Etude ergodique de bêta-transformations aléatoires

Younes Tierce

▶ **To cite this version:**

Younes Tierce. Etude ergodique de bêta-transformations aléatoires. Systèmes dynamiques [math.DS]. Normandie Université, 2021. Français. NNT : 2021NORMR069 . tel-03516372v2

HAL Id: tel-03516372
https://theses.hal.science/tel-03516372v2

Submitted on 22 Mar 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Normandie Université

THÈSE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité MATHÉMATIQUES

Préparée au sein de l'Université de Rouen Normandie

Étude ergodique de bêta-transformations aléatoires

Présentée et soutenue par
Younès TIERCE

Thèse soutenue le 9/12/21 devant le jury composé de		
Mme Karma DAJANI	Professeur / University of Utrecht / Mathematical Institute of Utrecht	Rapporteur
M. Benoît RITTAUD	Maître de conférences / Université Sorbonne Paris-Nord / LAGA	Rapporteur
M. Yves COUDENE	Professeur / Sorbonne Université / LPSM	Membre
Mme Élise JANVRESSE	Professeur / Université de Picardie Jules Verne / LAMFA	Membre
Mme Françoise PENE	Professeur / Université de Bretagne Occidentale / LMBA	Membre
M. Pierre CALKA	Professeur / Université de Rouen Normandie / LMRS	Membre
M. Jean-Baptiste BARDET	Maître de conférences / Université de Rouen Normandie / LMRS	Co-encadrant

Thèse dirigée par Thierry DE LA RUE, laboratoire LMRS

UNIVERSITÉ DE ROUEN NORMANDIE

MIIΣ

LMRS

Remerciements

Ces trois années que j'ai consacrées à cette thèse s'achèvent, et j'ai le sentiment qu'elles sont passées en un clin d'oeil. Ce travail n'aurait pu être accompli dans de si bonnes conditions sans de nombreuses personnes, et je tiens sincèrement à les remercier ici. On me pardonnera la répétitivité de mes propos, mais il vaut mieux dire merci un peu trop que trop peu.

Merci à mes encadrants, Thierry de la Rue et Jean-Baptiste Bardet, pour leur grande disponibilité tout au long de cette thèse et leur accompagnement précieux. Je ne mesure pas encore l'étendue de ce que j'ai appris à leur côté, mais j'ai bien conscience de la chance que j'ai eue de travailler avec eux.

Un grand merci à Pierre Calka, sans qui je n'aurais certainement pas pu faire cette thèse. Je le remercie pour sa grande gentillesse et ses précieux conseils. Cela me tenait à coeur qu'il puisse faire partie de mon jury de thèse, la boucle est bouclée !

Merci à Karma Dajani pour nos discussions fructueuses qui ont permis de bien faire avancer nos recherches, et d'avoir bien voulu être rapporteuse de cette thèse. J'espère pouvoir un jour lui rendre visite aux Pays-Bas !

Merci à Benoît Rittaud d'avoir bien accepté d'être rapporteur sur cette thèse, ainsi qu'à Yves Coudène, Élise Janvresse et Françoise Pene pour leur participation au jury.

Merci à mes voisins du deuxième étage, dont la bonne humeur quotidienne m'a toujours donné envie de revenir le lendemain au laboratoire ! Merci donc à Gaëlle Chagny, Antoine Channarond, sans oublier Olivier Guibé. Je tiens à remercier tout particulièrement Gaëlle pour sa gentillesse et ses conseils de grande valeur. Je remercie plus généralement tous les membres du LMRS que j'ai côtoyés de près ou de loin, ou avec qui j'ai partagé de nombreux repas à la cantine : ces moments font aussi la saveur de ces trois années.

Merci à ma professeure Colette Renouvin pour m'avoir donné le goût des Mathématiques au lycée. Je ne l'oublie pas et ai toujours un profond respect pour elle.

Merci à mes parents pour leur soutien et leur amour indéfectible. J'espère les rendre fiers par ce travail accompli, et je n'en serai pas là sans leurs conseils et leurs encouragements.

Et enfin merci à Manon. C'est bien grâce à elle que j'ai acquis une méthode de travail tout au long de cette thèse, ses conseils auront été très précieux. Mais plus que des conseils, sa présence à mes côtés pendant ces trois années a été d'un grand secours, et j'ai bien l'intention de la garder auprès de moi encore longtemps.

Table des matières

Introduction **7**

1 Écriture en base non entière : le cas déterministe **16**
1.1 Transformations greedy et lazy 16
1.2 Extension de la transformation greedy 19

2 Système dynamique aléatoire et extension principale **31**
2.1 Système dynamique aléatoire associé au développement en base non entière 31
2.2 Extension de la dynamique 33
2.3 Propriétés de l'extension 53

3 Extension naturelle **70**
3.1 Construction de la nouvelle extension 70
3.2 Extension naturelle du système de départ 74
3.3 Bernoullicité 82

Perspectives **86**

Annexes **88**

A Schéma récapitulatif **89**

B Définitions et propriétés générales **90**

C Le point de vue analytique : l'opérateur de Perron-Frobenius **93**
C.1 Définitions 93
C.2 Théorème d'existence et d'unicité d'une mesure invariante pour une transformation aléatoire 94

C.3 Application aux développements en base non entière : propriété de mélange fort 95

D Cas particulier du nombre d'or **99**
D.1 Calcul de la mesure invariante selon Suzuki 99
D.2 Calcul de la mesure invariante à partir des résultats du chapitre 2 104

E Table des notations **108**

Bibliographie **111**

Introduction

Écriture des nombres en base entière

On s'intéresse à la représentation des nombres réels dans certains systèmes d'écriture. Par exemple, tout nombre réel admet une écriture en base 10. On peut aborder cette écriture en l'étudiant à travers le prisme des systèmes dynamiques : considérons à cet effet la fonction f définie sur l'intervalle $[0,1[$ par $f(x) = 10x \bmod 1$. Étant fixé un réel $x \in [0,1[$, on définit alors la suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Pour $n \geqslant 1$, on pose $d_n := \lfloor 10x_{n-1} \rfloor \in \{0,\dots,9\}$. Pour tout réel $x \in [0,1[$, on a alors :

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}, \tag{Δ}$$

et la suite (d_n) est une suite de décimales du réel x. Cette écriture est, pour la grande majorité des nombres réels (tous sauf les nombres décimaux), l'unique écriture en base 10.

Une autre manière d'appréhender les décimales (d_n) est de partitionner l'intervalle $[0,1[$ en 10 atomes de longueurs égales, numérotés de 0 à 9. On note $\mathcal{P} := \{[\frac{k}{10}; \frac{k+1}{10}[, k \in \{0,\dots,9\}\}$ la partition ainsi définie. La n-ième décimale d_n du réel x correspond à l'atome dans lequel tombe le réel $x_n = f^n(x)$.

Ainsi, l'étude des images successives d'un réel x par f peut permettre une meilleure compréhension de son développement en base 10. Cependant, l'approche « déterministe » d'une telle fonction montre ses limites, la suite (x_n) pouvant avoir un comportement « chaotique ». En effet, étant donnés deux réels x et x' arbitrairement proches dans $[0,1[$, leurs orbites respectives sous f finissent par être complètement différentes après un nombre suffisant d'itérations.

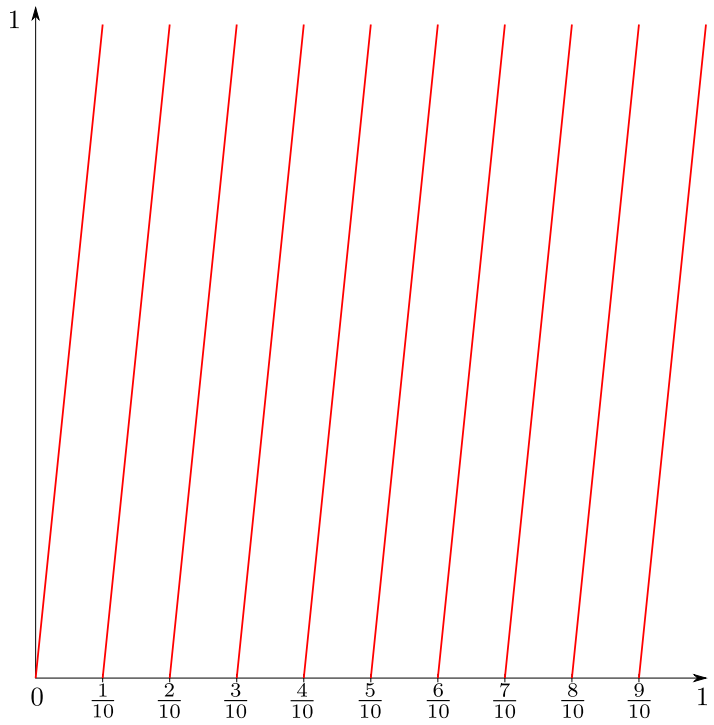


FIGURE 1 – Courbe de la fonction $x \mapsto 10x \bmod 1$

On étudie alors cette dynamique d'un point de vue probabiliste : si l'on tire uniformément au hasard un réel dans l'intervalle, quelle est la loi de la suite de ses images successives par f ? En faisant tendre le nombre d'itérations à l'infini, obtient-on une loi limite ? On remplace ainsi un regard « point par point » par un regard d'ensemble sur la dynamique de la fonction f [6].

Notons premièrement que f préserve la mesure de Lebesgue λ sur $[0,1[$, au sens que pour tout borélien $A \subset [0,1[$, on a $\lambda(f^{-1}(A)) = \lambda(A)$. Cela revient à dire que si on tire un réel x uniformément au hasard, les images successives de x par f suivent toutes la loi uniforme sur $[0,1[$. Le quadruplet $([0,1[, \mathcal{B}, \lambda, f)$, où $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne sur $[0,1[$, est appelé *système dynamique mesuré*.

On a de plus la propriété suivante, qui donne une description probabiliste des décimales : si on tire un réel uniformément au hasard dans l'intervalle, alors ses décimales sont une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de loi uniforme sur $\{0, \ldots, 9\}$. De plus, ces décimales engendrent la tribu borélienne. En fait, faire agir f sur x revient à

décaler les décimales de x vers la gauche. Formellement, à tout réel x de l'intervalle est associée la suite (P_n) de $\mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ telle que pour pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in P_n$. On dit que la suite (P_n) est le $\mathcal{P}$-*nom* du réel x. En l'occurrence, la partition $\mathcal{P}$ est dite *génératrice* du système, car chaque $\mathcal{P}$-nom correspond à un unique réel x de l'intervalle via la formule (Δ), ce qui revient à dire que si deux réels ont la même suite de décimales, alors ils sont égaux. Un tel système (où l'on décale vers la gauche une suite de variables aléatoires i.i.d) est appelé *schéma de Bernoulli*. On peut déduire de cette propriété les conséquences suivantes.

Le système $([0,1[, \mathcal{B}, \lambda, f)$ est *ergodique* : pour tout mesurable $A \in \mathcal{B}$, si $f^{-1}(A) = A$ alors $\lambda(A) = 1$ ou $\lambda(A) = 0$. Intuitivement, l'ergodicité est une forme d'irréductibilité du système, au sens qu'on ne peut décomposer le système en deux ensembles de mesures non nulles et invariants par la transformation.

De plus, le système est fortement mélangeant : pour tous $A, B \in \mathcal{B}$, on a

$$\lambda(A \cap f^{-n}(B)) \to \lambda(A)\lambda(B).$$

Cette propriété est une forme d'indépendance asymptotique du système : plus n est grand, plus x_n devient indépendant de x.

Enfin, si on tire x uniformément au hasard sur $[0,1[$, les décimales de x vérifient un théorème central limite : tirons un réel x uniformément au hasard et notons $(d_n)_{n\geqslant 1}$ sa suite de décimales. Notons m l'espérance de d_1 et σ l'écart-type de d_1. Alors on a la convergence en loi suivante :

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} d_k - nm}{\sigma\sqrt{n}} \to_{n\to\infty} \mathcal{N}(0,1).$$

Tous les résultats énoncés ci-dessus sont valables dans toutes les bases entières, en particulier en base 2, où la transformation en jeu est alors $g(x) = 2x \bmod 1$. Le système $([0,1[, \mathcal{B}, \lambda, g)$ n'est pas inversible, mais on peut l'étendre en un système inversible qu'on appelle classiquement la transformation du boulanger, définie sur le carré $[0,1[\times[0,1[$ par

$$\tilde{g}(x,y) = \begin{cases} (2x, y/2) & \text{si } \ x < 1/2, \\ (2x-1, y/2+1/2) & \text{si } \ x \geqslant 1/2. \end{cases}$$

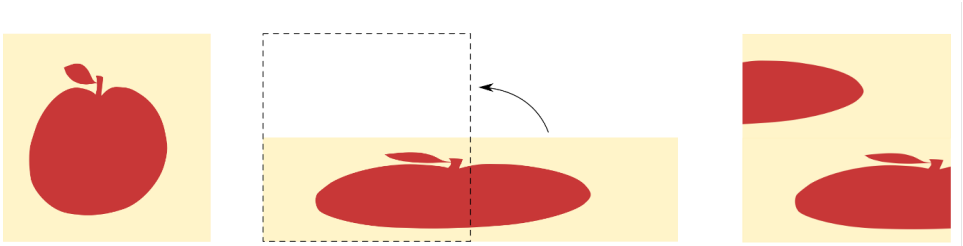


FIGURE 2 – Illustration de la transformation du boulanger

L'action de $\tilde{g}$ sur la première coordonnée est exactement celle de g. De plus, $\tilde{g}$ préserve la mesure de Lebesgue sur le carré, qui se projette sur la mesure de Lebesgue unidimensionnelle. On dit alors que g est un *facteur* de $\tilde{g}$, ou de manière équivalente, $\tilde{g}$ est une *extension* de g. De surcroît, la transformation $\tilde{g}$ est la plus « petite » extension de g qui soit inversible : le système $([0,1[\times[0,1[, \mathcal{B}\times\mathcal{B}, \lambda\otimes\lambda, \tilde{g})$ est « l'extension naturelle » du système initial. On formalisera davantage cette notion par la suite (voir Définition 3.1).

Notons dès à present qu'on peut réécrire cette transformation de manière « géométrico-symbolique », en remplaçant la composante y par son écriture binaire écrite en ordre inverse, codée ici par une suite de $\{0,1\}^{\mathbb{Z}_-}$:

$$\tilde{g}(x,e) = \begin{cases} (2x, e\cdot 0) & \text{si } \ x < 1/2, \\ (2x-1, e\cdot 1) & \text{si } \ x \geqslant 1/2, \end{cases}$$

où $e\cdot\varepsilon$ est la concaténation de la suite e et du bit ε. La suite e peut être vue comme une suite d'étiquettes : l'étiquette 0 représente la moitié inférieure du carré, le « rez-de-chaussée », tandis que 1 représente sa moitié supérieure, le « premier étage ». On décide d'indexer par Z_- car les étiquettes permettent de retrouver l'orbite passée d'un point donné. On généralisera ce point de vue dans la suite de la thèse.

Les bases non entières

Jusqu'ici, on a illustré à quel point l'approche probabiliste des systèmes dynamiques permet de comprendre les écritures des réels en base entière. Il est donc légitime d'utiliser les mêmes outils pour décrire d'autres systèmes de numérations. Dans cette thèse, on se concentrera sur l'écriture des nombres dans une base non entière, que l'on notera β. On se limitera ici au cas où $1 < \beta < 2$, bien que les résultats classiques énoncés ci-dessous soient valables pour tout $\beta > 1$.

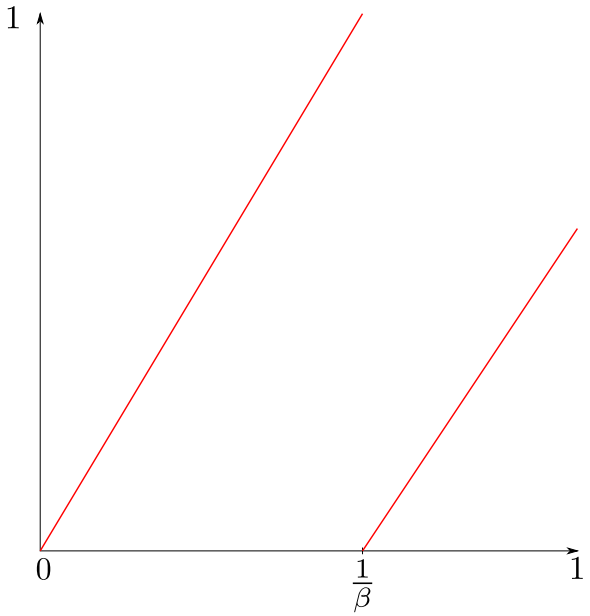


FIGURE 3 – Courbe de T_β

C'est en 1957 que Rényi [23] introduit la transformation T_β définie sur $[0,1[$ par $T_\beta(x) = \beta x \bmod 1$, permettant d'écrire tout réel x de cet intervalle sous la forme

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{\beta^n},$$

avec $b_n := 1_{[1/\beta,1[}(T_\beta^{n-1}(x))$ pour tout $n \geqslant 1$. La suite (b_n) est une écriture du réel x en base β, appelée écriture « greedy » de x. En fait, λ-presque tout réel de $[0,1[$ admet cette fois une infinité d'écritures possibles en base β, et l'écriture greedy est la plus grande de toutes, dans l'ordre lexicographique [11].

On peut, au même titre que pour l'écriture décimale, étudier les propriétés de l'écriture dite greedy du point de vue de la théorie ergodique. Dans son article, Rényi démontre l'existence et l'unicité d'une mesure de probabilité invariante équivalente à la mesure de Lebesgue, et en explicite la densité dans le cas où β est égal au nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, il s'agit de la fonction :

$$\frac{5+3\sqrt{5}}{10} 1_{[0,\varphi-1[} + \frac{5+\sqrt{5}}{10} 1_{[\varphi-1,1[}.$$

En 1960, William Parry donne une forme explicite de la densité de cette

mesure pour toute valeur de β [19]. Étant donné un réel $\beta > 1$, la densité h_β de l'unique mesure de probabilité invariante ν_β absolument continue par rapport à λ est proportionnelle à la fonction

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{\beta^n} 1_{[0,T_\beta^n(1)[}.$$

De plus, Parry établit que le système $([0,1[, \mathcal{B}, \nu_\beta, T_\beta)$ est faiblement mélangeant, c'est à dire que pour tous boréliens $A, B \in \mathcal{B}$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\nu_\beta(A \cap T_\beta^{-n}(B)) - \nu_\beta(A)\nu_\beta(B)| = 0.$$

Il s'agit d'une notion intermédiaire entre l'ergodicité et le mélange fort. C'est aussi dans cet article que sont décrites pour la première fois les décimales admissibles dans un développement greedy en base β. En effet, contrairement aux bases entières, toute suite de décimales ne constitue pas nécessairement une écriture greedy possible en base β. Par exemple, dans la base φ, l'écriture greedy d'un réel ne peut pas avoir deux 1 qui se suivent.

Parry prouve le théorème suivant :

Théorème. *([19, Theorem 3], voir aussi [9]) Soit $\beta > 1$ tel que l'écriture greedy de $\beta - \lfloor\beta\rfloor$ soit infinie et de la forme*

$$\beta - \lfloor\beta\rfloor = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{\beta^i},$$

et posons $a_0 = \lfloor\beta\rfloor$. Soit $(b_1, b_2, \ldots)$ une suite d'entiers positifs. Alors il existe un réel $x \in [0,1[$ dont l'écriture greedy est

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{\beta^i}$$

si et seulement si, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$(b_n, b_{n+1}, \ldots) < (a_0, a_1, \ldots),$$

où $<$ désigne l'ordre lexicographique. En particulier, on a, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$(a_n, a_{n+1}, \ldots) < (a_0, a_1, \ldots).$$

Parry énonce un résultat analogue dans le cas où β admet une écriture finie. Nous avons vu que dans le cas des bases entières, les décimales d'un réel tiré uniformément au hasard constituent une suite de variables aléatoires i.i.d. Dans le cas non entier, Smorodinsky [24] montre en 1973 que si l'écriture greedy de $\beta - \lfloor\beta\rfloor$ en base β est finie, et si on tire un réel x selon la loi ν_β, alors les décimales de x dans la base β forment une chaîne de Markov stationnaire d'ordre la longueur du développement greedy de β. Plus généralement, il démontre que pour tout $\beta > 1$, le système dynamique associé à la transformation T_β est isomorphe à un schéma de Bernoulli.

Enfin, en 1996, Dajani, Kraaikamp et Solomyak [9] construisent une extension naturelle de la transformation T_β, sous forme d'empilement de rectangles de la forme $[0, T_\beta^n(1)] \times [0, \frac{1}{\beta^n}]$, ce qui peut être considéré comme une généralisation de la transformation du boulanger à tout $\beta > 1$. On détaillera cette construction dans le premier chapitre, en introduisant une version symbolique. On verra comment on obtient, par projection, l'expression de la fonction h_β à partir de cette extension. Les auteurs démontrent enfin que l'extension naturelle ainsi construite est isomorphe à un schéma de Bernoulli, retrouvant ainsi le résultat de Smorodinsky.

Dynamique aléatoire

On peut étendre la transformation T_β en posant $T_\beta(x) = \beta x - 1$ pour $x \in [1, \frac{1}{\beta-1}]$. La valeur de $1 < \beta < 2$ étant fixée, on notera cette transformation T_g par la suite, qu'on appellera « transformation greedy ». Comme précédemment, itérer la transformation T_g permet de définir une écriture en base β de tout réel x de l'intervalle $I_\beta := [0, \frac{1}{\beta-1}]$, qui coïncide avec l'écriture greedy sur $[0, 1[$. Le réel $\frac{1}{\beta-1}$ admet pour suite de décimales la suite constante égale à 1, car $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta^n} = \frac{1}{\beta-1}$. Enfin, la mesure ν_β étendue sur l'intervalle I_β en posant $\nu_\beta([1, \frac{1}{\beta-1}]) = 0$ est une mesure de probabilité invariante de T_g sur cet intervalle.

Parallèlement aux travaux décrits précédemment, des écritures en base β autres que l'écriture greedy ont été étudiées, en particulier par Erdős, Joó et Komornik [11], et notamment l'écriture « lazy ». Cette écriture s'obtient à partir de la fonction notée T_ℓ, appelée « transformation lazy » et définie par

$$\begin{array}{rccl} T_\ell : & I_\beta & \to & I_\beta \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \beta x & \text{si } x \leqslant \frac{1}{\beta(\beta-1)} \\ \beta x - 1 & \text{sinon} \end{cases} . \end{array}$$

Si on fixe un réel $x \in I_\beta$, alors l'écriture lazy de x est donnée par la suite (c_n) définie pour tout $n \geqslant 1$ par $c_n = 1_{]\frac{1}{\beta(\beta-1)}, \frac{1}{\beta-1}]}(T_\ell^{n-1}(x))$. L'écriture ainsi obtenue est la plus petite écriture possible en base β dans l'ordre lexicographique [11].

On a le résultat suivant dû à Dajani et Kraaikamp [7] : les systèmes $(I_\beta, \mathcal{B}, \nu_\beta, T_g)$ et $(I_\beta, \mathcal{B}, \tilde{\nu}_\beta, T_\ell)$ sont isomorphes (la mesure $\tilde{\nu}_\beta$ est la mesure image de ν_β par la symétrie de l'intervalle $s(x) := \frac{1}{\beta-1} - x$). On rappellera dans le premier chapitre les propriétés utiles des transformations greedy et lazy et des écritures du même nom.

Ayant à disposition deux transformations permettant d'obtenir la plus grande et la plus petite écriture d'un réel en base β, la question naturelle est de savoir si l'on peut obtenir les autres écritures en base β de manière dynamique. C'est en 2003 que Dajani et Kraaikamp introduisent la transformation β aléatoire [8]. Les transformations T_g et T_ℓ ne diffèrent que sur l'intervalle $[\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\beta(\beta-1)}]$: les réels de cet intervalle ont une écriture greedy commençant par un 1, tandis que leur écriture lazy commence par un 0. Ainsi, plutôt qu'itérer seulement une des deux transformations, on peut choisir au hasard la transformation à appliquer à chaque itération : si on fixe $p \in]0, 1[$, on décide d'appliquer T_g avec probabilité p et T_ℓ avec probabilité $1 - p$. Les auteurs démontrent qu'on obtient ainsi toutes les écritures possibles d'un réel en base β. Dans le cadre de ce système dynamique aléatoire, on peut définir une notion de mesure de probabilité invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue (section 2.1). L'unicité d'une telle mesure, notée μ_p, est obtenue par Dajani et De Vries en 2007 [5], à l'aide d'un résultat portant sur les opérateurs de transfert démontré par Pelikan en 1984 [20]. En 2014, Kempton [18] propose une extension naturelle de ce système aléatoire inspirée de celle de Dajani et Kraaikamp [9] dans le cas où $p = \frac{1}{2}$ et obtient l'expression de $\mu_{1/2}$. Cette construction ne semble pas pouvoir se généraliser directement à toute valeur de p.

Plan de la thèse

Le chapitre 1 introduit les transformations greedy et lazy, ainsi que leurs propriétés ergodiques. On construit l'extension naturelle de la transformation greedy, qui permet en particulier de retrouver l'expression de l'unique mesure de probabilité invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Le chapitre 2 est dédié à la définition du système dynamique aléatoire générant les écritures en base β, ainsi qu'à la construction d'une extension sur

le modèle de celle de Kempton, mais qui est valable pour toute valeur de p. Cette extension nous permet en particulier d'obtenir l'expression de l'unique mesure de probabilité invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, déjà obtenue par Suzuki en 2019 [25] via l'utilisation des opérateurs de transfert. Cette extension n'est pas inversible, mais possède un certain nombre de propriétés fondamentales, qu'on établit dans ce chapitre. Dans l'esprit de l'article [9], on introduit l'ensemble E_g, (section 2.2.1), appelée « base greedy », dans l'objectif d'étudier la transformation induite de l'extension sur cet ensemble (définition en annexe B). Nous définissons aussi une partition de E_g (Lemme 2.8) dont on démontrera qu'elle possède des propriétés d'indépendance et de génération. Elle est particulièrement utile dans le troisième chapitre. On cloture le chapitre en démontrant l'ergodicité de cette extension (Théorème 2.15).

Enfin, le chapitre 3 est dédié a la construction et à l'étude de l'extension naturelle du système dynamique aléatoire défini dans le deuxième chapitre. Pour ce faire, on utilise en particulier la notion de couplages de systèmes dynamiques (annexe B). On déduit de cette construction l'ergodicité du système dynamique aléatoire initial et l'unicité de la mesure invariante construite au chapitre précédent (Corollaire 2.16). Nous retrouvons ainsi de nombreuses propriétés uniquement à l'aide de cette extension. Enfin, on démontre que, comme dans le cas des bases entières, ou le cas de la transformation greedy, le système est isomorphe à un schéma de Bernoulli, en appliquant un résultat de Ito, Totoki et Murata [15] portant sur les partitions dénombrables. On s'inspire pour cela des méthodes employées dans l'article de Dajani, Kraaikamp et Solomyak [9], et notamment de la transformation induite sur la base E_g.

Chapitre 1

Écriture en base non entière : le cas déterministe

Dans la première partie du chapitre, on définit les écritures en base β ainsi que les deux dynamiques principales permettant de générer ces écritures : la transformation greedy T_g et lazy T_ℓ. Après avoir rappelé leurs propriétés les plus utiles (Théorèmes 1.1 et 1.2), on décrit dans la deuxième partie la construction de l'extension naturelle de la transformation greedy (sections 1.2.1 et 1.2.2). En construisant une mesure invariante de cette extension (Section 1.2.3), on retrouve l'expression de l'unique mesure de probabilité invariante par T_g absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

1.1 Transformations greedy et lazy

Soit $1 < \beta < 2$ un réel, et $x \in I_\beta := \left[0; \frac{1}{\beta-1}\right]$. Une écriture (ou développement) en base β du réel x est une suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\{0,1\}$ telle que

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{\beta^n}.$$

Une manière d'obtenir une écriture du réel x consiste à itérer la transformation T_g, appelée *transformation greedy*, et définie par

$$\begin{array}{rccl} T_g : & I_\beta & \to & I_\beta \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \beta x & \text{si } x < \frac{1}{\beta} \\ \beta x - 1 & \text{sinon} \end{cases} . \end{array}$$

Plus précisement, on définit la suite (b_n) en posant, pour tout $n \geqslant 1$, $b_n = 1_{[\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\beta-1}]}(T_g^{n-1}(x))$. Autrement dit, si le réel $T_g^{n-1}(x)$ est supérieur ou égale à $\frac{1}{\beta}$, alors la n-ième décimale vaut 1, sinon elle vaut 0. La suite (b_n) est le développement greedy de x. On peut obtenir une deuxième écriture du réel x en itérant cette fois la transformation T_ℓ, appelée *transformation lazy*, et définie par

$$\begin{array}{rccl} T_\ell : & I_\beta & \to & I_\beta \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \beta x & \text{si } x \leqslant \frac{1}{\beta(\beta-1)} \\ \beta x - 1 & \text{sinon} \end{cases} . \end{array}$$

On obtient alors la suite de décimales (c_n) en posant $c_n = 1_{[\frac{1}{\beta(\beta-1)}, \frac{1}{\beta-1}]}(T_\ell^{n-1}(x))$. La suite (c_n) est le développement lazy de x. La transformation T_g permet d'obtenir le développement en base β le plus grand dans l'ordre lexicographique tandis que la transformation T_ℓ permet d'obtenir le développement en base β le plus petit dans l'ordre lexicographique [11]. Autrement dit, pour tout développement (d_n) de x, on a

$$(c_n) \leqslant (d_n) \leqslant (b_n)$$

où $\leqslant$ désigne l'ordre lexicographique.

La transformation T_g est ici continue à droite et limitée à gauche, tandis que T_ℓ est continue à gauche et limitée à droite par symétrie. On note $L := [0, \frac{1}{\beta}[$, $S := [\frac{1}{\beta}; \frac{1}{\beta(\beta-1)}]$ et $R :=]\frac{1}{\beta(\beta-1)}; \frac{1}{\beta-1}]$. On définit l'application s sur I_β par $s(x) := \frac{1}{\beta-1} - x$. Elle envoie l'intervalle S sur lui-même, et l'intervalle R sur L et réciproquement. On a de plus la relation de conjugaison suivante

$$s \circ T_g \circ s = T_\ell.$$

En 1960, William Parry obtient une expression de l'unique mesure invariante ν_β de T_g absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ [2]. Sa densité h_β est proportionnelle à la fonction

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{\beta^n} 1_{[0, T_\beta^n(1)]}.$$

Dans la section suivante, on retrouvera cette expression par la construction d'une extension du système $(I_\beta, \mathcal{B}, \lambda, T_g)$. Dans la suite, tous les espaces considérés seront munis de leur tribu borélienne, sauf précision contraire. C'est pourquoi on omettera la mention de la tribu lorsqu'on évoquera un système donné.

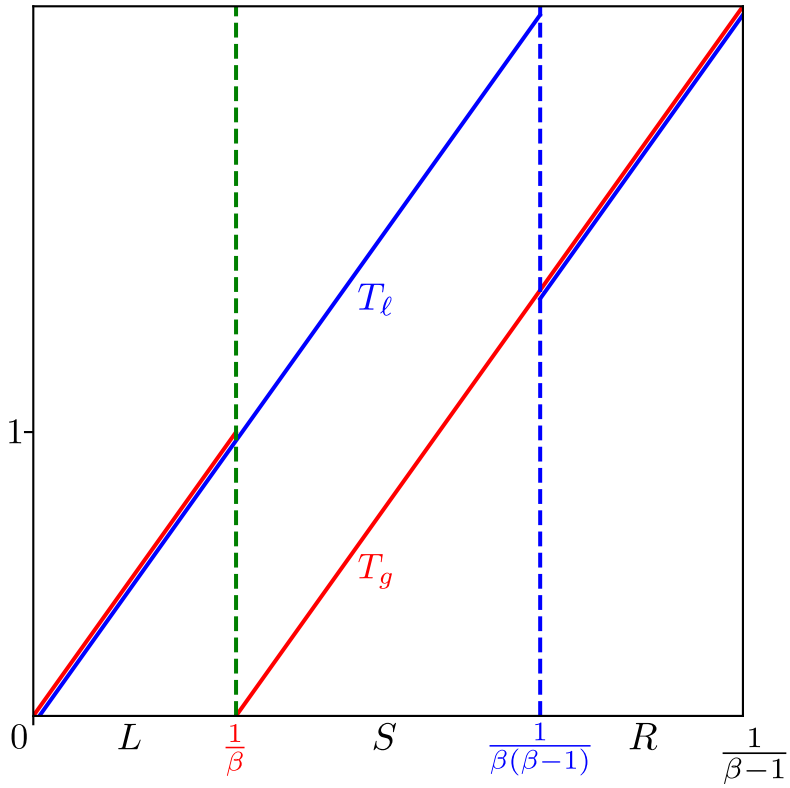


FIGURE 1.1 – Transformations greedy (en rouge) et lazy (en bleu)

Notons $\tilde{\nu}_\beta = \nu_\beta \circ s^{-1}$. La mesure $\tilde{\nu}_\beta$ est alors l'unique mesure invariante de T_ℓ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue [7]. On a le résultat suivant dû à Dajani et Kraaikamp [7] :

Théorème 1.1. *Les systèmes $(I_\beta, \nu_\beta, T_g)$ et $(I_\beta, \tilde{\nu}_\beta, T_\ell)$ sont isomorphes.*

On a le résultat suivant dû à Smorodinsky [24] :

Théorème 1.2. *Le système $(I_\beta, \nu_\beta, T_g)$ est isomorphe à un schéma de Bernoulli.*

En particulier, le système est fortement mélangeant (donc ergodique). Dajani, Kraaikamp et Solomyak retrouvent ce résultat par la construction de l'extension naturelle du système. La partie suivante est dédiée à cette extension, dont on donne une version symbolique.

1.2 Extension de la transformation greedy

L'extension décrite par Dajani, Kraaikamp et Solomyak [9] se construit à l'aide d'une tour. Bruin et Kalle [3] proposent une construction similaire, à l'aide d'une tour de Hofbauer, généralisable à une classe de transformations affines par morceaux. Ces deux constructions sont purement géométriques, nous en donnons ici une nouvelle version « géométrico-symbolique ». Nous adapterons ensuite dans le chapitre 2 cette construction au cas aléatoire. Dans cette partie, on notera $T := T_g$, la transformation greedy sur l'intervalle I_β et $\mathcal{T}$ son extension. L'extension $\mathcal{T}$ permet en particulier de déterminer une expression de h_β. Ici, on ne démontre pas que l'extension construite est une extension naturelle (voir Définition 3.1), on renvoie à [9] pour une démonstration complète.

