



HAL
open science

Etude numérique de couches limites sur paroi courbe : rôle de l'instabilité de Görtler et transition à la turbulence

Jérémie Dagaut

► **To cite this version:**

Jérémie Dagaut. Etude numérique de couches limites sur paroi courbe : rôle de l'instabilité de Görtler et transition à la turbulence. Océan, Atmosphère. Université Grenoble Alpes [2020-..], 2021. Français. NNT : 2021GRALU037 . tel-03610614

HAL Id: tel-03610614

<https://theses.hal.science/tel-03610614v1>

Submitted on 16 Mar 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : Océan, Atmosphère, Hydrologie

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

Jérémy DAGAUT

Thèse dirigée par **Christophe BRUN**, Maître de Conférences,
Université Grenoble Alpes,

codirigée par **Guillaume BALARAC**, Professeur des Universités,
Grenoble INP

et co-encadrée par **Maria Eletta NEGRETTI**, Chargée de recherche,
CNRS

préparée au sein du **Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels**
dans l'**École Doctorale Science de la Terre, de l'Environnement et des Planètes**

Étude numérique de couches limites sur paroi courbe : rôle de l'instabilité de Görtler et transition à la turbulence

Thèse soutenue publiquement le **16 décembre 2021**,
devant le jury composé de :

M. Christophe BAUDET

Professeur des Universités, Université Grenoble Alpes, Président

M. Paul BILLANT

Directeur de Recherche, CNRS, École polytechnique, LADHYX, Rapporteur

M. Éric LAMBALLAIS

Professeur des Universités, Université de Poitiers, Rapporteur

M. Jorge SILVESTRINI

Professeur, Pontificia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Examineur

M. Christophe BRUN

Maître de Conférences, Université Grenoble Alpes, Directeur

M. Guillaume BALARAC

Professeur des Universités, Grenoble INP, Co-directeur

Mme Maria Eletta NEGRETTI

Chargée de recherche, CNRS, Université Grenoble Alpes, LEGI, Co-encadrante



Remerciements

Après ces trois (+1) années d'investissement personnel dans ce travail de thèse, il me paraît très naturel de remercier toutes les personnes qui y ont contribué de près ou de loin, sur le plan professionnel et personnel.

Mes premiers remerciements sont adressés à mes encadrants de thèse Christophe Brun, Guillaume Balarac et Eletta Negretti qui m'ont accompagné et m'ont fait confiance tout au long de cette thèse.

Merci Christophe pour ta patience qui fût mise à rude épreuve et tes éclaircissements dans toutes les thématiques abordées. Merci également pour les longues discussions que l'on a pu avoir sur beaucoup de sujets scientifiques qui montrent ton intérêt (contagieux) pour la recherche et qui m'ont été bien souvent d'une grande aide. Enfin je te remercie pour ton accompagnement dans ma première expérience d'enseignement à l'UGA.

Merci Guillaume pour ta réactivité et ta disponibilité sans faille malgré tes nombreuses responsabilités, ce qui m'a apporté un réel soutien dans mon travail au quotidien. Au delà de ton expertise scientifique pointue, j'ai également beaucoup apprécié le pragmatisme dont tu as fait preuve ce qui m'a permis de ne pas (trop) m'égarer en chemin. Enfin, sur un plan plus personnel, je te remercie d'avoir été quelqu'un sur qui j'ai pu compter dans les moments de doute et les coups de mou, tu as su trouver les mots pour me redonner confiance.

Merci Eletta pour ton regard toujours bienveillant sur mon travail et pour les échanges toujours très constructifs qu'on a pu avoir et qui ont fait avancer ma thèse. Tu as été un vrai moteur dans mon travail en étant à l'initiative de ma participation à l'ETC et de l'écriture de mon premier article scientifique. Tu as également su trouver les mots qu'il fallait pour me redonner confiance en mon travail lorsque j'en ai eu besoin.

Je remercie ensuite toute l'équipe MoST pour son accueil formidable lors de mon arrivée au laboratoire en mars 2017 en stage de fin d'études et pour l'excellente entente qui y règne. Côté permanents, je remercie Patrick Begou, sans qui l'équipe MoST ne serait pas la même, pour son aide technique bien entendu mais également pour les discussions et expériences passionnantes que l'on a pu partager ainsi que pour son soutien en fin de thèse. Merci à Jean-Luc Achard, sans qui je ne serais jamais arrivé au LEGI, d'avoir partagé tant de discussions avec moi qui m'ont fait ouvrir les yeux sur beaucoup de sujets. Je remercie également Manuel Bernard, qui a gagné sa place dans le paragraphe des permanents très récemment, pour son soutien, son aide technique, les relectures du manuscrits (il fallait du courage), les discussions toujours intéressantes qu'on a pu avoir et pour les sorties sportives que l'on a pu partager. Merci enfin à Giovanni Ghigliotti pour les questions et échanges constructifs que l'on a pu avoir lors des teams meetings ainsi que pour les conseils très utiles en vue de la préparation de ma soutenance.

Je remercie chaleureusement tous les doctorants et post-doctorants avec qui j'ai partagé ces années de thèse et sans qui l'expérience aurait été bien différente. Merci à Matthieu, Cyril, François, Lucas, Yves, Savinien, Thomas, Yann, Claudine, Guillaume S. Guillaume M., Antoine, Pedro, Anastasiia, Hugo, Alexis, Matei, Elliott.

Merci aux licornes d'Orléans.

Merci à ma famille, pour tout et plus encore.

Table des matières

1	Introduction	9
1.1	Contexte de l'étude	10
1.2	Écoulements pariétaux	11
1.2.1	Contrainte pariétale et couche limite	11
1.2.2	Épaisseurs caractéristiques	12
1.2.3	Équations de couche limite	13
1.2.4	Stabilité de la couche limite et transition à la turbulence	15
1.2.5	Couche limite turbulente	15
1.3	Écoulements sur paroi courbe	19
1.3.1	Instabilités centrifuges	19
1.3.2	Discriminant de Rayleigh	20
1.4	Écoulement de Görtler	23
1.4.1	Topologie de l'écoulement	23
1.4.2	Évolution spatiale de l'instabilité	24
1.4.3	Compétition entre les instabilités de Tollmien–Schlichting et de Görtler	25
1.5	Écoulements stratifiés	26
1.6	Plan de thèse	29
2	Méthodes numériques et modélisation de la turbulence : simulations des grandes échelles	31
2.1	Écoulements turbulents	32
2.1.1	Équations de Navier-Stokes	32
2.1.2	Mécanismes énergétiques turbulents	33
2.2	Simulations des grandes échelles	34
2.2.1	Avant-propos	34
2.2.2	Équations filtrées	35
2.2.3	Modèle de Smagorinsky dynamique	36
2.3	Méthodes numériques	37
2.3.1	Maillages non-structurés	37
2.3.2	Méthode des volumes finis	37
2.3.3	Couplage pression/vitesse : méthode de projection	38
2.3.4	Schémas numériques et critère de stabilité numérique	39
2.4	Domaine de calcul et maillage	39
2.4.1	Géométrie	39

2.4.2	Maillage hybride	41
2.4.3	Conditions aux limites	41
2.5	Outils d'analyse	43
3	Analyse de stabilité linéaire	47
3.1	Étude fondatrice de Görtler (1940)	48
3.2	Étude de Floryan et Saric (1982)	49
3.2.1	Formalisme de l'étude	49
3.2.2	Résultats	50
3.3	Mise en équation du problème	51
3.3.1	Écoulement de base	51
3.3.2	Équations de Görtler	52
3.4	Résolution numérique du système d'équations	55
3.5	Résultats	56
3.5.1	Validation de la méthode	56
3.5.2	Extension de l'étude de Floryan et Saric	58
4	Simulations numérique de l'instabilité de Görtler à nombres de Reynolds modérés	61
4.1	Instabilité de Görtler à longueur d'onde forcée	62
4.1.1	Méthodologie	62
4.1.2	Validation des simulations	65
4.1.3	Résultats	71
4.2	Développement naturel de l'instabilité de Görtler	79
4.2.1	Influence des paramètres numériques	79
4.2.2	Influence des nombres de Reynolds et Görtler	83
4.3	Instabilité de Görtler en milieu stratifié	98
4.3.1	Configuration physique	98
4.3.2	Croissance de la couche limite et croissance de l'instabilité	100
4.3.3	Topologie de l'instabilité de Görtler dans les régions linéaire et non-linéaire	102
5	Linear to turbulent Görtler instability transition (Dagaut et al., 2021)	107
6	Analogie de Bradshaw : effets de courbure vs. effets de flottabilité	121
6.1	Effets de courbure sur le champ turbulent	122
6.1.1	Cas de référence à haut Reynolds ($Re_{\delta_0} = 10^4$)	122
6.1.2	Bilan du tenseur de Reynolds	124
6.1.3	Nombre de Richardson de courbure	125
6.1.4	Définition alternative du nombre de Richardson de courbure	129
6.1.5	Longueur de mélange et longueur de courbure	130
6.1.6	Corrections de la loi logarithmique de vitesse	132

6.1.7	Effets de courbure et présence de tourbillons longitudinaux	134
6.1.8	Bilan	139
6.1.9	Effets de courbure à Reynolds modéré ($Re_{\delta_0} = 1800$)	140
6.2	Effets de flottabilité sur le champ turbulent	146
6.2.1	Configuration physique avec refroidissement à la paroi	146
6.2.2	Résultats statistiques	147
6.2.3	Bilan de TKE	152
6.2.4	Échelles de longueur caractéristiques	154
6.2.5	Bilan du terme de cisaillement turbulent	155
6.2.6	Analogie de Bradshaw pour les Richardson de flux et de cisaillement	156
7	Conclusion	159
7.1	Objectifs de la thèse	159
7.2	Conclusions du travail réalisé	159
7.3	Perspectives	161
A	Équation de transport pour le tenseur de Reynolds $\langle u'_i u'_j \rangle$ et l'énergie cinétique turbulente k : écriture classique	163
B	Équation de Navier-Stokes en repère courbé	165
C	Génération d'un jet catabatique par refroidissement	167
D	Effets de flottabilité par stratification bi-couche : courant gravitaire	169
D.1	Configuration physique	169
D.2	Résultats	171
D.2.1	Croissance de l'instabilité de Görtler	171
D.2.2	Topologie 3D de l'écoulement développé	174
D.2.3	Topologies locales dans l'écoulement développé	176
E	Simulation numérique d'un jet sur paroi courbe à $Re_{\delta_0} = 1800$	179
	Bibliographie	181

1 Introduction

Résumé : Dans ce chapitre, on présente les caractéristiques principales des écoulements géophysiques auxquels on s'intéresse. On fait l'état de l'art des connaissances sur les différentes problématiques posées par la physique de ces écoulements. Les connaissances portant sur les couches limites laminares et turbulentes, les instabilités centrifuges, l'instabilité de Görtler et les écoulements stratifiés sont ainsi présentées.

Sommaire

1.1	Contexte de l'étude	10
1.2	Écoulements pariétaux	11
1.2.1	Contrainte pariétale et couche limite	11
1.2.2	Épaisseurs caractéristiques	12
1.2.3	Équations de couche limite	13
1.2.4	Stabilité de la couche limite et transition à la turbulence	15
1.2.5	Couche limite turbulente	15
1.3	Écoulements sur paroi courbe	19
1.3.1	Instabilités centrifuges	19
1.3.2	Discriminant de Rayleigh	20
1.4	Écoulement de Görtler	23
1.4.1	Topologie de l'écoulement	23
1.4.2	Évolution spatiale de l'instabilité	24
1.4.3	Compétition entre les instabilités de Tollmien–Schlichting et de Görtler	25
1.5	Écoulements stratifiés	26
1.6	Plan de thèse	29

1.1 Contexte de l'étude

Ce travail de thèse s'inscrit dans une volonté de décrire la physique complexe d'écoulements géophysiques se développant sur terrains réels (Blein, 2016, Brun et al., 2017, Brun, 2017, Charronière et al., 2020). Les recherches qui s'articulent autour de ce projet sont orientées vers les **écoulements gravitaires**. Les écoulements gravitaires sont des écoulements qui sont **générés par effets de flottabilité**. Les conditions d'apparition de ces écoulements gravitaires sont **une différence de masse volumique** au sein du système considéré et **une topographie** (ou pente) favorable au développement de l'écoulement. Les situations réelles où de tels écoulements se développent ne manquent pas : fleuves et rivières, avalanches, coulées de boue, coulées de lave. Dans ces exemples, un fluide dense (eau, neige, lave) est mis en mouvement au sein d'un fluide moins dense (air). Les écoulements gravitaires existent également au sein d'un même fluide. En Antarctique, l'air à la surface du continent est plus froid (donc plus dense) que l'air ambiant ce qui génère ce qu'on appelle les **vents catabatiques**. Ce phénomène existe également en région montagneuse où l'air à la surface de la montagne se refroidit quand le flux de chaleur à la paroi devient négatif (le plus souvent le soir). Dans l'océan, des **courants de densité** se développent, participant à la circulation océanique. Dans ce cas, la différence de masse volumique à l'origine de leur développement peut provenir d'une différence de température entre deux couches de fluide mais également d'une différence de salinité de l'eau.

Que ce soit les vents catabatiques ou les courants de densité, certaines propriétés sont communes et définissent donc le cadre de l'étude réalisée. Tout d'abord, les écoulements auxquels on s'intéresse sont des écoulements en contact avec une paroi solide (croûte terrestre). La vitesse relative entre une paroi solide et un fluide qui s'écoule à son voisinage étant nulle, le fluide est soumis à des forces de cisaillement importantes dans le voisinage proche de la paroi : une **couche limite se développe**.

De plus, la surface solide (croûte terrestre) présente une topographie complexe. En effet, la surface des montagnes ou les fonds océaniques sont très éloignés du cas académique classique que l'on étudie en couche limite : la plaque plane. Une première méthode pour se rapprocher un peu plus d'une topographie réelle est de considérer une **paroi courbe** qui peut correspondre, à grande échelle, à la courbure de la montagne ou des fonds marins. Ce choix a une conséquence importante : la courbure favorise le développement de **l'instabilité de Görtler**, une instabilité hydrodynamique centrifuge qui change radicalement la dynamique de l'écoulement. La question de l'influence de cette instabilité sur les écoulements étudiés est centrale dans ce travail de thèse.

De surcroît, les écoulements géophysiques, que ce soit les vents catabatiques ou les courants gravitaires, sont des écoulements **turbulents**. Il n'existe pas de définition précise de la turbulence, néanmoins les caractéristiques suivantes sont observées dans les écoulements turbulents (Pope, 2000, Lesieur, 2008) :

- un fort nombre de Reynolds
- une fluctuation en temps et en espace des propriétés de l'écoulement
- un champ de vitesse instationnaire et tridimensionnel
- la présence d'une large gamme d'échelles
- un caractère non-prédictible
- un fort mélange
- une forte diffusivité
- une forte dissipation

où le nombre de Reynolds, noté Re , représente le rapport entre les effets inertiels et les effets visqueux de l'écoulement. Il peut également être vu comme le rapport de deux temps caractéristiques : le temps d'advection t_{adv} et le temps de diffusion t_{visq} . Le temps d'advection $t_{adv} = L/U$ est le temps nécessaire à une particule fluide pour parcourir la distance caractéristique L (propre à chaque configuration) à la vitesse caractéristique de l'écoulement U . Le temps de diffusion $t_{visq} = L^2/\nu$ est le temps nécessaire pour amortir une perturbation de vitesse par effets de viscosité. Le nombre de Reynolds s'écrit

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (1.1)$$

Enfin, les écoulements gravitaires sont des écoulements (intrinsèquement) **stratifiés**. Au delà du fait que les effets de flottabilité soient à l'origine de leur développement, la dynamique interne des écoulements est impactée par la stratification. La stabilité hydrodynamique de l'écoulement dépend de la stratification, mais également les propriétés de mélange, les propriétés turbulentes, etc. Le cas du vent catabatique est par ailleurs un peu particulier car deux stratifications peuvent être identifiées : la **stratification de l'atmosphère** (stratification à grande échelle où la température varie linéairement avec l'altitude) et la stratification proche de la paroi où une **couche limite thermique**, avec de forts gradients de température, se développe.

1.2 Écoulements pariétaux

1.2.1 Contrainte pariétale et couche limite

La viscosité d'un fluide, notée μ , correspond à la manifestation macroscopique des interactions moléculaires (collisions) au sein du fluide. Quand un écoulement rencontre une paroi solide, la vitesse relative entre le fluide et le solide est nulle à cause de ces interactions moléculaires, donc de la viscosité. Pour le cas d'un gaz parfait, modèle valide dans de nombreuses applications, la viscosité est nulle et le fluide « glisse » le long de la paroi, ce qui donne lieu à des résultats non physiques pour des écoulements présentant des obstacles solides (paradoxe de d'Alembert, voir [Darrigol, 2005](#), [Grimberg et al., 2008](#)).

En réalité, l'évolution spatiale du fluide en mouvement au voisinage d'une paroi solide, de la paroi (où la vitesse est nulle) jusqu'à une région lointaine de cette paroi (où la vitesse est homogène et constante), n'est pas triviale. Elle est décrite par Prandtl en 1904 quand il présente sa théorie de la couche limite. Il met ainsi en évidence que les contraintes visqueuses à l'interface entre le solide et le fluide sont responsables de la présence d'une trainée par frottement. Des impacts sur la dynamique de l'écoulement plus importants encore, comme la présence de sillages en aval d'obstacles, sont alors expliqués.

La viscosité d'un fluide, responsable de l'existence d'une couche limite, peut par ailleurs être mesurée par l'expérience de Couette (schéma en figure 1.1). La paroi solide inférieure est immobile, la paroi solide supérieure est mise en mouvement par application d'une force horizontale \vec{F} , se déplaçant ainsi à une vitesse horizontale \vec{U} . Le profil de vitesse du fluide $u(y)$ évolue linéairement entre les deux parois et s'exprime comme $u(y) = (U/H)y$. De plus, la force nécessaire à maintenir une vitesse de déplacement de la paque supérieure U constante est inversement proportionnelle à la hauteur de fluide H et dépend de la viscosité du fluide. Elle s'exprime (par unité de surface) comme $F/S = \mu(U/H)$. Par les efforts de cisaillement au sein du fluide, la réaction de cette force se retrouve à la paroi inférieure. On appelle cette force la contrainte de cisaillement, notée τ et on

généralise son expression en tout point du domaine fluide (x, y) par

$$\tau(x, y) = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.2)$$

On introduit alors la contrainte pariétale, notée τ_w , qui correspond à la force qu'exerce le fluide sur la paroi solide inférieure et qui n'est autre que l'expression de la contrainte de cisaillement écrite à la paroi ($y = 0$)

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (1.3)$$

La forme adimensionnelle de la contrainte pariétale τ_w est le coefficient de frottement C_f , défini par

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho_0 U_\infty^2} \quad (1.4)$$

1.2.2 Épaisseurs caractéristiques

La couche limite est la région de transition entre la paroi où la vitesse est nulle et la région lointaine où la vitesse du fluide est homogène, que l'on appelle vitesse extérieure et que l'on note U_∞ . Un schéma de la topologie d'un écoulement de couche limite est proposé en figure 1.2. La couche limite est la région de l'écoulement qui est soumise à des efforts de cisaillement. Ce cisaillement τ est maximal à la paroi où $\tau = \tau_w$ et s'annule à l'extérieur de la couche limite où l'écoulement est homogène.

On appelle épaisseur de couche limite, notée δ_{99} , la distance à la paroi à partir de laquelle la vitesse $u(y)$ a atteint 99% de la vitesse extérieure U_∞ . Son expression mathématique est

$$\delta_{99} = y|_{u(y)=0.99U_\infty} \quad (1.5)$$

On introduit une deuxième épaisseur caractéristique de la couche limite, appelée épaisseur de déplacement et notée δ^* , définie par

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_\infty} \right) dy \quad (1.6)$$

C'est une mesure du déficit de débit (induit par la couche limite) par rapport au débit d'un écoulement de fluide parfait (glissement à la paroi et vitesse homogène $u(y) = U_\infty$) dans la

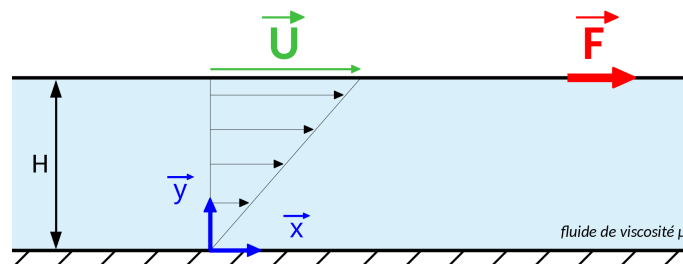


Figure 1.1. Schéma de l'expérience de Couette où une couche de fluide est mise en mouvement par contrainte de cisaillement, permettant la mesure de la viscosité dynamique μ .

même configuration. Une dernière épaisseur caractéristique de couche limite est introduite, appelée épaisseur de quantité de mouvement et notée θ , définie par

$$\theta = \int_0^{\infty} \frac{u}{U_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{U_{\infty}}\right) dy \quad (1.7)$$

L'épaisseur de quantité de mouvement quantifie le déficit de quantité de mouvement (induit par la couche limite) par rapport au cas d'un fluide parfait dans la même configuration. On appelle facteur de forme, noté H_{12} , le rapport entre l'épaisseur de déplacement et l'épaisseur de quantité de mouvement

$$H_{12} = \frac{\delta^*}{\theta} \quad (1.8)$$

Cette quantité permet de décrire l'état de la couche limite (laminaire, en transition ou turbulente).

1.2.3 Équations de couche limite

Équations générales

Les écoulements de couche limite sont considérés dans la majorité des cas comme étant bidimensionnels. Pour un fluide incompressible, les équations qui régissent leur dynamique sont

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.9)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1.10)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (1.11)$$

Par des arguments d'ordre de grandeur qui ne sont pas détaillés ici, on peut montrer que les termes en bleu sont négligeables. L'équation de conservation de quantité de mouvement sur y (équation 1.11) se réduit à

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (1.12)$$

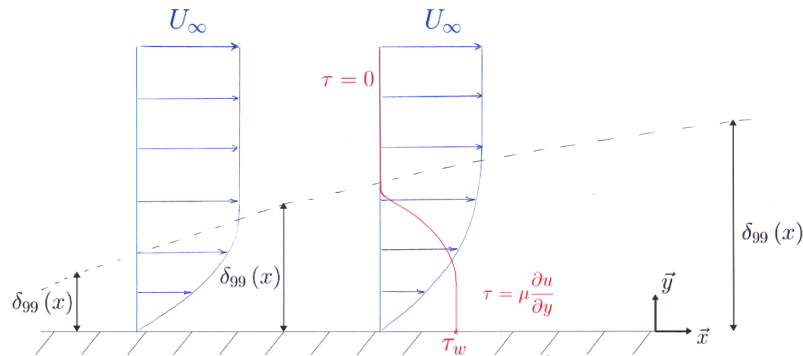


Figure 1.2. Schéma de la topologie d'une couche limite se développant sur une plaque plane et induite par la différence de vitesse entre la région extérieure (vitesse à l'infini, $u = U_{\infty}$) et la paroi (condition d'adhérence à la paroi, $u = 0$).

De plus, dans ce travail, on considère uniquement le cas d'une couche limite sans gradient de pression longitudinal où $\partial p/\partial x = 0$. Les équations de couche limite incompressible bidimensionnelle sans gradient de pression longitudinal sont finalement données par

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.13)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.14)$$

Équation de Blasius

Le cas particulier d'une couche limite se développant sur une plaque plane et sans gradient de pression longitudinal ($\partial p/\partial x = 0$) mène à l'écriture de l'équation de Blasius simplifiée (1907). L'intérêt de cette équation est d'avoir une solution auto-similaire de vitesse pour la couche limite laminaire.

Les échelles de longueur et de vitesse sont normalisées par les échelles caractéristiques de la couche limite, selon l'idée originale de Prandtl (1904). Dans la direction longitudinale (direction convective de la couche limite) l'échelle de longueur caractéristique est notée L et l'échelle de vitesse est $U_\infty = L/t_{\text{conv}}$, où t_{conv} est le temps caractéristique de convection défini par

$$t_{\text{conv}} = L/U_\infty \quad (1.15)$$

Dans la direction normale (échelle de la couche limite) l'échelle de longueur est δ_r et l'échelle de vitesse est δ_r/t_{visq} où t_{visq} est l'échelle de temps caractéristique de diffusion de quantité de mouvement dans la couche limite et s'exprime en fonction de la viscosité cinématique du fluide ν par

$$t_{\text{visq}} = \delta_r^2/\nu \quad (1.16)$$

Dans un écoulement de couche limite, les temps de convection et de diffusion sont du même ordre de grandeur, ce qui implique que l'échelle de longueur caractéristique de la couche limite δ_r s'écrit $\delta_r = L/\sqrt{Re_L}$. Les variables normalisées de la couche limite sont donc

$$x_* = \frac{x}{L} \quad y_* = \frac{y}{\delta_r} = \frac{y}{L} \sqrt{Re_L} \quad (1.17)$$

$$u_* = \frac{u}{U_\infty} \quad v_* = \frac{v}{U_\infty} \sqrt{Re_L} \quad (1.18)$$

En introduisant une fonction courant Ψ telle que $u_* = \partial\Psi/\partial y_*$ et $v_* = -\partial\Psi/\partial x_*$, il est possible d'écrire les équations 1.13 et 1.14 sous la forme d'une seule équation, c'est l'équation de Blasius. On ne détaille pas les calculs par soucis de concision, on présente directement l'équation obtenue ci-dessous

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \quad (1.19)$$

complétée des conditions aux limites qui traduisent la condition d'adhérence à la paroi d'une part et la continuité avec la zone extérieure d'autre part

$$y_* = 0 ; f = f' = 0 \quad (1.20)$$

$$y_* \rightarrow \infty ; f' = 1 \quad (1.21)$$

où $f' = u_*$ correspond à la composante longitudinale de la vitesse normalisée. La composante normale de la vitesse normalisée est elle donnée par

$$v_* = \frac{1}{2Re_L^{1/2}} \left[y_* f' - f \right] \quad (1.22)$$

L'équation 1.19 n'a pas de solution analytique, malgré sa simplicité apparente, à cause du terme non-linéaire venant directement des équations de Navier-Stokes. La solution à cette équation peut néanmoins être déterminée numériquement par méthode d'intégration de type Runge-Kutta couplée à une méthode de tir pour obtenir la valeur de f'' à la paroi ($y_* = 0$).

1.2.4 Stabilité de la couche limite et transition à la turbulence

Les premières études théoriques de la couche limite (Schlichting et Gersten, 1961, Drazin et Reid, 2004) montrent que la stabilité d'un tel écoulement peut être décrite par le nombre de Reynolds $Re_{\delta^*} = U_{\infty} \delta^* / \nu$ construit à partir de l'épaisseur de déplacement δ^* et que pour des valeurs inférieures à un nombre de Reynolds critique $Re_{\delta^*} < 520$, la couche limite est intégralement stable ce qui signifie qu'elle demeure laminaire.

Le développement aval de la couche limite induit une croissance du nombre de Reynolds $Re_x = U_{\infty} x / \nu$ construit avec la position longitudinale x . Il est alors montré que pour des nombres de Reynolds approchant $Re_x \approx 10^5$, la couche limite devient instable et la croissance d'onde (appelées onde de Tollmien-Schlichting) associées à des oscillations dans la direction transverse est observée.

Des études expérimentales (Klebanoff et al., 1962, Herbert, 1988) où des perturbations périodiques transverses sont introduites dans l'écoulement de couche limite viennent corroborer ces résultats théoriques. L'existence de structures cohérentes longitudinales associées à des phénomènes d'accélération et de décélération locales est alors mise en évidence. Ces structures, qualifiées de *hairpins* dans la littérature, sont notamment observées par Hama et al. (1957).

Dans la zone d'observation des *hairpins*, la topologie du profil de vitesse est localement modifiée. Ces structures cohérentes induisent un point d'inflexion dans le profil de vitesse, ce qui sera confirmé ultérieurement par des simulations numériques directes (Kleiser et Zang, 1991, Normand et Lesieur, 1992).

La transition naturelle de la couche limite est également abondamment étudiée dans la littérature (Schubauer et Skramstad, 1947, Emmons, 1951, Lesieur, 2008). Les expériences montrent que la couche limite est stable (laminaire) pour des nombres de Reynolds $Re_x \leq 10^5$, ce qui est en accord avec les études théoriques préalables. À partir de $Re_x > 10^5$, l'apparition désordonnée de régions turbulentes très localisées est reportée. Des structures en forme de « Λ » sont alors observées et sont semblables à une accumulation d'onde de Tollmien-Schlichting tridimensionnelles se déplaçant en aval de l'écoulement. Ces observations sont compatibles avec le caractère intermittent du processus de transition à la turbulence décrit par Pomeau et Manneville (1980) et commenté par Lesieur (2008).

1.2.5 Couche limite turbulente

Topologie

Les premières études expérimentales sur la couche limite turbulente (Townsend, 1951, Klebanoff, 1955, Kovasznay, 1967) ont permis de définir les différentes régions caractéristiques d'un tel écoulement. Pour cela, une échelle de longueur et une échelle de vitesse sont introduites pour normaliser les différentes quantités physiques de la couche limite. La vitesse de frottement, notée u_{τ} , est l'échelle de vitesse utilisée. Elle s'exprime en fonction de la contrainte pariétale τ_w (équation

1.3) par

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_0}} \quad (1.23)$$

L'échelle de longueur visqueuse δ_ν est la longueur caractéristique utilisée. Elle est construite à partir de la vitesse de frottement u_τ (équation 1.38) et de la viscosité cinématique ν et s'exprime comme

$$\delta_\nu = \nu/u_\tau \quad (1.24)$$

C'est à partir de ces deux échelles que la normalisation en unités de paroi, notée par le symbole $^+$, est définie. La vitesse en unités de paroi, notée u^+ , est alors donnée par

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} \quad (1.25)$$

La distance normale à la paroi exprimée en unités de paroi et notée y^+ est donnée par

$$y^+ = \frac{y}{\delta_\nu} = \frac{yu_\tau}{\nu} \quad (1.26)$$

La couche limite turbulente est divisée en quatre régions principales (voir [Pope, 2000](#)) :

- **la sous-couche visqueuse** ($y^+ < 5$), correspondant à la région très proche de la paroi où les contraintes visqueuses (interactions moléculaires) prévalent sur les contraintes turbulentes. Dans cette région, il est possible de montrer que la vitesse en unités de paroi est

$$u^+ = y^+ \quad (1.27)$$

donc que le profil de vitesse varie linéairement dans la direction normale à la paroi.

- **la zone tampon** ($5 < y^+ < 40$) où les contraintes visqueuses sont de moins en moins importantes par rapport aux contraintes turbulentes. Aucune loi universelle n'existe pour cette région de la couche limite, qui est la transition entre la sous-couche visqueuse et la sous-couche inertielle (présentée ci-après).
- **la sous-couche inertielle** ($y^+ > 40$), également appelée zone logarithmique, où la vitesse exprimée en unités de paroi est définie par

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B \quad (1.28)$$

où κ est la constante de von Kármán et B est une constante. Typiquement pour une couche limite turbulente sur plaque plane, on observe les valeurs $\kappa = 0.41$ et $B = 5.2$ ([Pope, 2000](#)). Dans cette région, le cisaillement turbulent $-\langle u'v' \rangle$ est égal à la vitesse de frottement au carré u_τ^2 .

- **la région externe** ($y/\delta_{99} > 0.2$), qui permet de raccorder la loi logarithmique (équation 1.28) à la vitesse extérieure U_∞ . Une loi pour la vitesse déficitaire ($U_\infty - u$) est alors introduite pour décrire cette région, telle que

$$\frac{U_\infty - u}{u_\tau} = \Phi \left(\frac{y}{\delta_{99}} \right) \quad (1.29)$$

où $\Phi(y/\delta_{99})$ n'est pas un loi universelle car elle peut dépendre des conditions extérieures telles que la pression, le nombre de Reynolds etc.

Processus de production de turbulence

Pour une couche limite turbulente sur plaque plane, l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente k est

$$0 = \underbrace{-\left(\langle u \rangle \frac{\partial k}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial k}{\partial y}\right)}_{\text{I}} + \underbrace{\mathcal{P}}_{\text{II}} - \underbrace{\tilde{\epsilon}}_{\text{III}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 k}{\partial y^2}}_{\text{IV}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left\langle \frac{1}{2} v' \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}' \right\rangle}_{\text{V}} + \underbrace{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} \langle v' p' \rangle}_{\text{VI}} \quad (1.30)$$

où l'on retrouve le terme d'advection (I), le terme de production (II), le terme de dissipation (III), le terme de diffusion moléculaire (IV), le terme d'advection turbulente (V) et le terme de pression (VI). Dans la région de la sous-couche visqueuse ($y^+ < 5$), les termes principaux de l'équation 1.30 sont la diffusion moléculaire et la dissipation. Dans la région logarithmique ($y^+ > 40$), il est observé que les termes prépondérants de l'équation 1.30 sont la production et la dissipation (Townsend, 1980, Spalart, 1988, Pope, 2000). Un exemple de bilan complet de l'équation 1.30 provenant d'une simulation numérique directe à $Re_\theta = 1410$ (Spalart, 1988) est présenté en figure 1.3 où l'on retrouve les comportements décrits pour la sous-couche visqueuse et la zone logarithmique.

Pour une couche limite turbulente, le terme de production \mathcal{P} est essentiellement porté par le cisaillement longitudinal moyen tel que

$$\mathcal{P} = -\langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \quad (1.31)$$

À partir des propriétés de la sous-couche inertielle, il est facile de montrer que le terme de production peut s'exprimer simplement en fonction de y et de la constante de von Kármán κ tel que

$$\mathcal{P} = \frac{u_\tau^3}{\kappa y} \quad (1.32)$$

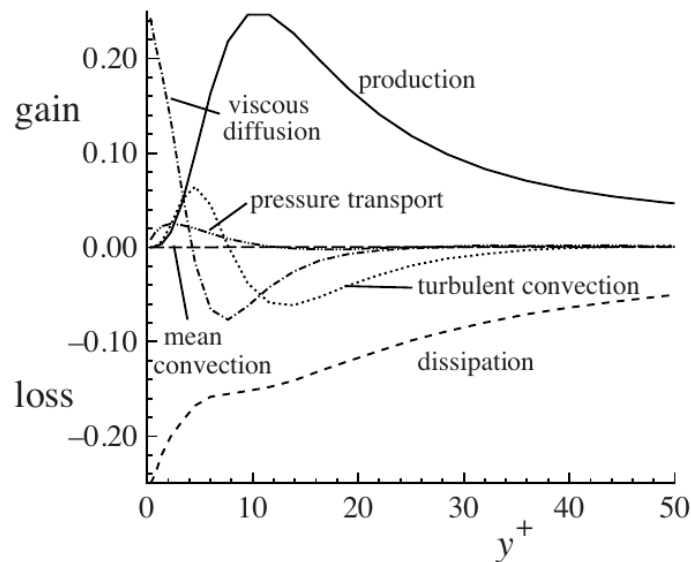


Figure 1.3. Bilan des termes de l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente $k = (\langle u'u' \rangle + \langle v'v' \rangle + \langle w'w' \rangle) / 2$. Les résultats proviennent d'une simulation numérique directe d'une couche limite turbulente sur plaque plane à $Re_\theta = 1410$ (Spalart, 1988).

Longueur de mélange

L'hypothèse de [Boussinesq \(1877\)](#), très largement utilisée dans les problématiques de modélisation de la turbulence, permet d'écrire une relation linéaire entre le tenseur des contraintes turbulentes et le taux de déformation moyen via un concept de viscosité turbulente, notée ν_t . Pour le cas d'un écoulement cisailé libre, on obtient la relation simple suivante entre le cisaillement moyen ($\partial\langle u\rangle/\partial y$) et le cisaillement turbulent $\langle u'v'\rangle$

$$-\langle u'v'\rangle = \nu_t \frac{\partial\langle u\rangle}{\partial y} \quad (1.33)$$

Le concept de longueur de mélange est introduit par [Prandtl \(1925\)](#). La longueur de mélange est l'échelle de longueur, notée ℓ_m , qui est utilisée pour décrire la viscosité turbulente ν_t comme le produit d'une échelle de vitesse et d'une échelle de longueur. Cette échelle caractérise donc la turbulence d'un écoulement et peut être vue comme le parcours moyen des particules associées aux structures cohérentes turbulentes (tourbillons) présents dans l'écoulement. De plus, elle est importante pour les problématiques de modélisation de la turbulence puisqu'elle intervient dans la définition de la viscosité turbulente (plus de détails seront donnés au chapitre 2).

D'après le concept introduit par Prandtl, la viscosité turbulente ν_t s'écrit comme le produit d'une échelle de vitesse u^* et la longueur de mélange ℓ_m

$$\nu_t = u^* \ell_m \quad (1.34)$$

L'échelle de vitesse u^* est exprimée en fonction du terme de cisaillement turbulent $\langle u'v'\rangle$ comme

$$u^* = |\langle u'v'\rangle|^{1/2} = u_\tau \quad (1.35)$$

En utilisant l'hypothèse de Boussinesq (équation 1.33), on exprime la longueur de mélange ℓ_m en fonction du cisaillement moyen ($\partial\langle u\rangle/\partial y$) et du cisaillement turbulent $\langle u'v'\rangle$ comme

$$-\langle u'v'\rangle = \ell_m^2 \left(\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial y} \right)^2 \quad (1.36)$$

ou en fonction de la viscosité turbulente ν_t et du cisaillement moyen ($\partial\langle u\rangle/\partial y$) comme

$$\nu_t = \ell_m^2 \left| \frac{\partial\langle u\rangle}{\partial y} \right| \quad (1.37)$$

Dans la région logarithmique d'une couche limite turbulente, le cisaillement turbulent $-\langle u'v'\rangle$ est égale à u_τ^2 et le cisaillement moyen est

$$\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial y} = \frac{u_\tau}{\kappa y} \quad (1.38)$$

où κ est la constante de Kármán. Dans cette région, la longueur de mélange est donc

$$\ell_m = \kappa y \quad (1.39)$$

ou exprimée en unité de paroi¹ (normalisée par les échelles visqueuses)

$$\ell_m^+ = \kappa y^+ \quad (1.41)$$

1. On remarque que cette relation n'est pas consistante pour la région de sous-couche visqueuse, où si on l'appliquait on aurait une variation du terme $-\langle u'v'\rangle$ en y^2 . En réalité, le cisaillement turbulent varie plutôt en y^3 , donc plus lentement. Une correction est proposée afin d'amortir la croissance de ℓ_m proche de la paroi [Van Driest \(1956\)](#), [Pope \(2000\)](#) et l'expression pour ℓ_m^+ est

$$\ell_m^+ = \kappa y^+ [1 - \exp(-y^+/A^+)] \quad (1.40)$$

où le terme $[1 - \exp(-y^+/A^+)]$ est la fonction d'amortissement de van Driest (*van Driest damping function*).

Dans le cas d'une couche limite turbulente sur plaque plane, la production d'énergie cinétique turbulente \mathcal{P}_M et la dissipation ϵ sont en équilibre, les autres termes étant négligeables dans la zone logarithmique. Le bilan de TKE est simplement décrit par

$$\mathcal{P}_M = \epsilon \quad (1.42)$$

À partir des équations 1.31, 1.36 et 1.38, la production peut par ailleurs s'exprimer en fonction de u_τ et de ℓ_m par

$$\mathcal{P}_M = u_\tau^3 / \ell_m \quad (1.43)$$

où l'échelle ℓ_m est définie comme la longueur caractéristique de la production d'énergie cinétique turbulente. De la même façon, la dissipation s'écrit

$$\epsilon = u_\tau^3 / \mathcal{L}_\epsilon \quad (1.44)$$

où \mathcal{L}_ϵ est l'échelle de longueur caractéristique de la dissipation. On obtient donc pour une couche limite turbulente sur plaque plane la relation

$$\frac{1}{\ell_m} = \frac{1}{\mathcal{L}_\epsilon} \quad (1.45)$$

Par conséquent, $\mathcal{L}_\epsilon = \ell_m = \kappa \psi$ dans la zone logarithmique.

1.3 Écoulements sur paroi courbe

Les écoulements de couche limite sur paroi courbe développent une instabilité centrifuge particulière appelée instabilité de Görtler. Avant de décrire en détails cette instabilité, les instabilités centrifuges en générale sont présentées.

1.3.1 Instabilités centrifuges

Il existe trois instabilités centrifuges dont on présente les configurations respectives en figure 1.4. **L'instabilité de Taylor-Couette** se développe dans les écoulements confinés entre deux cylindres concentriques en rotation, dont la vitesse de rotation est différente pour chaque cylindre. Les vitesses de rotation des cylindres de rayon R_1 et R_2 sont respectivement Ω_1 et Ω_2 (figure 1.4a). Cette instabilité génère des tourbillons longitudinaux, refermés sur eux-mêmes formant ainsi des

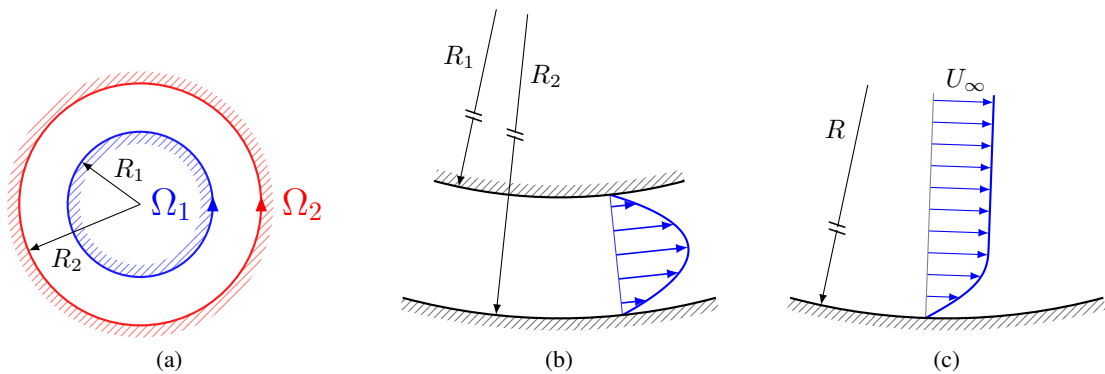


Figure 1.4. Présentation schématique des instabilités centrifuges. (a) Instabilité de Taylor-Couette, (b) instabilité de Dean, (c) instabilité de Görtler.

structures en forme de tores.

L'instabilité de Dean se déclenche quand un écoulement de Couette se développe dans une conduite courbe (figure 1.4b). Cette instabilité génère également des tourbillons longitudinaux, alignés avec les lignes de courant de l'écoulement moyen.

L'instabilité de Görtler apparaît classiquement quand une couche limite se développe sur une paroi concave (figure 1.4c). Des tourbillons longitudinaux sont alors également générés par les mécanismes instables présents.

1.3.1.1 Contraintes de croissance

À partir des descriptions ci-dessus, il est assez facile de visualiser les contraintes spatiales qui sont mises en jeu pour chacune des configurations. L'instabilité de Taylor-Couette est la plus contrainte car sa croissance est limitée par les parois des cylindres concentriques mais également dans la direction longitudinale puisque les tourbillons sont refermés sur eux-mêmes. L'instabilité de Dean est contrainte uniquement par les parois de la conduite dans laquelle elle se développe, mais une évolution longitudinale est observée. Enfin l'instabilité de Görtler se développe dans un système ouvert, en principe, car aucune paroi ne bloque la croissance de l'instabilité.

De cette différence de degrés de liberté entre les deux premières instabilités et l'instabilité de Görtler naît la complexité de cette dernière.

1.3.1.2 Systeme semi-ouvert

Comme évoqué ci-dessus, dans la configuration d'un écoulement de Görtler, aucune paroi ne vient bloquer la croissance de l'instabilité qui s'y développe. Néanmoins, la région instable de l'écoulement dans cette configuration est limitée à la zone de cisaillement de la couche limite. On peut alors considérer que l'instabilité de Görtler se développe dans un système semi-ouvert, car l'épaisseur de la couche limite correspond à la limite physique de croissance de l'instabilité. Le terme semi-ouvert s'explique par le fait que l'épaisseur de la couche limite, qui contraint la croissance de l'instabilité, n'est pas constante. En effet, une couche limite qui se développe sur une paroi plane ou courbe, voit son épaisseur croître.

1.3.2 Discriminant de Rayleigh

Considérons un écoulement bidimensionnel dont les lignes de courant sont courbées et parallèles entre elles (voir figure 1.5a). En coordonnées cylindriques, la vitesse en tout point (r, ϕ) de l'écoulement est $\vec{u}(r, \phi) = u_r(r, \phi)\vec{e}_r + u_\phi(r, \phi)\vec{e}_\phi = u_\phi(r)\vec{e}_\phi$. En négligeant les effets visqueux, le mouvement d'une particule fluide dans cet écoulement est décrit par l'équation d'Euler qui, dans le cas présent, se réduit à

$$-\frac{u_\phi^2(r)}{r} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{dp}{dr} \quad (1.46)$$

Dans cette configuration, l'accélération centripète associée à la trajectoire circulaire des lignes de courant est assurée par le gradient de pression radial.

Sur la figure 1.5(b), on représente une particule P qui se déplace à la vitesse $u_\phi(r)$ le long de la ligne de courant décrite par le cercle de rayon r . Son moment angulaire (ou moment cinétique) par unité de masse est $J(r) = u_\phi(r)r$.

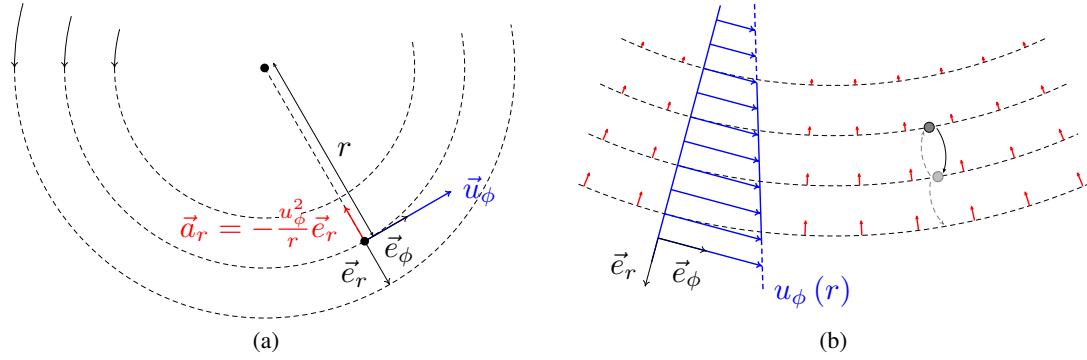


Figure 1.5. (a) Écoulement bidimensionnel dont les lignes de courant sont courbées et parallèles entre elles. Le mouvement d'un tel fluide est intégralement décrit par sa vitesse azimutale $u_\phi(r)$. (b) Déstabilisation d'une particule de fluide immergée dans un écoulement courbe. Le champ du gradient de pression (ou accélération centripète) est montré en rouge, un profil de vitesse $u_\phi(r)$ arbitraire est indiqué en bleu.

Si cette particule est déstabilisée et déplacée vers une position $r + dr$, sa vitesse est alors $u'_\phi(r + dr) = u_\phi(r) r / (r + dr)$ par application de la conservation du moment angulaire, qui est différente de la vitesse du fluide à l'équilibre à cette même position $u_\phi(r + dr)$ (voir [Batchelor, 1967](#), [Charru, 2011](#)). Le gradient de pression effectif est

$$u_\phi^2(r + dr) / (r + dr) = J^2(r + dr) / (r + dr)^3$$

et le gradient de pression nécessaire pour maintenir la particule P à cette nouvelle position est

$$u'_\phi^2(r + dr) / (r + dr) = J^2(r) / (r + dr)^3$$

Un tel écoulement est donc stable si le gradient de pression effectif à la nouvelle position est supérieur au gradient de pression nécessaire pour maintenir P à cette position et une force de rappel P s'exerce alors sur la particule P jusqu'à ce qu'elle revienne à un état d'équilibre.

Ce critère de stabilité est traduit par le discriminant de Rayleigh Φ ([1917](#)). L'écoulement est stable si et seulement si $\Phi > 0$, où Φ est donné par

$$\Phi = \frac{1}{r^3} \frac{dJ^2}{dr} = \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} (u_\phi r)^2 \quad (1.47)$$

Le critère de stabilité présenté ci-dessus est directement applicable à de multiples configurations d'écoulements dont les lignes de courant sont courbées. Ici on fait l'application directe de ce critère de stabilité pour deux types d'écoulement sur paroi concave : la couche limite et le jet de paroi. Les schémas illustrant ces configurations sont montrés en figure 1.6.

La région instable d'une couche limite de sur paroi concave correspond à la zone dite de couche limite, région proche de la paroi où le cisaillement est important (figure 1.6a). La région instable pour un jet de paroi qui se développe sur une paroi concave correspond également à la région proche de la paroi où le cisaillement est fort (figure 1.6b). On peut donc attendre de ces deux configurations qu'elles développent l'instabilité de Görtler. Le cas du jet de paroi est néanmoins un peu plus complexe que celui de la couche limite. En effet, la zone de cisaillement externe (au dessus du maximum de vitesse du jet) est potentiellement à l'origine du développement d'une autre instabilité hydrodynamique, appelée instabilité de Kelvin-Helmholtz. Dans cette configuration, on peut s'attendre à une coexistence de ces deux instabilités que sont l'instabilité de Görtler et

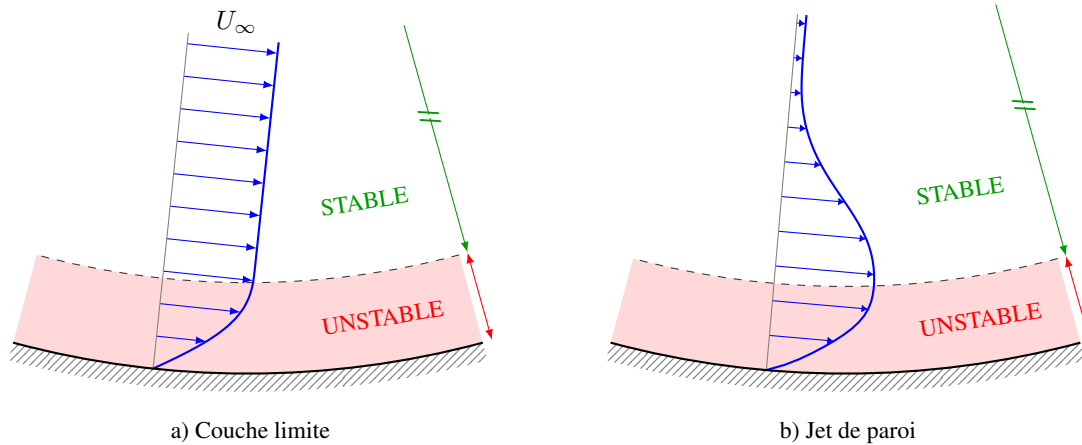


Figure 1.6. Prédiction de la stabilité d'écoulements sur paroi concave par application du discriminant de Rayleigh.

l'instabilité de Kelvin-Helmholtz.

La stabilité de la couche limite et du jet de paroi se développant sur une paroi convexe est prédite au regard du discriminant de Rayleigh. Les schémas correspondant à ces configurations ainsi que les régions instables (vis-à-vis des effets centrifuges) sont montrés en figure 1.7. La couche limite

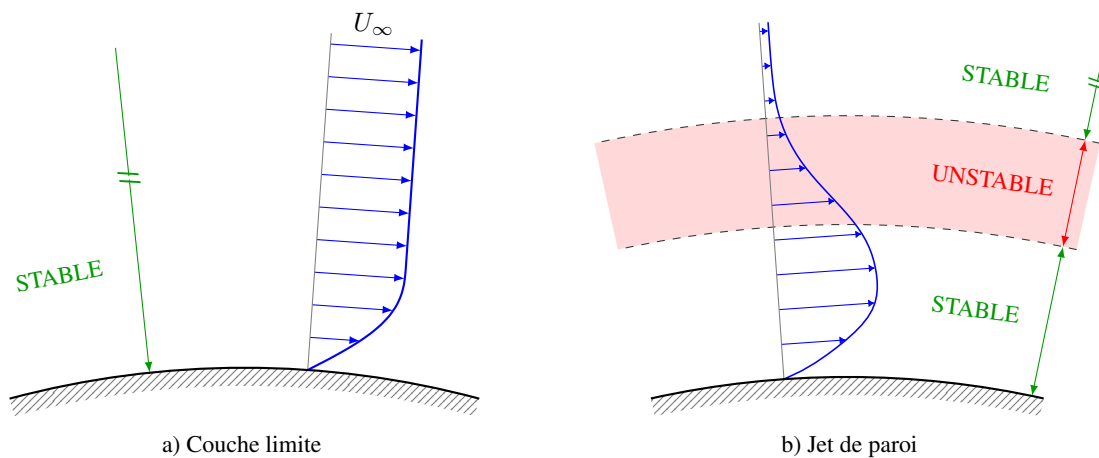


Figure 1.7. Prédiction de la stabilité d'écoulements sur paroi convexe par application du discriminant de Rayleigh.

(figure 1.7a) est complètement stable dans le sens où elle n'est pas sujette aux effets centrifuges induits par la paroi convexe. En revanche, il existe une région locale dans le jet de paroi qui est instable par rapport aux effets centrifuges et qui correspond à la région de cisaillement externe (figure 1.7b). Dans ce cas, il n'est pas trivial de prédire le comportement du jet de paroi, notamment dans la zone de cisaillement externe. En effet, cette zone est aussi potentiellement instable par effets de cisaillement (instabilité de Kelvin-Helmholtz). On est alors dans une configuration où deux instabilités hydrodynamiques de nature différente peuvent se développer dans la même région (couche externe de cisaillement). L'étude de la compétition entre le développement de ces deux instabilités n'est pas triviale.

1.4 Écoulement de Görtler

Après l'étude de Taylor (1923) sur l'écoulement se développant entre deux cylindres concentriques de vitesses angulaires différentes, Görtler étudie en 1940 le cas spécifique d'un écoulement de couche limite sur paroi courbe et montre théoriquement que des structures tourbillonnaires semblables à celles observées par Taylor (tourbillons longitudinaux) peuvent s'y développer si le nombre de Görtler G , défini par

$$G = \frac{U_\infty \delta_r}{\nu} \left(\frac{\delta_r}{R} \right)^{1/2} = Re_{\delta_r} \left(\frac{\delta_r}{R} \right)^{1/2} \quad (1.48)$$

est au dessus d'un certain seuil. Dans l'équation 1.48, R correspond au rayon de courbure de la paroi. Les premières preuves par l'expérience de l'existence de cette instabilité sont ensuite apportées, d'abord par la visualisation des tourbillons de Görtler (Gregory, 1956) puis par des mesures in-situ de vitesse Tani (1962).

Le nombre de Görtler, paramètre de contrôle de l'instabilité étudiée, peut être vu comme le rapport de deux échelles de temps caractéristiques : l'échelle de temps caractéristique de la diffusion t_{visq} (effet stabilisant) et l'échelle de temps caractéristique de la force centrifuge t_{cent} (effet déstabilisant). Le temps caractéristique de diffusion s'écrit $t_{visq} = \delta_r^2 / \nu$. Le temps caractéristique des effets centrifuges s'obtient à partir de l'expression de l'accélération centripète $a = U_\infty^2 / R$ où $a = \delta_r / t_{cent}^2$ est le rapport de la longueur caractéristique δ_r et du temps caractéristique au carré t_{cent}^2 . Le rapport des deux temps caractéristiques est

$$\frac{t_{visq}}{t_{cent}} = \frac{U_\infty \delta_r^{3/2}}{\nu R^{1/2}} = G_{\delta_r} \quad (1.49)$$

Si $t_{visq} \ll t_{cent}$ (nombre de Görtler $G \ll 1$), alors les effets visqueux prédominent et l'écoulement est stable. Si $t_{visq} \gg t_{cent}$ (nombre de Görtler $G \gg 1$), alors les contraintes visqueuse ne suffisent pas à amortir la déstabilisation de l'écoulement par effets centrifuges, l'écoulement est instable.

1.4.1 Topologie de l'écoulement

Comme toutes les instabilités centrifuges, l'instabilité de Görtler induit le développement de tourbillons cohérents dans l'écoulement (voir figure 1.8). Ces tourbillons sont orientés dans la direction longitudinale qui correspond à la direction dans laquelle la couche limite est advectée. La ligne centrale de ces tourbillons est donc alignée avec les lignes de courant de l'écoulement moyen.

Les tourbillons longitudinaux sont organisés par paires et la distance entre deux paires de tourbillons correspond à la longueur d'onde λ de l'instabilité (Görtler, 1940, Smith, 1955). Les tourbillons d'une même paire sont contrarotatifs induisant ainsi des mouvements dans la direction normale à la paroi à leur frontière. Quand le fluide est localement éloigné de la paroi (vitesse normale positive) on parle du phénomène d'*upwash* et quand le fluide est localement poussé vers la paroi (vitesse normale négative) on parle du phénomène de *downwash* (Saric, 1994). On gardera la formulation anglaise pour décrire ces phénomènes dans la suite de ce manuscrit. On retrouve ces phénomènes sur le schéma présenté en figure 1.8 où la région de *downwash* est annotée de la lettre « A » et la région d'*upwash* de la lettre « B ».

La présence des tourbillons longitudinaux dans l'écoulement implique que les champs de vitesse et de pression ne soient pas homogènes dans la direction transverse. La figure 1.8 montre qualitativement la variabilité transverse de la vitesse longitudinale qui est attendue dans un écoulement

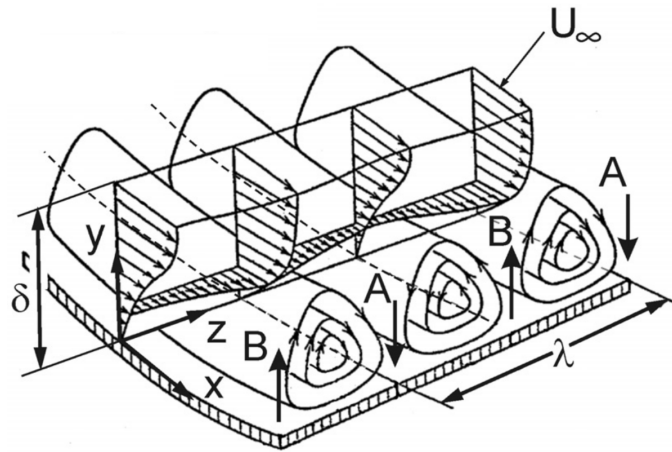


Figure 1.8. Schéma de la topologie de l'instabilité de Görtler issu de [Gordeev et al. \(2010\)](#). δ est l'épaisseur de la couche limite, U_∞ est la vitesse extérieure, x , y et z sont respectivement les directions longitudinale, normale et transverse. λ est la longueur d'onde de l'instabilité. Les zones marquées « A » correspondent au phénomène *downwash* et les zones marquées « B » correspondent au phénomène *upwash*.

de Görtler. Par rapport à l'écoulement moyen, on observe alors des accélérations et décélérations locales. Il est important de noter que le phénomène de *downwash* est associé à une accélération locale de l'écoulement (effet de convergent) et que le phénomène d'*upwash* est associé à une décélération locale de l'écoulement (effet de divergent).

1.4.2 Évolution spatiale de l'instabilité

L'instabilité de Görtler est une instabilité convective ([Floryan, 1991](#), [Chomaz et Perrier, 1991](#), [Saric, 1994](#)) et de ce fait on s'intéresse davantage à son évolution spatiale. Différentes régions peuvent être identifiées lors du développement de l'instabilité de Görtler. Pour illustrer son développement spatial, on montre en figure 1.9 une photographie issue d'une étude expérimentale ([Ito, 1985](#)). Les structures cohérentes présentes dans l'écoulement de Görtler sont rendues visibles par l'utilisation de fumée opaque. Dans cette configuration expérimentale, les premiers indices de la présence de l'instabilité de Görtler sont observés pour $x = 400\text{mm}$ (position longitudinale). Les premières stries sont en effet visibles et proviennent de la présence de mouvements transverses et normaux de faible intensité. Cette région de l'instabilité correspond à sa croissance linéaire, région de l'écoulement que l'on peut décrire théoriquement par analyse de stabilité linéaire ([Görtler, 1940](#), [Smith, 1955](#), [Bippes et Görtler, 1972](#)). Les prémices des tourbillons longitudinaux sont alors développés.

Les larges stries que l'on observe plus en aval sont la trace des tourbillons de Görtler et correspondent à la région non-linéaire de l'instabilité. La physique de cette région ne peut pas être décrite par l'analyse de stabilité linéaire et des simulations non-linéaires ou expériences sont alors nécessaires. Dans la région non-linéaire, sur la figure 1.9, l'accumulation de fumée correspond au phénomène d'*upwash* et l'absence de fumée au *downwash* [Ito \(1985\)](#), [Floryan \(1991\)](#). Les observations montrent que les tourbillons de Görtler sont stationnaires, c'est à dire qu'une fois qu'ils sont développés leur position transverse ne change plus ([Saric, 1994](#)). Par ailleurs, l'écoulement est laminaire dans cette région, bien qu'instable.

Les tourbillons développés dans la région non-linéaire sont ensuite sujets à différents types d'instabilités secondaires ([Aihara et Koyama, 1981](#), [Yu et Liu, 1994](#), [Li et Malik, 1995](#), [Mitsudharmadi et al., 2005a](#), [Souza, 2017](#)). Ces processus complexes induisent une tridimensionalisation des tourbillons,

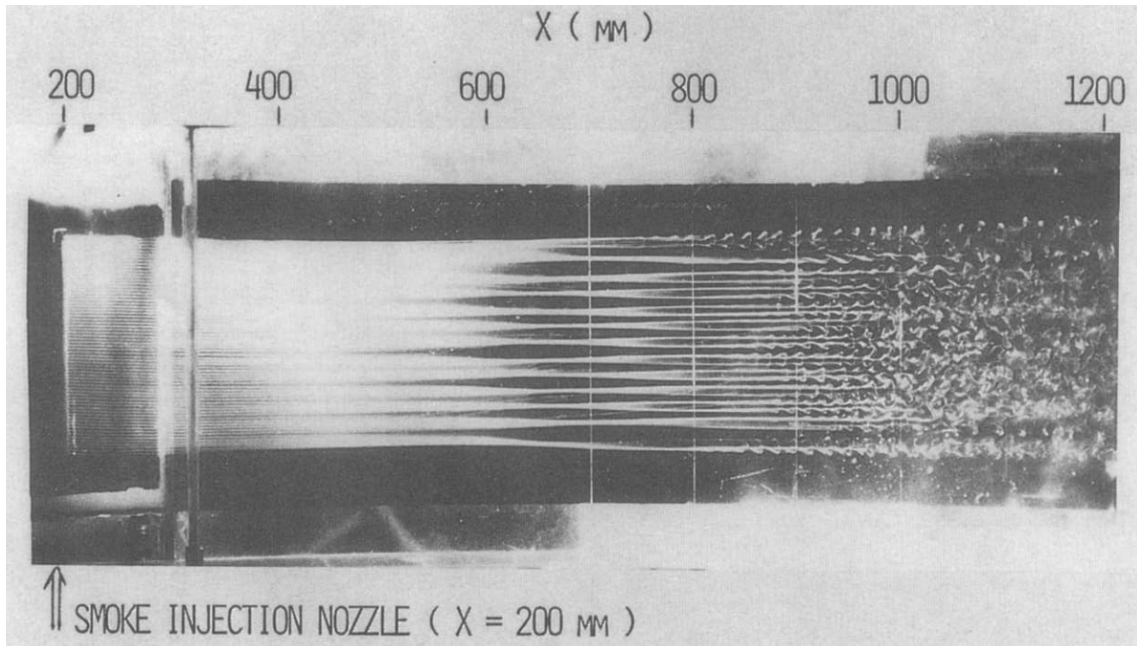


Figure 1.9. Visualisation de la topologie de l'écoulement de Görtler issue de [Ito \(1985\)](#) montrant les différentes régions du développement spatial de l'instabilité. Une injection de fumée en amont de l'écoulement permet la visualisation des structures cohérentes.

comme le montre la figure 1.10 et correspondent à la région de transition à la turbulence. Sur la figure 1.9, cette région correspond à $900 < x < 1000$. On observe que les structures cohérentes gardent une trace de la périodicité spatiale générée en amont.

La couche limite devient turbulente à mesure de son développement spatial. Il est très clair que dans l'étude de [Ito \(1985\)](#) l'écoulement tend vers un état turbulent par la simple observation de la topologie car on retrouve certaines des caractéristiques présentées précédemment telles que l'instationnarité, la tridimensionalisation, le fort mélange, la multiplicité des échelles.

1.4.3 Compétition entre les instabilités de Tollmien–Schlichting et de Görtler

Comme nous l'avons expliqué précédemment, pour un écoulement visqueux soumis à des effets centrifuges, il y a une compétition entre les instabilités centrifuges et les instabilités de cisaillement. Pour le cas d'une couche limite qui se développe sur une paroi concave, l'instabilité de cisaillement appelée instabilité de Tollmien–Schlichting peut exister dans la région proche de la paroi à cause des effets de cisaillement, de la même façon que l'instabilité de Görtler peut exister à cause des effets centrifuges.

Le nombre de Reynolds critique construit avec l'épaisseur de déplacement δ^* comme longueur caractéristique, Re_{δ^*c} , pour lequel l'instabilité de Tollmien–Schlichting se déclenche est $Re_{\delta^*c} = U\delta^*/\nu = 520$ selon [Jordinson \(1970\)](#). [Floryan et Saric \(1982\)](#) montrent que le nombre de Görtler critique pour lequel l'instabilité de Görtler se déclenche lorsqu'une couche limite se développe sur paroi concave est $G_{\delta^*c} = Re_{\delta^*} (\delta^*/R)^{1/2} = 0.4638$.

Ces différents seuils critiques de déclenchement des instabilités peuvent alors être utilisés pour définir la valeur critique de (δ^*/R) pour laquelle l'instabilité de Görtler se déclenche avant l'instabilité

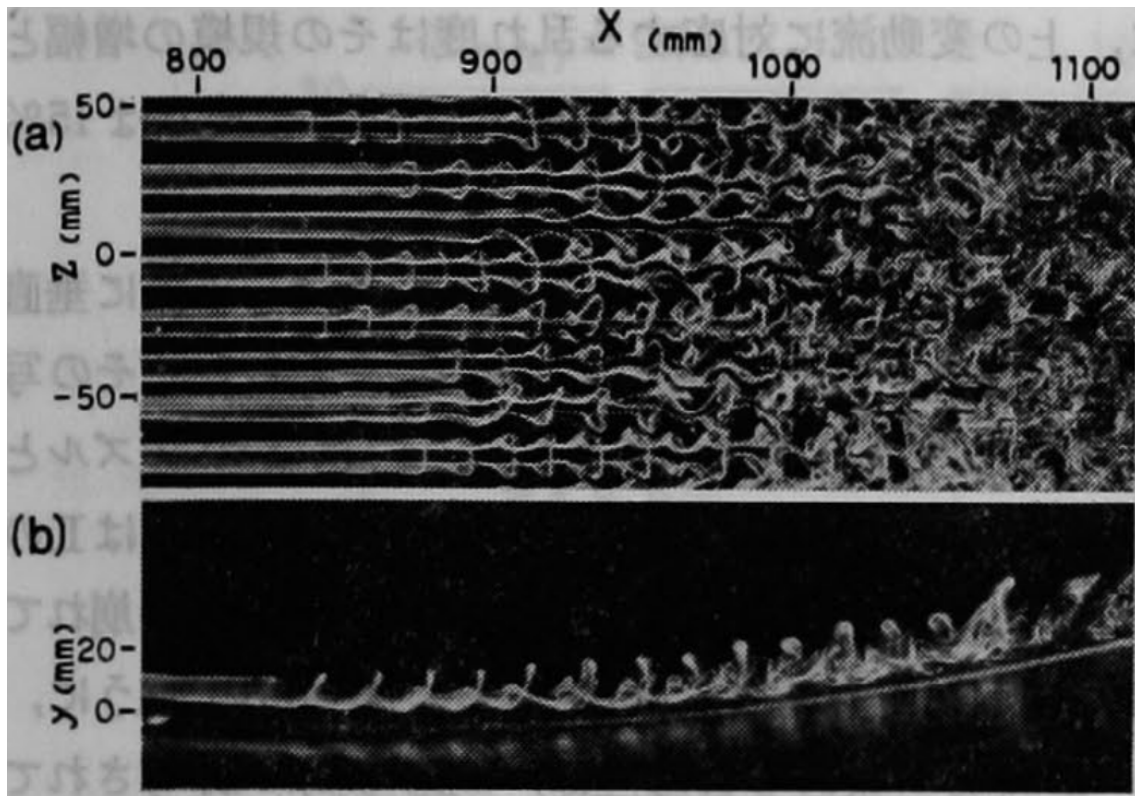


Figure 1.10. Visualisation de la topologie de l'écoulement de Görtler issue de *Ito A., 1985 Ito (1985)* focalisée sur la région de la transition à la turbulence. Une vue de haut (a) et une vue latérale (b) sont proposées.

de Tollmien–Schlichting. On obtient alors

$$\left(\frac{\delta^*}{R}\right)_c = \left(\frac{G_{\delta^*c}}{Re_{\delta^*c}}\right)^2 \approx 8 \times 10^{-7} \quad (1.50)$$

Pour une couche limite pour laquelle $U \approx 1$ m/s, $\delta^* \approx 0.5$ m, le rayon minimal nécessaire pour que l'instabilité de Tollmien–Schlichting se déclenche avant l'instabilité de Görtler est

$$R_c \approx 628 \text{ km}$$

On voit ici par cette simple analyse que la stabilité de la couche limite est très sensible aux effets centrifuges et que dans une configuration présentant une courbure de la paroi, l'instabilité de Görtler se déclenche certainement avant l'instabilité de Tollmien–Schlichting et de ce fait, la transition à la turbulence se fera alors par ce mécanisme prédominant.

Ce que l'on montre ici par une analyse simple des nombres critiques d'apparition des instabilités responsables de la transition à la turbulence est observé dès 1937 par [Clauser et Clauser](#) (avant les travaux de Görtler), qui montre que la transition à la turbulence intervient plus rapidement sur paroi concave. [Liepmann \(1943, 1945\)](#) attribuera ce phénomène à la présence de l'instabilité de Görtler en s'appuyant sur les travaux respectifs de Clauser et Görtler.

1.5 Écoulements stratifiés

La couche limite atmosphérique est un bon exemple d'écoulement où les effets de flottabilité sont importants. Les variations de température en son sein induisent des variations de masse volumique

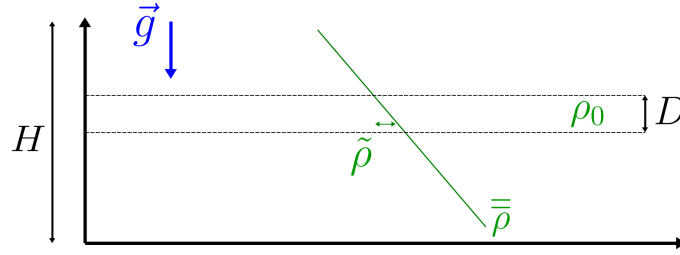


Figure 1.11. Représentation du profil de masse volumique de l'état hydrostatique de base $\bar{\rho}$ ainsi que la fluctuation de masse volumique $\tilde{\rho}$

qui agissent sur la stabilité de l'écoulement. Pour décrire les effets de flottabilité, l'approximation de Boussinesq est utilisée ce qui permet de s'affranchir de la résolution des équations de Navier-Stokes compressibles. Cette hypothèse est valable pour les écoulements dont la masse volumique ρ et la pression p sont très proche de leur état hydrostatique, respectivement $\bar{\rho}$ et \bar{p} satisfaisant

$$-\frac{1}{\bar{\rho}}\vec{\nabla}\bar{p} + \vec{g} = \vec{0} \quad (1.51)$$

Par application de l'approximation de Boussinesq, les champs de pression et de masse volumique sont décomposés en un état hydrostatique et une fluctuation par rapport à cet état hydrostatique tels que

$$\begin{aligned} p &= \bar{p} + \tilde{p} \\ \rho &= \bar{\rho} + \tilde{\rho} \end{aligned}$$

On montre alors que la dynamique de l'écoulement avec effets de flottabilité (voir [Lesieur, 2008](#) pour les détails calculatoires) est très bien décrite par les équations

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}\tilde{p} + \nu\Delta^2\vec{u} + \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}\vec{g} \quad (1.52)$$

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{D\tilde{\rho}}{Dt} + \frac{1}{\rho_0}\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\bar{\rho} = \frac{1}{\rho_0}\kappa_\rho\Delta^2\tilde{\rho} \quad (1.53)$$

où ρ_0 est la masse volumique de référence (du même ordre de grandeur que $\bar{\rho}$) et κ_ρ est la diffusivité de $\tilde{\rho}$. Le rapport entre la viscosité cinématique du fluide ν et la diffusivité κ_ρ est par ailleurs donné par le nombre de Schmidt Sc

$$Sc = \frac{\nu}{\kappa_\rho} \quad (1.54)$$

Le schéma présenté en figure 1.11 rappelle la configuration de l'approximation de Boussinesq. Dans le cas de la couche limite atmosphérique (CLA), le profil hydrostatique $\bar{\rho}$ correspond à la stratification linéaire de l'air, où la masse volumique varie avec l'altitude. Le champ de vitesse \vec{u} dans la couche limite et les fluctuations locales de masse volumique $\tilde{\rho}$ sont couplés par les équations 1.52-1.53.

La stabilité de la CLA dépend naturellement du gradient de masse volumique dans la direction

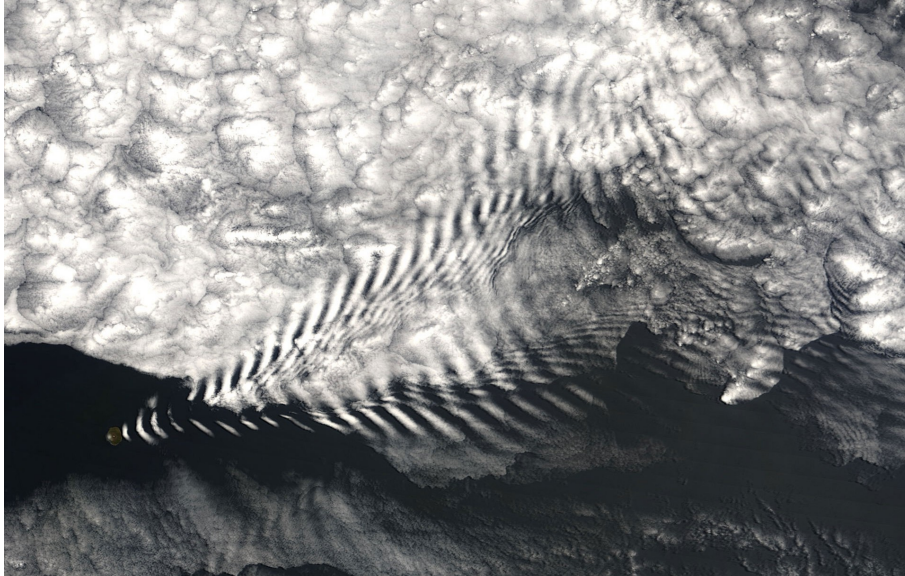


Figure 1.12. Imagerie satellite prise depuis le satellite *Terra* de la NASA, montrant les motifs nuageux réguliers formés aval de l'Île Amsterdam dont l'espacement est régi par la fréquence de *Brunt-Väisälä* N .

verticale (y) telle que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial y} < 0 & : \text{couche limite stable} \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 & : \text{couche limite neutre} \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} > 0 & : \text{couche limite instable} \end{aligned}$$

Dans le cas d'une couche limite atmosphérique stable, si une particule de fluide initialement au repos ($\rho = \bar{\rho}$) est déplacée à une position où $\rho = \bar{\rho} + \tilde{\rho}$, une force de rappel s'exerce alors sur cette particule qui subit une oscillation autour de la position d'équilibre. La fréquence de ces oscillations s'appelle la fréquence de *Brunt-Väisälä*, notée N et définie par

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \times \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} \quad (1.55)$$

Ce paramètre quantifie le niveau de stratification statique d'un écoulement. Dans l'atmosphère, le paramètre N est de l'ordre de $N = 10^{-2} s^{-1}$. On peut également caractériser la stabilité dynamique d'un écoulement stratifié en prenant en compte les effets inertiels. Le nombre de Richardson Ri est le rapport entre les effets de flottabilité et les effets de cisaillement, défini par

$$Ri = \frac{N^2}{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} \quad (1.56)$$

Un nombre de Richardson positif correspond à un écoulement stable. Pour $0 < Ri < 1$, les effets de flottabilité tendent à stabiliser l'écoulement mais ne sont pas dominants. Pour $Ri \gg 1$, l'écoulement est stable et les effets de flottabilité sont très importants.

Les vents catabatiques, ainsi que les courants de gravité, sont des écoulements turbulents. La

stabilité d'un écoulement stratifié peut être décrite au regard de l'impact qu'ont les effets de flottabilité sur le développement de la turbulence. Le bilan de production d'énergie cinétique turbulente peut être réécrit en tenant compte des effets de flottabilité (on détaillera cela au chapitre 6). Si la production de TKE par effets de flottabilité, notée \mathcal{P}_k^B , est positive alors la flottabilité participe à la production de turbulence et, à ce sens, a un effet déstabilisant. À l'inverse, si le terme \mathcal{P}_k^B est négatif, la flottabilité réduit la turbulence, la stratification stabilise l'écoulement.

Le nombre de Richardson de flux, R_f , compare la production de TKE par cisaillement et la production de TKE par flottabilité. Il est défini par (moins) le rapport du terme de production par flottabilité \mathcal{P}_k^B et du terme de production par cisaillement \mathcal{P}_k^M

$$R_f = -\frac{\mathcal{P}_k^B}{\mathcal{P}_k^M} \quad (1.57)$$

Là encore, pour un nombre de Richardson de flux R_f tel que $0 > R_f > -1$, l'écoulement est stable avec des effets de flottabilité modérés. Si $R_f \gg -1$, l'écoulement est stabilisé par des effets de flottabilité très importants. À l'inverse, un nombre de Richardson de flux tel que $R_f \ll -1$ signifie que la flottabilité participe fortement à la production d'énergie cinétique turbulente et à ce sens déstabilise l'écoulement.

1.6 Plan de thèse

La description d'un système aussi complexe que les écoulements gravitaires sur terrain réel représente un challenge scientifique très intéressant. La présence de la courbure (modèle de terrain réel utilisé dans cette étude) tend à déstabiliser l'écoulement gravitaire alors que les effets de flottabilité tendent à les stabiliser. La compétition entre ces deux effets reste encore peu comprise et constitue un des objectifs de la thèse. La dynamique de l'instabilité de Görtler dans les régions transitionnelle et turbulente de son développement est complexe et constitue une majeure partie du travail effectué. Ce manuscrit de thèse est composé des chapitres suivants :

Chapitre 2 :

Dans ce chapitre, les principes de la simulation des grandes échelles sont présentés et les méthodes numériques employées sont décrites en détails. Les paramètres numériques (géométrie, type de maillage, conditions aux limites) des simulations effectuées ainsi que les outils d'analyse physique employés sont finalement détaillés.

Chapitre 3 :

dans ce chapitre, on présente l'analyse de stabilité linéaire d'une couche limite de Blasius sur paroi courbe. L'étude réalisée est située par rapport à l'état de l'art et on présente les résultats pour une large gamme des nombres adimensionnels impliqués.

Chapitre 4 :

Dans ce chapitre, on présente une série de simulations numériques instationnaires pour décrire la dynamique de l'instabilité de Görtler. Les régions linéaire et non-linéaire de l'instabilité sont décrites et des études paramétriques sont réalisées. En particulier, l'influence de la longueur d'onde de l'instabilité et l'influence du nombre de Reynolds sont étudiées. Enfin, l'influence d'une stratification linéaire sur le développement de l'instabilité de Görtler est analysée. En particulier, l'influence de la longueur d'onde de l'instabilité et l'influence du nombre de Reynolds sont étudiées.

Chapitre 5 :

Dans ce chapitre, on présente une étude qui fait l'objet d'une publication dans le journal *Physics of Fluids*. On y étudie la topologie de la couche limite turbulente générée par l'instabilité de Görtler dans laquelle une forte hétérogénéité spatiale persiste.

Chapitre 6 :

Dans ce chapitre, l'analogie entre les effets de courbure et les effets de flottabilité est utilisée. On décrit ainsi l'influence de la courbure et de la flottabilité sur la couche limite en transition à la turbulence et en turbulence développée. Une stratification linéaire ainsi qu'un refroidissement pariétal sont simulés pour ce rapprocher du cas réel de vent catabatique.

2

Méthodes numériques et modélisation de la turbulence : simulations des grandes échelles

Résumé : Dans ce chapitre, les principes de la simulation des grandes échelles sont présentés et les méthodes numériques employées sont décrites en détails. Les paramètres numériques (géométrie, type de maillage, conditions aux limites) des simulations effectuées ainsi que les outils d'analyse physique employés sont finalement détaillés.

Sommaire

2.1	Écoulements turbulents	32
2.1.1	Équations de Navier-Stokes	32
2.1.2	Mécanismes énergétiques turbulents	33
2.2	Simulations des grandes échelles	34
2.2.1	Avant-propos	34
2.2.2	Équations filtrées	35
2.2.3	Modèle de Smagorinsky dynamique	36
2.3	Méthodes numériques	37
2.3.1	Maillages non-structurés	37
2.3.2	Méthode des volumes finis	37
2.3.3	Couplage pression/vitesse : méthode de projection	38
2.3.4	Schémas numériques et critère de stabilité numérique	39
2.4	Domaine de calcul et maillage	39
2.4.1	Géométrie	39
2.4.2	Maillage hybride	41
2.4.3	Conditions aux limites	41
2.5	Outils d'analyse	43

2.1 Écoulements turbulents

2.1.1 Équations de Navier-Stokes

Les écoulements considérés dans ce travail sont des écoulements incompressibles, dont le comportement est régi par les équations de Navier-Stokes. La conservation de la masse au sein de l'écoulement est décrite par l'équation de continuité

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1)$$

où u_i correspond aux trois composantes de la vitesse u , v et w et x_i aux trois directions x , y et z . Le mouvement d'un écoulement incompressible est décrit en chaque instant par l'équation de conservation de quantité de mouvement

$$\underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial t}}_{(I)} + \underbrace{\frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j}}_{(II)} = - \underbrace{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i}}_{(III)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (2\nu S_{ij})}_{(IV)} \quad (2.2)$$

où ρ_0 est la masse volumique du fluide, p est la pression au sein du fluide, ν est la viscosité cinématique et S_{ij} est le tenseur du taux de déformation défini par

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.3)$$

Dans les termes de gauche de l'équation, on retrouve le terme de dérivée temporelle de la vitesse (I) ainsi que le terme non-linéaire d'advection (II). Dans les termes de droite on retrouve les forces qui s'exercent sur l'écoulement avec la force de pression (III) et la force visqueuse, ou terme de diffusion (IV). À cause du terme non-linéaire présent dans ces équations, il est impossible de résoudre ce système d'équation analytiquement. La résolution d'un tel système passe donc par une résolution numérique du problème.

