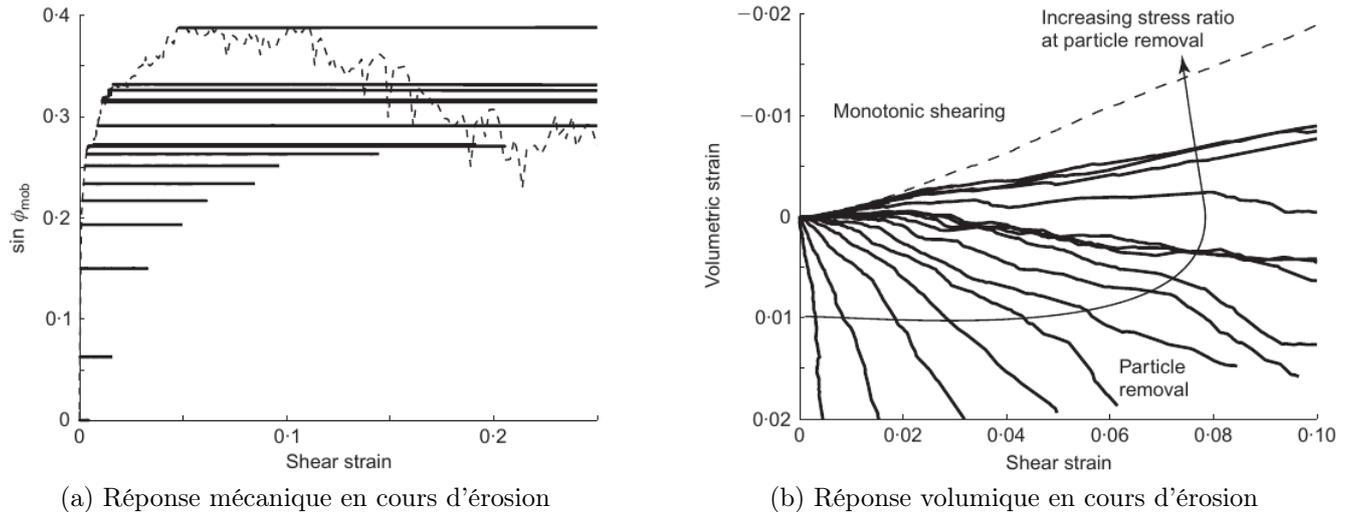


FIGURE 1.12 – Réponses (a) en contrainte et (b) volumiques d'un sol en cours d'érosion, d'après Muir Wood *et al.* [23]

même de leurs contributions aux chaînes de forces. Si cette approche ne semble pas optimale pour reproduire un échantillon de sol réellement érodé, elle a permis de mettre en évidence le développement des déformations induites par arrachements particuliers. En parallèle, Scholtès *et al.* [24] ont proposé une approche similaire mais pour laquelle les grains éliminés sont choisis en regard des états de contrainte qui s'y exercent. Les grains les moins sollicités, étant *a priori* les plus facilement détachables, sont extraits en priorité. Ici aussi, des déformations se sont développées au cours de l'élimination des grains. Par ailleurs, ces déformations semblent intimement liées à l'état de contrainte exercé sur les grains arrachés. Si les grains éliminés font partie intégrante des chaînes de forces, alors l'échantillon se déforme. A l'inverse, si les grains éliminés sont libres de contraintes, aucune déformation ne se produit lors de l'arrachement. En outre, la nature et l'amplitude des déformations engendrées par les arrachements successifs dépendent de l'état de contrainte perçu par l'échantillon. En suivant les résultats de Muir Wood *et al.* [23], il apparaît que l'échantillon érodé sous un état de contrainte isotrope présentera une déformation essentiellement volumique et de contractance. A l'inverse, si l'état de contrainte est proche de l'enveloppe de rupture du sol, alors les déformations deviennent d'avantage déviatoriques (voir figure 1.12). L'amplitude des déformations semble également croître lorsque le sol se rapproche de son enveloppe de rupture. Les travaux de Scholtès *et al.* [24] montrent que si l'érosion opère au delà de l'état critique du sol, alors l'érosion déclenche une dilatance associée à une instabilité et le sol entre en rupture. Toujours dans le cadre des expérimentations numériques de Scholtès *et al.* [24], les échantillons sont chargés mécaniquement une fois l'érosion achevée. On remarque que si le matériau sain se comporte comme un échantillon dense, les matériaux érodés présentent des comportements typiques des échantillons lâches (voir figure 1.13). Finalement, on observe que l'état critique atteint par le sol reste le même, qu'il soit érodé ou non. Ces résultats ont pu être confirmés par d'autres études réalisées également avec la méthode des éléments discrets, mais cette fois-ci en reliant l'arrachement particulier avec l'action d'un écoulement. On citera par exemple les travaux de Aboul Hosn *et al.* [25] et de Hu *et al.* [26]. L'ensemble de ces résultats sont à mettre en perspective avec d'autres travaux récents conduits par Wautier *et al.* [27] sur la contribution des grains libres à la stabilité des chaînes de

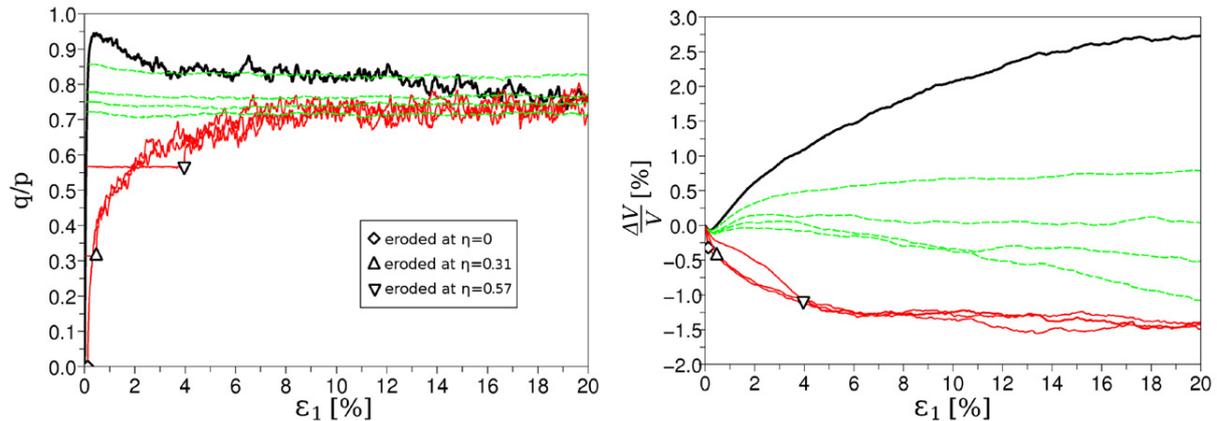


FIGURE 1.13 – Réponses en contrainte (à gauche) et volumiques (à droite) d'un échantillon au cours de l'érosion, d'après Scholtès *et al.* [24]

forces. En effet, si l'élimination de grains libres n'a pas d'effet direct sur la déformation du sol, elle n'est pas sans conséquence sur le comportement mécanique du sol lors d'un chargement ultérieur. Ces auteurs ont montré qu'une des contributions des grains libres est d'empêcher les flambements locaux des chaînes de forces. La présence de grains libres permet alors de limiter considérablement le développement des déformations plastiques dans un sol. Ceci permet alors d'expliquer en partie le passage d'un comportement dense à un comportement lâche. Des conclusions similaires ont été dressées par Taha [28] et de Taha *et al.* [29].

### 1.4.2 Modélisations macroscopiques

Afin de pouvoir anticiper le risque de suffusion et le développement éventuel d'une telle érosion interne, il est souvent avantageux de disposer d'outils de modélisation performants. Dans le but de fournir de tels modèles aux ingénieurs, des travaux ont été initiés dans les années 1990 et pour deux contextes différents. D'un côté, des études centrées sur un contexte d'exploitation pétrolière se sont traduites par une large diffusion scientifique. On retiendra par exemple Vardoulakis *et al.* [30], Stavropoulou *et al.* [31], Vardoulakis et Papamichos [32], Papamichos *et al.* [33], Papamichos et Vardoulakis [34] ainsi que Papamichos [35]. Ces travaux concernent principalement la production de sable dans les puits de forage d'hydrocarbures. Les géomatériaux concernés sont alors cohésifs (des grès par exemple). Cette production de sable est alors appréhendée comme le résultat de l'érosion interne de la roche réservoir. Même si les résultats de ces études ne concernent pas immédiatement les sols sans cohésions (principaux sujets de la suffusion), ils sont régulièrement exploités pour la modélisation de la suffusion. On notera par exemple les travaux de Yang *et al.* [36, 37, 38]. D'un autre côté, d'autres approches, basées sur la thermodynamique des milieux poreux ont été établies à partir de 2013 par Zhang *et al.* [39]. Les travaux de Bui *et al.* [40] ont proposé une autre interprétation thermodynamique de la suffusion et ont servi de base à une modélisation de la cinétique d'érosion par Kodieh *et al.* [41]. Il s'agit maintenant de détailler brièvement ces différentes approches.

### 1.4.2.1 Contexte pétrolier

Dans le cadre de l'étude de la production de sable lors de l'extraction d'hydrocarbures, Vardoulakis *et al.* [30] ont proposé une première approche simplement hydro-mécanique, ou seule la cinétique de la production de sable est étudiée, sans intégrer le comportement squelettique du milieu poreux. L'approche de l'érosion interne ainsi proposée consiste à introduire un terme source dans le bilan massique du fluide (et son opposé dans le bilan massique du solide). Ce terme source est lui même composé de la différence de deux termes : le premier,  $\dot{m}_{er}$ , est un terme d'érosion ; le second,  $\dot{m}_{dep}$ , est un terme de dépôt, correspondant à une libération de particules solides par le fluide. Ces deux termes sont donnés par les lois de comportement suivantes :

$$\dot{m}_{er} = \rho^s \lambda (1 - \phi) c \|\bar{q}_i\| \quad (1.1)$$

où  $\rho_s$ ,  $\lambda$ ,  $\phi$ ,  $c$  et  $\|\bar{q}_i\|$  désignent respectivement : la masse volumique du solide, un coefficient « probablement relié à la fréquence spatiale des points de dépôts potentiels de l'érosion », la porosité, la concentration en particules fines dans le fluide, le débit volumique de décharge. Le taux de dépôt est donné comme suit :

$$\dot{m}_{dep} = \rho^s \lambda (1 - \phi) \frac{c^2}{c_{cr}} \|\bar{q}_i\| \quad (1.2)$$

où  $c_{cr}$  est une valeur critique de concentration pour laquelle érosion et dépôt se compensent. Pour ce modèle, la force responsable de l'érosion n'est autre que le débit de décharge. Le couplage inverse, c'est à dire la prise en compte de l'érosion sur le comportement hydraulique, est modélisé *via* la loi de Carman-Kozeny. La perméabilité  $K$  est fonction de la porosité et d'une perméabilité de référence  $K_0$  :

$$K = K_0 \frac{\phi^3}{(1 - \phi)^2} \quad (1.3)$$

Les travaux de Stavropoulou *et al.* [31] reprennent la même modélisation hydrodynamique de l'érosion interne mais intègre cette fois-ci un couplage entre érosion et comportement squelettique. Selon ces auteurs, l'effet de l'érosion sur le comportement mécanique d'une roche réservoir diagenétique résulte principalement de l'altération des ponts cimentaires entre les grains. A l'échelle macroscopique, les auteurs interprètent ce phénomène sous l'angle de la théorie de l'endommagement (voir Lemaître [42] pour une introduction à cette théorie). Dans le modèle proposé par Stavropoulou *et al.*, la porosité  $\phi$  joue le rôle de variable d'endommagement et les auteurs couplent élasticité et endommagement, ainsi qu'enveloppe de rupture et endommagement. Pour ce faire, le module de Young  $E$  et la cohésion  $C$  suivent alors les lois suivantes :

$$E = \bar{E} (1 - \phi) \quad \text{et} \quad C = \bar{C} (1 - \phi) \quad (1.4)$$

où  $\bar{E}$  et  $\bar{C}$  représentent respectivement le module de Young et la cohésion de la phase solide de la roche réservoir. En 2001, Papamichos *et al.* proposent d'analyser le couplage entre érosion interne et comportement mécanique sous le prisme de la plasticité. Pour ce faire, ces auteurs proposent d'introduire un effet de la distorsion plastique  $\gamma^p$  sur le coefficient d'érosion  $\lambda$  :

$$\lambda(\gamma^p) = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma^p \leq \gamma_{peak}^p \\ \lambda_1 (\gamma^p - \gamma_{peak}^p) & \text{si } \gamma_{peak}^p \leq \gamma^p \leq \gamma_{peak}^p + \lambda_2/\lambda_1 \\ \lambda_2 & \text{si } \gamma_{peak}^p + \lambda_2/\lambda_1 \leq \gamma^p \end{cases} \quad (1.5)$$

où  $\gamma_{peak}^p$  désigne la distorsion plastique correspondant au pic de résistance de la roche reservoir.  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont alors deux constantes propres au matériau à déterminer. Cette modélisation suppose que l'érosion n'opère que lorsque l'état de plastification du matériau le permet. Cet état permissif est atteint lorsque le matériau entre dans une phase comportementale adoucissante. Par ailleurs, l'effet de l'érosion sur le comportement mécanique est introduit en considérant une réduction de la contrainte de rupture en traction pure  $T_c$  *via* la porosité :

$$T_c(\gamma^p, \phi) = T_{c\gamma^p}(\gamma^p) \frac{1 - \phi}{1 - \phi_0} \quad (1.6)$$

où  $T_{c\gamma^p}$  représente la contrainte de rupture en traction pour un échantillon témoin exempt d'érosion. La porosité initiale du matériau est désignée par  $\phi_0$ .

Dans l'étude de Papamichos et Vardoulakis [34], la loi d'érosion est revue et les auteurs proposent de modéliser l'érosion *via* une loi de diffusion de porosité :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \lambda' \Delta \phi \quad (1.7)$$

L'équation donnant la porosité est alors régie uniquement par le coefficient  $\lambda'$ , différent de  $\lambda$  mais dont le rôle est similaire. Le comportement mécanique est ici aussi considéré comme affecté par l'érosion. Cet effet est envisagé au sens de la *poro*-plasticité et les auteurs proposent de considérer la loi d'évolution (1.6). Le caractère *poro*-plastique du modèle permet d'introduire directement l'effet de l'érosion sur le comportement plastique du matériau. Cet effet est introduit *via* la porosité  $\phi$  qui est alors considérée comme une variable du modèle d'élasto-plasticité du sol. Cette dernière évolue à mesure que le matériau est déformé et/ou érodé.

Les quelques approches présentées ici ont été synthétisées dans l'étude réalisée par Papamichos [35]. Dans le cadre de ces travaux, la loi d'érosion a été modifiée et l'érosion est alors pilotée par le gradient de pression :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \lambda'' \|\nabla p\| \quad (1.8)$$

où  $\lambda''$  est un paramètre *a priori* différent de  $\lambda'$  et de  $\lambda$ . Si ces approches ont pu être éprouvées pour modéliser l'érosion interne dans les roches diagénétiques, elles demeurent limitées pour modéliser l'érosion interne par suffusion dans les sols sans cohésion. En premier lieu, la détermination expérimentale des paramètres  $\lambda$ ,  $\lambda'$  et  $\lambda''$  n'est *a priori* pas aisée. Ensuite, les effets de l'érosion sur le comportement mécanique des roches ont ici été introduits de deux façons : par une réduction du module de Young (endommagement) et par une réduction de la cohésion de la roche. Dans le cadre de cette thèse, nous allons nous attacher à modéliser le comportement mécanique des sols grenus, sans cohésion, sujets à érosion interne. Il faudra donc introduire le couplage entre suffusion et comportement poro-mécanique d'une autre façon.

#### 1.4.2.2 Contexte géotechnique

La modélisation de la suffusion dans un contexte géotechnique a fait l'objet de recherches conduites par Zhang *et al.* [39]. Pour ces travaux, les auteurs ont proposé une interprétation de la suffusion au sens de la thermodynamique des milieux poreux, et considérant l'hypothèse des petites déformations. Cette étude présente deux résultats majeurs. Le premier est une reformulation de la condition d'incompressibilité des grains. Classiquement (voir Coussy [43]), cette condition exprime

la déformation volumique  $\varepsilon_v$  d'un milieu poreux à partir de la variation de porosité  $\phi - \phi_0$  ( $\phi_0$  étant la porosité initiale) :

$$\varepsilon_v = \phi - \phi_0 \quad (1.9)$$

Zhang *et al.* [39] expriment cette condition d'incompressibilité des grains en considérant que la déformation du milieu poreux suffisif égale la variation de porosité depuis un état dégradé  $\phi - \phi_0 - \phi^{er}$  :

$$\varepsilon_v = \phi - \phi_0 - \phi^{er} \quad (1.10)$$

où  $\phi^{er}$  désigne la porosité induite uniquement par suffusion. De plus, ces auteurs proposent une écriture originale de la dissipation thermodynamique induite par la suffusion (notée  $\Phi_{\rightarrow}$ ). En notant  $\Psi_e^s$  l'énergie libre du squelette, ces auteurs proposent :

$$\Phi_{\rightarrow} = -\frac{\partial \Psi_e^s}{\partial \phi^{er}} \dot{\phi}^{er} \geq 0 \quad (1.11)$$

Ce qui conduit à de trop faibles restrictions et ne donne aucune indication pour formuler une loi d'érosion qui permet d'exprimer  $\dot{\phi}^{er}$ . De plus, Zhang *et al.* [39] considèrent que le couplage entre suffusion et comportement mécanique se fait par un endommagement. En introduisant  $\mathbb{C}^0$  le tenseur d'élasticité du milieu poreux avant suffusion, ces auteurs expriment la variation de l'énergie libre du squelette de la façon suivante :

$$\frac{\partial \Psi_e^s}{\partial \phi^{er}} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ij} C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl} < 0 \quad (1.12)$$

ce qui permet de vérifier l'inégalité (1.11) de façon certaine si  $\dot{\phi}^{er} \geq 0$ . Cette restriction est bien trop faible pour déduire une quelconque loi de comportement, si bien que les auteurs furent contraints de faire le choix arbitraire d'une loi basée sur l'existence d'un seuil de contrainte de cisaillement du fluide déclenchant l'érosion, loi par ailleurs développée pour l'érosion de conduit.

Dans le même temps, Bui *et al.* [40] ont réalisé une étude explorant à nouveau la thermodynamique des milieux poreux suffisif à l'aide de la théorie des mélanges. Si cette étude se cantonne aux sols suffisifs présentant un comportement élastique, les auteurs aboutissent à une écriture de la dissipation qui ne découple pas suffusion et écoulement. Dans ce travail, la positivité de la dissipation obtenue n'est pas imposée. Cependant, l'écriture de cette dissipation permet aux auteurs de proposer un couplage franc entre suffusion et écoulement. Dans le but d'établir un lien avec l'approche en énergie de la sensibilité à la suffusion, le taux d'érosion est pris proportionnel à la puissance dissipée par le fluide. Dans cette approche simplifiée, le coefficient de proportionnalité est alors dépendant de l'indice de sensibilité à la suffusion  $I_\alpha$ , défini par Marot *et al.* [44]. Finalement, les résultats récents de Kodieh *et al.* [41] comparent plusieurs relations empiriques décrivant la cinétique de suffusion, à savoir : (i) l'approche basée sur une loi à seuil en termes de contrainte de cisaillement du fluide, (ii) l'approche en puissance dissipée proposée par Sibille *et al.* [45] et une nouvelle loi de suffusion basée sur l'approche en énergie de la sensibilité à la suffusion introduite par Marot *et al.* [17]. Selon les auteurs, l'approche basée sur la contrainte de cisaillement n'est pas appropriée pour modéliser la suffusion d'un sol. L'approche en puissance dissipée apporte de meilleurs résultats pour modéliser la suffusion au cours d'un essai à chargement hydraulique échelonné mais présente parfois des comportements asymptotiques surprenants, ou pouvant parfois sur-estimer fortement la masse érodée cumulée. La nouvelle loi de comportement proposée par les auteurs est alors décrite comme plus performante. Cependant, ces travaux n'ont pas été effectués sous le prisme de la thermodynamique des milieux poreux et il conviendrait d'examiner à nouveau

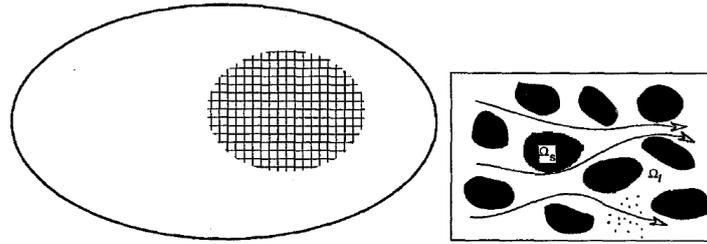


FIGURE 1.14 – Représentation cellulaire du milieu poreux selon Bouddour *et al.* [47]

chacune de ces lois afin de juger de leurs propensions à observer les principes fondamentaux de la thermodynamique.

Dans le même temps, les travaux de Yang *et al.* [36, 37, 38] ont visé à proposer une modélisation complète de l'érosion interne par suffusion en se basant d'une part sur les modèles hydrodynamiques présentés dans la section 1.4.2.1 ; et d'autre part sur un modèle d'élasto-plasticité pour traiter les liens entre suffusion et comportement mécanique. L'approche retenue ici vise essentiellement à modifier la position de la ligne d'état critique par rapport au contenu en fines du sol. En partant du principe que ce contenu en fines est altéré par l'érosion, les auteurs introduisent alors un effet de l'érosion sur le comportement mécanique du sol. L'effet de ce comportement n'est toutefois pas pris en compte directement sur le comportement suffusif du sol.

Les quelques approches illustrées ici ont été réalisées soit dans le cadre de la mécanique des milieux poreux en considérant l'hypothèse des petites perturbations, soit dans le cadre de la théorie des mélanges. Proposer une approche complète de la cinématique des milieux poreux suffusifs en considérant un point de vue Lagrangien constituerait une contribution intéressante dans le but de formaliser une théorie des milieux poreux sujets à suffusion. Une telle théorie permettrait à terme de futures extensions et l'emploi de modèles plus avancés, comme les modèles enrichis tels que les modèles à second gradient (voir Sciarra *et al.* [46]). De plus, ce point de vue pourrait apporter un autre regard sur la thermodynamique des milieux poreux sujets à suffusion et éventuellement de proposer une autre façon de coupler l'écoulement avec l'érosion. Finalement, dans la perspective d'un transfert des méthodes de modélisation vers les champs d'application de l'ingénierie géotechnique, il est préférable de proposer des modèles de comportement simples. Il semble dès lors pertinent d'évaluer les possibilités qu'offrent les modèles issus des modèles de Cam-Clay, pour modéliser le comportement élasto-plastique des sols suffusifs.

### 1.4.3 Homogénéisation

Afin d'obtenir des modèles d'érosion macroscopique, il est également possible de procéder par homogénéisation périodique. Cette méthode s'appuie sur une représentation cellulaire et périodique du milieu poreux (voir figure 1.14), considéré alors comme hétérogène. Les cellules composant le milieu poreux sont qualifiées de cellules « élémentaires ». Une fois qu'une telle topologie du problème est posée, les modélisateurs formulent un problème mécanique que l'on qualifiera ici de « vrai ». Ce problème vrai a pour vocation de proposer une représentation fine de la physique à l'échelle microscopique. À ce stade des développements, la résolution numérique du problème vrai est nettement trop coûteuse en terme de puissance de calcul. Pour pallier à ce problème, il est possible d'écrire les champs solutions comme des développements asymptotiques, qualifiés parfois

d'Ansatz (voir Allaire [48]). Le modélisateur aboutit alors à une cascade de problèmes définis sur une cellule élémentaire. La résolution des problèmes obtenus aux différents étages de cette cascade permet l'émergence d'un modèle homogénéisé. Ce dernier est alors purement macroscopique et ne fait plus intervenir les hétérogénéités du milieu poreux qu'au travers de paramètres homogénéisés. Il existe une littérature abondante traitant de l'emploi de cette méthode et des problèmes de convergence sous-jacent. Le lecteur est invité à se référer aux ouvrages édités respectivement par Hornung [49] et Auriault *et al.* [50]. Ces ouvrages présentent des applications concrètes de la méthode. Un des exemples d'emploi de l'homogénéisation est la déduction de la loi de Darcy (voir Allaire [51] pour référence). Si on considère un problème vrai de type « Stokes » pour modéliser l'écoulement dans les pores d'un milieu poreux, on aboutit par homogénéisation périodique, à la loi de Darcy. Par ailleurs, cette approche permet de donner une interprétation physique et mathématique au tenseur de perméabilité.

En se basant sur l'homogénéisation périodique, Bouddour *et al.* [47] ont proposé une première étude du problème de l'érosion interne. Dans ces travaux, le problème vrai consiste en un problème de Stokes pour modéliser l'écoulement, et un problème de Fick pour modéliser un transport diffusif de particules érodées. L'érosion est alors vue comme un flux de matière traversant l'interface solide fluide au niveau poral. Cependant, dans cette étude, la microstructure du milieu poreux n'évolue pas malgré l'érosion opérante. Il est donc naturel et parfaitement attendu que, Bouddour *et al.* [47] retrouvent la loi de Darcy. Ces travaux constituent un point de départ important. En effet, en s'appuyant sur des méthodes de suivi d'interface récentes, il est alors *a priori* possible d'envisager une procédure d'homogénéisation similaire à celle proposée par Bouddour *et al.* [47] mais en considérant une microstructure évolutive. Des approches d'homogénéisation périodique avec suivi d'interface ont déjà été présentées dans la littérature. Les études conduites van Noorden [52] et van Noorden et Muntean [53] se sont basées sur la méthode des courbes de niveau (voir Osher [54] pour référence) pour réaliser l'homogénéisation du problème de précipitation/dissolution en milieu poreux. Ces auteurs ont par la même occasion tracé un chemin vers l'homogénéisation du problème de suffusion en considérant une micro-structure évolutive. C'est précisément ce chemin que nous emprunterons dans la deuxième partie de cette thèse.

Première partie

Modélisation macroscopique



# Chapitre 2

## Modélisation poromécanique d'un milieu suffusif

### Table des matières

---

<b>2.1</b>	<b>Cinématique</b> . . . . .	<b>24</b>
2.1.1	Configuration de référence et configuration courante, déformations . . . . .	24
2.1.2	Vitesses et accélérations . . . . .	25
2.1.3	Bilans de masse . . . . .	26
<b>2.2</b>	<b>Puissance des efforts extérieurs</b> . . . . .	<b>28</b>
<b>2.3</b>	<b>Thermodynamique</b> . . . . .	<b>30</b>
2.3.1	Le premier principe : bilan d'énergie interne . . . . .	30
2.3.2	Le second principe : croissance entropique . . . . .	31
2.3.3	L'inégalité de Clausius-Duhem . . . . .	32
<b>2.4</b>	<b>Lois de comportement</b> . . . . .	<b>35</b>
2.4.1	Comportement squelettique . . . . .	35
2.4.2	Couplage entre diffusion hydraulique et suffusion . . . . .	39
2.4.3	Diffusion thermique . . . . .	41

---

*L'objectif de ce chapitre est de formuler un modèle comportemental macroscopique pour un milieu sujet à érosion interne par suffusion. Pour mener à bien ce travail, le cadre de la poromécanique tel que formalisé par Coussy [43] sera adopté à titre de socle théorique. La première démarche de cette modélisation consiste à expliciter la cinématique du milieu suffusif, en profitant de cette occasion pour rappeler quelques fondamentaux de la poromécanique. Nous serons ensuite en mesure de proposer un cadre thermodynamique cohérent duquel découlera une forme originale de l'inégalité de Clausius-Duhem. Un jeu de restrictions, qui devra être respecté par la loi de comportement du milieu suffusif, sera finalement exprimé. De ce jeu de restrictions découlera une proposition de lois de comportement.*

## 2.1 Cinématique

Par essence, un milieu poreux est constitué de plusieurs phases : des phases solides et des phases fluides. Il est donc de rigueur d'établir une fois, et pour le reste de ce manuscrit, la constitution d'un milieu poreux suffusif. Dans un premier temps notons que notre étude se restreindra aux milieux poreux granulaires saturés sujets à suffusion. On a pu relever dans la littérature différentes approches pour ce type de milieux. Une part de la communauté scientifique considère le milieu poreux suffusif comme un milieu granulaire à quatre phases, distinguant les grains non érodables, les grains érodables, les grains érodés et le liquide interstitiel (voir Yang *et al.* [36, 37, 38]) par exemple. Une autre façon de traiter le problème est de considérer le milieu poreux suffusif comme bi-phasique (ce qui constitue une description classique, voir Coussy [43]), en distinguant un unique squelette solide et une phase fluide saturante, constituée d'un mélange binaire de liquide interstitiel (de l'eau le plus souvent) et de grains fluidisés. Dans le cadre de ces travaux, nous adopterons ce deuxième point de vue, qui présente l'avantage de simplifier la description cinématique du milieu sans dénaturer la physique de ce dernier. Nous nous référerons au squelette solide par le biais de l'exposant  $s$  et à la phase fluide par l'emploi de l'exposant  $f$ . Les constituants (ou espèces) de la phase fluide, à savoir l'eau et les grains fluidisés, seront indiqués par les exposants  $wf$  et  $sf$  respectivement. Chaque phase du milieu poreux présente une cinématique qui lui est propre que nous détaillons dès à présent.

### 2.1.1 Configuration de référence et configuration courante, déformations

Notons  $\mathcal{D}_0$  la configuration de référence du squelette solide. Soit  $\mathcal{T}$  l'intervalle de temps d'observation du milieu et  $\mathcal{E}$  l'espace Euclidien des positions. Nous notons  $t$  un instant de  $\mathcal{T}$ . L'application  $\chi : \mathcal{D}_0 \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{E}$  indique le mouvement du squelette solide. L'image  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{D}_0$  au temps  $t$  par ce mouvement représente alors la configuration courante du squelette solide dans  $\mathcal{E}$ . Nous notons finalement  $\mathbf{X} \in \mathcal{D}_0$  une particule du squelette solide et  $\mathbf{x}$  son image par  $\chi(\cdot, t)$ , soit  $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$ . Nous pouvons dès à présent introduire le gradient de déformation  $\mathbf{F}$  dont les composantes sont données par :

$$F_{\alpha i} = \chi_{\alpha, i} \quad (2.1)$$

où l'indice  $\alpha$  indique la  $\alpha$  - ème composante selon un référentiel orthonormal fixe de  $\mathcal{D}$  et où l'indice  $i$  se réfère à la  $i$  - ème composante selon un référentiel orthonormal fixe de la configuration de référence  $\mathcal{D}_0$ . Ce gradient de déformation permet de réaliser le transport d'un vecteur tangent à la configuration de référence (vecteur matériel)  $d\mathbf{X}$  de la configuration de référence vers son pendant déformé  $d\mathbf{x}$  tangent à la configuration courante (vecteur déformé) :

$$dx_\alpha = F_{\alpha i} dX_i \quad (2.2)$$

À partir de cette définition, on remarque aisément qu'un volume élémentaire  $d\Omega_0 = d\mathbf{X}_1 \cdot (d\mathbf{X}_2 \wedge d\mathbf{X}_3)$  de la configuration de référence se voit déformé en un volume élémentaire  $d\Omega_t = d\mathbf{x}_1 \cdot (d\mathbf{x}_2 \wedge d\mathbf{x}_3)$  de la configuration courante. En considérant  $J = \det \mathbf{F}$  on rappelle la relation suivante :

$$d\Omega_t = J d\Omega_0 \quad (2.3)$$

Finalement, il est tout à fait classique d'introduire le tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\Delta$  comme une mesure de la variation du produit scalaire de deux vecteurs matériels  $d\mathbf{X}$  et  $d\mathbf{Y}$

au cours du mouvement  $\chi$  les déformant en  $d\mathbf{x}$  et  $d\mathbf{y}$  respectivement. On a alors :

$$dx_\alpha dy_\alpha - dX_i dY_i = 2dX_i \Delta_{ij} dY_j \quad (2.4)$$

où, à l'aide de l'expression du gradient de déformation on écrit :

$$\Delta_{ij} = \frac{1}{2} (F_{i\alpha} F_{\alpha j} - \delta_{ij}) \quad (2.5)$$

$\delta_{ij}$  représente le symbole de Kronecker.

D'un autre côté, introduisons  $\mathcal{D}_0^f$  comme la configuration de référence du fluide. On suppose que cette configuration de référence est liée à celle du squelette solide par le biais d'une application  $\chi_0^f : \mathcal{D}_0 \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{E}$ . L'image par  $\chi_0^f$  d'une particule  $\mathbf{X}$  identifie alors la particule fluide  $\mathbf{X}^f \in \mathcal{D}_0^f$  qui occupe la même place  $\mathbf{x}$  de  $\mathcal{E}$  que celle de la particule solide à l'instant  $t$ . Comme conséquence directe de cette hypothèse, nous pouvons décrire le mouvement de la phase fluide par l'application  $\chi^f$  telle que  $\chi^f = \chi \circ \chi_f^0$  où  $\chi_f^0$  désigne l'application réciproque de  $\chi_0^f$ . On s'aperçoit dans ce contexte que la cinématique du milieu poreux peut être décrite relativement à la configuration de référence du squelette solide. Ce point de vue constitue une des pierres angulaires de la théorie de la poromécanique issue des travaux de Biot [55] et généralisée par Coussy [43].

### 2.1.2 Vitesses et accélérations

En déterminant la dérivée temporelle de  $\chi$ , on introduit la vitesse  $\mathbf{v}^s$  du squelette ainsi que l'accélération correspondante  $\boldsymbol{\gamma}^s$  :

$$v_\alpha^s = \frac{d\chi_\alpha}{dt} \quad \text{et} \quad \gamma_\alpha^s = \frac{d^s v_\alpha^s}{dt} \quad (2.6)$$

où  $d^s/dt$  indique une différentiation le long du mouvement de la particule solide, c'est à dire :

$$\frac{d^s v_\alpha^s}{dt} = \frac{\partial v_\alpha^s}{\partial t} + \frac{\partial v_\alpha^s}{\partial x_\beta} \frac{\partial x_\beta}{\partial t} = \frac{\partial v_\alpha^s}{\partial t} + v_{\alpha,\beta}^s v_\beta^s \quad (2.7)$$

De la même manière, en différenciant  $\chi^f$ , on introduit la vitesse  $\mathbf{v}^f$  du fluide :

$$v_\alpha^f = \frac{d\chi_\alpha^f}{dt} = \frac{d\chi_\alpha \circ \chi_f^0}{dt} \Big|_{(\mathbf{X}^f, t)} \quad (2.8)$$

Dès lors, suivant Sciarra [56], on applique la règle de dérivation des compositions de fonctions afin d'exprimer cette vitesse en fonction de la vitesse du squelette solide, du gradient de déformation et du gradient  $\Theta$  de l'application  $\chi_0^f$  :

$$v_\alpha^f(\mathbf{x}, t) = v_\alpha^s(\mathbf{X}, t) - F_{\alpha i}(\mathbf{X}, t) (\Theta^{-1}(\mathbf{X}, t))_{ik} \frac{\partial (\chi_0^f)_k}{\partial t} \Big|_{(\mathbf{X}, t)} \quad (2.9)$$

L'accélération  $\boldsymbol{\gamma}^f$  du fluide est alors donnée par la dérivée particulaire de  $\mathbf{v}^f$  le long du mouvement du fluide :

$$\gamma_\alpha^f = \frac{d^f v_\alpha^f}{dt} = \frac{\partial v_\alpha^f}{\partial t} + v_{\alpha,\beta}^f v_\beta^f \quad (2.10)$$

### 2.1.3 Bilans de masse

Cette sous-section traite des équations de bilan de masse pour les constituants du milieu poreux. On introduit alors  $\rho^s$  comme la masse volumique intrinsèque du matériau solide constituant le squelette granulaire. D'autre part, on introduit  $\rho^f$  comme la masse volumique du mélange saturant composé d'un liquide et de grains du squelette en cours de transport.  $\rho^f$  suit la loi de mélange classique suivante :

$$\rho^f = (1 - c) \rho^{wf} + c \rho^s \quad (2.11)$$

où  $c$  représente la fraction volumique de solide fluidisé dans le fluide saturant,  $\rho^{wf}$  la masse volumique intrinsèque du liquide constituant l'autre espèce du mélange. Les masses volumiques  $\rho^s$  et  $\rho^{wf}$  sont supposées constantes, aussi bien en temps qu'en espace. En se basant sur le formalisme classique de la poromécanique, on introduit la porosité Lagrangienne  $\phi$  et la porosité Eulérienne  $\eta$  comme respectivement les fractions volumiques des pores dans la configuration de référence et dans la configuration courante. Par transport de volume il est clair que  $\phi = J\eta$ .

On formule la loi de bilan de masse du squelette solide sur la configuration courante. Pour ce faire, il est nécessaire de discuter l'essence d'un milieu suffusif. Ce type de milieu est sujet à des variations locales de masse squelettique du fait de l'arrachement de grains solides et du dépôt de grains fluidisés. Le bilan de la masse du solide doit alors intégrer cette variation locale. C'est pourquoi, à la manière de Vardoulakis *et al.* [30], de Papamichos et Vardoulakis[34] et d'autres auteurs ayant proposé des modèles d'érosion interne (on peut citer aussi Zhang *et al.*[39], Bui *et al.*[40]), on considère un terme source volumique  $\hat{\varrho}^s$  visant à saisir la variation de masse du squelette solide :

$$\frac{d^s}{dt} \int_{\mathcal{D}} (1 - \eta) \rho^s d\Omega_t = \int_{\mathcal{D}} \hat{\varrho}^s d\Omega_t \quad (2.12)$$

En rappelant que  $d\Omega_t = Jd\Omega_0$ , on reporte cette égalité sur la configuration de référence :

$$\int_{\mathcal{D}_0} \frac{d^s ((J - \phi) \rho^s)}{dt} d\Omega_0 = \int_{\mathcal{D}_0} \hat{\Gamma}^s d\Omega_0 \quad (2.13)$$

Le terme source  $\hat{\Gamma}^s = J\hat{\varrho}^s$  désigne le pendant Lagrangien de  $\hat{\varrho}^s$ . On peut écrire cette relation sous forme locale en considérant le lemme fondamental des milieux continus (voir Germain [57]), donnant ainsi :

$$\frac{d^s ((J - \phi) \rho^s)}{dt} = \hat{\Gamma}^s \quad (2.14)$$

On raisonne de la même manière pour exprimer le bilan de la masse du fluide. La masse de fluide contenue dans le milieu poreux est sujette à variations en raison du fait que les grains chargent le fluide en s'arrachant, tandis qu'ils le déchargent en se déposant. On écrit donc la variation de masse du fluide sur  $\mathcal{D}$ . On considère un terme source volumique  $\hat{\varrho}^f$  visant à saisir la variation de masse sus-mentionnée :

$$\frac{d^f}{dt} \int_{\mathcal{D}} \eta \rho^f d\Omega_t = \int_{\mathcal{D}} \hat{\varrho}^f d\Omega_t \quad (2.15)$$

On peut également reporter cette égalité sur  $\mathcal{D}_0$  et on a :

$$\int_{\mathcal{D}_0} \frac{d^f \phi \rho^f}{dt} d\Omega_0 = \int_{\mathcal{D}_0} \hat{\Gamma}^f d\Omega_0 \quad (2.16)$$

qui se met directement sous la forme locale suivante :

$$\frac{d^f m^f}{dt} = \hat{\Gamma}^f \quad (2.17)$$

où  $m^f = \phi \rho^f$  et  $\hat{\Gamma}^f = J \hat{\phi}^f$ . Cette équation implique une dérivation selon le mouvement du fluide. On préférera dans un formalisme poromécanique, impliquer une dérivation par rapport au mouvement du solide. Pour ce faire, on introduit le vecteur de filtration  $\mathbf{M}$  tel que  $M_i = \rho^f \phi (F^{-1})_{i\alpha} (v_\alpha^f - v_\alpha^s)$  et on obtient :

$$\frac{d^s m^f}{dt} + M_{i,i} = \hat{\Gamma}^f \quad (2.18)$$

Puisque la suffusion se traduit par un échange de masse entre la phase solide et la phase fluide, on déduit que  $\hat{\Gamma}^s$  est l'opposé de  $\hat{\Gamma}^f$ . On écrit alors dans un but de simplicité  $\hat{\Gamma}^s = -\hat{\Gamma}^f = -\hat{\Gamma}$  (soit  $\hat{\phi}^s = -\hat{\phi}^f = -\hat{\phi}$  du point de vue Eulérien).

**Remarque** (Une question de signe). *On choisit d'écrire  $\hat{\Gamma}^s = -\hat{\Gamma}$  afin de considérer  $\hat{\Gamma}$  positif en cas d'arrachement de grains par le fluide et négatif en cas de dépôt de grains*

Comme notre étude concerne les milieux granulaires, on peut légitimement considérer que les grains sont incompressibles, du moins au regard des niveaux de contrainte supportés. Dans le cadre de la mécanique des sols classiques (voir Nova [58]), cette restriction d'incompressibilité permet d'attribuer la variation de volume du milieu poreux granulaire à une variation de volume des pores :

$$J - 1 = \phi - \phi_0 \quad (2.19)$$

où  $\phi_0$  représente la porosité Lagrangienne à l'état initial. Dans le cadre des milieux granulaires suffusifs, cette relation doit être modifiée afin de considérer le fait que le volume de solide varie lorsqu'une partie des grains est arrachée. En se basant sur les travaux de Zhang *et al.* [39] on réformule l'incompressibilité des grains en attribuant la variation de volume du milieu à une variation de volume des pores mais cette fois-ci depuis une porosité initiale altérée noté  $\phi_0^*$  :

$$J - 1 = \phi - \phi_0^* \quad (2.20)$$

On écrit alors cette porosité initiale altérée comme la somme de la porosité initiale  $\phi_0$  et de la porosité induite par l'arrachement des grains notée  $\phi^{er1}$ . On a alors :

$$J - 1 = \phi - \phi_0 - \phi^{er} \quad (2.21)$$

Cette expression constitue un point crucial de notre approche : la variation de porosité Lagrangienne n'est plus due uniquement à la déformation volumique mais également à la suffusion. On peut dès maintenant exploiter cette nouvelle forme de l'hypothèse d'incompressibilité des grains pour reformuler les bilans de masse Lagrangiens :

$$\rho^s \frac{d^s \phi^{er}}{dt} = \hat{\Gamma} \quad \text{et} \quad \frac{d^s \rho^f (J + \phi^{er})}{dt} + M_{i,i} = \hat{\Gamma} \quad (2.22)$$

On remarque alors que les informations sur la cinétique du détachement et sur le dépôt de grains sont intégralement contenues et confondues dans un seul terme :  $\hat{\Gamma}$ .

<sup>1</sup>Cette notation est due à Zhang *et al.* [39], l'exposant *er* indique « érosion »

## 2.2 Puissance des efforts extérieurs

L'objectif de cette section est de construire la puissance des efforts extérieurs en vue de son emploi dans le cadre de la thermodynamique des milieux poreux. Soit  $\mathcal{V}_D^\pi$  l'espace des champs de vitesse de la phase  $\pi$  cinématiquement admissibles sur  $\mathcal{D}$ . On introduit  $\mathcal{P}_{ext}$  la puissance des efforts extérieurs comme une fonctionnelle linéaire et continue sur l'espace produit  $\mathcal{V}_D^s \times \mathcal{V}_D^f$  soit :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ext} : \mathcal{V}_D^s \times \mathcal{V}_D^f &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}^s, \mathbf{v}^f) &\mapsto \mathcal{P}_{ext}(\mathbf{v}^s, \mathbf{v}^f) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Où on écrit :

$$\mathcal{P}_{ext}(\mathbf{v}^s, \mathbf{v}^f) = \int_{\mathcal{D}} b_\alpha^s v_\alpha^s + b_\alpha^f v_\alpha^f d\Omega_t + \int_{\partial\mathcal{D}} t_\alpha^s v_\alpha^s + t_\alpha^f v_\alpha^f da \quad (2.24)$$

où les  $b_\alpha^\pi$  désignent les  $\alpha$  – èmes composantes des forces volumiques exercées sur la phase  $\pi$  sur  $\mathcal{D}$  tandis que les  $t_\alpha^\pi$  désignent les  $\alpha$  – èmes composantes des forces surfaciques exercées sur la phase  $\pi$  sur la frontière  $\partial\mathcal{D}$  de  $\mathcal{D}$ . Remarquons ici que cette frontière doit être suffisamment régulière de telle sorte que sa normale extérieure  $\mathbf{n}$  (de composantes  $n_\alpha$ ) peut être définie presque partout sur  $\partial\mathcal{D}$ . Cette expression de la puissance des efforts extérieurs, affranchie de forces linéiques et ponctuelles sur les éventuelles arêtes et sommets de  $\partial\mathcal{D}$ , permet de limiter le modèle développé ici aux théories du premier gradient [59]. Dans ce contexte, on utilise le théorème de la contrainte de Cauchy et on établit que pour chaque phase, il existe une unique application  $\boldsymbol{\sigma}^\pi$  définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^\pi : \mathcal{D} \times \mathcal{T} &\rightarrow \mathbb{T}_s^2 \\ (\mathbf{x}, t) &\mapsto \boldsymbol{\sigma}^\pi(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (2.25)$$

où  $\mathbb{T}_s^2$  désigne la restriction de  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  à l'ensemble des tenseurs symétriques. L'image de  $\mathcal{D} \times \mathcal{T}$  par cette application est nommée « champ de tenseur des contraintes de Cauchy sur la phase  $\pi$  » et est telle que pour toute facette de normale  $\mathbf{n}$  :

$$\forall (\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D} \times \mathcal{T}, \quad \sigma_{\alpha\beta}^\pi(\mathbf{x}, t) n_\beta(\mathbf{x}, t) = t_\alpha^\pi(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) \quad (2.26)$$

Une fois cette définition statuée, on est en mesure d'employer le théorème de flux-divergence pour exprimer le deuxième terme intégral de (2.24) comme une intégrale sur  $\mathcal{D}$  :

$$\int_{\partial\mathcal{D}} t_\alpha^s v_\alpha^s + t_\alpha^f v_\alpha^f da = \int_{\mathcal{D}} \sigma_{\alpha\beta}^s d_{\alpha\beta}^s + \sigma_{\alpha\beta,\beta}^s v_\alpha^s d\Omega_t + \int_{\mathcal{D}} \sigma_{\alpha\beta}^f d_{\alpha\beta}^f + \sigma_{\alpha\beta,\beta}^f v_\alpha^f d\Omega_t \quad (2.27)$$

où  $d_{\alpha\beta}^\pi = (v_{\alpha,\beta}^\pi + v_{\beta,\alpha}^\pi) / 2$  désigne les composantes de la partie symétrique du gradient de vitesse de la phase  $\pi$ , aussi appelé tenseur de taux de déformation Eulérien de la phase  $\pi$ . En se concentrant sur le milieu poreux comme un tout, on exprime la contrainte de Cauchy du milieu poreux  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^s + \boldsymbol{\sigma}^f$  ainsi que la force volumique exercée sur le milieu poreux  $\mathbf{b} = \mathbf{b}^s + \mathbf{b}^f$ . On choisit de privilégier la cinématique du solide et la puissance des efforts extérieurs s'écrit alors :

$$\mathcal{P}_{ext}(\mathbf{v}^s, \mathbf{v}^f) = \int_{\mathcal{D}} \sigma_{\alpha\beta} d_{\alpha\beta}^s + \sigma_{\alpha\beta}^f (d_{\alpha\beta}^f - d_{\alpha\beta}^s) + (b_\alpha + \sigma_{\alpha\beta,\beta}) v_\alpha^s + (b_\alpha^f + \sigma_{\alpha\beta,\beta}^f) (v_\alpha^f - v_\alpha^s) d\Omega_t \quad (2.28)$$

Jusqu'ici le raisonnement est somme toute classique (voir Coussy [43]). Pour aller plus loin, une hypothèse supplémentaire est nécessaire : on doit considérer le bilan local des forces exercées sur le milieu poreux. Obtenir ce dernier peut se faire en partant d'une équation intégrale sur

la configuration courante que nous localiserons. On pose donc l'équation intégrale du bilan de quantité de mouvement sur  $\mathcal{D}$  et on a :

$$\frac{d^s}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho^s (1 - \eta) v_\alpha^s d\Omega_t + \frac{d^f}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho^f \eta v_\alpha^f d\Omega_t = \int_{\mathcal{D}} b_\alpha d\Omega_t + \int_{\partial\mathcal{D}} t_\alpha da \quad (2.29)$$

En utilisant le transport d'une quantité intégrale, on réécrit les termes du membre de droite. Afin d'alléger l'écriture, on traite la contribution de la phase fluide seule :

$$\begin{aligned} \frac{d^f}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho^f \eta v_\alpha^f d\Omega_t &= \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho^f \eta v_\alpha^f) + (\rho^f \eta v_\alpha^f v_\beta^f)_{,\beta} d\Omega_t \\ &= \int_{\mathcal{D}} \frac{d^f \rho^f \eta}{dt} v_\alpha^f + \rho^f \eta \frac{d^f v_\alpha^f}{dt} d\Omega_t \\ &= \int_{\mathcal{D}} \hat{\rho} v_\alpha^f + \rho^f \eta \gamma_\alpha^f d\Omega_t \end{aligned} \quad (2.30)$$

On étend aisément ce résultat à la contribution du solide :

$$\frac{d^s}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho^s (1 - \eta) v_\alpha^s d\Omega_t = \int_{\mathcal{D}} -\hat{\rho} v_\alpha^s + \rho^s (1 - \eta) \gamma_\alpha^s d\Omega_t \quad (2.31)$$

maintenant, en considérant le théorème de la contrainte de Cauchy appliqué au tenseur des contraintes du milieu poreux, soit  $t_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} n_\beta$ , puis le théorème de flux-divergence, on obtient le bilan intégral de quantité de mouvement :

$$\int_{\mathcal{D}} \hat{\rho} (v_\alpha^f - v_\alpha^s) + \rho^s (1 - \eta) \gamma_\alpha^s + \rho^f \eta \gamma_\alpha^f d\Omega_t = \int_{\mathcal{D}} b_\alpha + \sigma_{\alpha\beta,\beta} d\Omega_t \quad (2.32)$$

On peut alors écrire le bilan local de quantité de mouvement suivant :

$$\hat{\rho} (v_\alpha^f - v_\alpha^s) + \rho^s (1 - \eta) \gamma_\alpha^s + \rho^f \eta \gamma_\alpha^f = b_\alpha + \sigma_{\alpha\beta,\beta} \quad (2.33)$$

Dans cette équation, on distingue en particulier la mise en jeu du terme  $\hat{\rho}(v_\alpha^f - v_\alpha^s)$ , qui représente la variation de quantité de mouvement issue du transfert de masse entre solide et fluide lors du détachement ou du dépôt de grains. À l'aide de cette dernière égalité, on remplacera la quantité  $b_\alpha + \sigma_{\alpha\beta,\beta}$  présente dans l'expression du travail des efforts extérieurs. Maintenant, le dernier aspect à traiter est la contrainte du fluide. Suivant la poromécanique classique, on considère que la contrainte supportée par le fluide est hydrostatique et liée à la pression  $p$  du fluide *via* la porosité Eulérienne. On écrit alors  $\sigma_{\alpha\beta}^f = -\eta p \delta_{\alpha\beta}$ . Dans ce contexte, le terme  $\sigma_{\alpha\beta}^f (d_{\alpha\beta}^f - d_{\alpha\beta}^s)$  se réduit à  $-\eta p (v_\alpha^f - v_\alpha^s)_{,\alpha}$  et  $\sigma_{\alpha\beta,\beta}^f$  à  $-(\eta p)_{,\alpha}$ . Finalement si la force volumique exercée sur la phase fluide est proportionnelle à la masse de cette dernière, alors on écrit  $b_\alpha^f = \rho^f \eta^f f_\alpha$  où  $\mathbf{f}$  est alors une densité d'effort spécifique (par unité de masse). Dès lors, on donne l'expression finale du travail des efforts extérieurs :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ext}(\mathbf{v}^s, \mathbf{v}^f) &= \int_{\mathcal{D}} \sigma_{\alpha\beta}^s d_{\alpha\beta}^s - (\eta p (v_\alpha^f - v_\alpha^s))_{,\alpha} + \rho^f \eta^f f_\alpha (v_\alpha^f - v_\alpha^s) d\Omega_t \\ &\quad + \int_{\mathcal{D}} (\rho^s (1 - \eta) \gamma_\alpha^s + \rho^f \eta \gamma_\alpha^f) v_\alpha^s d\Omega_t + \int_{\mathcal{D}} \hat{\rho} v_\alpha^s (v_\alpha^f - v_\alpha^s) d\Omega_t \end{aligned} \quad (2.34)$$

Dans l'équation ci-dessus, on remarque que le premier terme intégral contient le travail des efforts intérieurs, et que le second terme contient les effets inertiels. Si les deux premières intégrales sont tout à fait communes au regard de la poromécanique classique, la troisième intégrale correspond aux effets de la suffusion. Ce terme marque donc une différence notable, sur le plan dynamique, entre un milieu suffusif et un milieu poreux standard.

## 2.3 Thermodynamique

Dans cette section nous nous attachons à étendre la thermodynamique des milieux poreux dans le cadre d'un milieu suffusif. Ceci a pour objectif de fournir un cadre propice à la proposition de lois de comportement vérifiant rigoureusement les lois fondamentales de la thermodynamique soit : le premier principe, statuant de l'évolution de l'énergie interne et le second principe, contraignant la variation d'entropie. Les deux premières sous-sections seront dédiées à l'expression de ces deux principes. Ces principes seront écrits dans la configuration courante sous formes intégrales, reportés sur la configuration de référence et localisés. La troisième sous-section vera l'établissement d'une forme nouvelle de l'inégalité fondamentale (ou de Clausius-Duhem).

### 2.3.1 Le premier principe : bilan d'énergie interne

Le premier principe de la thermodynamique des milieux poreux statue du bilan de l'énergie interne, considérant le milieu poreux comme un tout. On fait classiquement l'hypothèse que le postulat de l'état local [43] s'applique pour chacune des phases. La variation d'énergie interne du milieu poreux est alors donnée comme la somme des variations d'énergie interne de chaque phase, dans leurs mouvements respectifs. Dans cette étude, on ne considère pas l'existence de source de chaleur volumique. On a alors une égalité de la forme :

$$\frac{d^s}{dt} (\mathcal{U}^s + \mathcal{K}^s) + \frac{d^f}{dt} (\mathcal{U}^f + \mathcal{K}^f) = \mathcal{P}_{ext} + \mathring{Q} \quad (2.35)$$

où  $\mathcal{U}^\pi$  et  $\mathcal{K}^\pi$  désignent respectivement l'énergie interne et l'énergie cinétique de la phase  $\pi$  de telle sorte qu'en désignant par  $e^\pi$  l'énergie interne spécifique (par unité de masse) de la phase  $\pi$  alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^s &= \int_{\mathcal{D}} \rho^s (1 - \eta) e^s d\Omega_t, & \mathcal{U}^f &= \int_{\mathcal{D}} \rho^f \eta e^f d\Omega_t \\ \mathcal{K}^s &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \rho^s (1 - \eta) v_\alpha^s v_\alpha^s d\Omega_t, & \mathcal{K}^f &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \rho^f \eta v_\alpha^f v_\alpha^f d\Omega_t \end{aligned} \quad (2.36)$$

$\mathring{Q}$  désigne l'énergie calorifique fournie au milieu poreux par le biais d'un flux sur sa frontière  $\partial\mathcal{D}$  :

$$\mathring{Q} = - \int_{\partial\mathcal{D}} q_\alpha n_\alpha da = - \int_{\mathcal{D}} q_{\alpha,\alpha} d\Omega_t \quad (2.37)$$

où  $\mathbf{q}$  désigne un vecteur courant de chaleur entrant. La somme des dérivations des énergies internes est un résultat courant et se pose comme suit (voir Coussy [43]) :

$$\frac{d^s}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho^s (1 - \eta) e^s d\Omega_t + \frac{d^f}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho^f \eta e^f d\Omega_t = \int_{\mathcal{D}} \frac{d^s e}{dt} + e v_{\alpha,\alpha}^s + (\rho^f \eta e^f (v_\alpha^f - v_\alpha^s))_{,\alpha} d\Omega_t \quad (2.38)$$

où on a introduit  $e$  comme l'énergie interne du milieu poreux par unité de volume :

$$e = \rho^s (1 - \eta) e^s + \rho^f \eta e^f \quad (2.39)$$

En raison du transfert de masse entre les deux phases du milieu, les expressions des dérivées des énergies cinétiques sont plus originales. On se concentre sur la dérivation de l'énergie cinétique du fluide :

$$\frac{d^f \mathcal{K}^f}{dt} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial \rho^f \eta}{\partial t} + (\rho^f \eta v_\beta^f)_{,\beta} \right) v_\alpha^f v_\alpha^f + \rho^f \eta \left( \frac{\partial v_\alpha^f v_\alpha^f}{\partial t} + (v_\alpha^f v_\alpha^f)_{,\beta} v_\beta^f \right) d\Omega_t \quad (2.40)$$

Considérant l'expression de l'accélération du fluide (2.10) et le bilan de la masse du fluide (2.15), cette dérivation (voir Coussy [43]) se réduit à :

$$\frac{d^f \mathcal{K}^f}{dt} = \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{2} \hat{\rho} v_\alpha^f v_\alpha^f + \rho^f \eta \gamma_\alpha^f v_\alpha^f d\Omega_t \quad (2.41)$$

En raisonnant de la même manière pour l'énergie cinétique du squelette solide on aboutit à :

$$\frac{d^s \mathcal{K}^s}{dt} = \int_{\mathcal{D}} -\frac{1}{2} \hat{\rho} v_\alpha^s v_\alpha^s + \rho^s (1 - \eta) \gamma_\alpha^s v_\alpha^s d\Omega_t \quad (2.42)$$

Les équations (2.41) et (2.42) indiquent que l'échange de masse  $\hat{\rho}$  est explicitement présent dans les dérivations temporelles des énergies cinétiques des deux phases. Maintenant, considérons : l'expression de la puissance des efforts extérieurs (2.34), l'énergie calorifique fournie par l'extérieur (2.37), les dérivations des énergies internes (2.38) et des énergies cinétiques, (2.41), (2.42). Introduisons l'enthalpie spécifique du fluide  $h^f = e^f + p/\rho^f$ . Dès lors, on obtient la forme Eulérienne du premier principe de la thermodynamique appliquée au milieu poreux suffusif :

$$\begin{aligned} \frac{d^s}{dt} \int_{\mathcal{D}} e d\Omega_t &= \int_{\mathcal{D}} \sigma_{\alpha\beta} d_{\alpha\beta}^s + \left( \rho^f \eta (f_\alpha - \gamma_\alpha^f) - \frac{1}{2} \hat{\rho} (v_\alpha^f - v_\alpha^s) \right) (v_\alpha^f - v_\alpha^s) d\Omega_t \\ &\quad - \int_{\mathcal{D}} (\rho^f \eta h^f (v_\alpha^f - v_\alpha^s))_{,\alpha} + q_{\alpha,\alpha} d\Omega_t \end{aligned} \quad (2.43)$$

De la même manière que pour les bilans de la masse, on cherche à reporter cette égalité sur la configuration de référence. Pour ce faire, il est nécessaire d'introduire quelques quantités Lagrangiennes. Dans un premier temps introduisons  $E = eJ$ , énergie interne Lagrangienne spécifique (par unité de volume) du milieu. Considérons  $\Sigma$  comme le second tenseur des contraintes de Piola Kirchhoff :

$$\Sigma_{ij} = J (F^{-1})_{i\alpha} \sigma_{\alpha\beta} (F^{-1})_{j\beta} \quad (2.44)$$

Ensuite, écrivons  $Q_i = J (F^{-1})_{i\alpha} q_\alpha$  les composantes du flux de chaleur  $\mathbf{Q}$ , report de  $\mathbf{q}$  sur la configuration de référence. On a alors :

$$\int_{\mathcal{D}_0} \frac{d^s E}{dt} d\Omega_0 = \int_{\mathcal{D}_0} \Sigma_{ij} \frac{d^s \Delta_{ij}}{dt} - (h^f M_i)_{,i} + \left( f_\alpha - \gamma_\alpha^f - \frac{\hat{\Gamma}}{2(\rho^f \phi)^2} F_{\alpha i} M_i \right) F_{\alpha i} M_i - Q_{i,i} d\Omega_0 \quad (2.45)$$

Qui s'écrit sous forme locale :

$$\frac{d^s E}{dt} = \Sigma_{ij} \frac{d^s \Delta_{ij}}{dt} - (h^f M_i)_{,i} + \left( f_\alpha - \gamma_\alpha^f - \frac{\hat{\Gamma}}{2(\rho^f \phi)^2} F_{\alpha i} M_i \right) F_{\alpha i} M_i - Q_{i,i} \quad (2.46)$$

### 2.3.2 Le second principe : croissance entropique

Le second principe de la thermodynamique postule une restriction sur le bilan d'entropie du milieu. On considère que, au sein d'un volume élémentaire représentatif associé à un point matériel donné, les phases du milieu sont à l'équilibre thermique, et on note  $T$  la température correspondant à cet équilibre. Si on écrit  $s^\pi$  l'entropie spécifique (par unité de masse) de la phase  $\pi$ , alors le second principe s'écrit comme suit :

$$\frac{d^s}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho^s (1 - \eta) s^s d\Omega_t + \frac{d^f}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho^f \eta s^f d\Omega_t \geq - \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{q_\alpha n_\alpha}{T} da \quad (2.47)$$

De manière analogue à la dérivation de l'énergie interne (voir équation (2.38)), les dérivations temporelles de l'entropie s'expriment :

$$\frac{d^s}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho^s (1 - \eta) s^s d\Omega_t + \frac{d^f}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho^f \eta s^f d\Omega_t = \int_{\mathcal{D}} \frac{d^s s}{dt} + s v_{\alpha, \alpha}^s + (\rho^f \eta s^f (v_{\alpha}^f - v_{\alpha}^s))_{, \alpha} d\Omega_t \quad (2.48)$$

où on a introduit  $s$  comme l'entropie du milieu poreux par unité de volume :

$$s = \rho^s (1 - \eta) s^s + \rho^f \eta s^f \quad (2.49)$$

Considérant le théorème de flux-divergence, on obtient la forme Eulérienne du second principe de la thermodynamique :

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{d^s s}{dt} d\Omega_t \geq - \int_{\mathcal{D}} \left( \rho^f \eta s^f (v_{\alpha}^f - v_{\alpha}^s) + \frac{q_{\alpha}}{T} \right)_{, \alpha} d\Omega_t \quad (2.50)$$

En introduisant  $S = sJ$  l'entropie Lagrangienne spécifique (par unité de volume) du milieu poreux, on reporte le second principe Eulérien sur la configuration de référence :

$$\int_{\mathcal{D}_0} \frac{d^s S}{dt} d\Omega_t \geq - \int_{\mathcal{D}_0} \left( s^f M_i + \frac{Q_i}{T} \right)_{, i} d\Omega_t \quad (2.51)$$

Cette équation se localise selon :

$$\frac{d^s S}{dt} \geq - \left( s^f M_i + \frac{Q_i}{T} \right)_{, i} \quad (2.52)$$

Cette équation est somme toute classique et n'introduit pas d'effet du transfert de masse entre le solide et le fluide. En définitive, le bilan entropique d'un milieu poreux reste le même, suffusion ou non.

**Remarque** (Écriture de l'entropie Lagrangienne). *Puisque  $S = sJ$ , il est clair qu'on peut écrire  $S$  de la forme suivante :*

$$S = S^s + m^f s^f \quad (2.53)$$

où  $S^s$  désigne l'entropie Lagrangienne spécifique du squelette solide, par unité de volume.

### 2.3.3 L'inégalité de Clausius-Duhem

**Remarque** (Notations). *Afin d'alléger les notations, à partir de maintenant et sauf indication contraire, les dérivations  $d^s/dt$  d'une quantité  $a$  seront indiquées par  $\dot{a}$ .*

Le point crucial d'une modélisation comportementale appuyée sur la thermodynamique se tient dans l'inégalité fondamentale, ou de Clausius-Duhem. Cette inégalité se lit comme la restriction de la dissipation thermodynamique aux valeurs positives et permet d'identifier le caractère conservatif ou dissipatif des processus thermodynamiques. Pour obtenir l'inégalité de Clausius-Duhem, nous allons ici lier le premier principe de la thermodynamique avec le second. Une des façons d'établir ce lien consiste à introduire l'énergie libre de Helmholtz du milieu poreux :

$$\Psi = E - TS \quad (2.54)$$

Au travers de cette transformation de Legendre, la dérivée temporelle de l'entropie  $S$  fait intervenir celle de l'énergie interne. En considérant le bilan d'entropie local Lagrangien (2.52) on écrit donc :

$$\dot{S} = \frac{1}{T} \left( \dot{E} - S\dot{T} - \dot{\Psi} \right) \geq - \left( s^f M_i + \frac{Q_i}{T} \right)_{,i} \quad (2.55)$$

En passant à gauche le membre de droite et en multipliant par  $T$  on définit la dissipation du milieu poreux :

$$\Phi := \dot{E} - S\dot{T} + T \left( s^f M_i + \frac{Q_i}{T} \right)_{,i} - \dot{\Psi} \geq 0 \quad (2.56)$$

Puisque  $\dot{E}$  intervient dans cette inégalité, alors on peut y introduire l'expression du premier principe (2.46). De plus, on suppose que l'énergie libre du milieu poreux s'écrit comme la somme de celle du solide  $\Psi^s$  et de celle du fluide  $\Psi^f = m^f \psi^f$ . La dissipation s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \Phi &= \Sigma_{ij} \dot{\Delta}_{ij} - (h^f M_i)_{,i} + \left( f_\alpha - \gamma_\alpha^f - \frac{\hat{\Gamma}}{2(\rho^f \phi)^2} F_{\alpha i} M_i \right) F_{\alpha i} M_i - Q_{i,i} \\ &\quad - S\dot{T} - \dot{\Psi}^s - \left( \dot{m}^f \psi^f + m^f \dot{\psi}^f \right) + T \left( s^f M_i + \frac{Q_i}{T} \right)_{,i} \geq 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

Afin de fournir une forme de l'inégalité de Clausius-Duhem qui soit propice à la prescription de lois de comportement, plusieurs étapes sont nécessaires. Dans un premier temps remarquons que :

$$-Q_{i,i} + T \left( \frac{Q_i}{T} \right)_{,i} = -\frac{Q_i}{T} T_{,i} \quad (2.58)$$

La deuxième étape consiste à considérer que le fluide suit des lois de comportement simples. On suppose pour cela que l'énergie libre du fluide est une fonction du volume spécifique du fluide et de sa température soit  $\psi^f = \psi^f(1/\rho^f, T)$ . La pression et l'entropie du fluide suivent alors :

$$p = -\frac{\partial \psi^f}{\partial 1/(\rho^f)} \quad \text{et} \quad s^f = -\frac{\partial \psi^f}{\partial T} \quad (2.59)$$

On considère le potentiel de Gibbs du fluide  $\mu^f = \psi^f + p/\rho^f$ , ou encore  $\mu^f = h^f + T s^f$ . On rappelle de plus que  $S = S^s + m^f s^f$ . En considérant les bilans massiques respectifs du squelette solide et fluide (voir (2.22), (2.18)), ainsi que la condition d'incompressibilité des grains (2.21) on peut réécrire certains termes de (2.57) :

$$-(h^f M_i)_{,i} - S\dot{T} - \left( \dot{m}^f \psi^f + m^f \dot{\psi}^f \right) + T (s^f M_i)_{,i} = -\frac{p_{,i}}{\rho^f} M_i + \dot{\phi}^{er} (p - \rho^s \mu^f) + p\dot{J} - S^s \dot{T} \quad (2.60)$$

Les détails de ces calculs sont donnés dans l'annexe A. Finalement, on fait une hypothèse sur l'énergie libre du solide. On considère que  $\Psi^s$  est une fonction de  $T$ , de  $\Delta$  ainsi que d'une variable interne généralisée  $\zeta$  tenant compte des processus irréversibles opérants au sein du squelette solide. À titre d'exemple,  $\zeta$  contiendra la porosité induite par suffusion  $\phi^{er}$ . À ce moment, et afin de ne pas perdre en généralité, la discussion autour du choix de ces variables internes se fera au cours de la prochaine section. On a alors :

$$\Psi^s = \Psi^s(T, \Delta, \zeta) \quad (2.61)$$

**Remarque** (Variable interne généralisée).  $\zeta$  consiste en un vecteur de composantes  $\zeta_J$  où chaque  $\zeta_J$  présente potentiellement un ordre de tensorialité différent.

De cette hypothèse sur les dépendances de  $\Psi^s$  on déduit la différentielle  $\dot{\Psi}^s$  :

$$\dot{\Psi}^s = \frac{\partial \Psi^s}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \Psi^s}{\partial \Delta_{ij}} \dot{\Delta}_{ij} + \left\langle \frac{\partial \Psi^s}{\partial \zeta_J}, \dot{\zeta}_J \right\rangle \quad (2.62)$$

où  $\langle \partial \Psi^s / \partial \zeta_J, \dot{\zeta}_J \rangle$  désigne le produit scalaire entre  $\partial \Psi^s / \partial \zeta_J$  et  $\dot{\zeta}_J$ . Dans ces conditions, et en remarquant que  $\dot{J} = J (F^{-1})_{i\alpha} (F^{-1})_{j\alpha} \dot{\Delta}_{ij}$ , l'inégalité de Clausius-Duhem se réécrit :

$$\begin{aligned} \Phi = & \left( \Sigma_{ij} + pJ (F^{-1})_{i\alpha} (F^{-1})_{j\alpha} - \frac{\partial \Psi^s}{\partial \Delta_{ij}} \right) \dot{\Delta}_{ij} - \left( S^s + \frac{\partial \Psi^s}{\partial T} \right) \dot{T} - \left\langle \frac{\partial \Psi^s}{\partial \zeta_J}, \dot{\zeta}_J \right\rangle - \frac{Q_i}{T} T_{,i} \\ & + \left( -\frac{p_{,i}}{\rho^f} + (f_\alpha - \gamma_\alpha) F_{\alpha i} \right) M_i + \left( p - \rho^s \mu^f - \frac{\rho^s}{2(\rho^f \phi)^2} F_{\alpha i} M_i F_{\alpha j} M_j \right) \dot{\phi}^{er} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Dans cette forme de l'inégalité de Clausius-Duhem, on note la présence de plusieurs termes classiques en mécanique des milieux continus et en poromécanique (voir Coussy [43] par exemple). Cependant, la présence de termes contenant les effets de l'érosion impose de proposer une nouvelle façon de découpler les différentes sources dissipatives. Au regard de la littérature, on note que Zhang *et al.* [39] proposent d'intégrer les processus dissipatifs liés à la suffusion au sein de la dissipation propre du squelette solide. Cependant on a pu voir que cette proposition implique de trop faibles restrictions sur l'évolution de  $\phi^{er}$ , et permet même de complètement découpler la suffusion de l'écoulement du fluide, ce qui est physiquement contre intuitif. Afin de considérer le couplage entre suffusion et écoulement, on préférera associer la dissipation liée à la suffusion avec la dissipation du fluide. On propose dans un premier temps de découper la dissipation en trois termes,  $\Phi_{\rightarrow}^s$ ,  $\Phi_{\rightarrow}^f$ ,  $\Phi^{th}$ , de telle sorte que :

$$\Phi_{\rightarrow}^s + \Phi_{\rightarrow}^f + \Phi^{th} \geq 0 \quad (2.64)$$

Ici,  $\Phi_{\rightarrow}^s$  contient principalement la dissipation propre du squelette solide, ainsi que la dissipation liée aux effets mécaniques de la suffusion ;  $\Phi_{\rightarrow}^f$  contient à la fois la dissipation hydraulique (c'est à dire la dissipation de type « Darcy ») et une partie de la dissipation induite par la suffusion.  $\Phi^{th}$  contient la dissipation liée aux effets thermiques. Afin de ne pas trop restreindre les raisonnements à venir, nous forçons seulement la positivité de  $\Phi^{th}$ . Pour les autres sources dissipatives, et tant que nous n'avons pas explicité le jeu de variables internes retenues pour spécifier l'énergie libre du squelette, nous considérons simplement  $\Phi_{\rightarrow}^s + \Phi_{\rightarrow}^f \geq 0$ . On donne le détail des différents termes :

$$\Phi_{\rightarrow}^s = \left( \Sigma_{ij} + pJ (F^{-1})_{i\alpha} (F^{-1})_{j\alpha} - \frac{\partial \Psi^s}{\partial \Delta_{ij}} \right) \dot{\Delta}_{ij} - \left( S^s + \frac{\partial \Psi^s}{\partial T} \right) \dot{T} - \left\langle \frac{\partial \Psi^s}{\partial \zeta_J}, \dot{\zeta}_J \right\rangle \quad (2.65a)$$

$$\Phi_{\rightarrow}^f = \left( -\frac{p_{,i}}{\rho^f} + (f_\alpha - \gamma_\alpha) F_{\alpha i} \right) M_i + \left( p - \rho^s \mu^f - \frac{\rho^s}{2(\rho^f \phi)^2} F_{\alpha i} M_i F_{\alpha j} M_j \right) \dot{\phi}^{er} \quad (2.65b)$$

$$\Phi^{th} = -\frac{Q_i}{T} T_{,i} \geq 0 \quad (2.65c)$$

L'indice  $\rightarrow$  indique la présence d'effets de transfert liés à la suffusion. Dans la section suivante, l'introduction des variables internes spécifiant  $\Psi^s$  permettra de réécrire l'inégalité de Clausius-Duhem sous la forme :

$$\Phi^s + \Phi^f + \Phi^{th} \geq 0 \quad (2.66)$$

où les dissipations du solide et du fluide seront découplées et où  $\Phi^f$  contiendra tous les termes liés *explicitement* à la suffusion. Une fois ce découplage posé, nous forcerons la positivité de  $\Phi^s$  et de  $\Phi^f$  en vue d'obtenir le jeu de restrictions qui devra être vérifié par les lois de comportement que nous statuerons.

## 2.4 Lois de comportement

Comme énoncé brièvement à la fin de la section précédente, l'objectif de cette section est d'explorer les possibilités de formuler un modèle de comportement pour sol suffusif. On se concentre en particulier sur deux aspects : le couplage entre suffusion et le comportement mécanique du squelette, puis le couplage entre la suffusion et la diffusion hydraulique.

### 2.4.1 Comportement squelettique

Puisque nous ne nous intéressons pas ici aux effets de la température sur ces différents aspects, décidons, pour alléger les raisonnements suivants, de considérer que la température suit un régime stationnaire caractérisé par  $\dot{T} = 0$ . Sous cette réserve, on peut omettre la dépendance de  $\Psi^s$  vis-à-vis de la température de telle sorte que l'on considère dès à présent  $\Psi^s = \Psi^s(\Delta, \zeta)$ . Par ailleurs, on peut introduire  $\Sigma'$  le tenseur des contraintes effectives (en description Lagrangienne) tel que :

$$\Sigma'_{ij} = \Sigma_{ij} + pJ (F^{-1})_{i\alpha} (F^{-1})_{j\alpha} \quad (2.67)$$

Dans ces conditions, (2.65a) se réduit alors à l'équation suivante :

$$\Phi_{\rightarrow}^s = \left( \Sigma'_{ij} - \frac{\partial \Psi^s}{\partial \Delta_{ij}} \right) \dot{\Delta}_{ij} - \left\langle \frac{\partial \Psi^s}{\partial \zeta_J}, \dot{\zeta}_J \right\rangle \quad (2.68)$$

À partir de maintenant et pour la suite de ce chapitre, nous posons l'hypothèse des petites perturbations. Ceci permet de confondre la configuration courante avec la configuration de référence. L'emploi de cette hypothèse permet d'identifier le tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\Delta$  avec le tenseur des déformations linéarisées  $\varepsilon$ . En notant  $\mathbf{u}$  le déplacement du squelette solide on écrit :

$$\Delta_{ij} \approx \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.69)$$

Cette hypothèse permet au passage de reformuler l'énergie libre du squelette sous la forme  $\Psi^s = \Psi^s(\varepsilon, \zeta)$ . Une autre conséquence de cette hypothèse est la réécriture de la condition d'incompressibilité des grains. En effet, le terme  $J - 1$  est alors associée à la déformation volumique  $\varepsilon_v = \varepsilon_{ii}$ .

$$\varepsilon_v = \phi - \phi^{er} - \phi_0 \quad (2.70)$$

D'un autre côté, en supposant que la configuration de référence est libre de contraintes, alors on identifie le tenseur Eulérien des contraintes effective de Terzaghi  $\sigma'$  avec  $\Sigma'$  :

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij} \approx \Sigma'_{ij} \quad (2.71)$$

La dissipation  $\Phi_{\rightarrow}^s$  s'écrit alors :

$$\Phi_{\rightarrow}^s = \left( \sigma'_{ij} - \frac{\partial \Psi^s}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} - \left\langle \frac{\partial \Psi^s}{\partial \zeta_J}, \dot{\zeta}_J \right\rangle \quad (2.72)$$

**Remarque** (À propos des indices). *On remarque ici que les tenseurs des contraintes de Terzaghi et de déformations linéarisées sont donnés en terme du couple d'indices  $ij$  et non plus  $\alpha\beta$ . Puisque l'hypothèse des petites perturbations a été considérée, alors la configuration courante et la configuration de référence sont confondues. Les repères tangents de ces deux configurations sont alors confondus, de même que les systèmes d'indices correspondants. On emploie donc ici pour la suite de ce chapitre, le système d'indice correspondant au repère tangent de la configuration de référence.*

Maintenant, pour aller plus loin il est nécessaire de faire un choix sur les variables internes  $\zeta_J$  précisant l'énergie libre du squelette solide. Dans un premier temps, rappelons que nous souhaitons proposer un modèle de comportement mécanique pour le squelette solide, qui intègre les effets de la suffusion. Pour cette raison, il est naturel d'introduire  $\phi^{er}$  comme une variable interne. Le choix des autres variables internes est piloté par les effets que nous cherchons à prendre en compte dans la modélisation du comportement mécanique du squelette solide. En particulier, la théorie de l'élasto-plasticité est un des cadres convenables et bien connu pour modéliser le comportement *non-linéaire* et *irréversible* d'un sol et plus particulièrement de son squelette solide (voir Nova [58]). L'hypothèse des petites perturbations implique la partition additive des déformations. On considère alors que le tenseur des déformations s'écrit comme la somme d'un tenseur des déformations élastiques  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  et d'un tenseur des déformations plastiques  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (2.73)$$

On introduit ici quelques notations : on note  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  les parties déviatoriques respectives de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ . On note également  $\varepsilon_v$ ,  $\varepsilon_v^e$  et  $\varepsilon_v^p$  les déformations volumiques, déformations volumiques élastiques et déformations volumiques plastiques, respectivement. Dans le cadre des milieux poreux, il est classique de réaliser le même type de partition en ce qui concerne la porosité et on écrit :

$$\phi - \phi_0 = \phi^e + \phi^p \quad (2.74)$$

$\phi^e$  et  $\phi^p$  désignent alors respectivement une variation réversible et irréversible de porosité. On réécrit alors la condition d'incompressibilité des grains :

$$\varepsilon_v^e + \varepsilon_v^p = \phi^e + \phi^p - \phi^{er} \quad (2.75)$$

En particulier, les composantes réversibles et irréversibles doivent respecter les conditions suivantes :

$$\phi^e = \varepsilon_v^e \quad (2.76a)$$

$$\phi^p = \varepsilon_v^p + \phi^{er} \quad (2.76b)$$

Ceci étant, il convient de statuer le jeu de variables internes que nous considérons. En premier lieu, afin de tenir compte des effets propres de la suffusion, la porosité  $\phi^{er}$  est retenue comme variable interne. Ensuite, afin de tenir compte d'éventuels écrouissages cinématique, une quantité tensorielle doit être retenue. Dans ce sens, nous retenons la déformation plastique  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ . On propose finalement d'introduire la déformation plastique (déviatorique) cumulée  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  comme une variable interne :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \int_0^t \sqrt{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^p \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^p} d\tau \quad (2.77)$$

Cette quantité est communément employée pour la modélisation élasto-plastique des sols, et en particulier des sables. Cette variable interne permet de prendre en compte l'effet des distorsions plastiques sur l'érouissage des sols sableux. Les travaux de Nova et de Wood [60] traitant de la modélisation du comportement triaxial des sables constituent un exemple typique de la littérature traitant ces questions.