1.2.1 Description de la tour

On souhaite construire une extension de T qui soit inversible. Le défaut d'injectivité de T est dû à ses deux branches. L'extension de T que l'on explicite ici consiste ainsi à séparer les images des deux branches de T dans des « étages » différents d'une tour, tout en conservant le souvenir des étages parcourus. Ainsi, appliquer la nouvelle dynamique $\mathcal{T}$ fera passer d'un étage à un autre. La tour est un empilement d'étages rectangulaires, on peut considérer que cette extension est une généralisation de la transformation du boulanger, qui est l'extension naturelle du système dynamique associé au développement en base 2, comme explicité dans l'introduction (p. 9). On a

proposé une version géométrico-symbolique de la transformation du boulanger, et cette nouvelle extension suit le même principe.

À chaque étage de la tour est associé un numéro $n \in \mathbb{N}$. Il y a deux types de transitions d'un étage à un autre :

— soit on passe de l'étage n à l'étage suivant $n+1$.

— soit on passe de l'étage n au « rez-de-chaussée » de la tour, c'est à dire l'étage 0, ce qui n'est possible que lorsque $T^n(1) \geqslant \frac{1}{\beta}$. On appellera cet étage la « base » de la tour.

Un élément de cette tour est alors un couple $c = (e, x)$, où x est la composante réelle, de l'intervalle I_β qui subit la dynamique T (plus précisement x est dans un intervalle inclus dans I_β, qui sera précisé dans la suite). La composante e est la suite des étages de la tour qui ont été parcourus dans l'orbite passée de c par $\mathcal{T}$. Plus précisément, $e = (e_k)_{k\leqslant 0} \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}_-}$, il s'agit de la suite d'entiers qui décrit le numéro des étages précédemment visités par l'orbite passée de c. L'étage où se situe actuellement le point c est donc e_0.

On définit $Y \subset \mathbb{N}^{\mathbb{Z}_-}$ l'ensemble des suites d'étages admissibles. Dans toute suite $e \in Y$, les seuls mots de longueur 2 admissibles sont :

— $(n, n+1)$ pour tout entier $n \geqslant 0$;

— $(n, 0)$ pour tout entier $n \geqslant 0$ tel que $T^n(1) \geqslant \frac{1}{\beta}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit le cylindre $[n]_0$ de Y comme étant l'ensemble des suites d'étages de Y se terminant par n à l'indice 0. On peut noter qu'un élément de ce cylindre est nécessairement de la forme $(\ldots, 0, 1, \ldots, n-1, n)$, puisque le seul moyen de parvenir à l'étage n est d'avoir parcouru tous les étages précédents depuis l'étage 0. On définit de même, pour une séquence finie u vérifiant les conditions de compatibilité de Y, le cylindre $[u]_0$, désignant l'ensemble des suites d'étages de Y se terminant par le mot u.

On définit pour tout entier n, l'étage n de la tour par :

$$E_n := [n]_0 \times [0, T^n(1)].$$

L'étage $E_0 = [0]_0 \times [0, 1]$ est appelé la base de la tour. On définit la tour elle-même par

$$E := \bigsqcup_{n\geqslant 0} E_n.$$

Dans la figure 1.2, la hauteur des étages est choisie de sorte que la dynamique introduite dans la section suivante préserve la mesure de Lebesgue.

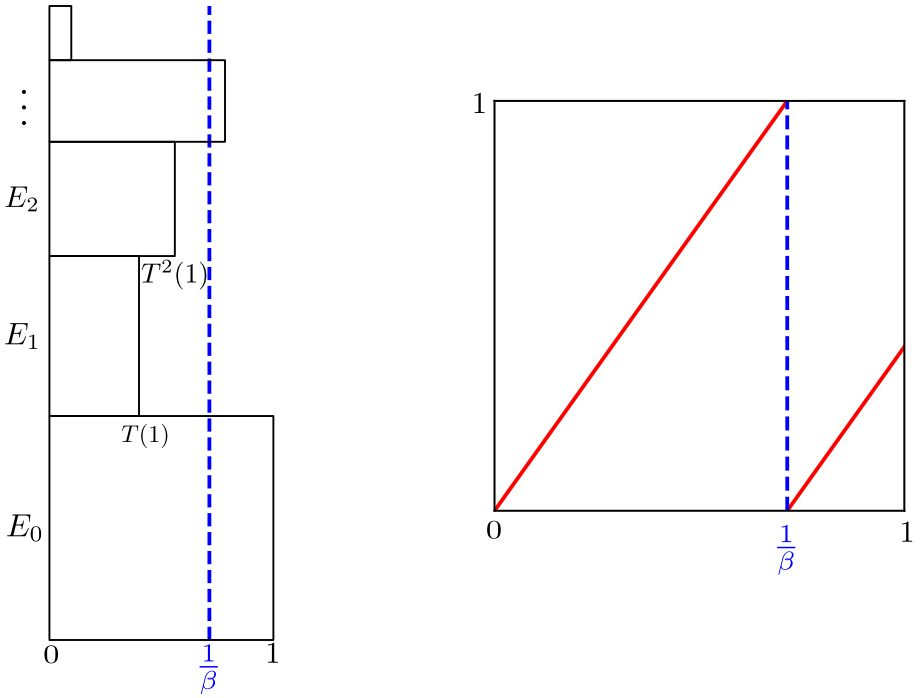


FIGURE 1.2 – Représentation de la tour E et graphe de T

1.2.2 Description de la dynamique

On définit la dynamique $\mathcal{T}$ étage par étage (voir figure 1.3) sur E. On rappelle que l'étage n a deux composantes : son numéro n et l'intervalle $[0, T^n(1)]$. Sur l'étage E_n, La dynamique $\mathcal{T}$ consiste à monter d'un étage lorsque $T^n(1)$ est inférieure à $\frac{1}{\beta}$ (première branche de la transformation T). Si la longueur de $[0, T^n(1)]$ excède $\frac{1}{\beta}$, alors une partie de l'étage sera envoyée dans l'étage suivant (deuxième branche de T), et l'autre ira dans la base de la tour (première branche « pleine »).

Pour une suite e de Y (ou un sous-mot fini d'un élément de Y), on introduit la notation $e \cdot a$, qui consiste à concaténer l'entier a à la suite e. Autrement dit, $(e \cdot a)_k = e_{k+1}$ si $k < 0$ et $(e \cdot a)_0 = a$. L'opération $e \cdot a$ n'est valable que lorsque la nouvelle suite obtenue vérifie les conditions citées plus haut.

L'extension $\mathcal{T}$ est ainsi définie :

1. Si $T^n(1) < \frac{1}{\beta}$, alors la dynamique sur l'étage n est

$$\begin{array}{ccc} E_n & \to & E_{n+1} \\ (e, x) & \mapsto & (e \cdot (n+1), \beta x) \end{array}.$$

   L'image de l'étage E_n est alors l'étage suivant E_{n+1} tout entier (l'image par T de l'intervalle $[0, T^n(1)]$ est bien l'intervalle $[0, T^{n+1}(1)]$ dans ce cas).

2. Si $T^n(1) \geqslant \frac{1}{\beta}$, la partie $E_n \cap \{x < \frac{1}{\beta}\}$ est envoyée dans E_0 par

$$\begin{array}{ccc} E_n \cap \{x < \frac{1}{\beta}\} & \to & E_0 \\ (e, x) & \mapsto & (e \cdot 0, \beta x) \end{array}.$$

   La partie $E_n \cap \{x \geqslant \frac{1}{\beta}\}$ est envoyée sur E_{n+1} par

$$\begin{array}{ccc} E_n \cap \{x \geqslant \frac{1}{\beta}\} & \to & E_{n+1} \\ (e, x) & \mapsto & (e \cdot (n+1), \beta x - 1) \end{array}.$$

   L'image par T de l'intervalle $[0, \frac{1}{\beta}[$ est l'intervalle $[0, 1[$ (on remplit une « tranche » horizontale de la base de la tour, à un point près), et l'image de la partie droite de E_n est l'étage E_{n+1} tout entier.

   On notera bien sûr que pour tout $(e, x) \in E$, la deuxième composante de $\mathcal{T}(e, x)$ est égale à $T(x)$.

Dans la figure 1.3, la longueur de l'étage 1 excède $\frac{1}{\beta}$, ainsi la partie gauche (rouge) est envoyée dans la base de la tour, et la partie droite (bleue) monte

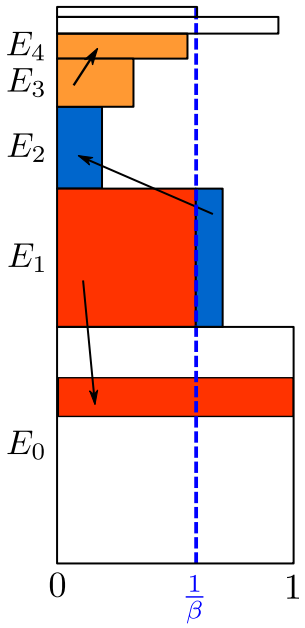


FIGURE 1.3 – Action de $\mathcal{T}$ sur la tour

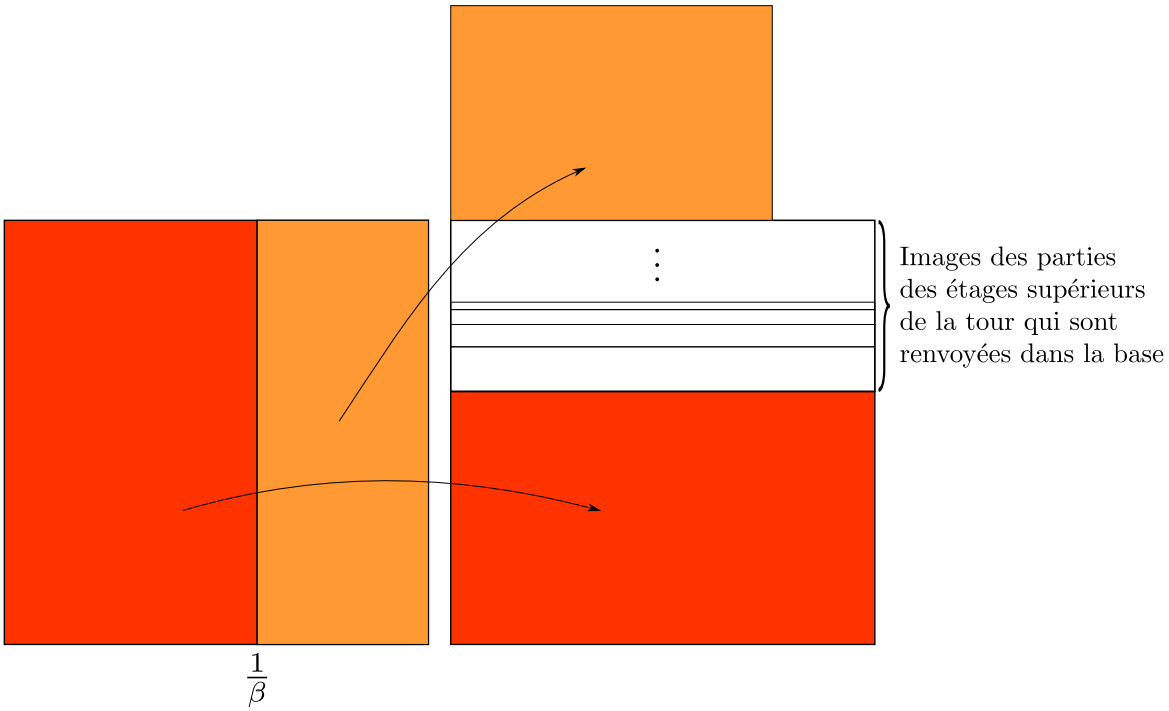


FIGURE 1.4 – Action de $\mathcal{T}$ sur la base de la tour

d'un étage. Par ailleurs, l'étage 3 a une longueur inférieure à $\frac{1}{\beta}$, la dynamique $\mathcal{T}$ envoie donc cet étage sur l'étage 4. La figure 1.4 illustre la dynamique sur la base de la tour. La partie gauche de la base est renvoyée dans la base, tandis que la partie droite remplit l'étage suivant. La base reçoit aussi toutes les parties gauches des étages supérieurs dont la longueur dépasse $\frac{1}{\beta}$.

1.2.3 Propriétés

Bijectivité de la dynamique ainsi construite

La surjectivité de la dynamique découle de la construction de celle-ci. En effet, dès lors qu'un étage ou qu'une partie d'un étage monte à l'étage suivant, celui-ci est complètement rempli. Par ailleurs, les retours à la base remplissent tout l'intervalle $[0, 1[$. Dans tous les cas, on explicite ici l'unique antécédent de chaque point de la tour.

Soit $c = (e, x) \in E$. L'existence et l'unicité de l'antécédent de c par $\mathcal{T}$ se détermine à l'aide de l'étage actuel e_0 ainsi que de l'étage précédent e_{-1}. C'est bien la composante en Y qui permet de retrouver cet antécédent.

- Si $e_0 = 0$: le point c est donc dans la base E_0 de la tour. Puisque $e_0 = 0$, alors $T^{e_{-1}}(1) \geqslant \frac{1}{\beta}$ (ceci est assuré par les relations de compatibilité dans Y). Alors $c^{-1} := (\delta(e), \frac{x}{\beta})$ est l'unique antécédent de c par $\mathcal{T}$ (où δ est le shift vers la droite). Cet antécédent est donc dans l'étage e_{-1}. La suite $\delta(e)$ est bien un élément de Y (les mots de longueurs 2 dans $\delta(e)$ sont bien admissibles). L'image de c^{-1} par $\mathcal{T}$ est bien c, car la longueur de l'étage dans laquelle se situe c^{-1} est supérieure à $\frac{1}{\beta}$, et $\frac{x}{\beta} < \frac{1}{\beta}$. Cet antécédent est bien unique car un seul point de l'étage e_{-1} a pour image c.
- Si $e_0 > 0$, cela signifie que le point c provient forcément de l'étage juste au-dessous de son étage actuelle E_{e_0}.
  - si $T^{e_{-1}}(1) < \frac{1}{\beta}$, autrement dit si l'étage précédent a une longueur inférieure à $\frac{1}{\beta}$ alors $(\delta(e), \frac{x}{\beta})$ est l'unique antécédent de c.
  - si $T^{e_{-1}}(1) \geqslant \frac{1}{\beta}$, autrement dit si l'étage précédent a une longueur supérieure à $\frac{1}{\beta}$ alors $(\delta(e), \frac{x}{\beta} + \frac{1}{\beta})$ est l'unique antécédent de c (sauf pour $x = 0$). L'antécédent de c est dans la partie droite de l'étage $E_{e_{-1}}$ (composante réelle supérieure à $\frac{1}{\beta}$).

Construction d'une mesure invariante

On cherche à définir une mesure μ sur la tour, preservée par la dynamique, de sorte que sur chaque étage de la tour, la mesure μ soit le produit d'une mesure m sur Y par la mesure de Lebesgue restreinte à l'intervalle que l'on considère.

Pour que μ soit préservée sur la tour, il faut, pour tout entier n, que la mesure de l'étage E_n soit égale à la mesure de son image réciproque par $\mathcal{T}$:

— Si $n > 0$ et si $T^{n-1}(1) < \frac{1}{\beta}$: alors $\mathcal{T}^{-1}(E_n) = E_{n-1}$. Ainsi,

$$\mu(\mathcal{T}^{-1}(E_n)) = \mu(E_{n-1}) = m([n-1]_0) \times T^{n-1}(1).$$

Par ailleurs, $\mu(E_n) = m([n]_0) \times T^n(1)$ et $T^n(1) = \beta T^{n-1}(1)$ donc on doit avoir l'égalité

$$m([n]_0) = \frac{1}{\beta} m([n-1]_0).$$

De même, si $T^{n-1}(1) \geqslant \frac{1}{\beta}$, alors $\mathcal{T}^{-1}(E_n) = E_{n-1} \cap \{x \geqslant \frac{1}{\beta}\}$. Ainsi,

$$\mu(\mathcal{T}^{-1}(E_n)) = \mu(E_{n-1} \cap \{x > \frac{1}{\beta}\}) = m([n-1]_0) \times (T^{n-1}(1) - \frac{1}{\beta}).$$

Par ailleurs, $\mu(E_n) = m([n]_0) \times T^n(1)$ et $T^n(1) = \beta T^{n-1}(1) - 1$. Ici aussi, on doit avoir l'égalité

$$m([n]_0) = \frac{1}{\beta} m([n-1]_0).$$

En résumé, pour tout $n > 0$, la mesure m doit vérifier

$$m([n]_0) = \frac{1}{\beta} m([n-1]_0). \tag{1.1}$$

Cette équation correspond à la préservation des aires bleues et orange dans la figure 1.3.

— D'autre part, la mesure μ doit aussi être préservée lors des retours à la base de la tour. Pour tout entier n tel que $T^n(1) \geqslant \frac{1}{\beta}$, on a

$$\mathcal{T}^{-1}(E_0 \cap \{e \in [n0]_0\}) = E_n \cap \{x \leqslant \frac{1}{\beta}\}.$$

On a $\mu(E_n \cap \{x \leqslant \frac{1}{\beta}\}) = m([n]_0) \times \frac{1}{\beta}$. De plus, $\mu(E_0 \cap \{e \in [n0]_0\}) = m([n0]_0) \times 1$. Ainsi, pour tout entier n tel que $T^n(1) \geqslant \frac{1}{\beta}$, la mesure m doit vérifier

$$m([n0]_0) = \frac{1}{\beta} m([n]_0). \tag{1.2}$$

Cette équation correspond à la préservation de l'aire rouge dans la figure 1.3.

De l'équation (1.1), on déduit que pour tout entier $n > 0$, on a

$$m([n]_0) = \frac{1}{\beta^n} m([0]_0). \tag{1.3}$$

Les équations (1.2) et (1.3) sont nécessaires pour avoir la préservation de la mesure μ sur la tour. En sommant les mesures de toutes les parties envoyées dans la base de la tour, on doit nécessairement retrouver la mesure de la base :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} m([n0]_0) \times 1_{[\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\beta-1}]}(T^n(1)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\beta} m([n]_0) \times 1_{[\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\beta-1}]}(T^n(1))$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\beta^{n+1}} m([0]_0) \times 1_{[\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\beta-1}]}(T^n(1)) = m([0]_0).$$

La dernière égalité découle du développement greedy en base β de 1 :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\beta^{n+1}} \times 1_{[\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\beta-1}]}(T^n(1)) = 1. \tag{1.4}$$

En appliquant le raisonnement précédent à des « tranches » horizontales de la base, on déduit des équations 1.2 et 1.3 que pour $n_1, \ldots, n_k$ des entiers tels que $T^{n_i}(1) \geqslant \frac{1}{\beta}$, la mesure m doit vérifier

$$m([n_k 0 \ldots n_{k-1} 0 \ldots 0 \ldots n_1 0]_0) = \frac{1}{\beta^{n_k+1}} \frac{1}{\beta^{n_{k-1}+1}} \cdots \frac{1}{\beta^{n_1+1}} m([0]_0). \tag{1.5}$$

De même, pour toute séquence finie u telle que $u \cdot n$ vérifie les conditions de compatibilité, on a :

$$m([u \cdot n]_0) = \frac{1}{\beta} m([u]_0).$$

On pose $m([0]_0) = 1$. Soit $\mathcal{N} := \{n \in \mathbb{N}, T^n(1) \geqslant \frac{1}{\beta}\}$. Le développement en base β de 1 donné par (1.4) permet de définir une mesure de probabilité p_1 sur $\mathcal{N}$, qui associe à chaque entier $n \in \mathcal{N}$ la probabilité $\frac{1}{\beta^{n+1}}$.

L'application φ définie sur $\mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ par

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{N}^{\mathbb{N}} & \to & [0]_0 \\ (n_k)_{k\in\mathbb{N}} & \mapsto & (\ldots, n_k, 0, 1, \ldots, n_{k-1}, \ldots, 0, 1, \ldots, n_0, 0) \end{array}$$

est une bijection mesurable de $\mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ vers $[0]_0$. En effet, toute suite de $\mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ définit bien une unique suite admissible de $[0]_0$, et toute suite e de l'ensemble $[0]_0$ est caractérisée par une unique suite d'entiers positifs ou nuls $(n_k)_{k\geqslant 0}$, vérifiant $T^{n_k}(1) \geqslant \frac{1}{\beta}$ pour tout k et telle que $e = (\ldots, n_k, 0, 1, \ldots, n_{k-1}, \ldots, 0, 1, \ldots, n_0, 0)$. On définit alors m sur $[0]_0$ comme mesure image de $p_1^{\otimes\mathbb{N}}$ par φ.

On souhaite maintenant définir m sur les cylindres de la forme $[n]_0$. On note $\mathcal{B}_n$ l'ensembles des boréliens de $[n]_0$. Décaler n fois vers la droite un élément de $[n]_0$ est une bijection de $[n]_0$ vers $[0]_0$, car tout élément e de $[n]_0$ est de la forme $[e', 1, 2, \ldots, n]_0$, où $e' \in [0]_0$ est unique. On a donc

$$\delta^n(\mathcal{B}_n) = \mathcal{B}_0,$$

où δ est le décalage vers la droite.

On peut donc étendre m sur tout cylindre de la forme $[n]_0$:

$$m : \begin{array}{ccc} \mathcal{B}_n & \to & [0,1] \\ B & \mapsto & \frac{1}{\beta^n} m(\delta^n(B)) \end{array}.$$

On obtient donc $m[n]_0 = \frac{1}{\beta^n}$. La masse totale de Y est alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^n} = \frac{\beta}{\beta - 1}$.

On peut alors définir la mesure μ sur la tour E : sur chaque étage E_n, μ est le produit de la mesure m restreinte à $[n]_0$ par la mesure de Lebesgue restreinte à l'intervalle $[0, T^n(1)]$.

Par construction, la mesure μ est préservée par la dynamique sur la tour. En effet, considérons un pavé $D = [u \cdot n]_0 \times [\alpha, \gamma]$ inclus dans l'étage E_n, où $n \geqslant 0$, u est une séquence finie admissible d'entiers, et $0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma < T^n(1)$. On a alors :

$$\mu(\mathcal{T}^{-1}(D)) = m([u]_0) \times \frac{1}{\beta}(\gamma - \alpha) = \beta m([u \cdot n]_0) \times \frac{1}{\beta}(\gamma - \alpha) = \mu(D).$$

En projetant la mesure μ sur la coordonnée réelle, on obtient alors l'unique mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de T. Sa densité h_β est proportionnelle à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} m([n]_0) 1_{[0,T^n(1)]} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\beta^n} 1_{[0,T^n(1)]},$$

ce qui est la formule obtenue par Parry [19].

Ergodicité et unicité de la mesure

Les méthodes et les arguments développés dans la suite de la thèse dans le cadre aléatoire s'adaptent au cas déterministe et permettent de démontrer l'ergodicité de la transformation greedy et l'unicité de la mesure invariante absolument continue, à l'aide de l'extension $\mathcal{T}$. On se contente ici de donner les étapes importantes du raisonnement, dans un but pédagogique.

Étape 1 : construction d'une partition de E_0

L'objectif premier est de démontrer l'ergodicité de l'extension naturelle $(E, \mu, \mathcal{T})$. Pour ce faire, on étudie d'abord la transformation induite de $\mathcal{T}$ sur la base E_0, que l'on note $\mathcal{T}_0$ (voir la définition en annexe B). Cette transformation préserve la mesure μ conditionnée à la base E_0, c'est à dire la mesure $\mu_0 := m_{|[0]_0} \otimes \lambda$. On souhaite démontrer que le système induit sur E_0 est isomorphe à un schéma de Bernoulli. On définit la partition $\mathcal{P}$ de E_0 selon le premier temps de retour à E_0 : pour chaque entier $n \in \mathcal{N}$, l'atome P_n contient tous les éléments de la base E_0 qui retournent pour la première fois dans E_0 après exactement n itérations de $\mathcal{T}$, c'est à dire

$$P_n := \mathcal{T}_0^{-1}([n, 0]_0 \times [0, 1]).$$

Étape 2 : suite de partitions indépendantes

On démontre ensuite que la suite de partitions $(\mathcal{T}_0^{-k}(\mathcal{P}))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de partitions indépendantes. Plus précisément, pour tous $n_0, n_1, \ldots, n_k \in \mathcal{N}$, on a

$$\mu_0(P_{n_0} \cap \mathcal{T}_0^{-1}(P_{n_1}) \cap \ldots \cap T_0^{-k}(P_{n_k})) = \prod_{i=0}^{k} \mu_0(P_{n_i}).$$

Étape 3 : $\mathcal{P}$ est une partition génératrice

De plus, la partition $\mathcal{P}$ est une partition génératrice du système induit, c'est à dire que la partition $\bigvee_{i=0}^{\infty} \mathcal{T}_0^{-i}(\mathcal{P})$ est la tribu des boréliens de E_0. En effet, on peut montrer que les atomes de la partition $\bigvee_{i=0}^{k} \mathcal{T}_0^{-i}(\mathcal{P})$ sont de la forme

$$[0, 1, \ldots, n_0, 0, 1, \ldots, n_1, 0, \ldots, n_k, 0]_0^{n_0+\ldots+n_k+1} \times I_{n_0,\ldots,n_k}$$

où $I_{n_0,\ldots,n_k}$ est un sous-intervalle de $[0, 1]$, dont la mesure de Lebesgue tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. Cela implique en particulier que μ_0-presque

tout point de E_0 est uniquement déterminé par son $\mathcal{P}$-nom. On déduit des étapes 2 et 3 que le système induit sur la base E_0 est isomorphe à un schéma de Bernoulli, donc il est ergodique.

Étape 4 : ergodicité du système

On démontre que μ-presque tout point de E atteint la base E_0 en un nombre fini d'itérations de $\mathcal{T}$, ce qui implique l'ergodicité du système $(E, \mu, \mathcal{T})$ (voir Proprosition B.1). Puisque $(E, \mu, \mathcal{T})$ est l'extension naturelle de $([0,1], \nu_\beta, T_g)$, on en déduit que ce dernier système est ergodique.

Étape 5 : unicité de la mesure

Enfin, étant donnée une mesure ν invariante par T_g et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, cette mesure est aussi absolument continue par rapport à ν_β (qui est équivalente à la mesure de Lebesgue). Par ergodicité, on en déduit que $\nu = \nu_\beta$ (voir Lemme 2.17), d'où l'unicité d'une telle mesure.

On peut donc constater que la construction d'une extension naturelle géométrico-symbolique permet non seulement d'obtenir l'expression de la densité h_β, mais aussi l'ergodicité du système et l'unicité de la mesure ν_β en tant que mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Elle permet aussi de démontrer que le système dynamique associé est isomorphe à un schéma de Bernoulli [9].

Dans la suite, on définit un système dynamique aléatoire permettant d'obtenir toutes les écritures en base β d'un nombre réel. Les résultats principaux de la thèse présentés dans les chapitres qui suivent sont obtenus en suivant le plan général décrit ci-dessus.

Chapitre 2

Système dynamique aléatoire et extension principale

Dans la section 2.1, on définit la transformation aléatoire K_β permettant de générer les écritures d'un réel en base β. C'est le système central de cette thèse. La section 2.2 est consacrée à la construction d'une première extension $\mathcal{K}$ de K_β que l'on nommera « extension principale », qui n'est pas encore une extension naturelle de K_β. En particulier, $\mathcal{K}$ n'est pas inversible (le chapitre 3 est consacrée à la construction d'une extension naturelle). Dans la construction du chapitre précédent, l'extension de la transformation greedy est définie sur une tour. Dans ce chapitre, on définit les deux tours greedy et lazy (section 2.2.1), puis la dynamique $\mathcal{K}$ (section 2.2.2) définie sur ces deux tours. On construit ensuite une mesure μ invariante par $\mathcal{K}$ (section 2.2.3). Dans la section 2.3, on établit des propriétés de cette extension : en particulier, le système associé à la transformation induite de $\mathcal{K}$ sur la base de la tour greedy est isomorphe à un schéma de Bernoulli (Proposition 2.12), et le système associé à $\mathcal{K}$ est ergodique (Théorème 2.15).

2.1 Système dynamique aléatoire associé au développement en base non entière

On a vu que les transformations T_g et T_ℓ permettent d'obtenir respectivement le plus grand et plus petit développement en base β de tout réel de l'intervalle I_β. On peut aussi obtenir les autres développements en « mélangeant » ces deux transformations à l'aide d'un système dynamique aléatoire. En effet, les transformations T_g et T_ℓ ne diffèrent que sur l'intervalle central S : les réels de cet intervalle ont une écriture greedy commençant par

un 1, tandis que leur écriture lazy commence par un 0. Ainsi, plutôt qu'itérer seulement une des deux transformations, on peut choisir au hasard la transformation à appliquer à chaque itération : si on fixe $p \in]0,1[$, on décide d'appliquer T_g avec probabilité p et T_ℓ avec probabilité $1-p$. Les développements en base β aléatoires ont été introduits et étudiés Par Dajani et Kraaikamp à partir de 2003 [8, 4, 5]. Nous rappelons ici quelques résultats de ces articles.

Soit $\Omega := \{g, \ell\}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites d'indices « g » et « ℓ », et σ le décalage vers la gauche (appelé aussi *shift*) sur Ω. On définit la β-transformation aléatoire par :

$$K_\beta : \begin{array}{ccc} \Omega \times I_\beta & \to & \Omega \times I_\beta \\ (\omega, x) & \mapsto & (\sigma(\omega), T_{\omega_0}(x)) \end{array}.$$

On notera par ailleurs $T_{\omega_0,\dots,\omega_n} := T_{\omega_n} \circ \cdots \circ T_{\omega_0}$.

Soit x un réel dont on souhaite déterminer un développement en base β. Fixer $\omega \in \Omega$ revient à choisir l'ordre dans lequel on applique les transformations greedy et lazy à partir du réel x. À chaque itération de K_β, on obtient une nouvelle « décimale » de x en base β. Plus précisément, pour toute suite $\omega \in \Omega$, et tout $x \in I_\beta$, on note $\pi(\omega, x) := x$ la projection sur I_β. À ω fixé, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$x_n^\omega := \begin{cases} 1_{\{\pi(K_\beta^{n-1}(\omega,x)) \geqslant \frac{1}{\beta}\}} & \text{si } \omega_{n-1} = g \\ 1_{\{\pi(K_\beta^{n-1}(\omega,x)) > \frac{1}{\beta(\beta-1)}\}} & \text{si } \omega_{n-1} = \ell \end{cases}.$$

La suite $(x_n^\omega)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est le développement en base β de x « le long de la suite ω », et on a

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n^\omega}{\beta^n}.$$

De plus, étant donné un développement (d_n) de x en base β, alors il existe une suite $\omega \in \Omega$ telle que $(d_n) = (x_n^\omega)$ [4].

Enfin, comme dit précédemment, les transformations T_g et T_ℓ ne diffèrent que sur l'intervalle S. On pourrait donc construire la dynamique aléatoire légèrement différemment, en ne décalant la suite ω que lorsque $x \in S$, ce qui est la dynamique initialement construite par Dajani et Kraaikamp. Les propriétés ergodiques de ces deux dynamiques étant les mêmes, on étudiera plutôt K_β par soucis de simplification.

On fixe un réel $p \in]0,1[$, et on munit l'ensemble Ω de la mesure de Bernoulli m_p de paramètre p : on tire g avec probabilité p et ℓ avec probabilité $1-p$, les tirages étant tous indépendants. On s'intéresse alors aux questions suivantes : existe-t-il une mesure μ_p sur I_β, absolument continue par rapport

à la mesure de Lebesgue, telle que la mesure produit $m_p \otimes \mu_p$ soit préservée par K_β ? Si oui, est-elle unique ? Peut-on expliciter sa densité ? Et quelles sont ses propriétés ergodiques ? On peut aborder ces questions d'au moins deux points vues :

— le point de vue classique avec les opérateurs de Perron-Frobenius [20, 2, 5, 14, 1, 25] dont nous rappelons les principaux points en annexe C,

— la construction d'extensions « géométrico-symboliques » comme dans le chapitre 1 (voir par exemple [9, 18]), qui sera notre point de vue dans cette thèse.

2.2 Extension de la dynamique

Afin de construire une telle mesure μ_p, on passe par la construction d'une extension de K_β. Une forme explicite de cette mesure a été donnée dans le cas $p = \frac{1}{2}$ par Kempton en 2014 [18] par la construction d'une extension puis dans le cas général par Suzuki en 2019 [25] à l'aide des opérateurs de Perron-Frobenius. Bruin et Kalle [3] proposent aussi une version de cette extension par une tour de Hofbauer dans le cas où $p = \frac{1}{2}$, explicitée pour β égal au nombre d'or.

Pour la suite, on pourra se référer au schéma en annexe E, qui récapitule les divers facteurs et extensions en jeu.

2.2.1 Première présentation des deux tours

On poursuit l'idée exposée dans le premier chapitre en étendant la dynamique K_β sur deux tours, une tour dite « greedy » et l'autre tour « lazy ». Cette idée a été mise en œuvre dans [18] par Kempton pour $p = \frac{1}{2}$, mais la méthode proposée ne semble pas s'adapter aux autres valeurs de p. On montre ici une construction différente, valable pour tout réel $0 < p < 1$.

Comme précédemment, les tours sont composées d'étages. Chaque étage est le produit de l'ensemble Ω et d'un sous-intervalle de I_β, muni en plus d'une « étiquette », qui est l'analogue du numéro des étages dans la construction du premier chapitre. On définit dans un premier temps la base de chaque tour. On note E_g la base de la tour greedy $\mathcal{G}$, définie par :

$$E_g := \Omega \times \{g\} \times [0, 1].$$

L'étiquette de la base greedy est donc (g), signifiant qu'il s'agit du premier étage de la tour greedy. On note de même E_ℓ la base de la tour lazy $\mathcal{L}$, définie

par :

$$E_\ell := \Omega \times \{\ell\} \times \left[s(1), \frac{1}{\beta - 1} \right].$$

Un étage d'une des deux tours est noté E_e, où e est l'étiquette de l'étage. Cet étage est de la forme :

$$E_e := \Omega \times \{e\} \times I_e,$$

où I_e est un sous-intervalle de I_β que l'on précisera dans la suite. Un point dans un étage d'une des deux tours est donc de la forme $c = (\omega, e, x)$ où :

— ω est une suite indexée par $\mathbb{N}$ d'éléments dans $\{g, \ell\}$. La suite ω détermine la suite des transformations T_g et T_ℓ à appliquer.

— Toute étiquette e est de la forme

$$e = (h, \omega_{-n}, \omega_{-n+1}, \ldots, \omega_{-1})$$

et détermine de manière unique l'étage où se situe le point c. L'entier n est le *niveau* de l'étage E_e, il y a donc 2^n étages de niveau n dans chaque tour, les bases étant au niveau 0. La lettre h indique la tour dans laquelle se situe l'étage : si $h = g$, il s'agit d'un étage de la tour greedy, si $h = \ell$, de la tour lazy. Enfin, la composante réelle d'un point de E_e a subi les transformations $T_{\omega_{-n}}$ jusqu'à $T_{\omega_{-1}}$ depuis la base E_h : les symboles $\omega_{-n}, \ldots, \omega_{-1}$ indique donc la suite des transformations effectuées depuis le dernier passage dans une des deux bases.

