



HAL
open science

Approche expérimentale de l'homogénéisation numérique

Thibault Dassonville

► **To cite this version:**

Thibault Dassonville. Approche expérimentale de l'homogénéisation numérique. Mécanique [physics].
Université Paris-Est, 2020. Français. NNT : 2020PESC0051 . tel-03546223

HAL Id: tel-03546223

<https://theses.hal.science/tel-03546223v1>

Submitted on 27 Jan 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Doctorale SIE

Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Échelle

Thèse

Présentée pour l'obtention du grade de DOCTEUR
DE L'UNIVERSITE PARIS-EST

par

Thibault DASSONVILLE

Approche expérimentale de l'homogénéisation numérique

Spécialité : Mécanique

Soutenue le 30 octobre 2020 devant un jury composé de :

| | | | |
|-----------------------|------------------|---------------------|---------------------------|
| Président du jury | Francesco | DELL'ISOLA | (Université la Sapienza) |
| Rapporteur | Justin | DIRRENBARGER | (HESAM Université) |
| Rapporteur | Marc | FRANÇOIS | (Université de Nantes) |
| Examineur | Laurence | BODELOT | (IPP) |
| Examineur | Julien | YVONNET | (Université Paris Est) |
| Examineur | Michel | CORET | (Université de Nantes) |
| Directeur de thèse | Nicolas | AUFFRAY | (Université Paris Est) |
| Co-encadrant de thèse | Martin | PONCELET | (Université Paris-Saclay) |

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Matériaux architecturés : modélisation et caractérisation mécanique | 7 |
| 1.1 | Les matériaux architecturés (MA) | 7 |
| 1.1.1 | Domaines d'utilisation | 8 |
| 1.1.2 | Optimisation | 10 |
| 1.1.3 | Définition | 12 |
| 1.1.4 | Fabrication | 14 |
| 1.1.5 | Modes d'organisation | 16 |
| 1.1.6 | Aparté sur l'anisotropie élastique 2D et les groupes de symétrie | 19 |
| 1.1.7 | L'évaluation des performances, une difficulté majeure | 24 |
| 1.2 | Les essais en mécanique, approche historique et développements récents | 25 |
| 1.2.1 | Un peu d'histoire | 26 |
| 1.2.2 | Quelques moyens d'essai atypiques | 27 |
| 1.2.3 | Synthèse | 33 |
| 1.3 | Homogénéisation | 34 |
| 1.3.1 | Description de l'éprouvette / VER | 35 |
| 1.3.2 | Critère d'équivalence de Hill-Mandel | 36 |
| 1.3.3 | KUBC/SUBC et PBC vs essais conventionnels | 39 |
| 1.3.4 | Schémas d'homogénéisation KUBC/SUBC/PBC | 41 |
| 1.3.5 | Quid d'obtenir directement des invariants ? | 44 |
| 1.4 | Synthèse sur la caractérisation des propriétés émergentes des matériaux architecturés dans un cadre expérimental | 46 |
| 1.4.1 | Comparaison et choix d'une approche d'homogénéisation | 46 |
| 1.4.2 | Résultats préliminaires | 47 |
| 1.4.3 | Rédaction d'un cahier des charges | 52 |
| 2 | De l'idée à la matière | 55 |
| 2.1 | Philosophie du pilotage | 55 |
| 2.1.1 | Pilotage local | 56 |
| 2.1.2 | Pilotage global | 57 |
| 2.1.3 | Bilan | 58 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 2.2 | Philosophie de l'instrumentation | 59 |
| 2.2.1 | Projection sur les bords | 59 |
| 2.2.2 | Condensation aux coins | 65 |
| 2.2.3 | Bilan | 69 |
| 2.3 | Choix technologiques | 70 |
| 2.3.1 | Système de répartition | 70 |
| 2.3.2 | Actionneurs et contrôle | 73 |
| 2.3.3 | Pantographe HPP | 76 |
| 2.4 | Dimensionnement des liaisons souples | 80 |
| 2.4.1 | Définition de la géométrie du pantographe | 80 |
| 2.4.2 | Équilibre global | 84 |
| 2.4.3 | Pré-dimensionnement | 89 |
| 2.4.4 | Nécessité d'une étude numérique | 94 |
| 3 | Conception d'une maquette numérique | 99 |
| 3.1 | Choix d'un modèle | 100 |
| 3.1.1 | Structure globale du modèle | 103 |
| 3.1.2 | Détermination des matrices de rigidité élémentaires | 103 |
| 3.1.3 | Pantographe | 105 |
| 3.1.4 | Bloc | 106 |
| 3.1.5 | Assemblage complet | 109 |
| 3.1.6 | Résolution | 111 |
| 3.1.7 | Relocalisation | 113 |
| 3.2 | Validation numérique | 114 |
| 3.2.1 | Choix du cas test | 114 |
| 3.2.2 | Validation | 116 |
| 3.3 | Dimensionnement d'un bloc élémentaire | 117 |
| 3.3.1 | Modification des paramètres d'influence | 117 |
| 3.3.2 | Choix des cas tests | 117 |
| 3.3.3 | Dimensionnement | 118 |
| 3.3.4 | Bilan des dimensions obtenues | 121 |
| 3.4 | Validation expérimentale | 123 |
| 3.4.1 | Corrélation d'image numérique | 124 |
| 3.4.2 | En compression | 127 |
| 3.4.3 | En flexion | 131 |
| 3.4.4 | Discussion et validité | 134 |
| 4 | Protocole de caractérisation et validation du montage expérimental | 139 |
| 4.1 | Présentation du dispositif complet | 140 |

| | |
|--|------------|
| <i>TABLE DES MATIÈRES</i> | <i>III</i> |
| 4.2 Recherche des sources d'erreur | 142 |
| 4.2.1 Axes d'amarrage | 142 |
| 4.2.2 Fourchettes | 147 |
| 4.2.3 Cellules d'effort | 150 |
| 4.3 Protocole de validation | 156 |
| Conclusion et perspectives | 161 |
| bibliographie | 176 |
| A Table des notations | 177 |
| B Validation du critère de Hill Mandel par conditions PBC | 181 |
| C Cahier des charges | 183 |
| C.1 Caractérisation des éléments du milieu extérieur | 183 |
| C.2 Phase de vie : Montage de la M. KUBC | 185 |
| C.3 Phase de vie : montage de l'éprouvette | 185 |
| C.4 Phase de vie : sollicitations et mesures | 187 |
| C.5 Phases de vie annexes | 188 |
| C.5.1 Démontage | 188 |
| C.5.2 Incidents | 188 |
| C.5.3 Stockage & manipulation | 188 |
| D Acquisition et contrôle | 189 |
| E Étude statique du chargement transverse | 197 |
| E.1 Premier isolement | 197 |
| E.2 Récurrence | 199 |
| E.2.1 Initialisation | 199 |
| E.2.2 Hérité | 199 |
| E.2.3 Conclusion | 200 |
| E.3 Effort central | 200 |
| F Étude statique du chargement axial | 203 |
| F.1 Premier isolement | 203 |
| F.2 Récurrence | 204 |
| F.2.1 Initialisation | 204 |
| F.2.2 Hérité | 205 |
| F.2.3 Conclusion | 205 |
| F.3 Effort central | 206 |

IV

TABLE DES MATIÈRES

G Fabrication **207**

H Indication des temps de fabrication et de montage **211**

Table des figures

| | | |
|------|---|----|
| 1 | Matériaux architecturés ayant différents modes d’obtention et organisations internes | 1 |
| 2 | Configuration initiale et configuration optimisée d’une poutre console avec maximisation de la raideur (images de [All07]) | 2 |
| 3 | Description du principe de l’homogénéisation. | 3 |
| 4 | Schématisation de l’affaiblissement des hypothèses à introduire pour passer du cadre de l’homogénéisation théorique à un cadre expérimental | 4 |
| 5 | Dispositif d’essai réalisé | 5 |
| 1.1 | Diversité des formes, échelles, matériaux constitutifs, fonction et origines des matériaux architecturés | 9 |
| 1.3 | Définition des échelles caractéristiques | 13 |
| 1.4 | Nid d’abeille obtenu par pré-ondulation de feuilles d’aluminium puis assemblage par collage [Jaa18] | 13 |
| 1.5 | mousse métallique régulière obtenue par fonderie (production CTIF)) | 14 |
| 1.6 | Imbrication topologique de blocs (image de [Bar15]) | 14 |
| 1.7 | Mousse d’aluminium | 15 |
| 1.8 | Deux techniques de fabrication additive très répandues | 15 |
| 1.9 | Matériaux architecturés périodiques de réseau unidimensionnel | 16 |
| 1.10 | Matériaux architecturés périodiques de réseau bidimensionnel | 16 |
| 1.11 | Matériaux architecturés périodiques de réseau tridimensionnel | 17 |
| 1.12 | Exemple de structures quasi-périodiques | 17 |
| 1.13 | Exemple de structures aperiodiques ordonnées | 18 |
| 1.14 | Matériaux architecturés aperiodiques aléatoires | 18 |
| 1.15 | Différence entre les groupes Z_k et D_k | 20 |
| 1.16 | Influence de l’orientation sur la définition des éléments de symétrie | 21 |
| 1.17 | Diagramme de transition | 24 |
| 1.18 | Illustrations des premiers essais en mécanique des matériaux | 26 |
| 1.19 | Vernier “au 1/10” c’est à dire avec une précision au dixième de l’unité principale | 27 |
| 1.20 | Solutions envisagées par [QC81] pour le chargement uniforme en effort d’une éprouvette de grande taille | 28 |

| | | |
|------|---|----|
| 1.21 | Dispositif expérimental utilisé par [Oho+89] pour appliquer des chargements de cisaillement plan à des éprouvettes en béton armé de grande taille | 29 |
| 1.22 | Essai à effort réparti uniformément sur matériau architecturé par [Pon+18] | 30 |
| 1.23 | Palonnier utilisé en aéronautique pour appliquer des chargements répartis sur une aile d'avion | 30 |
| 1.24 | Essai de cisaillement au cadre sur toile par [Boi+17] | 31 |
| 1.25 | Essai de bi-extension de films polymères par Accupull (entreprise kairo) | 31 |
| 1.26 | Machine "1γ2ε" par [Joe91] | 32 |
| 1.27 | Pantographe à biellettes de la machine "1γ2ε" par [Joe91] | 32 |
| 1.28 | Propositions pour essais hétérogènes permettant de déterminer des rigidités d'ordre supérieur pour une identification d'un modèle de milieu à gradient ([Pon18]) | 33 |
| 1.29 | Définition du domaine considéré Ω | 35 |
| 1.30 | Définitions de points homologues sur une cellule élémentaire ayant subi une déformation périodique | 38 |
| 1.31 | Représentation schématique des KUBC et SUBC et des conditions limites d'essais conventionnels s'en rapprochant le plus dans le cas d'un chargement de traction uniaxiale. Code couleur : en bleu les conditions statiques et en vert les conditions cinématiques. | 40 |
| 1.32 | Représentation schématique des KUBC et SUBC et des conditions limites d'essais conventionnels s'en rapprochant le plus dans le cas d'un chargement de cisaillement | 40 |
| 1.33 | Définition de $\partial\Omega_-$ et $\partial\Omega_+$ | 43 |
| 1.34 | Deux éprouvettes d'un matériau élastique anisotrope prélevé d'un même échantillon de départ selon deux directions différentes | 44 |
| 1.35 | Conditions de simulation pour faire apparaître l'effet de la discrétisation des conditions aux limites pour l'homogénéisation par schéma KUBC d'une éprouvette en ABS (zone grise) avec vides (zones blanches) | 48 |
| 1.36 | l'erreur relative sur C_{11}^* en fonction de a | 49 |
| 1.37 | Déformées du VER à inclusions rectangulaire selon la position des zones d'accroche | 50 |
| 1.38 | Enveloppe des erreurs relatives commises sur la valeur de C_{11}^* pour différentes amplitudes d'erreur aléatoire sur 20 tirages. | 50 |
| 1.39 | Erreur relative de la composante C_{11} | 51 |
| 2.1 | Schéma de principe des pilotages local et global | 56 |
| 2.2 | Schéma de principe des mesures locale et globale | 58 |
| 2.3 | Détail d'un coin de l'éprouvette et découpage de $\partial\Omega$ en sous-ensembles | 60 |
| 2.4 | Description locale d'une attache et définition de la variable de position locale $\underline{y}^{(p)}$ | 61 |
| 2.5 | Numérotation des bords | 63 |
| 2.6 | Équilibre du système mécanique associé à l'un des bords | 65 |
| 2.7 | Deux stratégies de mesurage global | 69 |
| 2.8 | Première représentation d'un pantographe en 1631 par [Sch31] | 70 |
| 2.9 | Utilisation des propriétés des pantographes | 71 |

| | | |
|------|--|-----|
| 2.10 | Pantographe et cellule élémentaire | 71 |
| 2.11 | Extension d'un pantographe | 72 |
| 2.12 | Réseau 2D de pantographes composé de pantographes horizontaux (en noir) et verticaux (en bleu). Les pantographes sont reliés uniquement par les centres des cellules élémentaires (def Figure 2.10b) de sorte que les élongations horizontale et verticale soient découplées, un cisaillement du réseau est également possible. Image de [SAI11] | 73 |
| 2.13 | Déplacements à contrôler et fixations pour imposer une déformation plane homogène quelconque au cadre. | 74 |
| 2.14 | Définition des dimensions sur un roulement | 77 |
| 2.15 | Affaissement d'un pantographe bi-appuyé sous son propre poids | 77 |
| 2.16 | Détermination de l'erreur en position transverse due au jeu dans les roulements pour un problème de "pantographe console" | 78 |
| 2.17 | déformée du pantographe bi-appuyé | 79 |
| 2.18 | Description d'une liaison souple, S1 et S2 sont les deux solides en liaison pivot. | 79 |
| 2.19 | Définition des centres cinématique et géométrique | 80 |
| 2.20 | a,b,c,d,e : Processus de création CAO des bras du pantographe | 82 |
| 2.21 | Cinématique du pantographe et déformation corrélée des LS. Le pantographe est piloté en imposant la cinématique des nœuds proches du centre des LS 2 et 5 de la ligne inférieure, repérées par ●. L'échelle de couleur représente la première déformation propre. | 83 |
| 2.22 | Chargement transverse du pantographe | 84 |
| 2.23 | Amplitude et orientation des efforts pour le cas de chargement transverse | 85 |
| 2.24 | Chargement axial du pantographe - | 86 |
| 2.25 | Amplitude et orientation des efforts pour le cas de chargement axial | 87 |
| 2.26 | Décomposition d'une liaison souple en 3 liaisons souples associées en parallèle | 88 |
| 2.27 | Tracés des fonctions utiles à la détermination de l'angle de rotation maximal des liaisons souples | 90 |
| 2.28 | Carte (σ_e , E) de [Ash05] | 92 |
| 2.29 | Détermination de l'angle de rotation nécessaire | 93 |
| 2.30 | Pantographes à 1 et 2 rangs | 94 |
| 2.31 | Composition de la machine | 95 |
| 3.1 | Classification des différents modèles envisagés pour la représentation des pantographes | 100 |
| 3.2 | Représentation graphique d'un modèle de type Hencky utilisé par [Tur+16] pour décrire le comportement d'un pantographe. | 101 |
| 3.3 | Structure globale du modèle | 103 |
| 3.4 | Géométries "numériques" et conditions aux limites pour la détermination des matrices de rigidité élémentaires | 104 |
| 3.5 | Les 6 géométries des ensembles cinématiques considérés | 106 |

| | | |
|------|--|-----|
| 3.6 | Chaque nœud possède alors trois indices : deux indices locaux “de bras” (un pour le bras rouge et l’autre pour le bras bleu, en minuscule sur le schéma) et un indice global “de pantographe” (en majuscule sur le schéma) | 107 |
| 3.7 | Points géométriquement homologues entre les pantographes (mais cinématiquement distincts) | 107 |
| 3.8 | Création d’ensembles mécaniques contenant les centres cinématiques (C^c) et géométriques (C^g) d’une même couche | 108 |
| 3.9 | Assemblage utilisé pour déterminer $[k]$, la rigidité entre les couches. | 109 |
| 3.10 | Composition du dispositif : 4 blocs tournés | 111 |
| 3.11 | Simulation sur une LS soumise à des chargements élémentaires pour la détermination des états de contrainte élémentaires ¹ | 114 |
| 3.12 | Description des simulations pour le cas test (calcul et champs complet et maquette numérique) | 115 |
| 3.13 | Écarts de déplacement des axes des LS entre le modèle EF et le VTD | 116 |
| 3.14 | Réduction à 2 rangs d’un pantographe à 4 rangs | 118 |
| 3.15 | Représentation des cas test envisagés | 119 |
| 3.16 | Écarts à la linéarité des liaisons de la ligne de contrôle sous chargement statique transverse réparti et perturbation sur la cinquième cellule en fonction du nombre de rangs r calculés avec le VTD. | 120 |
| 3.17 | Erreur à la linéarité des liaisons de la ligne de contrôle sous chargement statique transverse réparti en fonction de l’épaisseur b | 122 |
| 3.18 | Pantographe seul, bras non séparés des plaques | 124 |
| 3.19 | Définition et déformation d’un maillage composé d’éléments poutre (ou barre) | 126 |
| 3.20 | Polynômes de Hermite | 127 |
| 3.21 | Montage utilisé pour contrôler la cinématique du pantographe, représentation du “treillis” utilisé pour l’étude DIC du pantographe, définition de la ligne de contrôle et numérotation des points. | 127 |
| 3.22 | Essai de compression pour la validation des pantographes - légère irrégularité vers -0.6 mm | 128 |
| 3.23 | Illustration de “l’écart à la linéarité” | 129 |
| 3.24 | Suivi des déplacement des nœuds de la ligne de contrôle lors de l’essai de compression. Lignes en pointillé : charge, lignes pleines : décharge Le point 12 étant le point “fixe” de l’expérience. | 130 |
| 3.25 | Écart à la linéarité des déplacements des nœuds de la ligne de contrôle lors de l’essai de compression au pas le plus chargé | 131 |
| 3.26 | Montage utilisé pour contrôler la rigidité du pantographe aux sollicitations de flexion | 132 |
| 3.27 | Suivi des déplacement des nœuds de la ligne de contrôle lors de l’essai de flexion. Lignes pleines : charge, lignes en pointillé : décharge | 133 |
| 3.28 | Écarts à la linéarité pour le VTD (lignes pleines) et l’expérience (lignes pointillées) pour la sollicitation de flexion | 134 |
| 4.1 | Schéma d’ensemble de la machine | 140 |

| | | |
|------|---|-----|
| 4.2 | Machine réelle | 141 |
| 4.3 | Rappel de l'architecture machine (l'image a été tournée afin de mieux correspondre à la vue CAO de la Figure 4.4c.) | 142 |
| 4.4 | Présence d'axes d'amarrage entre les blocs pour la tenue de l'éprouvette ; la couche supplémentaire permettant de lier ces axes aux blocs est représentée en rose | 143 |
| 4.5 | Axes d'amarrage court et long avec liaison souple en bout pour permettre le montage | 145 |
| 4.6 | Détermination du couple résistant dans les axes d'amarrage | 145 |
| 4.7 | Déplacements pilotés et fixations de la partie centrale. | 146 |
| 4.8 | Deux stratégies d'ancrage sur le système de pilotage - vu schématique en coupe d'un coin du montage | 147 |
| 4.9 | Détails technologiques du système de fourchettes | 149 |
| 4.10 | Rappel de la stratégie globale de mesure des efforts | 150 |
| 4.11 | Proposition d'implémentation de cellules d'effort sur les fourchettes. Proposition 1 \otimes ; Proposition 2 \diamond | 151 |
| 4.12 | Branchement des jauges de déformation pour la mesure de l'effort dans la configuration de la proposition 2. | 152 |
| 4.13 | Solution de mesure des efforts retenue | 153 |
| 4.14 | Montage réalisé pour l'étalonnage des cellules horizontales | 154 |
| 4.15 | Résultats d'étalonnage cellule à cellule | 155 |
| B.1 | Définition d'une cellule élémentaire T | 181 |
| C.1 | Éléments du milieu extérieur lors des différentes phases de vie | 183 |
| C.2 | Fonctions en phase de montage de la M. KUBC | 185 |
| C.3 | Fonctions en phase de montage de l'éprouvette | 185 |
| C.4 | Fonctions en phase de Sollicitation et mesure | 187 |
| E.1 | Chargement transverse du pantographe - | 197 |
| E.2 | Premier isolement- chargement transverse | 198 |
| E.3 | Isolements pour l'initialisation de la récurrence | 199 |
| E.4 | Isolement d'une cellule courante | 199 |
| E.5 | Isolement d'une cellule courante | 200 |
| F.1 | Chargement axial du pantographe - | 203 |
| F.2 | Chargement du pantographe - | 204 |
| F.3 | Isolement du premier bras "descendant" | 204 |
| F.4 | Isolement d'une cellule courante | 205 |
| F.5 | Isolement d'une cellule courante | 206 |
| G.1 | Image CAO d'une plaque | 207 |
| G.2 | Détail de géométrie : trou de centrage et liaison avec le système de pilotage | 208 |

Liste des tableaux

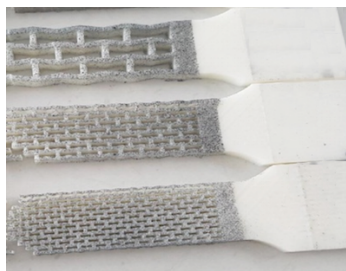
| | | |
|------|---|-----|
| 1.1 | Noms, sous-groupes et nombre de composants indépendants des 4 classes de symétrie des tenseurs élastiques 2D. Le nombre entre parenthèse indique le nombre minimal de composantes de la loi élastique écrite dans une base appropriée. | 20 |
| 1.2 | Valeurs de n et x sur les différents bords | 36 |
| 1.3 | Comparaison des différentes méthodes d’homogénéisation par champs moyens. La “difficulté” notée de 0 (simple) à 3 (complexe) est un critère subjectif mais issu du savoir faire d’expérimentateurs et représente les difficultés techniques estimées pour leur implémentation ou le besoin d’hypothèses fortes. | 47 |
| 1.4 | Caractéristiques générales, extraites du cahier des charges (cf. Appendice C) . . . | 52 |
| 2.1 | Valeurs particulières des vecteurs sur $\partial\Omega$ pour la géométrie considérée | 64 |
| 2.2 | Réalisation des trois modes de déformation plane. | 74 |
| 2.3 | Dimensions et jeu pour montage ”normal” (sans précontrainte et ajustement recommandés utilisés) sur roulements | 76 |
| 2.4 | Paramètres matière et géométriques obtenus à l’issue de la phase de pré-dimensionnement | 93 |
| 3.1 | Nomenclature utilisée pour la description de la construction de la matrice de rigidité du modèle | 104 |
| 3.2 | Norme 2 et norme infinie du résidu pour les deux résolutions | 113 |
| 3.3 | Coûts de calculs associés aux deux modèles du cas test | 116 |
| 3.4 | Coûts de calculs associés aux deux modèles du dispositif complet | 116 |
| 3.5 | Présentation des différentes sollicitations auxquelles peut être soumis le VTD . . . | 117 |
| 3.6 | Cas test retenus | 119 |
| 3.7 | Erreur maximale en position pour les différents cas tests en fonction du nombre de rangs (on donne également en indication l’erreur dans le cas extrême non dimensionnant) | 121 |
| 3.8 | Erreur maximale en position pour les différents cas tests en fonction de b (on donne également en indication l’erreur dans le cas extrême non dimensionnant) | 122 |
| 3.9 | Critères de dimensionnement des pantographes | 123 |
| 3.10 | Caractéristiques générales du dispositif | 123 |
| 3.11 | Plages min-max d’écart à la linéarité pour le VTD et l’expérience | 131 |
| 4.1 | Cumul des jeux et des déflexions de la chaîne de pilotage à pleine charge. | 150 |

H.1 Temps dédiés à la fabrication et au montage 211

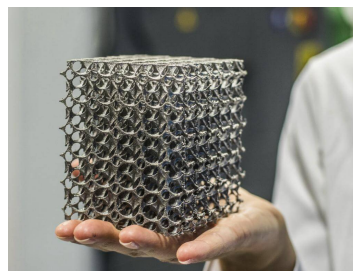
Introduction générale

Le rapport "La mécanique du futur et la recherche en sciences mécaniques" de l'Académie des sciences et du Haut Comité Mécanique du 19 novembre 2019 ([Noab]) insiste sur l'importance toujours existante de la recherche dans le domaine de la mécanique et invoque, parmi d'autres raisons, "l'apparition de nouvelles questions aux frontières de la mécanique, de la physique, de la science des matériaux, de la chimie et de la biologie et notamment celles qui ont trait [...] aux nouvelles méthodes de fabrication et aux *matériaux architecturés*". Ce rapport recommande d'appuyer les recherches concernant les phénomènes complexes multi-physiques actuels et encourage les développements des technologies nécessaires pour l'industrie du futur dont notamment le recours aux matériaux architecturés. En effet, ces matériaux sont une solution potentielle aux problèmes contemporains de minimisation de masse, d'utilisation des ressources ainsi qu'aux exigences multi-fonctionnelles.

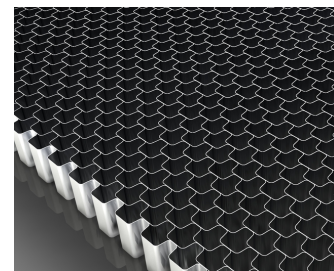
Les matériaux architecturés sont des matériaux présentant différentes échelles d'organisation de la matière. Bien que de nombreux exemples puissent être trouvés dans la nature, ils présentent en général une organisation volontaire, artificielle, de la matière à une échelle, dite mésoscopique, proche de celle de la macro-structure (cf. Figure 1). Certains matériaux très anciens correspondent à cette définition, par exemple le contreplaqué utilisé dès l'égypte antique ([Mor06]) ainsi que les tricots et tissus, mais leur essor et leur étude, sont relativement récents, et sont majoritairement dus au développement conjoint des techniques d'*optimisation topologique* et des méthodes de *fabrication additives* qui permettent la réalisation de formes jusqu'alors impossibles ou trop onéreuses à produire. Ces méthodes additives présentent toutefois de nombreux désavantages tels que le fort coût unitaire des pièces imprimées ou encore les défauts de fabrication inhérents. D'autres méthodes de fabrication peuvent être utilisées comme le pliage et l'assemblage de tôles, les géométries devant alors être simplifiées.



(a) Impression polymère à dépose de fil



(b) Impression métallique par fusion de lit de poudre



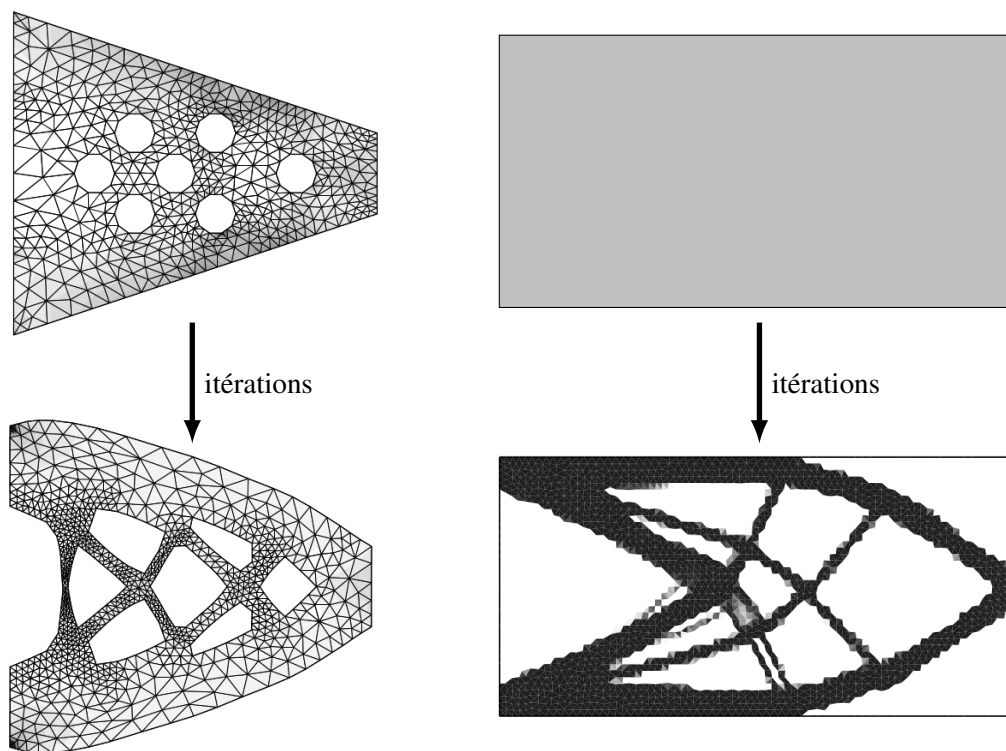
(c) Assemblage de tôles pliées

FIGURE 1: Matériaux architecturés ayant différents modes d'obtention et organisations internes

Ils répondent principalement à deux grandes problématiques : celle de l'allègement des structure

([Lon74; Mic04; Jun15]) et celle de l'obtention de nouvelles propriétés, avec comme exemples les plus médiatiques les propriétés auxétiques ([EA00; Dir+11]) ou la "cape d'invisibilité" qui permet de rendre un objet invisible à certaines ondes ([Cai+07; CS07; NS11]). Les matériaux architecturés ne se limitent pas à ce cas et les méthodes d'optimisation permettent de concevoir un matériau architecturé propre à chaque besoin. L'archétype du problème d'optimisation est celui de la maximisation de la raideur d'une pièce (ou d'une structure) qui peut se faire

- par optimisation paramétrique. On parle d'optimisation paramétrique lorsque la géométrie peut être décrite par quelques paramètres, comme ce peut être le cas par exemple pour l'épaisseur des barres d'un treillis ;
- par optimisation géométrique cf. Figure 2a, c'est à dire en faisant évoluer les contours sans ajouter de trous ;
- par optimisation topologique cf. Figure 2b donc en s'autorisant créer et à supprimer des trous dans la matière. Bien évidemment l'optimisation topologique est associée à une optimisation géométrique.



(a) Forme obtenue par optimisation géométrique

(b) Carte de densité obtenue par optimisation topologique par homogénéisation avec pénalisation

FIGURE 2: Configuration initiale et configuration optimisée d'une poutre console avec maximisation de la raideur (images de [All07])

Du fait de la présence d'une échelle mésoscopique d'organisation de la matière, les propriétés mécaniques de ces matériaux sont des propriétés émergentes, c'est à dire résultant d'un couplage entre le matériau constitutif et l'architecture. La détermination de ces propriétés globales est une difficulté majeure pour leur usage et passe généralement par une étape d'homogénéisation (numérique ou analytique) qui permet d'obtenir le comportement du matériau avec la prise en compte de l'architecture. L'homogénéisation est le fait de prendre en compte les propriétés locales dans une loi de comportement. Ainsi en élasticité, l'homogénéisation est le fait de prendre en

compte la géométrie ainsi que le tenseur élastique local $\underline{\underline{C}}(\underline{x})$ pour en déterminer le comportement équivalent $\underline{\underline{C}}^*$ (cf. Figure 3).

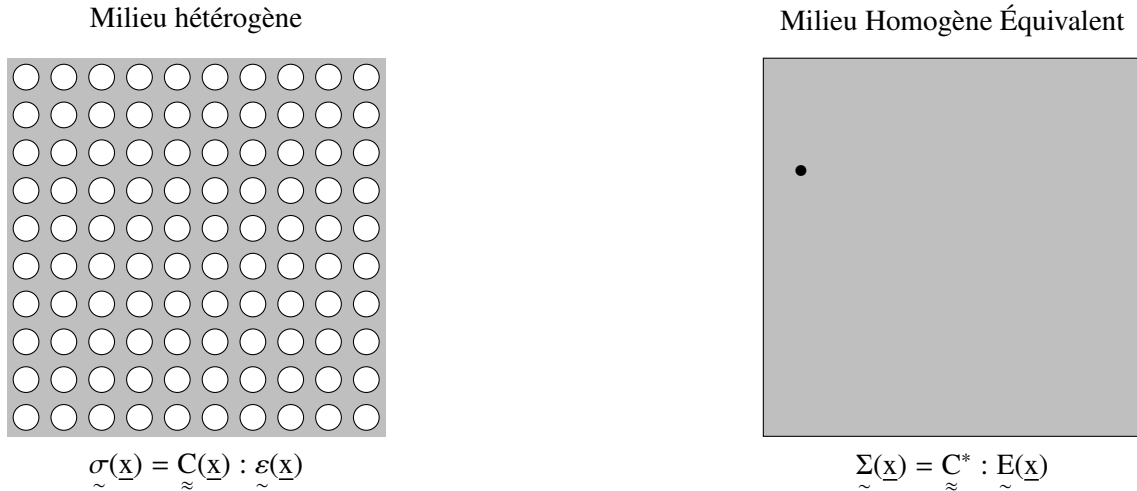


FIGURE 3: Description du principe de l'homogénéisation.

Les méthodes d'homogénéisation sont bien connues en mécanique et leur efficacité n'est plus à prouver en élasticité. Cependant les méthodes de fabrication additive génèrent d'importants défauts tant en termes de santé matière que de géométrie et ce, en fonction de très nombreux paramètres (méthode d'impression [Jun+18; Tan+17], paramètres énergétiques [PAW16; Wil+19], orientation [TKP14], etc.). De plus, leur développement étant relativement récent, ces défauts sont mal connus et surtout mal caractérisés. De ce fait, la prise en compte des défauts dans le comportement homogénéisé ne peut se faire sans une campagne expérimentale de caractérisation.

Une autre piste envisageable pour la prise en compte des défauts du matériau est celle de la *détermination expérimentale des propriétés émergentes*. Malheureusement, si les techniques expérimentales ont connu un développement important depuis leurs débuts, notamment en ce qui concerne les mesures avec la révolution des mesures de champs, les sollicitations applicables par les machines d'essai standard ne sont pas adaptées à la détermination de comportements équivalents. Certains tests permettent évidemment la détermination de coefficients du tenseur d'élasticité apparent d'une éprouvette mais 1) cela se fait généralement à l'aide d'une approche inverse nécessitant une connaissance a priori du matériau (ce que l'on souhaite éviter sans quoi il faut caractériser les défauts) et 2) aucun essai classique ne permet une détermination complète du tenseur d'élasticité équivalent. De plus, une plus grande richesse sur le contrôle des conditions aux limites permet d'envisager la mesure expérimentale d'autres quantités comme notamment les invariants du tenseur d'élasticité.

Dans ce contexte, une troisième voie est proposée pour déterminer les propriétés émergentes, ne s'appuyant pas, comme précédemment, sur une étape d'homogénéisation, ou sur une combinaison d'étapes expérimentales et numériques. Cette autre voie consiste en la réalisation d'un seul essai mécanique, dont les conditions limites sont judicieusement choisies afin d'obtenir directement les propriétés homogénéisées.

Le travail qui sera présenté ici aura donc pour but de mettre au point un dispositif d'essai permet-

tant la détermination complète et directe sans a priori du comportement équivalent d'un matériau architecturé. La [Figure 4](#) présente les changements d'hypothèse à introduire pour passer du cadre de l'homogénéisation théorique à un cadre expérimental qui seront donc à prendre en compte dans la conception de l'essai.

Le dispositif qui sera développé ici le sera dans le cadre dimensionnant de l'homogénéisation élastique linéaire mais sera bien évidemment utilisable à d'autres fins comme par exemple l'extension à des comportements plus complexes que l'élasticité linéaire ou encore l'étude du comportement confiné des matériaux (acousto-élasticité).

D'une situation théorique parfaite ...

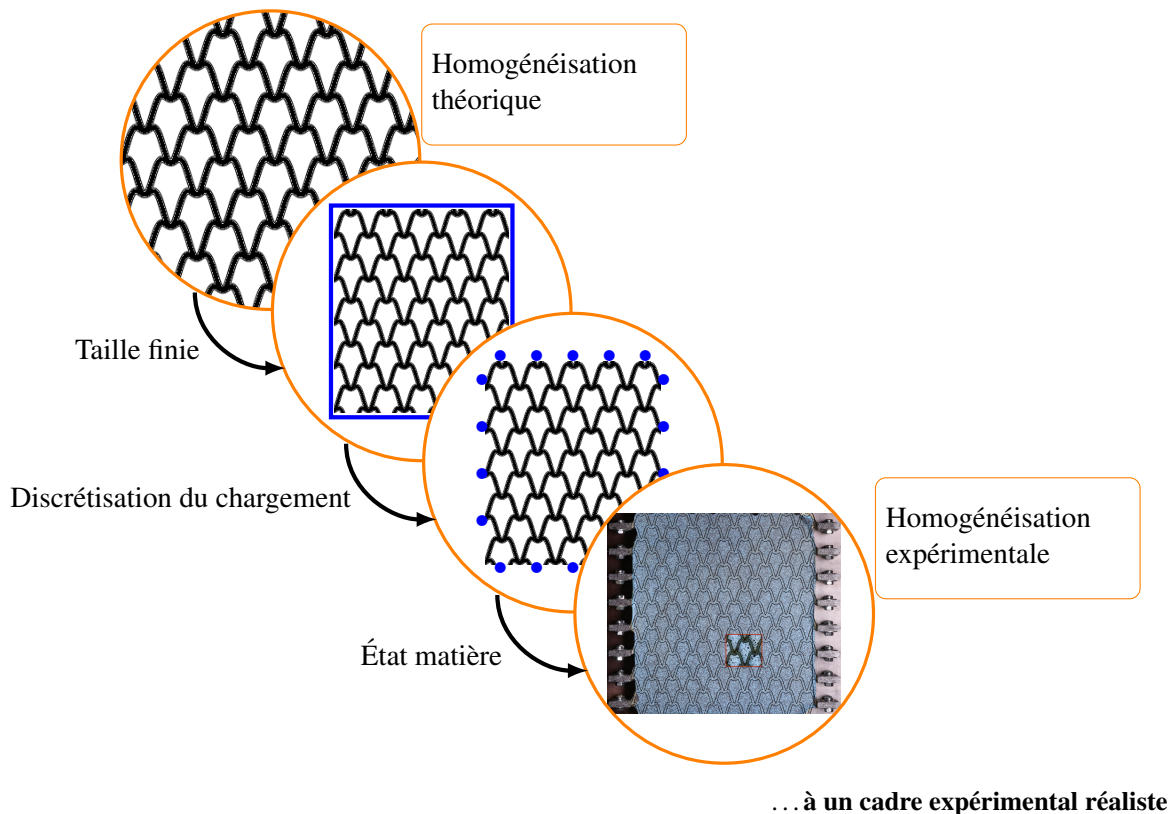


FIGURE 4: Schématisation de l'affaiblissement des hypothèses à introduire pour passer du cadre de l'homogénéisation théorique à un cadre expérimental

Le travail exposé ici, qui a fait l'objet d'une publication et de communications en conférences, a abouti à la fabrication et au montage d'un dispositif d'essai permettant l'application de conditions limites enrichies dans le but de réaliser des essais d'homogénéisation. Un aperçu du dispositif est donné en [Figure 5](#). Il faut toutefois noter que dans le cadre contraint de la pandémie de Covid, la machine a pu être montée mais qu'aucun essai n'a pu être réalisé.

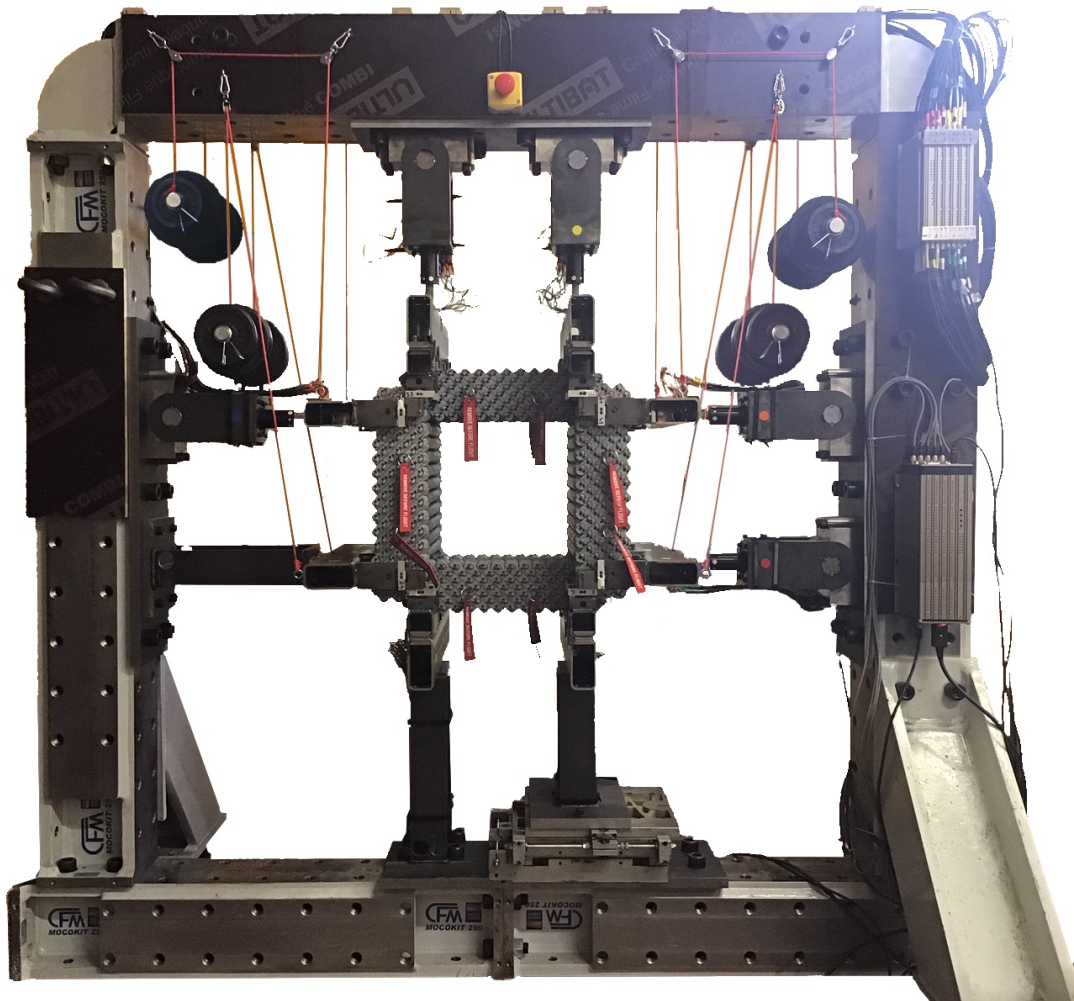


FIGURE 5: Dispositif d'essai réalisé

Organisation du manuscrit

Le chapitre 1 revient plus en détail sur les points abordés ici, autrement dit les matériaux architecturés et leur caractérisation grâce à l'homogénéisation numérique ainsi que les techniques expérimentales existantes.

Le chapitre 2 présente l'adaptation d'architectures machine existantes dans le but de permettre la détermination expérimentale du tenseur d'élasticité apparent d'une éprouvette.

Dans le chapitre 3 un outil numérique d'aide au dimensionnement, de préparation des essais et permettant à terme l'enrichissement du dépouillement est présenté.

Le chapitre 4 décrit l'architecture réelle de la machine et fait un état des lieux des défauts et possibilités du dispositif. Un protocole de validation de la machine y est également proposé, la validation n'ayant pu se faire durant le temps de la thèse.

La conclusion revient sur les points clés du travail réalisé et ouvre de nombreuses perspectives d'utilisation de la machine créée.

Des détails mathématiques et technologiques sont donnés en annexe.

Chapitre 1

Matériaux architecturés : modélisation et caractérisation mécanique

Ce premier chapitre a pour objectif de situer le cadre du travail de thèse en établissant un panorama (nécessairement non exhaustif et subjectif) du domaine des matériaux architecturés, de leur historique, de leurs propriétés ainsi que de la manière dont ils sont conçus, réalisés et testés.

- Dans un premier temps nous nous focaliserons donc sur les matériaux architecturés, leurs domaines d'utilisation et méthodes d'optimisation puis nous en poserons une définition. Ensuite nous évoquerons les méthodes de fabrication qui y sont associées ainsi que leur modes d'organisation principaux ce qui nous mènera à un aparté sur l'anisotropie 2D et les groupes de symétrie. Enfin nous aborderons les défis que représentent leur caractérisation mécanique.
- Dans un second temps, un rapide aperçu historique des moyens d'essai sera donné puis nous nous focaliserons sur quelques développements récents dans le domaine des essais élasto-statiques.
- Dans un troisième temps, nous introduirons le concept d'homogénéisation nécessaire à la définition de propriétés émergentes et nous nous concentrerons sur les approches par champs moyens, approches les plus à même d'être adaptées à un contexte expérimental. Une discussion sur la possibilité de déterminer directement des invariants du tenseur d'élasticité via ces méthodes sera finalement menée.
- Enfin un bilan sur la faisabilité d'une approche expérimentale de l'homogénéisation sera dressé par la synthèse des éléments préalablement mentionnés adjoints de quelques résultats préliminaires.

1.1 Les matériaux architecturés (MA)

Les matériaux architecturés (MA) forment une classe de matériaux très vaste, ils peuvent être

- micro-architecturés ([FDA10]), ou (méso) architecturés ;
- multifonctionnels ([BE13] ou au contraire avoir été optimisés pour répondre au mieux à une contrainte spécifique ([OG16]) ;
- bio-inspirés ([FW07]) ;
- périodiques, quasi-périodiques, presque-périodiques ou complètement aperiodiques ;

- obtenus par des méthodes de fabrication très variées : pliage ([Leb15]), assemblage ([EDP11]), expansion [Wad02], poinçonnage ([Bar15]) et sans oublier la fabrication additive dont le développement récent est une raison de leur essor de ces dernières années.

Un aperçu de leur diversité est donné en [Figure 1.1](#).

Malgré ces disparités, les matériaux architecturés répondent le plus souvent à l'une des deux problématiques suivantes.

- Réaliser des objectifs nouveaux en termes de propriétés matériaux, comme la modification de l'anisotropie apparente d'un laminé (cf. [Figure 1.2a](#), [CH19]).
- Réaliser des objectifs déjà atteints mais avec moins de matière / de matériaux (cf. [Figure 1.2b](#) [FDA10; BE13]).

Dans les deux cas, ce qui permet de répondre à la problématique est l'introduction d'une nouvelle variable : l'architecture interne du matériau.

1.1.1 Domaines d'utilisation

Comme nous venons de le dire, les matériaux architecturés sont utilisés pour répondre à des problématiques pouvant être regroupées en deux grandes catégories : a) faire aussi bien avec moins et b) créer de nouvelles fonctionnalités. Quelques exemples en sont donnés ci-après.

a. Allègement

La première problématique est celle de l'allègement des structures et intéresse les ingénieurs depuis le milieu du XIX^e siècle comme peuvent en témoigner les constructions métalliques de l'époque (ouvrages d'Eiffel notamment). Ce domaine d'étude aboutira à l'obtention des solutions mathématiques au problème du treillis optimal ([Mic04])¹. Preuve que cette problématique d'allègement est commune à de nombreux domaines, on peut par exemple noter l'apparition du carton ondulé double face ([Lon74]) ainsi qu'un peu plus tard, deux brevets ([HR14; Jun15]) portant sur l'utilisation des sandwichs nid d'abeille pour des applications en construction et en aéronautique. Actuellement, l'utilisation de matériaux architecturés dans un but de gain de masse est principalement présente dans les domaines automobiles et aéronautiques pour des gains de performance.

b. Nouvelles fonctionnalités

L'organisation de la matière à une échelle mésoscopique permet de conférer des fonctionnalités émergentes² aux matériaux. Parmi cet éventail on peut citer

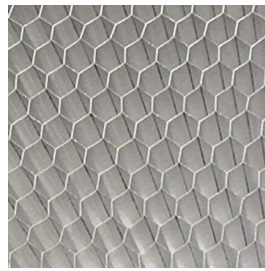
- les matériaux pentamode ([MC95; Kad+12]) qui permettent par exemple un module de compressibilité élevé, tout autre coefficient de raideur étant quasi nul, ce qui est un comportement proche de celui d'un fluide ;

1. On peut noter que les solutions d'optimisation topologiques pour la minimisation de la compliance sont souvent comparées aux treillis de [Mic04]

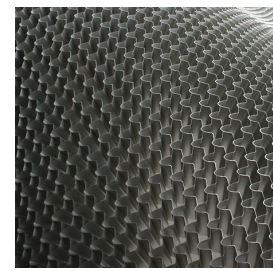
2. Une propriété peut être qualifiée d'émergente si elle découle de propriétés plus fondamentales tout en demeurant nouvelle ou irréductible à celles-ci.



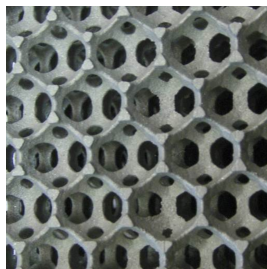
(a) Nid d'abeille naturel



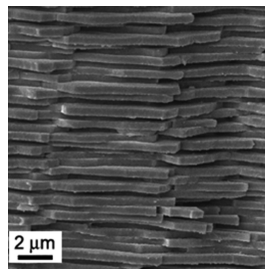
(b) Nid d'abeille aluminium hexagonal par collage-dépliage (Corex™)



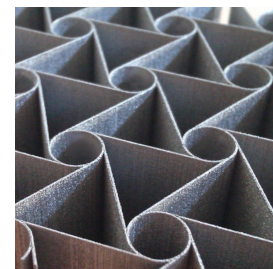
(c) Nid d'abeille aluminium flexcore(®) obtenue par pliage-soudage (Hexcel™)



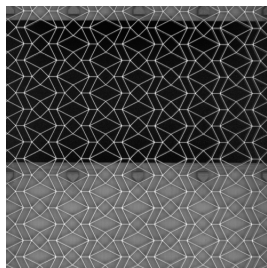
(d) Mousse métallique régulière obtenue par fonderie (production CTIF)



(e) Nacre naturelle [barthelat' designing'2014]



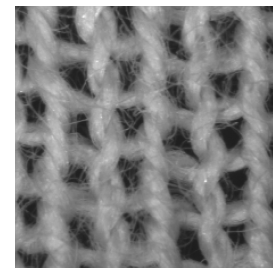
(f) Hexachiral métallique obtenu par fabrication additive [dirrenberger'effective'2011]



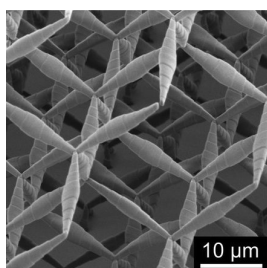
(g) Pantographe en polymère obtenue par fabrication additive [sepecher'microscopic'2020]



(h) os spongieux naturel (source wikipedia)



(i) tricot jersey (source wikipedia)



(j) Pentamode métallique obtenu par fabrication additive [milton'possible'2017]

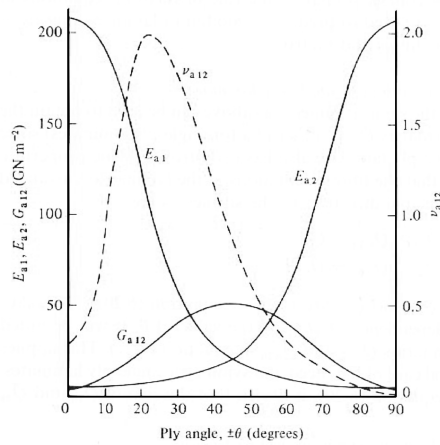


(k) Penrose en céramique obtenu par assemblage manuel (Darb-i Imam Shrine, Isfahan, Iran, 1453)

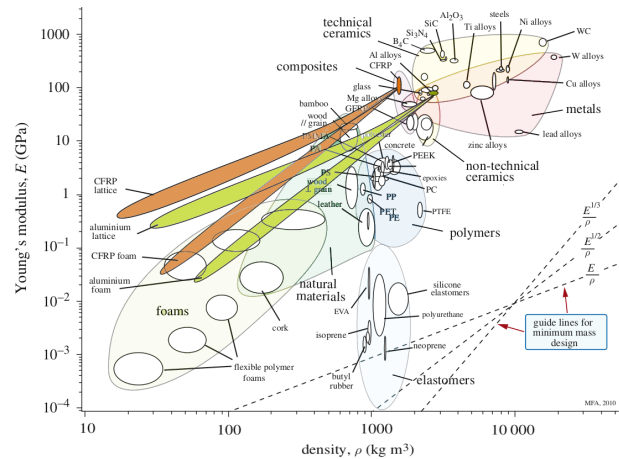


(l) Gyroid en polymère obtenu par fabrication additive (shapeways™)

FIGURE 1.1: Diversité des formes, échelles, matériaux constitutifs, fonction et origines des matériaux architecturés



(a) Constantes élastiques pour un laminé d'angle de pli $\pm\theta$ en fibre de carbone et résine époxy [CH19]



(b) Agrandissement de deux espaces matériaux : celui des CFRP et celui de l'aluminium par le développement des lattices et des mousses dans une carte $(E - \rho)$ - [FDA10]
CFRP : carbon fiber reinforced polymer

- l'auxétisme ([EA00; Dir+11]) qui est le fait d'avoir un coefficient de poisson négatif. Les propriétés auxétiques permettent par exemple une meilleure résistance à l'indentation ([Ald+94]), de plus les mousses auxétiques semblent avoir un meilleur comportement au crash que les mousses classiques ([Sca+02]);
- la "cape d'invisibilité" qui est le fait de rendre un objet "invisible" à certaines ondes, qu'elles soient électromagnétiques ([Cai+07]) acoustiques ([CS07]) ou élastiques ([NS11]);
- ainsi que des propriétés multiphysiques : mousses structurales acoustiques [Ver+09], échangeurs thermiques [Lu01; Rop+15], ou encore milieux à porosité variable [NSS97].

Ces nouvelles fonctionnalités ainsi que l'allègement de structures sont généralement obtenus grâce à une étape d'optimisation du matériau.

1.1.2 Optimisation

On va considérer deux types de problèmes d'optimisation : les problèmes de structure qui portent sur l'ensemble du domaine Ω occupé par la structure et les problèmes de VER qui concernent une cellule périodique T .

Le premier problème est de type structure tandis que le deuxième est de type matériau c'est à dire que

- le résultat du problème de structure va (généralement) donner une géométrie complètement apériodique dont l'organisation dépend du problème de chargement réel ;
- le résultat du problème sur un VER est par essence périodique et est pensé pour que le matériau formé de la répétition de ce VER réponde aux contraintes imposées.

L'optimisation de structure consiste à chercher à optimiser la forme extérieure de Ω ainsi que sa forme intérieure, de manière à satisfaire au mieux un critère choisi a priori.

L'archétype de cette approche est la minimisation de la souplesse (maximisation de la raideur) qui est particulièrement simple à formuler (mathématiquement), ce qui donne lieu à une compétition du code Matlab le plus court permettant de réaliser cette optimisation ([Sig01]), ainsi qu'à des applications temps réel ([Noaa]).

Toutefois d'autres fonctions coût peuvent être considérées de manière à optimiser une cinématique déterminée a priori (mécanisme compliant), la première fréquence propre en dynamique, etc. Selon la fonction coût considérée le problème mathématique peut se révéler extrêmement difficile à étudier rigoureusement, et de multiples algorithmes heuristiques (c'est à dire sans justification mathématique de leur convergence) sont proposés (Cf. [Jou04]).

Les approches permettant de faire évoluer la géométrie de Ω de manière à atteindre l'objectif visé sont diverses en fonction des transformations de la géométrie que l'on s'autorise :

a) Paramétrique : quand la géométrie peut être décrite par quelques paramètres on parle d'optimisation paramétrique (*e.g.* optimisation des épaisseurs des barres dans un treillis). Généralement il s'agit d'améliorer une structure au voisinage d'une solution qu'on estime être la meilleure, les transformations de designs offertes par une telle approche étant limitées ;

b) Géométrique : dans cette approche on prédéfinit des phases dans la matière et on demande à l'algorithme de faire évoluer le contour de ces phases pour minimiser le critère. Stricto-sensu cette classe d'algorithme ne nucléé pas de nouvelle forme (pas de génération de nouveau trou dans une optimisation vide-matière), de fait il cherche la meilleure géométrie à topologie fixée ;

c) Topologique : on laisse à l'algorithme le loisir de générer de nouvelles phases au cours du procédé d'optimisation. Avec une phase de vide, l'algorithme fait évoluer la topologie du matériau.

Une revue de ces différentes méthodes peut être trouvée dans [All07] ainsi que sur les pages webs suivantes [Noad; Noae].

Considérons l'optimisation topologique dans le cadre de la répartition optimale de matière et de vide (Problème $\{1, 0\}$). Les approches par algorithmes topologiques peuvent se découper en 2 grandes familles :

a) Méthodes par densité : dans ces approches la fonction caractéristique qui ne prend que deux valeurs selon que l'on se situe dans la matière $\{1\}$, ou dans le vide $\{0\}$, est approchée par une densité continue $\rho \in [0, 1]$. Le problème est optimisé par rapport à cette densité continue avant de subir une phase de pénalisation des densités intermédiaires pour retrouver, au final, une solution de type 0 ou 1. Selon le sens que l'on donne aux densités intermédiaires $\rho \in]0, 1[$ on distingue deux approches :

- SIMP ([Ben89]) : le matériau associé aux densités intermédiaires est un matériau fictif sans sens physique, on ne le considère que comme un intermédiaire de calcul ;
- Homogenisation ([AS07]) : dans cette approche le matériau intermédiaire est considéré comme un matériau composite anisotrope, ce matériau est vu comme étant une microstructure obtenue par mélange au niveau infinitésimal de matière et de vide. Cette approche à un contenu physique beaucoup plus riche que l'approche précédente.

b) Approches par level set : dans les approches par level-set les phases sont décrites par des courbes de niveaux que l'on fait évoluer au cours de l'algorithme. Ces méthodes se rapprochent de l'optimisation géométrique évoquée plus haut. De fait ces approches nécessitent d'inclure une phase de nucléation dans leur algorithme de manière à faire évoluer la topologie de la solution. Cette nucléation est généralement traitée via un outil mathématique que l'on appelle « dérivée topologique » et qui indique à quel endroit de la matière la percée d'un trou améliore la fonction

coût.

Les approches par densité ont connu leur heure de gloire dans les années 2000, avant de s’effacer au profit des approches de type level-set, toutefois elles sont en train de connaître un nouveau essor car elles permettent de traiter les matériaux anisotropes plus aisément que les approches de type level-set.

Initialement ces méthodes ont été appliquées à une structure dans son ensemble produisant des architectures internes qu’il faut ensuite fabriquer. Le développement de machines d’impression 3D a rendu possible les conceptions établies dans le cadre de l’optimisation de forme.

Plus récemment ces approches ont été étendues à la conception de VER produisant un comportement effectif cible à l’échelle macroscopique. Autrement dit, il s’agit d’optimiser une cellule périodique dans le but de produire un comportement macroscopique cible. Ces approches combinent les techniques d’optimisation précédemment discutées avec des techniques d’homogénéisation de matière à formuler des algorithmes d’optimisation périodique multi-échelle. Une référence concernant cet aspect est [Ams+10].

Cette approche, combinée à l’utilisation de la théorie des invariants appliquée au tenseur d’élasticité semble prometteuse pour déterminer les microstructures produisant des tenseurs d’élasticité non-standard prédits de manière théorique. On sait, par exemple, qu’il existe des tenseurs d’élasticité anisotropes pour lesquels le module de Young directionnel $E(n)$ est isotrope ([He04]), c’est à dire que les modules de cisaillement sont anisotropes mais pas le module d’Young apparent, toutefois une microstructure produisant ces effets est actuellement inconnue.

Les matériaux architecturés sont les matériaux qui se placent entre le problème de structure et celui de VER en cela que leur comportement n’est pas celui d’une structure (dans le sens où leur organisation interne présente une organisation répétée) mais pas non plus celui d’un matériau car l’échelle de l’organisation interne est trop proche de celle de la macrostructure. Une définition plus précise est proposée ci après.

1.1.3 Définition

On peut trouver dans la littérature différentes définitions, ainsi [Dir18] définit un matériau architecturé de la manière suivante (traduction) : “ Le terme matériaux architecturés englobe toute microstructure conçue de manière réfléchie, de sorte que certaines de ses propriétés de matériaux, e.g. son rapport limite d’élasticité / densité, ont été améliorées par rapport à celles de ses composants, en raison à la fois de la structure et des effets composites, qui dépendent de l’arrangement topologique relatif entre chaque phase.”. L’auteur fait alors apparaître ici une notion d’intention de l’organisation interne du matériau.

On trouve également chez [Pon+18] (traduction) : “ Un matériau est dit architecturé si :

1. il présente, entre sa micro-structure et sa macro-structure, une ou plusieurs autres échelles d’organisation de la matière ;
2. les tailles caractéristiques des échelles intermédiaires d’organisation sont comparables à celle de la macrostructure, mais séparées de celle de la microstructure. ”

L’auteur insiste ici sur la notion d’échelle. Dans le cas d’un matériau présentant 3 échelles, notons L la longueur caractéristique de la macrostructure, l celle de la mésostructure et λ l’échelle de la

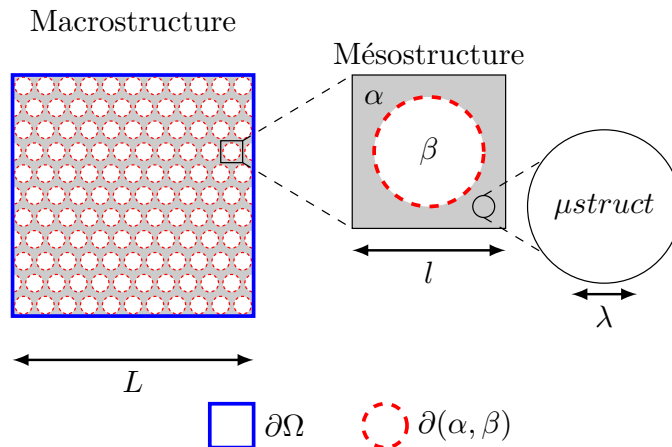


FIGURE 1.3: Définition des échelles caractéristiques

microstructure (Figure 1.3). On peut alors définir deux rapports de séparation d'échelle $\epsilon \in [0; 1]$:

$$\epsilon_\mu = \frac{\lambda}{l} \quad \text{et} \quad \epsilon_m = \frac{l}{L}$$

Les échelles sont dites séparées si $\epsilon \rightarrow 0$ (en pratique, pour l'élastodynamique³, les échelles sont considérées séparées dès que $\epsilon \leq \frac{1}{10}$, [RPA18])⁴.

Une définition transversale serait donc : un matériau est architecturé si

- il existe en son sein au moins une échelle d'organisation de la matière, faiblement séparée d'une autre échelle caractéristique du matériau (échelle micro, échelle macro ou même autre échelle méso),
- ayant été réfléchi de sorte à améliorer certaines de ces propriétés par rapport à celles de ses composants.

La notion d'intentionnalité introduite par [Dir18] élimine les matériaux naturels. Toutefois, ceux-ci optimisent et adaptent leur mésosstructure en fonction de l'environnement (contrainte mécanique,

3. Dans le cadre de l'élastodynamique, une autre échelle est pertinente : celle du chargement mécanique.
4. Lorsque $\epsilon_\mu \rightarrow 0$ et $\epsilon_m \neq 0$, c'est le domaine de la micromécanique.

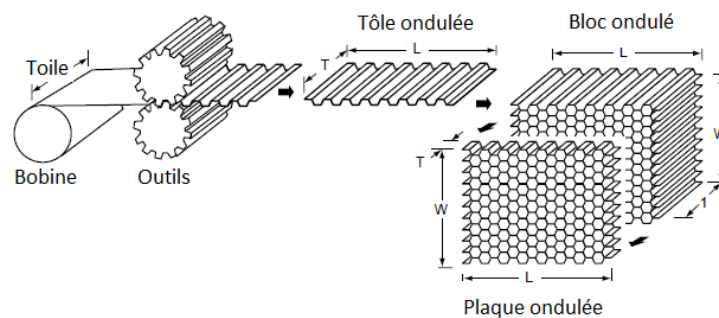


FIGURE 1.4: Nid d'abeille obtenu par pré-ondulation de feuilles d'aluminium puis assemblage par collage [Jaa18]

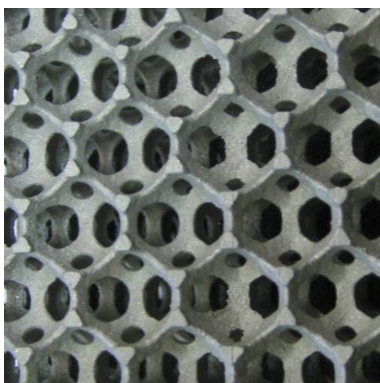


FIGURE 1.5: mousse métallique régulière obtenue par fonderie (production CTIF)

ressources disponibles, etc.). De fait, s'il n'y a pas d'intentionnalité au sens fort il demeure une idée de réaliser / optimiser des fonctions sous contraintes. En ce sens ils peuvent donc parfois être considérés comme des matériaux architecturés (*e.g.* nacre, émail ou encore certaines éponges marines [Bar15]).

1.1.4 Fabrication

Comme on l'a dit, ces matériaux se placent entre les problèmes matériau et les problèmes structures ce qui pose question quant à leur fabrication. En effet jusqu'à peu, le domaine de fabrication lié à l'optimisation matériau était celui de la métallurgie ou du travail sur les polymères (majoritairement) tandis que le domaine de fabrication lié à l'optimisation de structure était celui de l'usinage, de la forge et de la fonderie (majoritairement). Certains de ces procédés "traditionnels" sont utilisés pour obtenir des matériaux architecturés :

- pliage : pour obtenir des structures nid d'abeille (métalliques cf. Figure 1.4 ou non), du carton ondulé etc. Ces procédés permettent une production à relativement bas coût mais sont très limités en termes de géométrie qu'il est possible d'obtenir ;
- fonderie : cas des mousses régulières développées pour le CTIF (cf. Figure 1.5) ;
- assemblage : les matériaux obtenus par imbrication topologique (cf. Figure 1.6,[EDP11]), les sols pavés et les murs en pierres sont des exemples de matériaux architecturés si l'on observe leur comportement au niveau de la structure ;

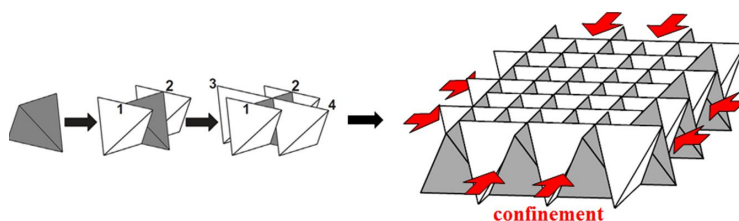


FIGURE 1.6: Imbrication topologique de blocs (image de [Bar15])

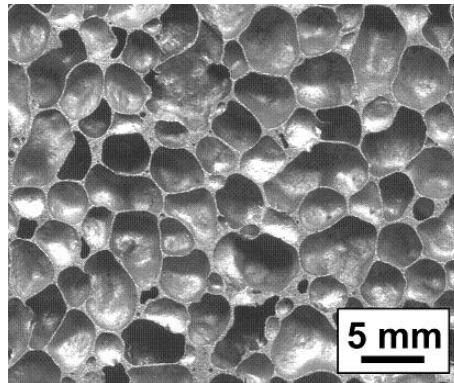


FIGURE 1.7: Mousse d'aluminium

- auto-organisation : techniques se basant sur des phénomènes physiques de minimisation d'énergie comme la formation de mousses à porosité contrôlée (cf. Figure 1.7) par exemple ou encore la fabrication d'aubes monocristallines par croissance de grain, même si ici, parler de matériau architecturé n'est pas correct vu la définition proposée puisque "l'architecture" est le réseau cristallin. Ces techniques permettent une production à large échelle et à bas coût puisque le matériau prend "naturellement" (par minimisation de son énergie) l'architecture voulue.

Cependant, ces méthodes sont assez limitantes et ne permettent pas d'obtenir toutes les variétés de formes dictées par l'optimisation. La méthode de fabrication, plus polyvalente, la plus utilisée et ayant permis un essor des matériaux architecturés est relativement récente. C'est la fabrication additive. Ce terme regroupe en réalité un ensemble de techniques (dépose de fil cf. Figure 1.8a, fusion de lit de poudre cf. Figure 1.8b) et de matériaux de base (polymères, métaux). Ces techniques permettent la fabrication de géométries jusqu'alors très complexes et chères (si ce n'est impossibles) à obtenir et sont très bien adaptées à la production en petites séries, mais pas en moyenne ou grande série.

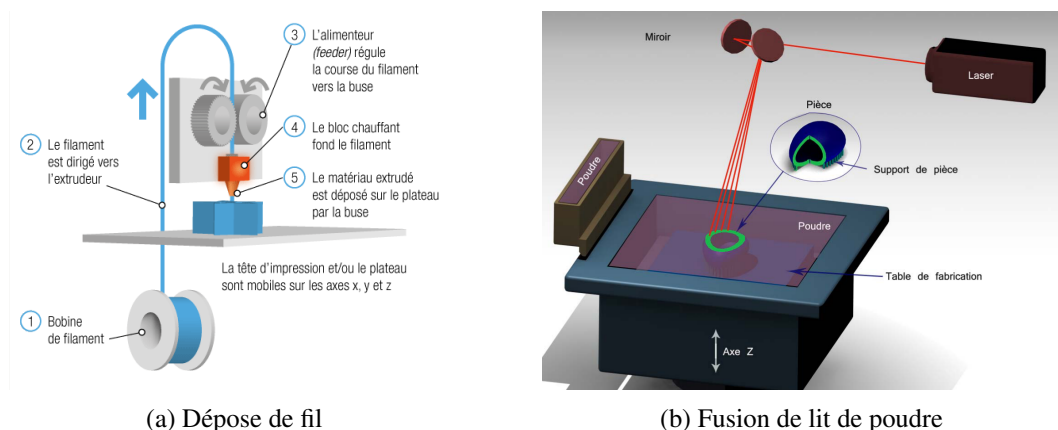
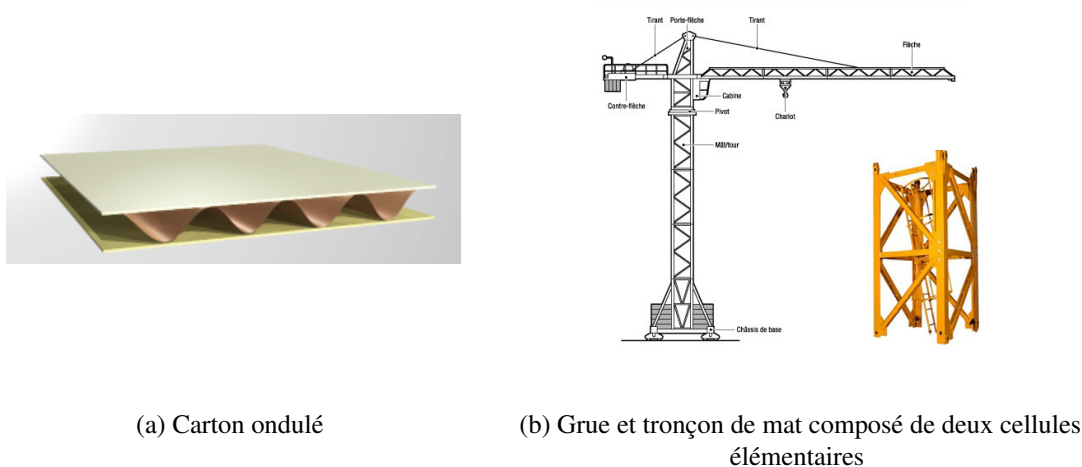


FIGURE 1.8: Deux techniques de fabrication additive très répandues



(a) Carton ondulé

(b) Grue et tronçon de mat composé de deux cellules élémentaires

FIGURE 1.9: Matériaux architecturés périodiques de réseau unidimensionnel

1.1.5 Modes d'organisation

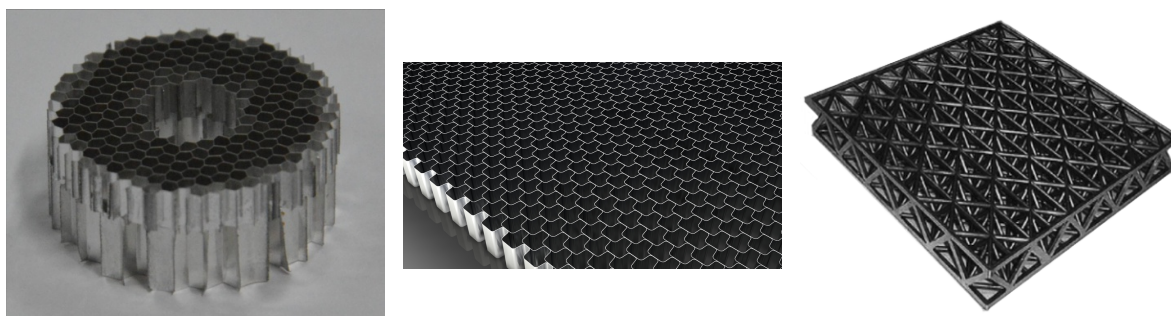
Une catégorisation intéressante de la famille des matériaux architecturés, liée aux modes d'obtention précédemment cités, est celle de leur mode d'organisation spatiale. Quatre modes d'organisation sont ici retenus : périodiques, quasi périodiques, apériodiques ordonnés et apériodiques aléatoires.

1.1.5.a Périodiques

Les matériaux périodiques sont des matériaux définis par une cellule de base et un réseau (directions et périodes) sur lequel la cellule de base va être répétée. Le réseau peut être unidimensionnel comme dans le cas du carton ondulé (Figure 1.9a) ou des mats de grue (Figure 1.9b)⁵.

Le réseau peut également être bidimensionnel pour les matériaux en plaque tels que les nids d'abeille (Figure 1.10a) et autres motifs équivalents (changement de cellule de base) tel que le flexcore™ (Figure 1.10b) et les treillis 2D (Figure 1.10c).

5. Au sens strict un matériau périodique est infini, aucun matériau réel n'étant infini on se permettra de classer dans ces matériaux périodiques ceux présentant un nombre *suffisant* de cellules ($\epsilon_m \leq \frac{1}{10}$)



(a) Nid d'abeille métallique

(b) Flexcore™

(c) Treillis 2D

FIGURE 1.10: Matériaux architecturés périodiques de réseau bidimensionnel

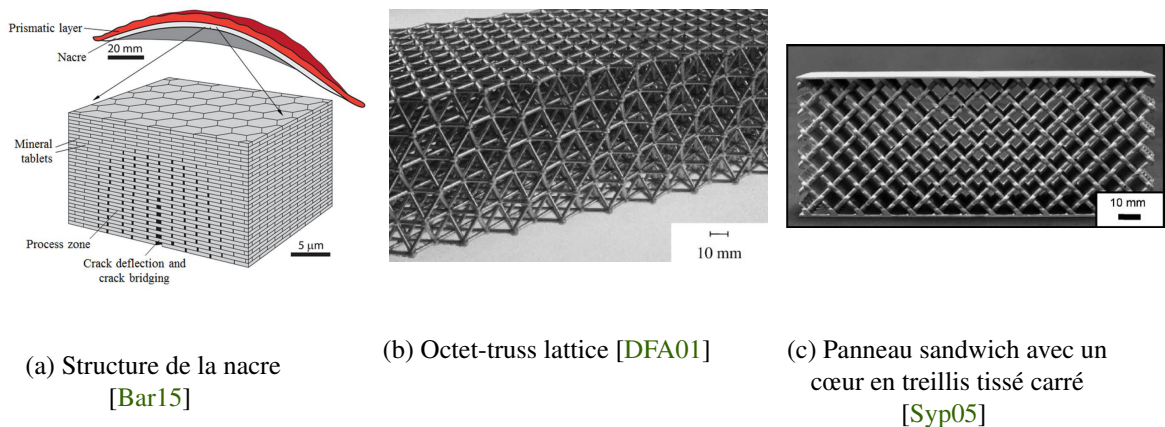
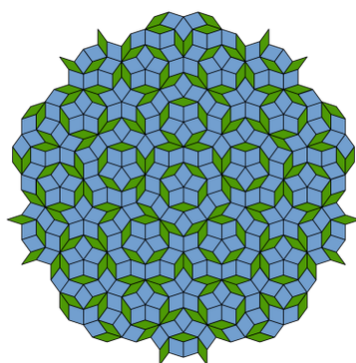


FIGURE 1.11: Matériaux architecturés périodiques de réseau tridimensionnel

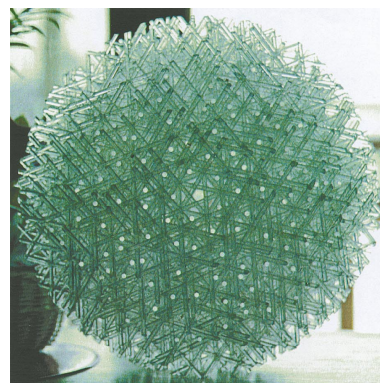
On trouve enfin des matériaux périodiques à réseau tridimensionnel comme dans le cas de la nacre (Figure 1.11a), et des matériaux inspirés de la nacre (“Nacre-like composite” [BZ11; Li+12], “nacre like Alumina” [Wat+19]) ou encore les treillis 3D et les panneaux sandwich avec un cœur en treillis (Figure 1.11c). Sur ces exemples l’échelle macroscopique est implicitement choisie “à taille humaine” mais l’analyse vaut aussi aux petites échelles, ainsi on peut ajouter tous les cristaux pour lesquels l’échelle macroscopique est celle du grain (ou de l’aube pour les aubes monocristallines).

Ces matériaux présentent généralement un comportement mécanique anisotrope⁶. Le nid d’abeille hexagonal est un contre exemple puisque son comportement élastique linéaire classique est isotrope transverse (en élasticité non linéaire ainsi que dans le cadre des milieux continus généralisés le nid d’abeille devient anisotrope).

6. ceci dépend en réalité du rapport d’échelles, en élastodynamique il existe pour tout matériau périodique un rapport de séparation d’échelles en dessous duquel celui-ci devient anisotrope

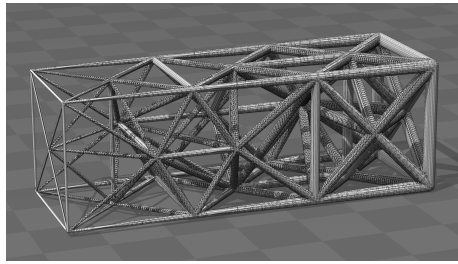


(a) Pavage de Penrose en losanges

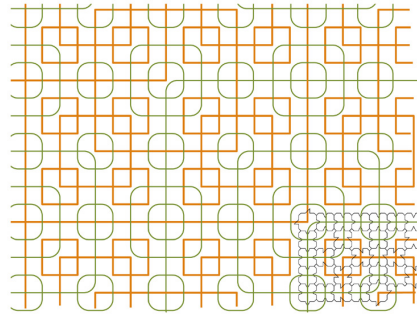


(b) Assemblage de fibres avec symétrie icosaédrale par [DA99]

FIGURE 1.12: Exemple de structures quasi-périodiques



(a) Treillis avec gradient d'épaisseur des barres



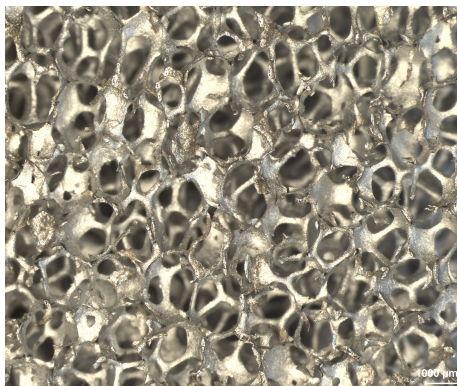
(b) Pavage avec tuiles de Robinson

FIGURE 1.13: Exemple de structures aperiodiques ordonnees

1.1.5.b Quasi périodiques

Les matériaux quasi-périodiques sont des matériaux dont la figure de diffraction est discrète et périodique. Ils sont créés à partir d'une ou plusieurs cellules de base répétées dans l'espace de manière non périodique mais dont toute portion finie du pavage, aussi grande soit-elle, se répète infiniment dans le pavage. Le terme quasi-périodique est apparu avec la découverte des quasi-cristaux. Dans le plan, les pavages de Penrose (cf. [Figure 1.12a](#)) en sont des exemples connus. On peut également citer l'assemblage de fibres avec symétrie icosaédrale par [DA99] (cf. [Figure 1.12b](#)).

Ce type d'organisation mésoscopique induit des propriétés particulières : les treillis de type Penrose sont étudiés pour leur propriétés phononiques intéressantes et en statique pour l'absence de plan de clivage.



(a) Mousse métallique à pores joints



(b) Mousse d'aluminium

FIGURE 1.14: Matériaux architecturés aperiodiques aléatoires

1.1.5.c Apériodiques ordonnés et aléatoires

Les matériaux apériodiques ordonnés peuvent être le résultat d'une optimisation topologique à une contrainte donnée et ne sont alors, généralement pas prévu pour un emploi générique mais particulier. Leur structure est ordonnée mais varie avec la position (Figure 1.13a). On peut également trouver dans ces catégories des pavages comme ceux des tuiles de Wang ou de Robinson (Figure 1.13b). De (très) nombreux exemples peuvent être trouvés dans [GS90].

Enfin, parmi les matériaux architecturés apériodiques aléatoires on trouve principalement les mousses qui peuvent être à pores joints (Figure 1.14a) ou disjoints (Figure 1.14b). Dans une certaine mesure, un béton peut également être vu comme un matériau architecturé apériodique aléatoire.

1.1.6 Aparté sur l'anisotropie élastique 2D et les groupes de symétrie

Les matériaux peuvent présenter des symétries (par exemple dans la sous-section précédente tous les matériaux périodiques et quasi périodiques représentés possèdent des symétries) et conséquemment leurs propriétés physiques (en particulier mécaniques) en sont affectées selon le principe de Curie. On se propose donc ici d'introduire la notion de groupe de symétrie qui va nous aider à comprendre le lien entre symétrie matérielle et anisotropie élastique. Pour plus de simplicité et parce que l'ensemble de l'étude qui sera présentée est restreinte à l'élasticité 2D, on ne présentera que les groupes de symétrie du plan.