L'équation 2.2 fait intervenir deux termes importants : le terme d'advection (II) qui définit l'inertie de l'écoulement et le terme de diffusion (IV) issu des forces visqueuses conduisant à la diffusion de la quantité de mouvement, respectivement associés à un temps caractéristique d'advection t_{adv} et un temps caractéristique de diffusion t_{visq} . On comprend alors que le nombre de Reynolds Re défini comme le rapport de ces deux temps caractéristiques (voir chapitre 1, équation 1.1) décrit l'importance relative des termes d'advection et de diffusion. Pour des faibles nombres de Reynolds, les forces visqueuses sont prépondérantes dans l'écoulement et les éventuelles perturbations de vitesse sont rapidement amorties par les effets visqueux. À l'inverse, pour des grands nombres de Reynolds, des perturbations locales peuvent se développer sans pouvoir être amorties par diffusion. Des fluctuations spatio-temporelles complexes de vitesse et de pression peuvent alors être observées. Plus le nombre de Reynolds est important, plus les fluctuations peuvent se développer sur une large gamme d'échelles et plus l'écoulement est turbulent. Les fluctuations spatio-temporelles d'un écoulement turbulent viennent se superposer au comportement moyen de l'écoulement. On peut alors dissocier ce comportement chaotique et imprévisible de l'écoulement de son comportement moyen, c'est le principe de la décomposition de Reynolds. Pour toute quantité $f(\vec{x}, t)$, on définit le champ moyen $\langle f \rangle(\vec{x}, t)$ et le champ fluctuant $f'(\vec{x}, t)$ tels que

$$f(\vec{x}, t) = \langle f \rangle(\vec{x}, t) + f'(\vec{x}, t) \quad (2.4)$$

où l'opérateur $\langle \cdot \rangle$ est la moyenne statistique. Par définition, la moyenne des fluctuations est nulle i.e. $\langle f'(\vec{x}, t) \rangle = 0$. L'application de l'opérateur $\langle \cdot \rangle$ aux équations 2.1 et 2.2 conduit à l'écriture des équations de Reynolds :

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\nu \langle S_{ij} \rangle) - \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_j} \quad (2.6)$$

où apparaît le tenseur de Reynolds $\langle u'_i u'_j \rangle$ qui caractérise les flux turbulents de quantité de mouvement. Le terme $\langle S_{ij} \rangle$ est le tenseur du taux de déformation moyen défini par

$$\langle S_{ij} \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) \quad (2.7)$$

2.1.2 Mécanismes énergétiques turbulents

L'énergie cinétique moyenne d'un écoulement, notée K , est définie par

$$K = \frac{1}{2} \langle u_i \rangle \langle u_i \rangle \quad (2.8)$$

À partir des équations 2.6 et 2.8, on peut écrire l'équation de transport de l'énergie cinétique du champ moyen K telle que

$$\underbrace{\frac{\partial K}{\partial t}}_{(I)} + \underbrace{\langle u_i \rangle \frac{\partial K}{\partial x_i}}_{(II)} = \underbrace{\langle u'_i u'_j \rangle \langle S_{ij} \rangle}_{-\mathcal{P}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\langle u_i \rangle \langle u'_i u'_j \rangle + \frac{\langle p \rangle}{\rho_0} \langle u_i \rangle - 2\nu \langle u_i \rangle \langle S_{ij} \rangle \right)}_{(IV)} - \underbrace{2\nu \langle S_{ij} \rangle \langle S_{ij} \rangle}_{(V)} \quad (2.9)$$

où l'on retrouve les termes de variation temporelle (I) et d'advection (II). Le terme (IV) comprend le transport turbulent et moléculaire de l'énergie cinétique moyenne, ainsi que les effets diffusifs. La dissipation de l'énergie cinétique du champ moyen correspond au terme (V). Le terme de production $-\mathcal{P}$ qui apparaît représente le transfert d'énergie cinétique qui existe entre l'écoulement moyen et l'écoulement fluctuant. L'énergie cinétique associée à la partie fluctuante de l'écoulement est appelée énergie cinétique turbulente, notée k et définie par

$$k = \frac{1}{2} \langle u'_i u'_i \rangle \quad (2.10)$$

Pour mettre en évidence le transfert d'énergie cinétique entre l'écoulement moyen et l'écoulement fluctuant, on écrit l'équation de transport de k (les étapes calculatoires qui mènent à l'écriture de l'équation 2.11 sont présentées en annexe A)

$$\underbrace{\frac{\partial k}{\partial t}}_{(I)} + \underbrace{\langle u_i \rangle \frac{\partial k}{\partial x_i}}_{(II)} = \underbrace{-\langle u'_i u'_j \rangle \langle S_{ij} \rangle}_{\mathcal{P}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\langle u'_j \frac{u'_i u'_i}{2} \rangle + \frac{\langle p' u'_i \rangle}{\rho_0} - 2\nu \langle u'_i s'_{ij} \rangle \right)}_{(IV)} - \underbrace{2\nu \langle s'_{ij} s'_{ij} \rangle}_{(V)} \quad (2.11)$$

où $s'_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)$ correspond au tenseur du taux de déformation du champ fluctuant. La variation temporelle de l'énergie cinétique turbulente est décrite par (I), l'advection de k par le terme (II) et le terme (IV) contient le transport turbulent et moléculaire de k ainsi que les effets diffusifs (pression). Le terme (V) correspond à la dissipation de l'énergie cinétique turbulente, notée ϵ , où $\epsilon = 2\nu \langle s'_{ij} s'_{ij} \rangle$. Le transfert d'énergie cinétique qui existe entre l'écoulement moyen et l'écoulement fluctuant est mis en évidence par la présence du terme \mathcal{P} dans cette équation. En

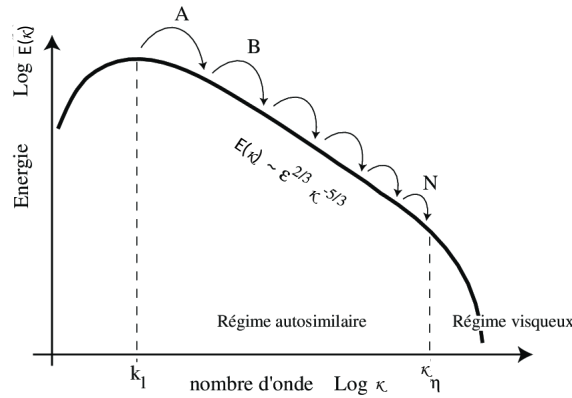


Figure 2.1. Représentation d'un spectre d'énergie $E(\kappa)$ en fonction du nombre d'onde κ (schéma adapté de Morize, 2006) où l'énergie dans la zone inertielle (ou régime autosimilaire) est caractérisée par la loi de Kolmogorov (1941).

effet, on retrouve ce terme à la fois dans l'équation de transport de l'énergie cinétique moyenne K (équation 2.9) et dans l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente k (équation 2.11) avec un signe opposé.

Les échanges d'énergie cinétique au sein de l'écoulement peuvent également être décrits en considérant les différentes échelles de la turbulence. En effet, Richardson (1922) explique dans son livre "Weather prediction by numerical process" qu'il existe de grands tourbillons qui transfèrent leur énergie à de plus petits tourbillons qui, eux, la dissipent (voir également Frisch, 1995, Davidson, 2015). Cela correspond à la cascade d'énergie, où l'énergie cinétique turbulente est transférée successivement des plus grandes échelles de la turbulence vers les échelles les plus petites, jusqu'à être dissipées (figure 2.1). La plus petite échelle pour laquelle ce transfert d'énergie cinétique existe est appelée échelle de Kolmogorov et notée l_k ou η . Ainsi, pour une échelle l telle que $l < l_k$, l'énergie est directement dissipée en chaleur par le terme (V) de l'équation 2.11. La représentation classique de ce mécanisme est la distribution spectrale de l'énergie. On peut ainsi définir un nombre d'onde κ associé à la longueur l et défini par $\kappa = 2\pi/l$ et l'énergie qui y est associée $E(\kappa)$.

La figure 2.1 montre le spectre d'énergie d'un écoulement turbulent. Le terme de production \mathcal{P} est à l'origine des grandes échelles de l'écoulement, caractérisées par ce qu'on appelle aussi l'échelle intégrale l_I (associée au nombre d'onde k_I). L'énergie de ces grandes échelles est ensuite transférée aux plus petites échelles, en suivant la loi de Kolmogorov (1941) qui prédit une évolution en $\kappa^{-5/3}$, jusqu'à l'échelle de Kolmogorov η (associée au nombre d'onde κ_η). On parle alors de zone inertielle pour les nombres d'onde $\kappa_I < \kappa < \kappa_\eta$ et la loi de Kolmogorov qui la régit est considérée comme universelle. De nombreuses observations expérimentales confirment l'existence de cette loi d'évolution de l'énergie (Frisch, 1995). Enfin, la dissipation de l'énergie par viscosité moléculaire est observée pour les nombres d'onde $\kappa > \kappa_\eta$. L'universalité de la loi de Kolmogorov est importante car elle est le point de départ des simulations aux grandes échelles.

2.2 Simulations des grandes échelles

2.2.1 Avant-propos

Pour des configurations d'écoulement turbulent non triviales, la résolution des équations de Navier-Stokes se fait par voie numérique. Il est possible de résoudre directement les équations de Navier-Stokes, on parle alors de Simulation Numérique Directe (SND) ou de *Direct Numerical Simulation*

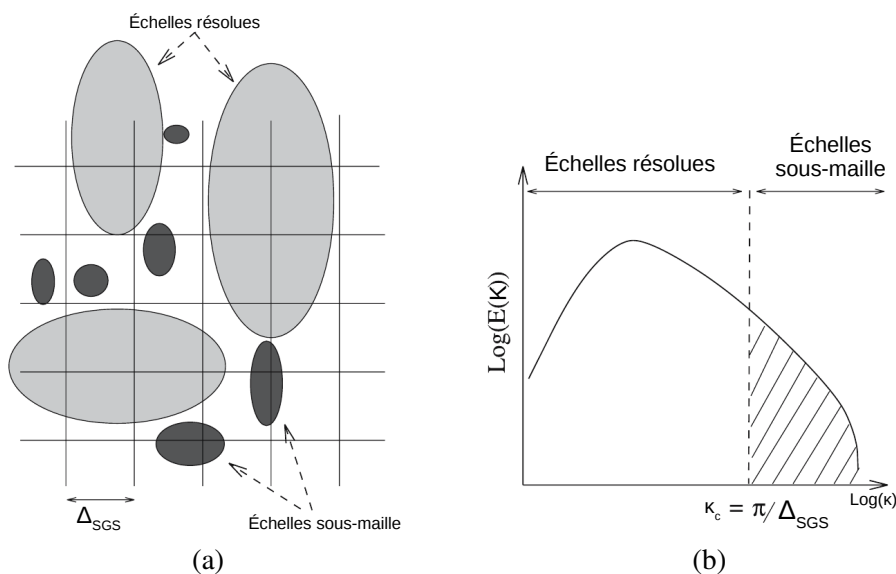


Figure 2.2. Représentation de la méthode de simulation d'un écoulement turbulent selon le type de simulation numérique employé (tiré de Sagaut, 1995).

(DNS). Cependant, ce type de résolution est encore aujourd'hui réservé aux simulations à nombre de Reynolds modéré et nécessite des ressources de calcul très importantes.

Il existe deux alternatives principales à la résolution directe des équations de Navier-Stokes : la simulation des grandes échelles (SGE, ou LES pour *Large-Eddy Simulation*) et la simulation RANS (*Reynolds-Averaged Navier-Stokes*). La simulation RANS consiste à résoudre les équations de Reynolds (2.5-2.6) en utilisant un modèle de fermeture pour modéliser les flux turbulents. La simulation des grandes échelles consiste à résoudre directement la dynamique de l'écoulement pour les plus grandes échelles de la turbulence et à modéliser les effets des plus petites échelles. La figure 2.2 illustre dans l'espace physique (a) et l'espace spectral (b) la séparation entre les grandes échelles et les plus petites échelles. Le nombre d'onde de coupure se situe donc dans la zone intertelle, zone où le transfert d'énergie des plus grandes échelles vers les plus petites échelles est décrit par la loi de Kolmogorov (1941) (pour une turbulence développée).

2.2.2 Équations filtrées

La méthode LES consiste à simuler directement les grandes échelles de l'écoulement et modéliser les plus petites échelles. On définit une échelle de coupure $\Delta_{SGS} = 2\pi/\kappa_{SGS}$ séparant les grandes échelles des petites échelles. L'échelle de coupure est définie en pratique par la taille de maille et les petites échelles sont appelées les échelles sous-maille (en anglais *sub-grid scales* ou *SGS*). Cela se formalise par l'utilisation d'un filtre d'échelle passe-haut que l'on note par une barre supérieure. Pour toute quantité $f(\vec{x}, t)$, on définit alors un champ à grande échelle $\bar{f}(\vec{x}, t)$ et un champ à petite échelle $f^{SGS}(\vec{x}, t)$ tels que :

$$f(\vec{x}, t) = \bar{f}(\vec{x}, t) + f^{SGS}(\vec{x}, t) \quad (2.12)$$

En appliquant cet opérateur aux équations 2.1 et 2.2, on obtient les équations du mouvement filtrées

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\nu \bar{S}_{ij}) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.14)$$

où $\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$ est le tenseur des contraintes sous-mailles et $\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$ est le tenseur du taux de déformation des vitesses pour échelles résolues. La modélisation des petites échelles de la turbulence précédemment évoquée est donc contenue dans le terme τ_{ij} .

2.2.3 Modèle de Smagorinsky dynamique

Pour modéliser la turbulence à petite échelle, il existe deux approches (Sagaut, 1995) : la modélisation structurelle, qui consiste à modéliser la structure mathématique du tenseur sous-maille en s'appuyant sur les propriétés mathématiques de l'opérateur de filtrage et la modélisation fonctionnelle qui consiste à modéliser la fonction du terme sous-maille dans les transferts énergétiques, essentiellement dissipatifs, pour les échelles résolues et les échelles filtrées (voir également Brun, 2010). Dans cette thèse nous utiliserons la deuxième approche.

Les échanges énergétiques des grandes échelles vers les petites échelles suivent la loi de Kolmogorov (1941) dans la zone inertielle. Pour une turbulence isotrope, cette loi de comportement est universelle. L'utilisation de la loi de Kolmogorov pour modéliser les échanges énergétiques entre les échelles résolues et les échelles filtrées est possible car l'échelle de coupure Δ_{SGS} est dans la zone inertielle et que la turbulence à petite échelle est isotrope.

Le transfert d'énergie peut être vu comme une dissipation par les effets d'une viscosité artificielle appelée viscosité sous-maille, notée ν_{SGS} , variable en temps et en espace. Le tenseur des contraintes sous-maille τ_{ij} est alors donné par

$$\tau_{ij} = -2\nu_{\text{SGS}}(\vec{x}, t) \bar{S}_{ij} + \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij} \quad (2.15)$$

L'équation 2.14 devient alors ¹

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[2(\nu + \nu_{\text{SGS}}) \bar{S}_{ij} \right] \quad (2.16)$$

avec $\bar{p}^* = \bar{p} + \frac{1}{3} \tau_{kk}$ la pression modifiée. Le modèle de Smagorinsky dynamique est utilisé dans cette thèse. Dans ce modèle, la viscosité sous-maille est donnée en fonction des caractéristiques des grandes échelles de l'écoulement (maille Δ , cisaillement moyen) par

$$\nu_{\text{SGS}}(\Delta, \bar{S}) = C_s(\vec{x}, t) \Delta^2 |\bar{S}| \quad (2.17)$$

où C_s est la constante de Smagorinsky à déterminer et $|\bar{S}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}$. Une procédure a été développée par Germano et al. (1991) et Lilly (1992) pour déterminer dynamiquement le terme $C_s(\vec{x}, t)$, l'objectif étant d'adapter le niveau de transfert d'énergie sous-maille en espace et en temps selon l'état de l'écoulement turbulent. En particulier, dans les zones de transition à la turbulence $C_s(\vec{x}, t)$ s'adapte jusqu'à s'annuler dans les régions laminaires de l'écoulement. Cette propriété est essentielle dans le travail présenté car elle permet au modèle sous-maille de ne pas impacter la dynamique de l'écoulement dans les zones de développement de l'instabilité de Görtler où les effets non-linéaires de la turbulence n'ont pas encore mené à un état turbulent développé.

1. Par la suite, on présentera les résultats de LES (et de DNS) sans utiliser la notation \bar{u}_i par soucis de simplicité d'écriture.

2.3 Méthodes numériques

2.3.1 Maillages non-structurés

Les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles fortement non linéaires, pour lesquelles aucune solution analytique n'existe aussitôt que l'on considère des écoulements turbulents multi-échelles. On doit donc les discrétiser pour pouvoir les résoudre numériquement. La solution aux équations de Navier-Stokes considérées est donc approximée (numériquement) à des positions données (discrétisation spatiale) et des instants donnés (discrétisation temporelle).

La discrétisation spatiale se fait par l'utilisation d'un maillage. Il existe deux types principaux de maillage : les **maillages structurés** dans lesquels la position des nœuds est définie par des indices et les **maillages non-structurés** pour lesquels les nœuds ne peuvent être identifiés que par leur coordonnées. Deux exemples de ces types de maillages sont montrés en figure 2.3. L'avantage d'un

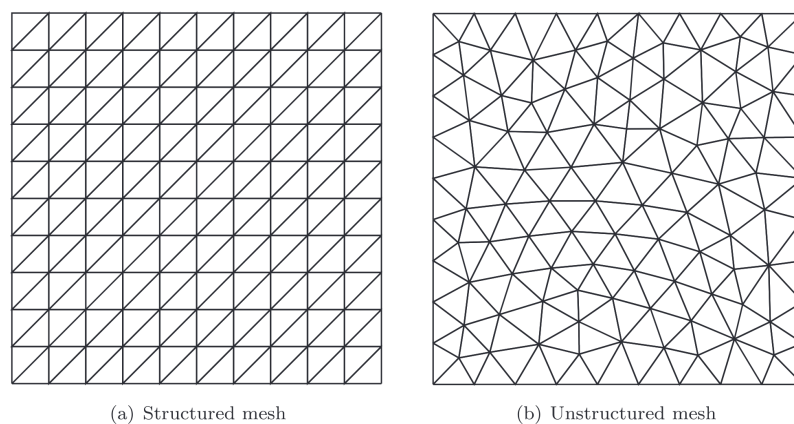


Figure 2.3. Principaux types de maillages illustrés par des schémas 2D d'un même domaine de simulation (tiré de [Hiester et al., 2014](#)).

maillage non-structuré par rapport au maillage structuré est sa capacité à discrétiser des domaines fluides de géométries complexes. Dans le cadre de cette thèse, un domaine courbé est utilisé, ce qui ne constitue pas en soit un domaine très complexe et qui, par ailleurs, pourrait être discrétisé par un maillage structuré. Néanmoins, le choix d'utiliser un maillage non-structuré a été fait pour plusieurs raisons :

- le maillage non-structuré permet d'avoir une grande liberté dans le raffinement/déraffinement local du maillage, en particulier pour la résolution explicite des conditions limites à la paroi
- des algorithmes très performants ont été développés dans le code YALES2 pour ce type de maillage
- ce travail de thèse, à caractère plutôt fondamental, vise à être appliqué à des configurations d'écoulements plus complexes à changement de courbure ([Brun, 2017](#)) ou à des configurations d'écoulements se développant sur des topographies réelles ([Blein, 2016](#)), pour lesquelles l'utilisation d'un maillage non-structuré est très pertinente

2.3.2 Méthode des volumes finis

Les équations de Navier-Stokes sont discrétisées par la méthode des volumes finis, méthode principalement utilisée en mécanique des fluides. Cette méthode, initialement développée par [Chorin \(1967, 1968\)](#) et [Temam \(1968\)](#) et améliorée ensuite par [Goda \(1979\)](#) et [Gresho \(1990\)](#) entre

autres, consiste à définir un volume de contrôle, qui peut correspondre à la cellule fluide du maillage ou alors être centré sur les nœuds du maillage. C'est cette deuxième option qui est utilisée dans le code YALES2. Un schéma d'un volume de contrôle issu d'un maillage non-structuré quelconque est montré en figure 2.4 Les équations de Navier-Stokes sont alors intégrées pour chaque volume de

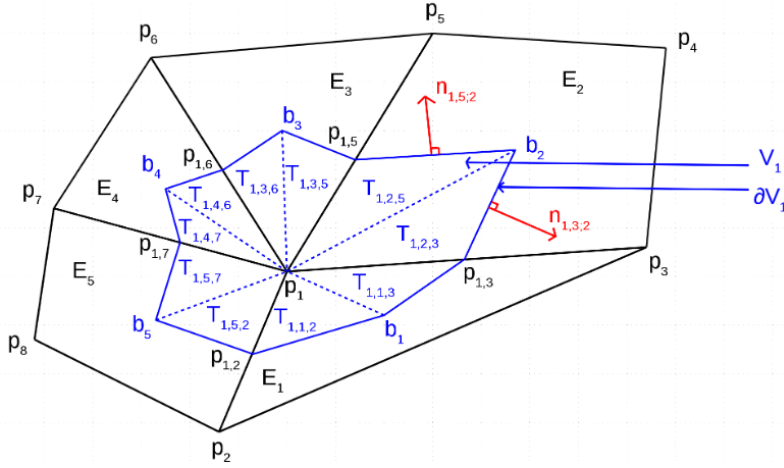


Figure 2.4. Construction d'un volume de contrôle dans YALES2 à partir des mailles contenant le nœud central de ce volume (issu de Sahut, 2019).

contôle. L'opérateur divergence qui intervient dans les équations devient une intégrale surfacique par application du théorème de Green-Ostrogradski. Pour un écoulement incompressible on obtient alors le système d'équations suivant

$$\oint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V u dV &= - \oint_S u \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS - \frac{1}{\rho_0} \oint_S p n_x dS + \nu \oint_S \nabla u \cdot \mathbf{n} dS \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_V v dV &= - \oint_S v \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS - \frac{1}{\rho_0} \oint_S p n_y dS + \nu \oint_S \nabla v \cdot \mathbf{n} dS \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_V w dV &= - \oint_S w \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS - \frac{1}{\rho_0} \oint_S p n_z dS + \nu \oint_S \nabla w \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (2.19)$$

évolution temporelle
terme d'advection
terme de pression
terme de diffusion

2.3.3 Couplage pression/vitesse : méthode de projection

Pour calculer le champ de vitesse \mathbf{u}^{n+1} à l'instant $n + 1$ à partir de la solution des équations de Navier-Stokes à l'instant n , on voudrait résoudre directement

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -\nabla \cdot (\mathbf{u}^n \otimes \mathbf{u}^n) - \nabla P^{n+1} + \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}^n) \quad (2.20)$$

Or, dans le code YALES2, pour s'affranchir de la résolution simultanée des termes de vitesse et de pression on utilise la méthode de projection pour la résolution de cette équation. Cette méthode découle de la décomposition de Helmholtz qui stipule que tout champ vectoriel de dimension 2 ou 3 peut être décomposé en une composante irrotationnelle et une composante solénoïdale (à

divergence nulle). La décomposition de Helmholtz nous donne les équations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -\nabla \cdot (\mathbf{u}^n \otimes \mathbf{u}^n) + \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}^n) \\ \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\nabla P^{n+1} \end{array} \right. \quad (2.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -\nabla \cdot (\mathbf{u}^n \otimes \mathbf{u}^n) + \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}^n) \\ \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\nabla P^{n+1} \end{array} \right. \quad (2.22)$$

où \mathbf{u}^* est une prédiction de la vitesse finale recherchée \mathbf{u}^{n+1} , qui, contrairement à \mathbf{u}^{n+1} ne respecte pas la condition de divergence nulle. La pression et la vitesse ne sont toujours pas couplées dans l'équation 2.21 mais en calculant la divergence de l'équation 2.21 on obtient l'équation de Poisson qui permet de calculer le terme de pression à l'instant $n + 1$

$$\nabla \cdot (\nabla P^{n+1}) = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t} \quad (2.23)$$

Il vient alors l'expression pour la vitesse à l'instant $n + 1$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t (\nabla P^{n+1}) \quad (2.24)$$

La méthode de projection consiste donc à résoudre l'équation 2.20 en plusieurs étapes :

- l'étape de **prédiction** qui consiste à calculer une prédiction, notée \mathbf{u}^* , de la vitesse recherchée \mathbf{u}^{n+1} , sans prendre en compte le gradient de pression (équation 2.20)
- l'étape de résolution de **l'équation de Poisson**, qui représente bien souvent près de 50% du temps de calcul du fait du grand nombre de points de maillage qui oblige à utiliser des méthodes itératives de résolution du système linéaire
- l'étape de **correction** qui consiste à calculer la vitesse \mathbf{u}^{n+1} corrigée par la pression

2.3.4 Schémas numériques et critère de stabilité numérique

Le schéma numérique de discrétisation spatiale utilisé dans YALES2 pour le calcul des flux est un schéma centré d'ordre 4. Le schéma de discrétisation temporelle est un schéma d'ordre 4 semblable au schéma Runge-Kutta RK4, appelé TFV4A Plus de détails sur les schémas numériques utilisés dans le code YALES2 peuvent être trouvés dans les travaux de [Vantieghem \(2011\)](#). Cette adaptation du schéma classique RK4 conduit à ce que la condition de Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) soit respectée à chaque pas de temps. Le CFL est le critère de stabilité numérique utilisé. Il permet d'imposer en chaque point du maillage que le pas de temps Δt soit suffisamment faible pour qu'une particule de fluide se déplaçant à une vitesse U ne parcoure pas une distance supérieure à la taille locale du maillage Δ . Il s'écrit

$$C(\vec{x}, t) = \frac{U(\vec{x}, t) \Delta t}{\Delta} < 1 \quad (2.25)$$

Les simulations numériques présentées dans ce travail sont réalisées avec un pas de temps Δt tel que $C < 0.9$.

2.4 Domaine de calcul et maillage

2.4.1 Géométrie

Le domaine de calcul est composé de deux parties distinctes : une partie courbe et une partie plane (figure 2.5). Toutes les dimensions du domaine sont exprimées en fonction de la longueur caractéristique δ_0 , épaisseur de la couche limite en entrée du domaine. Le rayon de courbure est

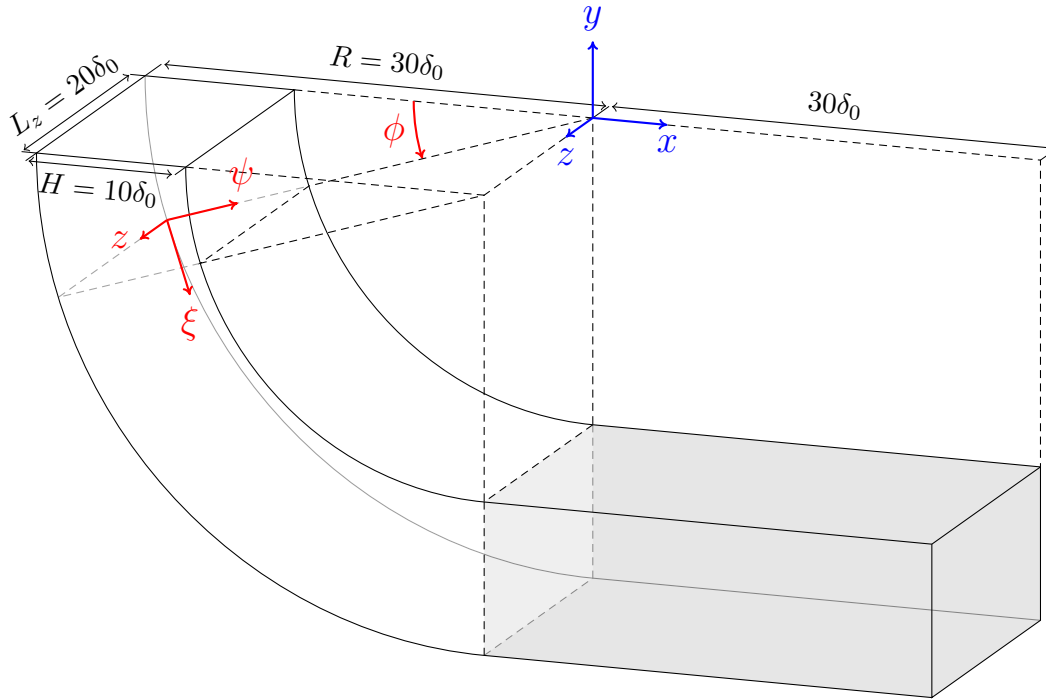


Figure 2.5. Géométrie de la configuration physique. Partie courbée en blanc et partie plane en gris. Repère global (x, y, z) en bleu et repère local (ξ, ψ, z) en rouge.

$R = 30\delta_0$, la hauteur du domaine (dans la direction normale ψ) est $H = 10\delta_0$, la longueur de la partie plane est $30\delta_0$ et la largeur du domaine (dans la direction transverse z) est $L_z = 20\delta_0$ à l'exception des simulations où la longueur d'onde de l'instabilité de Görtler λ est forcée (aux chapitres 4 et 6) où la largeur du domaine est alors $L_z = 6\lambda$. La position angulaire ϕ varie de $\phi = 0$ en entrée du domaine à $\phi = \pi/2$ à la fin de la partie courbe puis sur l'intégralité de la partie plane et s'exprime (pour la partie courbe) en fonction des coordonnées (x, y) par

$$\phi = \arctan \frac{y}{x} \quad (2.26)$$

Alors que les équations de Navier-Stokes sont résolues dans le repère global (x, y, z) , l'analyse physique de l'écoulement est effectuée dans le repère local (ξ, ψ, z) , exprimé en fonction des coordonnées (x, y) , du rayon de courbure R et de la position angulaire ϕ comme

$$\begin{cases} \xi &= R\phi \\ \psi &= R - \sqrt{x^2 + y^2} \\ z &= z \end{cases}$$

Le champ de vitesse dans le repère local $\mathbf{u} = (u_\xi \ u_\psi \ u_z)$ s'exprime en fonction de ϕ et du champ de vitesse dans le repère global $\mathbf{u} = (u_x \ u_y \ u_z)$ comme

$$\begin{cases} u_\xi &= \sin \phi \ u_x - \cos \phi \ u_y \\ u_\psi &= \cos \phi \ u_x + \sin \phi \ u_y \\ u_z &= u_z \end{cases}$$

Dans la suite de ce manuscrit, toute l'analyse physique est présentée en utilisant la notation classique pour le champ de vitesse à savoir $\mathbf{u} = (u \ v \ w)$, où u , v et w correspondent aux composantes longitudinale, normale et transverse de la vitesse respectivement.

2.4.2 Maillage hybride

Le type de maillage qui est utilisé pour les simulations présentées dans cette thèse est un maillage hybride dans le sens où toutes les cellules du maillage ne sont pas de même nature (figure 2.6). En effet, les cellules fluides sont des prismes dans la région proche de la paroi (2.6b) alors que des tétrahèdres sont utilisés pour la région externe (éloignée de la paroi). Les prismes sont bien adaptés pour la région proche de la paroi car ils permettent d'avoir une taille de maille locale dans la direction normale à la paroi ψ très faible, permettant ainsi de résoudre correctement le cisaillement à la paroi.

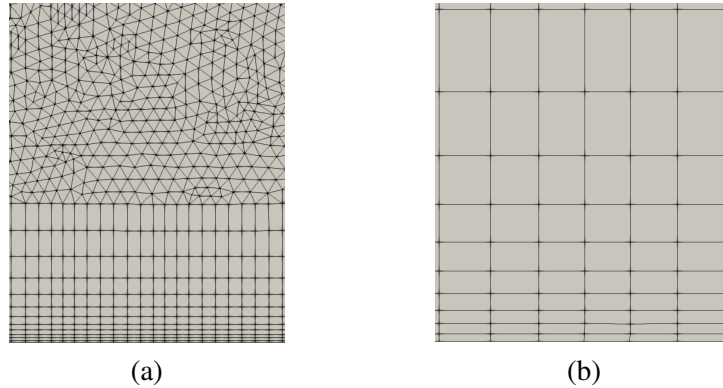


Figure 2.6. Maillage du domaine fluide. Les cellules de fluides proche de la paroi sont des prismes, les cellules de la région externes sont des tétrahèdres.

2.4.3 Conditions aux limites

La synthèse des conditions aux limites utilisées dans les simulations numériques présentées dans ce travail est montrée en figure 2.7.

Limite inférieure

La limite inférieure (figure 2.7a), qui correspond à $\psi = 0$, est une paroi où une condition d'adhérence est imposée. Une condition de Dirichlet sur le champ de vitesse est donc utilisée et la vitesse à la paroi est

$$\mathbf{u}|_{\psi=0} = \vec{0}$$

Limite supérieure

La limite supérieure (figure 2.7b), qui correspond à $\psi = H$ est une paroi glissante. On utilise une condition de Neumann sur le champ de vitesse. À la limite supérieure, on a donc

$$(\partial \mathbf{u} / \partial \psi)|_{\psi=H} = \vec{0}$$

Condition d'entrée

L'entrée du domaine correspond à $\phi = 0$ (figures 2.5 et 2.7c). Le profil de vitesse imposé en entrée correspond à la solution autosimilaire de Blasius (équation 1.19), dimensionnée par les échelles δ_0 et U_∞ .

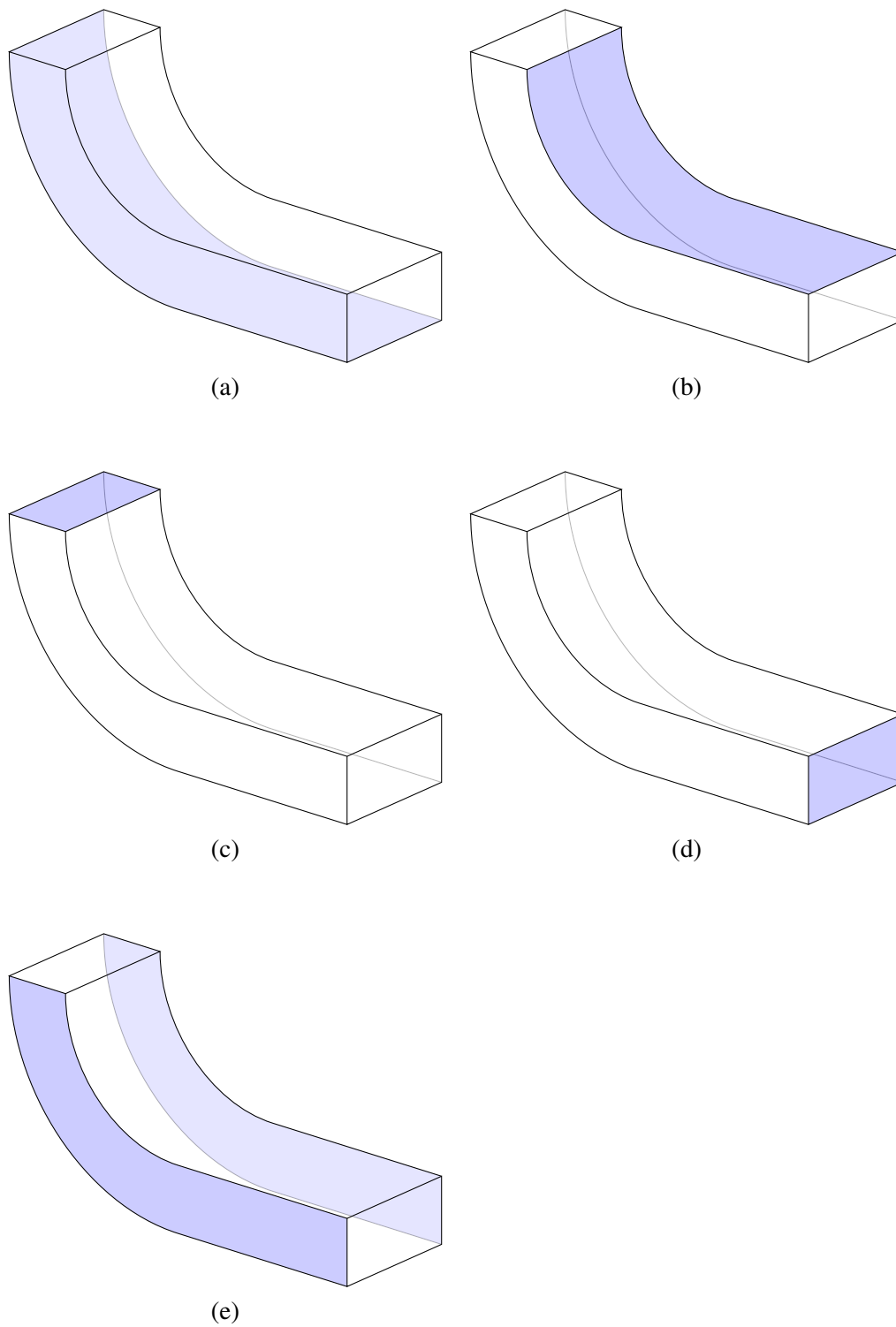


Figure 2.7. Conditions aux limites pour l'ensemble des simulations présentées dans ce travail de thèse (descriptions détaillées dans le texte). (a) Condition d'adhérence, (b) paroi glissante, (c) condition d'entrée, (d) condition de sortie, (e) condition de périodicité.

Condition de sortie

La sortie du domaine correspond à la position $x = 30\delta_0$ (figure 2.7d). Une condition de sortie advective est utilisée (Orlanski, 1976). Cette condition permet d'éviter les retours d'écoulement quand des structures tourbillonnaires sortent du domaine.

Périodicité

Une condition de périodicité dans la direction transverse est utilisée. De ce fait, le champ de vitesse défini aux positions $z = 0$ et $z = L_z$ est identique (figure 2.7e). La longueur $L_z = 20\delta_0$ est suffisamment importante pour avoir une décorrélation transverse de l'écoulement.

2.5 Outils d'analyse

Critère Q

Pour caractériser la topologie de l'écoulement et plus particulièrement les structures tourbillonnaires présentes dans l'écoulement, nous utilisons le critère Q (Hunt et al., 1988, Dubief et Delcayre, 2000). C'est le second invariant du tenseur des gradients de vitesse, qui est défini par

$$Q = \frac{1}{2} (\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij}) \quad (2.27)$$

avec S_{ij} la partie symétrique du tenseur des gradients de vitesse, qui mesure la déformation dans l'écoulement et Ω_{ij} la partie anti-symétrique du tenseur des gradients de vitesse, qui mesure la rotation. Ils sont définis par

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.28)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.29)$$

Les valeurs de Q positives correspondent aux régions de l'écoulement où les effets de rotation sont dominants par rapport aux effets de cisaillement. Ce critère sera utilisé dans ce travail de thèse pour observer les tourbillons de Görtler mais aussi les structures tourbillonnaires turbulentes (plus petites et homogènes).

Vorticité

La vorticité, notée ω permet également d'observer des structures tourbillonnaires présentes dans l'écoulement. Les composantes longitudinale, normale et transverse de la vorticité ω sont respectivement notée ω_ξ , ω_ψ et ω_z .

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial \psi} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \psi} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Dans la région de développement de l'instabilité de Görtler, la vorticité longitudinale ω_ξ est particulièrement utile pour identifier les tourbillons longitudinaux contra-rotatifs (tourbillons de Görtler).

Opérateurs statistiques

Le traitement statistique d'un écoulement turbulent permet une quantification des phénomènes physiques en présence. Les quantités statistiques d'un écoulement sont reproductibles et permettent une comparaison avec d'autres études (numériques ou expérimentales). Dans cette étude, la décomposition de Reynolds est utilisée (voir équation 2.4). Une quantité f est donc définie par sa partie moyenne $\langle f \rangle$ et sa partie fluctuante f' . Par définition, la moyenne de la fluctuation est nulle $\langle f' \rangle = 0$. La quantification statistique de la fluctuation se fait donc par le calcul de sa variance $\langle f'^2 \rangle$.

En faisant l'hypothèse d'ergodicité (Boltzmann, 1866) temporelle et spatiale dans la direction transverse z , on exprime la moyenne statistique de f par²

$$\langle f(\xi, \psi, z, t) \rangle(\xi, \psi) = \frac{1}{N \times N_z} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{N_z} f(\xi, \psi, m\Delta z, n\Delta t) \quad (2.31)$$

qui sera également notée $\langle f \rangle_{t,z}$ par endroit pour insister sur le fait que l'hypothèse d'ergodicité est faite pour le temps t et la direction transverse z . Dans le cas de l'instabilité de Görtler, il est également pertinent de ne considérer que l'ergodicité temporelle du fait de l'hétérogénéité spatiale induite par le développement des tourbillons de Görtler. Dans ce cas, la moyenne statistique correspond à la moyenne temporelle que l'on note $\langle f \rangle_t$ et que l'on définit par

$$\langle f(\xi, \psi, z, t) \rangle_t(\xi, \psi, z) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\xi, \psi, z, n\Delta t) \quad (2.32)$$

À partir des équations 2.31 et 2.32, on peut introduire une décomposition du champ moyen temporel $\langle f \rangle_t$ en une moyenne spatiale $\langle f \rangle_{t,z}$ (ou $\langle f \rangle$) et une fluctuation spatiale, notée f'' , qui s'exprime par

$$f''(\xi, \psi, z) = \langle f \rangle_t(\xi, \psi, z) - \langle f \rangle(\xi, \psi) \quad (2.33)$$

Par définition, la moyenne spatiale de f'' est $\langle f'' \rangle_z = 0$. Pour quantifier l'hétérogénéité transverse de la quantité $\langle f \rangle_t$, on introduit alors f_{SHL} (pour *Spanwise Heterogeneity Level*) défini par

$$f_{\text{SHL}}(\xi, \psi) = \sqrt{\frac{1}{N_z} \sum_{m=1}^{N_z} f''^2(\xi, \psi, m\Delta z)} \quad (2.34)$$

qui correspond à l'écart type transverse de $\langle f \rangle_t(\xi, \psi, z)$.

Post-traitements spécifiques

Spectrogramme

On a vu au chapitre 1 que les fluctuations spatiales présentes dans l'écoulement de Görtler étaient intimement liées à la présence d'une (ou plusieurs) longueur(s) d'onde. Pour mesurer cette longueur d'onde, on utilise la transformée de Fourier appliquée à la fluctuation spatiale du champ moyen (f'' , équation 2.33). Il est judicieux d'utiliser cette quantité pour le calcul de la transformée de Fourier car sa variation transverse est sinusoïdale et permet une bonne estimation de la longueur d'onde dominante dans l'écoulement. La transformée de Fourier discrète F est donnée par

$$F(\xi, \psi, 1/\lambda) = \sum_{m=0}^{N_z-1} f''(\xi, \psi, m) e^{-2i\pi k \frac{m}{N_z}} \quad (2.35)$$

2. L'équation 2.31 est écrite pour un pas de temps Δt constant.

Un exemple de spectrogramme obtenu par transformée de Fourier discrète à partir de la fluctuation spatiale du champ de vitesse moyen u'' est montré en figure 2.8. L'amplitude du spectre est

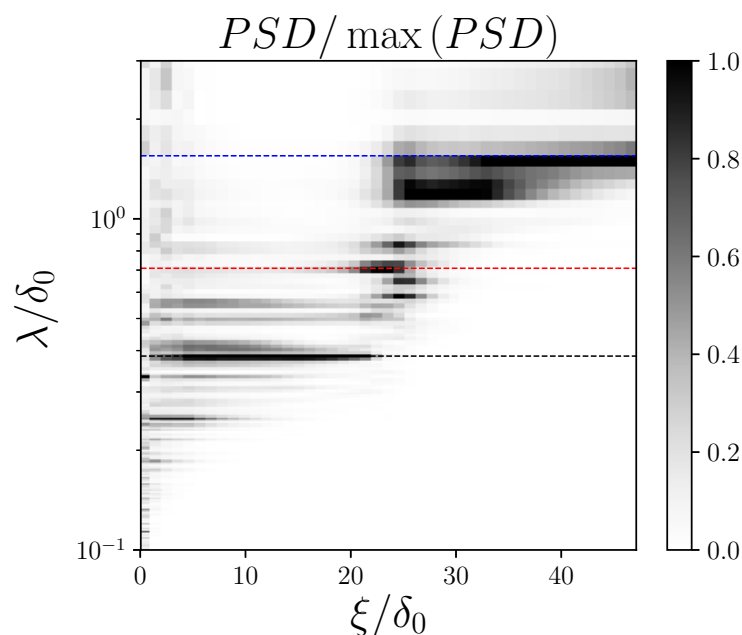


Figure 2.8. Spectrogramme issu de [Dagaut et al. \(2021\)](#) montrant l'évolution longitudinale de la longueur d'onde dominante dans l'écoulement.

normalisée par son maximum local pour faciliter l'identification des longueurs d'onde dominantes dans l'écoulement.

Moyenne de phase

Ce dernier post-traitement vise à calculer une moyenne spatiale d'un champ donné tout en gardant l'hétérogénéité locale présente sur une longueur d'onde. Le domaine de calcul de largeur L_z est donc divisé en sous-domaines de largeur λ , auxquels l'opérateur de moyenne d'ensemble est appliqué. On obtient un domaine réduit de largeur λ et on note la position transverse dans ce domaine réduit $0 < \tilde{z} < \lambda$. Le champ de moyenne de phase, noté $\langle \tilde{f} \rangle_t$, calculé à partir du champ moyenné temporellement $\langle f \rangle_t$ est défini par

$$\langle \tilde{f} \rangle_t(\xi, \psi, \tilde{z}) = \frac{1}{N_\lambda} \sum_{i=0}^{N_\lambda-1} \langle f \rangle_t(\xi, \psi, \tilde{z} + i\lambda) \quad (2.36)$$

Maillage de traitement statistique

L'utilisation d'un maillage non structuré a de nombreux avantages, notamment une très grande liberté dans la géométrie du domaine fluide considéré. Avec ce type de maillage, on pourrait par exemple modéliser la topographie locale d'une montagne sans difficulté, ce qui s'avère très intéressant dans le contexte de cette thèse et les travaux qui suivront. Néanmoins, l'étude porte en grande partie sur l'instabilité de Görtler ce qui implique la nécessité de calculer des statistiques spatiales pour quantifier les hétérogénéités spatiales qu'elle induit. Il est donc nécessaire d'utiliser, en plus de la grille principale de résolution des équations de Navier-Stokes, une grille secondaire (grille de post-traitements) dont les points sont alignés dans la direction transverse pour pouvoir

calculer les statistiques spatiales décrites précédemment. Un schéma simplifié en 2D mettant en évidence les deux grilles utilisées est montré en figure 2.9. Pour connaître toute quantité f aux

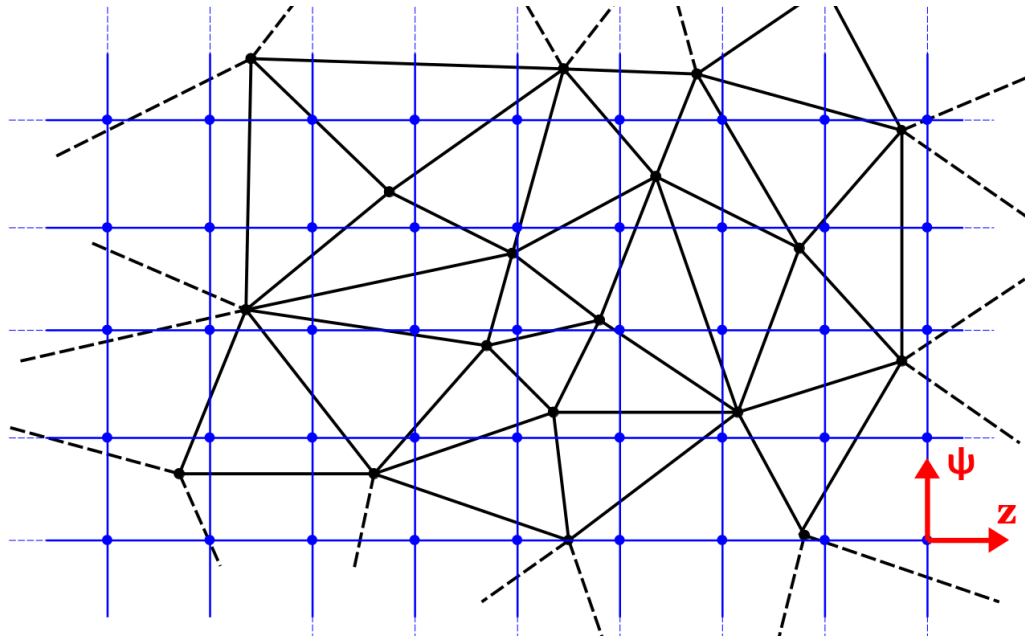


Figure 2.9. Représentation schématique de la grille de résolution des équation de Navier-Stokes (non-structurée) en noir et de la grille de post-traitements (structurée) en bleu.

points de la grille de post-traitements, on utilise une méthode d'interpolation linéaire.

3

Analyse de stabilité linéaire

Résumé : Dans ce chapitre, on présente l'analyse de stabilité linéaire d'une couche limite de Blasius sur paroi courbe. L'étude réalisée est située par rapport à l'état de l'art et on présente les résultats pour une large gamme des nombres adimensionnels impliqués.

Sommaire

3.1	Étude fondatrice de Görtler (1940)	48
3.2	Étude de Floryan et Saric (1982)	49
	3.2.1 Formalisme de l'étude	49
	3.2.2 Résultats	50
3.3	Mise en équation du problème	51
	3.3.1 Écoulement de base	51
	3.3.2 Équations de Görtler	52
3.4	Résolution numérique du système d'équations	55
3.5	Résultats	56
	3.5.1 Validation de la méthode	56
	3.5.2 Extension de l'étude de Floryan et Saric	58

3.1 Étude fondatrice de Görtler (1940)

Görtler (1940) publie les premiers travaux s'intéressant à l'instabilité tridimensionnelle qui se développe lorsqu'une couche limite de Blasius est soumise à une courbure de ses lignes de courant. Les caractéristiques spécifiques à l'instabilité de Görtler sont introduites dans cette étude.

Cette instabilité se développant dans une couche limite, ses limites spatiales de développement sont dictées par l'évolution de la couche limite elle-même. Les paramètres physiques de l'instabilité sont alors normalisés par une échelle caractéristique de la couche limite : l'épaisseur de quantité de mouvement θ . Ainsi, le taux de croissance spatial de l'instabilité (i.e. croissance de perturbations de vitesse) est $\beta\theta^2/\nu$, où β est homogène au rapport d'une vitesse sur une distance. Le nombre d'onde adimensionnel de l'instabilité est $\alpha\theta$, où α est le nombre d'onde dimensionnel défini par $2\pi/\lambda$ et λ est la longueur d'onde de l'instabilité (distance entre deux paires de tourbillons). Le nombre de Görtler est également introduit comme étant le paramètre physique qui définit les limites de stabilité d'un tel problème et s'exprime $G_\theta = (U\theta/\nu) \sqrt{\theta/R}$ qui peut être vu comme le rapport d'un temps caractéristique de diffusion et d'un temps caractéristique des effets centrifuges (voir chapitre 1).

Le diagramme de stabilité issu de cette étude, qui présente à la fois la courbe de stabilité marginale et les courbes de taux de croissance spatial constant, est montré en figure 3.1. Les résultats sont présentés pour des valeurs du nombre d'onde adimensionnel $0.01 < \alpha\theta < 7.5$ et du nombre de Görtler $0.6 < G_\theta < 100$. Une valeur critique du nombre de Görtler $G_c \approx 0.6$ est obtenue et correspond à un nombre d'onde adimensionnel $\alpha\theta \approx 0.2$. À partir des résultats de cette étude on peut donc conclure que l'écoulement est stable pour les nombres de Görtler inférieurs au nombre de Görtler critique $G_c \approx 0.6$. L'écoulement est instable pour $G_\theta = G_c$ et le nombre d'onde correspondant à l'instabilité développée est $\alpha\theta \approx 0.2$. Au delà de cette valeur, pour $G_\theta > G_c$, plusieurs nombres d'onde sont susceptibles de se développer mais aucun résultat détaillé n'est présenté par cette étude.

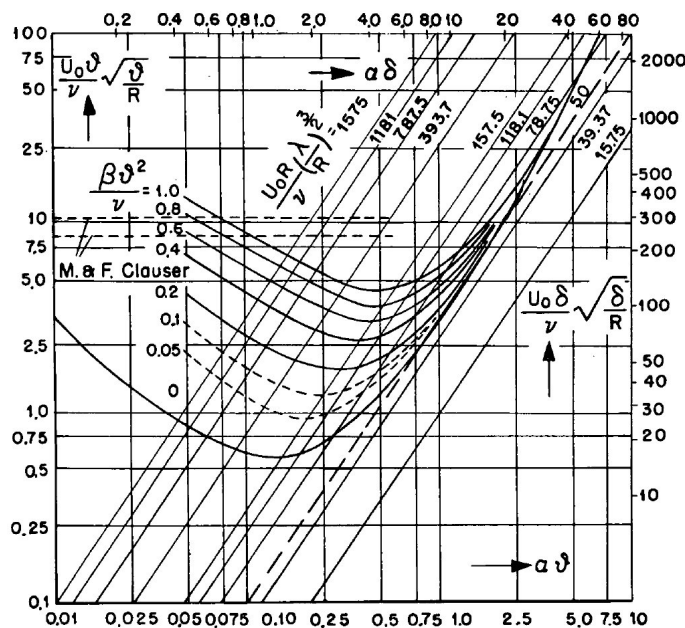


Figure 3.1. Diagramme de stabilité proposé par Görtler (1940). Les courbes à taux de croissance spatial constant sont tracées en fonction du nombre d'onde adimensionnel $\alpha\theta$ et du nombre de Görtler $(U\theta/\nu) \sqrt{\theta/R}$.

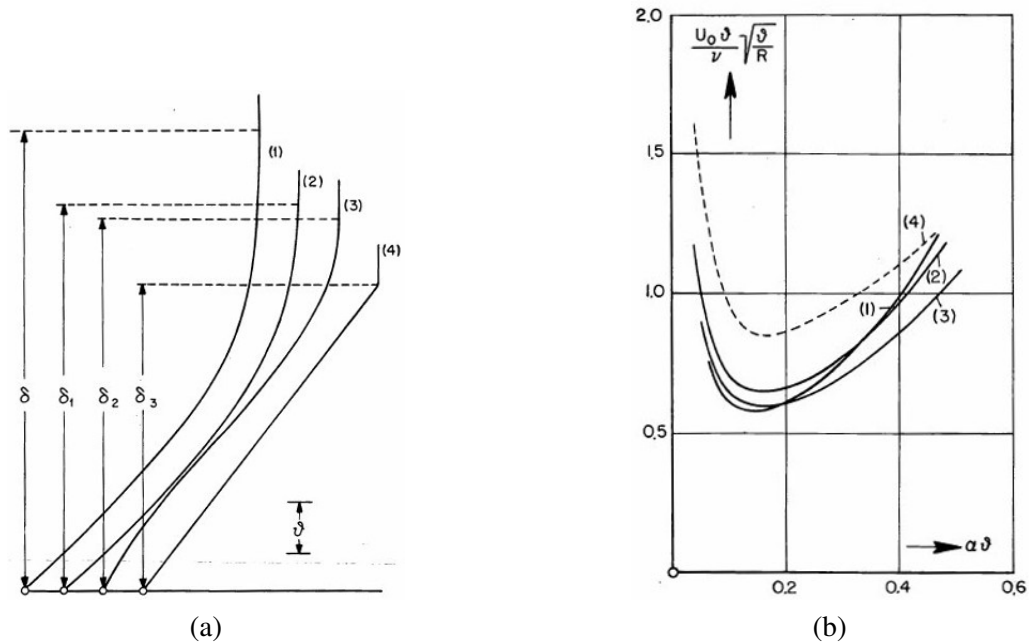


Figure 3.2. (a) Profils de vitesse utilisés pour l'état de base de l'écoulement lors du calcul de stabilité. (b) Courbes de stabilité marginale associées aux différents états de base.

Une étude de sensibilité au profil de vitesse de l'état de base est également faite, dont on montre la synthèse en figure 3.2. Quatre topologies de profil de vitesse sont utilisées (figure 3.2a) en conservant l'épaisseur de quantité de mouvement θ constante. Il est montré qu'il existe une légère dépendance de la courbe de stabilité marginale obtenue (figure 3.2b). Une différence notable des limites de stabilité est néanmoins à noter lorsque de l'état de base correspond à un profil de vitesse linéaire de type $U = a\psi$ (profil (4) sur la figure 3.2a).

3.2 Étude de Floryan et Saric (1982)

3.2.1 Formalisme de l'étude

Le formalisme présent dans l'étude de Floryan et Saric (1982) est choisi comme référence pour les calculs de stabilité linéaire qui seront effectués dans la suite de ce manuscrit. Dans leur article, les étapes qui mènent à leur formalisme sont décrites et conduisent à l'écriture des équations de Görtler. Ici, on présente uniquement le résultat de leur démonstration et les notations qui seront utilisées dans ce chapitre spécifiquement. Leur étude étant entièrement faite à partir d'une analyse adimensionnelle, on présente ici les variables adimensionnelles utilisées ainsi que leur définition par rapport aux variables définies en début de manuscrit.

Deux échelles caractéristiques de longueur sont utilisées pour le problème de couche limite, découlant de l'idée originale de Prandtl (1904). Dans la direction longitudinale, l'échelle de longueur caractéristique est L et dans la direction normale l'échelle de longueur caractéristique de la couche limite est $\delta_r = Re_L^{-1/2} L$.

L'espace est défini par les directions longitudinale ξ_* , normale à la paroi ψ_* et transverse z_* ,

où

$$\begin{cases} \xi_* = \xi/L \\ \psi_* = \psi/\delta_r \\ z_* = z/\delta_r \end{cases} \quad (3.1)$$

Le champ adimensionnel de vitesse (u_*, v_*, w_*) est décomposé en un état de base (U_*, V_*) et un champ fluctuant (u'_*, v'_*, w'_*) tel que

$$\begin{cases} u_*(\xi, \psi, z) = U_*(\xi, \psi) + u'_*(\xi, \psi, z) \\ v_*(\xi, \psi, z) = V_*(\xi, \psi) + v'_*(\xi, \psi, z) \\ w_*(\xi, \psi, z) = w'_*(\xi, \psi, z) \end{cases} \quad (3.2)$$

L'écoulement de base, qui est supposé bi-dimensionnel, est défini par une composante longitudinale U_* et normale V_* où

$$\begin{cases} U_*(\xi, \psi) = U(\xi, \psi)/U_\infty \\ V_*(\xi, \psi) = V(\xi, \psi)/U_\infty \end{cases} \quad (3.3)$$

Ici, la même échelle caractéristique est utilisée pour les deux composantes de la vitesse de l'écoulement de base. Les perturbations adimensionnelles de vitesse (u'_*, v'_*, w'_*) sont définies par

$$\begin{cases} u'_*(\xi, \psi, z) = u'(\xi, \psi, z)/U_\infty \\ v'_*(\xi, \psi, z) = v'(\xi, \psi, z)/(U_\infty Re_{\delta_r}) \\ w'_*(\xi, \psi, z) = w'(\xi, \psi, z)/(U_\infty Re_{\delta_r}) \end{cases} \quad (3.4)$$

L'utilisation d'échelles caractéristiques différentes pour u'_* d'une part et v'_* et w'_* d'autre part est justifiée par le fait que des cellules de faibles perturbations dans le plan (ψ_*, z_*) induisent un fort déficit de vitesse dans la direction longitudinale. Le rapport des échelles de vitesses est $1/Re_{\delta_r}$. On retrouve ce rapport dans la relation entre les échelles de longueurs L et δ_r , où $L = \delta_r Re_{\delta_r}$.

Les mêmes notations sont utilisées pour le champ de pression adimensionnel $p_* = p/(\rho_0 U_\infty^2)$, défini par un état de base $P_* = P/(\rho_0 U_\infty^2)$ et une perturbation $p'_* = p'/(\rho_0 U_\infty^2 Re_L)$ selon

$$p_*(\xi, \psi, z) = P_*(\xi, \psi) + p'_*(\xi, \psi, z) \quad (3.5)$$

Les nombres adimensionnels importants qui contrôlent l'instabilité sont le nombre de Görtler G , la longueur d'onde adimensionnelle Λ , le nombre d'onde adimensionnel α_* et le taux de croissance spatial adimensionnel β_* , où

$$G = \frac{U_\infty \delta_r}{\nu} \left(\frac{\delta_r}{R} \right)^{3/2} \quad \Lambda = \frac{U_\infty \lambda}{\nu} \left(\frac{\lambda}{R} \right)^{3/2} \quad \alpha_* = \alpha \delta_r \quad \beta_* = \beta \delta_r Re_{\delta_r}$$

3.2.2 Résultats

Le diagramme présenté par [Floryan et Saric \(1982\)](#) est donné pour des nombres d'onde adimensionnel $0.01 < \alpha_* < 3.0$ et des nombres de Görtler $0.4 < G < 100$ (figure 3.3). La courbe de stabilité marginale correspond à la courbe $\beta_* = \beta \theta Re_\theta = 0$. Ici, les courbes pour lesquelles $\beta_* < 0$ signifient que les perturbations sont amorties, donc en d'autres termes que l'écoulement est stable. Ce diagramme montre qu'il existe un comportement asymptotique de la courbe de stabilité marginale pour $\alpha_* \rightarrow 0$ et le nombre de Görtler critique associé est $G = 0.4638$. C'est la première étude à montrer un tel comportement, qui semble signifier que le nombre de Görtler critique est

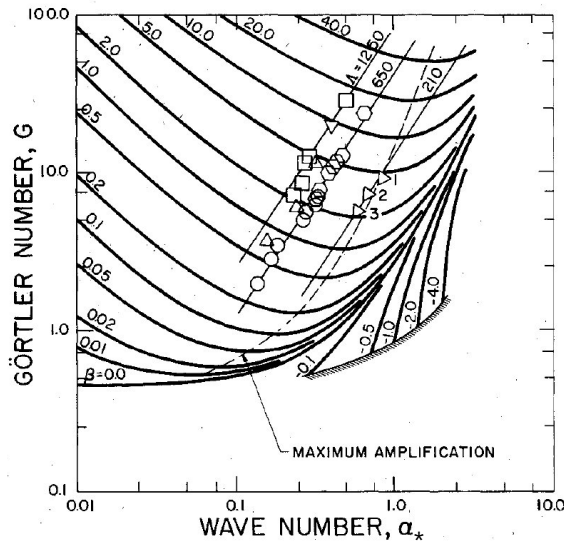


Figure 3.3. Diagramme de stabilité proposé par Floryan et Saric (1982). Les courbes à taux de croissance spatial constant sont tracées en fonction du nombre d'onde adimensionnel α_* et du nombre de Görtler $G = (U\theta/\nu) \sqrt{\theta/R}$, où le taux de croissance spatial adimensionnel est β_* .

obtenu pour les nombres d'onde α_* qui tendent vers 0.

La topologie de l'écoulement instable de Görtler est décrite par ce qu'on appellera les modes spatiaux $\hat{\mathbf{u}}(\psi_*) = [\hat{u}(\psi_*), \hat{v}(\psi_*), \hat{w}(\psi_*)]$. Ils correspondent à la « portante » perturbations de vitesse (u'_*, v'_*, w'_*) qui sont définis par les équations 3.10-3.11.

Floryan et Saric montrent l'influence du nombre de Görtler sur la topologie de l'écoulement et donc sur les modes spatiaux $\hat{\mathbf{u}}(\psi_*)$, pour un nombre d'onde fixé (figure 3.4a). Dans leurs résultats, il est à noter que les modes spatiaux sont normalisés par la valeur maximale du mode longitudinal $\max(\hat{u})$. Plus le nombre de Görtler G est grand, plus les profils verticaux s'amincissent, la position verticale des différents maxima observés diminue et l'amplitude des modes $\hat{v}/\max(\hat{u})$ et $\hat{w}/\max(\hat{u})$ augmente. En d'autres termes, les mouvements verticaux et transverses s'intensifient quand le nombre de Görtler augmente.

Ils montrent également le profil des trois premiers modes de l'instabilité de Görtler pour $(\alpha_*, G) = (1.0, 16.22)$ (figure 3.4b). Pour rappel, le premier mode correspond à une paire de tourbillons contrarotatifs, le deuxième mode à l'empilement vertical de deux paires de tourbillons contrarotatifs, etc. Le taux de croissance associé à chacun des modes est différent, le premier mode étant le mode le plus amplifié et donc celui qui dominera la dynamique de l'écoulement.

3.3 Mise en équation du problème

3.3.1 Écoulement de base

L'écoulement de base pour ce problème $(U_*(\psi_*), V_*(\psi_*))$ correspond au profil de vitesse d'une couche limite de Blasius (1907). L'équation qui régit la topologie d'une couche limite de Blasius sans gradient de pression longitudinal a été présentée précédemment (équation 1.19). On rappelle que les vitesses $U_*(\psi_*)$ et $V_*(\psi_*)$ qui décrivent la couche limite de Blasius s'écrivent en fonction

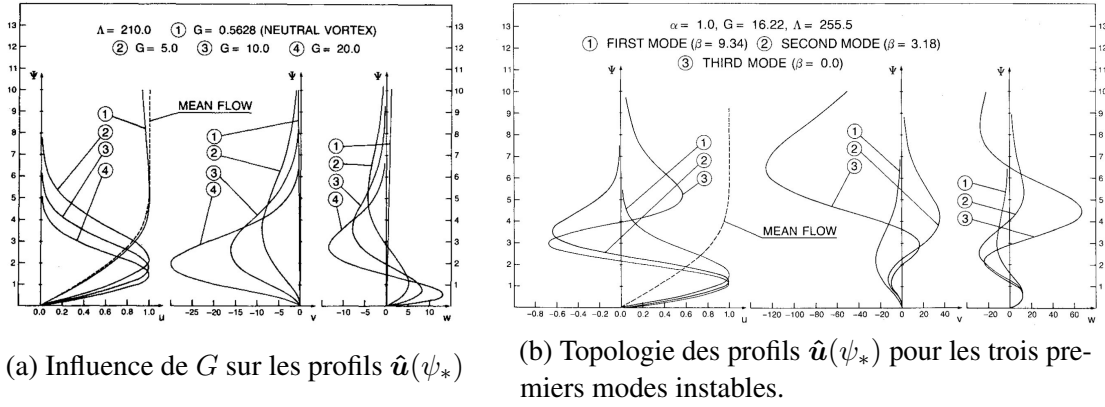


Figure 3.4. Résultats issus de l'étude de Floryan et Saric (1982). (a) Les modes spatiaux $\hat{u}(\psi_*)$ sont tracés pour des valeurs de $G = 5, 10, 20$ en gardant la longueur d'onde adimensionnelle Λ constante. (b) Les modes spatiaux $\hat{u}(\psi_*)$ des trois premiers modes instables sont tracés pour des valeurs $\alpha_* = 1, G = 16.22$ et $\Lambda = 255.5$. Le taux de croissance associé à chaque mode est donné en légende.

de la variable de l'équation de Blasius f et de sa dérivée $f' = \partial f / \partial \psi_*$ comme

$$\begin{cases} U_*(\psi_*) = U_\infty f' \\ V_*(\psi_*) = \frac{1}{2\sqrt{Re_L}} [\psi_* f' - f] \end{cases}$$

3.3.2 Équations de Görtler

Suivant les travaux de Görtler (1940), Smith (1955) et Floryan et Saric (1982), on peut exprimer les équations de Navier-Stokes linéarisées pour les perturbations $\mathbf{u}'_* = (u'_*, v'_*, w'_*)$ et p'_* . On obtient alors l'équation de conservation de la masse (3.6) et les équations de conservation de quantité de mouvement suivant ξ_* (3.7), suivant ψ_* (3.8) et suivant z_* (3.9)

$$\frac{\partial u'_*}{\partial \xi_*} + \frac{\partial v'_*}{\partial \psi_*} + \frac{\partial w'_*}{\partial z_*} = 0 \quad (3.6)$$

$$u'_* \frac{\partial U_*}{\partial \xi_*} + U_* \frac{\partial u'_*}{\partial \xi_*} + v'_* \frac{\partial U_*}{\partial \psi_*} + V_* \frac{\partial u'_*}{\partial \psi_*} - \frac{\partial^2 u'_*}{\partial \psi_*^2} - \frac{\partial^2 u'_*}{\partial z_*^2} = 0 \quad (3.7)$$

$$U_* \frac{\partial v'_*}{\partial \xi_*} + u'_* \frac{\partial V_*}{\partial \xi_*} + v'_* \frac{\partial V_*}{\partial \psi_*} + V_* \frac{\partial v'_*}{\partial \psi_*} + 2G^2 U_* u'_* + \frac{\partial p'_*}{\partial \psi_*} - \frac{\partial^2 v'_*}{\partial \psi_*^2} - \frac{\partial^2 v'_*}{\partial z_*^2} = 0 \quad (3.8)$$

$$U_* \frac{\partial w'_*}{\partial \xi_*} + V_* \frac{\partial w'_*}{\partial \psi_*} + \frac{\partial p'_*}{\partial z_*} - \frac{\partial^2 w'_*}{\partial \psi_*^2} - \frac{\partial^2 w'_*}{\partial z_*^2} = 0 \quad (3.9)$$

où les perturbations de vitesse $\mathbf{u}'_* = (u'_*, v'_*, w'_*)$ et de pression p'_* s'expriment en fonction des modes spatiaux $(\hat{u}(\psi_*), \hat{v}(\psi_*), \hat{w}(\psi_*))$ et $\hat{p}(\psi_*)$, du nombre d'onde adimensionnel α_* et du taux de croissance spatial adimensionnel β_* par

$$[u'_*, v'_*, p'_*] = [\hat{u}(\psi), \hat{v}(\psi), \hat{p}(\psi)] \cos(\alpha_* z_*) \exp(\beta_* \xi_*) \quad (3.10)$$

$$w'_* = \hat{w}(\psi) \sin(\alpha_* z_*) \exp(\beta_* \xi_*) \quad (3.11)$$

La substitution des perturbations (u'_*, v'_*, w'_*, p'_*) dans les équations 3.6-3.9 par leurs expressions (équations 3.10-3.11) mène à l'écriture du système d'équations de Görtler dans formalisme de Floryan et Saric (1982)

$$\beta_* \hat{u} + \frac{d\hat{v}}{d\psi_*} + \alpha_* \hat{w} = 0 \quad (3.12)$$

$$\hat{u} \frac{\partial U_*}{\partial \xi_*} + \beta_* U_* \hat{u} + \hat{v} \frac{\partial U_*}{\partial \psi_*} + V_* \frac{d\hat{u}}{d\psi_*} - \frac{d^2 \hat{u}}{d\psi_*^2} + \alpha_*^2 \hat{u} = 0 \quad (3.13)$$

$$\beta_* U_* \hat{v} + \hat{u} \frac{\partial V_*}{\partial \xi_*} + \hat{v} \frac{\partial V_*}{\partial \psi_*} + V_* \frac{d\hat{v}}{d\psi_*} + 2G^2 U_* \hat{u} + \frac{d\hat{p}}{d\psi_*} - \frac{d^2 \hat{v}}{d\psi_*^2} + \alpha_*^2 \hat{v} = 0 \quad (3.14)$$

$$\beta_* U_* \hat{w} + V_* \frac{d\hat{w}}{d\psi_*} - \alpha_* \hat{p} - \frac{d^2 \hat{w}}{d\psi_*^2} + \alpha_*^2 \hat{w} = 0 \quad (3.15)$$

On peut également écrire ce système d'équations sous une forme matricielle telle que

$$\frac{d\zeta_i}{d\psi} = M_{ij}(\psi) \zeta_j \quad (3.16)$$

en définissant le changement de variable suivant

$$\zeta_1 = \hat{u}, \quad \zeta_2 = \frac{d\hat{u}}{d\psi}, \quad \zeta_3 = \hat{v}, \quad \zeta_4 = \frac{d\hat{v}}{d\psi}, \quad \zeta_5 = \frac{d^2 \hat{v}}{d\psi^2}, \quad \zeta_6 = \frac{d^3 \hat{v}}{d\psi^3}$$

On obtient alors l'écriture qui suit pour la matrice M_{ij}

$$\begin{bmatrix} \frac{d\zeta_1}{d\psi} \\ \frac{d\zeta_2}{d\psi} \\ \frac{d\zeta_3}{d\psi} \\ \frac{d\zeta_4}{d\psi} \\ \frac{d\zeta_5}{d\psi} \\ \frac{d\zeta_6}{d\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ M_{61} & M_{62} & M_{63} & M_{64} & M_{65} & M_{66} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \\ \zeta_5 \\ \zeta_6 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

avec,

$$\begin{aligned}
 M_{21} &= \frac{\partial U_*}{\partial \xi_*} + U_* \beta_* + \alpha_*^2 \\
 M_{22} &= V_* \\
 M_{23} &= \frac{\partial U_*}{\partial \psi_*} \\
 M_{61} &= - \left(\frac{\partial V_*}{\partial \xi_*} \alpha_*^2 + 2G^2 U_* \alpha_*^2 + \frac{\partial^2 U_*}{\partial \xi_* \partial \psi_*} \beta_* \right) \\
 M_{62} &= - \frac{\partial U_*}{\partial \xi_*} \beta_* \\
 M_{63} &= - \left(U_* \alpha_*^2 \beta_* + \frac{\partial V_*}{\partial \psi_*} \alpha_*^2 + \frac{\partial^2 U_*}{\partial \psi_*^2} \beta_* + \alpha_*^4 \right) \\
 M_{64} &= -V_* \alpha_*^2 \\
 M_{65} &= 2\alpha_*^2 + U_* \beta_* + \frac{\partial V_*}{\partial \psi_*} \\
 M_{66} &= V_*
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Ce système admet les conditions aux limites suivantes

$$\zeta_1 = \zeta_3 = \zeta_4 = 0 \text{ pour } \psi = 0 \tag{3.19}$$

$$\zeta_1 = \zeta_3 = \zeta_4 = 0 \text{ pour } \psi \rightarrow \infty, \tag{3.20}$$

qui traduisent des conditions d'adhérence et de non-pénétration à la paroi d'une part et d'un écoulement non perturbé dans la région externe lointaine d'autre part.

Pour notre cas d'étude, certaines hypothèses sont émises afin de simplifier le problème. D'une part, on considère que localement, l'épaississement de la couche limite de l'écoulement de base dans la direction longitudinale est suffisamment faible pour le négliger. Ceci revient à annuler les termes de la matrice M_{ij} faisant intervenir les dérivées suivant ξ_* , i. e. $\partial(\cdot)/\partial \xi_* = \partial^2(\cdot)/\partial \xi_* \partial \psi_* = 0$. D'autre part, on considère ici que l'écoulement de base est localement parallèle, donc que la composante normale à la paroi de vitesse est nulle, i.e. $V_*(\psi) = \partial V_*/\partial \psi_* = 0$. On obtient alors une expression simplifiées des coefficients de la matrice M_{ij}

$$\begin{aligned}
 M_{21} &= U_* \beta_* + \alpha_*^2 \\
 M_{22} &= 0 \\
 M_{23} &= \frac{\partial U_*}{\partial \psi_*} \\
 M_{61} &= -2G^2 U_* \alpha_*^2 \\
 M_{62} &= 0 \\
 M_{63} &= - \left(U_* \alpha_*^2 \beta_* + \frac{\partial^2 U_*}{\partial \psi_*^2} \beta_* + \alpha_*^4 \right) \\
 M_{64} &= 0 \\
 M_{65} &= 2\alpha_*^2 + U_* \beta_* \\
 M_{66} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

3.4 Résolution numérique du système d'équations

La méthode utilisée est décrite par [Petitjeans \(1992\)](#) pour le problème de Görtler, mais également par d'autres auteurs pour des problèmes similaires de type Taylor-Couette ou Dean ([Krueger et al., 1966](#), [Mutabazi et al., 1992](#)). Le principe est de choisir trois vecteurs ζ indépendants, vérifiant les conditions limites en $\psi = 0$ (eq. 3.19), $\zeta_1 = [0, 1, 0, 0, 0, 0]$, $\zeta_2 = [0, 0, 0, 0, 1, 0]$, $\zeta_3 = [0, 0, 0, 0, 0, 1]$. Des solutions partielles sont alors obtenues par résolution numérique en utilisant un méthode de Runge-Kutta pour chacun des trois vecteurs ζ . La solution globale est ensuite obtenue par combinaison linéaire des solutions partielles et doit vérifier les conditions limites en $\psi \rightarrow \infty$ (eq. 3.20). Pour un couple (α_*, G) donné, la valeur de β_* qui remplit cette dernière condition est la valeur du taux de croissance spatial qui est solution du problème.

Contrairement à la plupart des systèmes d'équations aux dérivées partielles, le problème que l'on traite ici est un problème pour lequel on ne connaît pas l'intégralité de la solution initiale, i.e. $\zeta(\psi_* = 0)$. Ici on connaît une partie de la solution initiale et une partie de la solution finale : c'est un problème aux valeurs limites (*boundary value problem*). Pour résoudre ce type de problème, on choisit d'utiliser les algorithmes décrits par [Kierzenka et Shampine \(2008\)](#) nécessitant de renseigner une solution d'initialisation (ici ζ_1 , ζ_2 ou ζ_3), des conditions limites (équations 3.19 - 3.20) et l'expression de l'équation différentielle ordinaire à résoudre (équation 3.17). Les outils numériques utilisés permettent d'avoir une discretisation verticale du domaine de résolution qui est non-homogène. Ainsi, il est possible de discrétiser finement le profil pour les valeurs de $\psi_* \approx 0$ et d'élargir la résolution pour $\psi_* \rightarrow \infty$.

La recherche de la solution se fait par méthode itérative. Un couple (α_*, G) est choisi et on cherche la valeur de β_* pour laquelle la solution globale (combinaison linéaire des solutions partielles) obtenue satisfait les conditions limites en $\psi_* \rightarrow \infty$ (eq. 3.20). Un exemple de l'évolution de la valeur à l'infini de la combinaison linéaire des solutions partielles fonction de β_* pour un couple (α_*, G) donné est montré en figure 3.5. Le taux de croissance β_* associé à un couple (α_*, G) donné est alors la valeur de β_* qui minimise $\psi_* \rightarrow \infty$.

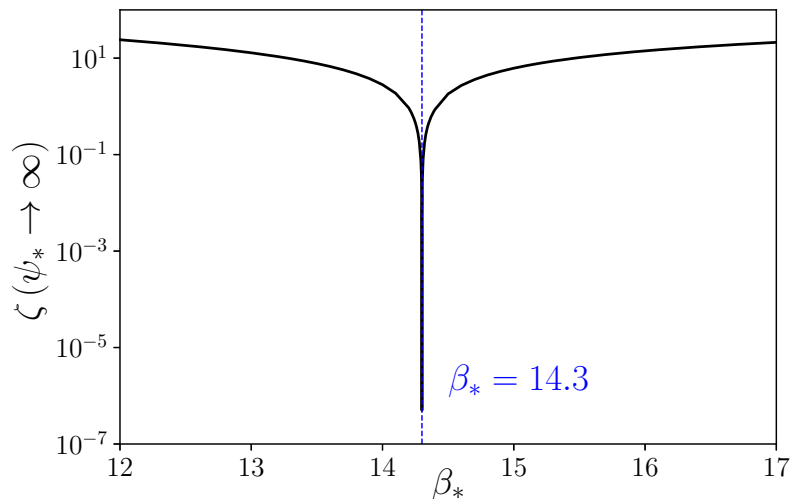


Figure 3.5. Évolution de $\zeta_1(\psi_* \rightarrow \infty)$ en fonction de β_* pour un couple $(\alpha_*, G) = (0.285, 36)$. Ici, le taux de croissance de l'instabilité correspondant aux paramètres $(\alpha_*, G) = (0.285, 36)$ est $\beta_* = 14.3$.

3.5 Résultats

3.5.1 Validation de la méthode

On choisit de valider la méthode utilisée par comparaison directe avec les résultats obtenus par [Floryan et Saric \(1982\)](#). Tout d'abord, on compare leur limite de stabilité à celle obtenue dans ce travail en figure 3.6(a). On remarque que la limite de stabilité que l'on obtient avec la méthode

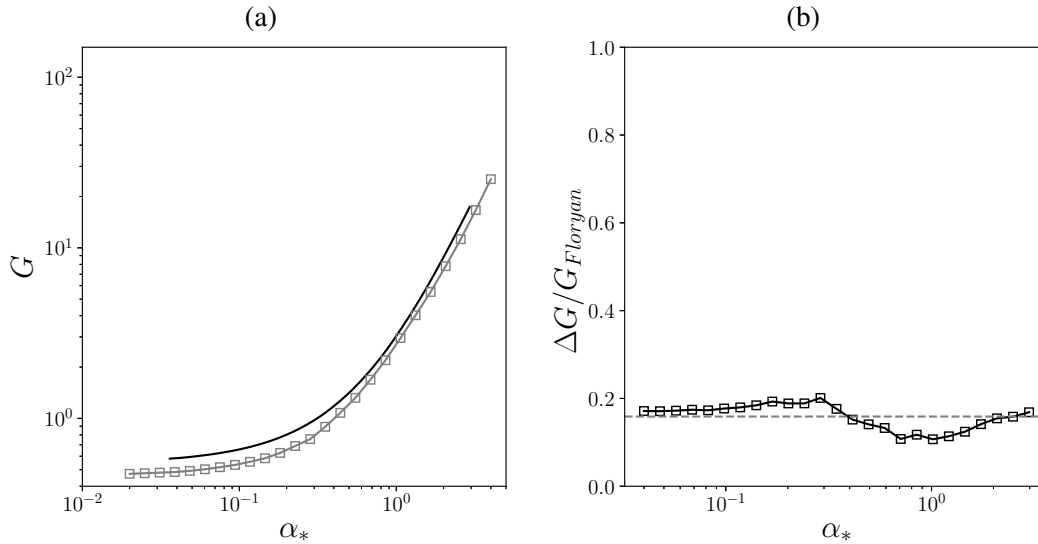


Figure 3.6. Comparaison des limites de stabilité obtenues pour le problème de Görtler. (a) La courbe noire représente les résultats obtenus avec la méthode présentée ici, la courbe grise représente les résultats de [Floryan et Saric \(1982\)](#). (b) L'erreur $\Delta G/G_{Floryan}$ en fonction de α_* est de l'ordre de 15% pour les nombres d'onde considérés.

présentée est légèrement décalée par rapport aux résultats de référence, avec des valeurs de G limites plus élevées. L'erreur observée entre notre méthode et les résultats de Floryan est de l'ordre de 15%, comme montré dans la figure 3.6(b). Cette différence est certainement due en partie au fait que l'on considère un écoulement de base sans vitesse verticale. On pourrait très bien comparer la courbe de stabilité marginale obtenue avec et sans vitesse verticale. Cela impliquerait néanmoins de faire une hypothèse sur le nombre de Reynolds de l'écoulement de base, car la vitesse verticale $V_*(\psi_*)$ en dépend directement. D'autre part, Floryan ne précise pas quel profil de $V_*(\psi_*)$ ni quel Reynolds sont utilisés pour leurs simulations, il est donc difficile de proposer une autre comparaison des deux méthodes en ajoutant une vitesse verticale à l'écoulement de base. Malgré les différences observées, le comportement aux limites $\alpha_* \rightarrow 0$ et $\alpha_* \rightarrow 4$ est très semblable dans les deux cas.