Considérant les quelques raisonnements formulés ci-dessus, on considère que  $\Psi^s$  est une fonction de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  et  $\bar{\varepsilon}^p$  et, bien sûr, de  $\phi^{er}$ .

$$\Psi^s = \Psi^s(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \bar{\varepsilon}^p, \phi^{er}) \quad (2.78)$$

Maintenant que le choix des variables internes a été posé, on peut supposer qu'il existe une décomposition additive de  $\Psi^s$  comme la somme d'une énergie libre relative au comportement élastique  $\Psi_e^s$ , et d'une énergie libre « gelée »  $\Psi_p^s$  représentant la quantité de travail plastique emmagasinée (sous forme d'énergie libre) par le squelette solide lors des processus d'érouissage. On considère alors que l'énergie libre élastique dépend de la partie élastique de la déformation, ainsi que de la porosité induite par suffusion, à la manière de Zhang *et al.* [39]. Dans ce contexte,  $\phi^{er}$  peut être interprétée comme une variable d'endommagement pilotant l'évolution de la raideur du sol suivant la progression de l'érosion. L'énergie gelée est donnée comme une fonction des variables internes *uniquement*. En particulier, la contribution de  $\phi^{er}$  au travers de  $\Psi_p^s$  est analogue à celle d'une variable d'érouissage. On a donc :

$$\Psi^s(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \bar{\varepsilon}^p, \phi^{er}) = \Psi_e^s(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p, \phi^{er}) + \Psi_p^s(\boldsymbol{\varepsilon}^p, \bar{\varepsilon}^p, \phi^{er}) \quad (2.79)$$

Ceci permet alors de détailler plus encore l'expression de  $\Phi_{\rightarrow}^s$  :

$$\Phi_{\rightarrow}^s = \left( \sigma'_{ij} - \frac{\partial \Psi_e^s}{\partial (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p)} \right) (\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^p) + \sigma'_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \frac{\partial \Psi_p^s}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \frac{\partial \Psi_p^s}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \dot{\bar{\varepsilon}}^p - \left( \frac{\partial \Psi_e^s}{\partial \phi^{er}} + \frac{\partial \Psi_p^s}{\partial \phi^{er}} \right) \dot{\phi}^{er} \quad (2.80)$$

On peut écrire la déformation plastique comme la somme de sa partie déviatorique et de sa partie sphérique. On fait alors le changement de variable  $\Psi_p^s(\boldsymbol{\varepsilon}^p, \bar{\varepsilon}^p, \phi^{er}) = \Psi_p^s(\boldsymbol{\varepsilon}^p, \varepsilon_v^p, \bar{\varepsilon}^p, \phi^{er})$  et on a alors :

$$\frac{\partial \Psi_p^s}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\partial \Psi_p^s}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \frac{\partial \Psi_p^s}{\partial \varepsilon_v^p} \dot{\varepsilon}_v^p \quad (2.81)$$

Maintenant, on restreint la dépendance de  $\Psi_p^s$  vis-à-vis de  $\phi^{er}$  et  $\varepsilon_v^p$  de telle sorte que :

$$\Psi_p^s(\boldsymbol{\varepsilon}^p, \varepsilon_v^p, \bar{\varepsilon}^p, \phi^{er}) = \Psi_p^s(\boldsymbol{\varepsilon}^p, \varepsilon_v^p + \phi^{er}, \bar{\varepsilon}^p) \quad (2.82)$$

Alors, en exploitant la condition d'incompressibilité des grains (2.76b), on a :

$$\frac{\partial \Psi_p^s}{\partial \varepsilon_v^p} \dot{\varepsilon}_v^p + \frac{\partial \Psi_p^s}{\partial \phi^{er}} \dot{\phi}^{er} = \frac{\partial \Psi_p^s}{\partial \phi^p} \dot{\phi}^p \quad (2.83)$$

Ce qui conduit à une nouvelle formulation de  $\Phi_{\rightarrow}^s$  :

$$\Phi_{\rightarrow}^s = \left( \sigma'_{ij} - \frac{\partial \Psi_e^s}{\partial (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p)} \right) (\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^p) + \sigma'_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \frac{\partial \Psi_p^s}{\partial \phi^p} \dot{\phi}^p - \frac{\partial \Psi_p^s}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \frac{\partial \Psi_p^s}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \dot{\bar{\varepsilon}}^p - \frac{\partial \Psi_e^s}{\partial \phi^{er}} \dot{\phi}^{er} \quad (2.84)$$

On remarque dans cette expression que seul le dernier terme (soit  $(\partial\Psi_e^s/\partial\phi^{er})\dot{\phi}^{er}$ ) est lié *explicitement* à la suffusion. Afin d'aboutir à la forme de la dissipation évoquée en fin de section précédente, on propose d'écrire :

$$\begin{aligned}\Phi^s &= \Phi_{\rightarrow}^s + \frac{\partial\Psi_e^s}{\partial\phi^{er}}\dot{\phi}^{er} \geq 0 \\ &= \left( \sigma'_{ij} - \frac{\partial\Psi_e^s}{\partial(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p)} \right) (\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^p) + \sigma'_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p - \frac{\partial\Psi_p^s}{\partial\phi^p}\dot{\phi}^p - \frac{\partial\Psi_p^s}{\partial\varepsilon_{ij}^p}\dot{\varepsilon}_{ij}^p - \frac{\partial\Psi_p^s}{\partial\bar{e}^p}\dot{\bar{e}}^p \geq 0\end{aligned}\quad (2.85a)$$

$$\begin{aligned}\Phi^f &= \Phi_{\rightarrow}^f - \frac{\partial\Psi_e^s}{\partial\phi^{er}}\dot{\phi}^{er} \geq 0 \\ &= \left( -\frac{p_{,i}}{\rho^f} + f_i - \gamma_i \right) M_i + \left( p - \rho^s\mu^f - \frac{\partial\Psi_e^s}{\partial\phi^{er}} \right) \dot{\phi}^{er} \geq 0\end{aligned}\quad (2.85b)$$

de telle sorte que  $\Phi^f$  contienne l'intégralité des termes explicitement liés à la suffusion.

**Remarque** (À propos de l'écriture de  $\Phi^f$ ). *Pour passer de  $\Phi_{\rightarrow}^f$  à  $\Phi^f$ , nous avons de plus considéré (i) l'hypothèse des petites perturbations; (ii) que la vitesse de filtration du fluide est suffisamment faible pour pouvoir négliger le produit scalaire du vecteur  $\mathbf{M}$  par lui même.*

Pour une transformation purement élastique, la dissipation du squelette est nulle et les variables interne n'évoluent pas. La loi de comportement contraintes-déformations est alors obtenue immédiatement :

$$\sigma'_{ij} = \frac{\partial\Psi_e^s}{\partial(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p)} \quad (2.86)$$

Une hypothèse raisonnable, et somme toute classique, consiste à considérer que  $\Psi_e^s$  dépend de la déformation élastique au travers d'une forme quadratique soit :

$$\Psi_e^s = C_{ijkl}(\phi^{er})(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p)(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p) + \Psi_{e\phi}^s(\phi^{er}) \quad (2.87)$$

où le tenseur  $\mathbb{C}$  d'ordre 4 correspond au tenseur d'élasticité, ou tenseur de Hooke. On note que ce tenseur dépend potentiellement de  $\phi^{er}$ , alors interprétée comme une variable d'endommagement. Le terme  $\Psi_{e\phi}^s(\phi^{er})$  est une part de l'énergie élastique dépendant uniquement de  $\phi^{er}$ . Le tenseur des contraintes effectives est dès lors donné par :

$$\sigma'_{ij} = C_{ijkl}(\phi^{er})\varepsilon_{kl}^e \quad (2.88)$$

où sous forme incrémentale :

$$\dot{\sigma}'_{ij} = C_{ijkl}(\phi^{er})\dot{\varepsilon}_{kl}^e + \frac{\partial C_{ijkl}}{\partial\phi^{er}}\varepsilon_{kl}^e\dot{\phi}^{er} \quad (2.89)$$

On déduit que la partie purement dissipative de  $\Phi^s$  est :

$$\Phi^s = \sigma'_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p - \frac{\partial\Psi_p^s}{\partial\phi^p}\dot{\phi}^p - \frac{\partial\Psi_p^s}{\partial\varepsilon_{ij}^p}\dot{\varepsilon}_{ij}^p - \frac{\partial\Psi_p^s}{\partial\bar{e}^p}\dot{\bar{e}}^p \geq 0 \quad (2.90)$$

Au travers de cette dissipation on identifie  $-\partial\Psi_p^s/\partial\phi^p$  et  $-\partial\Psi_p^s/\partial\bar{e}^p$  à des forces d'écroutissage isotropes et  $-\partial\Psi_p^s/\partial\varepsilon_{ij}^p$  à la composante  $ij$  d'un tenseur force d'écroutissage cinématique. Afin d'assurer la positivité d'une telle dissipation, nous pourrions formuler un modèle de comportement *via* la théorie de la plasticité.

### 2.4.2 Couplage entre diffusion hydraulique et suffusion

Comme écrit plus haut, la dissipation du fluide s'écrit maintenant :

$$\Phi^f = \left( -\frac{p_{,i}}{\rho^f} + f_i - \gamma_i \right) M_i + \left( p - \rho^s \mu^f - \frac{\partial \Psi_e^s}{\partial \phi^{er}} \right) \dot{\phi}^{er} \geq 0 \quad (2.91)$$

Nous pouvons dans un premier temps considérer le cas d'un processus diffusif en considérant que la porosité induite par suffusion n'évolue pas  $\dot{\phi}^{er} = 0$ . On retrouve alors une forme classique de la dissipation :

$$\Phi^f = \left( -\frac{p_{,i}}{\rho^f} + f_i - \gamma_i \right) M_i \geq 0 \quad (2.92)$$

Une des façons de s'assurer de la positivité de cette dissipation réduite consiste à statuer la loi de Darcy, c'est à dire d'écrire :

$$M_i = \mathcal{K}_{ij} \left( -\frac{p_{,j}}{\rho^f} + f_j - \gamma_j \right) \quad (2.93)$$

où  $\mathcal{K}$  est le tenseur de perméabilité, symétrique et défini positif de telle sorte que :

$$\Phi^f = \left( -\frac{p_{,i}}{\rho^f} + f_i - \gamma_i \right) \mathcal{K}_{ij} \left( -\frac{p_{,j}}{\rho^f} + f_j - \gamma_j \right) \geq 0 \quad (2.94)$$

Maintenant, considérons arbitrairement un processus purement suffusif. De telle sorte que la dissipation du fluide s'écrive :

$$\Phi^f = \left( p - \rho^s \mu^f - \frac{\partial \Psi_e^s}{\partial \phi^{er}} \right) \dot{\phi}^{er} \geq 0 \quad (2.95)$$

On peut forcer la positivité de  $\Phi^f$  en statuant une loi de comportement linéaire pour  $\dot{\phi}^{er}$  :

$$\dot{\phi}^{er} = \mathcal{R} \left( p - \rho^s \mu^f - \frac{\partial \Psi_e^s}{\partial \phi^{er}} \right) \quad (2.96)$$

où  $\mathcal{R}$  est un réel positif correspondant à une admittance à la suffusion de telle sorte que plus la valeur de  $\mathcal{R}$  est grande, plus l'érodabilité du sol est importante. Un régime stationnaire est atteint lorsque :

$$\rho^s \left( \frac{p}{\rho^s} - \mu^f \right) = \frac{\partial \Psi_e^s}{\partial \phi^{er}} \quad (2.97)$$

Toutefois, il est admis, du point de vue expérimental, que la suffusion est indissociable de l'écoulement et que le taux d'érosion est fortement dépendant de l'intensité de l'écoulement (voir Marot *et al.* [15, 17], Skempton et Brogan [12], Reddi *et al.* [13], Sibille *et al.* [45], Rochim *et al.* [16], Moffat et Fannin [61, 61], Bendahmane *et al.* [19], Chang et Zhang [7], Perzlmair *et al.* [14]). Donc, il est clair que cette façon de procéder pour formuler des lois de comportement est incomplète dans le sens où la cinétique de suffusion n'est pour l'instant pas pilotée par les forces d'écoulement. Afin d'introduire ce lien, une option est de poser un couplage symétrique entre les flux  $\mathbf{M}$  et  $\dot{\phi}^{er}$  et les forces correspondantes. On étend donc le raisonnement ayant conduit aux lois de comportement (2.93) et (2.96). On introduit alors le vecteur des flux généralisés  $\mathcal{F}l$  et le vecteur des forces thermodynamiques généralisées  $\mathcal{G}$  tels que :

$$\Phi^f = \mathcal{G}_I \mathcal{F}l_I \geq 0 \quad (2.98)$$

où l'indice en lettre capitale  $I$  désigne la  $I$ -ème composante des vecteurs généralisés. Par ailleurs, on explicite ici ces vecteurs généralisés :

$$\mathcal{F}l = \begin{bmatrix} M_i \\ \dot{\phi}^{er} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{G} = \begin{bmatrix} -\frac{p_{,i}}{\rho^f} + f_i - \gamma_i^f \\ p - \rho^s \mu^f - \frac{\partial \Psi_e^s}{\partial \phi^{er}} \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

On suppose maintenant que  $\mathcal{G}$  dérive d'un potentiel  $\mathcal{L}$  de telle sorte que la dissipation du fluide s'écrive :

$$\Phi^f = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{F}l_I} \mathcal{F}l_I \geq 0 \quad (2.100)$$

Afin d'assurer la positivité de  $\Phi^f$  d'une façon simple, on construit  $\mathcal{L}$  comme une forme quadratique du flux généralisé :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mathcal{F}l_I \mathcal{A}_{IJ} \mathcal{F}l_J \quad (2.101)$$

De telle sorte que, si le tenseur de couplage  $\mathcal{A}$  est symétrique, défini positif, alors la dissipation  $\Phi^f$  est positive. On établit donc une loi de couplage symétrique linéaire donnant les forces thermodynamiques :

$$\mathcal{G}_I = \mathcal{A}_{IJ} \mathcal{F}l_J \quad (2.102)$$

En inversant cette relation de comportement on écrit :

$$\mathcal{F}l_J = (\mathcal{A}^{-1})_{JI} \mathcal{G}_I \quad (2.103)$$

En injectant les expressions des flux et forces généralisés on écrit alors de manière explicite la loi de comportement donnant le vecteur de flux de masse fluide  $\mathbf{M}$  et la variation de porosité induite par suffusion :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_i \\ \dot{\phi}^{er} \end{bmatrix}}_{\mathcal{F}l} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \mathcal{K}_{ij} & \mathcal{C}_i^v \\ \mathcal{C}_j^\phi & \mathcal{R} \end{Bmatrix}}_{\mathcal{A}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{p_{,j}}{\rho^f} + f_j - \gamma_j^f \\ p - \rho^s \mu^f - \frac{\partial \Psi_e^s}{\partial \phi^{er}} \end{bmatrix}}_{\mathcal{G}} \quad (2.104)$$

Au sein d'une telle écriture, les vecteurs de couplage  $\mathbf{C}^\phi$  et  $\mathbf{C}^v$  doivent être tels que le tenseur de couplage soit défini positif. Idéalement, le tenseur de couplage se doit d'être symétrique. Cette propriété s'observe si :

$$\mathbf{C}^\phi = \mathbf{C}^v = \mathbf{C} \quad (2.105)$$

La signification de ces vecteurs de couplage est un point crucial de la théorie formulée ici. Au travers du couplage comportemental (2.104), la suffusion est pilotée par le gradient de pression, allant dans le sens de résultats issus de la littérature (voir Papamichos [35]). De plus, cette loi de couplage implique un effet direct de la suffusion sur l'écoulement : la diffusion hydraulique n'est plus pilotée seulement par le gradient de pression *via* la loi de Darcy, mais également par des forces propres au processus d'érosion interne par suffusion. Notons cependant qu'à ce stade des développements, nous ne spécifions en aucun cas l'origine microscopique, ou même un ordre de grandeur pour les composantes de  $\mathbf{C}^v$ ,  $\mathbf{C}^\phi$  où même  $\mathcal{R}$ . Ces aspects sont explorés dans ce travail, par le biais d'une analyse micromécanique basée sur la procédure d'homogénéisation à deux échelles.

### 2.4.3 Diffusion thermique

Au regard des effets thermiques, il est clair que la loi de Fourier classique permet à elle seule d'assurer la positivité de la dissipation  $\Phi^{th}$ . On a alors :

$$Q_i = -\kappa_{ij}^{th} T_{,j} \quad (2.106)$$

où  $\kappa_{ij}^{th}$  désigne la composante  $ij$  du tenseur de conductivité thermique. Ce tenseur doit alors être symétrique et défini positif.



# Chapitre 3

## Poros-élasto-plasticité : application à la suffusion

### Table des matières

---

<b>3.1</b>	<b>Formulation du modèle</b>	<b>44</b>
3.1.1	Généralités sur la théorie de l'élasto-plasticité	44
3.1.1.1	Le principe de dissipation plastique maximale	46
3.1.1.2	Le cas des géomatériaux : plasticité non-associée	46
3.1.2	Le modèle parent : « Sinfonietta-Classica »	47
3.1.2.1	Etat caractéristique, état ultime et état critique	51
3.1.3	La suffusion comme un écrouissage en porosité	52
3.1.3.1	Energie gelée et dissipation	55
3.1.4	Un état caractéristique paramétré par la porosité	56
<b>3.2</b>	<b>Simulations sur un point matériel</b>	<b>57</b>
3.2.1	Position du problème sur un point matériel	59
3.2.1.1	Résolution analytique	59
3.2.1.2	Résolution numérique : « Return-Mapping »	61
3.2.2	Conditions drainées	64
3.2.2.1	Pré-chargement à déformation imposée	64
3.2.2.2	Essai de suffusion	66
3.2.2.3	Chargement mécanique vers la rupture	66
3.2.2.4	Résultats	67
3.2.3	Conditions oedométriques	69
3.2.3.1	Pré-chargement à déformation imposée	69
3.2.3.2	Essai de suffusion	69
3.2.3.3	Chargement mécanique <i>post</i> -suffusion	71
3.2.3.4	Résultats	71
<b>3.3</b>	<b>Implémentation aux éléments finis</b>	<b>74</b>

3.3.1	The FEniCS Project . . . . .	74
3.3.2	Position du problème . . . . .	76
3.3.2.1	« Return-Mapping » implicite . . . . .	79
3.3.2.2	Raideur tangente . . . . .	83
3.3.3	Simulations . . . . .	85
3.3.3.1	Paramètres matériau, géométrie et maillage . . . . .	85
3.3.3.2	Pilotage du pré-chargement . . . . .	86
3.3.3.3	Pilotage du chargement en suffusion . . . . .	88
3.3.3.4	Pilotage du chargement post-suffusion . . . . .	88
3.3.3.5	Résultats, validation et conclusions . . . . .	89

*Ce chapitre est dédié à la formulation d'un modèle de comportement élasto-plastique pour le squelette solide d'un milieu granulaire sujet à suffusion. Pour mener à bien un tel objectif, ces travaux s'appuient sur la théorie de la plasticité (voir Hill [62], Simo et Hughes [63], Borja [64] ou encore Han et Reddy [65]) et plus particulièrement sur sa branche appliquée à la mécanique des sols (voir les ouvrages de Nova [58] et Puzrin [66] pour référence). La première étape de cette modélisation correspond à la formulation du modèle, en réalisant une extension d'un modèle existant et connu de la littérature. Afin d'illustrer les capacités de ce modèle à appréhender le comportement mécanique du squelette granulaire au cours et après la suffusion, des simulations seront réalisées à l'échelle d'un point matériel. Finalement, l'implémentation du modèle dans une bibliothèque de calcul numérique par éléments finis sera discutée.*

## 3.1 Formulation du modèle

Cette section concerne le développement du modèle élasto-plastique traduisant le comportement mécanique du squelette granulaire. Après avoir énoncé quelques aspects théoriques de la modélisation élasto-plastique, nous présenterons le modèle parent que nous étendrons pour prendre en compte l'occurrence de la suffusion. Quelques implications de l'extension ainsi réalisée seront discutées.

### 3.1.1 Généralités sur la théorie de l'élasto-plasticité

La théorie de la plasticité fût introduite par les travaux doctoraux de Rodney Hill publiés en 1950 [62]. Ces travaux formalisent cette théorie au regard de l'analyse convexe et sont à la source d'un ensemble de concepts qui constitue la base de la plupart des modèles d'élasto-plasticité d'hier et d'aujourd'hui. Le modèle employé, puis étendu dans ce mémoire n'y échappe pas et s'inscrit dans cet héritage conceptuel. Dans ce sens, il est utile de rappeler certains fondamentaux de la théorie de la plasticité. Pour ce faire, nous nous baserons sur l'ouvrage « Computational Inelasticity » de Simo et Hughes [63] et nous considérerons le cas de la plasticité avec écrouissage. Concernant les notations, et sans perte de généralité, nous nous permettons de formuler ces concepts en terme du tenseur des contraintes effective  $\boldsymbol{\sigma}'$  et d'une force d'écrouissage généralisée  $\mathbf{q}$ , de telle sorte que la dissipation due aux phénomènes plastiques s'écrive généralement de la forme :

$$\Phi^s = \sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p + \langle \mathbf{q}_J, \dot{\alpha}_J \rangle \geq 0 \quad (3.1)$$

où  $\alpha$  désigne une variable d'érouissage. Dans le cadre de ces travaux, on aurait alors :

$$\dot{\alpha} = \begin{bmatrix} \dot{\phi}^p \\ \dot{\epsilon}^p \\ \dot{\bar{\epsilon}}^p \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \Psi_p^s}{\partial \phi^p} \\ -\frac{\partial \Psi_p^s}{\partial \epsilon^p} \\ -\frac{\partial \Psi_p^s}{\partial \bar{\epsilon}^p} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Une idée clé de la théorie de la plasticité est d'introduire une représentation implicite du domaine des états mécaniques plastiquement admissibles par le matériau. Pour ce faire, on introduit classiquement une fonction  $f$  appelée fonction de charge, ou fonction critère de plasticité. Cette fonction est à valeur sur sur l'espace produit  $\mathbb{T}_s^2 \times \mathbb{T}_q$  :

$$f : \mathbb{T}_s^2 \times \mathbb{T}_q \rightarrow \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q}) \mapsto f(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q}) \quad (3.3)$$

où  $\mathbb{T}_q$  désigne l'espace vectoriel d'appartenance de  $\mathbf{q}$ . La partie de  $\mathbb{T}_s^2 \times \mathbb{T}_q$  dans laquelle  $f$  prend une valeur négative est appelée domaine d'élasticité, noté  $\mathbb{S}$ . La frontière  $\partial\mathbb{S}$  de  $\mathbb{S}$  correspond au noyau de  $f$  et est appelée « surface de charge ». Soit de manière synthétique :

$$\mathbb{S} := \{(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q}) \in \mathbb{T}_s^2 \times \mathbb{T}_q \mid f(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q}) < 0\} \quad (3.4a)$$

$$\partial\mathbb{S} := \ker f \equiv \{(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q}) \in \mathbb{T}_s^2 \times \mathbb{T}_q \mid f(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q}) = 0\} \quad (3.4b)$$

L'union de  $\partial\mathbb{S}$  et de  $\mathbb{S}$  (soit la fermeture  $\bar{\mathbb{S}}$  de  $\mathbb{S}$ ) désigne la partie de  $\mathbb{T}_s^2 \times \mathbb{T}_q$  contenant les états  $(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q})$  plastiquement admissibles.

**Remarque** (Plasticité parfaite). *La plasticité parfaite correspond au cas particulier où la fonction de charge est une fonction de  $\boldsymbol{\sigma}'$  seulement. Ceci se traduit par l'invariance du domaine d'élasticité au cours d'une transformation quelconque.*

La fonction de charge permet de déduire l'occurrence ou non des transformations plastiques. En effet, pour subir une transformation plastique, le matériau doit être sujet à un chargement mécanique tel que :

$$f(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q}) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q}) = 0 \quad (3.5)$$

Autrement dit, avant chargement, l'état mécanique du matériau est sur la surface de charge, et il y reste au cours du chargement. Maintenant, si le matériau subit une transformation plastique, alors dans un cadre général, la déformation plastique et la variable d'érouissage suivent une loi d'écoulement donnée en terme d'un multiplicateur plastique  $\dot{\lambda} \geq 0$  et des potentiels  $\mathbf{g}$  et  $\mathbf{h}$ , fonctions du couple  $(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q})$  :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \mathbf{g}_{ij}(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q}) \quad \text{et} \quad \dot{\alpha}_J = \dot{\lambda} \mathbf{h}_J(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q}) \quad (3.6)$$

où  $\dot{\lambda}$  vérifie la condition de cohérence suivante :

$$f(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q}) = 0 \Rightarrow \dot{\lambda} \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q}) = 0 \quad (3.7)$$

Littéralement, cette condition implique que si  $f(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q}) = 0$ , alors soit (i)  $\dot{\lambda} = 0$ , correspondant à un chargement de décharge élastique; (ii)  $\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q}) = 0$ , correspondant effectivement à une transformation plastique; (iii)  $\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q}) = 0$  et  $\dot{\lambda} = 0$ , correspondant à une transformation « neutre ».

### 3.1.1.1 Le principe de dissipation plastique maximale

Le principe de la dissipation plastique maximale stipule que, parmi tous les états de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}'^*$  et d'écroûissage  $\mathbf{q}^*$  plastiquement admissibles, l'état mécanique *réel* (ou effectivement supporté par le matériau) maximise la dissipation plastique :

$$\Phi^s(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q}) = \max_{(\boldsymbol{\sigma}'^*, \mathbf{q}^*) \in \bar{\mathbb{S}}} [\Phi^s(\boldsymbol{\sigma}'^*, \mathbf{q}^*)] \quad (3.8)$$

Plusieurs propositions découlent directement de ce principe : (i) les évolutions de la déformation plastique et de la variable d'écroûissage suivent la règle d'écoulement plastique associée, appelée règle de normalité :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} \quad \text{et} \quad \dot{\alpha}_J = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.9)$$

(ii) Le multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$  vérifie les conditions de complémentarité de Kuhn-Tucker

$$f(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q}) \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} f(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q}) = 0 \quad (3.10)$$

(iii) le domaine d'élasticité est un convexe. Du point de vue de la fonction de charge, ceci se traduit par :

$$(\sigma'_{ij} - \sigma'_{ij}^*) \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} + (\mathbf{q}_J - \mathbf{q}_J^*) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}_J} \geq 0 \quad (3.11)$$

La convexité de  $f$  implique par ailleurs directement la positivité de la dissipation (3.1) (voir par exemple Coussy [43]). La preuve de ces implications est disponible dans l'ouvrage de Simo et Hughes [63].

### 3.1.1.2 Le cas des géomatériaux : plasticité non-associée

Si le modèle de plasticité associée est pertinent pour une large gamme de matériaux métalliques, elle demeure incapable de saisir certaines particularités des géomatériaux. A titre d'exemple, la règle de normalité n'est pas performante dès lors qu'on s'intéresse au comportement plastique volumique d'un sol grenu au bord de la rupture. Les déformations plastiques volumiques sont alors largement sur-évaluées. Pour pallier ce problème, il est communément suggéré que la loi d'écoulement plastique découle d'un potentiel plastique  $g$  (plutôt que de  $f$ ) de telle sorte que :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{ij}} \quad (3.12)$$

Par ailleurs, on considère généralement :

$$\dot{\alpha}_J = \dot{\lambda} \mathbf{h}_J(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q}) \quad (3.13)$$

Ces deux hypothèses viennent rompre avec le principe de travail maximal, avec pour conséquence principale, la perte de la vérification d'office de la positivité de la dissipation. Cette implication dommageable impose *de facto* de vérifier la positivité de la dissipation pour s'assurer de l'admissibilité physique, et ce pour chaque modèle ainsi formulé.

### 3.1.2 Le modèle parent : « Sinfonietta-Classica »

**Remarque** (Convention de signe). *On rappelle ici que la convention de signe employée est celle de la mécanique des milieux continus. Ce choix implique que les expressions présentées dans ce qui suit diffèrent légèrement de leurs formulations originales issues de la littérature, présentée le plus souvent en convention géomécanique.*

Pour modéliser le comportement élasto-plastique des sols grenus, plusieurs familles de modèles sont disponibles. La première famille de modèle est constituée par des modèles de type « sol frottant-cohérent » basés sur le modèle historique de Mohr Coulomb (l'ouvrage de Nova propose une description complète de ce modèle [58]). On notera par exemple, les modèles de Drucker-Prager [67] et de Matsuoka Nakai [68], qui présentent d'avantage de régularité. Cette famille de modèles permet de modéliser convenablement le comportement plastique des sols proches de la rupture, en particulier de sa dépendance à la compression isotrope. Ces modèles ont par ailleurs l'avantage d'être simples d'identification et d'implémentation. En effet, les paramètres de plasticité (cohésion, angle de frottement, angle de dilatance, *etc*) sont peu nombreux et leurs procédures d'estimation bien connues. Ils sont de plus largement employés dans l'industrie et sont disponibles dans la plupart des logiciels de conception aux éléments finis commerciaux utilisés par les bureaux d'études en géotechnique. L'inconvénient de cette famille de modèles réside dans son incapacité à modéliser le comportement élasto-plastique des sols soumis à des états mécanique éloignés de la rupture, notamment dans le cas des sols sujets à des états de contrainte isotropes ou à une cinématique de type « essai oedométrique » [66]. Pour pallier à ce problème, plusieurs tentatives ont été formulées et visent principalement à étendre le modèle en ajoutant plusieurs surfaces de charges « fermant » le domaine d'élasticité [64]. Si ces tentatives se sont révélées fructueuses, elles induisent des coûts d'implémentation et de calculs nettement plus élevés.

La deuxième famille de modèle est constituée par les modèles issus du modèle de Cam-Clay [69, 70], par exemple le modèle de Cam-Clay modifié [71], le modèle de Nor-Sand [72], *etc*. Ces modèles permettent efficacement de reproduire le comportement des sols argileux sujets à des consolidations isotropes ou oedométriques. De plus, formalisant la théorie de l'état critique, ils sont capables de modéliser le comportement frottant des argiles proches de la rupture. Ces modèles sont également pertinents pour la modélisation du comportement non-drainé des sols. En introduisant la dépendance de l'écrouissage à la déformation plastique déviatorique, les travaux de Nova et Wood (voir modèle de Nova-Wood [60]) ont permis de généraliser la modélisation de type Cam-Clay aux sols grenus (sables, roches meubles). Nova reprit cette idée pour proposer le modèle « Sinfonietta-Classica » [73], qui combine les avantages du modèle de Cam-Clay et ceux du critère de rupture de Matsuoka-Nakai. Ce modèle à une seule surface de charge demeure relativement simple puisqu'il introduit un ensemble restreint de paramètres (7 au total).

Les modèles issus de Cam-Clay ont fait l'objet d'extensions visant à prendre en compte les effets de dégradations par restructuration [74]. On peut par exemple citer la restructuration par altération de ponts cimentaires [75, 76, 77] ou capillaires [78][79]. Ces modèles constituent donc de bons candidats pour introduire des effets de dégradation, par exemple par suffusion.

Les travaux présentés ici concernent la modélisation de sols sujets à érosion interne. Étant donné que l'on cherchera à reproduire qualitativement des essais de laboratoire sur sol lacunaire, alors on est intéressé à modéliser le comportement d'un sol limono-sableux sous chargement monotone. C'est pourquoi « Sinfonietta-Classica », simple et capable, constitue un modèle parent pertinent. Dans cette section, on présentera le modèle « Sinfonietta-Classica » et nous discuterons les possibilités d'intégration de la suffusion à ce modèle.

**Remarque** (Une première modification). *Le modèle « Sinfonietta-Classica » introduit, pour la partie élastique du comportement, une loi de type « hypoélastique », impliquant que la dissipation élastique ne soit pas nécessairement nulle. C'est pourquoi nous préfererons considérer que le comportement du squelette est élastique linéaire, voir l'équation (2.88).*

Dans le cadre du modèle « Sinfonietta-Classica » et à la manière de Cam-Clay, les forces d'érouissage sont réduites à une unique force d'érouissage isotrope  $p_c$  positive représentant la pression de préconsolidation du matériau. On peut donc spécifier les différents concepts évoqués plus haut. La fonction de charge est à valeur sur l'espace produit  $\mathbb{T}_s^2 \times \mathbb{R}_+^*$  :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{T}_s^2 \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{\sigma}', p_c) &\mapsto f(\boldsymbol{\sigma}', p_c) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Le domaine d'élasticité et sa frontière sont donc donnés par :

$$\mathbb{S} := \{(\boldsymbol{\sigma}', p_c) \in \mathbb{T}_s^2 \times \mathbb{R}_+^* \mid f(\boldsymbol{\sigma}', p_c) < 0\} \quad (3.15a)$$

$$\partial\mathbb{S} := \ker f \equiv \{(\boldsymbol{\sigma}', p_c) \in \mathbb{T}_s^2 \times \mathbb{R}_+^* \mid f(\boldsymbol{\sigma}', p_c) = 0\} \quad (3.15b)$$

Pour subir une transformation plastique, le matériau doit alors être sujet à un chargement mécanique tel que :

$$f(\boldsymbol{\sigma}', p_c) = 0 \quad (3.16a)$$

$$\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}', p_c) = 0 \quad (3.16b)$$

Puisque orienté vers la modélisation du comportement mécanique des sables, le modèle « Sinfonietta-Classica », utilise une loi d'écoulement plastique non associée :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{ij}} \quad (3.17)$$

où  $g$  est alors le potentiel plastique et  $\dot{\lambda}$  le multiplicateur plastique vérifiant les conditions de chargement-déchargement suivantes, analogues aux conditions de Kuhn-Tucker (considérées dans le cas des matériaux observant le principe du travail maximal) :

$$f(\boldsymbol{\sigma}', p_c) \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} f(\boldsymbol{\sigma}', p_c) = 0 \quad (3.18)$$

Ainsi que la condition de cohérence :

$$f(\boldsymbol{\sigma}', p_c) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}', p_c) \leq 0, \quad \dot{\lambda} \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}', p_c) = 0 \quad (3.19)$$

**Remarque** (Quelques notations). *Afin d'introduire l'expression de la fonction de charge  $f$  et celle du potentiel plastique  $g$  dans le cadre de « Sinfonietta-Classica », il est nécessaire d'introduire quelques quantités : on introduit  $p'$  comme la pression effective moyenne,  $\mathbf{s}'$  la partie déviatorique du tenseur des contraintes effectives et  $\boldsymbol{\xi}$  le tenseur ratio de contrainte effective :*

$$p' = -\frac{1}{3}\sigma'_{ii}, \quad s'_{ij} = \sigma'_{ij} + p\delta_{ij}, \quad \xi_{ij} = \frac{s'_{ij}}{p'} \quad (3.20)$$

On introduit  $J_2$  comme le deuxième invariant de  $\mathbf{s}'$ , la contrainte déviatorique  $q$ , et le ratio de contrainte  $\xi$  :

$$J_2 = \frac{1}{2}s'_{ij}s'_{ij}, \quad q = \sqrt{3J_2}, \quad \xi = \frac{q}{p'} \quad (3.21)$$

On donne finalement  $J_{2\xi}$  et  $J_{3\xi}$  comme le second et le troisième invariant du tenseur  $\xi$ , respectivement :

$$J_{2\xi} = \xi_{ij}\xi_{ij}, \quad J_{3\xi} = \xi_{ij}\xi_{jk}\xi_{ki} \quad (3.22)$$

Pour « Sinfonietta-Classica », la fonction de charge  $f$  et le potentiel plastique  $g$  sont donnés comme suit :

$$f(\boldsymbol{\sigma}', p_c) = 3\beta(z-3) \ln \frac{p'}{p_c} + \frac{9}{4}(z-1) J_{2\xi} + zJ_{3\xi} \quad (3.23a)$$

$$g(\boldsymbol{\sigma}', p_g) = 9(z-3) \ln \frac{p'}{p_g} + \frac{9}{4}(z-1) J_{2\xi} + zJ_{3\xi} \quad (3.23b)$$

Ici,  $\beta$  est un nombre sans dimension qui caractérise la non associativité du modèle. En effet, si  $\beta = 3$ , alors le modèle est associé, la loi d'écoulement se réduit à la règle de normalité :

$$\beta = 3 \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{ij}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} \quad (3.24)$$

On remarque par ailleurs que la quantité  $p_g$  est une quantité futile, homogène à une pression, qui doit être positive mais qui n'interviendra à aucun moment lors des calculs puisque seules les dérivées partielles de  $g$  par rapport aux composantes  $\sigma'_{ij}$  importeront. La quantité  $z$  est également un nombre sans dimension, qui est liée à la pente  $Z$  de la ligne d'état caractéristique du matériau par la relation :

$$z = \frac{(9-Z)^2}{3-Z^2+2\frac{Z^3}{9}}, \quad Z = \frac{6 \sin \varphi}{3 - \sin \varphi} \quad (3.25)$$

$\varphi$  représente alors l'angle de frottement mesuré à l'atteinte de l'état caractéristique. La ligne d'état caractéristique sépare l'espace des états mécaniques en deux demi-espaces : le demi espace caractérisé par  $\xi > Z$ , contenant les états mécaniques pour lequel le matériau est dilatant ; le demi espace caractérisé par  $\xi < Z$ , contenant les états mécaniques pour lequel le matériau est contractant. Si  $\xi = Z$ , alors le matériau est plastiquement incompressible. D'un point de vue formel l'état caractéristique du matériau se traduit par la nullité de la dilataance  $d$  définie comme le rapport entre l'incrément de déformation plastique volumique et la norme de l'incrément de déformation plastique déviatorique :

$$d = -\frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{\sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p}} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial \sigma'_{kl}} \delta_{kl}}{\sqrt{\left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{\delta_{ij}\delta_{kl}}{3}\right) \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{kl}} \left(\delta_{im}\delta_{jn} - \frac{\delta_{ij}\delta_{mn}}{3}\right) \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{mn}}} \quad (3.26)$$

où  $\left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{\delta_{ij}\delta_{kl}}{3}\right)$  désigne les composantes de l'opérateur de projection déviatorique. La présence du signe « - » est due à la convention de signe employée. On souhaite en effet que la dilataance soit positive lors de compressions plastiques. L'équation (3.26) stipule que la dilataance est complètement déterminée dès lors que l'état de contrainte effective est connu. En conditions axisymétriques, et pour des états de contrainte effective de compression, suivant Nova [73],  $J_{2\xi}$

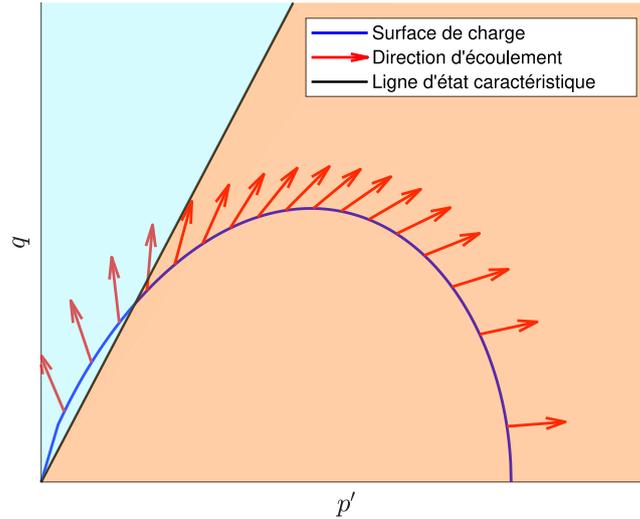


FIGURE 3.1 – Surface de charge et direction d'écoulement plastique

se résume à  $-2\xi^2/3$ , et  $J_{3\xi}$  à  $2\xi^3/9$ . La dilatance devient alors une fonction de  $\xi$  telle que :

$$d = \frac{3(z-3) - (z-1)\xi^2 + \frac{2}{9}z\xi^3}{\sqrt{\frac{3}{2}(z-1)\xi^2 + \frac{4}{9}z^2\xi^4 - \frac{6}{9}z(z-1)\xi^3}} \quad (3.27)$$

La démarche d'obtention de cette expression est disponible dans l'annexe B.2. La figure 3.1 représente la surface de charge et la ligne d'état caractéristique dans le plan de Cambridge ( $p', q$ ). Les flèches rouges indiquent la direction d'écoulement plastique, soit finalement la direction portant le gradient du potentiel plastique  $g$ . La région bleue située au-dessus de la ligne d'état caractéristique correspond à la région sur laquelle le matériau est dilatant tandis que la région orange située sous la ligne d'état caractéristique correspond à la région sur laquelle le matériau est contractant.

Finalement, la forme et l'étendue du domaine d'élasticité sont pilotées par l'écroutissement en pression de préconsolidation. Cette force d'écroutissement correspond à la compression isotrope pour laquelle le matériau subira des déformations plastiques. Dans un modèle de type Cam-Clay, la pression de préconsolidation est une fonction de la déformation plastique volumique  $\varepsilon_v^p$ . Si cette proposition est adaptée à la modélisation des argiles, elle est insuffisante pour modéliser les sables. Afin de traduire plus fidèlement le comportement de ces derniers, Nova proposa d'introduire des effets de la déformation plastique déviatorique. On retrouve cette idée dans le modèle de Nova-Wood puis dans « Sinfonietta-Classica ». La pression de préconsolidation varie selon la loi d'évolution suivante :

$$\dot{p}_c = \frac{p_c}{\beta_p} \left( -\dot{\varepsilon}_v^p + \varkappa \sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p} + \varpi \sqrt[3]{\dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{jk}^p \dot{\varepsilon}_{ki}^p} \right) \quad (3.28)$$

où  $\beta_p$  est une quantité sans dimension représentant la souplesse plastique du matériau.  $\varkappa$  et  $\varpi$  sont des quantités sans dimension permettant de pondérer respectivement les effets du second invariant et du troisième invariant de la déformation déviatorique plastique sur l'écroutissement du matériau. Selon Nova, (voir [80] par exemple),  $\varpi$  peut être pris nul dans la plupart des cas et c'est ce que nous ferons ici. Etant données ces quelques remarques, on reformule la loi d'écroutissement

pour les développements à venir :

$$\dot{p}_c = \frac{p_c}{\beta_p} (-\dot{\varepsilon}_v^p + \varkappa \dot{\varepsilon}^p) \quad (3.29)$$

Cette dernière équation achève la formulation mathématique du modèle parent et par là même, permet de passer à son enrichissement pour introduire les effets de la suffusion.

### 3.1.2.1 Etat caractéristique, état ultime et état critique

Bien qu'issu du modèle de Cam-Clay, le modèle « Sinfonietta-Classica » n'est pas un modèle à « état critique » au sens où le concept d'état critique n'est pas à la source de sa formulation. « Sinfonietta-Classica » est plutôt un modèle à « état caractéristique ». L'existence d'un état critique n'est alors pas garantie, et est dépendante du jeu de paramètres retenu pour le sol ainsi modélisé. Afin de lever toute ambiguïté, il est nécessaire de définir ce qu'on entend par « état caractéristique », « état ultime » et finalement « état critique ». On précise que les définitions sont proposées ici au regard du tryptique  $(p', q, \varepsilon_v^p)$ , pour les sols sollicités dans un appareil triaxial de révolution, en conditions drainées avec pilotage monotone en déformations. Par ailleurs on suppose que le matériau est dans un régime plastique de comportement.

- i L'état *caractéristique* correspond à un état de contrainte telle que la variation de déformation plastique volumique est nulle

$$\dot{\varepsilon}_v^p = 0 \quad (3.30)$$

- ii L'état *ultime* du matériau correspond à l'état de contrainte résiduel que peut supporter le matériau et correspond à un comportement parfaitement plastique. Pour un incrément de déformation donné, on a alors  $\dot{p}_c = 0$ , induisant :

$$\dot{p}' = 0, \quad \dot{q} = 0 \quad (3.31)$$

- iii L'état *critique* est un cas particulier où on peut distordre un échantillon sans engendrer de variation de l'indice des vides  $e$  et sans induire de variation de l'état de contrainte. Il se caractérise par :

$$\dot{e} = 0, \quad \dot{p}' = 0, \quad \dot{q} = 0 \quad (3.32)$$

Par ailleurs, si le comportement élastique du squelette suit la loi de Hooke, comme c'est le cas ici, alors  $\dot{p}' = 0$  implique la constance de la déformation élastique volumique. En considérant  $\dot{\varepsilon}_v = \dot{\varepsilon}_v^p + \dot{\varepsilon}_v^e$ , l'état critique se réécrit comme :

$$\dot{\varepsilon}_v^e = 0, \quad \dot{\varepsilon}_v^p = 0, \quad \dot{p}' = 0, \quad \dot{q} = 0 \quad (3.33)$$

On peut envisager l'état critique, s'il en est, comme un cas particulier de l'état ultime, où celui-ci se retrouve confondu avec l'état caractéristique. En effet, l'état caractéristique est atteint pour  $\xi = Z$  (par définition) conduisant à :

$$\dot{\varepsilon}_v^p = 0 \quad (3.34)$$

On remarque alors que si  $\varkappa = 0$  (ce qui constitue le cas particulier en question), alors une fois l'état caractéristique atteint et considérant la loi d'érouissage (3.29),  $p_c$  reste constant. Dans le cas d'un chargement triaxial axisymétrique drainé et monotone, il en résulte  $\dot{p}' = 0$  et  $\dot{q} = 0$ . Finalement, la constance de  $p'$  implique celle de la déformation volumique élastique. On a alors :

$$\dot{\varepsilon}_v^p = 0, \quad \dot{\varepsilon}_v^e = 0, \quad \dot{p}' = 0, \quad \dot{q} = 0 \quad (3.35)$$

Correspondant à l'état critique défini suivant (3.33). L'état caractéristique devient alors confondu avec l'état ultime.

### 3.1.3 La suffusion comme un écoulement en porosité

La loi d'écrouissage formulée à l'origine était conçue pour modéliser un sol sain, c'est à dire un sol qui ne subit pas d'autres altérations que des déformations plastiques. Nova n'y a pas ajouté d'effets de dissolution, ni érosion ou même de rupture granulaire. Cette situation particulière permet d'employer la condition d'incompressibilité des grains (2.76b) pour établir une équivalence entre l'évolution de porosité irréversible et celle de la déformation plastique volumique :

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \dot{\phi}^p \quad (3.36)$$

La loi d'écrouissage est alors identiquement :

$$\dot{p}_c = \frac{p_c}{\beta_p} \left( -\dot{\phi}^p + \kappa \dot{\varepsilon}^p \right) \quad (3.37)$$

Cette reformulation semble à première vue évidente. Néanmoins, maintenant que la loi d'écrouissage est formulée en terme de porosité irréversible, il est possible de l'étendre *naturellement* pour introduire diverses sources de porosité irréversible, comme l'érosion interne. On s'intéresse au cas d'un sol sujet à la suffusion et on rappelle que la condition d'incompressibilité des grains (2.76b) s'écrit :

$$\dot{\phi}^p = \dot{\varepsilon}_v^p + \dot{\phi}^{er} \quad (3.38)$$

Il est donc clair que la loi d'écrouissage est alors :

$$\dot{p}_c = \frac{p_c}{\beta_p} \left( -\dot{\varepsilon}_v^p - \dot{\phi}^{er} + \kappa \dot{\varepsilon}^p \right) \quad (3.39)$$

Cette formulation alternative constitue un résultat crucial de la modélisation présentée ici : on souligne clairement que la pression de préconsolidation décroît lorsque la porosité induite par suffusion augmente.

Une première implication est identifiable immédiatement : pour un état de contrainte donné et fixe, l'augmentation de  $\phi^{er}$  tend à resserrer le domaine d'élasticité et la surface de charge  $\partial\mathcal{S}$  « s'effondre » vers l'état de contrainte. Afin d'examiner les conséquences plus profondes d'une telle implication, nous pouvons réaliser une expérience de pensée. Pour ce faire on considère un échantillon de pression de préconsolidation initiale  $p_{c0}$  et sur lequel un état de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}'$  est appliqué de telle sorte que le matériau soit dans un régime comportemental élastique  $f(\boldsymbol{\sigma}', p_{c0}) < 0$ . On suppose par ailleurs que le chargement en contrainte  $\boldsymbol{\sigma}'$  est piloté explicitement et est maintenu constant. Maintenant, considérons un processus de suffusion de telle sorte que l'arrachement de particules soit prédominant, caractérisé par  $\dot{\phi}^{er} > 0$ . Alors la pression de préconsolidation décroît depuis  $p_{c0}$  vers une valeur courante  $p_c < p_{c0}$ . La surface de charge  $\partial\mathcal{S}$  « chute » sur l'état de contrainte effective. Puisqu'à ce moment le matériau est en régime élastique, alors cette décroissance de pression de préconsolidation se fait *librement*, c'est à dire qu'aucune transformation plastique n'a lieu. Cependant, dès lors que la quantité de particules fines arrachée atteint une valeur telle que  $p_c$  ait suffisamment décréu, induisant  $f(\boldsymbol{\sigma}', p_c) = 0$ , alors  $p_c$  ne peut plus décroître librement. En effet, un nouvel arrachement de particules induisant une nouvelle décroissance de  $p_c$  conduirait à  $f(\boldsymbol{\sigma}', p_c) > 0$ . Cette condition implique que  $\boldsymbol{\sigma}'$  soit hors du domaine d'élasticité, ce qui est plastiquement inadmissible. Pour conserver l'admissibilité de l'état de contrainte, des déformations plastiques doivent opérer, contrebalçant ainsi l'augmentation de  $\phi^{er}$ . En tout état

de fait, ces déformations plastiques « maintiennent » la surface de charge *sur* l'état de contrainte courant, impliquant  $\dot{f} = 0$ . On examine cette restriction en la développant :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} \dot{\sigma}'_{ij} + \frac{\partial f}{\partial p_c} \dot{p}_c = 0 \quad (3.40)$$

Comme l'état de contrainte effective est fixé on a :

$$\frac{\partial f}{\partial p_c} \dot{p}_c = 0 \Rightarrow \dot{p}_c = 0 \quad (3.41)$$

Compte tenu de la loi d'érouissage (3.39), on aboutit à la restriction suivante :

$$\dot{\varepsilon}_v^p - \varkappa \dot{\varepsilon}^p = -\dot{\phi}^{er} \quad (3.42)$$

Cette égalité constitue une restriction cinématique régissant les déformations plastiques induites par suffusion *pour un état de contrainte effective constant*. Si on considère la dilatance (3.26) du matériau, alors (3.42) s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}_v^p \left(1 - \frac{\varkappa}{d}\right) = -\dot{\phi}^{er} \quad (3.43)$$

Puisque la dilatance est une fonction de l'état de contrainte seulement, et est connue dès lors que  $\sigma'$  est connu, alors (3.43) constitue une restriction sur la déformation plastique volumique *pour un état de contrainte effective constant*. Nous pouvons maintenant analyser quelques cas limites :

- i On considère le cas d'un chargement isotrope (soit  $q = 0$ ), la déformation plastique déviatorique est constante. Dans ces conditions la restriction (3.42) se simplifie pour devenir :

$$\dot{\varepsilon}_v^p = -\dot{\phi}^{er} \quad (3.44)$$

- ii Dans le cas d'un sol dont le paramètre  $\varkappa$  est nul, (3.43) devient *indépendante* de l'état de contrainte :

$$\dot{\varepsilon}_v^p = -\dot{\phi}^{er} \quad (3.45)$$

Si, de plus, le matériau est érodé sous une contrainte effective constante située sur, voire au dessus de la ligne d'état caractéristique, alors l'incrément de déformation plastique volumique censé contrebalancer l'augmentation de la porosité induite par suffusion ne pourra pas se développer. L'échantillon s'effondre alors sur lui-même. En effet, un incrément de déformation plastique volumique est positif si le sol est en régime de dilatance et ne peut donc pas évaluer  $-\dot{\phi}^{er}$  puisque cette quantité est négative et non nulle. Ce résultat corrobore les déductions issues des travaux de Muir Wood *et al.* [23], de Scholtès *et al.* [24] concernant les échantillons « érodés » à proximité et au dessus de l'état caractéristique : ces auteurs montrent que la disparition de particules fines déclenche l'instabilité de l'échantillon si ce dernier est proche, voir au dessus, de son état caractéristique.

Maintenant, on s'intéresse aux effets de la suffusion sur la typologie comportementale du sol érodé, avec un intérêt particulier pour la résistance du matériau. On propose de réaliser une seconde expérience de pensée. On considère un échantillon dense que l'on teste en conditions triaxiales de révolution, piloté en déplacement, voire en déformation. Au sein de cette expérience, l'érosion se fait préalablement au chargement mécanique sous un état de contrainte isotrope fixée :  $p'$  est une donnée et  $q = 0$ .

**Remarque** (A propos de l'état de densité). *Du point de vue du modèle « Sinfonietta-Classica » comme dans le cas du modèle de Cam-Clay modifié, la notion de densité est à interpréter relativement à l'état de contrainte, au travers de la notion de ratio de surconsolidation. En effet, pour un état de contrainte ( $p', q = 0$ ), l'état de densité du sol est caractérisé par le rapport entre  $p'$  la pression de préconsolidation  $p_c$ , appelé ratio de surconsolidation. Plus ce rapport est faible, plus le sol est dense. Plus le rapport de surconsolidation est proche de 1, plus le sol est lâche. Dans ce document, nous employerons de façon équivalente les termes « dense », « fortement surconsolidé », ou même « faiblement confiné ».*

Le comportement du matériau sain devrait alors être typique des échantillons denses ( $p' \ll p_c$ ). En terme de réponse en déviateur des contraintes  $q$  par rapport à la déformation axiale  $\varepsilon_a$ , ce comportement se caractérise par un maximum (pic) de déviateur des contraintes  $q$  suivi d'une décroissance asymptotique vers un régime résiduel qualifié d'état limite. En raison de la loi d'écroutissement (3.39), en cours d'érosion, le matériau se dé-densifie. L'échantillon érodé se comporte alors comme un matériau lâche, dont le comportement se caractérise par une tendance asymptotique vers le même état limite que celui du matériau sain, dense. Ceci étant, on statue que, du point de vue du modèle présenté ici, et pour un échantillon initialement dense, la suffusion induit une évanescence du pic de déviateur des contraintes. Cette disparition est induite par la chute de la surface de charge vers l'état de contrainte. Dans le cas du matériau sain, le pic de déviateur des contraintes est dû au fait que le matériau plastifie pour la première fois sur la région des dilatances, au-dessus de l'état ultime. Cette plastification à haut niveau de déviateur des contraintes s'accompagne alors d'un écroutissement négatif (ou adoucissement) induisant la tendance asymptotique vers l'état ultime. Une fois l'érosion effectuée, la surface de charge s'est effondrée vers l'état de contrainte et lors du chargement *post-suffusion*, le matériau plastifiera pour la première fois dans la région des contractances, induisant un écroutissement positif et la tendance asymptotique vers l'état limite. Par ailleurs, la réduction de l'étendue du domaine d'élasticité implique une réduction de l'amplitude des déformations élastiques avant plastification. Ces déductions font alors un écho tout particulier aux résultats expérimentaux proposés par Chang et Zhang [20] et numériques de Muir Wood *et al.* [23], Scholtès *et al.* [24] et de Aboul Hosn *et al.* [25] où la perte de résistance du sol consiste principalement en une perte de résistance au pic, due à un changement d'état de densité, de dense vers lâche.

Concernant les matériaux initialement lâches ( $p' \sim p_c$ ), la suffusion n'aura pas d'effet particulier sur la réponse dans le plan ( $\varepsilon_a, q$ ). Du point de vue du modèle, la dé-densification par suffusion rendra simplement le matériau plus lâche sans affecter la valeur de son état limite. En effet, le matériau lâche plastifie initialement dans la région des contractances et montre une tendance asymptotique vers l'état ultime. Une fois la suffusion achevée, alors (i) l'amplitude des éventuelles déformations élastiques sera réduite ; (ii) la première plastification en région de contractance ainsi que la tendance comportementale asymptotique vers l'état ultime sont préservées. Comme énoncé dans la précédente expérience de pensée, il est fortement probable que l'échantillon montre un développement de déformations plastiques volumiques considérable lors de l'érosion, si l'accroissement de  $\phi^{er}$  est suffisant. A l'échelle d'un échantillon, ces déformations plastiques volumiques de contractances induisent un tassement du sol et finalement contrebalancent la perte de densité que la suffusion tend à induire. Ainsi, les matériaux lâches ne subissent pas de perte de résistance mécanique. Ces déductions sont en accord avec les résultats expérimentaux présentés dans la thèse de Nguyen [81].

### 3.1.3.1 Energie gelée et dissipation

On peut intégrer la loi d'écoulement pour obtenir  $p_c$  puis l'énergie gelée  $\Psi_p^s$ . On commence donc par intégrer  $p_c$  :

$$\dot{p}_c = \frac{\partial p_c}{\partial \phi^p} \dot{\phi}^p + \frac{\partial p_c}{\partial \bar{\epsilon}^p} \dot{\bar{\epsilon}}^p = \frac{p_c}{\beta_p} \left( -\dot{\phi}^p + \varkappa \dot{\bar{\epsilon}}^p \right) \quad (3.46)$$

En factorisant par les incréments des variables internes, on obtient une équation aux dérivées partielles :

$$\left( \frac{\partial p_c}{\partial \phi^p} + \frac{p_c}{\beta_p} \right) \dot{\phi}^p = \left( -\frac{\partial p_c}{\partial \bar{\epsilon}^p} + \varkappa \frac{p_c}{\beta_p} \right) \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (3.47)$$

On suppose alors une séparation de variable soit :

$$p_c(\phi^p, \bar{\epsilon}^p) = p_c^\phi(\phi^p) p_c^\epsilon(\bar{\epsilon}^p) \quad (3.48)$$

Permettant de reformuler (3.47) sous la forme suivante :

$$\left( \frac{1}{p_c^\phi} \frac{\partial p_c^\phi}{\partial \phi^p} + \frac{1}{\beta_p} \right) \dot{\phi}^p = \left( -\frac{1}{p_c^\epsilon} \frac{\partial p_c^\epsilon}{\partial \bar{\epsilon}^p} + \frac{\varkappa}{\beta_p} \right) \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (3.49)$$

Cette égalité doit se vérifier pour des incréments  $\dot{\phi}^p$  et  $\dot{\bar{\epsilon}}^p$  à priori quelconques et non nuls. Ceci implique que les coefficients de ces incréments sont identiquement nuls. On obtient alors un jeu d'équations différentielles ordinaires d'ordre 1 à coefficients constants :

$$\frac{\partial p_c^\phi}{\partial \phi^p} + \frac{1}{\beta_p} p_c^\phi = 0 \quad (3.50a)$$

$$-\frac{\partial p_c^\epsilon}{\partial \bar{\epsilon}^p} + \frac{\varkappa}{\beta_p} p_c^\epsilon = 0 \quad (3.50b)$$

Ces équations s'intègrent de façon classique et on écrit leurs solutions générales :

$$p_c^\phi(\phi^p) = p_{c0}^\phi \exp\left(-\frac{\phi^p}{\beta_p}\right) \quad (3.51a)$$

$$p_c^\epsilon(\bar{\epsilon}^p) = p_{c0}^\epsilon \exp\left(\frac{\varkappa \bar{\epsilon}^p}{\beta_p}\right) \quad (3.51b)$$

où  $p_{c0}^\phi$  et  $p_{c0}^\epsilon$  constituent des données initiales. En injectant ces résultats dans (3.48) et en écrivant la condition initiale  $p_{c0} = p_{c0}^\phi p_{c0}^\epsilon$ , on obtient l'expression intégrée de  $p_c$  :

$$p_c(\phi^p, \bar{\epsilon}^p) = p_{c0} \exp\left(-\frac{\phi^p}{\beta_p} + \frac{\varkappa \bar{\epsilon}^p}{\beta_p}\right) \quad (3.52)$$

On rappelle que les dérivées de l'énergie gelée par rapport aux variables d'écoulement représentent les forces d'écoulement. Par ailleurs, on suggère d'identifier :

$$p_c = -\frac{\partial \Psi_p^s}{\partial \phi^p} \quad (3.53)$$

On peut alors intégrer partiellement l'expression de l'énergie gelée :

$$\Psi_p^s(\phi^p, \epsilon^p, \bar{\epsilon}^p) = \beta_p p_c(\phi^p, \bar{\epsilon}^p) + \mathfrak{H}_k(\epsilon^p) + \mathfrak{H}_i(\bar{\epsilon}^p) + \Psi_{p0}^s \quad (3.54)$$

où  $\Psi_{p0}^s$  désigne un niveau d'énergie gelée de référence. Les fonctions  $\mathfrak{H}_k$  et  $\mathfrak{H}_i$  sont issues naturellement de l'intégration de (3.53) par rapport à  $\phi^p$  du fait des dépendances de  $\Psi_p^s$  vis-à-vis de  $\epsilon^p$  et  $\bar{\epsilon}^p$ , supposées lors de l'écriture de la dissipation du squelette (2.90). Réécrivons justement cette dissipation :

$$\Phi^s = \sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p + p_c \dot{\phi}^p - \left( p_c \varkappa + \frac{\partial \mathfrak{H}_i}{\partial \bar{\epsilon}^p} \right) \dot{\bar{\epsilon}}^p - \frac{\partial \mathfrak{H}_k}{\partial \epsilon_{ij}^p} \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (3.55)$$

On voit alors que  $-\frac{\partial \mathfrak{H}_i}{\partial \bar{\epsilon}^p}$  représente une force d'écroûissage isotrope et  $-\frac{\partial \mathfrak{H}_k}{\partial \epsilon_{ij}^p}$  représente les composantes d'une force d'écroûissage cinématique. Cependant, en se recentrant sur le modèle « Sinfonietta-Classica », on considère l'existence d'une unique force d'écroûissage :  $p_c$ . On considère alors que  $\mathfrak{H}_i$  et  $\mathfrak{H}_k$  sont des fonctions constantes, que nous pouvons inclure à  $\Psi_{p0}^s$  :

$$\Psi_p^s(\phi^p, \bar{\epsilon}^p) = \beta_p p_c(\phi^p, \bar{\epsilon}^p) + \Psi_{p0}^s \quad (3.56)$$

La dissipation du squelette s'écrit alors :

$$\Phi^s = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p + p_c \left( \dot{\phi}^p - \varkappa \dot{\bar{\epsilon}}^p \right) \geq 0 \quad (3.57)$$

### 3.1.4 Un état caractéristique paramétré par la porosité

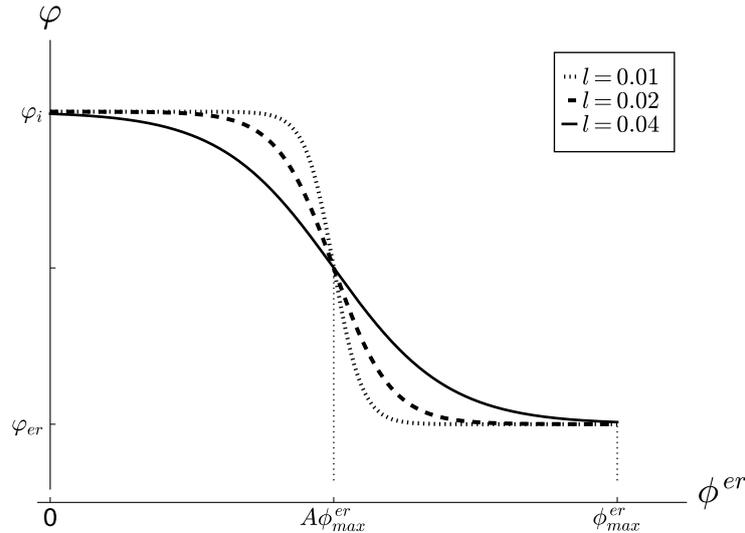
Quelques études de la littérature révèlent que parfois, l'état ultime du sol peut être affecté par l'érosion interne. En se basant les résultats de Chang et Zhang [20] et de Ke et Takahashi [22], la suffusion tend à légèrement diminuer la valeur résiduelle atteinte par le déviateur des contraintes  $q$ . Cet effet est légèrement observable dans le cas des sols denses étudiés dans [20] et est largement discutable au regard d'autres résultats de la littérature [24, 25, 21, 81, 28]. On remarque cependant que cet effet est marqué dans le cas des sols lâches étudiés dans [22]. On propose donc une façon de modéliser cette réduction de résistance à l'état limite en modifiant la pente de la ligne d'état caractéristique. On suppose dès lors que  $Z$  décroît au fur et à mesure que la suffusion se développe. Pour modéliser un tel phénomène, on propose de paramétrer l'angle de frottement à l'état caractéristique par rapport à la porosité induite par suffusion  $\phi^{er}$ . Afin de construire une telle paramétrisation, quelques considérations physiques sont retenues : on suppose que les premières particules érodées sont des particules libres, ne participant que très peu au comportement mécanique du squelette solide. Ensuite, on suppose qu'à partir d'un certain seuil d'érosion, des particules contribuant au comportement mécanique du squelette sont érodées. Ceci implique l'existence d'un seuil  $\phi_c^{er}$  de porosité induite au dessus duquel l'angle de frottement caractéristique  $\varphi$  est fortement affecté. Ce seuil est supposé proportionnel à la quantité maximale de particules érodables notée  $\phi_{max}^{er}$  soit :

$$\phi_c^{er} = A \phi_{max}^{er}, \quad 0 \leq A \leq 1 \quad (3.58)$$

On propose alors une loi de transition régulière :

$$\varphi(\phi^{er}) = \frac{1}{2} \varphi_{er} \left( 1 + \tanh \left( \frac{1}{l} (\phi^{er} - A \phi_{max}^{er}) \right) \right) + \frac{1}{2} \varphi_i \left( 1 + \tanh \left( \frac{1}{l} (A \phi_{max}^{er} - \phi^{er}) \right) \right) \quad (3.59)$$

Dans une telle écriture,  $\varphi_i$  représente l'angle de frottement caractéristique initial et  $\varphi_{er}$  est l'angle de frottement minimal que le sol érodé montrera à l'état caractéristique.  $l$  est alors une quantité sans dimension qui représente une largeur de bande de transition. Plus  $l$  est grand, plus la bande de transition est large et plus la transition de  $\varphi_i$  vers  $\varphi_{er}$  est douce (voir figure 3.2). On notera alors que

FIGURE 3.2 – Angle de frottement caractéristique en fonction de  $\phi^{er}$ 

pour modéliser une diminution de la pente de la ligne d'état caractéristique avec l'augmentation de  $\phi^{er}$ , il faut nécessairement que  $\varphi_{er}$  soit inférieur à  $\varphi_i$ . Cependant, si on souhaite modéliser un regain de résistance résiduelle induit par érosion, alors on choisira  $\varphi_{er} > \varphi_i$ . En plus de modéliser la variation de résistance résiduelle du sol, cette loi implique l'existence d'un fuseau de lignes d'état caractéristique, que nous appellerons *fuseau caractéristique*. Ce fuseau est délimité par les deux lignes d'état caractéristique extrêmes de pentes  $Z_i$  et  $Z_{er}$ , correspondant respectivement à  $\varphi_i$  et  $\varphi_{er}$ . Ainsi, au cours de l'érosion, la ligne d'état caractéristique courante balaie le fuseau caractéristique. Ce résultat implique que, si le ratio de contrainte  $\xi$  est fixé entre  $Z_i$  et  $Z_{er}$ , la typologie de la réponse plastique du sol peut varier au cours de l'érosion. Dans le cas d'une érosion monotone, on distingue alors deux cas possibles. Dans un cas où  $Z_i > Z_{er}$  (voir figure 3.3), alors le sol passera d'un comportement contractant (voir figure 3.3a) à un comportement dilatant (voir figure 3.3b). Inversement si  $Z_i < Z_{er}$  (voir figure 3.4), alors le sol passera d'un comportement dilatant (voir figure 3.4a) à comportement contractant (voir figure 3.4b). Si le ratio de contrainte est à l'extérieur du fuseau caractéristique, alors la typologie comportementale ne sera pas affectée.

Finalement, les paramètres  $\phi_{max}^{er}$ ,  $A$  et  $l$ ,  $\varphi_{er}$  sont vraisemblablement fortement dépendants de la nature du sol. On note les probables influences de la distribution granulaire du sol (et particulièrement le contenu en fines initial), de l'angularité des grains, de la direction d'écoulement par rapport à la direction des contraintes principales (voir Chang et Zhang, [20]), et éventuellement de l'empilement granulaire (voir Muir Wood *et al.* [23]).

Maintenant que le modèle de comportement élasto-plastique a été formulé, il est temps d'en illustrer les capacités à l'aide de simulations numériques.

## 3.2 Simulations sur un point matériel

Dans cette section, nous examinons les capacités du modèle à appréhender le comportement mécanique des sols sujets à érosion interne, que ce soit en cours de suffusion, où lors d'un chargement mécanique *post-suffusion*. Pour ce faire, des simulations à l'échelle du point matériel sont réalisées

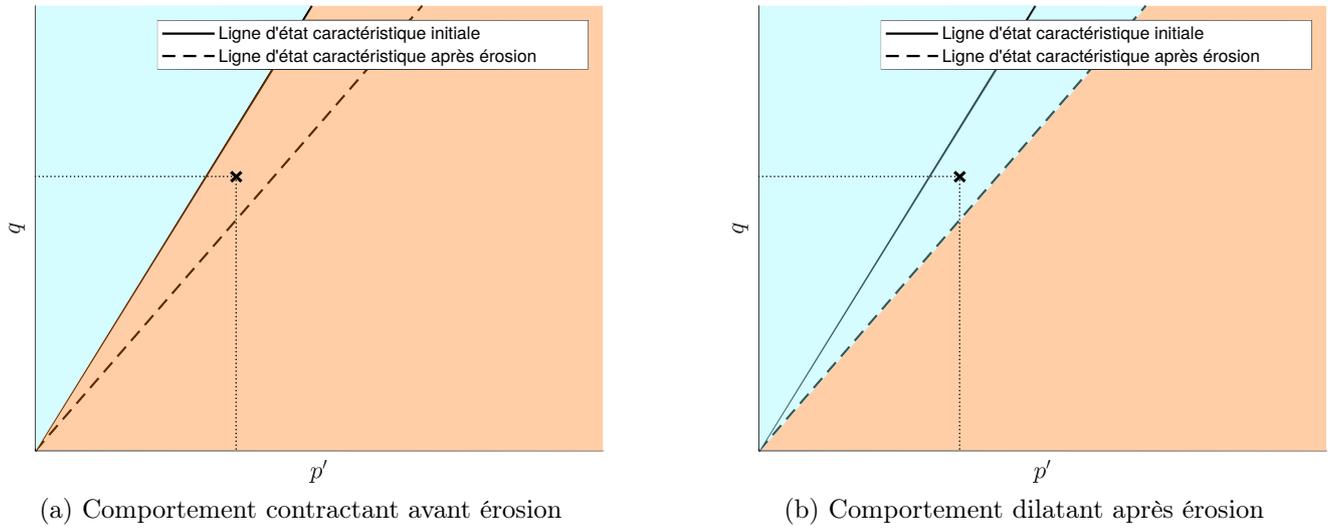


FIGURE 3.3 – Illustration du passage de comportement contractant à dilatant (cas  $Z_i > Z_{er}$ )

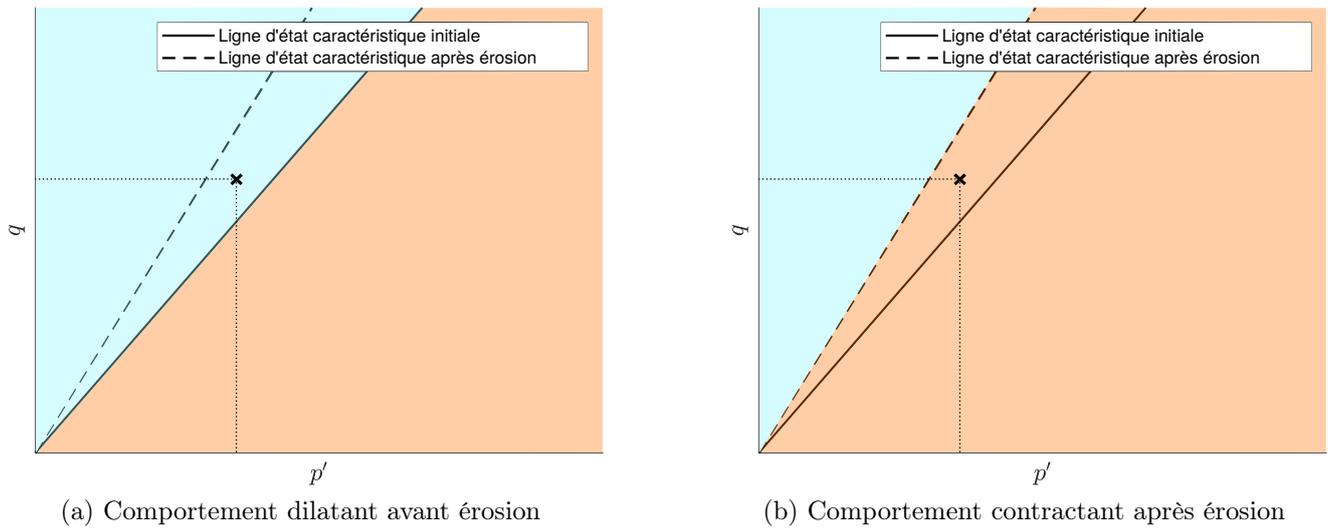


FIGURE 3.4 – Illustration du passage de comportement dilatant à contractant (cas  $Z_i < Z_{er}$ )

et leurs résultats analysés. Ces simulations se feront en conditions triaxiales de révolution drainées et en conditions oedométriques. En confrontant les résultats des simulations en conditions triaxiales drainées avec ceux d'essais expérimentaux issus de la littérature[20, 22], les capacités du modèle seront analysées. Les simulations en conditions oedométriques seront réalisées à titre exploratoire, afin d'anticiper le comportement d'un sol érodé sous de telles conditions. Ceci étant, avant d'aller plus loin et pour des question de reproductibilité, il est de rigueur de poser le problème d'élasto-plasticité que nous résolvons et de détailler la procédure de résolution du problème de plasticité qui sera employée.

### 3.2.1 Position du problème sur un point matériel

Dans les simulations qui suivent, nous considérons que la porosité induite par suffusion évolue sous forme incrémentale, et ce de manière *quasi*-statique. Si cette hypothèse prévient la possibilité d'intégrer pleinement la cinétique de la suffusion, elle permet de calculer la réponse du modèle sans l'analyser sous le prisme de la consolidation ni celui de la dynamique. Dans ce sens, le processus de suffusion sera assimilé à un chargement donné en terme d'incrément de porosité induite  $\dot{\phi}^{er}$ . De plus, nous ne considérerons pas de processus d'endommagement par la suffusion. De ce fait, le tenseur de Hooke employé dans les équations (2.88) et (2.89) sera pris indépendant de  $\phi^{er}$ .

#### 3.2.1.1 Résolution analytique

Ici nous proposons une résolution analytique du problème d'élasto-plasticité pour un point matériel chargé en déformations, *via* un incrément de déformation  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , et chargé en suffusion considérant un incrément de porosité induite par suffusion  $\dot{\phi}^{er}$ . Résoudre le problème consiste alors à déterminer l'évolution de la variable interne  $\bar{e}^p$ , du tenseur des déformations plastiques  $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ , de la force d'érouissage  $p_c$  et du tenseur des contraintes effectives  $\boldsymbol{\sigma}'$ . On distingue alors plusieurs cas :

- i Le point matériel se comporte de façon élastique
- ii Le point matériel subit une transformation plastique

Dans le premier cas, la déformation plastique n'évolue pas et la solution du problème est donnée directement par la loi de comportement élastique incrémentale (2.89). On a alors :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}'_{ij} = C_{ijkl} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{kl} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p_{kl}) = C_{ijkl} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{kl} \quad (3.60)$$

Si le matériau subit une transformation plastique, alors il faut dans un premier temps déterminer l'expression du multiplicateur plastique. Au préalable, nous introduisons quelques notations :

$$\begin{cases} \mathbf{q} &= -\ln(p_c) \\ \alpha &= -\varepsilon_v^p + \varkappa \bar{e}^p \end{cases} \quad (3.61)$$

Dans ces conditions, on redéfinit la fonction de charge :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{T}_s^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{\sigma}', p_c) &\mapsto f(\boldsymbol{\sigma}', p_c) \end{aligned} \quad (3.62)$$

On a alors l'expression suivante :

$$f(\boldsymbol{\sigma}', p_c) = 3\beta(z-3)(\ln(p') + \mathbf{q}) + \frac{9}{4}(z-1)J_{2\xi} + zJ_{3\xi} \quad (3.63)$$

Par ailleurs, si on considère :

$$\mathfrak{h} = -\frac{\partial g}{\partial \sigma'_{kl}} \delta_{kl} + \varkappa \sqrt{\left( \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{kl}} \left( \delta_{im} \delta_{jn} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{mn} \right) \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{mn}}} \quad (3.64)$$

alors on peut écrire :

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \dot{\lambda} \mathfrak{h} \\ \dot{\mathfrak{q}} = -H \left( \dot{\alpha} - \dot{\phi}^{er} \right) = -\dot{\lambda} H \mathfrak{h} + H \dot{\phi}^{er} \end{cases} \quad (3.65)$$

avec  $H = \beta_p^{-1}$ . Partons de la condition de cohérence (3.16b), qui doit être vérifiée et s'exprime comme suit :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} \dot{\sigma}'_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{q}} \dot{\mathfrak{q}} = 0 \quad (3.66)$$

On incorpore la loi de comportement élastique (2.89) ainsi que la loi d'écoulement (3.39) :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} C_{ijkl} (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p) - \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{q}} H \left( \dot{\alpha} - \dot{\phi}^{er} \right) = 0 \quad (3.67)$$

On considère la loi d'écoulement plastique (3.12) ainsi que l'équation (3.65) et on écrit :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} C_{ijkl} \left( \dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{kl}} \right) - \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{q}} H \left( \dot{\lambda} \mathfrak{h} - \dot{\phi}^{er} \right) = 0 \quad (3.68)$$

On factorise par  $\dot{\lambda}$  et on déduit l'expression du multiplicateur plastique :

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{q}} H \dot{\phi}^{er}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{kl}} + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{q}} H \mathfrak{h}} \quad (3.69)$$

La loi d'écoulement (3.12) donne alors l'évolution de la déformation plastique :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{pq}} C_{pqrs} \dot{\varepsilon}_{rs} + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{q}} H \dot{\phi}^{er}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{pq}} C_{pqrs} \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{rs}} + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{q}} H \mathfrak{h}} \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{ij}} \quad (3.70)$$

On remarque que cette expression du multiplicateur fait intervenir de manière explicite le chargement en suffusion  $\dot{\phi}^{er}$ . Ce résultat diffère des formulations classiques et stipule que les dégradations par suffusion induisent des déformations plastiques dès lors que la condition  $\dot{f} = 0$  doit-être vérifiée, comme évoqué dans la sous-section 3.1.3. Finalement, les évolutions respectives de la déformation plastique cumulée, de la force d'écoulement  $\mathfrak{q}$  et de la contrainte effective sont déterminées, dès lors qu'on considère les équations (3.64), (3.65), et (2.89). En particulier, la loi de comportement incrémentale donnant la contrainte effective s'écrit maintenant :

$$\dot{\sigma}'_{ij} = C_{ijkl} (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p) = C_{ijkl} \left( \dot{\varepsilon}_{kl} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{pq}} C_{pqrs} \dot{\varepsilon}_{rs} + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{q}} H \dot{\phi}^{er}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{pq}} C_{pqrs} \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{rs}} + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{q}} H \mathfrak{h}} \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{kl}} \right) \quad (3.71)$$

Après un réarrangement, on peut reformuler cette expression comme :

$$\dot{\sigma}'_{ij} = C_{ijkl} \left( \delta_{kr} \delta_{ls} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{pq}} C_{pqrs} \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{kl}}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{pq}} C_{pqrs} \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{rs}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} H \mathbf{h}} \right) \dot{\epsilon}_{rs} - C_{ijkl} \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} H \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{kl}}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{pq}} C_{pqrs} \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{rs}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} H \mathbf{h}} \dot{\phi}^{er} \quad (3.72)$$

On introduit alors  $\mathbb{C}^{ep}$  le tenseur de raideur tangente, de composante  $C_{ijrs}^{ep}$  :

$$C_{ijrs}^{ep} := \begin{cases} C_{ijkl} \left( \delta_{kr} \delta_{ls} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{pq}} C_{pqrs} \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{kl}}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{pq}} C_{pqrs} \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{rs}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} H \mathbf{h}} \right) & \text{si } \dot{\lambda} > 0 \\ C_{ijrs} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.73)$$

Ainsi qu'un tenseur de raideur porale controlant l'évolution de la contrainte lors du développement de la suffusion :

$$C_{ij}^{er} := \begin{cases} C_{ijkl} \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} H \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{kl}}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{pq}} C_{pqrs} \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{rs}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} H \mathbf{h}} & \text{si } \dot{\lambda} > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.74)$$

Ainsi, l'évolution de la contrainte effective s'écrit maintenant de la façon suivante :

$$\dot{\sigma}'_{ij} = C_{ijrs}^{ep} \dot{\epsilon}_{rs} - C_{ij}^{er} \dot{\phi}^{er} \quad (3.75)$$

Cette équation est un résultat crucial de cette démarche de modélisation : la variation de contrainte effective, la variation de déformation ainsi que la variation de porosité induite par suffusion sont désormais liées explicitement par une équation synthétisant les différentes implications évoquées au cours de ce chapitre.

Néanmoins, les intégrations analytiques de la déformation plastique et du tenseur des contraintes effectives ne sont pas aisées en raison du caractère non-linéaire des équations d'évolution. Afin de résoudre complètement le problème d'élasto-plasticité sur un point matériel, et pour un chemin de chargement complet, on préférera l'emploi de méthodes d'intégration numériques de type « Return-Mapping ».

### 3.2.1.2 Résolution numérique : « Return-Mapping »

Dans la littérature (voir par exemple Simo et Hughes [63], Borja [64] ou encore De Souza Neto *et al.* [82]), la démarche de résolution numérique du problème de plasticité est nommée « Return-Mapping ». L'idée principale de cette méthode consiste, pour un incrément de chargement donné, à considérer une prévision élastique de la réponse du point matériel, puis de réaliser une correction plastique si nécessaire. Plusieurs méthodes existent pour réaliser un « Return-Mapping », certaines implicites (voir « General Closest Point Projection » [63]), d'autres explicites (voir « Cutting-Plane » [63]) ou même mixtes, (voir « Generalised Trapezoidal Return mapping », « Generalised

Midpoint Return Mapping » [82]). Les méthodes implicites sont pertinentes dans des codes de calcul par méthode des éléments finis. Les méthodes explicites ne sont pas aussi pertinentes au regard des éléments finis [63] mais leur implémentation à l'échelle d'un point matériel seul est bien plus aisée. C'est pourquoi pour cette étude, nous nous cantonnerons à l'emploi de méthodes explicites, et en particulier de la méthode dite de « Cutting-Plane ».

Dans une démarche incrémentale de résolution, on discrétise l'intervalle de temps d'observation  $\mathcal{T}$  du matériau en ensemble  $\mathcal{T}^*$  d'instant  $t_i$ .