1.1.6.a Rappel : élasticité linéaire

Soit un domaine Ω de l'espace occupé par un matériau (éventuellement hétérogène) sur lequel sont définis un champ de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ et un champ de déplacement $\underline{u}(\underline{x})$. On définit le champ de déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \nabla \otimes^s \underline{u}(\underline{x})$$

Le matériau constitutif de Ω a un comportement élastique linéaire si les champs $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$ sont liés en tout point par une relation linéaire :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) \quad ; \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

où $\underline{\underline{C}}$ est un tenseur élastique d'ordre quatre vérifiant les symétries indicelles suivantes :

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jilk}$$

1.1.6.b Les groupes de symétrie du plan

Les groupes de symétrie du plan sont :

- Id, le groupe identité ;
- Z_k , le groupe cyclique avec k éléments générés par une rotation d'angle $\frac{2\pi}{k}$:

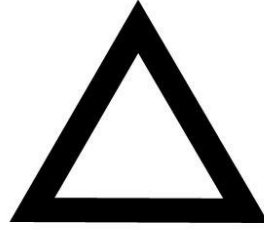
$$Z_k = \left\{ \left(r_{\frac{2\pi}{k}} \right)^p \right\}_{0 \leq p \leq k-1}$$

- $SO(2)$ le groupe spécial orthogonal constitué de toutes les rotations par rapport à l'origine. Il s'agit du groupe cyclique limite pour $k \rightarrow \infty$;

- $Z_2^{\sigma_{\underline{n}}}$ où $\sigma_{\underline{n}}$ note la symétrie miroir par la droite \underline{n} ;
- $D_k^{\sigma_{\underline{n}}}$, le groupe diédral avec $2k$ éléments générés par une rotation d'angle $\frac{2\pi}{k}$ et une symétrie miroir par la droite \underline{n} :

$$D_k = \left\{ \sigma_{\underline{n}} \cdot \left(r_{\frac{2\pi}{k}} \right)^p ; \left(r_{\frac{2\pi}{k}} \right)^p \right\}_{0 \leq p \leq k-1}$$

- $O(2)$, le groupe orthogonal qui est le groupe de toutes les isométries. Il s'agit du groupe diédral limite pour $k \rightarrow \infty$.

(a) Une figure invariante par Z_3 (la figure est chirale)(b) Une figure invariante par D_3 (la figure est achirale, c'est un polygone régulier)FIGURE 1.15: Différence entre les groupes Z_k et D_k

Dans le problème qui nous intéresse, il faut distinguer les groupes de symétrie matériau (cause) et les groupes de symétries physiques *i.e.* du tenseur d'élasticité (conséquence). Les symétries évoquées à la sous-section précédentes sont des symétries matériau et si les matériaux peuvent présenter n'importe quelle symétrie, on sait que les tenseurs d'élasticité de Cauchy du plan ne peuvent présenter que 4 classes de symétrie ⁷ ([HZ96 ; Via97 ; FV14]).

| Nom | Digonal | Orthotrope | Tétraogonal | Isotrope |
|--------------|---------|------------|-------------|----------|
| Classe | $[Z_2]$ | $[D_2]$ | $[D_4]$ | $[O(2)]$ |
| $\#_{indep}$ | 6(5) | 4 | 3 | 2 |

TABLE 1.1: Noms, sous-groupes et nombre de composants indépendants des 4 classes de symétrie des tenseurs élastiques 2D. Le nombre entre parenthèse indique le nombre minimal de composantes de la loi élastique écrite dans une base appropriée.

Remarques :

- En vertu du théorème de Hermann, dans les matériaux présentés à la sous-section précédente, tous ceux présentant une symétrie d'ordre au moins 4 dans le plan (donc par exemple le nid d'abeille, le pavage de penrose, l'assemblage à symétrie icosaédrale) présentent un comportement élastique linéaire de premier gradient isotrope ⁸.
- Lorsque l'on tourne un matériau élastique par rapport à une référence fixe (appareil de mesure, forces extérieures, etc.) le tenseur d'élasticité exprimé par rapport à cette référence va changer. Il est évident qu'une telle transformation ne change pas la nature de la matière. De fait :
 - 1) le matériau élastique est invariant par rapport à une rotation / symétrie miroir ;
 - 2) le tenseur décrivant les propriétés matériau change.

7. La définition d'une classe de symétrie est donnée plus loin.

8. Leur comportement élastique non linéaire ou de second gradient peut être non isotrope, de même que leurs autres propriétés physiques (acoustiques, thermiques, électriques, etc.)

- L'ensemble des tenseurs représentant le même matériau élastique est l'orbite d'un tenseur représentant le matériau élastique dans une orientation donnée. Soit \underline{C}_{\approx} un tenseur d'élasticité

$$O(\underline{C}_{\approx}) = \left\{ \underline{C}_{\approx} \in \mathbb{E}la, \exists Q \in O(2) \mid \underline{C}_{\approx}^* = Q * \underline{C}_{\approx} \right\}$$

avec $O(\underline{C}_{\approx})$ l'orbite de \underline{C}_{\approx} et $\underline{C}_{\approx}^*_{ijkl} = Q_{ip}Q_{jq}Q_{kr}Q_{ls}C_{pqrs}$.

- On définit $\mathbb{E}la_{/O(2)}$ l'espace des matériaux élastiques. Un point de cet espace correspond à un matériau élastique (son image dans $\mathbb{E}la$ est une collection de tenseurs).
- Les invariants d'un tenseur d'élasticité sont des fonctions constantes sur les orbites.
- Une base d'intégrité est un ensemble de fonctions polynomiales ayant les propriétés suivantes :
 - 1) Générateur : Tout polynôme invariant de $\underline{C}_{\approx} \in \mathbb{E}la$, est un polynôme en les éléments de cet ensemble.
 - 2) Séparant : Les éléments d'une base d'intégrité (*IB*) séparent les orbites

$$IB(\underline{C}_{\approx 1}) = IB(\underline{C}_{\approx 2}) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C}_{\approx 2} \in O(\underline{C}_{\approx 1})$$

C'est à dire que $\underline{C}_{\approx 1}$ et $\underline{C}_{\approx 2}$ représentent le même matériau.

1.1.6.c Groupe de symétrie versus classe de symétrie

Un groupe de symétrie d'un tenseur T est l'ensemble des opérations laissant le tenseur invariant

$$\mathcal{G}_T = \{Q \in O(2) \mid Q * T = T\}$$

Dans la définition des éléments de symétrie la notion d'orientation joue. Si l'on regarde l'exemple [Figure 1.16](#), on a $\mathcal{G}_{F_1} \neq \mathcal{G}_{F_2}$ car les lignes miroirs ne sont pas les mêmes. En revanche il s'agit bien du même type de symétrie :



FIGURE 1.16: Influence de l'orientation sur la définition des éléments de symétrie

$$\exists g \in SO(2) \mid \mathcal{G}_{F_2} = g\mathcal{G}_{F_1}g^T$$

C'est à dire que le groupe \mathcal{G}_{F_1} est conjugué à \mathcal{G}_{F_2} . Tous les groupes conjugués à un groupe donné définissent sa classe de conjugaison

$$\mathcal{G}_{F_2} \in [\mathcal{G}_{F_1}]$$

avec $[\mathcal{G}_{F_1}]$ la classe de conjugaison de \mathcal{G}_{F_1} .

En bref :

- Groupe de symétrie : l'orientation importe.
- Classe de symétrie : l'orientation n'importe pas.

Remarque :

| | Objet | Symétrie |
|--------------------|-----------------------------|--------------------|
| Orientation | Tenseur | Groupe de symétrie |
| Modulo orientation | Matériau élastique linéaire | Classe de symétrie |

De fait, la classe de symétrie définit le type de symétrie d'un matériau élastique, alors que le groupe de symétrie définit les symétries d'un tenseur particulier. On peut remarquer que lorsque l'on fait tourner un tenseur, son groupe change mais ni le matériau ni la classe de change.

1.1.6.d Base d'invariants

On cherche donc une⁹ base d'intégrité pour les matériaux élastiques en 2D¹⁰. Pour établir une base d'intégrité explicite, il faut ([DA19]) :

- établir la décomposition harmonique du tenseur ([AAAD20]) (en “déviateurs”¹¹ ;
- calculer les invariants de cette famille de déviateurs élémentaires ([Des+20]).

Une décomposition harmonique du tenseur d'élasticité en 2D \mathbb{C} est la suivante¹² :

$$\mathbb{C} \underset{\approx}{=} \mathbb{D} \underset{\approx}{=} + \frac{1}{2} (\mathbb{1} \underset{\approx}{\otimes} \mathbb{a} + \mathbb{a} \underset{\approx}{\otimes} \mathbb{1}) + K (\mathbb{1} \underset{\approx}{\otimes} \mathbb{1}) + G \mathbb{J} \underset{\approx}{=}$$

avec

- $\mathbb{1} \underset{\approx}{}$ le tenseur identité d'ordre 2 ;
- $\mathbb{I} \underset{\approx}{}$ le tenseur identité d'ordre 4 ;
- $\mathbb{J} \underset{\approx}{=} \mathbb{I} \underset{\approx}{=} - \frac{1}{2} \mathbb{1} \underset{\approx}{\otimes} \mathbb{1} \underset{\approx}{}$ le projecteur déviatorique.

9. On peut noter que le choix d'une base d'intégrité n'est pas unique. Le choix qui est fait ici a été de prendre I_1 et J_1 tels qu'ils correspondent aux modules de dilatation et de cisaillement (K, G). Il aurait également été possible de les choisir relativement aux coefficients de Lamé (λ, μ).

10. Le résultat dépend de la dimension de l'espace physique, cf. [OKA17]

11. On définit un déviateur généralisé de la manière suivante : complètement symétrique, sans trace et tel que $\dim \mathbb{K}^k = 2$ dans le cas général.

12. On peut remarquer cf. note précédente que $\dim \mathbb{D} \underset{\approx}{=} = 2$, $\dim \mathbb{a} \underset{\approx}{=} = 2$, $\dim \lambda = 1$ et $\dim \mu = 1$ ce qui est cohérent puisqu'il faut 6 coefficients pour décrire entièrement un tenseur d'élasticité du plan totalement anisotrope.

\underline{D} , \underline{a} , K et G sont définis par :

$$\begin{aligned}
 D_{ijkl} &= C_{ijkl} - \frac{1}{6} \left(\delta_{ij} C_{kplp} + \delta_{kl} C_{ipjp} + \delta_{ik} C_{lpjp} \right. \\
 &\quad \left. + \delta_{lj} C_{ipkp} + \delta_{il} C_{jpkp} + \delta_{jk} C_{iplp} \right) \\
 &\quad + \frac{C_{ppqq}}{12} \left(5\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk} \right) \\
 &\quad - \frac{C_{ppqq}}{8} \left(3\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk} \right) \\
 a_{ij} &= \frac{1}{12} \left(2C_{ipjp} - C_{ppqq}\delta_{ij} \right) \\
 K &= \frac{1}{4} C_{ppqq} \\
 G &= \frac{1}{8} \left(2C_{ppqq} - C_{ppqq} \right)
 \end{aligned}$$

Une base d'intégrité sur les actions de $O(2)$ est $(I_1, J_1, I_2, J_2, I_3)$ avec ([Des+20]) :

$$I_1 = K \quad ; \quad J_1 = G \quad ; \quad I_2 = \underline{a} : \underline{a} \quad ; \quad J_2 = \underline{D} :: \underline{D} \quad ; \quad I_3 = \underline{a} : \underline{D} : \underline{a}$$

On peut interpréter physiquement les premiers invariants de la manière suivante :

- I_1 est le module de dilatation isotrope du matériau ;
- J_1 est le module de cisaillement isotrope du matériau.

Pour les autres invariants, on peut considérer le diagramme de transition en Figure 1.17 : soit un matériau complètement anisotrope en 2D (donc de classe $[Z_2]$), tous ses invariants sont non nuls et $K_6 = I_2^2 J_2 - 2I_3 \neq 0$.

- a1)** Si $K_6 = 0$, $J_2 \neq 0$ avec $K_6 = I_2^2 J_2 - 2I_3^2$, alors le matériau est orthotrope (donc de classe $[D_2]$);
- a2)** si de plus $I_2 = 0$, alors le matériau est tétragonal (donc de classe $[D_4]$);
- a3)** si de plus $J_2 = 0$, alors le matériau est isotrope (donc de classe $[O(2)]$).
- b1)** Si d'autre part, $J_2 = 0$, $I_2 \neq 0$, alors le matériau est dit R_0 -orthotrope ¹³;
- b2)** si de plus, $J_2 = 0$ alors le matériau est isotrope (donc de classe $[O(2)]$).

Nous verrons plus tard, qu'il existe des méthodes pour déterminer directement ces invariants permettant la reconstruction du tenseur élastique dans une forme normalisée, c'est à dire dans une base bien choisie de sorte que certaines propriétés soient vérifiées (généralement il s'agit d'avoir un maximum de zéros dans l'expression finale). De plus, il est possible de déterminer l'orientation de cette base par rapport à celle ayant servi à la détermination des invariants. Ce dernier point est important car expérimentalement on ne connaît pas forcément l'orientation de l'échantillon par rapport à sa base propre.

13. Le nombre de constantes élastiques indépendantes est de 3 pour ces matériaux (contre 4 pour les matériaux orthotropes classiques) mais ne possèdent que deux axes de symétrie, orthogonaux ([Van02])

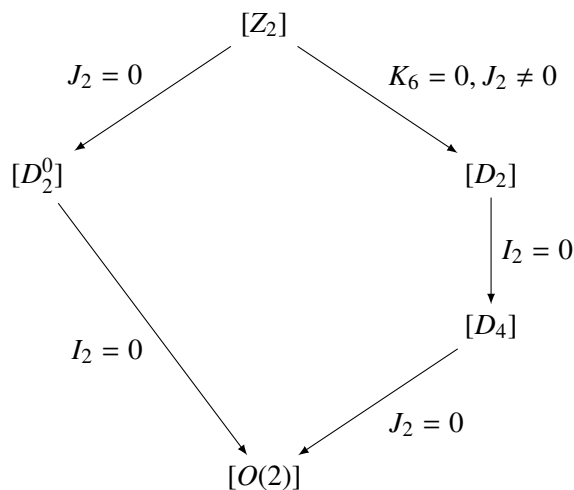


FIGURE 1.17: Diagramme de transition

1.1.7 L'évaluation des performances, une difficulté majeure

De nombreux challenges se posent sur la caractérisation de ces matériaux. On propose ici de les classer en trois familles.

- Design. Un milieu architecturé est conçu pour satisfaire une attente, une fonction. Cette fonction pouvant être émergente, comment relier un design à la propriété attendue ? Si cette question est réglée à partir d'un modèle mathématique ou numérique idéalisé et si un matériau, avec toutes ses imperfections, est obtenu à partir de cette conception idéale ; le matériau réel satisfait-il, valide-t-il les fonctions attendues ? Comment le caractériser ?
- Optimisation. Supposons maintenant que l'on veuille améliorer un design existant, comment réaliser numériquement cette opération sans que le coût numérique associé à la représentation de la mésostructure ne soit exorbitant ?
- Tenue. Supposons enfin que l'on obtienne et réalise un matériau conforme à nos attentes. Comment évaluer les critères de tenue mécanique du matériau architecturé ? Quelle est sa tenue à la fatigue ? Ses modes de ruine ? Sa fonction de seuil plastique ?

Une stratégie possible pour répondre à ces questions consiste à recourir aux techniques d'homogénéisation. En effet, l'homogénéisation peut (si elle est réalisée dans les conditions adéquates) restituer les propriétés émergentes d'un matériau architecturé et permet donc d'évaluer et de valider son comportement effectif. L'homogénéisation permet une forte réduction des coûts de calcul et des techniques d'optimisation y sont adaptées (sous-section 1.1.2). Enfin, l'homogénéisation permet de déterminer les modes de ruine et le seuil plastique d'une structure au prix d'une relocalisation (par exemple sur les approches FE^2 cf.[Yvo19]).

Concernant la représentation des défauts, il "suffit" de les prendre en compte dans la description (analytique ou numérique) du matériau que l'on souhaite homogénéiser. Cependant, si les états géométriques et matière obtenus par les méthodes de fabrication traditionnelles (usinage, moulage, laminage etc.) sont maintenant bien connus, les méthodes additives sont relativement récentes dans

le panel des méthodes de fabrication et leur essor est encore plus nouveau. Les problèmes liés à leur utilisation sont donc encore mal connus et sont l'objet de nombreux travaux. On sait toutefois que les états géométriques ainsi que de santé matière obtenus sont loin d'être optimaux et des variabilités sont observées en fonction

- de la méthode d'impression [Jun+18; Tan+17];
- des caractéristiques de la machine utilisée [BW12];
- des paramètres énergétiques pour la fusion des lits de poudre [PAW16; Wil+19];
- de l'orientation de la dépose de fil [TKP14];
- de la position sur la table d'impression [TKP14].

Ces défauts dépendant d'un grand nombre de paramètres, leur prise en compte dans la description du matériau ne peut se faire sans une étude expérimentale propre à chaque matériau (c'est à dire à chaque triplet matériau(x) constitutif(s) - architecture - procédé). Pour la description des défauts géométriques, on peut envisager une observation tomographique afin d'avoir des volumes élémentaire représentatifs très fidèles au matériau réel. Ceci n'est toutefois pas forcément réalisable pour tous les matériaux architecturés ou toutes les tailles de pièce. Pour la description de la santé matière (limite d'élasticité locale, contraintes résiduelles locales) la mesure en vue de la prise en compte dans un modèle numérique est extrêmement complexe et/ou onéreuse pour un matériau architecturé.

Une seconde approche peut alors paraître pertinente : celle de la réponse expérimentale à la question de la caractérisation macroscopique des matériaux architecturés. Cependant, il est important de se demander quels moyens expérimentaux actuels permettent la détermination de (toutes les) propriétés émergentes des matériaux architecturés.

La réponse à cette question fait l'objet de la section 2) de ce chapitre. La section 3) est quant à elle dédiée à une présentation plus détaillée des méthodes d'homogénéisation et de leur intégration potentielle dans un contexte expérimental. Enfin la section 4) dresse un bilan des possibilités de développement de méthode expérimentale adaptée à la caractérisation du comportement effectif des matériaux architecturés.

1.2 Les essais en mécanique, approche historique et développements récents

Dans cette section on se propose de présenter brièvement et sans aucune intention d'exhaustivité un historique des essais en mécanique ainsi que quelques développements récents dans le but d'en refléter l'évolution générale. Cette présentation se focalisera sur les aspects élastostatiques.

De la manière la plus générale, un essai mécanique est l'observation de la réponse à une sollicitation d'un matériau ou d'une structure dans le but d'en déduire une caractéristique de l'objet observé. De cette définition, trois domaines ressortent : l'observation, la sollicitation et la modélisation (la caractéristique à déterminer). L'apparition de nouveaux modèles de description du comportement entraîne le développement des deux autres axes afin de permettre la détermination de ces nouvelles caractéristiques; cependant l'inverse est également vraie car l'observation de comportements ne pouvant s'expliquer par les modèles existants entraîne la formulation de nouveaux modèles.

1.2.1 Un peu d'histoire

L'expérimentation en mécanique des solides commence assez tardivement¹⁴, aux environs du 16^{ème} siècle, principalement avec Léonard de Vinci qui réalise des expériences sur des fils en tension, des poutres en flexion et en compression ([Vin74; Bal03]) puis Galileo Galilei Linceo qui rédige 'Della Scienza Meccanica' et fait ainsi naître la résistance de matériaux (Figure 1.18a,b images tirées de [Lem01]). On ne parle pas encore ici de loi de comportement mais bien de résistance binaire (rupture ou tenue).

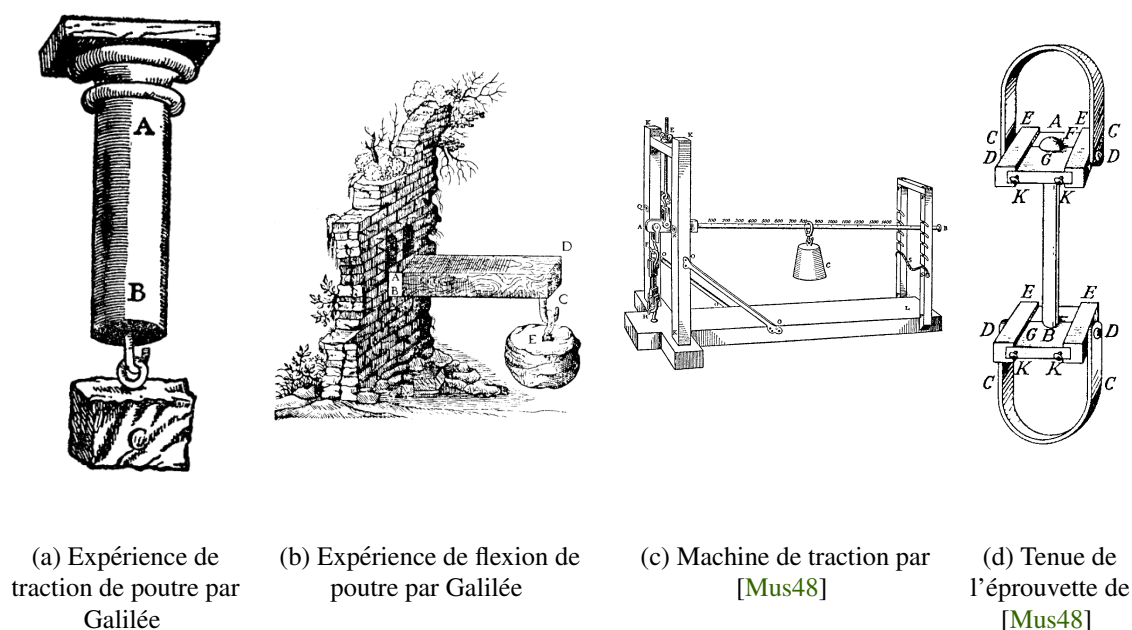


FIGURE 1.18: Illustrations des premiers essais en mécanique des matériaux

Il faut ensuite attendre R. Hooke (1635-1703) pour voir apparaître la première loi de comportement des solides déduite d'essais (1678) puis 1798 pour le premier traité de résistance des matériaux de P.S. Girard et enfin C.A. Coulomb qui va comparer la résistance à la rupture en traction et en cisaillement au travers d'expérimentations [Cou21; Lem01]. À cette même époque, une description d'une "machine d'essai" est faite par [Mus48] (Figure 1.18c) ainsi que la description de l'amarage de l'éprouvette (Figure 1.18d), ce qui montre que déjà, la notion de conditions aux limites était considérée, bien que balbutiante.

À ce stade, les principaux types de sollicitations sont déjà connus et expérimentés (traction / compression, flexion, cisaillement, torsion) bien que les conditions d'essai ne soient pas toujours bien pensées. Les observations restent en revanche très limitées, passant de la simple constatation tenue / rupture à une mesure reportée au compas pour R. Hooke puis à une mesure de l'élongation à la règle (mesure de la déflexion par G.L. Leclerc, Comte de Buffon (1707-1788)). Le vernier (Figure 1.19) inventé en 1631 par Pierre Vernier semble peu ou pas utilisé malgré sa grande précision.

Pendant longtemps les essais restent uniaxiaux. Des développements sont toutefois menés sur l'amélioration des conditions aux limites ainsi que sur la forme des éprouvettes pour rendre la sollicitation plus "pure" et donc améliorer la détermination des paramètres des différents modèles. On cherche alors à réaliser des chargements les plus homogènes possibles. La multi-axialité arrive à la fin du XIX^{ème} avec Lanza ([Lan86]) dans le domaine de la fatigue. Les essais multi-axiaux pour

14. Auparavant, seule, ou presque, l'observation de la nature existait en mécanique des solides

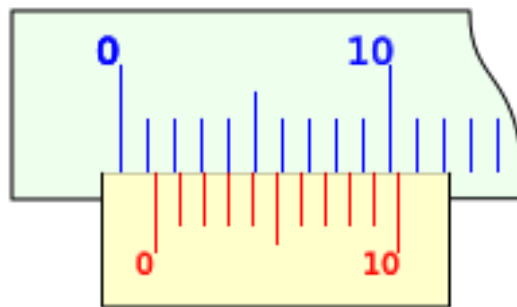


FIGURE 1.19: Vernier “au 1/10” c’est à dire avec une précision au dixième de l’unité principale

des comportements non-linéaires (plasticité) se développent à partir de la seconde moitié du XX^e siècle, lorsque la technologie des machines d’essai (servohydraulique) le permet. Quelque soit le type de sollicitation, il faut remarquer que les conditions limites sont *toujours* des mouvements de corps rigide à l’amarrage (mors rigides) et des conditions de bord libre sur les bords non tenus.

De même, les avancées dans le domaine de l’observation se font tout d’abord discrètes. La photo-élasticité apparaît au début du XIX^e siècle (Sir D.Brewster) mais n’est que très peu utilisée du fait de la difficulté d’enregistrement et de traitement des données. Les extensomètres mécanique font ensuite leur apparition en 1879 et permettent une lecture simple et précise d’une elongation. En 1938 la jauge de déformation est inventée par Arthur C. Ruge et va dominer très largement le domaine de la mesure de déformations. Enfin, avec l’arrivée de l’informatique et l’augmentation des puissances de calcul, une explosion des mesures de champs a lieu en termes de résolution spatiale (2D et 3D) comme temporelle. De plus, de nombreux autres développements sont menés en termes de nature physique des quantités mesurées (mesures thermiques en calorimétrie différentielle à balayage, mesures d’orientations cristallines par diffraction d’électrons rétrodiffusés par exemple).

Au risque d’être un peu caricatural on pourrait donc résumer le contexte de l’expérimentation en élasticité en ce début de XXI^{ème} siècle à des machines d’essai plus ou moins complexes mais toujours rudimentaires en terme de conditions aux limites, tandis que les moyens de mesure sont devenus extrêmement riches.

1.2.2 Quelques moyens d’essai atypiques

Les moyens d’essais ont été conçus en premier lieu pour des matériaux homogènes isotropes (d’abord) puis anisotropes¹⁵. Il n’est alors étonnant qu’ils ne soient pas optimaux pour des matériaux architecturés, hétérogènes par nature. On peut donc envisager des moyens d’essai complémentaires plus adaptés aux matériaux hétérogènes grâce à une sollicitation via des conditions limites autres que des mouvements de corps rigide des mors. On retrouve ainsi dans la littérature quelques développements atypiques visant à l’application de conditions différentes. On peut noter l’apparition de systèmes pour

15. Cela est vrai en mécanique des matériaux mais moins en géo mécanique où les problèmes d’anisotropie apparaissent rapidement.

- améliorer l’homogénéité des conditions aux limites statiques appliquées aux éprouvettes de grande taille ([QC81 ; SC88 ; QB89 ; Oho+89]);
- améliorer l’homogénéité des conditions aux limites cinématiques ([Joe91 ; MO98]) ou l’homogénéité dans la zone utile dans le cas de matériaux anisotropes ([BDK94]);
- augmenter l’hétérogénéité au bord, en ajoutant un bord libre (une entaille) par exemple ou en appliquant des conditions sinusoidales au bord ([Pon18]).

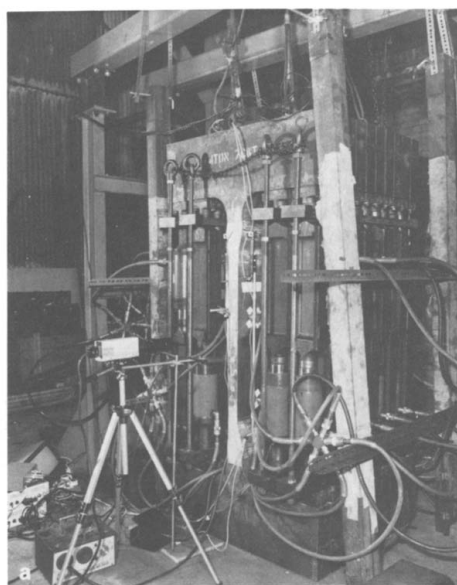
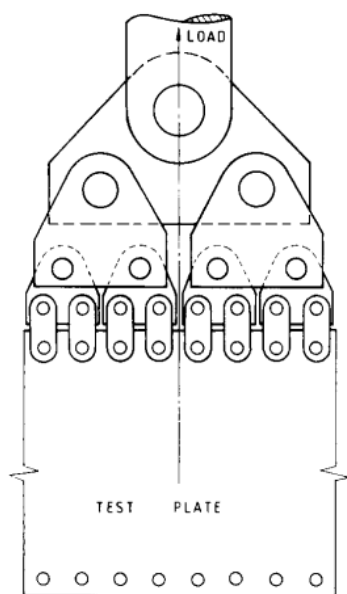
Dans les essais homogènes, le comportement de structure de l’éprouvette est minimisé et permet de ne mesurer que (ou presque) la réponse du matériau, comme si celui-ci était plongé dans un milieu infini. Au contraire, les essais hétérogènes mettent en avant les comportements de structure pour générer des chargements complexes à partir de sollicitations simples.

a. Homogénéité statique

Chez [QC81 ; QB89], la philosophie est d’appliquer un chargement réparti. Le contexte de l’ingénierie nucléaire imposant des éprouvettes avec de grandes dimensions (longueur, largeur, épaisseur), obtenir un chargement correspondant à un état de contrainte homogène au loin lors d’une propagation de fissure (sur une cuve de réacteur, sous pression) est complexe. La solution “classique” consistant à prendre l’éprouvette dans un mors (donc à piloter le déplacement au bord) ne peut fonctionner ici à moins d’utiliser une éprouvette de très grande taille (9 mètres environ).

Deux solutions sont envisagées pour permettre l’obtention d’une contrainte la plus homogène possible :

- solution par palonniers (cf. Figure 1.20a);
- solution à multiples actionneurs (cf. Figure 1.20b).



(a) Système de sollicitation par palonnier

(b) Système de sollicitation à multiples actionneurs

FIGURE 1.20: Solutions envisagées par [QC81] pour le chargement uniforme en effort d’une éprouvette de grande taille

La solution par palonnier présente l'avantage de répartir uniformément la charge de manière intrinsèque (aucun pilotage particulier ni asservissement n'est nécessaire) cependant, la machine est non modifiable si l'on veut tester une éprouvette plus large par exemple. De plus l'application de l'effort par des axes traversant l'éprouvette induit des localisations de contrainte dans cette zone. Enfin, la taille de l'ensemble {actionneur et palonnier} serait pour cette application considérable (quoique moins que la solution éprouvette + mors classique) vu les efforts recherchés : 10 MN.

La solution à multiples actionneurs présente l'avantage d'être très compacte et adaptable aisément à la largeur de l'éprouvette. La répartition de l'effort n'étant pas intrinsèque elle doit être faite via le pilotage des différents actionneurs ce qui est aisé dans ce cas (pression identique dans tous les vérins). C'est donc cette solution qui est retenue par les auteurs. La possibilité d'utiliser ce dispositif afin d'appliquer des champs plus complexes qu'uniformes est notée mais il semblerait que ces possibilités n'aient pas été explorées.

Le travail de [SC88] est la prolongation du travail présenté ci-avant dans le but d'augmenter la capacité de la machine jusqu'à 20 MN. La solution utilisée est la même. On peut noter une volonté de réaliser le même type de dispositif pour des chargements biaxiaux avec une capacité de 50 MN par axe. Ce projet de machine biaxiale ne sera toutefois pas mené à terme. Encore une fois, les auteurs notent la possibilité d'utiliser le dispositif uniaxial afin d'appliquer des champs plus complexes mais de tels essais n'ont pas été conduits.

Les travaux de [Oho+89] sont également motivés par l'ingénierie nucléaire. Leur objectif est de créer une sollicitation de cisaillement plan cyclique dans le but de développer un modèle hystérique du béton armé (Figure 1.21). La problématique est la même que précédemment : celle d'appliquer des conditions limites statiquement homogènes. Cela se fait une fois de plus par l'utilisation de multiples actionneurs.

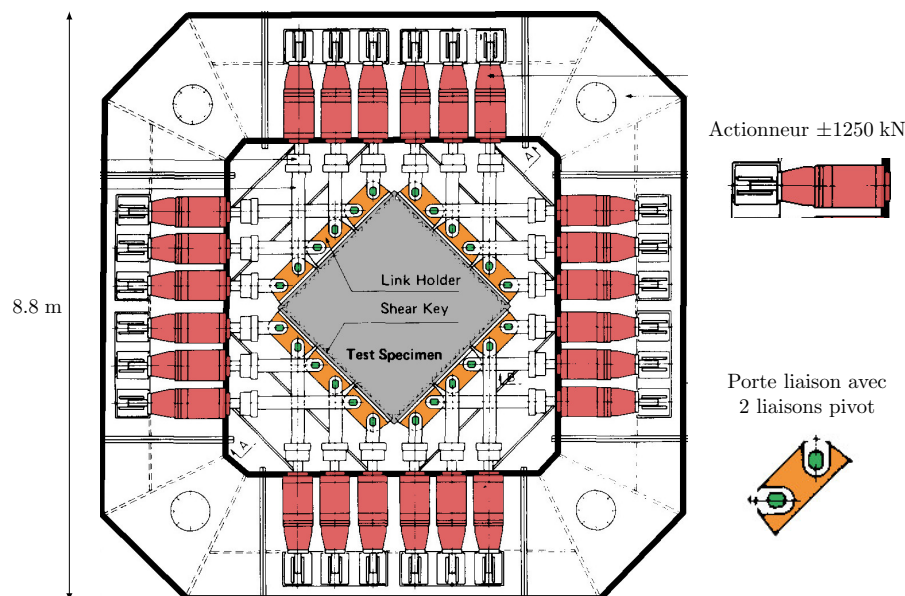


FIGURE 1.21: Dispositif expérimental utilisé par [Oho+89] pour appliquer des chargements de cisaillement plan à des éprouvettes en béton armé de grande taille

Enfin plus tard, on trouve chez [Pon+18] un essai de traction uni-axiale sur des matériaux archi-

tecturés. Un système de palonnier est utilisé afin d'avoir une répartition homogène des efforts de traction sur l'éprouvette tout en laissant libre la contraction / dilatation et flexion cinématique de l'éprouvette (Figure 1.22).

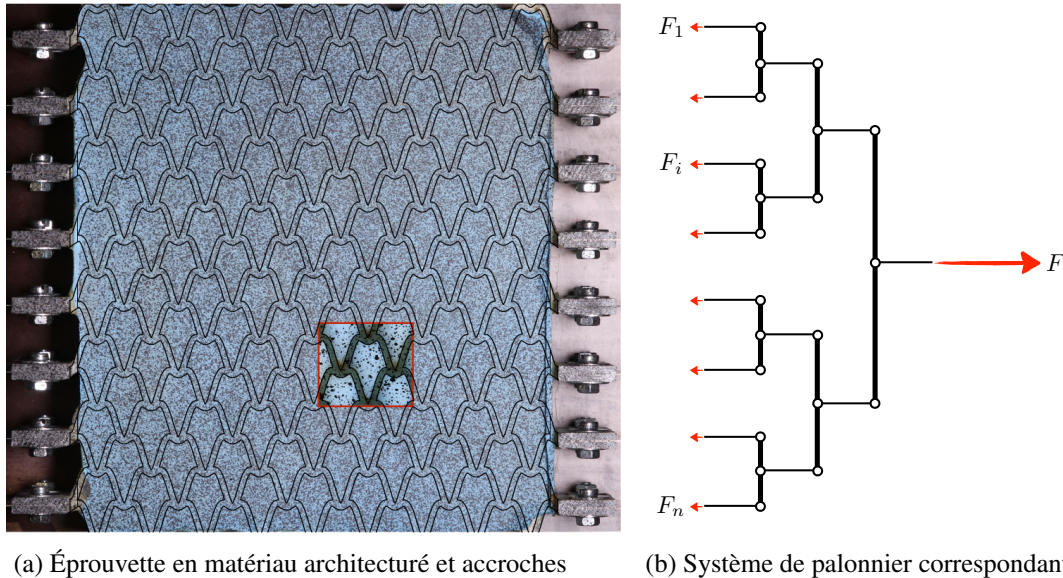


FIGURE 1.22: Essai à effort réparti uniformément sur matériau architecturé par [Pon+18]

Il est à noter que l'usage de palonniers pour des essais mécaniques est assez courant dans le domaine aéronautique (pour les ailes d'avion par exemple Figure 1.23) mais beaucoup plus rare dans le cadre d'essais matériau.



FIGURE 1.23: Palonnier utilisé en aéronautique pour appliquer des chargements répartis sur une aile d'avion

b. Homogénéité cinématique

Le pendant cinématique de cette volonté d'homogénéité des conditions aux limites peut être trouvé dans les essais de cisaillement au cadre pour les textiles ([MO98; Boi+17], cf. Figure 1.24). En effet, bien que cet essai soit simple et s'adapte sur une machine de traction classique, une cinématique de cisaillement pur est imposée sur tous les points du bord grâce à la déformation d'un cadre composé de 4 barres - rigides comparativement au textile - en liaison pivot les unes avec les autres (formant donc un parallélogramme déformable).

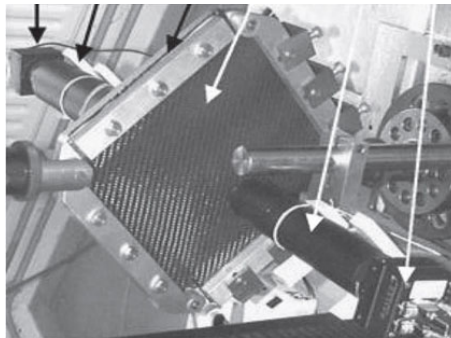


FIGURE 1.24: Essai de cisaillement au cadre sur toile par [Boi+17]

On trouve également une solution de sollicitation homogène cinématiquement chez un industriel, Accupull, qui a développé une machine pour réaliser des essais de bi-extension sur des films plastiques. Les gammes de déformations sont ici très importantes +700% tandis que les gammes d'efforts sont relativement faibles : effort maximum de 2 kN par bord (la sollicitation de cisaillement est absente).



FIGURE 1.25: Essai de bi-extension de films polymères par Accupull (entreprise kairo)

Enfin, dans la thèse de [Joe91] une machine nommée "1 γ 2 ϵ " (Figure 1.26) permet des essais de cisaillement et bi-compression sur des empilements de tubes pour la compréhension du comportement en mécanique des sols. Elle est conceptuellement une combinaison du cadre de cisaillement et des pantographes de Accupull (mais apparaît chronologiquement avant).

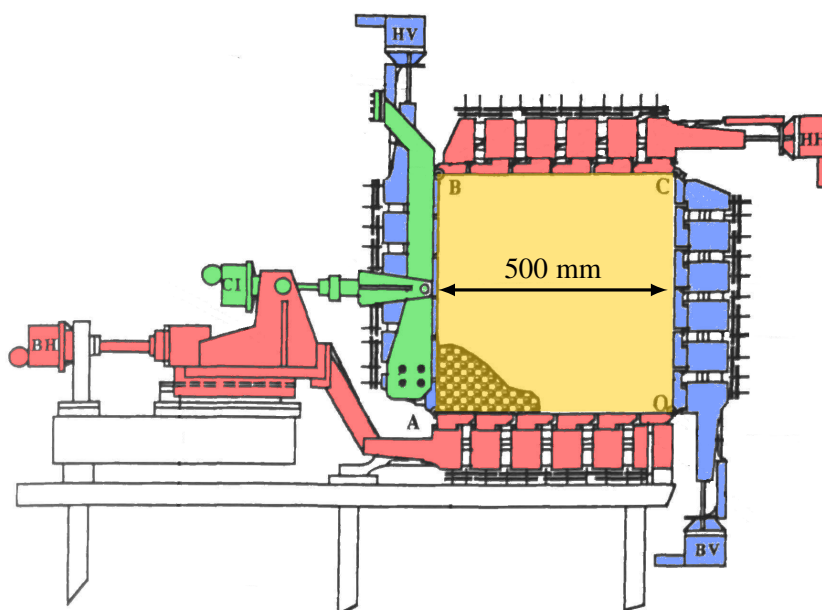


FIGURE 1.26: Machine "1γ2ε" par [Joe91]

La machine est composée de 4 pantographes (Figure 1.27) reliés à leurs extrémités pour former un carré à l'intérieur duquel vient prendre place l'éprouvette. Ces pantographes sont associés à une glissière pour éviter leur flexion due au jeu dans les roulements. Un "système de chariots" est placé entre les pantographes et l'éprouvette pour l'application des conditions aux limites, ce système remplace les mors ou plateaux de compressions sur une machine classique. Ce système permet

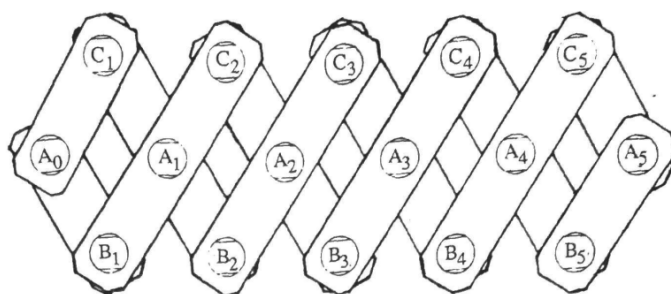


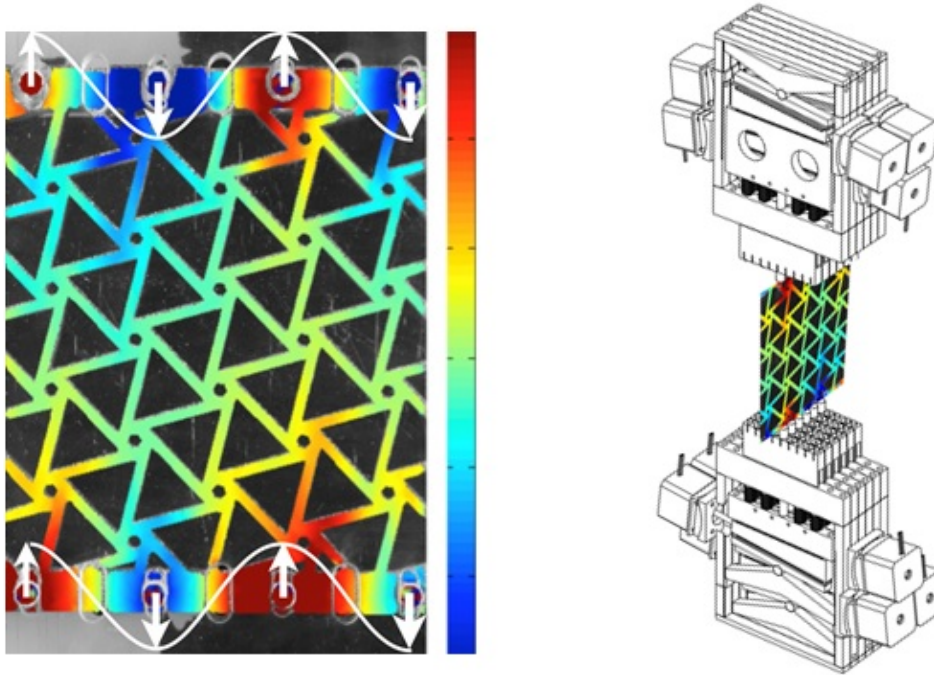
FIGURE 1.27: Pantographe à biellettes de la machine "1γ2ε" par [Joe91]

l'adaptation des bords imposés à tout type de déformation plane et d'obtenir un déplacement linéaire des chariots. Les gammes de déformation sont de l'ordre de -0.2% pour les compressions et 20% pour le cisaillement. Les efforts maximum développés sont de 100 kN par bord.

c. Hétérogénéité

À l'inverse de cette homogénéité, certaines approches recherchent l'hétérogénéité des conditions aux limites. La majorité induit l'hétérogénéité à l'aide d'un bord libre interne (trou), ou externe

(entaille) et vise généralement à identifier d'autres comportements que l'élasticité (propagation de fissure sur des éprouvettes entaillées par exemple). On peut aussi trouver de rares cas où l'hétérogénéité est imposée par le bord extérieur. Par exemple, sur la [Figure 1.28](#) on peut voir la conception préliminaire d'une machine d'essai capable d'imposer des conditions limites enrichies afin de déterminer des rigidités d'ordre supérieur pour une identification d'un modèle de milieu à gradient, le modèle élastique de Cauchy n'étant parfois pas suffisant pour décrire correctement le comportement élastique des matériaux architecturés ([Min65 ; Pon+18]).



(a) Essai à déplacement sinusoïdal au bord réalisé avec un dispositif monté sur une machine uniaxiale (b) Conception préliminaire d'une machine d'essai capable d'imposer des conditions limites enrichies (déplacement constant par morceaux)

FIGURE 1.28: Propositions pour essais hétérogènes permettant de déterminer des rigidités d'ordre supérieur pour une identification d'un modèle de milieu à gradient ([Pon18])

1.2.3 Synthèse

Comme on l'a vu, malgré les quelques exceptions qui ont été présentées (et d'autres qui ne l'ont pas été mais dans le même esprit), la majeure partie des essais élastiques actuels peuvent être qualifiés de "conventionnels" : machines d'essai mono ou bi-axiales réalisant des sollicitations simples (traction, compression, flexion, cisaillement, torsion appliquées via un *mouvement de corps rigide d'un mors*). Avec de tels moyens d'essai, déterminer les propriétés émergentes d'un matériau n'est généralement pas direct mais passe par une identification du comportement à partir de mesure de champ déplacement. Cette méthode nécessite toutefois de faire des hypothèses (potentiellement fortes) sur le comportement local du matériau, ce que l'on souhaiterait éviter. Une autre possibilité pour obtenir les propriétés émergentes est, comme on va le voir dans la section suivante, d'appliquer des conditions aux limites particulières que les machines conventionnelles ne réalisent pas. La section suivante détaille donc le principe de l'homogénéisation ainsi que quelques schémas dans le but de déterminer si des conditions limites adaptées à l'homogénéisation seraient applicables à

un contexte expérimental.

1.3 Homogénéisation

Le but n'est pas ici une présentation approfondie des techniques d'homogénéisation mais une présentation rapide de celles-ci dans le but de pouvoir discuter de leur potentielle transposition à un cadre expérimental.

L'homogénéisation consiste à remplacer un matériau hétérogène par un Matériau Homogène que l'on souhaite Équivalent (MHE). L'équivalence n'est généralement valable que dans une certaine plage de paramètres : rapport de séparation des échelles, niveau de contrainte max, etc. Cela consiste globalement, numériquement (ou parfois analytiquement), à transférer la complexité géométrique sur celle de la loi de comportement ce qui permet de réduire les coûts de calcul. Le sens de "équivalent" peut varier en fonction du type de comportement que l'on souhaite étudier. Dans le cadre de thermodynamique des milieux continus la définition du potentiel permet de caractériser les lois de comportement. De ce point de vue l'équivalence énergétique est naturelle. Les autres grandeurs (cinématiques et statiques) sont ensuite déduites. On pourrait également formuler des critères d'équivalence basés sur d'autres aspects comme la cinématique. Dans le cadre de l'élastostatique linéaire les deux approches sont équivalentes mais rien ne le garantit de manière générale.

Dans cette étude on se limitera toujours à une modélisation élastique linéaire classique. On peut noter dès à présent que les développements faits pourront s'appliquer à un cadre plus large en devant toutefois redémontrer leur validité ¹⁶.

En homogénéisation on considère deux milieux : le MHE et le milieu hétérogène initial. L est l'échelle caractéristique du MHE et l celle de son architecture (Figure 1.3). Les échelles sont dites séparées lorsque $\epsilon_m \rightarrow 0$, ce qui est le cadre classique de l'homogénéisation. Dans les faits, un rapport 1/10 donne une bonne séparation d'échelle pour l'homogénéisation en élasticité (résultats obtenus en dynamique [RPA18]). Lorsque cette séparation est assurée on peut alors déterminer un comportement homogénéisé du matériau architecturé que l'on vient alors appliquer sur le MHE. Les résultats obtenus (contrainte et déformation par exemple) sont représentatifs en moyenne du matériau architecturé c'est à dire que à tout point matériel du MHE correspond un volume Ω de matériau architecturé et que :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}) dV = \langle \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}) \rangle \quad ; \quad \underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{x}}) \rangle \quad (1.1)$$

avec $\underline{\underline{\Sigma}}$ et $\underline{\underline{E}}$ les variables macroscopiques et $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}})$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{x}})$ les variables microscopiques. Le comportement homogénéisé est alors le tenseur élastique $\underline{\underline{C}}^*$ tel que :

$$\underline{\underline{C}}^* : \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\Sigma}}$$

Le but de l'étape d'homogénéisation est de définir ce tenseur tout en respectant le critère d'équivalence choisi.

L'homogénéisation est un sujet vaste mais bien connu en mécanique, tant d'un point de vue théorique que numérique ([GKB10]), et de fait, de nombreuses procédures d'homogénéisation

16. L'utilisation des techniques d'homogénéisation par conditions de bord homogène s'applique également au cas non linéaire [Ilt+15]

existent dans la littérature [MS98; Fey99; BBG01; AS07; SAI11]. Cependant, il faut garder en vue que l'on souhaite discuter de leur transposition à un cadre expérimental. À ce titre, peu d'entre elles sont convenables, en effet, si appliquer un chargement volumique complexe et réaliser la "mesure" du champ de déplacement dans tout le volume sont choses aisées dans un contexte numérique elles le sont bien moins dans le cadre expérimental ; de plus la mesure directe du champ de contrainte n'est pas possible expérimentalement. De ce fait, toutes les approches requérant des chargements trop complexes ou demandant d'accéder à trop d'information ne peuvent pas être envisagées comme candidats à une transposition numérique-expérimental. Ainsi, on ne détaillera par la suite que les stratégies d'homogénéisation par champs moyens (c'est à dire n'utilisant que les moyennes volumiques des champs d'intérêts).

1.3.1 Description de l'éprouvette / VER

L'échantillon de matériau architecturé dont nous cherchons à déterminer le comportement effectif est supposé occuper un domaine carré¹⁷ borné Ω de \mathbb{R}^2 ¹⁸, sa frontière est notée $\partial\Omega$ (Figure 1.29) et $\bar{\Omega}$ sa fermeture. Les points dans Ω sont appelés points matériels et, soit un point de référence spatial O définissant \mathcal{P} un repère de référence de E^2 , les points matériels peuvent être désignés par leur vecteur position \underline{x} de \mathcal{P} . O est pris au coin inférieur gauche, la position et le vecteur normal au bord sont définis dans le Tableau 1.2.

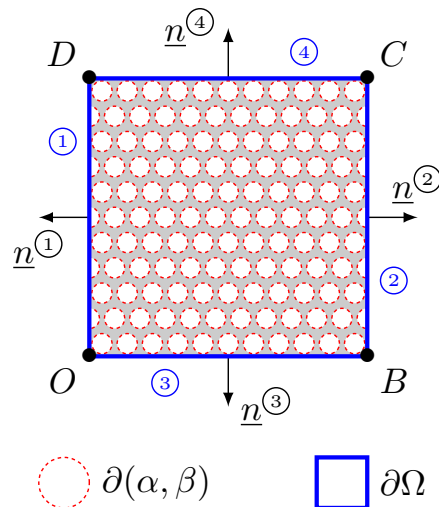
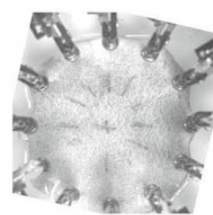
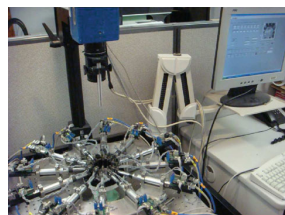


FIGURE 1.29: Définition du domaine considéré Ω

Ω est supposé être rempli par deux phases élastiques ci-après dénommées phase α et β . La frontière entre phases est symbolisée par $\partial(\alpha, \beta)$.

Les propriétés physiques de ces phases élastiques sont supposées définies par deux tenseurs d'élasticité,

Le choix d'un domaine carré, bien que classique relève bien d'un choix, des éprouvettes de formes
 17. différentes pouvant être utilisées comme par exemple des éprouvettes circulaires pour des tests sur la peau [Jor+11]



18. La méthode est indépendante du choix d'une forme pour Ω

| bord | ① | ② | ③ | ④ |
|--------------------------|---|--|---|--|
| $\underline{\mathbf{n}}$ | $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ |
| $\underline{\mathbf{x}}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} L \\ y \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} x \\ L \end{pmatrix}$ |

TABLE 1.2: Valeurs de $\underline{\mathbf{n}}$ et $\underline{\mathbf{x}}$ sur les différents bords

potentiellement anisotropes : $\underset{\approx}{\mathbf{C}}^\alpha$ et $\underset{\approx}{\mathbf{C}}^\beta$. Le tenseur élastique en un point donné $\underline{\mathbf{x}}$ de Ω est décrit par la fonction :

$$\underset{\approx}{\mathbf{C}}(\underline{\mathbf{x}}) = \chi(\underline{\mathbf{x}})\underset{\approx}{\mathbf{C}}^\alpha + (1 - \chi(\underline{\mathbf{x}}))\underset{\approx}{\mathbf{C}}^\beta$$

où χ représente la fonction caractéristique de la phase α , c'est à dire :

$$\chi(\underline{\mathbf{x}}) := \begin{cases} 1, & \text{si } \underline{\mathbf{x}} \in \alpha \\ 0, & \text{si } \underline{\mathbf{x}} \notin \alpha \end{cases}$$

Dans le cas classique de l'homogénéisation, $\underset{\approx}{\mathbf{C}}$ doit être défini positif. Cependant, pour nos besoins nous nous autoriserons

$$\underset{\approx}{\mathbf{C}}^\beta \rightarrow 0$$

afin de pouvoir représenter des pores¹⁹. Cette situation appartient à la catégorie de l'homogénéisation à fort contraste ([Tar89; PS97; AA18]). Cette hypothèse peut présenter des problèmes théoriques et numériques, en effet les propriétés homogénéisées vont dépendre de la manière dont l'approche asymptotique est menée. De plus des effets non locaux peuvent être obtenus. Cependant ces problèmes ne devraient pas se poser dans le cas de l'homogénéisation expérimentale.

On ne considère pas de forces volumiques, les équations d'équilibre pour un problème de Dirichlet s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\underset{\approx}{\mathbf{C}}(\underline{\mathbf{x}}) : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{x}})) = \underline{\mathbf{0}}, & \text{pour } \underline{\mathbf{x}} \in \Omega \\ \llbracket \underline{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\mathbf{x}}) \cdot \underline{\mathbf{n}} \rrbracket = \underline{\mathbf{0}}, & \text{pour } \underline{\mathbf{x}} \in \partial(\alpha, \beta) \\ \underline{\mathbf{u}} = \underline{\bar{\mathbf{u}}} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec la condition de compatibilité cinématique :

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) \otimes \underline{\nabla} + \underline{\nabla} \otimes \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}})), \quad \text{pour } \underline{\mathbf{x}} \text{ sur } \Omega$$

1.3.2 Critère d'équivalence de Hill-Mandel

Maintenant que le problème élastique est posé, il faut choisir un critère d'équivalence pertinent. Comme évoqué précédemment, on prendra ici un critère fondé sur l'énergie élastique : le critère

19. Un des problèmes lorsque $\underset{\approx}{\mathbf{C}}^\beta \rightarrow 0$ est que le champs de déformation n'est plus défini de manière unique dans les pores

de Hill-Mandel ([Hil63]) qui stipule que l'énergie mécanique macroscopique est la moyenne de l'énergie microscopique sur le VER :

$$\langle \underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle = \underline{\Sigma} : \underline{E} \quad (1.2)$$

Notons $CA(\Omega)$ l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles sur Ω et $SA(\Omega)$ l'ensemble des champs de contrainte statiquement admissibles sur Ω .

$$\begin{cases} CA(\Omega) &= \{ \underline{u}' \mid \underline{u}'(\underline{x}) = \underline{\bar{u}}(\underline{x}), \forall \underline{x} \in \partial_C \Omega \} \\ SA(\Omega) &= \{ \underline{\sigma}' \mid \underline{\nabla} \cdot \underline{\sigma}'(\underline{x}) = \underline{0}, \forall \underline{x} \in \Omega \parallel \underline{\sigma}'(\underline{x}) \cdot \underline{n} = \underline{\bar{t}}(\underline{x}), \forall \underline{x} \in \partial_S \Omega \} \end{cases}$$

$\underline{\bar{u}}(\underline{x})$ et $\underline{\bar{t}}(\underline{x})$ étant les conditions de bord cinématiques et statiques appliquées sur $\partial_C \Omega$ et $\partial_S \Omega$ respectivement. Par extension on dira qu'un champ de déformation est CA s'il est le gradient symétrisé d'un champ de déplacement $\underline{u}' \in CA(\Omega)$. Dans ce cas, avec un petit abus de notation, on écrira $\underline{\varepsilon}' \in CA(\Omega)$.

Considérons $\underline{u}'(\underline{x})$, $\underline{\varepsilon}'(\underline{x})$ et $\underline{\sigma}'(\underline{x})$ tels que :

$$\begin{cases} \underline{\varepsilon}'(\underline{x}) = \frac{1}{2} (\underline{u}'(\underline{x}) \otimes \underline{\nabla} + \underline{\nabla} \otimes \underline{u}'(\underline{x})), & \text{avec } \underline{u}' \in CA(\Omega) \\ \underline{\sigma}'(\underline{x}) \in SA(\Omega) \end{cases}$$

Pour tout $\underline{u}', \underline{\sigma}' \in CA \times SA$ on peut définir les quantités suivantes :

$$\begin{cases} \underline{\Sigma}' = \langle \underline{\sigma}'(\underline{x}) \rangle \\ \underline{E}' = \langle \underline{\varepsilon}'(\underline{x}) \rangle \\ \underline{U}' = \underline{E}' \cdot \underline{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\delta \sigma}'(\underline{x}) = \underline{\sigma}'(\underline{x}) - \underline{\Sigma}' \\ \underline{\delta \varepsilon}'(\underline{x}) = \underline{\varepsilon}'(\underline{x}) - \underline{E}' \\ \underline{\delta u}'(\underline{x}) = \underline{u}'(\underline{x}) - \underline{U}' \end{cases}$$

où \underline{U}' est le champ de déplacement moyen modulo un mouvement de corps rigide, tandis que $\underline{\delta u}'$, $\underline{\delta \varepsilon}'$ et $\underline{\delta \sigma}'$ sont, respectivement, les variations du déplacement, de la déformation et de la contrainte autour de leur moyenne. Dans cette analyse $\underline{\sigma}'$ et $\underline{\varepsilon}'$ ne sont pas reliés par une loi constitutive.

L'énergie mécanique associée à ces fluctuations a l'expression suivante :

$$\langle \underline{\delta \sigma}'(\underline{x}) : \underline{\delta \varepsilon}'(\underline{x}) \rangle = \langle \underline{\sigma}'(\underline{x}) : \underline{\varepsilon}'(\underline{x}) \rangle - \underline{\Sigma}' : \underline{E}'$$

C'est à dire que respecter le critère de Hill-Mandel (Equation (1.2)) revient à avoir un travail des fluctuations nul, en moyenne.

Puisque

$$\delta \varepsilon'_{ij}(\underline{x}) = \varepsilon'_{ij}(\underline{x}) - E'_{ij} = \frac{1}{2} (\delta u'_{i,j}(\underline{x}) + \delta u'_{j,i}(\underline{x}))$$

et du fait de la symétrie de $\delta \sigma'$

$$\delta \sigma'_{ij}(\underline{x}) \delta u'_{i,j}(\underline{x}) = \delta \sigma'_{ij}(\underline{x}) \delta u'_{j,i}(\underline{x})$$

le travail des fluctuations peut s'écrire :

$$\langle \underline{\delta \sigma}'(\underline{x}) : \underline{\delta \varepsilon}'(\underline{x}) \rangle = \frac{1}{V} \left[\int_{\Omega} (\delta \sigma'_{ij}(\underline{x}) \delta u'_{i,j}(\underline{x}))_{,j} dV - \int_{\Omega} \delta \sigma'_{ij,j}(\underline{x}) \delta u'_i(\underline{x}) dV \right]$$

L'annulation des forces volumiques

$$\delta\sigma'_{ij,j}(\underline{x}) = \underline{\nabla} \cdot \left[\underline{\tilde{\sigma}}'(\underline{x}) - \underline{\tilde{\Sigma}}' \right] = 0$$

mène à

$$\langle \delta\underline{\tilde{\sigma}}'(\underline{x}) : \delta\underline{\tilde{\varepsilon}}'(\underline{x}) \rangle = \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega} \left(\underline{\tilde{t}}(\underline{x}) - \underline{\tilde{\Sigma}}' \cdot \underline{\mathbf{n}} \right) \cdot \left(\underline{\tilde{u}}'(\underline{x}) - \underline{\tilde{E}}' \cdot \underline{x} \right) dS \quad (1.3)$$

$$= 0 \quad (1.4)$$

Si l'un des deux termes de l'intégrale de l'équation précédente est nul, alors l'équation est vérifiée. Ainsi, les conditions suivantes satisfont Equation (1.2) :

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{t}}(\underline{x}) &= \underline{\tilde{\Sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}} & \forall \underline{x} \in \partial\Omega \\ \text{ou} & & \\ \underline{\tilde{u}}(\underline{x}) &= \underline{\tilde{E}} \cdot \underline{x} & \forall \underline{x} \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (1.5)$$

avec $\underline{\tilde{\Sigma}}$ et $\underline{\tilde{E}}$ uniformes. Ces conditions sont des solutions triviales de l'Equation (1.3) et sont donc chacune suffisantes mais non nécessaires à la satisfaction du critère de Hill-Mandel. En effet, cette équation étant formulée faiblement, une fluctuation périodique des champs (par exemple) n'impacte pas le résultat ; des conditions périodiques au bord (PBC) satisfont également l'Equation (1.2) (le détail est donné en Appendice B).

Les conditions périodiques sont définies de la manière suivante : soient $M_1(\underline{x}_1)$ et $M_2(\underline{x}_2)$ deux points homologues d'une cellule élémentaire (Figure 1.30). Soit Ω un matériau périodique et $\mathcal{R} = \{ \underline{t} = \lambda_i \underline{b}_i, \lambda_i \in \mathbb{Z} \}$ le réseau de périodicité, les \underline{b}_i étant les vecteurs de translation élémentaires. Les points $M_1(\underline{x}_1)$ et $M_2(\underline{x}_2)$ sont homologues si $\underline{M}_1 \underline{M}_2 \in \mathcal{R}$. Les conditions périodiques s'expriment :

$$\begin{aligned} \delta\underline{u}(\underline{x}_1) &= \delta\underline{u}(\underline{x}_2) \\ \underline{\tilde{\sigma}}(\underline{x}_1) \cdot \underline{\mathbf{n}}_1 &= -\underline{\tilde{\sigma}}(\underline{x}_2) \cdot \underline{\mathbf{n}}_2 \end{aligned}$$

avec $\underline{\mathbf{n}}_1$ et $\underline{\mathbf{n}}_2$ les normales en M_1 et M_2 .

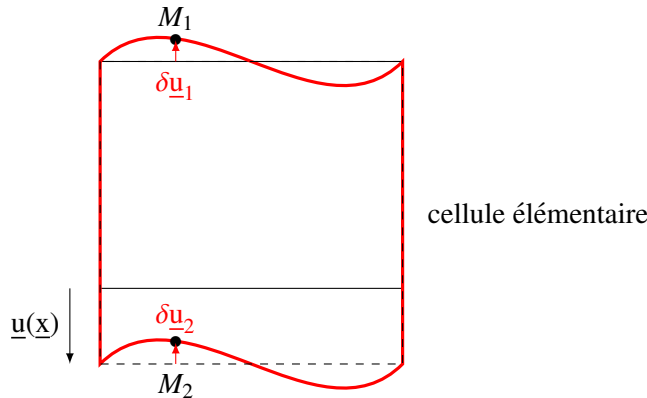


FIGURE 1.30: Définitions de points homologues sur une cellule élémentaire ayant subi une déformation périodique

D'autres perturbations peuvent également satisfaire l'Equation (1.2) comme des conditions mixtes mais ne seront pas évoquées ci-après.

Le premier ensemble de conditions aux limites de l'Equation (1.5) est appelé Static Uniform Boundary Conditions (SUBC), puisque les conditions en effort sur le bord correspondent à celles d'un matériau soumis à un champ de contrainte uniforme. De même, la seconde ligne de l'Equation (1.5) définit les Kinematic Uniform Boundary Conditions (KUBC) puisque les conditions en déplacement sur le bord correspondent à celles d'un matériau soumis à un champ de déformation uniforme. Les conditions de bord périodiques sont appelées PBC.

Il est important de noter que ces approches ne sont pas les seules viables pour réaliser un schéma d'homogénéisation. Elles garantissent (parmi d'autres) simplement le respect du critère d'équivalence de Hill-Mandel entre le matériau hétérogène initial et le milieu homogène équivalent. Leur efficacité et l'exactitude des résultats obtenus par ces conditions limites n'ont pas encore été abordées mais ne sont pas équivalentes :

- Le comportement homogénéisé obtenu par les approches KUBC et SUBC est un comportement **apparent** (couplage matériau / structure) dépendant du rapport de séparation d'échelle ϵ_m dans le VER utilisé : les KUBC donnent une surestimation de la rigidité tandis que les SUBC tendent à donner une sous-estimation ([Hil63; Hue90; Sab92; HH94]). Les résultats donnés par ces deux approches convergent vers le comportement **effectif** (le comportement du matériau sans effet de structure) lorsque $\epsilon_m \rightarrow 0$ c'est à dire lorsque l'on augmente la taille du VER ([Kan+03]). [RPA18] montre que la condition $\epsilon = \frac{1}{10}$ assure une bonne séparation d'échelle (c'est à dire permet la détermination du comportement effectif) pour le comportement dynamique.
- Le comportement homogénéisé obtenu par les approches PBC est, pour les matériaux périodiques, directement le comportement effectif ([MS98; BGG01]), quelle que soit la taille du VER, qui est alors généralement réduit à une cellule²⁰.

1.3.3 KUBC/SUBC et PBC vs essais conventionnels

On se propose ici de représenter explicitement les KUBC et SUBC ainsi que les conditions limites pouvant s'en rapprocher sur des essais conventionnels. On redonne les formules des KUBC et SUBC :

$$\begin{aligned} \text{SUBC} \quad \underline{t}(\underline{x}) &= \underline{\tilde{\Sigma}} \cdot \underline{n} & \forall \underline{x} \in \partial\Omega \\ \text{KUBC} \quad \underline{u}(\underline{x}) &= \underline{\tilde{E}} \cdot \underline{x} & \forall \underline{x} \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (1.6)$$

Traction Dans le cas d'une traction uniaxiale (SUBC) ou d'une extension simple (KUBC), arbitrairement choisie selon la direction 1, les conditions de bords s'écrivent :

$$\begin{aligned} \text{SUBC} \quad \underline{t}(\underline{x}) &= \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{n} & \forall \underline{x} \in \partial\Omega \\ \text{KUBC} \quad \underline{u}(\underline{x}) &= \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{x} & \forall \underline{x} \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (1.7)$$

20. Sur un milieu non périodique l'approche PBC ne donne pas le comportement effectif dès un volume élémentaire de taille 1 cellule toutefois elle reste intéressante du fait que ces conditions aux limites ne sur- (ou sous-) contraignent pas le volume élémentaire.

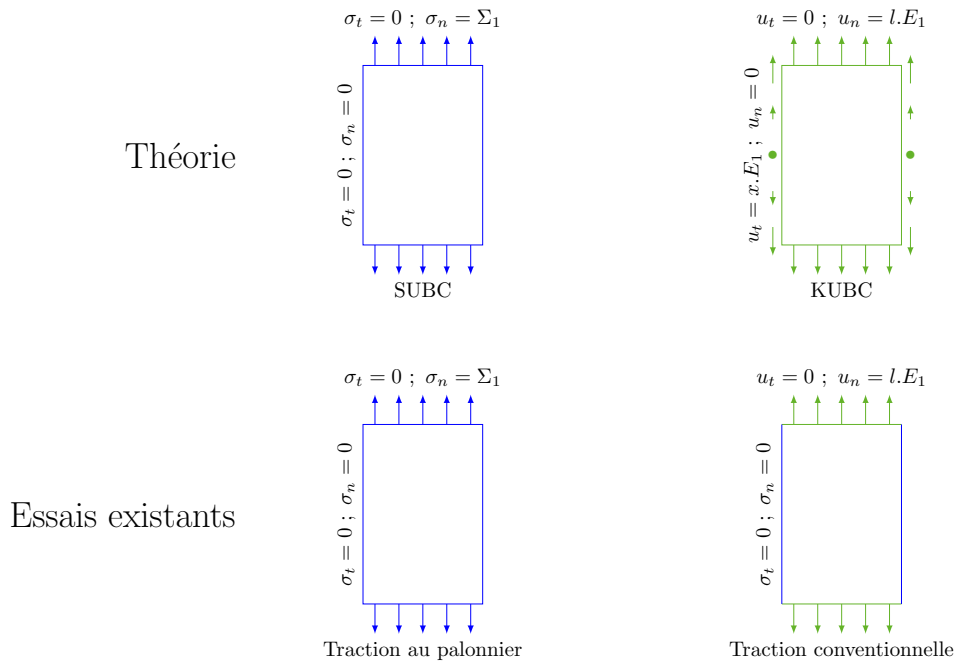


FIGURE 1.31: Représentation schématique des KUBC et SUBC et des conditions limites d’essais conventionnels s’en rapprochant le plus dans le cas d’un chargement de traction uniaxiale.

Code couleur : en bleu les conditions statiques et en vert les conditions cinématiques.

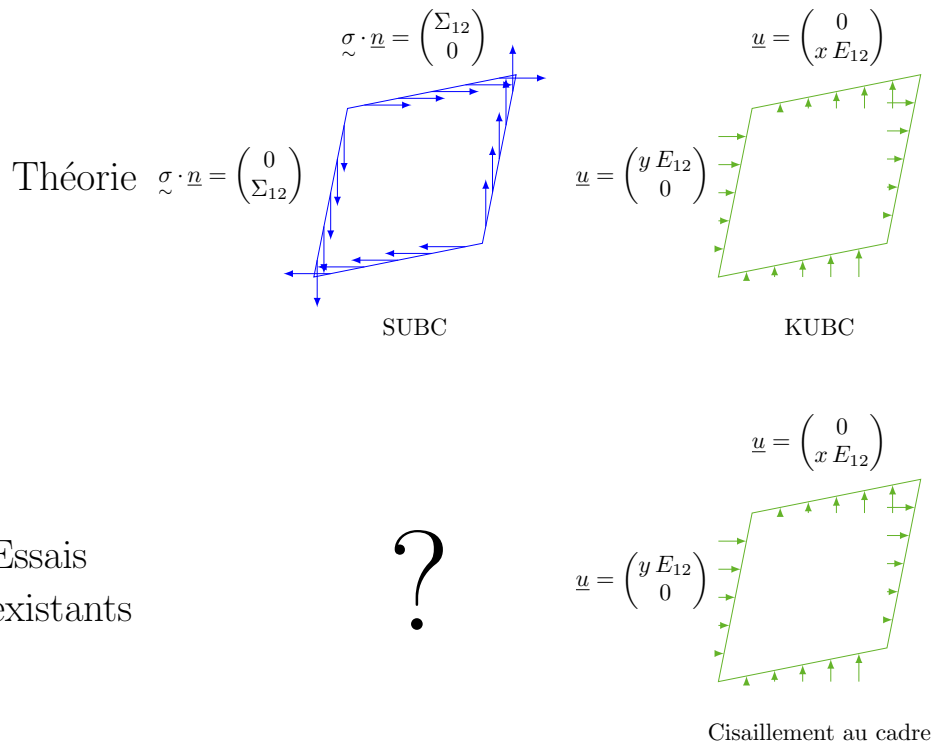


FIGURE 1.32: Représentation schématique des KUBC et SUBC et des conditions limites d’essais conventionnels s’en rapprochant le plus dans le cas d’un chargement de cisaillement

On donne en [Figure 1.31](#) une représentation schématique des KUBC et SUBC et des conditions limites d'essais conventionnels s'en rapprochant le plus. Le cas de la traction SUBC peut s'obtenir exactement avec un essai de traction avec palonnier bien que cet essai ne soit pas conventionnel en mécanique des matériaux il est relativement aisé à mettre en place du fait des conditions de bord libre sur les côtés de l'éprouvette. Pour la traction KUBC en revanche on ne trouve pas d'essai donnant les mêmes conditions de bord puisqu'il faut imposer le déplacement tangentiel et normal sur les côtés de l'éprouvette.

Cisaillement Dans le cas d'un cisaillement, les conditions de bords en statique et en cinématique s'écrivent :

$$\begin{aligned} \text{SUBC} \quad \underline{t}(\underline{x}) &= \begin{bmatrix} 0 & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12} & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{n} & \forall \underline{x} \in \partial\Omega \\ \text{KUBC} \quad \underline{u}(\underline{x}) &= \begin{bmatrix} 0 & E_{12} \\ E_{12} & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{x} & \forall \underline{x} \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (1.8)$$

On donne en [Figure 1.32](#) une représentation schématique des KUBC et SUBC et des conditions limites d'essais conventionnels s'en rapprochant le plus. Le cas du cisaillement SUBC n'a pas d'équivalent en termes d'essai conventionnels, le cisaillement conventionnel bi-axial étant différent puisqu'il a lieu dans un repère principal différent. Pour le cisaillement KUBC en revanche on trouve les essais au cadre qui donnent les mêmes conditions de bord.

Dans la [sous-section 1.2.2](#) quelques moyens d'essai permettant d'appliquer toutes ces conditions ont été présentés. La machine $1\gamma 2\varepsilon$ de [[Joe91](#)] permet en effet d'appliquer des conditions KUBC en traction (et bi traction) et cisaillement. Pour les conditions SUBC il faut se tourner du côté des moyens d'essai multi-actionneurs comme présenté dans [[Oho+89](#)]. Ces conditions sont donc réalisables dans un cadre expérimental bien que de manière non conventionnelle. Les machines citées ne correspondent pas (en termes de précision, de gamme d'efforts et de déformations) aux attentes concernant des essais sur des matériaux architecturés mais sont de bons exemples d'architectures possibles.

Les essais PBC n'ont pas été présentés mais il est assez simple de voir qu'aucun essai conventionnel ne s'en rapproche. En effet le lien entre les points homologues sur une cellule de base impliquant que la rigidité d'un point du bord dépend de la rigidité de son point homologue ce qui n'est évidemment jamais le cas sur un essai classique.

On voit que les essais KUBC et SUBC ne sont donc pas possibles avec des systèmes conventionnels mais que des pistes peuvent être explorées.

1.3.4 Schémas d'homogénéisation KUBC/SUBC/PBC

Réaliser l'homogénéisation d'un matériau élastique linéaire par champs moyens revient à chercher \underline{C}^* tel que $\underline{\Sigma} = \underline{C}^* : \underline{E}$ sur un domaine Ω . Tout d'abord, considérons les expressions matricielles de \underline{E} et $\underline{\Sigma}$ dans \mathcal{R} .

$$[\underline{E}] = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{12} & E_{22} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \quad \text{et} \quad [\underline{\Sigma}] = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

Définissons $\mathcal{M} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ la base canonique orthonormale de \mathbb{R}^3 , dans le contexte, \mathcal{M} sera appelée base de Mandel. Les vecteurs de \mathcal{M} sont obtenus des tenseurs d'ordre 2 de \mathcal{P} via la

construction suivante : considérons l'application linéaire suivante $\phi : S^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}\hat{e}_1 &= \phi(e_1 \otimes e_1), \\ \hat{e}_2 &= \phi(e_2 \otimes e_2), \\ \hat{e}_3 &= \phi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1)\right).\end{aligned}\tag{1.9}$$

Par rapport à \mathcal{M} , on peut définir le vecteur \hat{t} image de \underline{t} par ϕ .

En utilisant la transformation de Mandel, ces matrices peuvent être transformées en vecteurs de \mathbb{R}^3 :

$$[\hat{\underline{E}}] = \begin{pmatrix} \hat{E}_1 = E_{11} \\ \hat{E}_2 = E_{22} \\ \hat{E}_3 = \sqrt{2} E_{12} \end{pmatrix}_{\mathcal{M}} ; \quad [\hat{\underline{\Sigma}}] = \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_1 = \Sigma_{11} \\ \hat{\Sigma}_2 = \Sigma_{22} \\ \hat{\Sigma}_3 = \sqrt{2} \Sigma_{12} \end{pmatrix}_{\mathcal{M}}$$

Le principe de l'homogénéisation par champs moyens est le suivant. Considérons un état moyen de déformation $\hat{\underline{E}}$ et de contrainte $\hat{\underline{\Sigma}}$ sur Ω , et décomposons les sur \mathcal{M}

$$\hat{\underline{E}} = \hat{E}_i \hat{e}_i, \quad \hat{\underline{\Sigma}} = \hat{\Sigma}_i \hat{e}_i$$

On suppose maintenant que $\hat{\underline{\Sigma}}$ est lié à $\hat{\underline{E}}$ par une relation linéaire, en l'occurrence par un tenseur élastique d'ordre 4 constant défini positif $\hat{\underline{\hat{C}}}$

$$[\hat{\underline{\hat{C}}}] = \begin{pmatrix} C_{1111}^* & C_{1122}^* & \sqrt{2} C_{1112}^* \\ C_{1122}^* & C_{2222}^* & \sqrt{2} C_{2212}^* \\ \sqrt{2} C_{1211}^* & \sqrt{2} C_{1222}^* & 2 C_{1212}^* \end{pmatrix}_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} \hat{C}_{11}^* & \hat{C}_{12}^* & \hat{C}_{13}^* \\ \hat{C}_{12}^* & \hat{C}_{22}^* & \hat{C}_{23}^* \\ \hat{C}_{13}^* & \hat{C}_{23}^* & \hat{C}_{33}^* \end{pmatrix}_{\mathcal{M}}$$

Par linéarité, $\hat{\underline{\Sigma}}$ peut s'écrire

$$\hat{\underline{\Sigma}} = \hat{\underline{\hat{C}}} \cdot \hat{\underline{E}} = \hat{E}_i \hat{\underline{\hat{C}}}_i^{\parallel}, \quad \text{avec} \quad \hat{\underline{\hat{C}}}_i^{\parallel} = \hat{\underline{\hat{C}}} \cdot \hat{e}_i$$

où $\hat{\underline{\hat{C}}}_i^{\parallel}$ représente l'état de contrainte moyen associé au champ de déformation unitaire \hat{e}_i . Ce qui revient à décomposer $\hat{\underline{\hat{C}}}$ sur $\{\hat{\underline{\hat{C}}}_i^{\parallel}\}_{1 \leq i \leq 3}$, qui est une base de \mathbb{R}^3 grâce à l'hypothèse "défini positif". Par conséquent

$$\hat{\underline{\Sigma}} = \hat{\Sigma}_j \hat{e}_j = \hat{E}_j \hat{\underline{\hat{C}}}_j^{\parallel}$$

d'où

$$\hat{\Sigma}_i = \hat{\underline{\hat{C}}}_i^{\parallel} \cdot \hat{e}_i = \hat{E}_j \hat{\underline{\hat{C}}}_j^{\parallel} \cdot \hat{e}_i$$

ce qui signifie que

$$\hat{C}_{ij}^* = \hat{e}_i \cdot \hat{\underline{\hat{C}}}_j^{\parallel}$$

ou, de manière plus explicite

$$[\hat{\underline{\hat{C}}}] = \begin{pmatrix} \hat{\underline{\hat{C}}}_1^{\parallel} \cdot \hat{e}_1 & \hat{\underline{\hat{C}}}_2^{\parallel} \cdot \hat{e}_1 & \hat{\underline{\hat{C}}}_3^{\parallel} \cdot \hat{e}_1 \\ \hat{\underline{\hat{C}}}_1^{\parallel} \cdot \hat{e}_2 & \hat{\underline{\hat{C}}}_2^{\parallel} \cdot \hat{e}_2 & \hat{\underline{\hat{C}}}_3^{\parallel} \cdot \hat{e}_2 \\ \hat{\underline{\hat{C}}}_1^{\parallel} \cdot \hat{e}_3 & \hat{\underline{\hat{C}}}_2^{\parallel} \cdot \hat{e}_3 & \hat{\underline{\hat{C}}}_3^{\parallel} \cdot \hat{e}_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}\tag{1.10}$$

Aucune hypothèse n'ayant été faite sur les conditions aux limites, l'approche décrite est viable pour les schémas SUBC, KUBC et PBC puisque la différence entre ces schémas vient des conditions limites. Les trois schémas sont donnés de manière synthétique ci-après.

KUBC

1. On impose une déformation élémentaire $\underline{\tilde{E}}$ par des conditions de bord, donc on impose un déplacement linéaire en position :

$$\underline{u}_d(\underline{x}) = \underline{\tilde{E}} \cdot \underline{x} \quad ; \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega$$

Ces conditions sont détaillées et représentées dans la sous-section précédente.

2. On mesure le champ de contrainte résultant $\underline{\hat{\sigma}}^{\mathbb{1}}(\underline{x})$.
3. On calcule le champ de contrainte moyen $\underline{\hat{\Sigma}}^{\mathbb{1}}$ et les produits scalaires associés pour en déduire $\underline{\hat{C}}^*$ via l'Equation (1.10).

SUBC

1. On impose une contrainte élémentaire $\underline{\tilde{\Sigma}}$ par des conditions de bord, donc on impose un effort constant par bord :

$$\underline{t}_d(\underline{x}) = \underline{\tilde{\Sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) \quad ; \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega$$

Ces conditions sont détaillées et représentées dans la sous-section précédente.

2. On mesure le champ de déformation résultant $\underline{\hat{\varepsilon}}^{\mathbb{1}}(\underline{x})$.
3. On calcule le champ de déformation moyen $\underline{\hat{E}}^{\mathbb{1}}$ et les produits associés pour en déduire $\underline{\hat{S}}^*$ (tenseur de souplesse homogénéisé) via l'Equation (1.10) écrite en souplesse.

PBC

1. On impose la périodicité des conditions aux limites sur une cellule unitaire :

$$\begin{cases} \underline{u}(\underline{x}) - \underline{u}(\underline{x} - \delta\underline{x}) = \underline{\tilde{E}} \cdot \delta\underline{x} \\ \underline{t}(\underline{x}) = -\underline{t}(\underline{x} - \delta\underline{x}) \end{cases} \quad ; \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_+ \text{ (def sur Figure 1.33)}$$

avec $\delta\underline{x}$ la différence de position entre deux points homologues (cf. Figure 1.30 pour définition des points homologues). Ainsi si l'on pave l'espace avec la cellule déformée, les champs physiques sont continus aux frontières entre les cellules.

