



**HAL**  
open science

# Optimisation fiabiliste et topologique de la maintenance des structures soumises à la fatigue

Samer Mahmoud

► **To cite this version:**

Samer Mahmoud. Optimisation fiabiliste et topologique de la maintenance des structures soumises à la fatigue. Matériaux et structures en mécanique [physics.class-ph]. Université Clermont Auvergne, 2021. Français. NNT : 2021UCFAC058 . tel-03616085

**HAL Id: tel-03616085**

**<https://theses.hal.science/tel-03616085v1>**

Submitted on 22 Mar 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : D.U .....  
EDSPIC :.....

**UNIVERSITÉ CLERMONT AUVERGNE**  
**ECOLE DOCTORALE**  
**SCIENCES POUR L'INGENIEUR DE CLERMONT-FERRAND**

**THÈSE**

Présentée par

**Samer MAHMOUD**

Ingénieur & M2R en Génie Mécanique

Pour obtenir le grade de :

**DOCTEUR D'UNIVERSITÉ**

**SPECIALITÉ : GENIE MECANIQUE**

**OPTIMISATION FIABILISTE ET TOPOLOGIQUE DE LA  
MAINTENANCE DES STRUCTURES SOUMISES À LA  
FATIGUE**

Soutenue publiquement le \_23/03/2021 devant le jury composé de :

M.	Abdelhamid BOUCHAIR	Président
Mme.	Sylvie YOTTE	Rapporteur
M.	Abdelkhalak El HAMI	Rapporteur
M.	Alaa CHATEAUNEUF	Directeur de thèse
M.	Khaled EL-TAWIL	Codirecteur de thèse

Ces travaux de doctorat se sont déroulés au sein de l'Institut Pascal à l'Université Clermont Auvergne (UCA) à Aubière.

Je tiens à remercier Madame Evelyne GIL, directrice de l'Institut Pascal, Monsieur Youcef MEZOUAR, directeur de l'école doctorale des sciences pour l'ingénieur, Madame Aurèlie GROSCLAUDE, directrice de la recherche et valorisation UCA, de m'avoir accueilli en tant que doctorant pendant ces années de thèse.

Je remercie Monsieur Alaa CHATEAUNEUF, Professeur à l'Université Clermont Auvergne, d'avoir supervisés ces travaux en tant que directeur de thèse. Je lui témoigne toute ma reconnaissance pour ses qualités humaines, techniques et pour l'aide et le soutien qu'il a pu m'apporter durant ces années. Merci pour vos conseils qui m'ont permis d'avancer et de progresser, tant au niveau professionnel que personnel.

Ma reconnaissance va évidemment à Monsieur Khaled EL-TAWIL, Professeur associé à l'Université Libanaise pour avoir encadré ces travaux. Je lui témoigne toute ma reconnaissance pour ses qualités humaines et techniques, il s'agit d'une personne d'importante bienveillance.

Que Madame Sylvie YOTTE, Professeur à l'université de Limoges, ainsi que Monsieur Abdelkhalak El HAMI, Professeur à INSA Rouen, trouvent ici l'expression de ma considération, ainsi que mes remerciements sincères pour avoir accepté de rapporter ce travail.

Je désire exprimer ma gratitude à Monsieur Abdelhamid BOUCHAIR, Professeur de l'Université Clermont Auvergne d'avoir fait partie de cette thèse.

Merci à Mme Dominique TORRISANI, pour son aide administrative et très bonne accueil.

Je tiens également à saluer tous mes amis et collègues. Qu'ils sachent qu'ils ont tous contribué d'une manière ou d'autre au bon déroulement de cette thèse.

Enfin merci à ma famille de continuer de me soutenir et de me supporter après toutes ces années. Je vous aime !

# Sommaire

<b>RESUME.....</b>	<b>7</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>8</b>
<b>INTRODUCTION GENERALE .....</b>	<b>9</b>
1. PROBLEMATIQUE .....	9
2. ÉTAT DE L'ART .....	9
3. METHODE PROPOSEE.....	10
4. PLAN DU MEMOIRE.....	11
<b>CHAPITRE I.....</b>	<b>12</b>
1.1 INTRODUCTION.....	13
1.2 OPTIMISATION TOPOLOGIQUE DES STRUCTURES .....	13
1.2.1 <i>Optimisation topologique des structures continues</i> .....	14
1.2.2 <i>Optimisation topologique des treillis</i> .....	31
1.3 OPTIMISATION FIABILISTE DES STRUCTURES .....	38
1.3.1 <i>Bases de la fiabilité mécanique</i> .....	38
1.3.2 <i>Optimisation fiabiliste de la conception (RBDO)</i> .....	43
1.3.3 <i>Optimisation fiabiliste de la topologie (RBTO)</i> .....	45
1.4 MAINTENANCE DES STRUCTURES SOUMISES A LA FATIGUE .....	47
1.4.1 <i>Durée de vie en fatigue</i> .....	47
1.4.2 <i>Stratégie de la maintenance</i> .....	48
1.4.3 <i>Maintenance des structures basée sur la fiabilité</i> .....	50
1.5 CONCLUSION :.....	53
<b>CHAPITRE II .....</b>	<b>54</b>
2.1 INTRODUCTION.....	55
2.2 OPTIMISATION TOPOLOGIQUE SOUS CONTRAINTE DE FIABILITE .....	55
2.2.1 <i>Formulation du problème</i> .....	56
2.2.2 <i>Conditions d'optimalité et méthode de résolution</i> .....	57
2.2.3 <i>Calcul de sensibilité</i> .....	58
2.3 OPTIMISATION TOPOLOGIQUE FIABILISTE EN ELASTICITE PLANE.....	59
2.3.1 <i>Optimisation topologique de la structure continue</i> .....	60
2.3.2 <i>Analyse fiabiliste de la structure continue optimale</i> .....	64
2.3.3 <i>Application : Robustesse d'une Poutre console</i> .....	67
2.4 CONCLUSION .....	72
<b>CHAPITRE III .....</b>	<b>73</b>
3.1 INTRODUCTION.....	74
3.2 CALCUL DE LA PROBABILITE DE DEFAILLANCE DES COMPOSANTS .....	74
3.2.1 <i>Coefficients de corrélation</i> .....	75
3.2.2 <i>Probabilité de défaillance d'un système multi-composant</i> .....	75
3.3 OPTIMISATION TOPOLOGIQUE DES STRUCTURES A BARRES.....	79
3.3.1 <i>Méthode de résolution</i> .....	80
3.4 STRUCTURE A TROIS BARRES .....	82
3.5 POUTRE EN TREILLIS.....	92

3.6	PYLONE ELECTRIQUE .....	96
3.7	CONCLUSION .....	102
<b>CHAPITRE IV.....</b>		<b>103</b>
4.1	INTRODUCTION .....	104
4.2	COUT TOTAL DE MAINTENANCE .....	104
4.2.1	<i>Calcul du coût total.....</i>	<i>104</i>
4.3	CALCUL DE COUT TOTAL BASE SUR LA FIABILITE .....	106
4.4	APPLICATIONS .....	108
4.4.1	<i>Structure mono-composant : Poutre console.....</i>	<i>108</i>
4.4.2	<i>Structure multi-composants : Poutre console .....</i>	<i>113</i>
4.4.3	<i>Pylône électrique .....</i>	<i>119</i>
4.4.4	<i>Structure à trois barres .....</i>	<i>129</i>
4.5	CONCLUSION .....	135
<b>CONCLUSION GENERALE .....</b>		<b>136</b>
	PERSPECTIVES.....	137
<b>REFERENCES .....</b>		<b>138</b>

## Liste des figures

FIGURE 1: MICROSTRUCTURES DE TOPOLOGIE CONTINUE A DEUX DIMENSIONS : (A) MICROSTRUCTURE AVEC VIDES RECTANGULAIRES, (B) MICROSTRUCTURES EN COUCHES CONSTRUITES PAR SUPERPOSITION DE DEUX MATERIAUX ISOTROPES. ....	15
FIGURE 2: DISTRIBUTION DE MATERIAU POUR UNE STRUCTURE OPTIMISEE.....	15
FIGURE 3: POUTRE COMPOSITE OPTIMALE.....	17
FIGURE 4: POUTRE OPTIMALE APRES LA PROCEDURE DE PENALISATION .....	17
FIGURE 5: ALGORITHME DE LA METHODE SIMP. (SIGMUND 2001).....	19
FIGURE 6: EVOLUTION DE LA FONCTION DES LIGNES DE NIVEAU AVEC LE TEMPS (SETHIAN.J.A 1998).....	20
FIGURE 7: VUE PARAMETREE DE COURBE EN EVOLUTION .....	23
FIGURE 8: DISCRETISATION DE $\Phi$ SUR LA GRILLE CARTESIENNE.....	23
FIGURE 9: ILLUSTRATION DE LA COURBURE.....	25
FIGURE 10: PROPAGATION D'UNE FRONTIERE EN FORME DE V .....	27
FIGURE 11: ILLUSTRATION DE LA DISTANCE SIGNEE.....	28
FIGURE 12: COURBE INITIALE EN 'V' FORMEE PAR LES SEGMENTS QUI SE RENCONTRENT EN M (1/2, 0). POUR CONSTRUIRE UN SCHEMA NUMERIQUE, ON DIVISE L'INTERVALLE [0, 1] EN 2J - 1 POINTS. ....	29
FIGURE 13: DIFFERENCE CENTRALE AVEC $\Delta T=0.005$ .....	30
FIGURE 14: LIGNES DE NIVEAU.....	30
FIGURE 15: DIVERS TYPES DE STRUCTURES DE BASE, SOURCE (M. P. BENDSØE 1994) .....	31
FIGURE 16: OPTIMISATION DE STRUCTURE A 10 BARRES PAR L'AG.....	35
FIGURE 17: OPTIMISATION DE STRUCTURE A 15 BARRES PAR L'AG .....	35
FIGURE 18: OPTIMISATION TOPOLOGIQUE D'UNE STRUCTURE A 11 ELEMENTS PAR LA METHODE DE RECHERCHE DE L'HARMONIE. ....	37
FIGURE 19: OPTIMISATION TOPOLOGIQUE D'UNE STRUCTURE A 42 ELEMENTS PAR LA METHODE DE RECHERCHE DE L'HARMONIE. ....	37
FIGURE 20: ILLUSTRATION DE $\beta$ APRES LA TRANSFORMATION ISO-PROBABILISTE T (M. LEMAIRE 2009). ....	40
FIGURE 21: POINT DE CONCEPTION.....	41
FIGURE 22: SIMULATIONS DE MONTE-CARLO (M. LEMAIRE 2009). ....	42
FIGURE 23: ILLUSTRATION DIVERS CAS DE CORRELATION. ....	43
FIGURE 24: COURBES DE WÖHLER.....	47
FIGURE 25: ILLUSTRATION DES COUTS.....	49
FIGURE 26: DISTRIBUTION DE LA MATIERE .....	60
FIGURE 27: EVOLUTION DE LA TOPOLOGIE.....	61
FIGURE 28: FORMES INITIALES .....	62
FIGURE 29: ALGORITHME D'OPTIMISATION TOPOLOGIQUE DES STRUCTURES CONTINUES. ....	63
FIGURE 30: DISTRIBUTIONS DE N ET $N\alpha$ .....	65
FIGURE 31: ALGORITHME D'OPTIMISATION TOPO-FIABILISTE DES STRUCTURES CONTINUES. ....	66
FIGURE 32: POUTRE CONSOLE.....	67
FIGURE 33: VARIATION DES BORNES DE L'INTERVALLE DE CONFIANCE EN FONCTION DE RAPPORT GEOMETRIQUE L/H. ....	71
FIGURE 34: METHODE D'INTEGRATION BI-NORMALE. ....	78
FIGURE 35: METHODE D'INTEGRATION MULTI-NORMALE .....	78
FIGURE 36: STRUCTURE A BARRES : A) STRUCTURE DE BASE B) FORME OPTIMALE.....	79
FIGURE 37: OPTIMISATION TOPOLOGIQUE DES TREILLIS .....	81
FIGURE 38: STRUCTURE A TROIS BARRES : A) FORME GENERALE B) STRUCTURE ETUDIEE.....	82
FIGURE 39: POUTRE EN TREILLIS, A) STRUCTURE DE BASE , B) FORME OPTIMALE. ....	92
FIGURE 40: FORME OPTIMALE DE PYLONE ELECTRIQUE. ....	96

FIGURE 41: METHODOLOGIE DE L'OPTIMISATION TOPOLOGIQUE FIABILISTE DE LA MAINTENANCE.....	107
FIGURE 42 POUTRE CONSOLE.....	108
FIGURE 43: LA SENSIBILITE DE COUT A LA GEOMETRIE DE STRUCTURE. ....	112
FIGURE 44: LA SENSIBILITE DE NOPTI A LA GEOMETRIE DE STRUCTURE. ....	112
FIGURE 45: LA SENSIBILITE DU COUT A LA COMPLIANCE DE STRUCTURE. ....	118
FIGURE 46: LA SENSIBILITE DE $N_{opti}$ A LA COMPLIANCE. ....	118
FIGURE 47: LA SENSIBILITE DE COUT A LA COMPLIANCE DE PYLONE ELECTRIQUE POUR $FH = 0 kN$ .....	123
FIGURE 48: LA SENSIBILITE DE NOMBRE DE CYCLES A LA MAINTENANCE A LA COMPLIANCE DE PYLONE ELECTRIQUE POUR $FH = 0 kN$ .....	123
FIGURE 49: LA SENSIBILITE DE COUT A LA COMPLIANCE DE PYLONE ELECTRIQUE POUR $FH = 2 kN$ .....	127
FIGURE 50 : LA SENSIBILITE DE NOMBRE DE CYCLES A LA MAINTENANCE A LA COMPLIANCE DE PYLONE ELECTRIQUE POUR $FH = 2 kN$ .....	128
FIGURE 51: LA SENSIBILITE DE NOMBRE DE CYCLES OPTIMAL DE MAINTENANCE A L'ECART-TYPE DE LA FORCE. .....	131
FIGURE 52: LA SENSIBILITE DE COUT A L'ECART-TYPE DE LA FORCE.....	132
FIGURE 53: LA SENSIBILITE DE NOMBRE DE CYCLES OPTIMAL DE MAINTENANCE A L'ECART-TYPE DE S1. ....	132
FIGURE 54: LA SENSIBILITE DE COUT A L'ECART-TYPE DE S1.....	133
FIGURE 55: LA SENSIBILITE DE NOMBRE DE CYCLES OPTIMAL DE MAINTENANCE A L'ECART-TYPE DE S2. ....	133
FIGURE 56: LA SENSIBILITE DE COUT A L'ECART-TYPE DE S2.....	134
FIGURE 57: LA SENSIBILITE DE NOMBRE DE CYCLES OPTIMAL DE MAINTENANCE A L'ECART-TYPE DE S3. ....	134
FIGURE 58: LA SENSIBILITE DE COUT A L'ECART-TYPE DE S3.....	135

#### Liste des tableaux

TABLEAU 1: SENSIBILITE DE LA STRUCTURE AU RAPPORT GEOMETRIQUE.....	68
TABLEAU 2: INFORMATIONS GEOMETRIQUES DE LA STRUCTURE .....	82
TABLEAU 3: COURBES $(N_a, P_f)$ , ETUDE DE VARIATION DE LA FORCE.....	85
TABLEAU 4: INTERVALLE DE $N_a$ OU $P_f \in [0.05; 0.95]$ CAS DE LA VARIATION DE FORCE. ....	86
TABLEAU 5: COURBES $(N_a, P_f)$ , ETUDE DE VARIATION DE S1.....	86
TABLEAU 6: INTERVALLE DE $N_a$ OU $P_f \in [0,05 ; 0,95]$ CAS DE LA VARIATION DE S1.....	87
TABLEAU 7: COURBES $(N_a, P_f)$ , ETUDE DE VARIATION DE S2.....	88
TABLEAU 8: INTERVALLE DE $N_a$ OU $P_f \in [0.05; 0.95]$ CAS DE LA VARIATION DE S2.....	89
TABLEAU 9: COURBES $(N_a, P_f)$ , ETUDE DE VARIATION DE S3.....	90
TABLEAU 10: INTERVALLE DE $N_a$ OU $P_f \in [0.05; 0.95]$ CAS DE LA VARIATION DE S3.....	91
TABLEAU 11: COURBES $(N_a, P_f)$ , POUTRE EN TREILLIS. ....	92
TABLEAU 12: COURBES $(N_a, P_f)$ , PYLONE ELECTRIQUE EN NEGLIGEANT L'EFFET DU VENT.....	97
TABLEAU 13: COURBES $(N_a, P_f)$ , PYLONE ELECTRIQUE SOUS CONDITION DU VENT FORT. ....	99
TABLEAU 14: RESULTATS DE L'OPTIMISATION TOPOLOGIQUE FIABILISTE DE LA MAINTENANCE DE CONSOLE. ....	109
TABLEAU 15: RESULTATS DE L'OPTIMISATION TOPOLOGIQUE FIABILISTE DE LA MAINTENANCE DE CONSOLE MULTI-COMPOSANT.....	114
TABLEAU 16: RESULTATS DE L'OPTIMISATION TOPOLOGIQUE FIABILISTE DE LA MAINTENANCE DE PYLONE ELECTRIQUE POUR $FH = 0 kN$ .....	120
TABLEAU 17: RESULTATS DE L'OPTIMISATION TOPOLOGIQUE FIABILISTE DE PYLONE ELECTRIQUE POUR $FH =$ $2 kN$ . ....	124

## Résumé

Ce travail consiste à développer une méthode d'optimisation de la topologie des structures en tenant compte de leur maintenance et niveau de fiabilité. L'analyse de sensibilité permet d'étudier l'importance de certains paramètres sur le comportement et la fiabilité de la structure durant sa durée de vie.

La méthodologie se déroule en trois étapes principales :

Dans un premier temps, l'optimisation de la topologie de structure est effectuée en minimisant la fonction objectif sous des limitations d'optimisation. Lorsque la fonction objectif est la compliance mécanique, le volume minimal devient une limitation. Lorsque la fonction objectif est le poids de la structure (équivalent au volume), la limitation sur la compliance doit être considérée.

Dans un deuxième temps, nous calculons la probabilité de défaillance de la structure optimisée soumise à des charges cycliques en tenant compte de la fatigue du matériau. La durée de vie est ainsi déterminée.

Finalement, l'optimisation de la maintenance par la fiabilité aboutit à minimiser le coût total de la maintenance.

Cette méthodologie est appliquée sur des structures continues et des structures à barres ; nous appliquons la démarche sur une structure continue afin de déterminer la relation entre le coût minimal de maintenance et la dimension géométrique.

L'application numérique sur une poutre console à barre a pour bût d'étudier l'influence de la compliance et la diminution de rigidité sur la durée de vie et par la suite sur le coût de maintenance.

Un pylône électrique est une structure à barres soumise à des charges multiples qui sollicitent plusieurs nœuds. Cette application considère l'effet du vent sur le comportement de la structure et nous permet de trouver la forme optimisée la plus fiable.

Le problème de structure à trois barres est traité aussi, l'objectif de cette application est d'étudier l'effet de la dispersion des variables aléatoires sur le coût de maintenance, en considérant deux politiques de maintenance :

- Politique 1 : remplacement du système à l'instant de maintenance
- Politique 2 : remplacement à l'instant de maintenance de la barre la moins fiable

Enfin les résultats de ces applications sont analysés, ce qui nous conduit à une conclusion générale de ce travail.



## Abstract

This work consists of the development of a method for optimization of the topology of structures taking into consideration their maintenance and level of reliability. The sensitivity analysis makes it possible to study the importance of certain parameters on the behavior and reliability of the structure during its service life.

The methodology takes place in three main stages:

First, the optimization of the structure topology is performed by minimizing the objective function under optimization limitations. When the objective function is mechanical compliance, the minimum volume becomes a limitation. When the objective function is the weight of the structure (equivalent to the volume), the limitation on compliance must be considered.

Secondly, we calculate the probability of failure of the optimized structure subjected to cyclic loads, taking into consideration the fatigue of the material. The service life is thus determined.

Finally, the optimization of the maintenance based on reliability results in minimizing the total cost of maintenance.

This methodology is applied on continuous structures and bar structures; we apply the approach on a continuous structure in order to determine the relation between the minimum maintenance cost and the geometric dimension.

The numerical application on a bar console beam aims to study the influence of compliance and the decrease in rigidity on the service life and subsequently on the cost of maintenance.

An electricity pylon is a bar structure subjected to multiple loads which stress several nodes. This application considers the effect of wind on the behavior of the structure and allows us to find the most reliable optimized shape.

The three-bar structure problem is also treated; the objective of this application is to study the effect of the dispersion of random variables on the maintenance cost, considering two maintenance policies:

- Policy 1: replacement of the system at the time of maintenance
- Policy 2: replacement at the time of maintenance of the least reliable bar

Finally, the results of these applications are analyzed, which leads us to a general conclusion of this work.

# Introduction Générale

## 1. Problématique

Le choix de la topologie des structures joue un rôle principal dans la construction et la fabrication. L'objectif est de minimiser le poids en conservant les propriétés demandées. Cette problématique concerne également la robustesse de la structure.

La structure de forme idéale que nous recherchons, doit se comporter dans des conditions réelles incertaines pour une durée prédéterminée. Pour cela, la structure doit faire l'objet d'une étude de fiabilité sous les conditions de charge prédéfinies, afin de connaître sa durée de vie et sa probabilité de défaillance.

Pour garantir que la structure reste fiable pendant sa durée de vie nous devons appliquer les maintenances nécessaires et définir une stratégie de maintenance optimisée et indispensable.

Ces objectifs sont atteints en introduisant une méthode d'optimisation topologique fiabiliste de la maintenance des structures.

## 2. État de l'art

Dans la littérature scientifique, nous trouvons une grande variété de méthodes d'optimisation topologique des structures continues et discrètes. Par ailleurs, la théorie de la fiabilité est traitée dans de nombreux travaux bibliographiques avec différentes applications sur la conception des structures basée sur la fiabilité. Nous trouvons également des travaux sur l'optimisation topologique avec une limitation sur la probabilité de défaillance et/ou l'indice de fiabilité.

Par contre, nous ne trouvons pas dans la littérature des travaux sur le couplage de l'optimisation de forme avec l'optimisation du coût de maintenance. La plupart des travaux se concentrent sur la méthode d'optimisation topologique et ses applications.

De plus, les articles traitent bien la politique de maintenance, mais ne soulignent pas l'importance de la maintenance pour le choix de la forme des structures et leur durée de vie.

Toutes ces raisons nous amènent à proposer dans ce travail une méthode d'optimisation fiabiliste topologique de la maintenance, qui est une combinaison de :

- l'optimisation topologique des structures, au moyen des méthodes développées ;
- l'analyse fiabiliste des structures optimisées (cette application de la mécanique de fiabilité est rarement étudiée) ;
- l'optimisation par la fiabilité de la maintenance des structures de forme optimale basée sur la fiabilité, représente l'originalité du présent travail comme le détaille le chapitre 1.

### **3. Méthode proposée**

La méthode utilisée pour l'optimisation topologique et fiabiliste de la maintenance des structures consiste à suivre une démarche chronologique d'optimisation adoptée à chaque étape.

Tout d'abord, nous devons définir le type de structure (i.e. continue ou à barres), les propriétés des matériaux utilisés et les conditions aux limites.

Nous appliquons ensuite une méthode d'optimisation topologique pour obtenir la forme optimale de la structure. Cette méthode varie pour chaque type de structure (i.e. continue ou discrète), plusieurs méthodes présentées dans la littérature peuvent être utilisées.

Parmi les méthodes d'optimisation topologique disponibles, nous choisissons la méthode des lignes de niveau pour les structures continues et la méthode de structure de base pour les structures à barres. Les conditions aux limites, la fonction objectif et les contraintes d'optimisation varient d'une application à l'autre. La fonction objectif est définie par la compliance mécanique de la structure continue tandis qu'elle correspond au poids pour la structure à barres.

Dans la suite de la démarche, la structure de forme optimale soumise à la fatigue est analysée mécaniquement. Nous calculons la durée de vie de la structure en fatigue et ensuite la structure subit une étude fiabiliste afin de déterminer sa probabilité de la défaillance.

Concernant l'analyse fiabiliste des structures continues, nous appliquons la méthode directe (i.e. FORM) en utilisant la loi de distribution de la durée de vie de la structure.

Pour les structures à barres, le calcul de la probabilité de défaillance se fait en deux étapes :

- étape 1 : calcul des probabilités de défaillance des barres en appliquant la méthode directe.
- étape 2 : calcul de la probabilité de défaillance de la structure entière en appliquant la méthode d'intégration multi-normale et en utilisant les résultats de l'étape 1.

Les résultats obtenus de l'analyse fiabiliste sont ensuite utilisés pour l'optimisation de la maintenance. Nous choisissons le coût de la maintenance comme fonction objectif. Pour cela, nous devons minimiser le coût de la maintenance en tenant compte de la fiabilité, il s'agit de l'optimisation du coût de maintenance basée sur la fiabilité.

Le coût total de maintenance est calculé par cycle de charges appliquées. Nous pouvons déduire la relation entre ce coût et le nombre de cycles appliqués, et nous déterminons le coût minimal de maintenance et par la suite l'instant optimal de la maintenance.

Cette démarche est également appliquée pour l'étude de l'influence des paramètres sur le coût de maintenance et sur la probabilité de défaillance.

#### **4. Plan du mémoire**

Ce mémoire est divisé en quatre chapitres :

Chapitre 1 : Méthodes d'optimisation et de fiabilité des structures

Dans ce chapitre, nous présentons une revue de la littérature en considérant les thèmes abordés dans notre travail :

- l'optimisation topologique des structures continues et discrètes, où nous développons les méthodes utilisées dans le domaine d'optimisation des structures ;
- la fiabilité des structures, où nous rappelons les bases de la fiabilité mécanique et les approches d'optimisation fiabiliste de la conception ;
- l'optimisation de la maintenance, où nous présentons le calcul de la durée de vie en fatigue, les différents modèles de coût et la maintenance des structures basée sur la fiabilité.

Chapitre 2 : Optimisation topologique fiabiliste des structures continues

Dans ce chapitre, nous introduisons la méthodologie de l'optimisation topologique fiabiliste qui est constituée de deux étapes :

- l'optimisation topologique des structures continues par la méthode de lignes de niveau ;
- l'analyse fiabiliste de la structure de topologie optimale pour déterminer sa probabilité de défaillance.

À la fin de ce chapitre, nous présentons une application numérique de la méthode.

Chapitre 3 : Optimisation topologique fiabiliste de structures à barres

Dans ce chapitre, nous introduisons la méthode d'optimisation topologique fiabiliste des structures discrètes en utilisant la méthode de la structure de base pour l'optimisation topologique.

Le calcul de la probabilité de défaillance des structures à barres se fait par la méthode d'intégration multi-normale.

À la fin de ce chapitre, nous présentons des applications numériques de la méthode.

Chapitre 4 : Optimisation topologique fiabiliste de la maintenance

Dans ce chapitre, nous considérons le coût de maintenance comme objectif de l'optimisation de la maintenance, dans lequel les résultats de l'analyse fiabiliste sont utilisés pour déterminer le coût total de maintenance.

# CHAPITRE I

## Méthodes d'optimisation et de fiabilité des structures

1. Introduction
2. Optimisation topologique des structures
  - 2.1. Optimisation topologique des structures continues
    1. Méthode d'homogénéisation
    2. Méthode SIMP
    3. Méthode des courbes de niveau
  - 2.2. Optimisation topologique des treillis
    1. Méthode de la structure de base
    2. Algorithme Génétique
    3. Méthode de recherche de l'harmonie
3. Optimisation fiabiliste des structures
  - 3.1. Bases de la fiabilité mécanique
    1. Fonction d'état limite
    2. Indice de fiabilité
    3. Transformation iso-probabiliste
    4. Point de défaillance le plus probable  $P^*$
    5. Méthode de Monte-Carlo
    6. Fiabilité système
  - 3.2. Optimisation fiabiliste de la conception (RBDO)
    1. Formulation à deux niveaux
    2. Formulation mono-niveau
    3. Formulations découplées
  - 3.3. Optimisation fiabiliste de la topologie (RBTO)
4. Maintenance des structures soumises à la fatigue
  - 4.1. Durée de vie en fatigue
    1. Courbes de Wöhler
  - 4.2. Stratégie de la maintenance
    1. Types de maintenance
    2. Coût de maintenance
  - 4.3. Maintenance des structures basée sur la fiabilité
5. Conclusion

## 1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter les concepts fondamentaux et les travaux scientifiques qui ont servi de base pour mener notre travail de recherche. Compte tenu de l'étendue du thème de recherche abordé dans notre étude, ce chapitre est composé de trois parties :

- optimisation topologique des structures ;
- fiabilité des structures ;
- maintenance des structures soumises à la fatigue.

Dans un premier temps, nous présentons les différentes méthodes d'optimisation topologique des structures. Dans ce cadre, les structures sont divisées en deux catégories : structures continues et structures discrètes. Pour chacune de ces deux catégories, nous rappelons les méthodes d'optimisation topologique employées, notamment la méthode des courbes de niveau.

Dans un deuxième temps, nous rappelons les bases de la fiabilité mécanique, en présentant les notions principales, les approches analytiques et la méthode des simulations de Monte-Carlo. Cette partie est complétée par les différentes méthodes d'optimisation fiabiliste de la conception.

Dans un troisième temps, nous présentons succinctement les différents types de maintenance et nous détaillons le modèle de coût utilisé dans le présent travail.

## 1.2 Optimisation topologique des structures

L'optimisation topologique est une approche mathématique qui permet d'optimiser la disposition du matériau et des composants dans l'espace de conception prédéfini, pour un ensemble donné de charges et de conditions aux limites, de telle sorte que la disposition résultante réponde à un ensemble prescrit de critères de performance.

Les techniques d'optimisation peuvent, pour des raisons de simplicité, être divisées en deux groupes de base : (1) méthodes basées sur le gradient et (2) méthodes heuristiques. Les techniques basées sur le gradient, telles que la programmation linéaire et la programmation non linéaire, utilisent un calcul de dérivées pour trouver les solutions optimales locales pour des fonctions continues et différentiables. De leur côté, les méthodes heuristiques impliquent une combinaison de règles et d'aléas, qui ont pour but de trouver une solution optimale globale en utilisant des algorithmes inspirés de la nature.

Alors que le premier travail sur l'optimisation des structures remonte à 1904 ([Michell 1904](#)), ce domaine de recherche ne s'est fortement développé que pendant les trois dernières décennies, grâce à la puissance de calcul numérique. Nous distinguons trois catégories principales d'optimisation des structures :

1. Optimisation paramétrique (exemple : dimensions) des structures où les tailles de sections sont paramétrées par un nombre réduit de variables (par exemple, une épaisseur, un diamètre, des dimensions), ce qui ne modifie pas la forme de la structure.

2. Optimisation de forme géométrique, où, à partir d'une forme initiale, on s'autorise des variations de la position des frontières de cette forme sans toutefois changer la topologie.
3. Optimisation topologique, où l'on cherche, sans aucune restriction explicite ou implicite, la meilleure forme possible tout en modifiant la topologie ; il s'agit du type le plus général parmi ces trois catégories (Allaire 2007).

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'optimisation topologique des structures. Ce type d'optimisation permet aux ingénieurs d'obtenir la distribution optimale de la matière, dont les applications sont multiples pour les structures continues et discrètes.

L'évolution des moyens de calcul a permis le développement rapide dans le domaine de l'optimisation topologique qui s'appuie sur les approches numériques. La procédure d'optimisation commence avec un domaine matériel, auquel les charges extérieures et les conditions aux frontières sont appliquées. L'algorithme d'optimisation procède ensuite à l'élimination de la matière inefficace, pour obtenir la meilleure configuration structurale.

### 1.2.1 Optimisation topologique des structures continues

Dans le cas des structures continues, il existe quatre types de méthodes d'optimisation topologique qui ont été développées pendant les trois dernières décennies : la méthode d'homogénéisation, la méthode du matériau isotrope avec pénalisation (SIMP), l'optimisation évolutionniste des structures (ESO) et la méthode des lignes de niveau. Nous rappelons dans la suite les principes de chacune des trois méthodes les plus utilisées.

#### 1.2.1.1 Méthode d'homogénéisation

La méthode d'homogénéisation a été présentée par Bendsoe et Kikuchi en 1988 (Bendsoe 1988). Elle est basée sur l'hypothèse de microstructure dont les propriétés sont homogénéisées. Cette méthode utilise le modèle d'un matériau composite, formé de plusieurs cellules infiniment petites contenant de la matière et du vide (ou deux matières différentes). Les propriétés du matériau de chaque cellule sont calculées par la théorie d'homogénéisation. La topologie optimale est obtenue par la résolution du problème de distribution de la matière (Hongwei Zhao 2010).

La méthode d'homogénéisation permet d'établir les paramètres de forme optimaux d'une structure composée de cellules périodiques non isotropes, choisies par l'utilisateur. Avec la projection, il est ensuite possible de déshomogénéiser la forme optimale. Cette étape permet également de choisir la taille des cellules considérées et d'adapter ainsi la pièce finale à la résolution d'une imprimante 3D par exemple.

La méthode d'optimisation par homogénéisation considère les paramètres géométriques de la microstructure comme des variables de conception, et homogénéise ainsi les propriétés des microstructures. Ces microstructures sont nommées « microstructures stratifiées » et sont généralement anisotropes ; les vides sont généralement de forme carrée ou rectangulaire. Les variables de conception définissent la microstructure dans chaque élément fini. Comme le matériau composite est orthotrope, la rotation angulaire de la microstructure devient également une variable de conception.

La figure 1 ci-dessous montre les microstructures utilisées dans l'optimisation par la méthode d'homogénéisation.

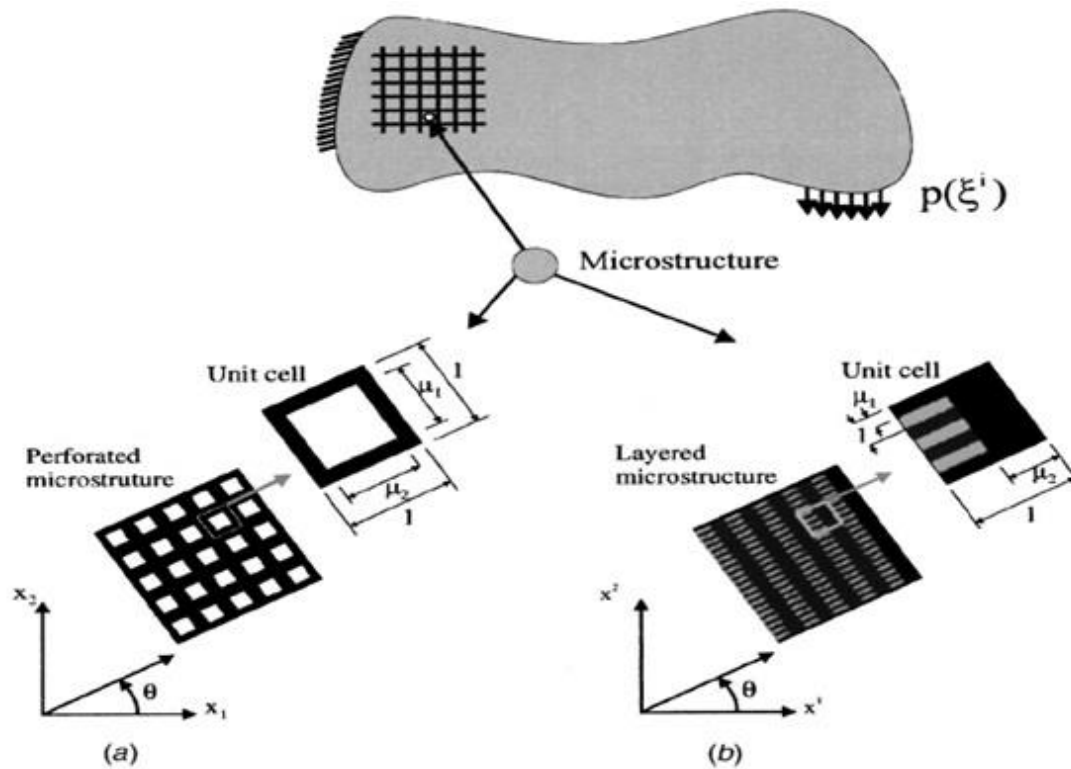


Figure 1: Microstructures de topologie continue à deux dimensions : (a) microstructure avec vides rectangulaires, (b) microstructures en couches construites par superposition de deux matériaux isotropes.

La matrice de rigidité est calculée en utilisant les variables de conception, et dépend de la densité effective du matériau, à l'exception des éléments qui sont totalement solides ou totalement vides (Eschenauer 2001).

L'objectif de la méthode d'optimisation par homogénéisation est de trouver, sous les conditions aux limites et les conditions de charges appliquées, le domaine matériel de forme admissible  $w$ , qui est un sous-ensemble du domaine de référence borné  $\Omega$  (Figure 2).

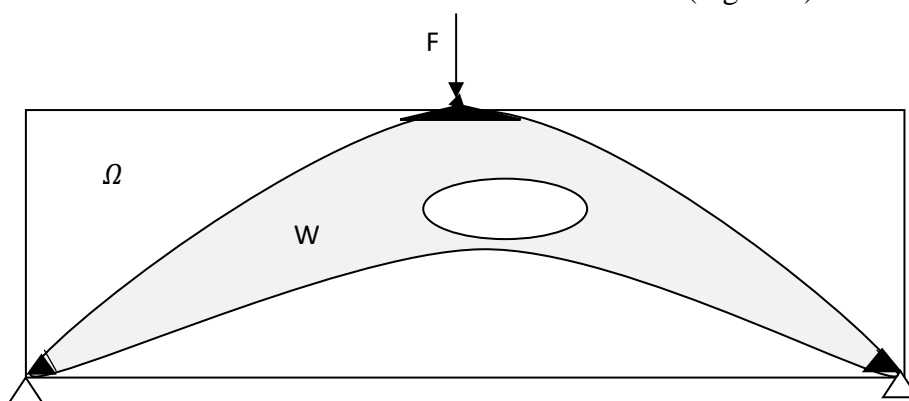


Figure 2: Distribution de matériau pour une structure optimisée.

Le problème d'optimisation topologique est représenté par la formulation de base suivante :



$$\begin{cases} \min(C) \\ \text{sous: } \begin{cases} \int_w Ae(u)dx = f \\ V \leq V_0 \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

avec  $C$  la compliance,  $f$  le vecteur des forces surfaciques,  $w$  la forme admissible,  $e(u)$  le tenseur de déformation,  $A$  le tenseur du comportement élastique,  $V$  le volume admissible et  $V_0$  la limite supérieure du volume,

Cette formule décrit le problème de minimisation du travail des forces extérieures (i.e. la compliance) en fonction de la topologie de la structure, sous conditions d'équilibre mécanique et de limitation au volume admissible.

Le principe de l'algorithme d'optimisation développé par G. Allaire (G. Allaire 1997), est de remédier aux inconvénients de la méthode d'analyse de sensibilité (très coûteuse en temps de calcul) à l'aide de la théorie de l'homogénéisation. Le résultat obtenu dépend fortement du choix initial et de la finesse de la discrétisation.

Sous l'hypothèse de l'élasticité linéaire, la mesure de la rigidité globale d'une structure mécanique est évaluée par la compliance qui correspond à l'énergie de déformation :

$$C = \int_{\partial\Omega} f \cdot u \, ds = \int_w Ae(u) \cdot e(u) \, dx \quad (2)$$

Le volume de la matière est calculé par :  $|w| = \int_w dx$ . Le but de l'optimisation est de minimiser, sur l'ensemble des formes admissibles, la somme pondérée de la compliance et du poids. Ainsi le problème d'optimisation s'écrit par :

$$\begin{cases} \min E = C + \lambda(V - V_0) \\ \text{Sous les conditions d'équilibre :} \\ \left( \begin{array}{l} \text{div } \sigma = 0 \text{ dans } w \text{ (équilibre dans le solide)} \\ \sigma \cdot \vec{n} = f \text{ sur } \partial\Omega \text{ (conditions aux limites de Newman)} \\ \sigma \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial w | \partial\Omega \text{ (conditions aux limites de Dirichlet)} \end{array} \right. \end{cases} \quad (3)$$

où  $\sigma$  est le tenseur de contrainte,  $\vec{n}$  est le vecteur normal,  $\Omega$  est le domaine de référence (borné),  $\partial\Omega$  est l'ensemble de la frontière du domaine,  $w$  est la forme admissible (sous-ensemble de  $\Omega$ ) et  $\partial w$  est la frontière de  $w$ .

Pour obtenir le minimum de la fonction objectif, il est nécessaire de faire appel à un processus de passage à la limite lorsque les trous deviennent de plus en plus petits et de plus en plus nombreux, conduisant à une forme généralisée (ou homogénéisée) qui est un matériau composite obtenu par micro-perforations du matériau élastique d'origine.

Soit  $G_\rho$  l'ensemble de toutes les lois d'élasticité correspondant à des matériaux composites de densité  $\rho$ , la fonctionnelle homogénéisée est alors donnée par :

$$\min_{\substack{0 \leq \rho \leq 1 \\ A^* \in G_\rho}} \left\{ \hat{E} = \hat{C} + \lambda \int_{\Omega} \rho(x) dx \right\} \quad (4)$$

avec  $\hat{C}$  la compliance associée au problème d'élasticité homogénéisé dans le domaine  $\Omega$  pour le tenseur effectif  $A^*$ .

Le problème homogénéisé consiste en une double minimisation par rapport aux paramètres de forme  $(A^*, \rho)$  et au tenseur de contrainte statiquement admissible  $\sigma$ .

L'algorithme d'optimisation est le suivant :

- 1- Initialisation de la forme en déterminant les valeurs initiales de paramètres de forme  $(A_0^*, \rho_0)$ , qui représentent le point de départ de l'algorithme.
- 2- Itérations  $n = 1, 2, \dots$  jusqu'à la convergence :
  - Pour la forme  $(A_{n-1}^*, \rho_{n-1})$ , on calcule les contraintes  $\sigma_n$  par résolution du problème d'élasticité linéaire (i.e. méthode des éléments finis)
  - à partir du tenseur de contrainte, on calcule les nouveaux paramètres de la forme  $(A_n^*, \rho_n)$  en utilisant les formules présentées par G. Allaire (G. Allaire 1997).

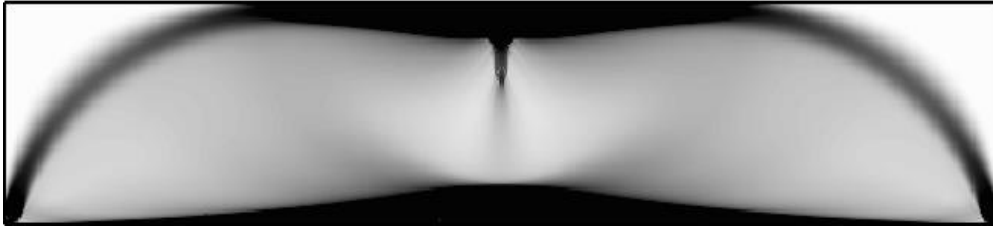


Figure 3: Poutre composite optimale

Cet algorithme donne une forme optimale composite où les frontières ne sont pas totalement identifiées (Figure 3). Pour cela, après la convergence de l'algorithme, les densités intermédiaires doivent être pénalisées afin d'obtenir la forme finale (Figure 4). Cela se réalise par l'exécution de quelques itérations de l'algorithme en pénalisant les densités intermédiaires, ce qui force la densité à ne prendre que les valeurs 0 ou 1.



Figure 4: Poutre optimale après la procédure de pénalisation

Par conséquent, cet algorithme permet d'optimiser automatiquement une structure sans restrictions sur sa topologie et réduit ainsi le bruit numérique, avec un coût de calcul très compétitif.

Afin de surmonter les instabilités numériques conduisant à des formes telles que les damiers, la dépendance du maillage a été étudiée par H. Zhao et al (Hongwei Zhao 2010). Ces derniers ont développé une nouvelle implémentation combinée à une méthode d'homogénéisation, sans introduire de contraintes supplémentaires. Ils ont utilisé la méthode d'approximation continue de la distribution des matériaux pour l'optimisation de la topologie, selon les modèles mathématiques de la méthode d'homogénéisation.

La taille des cellules à n'importe quel endroit de la structure  $r^e$  est une variable de conception, interpolée par les relations suivantes :

- cas d'un champ à dimension continue :

$$\begin{cases} r^e = \sum_{i=1}^m \phi_i r_i \\ \rho^e = 1 - (1 - r^e)^2 \end{cases} \quad (5)$$

- cas d'un champ à masse volumique continue :

$$\begin{cases} \rho_i = 1 - (1 - r_i)^2 \\ \rho^e = \sum_{i=1}^m \phi_i \rho_i \end{cases} \quad (6)$$

où  $m$  est le nombre de variables topologiques,  $\phi_i$  est la fonction d'interpolation,  $r_i$  est la variable dimensionnelle de conception,  $\rho_i$  est la masse volumique de la variable de conception  $r_i$  et  $\rho^e$  est la masse volumique à n'importe quel endroit de la structure. Si  $\phi_i$  est bilinéaire dans les problèmes à deux dimensions, la méthode est nommée « méthode d'homogénéisation à base nodale ».

D'autre part, K.Long *et al.* (K. Long 2009) ont introduit une méthode dans laquelle la méthode MLS (moving least square approximation) et les fonctions modifiées de filtrage sont adoptées comme fonctions d'interpolation. Le but de cette méthode est de s'affranchir des instabilités numériques (damier et dépendance du maillage) dans les formes optimales. Cette méthode est une extension de la méthode d'homogénéisation à base nodale et nommée « méthode d'homogénéisation du point matériel ».

P. Geoffroy-Donders (Geoffroy-Donders 2017) a proposé une méthode d'optimisation topologique basée sur la méthode d'homogénéisation, afin d'obtenir des structures composées de cellules périodiques de densité variable ; cette méthode est appliquée à des cellules non isotropes où l'auteur optimise également l'orientation. Une projection de solutions optimales permet d'envisager des applications à la fabrication additive. La principale originalité de ce travail réside dans la méthode de projection qui repose sur l'introduction d'une transformation du plan compatible avec l'orientation des cellules.

### 1.2.1.2 Méthode SIMP

La méthode SIMP a été proposée par Bendsoe (Bendsøe 1989) sous le terme « approche directe ». Le terme SIMP était introduit par Rozvany *et al.* (G. I. N. Rozvany 1992) pour l'optimisation de forme généralisée (optimisation avec une fraction de volume élevée) ; elle représente une extension de la méthode d'homogénéisation.

L'objectif est de réduire la complexité et d'améliorer la convergence en allant vers les solutions binaires (matière ou vide) (van Dijk 2013).

La figure 5 montre l'organigramme de la méthode SIMP présentée par (Sigmund 2001) qui a étudié le problème de compliance, exprimé par :

$$\begin{cases} \min C = \sum_{e=1}^n (\rho_e)^p \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{u}_e \\ \text{sous: } \frac{V(\rho)}{V_0} = f_V \quad 0 < \rho_{\min} \leq x_e \leq 1 \end{cases} \quad (7)$$

où  $C$  est la compliance,  $u_e$  et  $k_e$  sont respectivement le vecteur de déplacement et la matrice de rigidité de l'élément  $e$ ,  $\rho_e$  est le vecteur des variables de conception de l'élément,  $V(\rho)$  et  $V_0$  sont respectivement le volume matériel et le volume du domaine de conception,  $f_V$  est la fraction volumique,  $\rho_{\min}$  est la masse volumique minimale (non nulle pour éviter la singularité),  $n$  est le nombre d'éléments et  $p$  est le facteur de pénalité.

Les éléments avec  $\rho = 1$  représentent la matière (illustrée par une couleur noire) et ceux avec  $\rho = 0$  représentent les vides (illustrés par des régions blanches).

La raison de l'application de la pénalisation se justifie par la recherche d'une solution plus contrastée, qui est préférable du point de vue technique. Afin d'obtenir une véritable solution de type matière/vide, un exposant de pénalisation  $p$  supérieur à 3 est souvent requis, selon Bendsoe et Sigmund (Martin Philip Bendsoe 2004).

Il est toutefois recommandé, comme l'a souligné Rozvany (Rozvany 2009) d'augmenter progressivement la pénalisation, en commençant par  $p = 1$ . La raison est de ne pas précipiter l'optimisation en évitant de se bloquer à un optimum local.

