



**HAL**  
open science

# Approche renouvelée du mécanisme de Greenwood-Johnson de la plasticité de transformation pour les aciers et alliages

Youssri El Majaty

► **To cite this version:**

Youssri El Majaty. Approche renouvelée du mécanisme de Greenwood-Johnson de la plasticité de transformation pour les aciers et alliages. Matériaux. Sorbonne Université, 2021. Français. NNT : 2021SORUS092 . tel-03628806

**HAL Id: tel-03628806**

**<https://theses.hal.science/tel-03628806>**

Submitted on 3 Apr 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SORBONNE UNIVERSITÉ

**École Doctorale de Sciences Mécaniques, Acoustique,  
Électronique et Robotique de Paris**

Laboratoire : *Institut Jean Le Rond d'Alembert*

Équipe de recherche : *Mécanique et Ingénierie des Solides et des Structures*

## THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mécanique

présentée par

**Youssri El Majaty**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE SORBONNE UNIVERSITÉ**

---

### **Approche renouvelée du mécanisme de GREENWOOD-JOHNSON de la plasticité de transformation pour les aciers et alliages**

---

dirigée par

**Jean-Baptiste LEBLOND et Renald BRENNER**

#### Composition du Jury :

J.B LEBLOND	Professeur d'Université, IJLRDA, Paris	Directeur de thèse
R. BRENNER	Directeur de recherche CNRS, IJLRDA, Paris	Co-directeur de thèse
V. MONCHIET	Maître de conférence - HDR, UPEM	Rapporteur
N. LAHELLEC	Maître de conférence - HDR, UMA	Rapporteur
L. TALEB	Professeur d'Université, GPM, Rouen	Examinateur
D. KONDO	Professeur d'Université, IJLRDA, Paris	Examinateur
G. Perrin	Directeur scientifique, FRAMATOME, Paris	Examinateur
J.M Bergheau	Professeur d'Université, LTDS, Saint-Étienne	Examinateur



Ici, je tiens à ce qu'il me soit permis de remercier tous ceux qui ont participé de différentes façons à l'accomplissement de ma thèse, réalisée à l'INSTITUT JEAN LE ROND d'ALEMBERT.

J'exprime ma gratitude et ma profonde reconnaissance à Monsieur le professeur J.B. LEBLOND, qui a assuré la direction de cette thèse avec habileté et dont le rayonnement scientifique et l'enseignement à fortement contribué à ma formation dans l'ingénierie mécanique. Il a su me communiquer enthousiasme, rigueur et culture scientifique pour la conduite de ce travail de recherche. Je le remercie pour m'avoir accepté, au sein de son équipe MISES, et pour les précieux et longs moments qu'il m'a accordé.

Les remerciements vont aussi à Monsieur R. BRENNER qui a conduit mes premiers pas dans la micromécanique numérique et qui m'a aidé à écrire les programmes de modélisation sur les transformations de phase. Il m'a ensuite témoigné personnellement de l'intérêt à mon travail par des encouragements et des remarques nombreuses et détaillées qui ont grandement contribué à l'avancement de ce dernier, je lui exprime mes sincères reconnaissances.

Remerciements à Monsieur L. TALEB, qui a effectué les expériences et m'a appris à les exploiter. Ce travail constitue une perspective majeure dont je saurais honorer de participer plus tard avec engagement et sérieux. Cette étude permet de dépasser le stade de la spéculation théorique et de jauger la pertinence des résultats numériques.

Dépendant de cette thèse et à l'origine de cette étude, mon stage de maîtrise a pu être valorisé par les cours et formations du code SYSWELD par Monsieur A. BROSSE que je remercie et à travers lui la direction générale de FRAMATOME, qui m'ont permis de réaliser le début de la campagne expérimentale grâce à leur soutien financier. Je dois citer plus spécialement Monsieur G. PERRIN et Madame A. MONTOUCHET. Que tous soient profondément remerciés.

À l'ensemble de l'équipe pédagogique pour leur contribution et leur dévouement dans l'enseignement des sciences que j'ai pu suivre à l'UPMC tout au long de ma scolarité et que j'ai pu donner à mon tour dans ma mission d'enseignement. Je remercie également l'ensemble du personnel et plus particulièrement Monsieur D. KONDO directeur de l'école doctorale SMAER et ma gestionnaire Madame C. DEJANCOURT, qui ont assuré les conditions administratives nécessaires pour réaliser ma thèse et les différents déplacements dans un environnement cordial et propice, je leur adresse ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

The work exposed in this manuscript relates to the analytical and numerical modeling of Greenwood-Johnson's mechanism of transformation plasticity for metals and alloy. This is essential for the numerical simulations of industrial metal subjected to thermomechanical processes at high temperature such as welding and quenching.

A model to describe the phenomenon of transformation plasticity was developed in 1989 by J.B. LEBLOND, based on a simplified micromechanical approach. One of the objectives of this work is to take up this model, but from a more rigorous approach based on the combination of the theories of limit analysis and homogenization.

This not only makes it possible to relax the excessive hypotheses introduced in the 1989's analysis, but above all to describe effects that are known experimentally, but which this analysis could not by nature understand, such as the nonlinear growth of the plasticity effect of transformation with applied stress, or even to be able to investigate in the effects of shapes of nuclei in non-spherical growth.

In order to check the consistency of the new theoretical approach as well as to improve it, the study is devoted to numerical simulations using an FFT-based calculation method more robust than the standard finite element method. Numerical modeling will also make it possible to analyze the effects of interactions between nuclei and the effects of nucleation and growth.

*Keywords:* Transformation plasticity; Greenwood-Johnsons mechanism; limit-analysis and homogenization; FFT-based simulations; spherical and spheroidal phase nucleation/growth; JMAKs model.

Le travail exposé dans ce manuscrit concerne la modélisation analytique et numérique du mécanisme de GREENWOOD-JOHNSON de la plasticité de transformation des métaux et des alliages. Cette étude est primordiale pour les simulations numériques de pièces métalliques industrielles soumises à des procédés thermo-mécaniques à haute température, tels que le soudage et la trempe.

Un modèle fondée sur une approche micro-mécanique simplifiée permettant de décrire le phénomène de la plasticité de transformation a été développé en 1989 par J.B. LEBLOND. L'objectif de cette thèse est alors de reprendre les bases de ce modèle, mais de le résoudre avec une approche plus rigoureuse, combinant les théories de l'analyse-limite et de l'homogénéisation.

Cette nouvelle approche permet non seulement de renoncer aux hypothèses excessives introduites dans l'analyse de 1989, mais surtout de décrire des effets connus expérimentalement, que l'ancienne analyse ne pouvait pas appréhender. Par exemple, ne pouvait pas être perçu la croissance non-linéaire de la déformation plastique de transformation en fonction de la contrainte appliquée, ou encore, de pouvoir s'intéresser aux effets de formes des germes.

Afin de vérifier la consistance de la nouvelle approche théorique ainsi que l'améliorer, l'étude est consacrée à des simulations numériques utilisant une méthode de calcul à base de FFT plus robuste que la méthode standard des éléments finis. La modélisation numérique permettra en outre d'analyser les effets d'interactions entre les germes et les effets de germinations/croissances.

*Mot clés* : Plasticité de transformation ; mécanisme de Greenwood-Johnson ; analyse-limite et homogénéisation ; simulations à base de FFT ; germination/croissance de phase sphérique et sphéroïdal ; modèle JMAK.

<b>État de l'art</b>	<b>1</b>
<b>I Contexte et problématique</b>	<b>3</b>
I.1 Contexte industriel	4
I.2 Contexte scientifique	6
I.3 Problématique de thèse	8
<b>II Synthèse bibliographique sur la plasticité de transformation</b>	<b>11</b>
II.1 Définition de la plasticité de transformation	12
II.1.1 Dilatométrie libre	14
II.1.2 Dilatométrie sous contrainte	16
II.2 Mécanismes de la plasticité de transformation	18
II.2.1 Le mécanisme de Greenwood-Johnson	18
II.2.2 Le mécanisme de Magee	19
II.3 Principaux modèles analytiques de la plasticité de transformation	22
II.3.1 Premiers modèles	22
II.3.2 Modèle classique de Leblond (1989)	24
II.3.3 Modèles améliorés de Leblond	30
II.4 Modèles numériques de la plasticité de transformation	31
II.4.1 Modèles numériques de Leblond	32
II.4.2 Modèles numériques récents	32
<b>Étude pour des germes sphériques</b>	<b>35</b>
<b>III A novel treatment of Greenwood-Johnson's mechanism of transformation plasticity - Case of spherical growth of nuclei of daughter-phase</b>	<b>37</b>
III.1 Introduction	35
III.2 Elements of Leblond's classical of transformation plasticity	37
III.2.1 Generalities	37
III.2.2 Decomposition of microscopic strains	38
III.2.3 Decomposition of macroscopic strains	38
III.2.4 Additional hypoyheses	39
III.2.5 The spherical growth model and its approximate treatmet	39
III.3 Limit-analysis of hollow sphere subjected to external and internal loadings	41
III.3.1 Preliminary remarks	41
III.3.2 Generalities	42
III.3.3 Trial displacement fields and load parameters	43