Dans un second temps, on compare les résultats montrés en figure 3.4(a) qui correspondent aux profils \hat{u} pour des nombres de Görtler $G_1 = 5$, $G_2 = 10$, $G_3 = 20$ et $\Lambda = 210$. La comparaison est montrée dans la figure 3.7. L'impact du nombre de Görtler sur les profils $\hat{u}(\psi_*)$ est bien reproduite avec notre méthode. On retrouve que les profils s'épaississent quand le nombre de Görtler diminue et que les amplitudes de $\hat{u}(\psi_*)/\max(\hat{u})$ augmentent quand le nombre de Görtler augmente. Les profils obtenus avec les deux méthodes sont très similaires, voire confondus pour certains cas, ce qui permet de valider notre méthode.

Enfin, on valide la capacité de la méthode à reproduire le comportement de l'instabilité pour les deuxième et troisième mode et on compare les valeurs de β_* obtenues avec celles de l'étude de référence. Les cas montrés en figure 3.4(b) sont reproduits, la comparaison des profils obtenus

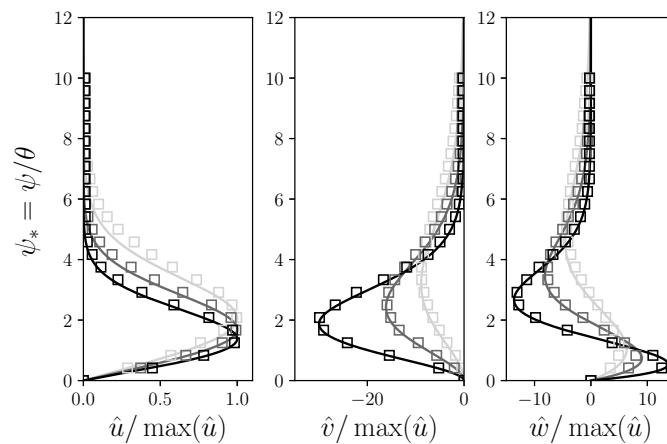


Figure 3.7. Comparaison des profils $\hat{u}(\psi_*)$ obtenus pour $G = 5(-)$, $G = 10(-)$ et $G = 20(-)$. La longueur d'onde adimensionnelle est gardée constante $\Lambda = 210$. Les courbes continues correspondent aux résultats obtenus avec notre méthode, les carrés montrent les résultats de référence [Floryan et Saric \(1982\)](#).

	β_{*1}	β_{*2}	β_{*3}
Floryan et Saric (1982)	9.34	3.18	0.0
Travail présenté	9.085	3.008	-0.005

Tableau 3.1. Tableau comparatif des valeurs de β_* obtenues pour les trois premiers modes de l'instabilité.

est montrée en figure 3.8, la comparaison des valeurs de β_* obtenues est montrée en table 3.1. Les valeurs de β_* obtenues sont très similaires à celles présentées par Floryan et Saric et permettent de valider la méthode pour la recherche du taux de croissance associé aux trois premiers modes de l'instabilité de Görtler. De plus, les modes spatiaux obtenus pour les deux premiers sont très similaires à ceux de Floryan et Saric, comme le montre la figure 3.8. Cependant, les profils $\hat{u}(\psi_*)$

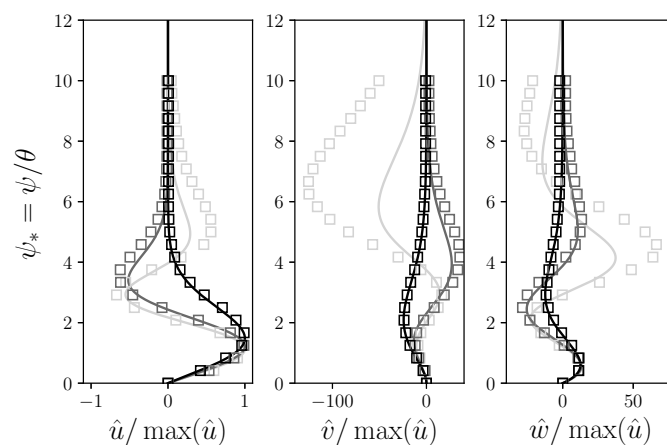


Figure 3.8. Comparaison des profils $\hat{u}(\psi_*)$ obtenus pour le premier mode (-), le deuxième mode (-) et le troisième mode (-). La longueur d'onde adimensionnelle est gardée constante $\Lambda = 255.5$, le nombre de Görtler est $G = 16.22$ et le nombre d'onde adimensionnel est $\alpha_* = 1.0$. Les courbes continues correspondent aux résultats obtenus avec notre méthode, les carrés montrent les résultats de référence [Floryan et Saric \(1982\)](#).

obtenus pour le troisième mode sont éloignés de ceux attendus. En effet, dans la couche externe du

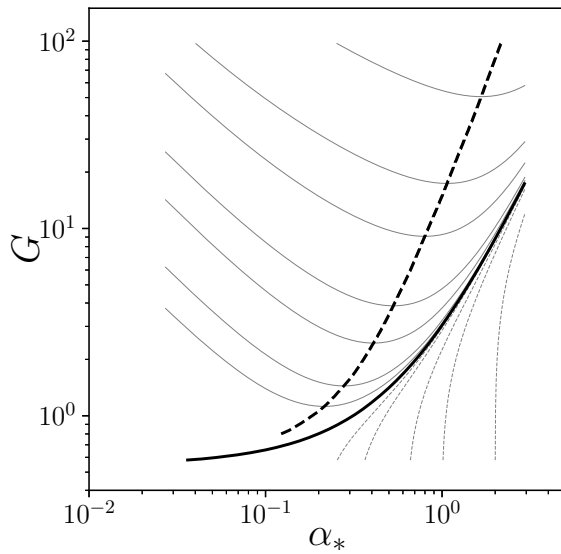


Figure 3.9. Diagramme de stabilité pour le problème de Görtler. (—) Courbe de stabilité marginale, (---) courbe d'amplification maximale, (—) courbes iso-valeurs de taux de croissance spatial β_* .

profil, l'écart entre les deux résultats est important mais s'explique par le fait que l'écoulement de base utilisé dans nos simulations a une vitesse verticale nulle $V_* = 0$. Dans la couche externe des profils et notamment pour les modes les plus élevés, l'hypothèse d'avoir $V_* = 0$ a un fort impact sur le résultat.

3.5.2 Extension de l'étude de Floryan et Saric

Floryan et Saric présentent un diagramme de stabilité complet et couvrent un très large domaine (α_*, G) . Cependant, les profils \hat{u} , qui définissent la topologie de l'écoulement instable, ainsi que les valeurs précises du taux d'amplification ne sont pas disponibles. La méthode mise en place durant ce travail de thèse est alors exploitée pour couvrir un large domaine (α_*, G) afin de pouvoir analyser les résultats à venir (simulations LES) avec un point de comparaison existant (LSA présentée). Le diagramme complet obtenu est présenté en figure 3.9.

3.5.2.1 Influence de α_* sur l'instabilité

On se propose d'utiliser la méthode mise en place pour caractériser l'influence du nombre d'onde adimensionnel α_* sur la topologie des modes spatiaux $\hat{u}(\psi_*)$ à nombre de Görtler fixé. On fixe le nombre de Görtler $G = 36.0$ et on choisit les nombres d'onde adimensionnels suivant $\alpha_* = \{0.041, 0.131, 0.421, 1.355\}$. Les modes spatiaux correspondant à ces quatre valeurs de α_* et normalisés par $\max(\hat{u})$ sont montrés en figure 3.10. Comme on peut s'y attendre, l'augmentation de α_* induit un amincissement des profils $\hat{u}(\psi_*)$ car α_* est directement relié à la longueur d'onde λ qui définit la taille des cellules de perturbations. Ce qui est particulièrement intéressant d'observer c'est l'influence de α_* sur les composantes $\hat{v}/\max(\hat{u})$ et $\hat{w}/\max(\hat{u})$. Pour les plus petits nombres d'ondes adimensionnels (grandes longueurs d'onde), l'amplitude de $\hat{v}/\max(\hat{u})$ est plus faible alors que l'amplitude de $\hat{w}/\max(\hat{u})$ est plus forte. Inversement, pour les plus grands nombres d'ondes adimensionnels (petites longueurs d'onde), l'amplitude de $\hat{v}/\max(\hat{u})$ est plus forte alors que l'amplitude de $\hat{w}/\max(\hat{u})$ est plus faible. La répartition des effets instables dans les cellules de perturbations dans le plan (ψ_*, z_*) dépend fortement du nombre d'onde. Les perturbations dominantes dans les cellules instables pour les petits nombres d'onde sont les perturbations transverses, alors que pour les grands nombres d'onde les perturbations normales dominent ("upwash" et "downwash").

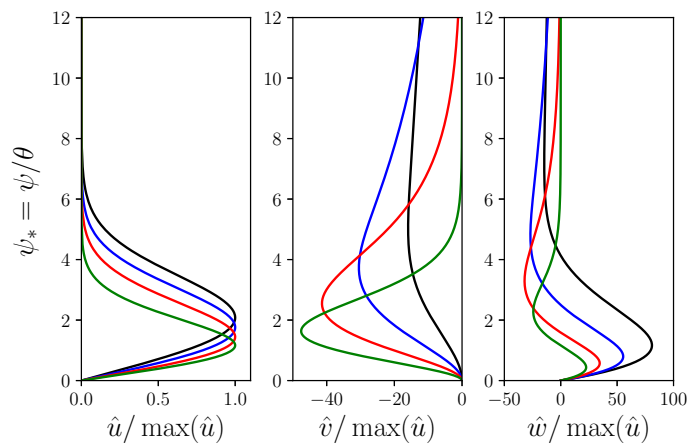


Figure 3.10. Modes spatiaux $\hat{\mathbf{u}}(\psi_*)$ normalisés par $\max(\hat{u})$ pour un nombre de Görtler fixé $G = 36.0$ et pour différentes valeurs du nombre d'onde adimensionnel α_* . (—) $\alpha_* = 0.041$, (—) $\alpha_* = 0.131$, (—) $\alpha_* = 0.421$, (—) $\alpha_* = 1.355$.

3.5.2.2 Influence de G sur l'instabilité

On se propose également d'utiliser la méthode mise en place pour caractériser l'influence du nombre de Görtler sur la topologie des modes spatiaux $\hat{\mathbf{u}}(\psi_*)$ à nombre d'onde adimensionnel fixé. Cela diffère des résultats de Floryan et Saric qui, dans leur étude, caractérisent l'influence de α_* sur les modes spatiaux en fixant la longueur d'onde adimensionnelle Λ . On fixe le nombre d'onde adimensionnel $\alpha_* = 0.421$ et on choisit les nombres de Görtler suivant $G = 6.0$, $G = 10.9$, $G = 19.8$ et $G = 36.0$. Les modes spatiaux correspondant à ces quatre valeurs de G et normalisés par $\max(\hat{u})$ sont montrés en figure 3.11. L'augmentation de G conduit à un amincissement des profils verticaux présentés, cependant cette tendance est assez faible. L'influence principale d'une augmentation de G sur les profils verticaux est l'augmentation des amplitudes observées sur les profils $\hat{v}/\max(\hat{u})$ et $\hat{w}/\max(\hat{u})$. En d'autres termes, plus le nombre de Görtler augmente, plus les cellules de perturbations dans le plan (ψ_*, z_*) sont d'intensité importante par rapport au déficit de vitesse induit dans la direction longitudinale, sans que ces cellules ne changent significativement de taille.

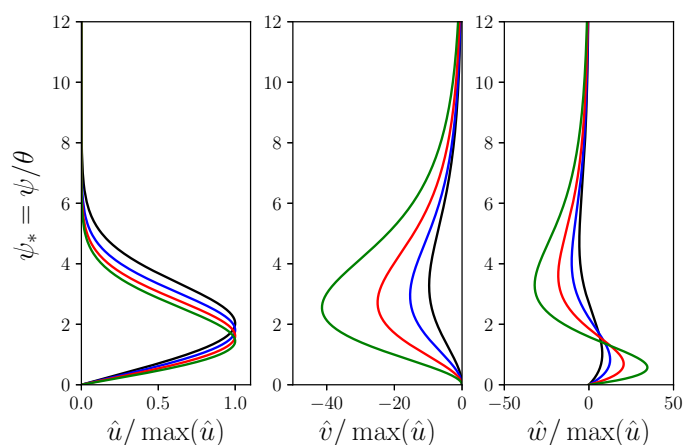


Figure 3.11. Modes spatiaux $\hat{\mathbf{u}}(\psi_*)$ normalisés par $\max(\hat{u})$ pour un nombre d'onde adimensionnel fixé $\alpha_* = 0.421$ et pour différentes valeurs du nombre de Görtler G . (—) $G = 6.0$, (—) $G = 10.9$, (—) $G = 19.8$, (—) $G = 36.0$.

4

Simulations numérique de l'instabilité de Görtler à nombres de Reynolds modérés

Résumé : Dans ce chapitre, on présente une série de simulations numériques instationnaires pour décrire la dynamique de l'instabilité de Görtler. Les régions linéaire et non-linéaire de l'instabilité sont décrites et des études paramétriques sont réalisées. En particulier, l'influence de la longueur d'onde de l'instabilité et l'influence du nombre de Reynolds sont étudiées. Enfin, l'influence d'une stratification linéaire sur le développement de l'instabilité de Görtler est analysée.

Sommaire

4.1	Instabilité de Görtler à longueur d'onde forcée	62
4.1.1	Méthodologie	62
4.1.2	Validation des simulations	65
4.1.3	Résultats	71
4.2	Développement naturel de l'instabilité de Görtler	79
4.2.1	Influence des paramètres numériques	79
4.2.2	Influence des nombres de Reynolds et Görtler	83
4.3	Instabilité de Görtler en milieu stratifié	98
4.3.1	Configuration physique	98
4.3.2	Croissance de la couche limite et croissance de l'instabilité	100
4.3.3	Topologie de l'instabilité de Görtler dans les régions linéaire et non-linéaire	102

4.1 Instabilité de Görtler à longueur d'onde forcée

4.1.1 Méthodologie

L'instabilité de Görtler est caractérisée par le développement de paires de tourbillons longitudinaux contrarotatifs, dont l'espacement correspond à sa longueur d'onde λ . La valeur théorique de cette longueur d'onde est directement reliée à la valeur du nombre de Görtler G . Cette dépendance est décrite par le diagramme de stabilité (figure 3.9), présenté au chapitre 3. Néanmoins, de nombreuses études ont montré que des perturbations (souvent non contrôlées) présentes en amont de l'écoulement peuvent avoir une influence sur la valeur de la longueur d'onde qui se développe en aval. Pour sélectionner la longueur d'onde qui se développe dans l'écoulement, on utilise alors des techniques de forçage au lieu du paramètre physique de contrôle G . Celles-ci permettent principalement de :

- s'assurer qu'une seule longueur d'onde se développe dans l'expérience (ou simulation)
- sélectionner une longueur d'onde ne correspondant pas nécessairement à la longueur d'onde la plus amplifiée théoriquement ($\alpha_* = f(G)$, voir figure 3.9)

Les méthodes de forçage sont assez variées dans la littérature. Les principales méthodes utilisées dans les études expérimentales et numériques sont présentées ci-après.

[Bippes et Görtler \(1972\)](#) et [Bippes \(1978\)](#) placent des fils chauffés à la paroi, alignés dans la direction longitudinale et répartis de manière périodique dans la direction transverse. Cette technique permet d'induire des mouvements verticaux dans l'écoulement mais s'avère peut efficace pour générer des tourbillons de grande taille ([Bippes et Görtler, 1972](#), [Floryan et Saric, 1982](#)).

Dans son travail de thèse, [Petitjeans \(1992\)](#) utilise des "tiroirs d'injection" qui génèrent des jets verticaux, espacés les uns des autres d'une distance correspondant à la longueur d'onde forcée (voir figure 4.1). L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de générer des perturbations qui ont déjà la topologie d'un écoulement perturbé de Görtler. Ces perturbations sont alors amplifiées ou amorties selon les conditions physiques de l'écoulement.

[Aihara et al. \(1985\)](#) et [Tomita \(1985\)](#), [Tomita et al. \(1985\)](#) utilisent quant à eux une rangée de plaques fines horizontales ou de profils d'aile fins à incidence nulle, placés dans la région de la couche limite avec une périodicité transverse. Les perturbations induites sont décrites comme faibles mais suffisantes pour générer l'instabilité de Görtler ([Aihara et al., 1985](#), [Tomita et al., 1985](#), [Floryan et Saric, 1982](#)).

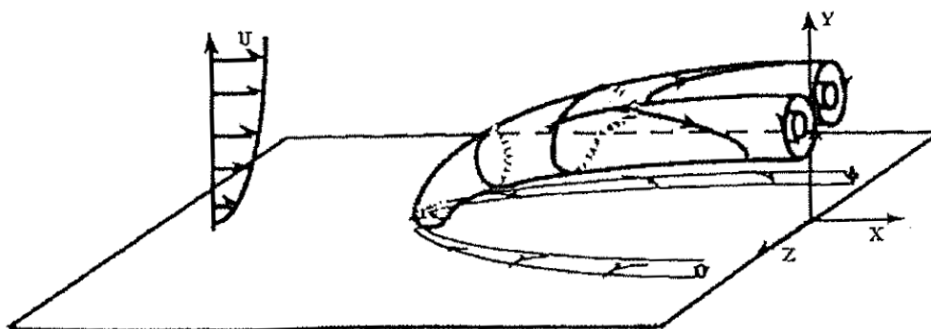


Figure 4.1. Illustration de la méthode expérimentale utilisée par [Petitjeans \(1992\)](#) pour forcer la longueur d'onde de l'instabilité de Görtler. Les jets d'injection produisent des structures tourbillonnaires longitudinales.

Dans une série d'études, [Mitsudharmadi et al. \(2004, 2005b, 2006\)](#) utilise des obstacles sous forme de câbles verticaux en amont de la partie courbe de son dispositif expérimental. La distance entre deux câbles successifs correspond à la longueur d'onde forcée. Cette méthode permet de générer des accélérations et décélérations locales dans l'écoulement.

[Schrader et al. \(2011\)](#), [Sescu et Thompson \(2015\)](#) et [Méndez et al. \(2018, 2020\)](#) présentent des études numériques dans lesquelles est utilisée une fonction de rugosité à la paroi en amont du développement de l'instabilité. Ainsi, une alternance périodique de rugosité positive et négative est produite, permettant de générer des accélérations et décélérations locales.

Dans le cadre de ce travail de thèse, les contraintes suivantes ont dû être respectées :

- Ne pas utiliser de fonction de rugosité
- Ne pas changer la géométrie utilisée et donc de ne mailler ni d'obstacles physiques périodiques ni de trous d'injections.
- Avoir en entrée du domaine un champ de vitesse homogène dans la direction transverse, correspondant à la solution autosimilaire de Blasius.

La solution choisie consiste en la présence de « bandelettes lisses » (sans frottement) à la paroi, dans la partie amont du domaine de simulation. Ces bandelettes sont disposées de telle sorte qu'il y ait une variation périodique, dans la direction transverse, du frottement pariétal. La figure 4.2 montre leur disposition dans le domaine de simulation.

La spécificité de cette méthode est que l'on n'impose pas de rugosité locale, mais on utilise localement une condition de glissement. On a alors une alternance, périodique dans la direction transverse, de bandelettes glissantes et des bandelettes adhérentes. La partie « glissante » est caractérisée par son gradient de vitesse normal à la paroi nul, $(\partial u / \partial \psi)|_{\psi=0} = 0$. La partie adhérente est caractérisée par une condition d'adhérence classique où $u|_{\psi=0} = 0$. La vitesse du fluide à la paroi est donc positive au niveau des bandelettes glissantes. Ce faisant, on génère une accélération locale (au niveau des bandes glissantes), qui est une propriété de l'écoulement de Görtler. L'amplitude de la vitesse normale est alors localement plus importante : c'est l'effet « downwash ». Si l'effet « downwash » est situé au dessus des bandelettes glissantes, l'effet complémentaire « upwash » est quant à lui situé au dessus des bandelettes de paroi adhérente. Les structures tourbillonnaires longitudinales qui en découlent sont montrées en figure 4.3. À l'instar de la méthode utilisée par [Petitjeans \(1992\)](#), la méthode utilisée permet de générer des structures longitudinales, qui seront amplifiées ou amorties selon les paramètres physiques mis en jeu. La largeur des motifs périodiques L_{motif} est égale à une demie longueur d'onde, $L_{\text{motif}} = \lambda/2$. La longueur, dans la direction longitudinale, des bandelettes est $l_{\text{motif}} = 5\delta_0$.

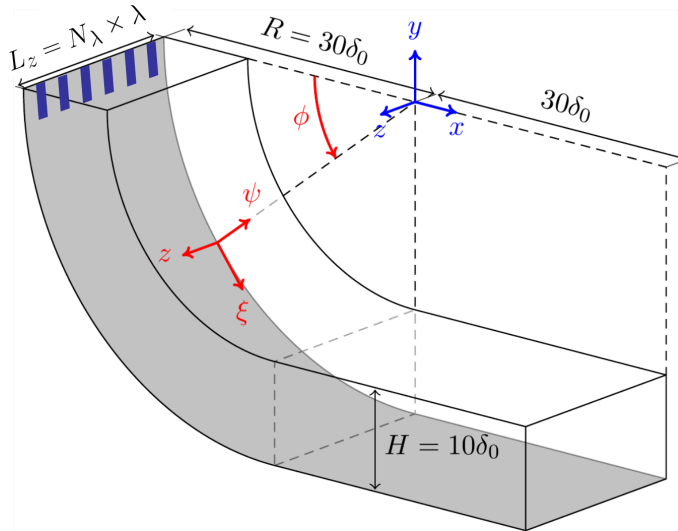


Figure 4.2. Schéma du domaine de calcul en présence des languettes glissantes utilisées pour forcer la longueur d'onde de l'instabilité de Görtler. La largeur du domaine L_z est exprimée en fonction du nombre de longueurs d'onde présentes dans le domaine N_λ .

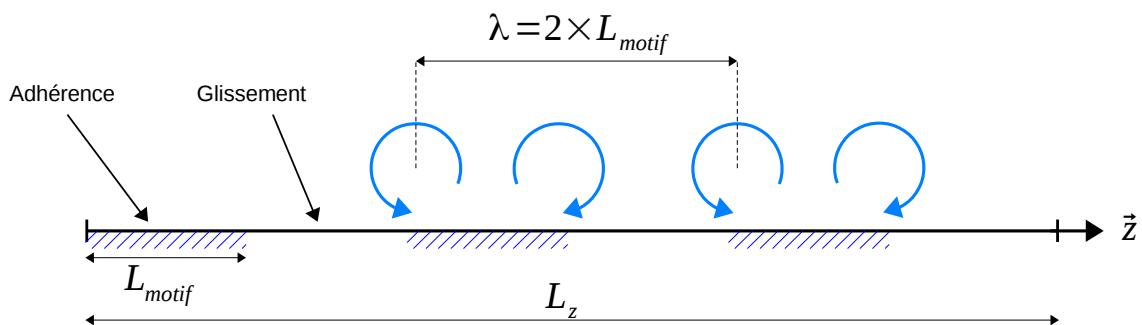


Figure 4.3. Schéma de la disposition des languettes glissantes (zones hachurées en bleu) et des structures tourbillonnaires associées. Configuration présentée pour $L_z = 3\lambda$.

4.1.2 Validation des simulations

L'instabilité de Görtler est une instabilité qui induit des hétérogénéités dans la direction transverse de l'écoulement. Ces hétérogénéités sont présentes dans le champ de vitesse instantané mais également dans le champ de vitesse moyenné temporellement. Avant d'aller plus loin dans l'analyse physique, le but de cette partie est de s'assurer que nos résultats sont indépendants des paramètres numériques, en particulier du maillage. Pour des écoulements de couche limite turbulente, ou en transition à la turbulence, il est admis que la taille de la première maille à la paroi doit respecter les critères suivants $\Delta x^+ < 100$, $\Delta y^+ < 2$ et $\Delta z^+ < 30$ (voir [Chapman, 1979](#), [Zang, 1991](#), [Pope, 2000](#)). Ces critères sont respectés dans l'ensemble des simulations présentées dans ce travail de thèse. La spécificité des écoulements étudiés dans ce travail de thèse requiert une attention particulière à la taille du maillage dans la direction transverse, sur l'ensemble de la région de couche limite et pas uniquement à la paroi. Une série de simulations est ainsi réalisée, en faisant varier le nombre de mailles par longueur d'onde, noté N_c .

On choisit de simuler le développement de l'instabilité de Görtler pour les paramètres physiques $G_{\theta_0} = 18.4$ et $Re_{\delta_0} = 2500$. Le nombre de Görtler choisi conduit à un écoulement instable (voir le diagramme de stabilité en figure 4.4). Le nombre de Reynolds choisi est modéré et permet

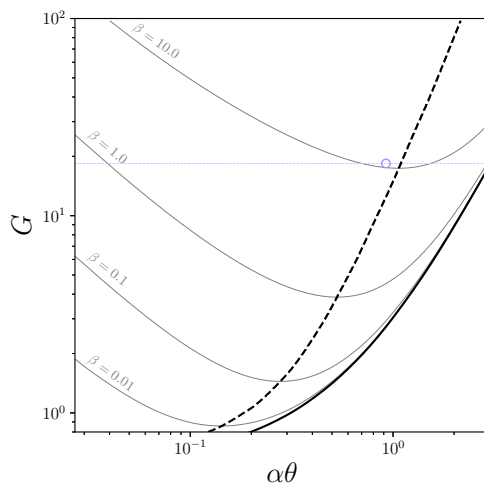


Figure 4.4. Diagramme de stabilité pour le problème de Görtler et paramètres physiques adimensionnels pour les simulations numériques présentées.

d'observer la transition à la turbulence de la couche limite, qui sera importante dans la suite de cette étude. La longueur d'onde choisie correspond à une longueur d'onde voisine de la longueur d'onde la plus amplifiée dans l'analyse de stabilité linéaire. Après avoir testé 5 résolutions différentes, $N_c = \{8, 10, 12, 16, 20\}$, on montre que la résolution nécessaire minimale pour que les résultats obtenus ne dépendent plus du maillage est $N_c = 16$. Pour 3 des résolutions testées, $N_c = \{8, 12, 16\}$, on présente des résultats statistiques de l'écoulement tels que le champ de vitesse de perturbation \tilde{u} , la topologie tridimensionnelle, et le coefficient de frottement moyen $\langle C_f(\xi, z) \rangle_{t,z}$. Une validation de la méthode de forçage par comparaison à l'analyse de stabilité linéaire est également présentée.

4.1.2.1 Convergence des résultats statistiques en fonction de N_c

Le premier résultat statistique présenté est le champ de vitesse moyenné temporellement, en particulier la composante transverse de la vitesse $\langle w \rangle$, qui permet le mieux de voir la présence de l'instabilité de Görtler dans la région linéaire. Une coupe transverse colorée par la vitesse transverse $\langle w \rangle$ est présentée pour chacune des résolutions étudiées en figure 4.5. Pour les deux premiers niveaux de raffinement, on observe clairement que les gradients spatiaux sont forts par

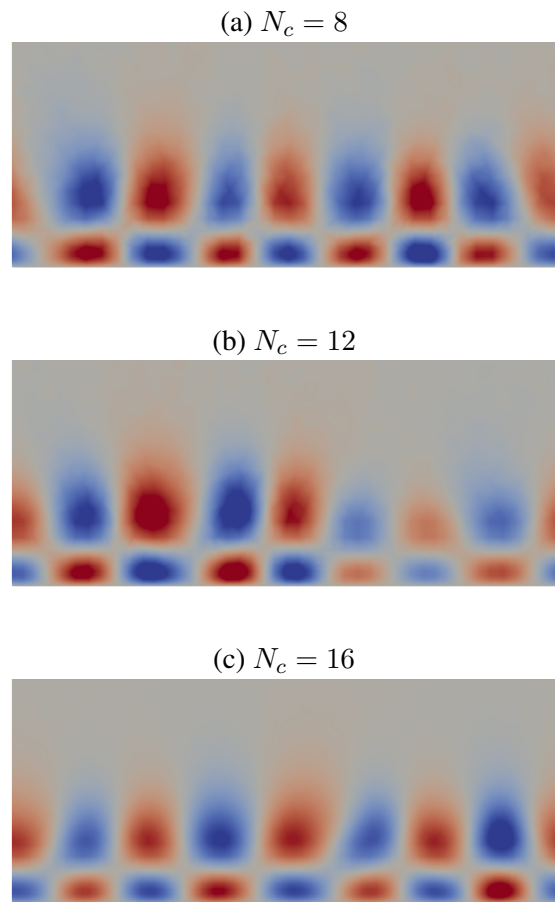


Figure 4.5. Coupes transverses de l'écoulement dans la région de croissance linéaire colorée par la composante transverse de la vitesse, $\langle w \rangle$, pour différentes résolutions transverses du maillage.

rapport à la taille de maille (présence des mailles visible sur les visualisations), ce qui met en doute la bonne résolution du calcul. De plus, les intensités du champ de vitesse $\langle w \rangle$ sont hétérogènes dans la direction transverse, ce qui n'est pas attendu lorsqu'on force la longueur d'onde de l'instabilité de Görtler (particulièrement marqué en figure 4.5b). Pour le raffinement maximal présenté en figure 4.5(c), le champ de vitesse $\langle w \rangle$ semble être cohérent avec ce que l'on attend dans un écoulement de Görtler et les gradients de vitesse semblent également être bien résolus.

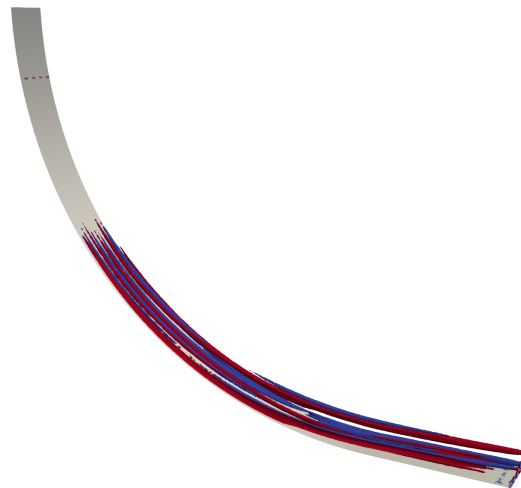
La topologie tridimensionnelle de l'écoulement est également analysée pour les différents niveaux de raffinement du maillage. On montre en figure 4.6 les iso-contours de critère Q (Dubief et Delcayre, 2000) coloré par la vorticité longitudinale pour les différents raffinements du maillage, mettant en évidence la présence des structures tourbillonnaires dans l'écoulement. Ces visualisations permettent de mettre en évidence l'influence du maillage sur les structures tourbillonnaires qui se développent dans la région non-linéaire de l'écoulement. La bonne reproduction du développement de ces structures est essentielle car ce sont ces mêmes structures qui caractérisent la transition à la turbulence. Le critère Q étant calculé sur le champ de vitesse instantané et non moyenné dans le temps, il est évident qu'il est impossible d'obtenir une convergence en maillage sur ce critère, à moins d'atteindre un maillage permettant de résoudre toutes les échelles turbulentes, i.e. faire une simulation de type DNS. La multiplicité des échelles tourbillonnaires ne doit donc pas être

un critère de convergence en maillage. De ce fait, on se sert du critère Q pour discriminer nos résultats par rapport à deux autres aspects : la régularité des tourbillons dans la région laminaire de l'écoulement (première apparition des tourbillons) et la tridimensionalisation de ces mêmes tourbillons dans la région de transition à la turbulence.

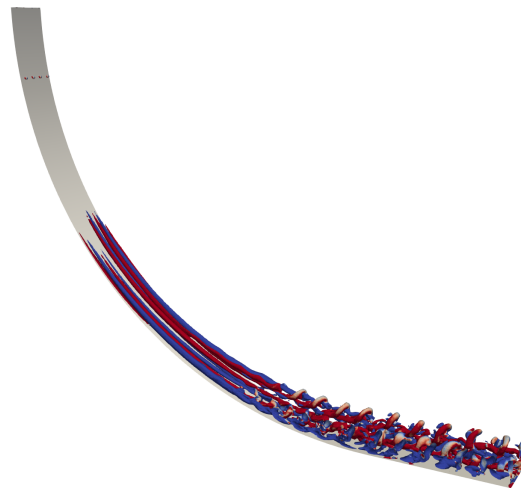
Le premier niveau de raffinement (figure 4.6(a), $N_c = 8$) conduit à la présence de tourbillons longitudinaux contrarotatifs comme attendu. Néanmoins les tourbillons observés ne deviennent pas tridimensionnels avant la fin du domaine de simulation, ce qui est le cas pour les raffinements plus élevés. La taille de maille dans la direction transverse n'est donc pas suffisante pour simuler correctement le processus de transition à la turbulence. Le deuxième niveau de raffinement (figure 4.6(b), $N_c = 12$) permet quant à lui d'observer la tridimensionalisation des tourbillons longitudinaux. Néanmoins, dans ce cas, l'apparition des tourbillons initiaux n'est pas régulière et la tridimensionalisation des tourbillons apparaît plus tard que pour les cas plus raffinés. Le maillage le plus raffiné (figure 4.6(c), $N_c = 16$) permet une bonne description du développement des tourbillons longitudinaux de Görtler, car ils sont réguliers lors de leur première apparition et que leur tridimensionalisation est bien décrite dans la région de transition à la turbulence. Une simulation avec un maillage encore plus fin ($N_c = 20$) produit les mêmes résultats. Le coefficient de frottement C_f (défini en équation 1.4) est analysé pour conclure sur la résolution spatiale transverse du maillage nécessaire pour décrire correctement la physique d'un écoulement de Görtler. Il est important que les simulations numériques effectuées nous permettent d'obtenir des résultats de C_f cohérents, car cette quantité est critique pour les problèmes de transport sédimentaire (Hopfinger et al., 2004) et de transfert de chaleur (Malatesta et al., 2013). Au delà de l'hétérogénéité transverse du coefficient de frottement observée (Dagaut et al., 2021), la présence de l'instabilité de Görtler induit une forte augmentation du frottement global lorsqu'elle se développe (Schrader et al., 2011, Méndez et al., 2018). Cette forte augmentation se produit dans la région de croissance non-linéaire où les tourbillons longitudinaux se forment. On montre en figure 4.7 le coefficient de frottement moyenné temporellement et spatialement dans la direction transverse $\langle C_f(\xi, z) \rangle_{t,z}$, pour quatre niveaux de résolution transverse du maillage, $N_c = \{8, 12, 16, 20\}$. Le frottement maximum ainsi que la position longitudinale pour laquelle ce maximum est atteint sont les critères de convergence. Les résultats présentés montrent très clairement qu'une convergence est atteinte pour un maillage transverse de 16 mailles par longueur d'onde. L'analyse de ce dernier critère est en accord avec les autres observations déjà faites et nous permet de conclure sur le nombre de mailles nécessaire pour décrire la physique d'un écoulement de Görtler. Toutes les simulations numériques, où la longueur d'onde de l'instabilité est forcée, que l'on présentera par la suite respectent ce critère de taille de maille. On précise que pour les simulations numériques où l'instabilité se développe naturellement, ce critère peut ne pas être respecté car la longueur d'onde qui se développe n'est pas connue *a priori*. Cependant, connaissant la longueur d'onde théorique pour chaque simulation, on fait en sorte que le critère de maillage soit respecté pour cette longueur d'onde.

4.1.2.2 Validation de la méthode de forçage

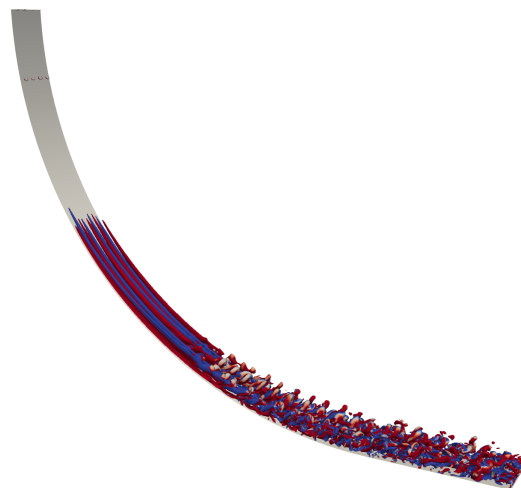
Le forçage de la longueur d'onde doit permettre le développement privilégié d'une longueur d'onde donnée dans l'écoulement. La croissance des perturbations induites dans la région de croissance linéaire doit être cohérente par rapport aux prédictions provenant de l'analyse de stabilité linéaire. La topologie des modes instables développés et amplifiés est aussi analysée et comparée à la LSA pour valider la méthode. Les résultats que l'on présente sont issus d'une simulation numérique où les nombres de Görtler et Reynolds sont les mêmes que pour l'étude de convergence en maillage, $G_{\theta_0} = 18.4$ et $Re_{\delta_0} = 2500$. La résolution spatiale transverse est telle que $N_c = 16$. La longueur d'onde forcée est $\lambda = 0.8\delta_0$, ce qui correspond à un nombre d'onde adimensionnel amont $\alpha_* = 0.92$. Pour ce jeu de paramètres physiques, le taux de croissance adimensionnel théorique de



(a) $N_c = 8$



(b) $N_c = 12$



(c) $N_c = 16$

Figure 4.6. Iso-contour du critère-Q coloré par la vorticité longitudinale pour différentes résolutions transverses du maillage. L'alternance de vorticité longitudinale positive (couleur rouge) et négative (couleur bleue) indique bien la présence des tourbillons contrarotatifs attendus lors du développement de l'instabilité de Görtler.

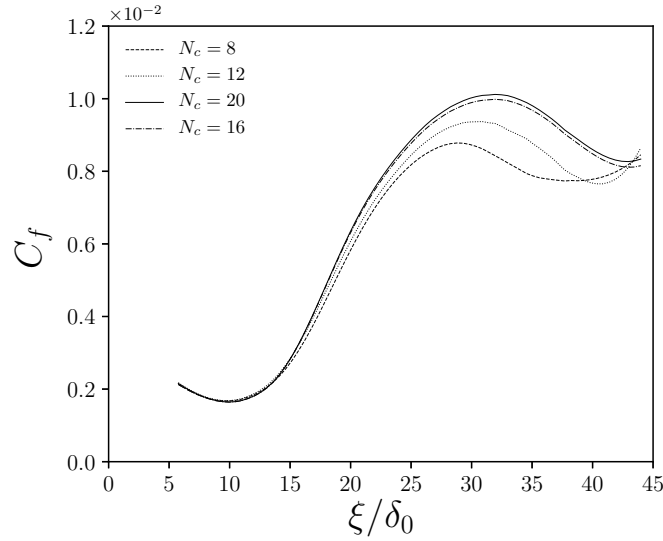


Figure 4.7. Coefficient de frottement moyenné temporellement et spatialement dans la direction transverse $\langle C_f(\xi, z) \rangle_{t,z}$, pour quatre résolutions spatiales différentes, exprimées en nombre de cellules par longueur d'onde $N_c = \{8, 12, 16, 20\}$.

l'instabilité est $\beta_* = 10.36$. Les outils d'analyse présentés dans la section 2.5 sont utilisés pour valider la méthode de forçage choisie.

La grandeur \mathbf{u}_{SHL} qui quantifie le niveau d'hétérogénéité dans l'écoulement est utilisée pour valider la croissance linéaire de l'instabilité. En effet, il est attendu que cette quantité croisse dans la direction longitudinale selon $\exp(\beta\xi)$, β et ξ étant dimensionnels¹. En figure 4.8, on montre l'évolution du maximum sur ψ des trois composantes de \mathbf{u}_{SHL} que l'on normalise par U_∞ , en fonction de la position longitudinale ξ/δ_0 . Les composantes longitudinale, normale et transverse sont respectivement représentées en trait plein, tirets et pointillés. La croissance prédite par analyse de stabilité est représentée en rouge.

En entrée du domaine de simulation, le niveau d'hétérogénéité est presque nul car le profil de vitesse imposé en entrée est homogène dans la direction transverse. Par la présence du forçage, le niveau d'hétérogénéité augmente pour $0 < \xi/\delta_0 < 5$. Quand la fin de la région de forçage est atteinte, on observe une diminution de u_{SHL} et un pic d'augmentation pour v_{SHL} et w_{SHL} . Après cette région de forçage, une région de croissance linéaire est observée pour les trois composantes de \mathbf{u}_{SHL} , suivie d'une saturation non-linéaire où le niveau d'hétérogénéité dans l'écoulement est maintenu (présence des tourbillons).

La croissance linéaire observée est cohérente avec les prédictions de l'analyse de stabilité linéaire, particulièrement pour les composantes normale v_{SHL} et transverse w_{SHL} . La composante longitudinale des perturbations de vitesse présente une croissance légèrement plus faible que celles prédites par l'analyse de stabilité. Ceci s'explique en partie par le niveau d'hétérogénéité en amont relativement fort, induit par le forçage et par les effets non parallèles présents dans l'écoulement et ne remet pas en cause l'efficacité de la méthode de forçage.

Les modes spatiaux, $\hat{\mathbf{u}}(\psi_*)$, qui caractérisent la topologie de l'instabilité dans la région linéaire sont

1. Remarque : le choix des variables d'adimensionalisation dans le formalisme utilisé induit que $\beta\xi = \beta_*\xi_*$, de même que $\alpha z = \alpha_*z_*$.

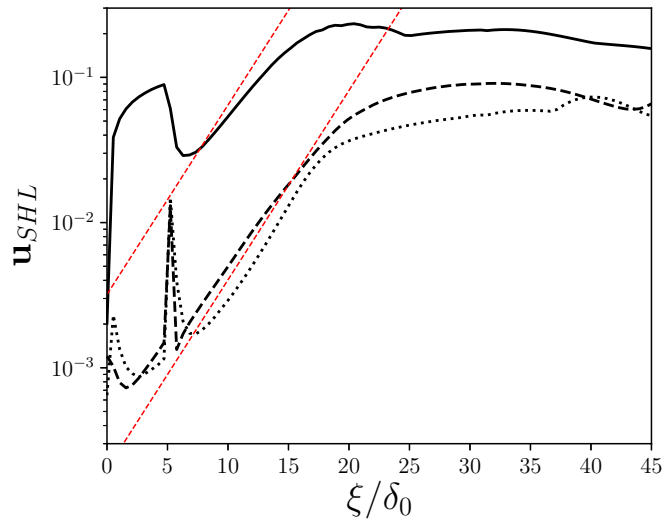


Figure 4.8. Évolution longitudinale de l'hétérogénéité spatiale de vitesse u_{SHL} normalisée par U_∞ . Les composantes longitudinale, normale et transverse sont respectivement représentées en trait plein, tirets et pointillés. La comparaison avec la croissance prédite par l'analyse de stabilité linéaire est tracée en rouge, où $\alpha_{*MAX} = 0.92$ et $\beta_* = 10.36$.

aussi analysés. Ils correspondent à la « portante » des perturbations de vitesse induites par la présence de l'instabilité de Görtler. En considérant que l'écoulement de base correspond à la moyenne transverse du champ de vitesse moyen $\langle \mathbf{u} \rangle_{t,z}(\xi, \psi)$, les perturbations de vitesse correspondent alors à la fluctuation transverse du champ moyen $\mathbf{u}''(\xi, \psi, z)$ définie par l'équation 2.33. Par corrélation avec les fonctions trigonométriques $\cos(\alpha z)$ et $\sin(\alpha z)$, on calcule les modes spatiaux normalisés, $\hat{\mathbf{u}}(\psi) / \max \hat{u}$, à partir des résultats statistiques des simulations numériques. Ces modes spatiaux caractérisent la façon dont les perturbations présentes dans l'écoulement sont amplifiées, du point de vue topologique (dimensions et formes des structures instables) mais également des amplitudes (croissance de l'instabilité). La comparaison entre les résultats de la simulation LES et de l'analyse de stabilité linéaire est montrée en figure 4.9, où la composante longitudinale est normalisée par son maximum $\max \hat{u}$ et les composantes normale et transverse sont normalisées par le maximum de la composante longitudinale $\max(\hat{u})$. On montre que les résultats obtenus sont cohérents avec les

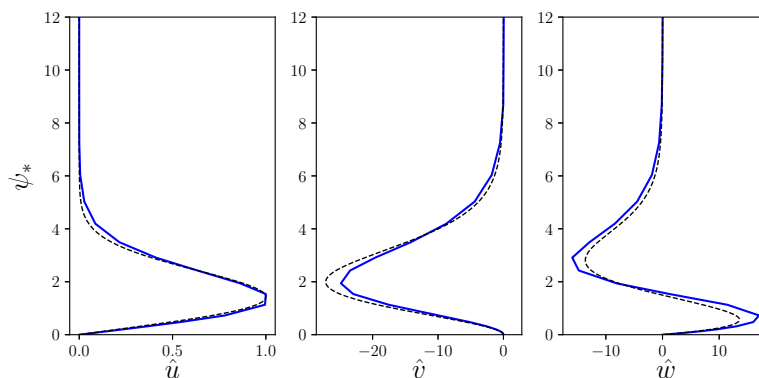


Figure 4.9. Profils des modes spatiaux de l'instabilité de Görtler obtenus par analyse de stabilité (lignes pointillées noires) et traitement statistique issu de la simulation des grandes échelles présentée ci-dessus (lignes continues bleues). Résultats obtenus pour les paramètres physiques suivants : $G = 18.4$, $\alpha_{*MAX} = 0.92$, $\beta_* = 10.36$.

prédictions par LSA. Les amplitudes observées sur les différents profils sont en effet très similaires, de même que la position verticale des différents maxima et minima. La méthode de forçage utilisée permet donc la génération de perturbations longitudinales qui sont ensuite amplifiées de manière cohérente avec la physique de l'instabilité de Görtler. La topologie des structures instables ainsi développées est également conforme aux prédictions de la LSA. L'outil de moyenne de phase introduit au chapitre 2.5 est utilisé ici pour présenter, dans une forme plus visuelle que les modes spatiaux, la topologie des structures instables développées. La fluctuation transverse de vitesse $\mathbf{u}''(\xi, \psi, z)$ est moyennée par phase (opérateur de moyenne de phase en équation 2.36) pour décrire la topologie de l'instabilité sur une fenêtre spatiale $\tilde{z} \in [0; \lambda]$. Les fluctuations spatiales de vitesse moyennées par phase sont notées \tilde{u}'' , \tilde{v}'' et \tilde{w}'' , respectivement pour la composante longitudinale, normale et transverse. On montre les résultats obtenus, après normalisation par U_∞ , en figure 4.10. On ne compare pas les structures instables obtenues avec une analyse de stabilité linéaire,

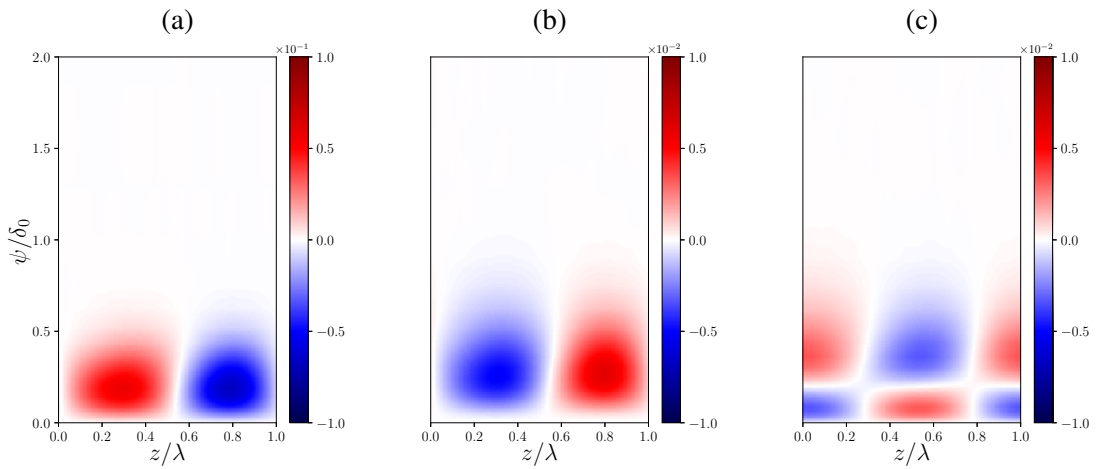


Figure 4.10. Fluctuations spatiales de vitesse moyennées par phase \tilde{u}''/U_∞ (a), \tilde{v}''/U_∞ (b) et \tilde{w}''/U_∞ (c). Les résultats proviennent de la région linéaire de l'écoulement, pour $G = 18.4$, $\alpha_* = 0.92$. (a) Composante longitudinale. (b) Composante normale. (c) Composante transverse.

mais il est clair que les résultats montrent la présence de structures instables qui correspondent au développement de tourbillons longitudinaux contrarotatifs. Les amplitudes des perturbations obtenues sont de l'ordre de 6% pour la composante longitudinale \tilde{u}'' , de 1% pour la composante normale \tilde{v}'' et de 0.5% pour la composante transverse \tilde{w}'' .

4.1.3 Résultats

Une série de simulations numériques d'écoulements de couche limite sur paroi courbe développant l'instabilité de Görtler a été effectuée (configuration décrite en figure 4.2). Dans cette série de simulations numériques, on fait varier la longueur d'onde de l'instabilité développée en utilisant la méthode de forçage décrite précédemment. Cinq simulations sont présentées, où la longueur d'onde est $\lambda/\delta_0 = \{0.6, 0.7, 0.9, 1.0, 1.5\}$. Les valeurs de la longueur d'onde forcée sont choisies de telle sorte qu'elles couvrent une large gamme par rapport à l'épaisseur de la couche limite amont qui elle est identique pour toutes les simulations. Les nombres de Reynolds et de Görtler amonts sont également identiques pour toutes les simulations et sont $G_{\theta_0} = 13.4$ et $Re_{\delta_0} = 1800$. Ces valeurs sont différentes de celles utilisées pour la validation de la méthode mais permettent ainsi de couvrir une gamme de nombres d'onde adimensionnels α_* aussi bien inférieurs que supérieurs à α_{*MAX} , le nombre d'onde le plus amplifié théorique (figure 4.11). Les valeurs du nombre d'onde forcé sont $\alpha_* = \{0.49, 0.74, 0.82, 0.92, 1.05, 1.23\}$ et le nombre d'onde le plus amplifié théorique, obtenu par

analyse de stabilité linéaire, est $\alpha_{*,\text{MAX}} = 0.95$. L'objectif de cette étude paramétrique est de montrer l'influence de la longueur d'onde forcée sur la dynamique de l'écoulement. On s'intéresse dans un premier temps à la croissance de l'instabilité, propriété physique pour laquelle la comparaison avec une analyse de stabilité linéaire est possible. L'avantage de la simulation numérique instationnaire de type LES est ensuite exploité et prend tout son sens dans l'analyse de la région non-linéaire et de transition à la turbulence. En particulier, on étudie la croissance non-linéaire de l'instabilité, la topologie locale de l'écoulement, le frottement pariétal et la topologie 3D.

4.1.3.1 Croissance de l'instabilité

L'analyse de la croissance de l'instabilité présentée se résume au calcul du taux de croissance spatial adimensionnel β_* , dans la région de croissance linéaire. La détermination du taux de croissance spatial se fait à partir de l'évolution longitudinale des perturbations de vitesse u'' qui croissent de façon exponentielle (équations 3.10-3.11). Si l'on se place le long d'une ligne de courant (ψ constant) et une position transverse donnée (z constant), le taux de croissance spatial β des perturbations de vitesse longitudinale $u''(\xi, \psi_0, z_0)$ sur cette même ligne est simplement donné par

$$\beta = \frac{1}{u''(\xi, \psi_0, z_0)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[u''(\xi, \psi_0, z_0) \right] \quad (4.1)$$

De manière générale, on définit une quantité globale qui quantifie les perturbations de vitesse induites par l'instabilité, que l'on appelle A . Le calcul du taux de croissance est similaire et s'écrit

$$\beta = \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \xi} \quad (4.2)$$

D'après Day et al. (1990) et Saric (1994), plusieurs quantités A peuvent être utilisées pour déterminer le taux de croissance spatial. La quantité classiquement utilisée pour une comparaison avec une analyse de stabilité linéaire par méthode des modes orthogonaux est $\mathbf{A} = \{\max u'', \max v'', \max w''\}$. C'est la quantité qui a été utilisée pour valider la méthode de forçage. On peut également utiliser une quantité intégrale A^* , qu'il est judicieux d'utiliser quand des effets non-parallèles sont présents selon les études de Gaster (1974), Saric et Nayfeh (1977) et Saric (1994). Cette quantité peut être calculée à partir de chacune des composantes de la perturbation de vitesse de manière équivalente. À partir de la composante longitudinale de la perturbation de

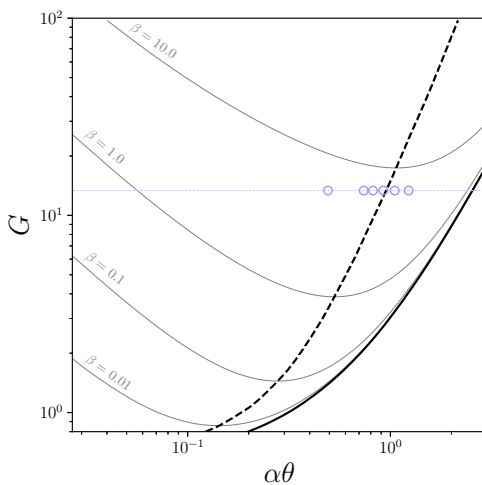


Figure 4.11. Projection des conditions de forçage amont du nombre d'onde de l'instabilité α_* , dans un diagramme de stabilité linéaire. De gauche à droite, les valeurs du nombre d'onde adimensionnel sont $\alpha\theta = \{0.49, 0.74, 0.82, 0.92, 1.05, 1.23\}$.

vitesse $u''(\xi, \psi_0, z_0)$, la quantité A^* s'écrit

$$A^* = \sqrt{\iint u''^2 dz d\psi} \quad (4.3)$$

Les effets non-parallèles (vitesse dans la direction normale à la paroi significative) sont d'autant plus présents que le nombre de Reynolds est faible (Blasius, 1907). Le nombre de Reynolds est ici suffisamment élevé pour négliger les effets non-parallèles. Néanmoins, on choisit d'utiliser A^* pour le calcul du taux de croissance car cela deviendra justifié dans l'analyse de certaines simulations présentées par la suite.

L'évolution longitudinale de la quantité A^* obtenue par simulations LES est montrée en figure 4.12 pour chacune des valeurs de longueur d'onde présentées. La quantité A^* est calculée à partir de chacune des trois composantes des perturbations de vitesse u'' (trait plein noir), v'' (tirets noirs) et w'' (pointillés noirs). La courbe en pointillée rouge représente la croissance théorique obtenue par analyse de stabilité linéaire pour chacune des longueurs d'onde étudiées. On observe dans un premier temps que l'amplitude des perturbations de vitesse est plus élevée pour la composante longitudinale que pour les deux autres composantes (environ 10 fois plus élevée), ce qui vient corroborer les observations faites précédemment à partir de la figure 4.10. De plus, quelle que soit la composante utilisée pour le calcul de la quantité A^* , on peut identifier clairement la région de croissance exponentielle. La croissance ne semble pas être exactement la même selon les composantes mais reste globalement cohérente avec les résultats issus de la LSA. Une légère tendance à s'écarter de la croissance obtenue par l'analyse de stabilité linéaire semble apparaître lorsque la longueur d'onde forcée devient faible, pour $\lambda = 0.7\delta_0$ et $\lambda = 0.6\delta_0$.

Une comparaison plus détaillée des taux de croissance spatiaux obtenus est présentée en figure 4.13, où le taux de croissance adimensionnel β_* est tracé en fonction du nombre d'onde adimensionnel α_* . Les résultats obtenus par analyse de stabilité linéaire sont tracés en noir (ronds), les résultats obtenus par simulations LES sont montrés en bleu. β_{*u} représente le taux de croissance calculé à partir de la composante longitudinale de la perturbation de vitesse (carrés), β_{*v} à partir de la composante normale (triangles) et β_{*w} à partir de la composante transverse (losanges).

Les résultats obtenus confirment les observations faites à partir de la figure 4.12, à savoir que la croissance spatiale des perturbations de vitesse diffère selon la composante utilisée pour le calcul de A^* . La croissance spatiale de la composante normale des perturbations de vitesse v'' est plus forte que celle de la composante transverse w'' , elle-même plus forte que celle de la composante longitudinale u'' . Les écarts observés ne dépassent néanmoins pas les 10%, si on prend les taux de croissance maximum pour chacune des courbes présentées.

De plus, les résultats issus des simulations numériques reproduisent un processus de sélection de longueur d'onde, c'est à dire que la croissance spatiale des perturbations introduites par la méthode de forçage dépend de la longueur d'onde forcée. La longueur d'onde pour laquelle les perturbations sont le plus amplifiées est $\lambda/\delta_0 = 1.0$ et ce, quelle que soit la composante de \mathbf{u}'' . Le nombre d'onde adimensionnel correspondant est $\beta_* = 0.74$. Cette valeur est différente du nombre d'onde le plus amplifié déterminé préalablement par analyse de stabilité linéaire, $\beta_{*\text{MAX}} = 0.94$. Les simulations numériques semblent favoriser la croissance des longueurs d'onde les plus élevées jusqu'à ce qu'elles deviennent supérieures à l'épaisseur de couche limite.

Enfin, les valeurs des taux de croissance spatiaux calculés à partir des résultats des simulations numériques sont globalement inférieures aux valeurs prédites par la LSA. Là encore, l'écart est

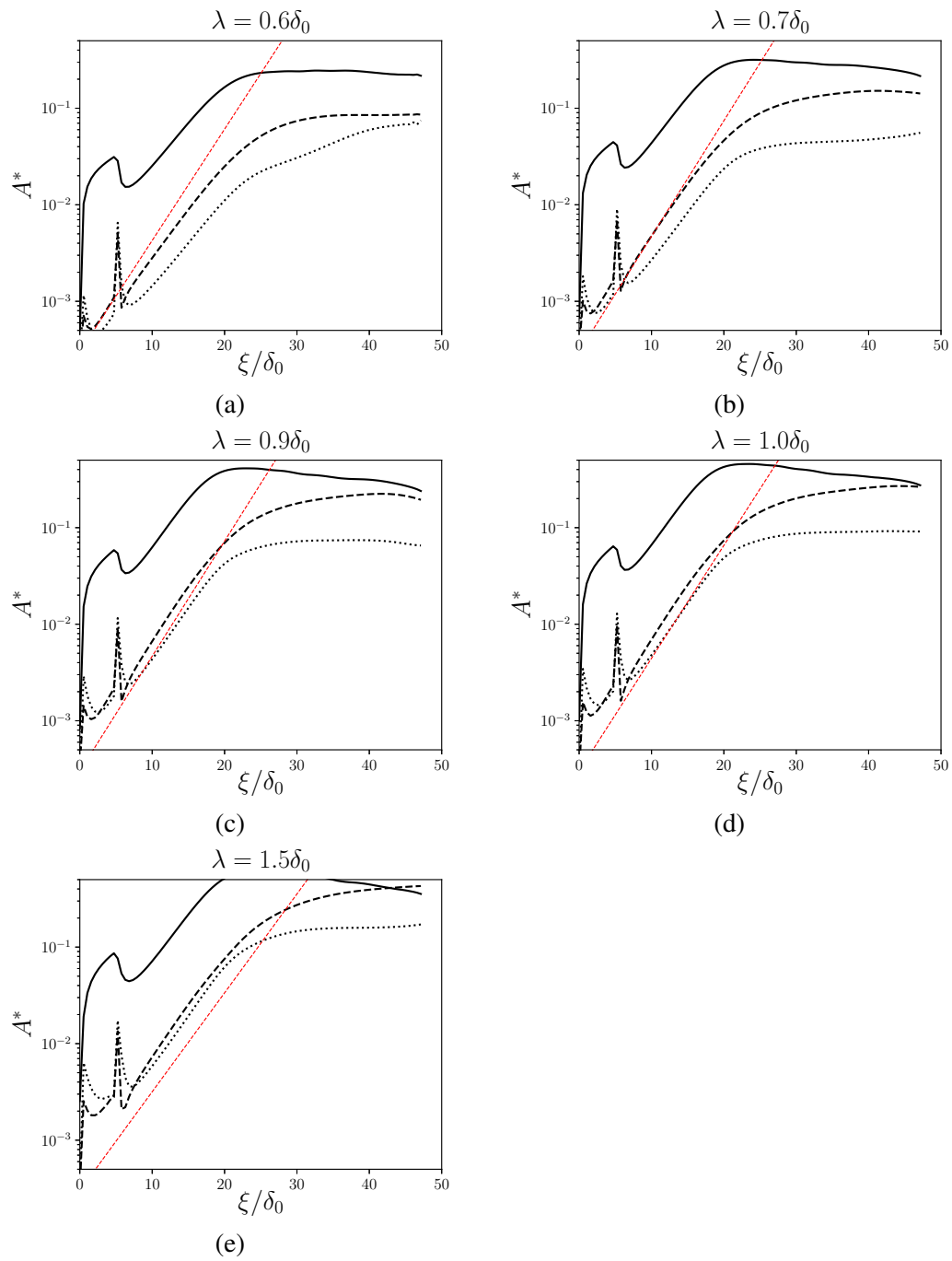


Figure 4.12. Evolution longitudinale de A^* pour différentes valeurs de la longueur d'onde λ forcée en amont du domaine et pour les 3 composantes de la perturbation de vitesse, où les composantes longitudinale, normale et transverse sont respectivement représentées en noir par des traits plein, tirets et pointillés. Le taux de croissance obtenu par analyse de stabilité linéaire est représenté par la pente en rouge.

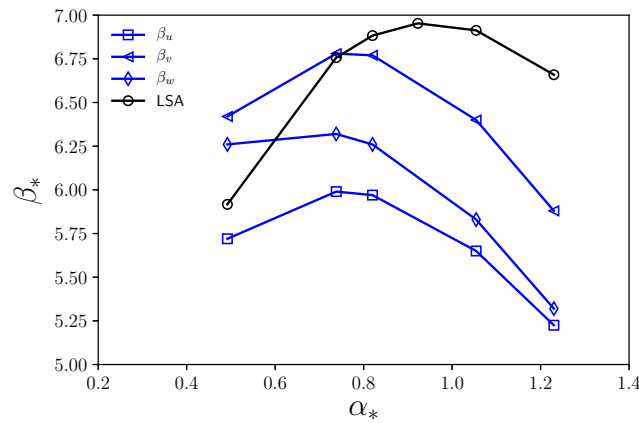


Figure 4.13. Taux de croissance spatial de l'instabilité β_* en fonction du nombre d'onde α_* . Comparaison entre l'analyse de stabilité linéaire (LSA, en noir) et les résultats des simulations LES (en bleu) ou le taux de croissance des perturbations de vitesse est montré selon la composante considérées, β_{*u} pour la composante longitudinale, β_{*v} pour la composante normale, β_{*w} pour la composante transverse.

faible et peut s'expliquer par la présence d'effets non-linéaires, qui sont très faibles mais qui existent par la nature de la simulation numérique. On note également que pour la simulation où la longueur d'onde forcée est $\lambda = 1.5\delta_0$ (i.e. $\alpha_* = 0.49$), le taux de croissance spatial calculé à partir des résultats de la simulation numérique est supérieur aux prédictions de la LSA.

4.1.3.2 Région non-linéaire

La simulation numérique de type LES nous permet d'aller plus loin que l'analyse de stabilité linéaire dans l'étude de l'écoulement. La forme non-linéaire de l'instabilité et la transition à la turbulence sont ainsi étudiées par les outils statistiques mis à notre disposition.

Dans la région non-linéaire de l'instabilité, l'écoulement moyen $\langle \mathbf{u} \rangle_{t,z}$ est modifié et ne correspond plus à la solution autosimilaire de Blasius. Ce phénomène est observé dans les résultats des simulations numériques présentées, comme le montre la figure 4.14 où un point d'inflexion est visible sur les profils de vitesse. La série de simulations nous permet de caractériser l'influence de

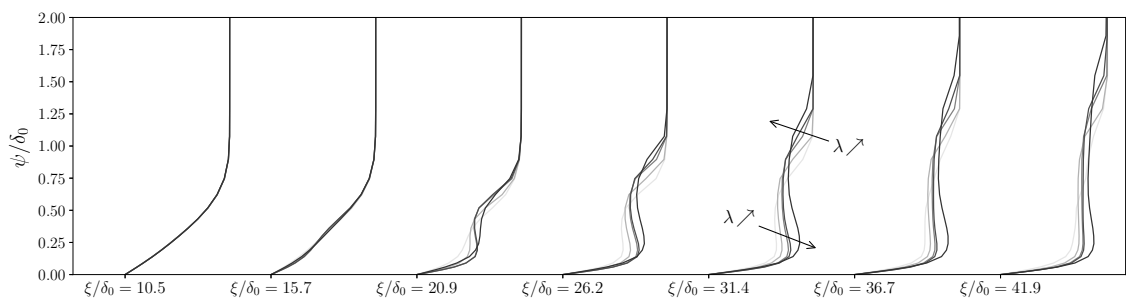


Figure 4.14. Évolution longitudinale du profil de vitesse $\langle u \rangle_{t,z}/U_\infty$ pour chacune des simulations où la longueur d'onde de l'instabilité de Görtler est forcée. Du plus clair au plus foncé, les profils présentés correspondent à la longueur forcée $\lambda/\delta_0 = \{0.6, 0.7, 0.9, 1.0, 1.5\}$.

la longueur d'onde λ/δ_0 sur la déformation du profil de vitesse longitudinale $\langle u \rangle_{t,z}$. Les résultats obtenus nous montrent que plus la longueur d'onde est grande, plus la distorsion du profil $\langle u \rangle_{t,z}$

est prononcée. Ceci indique une différence de comportement entre la région linéaire et la région non-linéaire puisqu'ici on n'observe pas de processus favorisant une longueur d'onde en particulier. Pour aller plus loin dans l'analyse, on trace en figure 4.15 l'évolution longitudinale du profil de $\langle v \rangle_{t_{\text{SHL}}} / U_\infty$ qui correspond au niveau d'hétérogénéité transverse de la vitesse verticale moyenne $\langle v \rangle_t$. Ceci nous permet de quantifier l'importance des phénomènes d'*upwash* et de *downwash*

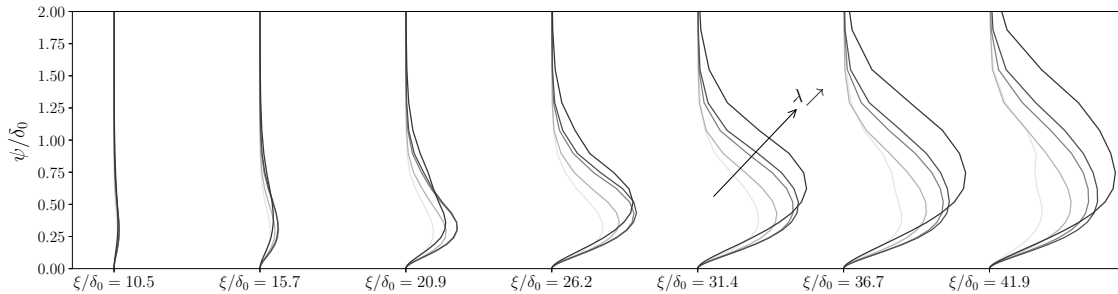


Figure 4.15. Évolution longitudinale de $\langle v \rangle_{t_{\text{SHL}}} / U_\infty$ pour chacune des simulations où la longueur d'onde de l'instabilité de Görtler est forcée. Du plus clair au plus foncé, les profils présentés correspondent à la longueur forcée $\lambda / \delta_0 = \{0.6, 0.7, 0.9, 1.0, 1.5\}$.

dans l'écoulement de Görtler. Les résultats obtenus nous montrent encore une fois que ce sont les configurations où la longueur d'onde forcée λ est la plus grande qui induisent les plus fortes distorsions dans la région non-linéaire de l'écoulement. Il est intéressant de remarquer que pour les positions $\xi / \delta_0 < 20.9$, ce sont les longueurs d'onde $\lambda / \delta_0 = \{0.9, 1.0\}$ qui induisent l'hétérogénéité spatiale de $\langle u \rangle_t$ la plus importante. En effet, la croissance de l'instabilité est plus forte pour ces longueurs d'onde qu'elle ne l'est pour $\lambda / \delta_0 = 1.5$ (voir figure 4.13). C'est seulement à partir des positions $\xi / \delta_0 > 26.2$ que les fluctuations transverses de vitesse deviennent plus importantes pour la plus grande longueur d'onde $\lambda / \delta_0 = 1.5$. Ceci indique que, malgré une croissance plus faible, la saturation non-linéaire des perturbations de vitesse intervient pour des niveaux d'hétérogénéité plus forts, ce qui peut également être déduit de la figure 4.12 présentée précédemment. Pour prédire les effets d'hétérogénéité d'un écoulement de Görtler il est donc important de considérer à la fois la croissance de l'instabilité (prédictible par analyse de stabilité linéaire) mais également la valeur de la longueur d'onde qui se développe. Pour corroborer cette analyse, on trace en figure 4.16 la composante longitudinale de la vitesse $\langle u \rangle_t$ aux positions transverse correspondant aux phénomènes d'*upwash* (figure 4.16a) et de *downwash* (figure 4.16b), dans les régions linéaire et non-linéaire. Les profils sont tracés en fonction de ψ / θ et pour des nombres

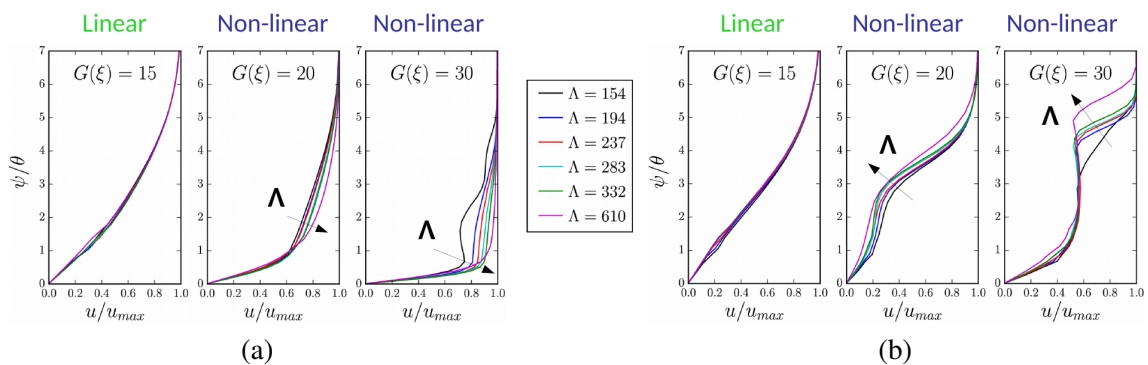


Figure 4.16. Composante longitudinale de la vitesse u / u_{MAX} pour les différentes valeurs de λ et différentes position longitudinales, correspondant aux régions linéaire et non-linéaire. (a) *Downwash*, (b) *upwash*.

de Görtler identiques selon les configurations. Dans la zone linéaire ($G(\xi) = 15$), la longueur d'onde λ n'a pas d'effet notable sur la dynamique de l'écoulement. Dans la zone non-linéaire, on observe que plus λ est grand, plus les effets *upwash* et *downwash* sont importants, à savoir que l'écoulement est de plus en plus accéléré proche de la paroi pour le *downwash* et de plus en plus décéléré pour l'*upwash*. Encore une fois, le processus de sélection de longueur d'onde présent dans la région linéaire n'est pas reproduit dans la région non-linéaire et la dynamique de l'écoulement est régie par la valeur de la longueur d'onde forcée λ , i.e. par la taille des tourbillons générés.

Enfin, on s'intéresse à la topologie tridimensionnelle des écoulements de Görtler générés par forçage de la longueur d'onde. Pour ce faire les iso-contours de critère Q colorés par la vorticité longitudinale sont montrés pour les différentes simulations en figure 4.17. L'apparition initiale des tourbillons, i.e. la position longitudinale à partir de laquelle les tourbillons commencent à apparaître est tout d'abord analysée. Les résultats obtenus nous montrent que cette position initiale des tourbillons est d'autant plus en amont de l'écoulement que le taux de croissance spatial est élevé. Le processus de sélection de longueur d'onde (prédictible par LSA) régit la rapidité d'apparition des tourbillons de Görtler. Ces tourbillons sont ensuite responsables de la transition à la turbulence par le développement d'instabilité secondaire présentées au chapitre 1. Ces instabilités secondaires induisent en effet une tridimensionalisation des tourbillons de Görtler, formant d'abord des structures en fer à cheval (*horseshoe vortices*) puis des tourbillons désorganisés². Les résultats de nos simulations nous montrent que la tridimensionalisation des tourbillons de Görtler dépend de la longueur d'onde. On observe que le taux de croissance spatial semble encore une fois permettre de prédire en partie les configurations dans lesquelles la transition à la turbulence intervient le plus rapidement. En effet, les configurations où cette transition apparaît le plus en amont correspondent aux configurations où le taux de croissance de l'instabilité est le plus fort (figures 4.17c et 4.17d). Par exemple, le fait que la tridimensionalisation des tourbillons ne s'observe pas dans le cas à $\lambda/\delta_0 = 1.5$ s'explique en partie par un taux de croissance spatial de l'instabilité plus faible. Cependant, ce n'est pas le seul élément de réponse à ces observations car les simulations où $\lambda/\delta_0 = 0.6$ et $\lambda/\delta_0 = 0.7$ présentent une tridimensionalisation des tourbillons de Görtler alors que le taux de croissance spatial est inférieur à celui observé pour $\lambda/\delta_0 = 1.5$ (se référer à la figure 4.13). Pour expliquer ces observations, il faut en réalité dire que ce sont les effets non-linéaires qui sont responsables de la tridimensionalisation des tourbillons. Or, les effets non-linéaires impactent en premier lieu les petites échelles de l'écoulement. Les configurations où la longueur d'onde est faible ($\lambda/\delta_0 = \{0.6, 0.7\}$) sont donc sujettes aux effets non-linéaires plus en amont de l'écoulement, induisant une tridimensionalisation des tourbillons malgré le faible taux de croissance spatial. On remarque enfin que les structures en fer à cheval sont plus ou moins organisées selon les configurations présentées. Par exemple pour $\lambda/\delta_0 = 1.0$ (figure 4.17d), il est frappant de voir l'organisation régulière des structures tourbillonnaires formées. Là encore, on observe que plus la longueur d'onde est faible, moins les structures tridimensionnelles sont organisées, car plus sensibles aux effets non-linéaires présents dans l'écoulement.

Ces analyses montrent l'importance cruciale de la longueur d'onde de l'instabilité sur la dynamique et la topologie de l'écoulement, à la fois dans la région de croissance linéaire et la région non-linéaire (Dagaut et al., 2019). Les propriétés turbulentes de l'écoulement ne sont pas analysées dans ce chapitre mais il serait intéressant d'étudier l'influence de la longueur d'onde de l'instabilité sur la turbulence avale. Ceci constitue une des perspectives de ce travail de thèse.

2. On remarque que le forçage de la longueur d'onde de l'instabilité induit une organisation très régulière des structures tourbillonnaires développées, ce qui n'est pas le cas pour le développement naturel de l'instabilité

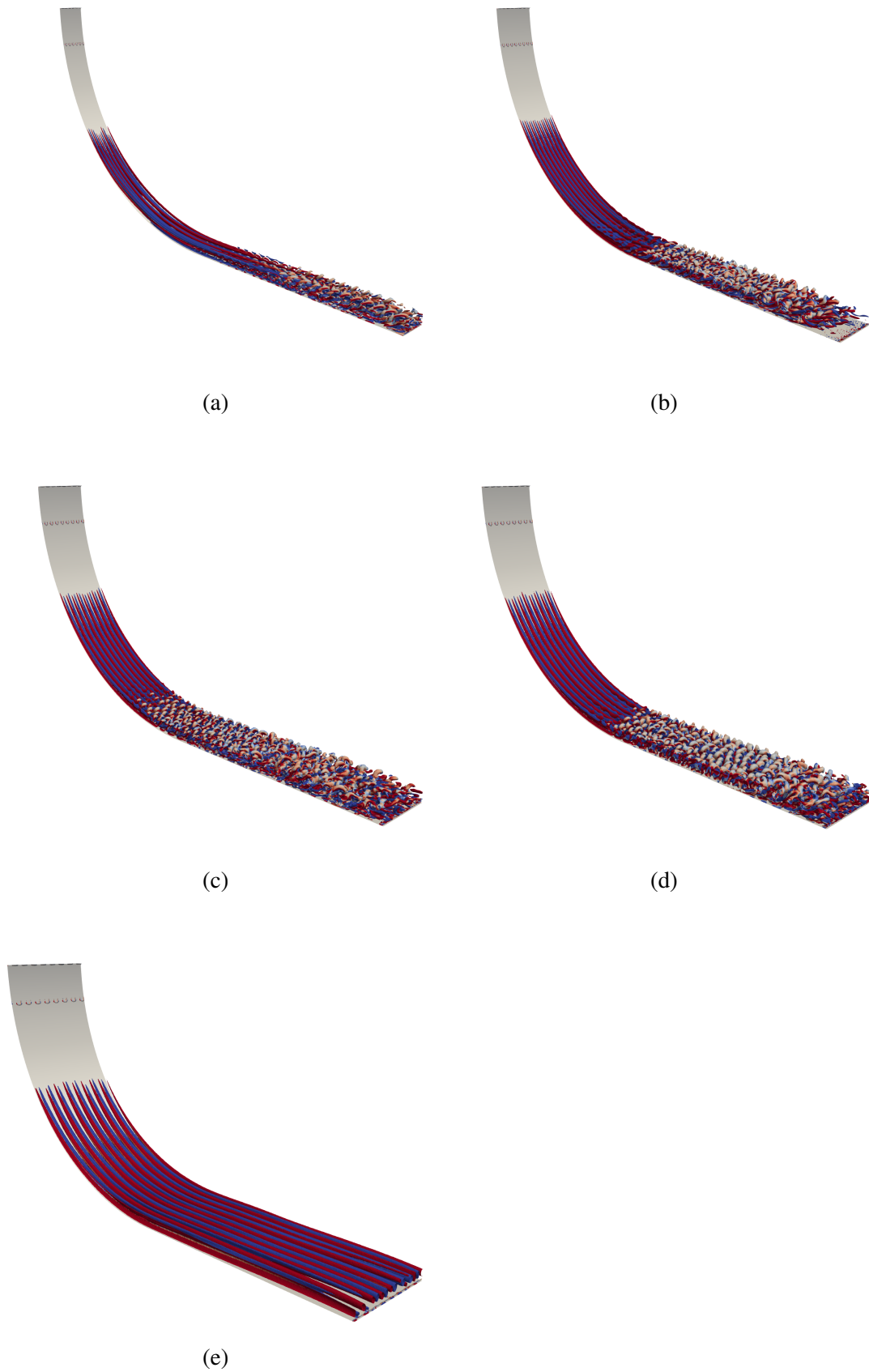


Figure 4.17. Iso-contours de critère Q colorés par la vorticité longitudinale montrant la topologie tridimensionnelle de l'écoulement pour les différentes valeurs de λ . (a) $\lambda = 0.6$, (b) $\lambda = 0.7$, (c) $\lambda = 0.9$, (d) $\lambda = 1.0$, (e) $\lambda = 1.5$.

4.2 Développement naturel de l'instabilité de Görtler

4.2.1 Influence des paramètres numériques

La simulation d'un écoulement de Görtler (i.e. écoulement de couche limite sur paroi courbe) sans forçage de la longueur d'onde, nécessite une précaution particulière vis-à-vis des conditions d'entrée. En effet, il est montré par plusieurs études (Bippes, 1978, Floryan et Saric, 1982, Ducoin et al., 2017) que le développement « naturel » de l'instabilité est sensible aux conditions amont. On présente ici deux simulations LES pour lesquelles aucun forçage de la longueur d'onde n'est utilisé et dont le déclenchement de l'instabilité est initié par :

- un champ fluctuant de perturbation de vitesse, de type bruit blanc et dont l'amplitude est de l'ordre de $10^{-2}U_\infty$;
- un champ fluctuant de perturbation de vitesse, de type écoulement de turbulence homogène isotrope (THI), dont l'amplitude moyenne des fluctuations de vitesse est de l'ordre de $10^{-2}U_\infty$ également.

L'utilisation d'une perturbation en entrée, si elle est correctement mise en place, doit déclencher le développement de l'instabilité plus rapidement. En termes de développement spatial de l'instabilité, le déclenchement de l'instabilité doit apparaître plus en amont du domaine. L'intérêt du bruit blanc par rapport au champ de vitesse de THI est qu'il est très simple à générer. À l'inverse, l'avantage d'injecter de la turbulence homogène isotrope dans l'écoulement de couche limite initial est qu'il a une interprétation physique et qu'il sera dissipé plus difficilement. En effet, les structures cohérentes présentes dans un écoulement de THI ont un temps de vie plus long que des perturbations aléatoires. Cependant, la physique de l'écoulement de Görtler ne doit pas être impactée par ces différentes techniques de déclenchement de l'instabilité.

La croissance linéaire, le processus de sélection de la longueur d'onde naturelle, ainsi que la topologie 3D de l'écoulement sont analysés pour ces deux cas afin de dresser un bilan sur l'utilisation de perturbation en amont du domaine pour déclencher l'instabilité.

4.2.1.1 Croissance de l'instabilité de Görtler

L'évolution longitudinale de la quantité u_{SHL} pour les deux simulations est présentée en figure 4.18. Ces résultats témoignent d'une dépendance de la région de croissance linéaire, facilement identifiable sur ces courbes, à la condition d'entrée. En effet, le déclenchement de l'instabilité se fait plus en amont dans le cas où l'on utilise de la THI en entrée. De plus, la fin de la région linéaire intervient également plus en amont pour le cas avec THI que pour le cas avec du bruit blanc de même intensité.

Du fait de l'apparition retardée de la saturation non-linéaire dans le cas avec bruit blanc, le niveau d'hétérogénéité transverse maximal atteint dans le domaine est bien plus élevé. Les effets « upwash » et « downwash », par exemple, seront donc plus importants si le déclenchement se fait par bruit blanc.

Malgré ces différences notables, le taux de croissance spatial observé reste identique dans les deux cas simulés, ce qui semble indiquer que le processus de croissance de l'instabilité n'est pas impacté par le choix de la perturbation amont. Enfin, ce taux de croissance est semblable au taux de croissance prédit par analyse de stabilité linéaire.