**Remarque** (Notations). *Dans cette sous-section et afin de faciliter la lecture, les tenseurs seront exprimés avec la notation intrinsèque.*

On suppose qu'au temps  $t_n$ , l'état mécanique du matériau  $(\boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_n^p, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p, \phi^{er}, \boldsymbol{\sigma}'_n, \mathbf{q}_n)$  est parfaitement connu et constitue un état de référence. On considère un incrément de temps  $\Delta t$  entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$ , durant lequel un incrément de chargement  $(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \phi^{er})$  est appliqué sur le matériau. On considère alors que le matériau répond de manière élastique à cet incrément de chargement et on exprime l'état élastique prévisionnel au temps  $t_{n+1}$  :

$$\underbrace{\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \phi_{n+1}^{er} = \phi_n^{er} + \Delta \phi^{er} \end{cases}}_{\text{Chargement}}, \quad \underbrace{\begin{cases} \dot{\lambda}_{n+1}^{tr} = 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p^{tr}} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \\ \alpha_{n+1}^{tr} = \alpha_n \end{cases}}_{\text{Prévision élastique}} \quad (3.76)$$

où l'exposant  $tr$  désigne l'état élastique prévisionnel (cette notation est issue de l'anglais « trial state » employé par Simo et Hughes [63]). Compte tenu des lois de comportement donnant la contraintes effectives (2.89) et la pression de préconsolidation (3.39) on a :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tr} = \boldsymbol{\sigma}'_n + \mathbb{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{q}_{n+1}^{tr} = \mathbf{q}_n + H \Delta \phi^{er} \quad (3.77)$$

**Remarque** (Une différence cruciale). *La prévision élastique diffère grandement de celle employée classiquement (voir Simo et Hughes [63]). En effet dans notre cas, la force d'écroûissage  $\mathbf{q}_{n+1}^{tr}$  issue de la prévision élastique n'est pas égale à  $\mathbf{q}_n$ . Cette différence tient au fait que la prévision élastique intègre les effets de l'érosion via le chargement  $\phi^{er}$ .*

On évalue alors la valeur de la fonction de charge sur l'état mécanique prévisionnel, soit  $f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tr}, \mathbf{q}_{n+1}^{tr})$ , et on réalise un test d'admissibilité de la prévision tel que :

- i Si  $f_{n+1}^{tr} := f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tr}, \mathbf{q}_{n+1}^{tr}) \leq 0$  alors la prévision est plastiquement *admissible*
- ii Si  $f_{n+1}^{tr} := f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tr}, \mathbf{q}_{n+1}^{tr}) > 0$  alors la prévision est plastiquement *inadmissible*

Si la prévision est plastiquement admissible, alors pour chaque quantité d'intérêt on pose :

$$(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{tr} \quad (3.78)$$

et le problème est résolu, on pose  $n = n + 1$  et on passe à l'incrément de chargement suivant. Si la prévision est plastiquement inadmissible alors on réalise une correction plastique suivant un processus itératif de type Newton-Raphson. Cette correction plastique s'effectue jusqu'à obtenir un état de contrainte et d'écroûissage plastiquement admissible. D'un point de vue géométrique, cette correction revient à projeter l'état de contrainte et d'écroûissage sur la surface de charge :

c'est le « Return Mapping ». Pour chaque quantité, on introduit un nouveau compteur ( $k$ ) et on pose alors

$$(\cdot)_{n+1}^{(k=0)} = (\cdot)_{n+1}^{tr} \quad (3.79)$$

Dans le cadre de l'algorithme « Cutting-Plane », on cherche à aboutir à l'admissibilité plastique de l'état de contrainte et d'écroissage. On calcule alors :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}^{(k)} &= \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}^{(k=0)} - \mathbb{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)} \\ \mathbf{q}_{n+1}^{(k)} &= \mathbf{q}_{n+1}^{(k=0)} - H \Delta \alpha_{n+1} \end{cases} \quad (3.80)$$

Si on considère l'évolution entre le pas suivant ( $k+1$ ) et l'état ( $k$ ) connu, on écrit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}^{(k+1)} &= \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}^{(k)} - \mathbb{C} : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p \\ \mathbf{q}_{n+1}^{(k+1)} &= \mathbf{q}_{n+1}^{(k)} - H \delta \dot{\alpha}_{n+1} \end{cases} \quad (3.81)$$

où  $\delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$  et  $\delta \dot{\alpha}_{n+1}$  désignent les variations respectives d'incrément de déformation plastique et de variable d'écroissage entre les états ( $k$ ) et ( $k+1$ ). A l'aide de la règle d'écoulement plastique (3.12), on peut reformuler (3.81) comme :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}^{(k+1)} &= \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}^{(k)} - \delta \dot{\lambda} \mathbb{C} : \left. \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right|_{n+1}^{(k)} \\ \mathbf{q}_{n+1}^{(k+1)} &= \mathbf{q}_{n+1}^{(k)} - \delta \dot{\lambda} H \mathbf{h}_{n+1}^{(k)} \end{cases} \quad (3.82)$$

Projeter  $(\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}^{(k+1)}, \mathbf{q}_{n+1}^{(k+1)})$  sur la surface de charge revient à résoudre le problème suivant :

$$\text{Trouver } \delta \dot{\lambda} \text{ tel que } f_{n+1}^{(k+1)} := f(\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}^{(k+1)}, \mathbf{q}_{n+1}^{(k+1)}) = 0 \quad (3.83)$$

On écrit alors  $f_{n+1}^{(k+1)}$  sous la forme d'un développement limité :

$$f_{n+1}^{(k+1)} = f_{n+1}^{(k)} + \left. \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right|_{n+1}^{(k)} : (\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}^{(k+1)} - \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}^{(k)}) + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \right|_{n+1}^{(k)} (\mathbf{q}_{n+1}^{(k+1)} - \mathbf{q}_{n+1}^{(k)}) \quad (3.84)$$

En exploitant (3.82), on fait émerger  $\delta \dot{\lambda}_{n+1}$  et on obtient la solution du problème :

$$\delta \dot{\lambda} = \frac{f_{n+1}^{(k)}}{\left. \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right|_{n+1}^{(k)} : \mathbb{C} : \left. \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right|_{n+1}^{(k)} + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \right|_{n+1}^{(k)} H \mathbf{h}_{n+1}^{(k)}} \quad (3.85)$$

On peut alors procéder à la mise à jour des variables :

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_{n+1}^{(k+1)} &= \dot{\lambda}_{n+1}^{(k)} + \delta \dot{\lambda} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k+1)} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)} + \delta \dot{\lambda} \left. \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right|_{n+1}^{(k)} \\ \alpha_{n+1}^{(k+1)} &= \alpha_{n+1}^{(k)} + \delta \dot{\lambda} \mathbf{h}_{n+1}^{(k)} \end{cases} \quad (3.86)$$

Ainsi qu'à celle de la contrainte effective et de la force d'écroissage : on calcule  $\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}^{(k+1)}$  et  $\mathbf{q}_{n+1}^{(k+1)}$  en exploitant (3.82). Finalement, on évalue la fonction de charge au pas ( $k+1$ ) et on fait un test d'admissibilité de la solution du problème. On introduit pour ce faire la tolérance  $TOL_f$  représentant la valeur cible pour  $f_{n+1}^{(k+1)}$  (idéalement nulle, à titre d'exemple, dans ce travail, nous considérons  $TOL_f = 10^{-8}$ ).

- i Si  $f_{n+1}^{(k+1)} := f(\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}^{(k+1)}, \mathbf{q}_{n+1}^{(k+1)}) \leq TOL_f$ , alors la solution est plastiquement *admissible*. On procède à la mise à jour suivante :

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_{n+1} = \dot{\lambda}_{n+1}^{(k+1)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k+1)} \\ \alpha_{n+1} = \alpha_{n+1}^{(k+1)} \end{cases}, \quad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}'_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}^{(k+1)} \\ \mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_{n+1}^{(k+1)} \end{cases} \quad (3.87)$$

On pose  $n = n + 1$  et on passe à l'incrément de chargement suivant.

- ii Si  $f_{n+1}^{(k+1)} := f(\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}^{(k+1)}, \mathbf{q}_{n+1}^{(k+1)}) > TOL_f$ , alors la solution est plastiquement *inadmissible*, alors on pose  $k = k + 1$  et on reprend le problème (3.83) jusqu'à vérifier le test d'admissibilité.

Maintenant que l'algorithme « Cutting-Plane » est formulé, nous pouvons l'exploiter dans le cadre de simulations sur point matériel sollicité en conditions drainées triaxiales et oedométriques. Les expressions des dérivations  $\partial g / \partial \boldsymbol{\sigma}'$ ,  $\partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}'$ , et  $\partial f / \partial \mathbf{q}$  sont disponibles dans l'annexe B.1.

### 3.2.2 Conditions drainées

Cette sous-section a pour but de proposer une validation qualitative du modèle vis-à-vis d'essais expérimentaux de la littérature. Les résultats retenus pour cette comparaison sont ceux de Chang et Zhang [20], obtenus sur un sable dense, et ceux de Ke et Takahashi [22], obtenus sur un sable lâche. Les essais expérimentaux évoqués ici sont des essais d'érosion en appareil triaxial de révolution. La première étape des essais consiste à charger mécaniquement l'échantillon, en conditions drainées, de manière à atteindre un niveau de contrainte donné. Ensuite, l'échantillon est soumis à un essai d'érosion, durant lequel la contrainte est *maintenue constante*. Une fois le chargement d'érosion achevé et le matériau érodé, un second chargement mécanique, en conditions drainées, est réalisé jusqu'à rupture de l'échantillon. Les simulations sur un point matériel seront réalisées de manière à reproduire au plus proche les essais sus-mentionnés. Pour ce faire, nous considérons le jeu de paramètres matériels présentés dans le tableau 3.1 où  $E$  et  $\nu$  désignent respectivement les module de Young et coefficient de Poisson des matériaux. L'ensemble de ces paramètres a été déterminé ou estimé ( $\phi_{er}$ ,  $A$ ,  $l$ ,  $\xi$ ,  $p_{c0}$  et  $\phi_{max}^{er}$ ) à partir des données expérimentales de la littérature et permettent de reproduire qualitativement les résultats expérimentaux. La réponse d'un matériau sain est également présentée, à titre d'échantillon témoin.

TABLE 3.1 – Paramètres des échantillons testés sous conditions triaxiales axisymétriques drainées

Matériau	$E$ (MPa)	$\nu$	$\beta$	$\varphi_i$	$\varphi_{er}$	$A$	$l$	$\beta_p$	$\varkappa$	$p_{c0}$ (kPa)	$\phi_{max}^{er}$
Sable Dense	4.34	0.36	1.2	41°	-	-	-	0.012	0	720	0.031
Sable Lâche	3.46	0.25	1.2	38.5°	36°	0.5	0.01	0.01	0	50	0.05

#### 3.2.2.1 Pré-chargement à déformation imposée

Pour le sable dense, Chang et Zhang [20] ont réalisé trois essais, pour trois niveaux de contrainte différentes. Pour ces trois essais, l'état de contrainte initial est isotrope de telle sorte que  $p'_0 = 50$  kPa. Ensuite, un chargement mécanique est appliqué jusqu'à ce que le ratio de contrainte  $\xi$  atteigne le ratio de contrainte  $\xi_{init}$  souhaité pour commencer la phase d'érosion. Il n'y a pas de

chargement mécanique préalable à l'érosion pour le premier essai, le sable est érodé sous contraintes isotropes soit  $\xi_{init} = 0$ . Pour le deuxième essai,  $\xi_{init} = 1.2$ . Pour le troisième essai,  $\xi_{init} = 1.5$ . Concernant le sable lâche étudié par Ke et Takahashi [22], l'échantillon est érodé sous contraintes isotropes. On pose simplement  $p'_0 = 50\text{kPa}$  et on commence le chargement d'érosion.

Avant de discuter du chargement en érosion, il convient de traiter des spécificités propres aux chargements mécaniques en conditions triaxiales axisymétriques drainées. Dans notre cas, le processus de chargement mécanique est piloté en déformation. Dans le cadre d'un essai triaxial de révolution drainé, la pression de confinement  $\sigma_c$ , imposée par le fluide contenu dans la cellule triaxiale, est maintenue constante. De plus, un vérin ajuste le déplacement du piston induisant une déformation axiale de l'échantillon  $\Delta\varepsilon_a$ . Cette déformation implique alors un supplément de contrainte axiale  $\Delta\sigma'_a$ . Le tenseur des contraintes effectives s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{pmatrix} -\sigma_c + \Delta\sigma'_a & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_c & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_c \end{pmatrix} \quad (3.88)$$

On cherche à appliquer un chargement de déformation axiale assurant la constance des composantes  $\sigma'_{22}$  et  $\sigma'_{33}$  du tenseur des contraintes effectives. Afin d'observer cette constance au cours d'une transformation élastique, on impose l'incrément de déformations suivant :

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \Delta\varepsilon_a & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\Delta\varepsilon_a & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\Delta\varepsilon_a \end{pmatrix} \quad (3.89)$$

Dans cette écriture,  $\Delta\varepsilon_a$  est la donnée de pilotage. Si le matériau se comporte effectivement de manière élastique, alors il est clair que la loi de Hooke (3.89) implique (3.88) :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}' &= -\sigma_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{E}{1+\nu} \left( \begin{pmatrix} \Delta\varepsilon_a & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\Delta\varepsilon_a & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\Delta\varepsilon_a \end{pmatrix} + \nu\Delta\varepsilon_a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= -\sigma_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + E \begin{pmatrix} \Delta\varepsilon'_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.90)$$

on note alors que  $\Delta\sigma'_a = E\Delta\varepsilon'_a$ . Cependant, si le matériau plastifie, alors les contraintes  $\sigma'_{22}$  et  $\sigma'_{33}$  évoluent en réponse aux déformations plastiques développées. Il est alors nécessaire d'appliquer une correction de l'incrément de déformation, à la fin de chaque pas de chargement, une fois le calcul de déformation plastique effectué. Puisqu'on pilote la déformation axiale, la composante  $\Delta\varepsilon_{11}$  doit être maintenue constante dans cette correction. De plus, cette correction doit être construite de telle sorte que  $\sigma'_{22}$  et  $\sigma'_{33}$  soient constants tout au long du chargement. On propose alors l'incrément de déformation corrigé suivant :

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \Delta\varepsilon_a & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\Delta\varepsilon_a + \dot{\lambda} \left( \nu \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{11}} + \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{22}} \right) & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\Delta\varepsilon_a + \dot{\lambda} \left( \nu \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{11}} + \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{33}} \right) \end{pmatrix} \quad (3.91)$$

De cette façon, la déformation élastique est alors donnée par :

$$\Delta \varepsilon^e = \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_a - \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \left( \Delta \varepsilon_a + \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{11}} \right) & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \left( \Delta \varepsilon_a + \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{11}} \right) \end{pmatrix} \quad (3.92)$$

De telle sorte que par la loi de Hooke, le tenseur des contraintes effectives est donné par :

$$\boldsymbol{\sigma}' = -\sigma_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + E \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_a - \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

On note alors que :

$$\Delta \sigma'_a = E \left( \Delta \varepsilon_a - \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{11}} \right) \quad (3.94)$$

Maintenant que la question du pilotage en déformation a été traité, alors nous pouvons détailler la procédure de chargement en suffusion.

### 3.2.2.2 Essai de suffusion

La deuxième étape essais expérimentaux et donc des simulations consiste en un essai d'érosion. Comme nous l'avons évoqué au début de la sous-section 3.2.1, nous ne prenons pas en compte de chargement hydraulique, nous considérons que la suffusion est un processus *quasi*-statique dont l'évolution est donnée et se caractérise par une suite d'état  $\phi^{er}$ . On modélisera l'effet de la suffusion sur la réponse mécanique du matériau par un chargement que nous qualifions « de suffusion » et qui consiste en fait en une suite d'incrément de porosité induite par suffusion  $\Delta \phi^{er}$ . Durant cet essai, aucun incrément de déformation n'est imposé et la contrainte exercée sur l'échantillon est constante. Cependant, dans la sous-section 3.1.3, nous avons établi que la suffusion pouvait engendrer des déformations plastiques. Puisque dans notre cas la contrainte effective est constante lors de la suffusion, alors il n'y a pas de développement de déformation élastique. Par conséquent, durant cette phase, on force la déformation totale du matériau à égaler la déformation plastique développée conjointement à la suffusion :

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.95)$$

Une fois que la suffusion est achevée, on a  $\phi^{er} = \phi_{max}^{er}$ . On peut alors initier le chargement *post*-suffusion vers la rupture.

### 3.2.2.3 Chargement mécanique vers la rupture

Le chargement à la rupture consiste en un chargement piloté en déformations. Le processus de chargement suit le raisonnement proposé en section 3.2.2.1. Il convient néanmoins de définir ce que nous qualifions de rupture. En conditions triaxiales axisymétriques drainées, on considère que la rupture est atteinte quand la contrainte effective n'évolue plus malgré un incrément de déformation donné. Etant donné que pour les matériaux étudiés,  $\nu = 0$ , alors cette rupture se traduit par l'atteinte de l'état critique et la déformation volumique doit alors être constante également.

### 3.2.2.4 Résultats

Les courbes illustrant les résultats des simulations en conditions drainées sont regroupées dans les figures 3.5 et 3.6. Dans un premier temps nous allons analyser la réponse du matériau dense. On remarque que le matériau sain présente une phase élastique précédant une phase de plastification dans la région des dilatances (voir figure 3.5a). La transition entre ces deux phases est marquée, dans le plan  $(\varepsilon_a, q)$  (voir figure 3.5c), par un pic de déviateur des contraintes. Une fois la limite d'élasticité franchie, le comportement du matériau révèle une tendance asymptotique vers l'état ultime caractérisé par  $\xi = Z$  puisque  $\varkappa = 0$ . L'état ultime est en fait un état critique au regard des figures 3.5c et 3.5e. En effet, à l'état ultime, on voit que la déformation volumique et la contrainte effective n'évoluent plus. Par ailleurs, du point de vue des déformations volumiques, on distingue clairement que lors de la phase élastique, le matériau se contracte, tandis qu'il se dilate dès lors que la plastification est initiée (voir figure 3.5e).

Concernant l'échantillon qui a été sujet à érosion sous la condition  $q = 0$ , on remarque que l'érosion a provoqué la chute de la surface de charge (voir figure 3.5a), sans impliquer de déformations plastiques (voir figure 3.5e). Lors du chargement mécanique *post*-suffusion, le matériau ainsi chargé dispose d'une courte réserve d'élasticité (évidente sur la figure 3.5a) et plastifie très tôt, dans la région des contractances. Le comportement élasto-plastique alors développé suit une tendance asymptotique vers un état ultime, sans présenter de pic de déviateur (voir figure 3.5c). L'état ultime ainsi atteint est équivalent à celui du matériau sain, en terme de contraintes. Lors du chargement *post*-érosion, l'échantillon continue légèrement sa contraction élastique puis initie une contraction élasto-plastique dès lors que la limite d'élasticité est atteinte. Cette contraction élasto-plastique se fait de manière asymptotique vers une déformation volumique constante, faisant ici aussi de l'état ultime un état critique.

Si on se concentre maintenant sur les matériaux érodés à  $\xi_{init} = 1.2$  et  $\xi_{init} = 1.5$ , on remarque directement (Figure 3.5e) que pendant l'érosion, des déformations plastiques se développent. En particulier, l'amplitude de ces déformations est plus importante dans le cas où  $\xi_{init} = 1.5$  que dans le cas où  $\xi_{init} = 1.2$ . Nous expliquons ce constat par deux aspects. Mais avant cela, rappelons qu'aucune déformation élastique ne se développe au cours de l'érosion puisque l'état de contrainte est maintenu constant. Les déformations totales induites lors de la suffusion sont donc des déformations plastiques. Maintenant, pour  $\xi_{init} = 1.5$ , la part du chargement en suffusion responsable de la chute de la surface de charge sur l'état de contrainte est nettement plus faible que dans le cas  $\xi_{init} = 1.2$ . En effet, on voit que dans le premier cas, la distance de l'état mécanique à la surface de charge est plus faible que dans le second cas. Par conséquent, dans le cas  $\xi_{init} = 1.5$ , la part du chargement de suffusion impliquant des déformations plastiques volumiques pour préserver l'admissibilité plastique de l'état mécanique est plus importante que dans le cas  $\xi_{init} = 1.2$ . De plus, la valeur de la dilatance, fixée par la valeur de  $\xi_{init}$  (voir équation (3.27)) lors de l'érosion, est plus faible pour  $\xi_{init} = 1.5$  que pour  $\xi_{init} = 1.2$ . Ceci implique qu'à déformation plastique volumique équivalente, le matériau érodé à  $\xi_{init} = 1.5$  déploie une déformation plastique axiale plus importante. Cette restriction justifie la plus faible pente de la courbe de la déformation volumique en fonction de la déformation axiale au cours de l'érosion dans le cas du sol érodé au plus fort ratio de contrainte. On remarque finalement que les sols érodés présentent des comportements *post*-suffusion de tendances asymptotiques équivalentes vers le même état de contraintes et de déformations. Ce comportement asymptotique est dénué de pic de déviateur des contraintes et est purement contractant. L'état ultime de contrainte est le même que celui du matériau sain. On remarque finalement que la déformation volumique totale à la rupture est constante et de même valeur pour chaque matériau érodé.

Face à cette dernière remarque, on pose la question suivante : Est-ce que l'état critique est le même pour tous les matériaux érodés ? Pour discuter de cet aspect, on se réfère à la figure 3.6a donnant l'évolution de l'indice des vides en fonction de la déformation axiale des différents échantillons. Sur cette figure, l'état critique correspond à la constance de l'indice des vides lors du chargement *post*-érosion. On remarque alors immédiatement que le sol sain et les sols érodés présentent le même indice des vides (autour de 0.49) à l'état critique. On déduit donc que les matériaux érodés partagent le même état critique que ce soit en terme de contraintes effectives ou d'indice des vides. De plus, cet état critique est également celui du matériau sain. On synthétise donc plusieurs conclusions concernant les simulations au cours d'une suffusion « fictive » et *post*-suffusion sur échantillons denses en conditions triaxiales drainées :

- i Les échantillons érodés présentent un comportement élasto-plastique contractant alors que l'échantillon sain était élasto-plastiquement dilatant.
- ii Le pic de déviateur des contraintes propre au matériau sain s'évanouit dès lors qu'une érosion suffisamment importante se développe
- iii Les amplitudes de déformations induites par suffusion sont plus importantes pour des fortes valeurs du ratio de contrainte  $\xi_{init}$  à l'initiation de l'érosion.
- iv L'état critique du matériau érodé est identique à celui du matériau sain.

Les conclusions i et ii font directement écho aux implications de la loi d'écrouissage discutées dans la sous section 3.1.3. Les conclusions iii et iv sont issues de l'observation des résultats de simulations. En particulier, la conclusion iii corrobore les observations expérimentales proposées par Chang et Zhang [20], ainsi que les déductions numériques de Scholtès *et al.* [24]. La conclusion iv est en opposition aux travaux de Muir Wood *et al.* qui modélisent l'effet de l'érosion *via* une translation de la ligne d'état critique [23]. En effet, tant que dans notre modèle, nous ne prenons pas en compte de paramétrisation de la ligne d'état caractéristique, alors les matériaux sains et érodés auront le même état critique.

On s'intéresse maintenant au matériau lâche, érodé uniquement sous un état de contrainte effective isotrope. Ici, le matériau sain plastifie dès le début du chargement mécanique et présente un comportement contractant avec tendance asymptotique vers un état ultime (voir figure 3.5d) coïncidant avec l'état caractéristique puisque  $\varkappa = 0$  : il s'agit donc d'un état critique. Concernant le matériau érodé, on remarque que lors de la suffusion, des déformations plastiques se développent, et sont isotropes. On vérifie en effet que  $\dot{\varepsilon}_v^p = 3\dot{\varepsilon}_a^p$ . Ceci est dû directement au fait que le matériau est érodé sous un état de contrainte tel que  $\xi = 0$ . Sous cet état de contrainte effective, seules des déformations plastiques volumiques peuvent se développer. Concernant la phase de chargement *post*-érosion, on remarque qu'à niveau de contrainte égal, l'échantillon érodé présente une raideur tangente plus faible, en particulier pour des niveaux de contrainte déviatorique élevés. Cependant, la typologie comportementale ne change pas : l'échantillon érodé se comporte de la même manière que l'échantillon sain, c'est à dire de façon contractante, asymptotiquement vers un état critique. En tout état de fait, si on omet les déformations induites par suffusion, la courbe de déformation volumique en fonction de la déformation axiale ne change pas de manière significative (voir figure 3.5f). On note que la paramétrisation de la ligne d'état caractéristique (voir figure 3.5b) par la suffusion permet de reproduire correctement la perte de résistance résiduelle que l'échantillon observé lors de l'érosion. En analysant la courbe de l'indice des vides en fonction de la déformation axiale (voir figure 3.6b), on voit que dans ce cas, l'état critique du sol érodé diffère de celui du sol sain. On synthétise ici aussi quelques conclusions :

- i Le comportement d'un sol lâche érodé n'est pas significativement différent de celui de son analogue sain.
- ii La paramétrisation de la ligne d'état caractéristique par  $\phi^{er}$  a induit une différence d'état critique entre le sol sain et le sol érodé.
- iii Au cours du processus de suffusion, l'indice des vides reste constant car l'augmentation de porosité induite par suffusion est compensée par les déformations plastiques de contractance de l'échantillon.

La première conclusion s'explique par le fait que des tassements importants tendent à contrebalancer l'effet de la suffusion [21]. La conclusion ii corrobore cette fois-ci la modélisation de Muir Wood *et al.* [23]. Ensuite, on notera que le modèle est capable de reproduire convenablement une perte de résistance résiduelle telle que celle présentée dans la littérature (voir Ke et Takahashi [22]). La conclusion iii corrobore les résultats expérimentaux et numériques (obtenus avec la DEM) issus des travaux de thèse de Aboul Hosn [21].

### 3.2.3 Conditions oedométriques

Cette sous-section est dédiée à la présentation de simulations en conditions oedométriques. Le matériau retenu pour ce faire est le matériau lâche présenté dans le tableau (3.1). Cependant, cette étude est avant tout exploratoire. Afin de comprendre les phénomènes modélisés par la loi d'écrouissage (3.39), nous ne considérerons pas la paramétrisation de l'état caractéristique, on pose alors  $\varphi_{er} = \varphi_i$ . De la même manière que pour les simulations précédentes, les simulations en conditions oedométriques seront constituées de trois étapes. D'abord en partant d'un état de contrainte effective tel que  $p' = 0.2p_{c0}$  et  $q = 0$ , un pré-chargement en déformation est imposé de manière à atteindre le ratio de contrainte souhaité  $\xi_{init}$ . Ensuite un chargement de suffusion est appliqué. Durant ce chargement, la contrainte axiale est maintenue constante et les déformations latérales sont empêchées. Une fois la suffusion à son terme, la déformation axiale seule est augmentée afin d'estimer sa réponse mécanique *post-suffusion*.

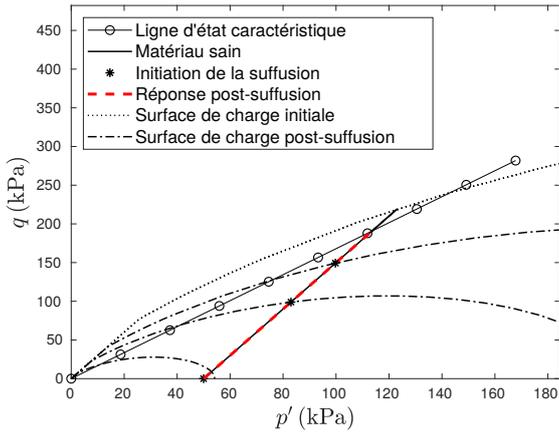
#### 3.2.3.1 Pré-chargement à déformation imposée

En conditions oedométriques, les déformations latérales sont empêchées. Les pré-chargements à déformation imposée en conditions oedométriques consistent en un incrément de déformation axiale  $\Delta\varepsilon_a$  de telle sorte que :

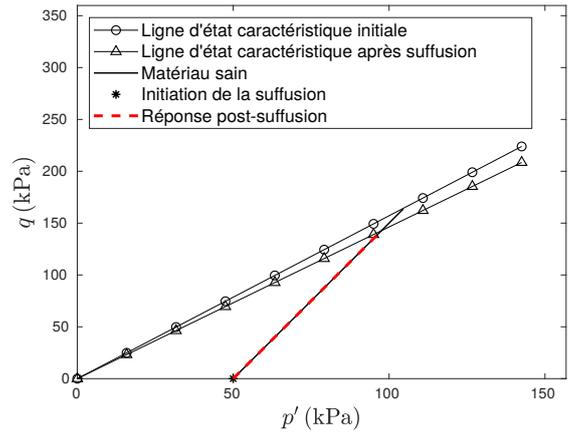
$$\Delta\varepsilon = \begin{pmatrix} \Delta\varepsilon_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.96)$$

#### 3.2.3.2 Essai de suffusion

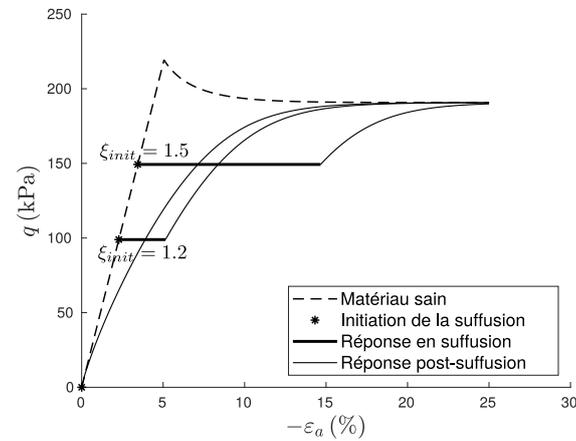
L'essai de suffusion est modélisé, comme dans le cas triaxial drainé, par une évolution *quasi*-statique de  $\phi^{er}$ . Le pilotage de cet essai se fait en terme d'incrément de  $\phi^{er}$  nommés  $\Delta\phi^{er}$  et la déformation axiale est laissée libre. Durant cette phase, la contrainte axiale effective est maintenue constante. Nous allons donc établir ici comment maintenir cette restriction. En conditions



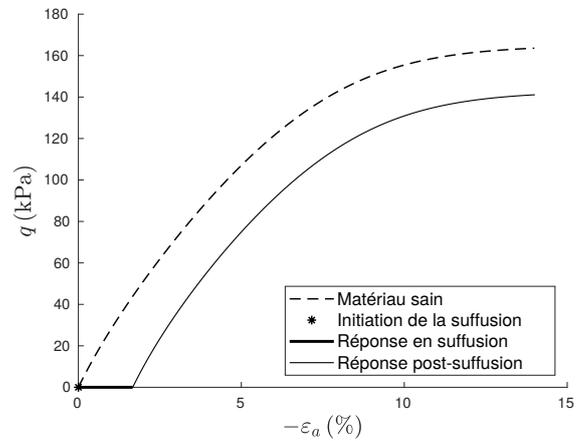
(a) Matériau dense : chemins de contraintes effectives dans le plan de Cambridge



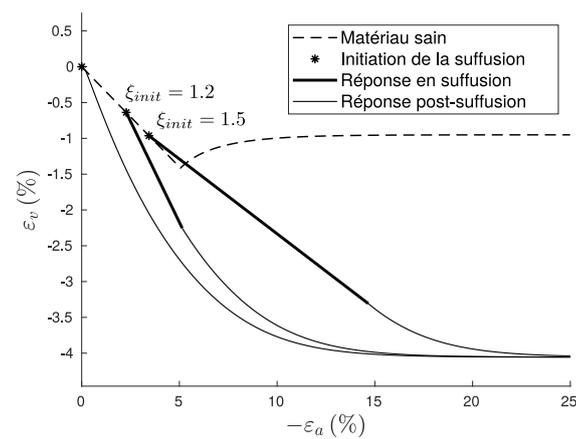
(b) Matériau lâche : chemins de contraintes effectives dans le plan de Cambridge



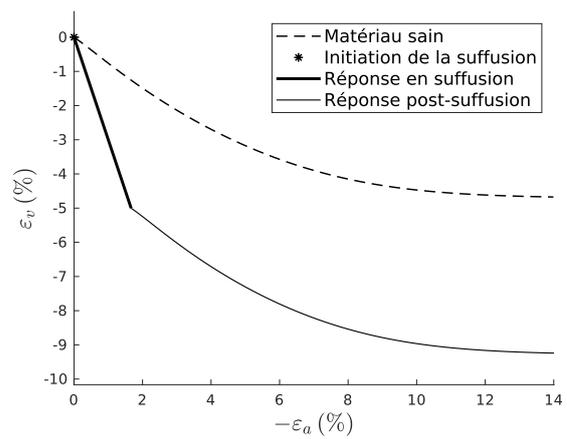
(c) Matériau dense : déviateur des contraintes en fonction de la déformation axiale



(d) Matériau lâche : déviateur des contraintes en fonction de la déformation axiale



(e) Matériau dense : déformation volumique en fonction de la déformation axiale



(f) Matériau lâche : déformation volumique en fonction de la déformation axiale

FIGURE 3.5 – Comparaison comportementale entre matériaux érodés et leurs analogues sains. À gauche, un matériau dense ; à droite, un matériau lâche

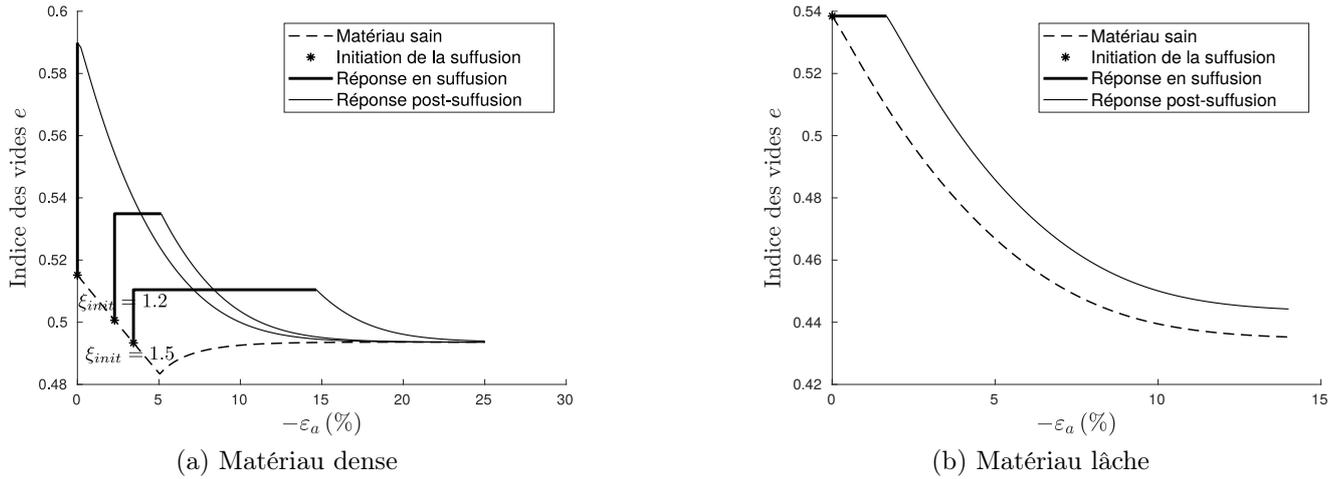


FIGURE 3.6 – Comparaison de l'indice des vides des matériaux érodés et de leurs analogues sains

oedométriques les déformations latérales sont empêchées, on écrit les variations respectives de la déformation et de la déformation élastique sous forme tensorielle :

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e = \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_a - \Delta \varepsilon_a^p & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta \varepsilon_{22}^p & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta \varepsilon_{33}^p \end{pmatrix} \quad (3.97)$$

où  $\Delta \varepsilon_a$  est une inconnue et où  $\Delta \varepsilon_a^p$ ,  $\Delta \varepsilon_{22}^p$  et  $\Delta \varepsilon_{33}^p$  sont solutions du problème de « Return-Mapping ». La variation de contrainte axiale est déduite de la loi de comportement élastique :

$$\begin{aligned} \Delta \sigma'_a &= \frac{E}{1 + \nu} (\Delta \varepsilon_a - \Delta \varepsilon_a^p + \nu (\Delta \varepsilon_a - \Delta \varepsilon_a^p - \Delta \varepsilon_{22}^p - \Delta \varepsilon_{33}^p)) \\ &= E (\Delta \varepsilon_a - \Delta \varepsilon_a^p) - E \frac{\nu}{1 + \nu} (\Delta \varepsilon_{22}^p + \Delta \varepsilon_{33}^p) \end{aligned} \quad (3.98)$$

Imposer le maintien de  $\sigma'_a$  revient à imposer une restriction sur  $\Delta \varepsilon_a$  :

$$\Delta \varepsilon_a = \Delta \varepsilon_a^p + \frac{\nu}{1 + \nu} (\Delta \varepsilon_{22}^p + \Delta \varepsilon_{33}^p) \quad (3.99)$$

Cette restriction doit être imposée à titre de correction, à la fin de chaque itération durant la résolution du problème de « Return-Mapping ».

### 3.2.3.3 Chargement mécanique *post-suffusion*

Le chargement mécanique *post-suffusion* est piloté en déformation de la même manière que le pré-chargement. Ce chargement est arrêté de manière arbitraire dès lors que la déformation axiale atteint 10.5%.

### 3.2.3.4 Résultats

Les résultats des simulations en conditions oedométriques sont synthétisés dans la figure 3.7. La figure 3.7b représente un zoom de la figure 3.7a sur le rectangle rouge. On analyse dans un premier temps la réponse du matériau en cours d'érosion, dans le plan de Cambridge. Remarquons d'abord sur les figures 3.7a, 3.7b et 3.7c que l'état de contrainte effective évolue au cours de l'érosion, que ce soit en terme de  $p'$ , comme de déviateur des contraintes. Cette évolution se fait de deux façons :

i  $p'$  diminue et  $q$  augmente :  $\xi$  augmente

ii  $p'$  augmente et  $q$  diminue :  $\xi$  diminue

Manifestement, la situation i correspond aux érosions initiées sous de faibles valeurs de  $\xi_{init}$ . La situation ii semble correspondre aux érosions initiées sous de fortes valeurs de  $\xi_{init}$ . On trouve une explication de cette réponse particulière dans la littérature traitant de la modélisation de la dégradation de calcarénite par attaques chimiques [77]. Pour ce faire, on considère l'expression de la dilatance (3.26) et on se place en conditions oedométriques :

$$\Delta\varepsilon_{22} = \Delta\varepsilon_{33} = 0 \Rightarrow \Delta\varepsilon_{22}^e = \Delta\varepsilon_{22}^p, \quad \Delta\varepsilon_{33}^e = \Delta\varepsilon_{33}^p \quad (3.100)$$

Pour des grandes valeurs de  $\phi^{er}$ , le sol semble atteindre un équilibre pour lequel l'état de contrainte effective n'évolue plus. Ceci implique que le taux de variation de la déformation plastique est nul. Dans ce sens, la variation de déformation plastique égale la variation de déformation. On a alors :

$$\Delta\varepsilon_{22}^p = \Delta\varepsilon_{33}^p = 0, \quad \Delta\varepsilon_a^p = \Delta\varepsilon_v^p \quad (3.101)$$

Les variations respectives de déformation plastique volumique et de déformation plastique cumulée s'écrivent donc :

$$\Delta\varepsilon_v^p = \Delta\varepsilon_a, \quad \Delta\bar{\varepsilon}^p = \frac{2}{3} |\Delta\varepsilon_a| \quad (3.102)$$

Sous cette condition, la dilatance tend vers la valeur  $3/2$  au cours de la suffusion. Ce résultat est retrouvé dans les simulations, comme on le voit sur la figure 3.7d. Or nous avons pu voir que la dilatance est une fonction de  $\xi$  seulement (voir équation (3.27)) dès lors que l'échantillon et le chargement sont sous conditions axisymétriques, comme c'est le cas dans un oedomètre. Par ailleurs,  $d$  est une fonction décroissante et monotone de  $\xi$  (voir figure 3.8). On peut donc affirmer l'existence d'une valeur  $\xi_{lim}$  vers laquelle tendra le ratio de contrainte, entraîné par la tendance de  $d$  vers  $3/2$ . Compte tenu de ces quelques remarques, il est clair que pendant la suffusion, le sens de variation de  $\xi$  sera déterminé par la relation d'ordre entre  $\xi_{init}$  et  $\xi_{lim}$  de telle sorte que :

$$\text{si } \xi_{init} < \xi_{lim} \quad \text{alors } \Delta\phi^{er} > 0 \Rightarrow \Delta\xi > 0 \quad (3.103)$$

$$\text{si } \xi_{init} > \xi_{lim} \quad \text{alors } \Delta\phi^{er} > 0 \Rightarrow \Delta\xi < 0 \quad (3.104)$$

Dans le cadre des simulations présentées ici,  $\xi_{lim} \approx 0.77$  (lisible sur la figure 3.7c). Les deux inégalités (3.103) et (3.104) donnent une explication aux évolutions respectives de  $p'$  et  $q$  au cours de la suffusion. En effet, on écrit  $\Delta\xi$  en fonction des variations de  $p'$  et de  $q$  :

$$\Delta\xi = \frac{\partial\xi}{\partial p'} \Delta p' + \frac{\partial\xi}{\partial q} \Delta q = -q \frac{\Delta p'}{p'^2} + \frac{\Delta q}{p'} \quad (3.105)$$

On peut établir les implications des inégalités (3.103) et (3.104)

$$(3.103) \Leftrightarrow \frac{\Delta q}{q} > \frac{\Delta p'}{p'}, \quad (3.104) \Leftrightarrow \frac{\Delta q}{q} < \frac{\Delta p'}{p'} \quad (3.106)$$

Pour les simulations réalisées dans ces travaux, la première restriction se manifeste par le cas particulier où  $\Delta q > 0$  et  $\Delta p' < 0$  tandis la seconde induit  $\Delta q < 0$  et  $\Delta p' > 0$ . En pratique, les conditions oedométriques sont représentatives d'un certain nombre de conditions in-situ. Dès lors, il est clair que, en raison des phénomènes d'écrouissage induits par érosion interne, la contrainte

effective dans un massif de sol évoluera au cours d'un processus de suffusion. Cette évolution accompagne alors celle induite par d'éventuelles redistributions des pressions interstitielles durant la suffusion.

La figure 3.7e détaille l'évolution de l'indice des vides en fonction du logarithme (base 10) de  $p'$ . Cette figure représente la courbe de compressibilité du matériau. On constate que le premier effet de l'érosion est une augmentation conséquente de l'indice des vides du matériau, pour les matériaux érodés sous faible niveau de contrainte. Cette augmentation se fait tant que le comportement du matériau est élastique. Une fois que le régime plastique est atteint, alors l'augmentation de l'indice des vides naturellement induite par suffusion se voit contrebalancée par le tassement de l'échantillon. Les échantillons érodés à forts niveaux de contrainte, dont le comportement a déjà atteint un régime élasto-plastique avant suffusion, présentent une variation négligeable d'indice des vides au cours de la suffusion. Conjointement aux variations d'indice des vides opèrent des variations de pression de préconsolidation, comme l'illustre la figure 3.7f. La pression de préconsolidation décroît de manière exponentielle au cours de l'érosion si, et tant que, l'échantillon concerné se comporte de manière élastique. Dès lors que le comportement de l'échantillon est élasto-plastique, cette variation de pression de préconsolidation est plus douce et permet au sol de supporter l'évolution de l'état de contrainte effective imposée par les restrictions cinématiques et (3.102) (3.103). Pour les échantillons érodés aux plus faibles niveaux de contrainte,  $p_c$  augmente légèrement lors de cette phase. Finalement, le changement de tendance de l'évolution de  $p_c$  est caractéristique du moment où la surface de charge atteint l'état de contrainte effective.

Le comportement *post*-érosion de tous les échantillons est analogue à celui du matériau sain et typique des sols sujets à des conditions oedométriques : le ratio de contrainte  $\xi$  tend vers une valeur unique  $\xi_0$ . La ligne  $\xi = \xi_0$  est classiquement désignée par « ligne de  $K_0$ -consolidation » [58] correspondant à un état de poussée des terres qualifié de « repos ». Le long de cette ligne, le ratio entre contrainte effective latérale et contrainte effective axiale est tel que :

$$\frac{\sigma'_{22}}{\sigma'_a} = \frac{\sigma'_{33}}{\sigma'_a} = K_0 \quad (3.107)$$

où  $K_0$  est classiquement nommé coefficient des terres au repos. On remarque que la valeur de  $\xi_0$  (et donc de  $K_0$ ) n'est pas altérée par la suffusion. En effet, selon Nova [58],  $\xi_0$  est une fonction de l'angle de frottement à l'état caractéristique. Dès lors, la paramétrisation (3.59) permettrait de modéliser une modification de  $\xi_0$  et donc de  $K_0$  induite par la suffusion. On synthétise alors les conclusions de cette étude :

- i La dilatance d'un échantillon en cours de suffusion tend vers 1.5.
- ii Durant la suffusion, un échantillon au comportement élasto-plastique sera sujet à des variations des contraintes effectives induites par les restrictions cinématiques propres aux conditions oedométriques, une fois mises à part celles induites par les redistributions de pression interstitielles.
- iii La suffusion augmente l'indice des vides de l'échantillon s'il se comporte de façon élastique. Cette augmentation est contrebalancée par un tassement de l'échantillon s'il est dans un régime comportemental élasto-plastique.
- iv La pression de consolidation décroît exponentiellement au début de la suffusion. Cette décroissance est contrebalancée par le tassement de l'échantillon une fois la limite d'élasticité atteinte.

- v Nous avons observé que *a priori* que la ligne de pression des terres au repos, et le coefficient  $K_0$  ne sont pas influencés par l'érosion. La paramétrisation de la pente de la ligne d'état caractéristique par  $\phi^{er}$  permettrait de modéliser une éventuelle altération de cette ligne et de  $K_0$ . Cette possibilité n'a pas été explorée ici.

### 3.3 Implémentation aux éléments finis

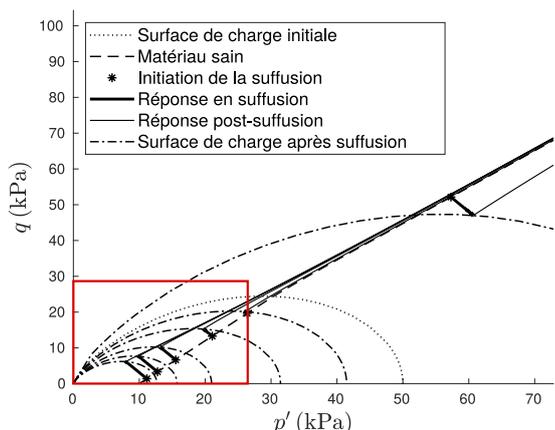
Dans cette section est discutée l'implémentation du modèle d'élasto-plasticité dans un code aux éléments finis. Dans un premier temps, nous discuterons du code retenu pour l'implémentation. Ensuite, la formulation faible du problème sera posée et la procédure de résolution développée. Finalement, les résultats obtenus pour un point matériel seront retrouvés, validant ainsi l'implémentation proposée.

#### 3.3.1 The FEniCS Project

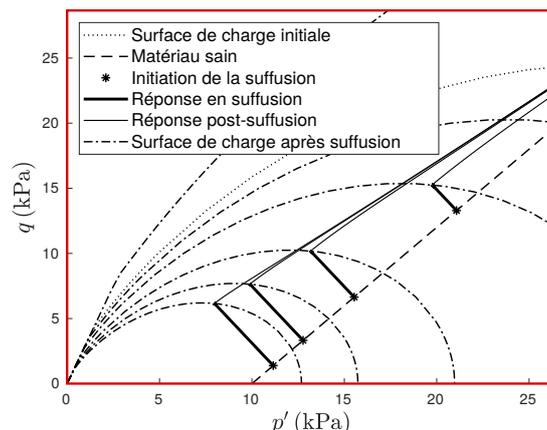
Pour l'implémentation du modèle de plasticité développé, le logiciel employé est un ensemble de bibliothèques nommé « FEniCS Project » [83]. L'idée directrice du développement de FEniCS est « l'automatisation de la résolution de modèles mathématiques basés sur des équations différentielles ». FEniCS est une bibliothèque libre (sous licence LGPLv3) et dispose de deux interfaces de programmation : l'une C++ et l'autre *Python*. La première caractéristique de FEniCS qui conduit à son choix pour l'implémentation du modèle est sa simplicité d'usage. En effet, cette plateforme de calcul automatise le calcul des matrices de rigidité locales (élémentaires) à partir de la forme variationnelle du problème à résoudre. Cette forme variationnelle est alors une des données d'entrée du problème sous la forme d'un code écrit en langage « Unified Form Language » (ou *UFL*) par l'utilisateur. Ce code *UFL* doit alors contenir la description fonctionnelle du problème (espace des fonctions tests, espace de recherche des solutions) ainsi que de la forme variationnelle du problème. La syntaxe d'un code *UFL* est similaire en tout point à celle d'un code écrit avec le langage *Python*. Le code ainsi écrit est ensuite traité par le compilateur « Fenics Form Compiler » (*FFC*) produisant un fichier « Unified Form-assembly Code » (*UFC*) pouvant être exploité par la bibliothèque principale de FEniCS nommée « DOLFIN ». Cette bibliothèque permet la construction de la matrice de rigidité globale du problème et la résolution de ce dernier. « DOLFIN » constitue de plus le cœur de FEniCS Project puisque c'est *via* cette bibliothèque que l'utilisateur construit le maillage supportant le problème, prescrit les conditions aux limites contraignant la solution, et résout le problème grâce à la large galerie des solveurs disponibles.

L'architecture de FEniCS en fait une bibliothèque propice à l'implémentation de nouveaux modèles. En particulier, il y est fort commode d'enrichir la physique d'un modèle déjà implémenté.

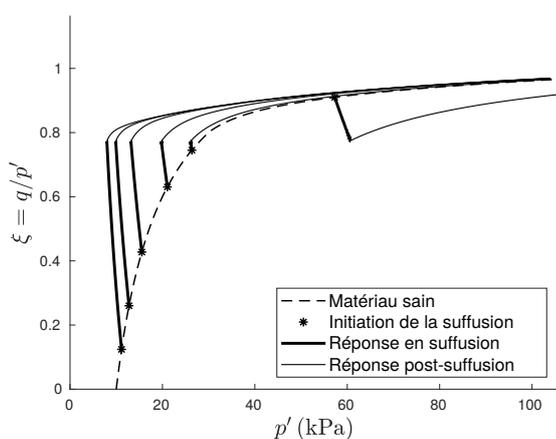
Au regard des problèmes de mécanique des solides, une librairie tierce « FEniCS Solid Mechanics » (où *FSM*), en cours de développement est proposée par Ølgaard et Wells [84]. Cette librairie permet de résoudre des problèmes d'élasto-plasticité, en 2D comme en 3D. Ces simulations peuvent faire appel à deux modèles de comportement classiques : le modèle de von Mises (voir Simo et Hughes [63] pour une formulation de ce modèle), où le modèle de Drucker-Prager [67]. La structure de cette librairie permet d'ajouter aisément de nouveaux modèles de comportement, et c'est cette spécificité que nous allons mettre à profit pour l'implémentation du modèle « Sinfonietta-Classica » modifié. Dans un souci de concision de ce mémoire, nous nous attacherons à détailler seulement (i) le positionnement du problème à résoudre; (ii) les procédures que



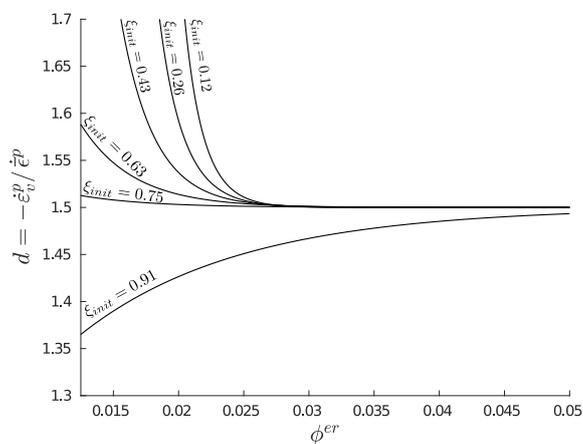
(a) Chemins de contraintes effectives dans le plan de Cambridge



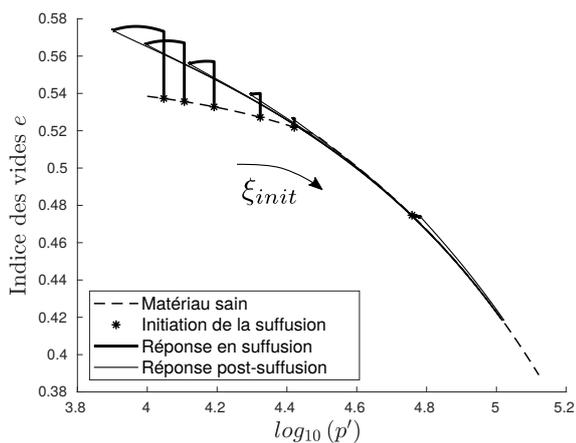
(b) Chemins de contraintes effectives dans le plan de Cambridge



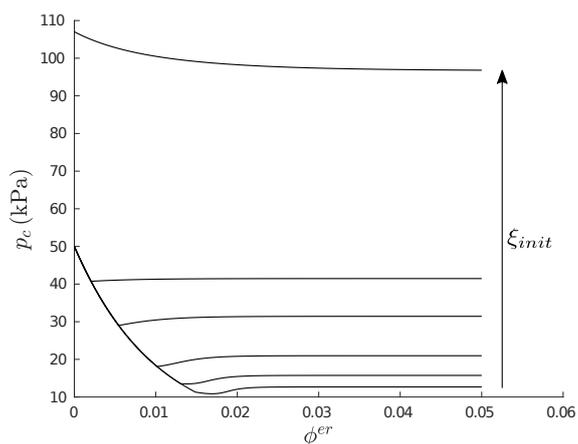
(c) Ratio de contraintes en fonction de  $p'$



(d) Dilatance au cours du chargement de suffusion



(e) Indice des vides en fonction de  $p'$



(f) Evolution de  $p_c$  au cours du chargement de suffusion

FIGURE 3.7 – Sol suffusif comparé à un son analogue sain ; conditions oedométriques

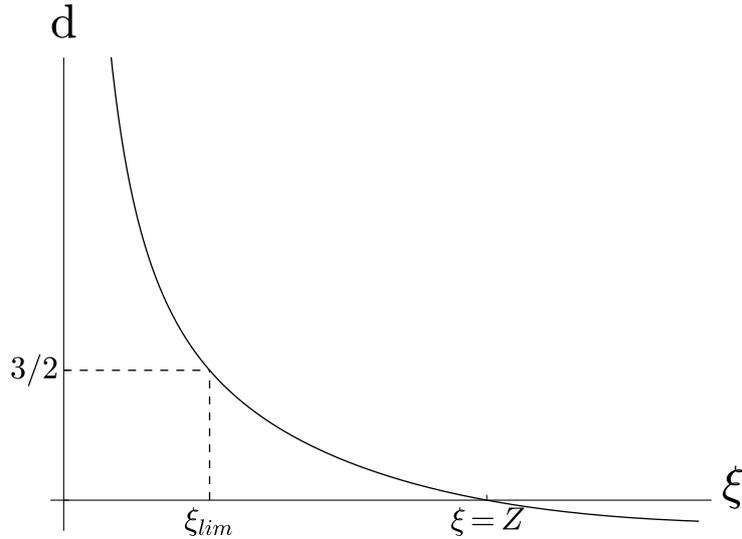


FIGURE 3.8 – Dilatance en fonction du ratio de contrainte en conditions axisymétriques

nous adaptons (le « Return-Mapping » et l'évaluation de la raideur tangente) ; et (iii) les données d'entrées des simulations réalisées et les résultats de ces dernières. Les procédures propres à FEniCS et à la librairie *FSM* demeurant telles quelles ne seront pas évoquées. Les détails propres à ces dernières sont disponible en accès libre dans la littérature [83] et *via* le serveur de dépôt de la librairie *FSM* [84]. Par ailleurs, pour éviter toute perte de généralité, l'adaptation des algorithmes sus-mentionnés sera détaillée uniquement d'un point de vue formel. Les détails syntaxiques (ou plus vulgairement « de code ») ne seront pas abordés.

### 3.3.2 Position du problème

Les simulations réalisées ici s'incrivent dans le même cadre que celles conduites sur des points matériels : nous considérons que la porosité induite par suffusion évolue sous forme incrémentale, et ce de manière *quasi*-statique. La porosité induite par suffusion est alors prescrite de manière externe, par le simulateur. Dans ce contexte de chargement incrémental, on s'intéresse à décrire le comportement mécanique du matériau une fois chaque processus de consolidation effectué. Dans ce sens, on considère que la pression du fluide est constante et connue dans l'échantillon, on peut alors légitimement se passer de la description du fluide. De cette façon, nous pouvons modéliser le matériau comme un matériau sec dont la porosité est dégradée du fait de processus d'érosion fictifs, sous l'action d'un *deus ex machina*. C'est pour cette raison que dans cette partie, on considère donc le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}'(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \mathbf{b} = 0 & \text{sur } \mathcal{D} \\ \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} & \text{sur } \partial\mathcal{D}_t \\ \mathbf{u} = \mathbf{u} & \text{sur } \partial\mathcal{D}_u \end{cases} \quad (3.108)$$

où le lien entre la contrainte effective  $\boldsymbol{\sigma}'$  et le déplacement  $\mathbf{u}$  est donné *via* la relation de comportement élastique linéaire :

$$\boldsymbol{\sigma}'(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}^p) = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^\top \mathbf{u}) \quad (3.109)$$

La typologie de ce problème aux limites permet de l'inscrire directement dans le champ d'application de la librairie FEniCS Solid Mechanics [83, 84]. Nous discutons alors de la façon d'obtenir la formulation faible de ce problème : on introduit tout d'abord l'espace de recherche des solutions  $\mathcal{U}$  tels que :

$$\mathcal{U} \equiv \{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{D}), \mathbf{u} = \mathbf{u} \text{ sur } \partial\mathcal{D}_u \} \quad (3.110)$$

On introduit de plus  $\mathcal{W}$  l'espace des fonctions test  $\mathbf{w}$  cinématiquement admissibles à zéro telle que :

$$\mathcal{W} \equiv \{ \mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in H^1(\mathcal{D}), \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\mathcal{D}_u \} \quad (3.111)$$

On évalue le produit scalaire du membre de gauche avec un champ  $\mathbf{w}$  de  $\mathcal{W}$ . On intègre sur  $\mathcal{D}$  :

$$\int_{\mathcal{D}} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}') \cdot \mathbf{w} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega = 0 \quad (3.112)$$

On réalise une intégration par partie et on utilise le théorème de flux-divergence :

$$\int_{\mathcal{D}} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}') \cdot \mathbf{w} \, d\Omega = \int_{\partial\mathcal{D}} (\boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w} \, da - \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\sigma}' : \nabla \mathbf{w} \, d\Omega \quad (3.113)$$

Maintenant on considère le théorème de la contrainte de Cauchy, la condition aux limites en contraintes ainsi que le caractère cinématiquement admissible à zéro de  $\mathbf{w}$ . On écrit finalement que :

$$\int_{\partial\mathcal{D}} (\boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w} \, da = \int_{\partial\mathcal{D}_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} \, da \quad (3.114)$$

La formulation variationnelle du problème est alors donnée par :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{u} \in \mathcal{U} \text{ tel que tel que } \forall \mathbf{w} \in \mathcal{W} \\ & F(\mathbf{u}, \mathbf{w}) := \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\sigma}' : \nabla \mathbf{w} \, d\Omega - \int_{\mathcal{D}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega - \int_{\partial\mathcal{D}_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} \, da = 0 \end{aligned} \quad (3.115)$$

Dans le cadre d'un chargement incrémental mixte, cette formulation faible du problème doit être vérifiée pour tout instant  $t_{n+1}$ . On introduit un nouvel espace de recherche noté  $\mathcal{U}_{n+1}$  et défini par :

$$\mathcal{U}_{n+1} \equiv \{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{D}), \mathbf{u} = \mathbf{u}_{n+1} \text{ sur } \partial\mathcal{D}_u \} \quad (3.116)$$

où  $\mathbf{u}_{n+1}$  est une donnée du problème représentant la partie « déplacement » du pilotage mixte de la simulation. La formulation faible du problème incrémental est alors :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{u}_{n+1} \in \mathcal{U}_{n+1} \text{ tel que } \forall \mathbf{w} \in \mathcal{W} \\ & F(\mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{w}) := \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\sigma}'_{n+1} \left( \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{n+1}), \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)} \right) : \nabla \mathbf{w} \, d\Omega - \int_{\mathcal{D}} \mathbf{b}_{n+1} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega - \int_{\partial\mathcal{D}_t} \mathbf{t}_{n+1} \cdot \mathbf{w} \, da = 0 \end{aligned} \quad (3.117)$$

$\mathbf{b}_{n+1}$  et  $\mathbf{t}_{n+1}$  sont des données du problème représentant la partie « effort » du pilotage mixte. La déformation plastique  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)}$  est calculée localement, à l'aide du « Return-Mapping », au niveau de chaque point de Gauss. La non-linéarité inhérente au comportement élasto-plastique suggère d'employer une méthode de Newton-Raphson pour résoudre ce problème. Pour ce faire, on introduit un compteur d'itération ( $k$ ) en exposant. On postule la connaissance de la solution au pas de

temps précédent  $t_n$  et on pose comme donnée initiale  $\mathbf{u}_{n+1}^{(k=0)} = \mathbf{u}_n$ . Ensuite, on linéarise  $F$  autour de  $\mathbf{u}_{n+1}^{(k)}$ . Cette linéarisation se fait au sens des dérivées de Gateaux. On cherche alors à résoudre :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{u}_{n+1}^{(k)} + \delta\mathbf{u}^{(k)} \in \mathcal{U}_{n+1} \text{ tel que } \forall \mathbf{w} \in \mathcal{W} \\ & F\left(\mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)}, \mathbf{w}\right) = F\left(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)}, \mathbf{w}\right) + \left. \frac{dF\left(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} + h\delta\mathbf{u}, \mathbf{w}\right)}{dh} \right|_{h=0} = 0 \end{aligned} \quad (3.118)$$

Où on a :

$$F\left(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)}, \mathbf{w}\right) = \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}{}^{(k)} : \nabla \mathbf{w} \, d\Omega - \int_{\mathcal{D}} \mathbf{b}_{n+1} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega - \int_{\partial\mathcal{D}_t} \mathbf{t}_{n+1} \cdot \mathbf{w} \, da \quad (3.119)$$

On calcule alors :

$$\left. \frac{dF\left(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} + h\delta\mathbf{u}, \mathbf{w}\right)}{dh} \right|_{h=0} = \int_{\mathcal{D}} \left. \frac{d\boldsymbol{\sigma}'\left(\boldsymbol{\varepsilon}\left(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} + h\delta\mathbf{u}^{(k)}\right), \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)}\right)}{dh} \right|_{h=0} : \nabla \mathbf{w} \, d\Omega \quad (3.120)$$

Or, en introduisant  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = \boldsymbol{\varepsilon}\left(\delta\mathbf{u}^{(k)}\right)$ , par dérivations successives on a :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\boldsymbol{\sigma}'\left(\boldsymbol{\varepsilon}\left(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} + h\delta\mathbf{u}^{(k)}\right), \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)}\right)}{dh} \right|_{h=0} &= \left. \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}'}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{n+1}{}^{(k)} : \left. \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}\left(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} + h\delta\mathbf{u}^{(k)}\right)}{dh} \right|_{h=0} \\ &= \mathbb{C}_{n+1}^{ep(k)} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} \end{aligned} \quad (3.121)$$

En posant :

$$a(\delta\mathbf{u}, \mathbf{w}) := \left. \frac{dF\left(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} + h\delta\mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{w}\right)}{dh} \right|_{h=0} \quad (3.122)$$

Ainsi que :

$$L(\mathbf{w}) := F\left(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)}, \mathbf{w}\right) \quad (3.123)$$

On introduit l'espace  $\mathcal{U}_{n+1}^\delta$  tel que :

$$\mathcal{U}_{n+1}^\delta \equiv \{\delta\mathbf{u} \mid \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}, \mathbf{u} + \delta\mathbf{u} \in \mathcal{U}_{n+1}\} \quad (3.124)$$

Alors résoudre (3.118) revient à résoudre le problème variationnel suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \delta\mathbf{u}^{(k)} \in \mathcal{U}_{n+1}^\delta \text{ tel que } \forall \mathbf{w} \in \mathcal{W} \\ & a(\delta\mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{w}) = -L(\mathbf{w}) \end{aligned} \quad (3.125)$$

Une fois ce problème résolu, on procède à la mise à jour du champ de déplacement de la façon suivante (voir [83] pour référence) :

$$\mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{u}_{n+1}^{(k)} - \delta\mathbf{u}^{(k)} \quad (3.126)$$

On réalise cette résolution jusqu'à ce que la norme du résidu  $\delta \mathbf{u}^{(k)}$  soit inférieure à la limite acceptée  $TOL_{abs}$ . Il s'agit alors d'un critère d'arrêt en terme de tolérance absolue :

$$\|\delta \mathbf{u}^{(k)}\|_{\mathcal{U}_{n+1}^\delta} \leq TOL_{abs} \quad (3.127)$$

On peut également arrêter le cycle de Newton-Raphson lorsque l'erreur relative est inférieure à la limite acceptée  $TOL_{rel}$ . Ceci revient à vérifier que :

$$\frac{\|\delta \mathbf{u}^{(k)}\|_{\mathcal{U}_{n+1}^\delta}}{\|\delta \mathbf{u}^{(0)}\|_{\mathcal{U}_{n+1}^\delta}} \leq TOL_{rel} \quad (3.128)$$

Il est également possible de considérer ces deux tolérances conjointement, et d'arrêter le cycle de Newton-Raphson lorsqu'elles sont toutes deux respectées. Compte tenu du problème variationnel à résoudre à chaque itération de la méthode de Newton, il est clair que la principale problématique rencontrée pour cette implémentation concerne l'adaptation des procédures d'évaluation du tenseur de raideur tangente et du tenseur des déformations plastiques. A l'échelle de chaque point de Gauss, ces évaluations nécessitent préalablement l'exécution de l'algorithme de « Return-Mapping ». Cette procédure doit donc être également adaptée. En effet, la procédure disponible dans la branche principale de développement de la librairie FEniCS Solid Mechanics est une procédure simplifiée particulièrement adaptée à des modèles issus de von Mises ou de Drucker-Prager. Cette simplicité se fait au prix de la généralité et ne permet pas d'implémenter des modèles plus complexes telles que « Sinfonietta-Classica ». Pour éviter toute régression, la procédure que nous allons développer ici devra être « rétro-compatible » et permettre de traiter des problèmes formulés considérant les modèles de von Mises ou de Drucker-Prager.

### 3.3.2.1 « Return-Mapping » implicite

Dans le cadre des simulations sur points matériels, le « Return-Mapping » employé était de type « Cutting-Plane ». Si cette procédure est peu coûteuse en temps de calcul et facilement implémentable, elle ne permet pas d'aboutir à l'estimation d'un tenseur de raideur tangente. Pour estimer ce tenseur, la librairie FEniCS Solid Mechanics préfère l'emploi d'un « Return-Mapping » implicite de type « General Closest Point Projection ». Nous allons donc ici formuler une procédure de ce type, adaptée à notre modèle. Les développements présentés ici s'inspirent de l'ouvrage de Simo et Hughes [63], en étendant le cas de la plasticité parfaite au cas de la plasticité non-associée avec écrouissage isotrope.

**Remarque** (Notations). *Résoudre un problème d'élasto-plasticité par éléments finis est un processus hautement itératif. En effet, à chaque pas de chargement  $n+1$ , il est nécessaire de réaliser deux cycles de Newton-Raphson : le cycle primaire, déterminant  $\mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)}$ , intègre un cycle de Newton-Raphson interne, sur chaque point de Gauss, évaluant  $\mathbb{C}_{n+1}^{ep(k)}$ . Nous qualifions ce cycle interne de cycle secondaire. Nous avons donc besoin d'alléger les notations au sein de ce second cycle. Puisque dans la boucle de Newton-Raphson au niveau du point de Gauss, on considère un pas de temps de chargement  $n+1$  donné et fixé, nous allons remplacer l'indice correspondant par l'indice relatif à l'itération courante de Newton-Raphson au niveau du point de Gauss. Ainsi, la quantité  $\boldsymbol{\varepsilon}_{(i)}^{p(k)}$  désigne le tenseur des déformations plastiques évalué au pas de chargement  $n+1$  (implicitement), à l'itération  $(k)$  du cycle primaire, à l'itération  $(i)$  du cycle secondaire.*

La première étape consiste à discrétiser les évolutions de la déformation plastique et de la variable d'écroutissage à l'aide des lois d'écoulement. Ces discrétisations se font en considérant un schéma de type Euler rétrograde :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{p(k)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{p(0)} + \dot{\lambda}^{(k)} \left. \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right|^{(k)} \quad (3.129a)$$

$$\alpha^{(k)} = \alpha^{(0)} + \dot{\lambda}^{(k)} \mathfrak{h}^{(k)} \quad (3.129b)$$

où le multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}^{(k)}$  est la solution du problème de « Return-Mapping » une fois la convergence obtenue. Il est déterminé de manière incrémentale au cours du « Return-Mapping », en introduisant le compteur indiciel ( $i$ ) de telle sorte que :

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_{(0)}^{(k)} = 0 \\ \dot{\lambda}_{(i+1)}^{(k)} = \dot{\lambda}_{(i)}^{(k)} + \delta \dot{\lambda} \end{cases} \quad (3.130)$$

$\delta \dot{\lambda}$  est alors la solution intermédiaire de chaque étape du processus de « Return-Mapping ». Dans le cadre d'un cycle de Newton-Raphson, on exprime ces deux équations sous leurs formes résiduelles en introduisant deux résidus  $\mathbf{r}_\varepsilon$  et  $r_\alpha$  :

$$\mathbf{r}_\varepsilon^{(k)} = -\boldsymbol{\varepsilon}^{p(k)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{p(0)} + \dot{\lambda}^{(k)} \left. \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right|^{(k)} \quad (3.131a)$$

$$r_\alpha^{(k)} = -\alpha^{(k)} + \alpha^{(0)} + \dot{\lambda}^{(k)} \mathfrak{h}^{(k)} \quad (3.131b)$$

D'un côté, on ajoute et retranche successivement  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}$  à (3.131a), puis on contracte doublement le résultat avec le tenseur de raideur élastique  $\mathbb{C}$ . D'un autre côté, étant donnée la définition de  $\alpha$  statué *via* l'équation (3.61), on traite (3.131b) en ajoutant l'incrément de porosité induite par suffusion  $\Delta \phi^{er}$  puis en multipliant le résultat par  $H$ . On définit ainsi les résidus  $\mathbf{R}_\sigma^{(k)}$  et  $R_q^{(k)}$  tels que :

$$\mathbf{R}_\sigma^{(k)} = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{p(k)}) - \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{p(0)}) + \dot{\lambda}^{(k)} \mathbb{C} : \left. \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right|^{(k)} \quad (3.132a)$$

$$R_q^{(k)} = -H\alpha^{(k)} + H\alpha^{(0)} + H\Delta\phi^{er} + \dot{\lambda}^{(k)} H\mathfrak{h}^{(k)} \quad (3.132b)$$

On identifie  $\boldsymbol{\sigma}'^{tr} = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{p(k)})$  et  $q^{tr} = H\alpha^{(0)} + H\Delta\phi^{er}$  à l'état mécanique issu d'une prévision élastique. On synthétise alors ces deux équations sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_\sigma \\ R_q \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}' \\ q \end{bmatrix}^{(k)} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}' \\ q \end{bmatrix}^{tr} + \dot{\lambda}^{(k)} \begin{bmatrix} \mathbb{C} : \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \\ H\mathfrak{h} \end{bmatrix}^{(k)} \quad (3.133)$$

Maintenant, on réalise le développement de Taylor de ce vecteur des résidus. On introduit alors les compteurs indiciels ( $i$ ) et ( $i+1$ ) de telle sorte que :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_\sigma \\ R_q \end{bmatrix}_{(i+1)}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\sigma \\ R_q \end{bmatrix}_{(i)}^{(k)} + \delta \dot{\lambda} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_\sigma}{\partial \dot{\lambda}} \\ \frac{\partial R_q}{\partial \dot{\lambda}} \end{bmatrix}_{(i)}^{(k)} \quad (3.134)$$

En considérant la dérivation des fonctions composées, on détaille alors les dérivées de  $\mathbf{R}_\sigma$  et  $R_q$  par rapport à  $\dot{\lambda}$  :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_\sigma}{\partial \dot{\lambda}} \\ \frac{\partial R_q}{\partial \dot{\lambda}} \end{bmatrix}_{(i)}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_\sigma}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} & \frac{\partial \mathbf{R}_\sigma}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial R_q}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} & \frac{\partial R_q}{\partial \mathbf{q}} \end{Bmatrix}_{(i)}^{(k)} \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'}{\partial \dot{\lambda}} \\ \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \dot{\lambda}} \end{bmatrix}_{(i)}^{(k)} + \begin{bmatrix} \mathbb{C} : \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \\ H\mathfrak{h} \end{bmatrix}_{(i)}^{(k)} \quad (3.135)$$

En raison de la constance de  $\mathbf{R}_\sigma$  et  $R_q$  vis-à-vis du prédicteur élastique, leurs dérivées partielles par rapport à  $\boldsymbol{\sigma}'$  et  $\mathbf{q}$  s'expriment de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}_\sigma}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} &= \mathbb{I} + \dot{\lambda} \mathbb{C} : \frac{\partial^2 g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'^2}, & \frac{\partial \mathbf{R}_\sigma}{\partial \mathbf{q}} &= \dot{\lambda} \mathbb{C} : \frac{\partial^2 g}{\partial \boldsymbol{\sigma}' \partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial R_q}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} &= \dot{\lambda} H \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}, & \frac{\partial R_q}{\partial \mathbf{q}} &= 1 + \dot{\lambda} H \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial \mathbf{q}} \end{aligned} \quad (3.136)$$

où  $\mathbb{I}$  désigne le tenseur identité d'ordre 4. On introduit les quantités  $\{Q\}^{-1}$  et  $[\delta \boldsymbol{\sigma}', \delta \mathbf{q}]$  définies comme :

$$\{Q\}^{-1} = \begin{Bmatrix} \mathbb{I} + \dot{\lambda} \mathbb{C} : \frac{\partial^2 g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'^2} & \dot{\lambda} \mathbb{C} : \frac{\partial^2 g}{\partial \boldsymbol{\sigma}' \partial \mathbf{q}} \\ \dot{\lambda} H \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} & 1 + \dot{\lambda} H \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial \mathbf{q}} \end{Bmatrix}_{(i)}^{(k)} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\sigma}' \\ \delta \mathbf{q} \end{bmatrix} = \delta \dot{\lambda} \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'}{\partial \dot{\lambda}} \\ \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \dot{\lambda}} \end{bmatrix}_{(i)}^{(k)} \quad (3.137)$$

De telle sorte que le développement de Taylor du vecteur des résidus (voir équation (3.134)) s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_\sigma \\ R_q \end{bmatrix}_{(i+1)}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\sigma \\ R_q \end{bmatrix}_{(i)}^{(k)} + \{Q\}^{-1} \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\sigma}' \\ \delta \mathbf{q} \end{bmatrix} + \delta \dot{\lambda} \begin{bmatrix} \mathbb{C} : \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \\ H\mathfrak{h} \end{bmatrix}_{(i)}^{(k)} \quad (3.138)$$

On cherche alors à annuler ce vecteur des résidus soit :

$$\begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\sigma}' \\ \delta \mathbf{q} \end{bmatrix} = -\{Q\} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\sigma \\ R_q \end{bmatrix}_{(i)}^{(k)} + \delta \dot{\lambda} \begin{bmatrix} \mathbb{C} : \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \\ H\mathfrak{h} \end{bmatrix}_{(i)}^{(k)} \right) \quad (3.139)$$

D'un autre côté, on doit s'assurer que l'état mécanique du matériau soit plastiquement admissible. Pour ce faire on exprime la fonction de charge pour l'étape  $(i+1)$  et on cherche à résoudre le problème suivant :

$$\text{Trouver } \delta \dot{\lambda} \text{ tel que } f_{i+1}^{(k)} := f(\boldsymbol{\sigma}'_{i+1}^{(k)}, \mathbf{q}_{i+1}^{(k)}) = 0 \quad (3.140)$$

En réalisant le développement de Taylor de la fonction de charge on a :

$$f_{(i+1)}^{(k)} = f_{(i)}^{(k)} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} & \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix}_{(i)}^{(k)} \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\sigma}' \\ \delta \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (3.141)$$

En considérant l'expression de  $[\delta\boldsymbol{\sigma}', \delta\mathbf{q}]$  issue de l'équation (3.3.2.1), résoudre (3.140) revient à résoudre :

$$f_{(i+1)}^{(k)} = f_{(i)}^{(k)} - \left[ \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \right]_{(i)}^{(k)} \{Q\} \left( \begin{array}{c} \left[ \mathbf{R}_\sigma \right]_{(i)}^{(k)} \\ \left[ R_q \right]_{(i)} \end{array} + \delta\dot{\lambda} \begin{array}{c} \left[ \mathbb{C} : \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right]_{(i)}^{(k)} \\ H\mathfrak{h} \end{array} \right) = 0 \quad (3.142)$$

Cette équation permet alors d'extraire la valeur de  $\delta\dot{\lambda}$  :

$$\delta\dot{\lambda} = \frac{f_{(i)}^{(k)} - \left[ \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \right]_{(i)}^{(k)} \{Q\} \begin{array}{c} \left[ \mathbf{R}_\sigma \right]_{(i)}^{(k)} \\ \left[ R_q \right]_{(i)} \end{array}}{\left[ \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \right]_{(i)}^{(k)} \{Q\} \begin{array}{c} \left[ \mathbb{C} : \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right]_{(i)}^{(k)} \\ H\mathfrak{h} \end{array}} \quad (3.143)$$

Maintenant que  $\delta\dot{\lambda}$  a été évalué, on procède à la mise à jour de  $\boldsymbol{\sigma}'$ , de  $\mathbf{q}$  et en se basant sur le résultat de l'équation (3.139) :

$$\begin{array}{c} \left[ \boldsymbol{\sigma}' \right]_{(i+1)}^{(k)} \\ \left[ \mathbf{q} \right]_{(i+1)} \end{array} = \begin{array}{c} \left[ \boldsymbol{\sigma}' \right]_{(i)}^{(k)} \\ \left[ \mathbf{q} \right]_{(i)} \end{array} - \{Q\} \left( \begin{array}{c} \left[ \mathbf{R}_\sigma \right]_{(i)}^{(k)} \\ \left[ R_q \right]_{(i)} \end{array} + \delta\dot{\lambda} \begin{array}{c} \left[ \mathbb{C} : \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right]_{(i)}^{(k)} \\ H\mathfrak{h} \end{array} \right) \quad (3.144)$$

Finalement, on évalue alors la fonction de charge et les résidus, puis on fait un test d'admissibilité de la solution du problème. On introduit pour ce faire les tolérances  $TOL_f$ ,  $TOL_\sigma$  et  $TOL_q$  représentant les erreurs admissibles (idéalement nulles) pour  $f_{n+1}^{(k)}$  ainsi que pour les normes respectives des résidus  $\mathbf{R}_{\sigma(i+1)}^{(k)}$  et  $R_{q(i+1)}^{(k)}$  :

- i Si  $f_{i+1}^{(k)} \leq TOL_f$ ,  $\left\| \mathbf{R}_{\sigma(i+1)}^{(k)} \right\| \leq TOL_\sigma$ ,  $\left| R_{q(i+1)}^{(k)} \right| \leq TOL_q$ , alors la convergence a atteint un degré suffisant. On pose alors :

$$\begin{array}{c} \left[ \boldsymbol{\sigma}' \right]_{(i+1)}^{(k)} \\ \left[ \mathbf{q} \right]_{(i+1)} \end{array} = \begin{array}{c} \left[ \boldsymbol{\sigma}' \right]_{(i+1)}^{(k)} \\ \left[ \mathbf{q} \right]_{(i+1)} \end{array} \quad (3.145)$$

Puis on procède à la mise à jour des variables cinématiques :

$$\begin{cases} \dot{\lambda}^{(k)} = \dot{\lambda}_i^{(k)} + \delta\dot{\lambda} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^p{}^{(k)} = \boldsymbol{\varepsilon}^p{}^{(0)} + \dot{\lambda}^{(k)} \left. \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right|^{(k)} \\ \alpha^{(k)} = \alpha^{(0)} + \dot{\lambda}^{(k)} \mathfrak{h}^{(k)} \end{cases} \quad (3.146)$$

On considère le problème résolu et on sort du processus de « Return-Mapping » (cycle secondaire).

- ii Sinon, alors la convergence n'est pas atteinte et on pose  $i = i + 1$  et on reprend les problèmes (3.134) puis (3.140) jusqu'à vérifier le test d'admissibilité.

Une fois que la procédure « Return-Mapping » a atteint le degré de convergence souhaité, alors on procède à l'évaluation du tenseur de raideur tangente.