— x représente la composante réelle du point c, qui subit la dynamique T_{ω_0}.

On définit alors la tour greedy comme réunion disjointe de tous les étages dont l'étiquette commence par g, et la tour lazy comme réunion disjointe de tous les étages dont l'étiquette commence par ℓ :

$$\mathcal{G} := \bigsqcup_{e' \in \{g,\ell\}^*} E_{g \cdot e'},$$

$$\mathcal{L} := \bigsqcup_{e' \in \{g,\ell\}^*} E_{\ell \cdot e'},$$

où le point médian $\cdot$ indique la concaténation, et l'ensemble $\{g, \ell\}^*$ est l'ensemble des suites finies, dont la suite vide, de g et de ℓ. On note alors $X := \mathcal{G} \sqcup \mathcal{L}$ la réunion disjointe des deux tours, sur laquelle sera définie $\mathcal{K}$. Enfin, étant donné un étage de X, on appelle *longueur* de cet étage la mesure de Lebesgue de l'intervalle associé.

Appliquer la dynamique $\mathcal{K}$ à un point d'une des deux tours consiste soit à monter d'un niveau dans cette tour, soit à retourner à la base de cette tour, soit à aller dans la base de l'autre tour, selon certaines conditions qui seront explicitées par la suite. Il reste donc à définir de manière précise les intervalles I_e ainsi que la dynamique sur les deux tours. On va définir ces intervalles en même temps que la dynamique $\mathcal{K}$, par induction.

On représente dans la figure 2.1 les deux tours l'une au dessus de l'autre pour plus de clarté, la tour lazy étant renversée. De même que dans le chapitre précédent, on choisit de représenter la composante symbolique par la composante verticale. Dans cette représentation, deux points sur une même droite verticale ont la même composante réelle x.

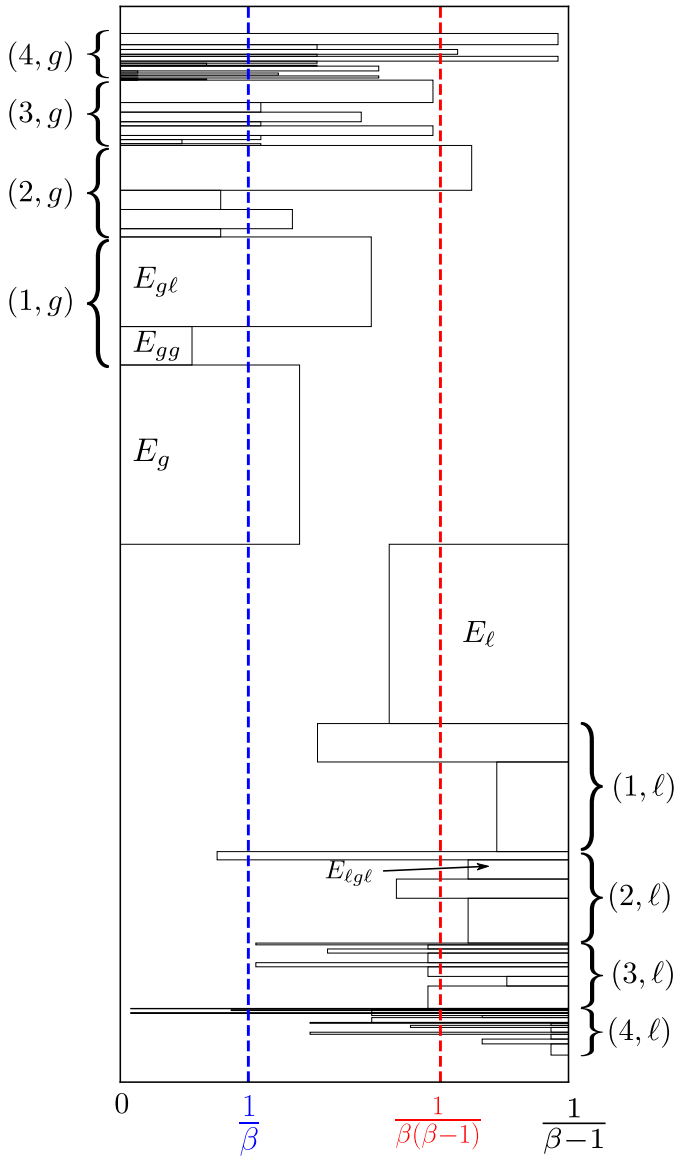


FIGURE 2.1 – Tours greedy et lazy

2.2.2 Dynamique sur les deux tours

Comme l'illustre la figure 2.1, les intervalles $I_{g,\omega_{-n},\dots,\omega_{-1}}$ ont pour borne inférieure 0 et les intervalles $I_{\ell,\omega_{-n},\dots,\omega_{-1}}$ ont pour borne supérieure $\frac{1}{\beta-1}$.

On considère un étage de la tour $\mathcal{G}$ dont on note $e := (g, \omega_{-n}, \dots, \omega_{-1})$, l'étiquette. L'étage E_e est coupé en deux selon la valeur de ω_0 :

$$E_e = (E_e \cap \{(\omega, e, x), \omega_0 = g\}) \sqcup (E_e \cap \{(\omega, e, x), \omega_0 = \ell\}).$$

Par souci de simplification, on notera $E_e \cap [g]_0$ pour désigner l'ensemble des points (ω, e, x) de E_e tels que $\omega_0 = g$, et de même pour ℓ. La dynamique $\mathcal{K}$ est différente sur chacune de ces parties. De plus, elle dépend de la longueur de l'intervalle I_e : si l'intervalle contient le point de discontinuité de la transformation T_{ω_0}, alors une partie de l'étage sera envoyée dans la base E_{ω_0} et le reste sera envoyé dans un étage du niveau suivant. Si I_e ne contient pas le point de discontinuité de la transformation T_{ω_0}, alors toute la partie $E_e \cap [\omega_0]_0$ est envoyée au niveau suivant. Pour simplifier les notations, on note $I_e = [0, t]$.

1. Si $\omega_0 = g$ et si $t < \frac{1}{\beta}$:

$$\mathcal{K} : \begin{array}{ccc} E_e \cap [g]_0 & \to & E_{e\cdot g} \\ (\omega, e, x) & \mapsto & (\sigma(\omega), e \cdot g, \beta x) \end{array}.$$

   On pose

$$I_{e\cdot g} := [0, T_g(t^+)]$$

   de telle sorte que $\mathcal{K}$ envoie $E_e \cap [g]_0$ sur $E_{e\cdot g}$.

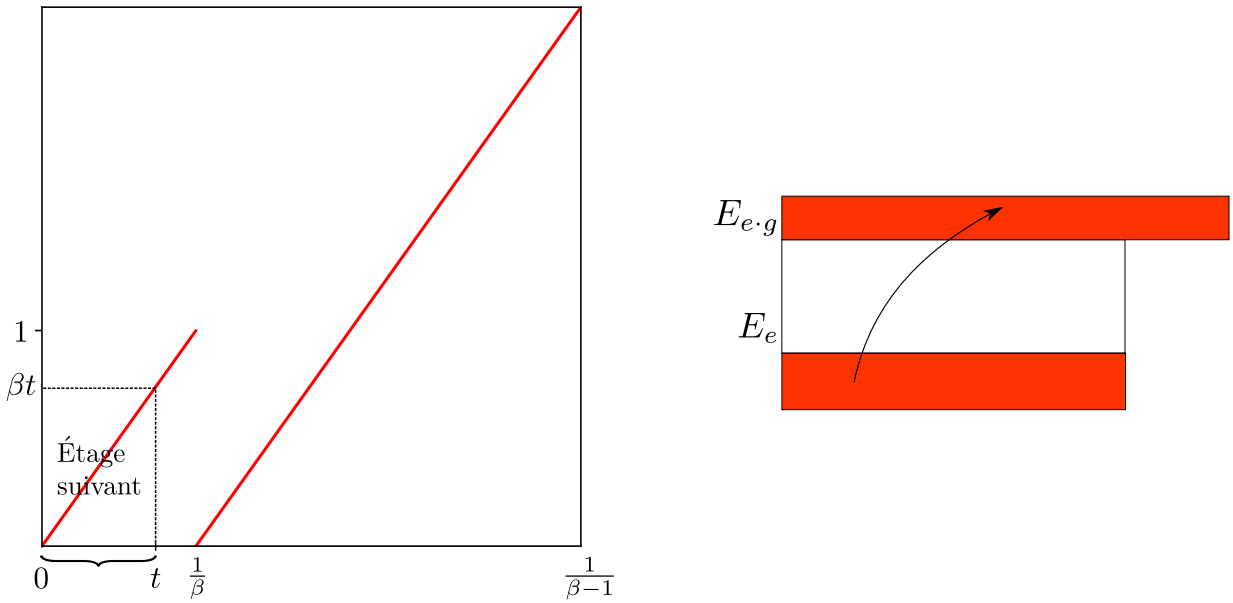


FIGURE 2.2 – $\omega_0 = g$ et $t < \frac{1}{\beta}$

2. si $\omega_0 = g$ et si $t \geqslant \frac{1}{\beta}$, la partie gauche de l'étage est renvoyée dans la base E_g :

$$\mathcal{K} : \begin{array}{ccc} E_e \cap \{\omega_0 = g, x < \frac{1}{\beta}\} & \to & E_g \\ (\omega, e, x) & \mapsto & (\sigma(\omega), g, \beta x) \end{array} ;$$

et la partie droite monte d'un étage :

$$\mathcal{K} : \begin{array}{ccc} E_e \cap \{\omega_0 = g, x \geqslant \frac{1}{\beta}\} & \to & E_{e\cdot g} \\ (\omega, e, x) & \mapsto & (\sigma(\omega), e \cdot g, \beta x - 1) \end{array} .$$

On constate que si $t = \frac{1}{\beta}$, la partie $E_e \cap [g]_0$ est envoyée dans la base à un point près. Dans ce cas l'étage suivant $E_{e\cdot g}$ a une composante réelle réduite au singleton $\{0\}$.
Comme précédemment, on pose

$$I_{e\cdot g} := [0, T_g(t^+)].$$

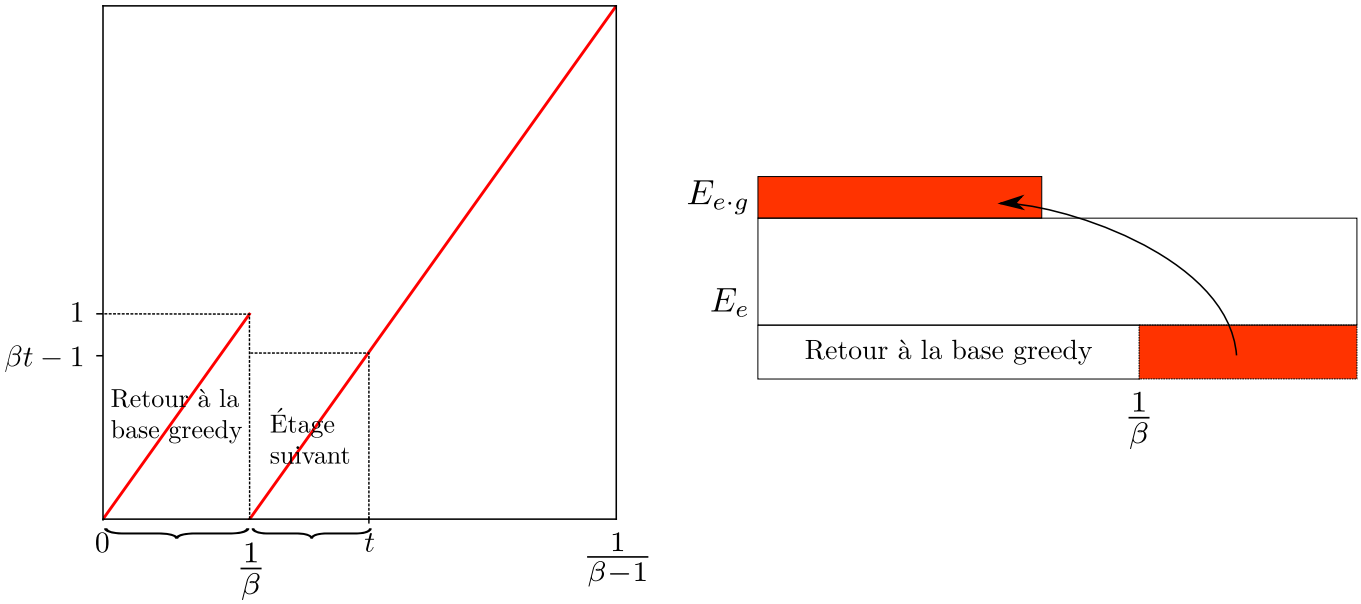


FIGURE 2.3 – $\omega_0 = g$ et $t \geqslant \frac{1}{\beta}$

3. si $\omega_0 = \ell$ et si $t < \frac{1}{\beta(\beta-1)}$:

$$\mathcal{K} : \begin{array}{ccc} E_e \cap [\ell]_0 & \to & E_{e\cdot\ell} \\ (\omega, e, x) & \mapsto & (\sigma(\omega), e\cdot\ell, \beta x) \end{array} .$$

Toute la partie $E_e \cap [\ell]_0$ est envoyée dans l'étage $E_{e\cdot\ell}$. Comme précédemment, on pose

$$I_{e\cdot\ell} := [0, T_\ell(t^+)].$$

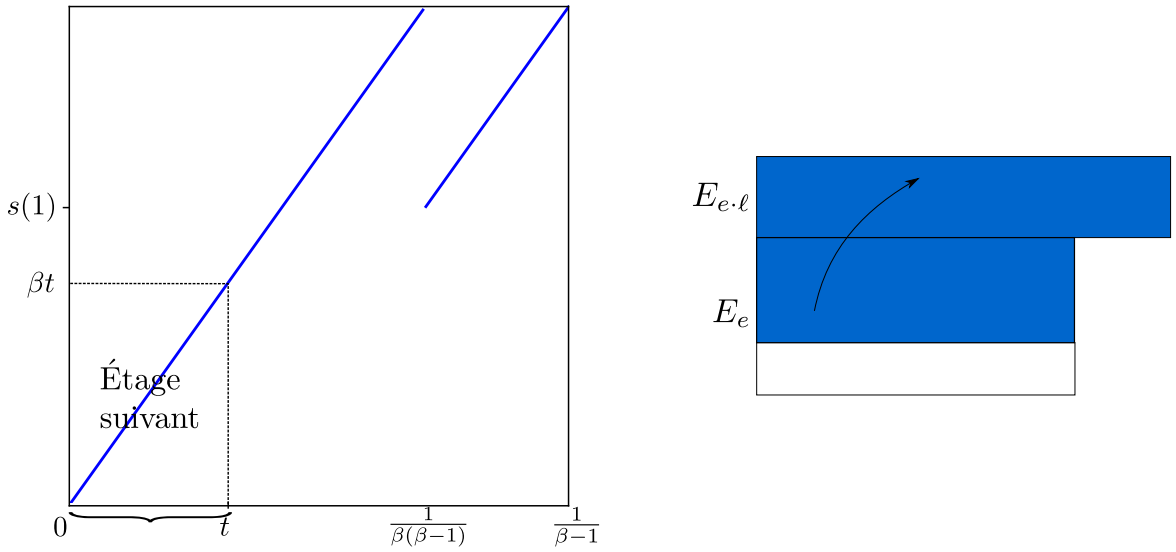


FIGURE 2.4 – $\omega_0 = \ell$ et $t < \frac{1}{\beta(\beta-1)}$

4. si $\omega_0 = \ell$ et si $t \geqslant \frac{1}{\beta(\beta-1)}$, la partie centrale de l'étage est envoyée dans la base E_ℓ :

$$\mathcal{K} : \begin{array}{ccc} E_e \cap \{\omega_0 = \ell, \frac{s(1)}{\beta} < x \leqslant \frac{1}{\beta(\beta-1)}\} & \to & E_\ell \\ (\omega, e, x) & \mapsto & (\sigma(\omega), \ell, \beta x) \end{array} ;$$

et les parties gauche et droite montent d'un étage :

$$\mathcal{K} : \begin{array}{ccc} E_e \cap \{\omega_0 = \ell, x \leqslant \frac{s(1)}{\beta}\} & \to & E_{e\cdot\ell} \\ (\omega, e, x) & \mapsto & (\sigma(\omega), e \cdot \ell, \beta x) \end{array} ;$$

$$\mathcal{K} : \begin{array}{ccc} E_e \cap \{\omega_0 = \ell, x > \frac{1}{\beta(\beta-1)}\} & \to & E_{e\cdot\ell} \\ (\omega, e, x) & \mapsto & (\sigma(\omega), e \cdot \omega_0, \beta x - 1) \end{array} .$$

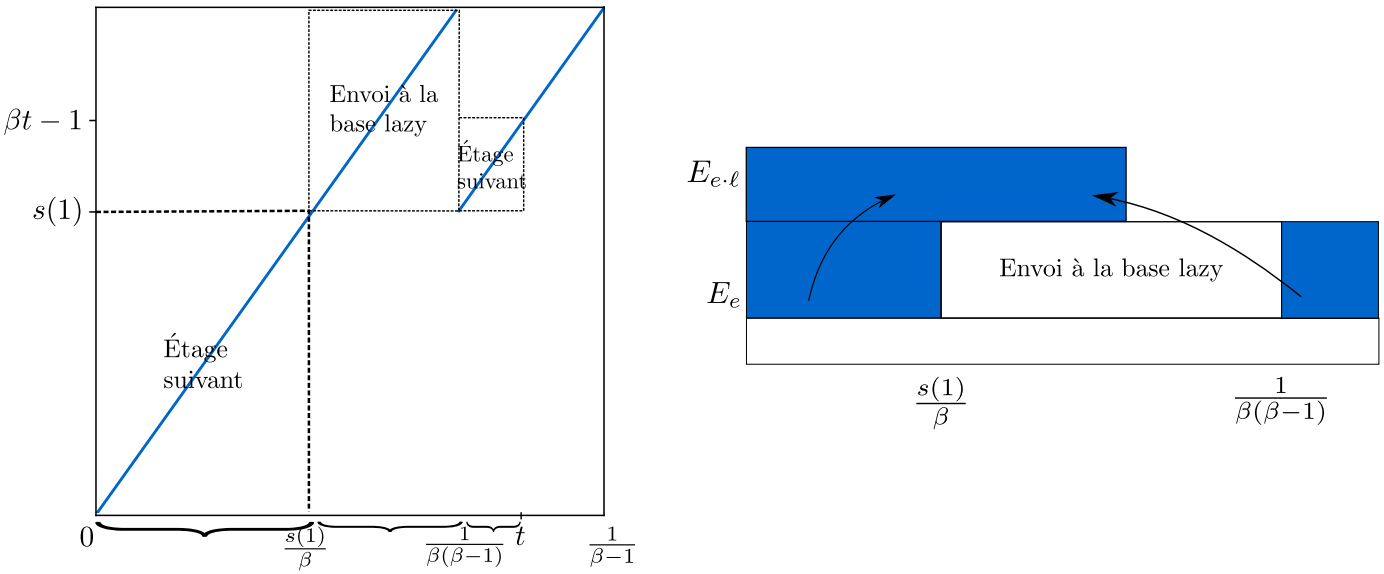


FIGURE 2.5 – $\omega_0 = \ell$ et $t \geqslant \frac{1}{\beta(\beta-1)}$

De même ici, on constate que si $t = \frac{1}{\beta(\beta-1)}$, seule la partie gauche de l'étage est envoyé dans l'étage suivant $E_{e\cdot\ell}$.

Dans tous les cas, on pose

$$I_{e\cdot\ell} := [0, T_\ell(t^+)].$$

On peut remarquer que si $t = \frac{1}{\beta(\beta-1)}$, on a bien $T_\ell(t^+) = s(1)$.

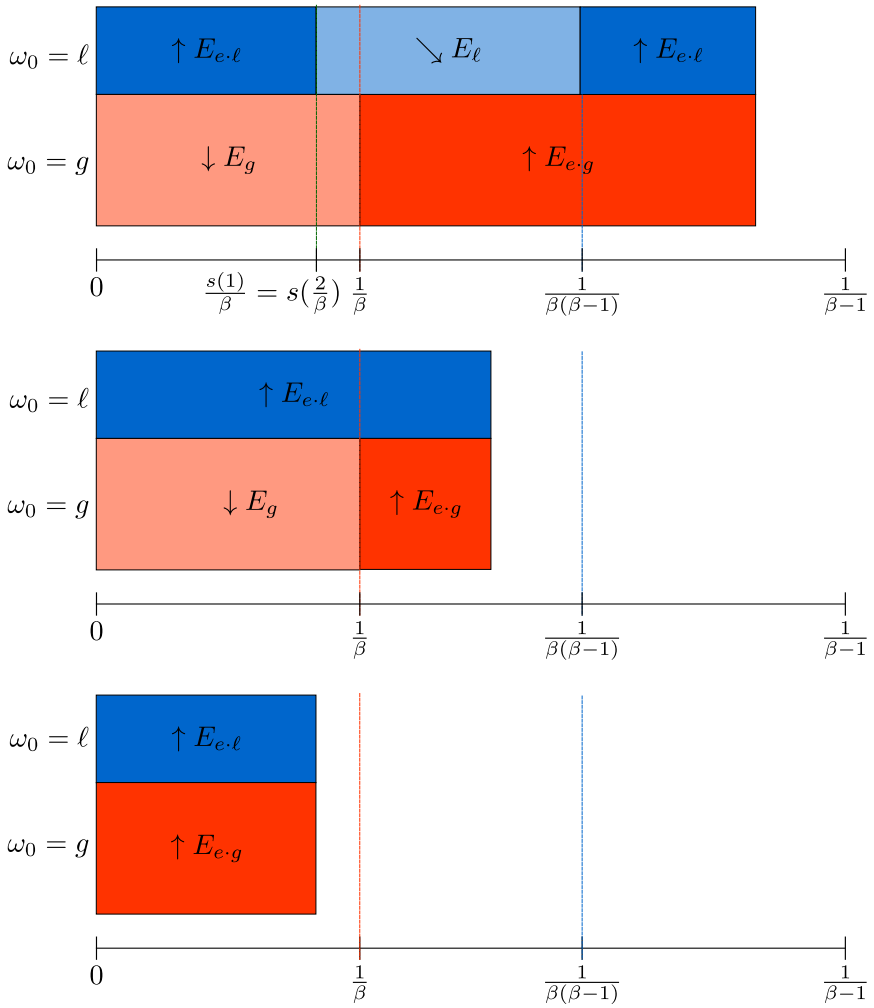


FIGURE 2.6 – Récapitulatif de la dynamique sur un étage E_e de la tour greedy, en fonction de la longueur de l'étage

Notons t_e la borne droite de l'intervalle I_e. On a, pour $\omega_0 \in \{g, \ell\}$:

$$T_{\omega_0}((t_e)^+) = t_{e\cdot\omega_0}.$$

Par ailleurs, la composante réelle de la base E_g est l'intervalle $[0, 1]$, et T_g et T_ℓ sont strictement croissantes par morceaux. Ainsi, si on note $e = (g, \omega_{-n}, ..., \omega_{-1})$, en composant les limites à droites, on peut donc définir les

étages E_e de la tour greedy par :

$$E_e := \Omega \times \{e\} \times [0, T_{\omega_{-n},\dots,\omega_{-1}}(1^+)].$$

On définit les étages de la tour $\mathcal{L}$ par symétrie, c'est à dire que pour toute étiquette e de la forme $e = (\ell, \omega_{-n}, ..., \omega_{-1})$, on pose

$$E_e := \Omega \times \{e\} \times [T_{\omega_{-n},\dots,\omega_{-1}}(s(1)^-), \frac{1}{\beta - 1}].$$

Sur la tour lazy, la dynamique $\mathcal{K}$ est elle aussi definie de manière symétrique. Pour simplifier les notations, on notera encore $I_e = [t, \frac{1}{\beta-1}]$. On considère cette fois un étage E_e de la tour lazy, d'étiquette $e := (\ell, \omega_{-n}, ..., \omega_{-1})$.

1. Si $\omega_0 = \ell$ et si $t > \frac{1}{\beta(\beta-1)}$:

$$\mathcal{K} : \begin{array}{ccc} E_e \cap [\ell]_0 & \to & E_{e\cdot\ell} \\ (\omega, e, x) & \mapsto & (\sigma(\omega), e \cdot \ell, \beta x - 1) \end{array} .$$

Toute la partie $E_e \cap [\ell]_0$ est envoyée dans l'étage $E_{e\cdot\ell}$.

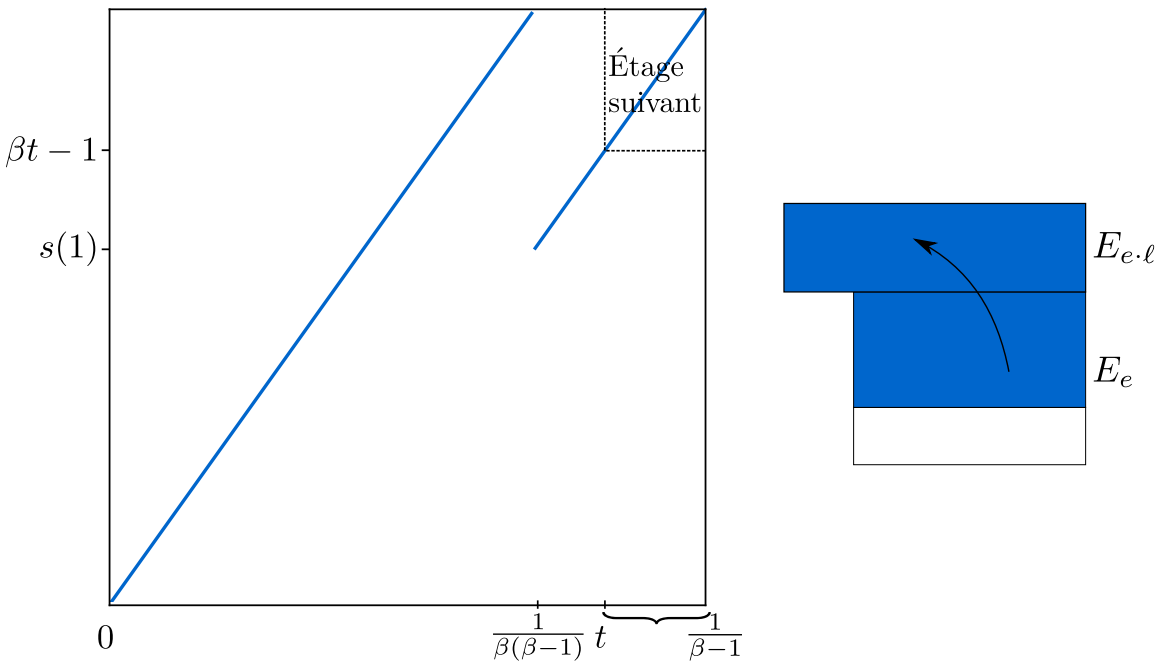


FIGURE 2.7 – $\omega_0 = \ell$ et $t > \frac{1}{\beta(\beta-1)}$

2. si $\omega_0 = \ell$ et si $t \leqslant \frac{1}{\beta(\beta-1)}$: la partie droite de l'étage est envoyée dans la base E_ℓ :

$$\mathcal{K} : \begin{array}{ccc} E_e \cap \{\omega_0 = \ell, x > \frac{1}{\beta(\beta-1)}\} & \to & E_\ell \\ (\omega, e, x) & \mapsto & (\sigma(\omega), \ell, \beta x - 1) \end{array} ;$$

et la partie gauche monte d'un étage :

$$\mathcal{K} : \begin{array}{ccc} E_e \cap \{\omega_0 = \ell, x \leqslant \frac{1}{\beta(\beta-1}\} & \to & E_{e\cdot\ell} \\ (\omega, e, x) & \mapsto & (\sigma(\omega), e \cdot \ell, \beta x) \end{array} .$$

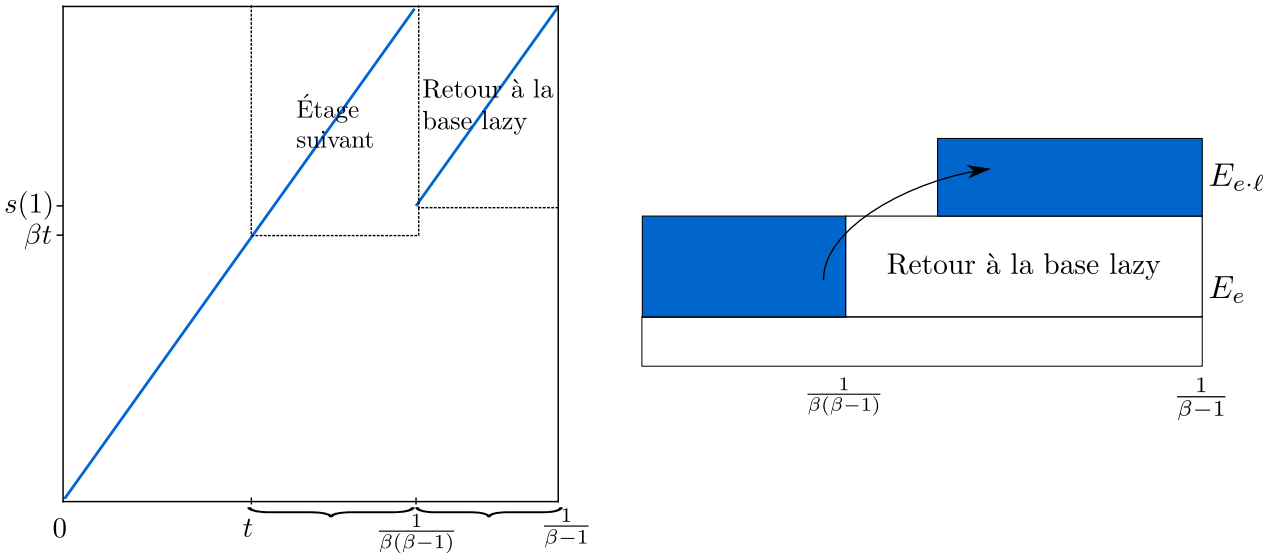


FIGURE 2.8 – $\omega_0 = \ell$ et $t \leqslant \frac{1}{\beta(\beta-1)}$

3. si $\omega_0 = g$ et si $t > \frac{1}{\beta}$:

$$\mathcal{K} : \begin{array}{ccc} E_e \cap [g]_0 & \to & E_{e\cdot g} \\ (\omega, e, x) & \mapsto & (\sigma(\omega), e \cdot g, \beta x - 1) \end{array} .$$

Toute la partie $E_e \cap [g]_0$ est envoyée dans l'étage $E_{e\cdot g}$.