III.3.4 Overall plastic dissipation . . . . .	45
III.3.5 Overall yield criterion . . . . .	45
III.3.6 Overall flow rule . . . . .	46
III.4 Application to Greenwood-Johnson's mechanism of transformation plasticity . . . . .	47
III.4.1 Principle ad preliminaries . . . . .	47
III.4.2 Special case : Small external stresses . . . . .	48
III.4.3 General case : Arbitrary external stresses . . . . .	49
III.4.4 Explicit formula for the beginning of the transformation . . . . .	50
III.4.5 A composite approximation . . . . .	50
III.5 Comparison with other theorie, experiments, and micromechanical simulations . . . . .	51
III.5.1 Element of comparison - Generalities . . . . .	51
III.5.2 Comparison of evolutions of the transformation plastic strain . . . . .	55
III.5.3 Comparison of final values of the transformation plastic strain . . . . .	55
III.5.4 Comparison with multiaxial experiments and michromechanical simulations . . . . .	55
III.6 Synthesis and perspectives . . . . .	55
III.6.1 Appendix A. Additional consideration on the thermal strains of individual phases and the overall thermomettarlurgical strain . . . . .	55
III.6.2 Appendix B. On the relative importance of Greenwood-Johnson's and Magee mechanism and their experimental separation . . . . .	55
<b>IV FFT-based micromechanical simulations of transformation plasticity. Comparison with a limit-analysis-based theory . . . . .</b>	<b>63</b>
IV.1 Introduction . . . . .	65
IV.2 General hypotheses and notations . . . . .	66
IV.3 Constitutive equations of the phases . . . . .	67
IV.4 The FFT-based numerical scheme in the context of transformation plasticity . . . . .	69
IV.4.1 Lippmann-Schwinger's equation for periodic media . . . . .	69
IV.4.2 Microstructure evolution . . . . .	69
IV.4.3 Preliminary study of dispersion effects . . . . .	74
IV.5 A summary of a limit-analysis-based theory of transformation plasticity . . . . .	78
IV.6 Assessment of the model using FFT numerical simulations . . . . .	80
IV.7 Conclusion . . . . .	82
IV.8 Appendix A. Effect of homogeneous/heterogeneous nucleation . . . . .	83
IV.9 Appendix B. Influence of some parameters of the numerical representation of the transformation . . . . .	85
IV.9.1 B.1 Yield stress variation during the transformation . . . . .	85
IV.9.2 B.2 Thickness of the transforming layer . . . . .	85
<b>Étude pour des germes sphéroïdaux . . . . .</b>	<b>89</b>
<b>V Approche renouvelée de la plasticité de transformation due au mécanisme de Greenwood-Johnson : Cas de croissance sphéroïdale des germes . . . . .</b>	<b>91</b>
V.1 Généralités . . . . .	93
V.1.1 Motivation . . . . .	93
V.1.2 Généralités géométriques . . . . .	95
V.1.3 Généralités mécaniques . . . . .	99
V.2 Analyse-limite d'un sphéroïde allongé contenant une cavité sphéroïdale confocale et soumis à des chargements externe et interne . . . . .	101
V.2.1 Choix des champs de déplacements tests . . . . .	102
V.2.2 Calcul des paramètres cinématiques et de chargement . . . . .	103
V.2.3 Dissipation plastique . . . . .	105
V.2.4 Critère de plasticité . . . . .	110
V.2.5 Loi d'écoulement plastique . . . . .	113

---

V.3	Application à la plasticité de transformation . . . . .	114
V.3.1	Préliminaires . . . . .	114
V.3.2	Cas de contraintes nulles ( $\Sigma = 0$ ) . . . . .	118
V.3.3	Cas de contraintes arbitraires . . . . .	121
<b>VI</b>	<b>Simulations numériques du mécanisme de GREENWOOD-JOHNSON : cas de croissance de germes allongés sphéroïdaux . . . . .</b>	<b>129</b>
VI.1	Approche numérique . . . . .	130
VI.1.1	Choix de la cellule élémentaire représentative . . . . .	130
VI.1.2	Cinétique JMAK de croissance sphéroïdale . . . . .	132
VI.1.3	Validation de la cinétique de nucléation/croissance . . . . .	135
VI.1.4	Étude numérique paramétrique de la plasticité de transformation . . . . .	138
VI.2	Comparaison du modèle théorique et des résultats numériques . . . . .	144
VI.2.1	Correction de couplage élastoplastique en l'absence de contrainte extérieure . . . . .	144
VI.2.2	Correction supplémentaire en présence d'une contrainte extérieure . . . . .	144
VI.2.3	Comparaison théorique/numérique : Traction . . . . .	146
VI.2.4	Comparaison théorique/numérique : Compression . . . . .	147
	<b>Bibliographie</b>	<b>151</b>

---

## Table des figures

---

I.1	Type de forgeage d'une virole à partir d'un lingot plein (figure issue de la médiathèque de l'IRSN) . . . . .	4
I.2	Pièces constitutives d'une cuve à eau pressurisée (issue de la médiathèque de l'IRSN) . . . . .	5
I.3	Interaction physique lors des procédés thermomécaniques ; diagramme issu de l'article de Inoue et Wang (1985) . . . . .	6
I.4	Diagramme métastable des aciers (alliages fer-carbone) . . . . .	7
I.5	Comportement allotrope . . . . .	8
II.1	Courbe d'un essai de traction d'une éprouvette interrompu dans le domaine plastique, (issue de Dieter et Bacon (1986). . . . .	12
II.2	Déformation plastique de transformation $\varepsilon^{TP}$ après une transformation complète ( $f = 1$ ) en fonction de la contrainte extérieure appliqué $\sigma$ (transformation $\gamma \rightarrow \alpha$ pour du fer à $910^{\circ}C$ ) (Greenwood et Johnson, 1965) . . . . .	13
II.3	Géométrie du spécimen . . . . .	13
II.4	Test de dilatométrie libre, réalisé sur un acier 16MND5 (Y. El Majaty et L. Taleb, 2019). . . . .	14
II.5	Diagramme de dilatométrie libre, provenant de Leblond <i>et al.</i> (1986) . . . . .	15
II.6	Test de dilatométrie sous contraintes, réalisé sur un acier 16MND5 (Y. El Majaty et L. Taleb, 2019). . . . .	16
II.7	Différence des dilatométries libre ( II.6(c) ) et forcée ( II.4(b) ) . . . . .	17
II.8	Micrographies typiques de l'acier 35NCD16 après différentes conditions d'austénitisation (Boudiaf <i>et al.</i> , 2011). . . . .	18
II.9	Mécanisme de Greenwood et Johnson (1965) (adapté de Gautier <i>et al.</i> , 1989) . . . . .	19
II.10	Formation de différentes variantes martensitiques dans un seul grain d'un alliage polycristallin durant un chargement de traction (Patoor <i>et al.</i> , 1996, 2006). . . . .	20
II.11	Mécanisme de Magee et Paxton (1966) (adapté de Gautier <i>et al.</i> , 1989) . . . . .	20
II.12	Volume élémentaire représentatif considéré par Leblond <i>et al.</i> (1989) . . . . .	27
II.13	Volume élémentaire représentatif considéré par Taleb et Sidoroff (2003b) . . . . .	30
IV.1	A 2D section of a periodic medium with cubic elementary cell, made of a $\gamma$ -phase matrix containing growing nuclei of $\alpha$ -phase, and subjected to some prescribed macroscopic load $\Sigma$ or $E$ . . . . .	66
IV.2	Spherical growth of $\alpha$ -phase nuclei. (For the explanation of values of $\zeta(\mathbf{x})$ differing from 0 and 1, see section IV.4.2). . . . .	70
IV.3	Comparison between the predictions of the JMAK model and the results of instantaneous nucleation simulations, for three values of the instantaneous nucleation density $Z_0$ (IN). . . . .	72
IV.4	Comparison between the predictions of the JMAK model and the results of sporadic nucleation simulations, for three values of the sporadic nucleation density $\dot{Z}_0$ (SN). . . . .	72

IV.5	Evolutions of the thermal strain and yield stress during the transformation process. . . . .	74
IV.6	Histograms of the diagonal components of the overall strain after complete transformation, and evolution of these components during the transformation, for various instantaneous nucleation densities $Z_0$ . No macroscopic stress applied. . . . .	76
IV.7	Autocorrelation function of an evolving microstructure at $f = 30\%$ . Microstructure image and isovalues of the function in three orthogonal planes. . . . .	77
IV.8	Distribution of the equivalent plastic strain rate within the austenitic phase during the transformation. . . . .	77
IV.9	Comparison of transformation plastic strains with instantaneous (IN) and sporadic (SN) nucleation processes, for an applied stress of 80 MPa. . . . .	77
IV.10	Microstructure considered for the limit-analysis-based approach of El Majaty <i>et al.</i> (2018). . . . .	78
IV.11	Transformation plasticity for uniaxial loadings. . . . .	80
IV.12	Transformation plasticity for tension-shear tests, with different values of the ratio $\eta = \Sigma/\mathcal{T}$ . . . . .	81
IV.13	Various isotropic microstructures at the percolation threshold : (left) sporadic homogeneous nucleation, $p_c \simeq 0.29$ ; (centre) instantaneous heterogeneous nucleation, $p_c \simeq 35\%$ ; (right) sporadic heterogeneous nucleation $p_c \simeq 60\%$ . . . . .	83
IV.14	Comparison between the JMAK model and instantaneous heterogeneous nucleation simulations based on a RSA algorithm, for three values of the instantaneous density of nucleation $Z_0$ . . . . .	84
IV.15	Comparison between instantaneous heterogeneous nucleation (symbols $\diamond$ ) and instantaneous homogeneous nucleation (symbols $\circ$ ), for an applied stress of 80 MPa. . . . .	84
IV.16	Comparison of transformation plastic strains with different evolutions of the yield stress during the transformation, for an applied stress of 80 MPa. Instantaneous heterogeneous nucleation. . . . .	85
IV.17	Comparison between the JMAK model and instantaneous homogeneous nucleation simulations, for different radial growth rates $G$ . . . . .	86
IV.18	Comparison of transformation plastic strains for different radial growth rates $G$ , for an applied stress of 80 MPa. Instantaneous homogeneous nucleation. . . . .	86
V.1	Microstructure d'un matériau composite à matrice métallique $FeTiB_2$ (K. Dorhmi, 2019). . . . .	93
V.2	Acier 18MND5 issu d'une tôle laminée : coupe dans le plan de laminage après attaque au Nital (Andrieu, 2013) . . . . .	94
V.3	Variation de longueur d'un spécimen A533 soumis à plusieurs efforts de compression pendant une transformation bainitique isotherme à $500^\circ C$ , en fonction du temps, figure issue de Desalos (1981) . . . . .	94
V.4	Géométrie étudiée : deux sphéroïdes allongés confocaux . . . . .	96
V.5	Fonctions $\alpha(e)$ et $\beta(e)$ . . . . .	98
V.6	Principaux paramètres géométriques en fonction de $e_1$ et $f$ . . . . .	99
V.7	VER considéré : sphéroïde allongé contenant une cavité sphéroïdale confocale. . . . .	100
V.8	Paramètre $P_{mm}$ et $P_{dd}$ en fonction de $e_1$ et $f$ . . . . .	109
V.9	Transformation étudiée - Adaptation de l'ancienne analyse de Leblond <i>et al.</i> (1989) . . . . .	115
V.10	Géométrie étudiée, issue des travaux de TRAN LE HUNG . . . . .	115
V.11	Résultats analytiques pour différentes excentricités finales des germes, en l'absence de contrainte externe. . . . .	120
V.12	Courbes dilatométriques en fonction du sens de prélèvement des éprouvettes dans la tôle, issues de Côté (2007) . . . . .	121
V.13	Courbes théoriques en traction (classées par excentricité) . . . . .	125
V.14	Courbes théoriques en compression (classées par excentricité) . . . . .	126
V.15	Directivité de la déformation en fonction de la géométrie des germes croissants de phase fille $\alpha$ . . . . .	127

