



HAL
open science

L'atténuation des ondes sismiques en utilisant des métamatériaux

Michaël Darche

► **To cite this version:**

Michaël Darche. L'atténuation des ondes sismiques en utilisant des métamatériaux. Génie civil. Université Paris-Saclay, 2021. Français. NNT : 2021UPAST030 . tel-03551871

HAL Id: tel-03551871

<https://theses.hal.science/tel-03551871>

Submitted on 2 Feb 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

L'atténuation des ondes sismiques en
utilisant des métamatériaux
*Seismic waves attenuation using
metamaterials*

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay

École doctorale n°579, Sciences Mécaniques et Énergétiques,
Matériaux et Géosciences (SMEMAG)
Spécialité de doctorat : Génie Civil
Unité de recherche : Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, CNRS,
Laboratoire de Mécanique des Sols, Structures et Matériaux, 91190,
Gif-sur-Yvette, France
Réfèrent : CentraleSupélec

**Thèse présentée et soutenue à Paris-Saclay,
le 31 mars 2021, par**

Michaël DARCHE

Composition du jury

Bernardo CAICEDO HORMAZA Professeur, Universidad de los Andes	Président
Yann CAPDEVILLE Directeur de recherche, Université de Nantes	Rapporteur & Examineur
Fabrizio SCARPA Professeur, University of Bristol	Rapporteur & Examineur
Stéphanie CHAILLAT-LOSEILLE Chargée de recherche, HdR, ENSTA Paris-Tech	Examinatrice
Éric SAVIN Chercheur, HdR, ONERA	Examineur

Direction de la thèse

Bing TIE Chargée de recherche, HdR, CentraleSupélec	Directrice
Fernando LOPEZ-CABALLERO Maitre de Conférence, CentraleSupélec	Coencadrant

À ma mère,

Remerciements

Je vais commencer par remercier tous ceux qui ont rendu ce travail possible en allant plus loin qu'un classique "Je suis content".

Tout d'abord, ma gratitude va à mes encadrants qui ont su m'aider à aller jusqu'au bout de ce projet. Je remercie Bing TIE pour son accompagnement régulier et pour m'avoir régulièrement remotivé pour cette thèse et à Fernando LOPEZ-CABALLERO pour sa disponibilité dans au labo comme en dehors et pour m'avoir aidé à monter ce projet et d'y avoir cru dès le début. Merci à Denis AUBRY, avec qui j'ai beaucoup échangé au début de la thèse et qui a toujours été de bon conseil.

Je tiens ensuite à remercier les membres de mon jury pour les discussions très enrichissantes lors de ma soutenance. Merci donc à Yann CAPDEVILLE et Fabrizio SCARPA d'avoir accepté de rapporter mes travaux et à Stéphanie CHAILLAT-LOSEILLE et à Éric SAVIN d'avoir examiné cette thèse avec attention.

Ensuite, un grand merci à Bernardo CAICEDO HORMAZA pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury et pour m'avoir accueilli chaleureusement au sein de l'Universidad de los Andes. Merci aussi à Julieth pour m'avoir forcé à apprendre l'espagnol et pour son expertise, à Jairo pour les essais, à Greg pour sa bonne humeur et ses conseils avisés sur la vie colombienne ainsi qu'à Edu, Henri, Juan, Jaime, Sandra.

La thèse c'est long et je pense que tout ce travail aurait été difficile sans l'appui de mes collègues, Adrien en particulier a été providentiel sur la fin de ma thèse et je le remercie d'avoir pris du temps pour couvrir mes lacunes quand j'étais dans le rush. Je remercie bien évidemment ceux avec qui j'ai partagé un bureau (Christina, Sarah, Raphaël), joué au foot (Romain, Martin, Michail, Guillaume, Andrea, David, Christian, les adversaires du LMT, Elsa), ceux qui m'ont précédé pour leur accueil (Filippo, Lucio, Luciano, Mathieu, Kyo, Hélène, Ahmed, Régis), et à tous les autres qui m'ont permis de changer d'air quand il le fallait (Claudia, Anne, Louis, Laure, Yannick, Valeria, Andrea, Yilun et bien d'autres).

Cette thèse n'aurait aussi pas été possible sans le soutien de mes très nombreux colocs, surtout pour les différents points de chute que j'ai eu l'occasion de tester pendant ma dernière année de thèse, je tiens donc à remercier Marie, TchoTcho, le Pap, Mathou, Féfé, Nobod, Auriane et Chloé. Toute ma reconnaissance aussi à mes compagnons de thèse et de bar (Fred et Richou), aux Déglingos (Pépette et Chatan), aux fins gourmets (Marion et Lele), à la team lève-tôt (Baluche et Nico), aux supporters du PSG (Daphné et FR6), aux décolorés (Fanfoué et Lala) et aux amateurs de rap (Bouya et Alice) pour les moments de détente, de concert, de matchs, de soirées, de coiffure, de séries et de distractions en tous genres à la Bikok. Merci par ailleurs à Vincent et Richard pour leurs relectures.

Bien évidemment une énorme pensée pour ceux qui m'ont connu et soutenu avant tous les autres : les plus anciens (Francesco, Malik, Rémi, Hakim, Jow, Don Malik pour ne citer qu'eux) comme les plus récents de prépa ou de l'ENS (qui sont trop nombreux pour que je me risque à en citer quelques uns) et qu'il me tarde de revoir bientôt.

Je remercie chaleureusement ma famille qui m'a toujours soutenu et appuyé dans mes choix. En particulier pour Darwin qui garde toujours le sourire même dans les moments difficiles et à mon père qui m'a toujours fait confiance. Mes remerciements sont aussi pour Alex évidemment.

Ces dernières lignes sont enfin pour ma mère afin de la remercier pour tout ce qu'elle m'a donné, et je suis content de l'avoir toujours rendue fière.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Description de l'étude et état de l'art	3
1.1 Ondes sismiques et contrôle des vibrations	4
1.1.1 Ondes sismiques	4
1.1.2 Phénomènes liés à la propagation des ondes dans les sols	6
1.1.3 Contrôle des vibrations	7
1.1.4 Développement des métamatériaux et cristaux phononiques	7
1.1.5 Métamatériaux sismiques	8
1.2 Propagation des ondes en milieux complexes	8
1.2.1 Mise en équation du problème modèle élastodynamique	9
1.2.2 Lois d'interface entre deux milieux homogènes	10
1.3 Outils théoriques et numériques pour la propagation d'ondes	12
1.3.1 Simulation numérique de la propagation des ondes dans les solides	13
1.3.2 Simulation de milieux infinis	14
1.4 Théorie de Floquet-Bloch dans un milieu périodique infini	15
1.4.1 Transformée de Floquet-Bloch	15
1.4.2 Première zone de Brillouin	16
1.4.3 Transformation inverse	17
1.4.4 Exemple sur un cas 2D	17
1.4.5 Bandes interdites en fréquence	18
1.5 Cadre et décomposition de l'étude	19
2 Propagation d'ondes hors-plan à l'intérieur et aux frontières d'un milieu périodique	23
2.1 Comportement d'un milieu stratifié périodique infini	24
2.1.1 Analyse de Bloch à l'échelle de la cellule	25
2.1.2 Analyse des relations de dispersion	28
2.2 Comportement à l'interface d'un milieu stratifié semi-infini.	32
2.2.1 Propriété d'orthogonalité des modes de Bloch	32
2.2.2 Projection des modes	35
2.2.3 Illustration avec des résultats numériques	37
2.3 Propriété d'un milieu infini périodique selon deux directions	43
2.4 Prise en compte du caractère borné du milieu périodique en 2D	45
2.4.1 Éléments de théorie spectrale pour les guides d'ondes ouverts	46
2.4.2 Principe et résultats préliminaires d'une étude modale en guide d'onde 1D d'un milieu périodique borné à inclusion	47

2.4.3	Étude d'une barrière périodique 2D bornée dans une direction	57
3	Généralisation de l'étude d'un métamatériau	65
3.1	Comportement d'un milieu élastique stratifié infini	66
3.1.1	Analyse de Bloch à l'échelle de la cellule	66
3.1.2	Analyse des courbes de dispersion	69
3.2	Prise en compte d'une interface pour un milieu stratifié semi-infini	71
3.3	Propriété d'un milieu élastique infini périodique selon deux directions	75
3.3.1	Influence des paramètres géométriques	76
3.3.2	Influence du matériau de l'inclusion	77
3.3.3	Résumé des effets de paramètres	85
3.4	Apport des structures à résonance locale	87
3.5	Extension des lois d'interface à un milieu acoustique 3D	92
3.5.1	Description de l'étude à l'interface	92
3.5.2	Vérification de l'orthogonalité des modes	93
3.5.3	Projection des modes	97
4	Modèle réduit de barrière sismique utilisant des inclusions périodiques	99
4.1	Réalisation du modèle réduit	100
4.1.1	Préparation de la matrice en kaolin	101
4.1.2	Réalisation des inclusions et paramètres géométriques	101
4.1.3	Propriétés des inclusions	103
4.1.4	Conditions de l'essai et instrumentation	105
4.1.5	Deux configurations expérimentales	106
4.1.6	Courbes de dispersion des milieux périodiques testés	106
4.2	Procédure de mesure et réponse du bloc homogène	109
4.2.1	Bruit de mesure	109
4.2.2	Présentation des résultats expérimentaux	109
4.2.3	Intercorrélation pour déterminer les propriétés du sol	109
4.2.4	Réponse du bloc non symétrique et résonance du bloc	111
4.3	Principales conséquences à l'ajout du milieu périodique	113
4.3.1	Présence d'ondes piégées à l'intérieur de la barrière	113
4.3.2	Modification de la réponse fréquentielle du bloc avec les hétérogénéités	113
4.3.3	Invisibilité du métamatériau	115
4.4	Modélisation modale de l'expérience	116
4.4.1	Géométrie de la réalisation expérimentale	116
4.4.2	Prise en compte d'inclusions supplémentaires au centre	117
4.5	Mise en évidence de bandes de fréquence filtrées sur des simulations temporelles	119
	Conclusions et perspectives	127
A	Vérification de l'extension de Snell-Descartes sur des demi-espace homogènes sous incidence normale	I
B	Des simulations temporelles pour vérifier le comportement du guide d'ondes	V
B.1	Réponse du guide d'onde dans les cas homogène et avec 16 inclusions	VI
B.2	Comparaison dans le domaine fréquentiel	VIII

Introduction générale

Contexte et motivations

Les vibrations sont souvent des phénomènes aux conséquences néfastes qu'il faut supprimer dans de nombreux cas industriels. Ce sont par exemple des sources de bruit comme dans le cas de conception ferroviaire ou aéronautique, ou des vibrations induites par un séisme qui doivent être contrôlées pour limiter les dégâts sur les structures. Si la recherche, influant sur la réglementation, permet en évoluant de mieux estimer et définir l'aléa sismique, les séismes causent des dégâts souvent importants sur les constructions pré-existantes. Plus particulièrement, des contraintes sur les bâtiments classés et le coût de travaux de réhabilitation appropriés rendent la protection efficace de ces structures très problématique.

La construction parasismique consiste aujourd'hui à ajouter soit des éléments utilisés pour rigidifier la structure, soit des éléments élastiques (de type amortisseurs) à la base des bâtiments. Ce sont donc des éléments qui peuvent être détériorés suite à un séisme. D'autres études permettent d'étudier les risques endurés par un séisme en fonction de la localisation du séisme. L'étude de la liquéfaction des sols et des effets de site dus notamment à la composition des sols et à la topologie du terrain permet donc de concevoir des solutions technologiques et des stratégies de construction afin de limiter les effets de séismes. La mise en évidence des interactions entre les ondes et la microstructure d'un milieu périodique a permis d'imaginer un nouveau moyen de penser la protection parasismique : plutôt que d'améliorer le comportement des bâtiments à protéger, mettre en place des éléments permettant de réduire en amont l'impact des ondes sismiques grâce à leur interaction avec le sol environnant modifié de manière adéquate. C'est pourquoi la multiplication des études sur le développement de matériaux architecturés ayant des propriétés non conventionnelles sur la propagation des ondes nous permet de s'intéresser à l'utilisation de tels milieux pour atténuer les ondes avant qu'elles n'atteignent le bâtiment.

Dans ce travail, le but est de comprendre et d'analyser le comportement des structures périodiques, la façon de les dimensionner, autant à l'échelle de la cellule qu'à l'échelle du système périodique. L'une des problématiques dans le passage d'une échelle à l'autre est de prendre en compte la présence d'interfaces entre le milieu architecturé périodique (supposé infini dans le cas de l'étude d'une seule cellule) et le sol environnant. Se mettant dans le domaine parasismique, on essaie autant que possible de se conformer aux contraintes du domaine du Génie Civil, que ce soit du point de vue des matériaux, où le béton et l'acier sont prédominants, mais aussi du point de vue des ordres de grandeurs.

Plan du manuscrit

Le CHAPITRE 1 présente un état de l'art de l'analyse et du contrôle des ondes par la présence d'hétérogénéités dans le milieu, notamment en s'intéressant aux cristaux phononiques et à leurs propriétés. Ensuite, les principales équations du problème modèle considéré dans la thèse sont développées dans un cadre général et les différents outils théoriques, notamment la transformée de Floquet-Bloch, et numériques sont présentés.

Dans le CHAPITRE 2, un cas acoustique 2D est étudié. Les hypothèses proposées permettent de faciliter

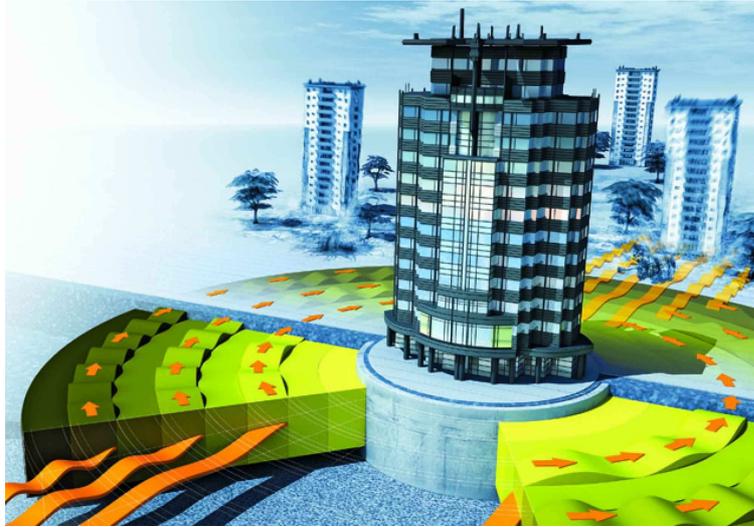


FIGURE 1 – Vue d’artiste d’un projet de cape d’invisibilité aux ondes sismiques.

la compréhension du problème posé et des outils théoriques et numériques développés. Le comportement des ondes à la frontière entre un milieu supposé homogène et un milieu périodique est donc analysé pour le cas d’un milieu stratifié. Plusieurs outils sont développés pour traiter ce problème aux interfaces.

Les différentes méthodes développées sont ensuite étendues au problème des ondes élastiques et à un cas acoustique 3D dans le CHAPITRE 3. La prise en compte d’une interface 2D et d’un cas élastodynamique sont étudiés. Des études paramétriques permettent finalement de donner des premiers éléments de dimensionnement de tels milieux périodiques.

Un cas expérimental sur un modèle réduit est construit et étudié dans le CHAPITRE 4. La réalisation de l’essai, puis l’analyse des résultats sont décrits. De plus, les différents outils théoriques et numériques présentés dans les autres chapitres sont utilisés pour effectuer une comparaison essai/calcul et valider certaines hypothèses faites dans les études théoriques et numériques.

Chapitre 1

Description de l'étude et état de l'art

L'étude de la propagation des ondes sismiques dans le sol et de son interaction avec les structures est une démarche essentielle au dimensionnement des ouvrages face à l'aléa sismique. Les structures sont en effet plus ou moins vulnérables en fonction de leurs caractéristiques (matériaux, géométrie) et de leur localisations (qualité du sol, effet de site). La résilience des structures est aussi un effet à prendre en compte dans le processus de dimensionnement.

La littérature propose de nombreuses solutions pour modifier la propagation des ondes par des solutions non-intrusives vis-à-vis de l'ouvrage, notamment en utilisant des inclusions périodiquement placées dans le sol. Il existe en effet de nombreux phénomènes liés à la propagation des ondes (réflexion, réfraction, diffraction, etc) dans un milieu non-homogène à cause de la présence d'hétérogénéités perturbant la propagation. Plusieurs types d'études permettent de mettre en évidence l'intérêt de telles modifications du sol dans l'objectif de créer une protection parasismique efficace selon le type d'ouvrage.

Afin d'étudier l'effet d'inclusions sur la propagation des ondes sismiques dans le sol, on commence par mettre en place le modèle de propagation des ondes et de comportement dans chacun des différents milieux puis aux interfaces entre ceux-ci. En effet, les phénomènes liés à la propagation des ondes en milieu hétérogène doivent alors être bien décrits pour simuler le comportement de tels arrangements.

Les différents outils théoriques et numériques utilisés dans le cadre de cette thèse sont introduits. Les méthodes numériques pouvant se révéler coûteuses dans le cas de milieux hétérogènes, la description de la propagation des ondes dans les milieux périodiques en utilisant la transformée de Floquet-Bloch est ensuite présentée.

Enfin, afin de simplifier l'étude des interactions entre les ondes et leurs milieux de propagation, des hypothèses et des modélisations permettant de séparer les difficultés sont alors proposées.

Sommaire

1.1 Ondes sismiques et contrôle des vibrations	4
1.1.1 Ondes sismiques	4
1.1.2 Phénomènes liés à la propagation des ondes dans les sols	6
1.1.3 Contrôle des vibrations	7
1.1.4 Développement des métamatériaux et cristaux phononiques	7
1.1.5 Métamatériaux sismiques	8
1.2 Propagation des ondes en milieux complexes	8
1.2.1 Mise en équation du problème modèle élastodynamique	9
1.2.2 Lois d'interface entre deux milieux homogènes	10
1.3 Outils théoriques et numériques pour la propagation d'ondes	12
1.3.1 Simulation numérique de la propagation des ondes dans les solides	13
1.3.2 Simulation de milieux infinis	14
1.4 Théorie de Floquet-Bloch dans un milieu périodique infini	15
1.4.1 Transformée de Floquet-Bloch	15
1.4.2 Première zone de Brillouin	16
1.4.3 Transformation inverse	17
1.4.4 Exemple sur un cas 2D	17
1.4.5 Bandes interdites en fréquence	18
1.5 Cadre et décomposition de l'étude	19

1.1 Ondes sismiques et contrôle des vibrations

1.1.1 Ondes sismiques

Les séismes sont des évènements géologiques dus aux déplacements des plaques tectoniques créant des zones de subduction ou des chocs entre elles. Cette libération soudaine d'énergie est dissipée à partir de la faille en énergie thermique et en ondes se propageant dans les milieux environnants. Deux types d'ondes se propagent dans les milieux solides : les ondes de compression (aussi appelées ondes P) et les ondes de cisaillement (ondes S). Ces ondes ont des fréquences allant jusqu'à 50 Hz (Naeim, 1989).

Pour les ondes P, la direction de la perturbation est dans la direction de propagation alors que dans le cas des ondes S, la perturbation est normale au sens de propagation. La FIGURE 1.1 présente ces deux types d'ondes dans le cas d'une propagation 2D selon une direction. Dans un repère spatial orthogonal, les ondes S peuvent donc être projetées sur les deux composantes dans le plan orthogonal à la direction de propagation de l'onde. Elles sont appelées ondes SV et ondes SH.

Lorsque les ondes de volume rencontrent une surface libre, une partie des ondes est réfléchiée et une partie des ondes est parfois convertie en ondes de surface. Les plus connues sont les ondes de Love et de Rayleigh. Ces types d'ondes entraînent des déplacements plus complexes comme ceux représentés sur la FIGURE 1.2. L'amplitude de ces ondes diminue très rapidement avec la profondeur.

Les ondes de surface sont souvent les plus problématiques pour le dimensionnement des structures. Tout d'abord, l'amplitude des ondes de surface est inversement proportionnelle à la racine carrée de la distance épiscoptrale (la distance par rapport à la source) alors que celle des ondes de volume décroît comme l'inverse de cette distance (Fowler, 2005). Les ondes de surfaces atteignent donc des zones plus éloignées que les autres. De plus, la complexité des mouvements dus à ce type d'ondes rend le dimensionnement des

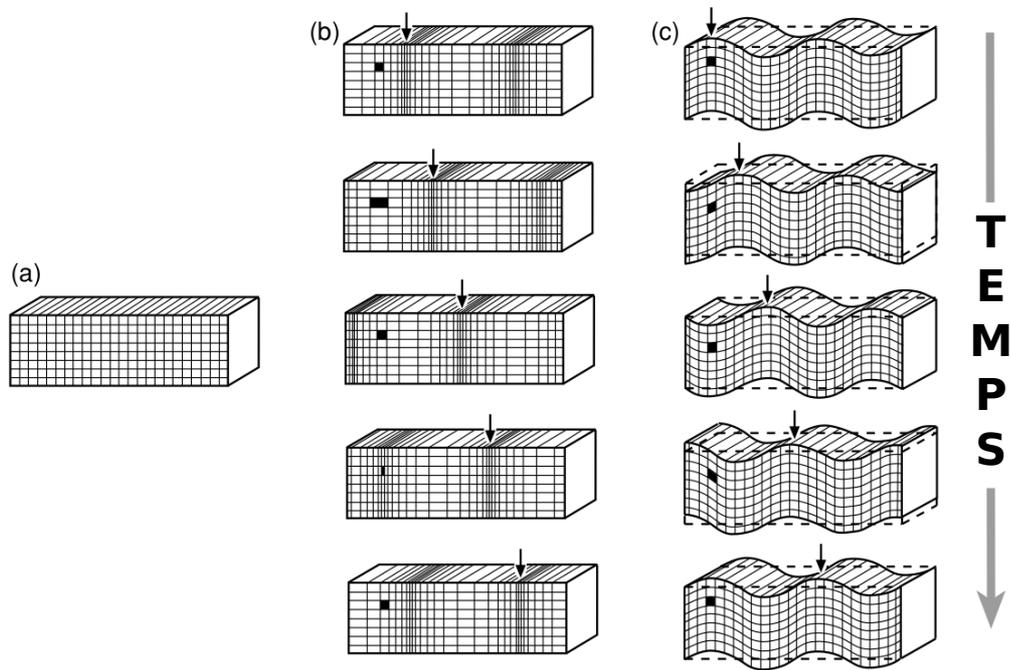


FIGURE 1.1 – Évolution des déformations d'un milieu solide (à gauche) au cours du temps (de haut en bas) lors du passage des ondes de volume se propageant dedans. Au milieu les ondes de compression et à droite celles de cisaillement (Fowler, 2005).

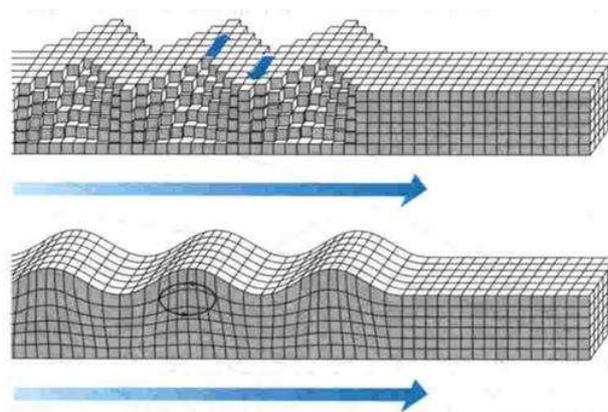


FIGURE 1.2 – Exemple des perturbations d'un milieu solide dues à des ondes de surface. Les ondes de Love sont représentées en haut et celles de Rayleigh en bas (Fowler, 2005).

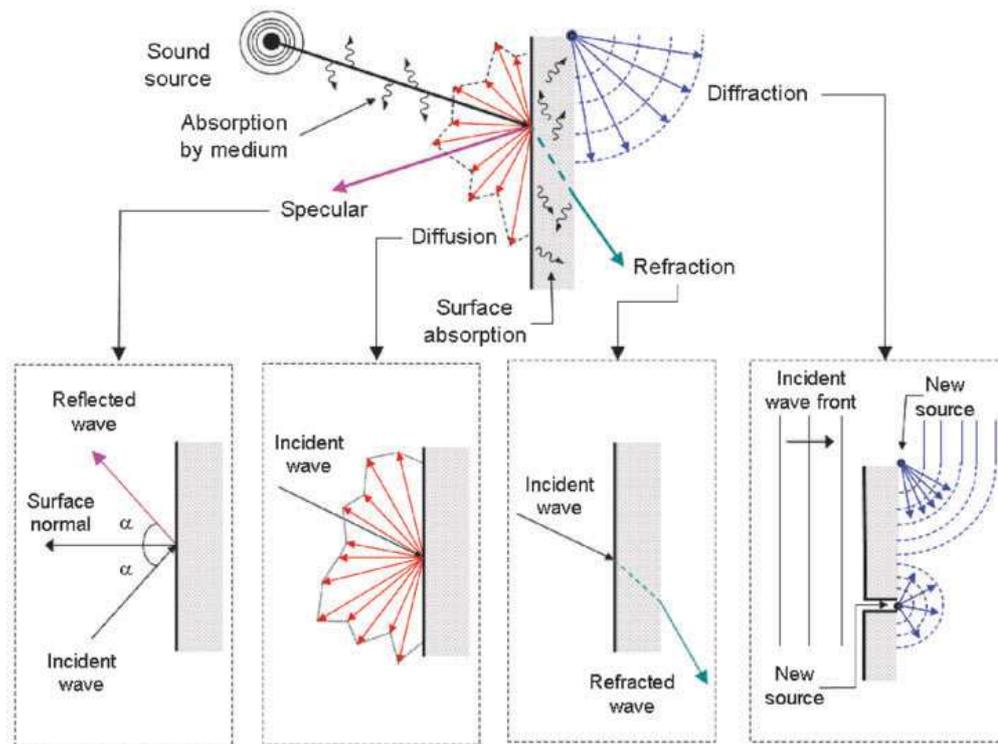


FIGURE 1.3 – Différents mécanismes intervenant lorsqu'une onde arrive à une interface et/ou un défaut. Pour le cas ici d'une onde acoustique, les phénomènes sont (de gauche à droite) la réflexion, la diffusion, la réfraction et la diffraction (Kapralos et al., 2008).

structures les prenant en compte beaucoup plus délicat. Les normes de construction en vigueur en Europe (AFNOR, 1998) ne prennent d'ailleurs pas en compte les différents types d'ondes. Elles estiment en effet les efforts à prendre en compte à partir de valeurs quasi-arbitraires telles que la valeur moyenne de la vitesse de propagation des ondes S dans la couche supérieure de 30 m de sol $v_{s,30}$.

La vitesse de propagation des ondes de Rayleigh dans le sol est du même ordre de grandeur (environ 10% plus faible) que celle des ondes de cisaillement (Addo and Robertson, 1992). Celle des ondes de Love est en revanche plus faible.

Il existe aussi des types d'ondes qui se développent au niveau des interfaces entre des milieux solides comme les ondes de Stoneley (1924).

1.1.2 Phénomènes liés à la propagation des ondes dans les sols

Durant le transport d'énergie par les ondes de la source à la structure, la propagation des ondes sismiques dépend des mécanismes à la source, de l'hétérogénéité du terrain, des éventuels effets de site dans les bassins sédimentaires (Gatti, 2017). À cause de ces phénomènes, il est assez difficile de prédire la nature des ondes incidentes. En effet, les ondes de compression et de cisaillement sont perturbées (conversion, réflexion, etc.) à une interface entre deux milieux. De plus, la présence de défauts crée de la diffraction et certains milieux ont pour propriétés de diffuser les ondes. La FIGURE 1.3 illustre les différents phénomènes qui peuvent se produire durant la propagation des ondes dans des milieux hétérogènes (Kapralos et al., 2008).

1.1.3 Contrôle des vibrations

Les vibrations étant des nuisances plus ou moins importantes, des solutions sont développées pour limiter leur impact sur les structures. Dans le but de guider les ondes le long d'interfaces, [Chen et al. \(2018\)](#) proposent une étude de la propagation des ondes topologiques dans des structures treillis 1D et 2D, et mettent en évidence le comportement dynamique de ces structures masses-ressort.

[Cacciola et al. \(2015\)](#) présentent l'implantation de barrières vibrantes destinées à réduire la réponse d'une structure à une sollicitation. Si ces barrières possèdent bien l'avantage d'être non-intrusives, leur taille reste encore imposante.

Dans le domaine du Génie Civil, les barrières sont souvent utilisées pour arrêter les ondes. Dans le domaine ferroviaire, ces applications permettent de limiter les nuisances liées au passage des trains, notamment en étudiant les propriétés du ballast vis-à-vis de la propagation des ondes ([De Abreu Corrêa et al., 2017, 2020](#)). [Yarmohammadi et al. \(2019\)](#) effectue une analyse paramétrique pour optimiser la conception de barrières en 1D pour la réduction du bruit. L'étude montre par exemple que des tranchées vides sont les plus efficaces pour réduire les vibrations. Expérimentalement, l'intérêt de barrières afin de réduire le bruit dû au passage des trains est testé par [Murillo et al. \(2009\)](#) sur un modèle réduit. L'utilisation de la centrifugeuse permet de reproduire les conditions du sous-sol, notamment en modifiant artificiellement la gravité.

Les interactions sol structure en milieu urbain peuvent être étudiées afin de voir comment le champ sismique est modifié par la présence de structures ([Clouteau and Aubry, 2001](#); [Escudero, 2006](#)). Plusieurs configurations sont étudiées, notamment le cas d'une ville périodique. Les travaux de [Mezher and Clouteau \(2003\)](#) et de [Guéguen et al. \(2002\)](#) reprennent cette idée en considérant des sites réels comme cas d'étude. Ainsi, il est mis en évidence que les bâtiments agissent comme des résonateurs permettant de modifier considérablement la réponse d'un bassin sédimentaire ([Semblat et al., 2008](#)).

Par ailleurs, la présence d'arbres peut modifier le champ des ondes de surface en agissant comme des résonateurs ([Colombi et al., 2016b](#)). Les résultats numériques permettent de mettre en évidence une forte atténuation des ondes de Rayleigh en basses fréquences. Les résultats numériques obtenus ont été en partie vérifiés de manière expérimentale sur une forêt des Landes dans le sud-ouest de la France grâce au projet Meta-Forêt ([Roux et al., 2018](#)).

Enfin, [Maurel et al. \(2018\)](#) adapte les résultats précédents pour faire apparaître les mécanismes de conversion d'ondes de surface en onde sismique de volume en modifiant les hauteurs des résonateurs (ici les arbres par exemple). La présence de défauts dans la régularité des hauteurs et des positions des arbres est notamment testée. De la même manière, le profil d'enfouissage des résonateurs est étudiée pour faire apparaître l'effet sur la présence de bandes de fréquences filtrés ([Liu et al., 2020](#)).

Toutes ces études récentes sont en fait développées autour de ce que l'on appelle des métamatériaux, qui sont basés, dans la plupart des cas, sur certains arrangements périodiques ou aperiodiques de manière à permettre de faire apparaître de nouvelles propriétés que l'on ne retrouve pas sur les matériaux homogènes ([Brunet et al., 2013](#)). Ils sont appelés métamatériaux.

1.1.4 Développement des métamatériaux et cristaux phononiques

Les métamatériaux sont des matériaux architecturés possédant des propriétés non-conventionnelles à large échelle face à la taille caractéristique des hétérogénéités. Les structures auxétiques, qui sont des structures à coefficient de Poisson négatifs, en sont un exemple très présent dans la littérature ([Yang et al., 2004](#); [Scarpa et al., 2013](#); [Albertini et al., 2019](#)).

Les métamatériaux en dynamique sont d'abord issus des travaux purement académiques de [Veselago \(1968\)](#) en électromagnétisme qui mettait en avance l'intérêt d'un matériau possédant une permittivité et une

perméabilité négatives pour la propagation des ondes.

Ces travaux ont ensuite été utilisés pour la mise en œuvre théorique (Pendry, 2000; Pendry et al., 2006) et expérimentale (Schurig et al., 2006) de capes d'invisibilité aux ondes électromagnétiques. Bien que les résultats théoriques et numériques soient prometteurs, la réalisation expérimentale ne permet pas d'obtenir des résultats similaires. Les bandes de fréquences filtrées sont plus restreintes notamment à cause des hypothèses faites sur le modèle.

Rupin et al. (2014) développe une maquette expérimentale pour mettre en avant les avantages des résonateurs dans le but d'atténuer des ondes de Lamb. D'autres réalisations ont été effectuées sur le cas de plaques en acoustique (Laude et al., 2005) et en élastodynamique (Celli and Gonella, 2015; D'Alessandro et al., 2017).

1.1.5 Métamatériaux sismiques

De la même façon, Brûlé et al. (2014) posent les bases de l'utilisation d'un tel système pour des applications dans le domaine de la propagation des ondes sismiques en comparant l'énergie mesurée dans le sol en différents points avant et après la réalisation des trous périodiquement disposés. Ces travaux fondateurs ont permis d'ouvrir la voie à de nombreuses réalisations théoriques et expérimentales pour limiter la propagation des ondes sismiques, que ce soit pour les ondes de surface (Colombi et al., 2016a; Palermo et al., 2016; Du et al., 2017) ou de volume (Aravantinos-Zafiris and Sigalas, 2015; Achaoui et al., 2016).

1.2 Propagation des ondes en milieux complexes

Les propriétés non-conventionnelles de ces métamatériaux peuvent être décrites en étudiant le comportement dynamique du milieu considéré. D'un point de vue théorique, un modèle de comportement est choisi comme hypothèse. Ensuite des outils numériques permettent de simuler le milieu lorsque la résolution analytique n'est pas possible. Ainsi, le cadre du modèle est développé dans la suite.

L'espace physique étudié de dimension d est muni du repère unitaire cartésien constitué des vecteurs unitaires \mathbf{e}_j avec $j \in [1, d]$. La variable temporelle est notée t et la position d'un point par la variable spatiale \mathbf{x} . Le schéma d'un problème modèle est donné sur la FIGURE 1.4.

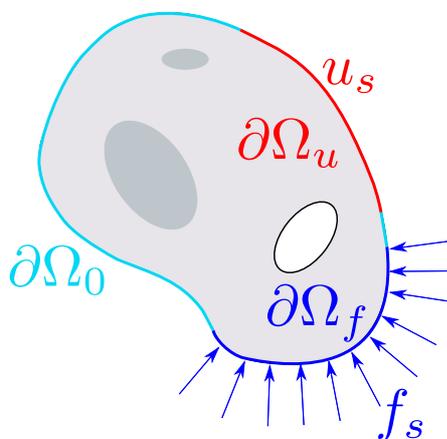


FIGURE 1.4 – Représentation d'un problème élastodynamique avec les conditions limites imposées en déplacement (en rouge) et en contrainte (effort surfacique en bleu et bords libres en bleu clair).

1.2.1 Mise en équation du problème modèle élastodynamique

En se plaçant dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, le tenseur des petites déformations $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ est défini par :

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T \right) \quad (1.1)$$

où $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}$ est le gradient spatial du champ de déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ et $(\cdot)^T$ est l'opérateur de transposition.

Le comportement élastique linéaire utilisé pour la simulation des matériaux est décrit par la loi de Hooke généralisée :

$$\sigma(\mathbf{x}, t) = \mathbb{C}(\mathbf{x}) : \varepsilon(\mathbf{x}, t). \quad (1.2)$$

Dans l'EQ.1.2, \mathbb{C} dénote le tenseur d'élasticité d'ordre quatre qui, appliqué au tenseur des petites déformations avec le produit contracté $\cdot : \cdot$, est défini dans le cas de l'élasticité isotrope par :

$$\mathbb{C} : \varepsilon = \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon) \mathbb{I}_d + 2\mu \varepsilon \quad (1.3)$$

où \mathbb{I}_d est la matrice identité de dimension $d \times d$ et λ et μ sont les coefficients de Lamé qui sont reliés au module de Young E et au coefficient de Poisson ν par :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1.4)$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

— en déplacement :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s \quad \text{sur } \partial\Omega_u \quad (1.5)$$

— en effort :

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}_s \quad \text{sur } \partial\Omega_f \quad (1.6)$$

où \mathbf{u}_s et \mathbf{f}_s sont respectivement le déplacement et l'effort surfacique imposés.

L'équation d'équilibre local du milieu s'écrit :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \sigma + \mathbf{f}_v = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (1.7)$$

où ρ est la densité du milieu et \mathbf{f}_v les efforts volumiques dans le domaine. La résolution est effectuée dans le domaine fréquentiel afin d'effectuer une analyse modale de la propagation des ondes en utilisant la transformée de Fourier temporelle définie par :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, f) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.8)$$

ω est la pulsation de l'onde liée à la fréquence f par :

$$\omega = 2\pi f. \quad (1.9)$$

Dans ce cadre, l'EQ.1.7 devient :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \sigma + \mathbf{f}_v = -\rho \omega^2 \mathbf{u} \quad (1.10)$$

où l'on a gardé la même notation \mathbf{u} pour les champs de déplacement $\tilde{\mathbf{u}}$ et \mathbf{u} , et σ pour les champs de contraintes $\tilde{\sigma}$ et σ dans les domaines respectivement fréquentiel et temporel pour ne pas alourdir les équations.

tions.

En injectant l'EQ.1.2 dans l'EQ.1.10 et en considérant un espace homogène, on obtient l'équation suivante :

$$(\lambda + 2\mu) \nabla_{\mathbf{x}} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla_{\mathbf{x}} \wedge (\nabla_{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{u}) = -\rho \omega^2 \mathbf{u} \quad (1.11)$$

où l'opérateur $\nabla_{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{u}$ désigne le rotationnel du vecteur \mathbf{u} . Il est ainsi possible de décomposer la solution \mathbf{u} en deux types d'ondes (décomposition de Helmholtz) tel que :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_P + \mathbf{u}_S \quad (1.12)$$

où \mathbf{u}_P est le gradient spatial d'un potentiel scalaire (donc de rotationnel nul) et \mathbf{u}_S est le rotationnel d'un potentiel vectoriel (de divergence nulle). Les vitesses de propagation des ondes V_P et V_S sont alors données par les relations suivantes pour les ondes de compression et de cisaillement (appelées respectivement ondes P et S) :

$$V_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}; \quad V_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (1.13)$$

Lorsque le milieu est hétérogène, les propriétés des matériaux diffèrent d'un point à l'autre du milieu et le trajet des ondes est modifié par rapport au cas homogène. Classiquement, on écrit le champ de déplacement comme la somme d'une onde incidente \mathbf{u}^{inc} et d'une onde diffractée \mathbf{u}^d (Aubry, 1987) :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^{inc}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^d(\mathbf{x}). \quad (1.14)$$

Si les propriétés sont constantes par morceaux, des interfaces apparaissent entre les différents matériaux et des solutions analytiques existent pour déterminer l'onde diffractée sous certaines hypothèses simplificatrices.

1.2.2 Lois d'interface entre deux milieux homogènes

Dans le cas d'une interface plane séparant deux demi-espaces Ω_1 et Ω_2 (FIGURE 1.5), le plan d'incidence est défini comme le plan contenant la normale à l'interface (que l'on note ici \mathbf{e}_z) et le vecteur d'onde de l'onde incidente. Le vecteur directeur de l'interface dans le plan d'incidence est noté \mathbf{e}_x . Le repère direct $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ est alors défini en prenant \mathbf{e}_y le vecteur normal au plan d'incidence. Les différents angles θ sont définis par rapport à la normale à l'interface plane et les vecteurs d'ondes \mathbf{k} représentent les directions de propagation des ondes.

Les lois d'interface pour les ondes ont d'abord été développées dans le domaine de l'optique pour être ensuite adaptées à la propagation des ondes dans les solides. Les lois de Snell-Descartes ont donc été étendues aux ondes mécaniques (Ewing, 1957; Pecker, 1984). En effet, à la rencontre de l'interface entre deux milieux, une partie des ondes se propageant dans le premier milieu est réfléchiée et une autre est transmise dans le second milieu.

En réécrivant l'EQ.1.11 comme suit,

$$(\lambda + \mu) \nabla_{\mathbf{x}} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}) + \mu \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = -\rho \omega^2 \mathbf{u} \quad (1.15)$$

il est possible de mettre en avant deux comportements pour les ondes :

- un couplage entre les composantes est dû au premier terme du membre de gauche,
- le laplacien amène des relations indépendantes pour chaque composante.

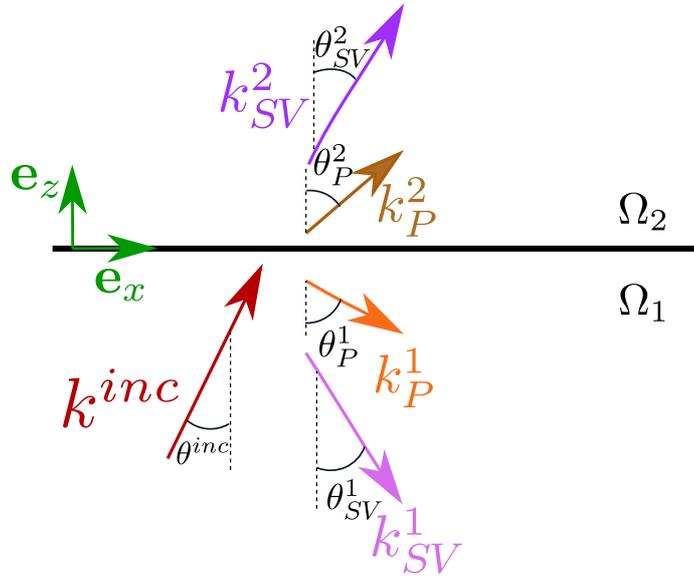


FIGURE 1.5 – Représentation de l'extension des lois de Snell-Descartes sur le comportement des ondes sur une interface à des milieux elastodynamiques pour une onde P-SV incidente.

En particulier une onde plane dont le déplacement est normal au plan d'incidence sera découplée des ondes dont les déplacements sont dans le plan d'incidence. L'onde hors-plan non polarisée est appelée onde SH. Les ondes de cisaillement dans le plan d'incidence sont appelées ondes SV. Les ondes de compression dans le milieu Ω_n ($n = 1, 2$) sont notées \mathbf{u}_P^n et celles de cisaillement \mathbf{u}_{SH}^n et \mathbf{u}_{SV}^n . Celles-ci composent l'onde diffractée.

La forme suivante d'onde planes est considérée :

$$\mathbf{u}_M^n(\mathbf{x}) = \phi_M^n e^{i\mathbf{k}_M^n \cdot \mathbf{x}} \quad (1.16)$$

où $M = \{P, SV, SH\}$ et $n = \{1, 2\}$ selon l'onde considérée, ϕ représente l'amplitude et la direction de la perturbation et \mathbf{k} est le vecteur d'onde vérifiant :

$$\begin{cases} \phi \parallel \mathbf{k} & \text{pour les ondes P,} \\ \phi \perp \mathbf{k} & \text{et dans le plan } (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y) \text{ pour les ondes SV,} \\ \phi \parallel \mathbf{e}_z & \text{pour les ondes SH.} \end{cases} \quad (1.17)$$

Le comportement d'une onde quelconque dont la perturbation est contenue dans le plan d'incidence (P-SV) arrivant sur une interface est donné sur la FIGURE 1.5. La nature des ondes est alors modifiée : l'onde incidente $\mathbf{u}^{inc}(\mathbf{x}) = \phi^{inc} e^{i\mathbf{k}^{inc} \cdot \mathbf{x}}$ est convertie en un ensemble d'ondes P et S se propageant dans les deux milieux. Les amplitudes des ondes réfléchies et réfractées par le changement de propriétés à l'interface sont déterminées avec l'écriture des conditions à l'interface (interface plane en $z = 0$) en déplacement :

$$\mathbf{u}^{inc}(x, 0) + \mathbf{u}_P^1(x, 0) + \mathbf{u}_{SV}^1(x, 0) = \mathbf{u}_P^2(x, 0) + \mathbf{u}_{SV}^2(x, 0) \quad (1.18)$$

et en contraintes :

$$\sigma^{inc}(x, 0) \cdot \mathbf{e}_z + \sigma_P^1(x, 0) \cdot \mathbf{e}_z + \sigma_{SV}^1(x, 0) \cdot \mathbf{e}_z = \sigma_P^2(x, 0) \cdot \mathbf{e}_z + \sigma_{SV}^2(x, 0) \cdot \mathbf{e}_z. \quad (1.19)$$

De plus, l'égalité des phases à l'interface implique que toutes les projections du vecteur d'onde sur \mathbf{e}_x sont égales. Les relations entre les angles θ issues de cette égalité s'écrivent, dans le cas d'une onde incidente

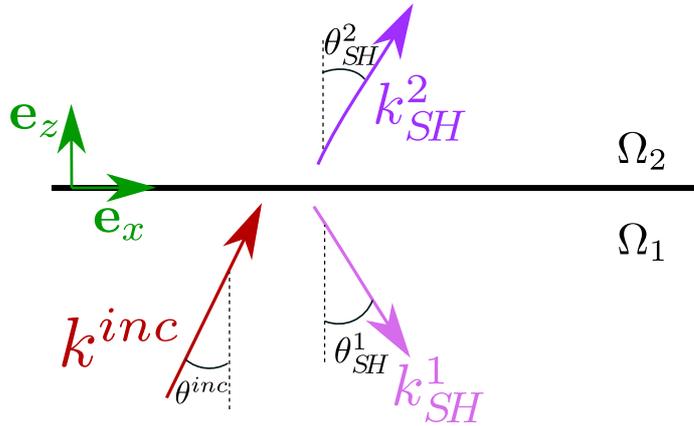


FIGURE 1.6 – Réflexion et réfraction d'une onde SH incidente à une interface.

du type M (M = P, SV) :

$$\frac{\sin(\theta^{inc})}{V_M^{inc}} = \frac{\sin(\theta_P^1)}{V_P^1} = \frac{\sin(\theta_{SV}^1)}{V_s^1} = \frac{\sin(\theta_P^2)}{V_P^2} = \frac{\sin(\theta_{SV}^2)}{V_s^2}, \quad (1.20)$$

Elles permettent donc d'obtenir des liens entre les propriétés de matériau et le comportement théorique des milieux vis-à-vis de la propagation des ondes.

Dans le cas particulier d'une onde incidente SH, dont la perturbation est orthogonale au plan d'incidence, l'onde n'est pas polarisée. Il n'y a alors pas de couplage entre les composantes, donc les ondes réfléchies et réfractées sont uniquement des ondes SH (FIGURE 1.6). Là encore, les conditions de raccord à l'interface et l'égalité des phases permettent de déterminer les ondes SH réfléchies et réfractées :

$$\mathbf{u}_{SH}^{inc}(x, 0) + \mathbf{u}_{SH}^1(x, 0) = \mathbf{u}_{SH}^2(x, 0) \quad (1.21a)$$

$$\sigma^{inc}(x, 0) \cdot \mathbf{e}_z + \sigma_{SH}^1(x, 0) \cdot \mathbf{e}_z = \sigma_{SH}^2(x, 0) \cdot \mathbf{e}_z. \quad (1.21b)$$

$$\frac{\sin(\theta^{inc})}{V_s^1} = \frac{\sin(\theta_{SH}^1)}{V_s^1} = \frac{\sin(\theta_{SH}^2)}{V_s^2}. \quad (1.21c)$$

Les relations pour les ondes de cisailment hors-plan (EQ. 1.21) montrent que ces ondes ne sont pas polarisées. La présence d'une interface ne modifie donc pas la nature des ondes lors du passage d'un milieu à l'autre. Le comportement des ondes SH est donc indépendant des ondes P et SV.

Aki (2002) présente les solutions analytiques dans les différents cas de figure possibles en fonction de la nature et la direction de l'onde incidente. Les coefficients de transmission et de réflexion sont notamment détaillés. Cependant, il est nécessaire d'utiliser d'autres méthodes pour les milieux plus complexes où les solutions analytiques ne sont pas disponibles.

1.3 Outils théoriques et numériques pour la propagation d'ondes

Afin de prendre en compte des milieux hétérogènes plus complexes, il est nécessaire d'utiliser des outils théoriques et numériques pour prendre en compte les différents phénomènes dus aux hétérogénéités. Selon les gammes de fréquence que l'on essaie de caractériser, les méthodes numériques pour résoudre les problèmes sont modifiées. Dans le contexte de la protection parasismique les fréquences considérées sont de l'ordre de la dizaine de Hertz. Il s'agit donc de basses fréquences vis-à-vis des caractéristiques des milieux

simulés. De plus, la gestion des conditions limites du modèle est importante, notamment si un milieu est modélisé comme étant infini ou borné par exemple.

1.3.1 Simulation numérique de la propagation des ondes dans les solides

Par la simulation numérique, les résultats sont obtenus en discrétisant le temps et les milieux considérés selon les paramètres et les phénomènes physiques du problème. Pour le cas de la propagation d'ondes, la taille des éléments du maillage (donc la discrétisation spatiale) est liée à la longueur d'onde. De plus la discrétisation temporelle est elle liée à la vitesse des ondes dans le milieu et à la taille minimale du maillage : on cherche à ce que la distance parcourue par pas de temps n'excède pas la longueur des éléments (Bathe, 1996).

Ainsi, en hautes et moyennes fréquences, les méthodes du type éléments finis deviennent rapidement très coûteuses car la taille des éléments décroît très vite ainsi que le pas de temps, ce qui a conduit au développement d'autres méthodes comme les formulations énergétiques (Ichchou et al., 1997; Le Bot, 1998), ou la Théorie Variationnelle des Rayons Complexes (TVRC) développée par Ladevèze et al. (2001). La méthode des éléments finis est en revanche très efficace en basses fréquences où la discrétisation du domaine est moins coûteuse.

La propagation des ondes dans les milieux hétérogènes est évidemment encore plus complexe à simuler. En effet, les contrastes entre les différents matériaux nécessitent de raffiner le maillage afin de décrire correctement les hétérogénéités, telles que les inclusions considérées dans le cadre de cette thèse, et donc de rendre les calculs plus coûteux en temps et en stockage.

Une catégorie de méthodes d'éléments finis intéressantes à utiliser est la méthode de Galerkin discontinue, soit en temps (Johnson, 1993; Li and Wiberg, 1996; Tie et al., 2003), soit en espace (Cockburn et al., 2000; LeVeque, 2002; Renaud, 2018; Tie et al., 2018; Tie and Mouronval, 2020). La méthode de Galerkin discontinue en temps donne lieu à des solveurs implicites, son intérêt est d'offrir un cadre pour développer des solveurs permettant de changer la discrétisation en espace d'une étape de temps à l'autre. L'avantage de la méthode de Galerkin discontinue en espace est qu'il permet de développer des solveurs explicite massivement parallèles.

Pour cette thèse, les études dans le domaine temporel sont réalisées avec *OOFE (Object Oriented Finite Element)*, un code développé au laboratoire MSSMAT. Le code a été validé et utilisé dans beaucoup de domaines, par exemple, Bai (2017) l'a utilisé pour simuler la propagation des ultrasons dans les milieux très hétérogènes que sont les matériaux polycristallins. Les deux méthodes de Galerkin discontinues sont implantées dans *OOFE*. Les calculs basés sur une analyse modale sont eux réalisés avec COMSOL en utilisant un solveur éléments finis.

Par ailleurs, les travaux de Komatitsch et al. (2002); Capdeville et al. (2003) sur l'utilisation d'éléments spectraux ont permis de développer des solveurs explicites massivement parallèle très efficace, grâce à une matrice de masse rendue diagonale. Comme exemple d'application, De Abreu Corrêa (2019) développe ces éléments spectraux pour des milieux granulaires pour la simulation des propriétés vis-à-vis de la propagation des ondes dans le ballast des voies ferroviaires.

Toutefois, pour des cas courants concernant les ondes sismiques, où le domaine à étudier est très grand voire peut être considéré comme non borné, la modélisation par éléments finis d'un domaine borné de taille réduite conduit à la nécessité d'utiliser des outils qui permettent de ne pas prendre en compte les ondes réfléchies aux bornes de ce domaine réduit.

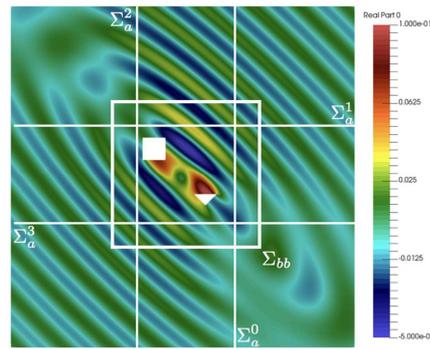


FIGURE 1.7 – Mise en œuvre de la méthode de *halfspace matching* pour la simulation de la propagation d'onde en présence de défauts (Bonnet-Ben Dhia et al., 2018b).

1.3.2 Simulation de milieux infinis

La simulation d'espaces infinis est en effet un enjeu majeur pour des applications telles que l'électromagnétisme ou l'interaction sol-structure.

Si la réponse à l'extérieur du domaine numériquement simulé a de l'intérêt, il est possible d'utiliser un couplage analytique/numérique en utilisant la méthode de *halfspace matching* (Tjandrawidjaja, 2019). L'idée principale de cette méthode est d'utiliser la trace d'une solution par éléments finis (dans un domaine borné entourant un défaut dont l'on veut mettre en avant les effets) à la frontière du domaine simulé pour avoir une solution analytique dans l'ensemble du milieu infini. La FIGURE 1.7 représente une utilisation de cette méthode dans le cas de la propagation d'une onde acoustique. La partie simulée numériquement est délimitée par Σ_{bb} . Si cette méthode est adaptée pour étudier un défaut au sein d'un milieu périodique infini en modélisant ce dernier à l'extérieur d'un domaine réduit contenant le défaut grâce à la transformée de Floquet-Bloch, elle ne s'applique pas au cas d'un milieu périodique borné. Naturellement, elle n'est pas non plus adaptée à une interface entre deux milieux semi-infinis.

Par contre, dans le cas où la réponse à l'extérieur du domaine numériquement simulé n'a pas intérêt, les méthodes largement développées dans la littérature consistent à rendre la frontière du domaine réduit transparente, c'est-à-dire que les ondes la rencontrant ne seront pas réfléchies. Parmi ces méthodes, on peut citer les conditions limites absorbantes, les éléments infinis et les PML. Les éléments infinis par exemple, introduits par Bettess (1977), modifient les fonctions de forme aux frontières en ajoutant un terme exponentiellement décroissant pour limiter la réflexion des ondes sur les bords du modèle numérique.

Les couches absorbantes parfaitement adaptées (*Perfectly Matched Layers*, ou PML) sont des couches permettant de simuler des milieux infinis en modifiant l'amortissement aux limites du milieu simulé. Leur développement a commencé d'abord en électromagnétisme par Berenger (1994), puis pour l'élastodynamique Zhang and Shen (2010). Les PML ont aussi été développées pour des utilisations dans le domaine sismique (Semblat et al., 2011), notamment dans le but de simplifier leur usage en transformant la couche dans laquelle les propriétés changent de manière continue en plusieurs couches aux propriétés constantes par morceaux. Cette méthode permet de réaliser des PML adaptés à la propagation des ondes en 2D là où leur efficacité était limitée.

En général, les propriétés des matériaux à l'intérieur des PML dépendent de la fréquence. Dans le cadre de ce travail, les PML des couches qui sont utilisées sont définies en utilisant un changement de variable géométrique et ne dépendent pas de la fréquence.

Dans le cas des milieux périodiques, il existe d'autres moyens pour traiter un milieu infini, par exemple des méthodes d'homogénéisation (Boutin and Auriault, 1993; Capdeville et al., 2010; Fossat et al., 2018),

mais qui ne sont pas traitées dans la suite. Dans le cadre de la thèse, l'étude d'un seul motif en utilisant la théorie de Floquet-Bloch est utilisée.

1.4 Théorie de Floquet-Bloch dans un milieu périodique infini

Un milieu périodique résulte de la répétition d'un motif, qui est appelé cellule élémentaire, selon une ou plusieurs directions. Les conditions de périodicité imposées à la frontière de ce motif permettent de limiter l'analyse à l'échelle très petite de celui-ci. La FIGURE 1.8 présente un exemple de milieu périodique en deux dimensions et permet d'illustrer la transformation de Floquet-Bloch (EQ.1.22) graphiquement.

Dans ce manuscrit, si le milieu considéré est périodique, l'espace physique est muni d'une base de vecteurs unitaires constituée des \mathbf{e}_α où $\alpha \in [1, \delta]$ où δ est la dimension de l'espace de périodicité. La direction non périodique est notée \mathbf{e}_z (puis \mathbf{e}_y si besoin), si la dimension de l'espace physique d est plus grande que celle de l'espace de périodicité δ (FIGURE 1.9a et FIGURE 1.9b).

1.4.1 Transformée de Floquet-Bloch

Introduite par Floquet (1883) puis par Bloch (1929) pour la mécanique quantique, la théorie des ondes de Bloch permet de résoudre l'équation de Schrödinger qui régit le mouvement d'une particule dans un potentiel périodique. Mead (1975, 1996) a été l'un des premiers à développer des éléments théoriques vis-à-vis de la propagation des ondes mécaniques dans les milieux périodiques d'abord en 1D puis plus tard en 2D à partir des travaux de Floquet, Bloch et Brillouin. En discutant la nature réelle et imaginaire du nombre d'onde, l'existence de bandes interdites en fréquence a été étudiée et ces travaux ont abouti à des avancées importantes réalisées à l'Université de Southampton entre 1964 et 1995.

La transformée de Floquet-Bloch est donc un outil permettant de réduire la taille des modèles analytiques (et donc numériques) d'un milieu périodique en limitant l'étude à l'analyse du problème aux valeurs propres de la seule cellule élémentaire (exemple de la FIGURE 1.8).

La transformée de Floquet-Bloch \mathbf{u}^B d'une grandeur vectorielle \mathbf{u} est définie dans un milieu périodique infini par :

$$\mathbf{u}^B(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^\delta} \mathbf{u}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\gamma}_\mathbf{n}) \cdot e^{-i(\mathbf{k}, \mathbf{x} + \boldsymbol{\gamma}_\mathbf{n})} \quad (1.22)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire, \mathbf{k} est le vecteur d'onde de Bloch évoluant dans la cellule de Brillouin (c.f.

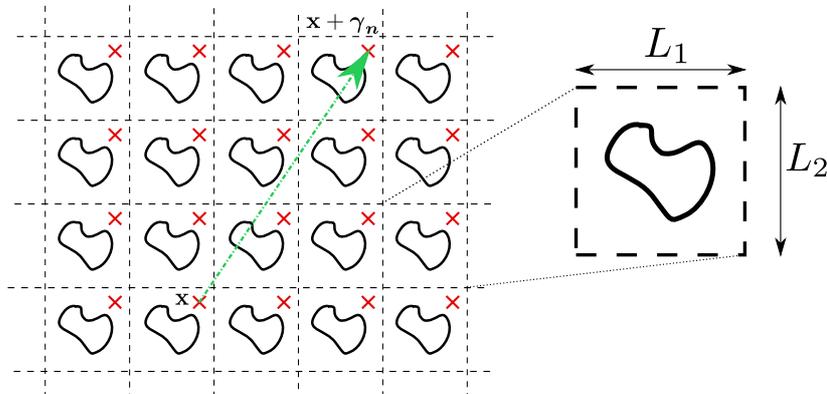


FIGURE 1.8 – Milieu périodique en 2D avec sa cellule élémentaire.

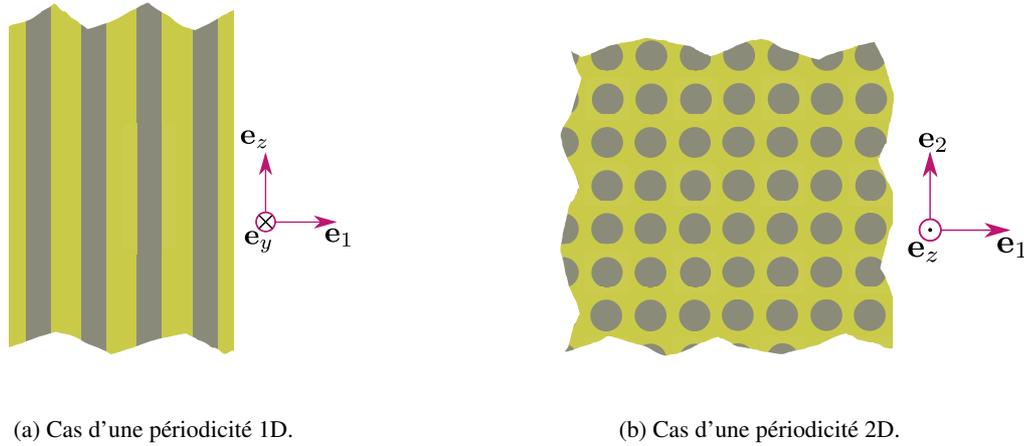


FIGURE 1.9 – Présentation des choix de notations des axes pour les cas 1D et 2D développés dans la suite.

l'exemple FIGURE 1.10) et $\boldsymbol{\gamma}_n$ est défini par :

$$\boldsymbol{\gamma}_n = \sum_{a=1}^{\delta} n_a \mathbf{L}_a; \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^{\delta} \quad (1.23)$$

avec \mathbf{L}_a les vecteurs de périodicité.

Utilisant la périodicité du réseau, la transformée de Bloch \mathbf{u}^B définie à partir d'un signal quelconque \mathbf{u} est un signal périodique de même période que le milieu périodique. En effet :

$$\mathbf{u}^B(\mathbf{x} + \boldsymbol{\gamma}_n) = \mathbf{u}^B(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^{\delta} \quad (1.24)$$

Il est alors possible de limiter les moyens numériques pour la modélisation du comportement d'un milieu périodique en prenant en compte la périodicité et ainsi analyser un spectre fréquentiel plus large.

Une vérification expérimentale de la décomposition des vecteurs d'ondes, obtenus à partir des mesures de champs de déplacement, sous la forme de modes de Bloch a notamment été réalisée par [Pierre \(2011\)](#) dans les milieux périodiques sur le cas d'ondes élastiques se propageant dans des plaques minces.

Dans le cadre de la théorie de Floquet-Bloch, le vecteur d'onde \mathbf{k} évolue dans l'espace dual des vecteurs de périodicité, qui est aussi de dimension δ . En plus, il suffit de considérer une zone bornée de cet espace dual, qui est appelé première zone de Brillouin.

1.4.2 Première zone de Brillouin

La première zone de [Brillouin \(1946\)](#) est définie à partir de la cellule élémentaire physique Ω_0 . [Kittel \(1962\)](#) la définit pour un réseau atomique comme étant l'ensemble des points de l'espace dual de la cellule atteints sans croiser de plans de Bragg à partir de l'origine. Dans le cas de la mécanique des milieux continus, le réseau réciproque (de même dimension que le réseau périodique) est construit de manière analogue avec les vecteurs $\boldsymbol{\Lambda}_l$ tels que :

$$\mathbf{L}_j \cdot \boldsymbol{\Lambda}_l = 2\pi \delta_{jl} \quad (1.25)$$

avec δ_{jl} est le delta de Kronecker.

Chaque composante du vecteur de Floquet-Bloch \mathbf{k} varie ainsi dans un intervalle de longueur $\frac{2\pi}{L_a}$ (choisi

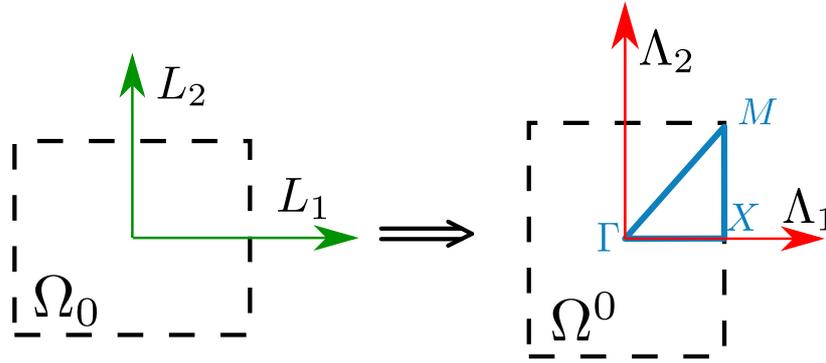


FIGURE 1.10 – Cellule élémentaire avec les composantes des vecteurs de périodicité L_i (vert) et la première zone de Brillouin associée et celles des vecteurs réciproques Λ_i (rouge). En bleu, la zone irréductible de Brillouin tenant compte des propriétés de symétrie de la cellule élémentaire, qui est délimitée par le contour $M - \Gamma - X - M$.

dans la suite entre $-\frac{\pi}{L_a}$ et $\frac{\pi}{L_a}$). Dans la pratique, l'étude est limitée à la cellule irréductible de Brillouin, c'est-à-dire la cellule après avoir pris en compte les plans de symétrie de la cellule réciproque du motif. Les points de haute symétrie sont les points remarquables permettant de délimiter le contour. Par exemple, ils sont notés M , Γ et X sur la FIGURE 1.10. La plus petite longueur d'onde, donc les plus hautes fréquences est obtenue pour les valeurs de \mathbf{k} aux frontières de la zone de Brillouin (Tie et al., 2016).

1.4.3 Transformation inverse

Il est possible de revenir à la fonction initiale $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ en utilisant la transformée inverse de Floquet-Bloch :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{(2\pi)^d}{\Gamma_{\Omega^0}} \int_{\Omega^0} \mathbf{u}^B(\mathbf{x}, \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} d\mathbf{k} \quad (1.26)$$

où Ω^0 est la cellule élémentaire réciproque de Brillouin, et Γ_{Ω^0} la caractérise en termes de dimension (longueur / surface / volume de la cellule élémentaire en 1D / en 2D / en 3D).

1.4.4 Exemple sur un cas 2D

Sur la FIGURE 1.10, l'équivalence entre la base de périodicité de l'espace physique L_α et celle dans l'espace de \mathbf{k} est donnée par les relations suivantes dans le cas d'un réseau rectangulaire.

$$\Lambda_1 = \frac{2\pi}{L_1} \quad (1.27a)$$

$$\Lambda_2 = \frac{2\pi}{L_2} \quad (1.27b)$$

La FIGURE 1.11 représente la transformée de Bloch d'une fonction gaussienne $f(x_1, x_2)$ (choisie uniquement pour illustrer la transformée sur un cas simple) définie par :

$$f(x_1, x_2) = e^{-2(x_1^2 + x_2^2)} \quad (1.28)$$

pour un vecteur de Bloch \mathbf{k} donné. Les résultats sont ici donnés pour une transformée de Floquet-Bloch réalisée pour $\mathbf{n} \in [-5, 5] \times [-5, 5]$ Le signal périodique de la transformée de Floquet-Bloch représentée sur la FIGURE 1.11 est de même période que le réseau périodique de motifs. Deux cas sont ici représentés

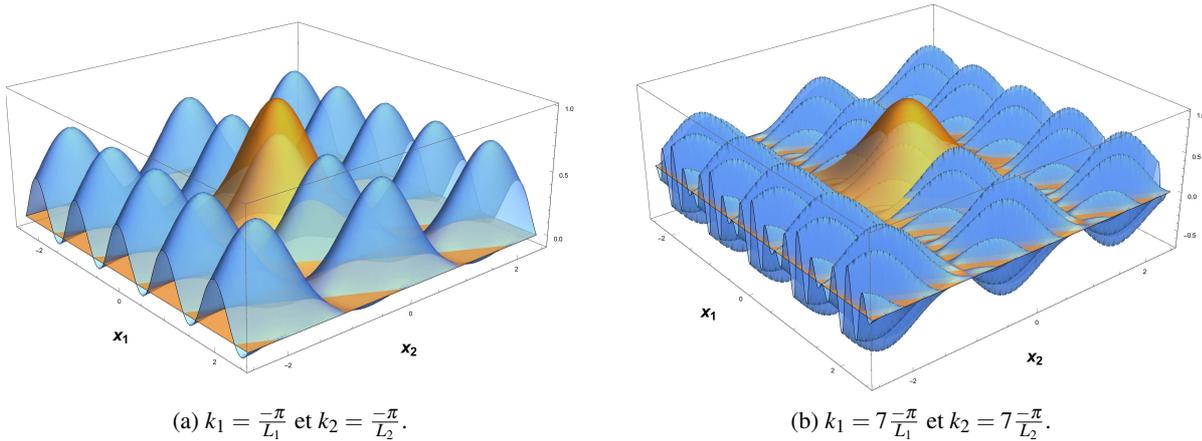


FIGURE 1.11 – Gaussienne (jaune) et sa transformée de Floquet-Bloch (bleu) avec $L_1 = 1$, $L_2 = 2$. À gauche : cas de \mathbf{k} dans la zone de Brillouin centrée sur $[0, 0]$. À droite : cas de \mathbf{k} hors de cette zone de Brillouin.