### 3.3.2.2 Raideur tangente

Ici nous exposons la procédure d'évaluation du tenseur de raideur tangente  $\mathbb{C}_{n+1}^{ep(k)}$ . Il est possible de déduire la raideur tangente selon deux méthodes (voir Simo et Hughes, [63]). La première méthode est qualifiée de « continue ». Elle consiste essentiellement à appliquer la condition de cohérence au niveau du problème « continu » comme nous l'avons fait dans la sous-section 3.2.1.1. La raideur tangente est alors donnée par l'équation (3.73). Si cette évaluation présente l'avantage d'être implémentable avec une aisance notoire, elle n'est pas des plus efficaces. En effet, la convergence quadratique du schéma de Newton-Raphson employé pour la résolution aux éléments finis est dégradée. Afin de préserver cette quadraticité, Simo et Hughes [63] proposent d'évaluer la raideur tangente en appliquant la condition de cohérence au niveau du problème discret mis en jeu dans le cadre du « Return- Mapping ». La raideur tangente ainsi évaluée est qualifiée de « cohérente » par les auteurs sus-mentionnés. Cette méthode se base sur la différentiation des lois de comportement élastique, des lois d'écoulement incrémentales, et la différentiation de la condition d'admissibilité plastique. Concernant les lois de comportement, la différentiation se fait de la façon suivante :

$$d\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} = \mathbb{C} : \left( d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p \right) \quad (3.147a)$$

$$d\mathbf{q}_{n+1} = -H d\alpha_{n+1} + H d\phi_{n+1}^{er} \quad (3.147b)$$

On rappelle que  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$  et  $\phi_{n+1}^{er}$  constituent ici des données du problème. Les différentielles des lois d'écoulement incrémentales s'écrivent comme suit :

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \dot{\lambda}_{n+1}^{(k)} \left. \frac{\partial^2 g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'^2} \right|_{n+1}^{(k)} : d\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} + \dot{\lambda}_{n+1}^{(k)} \left. \frac{\partial^2 g}{\partial \boldsymbol{\sigma}' \partial \mathbf{q}} \right|_{n+1}^{(k)} : d\mathbf{q}_{n+1} + d\dot{\lambda}_{n+1}^{(k)} \left. \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right|_{n+1}^{(k)} \quad (3.148a)$$

$$d\alpha_{n+1} = \dot{\lambda}_{n+1}^{(k)} \left. \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{n+1}^{(k)} d\mathbf{q}_{n+1} + \dot{\lambda}_{n+1}^{(k)} \left. \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right|_{n+1}^{(k)} : d\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} + d\dot{\lambda}_{n+1}^{(k)} \mathfrak{h}_{n+1}^{(k)} \quad (3.148b)$$

On rappelle la condition d'admissibilité plastique discrète :

$$f \left( \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1} \right) = 0 \quad (3.149)$$

La différentiation de cette condition conduit à l'obtention d'une condition de cohérence discrète :

$$df_{n+1}^{(k)} = \left. \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right|_{n+1}^{(k)} : d\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \right|_{n+1}^{(k)} d\mathbf{q}_{n+1} = 0 \quad (3.150)$$

Dès maintenant, l'omniprésence de l'indice  $n+1$  et de l'exposant  $(k)$  permet de se passer de leurs écritures en les sous-entendant. On injecte (3.148) dans (3.147) et on reformule le résultat sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} d\boldsymbol{\sigma}' \\ d\mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C} : d\boldsymbol{\varepsilon} \\ H d\phi^{er} \end{bmatrix} - \dot{\lambda} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial \boldsymbol{\sigma}' \partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} & \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial \mathbf{q}} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} d\boldsymbol{\sigma}' \\ d\mathbf{q} \end{bmatrix} - d\dot{\lambda} \begin{bmatrix} \mathbb{C} : \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \\ H \mathfrak{h} \end{bmatrix} \quad (3.151)$$

Comme présenté lors du « Return-Mapping » (voir équation (3.137)), on introduit alors la quantité  $[Q]^{-1}$  telle que :

$$\{Q\}^{-1} = \begin{Bmatrix} \mathbb{I} + \dot{\lambda} \mathbb{C} : \frac{\partial^2 g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'^2} & \dot{\lambda} \mathbb{C} : \frac{\partial^2 g}{\partial \boldsymbol{\sigma}' \partial \mathbf{q}} \\ \dot{\lambda} H \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} & 1 + \dot{\lambda} H \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial \mathbf{q}} \end{Bmatrix} \quad (3.152)$$

On réécrit alors (3.151) de la façon suivante :

$$\{Q\}^{-1} \begin{bmatrix} d\boldsymbol{\sigma}' \\ dq \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C} : d\boldsymbol{\varepsilon} \\ Hd\phi^{er} \end{bmatrix} - d\lambda \begin{bmatrix} \mathbb{C} : \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \\ H\mathfrak{h} \end{bmatrix} \quad (3.153)$$

On introduit la matrice  $[\Xi]$  définie ainsi :

$$[\Xi] = \{Q\} \begin{bmatrix} \mathbb{C} : \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \\ H\mathfrak{h} \end{bmatrix} \quad (3.154)$$

De telle sorte que (3.153) se résume à :

$$\begin{bmatrix} d\boldsymbol{\sigma}' \\ dq \end{bmatrix} = \{Q\} \begin{bmatrix} \mathbb{C} : d\boldsymbol{\varepsilon} \\ Hd\phi^{er} \end{bmatrix} - d\lambda [\Xi] \quad (3.155)$$

Maintenant, on donne la condition de cohérence discrète sous forme matricielle :

$$df_{n+1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} & \frac{\partial f}{\partial q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\boldsymbol{\sigma}' \\ dq \end{bmatrix} = 0 \quad (3.156)$$

En considérant (3.155), cette condition de cohérence permet de déterminer la différentielle  $d\lambda$  :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} & \frac{\partial f}{\partial q} \end{bmatrix} \left( \{Q\} \begin{bmatrix} \mathbb{C} : d\boldsymbol{\varepsilon} \\ Hd\phi^{er} \end{bmatrix} - d\lambda [\Xi] \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad d\lambda = \frac{\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} & \frac{\partial f}{\partial q} \end{bmatrix} \{Q\} \begin{bmatrix} \mathbb{C} : d\boldsymbol{\varepsilon} \\ Hd\phi^{er} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} & \frac{\partial f}{\partial q} \end{bmatrix} [\Xi]} \quad (3.157)$$

En réinjectant l'expression de  $d\lambda$  dans (3.155), on détermine pleinement  $[d\boldsymbol{\sigma}', dq]$  :

$$\begin{bmatrix} d\boldsymbol{\sigma}' \\ dq \end{bmatrix} = \{Q\} \begin{bmatrix} \mathbb{C} : d\boldsymbol{\varepsilon} \\ Hd\phi^{er} \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} & \frac{\partial f}{\partial q} \end{bmatrix} \{Q\} \begin{bmatrix} \mathbb{C} : d\boldsymbol{\varepsilon} \\ Hd\phi^{er} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} & \frac{\partial f}{\partial q} \end{bmatrix} [\Xi]} [\Xi] \quad (3.158)$$

Cette dernière équation peut être différenciée par rapport à la déformation ainsi que par rapport à la variable d'écoulement. On écrit cette différenciation :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial q}{\partial \alpha} \end{Bmatrix} = \{Q\} \begin{Bmatrix} \mathbb{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{Bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} & \frac{\partial f}{\partial q} \end{bmatrix} \{Q\} \begin{Bmatrix} \mathbb{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{Bmatrix}}{\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} & \frac{\partial f}{\partial q} \end{bmatrix} [\Xi]} \otimes [\Xi] \quad (3.159)$$

En introduisant la matrice  $\{\Xi_2\}$  telle que :

$$\{\Xi_2\} = \{Q\} \begin{Bmatrix} \mathbb{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{Bmatrix} \quad (3.160)$$

On exprime (3.159)

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \alpha} \end{Bmatrix} = \{\Xi_2\} - \frac{\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} & \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix} \{\Xi_2\}}{\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} & \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix} [\Xi]} \otimes [\Xi] \quad (3.161)$$

Dès lors, par définition identifier le terme  $\partial \boldsymbol{\sigma}' / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$  revient à identifier le tenseur de raideur tangente  $\mathbb{C}_{n+1}^{ep(k)}$  :

$$\mathbb{C}_{n+1}^{ep(k)} = \{\Xi_2\}_{11} - \frac{\left( \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} : \{\Xi_2\}_{11} \right) \otimes [\Xi]_1}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} : [\Xi]_1 + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} [\Xi]_2} \quad (3.162)$$

A titre de conclusion, on remarquera que les procédures de « Return-Mapping » et d'évaluation de la raideur tangente proposées ici généralisent celles proposées par la librairie *FSM* tout en restant rétro-compatibles avec des modèles simples comme ceux de plasticité parfaite, de von Mises où encore de Drucker-Prager. En effet, la formulation des lois d'écoulement et d'écrouissage permet d'implémenter facilement des modèles de plasticité non-associée aussi bien qu'associée, avec la possibilité de considérer une variable d'écrouissage isotrope. Les pistes d'extensions possibles concernent principalement l'implémentation de modèles avec écrouissage cinématique et écrouissages combinés ainsi que l'implémentation de modèles à plusieurs surfaces de charge et potentiels plastiques. Dans le contexte de « Sinfonietta-Classica », les calculs des dérivations partielles de  $f$ ,  $g$  et  $\mathfrak{h}$ , de même que les calculs des dérivées partielles secondes de  $g$ , sont données dans l'annexe B.1.

Maintenant que les détails algorithmiques concernant l'adaptation du « Return-Mapping » et l'évaluation de la raideur tangente ont été formulés, il convient de réaliser quelques simulations afin de s'assurer de la correcte implémentation de ces procédures dans la librairie *FSM*.

### 3.3.3 Simulations

La validation des procédures développées dans la sous-section précédente se fait en tentant de reproduire, par une simulation à l'échelle d'un échantillon, les résultats des simulations réalisées sur un point matériel en section 3.2. En particulier, nous tentons de reproduire les simulations en conditions triaxiales, sur un matériau dense et sur un matériau lâche. Pour ce faire nous allons donc définir dans un premier temps la géométrie de l'échantillon numérique. Ensuite, nous détaillerons le chargement subit par le matériau, ainsi que les conditions aux limites le contraignant. Finalement, les résultats de ces simulations seront présentés.

#### 3.3.3.1 Paramètres matériau, géométrie et maillage

Dans le but de reproduire les simulations sur un point matériel présentées dans la section 3.2.2, nous considérons les mêmes paramètres matériaux que ceux utilisés dans cette même section. Ces paramètres sont contenus dans le tableau 3.1.

Afin de simuler un essai triaxial de révolution, l'échantillon que nous considérons est un cylindre. Ce cylindre est paramétré par un rayon  $R = 0.05\text{m}$  et une longueur  $L = 0.1\text{m}$ . Dans un système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , le domaine  $\mathcal{D}$  occupé par ce cylindre est alors donné, par :

$$\mathcal{D} \equiv \{ (r, \theta, z) \mid r \in [-R, R], \theta \in [-\pi, \pi], z \in [0, L] \} \quad (3.163)$$

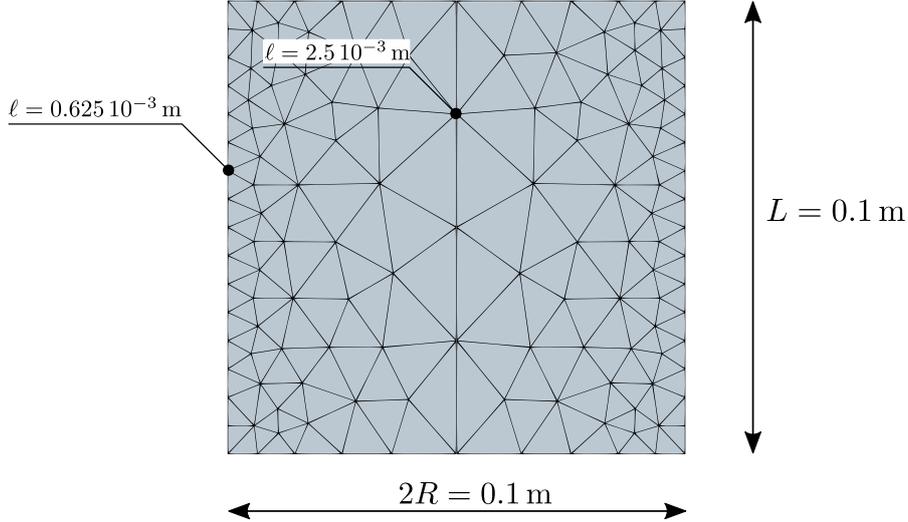


FIGURE 3.9 – vue en coupe longitudinale du maillage du cylindre

Le maillage éléments finis  $\mathcal{D}^h$  du domaine  $\mathcal{D}$  est réalisé à l'aide du mailleur « GMSH » [85] (logiciel libre sous licence LGPL) et illustré par la figure 3.9. Le maillage tri-dimensionnel ainsi réalisé est constitué uniquement de tétrahédres. Comme indiqué sur la figure 3.9 la dimension caractéristique  $\ell$  des éléments le long de l'axe du cylindre est  $\ell = 2.5 \cdot 10^{-3}$  m. Cette longueur caractéristique évolue pour atteindre  $\ell = 0.625 \cdot 10^{-3}$  m le long de la surface latérale du cylindre.

L'axisymétrie du problème inhérente à l'appareil triaxial de révolution permet de réduire le domaine d'intérêt à une portion donnée du cylindre complet. Ceci permet de réduire considérablement le temps de calcul du programme de simulation. Ici, nous choisissons de réduire le domaine d'intérêt  $\mathcal{D}_r$  à un quart du cylindre. On considère alors :

$$\mathcal{D}_r \equiv \left\{ (r, \theta, z) \mid r \in [0, R], \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], z \in [0, L] \right\} \quad (3.164)$$

Le maillage  $\mathcal{D}_r^h$  de  $\mathcal{D}_r$  suit la même évolution de densité que  $\mathcal{D}^h$  et est représenté par la figure 3.10.

### 3.3.3.2 Pilotage du pré-chargement

On rappelle que dans le cadre des simulations présentées en sous-section 3.2.2, le chargement de l'échantillon se fait en trois étapes : la première étape consiste en un pré-chargement mécanique permettant d'atteindre un état de ratio de contrainte  $\xi_{init}$  donné. Une fois  $\xi_{init}$  atteint, alors la phase d'érosion est initiée. Durant cette phase, la contrainte effective est maintenue constante et la porosité induite par suffusion  $\phi^{er}$  augmente de manière incrémentale. Finalement, un second chargement mécanique est appliqué jusqu'à atteindre l'état ultime de l'échantillon, caractérisé par un comportement asymptotique.

Concernant les simulations réalisées aux éléments finis, la phase de pré-chargement est pilotée en déplacement. On prescrit alors le déplacement vertical de la face supérieure du quart de cylindre  $\mathcal{D}_r^h$  (soit la surface pour laquelle  $z = L$ ). Le déplacement vertical ainsi prescrit à un instant  $t_n$  est noté  $\mathbf{u}_z$ . Le déplacement de la face inférieure du cylindre caractérisée par  $z = 0$  est alors

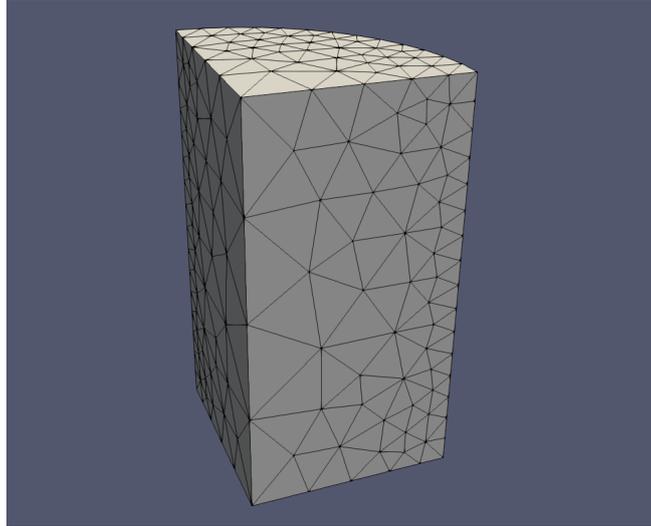


FIGURE 3.10 – perspective de  $\mathcal{D}_r^h$  (réalisée avec Paraview [86] (logiciel libre, licence BSD))

choisi nul. Afin d'éviter tout effet de frottement<sup>1</sup>, les déplacements tangents des faces supérieures et inférieures ne sont pas restreints. Afin de respecter l'axisymétrie du problème, on impose la nullité des déplacements orthoradiaux des surfaces générées par la découpe visant à réduire le domaine cylindrique initial (soit les surfaces données par  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi/2$ ). Ces restrictions en déplacement constituent des conditions aux limites de Dirichlet. Au niveau de la surface latérale paramétrée par  $r = R$ , aucune prescription en déplacement n'est donnée. En revanche, cette face est sujette à un vecteur contrainte non nul représentant l'action du fluide contenu dans la cellule de l'appareil triaxial, caractérisé par une pression de confinement  $\sigma'_c$ . Cette restriction constitue une condition aux limites de Neumann. Finalement, d'un point de vue formel, toutes ces restrictions se traduisent par :

$$u_z(r, \theta, z = L, t_n) = \mathbf{u}_z(t_n) \quad (3.165a)$$

$$u_z(r, \theta, z = 0, t_n) = 0 \quad (3.165b)$$

$$u_\theta(r, \theta = 0, z, t_n) = u_\theta\left(r, \theta = \frac{\pi}{2}, z, t_n\right) = 0 \quad (3.165c)$$

$$\boldsymbol{\sigma}'(r = R, \theta, z, t_n) \cdot \mathbf{e}_r = -\sigma'_c \mathbf{e}_r \quad (3.165d)$$

On remarque que les restrictions (3.165b) et (3.165c) empêchent tout mouvement de corps rigide. Ces conditions aux limites s'accompagne d'une condition initiale sur le champ de déplacement :

$$\mathbf{u}(r, \theta, z, t_0) = \mathbf{0} \quad (3.166a)$$

$$\mathbf{u}_z(t_0) = 0 \quad (3.166b)$$

**Remarque** (Conditions initiales en contraintes). *En plus du champ de déplacement, il est nécessaire d'initialiser le champ de contrainte effective avant le début de la simulation. Pour ce faire on pose :*

$$\sigma'_{ij}(r, \theta, z, t_0) = -\sigma'_c \delta_{ij} \quad (3.167)$$

<sup>1</sup>en effet, on cherche à réaliser des simulations aux éléments finis les plus proches possible de celles réalisées sur point matériels

Sans cette initialisation, le problème ne serait pas représentatif d'un essai triaxial : la simulation se ferait sur un échantillon dont la face inférieure et la face supérieure seraient initialement libres de contraintes.

Le pré-chargement en déplacement est interrompu une fois que l'état de contrainte effective de l'échantillon atteint en moyenne le ratio de contrainte  $\xi_{init}$  souhaité soit :

$$\frac{1}{|\mathcal{D}_r|} \int_{\mathcal{D}_r} \xi \, d\Omega_t = \xi_{init} \quad (3.168)$$

où  $|\mathcal{D}_r|$  désigne la mesure de  $\mathcal{D}_r$ . L'instant  $t_n$  pour lequel cette condition est vérifiée est notée  $t_{init}$ .

### 3.3.3.3 Pilotage du chargement en suffusion

Comme pour les simulations sur point matériel, un chargement de suffusion est réalisé de manière fictive. Ce chargement consiste à augmenter de façon incrémentale la porosité induite par suffusion  $\phi^{er}$  via des incréments  $\Delta\phi^{er}$  de manière à mimer un processus de suffusion, tout en maintenant artificiellement la contrainte effective à une valeur constante. Pour nos simulations par éléments finis, il faut dès lors incrémenter  $\phi^{er}$  localement, au niveau de chaque point de Gauss. On a pu voir précédemment que cette incrémentation locale se fait au cours du processus de « Return-Mapping » (voir équation (3.132)).

Lors du chargement en suffusion, les efforts extérieurs appliqués sur l'échantillon sont maintenus constants. Les conditions aux limites considérées diffèrent alors de celle statuées lors du pré-chargement. En particulier, la condition de Dirichlet appliquée sur la face supérieure de l'échantillon doit être remplacée par une condition de Neumann prescrivant un vecteur contrainte  $\mathbf{t}$  constant au cours du chargement.

$$\boldsymbol{\sigma}'(r, \theta, z = L, t_n) \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{t}(r, \theta) \quad (3.169a)$$

$$u_z(r, \theta, z = 0, t_n) = 0 \quad (3.169b)$$

$$u_\theta(r, \theta = 0, z, t_n) = u_\theta\left(r, \theta = \frac{\pi}{2}, z, t_n\right) = 0 \quad (3.169c)$$

$$\boldsymbol{\sigma}'(r = R, \theta, z, t_n) \cdot \mathbf{e}_r = -\sigma'_c \mathbf{e}_r \quad (3.169d)$$

Afin de maintenir un niveau de contrainte effective à l'issue du pré-chargement, le champ de vecteur  $\mathbf{t}$  est en fait le champ de vecteur contrainte calculé à partir du théorème de la contrainte de Cauchy appliqué au tenseur des contraintes effectives solution du problème de pré-chargement, sur la face supérieure au temps  $t_{init}$  :

$$\mathbf{t}(r, \theta) = \boldsymbol{\sigma}'(r, \theta, z = L, t_{init}) \cdot \mathbf{e}_z \quad (3.170)$$

Une fois que la porosité induite par suffusion a atteint la valeur maximale  $\phi_{max}^{er}$ , le chargement de suffusion est terminé et la simulation se poursuit par le chargement post-suffusion vers l'état asymptotique de l'échantillon. On note  $t_{post}$  l'instant d'arrêt du chargement de suffusion.

### 3.3.3.4 Pilotage du chargement post-suffusion

Le chargement post-suffusion est piloté en déplacement. Pour ce faire, on reprend des conditions aux limites similaires à celle du pré-chargement (équation (3.165)). L'unique différence réside dans le champ de déplacement imposé sur la face supérieure du cylindre. En effet, pour poursuivre la

simulation depuis l'état mécanique en fin de suffusion, il est nécessaire d'imposer un champ de déplacement vertical de la forme :

$$u_z(r, \theta, z = L, t_n) = \mathbf{u}_{post}(r, \theta) + \mathbf{u}_z(t_n) \quad (3.171)$$

considérant l'initialisation suivante :

$$\mathbf{u}_{post}(r, \theta) = u_z(r, \theta, z = L, t_{post}) \quad (3.172a)$$

$$\mathbf{u}_z(t_{post}) = 0 \quad (3.172b)$$

on prescrit les conditions aux limites suivantes :

$$u_z(r, \theta, z = L, t_n) = \mathbf{u}_{post}(r, \theta) + \mathbf{u}_z(t_{post}) \quad (3.173a)$$

$$u_z(r, \theta, z = 0, t_n) = 0 \quad (3.173b)$$

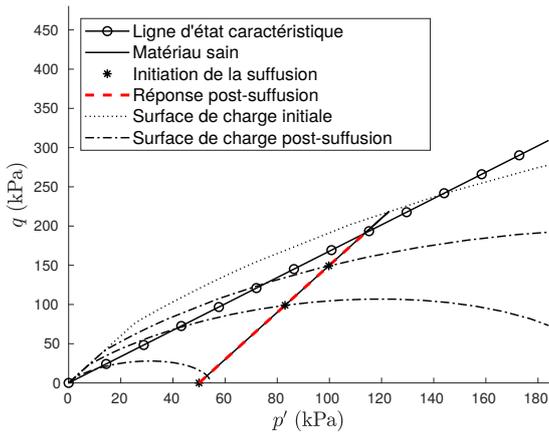
$$u_\theta(r, \theta = 0, z, t_n) = u_\theta\left(r, \theta = \frac{\pi}{2}, z, t_n\right) = 0 \quad (3.173c)$$

$$\boldsymbol{\sigma}'(r = R, \theta, z, t_n) \cdot \mathbf{e}_r = -\sigma'_c \mathbf{e}_r \quad (3.173d)$$

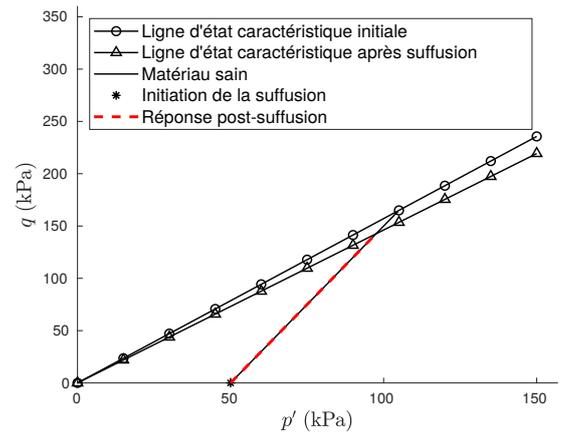
La simulation prend fin une fois que le déplacement vertical imposé a atteint une valeur cible notée  $\mathbf{u}_{lim}$ . Dans le cas des simulations sur matériau dense, on prendra  $\mathbf{u}_{lim} = 0.025$  afin d'obtenir une déformation axiale limite de 25% en fin de simulation. Pour le matériau lâche, on prendra  $\mathbf{u}_{lim} = 0.014$  afin d'obtenir une déformation axiale limite de 14%.

### 3.3.3.5 Résultats, validation et conclusions

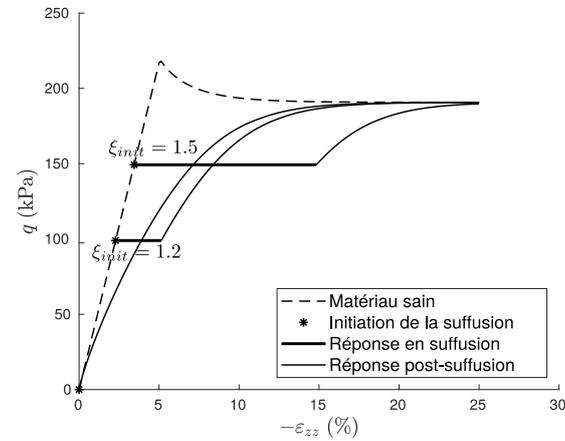
Ici nous présentons les résultats issus des simulations réalisées avec la méthode des éléments finis et visant à reproduire les simulations réalisées sur un point matériel. Pour cette validation, les quantités qui nous intéressent sont les moyennes du déviateur des contraintes,  $q$ , de la pression effective  $p'$ , de la déformation axiale  $\varepsilon_{zz}$ , et de la déformation volumique  $\varepsilon_v$ . Les évolutions de ces différentes quantités sont reportées dans la figure 3.11. On remarque que les résultats des simulations par éléments finis sont identiques à ceux des simulations réalisées sur un point matériel. Les principales observations, raisonnements et conclusions proposées en sous-section 3.2.2.4 sont applicables ici aussi. Ces résultats valident alors la procédure d'implémentation du modèle « Sinfonietta-Classica » modifié, proposée dans cette section. Ces développements ouvrent la voie vers des simulations plus riches, impliquant le couplage entre le comportement mécanique du squelette solide et la phase fluide du milieu poreux, ainsi que le lien entre écoulement et érosion.



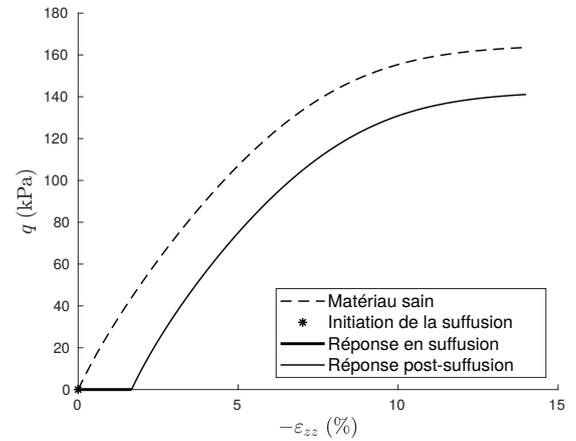
(a) Matériau dense : chemins de contraintes effectives dans le plan de Cambridge



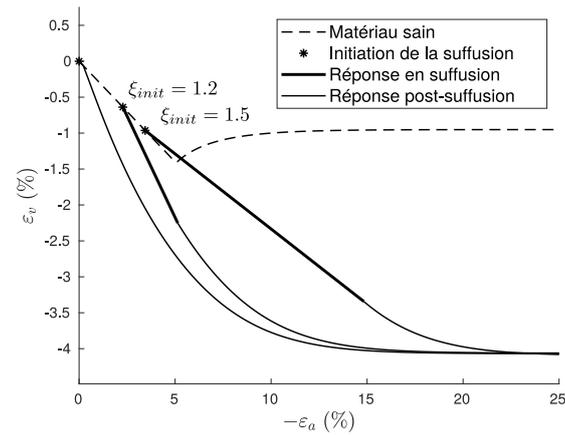
(b) Matériau lâche : chemins de contraintes effectives dans le plan de Cambridge



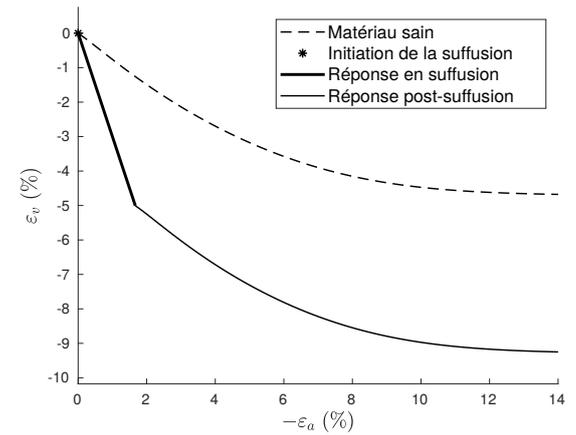
(c) Matériau dense : déviateur des contraintes en fonction de la déformation axiale



(d) Matériau lâche : déviateur des contraintes en fonction de la déformation axiale



(e) Matériau dense : déformation volumique en fonction de la déformation axiale



(f) Matériau lâche : déformation volumique en fonction de la déformation axiale

FIGURE 3.11 – Résultats de simulation aux éléments finis sur matériaux érodés et leurs analogues sains. A gauche, un matériau dense ; à droite, un matériau lâche

## Deuxième partie

### Homogénéisation quasi-périodique



# Chapitre 4

## Introduction

A la lumière de la thermodynamique des milieux poreux, l'analyse macroscopique d'un milieu granulaire suffusif a permis l'émergence d'un modèle de comportement poromécanique caractérisé par un couplage complet entre les comportements hydrodynamique, mécanique et suffusif dudit milieu. Nous nous intéressons ici plus particulièrement au couplage entre suffusion et hydrodynamique. Afin d'assurer le plus simplement possible la positivité de la dissipation  $\Phi_f$  liée à la phase fluide et aux processus de suffusion, on a suggéré la relation de comportement suivante entre le flux généralisé et la force correspondante :

$$\begin{bmatrix} M_i \\ \dot{\phi}^{er} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{ij} & \mathcal{C}_i^v \\ \mathcal{C}_j^\phi & \mathcal{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{p_{,j}}{\rho^f} + f_j - \gamma_j^f \\ p - \rho^s \mu^f - \frac{\partial \Psi_e^s}{\partial \phi^{er}} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Cette loi de comportement à l'avantage d'être cohérente d'un point de vue thermodynamique.  $\mathcal{K}_{ij}$  représente la composante  $ij$  du tenseur de perméabilité de Darcy. Cependant, les seules restrictions disponibles sur  $\mathcal{C}^v$ ,  $\mathcal{C}^\phi$  et  $\mathcal{R}$  consistent à s'assurer de la positivité et de la définition du tenseur de couplage. Par ailleurs, la signification physique de ces paramètres de couplage fait l'objet d'une question ouverte. De plus, afin de pouvoir exploiter une telle loi de comportement pour la résolution numérique d'un problème aux limites impliquant une suffusion, une estimation qualitative des paramètres de la loi de comportement est requise. Pour combler ces besoins de compréhension et de quantification, nous proposons une investigation multi-échelles du processus de suffusion, *via* la méthode de l'homogénéisation quasi-périodique. Cette approche consiste à considérer le milieu poreux dans toute sa richesse<sup>1</sup> puis, par l'usage d'une méthodologie bien connue de la littérature (voir Hornung *et al.* [49], Auriault *et al.* [50]), de faire émerger une formulation d'un problème aux limites sur un milieu dit « homogénéisé » ou « équivalent ». Par milieu « homogénéisé », nous entendons milieu au sein duquel les hétérogénéités ne sont plus perceptibles, tant d'un point de vue topologique que comportemental. L'emploi de cette méthode a pour objectif d'apporter des réponses à ces deux questions : (i) à partir d'un problème vrai présentant une physique élémentaire à l'échelle grain-pore, est-il possible de retrouver un modèle homogénéisé de structure semblable à celle du modèle macroscopique déduit de la thermodynamique des milieux poreux ? (ii) Est-il possible d'estimer les paramètres de couplage présentés en amont ? Du moins, peut-on extraire un encadrement de ces paramètres ? Le chapitre 5 vise à établir un problème vrai dont

---

<sup>1</sup>C'est à dire en prenant en compte ses hétérogénéités ainsi que leurs physiques respectives

la physique peut-être assimilée à une suffusion. On s'intéressa particulièrement à positionner la topologie du problème, sa structure différentielle ainsi que les spécificités comportementales des différents constituants. Finalement, l'adimensionalisation du problème sera effectuée. Dans le chapitre 6 nous conduirons la procédure d'homogénéisation et le passage à l'échelle macroscopique. Des hypothèses sur les ordres de grandeur des nombres adimensionnels seront posées. Ces hypothèses impliqueront *de facto* des considérations d'ordres d'importance relatifs sur les phénomènes physiques élémentaires mis en jeu localement.

# Chapitre 5

## Formulation du problème vrai

### Table des matières

---

<b>5.1</b>	<b>Topologie et cinématique du milieu poreux quasi périodique . . . . .</b>	<b>96</b>
<b>5.2</b>	<b>Microstructure évolutive : méthode des courbes de niveaux . . . . .</b>	<b>97</b>
5.2.1	Milieu quasi-périodique et description implicite des hétérogénéités . . . . .	97
5.2.1.1	Représentation implicite de l'interface par courbe de niveau . . . . .	98
5.2.1.2	Définition de la vitesse des iso-valeurs de $S$ . . . . .	99
5.2.1.3	Construction de la courbe de niveau . . . . .	100
<b>5.3</b>	<b>Équations de conservation pour le milieu poreux . . . . .</b>	<b>101</b>
5.3.1	Conservation de la masse . . . . .	102
5.3.2	Conservation de la masse de particules solides . . . . .	102
5.3.3	Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	103
<b>5.4</b>	<b>Lois de comportement de la phase fluide . . . . .</b>	<b>104</b>
5.4.1	Principe des puissances virtuelles . . . . .	104
5.4.2	Premier principe de la thermodynamique . . . . .	105
5.4.3	Second principe de la thermodynamique . . . . .	105
5.4.4	Inégalité de Clausius-Duhem . . . . .	106
5.4.5	Lois de comportement . . . . .	107
<b>5.5</b>	<b>Passage dans l'espace sans dimension . . . . .</b>	<b>107</b>
5.5.1	Lois de bilan sur $\tilde{\Omega}^f$ . . . . .	108
5.5.1.1	Conservation de la masse . . . . .	108
5.5.1.2	Conservation de la masse de particules fluidisées . . . . .	108
5.5.1.3	Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	109
5.5.1.4	Équation de la courbe de niveau . . . . .	110
5.5.2	Conditions d'interface . . . . .	110
5.5.2.1	Conservation de la masse . . . . .	110
5.5.2.2	Conservation de la masse des particules fluidisées . . . . .	111
5.5.2.3	Adhérence fluide-solide . . . . .	111

---

*Ce chapitre a pour vocation de proposer un problème aux limites dit « vrai » pour un milieu poreux suffusif. Par problème vrai, nous entendons problème considérant le milieu poreux comme un milieu hétérogène. La physique mise en jeu dans la formulation de ce problème devra alors tenir compte des hétérogénéités du milieu poreux et de la physique de ses constituants. Le formalisme théorique employé se détache alors de la mécanique des milieux poreux classique, au profit d'un retour à une physique certes un peu plus élémentaire, mais pour une topologie plus riche à l'échelle grain-pore.*

## 5.1 Topologie et cinématique du milieu poreux quasi périodique

L'objectif de cette section est de définir la topologie du milieu poreux sujet à suffusion, en considérant son hétérogénéité. Ceci a pour but d'inscrire les raisonnements conduits plus loin dans un cadre formel rigoureux. En particulier, nous verrons dans la sous section suivante que les équations du problème aux limites sont issues de lois de conservations écrites sous formes intégrales sur le milieu poreux. Il faut donc pouvoir fournir une description globale<sup>1</sup> des différents champs de grandeurs mécaniques mis en jeu, tout en tenant compte de la présence de discontinuités intrinsèquement liées au caractère hétérogène du milieu poreux. La cinématique Eulérienne est employée dans ce travail.

Soit un domaine  $\Omega$ , ouvert borné connexe de l'espace euclidien  $\mathcal{E}$  à deux dimensions muni de la distance usuelle, évoluant dans un intervalle de temps  $\mathcal{T}$  ouvert de  $\mathbb{R}_+$ . On note  $\partial\Omega$  la frontière de  $\Omega$  et  $\bar{\Omega}$  la fermeture de ce dernier. A tout instant  $t$  de  $\mathcal{T}$ ,  $\Omega$  est occupé par un milieu poreux constitué de deux phases, l'une solide (repérée par l'exposant  $s$ ) et l'autre fluide (repérée par l'exposant  $f$ ). A tout instant  $t$  de  $\mathcal{T}$ , la phase solide occupe un domaine  $\Omega^s$  ouvert borné et non-connexe de  $\mathcal{E}$ .  $\Omega^s$  est constitué de  $N$  parties connexes  $\Omega_i^s$  disjointes, chacune d'entre elles est assimilée au plus petit connexe contenant un grain du squelette solide. La frontière de  $\Omega^s$  est notée  $\Gamma$  et est un fermé borné non-connexe de  $\Omega$ .  $\Omega^s$  est strictement intérieure à  $\Omega$  et sa fermeture est notée  $\bar{\Omega}^s$ . A tout instant  $t$  de  $\mathcal{T}$ , le complémentaire de  $\bar{\Omega}^s$  dans  $\Omega$  est occupé par la phase fluide du milieu poreux. Ce domaine est donc un ouvert borné et connexe. La frontière  $\Gamma$  correspond à l'interface entre les phases solide et fluide. Il s'agit d'une interface non matérielle. Si on observe le milieu poreux ainsi décrit comme un milieu continu hétérogène, alors  $\Gamma$  constitue une surface de discontinuité vis-à-vis des grandeurs mécaniques que nous considérerons dans ce travail. Dans ce qui suit, pour une quantité mécanique  $a$  donnée, nous nous référons de façon explicite à la phase fluide par le biais de l'exposant  $f$  (respectivement  $a^f$ ) et à la phase solide *via* l'exposant  $s$  (respectivement  $a^s$ ). L'absence d'indice (respectivement  $a$ ) indique que l'on se réfère au milieu contenu dans  $\Omega$  sans distinction explicite de la phase observée.

Au travers de la cinématique Eulérienne,  $\Omega$  est un volume de contrôle fixe. La densité  $\rho$  du milieu poreux contenu dans ce domaine de contrôle est une fonction au moins continue par morceau sur  $\Omega$ . Le milieu poreux est dit suffusif : un échange de masse peut s'opérer entre les phases solides et fluides. En particulier, le solide peut être « fluidisé » et transporté par diffusion ou par advection au sein de la phase fluide. Ainsi, il est légitime d'introduire la concentration volumique  $c$  comme la concentration en particules solides dans le milieu poreux. Cette concentration est définie sur  $\Omega$ , est continue par morceau et est par définition unitaire dans  $\Omega^s$ . Le milieu poreux est animé

<sup>1</sup>Au sens du milieu poreux

d'un champ de vitesse  $\mathbf{v}$ , au moins continu sur  $\Omega^s$  et  $\Omega^f$ , au moins continu par morceau sur  $\Omega$ . L'accélération  $\gamma$  du milieu poreux est définie comme la dérivée particulaire de la vitesse :

$$\gamma = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \quad (5.1)$$

Nous nous intéressons à l'hydrodynamique du milieu poreux. En ce sens, la seule cinématique relative du fluide par rapport au solide importe. Ce caractère relatif permet alors de s'affranchir de la cinématique du solide si la vitesse du milieu poreux dans  $\Omega^s$  est prise identique au vecteur nul. Par définition, cette simplification implique la nullité de l'accélération dans  $\Omega^s$ .

## 5.2 Microstructure évolutive : méthode des courbes de niveaux

On suppose que le milieu poreux présente deux échelles de longueur. D'un côté, nous avons une longueur  $L$  caractéristique de la taille du domaine  $\Omega$  et de l'autre une longueur  $l$  caractéristique de la microstructure. On pose l'hypothèse de séparation des échelles c'est à dire :  $\epsilon = l/L \ll 1$ . Par ailleurs, on exprime la variable d'espace adimensionnelle  $\tilde{\mathbf{X}}$  à partir de la variable d'espace physique :

$$\tilde{\mathbf{X}} = \frac{\mathbf{X}}{L} \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega \quad (5.2)$$

De plus, nous notons  $\tilde{\Omega}$ ,  $\partial\tilde{\Omega}$ ,  $\tilde{\Omega}^s$ ,  $\tilde{\Omega}^f$ ,  $\tilde{\Gamma}$  les images respectives de  $\Omega$ ,  $\partial\Omega$ ,  $\Omega^s$ ,  $\Omega^f$ , et  $\Gamma$  dans l'espace adimensionnel ainsi défini. On introduit par ailleurs une variable de temps adimensionnelle  $\tilde{t}$  à partir d'un temps de référence  $\hat{t}$  :

$$\tilde{t} = \frac{t}{\hat{t}} \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (5.3)$$

On définit alors  $\tilde{\mathcal{T}}$  comme étant l'image de  $\mathcal{T}$  dans l'espace temporel adimensionnel.

### 5.2.1 Milieu quasi-périodique et description implicite des hétérogénéités

Maintenant que ces quelques considérations topologiques ont été présentées, il est possible de fournir une description fine de la géométrie du milieu poreux. Le milieu contenu dans  $\Omega$  est supposé quasi-périodique, de période  $l$  et constitué d'un grand nombre de cellules élémentaires. Chaque cellule contient un unique grain solide contenu par un  $\Omega_i^s$  et une partie  $\Omega_i^f$  connexe de  $\Omega^f$ . Chaque grain est constitué d'un noyau circulaire de rayon  $R$  fixe et centré sur le centre de la cellule. Ce noyau est recouvert d'une couche érodable d'épaisseur  $d$  variable sur le pourtour du noyau, et donc fonction de la coordonnée polaire angulaire  $\theta$  dans le repère cylindrique ayant pour origine le centre de la cellule, voir figure (5.1).  $R$  est variable, d'une cellule à une autre, de même que la distribution de  $d$  sur le pourtour du noyau. Cette variabilité *inter-cellulaire* apporte au milieu poreux son caractère quasi-périodique. A l'échelle grain-pore, on fait l'hypothèse que la suffusion se manifeste par une évolution de la localisation de l'interface entre solide et fluide. Ceci implique une évolution dans le temps de l'épaisseur de solide érodable  $d$ . Il semble intuitif d'émettre l'hypothèse que cette évolution soit gouvernée par les conditions mécaniques le long de  $\Gamma$  (voir Bonelli et Marot [87]) et il semble raisonnable d'employer une méthode implicite de description de l'interface afin d'évaluer son évolution. Maintenant, nous avons tous les éléments

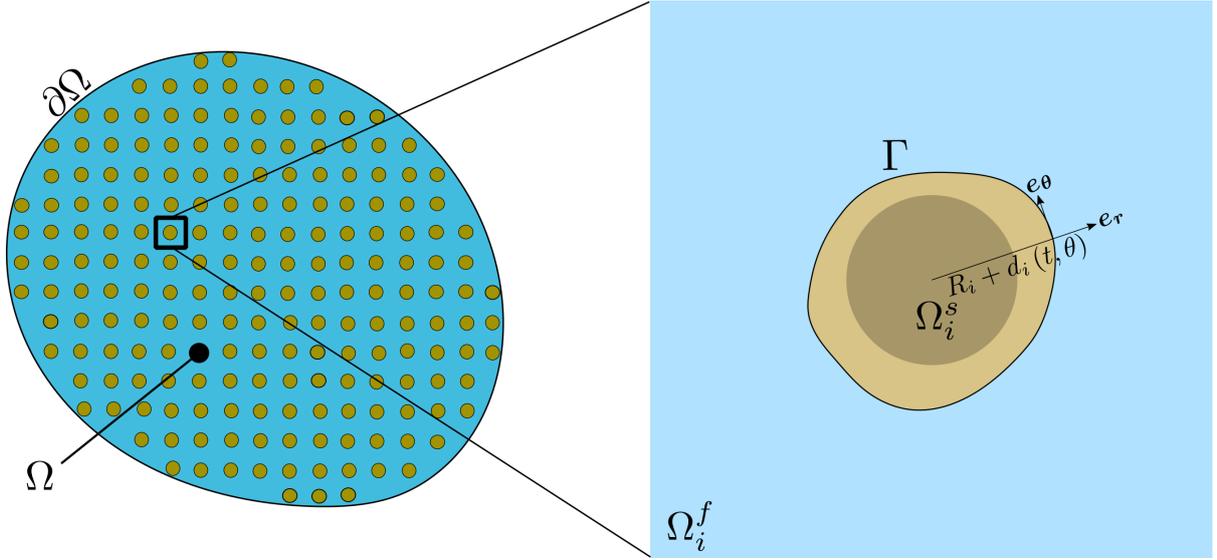


FIGURE 5.1 – Milieu quasi-périodique

conceptuels pour proposer une telle description, et ce par l'emploi de la méthode des courbes de niveau ou « Level-set Method » (voir Osher et Fedkiw [54]).

### 5.2.1.1 Représentation implicite de l'interface par courbe de niveau

Afin de représenter l'interface de manière implicite *via* la méthode des courbes de niveau, on souhaite définir une fonction  $S$  telle que son noyau  $\ker(S)$  corresponde au produit cartésien de l'interface  $\Gamma$  par l'intervalle de temps  $\mathcal{T}$  :

$$\begin{aligned} S : \Omega \times \mathcal{T} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{X}, t) &\mapsto S(\mathbf{X}, t) \end{aligned} \quad (5.4a)$$

$$\ker(S) := \{(\mathbf{X}, t) \in \Omega \times \mathcal{T} \mid S(\mathbf{X}, t) = 0\} \equiv \Gamma \times \mathcal{T} \quad (5.4b)$$

Cette fonction, appelée courbe de niveau  $S$ , doit être telle que son évaluation en un point de coordonnées  $\mathbf{X}$  donne une indication sur l'appartenance de ce point à  $\Omega^f$  ou à  $\Omega^s$  :

$$S(\mathbf{X}, t) \begin{cases} < 0, & \text{si } \mathbf{X} \text{ est dans le fluide } \Omega^f \text{ au temps } t \\ = 0, & \text{si } \mathbf{X} \text{ est sur l'interface } \Gamma \text{ au temps } t \\ > 0, & \text{si } \mathbf{X} \text{ est dans le grain } \Omega^s \text{ au temps } t \end{cases} \quad (5.5)$$

Ce formalisme permet de déterminer l'évolution de l'interface  $\Gamma$ . Pour ce faire, on différencie la fonction courbe de niveau le long du mouvement d'une iso-valeur de  $S$  (voir Osher et Fedkiw [54]) :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla S \cdot \mathbf{w}^* = 0 \quad \text{dans } \Omega^f \times \mathcal{T} \quad (5.6)$$

$\mathbf{w}^*$  étant la vitesse de l'interface à l'iso-valeur considérée. Le gradient  $\nabla S$  de la surface est lié à la normale  $\mathbf{n}$  d'une iso-valeurs de  $S$  par :

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla S}{\|\nabla S\|} \quad (5.7)$$

Si on note  $w_n^*$  la vitesse normale de l'iso-valeur de  $S$ , on a alors l'équation de la courbe de niveau régissant l'évolution des iso-valeurs de  $S$  (et donc celle de l'interface  $\Gamma$ ) :

$$w_n^* = -\frac{1}{\|\nabla S\|} \frac{\partial S}{\partial t} \quad \text{dans } \Omega^f \times \mathcal{T} \quad (5.8)$$

On considère que cette vitesse normale est connue au niveau de l'interface :

$$w_n^* = w_n \quad \text{dans } \Omega^f \times \mathcal{T} \quad (5.9)$$

où  $w_n$  correspond à la vitesse normale de l'interface. Dans cette étude,  $w_n$  sera supposée connue par prescription comportementale.

**Remarque** (A propos du signe de  $S$ ). *Le choix de considérer la courbe de niveau positive dans le grain et négative dans le pore n'est pas anodin : une telle description implique que la normale  $\mathbf{n}$  définie par l'équation (5.7) est dirigée vers l'extérieur du fluide, et donc vers l'intérieur du grain.*

### 5.2.1.2 Définition de la vitesse des iso-valeurs de $S$

L'équation de la courbe de niveau est valable dans le domaine  $\Omega$ . Cependant  $w_n^*$  est, pour l'instant, connue uniquement au niveau de l'interface. Il faut donc établir un moyen permettant de définir  $w_n^*$  dans tout  $\Omega$ , et de préférence, à partir de  $w_n$ . Pour ce faire, on peut choisir d'étendre  $w_n$  de  $\Gamma$  vers  $\Omega$ . On parle alors « d'extension de la vitesse de l'interface ». En se référant à la littérature (voir Osher et Fedkiw [54]), l'extension de la vitesse peut-être réalisée en résolvant le problème de transport suivant :

Soit  $\mathcal{T}'$  l'intervalle de temps fictif durant lequel on transporte  $w_n$  de  $\Gamma$  vers  $\Omega$ . Les éléments  $t'$  de  $\mathcal{T}'$  représentent des instants fictifs, distincts des instants physiques  $t$ . On commence par introduire le champ de vitesse étendu suivant :

$$\begin{aligned} w'_n &: \Omega \times \mathcal{T} \times \mathcal{T}' \rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{X}, t, t') &\mapsto w'_n(\mathbf{X}, t, t') \end{aligned} \quad (5.10)$$

On résoud ensuite le jeu d'équations suivant :

$$\frac{\partial w'_n}{\partial t'} + \text{sign}(S) \mathbf{n} \cdot \nabla w'_n = 0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathcal{T} \times \mathcal{T}' \quad (5.11a)$$

$$w'_n = w_n \quad \text{dans } \Gamma \times \mathcal{T} \times \mathcal{T}' \quad (5.11b)$$

Ce problème est un problème d'advection sur  $\mathcal{T}'$ . Concrètement, cette équation réalise le transport de  $w_n$  depuis  $\Gamma$  vers l'intégralité du domaine  $\Omega$ . Ce transport est effectué en suivant le champ  $\mathbf{n}$  de normales aux iso-valeurs de  $S$  de telle sorte qu'un régime stationnaire (au sens du temps fictif  $t'$ ) est atteint dès lors que la vitesse étendue  $w'_n$  est constante le long d'une ligne courant du champ de normale  $\mathbf{n}$ . En effet, on a alors :

$$\frac{\partial w'_n}{\partial t'} = -\text{sign}(S) \mathbf{n} \cdot \nabla w'_n = 0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathcal{T} \times \mathcal{T}' \quad (5.12)$$

Une fois que le régime stationnaire est atteint, le problème d'extension de  $w_n$  est résolu. On note  $t'_{stat}$  le temps fictif correspondant et on pose alors :

$$w_n^*(\mathbf{X}, t) = w'_n(\mathbf{X}, t, t'_{stat}) \quad \forall (\mathbf{X}, t) \in \Omega \times \mathcal{T} \quad (5.13)$$

La propriété d'orthogonalité entre le gradient du champ de vitesse étendue et le champ de normale  $\mathbf{n}$  procure à  $w_n^*$  l'avantage d'être conservateur par rapport à la propriété de distance signée de la fonction courbe de niveau. Cette propriété est d'un intérêt significatif d'un point de vue numérique (voir Osher et Fedkiw [54] d'après Zhao *et al.* [88]).

Cependant, dans le cadre de la procédure d'homogénéisation quasi-périodique, nous souhaitons disposer d'une expression explicite pour la vitesse étendue de l'interface. On parlera alors de vitesse des iso-valeurs de la courbe de niveau. C'est pourquoi nous prescrivons *directement* une loi de comportement pour cette dernière. La raison d'une telle préférence sera explicitée dans la section 6.2.2.1 tandis que la discussion concernant la construction d'un champ de vitesse des iso-valeurs de  $S$  sera abordée plus loin dans ce mémoire, en sous-section 6.5.4.1.

### 5.2.1.3 Construction de la courbe de niveau

En raison de la non-connexité de  $\Gamma$ , la définition d'une unique fonction  $S$  sur le domaine vrai n'est pas triviale. Le raisonnement ayant conduit à sa formulation a été largement inspiré par Van Nordeen et Muntean [53]. Par ailleurs, comme plus tard nous adimensionnerons le problème aux limites vrai avant d'employer la méthode d'homogénéisation formelle, nous donnons directement la forme de la fonction courbe de niveau dans l'espace des variables non-dimensionnelles. La fonction courbe de niveau  $S$  que nous proposons ici est donnée comme suit :

$$S(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{t}) = \tilde{R} \left( \tilde{\mathbf{X}} - \epsilon Q \left( \frac{\tilde{\mathbf{X}}}{\epsilon} \right) \right) + \tilde{d} \left( \tilde{\mathbf{X}} - \epsilon Q \left( \frac{\tilde{\mathbf{X}}}{\epsilon} \right), \theta, \tilde{t} \right) - P \left( \frac{\tilde{\mathbf{X}}}{\epsilon} \right) \quad (5.14)$$

Dans cette expression  $\tilde{R} = R/L$  représente la fonction de l'espace vrai adimensionnel donnant le rayon du noyau d'un grain, et  $\tilde{d} = d/L$  celle donnant l'épaisseur de grains érodables. Dans l'espace adimensionnel,  $Q$  et  $P$  représentent les extensions périodiques respectives des fonctions identité et module, sur un domaine de période unitaire :

$$\begin{aligned} Q : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \times \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \\ \zeta &\mapsto Q_\alpha(\zeta) = \zeta_\alpha - \left\lfloor \zeta_\alpha + \frac{1}{2} \right\rfloor \end{aligned} \quad (5.15a)$$

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \left[ 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \\ \zeta &\mapsto P(\zeta) = \sqrt{\left( \zeta_\alpha - \left\lfloor \zeta_\alpha + \frac{1}{2} \right\rfloor \right) \left( \zeta_\alpha - \left\lfloor \zeta_\alpha + \frac{1}{2} \right\rfloor \right)} \end{aligned} \quad (5.15b)$$

où les crochets  $\lfloor \cdot \rfloor$  désignent la fonction d'arrondi à l'entier inférieur :

$$\begin{aligned} \lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \zeta_\alpha &\mapsto \lfloor \zeta_\alpha \rfloor = \max \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \leq \zeta_\alpha \} \end{aligned} \quad (5.16)$$

On remarque par ailleurs que  $P$  n'est rien d'autre que le module de  $Q$ . La présence des termes  $+1/2$  dans les expressions des fonctions  $Q$  et  $P$  vient du fait que l'on cherche en fait à ce que ces fonctions permettent de se rapporter à un repère local défini par le centre de la cellule, voir figure

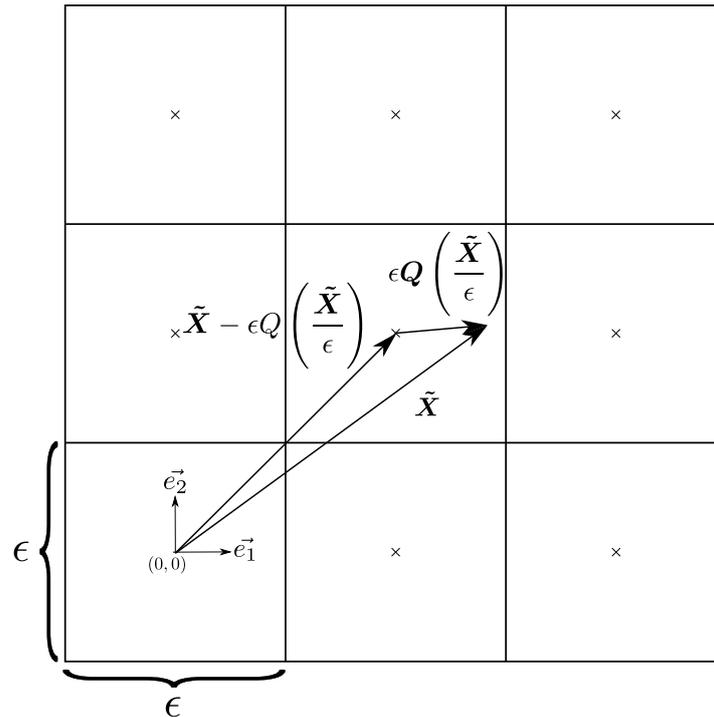


FIGURE 5.2 – Illustration des différents termes de la fonction courbe de niveau

(5.2). On définit également la variable  $\theta$  à partir de  $Q$  :

$$\theta = \arctan \frac{Q_2 \left( \frac{\tilde{\mathbf{X}}}{\epsilon} \right)}{Q_1 \left( \frac{\tilde{\mathbf{X}}}{\epsilon} \right)} \quad (5.17)$$

Cette définition a l'avantage d'être souple : il est possible de représenter plusieurs géométries de grains.

### 5.3 Équations de conservation pour le milieu poreux

Dans cette section, nous définissons le problème aux limites vrai considéré. Dans un premier temps, nous détaillerons les équations de conservation utilisées. Elles sont d'abord formulées sous formes intégrales puis localisées. Le raisonnement conduisant aux formes locales est explicité pour la conservation de la masse et est reproduit pour les autres équations de conservation. Nous nous intéressons uniquement aux phénomènes ayant lieu au sein du fluide et au niveau de l'interface fluide-solide. Afin de pouvoir localiser les équations de conservation écrites sous formes intégrales, nous considérons une partie quelconque  $\mathcal{D}$  de  $\Omega$  de frontière  $\partial\mathcal{D}$  contenant une partie  $\Gamma_{\mathcal{D}}$  de  $\Gamma$ . Dans ce qui suit, nous notons  $\mathbf{n}_{ext}$  la normale unitaire extérieure de  $\partial\mathcal{D}$ .  $\mathbf{n}$  désigne la normale unitaire de  $\Gamma$  définie par l'équation (5.7).

### 5.3.1 Conservation de la masse

On suppose l'existence d'une source de masse volumique  $\beta$  sur  $\mathcal{D}$  et d'un flux de diffusion massique  $\mathbf{a}$  sur  $\partial\mathcal{D}$ . On écrit la forme intégrale de la conservation de la masse :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \, d\Omega = \int_{\mathcal{D}} \beta \, d\Omega - \int_{\partial\mathcal{D}} (\rho\mathbf{v} + \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n}_{ext} \, da \quad (5.18)$$

On exploite le théorème de transport généralisé (voir théorème C.1.1 de l'annexe C) sur le membre de gauche :

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{\partial\rho}{\partial t} \, d\Omega - \int_{\Gamma_{\mathcal{D}}} \llbracket \rho\mathbf{w} \rrbracket \cdot \mathbf{n} \, da = \int_{\mathcal{D}} \beta \, d\Omega - \int_{\partial\mathcal{D}} (\rho\mathbf{v} + \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n}_{ext} \, da \quad (5.19)$$

On utilise ensuite le théorème de flux-divergence généralisé (voir théorème C.1.2 de l'annexe C) sur les membres de gauche et de droite :

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\mathcal{D}}} \llbracket \rho(\mathbf{v} - \mathbf{w}) + \mathbf{a} \rrbracket \cdot \mathbf{n} \, da = \int_{\mathcal{D}} \beta - \nabla \cdot \mathbf{a} \, d\Omega \quad (5.20)$$

Premièrement on remarque que si on localise l'équation ci-dessus, en utilisant le lemme fondamental des milieux continus (voir Gemain [57]), alors on obtient classiquement la forme locale de l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial\rho^\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha) = \beta - \nabla \cdot \mathbf{a} \quad \text{dans} \quad \Omega^\alpha \times \mathcal{T} \quad \alpha \in \{s, f\} \quad (5.21)$$

Si on considère que dans le fluide  $\beta = 0$  et que  $\mathbf{a} = 0$  alors :

$$\frac{\partial\rho^f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^f \mathbf{v}^f) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega^f \times \mathcal{T} \quad (5.22)$$

De plus, en considérant  $\rho$  et  $\mathbf{v}$  suffisamment réguliers, on peut localiser par densité sur  $\Gamma$

$$\int_{\Gamma_{\mathcal{D}}} \llbracket \rho(\mathbf{v} - \mathbf{w}) + \mathbf{a} \rrbracket \cdot \mathbf{n} \, da = 0 \quad \Rightarrow \quad \llbracket \rho(\mathbf{v} - \mathbf{w}) + \mathbf{a} \rrbracket \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{dans} \quad \Gamma \times \mathcal{T} \quad (5.23)$$

En considérant que le grain solide est immobile, soit  $\mathbf{v}^s = \mathbf{0}$ , et dans le cas où  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  on obtient le résultat suivant :

$$\rho^f (\mathbf{v}^f - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} = -\rho^s \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \quad \text{dans} \quad \Gamma \times \mathcal{T} \quad (5.24)$$

### 5.3.2 Conservation de la masse de particules solides

Pour établir les lois locales de conservation de la masse des particules solides, on procède d'une manière similaire à celle ayant conduit à l'établissement des lois locales de conservation de la masse. Dans ce cas, la quantité d'intérêt est  $\rho^s c$  où  $c$  est la concentration volumique en particules solides,  $\rho^s$  étant la masse volumique spécifique du solide, et donc des particules fluidisées. On pose dans un premier temps la forme intégrale de la loi de conservation de la masse des particules fluidisées. On ne considère pas de terme source volumique et on note  $\mathbf{J}$  un flux de diffusion sur le bord  $\partial\mathcal{D}$ .

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho^s c \, d\Omega = - \int_{\partial\mathcal{D}} (\rho^s c \mathbf{v} + \mathbf{J}) \cdot \mathbf{n}_{ext} \, da \quad (5.25)$$

On peut alors aboutir à l'équation locale de la conservation de la masse des particules solides dans le domaine contenant la phase fluide :

$$\frac{\partial \rho^s c}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^s c \mathbf{v}^f) = -\nabla \cdot \mathbf{J} \quad \text{dans } \Omega^f \times \mathcal{T} \quad (5.26)$$

Puis au niveau de l'interface, en considérant que la concentration en particules solides dans le solide est égale à 1 et que la vitesse  $\mathbf{v}^s$  est nulle :

$$(\rho^s c (\mathbf{v}^f - \mathbf{w}) + \mathbf{J}) \cdot \mathbf{n} = -\rho^s \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \quad \text{dans } \Gamma \times \mathcal{T} \quad (5.27)$$

### 5.3.3 Conservation de la quantité de mouvement

Pour établir les lois locales de conservation de la quantité de mouvement, on procède d'une manière similaire à celle ayant conduit à l'établissement des lois locales de conservation de la masse. Seulement cette fois-ci, la quantité d'intérêt n'est plus la quantité scalaire  $\rho$ , mais la quantité vectorielle  $\rho \mathbf{v}$ . On pose dans un premier temps la forme intégrale de la loi de conservation de la quantité de mouvement. On définit  $\mathbf{f}$  comme une force de volume sur  $\mathcal{D}$  et  $\mathbf{t}$  comme un effort surfacique sur le bord  $\partial \mathcal{D}$ .

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{f} \, d\Omega - \int_{\partial \mathcal{D}} (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_{ext} - \mathbf{t} \, da \quad (5.28)$$

On applique le théorème de la contrainte de Cauchy en introduisant l'application  $\boldsymbol{\sigma}$  définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} : \Omega \times \mathcal{T} &\rightarrow \mathbb{T}_s^2 \\ (\mathbf{X}, t) &\mapsto \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) \end{aligned} \quad (5.29)$$

où  $\mathbb{T}_s^2$  désigne, en deux dimensions, la restriction de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  à l'ensemble des tenseurs symétriques. L'image de  $\Omega \times \mathcal{T}$  par cette application est nommée « champ de tenseur des contraintes de Cauchy » et est telle que pour toute facette de normale  $\mathbf{n}$  :

$$\forall (\mathbf{X}, t) \in \Omega \times \mathcal{T}, \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{t}(\mathbf{X}, t, \mathbf{n}) \quad (5.30)$$

En considérant la restriction de  $\Omega \times \mathcal{T}$  à  $\mathcal{D} \times \mathcal{T}$ , et en considérant  $\mathbf{v}^s$  nulle, on aboutit à l'équation locale de la conservation de la quantité de mouvement dans le domaine contenant la phase fluide :

$$\frac{\partial \rho^f \mathbf{v}^f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^f \mathbf{v}^f \otimes \mathbf{v}^f) = \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad \text{dans } \Omega^f \times \mathcal{T} \quad (5.31)$$

Puis au niveau de l'interface :

$$(\rho^f \mathbf{v}^f \otimes (\mathbf{v}^f - \mathbf{w}) - \boldsymbol{\sigma}^f) \cdot \mathbf{n} = -\boldsymbol{\sigma}^s \cdot \mathbf{n} \quad \text{dans } \Gamma \times \mathcal{T} \quad (5.32)$$

On peut également supposer que la contrainte tangentielle est telle que le glissement entre le fluide et l'interface fluide-solide soit nul. Ce qui revient à poser :

$$\mathbf{v}^f \cdot \boldsymbol{\omega} = 0 \quad \text{dans } \Gamma \times \mathcal{T} \quad (5.33)$$

cette relation induit alors :

$$(\boldsymbol{\sigma}^f \cdot \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\sigma}^s \cdot \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\omega} \quad \text{dans } \Gamma \times \mathcal{T} \quad (5.34)$$

où  $\boldsymbol{\omega}$  représente le vecteur tangent à l'interface. Finalement, la composante normale de (5.32) se réduit à :

$$((\rho^f \mathbf{v}^f \otimes (\mathbf{v}^f - \mathbf{w}) - \boldsymbol{\sigma}^f) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = -(\boldsymbol{\sigma}^s \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \quad \text{dans } \Gamma \times \mathcal{T} \quad (5.35)$$

## 5.4 Lois de comportement de la phase fluide

L'objectif de cette section est de détailler la thermodynamique des processus ayant lieu au sein de la phase fluide, c'est à dire dans le domaine  $\Omega^f$ . L'idée principale étant d'établir des lois de comportement pour la phase fluide. La démarche retenue est la suivante : dans un premier temps, on écrit le principe des puissances virtuelles afin d'exprimer la puissance des efforts intérieurs. Ensuite, nous posons le premier principe de la thermodynamique. Ce dernier sera exploité dans l'expression du second principe afin de déduire la forme de l'inégalité de Clausius-Duhem. Enfin, cette inégalité sera utilisée pour caractériser les lois de comportement.

### 5.4.1 Principe des puissances virtuelles

Afin de nous affranchir de la condition d'interface solide-fluide, nous nous situons dans le domaine de contrôle fixe ouvert borné  $\mathcal{D}^f$  strictement intérieur à  $\Omega^f$  et de frontière  $\partial\mathcal{D}^f$  suffisamment régulière de telle sorte que sa normale  $\mathbf{n}_{\mathcal{D}}$  y soit définie presque partout. En mécanique des milieux continus, la puissance est définie comme étant une fonctionnelle linéaire et continue sur l'espace des champs de vitesse. Dans le cadre de l'application du principe des puissances virtuelles, on considère l'espace des champs de vitesses cinématiquement admissibles sur  $\mathcal{D}^f$  noté  $\mathcal{V}(\mathcal{D}^f)$ . Dans ce sens, les puissances des efforts extérieurs  $\mathcal{P}_{ext}$ , intérieurs  $\mathcal{P}_{int}$  et inertiels  $\mathcal{P}_a$  sont toutes définies de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\alpha & : \mathcal{V}(\mathcal{D}^f) \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{u} & \mapsto \mathcal{P}_\alpha(\mathbf{u}), \quad \alpha \in \{ext, int, a\} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Le principe des puissances virtuelles (voir Germain [57]) statue l'égalité entre la puissance des efforts inertiels et la somme des puissances des efforts extérieurs et intérieurs au cours de tout mouvement virtuel. Ceci se traduit par l'équation suivante :

$$\forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}(\mathcal{D}^f), \quad \mathcal{P}_a(\mathbf{u}) = \mathcal{P}_{ext}(\mathbf{u}) + \mathcal{P}_{int}(\mathbf{u}) \quad (5.37)$$

Il s'agit donc de former la puissance des efforts extérieurs ainsi que celle des efforts inertiels, puis d'en déduire  $\mathcal{P}_{int}$ . On suppose que les efforts extérieurs agissant sur le domaine  $\mathcal{D}^f$  sont constitué d'un champ de force volumique  $\mathbf{f}$  sur  $\mathcal{D}^f$  ainsi que d'une force surfacique  $\mathbf{t}$  sur  $\partial\mathcal{D}^f$  :

$$\mathcal{P}_{ext}(\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{D}^f} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\partial\mathcal{D}^f} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} \, da \quad (5.38)$$

Si on note  $\mathbf{d}$  la partie symétrique du gradient du champ de vitesse virtuelle, alors en vertu du théorème de la contrainte de Cauchy et du théorème de flux divergence,  $\mathcal{P}_{ext}(\mathbf{u})$  s'écrit :

$$\mathcal{P}_{ext}(\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{D}^f} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}) \cdot \mathbf{u} \, d\Omega \quad (5.39)$$

Compte tenu de la forme locale de la loi de conservation de la masse pour un point strictement intérieur au domaine contenant la phase fluide, alors on peut écrire la puissance des efforts inertiels :

$$\mathcal{P}_a(\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{D}^f} \rho^f \boldsymbol{\gamma}^f \cdot \mathbf{u} \, d\Omega \quad (5.40)$$

De cette façon, on écrit :

$$\mathcal{P}_{int}(\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{D}^f} (-\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} - \rho^f \boldsymbol{\gamma}^f) \cdot \mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \, d\Omega \quad (5.41)$$

En considérant le bilan local de quantité de mouvement ainsi que la conservation de la masse, pour un point strictement intérieur au domaine contenant la phase fluide, on obtient :  $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} - \rho^f \boldsymbol{\gamma}^f = \mathbf{0}$  soit :

$$\mathcal{P}_{int}(\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{D}^f} (-\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}) \, d\Omega \quad (5.42)$$

### 5.4.2 Premier principe de la thermodynamique

On appelle  $\mathcal{U}$  l'énergie interne globale du milieu contenu dans le domaine géométrique  $\mathcal{D}^f$  :

$$\mathcal{U} = \int_{\mathcal{D}^f} \rho^f e^f \, d\Omega \quad (5.43)$$

où  $e^f$  correspond à l'énergie interne spécifique de la phase fluide (par unité de masse). On écrit le premier principe de la thermodynamique sous la forme suivante :

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = -\mathcal{P}_{int}(\mathbf{v}^f) + \mathcal{P}_{diff} + \mathring{\mathcal{Q}} + \mathring{\mathcal{C}} \quad (5.44)$$

où  $\mathcal{P}_{int}$  est donnée par l'équation (5.42). Dans cette écriture  $\mathcal{P}_{diff}$  correspond à la puissance fournie au système par le biais d'un flux de diffusion sur le bord  $\partial\mathcal{D}^f$ ,  $\mathring{\mathcal{Q}}$  est la puissance calorifique fournie au système par le biais d'un flux de chaleur sur le bord  $\partial\mathcal{D}^f$ ,  $\mathring{\mathcal{C}}$  représente un flux convectif d'énergie interne traversant le bord  $\partial\mathcal{D}^f$  :

$$\mathcal{P}_{diff} = - \int_{\partial\mathcal{D}^f} \mu \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{D}} \, da \quad (5.45a)$$

$$\mathring{\mathcal{Q}} = - \int_{\partial\mathcal{D}^f} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{D}} \, da \quad (5.45b)$$

$$\mathring{\mathcal{C}} = - \int_{\partial\mathcal{D}^f} \rho^f e^f \mathbf{v}^f \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{D}} \, da \quad (5.45c)$$

$\mu$  étant le potentiel chimique de la phase fluide et  $\mathbf{q}$  une densité de flux de chaleur sur  $\partial\mathcal{D}^f$ . On remarquera un aspect important au travers de l'écriture de la puissance  $\mathcal{P}_{diff}$  fournie au système : aucun terme source volumique n'est pris en compte. C'est à dire que les particules fluidisées ne réagissent pas chimiquement avec le liquide poral. Après réarrangement de (5.44) en vertu du théorème de flux-divergence puis par localisation, on obtient le résultat suivant :

$$\frac{\partial \rho^f e^f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^f e^f \mathbf{v}^f) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \nabla \cdot (\mu \mathbf{J}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (5.46)$$

### 5.4.3 Second principe de la thermodynamique

On appelle  $\mathcal{S}$  l'entropie globale du milieu contenu dans le domaine géométrique  $\mathcal{D}^f$ . Le système étant ouvert, alors le second principe de la thermodynamique s'écrit de la façon suivante :

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} \geq - \int_{\partial\mathcal{D}^f} \left( \frac{\mathbf{q}}{T} + \rho^f s^f \mathbf{v}^f \right) \cdot \mathbf{n} \, da \quad (5.47)$$

où  $T$  correspond à la température du milieu poreux et  $s^f$  à l'entropie spécifique de la phase fluide (par unité de masse). Cette relation se réarrange et se localise avec la même procédure que l'énergie interne :

$$\frac{\partial \rho^f s^f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^f s^f \mathbf{v}^f) \geq - \nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} \quad (5.48)$$

### 5.4.4 Inégalité de Clausius-Duhem

Afin d'écrire la dissipation thermodynamique du fluide, il convient d'exprimer le second principe de la thermodynamique en y faisant intervenir l'énergie interne. Pour cela, on propose d'introduire classiquement l'énergie libre de Helmholtz  $\psi^f$  de telle sorte que  $\psi^f = e^f - Ts^f$ . De ce fait, on écrit :

$$\rho^f \frac{ds^f}{dt} = \frac{\rho^f}{T} \left( \frac{de^f}{dt} - s^f \frac{dT}{dt} - \frac{d\psi^f}{dt} \right) \geq -\nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} \quad (5.49)$$

Or la dérivée temporelle de l'énergie interne  $e^f$  est donnée localement par le premier principe (5.46). Dans ce sens on obtient l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$\rho^f \frac{ds^f}{dt} = \frac{1}{T} \left( \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \nabla \cdot (\mu \mathbf{J}) - \nabla \cdot \mathbf{q} - \rho^f s^f \frac{dT}{dt} - \rho^f \frac{d\psi^f}{dt} \right) \geq -\nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} \quad (5.50)$$

Soit finalement :

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \nabla \cdot (\mu \mathbf{J}) - \rho^f s^f \frac{dT}{dt} - \rho^f \frac{d\psi^f}{dt} - \frac{\mathbf{q}}{T} \nabla T \geq 0 \quad (5.51)$$

Si on se concentre sur les processus isothermes en temps et en espace, alors :

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \nabla \cdot (\mu \mathbf{J}) - \rho^f \frac{d\psi^f}{dt} \geq 0 \quad (5.52)$$

A partir de maintenant, on peut proposer une forme pour  $\psi^f$ . On propose que  $\psi^f$  soit dépendant à la fois du volume massique et de la concentration des particules fluidisées. On propose également d'ajouter une contrainte : on considère que la masse volumique du fluide  $\rho^f$  doit être égale à la densité du mélange solide-fluide soit :

$$\rho^f - ((1 - c) \rho^w + c \rho^s) = 0 \quad (5.53)$$

Cette contrainte d'égalité est ajoutée dans l'expression de  $\psi^f$  par le biais d'un multiplicateur de Lagrange  $\lambda$

$$\psi^f \left( \frac{1}{\rho^f}, c, \lambda \right) = \psi_r^f(c) - \lambda \left( 1 - \frac{\rho^w}{\rho^f} + c \frac{(\rho^w - \rho^s)}{\rho^f} \right) \quad (5.54)$$

où le terme  $\psi_r^f(c)$  représente une part de l'énergie libre du fluide dépendant de la concentration  $c$  uniquement. Si on considère la dérivée temporelle de  $\psi^f$ , on a alors la forme de l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \nabla \cdot (\mu \mathbf{J}) - \rho^f \lambda (\rho^w (1 - c) + c \rho^s) \frac{d1/\rho^f}{dt} \\ - \rho^f \left( \frac{\partial \psi_r^f}{\partial c} + \lambda \frac{\rho^s - \rho^w}{\rho^f} \right) \frac{dc}{dt} + \rho^f \left( 1 - \frac{\rho^w}{\rho^f} + c \frac{(\rho^w - \rho^s)}{\rho^f} \right) \frac{d\lambda}{dt} \geq 0 \end{aligned} \quad (5.55)$$

En considérant la conservation de la masse des particules fluidisées et la conservation de la masse, et en considérant la décomposition du tenseur des contraintes en une partie sphérique  $-p\mathbb{I}$  ( $\mathbb{I}$  désigne alors le tenseur identité d'ordre 2) et déviatorique  $\boldsymbol{\tau}$  telles que  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - p\mathbb{I}$ , on peut réarranger cette inégalité pour obtenir :

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\tau} + (-p + \mu \rho^s c - \lambda (\rho^w (1 - c) + c \rho^s)) \mathbb{I}) : \mathbf{d} - \nabla \mu \cdot \mathbf{J} \\ - \left( \rho^f \frac{\partial \psi_r^f}{\partial c} + \lambda (\rho^s - \rho^w) - \mu \rho^s \right) \frac{dc}{dt} + (\rho^f - \rho^w + c (\rho^w - \rho^s)) \frac{d\lambda}{dt} \geq 0 \end{aligned} \quad (5.56)$$

On peut alors proposer un ensemble de lois de comportement vérifiant la positivité de la dissipation.

### 5.4.5 Lois de comportement

Pour établir les lois de comportement du fluide, on commence par émettre une hypothèse : si chaque terme est positif, alors la dissipation l'est aussi. Cette approche est brutale mais elle permet d'obtenir des restrictions simples et cohérentes d'un point de vue thermodynamique. La première étape est de proposer une loi liant  $\nabla\mu$  et  $\mathbf{J}$ . La plus simple façon d'assurer  $-\nabla\mu \cdot \mathbf{J} \geq 0$  est de considérer une relation linéaire entre  $\nabla\mu$  et  $\mathbf{J}$ . L'objet caractérisant cette linéarité est le tenseur de diffusivité noté  $\mathbf{D}$

$$\mathbf{J} = -\mathbf{D} \cdot \nabla\mu \quad (5.57)$$

Dans le cadre d'un comportement isotrope, on assimile  $\mathbf{D}$  à sa valeur propre  $D$  et on a :

$$\mathbf{J} = -D\nabla\mu \quad (5.58)$$

Par ailleurs, en considérant comme nulle la force thermodynamique liée à  $dc/dt$  (hypothèse de comportement conservatif), alors on obtient une loi de comportement pour le potentiel chimique :

$$\mu = \frac{\rho^f}{\rho^s} \frac{\partial\psi_r^f}{\partial c} + \lambda \left( 1 - \frac{\rho^w}{\rho^s} \right) \quad (5.59)$$

On considère que la dissipation liée à  $d\lambda/dt$  est nulle. On retrouve alors la restriction cinématique :

$$\rho^f = (1 - c)\rho^w + c\rho^s \quad (5.60)$$

On propose alors une loi de comportement concernant le comportement mécanique du fluide. On suppose que la partie reliée au cisaillement est purement dissipative. Dans ce sens la plus simple façon d'assurer  $\boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} \geq 0$  est de considérer une relation de type Stokes entre  $\boldsymbol{\tau}$  et  $\mathbf{d}$  en introduisant la viscosité  $\Lambda$  du fluide, que l'on considère constante. Par ailleurs on suppose la partie de la dissipation liée aux composantes sphériques comme conservative. Dans ce sens, la force thermodynamique correspondante est nulle. On a donc :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\Lambda \left( \mathbf{d} - \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{d}) \mathbb{I} \right) \quad (5.61a)$$

$$p = \mu\rho^s c - \lambda(\rho^w(1 - c) + c\rho^s) = c\rho^f \frac{\partial\psi_r^f}{\partial c} - \lambda\rho^w \quad (5.61b)$$

## 5.5 Passage dans l'espace sans dimension

Dans cette section, nous nous intéressons à reformuler le problème vrai dans l'espace adimensionnel. Dans un premier temps, nous traiterons les équations du problème sur  $\tilde{\Omega}^f$ , puis les équations sur l'interface  $\tilde{\Gamma}$ . Finalement, les équations du problème vrai dans l'espace sans dimension sont agrégées dans le tableau 5.1.

**Remarque** (Opérateurs différentiels sans dimension). *Dans les sections qui suivent, quelques notations nouvelles seront employées. Le pendant dans l'espace adimensionnel de l'opérateur différentiel  $\nabla$  sera noté  $\tilde{\nabla}$ . Il en va de même pour l'opérateur laplacien  $\Delta$ , dont le pendant dans l'espace adimensionnel sera noté  $\tilde{\Delta}$ . On a ainsi :*

$$\nabla\Xi = \frac{1}{L} \tilde{\nabla}\Xi \quad ; \quad \nabla \cdot \Xi = \frac{1}{L} \tilde{\nabla} \cdot \Xi \quad ; \quad \Delta\Xi = \frac{1}{L^2} \tilde{\Delta}\Xi \quad ; \quad \frac{\partial\Xi}{\partial t} = \frac{1}{\tilde{t}} \frac{\partial\Xi}{\partial \tilde{t}} \quad (5.62)$$

### 5.5.1 Lois de bilan sur $\tilde{\Omega}^f$

#### 5.5.1.1 Conservation de la masse

On rappelle que l'équation de conservation de la masse (5.21), s'écrit :

$$\frac{\partial \rho^f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^f \mathbf{v}^f) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega^f \times \mathcal{T} \quad (5.63)$$

De plus, la loi de mélange donnant la masse volumique du fluide (5.60) est donnée en fonction de la concentration en particules fluidisées :

$$\rho^f = (1 - c) \rho^w + c \rho^s \quad (5.64)$$

En insérant cette loi de mélange dans la loi de conservation de la masse on obtient :

$$\frac{\partial (1 - c) \rho^w + c \rho^s}{\partial t} + \nabla \cdot (((1 - c) \rho^w + c \rho^s) \mathbf{v}^f) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega^f \times \mathcal{T} \quad (5.65)$$

Les masses volumiques  $\rho^s$  et  $\rho^w$  sont intrinsèques et constantes en espace comme en temps. On fait l'hypothèse que ces masses volumiques peuvent s'écrire comme le produit d'une masse volumique de référence  $\hat{\rho}$  par une densité  $\tilde{\rho}$  :

$$\rho^\alpha = \hat{\rho} \tilde{\rho}^\alpha, \quad \alpha \in \{w, s\} \quad (5.66)$$

Par ailleurs, on suppose l'existence d'une vitesse de référence  $\hat{v}$ , telle que la vitesse du fluide en soit proportionnelle :

$$\mathbf{v}^f = \hat{v} \tilde{\mathbf{v}}^f \quad (5.67)$$

Alors compte tenu des changements de variables (5.62), on peut exprimer une forme non dimensionnelle de l'équation de conservation de la masse comme suit :

$$(\tilde{\rho}^s - \tilde{\rho}^w) \frac{\partial c}{\partial \tilde{t}} + \underbrace{\frac{\hat{v} \tilde{t}}{L}}_{(1)} \tilde{\nabla} \cdot ((c(\tilde{\rho}^s - \tilde{\rho}^w) + \tilde{\rho}^w) \tilde{\mathbf{v}}^f) = 0 \quad \text{dans} \quad \tilde{\Omega}^f \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (5.68)$$

On met ainsi en évidence le premier nombre adimensionnel  $\hat{v} \tilde{t} / L$

#### 5.5.1.2 Conservation de la masse de particules fluidisées

On rappelle que l'équation de conservation de la masse des particules fluidisées (5.26), s'exprime comme suit :

$$\frac{\partial \rho^s c}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^s c \mathbf{v}^f) = -\nabla \cdot \mathbf{J} \quad \text{dans} \quad \Omega^f \times \mathcal{T} \quad (5.69)$$

On considère alors les lois de comportement (5.58) et (5.59), ainsi que la loi de mélange (5.60) :

$$\mathbf{J} = -D \nabla \mu \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{\rho^f}{\rho^s} \frac{\partial \psi_r^f}{\partial c} + \lambda \left( 1 - \frac{\rho^w}{\rho^s} \right) \quad \text{où} \quad \rho^f = (1 - c) \rho^w + c \rho^s \quad (5.70)$$

Nous pouvons formuler l'équation de la conservation de la masse des particules fluidisées tenant compte du comportement diffusif de ces particules conjointement à la loi de mélange donnant la masse volumique du fluide :

$$\rho^s \left( \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c \mathbf{v}^f) \right) = D \Delta \left( \frac{(c(\rho^s - \rho^w) + \rho^w)}{\rho^s} \frac{\partial \psi_r^f}{\partial c} + \lambda \left( 1 - \frac{\rho^w}{\rho^s} \right) \right) \quad \text{dans} \quad \Omega^f \times \mathcal{T} \quad (5.71)$$

En supposant que la dérivée de  $\psi_r^f$  par rapport à  $c$  est constante, alors on a :

$$\rho^s \left( \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c \mathbf{v}^f) \right) = \left( 1 - \frac{\rho^w}{\rho^s} \right) D \Delta \left( c \frac{\partial \psi_r^f}{\partial c} + \lambda \right) \quad \text{dans } \Omega^f \times \mathcal{T} \quad (5.72)$$

Par ailleurs, on considère que le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  et l'énergie libre  $\psi_r^f$  s'écrivent comme le produit d'une énergie de référence notée  $\hat{\lambda}$  par un multiplicateur  $\tilde{\lambda}$  et une énergie  $\tilde{\psi}_r^f$  tous deux sans dimension :

$$\lambda = \hat{\lambda} \tilde{\lambda} \quad ; \quad \psi_r^f = \hat{\lambda} \tilde{\psi}_r^f \quad (5.73)$$

Par conséquent, compte tenu du changement de variables (5.62), on donne une forme non dimensionnelle de l'équation de conservation de la masse des particules fluidisées :

$$\underbrace{\frac{(\hat{v}t)^2}{L^2} \frac{\hat{\lambda}}{\hat{v}^2} \frac{D}{\hat{\rho}t}}_{(1)^2 \times (2) \times (3)} \tilde{\Delta} \left( \tilde{\lambda} + \frac{\partial \tilde{\psi}_r^f}{\partial c} c \right) = \frac{\tilde{\rho}^s}{1 - \frac{\tilde{\rho}^w}{\tilde{\rho}^s}} \left( \frac{\partial c}{\partial \tilde{t}} + \underbrace{\frac{\hat{v}t}{L}}_{(1)} \tilde{\nabla} \cdot (c \tilde{\mathbf{v}}^f) \right) \quad \text{dans } \tilde{\Omega}^f \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (5.74)$$

Cette équation met en évidence deux nouveaux nombres adimensionnels :  $\hat{\lambda}/\hat{v}^2$  et  $D/\hat{\rho}t$

### 5.5.1.3 Conservation de la quantité de mouvement

On rappelle que l'équation (5.31) de conservation de la quantité de mouvement s'exprime comme suit :

$$\frac{\partial \rho^f \mathbf{v}^f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^f \mathbf{v}^f \otimes \mathbf{v}^f) = \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad \text{dans } \Omega^f \times \mathcal{T} \quad (5.75)$$

Dans un premier temps, on remarque que l'exploitation de l'équation de conservation de la masse (5.21), permet de simplifier cette écriture. On aboutit alors à :

$$\rho^f \left( \frac{\partial \mathbf{v}^f}{\partial t} + \nabla (\mathbf{v}^f) \cdot \mathbf{v}^f \right) = \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad \text{dans } \Omega^f \times \mathcal{T} \quad (5.76)$$

On considère toujours la loi de mélange donnant la masse volumique du fluide (5.60) :

$$\rho^f = (1 - c) \rho^w + c \rho^s \quad (5.77)$$

On considère de plus la loi de comportement en contrainte, incluant les lois de comportement en cisaillement (5.61a), et en pression (5.61b) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - p \mathbb{I} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\tau} = 2\Lambda \left( \mathbf{d} - \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{d}) \mathbb{I} \right) \quad \text{et} \quad p = c \rho^f \frac{\partial \psi_r^f}{\partial c} - \lambda \rho^w \quad (5.78)$$

On reprend aussi l'hypothèse proposée précédemment : la dérivée de  $\psi_r^f$  par rapport à  $c$  est constante. Dans ces conditions, nous pouvons réécrire l'équation de conservation de la quantité de mouvement de la manière suivante :

$$\begin{aligned} ((1 - c) \rho^w + c \rho^s) \left( \frac{\partial \mathbf{v}^f}{\partial t} + \nabla (\mathbf{v}^f) \cdot \mathbf{v}^f \right) = \\ \Lambda \Delta \mathbf{v}^f + \rho^w \nabla \lambda - ((\nabla c - 2c \nabla c) \rho^w + 2c \nabla c \rho^s) \frac{\partial \psi_r^f}{\partial c} \quad \text{dans } \Omega^f \times \mathcal{T} \end{aligned} \quad (5.79)$$

Par ailleurs, on propose de négliger les termes quadratiques  $\nabla(\mathbf{v}^f) \cdot \mathbf{v}^f$  et  $c\nabla c$ . L'équation précédente se simplifie donc comme suit :

$$((1-c)\rho^w + c\rho^s) \frac{\partial \mathbf{v}^f}{\partial t} = \Lambda \Delta \mathbf{v}^f + \rho^w \nabla \left( \lambda - \frac{\partial \psi_r^f}{\partial c} c \right) \quad \text{dans } \Omega^f \times \mathcal{T} \quad (5.80)$$

En considérant les changements de variables (5.62), alors on obtient une forme adimensionnelle de l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\underbrace{\frac{\hat{v}\hat{t}}{L}}_{(1)} \left( \underbrace{\frac{\hat{\lambda}}{\hat{v}^2}}_{(2)} \tilde{\rho}^w \tilde{\nabla} \left( \tilde{\lambda} - \frac{\partial \tilde{\psi}_r^f}{\partial c} c \right) + \underbrace{\frac{\Lambda}{\hat{\rho}\hat{v}L}}_{(4)} \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{v}}^f \right) = (c(\tilde{\rho}^s - \tilde{\rho}^w) + \tilde{\rho}^w) \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}^f}{\partial \tilde{t}} \quad \text{dans } \tilde{\Omega}^f \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (5.81)$$

Cette équation met en évidence un quatrième nombre sans dimension :  $\Lambda/\hat{\rho}\hat{v}L$ , dont on peut remarquer la ressemblance avec l'inverse du nombre de Reynolds.