---

VI.1 Coupe 2D des cellules élémentaires étudiées, constituées d'une matrice de phase $\gamma$ contenant des germes de phase $\alpha$ en croissance sphéroïdale allongée, et soumise à un chargement macroscopique imposé $\Sigma$ ou $E$ . . . . .	130
VI.2 Croissance sphéroïdale de phase-fille $\alpha$ ; cellule homothétique. . . . .	131
VI.3 Croissance cylindrique de phase-fille $\alpha$ ; cellule cubique. . . . .	132
VI.4 Cinétique JMAK de croissance sphéroïdale. . . . .	135
VI.5 Croissance sphéroïdale de phase-fille $\alpha$ ; cellule cubique. . . . .	135
VI.6 Comparaisons entre les prédictions du modèle JMAK et les résultats des simulations numériques, pour trois valeurs de densité $Z_0$ de nucléation instantanée (IN). . . . .	136
VI.7 Comparaisons entre les prédictions du modèle JMAK et les cinétiques numériques, pour trois valeurs de densité $Z_0$ de nucléation instantanée (IN). . . . .	137
VI.8 Évolution de la transformation pour $Z_0 = 10^{-4}$ et $e_1 = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.999$ . . . . .	138
VI.9 Comparaison entre deux types de VER en l'absence de contrainte extérieure appliquée. . . . .	139
VI.10 Effet de l'évolution et de l'amplitude de $\sigma_\gamma$ sur la déformation plastique de transformation ; pas de contrainte extérieure appliquée et excentricité $e_1 = 0.99$ (germes quasi-cylindriques). . . . .	140
VI.11 Comparaison pour deux niveaux de seuil $\zeta_\gamma$ avec ( VI.11(c) et VI.11(d)), ou sans ( VI.11(a) et VI.11(b)) contrainte appliquée ; cellule homothétique. . . . .	141
VI.12 Répartition de la déformation élasto-plastique équivalente $\epsilon_{eq}^p$ et du taux déformation élasto-plastique équivalent $\dot{\epsilon}_{eq}^p$ au cours de la transformation. . . . .	143
VI.13 Courbes théoriques (par excentricité, contrainte : 0MPa à 120MPa par pas de 20MPa). . . . .	146
VI.14 Courbes théoriques (par excentricité, contrainte : 0MPa à 120MPa par pas de -20MPa) . . . . .	147
VI.15 Déformation plastique de transformation après transformation complète. . . . .	148

---

## Liste des tableaux

---

II.1	Modèle de Leblond <i>et al.</i> (1989) sans écrouissage . . . . .	28
II.2	Modèle de Leblond <i>et al.</i> (1989) avec écrouissage isotrope . . . . .	29
II.3	Modèle de Leblond <i>et al.</i> (1989) avec écrouissage cinématique . . . . .	29
II.4	Propriétés matérielles (acier A508). . . . .	32
IV.1	Values of JMAK parameters $n$ and $K$ . . . . .	73
IV.2	Material properties (A508 steel). . . . .	74
IV.3	Statistics of the histograms of the overall strain shown in Figure IV.6 : Mean (M) - Standard deviation (SD) - Coefficient of variation = SD/M (CV). . . . .	75
VI.1	Valeurs de $n$ en fonction de la dimension spatiale de croissance et du type de nucléation (IN ou SN) des germes. . . . .	133
VI.2	Expressions de $K$ et $n$ en fonction de la forme des germes, pour une nucléation de type instantané (IN). . . . .	133
VI.3	Expressions de $K$ et $n$ pour une croissance sphéroïdale des germes, pour deux types de nucléation. . . . .	134





**Première partie**

**État de l'art**



---

## Contexte et problématique

---

*Ce chapitre d'introduction générale a pour objet de replacer cette étude dans son contexte industriel et scientifique. L'étude porte sur le phénomène de la plasticité de transformation présent lors des procédés thermo-mécaniques. Au niveau industriel, ces procédés interviennent lors des fabrications de pièces en acier et alliages. Afin d'améliorer la fiabilité de ces pièces, la plasticité de transformation fait l'objet d'investigation de recherche en science des matériaux. Le but de ce travail est d'obtenir une loi de comportement de la plasticité de transformation par une approche micromécanique du mécanisme de [Greenwood et Johnson \(1965\)](#).*

### Sommaire

---

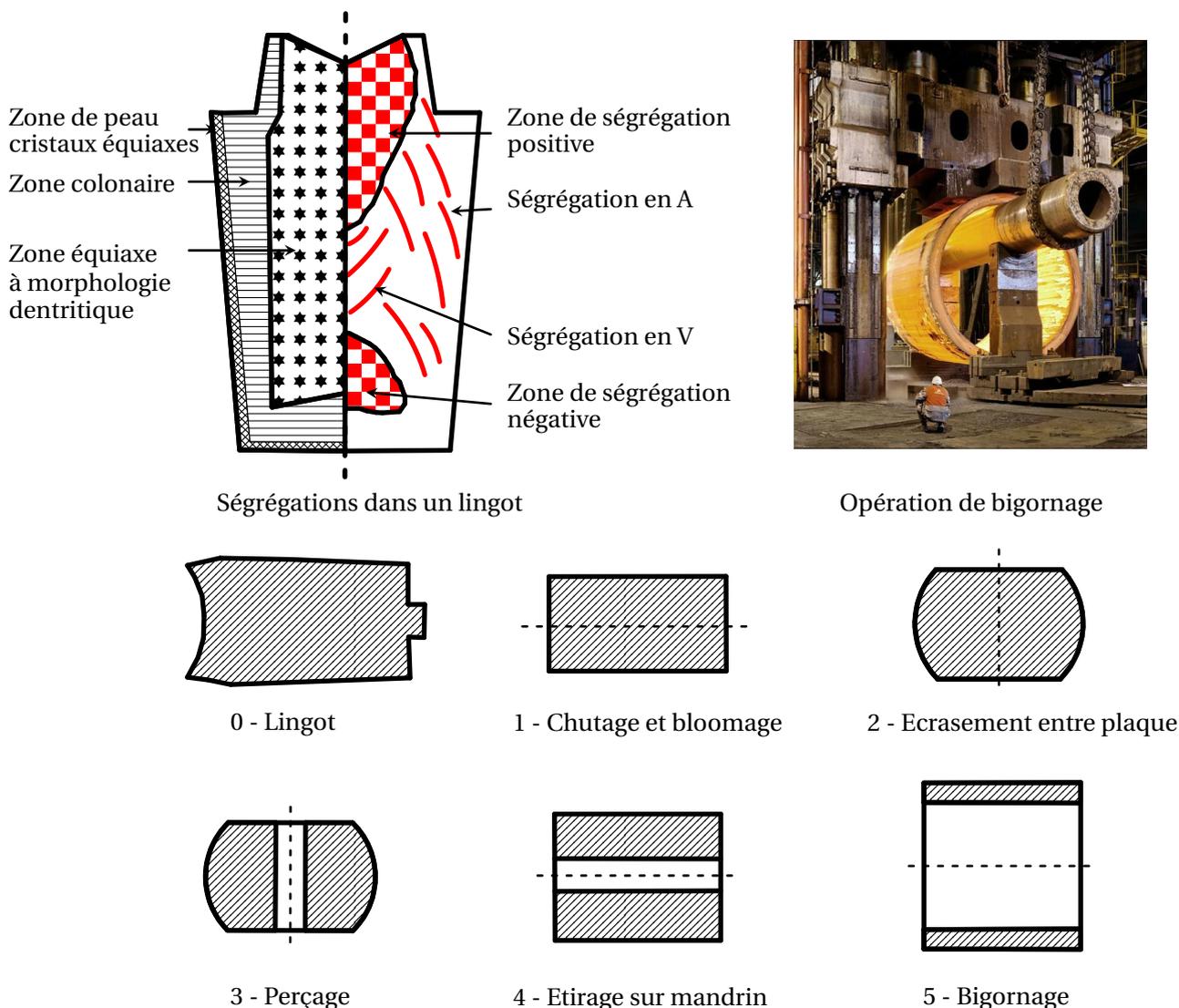
<b>I.1</b>	<b>Contexte industriel</b> . . . . .	<b>4</b>
<b>I.2</b>	<b>Contexte scientifique</b> . . . . .	<b>6</b>
<b>I.3</b>	<b>Problématique de thèse</b> . . . . .	<b>8</b>

---

## I.1 Contexte industriel

Neuf mille ans sont passés depuis l'invention de la métallurgie et celle-ci joue un rôle toujours plus central dans la science des matériaux. Les aciers et alliages issus de ces procédés thermomécaniques primaires sont recherchés pour leurs caractéristiques mécaniques uniques telles que la dureté, la ductilité, la ténacité ou encore la capacité à mémoire de forme. Cependant, lors des procédés thermomécaniques secondaires qui permettent la mise en forme et l'assemblage de pièces destinées à l'industrie de pointe telle que l'aéronautique, l'électronique, l'automobile ou encore le médical, des transformations de phase s'opèrent et modifient le comportement mécanique global de ces matériaux. Ces modifications à l'échelle microstructurale sont à l'origine de quelques problématiques industrielles majeures, elles concernent :

1. les procédés de trempe effectués, lors de l'élaboration des aciers, qui lors de la solidification engendrent des ségrégations. " *La ségrégation est un défaut qui consiste dans un manque d'homogénéité du métal dans certaines régions du lingot*", en coloris rouge sur la [Figure I.1](#) ; " *ce défaut est provoqué par la concentration, pendant la solidification, de divers constituants non ferreux de l'acier*", (ref, 1927). Ces ségrégations s'inclinent vers le centre et le haut du lingot en forme de A, tandis que les