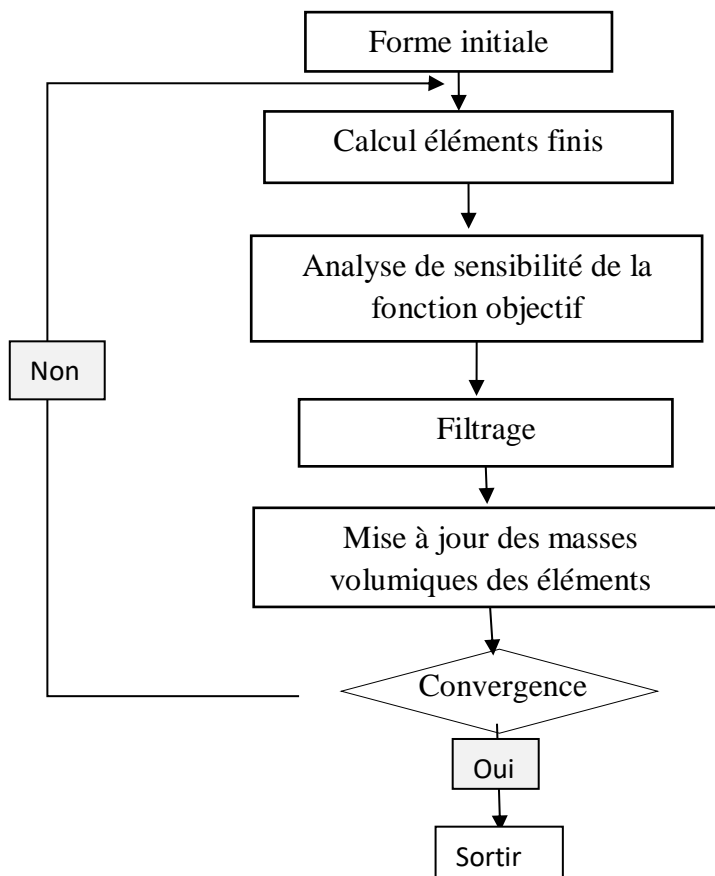


Figure 5: Algorithme de la méthode SIMP. (Sigmund 2001)

Le facteur de pénalité  $p$  est un paramètre principal de l'algorithme SIMP. Ce facteur réduit l'apparition des densités fractionnées dans la conception optimale. Le facteur de pénalité est introduit pour assurer des solutions plus réalistes pour la rigidité de chaque élément, du fait qu'il force le résultat final vers plus de solutions binaires.

Néanmoins, des densités intermédiaires avec  $(0 < \rho < 1)$  représentées par différentes nuances de gris peuvent encore exister dans la conception optimale le long des frontières structurales.

Sigmund et Petersson (O. Sigmund 1998) ont signalé deux problèmes principaux avec l'approche SIMP. Premièrement, SIMP peut générer des résultats avec des modèles de damier. Deuxièmement, les solutions optimales peuvent dépendre du maillage. Des techniques de filtrage supplémentaire peuvent être utilisées pour éviter l'apparition de formation de damiers et les problèmes de dépendance au maillage.

Sigmund (O.Sigmund 2007) a développé une version légèrement modifiée de la méthode SIMP qui comporte une rigidité minimale (ou d'autres paramètres matériels) indépendante de la pénalisation.

Il a suggéré une nouvelle famille de schémas de filtrage de la densité, basés sur la morphologie de l'optimisation topologique, qui fournit des solutions indépendantes du maillage, discrètes et pouvant être fabriquées.

### 1.2.1.3 Méthode des courbes de niveau

En 1988, J. A. Sethian et S. Osher (S.Osher 1988) ont proposé de représenter implicitement les frontières et modéliser leur propagation par des équations aux dérivées partielles. Ils ont représenté les frontières par des courbes de niveau  $\varphi(\mathbf{x})$  ; pour cela, cette technique est nommée « la méthode des lignes de niveau ». C'est une méthode simple et versatile pour déterminer et analyser le mouvement d'une interface en deux ou trois dimensions (Sethian 1995).

La méthode des lignes de niveau a été développée pour surmonter les problèmes qui se posent lorsque nous essayons de suivre une frontière mobile au cours du temps (Glatter 2004). Les frontières évolutives ou interfaces changent en termes d'apparition de forme et de position, à cause des lois du mouvement.

Il y a deux approches principales pour construire un contour actif (Maistrout 2008) : suivre une interface évolutive (Glatter 2004) ou modéliser le mouvement de la frontière (Persson 2005).

La figure 6 représente en 3 dimensions l'évolution temporelle de la fonction des lignes de niveau, le temps étant représenté par le troisième axe, nous observons la fonction implicite en 2 D qui s'évolue avec le temps, ce qui conduit à la changeant de la forme géométrique.

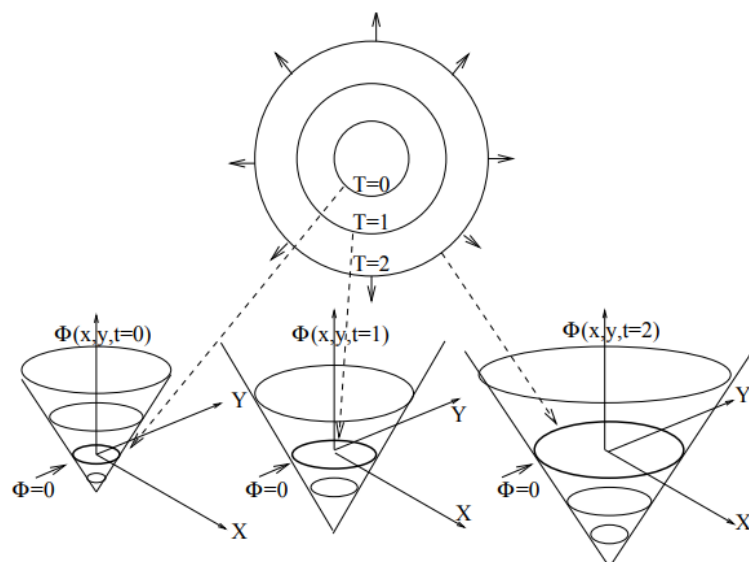


Figure 6: évolution de la fonction des lignes de niveau avec le temps (Sethian.J.A 1998)

### 1.2.1.3.1 Techniques explicites

Une approche simple pour modéliser le mouvement est de représenter explicitement les frontières. En deux dimensions, les nœuds d'une courbe sont reliés par des segments (Persson 2005) et chaque nœud se déplace suivant l'équation aux dérivées totales :

$$\frac{dx^i}{dt} = v(x^i, t) \quad x^i(0) = x_0^i \quad (8)$$

avec  $v(x^i, t)$  la vitesse d'évolution du nœud  $i$ ,  $x^i$  la position du nœud à l'instant  $t$ ,  $x^i(0)$  est la position initiale du nœud.

Une technique explicite est proposée sous le nom : « approche de type serpent ». Dans cette approche, le contour est représenté par une équation paramétrique qui s'écrit dans le plan par :

$$C(s) = \begin{cases} x(s) \\ y(s) \end{cases} \quad (9)$$

avec  $s$  l'abscisse de coordonnée curviligne et  $C(s)$  la courbe associée.

Cette méthode commence en partant d'un contour initial bien choisi, puis en utilisant l'algorithme de contour actif pour amener le contour à l'emplacement final souhaité. Elle est basée sur la minimisation de l'énergie totale sur le contour. Nous calculons les termes de l'énergie interne et externe. Chaque point du contour est ensuite déplacé vers l'emplacement permettant de diminuer l'énergie totale :

$$E_t(C) = E_{int}(C) + E_{ext}(C) \quad (10)$$

où  $E_t(C)$  est l'énergie totale du contour,  $E_{int}(C)$  est l'énergie interne du contour et  $E_{ext}(C)$  est l'énergie externe du contour (Maistrou 2008).

### 1.2.1.3.2 Techniques implicites

Dans la méthode des lignes de niveau, l'interface entre la matière et le vide est représentée par la courbe de niveau zéro,  $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ . Il est à noter que  $\varphi$  est définie pour tout l'espace  $\mathbf{x}$ , non seulement pour les points sur la frontière (Persson 2005).

Par exemple, pour représenter un cercle  $C$  de rayon  $R$ , nous avons deux options :

a- Représentation explicite par une approche paramétrique :

$$y(x) = \pm\sqrt{R^2 - x^2}, \quad C(s) \begin{cases} x(s) = R\cos(s) \\ y(s) = R\sin(s) \end{cases} \quad (11)$$

avec  $s$  un angle,  $s \in [0, 2\pi]$

b- Représentation implicite par la fonction de niveau :

$$\begin{cases} \Phi(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 \\ C = \{(x, y) | \Phi(x, y) = 0\} \\ \varphi(x, y) \begin{cases} < 0 & \text{à l'intérieur de } C \\ = 0 & \text{sur } C \\ > 0 & \text{à l'extérieur de } C \end{cases} \end{cases} \quad (12)$$

Dans cette représentation, le signe est arbitrairement choisi (Maistrou 2008)

### 1.2.1.3.3 Fonction des lignes de niveau dépendante du temps

#### 1.2.1.3.3.1 Description et évolution

L'idée consiste à définir une fonction  $\varphi(\vec{x}, t)$  représentant l'interface  $\Gamma$  « ligne de niveau zéro »,  $\varphi(\vec{x}, t) = 0$  pour tout  $\vec{x} \in \Gamma$  avec  $\vec{x}(t)$  exprime la trajectoire d'un point matériel au cours du temps,  $\vec{x} \in R^n$ . Pour permettre l'évolution, la fonction  $\varphi(\vec{x}, t)$  a une dimension supplémentaire représentant le temps (Glatter 2004).

Sur l'interface, pour chaque instant  $t$ , la valeur de la fonction est nulle. Pour cela, la variation de  $\varphi(\vec{x}_p, t)$  en un point  $p$  sur l'interface, par rapport au temps est nulle :

$$\frac{d\varphi(\vec{x}_p, t)}{dt} = 0 \quad (13)$$

Cette dérivée est une dérivée matérielle car la fonction dépend de l'espace et du temps. En utilisant la règle de la chaîne (théorème de dérivation des fonctions composées), nous obtenons :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \cdot \nabla \varphi = 0 \quad (14)$$

avec  $\nabla \varphi = \overrightarrow{grad(\varphi)}$  et  $\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \mathbf{v}$  la vitesse du point matériel en  $\vec{x}$ . Ainsi, nous déduisons la formule suivante :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi = 0 \quad (15)$$

Le mouvement dans la direction normale à la frontière (Figure 7) est donné par :  $\mathbf{v} = F\vec{n}$  avec  $\vec{n}$  le vecteur unitaire normal à l'interface au point  $\vec{x}$  (Persson 2005), (Stanley Osher 2001).

$$\begin{cases} \vec{n} = \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \\ \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = |\nabla \varphi| \cdot |\nabla \varphi| = |\nabla \varphi|^2 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + F \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \cdot \nabla \varphi = 0 \end{cases} \quad (16)$$

où  $F$  est la valeur de la vitesse normale de propagation. En conséquence nous pouvons écrire la formule suivante :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + F|\nabla \varphi| = 0 \quad (17)$$

Nous obtenons ainsi :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -F|\nabla \varphi| \quad (18)$$

Cette formule peut être étendue à tout le domaine de conception (Maistrout 2008) et résolue pour déterminer le mouvement de l'interface sous des conditions données (Glatter 2004).

La fonction de vitesse  $F$  dépend de trois types d'arguments (Sethian 1995) :

- propriétés locales de l'intervalle (courbure, direction normale...)
- propriétés globales (forme, position...)
- propriétés indépendantes de la forme de l'interface.

Dans le cas plan, les équations du mouvement peuvent être écrites en fonction des composantes individuelles  $\vec{x} = (x, y)$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = F \left( \frac{\frac{\partial y}{\partial s}}{\left( \frac{\partial x^2}{\partial s} + \frac{\partial y^2}{\partial s} \right)^{0.5}} \right) \\ \frac{\partial y}{\partial t} = -F \left( \frac{\frac{\partial x}{\partial s}}{\left( \frac{\partial x^2}{\partial s} + \frac{\partial y^2}{\partial s} \right)^{0.5}} \right) \end{cases} \quad (19)$$

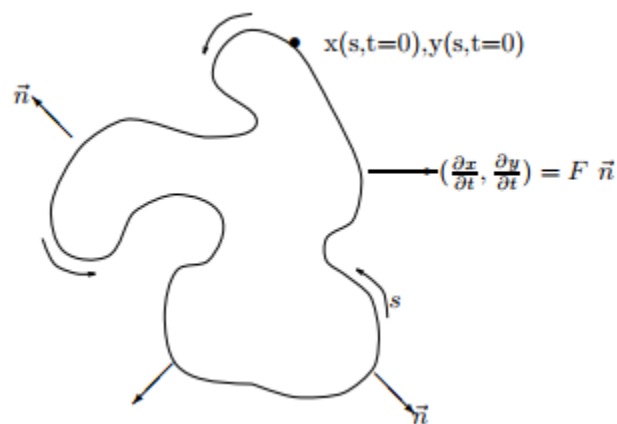


Figure 7: vue paramétrée de courbe en évolution

#### 1.2.1.3.3.2 Méthode de discrétisation

Pour permettre la mise en œuvre numérique de la méthode, la fonction des lignes de niveau est discrétisée sur les grilles cartésiennes (background cartesian grids) comme le montre la figure Figure 8. En conséquence, l'équation de Hamilton-Jacobi d'évolution (17) doit être résolue numériquement par la méthode de discrétisation selon le schéma suivant :

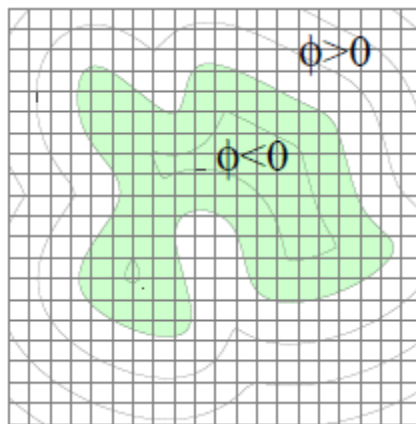


Figure 8: Discrétisation de  $\varphi$  sur la grille cartésienne.



### A- Schéma décentré Upwind

Le schéma décentré est un schéma du premier ordre. Pour une fonction  $u(x, t)$ , nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \text{ pour } a > 0 \\ \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0 \text{ pour } a < 0 \end{cases} \quad (20)$$

« a » représente la vitesse d'évolution, nous définissons :

$$a^+ = \max(a, 0) \text{ et } a^- = \min(a, 0); \quad u_x^- = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \text{ et } u_x^+ = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x}$$

Alors le schéma décentré peut être représenté par l'équation :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \Delta t [a^+ u_x^- + a^- u_x^+] \quad (21)$$

### B- Application à la fonction des lignes de niveau

Pour résoudre l'équation Hamilton-Jacobi d'évolution (17) par la méthode de discrétisation, nous appliquons la démarche suivante :

1. Définir les opérateurs de discrétisation de la fonction implicite  $\varphi$

- $D^{-x}$  est l'opérateur de différence arrière (backward) dans la direction x

$$D^{-x} = \frac{(\varphi_{i,j} - \varphi_{i-1,j})}{\Delta x}$$

- $D^{-y}$  est l'opérateur de différence arrière (backward) dans la direction y

$$D^{-y} = \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i,j-1}}{\Delta y}$$

- $D^{+x}$  est l'opérateur de différence avant (forward) dans la direction x

$$D^{+x} = \frac{(\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j})}{\Delta x}$$

- $D^{+y}$  est l'opérateur de différence avant (forward) dans la direction y :

$$D^{+y} = \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}}{\Delta y}$$

2. Comparer les opérateurs avec la valeur nulle (0) et déduire les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} \nabla_{ij}^+ = [\max(D^{-x}, 0)^2 + \min(D^{+x}, 0)^2 + \max(D^{-y}, 0)^2 + \min(D^{+y}, 0)^2]^{0.5} \\ \nabla_{ij}^- = [\max(D^{+x}, 0)^2 + \min(D^{-x}, 0)^2 + \max(D^{+y}, 0)^2 + \min(D^{-y}, 0)^2]^{0.5} \end{cases}$$

3. La vitesse d'évolution F doit être comparée à la valeur 0 comme suit :

$$\begin{cases} F^+ = \max(F, 0) = \begin{cases} F \text{ si } F > 0 \\ 0 \text{ si } F < 0 \end{cases} \\ F^- = \min(F, 0) = \begin{cases} F \text{ si } F < 0 \\ 0 \text{ si } F > 0 \end{cases} \end{cases}$$

4. Résolution de l'équation du mouvement en appliquant le schéma décentré pour la fonction implicite  $\varphi$  en 2D:

$$\frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = (F^- \nabla_{ij}^- + F^+ \nabla_{ij}^+) \quad (22)$$

#### 1.2.1.3.3 Influence de la courbure

La courbure  $\kappa$  illustrée dans la figure 9 est la divergence du vecteur normal  $\vec{n}$  (qui est le gradient de  $\varphi$ ) :

$$\kappa = \vec{\nabla} \cdot \vec{n} = \nabla \cdot \frac{\nabla \varphi}{\|\nabla \varphi\|} \quad (23)$$

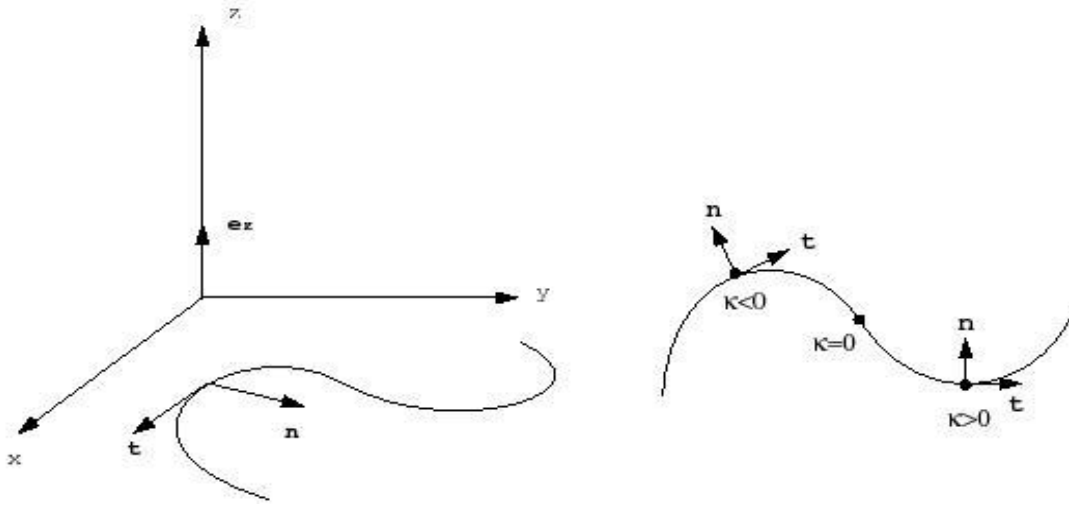


Figure 9: Illustration de la courbure

Selon (Maistrou 2008), la courbure en deux dimensions est calculée par :

$$\kappa = \nabla \cdot \frac{\nabla \varphi}{\|\nabla \varphi\|} = \frac{\varphi_{xx} \varphi_y^2 + \varphi_{yy} \varphi_x^2 - 2\varphi_x \varphi_y \varphi_{xy}}{\|\nabla \varphi\|^3} \quad (24)$$

Lorsque les deux dimensions  $(x, y)$  dépendent du paramètre  $s$ ,  $0 \leq s \leq S$ , nous avons :

$$\kappa = \frac{y_{ss} x_s - x_{ss} y_s}{(x_s^2 + y_s^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (25)$$

Etant donné que la vitesse de l'évolution est fonction de la courbure  $F = F(\kappa)$ , nous définissons la variation totale de l'interface qui détermine l'évolution des ondulations de la courbe :

$$Var(t) = \int_0^S |\kappa(s, t)| g(s, t) ds \quad (26)$$

avec  $g(s, t) = (x_s^2 + y_s^2)^{\frac{1}{2}}$  la dérivée de la longueur de l'arc par rapport à  $s$  (Sethian, 1995, Sethian.J.A., 1985).

En nous appuyant sur la définition de  $g$ , les équations (19) et les relations (Sethian.J.A. 1985) nous pouvons écrire:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} = \frac{F\kappa}{g^2} \\ \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s} - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s} = -\frac{\partial F}{\partial s} g \end{cases} \quad (27)$$

Ainsi, nous obtenons les dérivées de  $\kappa$  et de  $g$  par rapport à  $t$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial \kappa}{\partial t} = -\frac{\left(\frac{F_s}{g}\right)_s}{g} - \kappa^2 F \\ \frac{\partial g}{\partial t} = g\kappa F \end{cases} \quad (28)$$

Si  $\frac{\partial F}{\partial \kappa} < 0$  pour tout  $\kappa = 0$ , alors la variation totale diminue quand la frontière se déplace et le domaine s'étend, il s'agit de l'énergie de dissipation sur la frontière.

$$\begin{cases} \text{si } \frac{\partial F}{\partial \kappa} \leq 0 \text{ alors } \frac{dvar}{dt} \leq 0 \\ \text{si } \frac{\partial F}{\partial \kappa} \geq 0 \text{ alors } \frac{dvar}{dt} \geq 0 \end{cases} \quad (29)$$

Dans plusieurs cas, la différentiabilité est perdue après de fortes évolutions de la frontière. Par exemple, nous considérons une fonction initiale périodique (cosinus ou sinus) de l'interface, cette courbe se propage avec une vitesse constante. Avec le temps, on observe que la frontière développe un angle vif, représentant un point singulier dans le temps fini (figure 10). En ce point singulier, nous n'avons pas d'unicité du vecteur normal, ce qui empêche la poursuite de l'évolution de la frontière. Pour cela, nous avons besoin d'une solution généralisée à l'aide d'une condition sur l'entropie.

Sethian, J.A (Sethian.J.A. 1985) considère la frontière comme une flamme séparant une région brûlée à l'intérieur, d'une région non brûlée à l'extérieur. La condition d'entropie indique que si deux courbes d'inflammation se croisent en un point particulier, celle qui arrive en premier allume la particule qui s'y trouve. Nous supposons que la courbe d'allumage qui arrive en retard peut être éliminée au-delà du point d'intersection. Par analogie avec les points singuliers, des coins se forment en réponse à des collisions provenant de différents éléments de propagation, et servent à éliminer la variation et à diminuer "l'énergie" dans le système.

La figure 10 présente le cas de la propagation d'une frontière en forme de V dans la direction normale avec une vitesse d'évolution unitaire ( $F = 1$ ).

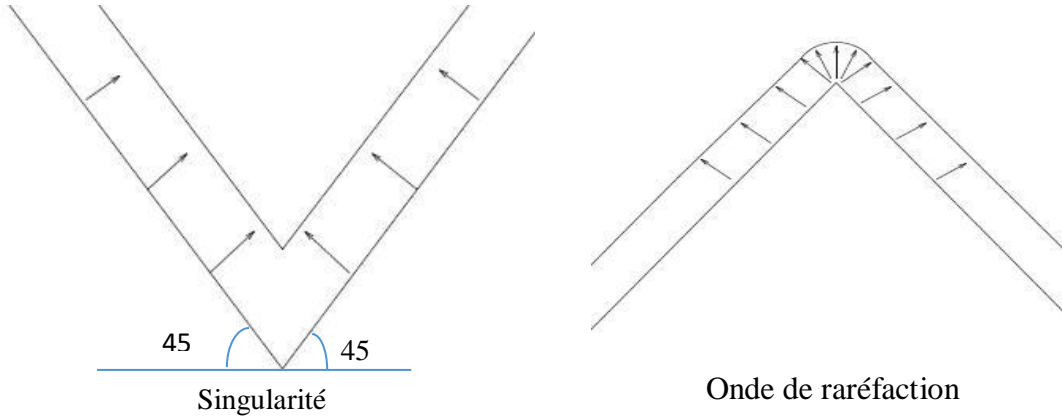


Figure 10: propagation d'une frontière en forme de V

Sur cette figure, on déduit que le point de la frontière tend vers le bas quand la frontière se déplace vers l'intérieur avec une vitesse unitaire. Une singularité est développée entre la portion gauche de pente -1 et la portion droite de pente +1. Lorsque le point de la frontière tend vers le haut, une onde de raréfaction se crée.

Une condition d'entropie est requise pour choisir la solution généralisée correcte pour que la solution ne soit pas à valeurs multiples.

#### Cas de F en fonction de $\kappa$

Considérons le cas où la vitesse de propagation F est fonction de  $\kappa$  :

$$F = 1 - \varepsilon\kappa \quad (30)$$

avec  $\varepsilon$  une constante. Posons  $\alpha$  la longueur d'arc à l'interface, alors  $d\alpha = g(s, t)ds$ , il vient :

$$\frac{\partial\kappa}{\partial t} = -\left(\frac{F_s}{g}\right)_s - \kappa^2 F = \varepsilon\kappa_{\alpha\alpha} + \varepsilon\kappa^3 - \kappa^2 \quad (31)$$

Cas d'une vitesse unitaire  $\varepsilon = 0$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial\kappa}{\partial t} = -\kappa^2 \\ \kappa(s, t) = \frac{\kappa(s, 0)}{1 + t\kappa(s, 0)} \end{cases} \quad (32)$$

Lorsque la courbure est négative pour tous les points, les solutions des équations (19) en partant de la courbe initiale  $(x(s, 0), y(s, 0))$  sont :

$$\begin{cases} x(s, t) = \frac{y(s, 0)}{(x(s, 0)^2 + y(s, 0)^2)^{0.5}} t + x(s, 0) \\ y(s, t) = -\frac{x(s, 0)}{(x(s, 0)^2 + y(s, 0)^2)^{0.5}} t + y(s, 0) \end{cases} \quad (33)$$

#### 1.2.1.3.3.4 Réinitialisation

Pendant l'évolution, la fonction  $\varphi$  peut devenir trop raide ou trop plate, même si elle commence à partir d'une initialisation régulière. Un moyen de garantir sa régularité consiste à réinitialiser périodiquement, en utilisant la fonction de distance signée dans le domaine  $\Omega$  à l'intérieur de l'interface  $d(\vec{x}, t)$ . Nous pouvons réinitialiser  $\varphi$  en définissant  $\varphi'$  avec le même ensemble de niveau zéro mais avec  $|\nabla\varphi'| = 1$  (Persson 2005).

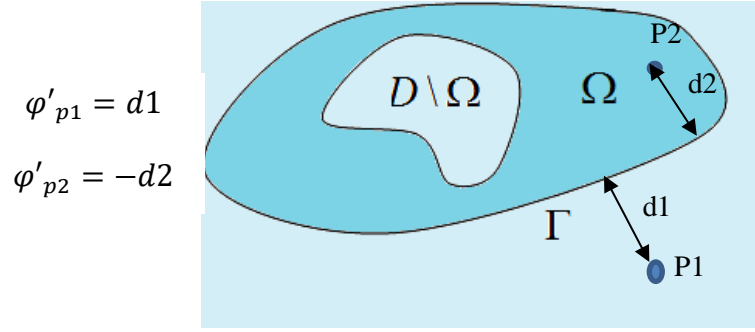


Figure 11: illustration de la distance signée

La plus petite distance entre  $\vec{x}$  et l'interface  $d(\vec{x}, t)$  illustrée sur la figure 11 est obtenue par la résolution en régime permanent ( $\tau \rightarrow \infty$ ) de l'équation (Sethian 1995) (Stanley Osher 2001):

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \text{sgn}(\varphi)(|\nabla \psi| - 1) = 0 \\ \psi(\vec{x}, 0) = \varphi(\vec{x}, t) \end{cases} \quad (34)$$

avec  $\text{sgn}(\varphi)$  la fonction de signe de  $\varphi$ . La fonction des lignes de niveau est définie comme la distance  $d(\vec{x})$  dans la métrique euclidienne (Maistrou 2008) :

$$\varphi(\vec{x}, t) = \begin{cases} -d(\vec{x}, t) & \text{si } \vec{x} \text{ est à l'intérieur de l'interface} \\ 0 & \text{si } \vec{x} \text{ est sur l'interface} \\ d(\vec{x}, t) & \text{si } \vec{x} \text{ est extérieur de l'interface} \end{cases} \quad (35)$$

#### 1.2.1.3.3.5 Approximations Numériques

L'implémentation de la méthode des lignes de niveau présente deux problèmes d'approximation numérique :

A- Courbe en forme de « V »

Pour étudier le schéma de résolution du problème de singularité, nous considérons l'équation de propagation suivante :

$$\psi_t = F(1 + \psi_x^2)^{1/2} \quad (36)$$

La courbe initiale est représentée par la fonction :

$$\psi(x, 0) = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - x & \text{pour } x \leq \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2} & \text{pour } x > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (37)$$

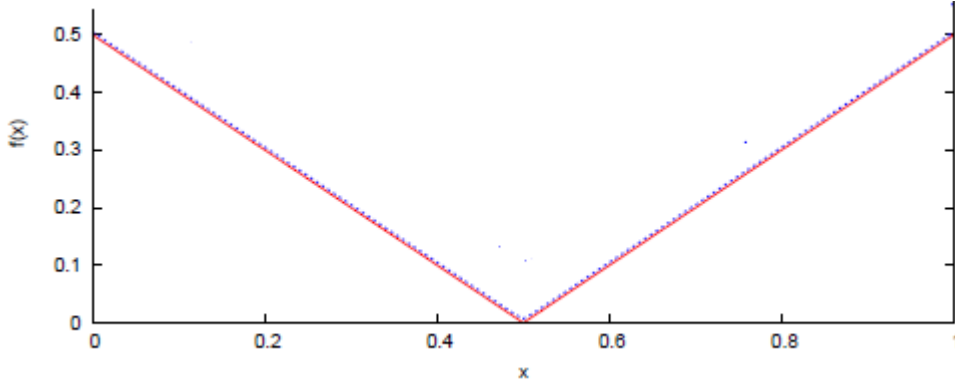


Figure 12: Courbe initiale en 'V' formée par les segments qui se rencontrent en M (1/2, 0). Pour construire un schéma numérique, on divise l'intervalle [0, 1] en  $2j - 1$  points.

La manière la plus directe pour approximer la solution de cette équation est de remplacer toutes les dérivées spatiales par des différences centrales et la dérivée temporelle par une différence avant.

La différence centrale de la dérivée spatiale  $\psi_x$  au temps  $n$  pour une grille  $i$  est de la forme :

$$\psi_x = \frac{\psi_{i+1}^n - \psi_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (38)$$

La différence avant  $\psi_t$  au temps  $n$  pour une grille  $i$  s'écrit par :

$$\psi_t = \frac{\psi_i^{n+1} - \psi_i^n}{\Delta t} \quad (39)$$

Ainsi, l'équation d'évolution discrétisée devient :

$$\frac{\psi_i^{n+1} - \psi_i^n}{\Delta t} = \left( 1 + \left( \frac{\psi_{i+1}^n - \psi_{i-1}^n}{2\Delta x} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (40)$$

Nous observons que pour tout  $x \neq 1/2$ , nous avons  $\psi_t = \sqrt{2}$ . De même, la valeur de  $\psi_x$  qui est associée à  $x = 1/2$  est la moyenne des pentes des deux segments de gauche et de droite.

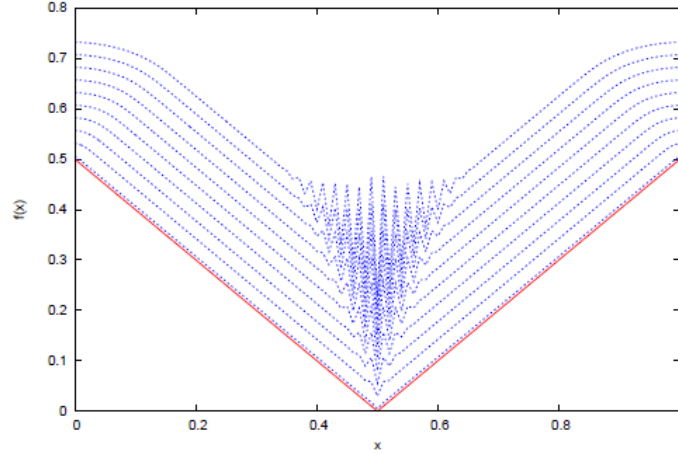


Figure 13: Différence centrale avec  $\Delta t=0.005$

Par conséquent, le problème de singularité ne possède pas de solutions. Pour cela, il est nécessaire d'utiliser la méthode des lignes de niveau.

#### B- Evolution de la fonction des lignes de niveau

Pour résoudre l'équation d'évolution (17) de la fonction de lignes de niveau dépendant du temps illustrée sur la figure Figure 14, nous discrétisons les valeurs de la fonction des lignes de niveau  $\varphi$  aux points de la grille (Sethian 1995). Chaque point de la grille contient ainsi la valeur locale de la fonction des lignes de niveau. De cette façon, nous obtenons toute une famille de contours, dont un seul correspond au niveau zéro.

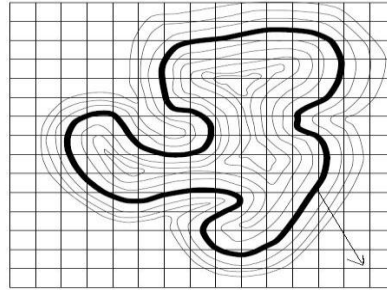


Figure 14: Lignes de niveau

Au final, la solution de l'équation (17) s'écrit :

$$\varphi_{i,j,k}^{n+1} = \varphi_{i,j,k}^n - \Delta t (\max(F_{ijk}, 0) \nabla^+ + \min(F_{ijk}, 0) \nabla^-) \quad (41)$$

avec

$$\nabla^+ = [\max(D_{i,j,k}^{-x}, 0)^2 + \min(D_{i,j,k}^{+x}, 0)^2 + \max(D_{i,j,k}^{-y}, 0)^2 + \min(D_{i,j,k}^{+y}, 0)^2 + \min(D_{i,j,k}^{+z}, 0)^2 + \max(D_{i,j,k}^{-z}, 0)^2]^{0.5}$$

et

$$\nabla^- = [\max(D_{i,j,k}^{+x}, 0)^2 + \min(D_{i,j,k}^{-x}, 0)^2 + \max(D_{i,j,k}^{+y}, 0)^2 + \min(D_{i,j,k}^{-y}, 0)^2 + \min(D_{i,j,k}^{-z}, 0)^2 + \max(D_{i,j,k}^{+z}, 0)^2]^{0.5}$$

Dans les développements ci-dessus, nous avons présenté les trois méthodes principales de l'optimisation topologique des structures continues. La méthode des lignes de niveau s'avère la plus directe et plus efficace comme elle représente la géométrie par une fonction implicite. Dans la section suivante, nous présentons le cas des structures discrètes.

## 1.2.2 Optimisation topologique des treillis

Le problème d'optimisation topologique des treillis a pour but de trouver les connectivités optimales des nœuds à partir d'un ensemble de nœuds et d'éléments existants, sous des contraintes et des conditions de chargement spécifiées. Nous présentons ci-dessous trois méthodes d'optimisation topologiques des treillis :

### 1.2.2.1 Méthode de la structure de base

La méthode de la structure de base (W. S. Dorn 1964) abrégée en GSM, est largement utilisée dans l'optimisation topologique des treillis. Cette méthode commence par des rangées de nœuds qui sont interconnectés avec un maillage dense d'éléments rectilignes connu sous le nom de structure de base. Ce maillage fournit l'approximation d'une structure, qui serait composée d'un nombre infini d'éléments. Pour le cas d'une seule charge, avec un comportement élastique linéaire, le treillis optimal avec le moins de matière peut être obtenu par la résolution d'un problème de programmation linéaire (Ohsaki 2011); la méthode élimine les éléments inutiles du treillis fortement interconnecté de la structure de base tout en gardant les emplacements nodaux fixes.

La figure Figure 15 illustre quatre types de structures de base dont les connexions varient du plus simple (A) au plus compliqué (D), formées de toutes les connexions possibles.

Hegemier et Prager (Hegemier G 1969) ont montré qu'un treillis avec une raideur maximale est aussi pleinement sollicité. De plus, le cas d'une seule charge prenant en compte des limites de contrainte égales en compression et en traction est équivalent à la minimisation de la compliance pour un volume prédéfini (Martin Philip Bendsoe 2004).

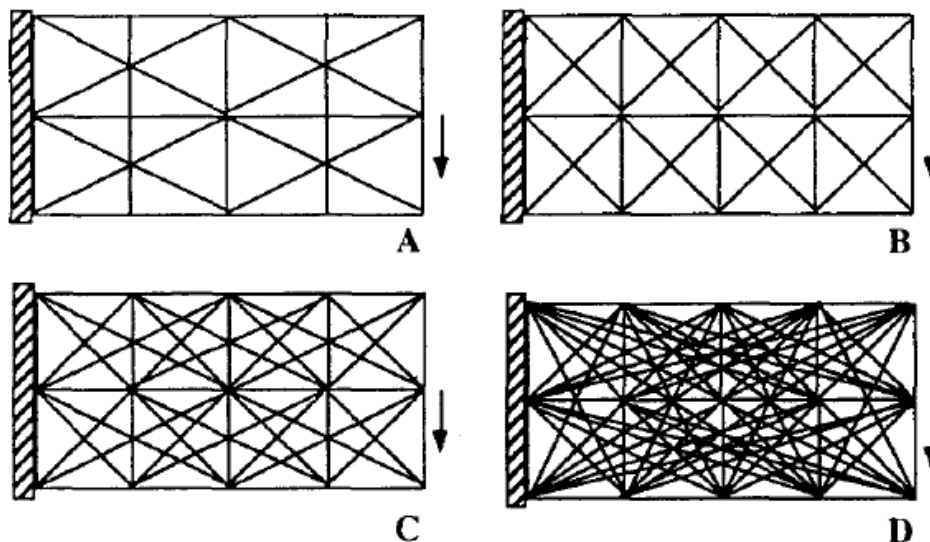


Figure 15: divers types de structures de base, source (M. P. Bendsoe 1994)



L'algorithme de la méthode est comme suivant :

- 1) Définition du domaine - Maillage de base : définir les données géométriques (nœuds et éléments), les conditions aux limites et les propriétés mécaniques.
- 2) Génération de la structure de base par interconnexion des nœuds
- 3) Analyse mécanique et détermination de la compliance
- 4) Vérification des contraintes de compliance, de volume, de longueur, de stabilité...
- 5) Suppression des éléments de volume zéro et dimensionnement des autres éléments selon les conditions d'optimisation.
- 6) Répétition des étapes 2,3 et 4 jusqu'à la réalisation des conditions d'arrêt.

#### *1.2.2.2 Algorithme Génétique (A G)*

L'algorithme génétique est une méthode heuristique qui imite le processus de sélection naturelle et d'évolution et fait partie d'un groupe plus large de méthodes heuristiques appelées 'algorithmes évolutionnistes (EA)' (Dowland. 1995). La relation entre l'algorithme génétique et le processus de sélection naturelle peut être expliquée comme suit : dans la nature, les individus sont en compétition pour la nourriture ; seuls les individus les plus aptes survivent et transmettent leurs gènes aux générations suivantes. Mélanger de nombreux gènes différents peut produire une génération avec une bonne aptitude. De même, dans l'algorithme génétique, un groupe entier d'individus (ou solutions candidates) est appelé une « génération ». L'aptitude de chaque individu dans la génération est évaluée et la combinaison avec les individus de grande aptitude permet de produire les générations suivantes. Le processus de reproduction se poursuit jusqu'à ce que le critère de terminaison soit satisfait ; ce critère correspond généralement à un nombre maximal de générations (Beasley.D 1993).

Les algorithmes génétiques ont trois opérateurs caractéristiques (Holland 1975): la sélection, le croisement et la mutation. Dans chaque itération, ou génération, ces opérateurs sont appliqués sur une population de solutions possibles, afin d'améliorer leur aptitude. Chaque individu est représenté par une chaîne, qui rappelle beaucoup les chromosomes naturels, d'où le nom d'algorithmes génétiques (Deb 1997).

La méthode des AG présente de nombreux avantages, qui sont principalement sa simplicité et sa large applicabilité. Elle peut facilement être modifiée pour couvrir un large éventail de problèmes (S.N. Sivanandam 2008), contrairement aux méthodes de recherche traditionnelles qui sont spécifiées pour un certain type de problèmes (Deb 1997). La technique est relativement robuste puisqu'elle n'a pas tendance à rester bloquée dans les optimums locaux comme c'est le cas des autres techniques (Deb, 1997, S.N. Sivanandam, 2008). En outre, grâce à l'évaluation de fonctions plutôt que de dérivées, les AG peuvent gérer des variables discrètes et travailler dans des espaces de recherche très complexes (S.N. Sivanandam 2008). Néanmoins, ils peuvent nécessiter de nombreuses évaluations des fonctions, et souffrent parfois de convergence prématurée (les individus se ressemblent beaucoup trop au début du processus). Enfin, comme nous le verrons, il existe de nombreuses options et alternatives dans les algorithmes génétiques, et il peut être difficile de trouver les bons paramètres pour atteindre une efficacité élevée.

Les AG sont différents des optimisations traditionnelles dans les aspects suivants :

- les AG traversent l'espace de solution en partant d'un groupe de points et non pas d'un seul point ;
- les AG recherchent une population de points et pas un seul point ;
- les AG utilisent l'information de la fonction objectif, pas de ses dérivées ni d'autres connaissances auxiliaires ;
- les AG utilisent des règles de transitions probabilistes, et non de règles déterministes ;
- il est très probable que la solution AG attendue soit une solution globale.

Pour ces raisons, les algorithmes génétiques constituent la meilleure technique de recherche de population.

#### 1.2.2.2.1 Etapes de l'algorithme génétique pour l'optimisation

Les étapes de l'AG sont comme suivant :

1- Initialisation :

- a) Choisir un codage pour représenter les paramètres du problème, un opérateur de sélection, un opérateur de croisement et un opérateur de mutation.
- b) Choisir la taille de la population  $n$ , la probabilité de croisement  $P_{cross}$  et la probabilité de mutation  $p_{mutation}$ .
- c) Initialiser une population aléatoire de taille  $l$  individus.
- d) Choisir un nombre de générations maximum permis  $N_{G_{Maxi}}$
- e) Poser  $N_G = 0$ .

2- Évaluer chaque individu dans la population

3- Si  $N_G = N_{G_{Maxi}}$  ou d'autres critères de terminaison sont satisfaits, arrêter l'algorithme

4- Effectuer la reproduction sur la population

5- Effectuer un croisement sur une paire de chaînes avec la probabilité  $P_{cross}$

6- Effectuer une mutation sur les chaînes avec la probabilité  $p_{mutation}$

7- Evaluer les chaînes dans la nouvelle population et sélectionnez les individus avec la meilleure adéquation.

8- Mettre  $N_G = N_G + 1$  et passer à l'étape 3

#### 1.2.2.2.2 Reproduction

Tout comme le chromosome, la chaîne a différents segments, ou gènes, qui correspondent aux différentes caractéristiques de la solution. En termes biologiques, l'information totale stockée dans une chaîne est appelée le génotype d'un individu, i.e. l'information génétique. L'apparence extérieure d'un individu est appelée le phénotype, et entre les deux existe une transformation : une cartographie du génotype-phénotype. Dans l'AG traditionnel, la chaîne se compose d'une chaîne binaire de longueur fixe. Le nombre de gènes dépend du nombre de variables à représenter.

Plus de gènes signifie plus de combinaisons possibles, et par conséquent plus d'informations peuvent être stockées.

Le phénotype de l'individu est obtenu par la cartographie génotype-phénotype. La chaîne est divisée en gènes, qui sont lus et traduits individuellement. La cartographie est effectuée selon un « enregistrement des paramètres de phénotype » (S.N. Sivanandam 2008).

#### 1.2.2.2.3 Evaluation de l'aptitude

L'aptitude d'un individu est déterminée par la fonction objectif du phénotypage (S.N. Sivanandam 2008). Dans les problèmes de minimisation, une faible valeur d'aptitude est préférée, et vice-versa. Les chaînes peuvent parfois représenter des solutions inadmissibles, même si leur l'aptitude est très bonne. Cela crée évidemment un problème pour le AG, mais il est pris en compte en complétant la fonction objectif par une fonction de contraintes. Il existe des méthodes assez sophistiquées pour gérer les contraintes dans l'AG, mais la méthode la plus courante consiste à utiliser la fonction de pénalité (Deb 1997). Si une contrainte est violée, une pénalité numérique est attribuée à la valeur d'aptitude, ce qui la rend moins attractive.

#### 1.2.2.2.4 Sélection

Pour la reproduction, les individus ayant une bonne aptitude sont choisis pour former un groupe d'accouplement. Il existe de nombreuses façons de choisir des individus pour le groupe d'accouplement, mais l'idée principale est que plus l'aptitude est bonne, plus la probabilité est élevée (Deb 1997).

Le groupe d'accouplement a la même taille que la population, mais les bons individus sont plus fréquents en raison de la duplication. Une méthode de sélection populaire est la sélection des tournois (S.N. Sivanandam 2008). Dans cette méthode, de petits "tournois" sont effectués entre des individus sélectionnés au hasard, ce qui signifie simplement que l'individu ayant la meilleure aptitude est sélectionné. Avec une taille de population  $N$ ,  $N$  tournois sont tenus pour remplir le groupe d'accouplement. De cette façon, aucune copie de la pire personne n'est sélectionnée (S.N. Sivanandam 2008).

#### 1.2.2.2.5 Croisement

Dans l'espoir de trouver de meilleures solutions, les chaînes dans le groupe d'accouplement sont croisées avec l'intention de créer une meilleure population. Tout comme dans la sélection, il existe différents opérateurs de croisement, mais l'idée principale est que deux individus aléatoires du groupe d'accouplement sont choisis comme parents, et une partie de leurs chaînes est commutée pour créer deux enfants (Deb 1997). Trois méthodes de croisement habituelles sont données ci-dessous :

- 1- croisement à un seul point : les deux chaînes parentes sont coupées à un endroit aléatoire, et les morceaux sont assemblés pour faire deux enfants ;
- 2- croisement à deux points : les chaînes parentes sont coupées à deux endroits aléatoires pour créer les enfants.
- 3- croisement uniforme : chaque gène dans les chaînes enfants est copié à partir de l'un des parents avec une probabilité de 50%.

#### 1.2.2.2.6 Mutation

Dans la création des enfants, il y a toujours une petite probabilité que chaque gène de la chaîne change de 0 à 1 ou vice versa. Le but de cette fonctionnalité est de maintenir la diversité parmi les individus (Deb 1997), à l'aide de la mutation pour empêcher l'algorithme de rester bloqué dans un minimum local. La probabilité de mutation ne devrait pas être trop élevée puisque dans ce cas, l'AG se transforme en algorithme de recherche aléatoire (S.N. Sivanandam 2008).

### 1.2.2.2.7 Élitisme

L'élitisme signifie que les meilleures ou quelques-uns des meilleurs individus sont copiés directement dans la nouvelle génération. Cela garantit qu'une bonne solution ne soit pas détruite ou mutée de façon défavorable dans la phase de croisement, ce qui améliore considérablement les performances de l'AG (S.N. Sivanandam 2008).

### 1.2.2.2.8 Taille de la population

La taille de la population doit être choisie en fonction de la complexité du problème. Dans des problèmes très complexes, le groupe de gènes doit être suffisamment étendu pour que tout l'espace de recherche puisse être exploré. Toutefois, avec une population plus importante, le temps de calcul augmente de sorte que la limite supérieure de la taille de population doit être déterminée par la puissance de calcul et le temps disponibles. La littérature contient des propositions sur la façon de choisir la taille de la population, en ce qui concerne la longueur de la chaîne ou la non-linéarité du problème. Dans le cas binaire, la taille de population doit être supérieure ou égale à la longueur de la chaîne (Deb 1997).

S. Ruiyi et al. (Su Ruiyi 2009) ont appliqué l'algorithme génétique pour l'optimisation topologique des structures à barres. Ils ont étudié le problème de treillis de 10 barres dont le résultat de l'optimisation topologique est illustré sur la figure 16 :

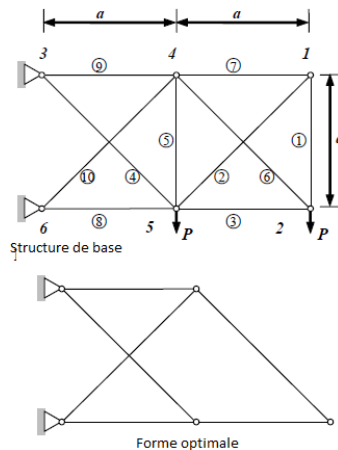


Figure 16: optimisation de structure à 10 barres par l'AG

Ils ont aussi étudié le problème de structure à 15 barres, la forme optimale est présentée sur la figure 17 :

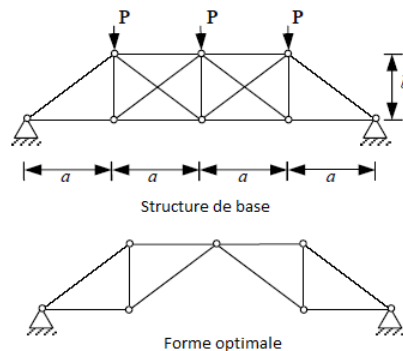


Figure 17: optimisation de structure à 15 barres par l'AG

### 1.2.2.3 Méthode de recherche de l'harmonie

Geem (Geem.Z. 2001) a développé une autre technique heuristique appelée « méthode de recherche de l'harmonie » qui imite l'improvisation de l'harmonie musicale en combinant différentes notes de musique. La recherche d'harmonie et certaines de ses variantes sont utilisées pour obtenir des solutions optimales de topologie de treillis.

Depuis son apparition en 2001 et grâce à sa simplicité, la recherche de l'harmonie a été implémentée pour résoudre différents problèmes d'optimisation. Lorsque la méthode de recherche de l'harmonie a été appliquée à la conception d'un réseau de pipelines, Geem a montré que les résultats obtenus avec cette méthode surpassaient de nombreuses autres méthodes mathématiques et heuristiques existantes. En 2004, Lee et Geem (Lee. K. S. 2004) l'ont appliquée à la conception de divers treillis avec des variables continues et discrètes montrant sa puissance par rapport aux algorithmes génétiques (Lee.K.S. 2005). Degertekin (Degertekin.S.O. 2008) a appliqué cette méthode à l'optimisation de cadres en acier et obtenu des structures plus légères que celles optimisées en utilisant l'algorithme génétique et l'algorithme de colonie de fourmis.