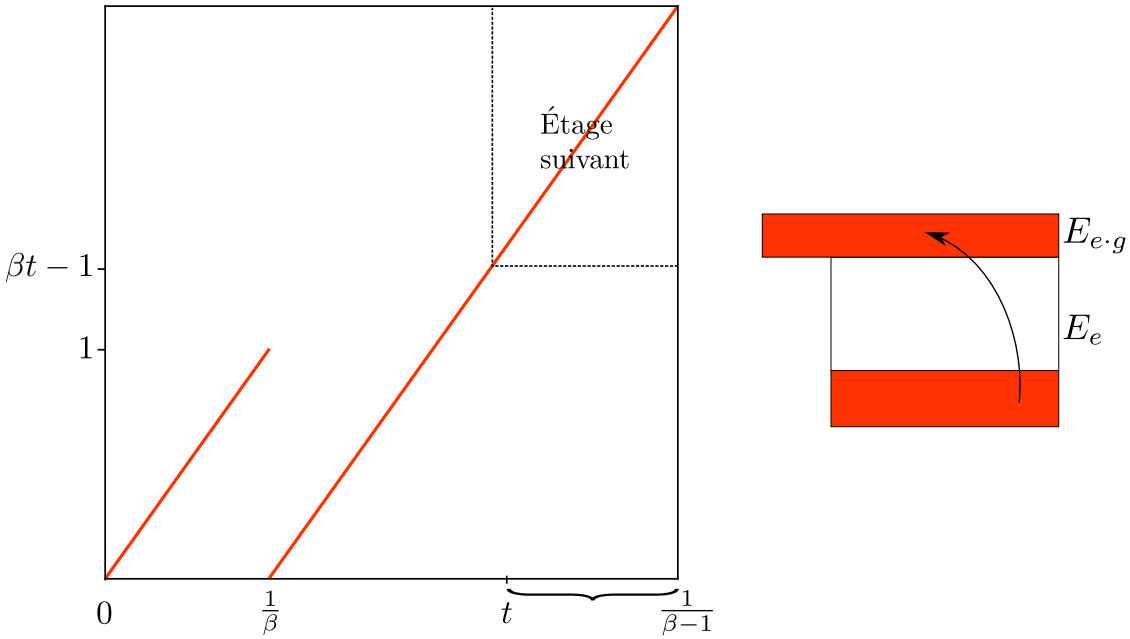


FIGURE 2.9 – $\omega_0 = g$ et $t > \frac{1}{\beta}$

4. si $\omega_0 = g$ et si $t \leqslant \frac{1}{\beta}$: la partie centrale de l'étage est envoyée dans la base E_g :

$$\mathcal{K} : \begin{array}{ccc} E_e \cap \{\omega_0 = g, \frac{1}{\beta} \leqslant x < \frac{2}{\beta}\} & \to & E_g \\ (\omega, e, x) & \mapsto & (\sigma(\omega), g, \beta x - 1) \end{array} ;$$

et les parties gauche et droite montent d'un étage :

$$\mathcal{K} : \begin{array}{ccc} E_e \cap \{\omega_0 = g, x \geqslant \frac{2}{\beta}\} & \to & E_{e\cdot g} \\ (\omega, e, x) & \mapsto & (\sigma(\omega), e \cdot g, \beta x - 1) \end{array}$$

$$\mathcal{K} : \begin{array}{ccc} E_e \cap \{\omega_0 = g, x < \frac{1}{\beta}\} & \to & E_{e\cdot g} \\ (\omega, e, x) & \mapsto & (\sigma(\omega), e \cdot g, \beta x) \end{array} .$$

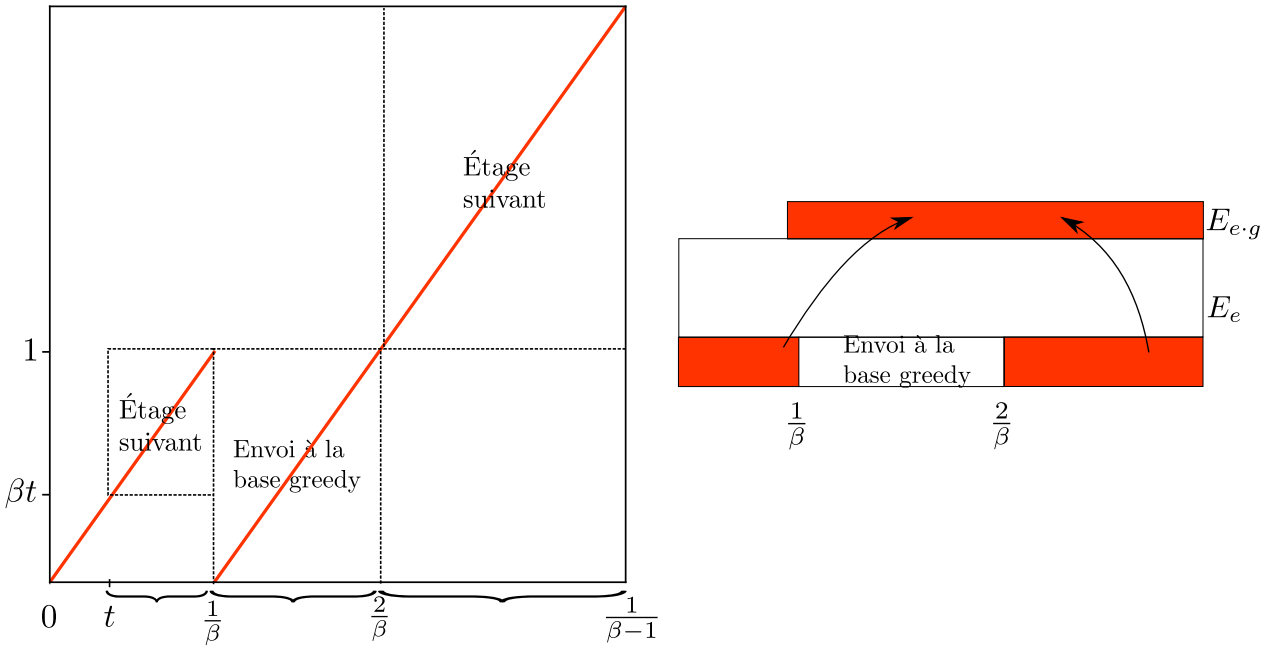


FIGURE 2.10 – $\omega_0 = g$ et $t \leqslant \frac{1}{\beta}$

On note $\pi : X \to \Omega \times I_\beta$ la projection des deux tours sur le produit $\Omega \times I_\beta$. Alors on a bien

$$\pi \circ \mathcal{K} = K_\beta \circ \pi.$$

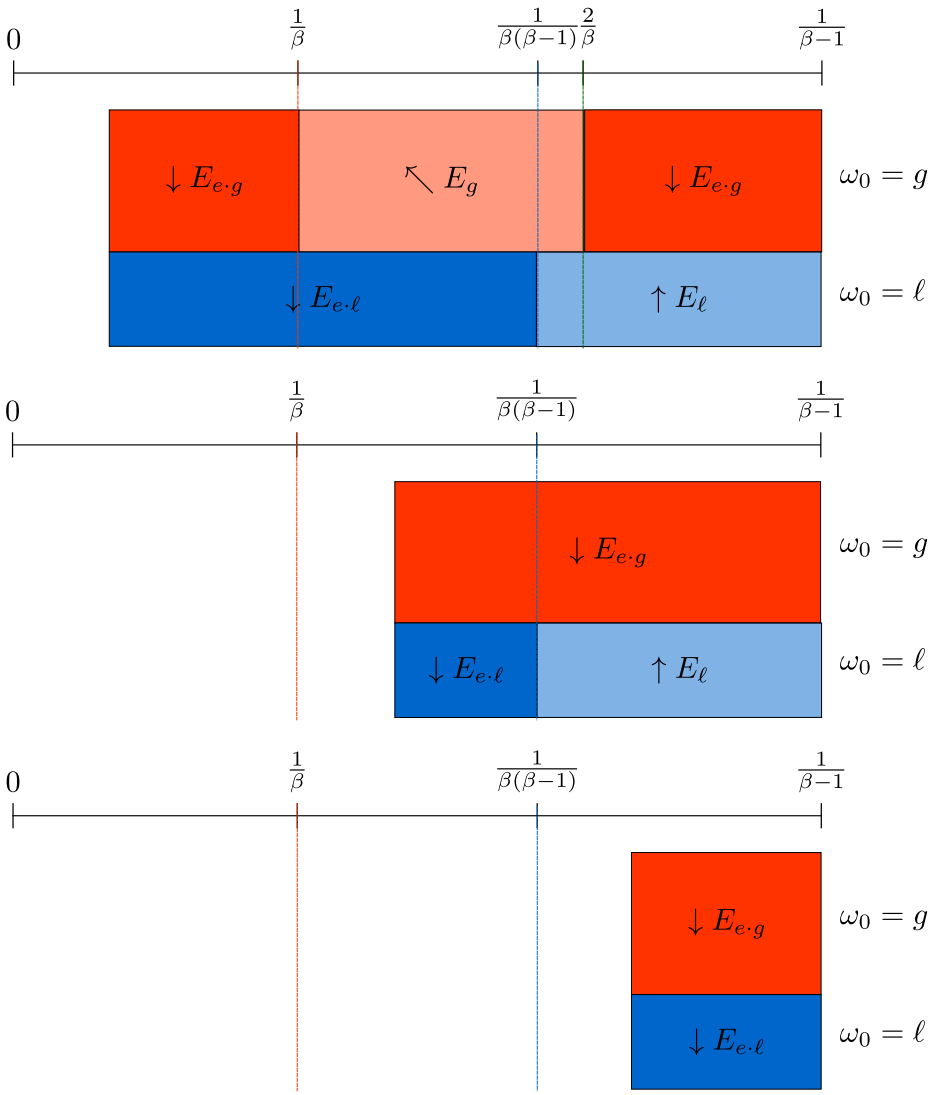


FIGURE 2.11 – Récapitulatif de la dynamique sur un étage E_e de la tour lazy (inversée), en fonction de la longueur de l'étage

2.2.3 Construction d'une mesure invariante

L'objectif de cette partie est de définir une mesure μ invariante par $\mathcal{K}$ sur X, de sorte que la projection sur I_β de cette mesure soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Chaque étage E_e s'identifie

à un produit cartésien de $\Omega \times I_\beta$, auquel on ajoute une étiquette e. Dans la suite, on note λ la mesure de Lebesgue.

On définit les mesures μ_g et μ_ℓ à support dans $\mathcal{G}$ et $\mathcal{L}$ respectivement de la manière suivante.

Sur chacune des deux bases :

$$\mu_{g|E_g} := m_p \otimes \lambda_{[0,1]}.$$

$$\mu_{\ell|E_\ell} := m_p \otimes \lambda_{[s(1),\frac{1}{\beta-1}]}.$$

Et sur l'étage $E_{g,\omega_{-n},\dots,\omega_{-1}}$, la mesure μ_g est définie par :

$$\mu_{g|E_{g,\omega_{-n},\dots,\omega_{-1}}} := \frac{1}{\beta^n} m_p([\omega_{-n},\dots,\omega_{-1}]_0^{n-1}) m_p \otimes \lambda_{[0,T_{\omega_{-n},\dots,\omega_{-1}}(1^+)]},$$

où $[\omega_{-n},\dots,\omega_{-1}]_0^{n-1}$ est le cylindre de Ω contenant les suites ω dont les n premiers termes sont $(\omega_{-n},\dots,\omega_{-1})$.

De même sur l'étage $E_{\ell,\omega_{-n},\dots,\omega_{-1}}$, la mesure μ_ℓ est définie par :

$$\mu_{\ell|E_{\ell,\omega_{-n},\dots,\omega_{-1}}} := \frac{1}{\beta^n} m_p([\omega_{-n},\dots,\omega_{-1}]_0^{n-1}) m_p \otimes \lambda_{[T_{\omega_{-n},\dots,\omega_{-1}}(s(1)^-),\frac{1}{\beta-1}]}.$$

Dans tous les cas on notera par la suite simplement λ pour la mesure de Lebesgue.

Le théorème qui suit décrit la situtation dans un cadre plus abstrait, et conclut à l'existence de la mesure μ souhaitée.

Théorème 2.1. *Soit $(X, \mathcal{B})$ un espace de Borel standard, $\mathcal{K}$ une transformation sur X et $\mathcal{G}$ et $\mathcal{L}$ deux sous-ensembles disjoints de X tels que :*

1. *$X = \mathcal{G} \sqcup \mathcal{L}$.*
2. *Il existe deux ensembles $E_g \subset \mathcal{G}$ et $E_\ell \subset \mathcal{L}$ tels que*

$$\mathcal{G} = \mathcal{K}^{-1}(\mathcal{G} \setminus E_g) \sqcup (\mathcal{K}^{-1}(E_g) \cap \mathcal{G}) \sqcup (\mathcal{K}^{-1}(E_\ell) \cap \mathcal{G})$$

et

$$\mathcal{L} = \mathcal{K}^{-1}(\mathcal{L} \setminus E_\ell) \sqcup (\mathcal{K}^{-1}(E_\ell) \cap \mathcal{L}) \sqcup (\mathcal{K}^{-1}(E_g) \cap \mathcal{L}).$$

Autrement dit, sous l'action de $\mathcal{K}$, un élément de $\mathcal{G}$ peut soit être envoyé dans $\mathcal{G} \setminus E_g$, soit être envoyé dans E_g ou E_ℓ. De même, un élément de $\mathcal{L}$ peut soit être envoyé dans $\mathcal{L} \setminus E_\ell$, soit être envoyé dans E_g ou E_ℓ. Pour passer de $\mathcal{G}$ à $\mathcal{L}$, on doit nécessairement passer par E_ℓ, et pour passer de $\mathcal{L}$ à $\mathcal{G}$, on doit nécessairement passer par E_g.

3. *Il existe deux mesures finies μ_g et μ_ℓ à support dans $\mathcal{G}$ et $\mathcal{L}$ respectivement telles que*
$$\mu_g(E_g) = \mu_\ell(E_\ell) = 1$$
et pour tout borélien A de $\mathcal{G} \setminus E_g$, on a :
$$\mu_g(\mathcal{K}^{-1}(A)) = \mu_g(A),$$
et pour tout borélien A de $\mathcal{L} \setminus E_\ell$, on a :
$$\mu_\ell(\mathcal{K}^{-1}(A)) = \mu_\ell(A),$$

4. *Il existe des constantes strictement positives g_0, ℓ_0, g_1, ℓ_1 telles que pour tout borélien A de X inclus dans E_g, on a*
$$\mu_g(\mathcal{K}^{-1}(A) \cap \mathcal{G}) = g_0\mu_g(A)$$
et
$$\mu_\ell(\mathcal{K}^{-1}(A) \cap \mathcal{L})) = \ell_0\mu_g(A),$$
et pour tout borélien A de X inclus dans E_ℓ, on a :
$$\mu_g(\mathcal{K}^{-1}(A) \cap \mathcal{G}) = g_1\mu_\ell(A)$$
et
$$\mu_\ell(\mathcal{K}^{-1}(A) \cap \mathcal{L})) = \ell_1\mu_\ell(A).$$

Alors il existe une unique mesure de probabilité μ sur X, combinaison linéaire de μ_g et μ_ℓ, telle que $\mathcal{K}$ préserve μ.

Démonstration. On cherche une mesure μ de la forme
$$\mu = C_g\mu_g + C_\ell\mu_\ell,$$
avec C_g et C_ℓ deux constantes strictement positives. On souhaite déterminer les valeurs de C_g et C_ℓ de sorte que μ soit une mesure de probabilité et que $\mathcal{K}$ préserve μ sur X.

Soit A un borélien de X inclus dans $\mathcal{G} \setminus E_g$. On a $\mu(A) = C_g\mu_g(A)$ et par hypothèse, $\mathcal{K}^{-1}(A) \subset \mathcal{G}$. On a :
$$\mu(\mathcal{K}^{-1}(A)) = C_g\mu_g(\mathcal{K}^{-1}(A)) = C_g\mu_g(A) = \mu(A).$$
De même, on a, pour tout borélien A de X inclus dans $\mathcal{L} \setminus E_\ell$:
$$\mu(\mathcal{K}^{-1}(A)) = C_\ell\mu_\ell(\mathcal{K}^{-1}(A)) = C_\ell\mu_\ell(A) = \mu(A).$$

Soit A un borélien de X inclus dans E_g. On a :

$$\begin{aligned}\mu(\mathcal{K}^{-1}(A)) &= \mu(\mathcal{K}^{-1}(A)\cap\mathcal{G}) + \mu(\mathcal{K}^{-1}(A)\cap\mathcal{L}) \\ &= C_g\mu_g(\mathcal{K}^{-1}(A)\cap\mathcal{G}) + C_\ell\mu_\ell(\mathcal{K}^{-1}(A)\cap\mathcal{L}) \\ &= g_0C_g\mu_g(A) + \ell_0C_\ell\mu_g(A) = (g_0C_g + \ell_0\mathcal{C}_\ell)\mu_g(A).\end{aligned}$$

Ainsi $\mu(\mathcal{K}^{-1}(A)) = \mu(A)$ si et seulement si

$$g_0 \times C_g + \ell_0 \times C_\ell = C_g. \tag{2.1}$$

De même, pour un borélien A inclus dans E_ℓ, $\mu(\mathcal{K}^{-1}(A)) = \mu(A)$ si et seulement si

$$g_1 \times C_g + \ell_1 \times C_\ell = C_\ell. \tag{2.2}$$

Il faut donc que les deux équations (2.1) et (2.2) soient vraies en même temps. On peut réécrire le système plus clairement :

$$\left\{\begin{array}{ccccc}(g_0-1)C_g & + & \ell_0C_\ell & = & 0 \\ g_1C_g & + & (\ell_1-1)C_\ell & = & 0\end{array}\right. .$$

D'après l'hypothèse 2, on a :

$$\mu_g(\mathcal{G}) = \mu_g(\mathcal{K}^{-1}(\mathcal{G}\setminus E_g)) + \mu_g(\mathcal{K}^{-1}(E_g)\cap\mathcal{G}) + \mu_g(\mathcal{K}^{-1}(E_\ell)\cap\mathcal{G}),$$

Or, $\mu_g(\mathcal{K}^{-1}(\mathcal{G}\setminus E_g)) = \mu_g(\mathcal{G}\setminus E_g)$ d'où

$$\mu_g(E_g) = \mu_g(\mathcal{K}^{-1}(E_g)\cap\mathcal{G}) + \mu_g(\mathcal{K}^{-1}(E_\ell)\cap\mathcal{G}).$$

Puisque $\mu_g(E_g) = 1$, on en déduit l'égalité :

$$g_0 + g_1 = 1.$$

En effectuant le même calcul sur $\mathcal{L}$, on obtient

$$\ell_0 + \ell_1 = 1.$$

Ainsi, le système a un déterminant nul, et se réduit à l'équation

$$C_g = \frac{l_0}{g_1}C_\ell.$$

Pour que μ soit une mesure de probabilité, on doit aussi avoir :

$$C_g\mu_g(\mathcal{G}) + C_\ell\mu_\ell(\mathcal{L}) = 1.$$

On en déduit les valeurs de C_g et C_ℓ (qui sont bien strictement positives) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} C_g & = & \dfrac{\ell_0}{\ell_0\mu_g(\mathcal{G}) + g_1\mu_\ell(\mathcal{L})} \\ C_\ell & = & \dfrac{g_1}{\ell_0\mu_g(\mathcal{G}) + g_1\mu_\ell(\mathcal{L})} \end{array} \right. .$$

Avec ce choix de constantes, la mesure μ est une mesure de probabilité et la transformation $\mathcal{K}$ préserve μ sur X. □

Montrons que notre système vérifie toutes les conditions du théorème 2.1.

1. Les tours greedy et lazy sont disjointes.
2. Sous l'action de $\mathcal{K}$, tout élément de $\mathcal{G}$ peut soit monter dans la tour $\mathcal{G}$, soit retourner à la base E_g, soit être envoyé dans la base E_ℓ de la tour lazy. De même, tout élément $\mathcal{L}$ peut soit monter dans la tour $\mathcal{L}$, soit retourner à la base E_ℓ soit être envoyé dans la base E_g.
3. Les mesures μ_g et μ_ℓ sont à support dans $\mathcal{G}$ et dans $\mathcal{L}$ respectivement. On a bien $\mu_g(E_g) = \mu_\ell(E_\ell) = 1$. Considérons un pavé A dans l'étage $E_{g,\omega_{-n},\dots,\omega_{-1}}$: $A := [u]_0^{|u|-1} \times \{(g, \omega_{-n}, \dots, \omega_{-1})\} \times [a, b]$, où u est une séquence finie d'éléments de $\{g, \ell\}$, et $|u|$ dénote la longueur de cette séquence. Démontrons que A et $\mathcal{K}^{-1}(A)$ ont même mesure. Quelles que soient les valeurs de a et b, la mesure de Lebesgue de la troisième composante de $\mathcal{K}^{-1}(A)$ est égale à $\frac{1}{\beta}(b-a)$. On obtient alors :

$$\mu_g(\mathcal{K}^{-1}(A)) = \frac{1}{\beta^{n-1}} \times m_p([\omega_{-n}, \dots, \omega_{-2}]_0^{n-2}) \times m_p([\omega_{-1} \cdot u]_0^{|u|}) \times \frac{1}{\beta}(b-a)$$

$$= \frac{1}{\beta^n} \times m_p([\omega_{-n}, \dots, \omega_{-1}]_0^{n-1}) \times m_p([u]_0^{|u|-1}) \times (b-a).$$

On en déduit que pour tout borélien de $\mathcal{G} \setminus E_g$, on a $\mu_g(\mathcal{K}^{-1}(A)) = \mu_g(A)$. Le même calcul permet d'obtenir que pour tout borélien de $\mathcal{L} \setminus E_\ell$, on a $\mu_\ell(\mathcal{K}^{-1}(A)) = \mu_\ell(A)$.
4. On pose :

$$g_0 := \mu_g(\mathcal{K}^{-1}(E_g) \cap \mathcal{G}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\beta^{n+1}} \sum_{\substack{v \in \{g,\ell\}^n \\ T_v(1^+) \geqslant \frac{1}{\beta}}} m_p([v \cdot g]_0^n),$$

$$\ell_0 := \mu_\ell(\mathcal{K}^{-1}(E_g) \cap \mathcal{L}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\beta^{n+1}} \sum_{\substack{w \in \{g,\ell\}^n \\ T_w(s(1)^-) \leqslant \frac{1}{\beta}}} m_p([w \cdot g]_0^n),$$

$$g_1 := \mu_g(\mathcal{K}^{-1}(E_\ell) \cap \mathcal{G}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\beta^{n+1}} \sum_{\substack{v \in \{g,\ell\}^n \\ T_v(1^+) \geqslant \frac{1}{\beta(\beta-1)}}} m_p([v \cdot \ell]_0^n)$$

et

$$l_1 := \mu_\ell(\mathcal{K}^{-1}(E_\ell) \cap \mathcal{L}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\beta^{n+1}} \sum_{\substack{w \in \{g,\ell\}^n \\ T_w(s(1)^-) \leqslant \frac{1}{\beta(\beta-1)}}} m_p([w \cdot \ell]_0^n).$$

Soit A un pavé de la base E_g : $A = [u]_0^{|u|-1} \times \{g\} \times]a; b[$, avec $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$. Alors on a :

$$\mathcal{K}^{-1}(A) \cap \mathcal{G} = \bigsqcup_{n \geqslant 0} \bigsqcup_{\substack{v \in \{g,\ell\}^n \\ T_v(1^+) \geqslant \frac{1}{\beta}}} E_{g \cdot v} \cap \left\{ x \in \left] \frac{a}{\beta}; \frac{b}{\beta} \right[; \omega \in [g \cdot u]_0^{|u|} \right\}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \mu_g(\mathcal{K}^{-1}(A) \cap \mathcal{G}) = & \\ & \sum_{n \geqslant 0} \sum_{\substack{v \in \{g,\ell\}^n \\ T_v(1^+) \geqslant \frac{1}{\beta}}} \frac{1}{\beta^n} \times m_p([v]_0^{n-1}) \times m_p([g \cdot u]_0^{|u|}) \times \frac{1}{\beta}(b-a) \\ & = g_0 \mu_g(A). \end{aligned}$$

Par un calcul similaire, on obtient les trois autres égalités. C'est le fait que les transformations T_g et T_ℓ soient affines par morceaux qui permet d'obtenir ces égalités.

Toutes les hypothèses du théorème sont vérifiées. On en déduit qu'avec le choix de C_g et C_ℓ suivant, la mesure $\mu := C_g \mu_g + C_\ell \mu_\ell$ est une mesure de probabilité sur X et la transformation $\mathcal{K}$ préserve μ :

$$\begin{cases} C_g &= \dfrac{\ell_0}{\ell_0 \mu_g(\mathcal{G}) + g_1 \mu_\ell(\mathcal{L})} \\ C_\ell &= \dfrac{g_1}{\ell_0 \mu_g(\mathcal{G}) + g_1 \mu_\ell(\mathcal{L})} \end{cases}.$$

Sur chaque étage des deux tours, la mesure μ est une mesure produit dont la marginale en ω est la mesure de Bernoulli m_p. Ainsi, par projection

de la mesure μ sur $\Omega \times I_\beta$, on obtient la mesure produit $m_p \otimes \mu_p$, où la mesure μ_p a pour densité de probabilité

$$\rho_p(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\beta^n} \left(C_g \sum_{\omega_1,\dots,\omega_n \in \{g,\ell\}^n} m_p([\omega_1,\dots,\omega_n]_0^{n-1}) 1_{[0,T_{\omega_1,\dots,\omega_n}(1^+)]}(x) \right.$$
$$\left. + C_\ell \sum_{\omega_1,\dots,\omega_n \in \{g,\ell\}^n} m_p([\omega_1,\dots,\omega_n]_0^{n-1}) 1_{[T_{\omega_1,\dots,\omega_n}(s(1)^-);\frac{1}{\beta-1}]}(x) \right). \quad (2.3)$$

Proposition 2.2. *Soit $\pi : X \to \Omega \times I_\beta$ la projection naturelle. Alors π est une application facteur entre les systèmes $(X, \mu, \mathcal{K})$ et $(\Omega \times I_\beta, m_p \otimes \mu_p, K_\beta)$.*

Démonstration. La projection π est mesurable. Sur les composantes en ω et en x, $\mathcal{K}$ se comporte comme K_β, on a bien $\pi \circ \mathcal{K} = K_\beta \circ \pi$. Par construction de μ_p, on a bien $\mu \circ \pi^{-1} = m_p \otimes \mu_p$. □

2.3 Propriétés de l'extension

Définition 2.3. *Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On définit la classe de fonctions $\mathfrak{F}_N$ comme étant l'ensemble des fonctions f vérifiant, à un ensemble fini de points près :*

- *Il existe un nombre fini d'intervalles disjoints $I_1, \dots, I_m$ et un intervalle J inclus dans I_β tel que $f : I_1 \sqcup \dots \sqcup I_m \to J$.*
- *la fonction f est croissante sur son ensemble de définition.*
- *Sur chaque intervalle I_i, f est une fonction affine de pente β^N.*
- *$f(\bigsqcup_{i=1}^m I_i) = \bigsqcup_{i=1}^m f(I_i) = J$.*

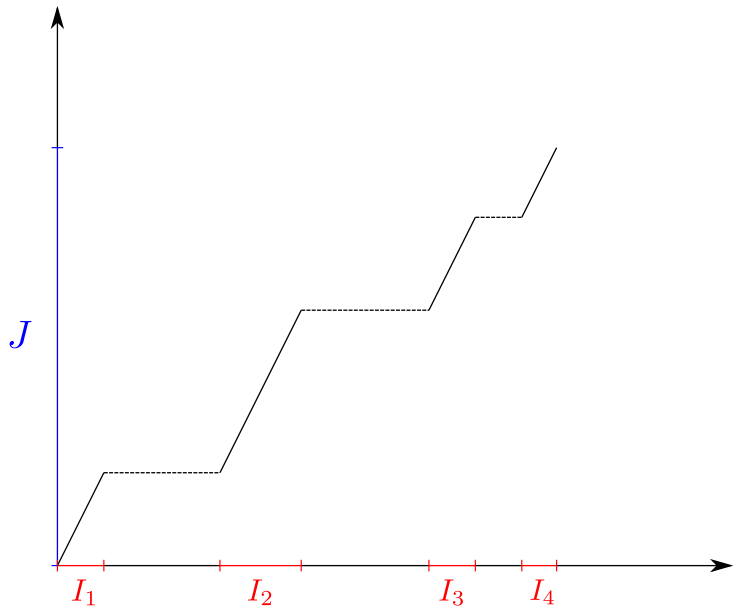


FIGURE 2.12 – Fonction de classe $\mathfrak{F}_n$

On remarque en particulier que

$$\lambda(I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_m) = \frac{1}{\beta^n}\lambda(J). \tag{2.4}$$

Lemme 2.4. *Soit $M, N \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathfrak{F}_N$, $g \in \mathfrak{F}_M$ telles que l'ensemble de définition D_f de f soit inclus dans l'image de g. Alors $f \circ g_{|g^{-1}(D_f)} \in \mathfrak{F}_{N+M}$.*

Démonstration. On note $g : I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_m \to J$ et $f : J_1 \sqcup \ldots \sqcup J_k \to L$ et $h = f \circ g_{|g^{-1}(D_f)}$. Alors $g^{-1}(D_f)$ est la réunion disjointe des intervalles $g^{-1}(J_i) \cap I_j$ (quand cet ensemble n'est pas vide). On a alors $h : \bigsqcup_{i,j} g^{-1}(J_i) \cap I_j \to L$. Par composition de fonctions croissantes, h est croissante sur son ensemble de définition. De plus, sur chaque $g^{-1}(J_i) \cap I_j$ non vide, h est la composée d'une fonction affine de pente β^N et d'une fonction affine de pente β^M : c'est bien une fonction affine de pente β^{N+M}. Enfin, pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, on a

$$\bigsqcup_j g(g^{-1}(J_i) \cap I_j) = J_i$$

d'où

$$\bigsqcup_{i,j} h(g^{-1}(J_i) \cap I_j) = L.$$

□

On note $\mathcal{E} := \{g, \ell\}^* \setminus \{\varnothing\}$ l'ensemble des séquences finies non vides de $\{g, \ell\}$, c'est à dire l'ensemble des étiquettes. Pour $e \in \mathcal{E}$, on note $e(0)$ le premier terme de e et $e(-1)$ son dernier terme.

On définit le graphe orienté G sur $\mathcal{E}$, qui décrit l'ensemble des suites admissibles d'étiquettes. Une étiquette $e \in \mathcal{E}$ peut être suivie de l'étiquette $e' \in \mathcal{E}$ (on note $e \to e'$) si $\tilde{\mu}(\mathcal{K}^{-1}(E_{e'}) \cap E_e) > 0$. Autrement dit, on a $e \to e'$ si la transformation $\mathcal{K}$ envoie une partie de mesure non nulle de l'étage E_e dans l'étage $E_{e'}$. Les étages réduits à un singleton (voir par exemple la figure 2.3) ne figurent pas dans ce graphe.

Lemme 2.5. *Pour tout réel $1 < \beta < 2$, il existe un étage de la tour greedy de longueur supérieure ou égale à $\frac{1}{\beta(\beta-1)}$. En particulier, on peut toujours passer de la tour $\mathcal{G}$ à la tour $\mathcal{L}$ sous l'action de $\mathcal{K}$.*

Démonstration. On pose :

$$n_0 = \min\{n \in \mathbb{N}, T_\ell^n(1) \geqslant \frac{1}{\beta(\beta-1)}.\}$$

Un tel n_0 existe pour tout $\beta > 1$: si $1 < \frac{1}{\beta(\beta-1)}$, alors $T_\ell(1) = \beta \times 1$. Tant que l'image par T_ℓ est inférieure à $\frac{1}{\beta(\beta-1)}$, appliquer T_ℓ revient à multiplier par le réel β. Ainsi, l'étage $E_{g\ell^{n_0}}$ a une longueur supérieure à $\frac{1}{\beta(\beta-1)}$. Alors, à un ensemble de mesure nulle près, on a :

$$\mathcal{K}(E_{g\ell^{n_0}} \cap \{\omega_0 = \ell, x \in]\frac{s(1)}{\beta}, \frac{1}{\beta(\beta-1)}]\}) = E_\ell.$$

□

Proposition 2.6. *Le graphe des transitions G sur $\mathcal{E}$ est un graphe fortement connexe.*

Démonstration. Soit $e, e' \in \mathcal{E}$. On souhaite démontrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(E_e \cap \mathcal{K}^{-n}(E_{e'})) > 0$. Autrement dit, on veut démontrer qu'on peut atteindre l'étage $E_{e'}$ à partir de l'étage E_e, pour tout $e, e' \in \mathcal{E}$. Supposons que $e(0) = e'(0) = g$ (c'est à dire E_e et $E_{e'}$ sont des étages de la tour greedy). Montrons dans un premier temps qu'on peut atteindre la base de la tour greedy à partir de l'étage E_e. On note D_e la borne droite de E_e. Si $D_e \geqslant \frac{1}{\beta}$, alors $\mathcal{K}(E_e \cap \{\omega_0 = g, x \leqslant \frac{1}{\beta}\}) = E_g$. Sinon, il existe un unique $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{\beta^{k+1}} \leqslant D_e \leqslant \frac{1}{\beta^k}$. On a alors $\mathcal{K}^{k+1}(E_e \cap \{\omega_0 = \ldots = \omega_k = g, x < \frac{1}{\beta^{k+1}}\}) = E_g$.

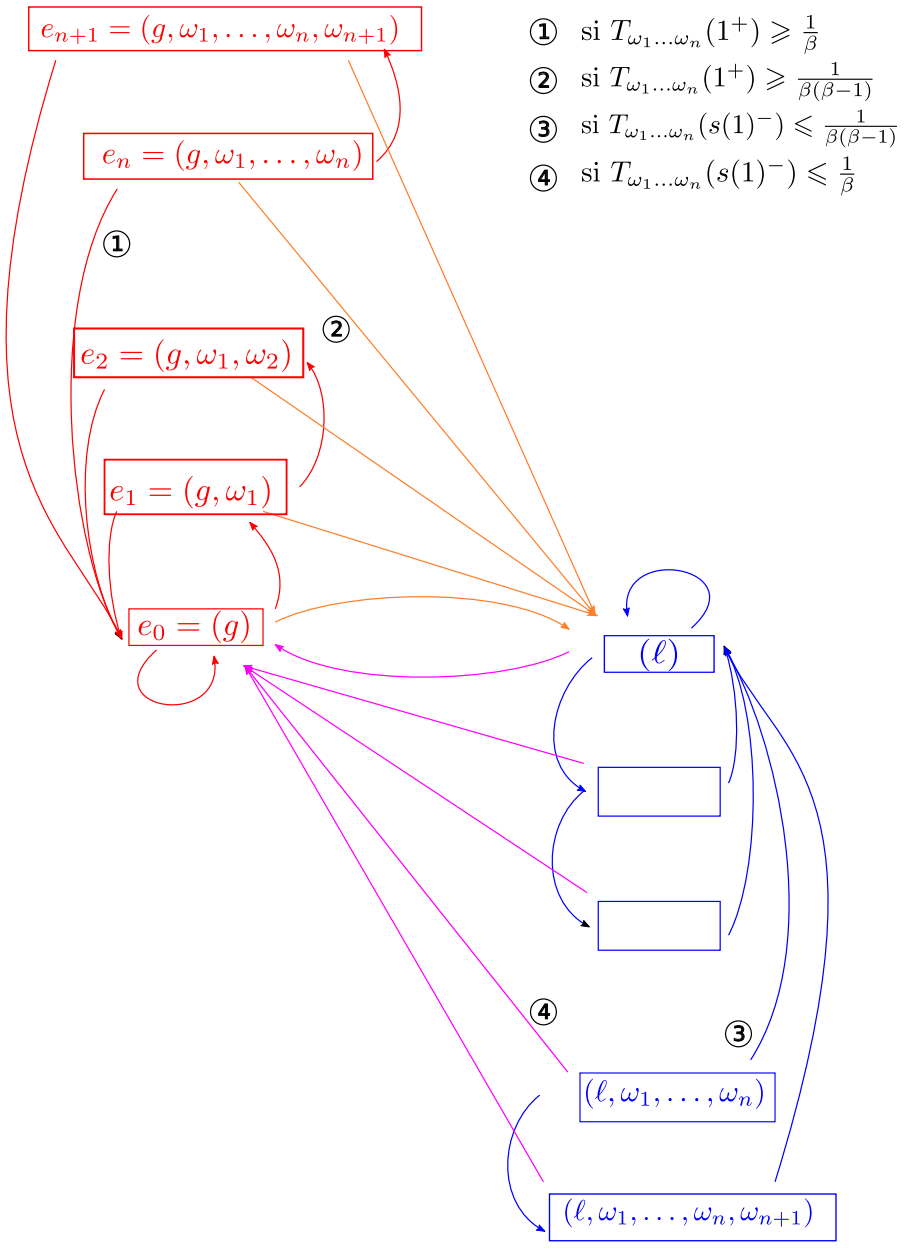


FIGURE 2.13 – Illustration du graphe G des transitions possibles d'étiquettes

De plus, par construction de $\mathcal{K}$, on a :

$$E_{e'} = \mathcal{K}^{|e'|-1}\Big(\bigcap_{k=0}^{|e'|-1} \mathcal{K}^{-k}(E_{e'(0),\dots,e'(k)})\Big),$$

avec $\bigcap_{k=0}^{|e'|-1} \mathcal{K}^{-k}(E_{e'(0),\dots,e'(k)}) \subset E_g$: autrement dit, on peut atteindre tout étage de la tour greedy à partir de sa base, c'est comme cela qu'est construit la tour $\mathcal{G}$. On peut donc aller de l'étage E_e à l'étage $E_{e'}$ en passant par la base E_g. Plus précisément, pour $n = k + |e'|$, on a $\mu(E_e \cap \mathcal{K}^{-n}(E_{e'})) > 0$. Par symétrie, on obtient le résultat pour $e, e' \in \mathcal{E}$ tels que $e(0) = e'(0) = \ell$.

D'après le lemme 2.5, on peut toujours passer de la tour $\mathcal{G}$ à la tour $\mathcal{L}$. Ainsi, pour $e, e' \in \mathcal{E}$ tels que $e(0) = g$ et $e'(0) = \ell$, on démontre qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(E_e \cap \mathcal{K}^{-n}(E_{e'})) > 0$: il existe une partie de l'étage E_e de mesure strictement positive qui sous l'action de $\mathcal{K}$, en passant par la base E_g, atteint un étage de $\mathcal{G}$ de longueur supérieure à $\frac{1}{\beta(\beta-1)}$, puis une fois dans la base E_ℓ, atteint (et remplit) l'étage $E_{e'}$. □

Proposition 2.7. *Soit $C = (e_0 = e, e_1, \dots, e_n = e')$ $(n \geqslant 1)$ une séquence finie d'étiquettes de $\mathcal{E}$ correspondant à un chemin dans le graphe des transitions d'étiquettes. Alors pour tout chemin C de ce type, on a*

$$E_C := \bigcap_{k=0}^{n} \mathcal{K}^{-k} E_{e_k} = [e_1(-1), \dots, e_n(-1)]_0^{n-1} \times \{e\} \times J_C$$

avec :

1. *J_C est une réunion finie d'intervalles disjoints,*
2. *$T_{e_1(-1),\dots,e_n(-1)|J_C} \in \mathfrak{F}_n$.*

En particulier, $\lambda(J_C) = \frac{1}{\beta^n}\lambda(I_{e'})$ et la transformation $\mathcal{K}^n : E_C \to E_{e'}$ est une bijection.