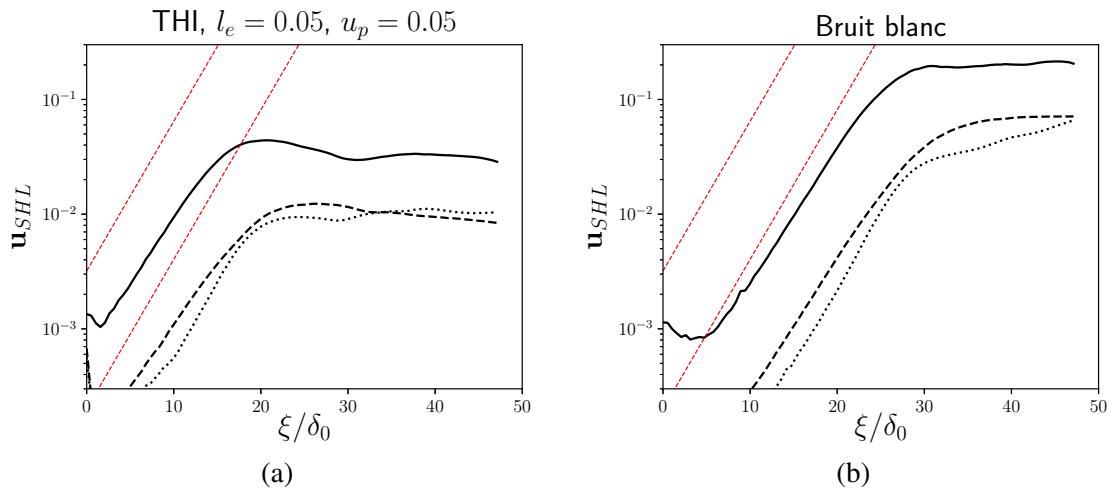


Figure 4.18. u_{SHL} pour un nombre de Reynolds $Re = 2500$ et nombre de Görtler $G = 18.4$. (a) L'instabilité de Görtler est déclenchée par utilisation d'un champ de turbulence homogène isotrope numérique, générée en entrée du domaine de simulation. (b) L'instabilité de Görtler est déclenchée par utilisation d'un bruit blanc, généré en entrée du domaine de simulation.

4.2.1.2 Processus de sélection de longueur d'onde

L'évolution longitudinale de la densité spectrale de puissance adimensionnée par son maximum local, obtenue par FFT spatiale sur le signal de perturbation de vitesse normale v'' , est montrée en figure 4.19. Les deux spectrogrammes sont notablement différents, en particulier dans la première

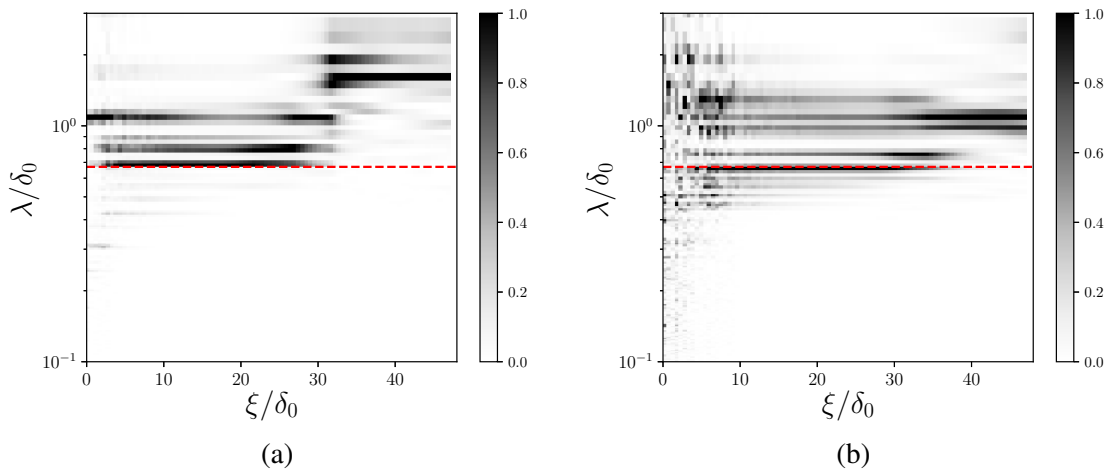


Figure 4.19. Spectrogramme obtenu par FFT spatiale calculée à partir de la composante normale de la perturbation de vitesse v'' adimensionnée par le maximum local. Le nombre de Reynolds est $Re = 2500$ et le nombre de Görtler est $G = 18.4$. (a) Utilisation d'un champ de turbulence homogène isotrope numérique en entrée du domaine de simulation pour déclencher l'instabilité. (b) Utilisation d'un bruit blanc en entrée du domaine de simulation pour déclencher l'instabilité.

région de développement de l'instabilité. En effet, l'utilisation d'un bruit blanc induit l'absence de longueurs d'onde identifiables dans le domaine jusqu'à $\xi/\delta_0 = 10$, alors qu'en présence d'un champ de vitesse perturbé par de la turbulence homogène isotrope, le spectrogramme admet un nombre fini de longueurs d'onde distinctes dans le domaine de simulation. Ce résultat complète ce qui a été expliqué précédemment et montre qu'en présence de turbulence homogène isotrope, le

déclenchement de l'instabilité intervient plus en amont, avec la présence dans ce cas de plusieurs longueurs d'onde.

D'autre part, une fois que l'instabilité de Görtler est déclenchée, la longueur d'onde la plus amplifiée est identique dans les deux simulations présentées. La nature des perturbations en amont ne semble donc pas changer la valeur de la longueur d'onde la plus amplifiée. On remarque également que la longueur d'existence de cette longueur d'onde dans la direction longitudinale est plus élevée dans le cas où les perturbations amont correspondent à un bruit blanc, ce qui rejoint les conclusions précédentes.

Enfin, dans les deux simulations présentées, la longueur d'onde la plus amplifiée observée correspond à la longueur d'onde prédite par analyse de stabilité linéaire.

4.2.1.3 Topologie de l'écoulement

Les iso-contours du critère Q , colorés par la vorticité longitudinale ω_ξ , sont montrés en figure 4.20. Ces figures permettent de montrer les structures tourbillonnaires présentes dans l'écoulement, notamment les tourbillons de Görtler qui sont la manifestation non-linéaire de l'instabilité de Görtler. On remarque que l'on montre les résultats sur l'ensemble du domaine de calcul (parties courbe et planes) contrairement aux résultats précédents (partie courbe uniquement).

Les deux topologies montrées sont très différentes l'une de l'autre. D'une part, proche de l'entrée du domaine de simulation, les structures tourbillonnaires cohérentes de la THI sont visibles sur l'iso-contour de critère Q alors qu'aucune structure tourbillonnaire n'est observée dans le cas du bruit blanc. Ces structures ont par ailleurs une longueur d'existence dans la direction longitudinale d'environ $4\delta_0$, avant d'être dissipées.

D'autre part, des structures tourbillonnaires longitudinales, identifiées comme étant des tourbillons de Görtler, apparaissent plus en amont du domaine pour le cas où de la THI est utilisée pour déclencher l'instabilité. Ces tourbillons apparaissent également de façon moins régulière dans la direction transverse pour le cas avec de la THI. Ces éléments d'observation sont en accord avec ce qui a été présenté précédemment, où l'on montre un décalage spatial (dans la direction longitudinale) du début de la saturation non-linéaire.

Enfin, dans le cas de THI, la régularité des tourbillons n'est pas aussi parfaite que dans les simulations où la longueur d'onde est forcée. Ces tourbillons sont justement soumis à des déformations tridimensionnelles très rapidement. Cette tridimensionalisation n'est pas observée dans le cas du déclenchement par bruit blanc. Pendant le processus de tridimensionalisation, des structures cohérentes, communément appelées « *horseshoe vortices* », émergent avant de laisser place à un ensemble de structures tourbillonnaires dont l'organisation spatiale n'est plus perceptible. Ce dernier état correspond aux prémices de la transition de la couche limite vers un état turbulent.

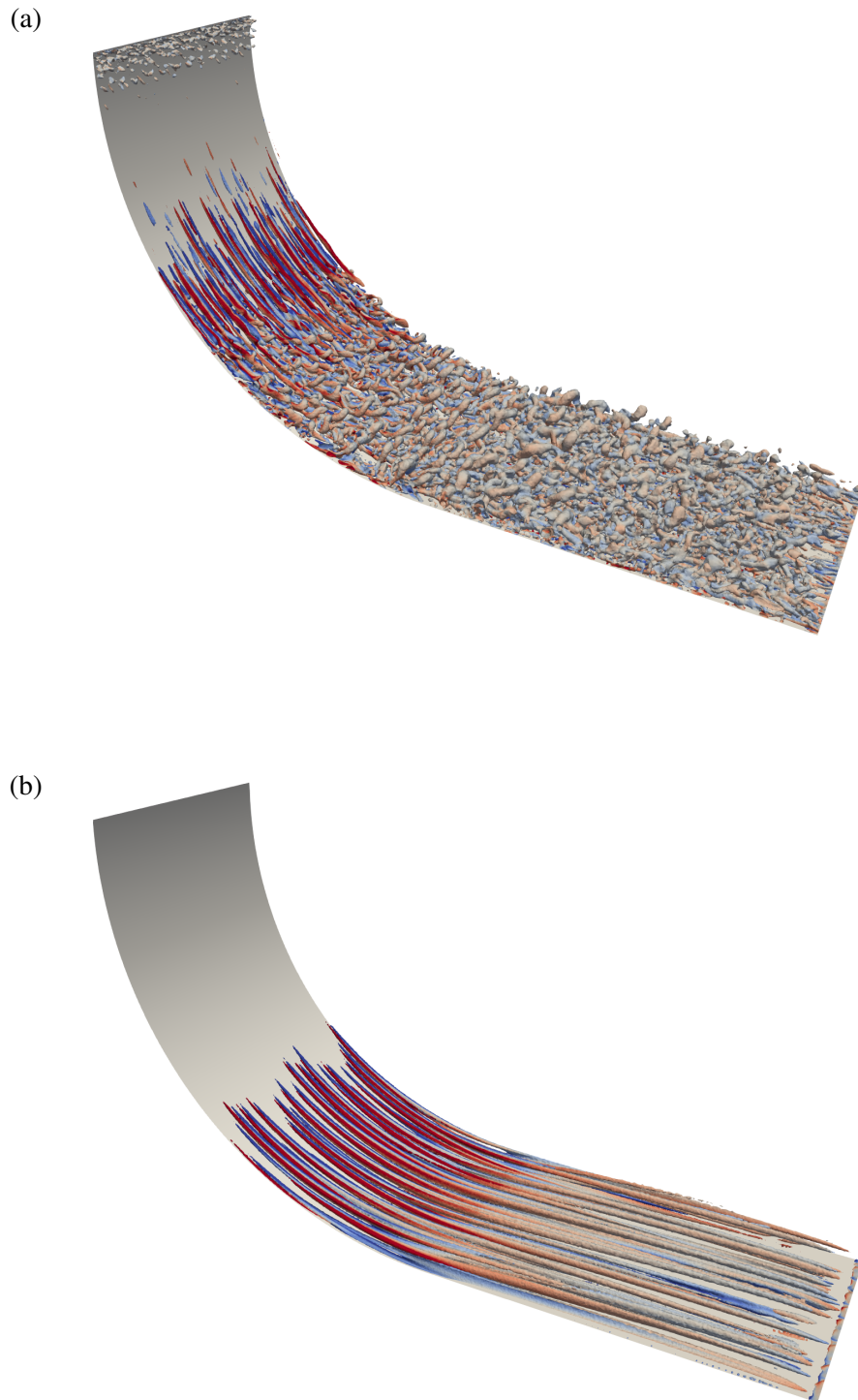


Figure 4.20. Visualisation 3D des structures tourbillonnaires par l'utilisation d'iso-contours du critère Q , coloré par la vorticité longitudinale. Le nombre de Görtler est $G = 18.4$, le nombre de Reynolds est $Re = 2500$. (a) Un champ de turbulence homogène isotrope (THI) est superposé au profil de vitesse en entrée du domaine. (b) Un bruit blanc est superposé au profil de vitesse en entrée du domaine.

4.2.2 Influence des nombres de Reynolds et Görtler

La seconde série de simulations consiste à laisser la (les) longueur(s) d'onde naturelle(s) se développer dans le domaine de calcul, en imposant uniquement le profil de vitesse en entrée. Dans cette série de simulations, aucun forçage de longueur d'onde n'est donc utilisé. On dit que l'instabilité de Görtler se développe naturellement (ou spontanément). L'influence des paramètres numériques dans ce type de simulations, qui a été présentée précédemment, nous conduit au choix de laisser l'instabilité se développer sans utiliser de perturbations (bruit blanc, ou structures turbulentes cohérentes).

La série de simulations présentée comprend des simulations à faibles nombres de Reynolds jusqu'à des nombres de Reynolds modérés et une simulation à haut nombre de Reynolds, qui sera présentée et étudiée plus en détail dans le chapitre suivant. Le nombre de Reynolds a une influence sur plusieurs aspects du développement de l'instabilité. En effet, au chapitre 1, l'équation 1.22 qui définit la composante normale de la vitesse dans la solution auto-similaire de Blasius (état de base pour notre problème de Görtler), montre une dépendance en Reynolds de la vitesse normale. Plus le nombre de Reynolds est faible, plus cette composante normale de la vitesse est élevée et donc plus on s'écarte de l'hypothèse d'un écoulement de base parallèle qui est utilisée dans l'analyse de stabilité linéaire présentée dans cette étude. Cet effet devra donc être pris en compte dans les comparaisons des simulations LES aux résultats de la LSA.

L'autre effet du nombre de Reynolds peut-être observé pour des nombres de Reynolds modérés et élevés. Plus le nombre de Reynolds sera élevé, plus les effets non-linéaires seront importants et apparaîtront plus rapidement. La présence de non-linéarités dans l'écoulement pourra alors avoir un effet sur la croissance de l'instabilité.

La série de simulations présentée comprend également des simulations à faibles nombres de Görtler (proches de la limite de stabilité établie par analyse de stabilité linéaire) jusqu'à des nombres de Görtler élevés. Le nombre de Görtler a un impact sur la croissance linéaire de l'instabilité, comme cela a été décrit dans le chapitre 3. Plus le nombre de Görtler est faible, plus la croissance spatiale de l'instabilité est faible, jusqu'à devenir nulle (stabilité marginale) puis négative (écoulement stable, perturbations amorties). Cela est important dans notre série de simulations LES car le domaine de calcul reste le même en terme de dimensions globales et donc plus le nombre de Görtler sera faible, plus les régions intéressantes à étudier seront réduites. Les nombres de Görtler plus élevés garantissent que l'instabilité croisse et atteigne la région non-linéaire dans le domaine de calcul.

L'étude de l'influence des nombres de Görtler et de Reynolds est faite suivant trois axes d'analyse : la croissance de l'instabilité, la longueur d'onde naturellement amplifiée et la topologie de l'écoulement résultant. L'ensemble des paramètres physiques utilisés est présenté en table 4.1.

4.2.2.1 Croissance de l'instabilité de Görtler

Une série de résultats concernant la croissance de l'instabilité est présentée ci-dessous. Pour chaque simulation, on présente deux résultats : d'une part l'évolution longitudinale de la quantité A^* (équation 4.3) comparée à l'évolution prédite par LSA (obtenue par un calcul du taux de croissance β_* en considérant le nombre de Görtler initial G_0 et le nombre d'onde $\alpha_{*0} = (2\pi/\lambda)\theta_0$) ; et d'autre part l'évolution du taux de croissance local de l'instabilité en fonction du nombre de Görtler local calculé à partir de l'épaisseur de quantité de mouvement locale θ provenant des résultats de la simulation LES en question, en parallèle du taux de croissance prédit par LSA.

ν	G_0	Re_{δ_0}	Re_{θ_0}	α_{*MAX}	β_{*MAX}
1.0×10^{-4}	73.50	10000	1175	1.95	6.433×10^1
4.0×10^{-4}	18.37	2500	293	1.09	1.078×10^1
4.6×10^{-4}	15.98	2174	255	1.03	8.906×10^0
5.5×10^{-4}	13.36	1818	213	0.95	6.956×10^0
6.6×10^{-4}	11.14	1515	178	0.88	5.382×10^0
8.6×10^{-4}	8.55	1162	136	0.78	3.658×10^0
1.2×10^{-3}	6.12	833	97	0.67	2.185×10^0
2.0×10^{-3}	3.67	500	58	0.52	9.097×10^{-1}
2.9×10^{-3}	2.53	344	40	0.42	4.316×10^{-1}
5.9×10^{-3}	1.25	170	20	0.24	6.098×10^{-2}

Tableau 4.1. Paramètres physiques pour les simulations présentées, où l'instabilité de Görtler se développe naturellement. Aucune perturbation n'est utilisée pour déclencher le développement de l'instabilité.

Les résultats sont présentés par nombres de Görtler initiaux G_0 croissants (figures 4.21 à 4.30). Pour les trois premières simulations présentées, correspondant aux nombres de Görtler les plus faibles ($G_0 = 1.25$ en figure 4.21, $G_0 = 2.53$ en figure 4.22, $G_0 = 3.67$ en figure 4.23), les résultats des simulations montrent une croissance linéaire de l'instabilité supérieure aux prédictions de l'analyse de stabilité linéaire. Cet écart est visible à la fois sur l'évolution de la quantité A^* et sur le taux de croissance local. De plus, on remarque que les résultats de ces simulations montrent une région linéaire qui débute à des positions longitudinales élevées, de $\xi = 30.0\delta_0$ pour $G_0 = 1.25$ à $\xi = 20.0\delta_0$ $G_0 = 3.67$. La région de croissance linéaire dans ces simulations n'est pas achevée avant la fin du domaine de simulation.

Les résultats des simulations pour lesquelles le nombre de Görtler initial est modéré ($G_0 = 6.12$ en figure 4.24, $G_0 = 8.55$ en figure 4.25, $G_0 = 11.14$ en figure 4.26, $G_0 = 13.36$ en figure 4.27) montrent une croissance linéaire qui est en accord avec les prédictions de l'analyse de stabilité linéaire. D'autre part, ces simulations permettent de décrire complètement la région de croissance linéaire contrairement aux 3 premières simulations. Il est évident que cela est lié au fait que le taux de croissance spatial augmente quand le nombre de Görtler augmente et donc que la saturation non-linéaire est atteinte plus en amont. Mais il est intéressant de remarquer également que le début de la région de croissance linéaire est avancé de plus en plus proche de l'entrée du domaine quand les nombre de Görtler et Reynolds augmentent.

Les résultats des dernières simulations aux nombres de Görtler et Reynolds amont les plus élevés ($G_0 = 15.98$ en figure 4.28, $G_0 = 18.37$ en figure 4.29 et $G_0 = 73.5$ en figure 4.30) montrent une tendance intéressante concernant la croissance linéaire de l'instabilité de Görtler. En effet, on observe un léger écart de taux de croissance avec les résultats venant de la LSA qui semble augmenter quand les nombres de Reynolds et Görtler deviennent très élevés (Dagaut et al., 2019). Ceci est très visible pour le dernier cas où $Re_{\delta_0} = 10000$ et $G_0 = 73.5$ (figure 4.30). Par ailleurs, dans cette dernière simulation, on observe que la région de croissance linéaire est pratiquement initiée dès l'entrée du domaine de simulation et la saturation non-linéaire intervient également très en amont dans le domaine. Une analyse plus détaillée de ce cas est présentée dans le chapitre 5.

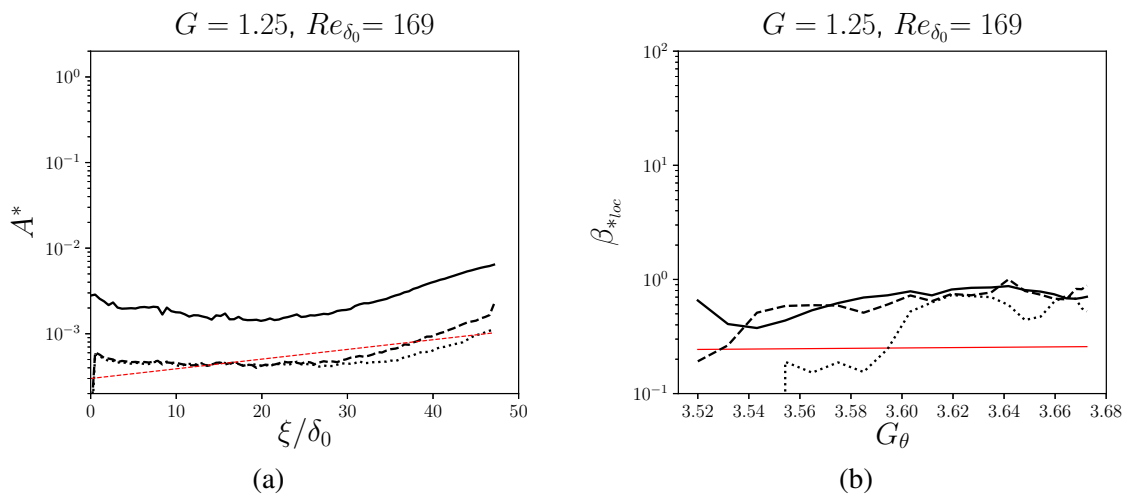


Figure 4.21. (a) Évolution de la quantité A^* en noir, où les courbes en trait plein, tirets et pointillé représentent respectivement les composantes longitudinale, normale et transverse. La croissance prédite par analyse de stabilité linéaire est montrée en rouge. (b) Détermination du taux de croissance spatial adimensionnel local β_{*loc} en fonction du nombre de Görtler local G_θ . $G_0 = 1.25$, $Re_{\delta_0} = 170$, $\beta_{*0}^{LSA} = 6.1 \times 10^{-2}$.

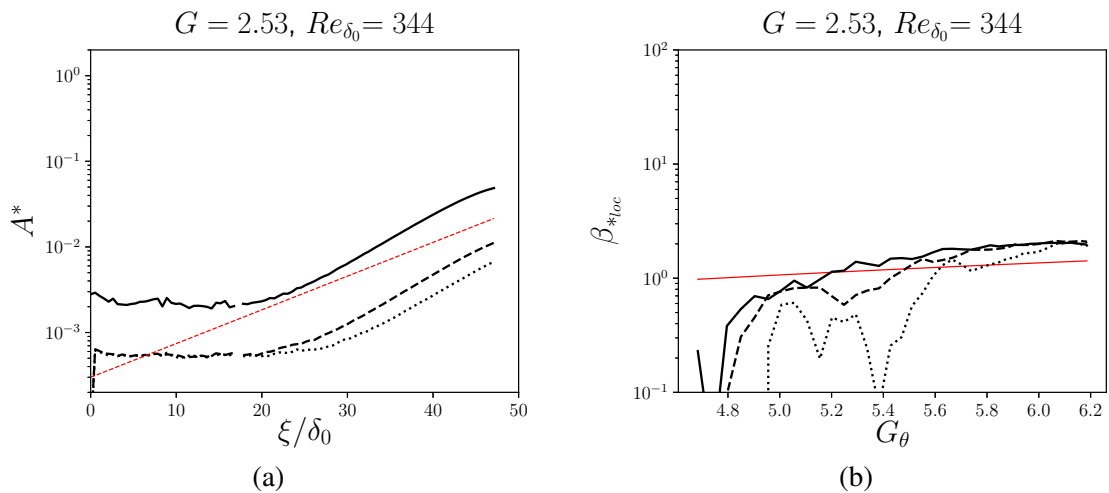


Figure 4.22. (a) Évolution de la quantité A^* en noir, où les courbes en trait plein, tirets et pointillé représentent respectivement les composantes longitudinale, normale et transverse. La croissance prédite par analyse de stabilité linéaire est montrée en rouge. (b) Détermination du taux de croissance spatial adimensionnel local β_{*loc} en fonction du nombre de Görtler local G_θ . $G_0 = 2.53$, $Re_{\delta_0} = 344$, $\beta_{*0}^{LSA} = 4.3 \times 10^{-1}$.

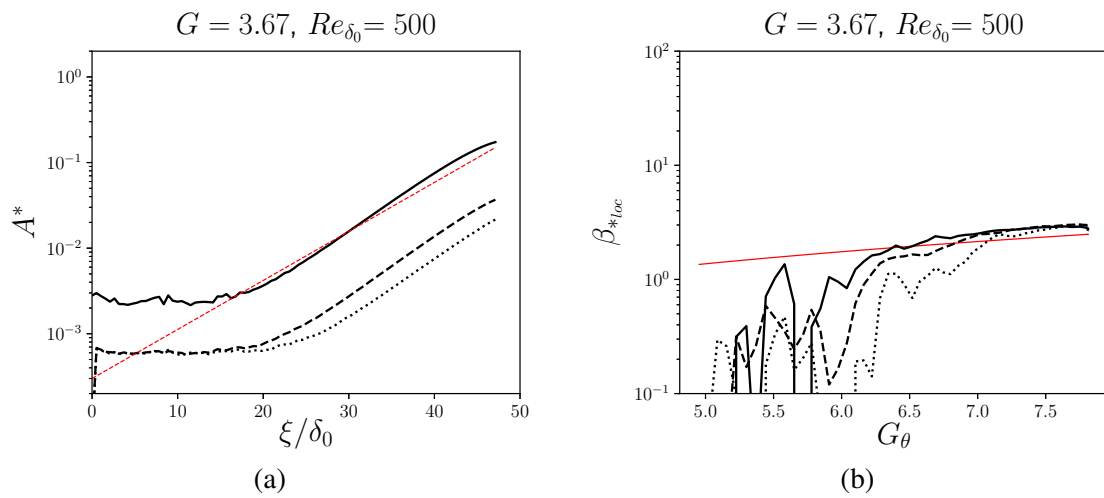


Figure 4.23. (a) Évolution de la quantité A^* en noir, où les courbes en trait plein, tirets et pointillé représentent respectivement les composantes longitudinale, normale et transverse. La croissance prédite par analyse de stabilité linéaire est montrée en rouge. (b) Détermination du taux de croissance spatial adimensionnel local β_{*loc} en fonction du nombre de Görtler local G_θ . $G_0 = 3.67$, $Re_{\delta_0} = 500$, $\beta_{*0}^{LSA} = 9.1 \times 10^{-1}$.

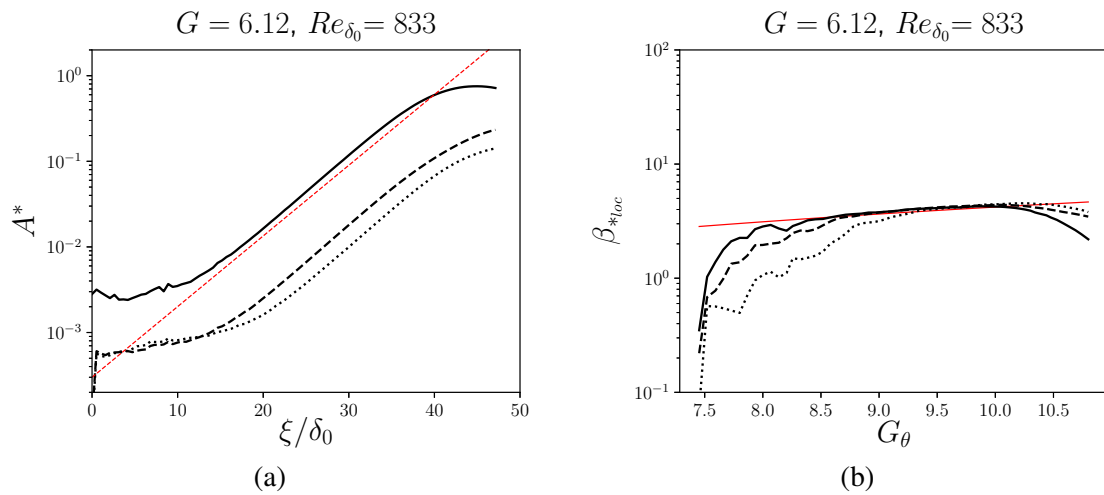


Figure 4.24. (a) Évolution de la quantité A^* en noir, où les courbes en trait plein, tirets et pointillé représentent respectivement les composantes longitudinale, normale et transverse. La croissance prédite par analyse de stabilité linéaire est montrée en rouge. (b) Détermination du taux de croissance spatial adimensionnel local β_{*loc} en fonction du nombre de Görtler local G_θ . $G_0 = 6.12$, $Re_{\delta_0} = 833$, $\beta_{*0}^{LSA} = 2.2$.

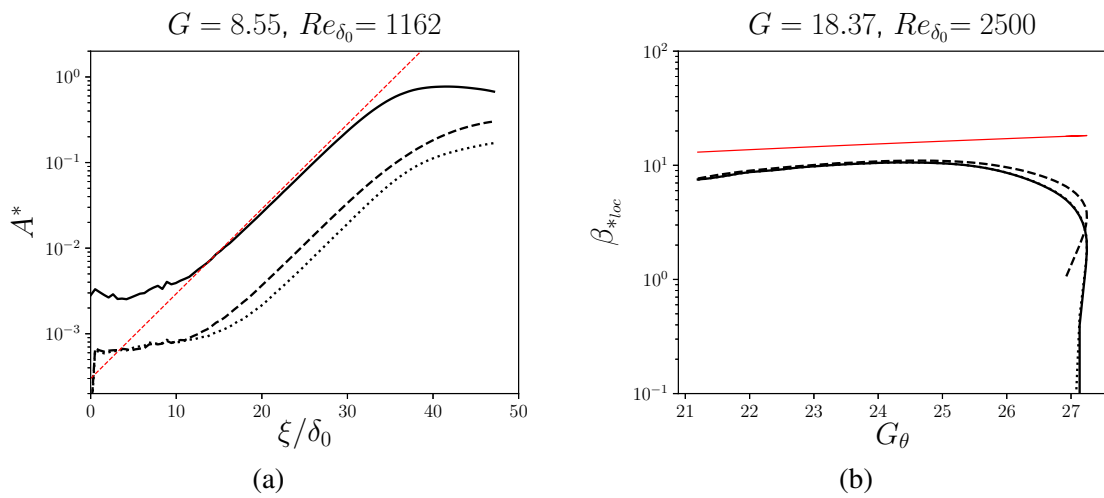


Figure 4.25. (a) Évolution de la quantité A^* en noir, où les courbes en trait plein, tirets et pointillé représentent respectivement les composantes longitudinale, normale et transverse. La croissance prédite par analyse de stabilité linéaire est montrée en rouge. (b) Détermination du taux de croissance spatial adimensionnel local β_{*loc} en fonction du nombre de Görtler local G_θ . $G_0 = 8.55$, $Re_{\delta_0} = 1162$, $\beta_{*0}^{LSA} = 3.7$.

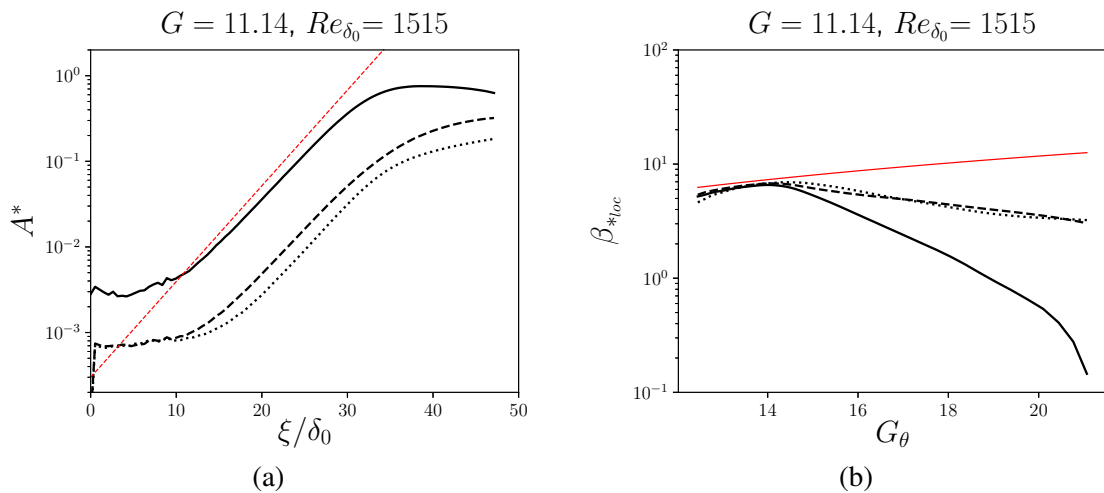


Figure 4.26. (a) Évolution de la quantité A^* en noir, où les courbes en trait plein, tirets et pointillé représentent respectivement les composantes longitudinale, normale et transverse. La croissance prédite par analyse de stabilité linéaire est montrée en rouge. (b) Détermination du taux de croissance spatial adimensionnel local β_{*loc} en fonction du nombre de Görtler local G_θ . $G_0 = 11.14$, $Re_{\delta_0} = 1515$, $\beta_{*0}^{LSA} = 5.4$.

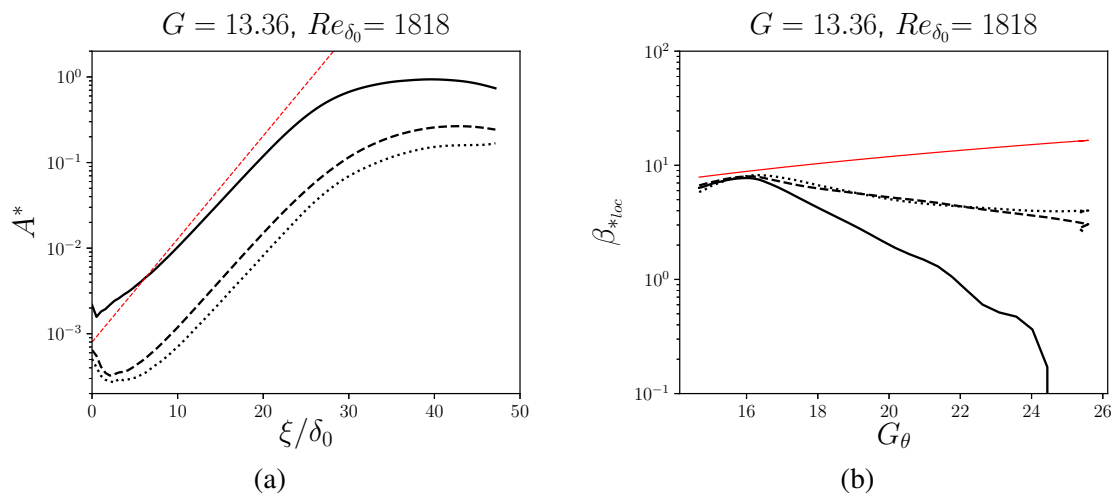


Figure 4.27. (a) Évolution de la quantité A^* en noir, où les courbes en trait plein, tirets et pointillé représentent respectivement les composantes longitudinale, normale et transverse. La croissance prédite par analyse de stabilité linéaire est montrée en rouge. (b) Détermination du taux de croissance spatial adimensionnel local β_{*loc} en fonction du nombre de Görtler local G_θ . $G_0 = 13.36$, $Re_{\delta_0} = 1818$, $\beta_{*0}^{LSA} = 7.0$.

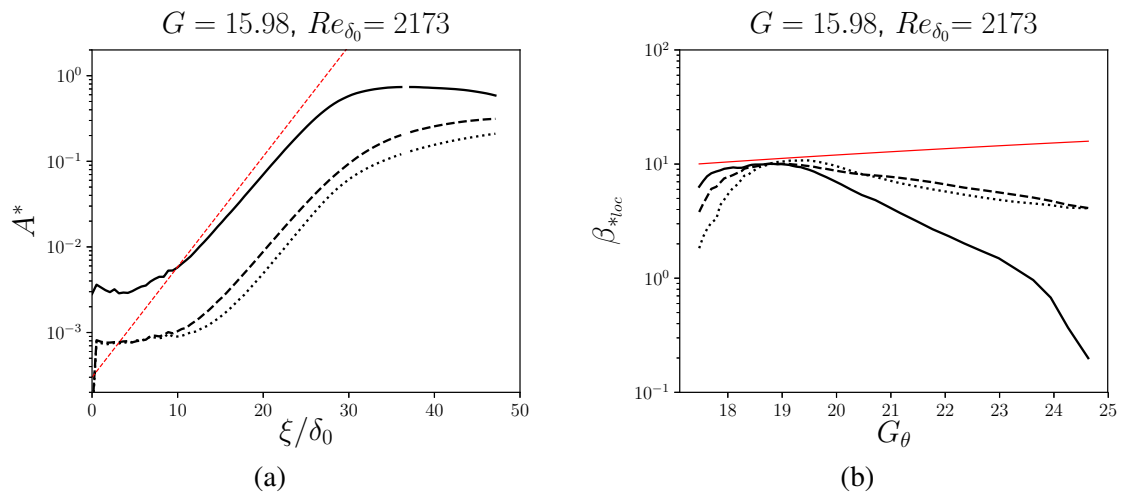


Figure 4.28. (a) Évolution de la quantité A^* en noir, où les courbes en trait plein, tirets et pointillé représentent respectivement les composantes longitudinale, normale et transverse. La croissance prédite par analyse de stabilité linéaire est montrée en rouge. (b) Détermination du taux de croissance spatial adimensionnel local β_{*loc} en fonction du nombre de Görtler local G_θ . $G_0 = 15.98$, $Re_{\delta_0} = 2174$, $\beta_{*0}^{LSA} = 8.9$.

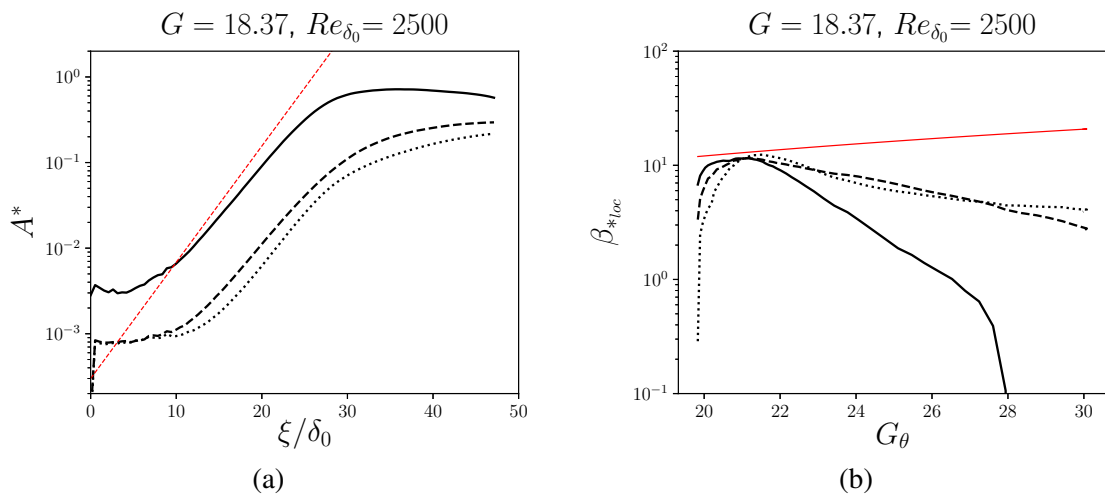


Figure 4.29. (a) Évolution de la quantité A^* en noir, où les courbes en trait plein, tirets et pointillé représentent respectivement les composantes longitudinale, normale et transverse. La croissance prédite par analyse de stabilité linéaire est montrée en rouge. (b) Détermination du taux de croissance spatial adimensionnel local β_{*loc} en fonction du nombre de Görtler local G_θ . $G_0 = 18.37$, $Re_{\delta_0} = 2500$, $\beta_{*0}^{LSA} = 10.8$.

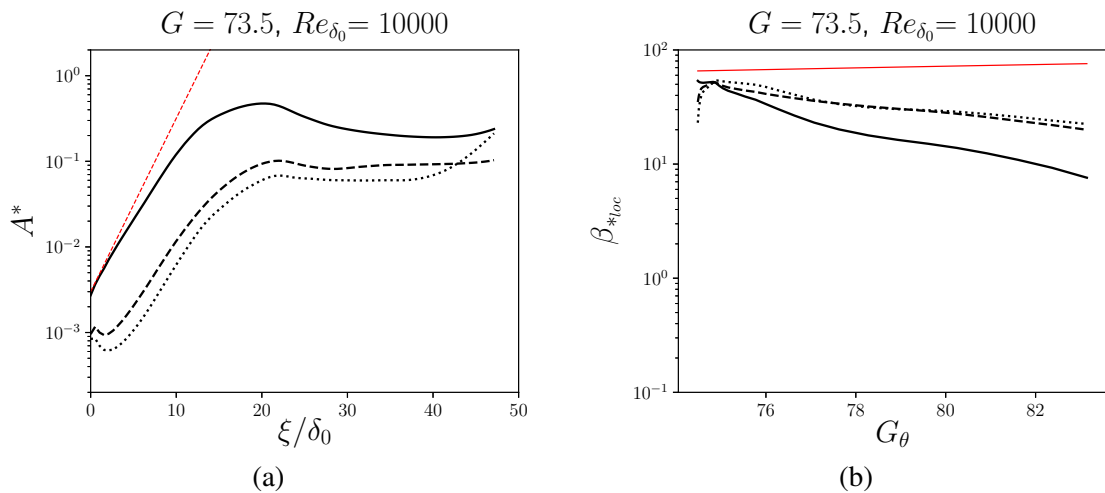


Figure 4.30. (a) Évolution de la quantité A^* en noir, où les courbes en trait plein, tirets et pointillé représentent respectivement les composantes longitudinale, normale et transverse. La croissance prédite par analyse de stabilité linéaire est montrée en rouge. (b) Détermination du taux de croissance spatial adimensionnel local β_{*loc} en fonction du nombre de Görtler local G_θ . $G_0 = 73.50$, $Re_{\delta_0} = 10000$, $\beta_{*0}^{LSA} = 64.3$.

4.2.2.2 Processus de sélection de longueur d'onde

L'étude de la longueur d'onde naturellement développée dans le domaine est faite en appliquant l'algorithme de FFT au signal de perturbation de vitesse (au sens de l'instabilité de Görtler). Les résultats présentés sont issus de calculs de transformée de Fourier de la composante normale de la perturbation de vitesse v'' (figures 4.31 à 4.40). On mesure alors les longueurs d'onde associées aux phénomènes d'*upwash* et de *downwash*. La densité spectrale obtenue est adimensionnée par son maximum local pour chaque position longitudinale ξ . L'évolution de l'amplitude réelle des spectres obtenus n'est pas présentée ici car on s'intéresse uniquement à l'identification de la longueur d'onde dominante dans l'écoulement. Les résultats de cette identification de la longueur d'onde dominante dans l'écoulement sont comparés aux résultats venant de l'analyse de stabilité linéaire présentée au chapitre précédent. Une marge d'erreur est utilisée correspondant aux longueurs d'onde ayant un taux de croissance spatial $\beta_* = \beta_{*\text{MAX}} \pm 1\%$. Cette marge d'erreur est illustrée en figure 4.41

Pour les trois premières simulations présentées, correspondant aux nombres de Görtler les plus faibles ($G_0 = 1.25$ en figure 4.31, $G_0 = 2.53$ en figure 4.32, $G_0 = 3.67$ en figure 4.33), les résultats des simulations montrent un bon accord avec les résultats venant de l'analyse de stabilité linéaire. On observe également sur les résultats de ces simulations une région proche de l'entrée du domaine dans laquelle aucune longueur d'onde naturelle ne se dégage. Cette région est d'autant plus importante quand les nombres de Reynolds et Görtler sont faibles et tend à se réduire quand ces nombres augmentent.

La comparaison avec les résultats de la LSA est moins convaincante pour les simulations à nombres de Reynolds et Görtler modérés ($G_0 = 6.12$ en figure 4.34, $G_0 = 8.55$ en figure 4.35, $G_0 = 11.14$ en figure 4.36, $G_0 = 13.36$ en figure 4.37). Il semble ressortir une longueur d'onde universelle pour ces simulations, dont la valeur est environ $\lambda = 1.2\delta_0$. Cette longueur d'onde est du même ordre de grandeur que l'épaisseur locale de la couche limite, mais aucune explication physique qui irait dans ce sens n'est proposée.

Enfin, on retrouve un bon accord avec les prédictions de la LSA pour les dernières simulations ($G_0 = 15.98$ en figure 4.38, $G_0 = 18.37$ en figure 4.39 et $G_0 = 73.5$ en figure 4.40), pour lesquelles la longueur d'onde développée naturellement dans l'écoulement est comprise dans la marge d'erreur. Dans ces simulations, on observe un changement de longueur d'onde dominante après la région de croissance linéaire qui montre que l'écoulement aval, alors en transition vers un état turbulent, développe d'autres longueurs d'onde. Ceci est d'autant plus marqué pour la dernière simulation présentée pour laquelle les longueurs d'onde présentes après la région de croissance linéaire persistent. Une analyse plus approfondie sur ce changement de longueur d'onde est présentée au chapitre suivant.

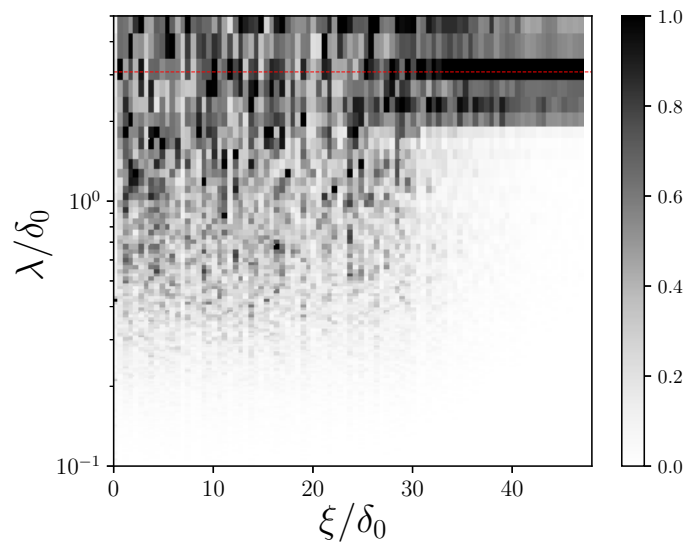


Figure 4.31. Évolution longitudinale de la densité spectrale d'énergie issu du calcul de FFT spatiale, normalisée par le maximum local de chaque position longitudinale ξ/δ_0 . La longueur d'onde la plus amplifiée obtenue par analyse de stabilité linéaire est montrée en pointillés rouges. $G_0 = 1.25$, $Re_{\delta_0} = 170$.

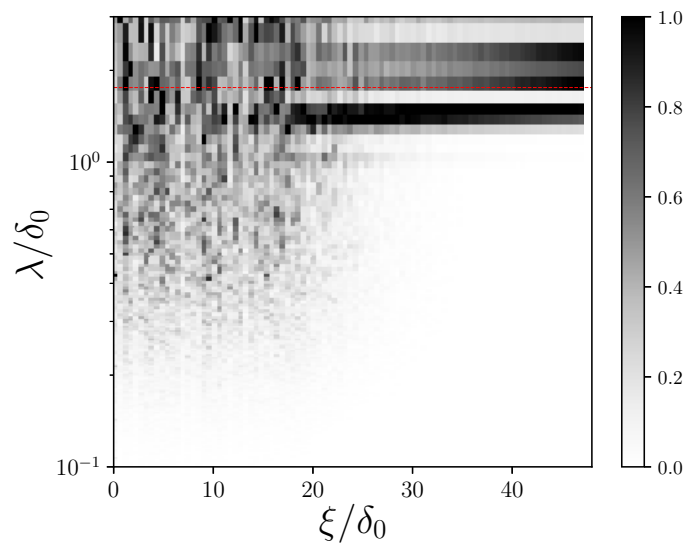


Figure 4.32. Évolution longitudinale de la densité spectrale d'énergie issu du calcul de FFT spatiale, normalisée par le maximum local de chaque position longitudinale ξ/δ_0 . La longueur d'onde la plus amplifiée obtenue par analyse de stabilité linéaire est montrée en pointillés rouges. $G_0 = 2.53$, $Re_{\delta_0} = 344$.

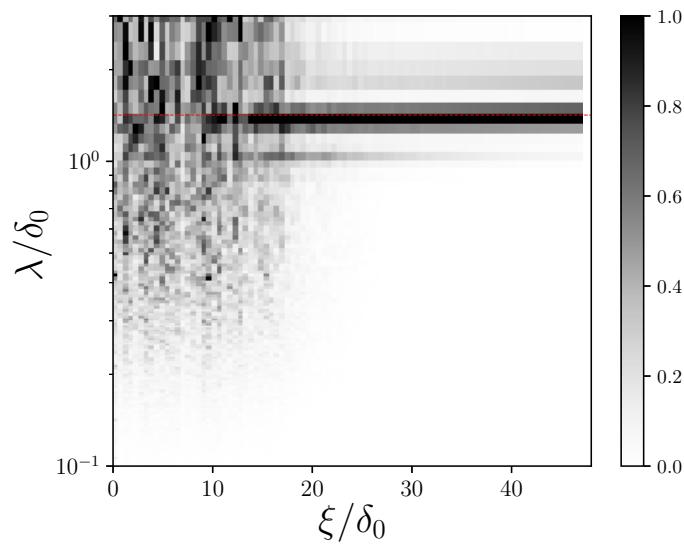


Figure 4.33. Évolution longitudinale de la densité spectrale d'énergie issu du calcul de FFT spatiale, normalisée par le maximum local de chaque position longitudinale ξ/δ_0 . La longueur d'onde la plus amplifiée obtenue par analyse de stabilité linéaire est montrée en pointillés rouges. $G_0 = 3.67$, $Re_{\delta_0} = 500$.

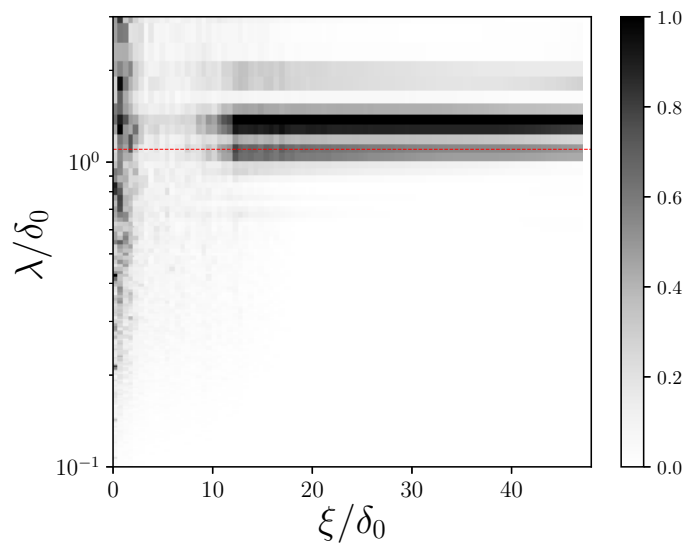


Figure 4.34. Évolution longitudinale de la densité spectrale d'énergie issu du calcul de FFT spatiale, normalisée par le maximum local de chaque position longitudinale ξ/δ_0 . La longueur d'onde la plus amplifiée obtenue par analyse de stabilité linéaire est montrée en pointillés rouges. $G_0 = 6.12$, $Re_{\delta_0} = 833$.

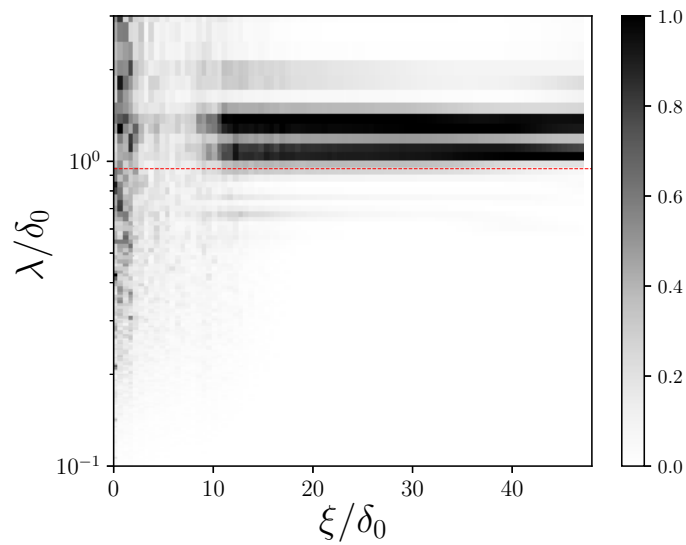


Figure 4.35. Évolution longitudinale de la densité spectrale d'énergie issu du calcul de FFT spatiale, normalisée par le maximum local de chaque position longitudinale ξ/δ_0 . La longueur d'onde la plus amplifiée obtenue par analyse de stabilité linéaire est montrée en pointillés rouges. $G_0 = 8.55$, $Re_{\delta_0} = 1162$.

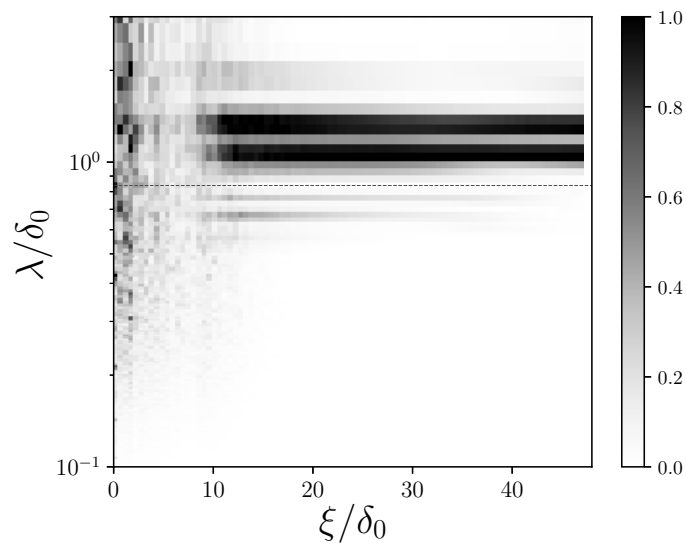


Figure 4.36. Évolution longitudinale de la densité spectrale d'énergie issu du calcul de FFT spatiale, normalisée par le maximum local de chaque position longitudinale ξ/δ_0 . La longueur d'onde la plus amplifiée obtenue par analyse de stabilité linéaire est montrée en pointillés rouges. $G_0 = 11.14$, $Re_{\delta_0} = 1515$.

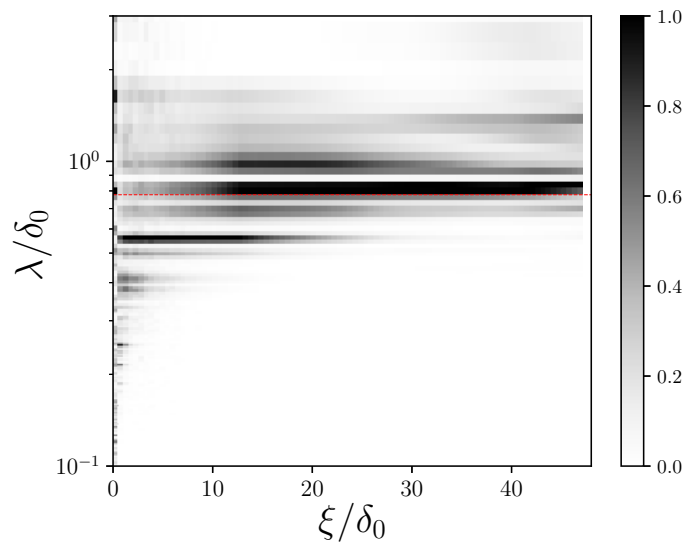


Figure 4.37. Évolution longitudinale de la densité spectrale d'énergie issu du calcul de FFT spatiale, normalisée par le maximum local de chaque position longitudinale ξ/δ_0 . La longueur d'onde la plus amplifiée obtenue par analyse de stabilité linéaire est montrée en pointillés rouges. $G_0 = 13.36$, $Re_{\delta_0} = 1818$.

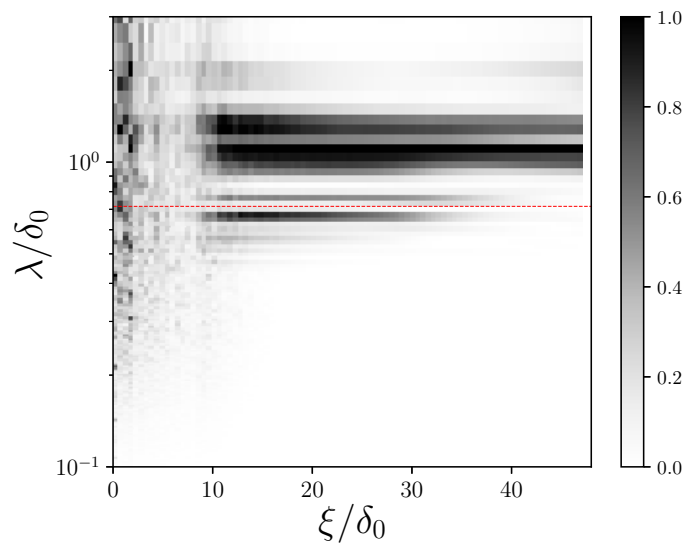


Figure 4.38. Évolution longitudinale de la densité spectrale d'énergie issu du calcul de FFT spatiale, normalisée par le maximum local de chaque position longitudinale ξ/δ_0 . La longueur d'onde la plus amplifiée obtenue par analyse de stabilité linéaire est montrée en pointillés rouges. $G_0 = 15.98$, $Re_{\delta_0} = 2174$.

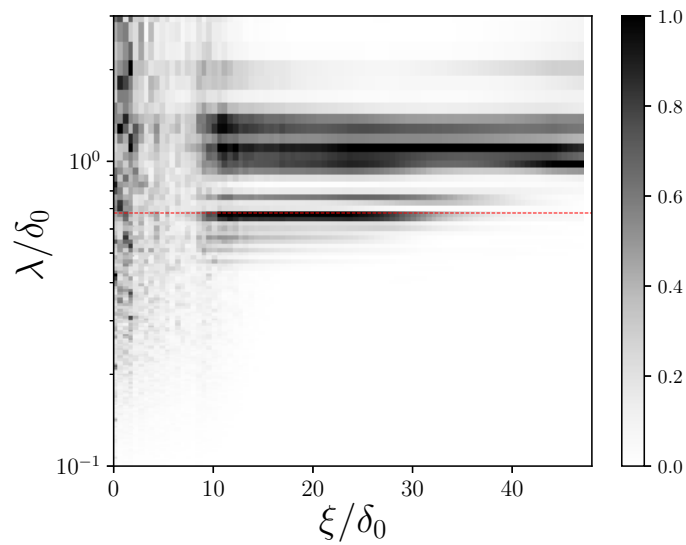


Figure 4.39. Évolution longitudinale de la densité spectrale d'énergie issu du calcul de FFT spatiale, normalisée par le maximum local de chaque position longitudinale ξ/δ_0 . La longueur d'onde la plus amplifiée obtenue par analyse de stabilité linéaire est montrée en pointillés rouges. $G_0 = 18.37$, $Re_{\delta_0} = 2500$.

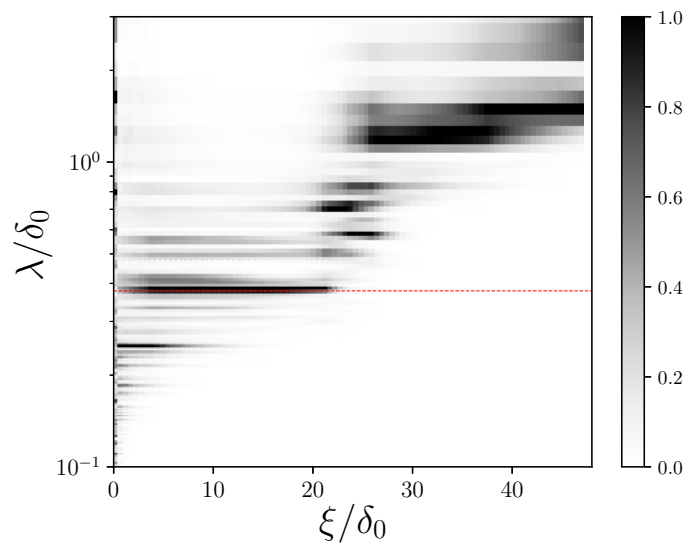


Figure 4.40. Évolution longitudinale de la densité spectrale d'énergie issu du calcul de FFT spatiale, normalisée par le maximum local de chaque position longitudinale ξ/δ_0 . La longueur d'onde la plus amplifiée obtenue par analyse de stabilité linéaire est montrée en pointillés rouges. $G_0 = 73.50$, $Re_{\delta_0} = 10000$.

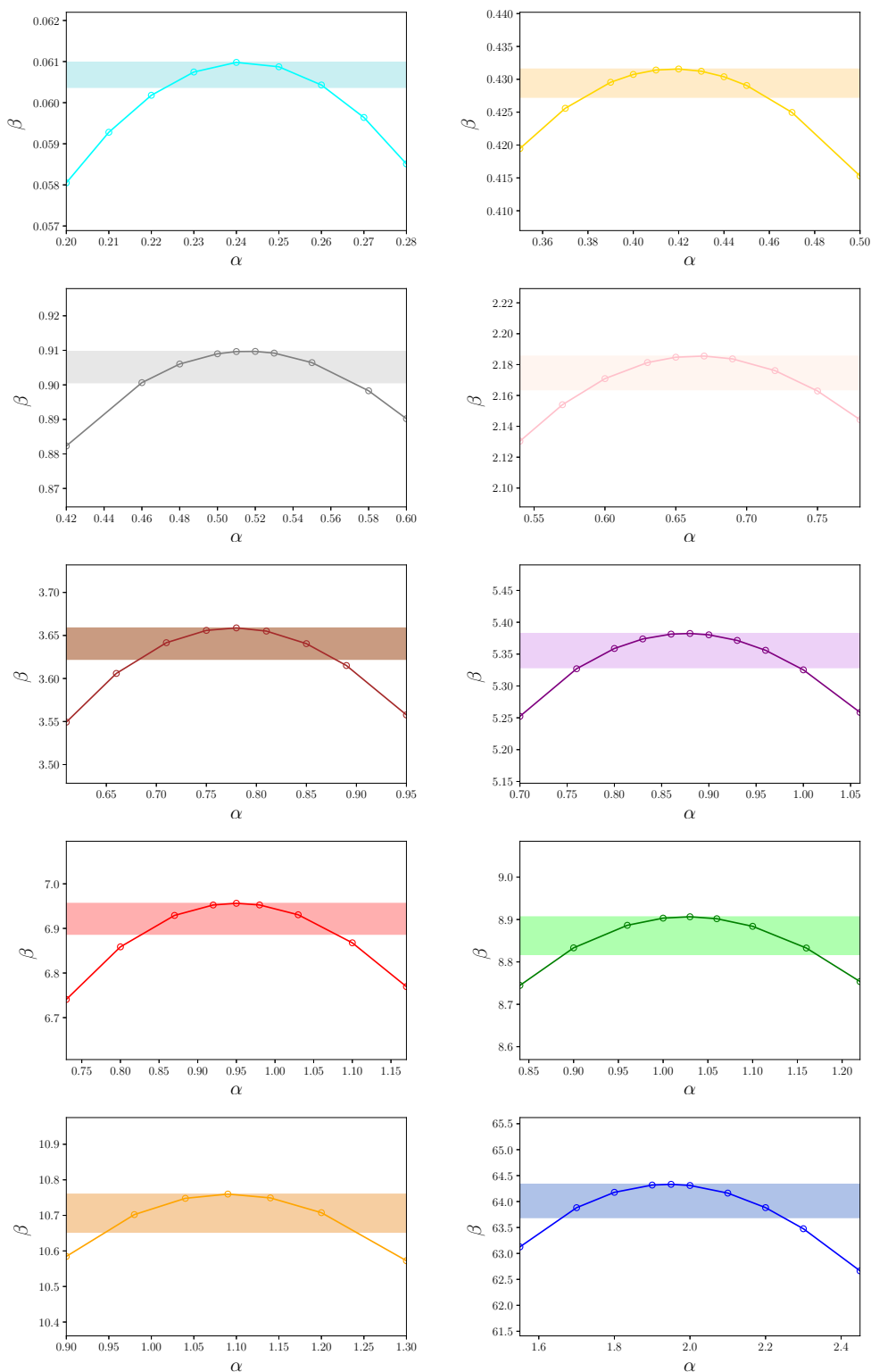


Figure 4.41. Marge d'erreur sur la longueur d'onde développée naturellement en considérant une erreur de 1% sur le taux de croissance considéré.

4.2.2.3 Synthèse des résultats

Une étude du taux de croissance local de l'instabilité de Görtler a été réalisée. Chaque simulation comporte une région où le taux de croissance est comparable aux taux de croissance prédit par l'analyse de stabilité linéaire. Les résultats obtenus peuvent être synthétisés en trois comportements principaux.

D'une part, les simulations pour lesquelles le nombre de Görtler initial est faible montrent une surestimation du taux de croissance spatial par rapport à l'analyse de stabilité linéaire faite à partir dudit nombre de Görtler initial (voir 4.42(a), carrés bleus pour la LES, ronds noirs pour la LSA). On montre que cet écart est lié au déclenchement tardif de l'instabilité de Görtler qui conduit à une augmentation locale du nombre de Görtler effectif et donc à un taux de croissance associé à ce nouveau nombre de Görtler plus important. Plus le nombre de Görtler initial est important, plus ces écarts sont faibles car le déclenchement de l'instabilité de Görtler intervient plus en amont. Une correction est proposée en figure 4.42(a) (triangles rouges pour la correction) où l'on reporte le taux de croissance spatial β_* issu des simulations en fonction du nombre de Görtler local G_{loc} à partir duquel la région de croissance linéaire débute. L'accord entre l'analyse de stabilité linéaire et les simulations LES est alors grandement amélioré.

D'autre part, ces résultats nous permettent d'observer que plus les nombres de Reynolds amont Re_{δ_0} et de Görtler amont G_0 augmentent, plus le taux de croissance spatial de l'instabilité obtenu par simulation numérique s'écarte des prédictions issues de la LSA, en le sous-estimant (Dagaut et al., 2019). Ceci peut s'expliquer par la présence des effets non-linéaires dans l'écoulement qui interviennent de plus en plus en amont quand le nombre de Reynolds augmente et qui ont un impact de plus en plus fort sur le taux de croissance spatial de l'instabilité quand Re_{δ_0} augmente.

En termes de nombre d'onde, des écarts sont observés entre les résultats provenant des simulations LES et les prédictions de l'analyse de stabilité linéaire, sans que de tendance claire se dégage sur la plage de paramètres simulés (figure 4.42b). Néanmoins, en utilisant une marge d'erreur sur le taux de croissance local calculé, on obtient une marge d'erreur sur le nombre d'onde naturellement développée dans les simulations LES qui permet d'avoir un accord raisonnable avec les prédictions de la LSA.

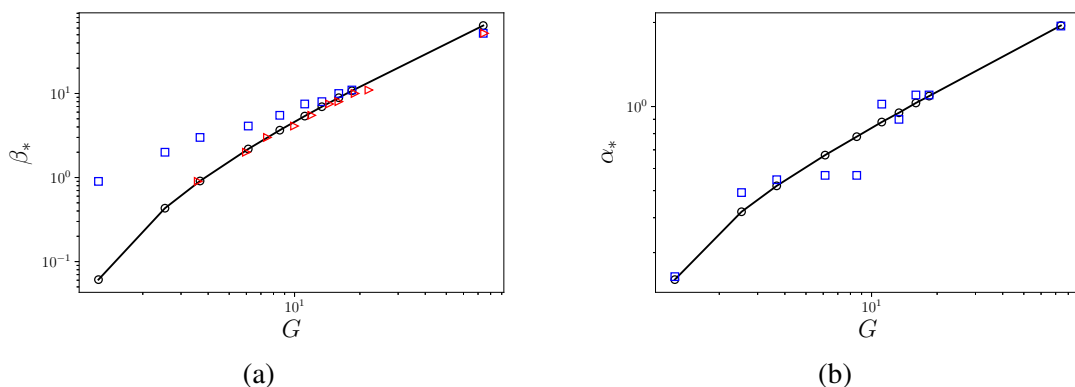


Figure 4.42. (a) Taux de croissance spatial β_* issus des simulations LES en fonction du nombre de Görtler initial (carré bleus) et en fonction du nombre de Görtler local effectif au début de la région de croissance linéaire (triangles rouges). La prédiction de l'analyse de stabilité linéaire est tracée en noir. (b) Nombre d'onde α_* observé dans les simulations LES en fonction du nombre de Görtler (carrés bleus). Le nombre d'onde le plus amplifié prédit par analyse de stabilité est tracé en noir.

4.3 Instabilité de Görtler en milieu stratifié

4.3.1 Configuration physique

Dans la fin de ce chapitre, on s'intéresse au développement de l'instabilité de Görtler dans un milieu stratifié. La stratification ambiante correspond au profil de masse volumique hydrostatique dans le fluide, $\bar{\rho}(\psi)$, qui varie uniquement sur ψ . Pour chaque simulation présentée, on aura un profil de masse volumique ambiante différent. La masse volumique locale, notée ρ , est définie comme la somme de la masse volumique ambiante $\bar{\rho}(\psi)$ et de la fluctuation de masse volumique $\tilde{\rho}(\xi, \psi, z, t)$.

$$\rho = \bar{\rho}(\psi) + \tilde{\rho}(\xi, \psi, z, t) \quad (4.4)$$

En normalisant par la masse volumique de référence ρ_0 , on obtient le champ de masse volumique adimensionnelle ρ_*

$$\rho_* = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\bar{\rho}(\psi)}{\rho_0} + \frac{\tilde{\rho}(\xi, \psi, z, t)}{\rho_0} = \bar{\rho}_*(\psi) + \tilde{\rho}_*(\xi, \psi, z, t), \quad (4.5)$$

où $\bar{\rho}_*$ est la masse volumique adimensionnelle ambiante et $\tilde{\rho}_*(\xi, \psi, z, t)$ est la fluctuation adimensionnelle de masse volumique.

En utilisant l'approximation de Boussinesq, on introduit un terme source dans l'équation de conservation de quantité de mouvement qui représente les effets de gravité (voir [Boussinesq, 1877](#) ou dans une formulation plus moderne [Lesieur, 2008](#)). Ce terme source fait intervenir la fluctuation de masse volumique $\tilde{\rho}_*(\xi, \psi, z, t)$. On résout par ailleurs une équation de transport pour cette fluctuation de masse volumique, avec un terme source qui dépend de la masse volumique ambiante (ou plus exactement de son gradient, contenu dans Ri) et du champ de vitesse. Ce couplage permet de résoudre la dynamique d'un écoulement stratifié sans avoir à résoudre les équations de Navier-Stokes compressibles. En utilisant les variables d'adimensionalisation suivantes :

$$u^* = u/U_\infty \quad x^* = x/\delta_0 \quad t^* = tU_\infty/\delta_0,$$

on écrit l'équation adimensionnelle de conservation de la quantité de mouvement avec effets de flottabilité et l'équation adimensionnelle d'advection/diffusion du scalaire $\tilde{\rho}_*$ comme

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u_i^* u_j^*}{\partial x_j^*} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p^*}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i^*} \right) + \frac{1}{Fr^2} \tilde{\rho}_*, \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_*}{\partial t^*} + u_j^* \frac{\partial \tilde{\rho}_*}{\partial x_j^*} = \frac{1}{RePr} \frac{\partial^2 \tilde{\rho}_*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} - u_j^* Ri Fr^2 \quad (4.7)$$

Les écoulements considérés dans cette partie sont des écoulements de couche limite turbulente ou en transition à la turbulence et qui sont soumis à des effets de flottabilité. Pour quantifier les effets dynamiques globaux de l'écoulement on utilise le nombre de Reynolds $Re = U_\infty \delta_0 / \nu$, où δ_0 est l'épaisseur de la couche limite amont et U_∞ la vitesse externe, qui compare les efforts inertiels aux efforts visqueux. Pour quantifier les effets globaux de la stratification, on utilise le nombre de Froude $Fr = U_\infty / \sqrt{g \delta_0}$, où g est l'accélération gravitationnelle, qui compare les efforts inertiels aux forces de gravité. Dans les simulations présentées, la gravité est exprimée dans le repère

global (voir la configuration en figure 4.43a). Dans le cas d'une stratification linéaire (stratification atmosphérique stable), on utilise également la fréquence de *Brunt-Väisälä* N , définie par

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \times \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \psi} \quad (4.8)$$

où le profil de $\bar{\rho}$ est imposé dans la simulation (figure 4.43b). En pratique, on impose ce profil de masse volumique ambiante sur une hauteur supérieure à δ_0 et supérieure à l'épaisseur de la couche limite dans tout le domaine. Le paramètre N^2 permet de quantifier le niveau de stabilité de l'écoulement dû à la stratification ambiante représentée par le gradient de masse volumique ambiante $\partial \bar{\rho} / \partial \psi$. Le nombre de Richardson est également utilisé pour comparer les forces de gravité au cisaillement dans l'écoulement. Dans la littérature, on trouve généralement des définitions locales pour le nombre de Richardson mais on peut aussi définir le nombre de Richardson global (*bulk Richardson number*) par

$$Ri = N^2 \delta_0^2 / U_\infty^2 \quad (4.9)$$

Les différents nombres sans dimension introduits permettent de classer les simulations numériques effectuées dans le cadre de cette étude. La liste non exhaustive des simulations effectuées qui seront utilisées et analysées dans cette dernière partie de l'étude est présentée dans le tableau 4.2.

Cas	Re_{δ_0}	$Fr = \frac{U_\infty}{\sqrt{g\delta_0}}$	$N\delta_0/U_\infty$	$Ri = \frac{N^2\delta_0^2}{U_\infty^2}$
	1800	3.16	0.00	0.0
	1800	3.16	0.05	0.0025
	1800	3.16	0.10	0.01
	1800	3.16	0.15	0.0225
	1800	3.16	0.20	0.04
	1800	3.16	0.30	0.09

Tableau 4.2. Nombre sans dimension et configurations physiques des simulations numériques effectuées du développement d'une couche limite turbulente ou en transition à la turbulence avec des effets de stratification.

On l'a vu précédemment, le développement d'une couche limite sur une paroi courbe induit le développement de l'instabilité de Görtler, si les conditions physiques y sont favorables (voir figure 3.9). En introduction de ce manuscrit, on a vu également que la stratification linéaire (stratification atmosphérique stable) d'un écoulement de couche limite a tendance à stabiliser l'écoulement. On a donc a priori des effets qui s'opposent avec la courbure qui tend à déstabiliser l'écoulement et la stratification (ou gravité) qui tend à stabiliser l'écoulement. Dans un premier temps, on s'intéresse uniquement à la compétition entre l'instabilité de Görtler et les effets de flottabilité.

On reprend la méthode de forçage déjà utilisée au début de ce chapitre. On prendra comme cas de référence la simulation d'une couche limite de Blasius neutre sur paroi concave avec les paramètres physiques $G_{\theta_0} = 18.4$ et $Re_{\delta_0} = 2500$.

Dans cette partie, on présente ainsi une série de simulations numériques pour lesquelles les conditions qui caractérisent la dynamique de l'écoulement sont gardées identiques. On fait alors varier les conditions de stratification ambiante, mais en gardant le même type de stratification (linéaire), ce qui revient à changer la fréquence de *Brunt-Väisälä* N . Pour la série de simulations présentée, on aura $N\delta_0/U_\infty = \{0.0, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3\}$.

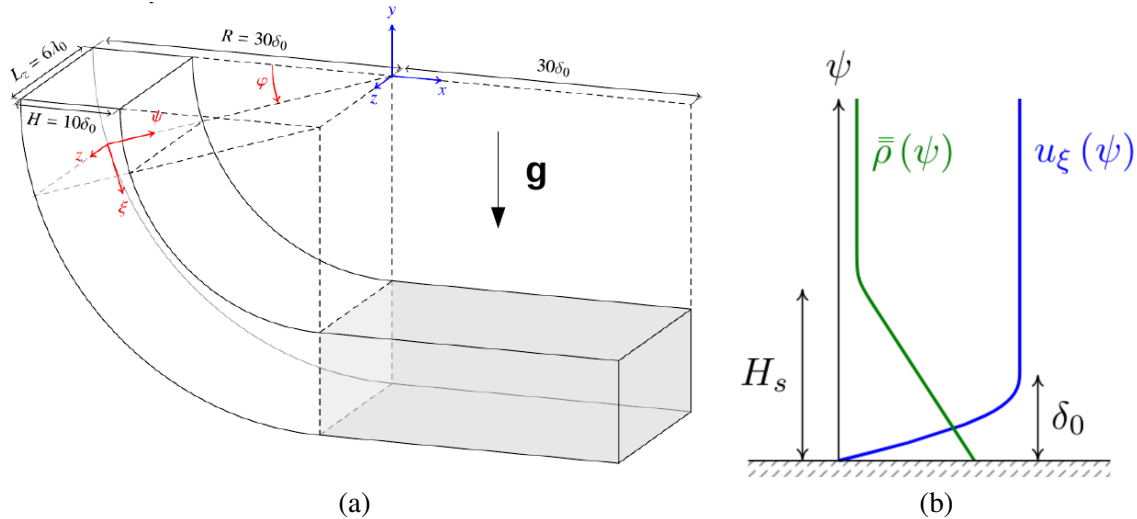


Figure 4.43. (a) Domaine de simulation numériques présentant un partie courbe et une partie plane. La largeur du domaine L_z est exprimée en fonction de la longueur d'onde forcée λ . La gravité est exprimée dans le repère global par $\mathbf{g} = -g\mathbf{y}$. (b) Schéma montrant la stratification ambiante globale $\bar{\rho}(\psi)$ et le profil de vitesse en entrée du domaine $u_\xi(\xi, \psi)$.

On s'intéresse dans un premier temps à la croissance de l'instabilité, où la comparaison avec une analyse de stabilité ne sera possible que pour le cas neutre $N\delta_0/U_\infty = 0.0$. Dans un deuxième temps, la topologie de l'écoulement dans les régions linéaire et non-linéaire est étudiée ainsi que la topologie des structures tridimensionnelles développées en aval.

4.3.2 Croissance de la couche limite et croissance de l'instabilité

On s'intéresse en premier lieu à l'évolution spatiale de la couche limite et en particulier à l'épaisseur de quantité de mouvement θ , dans un environnement stratifié. On montre en figure 4.44(a), l'évolution spatiale de θ pour différents niveaux de stratifications $N\delta_0/U_\infty = \{0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3\}$. On compare les résultats obtenus au cas d'une couche limite neutre ($N\delta_0/U_\infty = 0.0$). On observe que la stratification impacte le développement spatial de la couche limite développée. En effet, plus la stratification augmente (N croissant), plus la croissance de l'épaisseur de quantité de mouvement θ est réduite. Pour les valeurs $N\delta_0/U_\infty \leq 0.15$, cet effet est relativement modéré mais pour les valeurs $N\delta_0/U_\infty > 0.15$ les effets de stratification sont très forts et ne permettent pas d'observer une réelle croissance de θ dans les limites du domaine de simulation. Ces résultats nous montrent déjà un comportement de l'écoulement radicalement différent entre les simulations où $N\delta_0/U_\infty < 0.15$ et les simulations où $N\delta_0/U_\infty > 0.15$.

L'analyse de la croissance de l'instabilité, i.e. la croissance des inhomogénéités transverses de l'écoulement moyen, confirme cette observation. La figure 4.44(b) montre l'évolution longitudinale de A^* (équation 4.3) obtenue par simulations LES pour chacune des condition de stratification. Pour alléger la figure, la quantité A^* est uniquement calculée à partir de la composante normale de la fluctuation de vitesse v'' . Pour les simulations où $N\delta_0/U_\infty < 0.15$, la pente des courbes présentées tend à diminuer avec N ce qui signifie que la stratification induit une diminution de la croissance de l'instabilité. Par conséquent, plus N augmente, plus la région non-linéaire (début de la saturation des inhomogénéités) débute pour des positions longitudinales élevées. Ceci se traduit par un retard de l'apparition des tourbillons longitudinaux et par conséquent un retard de la transition

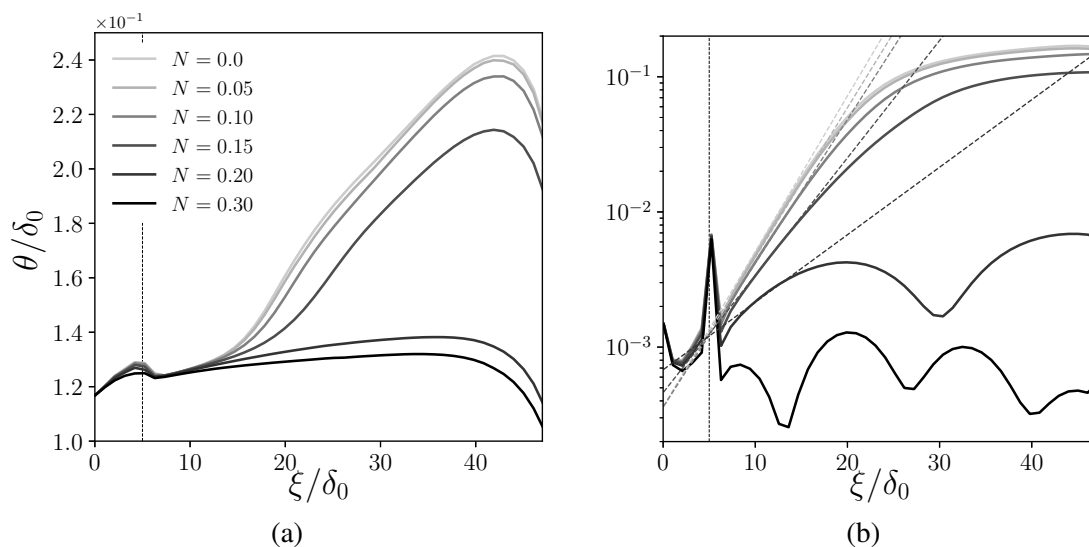


Figure 4.44. (a) Évolution longitudinale de l'épaisseur de quantité de mouvement θ pour différentes conditions de stratification. (b) Évolution du niveau d'hétérogénéité transverses mesuré par la quantité A^* en fonction de la position longitudinale ξ pour différentes conditions de stratification.

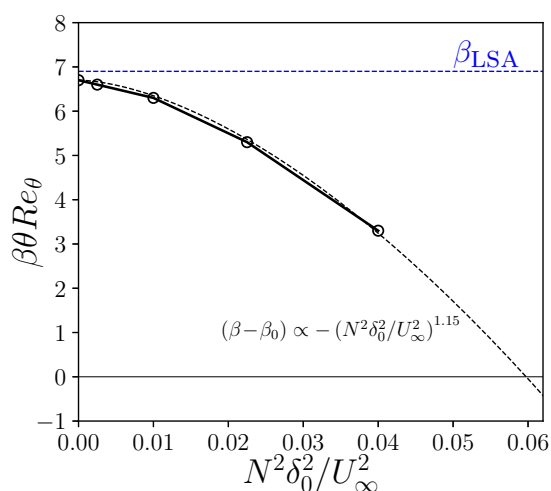


Figure 4.45. Taux de croissance spatial adimensionnel $\beta\theta Re_\theta$ en fonction du nombre de Richardson $Ri = N^2\delta_0^2/U_\infty^2$. Le taux de croissance β_{LSA} montré en bleu correspond à une couche limite neutre ($N^2 = 0.0$).

à la turbulence. Pour les simulations où $N\delta_0/U_\infty > 0.15$, les courbes présentées nous indiquent que l'instabilité ne se développe pas car le niveau d'hétérogénéité reste faible dans les limites du domaine de simulation. Pour le cas à $N\delta_0/U_\infty = 0.2$, on observe la présence initiale d'une région de croissance faible jusqu'à la position $\xi/\delta_0 \approx 15$ mais le niveau d'hétérogénéité est ensuite amorti. Des « rebonds » sont alors observés sur les courbes de A^* à $N\delta_0/U_\infty = 0.2$ et $N\delta_0/U_\infty = 0.3$ ce qui semble indiquer des effets dynamiques de croissance et d'amortissement, correspondant à une compétition entre les effets centrifuges et les effets de flottabilité. Cette dernière simulation à $N\delta_0/U_\infty = 0.3$ (ou $N^2\delta_0^2/U_\infty^2 = 0.06$) sera écartée de la série de simulations pour la suite de l'analyse.