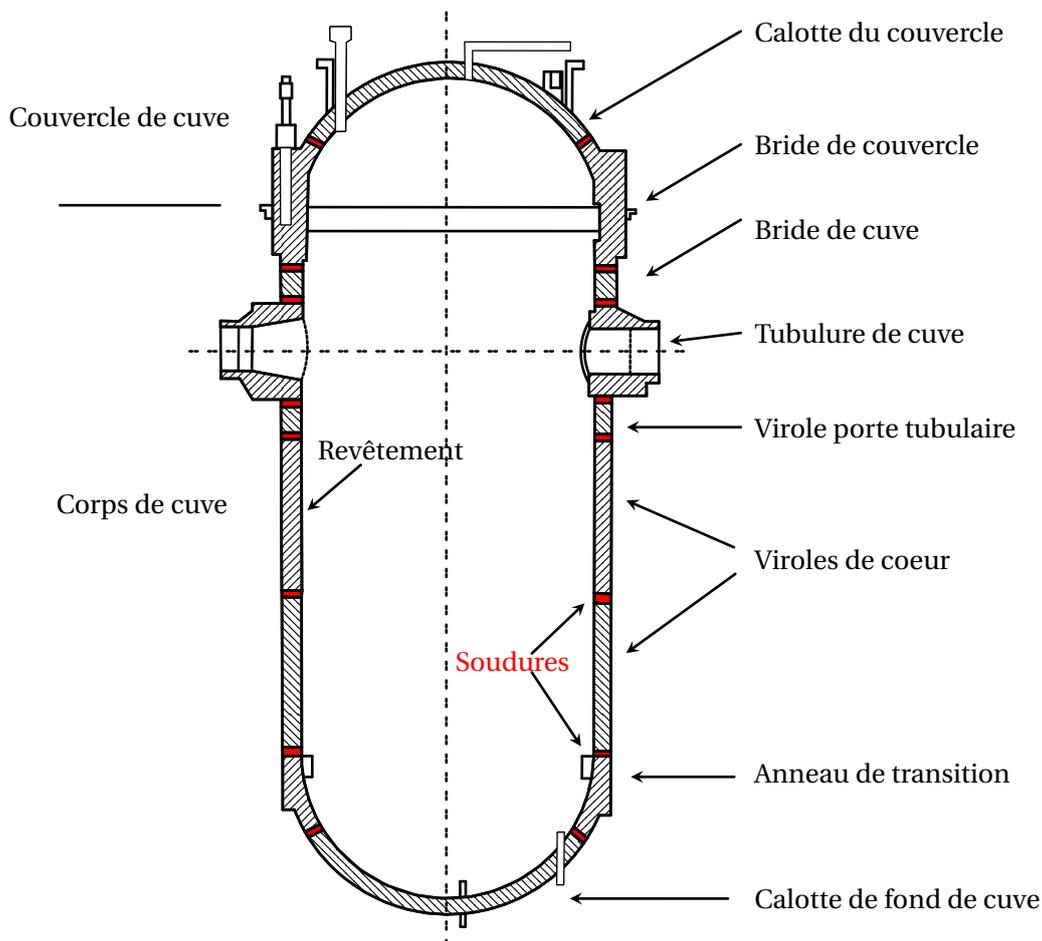


**Figure I.1** – Type de forgeage d'une virole à partir d'un lingot plein (figure issue de la médiathèque de l'IRSN)

ségrégations axiales s'inclinent vers l'extérieur en V.

Même si à l'issue des différentes opérations de forgeage (Figure I.1), telles que le perçage du lingot, qui permettent d'éliminer les ségrégations majeures, les ségrégations de type mineure persistent dans ces aciers. La plupart des cahiers des charges refusent que les pièces n'en présentent ou bien fixent une teneur moyenne de ségrégation à respecter. De ce fait, des centaines de nuances existent, à l'effigie des gammes de fragrance élaborées par les parfumeurs, afin de répondre à des exigences précises de tenue mécanique. Ces hétérogénéités microscopiques définissent donc le comportement mécanique du matériau à l'échelle macroscopique.

2. les procédés thermomécaniques de laminage, de corroyage (laminage à chaud) ou de bigornage (laminage circulaire, Figure I.1), dont le principe consiste à réduire l'épaisseur du lopin afin d'obtenir une tôle laminée, une couronne ou encore une ébauche de virole (Figure I.1). Lors de ces procédés, la structure métallurgique qui évolue crée des contraintes résiduelles lorsque le refroidissement des sections minces de la pièce se fait plus rapidement que le reste de la pièce. Ces défauts mènent au gauchissement de la pièce forgée. L'autre phénomène généré lors de ces procédés, est l'orientation des ségrégations, sous forme de bandes dans la direction du laminage, donnant un caractère anisotrope à la microstructure (Desalos, 1981).
3. les procédés de soudage réalisés sur certaines pièces, qui engendrent des gradients thermiques élevés. À titre d'exemple, les pièces qui constituent les cuves à eau pressurisée sont soudées entre elles (parties en coloris rouge sur la Figure I.2) générant des zones affectées thermiquement (ZAT), menant souvent à l'affaiblissement de l'ensemble de la structure soudée.

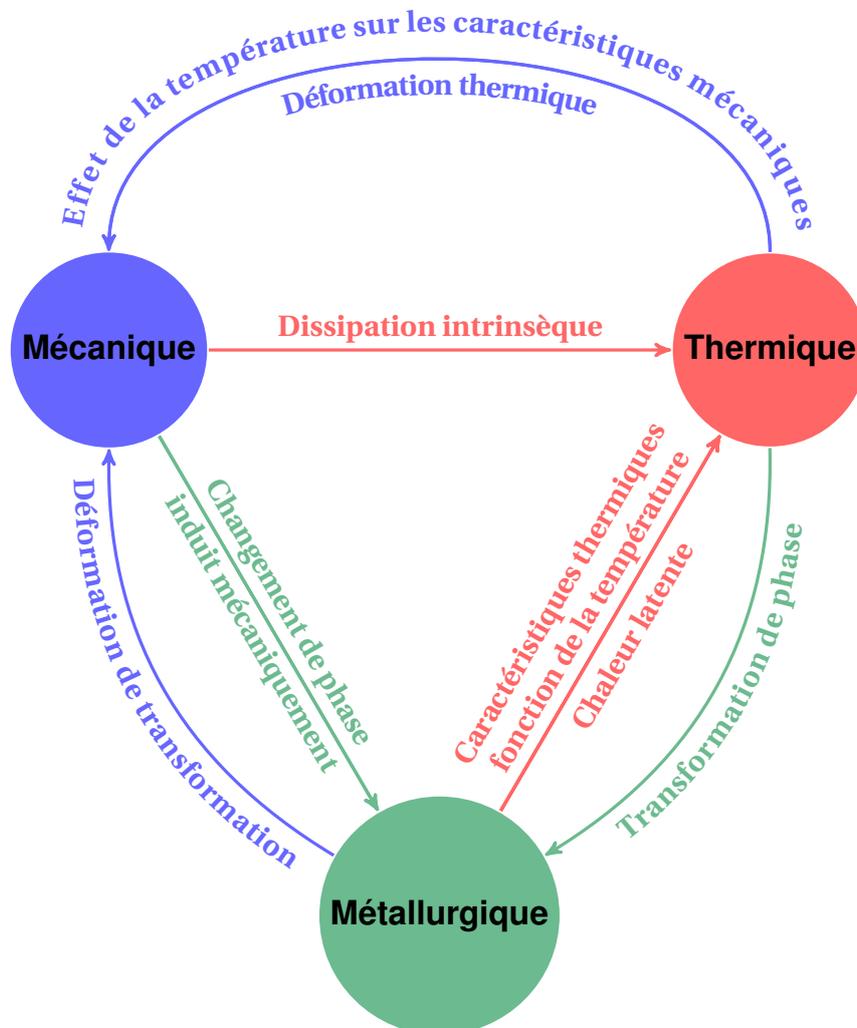


**Figure I.2** – Pièces constitutives d'une cuve à eau pressurisée (issue de la médiathèque de l'IRSN)

De plus, en service, les pièces sont soumises à différentes contraintes, variations de températures, pressions, irradiations neutroniques ou encore champs magnétiques qui les affaiblissent. Par conséquent, la connaissance précise de l'évolution des propriétés thermomécaniques de ces aciers et alliages sous de telles conditions sont indispensables pour garantir la fiabilité de ces matériaux.

## I.2 Contexte scientifique

Lors des procédés thermomécaniques tels que le soudage et la trempe, largement employés chez les industriels, trois principaux phénomènes physiques rentrent en interaction : thermique, métallurgique et mécanique. Ces interactions produisent différents effets tel que le montre de manière non exhaustive le diagramme de la [Figure I.3](#) ci-dessous.



**Figure I.3** – Interaction physique lors des procédés thermomécaniques ; diagramme issu de l'article de Inoue et Wang (1985)

Dans un souci de reproduire aussi fidèlement que possible les simulations numériques de procédés de soudage (Inoue *et al.*, 1981) et de procédés de trempe (Inoue et Wang, 1986), il est nécessaire de prendre en compte ses effets thermiques, métallurgiques et mécaniques dans les codes de calcul, afin d'en faire des outils de calcul numérique robustes permettant de prédire précisément le comportement des pièces industrielles soumises à ces procédés thermomécaniques.

Lors de ces procédés, les opérations thermiques et mécaniques induisent des transformations de phase (Thermique & Mécanique → Métallurgique) qui vont à leur tour produire une déformation de transformation (Métallurgique → Mécanique). Dans cette étude les changements de phase produits par le chargement mécanique sont négligés (Mécanique → Métallurgique). Ainsi, ces changements de phase sont uniquement la cause des effets thermiques (Thermique → Métallurgique). D'autre part, la déformation thermique (Thermique → Mécanique) sera considérée isotrope et la dissipation intrinsèque (Mécanique → Thermique) ne sera pas prise en compte, considérée négligeable par rapport au phénomène étudié.

Durant une sollicitation thermique d'échauffement, l'acier s'austénise, c'est-à-dire que le fer  $\alpha$  (phase ferrite) se transforme en fer  $\gamma$  (phase austénite) (Figure I.4). Au cours du refroidissement cette austénite se transforme en martensite, bainite, ferrite, perlite ou un mélange (structure  $\alpha$ ) suivant la vitesse de refroidissement. La présente étude est sujette à cette dernière transformation (austénite  $\gamma \rightarrow$  ferrite  $\alpha$ ) qui s'opère lors du refroidissement.

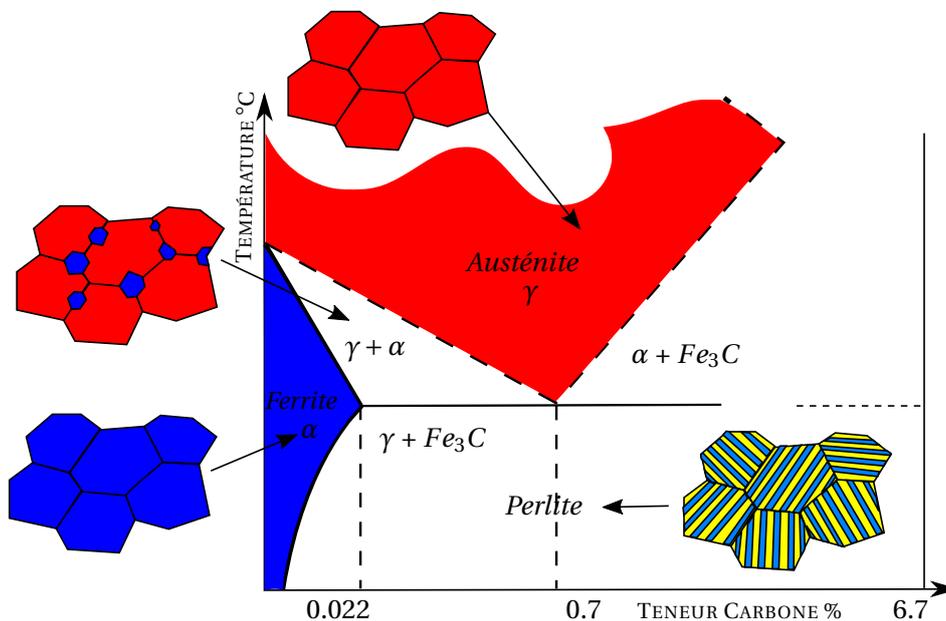


Figure I.4 – Diagramme métastable des aciers (alliages fer-carbone)

Au niveau microscopique ces changements de phase sont la conséquence de réarrangement de réseaux atomiques activés thermiquement (et/ou mécaniquement) et sont décrits par deux mécanismes : displacif ou diffusif. Ainsi, un changement de phase peut se distinguer par deux types de transformation, displacive et diffusive.