### 5.5.1.4 Équation de la courbe de niveau

On rappelle que l'équation de la courbe de niveau (5.8) :

$$-\frac{1}{\|\nabla S\|} \frac{\partial S}{\partial t} = w_n^* \quad \text{dans } \Omega^f \times \mathcal{T} \quad (5.82)$$

On suppose que la vitesse d'interface s'écrit comme le produit d'une vitesse de référence  $k_0$  et d'une vitesse d'interface sans dimension :

$$w_n = k_0 \tilde{w}_n \quad (5.83)$$

Compte tenu de la linéarité de  $w_n^*$  par rapport à  $w_n$ , (au travers du problème de l'extension (5.11)) on écrit  $w_n^*$  comme le produit de  $k_0$  par une vitesse d'interface étendue sans dimension  $\tilde{w}_n^*$

$$w_n^* = k_0 \tilde{w}_n^* \quad (5.84)$$

Dans ces conditions, compte tenu du changement de variable (5.62), on propose la forme adimensionnelle suivante de l'équation de la courbe de niveau

$$\frac{1}{\|\tilde{\nabla} S\|} \frac{\partial S}{\partial \tilde{t}} = \underbrace{\frac{\hat{v}\hat{t}k_0}{L\hat{v}}}_{(1) \times (5)} \tilde{w}_n^* \quad \text{dans } \tilde{\Omega}^f \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (5.85)$$

Un cinquième nombre sans dimension  $k_0/\hat{v}$  est alors mis en évidence. Ce nombre représente le rapport entre la vitesse de référence de l'interface et la vitesse de référence du fluide.

## 5.5.2 Conditions d'interface

### 5.5.2.1 Conservation de la masse

On rappelle l'équation de conservation de la masse le long de l'interface (5.24) :

$$\rho^f (\mathbf{v}^f - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} = -\rho^s \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \quad \text{dans } \Gamma \times \mathcal{T} \quad (5.86)$$

On peut dans un premier temps considérer la loi de mélange (5.60) :

$$\rho^f = (1 - c) \rho^w + c \rho^s \quad (5.87)$$

Par ailleurs le produit scalaire  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$  égale  $w_n$ . Dans ces conditions, on peut réécrire la loi de conservation de la masse :

$$((1 - c) \rho^w + c \rho^s) \mathbf{v}^f \cdot \mathbf{n} = (\rho^w - \rho^s) (1 - c) w_n \quad (5.88)$$

On peut donc proposer une forme adimensionnelle pour l'équation de conservation de la masse le long de l'interface :

$$\underbrace{\frac{\hat{v}}{k_0}}_{(5)} ((1 - c) \tilde{\rho}^w + c \tilde{\rho}^s) \tilde{\mathbf{v}}^f \cdot \mathbf{n} = (\tilde{\rho}^w - \tilde{\rho}^s) (1 - c) \tilde{w}_n \quad \text{dans } \tilde{\Gamma} \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (5.89)$$

Aucun nombre adimensionnel supplémentaire n'émerge de cette adimensionnalisation.

### 5.5.2.2 Conservation de la masse des particules fluidisées

On rappelle l'équation de conservation de la masse des particules fluidisées (5.27) :

$$(\rho^s c (\mathbf{v}^f - \mathbf{w}) + \mathbf{J}) \cdot \mathbf{n} = -\rho^s \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \quad \text{dans } \Gamma \times \mathcal{T} \quad (5.90)$$

On considère alors les lois de comportement, (5.58) et (5.59) ainsi que la loi de mélange (5.60) :

$$\mathbf{J} = -D \nabla \mu \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{\rho^f}{\rho^s} \frac{\partial \psi_r^f}{\partial c} + \lambda \left( 1 - \frac{\rho^w}{\rho^s} \right) \quad \text{où} \quad \rho^f = (1 - c) \rho^w + c \rho^s \quad (5.91)$$

En introduisant l'expression du flux  $\mathbf{J}$  dans l'équation de conservation on obtient la forme suivante :

$$\left( \rho^s c \mathbf{v}^f - \left( 1 - \frac{\rho^w}{\rho^s} \right) D \nabla \left( \frac{\partial \psi_r^f}{\partial c} c + \lambda \right) \right) \cdot \mathbf{n} = -\rho^s (1 - c) w_n \quad \text{dans } \Gamma \times \mathcal{T} \quad (5.92)$$

En considérant le changement de variable (5.62), alors on peut donner une forme adimensionnelle de l'équation de conservation de la masse des particules fluidisées :

$$\frac{\hat{v}}{k_0} \left( \tilde{\rho}^s c \tilde{\mathbf{v}}^f - \left( 1 - \frac{\tilde{\rho}^w}{\tilde{\rho}^s} \right) \frac{D \hat{\lambda}}{\hat{\rho} \hat{v} L} \tilde{\nabla} \left( \frac{\partial \tilde{\psi}_r^f}{\partial c} c + \tilde{\lambda} \right) \right) \cdot \mathbf{n} = -\tilde{\rho}^s (1 - c) \tilde{w}_n \quad \text{dans } \tilde{\Gamma} \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (5.93)$$

On constate ici qu'aucun nombre adimensionnel n'émerge, puisque  $D \hat{\lambda} / \hat{\rho} \hat{v} L$  est une combinaison des nombres déjà mis en évidence. En effet :

$$\frac{D \hat{\lambda}}{\hat{\rho} \hat{v} L} = \frac{D}{\hat{\rho} \hat{t}} \times \frac{\hat{\lambda}}{\hat{v}^2} \times \frac{\hat{v} \hat{t}}{L} \quad (5.94)$$

### 5.5.2.3 Adhérence fluide-solide

L'adhérence entre la phase fluide et le solide proposée *via* l'équation (5.33) se transpose directement dans l'espace sans dimension en considérant  $\mathbf{v}^f = \hat{v} \tilde{\mathbf{v}}^f$ . On écrit alors :

$$\tilde{\mathbf{v}}^f \cdot \boldsymbol{\omega} = 0 \quad \text{dans } \tilde{\Gamma} \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (5.95)$$

TABLE 5.1 – Lois de conservation sans dimensions

Domaine courant $\tilde{\Omega}^f \times \tilde{\mathcal{T}}$	
Equation	Expression
Conservation de la masse	$(\tilde{\rho}^s - \tilde{\rho}^w) \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\hat{v}t}{L} \tilde{\nabla} \cdot ((c(\tilde{\rho}^s - \tilde{\rho}^w) + \tilde{\rho}^w) \tilde{\mathbf{v}}^f) = 0$
Conservation de la masse des particules fluidisées	$\frac{(\hat{v}t)^2}{L^2} \frac{\hat{\lambda}}{\hat{v}^2} \frac{D}{\hat{\rho}t} \tilde{\Delta} \left( \tilde{\lambda} + \frac{\partial \tilde{\psi}_r^f}{\partial c} c \right) = \frac{\tilde{\rho}^s}{1 - \tilde{\rho}^s} \left( \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\hat{v}t}{L} \tilde{\nabla} \cdot (c \tilde{\mathbf{v}}^f) \right)$
Conservation de la quantité de mouvement	$\frac{\hat{v}t}{L} \left( \frac{\hat{\lambda}}{\hat{v}^2} \tilde{\rho}^w \tilde{\nabla} \left( \tilde{\lambda} - \frac{\partial \tilde{\psi}_r^f}{\partial c} c \right) + \frac{\Lambda}{\hat{\rho} \hat{v} L} \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{v}}^f \right) = (c(\tilde{\rho}^s - \tilde{\rho}^w) + \tilde{\rho}^w) \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}^f}{\partial t}$
Equation de la courbe de niveau	$\frac{1}{\ \tilde{\nabla} S\ } \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{k_0 \hat{t}}{L} \hat{w}_n^*$
Interface Solide Fluide $\tilde{\Gamma} \times \tilde{\mathcal{T}}$	
Equation	Expression
Conservation de la masse	$\frac{\hat{v}}{k_0} ((1-c) \tilde{\rho}^w + c \tilde{\rho}^s) \tilde{\mathbf{v}}^f \cdot \mathbf{n} = (\tilde{\rho}^w - \tilde{\rho}^s) (1-c) \hat{w}_n$
Conservation de la masse des particules fluidisées.	$\frac{\hat{v}}{k_0} \left( \tilde{\rho}^s c \tilde{\mathbf{v}}^f - \left( 1 - \frac{\tilde{\rho}^w}{\tilde{\rho}^s} \right) \frac{D \hat{\lambda}}{\hat{\rho} \hat{v} L} \tilde{\nabla} \left( \frac{\partial \tilde{\psi}_r^f}{\partial c} c + \tilde{\lambda} \right) \right) \cdot \mathbf{n} = \tilde{\rho}^s (c-1) \hat{w}_n$
Adhérence fluide-solide	$\tilde{\mathbf{v}}^f \cdot \omega = 0$

# Chapitre 6

## Homogénéisation quasi-périodique

### Table des matières

---

<b>6.1</b>	<b>Hypothèses de séparation des échelles, développements asymptotiques</b>	<b>114</b>
<b>6.2</b>	<b>Traîtement des ensembles de définition</b>	<b>115</b>
6.2.1	Prolongement des champs mécaniques	115
6.2.2	Redéfinition de l'interface et des conditions aux limites	115
6.2.2.1	A propos de la vitesse des iso-valeurs de la courbe de niveau	118
6.2.2.2	Courbe de niveau sous forme d'un développement asymptotique	118
<b>6.3</b>	<b>Hypothèses en ordre de grandeur</b>	<b>120</b>
<b>6.4</b>	<b>Cas 1</b>	<b>120</b>
6.4.1	Cascade d'équations dans le domaine $Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$	121
6.4.1.1	Bilan de la masse	121
6.4.1.2	Bilan de la masse des particules fluidisées	122
6.4.1.3	Bilan de la quantité de mouvement	122
6.4.1.4	Équation de la courbe de niveau	123
6.4.2	Conditions aux limites	123
6.4.2.1	Bilan de la masse	123
6.4.2.2	Bilan de la masse des particules fluidisées	124
6.4.2.3	Condition d'adhérence	125
6.4.3	Formulation du problème sur la cellule	125
6.4.3.1	Équations du problème	125
6.4.3.2	Proposition de découplage	126
6.4.4	Équations à l'ordre suivant et problème macroscopique	128
6.4.4.1	Bilan de la masse	128
6.4.4.2	Bilan de la masse des particules fluidisées	130
6.4.4.3	Problème unitaires cellulaires	132
6.4.4.4	Synthèse : modèle homogénéisé	135
6.4.5	Comparaison avec le modèle macroscopique et conclusions	135

<b>6.5</b>	<b>Cas 2</b>	<b>137</b>
6.5.1	Cascade d'équations dans le domaine $Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$	137
6.5.2	Bilan de la masse	137
6.5.2.1	Bilan de la masse des particules fluidisées	138
6.5.2.2	Bilan de la quantité de mouvement	138
6.5.2.3	Équation de la courbe de niveau	139
6.5.3	Conditions aux limites	139
6.5.3.1	Bilan de la masse	139
6.5.3.2	Bilan de la masse des particules fluidisées	139
6.5.3.3	Condition d'adhérence	140
6.5.4	Formulation du problème sur la cellule	140
6.5.4.1	Équations du problème	140
6.5.4.2	Possibilité de découplage	142
6.5.5	Équations à l'ordre suivant et problème macroscopique	143
6.5.5.1	Bilan de la masse	144
6.5.5.2	Bilan de masse des particules fluidisées	148
6.5.5.3	Problème unitaires cellulaires	150
6.5.6	Etude pour un cas simple	155
6.5.6.1	Une géométrie simplifiée	155
6.5.6.2	Résolution aux éléments finis	156
6.5.6.3	Synthèse : modèle homogénéisé	166
6.5.6.4	Comparaison avec le modèle macroscopique et conclusions	168
6.5.7	Conclusions	169

*Ce chapitre traite de l'homogénéisation quasi-périodique du problème vrai posé dans le chapitre 5. Dans un premier temps, nous jaugerons l'importance relative des phénomènes mis en jeu localement. Ces hypothèses constitueront le point de départ de la quatrième section ainsi que de la cinquième, toutes deux dédiées à la procédure d'homogénéisation périodique.*

## 6.1 Hypothèses de séparation des échelles, développements asymptotiques

On rappelle que le milieu poreux est caractérisé par l'existence de deux échelles de longueurs distinctes et séparées, voir Hornung [49], Auriault *et al.* [50] et Dormieux *et al.* [89] : d'un côté le domaine  $\Omega$  est de dimension caractéristique  $L$  ; d'un autre côté la microstructure a pour dimension caractéristique  $l$ . On suppose la séparation de ces deux échelles, c'est à dire que la longueur  $l$  est infime devant  $L$  soit  $l/L = \epsilon \ll 1$ . Dans le but d'alléger les notations, on introduit ici la variable adimensionnelle macroscopique  $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X}/L$ . Par ailleurs, on introduit la variable adimensionnelle microscopique  $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{X}}/\epsilon = \mathbf{X}/l$ . L'hypothèse de séparation des échelles permet de discerner les contributions microscopiques des contributions macroscopiques pour chaque grandeur

mécanique. Autrement dit : pour une fonction de grandeur physique sans dimension quelconque  $\tilde{f}$  ayant  $\tilde{\Omega}$  pour domaine de définition, on suppose qu'il existe un développement asymptotique à deux échelles tel que chaque terme  $f_\alpha$  de ce développement soit fonction des variables  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ . Par ailleurs, les termes  $f_\alpha$  sont supposés périodiques en  $\mathbf{y}$ , de période  $\epsilon$  et on parlera de  $\mathbf{y}$ -périodicité. On écrit donc la proposition suivante :

$$\forall (\mathbf{x}, \tilde{t}) \in \tilde{\Omega} \times \tilde{\mathcal{T}} : \tilde{f}(\mathbf{x}, \tilde{t}) = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \epsilon f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \epsilon^2 f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (6.1)$$

$(f_0, f_1, f_2)$   $\mathbf{y}$ -périodiques

L'introduction d'une variable rapide  $\mathbf{y}$  nécessite de revoir les ensembles de définition des champs mécaniques considérés. En effet, cette variable sans dimension constitue la variable d'espace dans la cellule élémentaire (dans le cas 2D) définie par le produit cartésien  $Y := [0, 1] \times [0, 1]$ . Dans ce sens, les termes  $f_\alpha$  des développements asymptotiques deviennent alors des fonctions de  $\tilde{\Omega} \times Y \times \tilde{\mathcal{T}}$  :

$$f_\alpha : \begin{array}{l} \tilde{\Omega} \times Y \times \tilde{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) \mapsto f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) \end{array} \quad (6.2)$$

Par ailleurs, cette nouvelle considération nécessite d'introduire une nouvelle définition des opérateurs différentiels dans l'espace adimensionnel. Considérons un des termes  $f_\alpha$  d'un tel développement, en considérant la règle de la dérivation de compositions de fonctions, alors on peut écrire les opérateurs nabla et laplacien adimensionnels, respectivement  $\tilde{\nabla}$  et  $\tilde{\Delta}$ , tel que :

$$\tilde{\nabla}(f_\alpha) = \nabla_x(f_\alpha) + \epsilon^{-1} \nabla_y(f_\alpha), \quad \tilde{\Delta}(f_\alpha) = \Delta_x(f_\alpha) + 2\epsilon^{-1} \nabla_y \cdot \nabla_x(f_\alpha) + \epsilon^{-2} \Delta_y(f_\alpha) \quad (6.3)$$

où les indices  $x$  et  $y$  indiquent la variable de différentiation considérée. Introduire de tels développements dans les équations de conservation conduira à l'établissement d'une cascade de problèmes, de laquelle émergera un problème macroscopique, indépendant de la variable microscopique  $\mathbf{y}$  et appelé problème homogénéisé.

## 6.2 Traîtement des ensembles de définition

### 6.2.1 Prolongement des champs mécaniques

Dans la section 5.2.1.2, nous avons supposé l'existence d'une expression du champ de vitesse des iso-valeurs de  $S$ , coïncidant avec la vitesse de l'interface lorsqu'on considère l'iso-valeur  $S = 0$ . Ce champ de vitesse est défini dans tout le domaine  $\tilde{\Omega} \times \tilde{\mathcal{T}}$  et supposé continu. Il est nécessaire de prolonger par continuité les quantités mises en jeu dans l'expression de ce champ de vitesse. Ainsi, nous supposons qu'il existe un prolongement par continuité de  $c$ ,  $\tilde{\mathbf{v}}^f$  et  $\tilde{\lambda}$  de  $\tilde{\Omega}^f \times \tilde{\mathcal{T}}$  vers  $\tilde{\Omega} \times \tilde{\mathcal{T}}$ . Par abus de notation, les champs ainsi prolongés seront notés respectivement  $c$ ,  $\tilde{\mathbf{v}}^f$  et  $\tilde{\lambda}$ .

### 6.2.2 Redéfinition de l'interface et des conditions aux limites

Les conditions aux limites du problème vrai sans dimension sont exprimées sur  $\tilde{\Gamma} \times \tilde{\mathcal{T}}$ , soit sur une partie de  $\tilde{\Omega} \times \tilde{\mathcal{T}}$ . Au cours du processus d'homogénéisation quasi-périodique, l'introduction des développements asymptotiques dans les équations du problème conduit à l'obtention de problèmes définis sur l'espace  $\tilde{\Omega} \times Y \times \tilde{\mathcal{T}}$ . Les conditions aux limites de ces problèmes doivent alors être formulées (voir van Noorden [52]) sur la partie de  $\tilde{\Omega} \times Y \times \tilde{\mathcal{T}}$  représentant l'interface solide-fluide

une fois la séparation des échelles supposée. Cette partie sera prescrite *via* les termes  $S_\alpha$  du développement asymptotique de la fonction courbe de niveau  $S$ . Il est nécessaire (i) de définir la partie de  $\tilde{\Omega} \times Y \times \tilde{\mathcal{T}}$  considérée pour l'application des conditions aux limites; (ii) de définir une procédure d'obtention des conditions aux limites en question, à partir de celles du problème vrai sans dimension définies sur  $\tilde{\Gamma} \times \tilde{\mathcal{T}}$ . Pour ce faire, nous résumons les travaux de Chechkin *et al.* [90], van Noorden *et al.* [52, 53] et Bringedal *et al.* [91] concernant la redéfinition des conditions aux bords du problème aux limites adimensionnel, sur le pendant de l'interface  $\tilde{\Gamma} \times \tilde{\mathcal{T}}$  dans l'espace  $\tilde{\Omega} \times Y \times \tilde{\mathcal{T}}$ . La première étape de cette procédure consiste à considérer le développement asymptotique de la fonction courbe de niveau :

$$S(\mathbf{x}, \tilde{t}) = S_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \epsilon S_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \epsilon^2 S_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (6.4)$$

On considère alors  $\Gamma_0$  le domaine défini implicitement à l'aide de la fonction  $S_0$  :

$$\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}} := \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) \in \tilde{\Omega} \times Y \times \tilde{\mathcal{T}} \mid S_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) = 0 \right\} \quad (6.5)$$

De la même manière, on définit la partie  $Y_0$  de la cellule  $Y$  contenant la partie fluide telle que :

$$Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}} := \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) \in \tilde{\Omega} \times Y \times \tilde{\mathcal{T}} \mid S_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) < 0 \right\} \quad (6.6)$$

Dans cette écriture, la fonction  $S_0$  constitue un bon candidat pour définir le support des conditions aux limites du problème. En effet, puisque  $\epsilon$  est supposé petit, alors la courbe de niveau zéro de  $S_0$  est représentative de l'interface solide-fluide. La seconde étape de la procédure permet de transférer des conditions aux limites exprimées sur  $\tilde{\Gamma} \times \tilde{\mathcal{T}}$ , vers  $\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$ . Rappelons dans un premier temps que la normale  $\mathbf{n}$  à une courbe iso-valeur de  $S$  s'écrit :

$$\mathbf{n} = \frac{\tilde{\nabla} S}{\|\tilde{\nabla} S\|} \quad (6.7)$$

Du développement asymptotique réalisé sur  $S$  découle un développement asymptotique de  $\mathbf{n}$  :

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}, \tilde{t}) = n_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \epsilon n_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (6.8)$$

où  $n_0$  et  $n_1$  sont tels que (voir van Noorden [52]) :

$$n_0 := \frac{\nabla_y S_0}{\|\nabla_y S_0\|} \quad (6.9a)$$

$$n_1 := \frac{\nabla_x S_0 + \nabla_y S_1}{\|\nabla_y S_0\|} - \frac{\nabla_y S_0}{\|\nabla_y S_0\|} \frac{\nabla_x S_0 \cdot \nabla_y S_0 + \nabla_y S_0 \cdot \nabla_y S_1}{\|\nabla_y S_0\|^2} \quad (6.9b)$$

Dans un contexte bi-dimensionnel, introduire  $\omega_0$  l'orthogonal de  $n_0$  conduit à :

$$n_1 = \omega_0 \frac{\omega_0 \cdot (\nabla_x S_0 + \nabla_y S_1)}{\|\nabla_y S_0\|} \quad (6.10)$$

On suppose maintenant qu'il existe une paramétrisation  $\kappa(s, \tilde{t})$  de la part d'interface  $\tilde{\Gamma}_i$  contenu dans la cellule élémentaire  $Y$  centrée en  $\mathbf{x}_0$ . De cette façon, à partir de l'expression de la courbe de niveau, on a :

$$S(\kappa(s, \tilde{t}), \tilde{t}) = 0 \quad (6.11)$$

Par ailleurs, cette paramétrisation se développe asymptotiquement suivant :

$$\kappa(s, \tilde{t}) = \mathbf{x}_0 + \epsilon \kappa_0(s, \tilde{t}) + \epsilon^2 \kappa_1(s, \tilde{t}) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (6.12)$$

A partir du développement asymptotique de  $S$  (6.4) et de la paramétrisation (6.12), on interprète  $S_0$  et  $S_1$  comme des fonctions de  $s$  seulement. Les variables  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont alors prescrites par :

$$\mathbf{x} = \kappa(s, \tilde{t}), \quad \mathbf{y} = \frac{\kappa(s, \tilde{t}) - \mathbf{x}_0}{\epsilon} \quad (6.13)$$

De telle sorte que :

$$S(\kappa(s, \tilde{t}), \tilde{t}) = S_0\left(\kappa(s, \tilde{t}), \frac{\kappa(s, \tilde{t}) - \mathbf{x}_0}{\epsilon}\right) + \epsilon S_1\left(\kappa(s, \tilde{t}), \frac{\kappa(s, \tilde{t}) - \mathbf{x}_0}{\epsilon}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0 \quad (6.14)$$

On considère alors les développements de Taylor de  $S_0$  et  $S_1$  autour de  $(\mathbf{x}_0, \kappa_0, \tilde{t})$  de  $S$ . On obtient :

$$S_0(\mathbf{x}_0, \kappa_0, \tilde{t}) + \epsilon (S_1(\mathbf{x}_0, \kappa_0, \tilde{t}) + \kappa_0 \cdot \nabla_x S_0(\mathbf{x}_0, \kappa_0, \tilde{t}) + \kappa_1 \cdot \nabla_y S_0(\mathbf{x}_0, \kappa_0, \tilde{t})) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0 \quad (6.15)$$

Un seul terme est d'ordre  $\epsilon^0$ , il s'agit de  $S_0(\mathbf{x}_0, \kappa_0, \tilde{t})$ . On s'aperçoit alors que  $\kappa_0$  paramètre localement<sup>1</sup> la courbe de niveau zéro de  $S_0$  :

$$S_0(\mathbf{x}_0, \kappa_0, \tilde{t}) = 0 \quad (6.16)$$

L'équation d'ordre suivante indique :

$$S_1(\mathbf{x}_0, \kappa_0, \tilde{t}) + \kappa_0 \cdot \nabla_x S_0(\mathbf{x}_0, \kappa_0, \tilde{t}) + \kappa_1 \cdot \nabla_y S_0(\mathbf{x}_0, \kappa_0, \tilde{t}) = 0 \quad (6.17)$$

Cette équation d'inconnue  $\kappa_1$  est résolue en cherchant  $\kappa_1$  aligné à  $n_0$  :

$$\kappa_1(s, \tilde{t}) = \xi(s, \tilde{t}) \frac{\nabla_y S_0}{\|\nabla_y S_0\|} \quad \text{avec} \quad \xi := -\frac{S_1}{\|\nabla_y S_0\|} - \frac{\kappa_0 \cdot \nabla_x S_0}{\|\nabla_y S_0\|} \quad (6.18)$$

Maintenant, considérons une condition aux limites abstraite scalaire de la forme :

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, \tilde{t}) \in \tilde{\Gamma} \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.19)$$

En considérant le développement de  $\kappa(s, \tilde{t})$ , alors le développement de Taylor de  $K$  autour de  $(\mathbf{x}_0, \kappa_0, \tilde{t})$  se réalise de la manière suivante :

$$\begin{aligned} K(\mathbf{x}_0, \kappa_0, \tilde{t}) + \epsilon (\kappa_0 \cdot \nabla_x K(\mathbf{x}_0, \kappa_0, \tilde{t}) + \kappa_1 \cdot \nabla_y K(\mathbf{x}_0, \kappa_0, \tilde{t})) \\ + \frac{\epsilon^2}{2} \begin{pmatrix} \kappa_0 \\ \kappa_1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \nabla_x \nabla_x K & \nabla_y \nabla_x K \\ \nabla_x \nabla_y K & \nabla_y \nabla_y K \end{bmatrix}}_{\mathcal{H}^2 K(\mathbf{x}_0, \kappa_0, \tilde{t})} \begin{pmatrix} \kappa_0 \\ \kappa_1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon^3) = 0 \end{aligned} \quad (6.20)$$

Où  $\mathcal{H}^2 K$  désigne la hessienne de  $K$  par rapport à  $\mathbf{x}$  et à  $\mathbf{y}$ . Si on considère désormais l'expression de  $\kappa_1$  et en considérant que  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) = (\mathbf{x}_0, \kappa_0, \tilde{t})$  sur  $\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$ , alors on peut réécrire le développement précédent :

$$\begin{aligned} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \epsilon (\mathbf{y} \cdot \nabla_x K(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \xi n_0 \cdot \nabla_y K(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t})) \\ + \frac{\epsilon^2}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \xi n_0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_x \nabla_x K & \nabla_y \nabla_x K \\ \nabla_x \nabla_y K & \nabla_y \nabla_y K \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \xi n_0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon^3) = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) \in \Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}} \end{aligned} \quad (6.21)$$

Ce développement réalise alors le transport de la condition aux limites (6.19) de  $\tilde{\Gamma} \times \tilde{\mathcal{T}}$  vers  $\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$ . En appliquant ce raisonnement aux différentes conditions d'interface du problème vrai, on obtiendra des conditions aux limites proprement posées sur l'interface  $\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$ .

<sup>1</sup>Par localement nous entendons « Dans la cellule élémentaire  $Y$  contenant la part de  $\tilde{\Gamma}$  paramétrée par  $\kappa$  »

### 6.2.2.1 A propos de la vitesse des iso-valeurs de la courbe de niveau

Au travers de la procédure de transport des conditions aux limites (6.21), il est clair que dans le cas où la condition aux limites transportée est dépendante de la vitesse de l'interface  $\tilde{w}_n$  (par exemple les conditions aux limites (5.89) et (5.93) du problème vrai), alors les termes  $\nabla_x K$  et  $\nabla_y K$  nécessitent l'existence d'une vitesse des iso-valeurs de  $S$ . Par ailleurs, on souhaitera pouvoir écrire cette vitesse des iso-valeurs de  $S$  comme un développement asymptotique. Il est possible d'obtenir l'existence d'un tel champ de vitesse en étendant la vitesse de l'interface selon la procédure de transport présentée en sous-section 5.2.1.2. Cependant, le champ de vitesse étendu est alors la solution d'un problème d'équations aux dérivées partielles. Nous perdons le bénéfice d'une expression explicite de la vitesse des iso-valeurs de  $S$ , et il deviendrait impossible d'identifier clairement les conditions aux limites transportées. Cette impossibilité est fortement préjudiciable pour la suite de la procédure et compromettrait l'identification d'une loi de comportement d'érosion macroscopique. C'est pour cette raison que, statuer directement d'une expression explicite pour le champ de vitesse des iso-valeurs de  $S$  est préféré. Au regard de la procédure de transport des conditions aux limites (6.21), il est nécessaire que la vitesse des iso-valeurs de  $S$  observe une régularité suffisante, en étant au minimum de classe  $\mathcal{C}^2(\tilde{\Omega} \times Y \times \tilde{\mathcal{T}}, \mathbb{R})$

### 6.2.2.2 Courbe de niveau sous forme d'un développement asymptotique

On cherche ici à écrire la courbe de niveau sous la forme d'un développement asymptotique, c'est à dire sous la forme :

$$S(\mathbf{x}, \tilde{t}) = S_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \epsilon S_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \epsilon^2 S_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (6.22)$$

Pour ce faire, il convient d'exprimer un développement de Taylor de  $S$  autour de  $\mathbf{x}$ . Dans un premier temps, on rappelle que la fonction courbe de niveau s'écrit sous la forme suivante :

$$S(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{t}) = \tilde{R}\left(\tilde{\mathbf{X}} - \epsilon Q\left(\frac{\tilde{\mathbf{X}}}{\epsilon}\right)\right) + \tilde{d}\left(\tilde{\mathbf{X}} - \epsilon Q\left(\frac{\tilde{\mathbf{X}}}{\epsilon}\right), Q\left(\frac{\tilde{\mathbf{X}}}{\epsilon}\right), \tilde{t}\right) - P\left(\frac{\tilde{\mathbf{X}}}{\epsilon}\right) \quad (6.23)$$

L'idée première est de réaliser un développement de Taylor de  $S$  autour de  $\tilde{\mathbf{X}}$  [52]. On fait donc dans un premier temps le développement de Taylor de  $\tilde{R}$  autour de  $\tilde{\mathbf{X}}$  :

$$\begin{aligned} \tilde{R}\left(\tilde{\mathbf{X}} - \epsilon Q\left(\frac{\tilde{\mathbf{X}}}{\epsilon}\right)\right) &= \tilde{R}(\tilde{\mathbf{X}}) - \epsilon Q\left(\frac{\tilde{\mathbf{X}}}{\epsilon}\right) \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{X}}}(\tilde{R}) \\ &\quad + \frac{\epsilon^2}{2} Q^\top\left(\frac{\tilde{\mathbf{X}}}{\epsilon}\right) \cdot \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{X}}}^2(\tilde{R}) \cdot Q\left(\frac{\tilde{\mathbf{X}}}{\epsilon}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (6.24)$$

On s'aperçoit qu'on peut alors écrire  $\tilde{R}$  comme la somme de termes multipliant  $\epsilon$  à différents ordres :

$$\tilde{R}\left(\tilde{\mathbf{X}} - \epsilon Q\left(\frac{\tilde{\mathbf{X}}}{\epsilon}\right)\right) = r_0 + \epsilon r_1 + \epsilon^2 r_2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (6.25)$$

avec respectivement :

$$\begin{cases} r_0 &= \tilde{R}(\tilde{\mathbf{X}}) \\ r_1 &= -Q\left(\frac{\tilde{\mathbf{X}}}{\epsilon}\right) \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{X}}}(\tilde{R}) \\ r_2 &= \frac{1}{2}Q^\top\left(\frac{\tilde{\mathbf{X}}}{\epsilon}\right) \cdot \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{X}}}^2(\tilde{R}) \cdot Q\left(\frac{\tilde{\mathbf{X}}}{\epsilon}\right) \end{cases} \quad (6.26)$$

On fait exactement la même chose pour  $\tilde{d}$  :

$$\begin{aligned} \tilde{d}\left(\tilde{\mathbf{X}} - \epsilon Q\left(\frac{\tilde{\mathbf{X}}}{\epsilon}\right), \theta, \tilde{t}\right) &= \tilde{d}(\tilde{\mathbf{X}}, \theta, \tilde{t}) - \epsilon Q\left(\frac{\tilde{\mathbf{X}}}{\epsilon}\right) \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{X}}}(\tilde{d}) \\ &+ \frac{\epsilon^2}{2}Q^\top\left(\frac{\tilde{\mathbf{X}}}{\epsilon}\right) \cdot \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{X}}}^2(\tilde{d}) \cdot Q\left(\frac{\tilde{\mathbf{X}}}{\epsilon}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (6.27)$$

On peut donc écrire  $\tilde{d}$  comme la somme de termes multipliant  $\epsilon$  à différents ordres :

$$\tilde{d}\left(\tilde{\mathbf{X}} - \epsilon Q\left(\frac{\tilde{\mathbf{X}}}{\epsilon}\right), \theta, \tilde{t}\right) = d_0 + \epsilon d_1 + \epsilon^2 d_2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (6.28)$$

avec respectivement :

$$\begin{cases} d_0 &= \tilde{d}(\tilde{\mathbf{X}}, \theta, \tilde{t}) \\ d_1 &= -Q\left(\frac{\tilde{\mathbf{X}}}{\epsilon}\right) \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{X}}}(\tilde{d}) \\ d_2 &= \frac{1}{2}Q^\top\left(\frac{\tilde{\mathbf{X}}}{\epsilon}\right) \cdot \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{X}}}^2(\tilde{d}) \cdot Q\left(\frac{\tilde{\mathbf{X}}}{\epsilon}\right) \end{cases} \quad (6.29)$$

On propose maintenant plusieurs allègements de notation : (i)  $Q\left(\frac{\tilde{\mathbf{X}}}{\epsilon}\right) = \mathbf{y}$ ; (ii)  $P\left(\frac{\tilde{\mathbf{X}}}{\epsilon}\right) = \|\mathbf{y}\|$  et (iii)  $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{x}$ ,  $\nabla_{\tilde{\mathbf{X}}} = \nabla_{\mathbf{x}}$ ,  $\mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{X}}}^2 = \mathcal{H}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}^2$ . On a alors l'expression de  $S$  sous la forme du développement asymptotique suivant :

$$S(\mathbf{x}, \tilde{t}) = S_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \epsilon S_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \epsilon^2 S_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (6.30)$$

Tant et si bien que l'on identifie aisément :

$$\begin{cases} S_0 &= r_0 + d_0 - \|\mathbf{y}\| &= \tilde{R}(\mathbf{x}) + \tilde{d}(\mathbf{x}, \theta, \tilde{t}) - \|\mathbf{y}\| \\ S_1 &= r_1 + d_1 &= -\mathbf{y} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\left(\tilde{R}(\mathbf{x}) + \tilde{d}(\mathbf{x}, \theta, \tilde{t})\right) \\ S_2 &= r_2 + d_2 &= \frac{1}{2}\mathbf{y} \cdot \mathcal{H}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}^2\left(\tilde{R}(\mathbf{x}) + \tilde{d}(\mathbf{x}, \theta, \tilde{t})\right) \cdot \mathbf{y} \end{cases} \quad (6.31)$$

### 6.3 Hypothèses en ordre de grandeur

Afin de spécifier l'importance relative qu'occupent les différents phénomènes à l'échelle grain-fluide, il est de rigueur d'introduire des hypothèses sur les ordres de grandeur des nombres adimensionnels. La première hypothèse que nous pouvons proposer concerne le nombre adimensionnel (1) soit  $\hat{v}\hat{t}/L$ . Si  $L$  est la dimension du domaine  $\tilde{\Omega}$ , alors considérer  $\mathcal{O}(\hat{v}\hat{t}/L) = 1$  revient à considérer que  $\hat{t}$  représente le temps durant lequel une particule de vitesse  $\hat{v}$  traverse le domaine  $\tilde{\Omega}$ . Considérer  $\mathcal{O}(\hat{v}\hat{t}/L) = \epsilon$  revient à considérer que  $\hat{t}$  représente le temps durant lequel une particule de vitesse  $\hat{v}$  traverse une cellule élémentaire. Les deux cas seront étudiés successivement dans ce travail. Dans le premier cas, le point de vue adopté est plutôt « macroscopique ». Dans le second cas, le point de vue adopté est plutôt « microscopique ». Ensuite, nous pouvons formuler une hypothèse sur le nombre adimensionnel (4) soit  $\Lambda/\hat{\rho}\hat{v}L$ . Pour ce faire, nous nous inspirons de la procédure classique d'homogénéisation du problème de Stokes vers le problème de Darcy tel que conduit par exemple par Allaire [51]. En effet, la loi de comportement macroscopique que nous cherchons à mettre en évidence contient le terme de Darcy. Il est donc raisonnable de proposer d'employer des hypothèses similaires, soit finalement  $\mathcal{O}(\Lambda/\hat{\rho}\hat{v}L) = 1$ ,  $\mathcal{O}(\hat{\lambda}/\hat{v}^2) = \epsilon^{-2}$ . Maintenant, on affecte le nombre sans dimension  $D/\hat{\rho}\hat{t}$  de l'ordre de grandeur  $\epsilon^2$ . Ce choix permet, au travers du bilan de masse des particules fluidisées, de considérer que, pour le transport des grains fluidisés, la contribution des effets de diffusion est de même importance que celle des effets d'advection. Ceci devrait conduire à un modèle homogénéisé généralisant celui formulé par Bouddour *et al.* [47]. Afin de considérer que la cinétique d'arrachement est lente par rapport à la cinétique d'écoulement, on choisit de considérer que le rapport  $\hat{v}/k_0$  est d'ordre de grandeur  $\epsilon^{-12}$ .

On peut également considérer une variante de ce jeu d'hypothèses. Dans le cadre de cette variante, on adoptera un point de vue « microscopique » en considérant  $\mathcal{O}(\hat{v}\hat{t}/L) = \epsilon$ . Afin de conserver l'hypothèse de même importance entre diffusion et advection au regard du transport des grains fluidisés, on considère  $\mathcal{O}(D/\hat{\rho}\hat{t}) = \epsilon$ . De plus, afin que le problème de la courbe de niveau demeure exploitable une fois les développements asymptotiques introduits, on maintient l'ordre de grandeur du produit  $(\hat{v}\hat{t}/L)(k_0/\hat{v})$  en considérant  $\mathcal{O}(k_0/\hat{v}) = \epsilon^0$ . La vitesse de référence dans une cellule est du même ordre de grandeur que la vitesse de l'interface. Cette variation cruciale conduira à une participation bien plus importante de la vitesse d'interface dans le modèle homogénéisé.

Finalement, les nombres sans dimension restants se verront affecter d'un ordre de grandeur  $\epsilon^0$ . Le tableau (6.1) répertorie les deux jeux hypothèses proposées ici, ainsi que les notations des nombres sans dimensions.

### 6.4 Cas 1

Maintenant que les équations du problème ont été écrites sous leurs formes adimensionnelles sur des ensembles de définition appropriés et que les ordres de grandeur des nombres sans dimensions ont été discutés, il est possible d'incorporer les développements asymptotiques sur les inconnues du problème afin de déduire la cascade de problèmes conduisant au problème homogénéisé. Dans un premier temps, dans la sous-section 6.4.1 nous nous concentrerons sur les équations relatives

<sup>2</sup>En tout état de fait, le produit  $(\hat{v}\hat{t}/L)(k_0/\hat{v})$  doit être d'ordre de grandeur  $\epsilon$  afin que le problème de la courbe de niveau soit exploitable une fois les développements asymptotiques données. Nous aurons l'occasion de revenir sur cette remarque au cours de la section dédiée

TABLE 6.1 – Hypothèses en ordre de grandeur (ODG) et notations

Nombre	$\frac{\hat{v}\hat{t}}{L}$	$\frac{\hat{\lambda}}{\hat{v}^2}$	$\frac{D}{\hat{\rho}\hat{t}}$	$\frac{\Lambda}{\hat{\rho}\hat{v}L}$	$\frac{\hat{v}}{k_0}$	$\frac{\tilde{\rho}^w}{\tilde{\rho}^s - \tilde{\rho}^w}$	$\frac{\tilde{\rho}^s}{1 - \tilde{\rho}^w/\tilde{\rho}^s}$	$\frac{\partial\tilde{\psi}_r^f}{\partial c}$
Cas 1								
ODG	$\epsilon^0$	$\epsilon^{-2}$	$\epsilon^2$	$\epsilon^0$	$\epsilon^{-1}$	$\epsilon^0$	$\epsilon^0$	$\epsilon^0$
Notation	$A$	$\epsilon^{-2}B$	$\epsilon^2C$	$E$	$\epsilon^{-1}F$	$H$	$M$	$\Psi$
Cas 2								
ODG	$\epsilon$	$\epsilon^{-2}$	$\epsilon$	$\epsilon^0$	$\epsilon^0$	$\epsilon^0$	$\epsilon^0$	$\epsilon^0$
Notation	$\epsilon A$	$\epsilon^{-2}B$	$\epsilon C$	$E$	$F$	$H$	$M$	$\Psi$

au problème dans le domaine  $\tilde{\Omega}$ , sans prendre en compte les conditions d'interfaces. Celles-ci nécessitent en effet de recevoir le traitement spécifique (voir eq. (6.21)) auquel nous dédions la sous-section 6.4.2.

### 6.4.1 Cascade d'équations dans le domaine $Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$

Pour obtenir la cascade d'équations conduisant au problème homogénéisé, il faut introduire les développements asymptotiques sur les inconnues du problème, soit  $\tilde{\mathbf{v}}^f$ ,  $c$ ,  $\tilde{\lambda}$  :

$$\forall (\mathbf{x}, \tilde{t}) \in \tilde{\Omega} \times \tilde{\mathcal{T}}, \begin{cases} \tilde{\mathbf{v}}^f(\mathbf{x}, \tilde{t}) = v_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \epsilon v_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \epsilon^2 v_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ c(\mathbf{x}, \tilde{t}) = c_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \epsilon c_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \epsilon^2 c_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ \tilde{\lambda}(\mathbf{x}, \tilde{t}) = \lambda_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \epsilon \lambda_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \epsilon^2 \lambda_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) \in \tilde{\Omega} \times Y \times \tilde{\mathcal{T}} \\ \forall i \in \mathbb{N}, (v_i, c_i, \lambda_i) \text{ } \mathbf{y}\text{-périodiques} \end{cases} \quad (6.32)$$

#### 6.4.1.1 Bilan de la masse

Considérons tout d'abord le bilan de masse (5.68). Compte tenu des hypothèses présentées dans le cas 1 du tableau 6.1, on reformule ce bilan de la façon suivante :

$$\frac{\partial c}{\partial \tilde{t}} + A \tilde{\nabla} \cdot ((c + H) \tilde{\mathbf{v}}^f) = 0 \quad \text{dans } \tilde{\Omega}^f \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.33)$$

En injectant les développements asymptotiques de  $\tilde{\mathbf{v}}$ ,  $c$  et  $\tilde{\lambda}$  et en collectant les termes des différents ordres de grandeur (en terme de puissance de  $\epsilon$ ), nous obtenons une cascade d'équations sur  $Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$ . La première équation concerne les termes d'ordre  $\epsilon^{-1}$  :

$$A \nabla_{\mathbf{y}} \cdot ((c_0 + H) v_0) = 0 \quad (6.34a)$$

La deuxième équation contient les termes d'ordre  $\epsilon^0$  :

$$\frac{\partial c_0}{\partial \tilde{t}} + A (\nabla_x \cdot ((c_0 + H) v_0) + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot ((c_0 + H) v_1 + c_1 v_0)) = 0 \quad (6.34b)$$

L'équation des termes d'ordre  $\epsilon$  donne :

$$\frac{\partial c_1}{\partial \tilde{t}} + A (\nabla_x \cdot ((c_0 + H) v_1 + c_1 v_0) + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot ((c_0 + H) v_2 + c_1 v_1 + c_2 v_0)) = 0 \quad (6.34c)$$

### 6.4.1.2 Bilan de la masse des particules fluidisées

Nous appliquons la même procédure pour le bilan de la masse des particules fluidisées (5.74). Compte tenu des hypothèses résumées dans le cas 1 du tableau 6.1, ce bilan se reformule de la façon suivante :

$$A^2 BC \tilde{\Delta} \left( \tilde{\lambda} + \frac{\partial \tilde{\psi}_r^f}{\partial c} c \right) = M \left( \frac{\partial c}{\partial \tilde{t}} + A \tilde{\nabla} \cdot (c \tilde{\mathbf{v}}^f) \right) \quad \text{dans } \tilde{\Omega}^f \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.35)$$

La cascade d'équations obtenue sur  $Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$  est la suivante. A l'ordre le plus élevé,  $\epsilon^{-2}$ , nous obtenons l'équation suivante :

$$A^2 BC \Delta_y (\lambda_0 + \Psi c_0) = 0 \quad (6.36a)$$

L'ensemble des termes d'ordre  $\epsilon^{-1}$  fournit l'équation suivante :

$$A^2 BC (\Delta_y (\lambda_1 + \Psi c_1) + 2 \nabla_y \cdot \nabla_x (\lambda_0 + \Psi c_0)) = M A \nabla_y \cdot (c_0 v_0) \quad (6.36b)$$

Finalement, à l'ordre  $\epsilon^0$ , l'équation de conservation de la masse des particules fluidisées s'écrit :

$$\begin{aligned} A^2 BC (\Delta_y (\lambda_2 + \Psi c_2) + 2 \nabla_y \cdot \nabla_x (\lambda_1 + \Psi c_1) + \Delta_x (\lambda_0 + \Psi c_0)) \\ = M \left( \frac{\partial c_0}{\partial \tilde{t}} + A (\nabla_y \cdot (c_0 v_1 + c_1 v_0) + \nabla_x \cdot (c_0 v_0)) \right) \end{aligned} \quad (6.36c)$$

### 6.4.1.3 Bilan de la quantité de mouvement

Nous réalisons la même procédure concernant l'équation de conservation de la quantité de mouvement (5.81). Nous commençons par reformuler cette équation à l'aide des hypothèses introduites dans le tableau 6.1, pour le cas 1 :

$$A \left( \epsilon^{-2} B H \tilde{\rho}^w \tilde{\nabla} \left( \tilde{\lambda} - \frac{\partial \tilde{\psi}_r^f}{\partial c} c \right) + \frac{E H}{\tilde{\rho}^w} \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{v}}^f \right) = (c + H) \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}^f}{\partial \tilde{t}} \quad \text{dans } \tilde{\Omega}^f \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.37)$$

La cascade d'équation obtenue sur  $Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$  est donc la suivante. A l'ordre  $\epsilon^{-3}$ , nous obtenons :

$$A B H \nabla_y (\lambda_0 - \Psi c_0) = 0 \quad (6.38a)$$

Ensuite, l'ensemble des termes d'ordre  $\epsilon^{-2}$  fournit l'équation suivante :

$$A \left( B H (\nabla_x (\lambda_0 - \Psi c_0) + \nabla_y (\lambda_1 - \Psi c_1)) + \frac{E H}{\tilde{\rho}^w} \Delta_y v_0 \right) = 0 \quad (6.38b)$$

Finalement, à l'ordre  $\epsilon^{-1}$ , l'équation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$A \left( B H (\nabla_x (\lambda_1 - \Psi c_1) + \nabla_y (\lambda_2 - \Psi c_2)) + \frac{E H}{\tilde{\rho}^w} (\Delta_y v_1 + 2 \nabla_y \cdot \nabla_x v_0) \right) = 0 \quad (6.38c)$$

#### 6.4.1.4 Équation de la courbe de niveau

Ici, nous traitons l'équation de la courbe de niveau. Dans leurs travaux, van Noorden *et al.* [53] écrivent que le gradient de la fonction courbe de niveau se développe asymptotiquement comme suit :

$$\left\| \tilde{\nabla} S \right\| = \epsilon^{-1} \|\nabla_y S_0\| + \mathcal{O}(\epsilon^0) \quad (6.39)$$

Par ailleurs, on suppose que l'extension de la vitesse d'interface se développe selon le développement asymptotique suivant :

$$\begin{aligned} \forall (\mathbf{x}, \tilde{t}) \in \tilde{\Omega} \times \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{w}_n^*(\mathbf{x}, \tilde{t}) &= w_{n_0}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \epsilon w_{n_1}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \epsilon^2 w_{n_2}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) &\in \tilde{\Omega} \times Y \times \tilde{\mathcal{T}} \\ \forall i \in \mathbb{N}, w_{n_i}^* &\mathbf{y}\text{-périodiques} \end{aligned} \quad (6.40)$$

L'équation de la courbe de niveau (5.85), une fois considérées les notations du cas 1 du tableau 6.1, se réécrit :

$$\frac{\partial S}{\partial \tilde{t}} = \epsilon A F^{-1} \|\nabla S\| \tilde{w}_n^* \quad (6.41)$$

L'équation de la courbe de niveau à l'ordre  $\epsilon^0$  s'écrit :

$$\frac{\partial S_0}{\partial \tilde{t}} = A F^{-1} \|\nabla_y S_0\| w_{n_0}^* \quad (6.42)$$

Si l'ordre de grandeur du produit  $(\hat{v}t/L)(k_0/\hat{v})$  avait été différent, l'équation de la courbe de niveau à l'ordre le plus haut aurait conduit soit à  $\partial S_0/\partial \tilde{t} = 0$  correspondant à un interface solide-fluide immobile, soit à  $\|\nabla_y S_0\| = 0$ , ce qui semble absurde. Afin d'éviter ces cas pathologiques que nous avons restreint l'ordre de grandeur du produit  $(\hat{v}t/L)(k_0/\hat{v})$  à  $\epsilon$ .

#### 6.4.2 Conditions aux limites

Ici nous proposons l'exploitation de la procédure développée dans la sous-section 6.2.2 pour déterminer la formulation des conditions aux limites sur l'interface. Il faut introduire les développements asymptotiques sur les inconnues du problème dans le domaine  $\tilde{\Omega}$  soit de  $\tilde{w}_n^*$ ,  $\mathbf{n}$ , et de  $\boldsymbol{\omega}$ . Cette définition dans tout le domaine n'empêche ensuite en rien de considérer la restriction de ces développements sur l'interface. On a donc :

$$\forall (\mathbf{x}, \tilde{t}) \in \tilde{\Omega} \times \tilde{\mathcal{T}}, \left\{ \begin{array}{l} \tilde{w}_n^*(\mathbf{x}, \tilde{t}) = w_{n_0}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \epsilon w_{n_1}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \epsilon^2 w_{n_2}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ \mathbf{n}(\mathbf{x}, \tilde{t}) = n_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \epsilon n_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \epsilon^2 n_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, \tilde{t}) = \omega_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \epsilon \omega_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \epsilon^2 \omega_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) \in Y \times \tilde{\mathcal{T}} \\ \forall i \in \mathbb{N}, (w_{n_i}^*, n_i, \omega_i) \mathbf{y}\text{-périodiques} \end{array} \right. \quad (6.43)$$

où les champs de normales  $n_0$  et  $n_1$  ont été respectivement définis *via* les équations (6.9b) et (6.9b).

##### 6.4.2.1 Bilan de la masse

Naturellement, nous commençons par la condition issue du bilan de la masse. On note  $K_\rho$  l'opérateur de condition aux limites relatif au bilan de la masse. Compte tenu de la condition aux limites du problème vrai (5.89) et des hypothèses proposées dans le cas 1 du tableau 6.1 on a :

$$K_\rho = \epsilon(1-c)\tilde{w}_n^* + F(H+c)\tilde{\mathbf{v}}^f \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{dans} \quad \tilde{\Gamma} \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.44)$$

Après adjonction des développements asymptotiques de  $\tilde{\mathbf{v}}^f$ ,  $c_z$ ,  $\mathbf{n}$  et  $\tilde{w}_n$ , on applique le résultat (6.21) sur  $K_\rho$  et on obtient une cascade d'équations sur  $\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$ . On collecte les différents termes à l'ordre  $\epsilon^0$  :

$$F(H + c_0)v_0 \cdot n_0 = 0 \quad (6.45a)$$

A l'ordre  $\epsilon^1$ ,

$$(1 - c_0)w_{n_0}^* + F((H + c_0)(v_1 \cdot n_0 + v_0 \cdot n_1) + c_1v_0 \cdot n_0) + \mathbf{y} \cdot \nabla_x (F(H + c_0)v_0 \cdot n_0) + \xi n_0 \cdot \nabla_y (F(H + c_0)v_0 \cdot n_0) = 0 \quad (6.45b)$$

Puis à l'ordre  $\epsilon^2$

$$\begin{aligned} & w_{n_1}^* - c_1w_{n_0}^* - c_0w_{n_1}^* + F((H + c_0)(v_2 \cdot n_0 + v_1 \cdot n_1 + v_0 \cdot n_2) + c_1(v_1 \cdot n_0 + v_0 \cdot n_1) + c_2v_0 \cdot n_0) \\ & + \mathbf{y} \cdot \nabla_x ((1 - c_0)w_{n_0}^* + F((H + c_0)(v_1 \cdot n_0 + v_0 \cdot n_1) + c_1v_0 \cdot n_0)) \\ & + \xi n_0 \cdot \nabla_y ((1 - c_0)w_{n_0}^* + F((H + c_0)(v_1 \cdot n_0 + v_0 \cdot n_1) + c_1v_0 \cdot n_0)) \\ & + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \xi n_0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_x \nabla_x & \nabla_y \nabla_x \\ \nabla_x \nabla_y & \nabla_y \nabla_y \end{bmatrix} (F(H + c_0)v_0 \cdot n_0) \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \xi n_0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (6.45c)$$

#### 6.4.2.2 Bilan de la masse des particules fluidisées

Ensuite nous travaillons sur l'équation provenant du bilan de la quantité de particules fluidisées (5.93). Compte tenu des hypothèses présentées dans le cas 1 du tableau 6.1, l'opérateur de condition aux limites  $K_c$  s'écrit :

$$K_c = Fc\tilde{\mathbf{v}}^f \cdot \mathbf{n} + \epsilon(1 - c)\tilde{w}_n - F\frac{ABC}{M}\tilde{\nabla} \left( \tilde{\lambda} + \Psi c \right) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, \tilde{t}) \in \tilde{\Gamma} \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.46)$$

Nous injectons les développements asymptotiques de  $\tilde{\mathbf{v}}^f$ ,  $c$ ,  $\tilde{\lambda}$ ,  $\mathbf{n}$  et  $\tilde{w}_n$ . On applique ensuite le résultat (6.21) sur  $K_c$  et on obtient une cascade d'équations sur  $\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$ . On collecte les différents termes à l'ordre  $\epsilon^{-1}$  :

$$\nabla_y (\lambda_0 + \Psi c_0) \cdot n_0 = 0 \quad (6.47a)$$

Puis à l'ordre  $\epsilon^0$  :

$$\begin{aligned} & Fc_0v_0 \cdot n_0 - F\frac{ABC}{M} (\nabla_x (\lambda_0 + \Psi c_0) \cdot n_0 + \nabla_y (\lambda_1 + \Psi c_1) \cdot n_0 + \nabla_y (\lambda_0 + \Psi c_0) \cdot n_1) \\ & - F\frac{ABC}{M} (\mathbf{y} \cdot \nabla_x (\nabla_y (\lambda_0 + \Psi c_0) \cdot n_0) + \xi n_0 \cdot \nabla_y (\nabla_y (\lambda_0 + \Psi c_0) \cdot n_0)) = 0 \end{aligned} \quad (6.47b)$$

Et enfin à l'ordre  $\epsilon^1$  :

$$\begin{aligned}
& F(c_1 v_0 \cdot n_0 + c_0 v_1 \cdot n_0 + c_0 v_0 \cdot n_1) + (1 - c_0) w_{n_0}^* \\
& - F \frac{ABC}{M} (\nabla_x (\lambda_1 + \Psi_{c_1}) \cdot n_0 + \nabla_x (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) \cdot n_1 + \nabla_y (\lambda_2 + \Psi_{c_2}) \cdot n_0) \\
& - F \frac{ABC}{M} (\nabla_y (\lambda_1 + \Psi_{c_1}) \cdot n_1 + \nabla_y (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) \cdot n_2) \\
& - F \mathbf{y} \cdot \nabla_x \left( \frac{ABC}{M} (\nabla_x (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) \cdot n_0 + \nabla_y (\lambda_1 + \Psi_{c_1}) \cdot n_0 + \nabla_y (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) \cdot n_1) - c_0 v_0 \cdot n_0 \right) \\
& - F \xi n_0 \cdot \nabla_y \left( \frac{ABC}{M} (\nabla_x (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) \cdot n_0 + \nabla_y (\lambda_1 + \Psi_{c_1}) \cdot n_0 + \nabla_y (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) \cdot n_1) - c_0 v_0 \cdot n_0 \right) \\
& - \frac{1}{2} F \frac{ABC}{M} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \xi n_0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_x \nabla_x & \nabla_y \nabla_x \\ \nabla_x \nabla_y & \nabla_y \nabla_y \end{bmatrix} (\nabla_y (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) \cdot n_0) \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \xi n_0 \end{pmatrix} = 0
\end{aligned} \tag{6.47c}$$

### 6.4.2.3 Condition d'adhérence

Nous travaillons sur l'équation décrivant l'adhérence du fluide sur l'interface (5.95). Nous écrivons l'opérateur  $K_u$  de condition d'adhérence comme suit :

$$K_u = \tilde{\mathbf{v}}^f \cdot \omega = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, \tilde{t}) \in \tilde{\Gamma} \times \tilde{\mathcal{T}} \tag{6.48}$$

Nous injectons les développements asymptotiques de  $\tilde{\mathbf{v}}^f$  et  $\omega$  et employons le résultat (6.21) et on obtient une cascade d'équations sur  $\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$ . Ainsi, à l'ordre  $\epsilon^0$  nous obtenons :

$$v_0 \cdot \omega_0 = 0 \tag{6.49a}$$

Puis à l'ordre  $\epsilon^1$  :

$$v_1 \cdot \omega_0 + v_0 \cdot \omega_1 + \mathbf{y} \cdot \nabla_x (v_0 \cdot \omega_0) + \xi n_0 \cdot \nabla_y (v_0 \cdot \omega_0) = 0 \tag{6.49b}$$

Enfin, à l'ordre  $\epsilon^2$  :

$$\begin{aligned}
& v_2 \cdot \omega_0 + v_1 \cdot \omega_1 + v_0 \cdot \omega_2 + \mathbf{y} \cdot \nabla_x (v_1 \cdot \omega_0 + v_0 \cdot \omega_1) + \xi n_0 \cdot \nabla_y (v_1 \cdot \omega_0 + v_0 \cdot \omega_1) \\
& + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \xi n_0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_x \nabla_x & \nabla_y \nabla_x \\ \nabla_x \nabla_y & \nabla_y \nabla_y \end{bmatrix} (v_0 \cdot \omega_0) \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \xi n_0 \end{pmatrix} = 0
\end{aligned} \tag{6.49c}$$

## 6.4.3 Formulation du problème sur la cellule

### 6.4.3.1 Équations du problème

Dans un premier temps, récupérons les ordres les plus hauts des équations de conservation de la masse des particules fluidisées (6.36a) et de la quantité de mouvement (6.38a). Nous y ajoutons également la condition aux limites (6.47a) :

$$\begin{cases} \Delta_y (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) = 0 & \text{dans } Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}} & (6.50a) \\ \nabla_y (\lambda_0 - \Psi_{c_0}) = 0 & \text{dans } Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}} & (6.50b) \\ \nabla_y (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) \cdot n_0 = 0 & \text{dans } \Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}} & (6.50c) \\ (c_0, \lambda_0) \mathbf{y} - \text{périodiques} & & \end{cases}$$

Le jeu d'équations (6.50) fait intervenir le domaine  $Y_0$  ainsi que sa frontière  $\Gamma_0$ . Ces domaines sont inconnus, et il convient de les déterminer à partir de l'équation de la courbe de niveau :

$$\frac{\partial S_0}{\partial \tilde{t}} = AF^{-1} \|\nabla_y S_0\| w_{n_0}^* \quad \text{dans } Y \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.51)$$

Il est évident que le bilan de la quantité de mouvement (6.50b) informe sur la constance du terme  $\lambda_0 - \Psi c_0$  vis-à-vis de la variable  $\mathbf{y}$ . Par ailleurs, on considère conjointement (i) la  $\mathbf{y}$ -périodicité de  $\lambda_0 + \Psi c_0$ ; (ii) le bilan de masse des particules fluidisées et (iii) sa restriction sur le bord interne  $\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$ . Considérant l'alternative de Fredholm telle que formulée par Allaire *et al.* [92] et présentée en annexe C, ces considérations aboutissent à la constance de  $\lambda_0 + \Psi c_0$  vis-à-vis de la variable  $\mathbf{y}$ . Comme  $\lambda_0 + \Psi c_0$  ainsi que  $\lambda_0 - \Psi c_0$  sont constants par rapport à la variable rapide, alors  $\lambda_0$  et  $c_0$  sont tous deux constants en  $\mathbf{y}$ . On écrit donc :

$$c_0 = c_0(\mathbf{x}, \tilde{t}) \quad \text{et} \quad \lambda_0 = \lambda_0(\mathbf{x}, \tilde{t}) \quad \text{dans } Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.52)$$

Ces deux champs deviennent alors des données d'entrée du problème sur la cellule défini par les équations de bilan obtenues à l'ordre suivant, à savoir : le bilan de la masse à l'ordre  $\epsilon^{-1}$  (6.34a), le bilan des particules fluidisées à l'ordre  $\epsilon^{-1}$  (6.36b), le bilan de la quantité de mouvement à l'ordre  $\epsilon^{-2}$  (6.38b). Les conditions aux limites sont issues (i) du bilan de la masse à l'ordre le plus haut (6.45a), (ii) du bilan de la masse des particules fluidisées à l'ordre  $\epsilon^0$  (6.47b) et (iii) de la condition d'adhérence à l'ordre le plus haut (6.49a). On a ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_y \cdot v_0 = 0 \quad \text{dans } Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.53a) \\ \Delta_y (\lambda_1 + \Psi c_1) = 0 \quad \text{dans } Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.53b) \\ ABH \nabla_y (\lambda_1 - \Psi c_1) + \frac{AEH}{\tilde{\rho}^w} \Delta_y v_0 = -ABH \nabla_x (\lambda_0 - \Psi c_0) \quad \text{dans } Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.53c) \\ v_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.53d) \\ \nabla_y (\lambda_1 + \Psi c_1) \cdot n_0 = -\nabla_x (\lambda_0 + \Psi c_0) \cdot n_0 \quad \text{dans } \Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.53e) \\ (v_0, c_1, \lambda_1) \mathbf{y}\text{-périodiques.} \end{array} \right.$$

L'indépendance de  $c_0$  et  $\lambda_0$  vis-à-vis de  $\mathbf{y}$  permet d'assimiler les termes fonctions de  $c_0$  et  $\lambda_0$  à des termes sources. De la même manière que pour (6.50), le jeu d'équations (6.53) présente une dépendance explicite vis-à-vis de  $Y_0$  et de sa frontière  $\Gamma_0$ . Il est donc clair que les problèmes (6.53) et (6.51) sont des problèmes couplés. Ce couplage pourrait éventuellement mettre à mal la linéarité du problème (6.53). Or, une telle linéarité constitue une propriété clé puisqu'elle permet d'écrire les solutions du problème (6.53) comme des combinaisons linéaires des solutions de problèmes unitaires. Ces problèmes unitaires sont qualifiés de « Cell problems » dans la littérature anglophone (voir par exemple Allaire [51]) et sont analogues au problème (6.53) mais caractérisés par des termes sources unitaires. Ces problèmes unitaires sont d'une importance cruciale pour l'identification des paramètres du modèle homogénéisé, comme le tenseur de perméabilité dans le cas de l'homogénéisation du problème de Stokes vers celui de Darcy (ici aussi, voir Allaire [51]). Pour assurer la linéarité sus-mentionnée, nous proposons de découpler les deux problèmes à l'aide d'une discrétisation temporelle.

### 6.4.3.2 Proposition de découplage

Afin de découpler les deux problèmes (6.53) et (6.51), nous étudions la possibilité de résoudre le problème d'évolution temporelle de la fonction courbe de niveau de manière incrémentale. En

effet, on remarque qu'il s'agit du seul problème différentiel où le temps apparaît comme variable de différentiation. On propose donc de résoudre ce problème à l'aide d'un schéma d'Euler progressif en temps. Au travers de cette formulation incrémentale, on note  $t^i$  l'instant courant. L'instant suivant  $t^{i+1}$  est défini de la façon suivante :

$$t^{i+1} = t^i + \delta t \quad (6.54)$$

où  $\delta t$  représente l'incrément de temps employé pour la résolution incrémentale. Dans le cadre d'un schéma d'Euler, l'expression de la dérivée partielle de  $S_0$  vis-à-vis du temps s'écrit de la façon suivante :

$$\left. \frac{\partial S_0}{\partial \tilde{t}} \right|^{i+1} = \frac{S_0^{i+1} - S_0^i}{\delta t} \quad (6.55)$$

où on a noté  $S_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t_i) = S_0^i$  ainsi que  $S_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t_{i+1}) = S_0^{i+1}$ . Plus particulièrement, dans le cas d'un schéma d'Euler *progressif*, la solution au pas de temps suivant (c-à-d  $S_0^{i+1}$ ) est déterminée à partir de la solution connue au pas de temps courant  $t^i$ . Dans ce sens, on peut écrire la forme incrémentale du problème de l'évolution de la fonction courbe de niveau. On introduit dans un premier temps les produits cartésiens  $(Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}})^i$  et  $(\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}})^i$  donnés à partir de la fonction courbe de niveau évaluée à l'instant  $t^i$ , et donc connus :

$$(Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}})^i := \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t^i) \in \tilde{\Omega} \times Y \times \tilde{\mathcal{T}} \mid S_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t^i) > 0\} \quad (6.56a)$$

$$(\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}})^i := \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t^i) \in \tilde{\Omega} \times Y \times \tilde{\mathcal{T}} \mid S_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t^i) = 0\} \quad (6.56b)$$

On introduit de plus quelques données connues constituant les sources du problème sur la cellule à l'instant  $t^i$  :

$$c_0^i = c_0(\mathbf{x}, t^i), \quad \lambda_0^i = \lambda_0(\mathbf{x}, t^i) \quad (6.57)$$

Dès lors le problème sur la cellule (6.53) se reformule de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot v_0^i = 0 \quad \text{dans} \quad (Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}})^i \end{array} \right. \quad (6.58a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{\mathbf{y}} (\lambda_1^i + \Psi c_1^i) = 0 \quad \text{dans} \quad (Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}})^i \end{array} \right. \quad (6.58b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ABH \nabla_{\mathbf{y}} (\lambda_1^i - \Psi c_1^i) + \frac{AEH}{\tilde{\rho}w} \Delta_{\mathbf{y}} v_0^i = -ABH \nabla_{\mathbf{x}} (\lambda_0^i - \Psi c_0^i) \quad \text{dans} \quad (Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}})^i \end{array} \right. \quad (6.58c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0^i = \mathbf{0} \quad \text{dans} \quad (\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}})^i \end{array} \right. \quad (6.58d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\mathbf{y}} (\lambda_1^i + \Psi c_1^i) \cdot \mathbf{n}_0^i = -\nabla_{\mathbf{x}} (\lambda_0^i + \Psi c_0^i) \cdot \mathbf{n}_0^i \quad \text{dans} \quad (\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}})^i \end{array} \right. \quad (6.58e)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (v_0^i, c_1^i, \lambda_1^i) \mathbf{y} - \text{périodiques.} \end{array} \right.$$

où les seules inconnues sont  $c_1^i$ ,  $\lambda_1^i$  et  $v_0^i$ . Une fois ce problème résolu, le système est complètement connu à l'instant  $t^i$ . Ainsi, puisque le problème (6.51) peut se reformuler sous la forme incrémentale progressive suivante :

$$\frac{S_0^{i+1} - S_0^i}{\delta t} = AF^{-1} \|\nabla_{\mathbf{y}} S_0^i\| w_{n_0}^{i*} \quad \text{dans} \quad Y \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.59)$$

Alors on peut déterminer  $S_0^{i+1}$ . Par voie de conséquences, on peut déterminer l'état de la cellule élémentaire et l'interface à l'instant  $t^{i+1}$  :

$$\left(Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}}\right)^{i+1} := \left\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t^{i+1}) \in \tilde{\Omega} \times Y \times \tilde{\mathcal{T}} \mid S_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t^{i+1}) > 0\right\} \quad (6.60a)$$

$$\left(\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}}\right)^{i+1} := \left\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t^{i+1}) \in \tilde{\Omega} \times Y \times \tilde{\mathcal{T}} \mid S_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t^{i+1}) = 0\right\} \quad (6.60b)$$

Tant et si bien que la connaissance de  $c_0^{i+1}$  et  $\lambda_0^{i+1}$  permet alors de résoudre le problème cellulaire à l'instant  $t^{i+1}$ , et ainsi de suite. Dans ces conditions, le problème est suffisamment découplé pour assurer la linéarité des solutions du problème cellulaire vis-à-vis des sources (où membre de droite) à un instant  $t^i$  donné. Ce résultat permettra par la suite de formuler un problème cellulaire élémentaire d'une manière convenable.

**Remarque** (Notations). *Afin de simplifier la lecture du rapport, à partir de maintenant et pour le reste de la section (sauf indication contraire), nous omettrons l'indice  $i$ , et les dérivées temporelles évaluées numériquement le seront par le biais d'un schéma d'Euler progressif*

#### 6.4.4 Équations à l'ordre suivant et problème macroscopique

Dans cette partie, nous allons analyser les équations obtenues à l'ordre suivant, dans le but d'obtenir un problème à l'échelle macroscopique, de solutions  $c_0$ ,  $\lambda_0$  et permettant de dégager l'expression d'une vitesse macroscopique que l'on notera  $\bar{v}$ , également solution de ce problème. Dans un premier temps, nous analyserons l'équation issue du bilan de la masse, puis celle issue du bilan de masse des particules fluidisées.

##### 6.4.4.1 Bilan de la masse

Désormais, nous pouvons écrire les équations à l'ordre suivant. Nous commençons naturellement par l'équation de conservation de la masse (6.34b). En considérant que  $\nabla_{\mathbf{y}} \cdot v_0 = 0$  et que  $c_0 = c_0(\mathbf{x}, \tilde{t})$  dans la cellule, on aboutit à :

$$\frac{\partial c_0}{\partial \tilde{t}} + A(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot ((c_0 + H)v_0) + (c_0 + H)\nabla_{\mathbf{y}} \cdot v_1 + v_0 \cdot \nabla_{\mathbf{y}} c_1) = 0 \quad \text{dans } Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.61)$$

Ainsi que la condition aux limites associée sur  $\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$  (6.45b),

$$(1 - c_0)w_{n_0}^* + F((H + c_0)(v_1 \cdot n_0 + v_0 \cdot n_1) + c_1 v_0 \cdot n_0) + \mathbf{y} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}(F(H + c_0)v_0 \cdot n_0) + \xi n_0 \cdot \nabla_{\mathbf{y}}(F(H + c_0)v_0 \cdot n_0) = 0 \quad (6.62)$$

Intégrons (6.61) sur  $Y_0$  :

$$\int_{Y_0} \frac{\partial c_0}{\partial \tilde{t}} + A(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot ((c_0 + H)v_0) + (c_0 + H)\nabla_{\mathbf{y}} \cdot v_1 + v_0 \cdot \nabla_{\mathbf{y}} c_1) \, d\mathbf{y} = 0 \quad (6.63)$$

On traite dans un premier temps le terme de dérivation temporelle en échangeant l'intégration et la dérivation à l'aide du résultat présenté en annexe C.7.1, équation (C.59) et en profitant de la constance de  $c_0$  sur la cellule :

$$\int_{Y_0} \frac{\partial c_0}{\partial \tilde{t}} \, d\mathbf{y} = |Y_0| \frac{\partial c_0}{\partial \tilde{t}} \quad (6.64)$$

L'intégrale de (6.61) s'écrit alors :

$$|Y_0| \frac{\partial c_0}{\partial \tilde{t}} + A \int_{Y_0} \nabla_x \cdot ((c_0 + H) v_0) d\mathbf{y} + A \int_{Y_0} (c_0 + H) \nabla_y \cdot v_1 + v_0 \cdot \nabla_y c_1 d\mathbf{y} = 0 \quad (6.65)$$

On interchange divergence selon  $\mathbf{x}$  et intégration sur  $Y_0$ . On utilise le résultat présenté en annexe (C.5). Pour un champ vectoriel  $\mathbf{u}$ , on a :

$$\nabla_x \cdot \int_{Y_0} \mathbf{u} d\mathbf{y} = \int_{Y_0} \nabla_x \cdot \mathbf{u} d\mathbf{y} - \int_{\Gamma_0} \mathbf{u} \cdot \frac{\nabla_x S_0}{\|\nabla_y S_0\|} da \quad (6.66)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} |Y_0| \frac{\partial c_0}{\partial \tilde{t}} + A \nabla_x \cdot \left( (c_0 + H) \int_{Y_0} v_0 d\mathbf{y} \right) + A (c_0 + H) \int_{\Gamma_0} v_0 \cdot \frac{\nabla_x S_0}{\|\nabla_y S_0\|} da \\ + A \int_{Y_0} (c_0 + H) \nabla_y \cdot v_1 d\mathbf{y} + A \int_{Y_0} v_0 \cdot \nabla_y c_1 d\mathbf{y} = 0 \end{aligned} \quad (6.67)$$

En utilisant le théorème de flux divergence sur les deux derniers termes, ainsi que la  $\mathbf{y}$ -périodicité de  $v_0$ ,  $v_1$  et  $c_1$  on a :

$$\int_{Y_0} \nabla_y \cdot v_1 d\mathbf{y} = \int_{\partial Y} v_1 \cdot n_{ext} da + \int_{\Gamma_0} v_1 \cdot n_0 da = \int_{\Gamma_0} v_1 \cdot n_0 da \quad (6.68a)$$

$$\int_{Y_0} \nabla_y c_1 \cdot v_0 d\mathbf{y} = \int_{Y_0} \nabla_y (c_1 \cdot v_0) - c_1 \nabla_y \cdot v_0 d\mathbf{y} = \int_{\partial Y} c_1 v_0 \cdot n_{ext} da + \int_{\Gamma_0} c_1 v_0 \cdot n_0 da = 0 \quad (6.68b)$$

On introduit  $\bar{v}$  la vitesse moyenne du fluide définie par :

$$\bar{v} = \frac{1}{|Y_0|} \int_{Y_0} v_0 d\mathbf{y} \quad (6.69)$$

L'équation intégrale du bilan de la masse se réduit donc à :

$$\begin{aligned} |Y_0| \frac{\partial c_0}{\partial \tilde{t}} + A \nabla_x \cdot ((c_0 + H) |Y_0| \bar{v}) + A (c_0 + H) \int_{\Gamma_0} v_0 \cdot \frac{\nabla_x S_0}{\|\nabla_y S_0\|} da \\ = -A \int_{\Gamma_0} (c_0 + H) v_1 \cdot n_0 + c_1 v_0 \cdot n_0 da \end{aligned} \quad (6.70)$$

On peut dès à présent tirer profit de la condition aux limites (6.45b). En rappelant que, sur  $\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$ ,  $v_0 = \mathbf{0}$ , on a :

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_0} (c_0 + H) v_1 \cdot n_0 + c_1 v_0 \cdot n_0 da = \frac{1}{F} \int_{\Gamma_0} (1 - c_0) w_{n_0}^* da \\ + \int_{\Gamma_0} \mathbf{y} \cdot \nabla_x ((H + c_0) v_0 \cdot n_0) + \xi n_0 \cdot \nabla_y ((H + c_0) v_0 \cdot n_0) da \end{aligned} \quad (6.71)$$

On rappelle que :

$$\xi = - \frac{S_1}{\|\nabla_y S_0\|} - \frac{\mathbf{y} \cdot \nabla_x S_0}{\|\nabla_y S_0\|} \quad (6.72)$$

Dans ces conditions, on écrit avantageusement :

$$\int_{\Gamma_0} \mathbf{y} \cdot \nabla_x ((H + c_0) v_0 \cdot n_0) + \xi n_0 \cdot \nabla_y ((H + c_0) v_0 \cdot n_0) \, da = I_1 + I_2 \quad (6.73)$$

Avec :

$$I_1 = \int_{\Gamma_0} \mathbf{y} \cdot \nabla_x ((c_0 + H) v_0 \cdot n_0) - \frac{\mathbf{y} \cdot \nabla_x S_0}{\|\nabla_y S_0\|} n_0 \cdot \nabla_y ((c_0 + H) v_0 \cdot n_0) \, da \quad (6.74a)$$

$$I_2 = \int_{\Gamma_0} -n_0 \cdot \nabla_y ((c_0 + H) v_0 \cdot n_0) \frac{S_1}{\|\nabla_y S_0\|} \, da \quad (6.74b)$$

On peut employer le premier lemme présenté dans les travaux de van Noorden [52] et disponible en annexe C.3, on a :

$$\nabla_x ((c_0 + H) v_0 \cdot n_0) = \frac{\nabla_y ((c_0 + H) v_0 \cdot n_0)}{\|\nabla_y S_0\|} \nabla_x S_0 \quad (6.75)$$

Et on obtient alors  $I_1 = 0$ . Par ailleurs, toujours en profitant de la nullité de  $v_0$  sur  $\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$ , on peut réécrire arbitrairement  $I_2$  sous la forme :

$$I_2 = \int_{\Gamma_0} \frac{\omega_0 \cdot \nabla_y S_1}{\|\nabla_y S_0\|} \omega_0 \cdot ((c_0 + H) v_0) - n_0 \cdot \nabla_y^\top ((c_0 + H) v_0 \cdot n_0) \frac{S_1}{\|\nabla_y S_0\|} \, da \quad (6.76)$$

Puisque la divergence selon  $\mathbf{y}$  de  $v_0$  est nulle, alors il est évident que  $I_2 = 0$  suivant le second lemme présenté dans les travaux de van Noorden [52] et disponible en annexe C.3. On aboutit finalement à :

$$|Y_0| \frac{\partial c_0}{\partial t} + A \nabla_x \cdot ((c_0 + H) |Y_0| \bar{v}) = \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} (1 - c_0) w_{n_0}^* \, da \quad (6.77)$$

Ce qui fournit une équation macroscopique dès lors que la vitesse de l'interface est correctement définie.