Démonstration. On démontre chaque point par récurrence sur la longueur du chemin C. Supposons que $C = (e, e')$ est une arête dans le graphe des transitions de $\mathcal{E}$. Notons $\omega_0 = e'(-1)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $e(0) = g$. Notons enfin $I_e = [0, t]$, $t \in [0, \frac{1}{\beta-1}[$.

— Si $\omega_0 = g$, alors $E_C = [g]_0 \times \{e\} \times J_C$ avec
  — si $t < \frac{1}{\beta}$, alors $J_C = I_e$,
  — si $t \geqslant \frac{1}{\beta}$, ou bien $e' = (g)$ et alors $J_C = [0, \frac{1}{\beta}[$, ou bien $e' = e \cdot g$ et alors $J_C = [\frac{1}{\beta}, t]$.

— Si $\omega_0 = \ell$, alors $E_C = [\ell]_0 \times \{e\} \times J_C$ avec
  — si $t < \frac{1}{\beta(\beta-1)}$, alors $J_C = I_e$,
  — si $t \geqslant \frac{1}{\beta(\beta-1)}$, ou bien $e' = (\ell)$ et alors $J_C =]\frac{s(1)}{\beta}; \frac{1}{\beta(\beta-1)}]$, ou bien $e' = e \cdot \ell$ et alors $J_C = [0, \frac{s(1)}{\beta}] \sqcup] \frac{1}{\beta(\beta-1)}, t]$.

Dans tous les cas, J_C est bien une réunion finie d'intervalles disjoints. De plus, $T_{\omega_0} : J_C \to I_{e'}$ appartient à la classe de fonction $\mathfrak{F}_1$.

Supposons maintenant que $C = (e = e_0, e_1, \ldots, e_{n+1} = e')$. On pose $C' = (e_1, \ldots, e_{n+1})$. Le chemin C' est un chemin de longueur n dans le graphe des transitions de $\mathcal{E}$ tel que $E_{C'}$ vérifie les conclusions de la proposition, c'est à dire :

— $E_{C'} = [e_2(-1), \ldots, e_{n+1}(-1)]_0^{n-1} \times \{e_1\} \times J_{C'}$ où $J_{C'}$ est une réunion finie d'intervalles disjoints.

— $T_{e_2(-1),\ldots,e_{n+1}(-1)|J_{C'}} \in \mathfrak{F}_n$.

On a alors $E_C = E_e \cap \mathcal{K}^{-1}(E_{C'})$.

La composante dans Ω est bien $[e_1(-1), e_2(-1), \ldots, e_{n+1}(-1)]_0^n$.

Posons $g = T_{e_1(-1)|J_{e_0,e_1}}$ et $f = T_{e_2(-1),\ldots,e_{n+1}(-1)|J_{C'}}$. On a $g \in \mathfrak{F}_1$ et $f \in \mathfrak{F}_n$. Si on pose $J_C := g^{-1}(J_{C'})$, on a bien que J_C est une réunion finie d'intervalles disjoints et

$$E_C = [e_1(-1), e_2(-1), \ldots, e_{n+1}(-1)]_0^n \times \{e\} \times J_C.$$

De plus, $T_{e_1(-1),e_2(-1),\ldots,e_{n+1}(-1)|J_C} = f \circ g_{|J_C}$. D'après le lemme 2.4, la fonction $T_{e_1(-1),e_2(-1),\ldots,e_{n+1}(-1)|J_C}$ est de classe $\mathfrak{F}_{n+1}$. □

Dans la suite, on souhaite démontrer que le système $(X, \mu, \mathcal{K})$ est ergodique. Pour ce faire, on étudie la transformation induite de $\mathcal{K}$ sur la base E_g (voir la définition en annexe B). On note $\mathcal{K}_g$ cette transformation induite. La mesure $\mu(.|E_g)$ est égale à la mesure μ_g, et est préservée par la transformation induite $\mathcal{K}_g$. Dans la suite, on identifie la base E_g à $\Omega \times [0, 1]$.

On considère l'ensemble $\mathscr{C}$ des chemins possibles pour un premier retour à la base E_g. C'est à dire l'ensemble des chemins de la forme $C = (e_0 = (g), e_1, \ldots, e_n = (g))$ (où $|C| := n$ est la longueur du chemin C), avec $e_k \neq (g)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$ tels que

$$\mu_{\mathcal{K}} \left(\bigcap_{k=0}^{n} \mathcal{K}^{-k}(E_{e_k}) \right) > 0.$$

On définit alors la partition $\mathcal{P}$ de E_g par

$$\mathcal{P} := \{E_C, C \in \mathscr{C}\}.$$

Lemme 2.8. *La collection $\mathcal{P}$ est une partition dénombrable de E_g, à un ensemble de mesure nulle près.*

Démonstration. Si on considère $C, C' \in \mathscr{C}$ deux chemins distincts, alors il est clair par la définition que E_C et $E_{C'}$ sont disjoints. Et puisque μ_g-presque tout a de E_g a un temps de retour fini, il existe $C \in \mathscr{C}$ tel que $a \in E_C$. □

Proposition 2.9. *La suite de partitions $(\mathcal{K}_g^{-n}(\mathcal{P}))_{n\in\mathbb{N}}$ est indépendante pour la mesure μ_g, c'est à dire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, les partitions $\mathcal{K}_g^{-n}\mathcal{P}$ et $\bigvee_{0\leqslant k\leqslant n-1} \mathcal{K}_g^{-k}\mathcal{P}$ sont indépendantes.*

Démonstration. Considérons un chemin

$$C = (e_0 = (g), e_1, \dots, e_N = (g))$$

commençant et finissant par l'étiquette de la base greedy. Alors ce chemin s'écrit de manière unique comme concaténation de chemins $C_0, \dots, C_k \in \mathscr{C}$, et

$$E_C = \bigcap_{i=0}^{k} \mathcal{K}_g^{-i} E_{C_i} = \bigcap_{i=0}^{N} \mathcal{K}^{-i}(E_{e_i}) = [e_1(-1), \dots, e_N(-1)]_0^{N-1} \times J_C$$

avec $\lambda(J_C) = \frac{1}{\beta^N}\lambda(I_{(g)}) = \frac{1}{\beta^N}$ d'après la proposition 2.7. Ainsi, on a

$$\mu_g(E_C) = m_p([e_1(-1), \dots, e_N(-1)]_0^{N-1}) \times \frac{1}{\beta^N},$$

et on a une égalité similaire pour tout C_j, $0 \leqslant j \leqslant k$. Il est donc clair que

$$\mu_g(E_C) = \prod_{j=0}^{k} \mu_g(E_{C_j}).$$

□

D'après la proposition 2.7, chaque atome de $\mathcal{P}$ est de la forme $[\omega_0, \dots, \omega_{r-1}] \times J_C$. De même, pour chaque $N \geqslant 0$, chaque atome de $\bigvee_{j=0}^{N} \mathcal{K}_g^{-j}\mathcal{P}$ est encore de cette forme.

Définition 2.10. *Soit $N \in \mathbb{N}$ et $(\omega, x) \in E_g$ tel qu'il existe un atome de $\bigvee_{j=0}^{N} \mathcal{K}_g^{-j}\mathcal{P}$ contenant (ω, x). Notons C le chemin associé à cet atome. Alors on définit l'ensemble $A_N(\omega, x)$ inclus dans l'intervalle $[0, 1]$, par*

$$A_N(\omega, x) := J_C.$$

Lemme 2.11. *Pour presque tout $(\omega, x) \in E_g$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout entier $m \geqslant 1$, il existe $N \geqslant n$ et $t \in [0,1]$ tels que*

$$A_{N+m}(\omega, x) = A_N(\omega, x) \cap [0, t].$$

Démonstration. Soit $P_0 = [g]_0 \times [0, \frac{1}{\beta}[$. L'ensemble P_0 est un atome de la partition $\mathcal{P}$, de mesure strictement positive, correspondant à l'ensemble des points retournant à la base E_g en une étape. Le processus qui à un point de E_g associe son $\mathcal{P}$-nom (défini pour presque tout $(\omega, x) \in E_g$) est un processus de Bernoulli. Ainsi, pour presque tout $(\omega, x) \in E_g$, l'orbite de (ω, x) sous $\mathcal{K}_g$ rencontre infiniment souvent l'atome P_0. Même mieux : pour tout entier $m \geqslant 1$, l'orbite de (ω, x) rencontre m fois de suite l'atome P_0, infiniment souvent.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour un tel point (ω, x), soit un entier $N \geqslant n$ tel que

$$\mathcal{K}_g^N(\omega, x), \dots, \mathcal{K}_g^{N+m-1}(\omega, x) \in P_0.$$

Notons P^N l'atome de $\bigvee_{j=0}^{N} K_g^{-j}\mathcal{P}$ contenant (ω, x). Alors P^N est de la forme

$$[\omega_0, \dots, \omega_{r-1}]_0^{r-1} \times A_N(\omega, x).$$

Si on note $A_N(\omega, x) = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_m$, on a, d'après la proposition 2.7,

$$[0,1] = T_{\omega_0,\dots,\omega_{r-1}} I_1 \sqcup \dots \sqcup T_{\omega_0,\dots,\omega_{r-1}} I_m,$$

où $T_{\omega_0,\dots,\omega_{r-1}} I_i$ est un intervalle pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$, et l'ordre des intervalles $(T_{\omega_0,\dots,\omega_{r-1}} I_i)$ est le même que celui des (I_i).

Or, puisque $\mathcal{K}_g^N(\omega, x) \in P_0$, on a

$$A_{N+1}(\omega, x) = \{y \in A_N(\omega, x), T_{\omega_0,\dots,\omega_{r-1}}(y) \in [0, \frac{1}{\beta}[\}.$$

Ainsi, il existe un réel $t_1 \in [0,1]$ tel que $T_{\omega_0,\dots,\omega_{r-1}}(A_N(\omega, x) \cap [0, t_1]) = [0, \frac{1}{\beta}[$. Ce qui implique que

$$A_{N+1}(\omega, x) = A_N(\omega, x) \cap [0, t_1].$$

Enfin, puisque $\mathcal{K}_g^N(\omega, x), \dots, \mathcal{K}_g^{N+m-1}(\omega, x) \in P_0$, on peut appliquer le même raisonnement m fois, ce qui implique l'existence d'un réel $t \in [0,1]$ tel que

$$A_{N+m}(\omega, x) = A_N(\omega, x) \cap [0, t].$$

Ce réel t est tel que $\lambda(A_N(\omega,x)\cap[0,t]) = \frac{1}{\beta^m}\lambda(A_N(\omega,x))$.

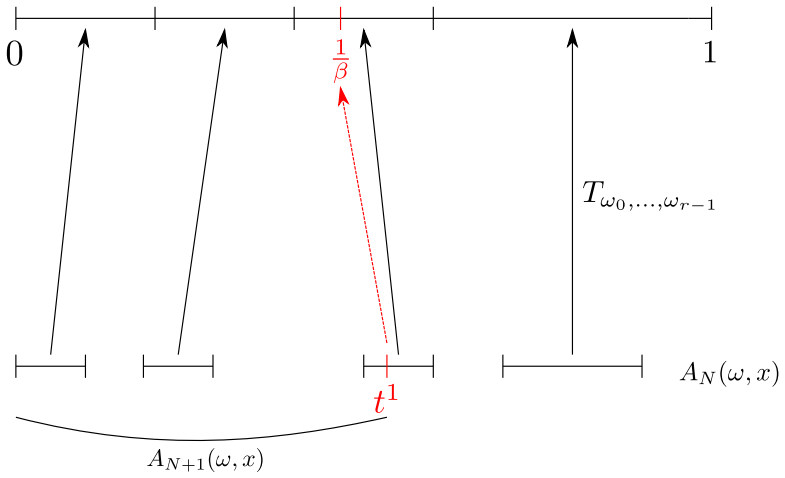


FIGURE 2.14 – Passage de $A_N(\omega,x)$ à $A_{N+1}(\omega,x)$

□

Soit la tribu facteur $\mathcal{F} := \bigvee_{j=0}^{+\infty} \mathcal{K}_g^{-j}\mathcal{P}$. La partition $\mathcal{P}$ fournit un processus de Bernoulli, on veut montrer que ce processus est générateur en démontrant la proposition suivante :

Proposition 2.12. *La tribu $\mathcal{F}$ est (modulo les négligeables) la tribu borélienne sur E_g.*

Lemme 2.13. *La tribu $\mathcal{F}$ contient la tribu engendrée par la composante ω.*

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Comme dit précédemment, tout atome de $\bigvee_{j=0}^{N} \mathcal{K}_g^{-j}\mathcal{P}$ est de la forme $[\omega_0,\ldots,\omega_{r-1}]_0^{r-1} \times J_C$, avec de plus $r \geqslant N$. On en déduit que, quel que soit $N \in \mathbb{N}^*$, $(\omega_0,\ldots,\omega_{N-1})$ est $\mathcal{F}$-mesurable, ce qui donne le résultat annoncé.

□

Pour démontrer la proposition 2.12, il suffit de montrer que quelle que soit la fonction continue $\varphi : E_g \to \mathbb{R}_+$, l'espérance conditionnelle $E[\varphi|\mathcal{F}]$ vérifie, μ_g presque sûrement,

$$E[\varphi|\mathcal{F}] = \varphi.$$

L'existence d'une version régulière de la probabilité conditionnelle assure que pour presque tout $(\omega, x) \in E_g$, il existe une mesure $\mu_{(\omega,x)}$ sur E_g telle que pour toute fonction continue positive $\varphi : E_g \to \mathbb{R}_+$,

$$E[\varphi|\mathcal{F}](\omega, x) = \int \varphi d\mu_{(\omega,x)}.$$

On souhaite démontrer que pour presque tout $(\omega, x) \in E_g$, la mesure $\mu_{(\omega,x)}$ est égale à la mesure de Dirac en (ω, x), ce qui donnera le résultat annoncé. Le lemme 2.13 assure ainsi que, pour presque tout $(\omega, x) \in E_g$, la mesure $\mu_{(\omega,x)}$ est de la forme $\delta_\omega \otimes \tilde{\mu}_{(\omega,x)}$, où $\tilde{\mu}_{(\omega,x)}$ est une mesure sur $[0, 1]$. Dans la suite, on identifie les mesures $\mu_{(\omega,x)}$ et $\tilde{\mu}_{(\omega,x)}$. Il reste donc à démontrer que $\mu_{(\omega,x)}$ est égale à la mesure de Dirac en x.

Soit $\varphi : E_g \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue ne dépendant que de la variable réelle x, c'est à dire $\varphi(\omega, x) = f(x)$, où f est une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}^+$.

Par le théorème de convergence des martingales, on a la convergence presque sûre :

$$E[\varphi| \bigvee_{j=0}^{N} \mathcal{K}_g^{-j}\mathcal{P}] \to E[\varphi|\mathcal{F}].$$

Ainsi, pour presque tout $(\omega, x) \in E_g$, on a la convergence

$$E[\varphi| \bigvee_{j=0}^{N} \mathcal{K}_g^{-j}\mathcal{P}](\omega, x) \to \int f(y)d\mu_{(\omega,x)}(y).$$

À N fixé, et pour presque tout $(\omega, x) \in E_g$, on a :

$$E[\varphi| \bigvee_{j=0}^{N} \mathcal{K}_g^{-j}\mathcal{P}](\omega, x) = \frac{1}{\lambda(A_N(\omega, x))} \int_{A_N(\omega,x)} f(y)dy.$$

On pose $\mu_{A_N(\omega,x)} := \frac{1}{\lambda(A_N(\omega,x))}\lambda_{|A_N(\omega,x)}$ la mesure de Lebesgue renormalisée sur $A_N(\omega, x)$.

Ainsi, pour presque tout $(\omega, x) \in E_g$, la suite de mesures $(\mu_{A_N(\omega,x)})_N$ converge étroitement vers la mesure $\mu_{\omega,x}$.

On définit l'ensemble de mesure 1 $\bar{E}_g$ comme étant l'ensemble des points $(\omega, x) \in E_g$ vérifiant :

— Il existe une mesure de probabilité $\mu_{(\omega,x)}$ sur E_g telle que pour toute fonction continue $\varphi : E_g \to \mathbb{R}_+$, on a :

$$E[\varphi|\mathcal{F}](\omega, x) = \int \varphi d\mu_{(\omega,x)}.$$

— Pour toute fonction continue $\varphi : E_g \to \mathbb{R}_+$ on a la convergence de $E[\varphi|\bigvee_{j=0}^{n} \mathcal{K}_g^{-j}\mathcal{P}](\omega,x)$ vers $E[\varphi|\mathcal{F}](\omega,x)$.

— Pour tout entier N, le point (ω,x) est dans un atome de la partition $\bigvee_{j=0}^{N} \mathcal{K}_g^{-j}\mathcal{P}$ et vérifie le lemme 2.11.

— Pour tout entier N et pour toute fonction continue $\varphi : E_g \to \mathbb{R}_+$ ne dépendant que de la variable réelle, on a :

$$E[\varphi|\bigvee_{j=0}^{N} \mathcal{K}_g^{-j}\mathcal{P}](\omega,x) = \int f(y) d\mu_{A_N(\omega,x)}(y).$$

Lemme 2.14. *Soit $(\omega,x) \in \bar{E}_g$. Soit $[a,b] \subset [0,1]$ tel que $\mu_{(\omega,x)}[a,b] = 1$. Alors l'une des deux propositions suivantes est vraie :*

i) $\mu_{(\omega,x)}[a, \frac{a+b}{2}] = 1$,

ii) $\mu_{(\omega,x)}]\frac{a+b}{2}, b] = 1$.

Démonstration. Supposons que *ii)* n'est pas vérifié. On pose alors $\eta := \mu_{(\omega,x)}[a, \frac{a+b}{2}] > 0$. Soit un entier m assez grand pour que $\frac{1}{\beta^m} < \frac{\eta}{2}$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit f_ε la fonction continue définie sur $[0,1]$ par $f_\varepsilon = 0$ sur $[a, \frac{a+b}{2}]$, $f_\varepsilon = 1$ sur $[\frac{a+b}{2} + \varepsilon, b]$ et f_ε est affine sur $[\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2} + \varepsilon]$.

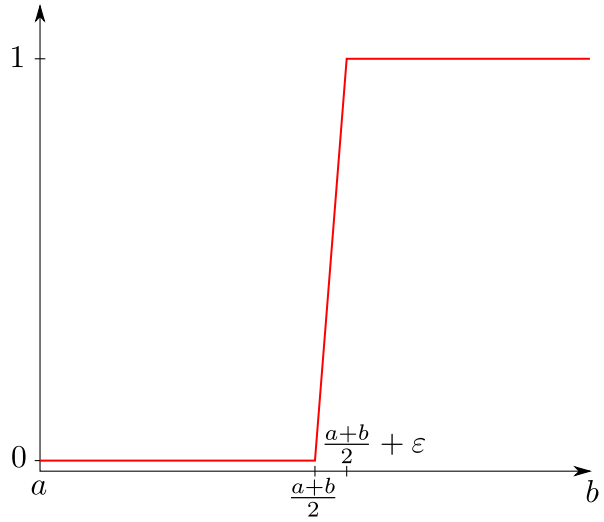


FIGURE 2.15 – Graphe de la fonction f_ε

Alors

$$\int f_\varepsilon d\mu_{(\omega,x)} \leqslant 1-\eta.$$

Ainsi, puisque la suite $(\mu_{A_n(\omega,x)})_n$ converge etroitement vers $\mu_{(\omega,x)}$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geqslant N_0$,

$$\int f_\varepsilon d\mu_{A_n(\omega,x)} \leqslant 1-\frac{\eta}{2}.$$

On a donc, pour tout $n \geqslant N_0$,

$$\mu_{A_n(\omega,x)}\left([\frac{a+b}{2}+\varepsilon, b]\right) \leqslant 1-\frac{\eta}{2} \leqslant 1-\frac{1}{\beta^m}.$$

On en déduit que

$$\mu_{A_n(\omega,x)}\left([a, \frac{a+b}{2}+\varepsilon[\right) > \frac{1}{\beta^m}.$$

Soit $n \geqslant N_0$ tel que $K_g^n(\omega,x), \ldots, K_g^{n+m-1}(\omega,x) \in P_0$. Alors d'après le lemme 2.11, il existe un réel $t \in [0,1]$ tel que $A_{n+m}(\omega,x) = A_n(\omega,x) \cap [0,t]$. De plus, $\lambda(A_{n+m}(\omega,x)) = \frac{1}{\beta^m}\lambda(A_n(\omega,x))$. On en déduit que $A_{n+m}(\omega,x) \subset [a, \frac{a+b}{2}+\varepsilon[$, d'où, pour tout $n' \geqslant n+m$,

$$\mu_{A_{n'}(\omega,x)}\left([\frac{a+b}{2}+\varepsilon, b]\right) = 0.$$

Or, on a

$$\int f_{2\varepsilon} d\mu_{A_n(\omega,x)} \to \int f_{2\varepsilon} d\mu_{(\omega,x)}.$$

Ainsi, on obtient que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mu_{(\omega,x)}([\frac{a+b}{2}+2\varepsilon, b]) = 0$, d'où $\mu_{(\omega,x)}(]\frac{a+b}{2}, b]) = 0$.

□

Par un argument classique de dichotomie, on en déduit que pour presque tout $(\omega,x) \in E_g$, la mesure $\mu_{(\omega,x)}$ est la mesure de Dirac en x, ce qui démontre la proposition 2.12. En particulier, la transformation induite $\mathcal{K}_g$ est isomorphe à un schéma de Bernoulli.

Théorème 2.15. *Le système $(X, \mu, \mathcal{K})$ est ergodique.*

Démonstration. La transformation induite de $\mathcal{K}$ sur E_g est Bernoulli, donc en particulier ergodique. D'après la proposition B.1, il suffit donc de démontrer que, à un ensemble de mesure nulle près,

$$\bigcup_{n\geqslant 1} \mathcal{K}^{-n}(E_g) = X.$$

Autrement dit, on souhaite démontrer que presque tout point de X atteint la base E_g en un nombre fini d'itérations de $\mathcal{K}$.

Montrons d'abord que presque tout point de X peut-être atteint à partir de E_g. Par construction de $\mathcal{K}$, tous les étages de la tour greedy sont l'image d'une partie de E_g par une itérée de $\mathcal{K}$. Plus précisément, pour tout $e \in \mathcal{E}$ tel que $e(0) = g$, on a :

$$E_e = \mathcal{K}^{|e|-1}\left(\bigcap_{k=0}^{|e|-1} \mathcal{K}^{-k}(E_{e(0),\dots,e(k)})\right).$$

De même, tous les étages de la tour lazy sont l'image par une itérée de $\mathcal{K}$ d'une partie de la base E_ℓ. Enfin, d'après le lemme 2.5, on peut passer de la tour greedy à la base de la tour lazy.

Par ailleurs, presque tout point de la base E_g retourne dans E_g en un nombre fini d'itérations de $\mathcal{K}$ (c'est une application du théorème de récurrence de Poincaré). Notons $\mathcal{N}_g$ l'ensemble des points de E_g qui ne retournent pas dans E_g. Alors $\mathcal{N}_g$ est de mesure nulle. Ainsi, l'ensemble $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{K}^n(\mathcal{N}_g)$ est mesurable, et de mesure nulle. En effet, soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\mathcal{K}^n(\mathcal{N}_g) = \bigcup_{|C|=n} \mathcal{K}^n(\mathcal{N}_g \cap E_C).$$

Pour tout chemin C de longueur n, la transformation $\mathcal{K}^n$ est inversible sur $\mathcal{N}_g \cap E_C$ d'après la proposition 2.7. Ainsi, $\mu(K^n(\mathcal{N}_g \cap E_C)) = 0$ et $\mu(\mathcal{K}^n(\mathcal{N}_g)) = 0$.

Soit $a \in X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{K}^n(\mathcal{N}_g)$. Le point a est atteint à partir de la base greedy, c'est à dire qu'il existe $a_0 \in E_g$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\mathcal{K}^n(a_0) = a$ (voir la démonstration de la proposition 2.6). De plus $a_0 \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{K}^n(\mathcal{N}_g)$ donc il existe un chemin $C_0^a \in \mathscr{C}$ tel que $a_0 \in P_{C_0^a}$. Ainsi, a retournera dans la base E_g en un nombre fini d'itérations de $\mathcal{K}$ (en suivant le chemin C_0^a).

□

Corollaire 2.16. *Le système* $(\Omega \times I_\beta, m_p \otimes \mu_p, K_\beta)$ *est ergodique.*

Lemme 2.17. *[2, Lemme 3.2.5 p.37] Soient μ_1 et μ_2 deux mesures de probabilité sur un espace Borel standard $(X, \mathcal{B})$, et $T : X \to X$ une transformation mesurable préservant les mesures μ_1 et μ_2. Si $(X, \mathcal{B}, \mu_1, T)$ est ergodique et μ_2 est absolument continue par rapport à μ_1, alors $\mu_1 = \mu_2$.*

Corollaire 2.18. *La mesure μ_p est l'unique mesure de probabilité absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue telle que $m_p \otimes \mu_p$ soit invariante par K_β.*

Démonstration. D'après le lemme 2.5, pour tout $1 < \beta < 2$, il existe un étage de la tour greedy dont la longueur est supérieure à $\frac{1}{\beta(\beta-1)}$. De manière symétrique, il existe aussi un étage de la tour lazy dont la borne gauche est inférieure à $\frac{1}{\beta}$. On en déduit que le support de la mesure μ_p est égal à l'intervalle I_β tout entier, donc la mesure $m_p \otimes \mu_p$ est équivalente à la mesure $m_p \otimes \lambda$.

Soit ν une mesure absolument continue par rapport à λ (c'est à dire absolument continue par rapport à μ_p) telle que $m_p \otimes \nu$ soit invariante par K_β. Alors la mesure $m_p \otimes \nu$ est absolument continue par rapport à $m_p \otimes \mu_p$, d'où $m_p \otimes \nu = m_p \otimes \mu_p$ d'après le lemme 2.17, puis $\nu = \mu_p$. □

Dans son article [25], Suzuki démontre que la densité de la mesure μ_p est proportionnelle à la fonction

$$B^0(\beta, p)\left(1_{[0,1]} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta^n} \sum_{\omega_1,\dots,\omega_n \in \{g,\ell\}} m_p([\omega_1, \dots, \omega_n]_1^n) 1_{[0, T_{\omega_1,\dots,\omega_n}(1)]}\right)$$
$$+B^0(\beta, 1-p)\left(1_{[s(1), \frac{1}{\beta-1}]} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta^n} \sum_{\omega_1,\dots,\omega_n \in \{g,\ell\}} m_p([\omega_1, \dots, \omega_n])_1^n 1_{[T_{\omega_1,\dots,\omega_n}(s(1)), \frac{1}{\beta-1}]}\right) \tag{2.5}$$

où

$$B^0(\beta, p) = p\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta^n} \sum_{\omega_1,\dots,\omega_{n-1}} 1_S(T_{\omega_1,\dots,\omega_{n-1}}(s(1))) m_p([\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, \ell]_1^n)\right).$$

Par unicité de la mesure μ_p, on sait que la densité (2.3) et l'expression obtenue par Suzuki (2.5) sont égales. Ce résultat peut s'obtenir simplement dans le cas où β n'est pas racine d'un polynôme de la forme $X^{n_0} - X^{n_1} - \dots X^{n_k} - 1$ (ce qui est équivalent à dire que 1 n'admet pas de développement fini en base β).

En effet, dans ce cas on démontre que $\ell_0 = B^0(\beta, p)$: d'une part, on rappelle que

$$\ell_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\beta^{n+1}} \sum_{w\in\{g,\ell\}^n, T_w(s(1)^-)\leqslant \frac{1}{\beta}} m_p([w\cdot g]_0^n).$$

Puisque β n'est pas racine d'un polynôme de la forme $X^{n_0} - X^{n_1} - \dots X^{n_k} - 1$, alors $T_w(s(1)^-) = T_w(s(1))$ pour tout $w \in \{g,\ell\}^n$. De plus, $T_w(s(1)^-) \leqslant \frac{1}{\beta}$ est équivalent à $T_w(s(1)) < \frac{1}{\beta}$. Ainsi, on a, après changement d'indice,

$$\ell_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\beta^{n+1}} \sum_{w\in\{g,\ell\}^n} 1_R(T_w(1)) m_p([w\cdot g]_0^n).$$

D'autre part, après un nouveau changement d'indice dans ℓ_1, on a :

$$\ell_0 = 1 - \ell_1 = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\beta^{n+1}} \sum_{w\in\{g,\ell\}^n} 1_{S\cup R}(T_w(1)) m_p([w\cdot \ell]_0^n)$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\beta^{n+1}} \sum_{w\in\{g,\ell\}^n} 1_S(T_w(1)) m_p([w\cdot\ell]_0^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\beta^{n+1}} \sum_{w\in\{g,\ell\}^n} 1_R(T_w(1)) m_p([w\cdot\ell]_0^n)$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\beta^{n+1}} \sum_{w\in\{g,\ell\}^n} 1_S(T_w(1)) m_p([w\cdot \ell]_0^n) - \frac{1-p}{p}\ell_0.$$

On obtient bien

$$\ell_0 = p\left(1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\beta^{n+1}} \sum_{w\in\{g,\ell\}^n} 1_S(T_w(1)) m_p([w\cdot \ell]_0^n)\right) = B^0(\beta, p).$$

Par symétrie, on obtient de même que $g_1 = B^0(\beta, 1-p)$, et on retrouve bien que les deux densités obtenues sont égales.

Dans le cas où 1 admet un développement fini en base β, il existe $n \in \mathbb{N}$ et une séquence $w \in \{g,\ell\}^n$ telle que $T_w(1) = 0$, et alors la limite à droite $T_v(1^+)$ et la valeur $T_v(1)$ peuvent ne pas coïncider, ce qui rend l'identification des formules plus délicate. On peut aussi vérifier dans le cas particulier du nombre d'or $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ que les deux expressions de la densité ρ_p sont égales

(les calculs détaillés sont en annexe D). On obtient en effet, dans les deux cas :

$$\rho_p(x) = \begin{cases} \frac{p(3\beta+1)}{5} & \text{si} \quad x \in L, \\ \frac{\beta+2}{5} & \text{si} \quad x \in S, \\ \frac{(1-p)(3\beta+1)}{5} & \text{si} \quad x \in R. \end{cases}$$

Dans ce cas particulier, on constate d'une part que l'intervalle central S a une masse indépendante de p, et d'autre part que les deux tours ont une structure périodique. Dans la tour $\mathcal{G}$, seuls les intervalles $[0, \frac{1}{\beta}]$ et $[0, 1]$ apparaissent, tandis que seuls les intervalles $[\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\beta-1}]$ et $[1, \frac{1}{\beta-1}]$ apparaissent dans la tour $\mathcal{L}$.

On remarque enfin que pour $p = 1$, on retrouve l'expression de la densité obtenue par Rényi dans [23].

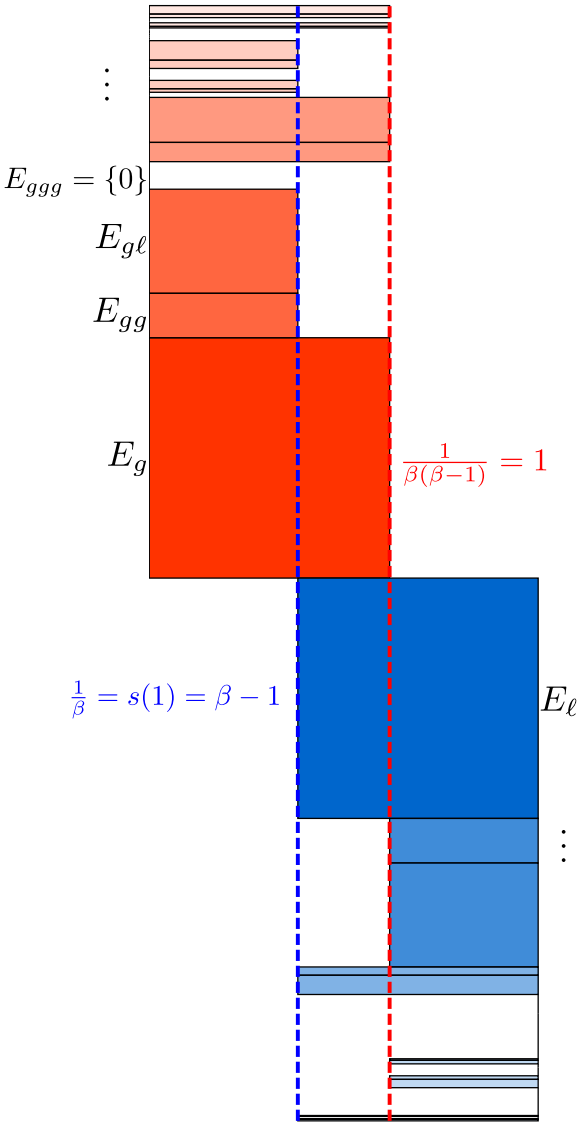


FIGURE 2.16 – Deux tours dans le cas où $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Chapitre 3

Extension naturelle

Dans la première section (3.1), on construit l'extension naturelle de $\mathcal{K}$, en définissant de nouvelles tours (3.1.1) et une nouvelle dynamique $\tilde{\mathcal{K}}$ (3.1.2). Dans la deuxième section (3.2), on démontre que cette extension est aussi l'extension naturelle du système aléatoire de départ. Pour ce faire, on démontre qu'elle est isomorphe à son extension naturelle « canonique » (Théorèmes 3.3 et 3.5), en utilisant notamment la notion de couplages de systèmes dynamiques. On retrouve en particulier l'unicité de la mesure μ_p (corollaire 2.18). Dans la dernière partie (3.3), on démontre que l'extension naturelle de K_β est isomorphe à un schéma de Bernoulli, à l'aide de la partition $\mathcal{P}$ de la base E_g construite dans le chapitre précédent.

3.1 Construction de la nouvelle extension

3.1.1 Définition des nouvelles tours

Tout élément de X qui n'est pas dans une base admet un unique antécédent par $\mathcal{K}$. En revanche, un élément d'une des deux bases peut potentiellement provenir de plusieurs étages, car lorsque l'application $\mathcal{K}$ envoie un élément dans une base, on « oublie » l'étage d'où provient cet élément. C'est ce manque d'information qui empêche l'extension $\mathcal{K}$ d'être inversible.