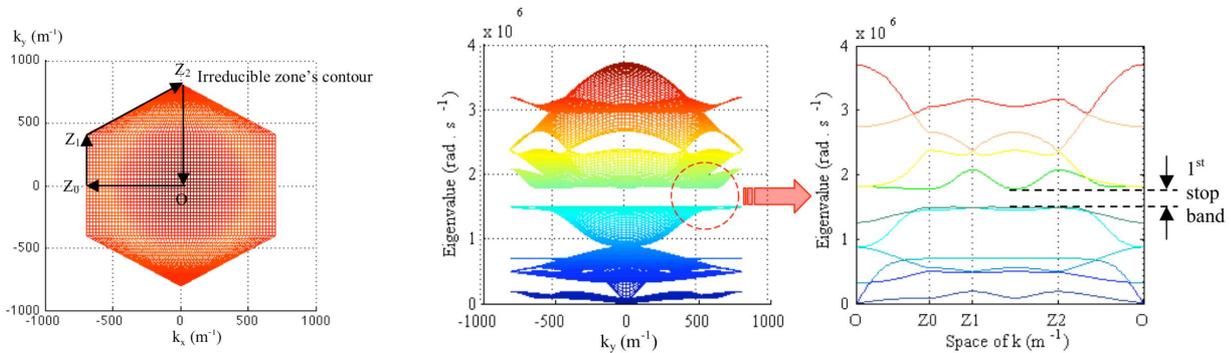


FIGURE 1.12 – Zone de Brillouin d'une cellule élémentaire en forme de nid d'abeille avec le contour de la zone irréductible (à gauche). Surfaces de dispersion du motif mettant en lumière des bandes de fréquences filtrées aussi appelés bandgaps (au milieu) et la transposition suivant la zone irréductible de Brillouin (à droite) (Tian, 2012).

pour faire apparaître l'utilité de la zone de Brillouin. La FIGURE 1.11a est obtenue avec des composantes du vecteur d'onde k_1 et k_2 sur la limite de la zone de Brillouin centrée autour de 0 alors que la seconde (FIGURE 1.11b) correspond à des valeurs extérieures à cette zone.

On peut remarquer une augmentation de la fréquence spatiale de la transformée de Floquet-Bloch du signal dans le cas où l'on sort de la zone de Brillouin. La seconde image correspond à un mode d'ordre supérieur de la transformée de Floquet-Bloch. Il est utile de remarquer que, même si les deux modes de Floquet-Bloch représentés sont différents, les ondes correspondantes sont les mêmes après application de la transformée inverse de Floquet-Bloch.

1.4.5 Bandes interdites en fréquence

En appliquant Bloch à une équation d'onde, la recherche de la solution permet de mettre en évidence la relation de dispersion. Les lieux de ces solutions, $\mathbf{k}(\omega)$ ou $\omega(\mathbf{k})$, permettent de tracer les courbes (ou surfaces) de dispersion du milieu étudié.

Un exemple est donné sur la FIGURE 1.12 pour le cas d'un motif élémentaire en nid d'abeille. Ces courbes permettent de mettre en évidence des bandes interdites en fréquences, appelées aussi bandes de fréquences filtrées. En effet, dans ces intervalles fréquentiels, il n'existe aucun mode de vibration de la cellule élémentaire. En dehors l'onde se propage librement alors que les domaines fréquentiels filtrés correspondent

à des modes évanescents des ondes et donc à un coefficient de transmission nul dans ces milieux. La dispersion de Bragg est la première cause d'apparition de ces bandes de fréquence. Il s'agit d'interférences destructives dues à la périodicité du réseau. Ce phénomène est donc la conséquence de l'arrangement géométrique du réseau périodique. Une autre cause est la nature des inclusions. En fonction de la forme et des matériaux utilisés, des conversions de modes sont recherchées et c'est notamment l'un des effets recherché pour la conception des matériaux localement résonnants. Ainsi l'étude des bandes de fréquences pour des matériaux chiraux (Spadoni et al., 2009; Torres-Silva and Cabezas, 2013) ou encore à rigidité négative (Wang et al., 2019) permet de mettre en évidence l'avantage des résonances locales. Dans un cas plus particulier, Pal et al. (2019) étudie l'effet d'une distribution des hétérogénéités quasipériodique sur l'apparition de bandes de fréquence interdite. Les surfaces de dispersion obtenues avec le théorème de Floquet Bloch permet en outre de voir un effet anisotrope de la microstructure sur la propagation de des ondes. Des directions de propagation privilégiées peuvent être mises en avant, car pour certaines fréquences, il est possible d'obtenir des bandes interdites pour un sous-ensemble de vecteurs d'ondes de Bloch dans des cas 2D (Langley, 1996; Ruzzene et al., 2003).

Enfin, Chen et al. (2019) ont obtenu des résultats très encourageants par des approches numériques et expérimentales sur l'apparition en très basses fréquences avec des métamatériaux multicouches pour des applications sismiques.

1.5 Cadre et décomposition de l'étude

La propagation d'ondes dans le sol mène à des modélisations non-bornées et très complexes à cause de la nature très hétérogène du sol, des interfaces, et d'autres phénomènes liés à la source FIGURE 1.13. Les modèles analytiques ne permettant pas de prendre tous ces phénomènes en compte, il est donc indispensable passer par la simulation numérique et mettre en place des modèles numériques. Cependant, il est alors nécessaire de borner le milieu d'étude en considérant des conditions aux limites pertinentes.

Dans le domaine de l'interaction sol-structure, il est notamment courant de limiter ainsi le domaine à étudier en utilisant diverses méthodes, par exemple les équations intégrales (DeSanto, 2010; Aubry et al., 1994), qui sont aussi appliquées aux cas périodiques (Clouteau et al., 2000). Dans cette thèse, la source sismique n'est pas considérée, remplacée sous forme d'ondes planes, et seule l'étude du milieu périodique et de ses interfaces avec le milieu environnant considéré comme homogène est pris en compte.

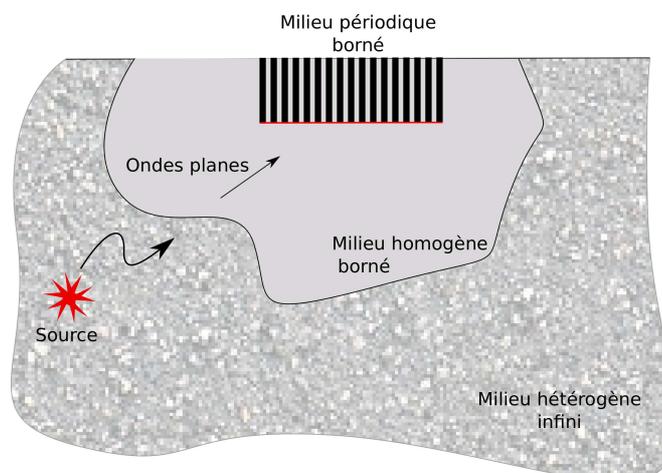


FIGURE 1.13 – Cadre d'étude des problèmes de propagation des ondes dans les milieux infinis dans cette thèse.

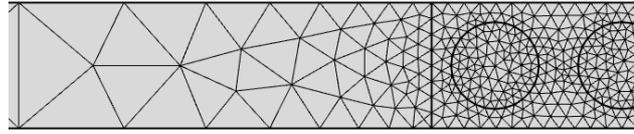


FIGURE 1.14 – Adaptation du maillage d'un domaine comportant des inclusions plus rigides.

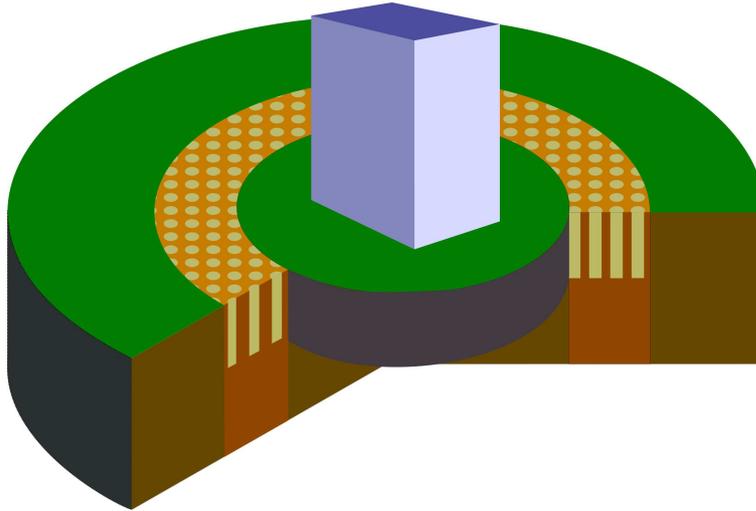


FIGURE 1.15 – Cadre de l'étude : utilisation d'un milieu périodique pour limiter la propagation des ondes sismiques et présence d'interfaces à prendre en compte dans les simulations.

Pour la modélisation de la propagation des ondes dans le milieu périodique, les résolutions classiques en utilisant des éléments finis peuvent se révéler coûteuse. En effet, la simulation de milieux contrastés mène à de grandes différences dans la taille de maillage, qui doit être définie en fonction des différentes longueurs d'ondes et des différentes dimensions caractéristiques liées aux hétérogénéités, tout en adaptant le maillage au niveau des interfaces (FIGURE 1.14). Au contraire, l'utilisation de la transformée de Bloch permet de limiter largement le temps de calcul par l'analyse d'une seule cellule, mais les informations à l'interface sont perdues, car la théorie de Floquet-Bloch décrit le comportement d'un milieu périodique infini.

Dans le cadre de cette thèse, l'étude est centrée sur la problématique représentée sur la FIGURE 1.15. Ainsi, les milieux périodiques considérés sont constitués d'une matrice 3D supposée homogène avec des inclusions de géométries cylindriques. Afin de regarder les phénomènes au niveau de plusieurs interfaces, on découpe l'étude selon deux plans de coupe. Le premier est dans la direction longitudinale des inclusions, ce qui permet de rendre compte de l'interface dans le sol entre le sous-sol considéré comme un milieu homogène et le milieu stratifié créé par les inclusions. Dans ce cas-là, l'interface considérée est un milieu 2D avec une périodicité dans une seule direction. Le modèle est réduit à un milieu périodique selon une seule direction dans laquelle il est considéré comme infini. Cette approche est traitée dans la première partie du CHAPITRE 2 avec des ondes non polarisées (SH) puis dans le CHAPITRE 3 dans un cadre plus général (P-SV). Le milieu périodique est d'abord étudié seul puis avec la prise en compte de l'interface avec le sous sol supposé homogène.

Le deuxième plan de coupe est transversal, donc correspond au plan horizontal. Le milieu périodique à étudier est alors périodique selon deux directions avec des inclusions circulaires placées de manière pério-

dique dans un domaine borné. Malgré la représentation, seule une interface plane entre le matériau périodique et le milieu homogène est considérée dans la suite. La modélisation issue de cette deuxième découpe est traitée dans les CHAPITRE 2 et CHAPITRE 3 comme précédemment en prenant en compte différents types d'ondes, et d'abord en considérant un milieu infini puis en ajoutant une interface.

Dans le cas de la protection parasismique, l'une des difficultés est que la source de l'onde sismique n'est pas connue. Un système stratifié comme présenté dans le CHAPITRE 2 ne permet donc pas de garantir la sécurité de la zone à protéger en fonction de la position de la source. Il est donc nécessaire d'imaginer un système en deux dimensions. C'est pourquoi une extension du problème à une onde provenant du sous-sol, et donc le cas d'une interface en deux dimensions entre le sous-sol considéré comme homogène et le milieu périodique composé par les inclusions cylindriques, a aussi été analysée dans le CHAPITRE 3.

Enfin, une représentation 2D des inclusions dans la matrice avec la zone isolée au milieu (là encore avec des interfaces planes et non circulaires) a été modélisée pour comparer les résultats aux résultats obtenus expérimentalement sur modèle réduit.

Conclusions

La problématique de la conception parasismique, et notamment un état de l'art concernant les pratiques d'isolation de structures utilisant des modifications du sol autour de celles-ci, est présentée. Ainsi, pour la protection de structures déjà existantes qu'il est difficile de renforcer pour des raisons techniques ou esthétiques (comme le patrimoine historique soumis à de diverses contraintes), des solutions permettant de protéger ces structures sans les modifier sont développées notamment grâce aux métamatériaux.

Les différents outils analytiques et numériques permettant de traiter le cas de métamatériaux périodiques sont présentés, notamment celui qui est basé sur la transformée de Floquet-Bloch. Les notations du modèle élastodynamique sont aussi introduites. Le principe des bandes de fréquence filtrées par les cristaux phononiques, c'est-à-dire des bandes de fréquences dans lesquelles les ondes sont évanescentes est introduit. Enfin, l'origine des différentes simplifications de la problématique et les modèles associés sont décrits.

En effet, la transformée de Floquet-Bloch permet de réduire le coût des modèles d'éléments finis utilisés pour étudier le comportement des milieux périodiques (et donc théoriquement infinis) en limitant l'analyse modale à la cellule élémentaire seule. Cependant, l'un des aspects étudié dans ce travail est la prise en compte des interfaces entre le métamatériau et le milieu environnant et du caractère borné des matériaux périodiques étudiés.

Chapitre 2

Propagation d'ondes hors-plan à l'intérieur et aux frontières d'un milieu périodique

Comme présenté dans le chapitre précédent, les milieux périodiques peuvent être utilisés pour filtrer des ondes à des fréquences spécifiques. À cause de la complexité du problème, il n'existe pas de solutions analytiques. Si des simulations numériques permettent d'étudier un tel milieu borné avec une prise en compte précise des conditions aux limites de sa frontière, la présence de la microstructure périodique implique des calculs de grande taille donc coûteux voire prohibitifs (différences de longueur d'onde dues à la différence de propriétés entre les matériaux). Pour contourner ce problème, la transformée de Floquet-Bloch permet de grandement limiter la taille du modèle numérique. L'étude du milieu périodique non borné est alors réduite à l'analyse modale d'une cellule de très petite taille, qui correspond à la cellule élémentaire de périodicité. Dans ce cas, une approche périodique, supposant que le milieu est infini, est-elle valide pour un milieu borné? Si oui, les questions de la prise en compte de l'incidence des ondes dans le milieu et du nombre minimal d'inclusions à mettre en place se posent.

La propagation des ondes dans un milieu stratifié périodique est d'abord considérée. Dans ce cadre, la dispersion du milieu est donc étudiée avec la transformée de Floquet-Bloch afin de mettre en évidence des bandes de fréquences interdites. Les ondes ne se propagent pas uniquement dans le sens de la périodicité, la prise en compte de l'angle d'incidence dans la réponse du milieu est étudiée. De plus, dans le but de valider les outils mis en place et les résultats obtenus, des comparaisons avec les cas 1D antérieurement étudiés dans la thèse de [Tian \(2012\)](#) sont effectués.

Dans le but de prendre en compte des conditions plus réalistes d'un milieu périodique borné comme indiqué dans la Section 1.5 (FIGURE 1.15), il est important de regarder le comportement des ondes à l'interface entre le milieu stratifié périodique et un milieu homogène. Le couplage permettant de raccorder les solutions dans deux demi-espaces est donc développé dans la deuxième partie de ce chapitre.

La troisième partie présente les courbes de dispersion obtenues numériquement pour un milieu infini périodique selon deux directions. Ces résultats sont ensuite utilisés comme référence pour l'étude de milieux périodiques bornés.

Dans la dernière partie de ce chapitre, afin de déterminer le nombre minimal d'inclusions à mettre en place pour valider l'utilisation de l'approche de Floquet-Bloch, une approche basée sur l'analyse modale de guide d'onde est développée et présentée pour prendre en compte le caractère borné d'un milieu périodique.

Dans ce chapitre, l'hypothèse de milieux modélisés réduits à deux dimensions dans lesquels la propagation d'ondes hors-plan (et donc non polarisées) est adoptée. Deux approches numériques sont utilisées

et mises en oeuvre : la première à l'échelle de la cellule en utilisant la transformée de Floquet-Bloch et la seconde basée sur l'analyse modale des guides d'onde. Par ailleurs, une troisième approche qui consiste à résoudre par éléments finis des équations d'onde dans le domaine temporel est aussi envisagée et des résultats préliminaires sont présentés dans l'ANNEXE B.

Sommaire

2.1 Comportement d'un milieu stratifié périodique infini	24
2.1.1 Analyse de Bloch à l'échelle de la cellule	25
2.1.2 Analyse des relations de dispersion	28
2.2 Comportement à l'interface d'un milieu stratifié semi-infini.	32
2.2.1 Propriété d'orthogonalité des modes de Bloch	32
2.2.2 Projection des modes	35
2.2.3 Illustration avec des résultats numériques	37
2.3 Propriété d'un milieu infini périodique selon deux directions	43
2.4 Prise en compte du caractère borné du milieu périodique en 2D	45
2.4.1 Éléments de théorie spectrale pour les guides d'ondes ouverts	46
2.4.2 Principe et résultats préliminaires d'une étude modale en guide d'onde 1D d'un milieu périodique borné à inclusion	47
2.4.3 Étude d'une barrière périodique 2D bornée dans une direction	57

2.1 Comportement d'un milieu stratifié périodique infini

La propagation d'ondes hors-plan (SH) est ici étudiée, c'est-à-dire une onde dont la polarisation est dans la direction normale au plan d'incidence formé par le vecteur d'onde de l'onde incidente et la direction verticale \mathbf{e}_z . En utilisant le formalisme de l'élastodynamique présenté dans le CHAPITRE 1, la propagation du champ de déplacement \mathbf{u} se réduit à la composante scalaire $u_y(x_1, z)$. La direction \mathbf{e}_y est supposée infinie. L'équation régissant ainsi le comportement du milieu (EQ.1.7) devient alors dans le domaine fréquentiel (équation de Helmholtz) :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mu(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} u_y(\mathbf{x})) = -\rho(\mathbf{x}) \omega^2 u_y(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

avec $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + z \mathbf{e}_z$. Il s'agit du même comportement qu'une onde acoustique, c'est-à-dire une onde scalaire se propageant à la vitesse des ondes de cisaillement et dont les ondes réfléchies et réfractées ne sont pas converties en un autre type d'onde puisque les ondes SH ne sont pas polarisées (peuvent être réduite à une grandeur scalaire).

Une étude mathématique de la propagation des ondes SH dans les milieux périodiques à partir de l'analyse de convergence des familles spectrales de réponse est proposée pour les milieux infinis par [Sanchez-Hubert and Turbe \(1986\)](#). Dans ce cadre, le milieu considéré est borné contrairement à l'étude présentée ici.

Le comportement des ondes à une interface entre deux milieux est un cas classique pour l'étude de la propagation des ondes dans les sols. [Lysmer and Drake \(1971\)](#) et [Lysmer and Waas \(1972\)](#) étudient la propagation d'ondes en prenant en compte des milieux non-stratifiés par exemple. Dans le cas d'une interface entre un milieu homogène et un milieu périodique, [Willis \(2016\)](#) met en avant l'utilisation de milieux stratifiés pour créer une interface à indice de réfraction négatif.

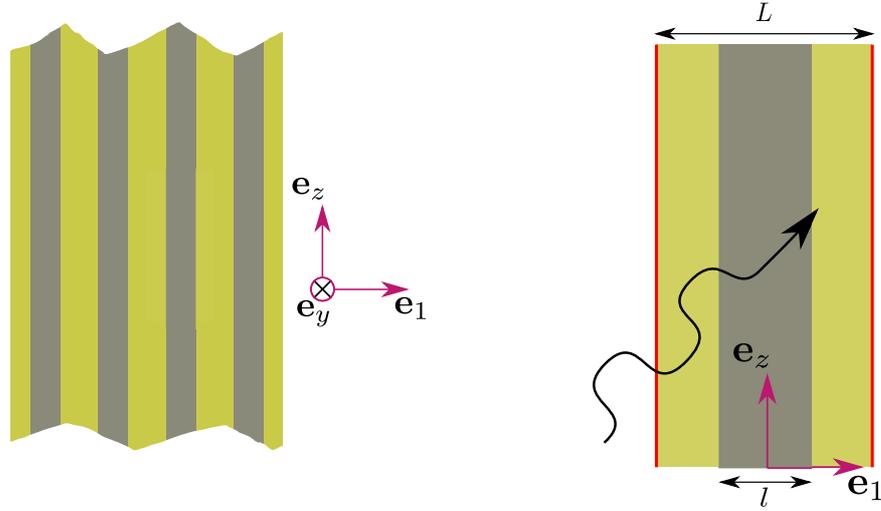


FIGURE 2.1 – Milieu périodique infini étudié (à gauche) et motif périodique symétrique du milieu stratifié matrice-inclusion (à droite). Les conditions de périodicité sont appliquées sur les bords (en rouge). Une onde se propageant dans n'importe quelle direction du plan $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_z$ est considérée.

2.1.1 Analyse de Bloch à l'échelle de la cellule

L'objectif est d'étudier comment ce milieu stratifié permet de diffracter les ondes et d'obtenir des bandes de fréquences interdites pour la propagation de l'onde.

Le milieu plan 2D considéré est dans un premier temps infini dans les deux directions du plan, et homogène dans la direction verticale \mathbf{e}_z et stratifié périodique dans la direction horizontale \mathbf{e}_1 .

La FIGURE 2.1 représente une cellule élémentaire de période spatiale L avec une inclusion de taille l . Le matériau externe (la matrice) a une densité ρ_m et un module μ_m , et respectivement ρ_i et μ_i pour le matériau interne (l'inclusion). Pour les développements analytiques, on se place néanmoins dans le cadre plus général avec ces deux paramètres de matériau définis comme une fonction de x_1 , qui est discontinue au niveau des deux interfaces.

Contrairement aux études antérieures développées dans la thèse de Tian (2012), la propagation de l'onde est 2D même si la périodicité est dans une seule direction. Comme le milieu est invariant dans la direction z , une transformée de Fourier en espace est appliquée à l'EQ.2.1 uniquement dans cette direction, ce qui fait apparaître un terme supplémentaire porté par k_z pour $x_1 \in]-\frac{l}{2}, -\frac{l}{2}[\cup]-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}[\cup]\frac{l}{2}, \frac{l}{2}[$:

$$\frac{d}{dx_1} \left[\mu(x_1) \left(\frac{d\hat{u}(x_1; k_z)}{dx_1} \right) \right] - \mu(x_1) k_z^2 \hat{u}(x_1; k_z) = -\rho(x_1) \omega^2 \hat{u}(x_1; k_z) \quad (2.2)$$

avec $\hat{u}(x_1; k_z)$ la transformée de Fourier de $u_y(x_1, z)$ dans la direction \mathbf{e}_z définie par :

$$\hat{u}(x_1; k_z) = \int_{\mathbb{R}} u_y(x_1, z) e^{-ik_z z} dz \quad (2.3)$$

et par soucis de simplicité, on omet dans la suite l'indice y .

D'autre part, la périodicité du milieu étant uniquement dans la direction \mathbf{e}_1 , on applique la transformée de Floquet-Bloch (EQ.1.22). Dans ce cas, le vecteur d'onde de Bloch est défini par :

$$\mathbf{k} = k\mathbf{e}_1 \quad (2.4)$$

En notant $u^B(x_1; k_z, k)$ la transformée de Floquet-Bloch de $\widehat{u}(x_1; k_z)$, l'EQ.2.2 devient alors pour $x_1 \in]-\frac{L}{2}, -\frac{L}{2}[\cup]-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}[\cup]\frac{L}{2}, \frac{L}{2}[$:

$$\left(\frac{d}{dx_1} + ik\right) \left[\mu \left(\frac{d}{dx_1} + ik\right) u^B \right] = (\mu k_z^2 - \rho \omega^2) u^B \quad (2.5)$$

avec la transformée de Bloch s'écrivant :

$$u^B(x_1; k_z, k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{u}(x_1 + nL; k_z) e^{-ik(x_1 + nL)}. \quad (2.6)$$

Il est intéressant de remarquer que l'équation dans le domaine de Bloch (EQ.2.5) peut être obtenue à partir de l'EQ.2.2 en remplaçant l'opérateur de dérivation $\frac{d}{dx_1}$ par $\left(\frac{d}{dx_1} + ik\right)$. La partie ajoutée dans l'opérateur permet de traduire la périodicité du milieu traitée avec la transformée de Floquet-Bloch. En effet, dans le cas où $k = 0$, l'EQ.2.5 est la même que celle dans le domaine de Fourier (EQ.2.2).

En plus de l'EQ.2.5, les conditions de périodicité sur la transformée de Floquet-Bloch du champ de déplacement doivent être ajoutées sur les deux frontières latérales de la cellule élémentaire. L'équation de continuité du déplacement s'écrit :

$$u^B\left(-\frac{L}{2}; k, k_z\right) = u^B\left(\frac{L}{2}; k, k_z\right) \quad (2.7)$$

De la même façon, la continuité du vecteur contrainte s'écrit :

$$\mu\left(-\frac{L}{2}\right) \left[\frac{d}{dx_1} + ik\right] u^B\left(-\frac{L}{2}; k, k_z\right) = \mu\left(\frac{L}{2}\right) \left[\frac{d}{dx_1} + ik\right] u^B\left(\frac{L}{2}; k, k_z\right). \quad (2.8)$$

Dans le cas où la cellule a des propriétés discontinues par morceaux, il faut ajouter les conditions aux limites suivantes aux interfaces internes entre la matrice et l'inclusion qui sont, d'une part, la continuité en déplacement :

$$u^B\left(\left(\frac{\pm l}{2}\right)^-; k, k_z\right) = u^B\left(\left(\frac{\pm l}{2}\right)^+; k, k_z\right) \quad (2.9)$$

où les exposants + et - permettent de désigner les deux limites à droite et à gauche d'une fonction au point d'interface, et d'autre part, la continuité du vecteur contrainte :

$$\mu\left(\left(\frac{\pm l}{2}\right)^-\right) \left[\frac{d}{dx_1} + ik\right] u^B\left(\left(\frac{\pm l}{2}\right)^-; k, k_z\right) = \mu\left(\left(\frac{\pm l}{2}\right)^+\right) \left[\frac{d}{dx_1} + ik\right] u^B\left(\left(\frac{\pm l}{2}\right)^+; k, k_z\right) \quad (2.10)$$

Ainsi, si les propriétés sont constantes par morceaux, l'équation différentielle suivante (EQ.2.11) permet de décrire le comportement de l'onde hors-plan dans le milieu stratifié :

$$\frac{d^2 u^B}{dx_1^2}(x_1; k, k_z) + 2ik \frac{du^B}{dx_1}(x_1; k, k_z) - (k^2 + k_z^2) u^B(x_1; k, k_z) = -\frac{\rho(x_1)}{\mu(x_1)} \omega^2 u^B(x_1; k, k_z) \quad (2.11)$$

Un terme prenant en compte la propagation d'une onde selon deux directions est ajoutée par rapport au cas 1D présenté par [Tian et al. \(2011\)](#). Le cas d'une propagation dans une seule direction de l'onde est notamment

retrouvé avec $k_z = 0$. En définissant une pulsation réduite :

$$\tilde{\omega} = \omega \sqrt{1 - V_s^2(x_1) \frac{k_z^2}{\omega^2}} \quad (2.12)$$

où V_s est la vitesse de propagation des ondes de cisaillement et dépend du matériau de la couche considérée, l'EQ.2.11 peut être reformulée comme suit :

$$\frac{d^2 u^B}{dx_1^2}(x_1; k, k_z) + 2ik \frac{du^B}{dx_1}(x_1; k, k_z) - k^2 u^B(x_1; k, k_z) = -\frac{\tilde{\omega}^2(x_1)}{V_s^2} u^B(x_1; k, k_z). \quad (2.13)$$

La pulsation réduite $\tilde{\omega}$ dépend donc de la direction de propagation des ondes. Dans le cas d'un milieu homogène, la composante k_z du vecteur d'onde selon \mathbf{e}_z ne peut pas être plus grande que le module de ce vecteur d'onde $\frac{\omega}{V_s}$. Mais, dans notre cas, comme k_z^2 est réel, la pulsation $\tilde{\omega}$ est soit réelle, soit imaginaire pur.

Donc, dans le cas avec V_s constante par couche, l'équation d'équilibre local (EQ.2.1) s'écrit alors sous la forme du problème aux valeurs propres quadratique (EQ.2.13) dont la solution s'écrit pour la couche q :

$$U_q^B(x_1, k_1) = \begin{cases} \left(A_q^+ e^{ik_1^+ x_1} + A_q^- e^{ik_1^- x_1} \right) & \text{si } k_z^2 \neq \frac{\omega^2}{V_s^2} \\ (A_q x_1 + B_q) e^{ik_1 x_1} & \text{si } k_z^2 = \frac{\omega^2}{V_s^2} \end{cases} \quad (2.14)$$

où les composantes du vecteur d'onde dans la direction de périodicité k_1^\pm s'écrivent :

$$k_1^\pm(V_s, k, k_z) = -k \pm \frac{\tilde{\omega}(k_z, \omega, V_s)}{V_s}. \quad (2.15)$$

Comme l'amplitude du déplacement de l'onde ne doit pas diverger à l'infini, $A_q = 0$ dans la seconde solution de l'EQ.2.14, ce qui correspond dans la première solution au cas où A_q^- est nul. De plus, dans la première solution, et pour la même raison, les coefficients A_q^\pm sont nuls dans la région où $\tilde{\omega}$ est imaginaire pur. Du point de vue de la physique, la solution est nulle pour k_z plus grand que le module du vecteur d'onde $\frac{\omega}{V_s}$. Comme les matériaux sont différents pour la matrice et l'inclusion, il peut exister un domaine de k_z pour lequel la solution est nulle dans l'un des deux matériaux. Comme le rapport $\frac{\omega}{k_z}$ est borné par V_s , donc dans le cas avec $V_{S_m} < V_{S_i}$ par exemple, le domaine $V_{S_m} < \frac{\omega}{k_z} < V_{S_i}$ correspond à une solution nulle dans la matrice et non-nulle dans l'inclusion.

La résolution du système vérifiant les conditions de périodicité (EQ.2.7 et EQ.2.8) et la continuité des grandeurs physiques (EQ.2.9 et EQ.2.10) entre les couches mène au système suivant :

$$[\mathbf{M}] \cdot \{\mathbf{A}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (2.16)$$

où $\{\mathbf{A}\}$ est de dimension 6 dans le cas d'une cellule élémentaire à trois couches (FIGURE 2.1). En utilisant la définition de l'impédance acoustique Z dans chaque couche donnée par :

$$Z = \sqrt{\mu \rho} \quad (2.17)$$

et en utilisant la notation $Y_q = Z_q \tilde{\omega}_q$, la matrice \mathbf{M} de l'EQ.2.16 est définie comme suit.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} e^{-ik_m^+ \frac{L}{2}} & e^{-ik_m^- \frac{L}{2}} & 0 & 0 & -e^{ik_m^+ \frac{L}{2}} & -e^{ik_m^- \frac{L}{2}} \\ Y_m e^{-ik_m^+ \frac{L}{2}} & -Y_m e^{-ik_m^- \frac{L}{2}} & 0 & 0 & -Y_m e^{ik_m^+ \frac{L}{2}} & Y_m e^{ik_m^- \frac{L}{2}} \\ e^{-ik_m^+ \frac{l}{2}} & e^{-ik_m^- \frac{l}{2}} & -e^{-ik_i^+ \frac{l}{2}} & -e^{-ik_i^- \frac{l}{2}} & 0 & 0 \\ Y_m e^{-ik_m^+ \frac{l}{2}} & -Y_m e^{-ik_m^- \frac{l}{2}} & -Y_i e^{-ik_i^+ \frac{l}{2}} & Y_i e^{-ik_i^- \frac{l}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{ik_i^+ \frac{l}{2}} & e^{ik_i^- \frac{l}{2}} & -e^{ik_m^+ \frac{l}{2}} & -e^{ik_m^- \frac{l}{2}} \\ 0 & 0 & Y_i e^{ik_i^+ \frac{l}{2}} & -Y_i e^{ik_i^- \frac{l}{2}} & -Y_m e^{ik_m^+ \frac{l}{2}} & Y_m e^{ik_m^- \frac{l}{2}} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Pour que le problème de l'EQ.2.16 ait des solutions non triviales, il faut que :

$$\det[\mathbf{M}(k, k_z)] = 0 \quad (2.19)$$

ce qui mène à une équation régissant la relation de dispersion entre k , ω et k_z qui s'écrit :

$$\cos(kL) = \cos\left(\frac{L-l}{V_{s,m}} \tilde{\omega}_m\right) \cos\left(\frac{l}{V_{s,i}} \tilde{\omega}_i\right) - \frac{Y_m^2 + Y_i^2}{2Y_m Y_i} \sin\left(\frac{L-l}{V_{s,m}} \tilde{\omega}_m\right) \sin\left(\frac{l}{V_{s,i}} \tilde{\omega}_i\right) \quad (2.20)$$

La même forme que dans la thèse de [Tian \(2012\)](#) en 1D est obtenue ici quand bien même le motif choisi initialement était différent (2 couches auparavant et 3 couches ici) sauf que l'impédance Z_q est remplacée par Y_q . Cette différence permet de prendre en compte le fait que l'onde ne se propage pas uniquement dans la direction périodique \mathbf{e}_1 , mais aussi dans la direction \mathbf{e}_z .

La distinction n'est pas faite sur le signe de $\omega^2 - \frac{\mu(x)}{\rho(x)} k_z^2$ (EQ.2.12). En effet, comme précisé auparavant, si $\tilde{\omega} \in \mathbb{C}$ alors la solution est nulle. La relation de dispersion ainsi obtenue permet d'avoir des détails sur le comportement du milieu vis-à-vis de la propagation des ondes.

2.1.2 Analyse des relations de dispersion

Les solutions de k de l'EQ.2.20 sont données par les relations suivantes :

$$k = \pm \frac{1}{L} \arccos \left[\frac{(Y_m + Y_i)^2 \cos\left[\frac{L-l}{V_{s,m}} \tilde{\omega}_m + \frac{l}{V_{s,i}} \tilde{\omega}_i\right] - (Y_m - Y_i)^2 \cos\left[\frac{L-l}{V_{s,m}} \tilde{\omega}_m - \frac{l}{V_{s,i}} \tilde{\omega}_i\right]}{4Y_m Y_i} \right] \quad (2.21)$$

où les valeurs de k sont bien bornées par les limites de la zone de Brillouin $\frac{-\pi}{L}$ et $\frac{\pi}{L}$ et sont aussi périodiques de période $\frac{2\pi}{L}$.

Il est alors possible de tracer les surfaces de dispersion $k(k_z, \omega)$ et de faire apparaître des bandes de fréquence interdites du milieu 2D stratifié périodique (FIGURE 2.1), c'est-à-dire des bandes de fréquences où l'onde ne se propage pas. Les dimensions et les paramètres matériau utilisés sont pour cet exemple ceux de [Tian \(2012\)](#), utilisés dans le cas d'un modèle 1D et récapitulés dans le TABLEAU 2.1. Ces valeurs, bien qu'éloignées des problématiques sismiques, sont utilisées pour permettre une comparaison.

Dans cet exemple, et contrairement à ce qui est fait ensuite, on représente les solutions de $k(\omega, k_z)$ car

L (mm)	l (mm)	μ_m (GPa)	μ_i (GPa)	ρ_m (kg/m ³)	ρ_i (kg/m ³)
5,5	1,5	50	250	2700	2700

TABLEAU 2.1 – Paramètres du modèle utilisé pour la comparaison avec la littérature.

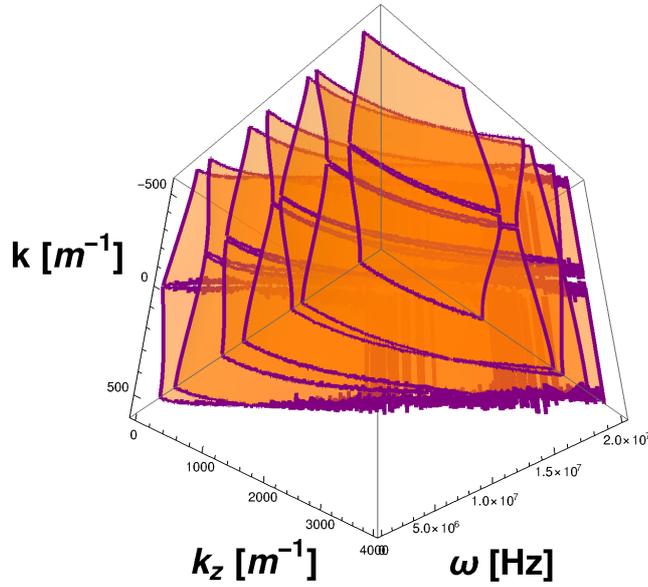


FIGURE 2.2 – Représentation des surfaces de dispersion $k(k_z, \omega)$ obtenues analytiquement en utilisant l'EQ.2.21.

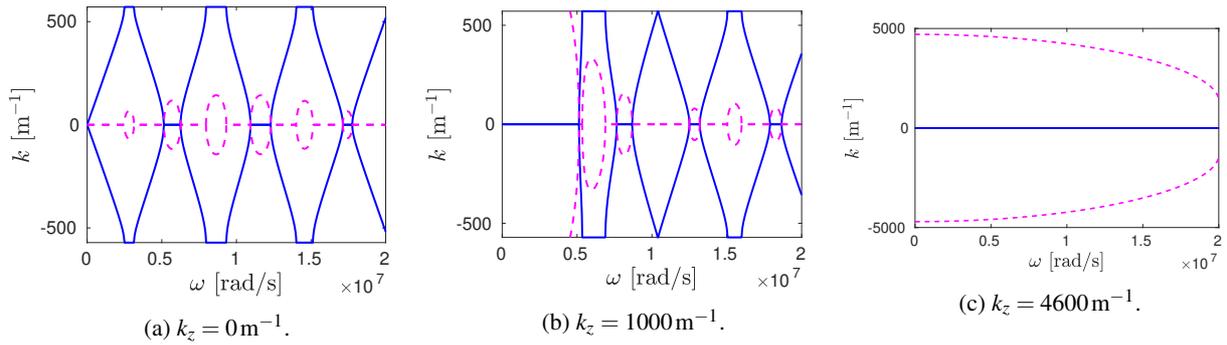


FIGURE 2.3 – Courbes de dispersion du milieu périodique pour plusieurs valeurs de k_z . La partie réelle est en bleu et la partie imaginaire en pointillés roses.

une solution analytique existe pour la résolution de l'EQ.2.20 uniquement dans ce sens. Contrairement à la représentation conventionnelle des surfaces de dispersion où la propagation de l'onde est dans la direction de périodicité (Andersen, 2015; Tie et al., 2013), la direction de propagation de l'onde dans la direction non périodique (représentée par k_z) intervient aussi dans l'apparition de bandes de fréquences filtrées (FIGURE 2.2). On retrouve bien le comportement périodique de k sur la zone de Brillouin puisque la solution est donnée à $\frac{2\pi}{L}$ près (EQ.2.21). Sur cette représentation, des bandes de fréquences filtrées peuvent être observées pour des coupes à k_z ou ω constants. Les coupes à k constants ne sont pas étudiées car cela correspond à ne plus considérer un modèle périodique.

Des coupes à k_z constants sont représentés sur la FIGURE 2.3. Le premier cas correspond à $k_z = 0$ (FIGURE 2.3a), donc $\tilde{\omega}$ est réel pour tout ω dans les deux couches.

Le cas $k_z = 1000 \text{ m}^{-1}$ (FIGURE 2.3b) est un cas où $\tilde{\omega}$ est réel dans la couche extérieure (la matrice) à partir de $\omega = 4,56 \cdot 10^6 \text{ rad/s}$. Dans l'inclusion, la valeur limite est obtenue pour $\omega = 5,98 \cdot 10^6 \text{ rad/s}$.

Dans le dernier cas, pour $k_z = 4600 \text{ m}^{-1}$ (FIGURE 2.3c), $\tilde{\omega}$ est imaginaire dans la bande de fréquence $[0 \ 20 \cdot 10^6 \text{ rad/s}]$. La valeur limite est liée à la vitesse de propagation des ondes dans le milieu. Pour un milieu homogène, cette valeur est $\omega_{im} = V_s * k_z$, c'est-à-dire la valeur de ω pour laquelle la composant selon

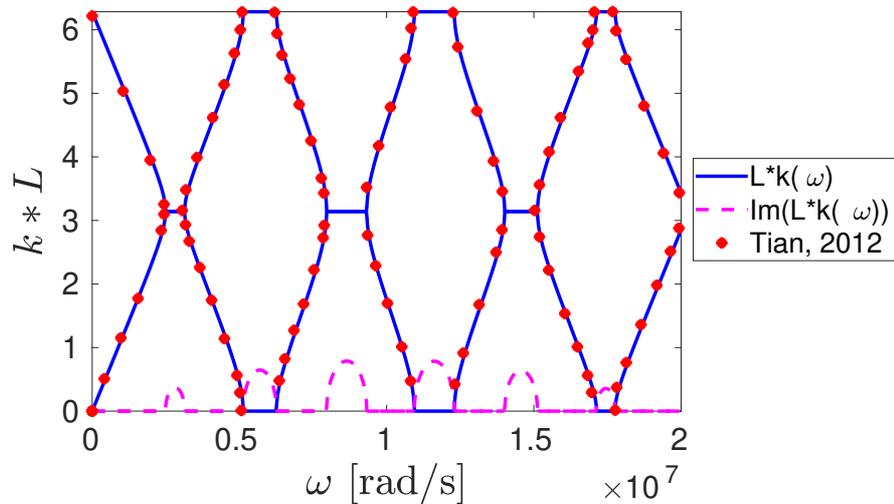


FIGURE 2.4 – Comparaison des solutions analytiques de l'EQ.2.20 pour $k_z = 0$ (lignes bleues) avec les résultats de Tian (2012) (points rouges). La partie imaginaire est elle tracée en pointillés (rose).

L (m)	l (m)	μ_m (GPa)	μ_i (GPa)	ρ_m (kg/m ³)	ρ_i (kg/m ³)
10	3,34	0,233	30	1750	2400

TABEAU 2.2 – Paramètres du modèle utilisé pour les problématiques du Génie Civil.

k_z est égale au module du vecteur d'onde dans le milieu. Dans le cas d'un milieu stratifié, la valeur limite est comprise entre celles des deux matériaux ($\omega_{lim} = 5,14 \cdot 10^6$ rad/s).

Le cas étudié en une seule dimension correspond à la résolution de l'EQ.2.13, donc au cas où $k_z = 0$ m⁻¹. Ainsi, il est possible de comparer les résultats analytiques 1D avec la littérature (FIGURE 2.4). Les résultats coïncident entre les différentes approches. Les modes liés aux bandes de fréquences interdites correspondent aux fréquences dont la partie imaginaire est non nulle. Les modes concernés sont alors des modes évanescents dans le milieu périodique.

En utilisant des propriétés des matériaux et une géométrie différentes afin de répondre à la problématique des ondes sismique et des structures de Génie Civil, de nouvelles surfaces de dispersion sont obtenues. Les valeurs utilisées sont résumées dans le TABLEAU 2.2.

Avec cette configuration, le contraste entre les propriétés des deux matériaux est plus important que dans le cas précédent. Les écarts entre les valeurs de $\tilde{\omega}_{lim}$ pour les deux matériaux sont donc importants. La FIGURE 2.5 présente les surfaces de dispersion $k(\omega)$. Une irrégularité des surfaces de dispersion est alors visible. En effet, l'expression de $k(k_z, \omega)$ présente des singularités dues à l'annulation de la pulsation réduite $\tilde{\omega}_i$ (comme l'inclusion est plus rigide). Le chemin $\tilde{\omega}_m$ correspond lui à la limite supérieure des courbes. Cependant, les résultats obtenus pour $k_z = 0$ sont bien cohérents (FIGURE 2.6a).

Les bandes en fréquences se rapprochent alors beaucoup plus des contraintes du Génie Civil puisque les fréquences atteintes sont de l'ordre de la centaine de Hertz. À cause de la grande différence entre les propriétés des matériaux, les ondes se propagent de moins en moins lorsque k_z augmente.

La FIGURE 2.6 présente des coupes pour différentes valeurs de k_z . Sur la FIGURE 2.6c, prise pour $k_z = 0,5$ m⁻¹ sur la bande fréquence, les courbes de dispersion montrent qu'il n'existe des modes réels que ponctuellement sur certaines fréquences. Cela signifie que les ondes ne se propagent dans le milieu stratifié que dans la direction e_z .

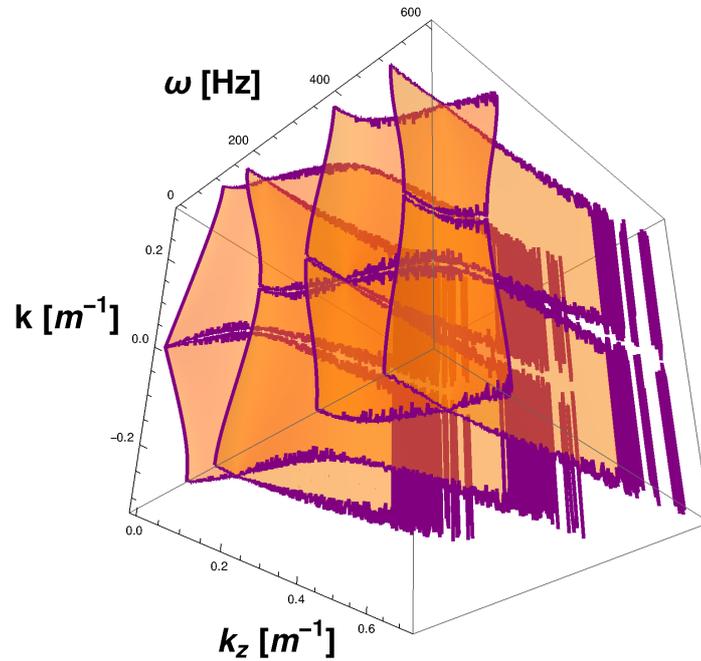


FIGURE 2.5 – Courbes de dispersion pour une propagation des ondes uniquement dans la direction \mathbf{e}_1 dans un milieu stratifié. Les propriétés des matériaux sont plus adaptées aux fréquences du GC.

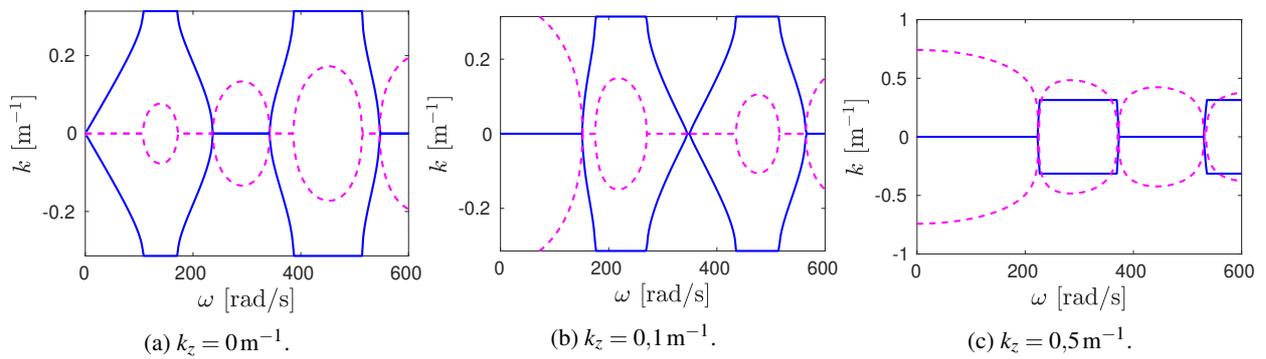


FIGURE 2.6 – Courbes de dispersion du milieu périodique pour plusieurs valeurs de k_z . La partie réelle est en bleu et la partie imaginaire en pointillés roses.

2.2 Comportement à l'interface d'un milieu stratifié semi-infini.

La situation présentée sur la FIGURE 2.7 est considérée en prenant en compte l'interface entre le milieu stratifié périodique étudié précédemment et un milieu homogène. Des inclusions semi-infinies sont positionnées dans une matrice de sol et le milieu homogène est constitué du même sol. La direction \mathbf{e}_1 qui est parallèle à l'interface est conservée infinie. L'indice n se réfère aux différents vecteurs de la base de modes de Floquet-Bloch.

En utilisant une approche différente de celles développées par [Srivastava \(2016\)](#) ou [Nemat-Nasser \(2015\)](#) basées sur la vitesse des ondes de phase, le comportement des ondes à une telle interface entre un milieu homogène et un milieu stratifié est étudiée. Les exemples des études citées permettent notamment de mettre en évidence des interfaces à indice de réfraction négatifs et l'évolution de la répartition de l'énergie transmise et réfléchiée en fonction des angles d'incidence. L'approche développée ici utilise le comportement modal de la cellule homogène et de la cellule périodique pour en déduire le comportement d'une onde incidente à l'interface.

Pour rester dans le cadre d'une analyse modale en écrivant des conditions de raccord entre les semi-espaces, le milieu homogène est aussi modélisé par la théorie de Floquet-Bloch comme un milieu périodique de même période que le milieu stratifié. Le calcul des modes est réduit à un calcul de modes en 1D après la séparation des variables comme décrite dans la section précédente. Le comportement de chaque demi-espace est décrit par le problème aux valeurs propres (EQ.2.5) défini sur $x_1 \in]-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}[$, mais qui est réécrite sous la forme suivante :

$$\left(\frac{d}{dx_1} + ik\right) \left[\mu \left(\frac{d}{dx_1} + ik\right) u^B \right] + \rho \omega^2 u^B = \mu k_z^2 u^B. \quad (2.22)$$

Donc, la résolution des problèmes aux valeurs propres (EQ.2.22) est différente. En effet, pour le calcul numérique des modes, ω est fixé et k varie dans la zone de Brillouin. Les valeurs propres calculées sont donc les k_{z_m} associés aux modes u^B . La FIGURE 2.8 représente ainsi les neuf premiers modes de Bloch calculés dans les deux demi-espaces pour $k = 0 \text{ m}^{-1}$. L'influence de l'inclusion sur la forme des modes est notamment visible. Sur cet exemple, le matériau la constituant étant plus rigide que celui de la matrice, l'amplitude des modes est diminuée dans la partie centrale de la cellule. Le cas $k = 0$ correspond à l'analyse modale d'une structure, avec notamment le calcul des modes de corps rigide. Dans la partie périodique, le mode de corps rigide est notamment modifié pour suivre la variation des propriétés des matériaux.

Une autre représentation en est donnée sur la FIGURE 2.9 où les neuf premiers modes sont séparés et représentés pour trois valeurs différentes de k . La forme des modes calculés dépend de la valeur du paramètre de Bloch k ainsi que de l'ordre du mode. Les modes de corps rigides sont pris en compte. Les modes représentés en bleu sont les modes représentés sur la FIGURE 2.8. Dans la partie périodique, il est possible de visualiser l'effet de l'inclusion sur les modes propres. Ainsi, comme l'inclusion est plus rigide, l'amplitude du mode dans la zone de l'inclusion est atténuée par rapport à son équivalent dans le milieu homogène.

2.2.1 Propriété d'orthogonalité des modes de Bloch

Afin de pouvoir projeter les différentes ondes réfléchies et réfractées sur une base modale, les modes de Bloch solutions de l'EQ.2.11 doivent être orthogonaux dans chaque demi-espace pour garantir l'unicité de la solution.

Soit u et w un champ de déplacement dans le domaine de Floquet-Bloch et la fonction test associée. L'exposant B est omis dans cette partie pour simplifier l'écriture. La formulation faible de l'équation traduisant

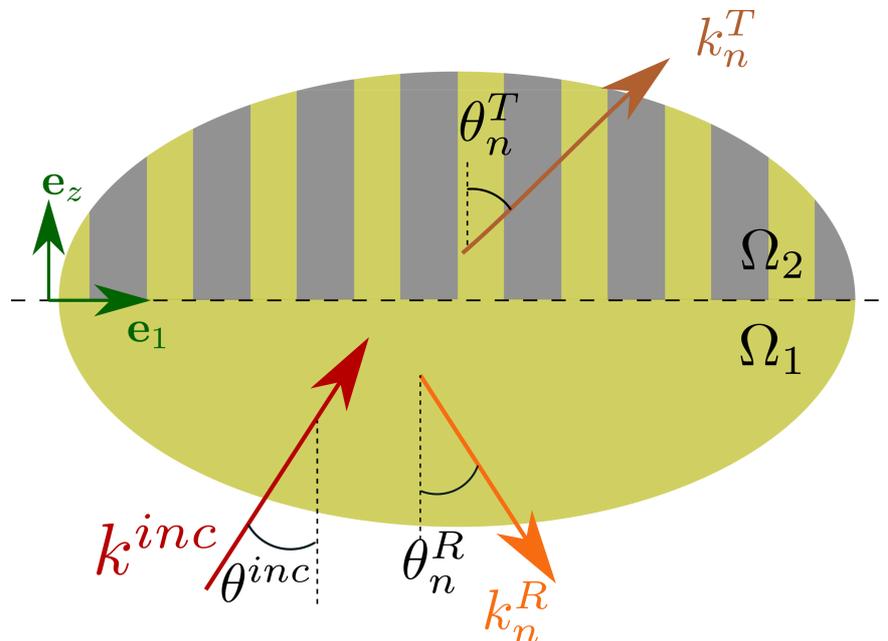


FIGURE 2.7 – Raccordement d'un demi-espace homogène avec un demi-espace stratifié périodique. Les vecteurs d'onde représentés sont celui de l'onde incidente (k^{inc} en rouge), ceux des ondes réfléchies (k_n^R en orange) et des ondes réfractées (k_n^T en marron).

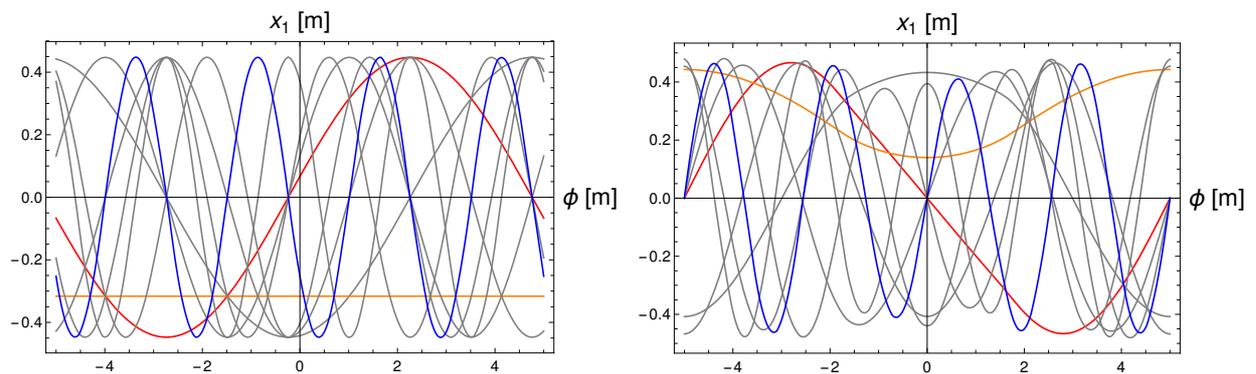


FIGURE 2.8 – 9 premiers modes de Bloch pour $k = 0$ dans le cas d'une cellule homogène (gauche) et d'une cellule périodique hétérogène 1D (droite) avec une inclusion centrale plus rigide que la matrice. Trois modes sont mis en valeur dans chaque cas, dont les modes de corps rigide en orange.

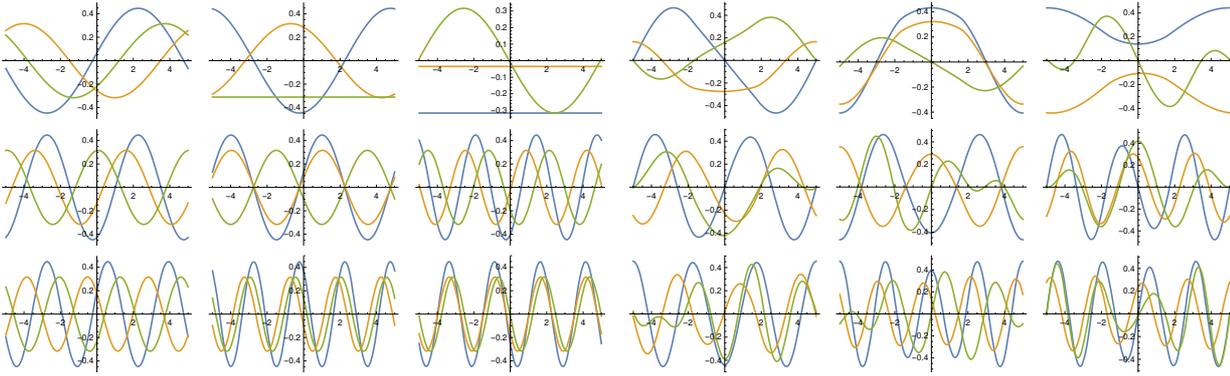


FIGURE 2.9 – 9 premiers modes de Bloch pour trois valeurs de k ($k = 0$ en bleu, $k = \frac{\pi}{2L}$ en jaune et $k = \frac{\pi}{L}$ en vert) dans le cas d'une cellule homogène (gauche) et d'une cellule périodique hétérogène 1D (droite) avec une inclusion centrale plus rigide que la matrice.

le comportement de la cellule périodique étudiée avec Floquet-Bloch (EQ.2.5) s'écrit :

$$\begin{aligned} - \int_{-L/2}^{L/2} \mu \frac{du}{dx_1} \frac{dw^*}{dx_1} dx_1 + ik \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{d\mu u}{dx_1} w^* + \mu \frac{du}{dx_1} w^* \right) dx_1 \\ + \int_{-L/2}^{L/2} (\rho \omega^2 - \mu k^2) u w^* dx_1 = k_z^2 \int_{-L/2}^{L/2} \mu u w^* dx_1 \end{aligned} \quad (2.23)$$

où * désigne le complexe conjugué.

On définit le produit scalaire permettant de définir l'orthogonalité des modes comme suit :

$$\langle u, w \rangle = \int_{-L/2}^{L/2} \mu(x_1) u w^* dx_1. \quad (2.24)$$

Proposition 1 Les modes de Bloch du problème aux valeurs propres (EQ.2.22) sont orthogonaux vis-à-vis du produit scalaire défini par l'EQ.2.24.

DÉMONSTRATION: Soit $u = u_a$ et $w = u_b$ deux éléments de la base de modes où l'on ne considère que des modes simples.

La formulation faible du problème (EQ.2.23) devient :

$$\begin{aligned} - \int_{-L/2}^{L/2} \mu \frac{du_a}{dx_1} \frac{du_b^*}{dx_1} dx_1 + ik \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{d\mu u_a}{dx_1} u_b^* + \mu \frac{du_a}{dx_1} u_b^* \right) dx_1 \\ + \int_{-L/2}^{L/2} (\rho \omega^2 - \mu k^2) u_a u_b^* dx_1 = k_{z,a}^2 \int_{-L/2}^{L/2} \mu u_a u_b^* dx_1 \end{aligned} \quad (2.25)$$

avec $k_{z,a}$ le nombre d'onde complexe associé au mode a . En échangeant le rôle de u_a et u_b dans l'EQ.2.25, on a :

$$\begin{aligned} - \int_{-L/2}^{L/2} \mu \frac{du_b}{dx_1} \frac{du_a^*}{dx_1} dx_1 + ik \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{d\mu u_b}{dx_1} u_a^* + \mu \frac{du_b}{dx_1} u_a^* \right) dx_1 \\ + \int_{-L/2}^{L/2} (\rho \omega^2 - \mu k^2) u_b u_a^* dx_1 = k_{z,b}^2 \int_{-L/2}^{L/2} \mu u_b u_a^* dx_1 \end{aligned} \quad (2.26)$$

En prenant le conjugué de l'EQ.2.26, la formulation suivante est obtenue :

$$\begin{aligned}
 - \int_{-L/2}^{L/2} \mu \frac{du_b^*}{dx_1} \frac{du_a}{dx_1} dx_1 - ik \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{d\mu u_b^*}{dx_1} u_a + \mu \frac{du_b^*}{dx_1} u_a \right) dx_1 \\
 + \int_{-L/2}^{L/2} (\rho \omega^2 - \mu k^2) u_b^* u_a dx_1 = k_{z,b}^{*2} \int_{-L/2}^{L/2} \mu u_b^* u_a dx_1
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

La différence entre l'EQ.2.25 et l'EQ.2.27 permet d'obtenir la relation :

$$ik \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{d\mu u_a}{dx_1} u_b^* + \mu \frac{du_a}{dx_1} u_b^* + \frac{d\mu u_b^*}{dx_1} u_a + \mu \frac{du_b^*}{dx_1} u_a \right) dx_1 = (k_{z,a}^2 - k_{z,b}^{*2}) \int_{-L/2}^{L/2} \mu u_a u_b^* dx_1 \tag{2.28}$$

Soit :

$$2ik \int_{-L/2}^{L/2} \frac{d(\mu u_a u_b^*)}{dx_1} dx_1 = (k_{z,a}^2 - k_{z,b}^{*2}) \int_{-L/2}^{L/2} \mu u_a u_b^* dx_1 \tag{2.29}$$

Or grâce à la périodicité :

$$\int_{-L/2}^{L/2} \frac{d(\mu u_a u_b^*)}{dx_1} dx_1 = 0 \tag{2.30}$$

Ainsi :

$$(k_{z,a}^2 - k_{z,b}^{*2}) \int_{-L/2}^{L/2} \mu u_a u_b^* dx_1 = 0 \tag{2.31}$$

Soit $b = a$:

$$k_{z,a}^2 = k_{z,a}^{*2} \tag{2.32}$$

Donc :

$$k_{z,a} \in \mathbb{R} \tag{2.33}$$

Soit $b \neq a$:

$$\int_{-L/2}^{L/2} \mu u_a u_b^* dx_1 = 0 \tag{2.34}$$

Donc les modes de Bloch sont orthogonaux pour un même milieu périodique vis-à-vis du produit scalaire de l'EQ.2.24. \square

De plus, les modes sont normalisés vis-à-vis de la norme associée au produit scalaire défini par l'EQ.2.24.

On a donc :

$$\int_{-L/2}^{L/2} \mu u_a u_a^* dx_1 = 1. \tag{2.35}$$

Enfin, les modes doubles sont construits pour respecter l'orthogonalité des modes.

2.2.2 Projection des modes

L'écriture des conditions aux limites entre les deux milieux (FIGURE 2.7) consiste à écrire au niveau de l'interface l'égalité des déplacements et du vecteur contrainte. Une onde de la forme :

$$\mathbf{u}^{inc} = e^{i(k_x^{inc} x_1 + k_z^{inc} z)} \tag{2.36}$$

est choisie comme onde incidente. Les équations de continuité des déplacements et du flux à l'interface entre les deux milieux considérés sont utilisées (EQ.1.18).

$$u^{inc}(x_1, 0) + u^R(x_1, 0) = u^T(x_1, 0) \quad (2.37a)$$

$$\mu(x_1, 0^-) \frac{\partial u^{inc}}{\partial z}(x_1, 0^-) + \mu(x_1, 0^-) \frac{\partial u^R}{\partial z}(x_1, 0^-) = \mu(x_1, 0^+) \frac{\partial u^T}{\partial z}(x_1, 0^+) \quad (2.37b)$$

où les ondes réfléchies sont notées u^R et celles transmises u^T . Le résultat sur les cellules élémentaires s'écrivant sous la forme d'une somme infinie de modes de Bloch, les ondes transmises et réfléchies sur le milieu complet s'écrivent en appliquant une transformée inverse de Floquet-Bloch (EQ.1.26) :

$$u^R = L \int_{-\frac{\pi}{L}}^{\frac{\pi}{L}} \left(\sum_n \alpha_n^0 \phi_n^0(x_1; k, k_{0z,n}) e^{-ik_{0z,n}z} \right) e^{ikx_1} dk, \quad (2.38a)$$

$$u^T = L \int_{-\frac{\pi}{L}}^{\frac{\pi}{L}} \left(\sum_n \alpha_n \phi_n(x_1; k, k_{z,n}) e^{ik_{z,n}z} \right) e^{ikx_1} dk \quad (2.38b)$$

où ϕ_n^0 et ϕ_n sont les modes de Bloch obtenus à ω fixé et pour lesquels k évolue dans la zone de Brillouin. Les quantités (modes, etc.) avec l'exposant 0 sont liées au milieu homogène, et celles sans exposant sont liées au milieu stratifié. À chaque mode est associé une valeur propre correspondant à la projection du vecteur d'onde sur l'axe \mathbf{e}_z ($k_{0z,n}$ dans la cellule homogène et $k_{z,n}$ dans celle périodique).

Pour chaque valeur de k , les coefficients de participation des modes de Floquet-Bloch α_n^0 et α_n dans la solution (EQS.2.38a et 2.38b) sont calculés en projetant la transformée de Floquet-Bloch des équations de raccordement (EQ.2.37a) sur une base de modes de la cellule stratifié :

$$a_m^{inc} + \sum_n \alpha_n^0 a_{nm}^0 = \sum_n \alpha_n a_{nm}, \quad (2.39a)$$

$$b_m^{inc} + \sum_n \alpha_n^0 b_{nm}^0 = \alpha_{mm} b_{mm} \quad (2.39b)$$

où les différents termes, issus de la projection des équations de continuité sur le mode m dans le demi-espace périodique (ϕ_m), sont explicités par :

$$a_m^{inc} = \int_{-L/2}^{L/2} e^{ik_x^{inc} x_1} \phi_m dx_1; \quad b_m^{inc} = \mu_m k_z^{inc} \int_{-L/2}^{L/2} e^{ik_x^{inc} x_1} \phi_m dx_1, \quad (2.40a)$$

$$a_{nm}^0 = \int_{-L/2}^{L/2} \phi_n^0 \phi_m dx_1; \quad b_{nm}^0 = -\mu_m k_{0z,n} \int_{-L/2}^{L/2} \phi_n^0 \phi_m dx_1, \quad (2.40b)$$

$$a_{nm} = \int_{-L/2}^{L/2} \phi_n \phi_m dx_1; \quad b_{nm} = k_{z,n} \int_{-L/2}^{L/2} \mu(x_1) \phi_n \phi_m dx_1 = \delta_{nm}. \quad (2.40c)$$

Les termes a_m^{inc} et b_m^{inc} concernent respectivement la projection de l'onde incidente et de sa dérivée sur les modes du milieu périodique. Ceux de l'onde réfléchi dans le milieu homogène sont désignés par les termes a_{nm}^0 et b_{nm}^0 et ceux de l'onde transmise par a_m et b_m . Parce que les modes sont orthonormés dans un même demi-espace, b_{nm} sont nuls si $m \neq n$. Les autres termes n'ont *a priori* pas de raisons de l'être.

En pratique, la solution est troquée aux projections des premiers modes de Bloch (ici $n_{max} = 9$). Les

approximations \tilde{u}^R et \tilde{u}^T sont définies par :

$$\tilde{u}^R = L \int_{-\frac{\pi}{L}}^{\frac{\pi}{L}} \left(\sum_{n=1}^{n_{max}} \alpha_n^0 \phi_n^0(x_1; k, k_{0z,n}) e^{-ik_{0z,n}z} \right) e^{ikx_1} dk, \quad (2.41a)$$

$$\tilde{u}^T = L \int_{-\frac{\pi}{L}}^{\frac{\pi}{L}} \left(\sum_{n=1}^{n_{max}} \alpha_n \phi_n(x_1; k, k_{z,n}) e^{ik_{z,n}z} \right) e^{ikx_1} dk. \quad (2.41b)$$

En fonction de la longueur d'onde (et donc de la pulsation de l'onde incidente), le nombre de modes à calculer diffère. Plus les fréquences considérées sont élevées, plus le nombre de modes à prendre en compte pour approximer la solution est grand.

2.2.3 Illustration avec des résultats numériques

Dans un milieu stratifié utilisé pour des applications sismiques, l'angle d'incidence des ondes dépend de la position de la source. Ainsi, il est important d'étudier le comportement des ondes en fonction de l'angle d'incidence de l'onde plane. La valeur du $k_{z,0}$ de l'onde incidente est alors modifiée et la part de chaque mode pour l'onde réfléchi et l'onde réfractée change. L'annexe A présente la vérification de la méthode développée sur le cas d'une interface entre deux milieux homogènes, d'abord avec un angle d'incidence nul puis avec un angle non nul.

Pour les propriétés des matériaux, on ne regarde ici qu'une seule configuration qui prend en compte le cas des inclusions plus rigides que la matrice. Le TABLEAU 2.3 montre les propriétés utilisées pour les matériaux. La largeur de l'inclusion est égale au tiers de la largeur du motif ($l = \frac{L}{3}$). Pour la modélisation du changement de propriétés, on définit une fonction échelon dont la distance de régularisation est faible devant la taille des éléments (FIGURE 2.10). Sur la bande de fréquence correspondant à $\omega = [0, 600]$ rad/s, la plus petite longueur d'onde est dans le matériau de la matrice et égale à $\lambda_{min} = 0,61$ m. On fixe la taille des éléments à $h_{max} = 0,05$ m, ce qui correspond à 12 éléments par longueur d'onde. Avec ces choix des paramètres numériques, il a été vérifié que les modes calculés sont équivalents aux résultats obtenus précédemment pour des propriétés discontinues.

D'abord, il est possible de représenter les surface de dispersion pour chacun des milieux périodiques considérés en calculant numériquement les valeurs propres $k_{0z,n}$ (pour le cas homogène) et $k_{z,n}$ (du milieu comportant des inclusions) issues de l'EQ.2.22. Le signe de k_z est choisi dans l'optique de leur application dans la suite pour analyser le raccord entre les deux demi-espaces : les ondes sont réfléchies dans le milieu homogène ($k_z < 0$) et sont réfractées dans le milieu stratifié ($k_z > 0$). Ces surfaces sont représentées sur les FIGURES 2.11a et 2.11b. Dans le milieu homogène, ces surfaces se croisent sans être disjointes complètement alors que dans le cas périodique, des bandes de fréquences interdites sont visibles pour des plans de coupe à $k_{z,n}$ (FIGURE 2.6) ou ω (FIGURE 2.13b) constants. Cependant contrairement aux cas plus classiques (directions de propagation de l'onde et de périodicité de même dimension), il n'existe pas de valeurs de ω pour laquelle il n'existe aucun mode de propagation. En effet, on trouvera toujours pour un ω donné un mode propagatif avec un $k_{z,n}$ approprié.