La performance de l'algorithme de recherche de l'harmonie réside dans la façon dont les nouveaux modèles sont improvisés afin d'améliorer l'harmonie globale du système. Dans la recherche d'harmonie classique, on adopte les paramètres suivants :

- Mémoire d'harmonie : ensemble de modèles (collection spécifique des variables de conception) qui sont conservés en mémoire et qui seront utilisés pour générer ou improviser de nouveaux modèles à considérer.
- Taille de la mémoire d'harmonie qui spécifie le nombre de modèles (réellement conservés en mémoire).
- Rapport de considération de la mémoire d'harmonie défini sur l'intervalle [0,1], qui spécifie les pondérations données aux modèles existants lors de l'improvisation de nouveaux modèles.
- Rapport d'ajustement du pas défini sur l'intervalle [0,1], qui pondère la mesure dans laquelle les modèles pris de la mémoire sont ajustés ou non dans le processus d'improvisation.
- Le paramètre de bande passante est un paramètre supplémentaire qui leur dicte dans quelle mesure les variables de conception peuvent varier lorsque leur pas est ajusté.

La recherche de l'harmonie comprend les cinq étapes suivantes :

1. Formuler le problème d'optimisation et spécifier les valeurs des paramètres de recherche d'harmonie.
2. Initialiser la Mémoire d'harmonie.
3. Improviser une nouvelle harmonie (fonction objectif : synthèse de toutes les variables de conception) et évaluer sa performance.
4. Mettre à jour l'HM si nécessaire i.e. vérifier si l'harmonie improvisée est supérieure à une ou plusieurs harmonies en mémoire.
5. Vérifiez les critères de terminaison ; s'il n'est pas satisfait, retourner à l'étape 3.

L'harmonie représente une synthèse de valeurs des variables de conception utilisées pour déterminer la valeur de la fonction objectif,  $X^i = \{x_1^i, x_2^i \dots x_n^i\}$  pour l'itération  $i$

H.Al Rabadi (**Rabadi.H. 2014**) a utilisé la méthode de recherche de l'harmonie pour l'optimisation topologique des structures à barres, il a appliqué la méthode à une structure de base de 11 éléments et à une autre de 42 éléments et il a trouvé la forme optimale de chacune des deux comme le montrent les figures 18 et 19.

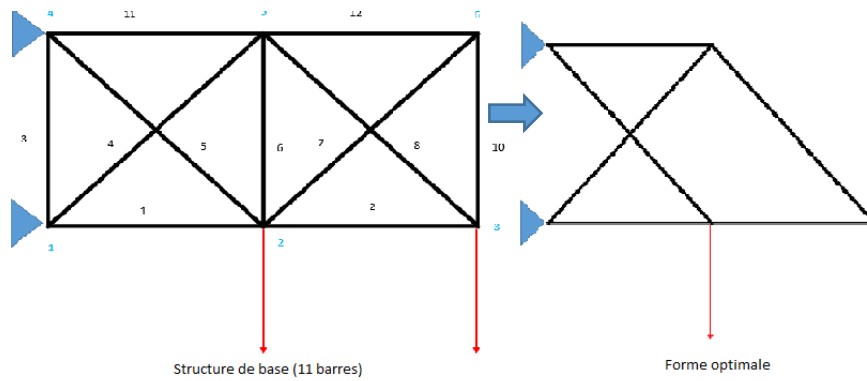


Figure 18: optimisation topologique d'une structure à 11 éléments par la méthode de recherche de l'harmonie.

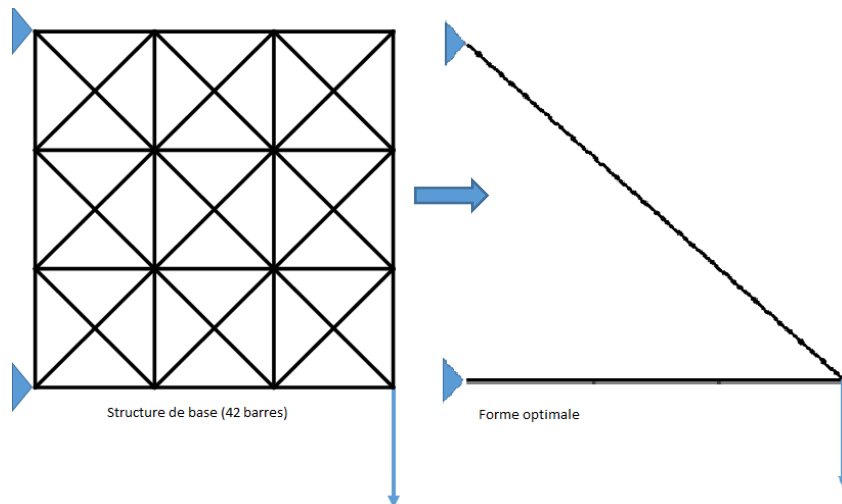


Figure 19: optimisation topologique d'une structure à 42 éléments par la méthode de recherche de l'harmonie.

### 1.3 Optimisation fiabiliste des structures

Depuis le début du XX<sup>ème</sup> siècle, la nécessité d'une approche rationnelle de la sécurité structurale a motivé un certain nombre de chercheurs, tels que Forsell (1924), Wierzbicki(1936), et Lévi (1948). Alors que la formulation de l'optimisation fiabiliste de la conception RBDO est connue depuis 1948 (voire plus tôt), son application directe n'était pas possible en raison des difficultés liées au calcul de la probabilité de défaillance pour les structures réelles. Avec le développement de la théorie de la fiabilité à partir des années 1950, les procédures de résolution sont devenues disponibles dans les années 1970 et améliorées dans les années 1980, afin de permettre l'analyse des structures réelles.

Cependant, jusqu'à présent, la difficulté d'estimer le coût de défaillance demeure un problème majeur, en particulier lorsqu'il s'agit de vies humaines et de détérioration de l'environnement. Sur la base de l'indice de fiabilité cible, la RBDO est réellement née dans la seconde moitié des années 1980 et s'est développée au cours des années 1990. De nos jours, les applications industrielles de la RBDO rencontrent encore beaucoup de difficultés en raison de l'effort de calcul très élevé requis pour résoudre les systèmes à grande échelle.

La plupart des applications pratiques de l'optimisation structurale implique au moins trois objectifs contradictoires (Kuschel. N. 1997):

- coût structural faible, y compris ou non le coût de défaillance ;
- niveaux de fiabilité élevés pour les composants et les systèmes ;
- bonne performance structurale dans différentes conditions de fonctionnement.

La RBDO a connu un développement rapide au cours des dernières décennies, et un certain nombre d'études qui documentent, améliorent et comparent les algorithmes sont disponibles. Un grand nombre de méthodes et d'approches ont été publiées au cours des deux dernières décennies, ce qui traduit le niveau d'intérêt pour ce domaine. Les travaux d'Aoues et Chateaufort (Y.Aoues 2010) et de Valdebenito et Schuëller (M.Valdebenito 2010) fournissent une étude approfondie des méthodes RBDO existantes, ainsi qu'une comparaison objective d'une sélection d'algorithmes. Les applications pratiques des méthodes RBDO ont également été bien documentées, et certaines méthodes ont même été implémentées dans les codes commerciaux d'analyse par éléments finis, tels que Altair HyperStudy (Altair 2012).

#### 1.3.1 Bases de la fiabilité mécanique

La conception basée sur la fiabilité est une approche probabiliste développée dans les années 1950, qui est basée sur l'expérience pour déterminer les facteurs de sécurité. Un résumé complet du concept de conception basée sur la fiabilité peut être trouvé dans le travail de Freudenthal, Garelt et Shinozuka 1966 (Freudenthal. A. 1966). Dans la conception basée sur la fiabilité, seules deux variables sont considérées (la charge sur la structure ou sollicitation, S, et la résistance ou capacité R). Ces deux variables sont supposées aléatoires, avec des moyennes, des variances et des fonctions de densité de probabilité.

La défaillance est définie comme la condition dans laquelle la résistance de la structure est inférieure à la charge appliquée ; c'est-à-dire lorsque le rapport entre  $R$  et  $S$  est inférieur à l'unité :

$$\frac{R}{S} < 1 \quad (42)$$

Ainsi, la probabilité de défaillance  $P_f$ , peut être estimée comme suit :

$$P_f = \Pr\left(\frac{R}{S} < 1\right) \quad (43)$$

### 1.3.1.1 Fonction d'état limite

Les états limites sont représentés par des modèles mathématiques qui sont des fonctions des différentes variables de sollicitation  $S$ , de résistance  $R$  et de géométrie  $g$ . La forme générale d'un état limite est la suivante :

$$G(S, R, g) \geq 0 \quad (44)$$

Pour un état limite, par convention  $G < 0$  signifie une violation de l'état limite, c'est-à-dire une défaillance structurale. Cette définition de base peut être étendue de plusieurs façons : la charge et la résistance peuvent être décomposées en facteurs supplémentaires qui traduisent les différentes sources d'incertitude.

Dans l'exemple d'une barre chargée en traction, la contrainte induite par la force de traction est la variable de sollicitation, tandis que la limite d'élasticité admissible est la variable de résistance. La condition de rupture en traction (contrainte de traction dépassant la limite d'élasticité) est l'état limite. L'état de sûreté peut être exprimé mathématiquement par la relation :

$$G = R - S \geq 0 \quad (45)$$

La probabilité de défaillance est calculée par :

$$P_f = \Pr(R - S \leq 0) \quad (46)$$

et la fiabilité est ainsi :

$$1 - P_f \quad (1)$$

### 1.3.1.2 Indice de fiabilité

Hasofer et Lind ([A.M. Hasofer 1974](#)) ont introduit une méthode qui s'appuie sur l'indice de fiabilité de Cornell permettant de garantir l'invariance par la transformation des variables aléatoires. Ils ont utilisé la transformation iso-probabiliste entre l'espace physique des variables aléatoires  $X_i$  et un nouvel espace  $U_i$  de variables normalisées et non corrélées. Formellement, cela signifie que les espérances des nouvelles variables sont nulles et qu'ils ont des écarts types unitaires :



$$E[U_i] = 0, \sigma_{U_i} = 1 \quad (48)$$

Dans l'espace gaussien standard (normé réduit) de variables  $U_i$ , l'indice de fiabilité  $\beta$  illustré sur la figure 20 est défini comme la distance entre l'origine  $O$  et le point  $P^*$  le plus proche de l'origine sur la surface d'état limite, appelé « point de défaillance le plus probable » :

$$\beta_{HL} = \min_{G(X) \leq 0} \sqrt{U^T U} \quad (49)$$

Le signe de cet indice est positif si l'origine du repère appartient au domaine de la sûreté, sinon il est négatif.

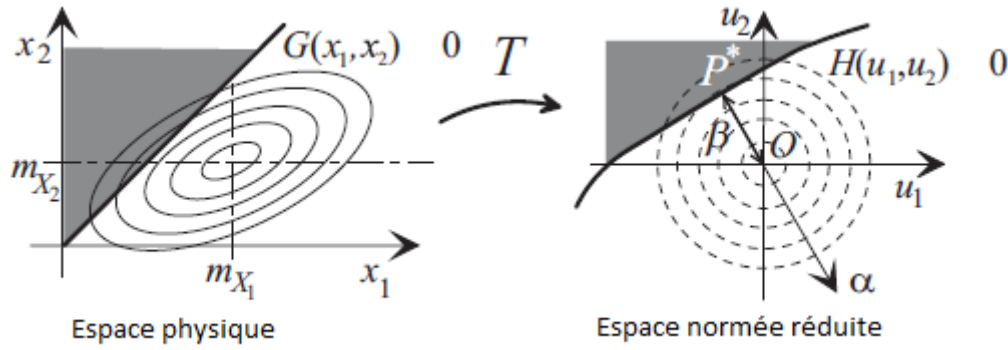


Figure 20: Illustration de  $\beta$  après la transformation iso-probabiliste  $T$  (M. Lemaire 2009).

### 1.3.1.3 Transformation iso-probabiliste

Pour le calcul de l'indice de fiabilité de Hasofer-Lind, les variables dans l'espace physique doivent être transformées en variables normales centrées réduites par une transformation notée  $T$  comme le montre la figure 20.

Pour les variables gaussiennes indépendantes de moyenne  $\bar{x}_i$  et d'écart-type  $\sigma_{x_i}$  :

$$u_i = \frac{(x_i - \bar{x}_i)}{\sigma_{x_i}} \quad (50)$$

Pour les variables indépendantes de distribution quelconque, la transformation iso-probabiliste est la suivante :

$$\phi(U) = F_X(X) \Rightarrow U = \phi^{-1}(F_X(X)) \quad (51)$$

où  $\phi(U)$  est la fonction de répartition normale standard et  $F_X(X)$  est la fonction de répartition de la variable physique.

Pour les variables indépendantes log-normales, si  $x_i$  est une variable aléatoire log-normale avec une moyenne  $\bar{x}_i$  et écart-type  $\sigma_{x_i}$  donc  $\ln(x_i)$  suit une distribution gaussienne avec une

moyenne  $\lambda_{x_i} = \ln \frac{\bar{x}_i}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_{x_i}}{\bar{x}_i}\right)^2}}$  et un écart-type  $\xi_{x_i} = \sqrt{\ln\left(1 + \left(\frac{\sigma_{x_i}}{\bar{x}_i}\right)^2\right)}$

La transformation iso-probabiliste est donc :

$$u_i = \frac{(\ln x_i - \lambda_{x_i})}{\xi_{x_i}} \quad (52)$$

Dans le cas où les variables ne sont pas indépendantes, les transformations les plus utilisées sont celles de Nataf (Nataf, 1962, R. Lebrun, 2009) et de Rosenblatt (Rosenblatt 1952).

#### 1.3.1.4 Point de défaillance le plus probable $P^*$

La figure 21 montre le point de conception  $P^*$  qui est le point dans le domaine de défaillance le plus proche de l'origine dans l'espace standard. Ce point est obtenu par la résolution du problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \min \sqrt{(U^T U)} \\ \text{sous:} \\ H(U) = 0 \end{cases} \quad (53)$$

avec  $H(U)$  la fonction d'état limite dans l'espace des variables normales standards.

Pour résoudre ce problème, un algorithme itératif a été initialement proposé par Rackwitz et Fiessler (Rackwitz.R 1978). Il a été ensuite étendu au cas des variables dépendantes par Ditlevsen (Ditlevsen.O 1981).

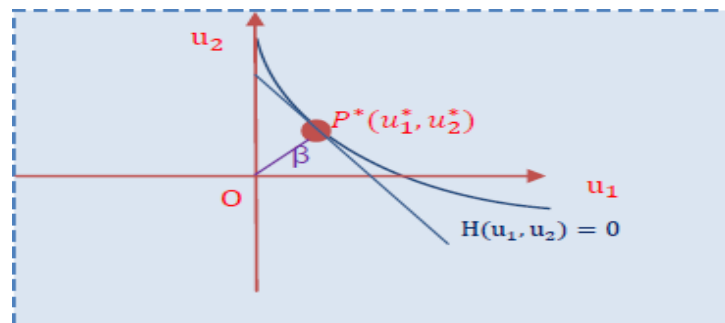


Figure 21: Point de conception.

#### 1.3.1.5 Méthode de Monte-Carlo

La méthode des simulations de Monte-Carlo illustrée dans la figure 22 est une approche simple et générale pour le calcul de la probabilité de défaillance. Dans cette méthode, un indicateur de défaillance est introduit, et défini comme suit :

$$I_D = \begin{cases} 1 & \text{si } G(X) \leq 0 \\ 0 & \text{si } G(X) > 0 \end{cases} \quad (54)$$

La probabilité de défaillance est calculée par l'espérance de cet indicateur de défaillance.

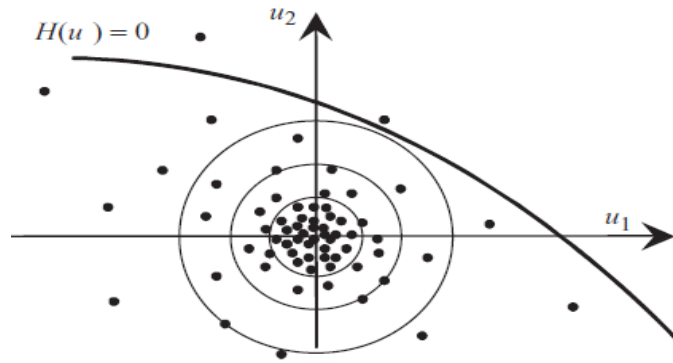


Figure 22: Simulations de Monte-Carlo (M. Lemaire 2009).

Pour N simulations, la probabilité de défaillance est estimée par :

$$P_f = E[I_D] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N+1} I_{D_i} \quad (55)$$

En termes de précision, pour évaluer une probabilité d'ordre  $10^{-n}$ , il est nécessaire d'effectuer entre  $10^{n+2}$  et  $10^{n+3}$  simulations.

#### 1.3.1.6 Fiabilité système

Un système est un ensemble de composants ou d'évènements de défaillance dont chacun a son état limite qui sépare le domaine de sûreté de celui de défaillance. Chaque composant contribue à la fiabilité (ou à la défaillance), et la combinaison des succès (ou des défaillances) mène au succès (ou à la défaillance) du système résultant.

Un événement de défaillance d'un composant i est noté par  $G_i \leq 0$  et sa probabilité est :

$$P[G_i \leq 0] \quad (56)$$

Il existe deux configurations de base :

Système en série : la probabilité de défaillance du système est celle de l'union des évènements de défaillance :

$$P_{f_{\text{série}}} = P[\cup G_i \leq 0] \quad (57)$$

Système en parallèle : la probabilité de défaillance du système est celle de l'intersection des évènements de défaillance :

$$P_{f_{\text{parallèle}}} = P[\cap G_i \leq 0] \quad (58)$$

Interdépendance : les interactions entre les composants peuvent être classées en trois types (Thomas.L. 1986) : dépendance économique, dépendance structurelle et dépendance stochastique. Les coefficients de corrélation entre les composants d'un système représentent l'interaction stochastique entre ses composants.

### Coefficient de corrélation entre les états limites

Considérons les événements  $G_i \leq 0$  et  $G_j \leq 0$  dont les hyperplans associés dans le repère des variables normales standards sont respectivement  $H_i$  et  $H_j$ ; les cosinus directeurs forment les vecteurs normaux à ces hyperplans :  $\vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_j$

La corrélation est alors donnée par :

$$\text{Cor}(G_i \leq 0, G_j \leq 0) = \vec{\alpha}_i \cdot \vec{\alpha}_j = \rho_{ij} \quad (59)$$

La figure 23 présente divers cas de corrélations entre deux états limites :

- cas de deux états limites colinéaires  $\rho = 1$ ,
- cas d'états limites non corrélés formant un angle droit  $\rho = 0$ ,
- cas d'états limites négativement corrélés formant un angle aigu  $\rho < 0$ ,
- cas d'états limites positivement corrélés formant un angle obtus  $\rho > 0$
- cas de deux états limites parallèles de part et d'autre de l'origine  $\rho = -1$ .

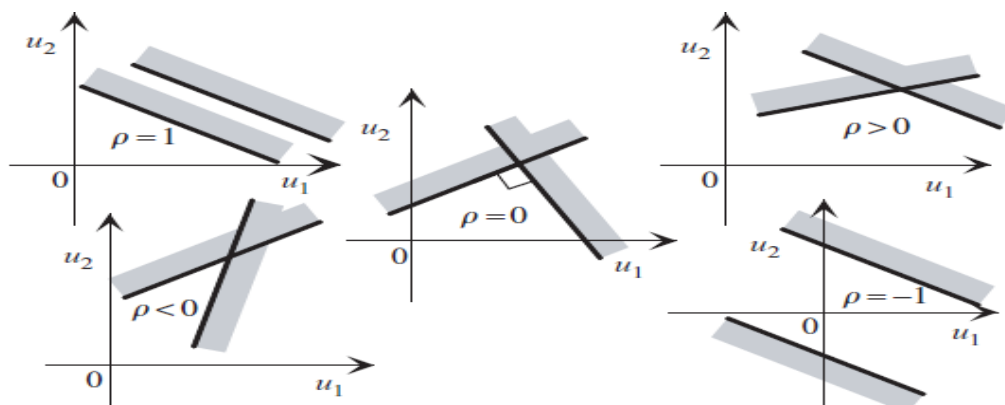


Figure 23: Illustration divers cas de corrélation.

### **1.3.2 Optimisation fiabiliste de la conception (RBDO)**

Lors de la conférence sur la sécurité structurale, tenue à Liège en 1948, par l'Association Internationale des Ponts et Charpentes, Torroja a déclaré, probablement pour la première fois, que la réduction du coût total, doit inclure non seulement le coût de construction, mais aussi le coût de défaillance (au sens de l'espérance mathématique) :

$$C_T = C_I + C_F \quad (60)$$

avec  $C_T$  est le coût total, et  $C_I$  est le coût initial,  $C_F$  est l'espérance du coût de défaillance. Cette expression traduit le fait que l'augmentation des coûts de construction devrait conduire à une marge de sûreté plus élevée et donc diminuer la probabilité de défaillance.

La RBDO vise à trouver les valeurs des variables de conception qui maximisent ou minimisent une fonction objectif décrivant la performance du système, tout en satisfaisant les contraintes probabilistes. Une formulation type de la RBDO s'écrit :

$$\begin{cases} \min_X F_{obj}(X) \\ \text{sous :} \\ P(G_i(X) \leq 0) \leq p_i^{cible} \quad i = 1, \dots, n_e \end{cases} \quad (61)$$

où X est un vecteur de variables aléatoires, les événements de défaillance sont donnés par les fonctions de performance  $G_i(X) \leq 0$ , chacune avec une probabilité admissible  $p_i^{cible}$  ;  $n_e$  dénote le nombre d'évènements de défaillance.

Dans ce qui suit, nous présentons les différentes formulations de la RBDO.

### 1.3.2.1 Formulation à deux niveaux

Nikolaidis et Burdisso (NiKolaidis.E. 1988) se sont basé sur l'idée de Hasofer et Lind pour proposer une procédure d'optimisation itérative imbriquée pour résoudre le problème RBDO. La boucle d'optimisation interne estime la fiabilité de la solution courante, tandis que la boucle externe optimise la fonction de coût global en utilisant la fiabilité calculée dans la boucle interne. L'analyse fiabiliste s'effectue par l'une des approches suivantes :

- approche de l'indice de fiabilité (RIA) (NiKolaidis.E. 1988).
- approche de la mesure de performance (PMA) (Tu.J. 1999).

La différence principale entre RIA et PMA réside dans la formulation du problème associé à l'obtention de P\*.

### 1.3.2.2 Formulation mono-niveau

Les approches à deux niveaux nécessitent un effort de calcul important en raison de l'optimisation imbriquée et des boucles probabilistes. Les efforts pour augmenter la performance des algorithmes RBDO, conduisent au travail de X. Chen et al. (Chen.X. 1997), qui remplacent les contraintes probabilistes par des contraintes déterministes approchées. Ainsi, la boucle probabiliste interne est éliminée, ce qui donne un algorithme plus efficace. Un travail similaire a été publié par Thanedar et Kodiyalam (Thanedar.P.B. 1992). Cependant, la méthode s'est révélée inadéquate pour les problèmes non linéaires en raison de l'hypothèse linéaire de l'approche FORM (Yang.R.J. 2004).

Madsen et Friis Hansen (Madsen. H. O. 1992) ont proposé une approche RBDO mono-niveau, où l'analyse de fiabilité est remplacée par les conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker et le coût total attendu est pris en compte en incluant les coûts de défaillance dans la fonction objectif. Cette approche permet l'utilisation d'algorithmes d'optimisation usuels.

Kuschel et Rackwitz (Kuschel.N 1997) ont apporté d'autres améliorations et reformulé le problème en termes de maximisation de la fiabilité sous contraintes de coût.

Liang et al. (Liang.J 2007) ont proposé la méthode SLA qui relie les approximations des conditions KKT et la méthode FORM inverse. Aucun P\* n'est calculé dans cette formulation :

en résolvant les conditions de KKT, une approximation des  $P^*$  et des contraintes actives est utilisée.

### 1.3.2.3 Formulations découplées

L'analyse de la fiabilité est la difficulté principale dans la RBDO, ce qui motive le développement d'une classe de méthodes qui évitent l'analyse de fiabilité à chaque étape de l'optimisation. Ces méthodes sont communément appelées « approches découplées ». Une caractéristique de toutes les approches de découplage est l'approximation déterministe de l'indice de fiabilité.

La méthode SORA (Sequential optimization and reliability assessment) introduite par X. Du et W. Chen (Du. X. 2004), effectue l'analyse de fiabilité et d'optimisation déterministe en deux cycles alternés dans chaque boucle d'optimisation. Dans le premier cycle, la solution déterministe du problème d'optimisation est obtenue en utilisant des procédures d'optimisation standard. Puisque les exigences de fiabilité de la plupart des contraintes seront vraisemblablement violées, au cours du deuxième cycle, elles sont déplacées dans la région probabiliste admissible au moyen d'un vecteur de décalage. Les points  $P^*$  des contraintes sont calculées après le second cycle en utilisant la méthode de Tu et al. (Tu.J. 1999).

Les deux cycles sont répétés jusqu'à ce que l'objectif soit atteint et que le décalage des distances devient nul. Une extension de SORA a été suggérée par Cho et Lee (Cho.T. 2010), en utilisant la méthode de déplacement des approximations asymptotes et les approximations de linéarisation convexe au lieu de l'expansion linéaire de Taylor.

Par ailleurs, Cheng et al. (Cheng.G. 2006) ont proposé une stratégie de programmation séquentielle approchée (SAP) qui fournit une approximation de l'indice de fiabilité et de son gradient à partir des conditions KKT nécessaires. Une approche similaire a été proposée par Zou et Mahadevan (Zou. T. 2006).

Une approche similaire de programmation linéaire séquentielle a été suggérée par Chan et al. (Chan. K-Y. 2007), dans laquelle une nouvelle étape  $s$  est calculée dans une région de confiance à chaque itération, qui est ensuite utilisée pour obtenir le nouveau point de conception. Les contraintes peuvent être approximées en utilisant FORM ou SORM.

### 1.3.3 Optimisation fiabiliste de la topologie (RBTO)

Avec le développement des méthodes RBDO et des puissances de calcul, l'optimisation fiabiliste commence à s'introduire dans le domaine de l'optimisation topologique, Maute et Frangopol (Maute. K. 2003) ont publié un premier travail, en appliquant l'optimisation PMA et la topologie à des mécanismes compliant. Kharmanda et al. (Kharmanda.G. 2004) ont fourni une étude plus complète de la façon dont la fiabilité affecte la topologie, et ont donné une comparaison visuelle pour quelques problèmes d'optimisation de topologie. Ces deux travaux suivent plus ou moins une approche standard de l'optimisation topologique (minimisation de la compliance, SIMP, filtrage, méthode des critères d'optimalité) sans modifications liées à la fiabilité.

Kim, S. et al. (Kim. C. 2006) ont proposé une formulation de l'optimisation topologique de minimisation du volume avec des contraintes de fiabilité ; cette dernière est calculée en utilisant les approches PMA et RIA. Le travail d'Eom et al. (Eom. YS. 2011) utilise la méthode de surface de réponse quadratique au lieu de l'évaluation directe pour approximer la réponse des structures 3D. Récemment la RBTO (optimisation fiabiliste de la topologie) est étudiée dans les travaux de (Clark) (Clark 2017), de (López Rodríguez, Carlos) (Rodríguez.C. 2017) et de (Oliveira, H. et al.) (Oliveira.H.L. 2017).

L'optimisation fiabiliste se développe encore aujourd'hui et devient applicable dans plusieurs domaines scientifiques et industriels. Mais avec l'évolution de la technologie et le développement d'applications industrielles réalistes, il reste encore beaucoup de progrès à faire dans ce domaine.

## 1.4 Maintenance des structures soumises à la fatigue

### 1.4.1 Durée de vie en fatigue

#### *Courbes de Wöhler*

Dans les analyses de fatigue, les courbes de Wöhler illustrées sur la figure 24 constituent une représentation pratique permettant de relier les durées de vie expérimentales aux charges appliquées. Ces courbes, également nommées courbes S-N, se composent de trois domaines :

- Domaine de fatigue oligocyclique : ce domaine est lié à des plages de charge élevées conduisant à des déformations plastiques importantes du matériau, et donc à un faible nombre de cycles à la rupture (durée de vie  $N$ ),  $1/4 < N < 10^4$  à  $10^5$  cycles.
- Domaine d'endurance limitée : il s'agit du domaine de fatigue à nombre de cycles élevé avec une durée de vie finie où les plages de charges appliquées sont inférieures à celles du domaine de fatigue oligocyclique. La durée de vie  $N$  dans ce domaine varie entre  $10^4(10^5)$  et  $10^6(10^7)$  cycles.
- Domaine d'endurance illimitée : dans ce domaine ( $N \geq 10^6(10^7)$  cycles), la durée de vie en fatigue est considérée comme infinie car la pente de la courbe de Wöhler tend parfois vers une limite asymptotique horizontale appelée « limite d'endurance ».

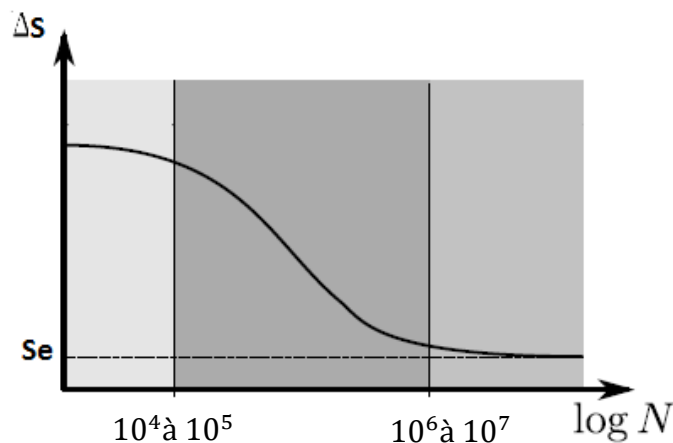


Figure 24: Courbes de Wöhler.

Différents modèles existent dans la littérature pour faire le lien entre le nombre de cycles à la rupture (durée de vie)  $N$  et l'étendue de variation de la contrainte appliquée  $\Delta S$ , ces relations prennent généralement la forme  $N = D(\Delta S)$

- Relation de Wöhler (1870):  $N = a e^{-b\Delta S}$
- Relation de Basquin (1910) :  $N = a(\Delta S)^{-b}$
- Relation de Stromeyer (1924) :  $N = a(\Delta S - S_e)^{-b}$
- Relation de Weibull (1949) :  $N = a \left( \frac{\Delta S - S_e}{S_u - S_e} \right)^{-b} - c$
- Relation de Bastenaire (1960) :  $N = a \frac{e^{-b(\Delta S - S_e)}}{\Delta S - S_e} - c$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des paramètres constants,  $S_e$  la limite d'endurance et  $S_u$  la résistance à la rupture.



## **1.4.2 Stratégie de la maintenance**

La maintenance est définie selon la norme européenne EN 13306 (AFNOR 2001) par : l'ensemble de toutes les actions techniques, administratives et de management durant le cycle de vie d'un bien, destinées à le maintenir ou à le rétablir dans un état dans lequel il peut accomplir la fonction requise.

### *1.4.2.1 Types de maintenance*

Selon (Wang.H. 2006) il existe deux types principaux de maintenance : préventive et corrective.

#### 1.4.2.1.1 Maintenance préventive

La maintenance préventive est définie par : « la maintenance effectuée à intervalles prédéterminés ou selon des critères prescrits et destinée à réduire la probabilité de défaillance ou la dégradation du fonctionnement d'un objet. La maintenance préventive peut être systématique ou conditionnelle ».

##### 1.4.2.1.1.1 Maintenance préventive systématique

La maintenance préventive systématique est l'ensemble des actions exécutées selon un calendrier ou un cycle périodique qui détectent, empêchent ou atténuent la dégradation d'un composant ou d'un système dans le but de maintenir ou d'étendre sa durée de vie en contrôlant la dégradation à un niveau acceptable. La maintenance préventive est un moyen d'augmenter la fiabilité du composant ou du système. En dépensant les ressources nécessaires pour mener les activités de maintenance prévues par le concepteur de la structure, sa durée de vie est prolongée et sa fiabilité augmente.

##### 1.4.2.1.1.2 Maintenance préventive conditionnelle

La maintenance préventive conditionnelle est l'ensemble des mesures qui détectent l'apparition d'un mécanisme de dégradation, permettant ainsi d'éliminer ou de contrôler les facteurs de défaillance avant toute détérioration significative du composant. Les résultats indiquent la capacité fonctionnelle actuelle et future. La maintenance conditionnelle est basée sur des inspections périodiques de la dégradation jusqu'au besoin urgent de réparation ou de remplacement périodique.

La maintenance prédictive diffère de la maintenance préventive basée sur le temps en basant le besoin de maintenance sur l'état réel de la structure plutôt que sur un calendrier prédéfini.

##### 1.4.2.1.2 Maintenance corrective

La maintenance corrective est une opération effectuée pour identifier, isoler ou séparer et rectifier un défaut particulier. Ceci est effectué afin de restaurer le composant ou le système défaillant dans une condition opérationnelle prévue.

### 1.4.2.2 Coût de maintenance

L'espérance du coût total de maintenance est donnée par la formule suivante :

$$C_M = C_P + C_{INS} + C_R + C_F \quad (62)$$

où  $C_P$  est l'espérance du coût de la maintenance préventive,  $C_F$  est l'espérance du coût de défaillance,  $C_{INS}$  est l'espérance du coût d'inspection et  $C_R$  est l'espérance du coût de réparation. Le coût de défaillance  $C_F$  est la somme des coûts liés aux dommages directs (vies statistiques, conséquences économiques, environnement, etc.) et aux dommages indirects (frais de procédures, effets commerciaux, effets à long terme, etc.).

La connaissance de l'état de dégradation et des conditions d'exploitation présente une grande part d'incertitude, ce qui rend la prise de décision de réparation assez difficile. La maintenance basée sur la fiabilité devient donc essentielle pour l'aide à la décision.

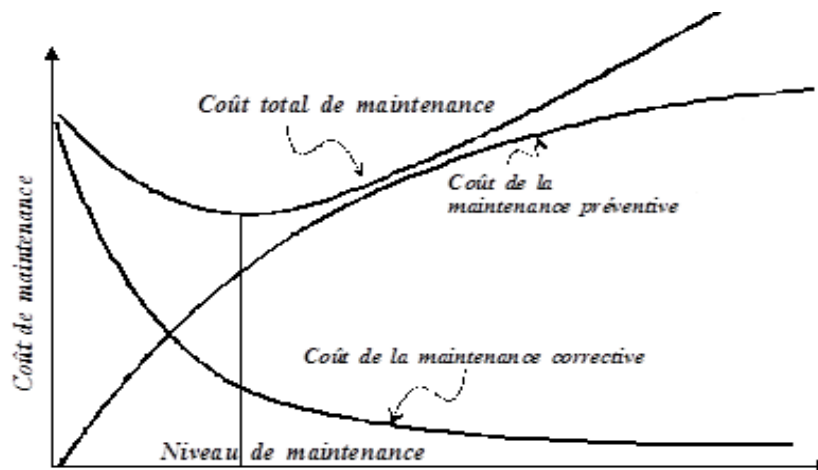


Figure 25: illustration des coûts

La figure 25 illustre les coûts de maintenance préventive et corrective en fonction du niveau de planification. Une faible planification conduit à des interventions d'urgence plus nombreuses et par conséquent, plus coûteuses. A l'opposé, une planification intensive coûte plus cher et conduit à des pertes liées à la sur-maintenance. L'optimisation du coût total permet de trouver le meilleur équilibre en fonction des risques mis en jeu. Elle illustre le point optimal de réparation, où le coût total de la maintenance est minimal.

Pour la modélisation du coût de maintenance, il existe deux hypothèses principales pour définir la durée sur laquelle les coûts sont évalués : horizon infini et horizon fini.

#### 1.4.2.2.1 Horizon infini

Dans le cas où les cycles de maintenance sont nombreux et identiques, le coût de maintenance est calculé par unité de temps sous la forme :

$$C_M = \frac{\text{Espérance du coût par cycle de maintenance}}{\text{Espérance de la longueur du cycle de maintenance}} \quad (63)$$

Pour un cycle de remplacement de période  $T$ , l'espérance du coût de maintenance par unité de temps s'écrit :

$$C_M(T) = \frac{C_c P_f(T) + C_p (1 - P_f(T))}{T} \quad (64)$$

où  $C_c$  est le coût de maintenance corrective dans lequel le coût de défaillance est inclus, et  $C_p$  est le coût de maintenance préventive. La probabilité de défaillance à l'instant  $T$  est notée  $P_f(T)$ .

#### 1.4.2.2.2 Horizon fini

Dans le cas où les cycles de maintenances sont différents et en nombre limité, le coût de maintenance est calculé sur toute la durée de vie par la formule :

$$C_M = \sum_{i=1}^n C_c P_f(T_i) + C_p (1 - P_f(T_i)) \quad (65)$$

où  $C_M$  est le coût total de maintenance,  $P_f(T_i)$  est la probabilité de défaillance pendant le cycle de maintenance de période  $T_i$  et  $n$  est le nombre de cycles de maintenance.

### 1.4.3 Maintenance des structures basée sur la fiabilité

Garavaglia et Sgambi, (E. Garavaglia 2016) ont proposé l'étude des stratégies de maintenance pour un pont en acier dans un environnement agressif, à partir de la simulation de chaque élément individuel. La simulation de la dégradation est obtenue par l'application d'une loi de dommage appropriée mise en œuvre avec une méthodologie de Monte-Carlo, tandis que la prévision temporelle de l'occurrence de la dégradation est obtenue par l'application d'une approche probabiliste markovienne. Concernant l'analyse du coût du cycle de vie, le coût total de maintenance  $C_m$  est évalué en additionnant les coûts  $C_q$  des interventions individuelles :

$$C_m = \sum_q \frac{C_q}{(1 + \nu)^{t_q}} \quad (66)$$

où  $C_q$  est le coût de la  $q$ -ème réhabilitation en tenant compte d'un taux d'actualisation monétaire  $\nu$ .

S. Bhattacharjee (Bhattacharjee 2016) présente une politique pratique de maintenance des chaussées, basée sur une maintenance préventive imparfaite et une analyse mécanique-empirique.

La politique est basée sur un modèle de taux de défaillance croissant d'un cycle à l'autre et sur un seuil minimum de fiabilité. Les simulations de Monte-Carlo sont utilisées pour développer

la fonction de fiabilité des chaussées souples, à partir de laquelle la fonction du taux de défaillance est déterminée. Le changement du taux de défaillance d'un cycle à l'autre est modélisé par le facteur de réduction de l'âge et le facteur d'augmentation du taux de défaillance. L'espérance du coût par unité de temps de la chaussée est minimisée, tout en respectant la fiabilité minimale. La procédure de minimisation produit le nombre de cycles de maintenance préventive déterminé en minimisant la fonction de coût par unité de temps définie par :

$$C_M(t) = \frac{C_p[1 - H(t)] + C_u H(t)}{t} \quad (67)$$

où  $C_p$  est le coût d'une activité de maintenance préventive étant donné que la section de chaussée a survécu au temps  $t$ ,  $C_u$  est le coût de l'activité de maintenance non planifiée étant donné que la section de la chaussée a défailli au bout du temps  $t$  et  $H$  est la fonction de défaillance cumulative obtenue par l'intégration du taux de défaillance.

L'étude indique que le taux de défaillance augmente avec le temps et que des actions de maintenance préventive plus fréquentes sont nécessaires lorsque le seuil de fiabilité choisi est plus élevé.

L'étude d'Okasha et Frangopol (N. M. Okasha, 2009) présente un cadre pour l'optimisation automatisée multi-objectif des stratégies de maintenance des structures en considérant les critères : fiabilité du système, redondance du système et coût du cycle de vie. Le coût du cycle de vie LCC dans cette étude comprend les coûts actualisés de l'application des interventions de maintenance pour une stratégie donnée. Le coût initial (conception et construction) peut être ajouté, bien que cela n'ait aucun effet sur les résultats du problème d'optimisation puisqu'il en est de même pour toute stratégie de maintenance. Le LCC total actualisé est calculé par la formule suivante :

$$LCC = C_0 + \sum_{i=1}^n \frac{C_{m_i}}{(1 + v)^{t_i}} \quad (68)$$

où  $C_0$  est le coût initial de la structure,  $C_{m_i}$  est le coût non réduit de l'application de la maintenance à l'intervention  $i$ ,  $t_i$  est le moment de l'intervention de maintenance  $i$ ,  $v$  est le taux d'actualisation monétaire et  $n$  est le nombre d'interventions de maintenance.

$$C_{m_i} = \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^m (C_{maint})_{j,k} M_{i,j,k} \quad (69)$$

où  $(C_{maint})_{j,k}$  est le coût d'application de la maintenance de type  $j$  au composant (ou groupe de composants)  $k$ ,  $M_{i,j,k}$  est un code binaire qui prend la valeur 1 lorsque la maintenance de type  $j$  est appliquée au composant (ou groupe de composants)  $k$  à l'intervention  $i$  et la valeur 0 autrement,  $m$  est le nombre de composants (ou groupes de composants) dans la structure et  $q$  est le nombre de types de maintenance.

L. C. Neves et al. (Lu. C. Neves, 2004) ont décrit l'indice de fiabilité dépendant du temps et l'effet des actions de maintenance en utilisant un modèle tenant compte de l'interaction entre le coût de maintenance et son effet sur l'indice de fiabilité. Ce modèle est utilisé pour comparer l'efficacité du coût de plusieurs stratégies de maintenance pour une structure dégradée. L'effet des paramètres associés au modèle de coût sur le scénario de maintenance optimale est également analysé. Le modèle de coût utilisée est défini par :

$$C = C_1 + C_2\gamma^{q_1} + C_3(\gamma^*)^{q_2} \quad (70)$$

où  $C$  est le coût total associé à une action de maintenance,  $C_1$  est le coût fixe,  $C_2$  est le coût associé à l'amélioration de la fiabilité,  $C_3$  est le coût associé au retard,  $q_1$  et  $q_2$  sont des paramètres associés à la relation entre le coût de maintenance et l'amélioration de la fiabilité,  $\gamma$  est l'amélioration de l'indice de fiabilité et  $\gamma^*$  est une mesure de l'effet du retard du taux de dégradation sur l'indice de la fiabilité.

Frangopol et al. (D. M. Frangopol 2007) présentent une procédure de programmation dynamique stochastique pour l'optimisation multi-objectif de la planification de la maintenance d'un réseau de ponts. Le réseau est composé d'un groupe de ponts routiers existants avec différentes durées de vie et différents facteurs d'importance de fiabilité. Dans cette étude, un plan optimal de maintenance correspond au coût minimum évalué en utilisant la même formule utilisée dans (E. Garavaglia 2016). La durée de vie totale d'un pont avec  $N$  actions de maintenance,  $T_m$  peut être exprimée comme suit :

$$T_m = T_0 + \sum_{i=1}^N \Delta T_i \quad (71)$$

où  $\Delta T_i$  est une durée de service prolongée en raison de l'action de maintenance  $i$  et  $T_0$  est la durée de vie effective d'un pont sans maintenance.

D'une manière générale, la nouvelle tendance consiste à inclure les coûts d'inspection, de maintenance, de réparation et d'exploitation dans la définition du coût total  $C_T$  afin d'atteindre une conception basée sur la performance, avec des considérations multicritères (D.M.Frangopol. 2000), une étude complète de ces approches est donnée par Frangopol et Maute (Frangopol.D.M. 2003).

Orcesi et al. (A. D. Orcesi 2010) présentent une méthodologie pour l'analyse de la fiabilité des superstructures de ponts métalliques incorporant les résultats de la surveillance. Les indices de fiabilité des composants sont calculés et une analyse de performance variant avec le temps est réalisée en considérant la corrosion. Des mesures continues et simultanées à des points discrets de la superstructure du pont, fournies par la surveillance, permettent de mettre à jour certains paramètres de la fonction d'état limite de service et d'effectuer une analyse de fiabilité en fatigue pour plusieurs composants du pont.

La prise en compte de plusieurs états limites conduit à des solutions différentes de maintenance optimales lorsqu'ils sont considérés individuellement ou simultanément. Le but de cette étude est de montrer l'impact de considérer une approche globale plutôt qu'une approche individuelle lors de la détermination des stratégies de maintenance optimales associées à plusieurs états limites. La procédure d'optimisation est un processus d'optimisation bi-objectif, minimisant le coût cumulé de maintenance  $C_r$  et l'espérance du coût cumulé de la défaillance  $C_{failure}$ .

$$C_r(t) = \sum_{m=1}^{m_f} \sum_{n=1}^{N_c} \sum_{i=1}^{U_m(n,t)} \frac{C(a_{i,n}^m)}{(1 + \nu)^{t_{i,n}^m}} \quad (72)$$

où  $m_f$  est le nombre d'états limites considérés,  $N$  est le nombre de composants,  $U_m(n, t)$  est le nombre d'interventions (maintenance / réparation / remplacement) du composant  $n$  associé à l'état limite  $m$  jusqu'à l'instant  $t$ ,  $C(a_{i,n}^m)$  est le coût de la  $i$ ème action de maintenance  $a_{i,n}^m$  pour le composant  $n$  associée à l'état limite  $m$ ,  $t_{i,n}^m$  est l'instant d'application de la maintenance du composant  $n$  associé à l'état limite  $m$ , et  $\nu$  est le taux d'actualisation annuelle.

L'espérance du coût de défaillance s'écrit ;

$$C_{\text{faillure}}(t) = \sum_{m=1}^{m_f} \sum_{n=1}^{N_c} \sum_{i=1}^{U_m(n,t)} \frac{C_f^m P_f^m(t_{i,n}^m)}{(1 + \nu)^{t_{i,n}^m}} \quad (73)$$

où  $P_f^m(t_{i,n}^m)$  est la probabilité de défaillance du système (pour l'état limite  $m$ ) au moment de la décision  $t_{i,n}^m$ , et  $C_f^m$  est le coût de défaillance du système pour l'état limite  $m$ .

R. Faddoul et al. (R.Faddoul. 2011) proposent un processus de décision de Markov généralisé partiellement observable combinant l'analyse décisionnelle et la programmation dynamique. Ce modèle est appliqué à un problème d'optimisation de maintenance, il cherche à optimiser les interventions qui minimisent le coût total de maintenance.

Les auteurs présentent trois versions du modèle de décision à utiliser comme relation récursive dans le modèle de programmation dynamique proposé :

1. optimisation concernant uniquement les actions de maintenance sans inspections.
2. optimisation concernant une inspection suivie d'une action de maintenance.
3. optimisation concernant deux inspections séquentielles suivies d'une action de maintenance.

Les modèles de décision sont des outils appropriés pour optimiser des séquences de décisions de toute complexité, qui sont adaptées à chaque problème. Le modèle est illustré en dérivant les équations mathématiques d'analyse de décision.

Une application numérique illustrant le modèle est présentée, cette application concerne un pont routier de béton dont le tablier est constitué d'une dalle au béton. L'analyse de sensibilité pour des horizons temporels variables et des incertitudes épistémiques variables est effectuée, puis une analyse d'alternatives est menée pour étudier l'influence du type d'inspection sur les coûts.

### 1.5 Conclusion :

Dans la littérature scientifique, nous trouvons des variétés de méthodes d'optimisation topologique des structures continues et discrètes. Par ailleurs, la théorie de la fiabilité est traitée dans de nombreux travaux bibliographiques avec différentes applications sur la conception des structures basée sur la fiabilité. Nous trouvons également des travaux sur l'optimisation topologique avec une limitation sur la probabilité de défaillance et/ou l'indice de fiabilité.

Par contre, nous ne trouvons pas dans la littérature des travaux sur le couplage de l'optimisation de forme avec l'optimisation du coût de maintenance. La plupart des travaux se concentrent sur la méthode d'optimisation topologique et ses applications.

De plus, les articles traitent bien la politique de maintenance, mais oublient complètement l'importance de la maintenance sur le choix de la forme des structures et sur leur durée de vie.

Toutes ces raisons nous amènent à proposer dans ce travail une méthode d'optimisation fiabiliste topologique de la maintenance.

## CHAPITRE II

### Optimisation topologique fiabiliste mono-composant

1. Introduction
2. Optimisation topologique sous contrainte de fiabilité
  - 2.1. Formulation du problème
    1. Cas de structure continue
    2. Cas de structure à barres
  - 2.2. Conditions d'optimalité et méthode de résolution
    1. Choix de la structure initiale
    2. Analyse statique
    3. Critères d'optimisation
    4. Nouvelle topologie
    5. Forme optimale
    6. Calcul de fatigue
    7. Calcul de la probabilité de défaillance
  - 2.3. Calcul de sensibilité
3. Optimisation topologique fiabiliste en élasticité plane
  - 3.1. Optimisation topologique de la structure continue
    1. Formulation du problème
    2. Méthode des lignes de niveau
  - 3.2. Analyse fiabiliste de la structure continue optimale
    1. Contraintes mécaniques dans la structure
    2. Calcul en fatigue
    3. Probabilités de défaillance
  - 3.3. Application : Robustesse d'une Poutre console
4. Conclusion

## 2.1 Introduction

Dans le premier chapitre, nous avons introduit et les différentes méthodes l'optimisation topologique des structures.

Rappelons que l'objectif de notre étude consiste à chercher les structures les plus robustes et fiables, en prenant le coût comme critère de décision pour la maintenance des structures optimales.