- Les *transformations diffusives* correspondent aux mouvements lents d'atomes sur des longues distances (supérieures à la distance interatomique) et interviennent généralement pour des vitesses de refroidissement relativement faibles du matériau. Ainsi, cette transformation diffusionnelle du carbone fournit le temps nécessaire pour un ré-agencement stable des atomes de carbone. Elle s'accompagne généralement d'une variation significative de la compacité de son réseau atomique (Figure I.5). De ce fait, la composante de la déformation de transformation est à dominante dilatométrique dans cette transformation.
- Les *transformations displacives* correspondent aux déplacements rapides d'atomes sur des courtes distances (inférieures à la distance interatomique) et interviennent généralement pour des vitesses de refroidissement relativement élevées. Ainsi, cette transformation non diffusionnelle du carbone ne fournit pas le temps nécessaire aux atomes de carbone de se déplacer librement, le réseau cristallin est alors distordu en une structure métastable. De ce fait, la composante de la déformation de transformation est à dominante déviatorique. Ces transformations sont aussi nommées transformation par cisaillement, comme les déformations de Bain et de Shuffle.

Ces transformations de phase sont à l'origine des déformations de transformation. En effet, la déformation de transformation est principalement due au changement de forme et/ou de volume des différents constituants (les phases) au cours de leurs transformations, tel que le montre la Figure I.3 (Métallurgique  $\rightarrow$  Mécanique). Dans cette étude les effets des changements de forme sont négligés, et seront pris en considération uniquement les effets dus aux changements de volume, pour des raisons qui seront évoquées plus tard.

Le changement de volume est la conséquence de la différence de compacité des phases. La phase austénitique d'une compacité de 74% présente une structure cubique à faces centrées, et la phase ferritique d'une compacité de 68% a une structure cubique centrée (Figure I.5).

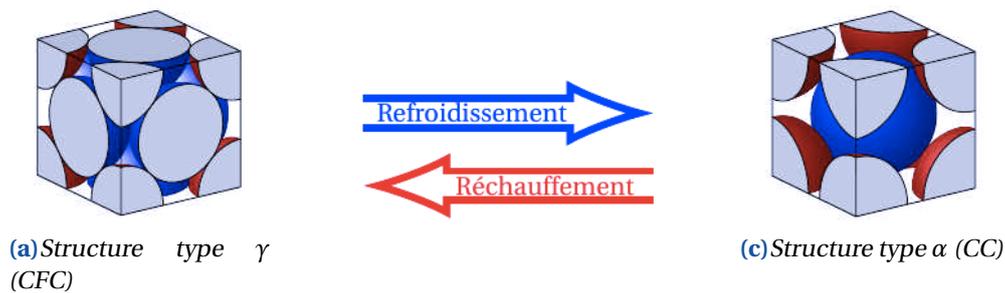


Figure I.5 – Comportement allotrope

Ces variations de volume lors des transformations de phase ont pour conséquence une modification du comportement mécanique des structures. Ainsi, cela constitue la motivation principale de développer des modèles mécaniques implémentables dans les codes d'éléments finis, afin de prédire avec le plus de précision possible le comportement de ces structures, à travers des simulations numériques de soudage et de trempe, telles que l'évaluation des contraintes résiduelles et les distorsions apparaissant au sein du matériau lors de ces procédés thermomécaniques.

### I.3 Problématique de thèse

Une des conséquences de la déformation de transformation issue des interactions thermomécaniques présentée dans la section précédente, est la plasticité de transformation. La plasticité de transformation s'opère donc durant les traitements thermomécaniques des aciers et alliages métalliques, tels que les procédés de trempe et de soudage, qui induisent des contraintes résiduelles et des distorsions au sein des matériaux, modifiant ainsi leur comportement mécanique à l'échelle macroscopique (Fukumuto *et al.*, 2001 ; Miyao *et al.*, 1986 ; Taleb *et al.*, 2004).

Il est communément admis que la plasticité de transformation est due à deux principaux mécanismes, un de type diffusif (Greenwood et Johnson, 1965) et l'autre de type displacif (Magee et Paxton, 1966). Ce dernier mécanisme ne sera pas considéré dans notre étude pour plusieurs raisons qui seront évoquées plus tard à la section II.2.

Le principe du mécanisme de Greenwood et Johnson (1965) de la plasticité de transformation réside dans l'accommodation plastique de la phase austénite (phase la plus molle) durant la transformation des phases. En effet, au cours du refroidissement, la phase austénitique  $\gamma$  donne naissance à une phase ferritique, bainitique ou martensitique  $\alpha$  qui comporte un volume spécifique plus important que sa phase parente. Lors de la coexistence des deux phases, la différence de volume entre ces phases est équivalente à un champ de déformation hétérogène qui génère des contraintes internes et induit un écoulement plastique macroscopique, même si la contrainte macroscopique appliquée est inférieure à la limite d'élasticité des deux phases où bien identiquement nulle.

Le premier modèle micromécanique de ce mécanisme établi par Leblond *et al.* (1989) considère un volume élémentaire représentatif d'un noyau de phase  $\alpha$  sphérique croissant, et entouré par une coquille de phase  $\gamma$  sphérique concentrique. En considérant des contraintes macroscopiques faibles, cette approche conduit à une expression du taux de déformation plastique de transformation comme dépendant linéairement du déviateur des contraintes.

Cependant, ce modèle micromécanique comporte quelques inconvénients puisqu'il repose sur des hypothèses simplificatrices, comme l'hypothèse d'un matériau rigide parfaitement plastique, qui a pour conséquence une singularité au tout début de la transformation du taux de déformation plastique de transformation. Mais l'inconvénient le plus important est que le traitement soit intrinsèquement limité

uniquement à des faibles contraintes externes appliquées. En conséquence, ce modèle ne peut pas prédire la dépendance non linéaire connue (Greenwood et Johnson, 1965) du taux de déformation plastique de transformation en fonction des contraintes externes appliquées.

Des extensions de ce modèle ont ensuite été proposées. Le problème de la valeur infinie de la pente initiale du taux plastique de transformation a été traité, entre autres, par Taleb et Sidoroff (2003a) et Weisz-Patrault (2017). Les effets visqueux ont été introduits par Vincent *et al.* (2003). Différents modèles de champ moyen ont été utilisés pour affiner la description du comportement mécanique de la phase-mère subissant les déformations plastiques (voir, par exemple, Cherkaoui *et al.*, 2000 ; Diani *et al.*, 1995 ; Fischlschweiger *et al.*, 2012, parmi d'autres). Cependant, en dépit de ces efforts, les prédictions du modèle de Leblond *et al.* (1989) restent uniquement cohérentes avec les observations de contraintes externes appliquées d'amplitude faible (approximativement inférieure à la demi-valeur de la limite d'élasticité de la phase austénitique).

L'objectif de cette thèse est alors de pallier les lacunes du modèle classique de Leblond *et al.* (1989), afin d'aborder la gamme des contraintes élevées (proches de la limite d'élasticité austénitique), sans l'utilisation de paramètres supplémentaires ajustables dit *ad-hoc*. Pour cela, la modélisation du mécanisme de Greenwood et Johnson sera reconsidérée en utilisant la théorie d'homogénéisation de Hill (1967)-Mandel (1966), combinée de plus à une approche cinématique qui est l'analyse limite afin d'aboutir à une nouvelle formulation théorique plus complète de la déformation plastique de transformation. Cette idée innovante a émergé lors d'une discussion entre D. Kondo et J.B. Leblond et est le fruit d'un premier article (El Majaty *et al.*, 2018), suivi de son application numérique (El Majaty *et al.*, 2020).

Ainsi l'élaboration de cette nouvelle théorie sera faite pour deux configurations géométriques de croissance de germes, d'abord sphérique puis étendue au cas sphéroïdale, et seront accompagnées par des confrontations numériques à base de FFT afin de nourrir le modèle analytique et de valider son champ de validité. Pour cela, le manuscrit sera présenté en cinq chapitres, précédés de ce chapitre d'introduction générale. Le chapitre II : " Synthèse bibliographique sur la plasticité de transformation " rappelle les différents mécanismes et modèles de la plasticité de transformation. Les quatre chapitres principaux suivent forment deux paires de chapitre. Le premier couple chapitre III & chapitre IV est consacré à l'étude de la plasticité de transformation dans le cas de croissance sphérique de germes et le deuxième couple chapitre V & chapitre VI à l'étude dans le cas de croissance sphéroïdale de germes. Les premiers chapitres de chacune des deux paires (chapitre III : " A novel treatment of Greenwood-Johnson's mechanism of transformation plasticity - Case of spherical growth of nuclei of daughter-phase " et chapitre V : " Approche renouvelée de la plasticité de transformation due au mécanisme de Greenwood-Johnson : Cas de croissance sphéroïdale des germes ") présentent les modèles analytiques de la nouvelle approche théorique de la plasticité de transformation par analyse limite et homogénéisation pour une géométrie de croissance sphérique et sphéroïdale respectivement. Les seconds chapitres de chacune des deux paires (chapitre IV : " FFT-based micromechanical simulations of transformation plasticity. Comparison with a limit-analysis-based theory " et chapitre VI : " Simulations numériques du mécanisme de GREENWOOD-JOHNSON : cas de croissance de germes allongés sphéroïdaux ") visent à étudier la pertinence de cette nouvelle théorie à travers des simulations numériques, basées sur un traitement FFT, sur des microstructures représentatives de cellule-unité de milieu périodique, consistant en des distributions aléatoires de noyaux de ferrite  $\alpha$ , pour une géométrie de croissance sphérique et sphéroïdale respectivement, évoluant dans un milieu infini de matrice austénitique  $\gamma$ .