2. On mesure le champ de contrainte résultant $\underline{\hat{\sigma}}^{\mathbb{1}}(\underline{x})$.
3. On calcule le champ de contrainte moyen $\underline{\hat{\Sigma}}^{\mathbb{1}}$ et les produits associés pour en déduire $\underline{\hat{C}}^*$ via l'Equation (1.10).

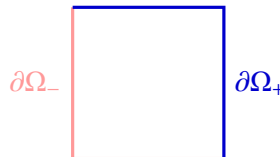


FIGURE 1.33: Définition de $\partial\Omega_-$ et $\partial\Omega_+$

Ces trois méthodes d'homogénéisation ne sont pas équivalentes en termes de résultats obtenus pour le tenseur homogénéisé ni pour les moyens à mettre en œuvre pour les adapter à un cadre expérimental. Ces deux points sont discutés en synthèse de ce chapitre.

1.3.5 Quid d'obtenir directement des invariants ?

Avant de passer à la dernière section de ce chapitre présentant un bilan de ce qui a été exposé jusqu'ici, il peut être intéressant de faire un retour sur les invariants des tenseurs d'élasticité. Comme on l'a vu en [sous-section 1.1.6](#), déterminer des invariants plutôt que des valeurs particulières du tenseur d'élasticité dans une base donnée semble pertinent puisque l'on connaît une base d'intégrité, c'est à dire un ensemble d'invariants élémentaires caractérisant de manière unique un matériau élastique. De plus, comme vu précédemment à la [sous-sous-section 1.1.6.d](#), l'annulation de certains invariants caractérise la classe de symétrie du matériau.

Deux stratégies de détermination des invariants sont envisageables :

- a) Mesure du tenseur via 3 essais puis détermination des invariants à partir de celui-ci ;
 - b) Mesure directe des invariants via 4 essais.
- a) Les approches KUBC, SUBC et PBC présentées permettent de déterminer l'expression du tenseur élastique d'un matériau par rapport à une base. La détermination des invariants se fait alors via les formules données dans la [sous-sous-section 1.1.6.d](#).
- b) Considérons deux éprouvettes d'un matériau élastique anisotrope prélevé d'un même échantillon de départ selon deux directions différentes (cf. [Figure 1.34](#)). On prendra la première orientation comme référence (angle nul) et on définit θ l'angle entre les deux orientations de découpe.

Introduisons maintenant les expressions du tenseur des contraintes et de l'énergie élastique en fonction de l'angle θ :

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}(\theta; \tilde{\varepsilon}) &= \tilde{\sigma}(\theta; \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}) = \tilde{\mathbb{C}}(\theta) : \tilde{\varepsilon} \\ W(\theta; \tilde{\varepsilon}) &= W(\theta; \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}) = \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon} : \tilde{\mathbb{C}}(\theta) : \tilde{\varepsilon}\end{aligned}$$

avec

$$\tilde{\mathbb{C}}(\theta) = Q * \mathbb{C}$$

le tenseur élastique tourné de l'angle θ . On rappelle ici la forme de l'énergie élastique pour un matériau anisotrope :

$$2W = D_{ijkl} \varepsilon_{ij}^d \varepsilon_{kl}^d + G \varepsilon_{pq}^d \varepsilon_{pq}^d + a_{pq} \varepsilon_{pq}^d \varepsilon_{rr} + K \varepsilon_{pp} \varepsilon_{qq}$$

l'exposant d indique que l'on prend le déviateur du tenseur, soit en 2D :

$$\tilde{\varepsilon}^d = \tilde{\varepsilon}^d - \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\varepsilon}^d) \mathbf{1}$$

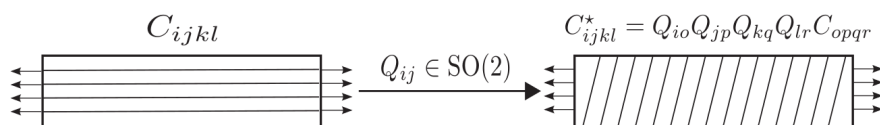


FIGURE 1.34: Deux éprouvettes d'un matériau élastique anisotrope prélevé d'un même échantillon de départ selon deux directions différentes

I_1 est l'énergie élastique associée à une déformation équi-biaxiale :

$$I_1 = K = \frac{1}{2}W(0; 1, 1, 0)$$

Pour calculer J_1 il faut tout d'abord imposer un cisaillement puis séparer les parts isotropes et anisotropes. Pour éliminer la part anisotrope, on réalise le même chargement sur l'éprouvette tournée²¹ :

$$J_1 = G = \frac{1}{4} \left(W(0; 0, 0, 1) + W\left(\frac{\pi}{4}; 0, 0, 1\right) \right)$$

Les autres invariants mesurent des aspects anisotropes, leur détermination fait donc intervenir le tenseur des contraintes :

$$I_2 = \left\| \tilde{\sigma}^d(0; 1, 1, 0) \right\|^2$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \left(\left\| \tilde{\sigma}^d(0; 0, 0, 1) \right\|^2 + \left\| \tilde{\sigma}^d\left(\frac{\pi}{4}; 0, 0, 1\right) \right\|^2 \right) - 8J_1^2$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme de Frobenius. Pour l'invariant restant I_3 qui est un invariant joint, la détermination se fait en deux temps. Tout d'abord on détermine l'expression de $\tilde{\mathbf{a}}$:

$$\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\sigma}^d(0; 1, 1, 0)$$

Et l'on se sert des valeurs déterminées comme sollicitations du problème. On a alors avec $\tilde{\mathbf{a}} =$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & -a_1 \end{pmatrix} :$$

$$2W(0; a_1, -a_1, a_2) = \tilde{\mathbf{a}} : \tilde{\sigma}(0; a_1, -a_1, a_2) = D_{ijkl}a_{ij}a_{kl} + Ga_{pq}a_{pq}$$

soit

$$I_3 = 2W(0; a_1, -a_1, a_2) - J_1J_2$$

Il est intéressant de noter que les quatre premiers invariants étant obtenu par des sollicitations classiques (traction équi-biaxiale et cisaillement) ils peuvent être déterminés grâce à des moyens conventionnels (avec le recours à une approche inverse) tandis que la détermination du dernier nécessite l'imposition de conditions aux limites potentiellement plus complexes, que les moyens d'essai conventionnels ne sont nécessairement en mesure d'appliquer.

Une approche similaire avec des conditions en effort peut être menée pour déterminer le tenseur de souplesse $\tilde{\mathbb{S}}$. Plus de détails sont donnés dans [AR16].

Au vu de ces résultats, la mise en place d'un essai d'homogénéisation via à un dispositif permettant l'application de conditions aux limites de type KUBC ou SUBC paraît pertinent puisqu'il deviendrait possible de mesurer directement les invariants de la base d'intégrité sur des résultats expérimentaux, ce qui n'est pas le cas pour des essais plus standards.

21. Si le moyen d'essai utilisé permet de faire tourner les directions principales du chargement on peut conserver la même éprouvette et faire tourner le chargement.

1.4 Synthèse sur la caractérisation des propriétés émergentes des matériaux architecturés dans un cadre expérimental

On a vu en [section 1.1](#) que les matériaux architecturés présentent un comportement émergent et qu'il ne suffit donc pas de caractériser leur matériau constitutif pour connaître leur comportement mais qu'il faut déterminer leur comportement effectif (souvent anisotrope) pour évaluer leurs performances. Dans la [section 1.2](#) un historique des techniques expérimentales ainsi que quelques développements dans le cadre des essais élastiques statiques ont été donnés. La comparaison des conditions limites théoriques requises par l'homogénéisation et les conditions aux limites expérimentales a montré un manque de dispositifs concernant la caractérisation de propriétés émergentes. Enfin en [section 1.3](#) le principe de l'homogénéisation ainsi que le détail des schémas d'homogénéisation par champs moyens ont été exposés dans l'optique de réaliser un dispositif d'essai permettant l'application d'un de ces schémas.

On se propose donc dans cette section de faire un bilan de ces méthodes et de leur potentielle transposition à un contexte expérimental puis de réaliser des tests sur la pertinence de cette approche en caractérisant les limites intrinsèques à une transposition expérimentale pour déterminer leurs éventuelles criticités.

1.4.1 Comparaison et choix d'une approche d'homogénéisation

Les méthodes d'homogénéisation par champs moyens sont les plus pertinentes vis-à-vis d'une transposition à un cadre expérimental. Ces trois approches (KUBC, SUBC, PBC) décrites précédemment ne sont pas équivalentes, le [Tableau 1.3](#), présente une comparaison des différentes méthodes d'homogénéisation par champs moyens en regard d'une adaptation à un contexte expérimental. Bien que l'approche PBC donne de meilleurs résultats, la complexité de son implémentation expérimentale nous détournera de ce choix, de plus les KUBC et SUBC permettent de faire varier le rapport de séparation d'échelle si besoin est. Les deux autres approches sont complémentaires et relativement équivalentes en termes de complexité d'implémentation. La nécessité de "mesurer" (relever, connaître) la contrainte moyenne sur le volume pour l'approche KUBC (et donc de faire un choix de comportement matériau) pourrait nous encourager à nous en détourner et à choisir l'approche SUBC. Cette dernière, au contraire, permet une mesure simplifiée mais la répartition de charge est techniquement complexe. Notre choix s'est porté sur l'approche KUBC²², ce qui mène à des choix forts de conception. Une étude complémentaire sur une approche SUBC représenterait un apport important à ce travail.

22. nous verrons en [sous-section 2.2.3](#) qu'il est possible de déterminer cette contrainte moyenne sans hypothèse sur le comportement.

23. Cette mesure est techniquement possible en surface par une analyse en corrélation d'images, il faut alors faire un choix sur la cinématique (cinématique élastique linéaire par exemple)

24. Il est nécessaire ici de faire une hypothèse forte, en effet, le champ de contraintes n'est pas accessible en expérimental, pour le "mesurer" il faut donc réaliser une mesure du champ de déformation (par corrélation d'images par exemple et en faisant des hypothèses sur la cinématique) puis faire une hypothèse sur le comportement du matériau afin d'en déduire le champ de contrainte.

| | | PBC | | SUBC | | KUBC | |
|---------------|------------------|--------------------------------------|-------|---------------------------------------|-------|--------------------------------------|-------|
| | | Description | Diff. | Description | Diff. | Description | Diff. |
| Charg. | Ensemble Type | $\partial\Omega$ Dépl. Interdep. | 3 | $\partial\Omega$ Effort unif. | 2 | $\partial\Omega$ Dépl. lin. | 1 |
| Mesure | Ensemble Type | Ω Contrainte ²⁴ | 2 | Ω Déformation ²² | 1 | Ω Contrainte ²³ | 2 |

TABLE 1.3: Comparaison des différentes méthodes d’homogénéisation par champs moyens. La “difficulté” notée de 0 (simple) à 3 (complexe) est un critère subjectif mais issu du savoir faire d’expérimentateurs et représente les difficultés techniques estimées pour leur implémentation ou le besoin d’hypothèses fortes.

1.4.2 Résultats préliminaires

Bien que tout soit à concevoir, quelques limitations et imperfections semblent devoir apparaître lors du passage à l’expérimental et il faut s’assurer que ces limitations ne sont pas critiques du point de vue de la méthode. Tout d’abord, la discrétisation des conditions aux limites sera difficilement évitable, car seul un nombre fini de points peut être piloté lors d’un essai. Les études numériques réalisées par calculs éléments finis sont également des cas discrétisés (par le maillage) mais à un niveau beaucoup plus fin que ce qu’il sera possible d’obtenir expérimentalement. D’autre part, les conditions limites en déplacement appliquées lors d’un essai sont nécessairement imparfaites, il convient donc de mener une étude de sensibilité à ces imperfections pour la rédaction d’un cahier des charges approprié.

Discrétisation des conditions aux limites

Pour déterminer l’influence de la discrétisation des conditions aux limites sur la détermination des termes du tenseur d’élasticité homogénéisé, on mène l’étude suivante. On considère une éprouvette carrée de taille 10x10 cellules d’un matériau architecturé dont la phase de matière est constituée d’un matériau homogène élastique linéaire sur laquelle on vient appliquer au bord des conditions de type KUBC discrétisées : sur chaque bord 10 zones d’accroche (autant que de cellules) sont définies. Tous les nœuds inclus dans cette zone voient leur déplacement imposé \underline{u}_{d_i} à la valeur du déplacement théorique du point au centre de la zone (M_i de coordonnées x_i et y_i) :

$$\underline{u}_{d_i} = \tilde{\underline{E}} \cdot \underline{r}_i \quad ; \quad \underline{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

avec $\tilde{\underline{E}}$ un tenseur de déformation homogène non nulle. La situation décrite est représentée en [Figure 1.35](#). Les calculs sont réalisés sous Castem 19 en élasticité linéaire HPP avec une hypothèse de déformations planes, une étude antérieure sur la finesse du maillage (éléments T3) a permis d’obtenir une solution convergée (à environ 8.10^5 ddl), ce point ne sera pas développé plus avant.

La procédure utilisée est celle présentée en [sous-section 1.3.4](#). Afin d’avoir un point de comparaison, un calcul analogue est mené, sur le même maillage en utilisant le module d’homogénéisation par conditions périodiques présent dans Castem, les résultats donnés par ce calcul seront considérés comme des références par la suite. La contrainte moyenne est déterminée par l’intégrale de la contrainte locale sur le volume de matière de l’éprouvette que l’on vient pondérer par la fraction volumique de matière. Cette méthode est explicitée dans [\[BBG01\]](#) pour le cas de matériaux

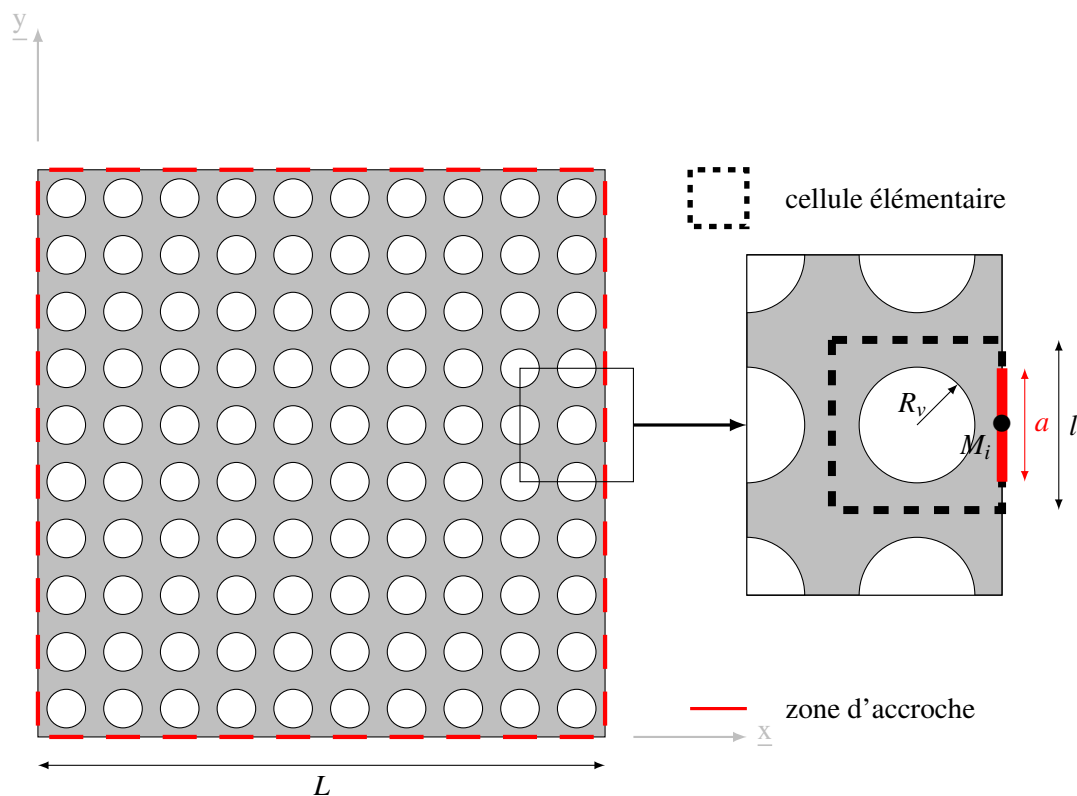
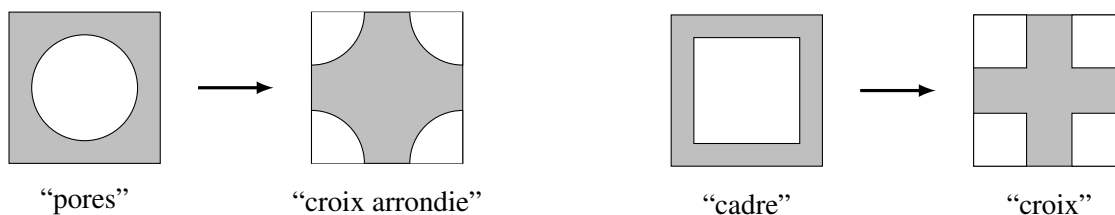


FIGURE 1.35: Conditions de simulation pour faire apparaître l'effet de la discrétisation des conditions aux limites pour l'homogénéisation par schéma KUBC d'une éprouvette en ABS (zone grise) avec vides (zones blanches)

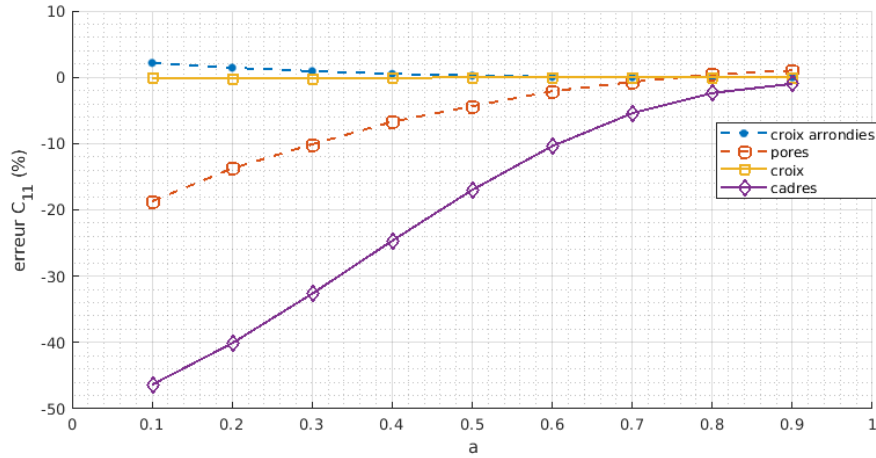
présentant des pores.

Différentes situations sont considérées en

- modifiant la longueur des zones d'accroche a ;
- modifiant la taille du trou central R_v ;
- modifiant la géométrie interne : pores rectangulaire plutôt que ronde par exemple ;
- modifiant la définition de la cellule élémentaire sur un même matériau en la faisant glisser d'une demi longueur caractéristique) :



On trace en Figure 1.36 l'erreur relative sur C_{11}^* en fonction de a pour les différentes géométries testées.

FIGURE 1.36: l'erreur relative sur C_{11}^* en fonction de a

Certains cas donnent de grands écarts, c'est le cas par exemple pour les inclusions rectangulaires avec application de la condition limite au droit du pore (éprouvettes "cadres"). Les écarts sont, dans ce cas, attendus ; la déformée associée, (cf. Figure 1.37a) montre en effet une forte localisation de la déformation dans la première rangée de cellules et une déformation plus faible ailleurs, la conditions limite n'est donc pas "bien transmise" aux couches internes. Toutefois, même dans ce cas on peut voir que la solution discrétisée se rapproche sensiblement de la référence lorsque a tend vers l .

A contrario, les cas où la condition limite est appliqué au droit des sections importante de matière (cas croix et croix arrondies) donnent de bons résultats avec une erreur faible ($< 1\%$), ce qui est en accord avec l'observation de la déformée (cf. Figure 1.37b).

Imperfection des conditions aux limites

La discrétisation des conditions aux limites ne représentant pas un obstacle majeur, une étude sur l'impact de l'imperfection des conditions aux limites est menée afin de donner des contraintes de dimensionnement au dispositif d'essai. Pour cela on reprend les simulations précédentes et on vient perturber les conditions aux limites par l'ajout d'un défaut en position aléatoire (équiréparti) :

$$\underline{u}_d = \underline{E} \cdot \underline{x} + \underline{v}(\underline{x}) \quad ; \quad \underline{v}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \text{ aléatoire}$$

avec $v_x \in \left[-\frac{e}{2}; \frac{e}{2}\right]$ et $v_y \in \left[-\frac{e}{2}; \frac{e}{2}\right]$, e étant le défaut maximal entre deux points consécutifs.

On trace en Figure 1.38 l'erreur relative sur C_{11}^* pour la géométrie "pores circulaires" en fonction du niveau d'erreur ajouté. On voit que l'erreur est linéaire en fonction de l'amplitude des CL

Modification du nombre de cellules dans le VER

Une question importante est celle du nombre de cellules dans le VER. Jusqu'à présent, il a toujours été noté qu'une séparation d'échelles méso / macro d'environ 1/10 était suffisante pour obtenir le comportement effectif du matériau. Ce qui se traduit par l'utilisation d'éprouvettes de 10x10 cellules élémentaires associées à une discrétisation des KUBC sur 10 points par bord. Toutefois il est

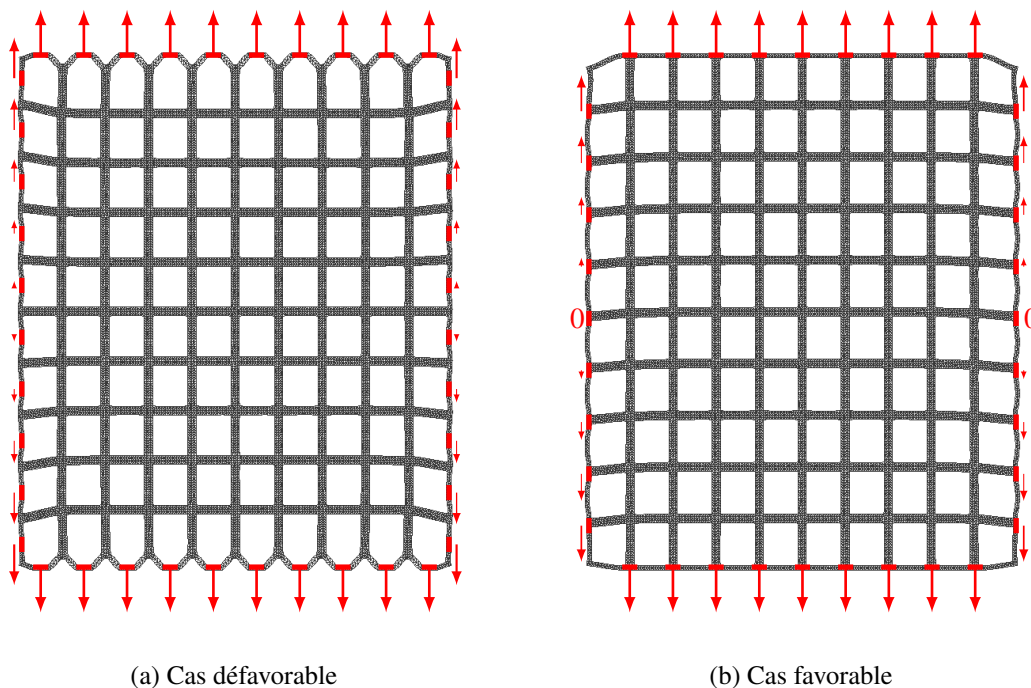


FIGURE 1.37: Déformées du VER à inclusions rectangulaire selon la position des zones d'accroche

intéressant de savoir s'il est possible de modifier ce nombre de cellules, sans modifier l'architecture de la machine. La question est donc la suivante : la modification du nombre de cellules dans le VER impacte-t-elle le comportement homogénéisé obtenu, toutes choses étant égales par ailleurs (géométrie de la cellule élémentaire, discrétisation des conditions aux limites) ? Et si oui, à quel

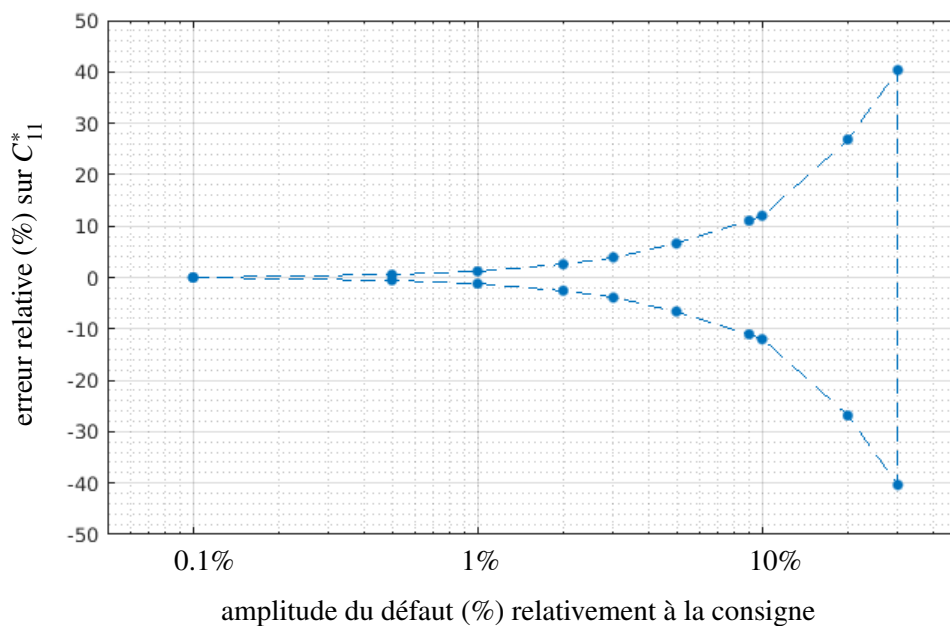


FIGURE 1.38: Enveloppe des erreurs relatives commises sur la valeur de C_{11}^* pour différentes amplitudes d'erreur aléatoire sur 20 tirages.

point ?

Une étude est menée sur la géométrie “pores circulaires”. On trace en [Figure 1.39](#) l’erreur relative commise sur la valeur de C_{11}^* pour différentes tailles d’éprouvettes. La valeur théorique exacte utilisée pour la comparaison est celle trouvée avec une approche PBC non discrétisée. On voit que la valeur apparente de C_{11}^* est très peu affectée par la modification du nombre de cellules (au maximum 0,2%) sur cette géométrie.

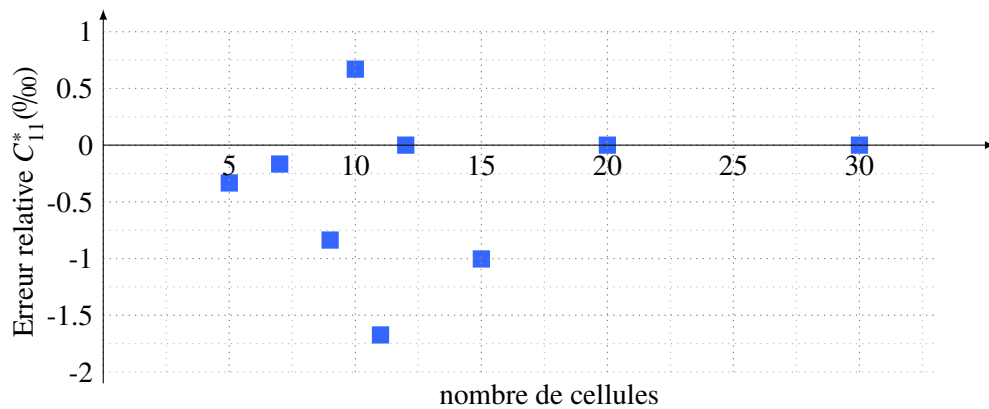


FIGURE 1.39: Erreur relative de la composante C_{11} en % pour des VER de différentes tailles à discrétisation des conditions limites constante

Bilan de l’étude préliminaire

Les résultats préliminaires qui ont été exposés montrent que

- la discrétisation des conditions aux limites est envisageable dans le cadre d’un schéma d’homogénéisation KUBC sans nécessairement présenter de dégradation forte des résultats obtenus (valeurs du tenseur d’élasticité) ;
- le choix de la cellule de base donc de l’emplacement de la zone d’accroche sur le motif périodique joue un rôle important sur la qualité des résultats, mais les cas pathologiques semblent relever du bon sens ;
- il est nécessaire de réaliser, avant tout essai, une étude numérique grossière (sans prise en compte des défauts de la mésostructure) pour déterminer l’impact de la discrétisation sur la détermination des coefficients pour éviter les cas dégénérés.
- l’imperfection des conditions aux limites induit comme attendu une perturbation sur les coefficients homogénéisés. Sur l’exemple illustré, une erreur en position de 2% de la consigne induit une variation d’environ 2% sur la valeur de C_{11}^* , c’est cette valeur de 2% que l’on retiendra pour le dimensionnement ;
- des essais sur différentes tailles de mésostructures peuvent être envisagés puisque les coefficients du tenseur d’élasticité homogénéisé semblent peu impactés par l’utilisation d’éprouvettes formées de différents nombres de cellules élémentaires.

Cette relative robustesse aux limitations et imperfections inhérente au domaine expérimental permet d’envisager la conception d’une machine KUBC pour réaliser des essais d’homogénéisation.

1.4.3 Rédaction d'un cahier des charges

Dans cette dernière sous-section on se propose de résumer très grossièrement les éléments donnés dans ce chapitre et de les formaliser sous la forme d'un cahier des charges. De plus, il est nécessaire de cadrer de manière restreinte l'utilisation souhaitée de la machine *en vue de son dimensionnement*. En effet, des conditions claires et spécifiques vont être nécessaires à l'évaluation de fonctions objectifs pour la conception. Le domaine d'étude pour le dimensionnement de la machine KUBC est donc le suivant :

- on considère des comportements élastiques linéaires sous hypothèse de petites perturbations dans le plan ;
- les matériaux testés sont obtenus par impression 3D polymère voire métallique ;
- la rigidité globale du matériau architecturé est 10 à 100 fois plus faible que celle du matériau constitutif.

Ainsi :

- pour obtenir une bonne qualité de la discrétisation des conditions aux limites, 10 points d'application par bords seront pris ;
- la fabrication des éprouvettes en impression 3D donne les dimensions atteignables dans le plan (dimensions classiques des tables d'impression 3D) : $300 \times 300 \text{ mm}^2$;
- pour éviter les risques de flambement tout en conservant un comportement assimilable à un comportement 2D, l'épaisseur de l'éprouvette est prise égale à environ 20 mm ;
- la gamme cinématique est prise pour permettre une caractérisation du comportement élastique de matériaux architecturés. On retiendra la valeur de 2% de déformation selon chaque direction ;
- la gamme statique est déduite de la gamme cinématique et de la raideur présumée des matériaux utilisés.

Ces paramètres sont rappelés en [Tableau 1.4](#), un cahier des charges plus complet est donné en [Appendice C](#).

Ce cadre va permettre d'évaluer les choix de conception et de dimensionnement. Toutefois il est évidemment envisageable (et souhaitable) d'utiliser la machine créée pour d'autres applications.

| type | valeur |
|---|-------------------------------|
| taille éprouvette dans le plan | $300 \times 300 \text{ mm}^2$ |
| épaisseur éprouvette | 20 mm |
| nombre de cellules | 10 |
| gamme de déformation ($\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$) | $\pm 2\%$ |
| gamme de déformation (ε_{xy}) | $\pm 2\%$ |
| erreur en déplacement | $< 2\%$ gamme totale |
| gamme statique | 200 N par point et par axe |

TABLE 1.4: Caractéristiques générales, extraites du cahier des charges (cf. [Appendice C](#))

Les matériaux architecturés présentant des échelles d'organisation de la matière mésoscopique, leur intégration à des simulations éléments finis passe généralement par une étape d'homogénéisation. Toutefois la grande variété de défauts qu'ils contiennent du fait de leur méthodes de fabrication remet en question les méthodes d'homogénéisation numérique classique. Pour palier cela, un essai d'homogénéisation va être développé. L'analyse des procédés expérimentaux existants [section 1.2](#) et des techniques d'homogénéisation [section 1.3](#) ainsi qu'une étude préliminaire de faisabilité [sous-section 1.4.2](#) permet la construction du cahier des charges du dispositif dont un extrait est donné en [Tableau 1.4](#).

Le chapitre suivant s'attache à lier concept et réalité technologique afin de respecter au mieux ce cahier des charges

Chapitre 2

De l'idée à la matière

Au cours du chapitre précédent, à la section 1.2 sur l'homogénéisation nous avons vu que deux difficultés majeures étaient présentes pour la réalisation d'un essai d'homogénéisation de type KUBC :

- l'imposition de conditions aux limites particulières ;
- la détermination de la contrainte moyenne dans le volume via des informations accessibles dans un contexte expérimental.

En section 1.3 nous avons vu que certaines propositions technologiques présentes dans la littérature permettent de répondre, partiellement, à la première contrainte. Nous verrons donc dans ce chapitre comment un développement de ces idées dans le cadre qui nous intéresse permet de satisfaire cette exigence. La seconde contrainte sera, quant à elle, abordée d'un point de vue mathématique, en projetant et découpant la contrainte sur les bords.

Malgré cette séparation des idées et des méthodologies de résolution ces deux questions sont liées et si les mathématiques dictent ce qu'il est nécessaire d'implémenter (en terme de capteurs par exemple), les possibilités technologiques orientent le traitement du problème. Pour plus de clarté, chaque contrainte sera traitée dans une section particulière mais il faut garder à l'esprit que les deux démarches sont en réalité imbriquées.

L'organisation du chapitre est donc la suivante : 1) choix technologiques génériques répondant à la première problématique exposée ; 2) traitement de la seconde problématique et impact sur l'instrumentation et le pilotage ; 3) choix technologiques résultants et ; 4) dimensionnement du dispositif d'essai. Cette quatrième section fera l'objet d'un prolongement dans le chapitre suivant. Le travail exposé dans ce chapitre ainsi que le suivant a fait l'objet d'une publication [DPA20].

2.1 Philosophie du pilotage

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, différentes stratégies peuvent être utilisées pour appliquer des conditions aux limites riches, cinématiquement comme statiquement. On choisit ici de regrouper ces stratégies en deux grandes catégories :

- pilotage local ;
- pilotage global.

Cette dichotomie semble en effet pertinente ici, car comme nous le verrons ci-après, elle oriente fortement les choix technologiques de l'architecture machine.

Pour bien distinguer les deux, posons une définition :

- **pilotage local** : chaque variable (statique ou cinématique) du point de contrôle (assimilées à des degrés de liberté (ddl) par la suite) au bord de l'échantillon (ou au sein de l'échantillon) a un actionneur dédié. Tous les ddl sont donc potentiellement indépendants, que cette indépendance soit utilisée ou non. La loi de pilotage utilisée peut alors lier les différents ddl si cela est désiré. Ce concept est illustré en Figure 2.1a.
- **pilotage global** : le nombre d'actionneurs est inférieur au nombre de degrés de liberté au bord (ou au sein) de l'échantillon et un mécanisme permet de distribuer le pilotage (en effort ou en déplacement) aux différents degrés de liberté. Les ddl dépendant du même actionneur sont donc mécaniquement liés par une relation figée ou au plus reconfigurable par un changement d'architecture. Ce concept est illustré en Figure 2.1b.

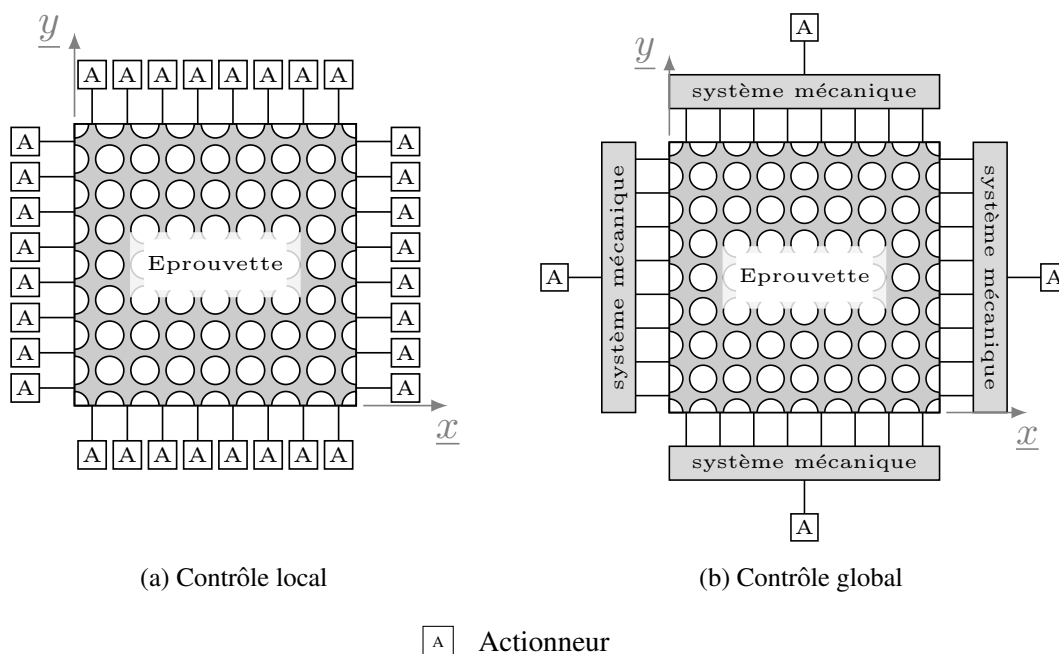


FIGURE 2.1: Schéma de principe des pilotages local et global

Pour faire un choix, arrêtons nous quelques instants pour regarder en détail les avantages et inconvénients de ces deux approches.

2.1.1 Pilotage local

La stratégie du pilotage local est, par essence, très polyvalente puisque tous les degrés de liberté sont indépendants et que de nombreux types d'actionneurs se pilotent aussi bien en effort qu'en déplacement (au prix d'un asservissement) ce qui permettrait de réaliser les deux approches complémentaires (KUBC et SUBC) sur une même machine. En outre, des conditions plus complexes, telles que, par exemple, des Quadratic Uniform Boundary Condition¹, ou encore des conditions limites avec des longueurs caractéristiques variables pourraient être appliquées.

1. Utilisées pour de l'homogénéisation au second gradient ([MAY20]) ou pour identifier des paramètres d'un milieu micro polaire ([Che+09]).

Les désavantages d'un tel pilotage, bien qu'étant moins évidents n'en sont pas moins importants. La plupart étant liés à la caractéristique inhérente du nombre d'actionneurs (l'extrait de cahier des charges donné en [sous-section 1.4.3](#) donne ici 80 actionneurs !).

Tout d'abord, le pilotage (et donc l'asservissement) parallèle d'un grand nombre d'actionneur peut poser problème. En effet même si la gestion de boucles d'asservissement est relativement aisée la connexion de 80 systèmes acquisition/actionneur est, elle, technologiquement un peu lourde à mettre en place.

L'encombrement est le vrai problème pour de tels systèmes, en effet dans les dimensions et gammes d'effort recherchées, les vérins hydrauliques du commerce sont surdimensionnés (en taille et en capacité), les pneumatiques et les électriques trop encombrants. Ce problème avait d'ailleurs également été rencontré par [Ebe95] qui avait dû faire réaliser des vérins sur mesure (alors que la machine présentée ne possédait *que* 24 vérins).

On peut de plus noter qu'un grand nombre d'actionneurs dégage nécessaire une chaleur importante au niveau de l'électronique de puissance ainsi qu'au niveau des actionneurs eux mêmes. Un système refroidissement dédié peut donc être indispensable pour des essais sur des matériaux sensibles à la température.

Dernièrement, et dans une moindre mesure, cette stratégie représente, conceptuellement, une réponse complexe à un problème simple.

2.1.2 Pilotage global

Une approche par pilotage global est quant à elle bien moins polyvalente. Le choix d'une imposition cinématique (comme chez [Joe91] et Accupull cf. [sous-section 1.2.2](#)) ou statique (comme chez [QC81] et [Pon+18] cf. [sous-section 1.2.2](#)) est définitif; une telle machine ne saurait en aucun cas être utilisée dans l'approche duale. De plus la loi de répartition du pilotage est physiquement inscrite dans les rapports de longueur du système mécanique de répartition est ne peut donc être modifiée sans une reconfiguration de la machine.

Malgré cela, en plus d'éviter le problème d'encombrement précédemment évoqué, cette stratégie représente une réponse cohérente (réponse mécanique à un problème mécanique) et, sur le principe, simple².

Le but de cette étude est de réaliser un démonstrateur mais aussi de proposer une conception qui permette à d'autres laboratoires de s'équiper pour une somme raisonnable. À ce titre, la voie d'un pilotage global semble également plus indiquée.

2. Bien que le choix de l'architecture du "système mécanique" ne sera fait qu'en [section 2.3](#) on peut dès à présent subodorer (via les solutions adoptées par [Joe91] et Accupull) qu'il s'agira de pantographes puisqu'un réseau 2D de pantographes remplit exactement les conditions voulues (cf [SAI1]). Cette idée sera développée plus avant en [section 2.3](#).

On peut alors noter le côté méta-approche que cela représente puisque, pour réaliser l'homogénéisation élastique linéaire (*i.e.* de premier gradient) d'un matériau on va l'inclure dans une structure ayant un comportement caractéristique d'un matériau de type "second gradient" ([SAI1]). On peut alors se demander si cette approche est généralisable : pour homogénéiser un milieu d'ordre n , faut-il le plonger dans un milieu d'ordre $n + 1$?

2.1.3 Bilan

Finalement la voie de l'approche globale est choisie pour les raisons évoquées plus-haut. Ce choix d'architecture de pilotage doit s'accompagner d'un choix d'instrumentation capable de donner une mesure de la contrainte moyenne dans le volume de l'éprouvette. La détermination cette contrainte fait l'objet de la section suivante mais on peut dès lors imaginer deux familles de solutions pour la mesure en faisant l'analogie avec le pilotage : globale ou locale. Ces deux voies sont schématisées en Figure 2.2.

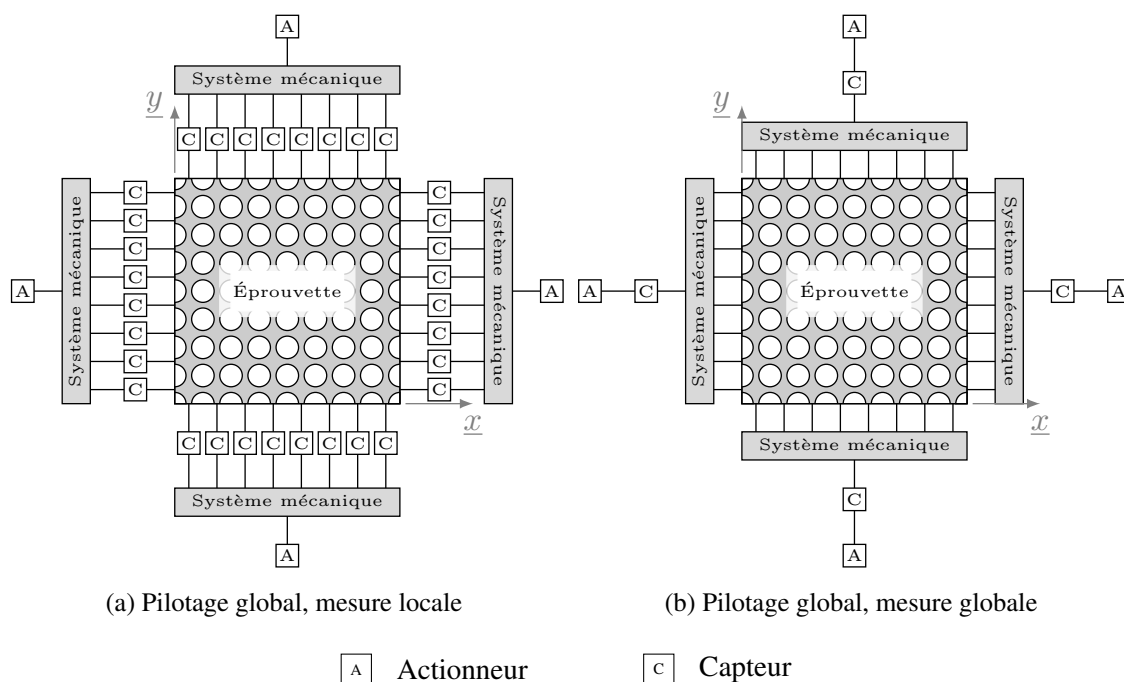


FIGURE 2.2: Schéma de principe des mesures locale et globale

2.2 Philosophie de l'instrumentation

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de s'assurer de la faisabilité de la détermination de la contrainte moyenne dans le volume de l'éprouvette $\tilde{\Sigma}$. En effet, à première vue le champ $\underline{\sigma}(\underline{x})$ doit être connu pour cela et, si sa détermination est simple dans le cadre d'une simulation numérique, cette information n'est pas directement mesurable dans un cadre expérimental. Il va donc falloir déterminer $\tilde{\Sigma}$ à l'aide d'informations plus pauvres que la connaissance du champ de contrainte en tout point. Nous verrons dans cette section que cela est possible sous certaines conditions.

2.2.1 Projection sur les bords

Par définition, on a :

$$\tilde{\Sigma} = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \underline{\sigma} dV \quad (2.1)$$

On va forcer la symétrie du terme de droite de l'Equation (2.1) en réécrivant l'équation :

$$\tilde{\Sigma} = \frac{1}{2V} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} + \sigma_{ji}) dV \quad (2.2)$$

Cette symétrisation, inutile ici, permet de conserver une expression symétrique tout au long du développement, ce qui ne serait pas le cas sinon. Une fois cette étape préliminaire faite, on peut projeter l'intégrale sur le bord :

$$2V\tilde{\Sigma} = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} + \sigma_{ji}) dV \quad (2.3)$$

$$= \int_{\Omega} (\sigma_{ik}\delta_{kj} + \sigma_{jk}\delta_{ki}) dV \quad (2.4)$$

$$= \int_{\Omega} (\sigma_{ik}x_{j,k} + \sigma_{jk}x_{i,k}) dV \quad (2.5)$$

$$= \int_{\Omega} ((\sigma_{ik}x_j)_{,k} + (\sigma_{jk}x_i)_{,k}) dV - \int_{\Omega} (\sigma_{ik,k}x_j + \sigma_{jk,k}x_i) dV \quad (2.6)$$

$$= \int_{\partial\Omega} ((\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \otimes \underline{x} + \underline{x} \otimes (\underline{\sigma} \cdot \underline{n})) dS \quad (2.7)$$

Du fait de l'absence de forces de volume, $\underline{\nabla} \cdot \underline{\sigma}$ s'annule dans l'Equation (2.6) tandis que le premier terme est transformé en intégrale sur le bord d'après le théorème de flux-divergence. Dans notre cas, la frontière $\partial\Omega$ est divisée en deux sous-ensembles correspondant aux deux phases : la matière et le vide (l'air, que l'on considère à contrainte nulle³). Le sous ensemble "matière" est lui même divisé en plusieurs attaches (cf Figure 2.3). La répartition attaches / vide dépend du positionnement de la matière au sein du dispositif.

De ce fait, l'intégrale Equation (2.7) peut être ré-écrite en une somme sur les différentes attaches :

$$V\tilde{\Sigma} = \sum_{p=1}^{4N} \int_{\partial\Omega^{(p)}} \left[(\underline{\sigma}^{(p)} \cdot \underline{n}^{(p)}) \otimes \underline{x} + \underline{x} \otimes (\underline{\sigma}^{(p)} \cdot \underline{n}^{(p)}) \right] dS \quad (2.8)$$

3. La déformation n'est alors pas définie de manière univoque, il faudra donc y faire attention dans les calculs ([BBG01])

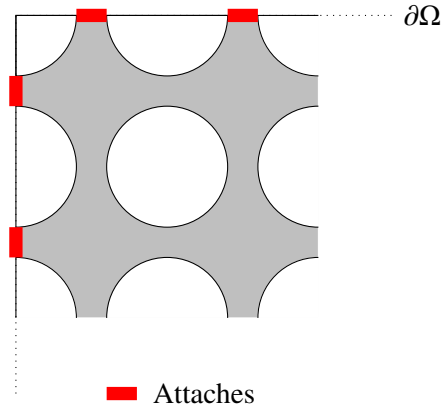


FIGURE 2.3: Détail d'un coin de l'éprouvette et découpage de $\partial\Omega$ en sous-ensembles

Avec $4N$ le nombre d'attaches sur $\partial\Omega$ et $\partial\Omega^{(p)}$ la restriction de $\partial\Omega$ à une attache. On note $(\cdot)^{(p)}$ la restriction du champ (\cdot) à $\partial\Omega^{(p)}$.

Pour aller plus loin, il faut ici faire une hypothèse sur la forme du champ de contraintes.

Hypothèse 1 *Le champ de contrainte est supposé linéaire en fonction de la position sur chaque attache.*

Introduisons une variable de position locale $\underline{y}^{(p)}$ définie sur la Figure 2.4 :

$$\underline{y}^{(p)} = \underline{x} - \underline{x}^{(p)} \quad (2.9)$$

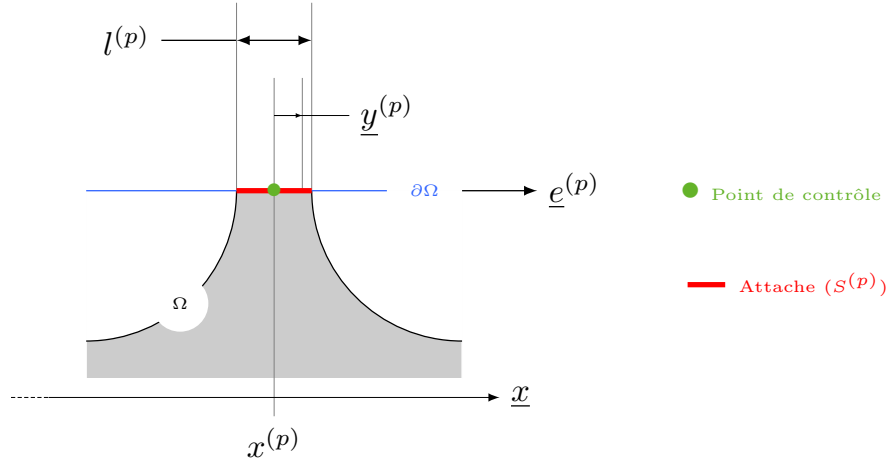
avec $\underline{x}^{(p)}$ le vecteur position du centre de l'attache (p) (c'est donc une constante), c'est à dire le point de contrôle. Nous pouvons alors décomposer $\tilde{\sigma}^{(p)}$ de la manière suivante :

$$\tilde{\sigma}^{(p)}(\underline{x}) = \tilde{\sigma}^{0(p)} + \frac{\underline{y}^{(p)}(\underline{x}) \cdot \underline{e}^{(p)}}{l^{(p)}} \tilde{\sigma}^{1(p)} \quad (2.10)$$

avec $\tilde{\sigma}^{0(p)}$ et $\tilde{\sigma}^{1(p)}$ deux tenseurs de contraintes constants tandis que $\underline{e}^{(p)}$ est le vecteur de la base tangent au bord.

En partant de l' Equation (2.8), et en utilisant la décomposition linéaire des champs (Equation (2.10)) et de la position (Equation (2.9)), nous obtenons :⁴

4. On notera bien que $\underline{x}^{(p)}$ est une constante (le centre de l'attache) et que la variable d'intégration est donc $\underline{y}^{(p)}$.

FIGURE 2.4: Description locale d'une attache et définition de la variable de position locale $\underline{y}^{(p)}$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega^{(p)}} \left(\underline{\sigma}^{(p)} \cdot \underline{n}^{(p)} \right) \otimes \underline{x} \, dS &= \int_{\partial\Omega^{(p)}} \left[\left(\underline{\sigma}^{0(p)} + \frac{\underline{\sigma}^{1(p)}}{l^{(p)}} \left(\underline{y}^{(p)} \cdot \underline{e}^{(p)} \right) \right) \cdot \underline{n}^{(p)} \right] \otimes \left(\underline{x}^{(p)} + \underline{y}^{(p)} \right) \, dS \\
&= \int_{\partial\Omega^{(p)}} \left(\underline{\sigma}^{0(p)} \cdot \underline{n}^{(p)} \right) \otimes \underline{x}^{(p)} \, dS + \int_{\partial\Omega^{(p)}} \left(\underline{\sigma}^{0(p)} \cdot \underline{n}^{(p)} \right) \otimes \underline{y}^{(p)} \, dS \\
&\quad + \int_{\partial\Omega^{(p)}} \left[\left(\frac{\underline{\sigma}^{1(p)}}{l^{(p)}} \left(\underline{y}^{(p)} \cdot \underline{e}^{(p)} \right) \right) \cdot \underline{n}^{(p)} \right] \otimes \underline{x}^{(p)} \, dS \\
&\quad + \int_{\partial\Omega^{(p)}} \left[\left(\frac{\underline{\sigma}^{1(p)}}{l^{(p)}} \left(\underline{y}^{(p)} \cdot \underline{e}^{(p)} \right) \right) \cdot \underline{n}^{(p)} \right] \otimes \underline{y}^{(p)} \, dS
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega^{(p)}} \left(\underline{\sigma}^{(p)} \cdot \underline{n}^{(p)} \right) \otimes \underline{x} \, dS &= S^{(p)} \left(\underline{\sigma}^{0(p)} \cdot \underline{n}^{(p)} \right) \otimes \underline{x}^{(p)} + \left(\underline{\sigma}^{0(p)} \cdot \underline{n}^{(p)} \right) \otimes \int_{\partial\Omega^{(p)}} \underline{y}^{(p)} \, dS \\
&\quad + \left(\frac{\underline{\sigma}^{1(p)}}{l^{(p)}} \cdot \underline{n}^{(p)} \right) \otimes \underline{x}^{(p)} \int_{\partial\Omega^{(p)}} \left(\underline{y}^{(p)} \cdot \underline{e}^{(p)} \right) \, dS \\
&\quad + \left(\frac{\underline{\sigma}^{1(p)}}{l^{(p)}} \cdot \underline{n}^{(p)} \right) \otimes \int_{\partial\Omega^{(p)}} \left(\underline{y}^{(p)} \cdot \underline{e}^{(p)} \right) \underline{y}^{(p)} \, dS
\end{aligned}$$

avec $S^{(p)} = l^{(p)} H$ la surface d'une attache ($l^{(p)}$ étant sa largeur et H l'épaisseur hors plan de l'éprouvette). Dans l'expression précédente, les termes linéaires en $\underline{y}^{(p)}$ s'annulent, il reste donc le premier et le dernier terme :

$$\int_{\partial\Omega^{(p)}} \left(\underline{\sigma}^{(p)} \cdot \underline{n}^{(p)} \right) \otimes \underline{x} \, dS = S^{(p)} \left(\underline{\sigma}^{0(p)} \cdot \underline{n}^{(p)} \right) \otimes \underline{x}^{(p)} \quad (2.11)$$

$$+ \left(\frac{\underline{\sigma}^{1(p)}}{l^{(p)}} \cdot \underline{n}^{(p)} \right) \otimes \int_{\partial\Omega^{(p)}} \left(\underline{y}^{(p)} \otimes \underline{y}^{(p)} \right) \cdot \underline{e}^{(p)} \, dS \quad (2.12)$$

$$= S^{(p)} \left(\underline{\sigma}^{0(p)} \cdot \underline{n}^{(p)} \right) \otimes \underline{x}^{(p)} + \left(\frac{\underline{\sigma}^{1(p)}}{l^{(p)}} \cdot \underline{n}^{(p)} \right) \otimes \frac{h \left(l^{(p)} \right)^3}{12} \underline{e}^{(p)} \quad (2.13)$$

$$= L S^{(p)} \left[\left(\underline{\sigma}^{0(p)} \cdot \underline{n}^{(p)} \right) \otimes \frac{\underline{x}^{(p)}}{L} + \frac{1}{12} \left(\underline{\sigma}^{1(p)} \cdot \underline{n}^{(p)} \right) \otimes \frac{l^{(p)}}{L} \underline{e}^{(p)} \right] \quad (2.14)$$

où L est la longueur d'un côté de l'éprouvette. Le premier terme correspond à la valeur moyenne de la contrainte sur une attache tandis que le deuxième correspond à l'approximation au premier ordre de la variation de la contrainte. On va maintenant comparer les ordres de grandeur des deux contributions. Il faut donc comparer

$$O\left(\underline{\sigma}^{0(p)}\right) \text{ avec } O\left(\underline{\sigma}^{1(p)}\right)$$

et

$$O\left(\underline{x}^{(p)} \cdot \underline{e}^{(p)}\right) \text{ avec } O\left(l^{(p)}\right)$$

Pour la première comparaison, il faut de nouveau faire une hypothèse puisque les valeurs de $\underline{\sigma}^{0(p)}$ et de $\underline{\sigma}^{1(p)}$ dépendent du matériau et du type de sollicitation.

Hypothèse 2 *On considérera donc que la variation de la contrainte n'est pas "trop" brusque et que les deux termes sont du même ordre de grandeur.*

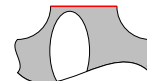
Cette hypothèse est assez faible puisqu'elle permet une variation de la contrainte sur une attache de $\pm 50\%$ de sa valeur moyenne ! En revanche il faut noter que si la valeur moyenne est nulle alors cette hypothèse implique que la contrainte est nulle sur toute l'attache. Une analyse éléments finis sur les éprouvettes pourra, au besoin, valider cette hypothèse dans les cas où elle semble limite⁵.

Remarque : lorsque plusieurs choix d'éprouvette représentant le même matériau architecturé sont possibles (sous-section 1.4.2), l'hypothèse ci-dessus donne un critère pour en sélectionner une adaptée à la conception du dispositif.

Pour la seconde comparaison, il s'agit ici de termes géométriques, on peut donc calculer les ordres de grandeur. $\underline{x}^{(p)} \cdot \underline{e}^{(p)}$ est la composante, tangente au bord, du vecteur de position d'un centre d'attache. Vu l'exigence du cahier des charges d'avoir 10 attaches par bord, nous avons :

$$\underline{x}^{(p)} \cdot \underline{e}^{(p)} = \left(i - \frac{1}{2} \right) \frac{L}{10} \quad ; \quad i \in \llbracket 1; 10 \rrbracket$$

5. Une forte variation de la contrainte sur une longueur d'attache est attendue dans le cas où la géométrie sous l'attache est très irrégulière comme schématisé ci-contre.



Or, vu cette même exigence, une attache ne peut être plus large qu'un dixième de la longueur puisqu'elles sont régulièrement espacées :

$$l^{(p)} < \frac{L}{10}$$

Ainsi en reprenant l'Equation (2.14), le second terme pourra majoritairement être négligé. De plus, dans le cas où les attaches sont fines dans le plan ($l^{(p)}$ faible) l'écart entre les deux termes augmente. De ce fait, le second terme ne sera plus considéré par la suite. Ce qui finalement nous amène à :

$$\int_{\partial\Omega^{(p)}} \left(\underline{\sigma}^{(p)} \cdot \underline{n}^{(p)} \right) \otimes \underline{x} \, dV \simeq S^{(p)} \left(\underline{\sigma}^{0(p)} \cdot \underline{n}^{(p)} \right) \otimes \underline{x}^{(p)} \quad (2.15)$$

En combinant l'Equation (2.8) avec l'Equation (2.15) nous retrouvons l'expression de la contrainte moyenne dans le volume :

$$2V \underline{\Sigma} \simeq \sum_{p=1}^{4N} S^{(p)} \left[\left(\underline{\sigma}^{0(p)} \cdot \underline{n}^{(p)} \right) \otimes \underline{x}^{(p)} + \underline{x}^{(p)} \otimes \left(\underline{\sigma}^{0(p)} \cdot \underline{n}^{(p)} \right) \right] \quad (2.16)$$

Le pire des cas, est celui où :

- $l^{(p)} = \frac{L}{10}$;
- la variation de contrainte au sein d'une attache est du même ordre de grandeur que sa moyenne ;
- toutes les contributions de la variation de la contrainte non prises en compte s'ajoutent.

Dans ce cas, l'erreur commise est d'environ 2% ce qui est tout à fait acceptable puisque ce cas dégénéré est très improbable. L'erreur due à la négligence de la variation de la contrainte est donc faible dans la majeure partie des cas. En conséquence de quoi, par la suite, on ne conservera que l'approximation constante pour la contrainte.

Cette somme peut maintenant être décomposée sur les quatre bords en utilisant les informations sur \underline{n} et sur \underline{x} définis en Figure 2.5. Le Tableau 2.1 donne les valeurs particulières des vecteurs \underline{n} et \underline{x} sur $\partial\Omega$.

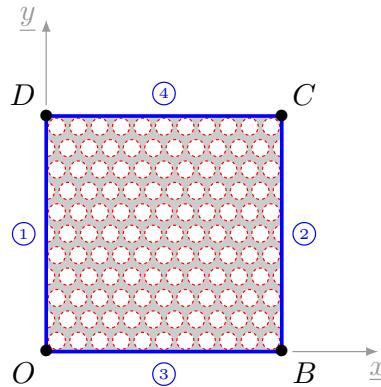


FIGURE 2.5: Numérotation des bords

| bord | ① | ② | ③ | ④ |
|-----------------|---|--|---|--|
| \underline{n} | $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ |
| \underline{x} | $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} L \\ y \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} x \\ L \end{pmatrix}$ |

TABLE 2.1: Valeurs particulières des vecteurs sur $\partial\Omega$ pour la géométrie considérée

on obtient donc

$$V_{\sim}^{\Sigma} = \sum_{s=1}^4 \sum_{p=1}^N S^{(sp)} \left[\left(\underline{\sigma}^{(sp)} \cdot \underline{n}^{(s)} \right) \otimes \underline{x}^{(sp)} + \underline{x}^{(sp)} \otimes \left(\underline{\sigma}^{(sp)} \cdot \underline{n}^{(s)} \right) \right]$$

ce qui, sous forme matricielle, donne :

$$2V_{\sim}^{\Sigma} = L \begin{bmatrix} \sum_{p=1}^N f_x^{(2p)} & \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N f_x^{(4p)} + f_y^{(2p)} \\ \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N f_x^{(4p)} + f_y^{(2p)} & \sum_{p=1}^N f_y^{(4p)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{p=1}^N \left(x^{(4p)} f_x^{(4p)} + x^{(3p)} f_x^{(3p)} \right) & \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N \left(\begin{array}{l} y^{(2p)} f_x^{(2p)} + y^{(1p)} f_x^{(1p)} \\ + x^{(4p)} f_y^{(4p)} + x^{(3p)} f_y^{(3p)} \end{array} \right) \\ \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N \left(\begin{array}{l} y^{(2p)} f_x^{(2p)} + y^{(1p)} f_x^{(1p)} \\ + x^{(4p)} f_y^{(4p)} + x^{(3p)} f_y^{(3p)} \end{array} \right) & \sum_{p=1}^N \left(y^{(2p)} f_y^{(2p)} + y^{(1p)} f_y^{(1p)} \right) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

où $f_j^{(sp)} = S^{(sp)} \sigma_{jk}^{(sp)} n_k^{(s)}$ est la composante selon j ($j = \{x, y\}$) de la force de la (p) -ème attache sur le bord (s) .

La valeur de ces sommes reste à déterminer. Les termes contribuant à la contrainte sont de deux sortes, correspondant aux deux matrices de l'expression précédente

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{p=1}^N L f_j^{(sp)} = -L F_j^{(s)}, & j = \{x, y\}, s = \llbracket 1; 4 \rrbracket \quad \text{première matrice} \\ \sum_{p=1}^N X^{(sp)} f_j^{(sp)}, & X = \{x, y\}, j = \{x, y\}, s = \llbracket 1; 4 \rrbracket \quad \text{deuxième matrice} \end{array} \right.$$


$F_j^{(s)}$ étant la j -ème composante de la force globale résultante sur le bord (s) .

Le premier terme est simple à déterminer dans un cadre expérimental puisque la mesure de l'effort global sur un bord est suffisante. Le second terme est, à première vue, plus complexe et sa

détermination nécessite l'implémentation de capteurs d'effort bi-axiaux sur chaque attache. Cependant pour des raisons de coût, d'encombrement et de cohérence avec le système de pilotage il est préférable, si possible, d'éviter cette multiplication des capteurs d'effort. La détermination de ces termes de manière plus simple fait l'objet de la sous-section suivante.

2.2.2 Condensation aux coins

Considérons l'équilibre du système mécanique associé à l'un des bords. Le cas du bord ③ ($s = 3$) est représenté et analysé en Figure 2.6, le cas des autres bords étant similaire à une rotation près, ils ne seront pas étudiés. Une forme volontairement quelconque est donnée au "système de répartition" afin de ne rien présupposer à ce niveau. Le système est piloté cinématiquement à

gauche par une rotule  et à droite par un déplacement imposé \underline{U}^{imp} . Trois points d'accroche avec l'éprouvette sont représentés (indiqués 1, 2 et N), dans l'étude on considèrera bien 10 points d'accroche.

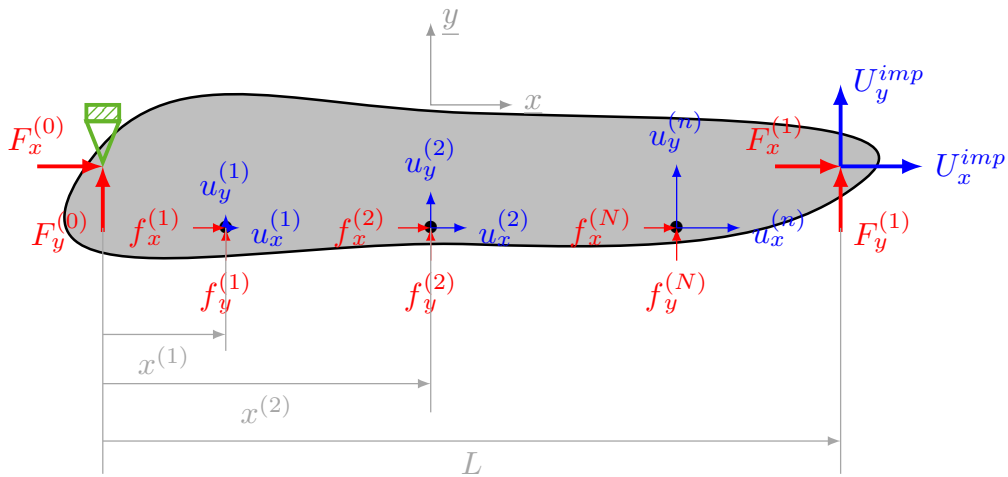


FIGURE 2.6: Équilibre du système mécanique associé à l'un des bords

Sur ce bord, deux sommes sont à déterminer (cf Equation (2.17))

1. Une somme sur les $f_y^{(p)}$ c'est à dire les forces normales au bord de l'éprouvette (cf Figure 2.6) :

$$\sum_{p=1}^N x^{(p)} f_y^{(p)}$$

2. Une somme sur les $f_x^{(p)}$ c'est à dire les forces tangentes au bord de l'éprouvette (cf Figure 2.6) :

$$\sum_{p=1}^N x^{(p)} f_x^{(p)}$$

Tout étant considéré linéaire, ces cas peuvent être résolus séparément, une superposition des cas donnant le résultat global.

1. Dans le premier cas $\sum_{p=1}^N x^{(p)} f_y^{(p)}$ est donné simplement par l'équilibre des moment en 0 (donc au niveau de la rotule) du système mécanique :

$$\sum_{p=1}^N x^{(p)} f_y^{(p)} = -F_y^{(1)} L \quad (2.18)$$

On retrouve une équation ne dépendant que de la force globale sur le bord.

2. Dans le second cas, on peut évaluer le travail W des forces extérieures $f_x^{(p)}$ et $F_x^{(1)}$. Puisque le matériau de l'éprouvette est élastique linéaire, chaque effort est proportionnel au déplacement du point d'application. Aucun lien entre les différentes forces n'est formulé, on considère simplement que pour un déplacement 2 fois plus important, la force *en chaque point* est deux fois plus importante, quelle que soit la répartition d'effort le long du bord de l'éprouvette.

La formule de Clapeyron donne, pour l'énergie mécanique stockée dans le système :

$$W = \sum_{p=1}^N \frac{1}{2} f_x^{(p)} u_x^{(p)} + \frac{1}{2} F_x^{(1)} U_x^{imp} \quad (2.19)$$

Dérivons cette équation par rapport à U_x^{imp}

$$\frac{\partial W}{\partial U_x^{imp}} = \sum_{p=1}^N \frac{1}{2} \left(f_x^{(p)} \frac{\partial u_x^{(p)}}{\partial U_x^{imp}} + \frac{\partial f_x^{(p)}}{\partial U_x^{imp}} u_x^{(p)} \right) + \frac{1}{2} \left(F_x^{(1)} \frac{\partial U_x^{imp}}{\partial U_x^{imp}} + \frac{\partial F_x^{(1)}}{\partial U_x^{imp}} U_x^{imp} \right) \quad (2.20)$$

Tout étant considéré linéaire, on sait que

$$f_x^{(p)} = \alpha_x^{(p)} u_x^{(p)} \quad ; \quad \forall p \in \llbracket 1; 10 \rrbracket \quad (2.21)$$

et

$$F_x^{(1)} = \alpha_x^{(1)} U_x^{(imp)} \quad (2.22)$$

où $\alpha_x^{(p)}$ et $\alpha_x^{(1)}$ sont des constantes. Ainsi en combinant l'Equation (2.20), l'Equation (2.21) et l'Equation (2.22) on obtient

$$\frac{\partial W}{\partial U_x^{imp}} = \sum_{p=1}^N \frac{1}{2} \left(f_x^{(p)} \frac{\partial u_x^{(p)}}{\partial U_x^{imp}} + \frac{\partial \alpha_x^{(p)} u_x^{(p)}}{\partial U_x^{imp}} u_x^{(p)} \right) + \frac{1}{2} \left(F_x^{(1)} \frac{\partial U_x^{imp}}{\partial U_x^{imp}} + \frac{\partial \alpha_x^{(1)} U_x^{(imp)}}{\partial U_x^{imp}} U_x^{imp} \right) \quad (2.23)$$

$$= \sum_{p=1}^N \frac{1}{2} \left(f_x^{(p)} \frac{\partial u_x^{(p)}}{\partial U_x^{imp}} + \alpha_x^{(p)} u_x^{(p)} \frac{\partial u_x^{(p)}}{\partial U_x^{imp}} \right) + \frac{1}{2} \left(F_x^{(1)} + \alpha_x^{(1)} U_x^{imp} \frac{\partial U_x^{(imp)}}{\partial U_x^{imp}} \right) \quad (2.24)$$

$$= \sum_{p=1}^N \frac{1}{2} \left(f_x^{(p)} \frac{\partial u_x^{(p)}}{\partial U_x^{imp}} + f_x^{(p)} \frac{\partial u_x^{(p)}}{\partial U_x^{imp}} \right) + \frac{1}{2} \left(F_x^{(1)} + F_x^{(1)} \right) \quad (2.25)$$

$$= \sum_{p=1}^N \left(f_x^{(p)} \frac{\partial u_x^{(p)}}{\partial U_x^{imp}} \right) + F_x^{(1)} \quad (2.26)$$

$$(2.27)$$

Le système mécanique étudié a pour but d'appliquer en bord d'éprouvette des KUBC discrétisés : le déplacement des points d'accroche système / éprouvette ($u_x^{(p)}$) doit être proportionnel à la

position du point ($x^{(p)}$) et à l'amplitude du déplacement imposé (U_x^{imp}) en bout de système ($x = L$). C'est à dire :

$$u_x^{(p)} = \frac{x^{(p)}}{L} U_x^{imp} \quad ; \quad \forall p \in \llbracket 1; N \rrbracket$$

Une fois de plus, dérivons cette équation par rapport à U_x^{imp}

$$\frac{\partial u_x^{(p)}}{\partial U_x^{imp}} = \frac{x^{(p)}}{L} \quad (2.28)$$

Ainsi, en combinant Equation (2.27) et Equation (2.28) on obtient la relation suivante :

$$\frac{\partial W}{\partial U_x^{imp}} = \sum_{p=1}^N \left(f_x^{(p)} \frac{x^{(p)}}{L} \right) + F_x^{(1)} \quad (2.29)$$

Pour déterminer $\sum_{p=1}^N \left(f_x^{(p)} \frac{x^{(p)}}{L} \right)$ en fonction de $F_x^{(1)}$, il faut introduire une hypothèse supplémentaire :

Hypothèse 3 *On suppose que le système mécanique ne stocke pas d'énergie de déformation, ou à tout le moins une quantité connue (qu'il suffit alors de soustraire)*^{6 7}.

L'énergie de déformation du système étant nulle, sa dérivée l'est également. Finalement

$$\sum_{p=1}^N x^{(p)} f_x^{(p)} = -F_x^{(1)} L - \left(\frac{\partial W}{\partial U_x^{imp}} \right)_{pre\ determined} \quad (2.30)$$

Toutes les quantités impliquées dans l'Equation (2.17) sont maintenant déterminables à partir de la mesure des forces globales sur chaque bord. De sorte que, dans le cas de KUBC, la contrainte moyenne $\tilde{\Sigma}$ peut être déterminée dans un cadre expérimental réaliste sous l'hypothèse que le système mécanique de répartition ne stocke pas d'énergie. Dans le cas où ce système stockerait de l'énergie il est toujours possible de mener ce raisonnement si la quantité d'énergie stocké est connue, il suffit alors de la soustraire aux mesures (terme $\left(\frac{\partial W}{\partial U_x^{imp}} \right)_{pre\ determined}$ de l'Equation (2.30)). L'expression finale de la contrainte moyenne est donnée Equation (2.31).

$$\tilde{\Sigma} = \frac{1}{2LH} \left[\tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{M}}^T \right] \quad (2.31)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{M}} = - \begin{pmatrix} F_x^{(2B)} + F_x^{(2C)} & F_x^{(1D)} + F_x^{(2C)} \\ +F_x^{(3B)} + F_x^{(4C)} & +F_x^{(4C)} + F_x^{(4D)} \\ F_y^{(2B)} + F_y^{(2C)} & F_y^{(1D)} + F_y^{(2C)} \\ +F_y^{(3B)} + F_y^{(4C)} & +F_y^{(4C)} + F_y^{(4D)} \end{pmatrix}$$

6. Il est nécessaire de déterminer, préalablement à tout essai, la relation entre énergie stockée dans le système et déplacement imposé au bord de façon à pouvoir dériver cette énergie et la prendre en compte. Cette hypothèse implique de devoir technologiquement minimiser autant que possible les sources de non unicité de la relation $W = f(U^{imp})$: les jeux et les frottements, cela sera traité au chapitre 4.

7. Le but étant de venir mesurer l'effort entre le système de répartition et l'éprouvette (cf. Figure 2.2b) la quantité d'énergie stockée par le système ne doit pas être trop importante sans quoi la fraction de l'effort servant à déformer l'éprouvette serait de l'ordre de grandeur du bruit de mesure

où $F_y^{(2C)}$ est l'effort selon y sur le bord ② appliqué au point C (voir Figure 2.5 pour la définition des bords et des points). Cette équation combinée à l'Equation (1.10) permet la détermination de \underline{C}^* via la mesure des efforts au bord uniquement.

Un rapide calcul sur un état de contrainte $\underline{\sigma}^v$ permet, sans la démontrer bien entendu, de voir fonctionner cette formule. Prenons par exemple le champ suivant⁸ :

$$\underline{\sigma}^v = \begin{pmatrix} \sigma_x + \alpha y & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y + \beta x \end{pmatrix}$$

Dans un premier temps, déterminons les efforts sur les bords $\underline{F}^{(s)}$

$$\text{bord 1 : } \underline{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{bord 3 : } \underline{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{F}^{(1)} = \int_{\partial\Omega_1} \begin{pmatrix} -\sigma_x - \alpha y \\ -\sigma_{xy} \end{pmatrix} dS$$

$$\underline{F}^{(3)} = \int_{\partial\Omega_1} \begin{pmatrix} -\sigma_{xy} \\ -\sigma_y - \beta x \end{pmatrix} dS$$

$$= \begin{pmatrix} -LH\sigma_x - \alpha H\frac{L^2}{2} \\ -LH\sigma_{xy} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -LH\sigma_{xy} \\ -LH\sigma_y - \beta H\frac{L^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{bord 2 : } \underline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{bord 4 : } \underline{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{F}^{(2)} = \int_{\partial\Omega_1} \begin{pmatrix} \sigma_x + \alpha y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} dS$$

$$\underline{F}^{(4)} = \int_{\partial\Omega_1} \begin{pmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_y + \beta x \end{pmatrix} dS$$

$$= \begin{pmatrix} LH\sigma_x + \alpha H\frac{L^2}{2} \\ LH\sigma_{xy} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} LH\sigma_{xy} \\ LH\sigma_y + \beta H\frac{L^2}{2} \end{pmatrix}$$

La contrainte mesurée est alors⁹

$$\underline{\Sigma} = \frac{1}{2LH} \left[\underline{M} + \underline{M}^T \right] \quad (2.32)$$

Avec

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} LH\sigma_x + \alpha H\frac{L^2}{2} & -\frac{1}{2}LH\sigma_y - \frac{1}{2}\beta H\frac{L^2}{2} + \frac{1}{2}LH\sigma_y + \frac{1}{2}\beta H\frac{L^2}{2} \\ -\frac{LH}{2}\sigma_{xy} + \frac{LH}{2}\sigma_{xy} & +LH\sigma_{xy} \\ LH\sigma_{xy} & -\frac{LH}{2}\sigma_{xy} + \frac{LH}{2}\sigma_{xy} \\ -\frac{1}{2}LH\sigma_y - \frac{1}{2}\beta H\frac{L^2}{2} + \frac{1}{2}LH\sigma_y + \frac{1}{2}\beta H\frac{L^2}{2} & LH\sigma_y + \beta H\frac{L^2}{2} \end{pmatrix}$$

8. On aurait pu choisir un champ plus complexe en prenant toutefois garde à ce qu'il soit admissible donc de divergence nulle en tout point car ce résultat est utilisé dans l'Equation (2.6)

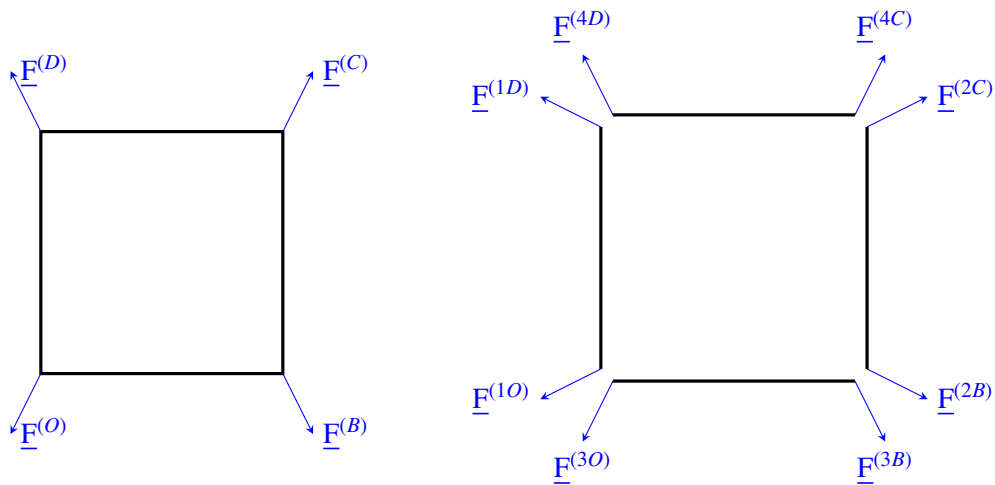
9. Pour le terme M_{11} , il faut déterminer $F_x^{(3B)} + F_x^{(4C)}$ or seule la résultante globale sur le bord a été calculée. La valeur de la force en 3B et en 4C dépend de la répartition sur le bord. On a pris ici $F_x^{(3B)} = 1/2F_x^{(3)}$ et $F_x^{(4C)} = 1/2F_x^{(4)}$ mais en réalité seule la somme des deux importe or on peut remarquer que les points 3B et 4C ne diffèrent que par leur position sur y , la contrainte qui nous intéresse ici (σ_{xy}) étant indépendante de y , cette somme est bien nulle.

Donc, après simplifications

$$\underline{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x + \alpha \frac{L}{2} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y + \beta \frac{L}{2} \end{pmatrix} = \langle \underline{\sigma}^v \rangle \quad (2.33)$$

ce qui est bien la valeur moyenne de $\underline{\sigma}^v$, la formule donne le bon résultat sur ce cas simplifié.

Il est important de noter que cette étude a été faite en considérant un bord *indépendant* du reste de la machine. On ne peut donc pas mesurer les efforts sur le montage complet (cf [Figure 2.7a](#)); il faut considérer chaque pantographe indépendamment (cf [Figure 2.7b](#)) pour pouvoir différencier en chaque coin les efforts des deux pantographes qui y sont rattachés.



(a) Mesure des forces en 4 points : montage complet (insuffisant) (b) Mesure des forces en 8 points : indépendance des côtés (nécessaire)

FIGURE 2.7: Deux stratégies de mesurage global

2.2.3 Bilan

On a montré que la détermination de $\underline{\Sigma}$ via une mesure globale est possible ([Equation \(2.31\)](#)) si :

- la variation de la contrainte est linéaire sur une attache (Hypothèse 1);
- la variation de la contrainte sur une attache est au plus du même ordre de grandeur que sa moyenne (Hypothèse 2);
- le système de répartition ne stocke pas d'énergie ou, à tout le moins, une quantité connue d'énergie (Hypothèse 3).

Les deux premières hypothèses seront limitantes quant aux matériaux pouvant être testés dans le dispositif. Une vérification par calcul éléments-finis sur une éprouvette pourra, au besoin, les valider. La dernière hypothèse impacte la conception du dispositif de pilotage et devra donc être prise en compte par la suite.

Le choix d'une mesure globale, bien qu'impliquant une plus grande erreur dans la détermination de la contrainte moyenne (puisque la condition KUBC ne pourra pas être strictement vérifiée et que l'[Equation \(2.28\)](#) s'en trouvera faussée), est cohérent avec la méthode choisie pour le pilotage de la machine et c'est celui que nous retiendront. Il reste maintenant à associer des choix technologiques à ces concepts généraux, ce qui est l'objet de la section suivante.