Ce chapitre est consacré à l'optimisation topologique fiabiliste des structures continues, dans lequel nous détaillons l'application de la méthode des lignes de niveau sur les structures mono-composants. La forme optimale des structures varie d'une manière radicale avec la modification de certains paramètres géométriques. Pour cela, nous déterminons la fiabilité de la structure optimale afin d'identifier la forme la plus robuste.

## 2.2 Optimisation topologique sous contrainte de fiabilité

Notre étude consiste à déterminer la forme optimale de la structure par l'optimisation topologique. Le résultat de cette optimisation nous donne la forme idéale et les propriétés mécaniques et géométriques de la structure optimale ; ce qui nous permet d'analyser la solution topologique, pour déterminer ses caractéristiques fiabilistes sous charge cyclique.

Comme nous l'avons introduit dans le premier chapitre, la structure à étudier peut-être considérée soit mono-composant, soit multi-composant. Dans ce dernier cas, on doit étudier chaque élément individuellement puis on étudie le système qui forme la structure.

L'objectif de l'optimisation topologique fiabiliste est de déterminer la forme optimale et fiable des structures. Pour arriver à ce but, la démarche pour obtenir la structure cible est définie par les étapes suivantes :

- Détermination de la structure initiale, de ses propriétés, des conditions aux limites et du but de l'étude (minimisation de la compliance ou du volume). En partant du problème physique défini, il faut établir le problème mathématique d'optimisation en déterminant la fonction objectif et les limitations d'optimisation.
- Résolution numérique du problème et obtention de la forme optimale avec les dimensions aux conditions d'optimalité.
- Analyse statique de la solution topologique et détermination des caractéristiques et informations mécaniques.
- Analyse fiabiliste de la structure optimale soumise à une charge de fatigue.
- Etude de la sensibilité de la structure par rapport aux paramètres.

Concernant l'étude de sensibilité, les paramètres qui influent sur la structure appartiennent à une des trois catégories :



- Paramètres géométriques liés à la forme et aux données géométriques de la structure initiale (dimensions, surface, volume.).
- Paramètres mécaniques liés aux charges appliquées et au procédé de fabrication. (forces appliquées, matériau, compliance mécanique...).
- Paramètres statistiques de la distribution d'un variable aléatoire (moyenne, écart- type, corrélation...).

Les résultats obtenus nous permettent de déterminer la valeur convenable d'un paramètre afin d'obtenir la probabilité de la défaillance cible de la structure.

### **2.2.1 Formulation du problème**

L'objectif est d'établir le système d'équations permettant la formulation du problème d'optimisation topologique fiabiliste des structures.

Lorsque la fonction objectif est la compliance mécanique, le volume minimal devient une limitation. Lorsque la fonction objectif est le poids de la structure (équivalent au volume), la limitation sur la compliance doit être considérée.

Dans notre étude, l'objectif d'optimisation des structures mono-composants porte sur la minimisation de la compliance mécanique, tandis qu'il porte sur le volume dans l'optimisation des structures multi-composants.

La contrainte principale d'optimisation réside dans la fiabilité cible, qui peut être une limitation sur la probabilité de la défaillance ou sur l'indice de fiabilité.

D'un autre côté, le problème peut être interprété comme un problème de choix de la valeur du paramètre d'étude de sensibilité qui satisfait la condition sur la fiabilité, en minimisant l'objectif de l'optimisation topologique et en respectant les limitations d'optimisation.

Le problème reformulé devient, pour les deux types de structures : continues et discrètes un problème de minimisation de la fonction objectif sous contraintes, qui varient selon le type considéré.

*Cas de structure continue*

○ minimisation de la fonction objectif : compliance mécanique  
sous

- contrainte sur le volume.
- contrainte sur l'équilibre énergétique.
- contrainte de fiabilité.

### *Cas de structure à barres*

- minimisation de la fonction objectif : volume sous
- contrainte sur la compliance mécanique.
- contrainte sur l'équilibre énergétique.
- contraintes sur les volumes et les longueurs des barres.
- contrainte de fiabilité.

#### **2.2.2 Conditions d'optimalité et méthode de résolution**

La structure optimale doit satisfaire les conditions d'optimalité, correspondant à la minimisation de la fonction objectif et au respect des limitations (i.e. contraintes d'optimisation).

La structure doit être de raideur maximale avec une quantité de matière convenable, ou bien de masse minimale avec une raideur satisfaisante. En plus, elle doit être suffisamment fiable, en respectant la condition de fiabilité.

Les étapes de résolution du problème d'optimisation sont décrites dans les paragraphes ci-dessous.

##### *1. Choix de la structure initiale*

La structure initiale définit la forme de départ de l'algorithme d'optimisation. Elle est représentée par une fonction implicite dans le cas des structures continues et par la structure de base (i.e. treillis avec toutes les connections possibles entre les nœuds) dans le cas des structures à barres. En plus de la forme initiale, il faut connaître les conditions aux limites (charges appliquées, conditions aux appuis) et les propriétés du matériau (module de Young, coefficient de Poisson...).

##### *2. Analyse statique*

La structure est analysée statiquement afin de déterminer les réponses mécaniques (déplacement, compliance, contraintes...) en utilisant le système matriciel d'équilibre. Pour les structures continues, le calcul mécanique se fait par la méthode des éléments finis tandis que pour les structures à barres, il se fait par la méthode de la matrice de rigidité ou par la méthode des éléments finis.

##### *3. Critères d'optimisation*

Après avoir calculé la compliance mécanique et le volume de la structure, la vérification des contraintes d'optimisation est à examiner. Concernant les structures continues, nous devons déterminer la vitesse d'évolution de la fonction implicite de lignes de niveau. Dans le cas des structures discrètes, nous devons déterminer les barres à supprimer afin d'obtenir la nouvelle forme de la structure.

#### 4. *Nouvelle topologie*

Dans le cas des structures continues, la résolution de l'équation d'évolution de la fonction de lignes de niveau, nous donne une nouvelle fonction de la géométrie qui représente la nouvelle topologie de cette structure.

Pour les structures discrètes, après la détermination des barres à éliminer, celles-ci sont supprimées pour obtenir la nouvelle forme du treillis.

#### 5. *Forme optimale*

L'algorithme itératif s'arrête quand la compliance converge tout en respectant les limitations sur le volume pour les structures continues, et les conditions d'arrêt (compliance égale à sa borne supérieure, volume égal à la limite de volume...) pour la structure à barres. A la fin de l'algorithme d'optimisation topologique, on obtient la forme optimale de la structure.

#### 6. *Calcul de fatigue*

L'analyse mécanique de la structure optimale permet le calcul de la contrainte maximale sur la structure continue, et des contraintes sur les éléments pour la structure à barres. En nous basant sur ces valeurs et en utilisant la loi de Wöhler nous pouvons calculer la durée de la vie de la structure continue ou des barres du treillis.

#### 7. *Calcul de la probabilité de défaillance*

Nous commençons par l'écriture de l'équation d'Etat limite de chaque composant (cas de treillis) ou de la structure continue, en fonction de la résistance et de la sollicitation. Nous devons ensuite spécifier les propriétés des variables aléatoires dans l'équation de l'état limite.

Concernant la structure multi-composant, nous devons d'abord déterminer la probabilité de défaillance de chaque composant. Ensuite, à partir des indices de fiabilité des éléments et des coefficients de corrélation entre eux, nous pouvons calculer la probabilité de défaillance de la structure.

Concernant la structure continue (i.e. structure mono-composant), la probabilité de défaillance peut être calculée, soit après la détermination de l'indice de fiabilité de la structure, soit directement par l'intégration de la fonction de densité de probabilité.

### **2.2.3 Calcul de sensibilité**

La probabilité de défaillance de la structure peut être étudiée, en évaluant l'effet des paramètres du modèle mécanique ou du modèle probabiliste sur cette probabilité, afin de déterminer le paramètre le plus important pour la fiabilité de la structure. Ainsi si on agit sur ce paramètre, on peut améliorer la fiabilité de la structure.

La probabilité de défaillance est sensible aux paramètres reliés aux composants de la structure. La corrélation entre les éléments de la structure multi-composant est un facteur dont l'effet est important sur le système structural. De même, le nombre de cycles appliqués et la durée de vie sont des paramètres qui jouent des rôles essentiels dans la détermination de la probabilité de défaillance.

Pour comprendre l'effet d'un paramètre donné sur la structure et sa probabilité de défaillance, il faut étudier la sensibilité de cette probabilité à ce paramètre objet de l'étude. Cette sensibilité est représentée mathématiquement par la dérivée de la probabilité de défaillance par rapport au paramètre étudié.

La sensibilité est représentée par la pente de la tangente à la courbe reliant la probabilité de défaillance au paramètre de la structure. Pour un point M sur cette courbe de coordonnées  $(x_M, P_{fM})$ , avec  $x_M$  la valeur du paramètre de la structure au point M de la courbe, la probabilité de défaillance au point M est  $P_{fM}$ , soit  $s$  la sensibilité de  $P_f$  à  $x$ , alors :

$$s = \frac{\partial P_f}{\partial x} \quad (74)$$

Pratiquement la sensibilité est évaluée en faisant changer la valeur du paramètre et à chaque valeur on détermine la probabilité de défaillance, ce qui nous permet de trouver la relation graphique entre cette probabilité et le paramètre. L'analyse de ces résultats permet de déduire l'importance de ce paramètre et son effet sur la probabilité de défaillance.

### 2.3 Optimisation topologique fiabiliste en élasticité plane

Une structure continue, en élasticité plane, est considérée comme une structure mono-composant dont on cherche la forme optimale sous contrainte de fiabilité. Pour cela, nous devons l'optimiser topologiquement en assurant la limitation fiabiliste.

La résolution du problème se fait en deux étapes principales :

- Optimisation topologique de la structure continue ;
- Analyse fiabiliste de la solution topologique.

La topologie de la structure est optimisée en prenant comme fonction objectif la compliance mécanique de la structure. Cette compliance correspond à l'énergie de déformation élastique, et indique par conséquent la souplesse de la structure. Les limitations de l'optimisation topologique sont imposées sur le volume de la structure et sur son équilibre énergétique.

La topologie de la structure est représentée par une fonction implicite qui évolue suivant un champ de vitesse instantanée qui dépend de la compliance mécanique de la structure à chaque instant.

La méthode de l'optimisation numérique utilisée est celle de Lagrange. Le critère d'arrêt de l'algorithme de l'optimisation topologique est la convergence du Lagrangien. La solution du problème est la fonction implicite finale représentant la structure optimale.

Étant donné que la structure optimale est soumise à la fatigue, alors on doit déterminer le nombre de cycles à la rupture. Concernant l'analyse fiabiliste, l'équation d'état limite est définie pour représenter le critère de défaillance. Cette fonction est obtenue par la différence entre la résistance de la structure optimale représentant la solution topologique, et la sollicitation appliquée à cette structure. Le but principal devient alors de trouver une relation entre la probabilité de défaillance et le paramètre d'intérêt, au moyen de l'étude de sensibilité.

### 2.3.1 Optimisation topologique de la structure continue

#### 2.3.1.1 Formulation du problème

La méthode utilisée pour l'optimisation topologique des structures continues est la méthode des lignes de niveaux détaillée dans le premier chapitre. La topologie de la structure est représentée par une fonction implicite  $\varphi$  qui évolue avec le temps.

Soit  $D$  le domaine de la structure,  $V_s$  la partie matérielle alors  $D \setminus V_s$  est la partie vide,  $\Gamma \equiv \partial\Omega$  est la frontière entre les deux parties de  $D$  (figure 26).

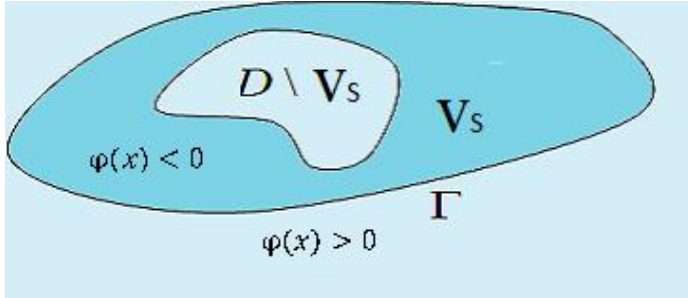


Figure 26: Distribution de la matière

Soit  $\vec{U}$  le vecteur des déplacements réels  $(u, v)$  et  $\vec{f}$  le vecteur des forces surfaciques extérieures. L'objectif est la minimisation de la compliance mécanique représentant l'énergie de déformation élastique, définie par l'intégration suivante :

$$C = \int_{\Gamma} \vec{f} \cdot \vec{U} d\Gamma \quad (75)$$

La première limitation d'optimisation est sur le volume de la structure, i.e. le volume de la partie matérielle du domaine  $V_s$ . Ce volume est calculé par la somme des volumes des éléments finis définis par  $V_e$  constituant la structure. La limite désirée du volume est désignée par  $V_0$ , défini par une valeur déterminée, ou par une fraction du volume initial.

$$V_s \leq V_0 \quad (76)$$

La deuxième limitation est l'équilibre énergétique de la structure. Cet équilibre nous permet d'obtenir une solution statiquement admissible et ainsi de déterminer les déplacements, les déformations et les contraintes dans la structure.

En plus du vecteur de déplacement mécanique  $U \equiv (u, v)$ , il existe un vecteur  $V$  des déplacements virtuels  $V \equiv (w, s)$ . Soit  $\varepsilon(U)$  le vecteur des déformations réelles et  $\varepsilon(V)$  le vecteur des déformations virtuelles, alors on peut écrire :

$$\varepsilon(U) = [\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}] = \left[ \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dy}, \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) \right] \quad (77)$$

$$\varepsilon(V) = [\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}] = \left[ \frac{dw}{dx}, \frac{ds}{dy}, \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dy} + \frac{ds}{dx} \right) \right] \quad (78)$$

Soit  $E$  le module de Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson, la matrice d'élasticité s'écrit sous la forme :

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (79)$$

L'équilibre énergétique de la structure s'écrit par :

$$\int_{\Omega} \varepsilon(U)^T D \varepsilon(V) d\Omega = \int_{\Gamma} \vec{f} \cdot V d\Gamma \quad (80)$$

Cette équation d'équilibre est discrétisée par la méthode des éléments finis. La frontière du domaine est divisée selon les conditions de Dirichlet (déplacements nuls), et les conditions de Neumann (charges appliquées). L'équation d'équilibre est discrétisée par le système matriciel :

$$[K] \cdot \{U\} = \{f\} \quad (81)$$

avec K la matrice de rigidité globale.

Le problème de minimisation sous limitations d'optimisation s'écrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \{f\}^t \cdot \{U\} d\Gamma \\ \text{sous} \quad V_s \leq V_0 \\ \quad \quad [K] \cdot \{U\} = \{f\}^t \\ \quad \quad V_e \geq 0 \end{array} \right. \quad (82)$$

L'optimisation se fait par la méthode de Lagrange. Pour cela, on définit le Lagrangien L :

$$L = C + \gamma(V_s - V_0) \quad (83)$$

où  $\gamma$  est le multiplicateur de Lagrange.

### 2.3.1.2 Méthode des lignes de niveau

Dans cette méthode d'optimisation topologique, présentée dans le premier chapitre, la fonction implicite  $\varphi$  qui représente la forme de la structure varie avec le temps jusqu'à l'obtention de la forme désirée de la structure. Le critère d'arrêt correspond à la convergence du lagrangien.



Figure 27: évolution de la topologie.

### 2.3.1.2.1 Forme initiale

La forme initiale de la structure peut être :

Soit une surface plane rectangulaire contenant des vides (Figure 28 (a)), soit une surface plane rectangulaire sans vide à l'intérieur (Figure 28(b)).

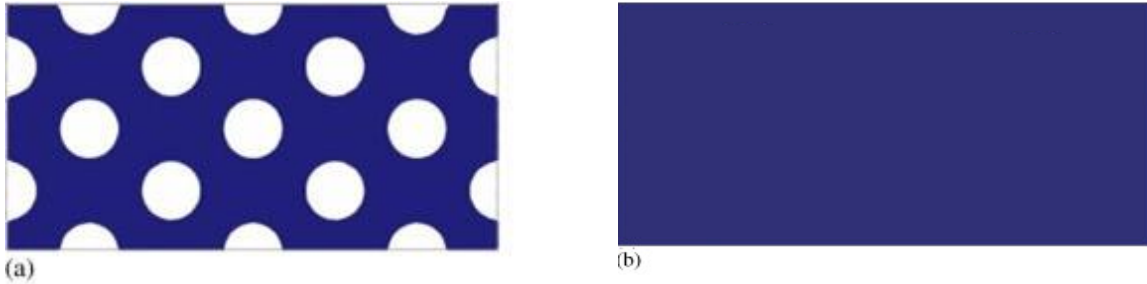


Figure 28: formes initiales

### 2.3.1.2.2 Evolution de la fonction de niveau

La fonction  $\varphi$  évolue avec le temps  $t$  suivant l'équation de Hamilton-Jacobi (17) avec une vitesse normale de propagation  $F$  :

$$F = \varepsilon(u)^T D\varepsilon(u) - \gamma \quad (84)$$

Après la résolution de l'équation (17), la nouvelle fonction implicite est obtenue pour la nouvelle topologie.

### 2.3.1.2.3 Algorithme d'optimisation topologique

L'algorithme suivant présente les démarches à suivre afin d'obtenir la forme optimale, en utilisant la méthode des lignes de niveau expliquée dans le premier chapitre :

- Déterminer la forme initiale de départ de l'algorithme
- Réinitialiser la fonction  $\varphi_0$  et obtenir la fonction de distance par la résolution de l'équation (34).
- Calculer les déplacements élastiques et les contraintes mécaniques dans chaque élément fini.
- Déduire la fonction objectif et le lagrangien  $L$
- Déterminer la nouvelle fonction  $\varphi_n$ , i.e. nouvelle topologie par la résolution de l'équation (17).
- Réinitialiser la fonction  $\varphi_n$  et obtenir la fonction de distance par la résolution de l'équation (34).
- Calculer les nouveaux déplacements élastiques et les contraintes mécaniques dans chaque élément fini.
- Déduire la nouvelle fonction objectif et le nouveau lagrangien  $L_n$
- Examiner la convergence du lagrangien : si  $L_n \leq L(1 + \text{Tol})$  avec Tol la tolérance acceptable, alors l'algorithme arrête.

- Si  $L_n > L(1 + Tol)$ , le pas de temps est réduit,  $T_n = \frac{T_{n-1}}{2}$
- Répéter les étapes précédentes jusqu'à la convergence du lagrangien.

A la fin de cet algorithme, présenté sur la Figure 29, la topologie optimale de la structure est obtenue.

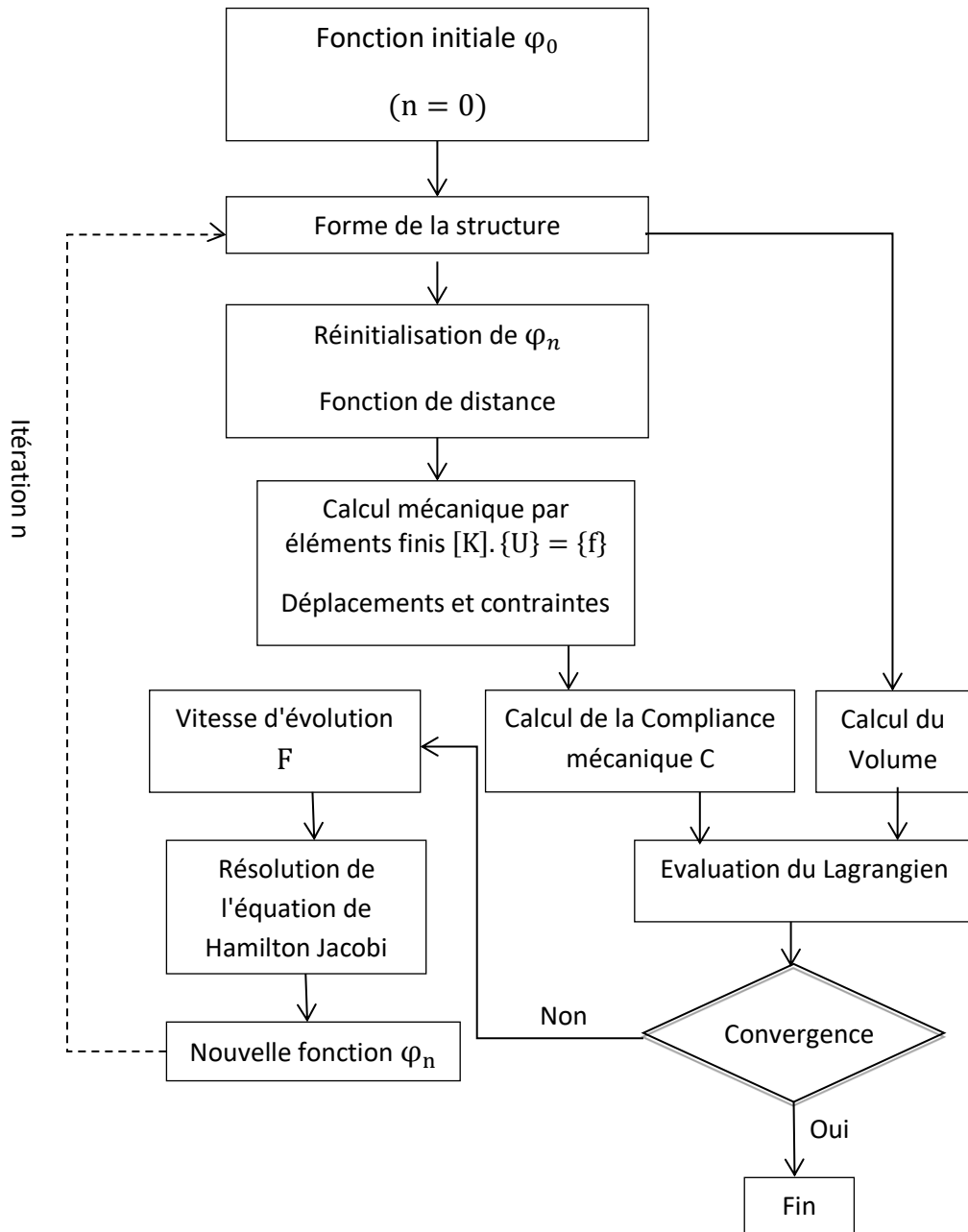


Figure 29: algorithme d'optimisation topologique des structures continues.



### 2.3.2 Analyse fiabiliste de la structure continue optimale

La résolution de l'optimisation topologique conduit à la structure de forme optimale. Lorsque cette structure est soumise à une charge cyclique, il devient nécessaire d'étudier l'effet de la fatigue sur la durée de vie de la structure optimale et de déterminer par conséquent sa probabilité de défaillance.

#### 2.3.2.1 Contraintes mécaniques dans la structure

Le calcul mécanique de la structure optimale permet d'obtenir les contraintes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  dans chaque élément. La contrainte de von Mises est calculée par :

$$\sigma_{vm} = \frac{\left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_y^2 + \sigma_x^2 + 6\tau_{xy}^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \quad (85)$$

Pour l'analyse de fatigue, la valeur maximale de cette contrainte  $\sigma_{max}$  est calculée sur toute la structure.

#### 2.3.2.2 Calcul en fatigue

La structure optimale est soumise à une contrainte mécanique cyclique d'amplitude  $\sigma_{max}$ , l'étendue de variation de la contrainte est :

$$\Delta S = 2|\sigma_{max}| \quad (86)$$

Pour obtenir le nombre des cycles à la rupture, nous utilisons la courbe S-N fournie par l'Eurocode 2. La loi de fatigue est ainsi définie par :

$$N = \begin{cases} 10^{5(\log_{10}(16) + (\frac{6}{5}) - \log_{10}(\Delta S))} & \Delta S < 16MPa \\ 10^{3(\log_{10}(1600) - \log_{10}(\Delta S))} & 16 < \Delta S \leq 160MPa \\ 1 & \Delta S > 160MPa \end{cases} \quad (87)$$

La contrainte cyclique appliquée est une variable aléatoire de distribution log-normale, donc  $\sigma_{max}$  est une variable aléatoire de moyenne  $m_{\sigma_{max}}$  et d'écart-type  $\sigma_{\sigma_{max}}$ .

Nous choisissons des valeurs arbitraires suivant la loi de la distribution de la contrainte  $\sigma_{max}$ . Pour chaque valeur de  $\sigma_{max}$ , nous calculons la valeur associée de N en appliquant l'équation (84) à l'aide d'une simulation de Monte-Carlo. Ainsi, nous obtenons la distribution log-normale de durée de vie et par suite nous déduisons la moyenne  $m_N$  et l'écart-type  $\sigma_N$  de la durée de vie.

#### 2.3.2.3 Probabilités de défaillance

La fonction d'état limite, qui représente la condition de bon fonctionnement de la structure, est définie par la différence entre : la durée de vie qui représente la résistance de la structure, et la sollicitation appliquée à la structure représentée par le nombre de cycles appliqués.

$$G = N - N_a \quad (88)$$

Dans notre étude, le nombre de cycles appliqués  $N_a$  est supposé déterministe, étant donné qu'il s'agit de l'objectif de durée de vie à atteindre (i.e. spécification de conception).

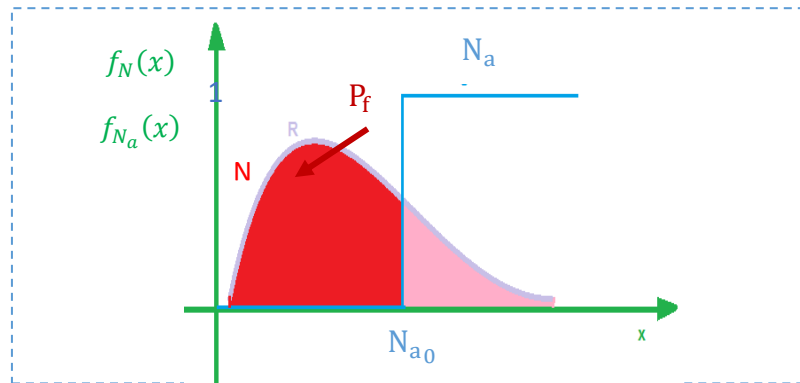


Figure 30: distributions de  $N$  et  $N_a$

La figure 30 ci-dessus illustre la distribution de la durée de vie  $N$  représentée par la fonction de densité  $f_N(x)$  ; le nombre de cycles appliqués  $N_a$  est représenté par une valeur constante.

La probabilité de la défaillance  $P_f$  de la structure peut être calculée selon la fonction de répartition de  $N$  notée  $F_N$  comme suit:

$$P_f = F_N(N_a) \quad (89)$$

L'algorithme illustré par la figure 31 ci-dessous représente la démarche à suivre pour obtenir la probabilité de défaillance de la structure optimale. Nous démarrons le cycle de calcul par l'introduction des données géométriques et mécaniques pour l'optimisation topologique. Après l'obtention de la forme optimale, la structure est analysée pour le calcul de la probabilité  $P_f$ .

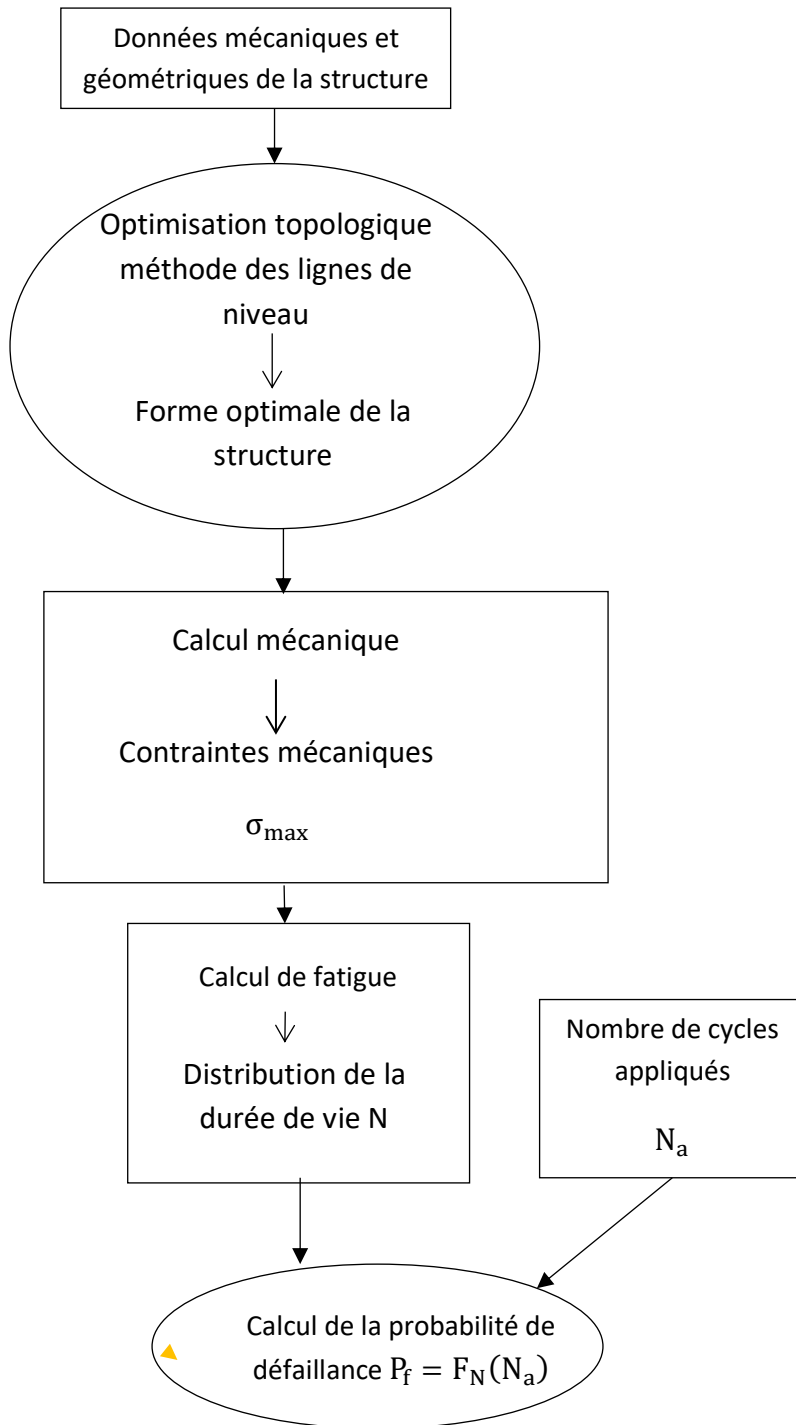


Figure 31: algorithme d'optimisation topo-fiabiliste des structures continues.

### 2.3.3 Application : Robustesse d'une Poutre console

Considérons une structure plane modélisant une poutre console supposée sans poids, illustrée sur la figure 32, de longueur  $L$  et de hauteur  $H=0.5$  m. La charge verticale  $F$  est appliquée au milieu de l'extrémité verticale libre, tandis que l'autre extrémité verticale est encastree ; les deux arrêtes horizontales sont libres.



Figure 32: poutre console.

La charge appliquée sur la structure est  $F = 10\text{kN}$ . Pour chaque valeur de  $L$ , nous optimisons la topologie de la structure en prenant comme limite de volume 50% du volume initial. Le module de Young est  $E = 210\text{ GPa}$  et le coefficient de Poisson est  $\nu = 0,3$ .

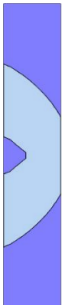
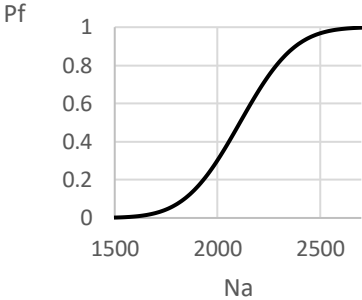
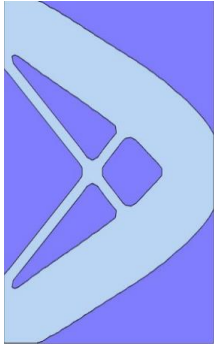
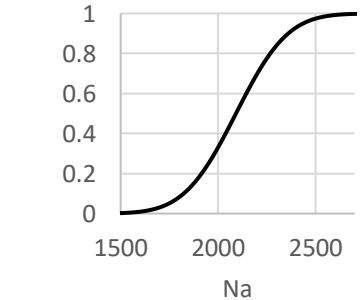
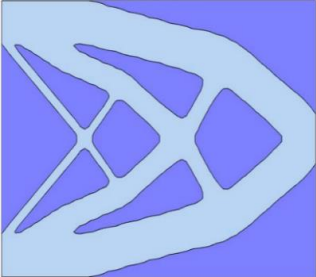
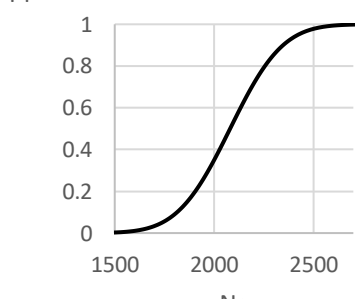
La poutre optimale est ensuite soumise à une contrainte cyclique. Le calcul de fatigue permet d'obtenir la durée de la vie  $N$  de la poutre.

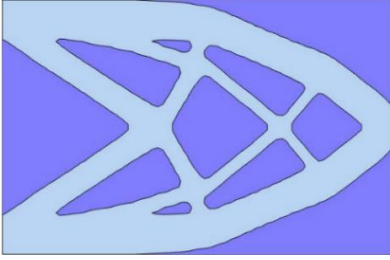
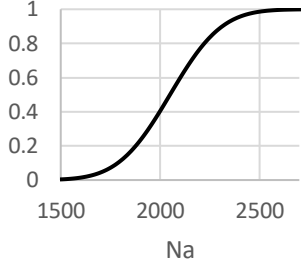
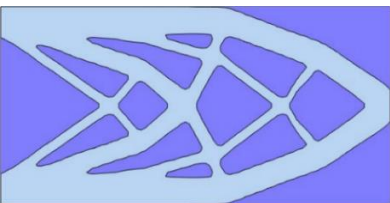
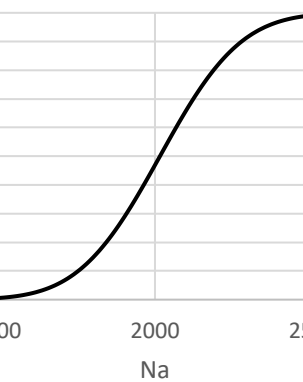
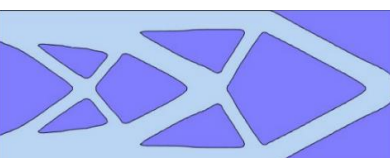
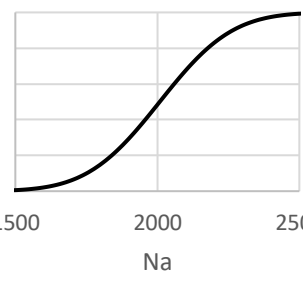
Pour l'analyse fiabiliste, nous considérons la charge appliquée sur la structure comme une variable aléatoire de distribution log-normale. Ainsi, à chaque valeur de la contrainte maximale obtenue par tirage aléatoire suivant la loi log-normale, nous calculons la durée de vie correspondante en appliquant les formules (86) et (87). Nous pouvons ensuite déduire la distribution log-normale de  $N$ , de moyenne  $m_N$  et d'écart-type  $\sigma_N$ .

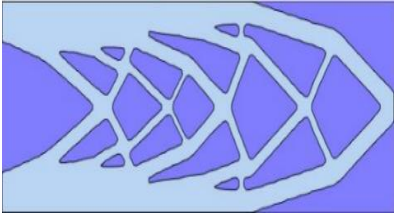
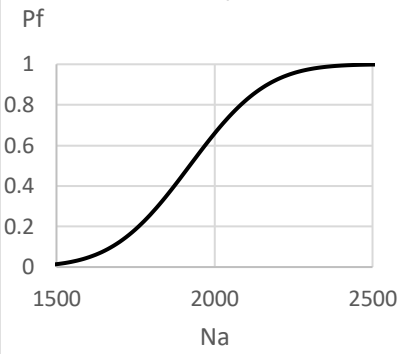
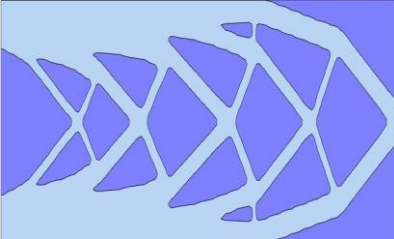
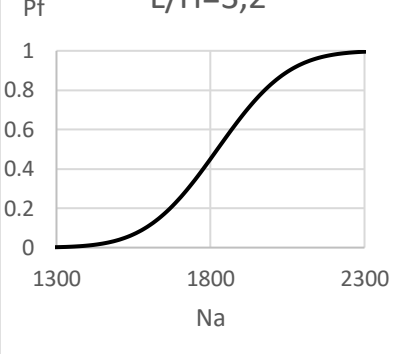
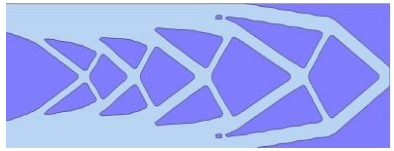
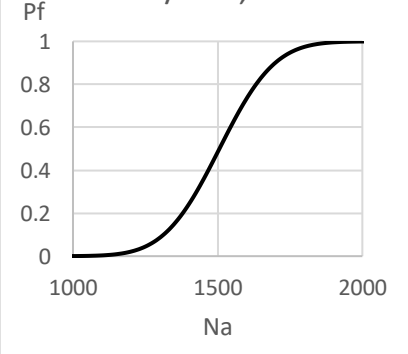
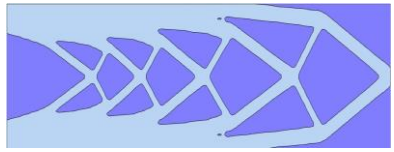
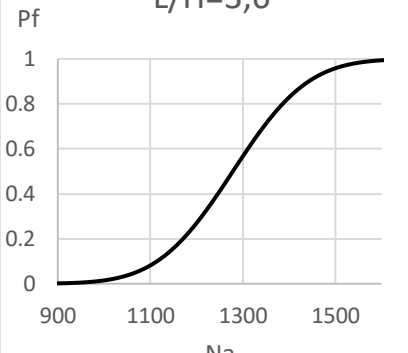
Le nombre de cycles appliqué  $N_a$  sur la structure est déterministe, que l'on fait varier. Pour chaque valeur de  $N_a$ , nous calculons la probabilité de défaillance de la structure  $P_f(N_a)$  ce qui nous permet d'obtenir la courbe reliant  $N_a$  et  $P_f$ .

Les résultats obtenus sont fournis dans le tableau ci-dessous. Les solutions topologiques et les fonctions de répartition sont données en fonction du ratio  $L/H$ , variant de 0,2 à 4,2. La valeur de la contrainte maximale obtenue varie de 50 à 74 MPa.

Tableau 1: sensibilité de la structure au rapport géométrique.

L / H	Topologie optimale de structure	Courbe( $N_a$ , $P_f$ )	Intervalle de $N_a$ où $P_f \in [0.05; 0.95]$
0,2		<p style="text-align: center;"><math>L/H=0,2</math></p> 	<b>[1770; 2467]</b>
0,5		<p style="text-align: center;"><math>L/H=0,5</math></p> 	<b>[1750; 2446]</b>
1		<p style="text-align: center;"><math>L/H=1</math></p> 	<b>[1745; 2430]</b>

1,5		<p>Pf <math>L/H=1,5</math></p> 	[1720; 2400]
2		<p>Pf <math>L/H=2</math></p> 	[1690; 2360]
2,5		<p>Pf <math>L/H=2,5</math></p> 	[1680; 2349]

3		<p style="text-align: center;"><math>L/H=3</math></p> 	<b>[1615; 2245]</b>
3,2		<p style="text-align: center;"><math>L/H=3,2</math></p> 	<b>[1530; 2130]</b>
3,4		<p style="text-align: center;"><math>L/H=3,4</math></p> 	<b>[1265; 1760]</b>
3,6		<p style="text-align: center;"><math>L/H=3,6</math></p> 	<b>[1073; 1500]</b>

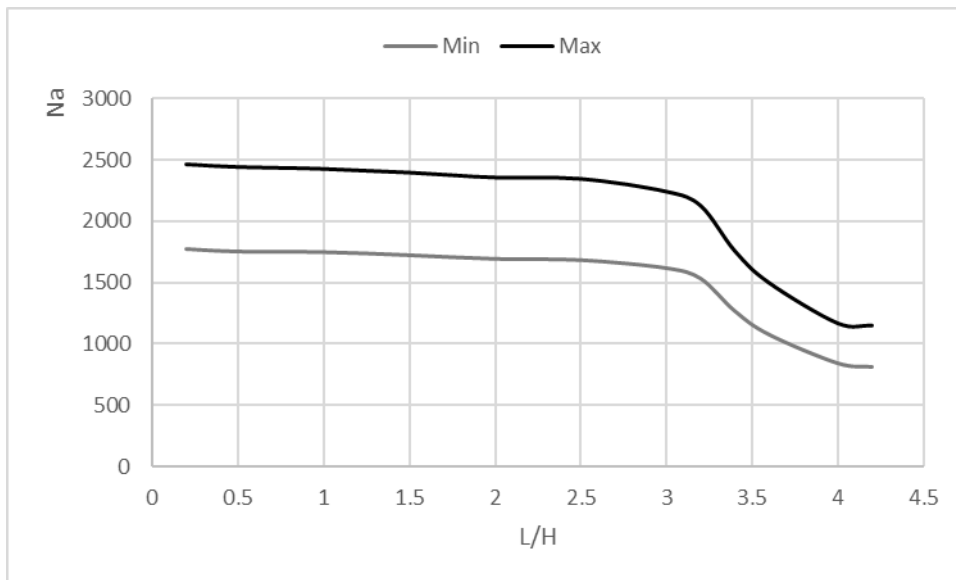
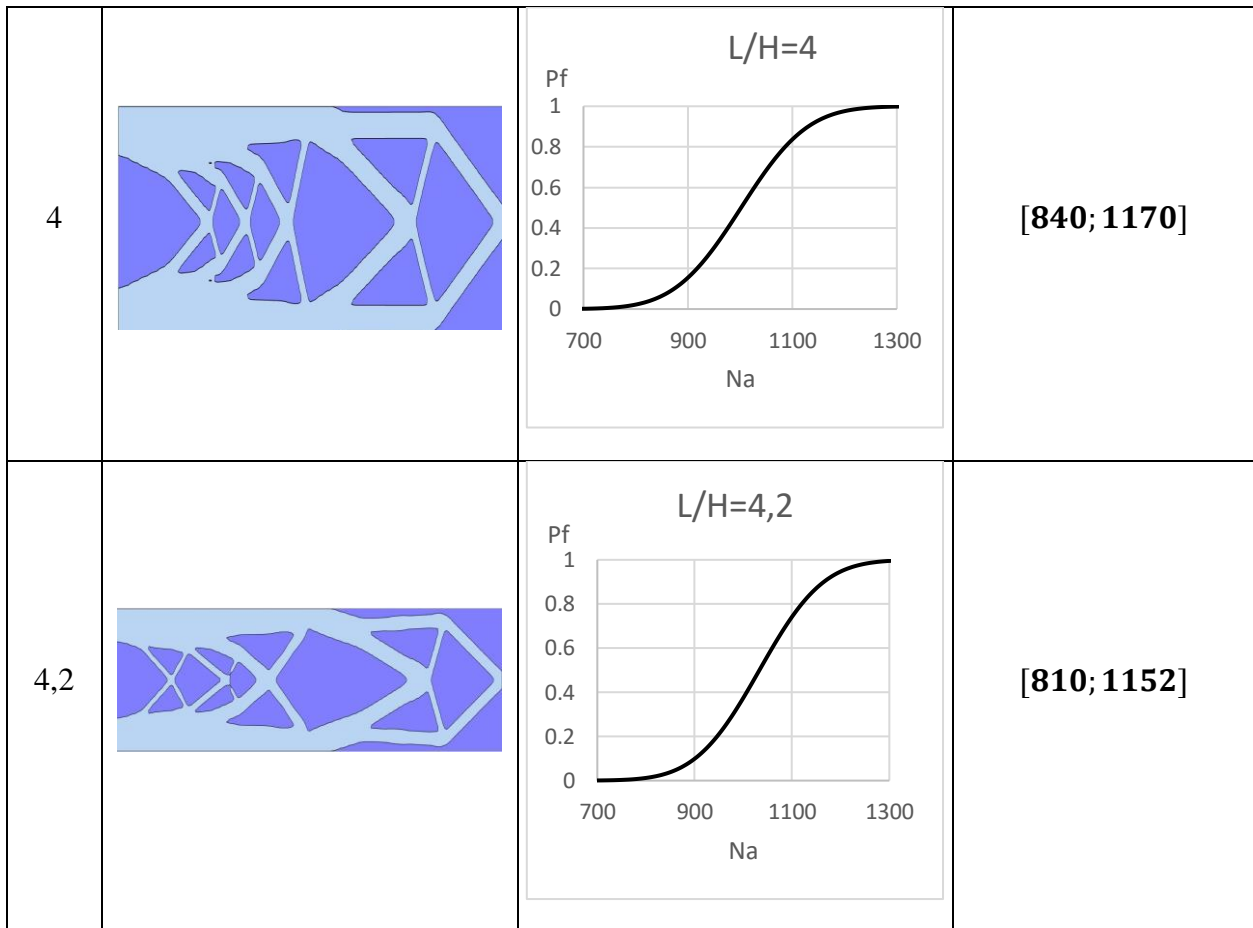


Figure 33: variation des bornes de l'intervalle de confiance en fonction de rapport géométrique  $L/H$ .



Nous observons que la taille de l'intervalle de confiance du nombre de cycles ( i.e. intervalle où la probabilité de défaillance est entre 0,05 et 0,95) diminue quand le rapport géométrique L/H augmente. Ce résultat est attendu puisque la contrainte augmente avec l'élançement de la console. Les valeurs des bornes de l'intervalle de confiance diminuent quand le rapport augmente, mais la taille de l'intervalle augmente légèrement par rapport à sa valeur moyenne : le rapport  $\frac{N_{0,95}-N_{0,05}}{N_{moyenne}}$  passe de 32% pour L/H=0,2 à 34,8% pour L/H=4,2. Ce résultat indique le rôle plus important des incertitudes quand L/H est plus grand.

D'après la figure 33, nous remarquons que la taille de l'intervalle de confiance de Na diminue d'une manière remarquable à partir de rapport L/H=3,2.

Pour une fraction volumique donnée, la fiabilité de la structure diminue quand le rapport géométrique augmente, ce qui signifie que la rigidité de la structure optimale diminue quand elle devient plus élancée.

## **2.4 Conclusion**

Nous observons dans les résultats de ce chapitre que la forme optimale de la structure varie avec le changement des paramètres géométriques comme le rapport entre la longueur et la hauteur de la structure, nous observons aussi que la compliance de la structure optimale augmente quand ce rapport augmente. Ce qui conduit à conclure que la forme optimale devient moins fiable quand le rapport géométrique augmente.

## CHAPITRE III

### **Optimisation topologique fiabiliste multi-composant**

1. Introduction
2. Calcul de la probabilité de défaillance des composants
  - 2.1. Coefficient de corrélation
  - 2.2. Probabilité de défaillance d'un système multi-composant
    1. Probabilité de défaillance d'un système à deux composants
3. Optimisation topologique des structures à barres
  - 3.1. Méthode de résolution
4. Structure à trois barres
5. Poutre en Treillis
6. Pylône électrique
7. Conclusion

### 3.1 Introduction

Ce chapitre porte sur l'optimisation topologique fiabiliste des structures multi-composants. Une structure multi-composant est un assemblage d'éléments distincts qui se combinent pour former la structure. Pour chacun des éléments, une fonction d'état limite est définie. Les composants peuvent être indépendants ou corrélés. Deux composants dont l'un influe sur l'autre sont des éléments corrélés, cette corrélation est exprimée par un coefficient de corrélation entre les états limites des composants. Les équations des états limites sont reliées entre elles par la matrice de corrélation représentant l'état de l'interdépendance entre les composants.

Dans un système, l'effet de chaque composant peut être déduit par l'analyse de chaque élément et de la structure entière. Pour mettre en valeur la relation de l'interdépendance, on doit étudier la sensibilité du système au coefficient de corrélation entre deux composants corrélés.

Dans ce chapitre nous nous intéressons aux structures discrètes où les éléments sont des barres. Notre objectif est d'étudier l'influence de l'interdépendance des barres sur la fiabilité du système. Pour cela, nous introduisons une méthode applicable aux structures à barres. L'étude consiste à analyser la structure résultant de l'optimisation topologique afin de calculer la probabilité de défaillance de la structure.

Par ailleurs, le changement d'un paramètre caractérisant un composant du système structural, à saisir une variable géométrique, une donnée mécanique ou un paramètre statistique, provoque des effets sur les autres composants de la structure. Ces effets sont représentés par la sensibilité de la probabilité de défaillance.

Cette sensibilité des probabilités de la défaillance par rapport à un paramètre peut être représentée par des relations graphiques entre ces probabilités et le paramètre. L'analyse de ces résultats graphiques permet de déduire l'effet de ce paramètre sur le système étudié.