#### 6.4.4.2 Bilan de la masse des particules fluidisées

Nous travaillons ensuite sur le bilan de la masse des particules fluidisées exprimé à l'ordre suivant. Pour ce faire et pour simplifier l'écriture, on introduit le champ  $\mathcal{Z}$  défini par :

$$\mathcal{Z} = \frac{ABC}{M} (\nabla_y (\lambda_1 + \Psi_{c_1}) + \nabla_x (\lambda_0 + \Psi_{c_0})) - c_0 v_0 \quad \text{dans} \quad \tilde{\Omega}^f \times Y \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.78)$$

**Remarque** (Une condition aux limites pour  $\mathcal{Z}$ ). *On rappelle que les conditions aux limites du problème à l'ordre précédent (c'est à dire le problème sur la cellule (6.53)) s'écrivent :*

$$\begin{cases} v_0 = \mathbf{0} & \text{dans} \quad \Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}} \\ \nabla_y (\lambda_1 + \Psi_{c_1}) \cdot n_0 = -\nabla_x (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) \cdot n_0 & \text{dans} \quad \Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}} \end{cases}$$

Fournissant ainsi la condition aux limites suivante :

$$\mathcal{Z} \cdot n_0 = \frac{ABC}{M} (\nabla_y (\lambda_1 + \Psi_{c_1}) \cdot n_0 + \nabla_x (\lambda_0 + \Psi_{c_0})) \cdot n_0 - c_0 v_0 \cdot n_0 = 0 \quad \text{dans} \quad \Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.79)$$

L'équation (6.36c) dans le domaine  $Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$  se réformule comme :

$$\frac{\partial c_0}{\partial \tilde{t}} = A \nabla_y \cdot \left( \frac{ABC}{M} (\nabla_y (\lambda_2 + \Psi c_2) + \nabla_x (\lambda_1 + \Psi c_1)) - c_0 v_1 - c_1 v_0 \right) + A \nabla_x \cdot \mathcal{Z} \quad (6.80)$$

Etant donnée la constance de  $c_0$  et  $\lambda_0$  par rapport à  $\mathbf{y}$ , la condition aux limites sur  $\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$  (6.47c) est donnée comme ceci :

$$\begin{aligned} n_0 \cdot \left( \frac{ABC}{M} (\nabla_y (\lambda_2 + \Psi c_2) + \nabla_x (\lambda_1 + \Psi c_1)) - c_0 v_1 - c_1 v_0 \right) &= -n_1 \cdot \mathcal{Z} + \frac{1-c_0}{F} w_{n_0}^* \\ -\mathbf{y} \cdot \nabla_x (\mathcal{Z} \cdot n_0) - \xi n_0 \cdot \nabla_y (\mathcal{Z} \cdot n_0) \end{aligned} \quad (6.81)$$

On intègre l'équation (6.80) sur  $Y_0$ , en profitant de la constance de  $c_0$  sur  $Y_0$  permettant entre autre chose de réemployer le résultat (6.64) :

$$\begin{aligned} |Y_0| \frac{\partial c_0}{\partial \tilde{t}} &= A \int_{Y_0} \nabla_y \cdot \left( \frac{ABC}{M} (\nabla_y (\lambda_2 + \Psi c_2) + \nabla_x (\lambda_1 + \Psi c_1)) - c_0 v_1 - c_1 v_0 \right) d\mathbf{y} \\ &+ A \int_{Y_0} \nabla_x \cdot \mathcal{Z} d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (6.82)$$

On traite le premier terme du membre de droite de l'équation (6.82) (on note ce terme (i) pour alléger l'écriture) en y appliquant le théorème de flux divergence et en considérant la  $\mathbf{y}$ -périodicité des champs. On a alors :

$$(i) = A \int_{\Gamma_0} \left( \frac{ABC}{M} (\nabla_y (\lambda_2 + \Psi c_2) + \nabla_x (\lambda_1 + \Psi c_1)) - c_0 v_1 - c_1 v_0 \right) \cdot n_0 da \quad (6.83)$$

On applique alors la condition aux limites :

$$(i) = -A \int_{\Gamma_0} \mathcal{Z} \cdot n_1 da + A \int_{\Gamma_0} \frac{1-c_0}{F} w_{n_0}^* da - A \int_{\Gamma_0} \mathbf{y} \cdot \nabla_x (\mathcal{Z} \cdot n_0) + \xi n_0 \cdot \nabla_y (\mathcal{Z} \cdot n_0) da \quad (6.84)$$

On traite le second terme du membre de droite de l'équation (6.82) en interchangeant la divergence selon  $\mathbf{x}$  et l'intégration sur  $Y_0$ . On utilise le résultat présenté en annexe (C.5). Soit :

$$A \int_{Y_0} \nabla_x \cdot \mathcal{Z} d\mathbf{y} = A \nabla_x \cdot \int_{Y_0} \mathcal{Z} d\mathbf{y} + A \int_{\Gamma_0} \mathcal{Z} \cdot \frac{\nabla_x S_0}{\|\nabla_y S_0\|} da \quad (6.85)$$

En tirant profit de la nullité de  $\mathcal{Z} \cdot n_0$  sur  $\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$ , on a donc :

$$\begin{aligned} |Y_0| \frac{\partial c_0}{\partial \tilde{t}} &= A \nabla_x \cdot \int_{Y_0} \mathcal{Z} d\mathbf{y} - A \int_{\Gamma_0} \mathcal{Z} \cdot n_1 + \mathbf{y} \cdot \nabla_x (\mathcal{Z} \cdot n_0) + \xi n_0 \cdot \nabla_y (\mathcal{Z} \cdot n_0) da \\ &+ \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} (1-c_0) w_{n_0}^* da \end{aligned} \quad (6.86)$$

De plus, en rappelant que :

$$n_1 = \omega_0 \frac{\omega_0 \cdot (\nabla_x S_0 + \nabla_y S_1)}{\|\nabla_y S_0\|} \quad (6.87)$$

Ainsi que :

$$\xi := -\frac{S_1}{\|\nabla_y S_0\|} - \frac{\mathbf{y} \cdot \nabla_x S_0}{\|\nabla_y S_0\|} \quad (6.88)$$

Le résultat (6.86) s'écrit :

$$|Y_0| \frac{\partial c_0}{\partial \tilde{t}} = \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} (1 - c_0) w_{n_0}^* da - \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2 \quad (6.89)$$

où  $\mathcal{I}_1$  et  $\mathcal{I}_2$  sont deux termes intégraux à étudier :

$$\mathcal{I}_1 = \int_{\Gamma_0} \mathbf{y} \cdot \nabla_x (\mathcal{Z} \cdot n_0) - \frac{\mathbf{y} \cdot \nabla_x S_0}{\|\nabla_y S_0\|} n_0 \cdot \nabla_y (\mathcal{Z} \cdot n_0) da \quad (6.90a)$$

$$\mathcal{I}_2 = \int_{\Gamma_0} \frac{\omega_0 \nabla_y S_1}{\|\nabla_y S_0\|} \omega_0 \cdot \mathcal{Z} - \frac{S_1}{\|\nabla_y S_0\|} n_0 \nabla_y (\mathcal{Z} \cdot n_0) da \quad (6.90b)$$

Puisque  $\mathcal{Z} \cdot n_0$  sur  $\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$  grâce au premier lemme présenté dans les travaux de van Noorden [52] (voir annexe C.3) on dispose du résultat suivant :

$$\nabla_x (\mathcal{Z} \cdot n_0) = \frac{n_0 \cdot \nabla_y (\mathcal{Z} \cdot n_0)}{\|\nabla_y S_0\|} \nabla_x S_0 \quad \text{dans } \Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.91)$$

Donnant  $\mathcal{I}_1 = 0$ . De plus, grâce au second lemme présenté dans les travaux de van Noorden [52] (voir annexe C.3), on a directement  $\mathcal{I}_2 = 0$ . On a donc in-fine :

$$\begin{aligned} |Y_0| \frac{\partial c_0}{\partial \tilde{t}} &= A \nabla_x \cdot \int_{Y_0} \left( \frac{ABC}{M} (\nabla_x (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) + \nabla_y (\lambda_1 + \Psi_{c_1})) - c_0 v_0 \right) d\mathbf{y} \\ &+ \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} (1 - c_0) w_{n_0}^* da \end{aligned} \quad (6.92)$$

En introduisant ici aussi la vitesse moyenne  $\bar{v}$  on a :

$$\begin{aligned} |Y_0| \frac{\partial c_0}{\partial \tilde{t}} + A \nabla_x \cdot (c_0 |Y_0| \bar{v}) &= A \nabla_x \cdot \int_{Y_0} \left( \frac{ABC}{M} (\nabla_x (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) + \nabla_y (\lambda_1 + \Psi_{c_1})) \right) d\mathbf{y} \\ &+ \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} (1 - c_0) w_{n_0}^* da \end{aligned} \quad (6.93)$$

Ce qui fournit ici aussi une équation macroscopique, dès lors que la vitesse de l'interface est correctement définie.

#### 6.4.4.3 Problème unitaires cellulaires

En observant les problèmes macroscopiques (6.77) et (6.93) posés précédemment, on remarque clairement qu'ils font intervenir les quantités  $v_0$  et  $\nabla_y (\lambda_1 + \Psi_{c_1})$ , qui sont en fait issues des solutions du problème sur la cellule (6.53). Considérant l'écriture du problème sus-mentionné, on introduit les problèmes unitaires cellulaires suivants :

$$\begin{cases} \Delta_y \nu^{(i)} = 0 & \text{dans } Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}} & (6.94a) \\ \nabla_y \nu^{(i)} \cdot n_0 = e_i \cdot n_0 & \text{dans } \Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}} & (6.94b) \\ \nu^{(i)} \mathbf{y} - \text{périodiques} & & \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u}^{(i)} = 0 & \text{dans } Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}} & (6.95a) \\ \Delta_{\mathbf{y}} u^{(i)} = -\nabla_{\mathbf{y}} \pi^{(i)} + e_i & \text{dans } Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}} & (6.95b) \\ \mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{0} & \text{dans } \Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}} & (6.95c) \\ (u^{(i)}, \pi^{(i)}) & \mathbf{y} - \text{périodiques} & \end{cases}$$

Puisque les termes  $e_i$  correspondent à des vecteurs unitaires et donc à des données, les problèmes (6.94) et (6.95) sont découplés. Leurs résolutions respectives se font donc de manière indépendante. Afin de garantir l'unicité des solutions de ces problèmes, on force la nullité des moyennes respectives de  $\nu^{(i)}$  et  $\pi^{(i)}$ . Par linéarité, les solutions  $v_0$ ,  $(\lambda_1 - \Psi c_1)$  et  $(\lambda_1 + \Psi c_1)$  du problème (6.53) peuvent être écrites comme des combinaisons linéaires des termes sources et des solutions  $\nu^{(i)}$ ,  $u^{(i)}$ ,  $\pi^{(i)}$  des problèmes unitaires (6.94) et (6.95). On peut donc écrire :

$$\begin{cases} (\lambda_1 + \Psi c_1) = -\sum_{i=1}^N \nu^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda_0 + \Psi c_0) + \bar{\mu}_1 & (6.96a) \\ (v_0)_\alpha = -\frac{B}{E} \tilde{\rho}^w \sum_{i=1}^N u_\alpha^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda_0 - \Psi c_0) & (6.96b) \\ (\lambda_1 - \Psi c_1) = -\sum_{i=1}^N \pi^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda_0 - \Psi c_0) + \bar{p}_1 & (6.96c) \end{cases}$$

où  $\bar{\mu}_1$  et  $\bar{p}_1$  sont des fonctions de  $(\mathbf{x}, \tilde{t})$  seulement permettant de garantir la non nullité des moyennes respectives de  $c_1$  et de  $\lambda_1$ . On déduit alors  $c_1$  et  $\lambda_1$  :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( \nu^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda_0 + \Psi c_0) + \pi^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda_0 - \Psi c_0) \right) + \frac{\bar{\mu}_1 + \bar{p}_1}{2} & (6.97a) \\ c_1 = \frac{1}{2\Psi} \sum_{i=1}^N \left( \pi^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda_0 - \Psi c_0) - \nu^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda_0 + \Psi c_0) \right) + \frac{\bar{\mu}_1 - \bar{p}_1}{2\Psi} & (6.97b) \end{cases}$$

Dans ces conditions, il devient possible d'exprimer les quantités homogénéisées  $\bar{\lambda}$  et  $\bar{c}$ , considérant une erreur d'ordre  $\epsilon^2$  :

$$\bar{\lambda} = \lambda_0 + \epsilon \frac{1}{|Y_0|} \int_{Y_0} \lambda_1 d\mathbf{y} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \lambda_0 + \epsilon \frac{\bar{\mu}_1 + \bar{p}_1}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (6.98a)$$

$$\bar{c} = c_0 + \epsilon \frac{1}{|Y_0|} \int_{Y_0} c_1 d\mathbf{y} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = c_0 + \epsilon \frac{\bar{\mu}_1 - \bar{p}_1}{2\Psi} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (6.98b)$$

On en profite pour définir la pression homogénéisée :

$$\bar{p} = \tilde{\rho}^w (\Psi \bar{c} (1 - H\bar{c}) - \bar{\lambda}) \quad (6.99)$$

On peut ensuite formuler une expression de la vitesse moyenne  $\bar{v}$  du fluide dans la cellule, admettant une erreur d'ordre  $\epsilon$ . Nous faisons ainsi émerger l'idée d'un tenseur de perméabilité et donc

d'une loi macroscopique de type Darcy :

$$\begin{aligned}\bar{v}_\alpha &= \frac{1}{|Y_0|} \int_{Y_0} (v_0)_\alpha \, d\mathbf{y} = \frac{1}{|Y_0|} \int_{Y_0} -\frac{B}{E} \tilde{\rho}^w \sum_{i=1}^N u_\alpha^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda_0 - \Psi_{c_0}) \, d\mathbf{y} \\ &= \frac{B}{E |Y_0|} \tilde{\rho}^w \int_{Y_0} \mathfrak{k}_{\alpha i} \, d\mathbf{y} \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda_0 - \Psi_{c_0})\end{aligned}\quad (6.100)$$

où les termes  $\mathfrak{k}_{\alpha i} = -u_\alpha^{(i)}$  correspondent finalement à l'opposé des composantes  $\alpha$  des vecteurs  $u^{(i)}$  contenus dans la liste des solutions du problème unitaire cellulaire relatives à la liste des sources  $e_i$ . On identifie  $\mathcal{K}_h$  comme un tenseur de perméabilité homogénéisé défini par les composantes suivantes :

$$(\mathcal{K}_h)_{\alpha i} = \frac{B}{E |Y_0|} \int_{Y_0} \mathfrak{k}_{\alpha i} \, d\mathbf{y} \quad (6.101)$$

ce résultat est similaire à celui présenté par Allaire [51]. On obtient alors une loi de comportement de type « Darcy » :

$$\bar{v}_\alpha = -\mathcal{K}_h \tilde{\rho}^w \nabla_x (\Psi_{c_0} - \lambda_0) \quad (6.102)$$

Nous pouvons maintenant employer (6.96) dans l'équation (6.93). On s'intéresse en particulier au premier terme du membre de droite :

$$\begin{aligned}\nabla_x \cdot \int_{Y_0} \nabla_x (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) + \nabla_y (\lambda_1 + \Psi_{c_1}) \, d\mathbf{y} &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \int_{Y_0} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) \, d\mathbf{y} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \int_{Y_0} \sum_{i=1}^N \frac{\partial \nu^{(i)}}{\partial y_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) \, d\mathbf{y} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \int_{Y_0} \delta_{\alpha i} + \varpi_{\alpha i} \, d\mathbf{y} \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) \right)\end{aligned}\quad (6.103)$$

où on a introduit  $\varpi_{\alpha i} = -\partial \nu^{(i)} / \partial y_\alpha$ . On identifie  $\mathbf{D}_h^*$  tenseur de diffusion homogénéisé par ses composantes  $(D_h^*)_{\alpha i}$  :

$$(D_h)_{\alpha i} = \int_{Y_0} \delta_{\alpha i} + \varpi_{\alpha i} \, d\mathbf{y} \quad (6.104)$$

De telle sorte que :

$$A \nabla_x \cdot \int_{Y_0} \left( \frac{ABC}{M} (\nabla_x (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) + \nabla_y (\lambda_1 + \Psi_{c_1})) \right) \, d\mathbf{y} = \frac{A^2 BC}{M} \nabla_x \cdot (\mathbf{D}_h \cdot \nabla_x (\lambda_0 + \Psi_{c_0})) \quad (6.105)$$

permettant de réécrire l'équation de bilan de la masse des particules fluidisées comme une équation de diffusion-advection :

$$|Y_0| \frac{\partial c_0}{\partial \tilde{t}} + A \nabla_x \cdot (c_0 |Y_0| \bar{v}) = \frac{A^2 BC}{M} \nabla_x \cdot (\mathbf{D}_h^* \cdot \nabla_x (\lambda_0 + \Psi_{c_0})) + \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} (1 - c_0) w_{n0}^* \, da \quad (6.106)$$

Achevant ainsi la formulation macroscopique.

#### 6.4.4.4 Synthèse : modèle homogénéisé

En considérant le bilan de la masse (6.77) ainsi que l'expression de  $\bar{c}$  (6.98b), on peut écrire le bilan de la masse homogénéisé en considérant une erreur d'ordre  $\epsilon$  :

$$|Y_0| \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + A \nabla_x \cdot ((\bar{c} + H) |Y_0| \bar{v}) = \frac{A}{F} (1 - \bar{c}) \int_{\Gamma_0} w_{n0}^* da + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (6.107)$$

En introduisant  $\phi = |Y_0|$  la porosité du milieu poreux homogénéisé, on a en définitive :

$$\phi \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + A \nabla_x \cdot ((\bar{c} + H) \phi \bar{v}) = \frac{A}{F} (1 - \bar{c}) \int_{\Gamma_0} w_{n0}^* da + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (6.108)$$

En procédant d'une manière strictement équivalente pour le bilan de masse des particules fluidisées (6.106) on a :

$$\phi \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + A \nabla_x \cdot (\bar{c} \phi \bar{v}) = \frac{A^2 BC}{M} \nabla_x \cdot (\mathbf{D}_h \cdot \nabla_x (\bar{\lambda} + \Psi \bar{c})) + \frac{A}{F} (1 - \bar{c}) \int_{\Gamma_0} w_{n0}^* da + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (6.109)$$

Finalement, on rappelle que nous avons négligé les termes quadratiques lors de la procédure d'adimensionalisation du bilan de quantité de mouvement 5.5.1.3. On peut donc identifier le gradient selon  $\mathbf{x}$  de  $\tilde{\rho}^w (\Psi c_0 - \lambda_0)$  à l'opposé du gradient selon  $\mathbf{x}$  de la pression moyenne  $\bar{p}$ . On écrit :

$$\bar{v}_\alpha = -\mathcal{K}_h \cdot \nabla_x \bar{p} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (6.110)$$

#### 6.4.5 Comparaison avec le modèle macroscopique et conclusions

Maintenant que nous avons formulé un problème macroscopique *via* l'homogénéisation quasi-périodique, nous pouvons le comparer avec le modèle de suffusion issu de la poromécanique. En particulier, nous allons comparer (i) le bilan de la masse du fluide homogénéisé (6.108) avec le bilan de la masse du fluide présenté dans l'équation (2.18) ; (ii) la vitesse du fluide homogénéisée (6.110) et celle prescrite à partir de la thermodynamique des milieux poreux (2.104).

**Remarque** (Notations). *Ici, afin d'éviter toute confusion entre les quantités ayant été définies dans la partie I traitant de la poromécanique des quantités exploitées dans la partie II traitant de l'homogénéisation, nous affectons d'une brève «  $\checkmark$  » les quantités « poromécanique », c'est à dire ayant été définies au cours de la partie I au regard d'un volume élémentaire représentatif. À titre d'exemple,  $\checkmark \mathbf{v}^f$  désigne alors la vitesse d'écoulement du fluide contenu dans le volume élémentaire en question et telle que définie par l'équation (2.8).*

Afin de comparer le bilan de masse homogénéisé (6.108) avec le bilan de masse du fluide issu de la formulation poromécanique (2.18), il convient de réarranger l'écriture de ce dernier. On commence par rappeler le bilan de masse en question :

$$\frac{d^s \checkmark m^f}{dt} + \checkmark M_{i,i} = \hat{\Gamma} \quad (6.111)$$

On rappelle que  $\checkmark m^f = \checkmark \rho^f \phi$ . En écriture intrinsèque et dans un contexte où le squelette solide est immobile, ce bilan se formule :

$$\frac{\partial \checkmark \rho^f \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\checkmark \rho^f \phi \checkmark \mathbf{v}^f) = \hat{\Gamma} \quad (6.112)$$

En appliquant la règle de dérivation des produits alors :

$$\phi \frac{\partial \check{\rho}^f}{\partial t} + \check{\rho}^f \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\check{\rho}^f \phi \check{\mathbf{v}}^f) = \hat{\Gamma} \quad (6.113)$$

Puisque le solide est immobile, alors la condition d'incompressibilité des grains (2.21) et le bilan de masse du squelette solide (2.22) considérés conjointement impliquent :

$$\hat{\Gamma} = \rho^s \frac{\partial \phi^{er}}{\partial t} = \rho^s \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (6.114)$$

d'où par réinjection dans (6.113) :

$$\phi \frac{\partial \check{\rho}^f}{\partial t} + \nabla \cdot (\check{\rho}^f \phi \check{\mathbf{v}}^f) = (\rho^s - \check{\rho}^f) \frac{\partial \phi^{er}}{\partial t} \quad (6.115)$$

En exploitant la loi de mélange :  $\check{\rho}^f = (1 - \check{c}) \rho^w + \check{c} \rho^s$  on écrit :

$$\phi (\rho^s - \rho^w) \frac{\partial \check{c}}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho^w + \check{c}(\rho^s - \rho^w)) \phi \check{\mathbf{v}}^f) = (\rho^s - \rho^w) (1 - \check{c}) \frac{\partial \phi^{er}}{\partial t} \quad (6.116)$$

Ce qui, en divisant à droite et à gauche par  $\rho^s - \rho^w$ , équivaut à :

$$\phi \frac{\partial \check{c}}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \left( \frac{\rho^w}{(\rho^s - \rho^w)} + \check{c} \right) \phi \check{\mathbf{v}}^f \right) = (1 - \check{c}) \frac{\partial \phi^{er}}{\partial t} \quad (6.117)$$

On propose de mettre cette équation sous une forme sans dimension. Pour ce faire, on considère la procédure d'adimensionnement utilisée dans la section 5.5 et que l'on rappelle :

$$\frac{\partial \Xi}{\partial t} = \frac{1}{\hat{t}} \frac{\partial \Xi}{\partial \hat{t}}, \quad \nabla \Xi = \frac{1}{L} \tilde{\nabla} \Xi, \quad \rho^s = \hat{\rho} \tilde{\rho}^s \quad \text{et} \quad \rho^w = \hat{\rho} \tilde{\rho}^w \quad (6.118)$$

On choisit d'adimensionner la vitesse  $\check{\mathbf{v}}^f$  à l'aide de la même vitesse de référence  $\hat{v}$  que celle considérée dans la section 5.5 :

$$\check{\mathbf{v}}^f = \hat{v} \check{\mathbf{v}} \quad (6.119)$$

On a alors :

$$\phi \frac{\partial \check{c}}{\partial \hat{t}} + \frac{\hat{v} \hat{t}}{L} \tilde{\nabla} \cdot \left( \left( \frac{\tilde{\rho}^w}{\tilde{\rho}^s - \tilde{\rho}^w} + \check{c} \right) \phi \check{\mathbf{v}} \right) = (1 - \check{c}) \frac{\partial \phi^{er}}{\partial \hat{t}} \quad (6.120)$$

On identifie alors les nombres adimensionnels  $A$  et  $H$  présentés dans le cas 1 du tableau 6.1 et tel que :

$$A = \frac{\hat{v} \hat{t}}{L}, \quad H = \frac{\tilde{\rho}^w}{\tilde{\rho}^s - \tilde{\rho}^w} \quad (6.121)$$

En définitive, le bilan de la masse formulé *via* la poromécanique équivaut :

$$\phi \frac{\partial \check{c}}{\partial \hat{t}} + A \tilde{\nabla} \cdot ((\check{c} + H) \phi \check{\mathbf{v}}) = (1 - \check{c}) \frac{\partial \phi^{er}}{\partial \hat{t}} \quad (6.122)$$

Cette forme est comparable au bilan de masse du fluide homogénéisé (6.108). En particulier, si on identifie  $\check{c}$  à  $\bar{c}$  et  $\check{\mathbf{v}}$  à  $\bar{\mathbf{v}}$ , alors on identifie clairement le lien entre la variation de porosité induite par suffusion et la vitesse de l'interface :

$$\frac{\partial \phi^{er}}{\partial \hat{t}} = \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} w_{n0}^* da \quad (6.123)$$

Ce faisant, on peut juger de la capacité de la procédure d'homogénéisation quasi-périodique présentée ici (en considérant les ordres de grandeur du premier cas proposé dans le tableau 6.1) à faire émerger une loi de comportement dès lors que la vitesse  $w_{n0}^*$  est correctement définie sur  $\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$ . Maintenant, on compare la loi de comportement homogénéisée donnant la vitesse du fluide à celle issue de la promécanique (2.104). Dans le cas où le squelette est immobile et si on omet la contribution de l'énergie libre du squelette, de l'accélération du fluide ainsi que de la pesanteur, cette dernière se réécrit :

$$\check{v}^f = \frac{1}{\check{\rho}^f \phi} \left( -\check{\mathcal{K}} \cdot \frac{\nabla \check{p}}{\check{\rho}^f} + \check{\mathcal{C}}^v \rho^s \left( \frac{\check{p}}{\rho^s} - \check{\mu}^f \right) \right) \quad (6.124)$$

On s'aperçoit que les lois (6.110) et (6.124) n'ont pas la même structure : si la loi (6.110) est de type « Darcy » et permet d'identifier correctement un tenseur de perméabilité homogénéisé, l'identification de  $\check{\mathcal{C}}^v$  est impossible. En définitive, on conclut que la procédure d'homogénéisation quasi-périodique présentée ici (en considérant les ordres de grandeur du premier cas proposé dans le tableau 6.1) et basée sur l'hypothèse que la cinétique d'arrachement est plus lente que la cinétique de l'écoulement, n'est pas capable de faire émerger une loi de comportement de diffusion hydraulique différente de la loi de Darcy. Le modèle homogénéisé est alors faiblement couplé et au travers de ce dernier, l'érosion n'influe pas sur la diffusion hydraulique autrement qu'en altérant la perméabilité du milieu poreux.

## 6.5 Cas 2

Etant donnée l'incapacité du premier modèle homogénéisé à introduire un effet *direct* (c'est à dire autre que l'évolution de la perméabilité) de l'érosion sur la vitesse du fluide du milieu poreux homogénéisé, nous proposons ici de procéder à l'homogénéisation du problème vrai en considérant un jeu d'hypothèses en ordre de grandeur différent, correspondant au cas 2 du tableau 6.1. Dans la section 6.5.1 nous nous concentrerons sur les équations relatives au problème dans le domaine  $\tilde{\Omega}$ , sans prendre en compte les conditions d'interfaces. Celles-ci nécessitent en effet de recevoir le traitement spécifique (voir eq. (6.21)) auquel nous dédierons la section 6.5.3.

### 6.5.1 Cascade d'équations dans le domaine $Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$

Comme dans la section 6.4.1, il convient de considérer les développements asymptotiques des inconnues du problème  $\tilde{v}^f$ ,  $c$  et  $\tilde{\lambda}$  qui ont été introduits par l'ensemble d'équations (6.32).

### 6.5.2 Bilan de la masse

Etant donné le jeu d'hypothèses propre au cas 2 du tableau 6.1 le bilan de masse (5.68) s'écrit cette fois-ci :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \epsilon A \tilde{\nabla} \cdot ((c + H) \tilde{v}^f) = 0 \quad \text{dans} \quad \tilde{\Omega}^f \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.125)$$

On remarque alors que l'unique différence avec le cas 1 réside dans la présence du facteur  $\epsilon$  devant le terme de divergence. En injectant les développements asymptotiques de  $\tilde{v}$ ,  $c$  et  $\tilde{\lambda}$  et en collectant les termes des différents ordres de grandeur (en terme de puissance de  $\epsilon$ ), nous obtenons une cascade d'équations sur  $Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$ . La première équation concerne les termes d'ordre  $\epsilon^0$  :

$$\frac{\partial c_0}{\partial t} + A \nabla_y \cdot ((c_0 + H) v_0) = 0 \quad (6.126a)$$

La deuxième équation contient les termes d'ordre  $\epsilon^1$  :

$$\frac{\partial c_1}{\partial \tilde{t}} + A(\nabla_x \cdot ((c_0 + H)v_0) + \nabla_y \cdot ((c_0 + H)v_1 + c_1 v_0)) = 0 \quad (6.126b)$$

L'équation des termes d'ordre  $\epsilon^2$  donne :

$$\frac{\partial c_2}{\partial \tilde{t}} + A(\nabla_x \cdot ((c_0 + H)v_1 + c_1 v_0) + \nabla_y \cdot ((c_0 + H)v_2 + c_1 v_1 + c_2 v_0)) = 0 \quad (6.126c)$$

### 6.5.2.1 Bilan de la masse des particules fluidisées

Nous travaillons maintenant sur le bilan de la masse des particules fluidisées (5.74). Compte tenu des hypothèses résumées dans le cas 2 du tableau 6.1, ce bilan se reformule de la façon suivante :

$$\epsilon A^2 BC \tilde{\Delta} \left( \tilde{\lambda} + \frac{\partial \tilde{\psi}_r^f}{\partial c} c \right) = M \left( \frac{\partial c}{\partial \tilde{t}} + \epsilon A \tilde{\nabla} \cdot (c \tilde{\mathbf{v}}^f) \right) \quad \text{dans } \tilde{\Omega}^f \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.127)$$

Contrairement au cas 1, ici, un facteur  $\epsilon$  s'applique aux termes laplacien et de divergence. Dans ces conditions, la cascade d'équations obtenue sur  $Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$  est la suivante. A l'ordre le plus élevé,  $\epsilon^{-1}$ , nous obtenons :

$$A^2 BC \Delta_y (\lambda_0 + \Psi c_0) = 0 \quad (6.128a)$$

L'ensemble des termes d'ordre  $\epsilon^0$  fournit l'équation suivante :

$$A^2 BC (\Delta_y (\lambda_1 + \Psi c_1) + 2\nabla_y \cdot \nabla_x (\lambda_0 + \Psi c_0)) = M \left( \frac{\partial c_0}{\partial \tilde{t}} + A \nabla_y \cdot (c_0 v_0) \right) \quad (6.128b)$$

Puis à l'ordre  $\epsilon^1$ , on a :

$$\begin{aligned} A^2 BC (\Delta_y (\lambda_2 + \Psi c_2) + 2\nabla_y \cdot \nabla_x (\lambda_1 + \Psi c_1) + \Delta_x (\lambda_0 + \Psi c_0)) \\ = M \left( \frac{\partial c_1}{\partial \tilde{t}} + A(\nabla_y \cdot (c_0 u_1 + c_1 u_0) + \nabla_x \cdot (c_0 u_0)) \right) \end{aligned} \quad (6.128c)$$

### 6.5.2.2 Bilan de la quantité de mouvement

Dans le cas du bilan de quantité de mouvement (5.81), les hypothèses présentées dans le cas 2 du tableau 6.1, nous aboutissons à l'écriture suivante :

$$\epsilon A \left( \epsilon^{-2} BH \tilde{\rho}^w \tilde{\nabla} \left( \tilde{\lambda} - \frac{\partial \tilde{\psi}_r^f}{\partial c} c \right) + \frac{EH}{\tilde{\rho}^w} \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{v}}^f \right) = (c + H) \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}^f}{\partial \tilde{t}} \quad \text{dans } \tilde{\Omega}^f \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.129)$$

Ici, l'unique différence avec l'équation présentée dans le cas 1 réside dans le facteur  $\epsilon$  multipliant le membre de gauche. De fait, la cascade d'équations obtenue sur  $Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$  est la suivante. A l'ordre le plus élevé,  $\epsilon^{-2}$ , nous obtenons :

$$ABH \nabla_y (\lambda_0 - \Psi c_0) = 0 \quad (6.130a)$$

à l'ordre suivant  $\epsilon^{-1}$  on a :

$$A \left( BH (\nabla_x (\lambda_0 - \Psi c_0) + \nabla_y (\lambda_1 - \Psi c_1)) + \frac{EH}{\tilde{\rho}^w} \Delta_y v_0 \right) = 0 \quad (6.130b)$$

Puis finalement, à l'ordre  $\epsilon^0$  :

$$A \left( BH (\nabla_x (\lambda_1 - \Psi c_1) + \nabla_y (\lambda_2 - \Psi c_2)) + \frac{EH}{\tilde{\rho}^w} (\Delta_y v_1 + 2\nabla_y \cdot \nabla_x v_0) \right) = (c_0 + H) \frac{\partial v_0}{\partial \tilde{t}} \quad (6.130c)$$

### 6.5.2.3 Équation de la courbe de niveau

En reprenant les hypothèses présentées dans le second cas du tableau 6.1, on remarque que l'équation de la courbe de niveau restera inchangée malgré le changement d'hypothèses en ordre de grandeur. On se référera donc à l'équation (6.42) pour ce qui concerne l'équation régissant l'évolution de  $S_0$ .

### 6.5.3 Conditions aux limites

Nous développons ici les cascades d'équations donnant les conditions aux limites pour les différents termes des développements asymptotiques de  $c$ ,  $\tilde{\mathbf{v}}^f$  et  $\tilde{\lambda}$ . Pour ce faire, nous commençons par considérer les développements asymptotiques introduits *via* le jeu d'équation (6.43).

#### 6.5.3.1 Bilan de la masse

Nous commençons ici aussi par traiter le bilan de la masse. On note  $K_\rho$  l'opérateur de condition aux limites relatif au bilan de la masse. Compte tenu de la condition aux limites du problème vrai (5.89) et des hypothèses proposées dans le cas 2 du tableau 6.1 on a :

$$K_\rho = (1 - c) \tilde{w}_n^* + F(H + c) \tilde{\mathbf{v}}^f \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{dans} \quad \tilde{\Gamma} \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.131)$$

On remarque que, à la différence du cas 1,  $K_\rho$  ne fait pas intervenir de facteur  $\epsilon$ . On applique ensuite le résultat (6.21) sur  $K_\rho$  et on obtient une cascade d'équations sur  $\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$ . On collecte les différents termes à l'ordre  $\epsilon^0$  :

$$(1 - c_0) w_{n_0}^* + F(c_0 + H) v_0 \cdot n_0 = 0 \quad (6.132a)$$

A l'ordre  $\epsilon^1$ , on a :

$$\begin{aligned} & w_{n_1}^* - c_1 w_{n_0} - c_0 w_{n_1}^* + F((c_0 + H)(v_1 \cdot n_0 + v_0 \cdot n_1) + c_1 v_0 \cdot n_0) \\ & + \mathbf{y} \cdot \nabla_x ((1 - c_0) w_{n_0}^* + F(c_0 + H) v_0 \cdot n_0) \\ & + \xi n_0 \cdot \nabla_y ((1 - c_0) w_{n_0}^* + F(c_0 + H) v_0 \cdot n_0) = 0 \end{aligned} \quad (6.132b)$$

Puis à l'ordre  $\epsilon^2$  :

$$\begin{aligned} & w_{n_2}^* - c_2 w_{n_0}^* - c_1 w_{n_1}^* - c_0 w_{n_2}^* + F((c_0 + H)(v_2 \cdot n_0 + v_1 \cdot n_1 + v_0 \cdot n_2)) \\ & + F(c_1(v_1 \cdot n_0 + v_0 \cdot n_1) + c_2 v_0 \cdot n_0) \\ & + \mathbf{y} \cdot \nabla_x (w_{n_1}^* - c_1 w_{n_0}^* - c_0 w_{n_1}^* + F((c_0 + H)(v_1 \cdot n_0 + v_0 \cdot n_1) + c_1 v_0 \cdot n_0)) \\ & + \xi n_0 \cdot \nabla_y (w_{n_1}^* - c_1 w_{n_0}^* - c_0 w_{n_1}^* + F((c_0 + H)(v_1 \cdot n_0 + v_0 \cdot n_1) + c_1 v_0 \cdot n_0)) \\ & + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \xi n_0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_x \nabla_x & \nabla_y \nabla_x \\ \nabla_x \nabla_y & \nabla_y \nabla_y \end{bmatrix} ((1 - c_0) w_{n_0}^* + F(c_0 + H) v_0 \cdot n_0) \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \xi n_0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (6.132c)$$

#### 6.5.3.2 Bilan de la masse des particules fluidisées

Nous travaillons à présent l'équation provenant du bilan de la masse de particules fluidisées (5.93). Compte tenu des hypothèses présentées dans le cas 2 du tableau 6.1, l'opérateur de condition aux limites  $K_c$  s'écrit :

$$K_c = Fc\tilde{\mathbf{v}}^f \cdot \mathbf{n} + (1 - c) \tilde{w}_n - F \frac{ABC}{M} \tilde{\nabla} \left( \tilde{\lambda} + \Psi c \right) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, \tilde{t}) \in \tilde{\Gamma} \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.133)$$

Ici, la différence avec le cas 1 réside dans l'absence de facteur  $\epsilon$ . On applique ensuite le résultat (6.21) sur  $K_c$  et on obtient une cascade d'équations sur  $\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$ . On collecte les différents termes à l'ordre  $\epsilon^{-1}$  :

$$\nabla_y (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) \cdot n_0 = 0 \quad (6.134a)$$

Puis à l'ordre  $\epsilon^0$  :

$$\begin{aligned} & F c_0 v_0 \cdot n_0 + (1 - c_0) w_{n_0}^* - F \frac{ABC}{M} \nabla_x (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) \cdot n_0 \\ & - F \frac{ABC}{M} (\nabla_y (\lambda_1 + \Psi_{c_1}) \cdot n_0 + \nabla_y (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) \cdot n_1) \\ & - F \frac{ABC}{M} (\mathbf{y} \cdot \nabla_x (\nabla_y (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) \cdot n_0) + \xi n_0 \cdot \nabla_y (\nabla_y (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) \cdot n_0)) = 0 \end{aligned} \quad (6.134b)$$

Et enfin à l'ordre  $\epsilon^1$  :

$$\begin{aligned} & F (c_1 v_0 \cdot n_0 + c_0 v_1 \cdot n_0 + c_0 v_0 \cdot n_1) + (1 - c_0) w_{n_1}^* - c_1 w_{n_0}^* - \\ & F \frac{ABC}{M} (\nabla_x (\lambda_1 + \Psi_{c_1}) \cdot n_0 + \nabla_x (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) \cdot n_1 + \nabla_y (\lambda_2 + \Psi_{c_2}) \cdot n_0) - \\ & F \frac{ABC}{M} (\nabla_y (\lambda_1 + \Psi_{c_1}) \cdot n_1 + \nabla_y (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) \cdot n_2) + \\ & \mathbf{y} \cdot \nabla_x ((1 - c_0) w_{n_0}^*) + \xi n_0 \cdot \nabla_y ((1 - c_0) w_{n_0}^*) - \\ & F \mathbf{y} \cdot \nabla_x \left( \frac{ABC}{M} (\nabla_x (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) \cdot n_0 + \nabla_y (\lambda_1 + \Psi_{c_1}) \cdot n_0 + \nabla_y (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) \cdot n_1) - c_0 v_0 \cdot n_0 \right) - \\ & F \xi n_0 \cdot \nabla_y \left( \frac{ABC}{M} (\nabla_x (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) \cdot n_0 + \nabla_y (\lambda_1 + \Psi_{c_1}) \cdot n_0 + \nabla_y (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) \cdot n_1) - c_0 v_0 \cdot n_0 \right) - \\ & \frac{1}{2} F \frac{ABC}{M} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \xi n_0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_x \nabla_x & \nabla_y \nabla_x \\ \nabla_x \nabla_y & \nabla_y \nabla_y \end{bmatrix} (\nabla_y (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) \cdot n_0) \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \xi n_0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (6.134c)$$

### 6.5.3.3 Condition d'adhérence

Concernant la condition d'adhérence, étant donné que la condition aux limites ne dépend pas des nombres sans dimension, aucune hypothèse en ordre de grandeur n'est considérée, on reprendra donc les mêmes résultats que ceux présentés pour le cas 1 en section 6.4.2.3

## 6.5.4 Formulation du problème sur la cellule

### 6.5.4.1 Équations du problème

Dans un premier temps, récupérons les ordres les plus élevés des équations de conservation de la masse des particules fluidisées (6.128a) et de la quantité de mouvement (6.130a). Nous y ajoutons également la condition aux limites (6.134a) :

$$\begin{cases} \Delta_y (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) = 0 & \text{dans } Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}} & (6.135a) \\ \nabla_y (\lambda_0 - \Psi_{c_0}) = 0 & \text{dans } Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}} & (6.135b) \\ \nabla_y (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) \cdot n_0 = 0 & \text{dans } \Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}} & (6.135c) \\ (v_0, c_0, \lambda_0) \mathbf{y} - \text{périodiques} & & \end{cases}$$

Ce problème s'accompagne de l'équation de la courbe de niveau  $S_0$  régissant les évolutions respectives de  $Y_0$  et de  $\Gamma_0$  au cours du temps :

$$\frac{\partial S_0}{\partial \tilde{t}} = AF^{-1} \|\nabla_y S_0\| w_{n_0}^* \quad \text{dans} \quad Y \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.136)$$

Le problème (6.135) est identique au problème sur la cellule à l'ordre le plus haut présenté dans le cas 1 (voir (6.50)). On déduit alors la même conclusion, à savoir :

$$c_0 = c_0(\mathbf{x}, \tilde{t}) \quad \text{et} \quad \lambda_0 = \lambda_0(\mathbf{x}, \tilde{t}) \quad \text{dans} \quad Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.137)$$

Ces deux champs deviennent alors des données d'entrée du problème sur la cellule défini à partir des équations de bilan obtenues à l'ordre suivant, à savoir : le bilan de la masse à l'ordre  $\epsilon^0$  (6.126a), le bilan des particules fluidisées à l'ordre  $\epsilon^0$  (6.128b), le bilan de la quantité de mouvement à l'ordre  $\epsilon^{-1}$  (6.130b). Les conditions aux limites sont issues (i) du bilan de la masse à l'ordre le plus haut (6.132a), (ii) du bilan de la masse des particules fluidisées à l'ordre  $\epsilon$  (6.134b) et (iii) de la condition d'adhérence à l'ordre le plus haut (6.49a). Etant donnée la constance de  $c_0$  et  $\lambda_0$  par rapport à  $\mathbf{y}$ , on aboutit au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial c_0}{\partial \tilde{t}} + A(c_0 + H) \nabla_y \cdot v_0 = 0 \quad \text{dans} \quad Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.138a) \\ \frac{A^2 BC}{M} \Delta_y (\lambda_1 + \Psi c_1) = \frac{\partial c_0}{\partial \tilde{t}} + A c_0 \nabla_y \cdot v_0 \quad \text{dans} \quad Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.138b) \\ B \nabla_y (\lambda_1 - \Psi c_1) + \frac{E}{\tilde{\rho}^w} \Delta_y v_0 = -B \nabla_x (\lambda_0 - \Psi c_0) \quad \text{dans} \quad Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.138c) \\ v_0 \cdot n_0 = -\frac{1}{F} \frac{1 - c_0}{c_0 + H} w_{n_0}^* \quad \text{dans} \quad \Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.138d) \\ v_0 \cdot \omega_0 = 0 \quad \text{dans} \quad \Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.138e) \\ F c_0 v_0 \cdot n_0 - \frac{F ABC}{M} \nabla_y (\lambda_1 + \Psi c_1) \cdot n_0 = \\ - (1 - c_0) w_{n_0}^* + \frac{F ABC}{M} \nabla_x (\lambda_0 + \Psi c_0) \cdot n_0 \quad \text{dans} \quad \Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.138f) \\ (v_0, c_1, \lambda_1) \mathbf{y} - \text{périodiques} \end{array} \right.$$

On constate clairement que la divergence selon  $\mathbf{y}$  de  $v_0$  est constant par rapport à  $\mathbf{y}$ . On écrit alors :

$$\nabla_y \cdot v_0 = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \ln \frac{1}{c_0 + H} \quad \text{dans} \quad Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.139)$$

Le problème (6.138) peut donc se réarranger dans la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_y \cdot v_0 = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{1}{c_0 + H} \quad \text{dans } Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.140a) \\ ABC \Delta_y (\lambda_1 + \Psi_{c_1}) = -\frac{MH}{A} \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{1}{c_0 + H} \quad \text{dans } Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.140b) \\ B \nabla_y (\lambda_1 - \Psi_{c_1}) + \frac{E}{\tilde{\rho}^w} \Delta_y v_0 = -B \nabla_x (\lambda_0 - \Psi_{c_0}) \quad \text{dans } Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.140c) \\ v_0 \cdot n_0 = -\frac{1}{F} \frac{1 - c_0}{c_0 + H} w_{n_0}^* \quad \text{dans } \Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.140d) \\ v_0 \cdot \omega_0 = 0 \quad \text{dans } \Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.140e) \\ \nabla_y (\lambda_1 + \Psi_{c_1}) \cdot n_0 = \frac{MH}{FABC} \frac{1 - c_0}{c_0 + H} w_{n_0}^* - \nabla_x (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) \cdot n_0 \quad \text{dans } \Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.140f) \\ (v_0, c_1, \lambda_1) \mathbf{y} - \text{périodiques} \end{array} \right.$$

Tout comme les problèmes (6.53) et (6.51), les problèmes (6.140) et (6.136) sont des couplés. Procéder de façon analogue au découplage proposé en section 6.4.3.2 permettrait avantageusement de découpler ces problèmes. Cependant, ceci ne suffit plus à garantir la linéarité des solutions du problème (6.140) vis-à-vis de ses termes sources. En effet, dans ce problème, la vitesse  $w_{n_0}^*$  des iso-valeurs de  $S_0$  agit aussi comme un terme source. Dès lors, garantir la linéarité entre les solutions de (6.140) et les termes sources suivants :

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{1}{c_0 + H}, \quad \nabla_x (\lambda_0 - \Psi_{c_0}), \quad \text{et} \quad \nabla_x (\lambda_0 + \Psi_{c_0})$$

nécessite de garantir que  $w_{n_0}^*$  ne soit pas une fonction non-linéaire d'un (ou plus) de ces termes sources. De plus, afin d'être en mesure d'écrire des problèmes unitaires cellulaires de formes simples, il est préférable que  $w_{n_0}^*$  soit constante sur la cellule, et donc indépendante des inconnues du problème. Nous verrons les implications de cette constance dans la section 6.5.5.

#### 6.5.4.2 Possibilité de découplage

Afin de découpler le problème sur la cellule (6.140) du problème de la courbe de niveau (6.136), on suit strictement le raisonnement établi pour traiter le cas 1 (voir section 6.4.3.2) et on résout le problème (6.136) à l'aide d'un schéma d'Euler progressif en temps. L'unique différence avec les développements présentés en 6.4.3.2 réside dans le problème cellulaire obtenu par discrétisation

temporelle du problème (6.140) et s'écrivant comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_y \cdot v_0^i = \frac{1}{A\delta t} \ln \frac{c_0^{i-1} + H}{c_0^i + H} \quad \text{dans} \quad (Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}})^i \end{array} \right. \quad (6.141a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ABC \Delta_y (\lambda_1 + \Psi c_1) = -\frac{MH}{A\delta t} \ln \frac{c_0^{i-1} + H}{c_0^i + H} \quad \text{dans} \quad (Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}})^i \end{array} \right. \quad (6.141b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B \nabla_y (\lambda_1^i - \Psi c_1^i) + \frac{E}{\tilde{\rho}^w} \Delta_y v_0^i = -B \nabla_x (\lambda_0^i - \Psi c_0^i) \quad \text{dans} \quad (Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}})^i \end{array} \right. \quad (6.141c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0^i \cdot n_0^i = -\frac{1}{F} \frac{1 - c_0^i}{c_0^i + H} w_{n0}^{i*} \quad \text{dans} \quad (\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}})^i \end{array} \right. \quad (6.141d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0^i \cdot \omega_0^i = 0 \quad \text{dans} \quad (\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}})^i \end{array} \right. \quad (6.141e)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_y (\lambda_1^i + \Psi c_1^i) \cdot n_0^i = \frac{MH}{FABC} \frac{1 - c_0^i}{c_0^i + H} w_{n0}^{i*} - \nabla_x (\lambda_0^i + \Psi c_0^i) \cdot n_0^i \quad \text{dans} \quad (\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}})^i \end{array} \right. \quad (6.141f)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (v_0^i, c_1^i, \lambda_1^i) \mathbf{y} - \text{périodiques} \end{array} \right.$$

**Remarque** (Notations). Afin de simplifier la lecture du rapport, à partir de maintenant et pour le reste de la section (sauf indication contraire), nous omettons l'indice  $i$ , et les dérivées temporelles devront être interprétées au sens d'un schéma d'Euler progressif. Nous continuerons donc à nous référer au problème (6.140).

### 6.5.5 Équations à l'ordre suivant et problème macroscopique

Dans cette section, nous allons analyser les équations obtenues à l'ordre suivant, dans le but d'obtenir un problème à l'échelle macroscopique. Avant de commencer, on remarque que le bilan de la masse à l'ordre le plus haut permet déjà d'établir une équation macroscopique concernant l'évolution de  $c_0$ . En effet, si on intègre l'équation (6.138a) sur la cellule, on obtient :

$$\int_{Y_0} \frac{\partial c_0}{\partial t} + A(c_0 + H) \nabla_y \cdot v_0 \, d\mathbf{y} = 0 \quad (6.142)$$

On traite dans un premier temps le terme de dérivation temporelle en interchangeant l'intégration et la dérivée temporelle à l'aide du résultats présenté en annexe C.7.1, équation (C.59). En effet, la constance de  $c_0$  sur la cellule permet de conclure que :

$$\int_{Y_0} \frac{\partial c_0}{\partial t} \, d\mathbf{y} = |Y_0| \frac{\partial c_0}{\partial t} \quad (6.143)$$

D'un autre côté, pour traiter le terme de divergence de cette égalité, on utilise le théorème de flux-divergence sur  $Y_0$ , puis on considère la  $\mathbf{y}$  - périodicité de  $v_0$  ainsi que la condition aux limites fixant la valeur de  $v_0 \cdot n_0$  sur l'interface :

$$A(c_0 + H) \int_{Y_0} \nabla_y \cdot v_0 \, d\mathbf{y} = A(c_0 + H) \int_{\Gamma_0} v_0 \cdot n_0 \, da = -\frac{A}{F} (1 - c_0) \int_{\Gamma_0} w_{n0}^* \, da \quad (6.144)$$

On obtient alors une équation macroscopique prescrivant l'évolution locale de  $c_0$  :

$$|Y_0| \frac{\partial c_0}{\partial t} = \frac{A}{F} (1 - c_0) \int_{\Gamma_0} w_{n0}^* \, da \quad (6.145)$$

Considérant la constance de  $w_{n_0}^*$  sur la cellule, on a de plus :

$$\frac{\partial c_0}{\partial \tilde{t}} = \frac{A}{F} \frac{|\Gamma_0|}{|Y_0|} (1 - c_0) w_{n_0}^* \quad (6.146)$$

Par conséquent

$$\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \ln \left( \frac{1}{c_0 + H} \right) = -\frac{1}{F} \frac{|\Gamma_0|}{|Y_0|} \frac{1 - c_0}{c_0 + H} w_{n_0}^* \quad (6.147)$$

Cette équation implique que l'on peut remplacer la source liée à  $w_{n_0}^*$  dans le problème cellulaire (6.140) par la source  $\partial \ln(1/c_0 + H) / \partial \tilde{t}$  garantissant la linéarité de ce même problème cellulaire et légitimant la possibilité d'en écrire une forme « unitaire ».

### 6.5.5.1 Bilan de la masse

Le bilan de la masse à l'ordre  $\epsilon^1$  (6.126b), dans le domaine  $Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$ , s'écrit comme :

$$\frac{\partial c_1}{\partial \tilde{t}} + A \nabla_x \cdot ((c_0 + H) v_0) + A \nabla_y \cdot ((c_0 + H) v_1 + c_1 v_0) = 0 \quad (6.148)$$

La condition aux limites correspondante est donnée d'après l'équation (6.132b) et s'exprime :

$$(1 - c_0) w_{n_1}^* - c_1 w_{n_0}^* + F ((c_0 + H) (v_1 \cdot n_0 + v_0 \cdot n_1) + c_1 v_0 \cdot n_0) + \mathbf{y} \cdot \nabla_x ((1 - c_0) w_{n_0}^* + (c_0 + H) v_0 \cdot n_0) + \xi n_0 \cdot \nabla_y ((1 - c_0) w_{n_0}^* + (c_0 + H) v_0 \cdot n_0) = 0 \quad (6.149)$$

L'idée maintenant va être d'intégrer (6.148) sur la cellule, soit sur  $Y_0$  :

$$\int_{Y_0} \frac{\partial c_1}{\partial \tilde{t}} + A \nabla_x \cdot ((c_0 + H) v_0) + A \nabla_y \cdot ((c_0 + H) v_1 + c_1 v_0) \, d\mathbf{y} = 0 \quad (6.150)$$

Dans cette égalité,  $c_1$  et  $v_0$  sont les solutions du problème sur la cellule à l'ordre précédent. C'est donc sur ces quantités qu'on cherche à obtenir des restrictions. Par soucis de lisibilité, on réécrit (6.150) comme suit :

$$\underbrace{\int_{Y_0} \frac{\partial c_1}{\partial \tilde{t}} \, d\mathbf{y}}_{T_1} + \underbrace{\int_{Y_0} A \nabla_x \cdot ((c_0 + H) v_0) \, d\mathbf{y}}_{T_2} + \underbrace{\int_{Y_0} A \nabla_y \cdot ((c_0 + H) v_1 + c_1 v_0) \, d\mathbf{y}}_{T_3} = 0 \quad (6.151)$$

Et on traitera chaque terme  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  séparément pour le moment. On commence dans un premier temps par traiter  $T_1$ . Pour ce faire, on exploite le résultat présenté dans l'annexe C.7, équation (C.56) et on écrit :

$$\int_{Y_0} \frac{\partial c_1}{\partial \tilde{t}} \, d\mathbf{y} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \int_{Y_0} c_1 \, d\mathbf{y} + \int_{\Gamma_0} c_1 \frac{\partial S_0}{\partial \tilde{t}} \, da \quad (6.152)$$

On rappelle que l'équation de la courbe de niveau à l'ordre le plus haut (6.136) s'écrit :

$$\frac{\partial S_0}{\partial \tilde{t}} = \frac{A}{F} w_{n_0}^* \|\nabla_y S_0\| \quad (6.153)$$

On a donc *in fine* :

$$T_1 = \frac{\partial \bar{c}_1 |Y_0|}{\partial \tilde{t}} + \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} c_1 w_{n_0}^* \|\nabla_y S_0\| \, da \quad (6.154)$$

Concernant le traitement du terme  $T_2$ , on se contente d'interchanger la  $\mathbf{x}$  – divergence et l'intégration (voir annexe C.5) :

$$T_2 = A \nabla_x \cdot \left( (c_0 + H) \int_{Y_0} v_0 \, d\mathbf{y} \right) + A (c_0 + H) \int_{\Gamma_0} v_0 \cdot \frac{\nabla_x S_0}{\|\nabla_y S_0\|} \, da \quad (6.155)$$

En employant la condition aux limites du problème sur la cellule (6.140d), on a sur l'interface  $\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$  :

$$A (c_0 + H) v_0 = -\frac{A}{F} (1 - c_0) w_{n_0}^* n_0 \quad (6.156)$$

D'où finalement :

$$T_2 = A \nabla_x \cdot \left( (c_0 + H) \int_{Y_0} v_0 \, d\mathbf{y} \right) - \frac{A}{F} (1 - c_0) \int_{\Gamma_0} w_{n_0}^* \frac{n_0 \cdot \nabla_x S_0}{\|\nabla_y S_0\|} \, da \quad (6.157)$$

Pour  $T_3$ , on utilise le théorème de flux divergence et on tire profit de la  $\mathbf{y}$  – périodicité des champs :

$$T_3 = A \int_{\Gamma_0} ((c_0 + H) v_1 + c_1 v_0) \cdot n_0 \, da \quad (6.158)$$

Il convient alors de faire usage de la condition aux limites sur l'interface (6.149), on a :

$$\begin{aligned} A((c_0 + H) v_1 \cdot n_0 + c_1 v_0 \cdot n_0) &= -\frac{A}{F} ((1 - c_0) w_{n_1}^* - c_1 w_{n_0}^*) - A (c_0 + H) v_0 \cdot n_1 \\ &\quad - \frac{A}{F} \mathbf{y} \cdot \nabla_x ((1 - c_0) w_{n_0}^* + F (c_0 + H) v_0 \cdot n_0) - \frac{A}{F} \xi n_0 \cdot \nabla_y ((1 - c_0) w_{n_0}^* + F (c_0 + H) v_0 \cdot n_0) \end{aligned} \quad (6.159)$$

D'où finalement :

$$\begin{aligned} T_3 &= -\frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} (1 - c_0) w_{n_1}^* - c_1 w_{n_0}^* + F (c_0 + H) v_0 \cdot n_1 \, da \\ &\quad - \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} \mathbf{y} \cdot \nabla_x ((1 - c_0) w_{n_0}^* + F (c_0 + H) v_0 \cdot n_0) \, da \\ &\quad - \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} \xi n_0 \cdot \nabla_y ((1 - c_0) w_{n_0}^* + F (c_0 + H) v_0 \cdot n_0) \, da \end{aligned} \quad (6.160)$$

Par ailleurs, on rappelle les expressions de  $n_1$  et de  $\xi$  :

$$n_1 := \omega_0 \frac{\omega_0 \cdot (\nabla_x S_0 + \nabla_y S_1)}{\|\nabla_y S_0\|} \quad (6.161a)$$

$$\xi := -\frac{S_1}{\|\nabla_y S_0\|} - \mathbf{y} \cdot \frac{\nabla_x S_0}{\|\nabla_y S_0\|} \quad (6.161b)$$

De plus, puisque  $(1 - c_0) w_{n_0}^* + F (c_0 + H) v_0 \cdot n_0 = 0$  alors selon le premier lemme de van Noorden [52] présenté en annexe C.3 :

$$\nabla_x ((1 - c_0) w_{n_0}^* + F (c_0 + H) v_0 \cdot n_0) = \frac{n_0 \cdot \nabla_y ((1 - c_0) w_{n_0}^* + F (c_0 + H) v_0 \cdot n_0)}{\|\nabla_y S_0\|} \nabla_x S_0 \quad (6.162)$$

L'équation (6.160) devient alors :

$$\begin{aligned} T_3 = & -\frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} (1 - c_0) w_{n_1}^* - c_1 w_{n_0}^* + F(c_0 + H) v_0 \cdot n_1 \, da \\ & - \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} -\frac{S_1}{\|\nabla_y S_0\|} n_0 \cdot \nabla_y ((1 - c_0) w_{n_0}^* + F(c_0 + H) v_0 \cdot n_0) \, da \end{aligned} \quad (6.163)$$

Étant donnée l'orthogonalité entre  $n_0$  et  $n_1$ , on peut reformuler ce résultat par :

$$\begin{aligned} T_3 = & -\frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} (1 - c_0) w_{n_1}^* - c_1 w_{n_0}^* + ((1 - c_0) w_{n_0}^* n_0 + F(c_0 + H) v_0) \cdot n_1 \, da \\ & + \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} \frac{S_1}{\|\nabla_y S_0\|} n_0 \cdot \nabla_y ((1 - c_0) w_{n_0}^* + F(c_0 + H) v_0 \cdot n_0) \, da \end{aligned} \quad (6.164)$$

On pose la notation suivante :

$$\mathcal{Z} = (1 - c_0) w_{n_0}^* n_0 + F(c_0 + H) v_0 \quad (6.165)$$

En considérant l'équation (6.140d), il est immédiat de noter que  $\mathcal{Z}$  est nul sur l'interface. En exploitant l'expression de  $n_1$  (6.161a), on reformule  $T_3$  :

$$\begin{aligned} T_3 = & -\frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} (1 - c_0) w_{n_1}^* - c_1 w_{n_0}^* + \mathcal{Z} \cdot \omega_0 \frac{\omega_0 \cdot (\nabla_x S_0 + \nabla_y S_1)}{\|\nabla_y S_0\|} \, da \\ & + \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} \frac{S_1}{\|\nabla_y S_0\|} n_0 \cdot \nabla_y (\mathcal{Z} \cdot n_0) \, da \end{aligned} \quad (6.166)$$

On identifie alors le terme suivant :

$$-\frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} \frac{\omega_0 \cdot \nabla_y S_1}{\|\nabla_y S_0\|} \omega_0 \cdot \mathcal{Z} - \frac{S_1}{\|\nabla_y S_0\|} n_0 \cdot \nabla_y (\mathcal{Z} \cdot n_0) \, da \quad (6.167)$$

La nullité de  $\mathcal{Z}$  sur  $\Gamma_0$  permet d'exploiter la révision du second lemme de van Noorden présentée en annexe C.3 et on écrit :

$$\begin{aligned} & -\frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} \frac{\omega_0 \cdot \nabla_y S_1}{\|\nabla_y S_0\|} \omega_0 \cdot \mathcal{Z} - \frac{S_1}{\|\nabla_y S_0\|} n_0 \cdot \nabla_y ((1 - c_0) w_{n_0}^* + F(c_0 + H) v_0 \cdot n_0) \, da = \\ & -\frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} \nabla_y \cdot (\mathcal{Z} S_1) \, da \end{aligned} \quad (6.168)$$

L'équation (6.160) se résume alors à :

$$T_3 = -\frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} (1 - c_0) w_{n_1}^* - c_1 w_{n_0}^* + \mathcal{Z} \cdot \omega_0 \frac{\omega_0 \cdot \nabla_x S_0}{\|\nabla_y S_0\|} - \nabla_y \cdot (\mathcal{Z} S_1) \, da \quad (6.169)$$

Puisque  $\mathcal{Z}$  est nul sur le bord, alors on a finalement :

$$T_3 = -\frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} (1 - c_0) w_{n_1}^* - c_1 w_{n_0}^* - \nabla_y \cdot (\mathcal{Z} S_1) \, da \quad (6.170)$$

Pour conclure, écrire l'équation  $T_1 + T_2 + T_3 = 0$  équivaut à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{c}_1 |Y_0|}{\partial \tilde{t}} + A \nabla_x \cdot \left( (c_0 + H) \int_{Y_0} v_0, d\mathbf{y} \right) = \\ \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} (1 - c_0) w_{n1}^* - c_1 w_{n0}^* (1 + \|\nabla_y S_0\|) + (1 - c_0) w_{n0}^* \frac{n_0 \cdot \nabla_x S_0}{\|\nabla_y S_0\|} - \nabla_y \cdot (\mathcal{Z} S_1) da \end{aligned} \quad (6.171)$$

Étant donné la nullité de  $\mathcal{Z}$  sur tout l'interface  $\Gamma_0$ , on montre l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_0} \nabla_y \cdot (\mathcal{Z} S_1) da &= \int_{\Gamma_0} \frac{\partial (\mathcal{Z} S_1)}{\partial n_0} \cdot n_0 + \underbrace{\frac{\partial (\mathcal{Z} S_1)}{\partial \omega_0} \cdot \omega_0}_{=0} da = \int_{\Gamma_0} (\nabla_y (\mathcal{Z} S_1) \cdot n_0) \cdot n_0 da \\ &= \int_{\Gamma_0} Z_{i,j} S_1 n_i n_j + Z_i n_i S_{1,j} n_j da = \int_{\Gamma_0} Z_{i,j} S_1 n_i n_j da \\ &= \int_{\Gamma_0} S_1 (\nabla_y \mathcal{Z} \cdot n_0) \cdot n_0 da \end{aligned} \quad (6.172)$$

Maintenant on détermine  $\nabla_y \mathcal{Z} \cdot n_0$ . On a :

$$\nabla_y \mathcal{Z} \cdot n_0 = (1 - c_0) \nabla_y (w_{n0}^* n_0) \cdot n_0 + F (c_0 + H) \nabla_y (v_0) \cdot n_0 \quad (6.173)$$

Il est alors clair que :

$$\nabla_y (w_{n0}^* n_0) \cdot n_0 = (\nabla_y w_{n0}^* \cdot n_0) n_0 + (w_{n0}^* \nabla_y n_0) \cdot n_0 = (\nabla_y w_{n0}^* \cdot n_0) n_0 \quad (6.174)$$

On en déduit donc l'expression de  $\nabla_y \mathcal{Z} \cdot n_0$  sur l'interface :

$$\nabla_y \mathcal{Z} \cdot n_0 = (1 - c_0) (\nabla_y w_{n0}^* \cdot n_0) n_0 + F (c_0 + H) \nabla_y (v_0) \cdot n_0 \quad (6.175)$$

Par conséquent, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_0} \nabla_y \cdot (\mathcal{Z} S_1) da &= \int_{\Gamma_0} S_1 ((1 - c_0) (\nabla_y w_{n0}^* \cdot n_0) n_0 + F (c_0 + H) \nabla_y (v_0) \cdot n_0) \cdot n_0 da \\ &= \int_{\Gamma_0} S_1 (1 - c_0) \nabla_y w_{n0}^* \cdot n_0 + S_1 (F (c_0 + H) \nabla_y (v_0) \cdot n_0) \cdot n_0 da \end{aligned} \quad (6.176)$$

Soit finalement, en introduisant  $\bar{v}$  moyenne de  $v_0$  sur la cellule :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{c}_1 |Y_0|}{\partial \tilde{t}} + A \nabla_x \cdot ((c_0 + H) |Y_0| \bar{v}) = \\ \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} (1 - c_0) w_{n1}^* - c_1 w_{n0}^* (1 + \|\nabla_y S_0\|) + (1 - c_0) w_{n0}^* n_0 \cdot \frac{\nabla_x S_0}{\|\nabla_y S_0\|} da \\ - \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} S_1 (1 - c_0) \nabla_y w_{n0}^* \cdot n_0 + S_1 (F (c_0 + H) \nabla_y (v_0) \cdot n_0) \cdot n_0 da \end{aligned} \quad (6.177)$$

Ce qui constitue une seconde équation macroscopique.

### 6.5.5.2 Bilan de masse des particules fluidisées

Avant de commencer, par soucis de lisibilité, nous posons :

$$\mathcal{Z}_2 = \frac{ABC}{M} (\nabla_x (\lambda_0 + \Psi_{c_0}) + \nabla_y (\lambda_1 + \Psi_{c_1})) - c_0 v_0 \quad (6.178)$$

Après un bref réarrangement, le bilan de masse de particules fluidisées à l'ordre suivant (6.128c) s'écrit comme :

$$\frac{\partial c_1}{\partial \tilde{t}} = A \nabla_x \cdot \mathcal{Z}_2 + A \nabla_y \cdot \left( \frac{ABC}{M} (\nabla_x (\lambda_1 + \Psi_{c_1}) + \nabla_y (\lambda_2 + \Psi_{c_2})) - c_0 v_1 - c_1 v_0 \right) \quad (6.179)$$

Puisque  $c_0$  et  $\lambda_0$  sont indépendants de  $\mathbf{y}$ , la condition aux limites sur  $\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$  correspondante est donnée (suivant (6.134c)) par :

$$\begin{aligned} F \left( \frac{ABC}{M} (\nabla_x (\lambda_1 + \Psi_{c_1}) + \nabla_y (\lambda_2 + \Psi_{c_2})) - c_1 v_0 - c_0 v_1 \right) \cdot n_0 &= -F \mathcal{Z}_2 \cdot n_1 + (1 - c_0) w_{n_1}^* \\ - c_1 w_{n_0}^* + \mathbf{y} \cdot \nabla_x ((1 - c_0) w_{n_0}^* - F \mathcal{Z}_2 \cdot n_0) &+ \xi n_0 \cdot \nabla_y ((1 - c_0) w_{n_0}^* - F \mathcal{Z}_2 \cdot n_0) \end{aligned} \quad (6.180)$$

On intègre (6.179) sur  $Y_0$ . On obtient alors une équation intégrale de la forme

$$\underbrace{\int_{Y_0} \frac{\partial c_1}{\partial \tilde{t}} d\mathbf{y}}_{T_1} = \underbrace{A \int_{Y_0} \nabla_y \cdot \left( \frac{ABC}{M} (\nabla_x (\lambda_1 + \Psi_{c_1}) + \nabla_y (\lambda_2 + \Psi_{c_2})) - c_0 v_1 - c_1 v_0 \right) d\mathbf{y}}_{T_3} + \underbrace{A \int_{Y_0} \nabla_x \cdot \mathcal{Z}_2 d\mathbf{y}}_{T_2} \quad (6.181)$$

Le terme  $T_1$  est identique à celui présent dans le cadre du bilan de la masse (voir équation (6.154)). On a donc pour rappel :

$$T_1 = \frac{\partial \bar{c}_1 |Y_0|}{\partial \tilde{t}} + \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} c_1 w_{n_0}^* \|\nabla_y S_0\| da \quad (6.182)$$

Pour traiter  $T_2$ , on interchange intégration et divergence (voir annexe C.5) :

$$T_2 = A \nabla_x \cdot \int_{Y_0} \mathcal{Z}_2 d\mathbf{y} + A \int_{\Gamma_0} \mathcal{Z}_2 \cdot \frac{\nabla_x S_0}{\|\nabla_y S_0\|} da \quad (6.183)$$

On emploie la condition aux limites à l'ordre  $\epsilon^0$  (voir équation (6.140f)) et on obtient la forme finale de  $T_2$  :

$$T_2 = A \nabla_x \cdot \int_{Y_0} \mathcal{Z}_2 d\mathbf{y} + A \int_{\Gamma_0} (1 - c_0) w_{n_0}^* n_0 \cdot \frac{\nabla_x S_0}{\|\nabla_y S_0\|} da \quad (6.184)$$

Pour traiter  $T_3$ , on utilise le théorème de flux-divergence puis la  $\mathbf{y}$  - périodicité des champs :

$$T_3 = A \int_{\Gamma_0} \left( \frac{ABC}{M} (\nabla_y (\lambda_2 + \Psi_{c_2}) + \nabla_x (\lambda_1 + \Psi_{c_1})) - c_0 v_1 - c_1 v_0 \right) \cdot n_0 da \quad (6.185)$$

Il est désormais possible d'introduire la condition aux limites (6.180). On a alors :

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} \mathbf{y} \cdot \nabla_x ((1 - c_0) w_{n_0}^* - F \mathcal{Z}_2 \cdot n_0) + \xi n_0 \cdot \nabla_y ((1 - c_0) w_{n_0}^* - F \mathcal{Z}_2 \cdot n_0) \, da \\ &\quad + \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} (1 - c_0) w_{n_1}^* - c_1 w_{n_0}^* - F \mathcal{Z}_2 \cdot n_1 \, da \end{aligned} \quad (6.186)$$

Étant donnée la condition aux limites sur  $\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$  à l'ordre précédent :

$$(1 - c_0) w_{n_0}^* - F \mathcal{Z}_2 \cdot n_0 = 0 \quad (6.187)$$

On exploite le premier lemme de van Noorden [52] donné en annexe C.3, on a :

$$\nabla_x ((1 - c_0) w_{n_0}^* - F \mathcal{Z}_2 \cdot n_0) = \frac{n_0 \cdot \nabla_y ((1 - c_0) w_{n_0}^* - F \mathcal{Z}_2 \cdot n_0)}{\|\nabla_y S_0\|} \nabla_x S_0 \quad (6.188)$$

Par ailleurs, on rappelle les expressions de  $n_1$  et de  $\xi$  :

$$n_1 := \omega_0 \frac{\omega_0 \cdot (\nabla_x S_0 + \nabla_y S_1)}{\|\nabla_y S_0\|} \quad (6.189a)$$

$$\xi := -\frac{S_1}{\|\nabla_y S_0\|} - \mathbf{y} \cdot \frac{\nabla_x S_0}{\|\nabla_y S_0\|} \quad (6.189b)$$

Il est donc clair que  $T_3$  peut se formuler comme suit :

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} (1 - c_0) w_{n_1}^* - c_1 w_{n_0}^* - F \mathcal{Z}_2 \cdot \omega_0 \frac{\omega_0 \cdot (\nabla_x S_0 + \nabla_y S_1)}{\|\nabla_y S_0\|} \, da \\ &\quad - \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} \frac{S_1}{\|\nabla_y S_0\|} n_0 \cdot \nabla_y ((1 - c_0) w_{n_0}^* - F \mathcal{Z}_2 \cdot n_0) \, da \end{aligned} \quad (6.190)$$

Maintenant, on propose d'écrire trivialement  $w_{n_0}^* = w_{n_0}^* n_0 \cdot n_0$ . Cette notation permet d'introduire la quantité  $\mathcal{Z}_2^*$  :

$$\mathcal{Z}_2^* = F \mathcal{Z}_2 - (1 - c_0) w_{n_0}^* n_0 \quad (6.191)$$

On peut alors reformuler  $T_3$  :

$$T_3 = \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} (1 - c_0) w_{n_1}^* - c_1 w_{n_0}^* - \mathcal{Z}_2^* \cdot \omega_0 \frac{\omega_0 \cdot (\nabla_x S_0 + \nabla_y S_1)}{\|\nabla_y S_0\|} + \frac{S_1}{\|\nabla_y S_0\|} n_0 \cdot \nabla_y (\mathcal{Z}_2^* \cdot n_0) \, da \quad (6.192)$$

Puisque  $\mathcal{Z}_2^* \cdot n_0 = 0$  sur  $\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$ , alors selon la révision du second lemme de van Noorden présentée en annexe C.3 on spécifie :

$$\frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} -\mathcal{Z}_2^* \cdot \omega_0 \frac{\omega_0 \cdot \nabla_y S_1}{\|\nabla_y S_0\|} + \frac{S_1}{\|\nabla_y S_0\|} n_0 \cdot \nabla_y (\mathcal{Z}_2^* \cdot n_0) \, da = \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} S_1 \nabla_y \cdot \mathcal{Z}_2^* \, da \quad (6.193)$$

Par ailleurs il est clair que  $\mathcal{Z}_2^* \cdot \omega_0 = 0$  sur l'interface, et donc  $\mathcal{Z}_2^*$  est nul sur  $\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$ . Dans ces conditions, en reprenant le résultat (6.172) :

$$\frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} S_1 \nabla_y \cdot \mathcal{Z}_2^* \, da = \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} \nabla_y \cdot (S_1 \mathcal{Z}_2^*) \, da = \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} S_1 (\nabla_y \mathcal{Z}_2^* \cdot n_0) \cdot n_0 \, da \quad (6.194)$$

Remarquons ici que :

$$\nabla_y (w_{n_0}^* n_0 \cdot n_0) \cdot n_0 = \nabla_y w_{n_0}^* \cdot n_0 \quad (6.195)$$

On en déduit donc :

$$(\nabla_y \mathcal{Z}_2^* \cdot n_0) \cdot n_0 = F (\nabla_y \mathcal{Z}_2 \cdot n_0) \cdot n_0 - (1 - c_0) \nabla_y w_{n_0}^* \cdot n_0 \quad (6.196)$$

On obtient alors la forme finale pour  $T_3$  :

$$T_3 = \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} (1 - c_0) w_{n_1}^* - c_1 w_{n_0}^* + F S_1 (\nabla_y \mathcal{Z}_2 \cdot n_0) \cdot n_0 - S_1 (1 - c_0) \nabla_y w_{n_0}^* \cdot n_0 \, da \quad (6.197)$$

Par conséquent développer  $T_1 = T_2 + T_3$  revient à écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{c}_1 |Y_0|}{\partial \tilde{t}} + A \nabla_x \cdot (\langle \mathcal{Z}_2 \rangle |Y_0|) &= \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} (1 - c_0) w_{n_1}^* - c_1 w_{n_0}^* (1 + \|\nabla_y S_0\|) \, da \\ &+ \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} (1 - c_0) w_{n_0}^* n_0 \cdot \frac{\nabla_x S_0}{\|\nabla_y S_0\|} \, da \\ &+ \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} S_1 (F (\nabla_y \mathcal{Z}_2 \cdot n_0) - (1 - c_0) \nabla_y w_{n_0}^*) \cdot n_0 \, da \end{aligned} \quad (6.198)$$

En définitive, en remplaçant  $\mathcal{Z}_2$  par son expression initiale, puis en introduisant  $\bar{v}$  moyenne de  $v_0$  sur la cellule et en considérant finalement la constance de  $c_0$  et  $\lambda_0$  par rapport à  $\mathbf{y}$ , on aboutit à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{c}_1 |Y_0|}{\partial \tilde{t}} + A \nabla_x \cdot (c_0 |Y_0| \bar{v}) - \frac{A^2 BC}{M} \nabla_x \cdot \left( |Y_0| \nabla_x (\lambda_0 + \Psi c_0) + \int_{Y_0} \nabla_y (\lambda_1 + \Psi c_1) \, d\mathbf{y} \right) &= \\ \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} (1 - c_0) w_{n_1}^* - c_1 w_{n_0}^* (1 + \|\nabla_y S_0\|) + (1 - c_0) w_{n_0}^* n_0 \cdot \frac{\nabla_x S_0}{\|\nabla_y S_0\|} \, da & \\ + \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} F S_1 \left( \nabla_y \left( \frac{ABC}{M} \nabla_y (\lambda_1 + \Psi c_1) - c_0 v_0 \right) \cdot n_0 - (1 - c_0) \nabla_y w_{n_0}^* \right) \cdot n_0 \, da & \end{aligned} \quad (6.199)$$

Constituant une troisième et dernière équation macroscopique.

### 6.5.5.3 Problème unitaires cellulaires

En observant les problèmes macroscopiques (6.177) et (6.199) posés précédemment, on remarque clairement qu'ils font intervenir les quantités  $v_0$  et  $\nabla_y (\lambda_1 + \Psi c_1)$ , qui sont en fait issues des solutions du problème sur la cellule (6.140). Considérant l'écriture du problème sus-mentionné et en rappelant le résultat (6.147), on introduit les problèmes unitaires cellulaires suivant :

$$\begin{cases} \nabla_y \cdot u^{(i)} = 0 & \text{dans } Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}} & (6.200a) \\ \Delta_y u^{(i)} = -\nabla_y \pi^{(i)} + e_i & \text{dans } Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}} & (6.200b) \\ u^{(i)} = \mathbf{0} & \text{dans } \Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}} & (6.200c) \\ (u^{(i)}, \pi^{(i)}) & \mathbf{y} \text{-périodiques} & \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \varphi = \frac{|\Gamma_0|}{|Y_0|} & \text{dans } Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}} & (6.201a) \\ \Delta_{\mathbf{y}} \varphi = -\nabla_{\mathbf{y}} \iota & \text{dans } Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}} & (6.201b) \\ \varphi = n_0 & \text{dans } \Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}} & (6.201c) \\ (\varphi, \iota) \text{ } \mathbf{y} \text{ - p\u00e9riodiques -} & & \end{cases}$$

Afin de garantir l'unicit\u00e9 des solutions respectives de (6.200) et (6.201), on force la nullit\u00e9 des moyennes des  $\pi^{(i)}$  et de  $\iota$ . Par lin\u00e9arit\u00e9, les solutions  $v_0$  et  $\lambda_0 - \Psi_{c_0}$  du probl\u00e8me sur la cellule (6.140) peuvent \u00eatre \u00e9crites comme des combinaisons lin\u00e9aires des termes sources et des solutions  $u^{(i)}$ ,  $\pi^{(i)}$ ,  $\varphi$  et  $\iota$  des probl\u00e8mes unitaires (6.200) et (6.201) :

$$\begin{cases} (v_0)_\alpha = -\frac{B}{E} \tilde{\rho}^w \sum_{i=1}^N u_\alpha^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda_0 - \Psi_{c_0}) - \varphi \frac{1}{F} \frac{1-c_0}{c_0+H} w_{n_0}^* & (6.202a) \\ (\lambda_1 - \Psi_{c_1}) = -\sum_{i=1}^N \pi^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda_0 - \Psi_{c_0}) - \iota \frac{1}{F} \frac{1-c_0}{c_0+H} w_{n_0}^* + \bar{p}_1 & (6.202b) \end{cases}$$

o\u00f9  $\bar{p}_1$  est une fonction de  $(\mathbf{x}, \tilde{t})$  seulement, permettant de garantir la non nullit\u00e9 de la moyenne de  $\lambda_1 - \Psi_{c_1}$ . Les solutions formul\u00e9es ici permettent alors d'obtenir une expression de la vitesse moyenne  $\bar{v}$  du fluide dans la cellule faisant \u00e9merger l'id\u00e9e d'une loi de comportement macroscopique :

$$\begin{aligned} \bar{v}_\alpha &= \frac{1}{|Y_0|} \int_{Y_0} (v_0)_\alpha \, d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{|Y_0|} \int_{Y_0} -\frac{B}{E} \tilde{\rho}^w \sum_{i=1}^N u_\alpha^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda_0 - \Psi_{c_0}) - \varphi \frac{1}{F} \frac{1-c_0}{c_0+H} w_{n_0}^* \, d\mathbf{y} & (6.203) \\ &= -\frac{B \tilde{\rho}^w}{E} \left( \frac{1}{|Y_0|} \int_{Y_0} \mathfrak{k}_{\alpha i} \, d\mathbf{y} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} (\Psi_{c_0} - \lambda_0) - \frac{1-c_0}{F(c_0+H)} w_{n_0}^* \left( \frac{1}{|Y_0|} \int_{Y_0} \varphi \, d\mathbf{y} \right) \end{aligned}$$

o\u00f9 les termes  $\mathfrak{k}_{\alpha i} = -u_\alpha^{(i)}$  correspondent finalement aux oppos\u00e9s des  $\alpha$ -i\u00e8mes composantes des vecteurs  $u^{(i)}$  contenus dans la liste des solutions du probl\u00e8me \u00e9l\u00e9mentaire cellulaire relatives \u00e0 la liste des sources  $e_i$ . On introduit finalement  $\bar{\varphi}$  tel que :

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{|Y_0|} \int_{Y_0} \varphi \, d\mathbf{y} \quad (6.204)$$

On identifie alors  $\mathcal{K}_h$  de la m\u00eame fa\u00e7on que dans le cas 1 (voir \u00e9quation (6.101)) et on \u00e9crit :

$$\bar{v} = -\mathcal{K}_h \tilde{\rho}^w \nabla_x (\Psi_{c_0} - \lambda_0) - \frac{1-c_0}{F(c_0+H)} w_{n_0}^* \bar{\varphi} \quad (6.205)$$

Contrairement \u00e0 la vitesse moyenne d\u00e9finie dans le cas 1 *via* l'\u00e9quation (6.102), la loi de comportement ainsi mise en \u00e9vidence n'est plus exclusivement de type « Darcy ». On identifie certes le terme de Darcy  $-\mathcal{K}_h \tilde{\rho}^w \nabla_x (\Psi_{c_0} - \lambda_0)$  mais on note la pr\u00e9sence d'un second terme directement reli\u00e9 \u00e0 la vitesse des iso-valeurs de la courbe de niveau, et donc au mouvement de l'interface  $\Gamma_0$ . D\u00e8s lors, on peut conclure que la vitesse moyenne du fluide est \u00e9galement pilot\u00e9e par l'\u00e9rosion.