2.3 Choix technologiques

Différents choix technologiques sont à faire pour les actionneurs, le pilotage, l'instrumentation et le "système mécanique de répartition". Nous aurons tout d'abord une discussion sur le système mécanique de répartition puis sur le choix des actionneurs et de l'instrumentation. Dans tous les cas, les choix auront pour but de

- limiter les inconnues et les pertes (jeux, frottements, erreurs) ;
- faciliter la mise en place de la machine ;
- limiter les coûts.

2.3.1 Système de répartition

Nous recherchons donc un système mécanique de distribution du déplacement permettant d'imposer un KUBC (donc répartition linéaire) qui ne stocke pas d'énergie ou à tout le moins une quantité faible et mesurable. Sans ce dernier point, une solution triviale et pourtant très efficace eut été de réutiliser l'idée des essais de cisaillement sur toile en collant ou pinçant l'éprouvette sur un cadre carré très rigide (relativement à la rigidité propre de l'éprouvette). Toute déformation appliquée à ce cadre serait alors transmise à l'éprouvette. Malheureusement cette solution n'est pas envisageable car la majeure partie de l'énergie de l'essai serait stockée dans ce cadre. De ce fait la quantité d'intérêt (l'énergie stockée dans l'éprouvette) serait de l'ordre de grandeur d'un bruit de mesure. Pour limiter l'énergie stockée dans le cadre, on utilise la même idée que [Joe91] et Accupull : le pantographe.

2.3.1.a Le pantographe : principe

Historiquement le pantographe est un outil de dessin, une première description et représentation (Figure 2.8) en est faite par [Sch31] ([SL18]) bien que cet outil existait a priori avant cette date. L'utilisation principale du pantographe est alors la reproduction d'un dessin avec un rapport d'échelle choisi.

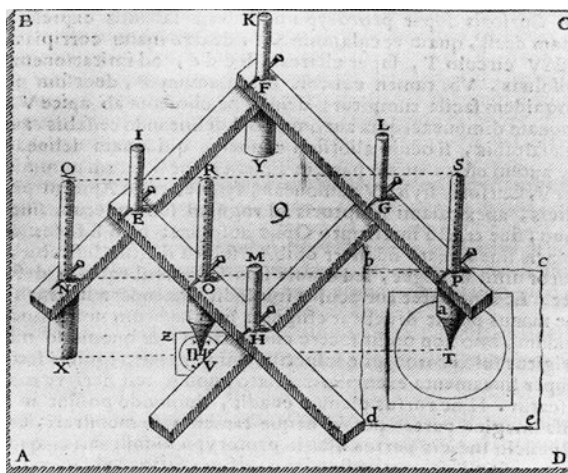


FIGURE 2.8: Première représentation d'un pantographe en 1631 par [Sch31]

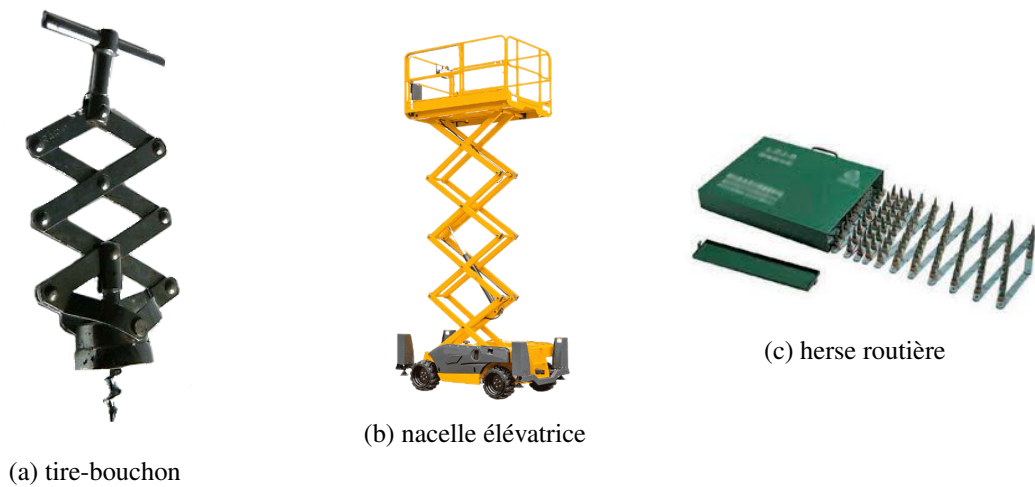


FIGURE 2.9: Utilisation des propriétés des pantographes

Cette utilisation est bien celle qui nous intéresse. Sur la [Figure 2.8](#) on peut voir en V et en T des pointes à tracer ainsi qu'une figure en dessous, la taille de la figure obtenue est proportionnelle à la distance au point X (point qui reste fixe lors du tracé). On peut dès lors subodorer la loi de proportionnalité des déplacements à leur distance à l'origine (ici X).

Plus tard, le pantographe deviendra dans la langue commune un dispositif articulé dans le domaine ferroviaire permettant la captation du courant par frottement sur une caténaire. Ce nom est obtenu par métonymie puisque cet instrument réutilise le principe préalablement présenté.

On trouve quelques autres applications utilisant les propriétés d'extension des pantographes ([Figure 2.9a](#)), de conservation du parallélisme des extrémités des bras ([Figure 2.9b](#)) ainsi qu'une application exploitant le comportement linéaire de la répartition des points du pantographe ([Figure 2.9c](#)).

Enfin l'extension de ce principe à des structures plus grandes (répétition du nombre de motifs en losange) et plus complexes (association de structures dans 2 dimensions, utilisation de motifs différents) est relativement récente. Le comportement de telles structures (ou mécanismes) est inhabituel puisqu'elles présentent un ou plusieurs modes à énergie nulle. À partir de maintenant on appellera pantographe la structure présentée en [Figure 2.10a](#) qui est une répétition du motif (ou cellule) de base. Deux choix sont possibles pour la cellule de base (croix ou losange), pour la suite, la cellule de base correspondra à l'élément représenté en [Figure 2.10b](#).

Sur cette figure, le mode d'extension / compression est un mode mou de déformation : aucune énergie élastique n'y est associée. Tous les autres modes de déformation font intervenir la rigidité

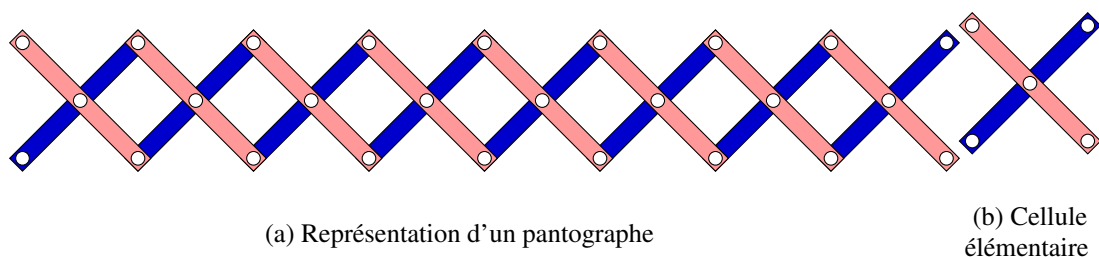


FIGURE 2.10: Pantographe et cellule élémentaire

des bras de sorte qu'imposer la cinématique de deux pivots impose la cinématique de l'ensemble du mécanisme [SAI11].

Un pantographe est modélisable par un milieu du second gradient "pur" dans le sens suivant. Dans un milieu du premier gradient (milieu de Cauchy), il y a un prix à payer (énergie élastique) pour que 2 points voisins aient des déplacements différents (incompatibles). Dans le cas du second gradient "pur", le déplacement différent de 2 points est "gratuit", toutefois ce qui "coûte" (de l'énergie) est l'imposition en 2 points (deux cellules pour le pantographe) de déformations incompatibles. On le constate en fixant la déformation d'une cellule sur le pantographe, le système devenant alors rigide ([ASD03; SAI11]).

Dans le cas représenté, où les rapports de longueur sont identiques au sein de la cellule de base, le déplacement des liaisons pivots est proportionnel à leur position (cf Figure 2.11) :

$$u_i = \frac{x_i}{x_1} u_1 \quad (2.34)$$

où u_i désigne le déplacement axial du pivot en position x_i (Figure 2.11).

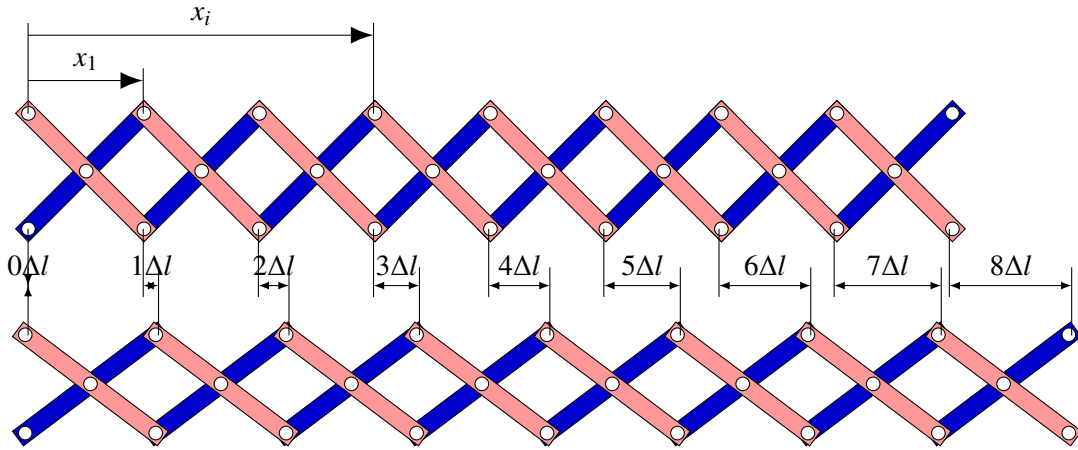


FIGURE 2.11: Extension d'un pantographe

On peut remanier l'Equation (2.34) en notant ε_1 le rapport $\frac{u_1}{x_1}$:

$$u_i = \varepsilon_1 x_i$$

et en remarquant que

$$\frac{u_i}{x_i} = \frac{i\Delta l}{ix_1} = \frac{\Delta l}{x_1} = \frac{u_1}{x_1} = \varepsilon_1 = \varepsilon \quad (2.35)$$

on obtient

$$u_i = \varepsilon x_i \quad (2.36)$$

où la déformation ε peut être imposée via n'importe quel point du mécanisme (Equation (2.35)). Un réflexion similaire peut être menée pour le déplacement selon le deuxième axe du plan.

Pour rappel, on recherche un mécanisme capable d'appliquer au bord d'une éprouvette des conditions de bord cinématiquement uniformes (homogénéisation par méthode KUBC cf. sous-section 1.3.4) c'est à dire

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{E}^0 \cdot \underline{x} \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega \quad (2.37)$$

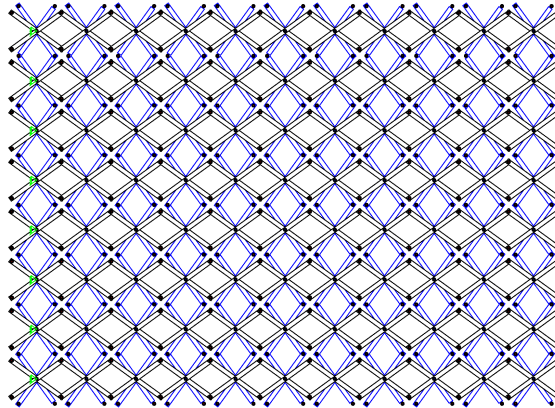




FIGURE 2.12: Réseau 2D de pantographes composé de pantographes horizontaux (en noir) et verticaux (en bleu). Les pantographes sont reliés uniquement par les centres des cellules élémentaires (def Figure 2.10b) de sorte que les elongations horizontale et verticale soient découplées, un cisaillement du réseau est également possible. Image de [SAI11]

Cette équation se ramène à l'Equation (2.36) lorsqu'elle est projetée sur un axe puis discrétisée sur un ensemble de points $x_i \in \partial\Omega$, $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$. Ainsi, un pantographe permet la réalisation d'un KUBC **discrétisé** sur un bord de l'éprouvette. L'association de 4 pantographes en un réseau 2D (cf Figure 2.12) semble donc bien adaptée à notre cas puisqu'il remplit les deux conditions nécessaires :

- permettre l'application de KUBC discrétisées au bord de l'éprouvette;
- ne pas stocker d'énergie (Hypothèse 3 de la section précédente).

2.3.1.b Architecture machine

Concernant le système de répartition du déplacement, notre choix s'est porté sur un réseau de pantographes sur lequel on vient accrocher l'éprouvette. Le système de pilotage doit être capable de déformer ce réseau selon 3 modes de déformation macroscopique : $\tilde{E}^{(xx)}$, $\tilde{E}^{(yy)}$ et $\tilde{E}^{(xy)}$. Ces trois cas sont représentés en Tableau 2.2. À chaque fois le nombre minimal d'actionneur ($\underline{u} \rightarrow$) est utilisé, les autres degrés de libertés étant bloqués par des liaisons rotules () ou des linéaires annulaires (). Nous pouvons voir dans le tableau que 5 actionneurs sont nécessaires pour appliquer ces trois modes de déformations : u_{1_x} , u_{1_y} , u_{2_x} , u_{2_y} et u_{3_x} . L'architecture de pilotage retenue est donc celle donnée en Figure 2.13.

2.3.2 Actionneurs et contrôle

Une architecture générale ayant été définie à la section précédente, les choix technologiques généraux du système de pilotage sont donnés ici.

2.3.2.a Choix des actionneurs

Les critères de choix pour les actionneurs sont les suivants :

- gamme statique : 2 kN ;

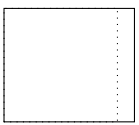
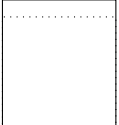
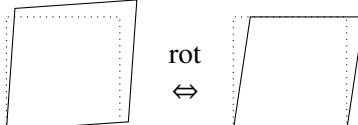
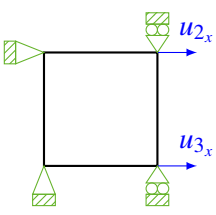
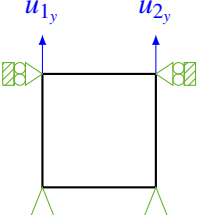
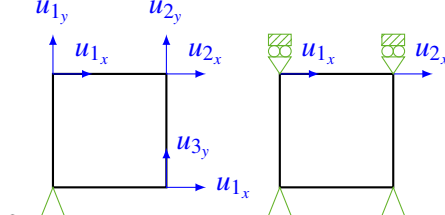
| | | | |
|------------------------------|---|---|---|
| Expression de la déformation | $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & \frac{\gamma}{2} \\ \frac{\gamma}{2} & 0 \end{pmatrix}$ |
| Déformée |  |  |  |
| Déplacements à imposer |  |  |  |

TABLE 2.2: Réalisation des trois modes de déformation plane.

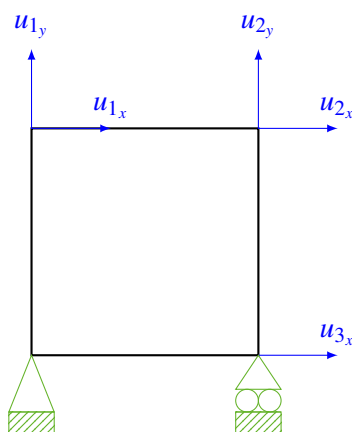


FIGURE 2.13: Déplacements à contrôler et fixations pour imposer une déformation plane homogène quelconque au cadre.

- gamme cinématique : 6 mm sont suffisants pour les phases d'essai, en revanche, pour la mise en place des éprouvettes quelques centimètres de débattement semblent nécessaires ;
- précision : le contrôle du déplacement à une dizaine de micromètres est souhaité (soit 0.16% de la gamme de déplacement) ;
- coût : comme précisé en [section 2.1](#) on souhaite éviter des coûts importants puisqu'il s'agit d'une étude exploratoire.

Quatre technologies d'actionneur se prêtent à l'imposition de déplacement linéaires : les vérins hydrauliques, pneumatiques, électriques et les systèmes piézo-électriques.

Vérins hydrauliques : Une solution via vérins hydrauliques ne semble pas adaptée ici en termes de gamme statique (capacité des vérins très largement supérieure à 2 kN) ainsi qu'en termes de coût. Un vérin n'est pas autosuffisant, il est nécessaire de le commander via une servo-valve et de

l'asservir en position via l'utilisation d'un capteur de position, par exemple un capteur LVDT.¹⁰

Vérins pneumatiques : C'est ici le critère de précision qui est éliminatoire, l'air étant un fluide compressible on ne peut garantir un bon pilotage du déplacement sous charge.

Systèmes piézo-électriques : Inenvisageable ici du fait de la très faible course de ces systèmes. Pour les applications nécessitant peu d'effort, des systèmes de démultiplication du déplacement peuvent être envisagés mais cela n'est pas applicable ici.

Vérins électriques : Reste donc la possibilité d'utiliser des vérins électriques (à base de moteur électromagnétique) pour lesquels trois sous-familles existent : moteur asynchrone, moteur à courant continu et moteur pas-à-pas. Les vérins à moteur asynchrone sont uniquement utilisés pour les applications à forte capacité de charge et ont besoin d'électronique dédiée importante (carte, onduleur). Les vérins utilisant la technologie des moteurs à courant continu nécessitent l'utilisation d'un asservissement (donc d'un capteur de position : LVDT ou roue codeuse en parallèle) tandis que les moteurs pas-à-pas ne nécessitent pas d'asservissement puisqu'ils respectent intrinsèquement la commande. Parmi les vérins électriques utilisant un moteur pas à pas, la transformation mécanique rotation / translation peut se faire via un système pignon-crémaillère ou un système vis-écrou. Pour comparer les capacités de ces deux technologies on prendra le paramètre d'encombrement constant, en effet on souhaite que le dispositif complet ait un encombrement au sol aussi réduit que possible. La technologie par écrou-vis présente dans ces conditions plusieurs avantages :

- plus grande capacité ;
- plus grande précision ;
- raideur assez élevée¹¹ ;
- transmission irréversible ;
- prix faible ;
- vendu "clé en main" en termes mécanique (moteur + écrou + vis + guidage en un ensemble) et en termes de pilotage (logiciels dédiés fonctionnels) puisque cette technologie est utilisée dans l'industrie.

Finalement, le choix est fait d'utiliser des moteurs linéaires pas-à-pas HaydonKerk 87H43-12-825 (cf. [Appendice D](#)) pour le pilotage du système. L'effort maximal développé est de 2 kN, un pilotage fin de la position est possible (12,7 μm /pas avec une possibilité de faire du micro-stepping à 1/128e de pas). Un petit jeu est présent dans le moteur qu'il faudra caractériser.

2.3.2.b Pilotage

Pour l'interface de commande, on utilise une carte de commande TMCM-6110 de chez Trinamic (cf. [Appendice D](#)) permettant

10. Un LVDT est un capteur passif constitué de 3 bobines est d'un noyau ferromagnétique. Un conditionneur envoie un signal dans la bobine principale, le noyau ferromagnétique coulisse dans l'axe des bobines. Lors de son mouvement, il modifie la distribution des champs entre les bobines secondaires permettant de déterminer le déplacement du noyau.

11. La raideur n'est, en général, pas donnée par les constructeurs. En revanche un essai interne au laboratoire sur des vérins électriques de 200 N de capacité (de la même gamme du même constructeur) utilisant des moteurs pas-à-pas donne un écrasement du vérin de 40 μm pour un effort appliqué de 200 N (donc à pleine charge). On peut donc s'attendre à un écrasement du même ordre de grandeur pour un effort de 2 kN sur un vérin de 2 kN de capacité. Un essai sera toutefois nécessaire pour caractériser leur raideur réelle.

- contrôle simultané de 6 moteurs ;
- acquisition de 12 capteurs fin de course ;
- interface PC par USB (avec bibliothèques Python, C++);
- pilotage par connexion PC ou programme embarqué.

Afin de rendre le système auto-suffisant et le plus facile d'utilisation, un boîtier de commande est réalisé de sorte qu'une entrée secteur et une connexion USB soient suffisantes pour l'alimentation et le pilotage de la machine. Les détails du boîtier sont donnés en [Appendice D](#).

2.3.3 Pantographe HPP

En [sous-section 2.3.1.a](#) le principe du pantographe et du réseau 2D de pantographes a été présenté. Il s'agit maintenant de faire les choix technologiques correspondant au mieux à la réalisation d'un pantographe répondant aux exigences du cahier des charges (cf. [Appendice C](#) pour le cahier des charges complet) :

- taille de la cellule élémentaire : ~ 30 mm ;
- gamme cinématique : $\pm 2\%$;
- gamme statique : 200 N par cellule ;
- déformation sous charge inférieure à 120 μm

La gamme cinématique demandée est très faible relativement aux déformations possibles pour les pantographes précédemment évoqués. Cette section s'attache donc à déterminer la meilleure approche possible afin de réaliser un pantographe adapté aux petites perturbations (pantographe HPP). Cela permet d'envisager des solutions technologiques différentes du "pantographe à dessin".

2.3.3.a Éléments roulants

La solution la plus évidente pour réaliser des liaisons pivots sans déperdition énergétique est l'utilisation d'éléments roulants. Cependant tout roulement non préchargé possède un jeu et pour les tailles recherchées ($\varnothing < 30$ mm) aucun roulement à contact oblique (bille ou rouleaux) n'a été trouvé dans les catalogues des divers fournisseurs. Le [Tableau 2.3](#) donne les dimensions et jeux pour des roulements adaptés. Les données sont extraites du catalogue SKF ([Noac]). Les paramètres géométriques utilisés sont définis sur la [Figure 2.14](#).

| Type Roulement | bille, 1 rangée, radial | rouleaux cylindriques | cages à aiguilles |
|------------------|-------------------------|-----------------------|-------------------|
| $d_i(\text{mm})$ | 4 | | 3 |
| $D_e(\text{mm})$ | 12 | | 5 |
| $L(\text{mm})$ | 4 | Pas de taille | 7 |
| $C_0(\text{kN})$ | 0.28 | adaptée | 1.3 |
| $j(\mu\text{m})$ | ≥ 10 | | ≥ 20 |

TABLE 2.3: Dimensions et jeu pour montage "normal" (sans précontrainte et ajustement recommandés utilisés) sur roulements

Du fait de la présence de jeu dans les roulements, une erreur de position est attendue sur le pantographe. On peut distinguer deux types d'erreur : une erreur axiale et une erreur transverse relativement à l'axe du pantographe.

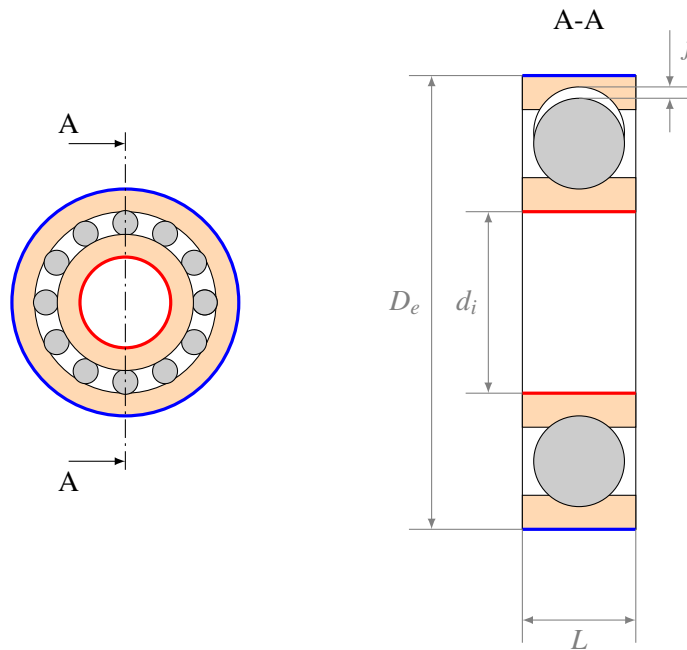
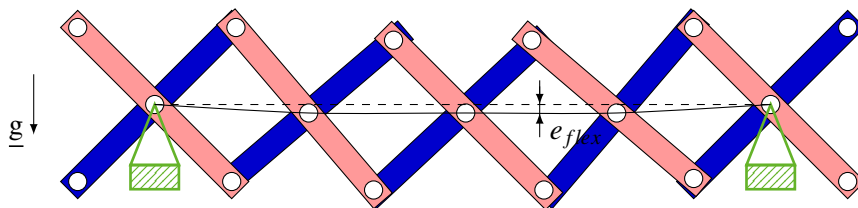


FIGURE 2.14: Définition des dimensions sur un roulement

FIGURE 2.15: Affaissement d'un pantographe bi-appuyé sous son propre poids (avec \underline{g} l'accélération de la gravité) dû au jeu dans les roulements

Erreur transverse L'erreur transverse est due à la flexion du pantographe. En effet sous l'effet cumulé du jeu dans les liaisons pivots, en contrôlant uniquement les extrémités du pantographe celui-ci va s'affaisser sous son propre poids s'il se trouve dans la position représentée Figure 2.15. L'erreur induite par cet affaissement, e_{flex} , se détermine géométriquement dans le cas d'un "pantographe console" comme représenté en Figure 2.16 :

$$e_{flex} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \theta l + (n-i)l \frac{\sqrt{2}}{2} \theta \right)$$

où θ est le basculement d'un bras dû au jeu dans les roulements. Cet angle s'obtient également par une construction géométrique :

$$\tan \theta = \frac{j}{l}$$

$$\theta = \frac{j}{l} + o\left(\frac{j}{l}\right)$$

La longueur L_i vaut

$$L_i = L_{tot} - i \times l \frac{\sqrt{2}}{2} = (n - i)l \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On a alors en première approximation

$$e_{flex} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{j}{l} l + (n - i)l \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{j}{l} \right) \quad (2.38)$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{(n - i + 1) \sqrt{2}}{2} j \quad (2.39)$$

$$= \frac{3}{4} (n^2 + n) j \sqrt{2} \quad (2.40)$$

Comme représenté en Figure 2.15 il ne faut pas considérer un pantographe console mais bi-appuyé. Par symétrie ce problème est donc équivalent à deux problèmes de "pantographe console" de 5 cellules cf Figure 2.17.

Pour le pantographe bi-appuyé, on reprend donc l'Equation (2.40) avec $n = 5$. Finalement

$$e_{flex} = 636 \mu\text{m} \quad (2.41)$$

Erreur axiale De la même manière, le jeu dans les pivots implique une erreur transverse, chaque cellule étant libre de se déplacer dans l'axe du pantographe grâce au jeu. L'erreur se cumule ici de manière linéaire. On obtient alors une erreur axiale de

$$e_{ax} = 100 \mu\text{m}$$

Pour rappel, on veut une erreur en déplacement inférieure à $120 \mu\text{m}$ (2% de la gamme de sollicitation). L'erreur transverse est critique vis-à-vis de ce critère. Elle peut cependant être réduite en associant le pantographe à un rail de guidage, par exemple une glissière à bille préchargée pour obtenir une erreur transverse faible $\approx 20 \mu\text{m}$. C'est cette solution qui est retenue par [Joe91] et Accupull. L'erreur axiale est acceptable cependant ces calculs ne prennent pas en compte la déformation des bras sous l'effet de la charge et les autres erreurs qui peuvent s'accumuler le long de la chaîne de pilotage, ce qui laisse donc très peu de marge pour dimensionner celle-ci. De plus, même si la dissipation énergétique des roulements à bille est très faible, le grand nombre de roulements ainsi que le très fort hyperstatisme du mécanisme risque de générer des pertes énergétiques significatives. Nous ne retiendrons donc pas cette solution.

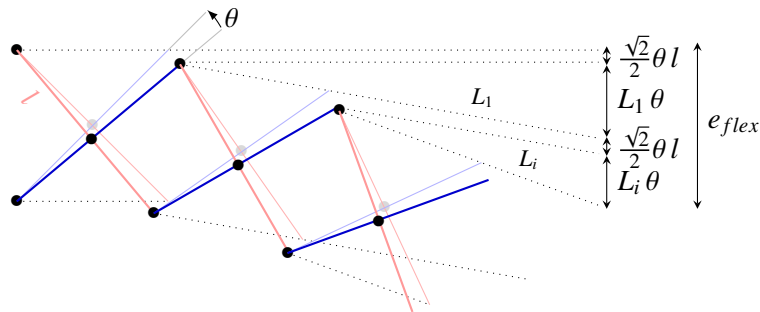


FIGURE 2.16: Détermination de l'erreur en position transverse due au jeu dans les roulements pour un problème de "pantographe console"

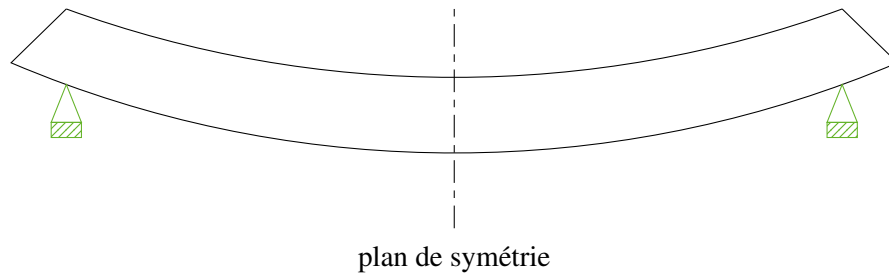
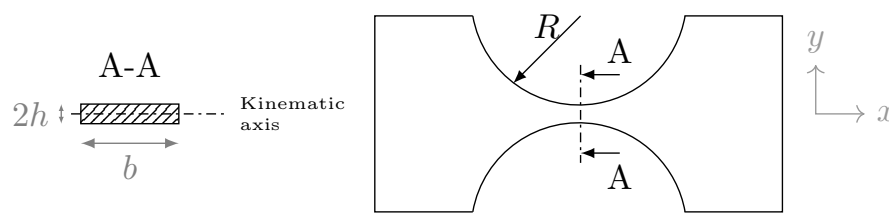


FIGURE 2.17: déformée du pantographe bi-appuyé

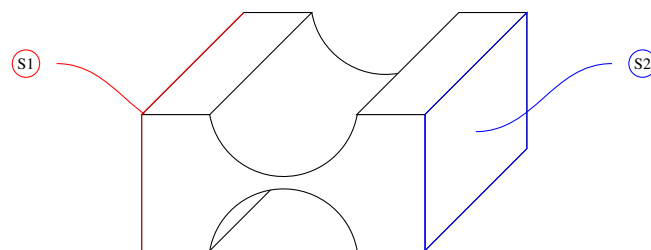
2.3.3.b Liaisons souples

Une solution alternative pour créer des liaisons pivots est d'utiliser des liaisons souples (LS). Le principe est d'utiliser la déformation élastique d'un voile mince ([Lob02]) ayant une géométrie spécifique (ex Figure 2.18). Une telle liaison n'a aucun jeu et ne dissipe pas d'énergie tant que la déformation reste élastique. La tenue mécanique et l'angle de rotation maximal de cette liaison dépendent des paramètres matériau (module de Young et limite élastique) et des paramètres géométriques R , h et b (cf Figure 2.18). Toutefois ces liaisons permettent le transfert d'actions mécaniques faibles ainsi que de faibles rotations (adapté au pantographe HPP). Une phase de dimensionnement spécifique aux liaisons souples sera donc nécessaire.

Bien que plus complexe à dimensionner et ayant un champ d'action plus réduit c'est cette solution qui sera retenue pour la suite de l'étude, la suppression des jeux et des pertes énergétiques étant primordiale.



(a) Paramètres géométriques



(b) Vue en perspective

FIGURE 2.18: Description d'une liaison souple, S1 et S2 sont les deux solides en liaison pivot.

2.4 Dimensionnement des liaisons souples

2.4.1 Définition de la géométrie du pantographe

La première étape de conception est de définir la géométrie globale du système. Il est important de noter dès à présent la distinction faite entre les ensembles cinématiques et les ensembles mécaniques (ou matériels). En effet, jusqu'à présent les bras des pantographes étaient considérés rigides, et avaient donc une cinématique de corps rigide. Ici, les pivots sont obtenus par liaison souple c'est à dire par déformation élastique. De plus les liaisons souples sont intégrées aux bras et ne sont pas des pièces supplémentaires (comme pourrait l'être un axe de liaison pivot). De ce fait, les bras ne peuvent plus être considérés rigides et leur cinématique n'est plus assimilable à celle d'un corps rigide mais à celle de deux corps rigides distincts séparés par la liaison souple.

La géométrie globale est obtenue :

- en remplaçant les liaisons pivots par des liaisons souples (Figure 2.20b);
- puis en maximisant la rigidité des bras de pantographe en plaçant la matière au plus loin de la fibre neutre et en maximisant la compacité du dispositif (Figure 2.20c). À cette étape, chaque pièce représentée forme un ensemble cinématique cohérent (mouvement de solide rigide).¹²
- on ajoute alors, après la liaison souple, un œillet dont le rôle est de permettre l'accrochage avec les autres bras (Figure 2.20d). À cette étape, chaque pièce représentée forme n ensembles cinématiques distincts (n mouvements de solide rigide comme repéré par la différence de couleur : un mouvement pour la partie rouge et un mouvement distinct par partie bleue) mais bien 1 ensemble matériel puisque formée d'une continuité de matière. Ces pièces seront appelées **bras souples** par la suite. On définit sur la Figure 2.19 des points d'intérêt : les centres cinématique et géométrique.¹³

12. Il faut noter dès à présent l'apparition d'évidements circulaires de chaque côté de la liaison souples. Ils sont dus à l'anticipation de la phase de fabrication : la qualité de surface, la finesse et le grand nombre de liaisons souples à usiner (plus de 2000 après dimensionnement) fait que le seul moyen de fabrication est le perçage conventionnel. En effet, une découpe jet d'eau ne permet pas une telle précision géométrique ni d'état de surface (d'autant plus que le jet est divergent et que l'épaisseur de liaison souple ne serait pas constante), une découpe par électro érosion représenterait un temps d'usinage trop élevé et la réalisation par fraisage nécessiterait l'emploi d'une fraise de faible diamètre par rapport à sa longueur, incapable d'obtenir les tolérances et états de surface requis.

La liaison souple requiert donc deux évidements circulaires de même rayon que l'amincissement. Ces contraintes géométriques fortes se feront particulièrement sentir lors du dimensionnement puisqu'une augmentation du rayon de la liaison implique une perte importante de matière au sein du bras

13. Les œillets permettent le passage de vis à travers les différentes couches (via les perçages centraux) du pantographe tout en assurant l'appui de la tête de vis ou rondelle pour le serrage

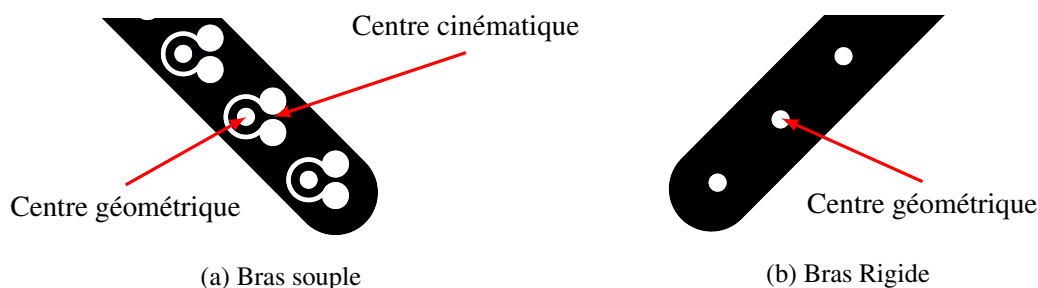


FIGURE 2.19: Définition des centres cinématique et géométrique

- les autres bras (en bleu sur [Figure 2.20e](#)) ne présentent alors aucune particularité puisque les liaisons pivots ont déjà été créées. Ces pièces seront appelées **bras rigides** par la suite.

Afin d'insister sur la non-trivialité du comportement de ce mécanisme souple, on réalise un calcul éléments finis sous Catia[®] V5.R23. On considère un pantographe formé de 5 cellules élémentaires soumis à une contraction et une extension. Les déplacements sont imposés en pilotant le déplacement des nœuds du maillage proches du centre des liaisons souples 2 et 5 de la ligne inférieure, représentées par ● sur [Figure 2.21](#).

La cinématique est bien celle attendue, on peut une fois de plus noter que les ensembles cinématiques et mécaniques sont distincts. La cinématique n'est en effet pas la plus évidente car les rotations n'ont pas lieu aux centres des trous de passage de vis (comme attendu visuellement) mais aux centres des liaisons souples.

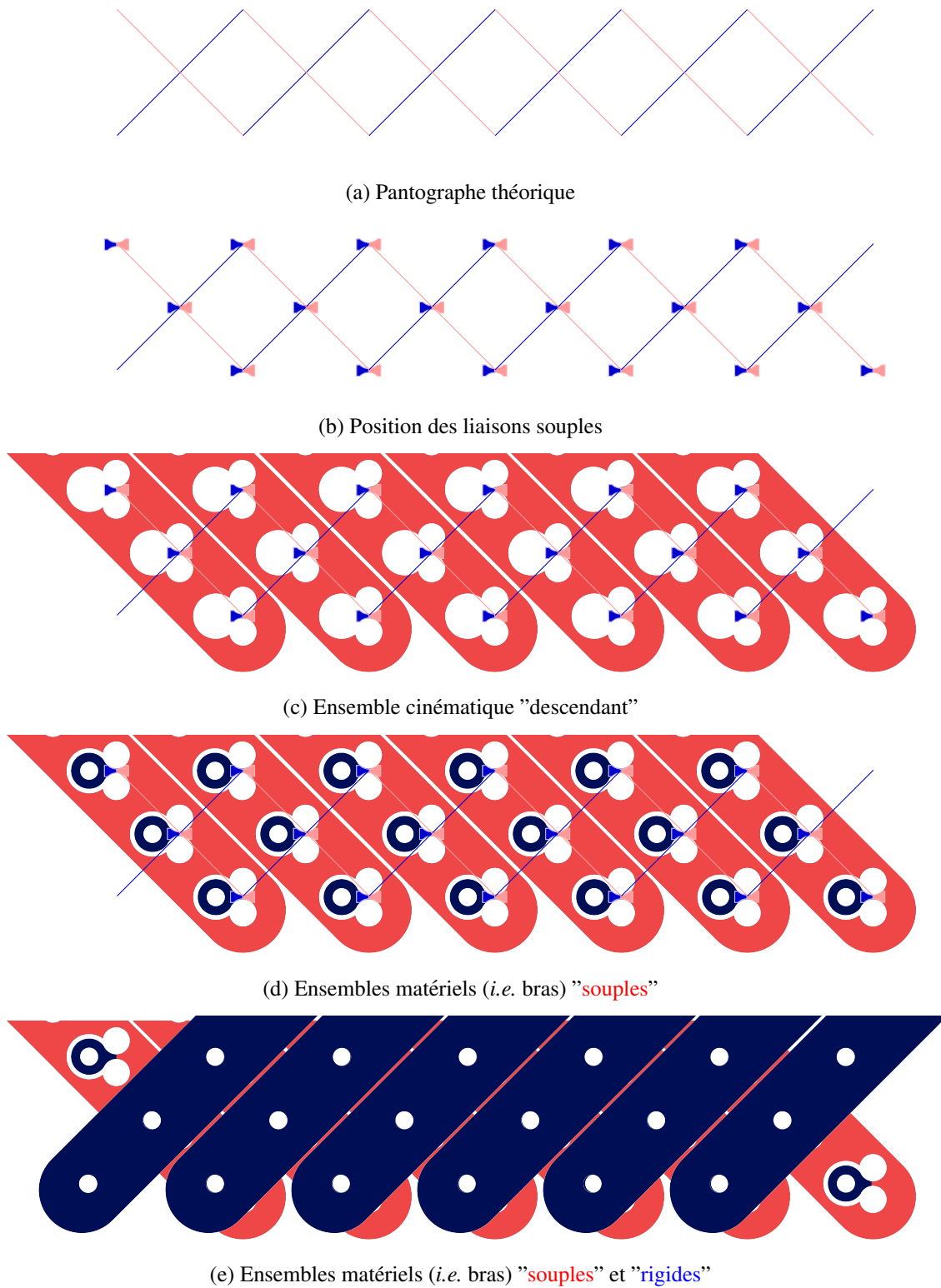


FIGURE 2.20: a,b,c,d,e : Processus de création CAO des bras du pantographe

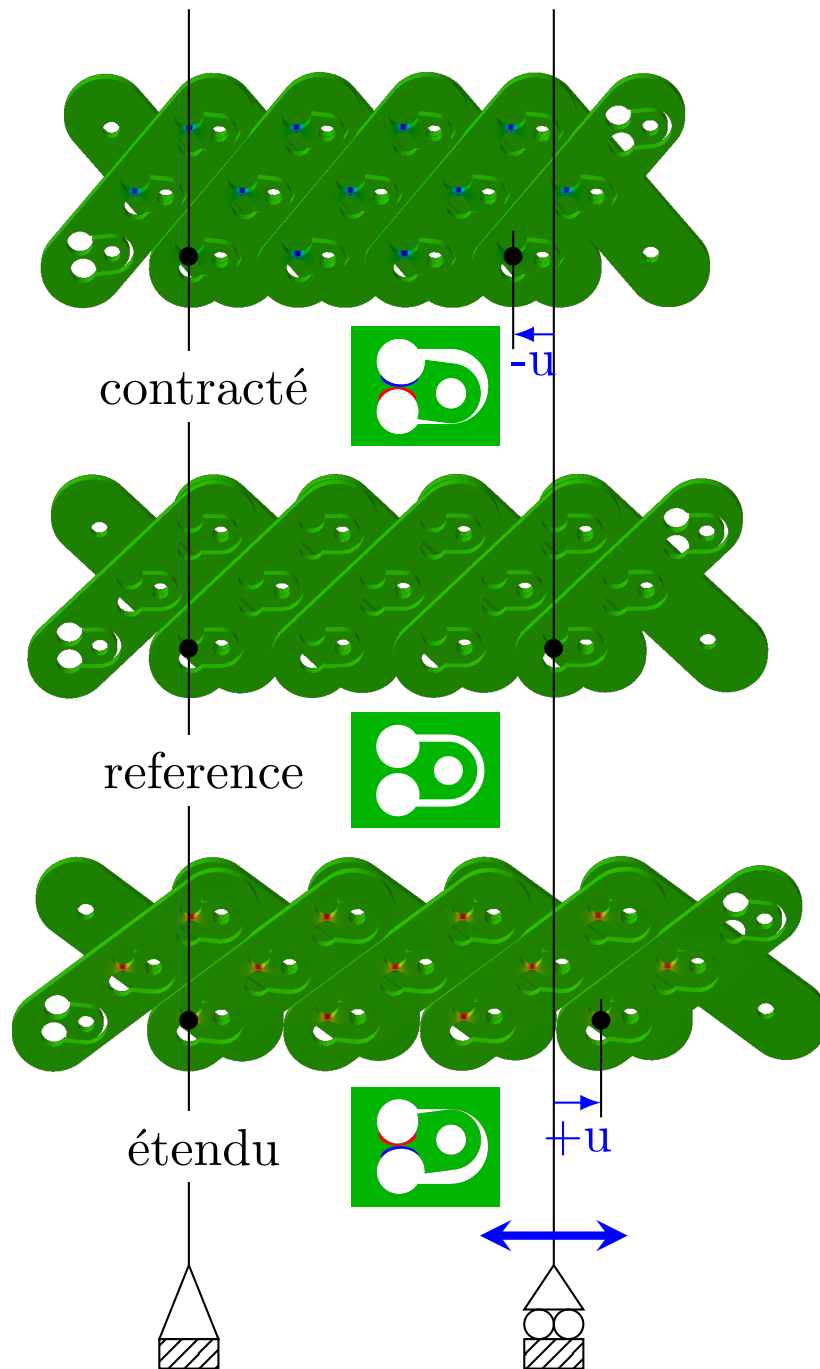


FIGURE 2.21: Cinématique du pantographe et déformation corrélée des LS. Le pantographe est piloté en imposant la cinématique des nœuds proches du centre des LS 2 et 5 de la ligne inférieure, repérées par \bullet . L'échelle de couleur représente la première déformation propre.

2.4.2 Équilibre global

La géométrie globale ayant été définie, il est désormais possible de dimensionner les liaisons souples. Pour cela, on va considérer deux cas de chargement sur le pantographe complet : 1) un chargement transverse et 2) un chargement axial pour déterminer les amplitudes et orientations extrêmes auxquelles sont soumises les liaisons souples.

2.4.2.a Chargement transverse

On représente en [Figure 2.22](#) un chargement transverse homogène sur le pantographe.

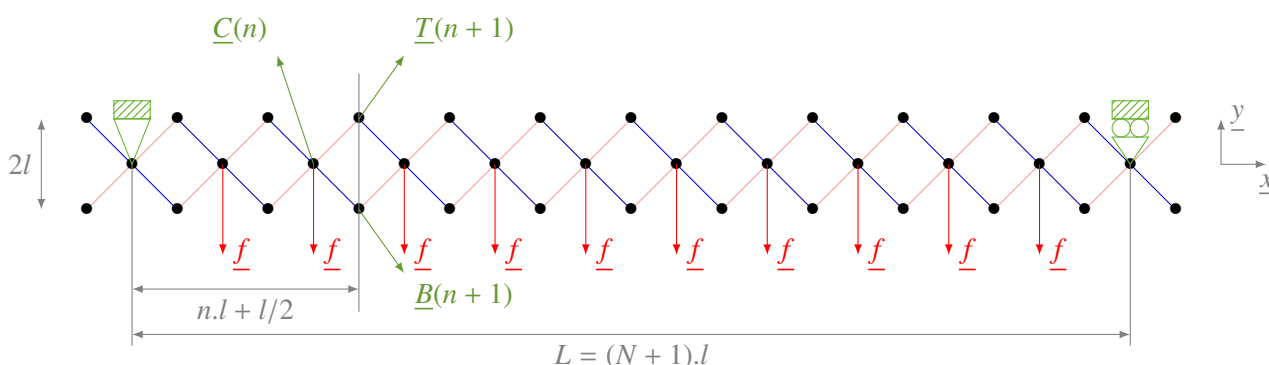


FIGURE 2.22: Chargement transverse du pantographe

Avec :

- n : numéro cellule élémentaire courante
- N : nombre total de cellules chargées
- $N + 2$: nombre total de cellules
- $2l$: longueur d'une cellule élémentaire
- L : longueur utile du pantographe
- f : effort local appliqué sur le pantographe
- \underline{T} , \underline{B} , \underline{C} : effort transisant par la liaison haute, basse, centrale (resp.) d'une cellule

L'équilibre global donne les efforts de réaction dans les attaches à gauche et à droite :

$$\underline{F} = F \underline{e}_y = \frac{1}{2} N \cdot f \underline{e}_y$$

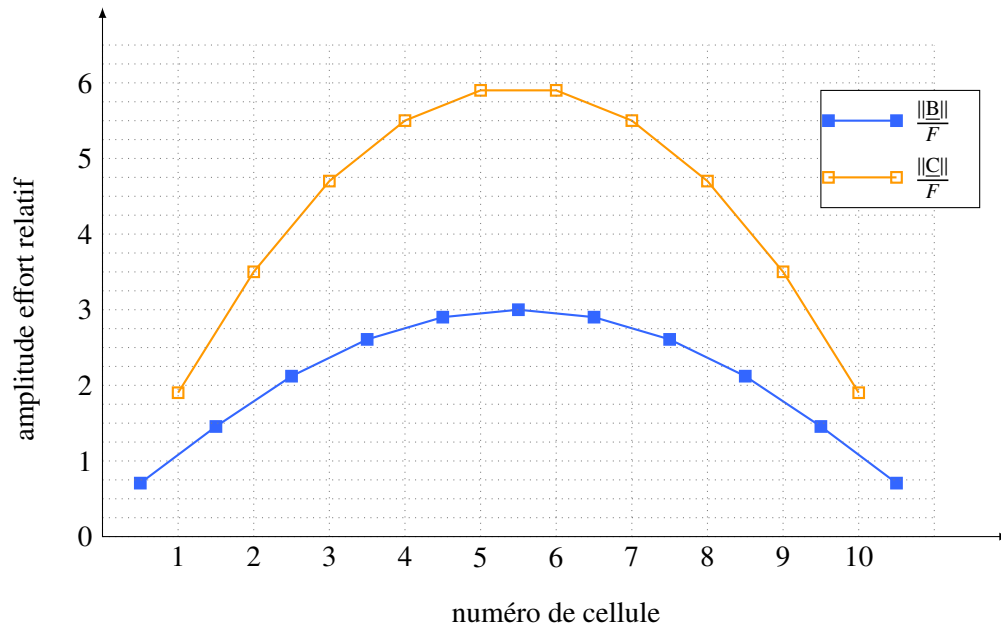
Une étude statique permet de déterminer les efforts $\underline{T}(n)$, $\underline{B}(n)$ et $\underline{C}(n)$. Le détail des calculs est donné en [Appendice E](#).

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x(n+1) = -T_x(n+1) = -\frac{F}{2} \left[\frac{2n^2}{N} - 2n - 1 \right] \\ T_y(n+1) = B_y(n+1) = \frac{F}{2} \left(\frac{2n}{N} - 1 \right) \\ C_x(n) = -F \left[\frac{2n^2 - 2n + 1}{N} - 2n \right] \\ C_y(n) = -\frac{F}{N} \end{array} \right. \quad (2.42)$$

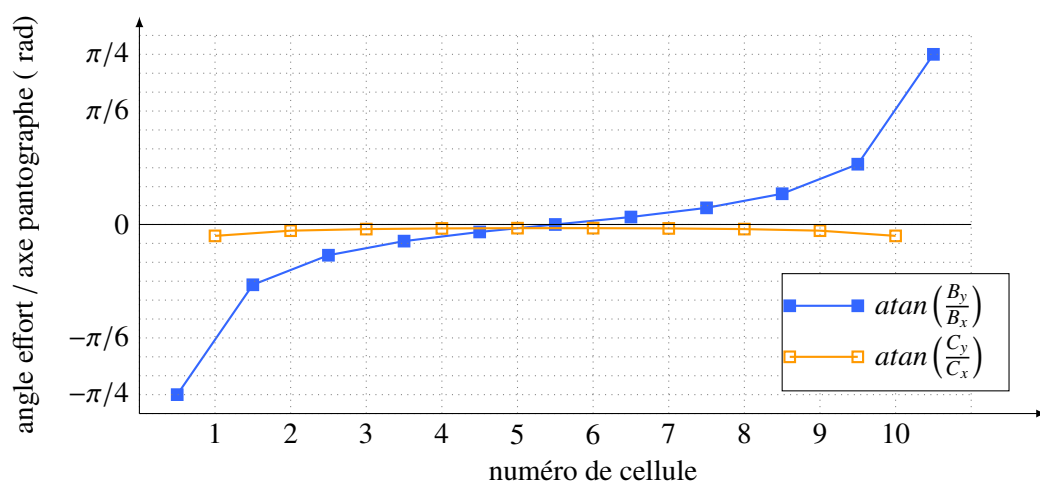
On trace en [Figure 2.23a](#) l'évolution de l'amplitude des efforts traversant les liaisons souples adi-

mentionnée par l'effort F : $\frac{\|B\|}{F}$ et $\frac{\|C\|}{F}$ ¹⁴. Il est intéressant d'exprimer les autres efforts relativement à celui-ci puisqu'il s'agit de l'effort mesuré sur le dispositif complet (cf Figure 2.7b).

En Figure 2.23b, on trace l'évolution de l'angle de l'effort par rapport à l'axe du pantographe : $\text{atan}\left(\frac{B_y}{B_x}\right)$ et $\text{atan}\left(\frac{C_y}{C_x}\right)$. Les courbes correspondant à l'action \underline{T} ne sont pas tracées puisque similaires à celles de l'action \underline{B} au signe près.



(a) Amplitude des efforts traversant les liaisons souples adimensionnée par l'effort F dans les rotules



(b) Angle par rapport à l'axe du pantographe des efforts traversant les liaisons souples

FIGURE 2.23: Amplitude et orientation des efforts pour le cas de chargement transverse

14. $\|B\| = \|T\|$

2.4.2.b Chargement axial

De même, on représente en [Figure 2.24](#) un chargement transverse homogène sur le pantographe.

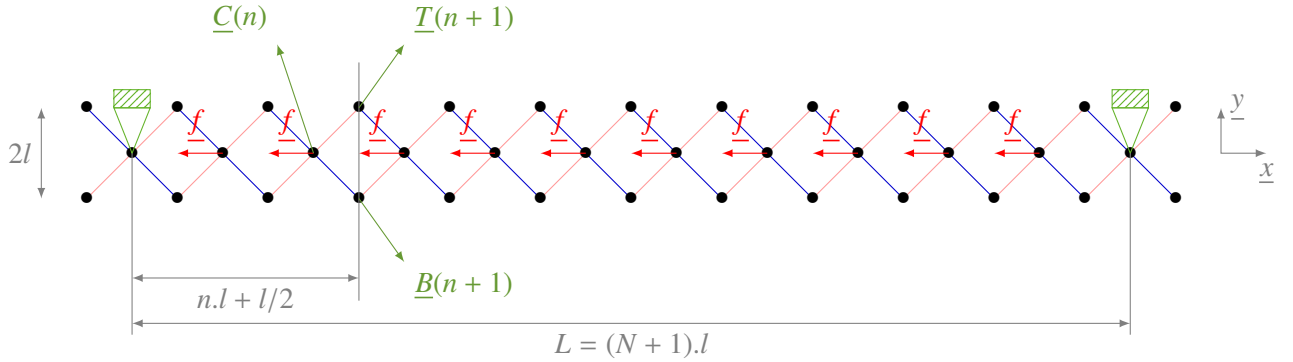


FIGURE 2.24: Chargement axial du pantographe -

L'équilibre global donne les efforts de réaction dans les rotules : $\underline{E}_1 + \underline{E}_2 = N.f e_x$. Avec \underline{E}_1 l'effort dans la rotule gauche et \underline{E}_2 l'effort dans la rotule droite.

L'équirépartition ($\underline{E}_1 = \underline{E}_2$) ne peut pas être obtenue par un simple équilibre statique ici. Une fois encore il faut raisonner en termes énergétiques. Le pantographe ne stockant pas d'énergie, nous pouvons écrire :

$$F_1 u_1 + F_2 u_2 = \sum_{i=1}^{10} f u_i = \sum_{i=1}^{10} f \left(\frac{x_i}{L} u_2 + \frac{L - x_i}{L} u_1 \right)$$

Cette équation peut être dérivée par rapport à u_1 et u_2 successivement

$$\begin{cases} F_1 = f \sum_{i=1}^{10} \frac{L - x_i}{L} = f \sum_{i=1}^{10} \frac{(N+1)l - n.l}{(N+1)l} = 5f \\ F_2 = f \sum_{i=1}^{10} \frac{x_i}{L} = f \sum_{i=1}^{10} \frac{n.l}{(N+1)l} = 5f \end{cases}$$

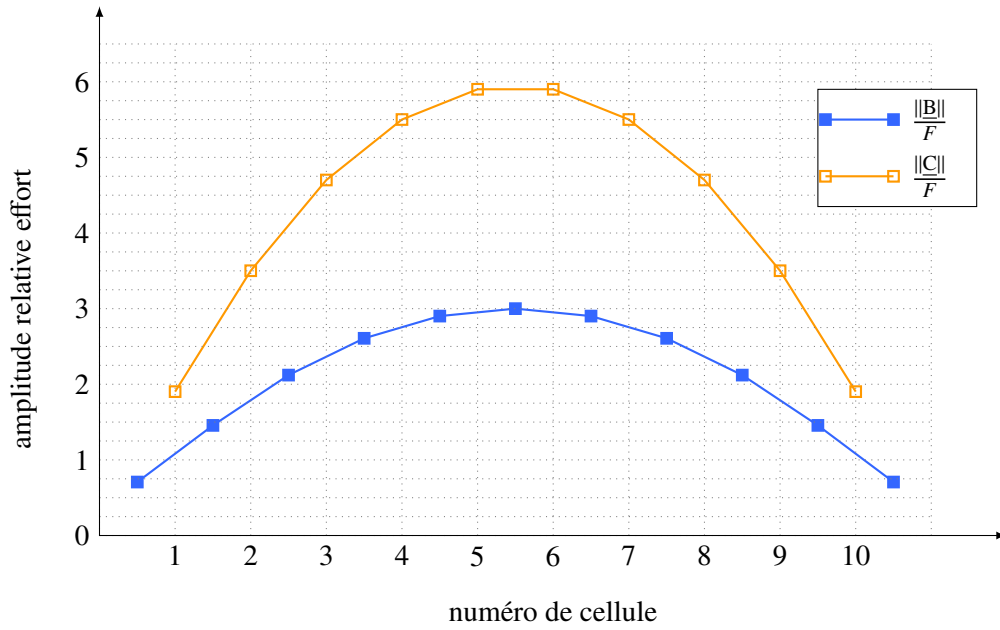
Finalement

$$\underline{E}_1 = \underline{E}_2 = F e_x = \frac{1}{2} N f e_x$$

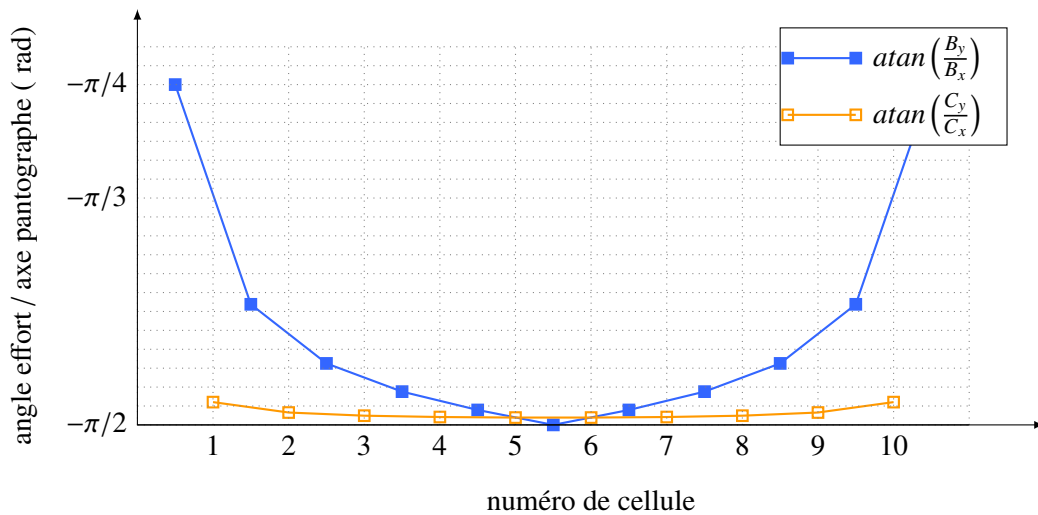
Une étude statique permet de déterminer les efforts $\underline{T}(n)$, $\underline{B}(n)$ et $\underline{C}(n)$. Le détail des calculs est donné en [Appendice F](#).

$$\begin{cases} T_x(n+1) = B_x(n+1) = \frac{F}{2} \left(\frac{2n}{N} - 1 \right) \\ T_y(n+1) = -B_y(n+1) = \frac{F}{2} \left[\frac{2n^2}{N} - 2n - 1 \right] \\ C_x(n) = \frac{-F}{N} \\ C_y(n) = -F \left[\frac{2n^2 - 2n + 1}{N} - 2n \right] \end{cases} \quad (2.43)$$

Les expressions obtenues sont les mêmes que pour le cas transverse en intervertissant les axes x et y . En Figure 2.25b, on trace l'évolution de l'angle de l'effort par rapport à l'axe du pantographe : $\text{atan}\left(\frac{B_y}{B_x}\right)[\pi]$ et $\text{atan}\left(\frac{C_y}{C_x}\right)[\pi]$. Les angles sont définis à π près puisque seule la direction de ligne d'action importe, le sens étant inversé pour un effort réparti opposé. Les courbes correspondant à l'action \underline{T} ne sont pas tracées puisque similaires à celles de l'action \underline{B} .



(a) Amplitude des efforts traversant les liaisons souples adimensionnée par l'effort F dans les rotules



(b) Angle par rapport à l'axe du pantographe des efforts traversant les liaisons souples

FIGURE 2.25: Amplitude et orientation des efforts pour le cas de chargement axial

2.4.2.c Choix d'une architecture à liaisons souples en parallèle

Dans les deux cas, l'amplitude maximale des efforts est de six fois l'effort au bord F . Pour le cas du chargement transverse, les efforts sont majoritairement orientés dans l'axe du pantographe sauf à proximité des extrémités. Pour le chargement axial en revanche les efforts sont moins orientés selon l'axe du pantographe. De plus, l'orientation est très dépendante du chargement imposé (angle opposé pour un chargement opposé). Ces chargements hors axe risquent d'endommager rapidement les liaisons souples qui sont sensibles aux actions de cisaillement. En outre, les charges de compression peuvent faire flamber les liaisons souples¹⁵ Pour éviter cela, on va associer trois pantographes en parallèle (en un **bloc**), chacun avec une orientation différente de liaison souple (Figure 2.26a). Ainsi, lors du chargement d'une liaison pivot, le chargement se répartit sur plusieurs liaisons souples (Figure 2.26b). La rigidité apparente de chaque liaison k_i dépend alors de l'angle entre l'effort et l'axe de la liaison, de sorte que la liaison ayant la meilleure orientation reprenne la majeure partie de l'effort.

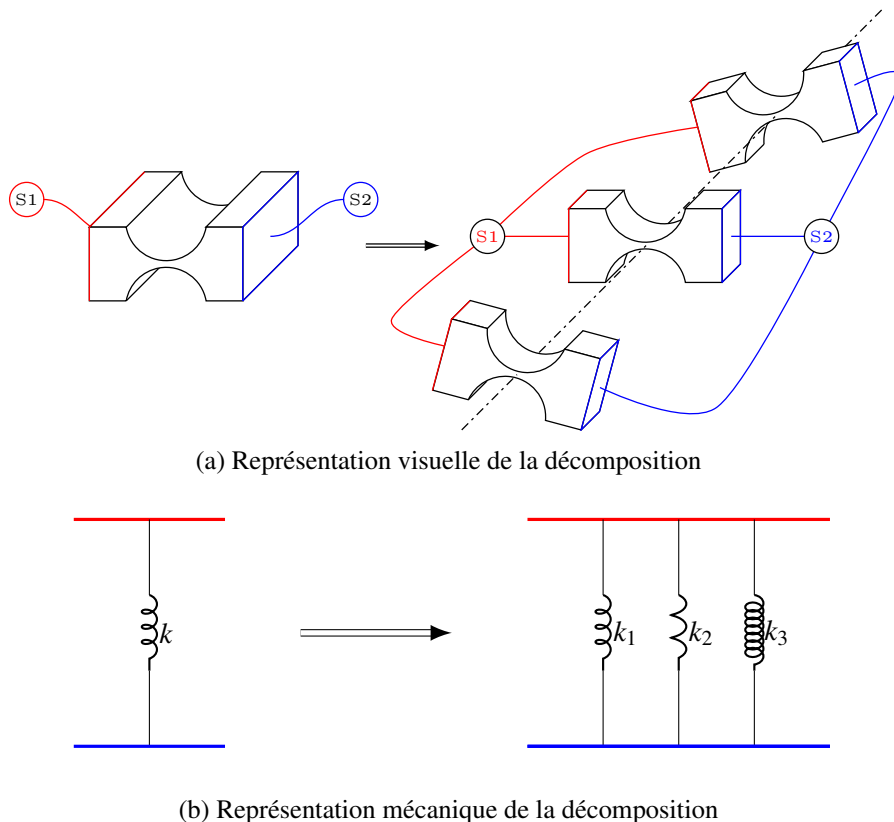


FIGURE 2.26: Décomposition d'une liaison souple en 3 liaisons souples associées en parallèle

La détermination du nombre de pantographes en parallèle ainsi que de l'orientation des liaisons sur ces pantographes est un travail complet, et est inter-dépendant avec les paramètres géométriques des liaisons. Il serait mécaniquement tentant de recourir à uniquement deux liaisons souples orientées à 90° l'une de l'autre (par exemple orientées à $0^\circ/90^\circ$ ou $-45^\circ/+45^\circ$) mais pour des raisons d'encombrement, il n'est pas possible d'orienter les liaisons selon n'importe quel alignement. En effet, si l'on regarde la géométrie des bras (Figure 2.20d), il ne suffit pas de faire tourner le motif pour changer l'orientation des liaisons, des contraintes sont à respecter :

15. En réalité, avec les paramètres géométriques qui seront retenus à l'issue de la phase de dimensionnement le flambement n'est pas un problème, la ruine étant atteinte avant le flambement.

- les centres des liaisons souples des différentes couches en parallèle doivent être superposés pour conserver une cinématique de liaison pivot ;
- les centres des perçages (centre des œillets bleus) doivent également être superposés puisque ce sont des passages de vis pour permettre un bridage des couches les unes sur les autres.

De ce fait, des orientations de liaison souple trop différentes entre les pantographes engendre une augmentation importante de la place occupée par la liaison souple + accouplement.

Le cas de chargement le plus courant est le cas transverse (Figure 2.22) puisqu'il correspond au chargement attendu pour un essai d'extension / compression sur une éprouvette. Le cas de chargement le plus courant des liaisons est donc un chargement dans l'axe du pantographe. Ainsi, il a été choisi de conserver un pantographe avec des liaisons souples orientées "à 0 degré" (dans l'axe du pantographe). Pour avoir le comportement le plus homogène et symétrique au sein d'un groupe de pantographe (le bloc) on place deux autres pantographes avec des orientations de liaison à $\pm\theta$. On prend θ maximum tout en conservant un encombrement limité de l'ensemble liaison souple-accouplement. Finalement, un bloc sera composé de trois pantographes avec les orientations de liaison suivante : $0^\circ, \pm 30^\circ$.

2.4.3 Pré-dimensionnement

On souhaite maintenant dimensionner les liaisons souples. Pour cela, une étude analytique est proposée. Elle s'attache à déterminer les 3 paramètres géométriques des liaisons souples R, h, b (définis Figure 2.18) ainsi que le matériau.

Hypothèse 4 Pour l'étude on considérera qu'une seule liaison reprend la totalité de l'effort et que cet effort est orienté parallèlement à l'axe de la liaison.

Les critères de dimensionnement sont :

1. rester dans le domaine élastique sous chargement maximal F . F étant l'effort dans les rotules dans les deux études précédentes, on a $F = 2$ kN ;
2. permettre une rotation suffisante pour la gamme cinématique d'élongation du pantographe voulue ($\pm 2\%$).

Rôle des paramètres : Dans un premier temps, il faut identifier les paramètres influents pour chacun des critères afin de décider d'une stratégie de dimensionnement.

1. Rester dans le domaine élastique sous charge.

L'hypothèse 4 rend aisée la détermination des critères influents, en effet, la liaison souple est considérée en traction, sa tenue élastique est donc assurée si

$$\frac{F}{2bh} \times s < \sigma_e \quad (2.44)$$

avec σ_e la limite élastique du matériau, $2bh$ la plus petite section de la liaison et s le coefficient de concentration de contraintes dû à la géométrie. Les paramètres influents pour le premier critère sont donc

$$\sigma_e \quad ; \quad b \quad ; \quad h$$

2. Permettre une rotation ω suffisante.

Pour connaître les paramètres influents ici, il faut réaliser une étude poutre à section variable. Ce travail a été fait dans [S.K93 ; Lob02], nous réutiliserons donc les résultats de cette étude :

$$\omega_{max} = 2f(\rho)\rho \frac{\sigma_e}{E} \quad (2.45)$$

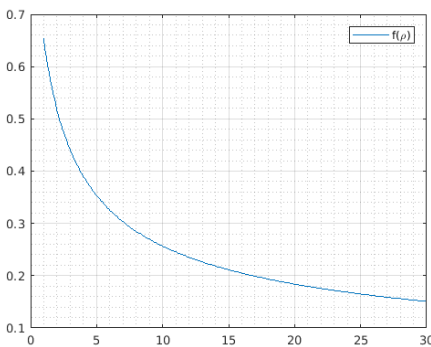
où ω_{max} est l'angle maximal de rotation de la liaison souple et E le module de Young du matériau. Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{R}{h} \\ f(\rho) = \frac{2}{y^5} \times [(y^4 - 1)I_3 + 2I_2 - I_1] \\ y = y(\rho) = (1 + 2\rho)^{1/2} \\ I_1 = \arctan(y) \\ I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{y}{2n(1+y^2)^N} \end{array} \right.$$

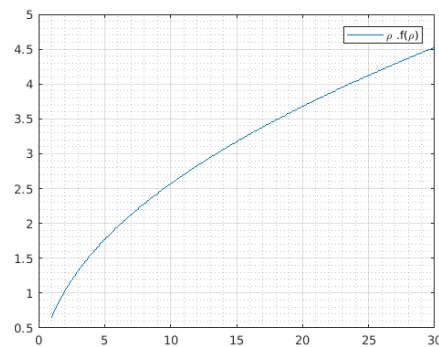
La fonction $f(\rho)$ est tracée en Figure 2.27a et la fonction $\rho.f(\rho)$ est tracée en Figure 2.27b. Cette dernière fonction étant strictement croissante et ω_{max} lui étant directement proportionnelle, on peut en déduire que ω_{max} est une fonction strictement croissante de $\rho = \frac{R}{h}$, ce sera donc un paramètre à maximiser.

Les paramètres influents pour le second critère sont donc

$$\frac{\sigma_e}{E} \quad ; \quad \frac{R}{h}$$



(a) Tracé de la fonction $f(\rho)$ pour l'étude d'une liaison souple



(b) Tracé de la fonction $\rho.f(\rho)$ pour l'étude d'une liaison souple

FIGURE 2.27: Tracés des fonctions utiles à la détermination de l'angle de rotation maximal des liaisons souples

Méthode Au vu de leurs influences, la méthode pas-à-pas suivante est utilisée pour la détermination des paramètres des liaisons souples :

- a. choix du matériau en maximisant le rapport $\frac{\sigma_e}{E}$;

- b. détermination du rapport $\frac{R}{h}$ critique (au regard de l' Equation (2.45));
- c. maximisation de R sous contrainte d'encombrement;
- d. détermination de h pour respecter le rapport $\frac{R}{h}$ choisi;
- e. détermination de b pour assurer la tenue élastique sous chargement maximal.

a. Choix matériau

Une carte (σ_e , E) de [Ash05] (cf Figure 2.28) donne les élastomères et les polymères comme familles maximisant le rapport $\frac{\sigma_e}{E}$. Cependant, au vu de la taille et du nombre des liaisons souples, il n'est pas envisageable de les réaliser séparément et de les assembler, le pantographe sera donc fabriqué dans sa totalité dans la même matière. Les bras devant être suffisamment rigides pour imposer la cinématique du pantographe à l'éprouvette, l'utilisation d'un élastomère paraît peu pertinente ici. De plus ces matériaux ont un comportement hystérétique et visqueux, ce qu'il faut absolument éviter pour assurer une bijection entre effort et déplacement sur le dispositif d'essai. Ces familles ne seront donc pas retenues. Les choix suivants sur la carte matériau sont les alliages de titane et alliages d'aluminium. D'un point de vue mécanique, les alliages de titane donnent de meilleurs résultats :

$$\left| \begin{array}{l} \text{aluminium 7075} \\ \text{TA6V} \end{array} \right. \begin{array}{l} \frac{\sigma_e}{E} \simeq 6.10^{-3} \\ \frac{\sigma_e}{E} \simeq 10.10^{-3} \end{array}$$

Cependant, ils sont globalement plus chers

$$\left| \begin{array}{l} \text{tonne d'aluminium en 2020} \\ \text{tonne de titane en 2020} \end{array} \right. \begin{array}{l} 1500\text{€} \\ 4500\text{€} \end{array}$$

et beaucoup plus difficiles à usiner. En effet les alliages de titane ayant une très haute limite d'élasticité et une faible conductivité thermique,

$$\left| \begin{array}{l} \text{conductivité thermique aluminium} \\ \text{conductivité thermique titane} \end{array} \right. \begin{array}{l} \simeq 200 \text{ W/m/K} \\ \simeq 20 \text{ W/m/K} \end{array}$$

l'échauffement est très important lors de l'usinage, de plus, ces alliages gardent une bonne tenue mécanique à haute température et sont donc complexes à usiner. Pour ces raisons nous utiliserons donc un alliage d'aluminium. Dans cette famille on choisit un aluminium 7075 ($E = 72$ GPa, $\sigma \simeq 430$ MPa) car c'est celui présentant le meilleur rapport $\frac{\sigma_e}{E}$.

b. Détermination de $\frac{R}{h}$

Dans l'Equation (2.45), il reste à déterminer le terme $\rho.f(\rho)$. Pour cela il faut connaître l'angle de rotation permettant une élongation de $\pm 2\%$ du pantographe donc une élongation de $\pm 2\%$ de chaque cellule. Une simple considération géométrique (Figure 2.29) donne :

$$\begin{aligned} \frac{l\sqrt{2}}{2} \cos \theta &= \frac{l\sqrt{2}}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + d\theta \right) = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon) \\ &= \frac{l\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\pi}{4} \cos d\theta - \frac{l\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{4} \sin d\theta \\ &= \frac{l}{2} \cos d\theta - \frac{l}{2} \sin d\theta \\ &= \frac{l}{2}(1 - d\theta) \quad \text{au premier ordre} \end{aligned}$$

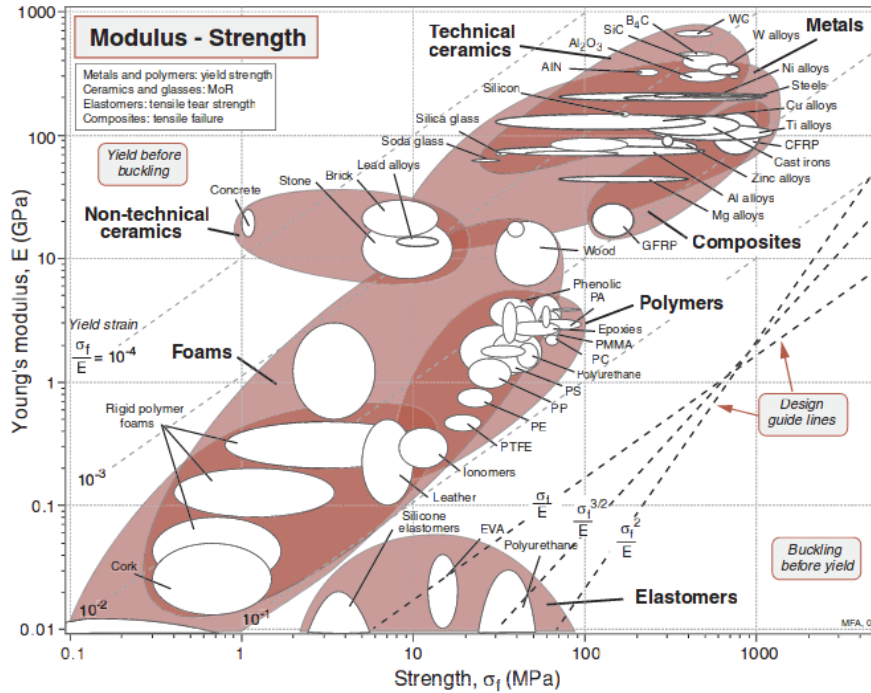


FIGURE 2.28: Carte (σ_e, E) de [Ash05]

Donc, en restant en HPP, $d\theta = -\varepsilon$. Donc en reprenant, Equation (2.45) il faut :

$$\rho f(\rho) > 1,7$$

Par lecture graphique sur Figure 2.27b, cela correspond environ à

$$\frac{R}{h} > 5 \tag{2.46}$$

c. Maximisation de R

Le choix de R se fait par maximisation sous contrainte d'encombrement. En effet, comme évoqué précédemment, avec les différentes orientations de liaison la place prise par l'ensemble liaison souple - accouplement est vite importante. Une autre contrainte à prendre en compte est l'existence de forêts du diamètre recherché puisqu'on ne peut pas réaliser ces perçages par une opération de fraisage car des fraises d'élancement suffisant n'assureraient pas la précision géométrique requise pour les liaisons souples. Au vu de ces contraintes, un rayon de 3 mm est retenu.

d. Détermination de h

On souhaite ici déterminer h. Pour cela, il serait suffisant de se contenter de satisfaire à l'Equation (2.46). Toutefois, il est préférable de prendre une marge de sécurité puisqu'il est tout à fait possible que la liaison subisse conjointement une rotation et une charge axiale. Pour faire en sorte que la liaison ne soit pas à la limite d'élasticité lorsque le pantographe est totalement étendu, on va choisir une valeur de h inférieure à l'optimum (donc une valeur de ρ supérieure, donc une valeur de ω_{max}

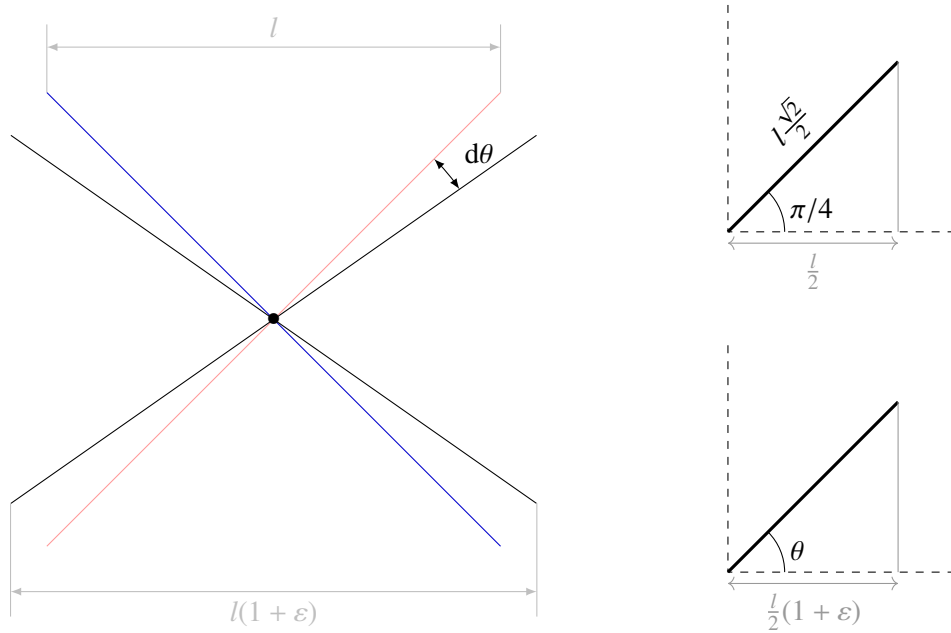


FIGURE 2.29: Détermination de l'angle de rotation nécessaire

supérieure au critère). Cette épaisseur doit cependant rester raisonnable afin de permettre son usinage. Vu ces contraintes, la valeur retenue¹⁶ est $h = 0.35$ mm (on rappelle que l'épaisseur de la liaison souple est de $2h$).

e. Détermination de b

Il ne reste plus qu'à déterminer b pour satisfaire l'Equation (2.44), soit

$$b > \frac{F s}{2h\sigma_e} > 160 \text{ mm}$$

La valeur de s , le coefficient de concentration des contraintes dépend des paramètres géométriques. Une abaque est donnée chez [PPB20].

En résumé, les paramètres obtenus sont donnés en Tableau 2.4.

| Paramètre | Valeur |
|-----------|---------|
| R_e | 430 MPa |
| E | 72 GPa |
| R | 3 mm |
| h | 0.35 mm |
| b | 160 mm |

TABLE 2.4: Paramètres matière et géométriques obtenus à l'issue de la phase de pré-dimensionnement

16. Cette valeur a été choisie pour un perçage en UGV sur de l'aluminium après discussions avec des spécialistes de l'usinage à l'ENS Paris Saclay (Bruce Anglade et Sylvain Lavernhe).

Un tel jeu de paramètres géométriques est difficilement envisageable, en effet l'usinage de voiles de bonne qualité de 0.7 mm sur 160 mm de profondeur représente une difficulté technique. De plus, l'interaction entre rotation et chargement statique des liaisons n'a pas réellement été pris en compte. D'autre part, cette étude est limitée, elle ne détermine pas la déflexion du pantographe sous son chargement et ne permet donc pas de valider l'exigence du cahier des charges à ce propos.

Pour diminuer le paramètre b , (c'est à dire diminuer l'effort transitant par chaque liaison) on va jouer sur le nombre de rangs du pantographe (défini en Figure 2.30). L'augmentation du nombre de rang aura pour effet de diminuer l'effort transmis par chaque liaison souple ainsi que de rigidifier le pantographe et limiter sa déflexion sous efforts externes. Pour réaliser l'étude sur la variation du nombre de rangs, un modèle numérique va être mis en place puisque le problème devient hyperstatique dans le plan (alors qu'il est isostatique *dans le plan* pour un pantographe à 1 rang). Le modèle numérique permettra également d'évaluer la déflexion du pantographe et ainsi de répondre à l'exigence correspondante du cahier des charges, ce qui est l'objet de la section suivante.

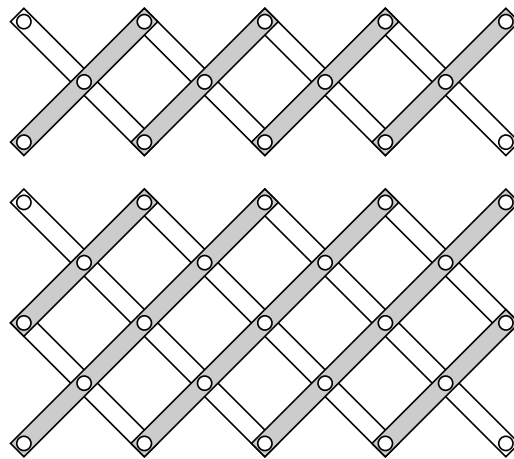


FIGURE 2.30: Pantographes à 1 et 2 rangs

2.4.4 Nécessité d'une étude numérique

Sur le jeu de paramètres déterminé précédemment, seule l'épaisseur des liaisons souples (paramètre b) va être reconsidéré ici puisque les paramètres matériaux ainsi que R et h ont été obtenus sur des critères d'encombrement et d'allongement requis du pantographe. Le nouveau paramètre que l'on va introduire : r , le nombre de rang, n'est pas influent pas sur ces critères et ne remet donc pas en cause le raisonnement préalablement mené.