À partir de l'évolution longitudinale de la quantité A^* (montrée en figure 4.44b), on calcule le taux de croissance spatial de l'instabilité β (équation 4.2). On présente en figure 4.45 l'évolution du taux de croissance β adimensionné par l'échelle θRe_θ en fonction du nombre de Richardson $Ri = N^2\delta_0^2/U_\infty^2$ qui quantifie la stratification ambiante. On compare les résultats obtenus par

simulation des grandes échelles à la valeur de $\beta\theta Re_\theta$ obtenu par analyse de stabilité linéaire pour une couche limite de Blasius neutre ($N = 0.0$), que l'on trace en bleu et que l'on note β_{LSA} . Ces résultats viennent corroborer les observations faites précédemment puisque l'on observe une diminution de la croissance linéaire de l'instabilité de Görtler quand les effets de stratification augmentent. Il serait intéressant d'effectuer une analyse de stabilité linéaire en tenant compte des effets de stratification pour pouvoir la comparer aux résultats provenant de simulations LES. C'est l'une des perspectives de ce travail de thèse.

On montre également une loi de puissance pour décrire l'évolution de β_* en fonction de $Ri = N^2\delta_0^2/U_\infty^2$, tracée en ligne noire pointillée. Cette loi ne provient pas d'une étude théorique mais simplement d'une lecture graphique des résultats issus des simulations LES. Néanmoins, elle permet de voir la tendance attendue pour l'évolution du taux de croissance en fonction de Ri . Par lecture graphique, l'évolution du taux de croissance en fonction du nombre de Richardson Ri est décrit par la loi de puissance

$$(\beta - \beta_0) \propto - (N^2\delta_0^2/U_\infty^2)^{1.15} \quad (4.10)$$

où β_0 désigne le taux de croissance de l'instabilité dans des conditions neutre. On remarque d'ailleurs que pour le cas de la simulation écartée de notre série ($Ri = 0.06$), on attendrait selon la loi proposée un taux de croissance proche de la limite de stabilité, i.e. $\beta = 0$, ce qui apporte une possible explication au comportement très particulier décrit précédemment. Il serait intéressant de proposer une loi d'évolution de β en fonction de Ri à partir d'une analyse de stabilité linéaire pour la comparer avec la loi obtenue ici.

4.3.3 Topologie de l'instabilité de Görtler dans les régions linéaire et non-linéaire

On étudie ici la topologie de l'écoulement de Görtler dans un milieu stratifié. Pour cela on propose d'analyser trois éléments de la topologie de l'écoulement : les modes spatiaux de l'instabilité, le profil de vitesse de la couche limite développée et la topologie 3D par visualisation du critère Q .

On rappelle que les modes spatiaux de l'instabilité de Görtler, notés \hat{u} , \hat{v} et \hat{w} , correspondent à la « portante » verticale des perturbations normalisées de vitesse (équations 3.10–3.11). On présente les modes spatiaux de l'instabilité de Görtler obtenus pour les différentes conditions de stratification en figure 4.46 (la méthode de calcul des modes spatiaux est la même que celle utilisée au début du chapitre). On voit en figure 4.46(a) que le mode spatial dans la direction longitudinale \hat{u} n'est pas impacté par les conditions de stratification puisque les différentes courbes présentées sont confondues. Les perturbations de vitesse dans la direction normale semblent elles impactées par les conditions de stratification. En effet, on observe en figure 4.46(b) que plus N augmente, plus le maximum du mode spatial \hat{v} diminue. Ceci signifie que l'amplitude des mouvements verticaux induits par l'instabilité est réduite dans la stratification augmente. En ce qui concerne les perturbations de vitesse transverses, on constate un comportement différent selon la position normale à la paroi, comme le montrent les profils de \hat{w} tracés en figure 4.46(c). Pour $\psi/\theta < 2.0$, plus la stratification augmente plus les mouvements transverses dus à l'instabilité augmentent. À l'inverse, pour les position $\psi/\theta > 2.0$, plus N augmente, plus l'amplitude des mouvements transverse est réduite. Il serait encore une fois intéressant de comparer ces résultats à une analyse de stabilité linéaire.

Au delà de la région linéaire, l'instabilité de Görtler induit un fort changement de la topologie de la couche limite avec l'apparition d'un point d'inflexion sur le profil de vitesse dans la région non-linéaire. On l'observe d'ailleurs sur la plupart des profils présentés en figure 4.47 où l'on trace l'évolution longitudinale du profil de vitesse $\langle u \rangle_{t,z}$ pour les différentes configurations. Ce qu'il

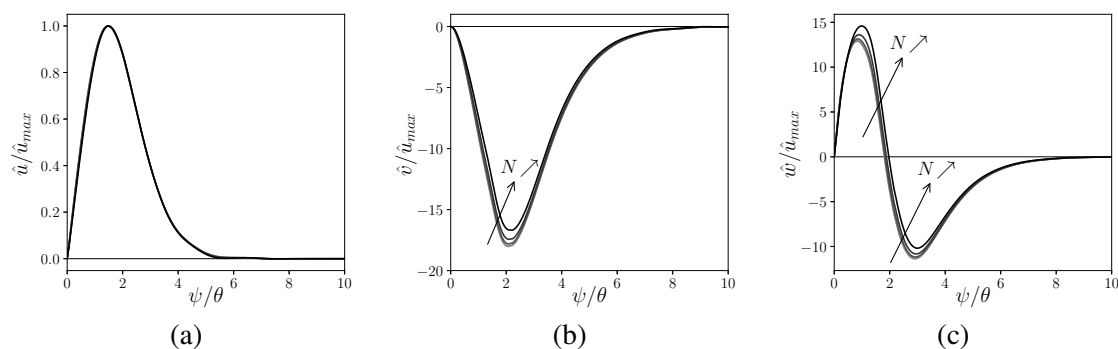


Figure 4.46. Profils des modes spatiaux de l'instabilité de Görtler obtenus par traitement statistique des simulations LES. De plus clair au plus foncé, les conditions de stratification sont $N\delta_0/U_\infty = \{0.0, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20\}$. Les modes spatiaux sont normalisés par $\max \hat{u}$. Résultats obtenus pour les paramètres physiques suivants : $G_{\theta_0} = 13.3$, $\alpha\theta_0 = 0.92$.

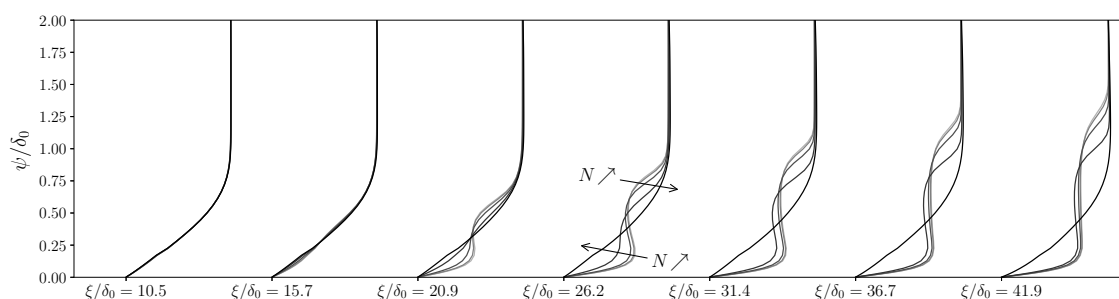


Figure 4.47. Évolution longitudinale des profils de vitesse $\langle u \rangle_{t,z}$ pour chacune des simulations présentées. Du plus clair au plus foncé, les profils présentés correspondent à la fréquence de Brunt-Väisälä $N\delta_0/U_\infty = \{0.0, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20\}$.

faut noter ici c'est que la stratification de l'écoulement tend à diminuer la distorsion du profil de vitesse. Pour ξ/δ_0 par exemple, les profils de vitesse pour $N\delta_0/U_\infty = 0.0$ et $N\delta_0/U_\infty = 0.05$ sont quasiment confondus. Les effets de stratification sont sensibles à partir de $N\delta_0/U_\infty = 0.10$ où on voit que la distorsion du profil de vitesse est légèrement réduite ainsi qu'à $N\delta_0/U_\infty = 0.15$ où la distorsion du profil $\langle u \rangle_{t,z}$ est fortement réduite. Pour $N\delta_0/U_\infty = 0.20$, aucune transition topologique du profil de vitesse n'est observé ce qui indique que les effets centrifuge ne sont pas suffisamment forts par rapport aux effets de stratification pour destabiliser la couche limite. Ceci est en accord avec les résultats montrés en figure 4.44(b) où, après une région de croissance linéaire initiale, le niveau d'hétérogénéité, mesuré par la quantité A^* , ne parvient pas à croître suffisamment pour atteindre une saturation non-linéaire des perturbations. Ceci signifie par conséquent que les tourbillons de Görtler ne se développent pas dans ce cas.

L'impact de la stratification sur la topologie 3D de l'écoulement et le développement des tourbillons de Görtler est étudié qualitativement par visualisations 3D des isocontours de critère Q . On montre en figure 4.48 la topologie 3D obtenue pour les 4 configurations permettant d'observer des tourbillons de Görtler $N\delta_0/U_\infty = \{0.0, 0.05, 0.10, 0.15\}$. Ces visualisations nous permettent essentiellement d'observer deux choses. Premièrement, on remarque que l'apparition initiale des tourbillons, c'est à dire la position longitudinale à partir de laquelle les tourbillons sont visibles³

3. Remarque : il est évident que la position dont on parle dépend du seuil de critère Q choisi pour faire la visualisation. Néanmoins, le seuil étant de même pour toutes les visualisations, on peut voir qualitativement l'impact de la stratification

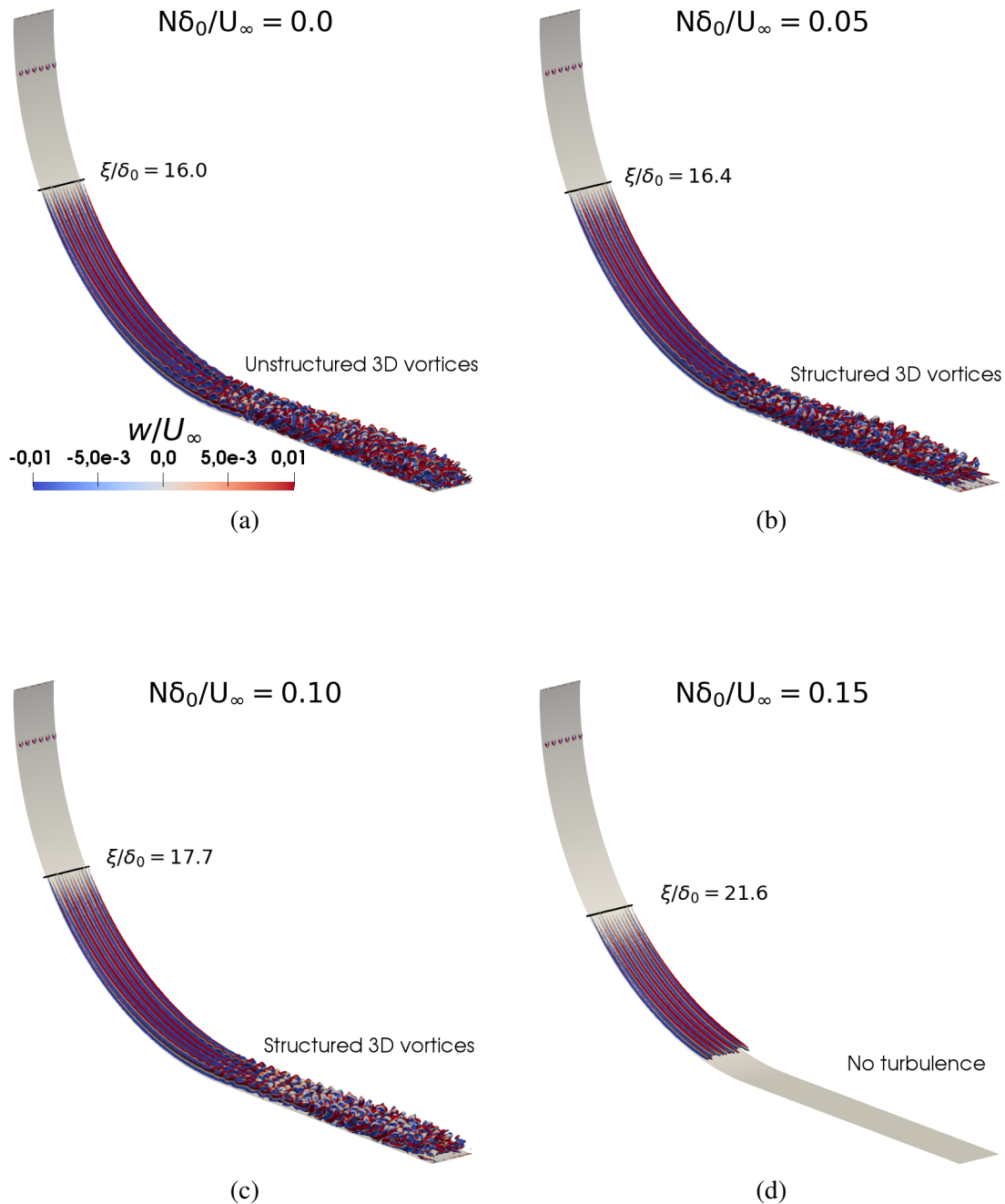


Figure 4.48. Visualisation 3D des structures tourbillonnaires développées dans l'écoulement par l'utilisation d'iso-contours du critère Q coloré par la vorticité longitudinale pour différentes conditions de stratification (a) $N\delta_0/U_\infty = 0.0$ (b) $N\delta_0/U_\infty = 0.05$ (c) $N\delta_0/U_\infty = 0.10$ (d) $N\delta_0/U_\infty = 0.15$.

dépend de la stratification. En effet, on constate un décalage dans la direction longitudinale de la position où l'on observe les premiers tourbillons longitudinaux. La configuration physique du cas de référence neutre (sans stratification) induit des tourbillons longitudinaux à partir de $\xi/\delta_0 = 16$ (figure 4.48a). Pour $N\delta_0/U_\infty = 0.05$ (figure 4.48b) et $N\delta_0/U_\infty = 0.10$ (figure 4.48c), cette position est légèrement décalée en aval et les premiers tourbillons apparaissent respectivement à $\xi/\delta_0 = 16.4$ et $\xi/\delta_0 = 17.7$. Le dernier cas (figure 4.48d) présente un fort décalage et les premiers

sur la position longitudinale des premiers tourbillons.

tourbillons de Görtler apparaissent seulement à partir de $\xi/\delta_0 = 21.6$.

Deuxièmement, les effets de stratification modifient le développement des structures tridimensionnelles responsables de la transition à la turbulence. Tout d'abord, on remarque que le cas le plus stratifié ($N\delta_0/U_\infty = 0.15$, figure 4.48d) ne présente pas de structures tourbillonnaires sur la partie plane de la paroi. Les effets de stratification amortissent complètement les mouvements verticaux et transverses générés en amont par l'instabilité de Görtler. Pour les autres cas où les effets de stratification sont plus modérés ou nuls, des structures tourbillonnaires tridimensionnelles se développent en aval de l'écoulement : l'écoulement est en transition à la turbulence. On remarque néanmoins que la topologie des structures tourbillonnaires ainsi développées est sensible au niveau de stratification ambiante. En effet, $N\delta_0/U_\infty = 0.10$ (figure 4.48c) les tourbillons tridimensionnels observés sont plus structurés que ceux observés dans le cas neutre ($N\delta_0/U_\infty = 0.0$, figure 4.48a) et le cas faiblement stratifié ($N\delta_0/U_\infty = 0.05$, figure 4.48b). Il est alors intéressant d'approfondir ces observations en s'intéressant aux propriétés turbulentes de l'écoulement en présence d'effets de stratification, ce qui est fait au chapitre 6.

5

Linear to turbulent Görtler instability transition

Résumé : Dans ce chapitre, on présente une étude qui fait l'objet d'une publication dans le journal *Physics of Fluids*. Les résultats sont issus d'une simulation des grandes échelles hautement résolue dans laquelle une couche limite de Blasius se développe sur une paroi concave. En raison des grands nombres de Reynolds et de Görtler en amont ($Re_{\theta_0} = 1175$, $G_{\theta_0} = 75$), nous observons l'apparition de deux longueurs d'onde dominantes distinctes : la première longueur d'onde λ_1 est dominante dans la région de croissance linéaire et la seconde longueur d'onde λ_2 est dominante dans la région turbulente. À partir d'une analyse de stabilité linéaire (LSA), on montre que les deux longueurs d'onde observées correspondent aux prédictions de la LSA. Pour λ_2 , la comparaison avec l'analyse de stabilité est faite en remplaçant la viscosité cinématique du fluide par la viscosité turbulente dans la définition du nombre de Görtler. Les modes spatiaux de l'instabilité obtenus par simulation des grandes échelles se comparent bien les prédictions issues de l'analyse de stabilité linéaire. Le coefficient de frottement C_f est hétérogène dans la direction transverse de l'écoulement à cause de l'émergence de λ_1 et λ_2 . La transition à la turbulence induit un *overshoot* de C_f par rapport à la loi pour une couche limite turbulente sur plaque plane mais l'amplitude de l'*overshoot* observé est nettement inférieur à ce qui est observé dans la littérature pour des nombres de Reynolds inférieurs.

Note importante au lecteur : le nom des grandeurs physiques ainsi que la notation des opérateurs statistiques utilisés dans cet article ne sont pas systématiquement les mêmes que dans le reste du manuscrit.

Linear to turbulent Görtler instability transition

Cite as: Phys. Fluids 33, 014102 (2021); doi: 10.1063/5.0033944
 Submitted: 20 October 2020 • Accepted: 11 December 2020 •
 Published Online: 6 January 2021



J. Dagaut,¹ M. E. Negretti,^{1,a)}  G. Balarac,^{1,2} and C. Brun¹

AFFILIATIONS

¹Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, LEGI, 38000 Grenoble, France

²Institut Univ. de France, 1 rue Descartes, 75231 Paris, France

^{a)}Author to whom correspondence should be addressed: elletta.negretti@legi.cnrs.fr

ABSTRACT

We present results from a highly resolved large-eddy simulation of a freely developing Blasius profile over a concave boundary in a large spanwise domain. Due to the large initial Reynolds and Görtler numbers ($Re_{\theta,0} = 1175$, $G_{\theta,0} = 75$), we observe the onset of two dominant wavelengths: the first dominating in the linear/transition region, λ_1 , and the second dominating in the turbulent region, λ_2 . Extending previous linear stability analysis (LSA) to higher Görtler numbers and non-dimensional wavenumbers, both dominant wavelengths of the Görtler instability correspond to predictions of LSA, the latter comparable to laminar theory by replacing the kinematic viscosity with the turbulent viscosity in the definition of the Görtler number. The predicted spatial modes compare well with the computed profiles for both λ_1 and λ_2 . The skin friction coefficient C_f is found heterogeneous in the spanwise direction according to the emerging wavelengths λ_1 and λ_2 of the Görtler instability. We report a smooth increase in C_f from the theoretical predictions of a laminar boundary layer to those for a turbulent boundary layer over a flat plate. The values only slightly overshoot these predictions in the domain of existence of the second dominant wavelength λ_2 , very different from that reported at lower Reynolds numbers.

Published under license by AIP Publishing. <https://doi.org/10.1063/5.0033944>

I. INTRODUCTION

Boundary layer flows are ubiquitous in both nature and engineering applications and are subject to instabilities, which generally lead to the transition to turbulence. When the flow develops over a curved boundary, this transition may occur through the development of the so-called Görtler instability,^{1–5} which results from a local unbalance between the centrifugal force and the normal pressure gradient. The boundary layer then exhibits unstable flow motion in the form of pairs of counter-rotating streamwise vortices that give rise to longitudinal streaks, leading to strongly distorted velocity profiles and normal-to-wall flow motion correlated with local low and high momentum fluxes. Due to their direct application in industrial^{6,7} and geophysical^{8–10} contexts, experimental^{11–13} and numerical^{14–16} studies on the development of the Görtler instability in boundary layer flows were performed using both wavelength-forced and wavelength-free inlet conditions. Inflow conditions showed to be a crucial choice since they lead either to a unique prescribed wavelength of the Görtler instability or to a freely developing system of multiple wavelengths.

For boundary layers developing over a flat plate, previous studies^{17,18} highlight the importance of the inlet conditions in determining the laminar–turbulent transition, influencing the

formation of characteristic flow coherent structures that develop in the boundary layer, but also changing the transition Reynolds number $Re_{\theta} = (U_{\infty}\theta)/\nu$ based on the momentum thickness θ , the free-stream velocity U_{∞} , and the kinematic viscosity ν . This, in turn, can strongly change the behavior of flow properties such as the drag coefficient with important consequences in industrial and geophysical contexts. For instance, Schlatter and Örlü¹⁹ showed that the skin friction coefficient C_f has very different developments depending on the tripping method used to force transition to turbulence. In general, it was observed that, for a Blasius boundary layer over a flat plate, the smaller the transition Reynolds number, the more likely an overshoot of C_f was reported, exceeding the theoretical predictions for a turbulent boundary layer; in contrast, when the transition Reynolds number was large (>2500), a smooth increase in C_f from laminar to turbulent predictions over a flat plate has been observed (see also the work of Méndez *et al.*²⁰).

In a Görtler flow, the typical evolution of the flow includes a first linear region, which is well predicted by linear stability theory,³ where the most amplified wavelength is driven by the Görtler number $G_{\theta} = Re_{\theta}(\theta/R)^{1/2}$ with R being the radius of curvature, followed by a non-linear region characterized by the above-mentioned longitudinal Görtler structures with a mushroom-like spanwise section

and upwash/downwash location. Swearingen and Blackwelder¹² (see also the work of Park and Huerre²¹) concluded that the Görtler vortices do not degenerate directly to turbulence; instead, they set up a localized shear-layer instability that results in the appearance of secondary instabilities. Their main finding was the association of the secondary instabilities with the high shears in the spanwise direction rather than with those in the wall-normal direction (see also the work of Schultz and Volino²²).

Méndez *et al.*²⁰ studied the laminar-to-turbulent transition in a Blasius flow over a concave wall by forcing the wavelength of the Görtler instability using wall-roughness elements, following the study of Schrader *et al.*,¹⁴ while increasing the spanwise dimension of the computational domain to assure a better transition to turbulence. They identified and characterized four regions encountered in the transition process (linear, non-linear, transition to turbulence, and fully turbulent) and performed a parametric study showing that the transition point is delayed when the non-dimensional radius of curvature $(R/\theta)^{1/2} = G_\theta/Re_\theta$ is increased, however, at the same critical Görtler number.

So far, either numerical (Schrader *et al.*,¹⁴ Méndez *et al.*,²⁰ and the references herein) or experimental^{8,9,11–13,22} studies focusing on the evolution of the boundary layer over a curved boundary reported the onset of only one unstable Görtler wavelength within the full considered domain. Generally, these numerical studies started with initial laminar flow conditions with the subsequent onset of one Görtler wavelength as predicted from linear stability analysis (LSA) and that degenerated into a turbulent flow. The experiments also include studies where the flow already attained turbulent conditions when reaching the curved boundary. Tani¹¹ demonstrated experimentally that the Görtler vortices can exist also in a turbulent boundary layer (see also the studies of Hopfinger *et al.*,⁸ Albayrak *et al.*,⁹ and Swearingen and Blackwelder¹²). In these cases, the dominant wavelength of the Görtler instability can be predicted using LSA, but a “turbulent” Görtler number G_T based on the turbulent viscosity ν_t has to be considered instead of the classical Görtler number G_θ defined using the kinematic viscosity ν .

Here, we perform well-resolved Large-Eddy Simulations (LESs) of a Blasius boundary layer over a concave wall. We let the Görtler instability develop freely, starting from a linear region and reaching turbulent conditions at the end of the computational domain. In particular, the Reynolds and Görtler numbers at the inlet are set to much higher values ($Re_{\theta_0} = 1175$ and $G_{\theta_0} = 75$), as compared to previous studies. In their study of boundary layer data over a flat plate, Örlü and Schlatter²³ demonstrated that starting with a high laminar Re_θ ($=750$) yields different results not only in terms of the skin friction coefficient but also for integral and global quantities. Here, the prescribed high $G_{\theta_0} = 75$ enables reaching high enough turbulent Görtler numbers in the turbulent region to ensure the onset of a second dominant wavelength. The large spanwise domain permits the presence of up to 52 Görtler vortices in the laminar region with the observed wavelength corresponding to the theoretical most amplified wavelength predicted by LSA for the present conditions. The skin friction coefficient is found to be accordingly heterogeneous, both in the laminar and turbulent regions with values that exceed the predictions for a turbulent boundary layer over a flat plate in the turbulent region, similarly to the work of Örlü and Schlatter.²³

This paper is organized as follows: in Sec. II, we describe the numerical resolution method. Section. III includes results for the

flow topology and the characteristic statistics of each developed region (Sec. III A), the comparison with theoretical predictions of linear stability theory (Sec. III B), and the effects on the skin friction coefficient (Sec. III C). The conclusions are given in Sec. IV.

II. NUMERICAL METHOD

Large-Eddy Simulations (LESs) have been performed using the YALES2 flow solver,²⁴ which solves the incompressible Navier–Stokes equations for turbulent flows on unstructured meshes using a projection method for pressure–velocity coupling.²⁵ It relies on fourth-order central finite-volume schemes and on highly efficient linear solvers.²⁶ The time integration is explicit for convective terms using a fourth-order modified Runge–Kutta scheme with a semi-implicit integration for the diffusive terms. A constant Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) number of 0.9 is set to determine the time step.

We used unstructured grids composed by prisms and tetrahedron elements, allowing to have a high resolution of the near-wall region. The dynamic Smagorinsky subgrid-scale model is used²⁷ with local averaging in space.²⁸

A sketch of the computational domain is given in Fig. 1. A local frame (ξ, ψ, z) is used to conveniently characterize the flow in the present curved domain, where ξ , ψ , and z are the streamwise, wall-normal, and spanwise directions, respectively. The inlet velocity is set to a Blasius boundary layer with thickness δ_0 and free-stream velocity U_∞ . The geometry of the computational domain is a 90-degree concave channel with a constant curvature of $R = 30\delta_0$, a spanwise length of $L_z = 20\delta_0$, and a wall-normal length of $L_\psi = 10\delta_0$. Close to the wall, the mesh size in the streamwise, wall-normal, and spanwise directions is $\Delta\xi = 3.6 \times 10^{-2}\delta_0$, $\Delta\psi = 1.2 \times 10^{-3}\delta_0$, and $\Delta z = 3.6 \times 10^{-2}\delta_0$, respectively, for a total number of mesh cells $N_c = 1.4 \times 10^8$. This ensures that the mesh size at the wall, expressed in

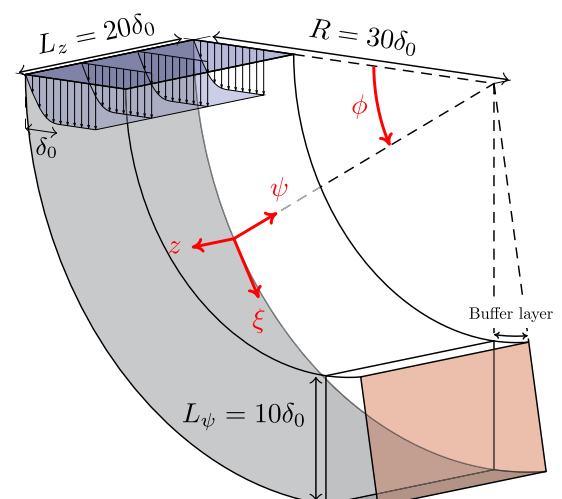


FIG. 1. Sketch of the computational domain. The inlet and outlet are highlighted in blue and red, respectively. All dimensions are expressed in terms of the initial boundary layer thickness δ_0 . The domain for physical analysis spans from $\phi = 0$ to $\phi = \pi/2$, and a buffer layer is used for 10 more degrees.

wall units⁺ (normalization with the wall friction velocity u_τ and the kinematic viscosity ν), is $(\Delta\xi^+, \Delta\psi^+, \Delta z^+) = (4.90, 0.17, 4.90)$ at the inlet and reaches maximum values of $(\Delta\xi^+, \Delta\psi^+, \Delta z^+) = (28.20, 0.98, 28.20)$ in the turbulent region. At the bottom and top boundaries (outer and inner radius boundaries), no-slip and free-slip boundary conditions are prescribed, respectively. The flow is set to be periodic in the spanwise direction. At the end of the 90-degree domain, a buffer layer is used ($90^\circ < \phi < 100^\circ$) and a convective outflow²⁹ after ($\phi = 100^\circ$).

We let Görtler vortices develop spontaneously without forcing the spanwise wavelength, without the free-stream turbulence level nor white noise perturbations. Hence, the centrifugal instability is triggered by numerical noise. The numerical noise results from the chosen discretization and numerical scheme with a value of 10^{-9} associated with the residual divergence of the flow. The spanwise length of the computational domain was chosen in order to obtain up to 52 Görtler rolls within the initial linear region based on linear stability predictions where the expected non-dimensional wavelength is $\Lambda = (U_\infty \lambda / \nu)(\lambda / R)^{1/2} = 435$, where λ is the wavelength defined as the distance between two pairs of counter-rotating Görtler vortices. This allows us to reach converged spatial statistics in the spanwise direction in both the laminar and turbulent regions. The Reynolds number based on the inflow boundary layer thickness δ_0 is $Re_{\delta_0} = (U_\infty \delta_0) / \nu = 10\,000$, while the Reynolds number based on the inflow momentum thickness is $Re_{\theta_0} = (U_\infty \theta_0) / \nu = 1175$. The Görtler number is consequently $G_{\theta_0} = Re_{\theta_0} (\theta_0 / R)^{1/2} = 75$.

A. Numerical validation and turbulent state

Figure 2(a) displays the streamwise evolution of the Kolmogorov scale $\eta = (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4}$ normalized by the longitudinal mesh size $\Delta\xi$ (black line) and the evolution of the sub-grid eddy viscosity ν_{sgs} normalized by the kinematic viscosity ν (gray line). Note that the dissipation rate ε used to compute the Kolmogorov scale η is determined using the structure function defined as $\langle (u'(\xi + r) - u'(\xi))^2 \rangle = C_2 (\varepsilon r)^{2/3}$, where r is the local streamwise distance and $C_2 = 2.0$ is a universal constant (see the work of Pope³⁰). We see that $\nu_{sgs} / \nu \ll 1$ and $\eta / \Delta\xi \approx 5$ in the linear region so that the chosen grid size at the wall in the linear region ($\xi / \delta_0 \leq 11$) is sufficiently small to resolve all scales and the LES is practically equivalent to a DNS. Even if the computation of the Kolmogorov scale η may be argued in the linear transition region, it is very useful to show the convergence toward a settled turbulent state value.

A spectral analysis has been performed using the Taylor hypothesis.³⁰ Temporal signals are extracted at fixed streamwise locations, and at the wall-normal position $\psi = \theta$ where the turbulent fluxes are important, and then transposed into spatial signals using the local streamwise velocity at the same position, representing the convective velocity. Figure 2(b) gives the energy spectrum as a function of the streamwise wavenumber κ_ξ at different streamwise positions (different solid lines), showing that starting from $\xi / \delta_0 = 10$, all energetic scales are resolved. Further downstream, we see the evolution of the spectra consistent with an energy transfer from small to larger wavenumbers up to the cut-off wavenumber κ_{SGS} [see the vertical dotted line in Fig. 2(b)] representative of the sub-grid model. Note that in the turbulent region, the cut-off wavenumber compared to the Kolmogorov scale is $\kappa_{SGS} = 0.25\kappa_\eta$. Figure 2(c) shows the

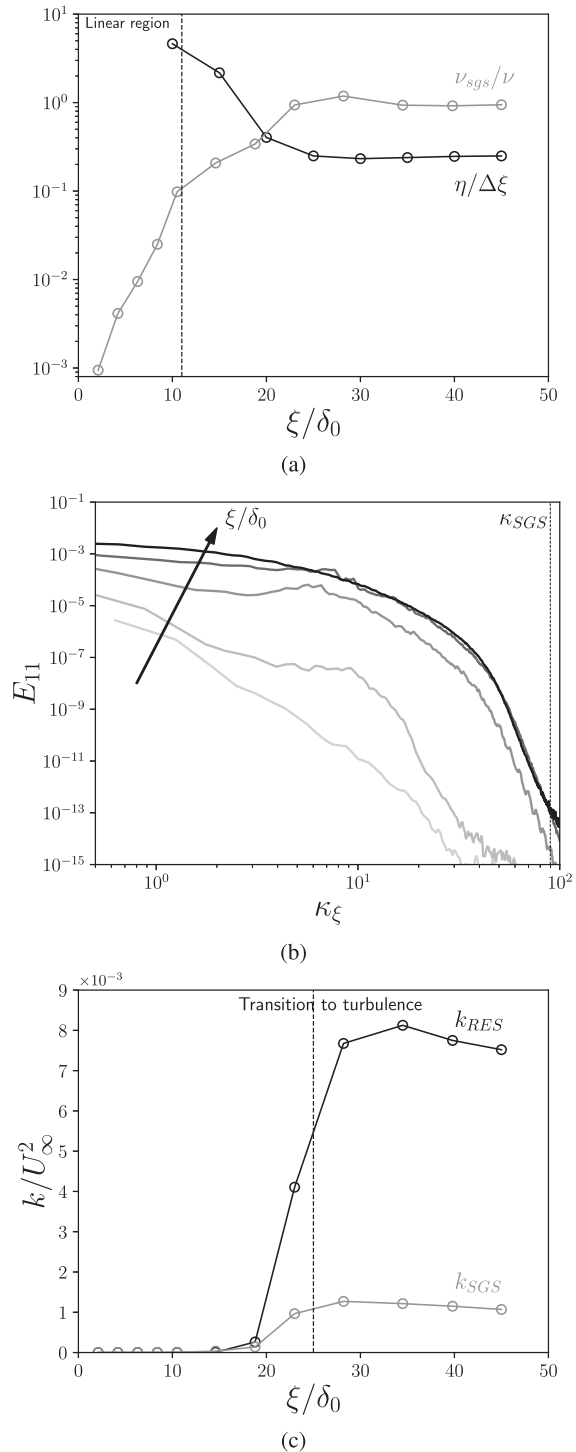


FIG. 2. (a) Ratio between the Kolmogorov scale η and the mesh size in the streamwise direction $\Delta\xi$ (black line) along with the ratio between the sub-grid viscosity ν_{SGS} and the kinematic viscosity of the fluid ν . (b) Streamwise evolution of the energy spectrum E_{11} for $\xi / \delta_0 = 10, 15, 20, 25, 35$ (from light gray to black). (c) Streamwise evolution of the explicitly resolved TKE k_{RES} and the sub-grid TKE k_{SGS} .

streamwise evolution of the normalized directly resolved (k_{RES}) and modeled (k_{SGS}) turbulent kinetic energy, where $k_{SGS} = C(v_{SGS}/\Delta)^2$ with $C \approx 100$.^{30,31} After transition to turbulence, k_{SGS} accounts for less than 20% of the total turbulent kinetic energy, which gives a criterion for good LES resolution.^{30,31}

To assess the turbulence level reached in the last part of the computational domain, we plot in Fig. 3(a) the normalized energy spectrum $E_{11}/(\epsilon\nu^5)^{1/4}$ as a function of $\kappa_\xi\eta$ for $\xi/\delta_0 = (35, 40, 45)$. The spectra converge, and the inertial zone (i.e., Taylor microscale $\kappa_\lambda\eta$, dashed black line) is partially resolved. We also estimated the Reynolds number $Re_\lambda = u'\lambda/\nu$ based on the Taylor microscale $\lambda = (\nu u'^2/\epsilon)^{1/2}$ and found values $Re_\lambda > 100$ for $\xi/\delta_0 > 15$ with an increasing value up to $Re_\lambda \approx 200$ at the end of the computational domain.

The velocity profiles expressed in wall units $u^+ = f(y^+)$ computed at the end of the domain [$\xi/\delta_0 = (35, 40, 45)$] are displayed in Fig. 3(b). They converge toward a turbulent velocity profile in agreement with the log-law $u^+ = (1/0.41) \log(y^+) + 5.2$ found in turbulent boundary layers over flat plates. We note that the velocity profiles exhibit an inflection point, specific of a secondary motion in the flow induced by the presence of Görtler vortices.

An overall assessment of the boundary layer development can be obtained through the boundary layer thickness δ_{99} as well as its integral measures, i.e., the displacement (δ^*) and momentum-loss (θ) thicknesses. The ratio between δ_{99} and δ^* (gray solid line) and θ (black solid line) is depicted in Fig. 4(a), along with the shape factor ($H_{12} = \delta^*/\theta$) in Fig. 4(b), as a function of Re_θ . We compare our results with those of Örlü and Schlatter²³ for two cases: the first having $Re_{\theta_0} = 55$ (triangles) and the second with $Re_{\theta_0} = 750$ (squares). As pointed out by Örlü and Schlatter,²³ a strong increase in the normalized boundary layer thicknesses occurs when transitioning to turbulence if the initial Reynolds number is large ($Re_{\theta_0} = 750$ in the work of Örlü and Schlatter²³ and $Re_{\theta_0} = 1175$ in the present study), which clearly contrasts with the smooth increase in the case of $Re_{\theta_0} = 55$. The shape factor H_{12} reveals a similar behavior as in the

case of Örlü and Schlatter²³ with a turbulent state reached at the end of the computational domain, however, with values that are 8% of the convergence limit (cf. Örlü and Schlatter²³). These results confirm the findings of Örlü and Schlatter²³ for which starting with a higher laminar $Re_{\theta,0}$ retards reaching the fully turbulent regime.

III. RESULTS

In the following, ensemble average $\langle \cdot \rangle$ is performed along homogeneous samples. Averaging over time at each point (ξ, ψ, z) provides, e.g., temporal mean velocity $\langle \mathbf{u} \rangle_t(\xi, \psi, z)$, where $\mathbf{u} = (u, v, w)$ is the vector of the three velocity components in the longitudinal, wall-normal, and spanwise directions, respectively. Additional averaging along the spanwise direction of the domain provides temporal and spatial mean velocities, e.g., $\langle \mathbf{u} \rangle_{t,z}(\xi, \psi)$.

A. Flow topology

The topology of the flow is described using a non-dimensional Q -criterion defined as $Q^* = (\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij})/(2\delta_0^2/U_\infty^2)$. Herein, Ω_{ij} is the vorticity tensor and S_{ij} is the strain rate tensor. A three-dimensional view of the iso-contours of the Q -criterion set to $Q^* = 10^{-3}$ is shown in Fig. 5. Figure 5(a) is computed from the instantaneous velocity field \mathbf{u} colored by the instantaneous non-dimensional streamwise vorticity $\omega_\xi^* = \omega_\xi\delta_0/U_\infty$, while Fig. 5(b) is computed from the mean flow $\langle \mathbf{u} \rangle_t$ colored by the mean non-dimensional streamwise vorticity $\langle \omega_\xi^* \rangle_t = \langle \omega_\xi \rangle_t\delta_0/U_\infty$. The longitudinal streak structures present for $21^\circ < \phi < 42^\circ$ are observed both in Figs. 5(a) and 5(b), meaning that they are spatially steady, which is characteristic for Görtler vortices. In Fig. 5(a), we see that the onset of the Görtler vortices appears at about $\xi/\delta_0 = 11$ ($\phi = 21^\circ$, $Re_\theta = 1200$), and the transition to turbulence starts at about $\xi/\delta_0 = 22$ ($\phi = 42^\circ$, $Re_\theta = 1350$). The turbulent region is reached at $\xi/\delta_0 > 31$ ($\phi > 59^\circ$, $Re_\theta = 1500$) (see also Sec. II A). The iso-contour of the Q -criterion computed from the mean flow velocity field [Fig. 5(b)] exhibits

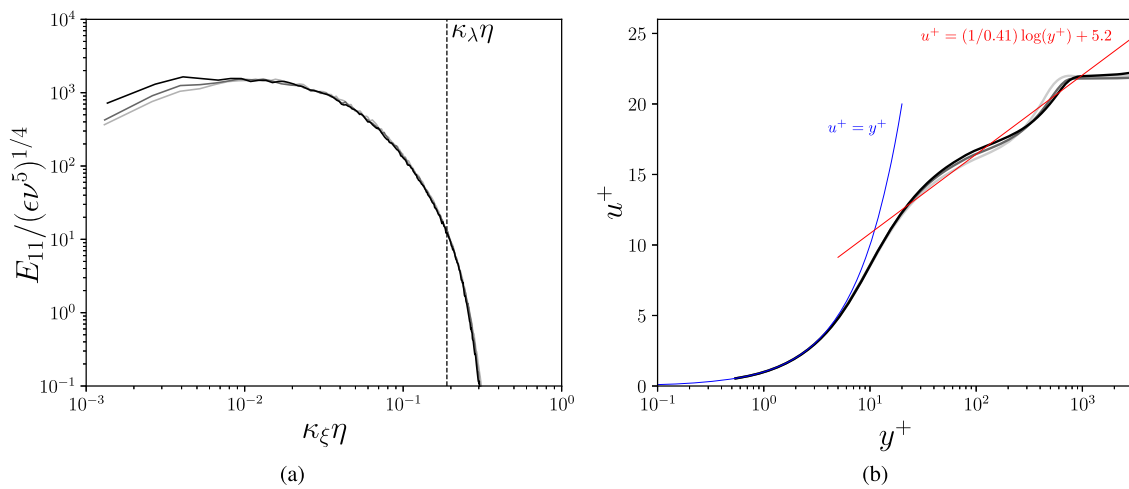


FIG. 3. (a) Normalized energy spectrum for $\xi/\delta_0 = 35, 40, 45$ (from light gray to black solid lines) with the $-5/3$ slope (black solid line) and the Taylor micro-scale (vertical dotted line). (b) Velocity profiles in wall units $u^+ = f(y^+)$ for $\xi/\delta_0 = 35, 40, 45$ (from light gray to black circles).

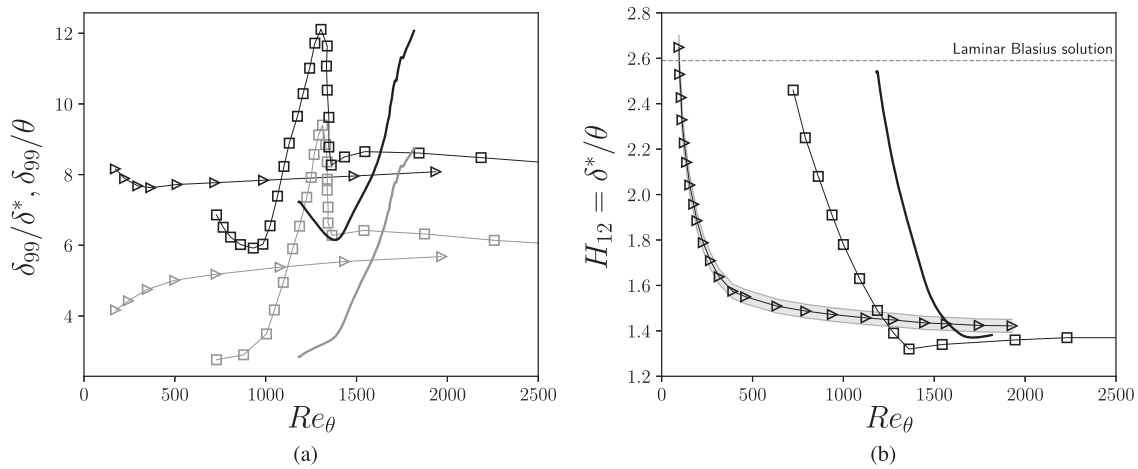


FIG. 4. (a) Evolution of the boundary layer thickness δ_{99} normalized by the displacement thickness δ^* (gray) and the momentum thickness θ (black) vs Re_θ . The present results with $Re_{\theta_0} = 1175$ (solid lines) are compared with results from Örlü and Schlatter²³ (squares: $Re_{\theta_0} = 750$; triangles: $Re_{\theta_0} = 55$). (b) Shape factor as a function of Re_θ . A 2% error with respect to results from Örlü and Schlatter²³ at $Re_{\theta_0} = 55$ is highlighted in gray.

large-scale longitudinal vortical Görtler structures in both transition and turbulent regions. Instantaneous streamwise velocity fields are displayed in Fig. 6 at three different streamwise locations $\xi/\delta_0 = (15, 25, 30)$ [(a), (b), and (c), respectively] highlighting the typical mushroom-like structure of the Görtler instability,¹³ well defined in the initial development region [Fig. 6(a)], while Figs. 6(b) and 6(c) show the onset of scale multiplicity further downstream.

Since the Görtler vortices are spatially steady, they induce a distortion of the mean flow,⁵ which leads to a spanwise heterogeneity

of the flow properties. A measure of the spanwise heterogeneity level (SHL) of the mean flow has been proposed by Méndez *et al.*²⁰ as follows:

$$\mathbf{u}_{SHL}(\xi) = \sqrt{\frac{1}{L_z} \int_0^{L_z} [\langle \mathbf{u}'_i(\xi, \psi, z) \rangle]^2 dz}, \quad (1)$$

where $\langle \mathbf{u}'_i(\xi, \psi, z) \rangle = \langle \mathbf{u} \rangle_i(\xi, \psi, z) - \langle \mathbf{u} \rangle_{i,z}(\xi, \psi)$ is the spanwise fluctuation of the mean velocity field $\langle \mathbf{u} \rangle_i(\xi, \psi, z)$.

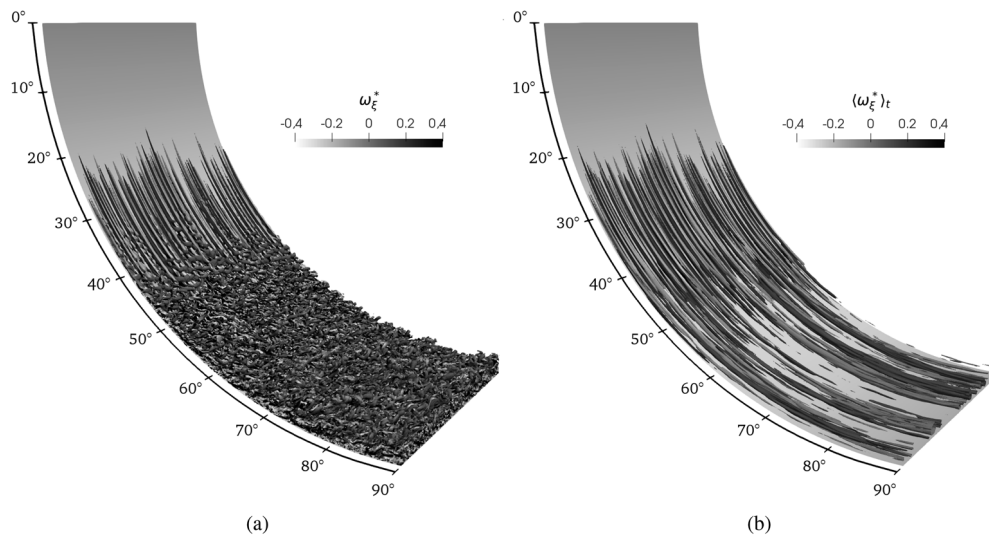


FIG. 5. Three-dimensional views of iso-contours of the normalized Q-criterion $Q^* = QR^2/U_\infty^2 = 1$, computed from the instantaneous flow velocity field (a) and the mean flow velocity field (b) colored by the instantaneous non-dimensional vorticity $\omega_\xi^* = \omega_\xi \delta_0 / U_\infty$ and the mean non-dimensional streamwise vorticity $(\omega_\xi^*)_t = (\omega_\xi)_t \delta_0 / U_\infty$. Streamwise streak structures (Görtler vortices) are visible in the non-linear region of the instability ($22^\circ < \phi < 42^\circ$) and persistent in the turbulent region (b).

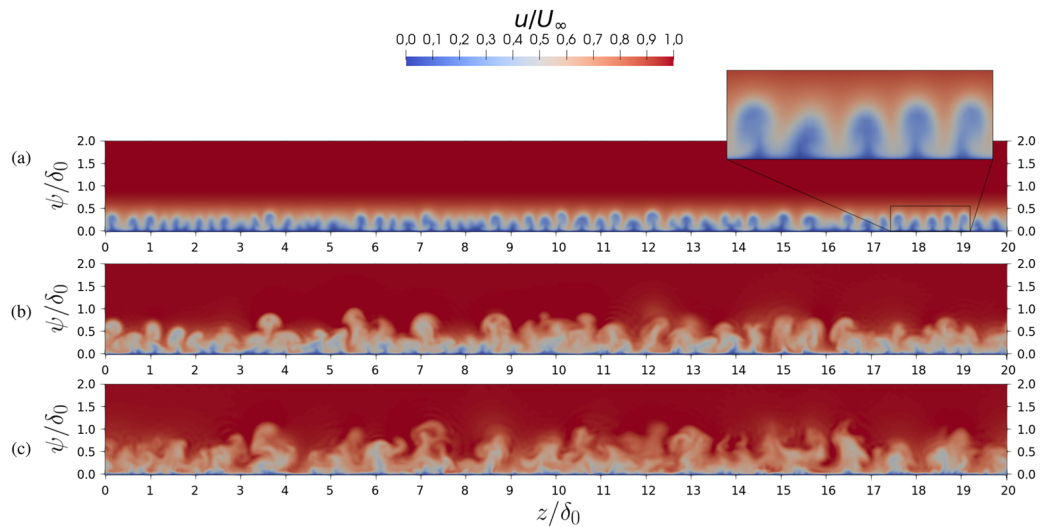


FIG. 6. Instantaneous streamwise velocity field u/U_∞ at $\xi/\delta_0 = 15$ (a), 25 (b), and 30 (c). In (a), mushroom-like structures of the Görtler instability are evident (see the inset for a zoomed-in view). For $\xi/\delta_0 > 25$ (b) and (c), a scale multiplicity is observed in the instantaneous velocity fields (i.e., turbulent state).

Equation (1) represents the spanwise standard deviation of the temporal mean flow, and the streamwise evolution of its value at the wall-normal position $\psi = 0.25\delta_0$ is displayed in Fig. 7(a). We see that all three components of \mathbf{u}_{SHL} rapidly increase in the first region, which corresponds to the linear growth of the Görtler instability. The level of heterogeneity is maintained for $\xi/\delta_0 > 25$ for all three components. This is not observed in a turbulent boundary layer over a flat plate, where a statistical spanwise homogeneity of the mean flow is expected.

The selected profiles of $\mathbf{u}_{SHL}/U_\infty$ are shown in Fig. 7 for the streamwise component [solid black line in (b)] and for the vertical and spanwise components [dotted and dashed lines in (c), respectively] along with the associated mean streamwise velocity profiles $\langle u \rangle_{t,z}/U_\infty$ [gray lines in (b)]. At $\xi/\delta_0 = 10$ (linear region), the computed $\langle u \rangle_{t,z}$ matches the Blasius solution. u_{SHL} and v_{SHL} have the maximum values for $\psi/\delta_0 = 0.12$ and $\psi/\delta_0 = 0.16$, respectively, while w_{SHL} has two maxima reached for $\psi/\delta_0 = 0.05$ and $\psi/\delta_0 = 0.28$. Note that the wall-normal positions of the maxima of all three components of \mathbf{u}_{SHL} are consistent with the observation of the Görtler vortices [cf. Fig. 6(a)]. At $\xi/\delta_0 = 25$ (non-linear region), an inflection point is observed on the mean streamwise velocity profile $\langle u \rangle_{t,z}$ [gray line in Fig. 7(b)], which is due to the development of the Görtler vortices. Wall-normal profiles of u_{SHL} and w_{SHL} are strongly influenced by the non-linear effects and the wavelength multiplicity, thus having complex shapes, while the v_{SHL} profile shape remains nearly the same. The width of all three profiles is thickening in the non-linear region, which might be associated with a sudden increase in the turbulent state [see the appearance of three-dimensional structures in Fig. 5(a) and non-linear saturation in Fig. 7(a)]. At $\xi/\delta_0 = 40$ in the turbulent region, the mean velocity profile as well as \mathbf{u}_{SHL} profiles is thicker, and an inflection point is still observed on the $\langle u \rangle_{t,z}$ profile, consistent with the large-scale streamwise vortices observed in the turbulent region [Fig. 5(c)]. In this region, u_{SHL} and w_{SHL} have their

maximum value very close to the wall at $\psi/\delta_0 = 0.08$, while v_{SHL} still keeps the same profile shape and its maximum moves away from the wall, similarly to what is observed when Görtler vortices grow in the non-linear region.

In order to extract the wavelengths responsible for the spatial heterogeneity, we focus on the wall-normal component of the velocity, which is associated with the upwash and downwash motions, characteristic of the Görtler instability. A spatial FFT is, therefore, performed in the spanwise direction on the velocity fluctuation $\langle v \rangle'_t$, and the streamwise evolution of the power spectral density is shown in Fig. 8(a). Unlike the previous studies of Méndez *et al.*²⁰ and Schrader *et al.*¹⁴ where the instability wavelength is forced, here, we report the onset of various wavelengths, also observed in the work of Tandiono *et al.*¹³

In the linear region ($2 < \xi/\delta_0 < 11$), multiple wavelengths can be identified [cf. Fig. 8(a)], and the most amplified wavelength is found to be $\lambda_1 = 0.385\delta_0$. λ_1 is dominant for $2 < \xi/\delta_0 < 22$, which corresponds to both linear and non-linear regions. At the breakdown of the Görtler vortices [Fig. 7(a)], larger wavelengths ($0.5\delta_0 < \lambda < 1.0\delta_0$) are found in the spectrum, which persist only for a distance of $\Delta\xi \approx 6\delta_0$.

Further downstream in the turbulent region ($\xi/\delta_0 > 30$), the dominant wavelength in the flow is found to be $\lambda_2 = 1.55\delta_0$.

B. Comparison to linear stability theory

In order to estimate the theoretical predicted growth rates and most unstable wavelengths, we extended the LSA of Floryan and Saric³ for a larger domain of the non-dimensional wavenumber $0.03 < \alpha\theta < 3.0$ with $\alpha\theta = (2\pi/\lambda)\theta$ and for Görtler numbers $0.5 < G_\theta < 100.0$. For this, we considered the linear perturbation equations of continuity and momentum for a Blasius boundary layer over a curved wall using a normal mode approach.

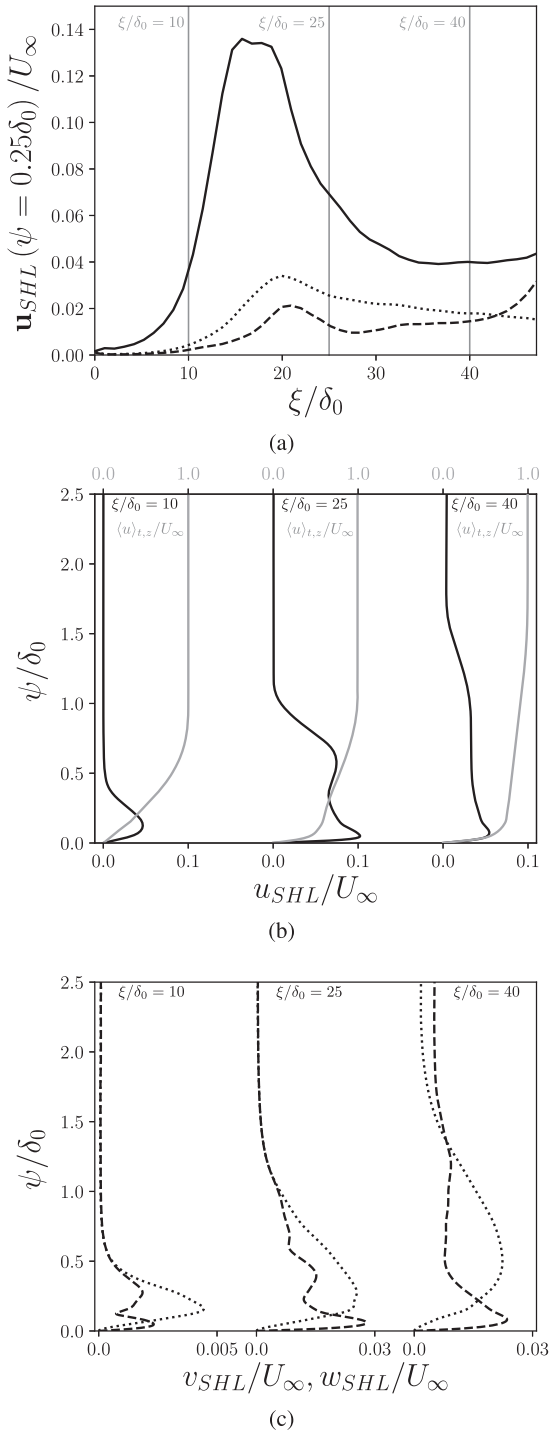


FIG. 7. (a) Streamwise evolution of u_{SHL} at $\psi = 0.25\delta_0$ [Eq. (1)] for the longitudinal (solid line), wall-normal (dotted line), and spanwise (dashed line) velocity components with the saturation reached at $\xi/\delta_0 \approx 22$. (b) Selected vertical profiles at $\xi/\delta_0 = (10, 25, 40)$ (from left to right, respectively) for u_{SHL}/U_∞ (black solid line) and the ensemble mean streamwise velocity profile $\langle u \rangle_{t,z}/U_\infty$ (gray solid line). (c) Selected vertical profiles at $\xi/\delta_0 = (10, 25, 40)$ (from left to right, respectively) for v_{SHL}/U_∞ (dashed line) and w_{SHL}/U_∞ (dotted line).

The dimensional variables are made dimensionless using the following scales:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} &= \xi/(\theta Re_\theta), & \tilde{\psi} &= \psi/(\theta), & \tilde{z} &= z/(\theta), \\ \tilde{U} &= U/(U_\infty), & \tilde{V} &= V/(U_\infty), & \tilde{p}' &= p'(\rho U_\infty^2)/Re_\theta^2, \\ \tilde{u}' &= u'/(U_\infty), & \tilde{v}' &= v'/(U_\infty/Re_\theta), & \tilde{w}' &= w'/(U_\infty/Re_\theta), \\ \tilde{\alpha} &= \alpha\theta, & \tilde{\beta} &= \beta\theta Re_\theta. \end{aligned}$$

The non-dimensional linear perturbations are defined as

$$[\tilde{u}', \tilde{v}', \tilde{p}'] = [\hat{u}(\tilde{\psi}), \hat{v}(\tilde{\psi}), \hat{p}(\tilde{\psi})] \cos(\tilde{\alpha}\tilde{z}) \exp(\tilde{\beta}\tilde{\xi}), \quad (2)$$

$$w' = \hat{w}(\tilde{\psi}) \sin(\tilde{\alpha}\tilde{z}) \exp(\tilde{\beta}\tilde{\xi}) \quad (3)$$

with $\tilde{\alpha}$ being the non-dimensional wavenumber, $\tilde{\beta}$ being the non-dimensional spatial growth rate, and $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ being the spatial modes.

The governing stability equations are then read as

$$\tilde{\beta}\hat{u} + \frac{d\hat{v}}{d\tilde{\psi}} + \tilde{\alpha}\hat{w} = 0, \quad (4)$$

$$\hat{u} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{\xi}} + \tilde{\beta}\tilde{U}\hat{u} + \hat{v} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{\psi}} + \tilde{V} \frac{d\hat{u}}{d\tilde{\psi}} - \frac{d^2\hat{u}}{d\tilde{\psi}^2} + \tilde{\alpha}^2\hat{u} = 0, \quad (5)$$

$$\tilde{\beta}\tilde{U}\hat{v} + \hat{u} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{\xi}} + \hat{v} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{\psi}} + \tilde{V} \frac{d\hat{v}}{d\tilde{\psi}} + 2G^2\tilde{U}\hat{u} + \frac{d\hat{p}}{d\tilde{\psi}} - \frac{d^2\hat{v}}{d\tilde{\psi}^2} + \tilde{\alpha}^2\hat{v} = 0, \quad (6)$$

$$\tilde{\beta}\tilde{U}\hat{w} + \tilde{V} \frac{d\hat{w}}{d\tilde{\psi}} - \tilde{\alpha}\hat{p} - \frac{d^2\hat{w}}{d\tilde{\psi}^2} + \tilde{\alpha}^2\hat{w} = 0. \quad (7)$$

The system of Eqs. (4)–(7) is expressed in matrix form through M_{ij} ,

$$\frac{d\zeta_i}{d\tilde{\psi}} = M_{ij}(\tilde{\psi})\zeta_j, \quad (8)$$

where $\zeta_1 = \hat{u}$, $\zeta_2 = \frac{d\hat{u}}{d\tilde{\psi}}$, $\zeta_3 = \hat{v}$, $\zeta_4 = \frac{d\hat{v}}{d\tilde{\psi}}$, $\zeta_5 = \frac{d^2\hat{v}}{d\tilde{\psi}^2}$, and $\zeta_6 = \frac{d^3\hat{v}}{d\tilde{\psi}^3}$, which constitutes an eigenvalue problem with boundary conditions

$$\zeta_1 = \zeta_3 = \zeta_4 = 0 \text{ for } \tilde{\psi} = 0, \quad (9)$$

$$\zeta_1 = \zeta_3 = \zeta_4 = 0 \text{ for } \tilde{\psi} \rightarrow \infty, \quad (10)$$

for which solutions exist only for specific sets of $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, G)$ (see the work of Floryan and Saric³). It is solved as a boundary value problem using a fourth-order Runge–Kutta integration method following the work of Petitjeans.³² The value of $\tilde{\beta}$, which fulfills the boundary conditions (10), is calculated for a set of given $(G, \tilde{\alpha})$ values.^{3,32}

Figure 8(b) is extracted from Fig. 8(a) for the two dominant wavelengths λ_1 (black line) and λ_2 (blue line) along with an intermediate wavelength of about $2\lambda_1$ (red line). It shows the streamwise evolution of the energy contained in the wall-normal component of the velocity fluctuations for each of the above identified wavelengths. The estimated theoretical growth rates for each of these three wavelengths are reported in Fig. 8(b) as linear dashed lines, revealing a good agreement between the LSA predictions and the simulation

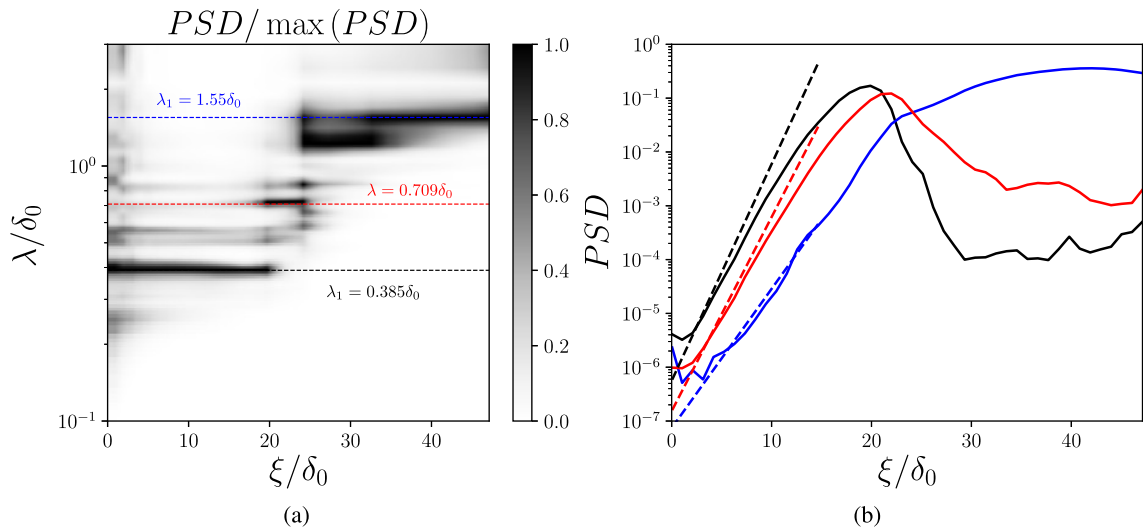


FIG. 8. (a) Spectrogram from a spatial FFT in the spanwise direction on the wall-normal disturbance velocity $\langle v \rangle_t$ normalized by the local maximum amplitude. Two dominant wavelengths emerge in the different development regions: $\lambda_1 = 0.385\delta_0$ (linear region, black dotted line), $\lambda_2 = 1.55\delta_0$ (turbulent region, blue dotted line), and an intermediate wavelength $\lambda = 0.709\delta_0$ (red dotted line); (b) respective streamwise evolution of the power spectral densities (solid lines) with the theoretical growth from LSA (dashed lines).

results. The energy associated with λ_1 and $2\lambda_1$ is damped further downstream at $\xi/\delta_0 \approx 25$, while the energy associated with λ_2 keeps growing, hence becoming the dominant wavelength for $\xi/\delta_0 \geq 30$ until the end of the computational domain.

We predict the theoretical most amplified wavelength for the Görtler number $G_{\theta_0} = 75$ and a base flow corresponding to a Blasius boundary layer in the linear region of $\lambda_1^{th} = 0.38\delta_0$, which matches the present observation.

As already observed experimentally,^{8,9,11,12} the Görtler instability may exist also in a fully developed turbulent boundary layer. Tani¹¹ argued that the *laminar* boundary layer Görtler instability diagram can be used to determine the instability characteristics of a *turbulent* boundary layer if the kinematic viscosity is replaced by the turbulent viscosity in the definition of the Görtler number. In this case, a turbulent Görtler number is the relevant parameter, defined as $G_T = U_\infty \theta / \nu_t (\theta/R)^{1/2}$. Figure 9(a) (solid line) displays the turbulent Görtler number G_T , in which the turbulent viscosity is estimated assuming a constant turbulent viscosity in the outer part of the boundary layer, for which Clauser³³ suggested the expression $\nu_t = 0.018 U_\infty \delta^*$, where δ^* is the displacement thickness. Our computation gives access to the relevant quantities necessary to calculate directly the turbulent viscosity. Using the Boussinesq hypothesis, we obtain $\nu_t = -\langle u'v' \rangle_{t,z} / \partial_\psi \langle u \rangle_{t,z}$ represented by a dashed line in Fig. 9(a), which can be, thus, also compared to the relation proposed by Clauser.³³ We see that both estimations for G_T are similar in the turbulent region, where the turbulent Görtler number ranges within $2.7 < G_T < 10$ for $\xi > 25\delta_0$. Figure 9 includes also the classical Görtler number G_θ based on the kinematic viscosity ν (gray line) for comparison.

The spatial amplification rate curves obtained from the LSA are displayed in Fig. 9(b) with the thick black line being the neutral stability curve. The range of the reported turbulent Görtler numbers

G_T and normalized wavenumbers $\tilde{\alpha}$ (note that $\tilde{\alpha}$ varies with θ since the wavelength λ_2 is kept constant) extracted from the present LES is highlighted within the gray box: The turbulent domain is clearly Görtler unstable. Moreover, the dominant wavelength observed in the present simulation, λ_2 , corresponds to a normalized wavenumber $\alpha\theta \approx 0.6$ that fairly fits the dominant wavenumber given by the LSA, represented by the dashed line for the maximum amplification rate in Fig. 9(b). Hence, during transition to turbulence, the relevant Görtler number decreases (from G_{θ_0} to G_T), favoring the onset of larger wavelengths, in accordance with the theoretical LSA predictions and with the present observations. In previous numerical studies, G_{θ_0} is smaller (cf. Table 1) so that the turbulent Görtler number falls close or even below the neutral stability curve [cf. Fig. 9(b)]. Also, at such smaller G_T , the most unstable modes may be inhibited by a limited computational domain in the spanwise direction.

From the spectral analysis, we find that in the linear region, the equivalent number of pairs of counter-rotating vortices corresponding to the most amplified wavelength λ_1 is $N_{\lambda_1} = 52$, which is sufficiently large to perform a phase-based statistical study in the spanwise direction with converged statistics. Considering that the spanwise flow heterogeneity is mainly driven by the dominant wavelength, the phase-averaged velocity field $\tilde{\mathbf{u}}(\xi, \psi, z)$ is defined as

$$\langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle_t(\xi, \psi, z) = \frac{1}{N_{\lambda_\kappa}} \sum_{i=0}^{N_{\lambda_\kappa}-1} \langle \mathbf{u} \rangle_t(\xi, \psi, z + i\lambda_\kappa), \quad (11)$$

where $z \in [0, \lambda_\kappa]$ is the reduced spanwise component and $\kappa = 1, 2$ represents the two dominant wavelengths. Similarly, we introduce the phase-averaged fluctuation velocity field $\langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle'_t(\xi, \psi, z) = \langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle_t(\xi, \psi, z) - \langle \mathbf{u} \rangle_{t,z}(\xi, \psi)$.

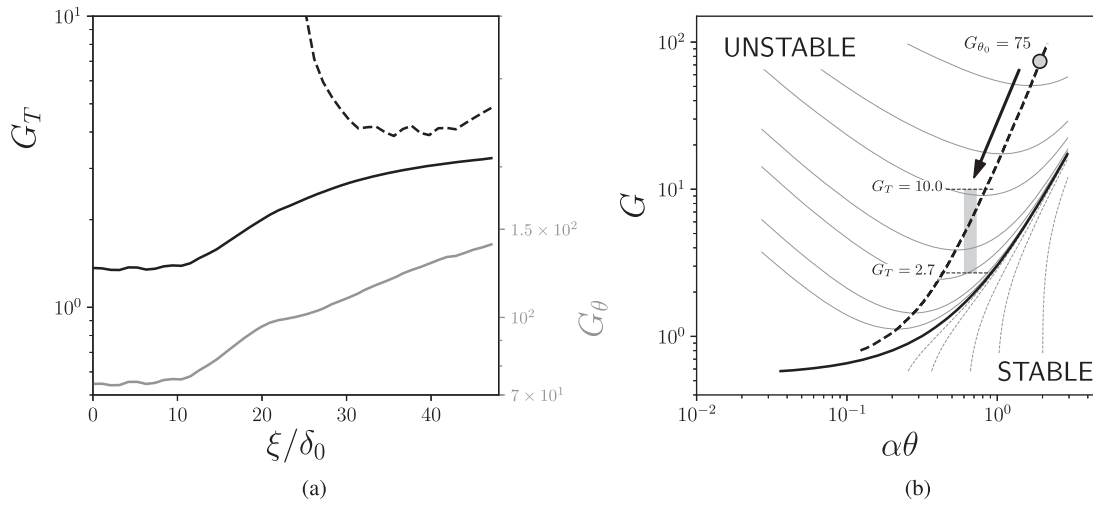


FIG. 9. (a) Variation of the turbulent Görtler number G_T in the longitudinal direction calculated using the turbulent viscosity with the mixing length model $\nu_t = 0.018U_\infty \delta^*$ from the work of Clauser³³ (solid line), where δ^* is the displacement thickness, and from the Boussinesq hypothesis $\nu_t = -\langle u'v' \rangle_{t,z} / \partial_\psi \langle u \rangle_{t,z}$ (dashed line). For comparison, G_θ is also plotted (gray line). (b) Curves of constant non-dimensional amplification rates $\beta\theta Re_\theta$. The black thick solid line and thick dashed lines correspond to the stability limit and the curve of maximum amplification rate, respectively. The present LES results are highlighted by the gray box, considering the turbulent Görtler number $G_T = U_\infty \theta / \nu_t(\theta/R)^{1/2}$.

In the linear region, the computed velocity field within z is compared with the theoretical expression of the spatial modes $\hat{\mathbf{u}}$. We expect the present results to fit the expression of the velocity disturbances defined in the LSA,

$$\langle \hat{\mathbf{u}} \rangle'_t(\xi, \psi, z) = \hat{\mathbf{u}}(\psi) [\cos(\alpha z), \cos(\alpha z), \sin(\alpha z)] \exp(\beta \xi). \quad (12)$$

In order to compute the spatial mode $\hat{\mathbf{u}}$ using Eq. (12), we perform a cross-correlation of the fluctuation velocity $\langle \hat{\mathbf{u}} \rangle'_t$ and the harmonic functions $[\cos(\alpha z), \cos(\alpha z), \sin(\alpha z)]$, where α is obtained using the spanwise FFT. The spatial growth rate β is not needed since $\hat{\mathbf{u}}$ is normalized by the maximum value of \hat{u} denoted by \hat{u}_{max} (Floryan and Saric³). For the spatial mode presented in Fig. 10, we observed a correlation accuracy above 90%.

The ensemble average profiles at $\xi/\delta_0 = 7$ representative of the linear region are shown in Figs. 10(a)–10(c) as solid lines and compared with the obtained LSA solutions (dashed lines). The dispersion of the computed local modes is highlighted with the shaded regions. The agreement is good, with exception of a slight shift between the two curves and an overestimation of \hat{v} , more likely due to the simultaneous presence of other wavelengths with similar amplitudes in the simulation profiles, as observed in Fig. 8(a). The discrepancies could also be inferred to non-parallel effects present in the LES simulations.

The same statistical analysis is applied to the higher dominant wavelength λ_2 both in the initial linear region ($2\delta_0 < \xi < 11\delta_0$) and in the turbulent region ($\xi > 35\delta_0$) [Figs. 10(d)–10(f)]. In the linear region, spatial modes associated with λ_2 obtained from the simulation compare well with the LSA modes (see the insets in bottom

TABLE I. Physical configuration and numerical resolution. The references are sorted by G_{θ_0} in the ascending order.

	Re_{θ_0}	G_{θ_0}	$\left(\frac{R}{\theta_0}\right)^{1/2}$	Triggering method	$\Delta\xi^+ \times \Delta\psi^+ \times \Delta z^+$
Méndez <i>et al.</i> ²⁰	75	1.5	50.0	Roughness elements	$19.10 \times 0.55 \times 5.80$
Schrader <i>et al.</i> ¹⁴	75	1.5	50.0	Roughness elements	$15.70 \times 0.70 \times 7.10$
Schultz and Volino ²²	133	5.3	25.0	Free-stream turbulence	...
Present study	210	13.4	16.0	Spontaneous	$04.90 \times 0.17 \times 4.90$
Present study	290	18.4	16.0	Spontaneous	$04.90 \times 0.17 \times 4.90$
Present study	1175	75.0	16.0	Spontaneous	$04.90 \times 0.17 \times 4.90$
Örlü and Schlatter ²³	55	∞	0.0	Tripping at $Re_\theta = 55$	$25.30 \times 14.2 \times 10.8$
Örlü and Schlatter ²³	750	∞	0.0	Tripping at $Re_\theta = 750$	$25.30 \times 14.2 \times 10.8$

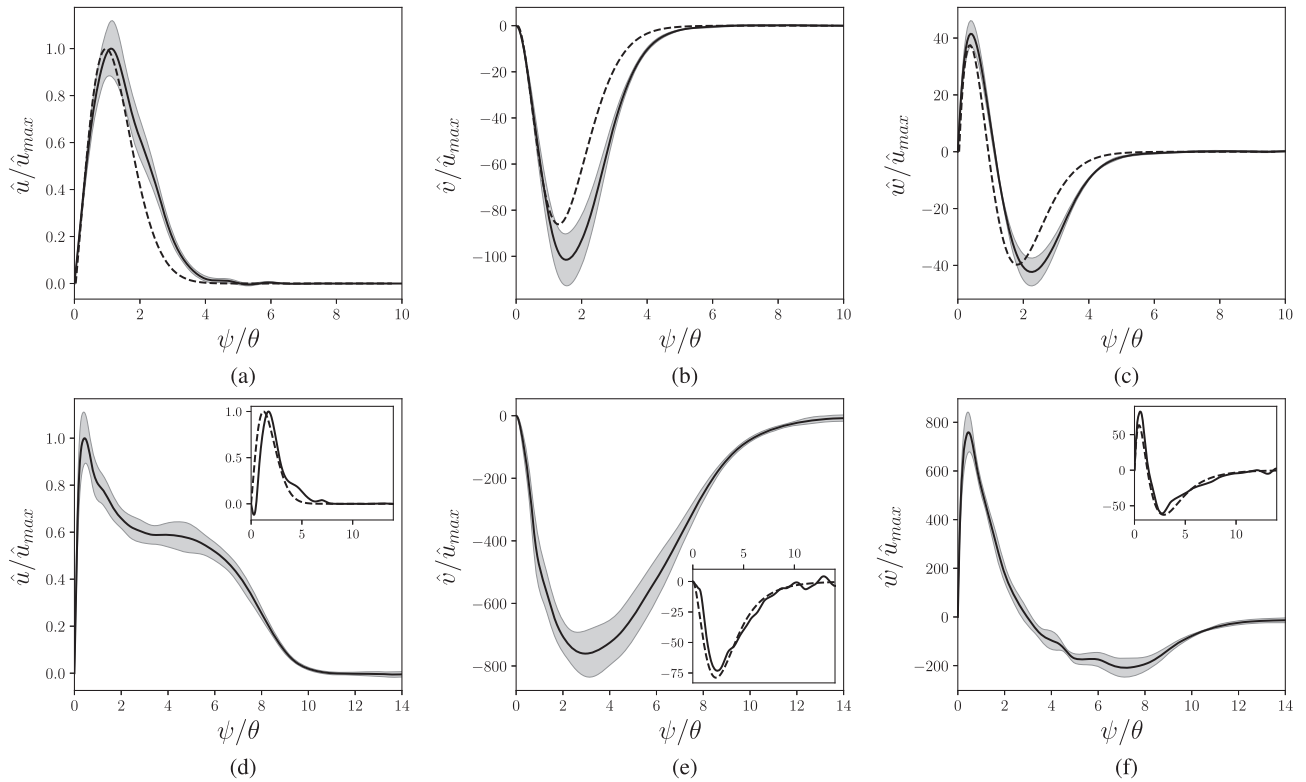


FIG. 10. Ensemble average of the spatial modes (\hat{u} , \hat{v} , \hat{w}) normalized by \hat{u}_{max} obtained from LES (solid lines) and theoretical predictions using LSA (dashed lines). The dispersion of the local modes from the LES simulation is highlighted by the shaded gray regions. [(a)–(c)] Spatial modes associated with λ_1 in the linear region ($\xi/\delta_0 = 7$). [(d)–(f)] Spatial modes associated with λ_2 in the turbulent region ($\xi/\delta_0 = 40$) with insets showing the spatial modes associated with λ_2 in the linear region compared to LSA.

panels of Fig. 10), meaning that λ_2 is present and grows from the beginning of the computational domain. It is found that the local disturbance velocity modes, calculated at different z positions, collapse, and a unique spatial mode emerges. In the turbulent region, the spatial modes \hat{v} and \hat{w} have a similar shape as those in the linear region but with a relaxation of the profile in the wall-normal direction; more importantly, \hat{u} is strictly positive, \hat{v} is strictly negative, and \hat{w} is positive near the wall and negative in the outer layer, as it is the case in the initial linear growth region. The distribution of the \hat{u} mode is turbulent-like due to its much closer-to-wall peak and the energetic fluctuations in the middle of the boundary layer. This observation suggests that the sustaining of λ_2 is due to the non-linear interaction of the large scales within the boundary layer, which is intrinsically taken into account in the definition of the turbulent Görtler number G_T , instead of the classical Görtler number G_θ . In terms of amplitude, the observed spatial modes associated with λ_2 have a much larger amplitude in the turbulent region than in the linear region, as expected. The existence of the spatial modes in the turbulent region is thus consistent with the observation of streamwise Görtler-like vortices in the turbulent region reported in Fig. 5(b).

C. Skin friction coefficient

The presence of dominant wavelengths is expected to have an effect on several properties of the flow, especially on the mean wall

shear stress $\langle \tau_w \rangle_t = \mu \partial_\psi \langle u \rangle_t|_{\psi=0}$ or, in its non-dimensional form, the mean skin friction coefficient $\langle C_f \rangle_t = \langle \tau_w \rangle_t / (0.5 \rho U_\infty^2)$.

In Fig. 11, we show the distribution of $\langle C_f \rangle_t$ over the full computational domain normalized with the spanwise-averaged skin friction coefficient $\langle C_f \rangle_{t,z}$ in order to assess the heterogeneity of the friction in the spanwise direction. The development of the Görtler instability clearly leads to a steady spanwise heterogeneity of $\langle C_f \rangle_t$ within the linear and non-linear regions ($2 < \xi/\delta_0 < 22$), as also reported in previous studies.^{12–15,20,22} In our study, however, this heterogeneity clearly persists also in the turbulent region, as highlighted by the inset box in Fig. 11 ($40 < \xi/\delta_0 < 45$). The spanwise fluctuations of $\langle C_f \rangle_t$ grow in the linear and non-linear regions ($2 < \xi/\delta_0 < 22$) up to 3.5 times the local spanwise-average $\langle C_f \rangle_{t,z}$ and up to 1.4 times in the transitional and turbulent regions ($\xi/\delta_0 > 22$).

The phase-based statistical treatment given in Eq. (11) is also applied to the skin friction coefficient $\langle C_f \rangle_t$. Figure 12(a) shows the evolution of the mean skin friction coefficient $\langle C_f \rangle_{t,z}$ (thick solid line) as a function of the Reynolds number Re_θ . Laminar and turbulent laws from Smits *et al.*³⁴ (dashed gray lines) are also reported for comparison. The evolution of $\langle C_f \rangle_t$ at upwash and downwash locations is computed using the reduced streamwise velocity field $\hat{u}(\xi, \psi, z)$. Upwash and downwash locations are defined with respect to the two dominant wavelengths λ_1 and λ_2 represented in Fig. 12 as dotted lines. The skin friction coefficient $\langle C_f \rangle_{t,z}$ detaches quickly from the laminar solution at the inflow (lower black dashed line) due

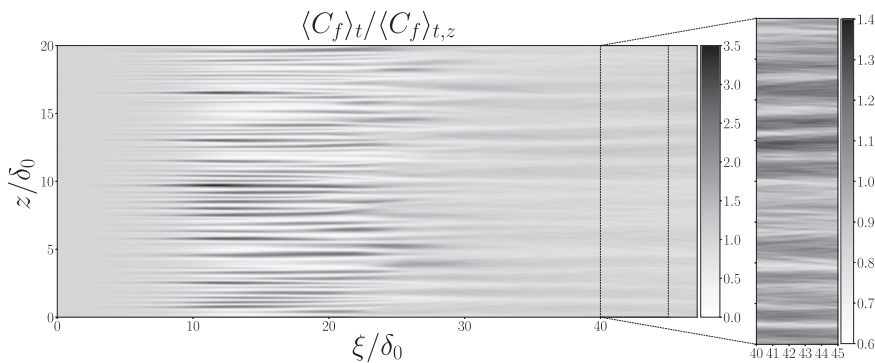


FIG. 11. Curved wall colored by the mean skin friction coefficient $\langle C_f \rangle_t$, normalized by the local spanwise averaged skin friction coefficient $\langle C_f \rangle_{t,z}$. The zoomed area in the inset ($40 < \xi/\delta_0 < 45$) highlights the persistence of the heterogeneity in the fully turbulent region.

to the high initial imposed Reynolds number $Re_{\theta,0} = 1175$. In the linear region ($1175 < Re_{\theta} < 1220$), with the dominant wavelength λ_1 , upwash and downwash effects start to appear. In the following non-linear region, $\langle C_f \rangle_{t,z}$ upwash and downwash effects both increase noticeably. When saturation occurs, upwash and downwash effects slowly diminish, and $\langle C_f \rangle_t$ is found to be homogeneous with respect to λ_1 .