Une approximation des déplacements réels obtenus sur la cellule après réalisation de la transformée de

L (m)	μ_m (GPa)	μ_i (GPa)	ρ_m (kg/m ³)	ρ_i (kg/m ³)
10	0,233	30	1750	2400

TABLEAU 2.3 – Paramètres de l'étude utilisés pour l'observation des conditions d'interface.

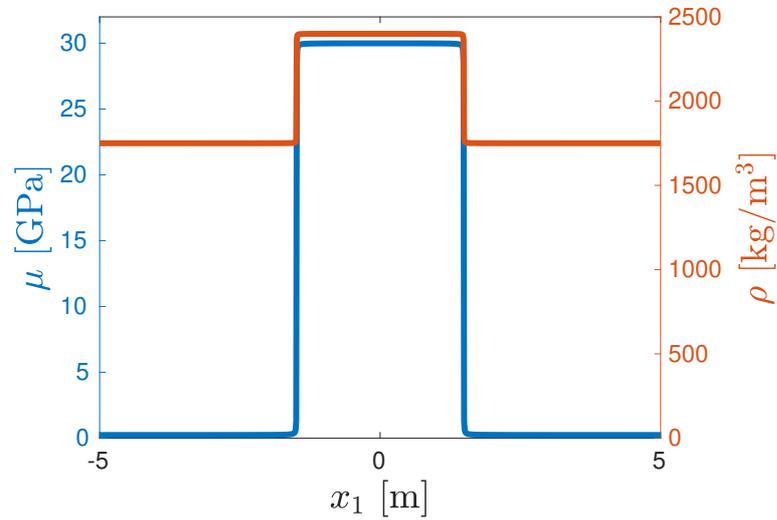
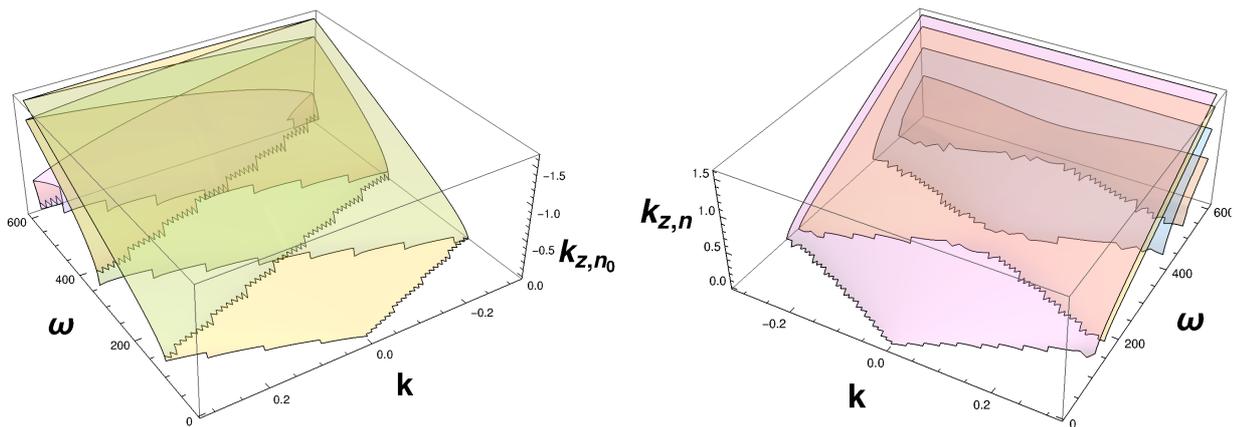


FIGURE 2.10 – Forme des changements de propriétés des matériaux sur la largeur du motif. La densité est en rouge et le module de cisaillement en bleu.



(a) Surfaces de dispersion d'un milieu homogène.

(b) Surfaces de dispersion d'un milieu périodique.

FIGURE 2.11 – Surfaces de dispersion obtenues numériquement permettant de caractériser les milieux périodiques selon une seule direction.

Bloch inverse sur chaque cellule et pour chaque onde (incidente, réfléchiée et réfractée) peut être obtenue. On tronque la solution aux neuf premiers modes de Bloch pour chaque k afin de considérer tous les modes participant au tracé des surfaces de dispersion de la FIGURE 2.11. Les modes suivants correspondent à des valeurs propres purement imaginaires, qui correspondent donc à un mode nul. On adopte une représentation modale des ondes dans la cellule primitive. Les résultats sont obtenus pour une discrétisation uniforme de la zone de Brillouin ($\delta k = \frac{\pi}{40L}$).

Le cas représenté sur la FIGURE 2.12 est obtenu pour une pulsation $\omega = 400\text{rad/s}$. Elle présente la méthodologie avec l'exemple d'une onde incidente d'angle $\theta^{inc} = 30^\circ$. On calcule séparément la part de chaque mode de Bloch du demi-espace homogène dans l'onde réfléchiée et la part des modes périodiques dans l'onde réfractée en fonction de l'angle d'incidence et des paramètres de l'étude conformément aux EQS.2.39.

Ensuite le résultat final est la somme de ces contributions dans chaque demi-espace et de l'onde incidente. Le retour sur l'ensemble du milieu périodique est assuré en effectuant une transformée inverse de Bloch (EQ.1.26). Dans ces résultats, on peut remarquer qu'une part de l'onde est réfléchiée par l'interface et une autre est transmise dans le milieu périodique avec inclusions. Une part plus importante est cependant réfléchiée dans le milieu périodique et qui interfère avec l'onde incidente. Ce comportement est cohérent avec les prédictions en utilisant le modèle de Floquet-Bloch puisque k_z^{inc} est situé dans une bande de fréquence interdite du milieu stratifié. L'influence de l'inclusion est aussi visible sur l'onde transmise dont les déplacements sont plus importants dans la matrice que dans l'inclusion.

Ces résultats sont ensuite étendus sur les FIGURES 2.13c et 2.14c en prenant en compte les angles d'incidence pour deux valeurs de ω : 400rad/s et 250rad/s . Une coupe des surfaces de dispersion (ω, k, k_z) est représentée pour le milieu homogène et pour le milieu périodique pour chaque valeur de ω correspondant.

Les deux études montrent une influence de l'angle d'incidence sur les coefficients de réflexion et de transmission des ondes au niveau des interfaces. Les lignes en pointillés orange sur les courbes de dispersion représentent les valeurs de k_z^{inc} de l'onde incidente pour les différents angles d'incidence de celle-ci.

Dans le premier cas avec $\omega = 400\text{rad/s}$ (FIGURE 2.13b), toutes les valeurs de k_z^{inc} sont situées dans les bandes interdites du milieu stratifié périodique. De la même façon pour $\omega = 250\text{rad/s}$ où seul l'angle d'incidence $\theta^{inc} = 35^\circ$ permet de couper une courbe de dispersion, les différents coefficients dépendent de l'incidence.

Ces figures montrent que lorsque l'angle d'incidence permet de s'approcher des courbes de dispersion, et donc des modes propagatifs, les ondes sont peu réfléchies (par exemple pour 25° avec $\omega = 400\text{rad/s}$) alors que la réflexion est plus importante lorsque le k_z^{inc} est éloignée d'un mode propagatif dans le milieu périodique (par exemple pour 25° et 50° avec $\omega = 250\text{rad/s}$).

Plus l'angle est élevé (et donc plus k_z est petit), plus l'onde est affectée par la périodicité du milieu et plus les résultats obtenus avec la transformée de Floquet-Bloch sont influents (puisque la transformée de Floquet-Bloch est réalisée dans la direction \mathbf{e}_1). Au contraire, pour un angle d'incidence nul (et donc orthogonal à la direction périodique), les résultats ne suivent pas ceux de Bloch mais sont quand même influencés par la présence de l'inclusion. À partir d'un angle d'incidence $\theta^{inc} = 12^\circ$ dans le cas $\omega = 400\text{rad/s}$, les premiers effets de la périodicité sur la transmission des modes sont visibles et les ondes sont plutôt réfléchies pour des angles d'incidence plus importants.

Il est important de noter que malgré la taille conséquente des motifs (avec des inclusions de plusieurs mètres de large), les bandes de fréquence interdites ne permettent pas de descendre sous la trentaine de hertz (avec les matériaux utilisés), ce qui ne correspond pas aux fréquences à filtrer pour la protection des structures face aux séismes. Les domaines de fréquences atteints ici correspondent cependant aux fréquences nuisibles pour les équipements (armoires, canalisations, etc.) des ouvrages sensibles (Suzuki, 2008).

De plus, la dépendance de l'efficacité d'un tel système à l'angle d'incidence fait qu'il n'est en pratique

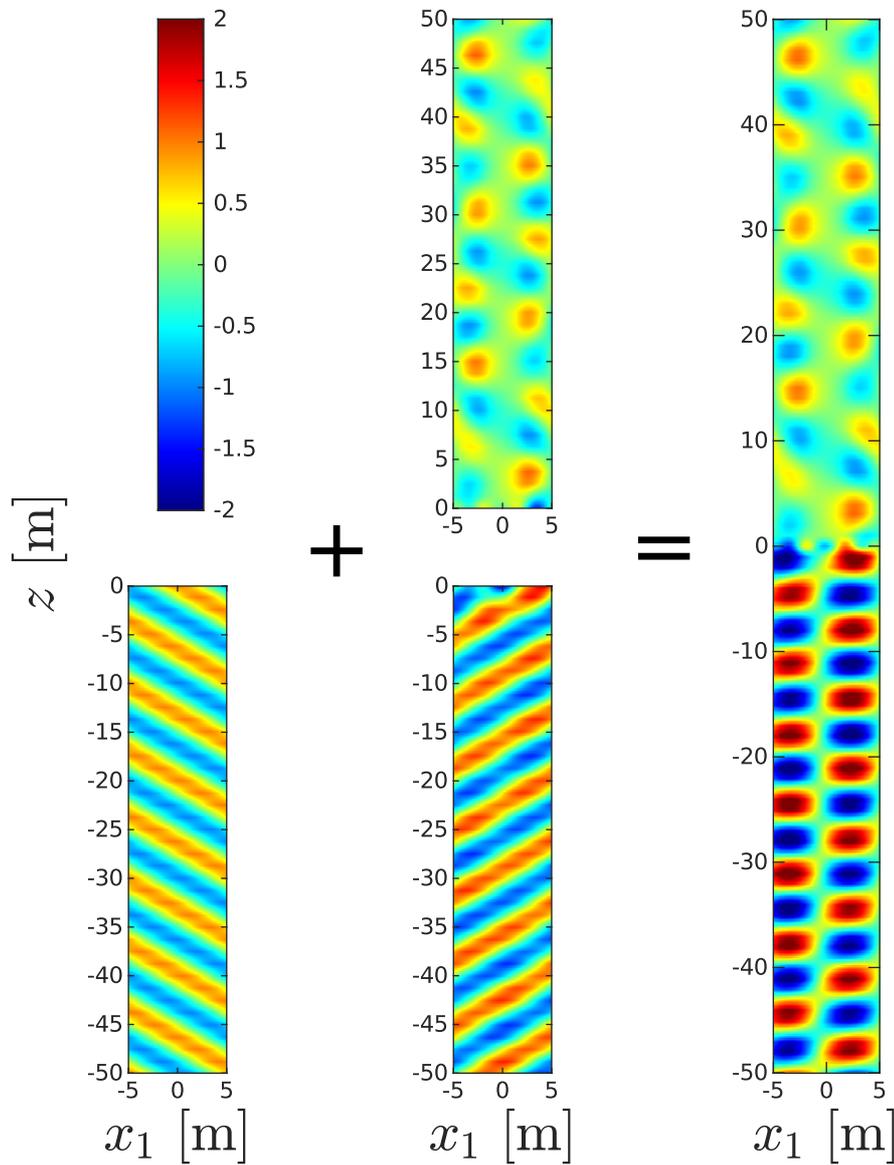
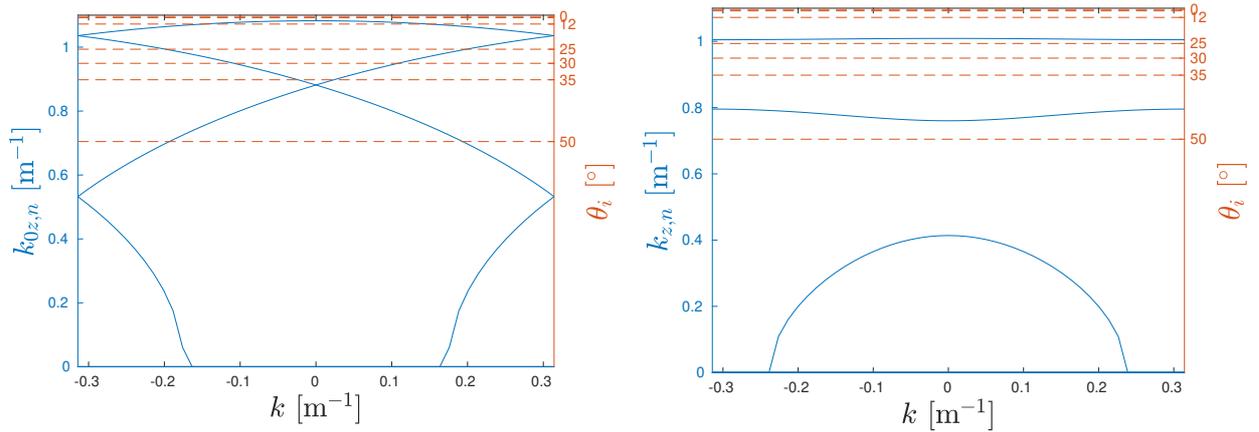
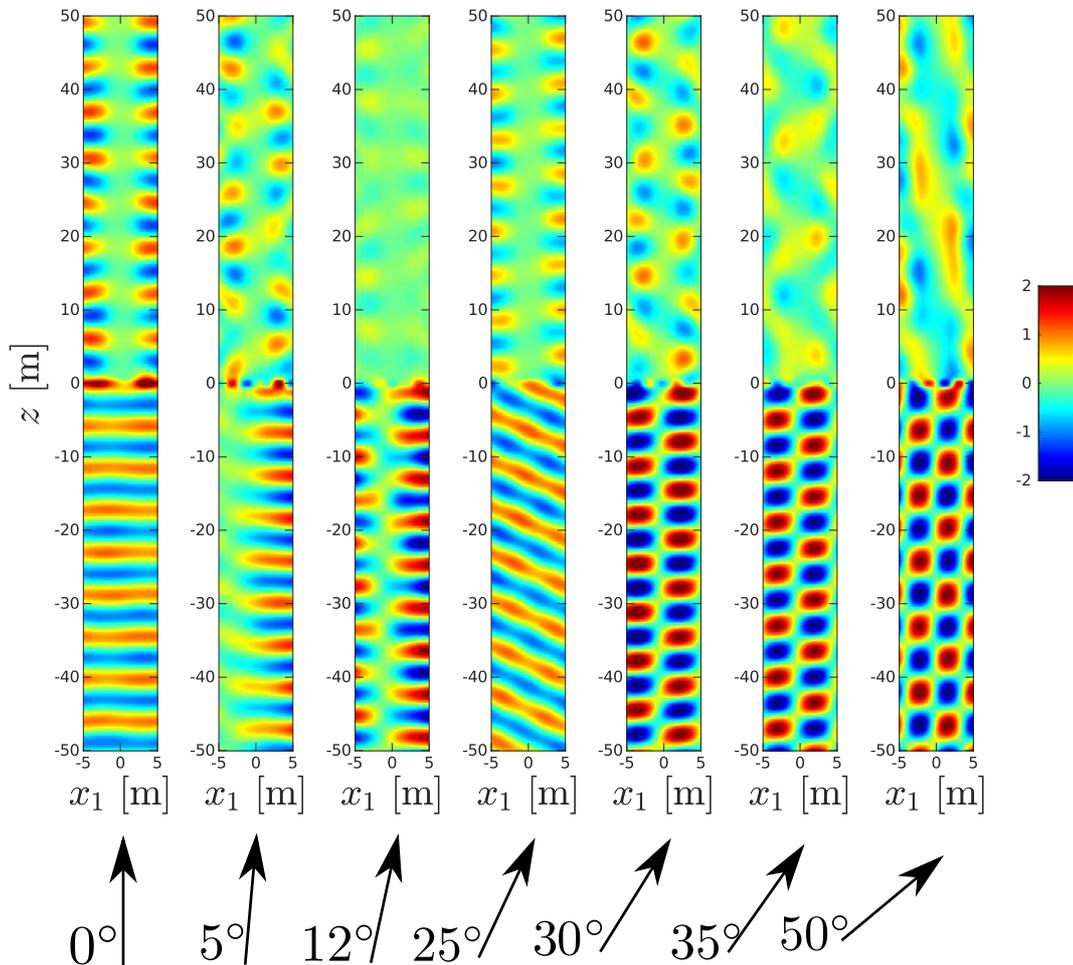


FIGURE 2.12 – Représentation des différentes ondes dans le demi-espace homogène et dans le demi espace périodique : onde incidente (en bas à gauche), onde transmise (en haut au milieu), onde réfléchie (en bas au milieu). La figure à droite est la somme des trois ondes précédente.



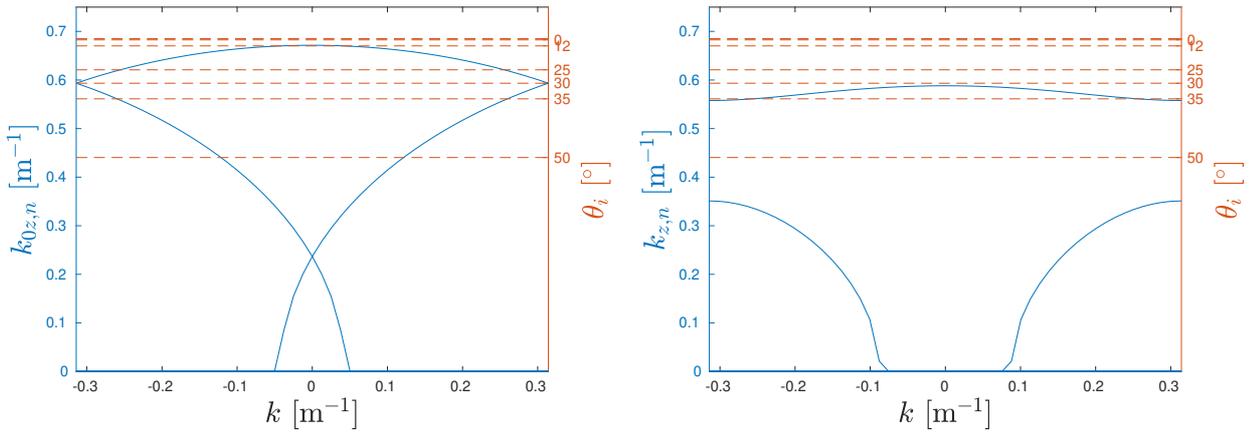
(a) Coupe des surfaces de dispersion $k - k_{0z,n}$ de la cellule homogène à $\omega = 400$ rad/s.

(b) Coupe des surfaces de dispersion $k - k_{z,n}$ de la cellule périodique à $\omega = 400$ rad/s.

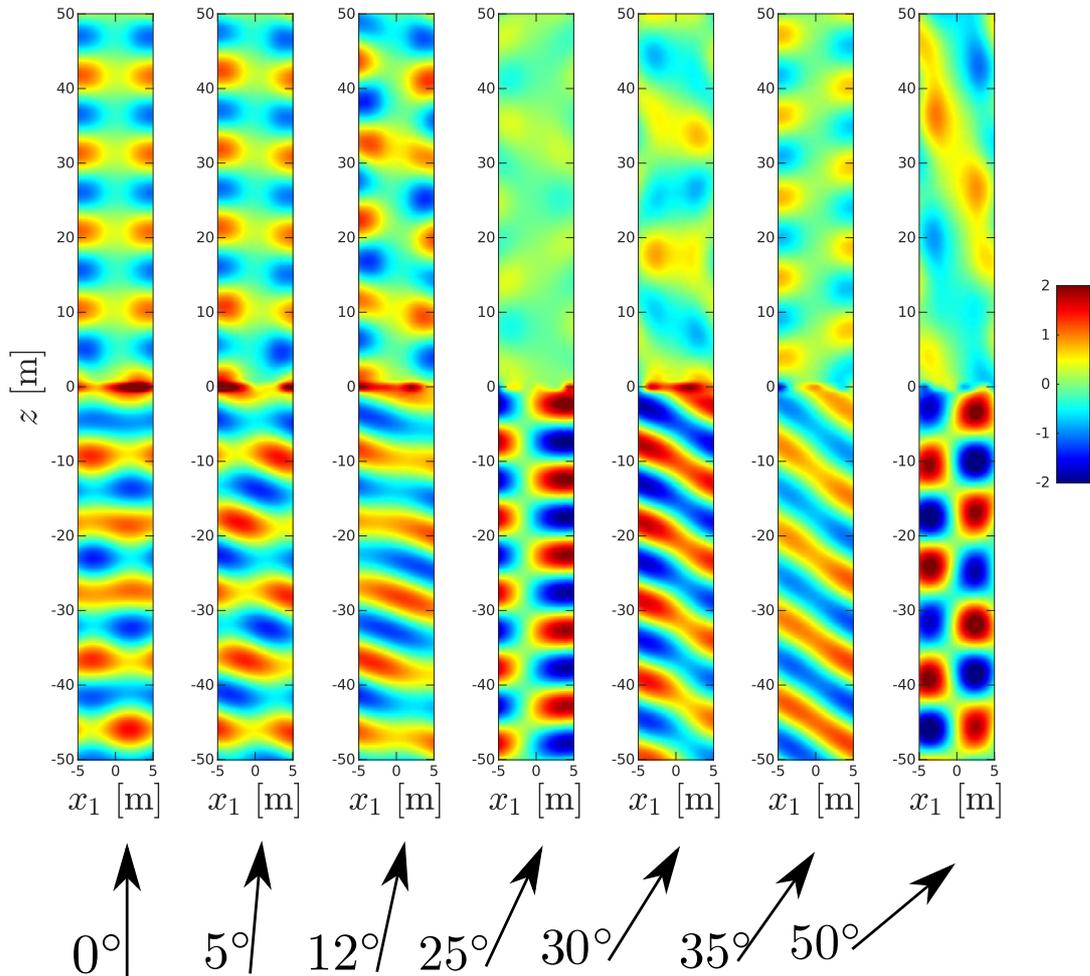


(c) Champs de déplacement total sur l'ensemble de la cellule pour différents angles d'incidence et donc pour plusieurs valeurs de $k_{z,0}$.

FIGURE 2.13 – Lien entre les courbes de dispersion dans les milieux considérés comme périodiques et la réflexion/réfraction des ondes à l'interface entre un milieu homogène et un milieu stratifié périodique selon l'angle d'incidence.



(a) Coupe des surfaces de dispersion $k - k_{0z,n}$ de la cellule homogène à $\omega = 250 \text{ rad/s}$. (b) Coupe des surfaces de dispersion $k - k_{z,n}$ de la cellule périodique à $\omega = 250 \text{ rad/s}$.



(c) Champs de déplacement total sur l'ensemble de la cellule pour différents angles d'incidence et donc pour plusieurs valeurs de $k_{z,0}$.

FIGURE 2.14 – Lien entre les courbes de dispersion dans les milieux considérés comme périodiques et la réflexion/réfraction des ondes à l'interface entre un milieu homogène et un milieu stratifié périodique selon l'angle d'incidence à une pulsation angulaire $\omega = 250 \text{ rad/s}$.

pas possible de le mettre en place. Pour des utilisations où la source est localisée (trafic ferroviaire, industrie, etc), sa mise en place peut par contre se révéler efficace. La prise en compte d'un milieu périodique selon deux dimensions est nécessaire pour limiter la propagation des ondes dont l'incidence n'est pas connue.

2.3 Propriété d'un milieu infini périodique selon deux directions

Le milieu périodique correspondant à une coupe horizontale du milieu périodique de la FIGURE 1.15 est désormais étudié (FIGURE 2.15). Le milieu est considéré comme infini dans les deux directions dans un premier temps. L'analyse du milieu périodique infini et de ses propriétés est réalisée comme précédemment à l'aide de la transformée de Floquet-Bloch. La cellule élémentaire étudiée est représentée sur la FIGURE 2.16a. Des ondes hors-plan sont considérées ici. Dans ce cas, contrairement au travail précédent, une transformée de Floquet-Bloch est réalisée selon deux directions sur l'EQ.2.1 puisque le milieu est périodique selon deux directions. Dans le milieu, l'équation ainsi transformée s'écrit sous la forme :

$$(\nabla_{\mathbf{x}} + i\mathbf{k}) \cdot [\mu(\mathbf{x})(\nabla_{\mathbf{x}} + i\mathbf{k})u^B(\mathbf{x})] = -\rho(\mathbf{x})\omega^2 u^B(\mathbf{x}) \quad (2.42)$$

où \mathbf{k} évolue dans l'espace réciproque limité à la zone irréductible de Brillouin, délimitée par le contour $\Gamma - X - M - \Gamma$ (FIGURE 2.16b).

En ne résolvant le problème aux valeurs propres de Floquet-Bloch (EQ.2.42) que pour le vecteur d'onde k appartenant au contour de la zone irréductible de Brillouin ($\Gamma - X - M - \Gamma$) (Chigrin et al., 2003), les surfaces de dispersion peuvent être réduites à des courbes. L'utilisation du contour de la zone de Brillouin permet donc de représenter la solution en deux dimensions : les points du contour possèdent les coordonnées suivantes, $M(\frac{\pi}{c}, \frac{\pi}{c})$, $\Gamma(0,0)$ et $X(\frac{\pi}{c}, 0)$, et ils sont reportés sur l'axe horizontal de manière contiguë. Contrairement au problème de la Section 2.1, il n'est plus possible d'obtenir une expression analytique de la solution étant donnée la géométrie plus complexe du motif. Il est alors nécessaire d'utiliser des méthodes numériques pour calculer les valeurs propres de l'EQ.2.42 et tracer les courbes de dispersion du milieu considéré. Les valeurs

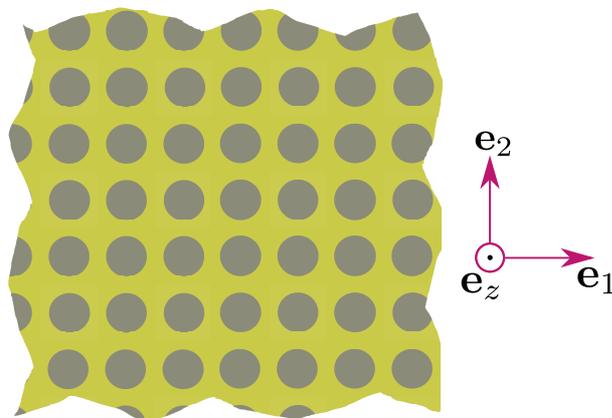
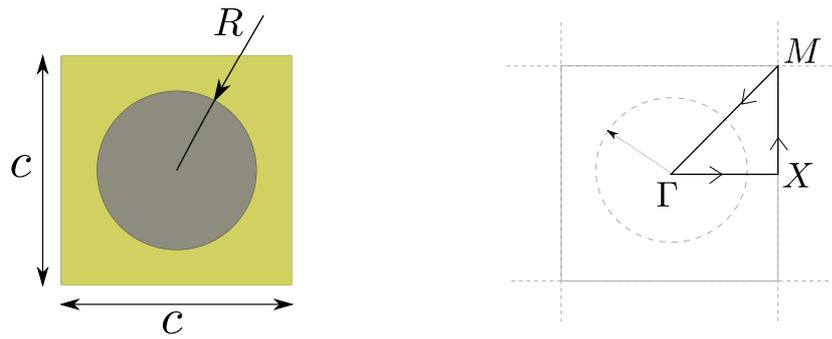


FIGURE 2.15 – Milieu périodique selon deux directions de maille carrée constitué d'une matrice et d'une inclusion circulaire.



(a) Cellule élémentaire correspondant à un milieu infini selon deux directions.

(b) Cellule réciproque sur laquelle est représenté le contour de la zone irréductible de Brillouin.

FIGURE 2.16 – Cellule primitive du milieu périodique dans l'espace physique et première zone de Brillouin correspondante dans l'espace réciproque.

c (m)	R (m)	μ_m (GPa)	μ_i (GPa)	ρ_m (kg/m ³)	ρ_i (kg/m ³)
1	0,346	0,233	30	1750	2400

TABLEAU 2.4 – Récapitulatif des données utilisées pour la simulation du milieu périodique infini 2D.

propres calculées sont les $\omega(\mathbf{k})$ de manière à ne pas traiter le problème aux valeurs propres quadratique en \mathbf{k} . La méthode des éléments finis est utilisée ici pour discrétiser la cellule. Contrairement au traitement de lissage appliqué aux propriétés μ et ρ discontinues à l'interface matrice/inclusion, un modèle où les propriétés des matériaux restent discontinues dans le modèle d'éléments finis est utilisé dans cette partie. Les équations de continuités en déplacement et en flux s'appliquent donc aux frontières entre les matériaux. En pratique, les conditions de continuité en flux sont appliquées de manière implicite dans la formulation variationnelle.

Les paramètres et les propriétés des matériaux sont résumés dans le TABLEAU 2.4. Il s'agit ici, comme dans la partie précédente, d'une inclusion plus rigide dans une matrice molle, ce qui correspond plus aux applications en Génie Civil. De plus, contrairement à l'étude précédente, la taille de la cellule a été réduite à 1 m pour mieux correspondre à ce qui est faisable en pratique.

Les courbes de dispersion du milieu périodique ainsi défini sont représentées sur la FIGURE 2.17. L'espace permettant de représenter le nombre d'onde de Bloch est présenté en abscisse suivant le contour de la zone irréductible de Brillouin $M - \Gamma - X - M$. Cette figure présente donc les valeurs propres $\omega(\mathbf{k})$ calculées numériquement sur la cellule. Pour chaque valeur du vecteur d'onde de Bloch \mathbf{k} , les six premiers modes sont calculés pour faire apparaître des bandes de fréquences où les modes sont purement imaginaires pour toutes les valeurs de \mathbf{k} . Il s'agit de bandes de fréquences interdites par le milieu périodique (bandes violettes). La première notamment apparaît autour de 300 Hz. Comme il n'existe qu'un seul type d'onde se propageant dans le modèle, la première courbe de dispersion ne fait apparaître qu'une seule courbe passant par le point Γ , qui correspond à $\mathbf{k} = \mathbf{0}$.

Cette méthode est étendue au cas des matériaux au comportement élastodynamique dans le CHAPITRE 3. Une étude paramétrique est notamment réalisée afin de tester l'influence des paramètres géométriques et des propriétés des matériaux sur l'apparition, la localisation et la largeur des bandes de fréquences interdites. De la même manière, l'étude de structures plus complexes permettant d'observer des résonances locales sont aussi étudiées dans le CHAPITRE 3.

Dans le cas d'un système de protection réel, les milieux ne sont en général pas infinis. La simulation d'un tel milieu borné ne peut donc pas se faire uniquement avec l'approche utilisant la transformée de Floquet-

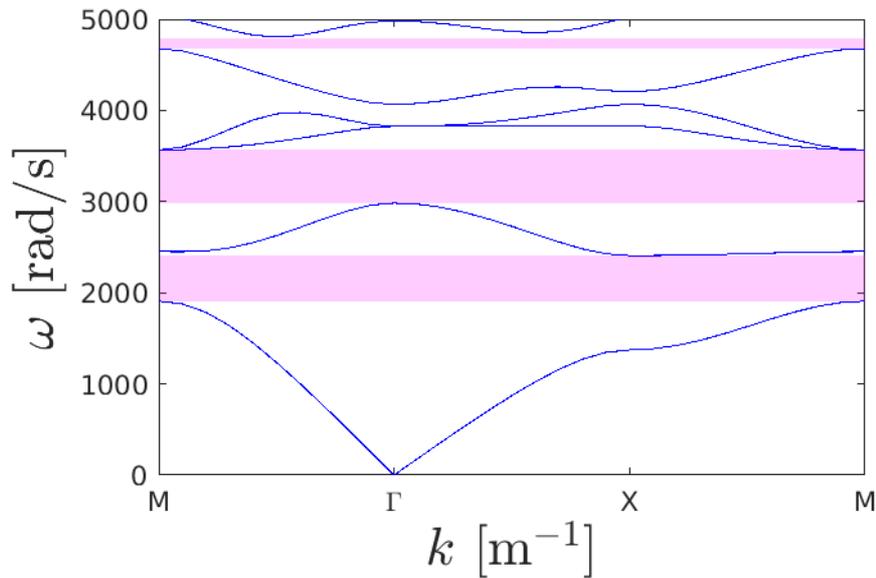


FIGURE 2.17 – Courbes de dispersion de la cellule périodique selon deux dimensions avec la mise en évidence des bandes de fréquence filtrées (en violet).

Bloch. Une solution consiste à réaliser un modèle à grande échelle en utilisant des conditions limites absorbantes permettant de simuler des milieux infinis.

Dans le cas d'un milieu périodique borné en 2D, les résultats précédents peuvent être étendus grâce à des méthodes développées pour le cas de la réalisation d'une interface active en utilisant des matériaux piézoélectriques (Tateo, 2013) ou la modélisation numérique dans le cas d'une généralisation de la méthode des EF dans le cas ferroviaire (Pinault et al., 2020). Cependant, selon la taille du domaine à considérer et le nombre d'inclusions, la simulation numérique devient très coûteuse car le maillage doit être raffiné au niveau des interfaces entre la matrice et les inclusions.

2.4 Prise en compte du caractère borné du milieu périodique en 2D

Le comportement des matériaux à microstructure complexe dépend du nombre de cellules utilisées. La réponse statique d'un matériau architecturé soumis à un effort est comparé par Kadic et al. (2018) en fonction du nombre de cellules utilisées. Il est alors mis en évidence que les phénomènes prédominants diffèrent en fonction du nombre de cellules. Le comportement dynamique d'un métamatériau suit d'autant plus cette sensibilité au nombre de cellules qu'en basse fréquence (celles qui concernent la protection parasismique), la taille des inclusions est petite devant les longueurs d'ondes considérées.

En dynamique, Del Broccolo (2020) évalue l'efficacité d'un milieu périodique en fonction du nombre d'inclusions en comparant les valeurs de l'atténuation dans les bandes de fréquence interdites.

Dans le cadre de cette thèse, nous proposons d'étendre l'approche en analyse modale de guide d'onde pour observer l'influence du nombre de cellules sur le comportement dynamique du milieu périodique borné. Ces résultats issus de cette nouvelle approche sont notamment confrontés aux résultats obtenus pour un milieu infini avec la théorie de Floquet-Bloch. Cela permet de voir l'effet de la dimension finie et du nombre d'inclusions sur les bandes de fréquences interdites théoriques du milieu infini.

L'avantage des modèles de guide d'onde développés ici est de pouvoir s'intéresser à des milieux non-infinis, ce qui est important pour le domaine d'application du Génie Civil. En effet, dans ce domaine il est

important de limiter la taille et le nombre des éléments (surtout dans le cas où l'installation est urbaine) ainsi que la complexité des éléments (pour des questions de maintenance).

2.4.1 Éléments de théorie spectrale pour les guides d'ondes ouverts

Les guides d'ondes sont des systèmes permettant de guider les ondes et pour lesquels la section longitudinale n'est pas bornée. Une des méthodes pour étudier cette famille de guide d'ondes est la simulation de milieux infinis en utilisant des PML. Cet outil a été développé et utilisé pour mettre en avant des modes piégés par des irrégularités (Pagneux, 2013) ou pour retrouver des défauts (Recoquillay, 2018) dans ces guides d'ondes.

L'idée principale est basée sur le fait que les modes obtenus par analyse modale d'un guide d'onde décrivent le comportement du milieu infini et du défaut. En utilisant des PML, l'un des objectifs est de séparer les modes correspondant au comportement du milieu à l'infini de ceux localisés car piégés et, ou atténués à cause de la présence des défauts locaux. Dans le cadre de cette thèse, nous proposons donc d'étendre cette approche à un milieu périodique borné. Par conséquent, notre premier but est de distinguer les modes correspondant au comportement du milieu infini et ceux piégés et, ou atténués par un sous-domaine borné contenant un nombre fini d'inclusions disposées périodiquement.

D'abord, nous rappelons quelques éléments théoriques de base (Benzoni-Gavage, 2010). Considérons le problème aux valeurs propres d'un guide d'onde possédant des inclusions régi par une équation de type :

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \quad (2.43)$$

où A est un opérateur linéaire auto-adjoint, l'étude du comportement du domaine est faite en séparant le spectre discret σ_{disc} de l'opérateur A de son spectre essentiel σ_{ess} . Ces deux spectres sont liés à l'ensemble résolvant $\rho(A)$ est défini par :

$$\rho(A) = \{\Lambda \in \mathbb{C}, A - \Lambda\mathbb{I} \text{ est inversible}\}. \quad (2.44)$$

Son complémentaire dans l'ensemble des complexes est appelé le spectre de A : L'analyse modale d'un guide d'onde permet ainsi de calculer le spectre de l'opérateur A , qui est l'ensemble des valeurs propres définies telles que :

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \text{ et } \mathbf{u} \neq \mathbf{0}\} \quad (2.45)$$

Le spectre de l'opérateur A peut alors être séparé entre le spectre discret σ_{disc} d'une part, défini par les valeurs propres isolées dans le spectre et le spectre essentiel, qui est son complémentaire dans le spectre :

$$\sigma_{ess}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, A - \lambda\mathbb{I} \text{ n'est pas un opérateur de Fredholm d'indice } 0\} \quad (2.46)$$

Le PML représentant un milieu infini grâce à un changement de variable géométrique, le nombre de valeurs propres est aussi infini. Il n'est donc pas possible d'avoir une égalité pour le système de calcul des valeurs propres, mais seulement une limite. Le spectre discret recouvre la part des modes dans le domaine borné, donc dans la partie utile et le spectre essentiel les modes dans la partie simulant le milieu infini. L'analyse modale des guides d'onde permettent de différencier les modes à fuite des modes propagatifs (Goursaud, 2010).

Les modes à fuite, décrivant la solution de la propagation de l'onde à l'intérieur des PML, ne sont pas considérés dans la suite. Le domaine d'intérêt étant dans le domaine borné, seules les modes du spectre discret sont conservés dans la suite. Grâce à la définition du PML (EQ.2.48), les spectres des domaines non bornés sont dirigés dans le domaine complexe. Pour réaliser l'analyse modale du guide d'onde étudié,

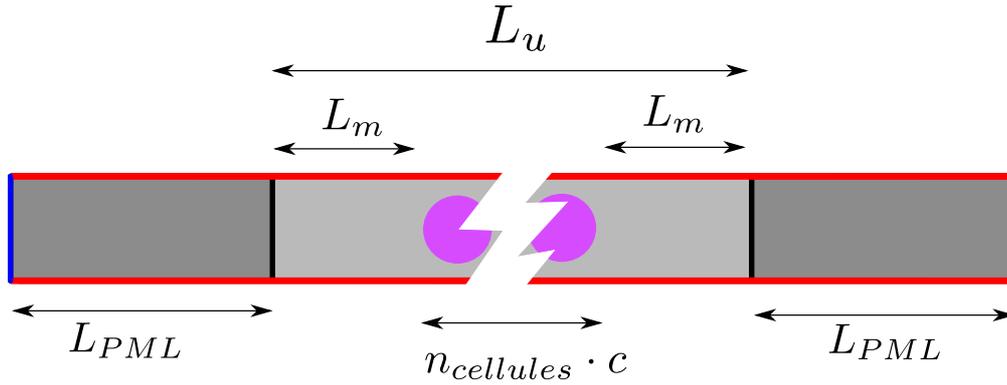


FIGURE 2.18 – Géométrie et notations pour la simulation du guide d'onde. Guide d'onde 1D pour considérer une cellule primitive constituée d'une matrice et une inclusion circulaire (représentée en violet) ou plus généralement qui peut être plusieurs cellules primitives constituant un milieu périodique dans la suite. Les PML sont représentés en gris foncé. En rouge : condition de bord libre et encastrement en bleu.

et contrairement à la définition habituelle des PML, les propriétés dans le milieu sont indépendantes de la fréquence de l'onde (Garnell et al., 2020). Ce changement permet d'éliminer la dépendance en fréquence des matrices de masse et de rigidité, ce qui rend l'analyse modale possible.

2.4.2 Principe et résultats préliminaires d'une étude modale en guide d'onde 1D d'un milieu périodique borné à inclusion

En utilisant les travaux de Goursaud (2010) qui considère des guides d'ondes ouverts pour l'étude des effets de défauts ou de jonctions sur la propagation des ondes dans un guide, l'approche développée ici permet de considérer un réseau périodique d'inclusions borné. Cette approche permet donc d'étudier l'influence des conditions aux limites de ce réseau et de considérer la limite de la théorie de Floquet-Bloch traitant un nombre infini de cellules lorsque appliquée au cas où le nombre de cellules est fini. Pour ce faire, un modèle de guide d'onde en 1D avec des inclusions est défini, et est présenté sur la FIGURE 2.18. Cette figure décrit aussi la géométrie du guide d'onde et les différents paramètres à modifier pour analyser l'apparition des bandes de fréquences interdites en fonction des hétérogénéités prises en compte (ici des inclusions). La zone d'intérêt est la zone correspondant à la longueur L_u . Elle est délimitée de part et d'autre par des marges (de longueur L_m) puis par des PML (de longueur L_{PML}). Les marges sont une zone entre le bord du milieu périodique borné et le PML. Elles permettent notamment de limiter les effets des inclusions sur le PML.

La propagation des ondes de cisaillement SH dans un milieu élastique est considérée (donc, un problème acoustique qui a été déjà traité dans ce chapitre). Ce comportement est décrit par la relation suivante :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\mu \nabla_{\mathbf{x}} u] = -\rho \omega^2 u. \quad (2.47)$$

Pour les études effectuées dans le cadre de la thèse utilisant l'analyse modale des guides d'onde ouverts, les PML sont définis grâce à un changement de variables dans l'espace défini par Bonnet-Ben Dhia et al. (2018a) :

$$\chi_{\theta}(x_1) = \begin{cases} -L + (x_1 + L)e^{\eta^-} & \text{si } x_1 \leq -L \\ x_1 & \text{si } |x_1| < L \\ +L + (x_1 - L)e^{\eta^+} & \text{si } x_1 \geq L \end{cases} \quad (2.48)$$

où $\eta^{\pm} = i\theta$ ou $-i\theta$ permet de choisir la rotation du spectre essentiel dans le plan complexe. Pour la suite, les PML sont dits conjugués s'ils sont définis tels que $\eta^- = \overline{\eta^+}$, alors que dans le cas où $\eta^- = \eta^+$, les

PML sont appelés classiques. De manière arbitraire n'ayant aucune incidence sur les résultats, on choisit $\eta^- = -i\theta$. Dans la suite, les résultats sont majoritairement obtenus avec des PML conjugués, sauf s'il est précisé explicitement que ce sont des PML classiques qui sont utilisés. Contrairement aux propriétés habituelles des PML, l'amortissement de la couche absorbante ne dépend pas de la fréquence, ce qui permet d'effectuer une analyse modale du guide d'onde. La présence de PML modifie les équations du problème et donc l'opérateur du problème. La résolution du problème aux valeurs propres associé à cet opérateur comporte alors deux parties, une partie associée à la résolution du problème fini, c'est-à-dire dans la zone où se trouvent le milieu périodique borné, et une autre concernant la réponse modale des PML.

Réponse modale d'un guide d'onde homogène

La FIGURE 2.19 représente le cas d'un guide d'onde uniforme, c'est-à-dire un guide d'onde sans défauts ou inclusions. Le matériau homogène est le même que celui de la matrice défini dans le TABLEAU 2.4 ($\mu_m = 233 \text{ MPa}$, $\rho_m = 1750 \text{ kg/m}^3$). Les dimensions choisies pour ce guide d'onde homogène sont $L_u = 20 \text{ m}$ et $L_{PML} = \frac{L_u}{2} = 10 \text{ m}$. Cette solution de référence permet de présenter un cas homogène pour voir l'évolution du comportement lorsqu'on ajoute des inclusions. Ces résultats permettent de voir si d'autres phénomènes modifient les résultats. Dans ce cas, deux types de modes sont observés.

Le premier type de mode regroupe les modes affichés en noir dans la représentation des valeurs propres dans le plan complexe (FIGURE 2.19). Il s'agit de modes évoluant dans les PML et donc aux valeurs propres dirigées dans le plan complexe à cause de la définition des PML. Un exemple est donné sur la FIGURE 2.20a. Les valeurs propres associées à ces modes constituent le spectre essentiel du signal. En effet, le changement de variable réalisé modifie la géométrie pour faire d'un domaine infini un modèle fini. Le paramètre θ est ici l'angle que fait la première branche du spectre essentiel dans le plan complexe par rapport à l'axe des réels (qui correspond au spectre dans un milieu homogène infini).

Le second type de mode correspond aux valeurs propres réelles du spectre. Elles sont représentées en

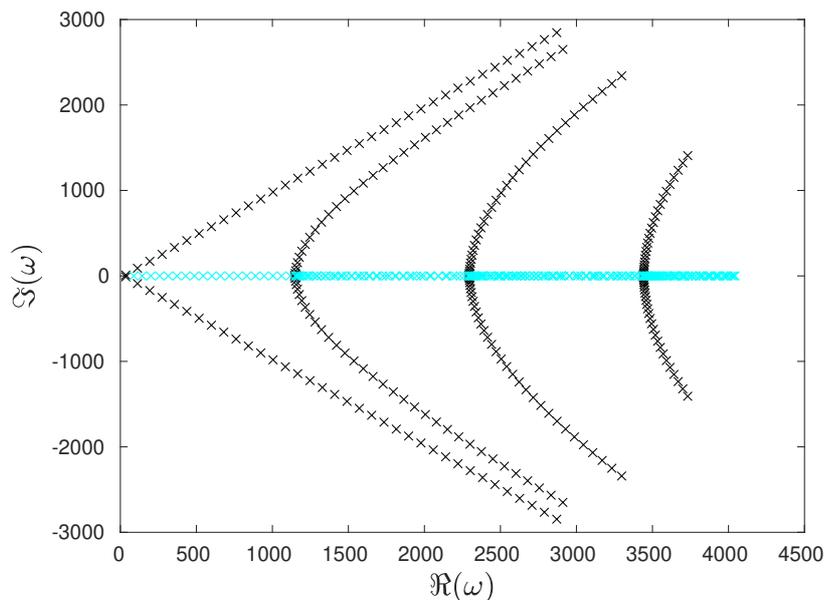


FIGURE 2.19 – Spectre d'un guide d'onde homogène dans le plan complexe avec les valeurs propres réelles en bleu et les valeurs propres imaginaires en noir.

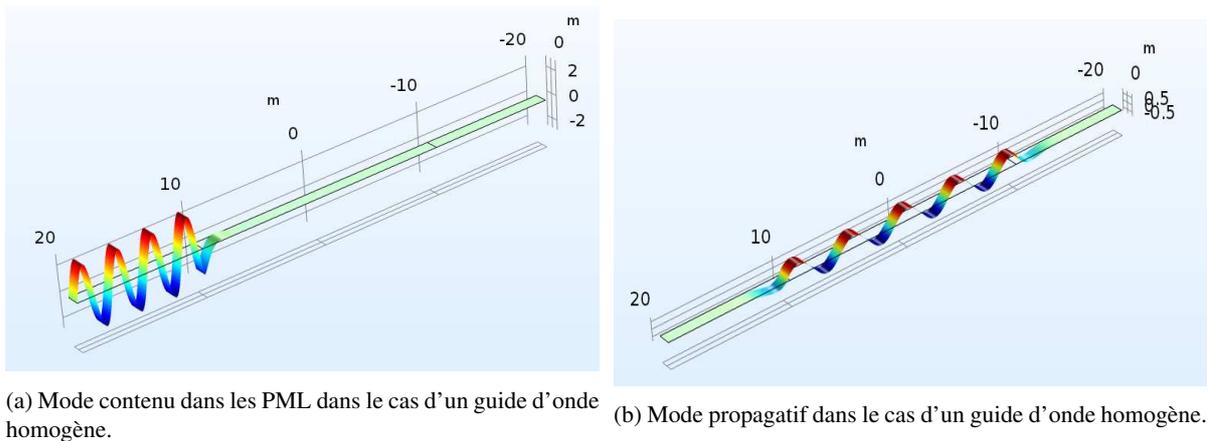


FIGURE 2.20 – Différents types de modes dans un guide d'onde homogène infini.

cyan sur la FIGURE 2.19 et dans la suite. Les modes correspondant sont des modes se propageant sans réflexion dans la zone d'intérêt entre les deux PML. Un exemple est affiché sur la FIGURE 2.20b. Ces modes sont des modes propagatifs dans la zone utile. Ces modes sont alors évanescents dans les PML à cause de leur partie complexe. Le spectre discret est alors concentré sur l'axe des réels. En effet, sans hétérogénéité, l'onde se propage dans le guide d'onde sans atténuation ni réflexion des ondes, ce qui se traduit par des modes réels.

La présence d'inclusions placées périodiquement dans la zone utile du guide d'onde modifie le spectre et est donc étudiée pour savoir à partir de combien de cellules l'hypothèse de périodicité (et donc l'étude faite sur la cellule avec la transformée de Floquet-Bloch) est vérifiée. Dans ce cadre, le milieu est d'abord analysé comme infini avec la théorie de Floquet-Bloch.

Bandes de fréquences interdites d'un milieu périodique selon une direction étudiée avec Floquet-Bloch

En considérant la propagation dans le guide d'onde tel que défini par la FIGURE 2.18, la propagation des ondes n'est affectée par la périodicité que dans une seule direction. Ainsi, les courbes de dispersions obtenues pour un milieu périodique infini selon deux directions FIGURE 2.17 ne sont pas représentatives. Le comportement d'un milieu périodique selon une direction et infini dans cette direction est étudié afin de comparer les résultats obtenus sur un milieu borné à une référence.

La FIGURE 2.21 représente les courbes de dispersion d'un milieu périodique selon une seule direction. La géométrie et les propriétés de la cellule utilisée pour obtenir les courbes de dispersion de la FIGURE 2.17 est reprise à la différence que la périodicité est uniquement dans la direction \mathbf{e}_1 . Des conditions de bords libres sont appliquées sur les frontières horizontales. De la même manière que précédemment, les courbes de dispersion sont obtenues à partir de la résolution numérique de l'EQ.2.5 avec $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_1$ et en utilisant les valeurs du TABLEAU 2.4. Les courbes représentées sont une réduction de celles de la FIGURE 2.17 au segment $\Gamma - X$. Pour afficher la périodicité en k des courbes de dispersion, le paramètre de Bloch évolue entre $-\frac{\pi}{c}$ et $\frac{\pi}{c}$. Les bandes de fréquences filtrées sont donc plus grandes que dans le cas périodique selon deux directions.

En utilisant ces résultats, l'un des buts est de dimensionner la zone utile et d'identifier le domaine fréquentiel où l'étude est valable. Le second but est d'identifier le nombre d'inclusions nécessaires pour que les résultats obtenus sur le domaine borné soient en accord avec les bandes de fréquence interdites obtenues pour un milieu infini avec la théorie de Floquet-Bloch.

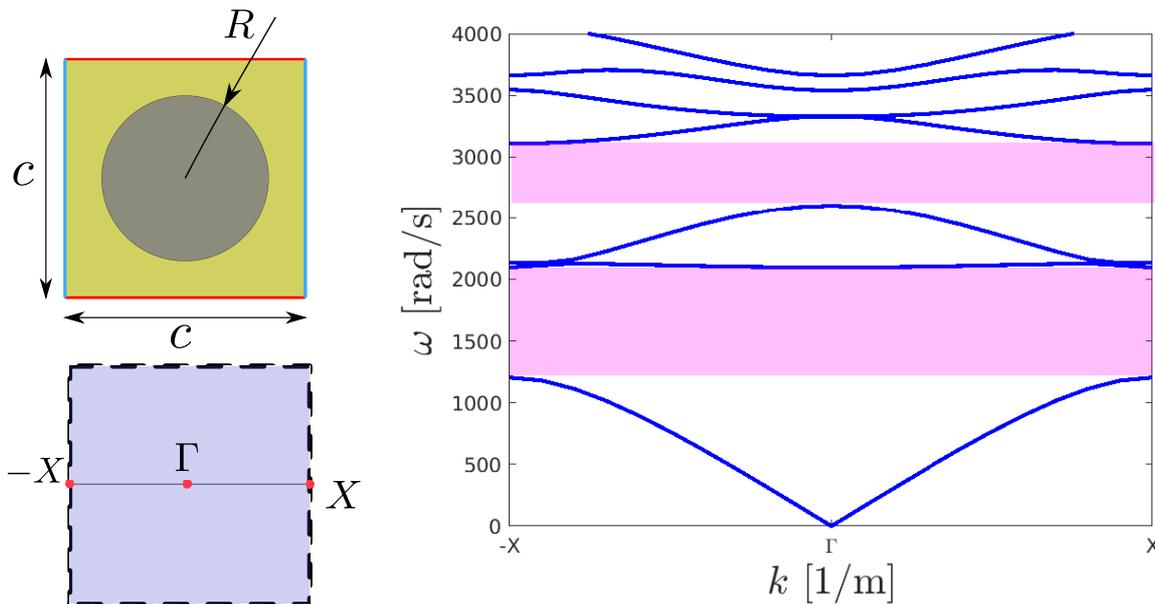


FIGURE 2.21 – Cellule élémentaire et zone de Brillouin associée (à gauche en haut et en bas) utilisés pour obtenir les courbes de dispersion (à droite). Les conditions de périodicité sont dessinées en bleu et les bords en rouge sont des bords libres.

Cas avec une seule inclusion en désaccord avec le modèle infini

Pour étudier l'influence de la taille de la zone utile sur l'évolution du domaine fréquentiel valide, un exemple est étudié avec une seule cellule primitive avec une inclusion rigide dans la matrice pour observer les comportements du guide d'onde. Les paramètres utilisés pour la géométrie et les propriétés sont celles du TABLEAU 2.4.

Dans un premier temps, on n'isole que le domaine physique auquel on s'intéresse, c'est-à-dire le milieu périodique comportant les inclusions. Dans ce cas, la longueur utile L_u est réduite à l'unique cellule et égale à c , soit dans ce cas $L_u = 1$ m et avec $L_m = 0$ m (FIGURE 2.22).

Le problème aux valeurs propres de l'EQ.2.47 est résolu. Les ω solutions de cette équation pour le guide d'onde sont représentées dans le plan complexe sur la FIGURE 2.22. Les bandes de fréquences interdites du milieu infini (FIGURE 2.21) sont représentées en rouge. Ces résultats montrent un premier problème : les modes obtenus ne prennent pas en compte les plus basses fréquences à cause de la faible longueur L_u considérée. Ainsi, la densité de modes disponibles sur les fréquences considérées ($[0\ 4500]$ rad/s) est faible par rapport à la solution homogène (FIGURE 2.19). La faible longueur de la zone utile implique que les longueurs d'ondes sont au maximum de même ordre de grandeur que L_u et les fréquences prises en compte sont donc plus élevées que la bande représentée ici. Dans ce cas, le nombre de longueurs d'ondes pour la fréquence de 4000rad/s (donc la plus petite longueur d'onde considérée) dans la zone utile est au maximum inférieur à 2 dans la zone utile.

Il faut donc augmenter la taille de la zone utile pour atteindre les fréquences les plus basses. L'une des solutions est donc d'ajouter des marges de longueur L_m (comme représenté sur la FIGURE 2.18) entre le PML et le bord du milieu périodique borné. Ainsi, la longueur utile finale L_u doit avoir une taille similaire aux plus grandes longueurs d'ondes.

Dans le cas d'une unique cellule, L_m devient donc aussi de taille similaire aux plus grandes longueurs d'ondes. Lorsque le nombre d'inclusions augmente, la taille du guide d'onde devient de plus en plus grande

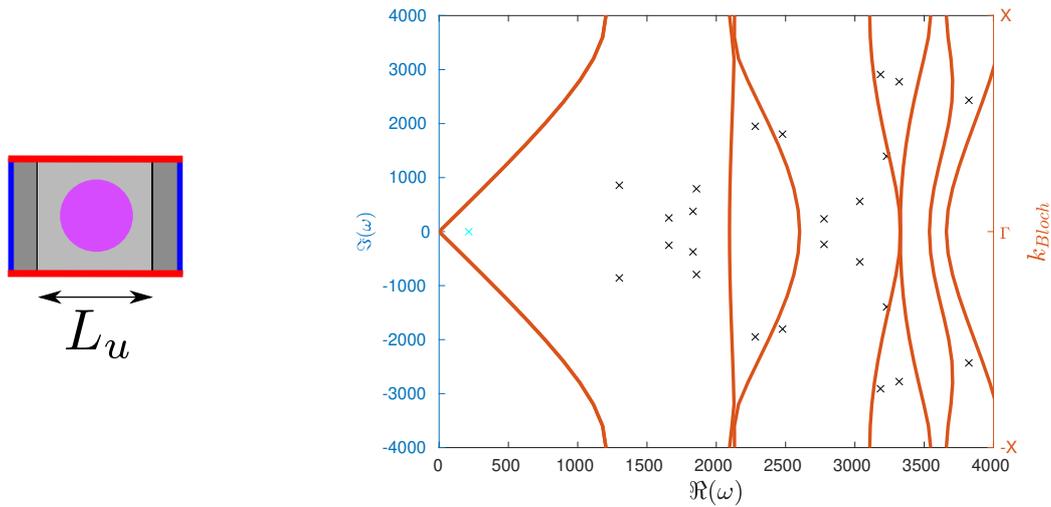


FIGURE 2.22 – Manque d’information sur les modes propagatifs en basse fréquence dans le cas avec une seule inclusion sans marges ($L_u = 1$ m) (représenté à gauche). Le comportement du milieu périodique infini résolu avec Floquet-Bloch est en rouge.

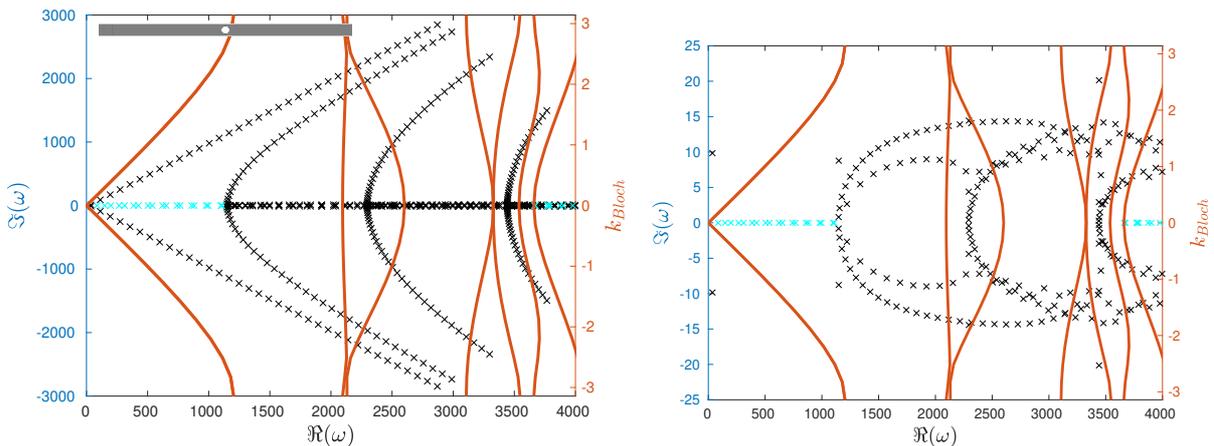
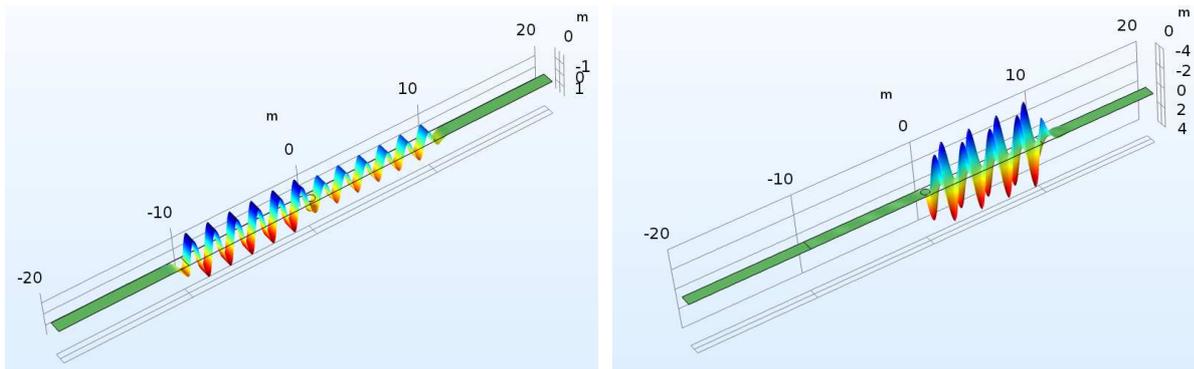


FIGURE 2.23 – Représentation du spectre (gauche) et d’un agrandissement autour de l’axe des abscisses (droite) pour un trou unique. Les valeurs propres réelles sont en cyan et les courbes dispersion d’un milieu infini sont en rouge.

et de nombreux modes polluent la lecture des résultats. Ces modes sont ceux qui évoluent dans les marges de la zone utile.

La solution finale adoptée est de garder la longueur L_u constante, suffisamment grande pour pouvoir analyser jusqu’à un nombre important d’inclusion par et avec L_m qui s’adapte en fonction du nombre d’inclusions. Un autre avantage est que le domaine de fréquence dans lequel évolue tous les guides d’onde (avec le nombre d’inclusions différent) est identique, donc la comparaison est facilitée.

Les dimensions du guide d’onde homogène présentés sont reprises. Avec ces paramètres, le spectre obtenu est représenté sur la FIGURE 2.23. L’ensemble des modes est représenté à gauche et un zoom autour de l’axe des réels est effectué. Pour l’analyse des bandes de fréquence atténuées, les modes du spectre essentiel, qui ne sont pas influencés par le réseau d’inclusions, ne sont pas pris en compte. C’est par contre l’analyse des autres modes qui va permettre de mettre en évidence l’atténuation. Les longueurs des PML étant les mêmes dans le cas homogène et dans le cas avec inclusion, le spectre essentiel dans les deux cas est aussi le même. Le spectre essentiel représente en effet le comportement des ondes dans le PML, donc à l’infini.



(a) Mode atténué par la présence d'une inclusion.

(b) Mode réfléchi par la présence de l'inclusion.

FIGURE 2.24 – Différents types de modes du spectre discret d'un guide d'onde avec une seule inclusion.

Les modes du spectre discret sont concentrés autour de l'axe des réels. Les fréquences où les valeurs propres sont réelles ne correspondent pas aux bandes de fréquences prédite par le modèle avec Floquet-Bloch. Les modes aux valeurs propres complexes du spectre discret font apparaître deux nouveaux types de comportement (en plus de ceux de la FIGURE 2.20), qui sont présentés sur la FIGURE 2.24. La FIGURE 2.24a représente les modes atténués par la présence de l'inclusion, associés aux valeurs propres contenant une partie imaginaire non nulle. Ces modes se propagent tout de même dans le milieu. La FIGURE 2.24b correspond aux modes qui ne sont pas transmis après l'inclusion. Les modes correspondants sont donc réfléchis au niveau de l'inclusion.

Ces résultats, notamment ceux des valeurs propres, montrent que l'étude d'un milieu borné avec seulement une cellule ne s'accorde pas du tout avec la modélisation d'un milieu infini, ce qui est tout à fait normal. L'objectif de la suite est de déterminer le nombre d'inclusions nécessaire pour retrouver le résultat du milieu infini.

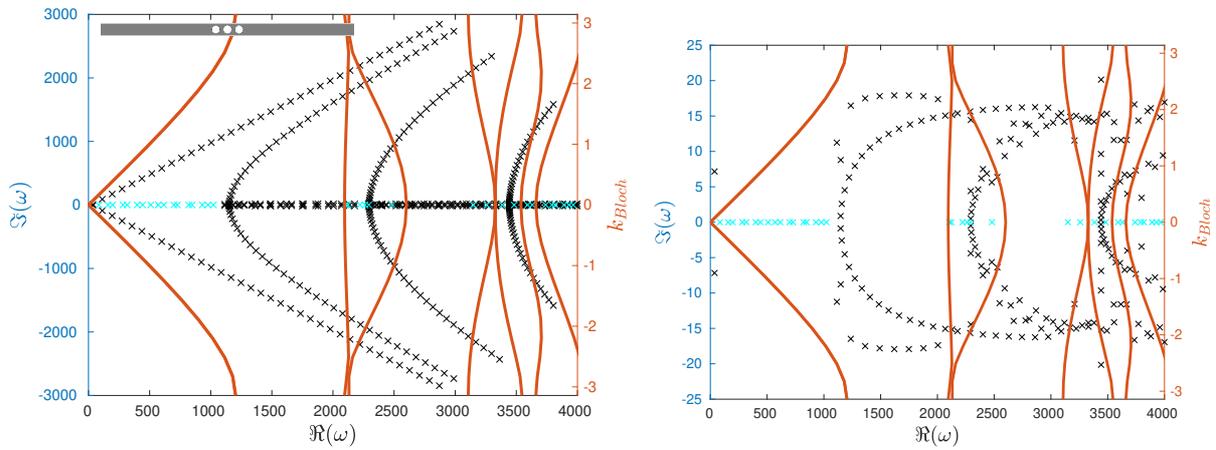
Nombre d'inclusions nécessaires pour valider l'hypothèse de périodicité

L'étude paramétrique en appliquant le principe décrit précédemment est maintenant présentée. L'influence du nombre d'inclusions périodiquement placées sur les modes propagatif est analysée à partir des résultats sur un cas infini obtenus avec l'étude d'une seule cellule en utilisant la transformée de Floquet-Bloch.

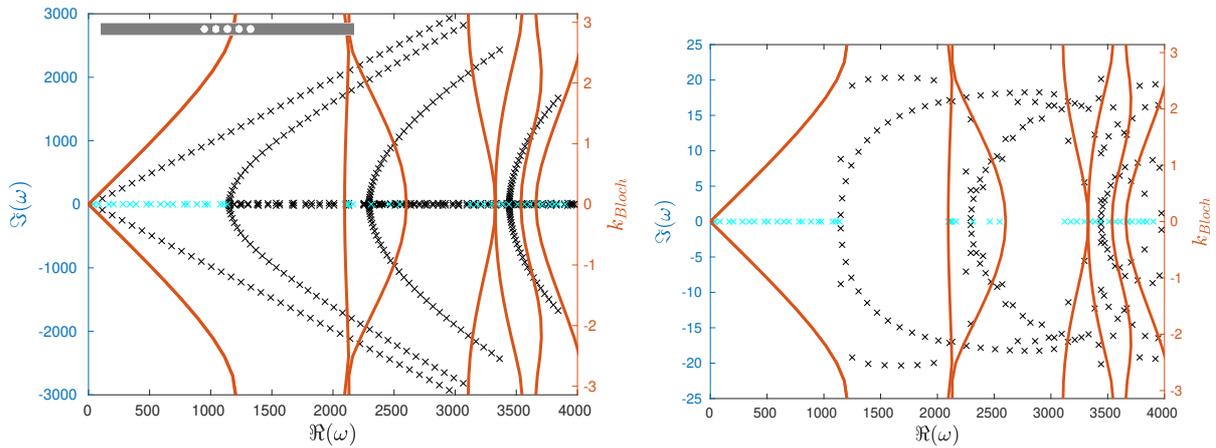
Dans ce cadre, afin de considérer des bandes de fréquences similaires (correspondant à des longueurs d'ondes comparables), on fixe la longueur L_u . Ainsi, avec le choix d'une cellule périodique de côté $c = 1$ m et un nombre maximal de dix-huit inclusions, la zone utile est choisie de longueur $L_u = 20$ m. La longueur des PML $L_{PML} = 10$ m pour tous les cas afin de limiter le nombre de modes du spectre essentiel calculé. Les propriétés des matériaux et les paramètres des cellules élémentaires sont définies dans le TABLEAU 2.4.

Les valeurs propres calculées sont représentées dans le plan complexe sur les FIGURES 2.25a à 2.25f. L'analyse modale du guide d'onde, et en particulier le spectre discret, est comparé aux courbes de dispersion obtenues théoriquement pour un milieu périodique infini (FIGURE 2.21). Les résultats pour six valeurs du nombre d'inclusions sont présentées : 3, 5, 9, 12, 15 et 18 inclusions. Comme sur la FIGURE 2.19, les valeurs propres réelles sont représentées en cyan et les imaginaires en noir. Les courbes de dispersion de la FIGURE 2.21 sont reportées ici en rouge. Elles représentent le cas d'un milieu périodique infini et servent à comparer le cas infini et le cas borné (cas d'un nombre fini d'inclusions).