---

 Synthèse bibliographique sur la plasticité de transformation
 

---

*Dans cette partie, une définition du phénomène de la plasticité de transformation est donnée et illustrée à l'aide d'essais dilatométriques, libre et empêché. Puis, les explications données à ce phénomène, selon deux mécanismes sont rappelées, celui de Greenwood et Johnson (1965) et de Magee et Paxton (1966). Enfin, les principaux modèles établis sur différentes approches du mécanisme de Greenwood et Johnson (1965) de la plasticité de transformation sont exposés.*

**Sommaire**

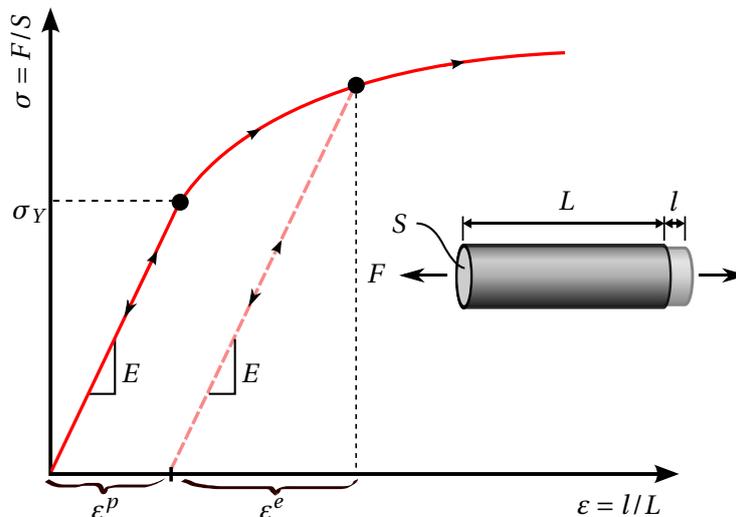

---

<b>II.1 Définition de la plasticité de transformation</b> . . . . .	<b>12</b>
II.1.1 Dilatométrie libre . . . . .	14
II.1.2 Dilatométrie sous contrainte . . . . .	16
<b>II.2 Mécanismes de la plasticité de transformation</b> . . . . .	<b>18</b>
II.2.1 Le mécanisme de Greenwood-Johnson . . . . .	18
II.2.2 Le mécanisme de Magee . . . . .	19
<b>II.3 Principaux modèles analytiques de la plasticité de transformation</b> . . . . .	<b>22</b>
II.3.1 Premiers modèles . . . . .	22
II.3.2 Modèle classique de Leblond (1989) . . . . .	24
II.3.3 Modèles améliorés de Leblond . . . . .	30
<b>II.4 Modèles numériques de la plasticité de transformation</b> . . . . .	<b>31</b>
II.4.1 Modèles numériques de Leblond . . . . .	32
II.4.2 Modèles numériques récents . . . . .	32

---

## II.1 Définition de la plasticité de transformation

La déformation plastique classique est la déformation irréversible d'une pièce, lorsque celle-ci est sollicitée par une contrainte d'amplitude allant au-delà de sa limite d'élasticité, comme illustré sur la [Figure II.1](#). Sur cette figure se présente deux régimes, au début la pièce commence par se déformer de manière réversible (déformation élastique  $\varepsilon^e$ ), c'est-à-dire qu'elle reprend sa forme initiale lorsque la sollicitation s'arrête. Ensuite, une augmentation suffisante de la sollicitation entraîne une déformation définitive (déformation plastique  $\varepsilon^p$ ) ; à l'arrêt de la sollicitation, la pièce reste déformée. Pour les métaux, considérés statistiquement isotropes, ce comportement est identique dans toutes les directions. Cependant, après certains procédés de fabrication (laminage, forgeage ...), un acier devient anisotrope, notamment à cause des ségrégations (cf. [chapitre I](#)), le comportement n'est alors pas le même selon la direction observée.



**Figure II.1** – Courbe d'un essai de traction d'une éprouvette interrompu dans le domaine plastique, (issue de Dieter et Bacon (1986)).

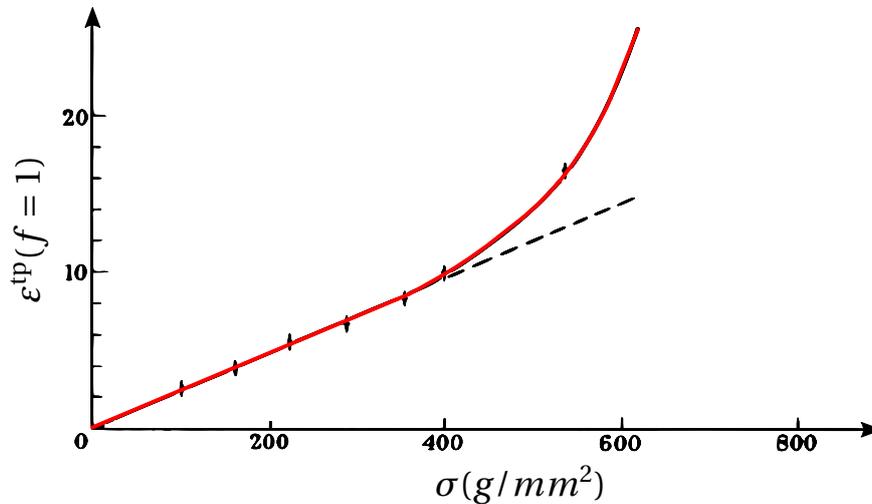
La notion de plasticité de transformation désigne le comportement de plasticité "anormale" des métaux et alliages durant les transformations de phase solide à phase solide. En effet, contrairement à la plasticité classique définie ci-dessus, cette déformation irréversible survient même si la contrainte appliquée  $\sigma$  est inférieure à la limite d'élasticité  $\sigma_Y$  ( $\sigma < \sigma_Y \Rightarrow \varepsilon^p$ ) du matériau supposé isotrope, et ceci pour le cas des matériaux isotropes. Le phénomène est encore plus stupéfiant pour le cas des matériaux anisotropes, en effet, cette déformation permanente apparaît dans ce cas même si aucune contrainte extérieure n'est appliquée ( $\sigma = 0 \Rightarrow \varepsilon^p$ ).

Ainsi, ces transformations de phase qui s'opèrent durant les traitements thermomécaniques, tels que le soudage ou la trempe, sont la cause principale de cette déformation, d'où son appellation de déformation de transformation. En effet, l'impact majeur résultant de ces transformations de phase se résume dans des contraintes résiduelles et des distorsions au sein de ces matériaux, aboutissant en une déformation de transformation à l'échelle macroscopique, comme cela a été souligné par certains auteurs (Fukumuto *et al.*, 2001 ; Miyao *et al.*, 1986 ; Taleb *et al.*, 2004).

Historiquement la plasticité de transformation a été découverte involontairement par Sauveur (Sauveur, 1924a,b, 1938). Par la suite, Scheil et Thiele (1937) ; Wassermann (1937) mettent en place une campagne expérimentale de manière à étudier ce nouveau phénomène. Une fois le phénomène reconnu, des investigations importantes ont été réalisées par De Jong et Rathenau (1959) ; Porter et Rosenthal (1959), où ils constatent une relation linéaire entre la déformation de plasticité de transformation et la contrainte équivalente appliquée.

Plus tard, les travaux expérimentaux et théoriques de Greenwood et Johnson (1965) marquent un tour-

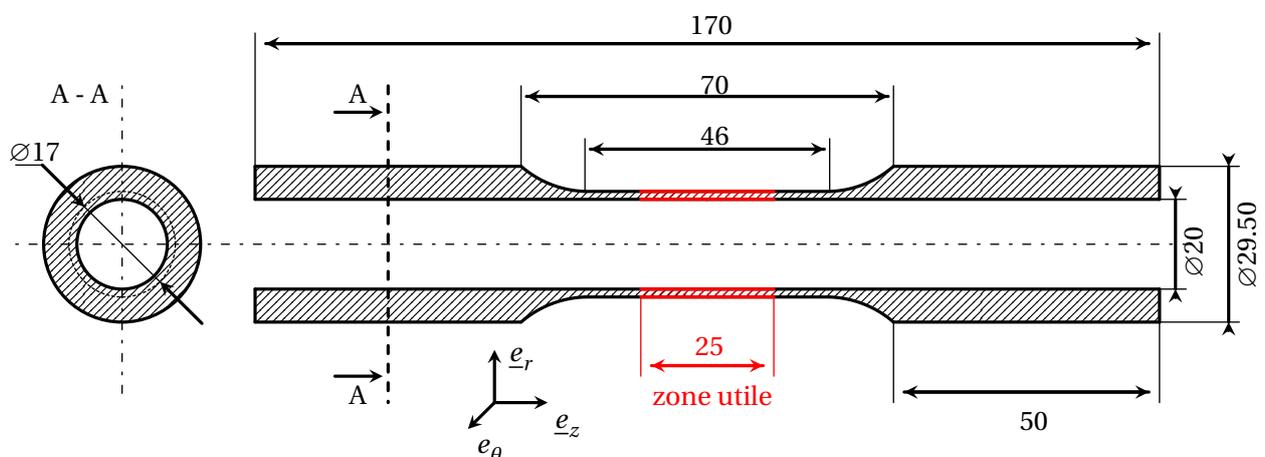
nant important dans la compréhension du phénomène de la plasticité de transformation. Ces auteurs constatent une perte de linéarité de la déformation plastique de transformation en fonction de la contrainte équivalente appliquée pour une valeur de celle-ci au moins supérieure à la demi-valeur de la limite d'élasticité de la phase la plus molle, comme le montre la [Figure II.2](#) ci-dessous.



**Figure II.2** – Déformation plastique de transformation  $\epsilon^{tp}$  après une transformation complète ( $f = 1$ ) en fonction de la contrainte extérieure appliquée  $\sigma$  (transformation  $\gamma \rightarrow \alpha$  pour du fer à  $910^\circ\text{C}$ ) ([Greenwood et Johnson, 1965](#))

Plusieurs études suivront sur différents types d'acier, de transformation et de chargement aussi bien sur le plan théorique que numérique et expérimental (parmi ces études, [Abrassart, 1972](#); [Cavallo, 1998](#); [Colette, 1980](#); [Desalos, 1981](#); [Gautier, 1985](#); [Magee et Paxton, 1966](#); [Nagayama et al., 2000](#); [Simon et al., 1994](#); [Taleb et al., 2001](#); [Videau et al., 1996](#)) afin de rendre complète la description de ce nouveau phénomène physique. Les travaux sur le plan théorique seront rappelés à la [section II.3](#).

Le phénomène de la plasticité de transformation peut-être visualisé par un test typique composé de deux cycles thermomécaniques consécutifs sur le même échantillon de longueur  $l$  et de section  $S$  sur la zone utile de l'éprouvette ([Figure II.3](#)) : le premier cycle est un test de dilatométrie libre ([sous-section II.1.1](#)) et le deuxième cycle est un test de dilatométrie sous contrainte ([sous-section II.1.2](#)). Dans les deux cas, l'échantillon est soumis au même cycle thermique.