On introduit maintenant un second jeu de problèmes unitaires :

$$\begin{cases} \Delta_y \nu^{(i)} = 0 & \text{dans } Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}} \\ \nabla_y \nu^{(i)} \cdot n_0 = e_i \cdot n_0 & \text{dans } \Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}} \\ \nu^{(i)} \mathbf{y} - \text{périodiques} \end{cases} \quad \begin{matrix} (6.206a) \\ (6.206b) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \Delta_y \vartheta = \frac{|\Gamma_0|}{|Y_0|} & \text{dans } Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}} \\ \nabla_y \vartheta \cdot n_0 = 1 & \text{dans } \Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}} \\ \vartheta \mathbf{y} - \text{périodique} \end{cases} \quad \begin{matrix} (6.207a) \\ (6.207b) \end{matrix}$$

Afin de garantir l'unicité des solutions de tels problèmes, on force la nullité des moyennes respectives des  $\nu^{(i)}$  et de  $\vartheta$ . Par linéarité, la solution  $\lambda_1 + \Psi c_1$  du problème sur la cellule (6.140) peut être écrite comme une combinaison linéaire des termes sources et des solutions  $\nu^{(i)}$  et  $\vartheta$  des problèmes (6.206) et (6.207) :

$$(\lambda_1 + \Psi c_1) = - \sum_{i=1}^N \nu^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda_0 + \Psi c_0) - \vartheta \frac{MH}{ABCF} \frac{1 - c_0}{c_0 + H} w_{n_0}^* + \bar{\mu}_1 \quad (6.208)$$

où  $\bar{\mu}_1$  est une fonction arbitraire de  $(\mathbf{x}, \tilde{t})$ . On peut alors exprimer  $c_1$  et  $\lambda_1$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = \frac{1}{2\Psi} \sum_{i=1}^N \left( \pi^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda_0 - \Psi c_0) - \nu^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda_0 + \Psi c_0) \right) \\ \quad + \frac{1}{2\Psi} \left( \iota - \frac{MH}{ABCF} \vartheta \right) \frac{1}{F} \frac{1 - c_0}{c_0 + H} w_{n_0}^* + \frac{\bar{\mu}_1 - \bar{p}_1}{2\Psi} \end{array} \right. \quad (6.209a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( \nu^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda_0 + \Psi c_0) + \pi^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda_0 - \Psi c_0) \right) \\ \quad - \left( \iota + \frac{MH}{ABCF} \vartheta \right) \frac{1}{F} \frac{1 - c_0}{c_0 + H} w_{n_0}^* + \frac{\bar{\mu}_1 + \bar{p}_1}{2} \end{array} \right. \quad (6.209b)$$

Dans ces conditions, et de la même façon que pour le cas 1, il devient possible d'exprimer les quantités homogénéisées  $\bar{\lambda}$  et  $\bar{c}$ , considérant une erreur d'ordre  $\epsilon^2$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\lambda} = \lambda_0 + \epsilon \frac{1}{|Y_0|} \int_{Y_0} \lambda_1 d\mathbf{y} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \lambda_0 + \epsilon \frac{\bar{\mu}_1 + \bar{p}_1}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \bar{c} = c_0 + \epsilon \frac{1}{|Y_0|} \int_{Y_0} c_1 d\mathbf{y} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = c_0 + \epsilon \frac{\bar{\mu}_1 - \bar{p}_1}{2\Psi} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{array} \right. \quad \begin{matrix} (6.210a) \\ (6.210b) \end{matrix}$$

La pression homogénéisée est alors donnée de la même façon que pour le cas 1 :

$$\bar{p} = \bar{\rho}^w (\Psi \bar{c} (1 - H \bar{c}) - \bar{\lambda}) \quad (6.211)$$

Finalement, comme dans le cas 1, on rappelle que nous avons négligé les termes quadratiques lors de la procédure d'adimensionalisation du bilan de quantité de mouvement 5.5.1.3. On peut donc identifier le gradient selon  $\mathbf{x}$  de  $\bar{\rho}^w (\Psi \bar{c}_0 - \lambda_0)$  à l'opposé du gradient selon  $\mathbf{x}$  de la pression

moyenne  $\bar{p}$ . Aussi, en admettant une erreur d'ordre  $\epsilon$ , on reformule la vitesse moyenne du fluide (6.205) :

$$\bar{v} = -\mathcal{K}_h \cdot \nabla_x \bar{p} - \frac{1 - \bar{c}}{F(\bar{c} + H)} \bar{w}_n^* \bar{\varphi} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (6.212)$$

Donnant ainsi une expression de la vitesse du fluide homogénéisée. Pour obtenir la suite du problème homogénéisé, il est désormais nécessaire d'inclure l'expression de  $\lambda_1 + \Psi c_1$  (6.208) dans l'équation macroscopique (6.199). Avant de procéder à cette déduction, on introduit les notations suivantes :

$$[\pi] = \begin{bmatrix} \pi^{(1)} \\ \pi^{(2)} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\nu] = \begin{bmatrix} \nu^{(1)} \\ \nu^{(2)} \end{bmatrix} \quad (6.213)$$

On s'intéresse dans un premier temps uniquement au terme mettant en jeu  $\lambda_1 + \Psi c_1$  :

$$\begin{aligned} \nabla_x \cdot \int_{Y_0} \nabla_x (\lambda_0 + \Psi c_0) + \nabla_y (\lambda_1 + \Psi c_1) \, d\mathbf{y} &= \nabla_x \cdot \int_{Y_0} \mathbb{I} - \nabla_y [\nu] \, d\mathbf{y} \nabla_x (\lambda_0 + \Psi c_0) \\ &\quad - \nabla_x \cdot \left( \frac{MH}{ABCF} \frac{1 - c_0}{c_0 + H} w_{n0}^* \cdot \int_{Y_0} \nabla_y \vartheta \, d\mathbf{y} \right) \end{aligned} \quad (6.214)$$

On identifie  $\mathbf{D}_h^*$  tenseur de diffusion homogénéisé :

$$D_h = \int_{Y_0} \mathbb{I} - \nabla_y [\nu] \, d\mathbf{y} \quad (6.215)$$

Ensuite, puisque  $w_{n0}^*$  est constant sur la cellule, alors en exploitant l'équation (6.208) on réalise le développement suivant :

$$\begin{aligned} &\frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} F S_1 \left( \nabla_y \left( \frac{ABC}{M} \nabla_y (\lambda_1 + \Psi c_1) - c_0 v_0 \right) \cdot n_0 \right) \cdot n_0 \, da = \\ &A \int_{\Gamma_0} S_1 \left( \nabla_y \frac{ABC}{M} \nabla_y \left( -[\nu] \cdot \nabla_x (\lambda_0 + \Psi c_0) - \vartheta \frac{MH}{ABCF} \frac{1 - c_0}{c_0 + H} w_{n0}^* \right) \cdot n_0 \right) \cdot n_0 \, da \\ &- A c_0 \int_{\Gamma_0} S_1 \left( \nabla_y \left( -\frac{B}{E} \tilde{\rho}^w \mathbf{k} \cdot \nabla_x (\lambda_0 - \Psi c_0) - \varphi \frac{1}{F} \frac{1 - c_0}{c_0 + H} w_{n0}^* \right) \cdot n_0 \right) \cdot n_0 \, da = \\ &- \frac{A^2 BC}{M} \int_{\Gamma_0} S_1 (\nabla_y (\nabla_y [\nu]) \cdot n_0) \cdot n_0 \, da \cdot \nabla_x (\lambda_0 + \Psi c_0) \\ &- \frac{AH}{F} \frac{1 - c_0}{c_0 + H} w_{n0}^* \int_{\Gamma_0} S_1 (\nabla_y (\nabla_y \vartheta) \cdot n_0) \cdot n_0 \, da \\ &+ c_0 \frac{AB}{E} \tilde{\rho}^w \int_{\Gamma_0} S_1 (\nabla_y \mathbf{k} \cdot n_0) \cdot n_0 \, da \cdot \nabla_x (\lambda_0 - \Psi c_0) \\ &+ c_0 \frac{A}{F} \frac{1 - c_0}{c_0 + H} w_{n0}^* \int_{\Gamma_0} S_1 (\nabla_y (\varphi) \cdot n_0) \cdot n_0 \, da \end{aligned} \quad (6.216)$$

De la même manière, on écrit :

$$\begin{aligned} - \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} S_1 (F(c_0 + H) \nabla_y (v_0) \cdot n_0) \cdot n_0 \, da &= \frac{A}{F} \frac{1 - c_0}{c_0 + H} w_{n0}^* \int_{\Gamma_0} S_1 (\nabla_y \varphi \cdot n_0) \cdot n_0 \, da \\ + \frac{AB}{E} \rho^w (c_0 + H) \int_{\Gamma_0} S_1 (\nabla_y \mathbf{k} \cdot n_0) \cdot n_0 \, da &\cdot \nabla_x (\lambda_0 - \Psi c_0) \end{aligned} \quad (6.217)$$

De plus, en considérant l'expression de  $c_1$  à partir des solutions des problèmes cellulaires unitaires (6.209a) alors on écrit :

$$\begin{aligned}
& -\frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} w_{n0}^* c_1 (1 + \|\nabla_y S_0\|) \, da = -\frac{A}{2F\Psi} w_{n0}^* (\bar{\mu}_1 - \bar{p}_1) \int_{\Gamma_0} 1 + \|\nabla_y S_0\| \, da \\
& -\frac{A}{2F\Psi} w_{n0}^* \int_{\Gamma_0} [\pi] (1 + \|\nabla_y S_0\|) \, da \cdot \nabla_x (\lambda_0 - \Psi c_0) \\
& -\frac{A}{2F\Psi} w_{n0}^* \int_{\Gamma_0} [\nu] (1 + \|\nabla_y S_0\|) \, da \cdot \nabla_x (\lambda_0 + \Psi c_0) \\
& -\frac{A}{2F^2\Psi} \frac{1-c_0}{c_0+H} (w_{n0}^*)^2 \int_{\Gamma_0} \left( \iota - \frac{MH}{ABCF} \vartheta \right) (1 + \|\nabla_y S_0\|) \, da
\end{aligned} \tag{6.218}$$

En injectant les résultats (6.214), (6.215), (6.216) et (6.218) dans le bilan de la masse des particules fluidisées (6.199), on aboutit à l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \bar{c}_1 |Y_0|}{\partial \tilde{t}} + A \nabla_x \cdot (c_0 |Y_0| \bar{v}) = \frac{A^2 BC}{M} \nabla_x \cdot (\mathbf{D}_h^* \cdot \nabla_x (\lambda_0 + \Psi c_0)) + \frac{A}{F} (1 - c_0) \int_{\Gamma_0} w_{n1}^* \, da \\
& -\frac{AH}{F} \nabla_x \cdot \left( \frac{1-c_0}{c_0+H} w_{n0}^* \int_{Y_0} \nabla_y \vartheta \, d\mathbf{y} \right) - \frac{A}{2F\Psi} w_{n0}^* (\bar{\mu}_1 - \bar{p}_1) \int_{\Gamma_0} 1 + \|\nabla_y S_0\| \, da \\
& -\frac{A}{2F\Psi} w_{n0}^* \int_{\Gamma_0} [\pi] (1 + \|\nabla_y S_0\|) \, da \cdot \nabla_x (\lambda_0 - \Psi c_0) \\
& -\frac{A}{2F\Psi} w_{n0}^* \int_{\Gamma_0} [\nu] (1 + \|\nabla_y S_0\|) \, da \cdot \nabla_x (\lambda_0 + \Psi c_0) \\
& -\frac{A}{2F^2\Psi} \frac{1-c_0}{c_0+H} (w_{n0}^*)^2 \int_{\Gamma_0} \left( \iota - \frac{MH}{ABCF} \vartheta \right) (1 + \|\nabla_y S_0\|) \, da \\
& + \frac{A}{F} (1 - c_0) w_{n0}^* \int_{\Gamma_0} n_0 \cdot \frac{\nabla_x S_0}{\|\nabla_y S_0\|} \, da + c_0 \frac{AB}{E} \tilde{\rho}^w \int_{\Gamma_0} S_1 (\nabla_y \mathbf{k} \cdot n_0) \cdot n_0 \, da \cdot \nabla_x (\lambda_0 - \Psi c_0) \\
& -\frac{A^2 BC}{M} \int_{\Gamma_0} S_1 (\nabla_y (\nabla_y [\nu]) \cdot n_0) \cdot n_0 \, da \cdot \nabla_x (\lambda_0 + \Psi c_0) \\
& -\frac{AH}{F} \frac{1-c_0}{c_0+H} w_{n0}^* \int_{\Gamma_0} S_1 (\nabla_y (\nabla_y \vartheta) \cdot n_0) \cdot n_0 \, da + c_0 \frac{A}{F} \frac{1-c_0}{c_0+H} w_{n0}^* \int_{\Gamma_0} S_1 (\nabla_y (\varphi) \cdot n_0) \cdot n_0 \, da
\end{aligned} \tag{6.219}$$

De la même manière, en insérant les résultats (6.217) et (6.218), le bilan de la masse (6.177)

s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \bar{c}_1 |Y_0|}{\partial \tilde{t}} + A \nabla_x \cdot ((c_0 + H) |Y_0| \bar{v}) = \frac{A}{F} (1 - c_0) \int_{\Gamma_0} w_{n1}^* da \\
& - \frac{A}{2F\Psi} w_{n0}^* \int_{\Gamma_0} [\pi] (1 + \|\nabla_y S_0\|) da \cdot \nabla_x (\lambda_0 - \Psi c_0) + \frac{A}{F} (1 - c_0) w_{n0}^* \int_{\Gamma_0} n_0 \cdot \frac{\nabla_x S_0}{\|\nabla_y S_0\|} da \\
& - \frac{A}{2F\Psi} w_{n0}^* \int_{\Gamma_0} [\nu] (1 + \|\nabla_y S_0\|) da \cdot \nabla_x (\lambda_0 + \Psi c_0) \\
& - \frac{A}{2F^2\Psi} \frac{1 - c_0}{c_0 + H} (w_{n0}^*)^2 \int_{\Gamma_0} \left( \iota - \frac{MH}{ABCF} \vartheta \right) (1 + \|\nabla_y S_0\|) da \\
& + (c_0 + H) \frac{AB}{E} \tilde{\rho}^w \int_{\Gamma_0} S_1 (\nabla_y \mathbf{k} \cdot n_0) \cdot n_0 da \cdot \nabla_x (\lambda_0 - \Psi c_0) \\
& + \frac{A}{F} (1 - c_0) w_{n0}^* \int_{\Gamma_0} S_1 (\nabla_y (\varphi) \cdot n_0) \cdot n_0 da - \frac{A}{2F\Psi} w_{n0}^* (\bar{\mu}_1 - \bar{p}_1) \int_{\Gamma_0} 1 + \|\nabla_y S_0\| da
\end{aligned} \tag{6.220}$$

Les équations (6.220) et (6.219) sont somme toute lourdes à manipuler. Pour la suite de ce travail, nous allons tenter de re-positionner le problème, en considérant un cas simple pour lequel certains termes s'annulent.

## 6.5.6 Etude pour un cas simple

### 6.5.6.1 Une géométrie simplifiée

Afin de simplifier le problème, nous proposons dans un premier temps de considérer une géométrie simple. La géométrie cellulaire la plus simple serait obtenue en considérant un noyau granulaire circulaire ainsi qu'une couche de particules fines d'épaisseur homogène tout autour du noyau. La courbe de niveau pour le problème vrai (5.14) se ré-écrit alors :

$$S(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{t}) = \tilde{R} \left( \tilde{\mathbf{X}} - \epsilon Q \left( \frac{\tilde{\mathbf{X}}}{\epsilon} \right) \right) + \tilde{d} \left( \tilde{\mathbf{X}} - \epsilon Q \left( \frac{\tilde{\mathbf{X}}}{\epsilon} \right), \tilde{t} \right) - P \left( \frac{\tilde{\mathbf{X}}}{\epsilon} \right) \tag{6.221}$$

On écrit alors  $S_0$  et  $S_1$  en accord avec le résultat (6.31)

$$\begin{cases} S_0 &= \tilde{R}(\mathbf{x}) + \tilde{d}(\mathbf{x}, \tilde{t}) - \|\mathbf{y}\| \\ S_1 &= -\mathbf{y} \cdot \nabla_x \left( \tilde{R}(\mathbf{x}) + \tilde{d}(\mathbf{x}, \tilde{t}) \right) \end{cases} \tag{6.222}$$

Cette expression permet d'observer assez simplement que la courbe  $S_0 = 0$  décrit l'équation d'un cercle. L'interface  $\Gamma_0$  représente alors un cercle de rayon  $\tilde{R}(\mathbf{x}) + \tilde{d}(\mathbf{x}, \tilde{t})$ . De cette façon :

$$\begin{cases} \|\nabla_y S_0\| = 1 \end{cases} \tag{6.223a}$$

$$\begin{cases} \nabla_x S_0 = \nabla_x \left( \tilde{R}(\mathbf{x}) + \tilde{d}(\mathbf{x}, \tilde{t}) \right) \end{cases} \tag{6.223b}$$

Le jeu d'équations (6.223) permet de déduire dans un premier temps que :

$$\int_{\Gamma_0} n_0 \cdot \frac{\nabla_x S_0}{\|\nabla_y S_0\|} da = 0 \tag{6.224}$$

Par conséquent le bilan de la masse (6.220) se réécrit :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \bar{c}_1 |Y_0|}{\partial \tilde{t}} + A \nabla_x \cdot ((c_0 + H) |Y_0| \bar{v}) = \frac{A}{F} (1 - c_0) \int_{\Gamma_0} w_{n1}^* da \\
& - \frac{A}{F\Psi} w_{n0}^* \int_{\Gamma_0} [\pi] da \cdot \nabla_x (\lambda_0 - \Psi c_0) - \frac{A}{F\Psi} w_{n0}^* \int_{\Gamma_0} [\nu] da \cdot \nabla_x (\lambda_0 + \Psi c_0) \\
& - \frac{A}{F^2\Psi} \frac{1 - c_0}{c_0 + H} (w_{n0}^*)^2 \int_{\Gamma_0} \left( \iota - \frac{MH}{ABCF} \vartheta \right) da - \frac{A}{F\Psi} w_{n0}^* (\bar{\mu}_1 - \bar{p}_1) |\Gamma_0| \\
& + (c_0 + H) \frac{AB}{E} \tilde{\rho}^w \int_{\Gamma_0} S_1 (\nabla_y \mathbf{k} \cdot n_0) \cdot n_0 da \cdot \nabla_x (\lambda_0 - \Psi c_0) \\
& + \frac{A}{F} (1 - c_0) w_{n0}^* \int_{\Gamma_0} S_1 (\nabla_y \varphi \cdot n_0) \cdot n_0 da
\end{aligned} \tag{6.225}$$

Et le bilan de masse des particules fluidisées (6.219) est donné par :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \bar{c}_1 |Y_0|}{\partial \tilde{t}} + A \nabla_x \cdot (c_0 |Y_0| \bar{v}) = \frac{A^2 BC}{M} \nabla_x \cdot (\mathbf{D}_h^* \cdot \nabla_x (\lambda_0 + \Psi c_0)) + \frac{A}{F} (1 - c_0) \int_{\Gamma_0} w_{n1}^* da \\
& - \frac{AH}{F} \nabla_x \cdot \left( \frac{1 - c_0}{c_0 + H} w_{n0}^* \int_{Y_0} \nabla_y \vartheta d\mathbf{y} \right) - \frac{A}{F\Psi} w_{n0}^* (\bar{\mu}_1 - \bar{p}_1) |\Gamma_0| \\
& - \frac{A}{F\Psi} w_{n0}^* \int_{\Gamma_0} [\pi] da \cdot \nabla_x (\lambda_0 - \Psi c_0) - \frac{A}{F\Psi} w_{n0}^* \int_{\Gamma_0} [\nu] da \cdot \nabla_x (\lambda_0 + \Psi c_0) \\
& - \frac{A}{F^2\Psi} \frac{1 - c_0}{c_0 + H} (w_{n0}^*)^2 \int_{\Gamma_0} \left( \iota - \frac{MH}{ABCF} \vartheta \right) da \\
& + c_0 \frac{AB}{E} \tilde{\rho}^w \int_{\Gamma_0} S_1 (\nabla_y \mathbf{k} \cdot n_0) \cdot n_0 da \cdot \nabla_x (\lambda_0 - \Psi c_0) \\
& - \frac{A^2 BC}{M} \int_{\Gamma_0} S_1 (\nabla_y (\nabla_y [\nu]) \cdot n_0) \cdot n_0 da \cdot \nabla_x (\lambda_0 + \Psi c_0) \\
& - \frac{AH}{F} \frac{1 - c_0}{c_0 + H} w_{n0}^* \int_{\Gamma_0} S_1 (\nabla_y (\nabla_y \vartheta) \cdot n_0) \cdot n_0 da + c_0 \frac{A}{F} \frac{1 - c_0}{c_0 + H} w_{n0}^* \int_{\Gamma_0} S_1 (\nabla_y \varphi \cdot n_0) \cdot n_0 da
\end{aligned} \tag{6.226}$$

Apportant ainsi quelques premières simplifications.

### 6.5.6.2 Résolution aux éléments finis

Afin d'aller plus loin dans la simplification, il faudrait analyser si les quantités intégrées sur  $\Gamma_0$  sont périodiques sur ce même domaine, et si possible de moyenne nulle. Afin de conclure quant à de telles propriétés, il est crucial de pouvoir résoudre les problèmes cellulaires unitaires. Pour ce faire, nous procédons numériquement et utilisons la méthode des éléments finis, en employant la plateforme FEniCS Project [83] comme support. Préalablement, il est nécessaire de proposer une forme faible pour chaque problème cellulaire unitaire. On commence par traiter le problème (6.206). Pour ce faire, introduisons dans un premier temps l'espace de recherche suivant  $\mathbf{y}$  – périodiques sur  $Y_0$  :

$$\mathcal{N} \equiv \{w \mid w \in H_{\#}^1(Y_0 \times \mathcal{T})\} \tag{6.227}$$

On multiplie alors l'équation (6.206a) par un champ test  $\phi$  de  $\mathcal{N}$ , à gauche et à droite, puis on intègre sur la cellule. On réalise alors une intégration par partie à l'aide du théorème de flux divergence :

$$\int_{Y_0} \Delta_y \nu^{(i)} \phi \, d\mathbf{y} = - \int_{Y_0} \nabla_y \nu^{(i)} \cdot \nabla_y \phi \, d\mathbf{y} + \int_{\partial Y} \nabla_y \nu^{(i)} \cdot n_{ext} \phi \, da + \int_{\Gamma_0} \nabla_y \nu^{(i)} \cdot n_0 \phi \, da = 0 \quad (6.228)$$

En tirant profit la  $\mathbf{y}$ -périodicité de  $\nu^{(i)}$  et  $\phi$ , puis en exploitant la condition de Neumann (6.206b), on introduit la forme bilinéaire  $a$  suivante :

$$\begin{aligned} a &: \mathcal{N} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ (w, \phi) &\mapsto a(w, \phi) = \int_{Y_0} \nabla_y \nu^{(i)} \cdot \nabla_y \phi \, d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (6.229a)$$

ainsi que la forme linéaire  $l_1$  suivante :

$$\begin{aligned} l_1 &: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\mapsto l_1(\phi) = \int_{\Gamma_0} \phi e_i \cdot n_0 \, da \end{aligned} \quad (6.229b)$$

On obtient alors le problème aux variations suivant dont  $\nu^{(i)}$  est solution :

$$\text{Trouver } \nu^{(i)} \in \mathcal{N} \text{ tel que } \forall \phi \in \mathcal{N} : a(\nu^{(i)}, \phi) = l_1(\phi) \quad (6.230)$$

On procède de la même manière pour le problème (6.207). On multiplie l'équation (6.207a) par un champ test  $\phi$ , à gauche et à droite, puis on intègre sur la cellule :

$$\int_{Y_0} \Delta_y \vartheta \phi \, d\mathbf{y} = - \int_{Y_0} \nabla_y \vartheta \cdot \nabla_y \phi \, d\mathbf{y} + \int_{\partial Y} \nabla_y \vartheta \cdot n_{ext} \phi \, da + \int_{\Gamma_0} \nabla_y \vartheta \cdot n_0 \phi \, da = \int_{Y_0} \frac{|\Gamma_0|}{|Y_0|} \phi \, d\mathbf{y} \quad (6.231)$$

On rappelle que  $\vartheta$  est  $\mathbf{y}$ -périodique et on considère la condition de Neumann (6.207b), si bien qu'en introduisant la forme linéaire  $l_2$  suivante :

$$\begin{aligned} l_2 &: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\mapsto l_2(\phi) = \int_{\Gamma_0} \frac{|\Gamma_0|}{|Y_0|} \phi \, da + \int_{\Gamma_0} \phi \, da \end{aligned} \quad (6.232)$$

alors le problème aux variations à résoudre pour déterminer  $\vartheta$  est :

$$\text{Trouver } \vartheta \in \mathcal{N} \text{ tel que } \forall \phi \in \mathcal{N} : a(\vartheta, \phi) = l_2(\phi) \quad (6.233)$$

Pour traiter le problème (6.200), on introduit un espace de recherche  $\mathcal{L}$  défini comme le produit cartésien des deux espaces  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  tels que :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &\equiv \mathcal{M}_0 \times \mathcal{N} \\ \mathcal{M}_0 &\equiv \{u \mid u \in H_{\#}^1(Y_0 \times \mathcal{T}), u = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_0 \times \mathcal{T}\} \end{aligned} \quad (6.234)$$

$\mathcal{M}_0$  est un espace de champs de vitesse cinématiquement admissibles ayant la particularité d'être à valeurs nulles sur le bord  $\Gamma_0$ . On introduit alors  $\phi^v$  comme un champ test de  $\mathcal{M}_0$ . On commence par traiter l'équation (6.200a) en multipliant à gauche par  $\phi$  et en intégrant sur  $Y_0$  :

$$\int_{Y_0} \nabla_y \cdot u^{(i)} \phi \, d\mathbf{y} = 0 \quad (6.235)$$

On réalise une contraction des membres de gauche et de droite de (6.200b) avec  $\phi^v$  puis en intégrant sur  $Y_0$  à l'aide d'une intégration par partie on a :

$$\begin{aligned}
\int_{Y_0} \Delta_y u^{(i)} \cdot \phi^v + \nabla_y \pi^{(i)} \cdot \phi^v \, d\mathbf{y} &= \int_{\partial Y} \left( (\nabla_y u^{(i)})^\top \cdot \phi^v \right) \cdot n_{ext} + \pi^{(i)} \phi^v \cdot n_{ext} \, da \\
&+ \int_{\Gamma_0} \left( (\nabla_y u^{(i)})^\top \cdot \phi^v \right) \cdot n_0 + \pi^{(i)} \phi^v \cdot n_0 \, da \\
&- \int_{Y_0} \nabla_y u^{(i)} : \nabla_y \phi^v + \pi^{(i)} \nabla_y \cdot \phi^v \, d\mathbf{y} \\
&= \int_{Y_0} e_i \cdot \phi^v \, d\mathbf{y}
\end{aligned} \tag{6.236}$$

En exploitant la  $\mathbf{y}$  – périodicité de  $u^{(i)}$  et de  $\pi^{(i)}$ , on a alors :

$$\int_{\Gamma_0} \left( (\nabla_y u^{(i)})^\top \cdot \phi^v \right) \cdot n_0 + \pi^{(i)} \phi^v \cdot n_0 \, da - \int_{Y_0} \nabla_y u^{(i)} : \nabla_y \phi^v + \pi^{(i)} \nabla_y \cdot \phi^v \, d\mathbf{y} = \int_{Y_0} e_i \cdot \phi^v \, d\mathbf{y} \tag{6.237}$$

Puisque  $\phi^v$  est nul sur  $\Gamma_0 \times \mathcal{T}$ , alors en introduisant les formes bilinéaires  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  suivantes :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 : \quad \mathcal{L}_0 \times \mathcal{L}_0 &\rightarrow \mathbb{R} \\
((u, w), (\phi^v, \phi)) &\mapsto \alpha_1((u, w), (\phi^v, \phi)) = - \int_{Y_0} \nabla_y u : \nabla_y \phi^v + w \nabla_y \cdot \phi^v \, d\mathbf{y}
\end{aligned} \tag{6.238a}$$

$$\begin{aligned}
\beta_1 : \quad \mathcal{L}_0 \times \mathcal{L}_0 &\rightarrow \mathbb{R} \\
((u, w), (\phi^v, \phi)) &\mapsto \beta_1((u, w), (\phi^v, \phi)) = \int_{Y_0} \nabla_y \cdot u \phi \, d\mathbf{y}
\end{aligned} \tag{6.238b}$$

ainsi que la forme linéaire  $l_3$  suivante :

$$\begin{aligned}
l_3 : \quad \mathcal{L}_0 &\rightarrow \mathbb{R} \\
(\phi^v, \phi) &\mapsto l_3(\phi^v, \phi) = \int_{Y_0} e_i \cdot \phi^v \, d\mathbf{y}
\end{aligned} \tag{6.238c}$$

On aboutit au problème variationnel suivant :

$$\begin{aligned}
&\text{Trouver } (u^{(i)}, \pi^{(i)}) \in \mathcal{L}_0 \text{ tel que } \forall (\phi^v, \phi) \in \mathcal{L}_0 : \\
&\alpha_1((u, w), (\phi^v, \phi)) + \beta_1((u, w), (\phi^v, \phi)) = l_3(\phi^v, \phi)
\end{aligned} \tag{6.239}$$

Pour traiter le problème (6.201), on introduit un espace de recherche  $\mathcal{L}$  défini comme le produit cartésien des deux espaces  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  tels que :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &\equiv \mathcal{M} \times \mathcal{N} \\
\mathcal{M} &\equiv \{u \mid u \in H_{\#}^1(Y_0 \times \mathcal{T}), u = n_0 \text{ sur } \Gamma_0 \times \mathcal{T}\}
\end{aligned} \tag{6.240}$$

$\mathcal{M}$  est un espace de champs de vitesse cinématiquement admissibles. La procédure employée est similaire à celle permettant l'obtention du problème (6.239). On multiplie à gauche et à droite de l'équation (6.201a) par  $\phi$  et on intègre sur  $Y_0$  :

$$\int_{Y_0} \nabla_y \cdot \varphi \phi \, d\mathbf{y} = \int_{Y_0} \frac{|\Gamma_0|}{|Y_0|} \phi \, d\mathbf{y} \tag{6.241}$$

L'équation (6.201b) est ensuite contractée à gauche et à droite avec  $\phi^v$ . Dès lors, en intégrant sur  $Y_0$  et en réalisant une intégration par partie, on a :

$$\begin{aligned} \int_{Y_0} \Delta_y \varphi \cdot \phi^v + \nabla_y \iota \cdot \phi^v \, d\mathbf{y} &= \int_{\partial Y} \left( (\nabla_y \varphi)^\top \cdot \phi^v \right) \cdot n_{ext} + \iota \phi^v \cdot n_{ext} \, da \\ &+ \int_{\Gamma_0} \left( (\nabla_y \varphi)^\top \cdot \phi^v \right) \cdot n_0 + \iota \phi^v \cdot n_0 \, da \\ &- \int_{Y_0} \nabla_y \varphi : \nabla_y \phi^v + \iota \nabla_y \cdot \phi^v \, d\mathbf{y} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.242)$$

Puisque  $\varphi$  et  $\iota$  sont  $\mathbf{y}$  – périodiques, alors :

$$\int_{\Gamma_0} \left( (\nabla_y \varphi)^\top \cdot \phi^v \right) \cdot n_0 + \iota \phi^v \cdot n_0 \, da - \int_{Y_0} \nabla_y \varphi : \nabla_y \phi^v + \iota \nabla_y \cdot \phi^v \, d\mathbf{y} = 0 \quad (6.243)$$

Par ailleurs puisque  $\phi^v$  est nul sur  $\Gamma_0 \times \mathcal{T}$ , alors en introduisant les formes bilinéaires  $\alpha_2$  et  $\beta_2$  suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_2 : \quad \mathcal{L} \times \mathcal{L}_0 &\rightarrow \mathbb{R} \\ ((u, w), (\phi^v, \phi)) &\mapsto \alpha_2((u, w), (\phi^v, \phi)) = \\ &- \int_{Y_0} \nabla_y u : \nabla_y \phi^v + w \nabla_y \cdot \phi^v \, d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (6.244a)$$

$$\begin{aligned} \beta_2 : \quad \mathcal{L} \times \mathcal{L}_0 &\rightarrow \mathbb{R} \\ ((u, w), (\phi^v, \phi)) &\mapsto \beta_2((u, w), (\phi^v, \phi)) = \int_{Y_0} \nabla_y \cdot u \phi \, d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (6.244b)$$

ainsi que la forme linéaire  $l_4$  suivante :

$$\begin{aligned} l_4 : \quad \mathcal{L}_0 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\phi^v, \phi) &\mapsto l_4(\phi^v, \phi) = \int_{Y_0} \frac{|\Gamma_0|}{|Y_0|} \phi \, d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (6.244c)$$

on déduit un dernier problème variationnel :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (\varphi, \iota) \in \mathcal{L} \text{ tel que } \forall (\phi^v, \phi) \in \mathcal{L}_0 : \\ \alpha_2((\varphi, \iota), (\phi^v, \phi)) + \beta_2((\varphi, \iota), (\phi^v, \phi)) = l_4(\phi^v, \phi) \end{aligned} \quad (6.245)$$

Maintenant que ces quatre problèmes variationnels ont été posés, il est possible de les discrétiser aux éléments finis et de les résoudre simplement en utilisant FEniCS. On commence par construire un maillage  $Y_{0h}$  de  $Y_0$ . Ce processus génère par la même occasion un maillage  $\Gamma_{0h}$  de  $\Gamma_0$ . On introduit alors les espaces de recherche  $\mathcal{N}_h$ ,  $\mathcal{L}_{0h}$  et  $\mathcal{L}_h$  comme des restrictions de  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{L}_0$  et  $\mathcal{L}$  de dimensions finies. Les formes discrétisées des problèmes variationnels sont données dans l'annexe D.

**Remarque** (Pénalisation du problème de Stokes). *Avant d'aller plus loin, il convient de remarquer que les problèmes (6.239) et (6.245) sont typiquement sujets à des instabilités. Pour lever cette*

problématique, on décide de pénaliser la forme discrète de ces problèmes en introduisant la forme bilinéaire  $d$  suivante :

$$\begin{aligned} d_h &: \mathcal{N}_h \times \mathcal{N}_h \rightarrow \mathbb{R} \\ (w_h, \phi_h) &\mapsto d_h(w_h, \phi_h) = \int_{Y_{0h}} w_h \phi_h \, d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (6.246)$$

De telle sorte que les pendants discrets des problèmes (6.239) et (6.245) (donnés respectivement par (D.1c) et (D.1d) en annexe D) soient réécrits comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (u_h^{(i)}, \pi_h^{(i)}) \in \mathcal{L}_{0h} \text{ tel que } \forall (\phi_h^v, \phi_h) \in \mathcal{L}_{0h} : \\ \alpha_{1h} \left( (u_h^{(i)}, \pi_h^{(i)}), (\phi_h^v, \phi_h) \right) + \beta_{1h} \left( (u_h^{(i)}, \pi_h^{(i)}), (\phi_h^v, \phi_h) \right) - \Upsilon d_h \left( \pi_h^{(i)}, \phi_h \right) = l_{3h}(\phi_h^v, \phi_h) \end{aligned} \quad (6.247)$$

et

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (\varphi_h, \iota_h) \in \mathcal{L}_h \text{ tel que } \forall (\phi_h^v, \phi_h) \in \mathcal{L}_{0h} : \\ \alpha_{2h} \left( (\varphi_h, \iota_h), (\phi_h^v, \phi_h) \right) + \beta_{2h} \left( (\varphi_h, \iota_h), (\phi_h^v, \phi_h) \right) - \Upsilon d_h(\iota_h, \phi_h) = l_{4h}(\phi_h^v, \phi_h) \end{aligned} \quad (6.248)$$

où  $\Upsilon$  est un petit paramètre visant à limiter l'importance de la perturbation ainsi introduite (voir l'ouvrage de Gunzburger [93] pour référence).

Maintenant que les problèmes ont été posés, il est possible de les résoudre. Pour ce faire, nous commençons par définir le maillage  $Y_{0h}$  de la cellule  $Y_0$  en exploitant le logiciel GMSH [85]. On construit alors un domaine carré de côté unitaire et auquel on soustrait un disque de rayon  $R = 0.125$ . Le domaine restant est alors  $Y_0$  et la frontière interne ainsi générée est  $\Gamma_0$ . Afin d'avoir des résultats précis au niveau de l'interface, le maillage au niveau de l'interface est considérablement dense. On y choisit en effet une longueur caractéristique élémentaire de  $1/2^{14}$ . Au niveau de la frontière extérieure du domaine, la longueur caractéristique des éléments est fixée à  $1/60$ . Le maillage  $Y_{0h}$  ainsi généré est constitué de 346 360 éléments, principalement concentrés autour de  $\Gamma_{0h}$ , comme le montre la figure 6.1.

**Remarque** (A propos de la densité du maillage). *La densité du maillage peut sembler trop importante au regard des problèmes que nous allons résoudre. Cependant, le but de cette démarche est de calculer numériquement des gradients et seconds gradients ( $\nabla(\nabla\vartheta_h)$  par exemple) au niveau de l'interface. Pour cela, il convient d'avoir une surface la plus lisse possible. Ceci explique alors la construction d'un maillage  $\Gamma_{0h}$  excessivement dense.*

Ensuite, on procède à la résolution à l'aide de la plateforme FEniCS. On propose ici dans la figure 6.2 la distribution des résultats  $\pi_h^{(1)}$ ,  $u_h^{(1)}$ ,  $\varphi_h$ ,  $\iota_h$ ,  $\nu_h^{(1)}$  et finalement  $\vartheta_h$  via leurs cartographies colorimétriques. Sur les figures 6.2b et 6.2d, on a également tracé les vecteurs tangents aux lignes de courant. Ceci permet d'identifier la direction d'écoulement du fluide dans la cellule. Il est important de noter qu'afin d'en faciliter la visualisation, ces vecteurs n'ont pas été mis à l'échelle par rapport à la vitesse du fluide. Le domaine  $Y_{0h}$  présente des symétries selon les axes verticaux et horizontaux passant en son centre. Sous cette réserve, nous ne traçons pas les solutions  $\pi_h^{(2)}$  et  $u_h^{(2)}$  car elles sont congruentes  $\pi_h^{(1)}$  et  $u_h^{(1)}$ , à une rotation de  $90^\circ$  du domaine  $Y_{0h}$  près. On cherche dans un premier temps à vérifier la justesse de l'implémentation des problèmes variationnels dans FEniCS. On peut dans un premier temps analyser la cohérence des résultats vis-à-vis des conditions aux limites. Pour ce faire, on s'assure que les conditions sur  $u_h^{(1)}$  et  $\varphi_h$  sont vérifiées. Une telle

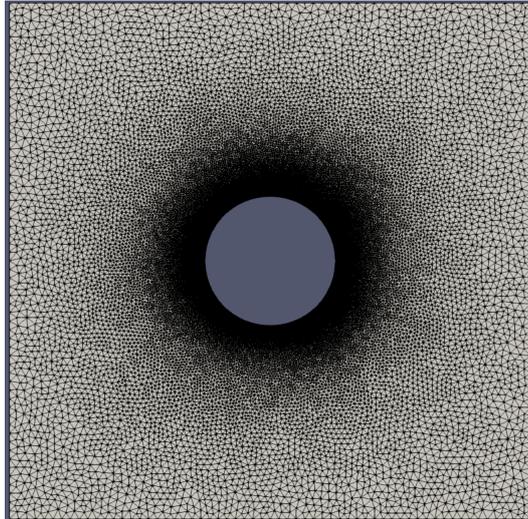


FIGURE 6.1 – vue de  $Y_{0h}$  (réalisée avec Paraview [86] (logiciel libre, licence BSD))

observation est immédiate sur les figures 6.2b et 6.2d. De plus, l'intégralité des solutions présentées dans la figure 6.2 vérifie la  $\mathbf{y}$ -périodicité. A l'aide des figures 6.2a, 6.2c et 6.2e, on peut conjecturer immédiatement que  $\pi_h^{(1)}$ ,  $\iota_h$  et de  $\nu_h^{(1)}$  sont périodiques et de moyenne nulle sur  $\Gamma_{0h}$ . On peut aussi subodorer que  $\vartheta_h$  est périodique sur  $\Gamma_{0h}$  mais de moyenne non nulle.

Afin de pousser l'analyse plus loin, on propose d'analyser la distribution de ces quantités le long de l'interface  $\Gamma_{0h}$ . Pour ce faire, on considère dans un repère polaire  $(r, \theta)$  dont l'origine est le centre de la cellule. On trace alors les  $\pi_h^{(i)}$  et  $\nu_h^{(i)}$  ainsi que  $\iota_h$  et  $\vartheta_h$  le long de la courbe paramétrée par  $r = R$  et  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Les résultats de ce tracé sont concaténés dans la figure 6.3 Les résultats conjecturés sont alors clairement mis en évidence. On distingue en effet sur les figures 6.3a, 6.3c, 6.3e, 6.3b et 6.3d que les  $\pi_h^{(i)}$ ,  $\nu_h^{(i)}$  et  $\iota_h$  sont périodiques de moyennes nulles sur  $\Gamma_{0h}$ . Finalement  $\vartheta_h$  est constant sur  $\Gamma_{0h}$ . En supposant que les solutions réelles présentent des propriétés similaires à celles des solutions approchées, on conclut sur la nullité de certains termes de (6.225) et (6.226) :

$$\int_{\Gamma_0} \pi^{(i)} da = \int_{\Gamma_0} \iota da = \int_{\Gamma_0} \nu^{(i)} da = 0 \quad (6.249)$$

Pour achever le raisonnement numérique, on détermine la distribution sur  $\Gamma_{0h}$  des quantités  $(\nabla_y u_h^{(i)} \cdot n_0) \cdot n_0$ ,  $(\nabla_y \varphi_h \cdot n_0) \cdot n_0$ ,  $(\nabla_y (\nabla_y \nu_h^{(i)}) \cdot n_0) \cdot n_0$  et  $(\nabla_y (\nabla_y \vartheta_h) \cdot n_0) \cdot n_0$ . Cette détermination se fait aisément *via* FEniCS, connaissant les solutions approchées. La figure 6.4 représente alors les distributions de  $(\nabla_y u_h^{(i)} \cdot n_0) \cdot n_0$ ,  $(\nabla_y \varphi_h \cdot n_0) \cdot n_0$ ,  $(\nabla_y (\nabla_y \nu_h^{(i)}) \cdot n_0) \cdot n_0$  et  $(\nabla_y (\nabla_y \vartheta_h) \cdot n_0) \cdot n_0$  sur  $\Gamma_{0h}$ . A l'aide des figures 6.4a, 6.4c, 6.4b et 6.4d, on déduit que les  $(\nabla_y u_h^{(i)} \cdot n_0) \cdot n_0$  et  $(\nabla_y (\nabla_y \nu_h^{(i)}) \cdot n_0) \cdot n_0$  sont périodiques sur  $\Gamma_{0h}$  et de moyennes nulles. On déduit de plus que  $(\nabla_y \varphi_h \cdot n_0) \cdot n_0$  est constant sur  $\Gamma_{0h}$  et que  $(\nabla_y (\nabla_y \vartheta_h) \cdot n_0) \cdot n_0$  est périodique de période  $\pi/4$  et de moyenne non nulle sur  $\Gamma_{0h}$ . En supposant que les solutions réelles présentent des propriétés similaires à celles des solutions approchées, on conclut sur la nullité de certains termes de (6.225) et (6.226). En effet, compte tenu de (6.222), alors :

$$\int_{\Gamma_0} S_1 (\nabla_y u^{(i)} \cdot n_0) \cdot n_0 da = \int_{\Gamma_0} \mathbf{y} ((\nabla_y u^{(i)} \cdot n_0) \cdot n_0) da \cdot \nabla_x \left( \tilde{R}(\mathbf{x}) + \tilde{d}(\mathbf{x}, \tilde{t}) \right) \quad (6.250)$$

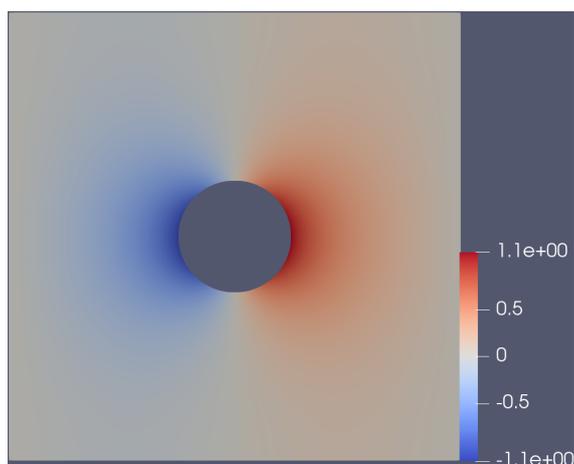
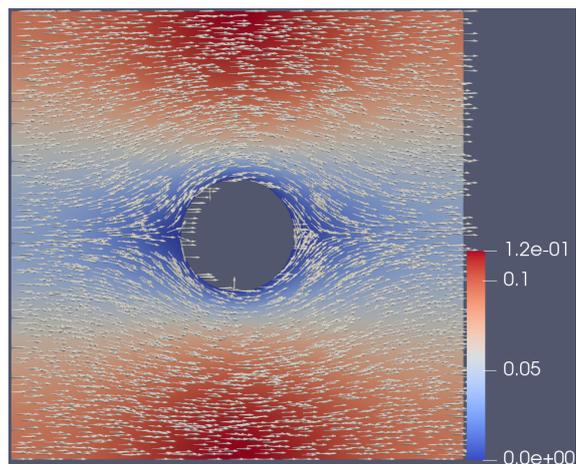
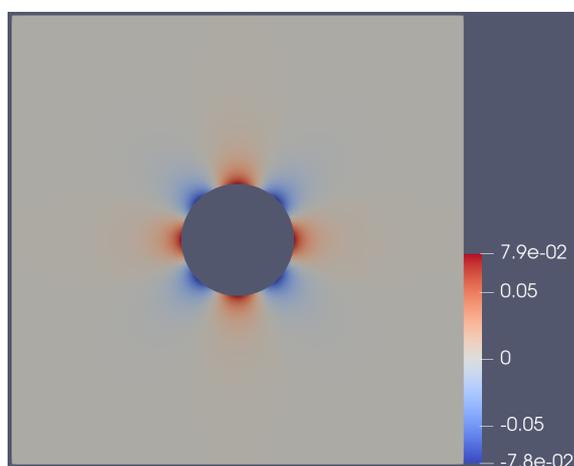
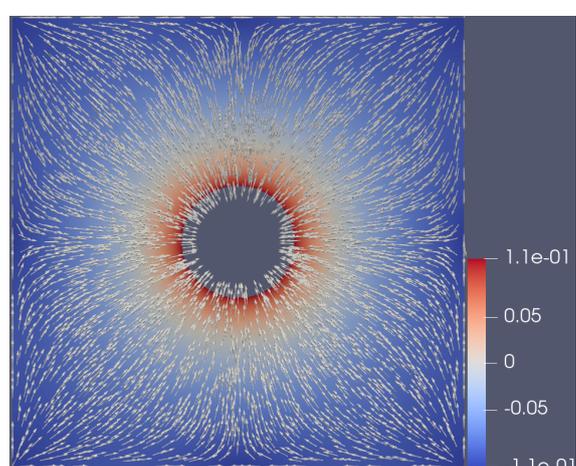
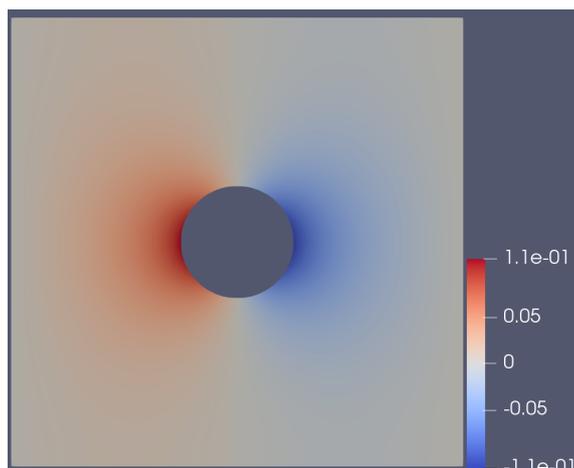
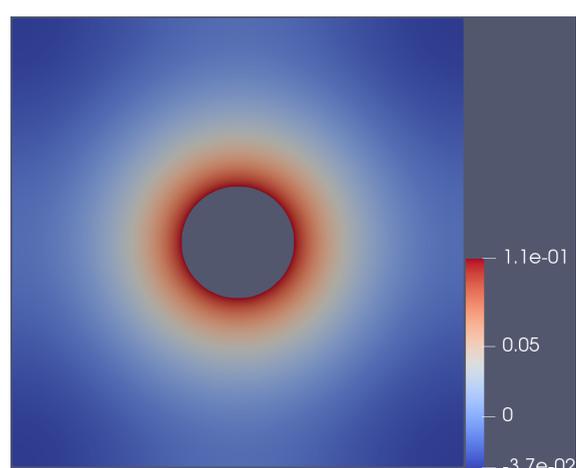
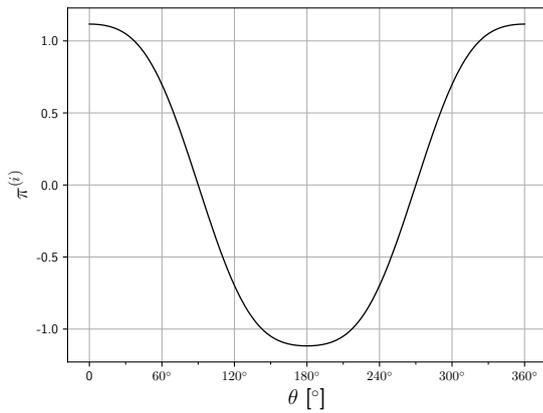
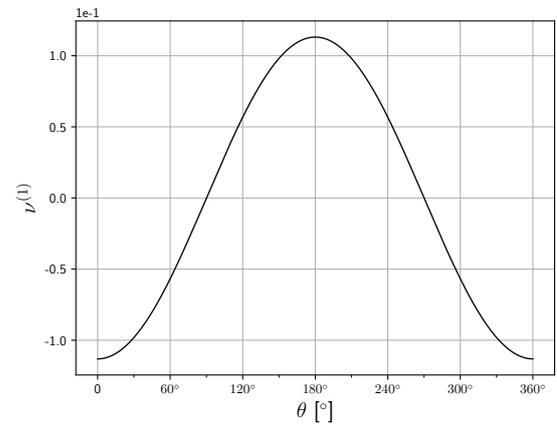
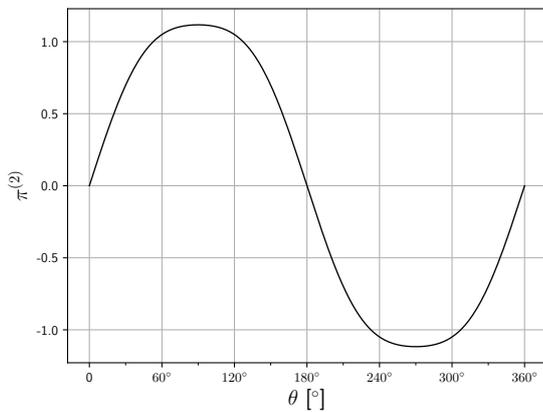
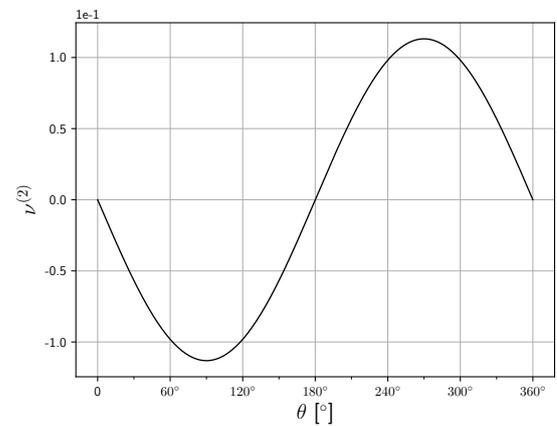
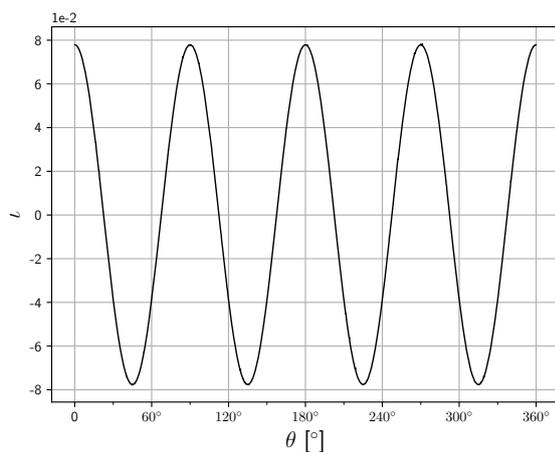
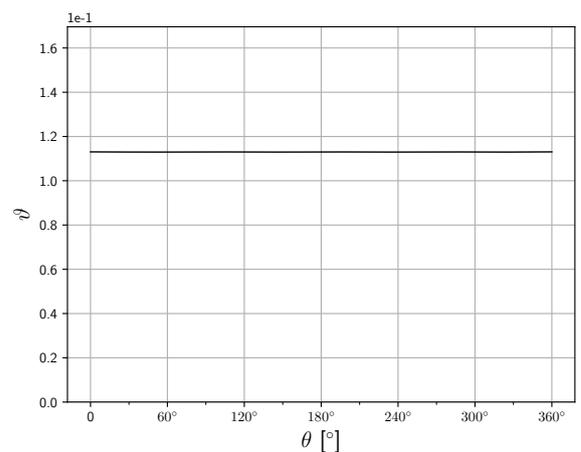
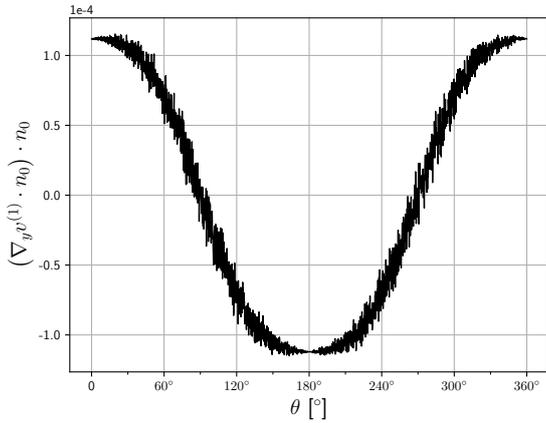
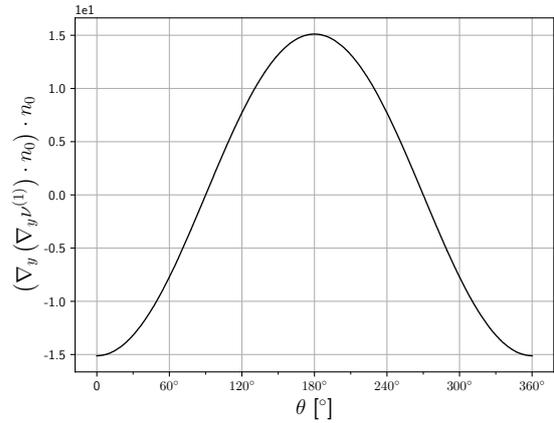
(a) Distribution de  $\pi_h^{(1)}$  sur  $Y_{0h}$ (b) Distribution de  $u_h^{(1)}$  sur  $Y_{0h}$ (c) Distribution de  $\nu_h$  sur  $Y_{0h}$ (d) Distribution de  $\varphi_h$  sur  $Y_{0h}$ (e) Distribution de  $\nu_h^{(1)}$  sur  $Y_{0h}$ (f) Distribution de  $\vartheta_h$  sur  $Y_{0h}$ 

FIGURE 6.2 – Cartographie colorimétriques des résultats de simulations aux éléments finis

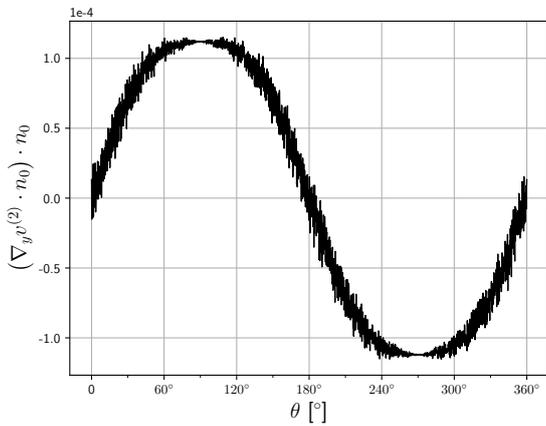
(a) Distribution de  $\pi_h^{(1)}$  sur  $\Gamma_{0h}$ (b) Distribution de  $\nu_h^{(1)}$  sur  $\Gamma_{0h}$ (c) Distribution de  $\pi_h^{(2)}$  sur  $\Gamma_{0h}$ (d) Distribution de  $\nu_h^{(2)}$  sur  $\Gamma_{0h}$ (e) Distribution de  $l_h$  sur  $\Gamma_{0h}$ (f) Distribution de  $\vartheta_h$  sur  $\Gamma_{0h}$ FIGURE 6.3 – Distributions de  $\pi_h^{(i)}$ ,  $l_h$ ,  $\nu_h^{(i)}$  et de  $\vartheta_h$  sur  $\Gamma_{0h}$



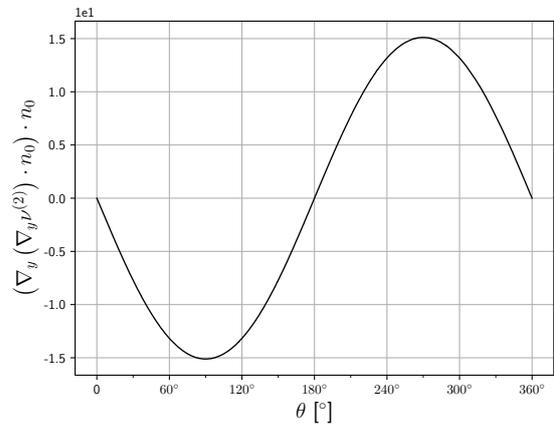
(a) Distribution de  $(\nabla_y u_h^{(1)} \cdot n_0) \cdot n_0$  sur  $\Gamma_{0h}$



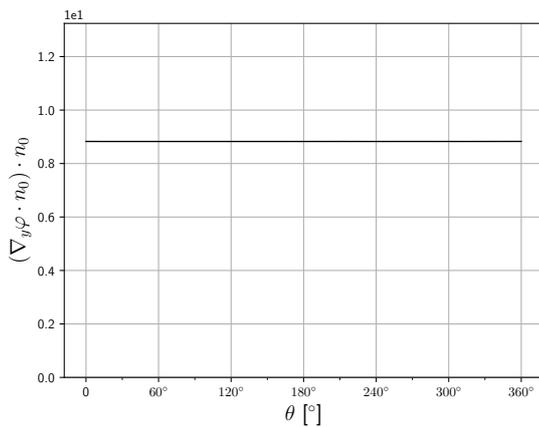
(b) Distribution de  $(\nabla_y (\nabla_y \nu_h^{(1)} \cdot n_0) \cdot n_0) \cdot n_0$  sur  $\Gamma_{0h}$



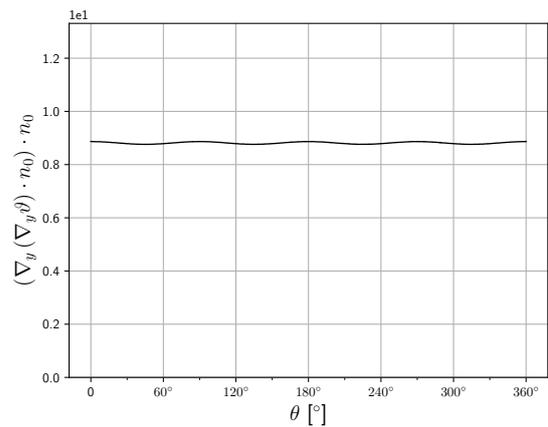
(c) Distribution de  $(\nabla_y u_h^{(2)} \cdot n_0) \cdot n_0$  sur  $\Gamma_{0h}$



(d) Distribution de  $(\nabla_y (\nabla_y \nu_h^{(2)} \cdot n_0) \cdot n_0) \cdot n_0$  sur  $\Gamma_{0h}$



(e) Distribution de  $(\nabla_y \varphi \cdot n_0) \cdot n_0$  sur  $\Gamma_{0h}$



(f) Distribution de  $(\nabla_y (\nabla_y \vartheta_h) \cdot n_0) \cdot n_0$  sur  $\Gamma_{0h}$

FIGURE 6.4 – Distributions de quelques quantités d'intérêt sur  $\Gamma_{0h}$

Puisque  $\Gamma_0$  est représentatif d'un cercle, alors on peut écrire  $\mathbf{y}$  de la façon suivante :

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} R \cos(\theta) \\ R \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (6.251)$$

Puisque  $\mathbf{y}$  est ainsi périodique (de période  $2\pi$ ) sur  $\Gamma_0$  alors :

$$\int_{\Gamma_0} S_1 (\nabla_y u^{(i)} \cdot n_0) \cdot n_0 \, da = 0 \quad (6.252)$$

On peut étendre aisément cette conclusion et proposer :

$$\int_{\Gamma_0} S_1 (\nabla_y (\nabla_y \nu_h^{(i)}) \cdot n_0) \cdot n_0 \, da = 0 \quad (6.253)$$

Comme  $(\nabla_y \varphi \cdot n_0) \cdot n_0$  est constant à moyenne non nulle, alors la périodicité de  $\mathbf{y}$  implique :

$$\int_{\Gamma_0} \mathbf{y} ((\nabla_y \varphi \cdot n_0) \cdot n_0) \, da \cdot \nabla_x (\tilde{R}(\mathbf{x}) + \tilde{d}(\mathbf{x}, \tilde{t})) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \nabla_x (\tilde{R}(\mathbf{x}) + \tilde{d}(\mathbf{x}, \tilde{t})) = 0 \quad (6.254)$$

De plus  $(\nabla_y (\nabla_y \vartheta_h) \cdot n_0) \cdot n_0$  peut s'écrire comme la somme d'un signal constant et d'un signal périodique de période  $\pi/4$  et de moyenne nulle. Dans ces conditions, les résultats (6.252) et (6.254) peuvent être étendus à  $(\nabla_y (\nabla_y \vartheta_h) \cdot n_0) \cdot n_0$  et on montre ainsi que :

$$\int_{\Gamma_0} S_1 (\nabla_y (\nabla_y \vartheta) \cdot n_0) \cdot n_0 \, da = 0 \quad (6.255)$$

Maintenant, puisque  $\vartheta$  est constant sur l'interface, alors on écrit :

$$\int_{\Gamma_0} \vartheta \, da = |\Gamma_0| \vartheta_\Gamma \quad (6.256)$$

où  $\vartheta_\Gamma$  est la valeur de  $\vartheta$  sur  $\Gamma_0$ . Considérant (6.249), (6.252), (6.253), (6.254), (6.255), (6.256) le bilan de la masse (6.225) se reformule de la façon suivante :

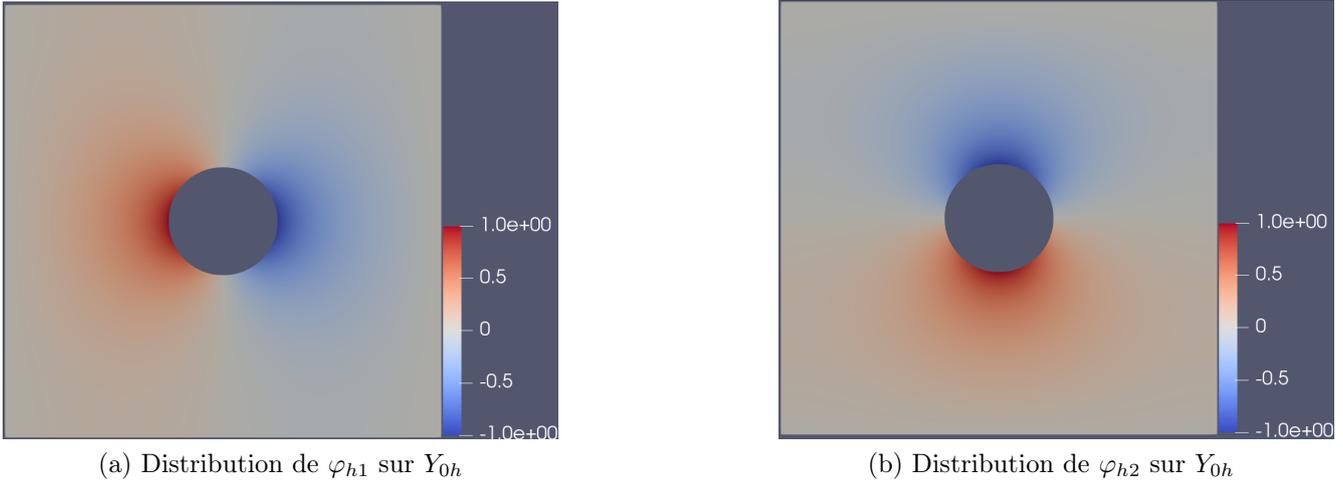
$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{c}_1 |Y_0|}{\partial \tilde{t}} + A \nabla_x \cdot ((c_0 + H) |Y_0| \bar{v}) &= \frac{A}{F} (1 - c_0) \int_{\Gamma_0} w_{n1}^* \, da - \frac{A}{F\Psi} w_{n0}^* (\bar{\mu}_1 - \bar{p}_1) |\Gamma_0| \\ &+ \frac{MH}{BCF^3\Psi} \frac{1 - c_0}{c_0 + H} (w_{n0}^*)^2 |\Gamma_0| \vartheta_\Gamma \end{aligned} \quad (6.257)$$

et le bilan de la masse des particules fluidisées (6.226) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{c}_1 |Y_0|}{\partial \tilde{t}} + A \nabla_x \cdot (c_0 |Y_0| \bar{v}) &= \frac{A^2 BC}{M} \nabla_x \cdot (\mathbf{D}_h^* \cdot \nabla_x (\lambda_0 + \Psi c_0)) + \frac{A}{F} (1 - c_0) \int_{\Gamma_0} w_{n1}^* \, da \\ &- \frac{AH}{F} \nabla_x \cdot \left( \frac{1 - c_0}{c_0 + H} w_{n0}^* \int_{Y_0} \nabla_y \vartheta \, d\mathbf{y} \right) - \frac{A}{F\Psi} w_{n0}^* (\bar{\mu}_1 - \bar{p}_1) |\Gamma_0| \\ &- \frac{MH}{ABC F^3 \Psi} \frac{1 - c_0}{c_0 + H} (w_{n0}^*)^2 |\Gamma_0| \vartheta_\Gamma \end{aligned} \quad (6.258)$$

Nous obtenons ainsi des formes bien plus simples et exploitables pour formuler un problème homogénéisé. Finalement, dans la figure 6.5, nous proposons les cartographies colorimétriques des composantes de  $\varphi_h$  (notées respectivement  $\varphi_{h1}$  et  $\varphi_{h2}$ ) sur l'ensemble de  $Y_{h0}$ . Il apparaît clairement que la  $y$ -périodicité de  $\varphi_{h1}$  et  $\varphi_{h2}$  s'accompagne de symétries axiales. Ceci permet de déduire la nullité des moyennes des deux composantes sus-mentionnées et donc la nullité des composantes du vecteur  $\bar{\varphi}$  introduit *via* l'équation (6.204) :

$$\bar{\varphi} = \mathbf{0} \quad (6.259)$$

FIGURE 6.5 – Cartographie colorimétriques des composantes de  $\varphi_h$ 

### 6.5.6.3 Synthèse : modèle homogénéisé

Nous faisons maintenant la synthèse des résultats obtenus jusqu'ici. On rappelle dans un premier temps le résultat (6.146) :

$$|Y_0| \frac{\partial c_0}{\partial \tilde{t}} = \frac{A}{F} |\Gamma_0| (1 - c_0) w_{n0}^* \quad (6.260)$$

En utilisant les résultats présentés l'annexe C.7, on a de plus :

$$|Y_0| \frac{\partial c_0}{\partial \tilde{t}} = \int_{Y_0} \frac{\partial c_0}{\partial \tilde{t}} d\mathbf{y} = \frac{\partial |Y_0| c_0}{\partial \tilde{t}} + \int_{\Gamma_0} c_0 \frac{\partial S_0}{\partial \tilde{t}} da \quad (6.261)$$

d'où :

$$\frac{\partial |Y_0| c_0}{\partial \tilde{t}} = \frac{A}{F} (1 - c_0) |\Gamma_0| w_{n0}^* - c_0 \int_{\Gamma_0} \frac{\partial S_0}{\partial \tilde{t}} da \quad (6.262)$$

En rappelant également l'équation de la courbe de niveau (6.136) :

$$\frac{\partial S_0}{\partial \tilde{t}} = AF^{-1} \|\nabla_y S_0\| w_{n0}^* \quad \text{dans } Y \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (6.263)$$

alors on a :

$$\frac{\partial |Y_0| c_0}{\partial \tilde{t}} = \frac{A}{F} (1 - c_0) |\Gamma_0| w_{n0}^* - \frac{A}{F} c_0 w_{n0}^* \int_{\Gamma_0} \|\nabla_y S_0\| da \quad (6.264)$$

Or nous avons proposé une simplification conduisant à  $\|\nabla_y S_0\| = 1$  (voir équation (6.223b)).

Dans ce cas :

$$\frac{\partial |Y_0| c_0}{\partial \tilde{t}} = \frac{A}{F} (1 - 2c_0) |\Gamma_0| w_{n0}^* \quad (6.265)$$

En sommant (6.265) avec le bilan de la masse (6.257) préalablement multiplié par  $\epsilon$ , on aboutit au résultat suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial |Y_0| (c_0 + \epsilon \bar{c}_1)}{\partial \tilde{t}} + \epsilon A \nabla_x \cdot ((c_0 + H) |Y_0| \bar{v}) &= \frac{A}{F} (1 - 2c_0) |\Gamma_0| w_{n0}^* + \epsilon \frac{A}{F} (1 - c_0) \int_{\Gamma_0} w_{n1}^* da \\ - \epsilon \frac{A}{F \Psi} w_{n0}^* (\bar{\mu}_1 - \bar{p}_1) |\Gamma_0| + \epsilon \frac{MH}{BCF^3 \Psi} \frac{1 - c_0}{c_0 + H} (w_{n0}^*)^2 |\Gamma_0| \vartheta_\Gamma & \end{aligned} \quad (6.266)$$

On rappelle alors que la moyenne de  $c_1$  est donnée comme ceci :

$$\bar{c}_1 = \frac{\bar{\mu}_1 - \bar{p}_1}{2\Psi} \quad (6.267)$$

Dès lors, si on admet une erreur d'ordre  $\epsilon^2$ , alors on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial |Y_0| \bar{c}}{\partial \tilde{t}} + \epsilon A \nabla_x \cdot ((\bar{c} + H) |Y_0| \bar{v}) &= \frac{A}{F} (1 - 2\bar{c}) |\Gamma_0| w_{n0}^* + \epsilon \frac{A}{F} (1 - \bar{c}) \int_{\Gamma_0} w_{n1}^* da \\ &+ \epsilon \frac{MH}{BCF^3\Psi} \frac{1 - \bar{c}}{\bar{c} + H} (w_{n0}^*)^2 |\Gamma_0| \vartheta_\Gamma + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (6.268)$$

Maintenant, on développe la dérivée partielle de  $|Y_0| \bar{c}$  et on utilise le résultat (C.58) de l'annexe C.7. On emploie l'équation de la courbe de niveau (6.136) ainsi que (6.223b). Ceci permet de montrer que :

$$\frac{\partial |Y_0| \bar{c}}{\partial \tilde{t}} = |Y_0| \frac{\partial \bar{c}}{\partial \tilde{t}} - \bar{c} \frac{A}{F} \int_{\Gamma_0} w_{n0}^* da \quad (6.269)$$

En exploitant ce résultat dans le bilan de la masse du fluide (6.268) et en considérant le développement asymptotique de  $w_n^*$  (6.40) alors il est clair que :

$$\phi \frac{\partial \bar{c}}{\partial \tilde{t}} + \epsilon A \nabla_x \cdot ((\bar{c} + H) \phi \bar{v}) = \frac{A}{F} (1 - \bar{c}) S_s \bar{w}_n^* \left( 1 + \epsilon \frac{MH}{ABCF^2\Psi} \frac{1}{\bar{c} + H} \bar{w}_n^* \vartheta_\Gamma \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (6.270)$$

où  $\phi$  et  $S_s$  désignent respectivement la porosité et la surface spécifique du milieu poreux homogénéisé :

$$\phi = |Y_0|, \quad S_s = |\Gamma_0| \quad (6.271)$$

La vitesse étendue moyenne  $\bar{w}_n^*$  est définie comme suit :

$$\bar{w}_n^* = w_{n0}^* + \epsilon \frac{1}{|\Gamma_0|} \int_{\Gamma_0} w_{n1}^* da + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (6.272)$$

En appliquant un raisonnement similaire, on écrit le bilan de masse des particules fluidisées. Pour cela, on introduit la moyenne du gradient selon  $\mathbf{y}$  de  $\vartheta$  :

$$\overline{\nabla_y \vartheta} = \frac{1}{|Y_0|} \int_{Y_0} \nabla_y \vartheta d\mathbf{y} \quad (6.273)$$

On évalue alors la somme de (6.265) et de l'équation (6.258) préalablement multipliée par  $\epsilon$ .

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial \bar{c}}{\partial \tilde{t}} + \epsilon A \nabla_x \cdot (\bar{c} \phi \bar{v}) - \epsilon \frac{A^2 BC}{M} \nabla_x \cdot \left( \mathbf{D}_h^* \cdot \nabla_x (\bar{\lambda} + \Psi \bar{c}) - \frac{MH}{ABCF} \frac{1 - \bar{c}}{\bar{c} + H} \bar{w}_n^* \overline{\nabla_y \vartheta} \right) &= \\ \frac{A}{F} (1 - \bar{c}) S_s \bar{w}_n^* \left( 1 + \epsilon \frac{MH}{ABCF^2\Psi} \frac{1}{\bar{c} + H} \bar{w}_n^* \vartheta_\Gamma \right) &+ \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (6.274)$$

Finalement, étant donné la nullité de  $\bar{\varphi}$  la vitesse moyenne  $\bar{v}$  (voir équation (6.212)) se réduit à :

$$\bar{v} = -\mathcal{K}_h \tilde{\rho}^w \nabla_x (\Psi \bar{c} - \bar{\lambda}) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (6.275)$$

Achevant ainsi la simplification des équations macroscopiques. Les équations (6.270), (6.274) et (6.275) synthétisent alors un modèle homogénéisé d'écoulement fluide en milieu poreux avec érosion.

#### 6.5.6.4 Comparaison avec le modèle macroscopique et conclusions

Nous avons formulé un problème macroscopique *via* l'homogénéisation quasi-périodique. Comme pour le cas 1, nous pouvons le comparer avec le modèle de suffusion issu de la poromécanique. Nous allons donc comparer dans un premier le bilan de la masse du fluide homogénéisé (6.270) avec le bilan de la masse du fluide présenté dans l'équation (2.18). Ensuite, nous comparerons la vitesse du fluide homogénéisée (6.275) et celle prescrite à partir de la thermodynamique des milieux poreux (2.104).

Afin de comparer le bilan de masse homogénéisé (6.270) avec le bilan de masse du fluide issus de la formulation poromécanique (2.18), il convient de réarranger l'écriture de ce dernier. On commence par rappeler le bilan de masse en question. En écriture intrinsèque et dans un contexte où le squelette solide est immobile, ce bilan se formule :

$$\frac{\partial \check{\rho}^f \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\check{\rho}^f \phi \check{\mathbf{v}}^f) = \hat{\Gamma} \quad (6.276)$$

Dans la section 6.4.5, nous avons montré qu'on peut formuler ce bilan de masse sous forme sans dimension de la façon suivante (voir équation (6.120)) :

$$\phi \frac{\partial \check{c}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\hat{v} \tilde{t}}{L} \tilde{\nabla} \cdot \left( \left( \frac{\tilde{\rho}^w}{\tilde{\rho}^s - \tilde{\rho}^w} + \check{c} \right) \phi \check{\mathbf{v}} \right) = (1 - \check{c}) \frac{\partial \phi^{er}}{\partial \tilde{t}} \quad (6.277)$$

On identifie alors les nombres adimensionnels  $\epsilon A$  et  $H$  présentés dans le cas 2 du tableau 6.1 et tel que :

$$\epsilon A = \frac{\hat{v} \tilde{t}}{L}, \quad H = \frac{\tilde{\rho}^w}{\tilde{\rho}^s - \tilde{\rho}^w} \quad (6.278)$$

En définitive, le bilan de la masse formulé *via* la poromécanique équivaut à :

$$\phi \frac{\partial \check{c}}{\partial \tilde{t}} + \epsilon A \tilde{\nabla} \cdot ((\check{c} + H) \phi \check{\mathbf{v}}) = (1 - \check{c}) \frac{\partial \phi^{er}}{\partial \tilde{t}} \quad (6.279)$$

Cette forme est comparable au bilan de masse du fluide homogénéisé (6.270). En particulier, si on identifie  $\check{c}$  à  $\bar{c}$  et  $\check{\mathbf{v}}$  à  $\bar{\mathbf{v}}$ , alors on identifie clairement le lien entre la variation de porosité induite par suffusion et la vitesse de l'interface :

$$\frac{\partial \phi^{er}}{\partial \tilde{t}} = \frac{A}{F} S_s \bar{w}_n^* \left( 1 + \epsilon \frac{MH}{ABC F^2 \Psi} \frac{1}{\bar{c} + H} \bar{w}_n^* \vartheta_\Gamma \right) \quad (6.280)$$

Ce faisant, on peut juger de la capacité de la procédure d'homogénéisation quasi-périodique présentée ici (en considérant les ordres de grandeur proposés dans le cas 2 du tableau 6.1) à faire émerger une loi de comportement dès lors que la vitesse  $\bar{w}_n^*$  est correctement définie. Maintenant, on compare la loi de comportement homogénéisée donnant la vitesse du fluide à celle issue de la poromécanique (2.104) (voir équation (6.124)). On s'aperçoit que ici que les lois (6.275) et (6.124) n'ont pas la même structure : si la loi (6.275) est de type « Darcy » et permet d'identifier correctement un tenseur de perméabilité homogénéisé, l'identification de  $\check{\mathcal{C}}^v$  reste impossible. Cette incapacité réside principalement dans la simplicité exarcebée du problème que nous avons résolu ici. En effet, la cellule élémentaire avec noyau circulaire présente de trop nombreuses symétries forçant la nullité de  $\bar{\varphi}$  et ruinant ainsi tous nos efforts pour extraire et identifier  $\check{\mathcal{C}}^v$ . Dans le cas d'une cellule plus complexe et sans symétries particulières, on pourrait certainement identifier ce paramètre de la loi de comportement du fluide.

### 6.5.7 Conclusions

Ici nous dressons un ensemble de conclusions et de remarques concernant le problème homogénéisé.

- i) On considère la loi de comportement de la vitesse homogénéisée, (6.212). Le modèle homogénéisé permet de prendre en compte un effet de l'érosion en modifiant la loi de Darcy. Cette modification se fait en considérant un terme additionnel proportionnel à la vitesse de l'interface moyennée  $\bar{w}_n^*$ . On pourra donc envisager d'introduire l'effet de la différence entre pression et potentiel chimique *via*  $w_{n0}^*$ . Ceci permettra alors d'identifier le paramètre  $\check{C}^v$  du modèle macroscopique (2.104). L'ordre de grandeur de ce terme est unitaire, identiquement au terme de Darcy.
- ii) On s'intéresse à la loi d'érosion homogénéisée (6.280). Cette équation établit un lien clair entre la vitesse d'interface moyennée  $\bar{w}_n^*$  et l'évolution de la porosité induite par suffusion. Ici aussi, on pourra envisager d'introduire l'effet de la différence entre pression et potentiel chimique *via*  $w_{n0}^*$ . Ceci permettra d'identifier le terme  $\check{R}$  du modèle macroscopique (2.104). L'ordre de grandeur de ce terme sera alors unitaire. L'effet du gradient de pression ne pourra être pris en compte qu'au travers de  $w_{n1}^*$ . Ceci permettra alors d'identifier le terme  $\check{C}^\phi$  du modèle macroscopique (2.104). Cependant, puisque ce terme sera introduit *via*  $w_{n1}^*$ , l'ordre de grandeur de ce terme sera au maximum  $\epsilon$ .
- iii) L'incompatibilité entre les ordres de grandeur de  $\check{C}^\phi$  et de  $\check{C}^v$  empêche d'envisager un tenseur de couplage macroscopique symétrique.
- iv) Si on considère une géométrie cellulaire comportant trop de symétries,  $\check{C}^v$  se réduit au vecteur nul. Les milieux isotropes (voire orthotropes) présentent *a priori* cette particularité.



# Chapitre 7

## Conclusions générales et perspectives

Dans ce dernier chapitre nous dressons les conclusions de ces travaux de thèse. Dans un premier temps, nous revenons sur la première partie qui concerna la formulation d'un modèle macroscopique de suffusion. Ensuite, nous détaillerons des conclusions générales quant à l'approche par homogénéisation quasi-périodique déployée dans la deuxième partie de la thèse. Finalement, les perspectives et questions laissées en suspens sont discutées.