On souhaite construire une extension naturelle de $\mathcal{K}$, que l'on notera $\tilde{\mathcal{K}}$. Dans un certain sens, c'est la plus petite extension de $\mathcal{K}$ qui soit inversible. Ainsi, pour construire $\tilde{\mathcal{K}}$, il faut étendre l'ensemble X de sorte que l'information des étages traversés dans le passé soit disponible, assurant ainsi l'inversibilité de $\tilde{\mathcal{K}}$.

On redonne la définition de ce qu'est une extension naturelle d'un système

(voir par exemple [3]).

Définition 3.1. *Le système $(Y, \mathcal{C}, \nu, F)$ est une extension naturelle du système $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ s'il existe des ensembles $X^* \in \mathcal{B}$ et $Y^* \in \mathcal{C}$ tels que $\mu(X^*) = \nu(Y^*) = 1$ et une application $\pi : Y^* \to X^*$ telle que :*

1. *F est inversible ν presque partout,*
2. *π est bimesurable et surjective,*
3. *$\mu = \nu \circ \pi^{-1}$,*
4. *$\pi \circ F = T \circ \pi$ et*
5. *$\mathcal{C} = \bigvee_{n \geqslant 0} F^n(\pi^{-1}(\mathcal{B}))$.*

Toutes les extensions naturelles d'un même système sont isomorphes [21].

On construit maintenant l'extension $\tilde{\mathcal{K}}$ de $\mathcal{K}$, puis on montre que c'est une de ses extensions naturelles. Dans la définition initiale des tours $\mathcal{G}$ et $\mathcal{L}$, chaque étage est muni d'une étiquette e. Plus précisément, une étiquette e est une séquence finie de g et de ℓ, où le premier terme de e détermine la tour dans laquelle on est et les termes suivants de e (s'il y en a) décrivent quelles transformations ont été appliquées depuis la base. L'étiquette décrit donc le passé proche d'un point. Ainsi, plutôt que « d'effacer » l'étiquette à chaque retour à une base, on va conserver toutes les étiquettes de sorte que l'on puisse déterminer de manière unique l'orbite passée de presque tout point d'une des deux tours.

On note Z l'ensemble des suites infinies dans le passé générées par le graphe G (p. 55), c'est à dire

$$Z := \{(e_j)_{j \in \mathbb{Z}_{\leqslant 0}} \in \mathcal{E}^{\mathbb{Z}_{\leqslant 0}} : \forall j \leqslant -1, e_j \to e_{j+1}\}.$$

Une suite d'étiquettes dans Z contient en particulier l'information de la suite des transformations effectuées dans le passé. Étant donnée une suite $\mathbf{e}$ de Z, on notera e_0 son terme de rang 0.

Pour $e \in \mathcal{E}$, on pose

$$Z_e := \{\mathbf{e} \in Z : e_0 = e\}.$$

On définit donc les bases des deux tours par

$$\tilde{E}_g := \Omega \times Z_{(g)} \times [0, 1]$$

et

$$\tilde{E}_\ell := \Omega \times Z_{(\ell)} \times \left[s(1), \frac{1}{\beta - 1} \right].$$

Si $e = (g, \omega_{-n}, ..., \omega_{-1})$, $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\tilde{E}_e := \Omega \times Z_e \times [0, T_{\omega_{-n},...,\omega_{-1}}(1^+)].$$

Si $e = (\ell, \omega_{-n}, ..., \omega_{-1})$, $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\tilde{E}_e := \Omega \times Z_e \times \left[T_{\omega_{-n},...,\omega_{-1}}(s(1)^-), \frac{1}{\beta - 1}\right].$$

On notera

$$\tilde{\mathcal{G}} := \bigsqcup_{e \in \mathcal{E}, e(0)=g} \tilde{E}_e$$

et

$$\tilde{\mathcal{L}} := \bigsqcup_{e \in \mathcal{E}, e(0)=\ell} \tilde{E}_e.$$

On note enfin $\tilde{X} := \tilde{\mathcal{G}} \sqcup \tilde{\mathcal{L}}$. On pose :

$$\pi_{(\tilde{X},X)} : \begin{array}{ccc} \tilde{X} & \to & X \\ (\omega, \mathbf{e}, x) & \mapsto & (\omega, e_0, x) \end{array}$$

la projection de $\tilde{X}$ sur X.

3.1.2 La dynamique

Soit $a = (\omega, \mathbf{e}, x) \in \tilde{X}$. Alors $\pi_{\tilde{X},X}(a) = (\omega, e_0, x)$. On a alors $\mathcal{K}(\omega, e_0, x) = (\sigma(\omega), e', T_{\omega_0}(x))$, où l'étiquette e' dépend de e_0, ω_0 et x, selon la construction effectuée dans le chapitre précédent. Par construction de $\mathcal{K}$, on a bien sûr $e_0 \to e'$ dans le graphe G.

Appliquer la nouvelle dynamique $\tilde{\mathcal{K}}$ sur a consiste alors à concaténer la nouvelle étiquette e' à la suite $\mathbf{e}$, en plus de décaler la suite ω et appliquer T_{ω_0} à x : on garde en mémoire toutes les étiquettes passées. Formellement, pour $\mathbf{e} \in Z$ et $e' \in \mathcal{E}$, on note $\mathbf{e} \cdot e'$ la suite d'étiquettes obtenues en concaténant l'étiquette e' à la suite $\mathbf{e}$. Autrement dit, $(\mathbf{e} \cdot e')_i = \mathbf{e}_{i+1}$ si $i \leqslant -1$ et $(\mathbf{e} \cdot e')_0 = e'$. Si $e_0 \to e'$, alors $\mathbf{e} \cdot e' \in Z$.

On définit alors la dynamique $\tilde{\mathcal{K}}$ sur $\tilde{X}$ par :

$$\tilde{\mathcal{K}} : \begin{array}{ccc} \tilde{X} & \to & \tilde{X} \\ (\omega, \mathbf{e}, x) & \mapsto & (\sigma(\omega), \mathbf{e} \cdot e', T_{\omega_0}(x)) \end{array},$$

où e' est l'étiquette associée au point $\mathcal{K}(\omega, e_0, x) \in X$.

La projection $\pi_{(\tilde{X},X)}$ est bimesurable et on a par construction

$$\mathcal{K} \circ \pi_{(\tilde{X},X)} = \pi_{(\tilde{X},X)} \circ \tilde{\mathcal{K}}.$$

On note $\mathcal{B}$ la tribu des boréliens sur X et $\tilde{\mathcal{B}}$ la tribu des boréliens sur $\tilde{X}$. Montrons que

$$\tilde{\mathcal{B}} = \bigvee_{n \geqslant 0} \tilde{\mathcal{K}}^n(\pi^{-1}_{(\tilde{X},X)}(\mathcal{B})).$$

L'inclusion $\bigvee_{n\geqslant 0} \tilde{\mathcal{K}}^n(\pi^{-1}_{(\tilde{X},X)}(\mathcal{B})) \subset \tilde{\mathcal{B}}$ est claire, démontrons l'inclusion inverse.

Soit k et n deux entiers positifs. On considère un pavé dans $\tilde{\mathcal{B}}$ de la forme $A = [\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n]_0^n \times [e_{-k}, \ldots, e_0]_{-k}^0 \times [a, b]$. Alors on a :

$$A = (\Omega \times [e_{-k}, \ldots, e_{-1}]_{-k}^{-1} \times [a, b]) \cap ([\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n]_0^n \times [e_0]_0 \times [a, b]).$$

On pose $A_- = \Omega \times [e_{-k}, \ldots, e_{-1}]_{-k}^{-1} \times [a, b]$ et $A_+ = [\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n]_0^n \times [e_0]_0 \times [a, b]$.

Alors $A_- \in \tilde{\mathcal{K}}^k(\pi^{-1}_{(\tilde{X},X)}(\mathcal{B}))$ et $A_+ \in \pi^{-1}_{(\tilde{X},X)}(\mathcal{B})$ et on en déduit que $A \in \bigvee_{n\geqslant 0} \tilde{\mathcal{K}}^n(\pi^{-1}_{(\tilde{X},X)}(\mathcal{B}))$.

On en déduit l'égalité

$$\tilde{\mathcal{B}} = \bigvee_{n \geqslant 0} \tilde{\mathcal{K}}^n(\pi^{-1}_{(\tilde{X},X)}(\mathcal{B})).$$

On peut alors définir la mesure $\tilde{\mu}$ sur $\tilde{X}$ ainsi : soit $A \in \bigvee_{n=0}^{N} \tilde{\mathcal{K}}^n(\pi^{-1}_{(\tilde{X},X)}(\mathcal{B}))$. On pose

$$\tilde{\mu}(A) := \mu(\pi_{(\tilde{X},X)}(\tilde{\mathcal{K}}^{-N}(A)).$$

La mesure $\tilde{\mu}$ est bien définie, car si $A \in \bigvee_{n=0}^{N} \tilde{\mathcal{K}}^n(\pi^{-1}_{(\tilde{X},X)}(\mathcal{B}))$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mu(\pi_{(\tilde{X},X)}(\tilde{\mathcal{K}}^{-N}(A)) = \mu(\pi_{(\tilde{X},X)}(\tilde{\mathcal{K}}^{-N-n}(A)).$$

Pour tout $B \in \mathcal{B}$, on a $\tilde{\mu} \circ \pi^{-1}_{(\tilde{X},X)}(B) = \mu(B)$, et la mesure $\tilde{\mu}$ est préservée par $\tilde{\mathcal{K}}$. La projection $\pi_{(\tilde{X},X)}$ est surjective $\tilde{\mu}$-presque partout (à cause des étages réduits à un singleton, qui ne sont plus considérés dans l'espace $\tilde{X}$).

Enfin, par construction, $\tilde{\mathcal{K}}$ est inversible sur $\tilde{X}$ sauf sur un ensemble de mesure $\tilde{\mu}$ nulle. En effet, soit $\xi = (\omega, \mathbf{e}, x) \in \tilde{X}$. Si ξ n'est pas dans une des deux bases, l'unique antécédent de ξ par $\tilde{\mathcal{K}}$ se déduit par la construction de $\mathcal{K}$. Si ξ est dans une des deux bases (excepté sur les bords), on dispose maintenant de l'étage précédent e_{-1}, qui permet de retrouver l'unique antécédent de ξ par $\tilde{\mathcal{K}}$. On en déduit que $(\tilde{X}, \tilde{\mu}, \tilde{\mathcal{K}})$ est une extension naturelle de $(X, \mu, \mathcal{K})$.

Proposition 3.2. *Le système $(\tilde{X}, \tilde{\mu}, \tilde{\mathcal{K}})$ est ergodique.*

Démonstration. Le système $(\tilde{X}, \tilde{\mu}, \tilde{\mathcal{K}})$ est ergodique car c'est une extension naturelle d'un système ergodique (Proposition 2.15). □

3.2 Extension naturelle du système de départ

Une extension naturelle de K_β peut être construite de manière canonique de la façon suivante. On pose

$$\underline{X} := \{(\underline{\omega}, \underline{x}) \in \{g, \ell\}^{\mathbb{Z}} \times I_\beta^{\mathbb{Z}} : \forall k \in \mathbb{Z}, T_{\omega_k} x_k = x_{k+1}\}.$$

Soit $\underline{\mathcal{B}}$ la tribu engendrée par les cylindres de $\underline{X}$. On définit la mesure $\underline{\mu}$ sur tout pavé A de la forme $A = [\omega_k, \dots, \omega_{n+k}]_k^{n+k} \times [I_k, \dots, I_{n+k}]_k^{n+k}$, avec $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $k \leqslant i \leqslant n+k$, $\omega_i \in \{g, \ell\}$ et I_i intervalle de I_β, par

$$\underline{\mu}(A) = m_p \otimes \mu_p \left([\omega_k, \dots, \omega_{n+k}]_0^n \times \bigcap_{i=0}^{n} T_{\omega_{k+i}}^{-i}(I_{k+i}) \right).$$

On note $\underline{K}$ le shift sur $\underline{X}$.

Théorème 3.3. *[2] Le système dynamique $(\underline{X}, \underline{\mu}, \underline{K})$ est une extension naturelle du système $(\Omega \times I_\beta, m_p \otimes \mu_p, K_\beta)$.*

Soit $(\omega, \mathbf{e}, x) \in \tilde{X}$. On note $\underline{\omega}(\omega, \mathbf{e})$ la suite de $\{g, \ell\}^{\mathbb{Z}}$ définie par $\underline{\omega}(\omega, \mathbf{e})(k) = \omega_k$ si $k \geqslant 0$ et $\underline{\omega}(\omega, \mathbf{e})(k) = \mathbf{e}_{k+1}(-1)$ si $k \leqslant -1$. La suite $\underline{\omega}(\omega, \mathbf{e})$ est la suite bi-infinie des transformations effectuées dans le passé et à effectuer dans le futur. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note x_k la composante réelle de $\tilde{\mathcal{K}}^k(\omega, \mathbf{e}, x)$, et $\underline{x} := (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. On définit l'application

$$\phi : \begin{array}{ccc} \tilde{X} & \to & \underline{X} \\ (\omega, \mathbf{e}, x) & \to & (\underline{\omega}, \underline{x}) \end{array}.$$

Lemme 3.4. *L'application ϕ est une application facteur entre les systèmes $(\tilde{X}, \tilde{\mu}, \tilde{\mathcal{K}})$ et $(\underline{X}, \underline{\mu}, \underline{K})$.*

Démonstration. On a $\phi \circ \tilde{\mathcal{K}} = \underline{K} \circ \phi$. Montrons que $\tilde{\mu} \circ \phi^{-1} = \underline{\mu}$.

Soit $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$, et pour $k \leqslant i \leqslant n+k$, $\omega_i \in \{g, \ell\}$ et I_i intervalle de I_β. Soit $A = [\omega_k, \dots, \omega_{n+k}]_k^{n+k} \times [I_k, \dots, I_{n+k}]_k^{n+k}$ un pavé dans $\underline{\mathcal{B}}$.

Alors on a :

$$\phi^{-1}(A) = \left\{ (\omega, \mathbf{e}, x) \in \tilde{X}, \underline{\omega}(\omega, \mathbf{e}) \in [\omega_k, \dots, \omega_{n+k}]_k^{n+k}, x \in \bigcap_{i=k}^{n+k} T_{\omega_i}^{-i}(I_i) \right\}.$$

Par invariance de $\tilde{\mu}$ par $\tilde{\mathcal{K}}$, on a :

$$\tilde{\mu}(\phi^{-1}(A)) = \tilde{\mu}\left(\left\{ (\omega, \mathbf{e}, x) \in \tilde{X}, \underline{\omega}(\omega, \mathbf{e}) \in [\omega_k, \dots, \omega_{n+k}]_0^n, x \in \bigcap_{i=0}^{n} T_{\omega_{k+i}}^{-i}(I_{k+i}) \right\} \right).$$

La projection $\pi_{(\tilde{X},X)}$ est une application facteur entre les systèmes $(\tilde{X}, \tilde{\mu}, \tilde{\mathcal{K}})$ et $(X, \mu, \mathcal{K})$. On a alors :

$$\tilde{\mu}(\phi^{-1}(A)) = \mu\left(\left\{ (\omega, e, x) \in X, \omega \in [\omega_k, \dots, \omega_{n+k}]_0^n, x \in \bigcap_{i=0}^{n} T_{\omega_{k+i}}^{-i}(I_{k+i}) \right\} \right).$$

De même, $(\Omega \times I_\beta, m_p \otimes \mu_p, K_\beta)$ est un facteur de $(X, \mu, \mathcal{K})$ via la projection naturelle, et on obtient donc :

$$\tilde{\mu}(\phi^{-1}(A)) = m_p \otimes \mu_p \left([\omega_k, \dots, \omega_{n+k}]_0^n \times \bigcap_{i=0}^{n} T_{\omega_{k+i}}^{-i}(I_{k+i}) \right) = \underline{\mu}(A).$$

L'extension naturelle $(\underline{X}, \underline{\mu}, \underline{K})$ est donc vue comme facteur du système $(\tilde{X}, \tilde{\mu}, \tilde{\mathcal{K}})$. □

Théorème 3.5. *L'application facteur ϕ est un isomorphisme. Ainsi, le système $(\tilde{X}, \tilde{\mu}, \tilde{\mathcal{K}})$ est une extension naturelle du système $(\Omega \times I_\beta, m_p \otimes \mu_p, K_\beta)$.*

Pour démontrer ce théorème, on utilise la notion de couplages relativement indépendants au-dessus d'un facteur. Les définitions et résultats utiles sur les couplages sont rassemblés en annexe B.

Soit $\mathbb{P}$ l'autocouplage de $\tilde{\mu}$ relativement indépendant au-dessus de $\underline{X}$. La mesure $\mathbb{P}$ est portée par l'ensemble $\{(a, b) \in \tilde{X} \times \tilde{X} : \phi(a) = \phi(b)\}$. On souhaite démontrer que ϕ est un isomorphisme en appliquant la proposition B.4. On démontre pour cela que $\mathbb{P}$ est portée par la diagonale de $\tilde{X} \times \tilde{X}$.

Soit $a = (\omega, \mathbf{e}, x)$ et $b = (\omega', \mathbf{e'}, x')$ deux éléments de $\tilde{X}$ tels que $\phi(a) = \phi(b)$. On a donc $\underline{\omega}(\omega, \mathbf{e}) = \underline{\omega}(\omega', \mathbf{e'})$ et $\underline{x} = \underline{x'}$. Autrement dit, a et b décrivent

deux trajectoires dans les tours, partant d'un même réel x et subissant les mêmes transformations $\underline{\omega}(\omega, \mathbf{e})$, mais suivant potentiellement des étages différents **e** et **e'**. Démontrer que $\mathbb{P}$ est portée par la diagonale de $\tilde{X} \times \tilde{X}$ consiste donc à démontrer que pour $\mathbb{P}$-presque tout $a, b \in \tilde{X}$, les deux suites d'étages **e** et **e'** sont en fait égales.

L'idée de la preuve consiste à prendre deux trajectoires dans $\tilde{X}$ partant d'un même réel x, suivant la même suite de transformations, et de montrer qu'elles vont finir par coïncider, c'est à dire se rejoindre dans un même étage. Une fois que ces trajectoires arrivent simultanément dans un même étage, elles coïncident dans le futur. On travaille sur l'extension $\mathcal{K}$ dans un premier temps.

Lemme 3.6. *Pour tout réel $1 < \beta < 2$, les intervalles de la tour lazy de X ne contiennent jamais 0.*

Démonstration. Cette propriété est vraie par construction de l'extension $\mathcal{K}$. En effet, pour qu'un intervalle d'un étage de la tour lazy contienne 0, il faudrait qu'il soit l'image par la transformation T_g d'un intervalle dont la borne gauche vaut $\frac{1}{\beta}$. Or, si la borne gauche d'un intervalle d'un étage de la tour lazy vaut $\frac{1}{\beta}$, on est dans le cas où toute la partie de l'étage vérifiant $x \in [\frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta}[$ est envoyée dans la base greedy lorsqu'on applique la transformation greedy (voir la figure 2.10). □

Pour toute étiquette $e \in \mathcal{E}$, on pose $Y_e := \Omega \times \{e\}$, et on a $E_e = Y_e \times I_e$. On pose alors $Y := \bigcup_{e \in \mathcal{E}} Y_e$, composante représentée verticalement sur la figure 2.1. On note ν la mesure sur Y telle que, pour tout $e \in \mathcal{E}$,

$$\mu_{|E_e} = \nu_{|Y_e} \otimes \lambda_{|I_e}.$$

Enfin, on note π_Y la projection de X sur Y.

Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $1 - \frac{1+2(\beta-1)}{(\beta-1)\mu(\mathcal{G})}\varepsilon > 0.5$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que la mesure μ des étages au-delà du niveau N dans la tour lazy $\mathcal{L}$ soit inférieure à ε. Soit $k \geqslant 1$ un entier suffisamment grand tel qu'aucun étage de la tour lazy jusqu'au niveau N n'ait un intervalle dont la borne gauche est inférieure à $\frac{1}{\beta^k}$. Un tel entier k existe par le lemme précédent.

Considérons l'ensemble

$$C_k := \left\{ (\omega, e, x) \in X : x < \frac{1}{\beta^k}, \omega_0 = \omega_1 = \ldots = \omega_{k-1} = g \right\}.$$

L'ensemble C_k décrit les points des deux tours dont la composante réelle est suffisamment proche de 0, et qui vont subir k fois de suite la transformation greedy. L'idée est de démontrer qu'étant données deux trajectoires

avec la même composante réelle et la même suite de transformations, l'événement C_k se produit presque sûrement et en même temps pour les deux trajectoires. Sachant l'événement C_k réalisé, on démontre alors qu'avec une grande probabilité, les deux trajectoires sont dans un étage de la tour greedy dont l'intervalle est suffisamment grand. Ainsi, après au plus k itérations de la transformation T_g, les deux trajectoires passent par la base E_g en même temps. La définition de C_k ne fait pas intervenir l'étiquette e, l'événement C_k est mesurable par rapport au facteur $\mathcal{B}(\Omega \times I_\beta)$.

Soit A_k la réunion des étages de $\mathcal{G}$ dont la longueur est inférieure à $\frac{1}{\beta^k}$. Soit B_k le complémentaire de A_k dans $\mathcal{G}$. On a donc :

$$\mu(C_k) = \mu(C_k \cap \mathcal{L}) + \mu(C_k \cap A_k) + \mu(C_k \cap B_k). \tag{3.1}$$

On souhaite estimer chaque terme du membre de droite de l'équation (3.1).

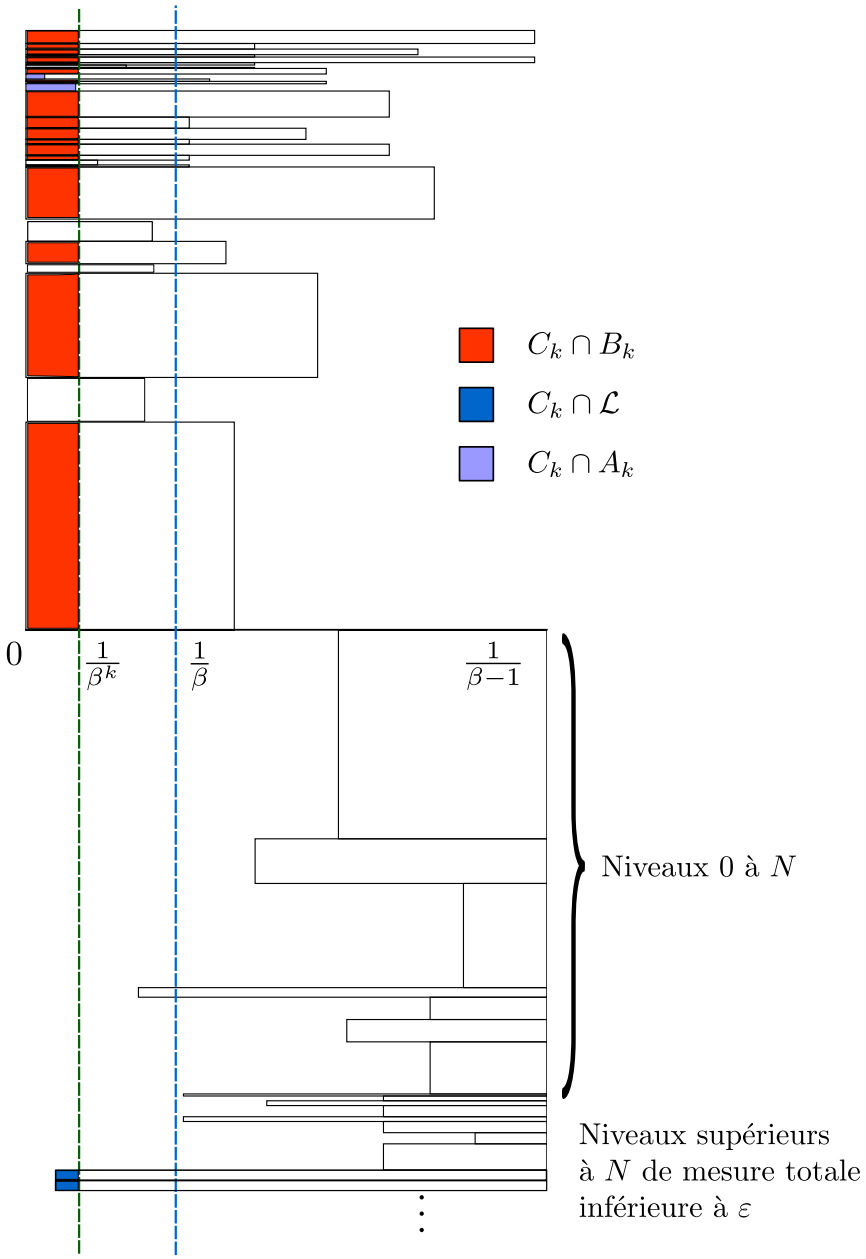


FIGURE 3.1 – Représentation de l'ensemble C_k

Dans la figure 3.1, on a représenté les ensembles $C_k \cap \mathcal{L}$, $C_k \cap A_k$ et

$C_k \cap B_k$ sans tenir compte de la composante en ω par souci de clarté. Cette figure est une illustration du fait que les ensembles $C_k \cap \mathcal{L}$ et $C_k \cap A_k$ sont de mesures résiduelles comparés à $C_k \cap B_k$.

Lemme 3.7. *Pour k suffisamment grand, on a*

$$\mu(C_k \cap \mathcal{L}) \leqslant 2p^k \frac{\beta - 1}{\beta^k} \varepsilon.$$

Démonstration. Un étage de la tour lazy ne peut rencontrer C_k que si la borne gauche de son intervalle est inférieure à $\frac{1}{\beta^k}$. L'entier N est fixé de sorte que tout étage sous le niveau N n'ait pas un intervalle contenant $\frac{1}{\beta^k}$. Ainsi, seuls des étages au delà du niveau N peuvent rencontrer C_k. Par ailleurs, pour tout $e \in \mathcal{E}$, on a, par définition de la mesure μ sur chaque étage :

$$\mu\left(\left\{(\omega, e, x) \in E_e : \omega_0 = ... = \omega_{k-1} = g, x < \frac{1}{\beta^k}\right\}\right) = p^k \mu\left(E_e \cap \left\{x < \frac{1}{\beta^k}\right\}\right).$$

On a donc :

$$\mu(C_k \cap \mathcal{L}) = p^k \sum_{e \in \mathcal{E}, e(0) = \ell, |e| \geqslant N+1} \nu(Y_e) \lambda\left(I_e \cap \left[0; \frac{1}{\beta^k}\right]\right).$$

Pour un étage E_e de la tour lazy tel que $I_e \cap [0; \frac{1}{\beta^k}] \neq \varnothing$, on a

$$\lambda(I_e) > \frac{1}{\beta - 1} - \frac{1}{\beta^k}.$$

Pour k suffisamment grand, on a donc

$$\lambda(I_e) > \frac{1}{2(\beta - 1)}.$$

On en déduit

$$\lambda\left(I_e \cap \left[0; \frac{1}{\beta^k}\right]\right) \leqslant \frac{1}{\beta^k} \leqslant 2\frac{\beta - 1}{\beta^k} \lambda(I_e)$$

d'où

$$\mu(C_k \cap \mathcal{L}) \leqslant 2p^k \frac{\beta - 1}{\beta^k} \varepsilon.$$

□

Lemme 3.8. *Pour k suffisamment grand, on a*

$$\mu(C_k \cap A_k) \leqslant \frac{p^k}{\beta^k} \varepsilon.$$

Démonstration.

$$\mu(C_k \cap A_k) = p^k \sum_{e\in\mathcal{E}, E_e\subset A_k} \nu(Y_e)\lambda\left(I_e \cap \left[0; \frac{1}{\beta^k}\right]\right).$$

Si E_e est un étage de A_k, alors $\lambda(I_e \cap [0; \frac{1}{\beta^k}]) \leqslant \frac{1}{\beta^k}$. Ainsi,

$$\mu(C_k \cap A_k) \leqslant \frac{p^k}{\beta^k}\nu(\pi_Y(A_k)).$$

Or,

$$\bigcap_{k\geqslant 1} A_k = \varnothing,$$

donc

$$\pi_Y\left(\bigcap_{k\geqslant 1} A_k\right) = \varnothing.$$

Et puisque l'intersection des A_k est décroissante, on a

$$\bigcap_{k\geqslant 1} \pi_Y(A_k) = \varnothing.$$

On en déduit que

$$\lim_{k\to\infty} \nu(\pi_Y(A_k)) = 0.$$

On peut prendre k suffisamment grand pour que $\nu(\pi_Y(A_k)) < \varepsilon$. Ainsi, on a :

$$\mu(C_k \cap A_k) \leqslant \frac{p^k}{\beta^k}\varepsilon.$$

□

Proposition 3.9. *Pour tout k suffisamment grand, on a*

$$\frac{\mu(C_k \cap B_k)}{\mu(C_k)} > 0.5.$$

Démonstration. On a :

$$\frac{\mu(C_k \cap B_k)}{\mu(C_k)} = 1 - \frac{\mu(C_k \cap A_k) + \mu(C_k \cap \mathcal{L})}{\mu(C_k)}.$$

Ainsi, d'après les lemmes 3.7 et 3.8, on obtient, pour k assez grand :

$$\frac{\mu(C_k \cap B_k)}{\mu(C_k)} \geqslant 1 - \frac{\frac{p^k}{\beta^k}\varepsilon + 2p^k\frac{\beta-1}{\beta^k}\varepsilon}{\mu(C_k)} \geqslant 1 - \frac{\frac{p^k}{\beta^k}\varepsilon + 2p^k\frac{\beta-1}{\beta^k}\varepsilon}{\mu(C_k \cap \mathcal{G})}.$$

Or,

$$\mu(C_k \cap \mathcal{G}) = p^k \sum_{e\in\mathcal{E}, e(0)=g} \nu(Y_e)\lambda\left(I_e \cap \left[0; \frac{1}{\beta^k}\right]\right).$$

Pour tout étage E_e de $\mathcal{G}$, on a la minoration $\lambda(I_e \cap [0, \frac{1}{\beta^k}]) \geqslant \lambda(I_e)\frac{\beta-1}{\beta^k}$ d'où

$$\frac{\mu(C_k \cap B_k)}{\mu(C_k)} \geqslant 1 - \frac{\frac{p^k}{\beta^k}\varepsilon + 2p^k\frac{\beta-1}{\beta^k}\varepsilon}{p^k\frac{\beta-1}{\beta^k}\mu(\mathcal{G})} = 1 - \frac{1+2(\beta-1)}{(\beta-1)\mu(\mathcal{G})}\varepsilon.$$

Or, le réel ε est tel que $1 - \frac{1+2(\beta-1)}{(\beta-1)\mu(\mathcal{G})}\varepsilon > 0.5$, ce qui donne le résultat souhaité. □

Tous ces calculs sont aussi valables dans l'extension $\tilde{X}$. En effet, $\pi^{-1}_{(\tilde{X},X)}(C_k) \in \pi^{-1}_{(\tilde{X},X)}(\mathcal{B})$, ce qui implique $\tilde{\mu}(\pi^{-1}_{(\tilde{X},X)}(C_k)) = \mu(C_k)$.

Par ergodicité de $\tilde{\mathcal{K}}$, presque toute trajectoire dans $\tilde{X}$ passe par $\pi^{-1}_{(\tilde{X},X)}(C_k)$. Ainsi, pour presque tout couple de trajectoires dans $\tilde{X}$ tirés selon l'autocouplage $\mathbb{P}$, les deux trajectoires passent simultanément dans $\pi^{-1}_{(X,\tilde{X})}(C_k)$ avec une fréquence égale à $\mu(C_k)$. Dans la suite on confondra C_k et $\pi^{-1}_{(X,\tilde{X})}(C_k)$. On a donc, plus précisément, pour $\mathbb{P}$-presque tout $(a, b) \in \tilde{X} \times \tilde{X}$,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{C_k}(\tilde{\mathcal{K}}^n(a)) \to \mu(C_k)$$

et

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{C_k}(\tilde{\mathcal{K}}^n(b)) \to \mu(C_k).$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $\tilde{\mathcal{K}}^n(a) \in C_k$, alors $\tilde{\mathcal{K}}^n(b) \in C_k$.

Parmi toutes les occurrences de l'événement C_k, l'événement $C_k \cap B_k$ se produit avec une fréquence strictement supérieure à 0.5 pour les orbites de a et b sous $\tilde{\mathcal{K}}$. Ainsi, pour $\mathbb{P}$-presque tout $a, b \in \tilde{X}$, il existe des instants dans les orbites de a et b où l'événement B_k se réalise en même temps pour les deux orbites. Autrement dit, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\tilde{\mathcal{K}}^{n_0}(a) \in C_k \cap B_k$ et $\tilde{\mathcal{K}}^{n_0}(b) \in C_k \cap B_k$. Ainsi, pour $\mathbb{P}$ presque tous $(a, b) \in \tilde{X} \times \tilde{X}$, si on note $a = (\omega, \mathbf{e}, x)$ et $b = (\omega, \mathbf{e'}, x)$, il existe un entier $M(\underline{\omega}(\omega, \mathbf{e}), \underline{x}, \mathbf{e}, \mathbf{e'})$ tel que $e_M = e'_M$.

Soit $\delta > 0$. Il existe un entier M_δ tel que

$$\mathbb{P}(M(\underline{\omega}(\omega, \mathbf{e}), \underline{x}, \mathbf{e}, \mathbf{e'}) > M_\delta) < \delta.$$

Ainsi, on a $\mathbb{P}(e_{M_\delta} = e'_{M_\delta}) \geqslant 1-\delta$. Par invariance de $\mathbb{P}$ par rapport à $\tilde{\mathcal{K}} \times \tilde{\mathcal{K}}$, on en déduit que pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$ et tout $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}(e_k = e'_k) \geqslant 1-\delta$$

d'où **e = e'**. On en déduit que $\mathbb{P}$ est portée par la diagonale de $\tilde{X} \times \tilde{X}$, et donc que ϕ est un isomorphisme. Ainsi, $(\tilde{X}, \tilde{\mu}, \tilde{\mathcal{K}})$ est une extension naturelle du système initial.

3.3 Bernoullicité

L'objectif de cette section est de démontrer la Bernoullicité de l'extension naturelle $\tilde{\mathcal{K}}$, c'est à dire que le système $(\tilde{X}, \tilde{\mu}, \tilde{\mathcal{K}})$ est isomorphe à un schéma de Bernoulli. Pour ce faire, on introduira une partition génératrice des deux tours, dont on démontrera la faible Bernoullicité, par un argument de Ito, Totoki et Murata [15]. Dans la suite, on notera $\tilde{\mu}_g := \tilde{\mu}(\cdot|\tilde{E}_g)$, et on note $\tilde{\mathcal{K}}_g$ la transformation induite de $\tilde{\mathcal{K}}$ sur la base $\tilde{E}_g$.