Le passage à une étude numérique permet de regarder le problème dans sa globalité. Jusqu'à présent seuls les bras, pantographes et les "côtés" (les blocs) ont été évoqués et plus ou moins pris en compte. Arrêtons nous donc un instant pour considérer le système dans son ensemble ainsi que pour définir les termes désignant les différents sous-ensembles. La Figure 2.31 présente la structure de la machine avec :

- Le **pantographe** (Figure 2.31a). Un pantographe est composé de deux **couches**, chacune formée de **bras** ("souples" ou "rigides");
- l'assemblage de trois pantographes en parallèle donne un **bloc** (Figure 2.31b);
- l'association de 4 blocs en un réseau pour former un cadre est appelé **étage** ((Figure 2.31c);

- enfin, deux étages sont présents sur le montage complet (Figure 2.31d), un de chaque côté de l'éprouvette afin de symétriser le dispositif et donc éviter les actions mécaniques hors-plan (plan de l'éprouvette) lors des essais.

Pour bien appréhender la complexité de l'ensemble, la figure en pleine page après le bilan détaille la composition d'un bloc de manière visuelle.

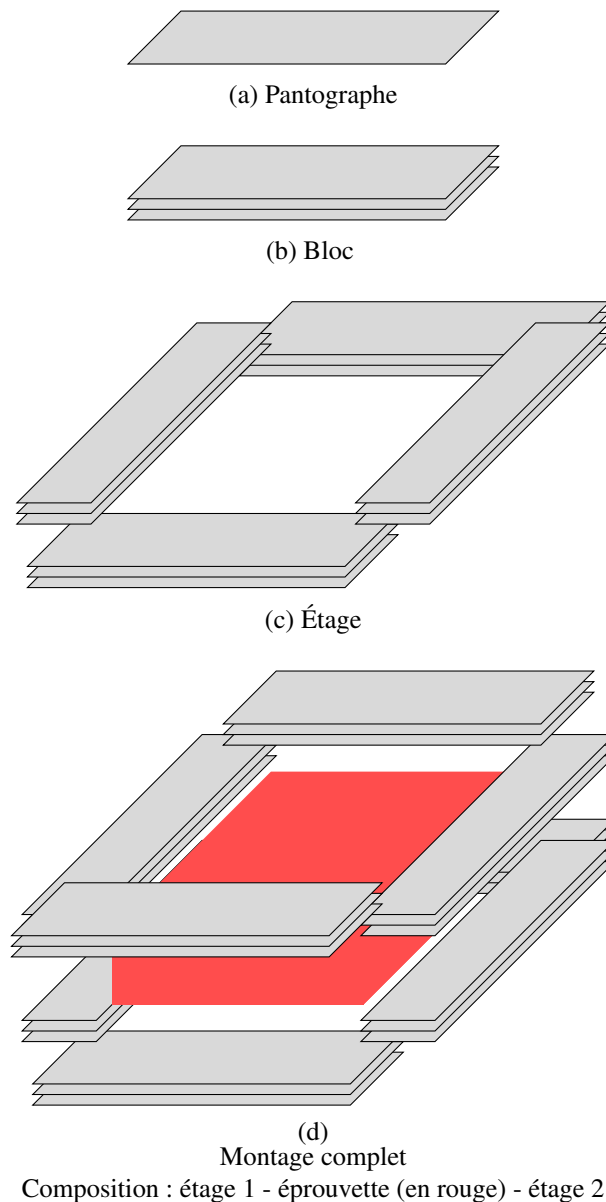


FIGURE 2.31: Composition de la machine

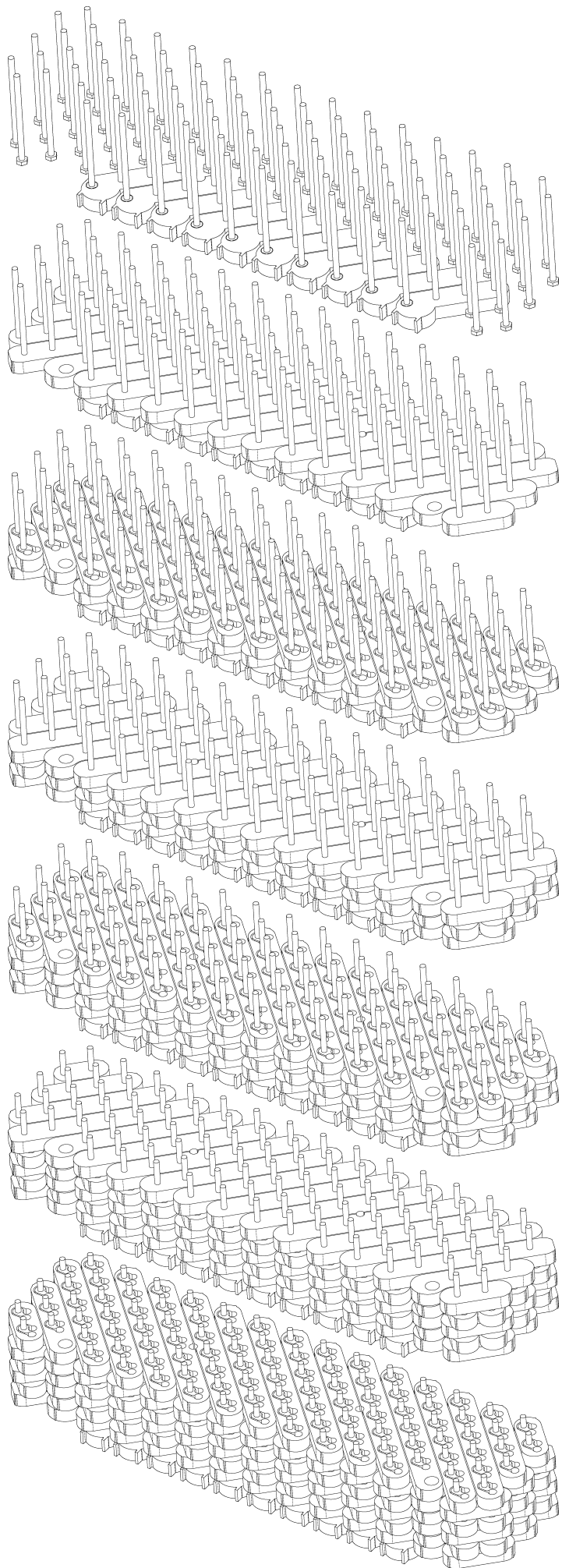
En Figure 2.21 une simulation sur un pantographe à 1 rang et 5 cellules a été présentée. Malgré la faible taille de cette simulation (relativement à l'ensemble du dispositif) son coût numérique est de 500 000 ddl en utilisant un maillage tétraédrique à éléments quadratiques (TET10). On peut en déduire le coût numérique pour le montage complet via une règle de proportionnalité. Celui-ci est estimé à 3×10^8 degrés de liberté ce qui, dans un cadre de dimensionnement, est prohibitif. Pour cette raison, un outil dédié à la simulation du comportement du montage à un coût numérique

réduit est développé. Le développement de cet outil fait l'objet du chapitre suivant.

Bilan

Les lignes directrices de la conception en termes de pilotage (section 2.1) et d'instrumentation (section 2.2) ont été fixées en regard des deux problématiques principales : application de KUBC et détermination de la contrainte moyenne dans le volume de l'éprouvette. Les choix technologiques pour le système de répartition du déplacement et pour le pilotage de la machine ont été présentés (section 2.3) et argumentés vu les contraintes fixées au chapitre précédent. Enfin, un prédimensionnement du système a été réalisé (section 2.4) et a montré la nécessité de modifier la conception.

L'augmentation de la complexité des pantographes (augmentation du nombre de rang et apparition de l'hyperstatisme) ainsi que la volonté d'évaluer la déflexion d'un bloc sous charge nécessite de recourir à une étude numérique. L'approche directe par calcul en champs complets étant trop coûteuse, un outil dédié est développé et présenté au chapitre suivant.



Montage couche par couche d'un bloc complet formé de 3 pantographes. Sur la première image on peut voir une couche supplémentaire, ces pièces spéciales servent à la liaison avec l'éprouvette (problématique non évoquée)

Chapitre 3

Conception d'une maquette numérique

Dans ce chapitre est présenté la mise en place d'une maquette numérique qui doit représenter aussi fidèlement que possible le comportement de la machine au stade de dimensionnement afin de permettre celui-ci. Pour ce faire, cette maquette devra respecter certaines exigences qui seront détaillées ci-après. Toutefois attardons nous un instant sur sa philosophie. Il est apparu rapidement que le temps nécessaire pour mettre en place cette maquette était important, sans doute plus que celui d'une étude de dimensionnement par calcul en champs complets. Il aurait été dès lors aussi pertinent de passer sur un gros calculateur (qui était à disposition) pour la phase de dimensionnement. Toutefois, ce modèle a été réalisé car son utilité va au delà du dimensionnement de la machine, en effet une fois que l'on dispose d'une maquette numérique de la machine, un effort supplémentaire raisonnable permet d'obtenir un jumeau numérique complet de l'expérience (machine & éprouvette) ce qui ouvre de nouvelles perspectives :

- prédimensionnement des essais en les simulant sur le jumeau numérique. Ce pré-essai va permettre d'assurer l'intégrité de la machine (niveau d'effort dans les Liaisons Souples (LS)) et de concevoir des éprouvettes dont la rigidité est compatible avec les performances de la machine (des conditions de bord trop dégradé impliquant une augmentation de l'incertitude sur les coefficients du tenseur d'élasticité homogénéisé cf. [sous-section 1.4.2](#));
- à terme, d'analyser les résultats expérimentaux, ce point sera détaillé plus en profondeur en conclusion.

À ce titre, cette maquette numérique sera par la suite qualifiée de "Virtual Testing Device" (VTD).

Dans la [sous-section 2.4.3](#) une méthode pas à pas de choix des paramètres géométriques est proposée :

1. choix du matériau afin de maximiser l'angle maximal de rotation;
2. maximisation de R (rayon de la liaison souple) a encombrement donné;
3. maximisation de h (hauteur de la liaison souple) pour assurer l'élongation voulue du pantographe;
4. minimisation de b (épaisseur hors plan de la liaison souple) pour assurer la tenue élastique sous chargement maximal.

Les paramètres matériau, R et h ont été choisis indépendamment des considérations de chargement mécanique du pantographe et sont donc conservés pour cette nouvelle étude. Seuls les paramètres b (épaisseur des bras) et r (nombre de rangs des pantographes) sont à optimiser ici. Les critères utilisés pour ce dimensionnement sont les suivants :

- ① Respect de la cinématique KUBC : l'erreur en position doit être inférieure à $120 \mu\text{m}$;
- ② Intégrité du dispositif de chargement : les liaisons souples doivent travailler dans leur domaine élastique uniquement.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : 1) présentation du modèle et mise en place ; 2) validation par rapport à des calculs en champs complets ; 3) utilisation du modèle pour dimensionner les liaisons souples ; 4) validation par rapport au pantographe réel obtenu sur les dimensions précédentes ; 5) enrichissement du modèle pour aller vers un jumeau numérique du dispositif.

3.1 Choix d'un modèle

Pour représenter le comportement mécanique des pantographes, plusieurs types de modèles sont utilisés dans la littérature ([SAI11 ; Tur+16]). Ils sont classés en Figure 3.1. Ces modèles sont détaillés par la suite et leur utilisation dans le cadre de l'aide au dimensionnement est étudiée.

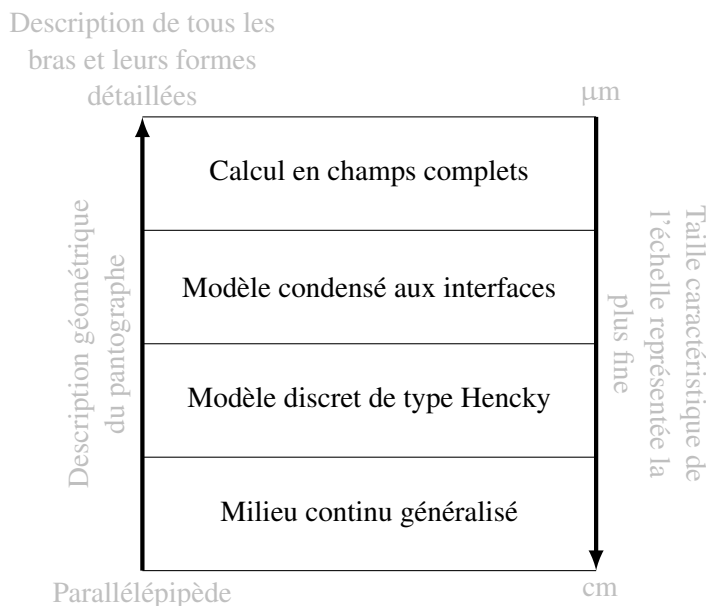


FIGURE 3.1: Classification des différents modèles envisagés pour la représentation des pantographes

Milieu continu généralisé

Les milieux continus généralisés sont des extensions de la mécanique des milieux continus classique incorporant soit :

- des degrés de liberté supplémentaires (milieux micromorphes [Eri68]) ;
- l'influence des gradients des variables cinématiques d'ordres supérieurs dans la densité d'énergie mécanique (milieux à gradients [Min65]).

Ces dernières années, les milieux à gradients ont été utilisés avec succès pour décrire le comportement de pantographes et de réseaux de pantographes ([SAI11 ; ADC15 ; Rah+15 ; PAG17]). Cette approche présente l'avantage d'avoir un temps de calcul très réduit mais nécessite de réaliser au

préalable l'homogénéisation du milieu de base à partir de la géométrie réelle. De plus, l'implémentation numérique n'est pas simple (utilisation d'éléments d'Argyris par exemple).

Cette représentation n'est valable que pour représenter le comportement global du "milieu pantographique". Comme indiqué sur la [Figure 3.1](#) dans cette approche la géométrie de la mésostructure est perdue au profit d'un milieu homogène équivalent. De ce fait, ce type d'approche n'est pas adapté à l'utilisation envisagée puisqu'il est requis de pouvoir suivre la cinématique de points précis du pantographe (critère ① de l'introduction).

Modèle discret de type Hencky

Un modèle de type Hencky est la représentation d'un milieu par un réseau de points reliés par des ressorts représentant les rigidités en traction / compression, flexion, cisaillement, des éléments du milieu. Ce concept est schématisé en [Figure 3.2](#). Cette description a été proposée par [\[Hen21\]](#)([\[Aba+19\]](#)) pour déterminer un système Lagrangien discret approximant d'une poutre d'Euler.

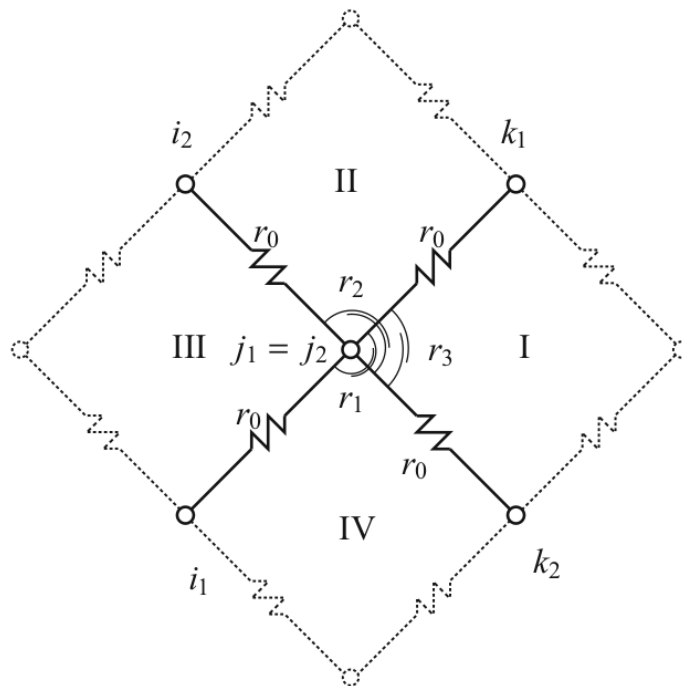


FIGURE 3.2: Représentation graphique d'un modèle de type Hencky utilisé par [\[Tur+16\]](#) pour décrire le comportement d'un pantographe.

Un modèle de ce type ayant été développé et proposé dans [\[Tur+16\]](#) pour décrire le comportement d'un pantographe, il pourrait être tentant de l'utiliser ici. De plus ce type de modèle permet bien la variation des différents paramètres et la validation du critère ① exprimé en introduction (erreur en déplacement). Pour le critère ② (tenue élastique des liaisons souples) une relocalisation sera nécessaire mais ne constitue pas a priori de contre-indication majeure.

Toutefois il est nécessaire, pour utiliser ce modèle, d'exprimer littéralement l'énergie de déformation

des bras du pantographe et des liaisons pivots en fonction des positions des nœuds du réseau. Du fait de la géométrie complexe des bras (cf. [Figure 2.20](#)) cette étape présente une certaine lourdeur.

Calcul en champs complet

La représentation d'un pantographe par un modèle éléments finis en champs complets permet bien évidemment la variation des différents paramètres ainsi que l'évaluation des critères fixés en introduction mais, comme explicité en [sous-section 2.4.4](#), ce modèle a un coût numérique extrêmement élevé qu'il est souhaitable d'éviter, pour cela on va réaliser une sous-structuration du modèle.

Modèle condensé aux interfaces

Les techniques de sous-structuration permettent de découper un problème complet en une somme de problèmes de plus petites dimensions afin de les résoudre séparément [[Man13](#)]. Le problème qui nous intéresse est celui du calcul en champs complets de la déformation d'un bloc et, profitant de la répétition¹ des éléments le constituant (les bras) on va découper ce bloc en macro-éléments (ou super-éléments). Chaque macro-élément est la restriction du maillage complet à un bras (ou presque comme nous le verrons plus tard). Ce macro-élément possède des degrés de liberté internes ainsi que des degrés de liberté aux frontières (ou interfaces). L'élimination des degrés de liberté internes (via un processus qui sera détaillé) permet de ne conserver dans le problème global que les degrés de liberté aux interfaces, on parle alors de condensation statique du problème [[Wil74](#)]. Après cette étape de condensation, ce macro-élément sera vu, d'un point de vue numérique, comme un élément individuel. Grâce à cette décomposition en macro-éléments, une modification locale de la géométrie (pour modéliser un bras spécial en bout de pantographe par exemple) n'impacte pas les interactions entre macro-éléments et donc ne nécessite pas de recalculer la matrice de raideur du problème complet mais seulement celle du macro-élément impacté (ceci n'est vrai que si les interfaces de l'élément restent inchangées). Cela est très avantageux dans un cadre de dimensionnement et c'est ce type d'approche qui sera utilisé.

La démarche adoptée ici tend à réduire encore plus le problème. En effet, chaque macro-élément est connecté à N_{LS} autres macro-éléments et chacune de ses interfaces est composée d'un ensemble de nœuds dans le problème global. Le choix est fait de réduire ces interfaces à 1 nœud ayant 3 degrés de liberté : les deux translations et la rotation du plan. Tous les effets ayant lieu dans l'épaisseur des bras sont donc négligés.

L'objet de cette section est d'expliquer en détail la construction de cette sous-structuration. Dans une première sous-section la structure de la construction du code est explicitée et servira de plan à la suite de la section, chaque étape étant détaillée séparément.

1. La répétition des éléments au sein de la structure initiale n'est pas une condition nécessaire à la mise en place de cette approche, celle-ci restant valable si tous les macro-éléments sont différents. La répétition des éléments permet simplement un coût de calcul préliminaire plus faible.

3.1.1 Structure globale du modèle

Le modèle numérique est construit de manière très similaire à l'objet physique qu'il représente. Comme expliquée préalablement la brique de base du modèle complet est un macro-élément représentant un bras (il existe en réalité 13 macro-éléments différents puisque des bras de différentes géométries sont présents). Cette brique est ensuite réutilisée pour créer un **pantographe**, les pantographes sont ensuite assemblés entre eux pour donner un **bloc** qui une fois unis donnent un **étage**, le modèle complet étant constitué de deux étages identiques. Ces quatre étapes sont explicitées ci-dessous :

1. détermination des matrices de rigidité des bras $[k]$ par calculs EF préliminaires sous Catia[®] V5R20;
2. assemblage des matrices $[k]$ en une matrice de rigidité d'un pantographe $[K]$ sous Matlab[®] R2017b de même que toutes les étapes suivantes ;
3. lien des matrices $[K]$ via un nouvel élément, $[K']$ afin d'obtenir la matrice de rigidité d'un bloc $[\mathcal{K}]$;
4. union des matrices $[\mathcal{K}]$ par pénalisation pour donner la matrice de rigidité globale $[\mathbb{K}]$.

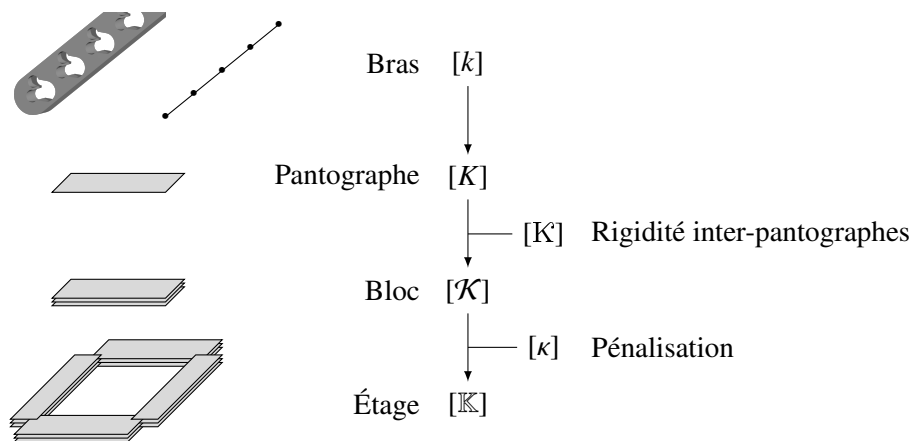


FIGURE 3.3: Structure globale du modèle

Afin d'avoir des notations cohérentes et de permettre d'écrire des relations entre les différents niveaux du modèle sans ambiguïté, on utilisera la nomenclature des notations détaillée dans le [Tableau 3.1](#).

Dans la suite de cette section, le lecteur prendra garde à la notion d'indice. En effet, ils désignent ici des nœuds correspondant donc à trois degrés de liberté (ddl) et donc $[k_{ij}]$ est une matrice de taille 3×3 . On se permettra également, par abus de notation, de confondre un nœud et son indice, on pourra alors écrire par exemple "si \mathcal{I} appartient au bras alors..." sous entendu "si le nœud d'indice \mathcal{I} appartient au bras alors ..."

3.1.2 Détermination des matrices de rigidité élémentaires

Puisqu'il est nécessaire de contrôler le pantographe par les axes des liaisons pivots pour imposer la cinématique souhaitée et que seuls les déplacements des axes des LS sont déterminants pour la validation du montage, il a été choisi d'exprimer les matrices de rigidité élémentaires $[k]$ aux centres

| Sous-ensemble | matrice de rigidité | déplacement | force | indice |
|-----------------------------|---------------------|-------------|-------------|----------------------------|
| Liaison | $[k]$ | $[u]$ | $[f]$ | \emptyset |
| Bras | $[k]$ | $[u]$ | $[f]$ | i, j |
| Pantographe | $[K]$ | $[U]$ | $[F]$ | I, J |
| Bloc | $[K]$ | $[U]$ | $[F]$ | \mathcal{I}, \mathcal{J} |
| Étage | $[K]$ | $[U]$ | $[F]$ | \mathbb{I}, \mathbb{J} |
| Rigidité inter-liaison | $[k]$ | \emptyset | \emptyset | \emptyset |
| Rigidité inter-pantographes | $[K]$ | \emptyset | \emptyset | \emptyset |
| Pénalisation | $[\kappa]$ | \emptyset | \emptyset | \emptyset |

TABLE 3.1: Nomenclature utilisée pour la description de la construction de la matrice de rigidité du modèle

des LS (centres cinématiques) plutôt qu'aux interfaces entre les bras (centres géométriques) (Figure 2.19). Pour cela, on va modifier les géométries précédemment présentées de sorte que les ensembles mécaniques soient les mêmes que les ensembles cinématiques, par rapport à la figure précédente les "œillelets" sont maintenant rattachés sur les bras rigides. De nouvelles pièces sont donc considérées sur la CAO, l'assemblage de ces nouvelles pièces est strictement identique à l'assemblage des pièces précédentes, seule la frontière entre les pièces a été décalée. Les nouvelles géométries sont présentées Figure 3.4. Le nombre de liaisons souples N_{LS} sur chaque bras dépend du nombre de rangs du pantographe (nombre de rang défini en Figure 2.30).

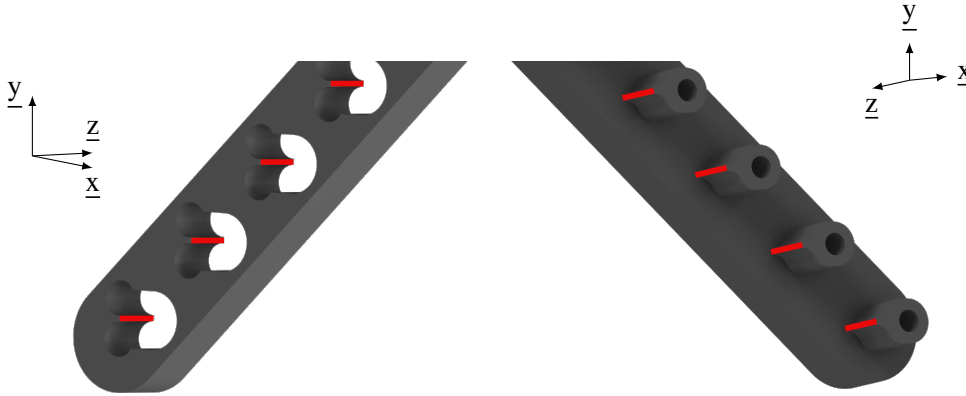


FIGURE 3.4: Géométries "numériques" et conditions aux limites pour la détermination des matrices de rigidité élémentaires

Pour chaque bras, $3 \times N_{LS}$ calculs sont nécessaires pour obtenir la matrice de rigidité associée. À chaque calcul, un des ddl d'une des LS est imposé à 1 tandis que tous les autres sont imposés à 0 (encastrement des faces rouges sur Figure 3.4). On relève alors les actions mécaniques associées à chaque ddl. Il convient de noter que cette procédure est analogue à celle de l'homogénéisation en élasticité linéaire cf. sous-section 1.3.4.

$$[f^{Ai}] = \left[\left[f_{x_1}^{Ai}, f_{y_1}^{Ai}, m_{z_1}^{Ai} \right], \dots, \left[f_{x_j}^{Ai}, f_{y_j}^{Ai}, m_{z_j}^{Ai} \right], \dots, \left[f_{x_{N_{LS}}}^{Ai}, f_{y_{N_{LS}}}^{Ai}, m_{z_{N_{LS}}}^{Ai} \right] \right]$$

$[f^{Ai}]$ désignant les réactions associées à un déplacement unitaire du ddl Ai avec $A \in \{x, y, z\}$ et $i \in \llbracket 1, \dots, N_{LS} \rrbracket$

Les résultats sont ensuite concaténés pour obtenir $[k]$:

$$\begin{array}{l}
 f_{x_1}, f_{y_1}, m_{z_1}, \dots, f_{x_j}, f_{y_j}, m_{z_j}, \dots, f_{x_N}, f_{y_N}, m_{z_N} \\
 u_{x_1} \\
 u_{y_1} \\
 \omega_{z_1} \\
 \vdots \\
 u_{x_i} \\
 u_{y_i} \\
 \omega_{z_i} \\
 \vdots \\
 u_{x_{N_F}} \\
 u_{y_{N_F}} \\
 \omega_{z_{N_F}}
 \end{array}
 \left[\begin{array}{ccc}
 \left[\begin{array}{ccc}
 f_{x_1}^{x_1} & f_{y_1}^{x_1} & m_{z_1}^{x_1} \\
 f_{x_1}^{y_1} & f_{y_1}^{y_1} & m_{z_1}^{y_1} \\
 f_{x_1}^{z_1} & f_{y_1}^{z_1} & m_{z_1}^{z_1}
 \end{array} \right] & & \\
 & \left[\begin{array}{ccc}
 & & \\
 & [k_{ij}] & \\
 & &
 \end{array} \right] & \\
 & &
 \end{array} \right]$$

avec $[k_{ij}]$ la matrice de rigidité relative aux nœuds i et j du même bras. Le montage complet est composé de deux types de bras (rigide et souple cf. [Figure 2.19](#)), ayant chacun 3 orientations spécifiques (cf. [Figure 2.26](#)). Attention, on considère ici les géométries “numériques” définies en [Figure 3.4](#). On compte donc 6 matrices élémentaires correspondant aux 6 bras cinématiques différents illustrés en [Figure 3.5](#) :

$$\{ [k^{RP}], [k^{R0}], [k^{RM}], [k^{SP}], [k^{S0}], [k^{SM}] \}$$

où les exposants désignent la géométrie du bras :

$$\left\{ \begin{array}{l} R : \text{bras rigide} \\ S : \text{bras souple} \end{array} \right\} \& \left\{ \begin{array}{l} P : \text{liaison à } +30^\circ / \text{axe panto} \\ 0 : \text{liaison à } 0^\circ / \text{axe panto} \\ M : \text{liaison } -30^\circ / \text{axe panto} \end{array} \right.$$

En réalité, la situation est un peu plus complexe et les bras réalisant la liaison entre le pantographe et le système de pilotage possèdent une géométrie spéciale pour permettre cet ancrage ([Figure G.2](#)). La liaison pivot au niveau de l’ancrage sur le système de pilotage est assurée par éléments roulants (cage à aiguilles) afin de supporter la charge importante transitant par cette liaison ainsi que l’angle de pivotement dans le cas d’un chargement de cisaillement. Il faut donc déterminer la matrice de rigidité de ces éléments. Lors de l’assemblage de la couche, dans la partie suivante, on substituera simplement la matrice d’un bras par sa version ad hoc à l’emplacement des liens avec le système de pilotage. Ces matrices de rigidité modifiées ne sont pas introduites ici, ni traitées par la suite afin de ne pas alourdir la présentation.

De même, la liaison entre l’éprouvette et le pantographe est réalisée par une pièce supplémentaire : **l’attache**, dont il convient de déterminer la matrice de rigidité et de l’intégrer à l’assemblage du bloc. Cette pièce vient en parallèle des bras RM et sa rigidité sera intégrée en même temps que celle des bras RM, on ne détaillera pas non plus cette opération par la suite.

3.1.3 Pantographe

Une fois les matrices de rigidité élémentaires déterminées, elles doivent être assemblées pour obtenir la matrice d’un pantographe. Les bras souples et rigides partageant une même orientation

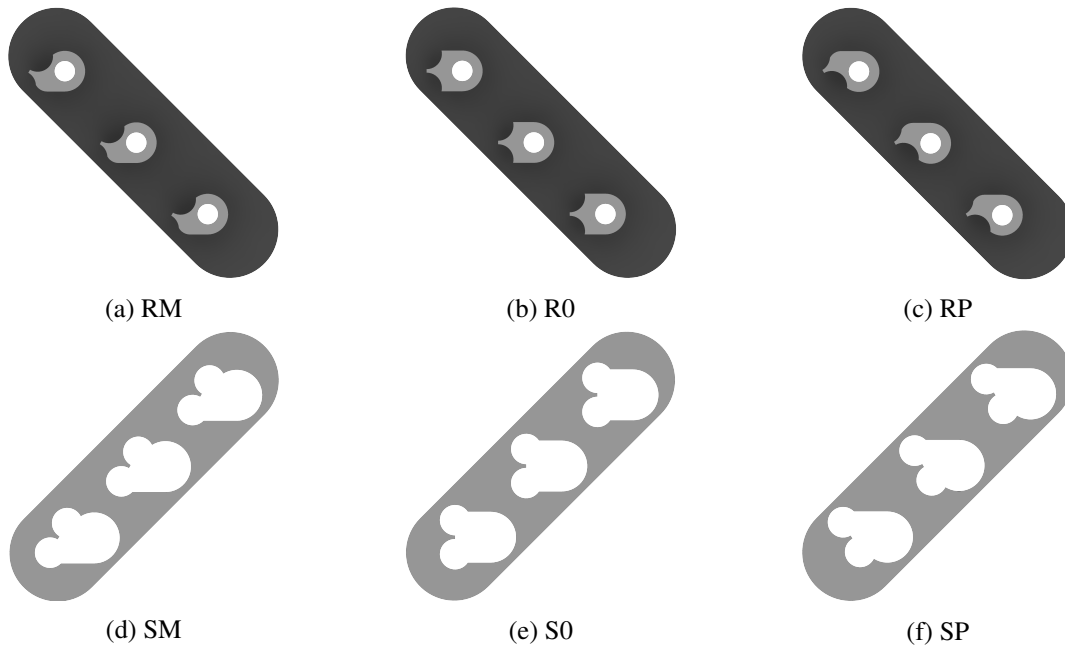


FIGURE 3.5: Les 6 géométries des ensembles cinématiques considérés

constituent un pantographe, on en obtient donc 3 :

$$\left[K^X \right] \quad \text{avec } X \in \{P, 0, M\}$$

Chaque matrice de raideur d'un pantographe s'exprime de la manière suivante :

$$\left[K_{(IJ)}^X \right] = \chi_R(I, J) \left[k_{(ij)}^{RX} \right] + \chi_S(I, J) \left[k_{(ij)}^{SX} \right]$$

où I et J sont les indices des nœuds dans la couche et i et j sont les indices correspondants dans le bras. Cette correspondance est illustrée en [Figure 3.6](#). Et on a

$$\begin{cases} \chi_R(I, J) = 1, & \text{si } I \text{ et } J \text{ sont des nœuds du même bras rigide;} \\ \chi_R(I, J) = 0, & \text{autrement;} \\ \chi_S(I, J) = 1, & \text{si } I \text{ et } J \text{ sont des nœuds du même bras souple;} \\ \chi_S(I, J) = 0, & \text{autrement.} \end{cases}$$

3.1.4 Bloc

Lors de l'étape précédente, les matrices élémentaires ont été assemblées deux à deux pour créer trois pantographes distincts P , 0 , et M . Il faut maintenant lier ces trois pantographes afin de former un bloc composant un côté du dispositif. Le choix de décrire le mécanisme par les bras cinématiques (par opposition aux bras géométriques) présente à ce stade une difficulté. En effet, on dispose d'une description de type treillis de chaque pantographe comme on peut le voir sur la [Figure 3.6](#). Pour lier les 3 pantographes superposés il pourrait être tentant d'imposer une cinématique identique sur les nœuds homologues de chaque pantographe (cf. [Figure 3.7](#)). Toutefois ces points ne sont pas les points de liaison entre les différents pantographes et n'ont donc pas la même cinématique. Les points ayant le même déplacement d'un pantographe à l'autre sont les

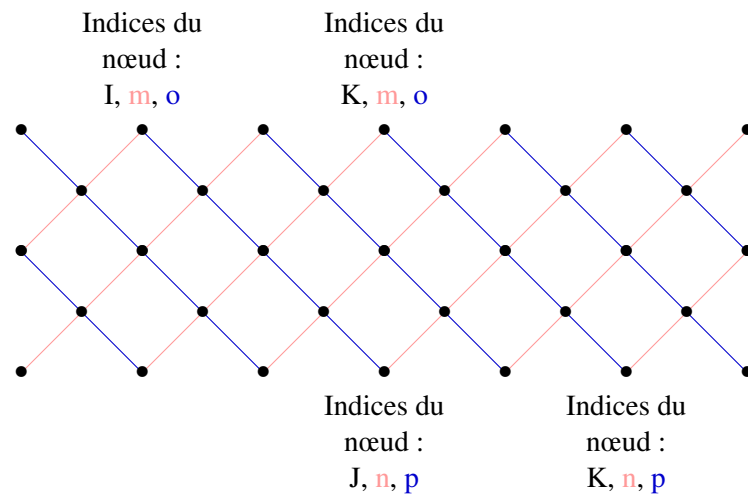


FIGURE 3.6: Chaque nœud possède alors trois indices : deux indices locaux “de bras” (un pour le bras rouge et l’autre pour le bras bleu, en minuscule sur le schéma) et un indice global “de pantographe” (en majuscule sur le schéma)

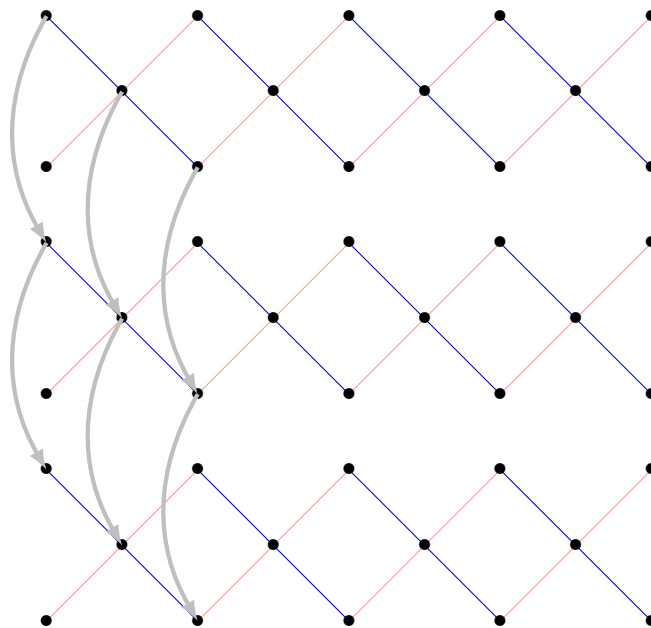


FIGURE 3.7: Points géométriquement homologues entre les pantographes (mais cinématiquement distincts)

centres géométriques (Figure 2.19) et ces points n’appartiennent pas au treillis.

Pour résoudre ce problème, un autre macro-élément, de matrice de rigidité $[k]$ correspondant à la rigidité entre les couches est introduit (cf. Figure 3.3). Pour cela, on vient recréer un assemblage contenant tous les centres cinématiques (C^c) et géométriques (C^g) (Figure 3.9). On y retrouve en rouge les sections centrales des LS (donc les centres cinématiques) en noir les surfaces ayant le même déplacement (donc les “centres” géométriques). La matrice de rigidité $[k]$ de cet assem-

blage est obtenue par un procédé similaire à $[k]$. Les ensembles de cet assemblage sont extraits du montage complet comme décrit en Figure 3.8.

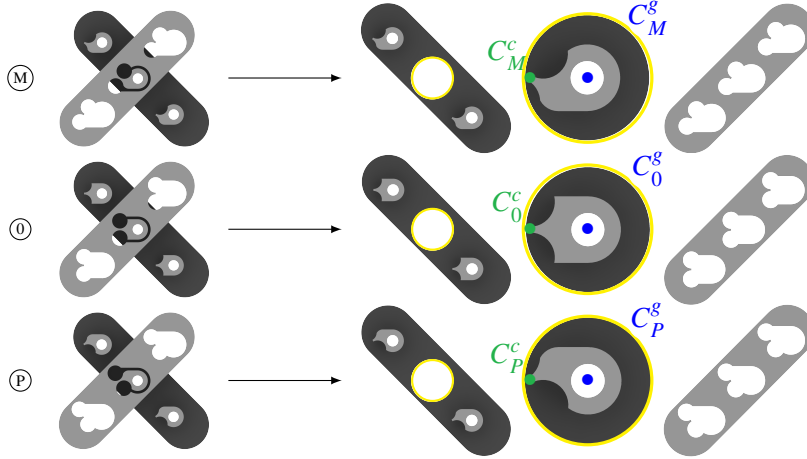


FIGURE 3.8: Création d'ensembles mécaniques contenant les centres cinématiques (C^c) et géométriques (C^g) d'une même couche

La matrice de rigidité entre les trois pantographes $[k]$ peut être scindée en sous éléments $[k_{(XY)}]$ avec $X, Y \in \{P, O, M\}$ décrivant l'interaction entre les nœuds de la couche X et Y :

$$[k] = \begin{bmatrix} [k_{(PP)}] & [k_{(PO)}] & [k_{(PM)}] \\ [k_{(OP)}] & [k_{(OO)}] & [k_{(OM)}] \\ [k_{(MP)}] & [k_{(MO)}] & [k_{(MM)}] \end{bmatrix}$$

Remarques sur $[k]$:

- les sous-matrices diagonales ne sont pas nulles puisque lorsqu'un ddl est imposé à 1 sur un centre de liaison, une action mécanique (effort et moment) s'exerce bien sur cette même liaison ;
- cette matrice est bien symétrique.

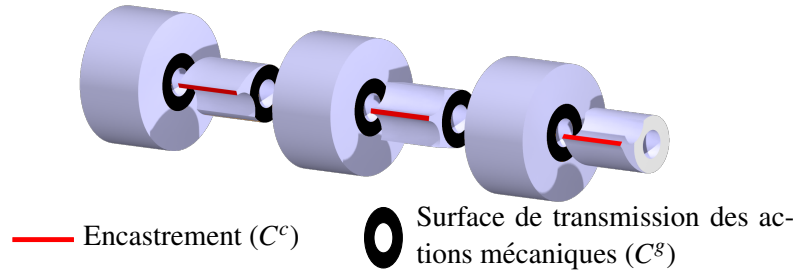
Cette décomposition va permettre d'assembler les trois pantographes en plaçant dans la matrice de rigidité globale du bloc $[K]$ les termes de rigidité nœud à nœud $[k_{(XY)}]$:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K^P] & [0] & [0] \\ [0] & [K^O] & [0] \\ [0] & [0] & [K^M] \end{bmatrix} + [K]$$

avec

$$[K_{(IJ)}] = \sum_{X=\{P,O,M\}} \sum_{Y=\{P,O,M\}} \delta_{IX}^p \delta_{JY}^p \delta_{IJ}^c [k_{(XY)}]$$

où, δ^p est un symbole "à la Kronecker" définissant l'appartenance à un pantographe et δ^c un symbole "à la Kronecker" pour les coordonnées (dans le plan) des nœuds :

FIGURE 3.9: Assemblage utilisé pour déterminer $[k]$, la rigidité entre les couches.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \delta_{IX}^p = 1, & \text{si } I \in \text{pantographe } X; \\ \delta_{IX}^p = 0, & \text{sinon;} \\ \delta_{IJ}^c = 1, & \text{si } I \text{ et } J \text{ sont homologues (cf. Figure 3.7), un point étant homologue à lui même;} \\ \delta_{IJ}^c = 0, & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

La matrice $[\mathcal{K}]$ traduit le comportement d'un pantographe complet ce qui représente 1/8 du dispositif (Figure 2.31). On choisit de ne pas prendre en compte la liaison entre les deux étages du dispositif :

- on considère que le système d'amarrage est suffisamment rigide pour que les déplacements imposés aux deux étages soient les mêmes ;
- on considère que du fait de la symétrie du dispositif et de la forme prismatique de l'éprouvette, les effets hors plan sont négligeables.

Ainsi, dans un souci de simplicité on considérera qu'un côté du dispositif est deux fois plus rigide qu'un bloc. On peut alors simplement multiplier par deux la matrice de raideur et obtenir le comportement d'un des côtés.

À ce stade, la maquette numérique est suffisamment avancée pour dimensionner les bras et les liaisons souples en soumettant le pantographe aux sollicitations maximales prévues dans le cahier des charges (Appendice C). Ce dimensionnement est l'objet de la section 3.2. Cependant, la description du montage n'est pas complète puisqu'il est composé de 8 blocs (réduit à 4 par l'hypothèse précédente), il manque donc encore une étape d'assemblage pour obtenir un jumeau numérique du dispositif.

3.1.5 Assemblage complet

Il reste finalement à accrocher ensemble quatre blocs afin de créer un étage dont la matrice de rigidité est $[\mathbb{K}]$. Sur le montage réel, on souhaite transmettre les translations mais laisser libre les rotations entre les différents côtés de l'étage afin de pouvoir imposer un cisaillement à l'éprouvette. Les rotations doivent donc être indépendantes tandis que les translations seront liées. Pour imposer ces deux conditions numériquement une méthode par pénalisation est utilisée. La matrice $[\mathbb{K}]$ s'écrit alors :

$$[\mathbb{K}] = \begin{bmatrix} [\mathcal{K}_1] & & & \\ & [\mathcal{K}_2] & & \\ & & [\mathcal{K}_3] & \\ & & & [\mathcal{K}_4] \end{bmatrix} + [\kappa] \quad (3.1)$$

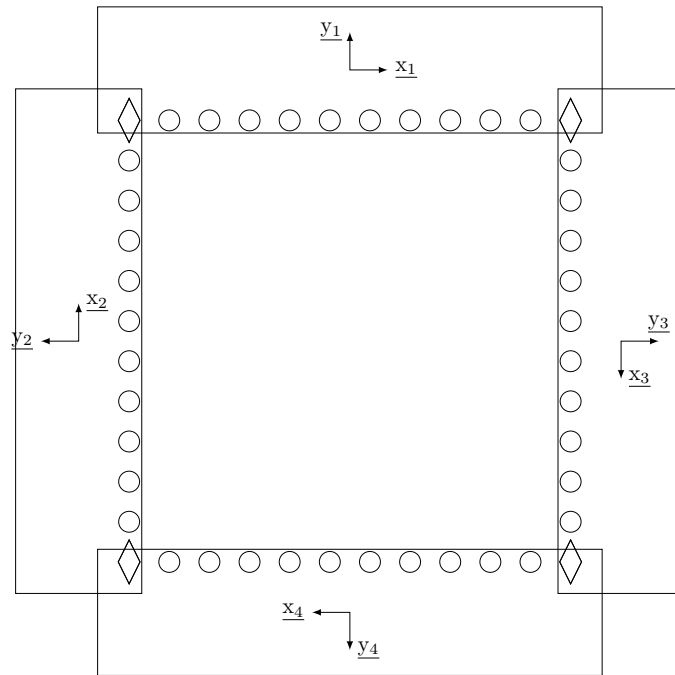


FIGURE 3.10: Composition du dispositif : 4 blocs tournés

3.1.6 Résolution

On dispose maintenant d'une matrice de rigidité équivalente du montage complet qui est simplement le double de celle d'un étage $[\mathbb{K}]$, le problème à résoudre est donc :

$$2[\mathbb{K}] [\mathbf{U}] = [\mathbf{F}] \quad (3.2)$$

avec $[\mathbf{U}]$ et $[\mathbf{F}]$ les vecteurs déplacements et actions mécaniques extérieures de toutes les liaisons souples exprimés dans le repère global.

La matrice $[\mathbb{K}]$ est symétrique positive mais n'est pas définie, en effet elle possède des valeurs propres nulles. Ces valeurs propres nulles sont dues aux éléments utilisés pour décrire les bras servant d'ancrages avec le système de pilotage, cette liaison laisse libre la rotation, le nœud associé n'a donc aucune rigidité en rotation et peut librement tourner sur lui même. L'algorithme de résolution utilisé par Matlab pour résoudre un système linéaire est (dans notre cas) l'algorithme LDL^T ([Wat04]) qui utilise une décomposition de Cholesky alternative pour réaliser l'inversion du système. La matrice à inverser est décomposée de la manière suivante :

$$A = LDL^T$$

où D est une matrice diagonale, et L une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur sa diagonale. Les valeurs propres nulles posent un problème ici, pour résoudre on va supprimer ces degrés de liberté en les imposants à 0 via un Lagrangien dans l'Equation (3.3).

Statique imposée

Pour imposer des conditions limites statiques (effort ou couple) on vient simplement donner les valeurs de ces conditions dans $[\mathbf{F}]$.

$$[\mathbf{F}_I] = [f_x^{imp}, f_y^{imp}, m_z^{imp}] \quad ; \quad \forall I \in IS$$

Où IS est la liste des nœuds sur lesquels une condition limite statique est imposée.

Cinématique imposée

Pour imposer des déplacements, on va utiliser des multiplicateurs de Lagrange et donc transformer le système à résoudre (Equation (3.2)) :

$$\begin{bmatrix} [\mathbb{K}] & [\mathbb{B}] \\ [\mathbb{B}]^T & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbb{U}] \\ [\lambda] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbb{F}] \\ [\mathbb{U}_{imp}] \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

avec $[\mathbb{B}]$ de taille $(3N_{LS} \times 3N_{IC})$ où N_{LS} est le nombre de nœuds et N_{IC} le nombre de nœuds appartenant à IC , IC étant la liste des nœuds sur lesquels une condition limite cinématique est imposée. $[\mathbb{U}_{imp}]$ est le vecteur contenant les valeurs des conditions limites cinématiques et $[\lambda]$ le vecteur d'inconnues des actions mécaniques sur les nœuds appartenant à IC .

Cela permet bien d'imposer des déplacements puisque l'on peut isoler dans l'Equation (3.3) :

$$[\mathbb{B}]^T [\mathbb{U}] = [\mathbb{U}_{imp}]$$

Il suffit donc que $[\mathbb{B}]$ cible les bons degrés de liberté.

Double Lagrange

L'algorithme LDL^T utilisé pour la résolution peut parfois poser problème. En effet, si les conditions limites cinématiques sont imposés par un Lagrangien (comme c'est le cas ici) alors, la résolution du système par cet algorithme de décomposition n'est plus garantie (même si le système est inversible [Pel11]). Pour éviter ce problème, une approche par "double Lagrange" est proposée. L'idée est de décomposer chaque coefficient de Lagrange λ en deux parties égales λ^1 et λ^2 permettant de garantir la résolution du système par l'algorithme LDL^T ([Pel11]). Le système à résoudre devient donc :

$$\begin{bmatrix} [\mathbb{K}] & [\mathbb{B}] & [\mathbb{B}] \\ [\mathbb{B}]^T & -\alpha[\mathbb{I}] & \alpha[\mathbb{I}] \\ [\mathbb{B}]^T & \alpha[\mathbb{I}] & -\alpha[\mathbb{I}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbb{U}] \\ [\lambda_1] \\ [\lambda_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbb{F}] \\ [\mathbb{U}_{imp}] \\ [\mathbb{U}_{imp}] \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

où α est une constante strictement positive. On prend $\alpha = 1$.

Résolution

Le système linéaire complet décrivant le chargement d'un étage, avec des pantographes à quatre rangs est de taille (6000×6000) .

Comme précisé au paragraphe précédent, sa résolution se fait via un algorithme LDL^T . Les deux stratégies de résolution (Lagrange et double Lagrange) sont implémentées et comparées. Les temps de résolution sont respectivement de 2 s et 1.2 s ; un avertissement concernant le conditionnement

de la matrice est donné pour le cas du simple Lagrange. Dans les deux cas, le résidu res est déterminé :

$$res = \|[K] [U] - [F]\|$$

On donne dans le [Tableau 3.2](#) la valeur du résidu en norme (vectorielle) 2 et en norme (vectorielle) infinie. Permettant de faire apparaître l'erreur "moyenne" ainsi que l'erreur maximale, on s'assure ainsi que la solution est globalement bonne et que le résidu n'est pas dû à un degré de liberté pathologique. Dans les deux cas (simple et double Lagrange) les résidus sont très faibles (les valeurs non nulles de $[F]$ ont un ordre de grandeur > 1), une résolution en simple Lagrange est donc suffisante ici, toutefois pour éviter tout cas pathologique (cas particulier de conditions aux limites pour lequel la résolution LDL^T ne fonctionnerait pas) on conservera une imposition des conditions aux limites par double Lagrange.

| | simple Lagrange | double Lagrange |
|---------------|----------------------|----------------------|
| norme 2 | $2.5 \cdot 10^{-11}$ | $2.2 \cdot 10^{-11}$ |
| norme infinie | $4.0 \cdot 10^{-12}$ | $5.4 \cdot 10^{-12}$ |

TABLE 3.2: Norme 2 et norme infinie du résidu pour les deux résolutions

Les déplacements de tous les nœuds de l'étage peuvent être déterminés quelles que soient les conditions aux limites statiques et cinématiques. Il faut maintenant post-traiter ces résultats afin de faire apparaître les grandeurs d'intérêt, ce qui est l'objet de la sous-section suivante.

3.1.7 Relocalisation

Pour répondre à la problématique exposée dans l'introduction du chapitre il est nécessaire de pouvoir évaluer les critères fixés en précédemment :

- ① Respect de la cinématique KUBC : l'erreur en position doit être inférieure à $120 \mu\text{m}$;
- ② Intégrité du dispositif de chargement : les liaisons souples doivent travailler dans leur domaine élastique uniquement.

Le premier critère peut être évalué, le déplacement des nœuds (donc des centres des liaisons souples) ayant été obtenu à l'étape précédente. Pour le second critère, il est nécessaire de "relocaliser" les champs en suivant le processus itératif suivant :

1. en amont un calcul EF en champs complets est réalisé sur une liaison souple (en réalité sur chaque type de liaison souple 0,M,P) soumise à une action mécanique élémentaire ([Figure 3.11](#)). Trois chargements élémentaires, correspondant aux trois degrés de liberté du modèle réduit sont considérés : f_x^0, f_y^0, m_z^0 . Le champ de contrainte en peau de la LS notée ∂LS (là où l'on trouve la valeurs maximales de contrainte) est alors relevé aux points d'intégration du maillage : $\tilde{\sigma}^{x_0}, \tilde{\sigma}^{y_0}, \tilde{\sigma}^{z_0}$.
2. Pour chaque bras le déplacement des nœuds $[u]$ (extrait du résultat du modèle réduit [Equation \(3.4\)](#)) est relevé. Puis, sur chaque bras, le vecteur des actions mécaniques transitant par les liaisons souples $[f]$ est calculé en réutilisant la matrice de rigidité $[k]$ du bras :

$$[f] = [k] [u]$$

2. La zone d'imposition des conditions limites statiques correspond à la surface d'appui d'une rondelle.

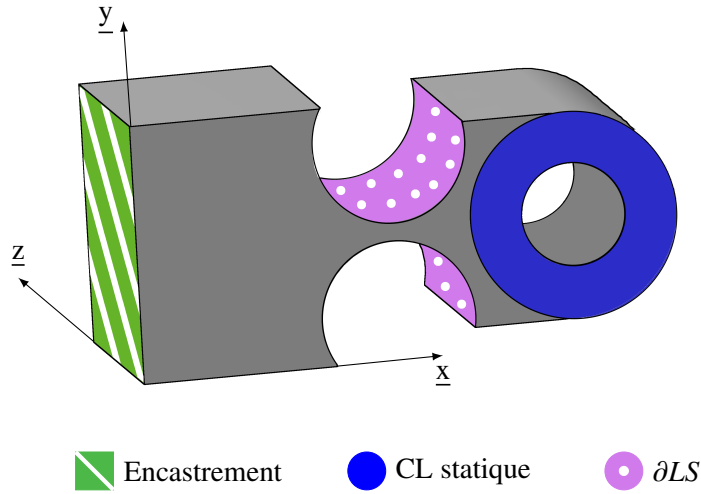


FIGURE 3.11: Simulation sur une LS soumise à des chargements élémentaires pour la détermination des états de contrainte élémentaires²

On a ainsi la valeur des actions mécaniques transitant par chaque liaison souple de chaque bras :

$$[f] = [f_x, f_y, m_z]$$

3. La valeur du champ de contraintes en peau de chaque liaison souple est alors déduit par superposition en utilisant les résultats de l'étape 1. Cette superposition est valable tant que la liaison souple reste dans le domaine élastique.

$$\tilde{\sigma} = \frac{f_x}{f_x^0} \sigma^{x_0} + \frac{f_y}{f_y^0} \sigma^{y_0} + \frac{m_z}{m_z^0} \sigma^{z_0} \quad (3.5)$$

4. Le champ de contrainte équivalente de Von Mises en peau de chaque liaison souple peut alors être déterminé :

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2}$$

avec $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ les contraintes principales de $\tilde{\sigma}$.

5. Enfin, on évalue un critère de plastification des liaisons.

$$\max_{\partial LS} (\sigma_{VM}) \leq \sigma_e$$

On dispose donc d'un modèle complet permettant de simuler à faible coût le comportement du dispositif et d'en relever les informations pertinentes pour le dimensionnement. Avant de procéder au dimensionnement il faut toutefois valider ce modèle réduit, ce qui est l'objet de la section suivante.

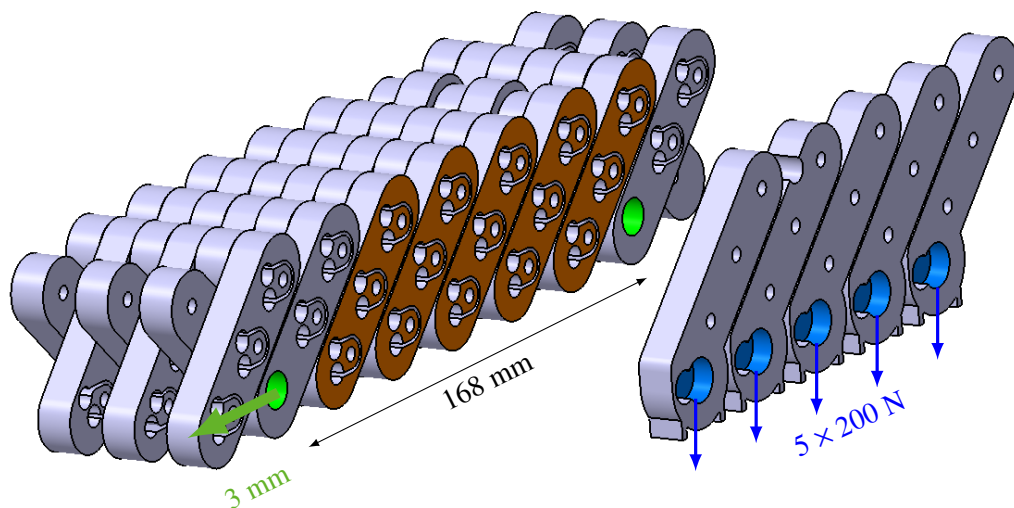
3.2 Validation numérique

3.2.1 Choix du cas test

Pour contrôler la validité du modèle réduit, une simulation EF en champs complets est réalisée. Afin d'être au plus proche possible du dispositif réel, la simulation présentée Figure 3.12a est

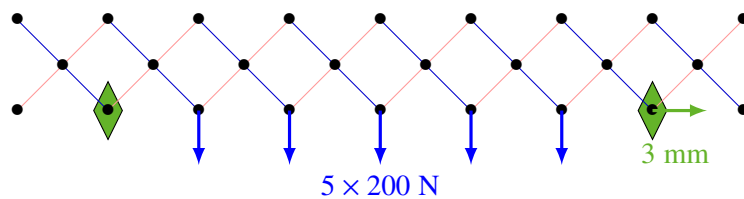
considérée. Un bloc de 3 pantographes et 1 rang avec 5 attaches est étudié. Bien que le nombre de nœuds, de rangs et d'attaches soit plus faible que pour le montage complet, toutes les difficultés techniques sont présentes :

- les bras spéciaux utilisés pour imposer la cinématique (disques verts) ;
- la dimension hors-plan, avec les trois étages et les attaches ;
- la rigidité des attaches, fixés sur les bras du pantographe (faces oranges).
- la diversité des types de bras (R/S, P/0/M)



(a) Simulation EF pour la validation du modèle réduit

- cylindres verts : cinématique imposée
- faces oranges : fixation aux attaches
- zones bleues : statique imposée



(b) Modèle condensé pour la comparaison avec simulation EF

- losanges verts : cinématique imposée
- flèches bleues : statique imposée

FIGURE 3.12: Description des simulations pour le cas test (calcul et champs complet et maquette numérique)

Le pantographe est soumis aux sollicitations cinématiques et statiques maximales prévues par le cahier des charges : 2% d'extension et 200 N par attache. Les coûts de calcul relatif au cas test sont donnés dans le [Tableau 3.3](#) pour des éléments tétraédriques quadratiques.

Pour une telle simulation, le bénéfice du modèle réduit n'est pas très important. Cependant pour le dispositif complet le coût de calcul du modèle réduit n'augmente pas significativement tandis que celui du modèle à champs complets augmente fortement.

| | calculs préliminaires | simulation finale |
|-----------------|------------------------|-------------------|
| champs complets | 0 | 8.10^6 ddl |
| modèle réduit | 13×1.10^5 ddl | 1.10^2 ddl |

TABLE 3.3: Coûts de calculs associés aux deux modèles du cas test

3.2.2 Validation

Déplacements La Figure 3.13 présente les écarts de déplacement des axes des liaisons pivots de la ligne de contrôle (axes pilotés et axes sur lesquels l'éprouvette est accrochée) entre le modèle éléments finis (référence) et le VTD. L'écart maximum observé est de $8 \mu\text{m}$ soit 0.3% de la sollicitation ce qui est satisfaisant.

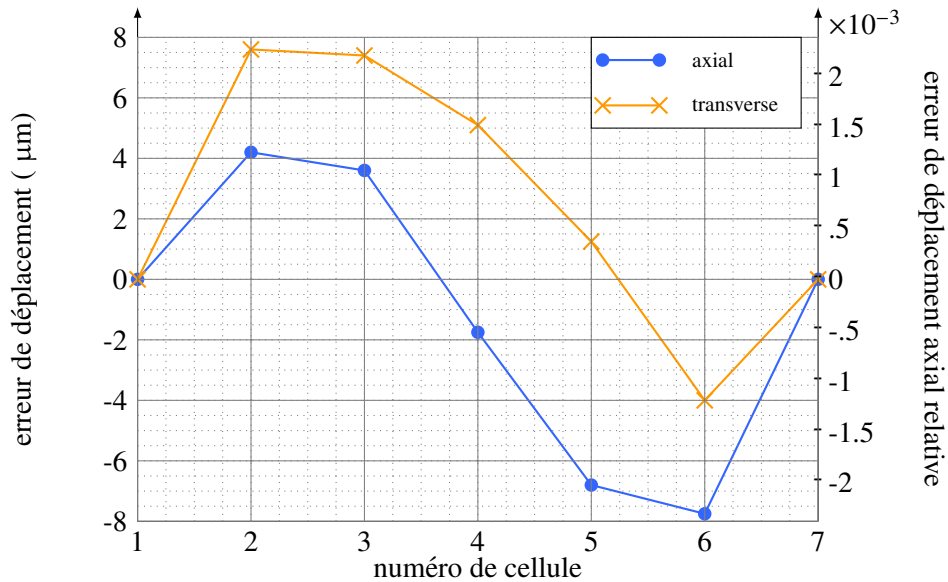


FIGURE 3.13: Écarts de déplacement des axes des LS entre le modèle EF et le VTD

Contrainte équivalente Sur la simulation EF précédente, on relève en peau de chaque liaison la contrainte de Von Mises maximale (moins le dernier centile de la répartition afin d'éviter les aberrations) et on fait de même avec le champ de contrainte déterminé par Equation (3.5) sur le VTD. On peut alors comparer la valeur maximale obtenue sur chaque liaison. Une dispersion de 15% environ est observée entre les deux résultats, on prendra donc toujours un coefficient de sécurité de 1.3 sur les résultats du VTD.

| | calculs préliminaires | simulation finale |
|-----------------|------------------------|-------------------|
| champs complets | 0 | 3.10^8 ddl |
| modèle réduit | 13×2.10^5 ddl | 6.10^3 ddl |

TABLE 3.4: Coûts de calculs associés aux deux modèles du dispositif complet

Le modèle proposé est satisfaisant en termes de suivi des déplacements et permet d'évaluer avec une précision suffisante un critère de plasticité sur les liaisons souples. Une estimation des coûts

de calcul pour le système complet est donnée [Tableau 3.4](#) (les résultats de la [section 3.3](#) sont utilisés ici pour connaître le nombre de rangs final du pantographe). Par la suite nous pourrons donc utiliser ce modèle pour dimensionner le dispositif, ce qui est l'objet de la section suivante.

3.3 Dimensionnement d'un bloc élémentaire

Pour procéder au dimensionnement des blocs via le VTD, il est important de pouvoir faire varier les paramètres à dimensionner dans le VTD sans devoir repasser par l'étape préliminaire de détermination des matrices de rigidité élémentaire.

3.3.1 Modification des paramètres d'influence

Épaisseur

Pour simuler des modification d'épaisseur des bras il suffit de multiplier la matrice de raideur globale par un facteur correctif, la rigidité des bras et des liaisons souples étant directement proportionnelle à l'épaisseur.

Nombre de rangs

Pour simuler différents nombre de rangs sans réaliser à chaque fois de nouveaux calculs préliminaires, on part de géométries correspondant à un grand nombre de rangs (par exemple 4) et, pour diminuer artificiellement ce nombre sur le modèle réduit on va laisser "flotter" les nœuds des rangs extremum : l'accrochage des pantographes ([sous-section 3.1.4](#)) n'est pas réalisé et, dans le bloc, un nœud supplémentaire est créé ([Figure 3.14](#)). Via cette méthode on peut réduire très aisément le nombre de rangs pris en compte dans la simulation³. Il n'est pas possible d'augmenter le nombre de rangs, le nombre maximal que l'on peut simuler est celui de la géométrie qui a servi à calculer la matrice de rigidité élémentaire.

Cette polyvalence va permettre de simuler le comportement d'un grand nombre de configurations rangs / épaisseurs dans divers cas de conditions aux limites sans augmenter substantiellement le coût de calcul.

3.3.2 Choix des cas tests

Pour dimensionner un bloc, il est nécessaire de choisir des cas tests permettant de définir le respect ou non des exigences du cahier des charges pour chaque choix de paramètres (b, h) . Toutes les combinaisons du [Tableau 3.5](#) peuvent être envisagées et testées.

| Cinématique | Statique | chargement ponctuel | | repos | chargement réparti | |
|------------------|----------|---------------------|------------|-------|--------------------|------------|
| | | normal | tangentiel | | normal | tangentiel |
| compression (2%) | | | | | | |
| repos | | | | | | |
| extension (2%) | | | | | | |

TABLE 3.5: Présentation des différentes sollicitations auxquelles peut être soumis le VTD

3. Utiliser la matrice de rigidité d'un bras à 9 nœuds pour connaître le comportement d'un bras à 7 ou 5 nœuds n'est théoriquement pas exact, la géométrie "flottante" ayant un impact sur la rigidité du bras. Cependant cet impact est très faible et sera donc négligé.

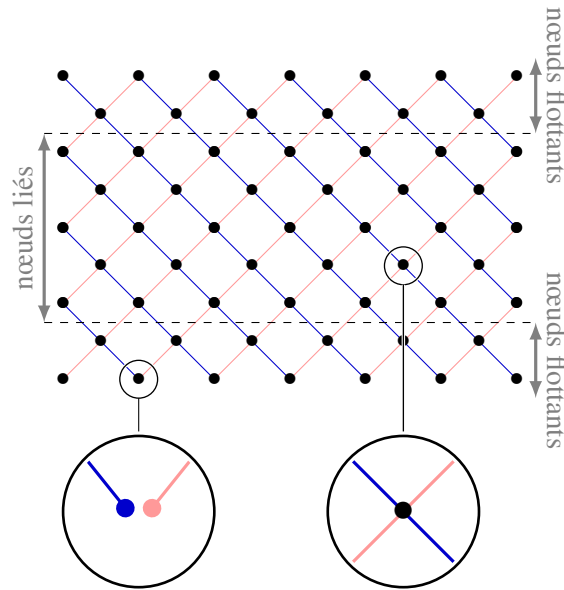


FIGURE 3.14: Réduction à 2 rangs d'un pantographe à 4 rangs

Pour le dimensionnement, deux cas de figure sont envisagés : une traction uniaxiale (Figure 3.15a) et un cisaillement (Figure 3.15b). Les chargements correspondants sont donnés en Tableau 3.6 et détaillés ci-dessous.

— Traction uniaxiale.

Les pantographes horizontaux (**t-H**) sont cinématiquement au repos et sont soumis majoritairement à un chargement réparti normal à son axe puisque ce sont eux qui assurent l'élongation de l'éprouvette. Ce chargement sera pris égal à la valeur maximale définie dans le cahier des charges.

Les pantographes verticaux (**t-V**) sont soumis à une extension ainsi qu'à un chargement orthogonal du fait de l'effet Poisson du matériau. Ce chargement sera pris égal à 50% de la valeur maximale définie dans le cahier des charges.

— Cisaillement.

Les pantographes (**c**) sont cinématiquement au repos et sont soumis à un effort réparti tangentiel.

À ces chargements répartis, on vient ajouter une perturbation ponctuelle proche du milieu du pantographe (points les plus sensible) d'une valeur de 50% de la valeur maximale définie dans le cahier des charges (le point en question sera donc chargé, au plus, à 150% de la charge maximale).

À ces cas dimensionnants ajoutons un cas extrême (**CE**) : le pantographe est soumis à une extension de 2% ainsi qu'à un chargement maximal (100% du cahier des charges) dans les deux directions et à un surcharge ponctuelle. Ce test permettra d'assurer une marge de sécurité pour le dispositif : quelle que soit sa déformée, on souhaite que le pantographe reste en régime élastique dans ce cas extrême.

3.3.3 Dimensionnement

Pour la réalisation de cette étude il aurait été possible de déterminer une fonction coût à minimiser donnant alors le couple (r, b) optimal pendant la détermination de cette fonction aurait été un

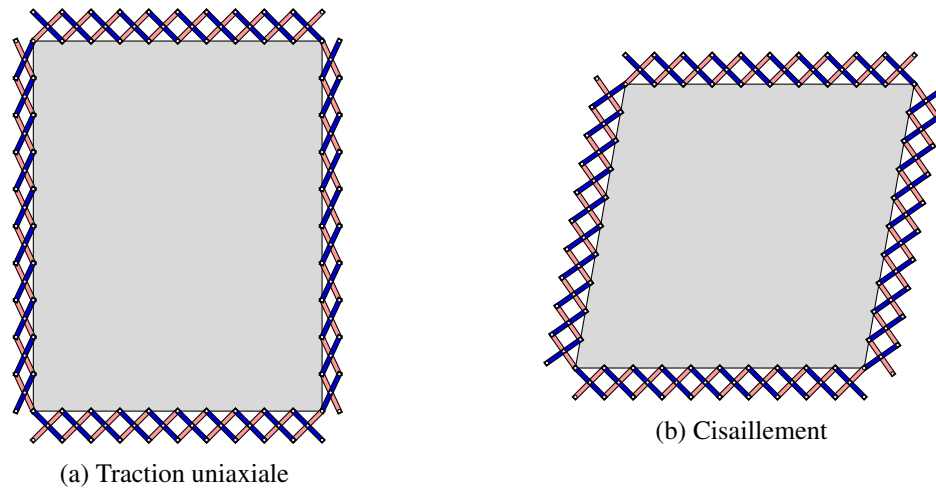


FIGURE 3.15: Représentation des cas test envisagés

| Cinématique \ Statique | chargement ponctuel | | repos | chargement réparti | |
|------------------------|---------------------|------------|-------|--------------------|------------|
| | normal | tangentiel | | normal | tangentiel |
| compression (2%) | perturbations | | | | |
| repos | | | | t-H | c |
| extension (2%) | | | | t-V ; CE | CE |

TABLE 3.6: Cas test retenus

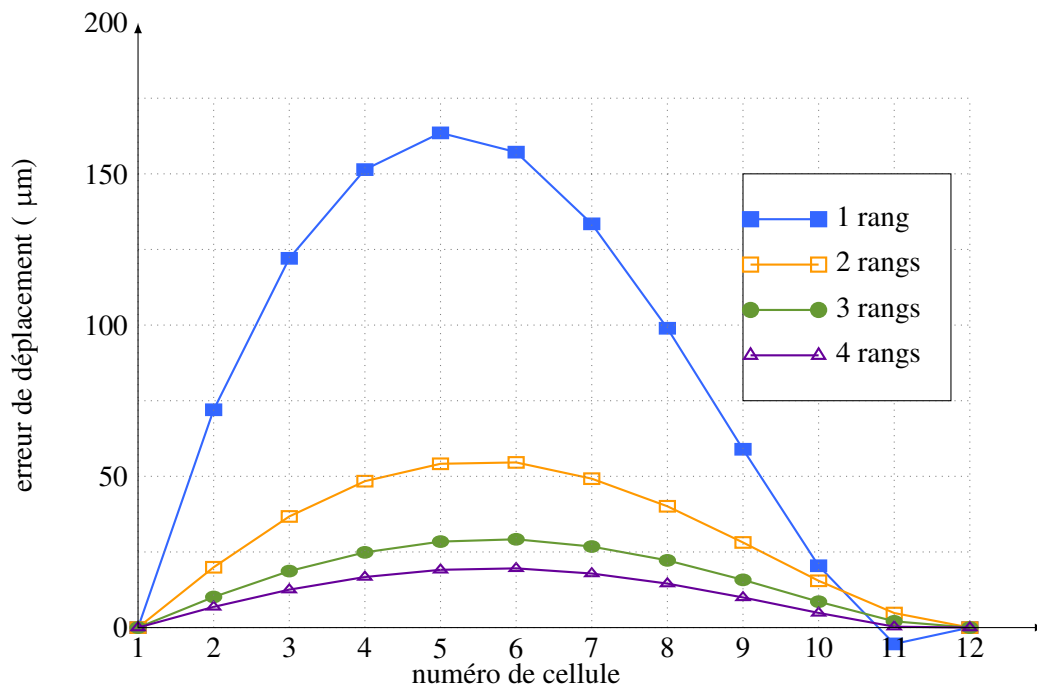
travail long car de nombreux facteurs sont à prendre en compte. Pour cette raison une étude "à la main" est réalisée. Dans un premier temps on va déterminer le nombre de rangs r . Pour cela on va observer le gain de rigidité en augmentant r de 1 en 1.

On appelle "ligne de contrôle" l'ensemble des liaisons d'intérêt : celles sur lesquelles on applique les CL cinématiques et celles auxquelles sont accrochées l'éprouvette. C'est sur les liaisons de cette ligne de contrôle que l'on va venir relever les déplacements afin de valider l'exigence ① de l'introduction.

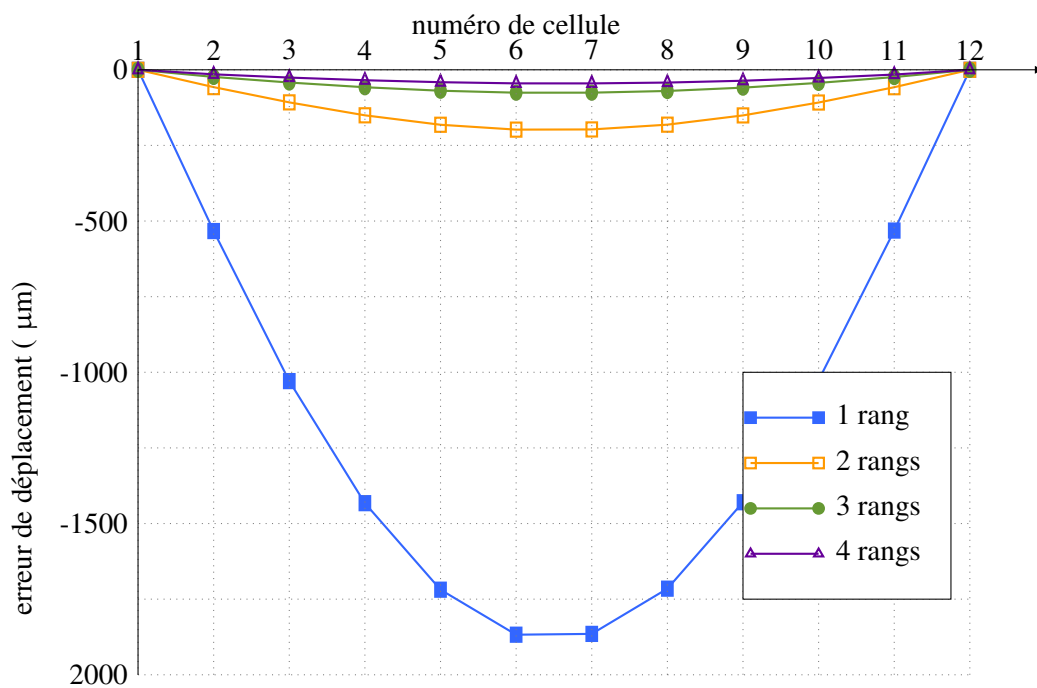
On représente en Figure 3.16 l'écart à la linéarité (valeur du déplacement donnée par le modèle - valeur théorique exacte pour un KUBC) sous chargement transverse réparti et perturbation sur la cinquième cellule. On trace les courbes d'erreur pour 1,2,3 et 4 rangs avec une épaisseur b de 10 mm.

Le Tableau 3.7 donne les erreurs maximales sous charge pour les différents cas test en fonction du nombre de rangs. On voit apparaître très nettement l'intérêt d'augmenter le nombre de rangs puisqu'en passant de 1 à 3 rangs, l'erreur en position est divisée par un facteur 10 à 15. Le passage de 3 à 4 rangs permet quant à lui une amélioration bien plus faible de la rigidité du pantographe au prix d'une augmentation importante de la quantité d'usinages à réaliser. Augmenter le nombre de rangs augmenterait également la taille et la masse de la machine ce que l'on souhaite éviter. On conservera donc pour la suite de l'étude un nombre de rangs de 3.

Une fois cette étude faite sur le nombre de rangs on réalise la même étude en faisant varier



(a) Sens axial



(b) Sens transverse

FIGURE 3.16: Écarts à la linéarité des liaisons de la ligne de contrôle sous chargement statique transverse réparti et perturbation sur la cinquième cellule en fonction du nombre de rangs r calculés avec le VTD.

| Nom | Cas de chargement | | Erreur maximale | | | |
|------------|-------------------|-------------|--------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| | Statique | Cinématique | $r = 1$ | $r = 2$ | $r = 3$ | $r = 4$ |
| t-H | Normal 100% | Repos | 1865 μm | 198 μm | 76 μm | 45 μm |
| t-V | Tangentiel 50% | Extension | 876 μm | 194 μm | 89 μm | 65 μm |
| c | Tangentiel 100% | Repos | 1529 μm | 282 μm | 94 μm | 51 μm |
| CE | Couplé 100% | Extension | 2149 μm | 341 μm | 148 μm | 100 μm |

TABLE 3.7: Erreur maximale en position pour les différents cas tests en fonction du nombre de rangs (on donne également en indication l'erreur dans le cas extrême non dimensionnant)

l'épaisseur b des bras. Pour ce paramètre on peut considérer une évolution continue cependant on ne trouvera dans le commerce que des plaques avec des valeurs discrètes d'épaisseur et on ne souhaite bien évidemment pas rectifier l'épaisseur des bruts qui seront achetés. Plusieurs considérations sont à prendre en compte pour le choix de l'épaisseur :

- brut de bonne qualité géométrique⁴ (il faut une très bonne planéité pour ne pas gêner l'assemblage, ce impacte le critère suivant) ;
- épaisseur standard (disponible dans le commerce)⁵ ;
- épaisseur permettant l'usinage des liaisons souples et évitant la présence de contraintes internes qui viendraient se libérer lors de l'usinage et donc déformer la plaque après usinage⁶ ;
- épaisseur suffisamment importante pour assurer les critères ① et ②.

Finalement on cherchera l'épaisseur "optimale" parmi les valeurs {5, 10, 15, 20} (en millimètre).

On représente en Figure 3.17 l'erreur à la linéarité (valeur du déplacement donnée par le modèle - valeur théorique exacte pour un KUBC) sous chargement statique transverse réparti et perturbation sur la cinquième cellule. On trace les courbes d'erreur pour $b = \{5, 10, 15, 20\}$ mm sur 3 rangs.

Le Tableau 3.8 donne les erreurs maximales sous charge pour les différents cas test en fonction de l'épaisseur b . L'exigence sur l'erreur à la linéarité (120 μm) est atteinte pour tous les cas test à une épaisseur de 10 mm. La tenue élastique des liaisons étant également assurée pour cette épaisseur, on retiendra pour la suite $b = 10$ mm. On peut noter que pour le cas de chargement extrême, l'erreur en position est plus élevée que l'exigence mais de peu (28 μm) et que la tenue élastique des liaisons souples est également assurée. Ce résultat est rassurant quant à l'intégrité du dispositif d'essai.

3.3.4 Bilan des dimensions obtenues

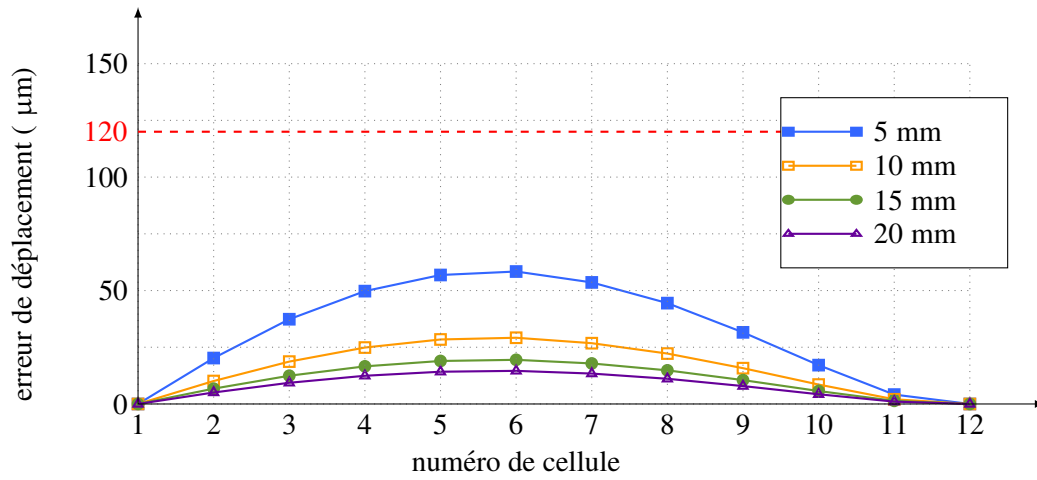
Les critères définis, rappelés dans le Tableau 3.9, permettent d'obtenir les dimensions finales du dispositif.