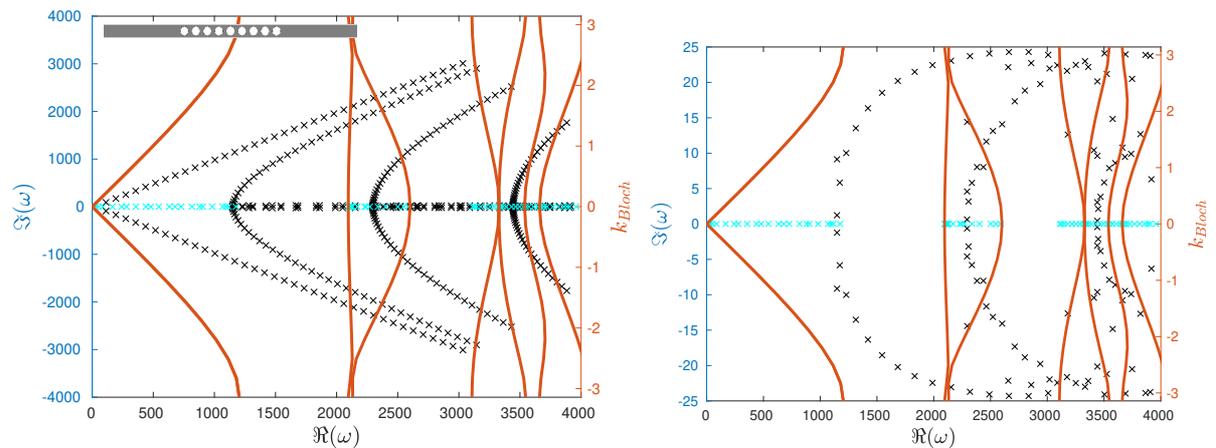
Les figures de droite sont des agrandissements de celles de gauche de la zone autour de l'axe des réels.



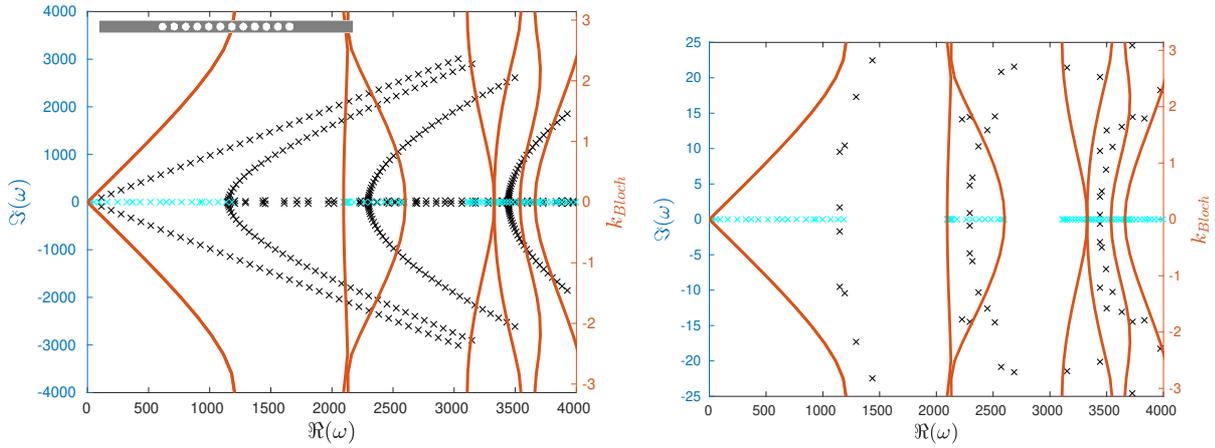
(a) Spectre de l'opérateur traduisant l'analyse modale du guide d'onde avec trois inclusions. Les valeurs propres réelles sont en cyan. En rouge les courbes de dispersion du motif obtenues avec Floquet-Bloch.



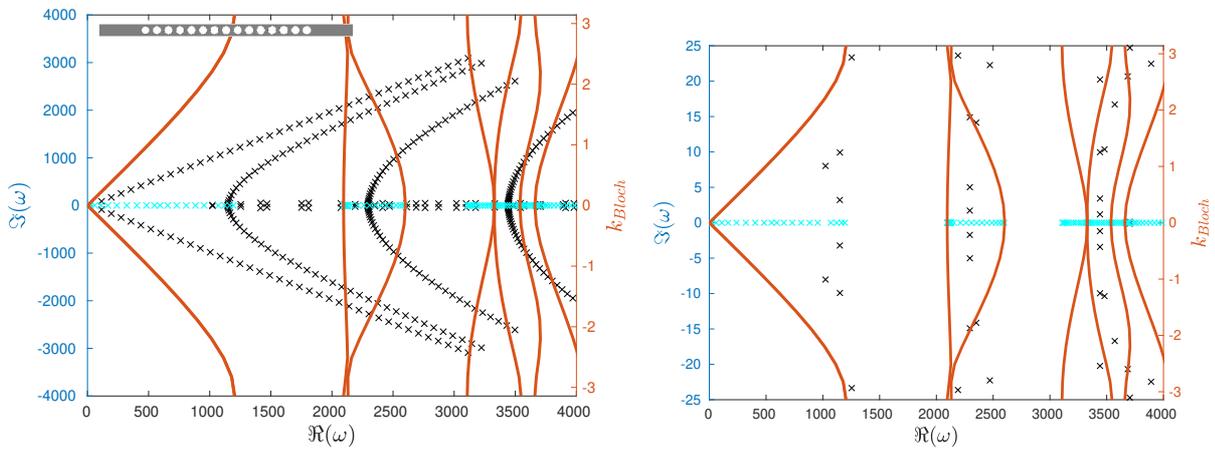
(b) Spectre de l'opérateur traduisant l'analyse modale du guide d'onde avec cinq inclusions. Les valeurs propres réelles sont en cyan. En rouge les courbes de dispersion du motif obtenues avec Floquet-Bloch.



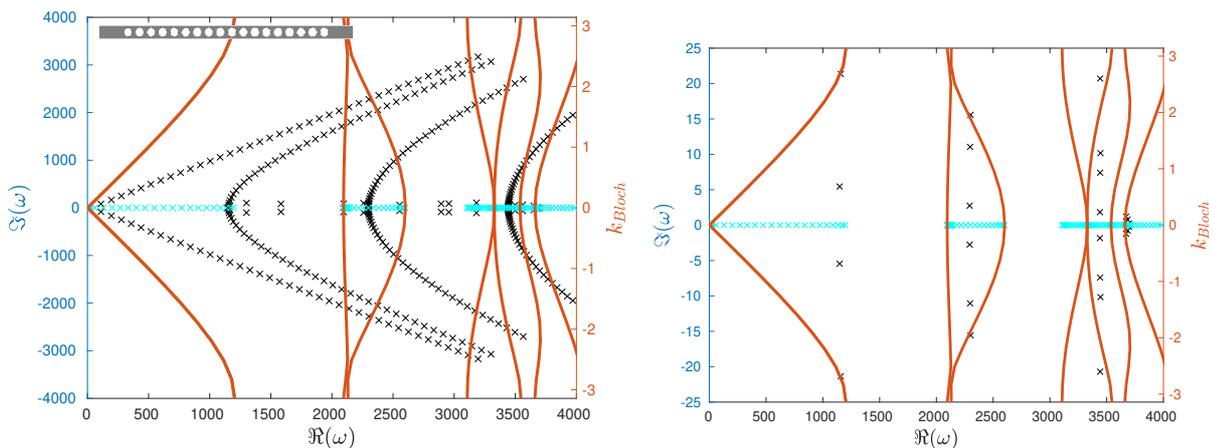
(c) Spectre de l'opérateur traduisant l'analyse modale du guide d'onde avec neuf inclusions. Les valeurs propres réelles sont en cyan. En rouge les courbes de dispersion du motif obtenues avec Floquet-Bloch.



(d) Spectre de l'opérateur traduisant l'analyse modale du guide d'onde avec douze inclusions. Les valeurs propres réelles sont en cyan. En rouge les courbes de dispersion du motif obtenues avec Floquet-Bloch.



(e) Spectre de l'opérateur traduisant l'analyse modale du guide d'onde avec quinze inclusions. Les valeurs propres réelles sont en cyan. En rouge les courbes de dispersion du motif obtenues avec Floquet-Bloch.



(f) Spectre de l'opérateur traduisant l'analyse modale du guide d'onde avec dix-huit inclusions. Les valeurs propres réelles sont en cyan. En rouge les courbes de dispersion du motif obtenues avec Floquet-Bloch.

FIGURE 2.25 – Étude paramétrique sur l'influence du nombre d'inclusions sur le spectre de valeurs propres et les comparaisons avec les courbes de dispersion obtenues avec la théorie de Floquet-Bloch.

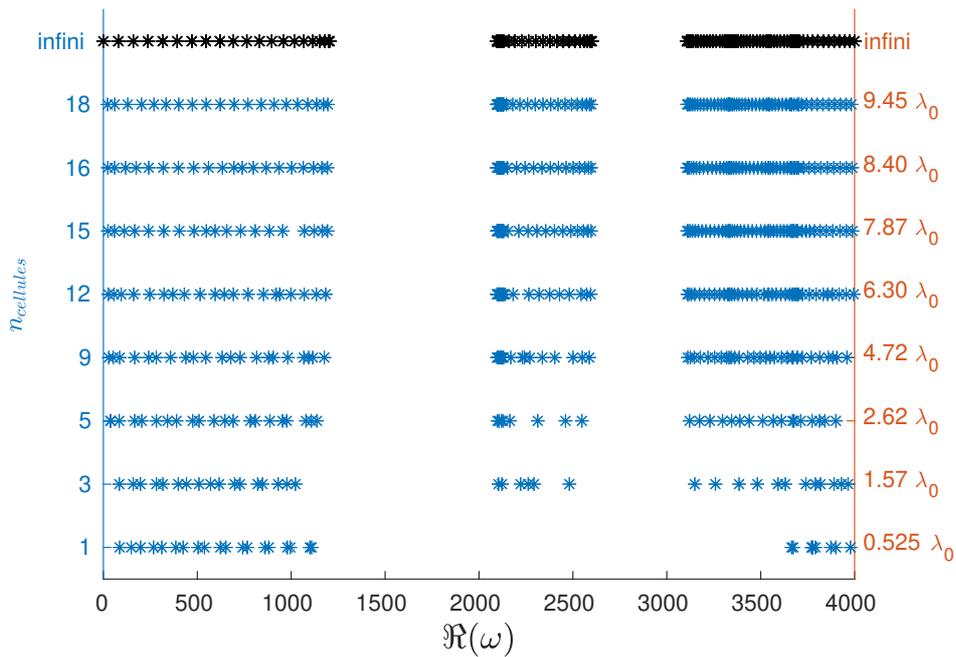


FIGURE 2.26 – Représentation des modes réels en fonction du nombre d'inclusions.

Elles permettent notamment de ne pas afficher les modes du spectre essentiel.

Comme attendu, plus le nombre de trous est élevé, moins il existe de modes à valeurs propres réelles (cyan) dans les bandes de fréquences interdites prédites numériquement en utilisant la transformée de Floquet-Bloch. Les modes qui subsistent sont les modes réfléchis qui sont concentrés dans les marges entre le PML et le bord du milieu périodique borné (FIGURE 2.24b).

De plus les parties imaginaires des modes complexes du spectre discret deviennent de plus en plus grandes lorsque le nombre d'inclusions augmente. Ainsi, alors que certains modes sont uniquement atténués (FIGURE 2.24a) pour un faible nombre d'inclusions, plus le nombre d'inclusions augmente, moins ces modes sont présents. À partir de cinq inclusions, de tels modes ne sont en effet plus visibles parmi les modes calculés. Les modes complexes du spectre discret représentent alors des modes complètement atténués. Ainsi, le comportement se rapproche bien de celui d'un milieu infini lorsqu'on augmente le nombre d'inclusions.

La FIGURE 2.26 résume les résultats précédents en représentant uniquement les modes réels en fonction du nombre d'inclusions. Le cas infini correspond aux courbes de dispersion obtenues en utilisant la transformée de Floquet-Bloch. Les conclusions précédentes sont ainsi retrouvées. De manière contre-intuitive, les bandes de fréquences où il n'existe pas de modes réels avec des inclusions périodiques sont plus grandes lorsque le nombre d'inclusions est faible. Par contre, les modes obtenus avec plus d'inclusions sont davantage atténués (parce que la partie imaginaire de la pulsation ω est plus importante). L'axe des ordonnées de droite présente l'équivalence de la taille du milieu périodique en termes de longueur d'onde. La référence est prise comme la longueur d'onde λ_0 d'une onde se propageant dans la matrice à une fréquence correspondant à la fréquence la plus basse de la première bande de fréquence filtrée par le milieu périodique dans le cas infini (donc pour $\omega = 1204 \text{ rad/s}$), qui correspond à la plus grande longueur d'onde (donc $\lambda_0 = 0,525 \text{ m}$ pour le cas considéré).

Ainsi, pour une longueur du milieu périodique supérieure à 4 fois la longueur d'onde de référence, le comportement du milieu périodique commence à correspondre à celui du milieu infini.

Pour le cas considérés ici, deux bandes interdites en fréquence sont obtenues. Pour la bande i ($i = 1, 2$), la

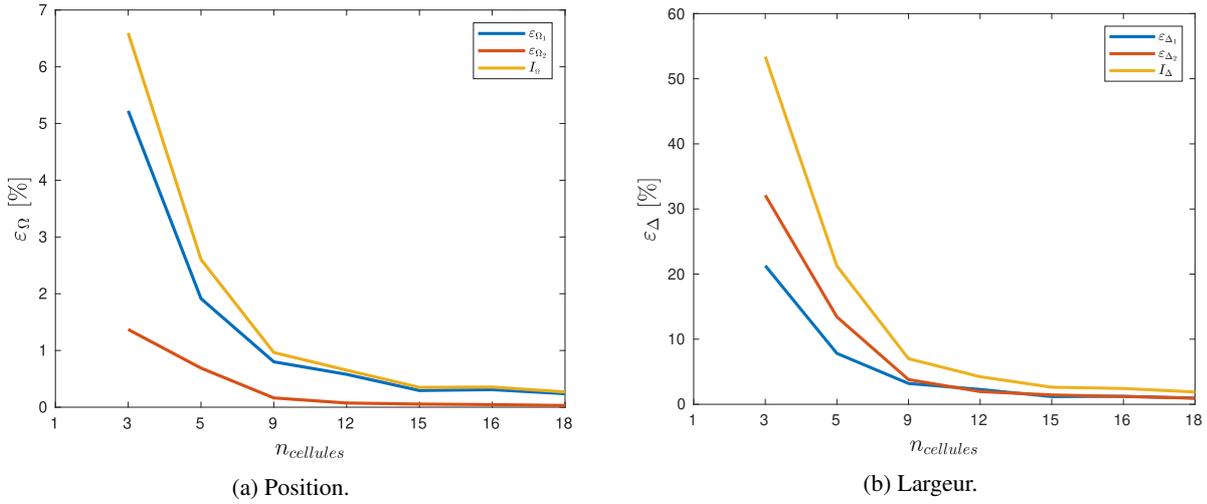


FIGURE 2.27 – Évolution de l'erreur comise sur les bandes de fréquences en termes de fréquence moyenne (à gauche) et de largeur (à droite).

position de la valeur moyenne $\tilde{\Omega}_i^{inf}$ de chacune des bandes de fréquence représentées sur la FIGURE 2.21 et leur largeur $\Delta\Omega_i^{inf}$ sont évaluées. Ces valeurs sont ensuite comparées aux valeurs obtenues numériquement sur un milieu borné.

Afin de quantifier l'écart entre les positions des modes propagatifs et les bandes de fréquences interdites obtenues avec Floquet-Bloch, deux indicateurs sont mis en place. Autour de chaque bande de fréquence filtrée, on récupère les fréquences des modes situés de part et d'autre de la valeur moyenne théorique pour déterminer la valeur moyenne liée $\tilde{\Omega}_i$ afin de calculer l'erreur relative I_{Ω} (EQ.2.49a) ainsi que l'écart entre ces valeurs $\Delta\Omega_i$ pour calculer l'erreur relative sur la largeur I_{Δ} (EQ.2.49b).

$$I_{\Omega} = \varepsilon_{\Omega_1} + \varepsilon_{\Omega_2} = \frac{|\tilde{\Omega}_1 - \tilde{\Omega}_1^{inf}|}{\tilde{\Omega}_1^{inf}} + \frac{|\tilde{\Omega}_2 - \tilde{\Omega}_2^{inf}|}{\tilde{\Omega}_2^{inf}} \quad (2.49a)$$

$$I_{\Delta} = \varepsilon_{\Delta_1} + \varepsilon_{\Delta_2} = \frac{|\Delta\Omega_1 - \Delta\Omega_1^{inf}|}{\Delta\Omega_1^{inf}} + \frac{|\Delta\Omega_2 - \Delta\Omega_2^{inf}|}{\Delta\Omega_2^{inf}} \quad (2.49b)$$

L'évolution de ces indicateurs en fonction du nombre de trous est donné sur les FIGURES 2.27. Les erreurs commises sur la position et la largeur des bandes de fréquences filtrées permettent de mettre en avant le fait que l'on converge vers les valeurs obtenues pour le milieu infini lorsque le nombre d'inclusions augmente. L'erreur commise sur la position moyenne I_{ω} est plus faible que celle sur la largeur I_{Δ} de la bande. Ainsi, à partir de neuf cellules, l'erreur sur la position est inférieure à 1% alors que celle sur la largeur est autour de 10%. Pour la taille, l'erreur descend vers 2,5% pour quinze cellules mais si l'on considère chaque bande séparément, l'erreur commise est inférieure à 2,5% à partir de douze cellules.

L'augmentation du nombre d'inclusions permet aussi d'observer l'apparition de modes piégés dans le milieu périodique. Deux exemples avec neuf et quinze inclusions sont donnés respectivement sur les FIGURES 2.28a et 2.28b. Ces modes sont piégés dans le milieu périodique. C'est-à-dire qu'ils correspondent à des modes propagatifs si un milieu infini est considéré. Ils correspondent dans le spectre à des valeurs propres réelles dans les deux cas où les PML sont conjugués et classiques. L'analyse du spectre obtenu avec des PML classiques permet de les différencier des modes propagatifs car ces derniers correspondent alors à des valeurs propres complexes. La FIGURE 2.29 présente le spectre du cas avec neuf inclusions dans le cas

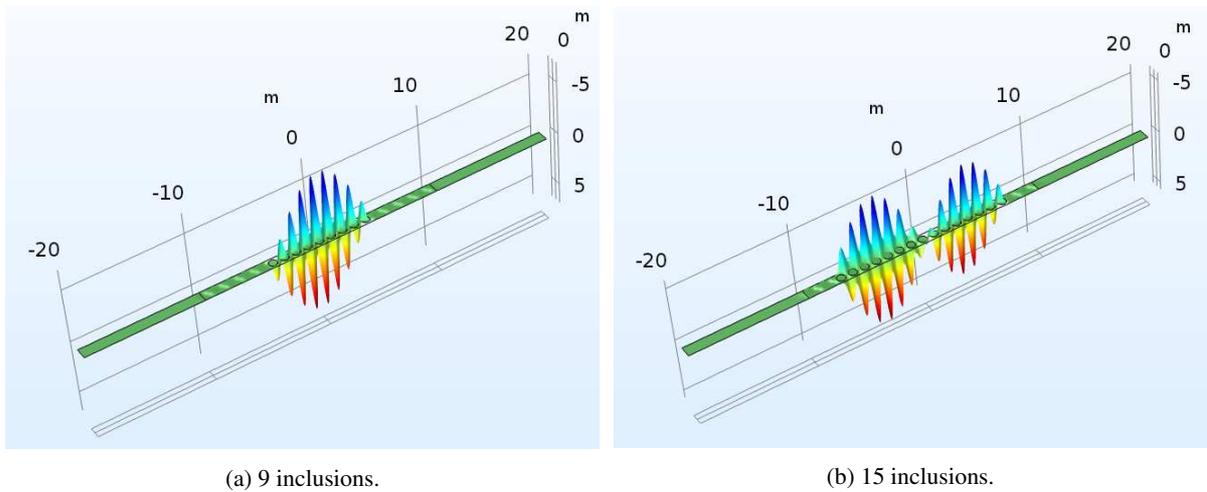


FIGURE 2.28 – Modes piégés dans le milieu périodique borné.

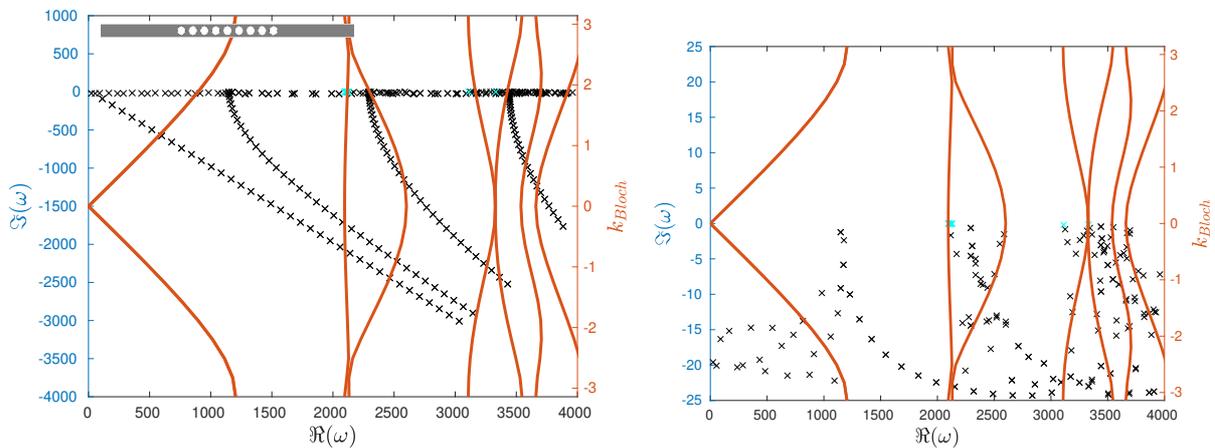


FIGURE 2.29 – Spectre obtenu avec des PML classique (à gauche) et un zoom autour de l'axe des réels permettant de mettre en évidence les modes piégés.

où les PML ne sont pas conjugués. Grâce à ce changement de définition des PML, une dizaine de modes piégés peuvent alors être distingués. Cependant, il n'est plus possible avec cette définition de distinguer les modes propagatifs des modes atténués et réfléchis par le milieu périodique.

2.4.3 Étude d'une barrière périodique 2D bornée dans une direction

L'analyse modale des guides d'ondes présentée dans la section précédente favorise cependant l'analyse du milieu dans la direction \mathbf{e}_1 . Mais une telle étude des guides d'ondes, qui est l'objet de présentation de cette section, ne permet pas de prendre en compte véritablement un milieu 2D, car elle ne peut pas étudier une incidence différente de celle du cas 1D. Pour simuler une barrière périodique, on peut néanmoins ajouter des conditions de Floquet-Bloch sur les bords horizontaux qui étaient précédemment libres d'effort (FIGURE 2.21).

On propose ici d'ajouter une deuxième direction de propagation dans le modèle de guide d'onde précédemment mis en place, malgré la direction de propagation privilégiée par le modèle. L'idée de base consiste à ajouter des conditions de périodicité de Floquet-Bloch sur le modèle et ainsi de garder dans cette deuxième direction un milieu périodique tout en restant avec un nombre fini de cellules élémentaires dans la première

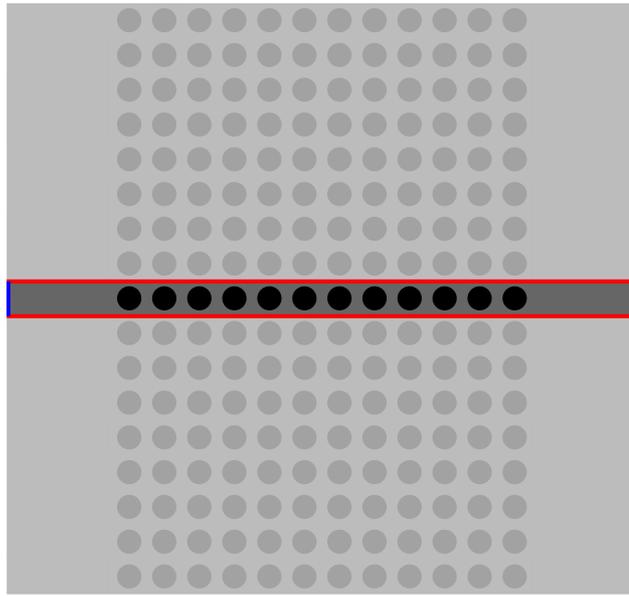


FIGURE 2.30 – La cellule élémentaire de la barrière périodique est le guide d'onde représenté en gris foncé (avec les inclusions en noir). Des conditions de périodicité de Floquet-Bloch sont appliquées sur la cellule élémentaire (rouge) et les bords latéraux sont libres (en bleu).

direction. Le comportement du guide d'onde est alors déterminé par :

$$(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot + i\mathbf{k}) [\mu (\nabla_{\mathbf{x}} + i\mathbf{k}) u] = -\rho \omega^2 u. \quad (2.50)$$

où $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_2$. Le changement de variable opéré dans les PML ne modifiant que la variable x_1 , la transformée de Floquet-Bloch n'affecte pas la définition des PML. Le problème ainsi défini est représenté sur la FIGURE 2.30. Dans ce cas, des conditions de Floquet-Bloch sont appliquées sur les bords horizontaux du guide d'onde afin de simuler un milieu infini dans la direction transverse à la propagation de l'onde dans le guide d'onde. Ces résultats sont ensuite comparés avec les bandes de fréquences filtrées obtenues sur une seule cellule du cristal phononique considéré ici avec une périodicité de Floquet-Bloch dans les deux directions en 2D.

Principe de l'étude et capacité de reconstitution du comportement de périodicité 2D

Les modes sont ici tracés pour l'ensemble des valeurs de k balayant l'ensemble de la zone de Brillouin $[-\frac{\pi}{c}, \frac{\pi}{c}]$, dans la direction \mathbf{e}_y sur laquelle les conditions de Floquet-Bloch sont appliquées. Un modèle avec douze cellules dans la direction \mathbf{e}_1 est choisi et les résultats sont présentés sur la FIGURE 2.31. Ainsi, il existe beaucoup plus de modes en utilisant cette approche que dans les cas avec des bords libres. Le spectre essentiel possède notamment beaucoup plus de modes que précédemment. En effet, pour chaque valeur de k dans la zone de Brillouin un spectre différent est calculé. Ces différents modes permettent de prendre en compte des modes plus complexes que les modes 1D précédemment étudiés.

Les bandes de fréquence où les modes sont réels (représentés en cyan) coïncident avec les modes d'un milieu infini 2D calculés avec la transformée de Floquet-Bloch (en rouge).

Ces résultats montrent donc que le modèle de guide d'onde permet d'approximer la solution infinie en ne considérant qu'une seule des directions infinies. Comme précédemment, selon le nombre de cellules prises en compte certains modes subsistent dans cette zone mais correspondent à des modes atténués (puisque'ils

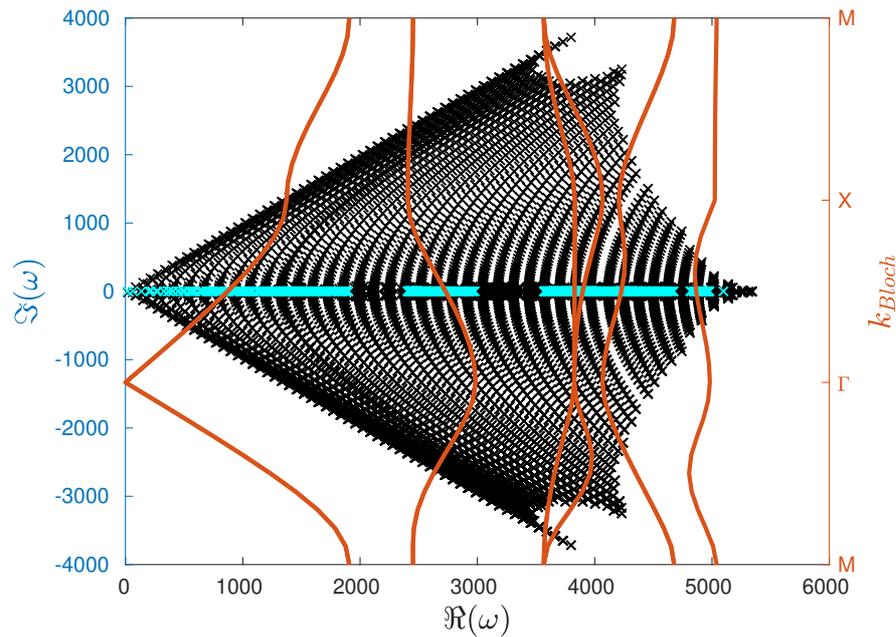


FIGURE 2.31 – Comparaison des bandes de fréquences interdites obtenues théoriquement pour un milieu infini (en rouge) et celles obtenues avec un modèle de guide d'onde avec conditions de périodicité de Floquet-Bloch (en bleu).

possèdent une partie imaginaire non nulle).

Nombre minimal d'inclusion pour la convergence non affecté par l'ajout de la périodicité dans la seconde direction

Si l'ajout de conditions de périodicité permet de se rapprocher du comportement sur un milieu infini dans le cas où le nombre d'inclusions est suffisant dans la direction \mathbf{e}_1 , les cas où celui-ci n'était pas suffisant dans l'étude du guide d'onde 1D doivent être étudiés.

Une étude paramétrique sur le nombre d'inclusions similaire à celle précédemment réalisée est donc mise en place. Le nombre d'inclusions allant d'une à douze inclusions. Les résultats sont donnés sur les FIGURES 2.32a à 2.32f. Comme pour le cas avec des inclusions sur un guide d'onde en 1D, la densité de modes ayant une partie imaginaire nulle augmente lorsque le nombre d'inclusions augmente. De plus, le cas d'une propagation 1D n'est pas retrouvé avec le cas avec une seule inclusion. En effet, à cause de la périodicité dans la direction \mathbf{e}_y , le comportement devrait être similaire à celui retrouvé avec le guide d'onde 1D simulé précédemment. La FIGURE 2.33 reprend les résultats précédents en n'affichant que les modes réels en fonction du nombre d'inclusions. Les conclusions précédemment faites sur le cas d'un guide d'onde avec une propagation 1D s'appliquent. Pour un faible nombre d'inclusions, le comportement du milieu infini diffère de l'analyse modale du guide d'onde. La densité de modes réels est notamment diminuée. Un nombre minimal d'inclusions doit donc être mis en place dans la direction \mathbf{e}_1 . Néanmoins, le comportement d'un milieu 2D est assez vite retrouvé.

Ainsi, si la mise en place de conditions de périodicité décrit assez bien les modes propagatifs et réfléchis lorsque l'on a un nombre suffisant d'inclusions dans la direction bornée, le modèle de guide d'onde mis en place favorise cependant la propagation des ondes dans la direction \mathbf{e}_1 . Ainsi, lorsque le nombre d'inclusions est faible dans cette direction, les bandes de fréquences filtrées ne correspondent pas à celles obtenues pour un milieu infini avec Floquet-Bloch.

De la même façon que précédemment, la FIGURE 2.34 présente l'évolution des indicateurs donnés par

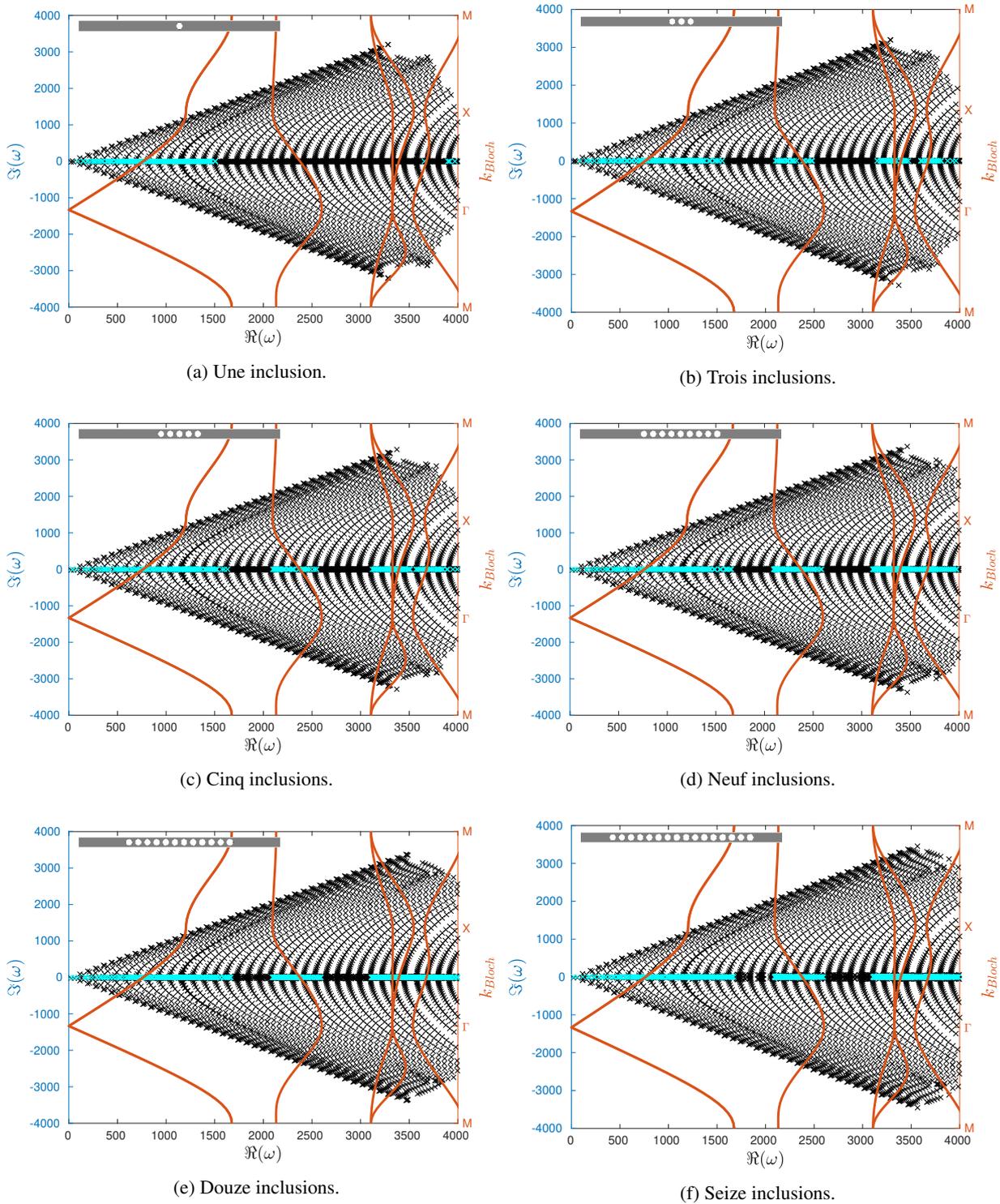


FIGURE 2.32 – Étude paramétrique sur l'influence du nombre d'inclusions sur le spectre de valeurs propres et les comparaisons avec les courbes de dispersion obtenues avec la théorie de Floquet-Bloch. Spectre de l'opérateur traduisant l'analyse modale du guide d'onde. Les valeurs propres réelles sont en cyan. En rouge les courbes de dispersion du motif obtenues avec Floquet-Bloch.

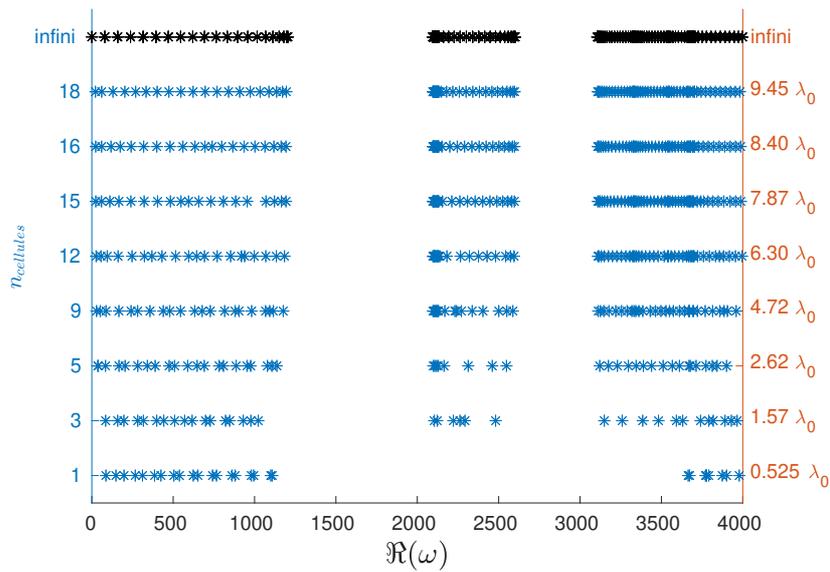


FIGURE 2.33 – Représentation des modes réels en fonction du nombre d'inclusions.

les EQS.2.49a et 2.49b en fonction du nombre d'inclusions. Pour une seule inclusion, cet indicateur n'est pas calculé car les modes propagatifs ne permettent pas de distinguer deux bandes de fréquences filtrées dans l'intervalle de ω considéré. Ces figures permettent de mettre en avant la diminution de l'erreur commise en ajoutant des inclusions dans la direction \mathbf{e}_1 . Elles permettent aussi de voir que si la position moyenne des bandes de fréquence filtrées par le milieu périodique est assez bien évaluée dès le départ (moins de 5% d'erreur dès trois inclusions dans la direction \mathbf{e}_1), les erreurs commises sur les largeurs restent très importantes.

Pas de modifications des modes propagatifs avec plusieurs couches

La prise en compte de plusieurs couches auxquels on ajoute des conditions de périodicité de Floquet-Bloch sur les bords latéraux ne doit théoriquement pas influencer la présence ou non de bandes de fréquence interdites dans le domaine fréquentiel prédites avec la transformée de Floquet-Bloch à l'échelle de la cellule avec des conditions de périodicité dans les deux directions. Pour le vérifier, on reprend l'étude précédente en ne prenant plus en compte une seule couche d'inclusions mais deux (FIGURE 2.35). Le calcul devient plus coûteux donc on limite l'étude à des fréquences plus faibles que précédemment. Seul la première bande de fréquence filtrée est considérée ici. Le spectre ainsi obtenu est représenté sur la FIGURE 2.36. Les modes dont les valeurs propres sont réelles coïncident ici encore avec les modes obtenus dans le cas d'une périodicité infinie selon deux directions. La FIGURE 2.37 représente la comparaison entre les résultats obtenus avec deux couches et ceux obtenus avec une seule couche. Les résultats montrent que les bandes de fréquences filtrées sont les mêmes dans les deux cas. De plus, des modes supplémentaires apparaissent lorsque l'on ajoute une couche dans le calcul. Ces nouveaux modes sont notamment visibles dans le spectre essentiel ou les modes s'intercalent entre les branches du spectre essentiel obtenu avec une seule couche.

Si le calcul est plus coûteux, il peut cependant être possible d'utiliser un tel motif pour ajouter des défauts dans la périodicité et ainsi considérer un milieu quasi-périodique. Cependant, cette problématique n'est pas traitée dans ce chapitre mais une modélisation similaire est utilisée dans le CHAPITRE 4.

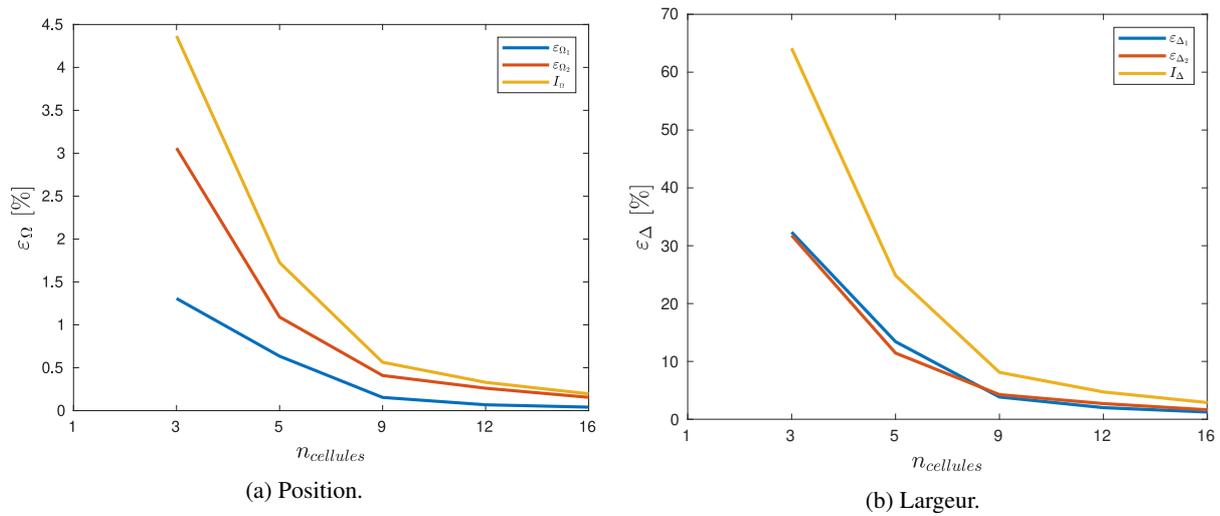


FIGURE 2.34 – Évolution de l'erreur relative commise avec le modèle de guide d'onde par rapport au modèle correspondant à un milieu périodique infini réalisé en fonction du nombre d'inclusions.

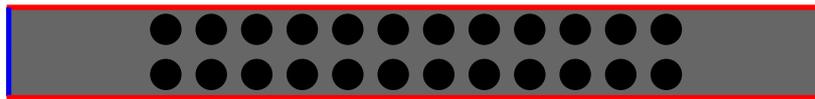


FIGURE 2.35 – Modélisation sous forme de guide d'onde d'un milieu infini périodique selon la direction dans la direction. Des conditions de périodicité de Floquet-Bloch sont appliquées sur les bords latéraux (rouge) et les bords en bleu sont encastés.

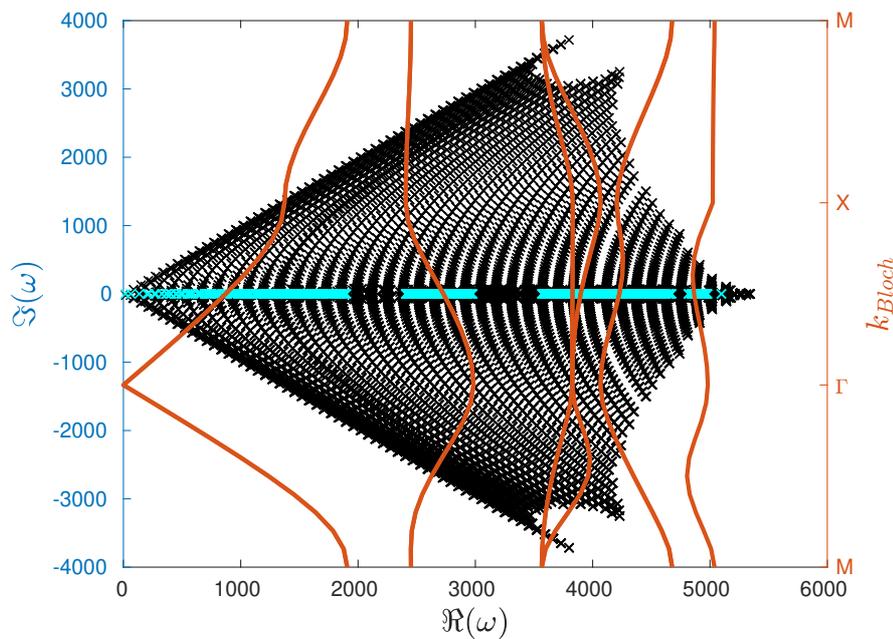


FIGURE 2.36 – Spectre correspondant à une barrière infinie selon deux directions calculé en utilisant la transformée de Floquet-Bloch sur un motif à deux couches (FIGURE 2.35).

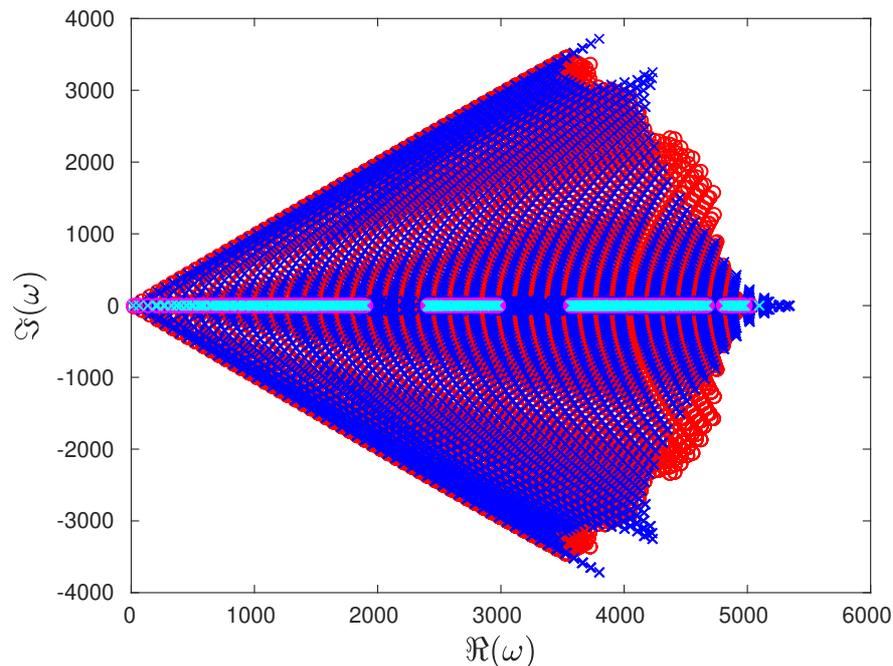


FIGURE 2.37 – Comparaison des spectres obtenus avec la modélisation d’une (bleu et cyan) et deux couches (rouge et violet) de guide d’onde. La distinction est aussi faite entre les valeurs propres réelles (cyan et violet) du reste du spectre.

Conclusions

Dans ce chapitre, l’étude de milieux périodiques et des interfaces qui peuvent exister avec celui-ci ont été étudiés pour des cas d’ondes acoustiques (ou hors-plan).

Ainsi, en utilisant la transformation de Floquet-Bloch, des surfaces de dispersion analytiques et semi-analytiques ont été produites concernant le comportement modal des ondes dans les milieux stratifiés infinis. À la différence du cas où la propagation est dans la direction de périodicité, il n’existe pas de bande de fréquence interdites pour toutes les fréquences. En effet, les ondes se propagent dans la direction non périodique en modifiant la direction de propagation.

Le raccordement de deux demi-espaces (un homogène et un stratifié) a ensuite été étudié. La décomposition des solutions dans chaque demi-espace sur les modes de Floquet-Bloch obtenus précédemment dans le cas de milieux stratifiés non bornés ont donc permis d’obtenir le comportement des ondes dans chaque demi-espace. Les résultats ont mis en avant une influence de l’angle d’incidence dans la part des ondes réfléchies et réfractées à l’interface entre deux demi-espaces.

Ensuite, après avoir étudié un milieu périodique 2D (comportant une inclusion circulaire) infini dans une et deux directions, une méthode d’analyse de ces milieux dans le cas borné a été développée grâce au calcul des modes d’un modèle de guides d’ondes. L’analyse des spectres issus de l’analyse modale ont permis de mettre en évidence différents comportements du milieu vis-à-vis de la propagation des ondes. Une comparaison entre les bandes de fréquences interdites prédites avec la théorie de Floquet-Bloch et celles obtenues avec cette approche a permis de montrer l’existence d’un nombre minimal d’inclusions à mettre en œuvre pour vérifier l’hypothèse de périodicité. Enfin, un couplage entre les deux approches a été testé afin de simuler un milieu périodique infini dans une direction et borné dans l’autre.

Chapitre 3

Généralisation de l'étude d'un métamatériau

Le travail précédent réalisé pour des milieux stratifiés dans le cadre des ondes acoustiques (ou des ondes hors-plan) ne permet pas de prendre en compte plusieurs aspects, notamment les différents types d'ondes, qu'implique la propagation des ondes sismiques. L'approche en acoustique est-elle généralisable au cas des ondes polarisées ? Et dans ce cas, comment les paramètres influent sur l'efficacité du milieu périodique ? Enfin, la généralisation à un cas 3D est-elle possible ?

La première partie traite donc le cas du comportement des ondes polarisées dans un milieu stratifié périodique. Pour étendre l'analyse précédente à des ondes de volume et afin de pouvoir mieux concevoir le milieu périodique, un modèle élastodynamique est considéré. Il est alors possible de tracer des surfaces de dispersions des ondes P et SV dans ce milieu.

Le passage des outils développés à un milieu périodique 2D ne pouvant pas être validé analytiquement, les simulations numériques sont comparées avec d'autres résultats numériques, qui sont issus de l'approche de [Valencia et al. \(2019\)](#). Afin de déterminer les paramètres importants pour le dimensionnement d'un métamatériau constitué d'inclusions périodiques placées périodiquement, une analyse paramétrique sur les effets de la géométrie de la cellule élémentaire ainsi que des différentes propriétés des matériaux utilisés est ensuite effectuée. L'évolution de la position et de la largeur de la première bande de fréquences filtrée par le réseau d'inclusions sont choisies comme indicateurs.

Le cas particulier des inclusions possédant plusieurs couches est étudié et fortement conseillé dans le but de filtrer de plus basses fréquences par rapport à celui des inclusions constituées d'un seul matériau. Ce type de structures pour concevoir des métamatériaux, appelées structures à résonances locales, permettent en effet de générer des bandes interdites en fréquences en mettant en jeu des phénomènes différents de la diffraction de Bragg à l'origine des bandes interdites en fréquence obtenues dans le chapitre précédent.

Enfin la dernière partie donne les principes pour généraliser la démarche proposée en acoustique pour les milieux 2D à un cas 3D en considérant une interface plane entre un milieu homogène et un milieu avec un réseau périodique d'inclusions.

Sommaire

3.1	Comportement d'un milieu élastique stratifié infini	66
3.1.1	Analyse de Bloch à l'échelle de la cellule	66
3.1.2	Analyse des courbes de dispersion	69
3.2	Prise en compte d'une interface pour un milieu stratifié semi-infini	71
3.3	Propriété d'un milieu élastique infini périodique selon deux directions	75
3.3.1	Influence des paramètres géométriques	76
3.3.2	Influence du matériau de l'inclusion	77
3.3.3	Résumé des effets de paramètres	85
3.4	Apport des structures à résonance locale	87
3.5	Extension des lois d'interface à un milieu acoustique 3D	92
3.5.1	Description de l'étude à l'interface	92
3.5.2	Vérification de l'orthogonalité des modes	93
3.5.3	Projection des modes	97

3.1 Comportement d'un milieu élastique stratifié infini

Dans un souci de simplification, les études présentées dans le chapitre précédent ont été menées en considérant une onde scalaire. Les ondes sismiques sont des ondes élastiques, ce qui implique que les grandeurs et les champs à étudier sont vectoriels, qu'il existe différents types d'onde (P et S par exemple), et que ces derniers sont en plus couplés entre eux.

À cause de la dimension infinie et l'invariance dans la direction \mathbf{e}_y , un champ de déplacement \mathbf{u} ne dépendant pas de cette composante est choisi.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = u_1(x_1, z)\mathbf{e}_1 + u_y(x_1, z)\mathbf{e}_y + u_z(x_1, z)\mathbf{e}_z \quad (3.1)$$

3.1.1 Analyse de Bloch à l'échelle de la cellule

Comme dans la partie sur les ondes hors-plan, le comportement du milieu est d'abord étudié comme étant infini dans la direction verticale \mathbf{e}_z . La cellule élémentaire étudiée est représentée sur la FIGURE 3.1. Elle est exactement la même que celle définie dans le chapitre précédent (FIGURE 2.1).

L'équilibre local du milieu stratifié s'écrit conformément à l'EQ.1.10 sans efforts volumiques :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \sigma = -\rho \omega^2 \mathbf{u}. \quad (3.2)$$

En utilisant la loi de comportement isotrope (EQ.1.3), l'équation d'équilibre local (EQ.3.2) se met sous la forme :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\lambda \operatorname{tr}(\varepsilon) \mathbb{I}_d) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (2\mu \varepsilon) = -\rho \omega^2 \mathbf{u} \quad (3.3)$$

qui peut aussi s'écrire dans le cas d'un milieu hétérogène (Beaudet, 1970) :

$$(\lambda + \mu) \nabla_{\mathbf{x}} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}) + \mu \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} (\nabla_{\mathbf{x}} \lambda) + (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{x}}^T \mathbf{u}) \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \mu) = -\rho \omega^2 \mathbf{u} \quad (3.4)$$

où $\Delta_{\mathbf{x}}$ désigne l'opérateur laplacien. Cette forme permet de séparer les deux premiers termes à gauche correspondant au cas homogène (EQ.1.15) et les deux termes suivant faisant apparaître le gradient des propriétés.

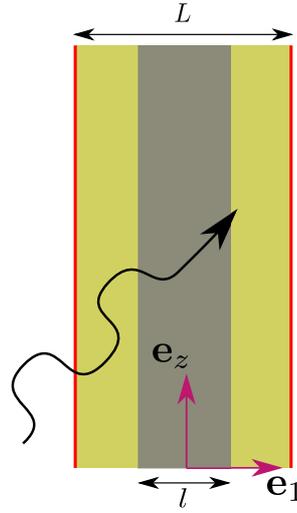


FIGURE 3.1 – Cellule élémentaire périodique symétrique du milieu stratifié matrice-inclusion. Les conditions de périodicité sont appliquées sur les bords (en rouge).

Les termes dus à la présence d'hétérogénéités sont notamment ceux qui complexifient grandement l'étude de l'orthogonalité des modes dans la suite.

Avec les hypothèses faites sur le champ de déplacement (EQ.3.1) et le comportement élastique linéaire isotrope du milieu, l'EQ.3.2 s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x_1} \right) \right] & = -\rho \omega^2 u_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\mu \frac{\partial u_y}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \frac{\partial u_y}{\partial z} \right] & = -\rho \omega^2 u_y \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x_1} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] & = -\rho \omega^2 u_z \end{cases} \quad (3.5)$$

où λ et μ désignent les coefficients de Lamé (EQ.1.4). Dans ce système d'équations, le déplacement hors-plan (donc dans la direction \mathbf{e}_y) n'est pas couplé aux autres composantes du champ de déplacement et son comportement est celui de l'onde hors-plan comme étudié dans le CHAPITRE 2. Donc, par la suite, l'étude est limitée aux ondes P-SV, c'est-à-dire au champ de déplacement réduit au plan d'incidence :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = u_1(x_1, z)\mathbf{e}_1 + u_z(x_1, z)\mathbf{e}_z \quad (3.6)$$

Après avoir effectué une transformation de Fourier :

$$\hat{\mathbf{u}}(x_1; k_z) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{u}(x_1, z) e^{-ik_z z} dz \quad (3.7)$$

dans la direction \mathbf{e}_z (considérée infinie), l'EQ.3.5 devient :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx_1} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{d\hat{u}_1}{dx_1} \right] - ik_z \frac{d}{dx_1} [\lambda \hat{u}_z] - ik_z \mu \left(\frac{d\hat{u}_z}{dx_1} - ik_z \hat{u}_1 \right) & = -\rho \omega^2 \hat{u}_1 \\ \frac{d}{dx_1} \left[\mu \left(\frac{d\hat{u}_z}{dx_1} - ik_z \hat{u}_1 \right) \right] - ik_z \lambda \frac{d\hat{u}_1}{dx_1} - k_z^2 (\lambda + 2\mu) \hat{u}_z & = -\rho \omega^2 \hat{u}_z \end{cases} \quad (3.8)$$

où k_z désigne le module du vecteur d'onde et avec les transformées de Fourier des composantes du champ de déplacement désignées par \hat{u}_j . Pour prendre en compte la périodicité selon une direction dans le milieu,

une transformée de Floquet-Bloch est réalisée dans la direction \mathbf{e}_1 sur l'EQ.3.8 d'argument $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_1$:

$$\mathbf{u}^B(x_1; k_z, k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\mathbf{u}}(x_1 + nL; k_z) e^{-ik(x_1 + nL)}. \quad (3.9)$$

Cela conduit au système suivant :

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dx_1} + ik \right) \left[(\lambda + 2\mu) \left(\frac{d}{dx_1} + ik \right) u_1^B - ik_z \lambda u_z^B \right] - ik_z \mu \left(\frac{d}{dx_1} + ik \right) u_z^B - k_z^2 \mu u_1^B = -\rho \omega^2 u_1^B \\ \left(\frac{d}{dx_1} + ik \right) \left[\mu \left(\frac{d}{dx_1} + ik \right) u_z^B - ik_z \mu u_1^B \right] - ik_z \lambda \left(\frac{d}{dx_1} + ik \right) u_1^B - k_z^2 (\lambda + 2\mu) u_z^B = -\rho \omega^2 u_z^B \end{cases} \quad (3.10)$$

où u^B désigne la transformée de Floquet-Bloch de \hat{u} . Comme précédemment, l'opérateur de dérivation $\frac{d}{dx_1}$ est modifié par la transformée de Floquet-Bloch dans la direction \mathbf{e}_1 . L'opérateur devient alors $\left(\frac{d}{dx_1} + ik \right)$, ce qui est en accord avec les développements de [Nassar et al. \(2015\)](#).

Ce problème aux valeurs propres quadratique peut se mettre sous la forme d'un problème aux valeurs propres linéarisé en effectuant le changement de variables décrit par les deux dernières équations :

$$\begin{cases} \left(\rho \omega^2 u_1^B + \left(\frac{d}{dx_1} + ik \right) \left[(\lambda + 2\mu) \left(\frac{d}{dx_1} + ik \right) u_1^B + \lambda v_z^B \right] + \mu \left(\frac{d}{dx_1} + ik \right) v_z^B \right) / \mu = ik_z v_1^B \\ \left(\rho \omega^2 u_z^B + \left(\frac{d}{dx_1} + ik \right) \left[\mu \left(\frac{d}{dx_1} + ik \right) u_z^B + \mu v_1^B \right] + \lambda \left(\frac{d}{dx_1} + ik \right) v_1^B \right) / (\lambda + 2\mu) = ik_z v_z^B \\ -v_1^B = ik_z u_1^B \\ -v_z^B = ik_z u_z^B \end{cases} \quad (3.11)$$

où v_1^B et v_z^B sont les variables introduites pour la linéarisation.

Les conditions de périodicité aux bornes du motif élémentaire en déplacement et en flux s'expriment respectivement par :

$$\mathbf{u}^B \left(-\frac{l}{2}, k, k_z \right) = \mathbf{u} \left(\frac{l}{2}, k, k_z \right) \quad (3.12a)$$

$$\sigma(\mathbf{u}^B) \left(-\frac{l}{2}, k, k_z \right) \cdot \mathbf{e}_1 = \sigma(\mathbf{u}^B) \left(\frac{l}{2}, k, k_z \right) \cdot \mathbf{e}_1. \quad (3.12b)$$

La résolution des problèmes aux valeurs propres de Bloch (EQ.3.10) par la méthode des éléments finis nécessite une transformation des équations sous forme faible. La transformation du système d'EQ.3.10 s'écrit :

$$\begin{cases} \left\langle \left(\frac{d}{dx_1} - ik \right) w_1^B, (\lambda + 2\mu) \left(\frac{d}{dx_1} + ik \right) u_1^B \right\rangle_{\Omega} - ik_z \left[\left\langle \left(\frac{d}{dx_1} - ik \right) w_1^B, \lambda u_z^B \right\rangle_{\Omega} - \left\langle w_1^B, \mu \left(\frac{d}{dx_1} + ik \right) u_z^B \right\rangle_{\Omega} \right] \\ + k_z^2 \left\langle w_1^B, \mu u_1^B \right\rangle_{\Omega} - \rho \omega^2 \left\langle w_1^B, u_1^B \right\rangle_{\Omega} = 0 \\ \left\langle \left(\frac{d}{dx_1} - ik \right) w_z^B, \mu \left(\frac{d}{dx_1} + ik \right) u_z^B \right\rangle_{\Omega} - ik_z \left[\left\langle \left(\frac{d}{dx_1} - ik \right) w_z^B, \mu u_1^B \right\rangle_{\Omega} - \left\langle w_z^B, \lambda \left(\frac{d}{dx_1} + ik \right) u_1^B \right\rangle_{\Omega} \right] \\ + k_z^2 \left\langle w_z^B, (\lambda + 2\mu) u_z^B \right\rangle_{\Omega} - \rho \omega^2 \left\langle w_z^B, u_z^B \right\rangle_{\Omega} = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

en utilisant la notation suivante :

$$\langle a, b \rangle_{\Omega} = \int_{\Omega} ab \, dx_1 \quad (3.14)$$

pour simplifier l'écriture. Le domaine Ω est ici la cellule périodique c'est-à-dire l'intervalle $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2} \right]$.

Le système d'EQS.3.13 s'écrit sous forme matricielle comme suit :

$$([\mathbf{K}] - ik_z [\mathbf{C}] + k_z^2 [\mathbf{M}]) \{\mathbf{U}\} = \mathbf{0} \quad (3.15)$$

avec les matrices $[\mathbf{K}]$, $[\mathbf{C}]$ et $[\mathbf{M}]$ sont alors définies par :

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.16a)$$

avec

$$\begin{aligned} - K_{11} &= \left\langle \left(\frac{d}{dx_1} - ik \right) w_1^{*B}, (\lambda + 2\mu) \left(\frac{d}{dx_1} + ik \right) u_1^B \right\rangle_{\Omega} - \rho \omega^2 \langle w_1^{*B}, u_1^B \rangle_{\Omega} \\ - K_{zz} &= \left\langle \left(\frac{d}{dx_1} - ik \right) w_z^{*B}, \mu \left(\frac{d}{dx_1} + ik \right) u_z^B \right\rangle_{\Omega} - \rho \omega^2 \langle w_z^{*B}, u_z^B \rangle_{\Omega} \\ [\mathbf{C}] &= \begin{bmatrix} 0 & C_{1z} \\ C_{z1} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.16b)$$

avec

$$\begin{aligned} - C_{1z} &= \left\langle \left(\frac{d}{dx_1} - ik \right) w_1^{*B}, \lambda u_z^B \right\rangle_{\Omega} - \left\langle w_1^{*B}, \mu \left(\frac{d}{dx_1} + ik \right) u_z^B \right\rangle_{\Omega} \\ - C_{z1} &= \left\langle \left(\frac{d}{dx_1} - ik \right) w_1^{*B}, \mu u_1^B \right\rangle_{\Omega} - \left\langle w_z^{*B}, \lambda \left(\frac{d}{dx_1} + ik \right) u_1^B \right\rangle_{\Omega} \\ [\mathbf{M}] &= \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{zz} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.16c)$$

avec

$$\begin{aligned} - M_{11} &= \langle w_1^{*B}, \mu u_1^B \rangle_{\Omega} \\ - M_{zz} &= \langle w_z^{*B}, (\lambda + 2\mu) u_z^B \rangle_{\Omega} \end{aligned}$$

Les matrices $[\mathbf{M}]$ et $[\mathbf{K}]$ sont des matrices diagonales et la matrice $[\mathbf{C}]$ est anti-diagonale. De plus on remarque que les rôles de \mathbf{u} et de \mathbf{w} sont similaires dans les EQ.3.16. Une étude plus approfondie de ce problème est proposée dans 3.2.

3.1.2 Analyse des courbes de dispersion

Comme dans le CHAPITRE 2, le comportement des milieux n'est pas le même en fonction de la valeur de k_z , qui dépend de la direction du vecteur d'onde dans le milieu considéré.

Si l'on considère la direction de propagation parallèle à l'interface en forçant $k_z = 0$, le système décrit par l'EQ.3.10 devient alors :

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dx_1} + ik \right) \left[(\lambda + 2\mu) \left(\frac{d}{dx_1} + ik \right) u_1^B \right] = -\rho \omega^2 u_1^B \\ \left(\frac{d}{dx_1} + ik \right) \left[\mu \left(\frac{d}{dx_1} + ik \right) u_z^B \right] = -\rho \omega^2 u_z^B \end{cases} \quad (3.17)$$

Deux équations découplées sont alors obtenues. La seconde équation est identique à celle déjà étudiée dans le cas des ondes hors-plan du CHAPITRE 2, ce qui est logique car ce sont toutes les deux des ondes S (SV et SH). La première, représentant la propagation des ondes P dans le milieu, est modifiée uniquement par le module de cisaillement qui devient le module de compression.

Afin de vérifier la linéarisation du problème quadratique (EQ.3.11) et les outils numériques associés qui sont développés, le système (EQ.3.17) est alors résolu en calculant $k(\omega)$ avec le système suivant linéarisé

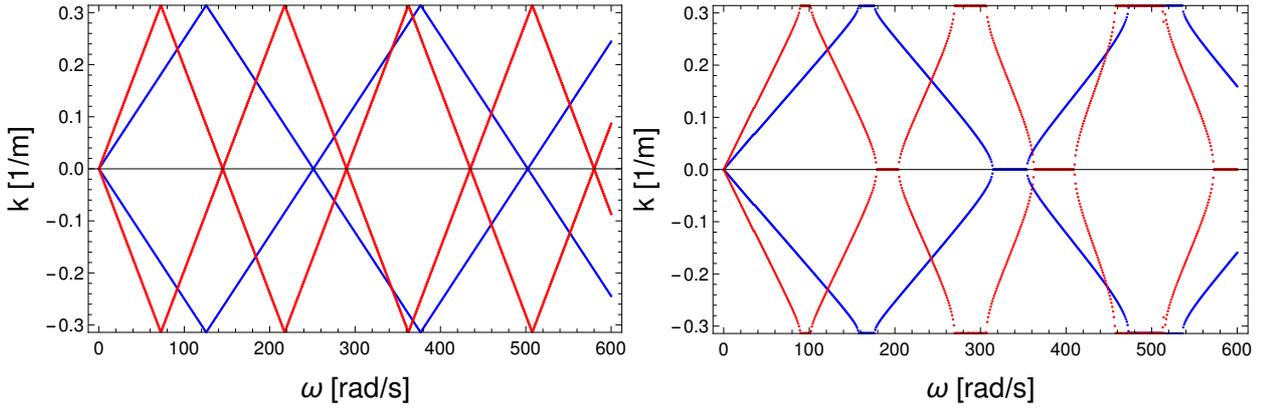


FIGURE 3.2 – Courbes de dispersion d'un milieu homogène (à gauche) et d'un milieu stratifié (à droite) avec une propagation 1D dans la direction \mathbf{e}_1 . Les courbes correspondant aux ondes P sont en bleu et celles des ondes SV sont en rouge.

par rapport à k par le changement de variable des deux dernières équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\rho \omega^2 u_1^B + \frac{d}{dx_1} \left[(\lambda + 2\mu) \left(\frac{du_1^B}{dx_1} + i v_1^B \right) \right] + i(\lambda + 2\mu) \frac{dv_1^B}{dx_1} \right) / (\lambda + 2\mu) = k v_1^B \\ \left(\rho \omega^2 u_z^B + \frac{d}{dx_1} \left[\mu \left(\frac{du_z^B}{dx_1} + i v_z^B \right) \right] + i\mu \frac{dv_z^B}{dx_1} \right) / \mu = k v_z^B \\ v_1^B = k u_1^B \\ v_z^B = k u_z^B \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Les courbes de dispersion ainsi obtenues pour un milieu homogène (à gauche) et un milieu périodique (à droite) sont représentées sur la FIGURE 3.2. Les équations étant découplées, il est possible de séparer les ondes de pression (en bleu) des ondes de cisaillement (en rouge). Comme attendu, les courbes de dispersion du cas homogène sont régulières et ne laissent pas apparaître de bandes de fréquence filtrées. Dans le cas du milieu stratifié, des bandes de fréquence interdites sont visibles pour les deux types d'ondes pour des bandes de fréquence différentes.

Pour une autre valeur de k_z , le système linéarisé par rapport à k , qui est le suivant (EQ.3.19), est alors résolu :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho \omega^2 u_1^B + \frac{d}{dx_1} \left[(\lambda + 2\mu) \left(\frac{du_1^B}{dx_1} + i v_1^B \right) - i k_z \lambda u_z^B \right] + i \left[(\lambda + 2\mu) \frac{dv_1^B}{dx_1} - i k_z \lambda v_z^B \right] - i k_z \mu \frac{du_z^B}{dx_1} + \mu k_z v_z^B - k_z^2 \mu u_1^B}{(\lambda + 2\mu)} = k v_1^B \\ \frac{\rho \omega^2 u_z^B + \frac{d}{dx_1} \left[\mu \left(\frac{du_z^B}{dx_1} + i v_z^B - i k_z u_1^B \right) \right] + i \mu \left[\frac{dv_z^B}{dx_1} - i k_z v_1^B \right] - i k_z \lambda \frac{du_1^B}{dx_1} + \lambda k_z v_1^B - k_z^2 (\lambda + 2\mu) u_z^B}{\mu} = k v_z^B \\ v_1^B = k u_1^B \\ v_z^B = k u_z^B \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Les équations étant couplées, le tri entre les modes P et les modes S n'est pas aussi facile. Ainsi, les courbes de dispersion tracées pour $k_z = 0,25 \text{ m}^{-1}$ concernent les deux types d'ondes pouvant se propager dans le milieu (FIGURE 3.3). Contrairement aux résultats du CHAPITRE 2, une valeur de k_z n'est pas liée à un angle d'incidence étant donné que deux types d'ondes existent. Cependant, le même comportement en basse fréquence est retrouvé : la propagation dans la direction \mathbf{e}_1 n'est pas possible en basse fréquence et limitée par la valeur de ω correspondant à k_z égale au module du vecteur d'onde dans le milieu. Ainsi, il existe deux valeurs limites différentes pour les ondes P et S.