The rapid onset of the second dominant wavelength λ_2 after ceasing of λ_1 induces a non-homogeneous distribution of $\langle C_f \rangle_t$ in both the transition and turbulent regions. Upwash and downwash effects with respect to λ_2 start to appear right after the transition to turbulence, at $Re_{\theta} = 1500$, and do not vanish within the limits of the present computational domain. The values of $\langle C_f \rangle_{t,z}$ approach and slightly exceed the predictions for the turbulent boundary layer over a flat plate³⁴ in the final part of the computational domain (Fig. 12).

This is very different from what has been reported before^{7,13,14,20} at lower Reynolds Re_{θ} and Görtler G_{θ} numbers. In those

studies, the spanwise-averaged skin friction coefficient $\langle C_f \rangle_{t,z}$ in the non-linear region clearly overshoots the theoretical predictions for a turbulent boundary layer over a flat plate and the skin friction coefficient is found to be larger already in the transition region corresponding to the domain of existence of the first unstable mode λ_1 . Here, $\langle C_f \rangle_{t,z}$ slightly exceeds the turbulent prediction only for the second dominant wavelength of the Görtler instability in the turbulent domain, as shown in Fig. 12(a). We compare our results with those of Méndez *et al.*²⁰ and Örlü and Schlatter,²³ which are represented as squares and circles in Fig. 12(b), respectively. We also report results from additional two simulations we performed, in which we fixed the initial Reynolds number $Re_{\theta} = 210$ (light gray line) and $Re_{\theta} = 290$ (dark gray line), keeping all other conditions identical. Our results at lower initial Re_{θ} follow those of Méndez *et al.*²⁰ and we also report an overshoot of the skin friction coefficient for the first dominant wavelength (cf. also the work of Ducoin *et al.*⁷).

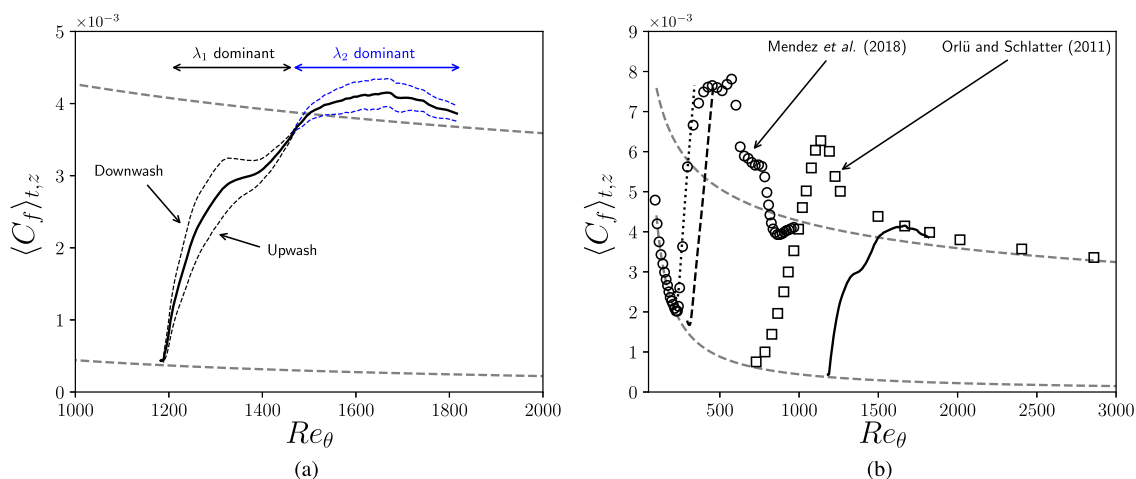


FIG. 12. (a) Evolution of the spanwise-averaged mean skin friction coefficient $\langle C_f \rangle_{t,z}$ (black solid line) and the local mean skin friction coefficient $\langle C_f \rangle_t$ at upwash (lower line) and downwash (upper line) locations with respect to λ_1 (black dashed lines) and λ_2 (blue dashed lines), as a function of Re_{θ} . The gray dashed lines represent theoretical laminar ($C_f = 0.441Re_{\theta}^{-1}$) and turbulent ($C_f = 0.024Re_{\theta}^{-1/4}$) laws, respectively, from Smits *et al.*³⁴ (b) Comparison with existing data [circles— $Re_{\theta} = 75$ (Méndez *et al.*²⁰); squares— $Re_{\theta} = 750$ (Örlü and Schlatter²³)] and LES simulations at lower Re_{θ} and G_{θ} [dashed black line for $(Re_{\theta}, G_{\theta}) = (210, 13.4)$ and dotted black line for $(Re_{\theta}, G_{\theta}) = (290, 18.4)$].

The high value of initial Re_θ induces non-linear effects that act primarily on smaller wavelengths, i.e., on the first appearing Görtler wavelength λ_1 . This induces a fast damping of the wavelength λ_1 , resulting in a different behavior for the skin friction coefficient C_f , where an overshoot of the turbulent flat plate prediction is not observed for the first appearing unstable Görtler wavelength. The results of Örlü and Schlatter²³ for large initial Re_{θ_0} report an overshoot of C_f during transition to turbulence. Here, the rapid onset of the second wavelength λ_2 allows C_f to continuously increase until it reaches and slightly exceeds the flat plate turbulent prediction, while approaching the flat plate turbulent law at the end of the computational domain.

Besides the different effects induced by initial conditions (such as tripping methods), the presence of an overshoot for the skin friction coefficient C_f appears to depend on the curvature $\sqrt{\theta/R}$ for a fixed value of the Görtler number G_θ , as reported in the work of Méndez *et al.*²⁰ They observed a diminution of the overshoot of C_f at a given Görtler number when the radius of curvature R was increased.

IV. SUMMARY AND CONCLUSIONS

A large-eddy simulation of a boundary layer flow over a concave wall has been performed using a Blasius inflow profile and without turbulence and wavelength forcing. The inlet Reynolds and Görtler numbers are $Re_{\theta_0} = 1175$ and $G_{\theta_0} = 75$, respectively. The transition to turbulence is induced by the natural development of the Görtler instability, and a developed turbulent region is reached at the end of the computational domain with maximum $Re_\theta = 1800$ and $G_\theta = 140$.

The developed flow over a concave wall exhibits steady large-scale vortical structures that induce a spanwise heterogeneity of the mean flow properties even in the developed turbulent region with a first clear wavelength in the initial development region $\lambda_1 = 0.385\delta_0$ and a second clear wavelength $\lambda_2 = 1.55\delta_0$ in the turbulent region.

The predictions of both the most amplified wavelength along with the associated spatial modes obtained by extending the LSA of Floryan and Saric³ to a wider parameter domain of G_θ and the non-dimensional wavelength Λ well compare to the computed wavelength and the spanwise averaged spatial modes in the linear region for λ_1 . The dominant wavelength λ_2 in the turbulent domain is well predicted with the LSA if a turbulent Görtler number is considered, in which the kinematic viscosity ν is replaced by the turbulent viscosity ν_t , as proposed by Tani.¹¹ In addition, the spatial modes associated with λ_2 converge with a low scatter in the turbulent region.

The skin friction coefficient $\langle C_f \rangle_t$ increases locally up to a factor of 3.5 in the non-linear region of dominance of λ_1 and up to a factor of 1.4 in the developed turbulent region for the downwash location of the λ_2 Görtler instability, very different from the homogeneous distribution of $\langle C_f \rangle_t$ reported previously in the literature, in which no Görtler vortices develop in the turbulent region because the estimated turbulent Görtler number is close or even below the neutral stability curve. Thus, the flow in the turbulent region becomes Görtler stable. The high value of initial Re_θ induces non-linear effects that act primarily on the first appearing Görtler wavelength λ_1 damping its growth so that the skin friction coefficient

C_f slightly exceeds the flat plate turbulent prediction for the second dominant wavelength λ_2 at the end of the computational domain, and no overshoot of C_f is reported in the region of dominance of λ_1 . Additional simulations were performed with a smaller initial $Re_{\theta,0}$ are in agreement with previous studies with an overshoot of C_f for the first dominant Görtler wavelength with respect to the turbulent plate predictions.

ACKNOWLEDGMENTS

This work has been supported by a grant from Labex OSUG (Investissements d'avenir—ANR10 LABX56). V. Moureau and G. Lartigue (CORIA) and the SUCCESS scientific group are acknowledged for providing the YALES2 code. This work was granted access to the HPC resources of IDRIS under Allocation No. 2019-A0060107567 made by GENCI.

Special thanks goes to E. J. Hopfinger for fruitful discussions.

DATA AVAILABILITY

The data that support the findings of this study are available from the corresponding author upon reasonable request.

REFERENCES

- ¹H. Görtler, "Über eine dreidimensionale Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden," *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* **2**, 1–26 (1940).
- ²A. M. O. Smith, "On the growth of Taylor–Görtler vortices along highly concave walls," *Q. Appl. Math.* **13**, 233–262 (1955).
- ³J. M. Floryan and W. S. Saric, "Stability of Görtler vortices in boundary layers," *AIAA J.* **20**, 316–324 (1982).
- ⁴P. Hall, "The linear development of Görtler vortices in growing boundary layers," *J. Fluid Mech.* **130**, 41–58 (1983).
- ⁵W. S. Saric, "Görtler vortices," *Annu. Rev. Fluid Mech.* **26**, 379–409 (1994).
- ⁶S. Navarro-Martinez and O. R. Tutty, "Numerical simulation of Görtler vortices in hypersonic compression ramps," *Comput. Fluids* **34**, 225–247 (2005).
- ⁷A. Ducoin, M. S. Shadloo, and S. Roy, "Direct numerical simulation of flow instabilities over Savonius style wind turbine blades," *Renewable Energy* **105**, 374–385 (2017).
- ⁸E. J. Hopfinger, A. Kurniawan, W. H. Graf, and U. Lemmin, "Sediment erosion by Görtler vortices: The scour-hole problem," *J. Fluid Mech.* **520**, 327–342 (2004).
- ⁹I. Albayrak, E. J. Hopfinger, and U. Lemmin, "Near-field flow structure of a confined wall jet on flat and concave rough walls," *J. Fluid Mech.* **606**, 27–49 (2008).
- ¹⁰C. Brun, "Large-Eddy simulation of a katabatic jet along a convexly curved slope: 2. Evidence of Görtler vortices," *J. Geophys. Res. Atmos.* **122**, 5190–5210, <https://doi.org/10.1002/2016jd025416> (2017).
- ¹¹I. Tani, "Production of longitudinal vortices in the boundary layer along a concave wall," *J. Geophys. Res.* **67**, 3075–3080, <https://doi.org/10.1029/jz067i008p03075> (1962).
- ¹²J. D. Swearingen and R. F. Blackwelder, "The growth and breakdown of streamwise vortices in the presence of a wall," *J. Fluid Mech.* **182**, 255–290 (1987).
- ¹³T. Tandiono, S. H. Winoto, and D. A. Shah, "Spanwise velocity component in nonlinear region of Görtler vortices," *Phys. Fluids* **25**, 104104 (2013).
- ¹⁴L.-U. Schrader, L. Brandt, and T. A. Zaki, "Receptivity, instability and breakdown of Görtler flow," *J. Fluid Mech.* **682**, 362–396 (2011).
- ¹⁵V. Malatesta, L. F. Souza, and J. T. C. Liu, "Influence of Görtler vortices spanwise wavelength on heat transfer rates," *Comput. Fluids Therm. Sci.* **5**, 389–400 (2013).
- ¹⁶L. F. Souza, "On the odd and even secondary instabilities of Görtler vortices," *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **31**, 405–425 (2017).

- ¹⁷I. Marusic, B. J. McKeon, P. A. Monkewitz, H. M. Nagib, A. J. Smits, and K. R. Sreenivasan, “Wall-bounded turbulent flows at high Reynolds numbers: Recent advances and key issues,” *Phys. Fluids* **22**, 065103 (2010).
- ¹⁸P. Schlatter, Q. Li, G. Brethouwer, A. Johansson, and D. Henningson, “Structure of a turbulent boundary layer studied by DNS,” in *Direct and Large-Eddy Simulation VIII* (Springer, 2011), pp. 9–14.
- ¹⁹P. Schlatter and R. Örlü, “Inflow length and tripping effects in turbulent boundary layers,” *J. Phys.: Conf. Ser.* **318**, 022018 (2011).
- ²⁰M. Méndez, M. S. Shadloo, A. Hadjadj, and A. Ducoin, “Boundary layer transition over a concave surface caused by centrifugal instabilities,” *Comput. Fluids* **171**, 135–153 (2018).
- ²¹D. S. Park and P. Huerre, “Primary and secondary instabilities of the asymptotic suction boundary layer on a curved plate,” *J. Fluid Mech.* **283**, 249–272 (1995).
- ²²M. P. Schultz and R. J. Volino, “Effects of concave curvature on boundary layer transition under high freestream turbulence conditions,” *J. Fluids Eng.* **125**, 18–27 (2003).
- ²³R. Örlü and P. Schlatter, *Inflow Length and Tripping Effects in Turbulent Boundary Layers* (IOP Publishing, 2011), p. 022018.
- ²⁴V. Moureau, P. Domingo, and L. Vervisch, “Design of a massively parallel CFD code for complex geometries,” *C. R. Mécanique* **339**, 141–148 (2011).
- ²⁵A. J. Chorin, “Numerical solution of the Navier–Stokes equations,” *Math. Comput.* **22**, 745–762 (1968).
- ²⁶M. Malandain, N. Maheu, and V. Moureau, “Optimization of the deflated conjugate gradient algorithm for the solving of elliptic equations on massively parallel machines,” *J. Comput. Phys.* **238**, 32–47 (2013).
- ²⁷M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, and W. H. Cabot, “A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model,” *Phys. Fluids* **3**, 1760–1765 (1991).
- ²⁸Y. Zang, R. L. Street, and J. R. Koseff, “A dynamic mixed subgrid-scale model and its application to turbulent recirculating flows,” *Phys. Fluids A* **5**, 3186–3196 (1993).
- ²⁹I. Orlanski, “A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows,” *J. Comput. Phys.* **21**, 251–269 (1976).
- ³⁰S. B. Pope, *Turbulent Flows* (Cambridge University Press, 2001).
- ³¹P. Benard, G. Balarac, V. Moureau, C. Dobrzynski, G. Lartigue, and Y. D’Angelo, “Mesh adaptation for large-eddy simulations in complex geometries,” *Int. J. Numer. Methods Fluids* **81**, 719–740 (2016).
- ³²P. Petitjeans, “Étude expérimentale des instabilités de couches limites sur des parois concaves: Instabilité de Görtler,” Ph.D. thesis, 1992.
- ³³F. H. Clauser, “The turbulent boundary layer,” *Adv. Appl. Mech.* **4**, 1–51 (1956).
- ³⁴A. Smits, N. Matheson, and P. Joubert, “Low-Reynolds-number turbulent boundary layers in zero and favorable pressure gradients,” *J. Ship Res.* **27**, 147–157 (1983).

6

Analogie de Bradshaw : effets de courbure vs. effets de flottabilité

Résumé : Dans ce chapitre, les effets de courbure et de flottabilité sur les propriétés turbulentes de l'écoulement sont étudiées. Pour ce faire, l'analogie entre les effets de courbure et les effets de flottabilité proposée par Bradshaw (1969) est utilisée. Dans un premier temps, l'analyse se porte sur un écoulement de couche limite neutre à haut nombre de Reynolds ($Re_{\delta_0} = 10000$) se développant sur paroi courbe et les effets de courbure sont analysés en détail. Ces résultats sont ensuite adaptés pour un écoulement de couche limite neutre à Reynolds modéré ($Re_{\delta_0} = 1800$) où la couche limite est en transition à la turbulence. Cet écoulement nous sert alors de référence pour une dernière étude paramétrique à Reynolds modéré où les effets de flottabilité sont pris en compte. Des conditions de stratification linéaire et de refroidissement pariétal sont simulées afin se rapprocher du cas réel de vent catabatique. L'analogie de Bradshaw est pleinement exploitée pour décrire la compétition entre la stabilisation de la couche limite par effets de flottabilité et la déstabilisation par effets de courbure.

Sommaire

6.1	Effets de courbure sur le champ turbulent	122
6.1.1	Cas de référence à haut Reynolds ($Re_{\delta_0} = 10^4$)	122
6.1.2	Bilan du tenseur de Reynolds	124
6.1.3	Nombre de Richardson de courbure	125
6.1.4	Définition alternative du nombre de Richardson de courbure	129
6.1.5	Longueur de mélange et longueur de courbure	130
6.1.6	Corrections de la loi logarithmique de vitesse	132
6.1.7	Effets de courbure et présence de tourbillons longitudinaux	134
6.1.8	Bilan	139
6.1.9	Effets de courbure à Reynolds modéré ($Re_{\delta_0} = 1800$)	140
6.2	Effets de flottabilité sur le champ turbulent	146
6.2.1	Configuration physique avec refroidissement à la paroi	146
6.2.2	Résultats statistiques	147
6.2.3	Bilan de TKE	152
6.2.4	Échelles de longueur caractéristiques	154
6.2.5	Bilan du terme de cisaillement turbulent	155
6.2.6	Analogie de Bradshaw pour les Richardson de flux et de cisaillement	156

6.1 Effets de courbure sur le champ turbulent

Le travail de Bradshaw (1969, 1973) met en évidence les effets des forces de flottabilité sur les propriétés turbulentes d'un écoulement de couche limite classique (plaque plane). Il propose également une analogie entre les effets de flottabilité et les effets de courbure, ainsi que des critères quantitatifs caractérisant ces deux effets.

Les écoulements géophysiques qui motivent ce travail de thèse sont d'une part turbulents et d'autre part soumis aux deux effets mentionnés à savoir la courbure (terrain montagneux, fond marin) et la flottabilité. L'étude de Bradshaw est donc utilisée comme fil rouge de l'analyse physique présentée ici. Dans un premier temps, on présente des résultats issus de simulations numériques où seuls les effets de courbure sont présents. Dans un second temps, les écoulements considérés sont soumis aux deux effets simultanément.

6.1.1 Cas de référence à haut Reynolds ($Re_{\delta_0} = 10^4$)

Le cas de référence analysé ne présente que l'effet de courbure. La configuration physique correspond à celle présentée dans le chapitre 5 (Dagaut et al., 2021). Le domaine de calcul est courbe, une couche limite laminaire de Blasius se développe et la transition à la turbulence se fait par le déclenchement spontané de l'instabilité de Görtler. Dans la région turbulente, des traces de l'instabilité de Görtler subsistent. L'évolution du profil de vitesse longitudinale $\langle u \rangle_{t,z}$, moyenné

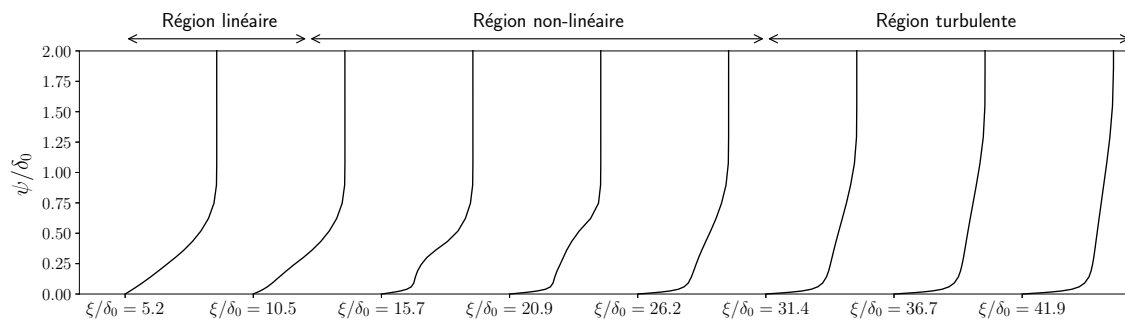


Figure 6.1. Évolution spatiale du profil de vitesse longitudinale moyen $\langle u \rangle_{t,z}$. Les résultats statistiques sont présentés pour les positions longitudinales $\xi/\delta_0 = \{5.2, 10.5, 15.7, 20.9, 26.2, 31.4, 36.7, 41.9\}$.

dans le temps et dans la direction transverse, dans le domaine de calcul est montrée en figure 6.1. Les premiers profils de vitesse correspondent à la région laminaire de l'écoulement ou l'on voit les effets de la présence de l'instabilité de Görtler (point d'inflexion très clair dans les profils de vitesse). L'épaisseur des profils, i.e. l'épaisseur de couche limite δ_{99} , croît dans la direction longitudinale et les profils de vitesse tendent vers des profils de couche limite turbulente. Le point d'inflexion reste présent sur les profils dans la région turbulente mais de façon moins marquée. La vitesse longitudinale adimensionnelle $\langle u^+ \rangle_{t,z}$ est ensuite tracée en fonction de la distance normale adimensionnelle ψ^+ pour différentes positions de la région turbulente en figure 6.2. Les lois de couche limite turbulente sont également tracées, à savoir $u^+ = \psi^+$ dans la sous-couche visqueuse ($\psi^+ < 5$) et $u^+ = (1/0.41) \ln \psi^+ + 5.2$ dans la zone logarithmique (Pope, 2000). La loi linéaire (sous-couche visqueuse) est bien décrite et une loi logarithmique modifiée par effets de courbure se développe dans la région turbulente. Le point d'inflexion sur le profil de vitesse est d'autant plus visible sur les profils de $u^+ = f(\psi^+)$, ce qui confirme la présence d'une forme de l'instabilité de Görtler dans la région turbulente de l'écoulement. On verra au paragraphe 6.1.4 comment les effets de courbure peuvent être intégrés dans une correction linéaire de cette loi logarithmique.

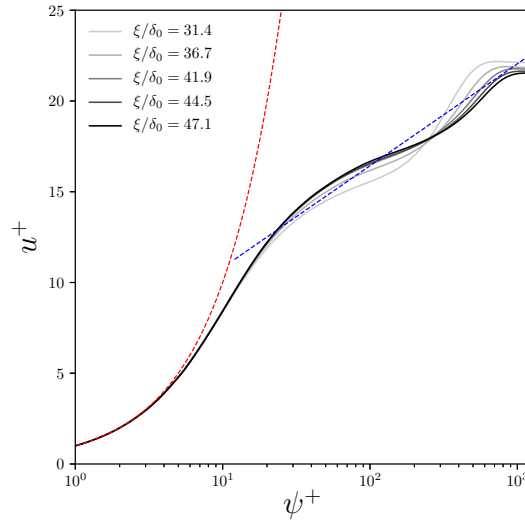


Figure 6.2. Vitesse longitudinale moyenne normalisée par les échelles visqueuses $\langle u \rangle_{t,z}^+$, en fonction de ψ^+ pour différentes positions longitudinales ξ/δ_0 .

La turbulence de l'écoulement peut être caractérisée dans une première approche par les écarts types des vitesses, notés u_{RMS} , v_{RMS} et w_{RMS} pour les composantes longitudinale, normale et transverse respectivement. On présente les profils des écarts types de vitesses en figure 6.3 pour différentes positions longitudinale ξ , que l'on normalise par u_τ et que l'on compare aux résultats obtenus par Eitel-Amor et al. (2014) dans une simulation numérique directe d'une couche limite turbulente sur plaque plane pour un nombre de Reynolds $Re_\theta = 2400$. Les profils ainsi obtenus semblent

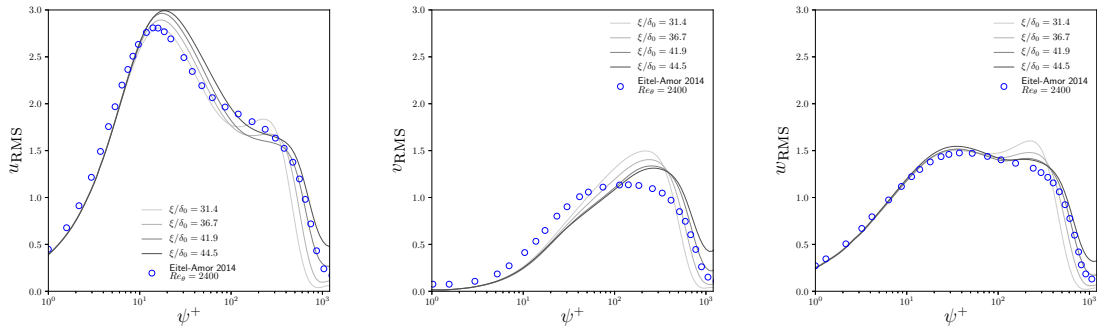


Figure 6.3. Profils des trois composantes de l'écart type de vitesse $\mathbf{u}_{RMS} = \sqrt{\langle u_i' u_i' \rangle}$ normalisées par u_τ pour différentes position longitudinales ξ/δ_0 . Comparaison avec une DNS de couche limite turbulente sur plaque plane à $Re_\theta = 2400$ (Eitel-Amor et al., 2014).

correspondre aux profils attendus pour une couche limite turbulente. L'écart type de la vitesse longitudinale est maximal proche de la paroi puis admet un plateau dans la zone logarithmique de la couche limite et tend vers 0 à l'extérieur de la couche limite. L'écart type de la vitesse normale est maximal dans la zone logarithmique et tend vers 0 à l'extérieur de la couche limite. L'écart type de la vitesse transverse admet 2 maxima, le premier dans la zone proche de la paroi et l'autre dans la zone logarithmique. Les ordres de grandeur obtenus sont similaires à ceux de Eitel-Amor et al. (2014) ce qui indique que la turbulence est développée dans notre écoulement.

On peut également analyser le tenseur de Reynolds $\langle u'_i u'_j \rangle$ ainsi que l'énergie cinétique turbulente k pour caractériser la turbulence. On trace en figure 6.4 les composantes les plus importantes du tenseur de Reynolds $\langle u'u' \rangle^+$, $\langle v'v' \rangle^+$, $\langle w'w' \rangle^+$ et $\langle u'v' \rangle^+$ ainsi que l'énergie cinétique turbulente k^+ pour une position longitudinale qui correspond à la région turbulente de l'écoulement. On com-

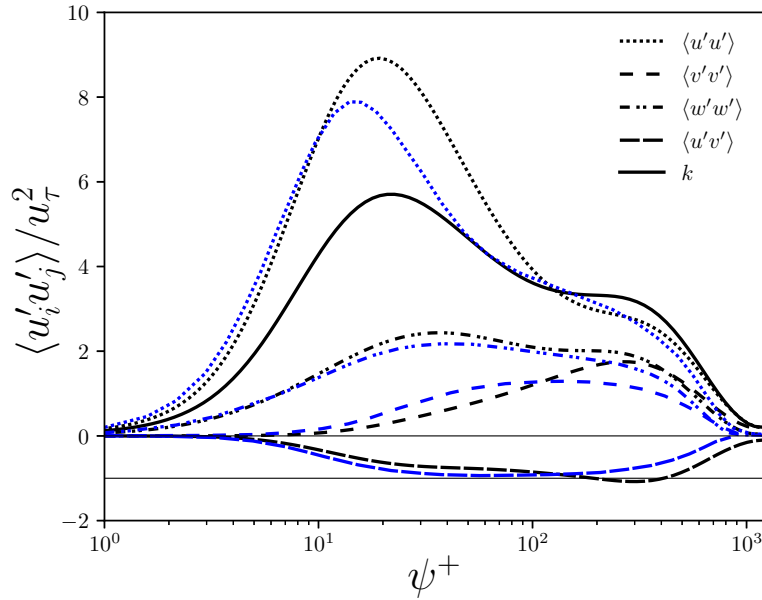


Figure 6.4. Composantes principales du tenseur de Reynolds $\langle u'_i u'_j \rangle$ pour une position donnée correspondant à la région de turbulence développée. Comparaison avec une simulation DNS à $Re_\theta = 2400$ (Eitel-Amor et al., 2014) (courbes bleues).

pare encore une fois les résultats obtenus avec ceux présentés par Eitel-Amor et al. (2014). $\langle u'u' \rangle^+$, $\langle v'v' \rangle^+$, $\langle w'w' \rangle^+$ ne sont autres que les carrés respectifs de u_{RMS} , v_{RMS} et w_{RMS} . Le cisaillement turbulent $\langle u'v' \rangle^+$ obtenu est de l'ordre de 1 ce qui est caractéristique d'un écoulement de couche limite turbulente (voir chapitre 1). Le quasi-plateau observé pour $40 < \psi^+ < 400$ confirme la présence d'une loi logarithmique dans la couche limite turbulente.

6.1.2 Bilan du tenseur de Reynolds

Les équations de transport, ou équations bilan, des termes $\langle u'u' \rangle$, $\langle v'v' \rangle$, $\langle w'w' \rangle$ dans le repère courbe, sont données dans leur forme complète en annexe A. Ici on les simplifie de telle sorte qu'il ne reste plus que les termes prépondérants dans le cas d'une couche limite sur paroi courbe 2D, on a alors

$$\left. \begin{aligned}
 0 &= \underbrace{-2\langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial \psi} + \frac{2\langle u'v' \rangle}{R-\psi} \langle u \rangle}_{\text{Cisaillement (M)}} + \underbrace{\frac{2\langle u'v' \rangle}{R-\psi} \langle u \rangle}_{\text{Courbure (C)}} - \underbrace{\frac{2}{\rho_0} \frac{R}{R-\psi} \langle u' \frac{\partial p'}{\partial \xi} \rangle}_{\text{Pression}} + \underbrace{\nu \Delta \langle u'u' \rangle}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\epsilon_{uu}}_{\text{Dissipation}} \\
 0 &= -\frac{4\langle u'v' \rangle}{R-\psi} \langle u \rangle - \frac{2}{\rho_0} \langle v' \frac{\partial p'}{\partial \psi} \rangle + \nu \Delta \langle v'v' \rangle - \epsilon_{vv} \\
 0 &= -\frac{2}{\rho_0} \langle w' \frac{\partial p'}{\partial z} \rangle + \nu \Delta \langle w'w' \rangle - \epsilon_{ww}
 \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

où l'opérateur Laplacien Δ est défini par

$$\Delta(\cdot) = \left(\frac{R}{R-\psi}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(\cdot) + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}(\cdot) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\cdot) - \frac{1}{R-\psi} \frac{\partial}{\partial \psi}(\cdot)$$

Pour l'équation de transport de $\langle u'u' \rangle$, on reconnaît le terme de production classique \mathcal{P} qui fait intervenir le cisaillement vertical moyen, auquel s'ajoute un terme provenant de l'écriture en repère courbe, que l'on appellera la contribution de la courbure ou terme de production par courbure. Le cisaillement turbulent $\langle u'v' \rangle$ étant négatif et la vitesse $\langle u \rangle$ positive, le terme de production par courbure est donc négatif dans la région de la couche limite ce qui signifie que la courbure participe à la « destruction » de la turbulence longitudinale. Le terme de production dans l'équation de transport de $\langle v'v' \rangle$ provient intégralement de l'écriture dans le repère courbe et il est positif dans la région de la couche limite. La courbure participe donc à la production de la turbulence dans la direction normale à la paroi. Il y a donc un transfert de l'énergie de u' vers v' par effets de courbure, ce qui favorise un retour à l'isotropie de la turbulence. Le terme de production dans l'équation de transport de $\langle w'w' \rangle$ est négligeable devant les autres termes.

À partir du jeu d'équations 6.1, l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente k est obtenue

$$0 = - \underbrace{\langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial \psi}}_{\text{Production}} - \underbrace{\frac{\langle u'v' \rangle}{R-\psi} \langle u \rangle}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{\nu \Delta k}_{\text{Diffusion}} - 2\nu \underbrace{\left\{ \left\langle \frac{\partial u'}{\partial \psi} \frac{\partial u'}{\partial \psi} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial v'}{\partial \psi} \frac{\partial v'}{\partial \psi} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial w'}{\partial \psi} \frac{\partial w'}{\partial \psi} \right\rangle \right\}}_{\text{Dissipation}} \quad (6.2)$$

dans laquelle le terme de pression est négligé (voir Pope, 2000). Dans le terme de production de l'équation bilan ainsi obtenue, on reconnaît encore une fois le terme de production par cisaillement qui fait intervenir le cisaillement vertical moyen, noté \mathcal{P}_k^M , ainsi que la contribution de la courbure, notée \mathcal{P}_k^C . Le terme $1/(R-\psi)$ que l'on retrouve dans la production d'énergie cinétique turbulente par courbure \mathcal{P}_k^C , mais également dans les contributions de la courbure aux termes de production de $\langle u'u' \rangle$ et $\langle v'v' \rangle$, joue un rôle important. Ce terme est croissant dans la direction normale à la paroi et il est d'autant plus important que le rayon de courbure R est petit. Par conséquent, la contribution de la courbure à la production d'énergie cinétique turbulente intervient plutôt dans la zone logarithmique (loin de la paroi), plutôt que dans la sous-couche visqueuse (proche de la paroi). On montre les résultats statistiques du bilan de l'équation 6.2, obtenus simulation numérique en figure 6.5(a), en faisant la distinction entre la production de TKE par cisaillement et la production par courbure. Les termes sont adimensionnés par les échelles visqueuses de l'écoulement, i.e. $u_\tau^3/\delta_\nu = u_\tau^4/\nu$ et sont tracés en fonction de ψ^+ . Les résultats montrent un équilibre des termes de diffusion et de dissipation à la paroi (sous-couche visqueuse) et un équilibre entre les termes de production et de dissipation dans la zone logarithmique. La production par courbure intervient à partir de $\psi/\delta_{99} = 0.2$ (i.e. $\psi^+ \approx 140$) comme le montre la figure 6.5(b) où l'on compare les contributions relatives du cisaillement moyen \mathcal{P}_k^M et de la courbure \mathcal{P}_k^C dans la production de k . La faible amplitude de la production par courbure est due au faible rapport $\delta_0/(R-\psi) \approx 3.4 \times 10^{-2}$ qui intervient dans l'expression de \mathcal{P}_k^C . Malgré la faible contribution de la courbure au terme de production de TKE, cette contribution n'est pas nulle et permet de voir que la courbure joue un rôle à partir de $\psi/\delta_{99} \approx 0.2$ et ce jusqu'à l'extérieur de la couche limite.

6.1.3 Nombre de Richardson de courbure

Bradshaw (1969, 1973) propose une analogie entre les effets de courbure et les effets de flottabilité sur la turbulence. Son idée est de reprendre les définitions du nombre de Richardson qui existent

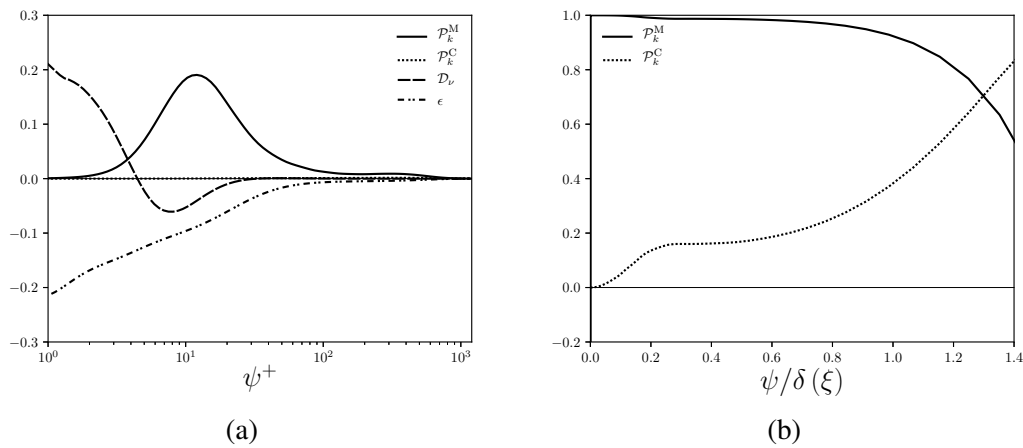


Figure 6.5. (a) Bilan de l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente k simplifiée. Les termes \mathcal{P}_M , \mathcal{P}_C , \mathcal{D}_ν et ϵ correspondent à la production mécanique, production par courbure, diffusion et dissipation respectivement et sont adimensionnée par les échelles visqueuses. (b) Comparaison entre les contributions classique \mathcal{P}_M et par courbure \mathcal{P}_C en fonction de ψ/δ_{99} . Les deux termes sont normalisés de telle sorte que la somme des carrés des contributions soit égale à 1 (voir Pope, 2000).

dans les problèmes impliquant des écoulements stratifiés et de les adapter à un écoulement soumis à des effets de courbure. La première définition du nombre de Richardson qu'il utilise est

$$Ri^C = \left(\frac{-2\langle u \rangle}{(R-\psi)^2} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[(R-\psi) \langle u \rangle \right] \right) / \left(\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial \psi} \right)^2 = 2S(1+S) \quad (6.3)$$

avec $S = -(\langle u \rangle / (R-\psi)) / (\partial \langle u \rangle / \partial \psi)$, qui résulte de l'expression de la fréquence d'oscillation d'une particule revenant à une position d'équilibre après avoir été soumise à un déplacement radial $d\psi$ (Bradshaw, 1969). Cette définition du nombre de « Richardson de courbure » fait écho à la définition découlant de l'expression de la fréquence d'oscillation d'une particule plongée dans un fluide stratifié et revenant à sa position d'équilibre après un déplacement adiabatique dans la direction verticale, appelée fréquence de *Brunt-Väisälä*. Par ailleurs, on note que ce nombre de Richardson est très similaire au critère de Rayleigh Φ défini au chapitre 1 (équation 1.47) qui permet de prédire la stabilité d'un écoulement dont les lignes de courant sont courbées. Dans le cas d'un fluide stratifié, on considère que l'écoulement est stable (par rapport à l'instabilité gravitationnelle) pour les valeurs de Ri positives et instable pour des valeurs de Ri négatives.

On montre le nombre de Richardson de courbure Ri^C obtenu par simulation numérique pour différentes positions longitudinales en figure 6.6(a). Les résultats montrent que le nombre de Richardson obtenu est négatif dans l'intégralité de la région de couche limite. Ce résultat signifie que la couche limite est instable par rapport aux effets de courbure et confirment les conclusions faites au chapitre précédent où les effets de courbure déstabilisent l'écoulement moyen (instabilité de Görtler observée dans la région turbulente).

Une deuxième définition du nombre de Richardson est utilisée par Bradshaw pour poursuivre l'analogie entre les effets de courbure et de stratification, appelée Richardson de flux et noté R_f . Dans un écoulement stratifié, le nombre de Richardson de flux est le rapport entre la production de TKE par flottabilité et la production de TKE par cisaillement. L'analogie que propose Bradshaw pour un écoulement soumis à des effets de courbure est la suivante : il constate que la production de TKE provient à la fois de l'équation de transport de $\langle u'u' \rangle$ (production longitudinale, $\mathcal{P}_{\langle u'u' \rangle}$) et de l'équation de transport de $\langle v'v' \rangle$ (production normale, $\mathcal{P}_{\langle v'v' \rangle}$) et définit le Richardson de flux,

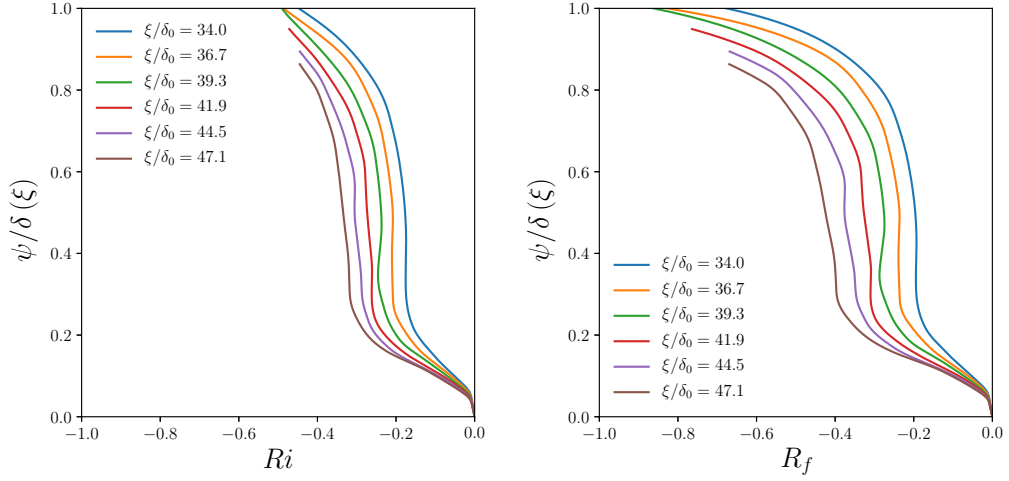


Figure 6.6. (a) Profils verticaux du nombre de Richardson de courbure Ri découlant de l'analogie entre les effets de stratification et de courbure pour différentes positions longitudinales ξ/δ_0 . La direction normale à la paroi est normalisée par l'épaisseur locale de la couche limite $\delta(\xi)$. (b) Profils verticaux du nombre de Richardson de flux R_f^\perp .

que l'on notera R_f^\perp , comme (moins) le rapport de ces deux termes de production.

Le terme de production de l'équation de transport de $\langle u'u' \rangle$ (équation 6.1) est

$$\mathcal{P}_{\langle u'u' \rangle} = -2\langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial \psi} + \frac{2\langle u'v' \rangle}{R-\psi} \langle u \rangle = \frac{-2\langle u'v' \rangle}{R-\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[(R-\psi) \langle u \rangle \right] \quad (6.4)$$

Le terme de production de l'équation de transport de $\langle v'v' \rangle$ (équation 6.1) est

$$\mathcal{P}_{\langle v'v' \rangle} = \frac{-4\langle u'v' \rangle}{R-\psi} \langle u \rangle \quad (6.5)$$

D'après la définition proposée par Bradshaw, le nombre de Richardson de flux de courbure, R_f^\perp , s'écrit donc

$$R_f^\perp = \frac{-\mathcal{P}_{\langle v'v' \rangle}}{\mathcal{P}_{\langle u'u' \rangle}} = \frac{\frac{4\langle u'v' \rangle}{R-\psi} \langle u \rangle}{\frac{-2\langle u'v' \rangle}{R-\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[(R-\psi) \langle u \rangle \right]} = \frac{-2\langle u \rangle}{\frac{\partial}{\partial \psi} \left[(R-\psi) \langle u \rangle \right]} \quad (6.6)$$

On montre en figure 6.6(b) l'évolution du nombre de Richardson de flux de courbure R_f^\perp dans la région de couche limite pour différentes positions longitudinales ξ/δ_0 , obtenus par simulation numérique. Les résultats montrent encore une fois que le nombre de Richardson obtenu est négatif dans la région de la couche limite, quelle que soit la position longitudinale. Ce résultat indique que l'écoulement est instable par rapport aux effets de courbure, c'est à dire que la courbure participe à la production d'énergie cinétique turbulente. On remarque par ailleurs un plateau, dont la valeur dépend de la position longitudinale ξ , dans la région de la couche limite où $0.2 < \psi/\delta(\xi) < 0.8$.

La dernière définition du nombre de Richardson proposée par Bradshaw fait intervenir les termes de production qui apparaissent dans l'équation de transport du flux turbulent de cisaillement $\langle u'v' \rangle$, particulièrement pertinent pour un écoulement de couche limite. En effet, le flux turbulent de

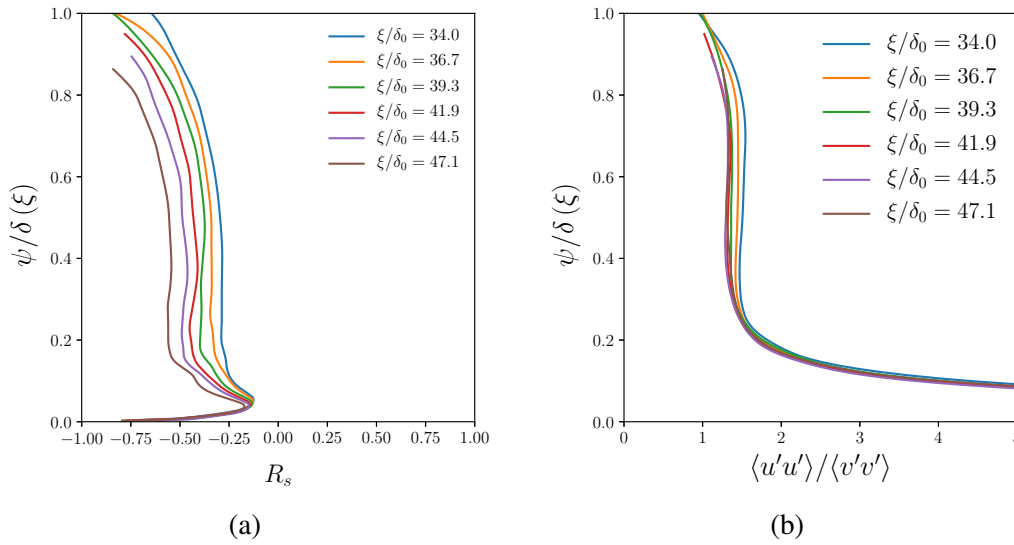


Figure 6.7. (a) Profils verticaux du nombre de Richardson de cisaillement de courbure R_s pour différentes positions longitudinales ξ/δ_0 . La direction normale à la paroi est normalisée par l'épaisseur locale de la couche limite $\delta(\xi)$. (b) Rapport des nombres de Richardson R_s/R_f pour les mêmes position longitudinales ξ/δ_0 .

cisaillement joue un rôle majeur dans la production d'énergie cinétique turbulente. Dans le repère courbe, l'équation de transport de $\langle u'v' \rangle$ s'écrit après simplification des termes négligeables

$$0 = \underbrace{-\frac{\langle v'v' \rangle}{R-\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} [(R-\psi) \langle u \rangle]}_{\text{Production}} - \underbrace{\frac{2}{R-\psi} \langle u \rangle \langle u'u' \rangle}_{\mathcal{P}_{\langle u'v' \rangle}^{\parallel}} = \underbrace{-\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{R}{R-\psi} \langle v' \frac{\partial p'}{\partial \xi} \rangle + \langle u' \frac{\partial p'}{\partial \psi} \rangle \right)}_{\text{Pression}} \quad (6.7)$$

Encore une fois, le terme de production s'écrit comme la somme de deux contributions et selon Bradshaw, la distinction se fait entre le terme de production longitudinale $\mathcal{P}_{\langle u'v' \rangle}^{\parallel}$ (faisant intervenir $\langle u'u' \rangle$) et de production normale $\mathcal{P}_{\langle u'v' \rangle}^{\perp}$ (faisant intervenir $\langle v'v' \rangle$). Le nombre de Richardson proposé est le nombre de Richardson de cisaillement (*shear Richardson number*), noté R_s^{\perp} . En suivant l'analogie de Bradshaw, le nombre de Richardson de cisaillement est le rapport entre (moins) la production normale $\mathcal{P}_{\langle u'v' \rangle}^{\perp}$ et la production longitudinale $\mathcal{P}_{\langle u'v' \rangle}^{\parallel}$, de l'équation 6.7. Le nombre de Richardson de cisaillement de courbure R_s^{\perp} s'écrit donc

$$R_s^{\perp} = \frac{-\mathcal{P}_{\langle u'v' \rangle}^{\perp}}{\mathcal{P}_{\langle u'v' \rangle}^{\parallel}} = \frac{\frac{2}{R-\psi} \langle u \rangle \langle u'u' \rangle}{-\frac{\langle v'v' \rangle}{R-\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} [(R-\psi) \langle u \rangle]} = \frac{\langle u'u' \rangle}{\langle v'v' \rangle} R_f^{\perp} \quad (6.8)$$

On retrouve la définition du nombre de Richardson de flux de courbure R_f^{\perp} dans cette nouvelle définition. Bradshaw mentionne le fait que le rapport des deux nombres de Richardson R_s^{\perp}/R_f^{\perp} est lui aussi un critère de stabilité et qu'un écoulement soumis à des effets de courbure est instable pour des rapports $R_s^{\perp}/R_f^{\perp} < 4$. On présente les résultats du nombre de Richardson de cisaillement de courbure en 6.7(a) et le rapport des nombres de Richardson en figure 6.7(b). Les profils de R_s^{\perp} montrent encore une fois que l'écoulement considéré est soumis à des effets de courbure qui le déstabilisent. Le critère R_s^{\perp}/R_f^{\perp} est intéressant car il suggère que dans la région proche de la

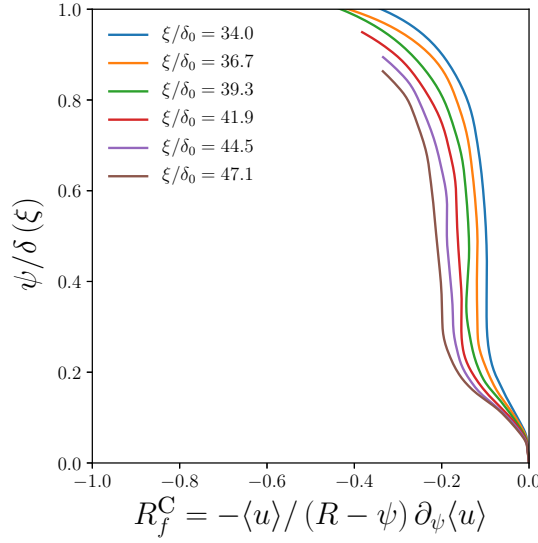


Figure 6.8. Alternative à la définition de Bradshaw (1969) du nombre de Richardson de cisaillement, notée R_f^C , tracée en fonction de ψ/δ pour différentes positions longitudinales ξ/δ_0 . La direction normale à la paroi est normalisée par l'épaisseur locale de la couche limite $\delta(\xi)$

paroi, les effets de courbure ne destabilisent pas l'écoulement ou en d'autres termes, que les effets de courbure ne participent pas à la production de turbulence (i.e. cisaillement turbulent). Dans la région où $0.2 < \psi/\delta(\xi) < 0.8$, on observe un plateau du rapport R_s^\perp/R_f^\perp qui conforte le fait que c'est cette région qui est impactée par les effets de courbure. Par ailleurs, c'est dans cette zone de la couche limite qu'apparaissent les tourbillons de Görtler.

6.1.4 Définition alternative du nombre de Richardson de courbure

Dans la définition proposée par Bradshaw, le nombre de Richardson de flux R_f^\perp fait intervenir les termes de production de l'équation de transport de $\langle u'u' \rangle$ et de $\langle v'v' \rangle$, respectivement $\mathcal{P}_{\langle u'u' \rangle}$ et $\mathcal{P}_{\langle v'v' \rangle}$. Selon son formalisme, les effets de courbure sont portés par $\langle v'v' \rangle$ et la définition du nombre de Richardson de flux qui en découle est $R_f^\perp = -\mathcal{P}_{\langle v'v' \rangle}/\mathcal{P}_{\langle u'u' \rangle}$. En réalité, les effets de courbure interviennent à la fois dans $\mathcal{P}_{\langle u'u' \rangle}$ et $\mathcal{P}_{\langle v'v' \rangle}$ (équation 6.1); il est alors assez difficile de quantifier l'importance des effet de courbure avec cette définition.

Dans l'équation de transport de TKE (équation 6.2), qui est la demie somme des équations de transport de $\langle u'u' \rangle$, $\langle v'v' \rangle$ et $\langle w'w' \rangle$, on peut séparer distinctement le terme de production en une contribution classique \mathcal{P}_k^M et une contribution de la courbure \mathcal{P}_k^C . On propose une alternative à la définition de Bradshaw pour la définition du nombre de Richardson de flux, noté R_f^C , qui est (moins) le rapport des termes de production par courbure \mathcal{P}_k^C et de production par cisaillement \mathcal{P}_k^M dans l'équation de transport de k .

$$R_f^C = \frac{-\mathcal{P}_k^C}{\mathcal{P}_k^M} = \frac{-\langle u \rangle (R - \psi)}{\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial \psi}} \quad (6.9)$$

Les profils de $R_f^C(\psi)$ tracés en figure 6.8 montrent des ordres de grandeur similaires à ce qu'on obtient avec la définition de Bradshaw (1969) (figure 6.6b). Cette définition alternative du nombre de Richardson de flux R_f^C est celle qui sera utilisée lorsqu'on s'intéressera aux longueurs caractéristiques de l'écoulement par la suite.

6.1.5 Longueur de mélange et longueur de courbure

On l'a vu aux chapitres 1 et 2, la longueur de mélange, notée ℓ_m introduite par Prandtl (1925) intervient dans la définition de la viscosité turbulente ν_t utilisée dans les modèles de turbulence dits *fonctionnels*. Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'impact de la courbure sur la longueur de mélange. On rappelle que l'équation qui définit la longueur de mélange ℓ_m à partir du cisaillement turbulent $\langle u'v' \rangle$ et du cisaillement moyen $(\partial \langle u \rangle / \partial \psi)$ est

$$-\langle u'v' \rangle = \ell_m^2 \left(\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial \psi} \right)^2 \quad (6.10)$$

Dans le cas d'une couche limite turbulente sur plaque plane, les propriétés de la zone logarithmique permettent d'exprimer le terme de production de TKE, \mathcal{P}_k (qui équilibre la dissipation ϵ), en fonction des échelles caractéristiques u_τ et ℓ_m , tel que

$$\mathcal{P}_k = \frac{u_\tau^3}{\ell_m} = \frac{u_\tau^3}{\kappa \psi} = \frac{u_\tau^3}{\mathcal{L}_\epsilon} = \epsilon \quad (6.11)$$

où $\mathcal{L}_\epsilon = \kappa \psi$ est l'échelle dissipative et où le cisaillement turbulent $\langle u'v' \rangle = u_\tau^2$ (vérifié en figure 6.4). Pour une couche limite turbulente sur paroi courbe, la production d'énergie cinétique turbulente est issue de deux contributions (voir équation 6.2) : \mathcal{P}_k^M (production par cisaillement) et \mathcal{P}_k^C (production par courbure). Dans la région logarithmique, la production de TKE est égale à la dissipation (la diffusion est négligeable) et l'équation 6.2 devient

$$\mathcal{P}_k^M + \mathcal{P}_k^C = \mathcal{P}_k^M (1 - R_f^C) = \epsilon \quad (6.12)$$

où R_f^C est le nombre de Richardson de courbure défini en équation 6.9. On introduit la longueur de courbure, notée \mathcal{L}_C , comme la longueur caractéristique de la production de TKE par courbure et définie par

$$\mathcal{L}_C = \frac{u_\tau^3}{\mathcal{P}_k^C} = \frac{u_\tau^3 (R - \psi)}{\langle u \rangle \langle u'v' \rangle} \quad (6.13)$$

Le bilan d'énergie cinétique turbulente peut alors être réécrit en faisant apparaître les longueurs mises en jeu. Après simplification on obtient

$$\frac{1}{\ell_m} + \frac{1}{\mathcal{L}_C} = \frac{1}{\mathcal{L}_\epsilon} = \frac{1}{\kappa \psi} \quad (6.14)$$

En faisant intervenir le nombre de Richardson de courbure R_f^C , on obtient une relation entre la longueur de mélange ℓ_m et la longueur dissipative \mathcal{L}_ϵ

$$\ell_m = \mathcal{L}_\epsilon (1 - R_f^C) = \kappa \psi (1 - R_f^C) \quad (6.15)$$

Le nombre de Richardson décrit l'impact de la courbure sur la longueur de mélange ℓ_m . Pour un nombre de Richardson de courbure négatif, c'est à dire quand la courbure déstabilise l'écoulement, la longueur de mélange ℓ_m devient plus grande que \mathcal{L}_ϵ . On présente les résultats issus de notre simulation numérique en figure 6.9. Les échelles de longueur sont normalisées par l'échelle visqueuse $\delta_\nu = \nu / u_\tau$. La longueur de mélange ℓ_m^+ est tracée en noir, la longueur de courbure \mathcal{L}_C est tracée en rouge et la longueur dissipative \mathcal{L}_ϵ est tracée en bleu (avec correction de *van Driest*, équation 1.40). On compare nos résultats à ceux obtenus par simulation numérique directe d'une couche limite sur plaque plane par (Spalart, 1988), pour un nombre de Reynolds $Re_\theta = 1410$ équivalent au notre.

Sur plaque plane, la longueur de mélange ℓ_m est bien décrite par la loi $\ell_m = \mathcal{L}_\epsilon = \kappa \psi$ dans

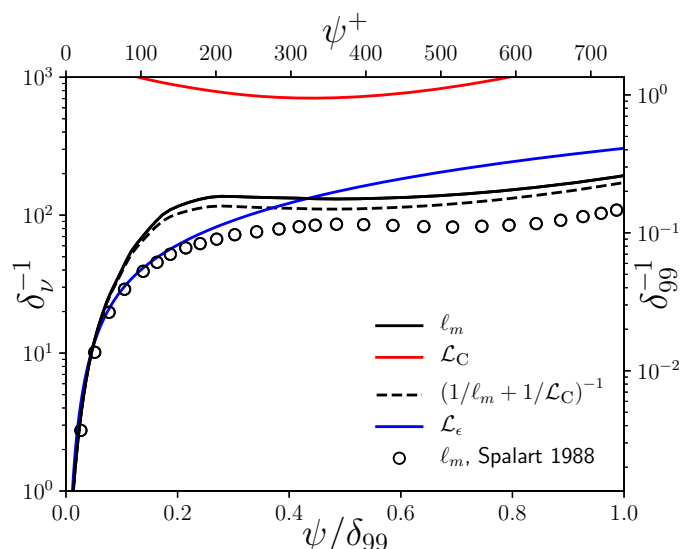


Figure 6.9. Comparaison des échelles de longueur caractéristiques, normalisées par l'échelle visqueuse $\delta_\nu = \nu/u_\tau$. La longueur de mélange ℓ_m^+ est tracée en noir, l'échelle de longueur caractéristique de la production par courbure \mathcal{L}_C^+ est tracée en rouge et l'échelle dissipative est tracée en bleu. Les cercles noirs correspondent aux résultats issus d'une simulation numérique directe d'une couche limite turbulente sur plaque plane (Spalart, 1988) pour un nombre de Reynolds $Re_\theta = 1410$ équivalent au notre.

la zone logarithmique ($\psi^+ > 40$ et $\psi/\delta_{99} < 0.2$), comme le montrent les résultats obtenus par Spalart (1988). Au delà de $\psi/\delta_{99} = 0.2$, d'autres expressions peuvent être utilisées pour modéliser la longueur de mélange (se référer par exemple à Escudier (1965), Smith et Cebeci (1967), Baldwin et Lomax (1978), Wilcox (2006)).

Les résultats provenant de notre simulation montrent que la longueur de mélange est bien décrite par la loi $\ell_m = \mathcal{L}_\epsilon = \kappa\psi$ pour $\psi/\delta_{99} < 0.1$ ($\psi^+ \approx 80$). Au delà de cette valeur, la courbure induit une augmentation de la longueur de mélange, comme le prédit l'équation 6.15. Les effets de courbure sont caractérisés par la longueur de courbure \mathcal{L}_C , qui joue un rôle dans le bilan des échelles de longueur à partir de $\psi^+ > 100$. L'équation 6.14 nous dit qu'en présence d'effets de courbure, il faut comparer la longueur dissipative \mathcal{L}_ϵ au terme

$$\frac{1}{\frac{1}{\ell_m} + \frac{1}{\mathcal{L}_C}},$$

qui est tracé en noir (ligne pointillée) en figure 6.9. Ce terme tend à se rapprocher de la loi linéaire en ψ , mais ne modifie pas réellement la région de validité de cette loi. En effet, on note un écart entre le terme tracé et la loi linéaire à partir de $\psi/\delta_{99} > 0.1$.

Dans la région extérieure, le comportement de la longueur de mélange ℓ_m d'une couche limite turbulente sur paroi courbe est semblable à celui observé sur plaque plane. Globalement, on observe un plateau à partir de $\psi/\delta_{99} = 0.2$, dont la valeur est légèrement supérieure à celle observée sur plaque plane ce qui s'explique simplement par la présence d'effets de courbure déstabilisant l'écoulement. À l'instar de la couche limite turbulente sur plaque plane, des corrections ou des lois adaptatives pourraient alors être proposées pour modéliser la longueur de mélange globalement. Il serait alors intéressant de faire intervenir le nombre de Richardson de courbure R_f^C dans les lois de description de la longueur de mélange car il est clair que la valeur du plateau observé dans la région extérieure est directement liée à la valeur de R_f^C dans cette même région.

La zone de la couche limite correspondant à $0.1 < \psi/\delta_{99} < 0.2$ pourrait quant à elle être décrite par la loi corrigée de *van Driest* (équation 1.40) mais avec des valeurs spécifiques au cas d'une couche limite turbulente sur paroi courbe pour les coefficients κ et A^+ . Cette question n'est pas traitée dans ce travail de thèse. Néanmoins, on s'intéressera à l'explication physique de l'écart observé entre ℓ_m et \mathcal{L}_ϵ dans la région $0.1 < \psi/\delta_{99} < 0.2$ au paragraphe 6.1.7.

6.1.6 Corrections de la loi logarithmique de vitesse

On a vu que la courbure avait un impact sur la topologie de l'écoulement, notamment en modifiant le profil de vitesse moyenne $\langle u \rangle_{t,z}$ (point d'inflexion, voir figure 6.1) qui induit une modification de la loi logarithmique (figure 6.2).

[Kaimal et Finnigan \(1994\)](#) proposent une correction analytique de la loi logarithmique de couche limite turbulente sur plaque plane pour tenir compte des effets de courbure. On se propose de confronter leur correction analytique aux résultats statistiques que l'on obtient par simulation numérique. La correction proposée pour le gradient de vitesse $\partial \langle u \rangle_{t,z} / \partial \psi$ dans la zone logarithmique est

$$\frac{\partial \langle u \rangle_{t,z}}{\partial \psi} = \frac{u_\tau}{\kappa \psi} (1 + \beta R_c) \quad (6.16)$$

où β est une constante et R_c est un nombre de Richardson de courbure qu'ils définissent comme

$$R_c = -u^+ \frac{\psi}{R} \quad (6.17)$$

La constante β dépend du type de courbure. Pour une courbure convexe, $\beta = 5$ et pour une courbure concave, $\beta = 4$ ([Kaimal et Finnigan, 1994](#), page 200).

En première approche, on veut appliquer cette correction dans une forme simplifiée où le terme de correction est une constante. Le nombre de Richardson de courbure R_c utilisé est alors

$$R_c \approx -u_0^+ \frac{\psi}{R} \quad (6.18)$$

où u_0^+ est une constante qui correspond à une vitesse adimensionnelle caractéristique de la zone logarithmique. La correction du gradient de vitesse est donc donnée par

$$\frac{\partial \langle u \rangle_{t,z}}{\partial \psi} = \frac{u_\tau}{\kappa \psi} - \beta \frac{u_0}{\kappa R} \quad (6.19)$$

et dans sa forme adimensionnelle par

$$\frac{\partial \langle u \rangle_{t,z}^+}{\partial \psi^+} = \frac{1}{\kappa \psi^+} - \beta \frac{u_0^+}{\kappa R^+} \quad (6.20)$$

Par intégration sur ψ^+ , la correction de la loi logarithmique pour la vitesse qui en découle est

$$\langle u \rangle_{t,z}^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \psi^+ - \beta \frac{u_0^+}{\kappa R^+} \psi^+ + B \quad (6.21)$$

qui est une correction linéaire en ψ^+ et très simple à appliquer. En figure 6.10, on montre la comparaison entre les lois de correction de [Kaimal et Finnigan](#) (équations 6.20 et 6.21, tracées en pointillés bleus pour différentes valeurs de la constante β) et les résultats statistiques issus de

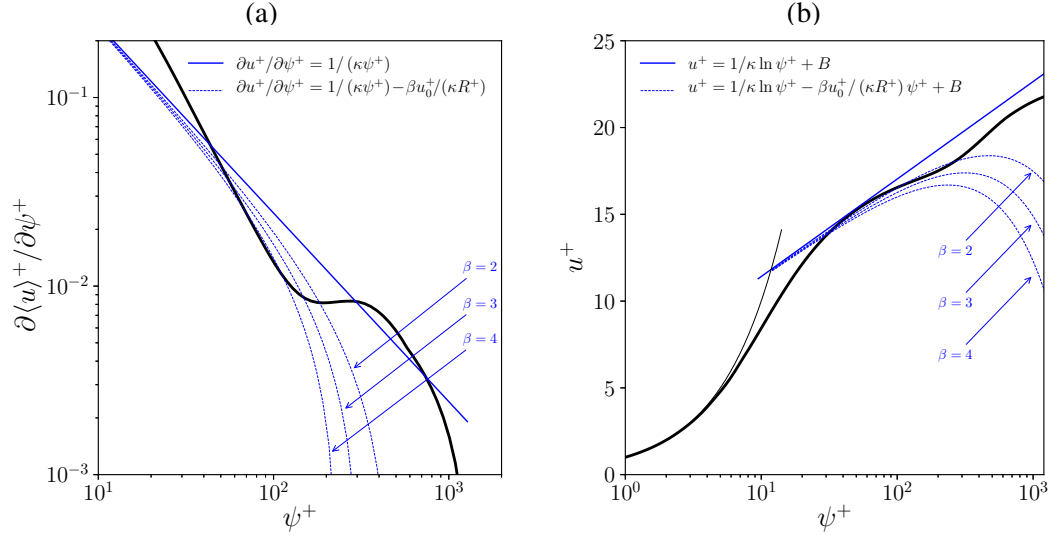


Figure 6.10. (a) Profil du gradient de vitesse $\partial\langle u \rangle_{t,z}^+ / \partial\psi^+$ en fonction de ψ^+ . La ligne bleue continue correspond à la loi classique de couche limite $\partial u^+ / \partial\psi^+ = 1 / (\kappa\psi^+)$ avec $\kappa = 0.41$, les lignes bleues pointillées correspondent à la loi corrigée (équation 6.20) pour différentes valeurs de la constante β , $\beta = \{4.0, 3.0, 2.0\}$. La ligne noire continue correspond aux résultats obtenus par LES. (b) Profil de vitesse moyenne $\langle u \rangle_{t,z}^+$ en fonction de ψ^+ . La ligne bleue continue correspond à la loi classique de couche limite $u^+ = 1/\kappa \ln \psi^+ + B$, avec $B = 5.8$, les lignes bleues pointillées correspondent à la loi corrigée (équation 6.21). La ligne noire continue correspond aux résultats obtenus par LES.

la simulation numérique (en noir). Dans la zone logarithmique ($40 < \psi^+ < 200$), le gradient de vitesse est modifié par effets de courbure et une diminution du gradient de vitesse est observée par rapport à la loi logarithmique classique. La correction proposée par [Kaimal et Finnigan \(1994\)](#) pour le gradient de vitesse reproduit cet effet et semble par ailleurs en très bon accord avec les résultats que l'on obtient par simulation pour $\beta = 4$. La figure 6.10(b) montre la comparaison de la correction sur la vitesse (équation 6.21) avec les résultats obtenus par simulation numérique. Le coefficient de la loi logarithmique B que l'on choisit pour la loi classique et la loi corrigée est $B = 5.8$ de telle sorte que le profil $\langle u \rangle_{t,z}^+$ obtenu par LES soit tangent à la loi logarithmique classique. La courbure induit un point d'inflexion sur le profil de vitesse $\langle u \rangle_{t,z}^+$, ce qui modifie le profil dans la zone logarithmique ($40 < \psi^+ < 200$) vers des valeurs de vitesse plus faibles. En dehors de la zone logarithmique, la vitesse tend vers la loi classique de couche limite sur plaque plane. Ici encore, la correction proposée par [Kaimal et Finnigan \(1994\)](#) reproduit les effets attendus, à savoir la diminution de la vitesse dans la zone logarithmique. Tous ces résultats montrent qu'en appliquant une forme simplifiée de la correction de [Kaimal et Finnigan \(1994\)](#), il est possible de décrire de façon fidèle les effets de courbure sur la vitesse moyenne.

Une autre approche peut être envisagée pour proposer une correction de la loi logarithmique par effets de courbure. En reprenant le bilan des échelles de longueur (équation 6.14) et en substituant les termes $1/\ell_m$ par $(\partial\langle u \rangle / \partial\psi) / u_\tau$ et $1/\mathcal{L}_c$ par $1/(\kappa\psi)$, on peut écrire

$$\frac{1}{u_\tau} \frac{\partial\langle u \rangle}{\partial\psi} + \frac{1}{\mathcal{L}_c} = \frac{1}{\kappa\psi} \quad (6.22)$$

ce qui mène directement à l'écriture de la loi logarithmique corrigée pour le gradient de vitesse adimensionnel

$$\frac{\partial\langle u \rangle^+}{\partial\psi^+} = \frac{1}{\kappa\psi^+} - \frac{1}{\mathcal{L}_c^+} \quad (6.23)$$

Pour des raisons de simplicité d'application de correction, on considère la longueur de courbure \mathcal{L}_c^+ constante dans la zone logarithmique et sa valeur correspond à son minimum observé dans la région de couche limite $\mathcal{L}_{c_0}^+ = 700$ (voir figure 6.9). L'intégration sur ψ^+ de l'équation 6.23 mène à l'écriture de la loi corrigée pour la vitesse adimensionnelle

$$\langle u \rangle^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \psi^+ - \frac{\psi^+}{\mathcal{L}_{c_0}^+} + B \quad (6.24)$$

On compare les corrections proposées aux résultats obtenus par simulation numérique en figure 6.11. On voit en figure 6.11(a) que le gradient de vitesse diminue dans la zone logarithmique par effets de courbure, ce qui est cohérent avec les résultats obtenus précédemment. La correction simple proposée permet donc de reproduire la bonne tendance des effets de courbure sur le gradient de vitesse. La correction du profil de vitesse $\langle u \rangle_{t,z}^+$ est montrée en figure 6.11(b) et comparée aux résultats obtenus par LES. La loi corrigée permet de décrire en partie l'inflexion du profil de vitesse dans la zone logarithmique et la tendance de correction est respectée.

On montre ici que l'utilisation d'une correction simple de la loi logarithmique fondée sur l'échelle de courbure $\mathcal{L}_{c_0}^+$ permet de prédire la tendance des effets de courbure sur la dynamique de l'écoulement (vitesse et gradient de vitesse). Cette étude pourrait bien évidemment être poursuivie d'une approche plus complète en ne considérant pas le terme de correction du gradient de vitesse constant dans la zone logarithmique et avoir une correction locale. Il sera également montré par la suite que l'échelle $\mathcal{L}_{c_0}^+$ n'est pas forcément l'échelle de correction la plus pertinente dans le cas où l'instabilité de Görtler turbulente se développe et induit une forte hétérogénéité transverse.

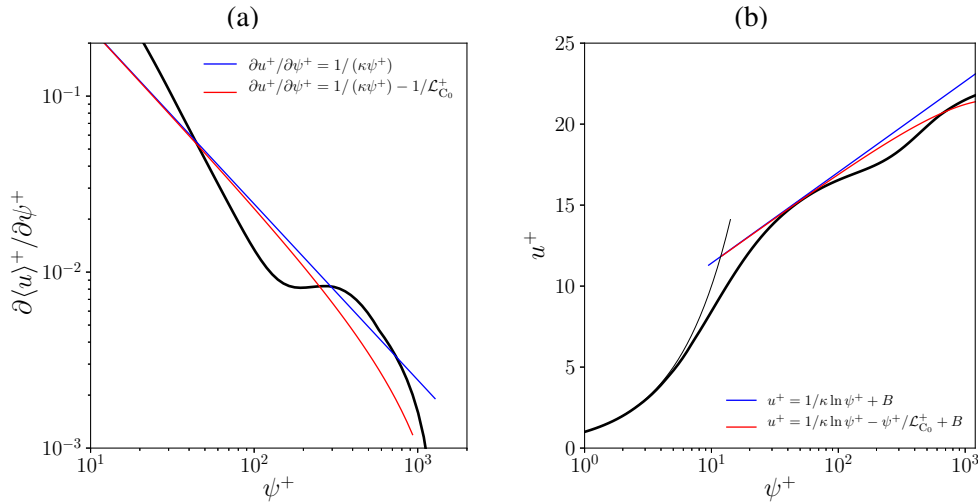


Figure 6.11. (a) Profil du gradient de vitesse $\partial \langle u \rangle_{t,z}^+ / \partial \psi^+$ en fonction de ψ^+ . La ligne bleue continue correspond à la loi classique de couche limite $\partial u^+ / \partial \psi^+ = 1 / (\kappa \psi^+)$ avec $\kappa = 0.41$, la ligne bleue pointillée correspond à la loi corrigée (Kaimal et Finnigan, 1994), la ligne rouge pointillée correspond à la loi corrigée par le terme $1 / \mathcal{L}_{c_0}^+$. La ligne noire continue correspond aux résultats obtenus par LES. (b) Profil de vitesse moyenne $\langle u \rangle_{t,z}^+$ en fonction de ψ^+ . La ligne bleue continue correspond à la loi classique de couche limite $u^+ = 1 / \kappa \ln \psi^+ + B$, avec $B = 5.8$, les lignes bleues pointillées correspondent à la loi corrigée (Kaimal et Finnigan, 1994), la ligne rouge pointillée correspond à la loi corrigée par le terme $\psi^+ / \mathcal{L}_{c_0}^+$. La ligne noire continue correspond aux résultats obtenus par LES.

6.1.7 Effets de courbure et présence de tourbillons longitudinaux

On présente ici une analyse visant à mettre en évidence la différence qui existe entre les effets dus à la courbure de la paroi et les effets dus à la présence de tourbillons longitudinaux dans la couche

limite.

On l'a vu précédemment, la courbure des lignes de courant induit des termes supplémentaires dans les équations de Navier-Stokes et les équations bilan des flux turbulents. Ces termes supplémentaires sont en $1/(R-\psi)$ ou $1/(R-\psi)^2$ ce qui signifie que ces termes deviennent négligeables pour des rayons de courbure R importants. Les équations en repère courbé tendent d'ailleurs vers l'écriture classique (sans courbure) quand $R \rightarrow \infty$.

En analysant les résultats statistiques provenant d'une simulation numérique à haut nombre de Reynolds, on a vu que pour un rayon de courbure R « modéré », les termes supplémentaires liés à la courbure jouent un rôle dans le bilan d'énergie cinétique turbulente, dans la zone de la couche limite où $\psi/\delta_{99} > 0.2$. A priori, le terme de production par courbure $\mathcal{P}_k^C = \langle u'v' \rangle \langle u \rangle / (R-\psi)$ est homogène dans la direction transverse z , où la courbure joue un rôle global avec la contribution $(1/R-\psi)$. Pour le terme de production par cisaillement $\mathcal{P}_k^M = \langle u'v' \rangle (\partial \langle u \rangle / \partial \psi)$, la courbure n'intervient pas.

Le terme de production par cisaillement \mathcal{P}_k^M est porté par le gradient normal de la vitesse moyenne $\partial \langle u \rangle / \partial \psi$ et le terme de production par courbure \mathcal{P}_k^C est porté par le profil de vitesse moyenne $\langle u \rangle$. Or le champ de vitesse de l'écoulement en question est inhomogène dans la direction transverse car des tourbillons longitudinaux se développent dans la région turbulente. Il est d'ailleurs montré que la présence de ces tourbillons longitudinaux dans la région turbulente est consistante avec la physique de l'instabilité de Görtler (Dagaut et al., 2021). L'instabilité de Görtler étant une instabilité centrifuge, la courbure joue un rôle dans l'inhomogénéité spatiale du champ de vitesse observée. Cette inhomogénéité transverse peut être vue comme un effet indirect ou secondaire de la courbure. On illustre ces propos en comparant le profil de vitesse dans la région turbulente $\langle u \rangle_{t,z}^+$ moyenné temporellement et dans la direction transverse en fonction de ψ^+ , à des profils locaux $\langle u \rangle_t^+$ pour différentes positions transverses z (figure 6.12(a)). On montre le niveau d'hétérogénéité transverse du profil de vitesse $\langle u \rangle_{t,\text{SHL}}$ normalisé par la vitesse $\langle u \rangle_{t,z}$ en figure 6.12(b). Les résultats équivalents pour le gradient normal de la vitesse, $\partial \langle u \rangle_{t,z}^+ / \partial \psi^+$, sont montrées en figure 6.13. Les variations transverses du champ de vitesse moyenne et de son gradient normal sont nettement visibles sur les profils présentés. L'écart-type spatial (ou SHL) de la vitesse représente près de 10% de la vitesse moyenne dans la région proche de la paroi et autour de 5% dans la zone logarithmique. L'écart-type spatial observé sur le gradient de vitesse est également de l'ordre de 10% près de la paroi mais est beaucoup plus important dans la zone logarithmique puisqu'il représente jusqu'à 35% dans la zone logarithmique. D'autre part, on note la présence du point d'inflexion observé sur le profil de vitesse ainsi que sur le gradient de vitesse (typique de la présence de l'instabilité de Görtler). Ce point d'inflexion explique l'écart qu'il y a entre les loi théoriques de couche limite turbulente sur plaque plane (tracées en bleu) et les résultats obtenus sur paroi courbe. Pour mettre en évidence l'inhomogénéité transverse du champ de vitesse moyen qui existe dans la région turbulente de l'écoulement, on peut également présenter une coupe transverse de l'écoulement à $\xi/\delta_0 = 41.9$ colorée par la fluctuation transverse du champ de vitesse moyen, u'' (définie par l'équation 2.33), normalisée par les échelles visqueuses (figure 6.14). Encore une fois, ce résultats est très différent de ce qu'on obtiendrait dans le cas d'une couche limite turbulente sur plaque plane et est dû à la présence des tourbillons longitudinaux persistant dans la région turbulente.

La topologie très spécifique de l'écoulement développé dans cette configuration physique, i.e. la présence de tourbillons longitudinaux stationnaires, est donc à l'origine d'une modification locale et globale des grandeurs physiques. La modification locale du champ de vitesse induite par la présence des tourbillons conduit à une modification, locale et globale, des termes de production

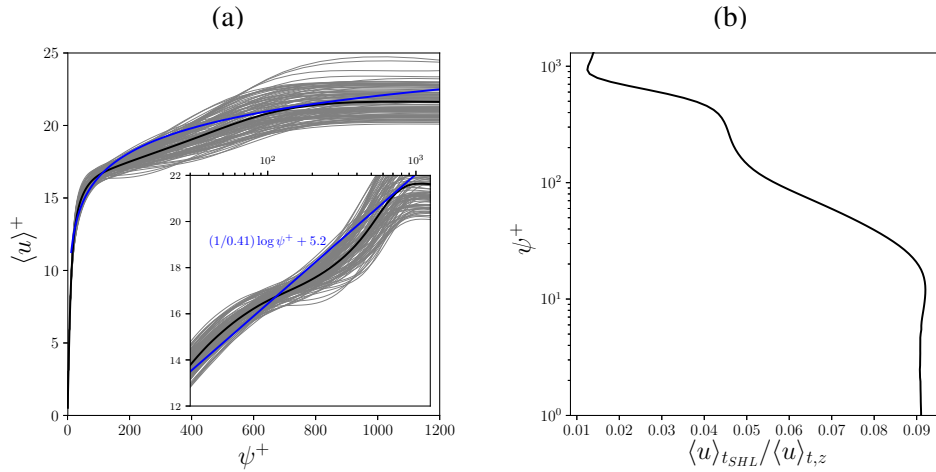


Figure 6.12. (a) Profil de $\langle u \rangle_{t,z}^+$ en fonction de ψ^+ en ligne noire et sélection de profils $\langle u \rangle_t^+(z)$ en fonction de ψ^+ pour plusieurs positions transverses z . (b) Quantification de l'inhomogénéité transverse de la vitesse, $\langle u \rangle_{t,SHL}$, normalisée par la vitesse $\langle u \rangle_{t,z}$. Les profils sont tracé dans la région turbulente où $\xi/\delta_0 = 41.9$.

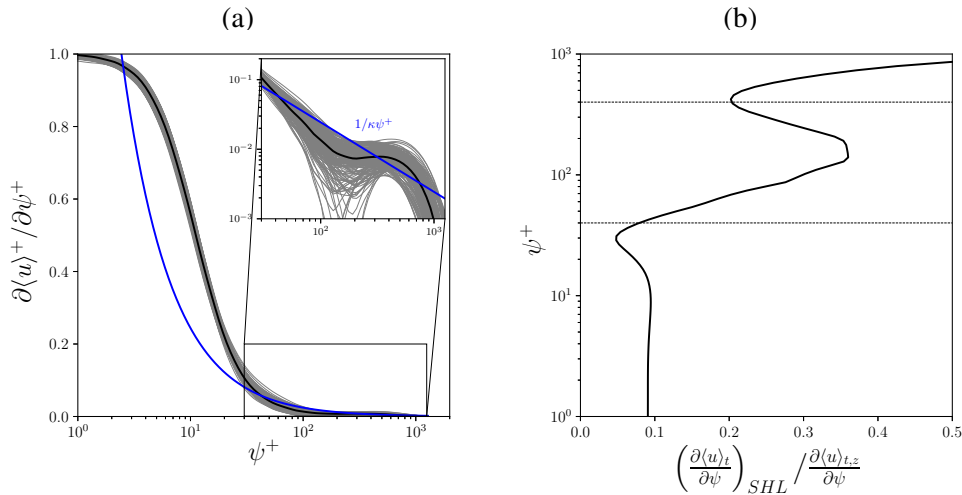


Figure 6.13. (a) Profil de $\partial \langle u \rangle_{t,z}^+ / \partial \psi^+$ en fonction de ψ^+ en ligne noire et sélection de profils $\partial \langle u \rangle_t^+(z) / \partial \psi^+$ en fonction de ψ^+ pour plusieurs positions transverses z . (b) Quantification de l'inhomogénéité transverse du gradient de vitesse, $(\partial \langle u \rangle_t / \partial \psi)_{SHL}$, normalisée par le gradient de vitesse $\partial \langle u \rangle_{t,z} / \partial \psi$. Les profils sont tracé dans la région turbulente où $\xi/\delta_0 = 41.9$.

des différents bilans effectués, comme par exemple les termes de production d'énergie cinétique turbulente. Évidemment, le champ de vitesse n'est pas la seule quantité à être modifiée. Les flux turbulents sont également impactés par la topologie spécifique de l'écoulement comme le montre les résultats présentés en figure 6.15. Les courbes présentées sont équivalentes à celles des figures 6.12 et 6.13 mais pour le flux turbulent adimensionnel $\langle u'v' \rangle^+$. Les résultats obtenus montrent effectivement une forte inhomogénéité transverse du cisaillement turbulent local $\langle u'v' \rangle^+(z)$, qui représente jusqu'à 15% de la moyenne spatiale $\langle u'v' \rangle_{t,z}^+$ dans la zone logarithmique. Le flux turbulent $\langle u'v' \rangle^+$ intervient dans les termes de production d'énergie cinétique turbulente, que ce soit la production par cisaillement \mathcal{P}_k^M ou la production par courbure \mathcal{P}_k^C , ce qui signifie une fois de plus que la présence des tourbillons longitudinaux impacte fortement le bilan d'énergie cinétique turbulente, de manière locale et globale.