Lemme 3.10. *Le système $(\tilde{E}_g, \tilde{\mu}_g, \tilde{\mathcal{K}}_g)$ est une extension naturelle du système $(E_g, \mu_g, \mathcal{K}_g)$.*

Démonstration. La projection $\pi_{(\tilde{X},X)}$ envoie la base $\tilde{E}_g$ sur E_g, et $\pi^{-1}_{(\tilde{X},X)}(E_g) = \tilde{E}_g$. On note π la projection de $\tilde{E}_g$ sur E_g. La projection π est bi-mesurable et on a bien $\pi \circ \tilde{\mathcal{K}}_g = \mathcal{K}_g \circ \pi$. Montrons que $\mu_g = \tilde{\mu}_g \circ \pi^{-1}$. Soit $A \in \mathcal{B}(E_g)$. Alors :

$$\tilde{\mu}_g \circ \pi^{-1}(A) = \tilde{\mu}(\pi^{-1}(A)|\tilde{E}_g) = \frac{\tilde{\mu}(\pi^{-1}(A) \cap \tilde{E}_g)}{\tilde{\mu}(\tilde{E}_g)} = \frac{\mu(A \cap E_g)}{\mu(E_g)} = \mu_g(A).$$

Montrons que $\mathcal{B}(\tilde{E}_g) = \bigvee_{n\geqslant 0} \tilde{\mathcal{K}}_g^n(\pi^{-1}(\mathcal{B}(E_g)))$. On a clairement l'inclusion $\bigvee_{n\geqslant 0} \tilde{\mathcal{K}}_g^n(\pi^{-1}(\mathcal{B}(E_g))) \subset \mathcal{B}(\tilde{E}_g)$. Soit A un pavé de $\mathcal{B}(\tilde{E}_g)$ de la forme

$$A := [\omega_0, \ldots, \omega_n]_0^n \times [e_{-k}, \ldots, e_0]_{-k}^0 \times I,$$

où $e_i \in \mathcal{E}$ pour tout $-k \leqslant i \leqslant -1$, $e_0 = (g)$, et I est un sous-intervalle de $[0,1]$. Posons $A_- := \Omega \times [e_{-k}, \ldots, e_0]_{-k}^0 \times I$ et $A_+ := [\omega_0, \ldots, \omega_n]_0^n \times [(g)]_0 \times I$. On a alors $A = A_- \cap A_+$ et $A_+ \in \pi^{-1}(\mathcal{B}(E_g))$.

On traite les deux cas particuliers suivants :

1. $e_{-k} = (g)$ et il n'y a aucune autre occurrence de l'étiquette (g) entre e_{-k} et e_{-1}.
2. Il n'y aucune occurrence de l'étiquette (g) entre e_{-k} et e_{-1}.

Le cas général se traitera avec le même raisonnement, en considérant toutes les occurrences de l'étiquette (g) dans la séquence $(e_{-k}, \dots, e_0)$.

Dans le premier cas, on note $C \in \mathscr{C}$ le chemin $(e_{-k}, \dots, e_{-1}, e_0)$. Alors on a :

$$A_- = \tilde{\mathcal{K}}_g(\pi^{-1}(B)),$$

avec $B = E_C \cap \{x \in T_{C|J_C}^{-1}(I)\} \in \mathcal{B}(E_g)$.

Dans le deuxième cas, notons $\mathscr{C}_{e_{-k},\dots,e_{-1},e_0}$ l'ensemble des chemins de $\mathscr{C}$ finissant par la séquence $(e_{-k}, \dots, e_{-1}, e_0)$. On se ramène en fait au premier cas en considérant toutes les manières de « compléter » le chemin $(e_{-k}, \dots, e_{-1}, e_0)$ en un chemin de $\mathscr{C}$. En effet, presque tout point de A_- rencontre la base greedy dans son orbite passée, par le théorème de récurrence de Poincaré appliqué à $\tilde{\mathcal{K}}^{-1}$. On a alors :

$$\begin{aligned} A_- &= \bigcup_{C \in \mathscr{C}_{e_{-k},\dots,e_{-1},e_0}} \tilde{\mathcal{K}}_g(\pi^{-1}(E_C \cap \{x \in T_{C|J_C}^{-1}(I)\})) \\ &= \tilde{\mathcal{K}}_g \circ \pi^{-1} \left(\bigcup_{C \in \mathscr{C}_{e_{-k},\dots,e_{-1},e_0}} E_C \cap \{x \in T_{C|J_C}^{-1}(I)\} \right). \end{aligned}$$

L'ensemble $\bigcup_{C \in \mathscr{C}_{e_{-k},\dots,e_{-1},e_0}} E_C \cap \{x \in T_{C|J_C}^{-1}(I)\}$ est un ensemble mesurable de $\mathcal{B}(E_g)$ car réunion dénombrable d'ensembles $\mathcal{B}(E_g)$-mesurables. On obtient alors que $A_- \in \bigvee_{n \geqslant 0} \tilde{\mathcal{K}}_g^n(\pi^{-1}(\mathcal{B}(E_g)))$, et donc A aussi, ce qui achève la preuve du lemme. □

Proposition 3.11. *La partition $\tilde{\mathcal{P}} := \pi^{-1}(\mathcal{P})$ est génératrice du système*

$$(\tilde{E}_g, \tilde{\mu}_g, \tilde{\mathcal{K}}_g).$$

Démonstration. À μ_g-presque tout point $a \in E_g$ est associée une unique suite $(C_n^a)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathscr{C}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{K}_g^n(a) \in E_{C_n^a}$: la suite $(C_n^a)_{n \in \mathbb{N}}$ est le $\mathcal{P}$-nom du point a. Notons $\phi_{\mathcal{P}}$ l'application définie presque partout sur E_g par $\phi_{\mathcal{P}}(a) = (C_n^a)_{n \in \mathbb{N}}$. Notons ν la mesure image de μ_g par $\phi_{\mathcal{P}}$ et σ le shift à gauche sur $\mathscr{C}^{\mathbb{N}}$. L'application $\phi_{\mathcal{P}}$ est une application facteur entre les systèmes $(E_g, \mu_g, \mathcal{K}_g)$ et $(\mathscr{C}^{\mathbb{N}}, \nu, \sigma)$. D'après la proposition 2.12, la partition $\mathcal{P}$ est génératrice du système $(E_g, \mu_g, \mathcal{K}_g)$. Ainsi, l'application $\phi_{\mathcal{P}}$ est un isomorphisme.

On peut construire une extension naturelle du système $(\mathscr{C}^{\mathbb{N}}, \nu, \sigma)$ de la même manière que pour la construction de $\underline{K}$. Par ce procédé, on obtient le système $(\mathscr{C}^{\mathbb{Z}}, \tilde{\nu}, \sigma)$, qui est un schéma de Bernoulli sur $\mathscr{C}^{\mathbb{Z}}$. Puisque toutes les extensions naturelles d'un même système sont isomorphes, on en déduit

que les systèmes $(\mathscr{C}^{\mathbb{Z}}, \tilde{\nu}, \sigma)$ et $(\tilde{E}_g, \tilde{\mu}_G, \tilde{\mathcal{K}}_g)$ sont isomorphes d'après le lemme précédent, d'où le résultat. □

À partir de cette partition $\tilde{\mathcal{P}}$, on construit la collection

$$\mathcal{P}_{\tilde{X}} := \{\tilde{\mathcal{K}}^k(\tilde{E}_C), C \in \mathscr{C}, 0 \leqslant k \leqslant |C| - 1\}.$$

Cette collection est construite en « dépliant » la partition $\tilde{\mathcal{P}}$ sur les deux tours : chaque chemin C de $\mathscr{C}$ est décrit non plus par l'atome de départ $\tilde{E}_C$, mais par la suite des images successives par $\tilde{\mathcal{K}}$ de cette atome.

Lemme 3.12. *La collection $\mathcal{P}_{\tilde{X}}$ est une partition de $\tilde{X}$.*

Démonstration. Deux éléments distincts de $\mathcal{P}_{\tilde{X}}$ sont clairement disjoints.

D'autre part, soit $(\omega, \mathbf{e}, x) \in \tilde{X}$. Presque sûrement, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbf{e}_{-k} = (g)$ (en appliquant le théorème de récurrence de Poincaré à la transformation $\tilde{\mathcal{K}}^{-1}$). Soit $k_0 := \min\{k \in \mathbb{N}, \mathbf{e}_{-k} = (g)\}$. L'entier $-k_0$ correspond au dernier passage dans la base greedy dans l'orbite passée de $(\omega, \mathbf{e}, x)$. Presque sûrement, il existe un unique $C \in \mathscr{C}$ tel que $\tilde{\mathcal{K}}^{-k_0}(\omega, \mathbf{e}, x) \in \tilde{E}_C$. Puisque k_0 est minimal, on a $0 \leqslant k_0 \leqslant |C| - 1$, et $(\omega, \mathbf{e}, x) \in \tilde{\mathcal{K}}^{k_0}(\tilde{E}_C)$. □

Proposition 3.13. *La partition $\mathcal{P}_{\tilde{X}}$ est génératrice du système $(\tilde{X}, \tilde{\mu}, \tilde{\mathcal{K}})$.*

Démonstration. Le but est de démontrer que presque tout point de $\tilde{X}$ est uniquement déterminé par son $\mathcal{P}_{\tilde{X}}$-nom.

Soit $(\omega, \mathbf{e}, x) \in \tilde{X}$. Presque sûrement, on peut définir l'entier k_0 comme dans la preuve précédente :

$$k_0 := \min\{k \in \mathbb{N}, \mathbf{e}_{-k} = (g)\}.$$

On note $a := \tilde{\mathcal{K}}^{-k_0}(e, x) \in \tilde{E}_g$. Presque sûrement, a est caractérisé par son $\tilde{\mathcal{P}}$-nom $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. À chaque chemin C_n correspond une unique séquence de longueur $|C_n|$ d'atomes de $\mathcal{P}_{\tilde{X}}$: la séquence $(\tilde{\mathcal{K}}^k(\tilde{E}_{C_n}), 0 \leqslant k \leqslant |C_n| - 1)$. Ainsi, l'élément a est caractérisé par l'unique suite $(P_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de $\mathcal{P}_{\tilde{X}}$ telle que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$,

$$\tilde{\mathcal{K}}^n(a) \in P_n.$$

On en déduit que le point $(\omega, \mathbf{e}, x)$ est uniquement déterminé par la suite $(P_{n+k})_{n\in\mathbb{Z}}$. □

On définit alors l'isomorphisme φ, qui a presque tout point de $\tilde{X}$ associe son $\mathcal{P}_{\tilde{X}}$-nom. On note ν la mesure image de $\tilde{\mu}$ par φ et σ le décalage vers la gauche sur $\mathcal{P}_{\tilde{X}}^{\mathbb{Z}}$. Alors φ est un isomorphisme facteur entre les systèmes $(\tilde{X}, \tilde{\mu}, \tilde{\mathcal{K}})$ et $(\mathcal{P}_{\tilde{X}}^{\mathbb{Z}}, \nu, \sigma)$.

La mesure ν est la mesure de Markov engendrée par la distribution invariante $(\tilde{\mu}(P))_{P \in \mathcal{P}_{\tilde{X}}}$ et la matrice de transitions définie comme suit :

— Si $P_0 = \tilde{\mathcal{K}}^k(\tilde{E}_C)$ pour $C \in \mathscr{C}$ et $0 \leqslant k \leqslant |C| - 2$, alors le processus passe à l'atome $P_1 = \tilde{\mathcal{K}}^{k+1}(\tilde{E}_C)$ avec probabilité 1.

— Si $P_0 = \tilde{\mathcal{K}}^{|C|-1}(\tilde{E}_C)$ pour $C \in \mathscr{C}$, alors, pour tout $C' \in \mathscr{C}$, la probabilité de passer de P_0 à $\tilde{E}_{C'}$ est égale à $\mu_g(E_{C'})$.

On peut donc identifier l'extension naturelle $(\tilde{X}, \tilde{\mu}, \tilde{\mathcal{K}})$ à un décalage markovien sur $\mathcal{P}_{\tilde{X}}^{\mathbb{Z}}$. Ce décalage markovien est irréductible et récurrent car $\tilde{\mathcal{K}}$ est ergodique. De plus, il est apériodique (l'atome $[g]_0 \times \{(g)\} \times [0, \frac{1}{\beta}[$ peut apparaître deux fois de suite par exemple). D'après la proposition 2 p.579 de l'article de Ito, Totoki et Murata [15], on en déduit que la partition $\mathcal{P}_{\tilde{X}}$ est faiblement Bernoulli, et donc que le système $(\tilde{X}, \tilde{\mu}, \tilde{\mathcal{K}})$ est isomorphe à un schéma de Bernoulli.

Perspectives

Généralisation à toute valeur de β

À travers le deuxième et le troisième chapitre, on a pu constater que la construction d'une extension géométrico-symbolique permet d'obtenir la plupart des propriétés ergodiques de la transformation β-aléatoire, au moins dans le cas où $1 < \beta < 2$. On peut espérer généraliser la construction du chapitre 2 à toutes valeurs de β. Dans le cas où β est compris entre 1 et 2, les retours aux bases ont lieu lorsqu'une branche d'une des transformations est « pleine » (par exemple lorsque la longueur d'un étage de $\mathcal{G}$ est supérieure à $\frac{1}{\beta}$ et qu'on applique T_g). Pour $\beta > 2$, il faut tenir compte des différentes branches lors de la construction de la version géométrico-symbolique de l'extension naturelle, afin de distinguer par quelle branche un retour à une base a lieu. La construction de l'extension principale ne devrait pas poser de problème a priori, mais il faut réussir à adapter les preuves des différents résultats obtenus, en particulier ceux sur la partition $\mathcal{P}$ de la base E_g : quel est l'analogue de cette partition $\mathcal{P}$? Comment tenir compte des différentes branches ?

Généralisation à d'autres systèmes dynamiques

Plus généralement, il est naturel de vouloir appliquer ce type de constructions à d'autres systèmes dynamiques (déterministe dans un premier temps, puis aléatoire). On pense notamment aux systèmes associés à certaines fractions continues (par exemple [17] ou [10]). La première différence notable est que ces transformations ne sont pas affines par morceaux et toutes les constructions de cette thèse reposent pleinement sur la linéarité des branches de T_g et T_ℓ. De plus, les transformations en jeu ont cette fois une infinité de branches. Janvresse, Rittaud et de la Rue exhibent dans [16] une bijection entre le paramètre β des écritures en base non entières et le paramètre λ des λ-fractions continues [22]. L'étude approfondie de cette bijection est une

piste intéressante à poursuivre afin d'essayer de transposer aux λ-fractions continues les résultats obtenus dans cette thèse. Cela nécessiterait entre autre d'identifier les analogues des transformations greedy et lazy dans le cas des λ-fractions continues.

Théorèmes limite

Nous avons vu que la description de l'extension $(X, \mu, \mathcal{K})$ permet de mieux comprendre la dynamique aléatoire initiale sur $\Omega \times I_\beta$ (existence et unicité d'une mesure invariante absolument continue, ergodicité, etc). On constate par ailleurs une structure de temps de renouvellement à chaque passage dans la base greedy, ce qui nous a permis de démontrer que le système est isomorphe à un schéma de Bernoulli. On peut espérer que cette propriété permette l'obtention de théorèmes limite. En effet, Young décrit dans [26] une certaine classe de systèmes dynamiques disposant d'un ensemble dit « de référence » sur lequel les systèmes effectuent des retours avec des propriétés de renouvellement. Young démontre que la queue des temps de retour à cet ensemble de référence est directement liée aux vitesses de convergence des mesures empiriques vers l'unique mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, ainsi qu'à l'existence de théorème limite.

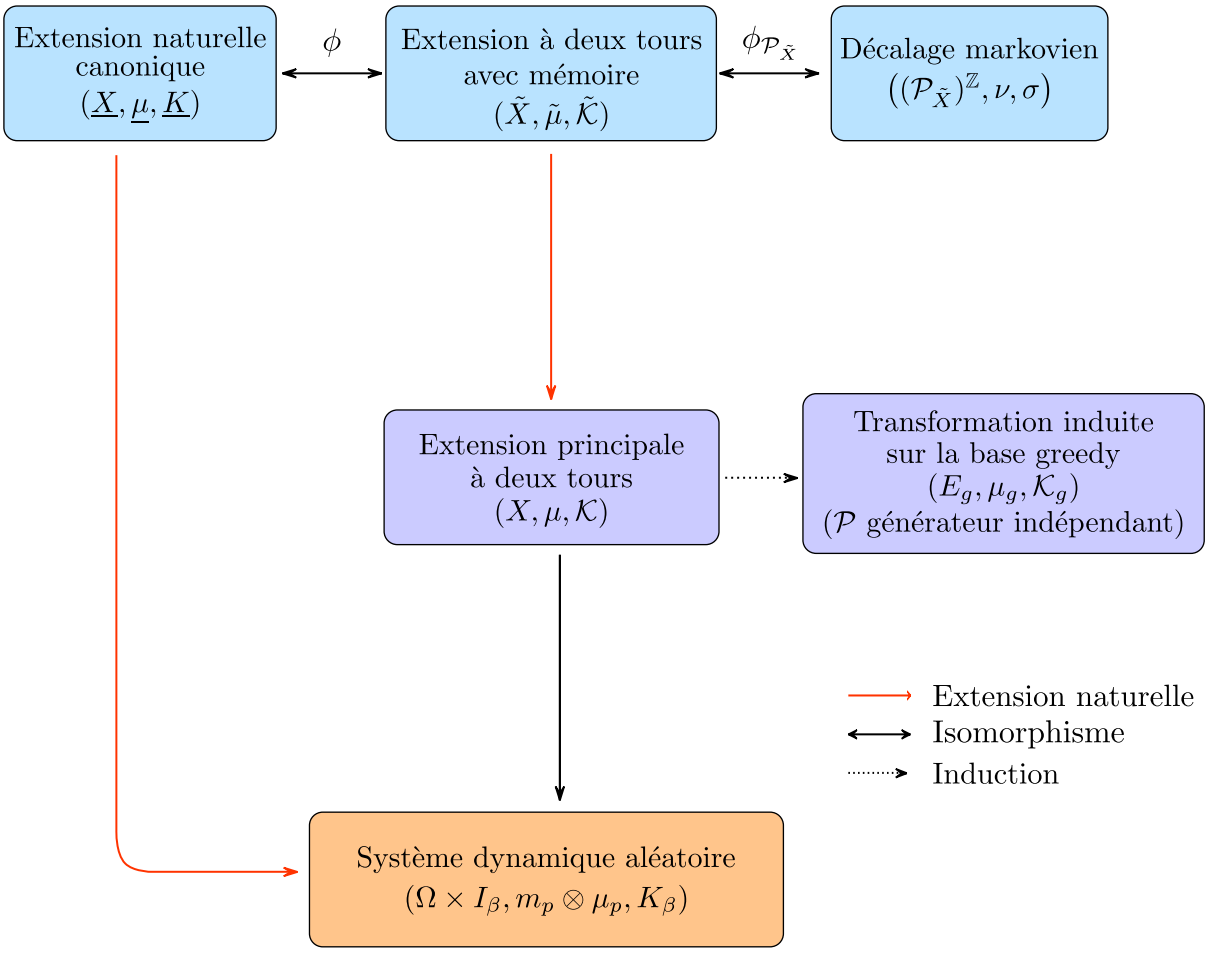
Notre système aléatoire semble pleinement entrer dans ce cadre. En effet, nous avons pu mettre en lumière des temps de renouvellement du système $(X, \mathcal{B}, \mu, \mathcal{K})$ sur la base E_g : les retours dans E_g sont indépendants les uns des autres et les points de X sont justement caractérisés par leurs retours dans E_g (voir la section 2.3). Dans notre cas, on conjecture que cette queue de temps de retour est au plus de l'ordre de $e^{-c\sqrt{n}}$. Pour obtenir un résultat précis, on a besoin entre autres d'estimations fines sur les longueurs des chemins de $\mathscr{C}$. Peut-on alors établir un théorème central limite pour les suites de décimales en base β le long d'une suite ω ? Ou en moyenne sur ω ?

Changement de mesure sur Ω

Dans toute la thèse, l'ensemble Ω est muni de la mesure de Bernoulli de paramètre p. La construction d'une mesure invariante sur les deux tours (p. 51) fonctionne car la mesure de Bernoulli est une mesure produit, et les propriétés d'indépendance des retours à la base E_g (proposition 2.9) reposent aussi fortement sur ce choix de mesure produit. Peut-on adapter certaines constructions et certains résultats de la thèse lorsque Ω est muni d'autres mesures stationnaires ?

Annexes

Annexe A. Schéma récapitulatif



Annexe B. Définitions et propriétés générales

Système dynamique mesuré

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace probabilisé, où $(X, \mathcal{B})$ est un espace polonais muni de sa tribu borélienne, et $T : X \to X$ une transformation mesurable qui préserve la mesure μ. Alors le quadruplet $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ est appelé *système dynamique mesuré*.

Transformation induite

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré, et $A \in \mathcal{B}$ un mesurable tel que $\mu(A) > 0$. D'après le théorème de récurrence de Poincaré, pour μ-presque tout $a \in A$, il existe un entier $r(a) \in \mathbb{N}$ tel que $T^{r(a)}(a) \in A$. L'entier $r(a)$ est appelé *temps de retour* de a dans l'ensemble A. On appelle *transformation induite* de T sur l'ensemble A la transformation T_A définie par

$$T_A : a \in A \mapsto T^{r(a)}(a) \in A.$$

La mesure μ conditionnée à A est alors invariante par la transformation induite T_A.

Proposition B.1. *[2, Prop. 3.6.3 p.61]*
Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré, et A un ensemble de mesure strictement positive tel que $\mu(\bigcup_{n \geqslant 1} T^{-n}(A)) = 1$. Alors le système $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ est ergodique si et seulement si le système induit sur A l'est.

Application facteur et facteurs

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$ deux systèmes dynamiques. On appelle *application facteur* toute application mesurable $\varphi : X \to Y$ satisfaisant :

1. $\varphi_* \nu = \mu$;

2. $\varphi \circ T = S \circ \varphi$.

Si φ est inversible, on parle alors d'*isomorphisme facteur*. On dit que S est un *facteur* de T s'il existe une application facteur $\varphi : X \to Y$.

Couplage dynamique

Pour plus de détails sur les couplages dynamiques, on renvoie aux travaux de Furstenberg et Glasner [12, 13].

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$ deux systèmes dynamiques. Un *couplage dynamique* de ces systèmes est une mesure de probabilité λ sur le produit cartésien $X \times Y$ dont les marginales sur X et Y sont respectivement μ et ν, et qui est invariante par la transformation produit $T \times S : (x, y) \mapsto (Tx, Sy)$.

On parlera de couplage dynamique de deux systèmes pour distinguer du couplage probabiliste de deux mesures. Un couplage probabiliste de deux mesures μ et ν est une mesure dont la première marginale est μ et la deuxième ν.

Couplage porté par un graphe

Supposons que S soit un facteur de T, et soit $\pi : X \to Y$ une application facteur. Alors π permet de construire un couplage dynamique très particulier de T et S. Considérons la mesure Δ_π sur $X \times Y$ caractérisée par les valeurs qu'elle prend sur les pavés mesurables de $X \times Y$: pour tout $A \in \mathcal{A}$, pour tout $B \in \mathcal{B}$,

$$\Delta_\pi(A \times B) = \mu(A \cap \pi^{-1}(B)).$$

La mesure Δ_π est un couplage dynamique de T et S et est *portée par le graphe* de π, au sens que $\Delta_\pi(\{(x, \pi(x)), x \in X\}) = 1$. Un tel couplage est unique. On a le cas particulier suivant :

Proposition B.2. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Il existe un unique autocouplage de μ portée par la diagonale de $X \times X$. Il s'agit de la mesure Δ telle que pour tous mesurables $A, B \in \mathcal{A}$,*

$$\Delta(A \times B) = \mu(A \cap B).$$

Autocouplage relativement indépendant au dessus d'un facteur

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique inversible ayant comme facteur un deuxième système dynamique inversible $(Z, \mathcal{C}, \rho, R)$. Plus précisement, soit $\pi_X : X \to Z$ une application facteur entre T et R. On considère le

couplage Δ_{π_X} sur $X \times Z$, porté par le graphe de π_X. Puis on désintègre cette mesure de probabilité par rapport à Z : pour ρ-presque tout $z \in Z$, il existe une mesure de probabilité λ_z^X sur X satisfaisant, pour tout $A \in \mathcal{A}$, pour tout $C \in \mathcal{C}$,

$$\Delta_{\pi_X}(A \times C) = \int_C \lambda_z^X(A) d\rho(z).$$

On peut alors définir une mesure de probabilité, notée $\mu \otimes_Z \mu$ sur $X \times X$ en posant, pour tout $D \subset X \times X$ mesurable,

$$(\mu \otimes_Z \mu)(D) = \int_Z (\lambda_z^X \otimes \lambda_z^X)(D) d\rho(z). \tag{B.1}$$

La mesure $\mu \otimes_Z \mu$ est un autocouplage dynamique de T, appelé *autocouplage relativement indépendant au-dessus du facteur Z* (voir [13] p. 126).

Proposition B.3. *On a pour $(\mu \otimes_Z \mu)$-presque tout $x, y \in X \times X$,*

$$\pi_X(x) = \pi_X(y).$$

Démonstration. On sait par construction de Δ_{π_X} que cette mesure est portée par le graphe de π_X. Donc pour ρ-presque tout z, λ_z^X est portée par l'ensemble des $x \in X$ vérifiant $\pi_X(x) = z$. On en déduit que pour ρ-presque tout z, la mesure produit $\lambda_z^X \otimes \lambda_z^X$ est portée par l'ensemble des $(x, y) \in X \times X$ tels que $\pi_X(x) = \pi_X(y) = z$. Si $D = \{(x, y) \in X \times X, \pi_X(x) = \pi_X(y)\}$, on en déduit par (B.1) que $\mu \otimes_Z \mu(D) = 1$. □

Proposition B.4. *Si l'autocouplage $\mu \otimes_Z \mu$ est porté par la diagonale de $X \times X$, alors l'application facteur π_X est un isomorphisme.*

Annexe C. Le point de vue analytique : l'opérateur de Perron-Frobenius

Dans le cas des systèmes dynamiques non aléatoires, l'opérateur de Perron-Frobenius (ou opérateur de transfert) est un outil analytique puissant permettant d'étudier les propriétés ergodiques des systèmes à travers l'étude des propriétés spectrales de cette opérateur [2]. En 2014, Aimino, Nicol et Vaienti [1] développent des outils afin d'étudier une certaine classe de systèmes dynamiques aléatoires. Ils définissent en particulier l'opérateur de Perron-Frobenius associé à un système dynamique aléatoire. Bien que nous ne nous en servions pas dans le cadre de la thèse, on en redonne ici la définition.

C.1 Définitions

Définition C.1. *Soit f une fonction dans $L_1(\lambda)$, et T une transformation non-singulière de l'intervalle I_β, c'est à dire telle que pour tout borélien A de l'intervalle, $\lambda(A) = 0$ si et seulement si $\lambda(T^{-1}(A)) = 0$. On note λ_f la mesure définie par $d\lambda_f = f d\lambda$, et $T \star \lambda_f$ la mesure image par T de λ_f. L'opérateur de Perron-Frobenius associé à la transformation T est défini par :*

$$P_T : \begin{array}{ccc} L_1(\lambda) & \to & L_1(\lambda) \\ f & \mapsto & \frac{d(T\star\lambda_f)}{d\lambda} \end{array} .$$

Autrement dit, on a, pour tout $f \in L_1(\lambda)$, pour tout $g \in L_\infty(\lambda)$,

$$\int_{I_\beta} g \circ T(x) f(x) d\lambda(x) = \int_{I_\beta} g(x) P_T(f)(x) d\lambda(x).$$

Dans un certain sens, l'opérateur de Perron-Frobenius P_T est l'adjoint de l'opérateur de Koopman associé à T (qui à $g \in L_\infty(\lambda)$ associe $g \circ T$).

Définition C.2. *Soit $\mathcal{N}$ un ensemble fini muni d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}$. On suppose qu'à chaque élément $a \in \mathcal{N}$ est associée une transformation $T_a : I_\beta \to I_\beta$ non-singulière, de sorte que $(a, x) \mapsto T_a(x)$ soit mesurable. On définit la transformation aléatoire R par :*

$$R : \begin{array}{ccc} \mathcal{N}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{I}_\beta & \to & \mathcal{N}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{I}_\beta \\ ((a_k), x) & \mapsto & (\sigma((a_k)), T_{a_0}(x)) \end{array}.$$

L'opérateur de Perron-Frobenius associé à R est l'opérateur défini sur $L_1(\lambda)$ par $Pf(x) = \int_{\mathcal{N}} P_{T_a} f(x) d\mathbb{P}(a)$.

On a, pour tout $f \in L_1(\lambda)$, pour tout $g \in L_\infty(\lambda)$,

$$\int_{I_\beta} \int_{\mathcal{N}} f(x) g \circ T_a(x) d\mathbb{P}(a) d\lambda(x) = \int_{I_\beta} g(x) P(f)(x) d\lambda(x).$$

C.2 Théorème d'existence et d'unicité d'une mesure invariante pour une transformation aléatoire

On dit qu'une mesure de probabilité μ sur I_β est invariante par R si la mesure $\mathbb{P}^{\mathbb{N}} \otimes \mu$ l'est.

Théorème C.3. *[2, 1] Soit P l'opérateur de Perron-Frobenius associé à une transformation aléatoire R :*

$$R : \begin{array}{ccc} \mathcal{N}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{I}_\beta & \to & \mathcal{N}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{I}_\beta \\ ((a_k), x) & \mapsto & (\sigma((a_k)), T_{a_0}(x)) \end{array}.$$

Soit $(\mathscr{B}, ||\cdot||)$ un espace de Banach inclus dans $L_1(\lambda)$ tel que :

1. *L'application identité $\mathscr{B} \to L_1(\lambda)$ est un opérateur compact.*
2. *L'espace $\mathscr{B}$ contient les fonctions constantes.*
3. *Pour tout $f \in \mathscr{B}$, on a $|f| \in \mathscr{B}$ et $\bar{f} \in \mathscr{B}$.*
4. *$\mathscr{B}$ est stable par P : $P(\mathscr{B}) \subset \mathscr{B}$ et P agit continuement sur $\mathscr{B}$.*
5. *P satisfait une inégalité de Lasota-Yorke : il existe $N \geqslant 1$, $\rho < 1$ et $K \geqslant 0$ tels que pour tout $f \in \mathscr{B}$:*

$$||P^N f|| \leqslant \rho ||f|| + K ||f||_{L_1(\lambda)}.$$

6. *1 est une valeur propre simple de P, et il n'y a pas d'autres valeurs propres de module 1.*

Sous ces hypothèses, R admet une unique mesure invariante μ absolument continue par rapport à λ, dont la densité appartient à $\mathscr{B}$.

Les hypothèses 1 à 5 impliquent en particulier que le spectre de P est inclus dans le disque unité, et que les valeurs propres de module 1 sont en nombre fini et de multiplicités finies (voir [2]). L'hypothèse 6 permet de renforcer ce résultat.

On définit enfin la propriété RC (« random covering »). D'après la proposition 2.6 de [1], cette propriété implique le point 6 dans le cas particulier d'une transformation aléatoire « dilatante en moyenne ».

Définition C.4. *[1](Propriété RC) Une transformation aléatoire R vérifie la propriété RC si et seulement si pour tout intervalle non trivial $I \subset I_\beta$, il existe $n \geqslant 1$, $\omega \in \mathcal{N}^n$ tels que $T_\omega(I) = I_\beta$.*

Autrement dit, partant d'un intervalle quelconque, on parvient à remplir l'intervalle I_β en appliquant une suite finie de transformation $T_a, a \in \mathcal{N}$.

C.3 Application aux développements en base non entière : propriété de mélange fort

On rappelle que l'ensemble $\Omega = \{g, \ell\}^{\mathbb{N}}$ est muni de la mesure de Bernoulli de paramètre p, notée m_p. L'opérateur de Perron-Frobenius associé à K_β est égal à $pP_{T_g} + (1-p)P_{T_\ell}$.

Théorème C.5. *Il existe une unique mesure de probabilité μ_p sur I_β, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, telle que $m_p \otimes \mu_p$ est invariante par K_β. Sa densité ρ_p est à variation bornée. De plus, le système $(\Omega \times I_\beta, m_p \otimes \mu_p, K_\beta)$ est mélangeant.*

En effet, les hypothèses du théorème C.3 sont vérifiées par K_β. L'ensemble des fonctions à variations bornées sur I_β, noté $BV(I_\beta)$, muni de la norme BV est un espace de Banach (la norme BV d'une fonction f est définie comme étant la somme de la norme L_1 de f et de sa variation totale sur I_β). Les points $1, 2, 3$ et 4 du théorème sont vérifiés sur cet espace. Les transformations T_g et T_ℓ sont de type Lasota-Yorke, et K_β est « dilatant en moyenne » (proposition 2.3 de [1]), ce qui donne le point 5.

Démontrons que K_β vérifie la propriété RC.

Soit I un intervalle non trivial de I_β. Puisque T_g est dilatante, la longueur des images $T_g^n I$ augmente jusqu'à contenir le point de discontinuité de T_g,

c'est à dire $\frac{1}{\beta}$. On a :

$$\lim_{x\to\frac{1}{\beta}^+} T_g(x) = 0.$$

0 est un point fixe de T_l, et l'intervalle $[0, \frac{1}{\beta(\beta-1)}]$ est envoyé sur tout I_β par T_l. Ainsi, il existe deux entiers N et M tels que

$$T_l^M \circ T_g^N(I) = I_\beta.$$

Par le théorème C.3, on déduit l'existence et l'unicité de la mesure μ_p.

L'existence et l'unicité de μ_p, et le fait que $\rho_p \in BV(I_\beta)$ ont aussi été démontrés dans [5] avec des arguments de [20].

Démontrons que le système $(\Omega \times I_\beta, m_p \otimes \mu_p, K_\beta)$ est mélangeant.