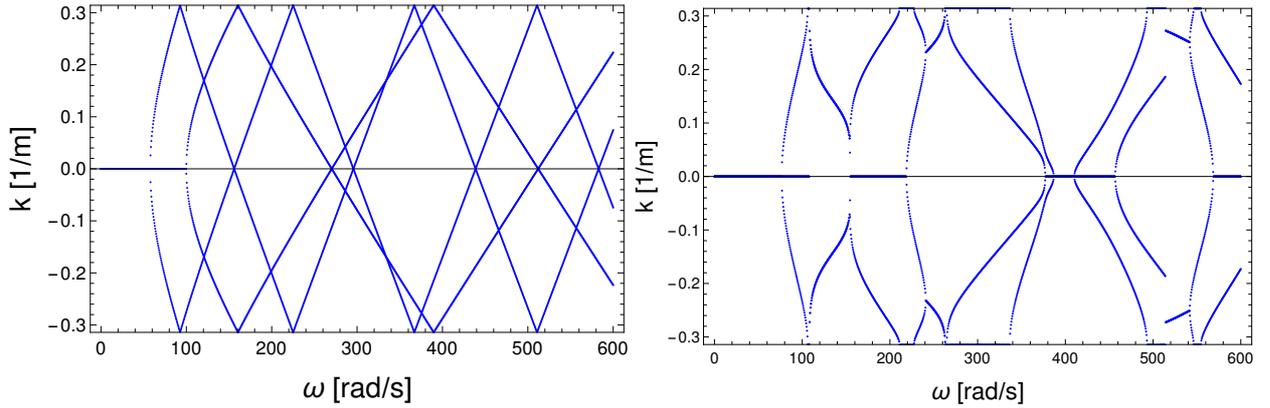


FIGURE 3.3 – Courbes de dispersion d'un milieu homogène (à gauche) et d'un milieu stratifié (à droite) avec une propagation donnée par la valeur de $k_z = 0,25 \text{ m}^{-1}$.

3.2 Prise en compte d'une interface pour un milieu stratifié semi-infini

En élastodynamique, des études sur l'évolution des coefficients de réflexion et de transmission à l'interface sont proposées par Willis (2020) dans le cas d'une interface entre un matériau homogène et un métamatériau aléatoire en utilisant une formulation variationnelle du problème basée sur la distribution statistique des inclusions.

La FIGURE 3.4 présente les notations utilisées pour les ondes réfléchies et transmises du demi-espace homogène vers le demi-espace stratifié. Comme présenté précédemment, l'interface plane entre le milieu périodique et le milieu homogène est considérée. La simulation de chaque milieu est réduite à un motif 1D dans la direction \mathbf{e}_1 . On considère un milieu infini dans la direction \mathbf{e}_1 et un milieu invariant dans la direction \mathbf{e}_y . Chacun des demi-espaces est donc semi-infini mais une solution est recherchée en la projetant sur une base constituée des modes obtenus en considérant un milieu infini dans la direction \mathbf{e}_z .

Pour calculer les modes de motifs élémentaires infinis dans la direction \mathbf{e}_z , la période des motifs représentant les milieux homogènes et stratifiés est la même pour les deux et correspond à la période du milieu périodique. Le problème aux valeurs propres quadratiques linéarisé, étudié avec des propriétés matériau continues le long du motif donc pour $x_1 \in]-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}[$, est celui de l'EQ.3.11.

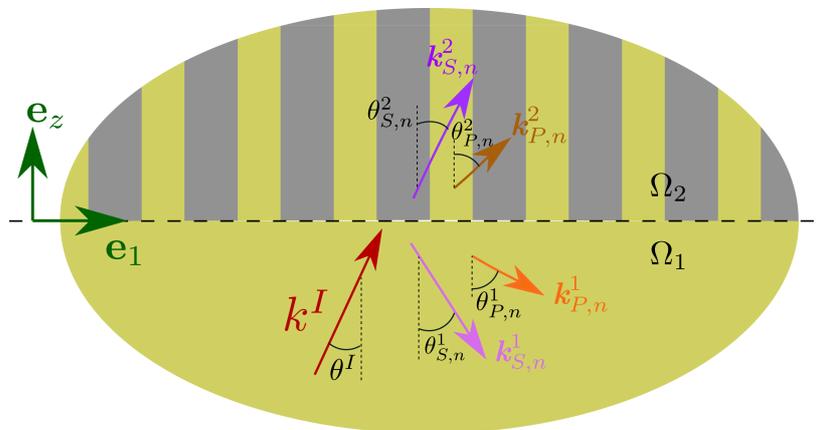


FIGURE 3.4 – Représentation du problème élastodynamique à l'interface entre un demi espace homogène et un demi-espace périodique dans la direction \mathbf{e}_1 .

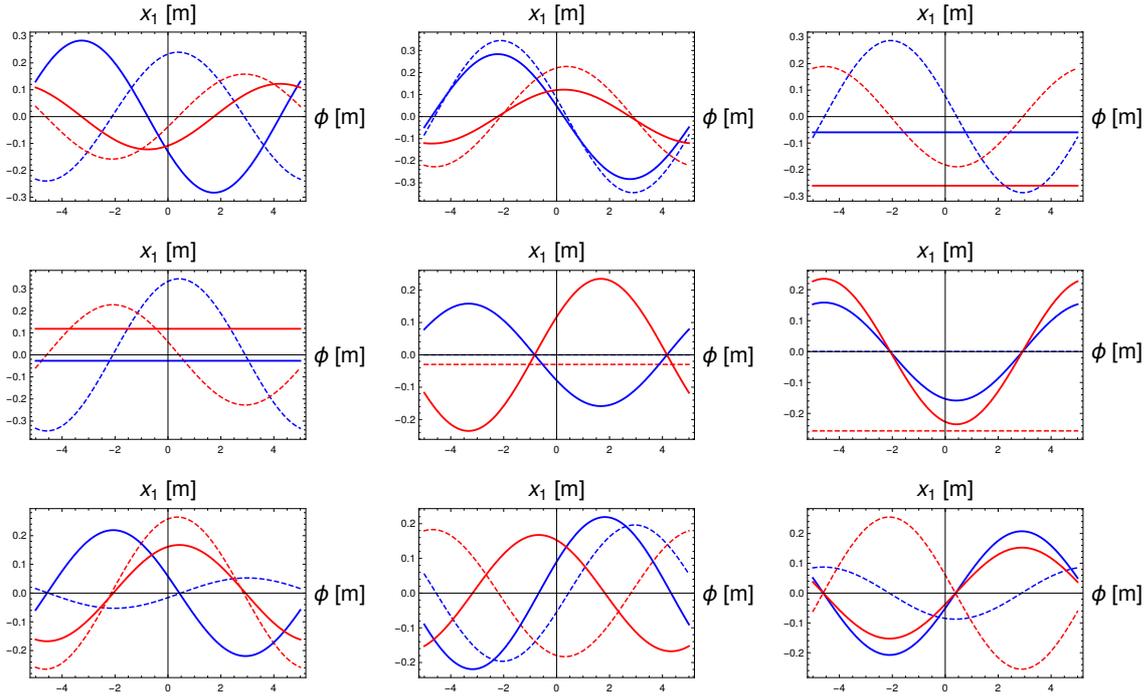


FIGURE 3.5 – Neuf premiers modes de Bloch du motif homogène projetés sur \mathbf{e}_1 (en bleu) et \mathbf{e}_z (rouge) pour $k = 0 \text{ m}^{-1}$ (lignes continues) et $k = \frac{\pi}{3L}$ (lignes pointillées).

Les neuf premiers modes de Bloch $\mathbf{u}^B(x_1)$ ainsi calculés sont représentés sur la FIGURE 3.5 pour le milieu homogène et sur la FIGURE 3.6 pour le milieu périodique. Les modes représentés en bleu correspondent à la projection sur \mathbf{e}_1 et ceux en rouge à celle sur \mathbf{e}_z . La représentation est effectuée pour deux valeurs différentes du paramètre de Bloch, $k = 0 \text{ m}^{-1}$ et $k = \frac{\pi}{3L}$, tracées respectivement en lignes continues et en pointillés. Le tracé des surfaces de dispersion permet de déterminer le comportement des milieux vis-à-vis du passage des ondes. Ces surfaces $k_z(\omega, k)$ ne sont pas tracées en 3D faute de lisibilité.

En effectuant la linéarisation du système défini par l'EQ.3.15 comme celle déjà indiquée dans 3.1.1 pour obtenir l'EQ.3.11, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{pmatrix} -[\mathbf{C}] & [\mathbf{K}] \\ [\mathbb{I}_2] & [\mathbf{0}] \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} ik_z \{\mathbf{U}\} \\ \{\mathbf{U}\} \end{Bmatrix} = ik_z \begin{pmatrix} [\mathbf{M}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbb{I}_2] \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} ik_z \{\mathbf{U}\} \\ \{\mathbf{U}\} \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

avec le vecteur $\{\mathbf{U}\} = \begin{Bmatrix} u_1^B \\ u_z^B \end{Bmatrix}$

Les matrices $[\mathbf{M}]$ et $[\mathbf{K}]$ sont hermitiennes, c'est-à-dire qu'elles sont égales au conjugué de leur transposée. Si les expressions ne sont pas égales, les fonctions de base utilisées pour le problème aux éléments finis sont les mêmes, ce qui implique donc que les rôles sont inversibles.

La matrice $[\mathbf{C}]$ est anti-hermitienne c'est-à-dire qu'elle est égale à l'opposé de sa matrice conjuguée. En utilisant les conclusions de Tisseur and Meerbergen (2001), les valeurs propres $\lambda = ik_z$ sont alors imaginaires ou par paires $(\lambda, -\bar{\lambda})$. Les k_z sont donc réels ou correspondent à des paires (k_z, \bar{k}_z) .

Les résultats concernant les propriétés d'orthogonalité des modes de Bloch ne s'étendent pas aussi facilement au cas élastodynamique notamment à cause des termes liés à l'hétérogénéité dans l'EQ.3.4. On définit

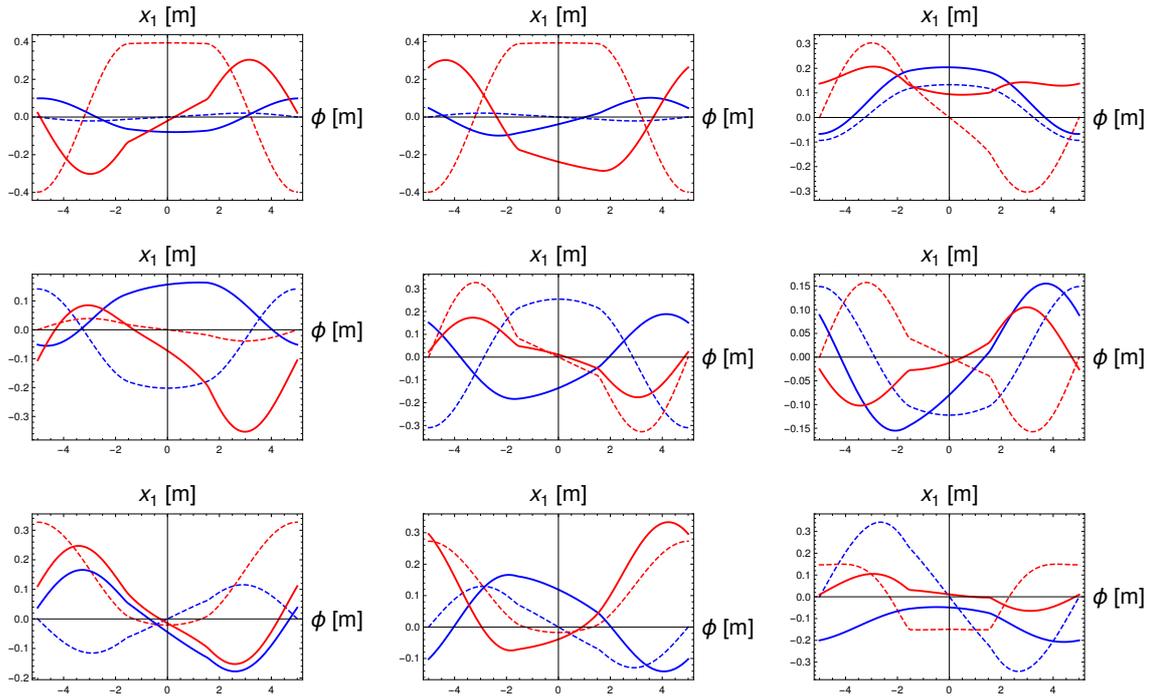


FIGURE 3.6 – Neuf premiers modes de Bloch du motif périodique stratifié projetés sur \mathbf{e}_1 (en bleu) et \mathbf{e}_z (rouge) pour $k = 0 \text{ m}^{-1}$ (lignes continues) et $k = \frac{\pi}{3L}$ (lignes pointillées).

le produit scalaire permettant de définir l'orthogonalité des modes comme suit :

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \int_{-L/2}^{L/2} \mathbf{w}^* [\mathbf{M}] \mathbf{u} dx_1. \quad (3.21)$$

La démonstration théorique de l'orthogonalité des modes de Bloch vis-à-vis du produit scalaire défini par l'EQ.3.21 n'a pas été menée à son terme dans cette thèse. Numériquement, elle n'est pas retrouvée non plus. Si une tendance a l'air d'apparaître (FIGURE 3.7), les modes de multiplicité plus grande que 2 ne sont pas orthogonaux entre eux pour la plupart alors qu'ils devraient l'être par construction. Le mauvais conditionnement de la matrice après le changement de variable opéré pour linéariser le problème aux valeurs propres quadratique est une des hypothèses de cette mauvaise construction des modes.

De plus, étant donné la multiplication des modes doubles dans ce cas, le calcul des ondes réfléchies et réfractées est devenu plus coûteux que dans le cas des ondes hors-plan. Il faut en effet calculer plus de modes pour obtenir des résultats semblables. Les résultats numériques n'ont pas été obtenus ici, mais il est possible d'optimiser les outils pour rendre accessible le calcul.

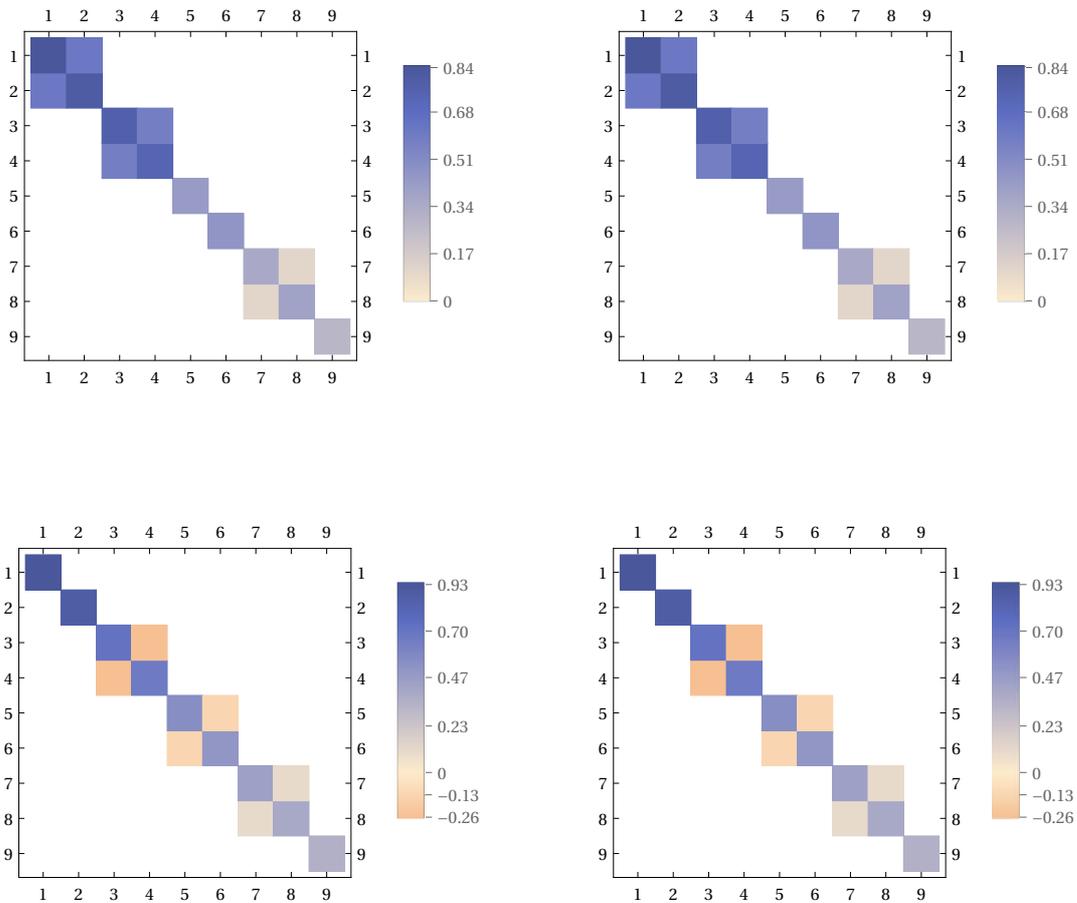


FIGURE 3.7 – Représentation graphique du produit scalaire entre les modes de Bloch d'un même espace sur les 9 premiers modes. À gauche : milieu homogène, à droite : milieu stratifié, en haut : $k = 0 \text{ m}^{-1}$ et en bas $k = \frac{\pi}{3c}$.

3.3 Propriété d'un milieu élastique infini périodique selon deux directions

Comme dans le chapitre précédent (2.3), une coupe horizontale du domaine du métamatériau à inclusions est ici considérée, c'est-à-dire que le milieu étudié est le milieu représenté sur la FIGURE 2.15, infini dans les deux directions du plan de coupe.

La cellule primitive pour ce milieu 2D périodique est avec une inclusion circulaire unique telle que représenté sur la FIGURE 3.8, elle est identique à celle déjà définie dans le CHAPITRE 2 (FIGURE 2.16a). Par contre, la prise en compte d'un comportement élastodynamique implique deux types d'ondes : P et S. Afin de dimensionner un tel métamatériau, l'influence de certains paramètres géométriques ainsi que celle des propriétés du matériau de l'inclusion sur l'existence, la largeur et la position des bandes de fréquence interdites est analysée.

Comme précédemment, l'équation différentielle (EQ.3.2) régissant le comportement du milieu est écrite dans le domaine fréquentiel puis une transformée de Bloch est utilisée pour permettre de prendre en compte la périodicité, qui est maintenant dans les deux directions spatiales. Le résultat de la transformée de Bloch donne l'équation suivante :

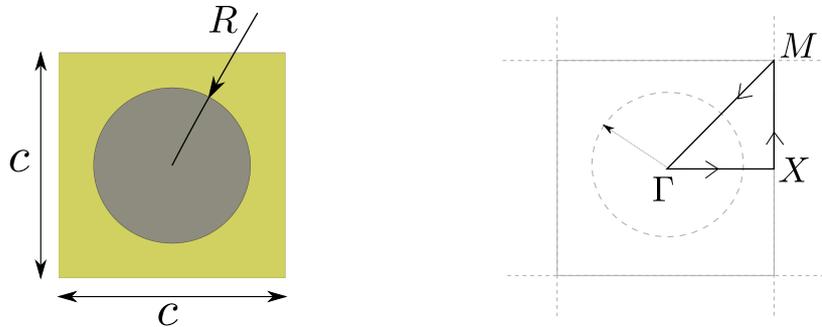
$$(\nabla_{\mathbf{x}} + i\mathbf{k}) \cdot (\mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^B) + i\mathbf{k} \otimes_s \mathbf{u}^B)) = -\rho \omega^2 \mathbf{u}^B. \quad (3.22)$$

dont la formulation faible de l'EQ.3.22 s'écrit :

$$\int_{\Omega} (\mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^B) + i\mathbf{k} \otimes_s \mathbf{u}^B)) : \overline{(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^B) + i\mathbf{k} \otimes_s \mathbf{v}^B)} d\Omega = - \int_{\Omega} \rho \omega^2 \mathbf{u}^B \cdot \mathbf{v}^B d\Omega \quad (3.23)$$

L'analyse modale de la cellule primitive est effectuée en résolvant le problème aux valeurs propres (EQ.3.23) par éléments finis, ce qui permet ainsi d'avoir accès aux courbes de dispersion du milieu périodique.

D'abord, les outils développés dans COMSOL ont été validés en comparant les résultats obtenus avec ceux d'un autre code d'éléments finis dans le cas d'une cellule de 1 m de côté, dont les propriétés sont données dans le TABLEAU 3.1. La cellule primitive est une inclusion circulaire dont le diamètre est fixé à $\frac{9}{13}$ de la taille du motif élémentaire. Le matériau de la matrice du motif a une densité $\rho_m = 1750 \text{ kg/m}^3$, un module de Young $E_m = 233 \text{ MPa}$ et un coefficient de Poisson $\nu_m = 0,3$. Dans le cas d'une inclusion plus rigide que la matrice, le matériau de l'inclusion du motif a une densité $\rho_i = 2400 \text{ kg/m}^3$, un module de Young $E_i = 30 \text{ GPa}$ et un coefficient de Poisson $\nu_i = 0,25$. Les dix premiers modes de Bloch sont calculés pour k variant sur le contour de la zone irréductible de Brillouin $M - \Gamma - X - M$ (FIGURE 3.8b).



(a) Cellule élémentaire correspondante à un milieu infini selon deux directions. (b) Cellule réciproque sur laquelle est représenté le contour de la zone irréductible de Brillouin.

FIGURE 3.8 – Cellule primitive du milieu périodique dans l'espace physique et première zone de Brillouin correspondante dans l'espace réciproque.

c (m)	R (m)	E_m (GPa)	E_i (GPa)	ν_m	ν_i	ρ_m (kg/m ³)	ρ_i (kg/m ³)
1	0,346	0,233	30	0,25	0,3	1750	2400

TABLEAU 3.1 – Paramètres et propriétés de la référence utilisée pour les comparaisons dans l'étude paramétrique.

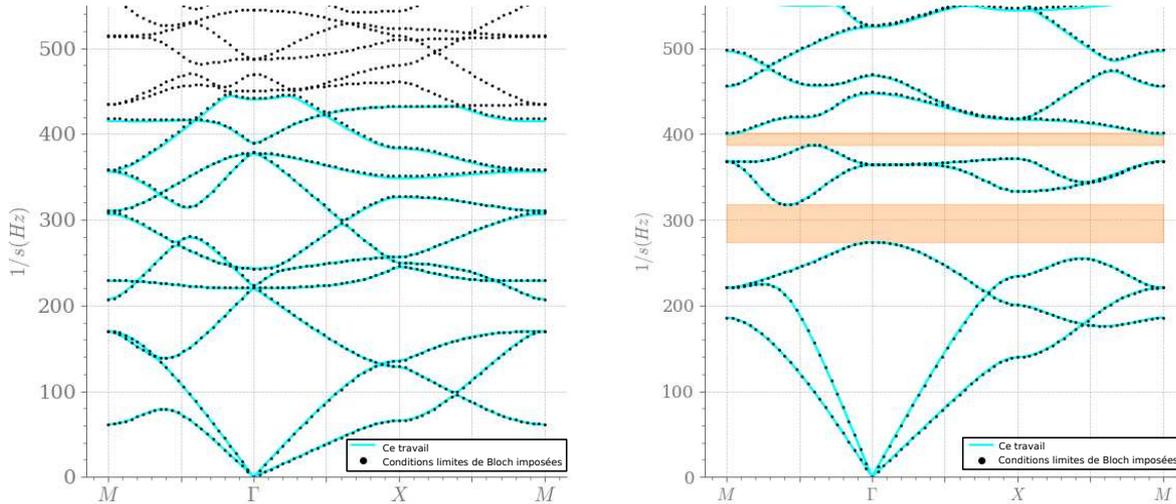


FIGURE 3.9 – Courbes de dispersion obtenues avec la méthode de Valencia et al. (2019) (points noirs) et avec la méthode proposée ici (lignes bleues) pour un milieu au comportement élastodynamique avec des trous vides (gauche) et des inclusions plus rigide que la matrice (droite).

Le code d'éléments finis utilisé pour cette comparaison est basée sur une méthode développée par Valencia et al. (2019), pour laquelle la transformée de Floquet-Bloch est appliquée sur les matrice élémentaires du modèle éléments finis plutôt que sur les conditions de bord, alors que la méthode utilisée dans cette thèse et implémentée dans COMSOL est de définir les équations de Bloch au niveau continu puis les discrétiser par éléments finis. Les résultats obtenus avec les deux méthodes sont représentés sur la FIGURE 3.9. Les deux méthodes permettent d'obtenir des résultats identiques. On observe notamment qu'avec les paramètres utilisés, la solution avec inclusions en mortier permet de créer une bande de fréquences interdite autour de 300Hz alors qu'il n'existe pas de bandes de fréquence interdites dans la solution avec des trous vides.

Dans la suite, des études paramétriques sont présentées. Pour ces études, le cas de référence est celui présenté en haut et considéré pour la validation. Dans chacune des études paramétriques, un seul paramètre est modifié. Les autres conservent les valeurs de référence. Par exemple, pour étudier l'influence de la taille du motif élémentaire, douze valeurs de c différentes entre 0,25m et 20m sont considérées. Pour chaque calcul des courbes de dispersion, les douze premiers modes de Bloch sont présentés pour k variant sur le contour irréductible de la première zone de Brillouin (FIGURE 3.8b).

3.3.1 Influence des paramètres géométriques

Dans cette partie, seuls les paramètres géométriques de la cellule élémentaire varient. Si la forme de l'inclusion et l'arrangement du réseau périodique ont aussi une influence sur les bandes de fréquences interdites du système (Du et al., 2017), la réalisation de formes cylindriques permet de comparer plus facilement la faisabilité des solutions proposées.

Influence de la taille de l'inclusion

La mise en place d'inclusions réparties selon un maillage particulier dans le sol nécessite des moyens humains, techniques et matériels conséquents. Il est donc nécessaire de limiter la taille des inclusions pour faciliter l'accès à de telles installations. Cependant, les inclusions doivent être de taille suffisante pour interagir avec les ondes de basses fréquences du chargement sismique.

Le paramètre modifié dans ce cas est la taille caractéristique de la cellule élémentaire. L'influence de la taille de la cellule élémentaire est discutée grâce à l'étude paramétrique représentée sur la FIGURE 3.10. Plus la taille du motif est petite, plus la première bande de fréquence filtrée est obtenue en hautes fréquences. Ainsi, l'ordre de grandeur est celui du kilohertz pour $c = 0,25$ m alors qu'elle apparaît autour de 12 Hz pour un motif de 20 m de côté. Cependant, la forme des courbes de dispersion ne subit qu'une homothétie en fonction de ce paramètre.

La FIGURE 3.11 présente l'évolution de la première bande de fréquences interdites en fonction du paramètre c . La région en bleu correspond à l'évolution de la position et celle de l'épaisseur est représentée en rouge. Les valeurs de l'épaisseur et des fréquences des bandes interdites sont inversement proportionnelles à la taille du motif utilisé. En effet, lorsque l'on normalise la largeur de la bande de fréquence par la valeur moyenne des fréquences de cette bande (FIGURE 3.12), ce rapport est constant. Ainsi, pour atteindre les bandes de fréquences intéressantes pour limiter les dégâts sur les structures de Génie Civil (entre 0 et 50 Hz), la taille des motifs (dans le cas de la géométrie et des matériaux utilisés ici) doit donc être supérieure à 5 m.

Les fréquences utiles à filtrer pour protéger les équipements à l'intérieur des bâtiments sont de l'ordre de la centaine de hertz, ce qui correspond à un motif de l'ordre du mètre. En milieu urbain en particulier, il est nécessaire de regarder d'autres paramètres pour faire baisser les fréquences d'apparition des bandes de fréquence filtrées car les contraintes sur la mise en œuvre augmentent lorsque la taille du motif augmente.

Influence du rapport de taille entre le motif et l'inclusion

L'autre paramètre géométrique intéressant à modifier est le ratio entre le rayon de l'inclusion et la taille de la cellule élémentaire. Ainsi pour une taille de motif identique, on peut choisir une taille de l'inclusion en fonction du besoin. Il apparaît aussi essentiel de limiter le diamètre de l'inclusion pour simplifier la mise en œuvre.

Les différentes courbes de dispersion pour des valeurs du ratio $\frac{R}{c}$ allant de 0,32 à 0,48 sont représentées sur la FIGURE 3.13. Contrairement aux résultats obtenus en modifiant la taille des inclusions, les courbes ne sont pas des homothéties. Il est cependant difficile de donner une tendance générale. Les courbes de dispersion obtenues pour le ratio $\frac{R}{c} = 0,3$ ne sont pas tracées mais sont prises en compte dans le résultat de la FIGURE 3.14. Cette figure présente comme précédemment l'évolution de la position et de l'épaisseur de la première bande de fréquence interdites par le milieu périodique en fonction du ratio. Une valeur maximale de l'épaisseur des bandes de fréquence interdites est observée pour un ratio entre le rayon et le diamètre autour de 0,45. Cette valeur correspond à des inclusions très larges par rapport à la taille de la cellule. En augmentant le ratio, les bandes de fréquences interdites apparaissent à des fréquences plus élevées. Il faut donc trouver un compromis entre l'épaisseur de la bande de fréquence et les fréquences visées (dans le cas des basses fréquences).

3.3.2 Influence du matériau de l'inclusion

Comme observé sur la FIGURE 3.9, la modification du type d'inclusion (des trous vides ou une inclusion plus rigide et plus dense que la matrice dans ce cas) influence considérablement le comportement du milieu pour une géométrie donnée.

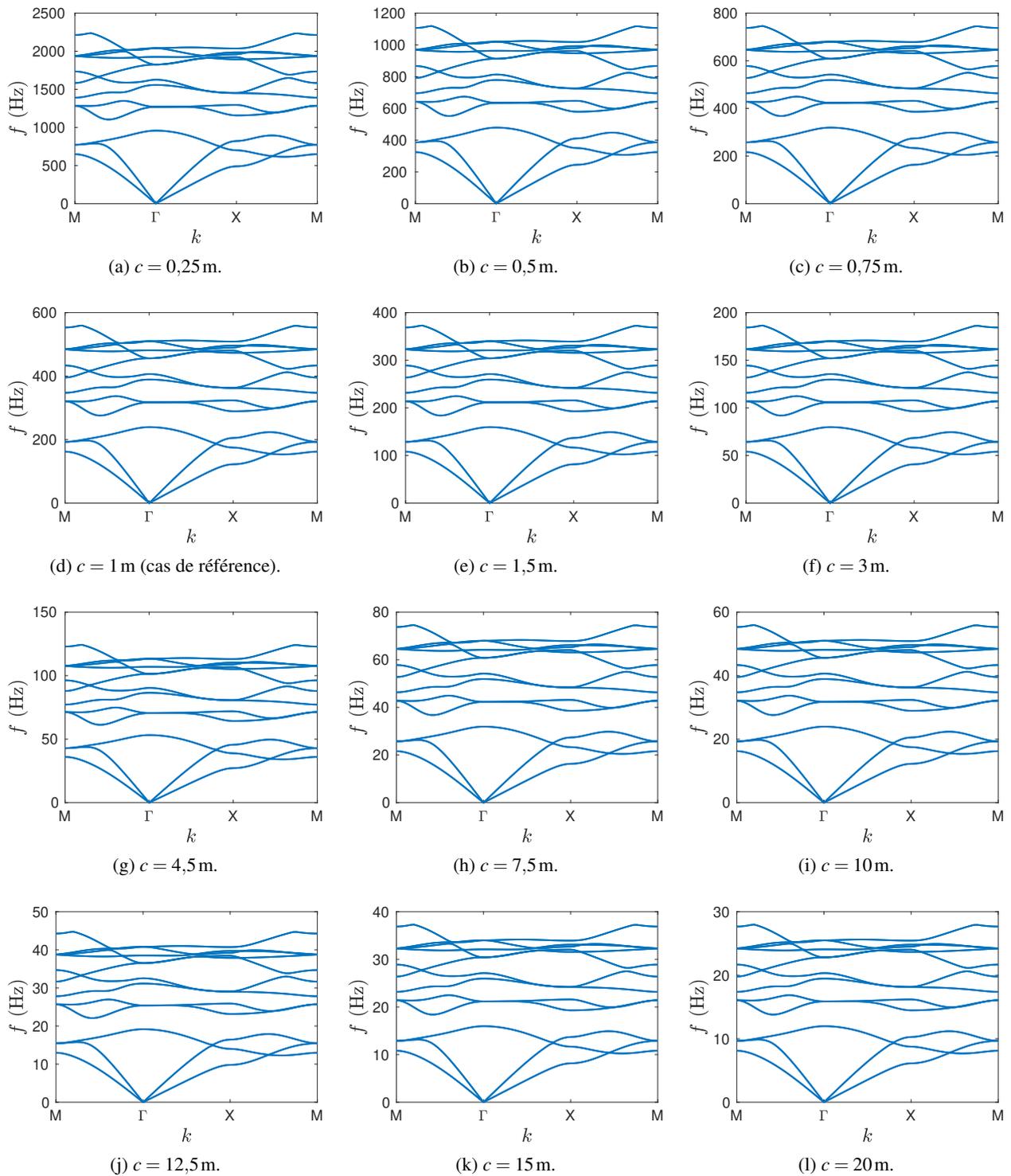


FIGURE 3.10 – Courbes de dispersion présentant la première bande de fréquence en fonction de c la taille de cellule élémentaire.

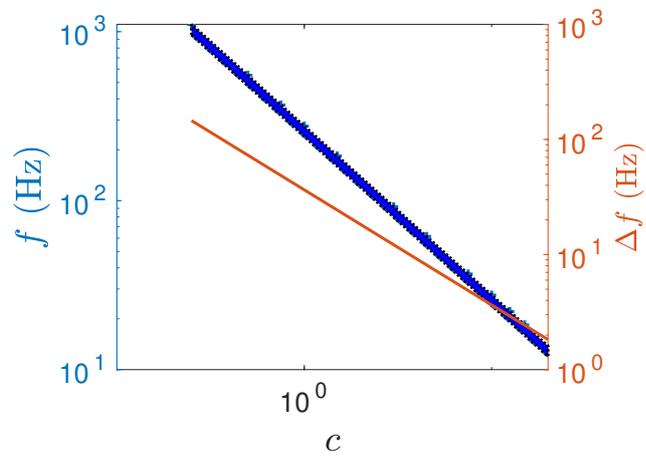


FIGURE 3.11 – Évolution de l'épaisseur et de la position de la première bande de fréquence interdite en fonction de c , la taille de la cellule élémentaire.

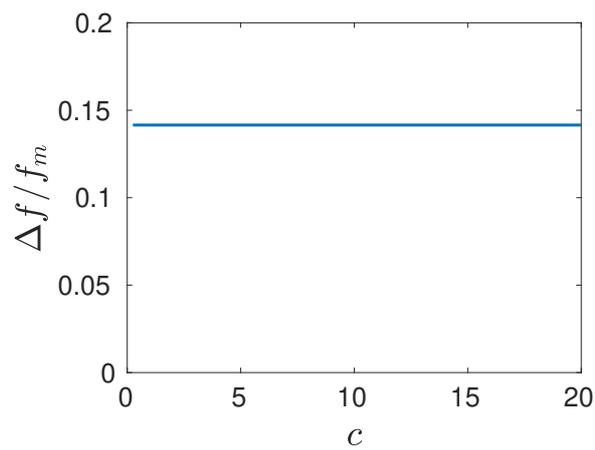


FIGURE 3.12 – Évolution de l'épaisseur normalisée par la position moyenne de la première bande de fréquence interdite en fonction de c , la taille de la cellule élémentaire.

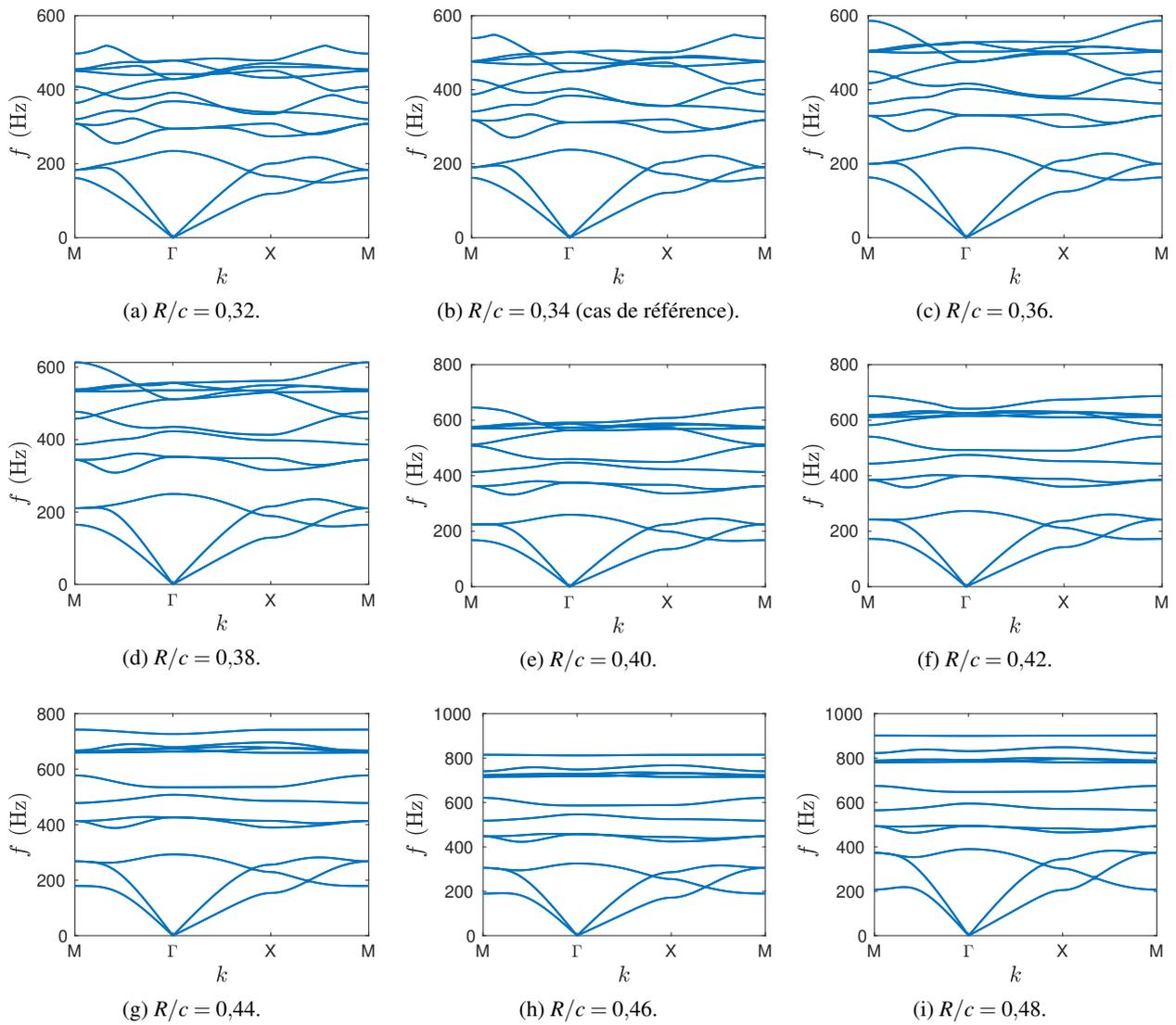


FIGURE 3.13 – Courbes de dispersion présentant la première bande de fréquence interdite en fonction de $\frac{R}{c}$ le ratio entre le rayon de l'inclusion et la taille de la cellule élémentaire.

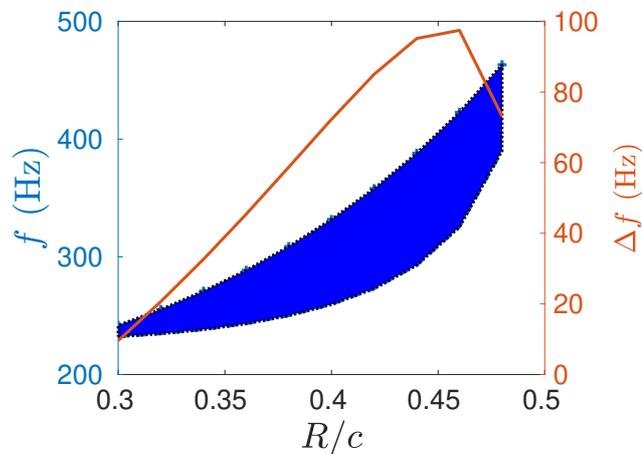


FIGURE 3.14 – Évolution de la position et de l'épaisseur de la première bande interdite en fréquence en fonction de $\frac{R}{c}$ le ratio entre le rayon de l'inclusion et la taille de la cellule élémentaire.

E_i [MPa]	50	100	233	500	$1 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$
E_i/E_m	0,214	0,429	1,00	2,15	4,29	21,5
E_i [MPa]	$1 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	$6 \cdot 10^5$	$1 \cdot 10^6$
E_i/E_m	43,0	129	429	$1,29 \cdot 10^3$	$2,58 \cdot 10^3$	$4,29 \cdot 10^3$

TABLEAU 3.2 – Différents valeurs considérées du module de Young de l'inclusion et le ratio correspondant entre le module de Young de l'inclusion et celui de la matrice.

Le dimensionnement du milieu périodique est donc lié à la fois à la géométrie du motif, mais aussi aux matériaux utilisés. Pour limiter l'étude paramétrique faite sur les matériaux, le choix est de ne modifier que le matériau de l'inclusion en conservant celui de la matrice de sol constante. Cette approche permet néanmoins de tirer des conclusions en faisant varier les propriétés autour de celles de la matrice. Les trois paramètres matériaux d'un matériau élastique isotrope sont donc considérés : le coefficient de Poisson ν , le module de Young E et la densité ρ .

Module de Young

En fonction du matériau utilisé pour l'inclusion, son module de Young peut-être plus petit ou plus grand que celui de la matrice. Les différentes valeurs du module de Young de l'inclusion choisies pour cette étude paramétrique ainsi que les ratios correspondants sont répertoriés dans le TABLEAU 3.2. Les courbes de dispersion correspondantes sont tracées sur la FIGURE 3.15. Les formes que prennent alors les courbes de dispersion sont très différentes selon que l'inclusion est moins ou plus rigide que la matrice. Lorsque l'inclusion est moins rigide, il n'existe pas de bande interdite en fréquence pour les douze premiers modes considérés. Lorsque l'inclusion est plus rigide avec un ratio $\frac{E_i}{E_m}$ suffisamment grand, c'est-à-dire plus grand que 4,29 (FIGURE 3.15e), il existe une première bande interdite comme pour le cas de référence, qui est avec un $\frac{E_i}{E_m} = 129$. Comme attendu, cette première bande de fréquence interdite se rétrécit lorsque le ratio $\frac{E_i}{E_m}$ tend vers 1. Lorsque $\frac{E_i}{E_m} < 1$, il n'y a pas de bande de fréquence interdite pour les douze premiers modes considérés et on retrouve bien les conclusions de la FIGURE 3.9 sur les trous vides.

L'évolution de l'ouverture et de la position de la première bande fréquence est représentée sur la FIGURE 3.16 en fonction du ratio entre les modules de Young de l'inclusion et de la matrice. Cette analyse de l'influence du module de Young met en avant le fait que la présence d'une inclusion plus rigide que la matrice a tendance à augmenter la largeur de la bande de fréquence interdite rapidement avant d'arriver à une valeur asymptotique. De plus, à partir de l'apparition de la bande de fréquence, la valeur moyenne de la première bande de fréquence interdite varie très peu. Il n'est donc pas utile de rigidifier au maximum la structure pour optimiser le dimensionnement.

Pas d'influence du coefficient de Poisson

L'effet du coefficient de Poisson est étudié ici en considérant des matériaux conventionnels uniquement. Les valeurs considérées se situent donc entre 0 et 0,5. Comme pour le cas des paramètres géométriques, seul le coefficient de Poisson est modifié dans ce cas.

La FIGURE 3.18 présente l'effet d'une variation du coefficient sur les bandes de fréquences interdites. La première bande de fréquence est représentée en bleu et la courbe rouge est l'évolution de l'épaisseur en fonction du paramètre ν_i . La variation affichée en rouge est négligeable par rapport à l'épaisseur de la bande de fréquence. De la même façon, sa position n'est pas modifiée en fonction du coefficient de Poisson de l'inclusion.

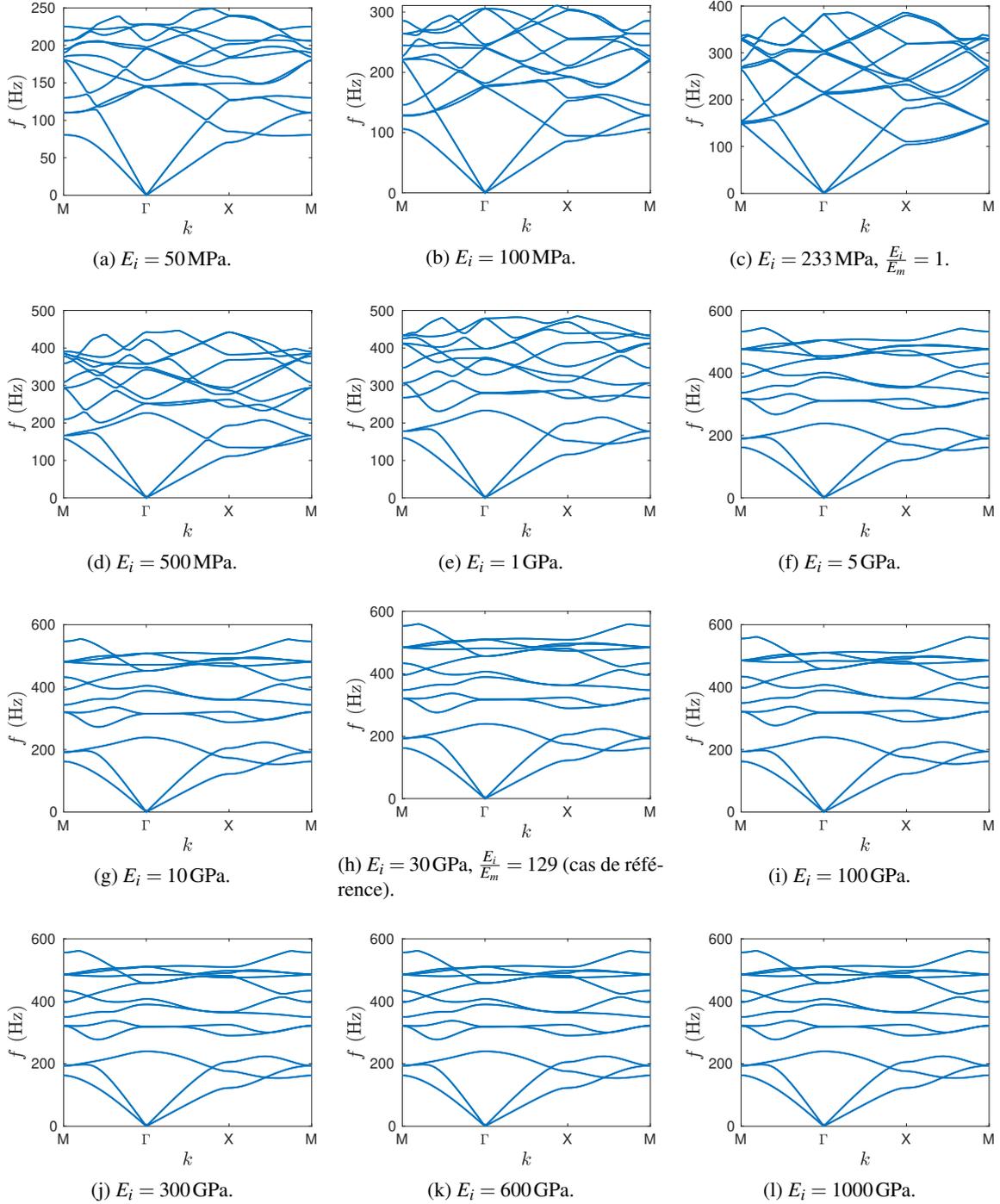


FIGURE 3.15 – Courbes de dispersion présentant la première bande de fréquence interdite en fonction du module de Young de l'inclusion.

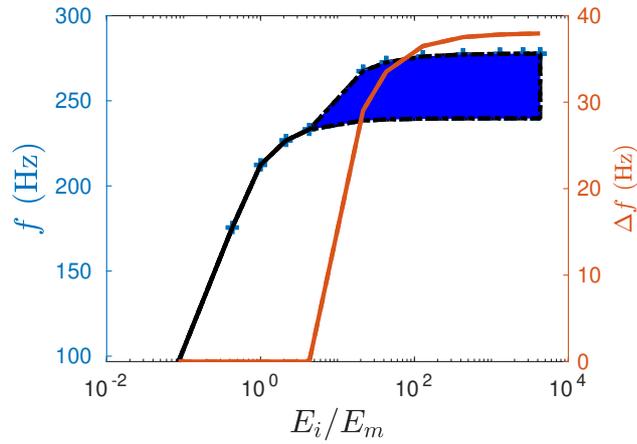


FIGURE 3.16 – Évolution de la position (bleu) et de l'ouverture (rouge) de la première bande de fréquence interdite en fonction du ratio entre les modules de Young de l'inclusion et de la matrice.

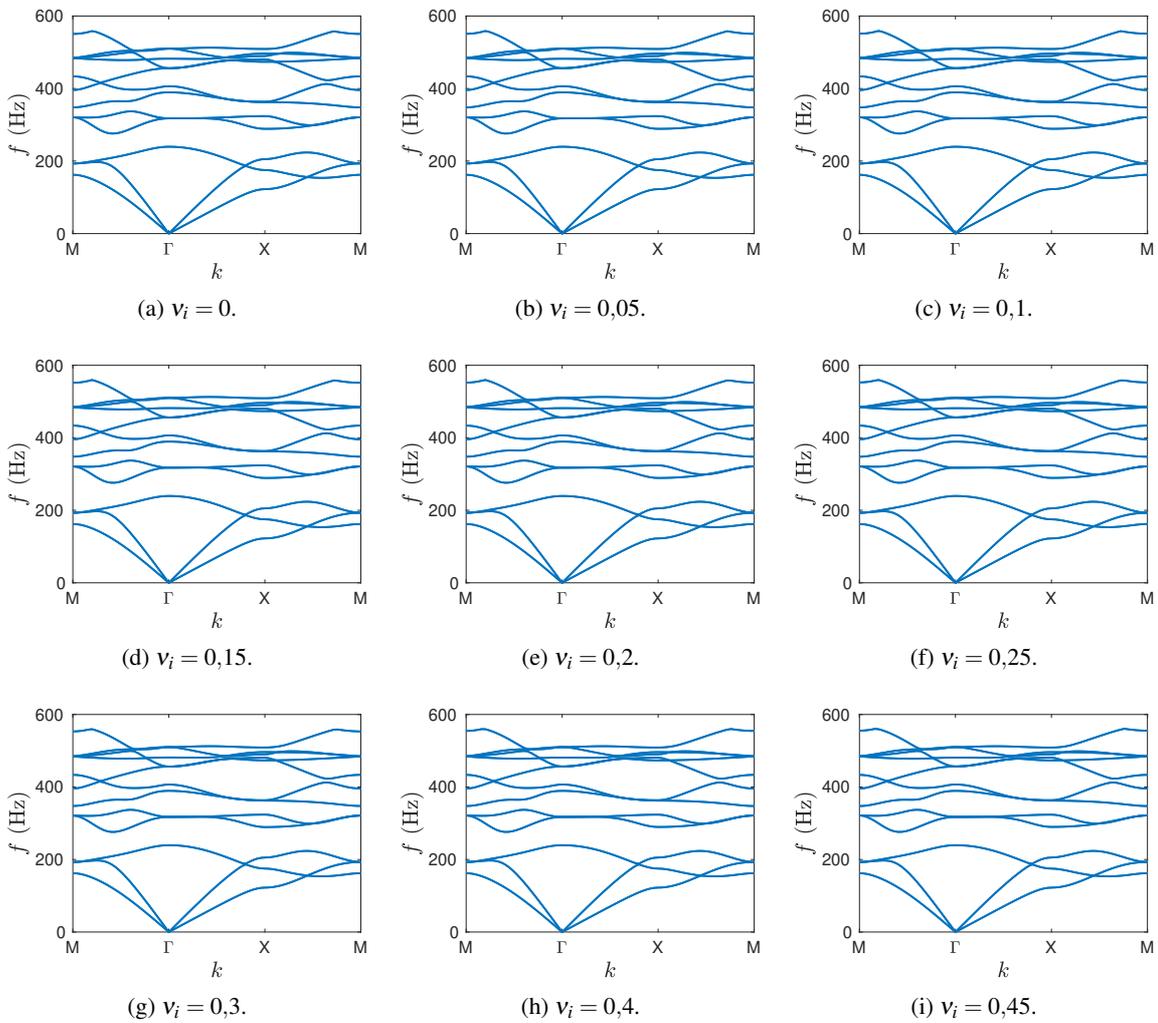


FIGURE 3.17 – Courbes de dispersion présentant la première bande de fréquence interdite en fonction du coefficient de Poisson de l'inclusion.

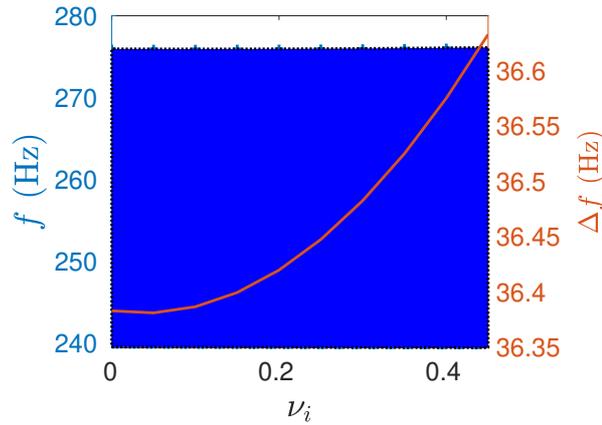


FIGURE 3.18 – Première bande de fréquence interdite (en bleu) et évolution de son épaisseur (en rouge) en fonction du coefficient de Poisson de l'inclusion.

ρ_i [kg/m ³]	100	500	750	1000	1500	2000	2400	2500	3000	5000	7500	10000
ρ_i/ρ_m	0,057	0,286	0,429	0,571	0,857	1,14	1,37	1,43	1,71	2,86	4,29	5,71

TABLEAU 3.3 – Différentes valeurs considérées de la masse volumique de l'inclusion et le ratio correspondant entre la densité de l'inclusion et celui de la matrice.

Le coefficient de Poisson n'a donc aucune influence dans ce cas de figure sur l'apparition ou non de bandes de fréquences interdites. Ce comportement est notamment dû au fait que dans ce cas de figure, l'inclusion est plus rigide que la matrice, donc moins sollicitée lors du calcul des modes comme l'illustre la FIGURE 3.19. Elle représente les quatre premiers modes de la cellule pour trois valeurs de \mathbf{k} . Les valeurs sont de haut en bas :

- le point Γ ($\mathbf{k} = (0,0)$),
- un point sur $\Gamma - M$ ($\mathbf{k} = (\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5})$)
- un point sur $\Gamma - X$ ($\mathbf{k} = (\frac{4\pi}{5}, 0)$)

Ainsi, pour la plupart des modes représentés, les déplacements dans l'inclusion sont quasiment constants, donc comportant peu de déformations, ce qui implique peu d'influence du coefficient de Poisson dans ce cas-là. Les conclusions présentées précédemment avec l'étude du module de Young amènent à ne pas étudier les configurations pour lesquels l'effet du coefficient de Poisson n'a pas été testée ($E_m > E_i$).

Masse volumique

Le dernier paramètre matériau pouvant influencer sur le comportement du milieu périodique étudié est la masse volumique du matériau. Dans l'idée d'obtenir des résonances locales, il se peut que l'influence de la densité massique puisse être plus importante que les modules d'élasticité. Pour ce paramètre, douze valeurs différentes sont considérées, dont cinq sont plus faibles que celle du cas de référence et sept plus grandes (TABLEAU 3.3). Les courbes de dispersion correspondantes à ces valeurs sont tracées sur la FIGURE 3.20. Contrairement aux courbes obtenues en modifiant le module de Young de l'inclusion (FIGURE 3.15), l'allure générale des courbes n'est pas modifiée en modifiant la masse volumique de l'inclusion. L'existence de la première bande interdite en fréquence dépend de la densité de l'inclusion et non du contraste de celle-ci entre l'inclusion et la matrice. Ainsi, un fort contraste pour une inclusion moins dense que la matrice ne permet pas de générer une bande de fréquence interdite. En effet, la première bande de fréquence interdite n'apparaît qu'à partir de la valeur $\rho_i = 1500\text{kg/m}^3$ (FIGURE 3.20e).

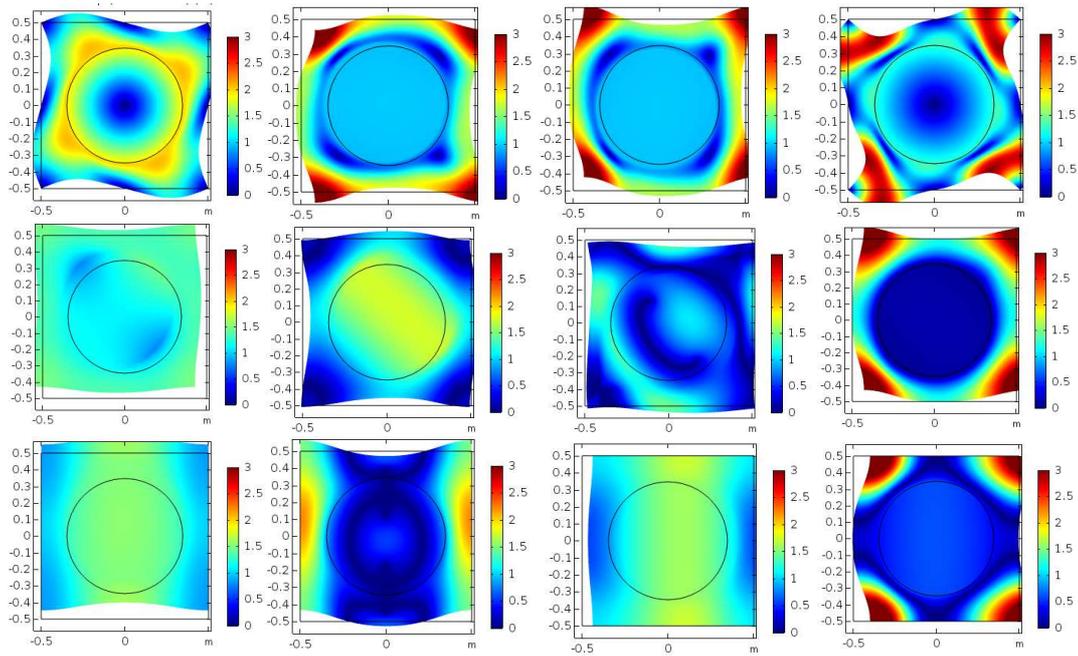


FIGURE 3.19 – Représentation des quatre premiers modes pour trois valeurs de \mathbf{k} , de haut en bas $\mathbf{k} = (0, 0)$ (le point Γ), $\mathbf{k} = (\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5})$ (un point sur $\Gamma - M$) et $\mathbf{k} = (\frac{4\pi}{5}, 0)$ (un point sur $\Gamma - X$). L'échelle de couleur représente la valeur absolue du déplacement.

L'évolution de la position et de la largeur de la première bande de fréquence interdite est donnée sur la FIGURE 3.21. Ainsi, l'augmentation de la masse du matériau de l'inclusion permet de créer des bandes de fréquences interdites plus larges et en plus dans le domaine de fréquence de plus en plus basse. Avec la conclusion apportée sur le comportement avec un changement de rigidité, il est donc intéressant de considérer des matériaux composites (voire des matériaux architecturés permettant d'obtenir les propriétés souhaitées).

3.3.3 Résumé des effets de paramètres

Le TABLEAU 3.4 reprend les conclusions obtenues pour les différents paramètres étudiés dans le cas particulier d'un milieu périodique composé de cellules carrées comportant une inclusion circulaire. Les effets sont ici étudiés séparément. Une étude plus poussée peut permettre de voir l'influence couplée des maté-

Paramètre	Influence sur la première bande de fréquence interdite
Taille de la cellule c	Diminution des fréquences d'apparition avec l'augmentation de la taille. L'épaisseur normalisée par la fréquence moyenne est constante.
Rapport des dimensions $\frac{R}{c}$	Présence d'un ratio optimal en termes de largeur de la bande de fréquence. La fréquence moyenne augmente avec ce rapport.
Coefficient de Poisson de l'inclusion	Pas d'influence dans le cas de référence choisi
Module de Young de l'inclusion E_i	Apparition uniquement pour des inclusions plus rigides. Valeur moyenne et largeur convergent vers une valeur asymptotique
Masse volumique de l'inclusion ρ_i	Diminution des fréquences moyennes et augmentation de la largeur quand ρ_i augmente

TABLEAU 3.4 – Résumé des conclusions obtenues pour le cas d'un milieu périodique avec une inclusion circulaire.

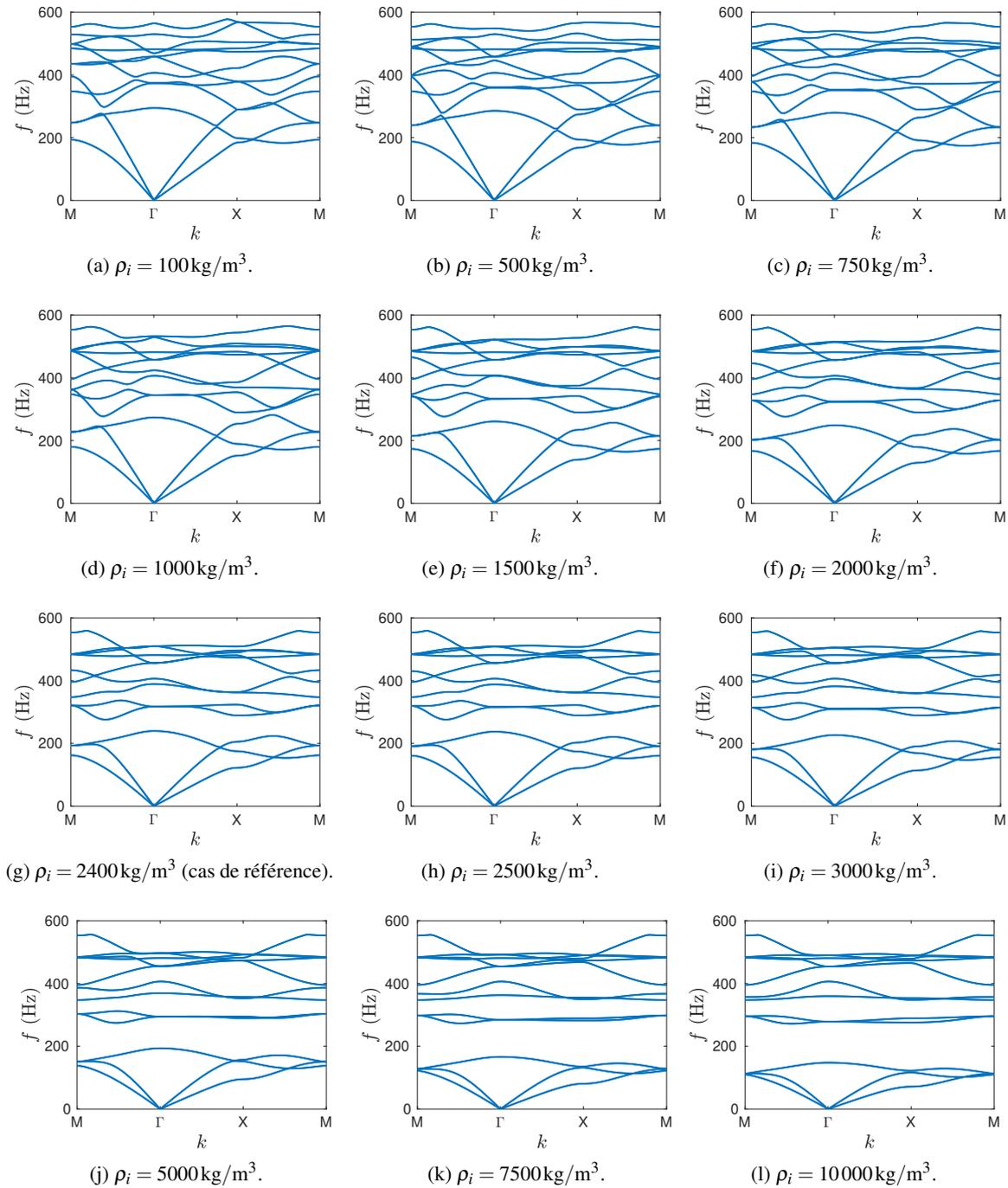


FIGURE 3.20 – Courbes de dispersion présentant la première bande de fréquence interdite en fonction de la masse volumique de l'inclusion.

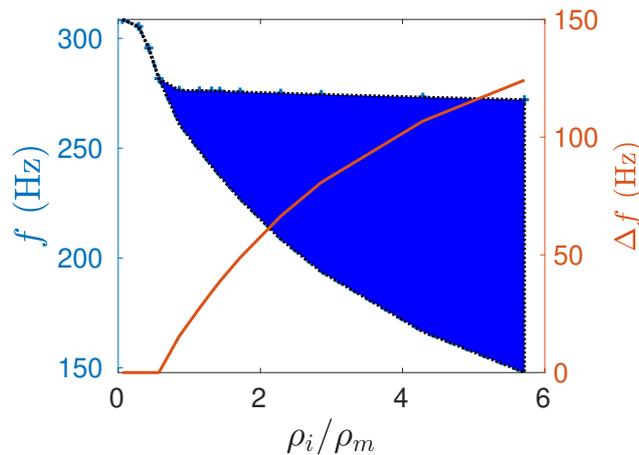


FIGURE 3.21 – Évolution de la position (en bleu) et de la largeur (en rouge) de la bande de fréquence interdite en fonction de la masse volumique.

riaux. La variation de la masse volumique est souvent liée à une variation du module de Young par exemple. Cependant, l'influence de la masse dans la réponse semble être la plus importante pour la géométrie considérée ici (milieu périodique à cellule élémentaire carrée comportant une inclusion circulaire) et vis-à-vis des critères de largeur et de position de la première bande de fréquence interdite choisis ici.

3.4 Apport des structures à résonance locale

Cette section étudie le concept des structures localement résonantes, l'objectif est d'améliorer les performances des métamatériaux précédemment présentées. Il s'agit en effet du deuxième type de phénomènes qui peuvent conduire à la présence de bandes interdites en fréquences après la diffraction de Bragg.

Tous les travaux cités montrent que ce type de milieux périodiques à résonance locale permet d'atteindre des fréquences plus basses et donc pouvant être moins limités par les contraintes d'encombrement et de faisabilité. En effet, la dispersion de Bragg implique des cellules dont la taille est de l'ordre de grandeur des longueurs d'onde à filtrer.

Concernant l'utilisation des structures périodiques localement résonantes, le travail bibliographique de [Ma and Sheng \(2016\)](#) présente des avancées réalisées principalement dans le domaine des métamatériaux acoustiques. En effet, cette utilisation s'est rapidement développée de l'étude et la conception théorique à la mise en œuvre pour devenir une alternative crédible dans le domaine du contrôle des vibrations.

Comme présenté dans [Zaccherini et al. \(2019\)](#), les structures à résonances locales peuvent être modélisées par un système masse ressort (et amortisseur dans le cas où l'un ou plusieurs des matériaux possèdent un comportement viscoélastique) complexe. Des mises en œuvre expérimentales ont été testées.

Les travaux de [Colombi et al. \(2020\)](#) traitent la réponse de deux méta-systèmes d'un point de vue temporel sur des simulations à grande échelle en utilisant une modélisation 3D. Comme précédemment, il s'agit de systèmes résonnants avec une masse liée à la matrice.

[Fossat et al. \(2018\)](#) utilise des modèles d'homogénéisation pour l'étude de résonateurs périodiques utilisant des plaques et des poutres permettant de faire apparaître des bandes de fréquence interdites.

Ici, nous présentons, pour les milieux périodiques avec des inclusions considérés dans le cadre de cette thèse, une réalisation d'études paramétriques sur ce type de structures dans le but de mettre en avant l'intérêt de tels matériaux. En effet, certaines contraintes, qu'elles soient de nature physiques ou économiques, ne permettent pas d'obtenir les performances souhaitées en utilisant un matériau homogène pour l'inclusion.