Enfin, la présence de tourbillons longitudinaux stationnaires dans la région turbulente induit

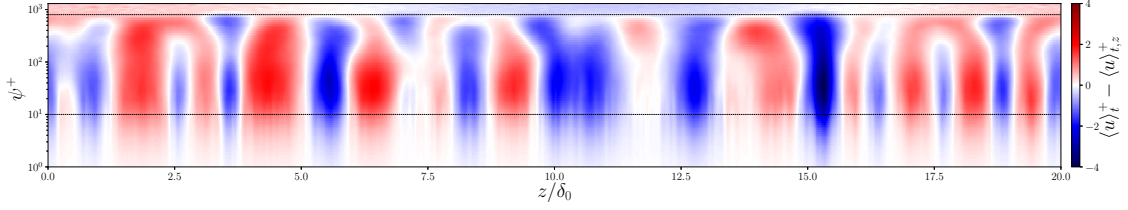


Figure 6.14. Coupe transverse de la couche limite dans la région turbulente de l'écoulement coloré par la quantité $\langle u \rangle_t^+ - \langle u \rangle_{t,z}^+$, correspondant à l'hétérogénéité spatiale de $\langle u \rangle_t^+$ due à la présence de tourbillons longitudinaux (i.e. instabilité de Görtler turbulente). La région de la couche limite la plus impactée par cette hétérogénéité est delimitée par les lignes horizontales pointillées. La position longitudinale de la coupe transverse présentée est $\xi/\delta_0 = 41.9$.

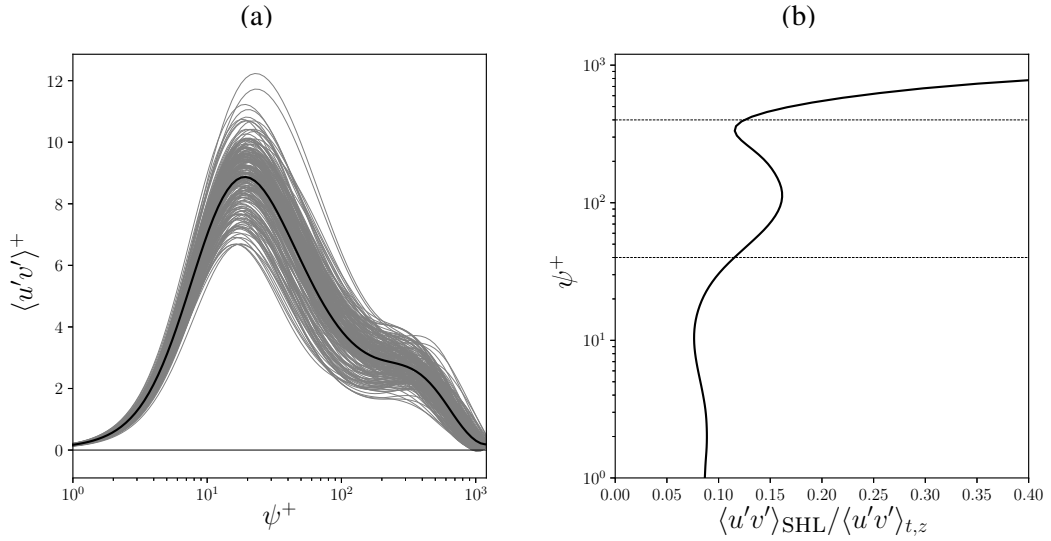


Figure 6.15. (a) Profil de $\langle u'v' \rangle_{t,z}^+$ en fonction de ψ^+ en ligne noire et sélection de profils $\langle u'v' \rangle_t^+(z)$ en fonction de ψ^+ pour plusieurs positions transverses z . (b) Quantification de l'inhomogénéité transverse du cisaillement turbulent, $\langle u'v' \rangle_{SHL}$, normalisée par $\langle u'v' \rangle_{t,z}$. Les profils sont tracés dans la région turbulente où $\xi/\delta_0 = 41.9$.

une dernière différence majeure par rapport à un écoulement de couche limite sur plaque plane : les gradients transverses du champ de vitesse moyen $d\langle \mathbf{u} \rangle_t / dz$ ne sont pas nuls. Cette spécificité d'un écoulement présentant des tourbillons longitudinaux stationnaires n'est pas anodine et modifie une fois de plus le bilan d'énergie cinétique turbulent. Il est alors possible de proposer un bilan local d'énergie cinétique turbulent où le terme de production local $\langle P_k \rangle_t(\xi, \psi, z)$ s'écrit

$$\left\langle P_k \right\rangle_t(\xi, \psi, z) = \left. \begin{aligned} & -\langle u'v' \rangle_t \frac{\partial \langle u \rangle_t}{\partial \psi} - \langle u'w' \rangle_t \frac{\partial \langle u \rangle_t}{\partial z} - \langle w'w' \rangle_t \frac{\partial \langle w \rangle_t}{\partial z} \end{aligned} \right\} \text{Cisaillement complet} \quad (6.25)$$

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{\langle u'v' \rangle_t}{R-\psi} \langle u \rangle_t \end{aligned} \right\} \text{Courbure}$$

où les termes $\langle u'w' \rangle_t (\partial \langle u \rangle_t / \partial z)$ et $-\langle w'w' \rangle_t (\partial \langle w \rangle_t / \partial z)$ sont importants en présence de tourbillons longitudinaux et sont négligeables dans une couche limite turbulente sur plaque plane (Liu et Domaradzki, 1993). On pourrait alors faire une analyse locale de la production d'énergie cinétique turbulente en utilisant les traitements statistiques conditionnels présentés au chapitre 4 mais cette étude n'est pas réalisée dans ce travail de thèse. Cela constitue une des perspectives de ce travail. Néanmoins, on peut quantifier les effets globaux de ces termes en calculant la moyenne

spatiale (dans la direction transverse) du terme de production local. On obtient alors l'expression suivante

$$\left\langle P_k(\xi, \psi) \right\rangle_z = \underbrace{-\left\langle \langle u'v' \rangle_t \frac{\partial \langle u \rangle_t}{\partial \psi} \right\rangle_z}_{\mathcal{P}_k^M} - \underbrace{\left\langle \langle u'w' \rangle_t \frac{\partial \langle u \rangle_t}{\partial z} \right\rangle_z - \left\langle \langle w'w' \rangle_t \frac{\partial \langle w \rangle_t}{\partial z} \right\rangle_z}_{\tilde{\mathcal{P}}_k^C} - \underbrace{\left\langle \frac{\langle u'v' \rangle_t}{R-\psi} \langle u \rangle_t \right\rangle_z}_{\mathcal{P}_k^C} \quad (6.26)$$

où l'on peut montrer que les termes de production \mathcal{P}_k^M et \mathcal{P}_k^C restent inchangés par ce changement de traitement statistique.

On montre en figure 6.16(a) les profils verticaux des deux nouveaux termes de production, normalisés par les échelles visqueuses. Les valeurs maximales des termes $-\langle u'w' \rangle^+ (\partial \langle u \rangle^+ / \partial z^+)$ et

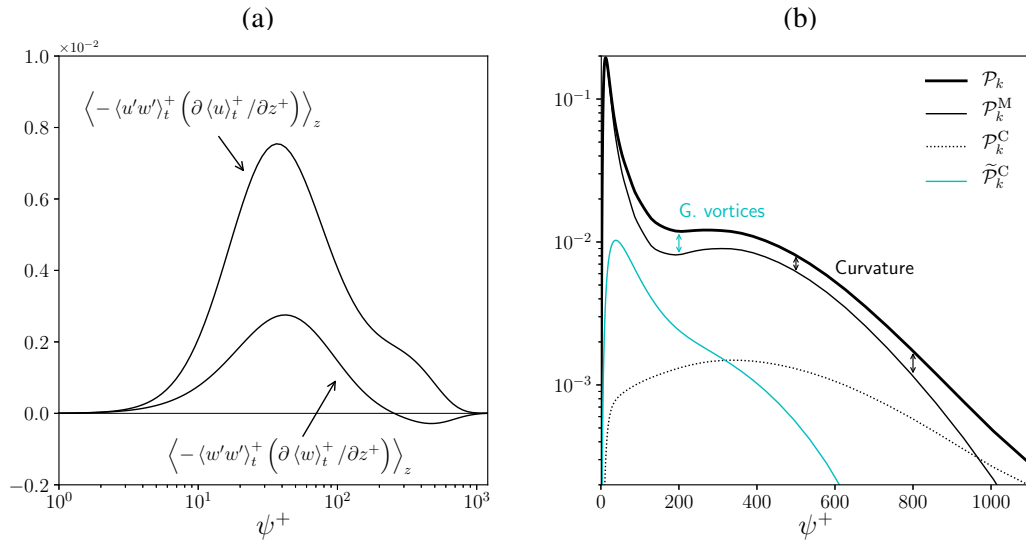


Figure 6.16. (a) Profil des termes de cisaillement transverse $-\langle u'w' \rangle^+ (\partial \langle u \rangle^+ / \partial z^+)$ et $-\langle w'w' \rangle^+ (\partial \langle w \rangle^+ / \partial z^+)$ en fonction de ψ^+ . (b) Profil de en fonction de ψ^+ en ligne noire et sélection de profils locaux en fonction de ψ^+ pour plusieurs positions transverse z . Les profils sont tracé dans la région turbulente où $\xi/\delta_0 = 41.9$.

$-\langle w'w' \rangle^+ (\partial \langle w \rangle^+ / \partial z^+)$ sont respectivement 7.5×10^{-3} et 3.5×10^{-3} et sont atteintes pour $\psi^+ = 40$. Quand $\psi^+ = 40$, le terme de production classique de k est $\mathcal{P}_k^M = \langle u'v' \rangle^+ (\partial \langle u \rangle^+ / \partial \psi^+) = 0.08$. Le terme $-\langle u'w' \rangle^+ (\partial \langle u \rangle^+ / \partial z^+)$ et $-\langle w'w' \rangle^+ (\partial \langle w \rangle^+ / \partial z^+)$ représentent donc respectivement près de 10% et 5% de \mathcal{P}_k^M . La présence des tourbillons longitudinaux induit donc une hausse de près de 15% de la production d'énergie cinétique turbulente dans la région où $\psi^+ \approx 40$. Si on compare les valeurs maximales des différentes contributions à la production d'énergie cinétique turbulente en unités de paroi, alors la contribution des tourbillons longitudinaux est de l'ordre de 10^{-2} (pour $\psi^+ = 40$) contre 2×10^{-1} ($\psi^+ = 11$) pour la production classique.

On compare toutes les contributions à la production d'énergie cinétique turbulente en figure 6.16(b). Ce résultats nous permet de mettre en évidence que les effets de courbure et la présence des tourbillons de Görtler induisent une augmentation de la production d'énergie cinétique turbulente où chacun des effets joue un rôle dans une région différente de la couche limite. En effet, les tourbillons de Görtler, responsables d'un cisaillement transverse, participent à la production de TKE jusqu'à $\psi^+ = 300$ alors que la contribution de la courbure devient dominante pour $\psi^+ = 300$. Enfin, on intègre les termes de production \mathcal{P}_k^C et $\tilde{\mathcal{P}}_k^C$ sur l'ensemble de la région de la couche limite. L'intégrale du terme de production par cisaillement transverse $\tilde{\mathcal{P}}_k^C$ représente 15% de la

production par cisaillement longitudinal $\mathcal{P}_k^{\text{M}^+}$ et l'intégrale du terme de production par courbure $\mathcal{P}_k^{\text{C}^+}$ représente 10% de la production par cisaillement longitudinal $\mathcal{P}_k^{\text{M}^+}$.

On reprend enfin le bilan des échelles de longueur (équation 6.14) en y ajoutant l'échelle de longueur issue de la production par cisaillement transverse, notée $\widetilde{\mathcal{L}}_C$ et définie par

$$\widetilde{\mathcal{P}}_k^{\text{C}} = \frac{u_\tau^3}{\widetilde{\mathcal{L}}_C} \quad (6.27)$$

Le bilan s'écrit alors

$$\underbrace{\frac{1}{\ell_m^+} + \frac{1}{\mathcal{L}_C^+} + \frac{1}{\widetilde{\mathcal{L}}_C^+}}_{\text{Production}} = \underbrace{\frac{1}{\kappa\psi^+}}_{\text{Dissipation}} \quad (6.28)$$

On trace le bilan des échelles de longueur en figure 6.17(a). L'échelle de longueur $\widetilde{\mathcal{L}}_C$ est de l'ordre

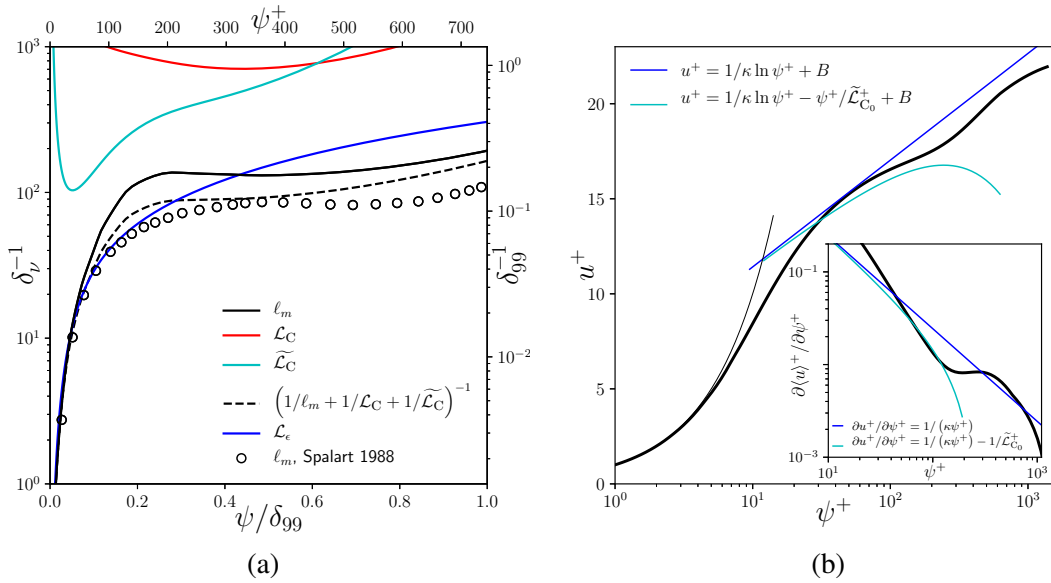


Figure 6.17. (a) Bilan des échelles de longueur, normalisées par l'échelle visqueuse δ_ν d'une part et normalisée par l'épaisseur de la couche limite δ_{99} d'autre part. La somme des contributions est tracée en pointillés noirs. (b) Corrections de vitesse ainsi que du gradient de vitesse associées à la longueur $\widetilde{\mathcal{L}}_C$.

de $100 < \widetilde{\mathcal{L}}_C < 300$ dans la région logarithmique ce qui a un impact sur le nouveau bilan des échelles de longueur, tracé en pointillés noirs. On montre alors que ce nouveau bilan est du même ordre de grandeur que celui obtenu pour une couche limite sur plaque plane pour un Reynolds équivalent au notre (Spalart, 1988). On peut décrire le bilan obtenu par la loi $\kappa\psi$ jusqu'à $\psi^+ = 110$. L'échelle de longueur $\widetilde{\mathcal{L}}_C$ apparaît alors comme une échelle pertinente dans la loi de correction présentée précédemment (équation 6.24). La correction qui en découle est tracée en figure 6.17(b) où l'on présente à la fois la correction de la vitesse et la correction du gradient de vitesse. La longueur $\widetilde{\mathcal{L}}_{C_0}^+ = 100$ utilisée pour les lois corrigées correspond à la valeur minimale de $\widetilde{\mathcal{L}}_C^+$. Les résultats montrent alors que les lois corrigées ainsi obtenues sont en effet plus consistantes avec le profil de vitesse issu de la simulation numérique.

6.1.8 Bilan

Avec toutes les analyses présentées, il a donc été montré que la turbulence d'un écoulement de couche limite se développant sur une paroi courbe est dans un premier temps soumise à des effets

de courbure globaux (analogie courbure/stratification). Si les conditions physiques permettent l'existence de tourbillons longitudinaux stationnaires (Dagaut et al., 2021), des effets plus locaux rentrent en jeu. Les tourbillons induisent alors un point d'inflexion responsable de la modification de la topologie de l'écoulement moyen (moyenne temporelle et spatiale). Les inhomogénéités transverses qui sont caractéristiques d'un écoulement présentant des tourbillons longitudinaux induisent une augmentation de 15% de la production de TKE et les effets de courbure induisent une augmentation de 10% de la production de TKE. Enfin, on montre que l'échelle de longueur pertinente pour corriger le profil de vitesse est l'échelle de longueur construite à partir du terme de production de TKE par cisaillement transverse. En effet, les effets de courbure interviennent après la région logarithmique.

6.1.9 Effets de courbure à Reynolds modéré ($Re_{\delta_0} = 1800$)

On présente ici les résultats statistiques issus d'une simulation numérique du développement d'une couche limite sur paroi courbe sans stratification où le nombre de Reynolds est modéré $Re_{\delta_0} = 1800$, dans un régime plutôt de transition à la turbulence que de turbulence développée. Ce cas nous servira ensuite de « référence neutre » à Reynolds modéré pour l'étude paramétrique présentée dans la section suivante. Ici on reprend les résultats principaux présentés précédemment pour le cas à $Re_{\delta_0} = 10000$ afin de décrire l'état de la turbulence dans l'écoulement neutre (sans stratification) à Reynolds modéré. L'évolution topologique du profil de vitesse longitudinale $\langle u \rangle_{t,z}$ dans le domaine de calcul est montrée en figure 6.18. Les premiers profils de vitesse correspondent à la région laminaire de l'écoulement ou l'on voit les effets de la présence de l'instabilité de Görtler (point d'inflexion très clair dans les profils de vitesse). L'épaisseur des profils, i.e. l'épaisseur de couche limite δ_{99} , croît dans la direction longitudinale et les profils de vitesse tendent vers des profils de couche limite turbulente. Le point d'inflexion reste présent sur les profils dans la région turbulente mais de façon moins marquée. On montre également l'évolution du profil $\langle u^+ \rangle_{t,z} = f(\psi^+)$

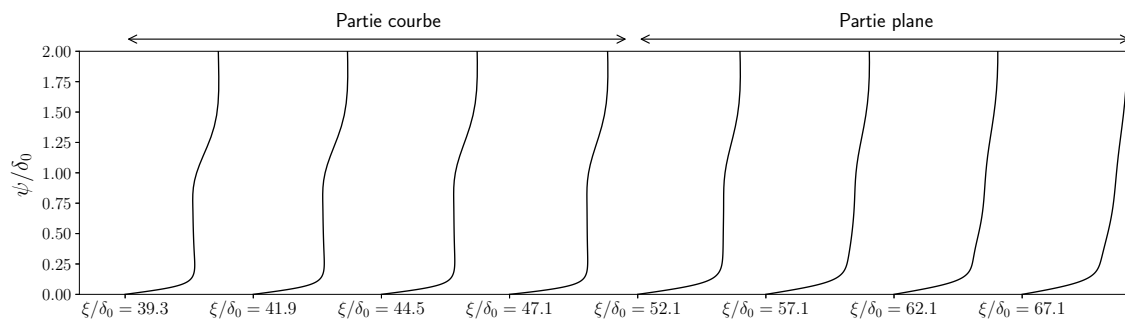


Figure 6.18. Évolution du profil moyen de vitesse $\langle u \rangle_{t,z}$ en fonction de la position longitudinale ξ .

pour les mêmes positions en figure 6.19. Les lois de couche limite turbulente sont également tracées, à savoir $u^+ = \psi^+$ dans la sous-couche visqueuse ($\psi^+ < 5$) et $u^+ = (1/0.41) \ln \psi^+ + 5.2$ dans la zone logarithmique. La loi linéaire (sous-couche visqueuse) est bien décrite dans notre simulations. Dans la région logarithmique, le profil de vitesse tend vers un comportement turbulent, c'est à dire que le profil de vitesse décrit une loi logarithmique sur une zone de plus en plus étendue. Il est clair que l'écoulement ainsi obtenu est en transition à la turbulence et que les effets de courbure sont encore très présents, bien que les derniers profils présentés correspondent à la partie plane du domaine de simulation. On trace en figure 6.20 les composantes les plus importantes du tenseur de Reynolds $\langle u'u' \rangle^+$, $\langle v'v' \rangle^+$, $\langle w'w' \rangle^+$ et $\langle u'v' \rangle^+$ ainsi que l'énergie cinétique turbulente k^+ pour trois positions longitudinales $\xi/\delta_0 = \{47.1, 57.1, 62.1\}$ qui correspondent à la région de l'écoulement où la turbulence est la plus développée (fin de courbure et partie plane). Le nombre

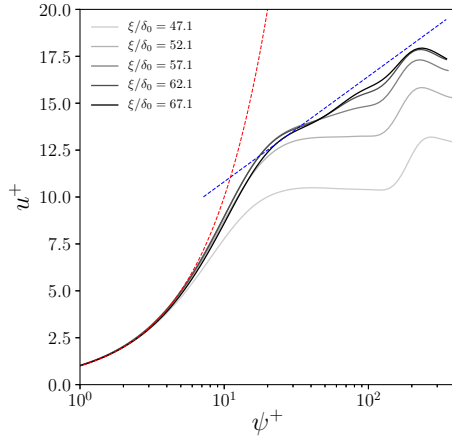


Figure 6.19. Vitesse longitudinale moyenne normalisée par les échelles visqueuses $\langle u \rangle_{t,z}^+$ en fonction de ψ^+ pour différentes positions longitudinales ξ/δ_0 .

de Reynolds Re_θ dans cette région est de l'ordre de $Re_\theta = 400$. Les profils ainsi obtenus par simulation des grandes échelles sont comparés aux résultats de Spalart (1988) correspondant à un écoulement de couche limite turbulente sur plaque plane pour un nombre de Reynolds $Re_\theta = 400$.

Dans notre simulation, le processus de transition à la turbulence est assuré par le développement de l'instabilité de Görtler, dont on force la longueur d'onde. Du fait de la valeur modérée du nombre de Reynolds, la transition à la turbulence intervient plus en aval dans le domaine que dans la simulation de référence. Le fait de tracer nos résultats pour trois positions longitudinales $\xi/\delta_0 = \{47.1, 57.1, 62.1\}$ nous permet de voir très clairement que les profils que l'on obtient évoluent dans la direction longitudinale et donc que la couche limite est en transition à la turbulence. Ceci explique les écarts d'amplitude observés entre nos résultats et ceux de Spalart (1988).

Bien que la turbulence ne soit pas complètement développée, les flux turbulents observés sont importants et nous permettent d'étudier l'influence de la courbure sur la turbulence à Reynolds modéré. Sur l'ensemble des profils de flux turbulents présentés, on observe globalement un facteur 2 entre les résultats de couche limite turbulente sur plaque plane et nos résultats de couche limite sur paroi courbe en transition à la turbulence. Ceci corrobore les observations faites sur le profils moyen de vitesse en figure 6.18, où la zone logarithmique est en développement.

Les positions longitudinales choisies $\xi/\delta_0 = \{47.1, 57.1, 62.1\}$ correspondent à la partie plane du domaine de simulation. Cependant, on présentera par la suite les effets de courbure sur la couche limite. On fait donc ici l'hypothèse qu'il y a un effet de mémoire de l'écoulement vis-à-vis des effets de courbure. Cette idée est soutenue par la présence d'une double bosse sur les profils de flux turbulents présentés (figure 6.20) qui indique que les effets de courbure sont présents et subsistent sur la partie plane. Dans la région logarithmique de la couche limite, la production d'énergie cinétique turbulente et la dissipation sont égales. On rappelle que le bilan de TKE simplifié pour la région logarithmique d'une couche limite en considérant les effets de courbure et les effets de l'hétérogénéité spatiale s'écrit comme

$$\underbrace{\mathcal{P}_k^M + \mathcal{P}_k^C + \tilde{\mathcal{P}}_k^C}_{\text{Production}} = \underbrace{\epsilon}_{\text{Dissipation}} \quad (6.29)$$

On montre en figure 6.21 les différentes contributions à la production d'énergie cinétique turbulente issu du bilan de k (équation 6.29), obtenu par simulation numérique à Reynolds modéré pour une couche limite neutre soumise à des effet de courbure. Les termes sont adimensionnés par les échelles visqueuses de l'écoulement, i.e. $u_\tau^2/\delta_\nu = u_\tau^4/\nu$ et sont tracés en fonction de ψ^+ .

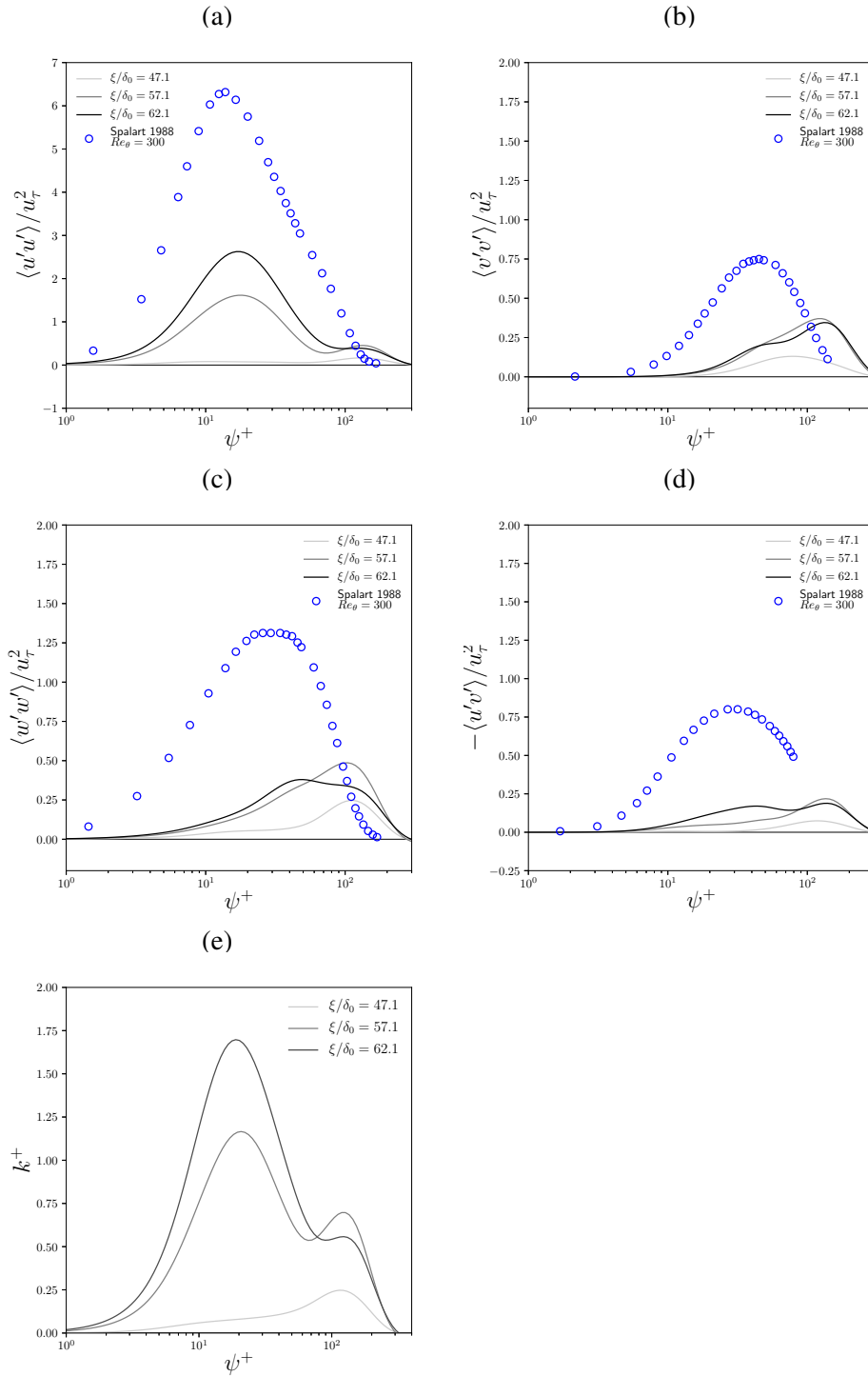


Figure 6.20. Tenseur de Reynolds $\langle u'_i u'_j \rangle$ normalisés par la vitesse de frottement au carré u_τ^2 en fonction de ψ^+ , pour trois positions longitudinales $\xi/\delta_0 = \{47.1, 57.1, 62.1\}$. (a) $\langle u'u' \rangle / u_\tau^2$, (b) $\langle v'v' \rangle / u_\tau^2$, (c) $\langle w'w' \rangle / u_\tau^2$, (d) $\langle u'v' \rangle / u_\tau^2$, (e) k / u_τ^2 . Les profils sont comparés aux résultats de Spalart (1988) pour un Reynolds $Re_\theta = 300$.

Les profils sont tracés pour trois positions longitudinales $\xi/\delta_0 = \{47.1, 57.1, 62.1\}$ afin de montrer une fois de plus que les profils dépendent fortement de la position étant donné que l'écoulement

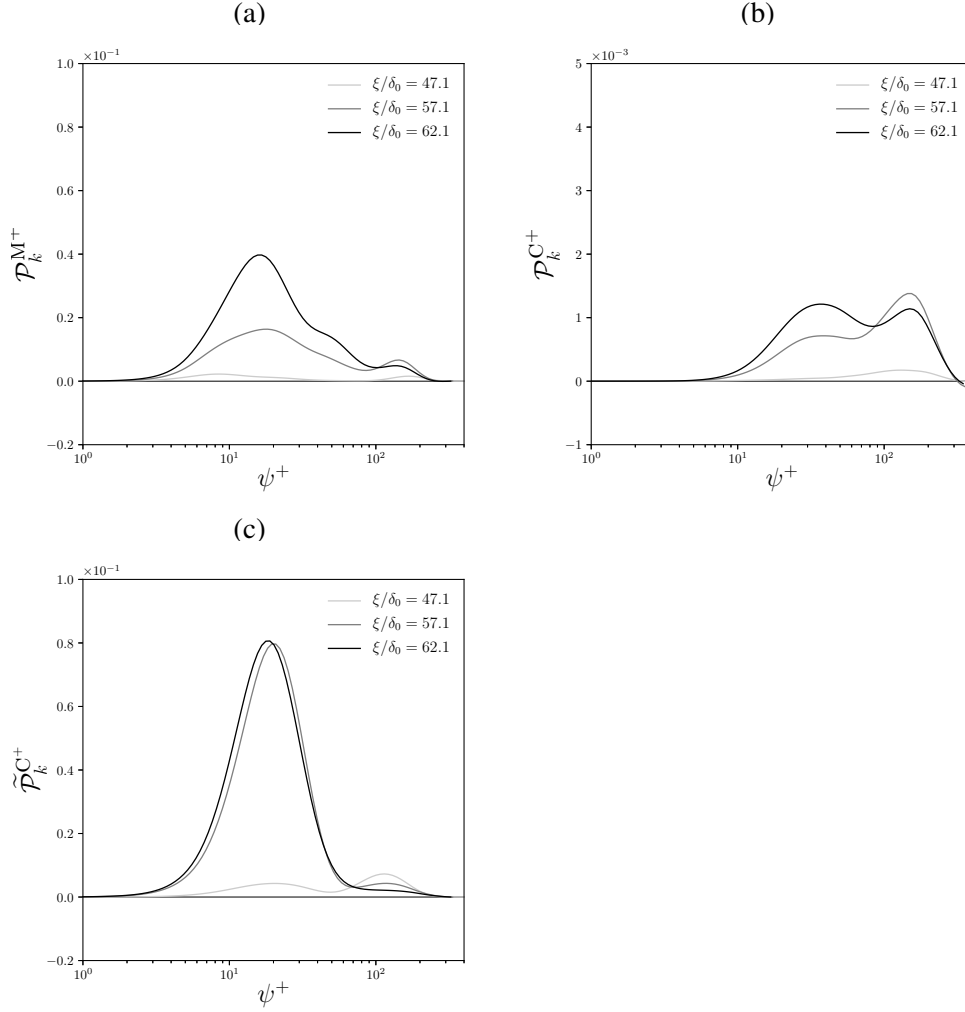


Figure 6.21. Contributions à la production d'énergie cinétique turbulente \mathcal{P}_k , normalisées par u_τ^4/ν pour 3 positions longitudinales $\xi/\delta_0 = \{47.1, 57.1, 62.1\}$. (a) Production par cisaillement moyen \mathcal{P}_k^M , (b) production par effets de courbure \mathcal{P}_k^C et (c) production indirecte par effets de courbure $\tilde{\mathcal{P}}_k^C$.

est en transition à la turbulence. Pour la dernière position longitudinale, le pic de production par cisaillement (à $\psi^+ = 20$) est $\mathcal{P}_k^M = 4 \times 10^{-2}$, le pic de production indirecte par courbure (à $\psi^+ = 20$ également) est $\tilde{\mathcal{P}}_k^C = 8 \times 10^{-2}$ et la production par courbure \mathcal{P}_k^C présente deux pics pour des valeurs de ψ^+ plus élevées, $\psi^+ = 40$ et $\psi^+ = 200$, de l'ordre de $\mathcal{P}_k^C \approx 1 \times 10^{-3}$. De la même manière que pour le cas à haut Reynolds, la production par courbure \mathcal{P}_k^C ne paraît pas très importante dans le bilan présenté, ce qui est due au faible rapport $\delta_0/(R-\psi) \approx 3.4 \times 10^{-2}$ qui intervient dans son expression. Malgré la faible contribution de la courbure au terme de production de TKE, cette contribution n'est pas nulle et permet de voir que la courbure joue un rôle dans la production de TKE dans la zone logarithmique et au delà ($20 < \psi^+ < 200$). De plus, la courbure joue un rôle primordial dans la transition à la turbulence par le terme de production de TKE indirecte par courbure $\tilde{\mathcal{P}}_k^C$. En effet, dans la phase de transition à la turbulence, ce terme participe 2 fois plus à la production d'énergie cinétique turbulente que le terme de production par cisaillement \mathcal{P}_k^M . Ces résultats nous permettent de dire que la production d'énergie cinétique turbulente \mathcal{P}_k dans la phase de transition à la turbulence d'une couche limite sur paroi courbe est principalement due au cisaillement moyen (\mathcal{P}_k^M) et à la présence des tourbillons ($\tilde{\mathcal{P}}_k^C$) qui est un effet indirect de la courbure.

On s'intéresse également au bilan des échelles de longueur, à savoir la longueur de mélange ℓ_m et les longueur de courbure \mathcal{L}_C et $\tilde{\mathcal{L}}_C$ (équation 6.28) qui suppose que le cisaillement turbulent est de l'ordre de $\langle u'v' \rangle = u_\tau^2$, hypothèse faiblement vérifiée pour ce régime de nombre de Reynolds modéré (figure 6.20d).

On montre les profils selon ψ^+ de ces échelles de longueur normalisées par $\delta_\nu = \nu/u_\tau$ en figure 6.22(a). Les résultats obtenus nous permettent de voir les régions de la couche limite où les

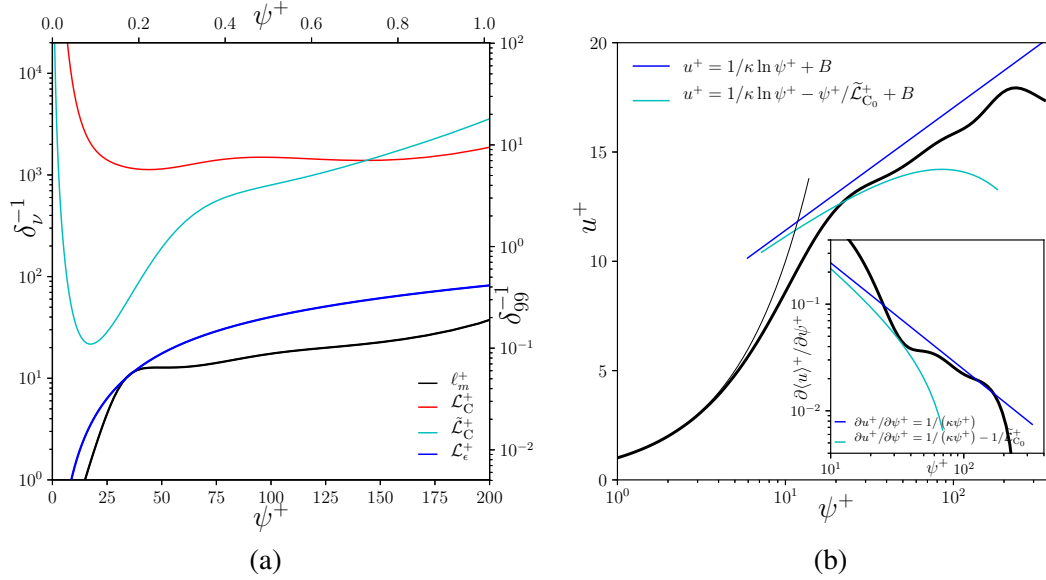


Figure 6.22. (a) Échelles de longueur caractéristiques des différentes contributions à la production d'énergie cinétique turbulente. Les échelles de longueur caractéristiques de la production par courbure \mathcal{L}_C^+ et $\tilde{\mathcal{L}}_C^+$, sont tracées en vert, l'échelle de longueur caractéristique de la production mécanique \mathcal{L}_M^+ est tracée en rouge. La longueur de mélange pour une couche limite turbulente sur plaque plane ℓ_m^+ est tracée en bleu. (b) Profil du gradient de vitesse $\partial \langle u \rangle_{t,z}^+ / \partial \psi^+$ en fonction de ψ^+ . La ligne bleue continue correspond à la loi classique de couche limite $\partial u^+ / \partial \psi^+ = 1/(\kappa \psi^+)$ avec $\kappa = 0.41$, la ligne noire pointillée correspond à la loi corrigée par le terme $\tilde{\mathcal{L}}_C^+$. La ligne noire continue correspond aux résultats obtenus par LES. (b) Profil de vitesse moyenne $\langle u \rangle_{t,z}^+$ en fonction de ψ^+ . La ligne bleue continue correspond à la loi classique de couche limite $u^+ = 1/\kappa \ln \psi^+ + B$, avec $B = 5.8$, la ligne noire pointillée correspond à la loi corrigée par le terme $\tilde{\mathcal{L}}_C^+$. La ligne noire continue correspond aux résultats obtenus par LES.

différents effets jouent et leur importance relative. Dans la région logarithmique, l'impact de la courbure via le terme $\tilde{\mathcal{L}}_C^+$ est très fort. Pour $10 < \psi^+ < 40$ on observe que $\tilde{\mathcal{L}}_C^+ \approx 40$. Cette valeur sera utilisée pour la correction de la loi logarithmique proposée par la suite. L'échelle de longueur \mathcal{L}_C^+ est elle négligeable dans cette configuration et la correction de la loi logarithmique qui en découle n'est pas étudiée.

La correction de la loi logarithmique de vitesse proposée s'appuie donc sur l'échelle $\tilde{\mathcal{L}}_C^+$ qui traduit les effets d'hétérogénéité (présence de tourbillons stationnaires). Cette correction a un sens physique et s'appuie sur le terme de production de TKE par des effets externes (courbure). La correction du gradient de vitesse s'écrit

$$\frac{\partial \langle u \rangle^+}{\partial \psi^+} = \frac{1}{\kappa \psi^+} - \frac{1}{\tilde{\mathcal{L}}_{C_0}^+} \quad (6.30)$$

où $\tilde{\mathcal{L}}_{c_0}^+ = 40$ correspond au minimum de $\tilde{\mathcal{L}}_c^+$ dans la zone logarithmique. Par intégration de l'équation 6.23 sur ψ^+ , la loi corrigée pour la vitesse adimensionnelle est

$$\langle u \rangle^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \psi^+ - \frac{\psi^+}{\tilde{\mathcal{L}}_{c_0}^+} + B \quad (6.31)$$

où $B = 5.8$ et $\kappa = 0.41$. On trace les corrections proposées en équations 6.30 pour le gradient de vitesse et 6.31 pour la vitesse en figure 6.22(b). Au delà du fait que la correction proposée ait du sens et au delà du fait que la tendance observée soit la bonne sur le gradient de vitesse et la vitesse, on observe que la correction permet de mieux décrire l'hétérogénéité liée à la présence des tourbillons de Görtler. L'accord entre les résultats statistiques (courbe noire continue) et la correction de la loi logarithmique (courbe cyan) est valable pour $20 < \psi^+ < 60$, qui est la partie basse de la zone logarithmique de notre couche limite. On montre donc ici que par application d'une correction simple s'appuyant sur le bilan d'énergie cinétique turbulente, on peut décrire les effets de courbure sur la topologie de l'écoulement (vitesse et gradient de vitesse).

6.2 Effets de flottabilité sur le champ turbulent

6.2.1 Configuration physique avec refroidissement à la paroi

On présente ici les résultats d'une série de simulations numériques où l'influence du refroidissement pariétal sur la turbulence de l'écoulement est étudiée pour un nombre de Reynolds modéré $Re_{\delta_0} = 1800$. Le but de cette série de simulation est de comprendre l'impact des effets de flottabilité sur le développement de la turbulence dans une couche limite sur paroi courbe. Pour cela, on distingue deux types de configurations physiques dans lesquelles une couche limite se développera :

- couche limite de blasius se développant dans un environnement où une stratification linéaire ambiante induit des effets de flottabilité
- couche limite de blasius se développant sur une paroi « refroidie » et dans un environnement de stratification linéaire ambiante, où les effets de flottabilité sont multiples

La configuration d'une couche limite avec refroidissement pariétal fait écho à la physique présente dans les écoulements de vents catabatiques. Dans le cas réel d'un vent catabatique, le refroidissement est à l'origine du développement de l'écoulement, formant ainsi un jet de paroi. Ici, le but des simulations présentées n'est pas de développer un tel jet de paroi, mais plutôt de caractériser l'influence du refroidissement sur la turbulence de couche limite. Ainsi, une série de simulations préliminaires qui n'est pas présentée ici a été effectuée pour obtenir des configurations dans lesquelles le refroidissement pariétal imposé est assez faible pour ne pas générer de jet de paroi, mais suffisamment important pour que des effets de refroidissement soient observés. La figure 6.23 résume la topologie (présence de l'instabilité de Görtler et présence d'un jet de paroi) obtenue dans ces simulations préliminaires pour un refroidissement croissant, quantifié par \mathcal{F} (voir équation 6.32). La série de simulations qui est exploitée pour l'analyse physique de la couche limite sur paroi

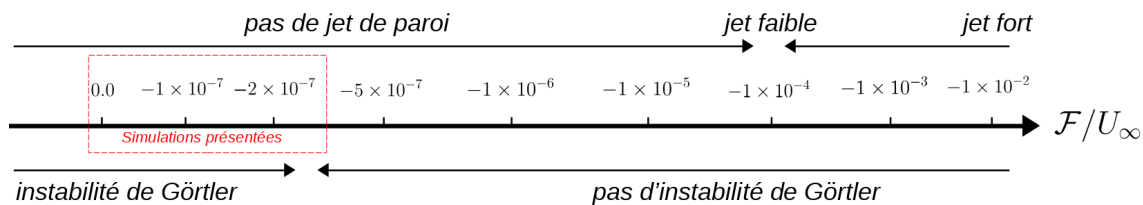


Figure 6.23. Présentation de la topologie observée lors d'une série de simulations préliminaires en fonction du paramètre de refroidissement \mathcal{F}/U_∞ . On situe de cadre de l'étude présentée (rectangle rouge).

courbe avec refroidissement permet donc d'observer le développement de l'instabilité de Görtler se développe. On force la longueur d'onde de l'instabilité de telle sorte que le processus de transition à la turbulence (développement de tourbillons puis tridimensionalisation) soit le même pour les différents cas simulés. Les paramètres relatifs à l'instabilité de Görtler sont le nombre de Görtler amont $G_0 = 13.4$ et le nombre d'onde adimensionnel amont est $\alpha_* = 0.92$. Ces paramètres physiques permettent d'observer la transition à la turbulence dans la domaine de simulation.

Les méthodes numériques pour simuler les effets de flottabilité sont celles présentées au chapitre 4 (section 4.3). Le paramètre physique pour la stratification linéaire ambiante est la fréquence de *Brunt-Väisälä* N . On introduit le paramètre de refroidissement \mathcal{F} qui correspond au flux de masse volumique adimensionnelle à la paroi, défini comme

$$\mathcal{F} = \kappa_\rho \left. \frac{\partial \tilde{\rho}_*}{\partial \psi} \right|_{\psi=0} \quad (6.32)$$

où κ_ρ est la diffusivité de $\tilde{\rho}_*$ qui intervient dans la définition du nombre de Schmidt Sc (équation 1.54) que l'on fixe à $Sc = 1$ dans toutes les simulations. Le scalaire $\tilde{\rho}_*$, dont le gradient est utilisé pour simuler un refroidissement, est la variation de densité par rapport à l'état de base $\bar{\rho}_*$. On note que le paramètre de refroidissement défini \mathcal{F} est homogène à une vitesse.

Un schéma reprenant la configuration physique du refroidissement et de la stratification ambiante est montré en figure 6.24. Le profil de vitesse en entrée du domaine $u_\xi(\psi)$ est une couche limite de Blasius laminaire (solution auto-similaire déjà présentée) et l'épaisseur de la couche limite est δ_0 . La stratification ambiante est représentée par le profil de $\bar{\rho}(\psi)$ et est appliquée pour $\psi < H_s$, avec H_s la hauteur de stratification. On s'assure que H_s reste supérieur à l'épaisseur de la couche limite δ_{99} dans tout le domaine, si bien que la couche limite est intégralement immergée dans un environnement stratifié. Le flux qui permet de simuler un refroidissement est appliqué dans la direction normale à la paroi, tout comme le profil de $\bar{\rho}(\psi)$ varie dans la direction normale à la paroi. La gravité elle est exprimée dans le repère global (direction y), similairement à ce qui a déjà été fait précédemment (voir figure 4.43).

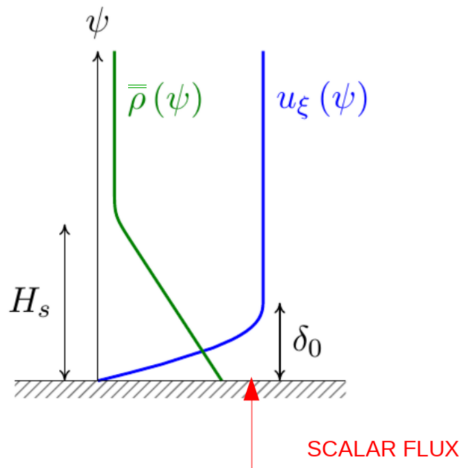


Figure 6.24. Profils qualitatifs de la vitesse longitudinale en entrée du domaine de calcul et de la stratification ambiante, dans la direction normale à la paroi. Le refroidissement pariétal correspond à un flux de densité \mathcal{F} , imposé à la paroi.

L'ensemble des simulations que l'on présente dans cette partie est résumé dans le tableau 6.1. Le cas de référence neutre à haut Reynolds nous a permis de caractériser les effets de courbure sur la turbulence de couche limite. Le cas de référence neutre à Reynolds modéré nous a également permis de caractériser les effets de courbure sur la turbulence de couche limite, plutôt dans une phase de transition à la turbulence et où la longueur de l'instabilité de Görtler est forcée. On présente ici 3 nouvelles simulations où les effets de flottabilité jouent. Une simulation à $N\delta_0/U_\infty = 0.05$ où la paroi courbe est une paroi adiabatique (pas de refroidissement pariétal) et deux simulations où on a à la fois une stratification ambiante ($N\delta_0/U_\infty = 0.05$) et un refroidissement pariétal plus ou moins élevé.

6.2.2 Résultats statistiques

On présente les résultats statistiques issus des 4 simulations à Reynolds modéré. On ne montrera les résultats que pour une position donnée $\xi/\delta_0 = 62.1$ qui correspond à la position où la turbulence est la plus développée dans le cas de référence précédemment présenté. La figure 6.25 montre le profil moyen de vitesse à $\xi/\delta_0 = 62.1$ pour les différentes configurations. On trace également les lois théoriques de couche limite turbulente sur plaque plane.

Premièrement, on observe que la stratification ambiante tend à relaminariser la couche limite,

Cas	$Re = U_\infty \delta_0 / \nu$	$\mathcal{F} = \kappa_\rho \partial \tilde{\rho}_* / \partial \psi _{\psi=0}$	N
Référence neutre haut Reynolds	10000	-	-
Référence neutre Reynolds modéré	1800	-	-
Stratification linéaire adiabatique	1800	-	$0.05 U_\infty / \delta_0$
Refroidissement en surface	1800	$-1.0 \times 10^{-7} U_\infty$	$0.05 U_\infty / \delta_0$
Refroidissement en surface	1800	$-2.0 \times 10^{-7} U_\infty$	$0.05 U_\infty / \delta_0$

Tableau 6.1. Configurations physiques des simulations numériques effectuées du développement d'une couche limite en transition à la turbulence avec des effets de flottabilité induit par stratification linéaire et refroidissement pariétal.

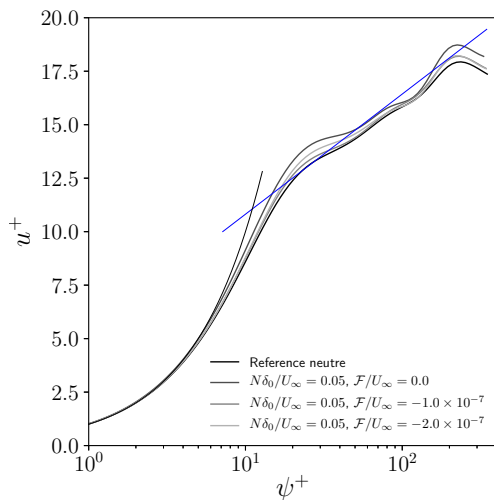


Figure 6.25. Vitesse longitudinale moyenne normalisée par les échelles visqueuses $\langle u \rangle_{t,z}^+$ en fonction de ψ^+ pour différentes positions longitudinales ξ/δ_0 . Pour les cas stratifiés, la stratification ambiante correspond à $N\delta_0/U_\infty = 0.05$. Pour les cas refroidis, le refroidissement est $\mathcal{F}/U_\infty = \{-1.0 \times 10^{-7}, -2.0 \times 10^{-7}\}$.

c'est à dire que le profil de vitesse tend à se rapprocher de la loi laminaire $u^+ = \psi^+$. Les effets de flottabilité tendent en effet à réduire l'amplitude des perturbations qui permettent la transition à la turbulence. On remarque également que pour les configurations où la couche limite est soumise à un refroidissement pariétal, le profil de vitesse obtenu est plus proche de la loi turbulente que pour la configuration où seule une stratification ambiante est imposée. On peut alors pressentir que le refroidissement pariétal participe au développement d'une forme de turbulence dans la couche limite.

On montre en figure 6.26 les résultats statistiques de l'état de la stratification dans la région où la turbulence est la plus développée dans l'écoulement ($\xi/\delta_0 = 62.1$). Les figures 6.26(a) et 6.26(b) montrent respectivement les profils moyens de la perturbation de masse volumique $\langle \tilde{\rho}_* \rangle$ et de son gradient dans la direction normale à la paroi $\partial \langle \tilde{\rho}_* \rangle / \partial \psi$. Ces résultats nous montrent la région de la couche limite où le modèle de stratification choisi joue sur la dynamique de l'écoulement. En effet, la quantité $\langle \tilde{\rho} \rangle$ intervient dans le terme source de l'équation de quantité de mouvement (équation 4.6). On voit ici que le modèle de stratification joue un rôle sur l'intégralité de la couche limite, avec une amplitude qui décroît et ce jusqu'à une position verticale $\psi/\delta(\xi) = 1.4$. Les figures 6.26(c) et 6.26(d) montrent respectivement les profils moyens de masse volumique totale $\langle \bar{\rho}_* + \tilde{\rho}_* \rangle$ et de son gradient dans la direction normale à la paroi $\partial \langle \bar{\rho}_* + \tilde{\rho}_* \rangle / \partial \psi$. Ces quantités nous permettent de décrire la stabilité de l'écoulement obtenu par simulation numérique. En effet, c'est la masse volumique totale qui nous permet de repérer les zones instables dans la couche limite. Les zones instables correspondent aux zones où le gradient de la masse volumique totale devient positif. Dans les simulations présentées, la stratification globale obtenue reste stable puisque le

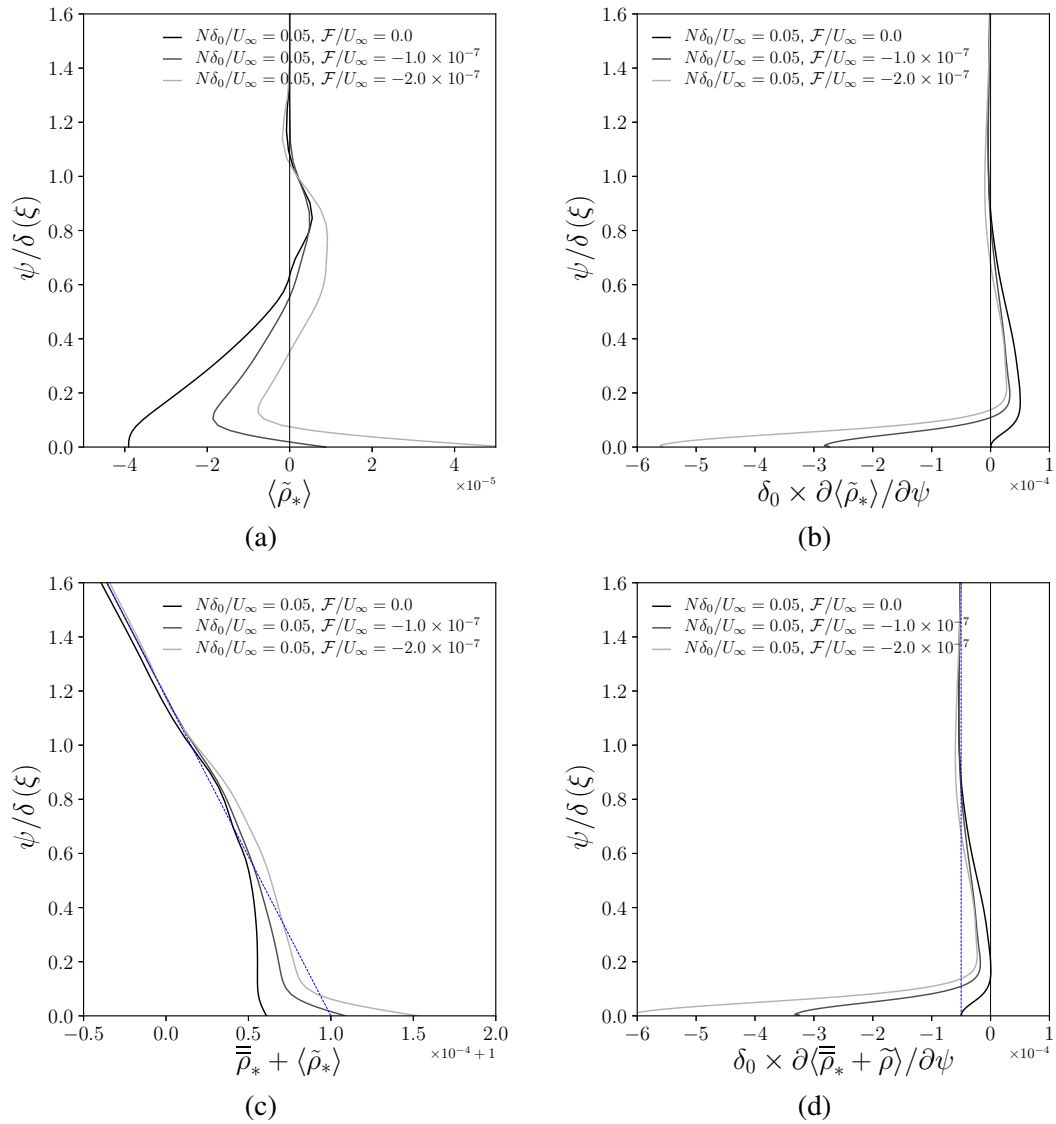


Figure 6.26. Résultats statistiques de la stratification dans l'écoulement. (a) Fluctuation de la masse volumique adimensionnelle moyenne $\langle \tilde{\rho}_* \rangle$ et (b) son gradient dans la direction normale à la paroi. (c) Masse volumique adimensionnelle totale $\overline{\rho}_* + \langle \tilde{\rho}_* \rangle$ et (d) son gradient dans la direction normale à la paroi. La stratification linéaire est représentée par les courbes bleues pointillées.

gradient de la masse volumique totale dans la direction normale à la paroi reste négatif (figure 6.26d). De plus, notons que la masse volumique totale obtenue présente des oscillations autour de l'état de stratification ambiante ce qui est représentatif de la solution 1D du modèle de Prandtl pour les écoulements à flux de chaleur à la paroi constant (vents catabatiques), qui est en exponentielle décroissante (Shapiro et Fedorovich, 2004). On reproduit ici un comportement cohérent avec la physique des écoulements catabatiques, même si le refroidissement pariétal ne permet pas de générer un jet de paroi.

On présente également le profil de l'énergie cinétique turbulente k à $\xi/\delta_0 = 62.1$ pour les différentes simulations en figure 6.27. Les observations que l'on peut faire viennent corroborer les conclusions précédentes. En effet, la stratification ambiante a un effet stabilisant vis à vis de l'énergie cinétique

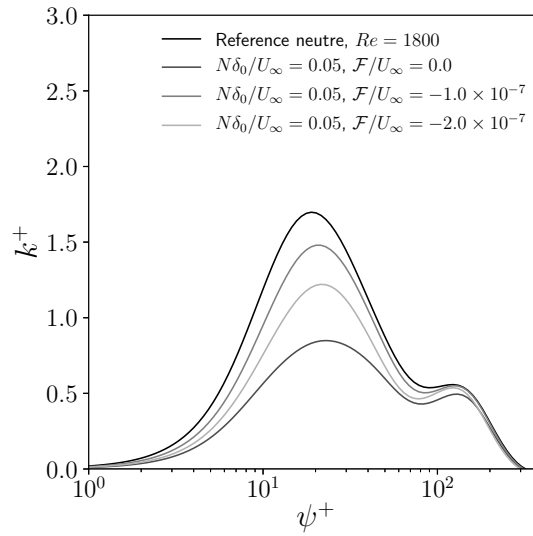


Figure 6.27. Énergie cinétique turbulente normalisée par la vitesse de frottement u_τ^2 en fonction de ψ^+ , pour les différentes configurations physiques simulées. Pour les cas stratifiés, la stratification ambiante correspond à $N\delta_0/U_\infty = 0.05$. Pour les cas refroidis, le refroidissement est $\mathcal{F}/U_\infty = \{-1.0 \times 10^{-7}, -2.0 \times 10^{-7}\}$.

turbulente car on observe une diminution de celle-ci pour la configuration où seule la stratification ambiante joue. En revanche, pour les cas refroidis, l'énergie cinétique turbulente est supérieure ce qui signifie que la refroidissement pariétal favorise la turbulence dans la couche limite. Cependant, quand le refroidissement devient trop fort, la turbulence est complètement amortie. Il y a donc un effet non trivial du refroidissement sur la turbulence de couche limite, qui est approfondi par la suite.

Enfin, les composantes principales du tenseur de Reynolds sont présentées en figure 6.28(a-d) pour les différentes configurations physiques et comparées aux résultats du cas de référence neutre. On montre une fois de plus que la présence des effets de flottabilité tend à réduire la turbulence, donc les flux turbulents, dans l'écoulement. De la même manière que pour l'énergie cinétique turbulente, les flux turbulents obtenus par simulation numérique sont plus élevés pour les cas avec refroidissement que pour les cas sans refroidissement. Le flux turbulent longitudinal de masse volumique adimensionnelle $\langle u'\tilde{\rho}' \rangle$ et normal à la paroi $\langle v'\tilde{\rho}' \rangle$ sont montrés en figure 6.28(e) et 6.28(f) respectivement. On normalise ces flux turbulents par la vitesse de frottement u_τ et la masse volumique de frottement ρ_τ définie par

$$\rho_\tau = \frac{q_\rho}{\rho_0 u_\tau} \quad (6.33)$$

où q_ρ est le flux de masse volumique à la paroi (équivalent au flux de chaleur pour la température) qui est défini par

$$q_\rho = \kappa_\rho \left. \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial \psi} \right|_{\psi=0} \quad (6.34)$$

Les résultats statistiques obtenus nous montrent que les flux de masse volumiques sont importants dans l'écoulement. On observe notamment que lorsque la condition aux limites de refroidissement est non nulle, les flux turbulents de densité normalisés par les conditions de frottement sont de l'ordre de 1. On a là un résultat cohérent avec la physique de la couche limite attendue où la condition de frottement pariétal se transporte jusque dans la couche limite comme le montrent les flux turbulents de masse volumique.

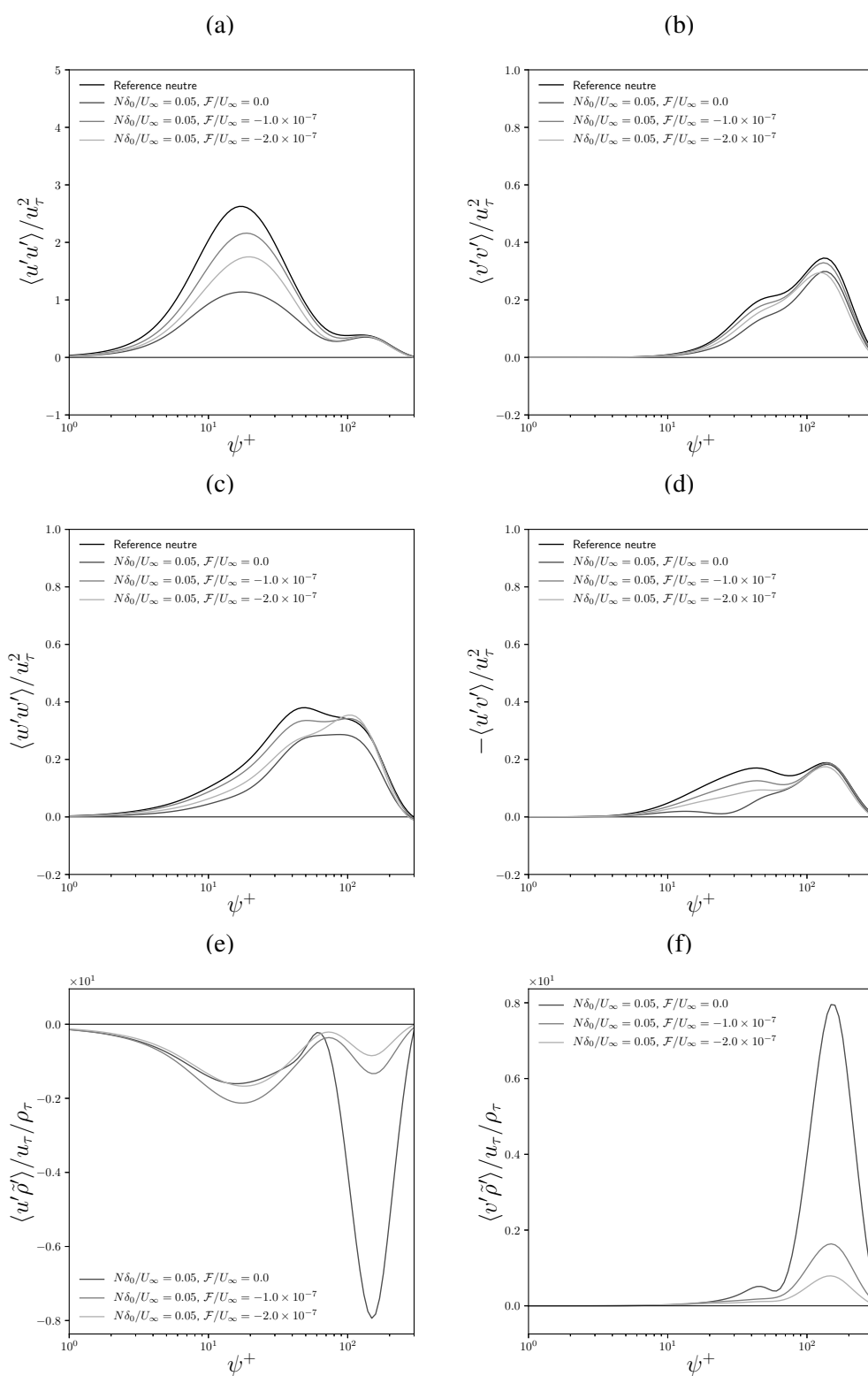


Figure 6.28. Tenseur de Reynolds $\langle u'_i u'_j \rangle$ normalisés par la vitesse de frottement au carré u_τ^2 en fonction de ψ^+ . (a) $\langle u'u' \rangle / u_\tau^2$, (b) $\langle v'v' \rangle / u_\tau^2$, (c) $\langle w'w' \rangle / u_\tau^2$, (d) $-\langle u'v' \rangle / u_\tau^2$, ainsi que les flux turbulents de densité $\langle u'_i \tilde{\rho}' \rangle$ normalisés par la vitesse de frottement u_τ et par la densité de frottement ρ_τ en fonction de ψ^+ (e) $\langle u' \tilde{\rho}' \rangle / u_\tau / \rho_\tau$ et (f) $\langle v' \tilde{\rho}' \rangle / u_\tau / \rho_\tau$. Les profils sont tracés pour $\xi/\delta_0 = 62.1$. Pour les cas stratifiés, la stratification ambiante correspond à $N\delta_0/U_\infty = 0.05$. Pour les cas refroidis, le refroidissement est $\mathcal{F}/U_\infty = \{-1.0 \times 10^{-7}, -2.0 \times 10^{-7}\}$.

6.2.3 Bilan de TKE

Le stratification ambiante ainsi que le refroidissement pariétal jouent également un rôle sur les propriétés turbulentes de couche limite. On s'intéresse ici au bilan de TKE et plus particulièrement à la production de TKE dans la couche limite en présence d'effets de flottabilité. Dans un premier temps, les équation de transport de $\langle u'u' \rangle$ et $\langle v'v' \rangle$, modifiées par l'apparition de termes de production par flottabilité, sont réécrite

$$\begin{array}{l}
 0 = \underbrace{-2\langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial \psi} + \frac{2\langle u'v' \rangle}{R-\psi} \langle u \rangle + 2g_\xi \langle u'\tilde{\rho}' \rangle}_{\text{Production}} \quad \underbrace{-\frac{2}{\rho_0} \frac{R}{R-\psi} \langle u' \frac{\partial \tilde{p}'}{\partial \xi} \rangle + \nu \Delta \langle u'u' \rangle}_{\text{Pression}} \quad \underbrace{+ \nu \Delta \langle u'u' \rangle}_{\text{Diffusion}} \quad \underbrace{-\epsilon_{uu}}_{\text{Dissip.}} \\
 0 = \quad \quad \quad \underbrace{-\frac{4\langle u'v' \rangle}{R-\psi} \langle u \rangle + 2g_\psi \langle v'\tilde{\rho}' \rangle}_{\text{Production}} \quad \quad \quad \underbrace{-\frac{2}{\rho_0} \langle v' \frac{\partial \tilde{p}'}{\partial \psi} \rangle + \nu \Delta \langle v'v' \rangle}_{\text{Pression}} \quad \quad \quad \underbrace{+ \nu \Delta \langle v'v' \rangle}_{\text{Diffusion}} \quad \quad \quad \underbrace{-\epsilon_{vv}}_{\text{Dissip.}} \\
 0 = \quad \quad \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{\text{Cisaillement (M)}} \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{\text{Courbure (C)}} \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{\text{Stratification (B)}} \quad \quad \quad \underbrace{-\frac{2}{\rho_0} \langle w' \frac{\partial \tilde{p}'}{\partial z} \rangle + \nu \Delta \langle w'w' \rangle}_{\text{Pression}} \quad \quad \quad \underbrace{+ \nu \Delta \langle w'w' \rangle}_{\text{Diffusion}} \quad \quad \quad \underbrace{-\epsilon_{ww}}_{\text{Dissip.}}
 \end{array} \quad (6.35)$$

avec $g_\xi = g \cos \phi$ et $g_\psi = -g \sin \phi$ qui représentent les composantes de l'accélération gravitationnelle \vec{g} dans les directions longitudinale et normale respectivement. La production par flottabilité n'intervient pas dans l'équation de $\langle w'w' \rangle$ du fait de la direction préférentielle de stratification (normale à la paroi) et de l'accélération gravitationnelle $\vec{g} = g\vec{y}$. Les termes de production classiques de cette équation sont eux négligés pour des raison de simplification du problème.

On peut ainsi écrire le bilan d'énergie cinétique turbulente avec effets de flottabilité à partir du bilan du tenseur de Reynolds. Le bilan présenté est simplifié pour un écoulement de couche limite et spécifiquement pour être vérifié dans la zone logarithmique où la production \mathcal{P}_k et la dissipation ϵ sont égales. Le bilan d'énergie cinétique turbulente est alors

$$\underbrace{-\langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial \psi} - \frac{\langle u'v' \rangle}{R-\psi} \langle u \rangle + g_\xi \langle u'\tilde{\rho}' \rangle + g_\psi \langle v'\tilde{\rho}' \rangle}_{\text{Production}} = \underbrace{\epsilon}_{\text{Dissipation}} \quad (6.36)$$

où \mathcal{P}_k^M , \mathcal{P}_k^C et \mathcal{P}_k^B représentent respectivement la production d'énergie cinétique turbulente par cisaillement, par effets de courbure et par effets de flottabilité. On montre les différentes contributions à la production d'énergie cinétique turbulente k en figure 6.29(a,b,d), ainsi que la production par effets d'hétérogénéité (figure 6.29c) qui s'obtient par un traitement statistique spécifique des flux turbulents (voir équation 6.26).

La première chose que l'on constate est que, contrairement à \mathcal{P}_k^{M+} et \mathcal{P}_k^{C+} , la production d'énergie cinétique turbulente par flottabilité \mathcal{P}_k^{B+} est négative, ce qui confirme que les effets de flottabilité tendent à réduire la turbulence dans notre configuration. Ceci correspond à un processus de laminarisation de l'écoulement. Cependant, les ordres de grandeurs des différents termes de production observés montrent que les effets de flottabilité ne sont pas assez forts pour avoir un impact significatif sur la turbulence de l'écoulement.

De plus, on observe que les effets de flottabilité sont présents pour $< 40 < \psi^+ < 400$ ce qui correspond à la zone logarithmique de la couche limite. Les effets de courbure sont également présents dans cette région, alors que la zone de production par cisaillement est plus étendue ($< 5 < \psi^+ < 200$). Par ailleurs, si on compare les effets de flottabilité et de courbure, on remarque

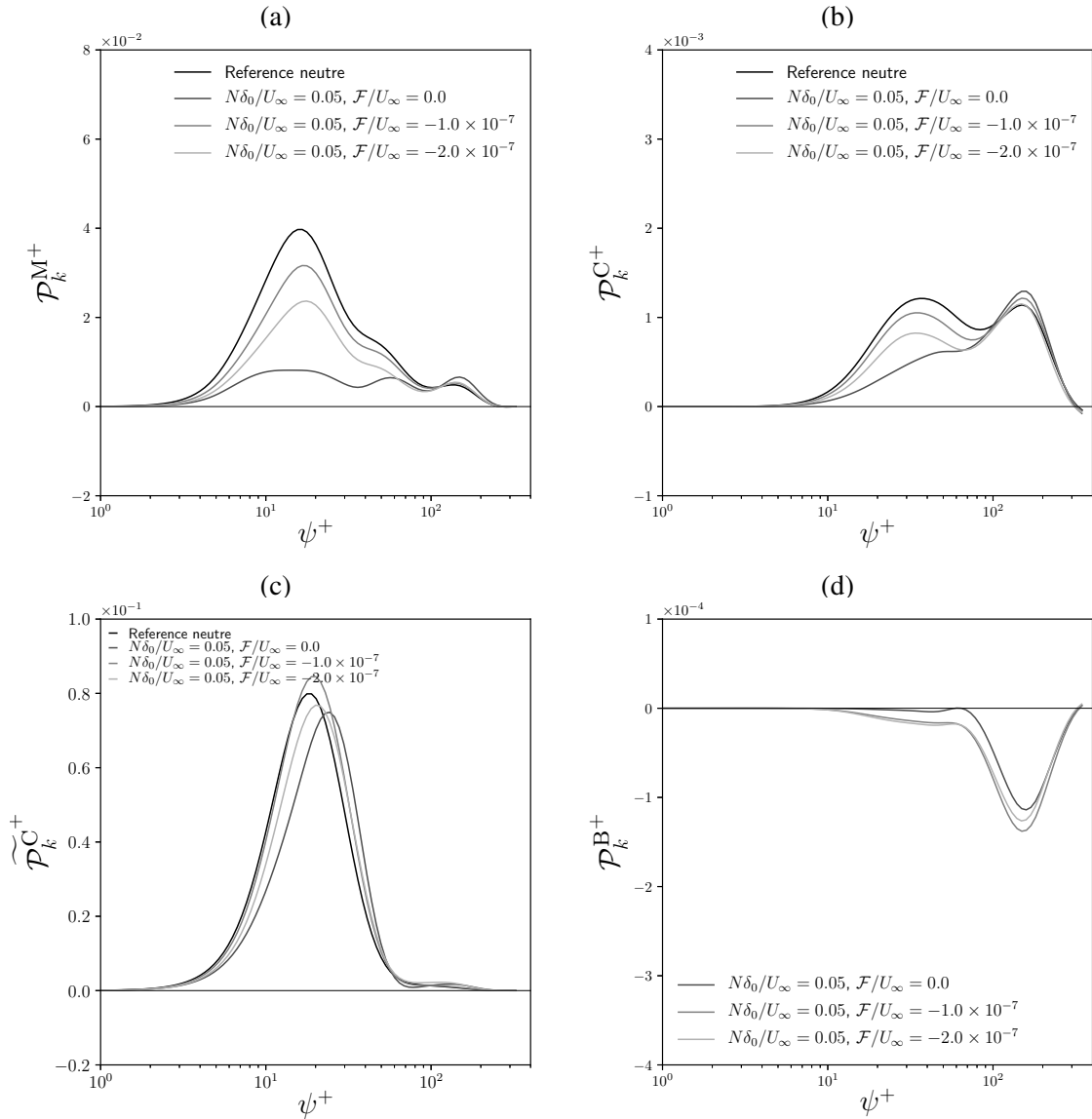


Figure 6.29. Contributions à la production d'énergie cinétique turbulente k , normalisées par u_τ^4/ν en fonction de ψ^+ pour les différentes configurations physiques simulées. (a) production par cisaillement \mathcal{P}_k^{M+} , (b) production par courbure \mathcal{P}_k^C+ , (c) production par cisaillement transverse $\widetilde{\mathcal{P}}_k^{C+}$, (d) production par flottabilité \mathcal{P}_k^{B+} . Pour les cas stratifiés, la stratification ambiante correspond à $N\delta_0/U_\infty = 0.05$. Pour les cas refroidis, le refroidissement est $\mathcal{F}/U_\infty = \{-1.0 \times 10^{-7}, -2.0 \times 10^{-7}\}$.

que la flottabilité représente 10% de la production par la courbure, en valeur absolue au niveau des pics de production. Or, on l'a vu précédemment, la courbure peut jouer un rôle non négligeable dans la dynamique de l'écoulement global. Le terme de production par flottabilité étant négatif, on peut voir les effets de flottabilité comme responsables d'une réduction de 10% de la production par courbure.

Enfin, on constate que la production par effets d'hétérogénéité reste la contribution dominante à la production de TKE.

6.2.4 Échelles de longueur caractéristiques

Jusqu'ici, les résultats montrent que l'on est en présence d'une couche limite en transition à la turbulence pour les différentes configurations présentées. Cependant, on utilise les propriétés présentées précédemment, valables en théorie pour une couche limite turbulente développée sur plaque plane pour écrire le bilan des échelles de longueurs caractéristiques de production de TKE.

Dans la zone logarithmique, la production \mathcal{P}_k et la dissipation ϵ sont à l'équilibre et $\epsilon = u_\tau^3 / (\kappa\psi)$. On réécrit l'équation bilan de TKE en présence d'effets de courbure et de flottabilité (équation 6.36) que l'on normalise par u_τ^3 / δ_ν . On rajoute ici les effets d'hétérogénéité transverse liés à la présence de l'instabilité de Görtler en région transitoire (voir équation 6.28). On obtient la relation suivante ¹

$$\underbrace{\frac{1}{\ell_m^+} + \frac{1}{\mathcal{L}_C^+} + \frac{1}{\widetilde{\mathcal{L}}_C^+}}_{\text{Production}} - \frac{1}{\mathcal{L}_B^+} = \underbrace{\frac{1}{\mathcal{L}_\epsilon^+}}_{\text{Dissipation}} = \frac{1}{\kappa\psi^+} \quad (6.37)$$

On note la contribution négative du terme de flottabilité qui provient des flux de transfert de masse volumique (figures 6.28e-f). On montre les profils des échelles de longueur de l'équation 6.37 en figure 6.30. Les échelles de longueur calculées sont comparées à l'échelle de dissipation pour une

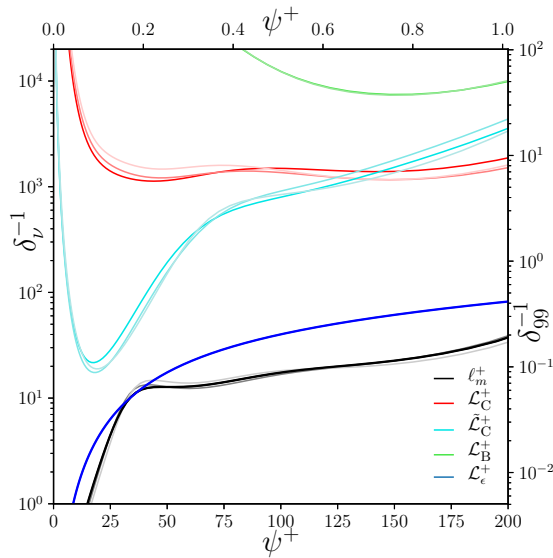


Figure 6.30. Échelles de longueur caractéristiques des différentes contributions à la production d'énergie cinétique turbulente pour différentes configurations du plus foncé au plus clair $\mathcal{F}/U_\infty = \{0.0, -1.0 \times 10^{-7}, -2.0 \times 10^{-7}\}$.

couche limite sur plaque plane $\ell_m^+ = \kappa\psi^+$. On observe que les effets de courbure et les effets de stratification jouent un rôle pour $\psi^+ = 150$, qui correspond aux pics de production par courbure et flottabilité respectivement. Les différentes configurations physiques simulées ne donnent pas de tendances significatives en terme d'échelles de longueur et on a pour les trois cas $\mathcal{L}_C^+ \approx 1000$ et $\mathcal{L}_B^+ \approx 10000$. L'échelle $\widetilde{\mathcal{L}}_C^+$ reste dominante dans le bilan montré où le minimum est $\widetilde{\mathcal{L}}_C^+ \approx 20$ à $\psi^+ = 20$.

Le bilan des échelles de longueur nous permet en théorie de proposer des corrections de la loi logarithmique par rapport aux processus qui ont un impact sur la turbulence i.e. la courbure correspondant à l'échelle \mathcal{L}_C^+ , l'hétérogénéité spatiale correspondant à l'échelle $\widetilde{\mathcal{L}}_C^+$ et la stratification correspondant à l'échelle \mathcal{L}_B^+ . De manière similaire à ce qui est présenté dans la section précédente

1. On suppose encore que le cisaillement turbulent est $\langle u'v' \rangle = u_\tau^2$, hypothèse faiblement vérifiée dans ce cas à Reynolds modéré (figure 6.28d).

et en adaptant aux nouvelles échelles mises en jeu, la correction du gradient de vitesse dans la zone logarithmique s'écrit

$$\frac{\partial \langle u \rangle^+}{\partial \psi^+} = \frac{1}{\kappa \psi^+} - \frac{1}{\mathcal{L}_C^+} - \frac{1}{\widetilde{\mathcal{L}}_C^+} + \frac{1}{\mathcal{L}_B^+} \quad (6.38)$$

Comme on l'a fait précédemment, on considère les termes de correction \mathcal{L}_C^+ , $\widetilde{\mathcal{L}}_C^+$ et \mathcal{L}_B^+ constants dans la zone logarithmique. Leurs valeurs sont respectivement $\widetilde{\mathcal{L}}_C^+ = 20$, $\mathcal{L}_{C_0}^+ = 10^3$ et $\mathcal{L}_{B_0}^+ = 10^4$. Par intégration de l'équation 6.38 sur ψ^+ , la loi corrigée pour la vitesse adimensionnelle est

$$\langle u \rangle^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \psi^+ - \frac{\psi^+}{\mathcal{L}_{C_0}^+} - \frac{\psi^+}{\widetilde{\mathcal{L}}_{C_0}^+} + \frac{\psi^+}{\mathcal{L}_{B_0}^+} + B \quad (6.39)$$

Pour dissocier les différents effets, on peut également proposer des corrections issues d'un seul effet à la fois. Pour les lois corrigées par effets de flottabilité, on aurait donc

$$\frac{\partial \langle u \rangle^+}{\partial \psi^+} = \frac{1}{\kappa \psi^+} + \frac{1}{\mathcal{L}_{B_0}^+} \quad (6.40)$$

$$\langle u \rangle^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \psi^+ + \frac{\psi^+}{\mathcal{L}_{B_0}^+} + B \quad (6.41)$$

On note que la contribution des effets liés aux échelles de longueurs \mathcal{L}_C^+ et \mathcal{L}_B^+ sont négligeables dans le bilan global. Dans les conditions physiques de ces simulations, seuls les effets de l'hétérogénéité spatiale sont prépondérants et les corrections qui y sont associées ne diffèrent pas des résultats montrés précédemment en figure 6.22.