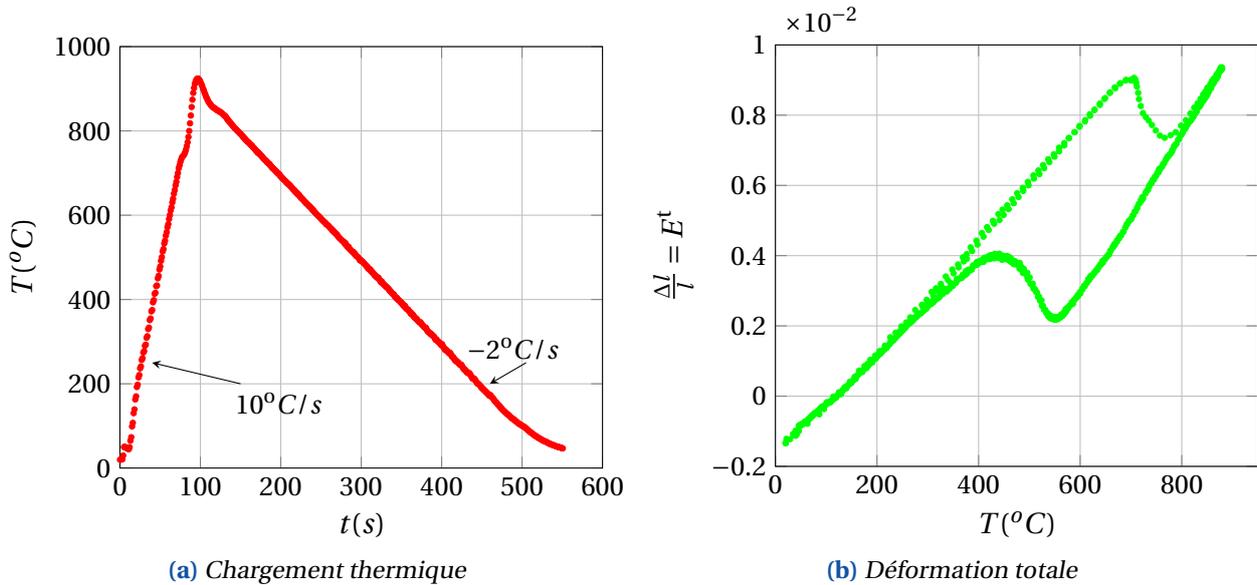
**Figure II.3** – Géométrie du spécimen

Ces tests ont été réalisés à l'INSA de Rouen auprès du Professeur L. Taleb.

### II.1.1 Dilatométrie libre

L'essai de dilatométrie libre (Free Dilatometric Test (FDT), [Figure II.4](#)) s'effectue ici sur une éprouvette en acier ([Figure II.3](#)). Ce spécimen subit un cycle thermique (échauffement suivi d'un refroidissement, [Figure II.4\(a\)](#)) et n'est soumis à aucun chargement mécanique ( $F = 0$ ). La première étape du cycle est l'échauffement du spécimen et correspond à l'austénitisation, c'est-à-dire, la transformation de la phase ferritique (phase  $\alpha$ ) en phase austénitique (phase  $\gamma$ ). La seconde étape du cycle est le refroidissement du spécimen et correspond à la transformation inverse effectuée lors de la première étape du cycle, c'est-à-dire, la transformation de la phase  $\gamma$  en phase  $\alpha$ .

La déformation totale observée  $E^t = \frac{\Delta l}{l}$  en fonction de la température  $T$  se manifeste par un cycle d'hystérisis pour un cycle thermique complet (échauffement puis refroidissement). Nous observons alors que la déformation totale revient au point de départ lors de la transformation inverse, en empruntant un chemin différent ([Figure II.4\(b\)](#)), ce comportement est principalement dû à la différence volumétrique molaire des deux phases (cf. [Figure I.5](#)).



**Figure II.4** – Test de dilatométrie libre, réalisé sur un acier 16MND5 (Y. El Majaty et L. Taleb, 2019).

Une autre observation illustrée sur la [Figure II.4\(b\)](#) montre deux régimes linéaires correspondant à la déformation thermique de phase pure (identique à la déformation totale de phase pure) austénite  $\varepsilon_M^{\text{th}}$  et ferrite  $\varepsilon_D^{\text{th}}$  et s'écrivent respectivement :

$$\varepsilon_M^{\text{th}}(T) = \delta_M(T - T_0) + \beta_M \quad (\text{II.1})$$

$$\varepsilon_D^{\text{th}}(T) = \delta_D(T - T_0) + \beta_D \quad (\text{II.2})$$

**Remarque.** Les notations avec l'indice  $M$  (pour "mother") et  $D$  (pour "daughter") correspond à la phase-mère  $\gamma$  et la phase-fille  $\alpha$  respectivement.

Ces droites affines se différencient par leur pente, qui représente leur coefficient de dilatation thermique  $\delta_M$  et  $\delta_D$ . Mais aussi par leur ordonnée à l'origine, due à la différence de volume entre les phases  $\beta_M$  et  $\beta_D$ . À la température de référence  $T_0$  la différence des déformations thermiques des phases  $\Delta\varepsilon_{M \rightarrow D}^{\text{th}}$

se réduit à la variation volumique spécifique des phases :

$$\Delta \varepsilon_{M \rightarrow D}^{\text{th}} = \beta_D - \beta_M = \frac{1}{3} \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l}{l} \quad (\text{II.3})$$

Pour décrire la déformation thermique  $\varepsilon^{\text{th}}$  sur la totalité du cycle, qui est la déformation thermo-métallurgique  $E^{\text{thm}}$ , une loi de mélange linéaire est généralement utilisée dans le cas de matériaux macroscopiquement isotropes :

$$E^{\text{thm}}(T) = (1 - f) \varepsilon_M^{\text{th}}(T) + f \varepsilon_D^{\text{th}}(T) \quad (\text{II.4})$$

Cette déformation thermo-métallurgique dépend des propriétés cristallographiques des phases et de leurs fractions volumiques et ce durant tout le cycle thermique. Au cours de la transformation de phase, la déformation totale  $E^t$  obtenue peut se décomposer en trois parties, la déformation thermo-métallurgique  $E^{\text{thm}}$ , la déformation élastique  $E^e$  et la déformation plastique  $E^p$ , tel que :

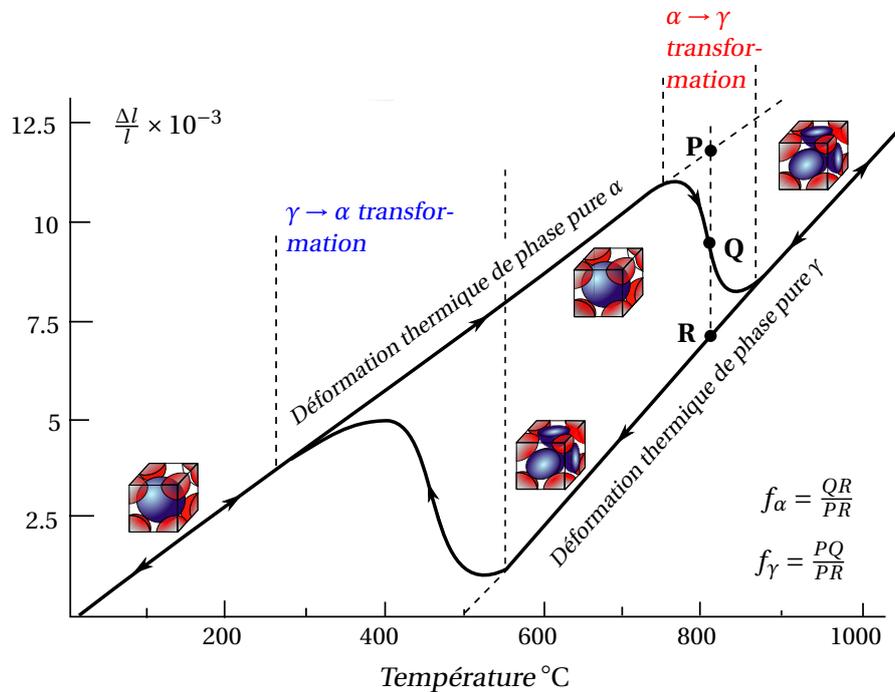
$$E^t = E^e + E^p + E^{\text{thm}} \quad (\text{II.5})$$

La déformation élastique est proportionnelle à la contrainte appliquée ( $E^e \propto F$ ), ainsi pour une dilatométrie libre (sans contraintes appliquées,  $F = 0$ ), la déformation élastique est nulle ( $E^e = 0$ ).

Ainsi, il ne reste plus que la déformation thermo-métallurgique  $E^{\text{thm}}$  à identifier à la déformation totale dans cet essai, soit

$$E^t = E^{\text{thm}} = (1 - f) \varepsilon_M^{\text{th}} + f \varepsilon_D^{\text{th}} \quad (\text{II.6})$$

Les proportions des phases présentes peuvent être déterminées géométriquement sur la [Figure II.4](#). Les différents régimes transitoires observés représentent les débuts et fins des transformations de phase. Prenons par exemple le diagramme de dilatométrie libre ([Figure II.5](#)) pour l'acier A508 C13, issu des travaux de [Leblond et al. \(1986\)](#), pour quantifier ces fractions de phase.



**Figure II.5** – Diagramme de dilatométrie libre, provenant de [Leblond et al. \(1986\)](#)

Soit P, Q et R les intersections respectives d'une droite verticale avec la droite supérieure (correspondant à la déformation de la phase pure  $\alpha$ ), la courbe actuellement observée (transformation  $\alpha \rightarrow \gamma$ ) et la droite inférieure (correspondant à la déformation de la phase pure  $\gamma$ ). Les proportions des phases  $\alpha$  et  $\gamma$  au point Q sont donc respectivement égales à  $\frac{QR}{PR}$  et  $\frac{PQ}{PR}$ .

L'essai de dilatométrie libre permet donc de renseigner sur la variation volumique des phases, les températures de début et fin de transformation et l'évolution de la fraction volumique de la phase produite en fonction de la température.

### II.1.2 Dilatométrie sous contrainte

Le phénomène de la plasticité induite par la transformation peut être mis en évidence par un essai de dilatométrie sous contrainte (Figure II.6). Dans ce test, l'échantillon subit un cycle thermique (identique à celui opéré en FDT, voir Figure II.6(a)), et est soumis à une contrainte équivalente d'amplitude inférieure à la limite d'élasticité de la phase la plus faible (l'austénite), juste avant le début de la transformation (au cours du refroidissement, cf. Figure II.6(b)). Cette force est maintenue constante tout au long de la transformation.