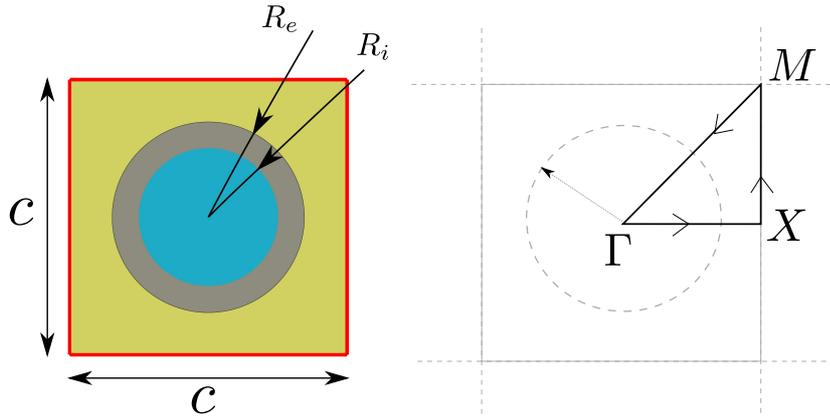


FIGURE 3.22 – Cellule primitive dans le cas d'une inclusion composite circulaire constituée de deux couches concentriques et première zone de Brillouin. .

Les cellules élémentaires proposées ici reprennent l'idée d'une inclusion circulaire mais comportant plusieurs couches. La géométrie d'une telle cellule est donnée sur la FIGURE 3.22. Ici, le cas d'une inclusion circulaire composée seulement de deux couches concentriques est étudié. Les deux matériaux constitutifs de l'inclusion peuvent être de nature différentes. Par exemple, ils peuvent être plus ou moins dense et il est ainsi possible de modifier la masse volumique effective de l'inclusion composite, qui est définie à partir des masses volumiques des deux matériaux (ρ_e pour la couche à l'extérieur et ρ_i pour celle à l'intérieur) (FIGURE 3.22) comme suit :

$$\rho_{eff} = \frac{\rho_e(R_e^2 - R_i^2) + \rho_i R_i^2}{R_e^2} \quad (3.24)$$

Pour analyser l'apport de cette nouvelle configuration, pour laquelle il est possible de rajouter de la masse en utilisant un matériau plus lourd (mais qui peut se révéler plus contraignant dans sa mise en forme et mise en œuvre qu'un matériau plus léger), mais aussi moins coûteux, deux études paramétriques sont présentées ici. Pour la première étude paramétrique, les mêmes matériaux sont conservés et seul le rayon de l'inclusion interne R_i est modifié (donc en gardant R_e constant) pour faire varier la masse volumique effective de l'inclusion.

Pour ce faire, différentes valeurs du rayon de l'inclusion interne R_i sont considérées. Les deux matériaux de l'inclusion sont choisis pour cette étude tels que, pour le matériau de la couche externe on a $E_e = 200$ GPa, $\nu_e = 0,2$ et $\rho_e = 7850$ kg/m³, et pour le matériau de la couche interne on a $E_i = 30$ GPa, $\nu_i = 0,3$ et $\rho_i = 2400$ kg/m³. Il s'agit en fait du matériau de l'inclusion du cas de référence défini précédemment (TABLEAU 3.1). Si le module de Young et le coefficient de Poisson diffèrent selon la proportion de chaque matériau, les études paramétriques précédentes ont montré une faible influence de ces deux paramètres sur la largeur et la position de la première bande de fréquence interdite, notamment lorsque l'inclusion est beaucoup plus rigide (plus de 100 fois) que la matrice. Les résultats sont présentés sur la FIGURE 3.23. Les courbes de dispersion représentées sont très similaires et l'influence de la taille de l'inclusion n'est pas très marquée. Pour observer cette influence, la FIGURE 3.24a présente l'évolution de la position et de la largeur de la bande de fréquence interdite en fonction du rapport entre la masse volumique effective de l'inclusion composite ρ_{eff} et de celle de la matrice ρ_m . Comme $\rho_e > \rho_i$, ρ_{eff} augmente lorsque le rapport $\frac{R_i}{R_e}$ diminue. Une légère augmentation de la largeur de la bande de fréquence est alors visible. En comparaison avec la FIGURE 3.21, l'évolution de la bande de fréquence est plus faible mais permet d'obtenir une bande de fréquence plus large pour des valeurs de la masse volumique effective équivalentes tout en diminuant légèrement les fréquences d'apparition des bandes de fréquences interdites.

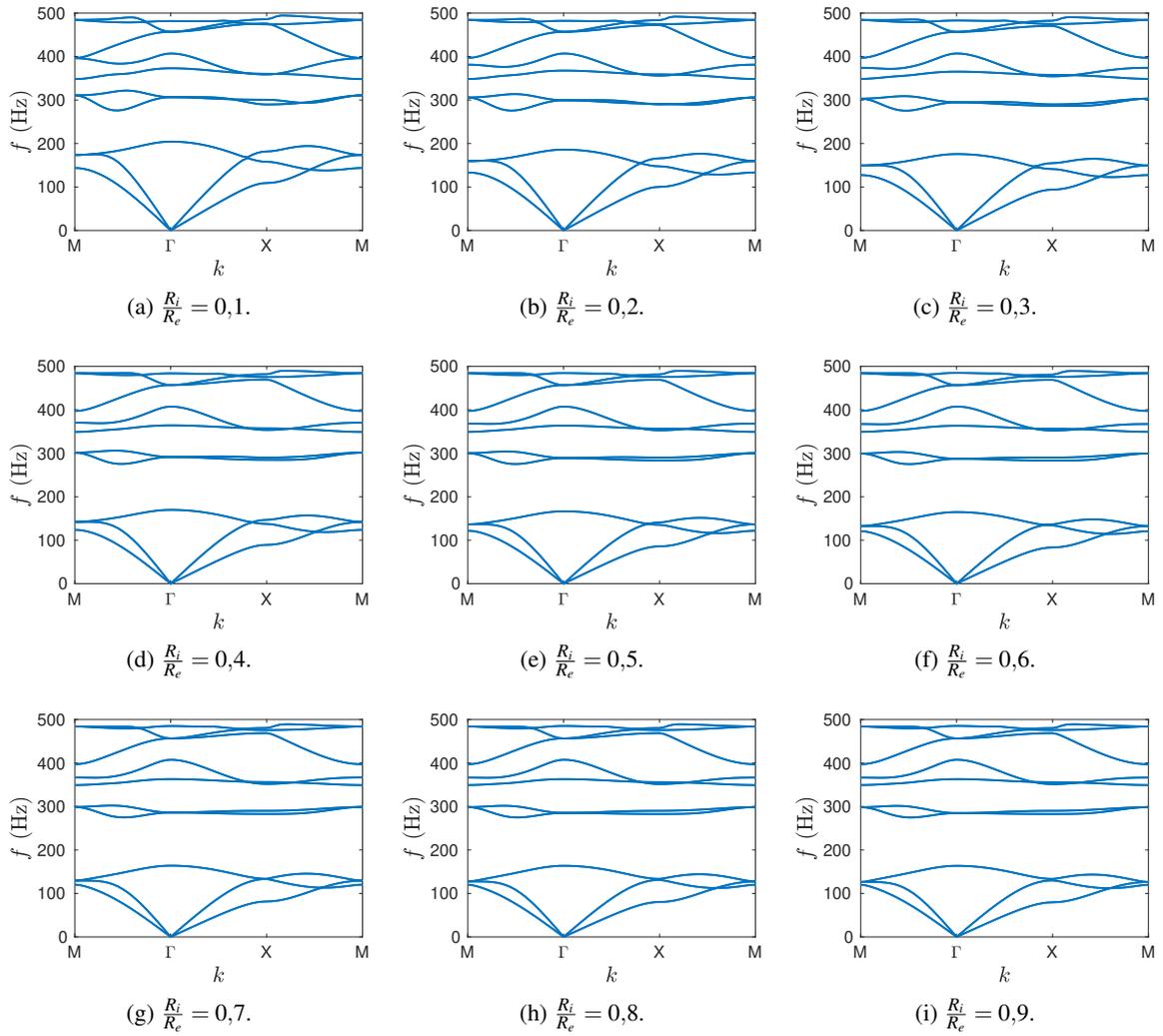


FIGURE 3.23 – Courbes de dispersion d’une cellule avec une inclusion composite avec un matériau externe plus dense que le matériau interne.

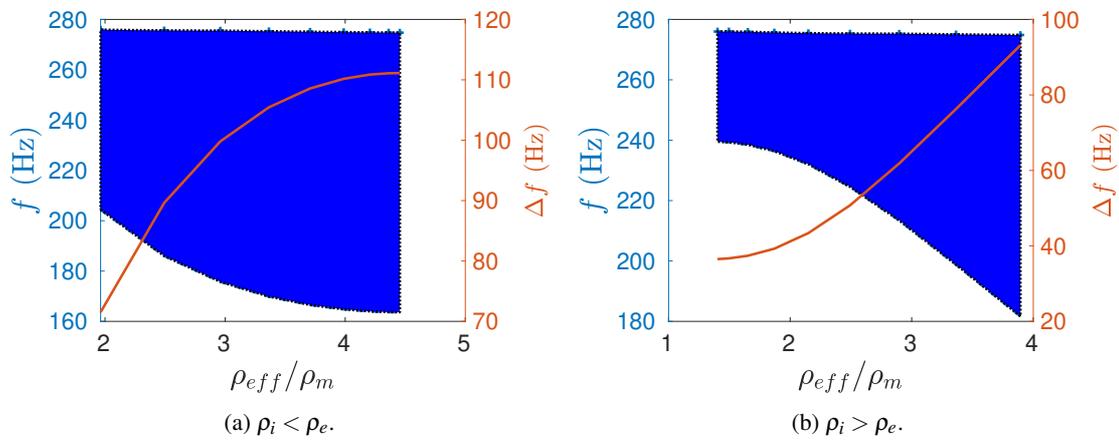


FIGURE 3.24 – Évolution de la position (en bleu) et de la largeur (en rouge) de la première bande de fréquence interdite en fonction de la masse volumique effective de l’inclusion ρ_{eff} .

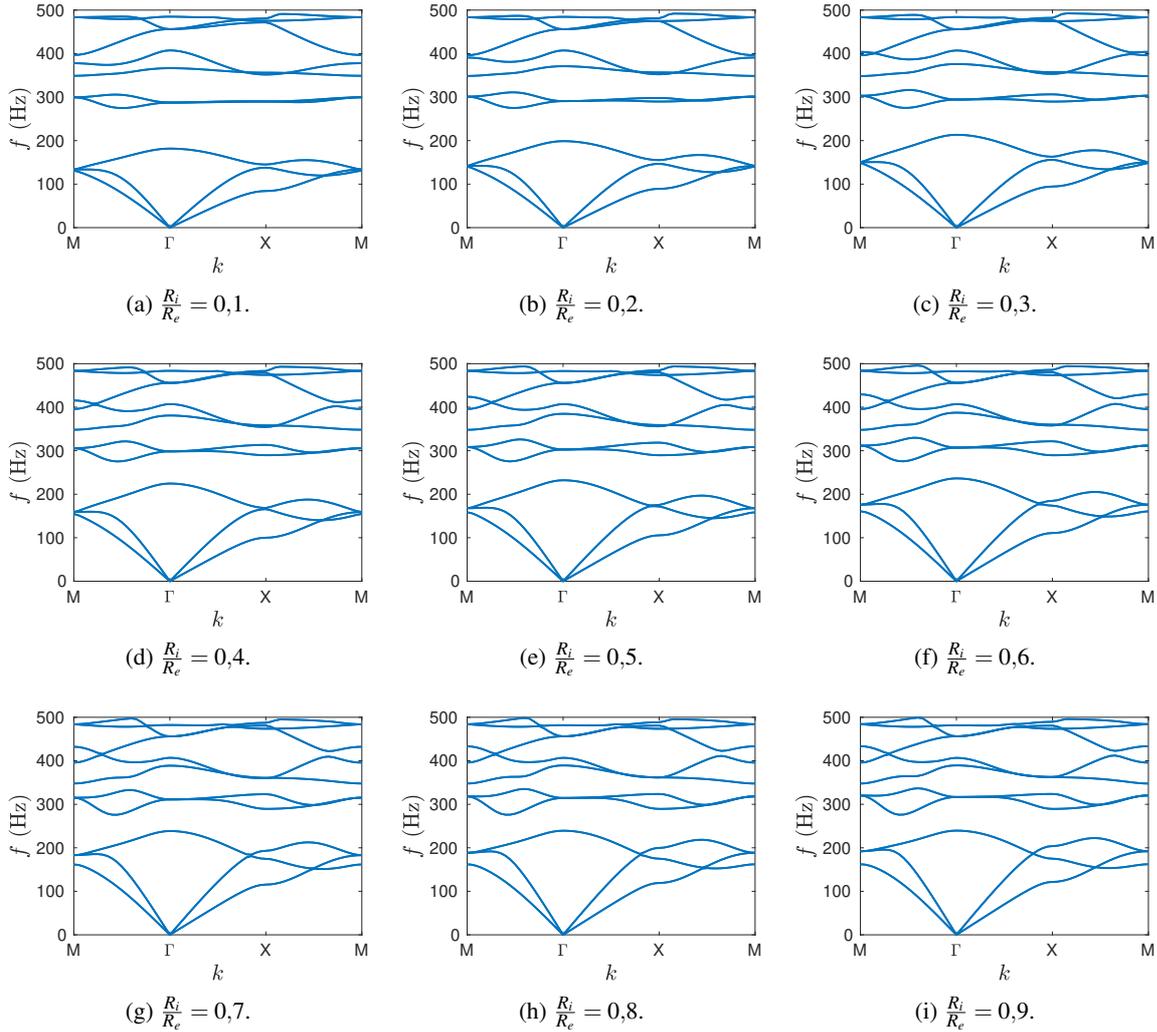


FIGURE 3.25 – Courbes de dispersion d’une cellule avec une inclusion composite avec un matériau interne plus dense que le matériau externe.

L’ordre des couches dans la réalisation a une influence sur le comportement de la cellule élémentaire, et donc du milieu périodique. La deuxième étude paramétrique est donc réalisée. C’est la même que la première mais en intervertissant les matériaux interne et externe de l’inclusion. Pour cette étude, le matériau à l’intérieur est alors plus dense que celui à l’extérieur. Ainsi, plus R_i augmente plus la masse volumique effective de l’inclusion augmente. Les courbes de dispersion obtenues pour un milieu infini avec la théorie de Floquet-Bloch sont présentés sur la FIGURE 3.25. Les courbes de dispersion dévoilent que lorsque R_i augmente, l’épaisseur des courbes de dispersion diminue, ce qui est cohérent avec les conclusions précédentes.

La FIGURE 3.24b présente l’évolution de la première bande de fréquence interdite en fonction du rapport entre la masse volumique effective de l’inclusion ρ_{eff} et celle de la matrice ρ_m . Pour des masses volumiques similaires (mais aussi le module de Young effectif et le coefficient de Poisson effectif), les bandes de fréquences interdites diffèrent entre ce cas et le cas où $\rho_i > \rho_e$. Cette différence met en avant le fait que le phénomène de résonance locale modifie le comportement du matériau par rapport à un modèle homogène. Les résultats obtenus pour la valeur maximale de ρ_{eff} dans cette configuration permettent d’obtenir des performances similaires à celles de la configuration avec $\rho_i > \rho_e$ mais pour une masse volumique effective plus petite. Enfin, alors qu’avec la configuration précédente, la largeur de la première bande de fréquence interdite

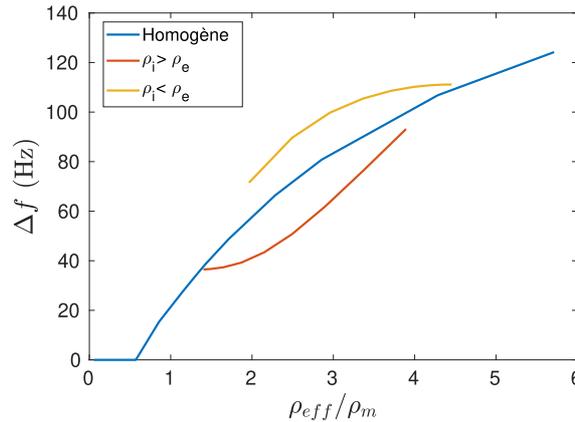


FIGURE 3.26 – Évolution de la largeur de la bande de fréquence interdite en fonction de la masse volumique effective pour trois cas : homogène, inclusion composite avec $\rho_i > \rho_e$ et inclusion composite avec $\rho_i < \rho_e$.

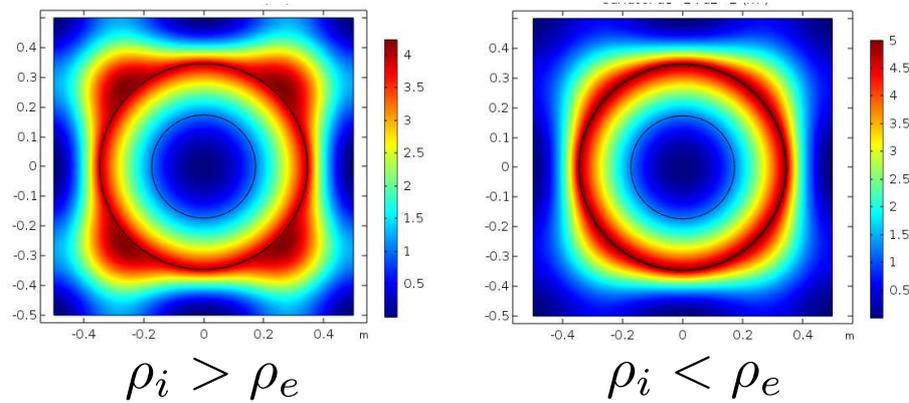


FIGURE 3.27 – Représentation de la norme du déplacement pour le troisième mode pour \mathbf{k} au niveau de Γ dans les deux configurations étudiées.

semble tendre vers une valeur limite, la tendance est à la hausse dans le cas $\rho_i > \rho_e$ pour la valeur maximale.

La comparaison entre l'évolution de la largeur des bandes de fréquence interdite (FIGURE 3.26) illustre le fait qu'il existe des domaines d'utilisation pour chacune des trois configurations étudiées (inclusion homogène, inclusion composite avec $\rho_i < \rho_e$ et avec $\rho_i > \rho_e$). Ainsi, selon les performances en termes de largeur et de position souhaitées, il peut être utile d'utiliser l'une ou l'autre des configurations. Le cas homogène possède l'avantage de n'utiliser qu'un seul matériau. Celui avec $\rho_i > \rho_e$ semble moins performant à masse volumique effective égale. Ces matériaux doivent donc être étudiés pour permettre d'améliorer les performances des métamatériaux sismiques (et pouvoir viser des bandes de fréquence interdites à basse fréquence).

De plus, même si leur influence n'est pas utilisée ici, la présence d'un matériau présentant de l'amortissement peut probablement encore améliorer les performances de tels matériaux. Ainsi la dissipation d'énergie dans ce matériau peut permettre de limiter aussi la propagation des ondes. Les modes ne sont en effet pas très différents entre les deux configurations, à l'image de ceux représentés sur la FIGURE 3.27 pour $R_i = \frac{R_e}{2}$. Ainsi, une première piste du comportement de ces matériaux localement résonants est illustré sur la FIGURE 3.27 avec la concentration des déplacements dans la couronne externe de l'inclusion. L'analyse des modes évanescent obtenus par la résolution du problème quadratique $\mathbf{k}(\omega)$ (pour ω à l'intérieur des bandes de fréquence) peut permettre de mieux comprendre les mécanismes dans ce type de cellules.

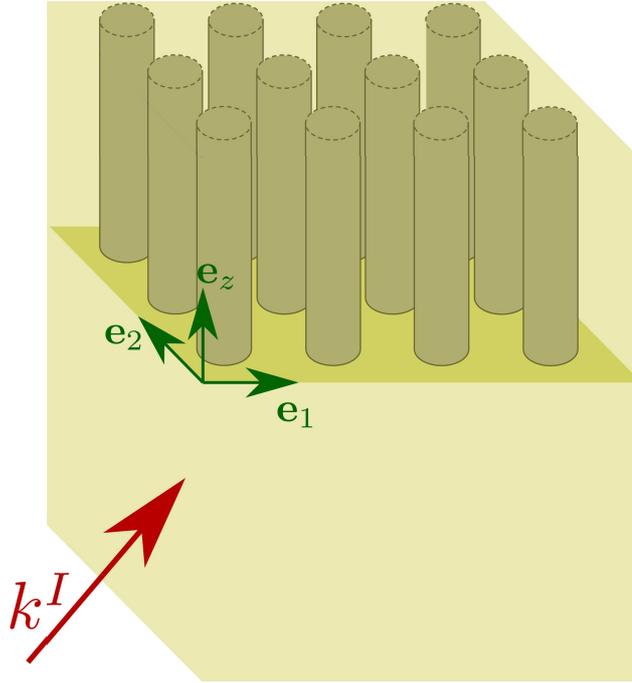


FIGURE 3.28 – Propagation d’une onde se propageant d’un demi-espace homogène vers un demi-espace périodique comportant des inclusions circulaires. Seule l’onde incidente est représentée ici, les différentes ondes diffractées par le motif sont déterminées ensuite.

3.5 Extension des lois d’interface à un milieu acoustique 3D

La configuration finale à étudier est une configuration 3D, et l’approche développé dans le CHAPITRE 2 est étendue au cas 3D : chacun des milieux périodiques est étudié séparément en calculant leurs modes de Bloch avant d’écrire les conditions de raccord sur l’interface en projetant la solution sur ces modes.

3.5.1 Description de l’étude à l’interface

Le comportement d’onde provenant du sous-sol considéré comme homogène arrivant sur une interface avec un milieu périodique avec une périodicité 2D comme représenté sur la FIGURE 3.28 est étudié. On conserve le modèle d’une onde scalaire dont le comportement est donné par l’équation suivante :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mu \nabla_{\mathbf{x}} u) = -\rho \omega^2 u. \quad (3.25)$$

On considère l’interface entre deux demi-espaces infinis dans les deux directions horizontales \mathbf{e}_α ($\alpha = 1, 2$). Dans la direction \mathbf{e}_z , on effectue une transformée de Fourier définie par :

$$\hat{u}(x_1, x_2; k_z) = \int_{\mathbb{R}} u(x_1, x_2, z) e^{-ik_z z} dz. \quad (3.26)$$

Cela permet de n’étudier que l’interface :

$$\nabla_\alpha \cdot (\mu \nabla_\alpha \hat{u}) - k_z^2 \mu \hat{u} = -\rho \omega^2 \hat{u} \quad (3.27)$$

où $\nabla_\alpha \cdot$ désigne l’opérateur de dérivation dans les directions de périodicité \mathbf{e}_α et \hat{u} est la transformée de Fourier du champ de déplacement u dans la direction \mathbf{e}_z . Comme effectué dans le CHAPITRE 2, les modes

de Bloch sont calculés dans chaque espace supposé infini. Contrairement au CHAPITRE 2, on considère ici le cas d'un milieu avec les propriétés des matériau qui varient périodiquement dans le plan ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$) et restent invariantes dans la direction \mathbf{e}_z . Par conséquent, le vecteur d'onde de Bloch à utiliser pour la transformée de Bloch est le suivant :

$$\mathbf{k} = k_1 \mathbf{e}_1 + k_2 \mathbf{e}_2. \quad (3.28)$$

La transformée de l'EQ.3.27 dans le domaine de Floquet-Bloch s'écrit :

$$(\nabla_\alpha + i\mathbf{k}) \cdot [\mu (\nabla_\alpha + i\mathbf{k}) u^B] - k_z^2 \mu u^B = -\rho \omega^2 u^B \quad (3.29)$$

avec la transformée de Bloch s'écrivant :

$$u^B(x_1, x_2; k_z, k) = \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2} \widehat{u}(x_1 + n_1 c, x_2 + n_2 c; k_z) e^{-i[k_1(x_1 + n_1 c) + k_2(x_2 + n_2 c)]}. \quad (3.30)$$

3.5.2 Vérification de l'orthogonalité des modes

Un milieu périodique dans le plan ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$) et invariant dans la direction \mathbf{e}_z est modélisé par une représentation 2D suivant les directions de périodicité \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 , on note Ω_α cette surface 2D. Les modes de Bloch d'un tel milieu sont calculés en résolvant l'EQ.3.29. Les neuf premiers modes de la cellule élémentaire 2D du milieu homogène sont calculés et représentés sur la FIGURE 3.29 pour $k_1 = \frac{\pi}{3c}$ et $k_2 = 0 \text{ m}^{-1}$. De la même façon, sur la FIGURE 3.30, les neuf premiers modes du milieu périodique sont représentés pour $k_1 = \frac{\pi}{3c}$ et $k_2 = 0 \text{ m}^{-1}$. Comme pour les résultats obtenus avec dans le cas 2D présenté dans le CHAPITRE 2, dont la cellule élémentaire est 1D, certains modes sont multiples. Dans ce cas, le choix du nombre de modes calculés et utilisés pour le traitement des conditions à l'interface est important.

Des surfaces de dispersion peuvent être obtenues numériquement en résolvant $k_z(\mathbf{k}, \omega)$ mais les illustrations sont difficiles à lire. La FIGURE 3.31 représente une coupe de ces surfaces à $k_z = 0 \text{ m}^{-1}$ pour le milieu homogène et le milieu périodique. Dans le cas du milieu périodique, les résultats obtenus dans le CHAPITRE 2 (FIGURE 2.17) sont retrouvés, même si des différences apparaissent notamment à cause de la gestion numérique de l'interface entre la matrice et l'inclusion. En effet, alors que les résultats obtenus dans le CHAPITRE 2 sont avec les propriétés de matériaux discontinues, les résultats obtenus avec cette approche utilisent une fonction continue pour lisser ces discontinuités.

Des coupes de ces mêmes surfaces de dispersion pour $k_z = 2 \text{ m}^{-1}$ sont tracées sur la FIGURE 3.32. Le comportement obtenu précédemment est alors retrouvé avec notamment une coupure des basses fréquences lorsque la valeur de k_z augmente, et donc lorsque l'angle de propagation dans le milieu par rapport à la direction infinie du milieu périodique augmente.

Comme précédemment, on vérifie l'orthogonalité des modes afin de projeter la solution sur les différents modes de Bloch calculés. On pose u et w le champ de déplacement dans le domaine de Floquet-Bloch et la fonction test associée vérifiant l'EQ.3.29. La formulation faible s'écrit :

$$\int_{\Omega_\alpha} (\nabla_\alpha + i\mathbf{k}) \cdot [\mu (\nabla_\alpha + i\mathbf{k}) u] w^* d\Omega_\alpha + \int_{\Omega_\alpha} \rho \omega^2 u w^* d\Omega_\alpha = k_z^2 \int_{\Omega_\alpha} \mu u w^* d\Omega_\alpha \quad (3.31)$$

Proposition 2 *Les modes de Bloch de chaque demi-espace sont orthogonaux entre eux.*

DÉMONSTRATION: Soit $u = u_a$ et $u = u_b$ deux modes de Bloch associés aux valeurs propres $k_{z,a}$ et $k_{z,a}$.

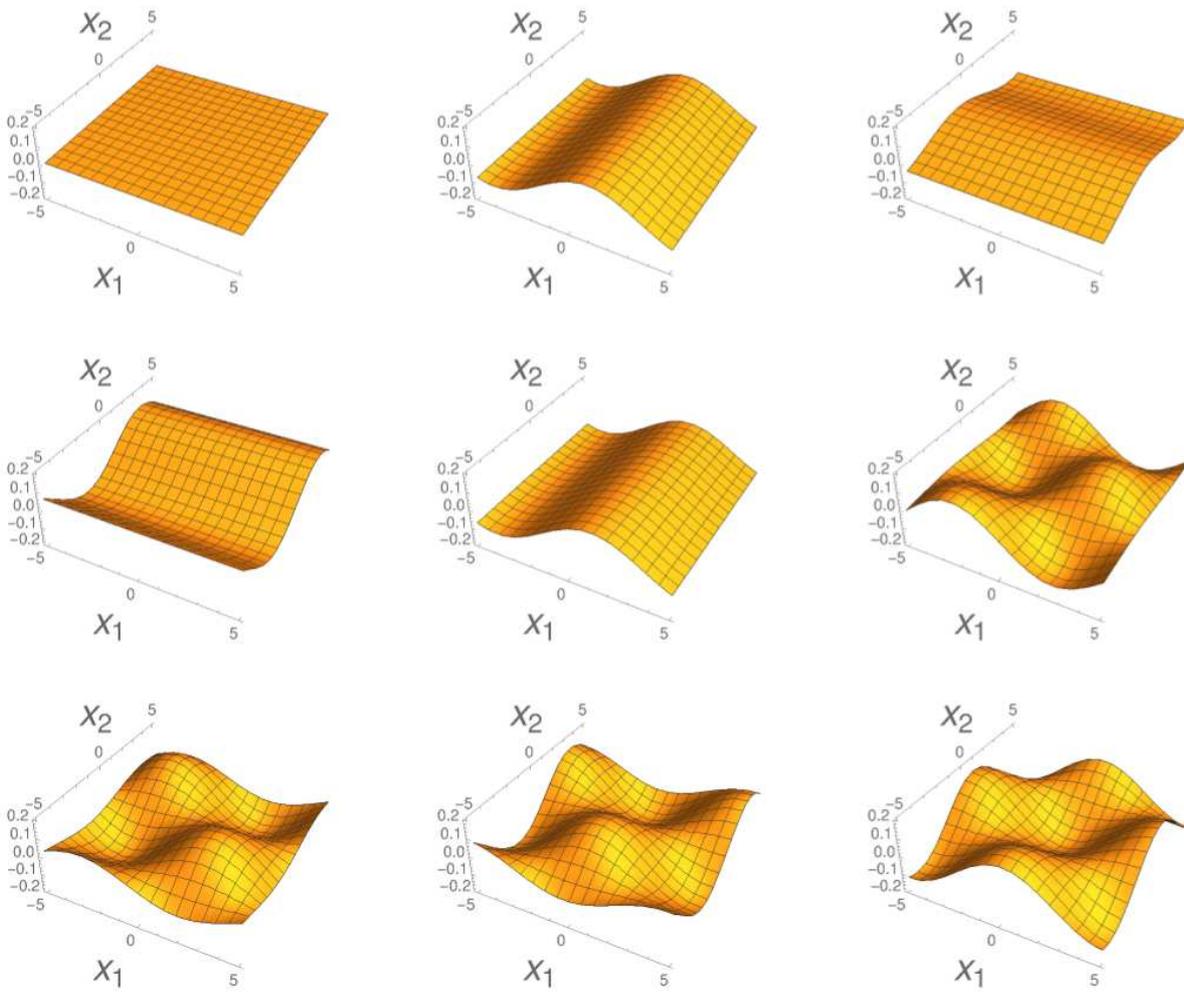


FIGURE 3.29 – 9 premiers modes de Bloch de la cellule homogène obtenus pour $k_1 = \frac{\pi}{3c}$ et $k_2 = 0 \text{ m}^{-1}$.

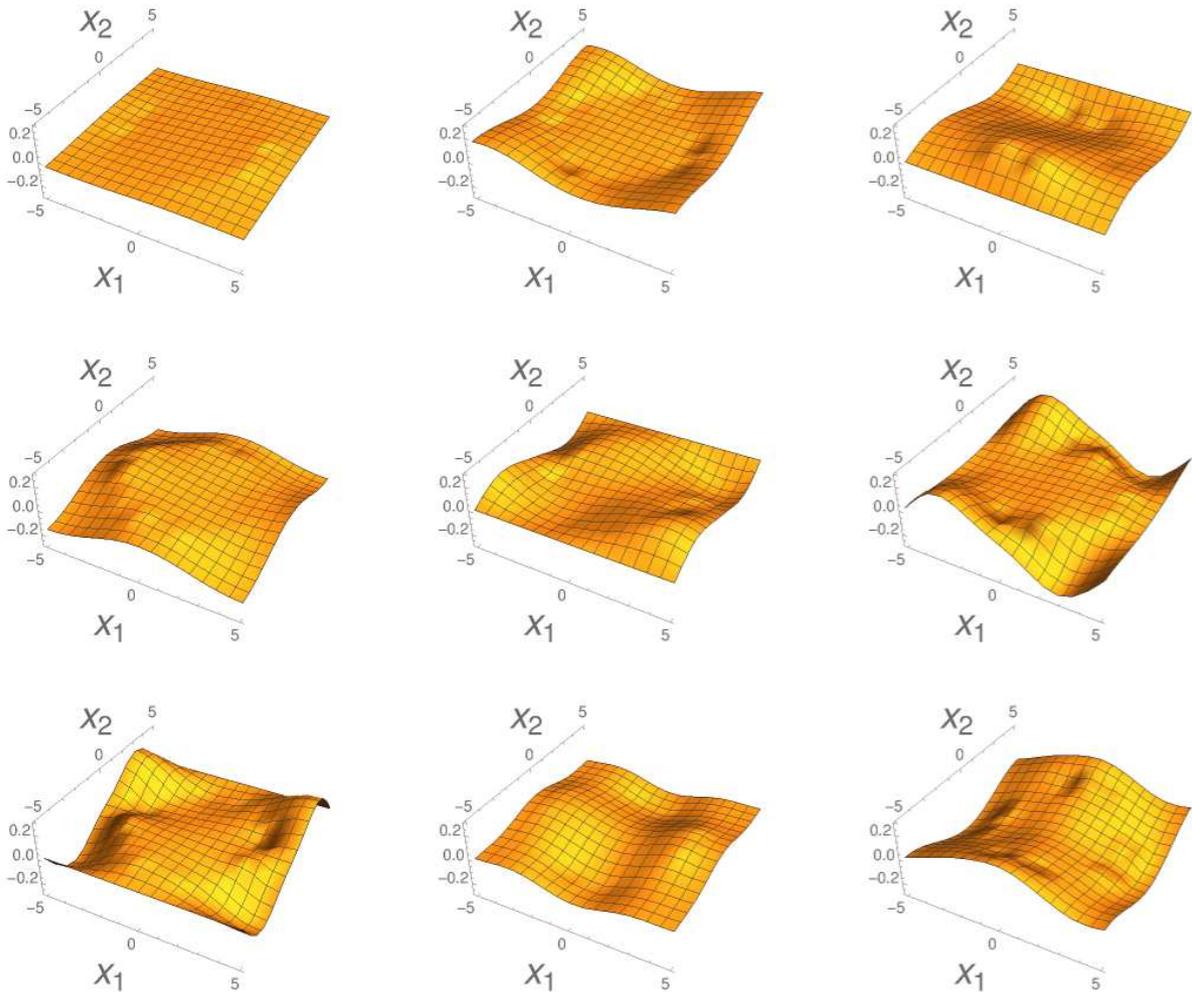


FIGURE 3.30 – 9 premiers modes de Bloch de la cellule périodique comportant une inclusion circulaire pour $k_1 = \frac{\pi}{3c}$ et $k_2 = 0\text{m}^{-1}$.

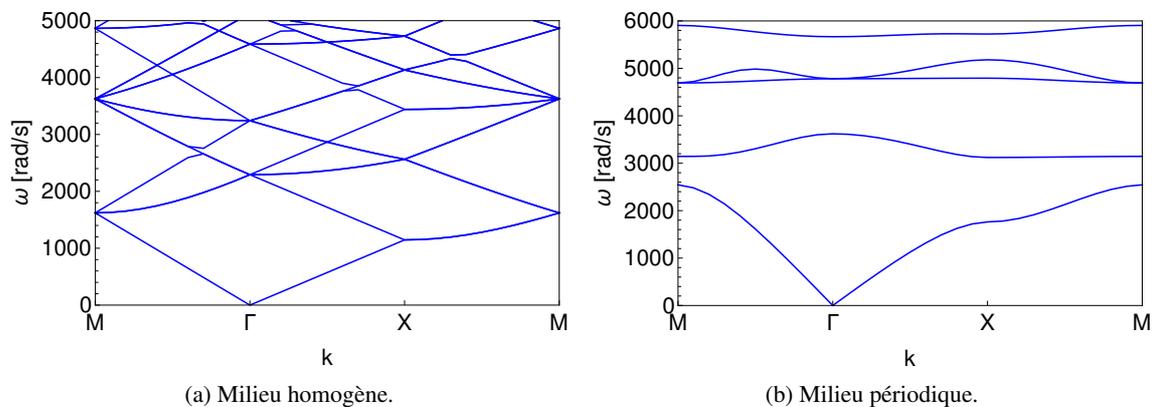


FIGURE 3.31 – Courbes de dispersion $\omega(\mathbf{k})$ d'une cellule élémentaire homogène (à gauche) et d'une cellule périodique (à droite) pour $k_z = 0\text{m}^{-1}$.

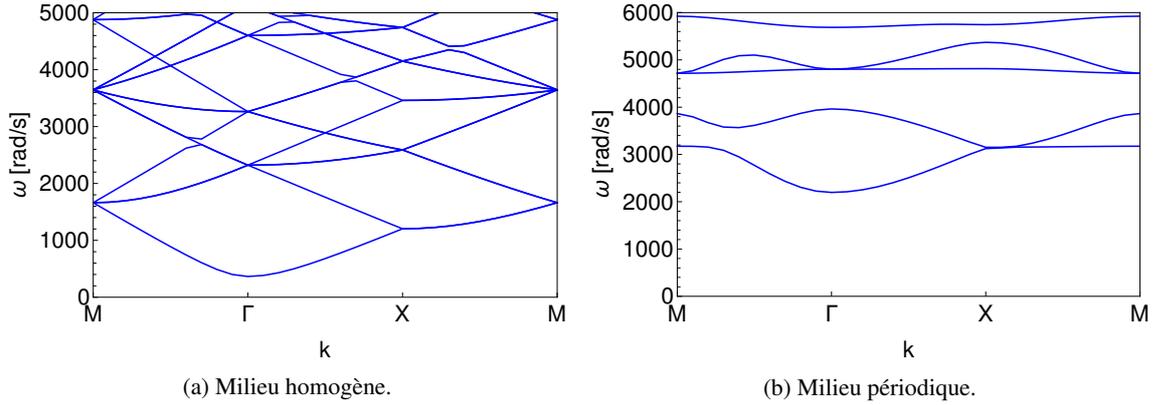


FIGURE 3.32 – Courbes de dispersion $\omega(\mathbf{k})$ d'une cellule élémentaire homogène (à gauche) et d'une cellule périodique (à droite) pour $k_z = 1 \text{ m}^{-1}$.

L'EQ.3.31 devient alors :

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega_\alpha} \mu \nabla_\alpha u_a \nabla_\alpha u_b^* d\Omega_\alpha + i\mathbf{k} \int_{\Omega_\alpha} [\nabla_\alpha (\mu u_a) + \mu \nabla_\alpha u_a] u_b^* d\Omega_\alpha \\
 + \int_{\Omega_\alpha} (\rho \omega^2 - \mu \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) u_a u_b^* d\Omega_\alpha = k_{z,a}^2 \int_{\Omega_\alpha} \mu u_a u_b^* d\Omega_\alpha
 \end{aligned} \quad (3.32)$$

puis en échangeant les rôles de u_a et u_b puis en prenant le conjugué de l'EQ.3.32, la formulation suivante est obtenue :

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega_\alpha} \mu \nabla_\alpha u_a \nabla_\alpha u_b^* d\Omega_\alpha - i\mathbf{k} \int_{\Omega_\alpha} [\nabla_\alpha (\mu u_b^*) + \mu \nabla_\alpha u_b^*] u_a d\Omega_\alpha \\
 + \int_{\Omega_\alpha} (\rho \omega^2 - \mu \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) u_a u_b^* d\Omega_\alpha = k_{z,a}^2 \int_{\Omega_\alpha} \mu u_a u_b^* d\Omega_\alpha
 \end{aligned} \quad (3.33)$$

La différence des deux équations précédentes (EQ.3.32 et EQ.3.33) donne :

$$2i\mathbf{k} \int_{\Omega_\alpha} \nabla_\alpha (\mu u_a u_b^*) d\Omega_\alpha = (k_{z,a}^2 - k_{z,b}^2) \int_{\Omega_\alpha} \mu u_a u_b^* d\Omega_\alpha \quad (3.34)$$

La périodicité implique que :

$$\int_{\Omega_\alpha} \nabla_\alpha (\mu u_a u_b^*) d\Omega_\alpha = 0 \quad (3.35a)$$

Ainsi :

$$(k_{z,a}^2 - k_{z,b}^2) \int_{\Omega_\alpha} \mu u_a u_b^* d\Omega_\alpha = 0 \quad (3.36)$$

Soit $b = a$:

$$k_{z,a}^2 = k_{z,a}^{*2} \quad (3.37)$$

Donc :

$$k_{z,a} \in \mathbb{R} \quad (3.38)$$

Soit $b \neq a$:

$$\int_{\Omega_\alpha} \mu u_a u_b^* d\Omega_\alpha = 0 \quad (3.39)$$

Donc les modes de Bloch sont orthogonaux dans un même demi-espace. \square

Comme pour le cas élastodynamique, si les résultats obtenus peuvent être implémentés d'un point de vue numérique, les résultats ne sont pas présentés ici. Cependant, les équations de raccordement sont obtenus en reprenant l'idée développée dans le CHAPITRE 2.

3.5.3 Projection des modes

L'écriture des conditions aux limites entre les deux milieux (FIGURE 2.7) consiste à écrire au niveau de la frontière l'égalité du déplacement et du flux. Une onde de la forme :

$$u^{inc} = e^{i(k_{x_1}^{inc} x_1 + k_{x_2}^{inc} x_2 + k_z^{inc} z)} \quad (3.40)$$

est choisie comme onde incidente. Les équations de continuité du déplacement et du flux à l'interface entre les deux milieux considérés s'écrivent (EQ.3.41).

$$u^{inc}(x_1, x_2, 0) + u^R(x_1, x_2, 0) = u^T(x_1, x_2, 0) \quad (3.41a)$$

$$\mu(x_1, x_2, 0^-) \frac{\partial u^{inc}}{\partial z}(x_1, x_2, 0^-) + \mu(x_1, x_2, 0^-) \frac{\partial u^R}{\partial z}(x_1, x_2, 0^-) = \mu(x_1, x_2, 0^+) \frac{\partial u^T}{\partial z}(x_1, x_2, 0^+) \quad (3.41b)$$

où les ondes réfléchies sont notées u^R et celles transmises u^T . Écrites comme une somme infinie sur la base des modes de Bloch, les ondes transmises et réfléchies sont formulées finalement comme suit, en appliquant une transformée inverse de Floquet-Bloch (EQ.1.26) avec \mathbf{k} évoluant sur la zone de Brillouin (et non le contour) :

$$u^R = c^2 \int_{\Omega^\alpha} \left(\sum_n \alpha_n^0 \phi_n^0(x_1, x_2; \mathbf{k}, k_{0z,n}) e^{-ik_{0z,n}z} \right) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k}, \quad (3.42a)$$

$$u^T = c^2 \int_{\Omega^\alpha} \left(\sum_n \alpha_n \phi_n(x_1, x_2; \mathbf{k}, k_{z,n}) e^{ik_{z,n}z} \right) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} \quad (3.42b)$$

où ϕ_n^0 et ϕ_n sont les modes de Bloch obtenus à ω fixé et pour lesquels \mathbf{k} évolue dans la zone de Brillouin. À chaque mode est associé une valeur propre correspondant à la projection du vecteur d'onde sur l'axe \mathbf{e}_z ($k_{0z,n}$ dans la cellule homogène et $k_{z,n}$ dans celle périodique).

Pour chaque \mathbf{k} , les coefficients de participation des modes de Floquet-Bloch α_n^0 et α_n dans la solution (EQS.3.42a et 3.42b) sont calculés en projetant la transformée de Bloch des équations de raccordement sur la base des modes de Bloch de la cellule stratifié :

$$a_m^{inc} + \sum_n \alpha_n^0 a_{nm}^0 = \sum_n \alpha_n a_{nm}, \quad (3.43a)$$

$$b_m^{inc} + \sum_n \alpha_n^0 b_{nm}^0 = \alpha_m b_m \quad (3.43b)$$

où les différents termes, issus de la projection des équations de continuité sur le mode m dans le demi-espace périodique, sont explicités par :

$$a_m^{inc} = \int_{\Omega^\alpha} e^{ik_x^{inc} x_1} \phi_m d\Omega_\alpha, \quad (3.44a)$$

$$b_m^{inc} = \mu_m k_z^{inc} \int_{\Omega^\alpha} e^{ik_x^{inc} x_1} \phi_m d\Omega_\alpha, \quad (3.44b)$$

$$a_{nm}^0 = \int_{\Omega^\alpha} \phi_n^0 \phi_m d\Omega_\alpha, \quad (3.44c)$$

$$b_{nm}^0 = \mu_m k_{0z,n} \int_{\Omega_\alpha} \phi_n^0 \phi_m \, d\Omega_\alpha, \quad (3.44d)$$

$$a_{nm} = \int_{\Omega_\alpha} \phi_n \phi_m \, d\Omega_\alpha, \quad (3.44e)$$

$$b_{nm} = k_{z,n} \int_{\Omega_\alpha} \mu(\mathbf{x}) \phi_n \phi_m \, d\Omega_\alpha. \quad (3.44f)$$

Les termes a_m^{inc} et b_m^{inc} concernent respectivement la projection de l'onde incidente et sa dérivée sur les modes du milieu périodique. Ceux de l'onde réfléchie dans le milieu homogène sont désignés par les termes a_{nm}^0 et b_{nm}^0 et ceux de l'onde transmise par a_m et b_m . Parce que les modes sont orthonormés dans un même demi-espace, b_{nm} sont nuls si $m \neq n$. Les autres termes n'ont *a priori* pas de raisons de l'être.

En pratique, la solution est tronquée aux projections sur les premiers modes de Bloch (ici $n_{max} = 9$). Les approximations \tilde{u}^R et \tilde{u}^T sont définies par :

$$\tilde{u}^R = c^2 \int_{\Omega_\alpha} \left(\sum_{n=1}^{n_{max}} \alpha_n^0 \phi_n^0(x_1, x_2; \mathbf{k}, k_{0z,n}) e^{-ik_{0z,n}z} \right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \, d\mathbf{k}, \quad (3.45a)$$

$$\tilde{u}^T = c^2 \int_{\Omega_\alpha} \left(\sum_{n=1}^{n_{max}} \alpha_n \phi_n(x_1, x_2; \mathbf{k}, k_{z,n}) e^{ik_{z,n}z} \right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \, d\mathbf{k}. \quad (3.45b)$$

avec Ω^α la zone de Brillouin liée à Ω_α , et permettant de repasser dans le domaine en entier à partir des modes de Bloch. Les résultats numériques ne sont pas présentés ici, car les simulations numériques sont coûteuses et ne permettent pas d'obtenir des résultats avec peu de modes étant donné qu'il existe un nombre important de modes de multiplicité strictement supérieure à un.

Conclusions

Les approches développées dans le cas des ondes acoustiques ont été étendues au cas des ondes élastodynamiques dans un milieu stratifié. Les bandes de fréquence interdites sont plus complexes à analyser dû au couplage entre les ondes de type P et de type SV.

La prise en compte d'une interface entre un demi-espace homogène et un demi-espace stratifié est testée d'un point de vue théorique. Si le couplage entre les composantes de l'onde ne permet pas de démontrer théoriquement le comportement des ondes à l'interface entre les demi-espaces, l'analyse des premiers modes de Bloch permet de montrer qu'il est possible de résoudre les équations si les modes sont orthogonaux.

Dans le cas du milieu périodique avec inclusions circulaires, donc avec une périodicité selon deux directions, une étude paramétrique sur les paramètres géométriques et les propriétés des matériaux de l'inclusion a été présentée. Elle a permis notamment de mettre en avant l'intérêt de jouer sur la masse des inclusions en vue d'une utilisation sismique. La poursuite de cette étude est effectuée avec des inclusions composites permettant d'analyser l'intérêt de la mise en œuvre d'inclusions localement résonantes.

Le cas des ondes acoustiques est enfin étendu au cas 3D avec une interface séparant un milieu homogène et un autre milieu périodique selon deux directions. L'ajout d'une nouvelle dimension ne modifie pas les développements théoriques obtenus dans le cas 2D. Cependant, comme pour le cas 3D, la multiplication des modes doubles implique que pour approximer correctement la solution, le nombre de modes à calculer doit être important. C'est pourquoi les résultats numériques n'ont pas été produits ici.

Chapitre 4

Modèle réduit de barrière sismique utilisant des inclusions périodiques

Un modèle réduit de protection parasismique, conçu en argile et comportant des inclusions vides et en béton, est étudié d'un point de vue expérimental, avant d'être comparé aux résultats obtenus en utilisant les outils théoriques et numériques précédemment introduits pour tester les limites des modèles utilisés. L'objectif est de souligner les similitudes entre les bandes de fréquence interdites prédites numériquement en utilisant :

- (i) la théorie de Floquet-Bloch pour le même milieu mais infini,*
- (ii) l'analyse modale utilisant des PML d'un guide d'onde avec la barrière constituée d'un nombre limité d'inclusions, et*
- (iii) le calcul numérique par éléments finis dans le domaine temporel*

et les bandes de fréquences atténuées obtenues expérimentalement sur ce modèle réduit.

En effet, pour contrôler l'efficacité de cette barrière dans des conditions de périodicité non-infinies vis-à-vis des prédictions obtenues avec la théorie de Floquet-Bloch à l'échelle de la cellule élémentaire, une étude expérimentale a été menée. Cette efficacité est déterminée en mesurant l'atténuation de l'amplitude due à la présence d'inclusions pour des signaux monochromatiques pour quelques bandes de fréquences. On compare donc les bandes de fréquence théoriquement obtenues avec les fonctions de transfert entre les résultats sur un bloc comportant des inclusions ou des trous et un bloc homogène. L'effet du contraste entre les propriétés du sol et des hétérogénéités est donc mis en évidence grâce à la présence de bandes de fréquence interdites.

Pour des applications en génie civil et au vu des dimensions mises en jeu, il est notamment primordial de limiter le nombre d'inclusions au minimum. Or l'approche analytique basée sur la théorie de Floquet-Bloch ne s'appliquant pas pour des milieux non-infinis, on compare aussi les résultats expérimentaux à l'analyse modale d'un guide d'onde ouvert comportant le même réseau d'inclusions que le métamatériau de sol testé. Cette approche permet de prendre en compte le caractère non-infini de la microstructure, et bien que non représentative de l'essai, il est possible de comparer les deux solutions.

Enfin, une simulation temporelle dans des conditions proches de celle de l'essai a été réalisée afin de fournir des résultats intermédiaires entre la réponse expérimentale et les solutions semi-analytiques et issues d'une analyse modale.

Sommaire

4.1	Réalisation du modèle réduit	100
4.1.1	Préparation de la matrice en kaolin	101
4.1.2	Réalisation des inclusions et paramètres géométriques	101
4.1.3	Propriétés des inclusions	103
4.1.4	Conditions de l'essai et instrumentation	105
4.1.5	Deux configurations expérimentales	106
4.1.6	Courbes de dispersion des milieux périodiques testés	106
4.2	Procédure de mesure et réponse du bloc homogène	109
4.2.1	Bruit de mesure	109
4.2.2	Présentation des résultats expérimentaux	109
4.2.3	Intercorrélation pour déterminer les propriétés du sol	109
4.2.4	Réponse du bloc non symétrique et résonance du bloc	111
4.3	Principales conséquences à l'ajout du milieu périodique	113
4.3.1	Présence d'ondes piégées à l'intérieur de la barrière	113
4.3.2	Modification de la réponse fréquentielle du bloc avec les hétérogénéités	113
4.3.3	Invisibilité du métamatériau	115
4.4	Modélisation modale de l'expérience	116
4.4.1	Géométrie de la réalisation expérimentale	116
4.4.2	Prise en compte d'inclusions supplémentaires au centre	117
4.5	Mise en évidence de bandes de fréquence filtrées sur des simulations temporelles	119

4.1 Réalisation du modèle réduit

Les modèles réduits sont très utilisés pour simuler des barrières ou des essais conçus pour le contrôle des ondes sismiques (Valensi et al., 2015; Pageot et al., 2017). En effet, le sol étant souvent hétérogène, il est assez difficile de comparer ensuite les résultats numériques aux données obtenues *in situ*. La méconnaissance du sol et de ses hétérogénéités demande de grandes ressources pour être étudiées.

Plusieurs types d'essais permettent de prendre en compte les effets d'échelle. L'un des problèmes majeurs de ces essais consiste à prendre en compte les conditions limites de l'essai et donc la réflexion des ondes dans le traitement des résultats.

Si les essais utilisant une centrifugeuse permettent de s'affranchir des effets d'échelle, il est néanmoins possible d'analyser les résultats obtenus avec un modèle réduit seul. Pour un rapport en fréquence N donné, l'équivalence pour une loi de comportement linéaire consiste à diviser le temps et les distances par un facteur N .

Dans ce cas, et contrairement aux travaux sur les appareils centrifuges (Caicedo Hormaza and Thorel, 2014), il n'y a pas de modification de la gravité.

Ainsi, si les matériaux peuvent être considérés comme homogènes, on peut alors réduire les dimensions sans perdre le sens physique de l'essai. On utilise une matrice en argile et des inclusions de plusieurs types afin de tester l'intérêt d'inclusions périodiques pour protéger une zone.

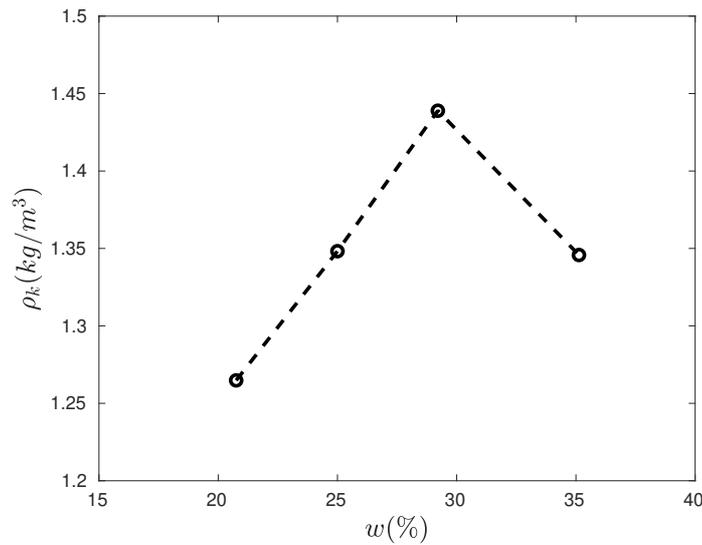


FIGURE 4.1 – Courbe Proctor ($\rho_k(w)$) du kaolin utilisé pour le bloc de sol mettant en évidence l’existence d’un maximum.

4.1.1 Préparation de la matrice en kaolin

En utilisant un modèle réduit, les propriétés du sol sont mieux contrôlées que dans un essai *in situ*. Le bloc de sol étudié est constitué de kaolin hydraté et compacté. Les kaolins sont des argiles blanches, donc des sols très fins, ce qui est en accord avec l’hypothèse d’homogénéité, et permet en plus de prendre en compte la réduction de l’échelle du modèle (ratio entre la taille des grains et la taille du modèle). La teneur en eau w du sol a été choisie autour de l’optimum Proctor du sol pour réduire l’amortissement. On rappelle que la teneur en eau est définie comme le ratio de la masse de la phase aqueuse (ici l’eau) et de la phase solide sèche défini par l’EQ.4.1 et que l’optimum Proctor correspond au maximum de la valeur de densité atteignable en fonction de w :

$$w = \frac{m_{eau}}{m_{kaolin}}. \quad (4.1)$$

La FIGURE 4.1, basée sur les travaux de Murillo Feo (2006) et Murillo et al. (2013) sur le même matériau représente l’évolution de la densité en fonction de la teneur en eau. On observe donc un maximum de la densité autour de $w_{opt} = 29\%$. En pratique après mesures, la teneur en eau mesurée dans le bloc de sol est autour de $w = 27\%$. Après avoir été hydraté, le kaolin est ensuite tamisé avec un tamis de 4 mm pour réduire les hétérogénéités dues à l’ajout d’eau sur l’argile.

L’échantillon considéré a pour dimension $300 \times 300 \times 250 \text{ mm}^3$ (FIGURE 4.2). Pour l’obtenir, le kaolin précédemment hydraté est compacté en trois couches successives dans le sens de sa hauteur jusqu’à une contrainte de 1,1 MPa, soit une charge de 100 kN, en utilisant une presse hydraulique représentée sur la FIGURE 4.3b. Le sol ainsi obtenu a une densité $\rho_m = 1750 \text{ kg}/\text{m}^3$. Son module d’élasticité est $E_m = 233 \text{ MPa}$. Cette valeur est déterminée en utilisant la corrélation entre deux signaux à différents points de mesure. Le coefficient de Poisson ν_m est choisi égal à 0,25 (Murillo Feo, 2006).

4.1.2 Réalisation des inclusions et paramètres géométriques

En utilisant ce modèle réduit, le but est de tester l’efficacité d’un milieu périodique pour protéger une zone d’une onde incidente. Des trous cylindriques vides et des inclusions cylindriques en béton de la même

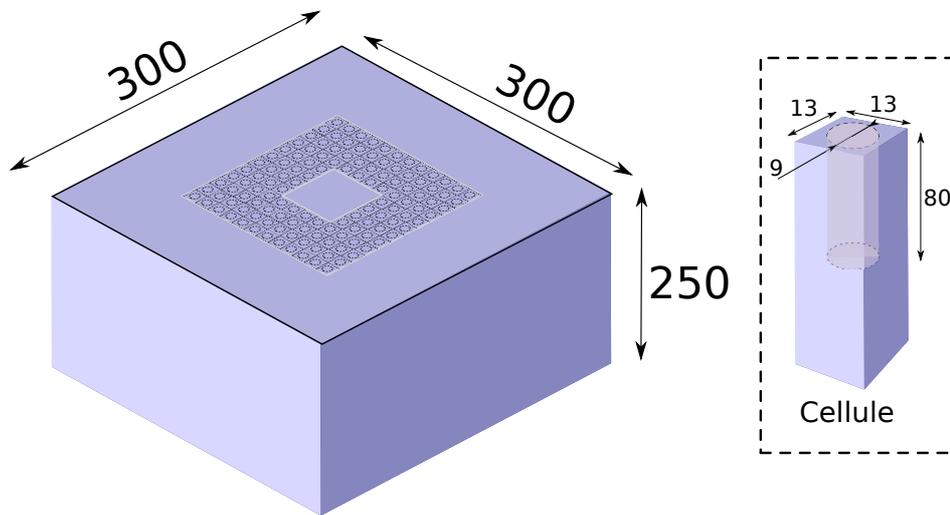
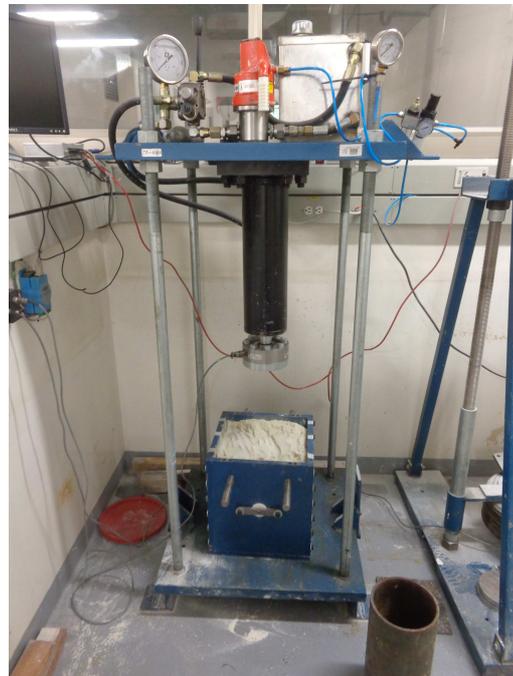


FIGURE 4.2 – Géométrie de l'essai physique et de la cellule élémentaire choisie. Les dimensions sont affichées en mm.



(a) Malaxeur et pulvérisateur permettant de mélanger le kaolin et l'eau afin d'obtenir la teneur en eau souhaitée.



(b) Presse hydraulique permettant de compacter le bloc de kaolin. L'effort est appliqué en ajoutant une plaque rigide non visible ici.

FIGURE 4.3 – Étapes de préparation de l'échantillon et matériel utilisé.

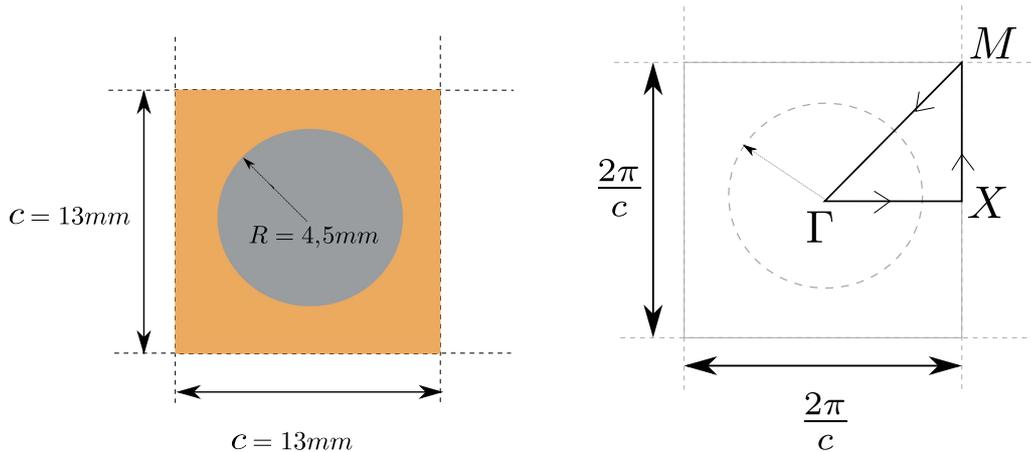


FIGURE 4.4 – Cellule primitive (gauche) et la zone de Brillouin correspondante (droite).

taille sont testés. [Dudchenko \(2018\)](#) présente des études numériques sur des modèles utilisant des géométries (notamment avec une zone au milieu) et des matériaux similaires. Le même bloc de sol est étudié pour chaque configuration pour assurer les mêmes conditions limites. Le premier essai est réalisé sur le bloc de sol homogène, puis des trous sont percés selon une grille périodique sur le plan horizontal à l'aide d'un foret de diamètre $\phi = 8\text{mm}$. Les trous ont une profondeur de 8 cm. La cellule primitive est conçue selon un réseau 2D carré de dimensions $c \times c = 13 \times 13\text{mm}^2$. Elle est représentée sur la FIGURE 4.4. Ensuite, les trous ont été remplis de coulis de ciment (mélange d'eau et de ciment). Donc, deux types d'hétérogénéités périodiques ont été testés, des trous vides et des inclusions en mortier.

Pour réaliser les essais, deux types d'hétérogénéités périodiques ont été utilisées comme décrit plus haut, des trous vides et des inclusions en coulis de ciment (mélange d'eau et de ciment). Les trous étant réalisés à la main, ce diamètre est le minimum (la plupart font plus), donc le rayon de l'inclusion est pris pour les simulations numériques à $R = 4,5\text{mm}$. Il y a donc des incertitudes sur leur diamètre et sur leur position. Les inclusions en coulis de ciment sont coulées en place dans les trous préalablement percés. Grâce à ce procédé, on assure un meilleur contact entre la matrice de kaolin et l'inclusion en mortier d'une part, et d'autre part, on évite de faire entrer une inclusion déjà fabriquée en force, qui risquerait de faire fissurer l'éprouvette. Une adhésion quasi-parfaite entre la matrice et l'inclusion peut donc être obtenue sans modification locale des propriétés du kaolin. Le ciment utilisé est un ciment à prise rapide. Les essais ont été effectués six jours après le coulage des inclusions. Pendant ce temps l'éprouvette a été conservée enroulée dans du film plastique afin de préserver la teneur en eau du kaolin.

4.1.3 Propriétés des inclusions

Afin de déterminer les propriétés du coulis de ciment, des essais de compression ont été réalisés sur des éprouvettes coulées en même temps que le matériau. Ces essais ont été pilotés en déplacement sur une machine électromécanique. Les déformations sont mesurées avec le déplacement de la traverse (qui se déplace à la vitesse de 0,3 mm/min). Le diamètre des éprouvettes est de 16 mm et la hauteur est comprise entre 39 mm et 42 mm. Avant l'essai, les éprouvettes sont surfacées (FIGURE 4.5) pour éviter une répartition hétérogène des contacts sur les surfaces d'application des efforts. Les résultats sont présentés sur la FIGURE 4.6 pour les quatre différentes éprouvettes. Les modules de Young mesurés ainsi sont compris entre 8,20 GPa et 11,84 GPa. Cette grande dispersion des résultats provient du jeune âge du béton. De même, il existe une grande variabilité des contraintes à rupture du matériau. Pour les études analytiques et numériques, le module



FIGURE 4.5 – Éprouvette de compression du coulis de ciment utilisé pour remplir les inclusions (vue après rupture).

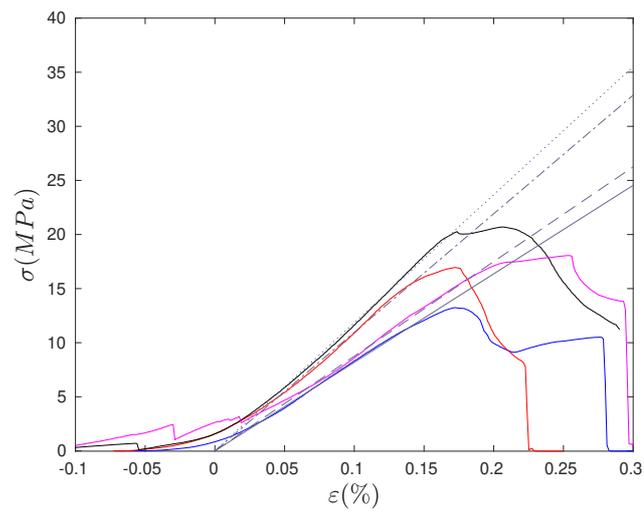


FIGURE 4.6 – Courbes de compression obtenues sur quatre éprouvettes de ciment hydraté permettant de caractériser le matériau utilisé pour les inclusions.

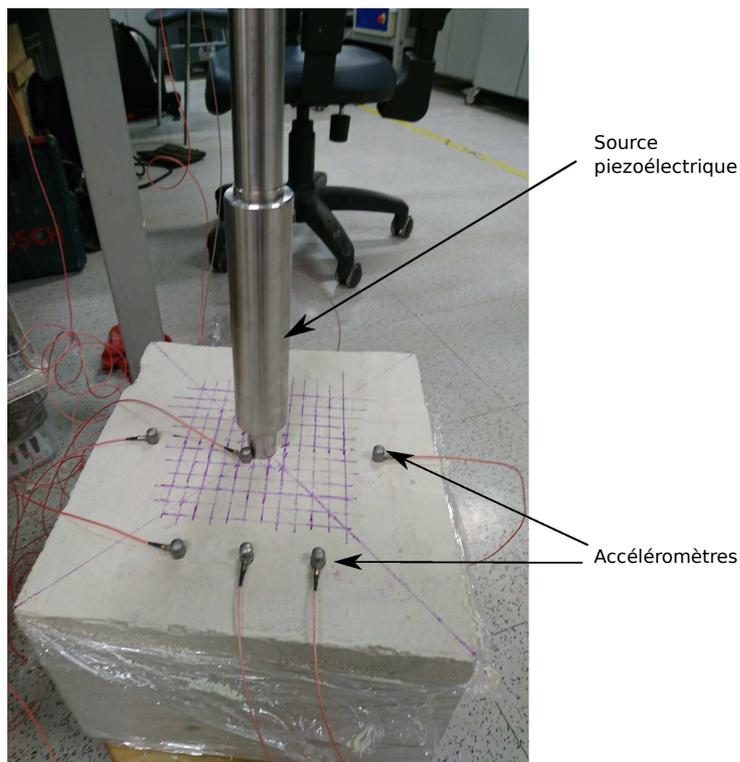


FIGURE 4.7 – Échantillon homogène comportant les différents capteurs (accéléromètres verticaux) et la source piézoélectrique.

de Young du coulis de ciment est choisi tel que $E_i = 10$ GPa. La densité est mesurée sur plusieurs échantillons et moyennée à $\rho_i = 2100$ kg/m³ et le coefficient de Poisson est pris égal à $\nu_i = 0.3$.

4.1.4 Conditions de l'essai et instrumentation

L'échantillon est posé sur une couche de caoutchouc afin de limiter la réflexion des ondes. Les autres faces de l'échantillon sont des surfaces libres de charge.

Le chargement appliqué est généré avec un appareil piézoélectrique sur le dessus de l'échantillon (FIGURE 4.7). Le cristal piézoélectrique permet de convertir l'énergie d'un signal électrique en un champ de contraintes (pression). Il est donc possible de contrôler le type de signaux appliqués. Avec la source piézoélectrique posée sur la face supérieure, des ondes de cisaillement (et des ondes de surface) sont donc générées par l'appareil. Afin de simplifier le protocole expérimental, on n'utilise que des signaux monochromatiques d'une vingtaine de fréquences comprises entre 200 Hz, dont la longueur d'onde correspond à la plus grande dimension de l'échantillon (30 cm), et 25 kHz (qui est la limite de l'appareil piézoélectrique). Pour chaque fréquence, la propagation du signal est mesurée sur la face supérieure de l'échantillon grâce à sept accéléromètres répartis sur la surface (FIGURE 4.7, FIGURE 4.8). La limite supérieure de la plage de fréquence couverte par les accéléromètres est de 20 kHz. Pour les besoins de l'essai, la fréquence d'échantillonnage d'acquisition des mesures est de 100 kHz sur des essais de 2 s.