### 7.1 Contributions à la modélisation macroscopique de l'érosion interne par suffusion

- I Dans la première partie de la thèse, nous avons proposé une interprétation cinématique des milieux poreux suffusif. Cette proposition s'appuie sur une description Lagrangienne d'un sol bi-phasique, tout en considérant que la phase liquide saturante est un mélange de deux espèces, l'une liquide et l'autre solide.
- II La thermodynamique des milieux poreux a été employée pour obtenir une nouvelle forme de l'inégalité de Clausius-Duhem. Cette forme permet de coupler les sources dissipatives propres au fluide et à la suffusion. Ceci a abouti à la formulation d'une loi de comportement couplant écoulement et cinétique de suffusion. Au sein d'un tel couplage, la loi de Darcy apparaît modifiée et un écoulement peut être induit par une suffusion spontanée. Par ailleurs, le gradient de pression est identifié comme l'une des deux forces pilotant la cinétique de suffusion. L'autre force considérée est la différence entre le potentiel chimique du fluide et la pression du fluide. A cette différence s'ajoute également la contribution de l'énergie libre du squelette, permettant de coupler le comportement squelettique à la suffusion.
- III Un modèle de plasticité existant a été étendu au cas de la suffusion. Pour ce faire, la loi d'écrouissage a été modifiée de manière à intégrer la porosité induite par suffusion comme une variable d'écrouissage. Cette modification permet de modéliser la transition comportementale propre aux sols suffusifs, d'un comportement dense à un comportement lâche. Cette nouvelle loi d'écrouissage permet de plus de modéliser le développement des déformations plastiques qui opèrent dans un sol en cours de suffusion. La pente de l'état caractéristique du sol est également paramétrée par la porosité induite par suffusion. Nous avons donc proposé la définition d'un « fuseau » caractéristique. La position de l'état mécanique du sol par rapport à ce fuseau caractéristique pilote la nature des déformations plastiques qui se

développent au cours de la suffusion. Par ailleurs, cette paramétrisation permet de prendre en compte une éventuelle altération, par suffusion, de la contrainte résiduelle pouvant être supportée par le sol.

- IV Les capacités du modèle ont été évaluées comparativement à des résultats expérimentaux issus de la littérature. Le modèle est effectivement capable d'appréhender les principales caractéristiques mécaniques d'un sol suffusif au cours d'un essai triaxial drainé, à savoir la transition d'un comportement dense vers un comportement lâche, la disparition d'un pic de résistance, le développement de déformations plastiques, la réduction de résistance résiduelle.
- V Le comportement oedométrique d'un sol suffusif a été analysé, et nous avons montré que l'état de contrainte effective évolue naturellement vers un état caractérisé par un ratio de contrainte  $\xi_{lim}$  constant et correspondant à une dilatance de  $3/2$ . L'indice des vides d'un sol augmente au cours de la suffusion dans le cas où son comportement est élastique. Sinon, des déformations plastiques induisent un tassement tel que la variation d'indice des vides induite par suffusion est compensée. La suffusion n'influe pas sur la ligne de pression des terres au repos.
- VI Le modèle de comportement élasto-plastique a été implémenté dans un code aux éléments finis. Cette implémentation est basée sur une évaluation implicite d'une raideur tangente consistante d'un point de vue algorithmique au sens de Simo et Hughes [63]. La justesse de l'implémentation a été vérifiée en comparant les résultats de simulations aux éléments finis à ceux issus des simulations sur un point matériel.

## 7.2 Analyse par homogénéisation périodique du phénomène de suffusion

- I Un problème vrai a été formulé. Ce problème vrai intègre une microstructure évolutive dont la géométrie est appréhendée par la méthode des courbes de niveau. Les équations du problème vrai ont été déduites des lois de conservations élémentaires et des lois de comportements justifiées au sens de la thermodynamique.
- II La mise sous forme adimensionnelle du problème vrai a permis de dégager un contingent de nombres sans dimension. Deux jeux d'hypothèses en ordres de grandeur ont été proposés et servent de base à la procédure d'homogénéisation quasi-périodique.
- III La procédure d'homogénéisation quasi-périodique a été réalisée en mettant en évidence les problématiques en lien avec l'évolution de la microstructure. Deux problèmes homogénéisés ont été formulés et comparés.
- IV Le premier problème homogénéisé est similaire à celui proposé par Bouddour *et al.* [47] et permet de prescrire la cinétique d'érosion (représentée par l'évolution de la porosité) en fonction de la vitesse de l'interface étendue (et donc de l'évolution de la microstructure). En choisissant convenablement la vitesse étendue de l'interface, il est *a priori* possible de donner une interprétation microscopique des paramètres de couplage introduit *via* le modèle de suffusion macroscopique. *A contrario*, le premier problème homogénéisé ne permet pas de considérer un effet de la suffusion sur l'écoulement du fluide. Autrement dit, aucun écoulement ne sera induit par suffusion spontanée.

V Un second modèle homogénéisé a été formulé. Ce modèle reprend les capacités du premier modèle quant à sa faculté à représenter la cinétique de suffusion. De plus, ce modèle permet de modéliser un écoulement macroscopique induit par un mouvement de l'interface. Un tel écoulement est alors principalement piloté par la géométrie de la cellule élémentaire considérée, et plus particulièrement de son anisotropie. Dès lors, en choisissant proprement la vitesse de l'interface étendue, le modèle devrait *a priori* être capable de retrouver la structure de la loi de comportement couplée proposée dans le modèle macroscopique. Cependant, le modèle ne permet pas d'envisager la symétrie du tenseur de couplage.

## 7.3 Perspectives

- I Le modèle d'élasto-plasticité pour sol suffusif a été implémenté dans un code aux éléments finis. Il est maintenant nécessaire d'implémenter en sus la « phase fluide » du milieu poreux suffusif, à savoir le problème de l'écoulement couplé au développement de la suffusion. Cette implémentation *poro*-élasto-plastique complète devrait permettre de pouvoir évaluer le comportement d'un sol suffusif vis-à-vis de la consolidation.
- II La suffusion est une source d'hétérogénéité (voir Chang et Zhang [20] Sail *et al.* [94], Nguyen *et al.* [81]). Ceci pose la question de la représentativité des essais de laboratoire. En effet, une fois une telle hétérogénéité développée, est-il toujours possible d'identifier un échantillon avec un volume élémentaire représentatif (VER) du point de vue de la réponse mécanique ? La formulation aux éléments finis du modèle d'élasto-plasticité avec suffusion permet d'introduire un champ hétérogène de porosités induites par suffusion. Dès lors, il est possible d'analyser et de quantifier l'écart entre les réponses mécaniques respectives d'un matériaux érodé de façon hétérogène et celle d'un matériau témoin érodé de façon homogène. Ceci permettrait de conclure quant à la possibilité d'identifier un échantillon érodé avec un VER, sur le plan mécanique, et sur les possibilités d'estimations des paramètres d'un modèle de comportement poro-mécanique pour sol suffusif
- III Le modèle homogénéisé ne permet pas de retrouver un tenseur de couplage symétrique. Dès lors, afin de réduire l'écart entre le modèle macroscopique et celui issu de l'homogénéisation, il peut être envisagé (*i*) de modifier la loi de comportement macroscopique. Nous avons en effet postulé ce couplage à partir de la thermodynamique mais il demeure possible d'envisager une loi de couplage différente ; (*ii*) de reformuler un jeu d'hypothèses en ordres de grandeur pour aboutir à un nouveau problème homogénéisé.



# Bibliographie

- [1] Ministère de la transition écologique . Ouvrages hydrauliques, barrages et digues <https://www.ecologie.gouv.fr/ouvrages-hydrauliques-barrages-et-digues> Consulté le 2 septembre 2020.
- [2] Bonelli S. *Erosion of geomaterials*. John Wiley & Sons ; 2012.
- [3] Veeken C-A-M., Davies D-R., Kenter C-J, Kooijman A-P., others . Sand production prediction review : developing an integrated approach. In : Society of Petroleum Engineers ; 1991.
- [4] Sibille L. Erosion interne et rupture dans les sols grenus. Habilitation à diriger des recherches. Grenoble 1 UGA - Université Grenoble Alpe, 2019.
- [5] Laffleur J., Mlynarek J., Rollin A-L. Filtration of broadly graded cohesionless soils. *Journal of Geotechnical Engineering*. 1989 ;115(12) :1747–1768.
- [6] Marot D., Bendahmane F., Nguyen H-H. Influence of angularity of coarse fraction grains on internal erosion process. *La Houille Blanche*. 2012 ;(6) :47–53.
- [7] Chang D-S., Zhang L-M. Critical hydraulic gradients of internal erosion under complex stress states. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*. 2012 ;139(9) :1454–1467.
- [8] Kenney T-C, Lau D. Internal stability of granular filters. *Canadian geotechnical journal*. 1985 ;22(2) :215–225.
- [9] Wan C-F., Fell R. Investigation of rate of erosion of soils in embankment dams. *Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering*. 2004 ;130(4) :373–380.
- [10] Li M., Fannin R-J. Comparison of two criteria for internal stability of granular soil. *Canadian Geotechnical Journal*. 2008 ;45(9) :1303–1309.
- [11] von Terzaghi K., Peck R-B., Mesri G. *Soil mechanics in engineering practice*. John Wiley & Sons ; 1996.
- [12] W. Skempton A, M. Brogan J. Experiments on piping in sandy gravels. *Geotechnique*. 1994 ;44 :449-460.
- [13] Reddi L-N., Lee I-M., Bonala M-V-S. Comparison of internal and surface erosion using flow pump tests on a sand-kaolinite mixture. *Geotechnical testing journal*. 2000 ;23(1) :116–122.

- [14] Perzlmaier S., Muckenthaler P., Koelewijn A-R. Hydraulic criteria for internal erosion in cohesionless soil. *Fell, R. and Fry, J.-J.(Eds.), Internal erosion of dams and their foundations.* 2007 ; :179–190.
- [15] Marot D., Le V-D., Garnier J., Thorel L., Audrain P. Study of scale effect in an internal erosion mechanism : centrifuge model and energy analysis. *European Journal of Environmental and Civil Engineering.* 2012 ;16(1) :1–19.
- [16] Rochim A., Marot D., Sibille L., Le V-T. Effects of Hydraulic Loading History on Suffusion Susceptibility of Cohesionless Soils. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering.* 2017 ;143(7) :04017025.
- [17] Marot D., Rochim A., Nguyen H-H., Bendahmane F., Sibille L. Assessing the susceptibility of gap-graded soils to internal erosion : proposition of a new experimental methodology. *Natural Hazards.* 2016 ;83(1) :365–388.
- [18] Sterpi D.. Effects of the erosion and transport of fine particles due to seepage flow. *International journal of Geomechanics.* 2003 ;3(1) :111–122.
- [19] Bendahmane F., Marot D., Alexis A. Experimental parametric study of suffusion and backward erosion. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering.* 2008 ;134(1) :57–67.
- [20] Chang D-S, Zhang L-M. A stress-controlled erosion apparatus for studying internal erosion in soils. *Geotechnical Testing Journal.* 2011 ;34(6) :579–589.
- [21] Aboul Hosn R. Suffusion and its effects on the mechanical behavior of granular soils : numerical and experimental investigations. Thèse de doctorat. Université Grenoble Alpes, 2017.
- [22] Ke L., Takahashi A.. Experimental investigations on suffusion characteristics and its mechanical consequences on saturated cohesionless soil. *Soils and Foundations.* 2014 ;54(4) :713–730.
- [23] Muir Wood D, Maeda K, Nukudani E. Modelling mechanical consequences of erosion. *Géotechnique.* 2010 ;60(6) :447–457.
- [24] Scholtès L., Hicher P-Y., Sibille L. Multiscale approaches to describe mechanical responses induced by particle removal in granular materials. *Comptes Rendus Mécanique.* 2010 ;338(10-11) :627–638.
- [25] Aboul Hosn R., Sibille L., Benahmed N., Chareyre B. A discrete numerical model involving partial fluid-solid coupling to describe suffusion effects in soils. *Computers and Geotechnics.* 2018 ;95 :30–39.
- [26] Hu Z., Zhang Y., Yang Z. Suffusion-induced deformation and microstructural change of granular soils : a coupled CFD–DEM study. *Acta Geotechnica.* 2019 ;14(3) :795–814.
- [27] Wautier A., Bonelli S., Nicot F. Rattlers’ contribution to granular plasticity and mechanical stability. *International Journal of Plasticity.* 2019 ;112 :172–193.
- [28] Taha H. Mechanical behavior of eroded soils : numerical study based on the DEM. Thèse de doctorat. Université de Nantes, 2019.

- [29] Taha H., Nguyen N-S., Marot D., Hijazi A., Abou-Saleh K.. Micro-scale investigation of the role of finer grains in the behavior of bidisperse granular materials. *Granular Matter*. 2019 ;21(2) :28.
- [30] Vardoulakis I., Stavropoulou M., Papanastasiou P. Hydro-mechanical aspects of the sand production problem. *Transport in porous media*. 1996 ;22(2) :225–244.
- [31] Stavropoulou M., Papanastasiou P., Vardoulakis I. Coupled wellbore erosion and stability analysis. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*. 1998 ;22(9) :749–769.
- [32] Vardoulakis I., Papamichos E. A continuum theory for erosion in granular media. *Actes de la journées scientifique internationale, Cermes*. 2001 ;21 :41–60.
- [33] Papamichos E., Vardoulakis I., Tronvoll J., Skjaerstein A. Volumetric sand production model and experiment. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*. 2001 ;25(8) :789–808.
- [34] Papamichos E., Vardoulakis I. Sand erosion with a porosity diffusion law. *Computers and Geotechnics*. 2005 ;32(1) :47–58.
- [35] Papamichos Euripides. Erosion and multiphase flow in porous media : Application to sand production. *European journal of environmental and civil engineering*. 2010 ;14(8-9) :1129–1154.
- [36] Yang J., Yin Z-Y., Laouafa F., Hicher P-Y. Internal erosion in dike-on-foundation modeled by a coupled hydromechanical approach. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 2019 ;43(3) :663–683.
- [37] Yang J., Yin Z-Y, Laouafa F, Hicher P-Y. Modeling coupled erosion and filtration of fine particles in granular media. *Acta Geotechnica*. 2019 ;14(6) :1615–1627.
- [38] Yang J., Yin Z-Y., Laouafa F., Hicher P-Y. Hydromechanical modeling of granular soils considering internal erosion. *Canadian Geotechnical Journal*. 2020 ;57(2) :157–172.
- [39] Zhang X-S., Wong H., Leo C-J, et al. A thermodynamics-based model on the internal erosion of earth structures. *Geotechnical and Geological Engineering*. 2013 ;31(2) :479–492.
- [40] Bui T-A., Gelet R., Marot D. Modelling of internal erosion based on mixture theory : General framework and a case study of soil suffusion. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 2019 ;43(15) :2407–2430.
- [41] Kodieh A., Gelet R., Marot D., Fino A-Z. A study of suffusion kinetics inspired from experimental data : comparison of three different approaches. *Acta Geotechnica*. 2020 ; :1–19.
- [42] Lemaitre J. *A course on damage mechanics*. Springer Science & Business Media ; 2012.
- [43] Coussy O. *Poromechanics*. Wiley ; 2004.
- [44] Marot D., Regazzoni P-L, Wahl T.. Energy-based method for providing soil surface erodibility rankings. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*. 2011 ;137(12) :1290–1293.

- [45] Sibille L., Marot D., Sail Y. A description of internal erosion by suffusion and induced settlements on cohesionless granular matter. *Acta Geotechnica*. 2015 ;10(6) :735–748.
- [46] Sciarra G., Dell’Isola F., Coussy O. Second gradient poromechanics. *International Journal of Solids and Structures*. 2007 ;44(20) :6607–6629.
- [47] Bouddour A, Auriault J-L, Mhamdi-Alaoui M. Erosion and deposition of solid particles in porous media : Homogenization analysis of a formation damage. *Transport in porous media*. 1996 ;25(2) :121–146.
- [48] Allaire G. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 1992 ;23(6) :1482–1518.
- [49] Hornung U. *Homogenization and porous media*. Springer Science & Business Media ; 1996.
- [50] Auriault J-L., Boutin C., Geindreau C. *Homogenization of coupled phenomena in heterogenous media*. John Wiley & Sons ; 2010.
- [51] Allaire G. Homogenization of the Stokes flow in a connected porous medium. *Asymptotic Analysis*. 1989 ;2(3) :203–222.
- [52] van Noorden T-L. Crystal precipitation and dissolution in a porous medium : effective equations and numerical experiments. *Multiscale Modeling & Simulation*. 2009 ;7(3) :1220–1236.
- [53] van Noorden T-L, Muntean A. Homogenization of a locally-periodic medium with areas of low and high diffusivity. *arXiv preprint arXiv :1003.3979*. 2010 ;.
- [54] Osher S., Fedkiw R. *The Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Springer ; 2004.
- [55] Biot M-A. General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of applied physics*. 1941 ;12(2) :155–164.
- [56] Sciarra G. Phase field modeling of partially saturated deformable porous media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2016 ;94 :230–256.
- [57] Germain P. *Cours de mécanique des milieux continus*. Masson ; 1973.
- [58] Nova R. *Soil mechanics*. Wiley Online Library ; 2010.
- [59] Germain P. La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus, première partie : théorie du second gradient. *Journal de mécanique*. 1973 ;12(2) :235–274.
- [60] Nova R, Wood David Muir. A constitutive model for sand in triaxial compression. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*. 1979 ;3(3) :255–278.
- [61] Moffat R., Fannin R-J. A hydromechanical relation governing internal stability of cohesionless soil. *Canadian Geotechnical Journal*. 2011 ;48(3) :413–424.
- [62] Hill R. *The mathematical theory of plasticity*. Oxford university press ; 1998.
- [63] Simo J-C., Hughes T-J-R. *Computational inelasticity*. Springer Science & Business Media ; 2006.

- [64] Borja R-I. *Plasticity : modeling & computation*. Springer Science & Business Media ; 2013.
- [65] Han W., Reddy B-D. *Plasticity : mathematical theory and numerical analysis*. Springer Science & Business Media ; 2012.
- [66] Puzrin A. *Constitutive modelling in geomechanics : introduction*. Springer Science & Business Media ; 2012.
- [67] Drucker D-C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design. *Quarterly of applied mathematics*. 1952 ;10(2) :157–165.
- [68] Matsuoka H., Nakai T. Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses. *Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers*. 1974 ;1974(232) :59–70.
- [69] Roscoe K-H., Schofield A-N., Wroth C-P. On the yielding of soils. *Geotechnique*. 1958 ;8(1) :22–53.
- [70] Schofield A-N., Wroth C-P. *Critical state soil mechanics*. McGraw-hill ; 1968.
- [71] Roscoe K-H., Burland J-B. On the generalized stress-strain behaviour of wet clay. 1968 ;
- [72] Jefferies M-G. Nor-Sand : a simple critical state model for sand. *Géotechnique*. 1993 ;43(1) :91–103.
- [73] Nova R. Sinfonietta classica : an exercise on classical soil modelling. *Constitutive Equations for Granular non-cohesive soils*. 1988 ; :501–519.
- [74] Liu M-D., Carter J-P. A structured Cam Clay model. *Canadian Geotechnical Journal*. 2002 ;39(6) :1313–1332.
- [75] Nova R., Castellanza R., Tamagnini C. A constitutive model for bonded geomaterials subject to mechanical and/or chemical degradation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 2003 ;27(9) :705–732.
- [76] Gens A., Nova R. Conceptual bases for a constitutive model for bonded soils and weak rocks. In : :485–494 ; 1993.
- [77] Castellanza R., Nova R. Oedometric tests on artificially weathered carbonatic soft rocks. *Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering*. 2004 ;130(7) :728–739.
- [78] Tamagnini R. An extended Cam-clay model for unsaturated soils with hydraulic hysteresis. *Géotechnique*. 2004 ;54(3) :223–228.
- [79] Rotisciani G-M., Sciarra G, Casini F., Desideri A. Hydro-mechanical response of collapsible soils under different infiltration events. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 2015 ;39(11) :1212–1234.
- [80] Nova R. A simple elastoplastic model for soils and soft rocks. In : 2005 (pp. 380–399).
- [81] Nguyen C-D. Etude expérimentale de l'impact de l'érosion par suffusion sur les propriétés physiques et mécaniques des sols. Thèse de doctorat. Université d'Aix-Marseille, 2018.

- [82] de Souza Neto E-A., Peric D., Owen D-R-J. *Computational methods for plasticity : theory and applications*. John Wiley & Sons ; 2011.
- [83] A. Logg, Mardal K-A., Wells G-N., others . *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*. Springer ; 2012.
- [84] Ølgaard K-B., Wells G-N. FEniCS Solid Mechanics <https://bitbucket.org/fenics-apps/fenics-solid-mechanics/src/master/> Consulté le 6 juin 2020.
- [85] C. Geuzaine, Remacle J-F. GMSH <https://gmsh.info/> Consulté le 29 juillet 2020.
- [86] Ayachit U. *The ParaView Guide : A Parallel Visualization Application*. Kitware ; 2015.
- [87] Bonelli S., Marot D. Micromechanical modeling of internal erosion. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*. 2011 ;15(8) :1207–1224.
- [88] Zhao Hong-Kai, Chan Tony, Merriman Barry, Osher Stanley. A variational level set approach to multiphase motion. *Journal of computational physics*. 1996 ;127(1) :179–195.
- [89] Dormieux L., Kondo D., Ulm F-J. *Microporomechanics*. John Wiley & Sons ; 2006.
- [90] Chechkin G-A., Piatnitski A-L. Homogenization of boundary-value problem in a locally periodic perforated domain. *Applicable Analysis*. 1998 ;71(1-4) :215–235.
- [91] Bringedal C., Berre I., Pop I-S., Radu F-A. Upscaling of non-isothermal reactive porous media flow with changing porosity. *Transport in Porous Media*. 2016 ;114(2) :371–393.
- [92] Allaire G., Briane M., Vanninathan M. A comparison between two-scale asymptotic expansions and Bloch wave expansions for the homogenization of periodic structures. *SEMA journal*. 2016 ;73(3) :237–259.
- [93] Gunzburger M-D. *Finite element methods for viscous incompressible flows : a guide to theory, practice, and algorithms*. Elsevier ; 2012.
- [94] Sail Y., Marot D., Sibille L., Alexis A.. Suffusion tests on cohesionless granular matter : Experimental study. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*. 2011 ;15(5) :799–817.

# Annexe A

## Réarrangement de l'inégalité de Clausius-Duhem

Ce chapitre est dédié au réarrangement de l'inégalité de Clausius-Duhem (2.57). On cherche ici à réarranger le terme  $T_1$  suivant :

$$T_1 = - (h^f M_i)_{,i} - S\dot{T} - (\dot{m}^f \psi^f + m^f \dot{\psi}^f) + T (s^f M_i)_{,i} \quad (\text{A.1})$$

En particulier, on cherche à prouver la validité de l'équation (2.60), que l'on rappelle ici :

$$- (h^f M_i)_{,i} - S\dot{T} - (\dot{m}^f \psi^f + m^f \dot{\psi}^f) + T (s^f M_i)_{,i} = -\frac{P_{,i}}{\rho^f} M_i + \dot{\phi}^{er} (p - \rho^s \mu^f) + p\dot{J} - S^s \dot{T} \quad (\text{A.2})$$

En considérant  $S = S^s + m^f s^f$  on a :

$$T_1 = - (h^f M_i)_{,i} - s^f m^f \dot{T} - (\dot{m}^f \psi^f + m^f \dot{\psi}^f) + T (s^f M_i)_{,i} - S^s \dot{T} \quad (\text{A.3})$$

En développant les dérivations et en considérant le potentiel de Gibbs  $\mu^f = h^f + T s^f$  on a :

$$\begin{aligned} T_1 &= - (h^f + T s^f)_{,i} M_i + - (h^f + T s^f) M_{i,i} - s^f T_{,i} M_i - s^f m^f \dot{T} \\ &- (\dot{m}^f \psi^f + m^f \dot{\psi}^f) - S^s \dot{T} \\ &= -\mu_{,i}^f M_i + -\mu^f M_{i,i} - s^f T_{,i} M_i - s^f m^f \dot{T} - (\dot{m}^f \psi^f + m^f \dot{\psi}^f) - S^s \dot{T} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Maintenant considérons le bilan de la masse du fluide (2.18) et les lois de comportement du fluide (2.59) :

$$\begin{aligned} T_1 &= -\mu_{,i}^f M_i + -\mu^f M_{i,i} - s^f T_{,i} M_i - s^f m^f \dot{T} \\ &- \left( (\hat{\Gamma} - M_{i,i}) \psi^f + m^f \frac{\partial \psi^f}{\partial T} \dot{T} - m^f \frac{\partial \psi^f}{\partial 1/\rho^f} \frac{\dot{\rho}^f}{\rho^{f2}} \right) - S^s \dot{T} \\ &= -\mu_{,i}^f M_i + -\mu^f M_{i,i} - s^f T_{,i} M_i - \left( (\hat{\Gamma} - M_{i,i}) \psi^f + \frac{p}{\rho^f} \frac{m^f}{\rho^f} \dot{\rho}^f \right) - S^s \dot{T} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Dans cette égalité, on remarque, par bilan de masse du fluide (2.18) que :

$$\frac{p}{\rho^f} \frac{m^f}{\rho^f} \dot{\rho}^f = \frac{p}{\rho^f} \phi \dot{\rho}^f = \frac{p}{\rho^f} (\hat{\Gamma} - M_{i,i} - \dot{\phi} \rho^f) \quad (\text{A.6})$$

En réinjectant ce résultat dans (A.5) on a :

$$\begin{aligned} T_1 &= -\mu_{,i}^f M_i + -\mu^f M_{i,i} - s^f T_{,i} M_i - \left( (\hat{\Gamma} - M_{i,i}) \left( \psi^f + \frac{p}{\rho^f} \right) - p\dot{\phi} \right) - S^s \dot{T} \\ &= -\mu_{,i}^f M_i - s^f T_{,i} M_i - \hat{\Gamma} \mu^f + p\dot{\phi} - S^s \dot{T} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

On détaille le gradient de  $\mu^f$ . Pour cela on considère  $\mu^f = \psi^f + p/\rho^f$ , la règle de dérivation des fonctions composées, et les lois de comportement du fluide :

$$\begin{aligned} \mu_{,i}^f &= \psi_{,i}^f + \left( \frac{p}{\rho^f} \right)_{,i} \\ &= \frac{\partial \psi^f}{\partial T} T_{,i} - \frac{\partial \psi^f}{\partial 1/\rho^f} \frac{\rho_{,i}^f}{\rho^{f2}} + \frac{p_{,i}}{\rho^f} - p \frac{\rho_{,i}^f}{\rho^{f2}} \\ &= -s^f T_{,i} + \frac{p_{,i}}{\rho^f} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

On réinjecte ce résultat dans (A.7) :

$$\begin{aligned} T_1 &= \left( s^f T_{,i} - \frac{p_{,i}}{\rho^f} \right) M_i - s^f T_{,i} M_i - \hat{\Gamma} \mu^f + p\dot{\phi} - S^s \dot{T} \\ &= -\frac{p_{,i}}{\rho^f} M_i - \hat{\Gamma} \mu^f + p\dot{\phi} - S^s \dot{T} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Maintenant, on exploite la condition d'incompressibilité des grains (2.21) et le bilan de masse du squelette solide exprimé en fonction de  $\phi^{er}$  (2.22). En remplaçant  $T_1$  par son expression originale, on achève la preuve :

$$-(h^f M_i)_{,i} - S \dot{T} - \left( \dot{m}^f \psi^f + m^f \dot{\psi}^f \right) + T (s^f M_i)_{,i} = -\frac{p_{,i}}{\rho^f} M_i + \dot{\phi}^{er} (p - \rho^s \mu^f) + p \dot{J} - S^s \dot{T} \quad (\text{A.10})$$

# Annexe B

## Autour de « Sinfonietta-Classica »

### B.1 Dérivation du modèle

La première section de cette annexe concerne l'évaluation des dérivations respectives de la fonction de charge  $f$ , du potentiel plastique  $g$ , et de la fonction  $\mathfrak{h}$  mises en jeu par le modèle « Sinfonietta-Classica ». On rappelle que les expressions de  $f$  et de  $g$  sont données comme suit :

$$f(\boldsymbol{\sigma}', p_c) = 3\beta(z-3) \ln \frac{p'}{p_c} + \frac{9}{4}(z-1) J_{2\xi} + z J_{3\xi} \quad (\text{B.1a})$$

$$g(\boldsymbol{\sigma}', p_g) = 9(z-3) \ln \frac{p'}{p_g} + \frac{9}{4}(z-1) J_{2\xi} + z J_{3\xi} \quad (\text{B.1b})$$

avec :

$$p' = -\frac{1}{3}\sigma'_{ii}, \quad s'_{ij} = \sigma'_{ij} + p\delta_{ij}, \quad \xi_{ij} = \frac{s'_{ij}}{p'}, \quad J_2 = \frac{1}{2}s'_{ij}s'_{ij}, \quad q = \sqrt{3J_2}, \quad \xi = \frac{q}{p'} \quad (\text{B.2})$$

ainsi que :

$$J_{2\xi} = \xi_{ij}\xi_{ij}, \quad J_{3\xi} = \xi_{ij}\xi_{jk}\xi_{ki} \quad (\text{B.3})$$

Avant de procéder aux dérivations, on va reformuler ces expressions en faisant intervenir la force d'écouissage  $\mathfrak{q}$ , ainsi que la partie déviatorique  $\mathbf{s}'$  du tenseur des contraintes effectives :

$$\mathfrak{q} = -\ln p_c, \quad s'_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij} \quad (\text{B.4})$$

On rappelle de plus que la force d'écouissage évolue selon :

$$\dot{\mathfrak{q}} = -\dot{\lambda}H\mathfrak{h} + H\dot{\phi}^{er} \quad (\text{B.5})$$

Avec :

$$\mathfrak{h} = -\frac{\partial g}{\partial \sigma'_{kl}}\delta_{kl} + \varkappa \sqrt{\left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right) \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{kl}} \left(\delta_{im}\delta_{jn} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{mn}\right) \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{mn}}} \quad (\text{B.6})$$

La fonction de charge et le potentiel plastique se reformulent alors comme suit :

$$f(\boldsymbol{\sigma}', \mathfrak{q}) = 3\beta(z-3) (\ln(p') + \mathfrak{q}) + \frac{9}{4}(z-1) \frac{s'_{ij}s'_{ij}}{p'^2} + z \frac{s'_{ij}s'_{jk}s'_{ki}}{p'^3} \quad (\text{B.7a})$$

$$g(\boldsymbol{\sigma}', p_g) = 9(z-3) (\ln(p') - \ln(p_g)) + \frac{9}{4}(z-1) \frac{s'_{ij}s'_{ij}}{p'^2} + z \frac{s'_{ij}s'_{jk}s'_{ki}}{p'^3} \quad (\text{B.7b})$$

On cherche à estimer la dérivée partielle de la fonction de charge par rapport à la contrainte effective. Pour ce faire on emploie le théorème de dérivation des fonctions composées :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial p'} \frac{\partial p'}{\partial \sigma'_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial s'_{kl}} \frac{\partial s'_{kl}}{\partial \sigma'_{ij}} \quad (\text{B.8})$$

Où on a :

$$\frac{\partial p'}{\partial \sigma'_{ij}} = -\frac{1}{3} \frac{\partial \sigma_{kl} \delta_{kl}}{\partial \sigma'_{ij}} = -\frac{1}{3} \delta_{ki} \delta_{lj} \delta_{kl} = -\frac{1}{3} \delta_{ij} \quad (\text{B.9a})$$

$$\frac{\partial s'_{kl}}{\partial \sigma'_{ij}} = \frac{\partial \sigma'_{kl} + p' \delta_{kl}}{\partial \sigma'_{ij}} = \delta_{ki} \delta_{lj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (\text{B.9b})$$

Ensuite, on calcul la dérivée de  $s'_{kl} s'_{kl}$  par rapport à  $s'_{ij}$  :

$$\frac{\partial s'_{kl} s'_{kl}}{\partial s'_{ij}} = 2 \frac{\partial s'_{kl}}{\partial s'_{ij}} s'_{kl} = 2 \left( \delta_{ki} \delta_{lj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) s'_{kl} \quad (\text{B.10})$$

Comme  $\mathbf{s}'$  est un tenseur déviatorique, alors  $s'_{kl} \delta_{kl} = 0$  :

$$\frac{\partial s'_{kl} s'_{kl}}{\partial s'_{ij}} = 2 s'_{ij} \quad (\text{B.11})$$

On fait de même pour la dérivée de  $s'_{kl} s'_{lm} s'_{mk}$  par rapport à  $s'_{ij}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial s'_{kl} s'_{lm} s'_{mk}}{\partial s'_{ij}} &= \delta_{ki} \delta_{lj} s'_{lm} s'_{mk} + \delta_{li} \delta_{mj} s'_{kl} s'_{mk} + \delta_{mi} \delta_{kj} s'_{kl} s'_{lm} \\ &= s'_{jm} s'_{mi} + s'_{ki} s'_{jk} + s'_{jl} s'_{li} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Puisque  $\mathbf{s}'$  est symétrique :

$$\frac{\partial s'_{kl} s'_{lm} s'_{mk}}{\partial s'_{ij}} = 3 s'_{ik} s'_{kj} \quad (\text{B.13})$$

On dispose alors de toutes les informations pour évaluer la dérivée partielle de  $f$  par rapport à la contrainte effective :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} &= - \left( \frac{3\beta(z-3)}{p'} - \frac{9}{2}(z-1) \frac{s'_{kl} s'_{kl}}{p'^3} - 3z \frac{s'_{kl} s'_{lm} s'_{mk}}{p'^4} \right) \frac{\delta_{ij}}{3} \\ &+ \left( \frac{9}{2}(z-1) \frac{s'_{kl}}{p'^2} + 3z \frac{s'_{km} s'_{ml}}{p'^3} \right) \left( \delta_{ki} \delta_{lj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Par analogie on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{ij}} &= - \left( \frac{9(z-3)}{p'} - \frac{9}{2}(z-1) \frac{s'_{kl} s'_{kl}}{p'^3} - 3z \frac{s'_{kl} s'_{lm} s'_{mk}}{p'^4} \right) \frac{\delta_{ij}}{3} \\ &+ \left( \frac{9}{2}(z-1) \frac{s'_{kl}}{p'^2} + 3z \frac{s'_{km} s'_{ml}}{p'^3} \right) \left( \delta_{ki} \delta_{lj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

On exprime finalement la dérivée partielle de  $f$  par rapport à la force d'érouissage  $\mathbf{q}$  :

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} = 3\beta(z-3) \quad (\text{B.16})$$

Dans le cadre des simulations par la méthode des éléments finis présentée dans la section 3.3.2.2, l'évaluation de la matrice de raideur tangente  $\mathbb{C}^{ep}$  nécessite la connaissance des quantités suivantes :

$$\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial \mathbf{q}}, \quad \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial \sigma'_{ij}}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma'_{ij} \partial \sigma'_{kl}}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma'_{ij} \partial \mathbf{q}} \quad (\text{B.17})$$

Concernant les termes impliquant une différentiation vis-à-vis de  $\mathbf{q}$ , étant donnée la définition de  $\mathfrak{h}$  (voir équation (B.6)) et l'indépendance de  $g$  (voir équation (B.7)) par rapport à  $\mathbf{q}$  il est clair que :

$$\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial \mathbf{q}} = 0, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma'_{ij} \partial \mathbf{q}} = 0 \quad (\text{B.18})$$

Avant de procéder au calcul de la dérivée partielle de  $\mathfrak{h}$  par rapport à la contrainte effective, on reformule l'expression de  $\mathfrak{h}$ . Pour ce faire, commençons par réaliser la réduction suivante :

$$\begin{aligned} \left( \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{\delta_{ij} \delta_{kl}}{3} \right) \left( \delta_{im} \delta_{jn} - \frac{\delta_{ij} \delta_{mn}}{3} \right) &= \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{im} \delta_{jn} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{ij} \delta_{mn} \\ &\quad - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{im} \delta_{jn} + \frac{1}{9} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{ij} \delta_{mn} \\ &= \delta_{km} \delta_{ln} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{mn} \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Permettant d'écrire  $\mathfrak{h}$  de la façon suivante :

$$\mathfrak{h} = -\frac{\partial g}{\partial \sigma'_{kl}} \delta_{kl} + \varkappa \sqrt{\left( \delta_{km} \delta_{ln} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{mn} \right) \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{kl}} \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{mn}}} \quad (\text{B.20})$$

En considérant l'orthogonalité de la partie sphérique et de la partie déviatorique du tenseur des contraintes, on écrit que :

$$\left( \delta_{km} \delta_{ln} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{mn} \right) \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{kl}} = \left( \delta_{km} \delta_{ln} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{mn} \right) \left( \frac{\partial g}{\partial p'} \frac{\partial p'}{\partial \sigma'_{kl}} + \frac{\partial g}{\partial s'_{pq}} \frac{\partial s'_{pq}}{\partial \sigma'_{kl}} \right) \quad (\text{B.21})$$

Etant donné que la projection déviatorique d'un tenseur sphérique est nulle, on a :

$$\left( \delta_{km} \delta_{ln} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{mn} \right) \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{kl}} = \left( \delta_{km} \delta_{ln} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{mn} \right) \frac{\partial g}{\partial s'_{pq}} \frac{\partial s'_{pq}}{\partial \sigma'_{kl}} \quad (\text{B.22})$$

Puisque la dérivation de la partie déviatorique de  $\boldsymbol{\sigma}'$  par rapport à  $\boldsymbol{\sigma}'$  donne le tenseur de projection déviatorique, alors :

$$\left( \delta_{km} \delta_{ln} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{mn} \right) \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{kl}} = \left( \delta_{km} \delta_{ln} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{mn} \right) \left( \delta_{pk} \delta_{ql} - \frac{1}{3} \delta_{pq} \delta_{kl} \right) \frac{\partial g}{\partial s'_{pq}} \quad (\text{B.23})$$

Comme  $\partial g / \partial s'_{pq}$  représente les composantes d'un tenseur déjà déviatorique, alors :

$$\left( \delta_{km} \delta_{ln} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{mn} \right) \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{kl}} = \frac{\partial g}{\partial s'_{kl}} \quad (\text{B.24})$$

On réinjecte ce résultat dans l'expression de  $\mathfrak{h}$  (B.20). On a alors :

$$\mathfrak{h} = -\frac{\partial g}{\partial \sigma'_{kl}} \delta_{kl} + \varkappa \sqrt{\frac{\partial g}{\partial s'_{kl}} \frac{\partial g}{\partial s'_{kl}}} \quad (\text{B.25})$$

Maintenant, à l'aide de la règle de dérivation des compositions de fonctions on a :

$$\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial \sigma'_{ij}} = -\delta_{kl} \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma'_{kl} \partial \sigma'_{ij}} - \varkappa \frac{\frac{\partial g}{\partial s'_{kl}}}{\sqrt{\frac{\partial g}{\partial s'_{pq}} \frac{\partial g}{\partial s'_{pq}}}} \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma'_{kl} \partial \sigma'_{ij}} \quad (\text{B.26})$$

En considérant :

$$\frac{\partial g}{\partial s'_{kl}} \frac{\partial^2 g}{\partial s'_{kl} \partial \sigma'_{ij}} = \frac{\partial g}{\partial s'_{kl}} \left( \delta_{mk} \delta_{nl} - \frac{1}{3} \delta_{mn} \delta_{kl} \right) \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma'_{mn} \partial \sigma'_{ij}} = \frac{\partial g}{\partial s'_{mn}} \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma'_{mn} \partial \sigma'_{ij}} \quad (\text{B.27})$$

On a finalement, après un bref réarrangement d'indice :

$$\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial \sigma'_{ij}} = -\delta_{kl} \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma'_{kl} \partial \sigma'_{ij}} - \varkappa \frac{\frac{\partial g}{\partial s'_{kl}}}{\sqrt{\frac{\partial g}{\partial s'_{pq}} \frac{\partial g}{\partial s'_{pq}}}} \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma'_{kl} \partial \sigma'_{ij}} \quad (\text{B.28})$$

Il ne reste qu'à déterminer les dérivées partielles secondes de  $g$  par rapport à la contrainte effective. Dans un contexte de simulations numériques, nous choisissons d'évaluer *numériquement* ces dérivées. Cette évaluation se fait en réalisant une approximation de la dérivée directionnelle de  $\partial g / \partial \sigma'_{kl}$ . Dans un premier temps, écrivons  $\sigma'$  et  $\partial g / \partial \sigma'$  avec la notation de Voigt :

$$\begin{aligned} [\sigma'] &= [\sigma'_{11}; \sigma'_{22}; \sigma'_{33}; \sigma'_{23}; \sigma'_{31}; \sigma'_{12}] \\ \left[ \frac{\partial g}{\partial \sigma'} \right] &= \left[ \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{11}}; \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{22}}; \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{33}}; \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{23}}; \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{31}}; \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{12}} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

On approxime alors la dérivée partielle de chaque composante du vecteur  $[\partial g / \partial \sigma']$  le long d'une direction  $J$  portée par un vecteur  $[e_J]$ . On obtient alors  $\partial^2 g / \partial \sigma'^2$ , en notation de Voigt, sous la forme d'une matrice carrée  $6 \times 6$  dont les composantes  $IJ$  sont évaluées comme suit :

$$\left\{ \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma'^2} \right\}_{IJ} = \frac{\partial \left[ \frac{\partial g}{\partial \sigma'} \right]_I}{\partial [\sigma']_J} = \frac{\left[ \frac{\partial g}{\partial \sigma'} \right]_I([\sigma'] + h_J [e_J]) - \left[ \frac{\partial g}{\partial \sigma'} \right]_I([\sigma'])}{h_J}, \text{ où } \begin{matrix} I = 1, \dots, 6 \\ J = 1, \dots, 6 \end{matrix} \quad (\text{B.30})$$

où on a :

$$[e_J]_I = \begin{cases} 1 & \text{si } I = J \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{B.31})$$

Et où  $h_J$  est un réel positif devant être suffisamment petit pour assurer de la robustesse et la précision de la méthode. Une valeur acceptable de ce paramètre de différentiation est donnée en fonction de précision de la machine  $\varepsilon^{mc}$  :

$$h_J = \sqrt{\varepsilon^{mc}} \left[ \frac{\partial g}{\partial \sigma'} \right]_I([\sigma']) \quad (\text{B.32})$$

## B.2 Dilatance

La seconde section de cette annexe concerne la simplification de l'écriture de la dilatance en conditions axisymétriques. On cherche à montrer que, dans ces conditions, la dilatance s'écrit comme suit :

$$d = \frac{3(z-3) - (z-1)\xi^2 + \frac{2}{9}z\xi^3}{\sqrt{\frac{3}{2}(z-1)\xi^2 + \frac{4}{9}z^2\xi^4 - \frac{6}{9}z(z-1)\xi^3}} \quad (\text{B.33})$$

Dans le cas général, l'expression de la dilatance est la suivante :

$$d = -\frac{\dot{\epsilon}_v^p}{\sqrt{\dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p}} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial \sigma'_{kl}} \delta_{kl}}{\sqrt{\left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{\delta_{ij}\delta_{kl}}{3}\right) \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{kl}} \left(\delta_{im}\delta_{jn} - \frac{\delta_{ij}\delta_{mn}}{3}\right) \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{mn}}} \quad (\text{B.34})$$

On peut dans un premier temps reformuler le dénominateur. Pour ce faire, on emploie la même méthodologie que celle utilisée pour réarranger l'écriture de  $\mathfrak{h}$ , soit pour passer de l'équation (B.6) à l'équation (B.25). Commençons par réaliser la réduction suivante :

$$\begin{aligned} \left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{\delta_{ij}\delta_{kl}}{3}\right) \left(\delta_{im}\delta_{jn} - \frac{\delta_{ij}\delta_{mn}}{3}\right) &= \delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{im}\delta_{jn} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{ij}\delta_{mn} \\ &\quad - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{im}\delta_{jn} + \frac{1}{9}\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ij}\delta_{mn} \\ &= \delta_{km}\delta_{ln} - \frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{mn} \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

On a alors :

$$d = -\frac{\frac{\partial g}{\partial \sigma'_{kl}} \delta_{kl}}{\sqrt{\left(\delta_{km}\delta_{ln} - \frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{mn}\right) \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{kl}} \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{mn}}} \quad (\text{B.36})$$

Or, en considérant l'orthogonalité de la partie sphérique et de la partie déviatorique du tenseur des contraintes, on écrit que :

$$\left(\delta_{km}\delta_{ln} - \frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{mn}\right) \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{kl}} = \left(\delta_{km}\delta_{ln} - \frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{mn}\right) \left(\frac{\partial g}{\partial p'} \frac{\partial p'}{\partial \sigma'_{kl}} + \frac{\partial g}{\partial s'_{pq}} \frac{\partial s'_{pq}}{\partial \sigma'_{kl}}\right) \quad (\text{B.37})$$

Etant donné que la projection déviatorique d'un tenseur sphérique est nulle, on a :

$$\left(\delta_{km}\delta_{ln} - \frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{mn}\right) \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{kl}} = \left(\delta_{km}\delta_{ln} - \frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{mn}\right) \frac{\partial g}{\partial s'_{pq}} \frac{\partial s'_{pq}}{\partial \sigma'_{kl}} \quad (\text{B.38})$$

Puisque la dérivation de la partie déviatorique de  $\sigma'$  par rapport à  $\sigma'$  donne le tenseur de projection déviatorique, alors :

$$\left(\delta_{km}\delta_{ln} - \frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{mn}\right) \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{kl}} = \left(\delta_{km}\delta_{ln} - \frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{mn}\right) \left(\delta_{pk}\delta_{ql} - \frac{1}{3}\delta_{pq}\delta_{kl}\right) \frac{\partial g}{\partial s'_{pq}} \quad (\text{B.39})$$

Comme  $\partial g/\partial s'_{pq}$  représente les composantes d'un tenseur déjà déviatorique, alors :

$$\left( \delta_{km}\delta_{ln} - \frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{mn} \right) \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{kl}} = \frac{\partial g}{\partial s'_{kl}} \quad (\text{B.40})$$

Par réinjection dans l'expression de la dilatance (B.36), et en considérant l'orthogonalité entre la partie sphérique et la partie déviatorique du tenseur des contraintes effectives on obtient :

$$d = - \frac{\frac{\partial g}{\partial \sigma'_{kl}} \delta_{kl}}{\sqrt{\frac{\partial g}{\partial s'_{kl}} \frac{\partial g}{\partial s'_{kl}}}} \quad (\text{B.41})$$

Au regard des dérivées de  $g$  exprimées dans l'équation (B.15), on a :

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma'_{kl}} \delta_{kl} = -\frac{1}{p'} \left( 9(z-3) - \frac{9}{2}(z-1) \frac{s'_{kl}s'_{kl}}{p'^2} - 3z \frac{s'_{kl}s'_{lm}s'_{mk}}{p'^3} \right) \quad (\text{B.42})$$

$$\frac{\partial g}{\partial s'_{kl}} = \frac{1}{p'} \left( \frac{9}{2}(z-1) \frac{s'_{kl}}{p'} + 3z \frac{s'_{km}s'_{ml}}{p'^2} \right) \quad (\text{B.43})$$

La dilatance s'exprime alors comme :

$$d = \frac{9(z-3) - \frac{9}{2}(z-1) \frac{s'_{kl}s'_{kl}}{p'^2} - 3z \frac{s'_{kl}s'_{lm}s'_{mk}}{p'^3}}{\sqrt{\left( \frac{9}{2}(z-1) \frac{s'_{kl}}{p'} + 3z \frac{s'_{km}s'_{ml}}{p'^2} \right) \left( \frac{9}{2}(z-1) \frac{s'_{kl}}{p'} + 3z \frac{s'_{km}s'_{ml}}{p'^2} \right)}} \quad (\text{B.44})$$

En considérant  $J_{2\xi}$  et  $J_{3\xi}$  :

$$d = \frac{9(z-3) - \frac{9}{2}(z-1) J_{2\xi} - 3z J_{3\xi}}{\sqrt{\left( \frac{9}{2}(z-1) \right)^2 J_{2\xi} + 9z^2 J_{2\xi}^2 + 27z(z-1) J_{3\xi}}} \quad (\text{B.45})$$

suivant Nova [73], en conditions axisymétriques,  $J_{2\xi}$  se résume à  $2\xi^2/3$ , et  $J_{3\xi}$  à  $-2\xi^3/9$ . On retrouve alors :

$$d = \frac{3(z-3) - (z-1)\xi^2 + \frac{2}{9}z\xi^3}{\sqrt{\frac{3}{2}(z-1)\xi^2 + \frac{4}{9}z^2\xi^4 - \frac{6}{9}z(z-1)\xi^3}} \quad (\text{B.46})$$

Correspondant à (B.33) et achevant la preuve.

# Annexe C

## Quelques résultats utiles

### C.1 Théorèmes de transport et de flux divergence généralisés

**Théorème C.1.1** (Theorème de transport généralisé). *Soit  $\mathbf{g}$  un champ tensoriel continu par morceau sur un domaine  $V$  animé d'une vitesse  $\mathbf{u}'$  de frontière  $\partial V$  et traversé d'une discontinuité  $\Sigma$  régulière presque partout vis-à-vis de la mesure de Lebesgue  $dS$  et séparant  $V$  en deux parties  $V_1$  et  $V_2$  se déplaçant à une vitesse  $\mathbf{w}$ . En notant  $\mathbf{n}$  la normale sortante de  $V_1$  le long de  $\Sigma$ , alors on a :*

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{g} \, d\Omega = \int_V \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \, d\Omega + \int_{\partial V} (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n}) \mathbf{g} \, dS - \int_{\Sigma} \llbracket \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} \rrbracket \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (\text{C.1})$$

où  $\llbracket \cdot \rrbracket$  désigne l'opérateur de saut de  $\mathbf{g}$  entre  $V_2$  et  $V_1$  :

$$\llbracket \mathbf{g} \rrbracket = \mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_1 \quad (\text{C.2})$$

**Théorème C.1.2** (Theorème de divergence généralisé). *Soit  $\mathbf{g}$  un champ tensoriel continu par morceau sur un domaine  $V$  de frontière  $\partial V$  et traversé d'une discontinuité  $\Sigma$  régulière presque partout vis-à-vis de la mesure de Lebesgue  $dS$  et séparant  $V$  en deux parties  $V_1$  et  $V_2$  se déplaçant à une vitesse  $\mathbf{w}$ . En notant  $\mathbf{n}$  la normale sortante de  $V_1$  le long de  $\Sigma$  alors on a :*

$$\int_{\partial V} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{g} \, d\Omega + \int_{\Sigma} \llbracket \mathbf{g} \rrbracket \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (\text{C.3})$$

où  $\llbracket \cdot \rrbracket$  désigne l'opérateur de saut de  $\mathbf{g}$  entre  $V_2$  et  $V_1$  :

$$\llbracket \mathbf{g} \rrbracket = \mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_1 \quad (\text{C.4})$$

### C.2 Alternative de Fredholm

**Lemme C.2.1** (Alternative de Fredholm). *Soit  $g \in L^2(Y)$ , il existe une solution unique  $w \in H_{\#0}^1(Y)$  (à une constante près) au problème suivant*

$$\begin{cases} -\nabla_y \cdot A(\mathbf{y}) \nabla_y w(\mathbf{y}) = g(\mathbf{y}) & \forall \mathbf{y} \in Y \\ \mathbf{y} \mapsto w(\mathbf{y}) \text{ } \mathbf{y} - \text{périodique} \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

si et seulement si  $g$  satisfait la condition de compatibilité suivante :

$$\int_Y g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = 0$$

### C.3 Lemmes de van Noorden et Bringedal

**Lemme C.3.1** (van Noorden 1 [52]). *Soit  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t})$  une fonction à valeur scalaire sur  $Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$  à valeur nulle sur  $\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$  alors :*

$$\nabla_{\mathbf{x}} g = \frac{n_0 \cdot \nabla_{\mathbf{y}} g}{|\nabla_{\mathbf{y}} S_0|} \nabla_{\mathbf{x}} S_0 \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) \in \Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}} \quad (\text{C.6})$$

**Lemme C.3.2** (van Noorden 2 [52]). *Soit  $F$  une fonction à valeur vectorielle sur  $Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$ , dont la divergence par rapport à  $\mathbf{y}$  est nulle et telle que  $n_0 \cdot F = 0$  sur  $\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$  alors :*

$$\int_{\Gamma_0} \frac{\omega_0 \cdot \nabla_{\mathbf{y}} S_1}{|\nabla_{\mathbf{y}} S_0|} \omega_0 \cdot F - \frac{S_1}{|\nabla_{\mathbf{y}} S_0|} n_0 \cdot \nabla_{\mathbf{y}} (n_0 \cdot F) \, da = 0 \quad (\text{C.7})$$

**Lemme C.3.3** (Bringedal [91]). *Soit  $F_Y$  une fonction à valeur vectorielle sur  $Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$  et  $F_G$  une fonction à valeur vectorielle sur  $G_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$  dont les divergences par rapport à  $\mathbf{y}$  sont nulles sur leurs ensembles de définition respectifs et telles que  $n_0 \cdot (F_Y - F_G) = 0$  sur  $\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$  alors :*

$$\int_{\Gamma_0} \frac{\omega_0 \cdot \nabla_{\mathbf{y}} S_1}{|\nabla_{\mathbf{y}} S_0|} \omega_0 \cdot (F_Y - F_G) - \frac{S_1}{|\nabla_{\mathbf{y}} S_0|} n_0 \cdot \nabla_{\mathbf{y}} (n_0 \cdot (F_Y - F_G)) \, da = 0 \quad (\text{C.8})$$

### C.4 Révision du second lemme de van Noorden

Dans cette sous-section, nous discutons d'une variante du second lemme de van Noorden, dans le cas où seulement l'hypothèse  $F \cdot n_0 = 0$  sur  $\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$  est vérifiée. Pour ce faire, on reprend le développement de la preuve du lemme. On étudie les variations de l'intégrale suivante :

$$\int_{Y^\delta} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot F \, d\mathbf{y} \quad (\text{C.9})$$

par rapport à son domaine d'intégration. Dans ce contexte,  $Y^\delta$  représente une région de  $Y$  définie de la manière suivante :

$$Y^\delta \times \tilde{\mathcal{T}} := \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) \in \tilde{\Omega} \times Y \times \tilde{\mathcal{T}} \mid S_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \delta S_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) < 0 \right\} \quad (\text{C.10})$$

Afin d'être certain que  $Y^\delta$  soit inclu dans  $Y_0$ , van Noorden propose de considérer la décomposition de  $S_1$  en une partie positive et une partie négative  $S_1 = [S_1]_+ - [S_1]_-$  définissant respectivement  $Y_+^\delta$  et  $Y_-^\delta$ .

$$\begin{cases} Y_+^\delta \times \tilde{\mathcal{T}} & := \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) \in \tilde{\Omega} \times Y \times \tilde{\mathcal{T}} \mid S_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \delta [S_1]_+(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) < 0 \right\} \\ Y_-^\delta \times \tilde{\mathcal{T}} & := \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) \in \tilde{\Omega} \times Y \times \tilde{\mathcal{T}} \mid S_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) + \delta [S_1]_-(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) < 0 \right\} \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

On étudie donc dans un premier temps les variations par rapport à  $\delta$  de l'intégrale :

$$\int_{Y_+^\delta} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot F \, d\mathbf{y} \quad (\text{C.12})$$

En suivant la preuve de van Noorden, il est clair que dans notre cas également :

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \int_{Y_+^\delta} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot F \, d\mathbf{y} \Big|_{\delta=0} = \int_{\Gamma_0} \frac{\omega_0 \cdot \nabla_{\mathbf{y}} S_1}{|\nabla_{\mathbf{y}} S_0|} \omega_0 \cdot F - \frac{S_1}{|\nabla_{\mathbf{y}} S_0|} n_0 \cdot \nabla_{\mathbf{y}} (n_0 \cdot F) \, dl \quad (\text{C.13})$$

Cependant, puisque  $\nabla_y \cdot F$  n'est pas nul dans  $Y_0 \times \mathcal{T}$ , alors l'affirmation :

$$\int_{\Gamma_0} \frac{\omega_0 \cdot \nabla_y S_1}{|\nabla_y S_0|} \omega_0 \cdot F - \frac{S_1}{|\nabla_y S_0|} n_0 \cdot \nabla_y (n_0 \cdot F) d\ell = 0 \quad (\text{C.14})$$

n'est plus vraie. On s'attache donc à évaluer correctement le terme :

$$\left. \frac{\partial}{\partial \delta} \int_{Y_+^\delta} \nabla_y \cdot F d\mathbf{y} \right|_{\delta=0}$$

Pour ce faire, on introduit la fonction indicatrice  $1_+$  de  $Y_+^\delta$  dans  $Y_0$  soit :

$$1_+(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \in Y_+^\delta \times \mathcal{T} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.15})$$

On peut autrement définir cette fonction à l'aide de la fonction de Heaviside.

$$\begin{aligned} 1_+(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) &= H(-S_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) - \delta [S_1]_+(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } S_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \delta [S_1]_+(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Puisque  $Y_0$  et  $F$  ne dépendent pas de  $\delta$ , alors on a :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \int_{Y_+^\delta} \nabla_y \cdot F d\mathbf{y} \right|_{\delta=0} &= \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \int_{Y_0} \nabla_y \cdot F H(-S_0 - \delta [S_1]_+) d\mathbf{y} \right|_{\delta=0} \\ &= \int_{Y_0} \nabla_y \cdot F \left. \frac{\partial}{\partial \delta} (H(-S_0 - \delta [S_1]_+)) \right|_{\delta=0} d\mathbf{y} \end{aligned}$$

La dérivation de la fonction de Heaviside doit alors s'interpréter au sens des distributions. Au sens des distributions, l'intégrale de la dérivée de  $H$ , évalué en  $\delta = 0$  peut s'exprimer via la distribution de Dirac sur  $\Gamma_0$  (locus de l'iso-valeur  $S_0 = 0$ ). On a donc :

$$\left. \frac{\partial}{\partial \delta} \int_{Y_+^\delta} \nabla_y \cdot F d\mathbf{y} \right|_{\delta=0} = \int_{Y_0} \nabla_y \cdot F \left. \frac{\partial}{\partial \delta} (H(-S_0 - \delta [S_1]_+)) \right|_{\delta=0} d\mathbf{y} = - \int_{\Gamma_0} [S_1]_+ \nabla_y \cdot F da \quad (\text{C.17})$$

Si on réalise le même raisonnement mais cette fois sur  $Y_-^\delta$ , on obtient :

$$\left. \frac{\partial}{\partial \delta} \int_{Y_-^\delta} \nabla_y \cdot F d\mathbf{y} \right|_{\delta=0} = - \int_{\Gamma_0} [S_1]_- \nabla_y \cdot F da \quad (\text{C.18})$$

En retranchant ce résultat à (C.17), on montre que :

$$\left. \frac{\partial}{\partial \delta} \int_{Y^\delta} \nabla_y \cdot F d\mathbf{y} \right|_{\delta=0} = - \int_{\Gamma_0} S_1 \nabla_y \cdot F da \quad (\text{C.19})$$

Et donc finalement :

$$\int_{\Gamma_0} \frac{\omega_0 \cdot \nabla_y S_1}{|\nabla_y S_0|} \omega_0 \cdot F - \frac{S_1}{|\nabla_y S_0|} n_0 \cdot \nabla_y (n_0 \cdot F) d\ell = - \int_{\Gamma_0} S_1 \nabla_y \cdot F da \quad (\text{C.20})$$

De plus, dans le cas où  $F$  est nul sur  $\Gamma_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$  :

$$\int_{\Gamma_0} \frac{\omega_0 \cdot \nabla_y S_1}{|\nabla_y S_0|} \omega_0 \cdot F - \frac{S_1}{|\nabla_y S_0|} n_0 \cdot \nabla_y (n_0 \cdot F) d\ell = - \int_{\Gamma_0} \nabla_y \cdot (FS_1) da \quad (\text{C.21})$$

## C.5 Interchanger intégration et dérivation (divergence)

Dans cette section nous avons cherché à interchanger l'intégration et la dérivation quand on cherche à exprimer la divergence selon  $\mathbf{x}$  de l'intégrale d'une quantité vectorielle  $F$  sur le domaine  $Y_0$  contenant la partie fluide de la cellule élémentaire  $Y$ . Ici, on note  $G_0$  le domaine contenant la partie solide de la cellule élémentaire. On cherche à exprimer le terme :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \int_{Y_0} F \, d\mathbf{y} \quad (\text{C.22})$$

Le principal problème du calcul de cette divergence réside dans la dépendance de  $Y_0$  par rapport à  $\mathbf{x}$ . On cherchera donc à se passer de cette dépendance. Pour ce faire, nous introduisons  $1_f$ , comme la fonction indicatrice de la partie fluide.

$$1_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \in Y_0 \times \mathcal{T} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.23})$$

On peut autrement définir cette fonction à l'aide de la fonction de Heaviside.

$$1_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = H(-S_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)) = \begin{cases} 1 & \text{si } S_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.24})$$

On exprime alors l'intégrale dont nous cherchons la divergence :

$$\int_{Y_0} F \, d\mathbf{y} = \int_{Y_0} F \underbrace{H(-S_0)}_1 \, d\mathbf{y} + \int_{G_0} F \underbrace{H(-S_0)}_0 \, d\mathbf{y} = \int_Y FH(-S_0) \, d\mathbf{y} \quad (\text{C.25})$$

Maintenant que le problème de dépendance vis-à-vis de  $\mathbf{x}$  du domaine d'intégration est levé, on peut interchanger intégration et divergence. On obtient alors :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \int_Y FH(-S_0) \, d\mathbf{y} = \int_Y \nabla_{\mathbf{x}} \cdot FH(-S_0) \, d\mathbf{y} = \int_Y H(-S_0) \nabla_{\mathbf{x}} \cdot F + F \cdot \nabla_{\mathbf{x}} H \, d\mathbf{y} \quad (\text{C.26})$$

Nous cherchons donc à exprimer le gradient de  $H$  par rapport à  $\mathbf{x}$ . On remarque que :

$$\nabla_{\mathbf{x}} H = -\nabla_{\mathbf{x}} S_0 \frac{dH}{d\tau}(-S_0) \quad (\text{C.27})$$

On introduit  $n_0$  comme le champ de normale aux iso-valeurs de  $S_0$  dans la cellule :

$$n_0 = \frac{\nabla_{\mathbf{y}} S_0}{\|\nabla_{\mathbf{y}} S_0\|} \quad (\text{C.28})$$

On obtient donc :

$$\nabla_{\mathbf{y}} H = -\nabla_{\mathbf{y}} S_0 \frac{dH}{d\tau}(-S_0) = -\|\nabla_{\mathbf{y}} S_0\| n_0 \frac{dH}{d\tau}(-S_0) \quad (\text{C.29})$$

En prenant le produit scalaire avec  $n_0$  à gauche et à droite,

$$\nabla_{\mathbf{y}} H \cdot n_0 = -\|\nabla_{\mathbf{y}} S_0\| n_0 \cdot n_0 \frac{dH}{d\tau}(-S_0) = -\|\nabla_{\mathbf{y}} S_0\| \frac{dH}{d\tau}(-S_0) \quad (\text{C.30})$$

La dérivée de  $H$  par rapport à son argument est alors donnée par :

$$\frac{dH}{d\tau} = -\frac{\nabla_y H \cdot n_0}{\|\nabla_y S_0\|} \quad (\text{C.31})$$

On retrouve alors le résultat proposé par le lemme 3.1 dans l'article de van Noorden [52] :

$$\nabla_x H = \frac{n_0 \cdot \nabla_y H}{\|\nabla_y S_0\|} \nabla_x S_0 \quad (\text{C.32})$$

On peut dès lors finaliser le calcul de (C.22) en injectant le dernier résultat dans l'équation (C.26) :

$$\begin{aligned} \int_Y H(-S_0) \nabla_x \cdot F + F \cdot \nabla_x H \, d\mathbf{y} &= \int_Y H(-S_0) \nabla_x \cdot F \, d\mathbf{y} + \int_Y F \cdot \nabla_x H \, d\mathbf{y} \\ &= \int_{Y_0} \nabla_x \cdot F \, d\mathbf{y} + \int_Y F \cdot \frac{n_0 \cdot \nabla_y H}{\|\nabla_y S_0\|} \nabla_x S_0 \, d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

Au sens des distributions, l'intégrale du gradient de  $H$  peut s'exprimer via la distribution de Dirac sur  $\Gamma_0$  (locus de l'iso-valeur  $S_0 = 0$ ). On a donc :

$$\begin{aligned} \int_Y F \cdot \frac{n_0 \cdot \nabla_y H}{\|\nabla_y S_0\|} \nabla_x S_0 \, d\mathbf{y} &= \int_Y F \cdot \frac{n_0 \cdot (-n_0 \delta_{\Gamma_0})}{\|\nabla_y S_0\|} \nabla_x S_0 \, d\mathbf{y} \\ &= - \int_Y F \cdot \frac{\nabla_x S_0}{\|\nabla_y S_0\|} \delta_{\Gamma_0} \, d\mathbf{y} \\ &= - \int_{\Gamma_0} F \cdot \frac{\nabla_x S_0}{\|\nabla_y S_0\|} \, da \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

On a donc finalement le résultat recherché :

$$\nabla_x \cdot \int_{Y_0} F \, d\mathbf{y} = \int_{Y_0} \nabla_x \cdot F \, d\mathbf{y} - \int_{\Gamma_0} F \cdot \frac{\nabla_x S_0}{\|\nabla_y S_0\|} \, da \quad (\text{C.35})$$

## C.6 Interchanger intégration et dérivation (gradient)

Cette fois-ci nous cherchons à interchanger l'intégration et la dérivation quand on cherche à exprimer le gradient selon  $\mathbf{x}$  de l'intégrale d'un champ scalaire  $g$  sur le domaine  $Y_0$  contenant la partie fluide de la cellule élémentaire  $Y$ . Ici, on note  $G_0$  le domaine contenant la partie solide de la cellule élémentaire. On cherche à exprimer le terme :

$$\nabla_x \int_{Y_0} g \, d\mathbf{y} \quad (\text{C.36})$$

Le principal problème du calcul de ce gradient réside dans la dépendance de  $Y_0$  par rapport à  $\mathbf{x}$ . On cherchera donc à se passer de cette dépendance. Pour ce faire, nous introduisons  $1_f$ , comme la fonction indicatrice de la partie fluide.

$$1_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \in Y_0 \times \mathcal{T} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.37})$$

On peut autrement définir cette fonction à l'aide de la fonction de Heaviside.

$$1_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = H(-S_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)) = \begin{cases} 1 & \text{si } S_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.38})$$

On exprime alors l'intégrale dont nous cherchons le gradient :

$$\int_{Y_0} g \, d\mathbf{y} = \int_{Y_0} \underbrace{g H(-S_0)}_1 \, d\mathbf{y} + \int_{G_0} \underbrace{g H(-S_0)}_0 \, d\mathbf{y} = \int_Y g H(-S_0) \, d\mathbf{y} \quad (\text{C.39})$$

Maintenant que le problème de dépendance vis-à-vis de  $\mathbf{x}$  du domaine d'intégration est levé, on peut interchanger intégration et gradient. On obtient alors :

$$\nabla_x \int_Y g H(-S_0) \, d\mathbf{y} = \int_Y \nabla_x g H(-S_0) \, d\mathbf{y} = \int_Y H(-S_0) \nabla_x g + g \nabla_x H \, d\mathbf{y} \quad (\text{C.40})$$

Nous cherchons donc à exprimer le gradient de  $H$  par rapport à  $\mathbf{x}$ . On remarque que :

$$\nabla_x H = -\nabla_x S_0 \frac{dH}{d\tau}(-S_0) \quad (\text{C.41})$$

On introduit  $n_0$  comme le champ de normale aux iso-valeurs de  $S_0$  dans la cellule :

$$n_0 = \frac{\nabla_y S_0}{\|\nabla_y S_0\|} \quad (\text{C.42})$$

On obtient donc :

$$\nabla_y H = -\nabla_y S_0 \frac{dH}{d\tau}(-S_0) = -\|\nabla_y S_0\| n_0 \frac{dH}{d\tau}(-S_0) \quad (\text{C.43})$$

En prenant le produit scalaire avec  $n_0$  à gauche et à droite,

$$\nabla_y H \cdot n_0 = -\|\nabla_y S_0\| n_0 \cdot n_0 \frac{dH}{d\tau}(-S_0) = -\|\nabla_y S_0\| \frac{dH}{d\tau}(-S_0) \quad (\text{C.44})$$

La dérivée de  $H$  par rapport à son argument est alors donnée par :

$$\frac{dH}{d\tau} = -\frac{\nabla_y H \cdot n_0}{\|\nabla_y S_0\|} \quad (\text{C.45})$$

On retrouve alors le résultat proposé par le lemme 3.1 dans l'article de van Noorden [52] :

$$\nabla_x H = \frac{n_0 \cdot \nabla_y H}{\|\nabla_y S_0\|} \nabla_x S_0 \quad (\text{C.46})$$

On peut dès lors finaliser le calcul de (C.36) en injectant le dernier résultat dans l'équation (C.40) :

$$\begin{aligned} \int_Y H(-S_0) \nabla_x g + g \nabla_x H \, d\mathbf{y} &= \int_Y H(-S_0) \nabla_x g \, d\mathbf{y} + \int_Y g \nabla_x H \, d\mathbf{y} \\ &= \int_{Y_0} \nabla_x g \, d\mathbf{y} + \int_Y g \frac{n_0 \cdot \nabla_y H}{\|\nabla_y S_0\|} \nabla_x S_0 \, d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

Au sens des distribution, l'intégrale du gradient de  $H$  peut s'exprimer via la distribution de Dirac sur  $\Gamma_0$  (locus de l'iso-valeur  $S_0 = 0$ ). On a donc :

$$\begin{aligned} \int_Y g \frac{n_0 \cdot \nabla_y H}{\|\nabla_y S_0\|} \nabla_x S_0 \, d\mathbf{y} &= \int_Y g \frac{n_0 \cdot (-n_0 \delta_{\Gamma_0})}{\|\nabla_y S_0\|} \nabla_x S_0 \, d\mathbf{y} \\ &= - \int_Y g \frac{\nabla_x S_0}{\|\nabla_y S_0\|} \delta_{\Gamma_0} \, d\mathbf{y} \\ &= - \int_{\Gamma_0} g \frac{\nabla_x S_0}{\|\nabla_y S_0\|} \, da \end{aligned} \quad (\text{C.48})$$

On a donc finalement le résultat recherché :

$$\nabla_x \int_{Y_0} g \, d\mathbf{y} = \int_{Y_0} \nabla_x g \, d\mathbf{y} - \int_{\Gamma_0} g \frac{\nabla_x S_0}{\|\nabla_y S_0\|} \, da \quad (\text{C.49})$$

## C.7 Interchanger intégration et dérivation temporelle

Cette fois-ci nous cherchons à interchanger l'intégration et la dérivation quand on cherche à exprimer la dérivée temporelle de l'intégrale d'un champ scalaire  $g$  sur le domaine  $Y_0$  contenant la partie fluide de la cellule élémentaire  $Y$ . Ici, on note  $G_0$  le domaine contenant la partie solide de la cellule élémentaire. On cherche à exprimer le terme :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \int_{Y_0} g \, d\mathbf{y} \quad (\text{C.50})$$

Le principal problème du calcul de cette dérivée réside dans la dépendance de  $Y_0$  par rapport à  $\mathbf{x}$ . On cherchera donc à se passer de cette dépendance. Pour ce faire, nous introduisons  $1_f$ , comme la fonction indicatrice de la partie fluide. Pour ce faire on introduit la fonction indicatrice de  $Y_0 \times \tilde{\mathcal{T}}$  définie dans  $Y \times \tilde{\mathcal{T}}$ .

$$1_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) = \begin{cases} 1 & \text{si } S_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{t}) < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.51})$$

On peut autrement définir cette fonction à l'aide de la fonction de Heaviside.

$$1_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = H(-S_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)) = \begin{cases} 1 & \text{si } S_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.52})$$

Maintenant, on peut écrire l'équivalence suivante :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \int_{Y_0} g \, d\mathbf{y} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \int_Y g H(-S_0) \, d\mathbf{y} = \int_Y \frac{\partial g H(-S_0)}{\partial \tilde{t}} \, d\mathbf{y} \quad (\text{C.53})$$

En utilisant la règle de dérivation des produits de fonctions on écrit :

$$\int_Y \frac{\partial g H(-S_0)}{\partial \tilde{t}} \, d\mathbf{y} = \int_Y \frac{\partial g}{\partial \tilde{t}} H(-S_0) \, d\mathbf{y} + \int_Y g \frac{\partial H(-S_0)}{\partial \tilde{t}} \, d\mathbf{y} \quad (\text{C.54})$$

Au sens des distribution, l'intégrale de la dérivée de  $H$  peut s'exprimer via la distribution de Dirac sur  $\Gamma_0$  (locus de l'iso-valeur  $S_0 = 0$ ). On a donc :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \int_{Y_0} g \, d\mathbf{y} = \int_Y \frac{\partial g H(-S_0)}{\partial \tilde{t}} \, d\mathbf{y} = \int_{Y_0} \frac{\partial g}{\partial \tilde{t}} \, d\mathbf{y} - \int_{\Gamma_0} g \frac{\partial S_0}{\partial \tilde{t}} \, da \quad (\text{C.55})$$

Si on introduit la moyenne  $\bar{g}$  de  $g$  sur la cellule, alors :

$$\frac{\partial |Y_0| \bar{g}}{\partial \tilde{t}} = \int_{Y_0} \frac{\partial g}{\partial \tilde{t}} \, d\mathbf{y} - \int_{\Gamma_0} g \frac{\partial S_0}{\partial \tilde{t}} \, da \quad (\text{C.56})$$

### C.7.1 Cas particulier où $g$ est constant sur $Y_0$

Si le champ  $g$  est constant sur la cellule alors  $\bar{g} = g$  et (C.56) devient :

$$\frac{\partial |Y_0| g}{\partial \tilde{t}} = |Y_0| \frac{\partial g}{\partial \tilde{t}} + g \frac{\partial |Y_0|}{\partial \tilde{t}} = \int_{Y_0} \frac{\partial g}{\partial \tilde{t}} d\mathbf{y} - g \int_{\Gamma_0} \frac{\partial S_0}{\partial \tilde{t}} da \quad (\text{C.57})$$

Or la dérivation temporelle de  $|Y_0|$  se détermine à l'aide de  $H(-S_0)$  :

$$\frac{\partial |Y_0|}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \int_{Y_0} d\mathbf{y} = \int_Y \frac{\partial H(-S_0)}{\partial \tilde{t}} d\mathbf{y} = - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial S_0}{\partial \tilde{t}} da \quad (\text{C.58})$$

d'où, par réinjection dans (C.57), on établit que :

$$\int_{Y_0} \frac{\partial g}{\partial \tilde{t}} d\mathbf{y} = |Y_0| \frac{\partial g}{\partial \tilde{t}} \quad (\text{C.59})$$

# Annexe D

## Problèmes variationnels discretisés

Dans cette annexe sont données les formes discretisées des problèmes aux variations employés dans la section 6.5.6 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \nu_h^{(i)} \in \mathcal{N}_h \text{ tel que } \forall \phi_h \in \mathcal{N}_h : \quad a_h(\nu_h^{(i)}, \phi_h) = l_{1h}(\phi_h) \\ \text{Trouver } \vartheta_h \in \mathcal{N}_h \text{ tel que } \forall \phi_h \in \mathcal{N}_h : \quad a_h(\vartheta_h, \phi_h) = l_{2h}(\phi_h) \\ \text{Trouver } (u_h^{(i)}, \pi_h^{(i)}) \in \mathcal{L}_{0h} \text{ tel que } \forall (\phi_h^v, \phi_h) \in \mathcal{L}_{0h} : \\ \alpha_{1h}((u_h^{(i)}, \pi_h^{(i)}), (\phi_h^v, \phi_h)) + \beta_{1h}((u_h^{(i)}, \pi_h^{(i)}), (\phi_h^v, \phi_h)) = l_{3h}(\phi_h^v, \phi_h) \\ \text{Trouver } (\varphi_h, \iota_h) \in \mathcal{L}_h \text{ tel que } \forall (\phi_h^v, \phi_h) \in \mathcal{L}_{0h} : \\ \alpha_{2h}((\varphi_h, \iota_h), (\phi_h^v, \phi_h)) + \beta_{2h}((\varphi_h, \iota_h), (\phi_h^v, \phi_h)) = l_{4h}(\phi_h^v, \phi_h) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(D.1a)} \\ \text{(D.1b)} \\ \text{(D.1c)} \\ \text{(D.1d)} \end{array}$$

Où les formes bilinéaires  $a_h$ ,  $\alpha_{1h}$ ,  $\alpha_{2h}$  sont données respectivement de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_h : \mathcal{N}_h \times \mathcal{N}_h \rightarrow \mathbb{R} \\ (w_h, \phi_h) \mapsto a(w_h, \phi_h) = \int_{Y_{0h}} \nabla_y \nu_h^{(i)} \cdot \nabla_y \phi_h \, d\mathbf{y} \\ \alpha_{1h} : \mathcal{L}_{0h} \times \mathcal{L}_{0h} \rightarrow \mathbb{R} \\ ((u_h, w_h), (\phi_h^v, \phi_h)) \mapsto \alpha_{1h}((u_h, w_h), (\phi_h^v, \phi_h)) = \\ - \int_{Y_{0h}} \nabla_y u : \nabla_y \phi_h^v + w \nabla_y \cdot \phi_h^v \, d\mathbf{y} \\ \alpha_{2h} : \mathcal{L}_h \times \mathcal{L}_{0h} \rightarrow \mathbb{R} \\ ((u_h, w_h), (\phi_h^v, \phi_h)) \mapsto \alpha_{2h}((u_h, w_h), (\phi_h^v, \phi_h)) = \\ - \int_{Y_{0h}} \nabla_y u : \nabla_y \phi_h^v + w \nabla_y \cdot \phi_h^v \, d\mathbf{y} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(D.2a)} \\ \text{(D.2b)} \\ \text{(D.2c)} \end{array}$$

Les formes bilinéaires  $\beta_{1h}$  et  $\beta_{2h}$  sont données telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{1h} : \mathcal{L}_{0h} \times \mathcal{L}_{0h} \rightarrow \mathbb{R} \\ ((u_h, w_h), (\phi_h^v, \phi_h)) \mapsto \beta_{1h}((u_h, w_h), (\phi_h^v, \phi_h)) = \int_{Y_{0h}} \nabla_y \cdot u \phi_h \, d\mathbf{y} \\ \beta_{2h} : \mathcal{L}_h \times \mathcal{L}_{0h} \rightarrow \mathbb{R} \\ ((u_h, w_h), (\phi_h^v, \phi_h)) \mapsto \beta_{2h}((u_h, w_h), (\phi_h^v, \phi_h)) = \int_{Y_{0h}} \nabla_y \cdot u \phi_h \, d\mathbf{y} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(D.3a)} \\ \text{(D.3b)} \end{array}$$

et finalement, les formes linéaires  $l_{1h}$ ,  $l_{2h}$ ,  $l_{3h}$  et  $l_{4h}$  sont données comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{1h} : \mathcal{N}_h \rightarrow \mathbb{R} \\ \phi_h \mapsto l_{1h}(\phi_h) = \int_{\Gamma_{0h}} \phi_h e_i \cdot n_0 \, da \end{array} \right. \quad (\text{D.4a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{2h} : \mathcal{N}_h \rightarrow \mathbb{R} \\ \phi_h \mapsto l_{2h}(\phi_h) = \int_{\Gamma_{0h}} \frac{|\Gamma_{0h}|}{|Y_{0h}|} \phi_h \, da + \int_{\Gamma_{0h}} \phi_h \, da \end{array} \right. \quad (\text{D.4b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{3h} : \mathcal{L}_{0h} \rightarrow \mathbb{R} \\ (\phi_h^v, \phi_h) \mapsto l_{3h}(\phi_h^v, \phi_h) = \int_{Y_{0h}} e_i \cdot \phi_h^v \, d\mathbf{y} \end{array} \right. \quad (\text{D.4c})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{4h} : \mathcal{L}_{0h} \rightarrow \mathbb{R} \\ (\phi_h^v, \phi_h) \mapsto l_{4h}(\phi_h^v, \phi_h) = \int_{Y_{0h}} \frac{|\Gamma_{0h}|}{|Y_{0h}|} \phi_h \, d\mathbf{y} \end{array} \right. \quad (\text{D.4d})$$

---

**Titre :** Modélisation du comportement poromécanique des sols sujets à érosion interne par suffusion

**Mots clés :** Suffusion, poromécanique, lois de comportement, élasto-plasticité, homogénéisation, microstructure évolutive

**Résumé :** Les écoulements d'infiltration dans les sols sont susceptibles d'engendrer des processus d'érosion interne. Dans les sols grenus sans cohésion, la « suffusion » est une érosion interne se caractérisant par trois phénomènes simultanés et indissociables : l'arrachement, le transport et la filtration des grains solides les plus fins au travers du réseau de pores. Puisqu'il existe une forte corrélation entre la majorité des avaries au sein d'ouvrages hydrauliques en terre (barrage, digues et canaux d'irrigation) et les phénomènes d'érosion interne, ces derniers sont au cœur d'enjeux économiques et sociétaux notables. En centrant l'intérêt sur l'érosion interne par suffusion, l'objectif de ces travaux de thèse est de contribuer à l'élaboration d'un outil clé pour l'ingénieur face à ces problèmes : un modèle de comportement poromécanique considérant un

couplage entre réponse hydromécanique et suffusion. La thermodynamique des milieux poreux est employée en vue d'analyser le couplage entre suffusion, écoulement et état mécanique. Un modèle de comportement est proposé en accord avec ce couplage complexe. D'un côté, l'effet de la suffusion sur le comportement mécanique du sol est modélisé via l'extension d'un modèle élasto-plastique existant en introduisant la porosité induite par suffusion comme variable d'écroûissage. A titre de validation, la réponse du modèle élasto-plastique est analysée puis comparée à des résultats expérimentaux issus de la littérature. D'un autre côté, la pertinence du modèle de couplage macroscopique entre diffusion hydraulique et érosion interne est éprouvée par une analyse à deux échelles, via la théorie de l'homogénéisation (quasi) périodique.

---

**Title:** Modelling the poromechanical behaviour of soils subjected to internal erosion by suffusion

**Keywords:** Suffusion, poromechanics, constitutive laws, elasto-plasticity, homogenization, evolutive microstructure

**Abstract:** Seepage flows within soils are prone to induce internal erosion processes. Concerning cohesionless granular soils, "suffusion" is a kind of internal erosion characterized by three simultaneous processes: detachment, transport and interlocking of the fine particles of the soil through the pore network. As a strong correlation exists between internal erosion and most of the incidents occurring within hydraulic structures (dams, dykes and irrigation channels), these processes are directly involved in some major economic and society concerns. By focusing on suffusion, the main objective of this research is to contribute to the development of a engineering tool to face the abovementioned problems: a poromechanical

model that couples suffusion and the hydromechanical behaviour of the considered soil. The thermodynamics of porous media is employed to analyze the coupling between suffusion, seepage flow and mechanical state. A poromechanical model is proposed in agreement. On the one hand, the effect of suffusion on the mechanical behaviour of the soil is modelled by extending an existing soil elasto-plastic model considering the suffusion induced porosity as a hardening variable. The model is then validated with respect to experimental results available in the literature. On the second hand, the macroscopic constitutive model coupling suffusion and seepage flow is tested considering a multi-scale analysis using the (quasi) periodic homogenization theory.