### 3.2 Calcul de la probabilité de défaillance des composants

La fonction d'état limite représente la condition de bon fonctionnement d'un composant  $i$  de la structure à barres. Elle est définie par la différence entre : la durée de vie  $N_i$  qui représente la résistance de la barre, et la sollicitation appliquée à la structure représentée par le nombre de cycles appliqués  $N_a$ :

$$G_i = N_i - N_a \quad (90)$$

Etant donné que le nombre de cycles appliqués est déterministe, la probabilité de la défaillance  $P_{f_i}$  de la barre  $i$  peut être calculée selon la fonction de répartition de  $N_i$ ,  $F_{N_i}$  comme suit :

$$P_{f_i} = \Pr[N_i \leq N_a] = F_{N_i}(N_a) \quad (91)$$

De même, nous déduisons l'indice de fiabilité de la barre  $\beta_i$  par:

$$\beta_i = -\Phi^{-1}(P_{f_i}) \quad (92)$$

où  $\Phi^{-1}$  est la fonction inverse de la loi de répartition normale centrée réduite.

### 3.2.1 Coefficients de corrélation

Lorsque la structure est un système multi-composant, les éléments sont interdépendants. Il est donc nécessaire de déterminer le coefficient de corrélation qui représente cette interdépendance entre chaque deux éléments.

Soit  $G_i(x_1, x_2)$  et  $G_j(x_1, x_2)$  les équations d'états limites de deux composants  $i$  et  $j$ . Le coefficient de corrélation entre les deux composants peut être calculé par la formule suivante :

$$\rho_{ij} = \frac{\text{cov}_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{(G_i(t) - m_{G_i})(G_j(t) - m_{G_j})}{n}}{\sigma_{G_i} \sigma_{G_j}} \quad (93)$$

avec  $\text{cov}_{ij}$  la covariance entre les deux états limites  $m_{G_i}$  et  $m_{G_j}$  les moyennes de  $G_i$  et  $G_j$  respectivement,  $\sigma_{G_i}$  et  $\sigma_{G_j}$  sont les écarts-types de  $G_i$  et  $G_j$  respectivement,  $n$  est le nombre de tirages des variables aléatoires.

### 3.2.2 Probabilité de défaillance d'un système multi-composant

Après avoir déterminé les indices de fiabilité des composants et les coefficients de corrélation entre chaque paire d'éléments, nous pouvons calculer la probabilité de défaillance de la structure entière.

Le système est composé de  $n$  éléments dont  $\{\beta\}$  est le vecteur des indices de fiabilité et  $[\rho]$  est la matrice de corrélation composée des coefficients de corrélation entre les éléments du système.

Pour déterminer la probabilité de défaillance de ce système, nous appliquons la méthode d'intégration multi-normale expliquée dans (J. Chun 2015) et (Won-Hee Kang 2010) et représentée par la figure 35 ci-dessous.

La fonction multi-normale est de la forme :

$$\varphi_n(\{\hat{T}\}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det[\rho]}} \exp\left(-\frac{1}{2} \{\hat{T}\}^t [\rho]^{-1} \{\hat{T}\}\right) \quad (94)$$

où  $\{\hat{T}\}$  est le vecteur des indices de fiabilité

L'intégration multi-normale de cette fonction est :

$$\Phi_n(\{\beta\}) = \int_{-\infty}^{\beta_1} \int_{-\infty}^{\beta_2} \int_{-\infty}^{\beta_3} \dots \int_{-\infty}^{\beta_n} \varphi_n(\{\hat{T}\}) dt_1 dt_2 dt_3 \dots dt_n \quad (95)$$

Pour résoudre cette équation, l'intégrale peut être simplifiée en la transformant en une suite d'intégrales bi-normales. Pour calculer  $\Phi_n$ , on applique la méthode proposée par Won-Hee Kang et Junho Song (Won-Hee Kang 2010) en utilisant les formulations de la fiabilité conditionnelle et l'intégration bi-normale.

Tout d'abord, nous choisissons deux composants, numérotés 1 et 2, de la structure. Nous calculons leurs probabilités de défaillance  $P_{f_1}$  et  $P_{f_2}$  et nous déduisons les indices de fiabilité  $\beta_1$  et  $\beta_2$ . Ensuite nous déterminons le coefficient de corrélation  $\rho_{12}$  entre ces deux composants.

Nous utilisons ces données pour calculer la probabilité de défaillance  $P_{f_{12}}$  du sous-système composé de l'assemblage de ces deux composants. Pour obtenir  $P_{f_{12}}$ , nous appliquons la méthode d'intégration bi-normales expliquée ci-dessous et nous déduisons l'indice de fiabilité  $\beta_{12}$  du sous-système.

De son tour, ce sous-système caractérisé par  $\beta_{12}$  est à réassembler avec un troisième composant choisi arbitrairement, numéroté 3, de probabilité de défaillance  $P_{f_3}$  et d'indice de fiabilité  $\beta_3$ .

Afin de déterminer le coefficient de corrélation entre le composant 3 et le sous-système 1-2, nous devons suivre la démarche suivante :

1. calculer les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} A = \frac{\varphi(-\beta_3)}{\phi(-\beta_3)} \\ B = A(A - \beta_3) \end{cases} \quad (96)$$

où  $\varphi(x)$  est la fonction de densité de la loi normale centrée réduite et  $\phi$  sa fonction de répartition.

2. déterminer les indices de fiabilité conditionnelle :

$$\begin{cases} \beta_{1|3} = \frac{\beta_1 - \rho_{13}A}{\sqrt{1 - \rho_{13}^2 B}} \\ \beta_{2|3} = \frac{\beta_2 - \rho_{23}A}{\sqrt{1 - \rho_{23}^2 B}} \end{cases} \quad (97)$$

3. calculer la corrélation :

$$\rho_{12,3} = (\rho_{12} - \rho_{13}\rho_{23}B) / \sqrt{(1 - \rho_{23}^2 B)(1 - \rho_{13}^2 B)} \quad (98)$$

4. calculer l'indice suivant :

$$\beta_{12|3} = -\phi^{-1} \left( \phi_2(-\beta_{1|3}, -\beta_{2|3}; \rho_{12|3}) \right) \quad (99)$$

5. déduire l'indice de fiabilité de la formule suivante:

$$\beta_{12|3} = \frac{\beta_{12} - \rho_{12,3}A}{\sqrt{1 - \rho_{12,3}^2 B}} \quad (100)$$

Nous calculons la probabilité de défaillance  $P_{f_{123}}$  du sous-système composé du sous-système 1,2 et du composant 3 et nous déduisons l'indice de fiabilité  $\beta_{123}$  de ce nouveau sous-système.

Puis nous continuons de la même manière jusqu'à l'arrivée au système équivalent bi-composant dont nous déterminons sa probabilité de défaillance  $P_{fs}$  par l'intégration bi-normale.

### 3.2.2.1 Probabilité de défaillance d'un système à deux composants

Pour un système composé de deux éléments dont les indices de fiabilité sont  $\beta_1, \beta_2$  et le coefficient de corrélation est  $\rho_{12}$ , la probabilité de défaillance est obtenue par la méthode d'intégration bi-normale représentée par la figure 34. La fonction bi-normale est :

$$\varphi(t_1, t_2; \rho_{12}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_{12}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho_{12}^2)} X(t_1^2 + t_2^2 - 2t_1t_2\rho_{12})\right) \quad (101)$$

L'intégration double de cette fonction est :

$$\Phi_2(\beta_1, \beta_2; \rho_{12}) = \int_{-\infty}^{\beta_1} \int_{-\infty}^{\beta_2} \varphi(t_1, t_2; \rho_{12}) dt_1 dt_2 \quad (102)$$

Cette intégration est simplifiée sous la forme :

$$\Phi_2(\beta_1, \beta_2; \rho_{12}) = \Phi(\beta_1)\Phi(\beta_2) + \begin{cases} \int_0^{\rho_{12}} \varphi(\beta_1, \beta_2; t) dt & \rho_{12} > 0 \\ - \int_{\rho_{12}}^0 \varphi(\beta_1, \beta_2; t) dt & \rho_{12} < 0 \end{cases} \quad (103)$$

Ainsi, la probabilité de défaillance est déduite par :

$$P_f = \begin{cases} P(U) = 1 - \Phi_2(\beta_1, \beta_2; \rho_{12}) & \text{Système en série} \\ P(\cap) = \Phi_2(-\beta_1, -\beta_2; \rho_{12}) & \text{Système parallèle} \end{cases} \quad (104)$$

Il est à noter que la structure à barres isostatique est un système en série.

L'indice de fiabilité du système bi-composant est :

$$\beta_{12} = -\Phi^{-1}(P_f) \quad (105)$$

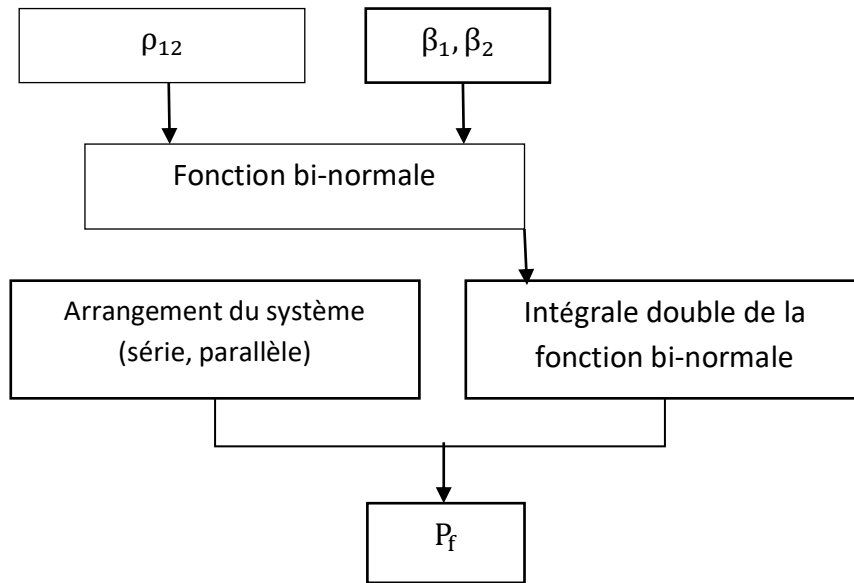


Figure 34: Méthode d'intégration bi-normale.

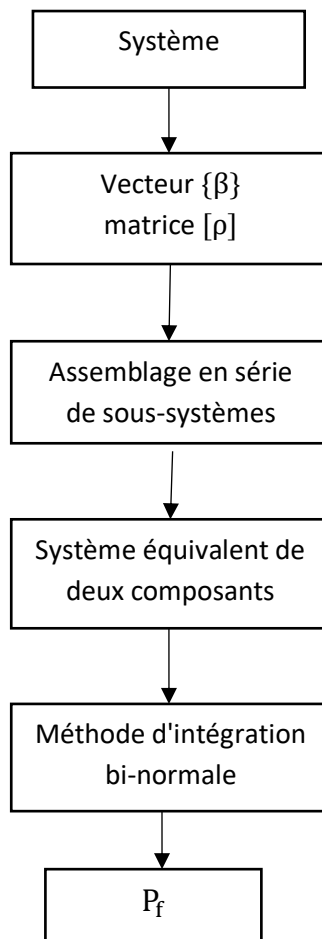


Figure 35: Méthode d'intégration multi-normale

### 3.3 Optimisation topologique des structures à barres

L'objectif est d'optimiser la structure pour minimiser son poids sous des limitations d'optimisation. Pour cela, nous utilisons la méthode de la structure de base, qui consiste à enlever les barres et les nœuds inutiles, selon la fonction objectif et les contraintes d'optimisation.

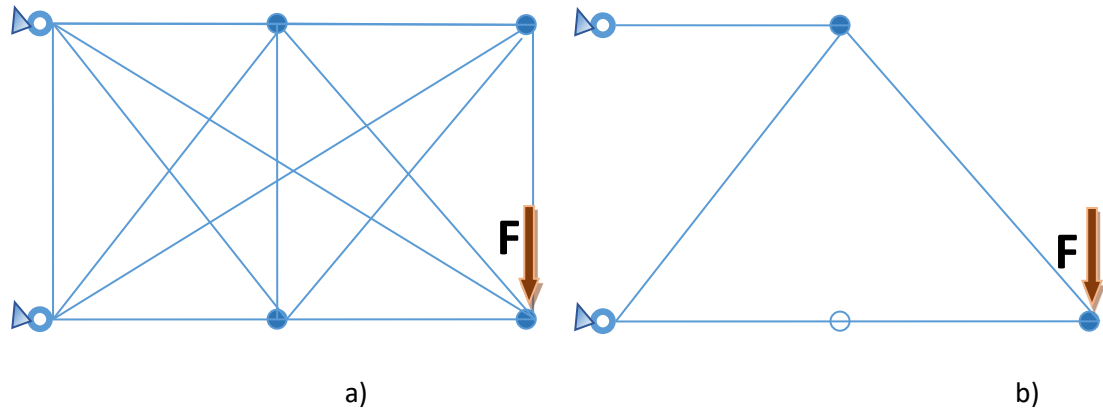


Figure 36: structure à barres : a) structure de base b) forme optimale.

Le problème d'optimisation topologique est exprimé par un problème d'optimisation numérique sous contraintes d'inégalité. La figure 37 illustre la démarche d'optimisation.

La fonction objectif, que nous voulons minimiser est égale le volume total du treillis. Soit  $x_i$  le volume de la barre  $i$ , avec  $i = 1, \dots, n$ ,  $n$  est le nombre d'éléments, le volume de la structure s'écrit :

$$V = \sum_{i=1}^n x_i \quad (106)$$

Les limitations d'optimisation (i.e. contraintes) sont les suivantes :

- Equilibre de la structure

Pour déterminer les déplacements, nous devons analyser la structure en appliquant la méthode de la matrice de rigidité (CASE 1999).

L'équation d'équilibre est écrite sous la forme d'un système matriciel permettant de déterminer les déplacements dans le repère global.

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\} \quad (107)$$

avec  $\{F\}$  le vecteur des charges appliqués,  $\{U\}$  le vecteur des déplacements des nœuds dans le repère global et  $[K]$  la matrice de rigidité globale.

A partir du vecteur  $\{U\}$ , on calcule la déformation  $\delta_i$ , la force  $F_i$  et la contrainte mécanique  $\sigma_i = \frac{F_i}{S_i}$  pour chaque barre  $i$ ,  $i=1..n$  avec  $S_i$  la section de la barre  $i$ .



- Contrainte sur la compliance mécanique

La compliance est l'énergie de déformation élastique ; elle s'écrit sous la forme :

$$C = \frac{1}{2} \{F\}^T \cdot \{U\} \quad (108)$$

Cette énergie est limitée par une borne supérieure de la compliance  $C_0$

$$\{F\}^T \cdot \{U\} \leq 2C_0 \quad (109)$$

- Longueur des barres

Cette contrainte est prise en compte pour éviter les barres trop longues. Elle est exprimée par une relation d'inégalité :

$$L_i \leq L_{\max}, i=1 \dots n \quad (110)$$

avec  $L_i$  la longueur de barre  $i$  et  $L_{\max}$  longueur maximale des barres.

- Condition de volume positif

Le volume de chaque barre doit être positif, toutes les barres de volume nul seront enlevées de la structure

$$x_i \geq 0 \quad (111)$$

Ainsi, le problème d'optimisation devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \left( \sum_1^n x_i \right) \\ \text{sous} \left\{ \begin{array}{l} [K] \cdot \{U\} = \{F\} \\ \{F\}^T \cdot \{U\} \leq 2C_0 \\ L_i \leq L_{\max} \\ x_i \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (112)$$

### 3.3.1 Méthode de résolution

Pour résoudre le problème d'optimisation, on applique la méthode d'optimisation non linéaire non convexe basée sur les matrices semi-définies positives. Ce problème est considéré comme une inégalité matricielle linéaire LMI.

Le code FMINSQP développé par Carl-Johan Thore (Thore 2016) utilise la fonction `fmin(.)` de la boîte à outils d'optimisation du logiciel MATLAB. Les barres du volume nul ou qui ne respectent pas les limitations d'optimisation seront supprimées de la structure. On obtient la forme finale du treillis qui nous donne les valeurs optimales de dimensionnement des barres.

La fonction `fmin(.)` utilisée pour la résolution du problème de minimisation applique la méthode de Cholesky. Cette méthode transforme les contraintes matricielles d'inégalité en des

contraintes scalaires d'égalités, en décomposant la matrice semi-définie positive en matrice triangulaire inférieure.

Algorithme d'optimisation topologique :

L'optimisation topologique des structures à barres par la méthode de la structure de base suit la démarche suivante :

1. Construire la structure de base (i.e. ground structure) et déterminer son volume initial.
2. Effectuer l'analyse mécanique et déterminer la compliance de la structure.
3. Examiner les conditions sur les limitations du problème.
4. Supprimer les éléments de volume nul et dimensionner les autres sections selon les conditions d'optimisation.
5. Répéter les étapes 2, 3 et 4 jusqu'à la satisfaction des conditions d'arrêt.

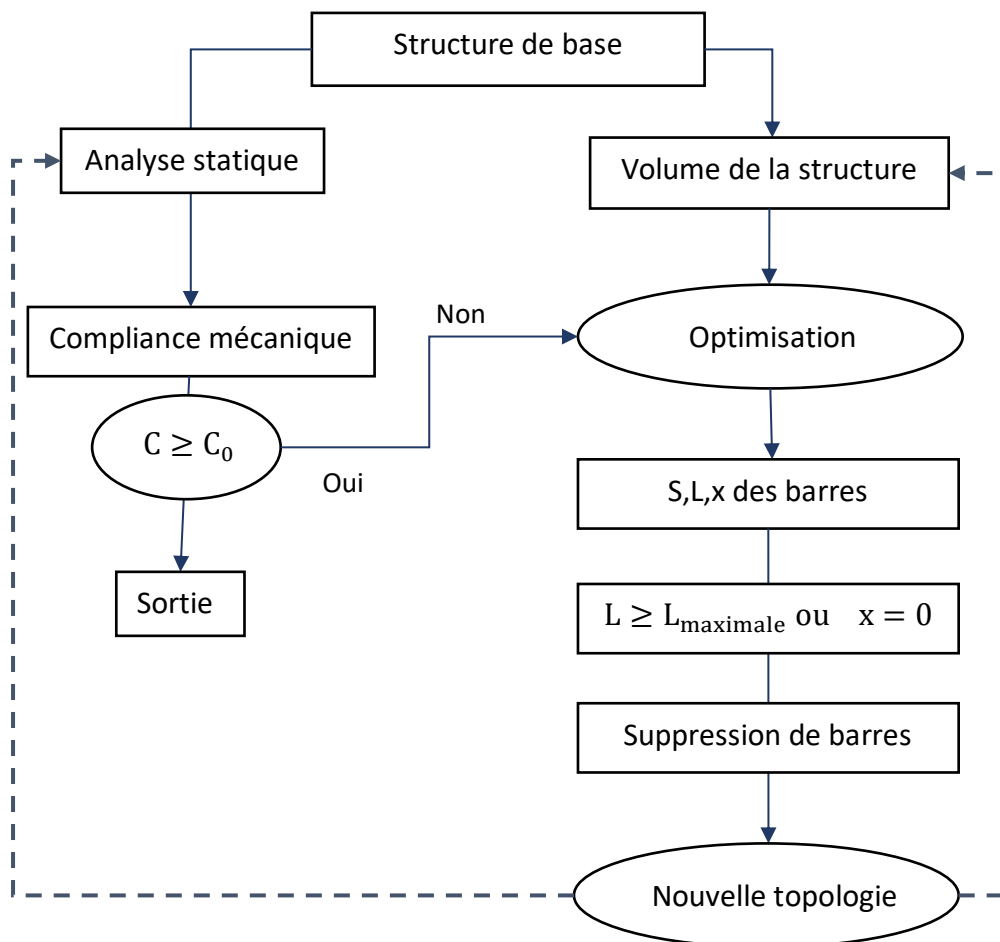


Figure 37: optimisation topologique des treillis

### 3.4 Structure à trois barres

Considérons une structure composée de trois barres, représentée sur la figure 38, sur laquelle nous appliquons une charge cyclique aléatoire. L'objectif est de calculer la probabilité de défaillance de chaque barre et par la suite de la structure soumise à la fatigue.

Nous définissons les paramètres géométriques et mécaniques de la structure qui influent sur la durée de la vie et par la suite sur la probabilité de défaillance du système. La probabilité de défaillance  $P_f$  est sensible à la modification de chaque paramètre.

Les informations géométriques de la structure sont données dans le tableau 2 et la figure 38.

Tableau 2: Informations géométriques de la structure

	Barre 1	Barre 2	Barre 3
Section	$S_1$	$S_2$	$S_3$
Longueur	$l_1$	$l_2$	$l_3$
Angle d'orientation avec l'horizontale	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$

La charge cyclique appliquée sur la structure est d'amplitude aléatoire  $F$  de distribution log-normale, de moyenne  $m_F$  et d'écart-type  $\sigma_F$ . Elle est orientée d'un angle  $\alpha$  avec l'axe horizontal. La matière des trois barres est l'acier de module de Young  $E = 210 \text{ GPa}$  et de coefficient de Poisson  $\mu = 0,3$ .

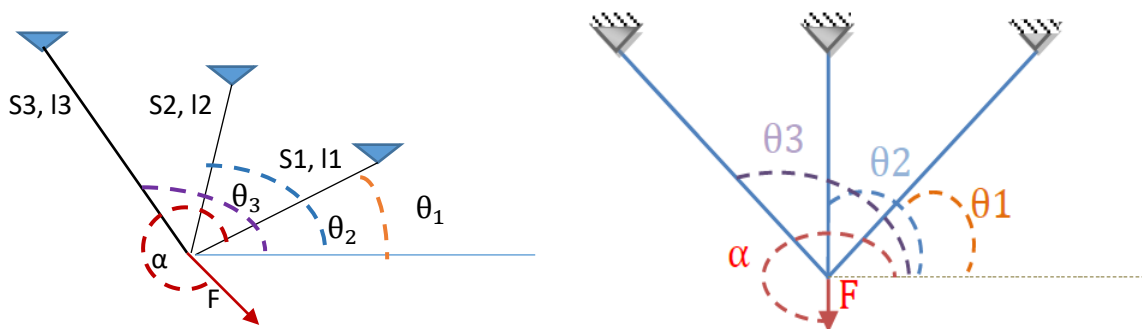


Figure 38: Structure à trois barres : a) forme générale

b) structure étudiée

Les sections des barres sont des variables aléatoires de distribution log-normale, dont les moyennes sont  $m_{S1} = 1,5 \times 10^{-5} m^2$ ,  $m_{S2} = 2 \times 10^{-5} m^2$  et  $m_{S3} = 10^{-5} m^2$  et les écarts-types sont  $\sigma_{S1}$ ,  $\sigma_{S2}$  et  $\sigma_{S3}$  respectivement.

L'étude commence par le calcul mécanique afin de déterminer les déplacements, la matrice de rigidité, les forces dans les barres ( $F_1, F_2, F_3$ ) et les contraintes associés ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ).

Les équations d'équilibre des forces, en négligeant le poids propre des barres, sont :

$$\begin{cases} -F\cos(\alpha) = F_1 \cos(\theta_1) + F_2 \cos(\theta_2) + F_3 \cos(\theta_3) \\ -F\sin(\alpha) = F_1 \sin(\theta_1) + F_2 \sin(\theta_2) + F_3 \sin(\theta_3) \end{cases} \quad (113)$$

Comme le système est statiquement indéterminé, nous introduisons l'équation du comportement du matériau, i.e. loi de Hooke, pour calculer les forces.  $K_i, \delta_i$  sont respectivement la raideur et la déformation de la barre  $i$ , avec  $i = 1 \dots 3$ .

$$\begin{cases} K_i = \frac{ES_i}{l_i} \\ F_i = K_i \delta_i \end{cases} \quad (114)$$

avec  $K_i$  la raideur de la barre  $i$  et  $\delta_i$  son déplacement axial, avec  $i = 1, 2, 3$ .

Le vecteur du déplacement axial de la barre  $i$  s'exprime en fonction du vecteur déplacement  $(u, v)$  du nœud commun :

$$\vec{\delta}_i = u \cos(\theta_i) \vec{i} + v \sin(\theta_i) \vec{j} \quad (115)$$

Ainsi, nous pouvons relier la force appliquée aux déplacements dans le système global  $u$  et  $v$  par la matrice de rigidité de la structure  $K$  :

$$\begin{cases} K = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ a = K_1 \cos(\theta_1)^2 + K_2 \cos(\theta_2)^2 + K_3 \cos(\theta_3)^2 \\ b = K_1 \cos(\theta_1) \sin(\theta_1) + K_2 \cos(\theta_2) \sin(\theta_2) + K_3 \cos(\theta_3) \sin(\theta_3) \\ c = K_1 \cos(\theta_1) \sin(\theta_1) + K_2 \cos(\theta_2) \sin(\theta_2) + K_3 \cos(\theta_3) \sin(\theta_3) \\ d = K_1 \sin(\theta_1)^2 + K_2 \sin(\theta_2)^2 + K_3 \sin(\theta_3)^2 \end{cases} \quad (116)$$

Le système matriciel d'équilibre s'écrit donc :

$$\begin{Bmatrix} -F\cos(\alpha) \\ -F\sin(\alpha) \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (117)$$

Nous en déduisons les contraintes dans les barres par :

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{S_1}, \sigma_2 = \frac{F_2}{S_2}, \sigma_3 = \frac{F_3}{S_3} \quad (118)$$

Pour obtenir la durée de vie  $N_i$  de chaque élément, nous utilisons l'équation 87 du chapitre 2. Pour les barres en traction, l'étendue de variation de la contrainte est :

$$\Delta S_i = 2|\sigma_i| \quad (119)$$

Étant donné que les surfaces des barres et la force appliquée sont des variables aléatoires de distribution log-normale, les contraintes dans les barres et les étendues de variation des contraintes sont aussi des variables aléatoires. En conséquence, nous pouvons déduire la distribution log-normale de  $N_i$ , de moyenne  $m_{N_i}$  et d'écart-type  $\sigma_{N_i}$ .

Nous supposons que le nombre de cycles appliqué  $N_a$  est de la forme :

$$Na = \tau \min(m_{N1}, m_{N2}, m_{N3}) \quad (120)$$

où  $\tau$  est un multiplicateur, ( $0 \leq \tau \leq 1$ ).

Nous calculons les probabilités de défaillance des barres  $P_{f1}$ ,  $P_{f2}$  et  $P_{f3}$ , et nous déterminons la probabilité de défaillance de la structure en appliquant la méthode d'intégration multi-normale pour un système en série.

$$P_f = Pr(\cup G_i \leq 0) = 1 - \phi_n(\{\beta\}) \quad (121)$$

L'objectif de cette application est d'étudier l'effet de la dispersion des variables aléatoires sur le coût de maintenance, en considérant deux politiques :

**Politique1** : remplacement de tout le système à l'instant de maintenance

Dans ce cas la probabilité de défaillance est calculée par la formule 121 pour le système de 3 barres.

**Politique2** : remplacement, à l'instant de maintenance, de la barre la moins fiable (deuxième barre)

Posons  $N_{opti}$  le nombre de cycles appliqué à l'instant de maintenance. La durée de vie de la barre 2 est décalée par  $N_{opti}$  et les durées de vie des barres 1 et 3 restent les mêmes.

$$\begin{cases} N1_2 = N1 \\ N2_2 = N2 + N_{opti} \\ N3_2 = N3 \end{cases} \quad (122)$$

où l'indice « 2 » indique la deuxième période, après la maintenance.

Etude paramétrique du coefficient de variation de la force :

Nous admettons que l'écart-type de la force appliquée est relié à sa moyenne par la relation :

$$\sigma_F = CVF * m_F \quad (123)$$

Le coefficient de variation de la force CVF est variable, tandis que les autres écarts-types sont fixes  $\sigma_{S1} = \sigma_{S2} = \sigma_{S3} = 10^{-6}m^2$ .

Le tableau 3 montre les relations entre le nombre de cycles appliqué Na et la probabilité de défaillance  $P_f$  dans les cas des politiques 1 et 2.

Le tableau 4 donne des bornes inférieures et supérieures de l'intervalle de confiance du nombre de cycles appliqué, pour les deux politiques de la maintenance.

Tableau 3: courbes  $(Na, P_f)$ , étude de variation de la force.

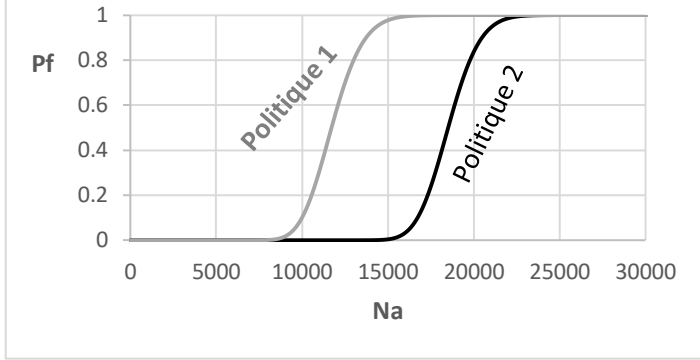
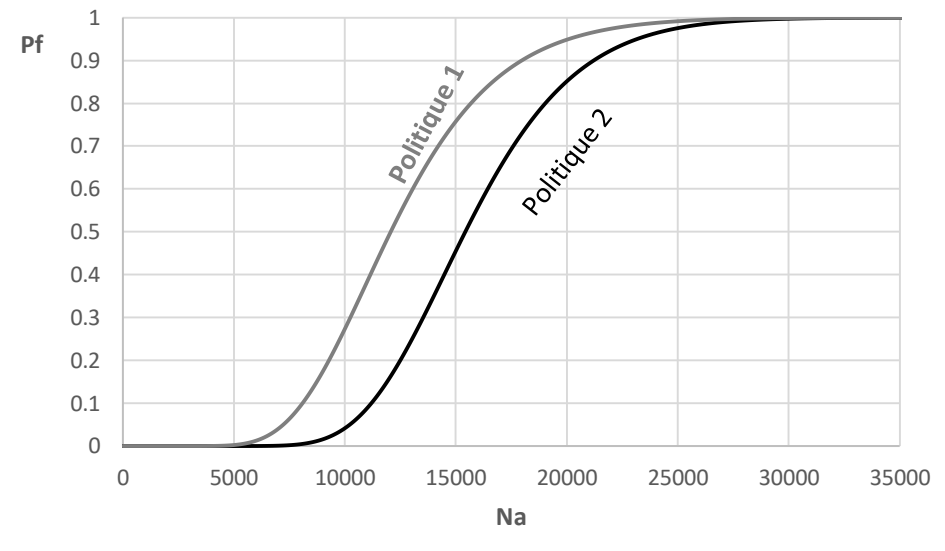
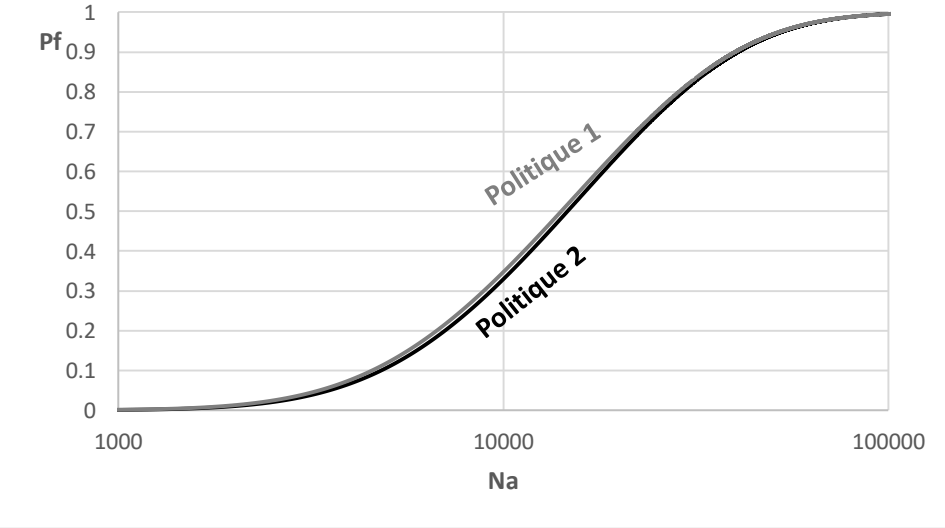
CVF	courbes $(Na, P_f)$
0,01	
0,1	
0,3	

Tableau 4: Intervalle de Na où  $P_f \in [0.05; 0.95]$  cas de la variation de force.

		Intervalle de Na où $P_f \in [0.05; 0.95]$	
		Politique 1	Politique 2
CVF	0,01	Na $\in$ [9500; 14380]	Na $\in$ [16200; 21000]
	0,1	Na $\in$ [7230; 20000]	Na $\in$ [10230; 23000]
	0,3	Na $\in$ [3340; 52000]	Na $\in$ [3540; 52700]

Etude paramétrique du coefficient de variation de la section  $S_1$

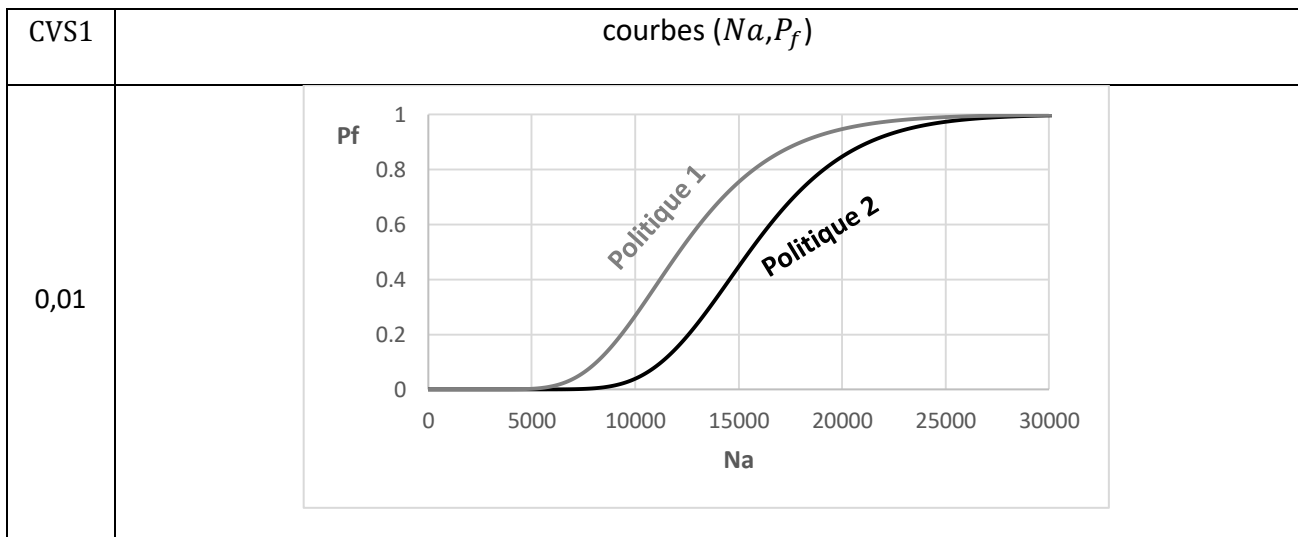
Dans ce cas, l'écart-type de la surface de première barre est relié à sa moyenne par :

$$\sigma_{S1} = CVS1 * m_{S1} \quad (124)$$

Les valeurs des autres écarts-types sont maintenues fixes  $\sigma_{S2} = \sigma_{S3} = 10^{-6} \text{ m}^2$  et  $\sigma_F = 10^2 \text{ N}$ .

Le tableau 5 montre les relations entre le nombre de cycles appliqué Na et la probabilité de défaillance  $P_f$  pour les deux politiques de maintenance. Le tableau 6 donne des bornes inférieures et supérieures de l'intervalle de confiance du nombre de cycles.

Tableau 5: courbes  $(Na, P_f)$ , étude de variation de  $S_1$ .



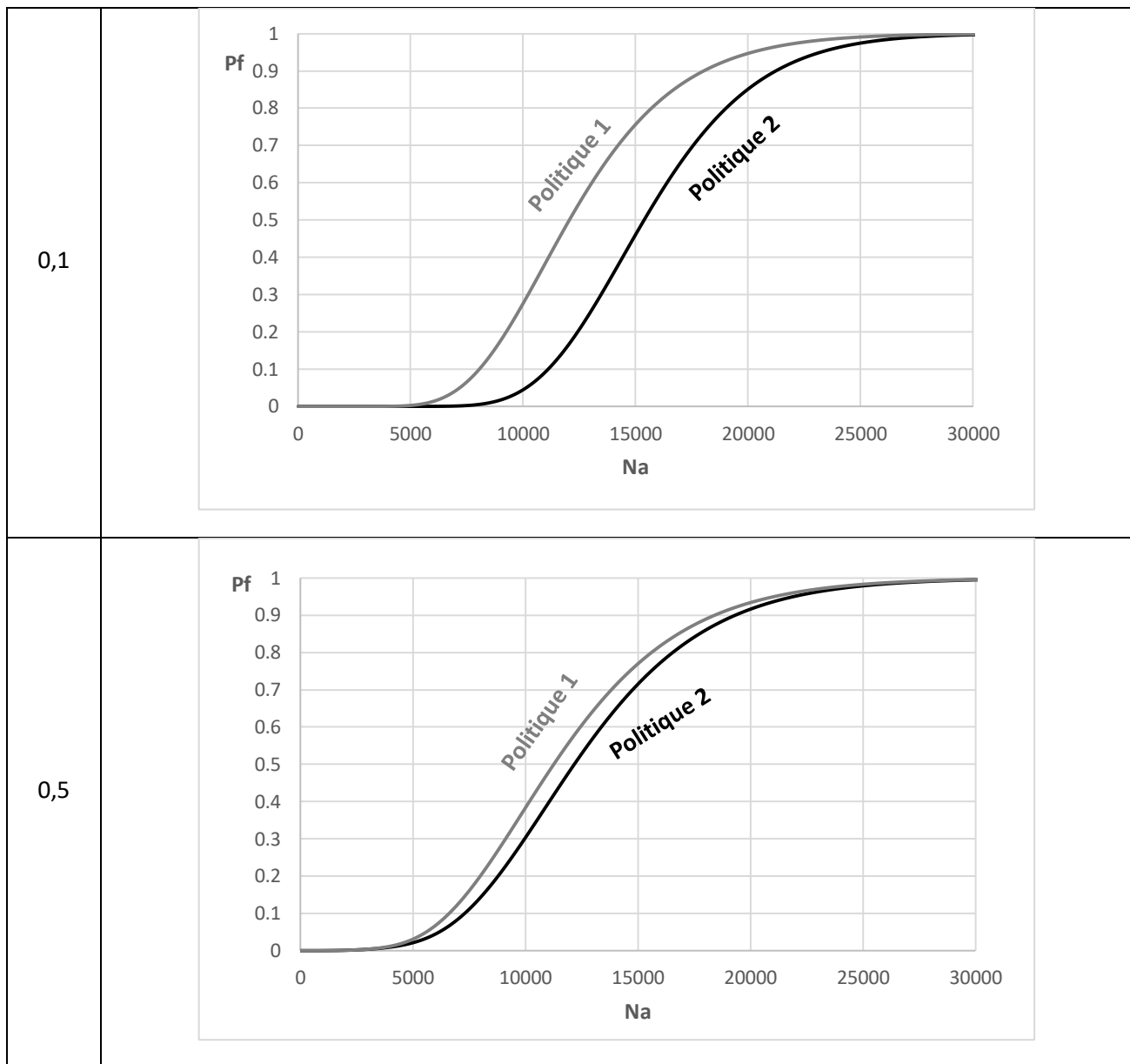


Tableau 6: Intervalle de  $Na$  où  $P_f \in [0,05 ; 0,95]$  cas de la variation de  $S1$ .

		Intervalle de $Na$ où $P_f \in [0.05; 0.95]$	
		Politique 1	Politique 2
CVS1	0,01	$Na \in [7280; 20160]$	$Na \in [10310; 23400]$
	0,1	$Na \in [7190; 20200]$	$Na \in [10190; 24000]$
	0,5	$Na \in [5600; 21060]$	$Na \in [6180; 24930]$



Etude paramétrique du coefficient de variation de la section  $S_2$

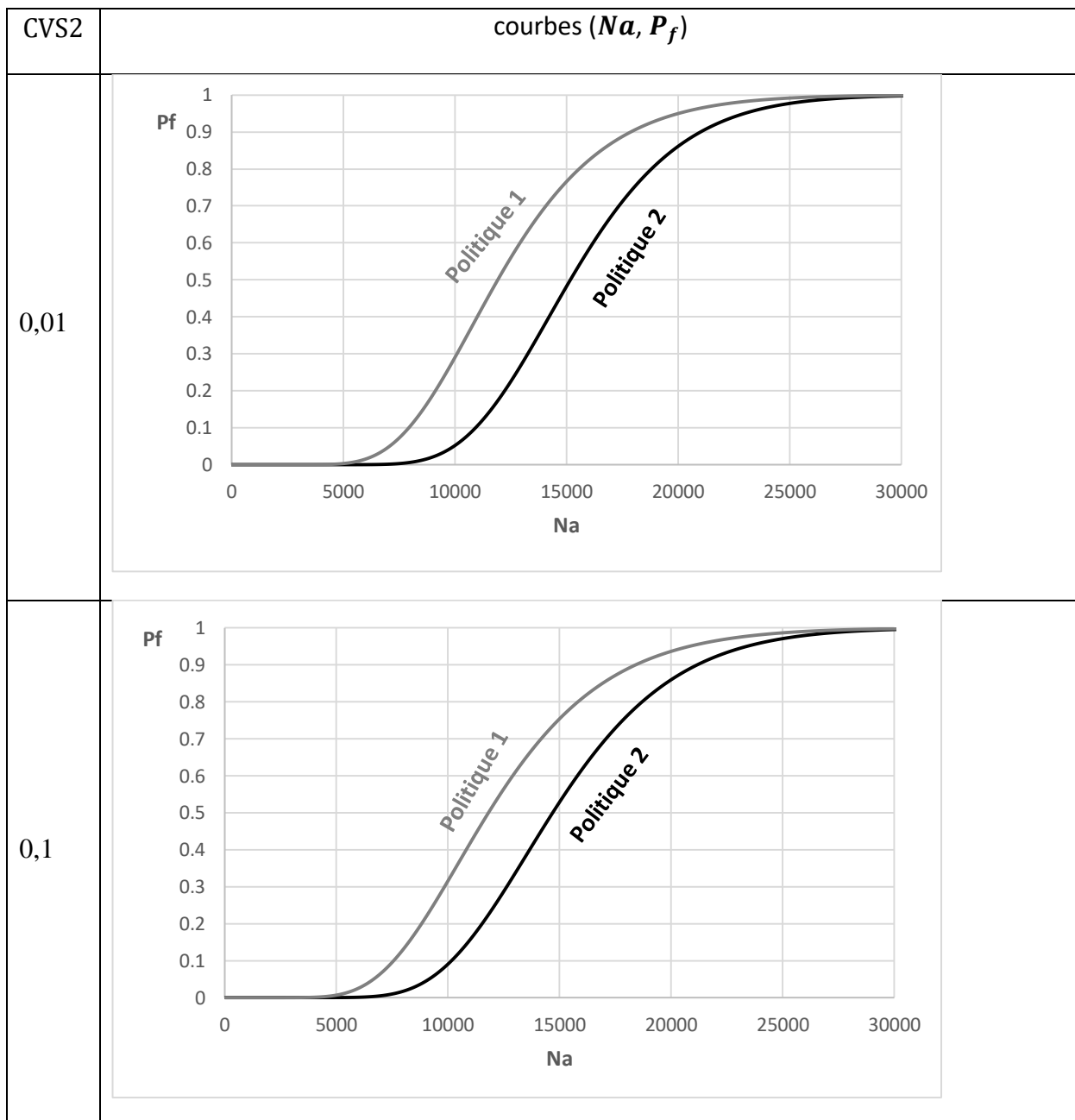
L'écart-type de la surface de deuxième barre est relié à sa moyenne par :

$$\sigma_{S_2} = CVS2 * m_{S_2} \quad (125)$$

Les valeurs des autres écarts-types sont maintenues fixes  $\sigma_{S_1} = \sigma_{S_3} = 10^{-6}m^2, \sigma_F = 10^2N$ .

Les tableaux 7 et 8 donnent les relations entre le nombre de cycles appliqué  $N_a$  et la probabilité de défaillance  $P_f$  ainsi que les intervalles de confiance du nombre de cycles.

Tableau 7: courbes  $(N_a, P_f)$ , étude de variation de  $S_2$ .



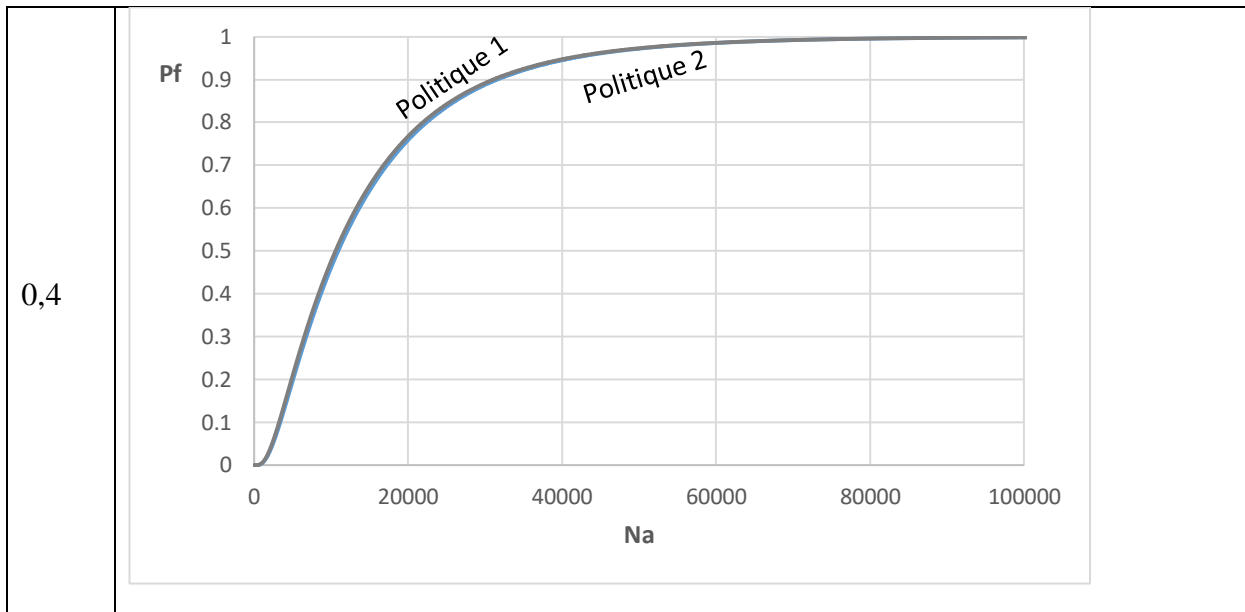


Tableau 8: Intervalle de Na où  $P_f \in [0.05; 0.95]$  cas de la variation de S2.

		Intervalle de Na où $P_f \in [0.05; 0.95]$	
		Politique 1	Politique 2
CVS2	0,01	Na $\in$ [7080; 20000]	Na $\in$ [10000; 22900]
	0,1	Na $\in$ [6670; 20800]	Na $\in$ [9150; 23400]
	0,4	Na $\in$ [2330; 40780]	Na $\in$ [2460; 41330]

### Etude paramétrique du coefficient de variation de la section $S_3$

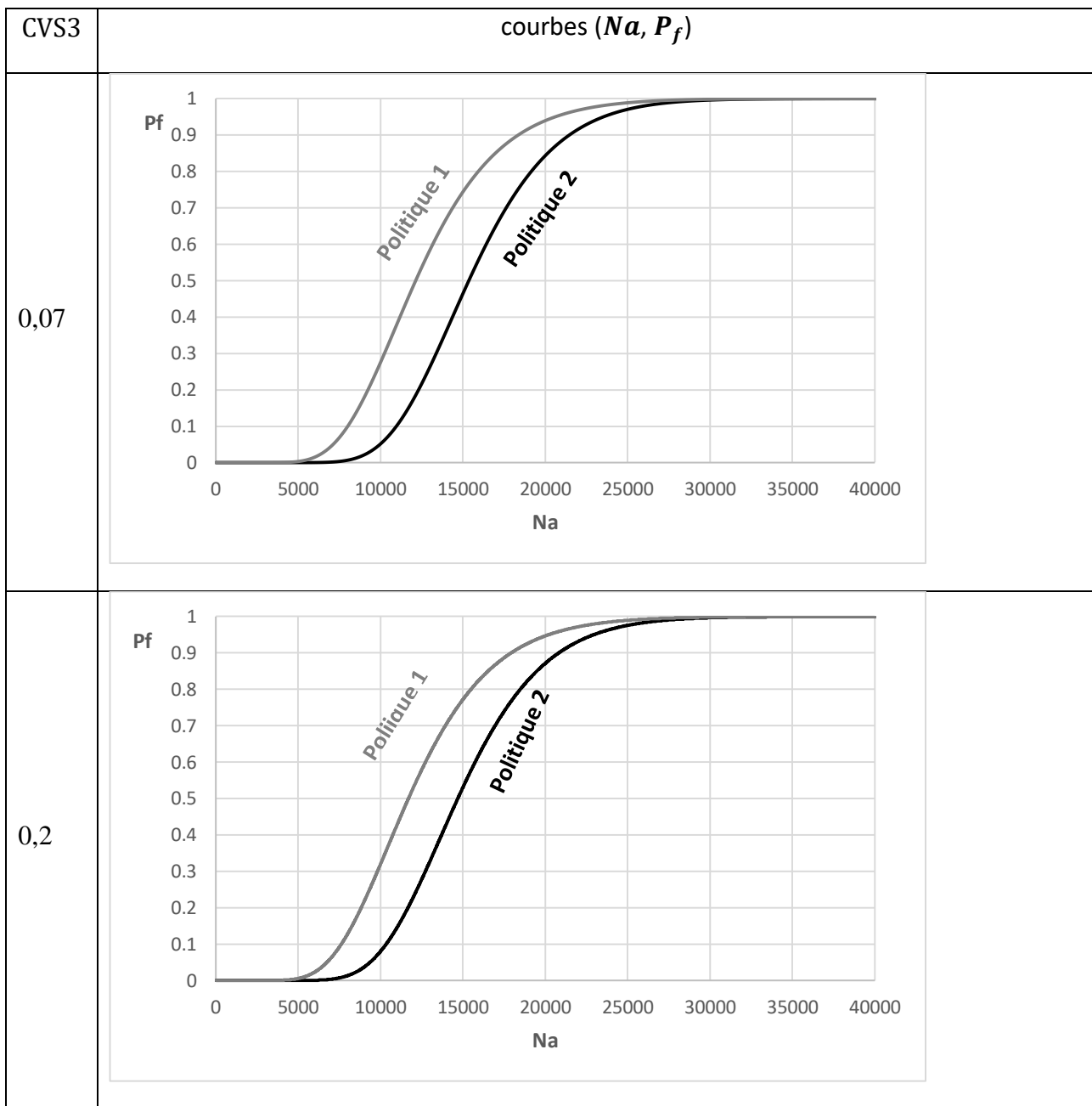
L'écart-type de la surface de troisième barre est relié à sa moyenne par :

$$\sigma_{S3} = CVS3 * m_{S3} \quad (126)$$

Les valeurs des autres écarts-types sont maintenues fixes  $\sigma_{S2} = \sigma_{S1} = 10^{-6}m^2$  et  $\sigma_F = 10^2N$ .