Les dimensions sont obtenues en deux temps :

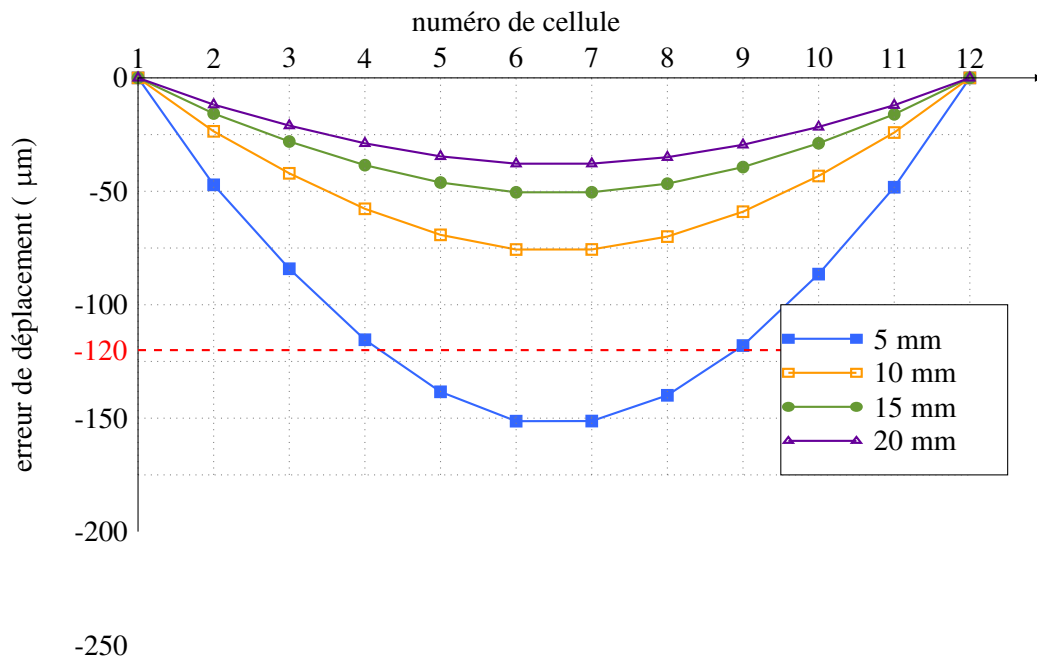
4. La planéité des bruts utilisés a été mesurée au marbre et comparateur avant usinage et un écart d'enveloppe de 200 μm est trouvé sur 120 mm.

5. Les épaisseurs des bras souples et rigides ne sont pas nécessairement identiques cependant cette variable n'a pas été prise en compte dans la démarche de dimensionnement.

6. Des test d'usinage ont été réalisé sur deux alliages d'aluminium (2024 et 7075) suite à une mise en garde d'usieurs sur le probable impact des contraintes internes du 7075. Les contrôles métrologiques effectués sur les deux plaques n'ont pas permis de mettre en évidence l'apparition d'un quelconque effet. L'alliage 7075 a donc été conservé.



(a) Sens axial



(b) Sens transverse

FIGURE 3.17: Erreur à la linéarité des liaisons de la ligne de contrôle sous chargement statique transverse réparti en fonction de l'épaisseur b

| Nom | Cas de chargement | | Erreur maximale | | | |
|------------|-------------------|-------------|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| | Statique | Cinématique | $b = 5 \text{ mm}$ | $b = 10 \text{ mm}$ | $b = 15 \text{ mm}$ | $b = 20 \text{ mm}$ |
| t-H | Normal 100% | Repos | 151 μm | 76 μm | 50 μm | 38 μm |
| t-V | Tangentiel 50% | Extension | 140 μm | 89 μm | 72 μm | 63 μm |
| c | Tangentiel 100% | Repos | 190 μm | 94 μm | 63 μm | 47 μm |
| CE | Couplé 100% | Extension | 266 μm | 148 μm | 113 μm | 94 μm |

TABLE 3.8: Erreur maximale en position pour les différents cas tests en fonction de b (on donne également en indication l'erreur dans le cas extrême non dimensionnant)

| critère | valeur |
|------------------------|-------------------------------|
| taille de l'éprouvette | $300 \times 300 \text{ mm}^2$ |
| extension | 2% |
| compression | 2% |
| cisaillement | 2° |
| charge par accroche | 0.2 kN |
| nb d'accroche par côté | 10 |
| erreur max en position | 120 μm |

TABLE 3.9: Critères de dimensionnement des pantographes

- L'épaisseur $2h$ et le rayon R des liaisons souples ainsi que le matériau sont choisis, grâce à une étude analytique présentée en [sous-section 2.4.3](#), afin de rester dans le domaine élastique tout en assurant la gamme de déplacement spécifié.
- L'épaisseur des bras b et le nombre de rangs r sont choisis, grâce à l'étude numérique présentée dans la sous-section précédente, pour assurer la précision cinématique et la reprise des efforts tout en restant dans des dimensions et géométries simples à usiner.

Le [Tableau 3.10](#) donne les caractéristiques générales du dispositif. Les termes spécifiques utilisés sont définis en [Figure 2.31](#).

| Spécifications globales | |
|-----------------------------------|--|
| - matériau | alliage d'aluminium 7075 |
| - taille de l'échantillon | $308 \times 308 \times 20 \text{ mm}^3$ |
| - point de contrôle / côté (2ddl) | 10 |
| - taille de l'assemblage | $500 \times 500 \times 400 \text{ mm}^3$ |
| - étages | 2 |
| - blocs par étage | 4 |
| - pantographes par bloc | 3 |
| - liaisons souples (total) | 2376 |
| - $2h$ | 0.7 mm |
| - R | 3 mm |
| - r | 3 |
| - b | 10 mm |

TABLE 3.10: Caractéristiques générales du dispositif

3.4 Validation expérimentale

Une fois que les paramètres dimensionnels ont été déterminés, la fabrication et le montage des pantographes peut commencer. Dans un premier temps, un pantographe est fabriqué (sur les 8 nécessaires) afin de valider le comportement prédit par le VTD. La fabrication des pantographes étant une étape importante, l'[Appendice G](#) détaille le processus de fabrication. Le pantographe fini

est imagé en Figure 3.18.

Afin de s'assurer que le pantographe fabriqué a les bonnes caractéristiques et pour valider la représentativité du VTD, deux expériences sont mises en place :

- compression du pantographe sur une machine d'essai afin de vérifier la cinématique ainsi que les niveaux d'effort à exercer sur les points de contrôle ;
- flexion du pantographe par suspension d'une masse afin de vérifier la rigidité du pantographe aux chargements transverses.

Pour comparer le VTD aux résultats expérimentaux, il faut déterminer le déplacement des axes des liaisons pivots. Pour cela on va utiliser la corrélation d'images numériques dont le principe est expliqué dans la sous-section suivante. Ces essais vont principalement servir à valider les prédictions du VTD sur le pantographe réel⁷. Ainsi, si dans les cas testés les prédictions sont bonnes il est raisonnable de considérer que les prédictions seront également justes dans le cas où le chargement est plus complexe.

3.4.1 Corrélation d'image numérique

3.4.1.a Généralités

La corrélation d'image est une technique de mesure de champs de déplacements qui consiste à comparer deux images : une image de la situation de référence et une image d'une situation déformée [Sut+83]. Numériquement cela revient à regarder et comparer les niveaux de gris des deux images. On note \underline{x} la position en pixels, les fonctions $f(\underline{x})$ pour l'image de référence et $g(\underline{x})$ pour l'image déformée décrivent les niveaux de gris. Le champ de déplacement $\underline{u}(\underline{x})$ permettant de passer de la situation de référence à la situation déformée :

$$g(\underline{x} + \underline{u}(\underline{x})) = f(\underline{x})$$

ce qui traduit l'hypothèse de la conservation du niveau de gris entre les deux images. En pratique,

7. Le VTD a jusqu'à présent été comparé à un calcul EF en champs complets, plus représentatif que le VTD mais évidemment non exact et sur un cas dégradé (bloc non complet). Il faut donc s'assurer que le cumul d'écarts VTD - calcul EF et calcul EF - réalité n'est pas trop important du fait des défauts du système réel (usinage, comportement matériau, alignement, etc.)



FIGURE 3.18: Pantographe seul, bras non séparés des plaques

l'égalité ne peut jamais être atteinte, on doit donc considérer un résidu local $\eta(\underline{x})$:

$$g(\underline{x} + \underline{u}(\underline{x})) + \eta(\underline{x}) = f(\underline{x})$$

Pour trouver $\underline{u}(\underline{x})$ on minimise le résidu au sens de la norme L^2 . Il s'agit d'un problème inverse car on cherche la cause des variations de niveaux de gris à partir de leur observation expérimentale. Lorsque champ $\underline{u}(\underline{x})$ est le bon, alors le résidu correspond :

- au bruit de mesure qui provient majoritairement des capteurs d'intensité de lumière de la caméra qui ont un bruit intrinsèque ;
- à une erreur de choix de cinématique (par exemple en identifiant un mouvement de corps rigide alors que le déplacement réel est un mouvement de corps rigide et une déformation homogène) ;
- à des fluctuations de luminosité globales (ombres, intensité de l'éclairage non constant) non prises en compte avec l'hypothèse de conservation du flux lumineux ;
- à des erreurs de l'algorithme de minimisation : interpolation, erreurs numériques, etc.

Ce problème peut être résolu de manière locale : on résout indépendamment ce problème en tout point \underline{x} ⁸ ou de manière globale. L'approche globale permet d'utiliser des hypothèses cinématiques pertinentes en mécanique du solide pour aider la résolution. Dans [BHR06], le champ de déplacement est alors calculé sur une base de fonctions de forme $\underline{n}_i(\underline{x})$:

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum a_i \underline{n}_i(\underline{x}) \quad (3.6)$$

Les coefficients a_i correspondent, alors, aux déplacements nodaux sur un maillage préalablement défini. L'interpolation du déplacement sur l'ensemble de la surface est réalisée grâce aux fonctions de forme des éléments finis choisis (Q4 pour [BHR06], Tri3 pour [Lec+09])

L'incertitude de mesure du déplacement est dépendante de plusieurs paramètres : la qualité de la caméra (et plus spécifiquement le « bruit » des images acquises), le contraste de la surface observée qui est généralement marquée par un mouchetis aléatoire présentant un fort contraste à petite échelle, ou encore la richesse du champ de déplacement recherché (maillage fin ou grossier) c'est à dire le nombre d'inconnues a_i par rapport à la quantité d'information (nombre de pixels et nombre de niveaux de gris).

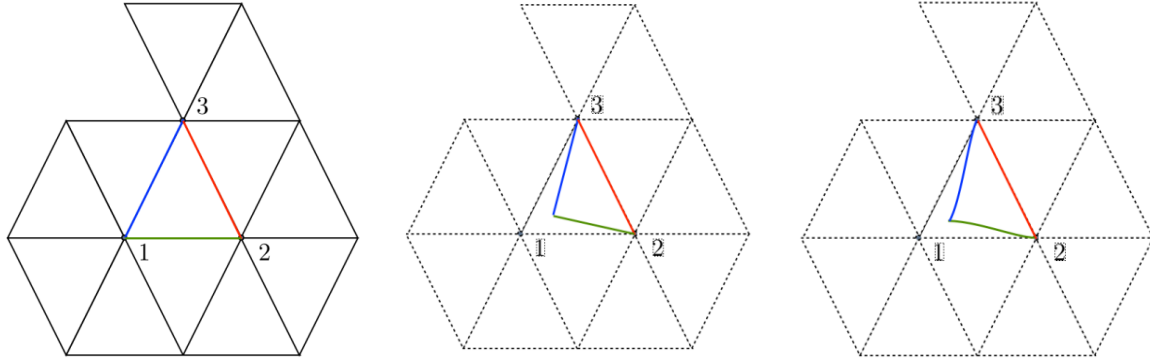
3.4.1.b Corrélation sur treillis / portique

Vu la cinématique du pantographe, il paraît pertinent d'utiliser un algorithme dédié à la corrélation sur treillis et portiques. En effet, chaque bras du pantographe est une poutre amarrée à d'autres poutres en 7 points. Sa cinématique est donc celle d'une succession de "sous-poutres" avec des conditions de continuité du déplacement et de sa dérivée entre les "sous-poutres". On va donc utiliser cette connaissance pour choisir des fonctions de forme adaptées dans l'Equation (3.6).

8. on fait alors une hypothèse de translation 2D "par imagerie" autour de \underline{x} . Ainsi, soit la mesure de taille $n \times n$ est réalisée sur une grille de pas $n \times n$ et elles sont indépendantes, soit si la grille est plus petite, les mesures ne sont pas indépendantes.

Détail des fonctions utilisées dans les cas treillis et portique.

Considérons la situation décrite sur la [Figure 3.19a](#) : 3 éléments au sein d'un maillage. Si ces trois éléments sont rotulés entre eux alors chaque nœuds possède deux degrés de liberté (ddl) chacun (deux translations cf. [Figure 3.19b](#)) tandis que s'ils sont reliés par des liaisons rigides, ils possèdent 3 ddl chacun (deux translations et une rotation cf. [Figure 3.19c](#))



(a) 3 nœuds définissant 3 poutres (ou barres) au sein d'un portique (ou treillis)

(b) Déformation des éléments exprimée sur une cinématique treillis (2ddl par nœuds)

(c) Déformation des éléments exprimée sur une cinématique portique (3 ddl par nœuds)

FIGURE 3.19: Définition et déformation d'un maillage composé d'éléments poutre (ou barre)

Cas du treillis : Lorsque chaque nœud ne possède que 2ddl alors les barres du treillis ne peuvent subir que de la traction / compression et des mouvements de corps rigide. Si l'on considère un élément barre de longueur unitaire dans son repère propre (\vec{e}_n, \vec{e}_t) , sa cinématique s'exprime alors avec des fonctions linaires :

$$\vec{u} = (u_n^1 \xi + u_n^2 (1 - \xi)) \vec{e}_n + (u_t^1 \xi + u_t^2 (1 - \xi)) \vec{e}_t \quad (3.7)$$

avec $0 \leq \xi \leq 1$ l'abscisse du point sur la barre.

Cas du portique : Lorsque chaque nœud possède 3 ddl, alors les poutres du portique peuvent subir de la flexion, de la traction / compression et des mouvements de corps rigide. Si l'on considère un élément poutre de longueur unitaire, dans son repère propre (\vec{e}_n, \vec{e}_t) , sa cinématique est de type Euler-Bernoulli, celle-ci s'exprime alors :

$$\vec{u} = (u_n^1 \xi + u_n^2 (1 - \xi)) \vec{e}_n + (u_t^1 H_{00}(\xi) + u_t^2 H_{01}(\xi) + u_r^1 H_{10}(\xi) + u_r^2 H_{11}(\xi)) \vec{e}_t \quad (3.8)$$

avec $H_{00}(\xi)$, $H_{01}(\xi)$, $H_{10}(\xi)$, $H_{11}(\xi)$ les polynômes de Hermite (fig. [Figure 3.20](#)) :

$$\begin{aligned} H_{00}(\xi) &= 2 \times \xi^3 - 3 \times \xi^2 + 0 \times \xi^1 + 1 \times \xi^0 \\ H_{01}(\xi) &= 1 \times \xi^3 - 2 \times \xi^2 + 1 \times \xi^1 + 0 \times \xi^0 \\ H_{10}(\xi) &= -2 \times \xi^3 + 3 \times \xi^2 + 0 \times \xi^1 + 0 \times \xi^0 \\ H_{11}(\xi) &= 1 \times \xi^3 - 1 \times \xi^2 + 0 \times \xi^1 + 0 \times \xi^0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Pour la corrélation, on va donc renseigner la position des nœuds, leurs liaisons (rotulées ou encastrées) ainsi que la largeur de la poutre. La solution de l'[Equation \(3.6\)](#) sera alors cherchée sur les fonctions de forme adéquates ([Equation \(3.7\)](#) ou [Equation \(3.8\)](#)) pour chaque nœud du maillage. L'utilisation de cette cinématique pour la corrélation d'images a été faite pour la première fois par [\[Hil+09\]](#) sur 1 poutre tandis que l'algorithme utilisé ci-après le fait de manière globale pour N poutres.

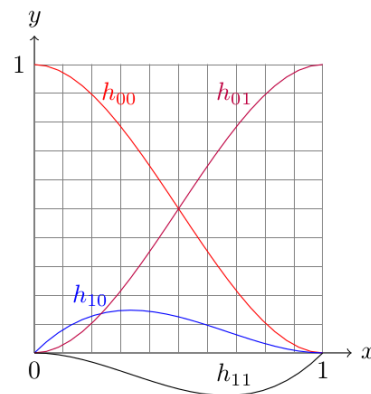


FIGURE 3.20: Polynômes de Hermite

3.4.2 En compression

Pour vérifier le comportement du pantographe lors d'un pilotage en déplacement, le montage illustré Figure 3.21 est réalisé. Les axes des ancrages sont logés dans des vés plaqués sur les plateaux d'une machine de traction Instron[®] 5982 (capacité maximale 10 kN) équipée d'une cellule d'effort 500 N. Le pantographe est soumis à une sollicitation cyclique 0 – 1 mm afin de vérifier la linéarité de son comportement ainsi que la gamme d'effort nécessaire à sa déformation. Une première compression de 50 N est appliquée pour que le mécanisme se mette en place et soit stable lors des cycles, cet état comprimé sera pris comme état de référence par la suite.

La courbe d'essai issue des données machine pour 4 cycles (0-1 mm) est donnée en Figure 3.22. Le comportement observé est complètement linéaire comme attendu, une irrégularité est visible aux alentours de -0.65 mm, cette irrégularité est répétable et correspond à un léger basculement du pantographe dans les vés. L'effort observé est de 10% supérieur à celui prévu par le modèle condensé. Cet écart sera commenté en fin de section.

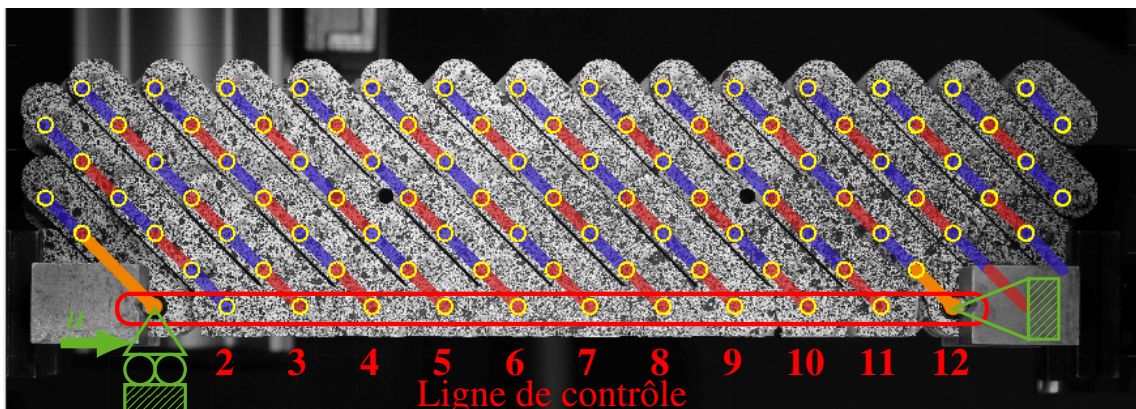


FIGURE 3.21: Montage utilisé pour contrôler la cinématique du pantographe, représentation du “treillis” utilisé pour l'étude DIC du pantographe, définition de la ligne de contrôle et numérotation des points.

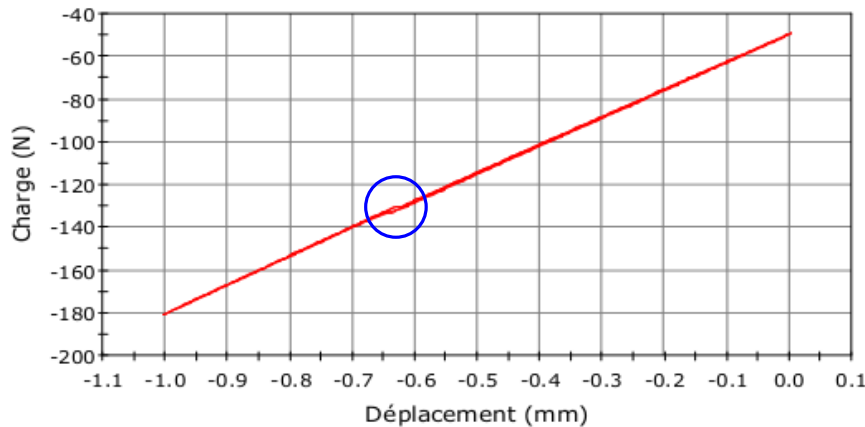


FIGURE 3.22: Essai de compression pour la validation des pantographes - légère irrégularité vers -0.6 mm

On réalise également une prise d'images pour comparer la totalité de la cinématique sur un cycle de compression $0 - 3$ mm. Les images sont obtenues par un appareil Canon EOS 70D équipé d'un objectif Canon EF 300mm f/2.8. Pour la corrélation d'images avec le code DIC TRUSS, chaque bras est assimilé à une succession de poutres, chaque poutre allant d'un centre de liaison souple au suivant. On cherche les résultats sur des fonctions de forme correspondant à des déformées de poutres en flexion. La [Figure 3.21](#) montre la position des nœuds sur l'image de référence ainsi que les segments de poutre utilisés (alternance rouge/bleu pour plus de lisibilité). Les appuis (liaisons entre le pantographe et les vés) sont difficiles à suivre par corrélation. En effet, les bras sont ici en partie masqués par les vés et le contraste est moins bon que sur le reste de l'image. Les résultats exposés ci-après sur les points d'appui (points numéros 1 et 12) sont donc obtenus en projetant les déplacements du reste du bras en faisant une hypothèse de mouvement de corps rigide (poutres oranges).

Une analyse de bruit sur 10 images prises au repos permet de quantifier les incertitudes de mesure de qui sont évaluées à 0.05 pixels soit $4 \mu\text{m}$.

Comme précédemment, on ne s'intéressera qu'aux déplacements des liaisons de la ligne de contrôle c'est-à-dire la rangée inférieure des nœuds sur la [Figure 3.21](#). Deux comparaisons seront faites :

- expérience / théorique ;
- expérience / VTD.

D'une part, la première comparaison permettra de savoir si le comportement du pantographe réel respecte bien les contraintes fixées et donc savoir si on peut fabriquer les autres pantographes. D'autre part la deuxième comparaison permettra de savoir si le VTD est fidèle au comportement réel du pantographe et donc s'il permettra par la suite de dimensionner les essais.

Comparaison expérience / théorie

On définit "l'écart à la linéarité" comme étant l'erreur en position commise par rapport à une condition cinématiquement uniforme, la linéarité théorique étant définie par la position des deux appuis. Cette notion est illustrée en [Figure 3.23](#).

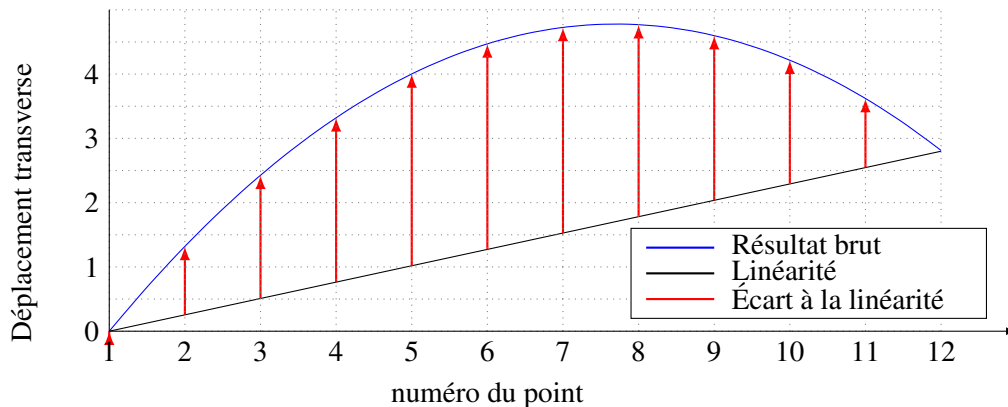


FIGURE 3.23: Illustration de "l'écart à la linéarité"

On trace sur la Figure 3.24 le déplacement des nœuds de la ligne de contrôle à différents pas de chargement. La figure a) représente le déplacement axial, on attend donc un déplacement linéaire en position, de 0 à 3 mm, ce qui semble respecté et sera investigué plus en détail. On peut toutefois noter que le déplacement du point 12 n'est pas nul alors qu'il devrait théoriquement l'être, cela est vraisemblablement dû à une imperfection des conditions aux limites. Ce déplacement est visible sur le résultat de corrélation, les mouvements de corps rigides n'ayant pas été supprimés.

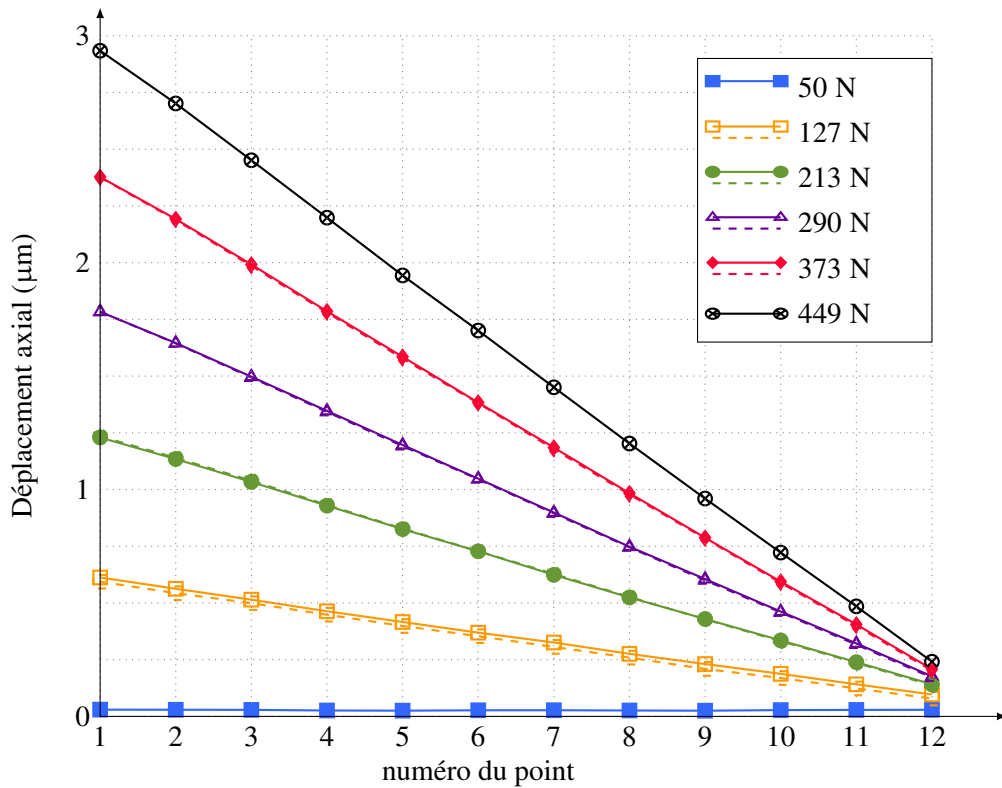
La figure b) représente le déplacement transverse qui est donc attendu très faible (nul dans le cas idéal); comme on peut le voir ce n'est pas du tout le cas, on observe au contraire un important déplacement transverse linéaire (plus perturbations) en position. Ce déplacement correspond au basculement du pantographe dans les vés évoqué au paragraphe précédent.

Pour plus de détail sur la cinématique du pantographe, on va tracer l'écart à la linéarité des déplacements axial et transverse en Figure 3.25 pour la charge maximale. Dans le cas du déplacement transverse on trace bien l'écart à la linéarité et non pas l'écart à 0 afin d'éliminer l'effet du basculement.

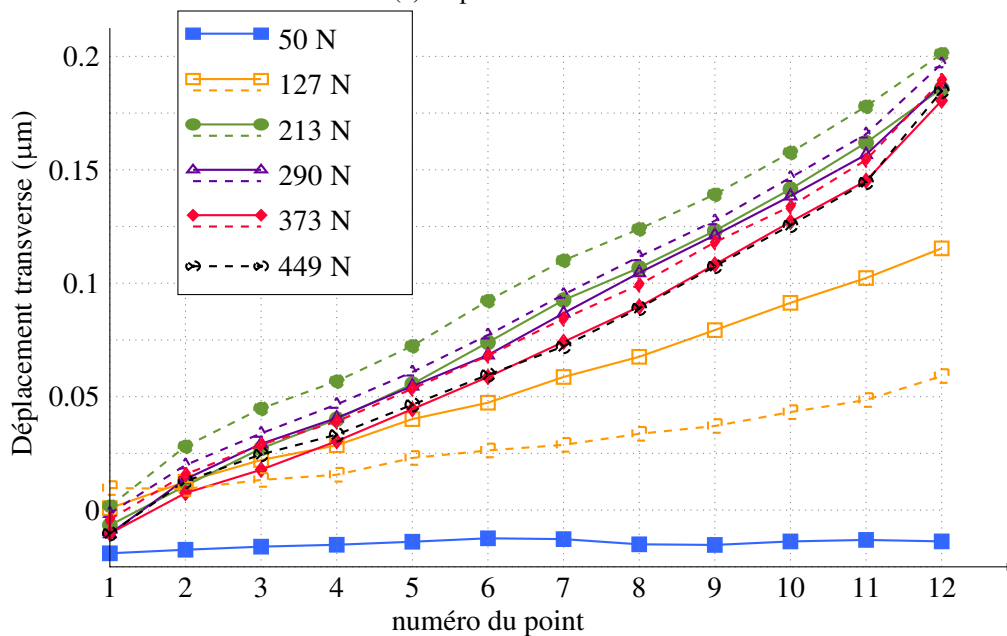
Les courbes d'écart à la linéarité sont irrégulières, et la courbe sur le déplacement transverse est étonnante, en effet l'écart important entre les deux derniers points n'est pas attendu. Comme précisé préalablement, les déplacements pour les deux appuis ne sont pas des résultats directs de corrélation mais sont obtenus en projetant des déplacements sous hypothèse de mouvement de corps rigide. Il est donc possible que des erreurs apparaissent, d'autant que nous parlons ici d'erreurs de quelques micromètres sur des déplacements de l'ordre du millimètre. Pour éviter ce problème de détermination des positions des appuis, on peut définir la ligne théorique en faisant passer une droite, ajustée par un critère de moindres carrés, par les points 2 à 11. La plage min-max de l'erreur est alors de 25 μm (contre 30 ici) pour le déplacement transverse et de 18 μm (contre 30 ici) pour le déplacement axial. Ce sont ces valeurs qui seront réutilisées pour la comparaison avec le VTD.

Comparaison expérience / VTD

Pour comparer l'expérience réelle à sa reproduction sur le VTD il faut connaître les conditions de l'expérience or, comme précisé préalablement, les positions des appuis (donc du pilotage de l'expérience) ne sont pas connus avec une grande précision. Comparer des courbes de déplacement



(a) Déplacement axial



(b) Déplacement transverse

FIGURE 3.24: Suivi des déplacements des nœuds de la ligne de contrôle lors de l'essai de compression. Lignes en pointillé : charge, lignes pleines : décharge
Le point 12 étant le point "fixe" de l'expérience.

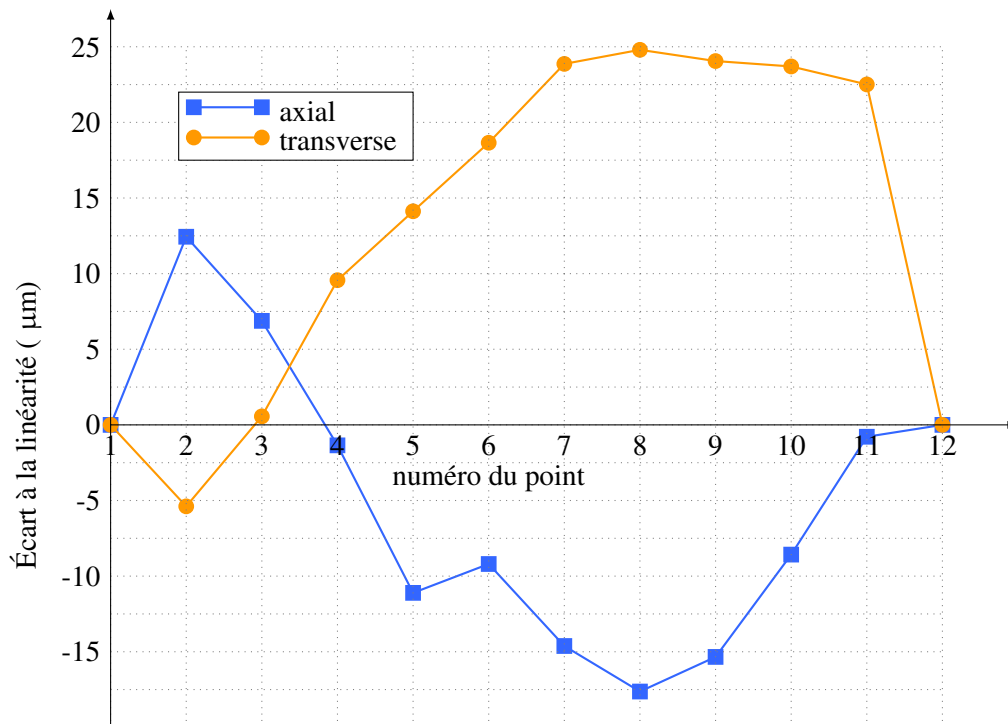


FIGURE 3.25: Écart à la linéarité des déplacements des nœuds de la ligne de contrôle lors de l'essai de compression au pas le plus chargé

dans ce cas est donc a priori fallacieux. Pour avoir un point de comparaison on va regarder les plages min-max d'écart à la linéarité dans les deux cas en prenant comme paramètres d'entrée de la simulation les positions des appuis trouvées par projection. L'erreur sur la position des appuis étant au pire de quelques dizaines de micromètres (sans doute plutôt une dizaine) cela représente moins de 5% de la sollicitation (qui est de 3 mm), les écarts à la linéarité devraient donc être sensiblement les mêmes. Ces plages sont données en [Tableau 3.11](#).

| | plage min-max transverse | plage min-max axiale |
|------------|--------------------------|----------------------|
| Expérience | 25 µm | 18 µm |
| VTD | 22 µm | 17 µm |

TABLE 3.11: Plages min-max d'écart à la linéarité pour le VTD et l'expérience

Malgré la méconnaissance des conditions aux limites et l'impossibilité de comparer point par point l'expérience et le VTD, il faut noter le très faible écart sur les plages d'erreur commise entre expérience et VTD dans le [Tableau 3.11](#). L'écart maximal étant de 3 µm cela représente 0.1% de la sollicitation de compression !

3.4.3 En flexion

Pour tester la raideur en flexion du pantographe le montage en [Figure 3.26](#) est réalisé. Les axes des ancrages sont posés sur des vés solidaires de colonnes fixes. La cinquième attache est sollicitée : un axe est placé dans le logement de l'attache et un poids est suspendu via un fil à cet axe. La sollicitation est exercée au plus proche du pantographe afin de limiter les effets de moment hors plan qui ne devraient pas apparaître lors des essais du fait de la symétrie de la machine. On charge

progressivement le pantographe jusqu'à 200% de l'effort maximal demandé sur une liaison souple (Appendice C) soit 200 N.

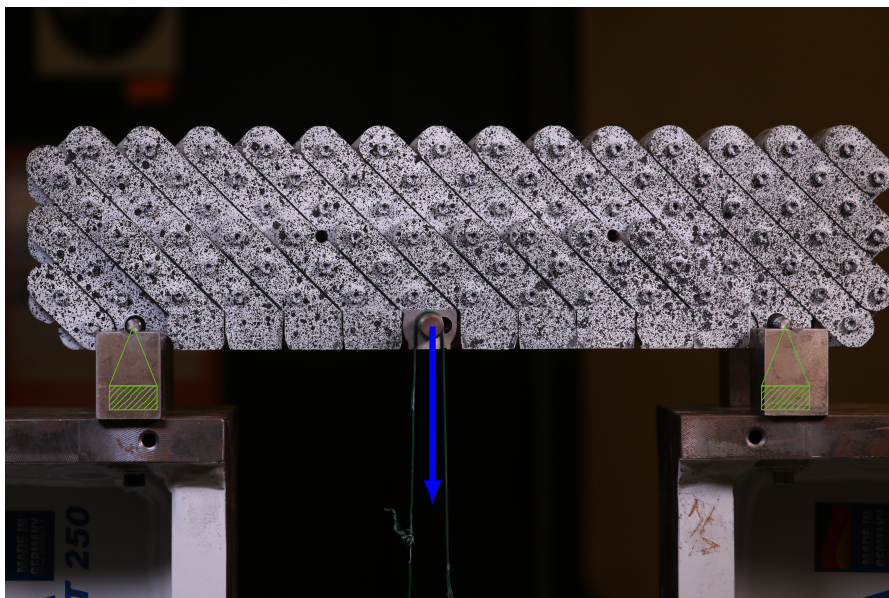


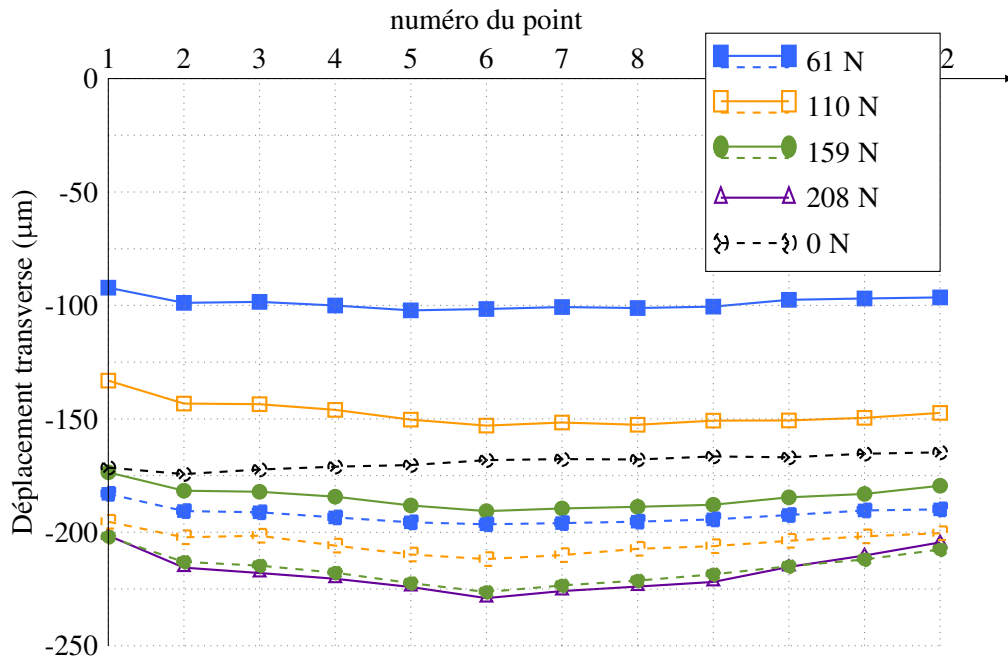
FIGURE 3.26: Montage utilisé pour contrôler la rigidité du pantographe aux sollicitations de flexion

Une analyse par corrélation d'images permet de déterminer les déplacements des différents bras. Les conditions de la corrélation d'images sont les mêmes que celles utilisées pour l'essai de compression, en revanche ici les vés étant placés différemment, ils ne gênent pas la corrélation. Tous les déplacements sont donc déterminés directement, sans hypothèse de mouvement de corps rigide. Les déplacements des nœuds de la ligne de contrôle sont donnés en Figure 3.27.

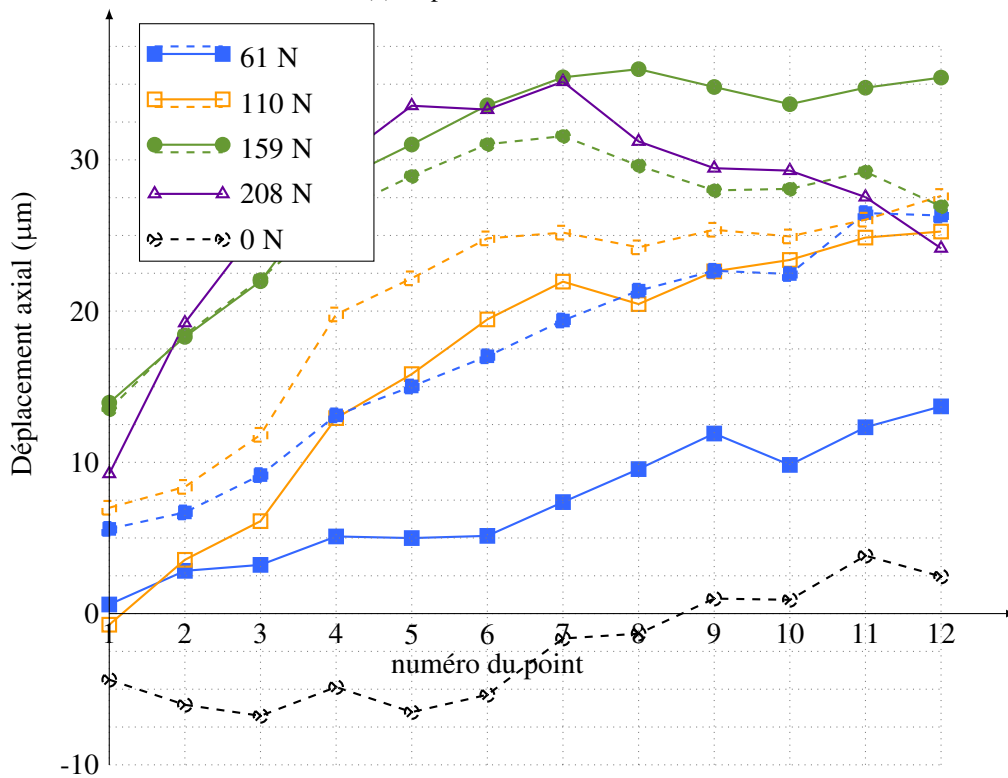
Tout d'abord, on voit que les nœuds 1 et 12, correspondant aux appuis se déplacent, axialement et transversalement. Les conditions cinématiques souhaitées et explicitées en Figure 3.26 ne sont donc pas bien réalisées expérimentalement. De plus, sur la Figure 3.27b, le déplacement axial moyen diminue entre le pas de chargement à 159 N et celui à 208 N au lieu d'augmenter comme entre les autres pas de chargement ce qui signifie probablement qu'une pièce a bougé. On voit également que sur les deux axes, le pantographe ne reprend pas sa position initiale après déchargement. Deux possibilités sont à envisager :

- lors de l'essai, le pantographe s'est enfoncé dans les vés (mauvaise mise en place initiale) et ne revient pas en place à cause du frottement des axes sur les vés. Cette hypothèse est cohérente avec le déplacement axial et transverse des points d'appui ;
- le chargement était trop important (200% de la charge max utilisée pour le dimensionnement) et une déformation permanente du pantographe a eu lieu. Le chargement étant présent en un seul point, cette hypothèse semble peu probable ; de plus une simulation de l'essai sur le VTD ne fait pas apparaître de liaison critique vis-à-vis du critère de plasticité.

Pour déterminer la cause de cette non réversibilité, d'autres essais seraient nécessaires, mais ils n'ont pas été réalisés faute de temps. Toutefois, le premier cas n'est pas problématique et le second ne doit pas être atteint.



(a) Déplacement transverse



(b) Déplacement axial

FIGURE 3.27: Suivi des déplacement des nœuds de la ligne de contrôle lors de l'essai de flexion. Lignes pleines : charge, lignes en pointillé : décharge

Pour cet essai, les positions des appuis étant déterminées directement par la corrélation on peut donc réaliser la simulation équivalente sur le VTD et comparer les déplacements des nœuds de la ligne de contrôle. On trace donc en Figure 3.28 les écarts à la linéarité axiaux et transverses relevés sur la simulation et sur l'expérience.

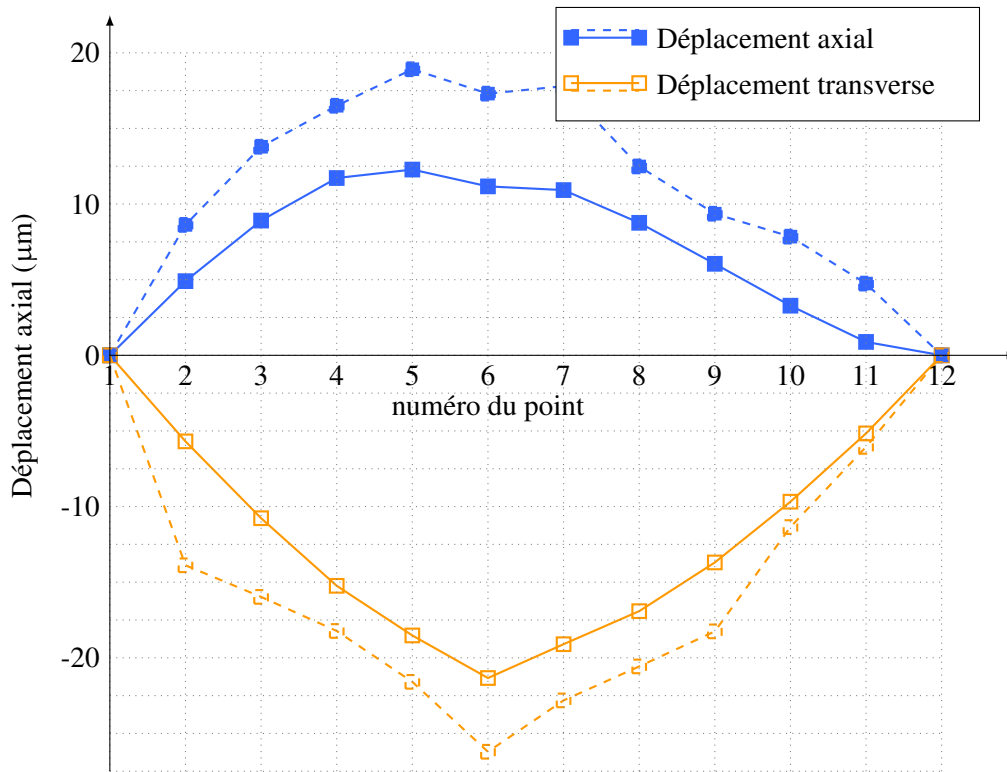


FIGURE 3.28: Écarts à la linéarité pour le VTD (lignes pleines) et l'expérience (lignes pointillées) pour la sollicitation de flexion

Les déplacements observés sont plus importants qu'attendus (d'environ 30% !), ceci ne représente toutefois que 6 μm d'écart. De plus on retrouve bien la même allure de déformée ainsi que la dissymétrie du déplacement axial.

3.4.4 Discussion et validité

En compression, le comportement du pantographe sur la plage explorée est conforme aux attentes : linéaire et sans hystérésis. La gamme d'effort est également conforme aux attentes. Toutefois l'ensemble monté présente une rigidité en compression plus importante que prévue de 10%. Les prédictions du VTD sur l'écart à la linéarité sont du bon ordre de grandeur en termes de plage min-max de l'erreur, un analyse plus fine n'étant pas envisageable pour l'essai réalisé. Un écart de 3 μm est relevé.

En flexion, bien que les conditions limites de l'essai soient imparfaites et ont donc perturbé les résultats, le comportement observé est conforme aux simulations en ordre de grandeur ainsi qu'en allure de la déformée. Toutefois, la rigidité réelle en flexion (déplacement transverse) est plus faible qu'attendue de 20% et le déplacement axial des nœuds est beaucoup plus important que prévu (de 6 μm soit environ 30% d'erreur).

Une possibilité est que les vés, bien que bridés aient bougé à charge maximale. En effet, si l'on

se place au pas de chargement précédent sur la [Figure 3.27b](#), l'écart à la linéarité est bien plus faible (environ 10 μm) et se trouve alors très proche de la prédiction du VTD pour ce chargement (9.4 μm).

Une fois ces observations faites, il est important de noter que les essais présentés ici sont en réalité le résultat d'une seconde série d'essais. Lors de la première série d'essais, le pantographe présentait un comportement fortement hystérétique et il était nécessaire d'appliquer des niveaux d'effort important pour obtenir une déformation. Après ces premiers résultats, le pantographe a été entièrement démonté. Lors du démontage, des copeaux ont été trouvés entre les bras, l'étape de libération du mécanisme (cf. [Appendice G](#)) ayant été réalisée à la scie à ruban. Pour éviter ce problème de copeaux, une découpe par électro érosion est utilisée pour les pantographes définitifs. De plus des rondelles plus épaisses sont intercalées entre les étages. Lors du deuxième montage, les bras n'étant plus solidaires par plaque, leur position relative n'est assurée que par le "guidage" des vis et non par un pion de référence.

Ainsi, les essais ont été réalisés sur un pantographe ayant vu des efforts plus importants que prévu avec éventuellement des localisations d'effort en des points ou des directions non prévues et ayant été remonté avec un positionnement relatif des éléments non assuré et donc un alignement des liaisons souples homologues non assuré (pour la définition de homologue voir la [Figure 3.7](#) et le paragraphe attendant). L'éventuelle plastification de certaines liaisons souples (donc leur variation d'orientation à contrainte nulle) ainsi que les erreurs de positionnement peuvent expliquer les écarts de rigidité observés en compression et en flexion. L'écart sur le déplacement axial lors de l'essai de flexion résulte probablement de ces mêmes causes⁹.

Des écarts moindres entre VTD et réel peuvent être attendus sur un pantographe sain (*i.e.* sans erreurs de repositionnement), cependant, malgré les différents facteurs ayant pu affecter le comportement du pantographe testé les prédictions du VTD sont très proches des résultats d'expérience avec un écart maximal de quelques micromètres.

Ces résultats expérimentaux permettent deux analyses, l'une sur la validité du modèle mis en place pour décrire le comportement réel du pantographe, l'autre sur la validation du comportement réel du pantographe vis-à-vis des exigences définies.

a. Bilan sur le VTD

L'erreur maximale commise par le VTD, pour la prédiction du comportement du pantographe réel, est de 30% pour un chargement statique (soit 6 μm à 20% de la charge max) et de 10% pour un chargement en déplacement (soit 12 μm à pleine charge)¹⁰. Ces erreurs sont à mettre en relation avec les objectifs du modèle.

- Le VTD a permis, dans un premier temps, de dimensionner les liaisons souples vis-à-vis d'un critère de précision défini dans le cahier des charges. De ce point de vue, les précisions observées sont suffisantes puisque premièrement une légère marge a été prise (cf. [Tableau 3.8](#)) et de plus le critère de 120 μm n'est pas absolu : un léger dépassement

9. Le couplage flexion / extension n'existant pas sur un pantographe théorique, son apparition sur le pantographe réalisé provient des "imperfections" de celui-ci : rigidité non nulle des liaisons et rigidité non infinie des bras. Une augmentation de la rigidité équivalente des liaisons impliquant *probablement* une augmentation de ce couplage ([AASB19]).

10. Vu les conditions d'essai et les explications préalablement données il paraît raisonnable d'espérer une meilleure prédiction en fonctionnement

de cette erreur entraînera seulement une plus grande imprécision dans la détermination des coefficients du tenseur d'élasticité homogénéisé.

- À terme, on souhaite utiliser le VTD afin de dimensionner des essais. La taille caractéristique des déplacements imposés lors d'un essai étant de quelques millimètres, l'erreur relative commise par le VTD est alors d'environ 0.2%. À ce titre, le VTD est un outil tout à fait adapté au dimensionnement des essais.

b. Bilan sur le pantographe

Les résultats d'essai sur le pantographe montrent que

- la rigidité en compression est conforme à celle attendue (quoique légèrement supérieure) ce qui permet son utilisation avec les actionneurs prévus, ainsi que de ne pas perturber la mesure des efforts appliqués à l'éprouvette (cf. 3);
- la précision du déplacement des points de la ligne de contrôle (définie en [Figure 3.21](#)) lors d'une compression est suffisante vis-à-vis du cahier des charges;
- la rigidité en flexion, donc la précision du déplacement des points de la ligne de contrôle sous chargement de flexion, est suffisante vis-à-vis du cahier des charges.

Les dimensions choisies ainsi que les usinages et le montage réalisés permettent donc la fabrication de pantographes utilisables pour la machine KUBC.

Bilan

Un modèle complet de la machine (système de répartition du déplacement) a été présenté (section 3.1) et validé (section 3.2). La sous-structuration de ce modèle en macro-éléments que l'on a condensés à leurs frontières a permis le dimensionnement d'un bloc (section 3.3) ce qui était son but premier. Des essais réalisés sur un bloc test (section 3.4) ont montré que le modèle réalisé permet la prédiction du comportement du pantographe à quelques micromètres près ce qui est satisfaisant du point de vue des critères de dimensionnement. Ces essais valident également le comportement du pantographe pour son utilisation en système de répartition du déplacement dans la machine KUBC.

Dans le chapitre suivant nous aborderons les points technologiques jusqu'à présent laissés de côté ainsi que leurs impacts sur la précision attendue. Un protocole de caractérisation de la machine KUBC sera également proposé.

Chapitre 4

Protocole de caractérisation et validation du montage expérimental

Dans les chapitres précédents nous avons vu les choix technologiques retenus (cf. [chapitre 2](#)) ainsi que la procédure de dimensionnement (cf. [chapitre 3](#)) permettant de répondre aux exigences du cahier des charges (cf. [Appendice C](#)) définies grâce à une étude des procédés d’homogénéisation (cf. [sous-section 1.3.4](#)). Dans cette quatrième et dernière partie, c’est le passage au réel qui est présenté : montage et caractérisation de la machine.

Avant de pouvoir utiliser la machine et donc de réaliser un essai d’homogénéisation expérimentale, il est nécessaire de caractériser et calibrer le dispositif d’essai. De là il sera possible de déterminer les incertitudes et la précision des mesures expérimentales. La caractérisation n’est possible qu’une fois tous les choix technologiques faits et la machine montée (certaines étapes de calibration peuvent se faire durant le montage).

La question primordiale de l’étalonnage et de la quantification des “erreurs” (jeux, frottements, souplesses) de la machine ne peut être abordée sans une connaissance plus approfondie des choix technologiques répondant à diverses fonctions :

- amarrages : imposer à l’éprouvette le déplacement du bloc correspondant ;
- fourchettes : imposer une déformation aux pantographes via les vérins électriques ;
- cellules d’effort : mesurer les efforts transitant par les pantographes.

La problématique principale va être le passage à la 3D. En effet, pour l’instant, exception faite des pantographes, seuls des schémas de principe en 2D ont été donnés.

La section suivante est dédiée à une présentation générale de la machine, dans la section 2) les trois points technologiques évoqués seront abordés pour détailler les sources d’erreur potentielles. Du fait des restrictions d’accès aux locaux lors des derniers mois de la thèse (pandémie du COVID-19) la machine a pu être montée, semble fonctionnelle mais n’a pu être validée¹. Une dernière section proposera néanmoins un protocole de validation du dispositif d’essai.

1. La validation de la machine sera réalisée dans la suite de mes travaux de thèse notamment via un post-doc dans le cadre du projet A.N.R. Max-OASIS.

4.1 Présentation du dispositif complet

Une image CAO de la machine est donnée en [Figure 4.1](#) avec les différents éléments importants repérés. Une image de la machine réelle est donnée en [Figure 4.2](#).

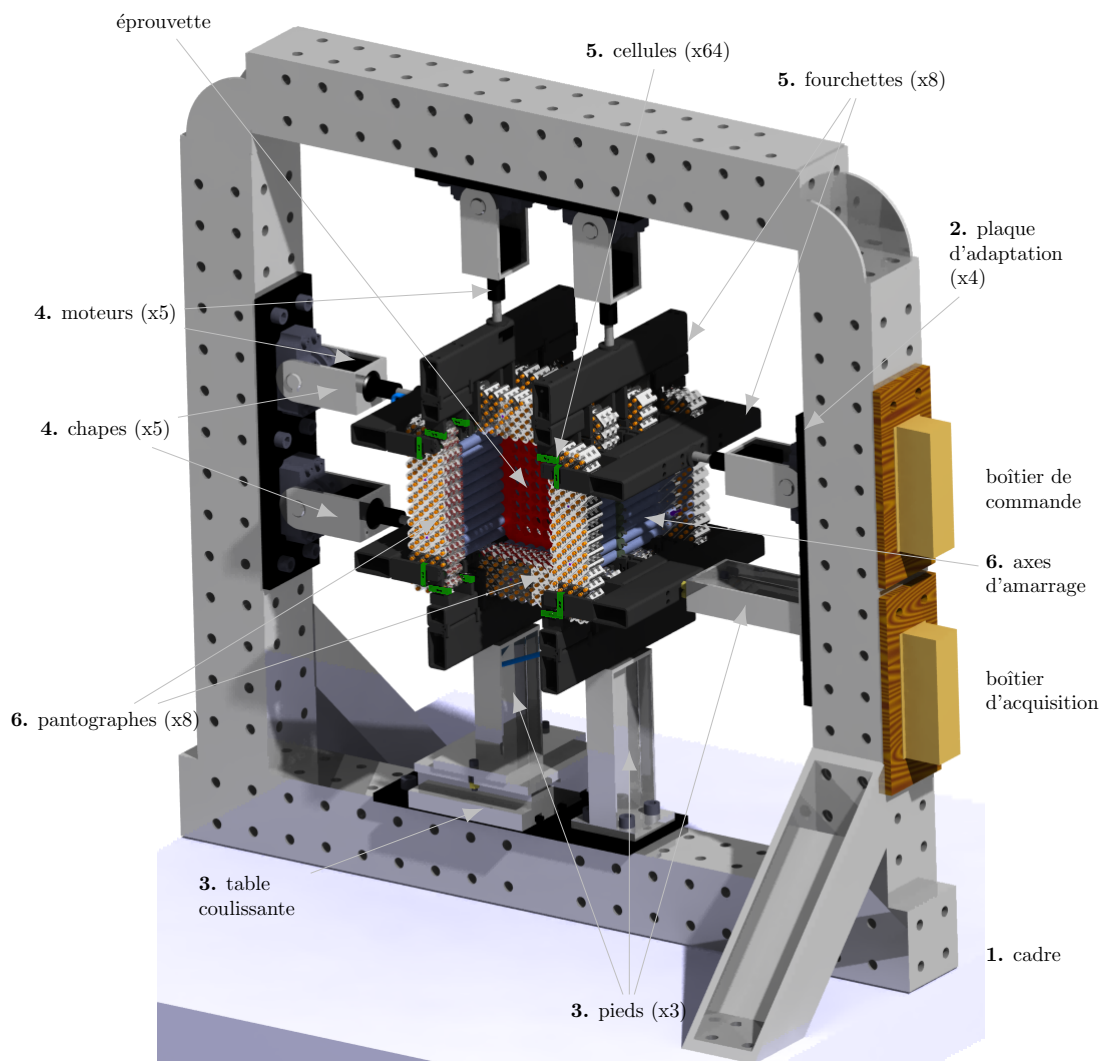


FIGURE 4.1: Schéma d'ensemble de la machine

Le montage de la machine se fait de l'extérieur vers l'intérieur :

1. Cadre : la référence choisie pour la totalité du montage est le cadre, en effet, réalisé en poutres fraisées de très grande inertie, on considérera toujours ce cadre comme indéformable et de géométrie parfaite ;
2. Plaques d'adaptation : les plaques d'adaptation permettent de placer les éléments suivants du montage sur le cadre, car celui-ci n'est pas modifiable. De plus 2 éléments sont montés sur chaque plaque ce qui permet d'assurer leur positionnement et orientation relatifs ;
3. Table coulissante et pieds : comme représenté en [Figure 4.7](#) l'un des coins du montage central avec les pantographes est fixe (coin inférieur droit sur l'image). Ce coin est lié au bâti par l'intermédiaire de 2 pieds de forte inertie ce qui permet d'apporter de la rigidité hors plan à la machine ;

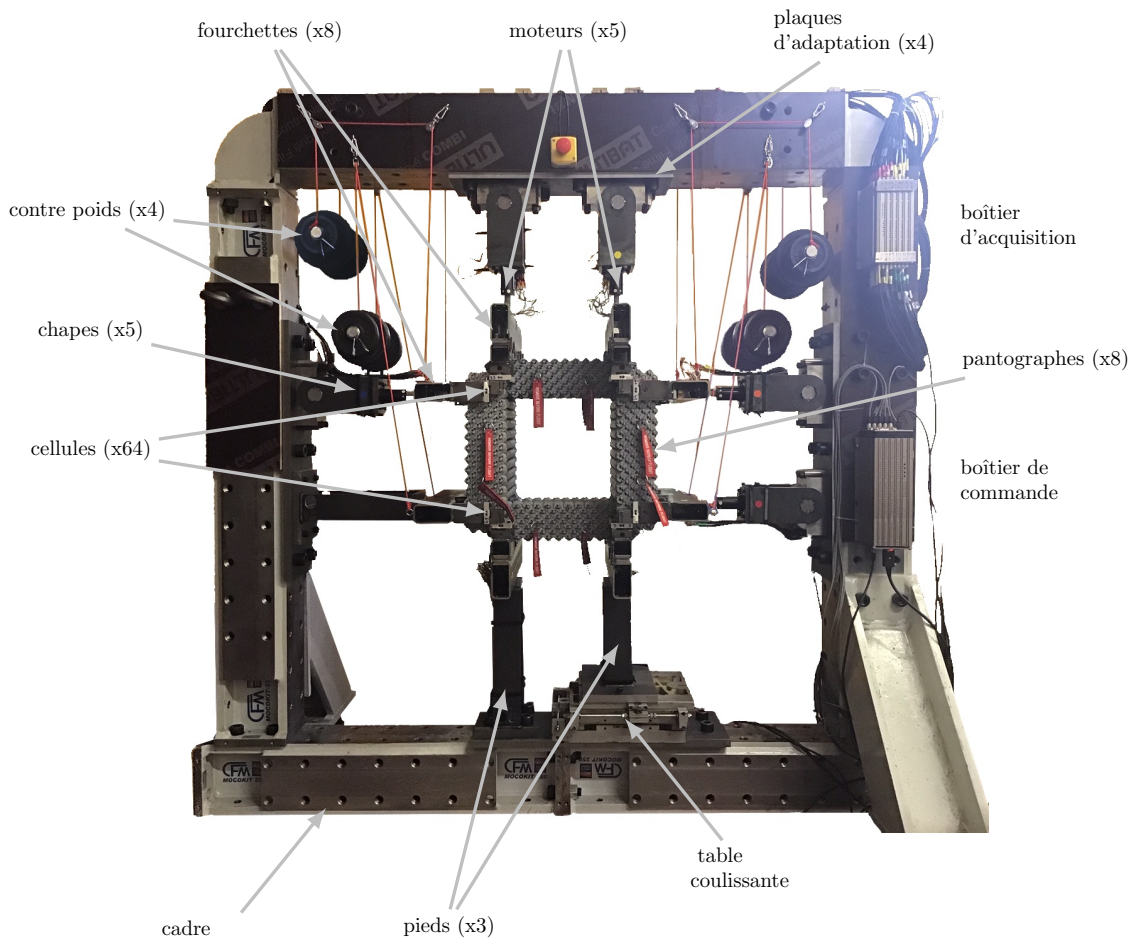


FIGURE 4.2: Machine réelle

4. Chapes et moteurs : les moteurs (vérins électriques) sont montés sur des chapes pour permettre leur rotation dans le plan, les chapes sont alignées et vissées sur les plaques d'adaptation ;
5. Fourchettes (§4.2.2) et cellules d'effort (§4.2.3) : les fourchettes sont les pièces permettant de faire le lien entre les vérins (ou les pieds) et les pantographes, on y intègre des cellules d'effort pour la mesure statique ;
6. Montage central : le cœur du dispositif composé des axes de pilotage des 8 blocs et des axes d'amarrage (§4.2.1) est monté séparément sur table. Plus précisément on assemble via leurs axes d'amarrage les deux blocs inférieurs, les deux blocs de gauche, les deux blocs de droite et les deux blocs supérieurs, ce qui donne alors 4 ensembles indépendants ;
7. Mise en place du montage central : enfin, chacun des 4 éléments du montage central est amené dans la machine et fixé sur les fourchettes.

Remarques :

- l'éprouvette représentée sur la [Figure 4.1](#) n'est pas présente lors du montage ;
- sur la photo de la machine, des contrepoids sont visibles, il permettent de compenser le poids propre des éléments de la machine afin de ne pas surcharger les cellules d'effort.

On donne pour indication en [Appendice H](#) les temps dédiés à la fabrication et au montage des différents éléments jusqu'à la machine complète. Ces temps ne prennent pas en compte les temps de conception ainsi que les différents tests et prototypes réalisés et représentent donc l'investissement en temps nécessaire à l'obtention de ce dispositif pour un laboratoire, la majeure partie des temps (les temps d'usinage et d'électronique) pouvant être sous traitée.

Dans la section suivante on se propose de détailler plus avant les points technologiques concernant les fourchettes, les cellules d'effort ainsi que les axes d'amarrage pour détailler les sources d'erreur potentielles.

4.2 Recherche des sources d'erreur

4.2.1 Axes d'amarrage

Le rôle des amarrages est de transmettre le déplacement type KUBC des blocs (un bloc est formé de 3 pantographes associés en parallèle) à l'éprouvette. Il faut imposer à l'éprouvette la translation de chaque point de contrôle mais pas sa rotation. En effet, lors d'une élévation du pantographe, les bras tournent mais cette rotation ne correspond en aucune façon aux conditions KUBC recherchées. Une transmission par des axes d'amarrage, libres en rotation, est donc choisie. Les axes peuvent être remplacés indépendamment du reste de la machine, la version présentée ici est relativement rudimentaire. Elle a pour but de répondre au mieux au cahier des charges tout en étant fabricable à court terme. Une version améliorée pourra aisément être mise en place a posteriori.

On rappelle le schéma d'architecture globale de la zone centrale en [Figure 4.3](#). On y trouve deux étages composés de 4 blocs (associés pour former un cadre) se faisant face, symétriquement à l'éprouvette située au centre .

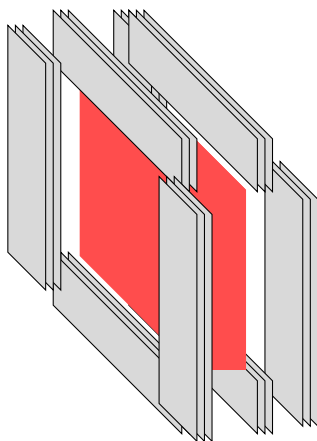


FIGURE 4.3: Rappel de l'architecture machine (l'image a été tournée afin de mieux correspondre à la vue CAO de la [Figure 4.4c](#).)

Pour la mise en place des axes, il est choisi d'ajouter une couche sur chaque bloc (cette couche est représentée en rose sur la [Figure 4.4](#)), du côté interne du montage. Les axes viennent alors se placer dans des logements de cette nouvelle couche et sont donc laissés libres en rotation au frottement près. Deux types d'axes, des courts ([Figure 4.4a](#)) et des longs ([Figure 4.4b](#)), sont nécessaires puisque le montage n'est pas identique selon les deux directions. Finalement, l'éprouvette est en-

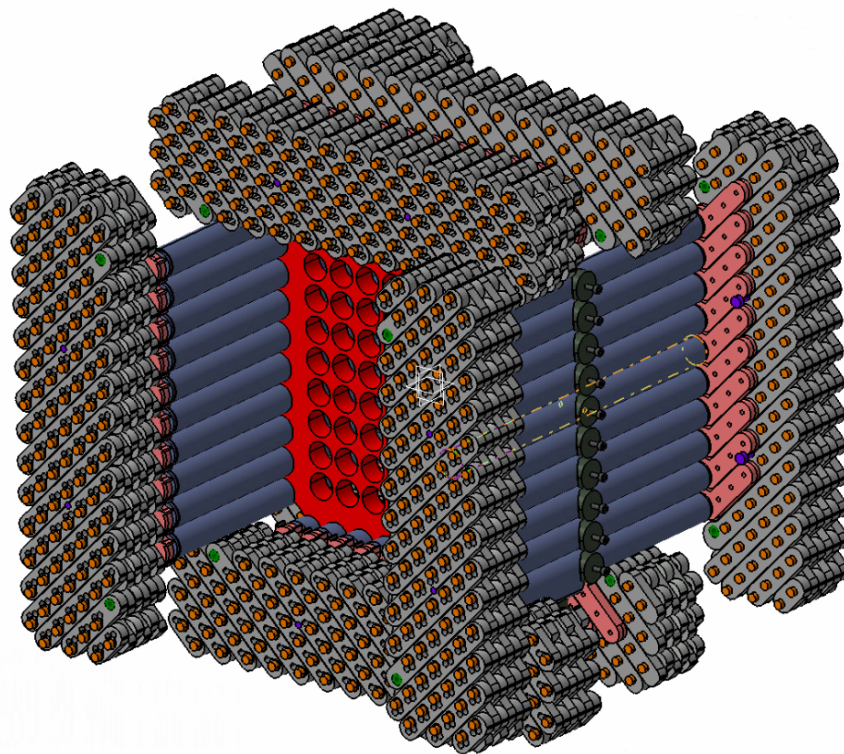
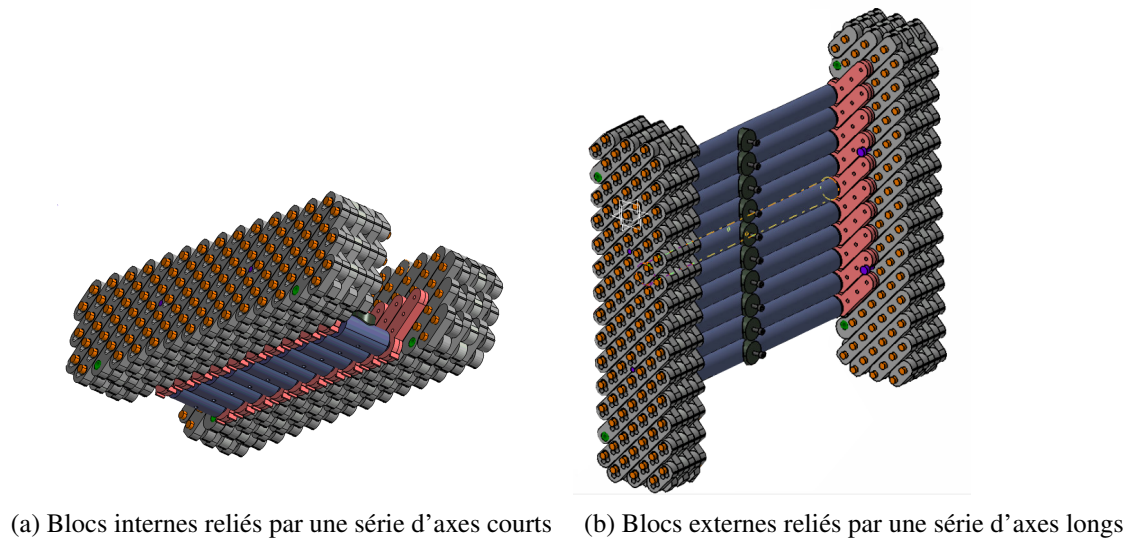


FIGURE 4.4: Présence d'axes d'amarrage entre les blocs pour la tenue de l'éprouvette ; la couche supplémentaire permettant de lier ces axes aux blocs est représentée en rose

tourée par 40 axes : 20 courts et 20 longs (cf. Figure 4.4c).

Minimisation de la flexion

Vu la portée entre les blocs les plus éloignés (300 mm), il est nécessaire de limiter la souplesse des axes, pour cela, on maximise leur diamètre sous contrainte d'encombrement (soit finalement 26 mm).

La question du choix du matériau se pose pour ces axes, trois possibilités sont alors considérées : acier, aluminium et composite à matrice époxy et fibre de carbone. On cherche à maximiser le rapport module de flexion / masse volumique. L'acier et l'aluminium sont proches avec des rapports à $27 \text{ MPa}/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$ et $26 \text{ MPa}/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$ respectivement. Le cas du tube composite est plus complexe à traiter puisque le module de flexion dépend fortement du choix du tissage, de l'orientation des fibres et des fractions volumiques fibre/matrice. Cependant, avec un tissage majoritairement orienté dans l'axe du tube, le rapport module de flexion/masse volumique est largement favorable au tube en composite. Malheureusement les tubes composites du commerce étant très mince, leur flèche sous charge est importante dans notre cas. On choisit donc d'utiliser des axes en acier, la fabrication de tubes composites aux dimensions voulues étant gardée de côté pour une éventuelle amélioration ultérieure.

Ce choix représente, pour les axes longs, une masse de 1.2 kg par axe (s'ils sont pleins) soit un poids de 120 N pour dix axes ce qui correspond à 5% de la capacité des moteurs. Pour éviter cette masse importante, on se tourne donc vers l'utilisation de tubes, le diamètre intérieur retenu est de 20 mm (soit le tube d'épaisseur maximale trouvée dans le commerce). Le gain de masse est de 7 kg par côté de la machine.

Avec cette géométrie, leur flexion sous charge maximale (200 N) est donnée par la théorie des poutres (poutre d'Euler Bernoulli bi-rotulée chargée au centre) : $24 \mu\text{m}$.

Pour les amarrages courts, des axes pleins sont conservés, leur masse totale n'étant pas très élevée (2 kg pour 10 axes). Leur flexion sous charge maximale est très faible, environ $1 \mu\text{m}$ par la théorie des poutres, poutre d'Euler Bernoulli bi-rotulée chargée au centre. Vu la longueur et le diamètre de ces axes on se trouve à la limite de l'hypothèse poutre cependant on ne cherche pas une valeur précise mais un ordre de grandeur, l'étude poutre est donc encore valable ici.

Prise en compte du montage

Le montage de 40 axes ajustés dans leur logement en parallèle entre deux étages quasi rigides étant très fortement hyperstatique, des liaisons souples axisymétriques sont réalisées à chaque extrémité des axes (Figure 4.5) permettant un léger rotulage (0.8° avant plasticité soit un déplacement de 0.8 mm en bout d'axe court et de 4 mm en bout d'axe long) sans nuire fortement à la rigidité en flexion (augmentation de la flèche $< 10 \mu\text{m}$). En plus de faciliter le montage, ces liaisons souples en bout d'axe vont permettre d'éviter d'appliquer des couples importants sur les pantographes lors du montage et des essais. La géométrie de ces liaisons souples a été obtenue par une étude analytique (selon les formules de [S.K93]) puis a été modifiée en fonction de contraintes d'usinage (risque de rupture de la pièce lors de l'usinage si trop peu de matière est laissée).

Impact du frottement axe - pantographe sur les essais

La conception ayant été réalisée sous l'hypothèse que la machine ne dissipe pas d'énergie, il est important de pouvoir évaluer la quantité d'énergie perdue au niveau des liaisons axes d'amarrage / blocs, pour cela il faut quantifier le couple résistant de ces liaisons.

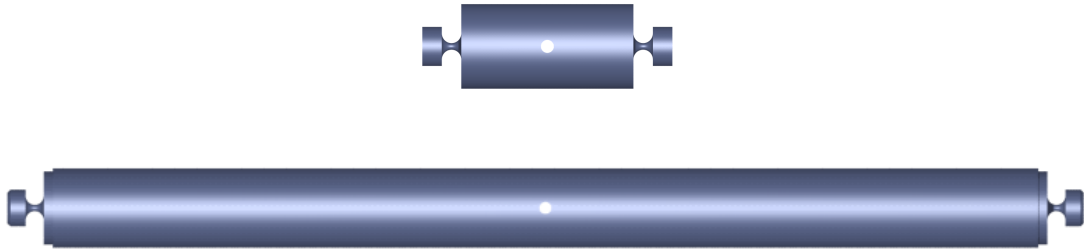


FIGURE 4.5: Axes d'amarrage court et long avec liaison souple en bout pour permettre le montage

Pour quantifier le couple résistant on enroule un fil autour de l'axe sur plusieurs tours et l'on suspend une masse M de chaque côté. On ajoute ensuite des masses δM jusqu'à obtenir une rotation de l'axe (Figure 4.6) assurée par le frottement exponentiel du fil enroulé. Le couple résistant C_r est alors simplement donné par

$$C_r = \frac{d \delta M g}{2}$$

On doit réaliser cet essai sur différents axes et à différents niveaux de chargement initial $M g$ afin d'avoir une bonne représentation du couple résistant.

Une analyse énergétique grossière permet de déterminer un couple résistant maximal ne perturbant pas les mesures d'effort à $n\%$ près. Plaçons nous dans le cas le plus défavorable : l'ensemble des quarante axes d'amarrage tournent de 0.02 rad (correspondant à un cisaillement de 2%) en subissant un couple linéairement croissant et de valeur maximale C_r atteinte lorsque l'axe est soumis à un effort de 200 N. La quantité d'énergie dissipée E_{diss} par ce frottement est donc :

$$E_{diss} = 40 \frac{1}{2} C_r \times 0.02 = 0.4 C_r$$

L'énergie emmagasinée par l'éprouvette E_{ep} vaut quant à elle, pour un matériau isotrope homogène en cisaillement :

$$E_{ep} = 4 \frac{1}{2} F u$$

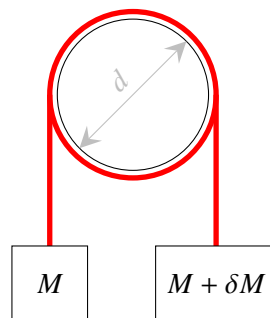


FIGURE 4.6: Détermination du couple résistant dans les axes d'amarrage

avec u le déplacement moyen imposé sur un bord de l'éprouvette, F la force résultante sur ce bord et 4 le nombre de bords. En se plaçant dans le cas de chargement maximum on obtient :

$$E_{ep} = 4/2 \times 2000 \times 1.5 \cdot 10^{-3} = 6 \text{ J}$$

Le déplacement moyen d'un bord vaut $L\gamma/4$ où L est la longueur d'un bord et $\gamma/2$ l'angle de cisaillement.

Si l'on souhaite que l'énergie dissipée par le frottement des axes d'amarrage représente au maximum 0.1% de l'énergie utile de l'essai (E_{ep}) il faut que

$$C_r \leq 1.5 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}$$

pour un axe chargé à 200 N.

Le cas considéré ici étant très restrictif (cas de chargement des axes d'amarrage peu probable et perturbation des résultats de 0.1%) un couple résistant dix fois plus élevé (donc de $15 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}$) pourra être considéré comme acceptable.

Jeu

Dans un cas parfait, le montage des axes dans leur logement peut se faire quasiment sans jeu. Malheureusement dans la réalité l'absence de jeu rend le montage complexe et il existe un risque de blocage de l'axe dans le logement. Pour éviter cela un jeu est nécessaire même s'il est indésirable ; pour le limiter, les axes sont repris 1 à 1 et ajustés avec leur logement.

Montage : retour d'expérience

- La détermination des couples résistants n'a pas pu se faire par manque de temps cependant cette valeur n'est pas aberrante, en effet cela revient à exercer un effort tangentiel de 1 N

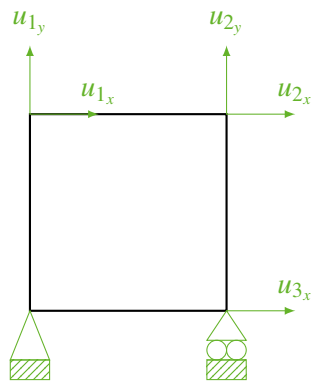


FIGURE 4.7: Déplacements pilotés et fixations de la partie centrale.

pour faire tourner un axe ce qui semble raisonnable vu la facilité avec laquelle la majorité des axes tournent ².

- La mesure du jeu n'a pas été réalisée mais il peut être estimé d'une à quelques dizaines de micromètres. Ce jeu n'est évidemment pas le même sur tous les axes.

4.2.2 Fourchettes

Un autre point important est la liaison entre les pantographes et le système de pilotage. Si la représentation schématique des choix réalisés est aisée en 2 dimensions (Figure 4.7) le passage à 3 dimensions est plus complexe. En effet, sur la figure, chaque flèche représente un moteur linéaire tandis que chaque côté du cadre (trait noir) est un ensemble formé de 2 blocs et d'une série d'axes (Figure 4.4).

Minimisation de la flexion Le pilotage se fera, à chaque coin du montage, par un axe traversant les 4 blocs concernés. Du fait de l'encombrement il est impossible de passer un axe suffisamment rigide à travers tout et de ne le tenir qu'en son centre (Figure 4.8a). En effet le diamètre maximal de l'axe de pilotage est de 9 mm cela se traduirait par une flèche de 10 mm en bout ce qui est

2. Quelques axes tournent difficilement, cela semble dû à une flexion plastique des liaisons souples de bout d'axe (mauvaise manipulation durant le montage). Un changement d'axe sans démontage de la machine semble possible et pourra être réalisé sur les axes les plus pénalisants.

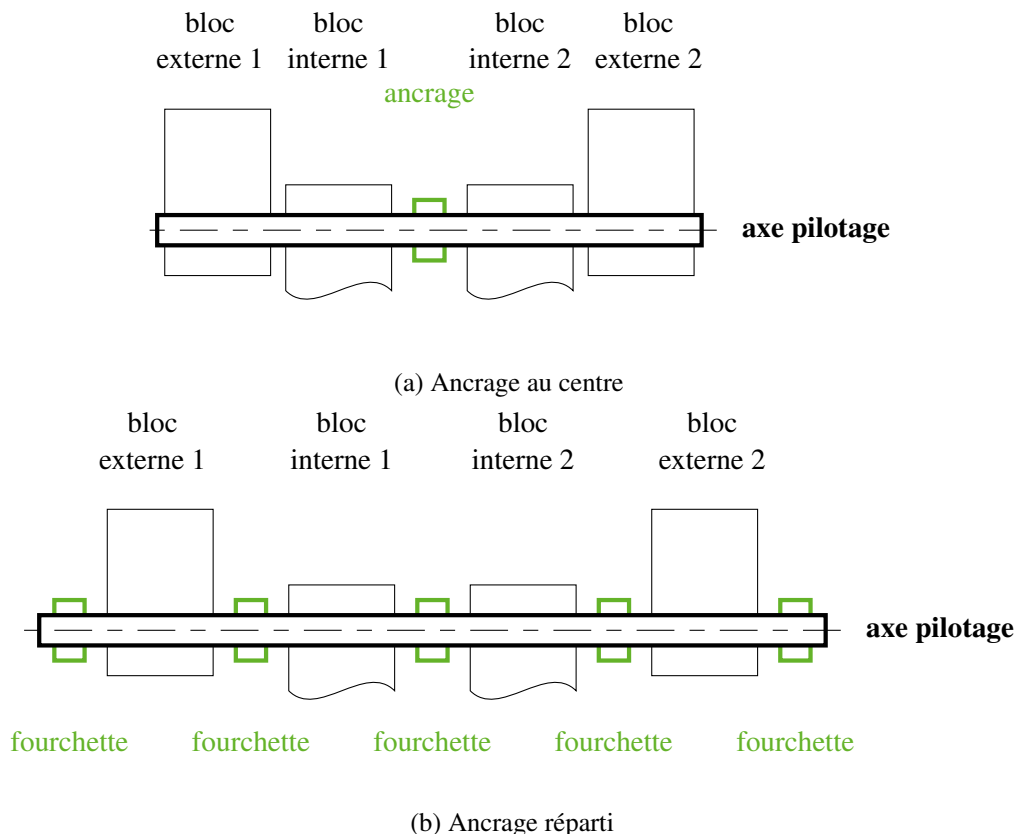


FIGURE 4.8: Deux stratégies d'ancrage sur le système de pilotage - vu schématique en coupe d'un coin du montage

critique vis-à-vis du cahier des charges ainsi que de l'alignement machine. Subséquemment, il est choisi d'adopter une stratégie d'ancrage réparti via un système de fourchette (Figure 4.8b) permettant d'assurer la rigidité de la transmission par une pièce supplémentaire se plaçant en parallèle de l'axe de pilotage.