Soit $A := [a_0, ..., a_i]_0^i \times [a, b]$ et $B := [b_0, ..., b_j]_0^j \times [c, d]$ deux pavés de $\Omega \times I_\beta$. On souhaite démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} m_p \otimes \mu_p(A \cap K_\beta^{-n}(B)) = (m_p \otimes \mu_p(A)) \times (m_p \otimes \mu_p(B)).$$

On a :

$$K_\beta^{-n}(B) = \bigcup_{\epsilon_0,...,\epsilon_{n-1}\in\{g,\ell\}} [\epsilon_0, ..., \epsilon_{n-1} b_0 ... b_j]_0^{n+j} \times (T_{\epsilon_{n-1}} \circ ... \circ T_{\epsilon_0})^{-1}([c, d]).$$

On note :

$$m_a := m_p([a_0, ..., a_i]_0^i),$$
$$m_b := m_p([b_0, ..., b_j]_0^j),$$
$$m_\epsilon := m_p([\epsilon_{i+1}, ..., \epsilon_{n-1}]_0^{n-i-2}).$$

Pour n assez grand, on a :

$$\begin{aligned}
&m_p \otimes \mu_p(A \cap K_\beta^{-n}(B)) \\
=& \sum_{\epsilon_{i+1},...,\epsilon_{n-1}\in\{g,\ell\}} m_a m_\epsilon m_b \times \mu_p([a, b] \cap (T_{\epsilon_{i+1},...,\epsilon_{n-1}} \circ T_{a_0,...,a_i})^{-1}([c, d])) \\
=& m_a m_b \sum_{\epsilon_{i+1},...,\epsilon_{n-1}\in\{g,\ell\}} m_\epsilon \int_{I_\beta} 1_{[a,b]}(x)\rho_p(x) \times 1_{[c,d]} \circ T_{\epsilon_{i+1},...,\epsilon_{n-1}} \circ T_{a_0,...,a_i}(x)dx \\
=& m_a m_b \sum_{\epsilon_{i+1},...,\epsilon_{n-1}\in\{g,\ell\}} m_\epsilon \int_{I_\beta} P_{T_{\epsilon_{i+1},...,\epsilon_{n-1}} \circ T_{a_0,...,a_i}}(1_{[a,b]}\rho_p)(x) 1_{[c,d]}(x)dx \\
=& m_a m_b \int_{I_\beta} P^{n-i-1}(P_{T_{a_0,...,a_i}}(1_{[a,b]}\rho_p))(x) 1_{[c,d]}(x)dx.
\end{aligned}$$

La fonction $P_{T_{a_0,\dots,a_i}}(1_{[a,b]}\rho_p)$ appartient à $BV(I_\beta)$. Pour $f \in BV(I_\beta)$, on a la convergence faible de $P^n f$ vers $(\int f)\rho_p$ car 1 est une valeur propre simple de P (voir proposition 7.2.2 dans [2]). Ainsi, quand n tend vers $+\infty$, $m_p \otimes \mu_p(A \cap K_\beta^{-n}(B))$ tend vers

$$l := m_a m_b \int_{I_\beta} P_{T_{a_0,\dots,a_i}}(1_{[a,b]}\rho_p)(x)dx \times \int_{I_\beta} 1_{[c,d]}(x)\rho_p(x)dx.$$

Les opérateurs de Perron-Frobenius préservent l'intégrale, on a donc :

$$l = m_a m_b \int_{I_\beta} 1_{[a,b]}\rho_p(x)dx \times \int_{I_\beta} 1_{[c,d]}(x)\rho_p(x)dx = (m_p \otimes \mu_p(A)) \times (m_p \otimes \mu_p(B)).$$

On conclut que le système $(\Omega \times I_\beta, m_p \otimes \mu_p, K_\beta)$ est mélangeant. On établit ici une propriété importante pour la suite.

Lemme C.6. *Pour $m_p \otimes \mu_p$ presque tout $(\omega, x) \in \Omega \times I_\beta$, pour toute fonction continue de $\Omega \times I_\beta$ dans $\mathbb{R}$, on a la convergence*

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(K_\beta^k(\omega, x)) \to \int_{\Omega \times I_\beta} f d(m_p \otimes \mu_p)$$

Démonstration. Par ergodicité de K_β, on sait que pour toute fonction f de $\mathcal{C}(\Omega \times I_\beta)$, pour $m_p \otimes \mu_p$ presque tout $(\omega, x) \in \Omega \times I_\beta$, on a la convergence précédente. Le "$m_p \otimes \mu_p$-presque tout" dépend de la fonction f. L'espace $\mathcal{C}(\Omega \times I_\beta)$ est séparable, on note donc (f_n) une famille dénombrable dense dans $\mathcal{C}(\Omega \times I_\beta)$. Pour $m_p \otimes \mu_p$ presque tout $(\omega, x) \in \Omega \times I_\beta$, on a la convergence précitée pour toute les fonctions f_n (la réunion dénombrable d'un ensemble de mesure nulle est de mesure nulle).

Soit $f \in \mathcal{C}(\Omega \times I_\beta)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe un entier n tel que $||f_n - f||_\infty < \varepsilon$. On a, pour $m_p \otimes \mu_p$ presque tout $(\omega, x) \in \Omega \times I_\beta$:

$$\left| \frac{1}{N}\sum_{k \leqslant N} f(K_\beta^k(\omega, x)) - \int_{\Omega \times I_\beta} f d(m_p \otimes \mu_p) \right|$$

$$\leqslant \left| \frac{1}{N}\sum_{k \leqslant N} f(K_\beta^k(\omega, x)) - \frac{1}{N}\sum_{k \leqslant N} f_n(K_\beta^k(\omega, x)) \right|$$

$$+ \left| \frac{1}{N}\sum_{k \leqslant N} f_n(K_\beta^k(\omega, x)) - \int_{\Omega \times I_\beta} f_n d(m_p \otimes \mu_p) \right| + \left| \int_{\Omega \times I_\beta} (f - f_n) d(m_p \otimes \mu_p) \right|$$

$$\leqslant 3\varepsilon$$

pour N assez grand. □

On peut en déduire la propriété suivante :

Propriété C.7. *Pour $m_p \otimes \lambda$ presque tout $(\omega, x) \in \Omega \times I_\beta$, pour toute fonction continue de I_β dans $\mathbb{R}$, on a la convergence*

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) \to \int_{I_\beta} f d\mu_p$$

avec $K_\beta^k(\omega, x) =: (\sigma^k(\omega), x_k)$.

Autrement dit, la mesure $\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \delta_{x_k}$ converge étroitement vers μ_p.

Démonstration. Pour $f \in \mathcal{C}(I_\beta)$, on pose $\tilde{f} : \Omega \times I_\beta \to \mathbb{R}$ telle que $\tilde{f}(\omega, x) = f(x)$. Alors $\tilde{f} \in \mathcal{C}(\Omega \times I_\beta)$ et le lemme précédent donne la convergence $m_p \otimes \mu_p$ presque sûrement, et les mesures $m_p \otimes \lambda$ et $m_p \otimes \mu_p$ sont équivalentes. □

Annexe D. Cas particulier du nombre d'or

L'objectif de cette annexe est de calculer explicitement l'expression de la densité de la mesure μ_p dans le cas où β est égal au nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On la calcule de deux manières différentes : selon les résultats de Suzuki [25] et selon les résultats du chapitre 2 de cette thèse (voir les formules (2.5) et (2.3)). On vérifie bien que les résultats coïncident.

D.1 Calcul de la mesure invariante selon Suzuki

D.1.1 Calcul du coefficient B^0

On redonne l'expression du coefficient $B^0(\beta, p)$ donné par Suzuki :

$$B^0(\beta,p) = p\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta^n} \sum_{\omega_1,\dots,\omega_{n-1},\omega_n=g} 1_{[\frac{1}{\beta},1]}(T_{\omega_1,\dots,\omega_{n-1}}(1)) m_p([\bar{\omega}_1,\dots,\bar{\omega}_n]_1^n)\right\}$$

$$= p\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta^n} \sum_{\omega_1,\dots,\omega_{n-1}} 1_{[\frac{1}{\beta},1]}(T_{\omega_1,\dots,\omega_{n-1}}(s(1))) m_p([\omega_1,\dots,\omega_{n-1},\ell]_1^n)\right\}$$

car l'intervalle central $[\frac{1}{\beta}, 1]$ est invariant par la symétrie s et $s(T_{\omega_1,\dots,\omega_{n-1}}(1)) = T_{\bar{\omega_1},\dots,\bar{\omega}_{n-1}}(s(1))$.

On a donc besoin de répondre à la question suivante : à quelles conditions sur les ω_i a-t-on $T_{\omega_1,\dots,\omega_{n-1}}(s(1)) \in [\frac{1}{\beta}, 1]$? On a :

— $s(1) = \frac{1}{\beta} = \beta - 1$,
— $T_g(s(1)) = 0$,
— $T_\ell(s(1)) = 1$,

— $T_{\ell,g}(s(1)) = s(1) = \frac{1}{\beta}$,

— $T_{\ell,\ell}(s(1)) = \frac{1}{\beta-1} = \beta$.

On continuera d'écrire $\frac{1}{\beta}$ au lieu de $\beta - 1$ et $\frac{1}{\beta-1}$ au lieu de β lorsque ces valeurs apparaissent dans des intervalles.

Les suites de transformations qui conviennent sont donc les suites (ℓ), (ℓ, g), (ℓ, g, ℓ), etc, c'est à dire les suites où ℓ et g alternent en partant de ℓ. Ainsi, on a :

$$B^0(\beta,p) = p\left\{1 - \frac{1-p}{\beta}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^{2k}}(1-p)^k p^k + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^{2k+1}}(1-p)^{k+1}p^k\right)\right\}$$

$$= p\left\{1 - \frac{1-p}{\beta}\left(\frac{\beta+1}{\beta+1-(1-p)p} + \frac{(1-p)\beta}{\beta+1-(1-p)p}\right)\right\}$$

d'où

$$B^0(\beta,p) = \frac{p^2(\beta+1)}{\beta+1-(1-p)p}.$$

On en déduit que

$$B^0(\beta,1-p) = \frac{(1-p)^2(\beta+1)}{\beta+1-(1-p)p}.$$

On rappelle que selon la formule (2.5), la densité ρ_p est proportionnelle à

$$B^0(\beta,p)\left(1_{[0,1]} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\beta^n}\sum_{\omega_1,\ldots,\omega_n} m_p([\omega_1,\ldots,\omega_n]_1^n)1_{[0,T_{\omega_1,\ldots,\omega_n}(1)]}\right)$$

$$+B^0(\beta,1-p)\left(1_{[s(1),\frac{1}{\beta-1}]} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\beta^n}\sum_{\omega_1,\ldots,\omega_n} m_p([\omega_1,\ldots,\omega_n]_1^n)1_{[T_{\omega_1,\ldots,\omega_n}(s(1)),\frac{1}{\beta-1}]}\right).$$

On a donc besoin des images successives de 1 :

— $T_g(1) = \frac{1}{\beta}$,

— $T_{g,\ell}(1) = 1$,

— $T_{g,g}(1) = 0$,

— $T_\ell(1) = \frac{1}{\beta-1}(= \beta)$.

On constate donc que seuls quelques intervalles interviennent dans la somme précédente. Dans la première somme, chaque intervalle est associé à un type de suite de transformations :

— l'intervalle $[0,1]$: $(g\ell)^k$,

— l'intervalle $[0,\frac{1}{\beta}]$: $(g\ell)^k g$,

— l'intervalle complet $[0,\frac{1}{\beta-1}]$: $(g\ell)^k\ell\ldots$,

où k parcourt l'ensemble des entiers naturels. De même, dans la deuxième somme :

— l'intervalle $[\frac{1}{\beta},\frac{1}{\beta-1}]$: $(\ell g)^k$,

— l'intervalle $[1,\frac{1}{\beta-1}]$: $(\ell g)^k\ell$,

— l'intervalle complet $[0,\frac{1}{\beta-1}]$: $(\ell g)^k g\ldots$

On peut alors calculer précisément les masses des intervalles $[0,\frac{1}{\beta}]$, $[\frac{1}{\beta},1]$ et $[1,\frac{1}{\beta-1}]$.

D.1.2 Masse de l'intervalle $[0,\frac{1}{\beta}]$

On obtient l'indicatice de l'intervalle $[0,\frac{1}{\beta}]$ dans les cas suivants :

— Dans la première somme, pour les suites de la forme $(g\ell)^k$, $(g\ell)^k g$ et $(g\ell)^k\ell\ldots$

— Dans la deuxième somme, pour les suites de la forme $(\ell g)^k g\ldots$

La masse de l'intervalle est donc :

$$B^0(\beta,p)\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^{2k}}p^k(1-p)^k+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^{2k+1}}p^{k+1}(1-p)^k+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^{2k+1}}p^k(1-p)^{k+1}\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^n}\right]$$

$$+B^0(\beta,1-p)\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^{2k+1}}p^{k+1}(1-p)^k\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^n}\right].$$

Ce qui donne :

$$B^0(\beta,p)\left[\frac{\beta+1}{\beta+1-p(1-p)}+\frac{\beta p}{\beta+1-p(1-p)}+\frac{(\beta+1)\beta(1-p)}{\beta+1-p(1-p)}\right]$$

$$+B^0(\beta,1-p)\left[\frac{(\beta+1)\beta p}{\beta+1-p(1-p)}\right]$$

$$=B^0(\beta,p)\frac{3\beta+2-(\beta+1)p}{\beta+1-p(1-p)}+B^0(\beta,1-p)\frac{(2\beta+1)p}{\beta+1-p(1-p)}$$

$$=\frac{p(5\beta+3)-p^2(2\beta+1)+p^3(2\beta+1)}{(\beta+1-p(1-p))^2}.$$

D.1.3 Masse de l'intervalle $[\frac{1}{\beta}, 1]$

On obtient l'indicatice de l'intervalle $[\frac{1}{\beta}, 1]$ dans les cas suivants :

— Dans la première somme, pour les suites de la forme $(g\ell)^k$ et $(g\ell)^k\ell\ldots$

— Dans la deuxième somme, pour les suites de la forme $(\ell g)^k$ et $(\ell g)^k g\ldots$

La masse de l'intervalle est donc :

$$B^0(\beta,p)\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^{2k}}p^k(1-p)^k+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^{2k+1}}p^k(1-p)^{k+1}\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^n}\right]$$

$$+B^0(\beta,1-p)\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^{2k}}p^k(1-p)^k+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^{2k+1}}p^{k+1}(1-p)^k\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^n}\right].$$

Ce qui donne :

$$B^0(\beta,p)\left[\frac{\beta+1}{\beta+1-p(1-p)}+\frac{(\beta+1)\beta(1-p)}{\beta+1-p(1-p)}\right]$$

$$+B^0(\beta,1-p)\left[\frac{\beta+1}{\beta+1-p(1-p)}+\frac{(\beta+1)\beta p}{\beta+1-p(1-p)}\right]$$

$$=B^0(\beta,p)\frac{3\beta+2-(2\beta+1)p}{\beta+1-p(1-p)}+B^0(\beta,1-p)\frac{\beta+1+(2\beta+1)p}{\beta+1-p(1-p)}$$

$$=\frac{3\beta+2-p(\beta+1)+p^2(\beta+1)}{(\beta+1-p(1-p))^2}.$$

D.1.4 Masse de l'intervalle $[1, \frac{1}{\beta-1}]$

On obtient l'indicatice de l'intervalle $[1, \frac{1}{\beta-1}]$ dans les cas suivants :

— Dans la première somme, pour les suites de la forme $(g\ell)^k\ell\ldots$

— Dans la deuxième somme, pour les suites de la forme $(\ell g)^k$, $(\ell g)^k\ell$ et $(\ell g)^k g\ldots$

La masse de l'intervalle est donc :

$$B^0(\beta,p)\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^{2k+1}}p^k(1-p)^{k+1}\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^n}\right]$$

$$+B^0(\beta,1-p)\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^{2k}}p^k(1-p)^k+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^{2k+1}}p^k(1-p)^{k+1}\right.$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^{2k+1}}p^{k+1}(1-p)^k\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^n}\Bigg].$$

Ce qui donne :

$$B^0(\beta,p)\left[\frac{(\beta+1)\beta(1-p)}{\beta+1-p(1-p)}\right]$$

$$+B^0(\beta,1-p)\left[\frac{\beta+1}{\beta+1-p(1-p)}+\frac{\beta(1-p)}{\beta+1-p(1-p)}+\frac{(\beta+1)\beta p}{\beta+1-p(1-p)}\right]$$

$$=B^0(\beta,p)\frac{2\beta+1-(2\beta+1)p)}{\beta+1-p(1-p)}+B^0(\beta,1-p)\frac{2\beta+1+(\beta+1)p}{\beta+1-p(1-p)}$$

$$=\frac{5\beta+3-p(7\beta+4)+p^2(4\beta+2)-(2\beta+1)p^3}{(\beta+1-p(1-p))^2}.$$

D.1.5 Calcul de la masse totale puis des masses renormalisées

La masse totale de la mesure ainsi obtenue est donc

$$\frac{4\beta+3-(\beta+2)p+(\beta+2)p^2}{(\beta+1-p(1-p))^2}.$$

Pour la mesure renormalisée, on obtient alors pour masse de chaque intervalle :

— Masse de $[0,\frac{1}{\beta}]$: $\frac{p(3\beta+1)}{5}$.

— Masse de $[\frac{1}{\beta},1]$: $\frac{\beta+2}{5}$.

— Masse de $[1,\frac{1}{\beta-1}]$: $\frac{(1-p)(3\beta+1)}{5}$.

Par exemple pour la masse de $[0,\frac{1}{\beta}]$, on constate que

$$(3\beta+1)(4\beta+3-(\beta+2)p+(\beta+2)p^2)=5(5\beta+3-p(2\beta+1)+p^2(2\beta+1)),$$

ce qui permet d'obtenir le résultat sous sa forme simplifiée.

D.2 Calcul de la mesure invariante à partir des résultats du chapitre 2

On rappelle les coefficients en jeu dans l'expression de la densité ρ_p :

$$\ell_0 = \mu_L(\mathcal{K}^{-1}(E_g) \cap \mathcal{L}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\beta^{n+1}} \sum_{\substack{w \in \{g,\ell\}^n \\ T_w(s(1)^-) \leqslant \frac{1}{\beta}}} m_p([w \cdot g]_0^n)$$

et

$$g_1 = \mu_G(\mathcal{K}^{-1}(E_\ell) \cap \mathcal{G}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\beta^{n+1}} \sum_{\substack{v \in \{g,\ell\}^n \\ T_v(1^+) \geqslant \frac{1}{\beta(\beta-1)}}} m_p([v \cdot \ell]_0^n)$$

Et

$$\begin{cases} C_g &= \dfrac{\ell_0}{\ell_0 \mu_G(\mathcal{G}) + g_1 \mu_L(\mathcal{L})} \\ C_\ell &= \dfrac{g_1}{\ell_0 \mu_G(\mathcal{G}) + g_1 \mu_L(\mathcal{L})} \end{cases}.$$

Et la densité de la mesure invariante est :

$$\rho_p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\beta^n} \left(C_g \sum_{\omega_1,\ldots,\omega_n \in \{g,\ell\}^n} m_p([\omega_1,\ldots,\omega_n]_0^{n-1}) 1_{[0, T_{\omega_1,\ldots,\omega_n}(1^+)]}(x) \right.$$
$$\left. + C_\ell \sum_{\omega_1,\ldots,\omega_n \in \{g,\ell\}^n} m_p([\omega_1,\ldots,\omega_n]_0^{n-1}) 1_{[T_{\omega_1,\ldots,\omega_n}(s(1)^-); \frac{1}{\beta-1}]}(x) \right).$$

On calcule les images successives de 1 (limites à droite) :

— $T_g(1^+) = \frac{1}{\beta}$,
— $T_{g,\ell}(1^+) = 1$,
— $T_{g,g}(1^+) = 0$,
— $T_\ell(1^+) = \frac{1}{\beta}$.

Et celles de $s(1) = \frac{1}{\beta}$ (limites à gauche) :

— $T_\ell(s(1)^-) = 1$,
— $T_{\ell,g}(s(1)^-) = \frac{1}{\beta}$,
— $T_{\ell,\ell}(s(1)^-) = \frac{1}{\beta-1}$,
— $T_g(s(1)^-) = 1$.

D.2.1 Calcul des constantes en jeu

Calcul de ℓ_0 et g_1

On a :

$$\ell_0 = \mu_L(\mathcal{K}^{-1}(E_g) \cap \mathcal{L}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\beta^{n+1}} \sum_{\substack{w \in \{g,\ell\}^n \\ T_w(s(1)^-) \leqslant \frac{1}{\beta}}} m_p([w \cdot g]_0^n).$$

Les suites $w \in \{g, \ell\}^n$ satisaisant $T_w(s(1)^-) \leqslant \frac{1}{\beta}$ sont les suites de la forme $\omega_0 g \omega_1 g \dots \omega_{k-1} g$ pour tout $\omega_0, \dots, \omega_{k-1}$. On a alors :

$$\ell_0 = \frac{p}{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^{2k}} \sum_{\omega_0,\dots,\omega_{k-1}} m_p([\omega_0, g, \omega_1, g, \dots, \omega_{k-1}, g]_0^{2k-1}) = \frac{p}{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^{2k}} p^k$$

d'où

$$\ell_0 = \frac{p\beta}{\beta + 1 - p}.$$

La constante g_1 s'obtient simplement en remplaçant p par $1 - p$ dans l'expression de ℓ_0 :

$$g_1 = \frac{(1-p)\beta}{\beta + p}.$$

Calcul de $\mu_G(\mathcal{G})$ et $\mu_L(\mathcal{L})$

On a

$$\mu_G(\mathcal{G}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^n} \sum_{\omega_0,\dots,\omega_{n-1}} m_p([\omega_0, \dots, \omega_{n-1}]_0^{n-1}) T_{\omega_0,\dots,\omega_{n-1}}(1^+).$$

— Pour tout $\omega_0, \dots, \omega_k$, les suites v de la forme $v = (\omega_0 \ell \omega_1 \dots \ell \omega_k)$ donnent $T_v(1^+) = \frac{1}{\beta}$.

— Pour tout $\omega_0, \dots, \omega_{k-1}$, les suites v de la forme $v = (\omega_0 \ell \omega_1 \dots \ell)$ donnent $T_v(1^+) = 1$.

— Toutes les autres séquences donnent $T_v(1^+) = 0$.

On a donc :

$$\mu_G(\mathcal{G}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^{2k+1}} \sum_{\omega_0,\dots,\omega_k} m_p([\omega_0, \ell, \dots, \omega_{k-1}, \ell, \omega_k]_0^{2k}) \times \frac{1}{\beta}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^{2k}}\sum_{\omega_0,\ldots,\omega_{k-1}} m_p([\omega_0,\ell,\ldots,\omega_{k-1},\ell]_0^{2k-1})\times 1$$

$$=\frac{1}{\beta^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^{2k}}(1-p)^k+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^{2k}}(1-p)^k$$

d'où

$$\mu_G(\mathcal{G})=\frac{(3-\beta)(\beta+1)}{\beta+p}.$$

De même, on obtient l'expression de $\mu_L(\mathcal{L})$ en remplaçant p par $1-p$:

$$\mu_L(\mathcal{L})=\frac{(3-\beta)(\beta+1)}{\beta+1-p}.$$

Calcul de C_g et C_ℓ

On a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} C_g &=& \dfrac{\ell_0}{\ell_0\mu_G(\mathcal{G})+g_1\mu_L(\mathcal{L})} \\ C_\ell &=& \dfrac{g_1}{\ell_0\mu_G(\mathcal{G})+g_1\mu_L(\mathcal{L})} \end{array}\right. .$$

On a

$$\ell_0\mu_G(\mathcal{G})+g_1\mu_L(\mathcal{L})=\frac{p\beta}{\beta+1-p}\frac{(3-\beta)(\beta+1)}{\beta+p}+\frac{(1-p)\beta}{\beta+p}\frac{(3-\beta)(\beta+1)}{\beta+1-p}$$

d'où

$$\ell_0\mu_G(\mathcal{G})+g_1\mu_L(\mathcal{L})=\frac{3\beta+1}{(\beta+1-p)(\beta+p)}$$

puis

$$\left\{\begin{array}{rcl} C_g &=& \dfrac{p(\beta+p)(3-\beta)}{5} \\ C_\ell &=& \dfrac{(1-p)(\beta+1-p)(3-\beta)}{5} \end{array}\right. .$$

D.2.2 Calcul des masses de chaque intervalle

Masse de l'intervalle $[0,\frac{1}{\beta}]$

On obtient l'indicatice de l'intervalle $[0,\frac{1}{\beta}]$ dans la première somme, pour les suites de la forme $(\omega_0\ell\omega_1\ldots\ell\omega_k)$ et $(\omega_0\ell\omega_1\ldots\ell)$.

La masse de l'intervalle est donc :

$$C_g \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^{2k}} (1-p)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^{2k+1}} (1-p)^k \right]$$

$$= C_g \frac{2\beta+1}{\beta+p} = \frac{p(3\beta+1)}{5}.$$

Masse de l'intervalle $[\frac{1}{\beta}, 1]$

On obtient l'indicatice de l'intervalle $[\frac{1}{\beta}, 1]$ dans la première somme, pour les suites de la forme $(\omega_0 \ell \omega_1 \dots \ell)$ et dans la deuxième somme pour les suites de la forme $(\omega_0 g \omega_1 \dots g)$.

La masse de l'intervalle est donc :

$$C_g \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^{2k}} (1-p)^k + C_\ell \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^{2k}} p^k$$

$$= C_g \frac{\beta+1}{\beta+p} + C_\ell \frac{\beta+1}{\beta+1-p} = \frac{\beta+2}{5}.$$

Masse de l'intervalle $[1, \frac{1}{\beta-1}]$

On obtient l'indicatice de l'intervalle $[1, \frac{1}{\beta-1}]$ dans la deuxième somme, pour les suites de la forme $(\omega_0 g \omega_1 \dots g \omega_k)$ et $(\omega_0 g \omega_1 \dots g)$.

La masse de l'intervalle est donc :

$$C_\ell \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^{2k}} p^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^{2k+1}} p^k \right]$$

$$= C_\ell \frac{2\beta+1}{\beta+1-p} = \frac{(1-p)(3\beta+1)}{5}.$$

On obtient bien la même expression de ρ_p dans les deux cas.

Annexe E. Table des notations

β : réel strictement compris entre 1 et 2 désignant la base de travail	p. 10
I_β : intervalle $[0, \frac{1}{\beta-1}]$, réels admettant une écriture en base β	p. 13
L : intervalle $[0, \frac{1}{\beta}[$	p. 17
S : intervalle $[\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\beta(\beta-1)}]$	p. 17
R : intervalle $]\frac{1}{\beta(\beta-1)}, \frac{1}{\beta-1}]$	p. 17
λ : mesure de Lebesgue (sur un intervalle dépendant du contexte)	p. 8
T_g : transformation greedy définie sur I_β	p. 13
T_ℓ : transformation lazy définie sur I_β	p. 13
s : symétrie de l'intervalle I_β	p. 14
ν_β : unique mesure de probabilité invariante par T_g absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur I_β	p. 12
h_β : densité de la mesure ν_β	p. 12
Ω : l'ensemble $\{g, \ell\}^{\mathbb{N}}$ des suites de g et de ℓ	p. 32
$\mathcal{T}$: extension de la transformation T_g	p. 19
K_β : transformation β aléatoire définie sur $\Omega \times I_\beta$	p. 32
π : désigne une projection, dépend du contexte	p. 32
σ : décalage vers la gauche (défini sur un ensemble dépendant du contexte)	p. 32
δ : décalage vers la droite	p. 25
m_p : mesure de Bernoulli de paramètre p sur Ω	p. 32
μ_p : unique mesure de probabilité sur I_β absolument continue par rapport à λ telle que $m_p \otimes \mu_p$ soit invariante par K_β	p. 32
ρ_p : densité de la mesure μ_p	p. 53
$\mathcal{E}$: ensemble des étiquettes d'étages	p. 55
E_e : étage d'une tour, d'étiquette e	p. 34
E_g : $\Omega \times \{(g)\} \times [0, 1]$, base de la tour greedy	p. 33
E_ℓ : $\Omega \times \{(\ell)\} \times [s(1), \frac{1}{\beta-1}]$, base de la tour lazy	p. 33
$\mathcal{G}$: tour greedy	p. 33
$\mathcal{L}$: tour lazy	p. 33
$(X, \mathcal{B}, \mu, \mathcal{K})$: extension principale de $(\Omega \times I_\beta, \mathcal{B}(\Omega \times I_\beta), m_p \otimes \mu_p, K_\beta)$	p. 53

G : graphe des transitions d'étiquettes p. 55
C : désigne un chemin dans les deux tours p. 57
E_C : ensemble des éléments de X suivant le chemin C p. 57
J_C : composante réelle de E_C p. 57
$\mathcal{K}_g$: transformation induite de $\mathcal{K}$ sur E_g p. 58
$\mathscr{C}$: ensemble des chemins possibles pour un premier retour à E_g p. 58
$\mathcal{P}$: partition de E_g selon le chemin de $\mathscr{C}$ suivi jusqu'au premier retour à E_g p. 58
$A_N(\omega, x)$: composante réelle de l'atome de $\bigvee_{j=0}^{N} \mathcal{K}_g^{-j}\mathcal{P}$ contenant (ω, x) p. 59
$\mathcal{F}$: $\bigvee_{j=0}^{+\infty} \mathcal{K}_g^{-j}\mathcal{P}$, tribu sur E_g p. 61
$\tilde{\mathcal{G}}$ et $\tilde{\mathcal{L}}$: respectivement tour greedy et lazy dans l'extension naturelle p. 72
$(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mu}, \tilde{\mathcal{K}})$: extension naturelle de $(X, \mathcal{B}, \mu_{\mathcal{K}}, \mathcal{K})$ p. 74
$(\underline{X}, \underline{\mathcal{B}}, \underline{\mu}, \underline{K})$: extension naturelle canonique de $(\Omega \times I_\beta, \mathcal{B}(\Omega \times I_\beta), m_p \otimes \mu_p, K_\beta)$ p. 74
$\tilde{\mathcal{P}}$: partition de $\tilde{E}_g$ selon le chemin de $\mathscr{C}$ suivi jusqu'au premier retour à $\tilde{E}_g$ p. 83
$\mathcal{P}_{\tilde{X}}$: partition de $\tilde{X}$ obtenue en « dépliant » la partition $\tilde{\mathcal{P}}$ p. 84

Bibliographie

[1] Romain Aimino, Matthew Nicol et Sandro Vaienti : Annealed and quenched limit theorems for random expanding dynamical systems. *Probab. Theory Relat. Fields*, 162(1-2):233–274, 2015.

[2] Abraham Boyarsky et Paweł Góra : *Laws of chaos. Invariant measures and dynamical systems in one dimension*. Boston, MA : Birkhäuser, 1997.

[3] Henk Bruin et Charlene Kalle : Natural extensions for piecewise affine maps via Hofbauer towers. *Monatsh. Math.*, 175(1):65–88, 2014.

[4] Karma Dajani et Martijn de Vries : Measures of maximal entropy for random β-expansions. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 7(1):51–68, 2005.

[5] Karma Dajani et Martijn de Vries : Invariant densities for random β-expansions. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 9(1):157–176, 2007.

[6] Karma Dajani et Cor Kraaikamp : *Ergodic theory of numbers*, volume 29. Washington, DC : Mathematical Association of America (MAA), 2002.

[7] Karma Dajani et Cor Kraaikamp : From greedy to lazy expansions and their driving dynamics. *Expo. Math.*, 20(4):315–327, 2002.

[8] Karma Dajani et Cor Kraaikamp : Random β-expansions. *Ergodic Theory Dyn. Syst.*, 23(2):461–479, 2003.

[9] Karma Dajani, Cor Kraaikamp et Boris Solomyak : The natural extension of the β-transformation. *Acta Math. Hung.*, 73(1-2):97–109, 1996.

[10] Karma Dajani et Margriet Oomen : Random N-continued fraction expansions. *J. Approx. Theory*, 227:1–26, 2018.

[11] Pál Erdős, István Joó et Vilmos Komornik : Characterization of the unique expansions $1 = \sum_{i=1}^{\infty} q^{-n_i}$ and related problems. *Bull. Soc. Math. Fr.*, 118(3):377–390, 1990.

[12] Harry Furstenberg : Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation. *Math. Syst. Theory*, 1:1–49, 1967.

[13] Eli Glasner : *Ergodic theory via joinings*, volume 101. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2003.

[14] Tomoki Inoue : Invariant measures for position dependent random maps with continuous random parameters. *Stud. Math.*, 208(1):11–29, 2012.

[15] Shunji Ito, Hiroshi Murata et Haruo Totoki : Remarks on the isomorphism theorems for weak Bernoulli transformations in general case. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 7:541–580, 1972.

[16] Élise Janvresse, Benoît Rittaud et Thierry de la Rue : Dynamics of λ-continued fractions and β-shifts. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 33(4): 1477–1498, 2013.

[17] Charlene Kalle, Tom Kempton et Evgeny Verbitskiy : The random continued fraction transformation. *Nonlinearity*, 30(3):1182–1203, 2017.

[18] Tom Kempton : On the invariant density of the random β-transformation. *Acta Math. Hung.*, 142(2):403–419, 2014.

[19] William Parry : On the β-expansions of real numbers. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 11:401–416, 1960.

[20] Stephan Pelikan : Invariant densities for random maps of the interval. *Trans. Am. Math. Soc.*, 281:813–825, 1984.

[21] Vladimir Abramovitch Rokhlin : Exact endomorphism of a Lebesgue space. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 25:499–530, 1961.

[22] David Rosen : A class of continued fractions associated with certain properly discontinuous groups. *Duke Math. J.*, 21:549–563, 1954.

[23] Alfred Rényi : Representations for real numbers and their ergodic properties. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 8:477–493, 1957.

[24] Meir Smorodinsky : β-automorphisms are Bernoulli shifts. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 24:273–278, 1973.

[25] Shintaro Suzuki : Invariant density functions of random β-transformations. *Ergodic Theory Dyn. Syst.*, 39(4):1099–1120, 2019.

[26] Lai-Sang Young : Recurrence times and rates of mixing. *Isr. J. Math.*, 110:153–188, 1999.

Étude ergodique de bêta-transformations aléatoires

Mots clefs : écriture en base non entière, système dynamique aléatoire, extension naturelle, transformation induite, autocouplage, bernoullicité.

Résumé : On s'intéresse aux écritures des réels en base non entière. Après avoir rappelé la construction de l'extension naturelle du système dynamique associé à la transformation dite « greedy »(Dajani, Kraaikamp et Solomyak), on construit une version géométrico-symbolique de l'extension naturelle de la transformation β-aléatoire, introduite par Dajani et Kraaikamp. Cette extension permet de retrouver l'existence et l'unicité de la mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et fournit une expression de sa densité ainsi que l'ergodicité du système aléatoire. On démontre enfin que cette extension naturelle est isomorphe à un schéma de Bernoulli, généralisant ainsi au cas aléatoire le résultat de Smorodinski sur la transformation greedy.

Abstract : We work on the expansions of real numbers in non integer bases. We recall the construction of the natural extension of the greedy transformation introduced by Dajani, Kraaikamp and Solomyak. We then construct a geometrico-symbolic version of the natural extension of the random β-transformation introduced by Dajani and Kraaikamp. This construction provides a new proof of the existence and uniqueness of an absolutely continuous invariant probability measure for the random β-transformation, an expression for its density and the ergodicity of the random system. We then prove that this natural extension is a Bernoulli automorphism, generalising to the random case the result of Smorodinsky about the greedy transformation.