Les tableaux 9 et 10 donnent les relations entre le nombre de cycles appliqué Na et la probabilité de défaillance  $P_f$  ainsi que les intervalles de confiance du nombre de cycles.

Tableau 9: courbes ( $Na$ ,  $P_f$ ), étude de variation de S3.



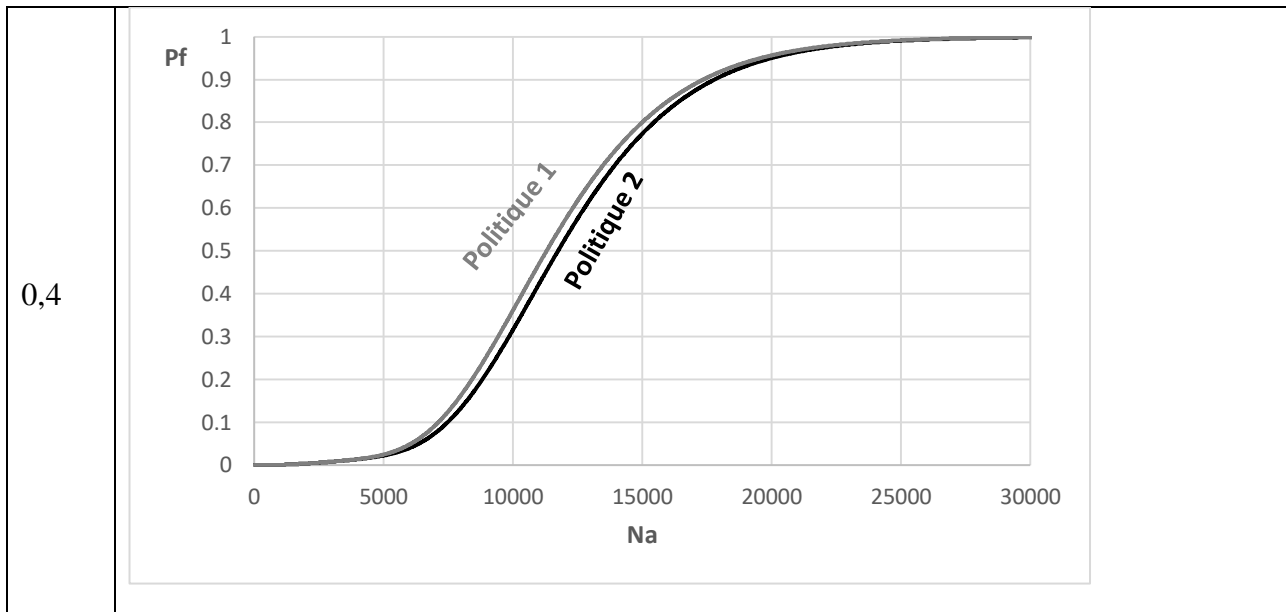


Tableau 10: Intervalle de Na où  $P_f \in [0.05; 0.95]$  cas de la variation de S3.

		Intervalle de Na où $P_f \in [0.05; 0.95]$	
		Politique 1	Politique 2
CVS3	0,07	Na $\in$ [7100; 18360]	Na $\in$ [9900; 23500]
	0,2	Na $\in$ [6750; 20200]	Na $\in$ [9370; 23940]
	0,4	Na $\in$ [6070; 21580]	Na $\in$ [6300; 24700]

Sur les tableaux 3,4 ,5, 6,7,8,9 et 10, nous observons que pour la même valeur du coefficient de variation, dans le cas de la politique 2, la probabilité de défaillance reste petite pour un nombre de cycles plus grand que dans le cas de la politique 1. Aussi, les bornes de l'intervalle de Na dans le cas de la politique 2 sont également plus grandes que celles dans le cas de la politique 1. Ainsi nous déduisons que la durée de vie est améliorée en appliquant la politique 2 car la probabilité de défaillance devient inférieure.

Nous observons aussi que l'intervalle de Na où  $P_f$  appartient à l'intervalle de confiance devient plus étendu quand le coefficient de variation augmente.

### 3.5 Poutre en Treillis

Le treillis illustré sur la figure 39 est fabriqué en acier de module de Young  $E = 210 \text{ GPa}$ , de coefficient de Poisson  $\mu = 0.3$  et de masse volumique  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ . La structure est de longueur  $L = 1 \text{ m}$  et de hauteur  $H = 0.5 \text{ m}$ , la force verticale est  $F = 400 \text{ kN}$ .

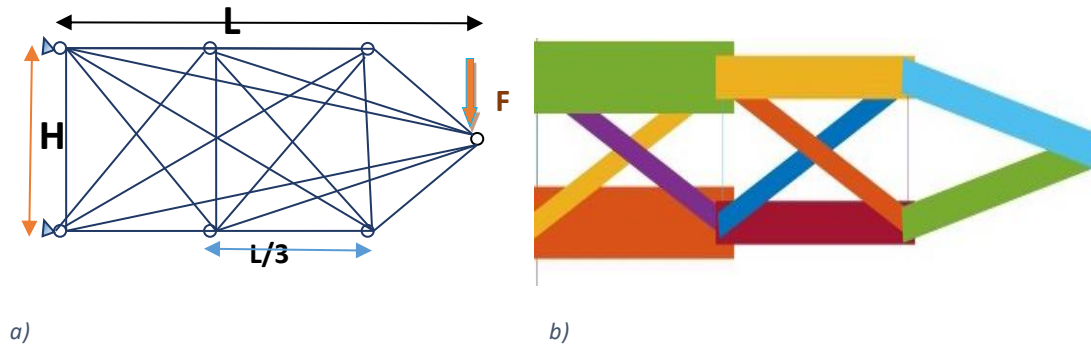


Figure 39: poutre en treillis, a) structure de base, b) forme optimale.

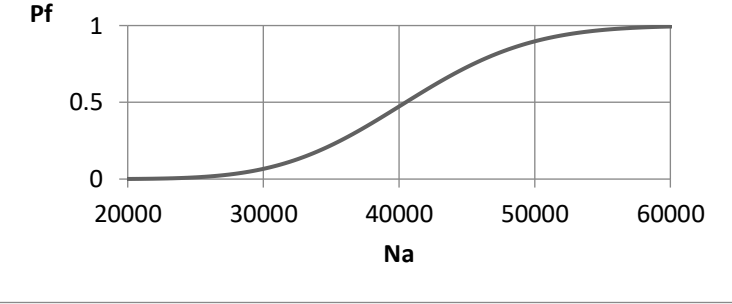
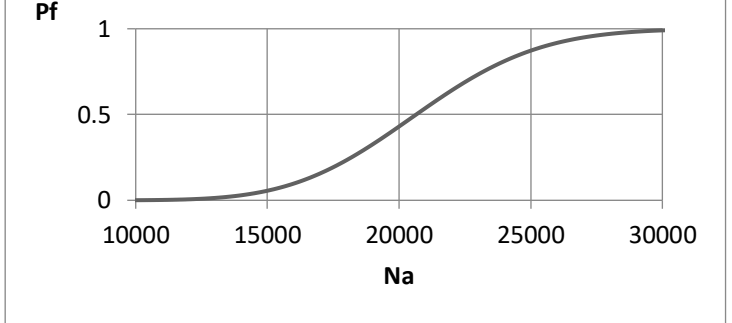
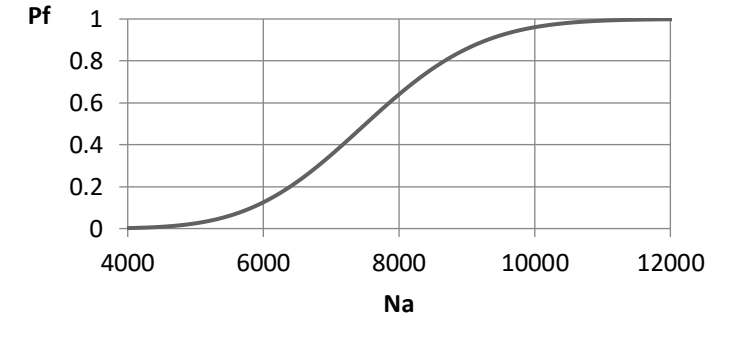
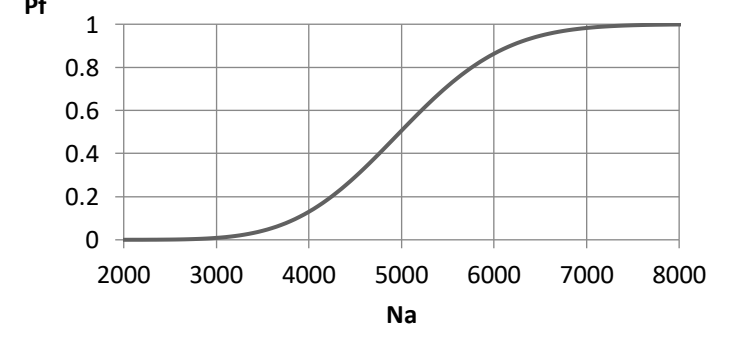
L'optimisation topologique de la structure est effectuée pour différentes valeurs de compliance  $C_0$ .

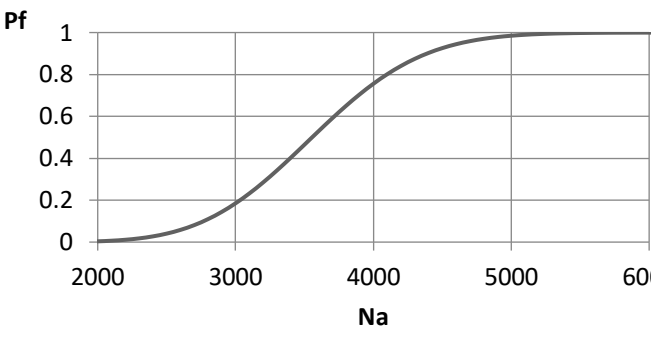
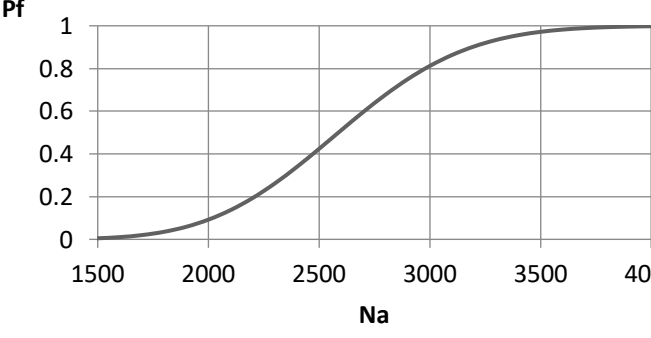
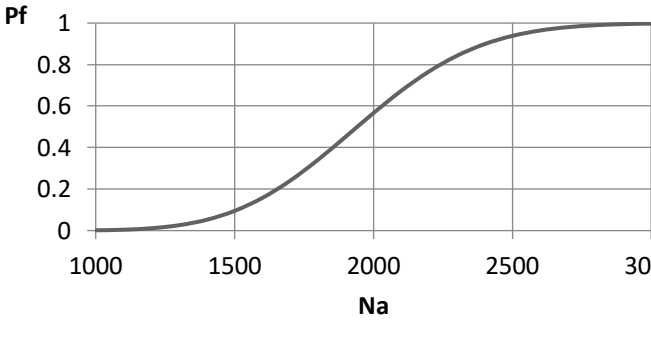
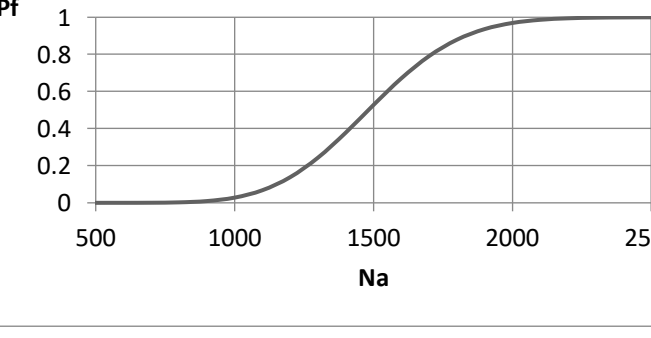
Nous supposons que les forces axiales dans les barres sont des variables aléatoires de distribution log-normale avec un coefficient de variation de 0,1. Le calcul de fatigue nous donne pour chaque barre  $i$  la distribution de  $N_i$ . Pour un nombre de cycles donné, on calcule la probabilité de défaillance du système  $P_f$  et on obtient la relation entre le nombre de cycles appliqué  $N_a$  et  $P_f$  pour la valeur définie de la compliance, étant donné que  $N_a$  est une déterministe dont on fait varier la valeur. On répète les mêmes étapes pour les autres valeurs de  $C_0$  limites.

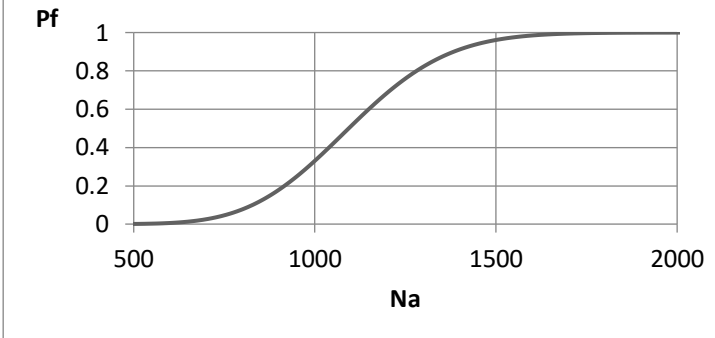
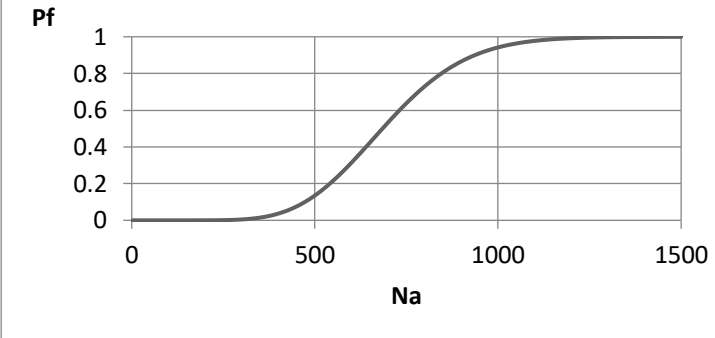
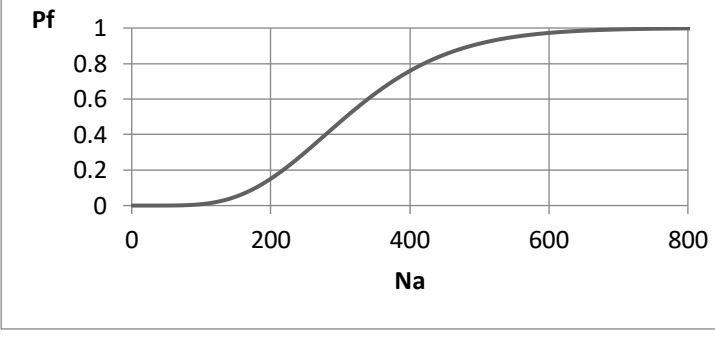
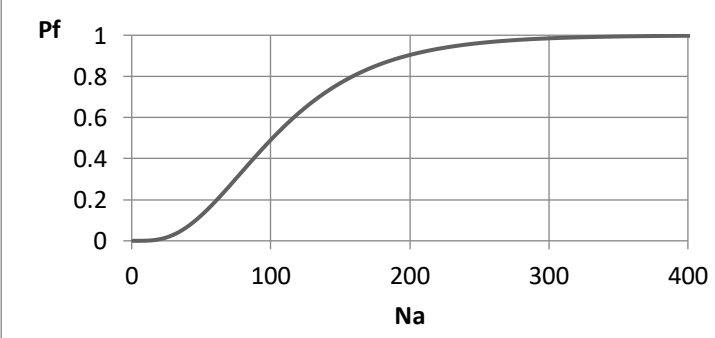
Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau suivant :

Tableau 11: courbes  $(N_a, P_f)$ , poutre en treillis.

C	Courbe de la probabilité de défaillance	Intervalle de $N_a$ où $P_f \in [0.05; 0.95]$
114,2855	<p style="text-align: center;"><math>C=114,2</math></p> <p style="text-align: center;"><math>N_a</math></p>	[50000; 125000]

152,3	<p style="text-align: center;"><b>C=152,3</b></p> 	[29000; 53000]
190,4	<p style="text-align: center;"><b>C=190,4</b></p> 	[14900; 27000]
266,6	<p style="text-align: center;"><b>C=266,6</b></p> 	[5400; 10000]
304,7	<p style="text-align: center;"><b>C=304,7</b></p> 	[3600; 6500]

342,8	<p style="text-align: center;"><b>C=342,8</b></p> 	[2600; 4700]
380,9	<p style="text-align: center;"><b>C=380,9</b></p> 	[1900; 3500]
419	<p style="text-align: center;"><b>C=419</b></p> 	[2000; 2500]
457,1	<p style="text-align: center;"><b>C=457,1</b></p> 	[1000; 1950]

495,2	<p style="text-align: center;"><b>C=495,2</b></p> 	[760; 1400]
533,3	<p style="text-align: center;"><b>C=533,3</b></p> 	[400; 1000]
571,4	<p style="text-align: center;"><b>C=571,4</b></p> 	[150; 550]
609,5	<p style="text-align: center;"><b>C=609,5</b></p> 	[40; 236]



Les graphes du tableau 11 nous permettent d'observer que la variation des bornes supérieure et inférieure de l'intervalle de  $N_a$  diminue quand la compliance augmente. Nous déduisons que la durée de vie de la structure devient plus courte quand la compliance augmente. Ainsi, la probabilité de la défaillance de la structure augmente quand sa compliance mécanique augmente.

### 3.6 Pylône électrique

La figure 40 illustre un pylône électrique en acier. Le vent est représenté par une force cyclique  $F_h$  variant entre 0 et 2 kN, Nous considérons un facteur de sécurité de 1,5. La force verticale est  $F_v = 10$  kN.

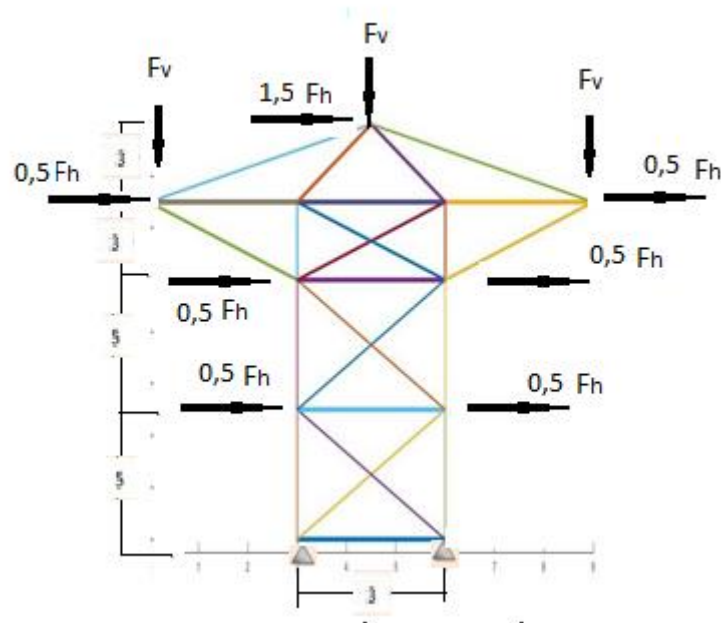


Figure 40: forme optimale de pylône électrique.

La structure subit l'optimisation topologique en supposant que  $F_h = 0$ . Nous calculons ensuite la compliance de la structure optimisée. Le pylône de forme optimale est par suite analysé mécaniquement avec deux niveaux de charge:  $F_h = 0$  et  $F_h = 2$  kN. Pour chaque niveau de charge, nous déterminons la contrainte sur chaque barre. Cette contrainte est supposée aléatoire de distribution log-normale et de coefficient de variation de 0,1.

Pour déterminer l'étendue de variation de la contrainte sur chaque barre, nous avons les trois cas suivants :

- Si la barre  $i$  est tendue dans les deux cas de charge, on obtient :

$$\Delta S_i = |\nabla_{i_1} - \nabla_{i_2}| \quad (127)$$

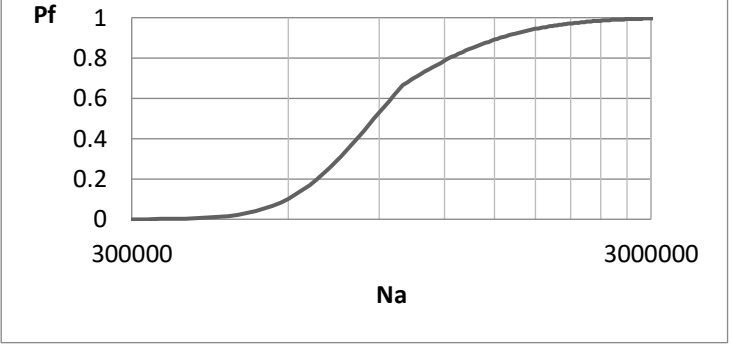
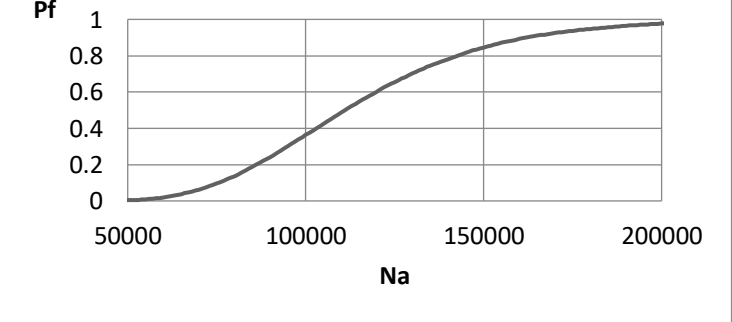
- Si elle est comprimée dans les deux cas, il n'y a pas de fatigue.
- Si elle est tendue dans un cas et comprimée dans l'autre, on obtient :

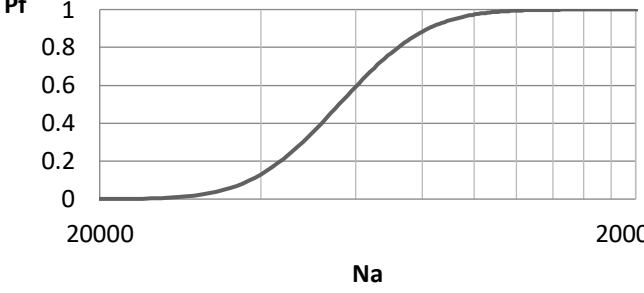
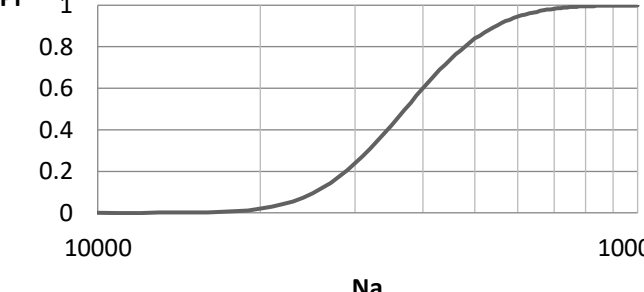
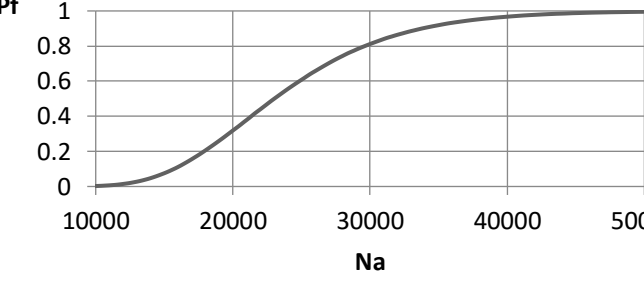
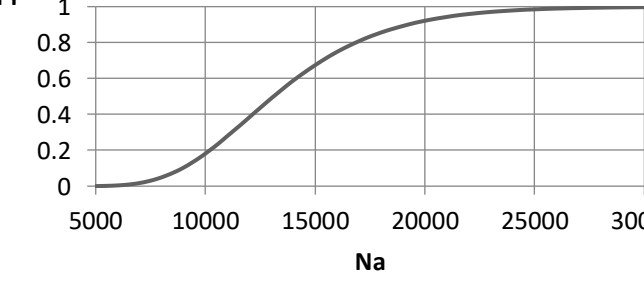
$$\Delta S_i = \frac{|\nabla_{i_1} - \nabla_{i_2}|}{1 - \left(\frac{\nabla_{i_{moyenne}}}{S_{ultime}}\right)} \quad (128)$$

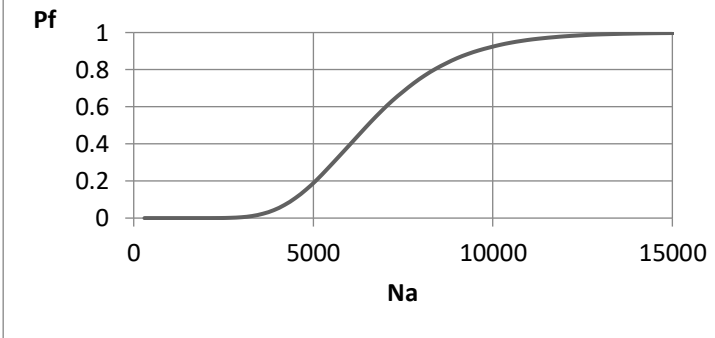
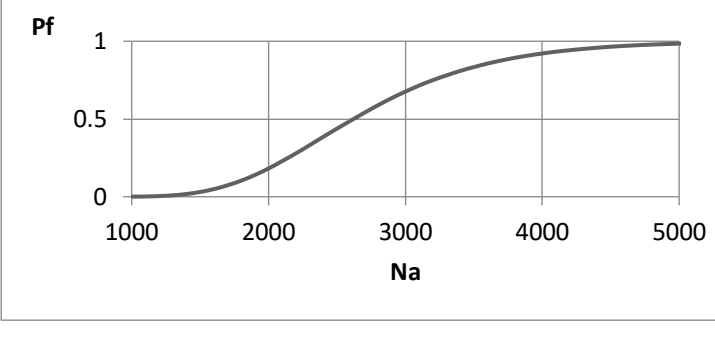
où  $S_{ultime}$  est la contrainte ultime du matériau (400MPa), et  $\nabla_{i_{moyenne}} = \frac{(\nabla_{i_1} + \nabla_{i_2})}{2}$

Ainsi, nous pouvons déterminer la durée de la vie de chaque barre, ce qui nous donne pour chaque barre  $i$  la distribution de  $N_i$ . Pour un nombre de cycles appliqués  $N_a$ , on calcule la probabilité de défaillance du système  $P_f$ . Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Tableau 12: courbes  $(N_a, P_f)$ , Pylône électrique en négligeant l'effet du vent.

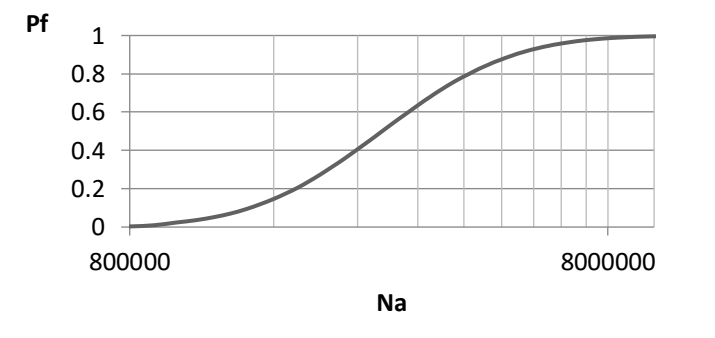
C	Courbe de probabilité de défaillance	Intervalle de $N_a$ où $P_f \in [0.05; 0.95]$
10	<p style="text-align: center;"><b>C=10</b></p> 	[5.4x10 <sup>5</sup> ; 1.86x10 <sup>6</sup> ]
20	<p style="text-align: center;"><b>C=20</b></p> 	[63000; 182000]

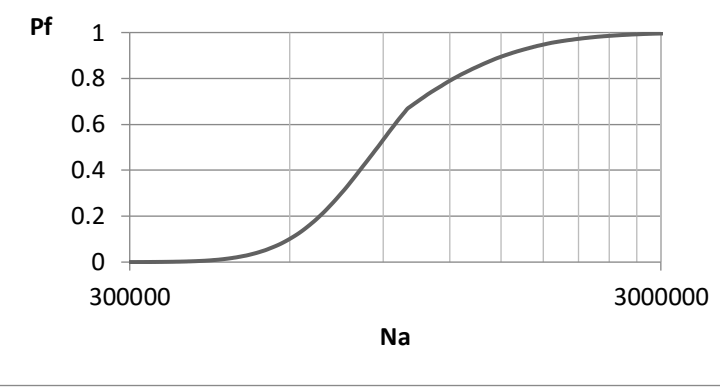
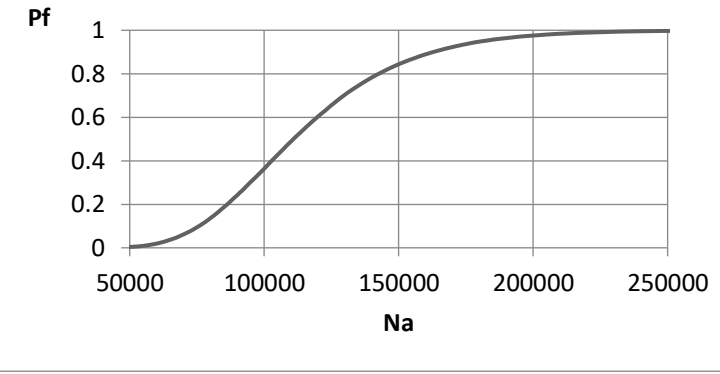
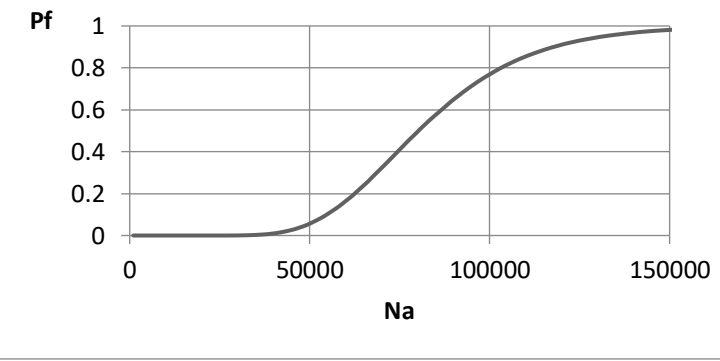
25	<p style="text-align: center;"><b>C=25</b></p> 	[35000; 92000]
28,7	<p style="text-align: center;"><b>C=28,7</b></p> 	[23000; 60000]
33,5	<p style="text-align: center;"><b>C=33,5</b></p> 	[14400; 38000]
40,1	<p style="text-align: center;"><b>C=40,1</b></p> 	[8200; 21400]

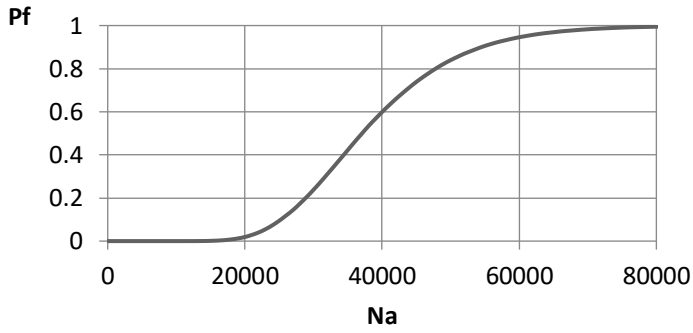
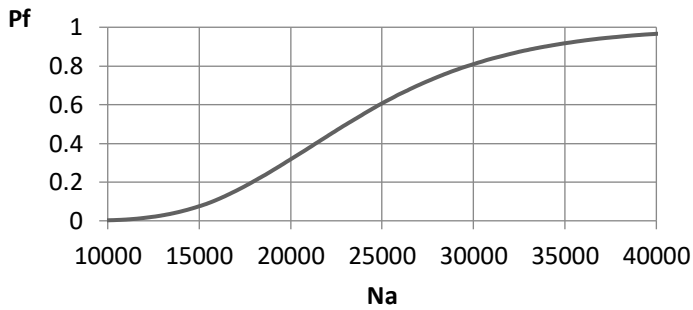
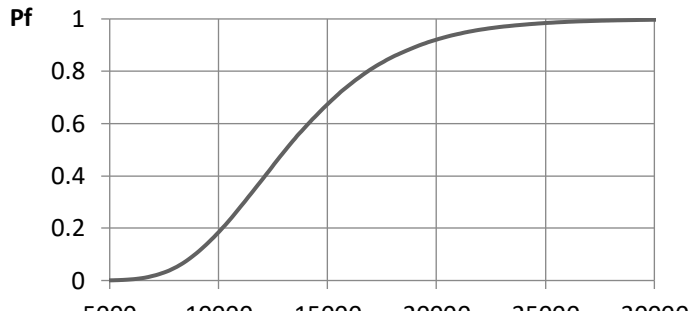
50,2	<p style="text-align: center;"><b>C=50,2</b></p> 	[4000; 11000]
66,9	<p style="text-align: center;"><b>C=66,9</b></p> 	[1600; 4300]

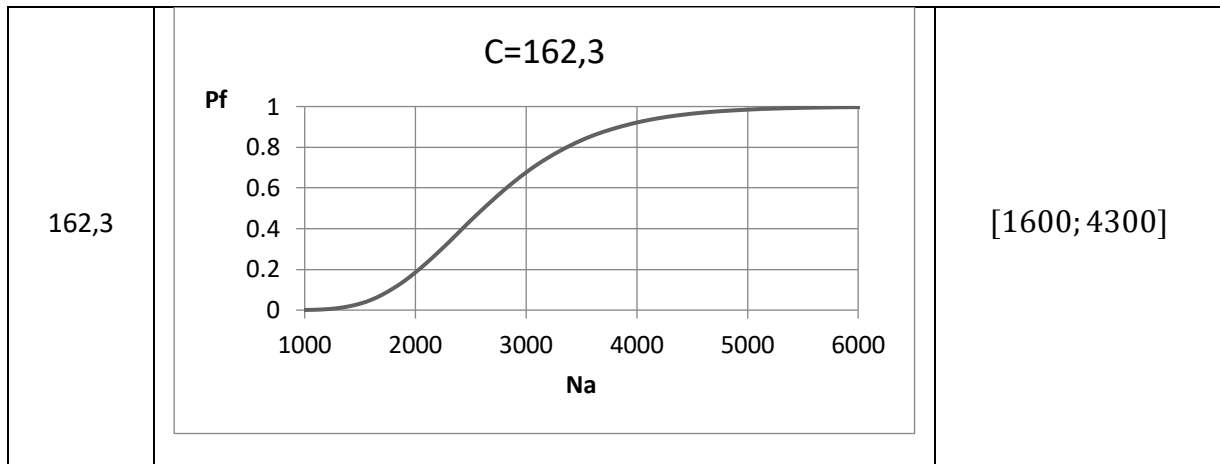
De même nous appliquons la même démarche mais en fixant la valeur de  $F_H = 2 \text{ kN}$  au lieu de 0. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Tableau 13: courbes  $(Na, P_f)$ , Pylône électrique sous condition du vent fort.

C	Courbe de la probabilité de défaillance	Intervalle de Na où $P_f \in [0.05; 0.95]$
19,3	<p style="text-align: center;"><b>C=19,3</b></p> 	[ $1.2 \times 10^6$ ; $6.2 \times 10^6$ ]

24,6	<p style="text-align: center;"><b>C=24,6</b></p> 	[5.4x10 <sup>5</sup> ; 1.8x10 <sup>6</sup> ]
48,2	<p style="text-align: center;"><b>C=48,2</b></p> 	[68000; 180000]
54,1	<p style="text-align: center;"><b>C=54,1</b></p> 	[50000; 132000]

<p>69,5</p>	<p style="text-align: center;"><b>C=69,5</b></p> 	<p>[23000; 61000]</p>
<p>81</p>	<p style="text-align: center;"><b>C=81</b></p> 	<p>[14000; 38000]</p>
<p>97,3</p>	<p style="text-align: center;"><b>C=97,3</b></p> 	<p>[8000; 21500]</p>



Nous observons que la durée de vie de la structure diminue quand la compliance augmente.

Pour la même valeur de la compliance, nous trouvons que dans le cas de la structure optimisée en tenant compte de l'effet du vent, les bornes de l'intervalle de  $N_a$  sont plus grandes que celles dans le cas de structure optimisée en négligeant l'effet du vent.

Nous déduisons que la structure de forme optimale en tenant compte de l'effet du vent est plus fiable que la structure de forme optimale en négligeant l'effet du vent.

### 3.7 Conclusion

Les résultats obtenus dans ce chapitre montrent que la prise en compte des différents chargements (ex le vent) est un facteur important dans la conception de la structure, et que la forme optimale obtenue en tenant compte de ce facteur est plus fiable que la forme obtenue en le négligeant.

Nous observons aussi que l'intervalle du nombre de cycles appliqué diminue quand la compliance de la structure augmente, ce qui conduit à déduire que la fiabilité de structure diminue avec l'augmentation de sa compliance, et par la suite avec la minimisation de sa rigidité.

L'analyse fiabiliste montre que la taille de l'intervalle de confiance des charges cycliques diminue avec l'augmentation du rapport entre la largeur et la hauteur.

Les résultats obtenus de l'analyse de la structure à trois barres, montrent que l'intervalle d'application de charges cycliques devient plus étendu quand le coefficient de variation augmente.

## **CHAPITRE IV**

### **Optimisation topologique fiabiliste pour la maintenance**

1. Introduction
2. Coût total de maintenance
  - 2.1. Calcul du coût total
3. Calcul de Coût total basé sur la fiabilité
4. Applications
  - 4.1. Structure mono-composant : Poutre console
  - 4.2. Structure multi-composants : Poutre console
  - 4.3. Pylône électrique
  - 4.4. Structure à trois barres
5. Conclusion



## 4.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'étudier la méthodologie adoptée à l'optimisation de la maintenance en tenant compte du critère de fiabilité. La démarche s'appuie sur les calculs fiabilistes effectués dans les chapitres 2 et 3. Les résultats de l'analyse fiabiliste sont utilisés dans un modèle de coût pour déterminer la distribution du coût total de maintenance. Cette méthodologie est validée au moyen de quatre applications numériques sur des structures continues et en treillis.

L'objectif de la méthode est d'obtenir la forme optimale de la structure et de déterminer le temps idéal pour la maintenance basée sur la fiabilité.

## 4.2 Coût total de maintenance

Dans ce travail, le modèle de coût utilisé est le suivant (voir chapitre I) :

$$C_m(N) = \frac{(C_r + C_f)P_f(N) + C_p(1 - P_f(N))}{N} \quad (129)$$

où  $C_m$  est le coût total de maintenance par cycle,  $C_r$  est le coût de réparation,  $C_f$  est le coût de défaillance,  $(C_r + C_f)$  représente le coût de la maintenance corrective et  $C_p$  est le coût de la maintenance préventive. La probabilité de défaillance associée au nombre de cycles  $N$ , est notée  $P_f(N)$ .

### 4.2.1 Calcul du coût total

Le coût total de maintenance dépend de la probabilité de défaillance  $P_f$  et du nombre de cycles de charge appliqué  $N$ .

Quatre types de coûts sont inclus dans la formule du coût total de maintenance :

1. Le coût initial de la structure  $C_0$  est relié au matériau de construction et à la forme géométrique de la structure,

$$C_0 = c_0 + V_S \cdot C_S \cdot \rho_S \quad (130)$$

où  $c_0$  est le coût initial de conception et de construction, et le terme  $V_S \cdot C_S \cdot \rho_S$  représente le prix du matériau de construction, avec  $C_S$  en €/kg représente le prix du matériau par unité de masse,  $\rho_S$  en  $kg/m^3$  la masse volumique du matériau et  $V_S$  le volume de la structure.

Dans le cas des structures multi-composants (i.e. structures à barres), le volume est calculé par :

$$V_S = \sum_{i=1}^n l_i \cdot S_i \quad (131)$$

où  $n$  est le nombre d'éléments dans la structure,  $l_i$  et  $S_i$  représentent respectivement la longueur et la surface de section de l'élément  $i$  ; en négligeant les coûts des assemblages, le coût initial d'une structure à barres devient :

$$C_0 = c_0 + \sum_{i=1}^n l_i \cdot S_i \cdot C_S \cdot \rho_S \quad (132)$$

2. Le coût de défaillance  $C_f$  qui est calculé en fonction du coût initial par la formule suivante :

$$C_f = \delta * C_0 \quad (133)$$

où  $\delta$  est un multiplicateur constant.

3. Le coût de maintenance préventive  $C_p$  est calculé par :

$$C_p = c_p + V_S \cdot C_S \cdot \rho_S \quad (134)$$

où  $c_p$  représente le coût d'arrêt de l'activité, de main d'œuvre, des outillages, etc ...

Dans le cas des structures multi-composants, le coût de maintenance préventive devient :

$$C_p = c_p + \sum_{i=1}^{n_p} l_i \cdot S_i \cdot C_S \cdot \rho_S \quad (135)$$

avec  $n_p$  le nombre d'éléments remplacés pendant la maintenance préventive.

4. Le coût de réparation  $C_r$ , obtenu par :

$$C_r = c_r + V_S \cdot C_S \cdot \rho_S \quad (136)$$

où  $c_r$  représente le coût d'outillages, de main d'œuvre, ...

Dans le cas des structures multi-composants, le coût de réparation devient :

$$C_r = c_r + \sum_{i=1}^{n_r} l_i \cdot S_i \cdot C_S \cdot \rho_S \quad (137)$$

avec  $n_r$  le nombre d'éléments remplacés pendant la maintenance corrective.

Si la décision est de remplacer la structure entièrement, alors le coût total de réparation est égal au coût de remplacement avec  $n_p = n$  .

### 4.3 Calcul de Coût total basé sur la fiabilité

L'objectif de la méthode est de calculer le coût minimal de maintenance des structures en utilisant les résultants de l'analyse fiabiliste. La méthodologie de l'optimisation topologique fiabiliste de la maintenance des structures est résumée par les étapes suivantes :

- 1- Introduire les données mécaniques et la forme géométrique initiale de la structure de base.
- 2- Effectuer l'optimisation topologique de la structure et obtenir la forme optimale.
- 3- Calculer la durée de vie en fatigue pour la structure optimale.
- 4- Effectuer l'analyse fiabiliste de la structure optimale vis-à-vis de la fatigue pour déterminer sa probabilité de défaillance.
- 5- Calculer le coût total de maintenance, associé à la probabilité de défaillance de la structure, et déterminer le coût minimal.

Alors que les quatre premières étapes sont détaillées dans les chapitres 2 (structures continues) et 3 (structures multi-composants), la cinquième étape permet le calcul du coût total de maintenance à partir des résultats de l'analyse fiabiliste.

Le coût de défaillance est affecté par les paramètres appartenant à l'un des types suivants :

- paramètres géométriques (dimensions, surfaces, volumes...)
- paramètres mécaniques (forces appliquées, matériaux, compliance...)
- paramètres statistiques (moyennes, écarts- types, corrélations...)

La sensibilité du coût total de maintenance par rapport à un paramètre est traitée en faisant varier ce paramètre, et en calculant le coût à chaque valeur de ce paramètre. La relation graphique entre le coût et le paramètre est ainsi obtenue. La figure 41 ci-dessous illustre l'algorithme de la méthodologie adoptée.

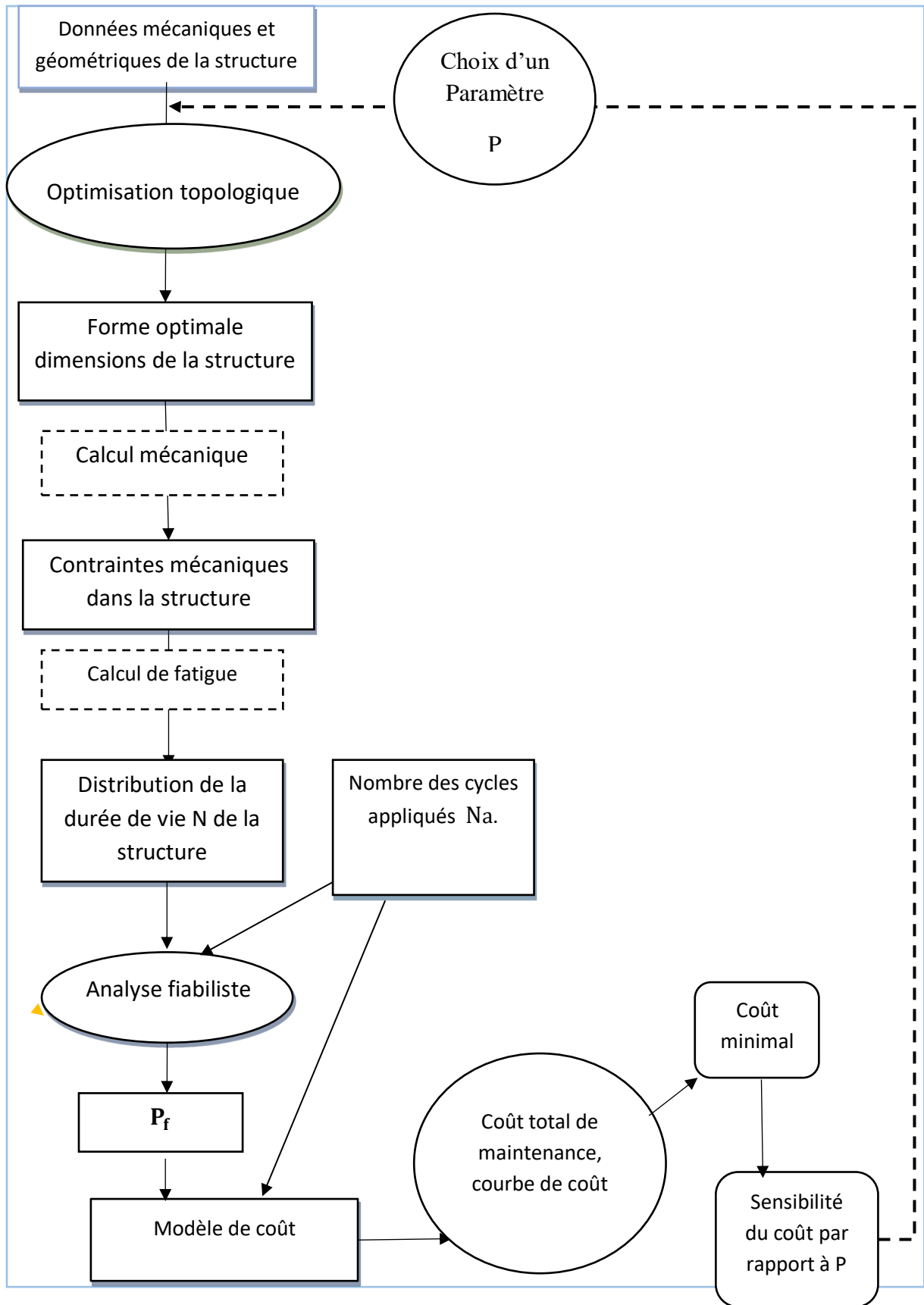


Figure 41: Méthodologie de l'optimisation topologique fiabiliste de la maintenance.

## 4.4 Applications

### 4.4.1 Structure mono-composant : Poutre console

La console modélisée dans le chapitre 2 (section 2.3.3) illustrée sur la figure 42 ci-dessous fait maintenant l'objet de l'optimisation fiabiliste de maintenance.