Ainsi, à chaque angle, deux fourchettes seront présentes : l'une verticale et l'autre horizontale. Ces deux fourchettes ne sont pas strictement identiques puisque l'encombrement 3D n'est pas le même suivant les deux axes. La maximisation de la rigidité de l'ensemble donne finalement les deux pièces présentées en Figure 4.9.

Une simulation éléments finis permet de déterminer la flèche à chargement maximal (2 kN) uniformément réparti sur les 8 points d'ancrage. Celle-ci est d'environ 2 μm . La flèche obtenue est très faible et garanti donc une conservation de l'alignement des différents éléments sous charge.

Le diamètre maximal d'axe pouvant être passé à travers les blocs est de 9 mm. Cependant, du fait de l'existence de mouvements relatifs, on souhaite interposer des éléments roulants entre l'axe et les pantographes. Finalement, un axe de 7 mm de diamètre associé à des cages à aiguilles est retenu. La flexion de l'axe est plus complexe à obtenir avec certitude (conditions aux limites mal connues) toutefois une estimation peut être donnée : $f < 110 \mu\text{m}$ dans le cas d'une poutre bi-rotulée et effort réparti. L'axe étant pris dans le bloc sur quasiment toute sa longueur, cela devrait avoir un fort effet rigidifiant et donc limiter cette souplesse.

Jeu

Le jeu dans les fourchettes est nul car tous les éléments sont bridés les uns sur les autres à l'exception des axes de pilotages qui sont maintenus par des cages à aiguilles. Le jeu de ces cages à aiguilles est d'environ 20 μm ³.

Montage : retour d'expérience

Bien que la détermination du jeu réel de la chaîne de pilotage n'a pas été réalisé, quelques essais ont permis de voir que ce jeu semble en réalité plus faible qu'attendu (une dizaine de micromètres). Cet abaissement du jeu peut être dû au fort hyperstatisme de l'assemblage : pour s'adapter aux inexactitudes d'usinage, les pièces rattrapent le jeu pour permettre le montage. Bien que ceci soit une bonne nouvelle concernant le jeu de la machine, des non linéarités de contact restent à prévoir à charge faible.

On peut dès à présent noter que l'exigence d'erreur maximum en position de 120 μm semble difficilement atteignable à pleine charge si l'on cumule les jeux et déflexions des différents éléments (cf. Tableau 4.1, les déflexions y sont données à pleine charge). On ajoute ici le jeu et la souplesse du moteur qui n'ont jusqu'alors pas été évoqués. Néanmoins, on peut distinguer dans le tableau la déflexion des pantographes et axes d'amarrages d'un côté et toutes les autres sources d'erreur en position de l'autre. En effet, la déflexion des pantographes et axes d'amarrages entraîne une erreur différente en chaque amarrage donc impossible à compenser tandis que toutes les autres sources s'appliquent indifféremment à tous les amarrages et sont donc compensables par le pilotage (le jeu entre les axes d'amarrage et leur logement n'est pas identique entre tous les axes cependant la

3. Il n'existe pas d'éléments roulants préchargeables de cette taille.

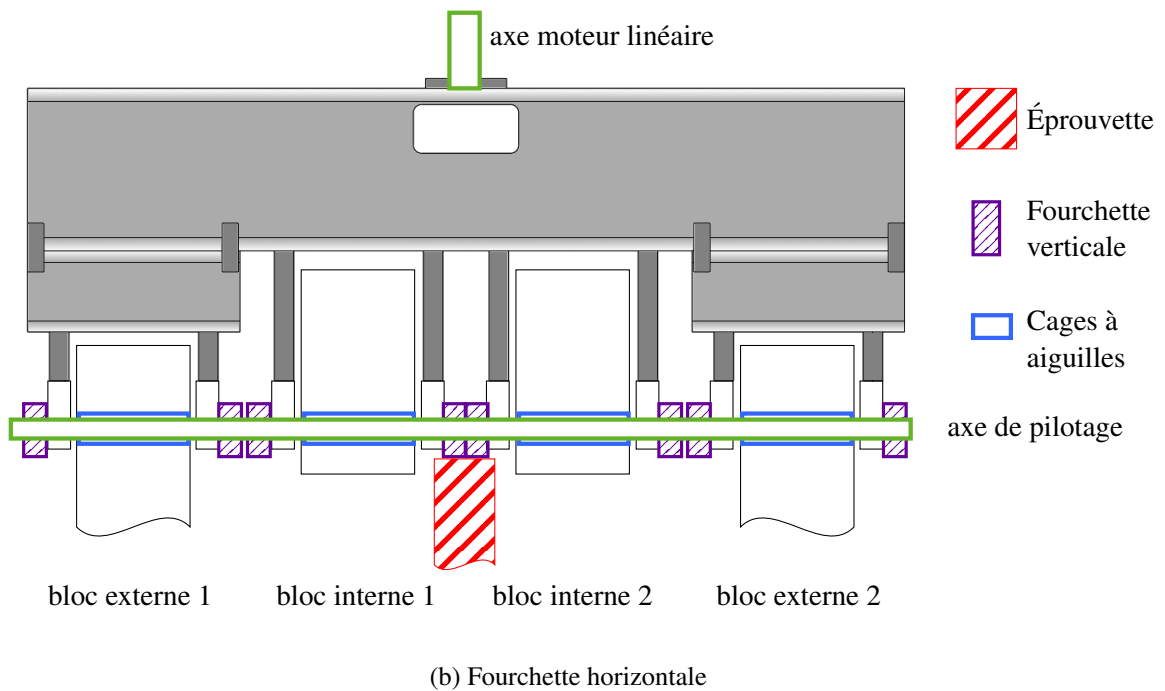
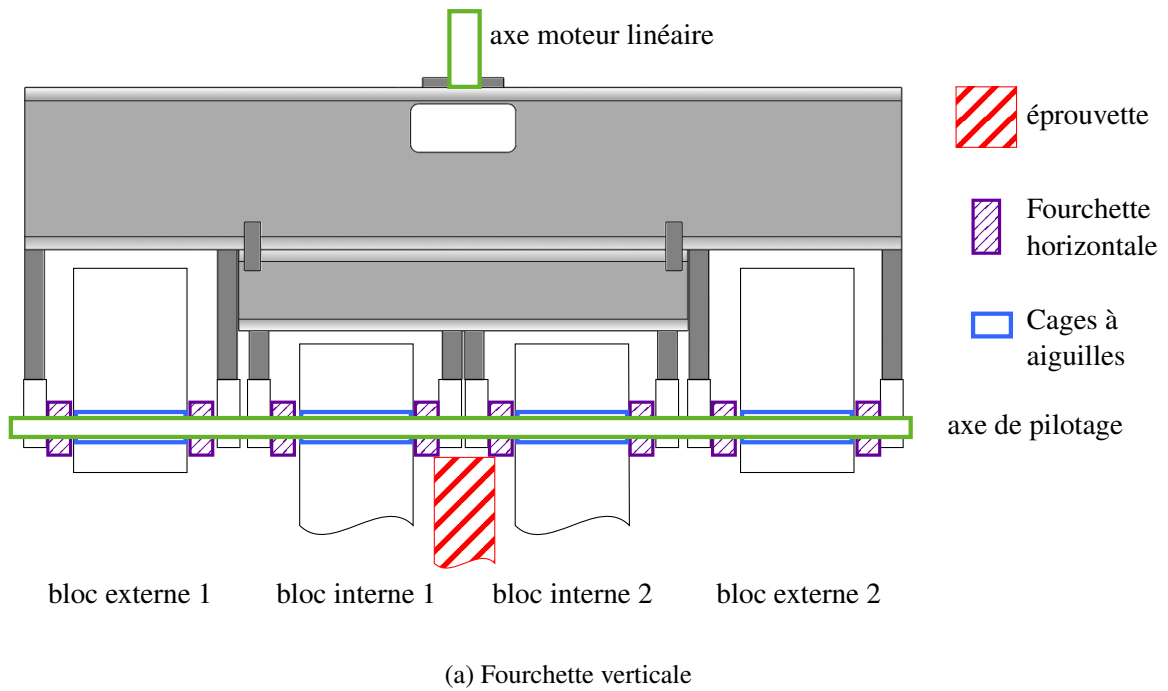


FIGURE 4.9: Détails technologiques du système de fourchettes

moyenne des jeux est compensable).

4. Estimé par test rapide sur le pilotage.
5. À caractériser, on utilise ici un résultat obtenu sur un moteur de la même gamme mais d'une puissance moindre. La souplesse était alors de $40 \mu\text{m}$ à chargement maximal.
6. + la moyenne des jeux des axes d'amarrages.
7. En faisant bouger les axes dans leur logement à la main on peut estimer l'amplitude du battement en bout d'axe

| Élément | Nature | Valeur |
|------------------------------|----------------------|---------------------------------------|
| Moteurs | Jeu | $< 10 \mu\text{m}^4$ |
| Moteurs | Souplesse | $40 \mu\text{m}^5$ |
| Fourchettes | Déflexion | $2 \mu\text{m}$ |
| Cages à aiguilles | Jeu | $20 \mu\text{m}$ |
| Axes de pilotages | Déflexion | $50 \mu\text{m}$ |
| Total compensable | | $120 \mu\text{m}^6$ |
| Axes d'amarrage | déflexion | $33 \mu\text{m}$ |
| Pantographes | déflexion | $120 \mu\text{m}$ |
| Axes d'amarrage | Jeu avec le logement | $< 30 \mu\text{m}^7$ |
| Total non compensable | | $183 \mu\text{m}$ |

TABLE 4.1: Cumul des jeux et des déflexions de la chaîne de pilotage à pleine charge.

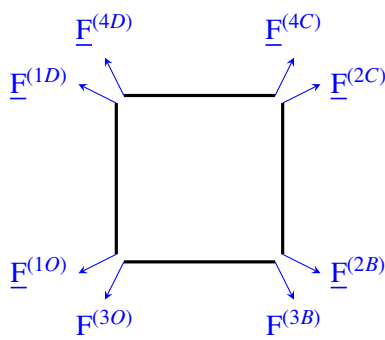


FIGURE 4.10: Rappel de la stratégie globale de mesure des efforts

Le total non compensable exprimé ici est une surestimation dans le cas d'un axe

- long ;
- au milieu d'un pantographe ;
- sous charge maximale ;
- ayant un jeu dans son logement maximal.

4.2.3 Cellules d'effort

La stratégie de mesure des efforts définie en sous-section 2.2.3 est résumée en Figure 4.10. Comme pour le système de pilotage, le passage à la 3D n'est pas direct. Sur le montage complet, un bord est composé de deux blocs, ces deux blocs peuvent être internes ou externes (cf. Figure 4.9).

Choix du dispositif

Comme on peut le voir sur la Figure 4.9, la place disponible pour intégrer des cellules d'effort manque. Pour pouvoir mesurer distinctement les efforts sur les blocs internes et externes, des modifications sont nécessaires.

et donc déterminer le jeu.

- L'axe de pilotage doit être scindé en 3 parties distinctes : bloc externe 1 - blocs internes - bloc externe 2 comme représenté sur la Figure 4.11. Sans cette séparation les efforts pourraient transiter d'un bloc externe à un bloc interne.
- Il faut ajouter une ou plusieurs cellules d'effort en des points bien choisis. Pour cela, deux implémentations paraissent envisageables, elles sont explicitées en Figure 4.11.

Proposition 1 : 2 (ou 3) cellules d'effort suffisent à la mesure des efforts si ces cellules sont placées en des points bien choisis. Cette solution présente l'avantage de donner une mesure directe de l'effort sur un bloc (ou un demi bloc pour les fourchettes horizontales). Cependant, à moins d'utiliser d'opéreuses cellules d'effort cylindriques typiques des machines d'essai uniaxiales de fortes capacités, il est à craindre que le rotulage nécessairement permis par une cellule de petite taille soit critique (instabilité) en compression du fait de l'éloignement cellules - axes de pilotage. Si cette solution est retenue, il faudra ajouter un guidage réalisant une glissière en parallèle du moteur, ce qui complexifie la conception. De plus un guidage, même statique, risque de fausser la mesure car une part de la force à mesurer va transiter via le guidage et non la cellule (frottement ou raideur du guidage).

Proposition 2 : La mesure de l'effort se fait au plus proche des blocs via un grand nombre de cellules. Cette solution présente plusieurs avantages : tout d'abord, plus la cellule est proche de ce qu'elle doit mesurer (en termes de nombre de pièces intermédiaires) moins il y a de risque pour que des perturbations interviennent. De plus, le rotulage des cellules est ici beaucoup moins problématique puisque le bras de levier entre l'axe de pilotage et les cellules est beaucoup plus faible.

Dans ce cas de figure, la mesure d'effort se fait en branchant en pont complet et en parallèle les 4 jauges des 4 cellules d'un même côté (externe ou interne) cf. Figure 4.12. Cette mesure sur-abondante permet, au besoin et en débranchant certaines cellules, de mesurer le déséquilibre du montage.

Finalement, l'architecture retenue est celle de la proposition 2, cette solution est illustrée en Figure 4.13. Huit cellules sont donc implantées par fourchette soit 16 par coin du montage (donc 64 en tout).

Vu le nombre important de cellules et l'encombrement réduit que celles-ci doivent avoir, on utilise

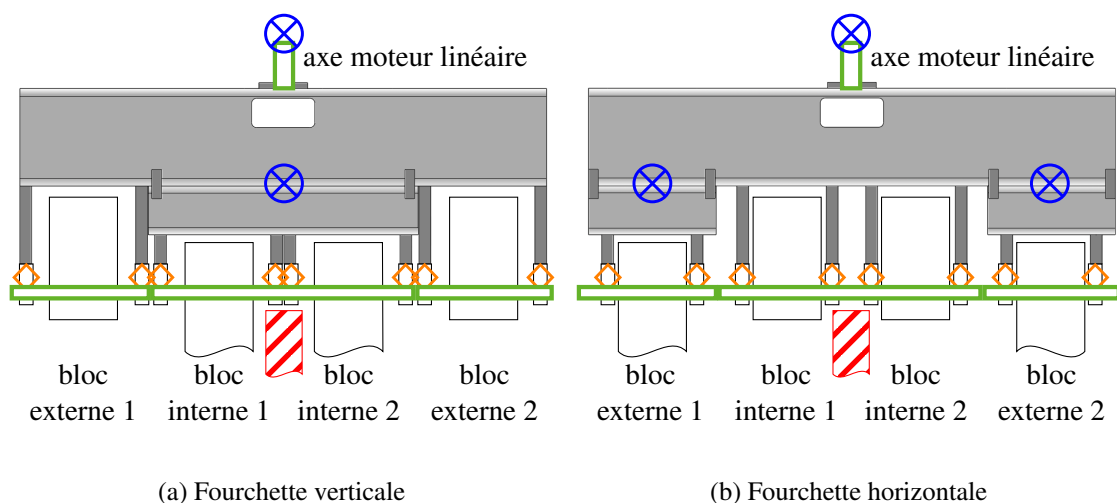


FIGURE 4.11: Proposition d'implémentation de cellules d'effort sur les fourchettes.

Proposition 1 ⊗ ; Proposition 2 ◇

des cellules “barreau”. Ces cellules présentent les avantages suivants :

- petite taille;
- peu onéreuse (10€ par cellule);
- placement des jauges et câblage permettant de mesurer le cisaillement et non la flexion de la cellule, la mesure d’effort est donc relativement indépendante de la position du point d’application de l’effort par rapport à la cellule.

Des cellules de 50 kg (490 N) sont choisies, elles devraient donc travailler sur la moitié de leur gamme ce qui est ici un bon compromis entre qualité de mesure et sécurité des cellules (des surcharges locales risquant d’apparaître). L’incertitude annoncée est de 0.05% (soit 0.25 N). Un boîtier d’acquisition avec 64 connecteurs quatre pins en entrée et un connecteur USB en sortie permet l’acquisition des 16 voies de mesure (mesure des efforts selon 2 directions en 8 points distincts). À l’intérieur du boîtier, 4 interfaces 1046 0B de chez Phidgets avec chacune 4 ponts de Wheatstone intégrés sont renvoyées sur un hub USB pour une sortie unique du boîtier. L’alimentation des ponts se fait via la connectique USB d’entrée. Ce système permet une grande facilité d’utilisation avec un encombrement très réduit ainsi qu’un coût faible. Le câblage du boîtier est donné en [Appendice D](#).

Principe d’étalonnage

L’étalonnage du système de mesure d’effort se fait en deux temps, ayant lieu à des étapes différentes du montage de la machine.

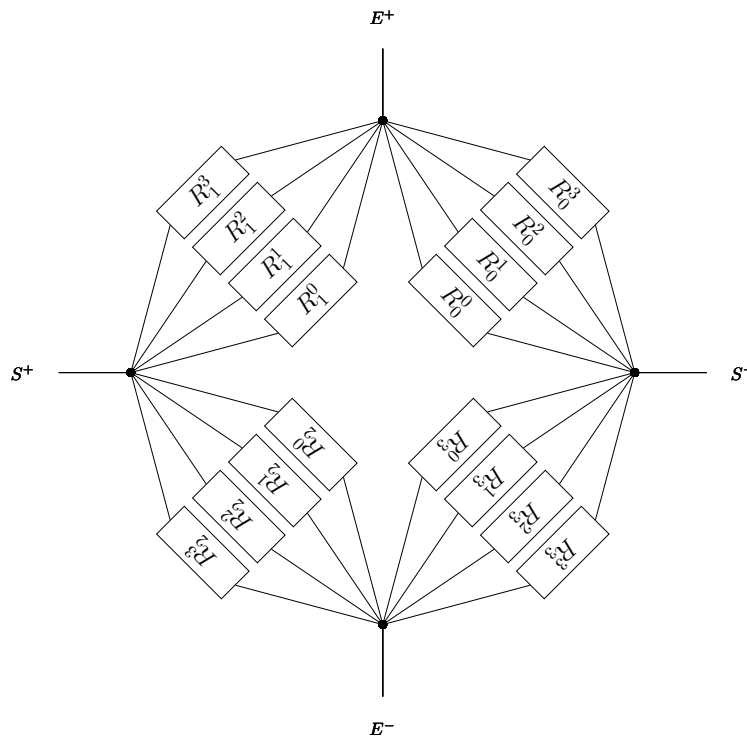
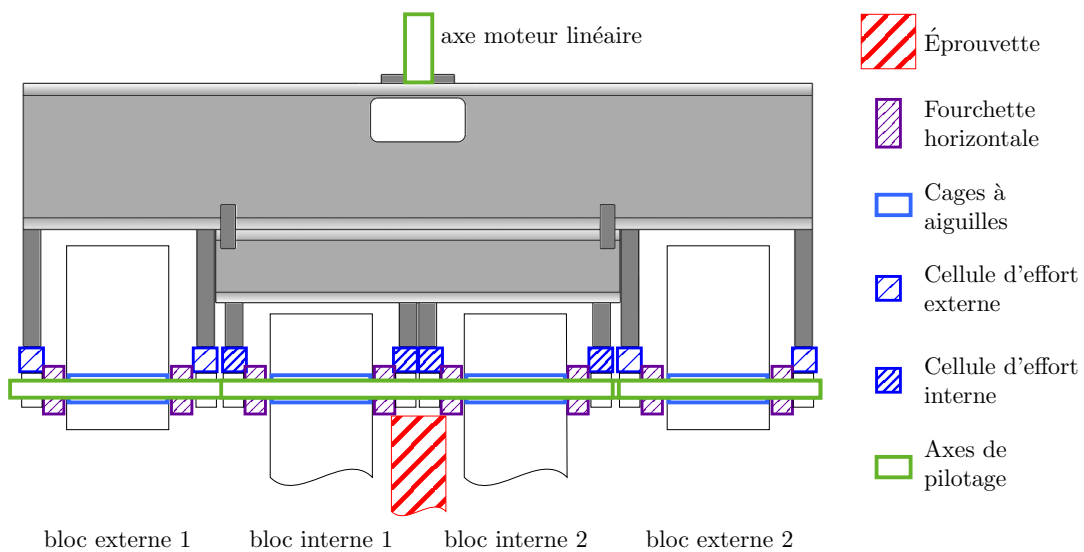


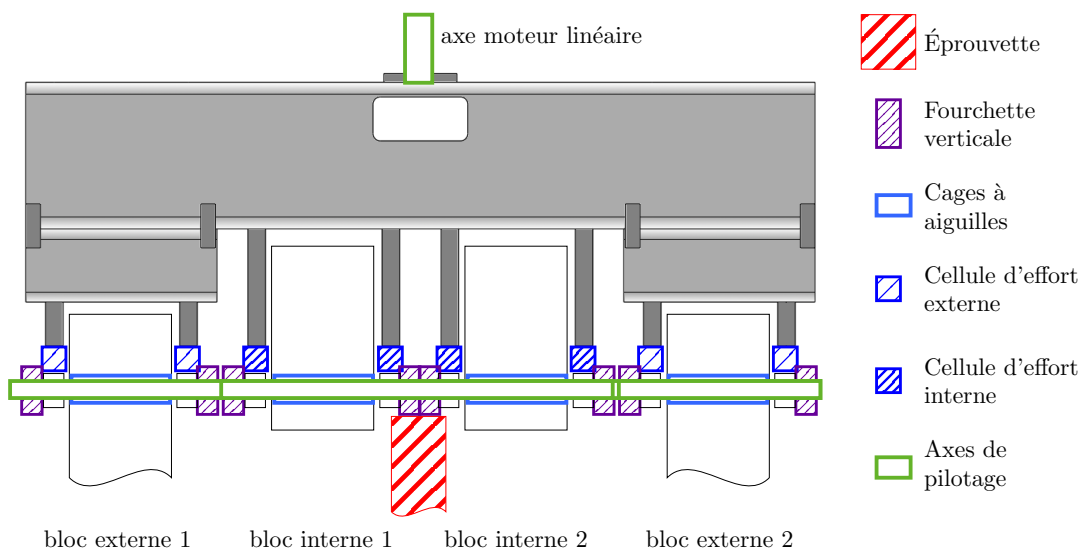
FIGURE 4.12: Branchement des jauges de déformation pour la mesure de l’effort dans la configuration de la proposition 2.

a. Une première étape grossière, en amont, a permis de déterminer des quadruplets de cellules ayant un gain proche afin d'induire le moins d'hétérogénéité possible sur un même pont de Wheatstone (pour rappel on branche quatre cellules en parallèle sur un pont). Cette première mesure a également permis d'écarter deux cellules défectueuses. Lors de cette étape chaque cellule est montée sur un pont de Wheatstone puis chargée par un jeu de masses de référence afin de déterminer son gain.

b. Une fois les cellules d'effort montées sur les fourchettes et câblées et avant que les axes de pilotage et les pantographes soient mis en place, on vient étalonner finement chaque cellule. La mesure est faite par paires de cellules en reliant ensemble 2 cellules opposées avec une cellule de



(a) Fourchette verticale



(b) Fourchette horizontale

FIGURE 4.13: Solution de mesure des efforts retenue

référence interposée (cf. Figure 4.14). La mise en tension de l'ensemble se fait par le pilotage d'un des moteurs.

Cette mesure locale permet de déterminer l'écart de gain effectif entre les cellules d'un même pont (cellules intérieures sur Figure 4.13 par exemple) ainsi que leur gain absolu.

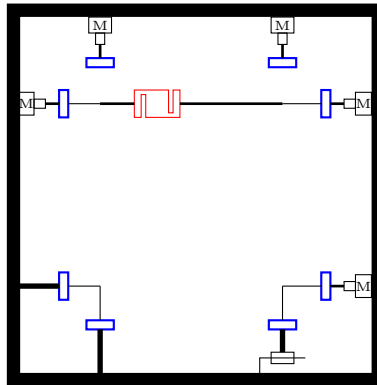
Une différence de gain entre les cellules n'impacte pas la mesure si les cellules se déforment de manière égale, puisque la mesure résulte de la moyenne des variations de chaque cellule. Notons F_{mes} l'effort mesuré par l'ensemble des cellules d'effort, F_{mes} est proportionnel à la variation de la résistance équivalente des 4 cellules en parallèle $\delta R^{(\Omega)}$:

$$F \propto \delta R^{(\Omega)}$$

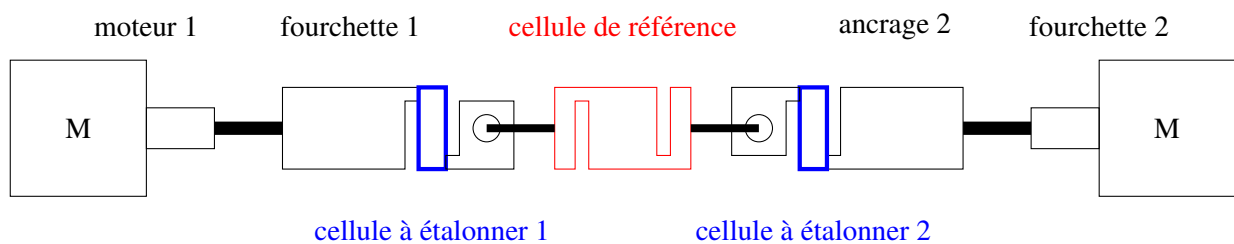
On peut également exprimer $\delta R^{(\Omega)}$ en fonction de la variation de résistance de chaque cellule :

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^{(\Omega)} + \delta R^{(\Omega)}} &= \sum_{i=1}^4 \frac{1}{R_i^{(\Omega)} + \delta R_i^{(\Omega)}} \\ &= \sum_{i=1}^4 \frac{1}{R_i^{(\Omega)} + k_i \varepsilon_i} \end{aligned}$$

avec k_i le gain en $\Omega/(\text{mm} \cdot \text{mm}^{-1})$ de la cellule i et ε_i la déformation vue par la cellule i . On peut alors faire un développement limité de cette expression :



(a) Position schématique du montage sur la machine



(b) Détail du montage

FIGURE 4.14: Montage réalisé pour l'étalonnage des cellules horizontales

$$\frac{1}{R^{(\Omega)}} - \frac{\delta R^{(\Omega)}}{R^{(\Omega)^2}} + o\left(\frac{\delta R^{(\Omega)}}{R^{(\Omega)^2}}\right) = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{R_i^{(\Omega)}} - \frac{k_i}{R_i^{(\Omega)^2}} \varepsilon_i + o\left(\frac{k_i \varepsilon_i}{R_i^{(\Omega)^2}}\right) \quad (4.1)$$

Si toutes les cellules voient la même déformation ε alors $\varepsilon_i = \varepsilon$ et on sait que $\varepsilon \propto F_{trans}$ avec F_{trans} l'effort transitant par chaque cellule. L'hypothèse de même déformation équivaut à $F_{trans} = F_{reel}/4$ avec F_{reel} l'effort global transitant par l'ensemble des cellules. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^{(\Omega)}} - \frac{\delta R^{(\Omega)}}{R^{(\Omega)^2}} &\simeq \sum_{i=1}^4 \left[\frac{1}{R_i^{(\Omega)}} - \left(\frac{k_i}{R_i^{(\Omega)^2}} \right) \right] \varepsilon \\ \frac{\delta R^{(\Omega)}}{R^{(\Omega)^2}} &\simeq \sum_{i=1}^4 \left(\frac{k_i}{R_i^{(\Omega)^2}} \right) \varepsilon \\ F_{mes} \propto \frac{\delta R^{(\Omega)}}{R^{(\Omega)^2}} &\simeq \sum_{i=1}^4 \left(\frac{k_i}{R_i^{(\Omega)^2}} \right) \varepsilon \propto F_{reel} \end{aligned}$$

Finalement, F_{mes} est proportionnel à F_{reel} ; le coefficient de proportionnalité étant obtenu par étalonnage.

En revanche, si l'effort ne transite pas de manière strictement égale entre les cellules, les ε_i de l'Equation (4.1) sont différents les uns des autres et le résultat obtenu dépend des différentes valeurs de $\frac{k_i}{R_i^2}$ ainsi que de la répartition d'effort sur les différentes cellules. Le cas le plus inexact étant celui où tout l'effort transite par une seule cellule. Les résultats d'étalonnage cellule à cellule sont donnés sur la Figure 4.15. L'unité du gain n'a pas d'importance ici, il exprimé en unités arbitraires propres aux ponts utilisés.

Montage : retour d'expérience

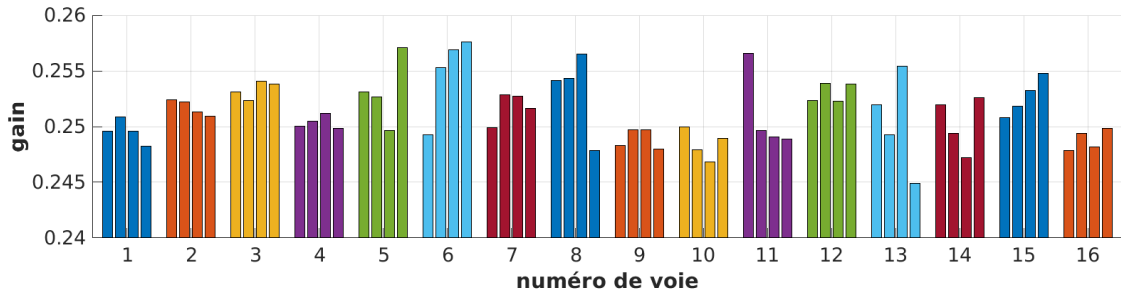


FIGURE 4.15: Résultats d'étalonnage cellule à cellule

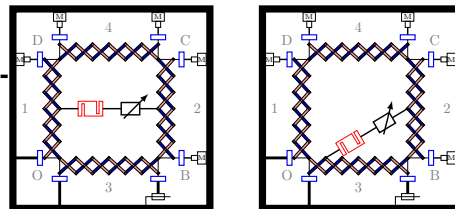
Le maximum des écarts à la moyenne est obtenu pour la voie 13 et vaut 4.1%. Ce qui signifie que si sur la voie 13, tout l'effort transite par la cellule ayant le gain le plus éloigné de la moyenne alors la détermination de l'effort commettra une erreur de 4.1%. Tous les autres cas de figure

étant plus favorables. Un cas plus raisonnable consiste à considérer que cette cellule critique subit une surcharge de 25% par rapport aux autres cellules du même groupe, entraînant une erreur raisonnable de 0.2% sur la détermination de l'effort global. Le gain de chaque voie sera donc considéré égal à un quart de la moyenne des quatre gains de la voie.

4.3 Protocole de validation

Chaque sous-partie ayant été caractérisée, il est théoriquement possible de réaliser des essais. Toutefois afin d'évaluer le comportement total de la machine, on propose ici une campagne de tests de complexité croissante afin d'intégrer progressivement les indéterminations restantes et d'éviter tout couplage d'inconnues. La validation de la machine via ces essais n'a pu être menée à bien faute de temps.

a. Essai uniaxial mono amarrage autonome instrumenté



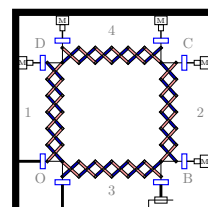
1. Pour le premier essai, on se propose d'accrocher entre deux amarrages opposés un ensemble constitué d'un fil, d'une cellule d'effort calibrée et d'un système de mise en tension (un tendeur de câble par exemple). Ainsi, la machine étant totalement au repos et dans sa configuration de référence, aucune perturbation n'est attendue et les efforts mesurés par les cellules de la machine sont déterminables a priori en connaissant la position du fil. Cela permet de vérifier dans ce cas simple :

- les formules de mesure de l'effort macroscopique et leur implémentation ;
- l'absence d'effort transitant via un chemin non prévu ;
- l'absence de couplage entre les voies de mesure
- la non criticité des variations de gain au sein d'un même pont en positionnant "mal" le fil c'est à dire en dehors du plan médian de la machine. Cette position excentrée va créer une disparité sur les efforts transitant par les cellules d'un même pont et va donc permettre de valider que cette perturbation a un impact faible.

Cet essai ne permet de vérifier que la moitié des voies de mesure : celle correspondant aux efforts normaux au bord sollicité.

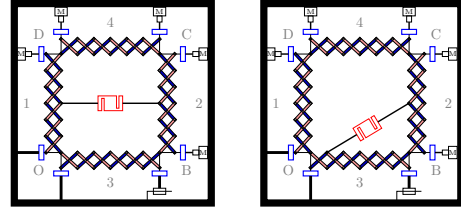
2. Pour valider les voies de mesure restantes (correspondant aux efforts tangentiels) il est nécessaire d'accrocher le fil en biais dans la machine. Ce test doit venir en second car la sollicitation en biais va se répercuter sur deux voies de mesure (tangentielle et normale), il faut donc préalablement avoir validé le comportement des voies normales.

b. Essais uniaxial à vide non instrumenté



À cette étape on va déterminer l'effort réel nécessaire à l'extension des pantographes. Cette détermination est très importante pour la suite puisqu'elle est requise pour la détermination de l'effort passant réellement par l'éprouvette. Un comportement très proche de celui déterminé en sous-section 3.4.2 est attendu avec une rigidité de 130 N/mm.

c. Essai uniaxial mono amarrage instrumenté

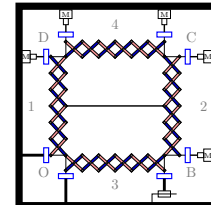


1. Par rapport aux essais de premier type, la mise en tension se fait via le système de pilotage de la machine. Cela a pour effet de mettre en extension les pantographes parallèles au fil. Les mesures d'effort étant découplées entre les pantographes, aucune perturbation sur la mesure des efforts due au fil ne devrait apparaître tant que celui-ci est accroché entre deux amarrages opposés, ce qui est vérifiable grâce à la cellule présente sur le fil.

2. Une fois cette validation réalisée, l'amarrage du fil en biais, comme pour la première étape, permet de vérifier que le couplage des efforts dus au pantographe et à "l'éprouvette" n'empêche pas la détermination des efforts passant dans l'éprouvette même dans le cas où la rigidité de celle-ci est faible.

On vérifie avec ces deux tests la bonne prise en compte de la rigidité propre de la machine (rigidité en traction et en flexion des pantographes).

d. Essai uniaxial mono amarrage non instrumenté ⁸

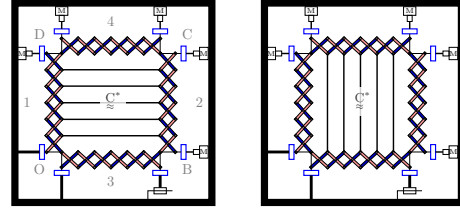


Pour caractériser la souplesse de la chaîne de pilotage, le même essai est réalisé sans instrumentation du fil. Ainsi, connaissant la rigidité du fil (préalablement déterminée sur une machine d'essai standard par exemple) et en mesurant les efforts, on détermine la déformation réellement imposée au fil (cette détermination peut également se faire par corrélation d'images). Cette déformation réelle du fil est mise en regard du déplacement demandé sur l'axe moteur en fonction

- de la position du fil (au centre comme représenté sur l'image ou proche des coins du montage);
- de la direction d'essai horizontale ou verticale (les chaînes de pilotages des deux axes ne sont pas identiques puisque les axes d'amarrages ne sont pas de la même longueur);

8. Ces essais peuvent être réalisés avec la cellule de référence comme les précédents mais ils sont conceptuellement différents c'est pourquoi ils sont présentés séparément.

e. Essai uniaxial multi amarrages



Dans cet essai, on va chercher à déterminer la rigidité uniaxiale équivalente d'un ensemble de fils. L'utilisation de fils de rigidité connue permet d'avoir a priori très juste sur la rigidité à obtenir. Cet essai a pour but de valider, dans un cadre réduit, les résultats de la sous-section 1.4.2 sur l'effet de l'imperfection des conditions aux limites sur la détermination du comportement équivalent. Le tenseur \hat{C}^* ainsi mesuré est dégénéré et possède 2 valeurs propres nulles. Ainsi si l'on reprend l'equation 4.3 on sait que

$$[\hat{C}^*] = \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_1^1 \cdot \hat{e}_1 & \hat{\Sigma}_2^1 \cdot \hat{e}_1 & \hat{\Sigma}_3^1 \cdot \hat{e}_1 \\ \hat{\Sigma}_1^1 \cdot \hat{e}_2 & \hat{\Sigma}_2^1 \cdot \hat{e}_2 & \hat{\Sigma}_3^1 \cdot \hat{e}_2 \\ \hat{\Sigma}_1^1 \cdot \hat{e}_3 & \hat{\Sigma}_2^1 \cdot \hat{e}_3 & \hat{\Sigma}_3^1 \cdot \hat{e}_3 \end{pmatrix}_M$$

et d'après l'Equation (2.31),

$$\tilde{\Sigma} = \frac{1}{2LH} [\tilde{M} + \tilde{M}^T]$$

avec

$$[\tilde{M}] = - \begin{pmatrix} F_x^{(2B)} + F_x^{(2C)} & F_x^{(1D)} + F_x^{(2C)} \\ +F_x^{(3B)} + F_x^{(4C)} & +F_x^{(4C)} + F_x^{(4D)} \\ F_y^{(2B)} + F_y^{(2C)} & F_y^{(1D)} + F_y^{(2C)} \\ +F_y^{(3B)} + F_y^{(4C)} & +F_y^{(4C)} + F_y^{(4D)} \end{pmatrix}$$

Pour le cas des fils horizontaux (figure de gauche), une extension horizontale de valeur ε_1 donne, après avoir soustrait les efforts de déformation des pantographes :

$$\tilde{M} = - \begin{pmatrix} F_x^{(2B)\varepsilon_1} + F_x^{(2C)\varepsilon_1} & F_x^{(1D)\varepsilon_1} + F_x^{(2C)\varepsilon_1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_x^{(2B)\varepsilon_1} + F_x^{(2C)\varepsilon_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $F_x^{(2B)\varepsilon_1}$ est la force selon x mesurée sur le côté 2 au point B résultant de la déformation

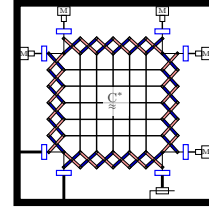
$$\hat{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les coins (O,B,C,D) et les bords (1,2,3,4) sont rappelés sur la figure. L'extension verticale ainsi que le cisaillement donnent quant à eux $\tilde{M} = 0$. Le tenseur homogénéisé est donc :

$$[\hat{C}^*] = - \frac{F_x^{(2B)\varepsilon_1} + F_x^{(2C)\varepsilon_1}}{2LH} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le $\frac{1}{\varepsilon_1}$ dans la matrice est dû au fait qu'ici, contrairement au cas numérique, on a pas $\varepsilon_1 = 1$. Le tenseur obtenu a bien la forme attendue.

f. Essai multi amarrages biaxial décorrélé sur milieu filaire



Le niveau de complexité suivant consiste à chercher le comportement biaxial d'un milieu sans couplage des deux axes. À ce stade, on recherche un éventuel couplage accidentel des directions de chargement. Celui-ci ne pouvant venir du milieu testé (les deux réseaux de fils pouvant être légèrement décalés pour éviter tout frottement) tout couplage serait nécessairement interne à la machine. Cet essai permet également de réaliser un cisaillement sous charge, de rigidité attendue nulle et donc de déterminer les pertes (frottements) dans le mécanisme lors d'une sollicitation de cisaillement. L'utilisation d'un milieu filaire permet à nouveau de déterminer presque exactement le comportement équivalent attendu. Le tenseur $\tilde{\mathbf{C}}^*$ ainsi mesuré est dégénéré et possède 1 valeur propre nulle. On peut réaliser le même raisonnement qu'à la partie précédente :

Une extension horizontale de valeur ε_1 donne, après avoir soustrait les efforts de déformation des pantographes :

$$\tilde{\mathbf{M}} = - \begin{pmatrix} F_x^{(2B)\varepsilon_1} + F_x^{(2C)\varepsilon_1} & F_x^{(1D)\varepsilon_1} + F_x^{(2C)\varepsilon_1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_x^{(2B)\varepsilon_1} + F_x^{(2C)\varepsilon_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

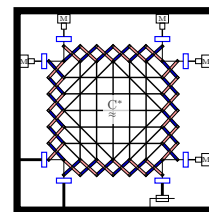
Une extension verticale de valeur ε_2 donne quant à elle, après avoir soustrait les efforts de déformation des pantographes :

$$\tilde{\mathbf{M}} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F_y^{(3B)\varepsilon_2} + F_y^{(4C)\varepsilon_2} & F_y^{(4C)\varepsilon_2} + F_y^{(4D)\varepsilon_2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F_y^{(4C)\varepsilon_2} + F_y^{(4D)\varepsilon_2} \end{pmatrix}$$

Le cisaillement donne toujours $\tilde{\mathbf{M}} = 0$. Le tenseur homogénéisé est donc :

$$[\tilde{\hat{\mathbf{C}}^*}] = - \frac{1}{2LH} \begin{pmatrix} \frac{F_x^{(2B)\varepsilon_1} + F_x^{(2C)\varepsilon_1}}{\varepsilon_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{F_y^{(4C)\varepsilon_2} + F_y^{(4D)\varepsilon_2}}{\varepsilon_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

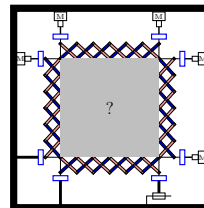
g. Essai multi amarrages biaxial corrélé sur milieu filaire complexe



La dernière étape avant l'homogénéisation d'éprouvettes de comportement inconnu consiste à réaliser un milieu filaire avec un couplage des directions et une rigidité non nulle en cisaillement. Le tenseur $\tilde{\mathbf{C}}^*$ correspondant n'a pas de valeurs propres nulles. Le comportement équivalent peut

être obtenu de manière précise par homogénéisation numérique ou analytique classique, la rigidité d'un fil étant attendue très peu variable.

h. Essai multi amarrages biaxial corrélé sur milieu complexe



Tous les chargements, déformations et couplages ont maintenant été testés et validés. Des essais d'homogénéisation de matériaux non filaires peuvent être réalisés. On se propose tout d'abord de donner ici un essai prouvant la validité et l'intérêt de cette machine.

Considérons une plaque de matériau anisotrope de laquelle on vient prélever deux jeux d'échantillons d'orientations inconnues. La méthode décrite en [sous-section 1.3.5](#) permet de déterminer $(I_1, J_1, I_2, J_2, I_3)$ ⁹ une base d'intégrité des tenseurs élastiques en 2D.

Le matériau initial étant le même, les invariants obtenus avec les deux jeux d'orientations doivent être les mêmes, si c'est effectivement le cas (ces invariants étant scalaires on peut mesurer la précision à $x\%$ de la méthode) alors :

- la méthode d'homogénéisation expérimentale proposée est fonctionnelle ;
- la machine permet la détermination du comportement homogénéisé d'un matériau inconnu sans aucune information a priori.

De manière plus générale, bien d'autres tests peuvent être réalisés, dont des tests sur :

- matériau homogène dont les caractéristiques sont connues (validation de la méthode d'homogénéisation expérimentale) ;
- matériau architecturé dont les caractéristiques effectives ont été déterminées via une homogénéisation numérique, ce qui permet de mettre en avant les effets des défauts du matériau.

Bilan

Le travail présenté dans les chapitres précédents a permis de mener à bien la conception et la fabrication des éléments essentiels que sont les pantographes. Le chapitre présent s'est focalisé sur trois autres éléments critiques bien que moins complexes. Les différentes erreurs qu'ils peuvent induire ont été discutées. Bien que la validation n'a pas pu être réalisée, les tests effectués lors du montage montrent que la machine est fonctionnelle et laissent espérer une précision cinématique équivalente à celle demandée par le cahier des charges (erreur inférieure à 2% de la gamme). De même, l'appareillage de mesure statique mis en place est fonctionnel et l'erreur de mesure est attendue très faible (inférieure à 0,1% de la gamme).

Bien que restant soumis à validation, l'objectif de mettre au point un démonstrateur de machine imposant des conditions aux limites complexes pour la mise en place d'essais d'homogénéisation semble donc atteint.

9. Pour la définition de ces invariants voir la [sous-section 1.1.6](#)

Conclusion et perspectives

Conclusion

La détermination des propriétés émergentes élastiques des matériaux architecturés, principalement ceux obtenus par fabrication additive se confronte à plusieurs difficultés. En effet, ces méthodes de fabrication génèrent d'importants défauts géométriques et matière non caractérisés donc difficiles voire impossibles à prendre en compte numériquement. Pour tenter d'apporter une réponse à ces problèmes, un dispositif expérimental permettant la détermination du tenseur d'élasticité homogénéisé complet sans aucune connaissance a priori sur le matériau est mis à l'étude. Le cadre des matériaux architecturés obtenus par impression 3D n'est évidemment qu'un cadre d'étude et le principe du dispositif est valable indépendamment du mode de fabrication du matériau, l'horizon des applications ne se résumant pas à ce cas particulier. De plus, un tel dispositif permet la détermination *directe* (sans reconstruction intermédiaire d'un tenseur d'élasticité) d'une base séparante d'invariants pour l'élasticité 2D classique (de Cauchy).

Différentes méthodes d'homogénéisation peuvent être envisagées mais la contrainte de l'adaptation à un contexte expérimental élimine d'emblée toutes les méthodes requérant l'application ou la mesure de champs de contrainte et de déformation (volumiques comme surfaciques). À ce titre, les approches d'homogénéisation par champs moyens semblent les plus pertinentes. Parmi celles-ci on distingue les approches uniforme en déplacement (KUBC), uniforme en contrainte (SUBC) et l'approche périodique (PBC), cette dernière bien que donnant toujours accès au tenseur effectif ne sera pas retenue du fait

- de la complexité (a priori) de son implémentation en expérimental ;
- de l'impossibilité de faire varier le rapport de séparation d'échelle si besoin est.

Les approches KUBC et SUBC donnent quant à elles le tenseur homogénéisé apparent (donc dépendant du rapport d'échelle). Le schéma KUBC tend à donner une surestimation de la rigidité du VER tandis que le schéma SUBC tend à la sous-estimer. Notre choix s'est porté sur l'approche KUBC.

Bien que certaines machines présentes dans la littérature aient été en mesure d'appliquer des conditions limites cinématiquement uniformes, aucune n'a été développée ni utilisée dans ce but à notre connaissance. Les exemples trouvés permettent toutefois d'axer le développement de l'architecture machine qui est pensée pour minimiser toutes les sources d'indéterminations et de non linéarités (frottements et jeux). Les tests effectués lors du montage semblent indiquer que les attentes en termes de gamme statique et cinématique ainsi qu'en termes de précisions sont validées.

En parallèle de cela, un outil numérique dédié à la simulation du comportement du dispositif par éléments finis a été mis en place et a aidé au dimensionnement de la machine. Cet outil est également pensé pour servir au dimensionnement des futurs essais.

Ce dispositif a été pensé en accord avec la méthode d'homogénéisation par champs moyen dans le sens où l'application des conditions aux limites cinématiques ainsi que la mesure statique se font de manière globale sur l'éprouvette. Toutefois, d'une part ces sollicitations et mesures globales ne donnent accès aux résultats attendus que sous certaines hypothèses (de précision de la machine et de régularité des champs) et d'autre part cela n'est pas nécessairement adapté à toutes les utilisations envisageables de la machine. Ainsi des mesures locales peuvent être implémentées pour enrichir les résultats d'essai :

- mesure de champ de déplacement sur les deux faces de l'éprouvette pour un contrôle plus rigoureux de la déformation moyenne mais aussi pour faire apparaître les hétérogénéités de ce champ ;
- mesure de l'effort transisant en chaque attache machine/éprouvette grâce à une approche inverse sur le calcul éléments finis précédemment cité. On ne déroge pas ici à la philosophie de ne pas apporter de connaissance a priori sur le matériau puisque l'approche inverse se fait le dispositif, lui même étant bien caractérisable.

L'objectif de créer un démonstrateur de dispositif permettant l'homogénéisation élastique linéaire de premier gradient de matériaux architecturés a donc été atteint, bien que cela reste à valider de manière plus approfondie. Nous espérons que ce travail ouvre la voie vers d'autres développements de moyens de sollicitation en mécanique des matériaux complémentaires aux traditionnels.

Perspectives

Homogénéisation

Tout d'abord et évidemment, ce dispositif devra servir à la réalisation d'essais d'homogénéisation élastique linéaire de premier gradient. Par exemple, un essai intéressant déjà présenté au chapitre 4 est celui consistant à déterminer les propriétés d'un même matériau architecturé selon différentes orientations de prélèvement de l'éprouvette. Cette perspective est à très court terme puisqu'elle est une validation du dispositif d'essai. On peut également envisager de réaliser un asservissement en position de la machine afin de compenser au mieux les erreurs décelées.

En restant dans le domaine de l'homogénéisation, cette machine permettra de mettre en pratique la méthode exposée dans [AR16] pour la détermination directe d'invariants dans un cadre expérimental. Dans le cadre de matériaux treillis on devrait retrouver les résultats de [FCC17]. La question intéressante à laquelle il faut tout d'abord répondre d'un point de vue théorique sera celle de l'influence des incertitudes de mesure. Vaut-il mieux une série de trois sollicitations $\{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$ donnant le tenseur élastique puis le calcul des invariants, ou une série de quatre sollicitations $\{(1, 1, 0); (0, 0, 1); (1, -1, 0); (a_1, -a_1, a_2)\}$, la dernière étant déduite des mesures précédentes ?

Une extension du travail présenté ici à des comportements plus complexes (élasticité non linéaire, visco-élasticité) est également souhaitable et serait particulièrement utile pour la compréhension des comportements visco-élastiques anisotropes des matériaux architecturés réels, tels que ceux obtenus par impression 3D de polymères ainsi que les tissus biologiques.

Enfin, cette étude d'un dispositif KUBC doit être vue comme l'exploration d'un nouveau domaine en termes de sollicitations ne se limitant plus ici à des mouvements de corps rigide et des bords

libres. À ce titre, la réalisation d'un dispositif dual (SUBC) permettant de réaliser un schéma d'homogénéisation par conditions de bord statiques représenterait un apport important. L'application de conditions périodiques qui semble au premier abord très complexe à mettre en place se doit également d'être étudiée.

Autres applications

Bien que le dispositif ait été dimensionné dans le cadre de l'homogénéisation linéaire de premier gradient, d'autres applications sont envisageables. Par exemple, il est possible d'appliquer au carré initial une déformation "en trapèze" et donc d'imposer un gradient de déformation (non pur) à l'éprouvette ce qui a plusieurs applications :

- excitation directe du comportement de second gradient du matériau (et non pas via les termes de couplage comme sur un essai classique) ;
- étude de phénomènes instables (propagation de fissures), le gradient de déformation ayant un effet stabilisant.

D'une certaine manière, on peut voir le dispositif comme permettant de noyer l'éprouvette dans un milieu homogène afin qu'elle aie un comportement proche d'un milieu infini sans pour autant avoir recours à une éprouvette de grande dimension. On peut donc l'utiliser par exemple pour étudier la propagation d'ondes dans un milieu sous contraintes (acoustoélasticité). De même, on peut étudier des cas complexes (non linéarité d'inclusion, pore, etc.)

Enfin, voir l'éprouvette comme incluse dans un milieu linéaire peut amener à envisager des essais hybrides sous-structurés, où le dispositif permet de réaliser l'interfaçage entre une structure plan numérique et son complément réel testé.

Bibliographie

- [Aba+19] Bilen Emek ABALI et al. *New Achievements in Continuum Mechanics and Thermodynamics : A Tribute to Wolfgang H. Müller*. Springer, 13 mar. 2019. 586 p. ISBN : 978-3-030-13307-8.
- [AA18] Houssam ABDOUL ANZIZ. “Homogénéisation de composites élastiques périodiques à fort contraste : Conception de métamatériaux de second gradient”. thesis. Toulon, 10 déc. 2018. URL : <http://www.theses.fr/2018TOUL0003> (visité le 03/06/2019).
- [AASB19] Houssam ABDOUL-ANZIZ, Pierre SEPPECHER et Cédric BELLIS. “Homogenization of frame lattices leading to second gradient models coupling classical strain and strain-gradient terms”. In : *Mathematics and Mechanics of Solids* 24.12 (déc. 2019), p. 3976-3999. ISSN : 1081-2865, 1741-3028. DOI : 10.1177/1081286519855431. URL : <http://journals.sagepub.com/doi/10.1177/1081286519855431> (visité le 13/08/2020).
- [Ald+94] K. L. ALDERSON et al. “Auxetic polyethylene : The effect of a negative poisson’s ratio on hardness”. In : *Acta Metallurgica et Materialia* 42.7 (1^{er} juil. 1994), p. 2261-2266. ISSN : 0956-7151. DOI : 10.1016/0956-7151(94)90304-2. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0956715194903042> (visité le 17/07/2020).
- [ADC15] Jean-Jacques ALIBERT et Alessandro DELLA CORTE. “Second-gradient continua as homogenized limit of pantographic microstructured plates : a rigorous proof”. In : *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* 66.5 (1^{er} oct. 2015), p. 2855-2870. ISSN : 1420-9039. DOI : 10.1007/s00033-015-0526-x. URL : <https://doi.org/10.1007/s00033-015-0526-x> (visité le 13/08/2020).
- [ASD03] Jean-Jacques ALIBERT, Pierre SEPPECHER et FRANCESCO DELL’ISOLA. “Truss Modular Beams with Deformation Energy Depending on Higher Displacement Gradients”. In : *Mathematics and Mechanics of Solids* 8.1 (1^{er} fév. 2003), p. 51-73. ISSN : 1081-2865. DOI : 10.1177/1081286503008001658. URL : <https://doi.org/10.1177/1081286503008001658> (visité le 17/12/2018).
- [All07] Grégoire ALLAIRE. *Conception optimale des structures*. Mathématiques & applications 58. OCLC : 180941820. Berlin : Springer, 2007. 278 p. ISBN : 978-3-540-36710-9.
- [AS07] Grégoire ALLAIRE et Marc SCHOENAUER. “Optimisation topologique par méthode d’homogénéisation”. In : *Conception optimale de structures*. T. 58. Springer, 2007, p. 163-175.
- [Ams+10] S. AMSTUTZ et al. “Topological derivative for multi-scale linear elasticity models applied to the synthesis of microstructures”. In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 84.6 (2010), p. 733-756. ISSN : 1097-0207. DOI : 10.1002/

- nme.2922. URL : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.2922> (visité le 18/07/2020).
- [Ash05] M. F. ASHBY. “Material property charts”. In : *Materials selection in mechanical design*. 3rd ed. Amsterdam; Boston : Butterworth-Heinemann, 2005, p. 45-78. ISBN : 978-0-7506-6168-3.
- [AR16] N. AUFFRAY et P. ROPARS. “Invariant-based reconstruction of bidimensional elasticity tensors”. In : *International Journal of Solids and Structures* 87 (1^{er} juin 2016), p. 183-193. ISSN : 0020-7683. DOI : 10.1016/j.ijsolstr.2016.02.013. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768316000676> (visité le 19/07/2020).
- [AAAD20] Nicolas AUFFRAY, Houssam ANDOUL-ANZIZ et Boris DESMORAT. “Explicit Harmonic Structure Of Bidimensional Strain-Gradient Elasticity”. In : *arXiv :2007.12455 [math-ph]* (24 juil. 2020). arXiv : 2007.12455. URL : <http://arxiv.org/abs/2007.12455> (visité le 01/08/2020).
- [Bal03] Roberto BALLARINI. “The Da Vinci-Euler-Bernoulli Beam Theory ?” In : *ASME* (2003).
- [BW12] Michael BARCLIFT et Christopher WILLIAMS. “Examining variability in the mechanical properties of parts manufactured via polyjet direct 3D printing”. In : *23rd Annual International Solid Freeform Fabrication Symposium - An Additive Manufacturing Conference, SFF 2012* (1^{er} jan. 2012).
- [Bar15] F. BARTHELAT. “Architected materials in engineering and biology : fabrication, structure, mechanics and performance”. In : *International Materials Reviews* 60.8 (17 nov. 2015), p. 413-430. ISSN : 0950-6608. DOI : 10.1179/1743280415Y.0000000008. URL : <https://doi.org/10.1179/1743280415Y.0000000008> (visité le 25/02/2019).
- [BZ11] Francois BARTHELAT et Deju ZHU. “A novel biomimetic material duplicating the structure and mechanics of natural nacre”. In : *Journal of Materials Research* 26.10 (2011), p. 1203.
- [Ben89] Martin P BENDSØE. “Optimal shape design as a material distribution problem”. In : *Structural optimization* 1.4 (1989), p. 193-202.
- [BHR06] G. BESNARD, F. HILD et S. ROUX. ““Finite-Element” Displacement Fields Analysis from Digital Images : Application to Portevin–Le Châtelier Bands”. In : *Experimental Mechanics* 46.6 (1^{er} déc. 2006), p. 789-803. ISSN : 1741-2765. DOI : 10.1007/s11340-006-9824-8. URL : <https://doi.org/10.1007/s11340-006-9824-8> (visité le 27/03/2020).
- [BDK94] J. P. BOEHLER, S. DEMMERLE et S. KOSS. “A new direct biaxial testing machine for anisotropic materials”. In : *Experimental Mechanics* 34.1 (1^{er} mar. 1994), p. 1-9. ISSN : 1741-2765. DOI : 10.1007/BF02328435. URL : <https://doi.org/10.1007/BF02328435> (visité le 17/12/2018).
- [Boi+17] P. BOISSE et al. “The bias-extension test for the analysis of in-plane shear properties of textile composite reinforcements and prepreps : a review”. In : *International Journal of Material Forming* 10.4 (1^{er} août 2017), p. 473-492. ISSN : 1960-6214. DOI : 10.1007/s12289-016-1294-7. URL : <https://doi.org/10.1007/s12289-016-1294-7> (visité le 16/10/2019).
- [BBG01] Michel BORNERT, T. BRETHERAU et P. GILORMINI. *Homogénéisation en mécanique des matériaux, Tome 1 : Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques*. Hermes science, 2001. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00112720> (visité le 17/12/2018).

- [BE13] Y. BRECHET et J. D. EMBURY. “Architected materials : Expanding materials space”. In : *Scripta Materialia*. Architected Materials 68.1 (1^{er} jan. 2013), p. 1-3. ISSN : 1359-6462. DOI : 10.1016/j.scriptamat.2012.07.038. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S135964621200499X> (visité le 09/04/2019).
- [Cai+07] Wenshan CAI et al. “Optical cloaking with metamaterials”. In : *Nature Photonics* 1.4 (avr. 2007), p. 224-227. ISSN : 1749-4893. DOI : 10.1038/nphoton.2007.28. URL : <https://www.nature.com/articles/nphoton.2007.28> (visité le 16/07/2020).
- [Che+09] Huan CHEN et al. “Identification of material parameters of micropolar theory for composites by homogenization method”. In : *Computational Materials Science*. Proceedings of the 18th International Workshop on Computational Mechanics of Materials 46.3 (1^{er} sept. 2009), p. 733-737. ISSN : 0927-0256. DOI : 10.1016/j.commatsci.2009.04.031. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0927025609002055> (visité le 08/08/2020).
- [CH19] TW CLYNE et Derek HULL. “Laminage theory”. In : *An introduction to composite materials*. Cambridge university press, 2019.
- [Cou21] Charles Augustin COULOMB. *Théorie des machines simples en ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur des cordages*. Google-Books-ID : AbIGcX-DrH8QC. Bachelier, 1821. 400 p.
- [CS07] Steven A. CUMMER et David SCHURIG. “One path to acoustic cloaking”. In : *New Journal of Physics* 9.3 (mar. 2007), p. 45-45. ISSN : 1367-2630. DOI : 10.1088/1367-2630/9/3/045. URL : <https://doi.org/10.1088%2F1367-2630%2F9%2F3%2F045> (visité le 17/07/2020).
- [DPA20] Thibault DASSONVILLE, Martin PONCELET et Nicolas AUFRAY. “Toward a homogenizing machine”. In : *International Journal of Solids and Structures* 191 (2020), p. 534-549.
- [DFA01] V S DESHPANDE, N A FLECK et M F ASHBY. “Effective properties of the octet-truss lattice material”. In : *J. Mech. Phys. Solids* (2001), p. 23.
- [DA19] B. DESMORAT et N. AUFRAY. “Space of 2D elastic materials : a geometric journey”. In : *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 31.4 (1^{er} juil. 2019), p. 1205-1229. ISSN : 1432-0959. DOI : 10.1007/s00161-019-00794-y. URL : <https://doi.org/10.1007/s00161-019-00794-y> (visité le 17/07/2020).
- [Des+20] Boris DESMORAT et al. “Computation of minimal covariants bases for 2D coupled constitutive laws”. In : *arXiv :2007.01576 [physics]* (3 juil. 2020). arXiv : 2007.01576. URL : <http://arxiv.org/abs/2007.01576> (visité le 01/08/2020).
- [Dir18] Justin DIRRENBARGER. “Towards an integrated approach for the development of architected materials”. Habilitation à diriger des recherches en mathématiques et en informatique. Sorbonne Université, déc. 2018. URL : https://scholar.googleusercontent.com/scholar?q=cache:l5DzhUhf7NoJ:scholar.google.com/+Justin+Dirrenberger.+Towards+an+integrated+approach+for+the+development+of+architected+materials&hl=fr&as_sdt=0,5 (visité le 31/03/2019).

- [Dir+11] Justin DIRRENBERGER et al. "Homogenization of periodic auxetic materials". In : 11th International Conference on the Mechanical Behavior of Materials (ICM11). T. 10. Elsevier, 5 juin 2011, p. 1847-1852. DOI : 10.1016/j.proeng.2011.04.307. URL : <https://hal-mines-paristech.archives-ouvertes.fr/hal-00607077> (visité le 16/07/2020).
- [DA99] Michel DUNEAU et Marc AUDIER. "Quasiperiodic packings of fibres with icosahedral symmetry". In : *Acta Crystallographica Section A Foundations of Crystallography* 55.4 (1^{er} juil. 1999), p. 746-754. ISSN : 0108-7673. DOI : 10.1107/S0108767399001142. URL : <http://scripts.iucr.org/cgi-bin/paper?S0108767399001142> (visité le 04/08/2020).
- [Ebe95] J. EBERHARDSTEINER. "Biaxial testing of orthotropic materials using electronic speckle pattern interferometry". In : *Measurement* 16.3 (1^{er} nov. 1995), p. 139-148. ISSN : 0263-2241. DOI : 10.1016/0263-2241(95)00019-4. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0263224195000194> (visité le 17/12/2018).
- [EFM17] Abdullah T. ELGAMMAL, Mohamed FANNI et Abdelfatah M. MOHAMED. "Design and Analysis of a Novel 3D Decoupled Manipulator Based on Compliant Pantograph for Micromanipulation". In : *Journal of Intelligent & Robotic Systems* 87.1 (juil. 2017), p. 43-57. ISSN : 0921-0296, 1573-0409. DOI : 10.1007/s10846-016-0452-y. URL : <http://link.springer.com/10.1007/s10846-016-0452-y> (visité le 17/07/2020).
- [Eri68] A. C. ERINGEN. "Mechanics of Micromorphic Continua". In : *Mechanics of Generalized Continua*. Sous la dir. d'Ekkehart KRÖNER. IUTAM Symposia. Berlin, Heidelberg : Springer, 1968, p. 18-35. ISBN : 978-3-662-30257-6. DOI : 10.1007/978-3-662-30257-6_2.
- [EDP11] Y. ESTRIN, A. V. DYSKIN et E. PASTERNAK. "Topological interlocking as a material design concept". In : *Materials Science and Engineering : C. Principles and Development of Bio-Inspired Materials* 31.6 (12 août 2011), p. 1189-1194. ISSN : 0928-4931. DOI : 10.1016/j.msec.2010.11.011. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0928493110002882> (visité le 31/07/2020).
- [EA00] K. E. EVANS et A. ALDERSON. "Auxetic Materials : Functional Materials and Structures from Lateral Thinking!". In : *Advanced Materials* 12.9 (2000), p. 617-628. ISSN : 1521-4095. DOI : 10.1002/(SICI)1521-4095(200005)12:9<617::AID-ADMA617>3.0.CO;2-3. URL : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/%28SICI%291521-4095%28200005%2912%3A9%3C617%3A%3AAID-ADMA617%3E3.0.CO%3B2-3> (visité le 16/07/2020).
- [Fel04] Carlos A FELIPPA. "Introduction to finite element methods". In : *Course Notes, Department of Aerospace Engineering Sciences, University of Colorado at Boulder, available at <http://www.colorado.edu/engineering/Aerospace/CAS/courses.d/IFEM.d>* (2004).
- [Fey99] Frédéric FEYEL. "Multiscale FE2 elastoviscoplastic analysis of composite structures". In : *Computational Materials Science* 16.1 (déc. 1999), p. 344-354. ISSN : 09270256. DOI : 10.1016/S0927-0256(99)00077-4. URL : <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0927025699000774> (visité le 31/03/2019).

- [FDA10] N.A. FLECK, DESHPANDE V. S. et ASHBY M. F. “Micro-architected materials : past, present and future”. In : *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 466.2121 (8 sept. 2010), p. 2495-2516. DOI : 10.1098/rspa.2010.0215. URL : <https://royalsocietypublishing.org/doi/full/10.1098/rspa.2010.0215> (visité le 28/02/2019).
- [FV14] Sandra FORTE et Maurizio VIANELLO. “A unified approach to invariants of plane elasticity tensors”. In : *Meccanica* 49.9 (1^{er} sept. 2014), p. 2001-2012. ISSN : 1572-9648. DOI : 10.1007/s11012-014-9916-y. URL : <https://doi.org/10.1007/s11012-014-9916-y> (visité le 19/07/2020).
- [FCC17] M. L. M. FRANÇOIS, L. CHEN et M. CORET. “Elasticity and symmetry of triangular lattice materials”. In : *International Journal of Solids and Structures* 129 (15 déc. 2017), p. 18-27. ISSN : 0020-7683. DOI : 10.1016/j.ijsolstr.2017.09.019. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768317304298> (visité le 05/09/2020).
- [FW07] Peter FRATZL et Richard WEINKAMER. “Nature’s hierarchical materials”. In : *Progress in Materials Science* 52.8 (1^{er} nov. 2007), p. 1263-1334. ISSN : 0079-6425. DOI : 10.1016/j.pmatsci.2007.06.001. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S007964250700045X> (visité le 16/07/2020).
- [GKB10] M. G. D. GEERS, V. G. KOUZNETSOVA et W. A. M. BREKELMANS. “Multi-scale computational homogenization : Trends and challenges”. In : *Journal of Computational and Applied Mathematics*. Fourth International Conference on Advanced Computational Methods in ENgineering (ACOMEN 2008) 234.7 (1^{er} août 2010), p. 2175-2182. ISSN : 0377-0427. DOI : 10.1016/j.cam.2009.08.077. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042709005536> (visité le 18/05/2019).
- [GS90] Branko GRUNBAUM et G.C. SHEPHAR. *Tilings and Patterns*. 1990.
- [HH94] S. HAZANOV et C. HUET. “Order relationships for boundary conditions effect in heterogeneous bodies smaller than the representative volume”. In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 42.12 (1^{er} déc. 1994), p. 1995-2011. ISSN : 0022-5096. DOI : 10.1016/0022-5096(94)90022-1. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022509694900221> (visité le 22/08/2019).
- [He04] Q. C. HE. “Characterization of the anisotropic materials capable of exhibiting an isotropic Young or shear or area modulus”. In : *International Journal of Engineering Science* 42.19 (1^{er} nov. 2004), p. 2107-2118. ISSN : 0020-7225. DOI : 10.1016/j.ijengsci.2004.04.009. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020722504001892> (visité le 18/07/2020).
- [HZ96] Q. C. HE et Q. S. ZHENG. “On the symmetries of 2D elastic and hyperelastic tensors”. In : *Journal of Elasticity* 43.3 (juin 1996), p. 203-225. ISSN : 0374-3535, 1573-2681. DOI : 10.1007/BF00042501. URL : <http://link.springer.com/10.1007/BF00042501> (visité le 19/07/2020).
- [Hen21] Heinrich HENCKY. “Über die angenäherte Lösung von Stabilitätsproblemen im Raum mittels der elastischen Gelenkkette”. Thèse de doct. Verlag nicht ermittelbar, 1921.
- [Hil+09] François HILD et al. “Displacement measurement technique for beam kinematics”. In : *Optics and Lasers in Engineering*. Optical Measurements 47.3 (1^{er} mar. 2009), p. 495-503. ISSN : 0143-8166. DOI : 10.1016/j.optlaseng.2008.03.006. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0143816608000432> (visité le 14/07/2020).

- [Hil63] R. HILL. “Elastic properties of reinforced solids : Some theoretical principles”. In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 11.5 (1^{er} sept. 1963), p. 357-372. ISSN : 0022-5096. DOI : 10.1016/0022-5096(63)90036-X. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002250966390036X> (visité le 18/05/2019).
- [How13] Larry L. HOWELL. “Compliant Mechanisms”. In : *21st Century Kinematics*. Sous la dir. de J. Michael McCARTHY. London : Springer, 2013, p. 189-216. ISBN : 978-1-4471-4510-3. DOI : 10.1007/978-1-4471-4510-3_7.
- [Hue90] C. HUET. “Application of variational concepts to size effects in elastic heterogeneous bodies”. In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 38.6 (1^{er} jan. 1990), p. 813-841. ISSN : 0022-5096. DOI : 10.1016/0022-5096(90)90041-2. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022509690900412> (visité le 22/08/2019).
- [HR14] R. HÖFLER et S. RENYI. “Plattenförmiger Baukörper”. Brev. allem. 355036. 1914.
- [Ilt+15] A. ILTCHEV et al. “Computational homogenisation of periodic cellular materials : Application to structural modelling”. In : *International Journal of Mechanical Sciences* 93 (avr. 2015), p. 240-255. ISSN : 00207403. DOI : 10.1016/j.ijmecsci.2015.02.007. URL : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0020740315000612> (visité le 31/07/2020).
- [Noaa] *Interactive 2D TopOpt App - TopOpt*. <https://www.topopt.mek.dtu.dk>. URL : <https://www.topopt.mek.dtu.dk/Apps-and-software/Interactive-2D-TopOpt-App> (visité le 18/07/2020).
- [Jaa18] Mohamed JAAFAR. “Étude expérimentale et simulation numérique de l’usinage des matériaux en nids d’abeilles : application au fraisage des structures Nomex® et Aluminium”. Thèse de doct. Université de Lorraine, 2018.
- [Joe91] Hackmet Aly JOER. “ γ 1 [gamma] 2 [epsilon]” : une nouvelle machine de cisaillement pour l’étude du comportement des milieux granulaires”. Thèse de doct. Université Joseph Fourier, 1991.
- [Jor+11] Jessica W. Y. JOR et al. “Estimating material parameters of a structurally based constitutive relation for skin mechanics”. In : *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology* 10.5 (oct. 2011), p. 767-778. ISSN : 1617-7959, 1617-7940. DOI : 10.1007/s10237-010-0272-0. URL : <http://link.springer.com/10.1007/s10237-010-0272-0> (visité le 17/07/2020).
- [Jou04] Francois JOUVE. “Optimisation de formes et quelques applications a la medecine”. 2004.
- [Jun+18] Mamta JUNEJA et al. “Accuracy in dental surgical guide fabrication using different 3-D printing techniques”. In : *Additive Manufacturing* 22 (août 2018), p. 243-255. ISSN : 22148604. DOI : 10.1016/j.addma.2018.05.012. URL : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2214860417304098> (visité le 31/03/2019).
- [Jun15] Hugo JUNKERS. “Abdeckung für Flugzeugtragflächen und dergleichen”. Brev. allem. 310040. 1915.
- [Kad+12] Muamer KADIC et al. “On the practicability of pentamode mechanical metamaterials”. In : *Applied Physics Letters* 100.19 (7 mai 2012), p. 191901. ISSN : 0003-6951. DOI : 10.1063/1.4709436. URL : <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.4709436> (visité le 31/07/2020).

- [Kan+03] T. KANIT et al. "Determination of the size of the representative volume element for random composites : statistical and numerical approach". In : *International Journal of Solids and Structures* 40.13 (1^{er} juin 2003), p. 3647-3679. ISSN : 0020-7683. DOI : 10.1016/S0020-7683(03)00143-4. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768303001434> (visité le 03/04/2019).
- [Noab] *La mécanique du futur et la recherche en sciences mécaniques | Rapports, ouvrages, avis et recommandations de l'Académie | Assurer un rôle d'expertise et de conseil*. 2019. URL : <https://www.academie-sciences.fr/fr/Rapports-ouvrages-avis-et-recommandations-de-l-Academie/mecanique-futur.html> (visité le 08/08/2020).
- [Lan86] G. LANZA. "Strength of shafting subjected to both twisting and bending". In : (1886).
- [Leb15] Arthur LEBÉE. "From Folds to Structures, a Review". In : *International Journal of Space Structures* 30.2 (juin 2015), p. 55-74. ISSN : 0266-3511, 2059-8033. DOI : 10.1260/0266-3511.30.2.55. URL : <http://journals.sagepub.com/doi/10.1260/0266-3511.30.2.55> (visité le 02/08/2020).
- [Lec+09] Hugo LECLERC et al. "Integrated Digital Image Correlation for the Identification of Mechanical Properties". In : *Computer Vision/Computer Graphics Collaboration-Techniques*. Sous la dir. d'André GAGALOWICZ et Wilfried PHILIPS. Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg : Springer, 2009, p. 161-171. ISBN : 978-3-642-01811-4. DOI : 10.1007/978-3-642-01811-4_15.
- [Lem01] Jean LEMAITRE. "Petite Histoire de L'experimentation en Mecanique des Solides". In : *Meccanica* 36.1 (1^{er} jan. 2001), p. 13-35. ISSN : 1572-9648. DOI : 10.1023/A:1011977806453. URL : <https://doi.org/10.1023/A:1011977806453> (visité le 17/12/2018).
- [Li+12] Yuan-Qing LI et al. "Bio-Inspired Nacre-like Composite Films Based on Graphene with Superior Mechanical, Electrical, and Biocompatible Properties". In : *Advanced Materials* 24.25 (2012), p. 3426-3431. ISSN : 1521-4095. DOI : 10.1002/adma.201200452. URL : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/adma.201200452> (visité le 16/07/2020).
- [Lob02] Nicolae LOBONTIU. *Compliant Mechanisms : Design of Flexure Hinges*. Google-Books-ID : ivnKBQAAQBAJ. CRC Press, 27 déc. 2002. 469 p. ISBN : 978-1-4200-4027-2.
- [Lon74] Oliver LONG. "Packings For Bottles, Jars, & C." Brev. 150,588. 5 mai 1874.
- [Lu01] T J LU. "Thermal management with micro-architected materials and metal foams". CAMBRIDGE UNIV (UNITED KINGDOM), 2001.
- [Man13] Vincent MANET. "La Méthode des Éléments Finis : Vulgarisation des aspects mathématiques, Illustration des capacités de la méthode". In : (20 août 2013), p. 355. URL : <https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00763690> (visité le 16/04/2020).
- [MO98] G.B. McGUINNESS et C.M. OBRADAIGH. "Characterisation of thermoplastic composite melts in rhombus-shear : the picture-frame experiment". In : *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing* 29.1 (jan. 1998), p. 115-132. ISSN : 1359835X. DOI : 10.1016/S1359-835X(97)00061-4. URL : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1359835X97000614> (visité le 17/07/2020).

- [Mic04] A.G.M. MICHELL. “LVIII. The limits of economy of material in frame-structures”. In : *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 8.47 (nov. 1904), p. 589-597. ISSN : 1941-5982, 1941-5990. DOI : 10.1080/14786440409463229. URL : <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/14786440409463229> (visité le 16/07/2020).
- [MC95] Graeme W. MILTON et Andrej V. CHERKAEV. “Which Elasticity Tensors are Realizable?” In : *Journal of Engineering Materials and Technology* 117.4 (1^{er} oct. 1995), p. 483-493. ISSN : 0094-4289. DOI : 10.1115/1.2804743. URL : <https://asmedigitalcollection.asme.org/materialstechnology/article/117/4/483/403101/Which-Elasticity-Tensors-are-Realizable> (visité le 31/07/2020).
- [Min65] R. D. MINDLIN. “Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity”. In : *International Journal of Solids and Structures* 1.4 (1^{er} nov. 1965), p. 417-438. ISSN : 0020-7683. DOI : 10.1016/0020-7683(65)90006-5. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020768365900065> (visité le 17/03/2020).
- [MAY20] Vincent MONCHIET, Nicolas AUFFRAY et Julien YVONNET. “Strain-gradient homogenization : A bridge between the asymptotic expansion and quadratic boundary condition methods”. In : *Mechanics of Materials* 143 (1^{er} avr. 2020), p. 103309. ISSN : 0167-6636. DOI : 10.1016/j.mechmat.2019.103309. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167663619308385> (visité le 08/08/2020).
- [Mor06] Andreas MORTENSEN. *Concise Encyclopedia of Composite Materials*. Google-Books-ID : zs_lGeGsuaAC. Elsevier, 8 déc. 2006. 989 p. ISBN : 978-0-08-052462-7.
- [MS98] H. MOULINEC et P. SUQUET. “A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure”. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 157.1 (28 avr. 1998), p. 69-94. ISSN : 0045-7825. DOI : 10.1016/S0045-7825(97)00218-1. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782597002181> (visité le 31/03/2019).
- [Mus48] Petrus van MUSSCHENBROEK. *Petri van Musschenbroek Institutiones physicae : conscriptae in usus academicos*. Google-Books-ID : nhI5AAAaAAJ. 1748. 822 p.
- [NSS97] P. NITHIARASU, K. N. SEETHARAMU et T. SUNDARARAJAN. “Natural convective heat transfer in a fluid saturated variable porosity medium”. In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 40.16 (1^{er} oct. 1997), p. 3955-3967. ISSN : 0017-9310. DOI : 10.1016/S0017-9310(97)00008-2. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931097000082> (visité le 17/07/2020).
- [NS11] A. N. NORRIS et A. L. SHUVALOV. “Elastic cloaking theory”. In : *Wave Motion. Special Issue on Cloaking of Wave Motion* 48.6 (1^{er} sept. 2011), p. 525-538. ISSN : 0165-2125. DOI : 10.1016/j.wavemoti.2011.03.002. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165212511000357> (visité le 31/07/2020).
- [Oho+89] N. OHOMORI et al. “Reinforced concrete membrane elements subjected to reversed cyclic in-plane shear stress”. In : *Nuclear Engineering and Design* 115.1 (1^{er} juil. 1989), p. 61-72. ISSN : 0029-5493. DOI : 10.1016/0029-5493(89)90260-4. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0029549389902604> (visité le 17/12/2018).

- [OKA17] M. OLIVE, B. KOLEV et N. AUFRAY. “A Minimal Integrity Basis for the Elasticity Tensor”. In : *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 226.1 (1^{er} oct. 2017), p. 1-31. ISSN : 1432-0673. DOI : [10.1007/s00205-017-1127-y](https://doi.org/10.1007/s00205-017-1127-y). URL : <https://doi.org/10.1007/s00205-017-1127-y> (visité le 02/08/2020).
- [OG16] Mikhail OSANOV et James K. GUEST. “Topology Optimization for Architected Materials Design”. In : *Annual Review of Materials Research* 46.1 (2016), p. 211-233. DOI : [10.1146/annurev-matsci-070115-031826](https://doi.org/10.1146/annurev-matsci-070115-031826). URL : <https://doi.org/10.1146/annurev-matsci-070115-031826> (visité le 02/08/2020).
- [PAW16] L. PARRY, I. A. ASHCROFT et R. D. WILDMAN. “Understanding the effect of laser scan strategy on residual stress in selective laser melting through thermo-mechanical simulation”. In : *Additive Manufacturing* 12 (1^{er} oct. 2016), p. 1-15. ISSN : 2214-8604. DOI : [10.1016/j.addma.2016.05.014](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2214860416300987). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2214860416300987> (visité le 20/12/2019).
- [Pel11] Jacques PELLET. “Dualisation des conditions aux limites”. In : (2 mai 2011), p. 30.
- [PS97] Catherine PIDERI et Pierre SEPPECHER. “Un résultat d’homogénéisation pour un matériau élastique renforcé périodiquement par des fibres élastiques de très grande rigidité”. In : *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Chemistry-Astronomy* 324.8 (avr. 1997), p. 475-481. ISSN : 12518069. DOI : [10.1016/S1251-8069\(97\)80185-6](https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1251806997801856). URL : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1251806997801856> (visité le 17/07/2020).
- [PPB20] Walter D. PILKEY, Deborah F. PILKEY et Zhuming Bi. *Peterson’s Stress Concentration Factors*. Google-Books-ID : apXFDwAAQBAJ. John Wiley & Sons, 11 fév. 2020. 640 p. ISBN : 978-1-119-53251-4.
- [PAG17] Luca PLACIDI, Ugo ANDREAUS et Ivan GIORGIO. “Identification of two-dimensional pantographic structure via a linear D4 orthotropic second gradient elastic model”. In : *Journal of Engineering Mathematics* 103.1 (avr. 2017), p. 1-21. ISSN : 0022-0833, 1573-2703. DOI : [10.1007/s10665-016-9856-8](http://link.springer.com/10.1007/s10665-016-9856-8). URL : <http://link.springer.com/10.1007/s10665-016-9856-8> (visité le 13/08/2020).
- [Pon+18] M. PONCELET et al. “An experimental evidence of the failure of Cauchy elasticity for the overall modeling of a non-centro-symmetric lattice under static loading”. In : *International Journal of Solids and Structures* 147 (2018), p. 223-237. DOI : [10.1016/j.ijsolstr.2018.05.028](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01704787). URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01704787> (visité le 14/04/2019).
- [Pon18] Martin PONCELET. “From a standard continuum experimental mechanics to a generalized one ?” workshop. Encounter of the third kind on Generalized continua and microstructures. Arpino, Italy, 5 avr. 2018.
- [QB89] A. QUIRK et E. BEVITT. “The history, development and application of a uniformly applied load wide plate testing machine”. In : *Nuclear Engineering and Design* 112 (1^{er} mar. 1989), p. 81-91. ISSN : 0029-5493. DOI : [10.1016/0029-5493\(89\)90147-7](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0029549389901477). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0029549389901477> (visité le 17/12/2018).
- [QC81] A. QUIRK et C. E. CROOK. “Philosophy, design and testing of a uniform applied load flat plate testing machine”. In : *International Journal of Pressure Vessels and Piping* 9.1 (1^{er} jan. 1981), p. 41-62. ISSN : 0308-0161. DOI : [10.1016/0308-0161\(81\)90035-1](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0308016181900351). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0308016181900351> (visité le 17/12/2018).