Enfin, avant chaque essai, une mesure du bruit ambiant permet de calibrer le bruit de mesure des accéléromètres, mais aussi de prendre en compte les bruits induits par les autres sources de vibration présentes au laboratoire.

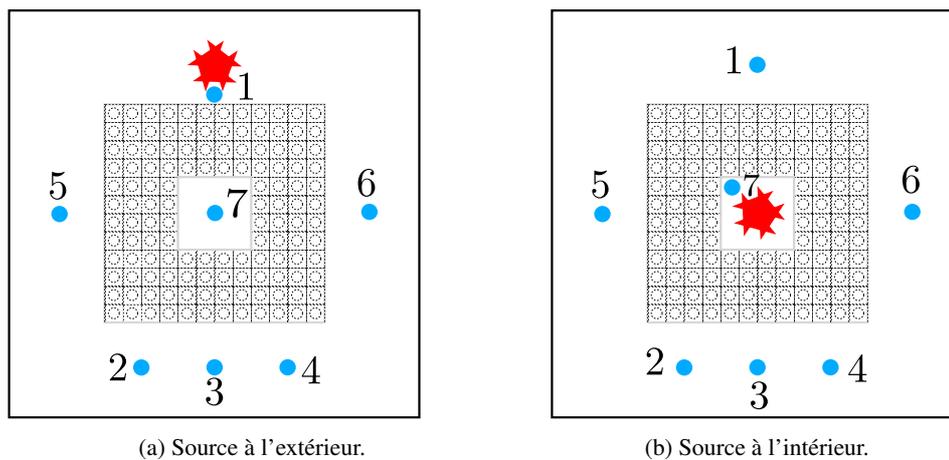


FIGURE 4.8 – Vue de dessus des deux différentes configurations testées avec la position des accéléromètres (en bleu) et de la source piézoélectrique (en rouge).

c (m)	R (m)	E_m (GPa)	E_i (GPa)	ν_m	ν_i	ρ_m (kg/m ³)	ρ_i (kg/m ³)
0,013	0,0045	0,233	10	0,25	0,3	1750	2100

TABEAU 4.1 – Paramètres et propriétés utilisé pour les études numériques liés à la réalisation expérimentale.

4.1.5 Deux configurations expérimentales

En changeant de position la source, deux configurations expérimentales sont testées : la première avec l'appareil piézoélectrique en dehors de la zone du métamatériau et une autre avec la source au centre de cette zone. Ces configurations sont représentées sur les FIGURE 4.8. Avec la première configuration, les effets de la barrière créée par le métamatériau sur la propagation d'une onde incidente sont testés. La seconde configuration est utilisée pour observer le comportement des ondes piégées à l'intérieur du métamatériau. Le même bloc de sol est utilisé pour l'échantillon homogène et pour ceux avec les barrières. La réponse du bloc de kaolin compacté est utilisée comme celle de référence. En effet, comme la réponse des échantillons comportant des inclusions est comparée à la réponse de référence, les incertitudes sur le kaolin et les conditions limites peuvent être considérées comme supprimées.

4.1.6 Courbes de dispersion des milieux périodiques testés

La mise en place d'inclusions dans la matrice de kaolin modifie le comportement du bloc. La réponse fréquentielle en particulier est affectée par le changement de géométrie. De la même façon que pour le bloc de sol homogène, les réponses du bloc avec des trous et avec des inclusions en béton sont considérées en regardant les fonctions de transfert des signaux entre les points de mesure et la source piézoélectrique. La comparaison de ces fonctions avec les prédictions numériques permettent de quantifier l'efficacité du métamatériau et permettent de regarder certaines propriétés de ces matériaux. Les FIGURES 4.9 présentent la matrice de kaolin respectivement avec des trous vides et des inclusions en coulis de ciment. Les prédictions numériques sont les résultats obtenus avec la transformée de Floquet-Bloch correspondant aux mêmes milieux périodiques mais infinis. Le modèle de cellule élémentaire utilisé est représenté sur la FIGURE 4.4, accompagné de sa zone de Brillouin.

Les propriétés des matériaux sont celles mesurées expérimentalement et reprises dans le TABLEAU 4.1.

En utilisant cette modélisation en 2D, il est important de noter que la direction verticale est considérée

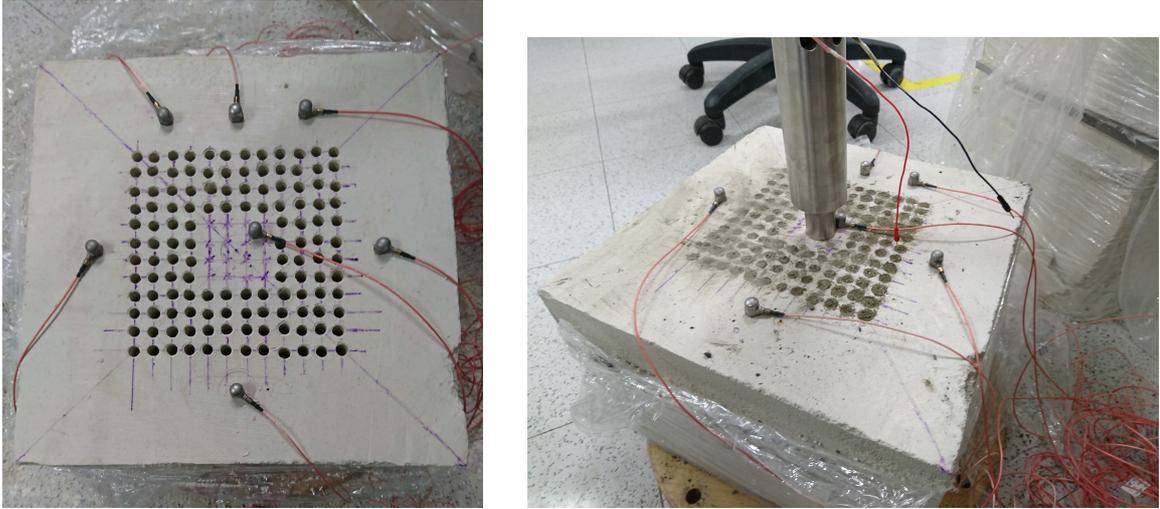


FIGURE 4.9 – Photos du bloc avec deux types d'hétérogénéités : à gauche avec des trous vides et à droite avec des inclusions en mortier.

comme homogène. De plus, le milieu périodique est aussi considéré comme infini avec cette approche, ce qui n'est pas le cas en pratique. Les phénomènes de diffraction et les réflexions aux interfaces et le fait que les inclusions ne sont pas sur toute la hauteur de l'échantillon ne sont pas pris en compte. Ainsi les résultats doivent être comparés avec précaution. C'est aussi pourquoi une autre analyse basée sur la propagation des ondes dans un guide d'onde présentant des défauts plus ou moins périodiques est mise en place.

Deux modèles physiques sont testés pour comparer les prédictions numériques et les résultats expérimentaux. Les deux modèles utilisent une discrétisation 2D de la surface supérieure du bloc, c'est-à-dire sans prendre en compte le comportement du bloc. La première hypothèse consiste à considérer la propagation d'une onde anti-plane dans le milieu. Cette mise en équation permet en effet de reproduire le mouvement des ondes de Rayleigh se propageant sur la surface. La seconde est une modélisation en 2D d'un comportement élastodynamique du sol. Les courbes de dispersion des deux modèles se retrouvent alors sur la FIGURE 4.10, à gauche la solution avec des trous vides et à droite avec des inclusions en mortier limités en fréquence par la limite des mesures (c'est-à-dire 20 kHz). Les courbes de dispersion laissent alors apparaître des bandes de fréquences interdites dans la gamme de fréquences considérée uniquement pour des inclusions en mortier. Les trous vides, conformément aux conclusions obtenues dans le CHAPITRE 3, ne laissent pas apparaître de bande de fréquence interdite avec cette géométrie. Pour le modèle avec des inclusions en mortier, cette bande s'étend de 18,6 kHz à 21 kHz.

Afin de s'intéresser aussi au cas des ondes SH, l'étude de la propagation des ondes hors-plan est considérée. Cette approche est notamment utilisée pour les comparaisons avec les résultats sur un milieu borné obtenus avec le modèle de guide d'onde. Comme dans le CHAPITRE 2, le problème aux valeurs propres correspondant est le suivant :

$$(\nabla_{\mathbf{x}} + i\mathbf{k}) \cdot [\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})(\nabla_{\mathbf{x}} + i\mathbf{k})u^B(\mathbf{x})] = -\rho(\mathbf{x})\omega^2 u^B(\mathbf{x}) \quad (4.2)$$

où l'on prend exceptionnellement $\boldsymbol{\mu}(x) = E(x)$ afin de maximiser l'ouverture des bandes interdites en fréquence.

Dans ce cas, les courbes de dispersion avec des trous vides et des inclusions en ciment sont respectivement tracées sur les FIGURES 4.11a et 4.11b. Les courbes de dispersion laissent apparaître des bandes de fréquences interdites. Pour le modèle avec des inclusions en mortier, la première bande de fréquence interdite

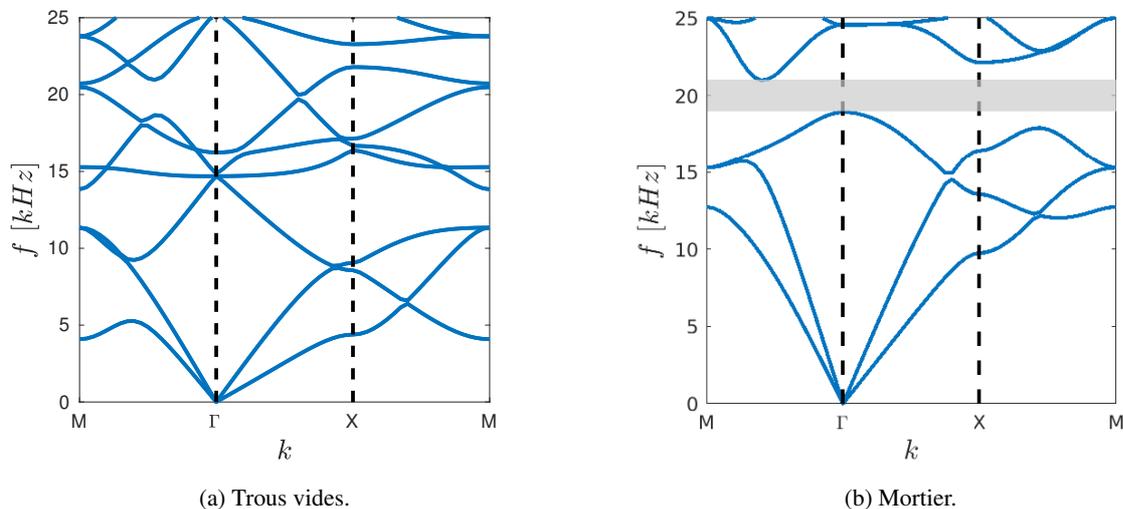


FIGURE 4.10 – Courbes de dispersion du milieu périodique infini pour un modèle elastodynamique.

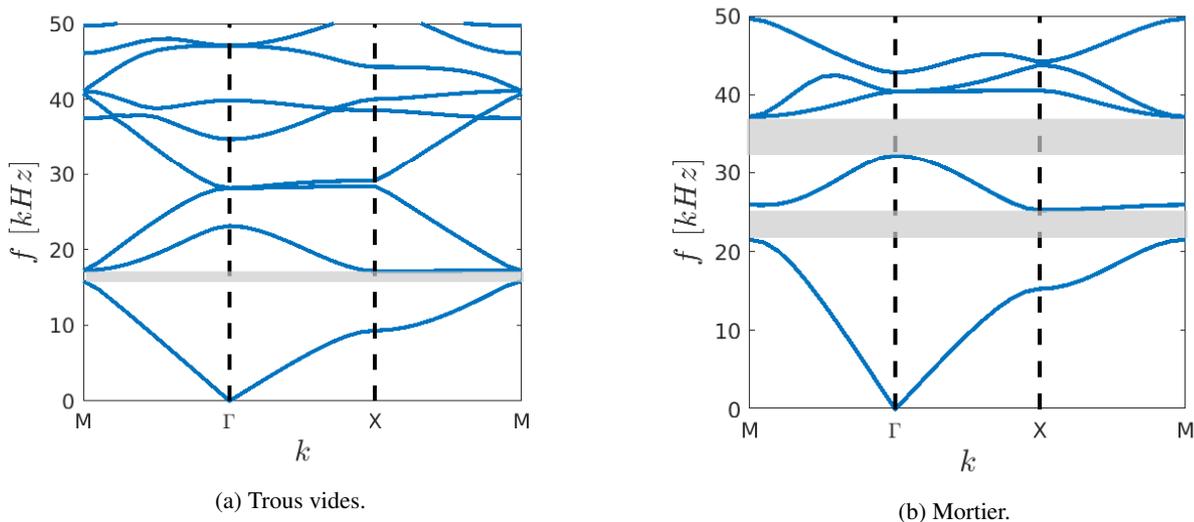


FIGURE 4.11 – Courbes de dispersion du milieu périodique infini pour un modèle acoustique.

s'étend de 15,75kHz à 17,25kHz et de 21,5kHz à 26kHz pour le cas avec des inclusions en mortier. Étant donné les fréquences d'apparition des bandes de fréquence interdites pour le cas avec inclusions en mortier (> 20kHz), les résultats ne peuvent pas être comparés avec les mesures expérimentales.

4.2 Procédure de mesure et réponse du bloc homogène

Avant de comparer les résultats des expériences aux prédictions obtenues avec les simulations, des premières observations sont conduites uniquement avec les résultats expérimentaux, notamment dans les interactions de la barrière sismique avec son environnement.

4.2.1 Bruit de mesure

D'abord, il faut vérifier que les mesures ne soient pas perturbées par le bruit et les vibrations ambiantes. Pour cela des mesures ont été réalisées sans source. La transformée de Fourier des données est présentée sur la FIGURE 4.12 pour les essais sans hétérogénéité (en bleu), avec les trous vides (en rouge) et avec les inclusions en coulis de ciment (en jaune). Dans la gamme de fréquence considérée pour les essais (entre 100Hz et 20kHz), les courbes moyennées sont similaires, à peu près constante et de l'ordre de la dizaine de nm. L'amplitude des signaux mesurés avec la source sont bien supérieurs (au moins 100 fois plus importante que le bruit) donc ne perturbent pas les mesures réalisées. Pour les résultats dans le domaine fréquentiel, le bruit est toutefois ôté des mesures.

4.2.2 Présentation des résultats expérimentaux

Pour le post-traitement des données, les fonctions de transfert $\alpha_{s,m}(f)$ dans le domaine fréquentiel entre les deux points de mesure s (la source) et m (un des six accéléromètres) sont définies par :

$$\alpha_{m,s}(f) = \frac{\hat{u}_m(f)}{\hat{u}_s(f)} \quad (4.3)$$

où $\hat{u}_m(f)$ est la transformée de Fourier du déplacement vertical obtenus à partir de l'accélération mesurée avec le capteur m .

L'un des défauts d'un essai sur un modèle de laboratoire est la gestion des conditions limites. En effet, contrairement à un essai *in situ*, l'onde est réfléchiée sur les limites du modèle. La solution homogène présentée plus haut comme référence ayant l'avantage d'être effectuée sur le même bloc de kaolin présentant les mêmes défauts et donc les mêmes conditions limites, on utilise donc ces résultats pour étudier les éventuelles atténuations. On introduit donc le rapport $R_{m,s}^\alpha$ entre la fonction de transfert avec le métamatériau et celle du bloc homogène :

$$R_{m,s}^\alpha = \frac{\alpha_{m,s}(f)}{\alpha_{m,s}^0(f)} \quad (4.4)$$

où $\alpha_{m,s}^0(f)$ est la fonction de transfert obtenue à l'accéléromètre m sur le bloc homogène. L'atténuation due au réseau d'inclusions périodiques est alors obtenue sans avoir à tenir compte de la dispersion géométrique des ondes et les effets dus aux conditions limites.

4.2.3 Intercorrélation pour déterminer les propriétés du sol

Afin d'adapter les valeurs des propriétés matériaux du sol dans le modèle numérique, une méthode d'intercorrélation [Elgamal et al. \(2004\)](#) est utilisée pour estimer la vitesse de propagation des ondes de Rayleigh

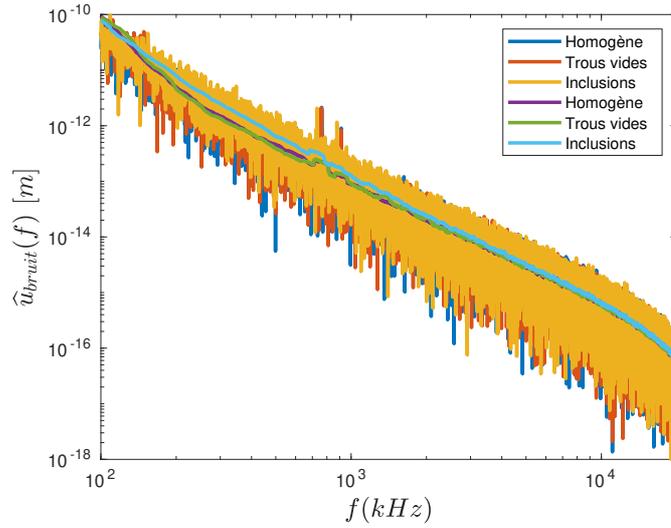


FIGURE 4.12 – Mesures du bruit sur les trois essais et leurs moyennes glissantes respectives.

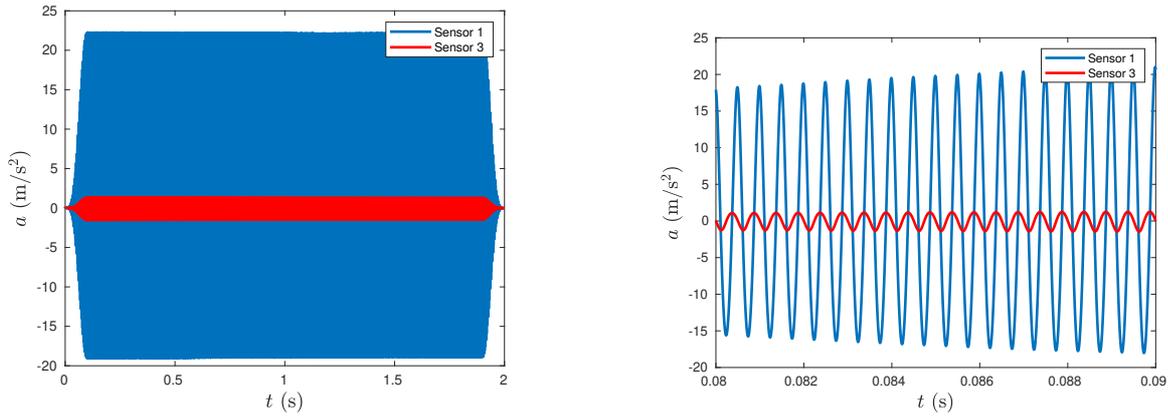


FIGURE 4.13 – Signaux temporels en déplacement enregistrés avec les accéléromètres 1 et 3 sur l'échantillon homogène dans la première configuration de la FIGURE 4.8.

générées par la source piézoélectrique sur le modèle physique sans hétérogénéité. La fonction d'intercorrélation $c_{a_i a_j}$ entre deux signaux temporels enregistrés par les accéléromètres $a_i(t)$ et $a_j(t)$ est donnée par la relation suivante :

$$c_{a_i a_j}(\tau) = \frac{\frac{1}{N-m} \sum_{n=1}^{N-m} a_i(n\Delta t) a_j((n+m)\Delta t)}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_i^2(n\Delta t)} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_j^2(n\Delta t)}} \quad m = 0, 1, 2, \dots, N \quad (4.5)$$

où N la taille du signal et Δt le pas de temps du signal.

Par exemple, l'intercorrélation entre les signaux enregistrés aux points 1 et 3 sur l'échantillon homogène pour une fréquence égale à 4,25 kHz (FIGURE 4.13) donne une vitesse des ondes de Rayleigh de $V_R = 206$ m/s. Le module de Young est ensuite déterminé par :

$$E_m = 2\rho_m(1 + \nu_m) \cdot V_s^2 \quad (4.6)$$

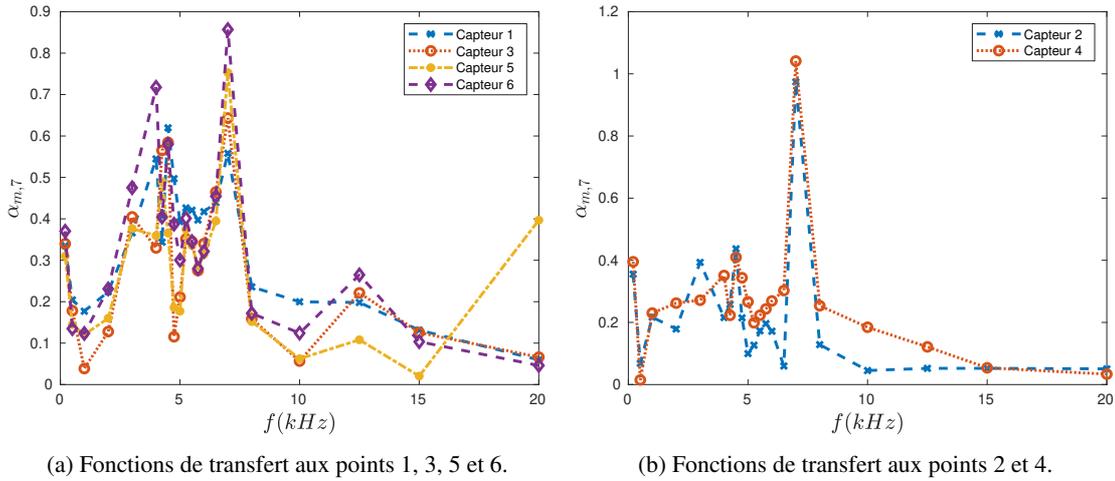


FIGURE 4.14 – Fonctions de transfert observées dans le cas où la source est au milieu de la surface supérieure du bloc entre des points équidistants de la source piézoélectrique.

en utilisant le lien entre la vitesse des ondes de Rayleigh V_R et celle des ondes de cisaillement V_s donné par [Chen et al. \(2006\)](#).

$$V_R = \frac{0.862 + 1.14v_s}{1 + v_s} V_s \quad (4.7)$$

La vitesse des ondes de cisaillement est alors $V_s = 225$ m/s, correspondant aux ordres de grandeurs des vitesses obtenues dans les argiles compactées ([Rénalier et al., 2010](#)). En utilisant cette valeur, les propriétés du modèle numérique basé sur cet essai sont utilisées (TABLEAU 4.1).

4.2.4 Réponse du bloc non symétrique et résonance du bloc

Les résultats obtenus sur le bloc homogène permettent de prendre en compte de nombreux effets qui peuvent nuire à la comparaison des résultats. En choisissant la configuration dans laquelle la source est au centre du bloc, les résultats mesurés aux points 1, 3, 5 et 6 d'une part, et 2 et 4 d'autre part, (FIGURE 4.8) doivent permettre d'obtenir des résultats identiques à cause des propriétés de symétrie que la géométrie et le chargement vérifient théoriquement. La FIGURE 4.14 compare les fonctions de transfert entre la source et chacun de ces deux groupes de points. Si quelques points sont très proches, les résultats ne respectent pas les propriétés de symétrie du modèle comme on pouvait s'y attendre. Des différences notables dans les résultats apparaissent. Elles peuvent s'expliquer par la forme du bloc qui présente de nombreux défauts de surface et par les liaisons entre l'accéléromètre et la matrice de kaolin. Les incertitudes sur la position de la source et celles des accéléromètres peuvent aussi avoir une influence sur ces résultats.

Même si le bloc n'est pas tout à fait symétrique, il est possible d'observer une tendance dans la réponse fréquentielle du bloc. Ainsi, pour chaque capteur, le comportement est assez similaire. Le tracé de la moyenne logarithmique du comportement du bloc en ces points permet de donner une référence. La moyenne logarithmique $\bar{\alpha}(f)$ des N fonctions de transfert est donnée par :

$$\ln(\bar{\alpha}(f)) = \frac{1}{N} \sum_i \ln(\alpha_i(f)) \quad (4.8)$$

La FIGURE 4.15 représente la moyenne géométrique des fonctions de transfert pour les deux groupes de points : (1, 3, 5, 6) et (2,4). Grâce à ces deux courbes, on peut identifier plusieurs phénomènes :

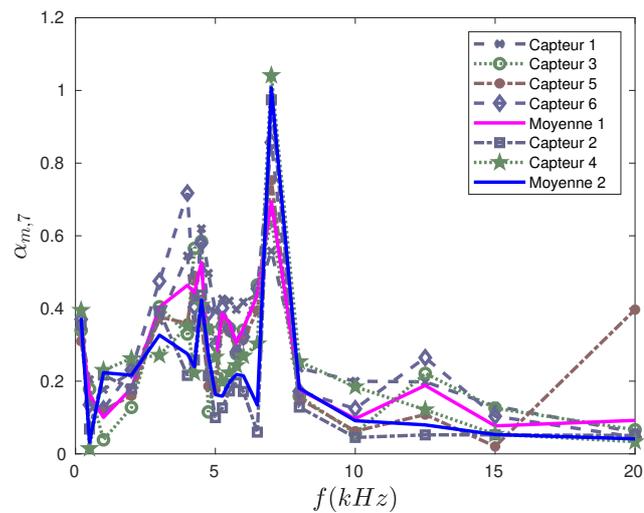


FIGURE 4.15 – Moyenne logarithmique des fonctions de transfert des signaux mesurés aux points équidistants. La moyenne des points les plus proche (1, 3, 5 et 6) est en rose et la moyenne aux points 2 et 4 est en bleu.

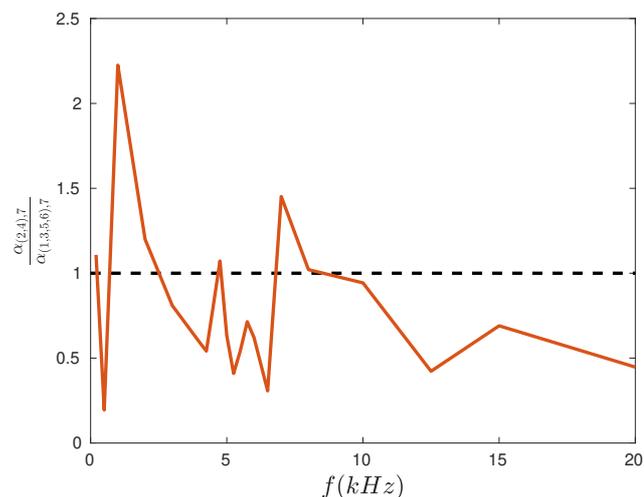


FIGURE 4.16 – Mise en évidence de l'apport négligeable de l'amortissement face aux autres phénomènes mis en jeu.

- il y a une forte atténuation du signal en haute fréquence. En effet, à partir de 15 kHz, l'amplitude mesurée correspond à moins de 15% du signal émis.
- Ensuite, tous les capteurs mesurent un pic autour de 7 kHz. Il peut s'agir d'un phénomène de résonance du bloc.
- Enfin, un léger pic indiquant une résonance plus locale est mesuré entre 4 et 5 kHz.

Il existe donc des phénomènes qui peuvent troubler l'analyse des données. La présence d'inclusions modifie en effet le comportement modal du bloc. On peut remarquer que l'amortissement du milieu n'intervient que très peu dans la réponse. En effet, les distances entre la source et les points utilisés pour tracer la FIGURE 4.16 sont différentes, or les courbes ne présentent pas de signes d'atténuation hormis au-delà de 10 kHz (FIGURE 4.16). Le rapport entre la moyenne des réponses les plus proches de la source et celle des réponses aux points situés le plus loin en fonction de la fréquence est présenté. Ces résultats montrent qu'il existe un fort impact de la fréquence sur la propagation des ondes dans le milieu borné. La prise en compte de ces effets peut expliquer des différences obtenues d'un point de vue numérique.

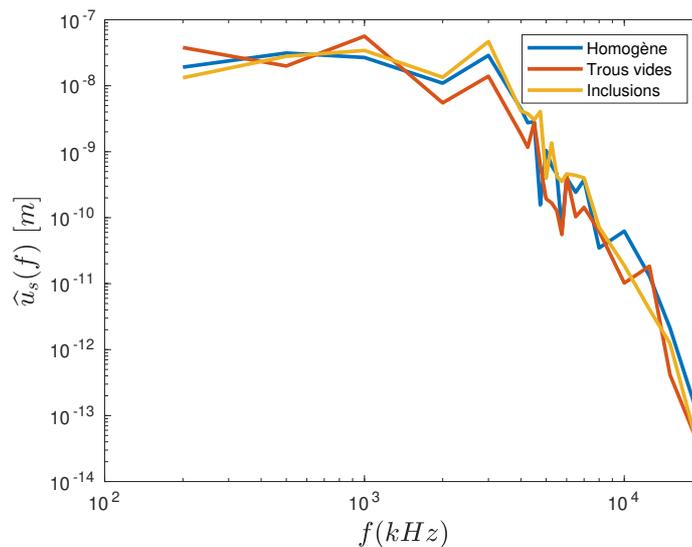


FIGURE 4.17 – Signaux dans le domaine fréquentiel mesurés proche de la source (point 7) dans les cas homogènes.

4.3 Principales conséquences à l’ajout du milieu périodique

D’un point de vue théorique si l’on considère un milieu infini, les courbes de dispersion sont données sur la FIGURE 4.10. Pour l’essai, le milieu considéré est cependant loin d’être infini et le nombre d’inclusions est en effet très limité et la présence d’une zone centrale sans hétérogénéité dégrade encore plus l’hypothèse de périodicité. La présence d’hétérogénéités dans le bloc modifie néanmoins la propagation des ondes dans le milieu.

4.3.1 Présence d’ondes piégées à l’intérieur de la barrière

Même si le protocole expérimental présente des défauts au niveau de la reproductibilité des signaux émis, les signaux mesurés à proximité de la source dans le cas de la FIGURE 4.8b peuvent mettre en avant le fait que des ondes soient piégées à l’intérieur de la zone. Pour des applications sismiques, où la position de la source n’est pas connue, il est important de déterminer le comportement des ondes dans le cas où la source sismique se situe à l’intérieur de la zone à protéger : une localisation de l’onde à l’intérieur de la zone à protéger serait en effet problématique pour la stabilité de la structure normalement isolée par le milieu hétérogène.

La FIGURE 4.17 présente le signal mesuré avant et après la mise en place des trous/inclusions dans la configuration de la FIGURE 4.8b. On remarque que les courbes suivent toutes la même tendance avec des signaux largement atténués pour des fréquences au-dessus de 10kHz (mais restent largement supérieures au bruit de mesure de la FIGURE 4.12). Les réponses sont cependant amplifiées dans le cas avec des inclusions et réduites dans le cas avec les trous. Ces modifications peuvent être dues à l’implantation des capteurs (qui sont remplacés entre chaque essai), ainsi qu’à la position de la source piézoélectrique mais une explication plus probable est que les ondes soient piégées par la barrière à l’intérieur de la zone contenant la source.

4.3.2 Modification de la réponse fréquentielle du bloc avec les hétérogénéités

Tout d’abord, avant de comparer les résultats, il est important de noter la différence dans le comportement du bloc de kaolin due à la présence de trous ou d’inclusions. La FIGURE 4.18 présente cette comparaison pour des trous vides et des inclusions en coulis de ciment. Sur ces courbes, il est visible que le comportement

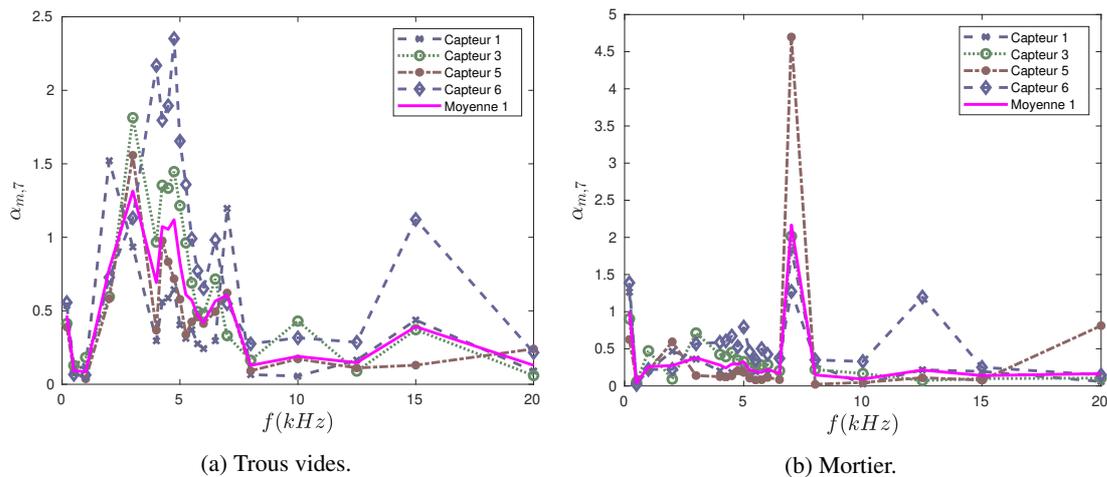


FIGURE 4.18 – Réponse du bloc lorsque la source est posée au centre du bloc (point 7) au niveau des 4 capteurs équidistants (1, 3, 5 et 6).

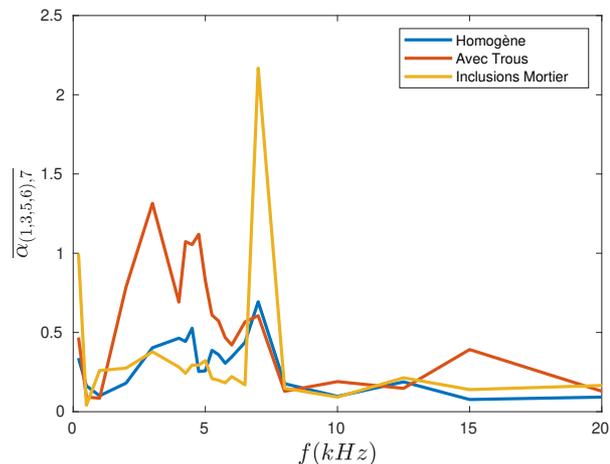


FIGURE 4.19 – Moyenne des réponses des capteurs 1, 3, 5 et 6 à une source située au centre pour le cas homogène, celui avec de trous vides et celui avec des inclusions en mortier.

général du bloc a été modifié par la présence des hétérogénéités. Pour les trous vides (FIGURE 4.18a), la réponse du bloc est fortement modifiée avec des pics qui n'étaient pas présents (par exemple à 3 kHz). De plus, le pic à 7 kHz est moins marqué que précédemment.

La FIGURE 4.18b, présentant l'évolution de la fonction de transfert entre la source et les quatre points équidistants, montre que le pic du signal autour de 7 kHz déjà observé dans le cas du bloc homogène est largement amplifié alors que le signal aux autres fréquences est largement atténué.

Les réponses moyennes pour les trois configurations (homogène, avec des trous, avec des inclusions) avec la source au centre et les mesures aux capteurs 1, 3, 5 et 6 sont résumées sur la FIGURE 4.19. Les conclusions précédentes se confirment avec notamment le pic qui devient très important en ajoutant des inclusions en mortier à 7 kHz et la réponse avec les trous vides qui est amplifiée en plus basses fréquences ([1 5] kHz).

La FIGURE 4.20 présente le rapport entre les moyennes des fonctions de transfert mesurées sur les blocs avec les trous vides ou avec les inclusions en béton (respectivement sur les FIGURES 4.20a et 4.20b) et celle mesurée sur le bloc homogène. Pour chaque cas, la moyenne en bleu correspond aux points de mesure 1,

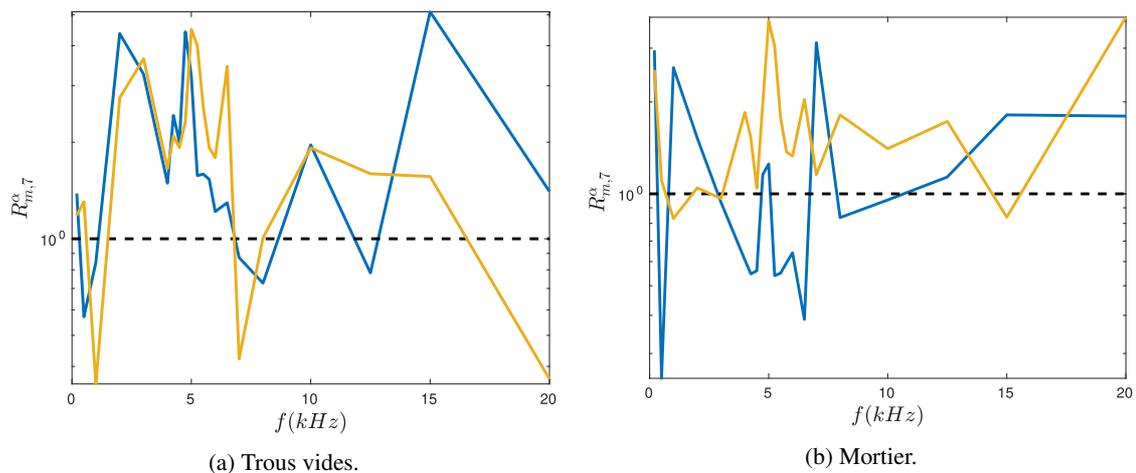


FIGURE 4.20 – Rapport des fonctions de transferts moyennes entre le cas hétérogène et le cas homogène pour les points 2 et 4 (en jaune) et pour les points 1, 3, 5 et 6 (en bleu).

3, 5 et 6 alors que la jaune correspond aux points 2 et 4. L'atténuation pour certaines bandes de fréquences est alors visible : sous la ligne en pointillés le signal est atténué et au-dessus il est amplifié. Le signal est majoritairement amplifié pour les autres fréquences. En effet ces points sont proches. Lorsque les points de mesure s'éloignent de la source (courbes jaunes), le comportement reste assez similaire à celui obtenu pour les points de mesure les plus proches (courbes bleues), notamment dans le cas des trous vides. La réponse du bloc avec les inclusions en mortier est elle fortement modifiée. Dans la suite, les comparaisons avec le cas du matériau infini (traité avec Floquet-Bloch) sont effectuées pour essayer de lier les mesures au comportement d'un milieu périodique infini.

4.3.3 Invisibilité du métamatériau

De nombreux projets montrent l'intérêt et la nécessité de mettre en place un système qui permette de modifier le moins possible la propagation de l'onde en dehors du métamatériau, notamment pour éviter de concentrer l'énergie du signal aux frontières du métamatériau. Par exemple, les résultats de [Farhat et al. \(2008\)](#) mettent en évidence la réalisation expérimentale d'une cape d'invisibilité aux vagues. Cependant cette mise en évidence n'a été réalisée que pour un type d'ondes seulement.

Les résultats obtenus dans la configuration de la FIGURE 4.8a sont alors étudiés. En mettant la source à l'extérieur de la zone, l'objectif est de regarder quel est l'impact sur la propagation de l'onde dans la zone à protéger, mais aussi à l'extérieur de cette zone. Les courbes de la FIGURE 4.21 montrent les ratios entre les valeurs en chaque point avant et après la mise en place des trous ou des inclusions lorsque la source est à l'extérieur. Les courbes bleues et roses correspondent aux ratios des fonctions de transfert entre les cas avec hétérogénéités (trous vides à gauche et inclusions en mortier à droite) et homogènes $R_{m,7}^\alpha$ aux points situés respectivement après la zone protégée (points de mesure 2, 3, 4) et à côté de cette zone (5 et 6). Les courbes grises correspondent à ce même ratio entre les points de mesure 7 et 1. Ces figures mettent en avant le fait que la présence des inclusions modifie considérablement la réponse fréquentielle des ondes à l'extérieur de la zone même pour les fréquences où une atténuation est visible. Il y a en effet de nombreuses bandes de fréquences où les ondes sont amplifiées.

Si l'une des causes est la réflexion des ondes dans ce milieu non borné, un travail sur ce point doit être effectué pour limiter l'impact sur les structures situées autour de la zone.

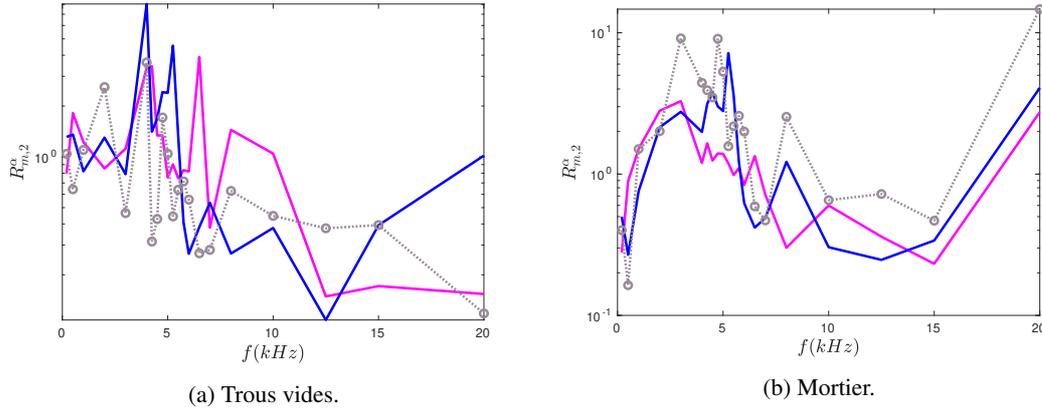


FIGURE 4.21 – Ratios entre les fonctions de transfert dans la configuration de la FIGURE 4.8a pour les points 2, 3 et 4 (en bleu) et 5 et 6 (en rose). Les pointillés gris représente le ratio pour le point à l’intérieur de la zone (point 7).

4.4 Modélisation modale de l’expérience

Dans cette approche, on considère la propagation d’ondes hors-plan sur la surface en considérant une modélisation 2D de la surface supérieure. La géométrie reprend l’idée du guide d’onde décrit dans la dernière partie du CHAPITRE 2. Le comportement des ondes hors-plan dans le milieu est alors régi par :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\mu \nabla_{\mathbf{x}} u] = -\rho \omega^2 u. \quad (4.9)$$

avec $\mu = E$. La valeur du module de Young a été conservée ici, comme expliqué dans précédemment dans l’étude sur un milieu infini en utilisant Floquet-Bloch (4.1.6).

4.4.1 Géométrie de la réalisation expérimentale

La géométrie utilisée pour l’analyse modale d’un guide d’onde avec la répartition des inclusions de l’échantillon physique est donnée sur la FIGURE 4.22. Les changements de variables utilisés pour les PML sont définis comme précédemment par :

$$\chi_{\theta}(x_1) = \begin{cases} -L + (x_1 + L)e^{\eta^-} & \text{si } x_1 \leq -L \\ x_1 & \text{si } |x_1| < L \\ +L + (x_1 - L)e^{\eta^+} & \text{si } x_1 \geq L \end{cases} \quad (4.10)$$

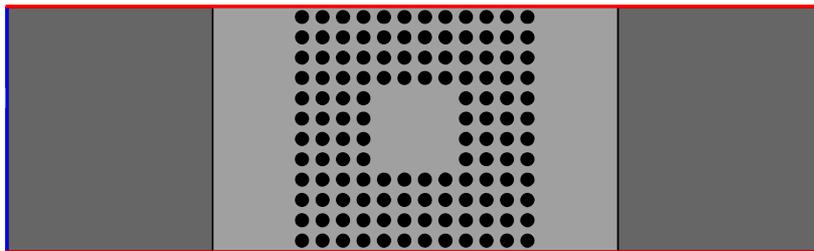


FIGURE 4.22 – Modèle de guide d’onde utilisé pour représenter l’essai physique. Les bords en rouge représentent un bord libre et en bleu les conditions d’encastrement.

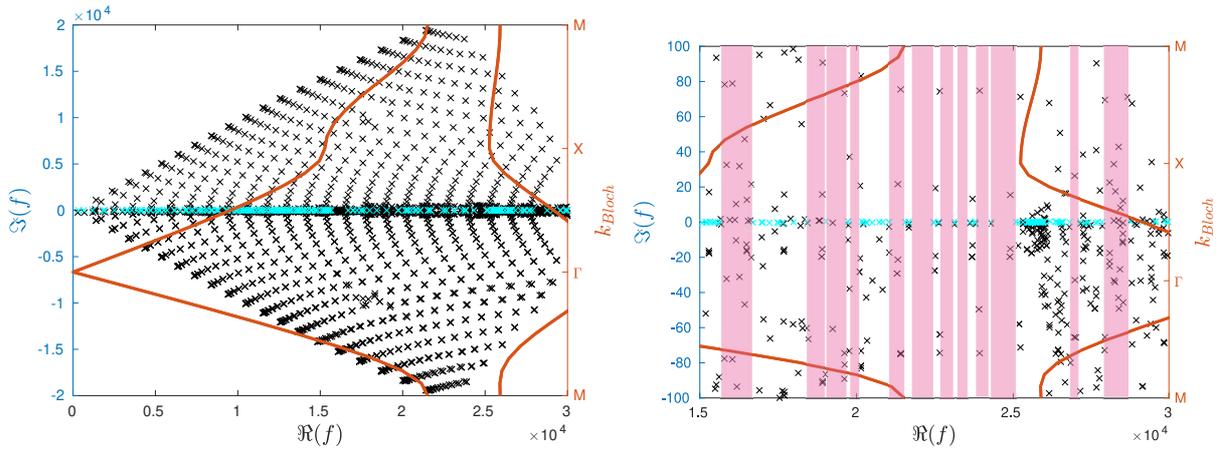


FIGURE 4.23 – Comparaison entre le spectre obtenu à partir des essais numériques sur guide d’onde (avec les valeurs réelles en cyan et les valeurs complexe en noir) et les courbes de dispersion obtenues en utilisant la théorie de Floquet-Bloch (en rouge), avec un zoom sur la première bande de fréquence filtrée.

où $\eta^\pm = \pm i\theta$ et en choisissant des valeurs conjuguées pour η^+ et η^- . La valeur du paramètre θ est choisie à $\frac{\pi}{4}$.

L’analyse modale permet de voir comment le milieu hétérogène périodique interagit avec la propagation d’une onde plane entre les deux PML. Si l’analyse n’est pas représentative de l’essai, elle permet néanmoins de mettre en évidence les bandes de fréquences filtrées.

Les résultats issus de ce modèle de guide d’onde sont donnés sur la FIGURE 4.23. La figure de gauche présente la comparaison entre le spectre du guide d’onde, donc du milieu périodique borné, et les résultats sur un milieu infini traité avec la transformée de Floquet-Bloch. Celle de droite présente un zoom autour de la bande de fréquence interdite théorique sur un milieu infini. Les bandes de fréquences mises en évidence sont celles obtenues lorsque la distance entre deux modes réels est supérieure à 200Hz. En effet, le zoom au niveau de la première bande de fréquence interdite prédite en utilisant la théorie de Floquet-Bloch permet de mettre en évidence les liens avec l’absence de modes propagatifs ou réfléchis dans le guide d’onde considéré ici. En effet, la densité de points pour ces fréquences est plus faible que dans les autres domaines. Ainsi, quelques bandes filtrantes, qui sont discontinues et de petites largeurs, existent dans cette configuration. Il est aussi important de noter que ces bandes discontinues existent sur une bande plus large que la bande interdite prédite avec la théorie de Floquet-Bloch.

4.4.2 Prise en compte d’inclusions supplémentaires au centre

Pour tester l’influence de la zone centrale sans inclusion dans la réponse, une simulation numérique supplémentaire est effectuée. Le modèle de guide d’onde considéré est alors représenté sur la FIGURE 4.24. Les conditions aux limites (FIGURE 4.22) et l’équation régissant la propagation des ondes dans le milieu (EQ.4.9) restent inchangées. Le spectre issu de l’analyse modale de ce guide d’onde est représenté sur la FIGURE 4.25 avec un agrandissement de la zone entre 15kHz et 25kHz à gauche. Dans ce cas, le nombre d’inclusions minimal pour vérifier l’hypothèse de périodicité (issue des travaux du CHAPITRE 2) est mis en place. Les bandes de fréquences filtrées mises en évidence sont comme précédemment celles où la distance entre deux modes réels successifs est supérieure à 200Hz.

Avec cette configuration, les bandes sont proches de celles obtenues pour un milieu infini avec la théorie de Floquet-Bloch, même si quelques bandes de fréquences interdites en dehors de la bande théorique subsistent. Ainsi, le nombre est suffisant pour retrouver les bandes de fréquences interdites prédites avec la

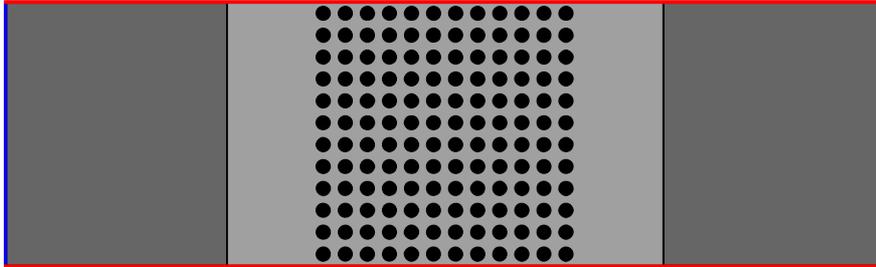


FIGURE 4.24 – Modèle de guide d’onde avec des inclusions au centre du métamatériau. Les conditions aux limites du modèle sont les mêmes que sur la FIGURE 4.22.

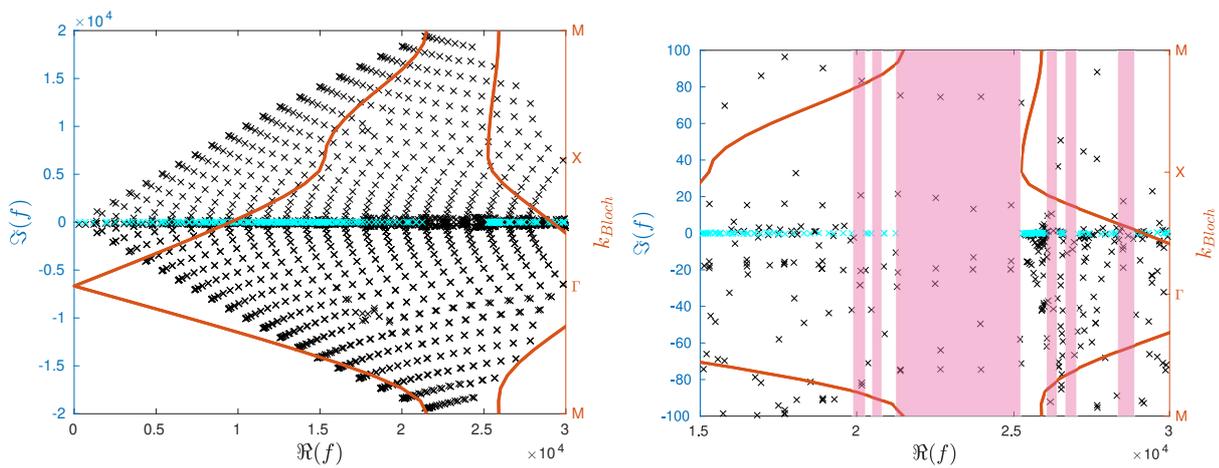


FIGURE 4.25 – Spectre du guide d’onde ne comportant pas de défaut en son centre.

théorie de Floquet-Bloch. Contrairement à l'étude présentée précédemment, les modes propagatifs dans le guide d'onde se trouvent dans les bandes définies pour le milieu infini.

Il est cependant intéressant de noter que la présence d'un défaut dans la zone centrale permet de créer des bandes de fréquence interdite à plus basse fréquence que pour le milieu infini, ce qui peut être un avantage dans le cas des problématiques de conception parasismique.

4.5 Mise en évidence de bandes de fréquence filtrées sur des simulations temporelles

L'analyse modale de guide d'onde permet d'obtenir des résultats assez cohérents avec les prédictions de Bloch, notamment en prenant en compte le caractère borné du milieu périodique réel. Cependant, la position de la source n'est pas considérée en utilisant cette modélisation. Afin de comparer plus précisément les résultats expérimentaux avec une solution numérique, des simulations temporelles ont été effectuées utilisant le code de calcul *OOFE* (*Object Oriented Finite Element*) basé sur la méthode de Galerkin discontinue en temps.

Il est alors possible de mieux prendre en compte la source et, notamment dans le cas présenté ici, les interactions entre la source et les trous vides/inclusions. Seule la configuration avec la source à l'intérieur est étudiée (FIGURE 4.8b). La géométrie utilisée comportant notamment la position de la source est représentée sur la FIGURE 4.26. L'étude porte sur une modélisation en 2D. Le comportement du milieu est décrit par un modèle élastique linéaire dans le domaine temporel (EQ.4.11).

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbb{C} : \varepsilon) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (4.11)$$

avec $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2$ le déplacement dans le plan. Les analyses dans la suite sont basées sur la vitesse des ondes.

Les conditions limites appliquées sont les suivantes. Les bords extérieurs sont libres. Un chargement en effort est appliqué sur le cercle bleu correspondant à la source (FIGURE 4.26) et deux cas sont testés, un chargement en pression (perturbation radiale) et un chargement en cisaillement (perturbation tangentielle). Le chargement est le même dans les deux cas et consiste en une somme de deux ondelettes de Ricker $R_T(t)$

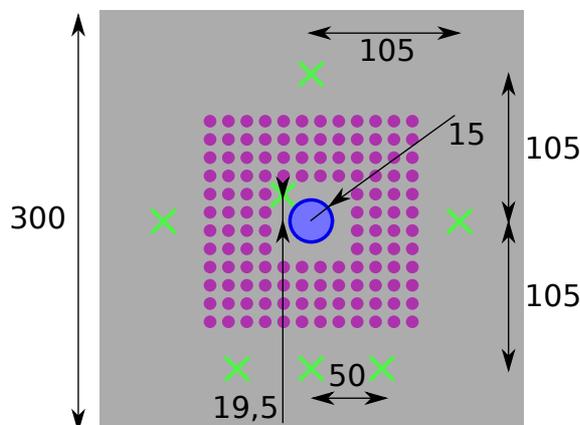


FIGURE 4.26 – Géométrie utilisée pour la simulation temporelle avec la source (cercle bleu) et la position des capteurs (croix vertes).

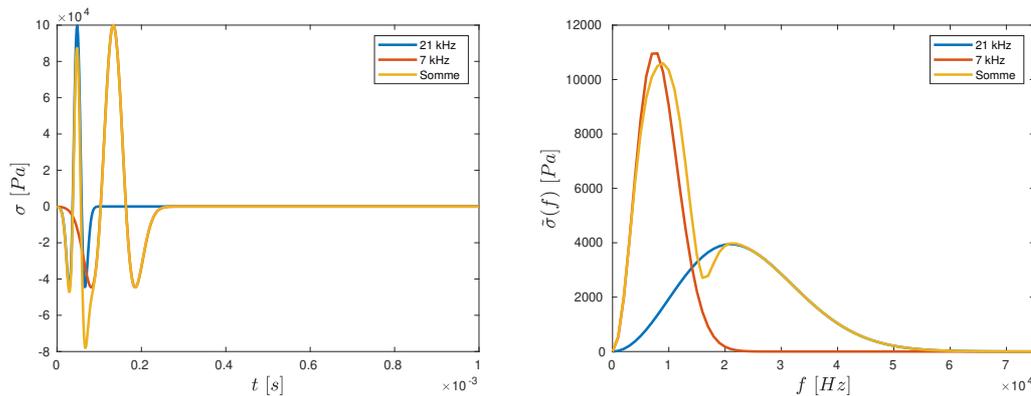


FIGURE 4.27 – Ondelettes de Ricker utilisées pour le chargement temporel (à gauche) et leur représentation dans le domaine fréquentiel (à droite).

définies par :

$$R_T(t) = A \left[1 - 2 \left(\pi \frac{2 * t - T}{T} \right)^2 \right] e^{-\left(\pi \frac{2 * t - T}{T} \right)^2} \quad (4.12)$$

avec A l'amplitude du signal et T la période de ce signal. Les ondelettes sont centrées sur 7 kHz et 21 kHz (FIGURE 4.27), ce qui correspond respectivement à $T_2 = 2,6667 \cdot 10^{-4}$ s et $T_1 = 9,5238 \cdot 10^{-5}$ s et $A = 1 \cdot 10^5$ Pa pour les deux signaux. Ces signaux sont très utilisés dans le domaine du génie civil (Gholamy and Kreinovich, 2014; Drosos and Anastasopoulos, 2015) notamment pour la large plage de fréquence couverte par le signal.

La durée de la simulation, le pas de temps et la taille maximale des éléments finis sont déterminées à partir des caractéristiques de l'essai. Les valeurs respectives choisies sont respectivement $T_s = 1$ ms, $dt = 1,6 \cdot 10^{-3}$ ms et $h_{max} = 0,7$ mm.

La FIGURE 4.28 illustre la propagation de l'onde dans le domaine temporel pour chaque type d'hétérogénéités. La réponse temporelle en déplacement du cas homogène est au milieu, la solution à gauche représente le cas avec les inclusions en mortier, et celle à droite avec de trous vides. Les signaux mesurés sont décomposés pour chaque cas de chargement en :

- une divergence permettant de suivre la propagation des ondes P, et
- un rotationnel permettant d'obtenir les ondes S

conformément aux conclusions de l'EQ.1.11. Dans le cas des ondes P, la solution pour $t = 0,32$ ms est représentée. Elle permet d'obtenir une solution assez large avant que les ondes ne se réfléchissent sur les bords du modèle. La propagation des ondes S dans le milieu est illustrée sur la FIGURE 4.29. Pour les ondes S, plus lentes que les ondes P, la solution représentée correspond à $t = 0,64$ ms.

Pour les deux cas de figure lorsque le milieu est homogène, il n'y a pas de conversion d'un type d'ondes à l'autre (avant réflexion sur les bords). L'onde se propage donc librement dans le milieu en n'étant pas modifiée.

Par contre il est intéressant de remarquer que dans le cas d'une source d'ondes P, il y a une importante conversion des ondes des ondes P en ondes S, notamment dans la configuration avec des trous vides où l'amplitude des ondes S piégées est du même ordre de grandeur que l'onde P transmise. Avec des inclusions en mortier, la première partie du signal temporel, correspondant au pic autour de 21 kHz, est largement atténuée par rapport au cas homogène et seule la seconde partie du signal est clairement reconnaissable.

Pour l'onde S générée au centre, les conclusions précédentes se confirme avec notamment une onde qui

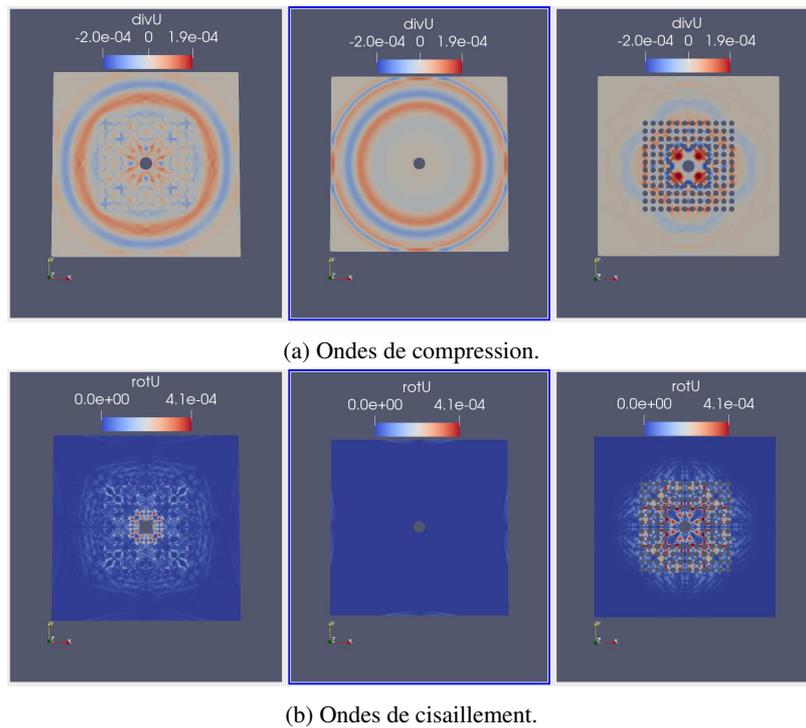


FIGURE 4.28 – Propagation d’une onde P émise depuis le centre avant les réflexions sur les bords du modèle dans 3 cas : (gauche) inclusions en mortier, (milieu) homogène et (droite) trous vides.

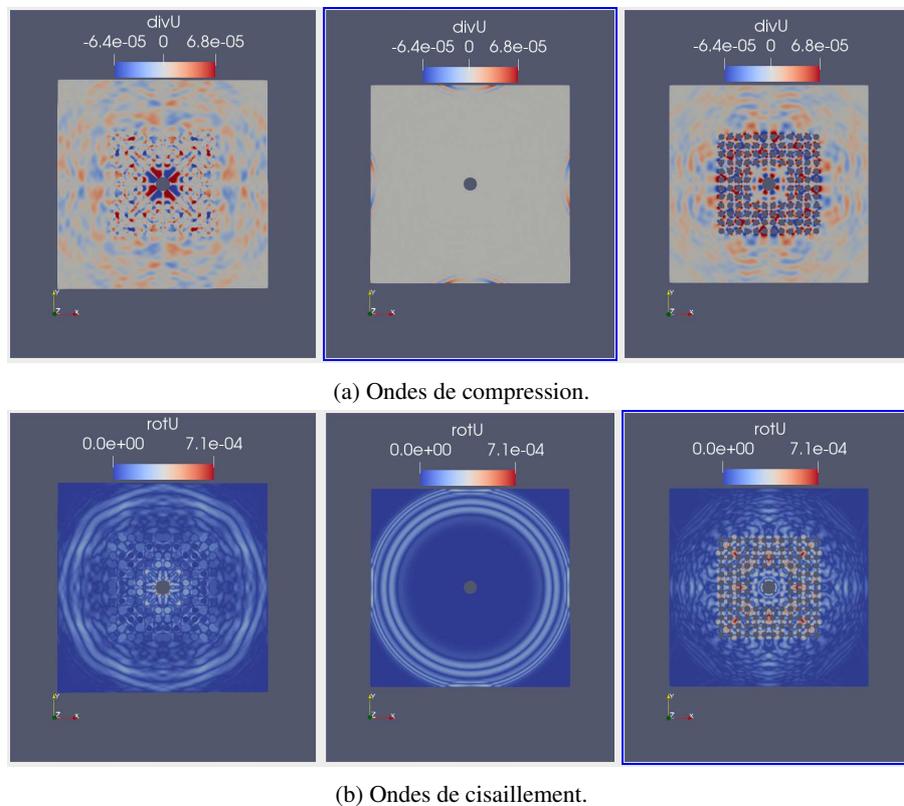


FIGURE 4.29 – Propagation d’une onde S émise depuis le centre avant les réflexions sur les bords du modèle dans 3 cas : (gauche) inclusions en mortier, (milieu) homogène et (droite) trous vides.

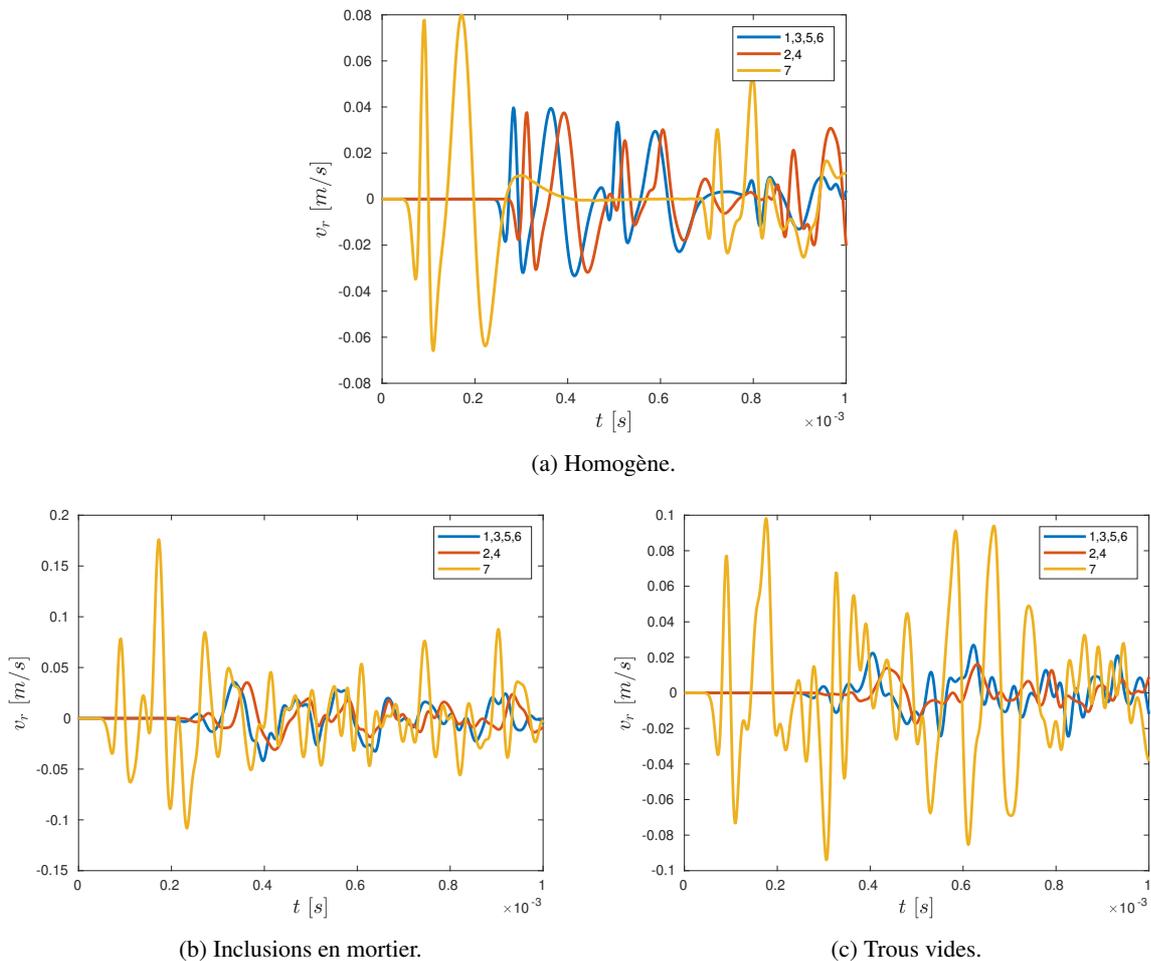


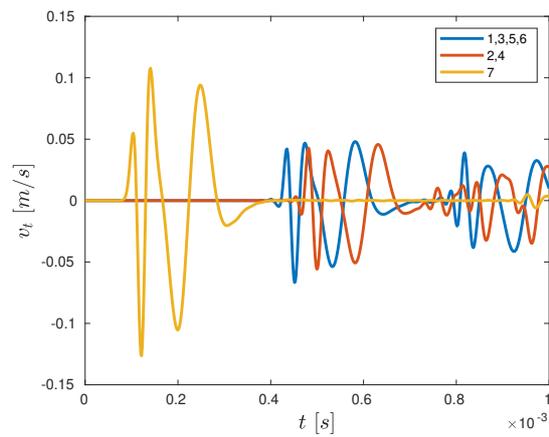
FIGURE 4.30 – Réponse temporelle des capteurs 1 à 7 avec une sollicitation en onde P.

paraît piégée dans le cas avec des trous vides. Un filtrage de certaines fréquences dans le cas des inclusions en mortier est visible avec la suppression des premiers pics. L'amplitude des ondes converties (d'onde S en onde P) est cependant plus faible que dans le cas d'une onde P source.

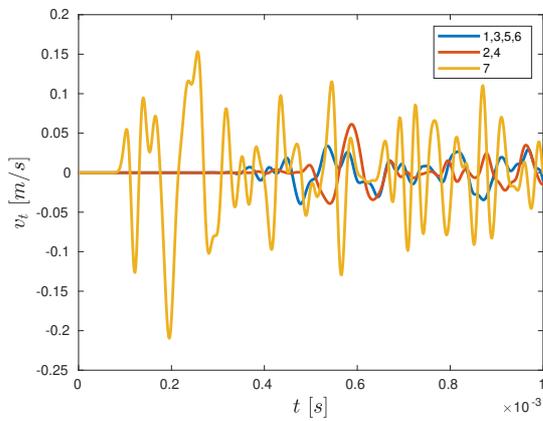
Dans les deux cas, l'onde a donc tendance à être piégée dans le milieu avec des trous vides, avec notamment de nombreuses conversions, alors que le milieu avec les inclusions en mortier permet à première vue de filtrer certaines bandes de fréquences, comme prédit avec la théorie de Floquet-Bloch.