6.2.5 Bilan du terme de cisaillement turbulent

Dans les écoulements de couche limite turbulente, le flux turbulent $\langle u'v' \rangle$ quantifie le mélange de la quantité de mouvement. Cette quantité intervient par ailleurs dans tous le terme de production par cisaillement de TKE, principale source de production (Pope, 2000). On s'intéresse ici dans le détail aux processus qui favorisent (ou défavorisent) la production du cisaillement turbulent. L'équation bilan pour le terme $\langle u'v' \rangle$ en repère courbe et en considérant les effets de flottabilité s'écrit

$$\underbrace{-\langle v'v' \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial \psi} - \frac{2\langle u'u' \rangle}{R-\psi} \langle u \rangle - \frac{\langle v'v' \rangle}{R-\psi} \langle u \rangle + g_\xi \langle \tilde{\rho}'v' \rangle + g_\psi \langle \tilde{\rho}'u' \rangle}_{\text{Production}} = \underbrace{\Pi}_{\text{Pression}} \quad (6.42)$$

où Π est le terme de pression, défini par

$$\Pi = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{R}{R-\psi} \langle v' \frac{\partial \tilde{p}'}{\partial \xi} \rangle + \langle u' \frac{\partial \tilde{p}'}{\partial \psi} \rangle \right) \quad (6.43)$$

On considère l'équilibre entre le terme de production et le terme de pression, comme c'est le cas pour une couche limite turbulente sur plaque plane (Pope, 2000). On montre l'ensemble des termes de production de l'équation bilan 6.42, pour les différentes conditions de stratification en figure 6.31. Premièrement, on remarque que la contribution du cisaillement longitudinal moyen $\mathcal{P}_{\langle u'v' \rangle}^M$ (en échelles de gris) et de la contribution de la courbure $\mathcal{P}_{\langle u'v' \rangle}^C$ (en échelles de rouges) sont du même ordre de grandeur. Ceci signifie encore une fois qu'à des nombre de Reynolds modérés, la courbure joue un rôle primordial dans la production de turbulence (ici le cisaillement turbulent). De plus, on observe que les conditions de refroidissement agissent sur le bilan de production de $\langle u'v' \rangle$. En effet,

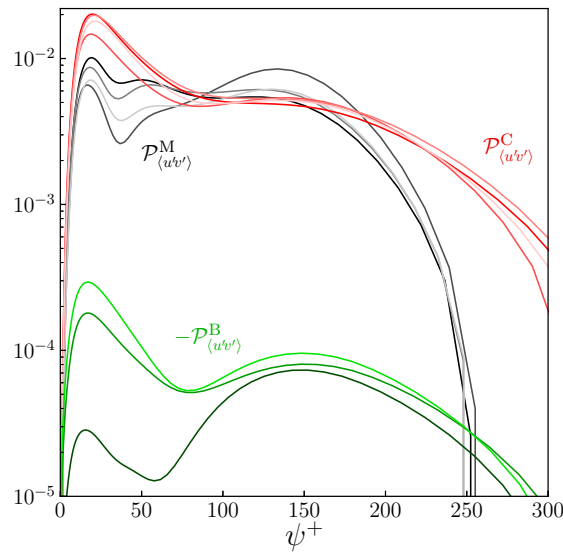


Figure 6.31. Contributions au terme de production $\mathcal{P}_{\langle u'v' \rangle}$ de l'équation de transport du cisaillement turbulent $\langle u'v' \rangle$. Du plus foncé au plus clair $\mathcal{F}/U_\infty = \{0.0, -1.0 \times 10^{-7}, -2.0 \times 10^{-7}\}$. Les profils sont comparés au cas de référence neutre (noir et rouge vif).

plus la condition de refroidissement est importante, plus le terme $-\mathcal{P}_{\langle u'v' \rangle}^B$ est important proche de la paroi. Peu de changement est à noter dans la région extérieure selon les configurations. Le refroidissement pariétal est donc responsable d'une diminution du cisaillement turbulent proche de la paroi. Ceci est important car le cisaillement turbulent est responsable du mélange dans les écoulements cisailés libres.

6.2.6 Analogie de Bradshaw pour les Richardson de flux et de cisaillement

Pour conclure cette analyse des effets de stratification sur une couche limite courbe, l'analogie de Bradshaw (1969) est à nouveau utilisée. Cette analogie décrit les similitudes qui existent entre les effets de courbure et les effets de stratification dans un écoulement de couche limite. Ici, on utilise cette analogie pour mettre en évidence la compétition qui existe entre ces deux effets dans un écoulement de couche limite refroidie, similaire aux vents catabatiques. Pour cela, on compare les nombres de Richardson de flux associés aux effets de courbure d'une part (R_f^C) et aux effets de flottabilité d'autre part (R_f^B). Le nombre de Richardson de flux est le rapport entre le terme de production de TKE par effets externes (courbure ou stratification) et le terme de production par cisaillement, tel que

$$R_f^C = \frac{\mathcal{P}_k^C}{\mathcal{P}_k^M} \quad (6.44)$$

$$R_f^B = \frac{\mathcal{P}_k^B}{\mathcal{P}_k^M} \quad (6.45)$$

On trace en figure 6.32 les profils des nombres de Richardson dans la zone de l'écoulement où la turbulence est la plus développée. Les nombres de Richardson de flux de courbure sont négatifs ce qui traduit un effet déstabilisant, alors que les nombres de Richardson de flux de stratification sont positifs ce qui traduit un effet stabilisant. Mis à part les oscillations observées sur les profils de R_f^C qui sont certainement dues aux fortes hétérogénéités spatiales présentes dans le domaine, on observe un plateau pour les deux définitions du nombre de Richardson de flux, où $R_f^C = 0.2$ et $R_f^B = 0.02$.

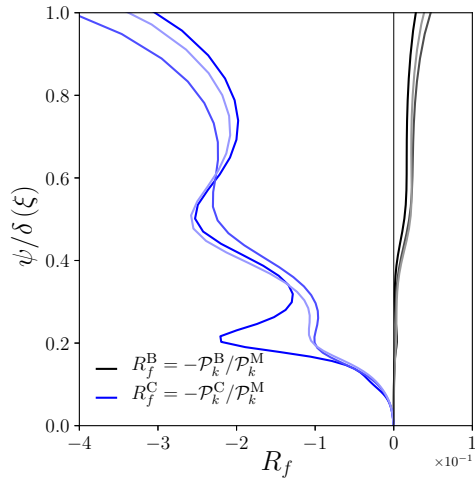


Figure 6.32. Nombre de Richardson de flux pour différentes configuration Du plus foncé au plus clair : $\mathcal{F}/U_\infty = \{0.0, -1.0 \times 10^{-7}, -2.0 \times 10^{-7}\}$.

Le nombre de Richardson de cisaillement correspond au rapport entre le terme de production par effets externes (courbure ou stratification) dans l'équation de transport du cisaillement turbulent $\langle u'v' \rangle$ et le terme de production classique. Les nombres de Richardson de flux, relatifs aux effets de courbure (R_s^B) et de stratification (R_s^C) sont

$$R_s^C = \frac{\mathcal{P}_{\langle u'v' \rangle}^C}{\mathcal{P}_{\langle u'v' \rangle}^M} \quad (6.46)$$

$$R_s^B = \frac{\mathcal{P}_{\langle u'v' \rangle}^B}{\mathcal{P}_{\langle u'v' \rangle}^M} \quad (6.47)$$

On présente en figure 6.33 les profils des nombres de Richardson de cisaillement obtenus par simulation numérique. Les résultats montrent encore un fois un rôle déstabilisant de la courbure et un

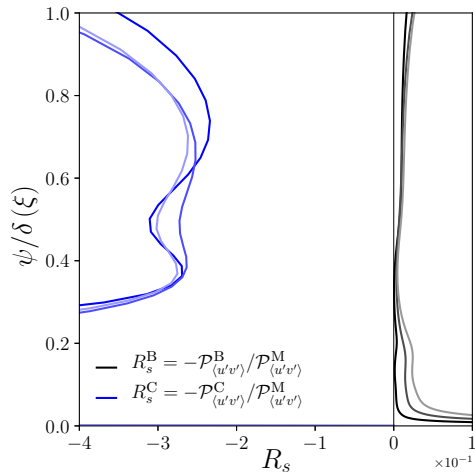


Figure 6.33. Nombre de Richardson de cisaillement pour différentes configuration Du plus foncé au plus clair : $\mathcal{F}/U_\infty = \{0.0, -1.0 \times 10^{-7}, -2.0 \times 10^{-7}\}$.

rôle stabilisant de la flottabilité. Le nombre de Richardson de cisaillement de courbure est de l'ordre de $R_s^C = 0.25$ et le nombre de Richardson de cisaillement de flottabilité est de l'ordre de $R_s^B = 0.01$.

On comprend ici avec ces différents résultats pourquoi l'impact de la courbure et de la stratification ne sont pas perceptibles dans les corrections précédemment proposées. Les nombres de Richardson observés sont inférieurs à 1 voire très inférieurs à 1 ce qui traduit un effet minoritaire

dans la dynamique globale de l'écoulement.

Néanmoins, les nombres de Richardson relatifs aux effets de la flottabilité R_f^B et R_s^B sont comparables à ce qui est observé dans des expériences de terrain. [Charrondière et al. \(2020\)](#) montrent en effet dans des mesures de terrains, où un vent catabatique se développe, que les valeurs de Richardson de flux R_f^B sont de l'ordre de 0.2. Dans la configuration physique de leur étude un fort refroidissement pariétal est mesuré et ce refroidissement est à l'origine d'une dynamique forte de l'écoulement puisqu'un jet de paroi se développe. Néanmoins, leurs mesures montrent que le nombre de Richardson reste inférieur à 1.

Les simulations numériques présentées sont donc tout à fait cohérentes avec des mesures réelles de terrain d'écoulements cisailés refroidis. On montre en effet une influence de la flottabilité sur la dynamique de l'écoulement (figure 6.25) sans que pour autant cela se traduise par des nombres de Richardson importants (figures 6.32 et 6.33).

7 Conclusion

7.1 Objectifs de la thèse

Ces travaux s'inscrivent dans le contexte de la simulation numérique d'écoulements géophysiques évoluant en topographie complexe. Dans cette thèse, nous faisons le choix de modéliser la topographie réelle par une paroi courbe puis plane et la topologie de l'écoulement amont par une couche limite de Blasius. La configuration principale de l'étude consiste alors en une couche limite de Blasius se développant sur paroi concave. La courbure de la paroi induit le développement de l'instabilité de Görtler, responsable de la transition à la turbulence. De plus, la courbure induit des termes supplémentaires dans le bilan des quantités turbulentes de la couche limite. Après avoir réalisé une analyse de stabilité linéaire de ce problème, l'approche employée est la simulation des grandes échelles qui permet de décrire l'écoulement à la fois dans la région de croissance linéaire et non-linéaire (où la simulation est équivalente à une DNS du fait de la résolution spatiale fine utilisée) mais également dans la région turbulente aval où le modèle sous-maille intervient. L'objectif est de décrire la dynamique de l'instabilité de Görtler dans toutes les phases de son développement et d'analyser son impact sur la turbulence développée en aval. Les effets de flottabilité, présents dans les configurations géophysiques réelles, sont également analysés au regard de la compétition qui existe avec les effets de courbure.

7.2 Conclusions du travail réalisé

Dans un premier temps, l'analyse de stabilité linéaire d'une couche limite de Blasius neutre sur paroi concave a été réalisée en s'appuyant sur les travaux de [Floryan et Saric \(1982\)](#). On étend leur étude à des nombres de Görtler G_θ élevés et une large gamme de nombres d'onde α . Une approche locale est employée puisque l'évolution spatiale de l'écoulement de base n'est pas prise en compte. Le comportement de l'instabilité obtenu est semblable aux résultats obtenus par [Floryan et Saric \(1982\)](#). Un diagramme de stabilité est proposé à partir de nos calculs et sert de base de comparaison pour la suite de l'étude.

Dans un deuxième temps, la simulation des grandes échelles est utilisée pour décrire la physique des écoulements auxquels on s'intéresse. Les simulations présentées s'articulent autour de deux grands axes qui correspondent aux deux phases du développement de l'instabilité de Görtler : la croissance linéaire et non-linéaire de l'instabilité de Görtler d'une part et la région turbulente d'autre part. Trois études paramétriques sont réalisées pour décrire la région où l'instabilité de Görtler est en développement. La première d'entre elles, qui consiste à forcer la longueur d'onde de l'instabilité λ , nous permet de décrire l'influence de λ sur la topologie en s'appuyant également sur une comparaison avec les résultats obtenus par LSA. Un processus de sélection de longueur d'onde régit la croissance de l'instabilité et la longueur d'onde la plus instable est ainsi déterminée. La comparaison à l'analyse de stabilité linéaire montre un accord raisonnable entre les deux approches mais on note un écart sur le taux de croissance de l'instabilité montrant que la croissance prédite par LSA est supérieure à celle obtenue par SGE. De plus, les perturbations de vitesse longitudinale, normale et transverse n'admettent pas le même taux de croissance, les perturbations normales étant les plus amplifiées. La seconde est une étude paramétrique où le nombre de Görtler amont G_{θ_0} et le Reynolds amont Re_{δ_0} varient et où l'instabilité de Görtler se développe naturellement. On montre

que la longueur d'onde naturelle de l'instabilité λ dépend des nombres de Görtler amont G_{θ_0} et le Reynolds amont Re_{δ_0} . Des écarts entre les résultats obtenus par SGE et les prédictions de la LSA sont observées en terme de longueur d'onde naturelle. La difficulté de prédire exactement la longueur d'onde naturelle qui se développe dans une couche limite sur paroi courbe est alors mise en évidence. En revanche, la croissance spatiale associée aux longueurs d'onde naturelles développées s'accorde très bien avec les prédictions de l'analyse de stabilité linéaire. La troisième étude paramétrique vise à mettre en évidence les effets de stratification sur le développement de l'instabilité de Görtler. Il est montré qu'une stratification linéaire, régie par la fréquence de *Brunt-Väisälä* N , peut impacter le développement de l'instabilité de Görtler pour des faibles niveaux de stratification, jusqu'à l'amortir totalement pour des fortes stratifications.

Enfin, la turbulence dans les écoulements de Görtler est principalement étudiée à partir des résultats d'une simulation à haut Reynolds ($Re_{\delta_0} = 10000$). Il est alors mis en évidence que la région turbulente de l'écoulement est marquée par la présence d'une forte hétérogénéité spatiale persistante, attribuée à la présence de l'instabilité de Görtler turbulente et compatible avec l'étude de stabilité linéaire en définissant un nombre de Görtler turbulent $G_t = (U_\infty \theta / \nu_t) (\theta / R)^{1/2}$ construit avec la viscosité turbulente ν_t . Les hétérogénéités spatiales persistantes présentes dans l'écoulement impactent le coefficient de frottement pariétal C_f qui admet des augmentations locales jusqu'à près de 40% dans la région turbulente. De plus, en reprenant l'analogie de [Bradshaw \(1969\)](#) entre les effets de courbure et les effets de flottabilité, on montre que les effets de courbure sur la turbulence de la couche limite peuvent être décrits par des nombres de Richardson de courbure R^C . Le nombre de Richardson de flux R_f^C , défini comme le rapport entre la production de TKE par courbure \mathcal{P}_k^C et la production de TKE par cisaillement moyen \mathcal{P}_k^M , quantifie l'impact des effets de courbure sur l'énergie cinétique turbulente. Le nombre de Richardson de cisaillement R_s^C , défini comme le rapport entre la production de cisaillement turbulent par courbure $\mathcal{P}_{\langle u'v' \rangle}^C$ et la production classique de cisaillement turbulent $\mathcal{P}_{\langle u'v' \rangle}^M$, quantifie l'impact des effets de courbure sur le cisaillement turbulent $\langle u'v' \rangle$. Les deux termes de production par courbure \mathcal{P}_k^C et $\mathcal{P}_{\langle u'v' \rangle}^C$ proviennent de l'écriture du bilan du tenseur de Reynolds en repère courbé et ne sont pas liés directement à l'instabilité de Görtler turbulente. Les deux définitions du nombre de Richardson R_f^C et R_s^C utilisées s'accordent à montrer que la couche limite turbulente est soumise à des effets de courbure importants dans la région de la couche limite où $\psi / \delta_{99} > 0.2$ qui augmentent localement la turbulence. En parallèle, il est montré que les hétérogénéités spatiales induites par la présence de l'instabilité de Görtler turbulente sont également responsables d'une production d'énergie cinétique turbulente par cisaillement transverse, $\widetilde{\mathcal{P}}_k^C$. L'augmentation de la production de TKE par cisaillement transverse est importante dans la région de la couche limite où $\psi / \delta_{99} < 0.2$. Il est conclu que les hétérogénéités spatiales sont responsables d'une augmentation globale de 15% de la production de TKE et que la courbure est responsable d'une augmentation globale de 10% de la production de TKE. Les résultats de cette simulation sont enfin exploités afin de proposer une correction de la loi logarithmique de vitesse à partir du bilan des longueurs de mélange et de courbure. L'échelle de longueur la plus pertinente pour corriger la loi logarithmique dans une couche limite turbulente sur paroi courbe est l'échelle de longueur construite à partir de la production de TKE par hétérogénéité $\widetilde{\mathcal{L}}_C$. En appliquant une loi linéaire simple fondée sur cette échelle de longueur, il est en effet possible de décrire précisément la topologie de la couche limite obtenue par simulation des grandes échelles.

Une série de simulations avec des effets de flottabilité par stratification linéaire et refroidissement pariétal est enfin réalisée pour conclure ce travail de thèse. Le nombre de Reynolds amont pour ces simulations $Re_{\delta_0} = 1800$ est modéré et permet de décrire la région de transition à la turbulence. Dans les simulations présentées, le refroidissement induit une diminution des flux turbulents et agit par conséquent sur la turbulence de l'écoulement. En s'appuyant sur les lois de correction

écrites pour les effets de courbure, des lois de correction sont proposées pour décrire les effets de flottabilité sur la topologie de l'écoulement moyen. Néanmoins, il est montré qu'il est difficile d'appliquer ici des corrections de loi logarithmique par effets de flottabilité car dans la région de transition à la turbulence, les effets d'hétérogénéité dominent la dynamique de l'écoulement et le terme de correction par effets de flottabilité est négligeable par rapport au terme de correction par hétérogénéités spatiales. La simulation numérique d'une configuration où l'instabilité de Görtler se développe sur une paroi concave fortement refroidie, présentant alors une forte compétition entre les effets de courbure et de flottabilité, reste un challenge.

7.3 Perspectives

Dans un premier temps, l'approche par analyse de stabilité linéaire utilisée dans cette thèse pourrait être revue afin de prendre en compte deux éléments. D'une part, les hypothèses sur l'écoulement de base pourraient être modifiées pour prendre en compte l'évolution spatiale de la couche limite dans la direction longitudinale, considérer les effets non-parallèles et les effets de Reynolds afin de décrire plus globalement la dynamique de l'instabilité. D'autre part, il serait intéressant de prendre en compte les effets de flottabilité dans les équations résolues en introduisant un terme de gravité par application de l'approximation de Boussinesq. En effet, seule l'analyse de stabilité linéaire d'une couche limite neutre est réalisée dans ce travail.

Dans un deuxième temps, pour compléter l'étude faite au chapitre 4.3, il serait intéressant de considérer un autre profil de stratification ambiante pour décrire les effets de flottabilité sur l'instabilité de Görtler. Par exemple, une stratification bi-couches, que l'on retrouve dans les conditions réelles de terrain des courants de densité océaniques (Negretti et al., 2017), pourrait être reproduite par SGE. Des simulations préliminaires ont été réalisées dans ce but mais l'analyse physique des résultats statistiques n'est pas réalisée (annexe D). Les paramètres physiques qui sont intéressants dans cette configuration sont la hauteur relative de la couche dense par rapport à l'épaisseur de la couche limite (ou par rapport à la longueur d'onde de l'instabilité) et la différence relative de masse volumique entre les deux couches. Les nombres adimensionnels importants dans cette configuration sont le nombre de Froude Fr et Richardson Ri_B (*bulk*).

Dans cette thèse, on considère uniquement le cas d'une couche limite de Blasius et il serait intéressant d'étudier la dynamique d'un jet de paroi se développant sur paroi courbe. Deux approches seraient alors possibles. D'une part, un jet de paroi neutre pourrait être étudié à la fois par analyse de stabilité linéaire et par simulation des grandes échelles. Il existe d'ailleurs des études théoriques (Floryan, 1986, 1989, Le Cunff et Zebib, 1996) et expérimentales (Matsson, 1995, 1998, Hopfinger et al., 2004) sur le sujet qui devraient être considérées pour s'y comparer. Des simulations préliminaires ont été effectuées sans que leur analyse physique soit faite, dont une particulièrement intéressante présentée succinctement en annexe E où l'on voit le développement simultané des instabilités de Görtler et de Kelvin-Helmholtz. D'autre part, pour se rapprocher d'une configuration réelle de terrain, la simulation numérique d'un jet généré par refroidissement devrait être réalisée. Encore une fois, des simulations préliminaires ont été réalisées sans que l'analyse physique soit assez approfondie pour pouvoir les présenter (voir annexe C). Une telle configuration physique engendre une complexité technique. En effet, on ne connaît pas a priori l'épaisseur du jet formé ainsi que le maximum de vitesse du jet, qui définissent normalement le maillage nécessaire pour résoudre correctement toutes les échelles de l'écoulement. Un premier dimensionnement du maillage pourrait être fait en utilisant le modèle de Prandtl pour le jet catabatique qui prédit la hauteur du jet et son amplitude à partir de la pente de la paroi, de la stratification ambiante N et du refroidissement en surface (Blein, 2016, Brun et al., 2017). Ensuite, l'utilisation de méthodes

de remaillage local récemment développées dans le code YALES2 (Benard et al., 2016) seraient pertinentes pour cette configuration spécifique. Quoi qu'il en soit, la simulation d'un jet (dynamique ou généré par refroidissement) sur une paroi concave est particulièrement intéressante car cette configuration est susceptible de développer à la fois l'instabilité de Görtler, largement décrite dans cette thèse, mais également l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. La compétition entre ces deux instabilités et leurs effets sur la dynamique de l'écoulement reste un challenge scientifique dont les enjeux et les applications sont multiples.

A

Équation de transport pour le tenseur de Reynolds $\langle u'_i u'_j \rangle$ et l'énergie cinétique turbulente k : écriture classique

On présente les étapes calculatoires menant à l'équation de transport du terme du tenseur de Reynolds $\langle u'u' \rangle$. La généralisation de ces équations pour le tenseur complet, noté $\langle u'_i u'_j \rangle$ dans le formalisme indiciel, et pour l'énergie cinétique turbulente k , vient ensuite très naturellement.

Équation de transport pour $\langle u'u' \rangle$ dans le repère global (x, y, z)

La décomposition de Reynolds permet de définir le champs de vitesse \mathbf{u} comme la somme de deux termes : une vitesse moyenne $\langle \mathbf{u} \rangle$ et une vitesse fluctuante \mathbf{u}' . Le point de départ pour l'écriture de l'équation de transport pour $\langle u'u' \rangle$ est l'équation de transport de la composante u du champ de vitesse

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{variation temporelle}} = \underbrace{-u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z}}_{\text{advection}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}}_{\text{diffusion par la pression}} + \underbrace{\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)}_{\text{diffusion par viscosité}}$$

À partir de cette équation on veut écrire l'équation de transport, ce qui revient à expliciter le terme de variation temporelle de $\langle u'u' \rangle$, qui n'est autre que

$$\frac{\partial \langle u'u' \rangle}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial \langle uu \rangle}{\partial t}}_I - \underbrace{\frac{\partial \langle u \rangle \langle u \rangle}{\partial t}}_{II} = \underbrace{\left\langle 2u \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle}_I - \underbrace{2 \langle u \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t}}_{II} \quad (\text{A.1})$$

Finalement on obtient

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\frac{\partial \langle u' u' \rangle}{\partial t}}_{\text{Dérivée temporelle}} &= - \underbrace{\langle u \rangle \frac{\partial \langle u' u' \rangle}{\partial x} - \langle v \rangle \frac{\partial \langle u' u' \rangle}{\partial y} - \langle w \rangle \frac{\partial \langle u' u' \rangle}{\partial z}}_{\text{Advection}} \\
 &\quad - \underbrace{2 \langle u' u' \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} - 2 \langle u' v' \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} - 2 \langle u' w' \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z}}_{\text{Production}} \\
 &\quad - \underbrace{\frac{\partial \langle u' u' u' \rangle}{\partial x} - \frac{\partial \langle u' u' v' \rangle}{\partial y} - \frac{\partial \langle u' u' w' \rangle}{\partial z}}_{\text{Advection turbulente}} \\
 &\quad - \underbrace{\frac{2}{\rho} \left\langle u' \frac{\partial p'}{\partial x} \right\rangle}_{\text{Terme de pression}} \\
 &\quad + \underbrace{\nu \left(\frac{\partial^2 \langle u' u' \rangle}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \langle u' u' \rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \langle u' u' \rangle}{\partial z^2} \right)}_{\text{Diffusion moléculaire}} \\
 &\quad - \underbrace{2\nu \left(\left\langle \frac{\partial u'}{\partial x} \frac{\partial u'}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u'}{\partial y} \frac{\partial u'}{\partial y} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u'}{\partial z} \frac{\partial u'}{\partial z} \right\rangle \right)}_{\text{Dissipation}}
 \end{aligned}$$

B Équation de Navier-Stokes en repère courbé

L'expression du repère courbé (ξ, ψ, z) en fonction du repère cartésien (x, y, z) est

$$\begin{cases} \xi &= R\phi \\ \psi &= R - \sqrt{x^2 + y^2} \\ z &= z \end{cases}$$

Le champ de vitesse dans le repère local $\mathbf{u} = (u_\xi, u_\psi, u_z)$ s'exprime en fonction de ϕ et du champ de vitesse dans le repère global $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ comme

$$\begin{cases} u_\xi &= \sin \phi u_x - \cos \phi u_y \\ u_\psi &= \cos \phi u_x + \sin \phi u_y \\ u_z &= u_z \end{cases}$$

Dans le repère courbe, les équations de Navier-Stokes incompressibles s'écrivent alors

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_\xi}{\partial t} + \frac{R}{R-\psi} u_\xi \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + u_\psi \frac{\partial u_\xi}{\partial \psi} + u_z \frac{\partial u_\xi}{\partial z} - \frac{1}{R-\psi} u_\xi u_\psi &= -\frac{1}{\rho} \frac{R}{R-\psi} \frac{\partial p}{\partial \xi} \\ &+ \nu \left[\Delta u_\xi - \frac{2R}{(R-\psi)^2} \frac{\partial u_\psi}{\partial \xi} - \frac{1}{(R-\psi)^2} u_\xi \right] \\ \frac{\partial u_\psi}{\partial t} + \frac{R}{R-\psi} u_\xi \frac{\partial u_\psi}{\partial \xi} + u_\psi \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} + u_z \frac{\partial u_\psi}{\partial z} + \frac{1}{R-\psi} u_\xi u_\psi &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \psi} \\ &+ \nu \left[\Delta u_\psi + \frac{2R}{(R-\psi)^2} \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} - \frac{1}{(R-\psi)^2} u_\psi \right] \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{R}{R-\psi} u_\xi \frac{\partial u_z}{\partial \xi} + u_\psi \frac{\partial u_z}{\partial \psi} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta u_z \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.1})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{R}{R-\psi} \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{1}{R-\psi} u_\psi = 0 \quad (\text{B.2})$$

où l'opérateur Laplacien Δ est défini par

$$\Delta(\cdot) = \left(\frac{R}{R-\psi} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(\cdot) + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}(\cdot) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\cdot) - \frac{1}{R-\psi} \frac{\partial}{\partial \psi}(\cdot)$$

C Génération d'un jet catabatique par refroidissement

On considère ici la cas du manuscrit à Reynolds modéré pour un refroidissement plus élevé $\kappa_p (\partial \tilde{\rho} / \partial \psi)_{\psi=0} = -10^{-4} U_\infty$, par rapport au tableau 6.1. La figure C.1 présente les résultats issus de la simulation préliminaire. Le refroidissement induit la formation d'un jet de paroi comme attendu (Charrondière et al., 2020).

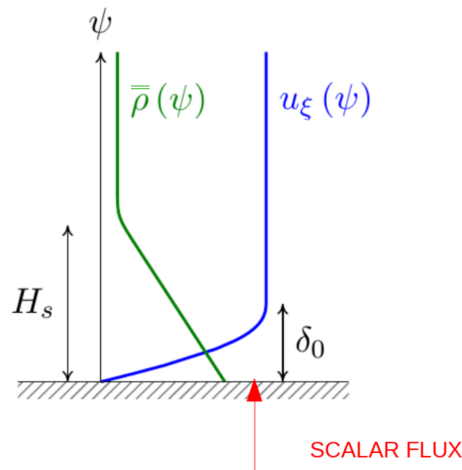


Figure C.1. Profils qualitatifs de la vitesse longitudinale en entrée du domaine de calcul et de la stratification ambiante, dans la direction normale à la paroi. Le refroidissement pariétal correspond à un flux de densité, imposé à la paroi.

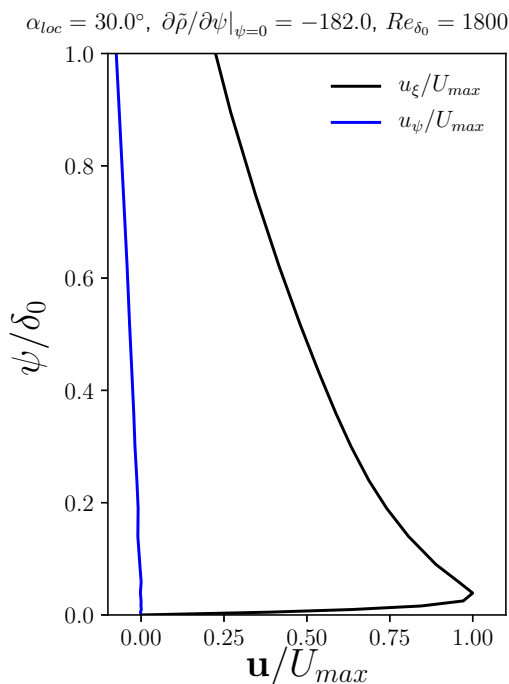


Figure C.2. Profil de vitesse longitudinale $\langle u \rangle_{t,z}$ développé par refroidissement pariétal, normalisé par le maximum de vitesse du jet U_{MAX} .

D

Effets de flottabilité par stratification bi-couche : courant gravitaire

D.1 Configuration physique

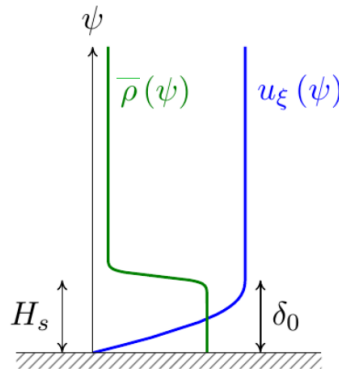


Figure D.1. Profil de densité ambiante $\bar{\rho}$ pour une stratification dite bi-couche. La couche dense, dont l'épaisseur est notée H_s , se situe à la paroi. Le profil de vitesse imposé en entrée $u_\xi(\psi)$ est un profil de couche limite de Blasius.

Cas $Re = U_\infty \delta_0 / \nu$ $(\rho_2 - \rho_1) / \rho_0$ H_s / δ_0

1800	1.0×10^{-3}	0.4
1800	1.0×10^{-3}	0.6
1800	1.0×10^{-3}	0.8
1800	1.0×10^{-3}	1.0
1800	2.0×10^{-3}	0.4
1800	2.0×10^{-3}	0.6
1800	2.0×10^{-3}	0.8
1800	2.0×10^{-3}	1.0
1800	5.0×10^{-3}	0.4
1800	5.0×10^{-3}	0.6
1800	5.0×10^{-3}	0.8
1800	5.0×10^{-3}	1.0
1800	1.0×10^{-2}	0.4
1800	1.0×10^{-2}	0.6
1800	1.0×10^{-2}	0.8
1800	1.0×10^{-2}	1.0

Tableau D.1. Configurations physiques des simulations numériques présentées

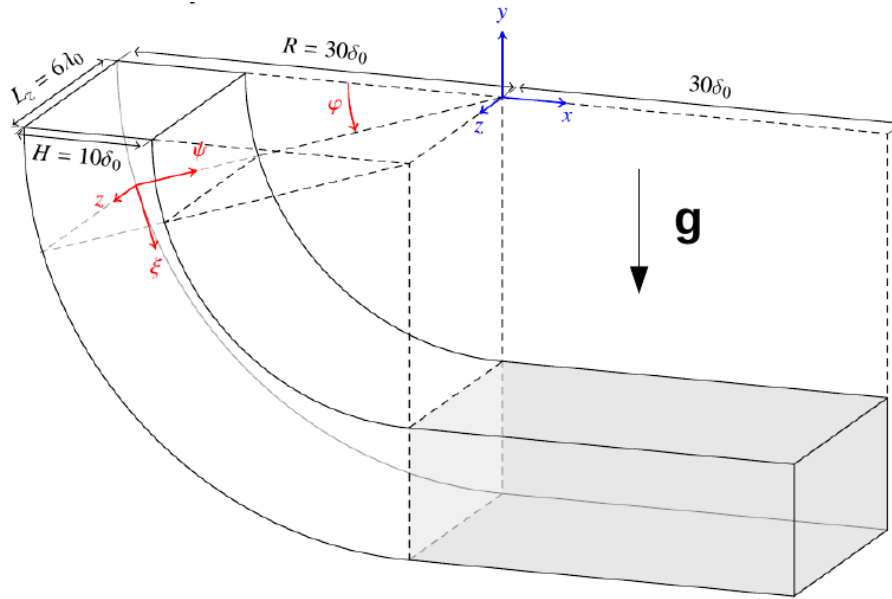


Figure D.2. Domaine de simulation numériques présentant un partie courbe et une partie plane. La largeur du domaine L_z est exprimée en fonction de la longueur d'onde forcée λ . La gravité est exprimée dans le repère global par $\mathbf{g} = -gy$.

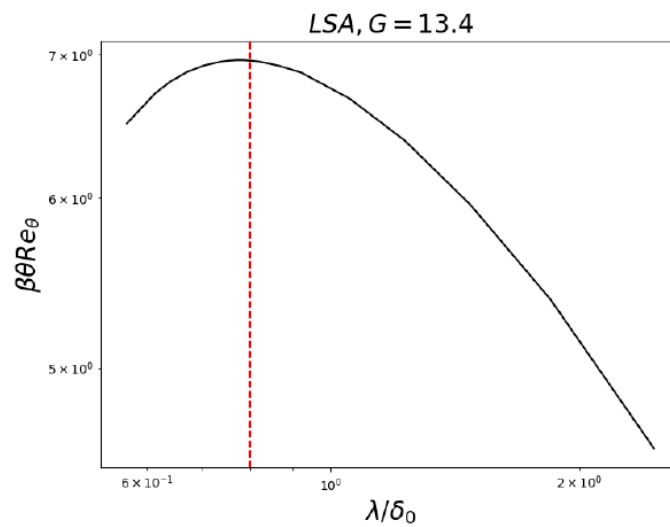


Figure D.3. Évolution du taux de croissance spatial adimensionnel $\tilde{\beta}$ en fonction de la longueur d'onde, issue de l'analyse de stabilité linéaire. La longueur d'onde forcée dans les simulations numériques présentées est choisie pour être proche de la longueur d'onde la plus amplifiée.

D.2 Résultats

D.2.1 Croissance de l'instabilité de Görtler

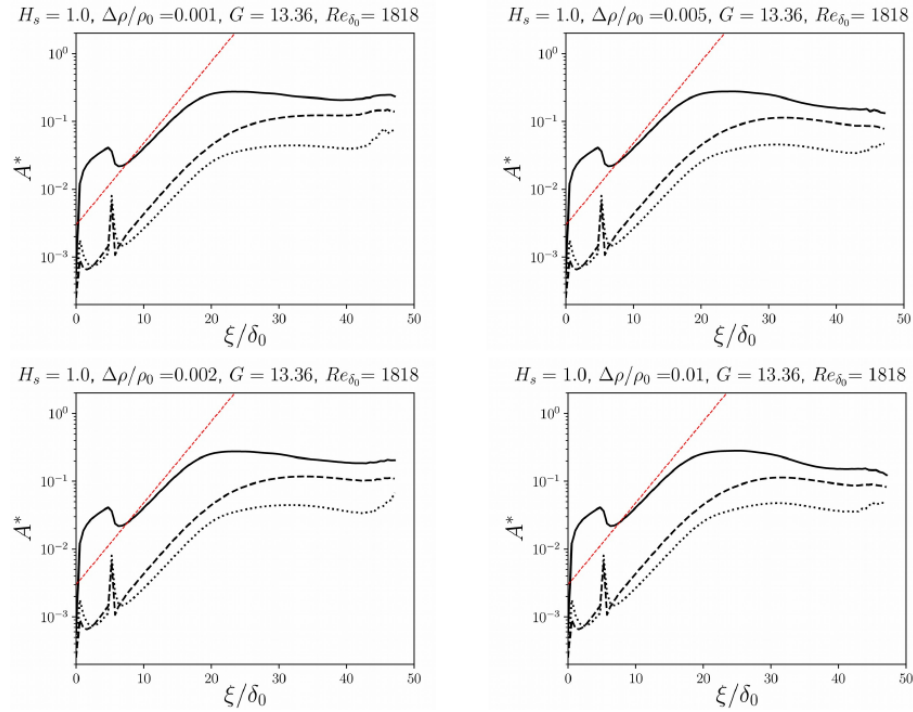


Figure D.4. Évolution longitudinales de la quantité $A^* = \sqrt{\iint \mathbf{u}'^2 dz d\psi}$ pour différentes valeurs de $(\rho_2 - \rho_1) / \rho_0$. La hauteur de la couche dense est $H_s = \delta_0$. La croissance théorique d'une couche limite neutre est montrée en rouge.

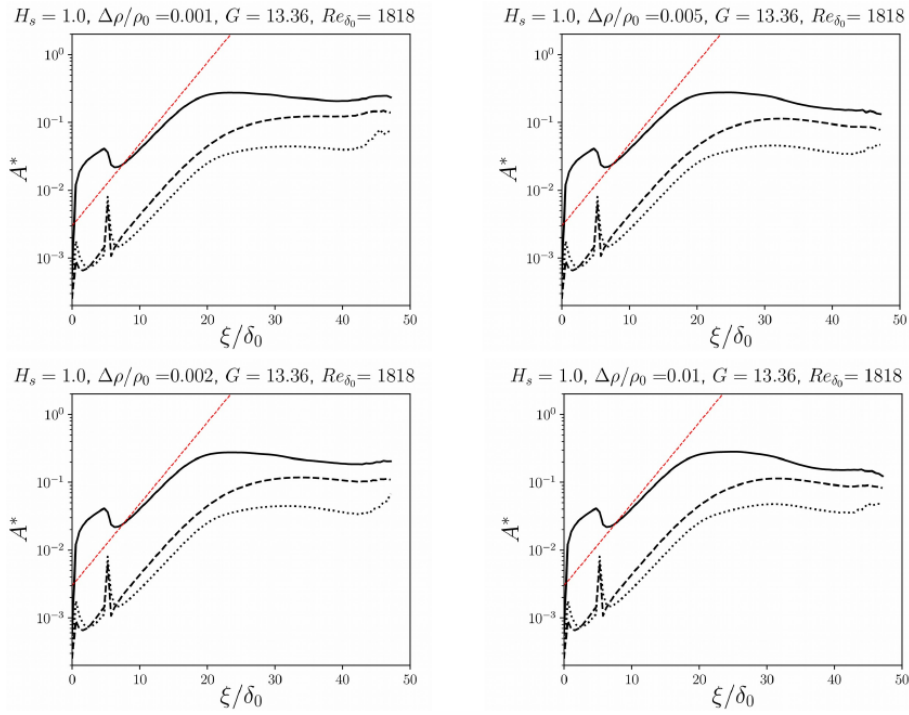


Figure D.5. Évolution longitudinale de la quantité $A^* = \sqrt{\iint \mathbf{u}^2 dz d\psi}$ pour différentes valeurs de $(\rho_2 - \rho_1) / \rho_0$. La hauteur de la couche dense est $H_s = 0.8\delta_0$. La croissance théorique d'une couche limite neutre est montrée en rouge.

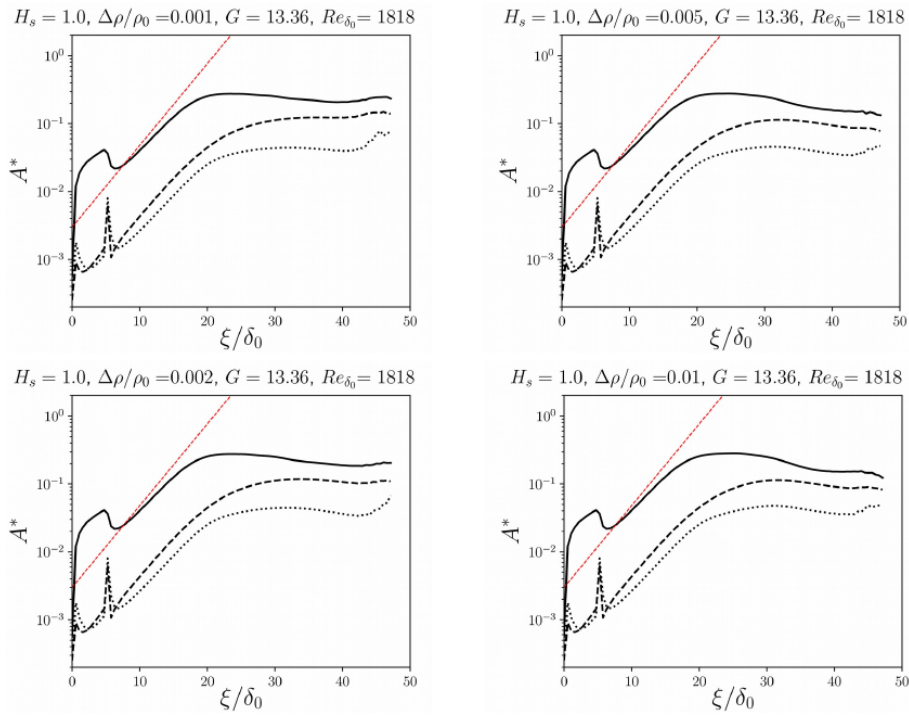


Figure D.6. Évolution longitudinale de la quantité $A^* = \sqrt{\iint \mathbf{u}^2 dz d\psi}$ pour différentes valeurs de $(\rho_2 - \rho_1) / \rho_0$. La hauteur de la couche dense est $H_s = 0.6\delta_0$. La croissance théorique d'une couche limite neutre est montrée en rouge.

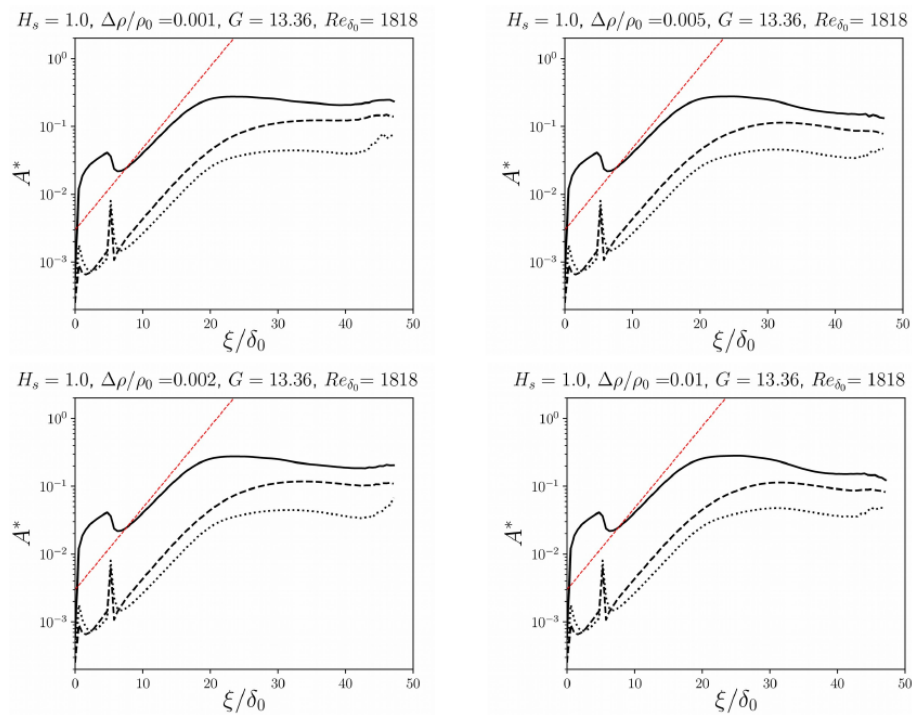


Figure D.7. Évolution longitudinales de la quantité $A^* = \sqrt{\iint \mathbf{u}'^2 dz d\psi}$ pour différentes valeurs de $(\rho_2 - \rho_1) / \rho_0$. La hauteur de la couche dense est $H_s = 0.4\delta_0$. La croissance théorique d'une couche limite neutre est montrée en rouge.

D.2.2 Topologie 3D de l'écoulement développé

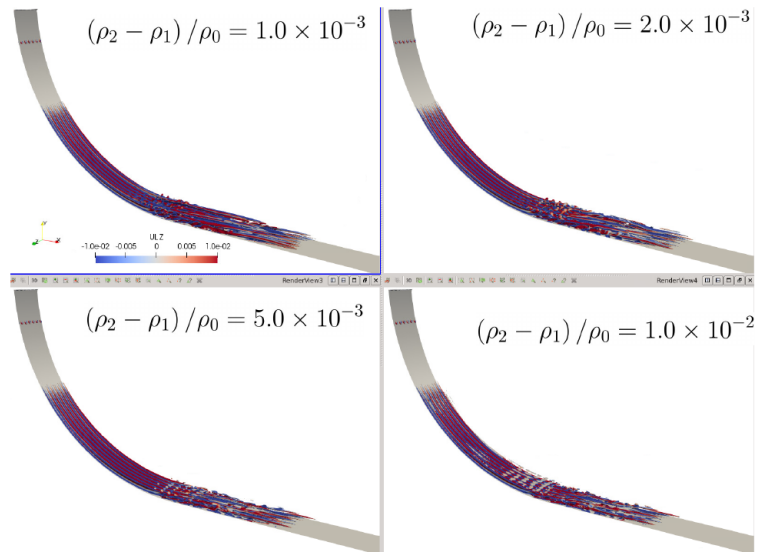


Figure D.8. Topologie 3D de l'écoulement développé. Iso-contours de critère Q colorés par la vorticité longitudinale. La hauteur de la couche dense est $H_s = \delta_0$.

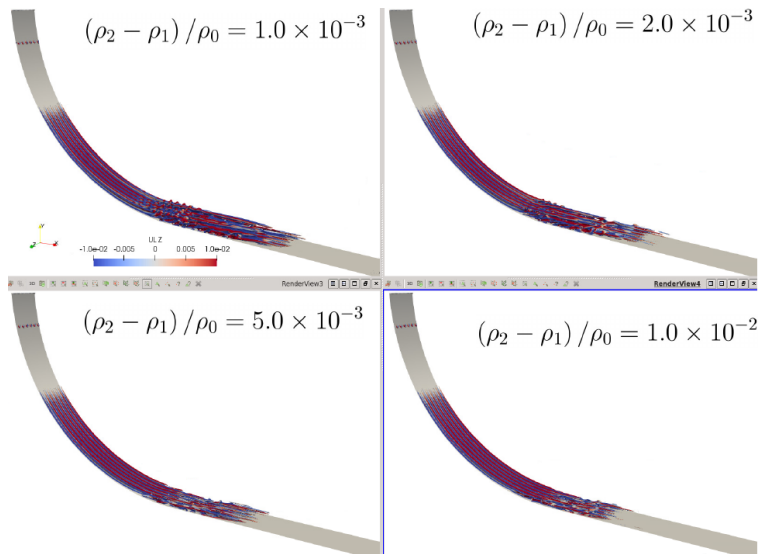


Figure D.9. Topologie 3D de l'écoulement développé. Iso-contours de critère Q colorés par la vorticité longitudinale. La hauteur de la couche dense est $H_s = 0.8\delta_0$.

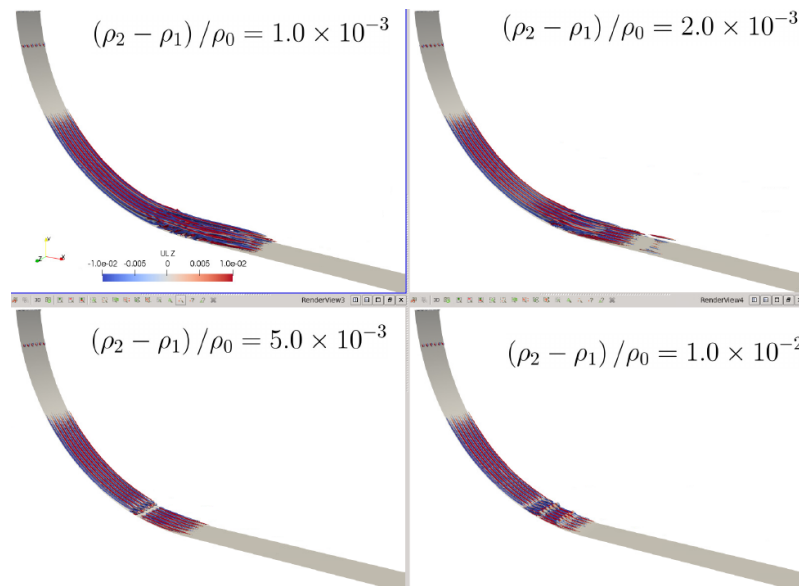


Figure D.10. Topologie 3D de l'écoulement développé. Iso-contours de critère Q colorés par la vorticité longitudinale. La hauteur de la couche dense est $H_s = 0.6\delta_0$.

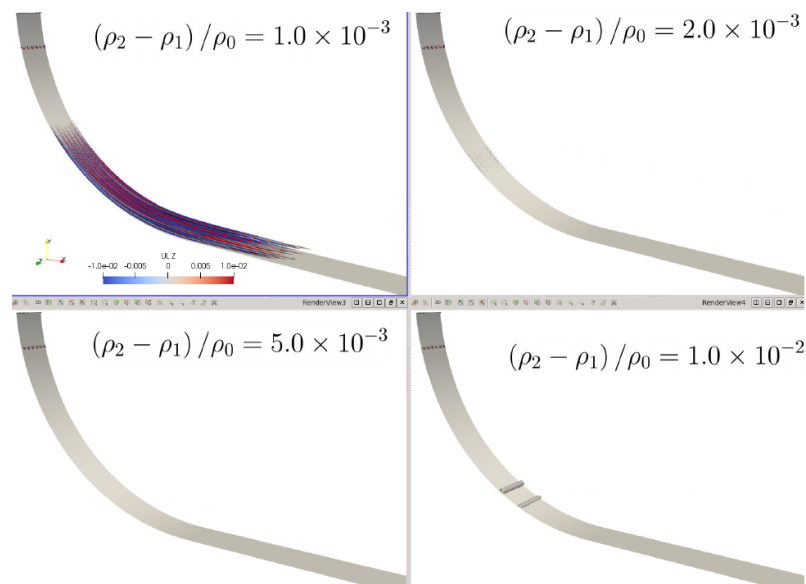


Figure D.11. Topologie 3D de l'écoulement développé. Iso-contours de critère Q colorés par la vorticité longitudinale. La hauteur de la couche dense est $H_s = 0.4\delta_0$.

D.2.3 Topologies locales dans l'écoulement développé

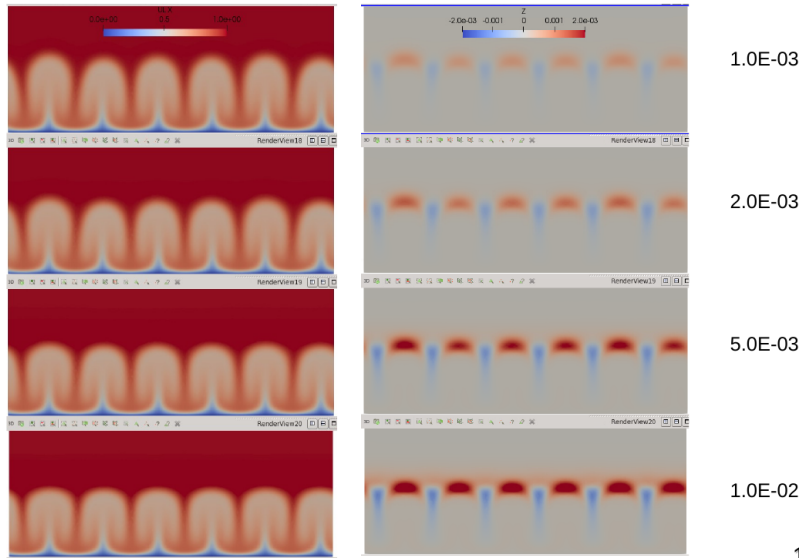


Figure D.12. Coupe transverse des champs de vitesse longitudinale u_ξ/U_∞ et de variation de densité $\tilde{\rho}$. La hauteur de la couche dense est $H_s = \delta_0$.

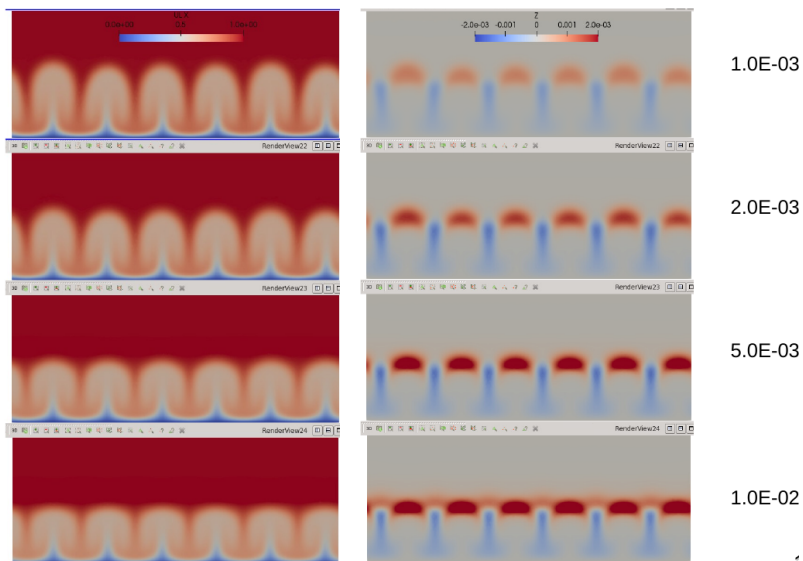


Figure D.13. Coupe transverse des champs de vitesse longitudinale u_ξ/U_∞ et de variation de densité $\tilde{\rho}$. La hauteur de la couche dense est $H_s = 0.8\delta_0$.

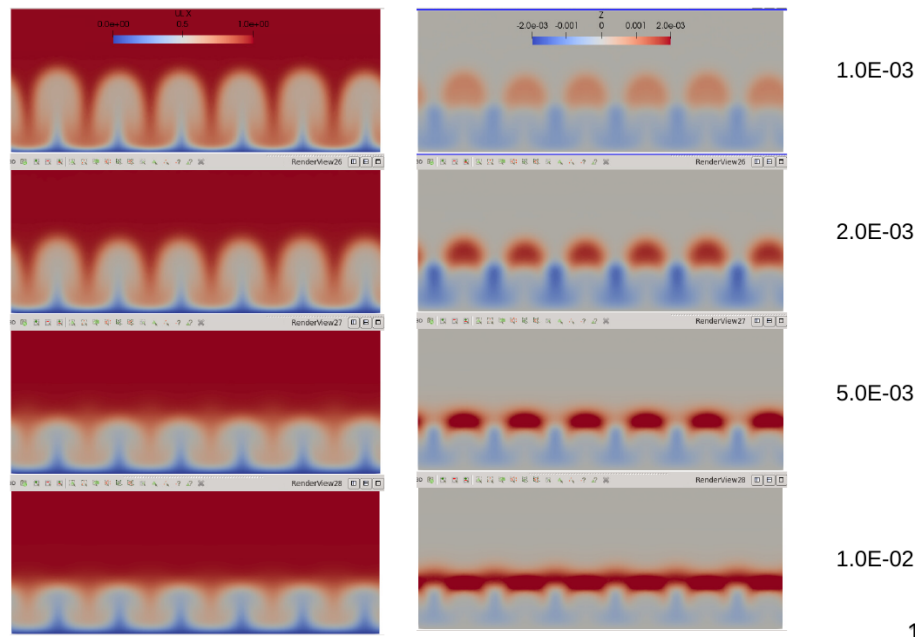


Figure D.14. Coupe transverse des champs de vitesse longitudinale u_ξ/U_∞ et de variation de densité $\tilde{\rho}$. La hauteur de la couche dense est $H_s = 0.6\delta_0$.

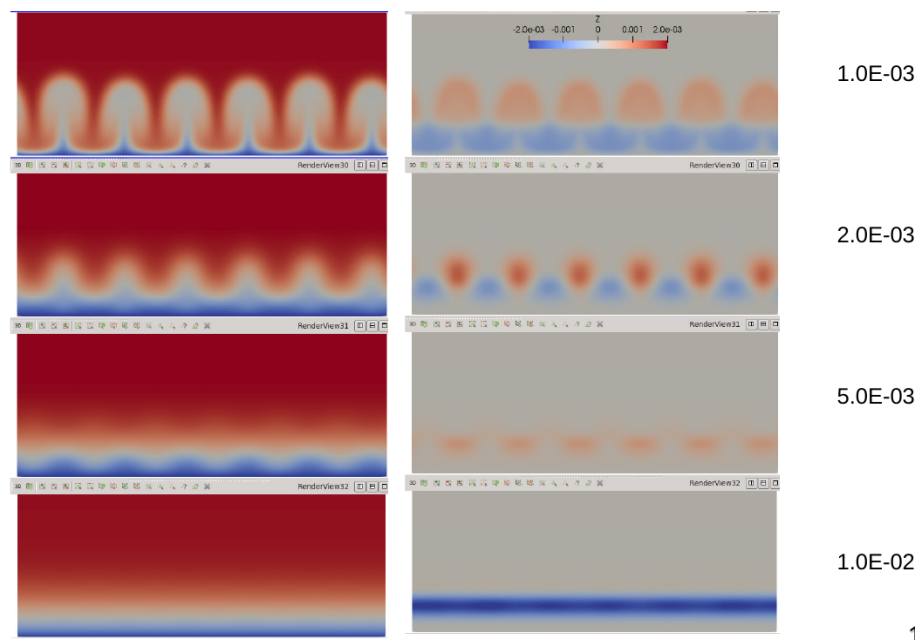


Figure D.15. Coupe transverse des champs de vitesse longitudinale u_ξ/U_∞ et de variation de densité $\tilde{\rho}$. La hauteur de la couche dense est $H_s = 0.4\delta_0$.

E Simulation numérique d'un jet sur paroi courbe à $Re_{\delta_0} = 1800$

On montre en figure E.1 la topologie tridimensionnelle d'un jet sur paroi courbe dans lequel les instabilités de Görtler et de Kelvin Helmholtz se développent simultanément. Le nombre de Reynolds amont est $Re_{\delta_0} = 1800$ et le nombre de Görtler amont est $G_0 = 13.4$.

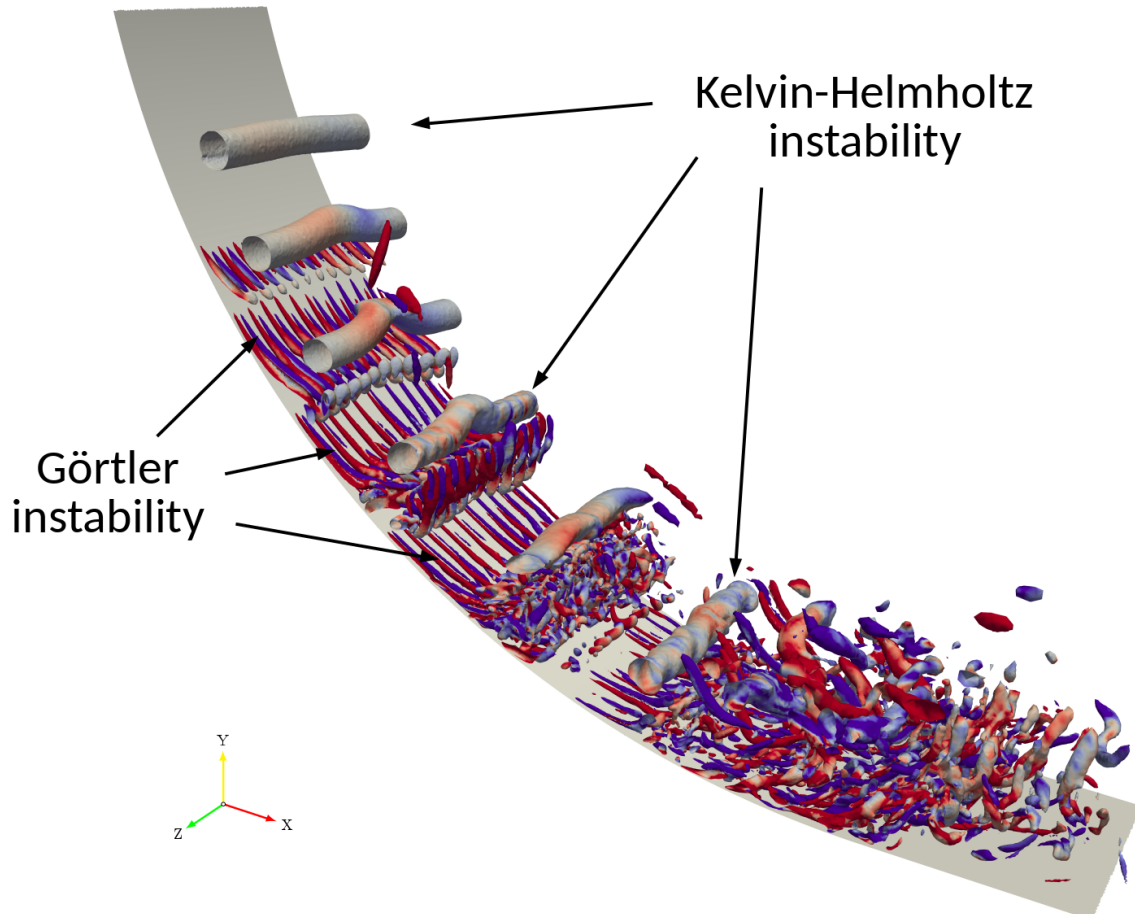


Figure E.1. Topologie 3D de l'écoulement développé. Iso-contours de critère Q colorés par la vorticité longitudinale. Le nombre de Reynolds amont est $Re_{\delta_0} = 1800$ et le nombre de Görtler amont est $G_0 = 13.4$.

Bibliographie

- Aihara, Y. et Koyama, H., "Secondary instability of Görtler vortices-formation of periodic three-dimensional coherent structure," *Japan Society of Aeronautical Space Sciences Transactions*, vol. 24, pages 78–94, 1981.
- Aihara, Y., Tomita, Y., et Ito, A., "Generation, development and distortion of longitudinal vortices in boundary layers along concave and flat plates," pages 447–454, 1985.
- Baldwin, B. et Lomax, H., "Thin-layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows," in *16th aerospace sciences meeting*, 1978, p. 257.
- Batchelor, G., *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- Benard, P., Balarac, G., Moureau, V., Dobrzynski, C., Lartigue, G., et D'Angelo, Y., "Mesh adaptation for large-eddy simulations in complex geometries," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 81, no. 12, pages 719–740, 2016.
- Bippes, H., "Experimental study of the laminar-turbulent transition of a concave wall in a parallel flow," *NASA Technical Report*, vol. 78, pages 103–180, 1978.
- Bippes, H. et Görtler, H., "Dreidimensionale störungen in der grenzschicht an einer konkaven wand," *Acta Mechanica*, vol. 14, no. 4, pages 251–267, 1972.
- Blasius, H., *Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung*. Druck von BG Teubner, 1907.
- Blein, S., "Observation et modélisation de couche limite atmosphérique stable en relief complexe : le processus turbulent d'écoulement catabatique," Thèse de Doctorat, Université Grenoble Alpes, 2016.
- Boltzmann, L., *Über die mechanische Bedeutung des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie :(vorgelegt in der Sitzung am 8. Februar 1866)*. Staatsdruckerei, 1866.
- Boussinesq, J., *Essai sur la théorie des eaux courantes*. Impr. nationale, 1877.
- Bradshaw, P., "The analogy between streamline curvature and buoyancy in turbulent shear flow," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 36, no. 1, pages 177–191, 1969.
- Bradshaw, P., "Effects of streamline curvature on turbulent flow." Advisory group for aerospace research and development, Paris (France), Rapport technique, 1973.
- Brun, C., "Simulation et modélisation d'écoulements cisailés turbulents," Habilitation à Diriger les Recherches, LEGI/Université Grenoble Alpes, 2010.
- Brun, C., "Large-eddy simulation of a katabatic jet along a convexly curved slope : 2. evidence of Görtler vortices," *Journal of Geophysical Research, Atmosphere*, vol. 122, no. 10, pages 5190–5210, 2017.
- Brun, C., Blein, S., et Chollet, J.-P., "Large-eddy simulation of a katabatic jet along a convexly curved slope. part I : Statistical results," *Journal of the Atmospheric Sciences*, vol. 74, no. 12, pages 4047–4073, 2017.

- Chapman, D., “Computational aerodynamics development and outlook,” *AIAA journal*, vol. 17, no. 12, pages 1293–1313, 1979.
- Charrondière, C., Brun, C., Sicart, J.-E., Cohard, J.-M., Biron, R., et Blein, S., “Buoyancy effects in the turbulence kinetic energy budget and Reynolds stress budget for a katabatic jet over a steep alpine slope,” *Boundary-Layer Meteorology*, vol. 177, no. 1, pages 97–122, 2020.
- Charru, F., *Hydrodynamic Instabilities*. Cambridge University Press, 2011.
- Chomaz, J.-M. et Perrier, M., “Nature of the Görtler instability : A forced experiment,” in *The Global Geometry of Turbulence*. Springer, 1991, pages 23–32.
- Chorin, A., “A numerical method for solving incompressible viscous flow problems,” *Journal of Computational Physics*, vol. 2, no. 1, pages 12–26, 1967.
- Chorin, A., “Numerical solution of the Navier-Stokes equations,” *Mathematics of computation*, vol. 22, no. 104, pages 745–762, 1968.
- Clauser, M. et Clauser, F., “The effect of curvature on the transition from laminar to turbulent boundary layer,” 1937.
- Dagaut, J., Balarac, G., Negretti, M.-E., et Brun, C., “Transition to turbulence in Görtler flows. Large Eddy Simulations (LES) of a Blasius boundary layer over a curved wall,” in *17th European Turbulence Conference*, Turin, Italy, Sep. 2019.
- Dagaut, J., Negretti, M.-E., Balarac, G., et Brun, C., “Linear to turbulent Görtler instability transition,” *Physics of Fluids*, vol. 33, no. 1, 2021.
- Darrigol, O., *Worlds of flow : A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*. Oxford University Press, 2005.
- Davidson, P., *Turbulence : an introduction for scientists and engineers*. Oxford university press, 2015.
- Day, H., Herbert, T., et Saric, W., “Comparing local and marching analyses of Görtler instability,” *AIAA journal*, vol. 28, no. 6, pages 1010–1015, 1990.
- Drazin, P. et Reid, W., *Hydrodynamic Stability*, 2nd ed., ser. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 2004.
- Dubief, Y. et Delcayre, F., “On coherent-vortex identification in turbulence,” *Journal of turbulence*, vol. 1, no. 1, 2000.
- Ducoin, A., Shadloo, M., et Roy, S., “Direct numerical simulation of flow instabilities over Savonius style wind turbine blades,” *Renewable Energy*, vol. 105, pages 374–385, 2017.
- Eitel-Amor, G., Örlü, R., et Schlatter, P., “Simulation and validation of a spatially evolving turbulent boundary layer up to $Re_\theta = 8300$,” *International Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 47, pages 57–69, 2014.
- Emmons, H., “The laminar-turbulent transition in a boundary layer : Part I,” *Journal of the Aeronautical Sciences*, vol. 18, no. 7, pages 490–498, 1951.
- Escudier, M., “The distribution of the mixing length in turbulent flows near walls,” Imperial College, London, Rapport technique, 1965.

- Floryan, J., "Görtler instability of boundary layers over concave and convex walls," *Physics of Fluids*, vol. 29, no. 8, pages 2380–2387, 1986.
- Floryan, J., "Görtler instability of wall jets," *AIAA journal*, vol. 27, no. 1, pages 112–114, 1989.
- Floryan, J., "On the Görtler instability of boundary layers," *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 28, no. 3, pages 235–271, 1991.
- Floryan, J. et Saric, W., "Stability of Görtler vortices in boundary layers," *AIAA journal*, vol. 20, no. 3, pages 316–324, 1982.
- Frisch, U., *Turbulence : the legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge university press, 1995.
- Gaster, M., "On the effects of boundary-layer growth on flow stability," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 66, no. 3, pages 465–480, 1974.
- Germano, M., Piomelli, U., Moin, P., et Cabot, W., "A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model," *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics*, vol. 3, no. 7, pages 1760–1765, 1991.
- Goda, K., "A multistep technique with implicit difference schemes for calculating two- or three-dimensional cavity flows," *Journal of computational physics*, vol. 30, no. 1, pages 76–95, 1979.
- Gordeev, S., Stieglitz, R., et Heinzl, V., "Large-eddy simulations of Taylor-Görtler instabilities in transitional and turbulent boundary layers." American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, 2010, pages 2217–2226.
- Görtler, H., "Über eine dreidimensionale Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden," *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, NF*, vol. 2, no. 1, pages 1–26, 1940.
- Gregory, M., "The effect on transition of isolated surface excrescences in the boundary layer," *Aeronautical Research Council, Reports and Memoranda No. 2779*, 1956.
- Gresho, P., "On the theory of semi-implicit projection methods for viscous incompressible flow and its implementation via a finite element method that also introduces a nearly consistent mass matrix. part 1 : Theory," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 11, no. 5, pages 587–620, 1990.
- Grimberg, G., Pauls, W., et Frisch, U., "Genesis of d'Alembert's paradox and analytical elaboration of the drag problem," *Physica D : Nonlinear Phenomena*, vol. 237, no. 14-17, pages 1878–1886, 2008.
- Hama, F. R., Long, J. D., et Hegarty, J. C., "On transition from laminar to turbulent flow," *Journal of Applied Physics*, vol. 28, no. 4, pages 388–394, 1957.
- Herbert, T., "Secondary instability of boundary layers," *Annual review of fluid mechanics*, vol. 20, no. 1, pages 487–526, 1988.
- Hieber, H., Piggott, M., Farrell, P., et Allison, P., "Assessment of spurious mixing in adaptive mesh simulations of the two-dimensional lock-exchange," *Ocean Modelling*, vol. 73, pages 30–44, 2014.
- Hopfinger, E., Kurniawan, A., Graf, W., et Lemmin, U., "Sediment erosion by Görtler vortices : the scour-hole problem," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 520, pages 327–342, 2004.
- Hunt, J., Wray, A., et Moin, P., "Eddies, stream, and convergence zones in turbulent flows," *Studying Turbulence Using Numerical Simulation Databases-II*, vol. 193, 1988.

- Ito, A., "Breakdown structure of longitudinal vortices along a concave wall," *Aeronautical and Space Sciences Japan*, vol. 33, no. 374, pages 166–173, 1985.
- Jordinson, R., "The flat plate boundary layer. part 1. numerical integration of the Orr—Sommerfeld equation," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 43, no. 4, p. 801–811, 1970.
- Kaimal, J. et Finnigan, J., *Atmospheric boundary layer flows : their structure and measurement*. Oxford university press, 1994.
- Kierzenka, J. et Shampine, L., "A BVP solver that controls residual and error," *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics*, vol. 3, no. 1-2, pages 27–41, 2008.
- Klebanoff, P., "Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient," National Bureau Of Standards, Rapport technique, 1955.
- Klebanoff, P., Tidstrom, K., et Sargent, L., "The three-dimensional nature of boundary-layer instability," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 12, no. 1, pages 1–34, 1962.
- Kleiser, L. et Zang, T., "Numerical simulation of transition in wall-bounded shear flows," *Annual review of Fluid Mechanics*, vol. 23, no. 1, pages 495–537, 1991.
- Kolmogorov, A., "On degeneration (decay) of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid," vol. 31. Doklady Akademii Nauk, 1941, pages 538–540.
- Kovaszny, L., "Structure of the turbulent boundary layer," *Physics of Fluids*, vol. 10, no. 9, pages 25–30, 1967.
- Krueger, E., Gross, A., et Di Prima, R., "On the relative importance of Taylor-vortex and non-axisymmetric modes in flow between rotating cylinders," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 24, no. 3, pages 521–538, 1966.
- Le Cunff, C. et Zebib, A., "Nonlinear spatially developing Görtler vortices in curved wall jet flow," *Physics of Fluids*, vol. 8, no. 9, pages 2375–2384, 1996.
- Lesieur, M., *Turbulence in fluids*. Springer, 2008, vol. 84.
- Li, F. et Malik, M., "Fundamental and subharmonic secondary instabilities of Görtler vortices," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 297, pages 77–100, 1995.
- Liepmann, H., "Investigation on laminar boundary-layer stability and transition on curved boundaries," *NACA, ACR No. 3H30*, 1943.
- Liepmann, H., "Investigation of boundary layer transition on concave walls," *NACA, ACR No. 4J28*, 1945.
- Lilly, D., "A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method," *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics*, vol. 4, no. 3, pages 633–635, 1992.
- Liu, W. et Domaradzki, J., "Direct numerical simulation of transition to turbulence in Görtler flow," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 246, pages 267–299, 1993.
- Malatesta, V., Souza, L., et Lui, J., "Influence of Görtler vortices spanwise wavelength on heat transfer rates," *Computational Thermal Sciences*, vol. 5, no. 5, pages 389–400, 2013.
- Matsson, O., "Experiments on streamwise vortices in curved wall jet flow," *Physics of Fluids*, vol. 7, no. 12, pages 2978–2988, 1995.

- Matsson, O., “Görtler vortices in wall jet flow on a rotating cylinder,” *Physics of Fluids*, vol. 10, no. 9, pages 2238–2248, 1998.
- Méndez, M., Shadloo, M., Hadjadj, A., et Ducoin, A., “Boundary layer transition over a concave surface caused by centrifugal instabilities,” *Computers & Fluids*, vol. 171, pages 135–153, 2018.
- Méndez, M., Shadloo, M., et Hadjadj, A., “Heat-transfer analysis of a transitional boundary layer over a concave surface with Görtler vortices by means of direct numerical simulations,” *Physics of Fluids*, vol. 32, no. 7, p. 074111, 2020.
- Mitsudharmadi, H., Winoto, S., et Shah, D., “Development of boundary-layer flow in the presence of forced wavelength Görtler vortices,” *Physics of Fluids*, vol. 16, no. 11, pages 3983–3996, 2004.
- Mitsudharmadi, H., Winoto, S., et Shah, D., “Development of most amplified wavelength Görtler vortices,” *Physics of Fluids*, vol. 18, no. 1, p. 014101, 2006.
- Mitsudharmadi, H., Winoto, S., et Shah, D., “Splitting and merging of Görtler vortices,” *Physics of Fluids*, vol. 17, no. 12, p. 124102, 2005.
- Mitsudharmadi, H., Winoto, S., et Shah, D., “Secondary instability in forced wavelength Görtler vortices,” *Physics of Fluids*, vol. 17, no. 7, p. 074104, 2005.
- Morize, C., “De la turbulence 3D en déclin à la turbulence anisotrope dominée par la rotation,” Thèse de Doctorat, Université Paris 7, 2006.
- Mutabazi, I., Normand, C., et Wesfreid, J., “Gap size effects on centrifugally and rotationally driven instabilities,” *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics*, vol. 4, no. 6, pages 1199–1205, 1992.
- Negretti, M.-E., Flòr, J.-B., et Hopfinger, E., “Development of gravity currents on rapidly changing slopes,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 833, pages 70–97, 2017.
- Normand, X. et Lesieur, M., “Direct and large-eddy simulations of transition in the compressible boundary layer,” *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, vol. 3, no. 4, pages 231–252, 1992.
- Orlanski, I., “A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows,” *Journal of computational physics*, vol. 21, no. 3, pages 251–269, 1976.
- Petitjeans, P., “Étude expérimentale des instabilités de couches limites sur des parois concaves : Instabilité de Görtler,” Thèse de Doctorat, 1992.
- Pomeau, Y. et Manneville, P., “Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 74, no. 2, pages 189–197, 1980.
- Pope, S., *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2000.
- Prandtl, L., “Über flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner reibung,” *Verhandlungen des dritten internationalen Mathematischen Kongresses, Heidelberg, Teubner, Leipzig, 1904*, pages 484–491, 1904.
- Prandtl, L., “Bericht über untersuchungen zur ausgebildeten turbulenz,” *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 5, no. 2, pages 136–139, 1925.
- Rayleigh, L., “On the dynamics of revolving fluids,” *Proc. Royal Soc. London. A*, vol. 93, no. 648, pages 148–154, 1917.

- Richardson, L., *Weather prediction by numerical process*. Cambridge University Press, 1922.
- Sagaut, P., “Simulations numériques d’écoulements décollés avec des modèles de sous-maille,” Thèse de Doctorat, 1995.
- Sahut, G., “Numerical simulation of boiling on unstructured grids,” Thèse de Doctorat, Université Grenoble Alpes, 2019.
- Saric, W. et Nayfeh, A., “Nonparallel stability of boundary layers with pressure gradients and suction,” *AGARD Laminar-Turbulent Transition*, 1977.
- Saric, W., “Görtler vortices,” *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 26, no. 1, pages 379–409, 1994.
- Schlichting, H. et Gersten, K., *Boundary-layer theory*. Springer, 1961.
- Schrader, L., Brandt, L., et Zaki, T., “Receptivity, instability and breakdown of Görtler flow,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 682, pages 362–396, 2011.
- Schubauer, G. et Skramstad, H., “Laminar boundary-layer oscillations and transition on a flat plate,” *Journal of research of the National Bureau of Standards*, vol. 38, p. 251, 1947.
- Sescu, A. et Thompson, D., “On the excitation of Görtler vortices by distributed roughness elements,” *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, vol. 29, no. 1-2, pages 67–92, 2015.
- Shapiro, A. et Fedorovich, E., “Unsteady convectively driven flow along a vertical plate immersed in a stably stratified fluid,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 498, pages 333–352, 2004.
- Smith, A. et Cebeci, T., “Numerical solution of the turbulent-boundary-layer equations,” Report No. DAC 33735, Douglas Aircraft Division, Rapport technique, 1967.
- Smith, A., “On the growth of Taylor-Görtler vortices along highly concave walls,” *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 13, no. 3, pages 233–262, 1955.
- Souza, L., “On the odd and even secondary instabilities of Görtler vortices,” *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, vol. 31, no. 4, pages 405–425, 2017.
- Spalart, P., “Direct simulation of a turbulent boundary layer up to $Re_\theta = 1410$,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 187, pages 61–98, 1988.
- Tani, I., “Production of longitudinal vortices in the boundary layer along a concave wall,” *Journal of Geophysical Research*, vol. 67, no. 8, pages 3075–3080, 1962.
- Taylor, G., “Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, vol. 223, no. 605-615, pages 289–343, 1923.
- Temam, R., “Une méthode d’approximation de la solution des équations de Navier–Stokes,” *Bulletin de la Société Mathématique de France*, vol. 96, pages 115–152, 1968.
- Tomita, Y., “Influence of polymer additives on neutral stability of Görtler vortices,” in *The Influence of Polymer Additives on Velocity and Temperature Fields*. Springer, 1985, pages 251–260.
- Tomita, Y., Funatsu, K., Tsuzuki, S., et Miyazaki, K., “Neutral stability of laminar boundary layers along the concave wall,” *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*, vol. 28, no. 244, pages 2288–2293, 1985.

- Townsend, A., *The structure of turbulent shear flow*. Cambridge university press, 1980.
- Townsend, A., “On the fine-scale structure of turbulence,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 208, no. 1095, pages 534–542, 1951.
- Van Driest, E., “On turbulent flow near a wall,” *Journal of the aeronautical sciences*, vol. 23, no. 11, pages 1007–1011, 1956.
- Vantieghem, S., “Numerical simulations of quasi-static magnetohydrodynamics using an unstructured finite volume solver : development and applications,” Thèse de Doctorat, 2011.
- Wilcox, D. C., *Turbulence modeling for CFD*, 3rd ed. DCW industries, 2006.
- Yu, X. et Liu, J., “On the mechanism of sinuous and varicose modes in three-dimensional viscous secondary instability of nonlinear Görtler rolls,” *Physics of Fluids*, vol. 6, no. 2, pages 736–750, 1994.
- Zang, T., “Numerical simulation of the dynamics of turbulent boundary layers : Perspectives of a transition simulator,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A : Physical and Engineering Sciences*, vol. 336, no. 1641, pages 95–102, 1991.

Résumé

Ces travaux s'inscrivent dans le contexte de la simulation numérique d'écoulements géophysiques évoluant en topographie complexe. Dans cette thèse, la topographie réelle est modélisée par une paroi courbe puis plane et la topologie de l'écoulement amont par une couche limite de Blasius. La courbure de la paroi induit la présence d'une instabilité hydrodynamique centrifuge appelée instabilité de Görtler. Cette instabilité est responsable d'une forte hétérogénéité transverse de l'écoulement et impacte la topologie moyenne de la couche limite aval, dans la région de transition à la turbulence mais également dans la région de turbulence développée. En utilisant les approches théorique (LSA) et numérique (SGE), on décrit son développement spatial et ses effets sur les propriétés physiques importantes des écoulements de couche limite. Il est notamment montré que la dynamique de l'écoulement aval est très dépendante de la longueur d'onde que l'on force. La difficulté de prédire la longueur d'onde naturelle de l'instabilité est également mise en avant par une étude paramétrique où l'on fait varier les nombres de Reynolds et de Görtler amont. À l'inverse, la croissance spatiale de l'instabilité est très prédictible et les simulations numériques permettent de voir que de forts nombres de Reynolds et de Görtler induisent une diminution du taux de croissance de l'instabilité (par effets non-linéaires) par rapport aux prédictions théoriques. Les effets de courbure sur l'écoulement turbulent aval sont également étudiés. Dans la région turbulente, la courbure induit une augmentation du frottement pariétal, une augmentation de la production d'énergie cinétique turbulente et une modification des lois de vitesse classiques. Des lois corrigées sont proposées en s'appuyant sur des travaux antérieurs mais également en proposant une nouvelle correction. Enfin, les effets de flottabilité induits par une stratification de la masse volumique, que l'on retrouve par ailleurs dans les configurations géophysiques réelles, sont analysés par voie numérique. L'intérêt des simulations effectuées est alors de mettre en évidence la compétition entre les forces en présence : la courbure et la stratification.

Mots-clés : Instabilité hydrodynamique, couche limite, simulation des grandes échelles, turbulence, analyse de stabilité linéaire, Görtler

Abstract

This work concerns numerical simulations of a boundary layer over complex topography with eventual presence of background stratification. The topography is considered as a curved followed by a planar wall. The topology of the upstream flow is a Blasius boundary layer. The wall curvature induces the development of a hydrodynamic instability called the Görtler instability. This instability is responsible for a strong transverse heterogeneity in the flow and impacts the average topology of the downstream boundary layer in both the transition and the fully turbulent regions. Using theoretical and numerical approaches, its spatial development and its effects on important physical properties of boundary layer flows are described. It is shown that the dynamics of the downstream flow is very dependent on the upstream imposed wavelength. The difficulty of predicting the natural wavelength in such flows is also highlighted by a parametric study in which the upstream Reynolds and Görtler numbers are varied. In contrast, the spatial growth of the instability is very predictable, and the numerical results show that high Reynolds and Görtler numbers induce a decrease in the instability growth rate by non-linear effects with respect to linear stability analysis predictions. The effects of curvature in the downstream turbulent flow are also studied. In the turbulent region, the curvature induces an increase in wall friction, an increase in turbulent kinetic energy production terms and a modification of the classical velocity laws. Corrected laws are presented based on previous work but also by proposing a new correction. The buoyancy effects due to a density stratification are also investigated, highlighting the competition between the forces involved: the curvature and the stratification.

Keywords: Hydrodynamic instability, boundary layer, large-eddy simulation, turbulence, linear stability analysis, Görtler