La console, de longueur  $L$  et de hauteur  $0,5$  m est soumise à une charge  $F=10$  kN appliquée au milieu du côté vertical libre; l'autre côté verticale est encastré. Le matériau a un module de Young  $E = 210$  GPa et un coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ .



Figure 42 poutre console.

Pour étudier l'influence de la topologie, nous faisons varier la longueur  $L$  et à chaque valeur de  $L$  la topologie de la structure est optimisée sous contrainte de fraction volumique de  $0,5$ . La poutre optimisée est ensuite soumise à une contrainte cyclique, et sa durée de vie en fatigue  $N$  est évaluée.

Dans l'analyse fiabiliste, nous considérons la contrainte maximale dans la structure optimale comme variable aléatoire de distribution log-normale. Pour chaque valeur de la contrainte maximale, nous calculons la durée de vie  $N$  correspondante. Nous obtenons ainsi la distribution de  $N$ , de moyenne  $m_N$ , et d'écart-type  $\sigma_N$  par la simulation de Monte Carlo.

Le nombre de cycles appliqué sur la structure est déterministe, défini par  $N_a$  que nous faisons varier à chaque itération de calcul de la probabilité de défaillance.

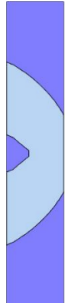
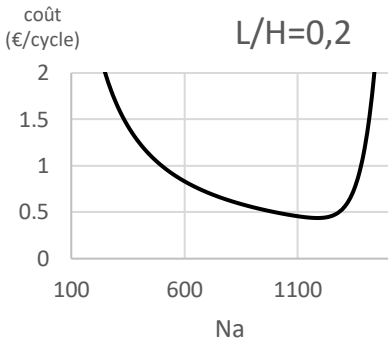
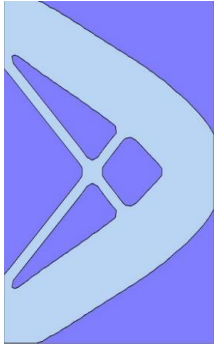
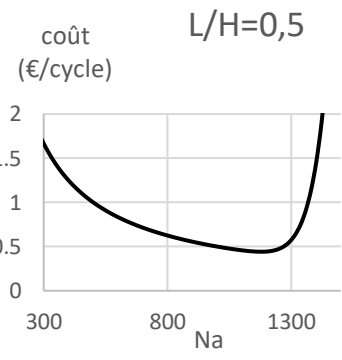
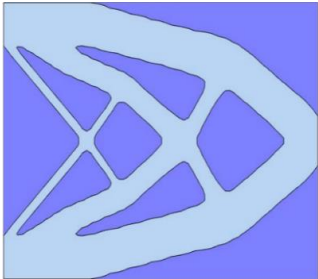
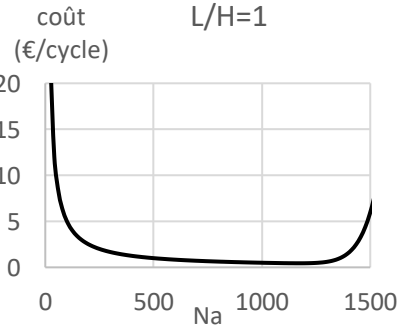
Pour chaque valeur de  $N_a$ , nous calculons la probabilité de défaillance de la structure  $P_f(N_a)$  ce qui nous permet d'obtenir la courbe reliant  $N_a$  et  $P_f$ , la méthode de calcul et les résultats ont été présentés dans le chapitre 2.

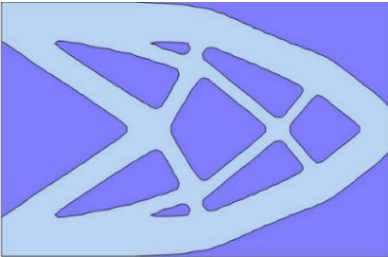
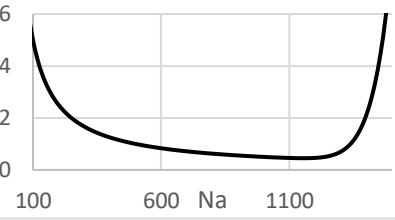
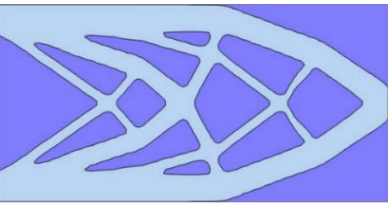
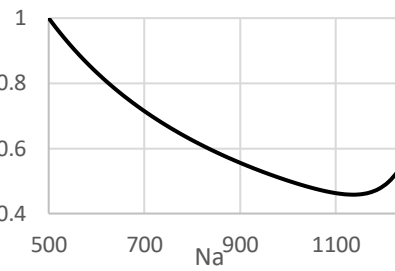
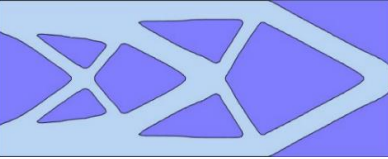
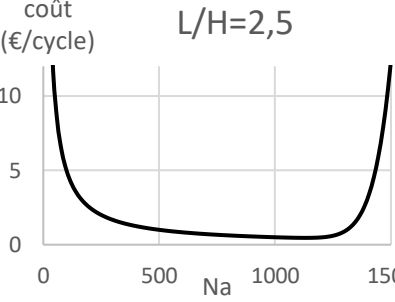
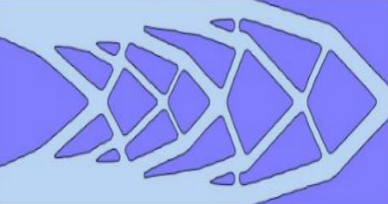
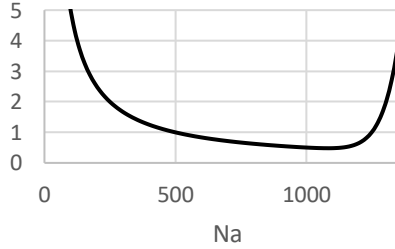
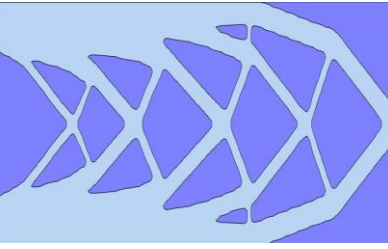
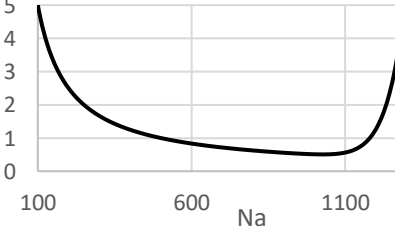
Nous observons que la structure a une même forme optimale pour un même intervalle de longueurs. Cette forme varie d'un intervalle à l'autre quand la longueur augmente. Nous choisissons le critère de coût de maintenance pour analyser les formes principales obtenues. Pour ce but, nous déterminons de la variation du coût optimal par cycle de fatigue avec la variation d'un paramètre géométrique. Pour cette étude, nous choisissons le rapport entre la longueur et la hauteur comme paramètre à étudier.


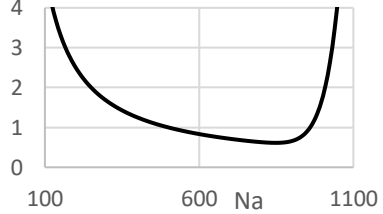
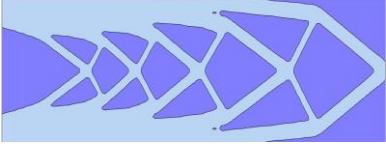
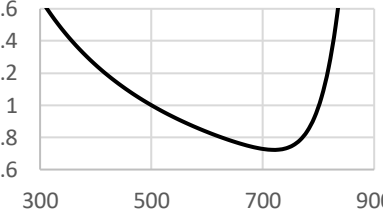
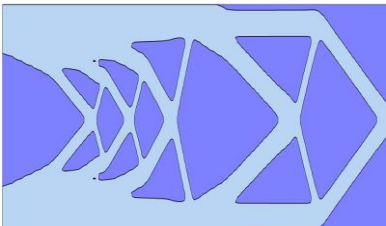
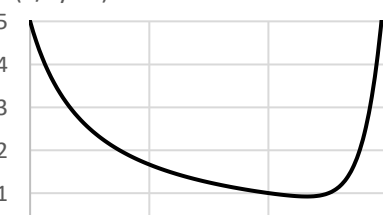
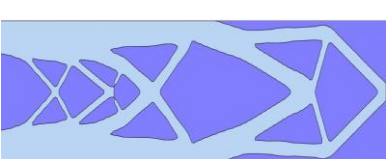
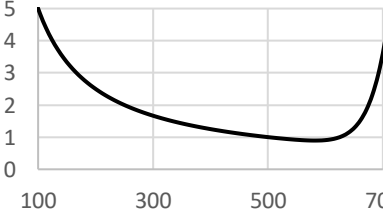
Les données de coûts sont :  $c_0 = 300$ ,  $c_p = 500$ ,  $c_r = 200000$ ,  $C_S = 1,5$  euro/kg  
 $\rho_s = 7850$  kg/m<sup>3</sup>.

Dans ce problème, la relation graphique entre le coût et le nombre de cycles appliqué est à déterminer. Les résultats sont les suivants : la compliance mécanique C, le Coût minimale Cmin (€/cycle) et le nombre de cycles appliqué à l'instant de la maintenance optimale Nopti.

Tableau 14: Résultats de l'optimisation topologique fiabiliste de la maintenance de console.

L / H	Topologie optimale de la structure	Courbe du coût total de maintenance	C	Cmin	Nopti (cycles)
0,2			$1,3 \times 10^{-9}$	0,438	1180
0,5			$2,7 \times 10^{-9}$	0,441	1170
1			$7,3 \times 10^{-9}$	0,446	1162

1,5		<p>coût (€/cycle) <math>L/H=1,5</math></p>  <p>6 4 2 0</p> <p>100 600 Na 1100</p>	$1,6 \times 10^{-8}$	0,45	1147
2		<p>coût (€/cycle) <math>L/H=2</math></p>  <p>1 0.8 0.6 0.4</p> <p>500 700 Na<sup>900</sup> 1100 1</p>	$3,1 \times 10^{-8}$	0,458	1130
2,5		<p>coût (€/cycle) <math>L/H=2,5</math></p>  <p>10 5 0</p> <p>0 500 Na 1000 1500</p>	$3,41 \times 10^{-8}$	0,46	1124
3		<p>coût (€/cycle) <math>L/H=3</math></p>  <p>5 4 3 2 1 0</p> <p>0 500 Na 1000</p>	$5,64 \times 10^{-8}$	0,48	1076
3,2		<p>coût (€/cycle) <math>L/H=3,2</math></p>  <p>5 4 3 2 1 0</p> <p>100 600 Na 1100</p>	$9,7 \times 10^{-8}$	0,506	1020

3,4		<p>coût (€/cycle) <math>L/H=3,4</math></p> 	$1,1 \times 10^{-7}$	0.613	843
3,6		<p>coût (€/cycle) <math>L/H=3,6</math></p> 	$1,33 \times 10^{-7}$	0.722	715
4		<p>coût (€/cycle) <math>L/H=4</math></p> 	$1,81 \times 10^{-7}$	0.92	560
4,2		<p>coût (€/cycle) <math>L/H=4,2</math></p> 	$2,1 \times 10^{-7}$	0.98	557



### Sensibilité du coût de maintenance

La figure 43 détermine la relation entre le rapport  $L/H$  de la structure et le coût minimal de maintenance.

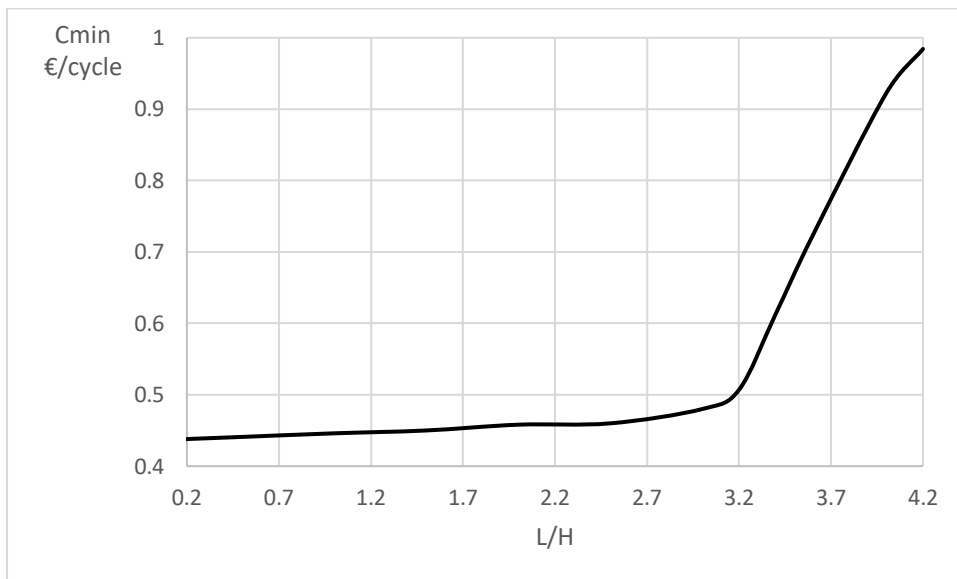


Figure 43: la sensibilité de coût à la géométrie de structure.

Nous observons que le coût minimal varie avec le paramètre géométrique. Le coût minimal de maintenance augmente quand le rapport  $L/H$  augmente. Nous constatons que ce coût augmente très rapidement lorsque  $L/H$  devient supérieur à 3,1 ; ceci est exprimé par l'influence de la topologie qui conduit à l'augmentation de la probabilité de défaillance. De cette courbe, nous pouvons estimer le coût optimal de la maintenance si nous avons la longueur et la hauteur de la poutre console

### Nombre de cycles appliqués à l'instant de maintenance optimale

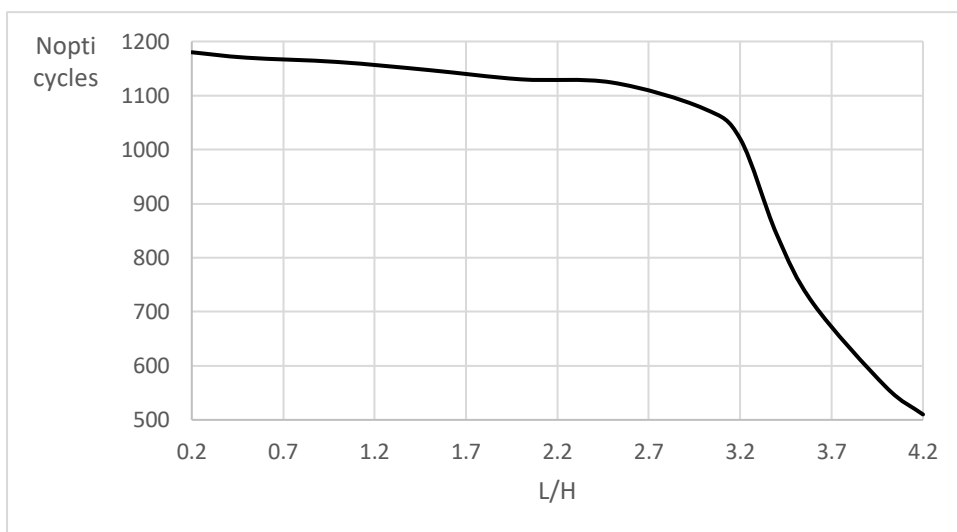


Figure 44: La sensibilité de  $N_{opti}$  à la géométrie de structure.

La figure 44 illustre la variation du nombre de cycles appliqué ou (instant optimal de maintenance). De cette courbe, nous observons que ce nombre de cycles diminue avec l'augmentation de rapport  $L/H$ . La diminution est plus forte pour  $L/H \geq 3,1$ , ce qui s'explique par l'évolution de la topologie.

#### 4.4.2 Structure multi-composants : Poutre console

Dans cette application, la structure est une poutre console composée de barres métalliques fabriquées en acier avec un module de Young  $E = 210 \text{ GPa}$  et un coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ .

La poutre est soumise à une force  $F$  verticale à l'extrémité orientée vers le bas. La structure est de longueur  $L = 1 \text{ m}$ , et de hauteur  $H = 0.5 \text{ m}$ . On choisit une borne supérieure de la compliance mécanique et on optimise la poutre pour obtenir la forme optimale illustrée sur la figure ci-dessous

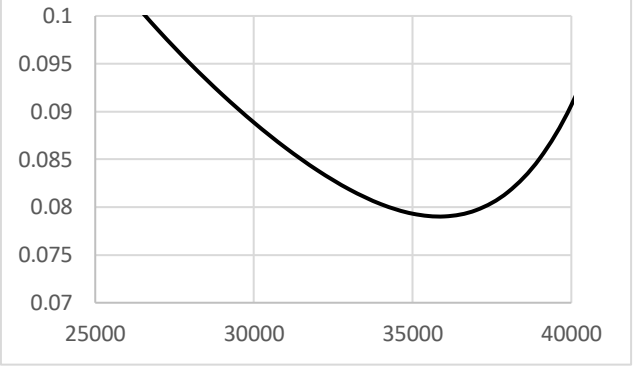
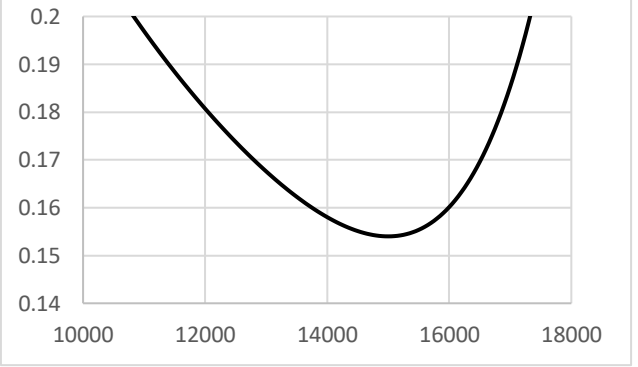
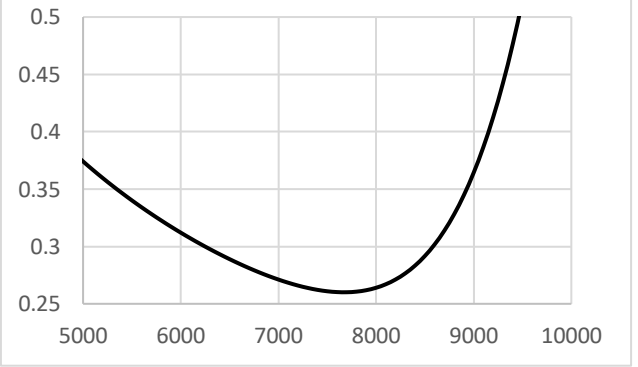


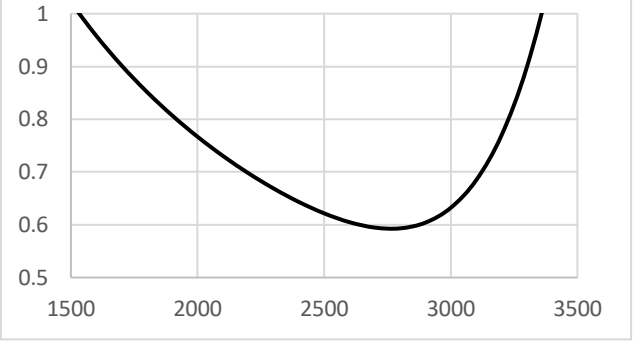

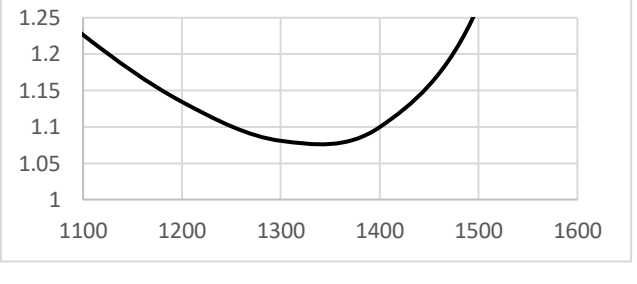
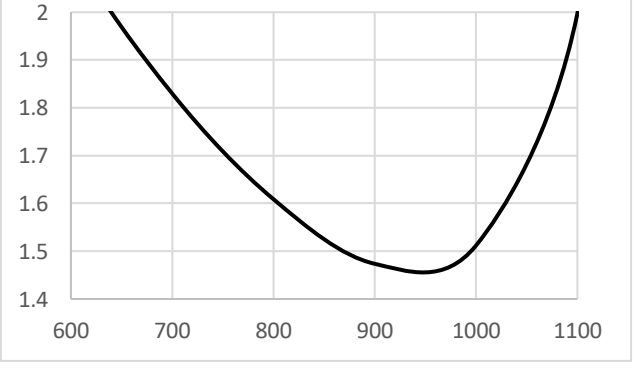
La structure optimale est analysée statiquement pour obtenir les forces internes, la compliance et les contraintes dans les barres, ces contraintes sont supposées aléatoires de distributions log-normales avec un coefficient de variation de 10%.

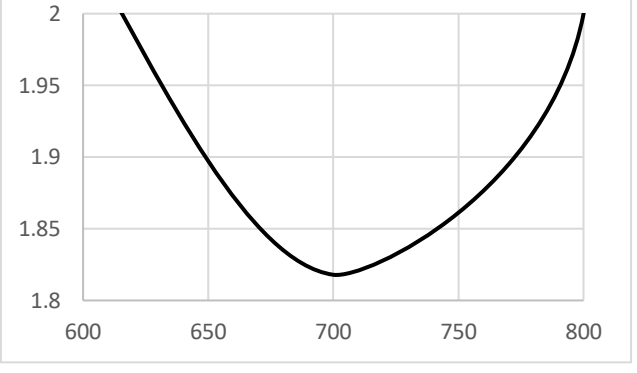
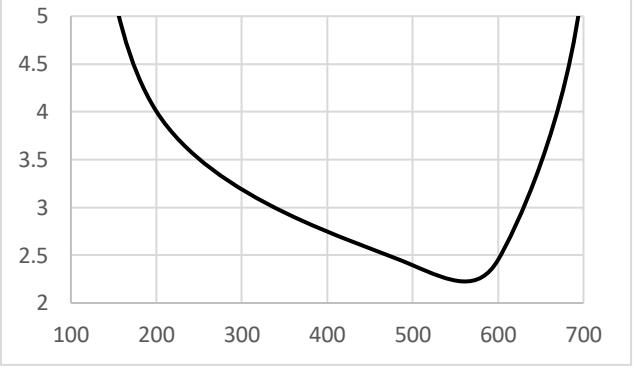
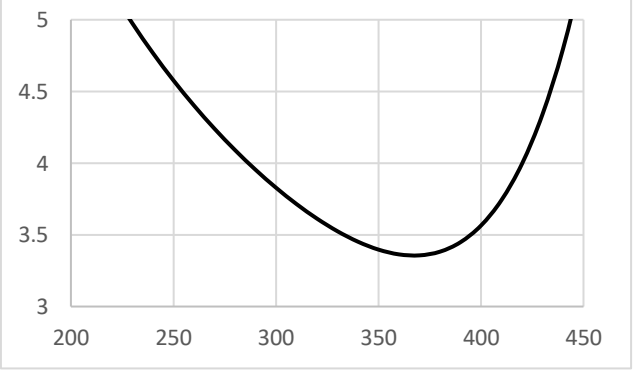
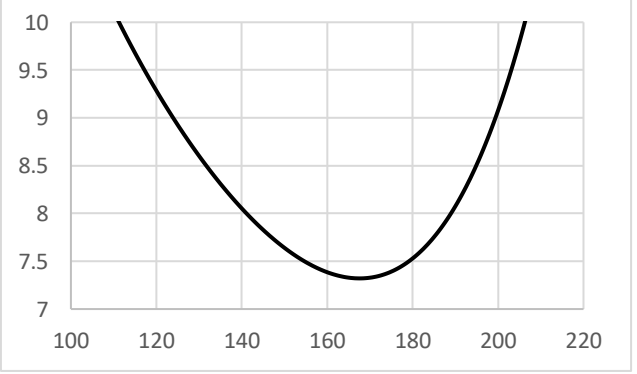
Pour chaque barre, nous déterminons la distribution de la durée de vie. Pour chaque nombre de cycles appliqué, nous déterminons la probabilité de défaillance de la structure  $P_f$  et le coût de maintenance par cycle.

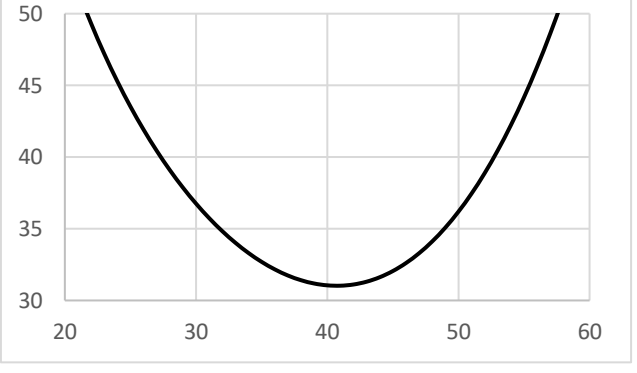
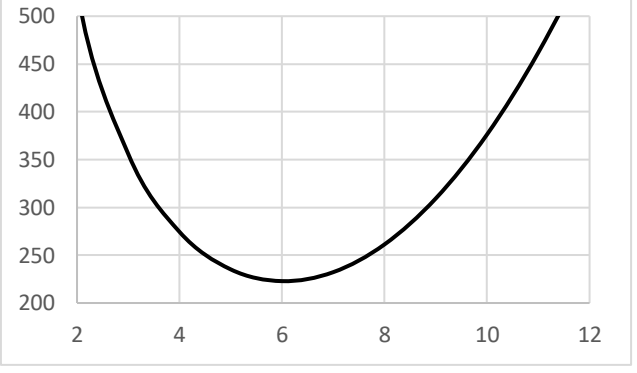
Nous répétons les mêmes étapes pour plusieurs valeurs de contrainte de compliance mécanique, afin d'obtenir la courbe du coût par cycle, le coût minimal de maintenance  $C_{min}$  et le nombre de cycles appliqué à l'instant optimal de maintenance  $N_{opti}$ .

Tableau 15: résultats de l'optimisation topologique fiabiliste de la maintenance de console multi-composant.

C	Courbe de coût de maintenance	Cmin (€/ cycle)	Nopti (cycles)
114,2855		0,079	35000
152,3806		0,1545	14900
190,4757		0,257	7800

266,6657		0,5828	2800
304,7606		0,8119	1900
342,8555		1,0667	1350
380,9504		1,4638	900

419,0452		1,8434	700
457,14		2,3921	550
495,2347		3,4929	350
533,3294		7,4147	166

571,4241		31	43
609,5187		243,243	6

De ces graphes, nous observons que pour la compliance 114,28, le nombre de cycles optimal de maintenance est de l'ordre de  $350 \times 10^2$  tandis qu'il est de l'ordre de  $1.66 \times 10^2$  pour la compliance 533,3.

Le coût minimal de maintenance par cycle varie entre 0,079 €/cycle pour la compliance 114,28 et 7,4147 €/cycle pour la compliance 533,3294 de l'ordre 98%.

#### Effets de la compliance sur le coût minimal de maintenance

Nous observons de la figure 45 que le coût de maintenance croît avec l'augmentation de la compliance. Le coût augmente lentement jusqu'à la compliance 400 où il commence à augmenter rapidement entre les compliance 400 et 500.

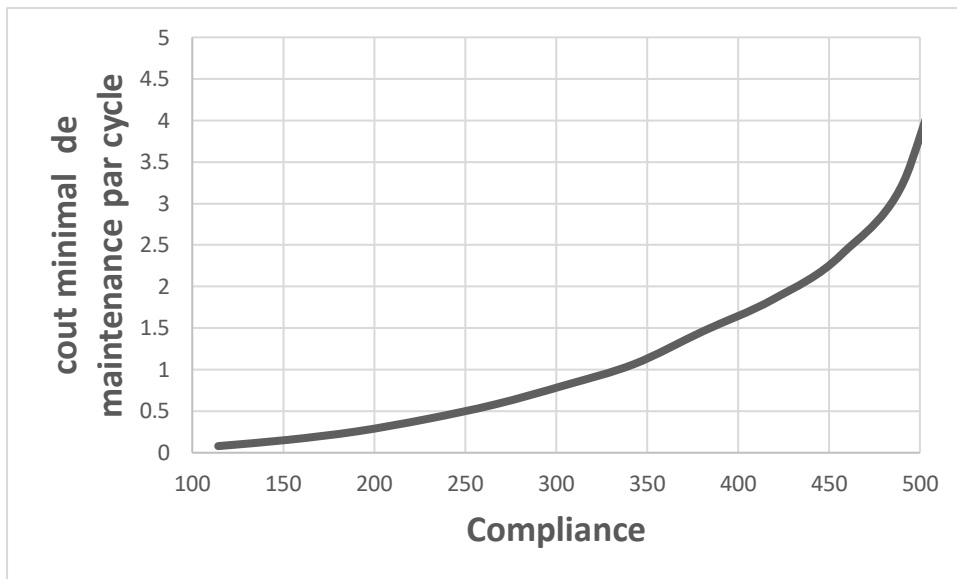


Figure 45: la sensibilité du coût à la compliance de structure.

La figure 46 montre que le nombre de cycles appliqué à l'instant optimal de maintenance diminue quand la compliance augmente,  $N_{opti}$  décroît avec l'augmentation de la compliance mécanique de la structure ; ceci est exprimé par l'influence de la diminution de rigidité qui conduit à la diminution de la durée de vie et par la suite  $N_{opti}$  décroît.

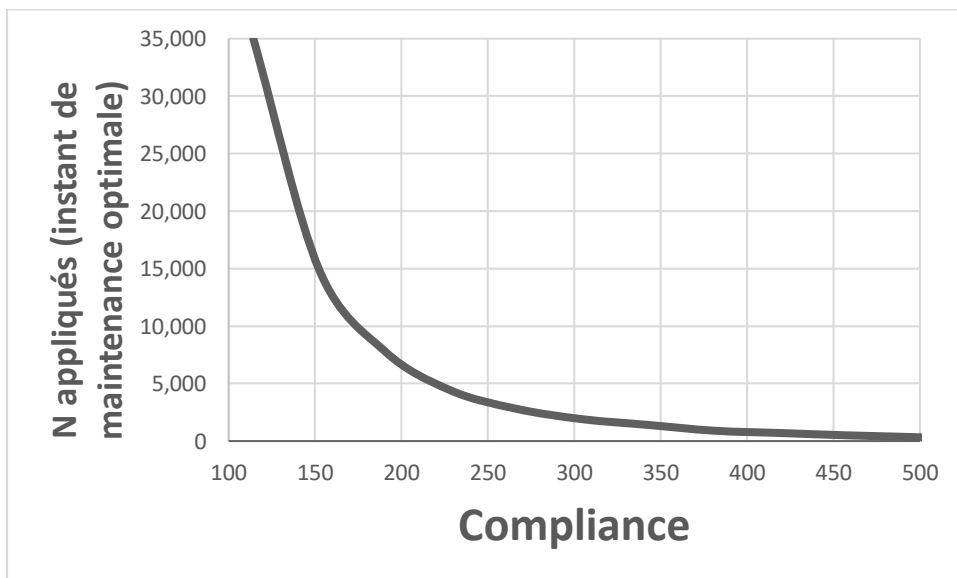
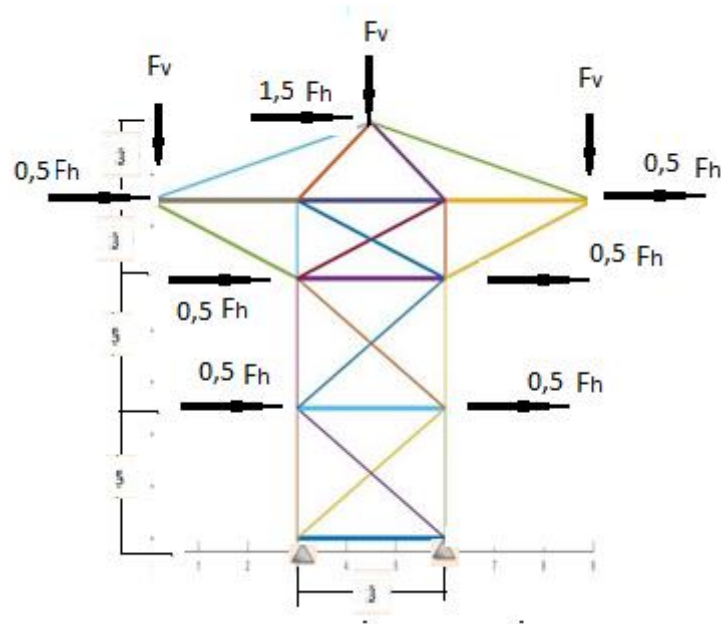


Figure 46: la sensibilité de  $N_{opti}$  à la compliance.

### 4.4.3 Pylône électrique

Un pylône électrique est une structure à barres soumise à des charges multiples qui sollicitent plusieurs nœuds. Cette application considère l'effet du vent sur le comportement de la structure. Cet effet est représenté par une charge cyclique  $F_h$  horizontale variant entre 0 et 2 kN. Le matériau a un module de Young  $E=210$  GPa.



Nous fixons la valeur de  $F_h = 0$  et nous faisons varier la limite supérieure de la compliance mécanique. Pour chaque valeur de la compliance, la topologie de la structure est optimisée puis le calcul mécanique se fait avec deux niveaux de charge:  $F_h = 0$  et  $F_h = 2$  kN. Ensuite, le calcul en fatigue et l'analyse fiabiliste sont effectués comme détaillé dans le troisième chapitre et le calcul du coût se fait en se basant sur la probabilité de défaillance. Finalement, nous obtenons les courbes de coût pour les différentes valeurs de compliance limite. Nous en déduisons les relations graphiques entre le coût optimal de maintenance  $C_{min}$  et la compliance  $C$ , et entre le nombre de cycles appliqué à l'instant optimale de la maintenance  $N_{opti}$  et la compliance.

Dans le deuxième temps, nous appliquons la même démarche mais en fixant la valeur de  $F_h = 2$  kN au lieu de 0.

Les résultats sont donnés dans les paragraphes suivants :

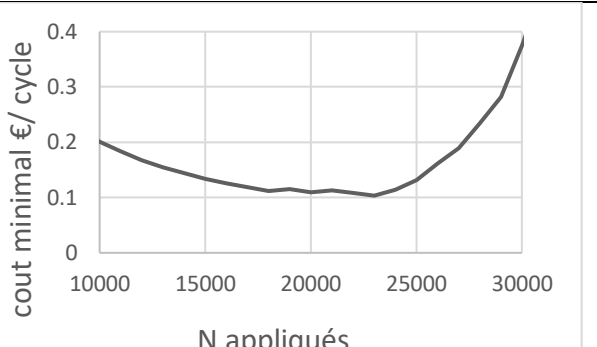
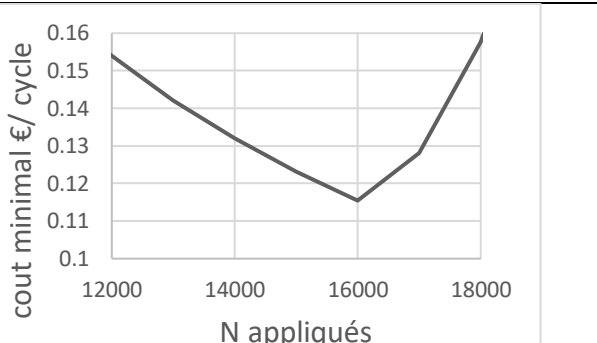
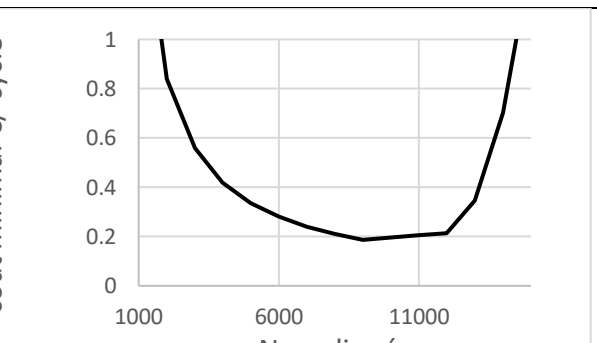
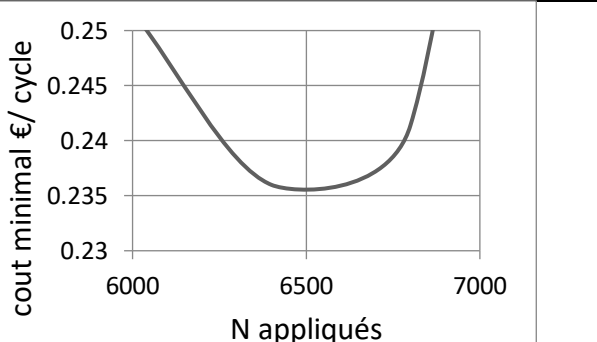
#### Cas de $F_h = 0$ kN

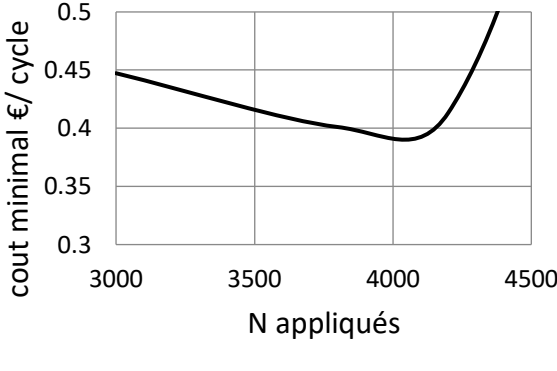
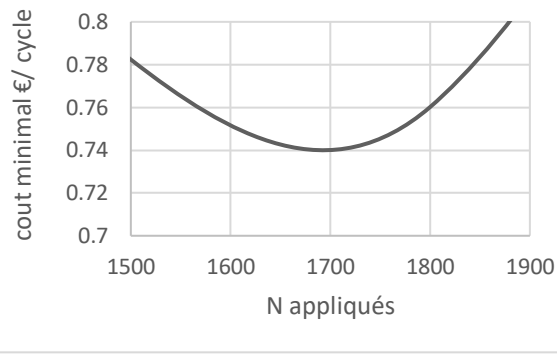
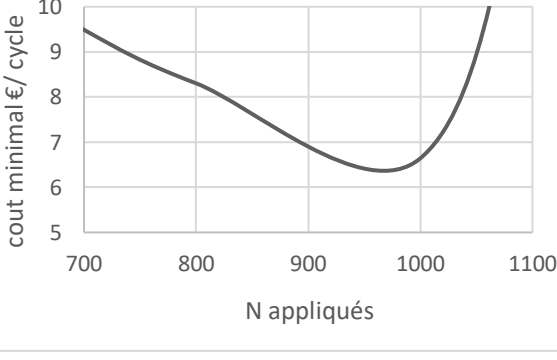
Dans le cas de  $F_h = 0$  kN (pas de vent) avec  $F_v = 10$  kN, les graphes obtenus sont les suivants :



Tableau 16: Résultats de l'optimisation topologique fiabiliste de la maintenance de pylône électrique pour  $F_H = 0 \text{ kN}$ .

Compliance Mécanique	Courbe de coût de maintenance	Cmin (€/ cycle)	Nopti (cycles)
8,0023		0,0095	500000
10,1727		0,0159	240000
20,0952		0,0768	31000

22,3280	 <p>Graph showing minimal cost per cycle (y-axis, 0 to 0.4) versus N appliqués (x-axis, 10000 to 30000). The curve is U-shaped, indicating a minimum cost around 23000 applications.</p>	0,1034	23000
25,1190	 <p>Graph showing minimal cost per cycle (y-axis, 0.1 to 0.16) versus N appliqués (x-axis, 12000 to 18000). The curve is U-shaped, indicating a minimum cost around 16000 applications.</p>	0,1154	16000
28,7075	 <p>Graph showing minimal cost per cycle (y-axis, 0 to 1) versus N appliqués (x-axis, 1000 to 11000). The curve is U-shaped, indicating a minimum cost around 8000 applications.</p>	0,1679	10000
33,4920	 <p>Graph showing minimal cost per cycle (y-axis, 0.23 to 0.25) versus N appliqués (x-axis, 6000 to 7000). The curve is U-shaped, indicating a minimum cost around 6500 applications.</p>	0,236	6400

40,1904		0,4	3400
50,2380		0,7601	1800
66,9841		6,6422	1000

De ces graphes, nous observons que pour la compliance égale à 8, le nombre de cycles appliqué (instant optimale de maintenance) est de l'ordre de  $10^5$  tandis qu'il est de l'ordre de  $10^3$  pour la compliance de 66,9.

Le coût minimal de maintenance par cycle varie entre 0,0095€/cycle pour la compliance de 8 et 6,64€/ cycle pour la compliance de 66,9, il augmente de l'ordre 99%.

Nous déduisons de la figure 47 que le coût de maintenance augmente avec l'augmentation de la compliance. Le coût augmente lentement jusqu'à la compliance 50,23 où il augmente rapidement entre les compliances 50,23 et 66,9.

Nous déduisons de la figure 48 que le nombre de cycles à la maintenance diminue quand la compliance de structure augmente car elle devient moins rigide.

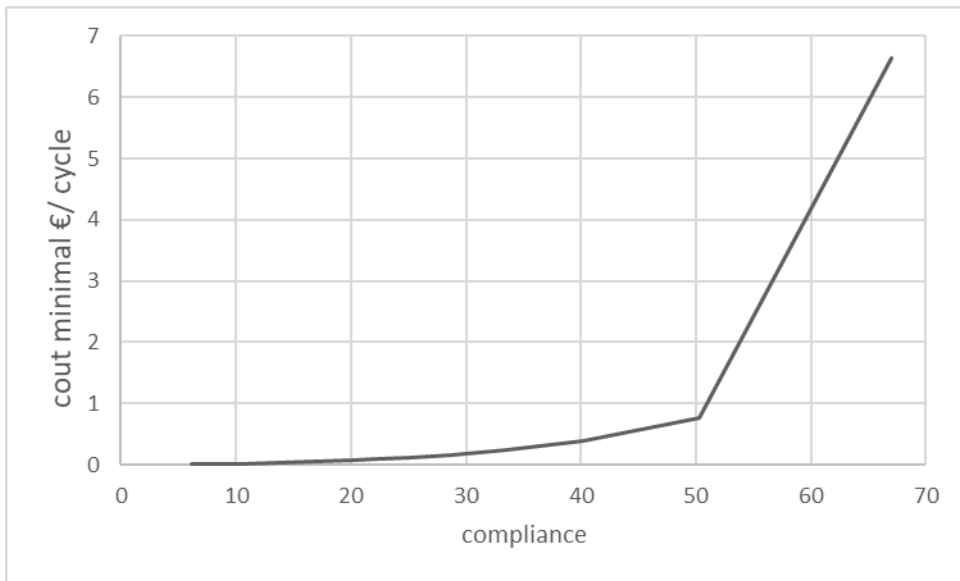


Figure 47: La sensibilité de coût à la compliance de pylône électrique pour  $F_H = 0 \text{ kN}$  .

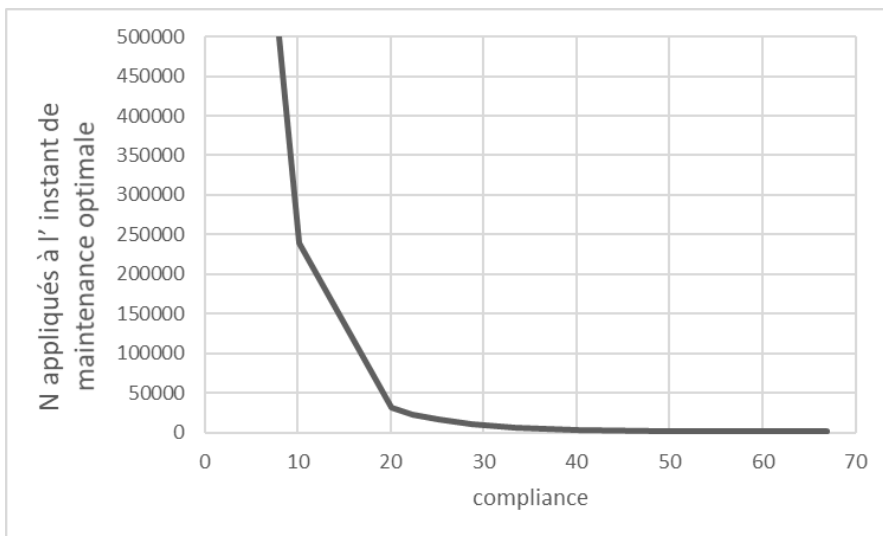


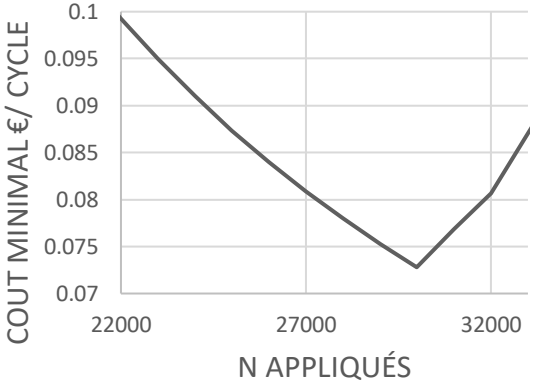
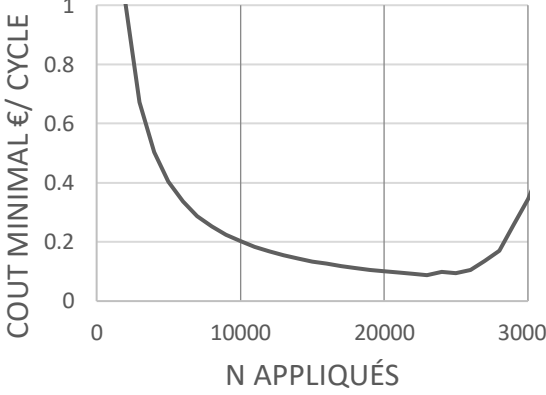
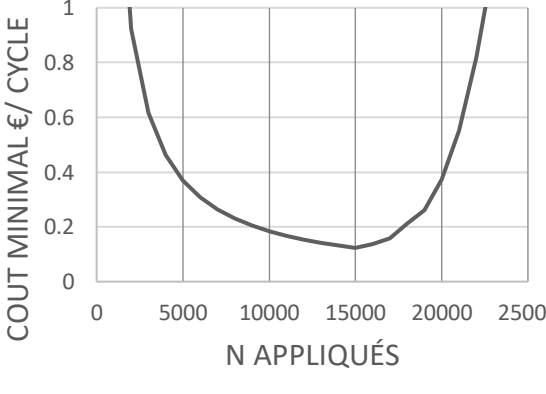
Figure 48: La sensibilité de nombre de cycles à la maintenance à la compliance de pylône électrique pour  $F_H = 0 \text{ kN}$  .