Les signaux temporels calculés au niveau des sept points de mesure présentés en vert sur la FIGURE 4.26, correspondant aux points de mesure sur l'essai physique, sont ensuite utilisés pour analyser plus précisément le comportement des ondes se propageant dans le milieu hétérogène. Afin de séparer fictivement les ondes P et les ondes S dans les mesures temporelles et fréquentielles récupérées en chaque point, les signaux en vitesse sont décomposés en une composante radiale v_r et une composante tangentielle v_t , obtenues à partir du repère direct polaire centré sur la source.

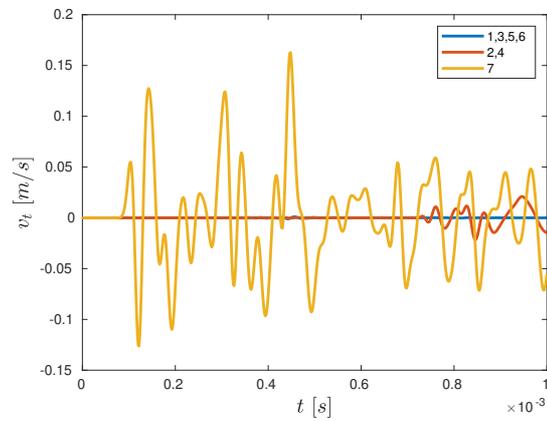
La FIGURE 4.30 présente les signaux temporels calculés dans la direction radiale v_r pour les trois configurations avec en jaune le signal proche de la source (point 7), en bleu la moyenne des signaux mesurés au groupe de points (1,3,5,6) et en rouge celle des signaux du groupe (2,4). De la même manière, les composantes tangentielles de la vitesse v_t dans le cas d'une sollicitation en onde S sont tracées sur la FIGURE 4.31. Ces courbes permettent de mettre en avant le fait que l'onde semble piégée dans le cas avec des trous vides



(a) Homogène.



(b) Inclusions en mortier.



(c) Trous vides.

FIGURE 4.31 – Réponse temporelle des capteurs 1 à 7 avec une sollicitation en onde S.

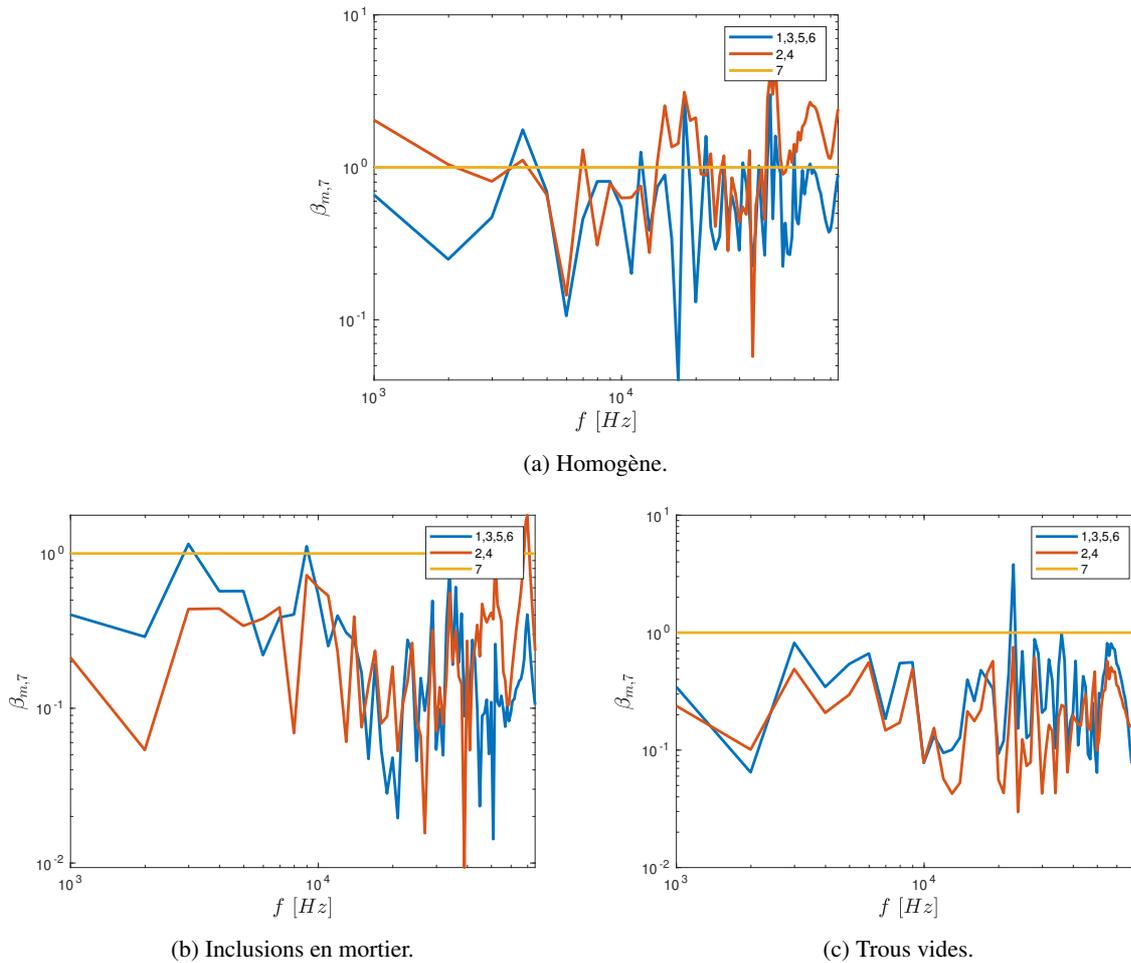


FIGURE 4.32 – Réponse temporelle des capteurs 1 à 7 avec une sollicitation en onde P.

car l'amplitude des signaux relevés après la source sont de faible amplitude et que les termes proches de la source. De plus dans le cas avec des inclusions en mortier, une forte diminution de l'amplitude du premier pic est à noter entre la source et les points de mesures après le matériau périodique.

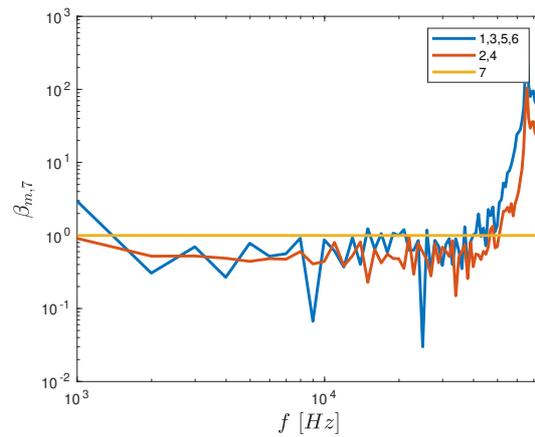
Comme pour la partie expérimentale, la transformée de Fourier est utilisée pour étudier la réponse fréquentielle des signaux. Les fonctions de transfert $\beta_{m,s}$ entre les transformées de Fourier des signaux aux points m et s sont choisies pour prendre en compte la différence de réponse entre les deux signaux et définies par :

$$\beta_{m,7}(f) = \frac{\hat{v}_m(f)}{\hat{v}_7(f)} \quad (4.13)$$

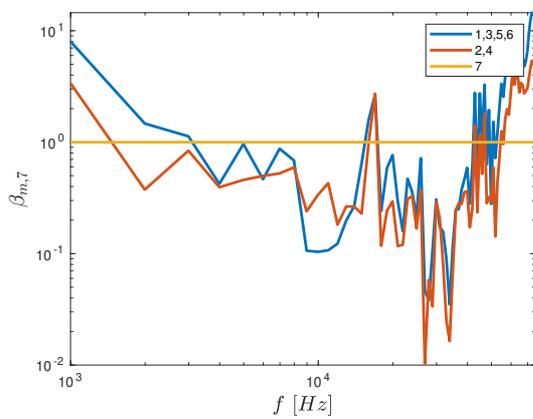
car la source est évaluée à partir du capteur $s = 7$.

Les fonctions de transfert relevées en chacun des points de mesure sont alors représentées sur la FIGURE 4.32 pour le cas avec une onde P comme source et sur la FIGURE 4.33 avec une onde S. Ces fonctions de transfert permettent de mettre en avant deux comportements différents en fonction de la nature de l'inclusion :

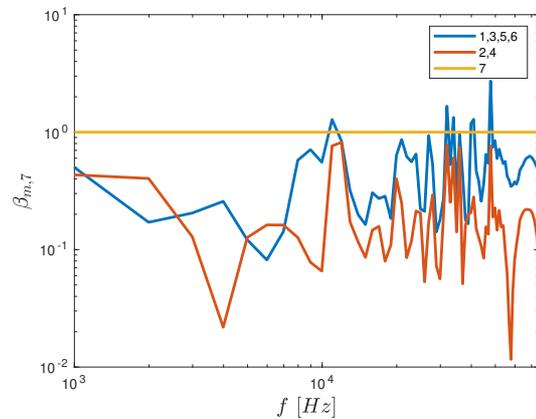
- une diminution de l'amplitude sur une très large gamme de fréquences en utilisant des trous vides, confirmant le fait que les ondes soient piégés à l'intérieur du milieu périodique, et



(a) Homogène.



(b) Inclusions en mortier.



(c) Trous vides.

FIGURE 4.33 – Réponse temporelle des capteurs 1 à 7 avec une sollicitation en onde S.

- une zone plus ou moins large de signal plus atténué dans le cas des inclusions en mortier située entre 15kHz et 30kHz et correspondant à la partie du signal temporel filtré.

Si la théorie de Floquet-Bloch ne permet pas de prédire le comportement dans le cas des trous vides avec notamment la localisation des ondes à l'intérieur du milieu périodique, les résultats obtenus pour des inclusions en mortier s'accordent avec les simulations numériques.

Conclusions

Les modèles 2D utilisant la théorie de Floquet-Bloch et les travaux sur l'analyse modale des guides d'ondes ouverts comportant des défauts ont permis de localiser les bandes de fréquence interdites grâce au tracé respectivement des courbes de dispersion et de l'analyse des valeurs propres du guide d'onde.

Pour tester l'efficacité du métamatériau, une étude expérimentale a été réalisée sur un bloc d'argile (kaolin) compactée dans lequel des trous ou des inclusions en ciment ont été distribués suivant une grille périodique.

Si les résultats expérimentaux ont permis de mettre en avant la présence de bandes de fréquences atténuées, les résultats diffèrent des études théoriques et numériques.

D'un point de vue expérimental, il peut être intéressant d'utiliser une source plus complexe que des signaux monochromatiques pour limiter le déplacement des capteurs et ainsi diminuer les incertitudes sur les mesures. Cependant, il faut pouvoir contrôler la source pour pouvoir la répéter entre les essais sur bloc homogène et sur les blocs avec les trous/inclusions.

D'un point de vue théorique et numérique, les différentes hypothèses fortes utilisées (modélisation 2D en acoustique, amortissement du milieu non pris en compte, absence de conditions limites dans le cas de l'analyse avec Floquet-Bloch, approximations sur les paramètres matériaux) peuvent participer à la comparaison peu concordante entre les résultats de modélisation et les données des essais.

Enfin, des simulations temporelles, reprenant la géométrie du modèle physique et en utilisant le code de calcul *OOFE*, a permis de mettre en lumière des bandes de fréquences atténuées cohérentes avec les prédictions faites avec la théorie de Floquet-Bloch.

Conclusions et perspectives

Ces travaux de thèse ont permis d'analyser et de mieux comprendre le comportement des ondes dans et aux bornes des matériaux architecturés périodiques en se basant sur des approches analytiques, numériques et expérimentales. Les approches utilisées correspondent aux problématiques du Génie Civil et plus particulièrement de la protection des ouvrages aux ondes sismiques.

Si le comportement des milieux périodiques infinis a été traité largement dans la littérature, les conclusions obtenues sur le cas des ondes acoustiques (CHAPITRE 2) a permis de mettre en place les outils nécessaires à l'analyse des milieux périodiques bornés. La première partie développe le comportement des ondes se propageant dans un milieu périodique dans une seule direction. La diffraction à la frontière entre un milieu homogène et un milieu stratifié périodique est ensuite étudiée d'un point de vue numérique en raccordant les deux demi-espace à l'échelle de la cellule. La troisième et la quatrième partie de ce chapitre s'intéressent au cas d'un milieu périodique 2D construit avec des inclusions circulaires dans le cas infini puis dans le cas d'une interface avec un milieu homogène. Le cas d'un milieu périodique borné, plus proche de la réalité, est ensuite traité grâce au développement d'une approche d'analyse modale d'un modèle de guide d'onde. Cette étude a notamment permis de montrer qu'un nombre minimal d'inclusions doit être implanté pour que les bandes interdites obtenues avec ce modèle et avec la théorie de Floquet-Bloch soient cohérentes.

Des extensions des études précédentes sont ensuite présentées dans le CHAPITRE 3. La première partie s'intéresse au couplage dû à la polarisation des composantes en plan des ondes élastiques et leur influence sur la dispersion des ondes dans le milieu. Comme précédemment, la possibilité pour l'onde de se propager dans la direction non-périodique complexifie la lecture des surfaces de dispersion et l'apparition des bandes de fréquences filtrées par le milieu périodique. La deuxième partie initie la résolution du problème de diffraction à l'interface entre un demi-espace homogène et un demi-espace stratifié. Si les équations du problème permettent d'utiliser un raisonnement analogue au cas des ondes non-polarisées, l'orthogonalité des modes n'a pas pu être démontrée ici dans le cas général. De plus, les besoins en termes de ressources numériques nécessaires à la résolution de ce problème avec MATHEMATICA sont assez importants et n'ont donc pas conduit à des résultats numériques du problème. L'analyse des courbes de dispersion obtenues grâce à l'étude d'une seule cellule a permis de déterminer des stratégies de dimensionnement qui peuvent s'appliquer sur ce type de structures périodiques. Les analyses paramétriques effectuées permettent notamment de mettre en évidence l'importance de la masse pour obtenir des bandes de fréquences interdites larges et en basse fréquence. Suivant cette conclusion, l'efficacité des structures localement résonantes obtenues en formant des inclusions composites multicouches a ensuite été démontrée et vérifiée. Enfin cette partie se conclut avec le développement théorique des problèmes d'interface entre un demi-espace homogène et un autre périodique avec une géométrie 3D.

Dans le CHAPITRE 4, des premiers résultats encourageants ont été produits en utilisant un modèle réduit et sur lequel différents types d'hétérogénéités ont été placées de manière périodique. Pour se rapprocher d'un cas réel, le centre de la zone ne possède pas d'inclusions. La propagation des ondes élastiques générées en surface par une source piézoélectrique est analysée à partir de sept accéléromètres répartis sur la surface

du bloc. Pour les deux types d'inclusions, les résultats sont analysés relativement à la réponse homogène du bloc. Les résultats ont été confrontés à deux modélisations du problème : la première à l'échelle de la cellule en utilisant la transformée de Floquet-Bloch et la seconde en adaptant le modèle de guide d'onde acoustique présenté dans le CHAPITRE 2. Les résultats obtenus à l'échelle de la cellule restent assez éloignés des mesures expérimentales même si une tendance est visible. Dans la modélisation sous forme de guide d'onde, un modèle est d'abord simulé avec la disposition exacte des inclusions, puis un autre avec la zone centrale possédant des inclusions. Cela permet de prendre en compte les défauts dans le milieu. On note que si le second cas (avec une zone centrale remplie d'inclusions) permet de retrouver de manière assez fiable les bandes de fréquences filtrées théoriquement obtenues avec la théorie de Floquet-Bloch, la première modélisation avec le défaut modifie considérablement la position des bandes de fréquences interdites. Enfin, des simulations temporelles ont été réalisées afin de mieux comprendre le comportement des ondes dans le milieu périodique borné. Les résultats produits ont mis en évidence des bandes de fréquences présentant une atténuation cohérente avec les prédictions réalisées en utilisant la théorie de Floquet-Bloch, mais aussi la présence d'ondes piégées qui n'étaient pas obtenues avec les simulations à l'échelle de la cellule.

Dans le cadre de ces travaux de thèse, des limites évidentes à ce genre de systèmes dans le cas de la protections aux séismes ont été montrées. En effet, même si l'utilisation des matériaux localement résonnants a permis de diminuer les fréquences d'apparition des bandes de fréquences filtrées par le matériau, les fréquences restent encore très supérieures à celles des ondes sismiques. L'adaptation de tels systèmes pour d'autres applications à plus hautes fréquences peut donc être développé, notamment la réduction du bruit dû au trafic ferroviaire (Van Hoorickx et al., 2017) ou la protection des équipements dans les ouvrages sensibles.

Avec les outils utilisés, la généralisation de l'étude des interfaces entre les milieux à microstructure périodique et les milieux homogènes n'a pas pu être poursuivie. Ainsi, le développement de moyens de simulation plus optimisés peut notamment permettre d'aboutir à une meilleure compréhension de la propagation des ondes. De plus, d'autres cas peuvent être envisagés, notamment le cas avec plusieurs interfaces.

L'étude des milieux périodiques bornés a permis de mettre en évidence des comportements proches de celui d'un milieu périodique infini et il peut être intéressant d'étudier si les effets des différents milieux périodiques se cumulent en gardant la même efficacité.

Les modèles de comportement utilisés dans le cadre de cette thèse sont limités au cadre des matériaux homogènes, linéaires et élastiques sans amortissement. La complexification du modèle pour prendre en compte plus de phénomènes comme la présence de différentes couches de sol et d'hétérogénéités, l'amortissement hystérétique variable des sols et la variabilité dans les propriétés et les paramètres géométriques des milieux périodiques imparfaits (Wagner et al., 2018) est nécessaire dans le cadre d'une utilisation dans le domaine sismique.

Le modèle expérimental a enfin montré que la prise en compte de défauts dans la périodicité peut mener à d'importantes modifications du comportement fréquentiel des ondes dans le milieu par rapport aux résultats obtenus dans le cas de milieux infinis périodiques parfaits. Il est néanmoins possible d'utiliser les effets de ces défauts (bandes de fréquences interdites plus petites mais plus nombreuses et sur des bandes fréquentielles plus larges) pour concevoir des milieux plus efficaces en fonction de l'usage et des critères (filtrage des basses fréquences, contenu fréquentiel de la source, contraintes de mise en œuvre), mais leur étude en est d'autant complexifiée puisque l'étude à l'échelle de la cellule n'est plus vérifiée.

Annexe A

Vérification de l'extension de Snell-Descartes sur des demi-espace homogènes sous incidence normale

L'approche utilisée pour déterminer la part et la forme des ondes transmises et réfléchies à une interface entre un milieu homogène et un milieu périodique est vérifiée ici dans des cas où les résultats sont connus, c'est-à-dire lorsque les deux milieux sont homogènes. Les demi-espaces sont étudiés en utilisant des motifs périodiques. On se place dans le cadre des ondes hors-plan présenté dans le CHAPITRE 2 régies par l'équation suivante dans le domaine de Floquet-Bloch pour des propriétés invariantes dans chaque demi-espace :

$$\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + ik \right) \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + ik \right) u^B \right] = (\mu k_z^2 - \rho \omega^2) u^B \quad (\text{A.1})$$

Le cas d'une onde incidente arrivant d'un milieu Ω_1 de propriétés μ_1 et ρ_1 sur une interface plane avec un milieu Ω_2 défini par μ_2 et ρ_2 . La configuration et les notations sont représentées sur la FIGURE A.1a. On se fixe ici à $\theta^I = 0$ et $L = 4$ m.

Les motifs et les conditions de bord utilisés pour étudier les deux milieux comme des milieux périodiques sont représentés sur la FIGURE A.1b. L'onde incidente $u^I(\mathbf{x})$ considérée est une onde plane d'amplitude unitaire s'écrivant dans le domaine fréquentiel :

$$u^I(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}^1 \cdot \mathbf{x}} \quad (\text{A.2})$$

avec $\mathbf{k} = k_z^1 \mathbf{e}_z = \frac{\omega}{V_{S,1}}$. $V_{S,1}$ est la vitesse de propagation des ondes de cisaillement dans le milieu Ω_1 .

Lorsque l'incidence est normale (c'est-à-dire $\theta^I = 0$), les coefficients de réflexion et de réfraction sont déterminés par les relations suivantes à partir des impédances acoustiques des milieux Z_1 et Z_2 (EQ.2.17).

$$R_{1,2} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (\text{A.3a})$$

$$T_{1,2} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (\text{A.3b})$$

Les expressions analytiques des transformées de Fourier temporelles des ondes réfléchies et transmises par un telle interface entre les milieux étant connues, on vérifie ici l'erreur commise sur la solution dans le cas

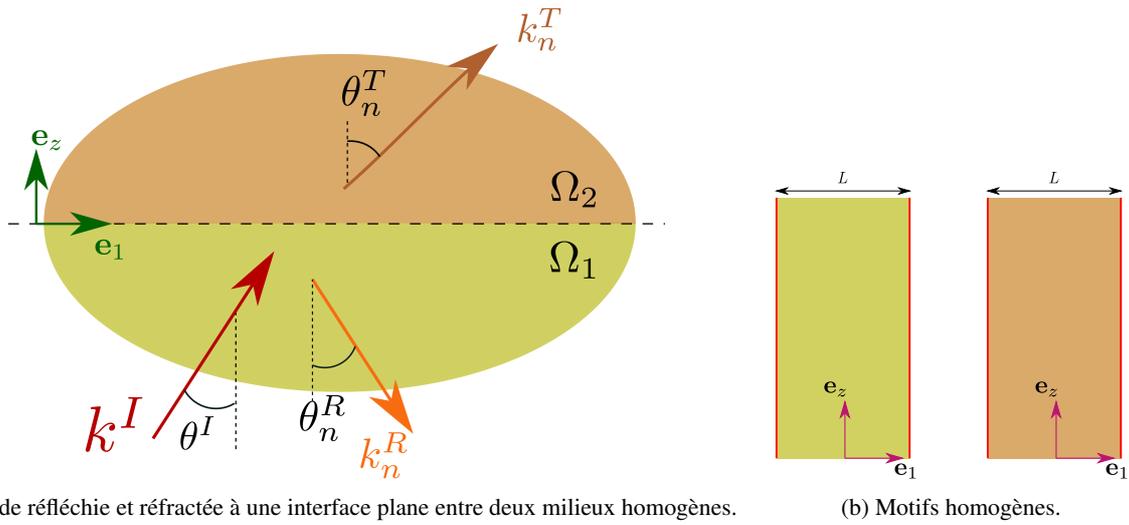


FIGURE A.1 – Description de l'étude réalisée pour vérifier les coefficient de transmission et de reflexion dans le cas de demi-espaces homogènes.

	Module de cisaillement μ_2 [GPa]	Masse volumique ρ_2 [kg/m ³]	Réflexion R	Transmission T
A.2a (homogène)	0,233	1750	0	1
A.2b	1	1900	0,367	0,633
A.2c	5	2100	0,671	0,329
A.2d	30	2400	0,860	0,140

TABLEAU A.1 – Valeurs de paramètres et des coefficients de réflexion et de transmission correspondants.

d'une onde incidente arrivant de manière oblique. Les ondes réfléchies $u^R(\mathbf{x})$ et transmises $u^T(\mathbf{x})$ s'écrivent :

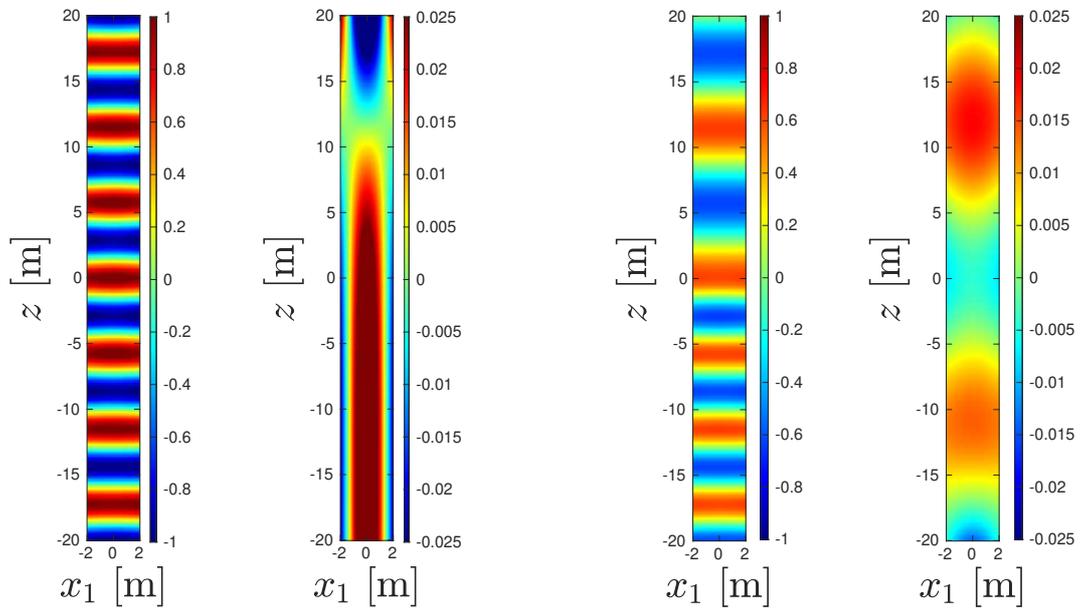
$$u^R(\mathbf{x}) = R e^{ik^1 z} \quad (\text{A.4a})$$

$$u^T(\mathbf{x}) = T e^{ik^2 z} \quad (\text{A.4b})$$

Une comparaison est donc effectuée entre la solution analytique des ondes à l'interface et le traitement du cas périodique. Différentes valeurs de l'impédance du milieu Ω_2 sont utilisées. Le milieu d'où provient l'onde incidente reste constant et l'autre milieu évolue pour modifier les coefficients à l'interface. La pulsation de l'onde incidente est $\omega = 400$ rad/s.

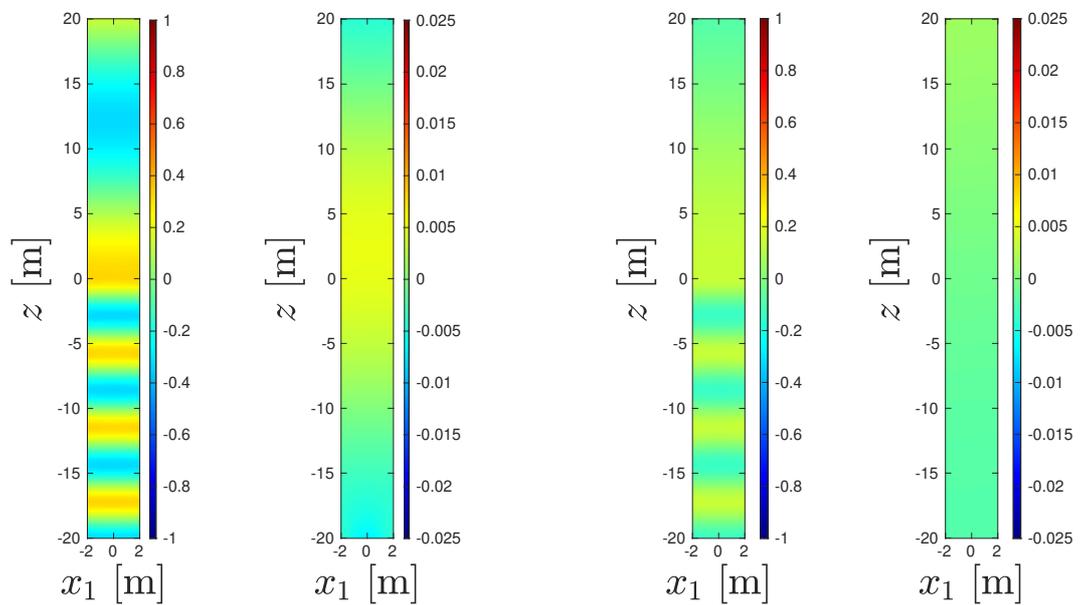
Des essais sont donc effectués pour 4 couples différents de propriétés matériau μ_i, ρ_i en fonction de Ω_i (avec $i = 1, 2$). Les configurations sont présentées dans le TABLEAU A.1. Les valeurs des coefficients de réflexion R et de transmission T correspondant à ses valeurs sont aussi présentés. Les résultats sont présentés ci-dessous. Pour chaque configuration, les résultats sont tracés dans le domaine fréquentiel (à gauche) puis les erreurs commises $u - (u^{inc} + u^R)$ (pour $z \in [-5L, 0]$) $u - u^T$ (pour $z \in [0, 5L]$) sur chaque solution sont représentées. Comme l'incidence est normale, l'unique mode prédominant est le mode de corps rigide, représentatif des ondes planes incidentes, réfléchies et réfractées dans le milieu sans modification de l'angle. La représentation de l'erreur montrent que l'erreur faite avec cette approximation est inférieure à 3% pour l'ensemble des configurations.

Ainsi, l'approche utilisée dans la thèse a été vérifiée sur des cas simples en utilisant les coefficients de réfraction et de réflexion connus dans le cas d'une propagation normale à l'interface.



(a) Cas n°1 (homogène).

(b) Cas n°2.



(c) Cas n°3.

(d) Cas n°4.

FIGURE A.2 – Pour chaque cas, champ de déplacement total dû à la rencontre d'une onde incidente à l'interface entre deux milieux homogènes dans le domaine fréquentiel.

Annexe B

Des simulations temporelles pour vérifier le comportement du guide d'ondes

Les simulations en temps des problèmes de guide d'onde sont réalisés avec le code de calcul *Object Oriented Finite Element* basé sur la méthode de discrétisation Galerkin discontinu en espace.

Le cadre de l'étude est la simulation temporelle des guides d'onde 2D tels que représentés sur la FIGURE B.1. On se place dans le cas d'un guide d'onde acoustique dont le comportement est donné par :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mu(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} u_y(\mathbf{x})) = -\rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u_y(\mathbf{x})}{\partial t^2} \quad (\text{B.1})$$

et d'épaisseur $c = 1$ m et de longueur $L = 36$ m. De part et d'autre de la zone d'intérêt le guide d'onde est rallongé pour éviter que les ondes réfléchies par les extrémités du guide d'onde n'interfèrent sur les résultats. Les mesures sont donc prises aux limites de la zone d'intérêt (de longueur $L_u = 24$ m). Les bords latéraux du guide d'onde sont libres d'effort. Les lignes en pointillés représentent les lieux où le déplacement est étudié. Les paramètres géométriques et les propriétés des matériaux sont résumés dans le TABLEAU B.1. Les indices m se réfèrent au matériau de la matrice et i à celui de l'inclusion. La cellule élémentaire choisie pour cet essai est celle représentée sur la FIGURE B.2. Comme indiqué, deux configurations différentes sont étudiées. Le guide d'onde est d'abord étudié sans hétérogénéités avant d'y ajouter seize inclusions réparties de manière périodique.

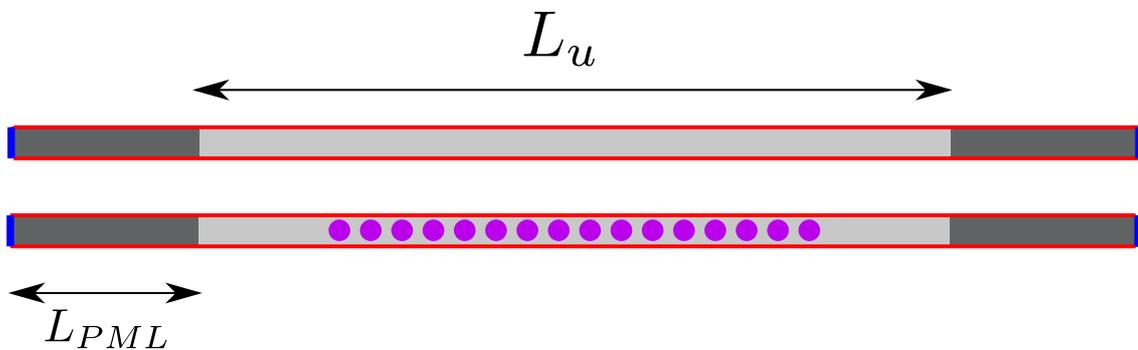


FIGURE B.1 – Géométrie du guide d'onde (fermé) avec les conditions limites et les points de mesure utilisés pour les signaux temporels. Le guide d'onde homogène se trouve en haut et le guide d'onde comportant 16 inclusions circulaires se trouve en bas.

c (m)	R (m)	μ_m (GPa)	μ_i (GPa)	ρ_m (kg/m ³)	ρ_i (kg/m ³)
1	0,346	0,233	30	1750	2400

TABLEAU B.1 – Paramètres des simulations temporelles du guide d'onde de la FIGURE B.1.

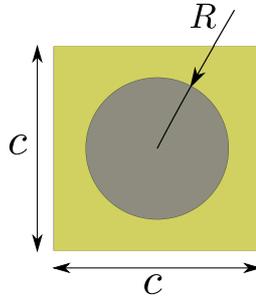


FIGURE B.2 – Cellule élémentaire composant le milieu périodique borné.

B.1 Réponse du guide d'onde dans les cas homogène et avec 16 inclusions

La perturbation en contrainte est appliquée sur le bord gauche du guide d'onde. On applique un signal correspondant à la somme de deux ondelettes de Ricker $R_T(t)$ définies dans le domaine temporel par :

$$R_T(t) = A \left[1 - 2 \left(\pi \frac{2 * t - T}{T} \right)^2 \right] e^{-\left(\pi \frac{2 * t - T}{T} \right)^2} \quad (\text{B.2})$$

avec A l'amplitude du signal et T la période du signal. . La représentation de ce signal dans les domaines temporels (en haut) et fréquentiels (en bas) sont donnés sur la FIGURE B.3.

Les paramètres des deux signaux utilisés sont $T_1 = 6,67$ ms et $T_2 = 2,86$ ms, ce qui correspond à des fréquences centrales de $f_1 = 300$ Hz et $f_2 = 700$ Hz.

La perturbation est une contrainte appliquée sur l'ensemble du bord gauche du guide d'onde, ce qui permet de créer une onde plane se propageant dans la direction \mathbf{e}_1 en utilisant le principe de Huygens. Les déplacements au niveau des zones délimitées par les pointillés pour un milieu homogène sont représentés sur la FIGURE B.4. Du côté gauche, le signal est représenté en rouge et en bleu du côté droit. Le temps de simulation permet d'observer l'onde réfléchiée par le bord opposé. Le déplacement ne correspond pas au signal représenté sur la FIGURE B.3 car le signal est généré en contrainte.

Lorsque les inclusions sont mises en place, la réponse temporelle est modifiée à cause de ces hétérogénéités. La FIGURE B.5 présente le signal obtenu à gauche et à droite du milieu périodique en termes de déplacements. Contrairement au cas homogène (FIGURE B.4), on remarque avec le signal rouge, qui représente ce qu'il se passe du côté gauche du guide d'onde, les ondes sont réfléchies beaucoup plus tôt et le signal réfléchi est fortement perturbé. Le signal correspondant aux ondes ayant traversé le milieu est atténué et le contenu fréquentiel est différent.

ANNEXE B. DES SIMULATIONS TEMPORELLES POUR VÉRIFIER LE COMPORTEMENT DU GUIDE D'ONDES

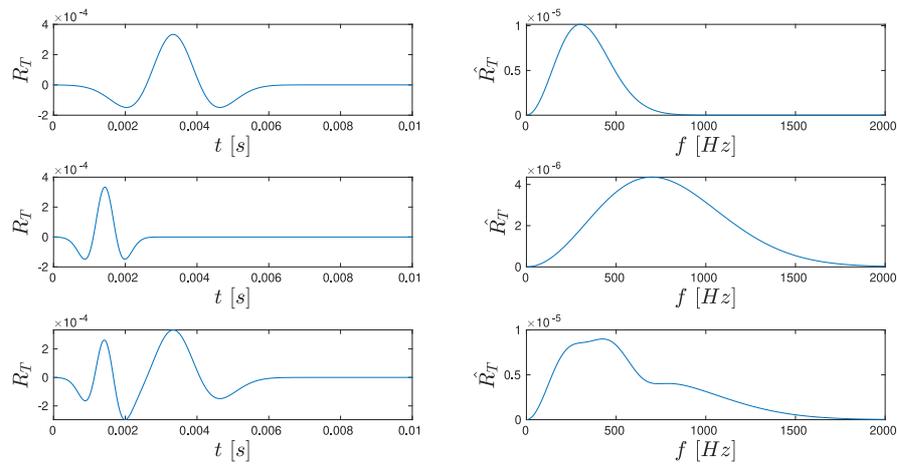


FIGURE B.3 – Représentation temporelle et fréquentielle du signal élémentaire (ondelette de Ricker) utilisé pour les simulation temporelles. Ici $T = 6,67$ ms.

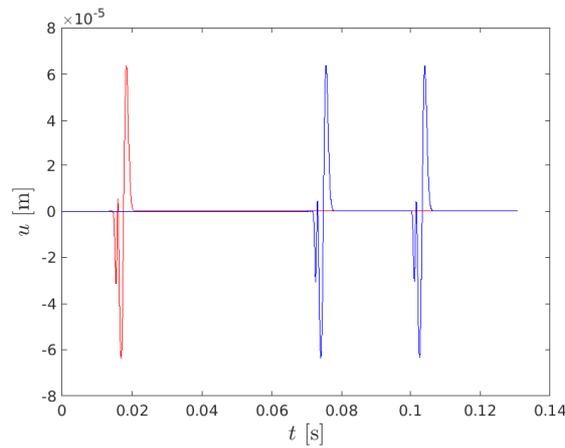


FIGURE B.4 – Évolution temporelle des déplacements mesurés à gauche (rouge) et à droite (bleu) de la zone d'intérêt dans un guide d'onde homogène.

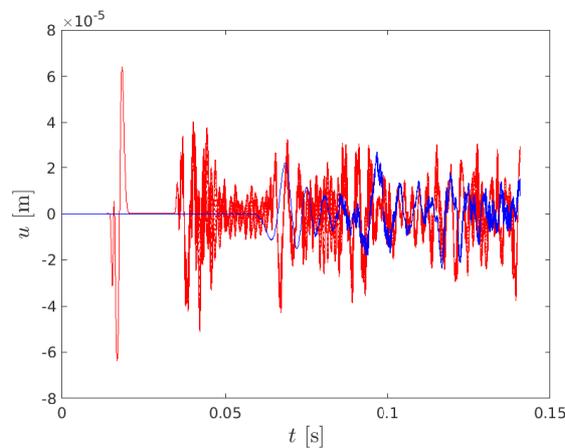


FIGURE B.5 – Évolution temporelle des déplacements mesurés à gauche (rouge) et à droite (bleu) de la zone d'intérêt dans un guide d'onde avec 16 inclusions placées périodiquement.

B.2 Comparaison dans le domaine fréquentiel

Une représentation fréquentielle des signaux est ensuite utilisée pour tenter de faire apparaître des bandes de coupures en fréquence dues à la présence des inclusions placées de manière périodique. De plus, afin de traiter uniquement la partie des ondes transmise dans le milieu, un fenêtrage est effectué sur les signaux temporels afin de ne pas prendre en compte les ondes piégées dans la partie en aval des inclusions. Ces courbes permettent d'observer un changement dans la façon dont les ondes se propagent dans le milieu. En effet, le contenu fréquentiel du signal est ici modifié et l'énergie est alors concentrée en basses fréquences. Le signal en bleu possède en effet un spectre fréquentiel entre 0 et 800Hz alors que le signal de sortie présente une bande de fréquence coupée entre 250 et 650Hz. L'amplitude du signal mesuré avant le milieu périodique est par contre plus important que la source.

Les résultats temporels et fréquentiels de la propagation d'une onde dans un milieu périodique borné permettent d'observer des bandes de fréquences filtrées par le milieu périodique avec seize inclusions. Ces résultats sont en accord avec les conclusions partielles obtenues dans le CHAPITRE 2 sur le nombre minimal d'inclusions à mettre en place pour retrouver le comportement d'un milieu périodique infini.

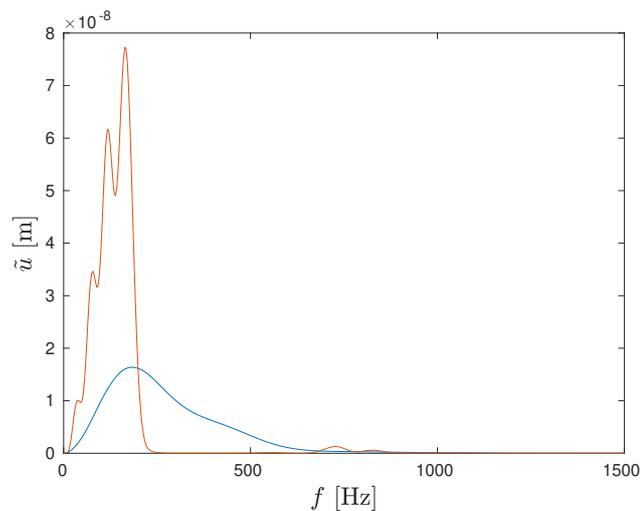


FIGURE B.6 – Transformée de Fourier des déplacements mesurés à gauche (rouge) et à droite (bleu) de la zone d'intérêt dans un guide d'onde avec 16 inclusions placées périodiquement.

Bibliographie

- Achaoui, Y., Ungureanu, B., Enoch, S., Brûlé, S., and Guenneau, S. (2016). Seismic waves damping with arrays of inertial resonators. *Extreme Mechanics Letters*, 8 :30–37. 8
- Addo, K. O. and Robertson, P. K. (1992). Shear-wave velocity measurement of soils using Rayleigh waves. *Can. Geotech. J.*, 29(4) :558–568. 6
- AFNOR (1998). Eurocode 8 : Calcul des structures pour leur résistance aux séismes - NF EN 1998-1. 6
- Aki, K. (2002). *Quantitative seismology*. University Science Books, Sausalito, Sausalito (Calif.) Mill Valley (Calif.), 2nd édition. edition. 12
- Albertini, F., Dirrenberger, J., Molotnikov, A., and Sollogoub, C. (2019). Computational Investigation of the Effective Mechanical Behavior for 3D Pre-Buckled Auxetic Lattices. *Journal of Applied Mechanics*, 86(111003). 7
- Andersen, L. V. (2015). Using periodicity to mitigate ground vibration. *Proceedings of Compdyn 2015*, pages 922–932. 29
- Aravantinos-Zafiris, N. and Sigalas, M. M. (2015). Large scale phononic metamaterials for seismic isolation. *Journal of Applied Physics*, 118(6) :064901. 8
- Aubry, D. (1987). Sur une approche intégrée de l'interaction sismique sol-structure. *Rev. Fr. Geotech.*, (38) :5–24. 10
- Aubry, D., Clouteau, D., and Svay, J. (1994). The seismic horizontal borehole problem : A mixed BEM-FEM-model approach in the frequency domain. In *SEG Technical Program Expanded Abstracts 1994*, SEG Technical Program Expanded Abstracts, pages 28–31. Society of Exploration Geophysicists. 19
- Bai, X. (2017). *Modélisation par éléments finis de la propagation des ondes ultrasonores dans des matériaux polycristallins*. PhD thesis, Paris Saclay. 13
- Bathe, K.-J. (1996). *Finite Element Procedures*. prentice Hall. Google-Books-ID : rWvefGICfO8C. 13
- Beudet, P. R. (1970). Elastic wave propagation in heterogeneous media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 60(3) :769–784. Publisher : GeoScienceWorld. 66
- Benzoni-Gavage, S. (2010). Spectre des opérateurs différentiels. page 31. 46
- Berenger, J.-P. (1994). A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114(2) :185–200. 14

- Bettess, P. (1977). Infinite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11(1) :53–64. [_eprint : https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.1620110107](https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.1620110107). 14
- Bloch, F. (1929). Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern. *Z. Physik*, 52(7) :555–600. 15
- Bonnet-Ben Dhia, A.-S., Chesnel, L., and Pagneux, V. (2018a). Trapped modes and reflectionless modes as eigenfunctions of the same spectral problem. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 474(2213) :20180050. 47
- Bonnet-Ben Dhia, A.-S., Fliss, S., and Tonnoir, A. (2018b). The halfspace matching method : A new method to solve scattering problems in infinite media. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 338 :44–68. 14
- Boutin, C. and Auriault, J. (1993). Rayleigh scattering in elastic composite materials. *International Journal of Engineering Science*, 31(12) :1669–1689. 14
- Brillouin, L. (1946). *Wave Propagation in Periodic Structures*. McGraw Hill, S.I. OCLC : 498587574. 16
- Brunet, T., Leng, J., and Mondain-Monval, O. (2013). Soft Acoustic Metamaterials. *Science*, 342(6156) :323–324. 7
- Brûlé, S., Javelaud, E., Enoch, S., and Guenneau, S. (2014). Experiments on Seismic Metamaterials : Molding Surface Waves. *Phys. Rev. Lett.*, 112(13) :133901. 8
- Cacciola, P., Espinosa, M. G., and Tombari, A. (2015). Vibration control of piled-structures through structure-soil-structure-interaction. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 77 :47–57. 7
- Caicedo Hormaza, B. and Thorel, L. (2014). Centrifuge modelling of unsaturated soils. *Journal of Geotechnical Engineering Sciences*, (1-2) :83–103. 100
- Capdeville, Y., Chaljub, E., and Montagner, J. P. (2003). Coupling the spectral element method with a modal solution for elastic wave propagation in global earth models. *Geophysical Journal International*, 152(1) :34–67. 13
- Capdeville, Y., Guillot, L., and Marigo, J.-J. (2010). 2-D non-periodic homogenization to upscale elastic media for P–SV waves. *Geophysical Journal International*, 182(2) :903–922. 14
- Celli, P. and Gonella, S. (2015). Manipulating waves with LEGO® bricks : A versatile experimental platform for metamaterial architectures. *Appl. Phys. Lett.*, 107(8) :081901. 8
- Chen, H., Nassar, H., and Huang, G. L. (2018). A study of topological effects in 1D and 2D mechanical lattices. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 117 :22–36. 7
- Chen, X., Sun, J.-Z., and Yuan, J.-B. (2006). An Improved Equivalent Homogenous Half-Space Method and Reverse Fitting Analysis of Rayleigh Wave Dispersion Curves. *Chinese Journal of Geophysics*, 49(2) :489–498. 111
- Chen, Y., Qian, F., Scarpa, F., Zuo, L., and Zhuang, X. (2019). Harnessing multi-layered soil to design seismic metamaterials with ultralow frequency band gaps. *Materials & Design*, 175 :107813. 19

- Chigrin, D. N., Enoch, S., Torres, C. M. S., and Tayeb, G. (2003). Self-guiding in two-dimensional photonic crystals. *Opt. Express, OE*, 11(10) :1203–1211. Publisher : Optical Society of America. [43](#)
- Clouteau, D. and Aubry, D. (2001). Modifications of the ground motion in dense urban areas. *J. Comp. Acous.*, 09(04) :1659–1675. [7](#)
- Clouteau, D., Elhabre, M. L., and Aubry, D. (2000). Periodic BEM and FEM-BEM coupling. *Computational Mechanics*, 25(6) :567–577. [19](#)
- Cockburn, B., Karniadakis, G. E., and Shu, C.-W. (2000). *Discontinuous Galerkin Methods : Theory, Computation and Applications*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition. [13](#)
- Colombi, A., Guenneau, S., Roux, P., and Craster, R. V. (2016a). Transformation seismology : composite soil lenses for steering surface elastic Rayleigh waves. *Scientific Reports*, 6 :25320. [8](#)
- Colombi, A., Roux, P., Guenneau, S., Gueguen, P., and Craster, R. V. (2016b). Forests as a natural seismic metamaterial : Rayleigh wave bandgaps induced by local resonances. *Scientific Reports*, 6 :19238. [7](#)
- Colombi, A., Zaccherini, R., Aguzzi, G., Palermo, A., and Chatzi, E. (2020). Mitigation of seismic waves : Metabarriers and metafoundations bench tested. *Journal of Sound and Vibration*, 485 :115537. [87](#)
- D’Alessandro, L., Bahr, B., Daniel, L., Weinstein, D., and Ardito, R. (2017). Shape optimization of solid–air porous phononic crystal slabs with widest full 3D bandgap for in-plane acoustic waves. *Journal of Computational Physics*, 344 :465–484. [8](#)
- De Abreu Corrêa, L. (2019). *Large scale numerical wave propagation in a randomly-fluctuating continuum model of ballasted railway tracks*. PhD thesis, Université Paris-Saclay. [13](#)
- De Abreu Corrêa, L., Cottureau, R., and Faure, B. (2020). Dispersion analysis in ballasted railway tracks and Anderson localization in granular media. *Journal of Sound and Vibration*, 465 :115010. [7](#)
- De Abreu Corrêa, L., Quezada, J. C., Cottureau, R., d’Aguiar, S. C., and Voivret, C. (2017). Randomly-fluctuating heterogeneous continuum model of a ballasted railway track. *Comput Mech*, 60(5) :845–861. [7](#)
- Del Broccolo, S. (2020). *Sandwich core periodic cell topology effects*. PhD thesis, Université Bourgogne Franche-Comté ; University of Bristol. [45](#)
- DeSanto, J. A. (2010). Exact boundary integral equations for scattering of scalar waves from infinite rough interfaces. *Wave Motion*, 47(3) :139–145. [19](#)
- Drosos, V. A. and Anastasopoulos, I. (2015). Experimental investigation of the seismic response of classical temple columns. *Bull Earthquake Eng*, 13(1) :299–310. [120](#)
- Du, Q., Zeng, Y., Huang, G., and Yang, H. (2017). Elastic metamaterial-based seismic shield for both Lamb and surface waves. *AIP Advances*, 7(7) :075015. [8](#), [76](#)
- Dudchenko, A. (2018). *Numerical analysis of surface Rayleigh wave interaction with seismic barriers and pile fields accounting elastic-plastic soil behaviour*. PhD thesis, Université d’État Lomonossov de Moscou (Moscou, Russie). [103](#)

- Elgamal, A., Yang, Z., and Stepp, J. C. (2004). Seismic downhole arrays and applications in practice. In *Proceedings of the International Workshop for Site Selection, Installation and Operation of Geotechnical Strong-Motion Arrays. Consortium of Organizations for Strong-Motion Observation Systems (COSMOS)*. 109
- Escudero, O. A. I. (2006). *Diffraction multiple des ondes en milieu aléatoire : application à l'étude de l'effet site-ville*. PhD thesis, Châtenay-Malabry, Ecole centrale de Paris. 7
- Ewing, M. W. (1957). *Elastic Waves in Layered Media*. New York, McGraw-Hill. 10
- Farhat, M., Guenneau, S., Movchan, A. B., and Enoch, S. (2008). Achieving invisibility over a finite range of frequencies. *Opt. Express, OE*, 16(8) :5656–5661. 115
- Floquet, G. (1883). Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 12 :47–88. 15
- Fossat, P., Boutin, C., and Ichchou, M. (2018). Dynamics of periodic ribbed plates with inner resonance : Analytical homogenized model and dispersion features. *International Journal of Solids and Structures*, 152-153 :85–103. 14, 87
- Fowler, C. (2005). *The Solid Earth : An Introduction to Global Geophysics*. Cambridge University Press, 2ed. edition. 4, 5
- Garnell, E., Doaré, O., and Rouby, C. (2020). Coupled vibro-acoustic modeling of a dielectric elastomer loudspeaker. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 147(3) :1812–1821. 47
- Gatti, F. (2017). *Analyse physics-based de scénarios sismiques «de la faille au site» : prédiction de mouvement sismique fort pour l'étude de vulnérabilité sismique de structures critiques*. PhD thesis, Université Paris-Saclay (ComUE). 6
- Gholamy, A. and Kreinovich, V. (2014). Why Ricker wavelets are successful in processing seismic data : Towards a theoretical explanation. In *2014 IEEE Symposium on Computational Intelligence for Engineering Solutions (CIES)*, pages 11–16. 120
- Goursaud, B. (2010). *Etude mathématique et numérique de guides d'ondes ouverts non uniformes, par approche modale*. PhD thesis, Palaiseau, Ecole polytechnique. 46, 47
- Guéguen, P., Bard, P.-Y., and Chávez-García, F. J. (2002). Site-City Seismic Interaction in Mexico City–Like Environments : An Analytical Study. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 92(2) :794–811. Publisher : GeoScienceWorld. 7
- Ichchou, M. N., Le Bot, A., and Jezequel, L. (1997). Energy models of one-dimensional, multi-propagative systems. *Journal of Sound and Vibration*, 201(5) :535–554. 13
- Johnson, C. (1993). Discontinuous Galerkin finite element methods for second order hyperbolic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 107(1) :117–129. 13
- Kadic, M., Frenzel, T., and Wegener, M. (2018). When size matters. *Nature Phys*, 14(1) :8–9. 45
- Kapralos, B., Jenkin, M., and Milios, E. (2008). Sonel Mapping : A Probabilistic Acoustical Modeling Method. *Building Acoustics*, 15(4) :289–313. 6

- Kittel, C. (1962). *Elementary solid state physics : a short course*. Wiley, New York. OCLC : 534646. 16
- Komatitsch, D., Ritsema, J., and Tromp, J. (2002). The Spectral-Element Method, Beowulf Computing, and Global Seismology. *Science*, 298(5599) :1737–1742. 13
- Ladevèze, P., Arnaud, L., Rouch, P., and Blanzé, C. (2001). The variational theory of complex rays for the calculation of medium-frequency vibrations. *Engineering Computations*, 18(1/2) :193–214. 13
- Langley, R. S. (1996). The Response Of Two-Dimensional Periodic Structures To Point Harmonic Forcing. *Journal of Sound and Vibration*, 197(4) :447–469. 19
- Laude, V., Wilm, M., Benchabane, S., and Khelif, A. (2005). Full band gap for surface acoustic waves in a piezoelectric phononic crystal. *Phys. Rev. E*, 71(3) :036607. 8
- Le Bot, A. (1998). A VIBROACOUSTIC MODEL FOR HIGH FREQUENCY ANALYSIS. *Journal of Sound and Vibration*, 211(4) :537–554. 13
- LeVeque, R. J. (2002). *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 1 edition. 13
- Li, X. D. and Wiberg, N.-E. (1996). Structural Dynamic Analysis by a Time-Discontinuous Galerkin Finite Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(12) :2131–2152. 13
- Liu, Z., Qin, K.-Q., and Yu, G.-L. (2020). Partially Embedded Gradient Metabarrier : Broadband Shielding from Seismic Rayleigh Waves at Ultralow Frequencies. *J. Eng. Mech.*, 146(5) :04020032. 7
- Lysmer, J. and Drake, L. A. (1971). The propagation of Love waves across nonhorizontally layered structures. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 61(5) :1233–1251. 24
- Lysmer, J. and Waas, G. (1972). Shear waves in plane infinite structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 98(1) :85–105. 24
- Ma, G. and Sheng, P. (2016). Acoustic metamaterials : From local resonances to broad horizons. *Science Advances*, 2(2) :e1501595. 87
- Maurel, A., Marigo, J.-J., Pham, K., and Guenneau, S. (2018). Conversion of Love waves in a forest of trees. *Phys. Rev. B*, 98(13) :134311. 7
- Mead, D. J. (1975). Wave propagation and natural modes in periodic systems : I. Mono-coupled systems. *Journal of Sound and Vibration*, 40(1) :1–18. 15
- Mead, D. M. (1996). Wave Propagation In Continuous Periodic Structures : Research Contributions From Southampton, 1964–1995. *Journal of Sound and Vibration*, 190(3) :495–524. 15
- Mezher, N. and Clouteau, D. (2003). Etude numérique de l'effet site-ville par homogénéisation périodique - Cas de la ville de Nice. page 9. 7
- Murillo, C., Caicedo, B., Thorel, L., and Dano, C. (2013). Elastic response of unsaturated soils. In *Advances in Unsaturated Soils*. CRC Press. 101
- Murillo, C., Thorel, L., and Caicedo, B. (2009). Ground vibration isolation with geofom barriers : Centrifuge modeling. *Geotextiles and Geomembranes*, 27(6) :423–434. 7

- Murillo Feo, C. A. (2006). *Caracterización geotécnica de estructuras multicapas en centrífuga empleando ondas de superficie*. PhD thesis, Uniandes,, Bogotá :. 101
- Naeim, F. (1989). *The seismic design handbook*. Publisher : New York, NY (USA); Van Nostrand Reinhold Co., Inc. 4
- Nassar, H., He, Q. C., and Auffray, N. (2015). Willis elastodynamic homogenization theory revisited for periodic media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 77 :158–178. 68
- Nemat-Nasser, S. (2015). Anti-plane shear waves in periodic elastic composites : band structure and anomalous wave refraction. *Proc. R. Soc. A*, 471(2180) :20150152. 32
- Pageot, D., Leparoux, D., Le Feuvre, M., Durand, O., Côte, P., and Capdeville, Y. (2017). Improving the seismic small-scale modelling by comparison with numerical methods. *Geophysical Journal International*, 211(1) :637–649. 100
- Pagneux, V. (2013). Trapped Modes and Edge Resonances in Acoustics and Elasticity. In Craster, R. V. and Kaplunov, J., editors, *Dynamic Localization Phenomena in Elasticity, Acoustics and Electromagnetism*, CISM International Centre for Mechanical Sciences, pages 181–223. Springer, Vienna. 46
- Pal, R. K., Rosa, M. I. N., and Ruzzene, M. (2019). Topological bands and localized vibration modes in quasiperiodic beams. *New J. Phys.*, 21(9) :093017. Publisher : IOP Publishing. 19
- Palermo, A., Krödel, S., Marzani, A., and Daraio, C. (2016). Engineered metabarrier as shield from seismic surface waves. *Scientific Reports*, 6 :39356. 8
- Pecker, A. (1984). *Dynamique des sols*. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées. 10
- Pendry, J. B. (2000). Negative Refraction Makes a Perfect Lens. *Phys. Rev. Lett.*, 85(18) :3966–3969. 8
- Pendry, J. B., Schurig, D., and Smith, D. R. (2006). Controlling Electromagnetic Fields. *Science*, 312(5781) :1780–1782. 8
- Pierre, J. (2011). *Ondes élastiques en milieu périodique et réfraction négative*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI. 16
- Pinault, H., Arlaud, E., and Balmes, E. (2020). A general superelement generation strategy for piecewise periodic media. *Journal of Sound and Vibration*, 469 :115133. 45
- Recoquilly, A. (2018). *Méthodes d'échantillonnage appliquées à l'imagerie de défauts dans un guide d'ondes élastiques*. PhD thesis, Université Paris-Saclay. 46
- Renaud, A. (2018). *The Discontinuous Galerkin Material Point Method : Application to hyperbolic problems in solid mechanics*. PhD thesis, École centrale de Nantes. 13
- Roux, P., Bindi, D., Boxberger, T., Colombi, A., Cotton, F., Douste-Bacque, I., Garambois, S., Gueguen, P., Hillers, G., Hollis, D., Lecocq, T., and Pondaven, I. (2018). Toward Seismic Metamaterials : The METAFORÉT Project. *Seismological Research Letters*, 89(2A) :582–593. 7
- Rupin, M., Lemoult, F., Lerosey, G., and Roux, P. (2014). Experimental Demonstration of Ordered and Disordered Multiresonant Metamaterials for Lamb Waves. *Phys. Rev. Lett.*, 112(23) :234301. 8

- Ruzzene, M., Scarpa, F., and Soranna, F. (2003). Wave beaming effects in two-dimensional cellular structures. *Smart Mater. Struct.*, 12(3) :363–372. Publisher : IOP Publishing. 19
- Rénalier, F., Bièvre, G., Valldosera, L., Jongmans, D., Flavigny, E., and Foray, P. (2010). Caractérisation de l’endommagement d’une argile par mesures de la vitesse des ondes de cisaillement. page 9 pages. 111
- Sanchez-Hubert, J. and Turbe, N. (1986). Ondes élastiques dans une bande périodique. *ESAIM : M2AN*, 20(3) :539–561. 24
- Scarpa, F., Ouisse, M., Collet, M., and Saito, K. (2013). Kirigami Auxetic Pyramidal Core : Mechanical Properties and Wave Propagation Analysis in Damped Lattice. *Journal of Vibration and Acoustics*, 135(041001). 7
- Schurig, D., Mock, J. J., Justice, B. J., Cummer, S. A., Pendry, J. B., Starr, A. F., and Smith, D. R. (2006). Metamaterial Electromagnetic Cloak at Microwave Frequencies. *Science*, 314(5801) :977–980. 8
- Semblat, J.-F., Kham, M., and Bard, P.-Y. (2008). Seismic-Wave Propagation in Alluvial Basins and Influence of Site-City Interaction. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 98(6) :2665–2678. 7
- Semblat, J.-F., Lenti, L., and Gandomzadeh, A. (2011). A simple multi-directional absorbing layer method to simulate elastic wave propagation in unbounded domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 85(12) :1543–1563. 14
- Spadoni, A., Ruzzene, M., Gonella, S., and Scarpa, F. (2009). Phononic properties of hexagonal chiral lattices. *Wave Motion*, 46(7) :435–450. 19
- Srivastava, A. (2016). Metamaterial properties of periodic laminates. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 96 :252–263. 32
- Stoneley, R. (1924). Elastic Waves at the Surface of Separation of Two Solids. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 106(738) :416–428. 6
- Suzuki, K. (2008). Earthquake Damage to Industrial Facilities and Development of Seismic and Vibration Control Technology. *Journal of System Design and Dynamics*, 2(1) :2–11. 39
- Tateo, F. (2013). *Distributed shunted piezoelectric cells for vibroacoustic interface optimization*. PhD thesis, Besançon. 45
- Tian, B. (2012). *Numerical simulation of elastic wave propagation in honeycomb core sandwich plates*. PhD thesis, Châtenay-Malabry, Ecole centrale de Paris. 18, 23, 25, 28, 30
- Tian, B., Tie, B., and Aubry, D. (2011). Théorie des Ondes Bloch Appliquée à la Modélisation de la Propagation d’Ondes Élastiques dans des Milieux Périodiques. page 9. 26
- Tie, B., Aubry, D., and Boullard, A. (2003). Adaptive computation for elastic wave propagation in plate/shell structures under moving loads. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 12(6) :717–736. 13
- Tie, B. and Mouronval, A. S. (2020). Systematic development of upwind numerical fluxes for the space discontinuous Galerkin method applied to elastic wave propagation in anisotropic and heterogeneous media with physical interfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 372 :113352. 13

- Tie, B., Mouronval, A. S., Nguyen, V. D., Series, L., and Aubry, D. (2018). A unified variational framework for the space discontinuous Galerkin method for elastic wave propagation in anisotropic and piecewise homogeneous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 338 :299–332. [13](#)
- Tie, B., Tian, B. Y., and Aubry, D. (2013). Theoretical and numerical investigation of HF elastic wave propagation in two-dimensional periodic beam lattices. *Acta Mech Sin*, 29(6) :783–798. [29](#)
- Tie, B., Tian, B. Y., and Aubry, D. (2016). Theoretical and numerical modeling of membrane and bending elastic wave propagation in honeycomb thin layers and sandwiches. *Journal of Sound and Vibration*, 382 :100–121. [17](#)
- Tisseur, F. and Meerbergen, K. (2001). The Quadratic Eigenvalue Problem. *SIAM Rev.*, 43(2) :235–286. Publisher : Society for Industrial and Applied Mathematics. [72](#)
- Tjandrawidjaja, Y. (2019). *Some contributions to the analysis of the Half-Space Matching Method for scattering problems and extension to 3D elastic plates*. PhD thesis, Ensta Paristech Université Paris Saclay. [14](#)
- Torres-Silva, H. and Cabezas, D. T. (2013). Chiral Seismic Attenuation with Acoustic Metamaterials. [19](#)
- Valencia, C., Gomez, J., and Guarín-Zapata, N. (2019). A General-Purpose Element-Based Approach to Compute Dispersion Relations in Periodic Materials with Existing Finite Element Codes. *J. Theor. Comp. Acout.*, page 1950005. [65](#), [76](#)
- Valensi, R., Leparoux, D., Durand, O., Bretaudeau, F., and Côte, P. (2015). Multicomponent reduced scale seismic modelling : upgrade of the MUSC laboratory with application to polarization observations. *Geophysical Journal International*, 202(3) :1993–2024. [100](#)
- Van Hoorickx, C., Schevenels, M., and Lombaert, G. (2017). Double wall barriers for the reduction of ground vibration transmission. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 97 :1–13. [128](#)
- Veselago, V. G. (1968). The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of varepsilon and mu. *Sov. Phys. Usp.*, 10(4) :509. [7](#)
- Wagner, P.-R., Dertimanis, V. K., Chatzi, E. N., and Beck, J. L. (2018). Robust-to-Uncertainties Optimal Design of Seismic Metamaterials. *Journal of Engineering Mechanics*, 144(3) :04017181. [128](#)
- Wang, K., Zhou, J., Wang, Q., Ouyang, H., and Xu, D. (2019). Low-frequency band gaps in a meta-material rod by negative-stiffness mechanisms : Design and experimental validation. *Appl. Phys. Lett.*, 114(25) :251902. Publisher : American Institute of Physics. [19](#)
- Willis, J. R. (2016). Negative refraction in a laminate. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 97 :10–18. [24](#)
- Willis, J. R. (2020). Transmission and reflection at the boundary of a random two-component composite. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 476(2235) :20190811. [71](#)
- Yang, W., Li, Z.-M., Shi, W., Xie, B.-H., and Yang, M.-B. (2004). Review on auxetic materials. *Journal of Materials Science*, 39(10) :3269–3279. [7](#)

- Yarmohammadi, F., Rafiee-Dehkharghani, R., Behnia, C., and Aref, A. J. (2019). Design of wave barriers for mitigation of train-induced vibrations using a coupled genetic-algorithm/finite-element methodology. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 121 :262–275. [7](#)
- Zaccherini, R., Colombi, A., Palermo, A., Dertimanis, V. K., Marzani, A., Thomsen, H. R., Stojadinovic, B., and Chatzi, E. N. (2019). Locally resonant metasurfaces for shear waves in granular media. *arXiv :1912.00617 [physics]*. arXiv : 1912.00617. [87](#)
- Zhang, W. and Shen, Y. (2010). Unsplit complex frequency-shifted PML implementation using auxiliary differential equations for seismic wave modeling. *GEOPHYSICS*, 75(4) :T141–T154. [14](#)

Titre : L'atténuation des ondes sismiques en utilisant des métamatériaux

Mots clés : Métamatériaux, Théorie de Floquet-Bloch, Ondes, Parasismique, Analyse modale

Résumé : Afin de protéger les structures existantes, conçues avant la mise en place des normes parasismiques, du risque sismique, une stratégie prometteuse est de réduire l'amplitude des ondes sismiques arrivant au niveau des ouvrages en traitant localement le sous sol pour en modifier ses caractéristiques mécaniques. Il est alors possible de modifier la distribution d'énergie sismique pour certaines gammes de fréquences et ainsi limiter les dégâts sur des ouvrages. Or, pour mesurer l'efficacité d'un tel système de protection, les phénomènes de diffraction d'ondes à l'intérieur et aux frontières d'un milieu périodique borné doivent être correctement modélisés, ce qui constitue le sujet principal de cette thèse. Dans la thèse, une approche semi-analytique est d'abord développée pour déterminer le cas d'une onde non polarisée arrivant à une interface plane entre un matériau homogène et un matériau stratifié périodique. Ensuite, des pistes sont proposées pour

étendre ces résultats à des cas plus complexes (ondes polarisées, passage en 3D). En parallèle, une analyse numérique des cellules primitives basée sur la théorie des ondes de Bloch est réalisée pour obtenir le comportement d'un milieu périodique infini et ainsi analyser l'influence de paramètres géométriques et de propriétés des matériaux sur l'atténuation des ondes de volume dans l'optique de choisir une stratégie de dimensionnement. Pour l'étude des milieux périodiques occupant un domaine borné, une approche généralisant une méthode modale d'analyse de guide d'onde est proposée. Elle permet de mieux caractériser les modes propagatifs dans le milieu périodique borné et quantifier numériquement la taille de ce dernier sur l'atténuation et le filtrage d'ondes initialement prévus dans le même milieu mais infini. Enfin, un modèle réduit de sol est instrumenté et conduit à de premiers résultats expérimentaux à comparer à l'analyse théorique et numérique.

Title : Seismic waves attenuation using metamaterials

Keywords : Metamaterials, Floquet-Bloch theory, Waves, Earthquake, Modal analysis

Abstract : To protect existing structures, designed before the implementation of seismic standards, from seismic risk, a promising strategy is to reduce the amplitude of seismic waves striking structures by locally treating the subsoil to modify its mechanical characteristics. Thus, it is possible to modify the seismic energy distribution for certain frequency ranges and thus limit the damage to structures. However, to measure the effectiveness of such a protection system, it is necessary to study the wave diffraction phenomena within and at the boundaries of a bounded domain made of periodic material, which is the main subject of this thesis. In the thesis, a semi-analytical approach is developed to determine the case of an unpolarised wave arriving at a plane interface between a homogeneous material and a periodic laminated material. Then, it is proposed to extend these results to more complex cases

(polarized waves, 3D transition). In parallel, a numerical analysis of primitive cells based on Bloch's wave theory is performed to obtain the behaviour of an infinite periodic medium and then to analyse the influence of geometrical parameters and material properties on the volume wave attenuation in order to choose a sizing strategy. For the study of periodic media occupying a limited domain, an approach is proposed that generalises a modal method for waveguide analysis. It allows to better characterize the propagation modes in the limited periodic medium and to numerically quantify the size of the latter on the attenuation and modeling of the wave initially predicted in the same but infinite medium. Finally, a reduced ground model is instrumented and leads to the first experimental results to be compared with the theoretical and numerical analysis.