- [Rah+15] Y. RAHALI et al. “Homogenization à la Piola produces second gradient continuum models for linear pantographic lattices”. In : *International Journal of Engineering Science* 97 (1^{er} déc. 2015), p. 148-172. ISSN : 0020-7225. DOI : 10.1016/j.ijengsci.2015.10.003. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020722515001391> (visité le 16/07/2020).
- [Rop+15] Christopher S. ROPER et al. “Scalable 3D Bicontinuous Fluid Networks : Polymer Heat Exchangers Toward Artificial Organs”. In : *Advanced Materials* 27.15 (2015), p. 2479-2484. ISSN : 1521-4095. DOI : 10.1002/adma.201403549. URL : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/adma.201403549> (visité le 17/07/2020).
- [RPA18] Giuseppe ROSI, Luca PLACIDI et Nicolas AUFFRAY. “On the validity range of strain-gradient elasticity : A mixed static-dynamic identification procedure”. In : *European Journal of Mechanics - A/Solids* 69 (1^{er} mai 2018), p. 179-191. ISSN : 0997-7538. DOI : 10.1016/j.euromechsol.2017.12.005. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0997753817305880> (visité le 18/05/2019).
- [Noac] *Roulements - SKF Precision Bearings - Catalogue PDF | Documentation technique | Brochure*. URL : <https://pdf.directindustry.fr/pdf/skf-precision-bearings/roulements/9172-923238.html> (visité le 08/08/2020).
- [Sab92] K. SAB. “On the Homogenization and the Simulation of Random Materials”. In : *Eur. J. Mech., A/Solids* (1992), p. 585-607. URL : <https://ci.nii.ac.jp/naid/80006722532/> (visité le 03/04/2019).
- [Sca+02] F. SCARPA et al. “Dynamic crushing of auxetic open-cell polyurethane foam”. In : *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science* 216.12 (1^{er} déc. 2002), p. 1153-1156. ISSN : 0954-4062. DOI : 10.1243/095440602321029382. URL : <https://doi.org/10.1243/095440602321029382> (visité le 17/07/2020).
- [Sch31] C. SCHEINER. *Pantographice, seu ars delineandi, res quaslibet per parallelo-grammum lineare seu cavum, mechani-cum, mobile*. Rome : Ex Typography Ludouici Grignani., 1631.
- [SL18] Silvia SCHÖNEBURG-LEHNERT. “The Pantograph : A Historical Drawing Device for Math Teaching”. In : *Mathematics, Education and History : Towards a Harmonious Partnership*. Sous la dir. de Kathleen M. CLARK et al. ICME-13 Monographs. Cham : Springer International Publishing, 2018, p. 323-340. ISBN : 978-3-319-73924-3. DOI : 10.1007/978-3-319-73924-3_16. URL : https://doi.org/10.1007/978-3-319-73924-3_16 (visité le 04/05/2020).
- [SAI11] Pierre SEPPECHER, Jean-Jacques ALIBERT et Francesco DELL'ISOLA. “Linear elastic trusses leading to continua with exotic mechanical interactions”. In : *Journal of Physics : Conference Series* 319.1 (2011), p. 012018. ISSN : 1742-6596. DOI : 10.1088/1742-6596/319/1/012018. URL : <http://stacks.iop.org/1742-6596/319/i=1/a=012018> (visité le 17/12/2018).
- [Noad] *Shape and Topology Optimization Group at CMAP*. URL : <http://www.cmap.polytechnique.fr/~optopo/index.php?lang=en> (visité le 31/07/2020).
- [Sig01] O. SIGMUND. “A 99 line topology optimization code written in Matlab”. In : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 21.2 (1^{er} avr. 2001), p. 120-127. ISSN : 1615-1488. DOI : 10.1007/s001580050176. URL : <https://doi.org/10.1007/s001580050176> (visité le 18/07/2020).

- [Sig97] Ole SIGMUND. "On the Design of Compliant Mechanisms Using Topology Optimization". In : *Mechanics of Structures and Machines* 25.4 (1^{er} jan. 1997), p. 493-524. ISSN : 0890-5452. DOI : 10.1080/08905459708945415. URL : <https://doi.org/10.1080/08905459708945415> (visité le 16/07/2020).
- [S.K93] S.KONIECZKA. "De la rigidité d'une liaison élastique calculée par la théorie des poutres". mémoire. école normale supérieure de cachan, 1993.
- [SC88] G SUMNER et AM CLAYTON. "Structural Testing in Nuclear Engineering". In : *Butterworths, Full-Scale Fatigue Testing of Components and Structures* 1.10 (1988), p. 186-209.
- [Sut+83] MA SUTTON et al. "Determination of displacements using an improved digital correlation method". In : *Image and Vision Computing* 1.3 (1^{er} août 1983), p. 133-139. ISSN : 0262-8856. DOI : 10.1016/0262-8856(83)90064-1. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0262885683900641> (visité le 27/03/2020).
- [Syp05] David J. SYPECK. "Cellular Truss Core Sandwich Structures". In : *Applied Composite Materials* 12.3 (mai 2005), p. 229-246. ISSN : 0929-189X, 1573-4897. DOI : 10.1007/s10443-005-1129-z. URL : <http://link.springer.com/10.1007/s10443-005-1129-z> (visité le 16/07/2020).
- [Tan+17] Wen See TAN et al. "Comparison of solid, liquid and powder forms of 3D printing techniques in membrane spacer fabrication". In : *Journal of Membrane Science* 537 (sept. 2017), p. 283-296. ISSN : 03767388. DOI : 10.1016/j.memsci.2017.05.037. URL : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0376738817303964> (visité le 31/03/2019).
- [Tar89] LUC TARTAR. "Nonlocal Effects Induced by Homogenization". In : *Partial Differential Equations and the Calculus of Variations : Essays in Honor of Ennio De Giorgi Volume 2*. Sous la dir. de Ferruccio COLOMBINI et al. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Boston, MA : Birkhäuser Boston, 1989, p. 925-938. ISBN : 978-1-4615-9831-2. DOI : 10.1007/978-1-4615-9831-2_19. URL : https://doi.org/10.1007/978-1-4615-9831-2_19 (visité le 22/08/2019).
- [Noae] *TopOpt*. <https://www.topopt.mek.dtu.dk>. URL : <https://www.topopt.mek.dtu.dk/> (visité le 31/07/2020).
- [Tur+16] Emilio TURCO et al. "Hencky-type discrete model for pantographic structures : numerical comparison with second gradient continuum models". In : *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* 67.4 (août 2016), p. 85. ISSN : 0044-2275, 1420-9039. DOI : 10.1007/s00033-016-0681-8. URL : <http://link.springer.com/10.1007/s00033-016-0681-8> (visité le 20/01/2020).
- [TKP14] B. M. TYMRAK, M. KREIGER et J. M. PEARCE. "Mechanical properties of components fabricated with open-source 3-D printers under realistic environmental conditions". In : *Materials & Design* 58 (1^{er} juin 2014), p. 242-246. ISSN : 0261-3069. DOI : 10.1016/j.matdes.2014.02.038. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0261306914001538> (visité le 17/12/2018).
- [Van02] Paolo VANNUCCI. "A Special Planar Orthotropic Material". In : *Journal of elasticity and the physical science of solids* 67.2 (2002), p. 81-96. ISSN : 1573-2681. DOI : 10.1023/A:1023949729395. URL : <https://doi.org/10.1023/A:1023949729395> (visité le 02/08/2020).

- [Ver+09] R. VERDEJO et al. “Enhanced acoustic damping in flexible polyurethane foams filled with carbon nanotubes”. In : *Composites Science and Technology*. CNT-NET 07 Special Issue with regular papers 69.10 (1^{er} août 2009), p. 1564-1569. ISSN : 0266-3538. DOI : 10.1016/j.compscitech.2008.07.003. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266353808002601> (visité le 19/07/2020).
- [Via97] M VIANELLO. “An integrity basis for plane elasticity tensors”. In : (1997), p. 12.
- [Vin74] Leonardo (da) VINCI. *The Madrid Codices : Facsimile edition of Codex Madrid 1 [1493]*. Google-Books-ID : bIGEQAACAAJ. MacGraw-Hill, 1974. book.
- [Wad02] H. N. G. WADLEY. “Cellular Metals Manufacturing”. In : *Advanced Engineering Materials* 4.10 (2002), p. 726-733. ISSN : 1527-2648. DOI : 10.1002/1527-2648(200210)4:10<726::AID-ADEM726>3.0.CO;2-Y. URL : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/1527-2648%28200210%294%3A10%3C726%3A%3AAID-ADEM726%3E3.0.CO%3B2-Y> (visité le 03/01/2020).
- [Wat+19] Amy WAT et al. “Bioinspired nacre-like alumina with a bulk-metallic glass-forming alloy as a compliant phase”. In : *Nature Communications* 10.1 (déc. 2019), p. 961. ISSN : 2041-1723. DOI : 10.1038/s41467-019-08753-6. URL : <http://www.nature.com/articles/s41467-019-08753-6> (visité le 16/07/2020).
- [Wat04] David S. WATKINS. *Fundamentals of Matrix Computations*. John Wiley & Sons, 27 août 2004. 636 p. ISBN : 978-0-471-46167-8.
- [Wil+19] Richard J. WILLIAMS et al. “In situ thermography for laser powder bed fusion : Effects of layer temperature on porosity, microstructure and mechanical properties”. In : *Additive Manufacturing* 30 (1^{er} déc. 2019), p. 100880. ISSN : 2214-8604. DOI : 10.1016/j.addma.2019.100880. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2214860419303410> (visité le 20/12/2019).
- [Wil74] Edward L. WILSON. “The static condensation algorithm”. In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 8.1 (1974), p. 198-203. ISSN : 1097-0207. DOI : 10.1002/nme.1620080115. URL : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1620080115> (visité le 14/04/2020).
- [Yvo19] Julien YVONNET. *Computational Homogenization of Heterogeneous Materials with Finite Elements*. Solid Mechanics and Its Applications. Springer International Publishing, 2019. ISBN : 978-3-030-18382-0. DOI : 10.1007/978-3-030-18383-7. URL : <https://www.springer.com/fr/book/9783030183820> (visité le 01/08/2020).

Annexe A

Table des notations

| Notation | Signification |
|---|---|
| Tenseurs et matrices | |
| a | Scalaire |
| \underline{a} | Vecteur |
| $\underset{\sim}{a}$ | Tenseur d'ordre 2 |
| $\underset{\approx}{a}$ | Tenseur d'ordre 4 |
| $[a]$ | Matrice |
| $\underset{\sim}{a}^*, \underset{\approx}{a}^*$ | Tenseur homogénéisé |
| $\underset{\sim}{1}$ | Tenseur identité d'ordre 2 |
| $\underset{\approx}{1}$ | Tenseur identité d'ordre 4 |
| $\underset{\approx}{J} = \underset{\approx}{I} - \frac{1}{2} \underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1}$ | Projecteur déviatorique |
| Opérateurs | |
| \cdot | Produit simplement contracté à gauche ($U_j = E_{ij} \cdot X_i$) |
| $:$ | Produit doublement contracté à gauche ($\Sigma_{kl} = C_{ijkl} : E_{ij}$) |
| \otimes | Produit tensoriel ($C_{ijkl} = A_{ij} \otimes B_{kl}$) |
| \otimes^s | Produit tensoriel symétrisé |
| ∇ | Opérateur nabra ($\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$) |
| $\langle \cdot \rangle$ | Moyenne volumique |
| $[[\cdot]]$ | Saut |
| $a_{,j}$ | Dérivation spatiale ($A_{,x} = \frac{\partial A}{\partial x}$) |
| Abréviations | |
| ddl | Degré de liberté |
| LS | Liaison souple |
| KUBC | Kinematic uniform boundary conditions |
| SUBC | Static uniform boundary conditions |
| PBC | Periodic boundary conditions |
| MHE | Milieu homogène équivalent |
| Indices et exposants | |
| a^1 | Quantité unitaire ou résultant de conditions unitaires |

| Notation | Signification |
|--|---|
| $a^{(s)}$ | Quantité exprimée sur le bord (s) |
| $a^{(p)}$ | Quantité exprimée sur l'attache (p) |
| R, S | Exposant indiquant un bras rigide ou souple respectivement |
| $M, 0, P$ | Exposant indiquant un bras avec liaisons souples orientées à $-30^\circ, 0^\circ$ ou $+30^\circ$ respectivement |
| a^{RP} | Quantité exprimée sur un bras rigide avec liaisons souples orientées à $+30^\circ$ |
| Notations diverses | |
| L | Longueur caractéristique de l'échelle macroscopique (puis longueur de l'éprouvette) |
| l | Longueur caractéristique de l'échelle mésoscopique |
| λ | Longueur caractéristique de l'échelle microscopique |
| ϵ | rapport d'échelles |
| Σ, \mathbf{E} | Tenseurs de contrainte et de déformation macroscopiques |
| $\tilde{\sigma}, \tilde{\epsilon}$ | Tenseur de contrainte et de déformation mésoscopiques |
| \mathbf{C} | Tenseur d'élasticité |
| $\hat{\Sigma}, \hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{C}}$ | Tenseur de contrainte, de déformation et d'élasticité en notation de Kelvin |
| $\underline{\mathbf{n}}$ | Vecteur normal |
| $\underline{\mathbf{e}}$ | Vecteur de base |
| Ω | Domaine occupé par l'éprouvette |
| V | Volume du domaine Ω |
| $\partial\Omega$ | Bord du domaine Ω |
| $\partial\Omega^{(p)}$ | Restriction de $\partial\Omega$ à l'attache (p) |
| O, B, C, D | Coins de l'éprouvette |
| $\underline{\mathbf{x}}$ | Variable de position |
| $\underline{\mathbf{y}}^{(p)}$ | Variable de position locale |
| $\underline{\mathbf{u}}$ | Déplacement |
| $\underline{\mathbf{t}}$ | Effort au bord de l'éprouvette |
| $\sigma^{0(p)}$ | Tenseur des valeurs moyennes de la contrainte sur $\partial\Omega^{(p)}$ |
| $\tilde{\sigma}^{1(p)}$ | Tenseur des valeurs de la variation linéaire de la contrainte sur $\partial\Omega^{(p)}$ |
| \tilde{f} | Force sur une attache |
| F | Force sur un bord |
| W | Énergie |
| N | Nombre d'attaches sur un bord |
| H | Épaisseur de l'éprouvette |
| $l^{(p)}$ | largeur d'une attache |
| $S^{(p)}$ | surface d'une attache |
| $\llbracket 1; N \rrbracket$ | Ensemble des entiers entre 1 et N |
| h | Hauteur de la liaison souple |
| R | Rayon de la liaison souple |
| ρ | Rapport de longueurs ($\rho = R/h$) |
| b | Profondeur de la liaisons souple |
| r | Nombre de rangs du pantographe |
| N_{LS} | Nombre de liaisons souples sur un bras |

| Notation | Signification |
|-----------------------------|---|
| e_{flex} | Erreur de position transverse |
| e_{ax} | Erreur de position axiale |
| $\underline{\mathbf{T}}(n)$ | Effort transitant par la liaison souple supérieure du pantographe |
| $\underline{\mathbf{B}}(n)$ | Effort transitant par la liaison souple inférieure du pantographe |
| $\underline{\mathbf{C}}(n)$ | Effort transitant par la liaison souple centrale du pantographe |
| σ_e | Limite élastique |
| E | module de Young |

Matrices et vecteurs particuliers du chapitre 3

| | |
|------------------|--|
| $[\mathbf{k}]$ | Matrice de rigidité d'une liaison |
| $[k]$ | Matrice de rigidité d'un bras |
| $[K]$ | Matrice de rigidité d'un pantographe |
| $[\mathcal{K}]$ | Matrice de rigidité d'un bloc |
| $[\mathbb{K}]$ | Matrice de rigidité d'un étage |
| $[\mathfrak{k}]$ | Matrice de rigidité hors plan inter-liaisons |
| $[\mathbb{K}]$ | Matrice de rigidité hors plan inter-pantographes |
| $[\kappa]$ | Matrice de rigidité de pénalisation |
| $[\mathbf{u}]$ | Vecteur des déplacement d'une liaison |
| $[u]$ | Vecteur des déplacements d'un bras |
| $[U]$ | Vecteur des déplacements d'un pantographe |
| $[\mathcal{U}]$ | Vecteur des déplacements d'un bloc |
| $[\mathbb{U}]$ | Vecteur des déplacements d'un étage |
| $[\mathbf{f}]$ | Vecteur des déplacement d'une liaison |
| $[f]$ | Vecteur des déplacements d'un bras |
| $[F]$ | Vecteur des déplacements d'un pantographe |
| $[\mathcal{F}]$ | Vecteur des déplacements d'un bloc |
| $[\mathbb{F}]$ | Vecteur des déplacements d'un étage |
| $[P]$ | Matrice de changement de base |
| $[\lambda]$ | Matrice des Lagrangiens |

Annexe B

Validation du critère de Hill Mandel par conditions PBC

Le solide est Ω , une cellule élémentaire est notée T (cf. Figure B.1). Pour les conditions PBC, sur un matériau périodique, le VER est réduit à une cellule élémentaire.

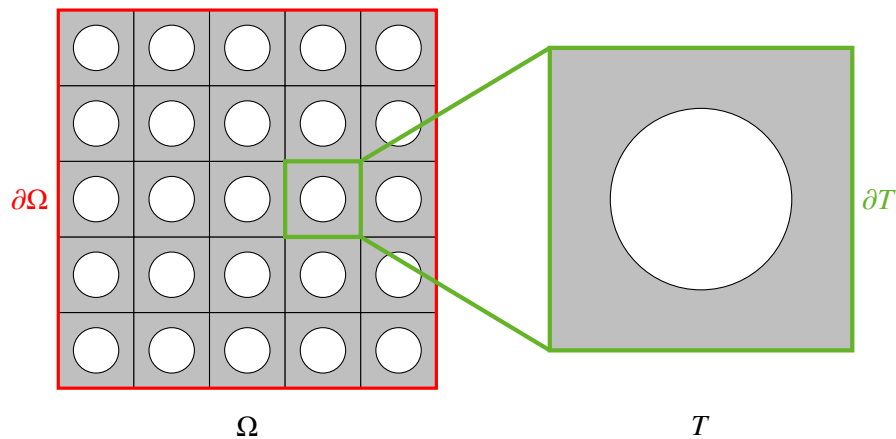


FIGURE B.1: Définition d'une cellule élémentaire T

On cherche \underline{u} sous la forme

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}^h(\underline{x}) + \underline{u}^\#(\underline{x})$$

$$\text{avec } \begin{cases} \underline{u}^h(\underline{x}) = \underline{E} \cdot \underline{x} \\ \underline{u}^\#(\underline{x}) \text{ T périodique} \Rightarrow \forall \underline{t} \in \mathcal{R} \underline{u}^\#(\underline{x}) = \underline{u}^\#(\underline{x} + \underline{t}) \end{cases}$$

on a

$$\begin{aligned}
\langle \underline{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle &= \int_T \frac{1}{2T} (\underline{u} \otimes \underline{\nabla} + \underline{\nabla} \otimes \underline{u}) \, dV \\
&= \frac{1}{2T} \int_T u_{i,j} + u_{j,i} \, dV \\
&= \frac{1}{2T} \int_T (u_{i,j}^h + u_{j,i}^h) \, dV + \frac{1}{2T} \int_T (u_{i,j}^\# + u_{j,i}^\#) \, dV \\
&= \frac{1}{2T} \int_T ((E_{ip}x_p)_{,j} + (E_{jp}x_p)_{,i}) \, dV + \frac{1}{2T} \int_{\partial T} (u_i^\# n_j + u_j^\# n_i) \, dS \\
&= \frac{1}{2T} \int_T (E_{ij} + E_{ji}) \, dV + \frac{1}{2T} \int_{\partial T} (u_i^\# n_j + u_j^\# n_i) \, dS \\
&= \underline{E} + \frac{1}{2T} \int_{\partial T} (\underline{u}^\#(\underline{x}) \otimes^s \underline{n}(\underline{x})) \, dS
\end{aligned}$$

Soient \underline{x} et \underline{X} les coordonnées de points homologues de ∂T .

$$\text{Comme } \begin{cases} \underline{u}^\#(\underline{x}) = \underline{u}^\#(\underline{X}) \\ \underline{n}^\#(\underline{x}) = -\underline{n}^\#(\underline{X}) \end{cases}$$

alors

$$\frac{1}{2T} \int_{\partial T} (\underline{u}^\#(\underline{x}) \otimes^s \underline{n}(\underline{x})) \, dS = 0$$

et donc

$$\langle \underline{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle = \underline{E}$$

Pour des PBC.

Pour l'implémentation numérique des PBC on pourra se référer à [MS98; Yvo19]

Annexe C

Cahier des charges

C.1 Caractérisation des éléments du milieu extérieur

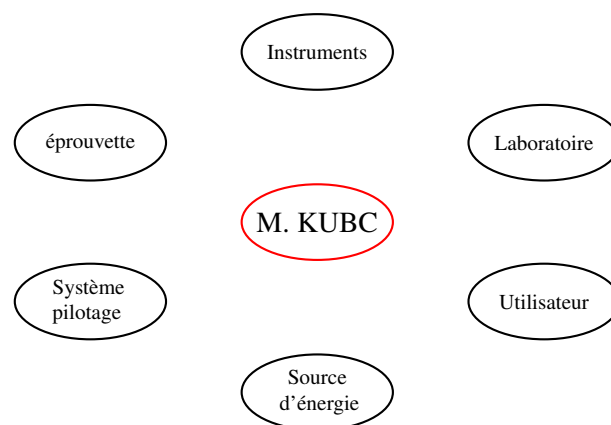


FIGURE C.1: Éléments du milieu extérieur lors des différentes phases de vie

| EME | Critère | Niveau | Lim. | Flex. |
|--------------------------------------|---|---------------------------|---------|-------|
| Utilisateurs | Surface de contact / force exercée | 1 cm ² /10 N | min | F2 |
| | Rayon/chanfrein en surface externe | 1 mm | min | F2 |
| | Nombre d'utilisateurs | 3 | max | F1 |
| Eprouvette | Matériau : | aucune | | |
| | Prop. chimique : corrosif, OxRed | aucune | absolu | F1 |
| | Dimension hors tout dans le plan | 300 × 300 mm | min-max | F1 |
| | Épaisseur de l'éprouvette | 15-20 mm | min-max | F1 |
| | Présence obstacles de transmission | éventuel | | F2 |
| | Présence système de référence | oui | Absolu | F3 |
| | Température admissible | 10-50 °C | min-max | F1 |
| | Raideur moyenne | 200N/mm | max | F2 |
| | Hétérogénéité de raideur (contraste) | 100% | max | F1 |
| Hétérogénéité de raideur (dim. car.) | 10 mm | min | F1 | |
| Poids | 2 kg | max | F2 | |
| Source d'énergie | électrique réseau | 240 V 50Hz mono | | F1 |
| Labo | Humidité | 60% | max | F0 |
| | Prop. chimique : corrosif, OxRed | aucune | | F0 |
| | Température | 50°C | max | F0 |
| | Espace disponible ($L \times l \times H$) | 1 × 1 × 2 m ³ | max | F1 |
| | Chargement surfacique | 500 kg | max | F0 |
| Instruments | Angles faisceaux visible | 90° | max | F1 |
| | Surface obs. au centre de l'éprouvette | 200 × 200 mm ² | max | F1 |
| | Surface obs. au centre de l'éprouvette | 150 × 150 mm ² | min | F1 |
| | Dépl. relatif hors plan s/s charge max | 0,1 mm | max | F1 |
| Système pilotage | Interface ordinateur | | | F2 |
| Système d'acquisition | Interface ordinateur | | | F2 |

C.2 Phase de vie : Montage de la M. KUBC

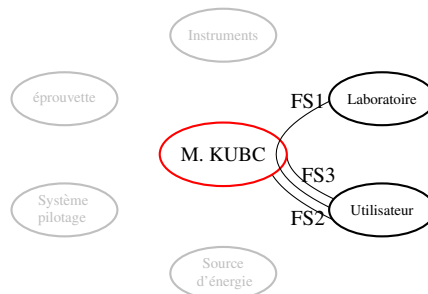


FIGURE C.2: Fonctions en phase de montage de la M. KUBC

| Qualification | Critère | Niveau | Lim. | Flex. |
|--|--|-----------------|------|-------|
| FS1 : permettre un montage aisé de la M. KUBC | Nombre d'utilisateurs nécessaires au montage | 2 | max | F1 |
| | Nombre d'éléments à manipuler à tout instant / utilisateur | 2 | max | F1 |
| | Accessibilité | | | F2 |
| | Visibilité | | | F2 |
| | Temps de montage | 10h | max | F2 |
| | Surface nécessaire | 4m ² | max | F3 |
| FS2 : Ne pas détériorer la M. KUBC lors du montage. | charge hors plan applicable localement | 200 | max | F1 |
| | contrainte locale applicable | 200MPa (alu) | max | F1 |
| FS3 : Permettre le montage et le démontage des capteurs d'effort | Nombre d'utilisateurs nécessaires au montage | 1 | max | F2 |
| | Nombre d'éléments à manipuler à tout instant / utilisateur | 2 | max | F1 |
| | Accessibilité | | | F2 |
| | Visibilité | | | F2 |
| | Temps de montage | 2h30 | max | F2 |

C.3 Phase de vie : montage de l'éprouvette

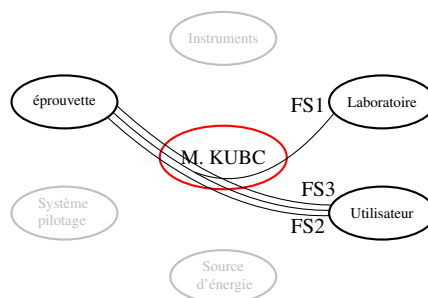


FIGURE C.3: Fonctions en phase de montage de l'éprouvette

| Qualification | Critère | Niveau | Lim. | Flex. |
|--|---|----------|------|-------|
| FS1 : permettre un montage aisé | Nombre d'utilisateurs nécessaires au montage | 2 | max | F1 |
| | Nombre d'éléments à manipuler à tout instant / utilisateur (épreuve comprise) | 2 | max | F1 |
| | Accessibilité | | | F2 |
| | Visibilité | | | F2 |
| | Temps de mise en place | 30min | max | F2 |
| | Temps de serrage | 2h | max | F2 |
| FS2 : mettre en position l'éprouvette | Tolérance de position de l'éprouvette | 0.2mm* | max | F1 |
| FS3 : garder un état éprouvette vierge | effort plan local | 2% gamme | | F0 |
| | pas de def(flèche) hors plan | 0.5 mm | max | F1 |

C.4 Phase de vie : sollicitations et mesures

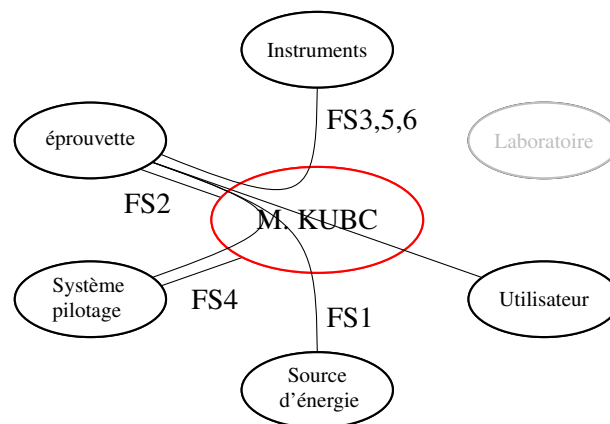


FIGURE C.4: Fonctions en phase de Sollicitation et mesure

| Qualification | Critère | Niveau | Lim. | Flex. |
|---|--|-----------|------|-------|
| FS1 : Appliquer un champ de déformations homogène au bord | Amplitude des def principales | 2% | min | F1 |
| | Pas de chargement | 1% du max | min | F2 |
| | Nombre de points (champ discrétisé) par bord | 10 | min | F0 |
| | Hétérogénéité du champ imposé - ampl. rel. | 1% | max | F1 |
| FS2 : Maintenir en position | Glissement plan sous charge | 0 mm | max | F0 |
| | Effort transmissible machine - éprouvette | 2kN | min | F1 |
| | Dépl. hors-plan sous charge | 0.1mm | max | F0 |
| | Rotation hors plan sous charge | 1deg | max | F0 |
| FS3 : Connaître le champs de force/contrainte appliqué | Incertitude | 1% | max | F2 |
| | Fréquence de mesure | 1 Hz | min | F3 |
| | Composantes (N+T) | absolu | | F0 |
| FS4 : Connaître les déplacements/déformations imposées | Incert. de mesure | 1% | max | F2 |
| | Composantes (N+T) | absolu | | F0 |
| | Fréquence de mesure | 1 Hz | min | F2 |
| FS5 : Permettre les mesures de sur champ 1 face | Voir description EME instru | | | F0 |
| FS6 : Permettre les mesures de sur champ 2 faces | Voir description EME instru | | | F2 |

C.5 Phases de vie annexes

C.5.1 Démontage

| Qualification | Critère | Niveau | Lim. | Flex. |
|--|--|------------------|------------|----------|
| FS1 : permettre un démontage aisé | Nombre d'utilisateurs nécessaires au montage | 2 | max | F1 |
| | Nombre d'éléments guidés à manipuler à tout instant (éprouvette comprise) | 2 | max | F1 |
| | Nombre d'éléments libres à manipuler à tout instant (éprouvette comprise) | 1 | max | F1 |
| | Accessibilité | | | F2 |
| | Visibilité | | | F2 |
| FS2 : éviter une détérioration de l'éprouvette | Contrainte appliquée en zone utile Modification de la géométrie de surface de serrage † | 30 MPa 0,1 mm | max max | F2 F2 |
| FS6 : permettre un démontage rapide | Temps de déserrage | 1 h | max | F2 |
| | Temps de dépose d'éprouvette | 1 h | max | F2 |

C.5.2 Incidents

Les cas d'incident considérés sont des déplacements inattendus des actionneurs dus à une rupture d'éprouvette ou une erreur de chargement

| Qualification | Critère | Niveau | Lim. | Flex. |
|---|--|-----------|------|-------|
| FS1 : permettre d'arrêter la machine avant la détérioration de la M. KUBC | Vitesse maximale de déplacement des vérins | 25 mm/min | max | F1 |
| FS2 : éviter la détérioration des moyens de mesures | Distance avec les appareils externes | 10 mm | min | F2 |
| | Chanfrein ou congé d'arêtes saillantes | 1 mm | min | F2 |
| | charge locale maximale | 300N | max | F1 |

C.5.3 Stockage & manipulation

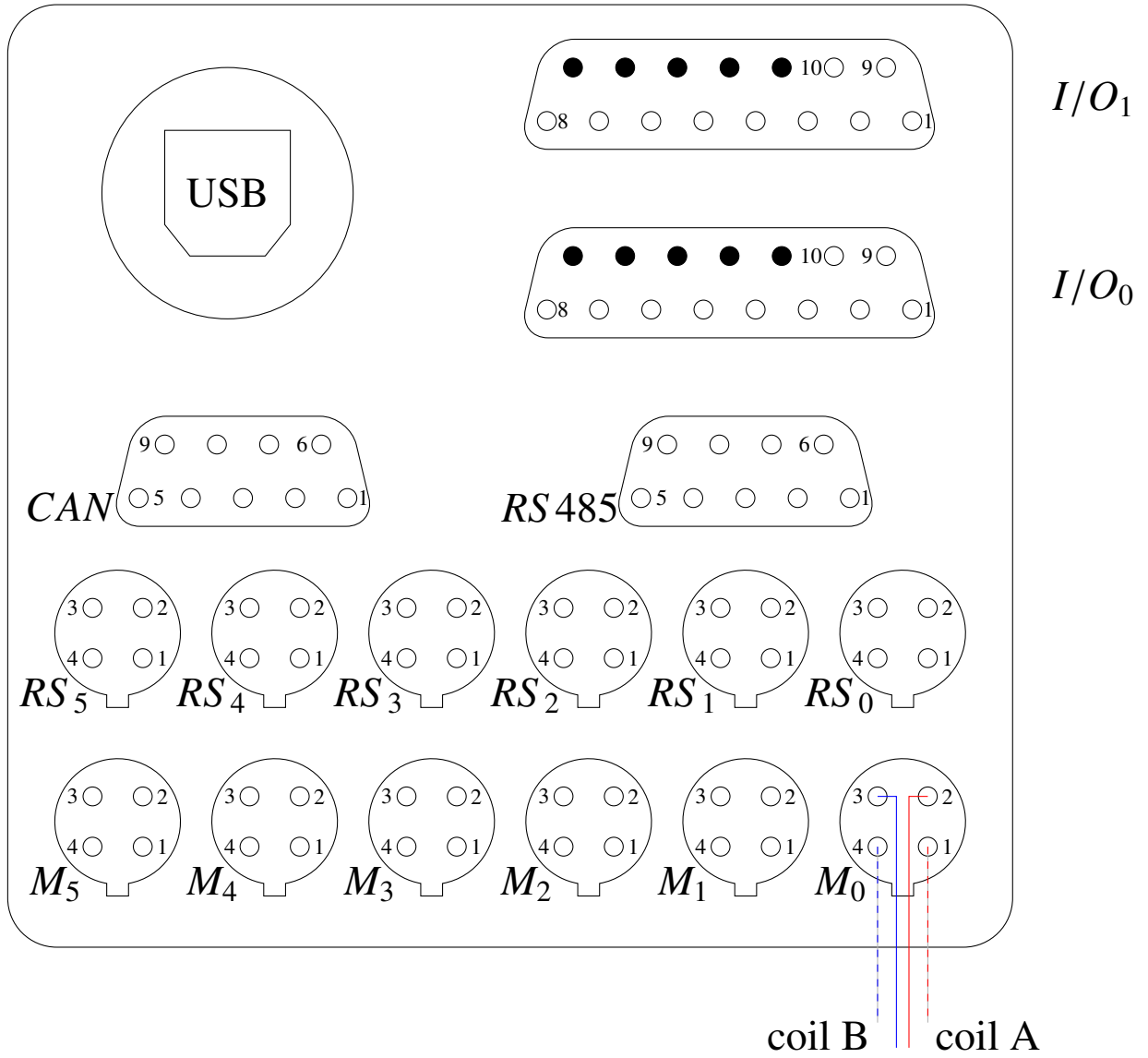
| Qualification | Critère | Niveau | Lim. | Flex. |
|---|---|--------|------|-------|
| FS1 : Ne pas blesser l'utilisateur | Nombre de position d'équilibre stable | 1 | min | F2 |
| | Angle d'arête vive | 135° | min | F2 |
| FS2 : Ne pas dégrader les surfaces fonctionnelles | Surfaces inertes chimiquement à l'air ambiant | | | F2 |
| | Dureté | 200 HB | min | F2 |

Annexe D

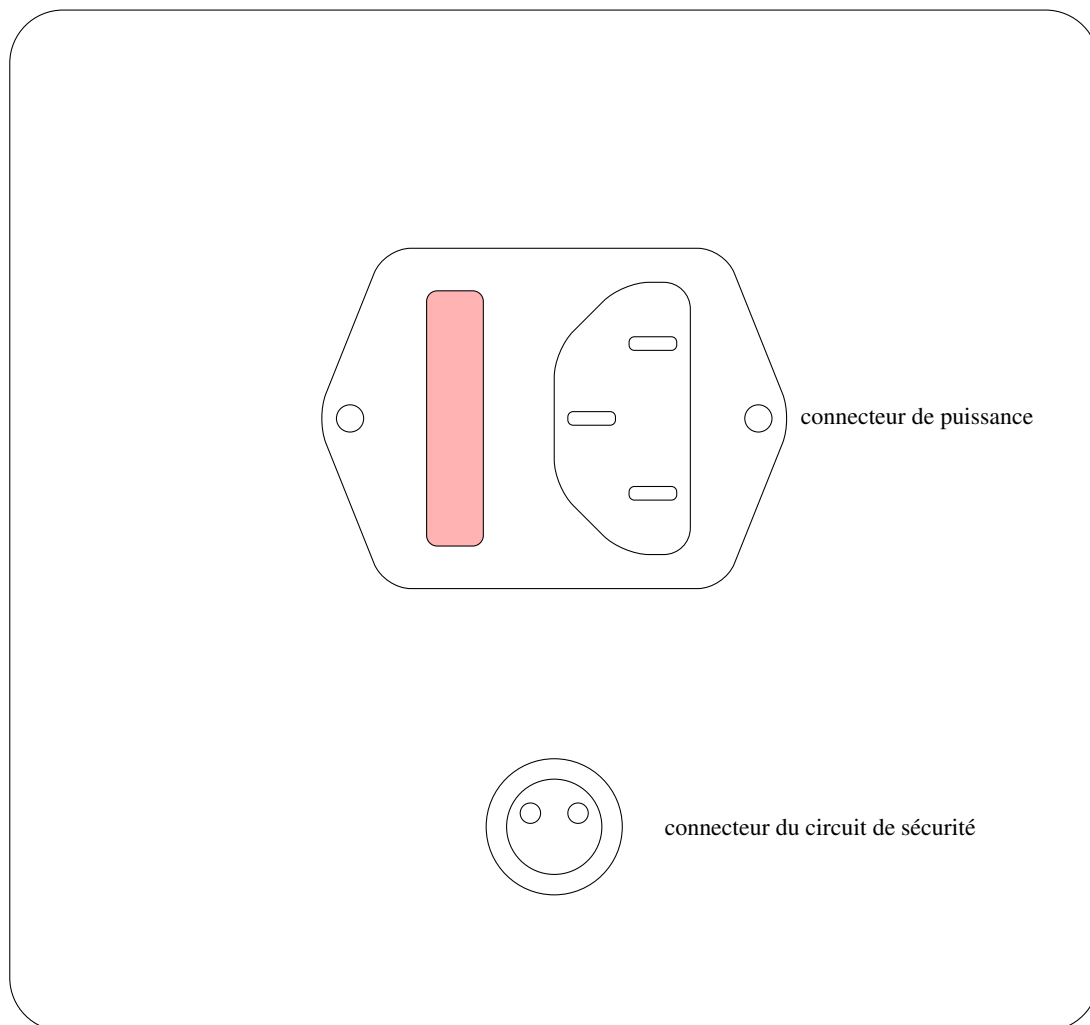
Acquisition et contrôle

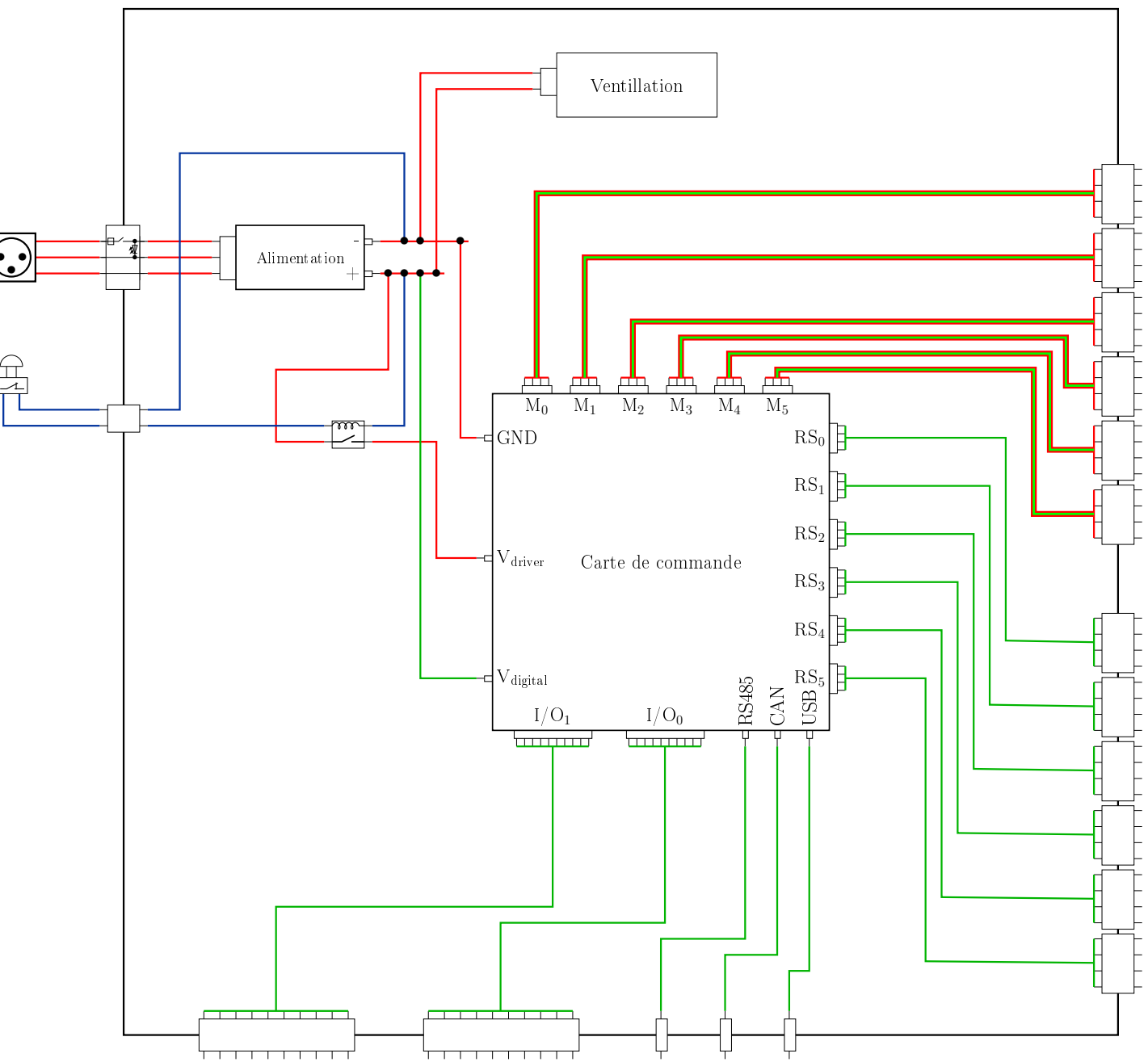
Boîtier de pilotage

Face A

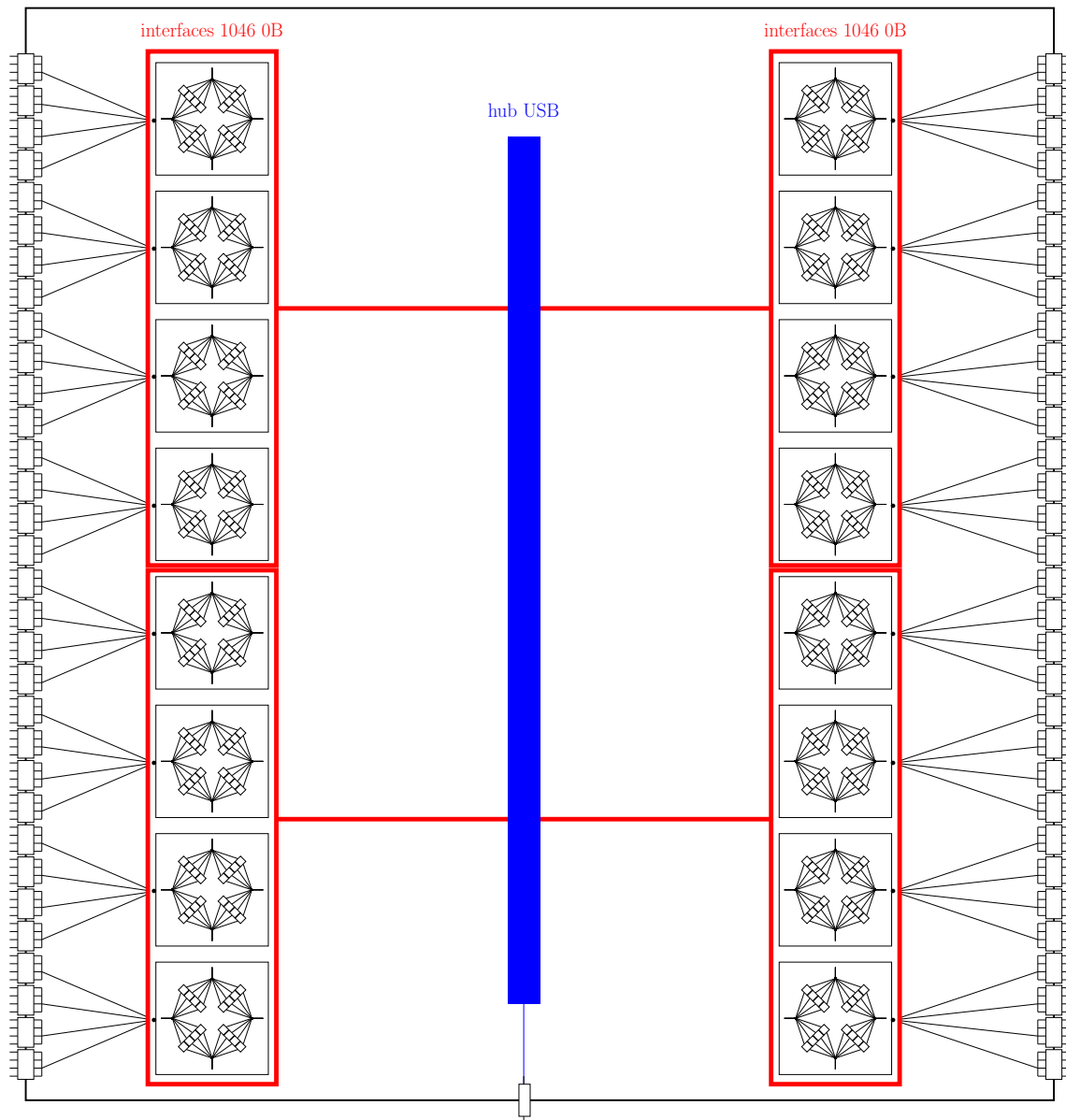


Face B

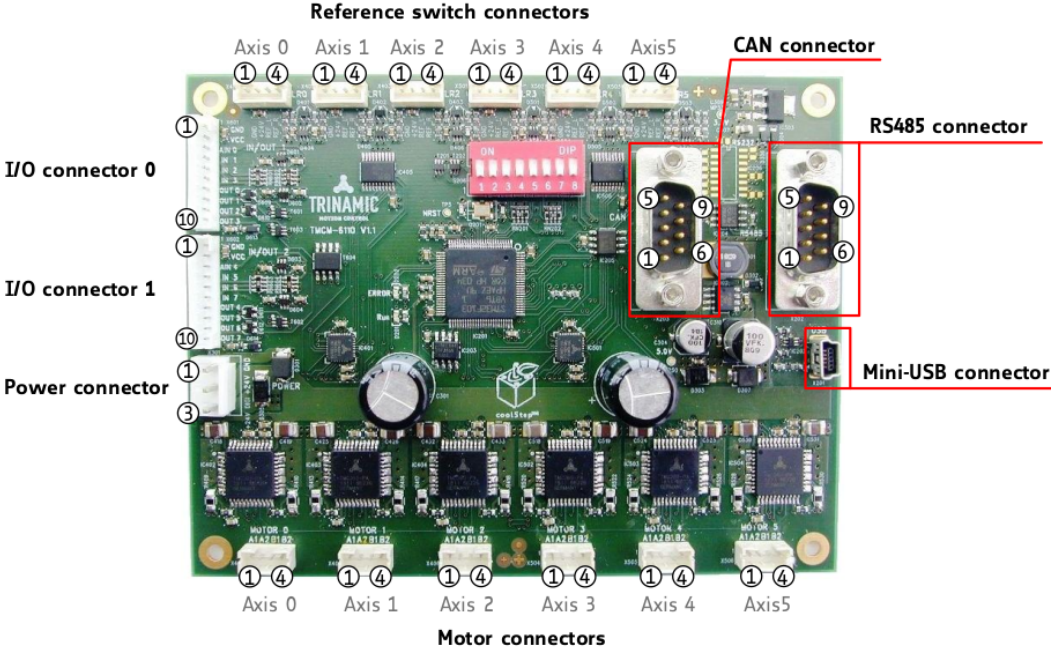




Boîtier d'acquisition

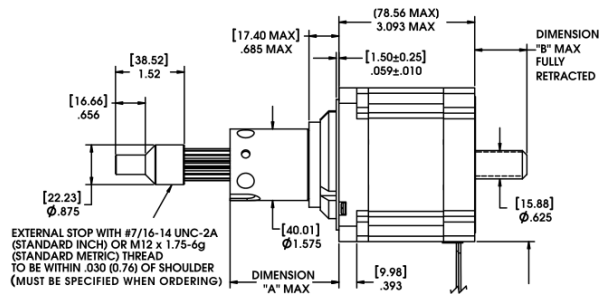
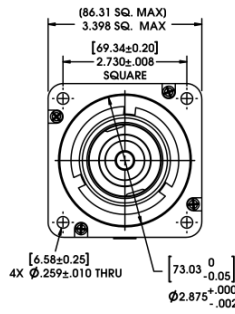


Carte de commande



Moteurs

Captive Lead-screw



| STROKE | DIM. "A" | DIM. "B" | SUFFIX # | M12x1.75 thread |
|-------------|---------------|--------------|----------|-----------------|
| 0.50 (12.7) | 1.225 (31.12) | 0 (0) | -905 | -805 |
| 1.00 (25.4) | 1.725 (43.82) | 0.25 (6.35) | -910 | -810 |
| 1.50 (38.1) | 2.225 (56.52) | 0.75 (19.05) | -915 | -815 |
| 2.00 (50.8) | 2.725 (69.22) | 1.25 (31.75) | -920 | -820 |
| 2.50 (63.5) | 3.225 (81.92) | 1.75 (44.45) | -925 | -825 |



Annexe E

Étude statique du chargement transverse

On représente en Figure E.1 un chargement transverse homogène sur le pantographe.

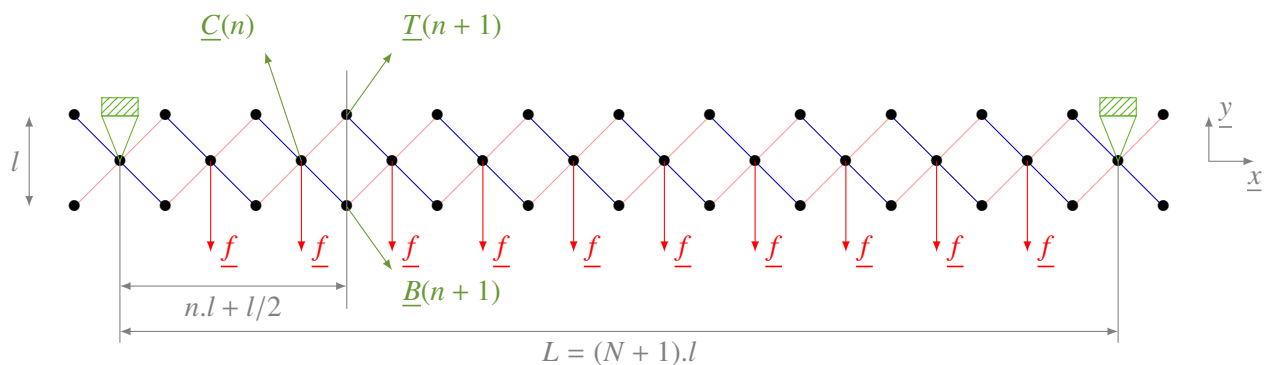


FIGURE E.1: Chargement transverse du pantographe -

Avec :

| | | |
|---|--------------------|---|
| { | n | : numéro cellule élémentaire courante |
| | N | : nombre total de cellules chargées |
| | $N + 2$ | : nombre total de cellules |
| | l | : longueur d'une cellule élémentaire |
| | L | : longueur utile du pantographe |
| | f | : effort local appliqué sur le pantographe |
| | $T(n), B(n), C(n)$ | : effort transisant par la liaison haute, basse, centrale (resp.) de la cellule n |

L'équilibre global donne les efforts de réaction dans les rotules : $\underline{F} = F\mathbf{e}_y = \frac{1}{2}N.f\mathbf{e}_y$

E.1 Premier isolement

Dans un premier temps, on isole les cellules de la partie gauche jusqu'au points d'application de $B(n + 1)$ et $T(n + 1)$ (cf Figure E.2).

Le PFS appliqué à cet isolement donne

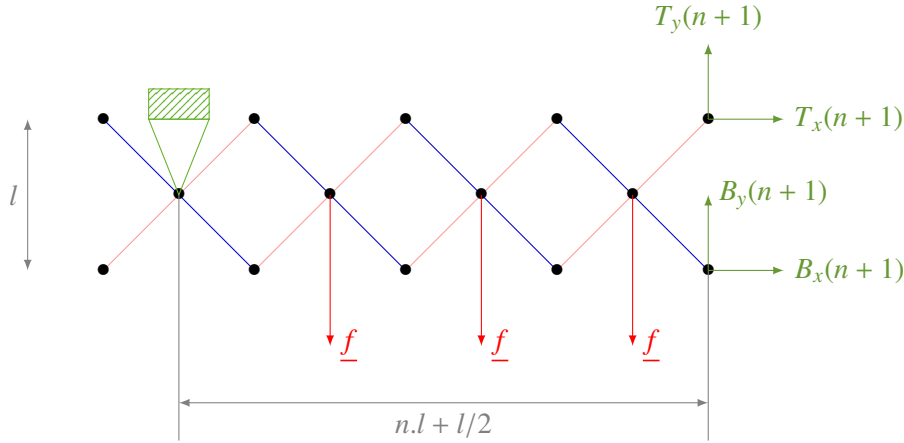


FIGURE E.2: Premier isolement- chargement transverse

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} \\ \text{/z en } M(n.l + l/2, 0) \end{array} \right. \begin{array}{l} T_x(n+1) + B_x(n+1) \\ T_y(n+1) + B_y(n+1) - n f + F \\ -T_x(n+1)l/2 + B_x(n+1)l/2 - F(n.l + l/2) + \sum_{i=1}^n f(n-i+1/2)l \end{array} = 0 \quad (\text{E.1})$$

Ce système est valable $\forall n \in \llbracket 0; N \rrbracket$. On admettra qu'ici, pour simplifier les notations $\sum_{i=1}^0 \dots = 0$.

En reprenant les lignes 1 et 3, on obtient

$$\begin{aligned} 2B_x(n+1)l/2 - F(n.l + l/2) + f l \left[n(n + \frac{1}{2}) - \sum_{i=1}^n i \right] &= 0 \\ 2B_x(n+1)l/2 - F(n.l + l/2) + f l \left[n(n + \frac{1}{2}) - \frac{n(n+1)}{2} \right] &= 0 \\ 2B_x(n+1)l/2 - F(n.l + l/2) + f l \left[\frac{n^2}{2} \right] &= 0 \end{aligned}$$

On sait que $f = \frac{2F}{N}$ on peut donc remplacer :

$$\begin{aligned} 2B_x(n+1)l/2 - F(n.l + l/2) + \frac{2F}{N} l \frac{n^2}{2} &= 0 \\ 2B_x(n+1)l/2 + F l \left[-n.l - l/2 + \frac{n^2}{N} \right] &= 0 \end{aligned}$$

Finalement :

$$B_x(n+1) = -T_x(n+1) = -\frac{F}{2} \left[\frac{2n^2}{N} - 2n - 1 \right] \quad (\text{E.2})$$

On peut maintenant utiliser la deuxième équation du PFS (Equation (E.1))

$$\begin{aligned} T_y(n+1) + B_y(n+1) &= n f - F \\ &= n \frac{2F}{N} - F \end{aligned}$$

Donc

$$T_y(n+1) + B_y(n+1) = F \left(\frac{2n}{N} - 1 \right) \quad (\text{E.3})$$

Pour déterminer particulièrement les valeurs de T_y et B_y il faut avoir recours à d'autres isolements.

E.2 Récurrence

On va montrer par récurrence que

$$B_y(n) = T_y(n) \quad ; \quad \forall n \in \llbracket 0; N \rrbracket$$

E.2.1 Initialisation

Considérons les deux isolements [Figure E.3a](#) et [Figure E.3b](#)

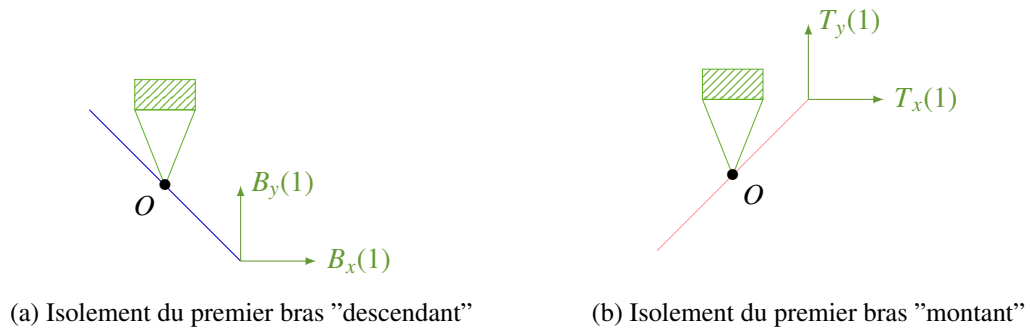


FIGURE E.3: Isolements pour l'initialisation de la récurrence

L'équilibre des moments en O donne :

$$\begin{cases} B_x(1)l/2 + B_y(1)l/2 = 0 \\ -T_x(1)l/2 + T_y(1)l/2 = 0 \end{cases}$$

Or on sait d'après [Equation \(E.1\)](#) que $T_x(1) = -B_x(1)$ donc

$$T_y(1) = B_y(1) \tag{E.4}$$

E.2.2 Hérité

On considère maintenant une cellule courante [Figure E.4](#). Pour laquelle on fait l'hypothèse que :

Hypothèse 5 $T_y(n) = B_y(n)$

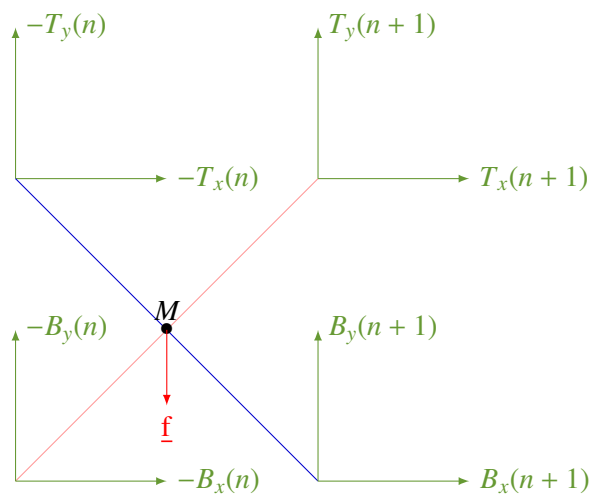


FIGURE E.4: Isolement d'une cellule courante

On isole séparément chacun des bras et on écrit l'équilibre des moments en M

$$\begin{cases} T_x(n)l/2 + T_y(n)l/2 + B_x(n+1)l/2 + B_y(n+1)l/2 = 0 \\ -B_x(n)l/2 + B_y(n)l/2 - T_x(n+1)l/2 + T_y(n+1)l/2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B_y(n+1) = -T_x(n) - T_y(n) - B_x(n+1) \\ T_y(n+1) = B_x(n) - B_y(n) + T_x(n+1) \end{cases}$$

Or on sait d'après Equation (E.1) que $T_x(n) = -B_x(n)$, $\forall n \in \llbracket 0; N \rrbracket$ donc

$$\begin{cases} B_y(n+1) = B_x(n) - T_y(n) + T_x(n+1) \\ T_y(n+1) = B_x(n) - B_y(n) + T_x(n+1) \end{cases}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence 5, on a finalement

$$B_y(n+1) = T_y(n+1)$$

E.2.3 Conclusion

La propriété

$$B_y(n) = T_y(n) \quad ; \quad \forall n \in \llbracket 0; N \rrbracket \quad (\text{E.5})$$

est vraie au rang 1 et est héréditaire, donc la propriété est vraie.

En utilisant Equation (E.2), Equation (E.3) et Equation (E.5) on a :

$$\begin{cases} B_x(n+1) = -T_x(n+1) = -\frac{F}{2} \left[\frac{2n^2}{N} - 2n - 1 \right] \\ T_y(n+1) = B_y(n+1) = \frac{F}{2} \left(\frac{2n}{N} - 1 \right) \end{cases} \quad (\text{E.6})$$

E.3 Effort central

Pour déterminer l'effort transisant au centre, on à plus qu'à isoler un bras Figure F.5.

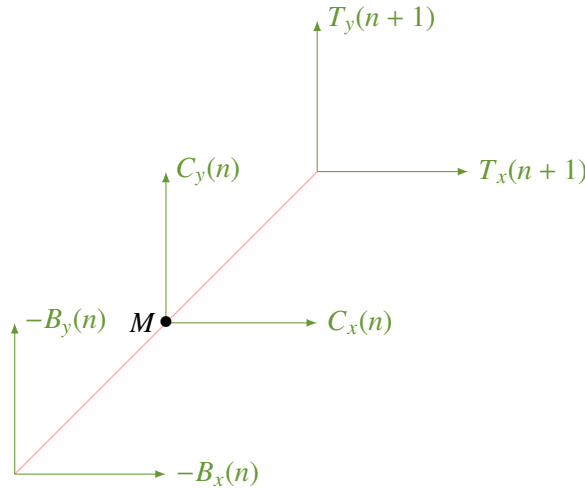


FIGURE E.5: Isolement d'une cellule courante

L'écriture du PFS en résultante sur \underline{x} et \underline{y} donne directement :

$$\begin{cases} C_x(n) = B_x(n) - T_x(n+1) \\ C_y(n) = B_y(n) - T_y(n+1) \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} C_x(n) = -\frac{F}{2} \left[\frac{2(n-1)^2}{N} - 2n + 1 \right] - \frac{F}{2} \left[\frac{2n^2}{N} - 2n - 1 \right] \\ C_y(n) = \frac{F}{2} \left(\frac{2(n-1)}{N} - 1 \right) - \frac{F}{2} \left(\frac{2n}{N} - 1 \right) \end{cases}$$

Finalement on obtient

$$\begin{cases} C_x(n) = -F \left[\frac{2n^2 - 2n + 1}{N} - 2n \right] \\ C_y(n) = -\frac{F}{N} \end{cases} \quad (\text{E.7})$$

Annexe F

Étude statique du chargement axial

On représente en Figure E.1 un chargement axial homogène sur le pantographe.

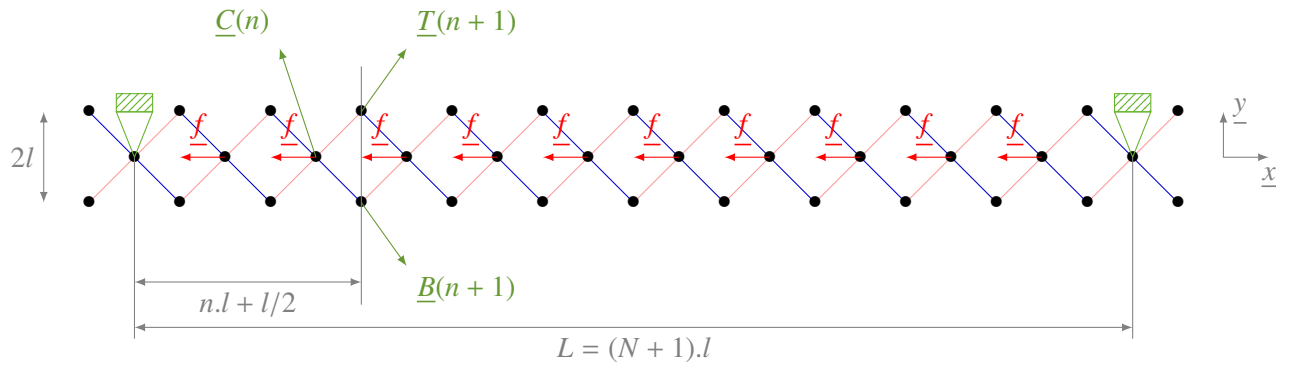



FIGURE F.1: Chargement axial du pantographe -

Avec :

- n : numéro cellule élémentaire courante
- N : nombre total de cellules chargées
- $N + 2$: nombre total de cellules
- $2l$: longueur d'une cellule élémentaire
- L : longueur utile du pantographe
- f : effort local appliqué sur le pantographe
- $T(n), B(n), C(n)$: effort transitant par la liaison haute, basse, centrale (resp.) de la cellule n

Par symétrie du problème, l'équilibre global donne les efforts de réaction dans les rotules  : $\underline{F} = F \underline{e}_x = \frac{1}{2} N \cdot f \underline{e}_x$

F.1 Premier isolement

Dans un premier temps, on isole les cellules de la partie gauche jusqu'au points d'application de $B(n+1)$ et $T(n+1)$ (cf Figure F.2).

Le PFS appliqué à cet isolement donne

$$\begin{cases} / \underline{x} & T_x(n+1) + B_x(n+1) - n f + F = 0 \\ / \underline{x} & T_y(n+1) + B_y(n+1) = 0 \\ / \underline{z} \text{ en } M(n.l + l/2, 0) & -T_x(n+1)l + B_x(n+1)l = 0 \end{cases} \quad (\text{F.1})$$

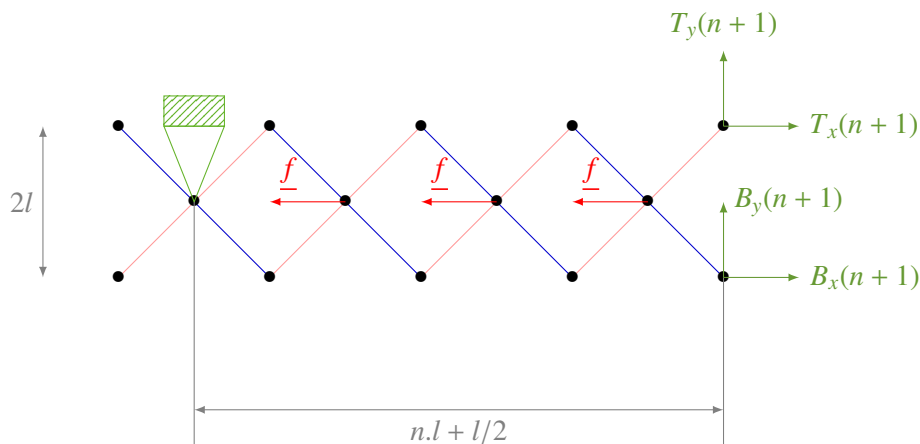


FIGURE F.2: Chargement du pantographe -

Ce système est valable $\forall n \in [0; N]$. Les équations 1 et 3 donnent

$$T_x(n+1) = B_x(n+1) = \frac{1}{2}(nf - F)$$

On sait que $f = \frac{2F}{N}$ on peut donc remplacer :

$$T_x(n+1) = B_x(n+1) = \frac{F}{2} \left(\frac{2n}{N} - 1 \right) \quad (\text{F.2})$$

D'après la deuxième équation, on sait que

$$T_y(n+1) = -B_y(n+1) \quad (\text{F.3})$$

Pour déterminer particulièrement les valeurs de T_y et $+B_y$ il faut avoir recours à d'autres isolements.

F.2 Récurrence

On va montrer par récurrence que

$$B_y(n) = -\frac{F}{2} \left[\frac{2(n-1)^2}{N} - 2n + 1 \right]$$

F.2.1 Initialisation

Considérons l'isolement Figure F.3

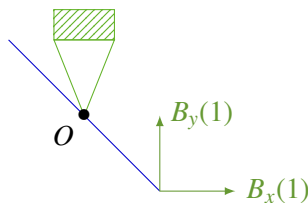


FIGURE F.3: Isolement du premier bras "descendant"

L'équilibre des moments en O donne :

$$B_x(1)l + B_y(1)l = 0$$

Donc

$$B_y(1) = -B_x(1) = \frac{F}{2} = -\frac{F}{2} \left[\frac{2(1-1)^2}{N} - 2 \times 1 + 1 \right] \quad (\text{F.4})$$

F.2.2 Hérité

On considère maintenant un bras courant [Figure F.4](#). Pour lequel on fait l'hypothèse que :

Hypothèse 6 $B_y(n) = -\frac{F}{2} \left[\frac{2(n-1)^2}{N} - 2n + 3 \right]$

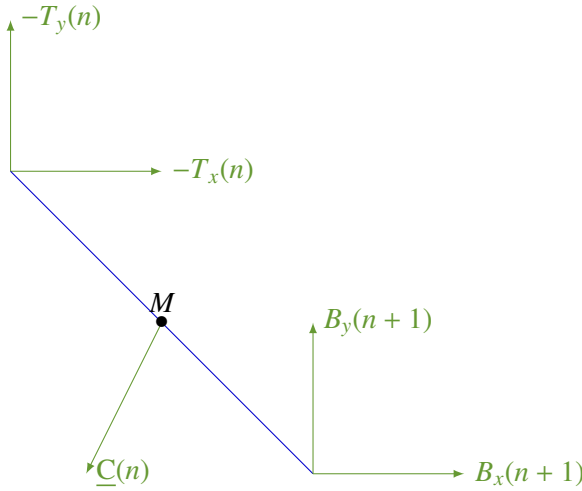


FIGURE F.4: Isolement d'une cellule courante

L'équilibre des moments en M donne :

$$T_x(n)l + T_y(n)l + B_x(n+1)l + B_y(n+1)l = 0$$

$$\Leftrightarrow B_y(n+1) = -T_x(n) - T_y(n) - B_x(n+1)$$

Or $T_y(n) = -B_y(n)$ ([Equation \(F.1\)](#)) dont on connaît l'expression par l'hypothèse 6. De plus, $T_x(n)$ et $B_x(n-1)$ sont donnés par l'[Equation \(F.2\)](#). On a donc

$$\begin{aligned} B_y(n+1) &= -\frac{F}{2} \left(\frac{2(n-1)}{N} - 1 \right) - \frac{F}{2} \left[\frac{2(n-1)^2}{N} - 2n + 3 \right] - \frac{F}{2} \left(\frac{2n}{N} - 1 \right) \\ &= -\frac{F}{2} \left[\frac{2(n-1) + 2(n-1)^2 + 2n}{N} - (1 + 2n - 1 + 1) \right] \\ &= -\frac{F}{2} \left[\frac{2n - 2 + 2n^2 - 4n + 2 + 2n}{N} - (2(n+1) - 1) \right] \\ &= -\frac{F}{2} \left[\frac{2n^2}{N} - (2(n+1) - 1) \right] \end{aligned}$$

C'est à dire

$$B_y(n+1) = -\frac{F}{2} \left[\frac{2(n+1-1)^2}{N} - 2(n+1) + 1 \right] \quad (\text{F.5})$$

F.2.3 Conclusion

La propriété

$$B_y(n) = -\frac{F}{2} \left[\frac{2(n-1)^2}{N} - 2n + 1 \right] \quad (\text{F.6})$$

est vraie au rang 1 et est héréditaire, donc la propriété est vraie.

En utilisant Equation (F.2), Equation (F.3) et Equation (F.5) on a :

$$\begin{cases} T_x(n+1) = B_x(n+1) = \frac{F}{2} \left(\frac{2n}{N} - 1 \right) \\ T_y(n+1) = -B_y(n+1) = \frac{F}{2} \left[\frac{2n^2}{N} - 2n - 1 \right] \end{cases} \quad (\text{F.7})$$

F.3 Effort central

Pour déterminer l'effort transisant au centre, on à plus qu'à isoler un bras Figure F.5.

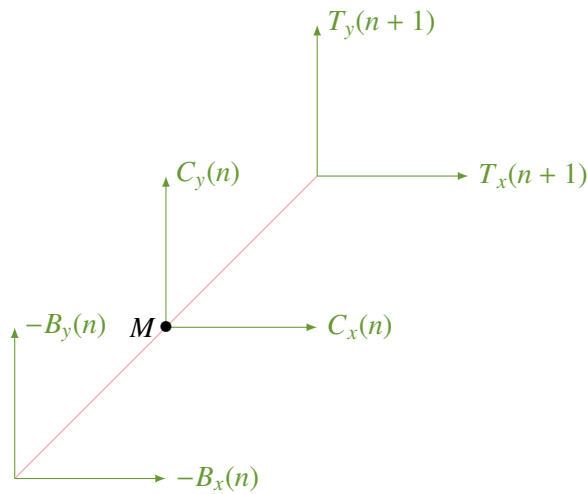


FIGURE F.5: Isolement d'une cellule courante

L'écriture du PFS en résultante sur \underline{x} et \underline{y} donne directement :

$$\begin{cases} C_x(n) = B_x(n) - T_x(n+1) \\ C_y(n) = B_y(n) - T_y(n+1) \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} C_x(n) = \frac{F}{2} \left(\frac{2(n-1)}{N} - 1 \right) - \frac{F}{2} \left(\frac{2n}{N} - 1 \right) \\ C_y(n) = -\frac{F}{2} \left[\frac{2(n-1)^2}{N} - 2(n-1) - 1 \right] - \frac{F}{2} \left[\frac{2n^2}{N} - 2n - 1 \right] \end{cases}$$

Finalement on obtient

$$\begin{cases} C_x(n) = \frac{-F}{N} \\ C_y(n) = -F \left[\frac{2n^2 - 2n + 1}{N} - 2n \right] \end{cases} \quad (\text{F.8})$$

Annexe G

Fabrication

Pour les pantographes, une réflexion sur la fabrication est menée afin de

- garantir la qualité des liaisons souples ;
- permettre un montage aussi aisé que possible ;
- garantir l’alignement des liaisons souples ;
- avoir un coût réduit.

Pour garantir l’alignement des liaisons souples ainsi que faciliter le montage, le choix est fait de réaliser les bras des pantographes par plaques (Figure G.1). ce qui permet d’assembler seulement 7 éléments par pantographes : 3 plaques bras souples (0, plus et moins), 3 plaques bras rigides et une plaque pour les attaches au lieu d’assembler tous les bras séparément (ce qui représenterait 106 éléments distincts). De plus ce montage par plaque permet d’ajouter un pion de référence : sur chaque plaque, des perçages de référence sont réalisés lors de la phase d’usinage et lors du montage on passe un axe calibré dans ces trous de centrage.

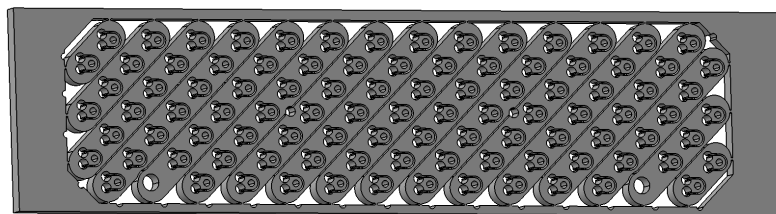


FIGURE G.1: Image CAO d'une plaque

Au début du procédé on possède donc une plaque de d'aluminium 7075 de 10mm. Celle-ci est utilisée telle quelle (pas de rectification) car une mesure au marbre et comparateur montre que le défaut d'enveloppe est faible ($\pm 100 \mu\text{m}$) d'un bout à l'autre de la plaque (400 mm).

Pour garantir la qualité des liaisons souples (état de surface et épaisseur) les perçages des liaisons souples sont réalisés sur fraiseuse CN permettant un positionnement très précis (erreur max de quelques μm) des centres des perçages. De même un forêt de bonne qualité est utilisé permettant d'obtenir une qualité H7 et donc une épaisseur de liaison souple bien maîtrisée.

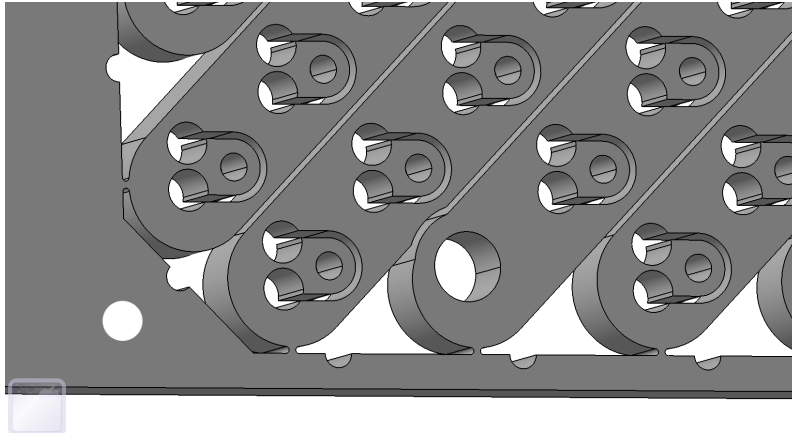
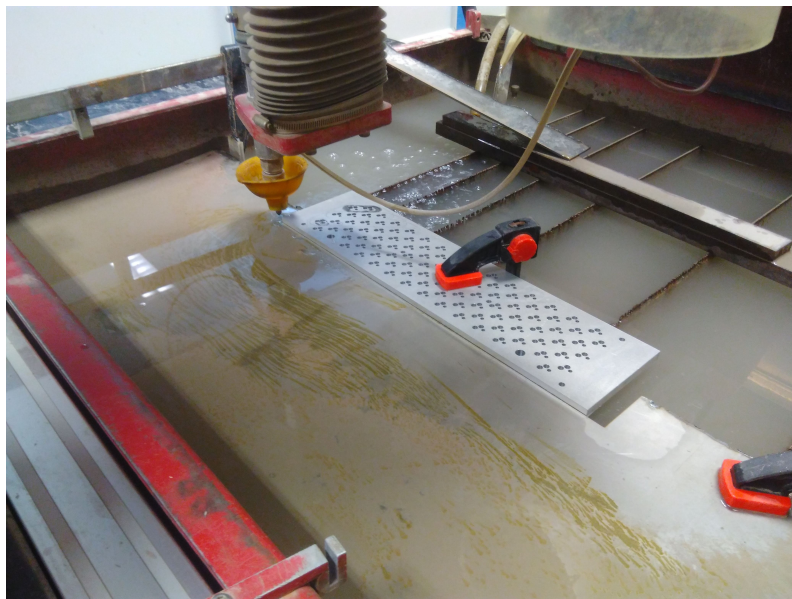


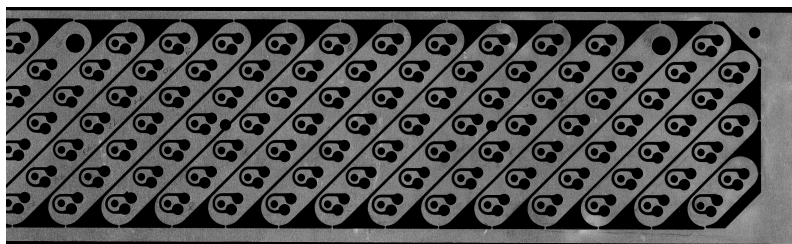
FIGURE G.2: Détail de géométrie : trou de centrage et liaison avec le système de pilotage



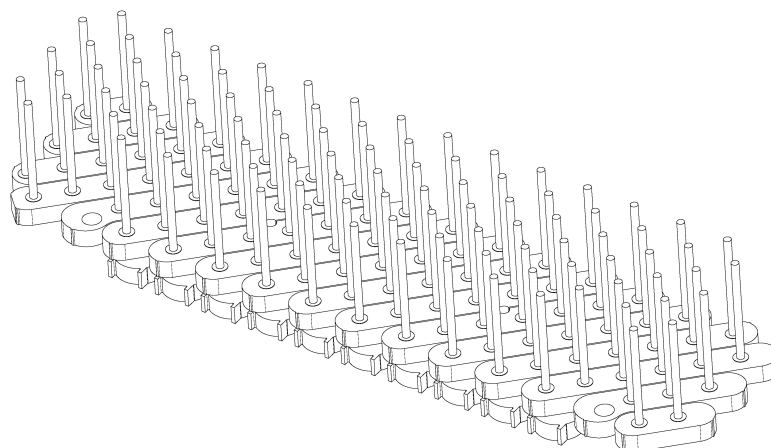
Après cette phase de perçage on obtient une plaque avec des liaisons souples non libérées et sans les bras. Pour passer de cette état à une plaque utilisable on va utiliser une machine de découpe jet d'eau pour venir détacher les liaisons souples ainsi que les bras.



Cette technique permet de réaliser cette opération rapidement (20 minutes par plaque) et à faible coût (environ 10€ par plaque). On a alors une plaque utilisable.



Pour l'assemblage, on insère des axes calibrés (en diamètre) dans les trous de référence de la première plaque, on passe toutes les vis et on vient mettre une rondelle calibrée (en épaisseur) autour de chaque vis afin de séparer les plaques pour qu'elles ne frottent pas les unes sur les autres.



Enfin, une fois le pantographe assemblé :



On libère le mécanisme en coupant les amarres entre les bras et la plaque par électro-érosion afin de ne pas créer de copeaux qui pourraient venir se loger entre les bras des différents étages et créer du frottement.

Annexe H

Indication des temps de fabrication et de montage

| Opération | | Nombre d'opérateurs | Temps |
|---|-------------------------|---------------------|------------|
| Usinages | | | |
| pantographes | perçages des plaques | 1 | 35h |
| | découpe jet d'eau | 1 | 40h |
| | assemblage | 1 | 24h |
| | découpe électro érosion | 1 | ? |
| | total | 12h20 | 99h |
| usinage de pièces diverses | | 1 | 30 |
| soudures | | 1 | 5 |
| Électronique | | | |
| montage des boîtiers de pilotage et de commande | | 1 | 30h |
| soudure des connectiques | | 1 | 70h |
| câblage du montage | | 2 | 30h |
| Montage et alignement | | | |
| structure | | 4 | 2h |
| pieds et actionneurs | | 2 | 24h |
| fourchettes | | 2 | 12h |
| ensemble central | | 2 | 30h |
| total | | | 330 |

TABLE H.1: Temps dédiés à la fabrication et au montage