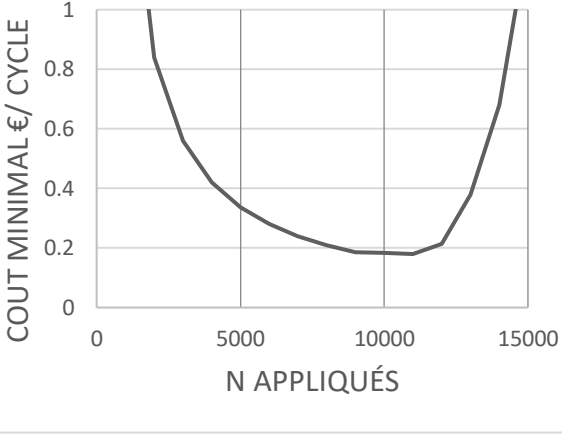
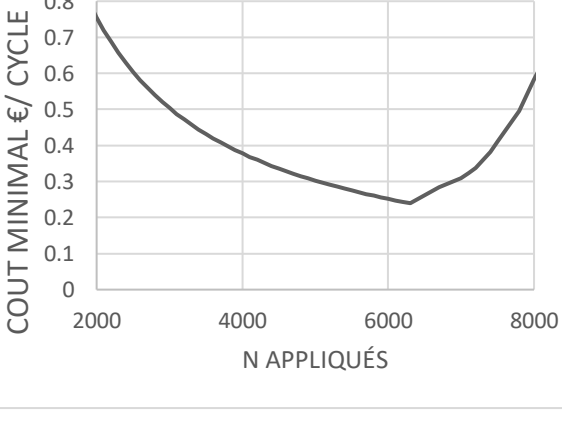
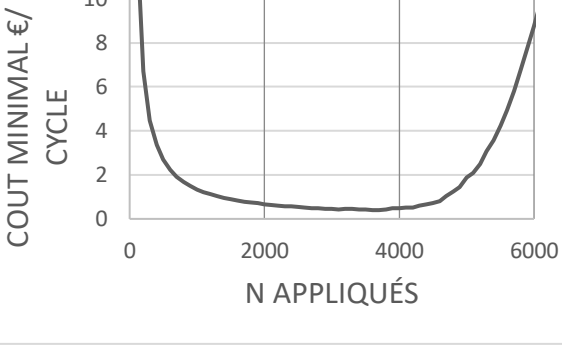
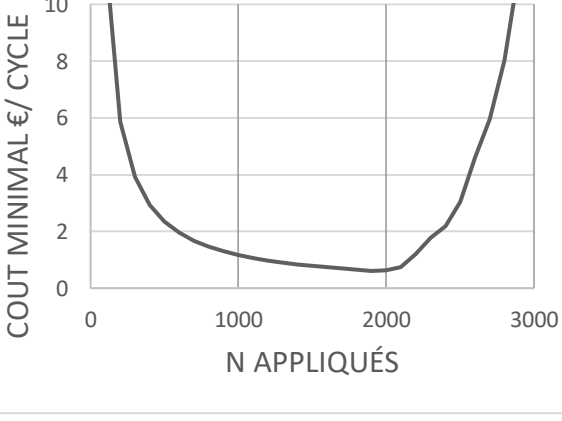
Cas de  $F_h = 2kN$

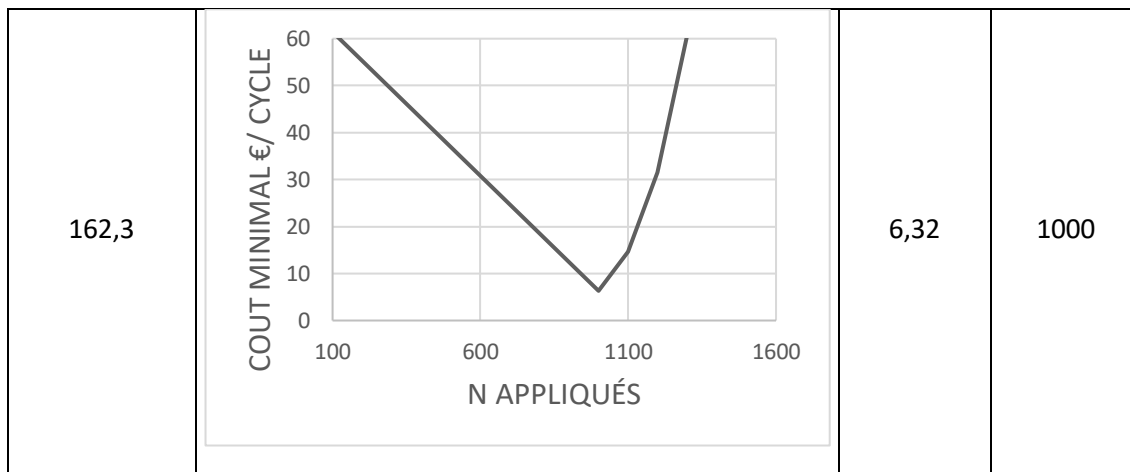
Dans le cas de  $F_h = 2kN$  (vent fort) avec  $F_v = 10kN$ , les graphes obtenus sont les suivants :

Tableau 17: Résultats de l'optimisation topologique fiabiliste de pylône électrique pour  $F_H = 2 kN$ .

C	Courbe de coût de maintenance	Cmin (€/ cycle)	Nopti (cycles)
14,94		0,005	1300000
19,37		0,0094	500000
24,64		0,0158	265000

48,69		0,072	30000
54,10		0,0876	23000
60,86		0,123	15000

69,55		0,18	11000
81,15		0,236	6400
97,38		0,4	3700
121,72		0,61	1900



De ces graphes et de la figure 50, nous observons que pour la compliance 14,9, le nombre de cycles optimal de maintenance est de l'ordre de  $10^6$  tandis qu'il est de l'ordre de  $10^3$  pour la compliance 162,3.

Le coût minimal de maintenance par cycle varie entre 0,005 €/cycle pour la compliance 14,9 et 6,32€/cycle pour la compliance 66,9.

Nous déduisons de la figure 49 que le coût de maintenance augmente avec l'augmentation de la compliance. Le coût augmente lentement jusqu'à la compliance 121,7 puis il augmente rapidement entre les compliances 121,7 et 162,3.

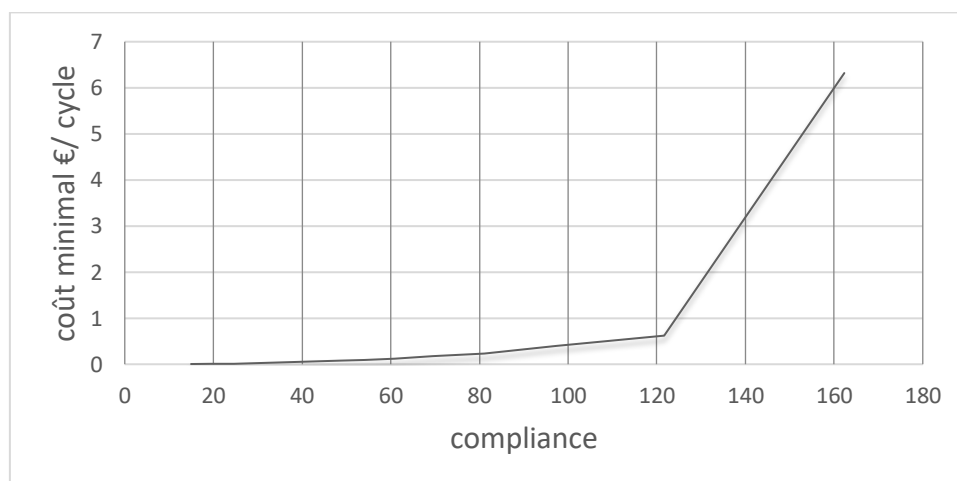


Figure 49: La sensibilité de coût à la compliance de pylône électrique pour  $F_H = 2 \text{ kN}$ .



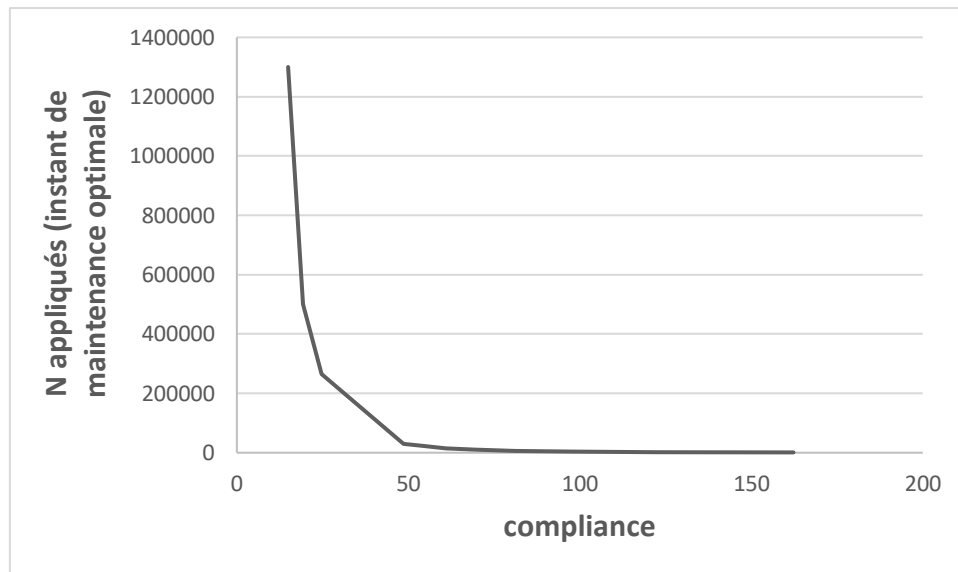


Figure 50 : La sensibilité de nombre de cycles à la maintenance à la compliance de pylône électrique pour  $F_H = 2 \text{ kN}$  .

Effet de la maintenance sur le choix de la topologie du pylône électrique :

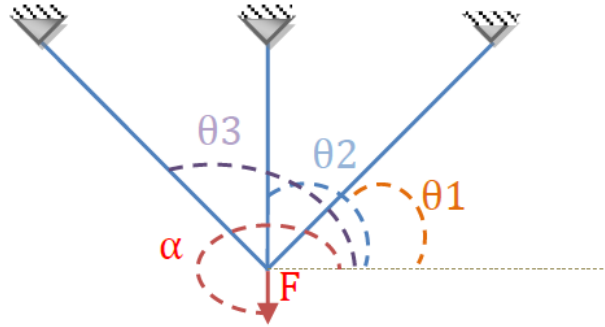
L'intervalle de compliance mécanique est entre 14,9 et 121,7 dans le cas de la topologie avec vent fort, tandis qu'il est entre 8 et 50,2 dans le cas de topologie en l'absence de vent. Nous en déduisons que la compliance est plus grande avec la présence de vent.

Le coût optimal de maintenance varie entre 0,0095 €/cycle et 6,64 €/cycle dans le cas de topologie avec  $F_h = 2 \text{ kN}$  et entre 0,005 €/cycle et 6,32€/ cycle dans le cas topologie avec  $F_h = 0 \text{ kN}$  ; l'écart est de l'ordre de 5% entre les deux structures

Dans la zone commune de compliance entre les deux formes [14,9 ,66,9] ;pour la même valeur de la compliance, le coût minimal de maintenance avec  $F_h = 2 \text{ kN}$  est moins que le coût de maintenance avec  $F_h = 0 \text{ kN}$  ; nous en déduisons que la forme optimisée en prenant en compte l'effet du vent est plus fiable.

#### 4.4.4 Structure à trois barres

La structure étudiée est composée de trois barres de sections aléatoires de moyennes  $m_{S1} = 10^{-5}m^2$ ,  $m_{S2} = 2 \times 10^{-5}m^2$  et  $m_{S3} = 1.5 \times 10^{-5}m^2$ . La structure est soumise à une charge cyclique aléatoire  $F$  de moyenne  $m_F = 10^3 N$ . Ces variables aléatoires ont des distributions log-normales.



L'objectif de cette application est d'étudier l'effet de la dispersion des variables aléatoires sur le coût de maintenance, en considérant deux politiques de maintenance. Pour cela, la méthodologie adoptée se dicline en trois boucles :

- Boucle de simulation pour étudier la sensibilité du coût de maintenance par rapport aux écarts-types des sections des barres et de la force appliquée. Cette boucle est appliquée pour quatre cas différents :
  - Premier cas : étude paramétrique du coefficient de variation de la force. Nous supposons que l'écart-type de la force appliquée est relié à sa moyenne par la relation :

$$\sigma_F = CVF * m_F \quad (138)$$

Le coefficient de variation de la force  $CVF$  varie à chaque itération de cette boucle, tandis que les autres écarts-types sont fixes  $\sigma_{S1} = \sigma_{S2} = \sigma_{S3} = 10^{-6}$ .

- Deuxième cas : étude paramétrique du coefficient de variation de la section  $S1$ . L'écart type de la section de première barre est relié à sa moyenne par la relation :

$$\sigma_{S1} = CVS1 * m_{S1} \quad (139)$$

Les valeurs des autres écarts-types sont maintenues  $\sigma_{S2} = \sigma_{S3} = 10^{-6}$  et  $\sigma_F = 10^2$ .

- Troisième cas : étude paramétrique du coefficient de variation de la section  $S2$ . L'écart-type de la section de la barre 2 est relié à sa moyenne par la relation :

$$\sigma_{S2} = CVS2 * m_{S2} \quad (140)$$

Les valeurs des autres écarts-types sont:  $\sigma_{S1} = \sigma_{S3} = 10^{-6}$ ,  $\sigma_F = 10^2$ .

- Quatrième cas : étude paramétrique du coefficient de variation de la section S3. L'écart-type de la section de la barre 3 est relié à sa moyenne par la relation :

$$\sigma_{S3} = CVS3 * m_{S3} \quad (141)$$

Les valeurs d'autres écarts-types sont:  $\sigma_{S1} = \sigma_{S2} = 10^{-6}$ ,  $\sigma_F = 10^2$ .

- Boucle de simulation des sollicitations. L'état limite de chaque barre est déterminé en considérant la résistance de la barre. Sa durée de vie est obtenue par le calcul de fatigue. La durée de vie est une variable aléatoire de distribution log-normale ; la sollicitation dans l'état limite est le nombre de cycles appliqués  $N_a$ , ce nombre est une variable déterministe que nous faisons varier à chaque itération de la boucle. Pour chaque valeur de cette variable, nous appliquons la boucle de résolution.
- Boucle de résolution : à chaque itération de cette boucle, les valeurs des 4 variables sont tirées aléatoirement.  
Les étapes de cette boucle sont les suivantes :
  1. Calcul de la structure pour déterminer les contraintes mécaniques dans les trois barres.
  2. Calcul en fatigue pour déterminer la durée de vie de chaque barre (voir le troisième chapitre)
  3. Application de la méthode d'intégration multi-normales présentée dans le troisième chapitre pour obtenir la probabilité de défaillance du système.
  4. Calcul du coût de maintenance :  
Le calcul du coût de maintenance diffère d'une politique à l'autre ; nous étudions deux politiques :
    - **Politique 1** : remplacement du système à l'instant de maintenance ; dans ce cas le coût de maintenance est calculé en utilisant la formulation du coût présentée dans la section (4.2).
    - **Politique 2** : remplacement à l'instant de maintenance de la barre la moins fiable (deuxième barre) ; dans ce cas le coût de maintenance par cycle est calculé par la formule suivante :

$$C_m = \frac{(C_r + C_f)P_f + C_{p2}(1 - P_f) + (C_r + C_f)P_{f_{sys2}} + C_{p1,3}(1 - P_{f_{sys2}})}{N_{appliqué}} \quad (142)$$

où  $P_f$  est la probabilité de défaillance calculée en supposant la réparation de tout le système lors de la maintenance (équivalent à la politique1),  $C_{p2}$  est le coût préventive de la deuxième barre,  $P_{f_{sys2}}$  est la probabilité de défaillance calculée en supposant la réparation lors de la maintenance de la barre la plus critique (deuxième barre),  $C_{p1,3}$  est le coût préventive des barres 1 et 3.

Dans ce problème, nous prenons ( $c_0 = 300$ ,  $c_p = 500$ ,  $c_r = 2000$ ) pour tout le système,  $C_s = 1.5 \text{ €/kg}$  et  $\rho_s = 7850 \text{ kg/m}^3$ .

Les résultats obtenus sont :

- les relations entre les écarts-types et le coût de maintenance minimal par cycle  $C_{mmin1}$  et  $C_{mmin2}$  pour les deux politiques.
- les relations graphiques entre les écarts-types et le nombre de cycles appliqués à l'instant de maintenance optimal  $Nopti1$  et  $Nopti2$  pour les deux politiques.

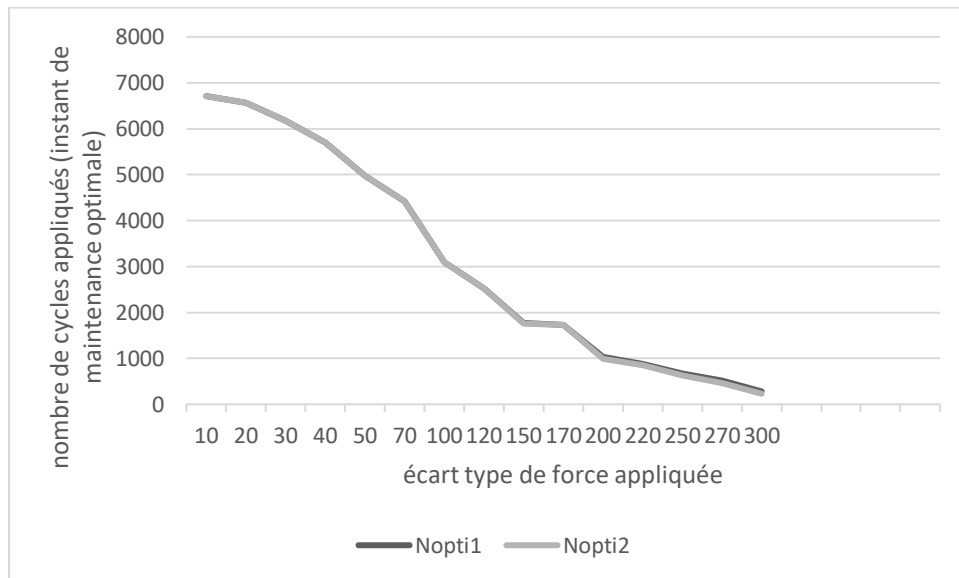


Figure 51: La sensibilité de nombre de cycles optimal de maintenance à l'écart-type de la force.

De la figure 51, nous observons que le nombre de cycles optimal de maintenance diminue quand l'écart-type augmente et que les valeurs de  $Nopti$  restent les mêmes pour les deux politiques lorsque l'écart-type de la force est  $\sigma_F \leq 120$  puis ils diffèrent. On observe aussi que pour tout  $\sigma_F > 120$ ,  $Nopti2 < Nopti1$  mais la différence entre les deux valeurs est très petite.

De la figure 52, nous observons que le coût minimal augmente avec l'augmentation de l'écart-type et que le coût de la politique 2 est plus grand que celui de la politique 1 pour les valeurs de  $\sigma_F > 120$  tandis que les deux coûts sont les mêmes lorsque  $\sigma_F \leq 120$ .

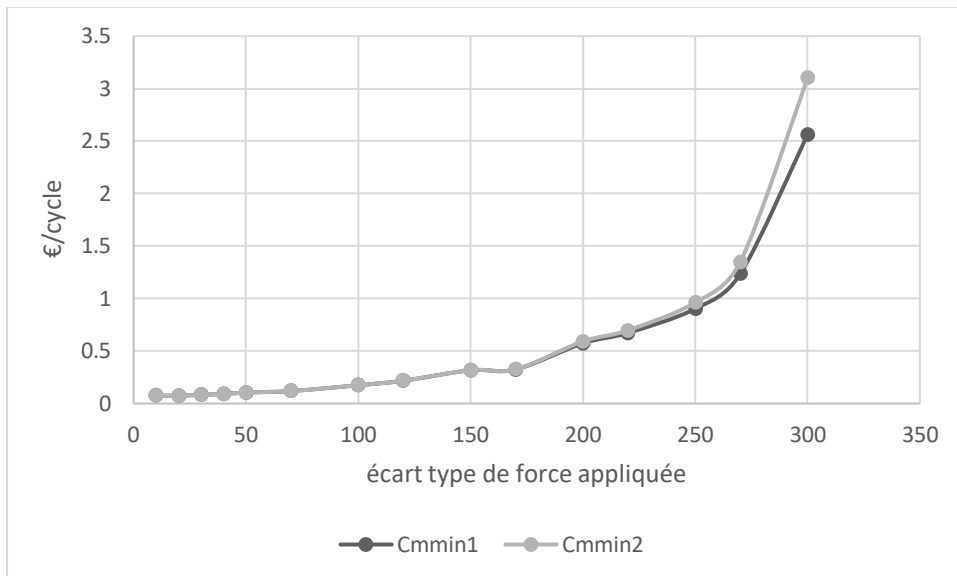


Figure 52: La sensibilité de coût à l'écart-type de la force.

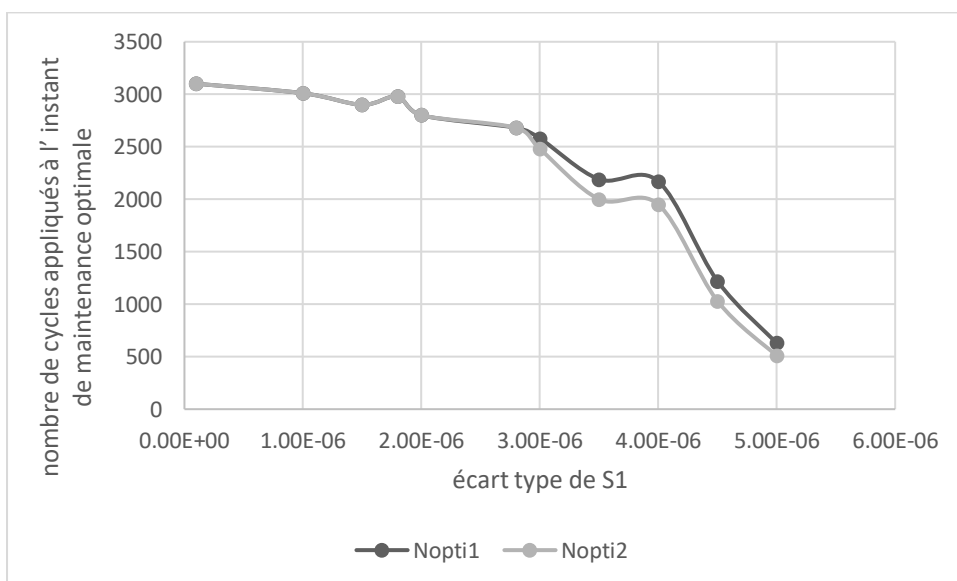


Figure 53: La sensibilité de nombre de cycles optimal de maintenance à l'écart-type de S1.

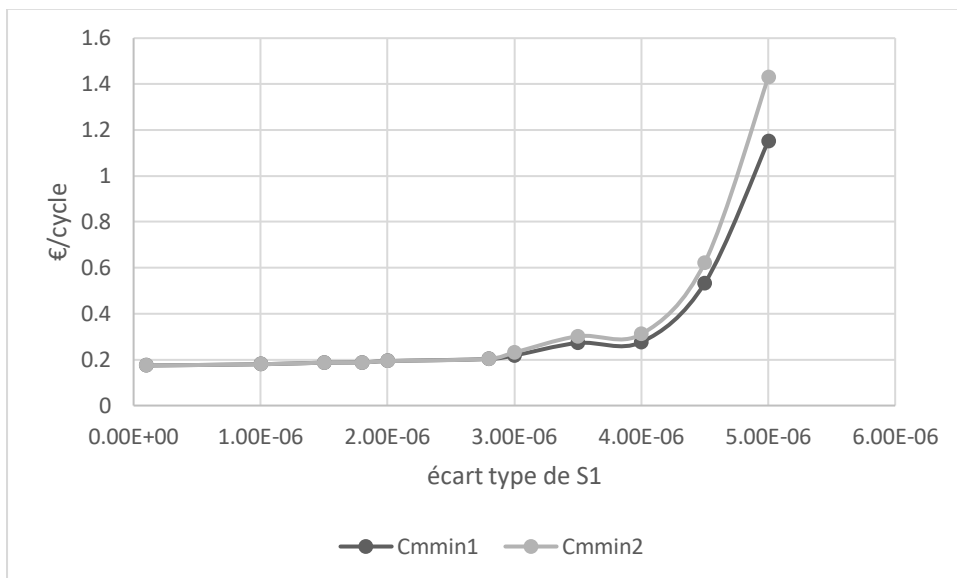


Figure 54: La sensibilité de coût à l'écart-type de S1.

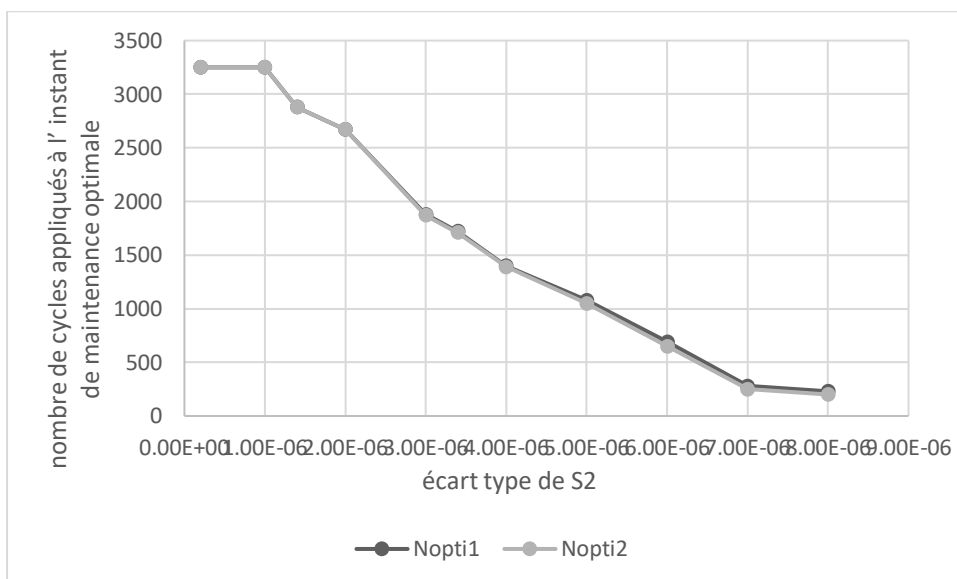


Figure 55: La sensibilité de nombre de cycles optimal de maintenance à l'écart-type de S2.

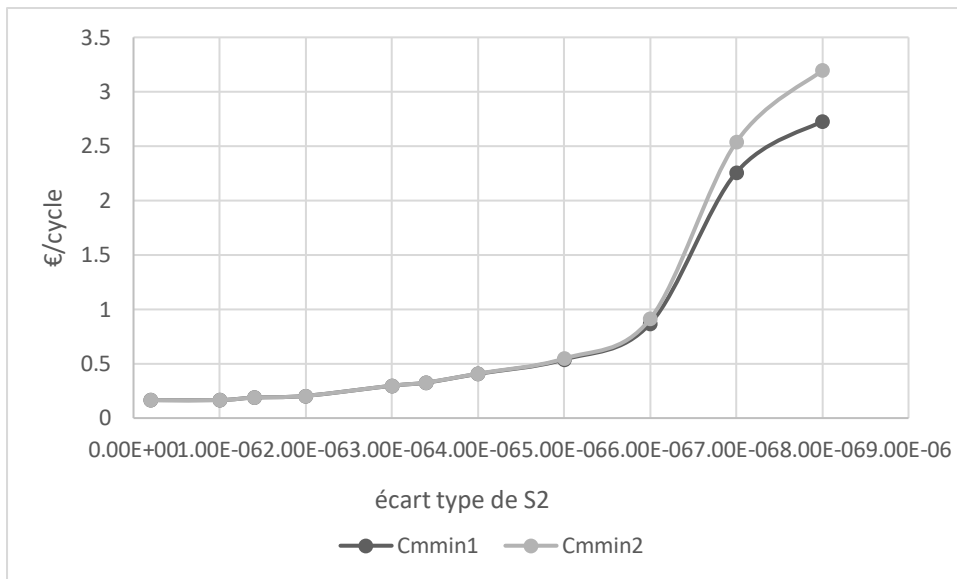


Figure 56: La sensibilité de coût à l'écart-type de S2.

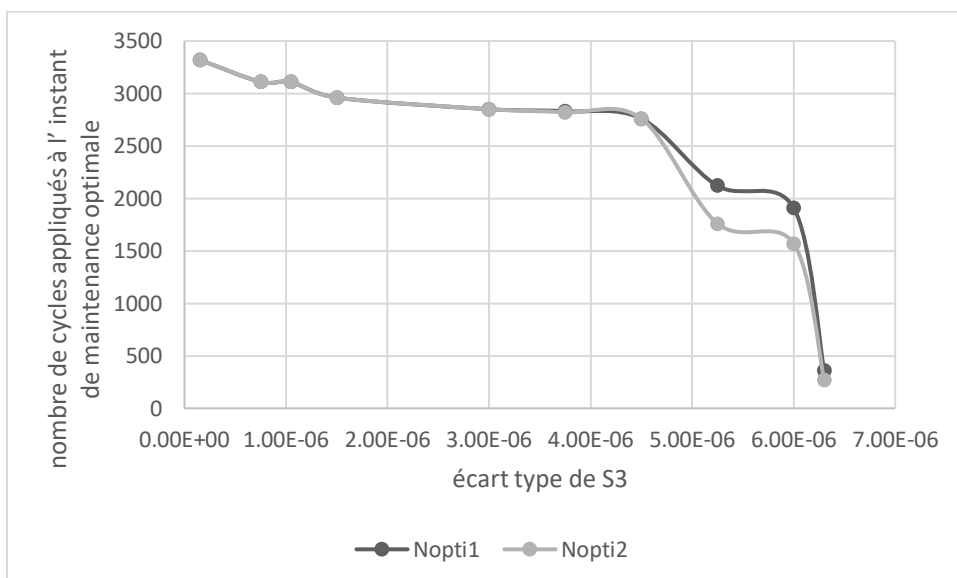


Figure 57: La sensibilité de nombre de cycles optimal de maintenance à l'écart-type de S3.

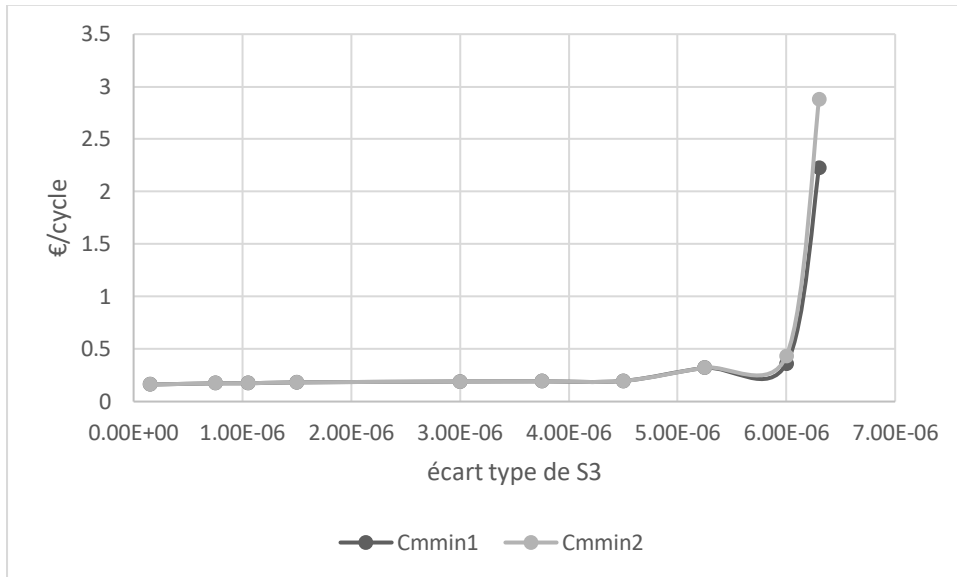


Figure 58: La sensibilité de coût à l'écart-type de S3.

De figures 53, 55 et 57 nous observons que le nombre de cycles optimal de maintenance diminue quand l'écart-type augmente et que les valeurs de  $Nopti$  restent les mêmes pour les deux politiques avec tout écart-type  $\sigma_{S1} \leq 3 \times 10^{-6}$ ,  $\sigma_{S2} < 4 \times 10^{-6}$  et  $\sigma_{S3} < 3 \times 10^{-6}$ . On observe aussi que  $Nopti2 < Nopti1$  pour tous les autres valeurs des écarts-types mais la différence entre les deux valeurs est plus importante que la différence dans le cas d'étude de l'écart-type de la force.

De figures 54, 56 et Figure 5658 nous observons que le coût minimal augmente avec l'augmentation de l'écart-type. Le coût de la politique 2 est plus grand que celui de la politique 1 pour  $\sigma_{S1} > 3 \times 10^{-6}$ ,  $\sigma_{S2} \geq 4 \times 10^{-6}$  et  $\sigma_{S3} \geq 3 \times 10^{-6}$  tandis que les deux coûts sont les mêmes pour les autres valeurs des écarts-types.

#### 4.5 Conclusion

Les résultats de ce chapitre conduisent à observer que le coût de la maintenance augmente avec l'augmentation de la compliance de la structure, ou avec l'augmentation de rapport géométrique qui conduit à son tour à accroître la compliance.

Concernant la structure de pylône électrique, nous observons que pour la même valeur de la compliance, le coût minimal de maintenance de la structure optimisée en tenant compte de l'effet de vent, est moins que le coût de maintenance en négligeant cet effet ; ainsi, nous concluons que la forme optimisée en prenant en compte l'effet du vent est plus fiable.

Après comparaisons des politiques de maintenance définies par le remplacement du système entier ou du composant le moins fiable, nous déduisons que le coût de la maintenance en appliquant la deuxième politique est plus grand que celui en appliquant la première politique de la maintenance.



## Conclusion générale

Ce travail présente une méthodologie d'optimisation topologique basée sur la fiabilité, permettant d'optimiser le coût total de maintenance des structures soumises à la fatigue.

Nous avons présenté la méthode à utiliser pour les deux catégories de structures : continues et discrètes.

Nous appliquons une méthode d'optimisation topologique pour obtenir la forme optimale de la structure. Cette méthode varie selon le type de structure (i.e. continues ou discrète) ; parmi les méthodes d'optimisation topologique disponibles, nous choisissons la méthode des lignes de niveau pour les structures continues et la méthode de structure de base pour les structures à barres. Les conditions aux limites, la fonction objectif et les contraintes d'optimisation varient d'une application à l'autre.

Dans la suite de la démarche, la structure de forme optimale soumise à la fatigue est analysée mécaniquement. Nous calculons la durée de vie de la structure en fatigue et nous effectuons une étude fiabiliste afin de déterminer sa probabilité de la défaillance.

Les résultats obtenus de l'analyse fiabiliste sont ensuite utilisés pour l'optimisation de la maintenance. Nous choisissons le coût de la maintenance comme fonction objectif. Pour cela, nous devons minimiser le coût de la maintenance en tenant compte de la fiabilité de la structure, il s'agit de l'optimisation du coût de maintenance basée sur la fiabilité.

Dans la littérature scientifique, nous ne trouvons pas des travaux sur le couplage de l'optimisation de forme avec l'optimisation du coût de maintenance. La plupart des travaux se concentrent sur la méthode d'optimisation topologique et ses applications.

Concernant les structures continues, nous observons dans les résultats du deuxième chapitre que la forme optimale de la structure varie avec le changement des paramètres géométriques comme le rapport entre la longueur et la hauteur de la structure. Nous observons aussi que la compliance de la structure optimale augmente quand ce rapport augmente. Ce qui conduit à conclure que la forme optimale devient moins fiable quand le rapport géométrique augmente.

Concernant les structures à barres, les résultats obtenus dans le troisième chapitre montrent que la prise en compte des différents chargements (ex le vent) est un facteur important dans la conception de la structure, et que la forme optimale obtenue en tenant compte de ce facteur est plus fiable que la forme obtenue en le négligeant.

Nous observons aussi que l'intervalle du nombre de cycles appliqué diminue quand la compliance de la structure augmente, ce qui conduit à déduire que la fiabilité de la structure diminue avec l'augmentation de sa compliance, et par la suite avec la minimisation de sa rigidité.

L'analyse fiabiliste montre que la taille de l'intervalle de confiance des charges cycliques diminue avec l'augmentation du rapport entre la longueur et la hauteur.

Les résultats obtenus de l'analyse de la structure à trois barres, montrent que l'intervalle d'application de charges cycliques devient plus étendu quand le coefficient de variation de variables augmente.

Les résultats du quatrième chapitre conduisent à observer que le coût de la maintenance augmente avec l'augmentation de la compliance de la structure, ou avec l'augmentation de rapport géométrique qui conduit à son tour à accroître la compliance.

Concernant la structure de pylône électrique, nous remarquons que pour la même valeur de la compliance, le coût minimal de maintenance de la structure optimisée en tenant compte de l'effet de vent, est moins élevé que le coût de maintenance en négligeant cet effet ; Ainsi, nous concluons que la forme optimisée en prenant en compte l'effet du vent est plus fiable.

Après comparaisons des politiques de maintenance définies par le remplacement du système entier ou du composant le moins fiable, nous déduisons que le coût de la maintenance en appliquant la deuxième politique est plus grand que celui en appliquant la première politique de maintenance.

### **Perspectives**

Les idées prévues à réaliser dans ce domaine de recherche sont de notre point de vue les suivants :

- Introduction des critères de maintenance dans l'algorithme d'optimisation topologique des structures.
- Optimisation multi-objectif des structures en prenant la fonction du coût de maintenance comme objectif et la fiabilité de la structure comme contrainte d'optimisation.

## References

- A. D. Orcesi, D.M. Frangopol. , Sunyong. K. 2010. "Optimization of bridge maintenance strategies based on multiple limit states and monitoring." *Engineering Structures* 32 627-640.
- A.M. Hasofer, N.C. Lind. 1974. "Exact and invariant second moment code forma." *Journal of Engineering Mechanics*, 100 111–121.
- AFNOR. 2001. *Maintenance - Terminologie de la maintenance, NF EN13306*. l'Association Française de Normalisation .
- Allaire, Grégoire. 2007. "Conception optimale de structures." In *Mathématiques et Applications*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Altair. 2012. *hyperstudy*. <https://altairhyperworks.com/product/hyperstudy>.
- Beasley.D, D.BULL,MARTIN. R. 1993. "An overview of genetic algorithms. Fundamentals." *University Computing*, 15(2) 58-69.
- Bendsøe, M. P. 1989. "Optimal shape design as a material distribution problem ." *Structural Optimization* 1 193-202 .
- Bendsoe, Martin Philip, Kikuchi, Noboru. 1988. "Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 71(2) 197-224.
- Bhattacharjee, S. 2016. "Imperfect Preventive Maintenance Strategy for Flexible Pavements Based on Threshold Reliability, Cost Optimization, and Mechanistic–Empirical Analysis ." *Journal of the Transportation Research Board*, No. 2589 32-39.
- CASE, JOHN. 1999. *Strength of Materials and Structures*. Elsevier Ltd.
- Chan. K-Y., S.Skerlos. , P. Papalambros. 2007. "An Adaptive Sequential Linear Programming Algorithm for Optimal Design Problems With Probabilistic Constraints." *Journal of Mechanical Design* 129.2 140–149.
- Chen.X., Timothy. H., Douglas .N. 1997. "Reliabilitybased structural design optimization for practical applications." *38th AIAA/ASME/ASCE/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*. American Institute.
- Cheng.G., L. Xu, Lei. J. 2006. "A sequential approximate programming strategy for reliability-based structural optimization." *Computers & Structures* 84.21 1353–1367.
- Cho.T., B. Lee. 2010. "Reliability-based design optimization using a family of methods of moving asymptotes." *Structural and Multidisciplinary Optimization* 42.2 (2). 255–268.
- Clark, P. R. 2017. *Reliability-Based Topology Optimization with Analytic Sensitivities*. Blacksburg, Virginia: the Virginia Polytechnic Institute.
- D. M. Frangopol, M.Liu. 2007. "Bridge Network Maintenance Optimization Using Stochastic Dynamic Programming." *JOURNAL OF STRUCTURAL ENGINEERING*, volume 133.

- D.M.Frangopol. 2000. "Advances in life-cycle reliability-based technology for design and maintenance of structural systems." *Computational mechanics for the twenty-first century*. Edinburgh: Saxe-Coburg Publishers 257–270.
- Deb, KALYANMOY. 1997. "Genetic Algorithm in Search and Optimization: The Technique and Applications." *Proceedings of the International Workshop on Soft Computing and Intelligent Systems* 58-87.
- Degertekin.S.O. 2008. "Optimum design of steel frames using harmony search algorithm." *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 36(4) 393-401.
- Ditlevsen.O. 1981. "Principle of Normal Tail Approximation." *Journal of the Engineering Mechanics Division* 107 1191–1208.
- Dowland., K.A. 1995. "Simulated Annealing." In *Modern Heuristic Techniques for Combinatorial*, by Reeves. C.R. McGraw-Hill.
- Du. X., W.Chen. 2004. "Sequential Optimization and Reliability Assessment Method for Efficient Probabilistic Design." *Journal of Mechanical Design* 126.2 225–233.
- E. Garavaglia, L. Sgambi. 2016. "Selective maintenance planning of a steel truss bridge based on the Markovian approach ." *Engineering Structures*, 125 532–545.
- Eom. YS., Yoo. KS., Park. JY. 2011. "Reliability-based topology optimization using a standard response surface method for three-dimensional structures." *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Volume 43 287-295.
- Eschenauer, Hans A , Olhoff.Niels. 2001. "Topology optimization of continuum structures:A review." *Applied Mechanics Reviews* vol 54, no 4 331.
- Frangopol.D.M., Maute. K. 2003. "Life-cycle reliability-based optimization of civil and aerospace structures." *Computers & Structures* 81 397–410.
- Freudenthal. A., M.Jewell,M. Garelt, M.Shinozuka. 1966. "The Analysis of Structural Safety." *Journal of Structural Engineering* 92.ST1 267–324.
- G. Allaire, F. Jouve. 1997. "Optimisation topologique de structures élastiques." *Actes du 3ème colloque national en calcul des structures*, B. Peseux et al. eds., 49-58.
- G. I. N. Rozvany, M. Zhou,T. Birker. 1992. "Generalized shape optimization without homogenization." *Structural optimization* Volume 4, Issue 3–4 250–252.
- Geem.Z., Kim. J., Loganathan.G. 2001. "A new heuristic optimization algorithm: Harmony search." *Simulation*, 76(2) 60-68.
- Geoffroy-Donders, P. 2017. "Optimisation de structures composées de cellules périodiques." *13ème Colloque National en Calcul des Structures*.
- Glatter, Markus. 2004. *Distance Field Reinitialization for localized level set methods*. University of Dortmund, Germany.

- Hegemier G, Prager W. 1969. "On Michell trusses." *Int. J. Mech. Sci.* 11 209-215.
- Holland, J.H. 1975. *Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligenc.* University of Michigan Press.
- Hongwei Zhao, Kai Long, Z.-D. Ma. 2010. "Homogenization Topology Optimization Method Based on Continuous Field." *Advances in Mechanical Engineering.*
- J. Chun, J. Song, G. H. Paulino. 2015. "Topology Optimization of Structures under Constraints on First Passage Probability." *12th International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering.* Vancouver, Canada: ICASP12.
- K. Long, Z. Zuo, and R. H. Zuberi, 2009. "Study on parameters for topological variables field interpolated by moving least square approximation." *Acta Mechanica Solida Sinica, vol. 22, no. 2* 180–188.
- Kharmanda.G., Olhoff.N., Mohamed. A.,M. Lemaire. 2004. "Reliability-based topology optimization." *Structural and Multidisciplinary Optimization, Volume 26* 295–307.
- Kim. C., Wang.S., Rae. K. 2006. "Reliability-based topology optimization with uncertainties." *Journal of Mechanical Science and Technology* 494-504.
- Kuschel. N., Rackwitz.R. 1997. "Two basic problems in reliability-based structural optimization." *Mathematical Methods of Operations Research* 46 309–333.
- Kuschel.N, R. Rackwitz. 1997. "Two Basic Problems in Reliability-Based Structural Optimization." *Mathematical Methods of Operations Research* 46.3 309–333.
- Lee. K. S., Geem.Z.W. 2004. "A new structural optimization method based on the harmony search algorithm." *Computers & Structures, 82(9)* 781-798.
- Lee.K.S., Geem.Z.W. , Lee.S.H. , Bae.K.W. 2005. "The harmony search heuristic algorithm for discrete structural optimization." *Engineering Optimization, 37(7)* 663-684.
- Liang,J, Zissimos. P. M., E. Nikolaidis. 2007. "A Single-Loop Approach for System Reliability-Based Design Optimization." *Journal of Mechanical Design* 129.12 1215–1224.
- Lu. C. Neves., D. M. Frangopol., P. S. Cruz. 2004. "Cost of life extension of deteriorating structures under reliability-based maintenance." *Computers and Structures* 82 1077–1089.
- M. Lemaire, A.Chateauneuf , Jean-Claude Mitteau. 2009. *Structural Reliability.* Wiley-ISTE.
- M. P. Bendsøe, A. Ben-Tal,J. Zowe. 1994. "Optimization methods for truss geometry and topology design." *Structural Optimization Volume 7* 141–159.
- M.Valdebenito, G. Schuëller. 2010. "A survey on approaches for reliability-based optimization." *Structural and Multidisciplinary Optimization* 42.5 (5) 645–663.
- Madsen. H. O., F. Friis Hansen In: Ed. -Ver. 1992. "A comparison of some algorithms for reliability-based structural optimization and sensitivity analysis." *4th IFIP WG 7.5 conference, Munich.* . by Rüdiger Rackwitz and P. Thoft-Christensen. Springer.

- Maistrrou, Aliaksei. 2008. *Level Set Methods – Overview*. Computer Aided Medical Procedures, TUM.
- Martin Philip Bendsoe, Ole Sigmund. 2004. *Topology Optimization Theory, Methods, and Applications*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Maute. K., D. M. Frangopol. 2003. "Reliability-based design of MEMS mechanisms by topology optimization." *Computers & Structures* 81.8-11 813–824.
- Michell, A. G. M. (1904), "The Limits of Economy in Frame Structures," *Philosophical Magazine, Series 6, Vol. 8, No. 47*, pp. 589-597. 1904. "The Limits of Economy in Frame Structures." *Philosophical Magazine, Series 6, Vol. 8, No. 47* 589-597.
- N. M. Okasha., D. M. Frangopol. 2009. "Lifetime-oriented multi-objective optimization of structural maintenance considering system reliability, redundancy and life-cycle cost using GA." *Structural Safety* 31 460–474.
- Nataf, A. 1962. "Détermination des distributions de probabilités dont les marges sont données." *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 225 42-43.
- NiKolaidis.E., R. Burdisso. 1988. "Reliability based optimization:A safety index approach." *Computers & Structures* 28.6 781–788.
- O. Sigmund, J. Petersson. 1998. "Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima." *Structural optimization*, 16(1) 68–75.
- O.Sigmund. 2007. "Morphology-based black and white filters for topology optimization." *StructMultidiscipOptim* 33(4–5 401–424.
- Ohsaki, Makoto. 2011. *Optimization of Finite Dimensional Structures*. CRC Press .
- Oliveira.H.L., Chateauneuf.A., Leonel.E.D. 2017. "Boundary Element Method applied to decision-making problems involving geometric variabilities in topology optimization." *Engineering Analysis with Boundary Elements,Volume 85* 116-126.
- Persson, Per-Olof. 2005. *Numerical Methods for Partial Differential Equations: The Level Set Method* . MIT, Lecture Notes.
- R. Lebrun, A. Dutfoy. 2009. "A generalisation of the Nataf transformation to distributions with elliptical copula." *Probabilistic Engineering Mechanics* 24 172-178.
- R.Faddoul., W. Raphael., A.Chateauneuf. 2011. "A generalised partially observable Markov decision process updated by decision trees for maintenance optimisation." *Structure and Infrastructure Engineering Vol. 7, No. 10* 783–796.
- Rabadi.H., Al. 2014. *Truss size and topology optimization using harmony search method* . University of Iowa (Master of Science) thesis.
- Rackwitz.R, B. Fiessler. 1978. "Structural Reliability Under Combined Random Load Sequences." *Computers & Structures* 9.5 484–494.

- Rodríguez.C., López. 2017. *Reliability-based design and topology optimization of aerospace components and structures*. University of Kentucky | UKY ,PhD thesis.
- Rosenblatt, M. 1952. "Remarks on a Multivariate Transformation." *the Annals of Mathematical Statistics, Vol. 23, No 3* 470-472.
- Rozvany, G.I.N. 2009. "A critical review of established methods of structural topology optimization." *Struct Multidisc Optim, Volume 37* 217–237.
- S.N. Sivanandam, S. N. Deepa. 2008. *Introduction to Genetic Algorithms*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag .
- S.Osher, Sethian.J.A. 1988. "Fronts Propagation with Curvature Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton Jacobi Formulations." *Journal of Computational Physics, 79* 12-49.
- Sethian, J.A. 1995. "Theory, Algorithms, and Applications." *Acta Numerica*.
- Sethian.J.A. 1998. *Fast marching methods and level set methods for propagating interface*. von Karman Institute Lecture Series, 29th Computational Fluid Dynamics.
- Sethian.J.A. 1985. "Curvature and the evolution of fronts." *Comm. Math. Phys. 101* 487--499.
- Sigmund, O. 2001. "A 99 line topology optimization code written in Matlab." *Struct Multidisc Optim 21* 120–127.
- Stanley Osher, Ronald P. Fedkiw. 2001. *Level set methods: An overview and some recent results*. J. Comput. Phys.
- Su Ruiyi, Gui Liangjin, Fan Zijie. 2009. "Truss Topology Optimization Using Genetic Algorithm with Individual Identification Technique." *Proceedings of the World Congress on Engineering Vol II*. London: WCE.
- Thanedar.P.B., S. Kodiyalam. 1992. "Structural optimization using probabilistic constraints." *Structural Optimization 4 (3–4)* 236–240.
- Thomas.L. 1986. "A survey of maintenance and replacement models for maintainability and reliability of multi-item systems." *Reliability Engineering, 16(4)* 297-309.
- Thore, Carl-Johan. 2016. "FMINS DP – a code for solving optimization problems with matrix inequality constraints." *mathworks*. <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/43643-fminsdp>.
- Tu.J., K.Choi, Y. H.Park. 1999. "A New Study on Reliability-Based Design Optimization." *Journal of Mechanical Design 121.4* 557–564.
- van Dijk, N.P., Maute, K., Langelaar, M. et al. 2013. "Level-set methods for structural topology optimization: a review." *Struct. Multi. Optim. 48* 437–472.
- W. S. Dorn, R. E. Gomory, H. J. Greenberg. 1964. "Automatic design of optimal structures ." *Journal de Mecanique, Vol. 3* 25-52.

- Wang.H., Pham.H. 2006. *Reliability and Optimal Maintenance*. London: Springer-Verlag.
- Won-Hee Kang, Junho Song. 2010. "Evaluation of multivariate normal integrals for general systems by sequential compounding." *Structural Safety* 32 35–41.
- Y.Aoues, A.Chateauneuf. 2010. "Benchmark study of numerical methods for reliability-based design optimization." *Structural and Multidisciplinary Optimization* 41.2 277–294.
- Yang.R.J., L.Gu. 2004. "Experience with approximate reliability-based optimization methods ." *Structural and Multidisciplinary Optimization* 26(1). 152–159.
- Zou. T., S. Mahadevan. 2006. "A direct decoupling approach for efficient reliability-based design optimization." *Structural and Multidisciplinary Optimization* 31.3 190–200.