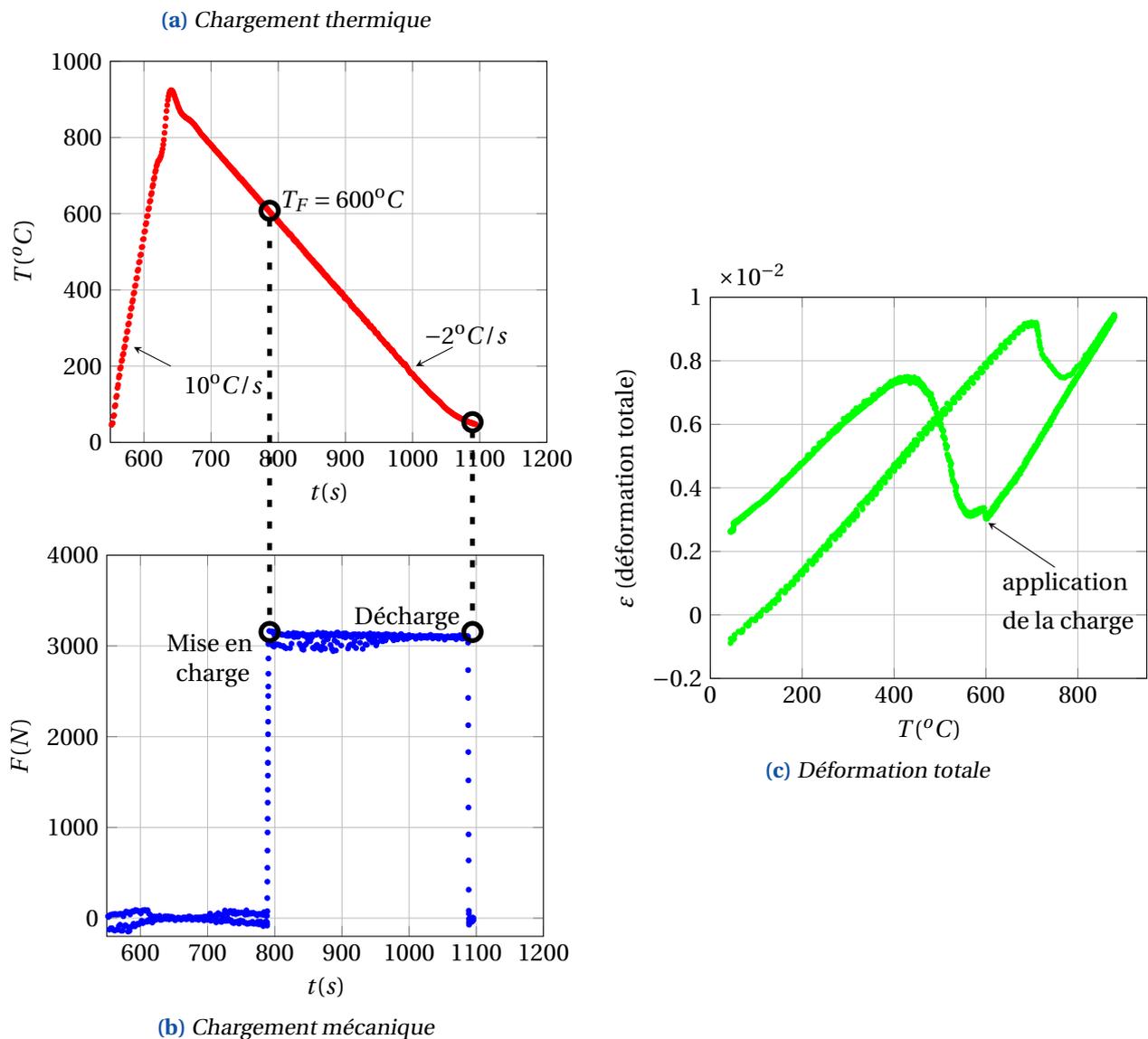


Figure II.6 – Test de dilatométrie sous contraintes, réalisé sur un acier 16MND5 (Y. El Majaty et L. Taleb, 2019).

Le caractère inattendu sur le comportement mécanique est une plasticité “anormale”. En effet, lorsque l'éprouvette est déchargée, une déformation macroscopique irréversible est obtenue bien que la contrainte

soit inférieure à la limite d'élasticité des deux phases, tel que le montre la [Figure II.6\(c\)](#) (voir aussi [Coret et al., 2004](#); [Fischer, 1990](#); [Fischer et al., 1996](#)). Cette déformation plastique de nature irréversible n'est donc pas classique, car ne peut pas être présente ici, et intervient uniquement pendant la transformation, ce phénomène est celui de la plasticité de transformation.

Ainsi dans cette essai ([Figure II.6](#)) la déformation plastique macroscopique  $E^P$ , définie comme la somme de la déformation plastique classique macroscopique  $E^{cp}$  et la déformation plastique de transformation macroscopique  $E^{tp}$  :

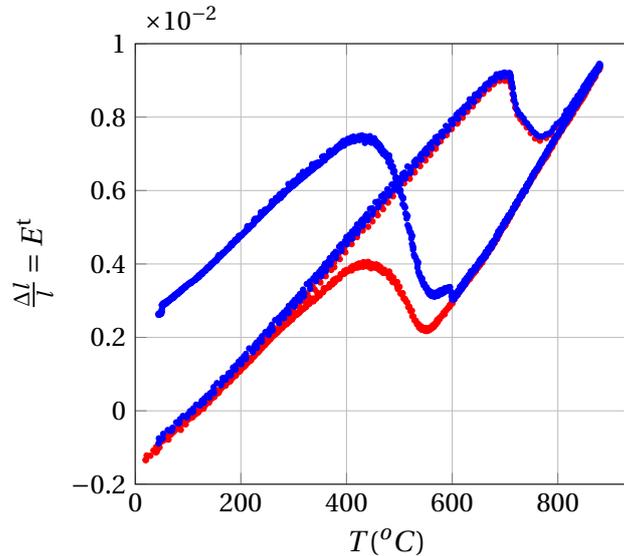
$$E^P = E^{cp} + E^{tp} \quad (II.7)$$

se réduit uniquement à :

$$E^P = E^{tp} \quad (II.8)$$

Puisque la contrainte équivalente appliquée est inférieure à la limite d'élasticité des deux phases et ne peut pas engendrer de plasticité classique ( $E^{cp} = 0$ ).

La différence entre la déformation totale  $E^t$  mesurée dans le test de dilatométrie sous contrainte ([Figure II.6](#)) et le test de dilatométrie libre ([Figure II.4](#)) permet d'obtenir l'évolution de la déformation de plasticité de transformation par rapport à la température, [Figure II.7](#).



**Figure II.7** – Différence des dilatométries libre ([Figure II.6\(c\)](#)) et forcée ([Figure II.4\(b\)](#))

Pour établir cette soustraction il suffit de calculer le terme  $E^{thm}$  lors de l'essai de dilatométrie libre *a priori* identique pour le test de dilatométrie sous contrainte. L'expression de la déformation plastique macroscopique est la suivante :

$$E^P = E^{tp}(T) = E^t - E^{thm} - E^e \quad (II.9)$$

Il est possible ensuite d'obtenir la déformation plastique de transformation en fonction de la phase-fille  $f$  produite (voir les travaux de [Taleb et al. \(2001\)](#)).

En conclusion, la plasticité de transformation est à dissocier de la plasticité classique :

- plasticité classique : régie par les variations de la contrainte appliquée et/ou de la température.
- plasticité de transformation : régie par les variations de la proportion des phases.

## II.2 Mécanismes de la plasticité de transformation

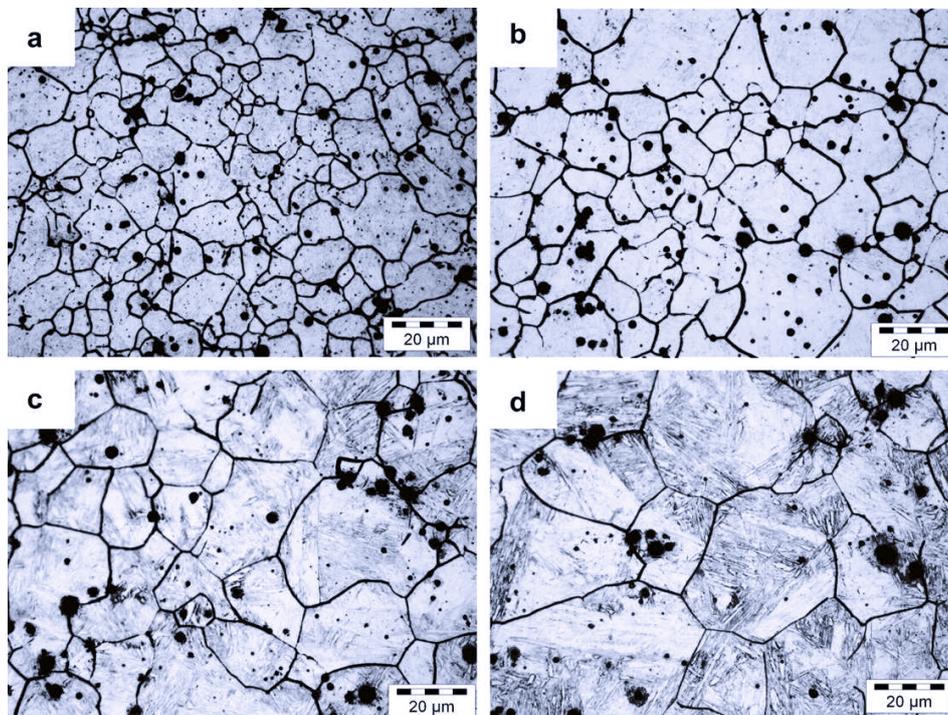
Les travaux de Fischer (1990); Fischer *et al.* (1996); Fischer et Tanaka (1992) ont fourni des explications sur la plasticité de transformation comme étant liée à la microplasticité des déformations internes du matériau lors des transformations de phase. Dès lors que le matériau est soumis à une contrainte externe, même inférieure à la limite d'élasticité de chacune des phases du matériau, celle-ci se combine à la microplasticité préexistante pour induire un écoulement plastique de manière irréversible à l'échelle macroscopique. Du point de vue microscopique, il est largement admis que la plasticité de transformation est due à deux mécanismes physiques, le mécanisme de Greenwood et Johnson (1965) et celui de Magee et Paxton (1966).

### II.2.1 Le mécanisme de Greenwood-Johnson

Selon Greenwood et Johnson (1965), la plasticité de transformation est due à l'*accommodation plastique* de la phase-mère lors des changements de phase (idée émise par De Jong et Rathenau (1961)). Ainsi, ces auteurs attribuent plus précisément le phénomène de plasticité de transformation à la variation de volume résultant de la différence de compacité entre la phase parente ( $\gamma$ ) et la phase produite ( $\alpha$ ) (Bhadeshia, 1999, 2004). En effet, la phase-mère en se transformant lors du refroidissement donne naissance à une phase-fille (plus dure) ayant un volume plus important. Lorsque les phases coexistent, leur différence de volume provoque des contraintes internes et plastifie les micro-régions, à proximité du front d'avancement, au sein de la phase la plus molle ( $\gamma$ ) non encore transformée. Ces zones subissent une plasticité classique résultant du glissement des dislocations.

Pour un matériau macroscopiquement isotrope, c'est-à-dire avec une croissance sphérique et une répartition homogène des germes de phase-fille  $\alpha$ , comme illustré sur la Figure II.8, obtenu pour :

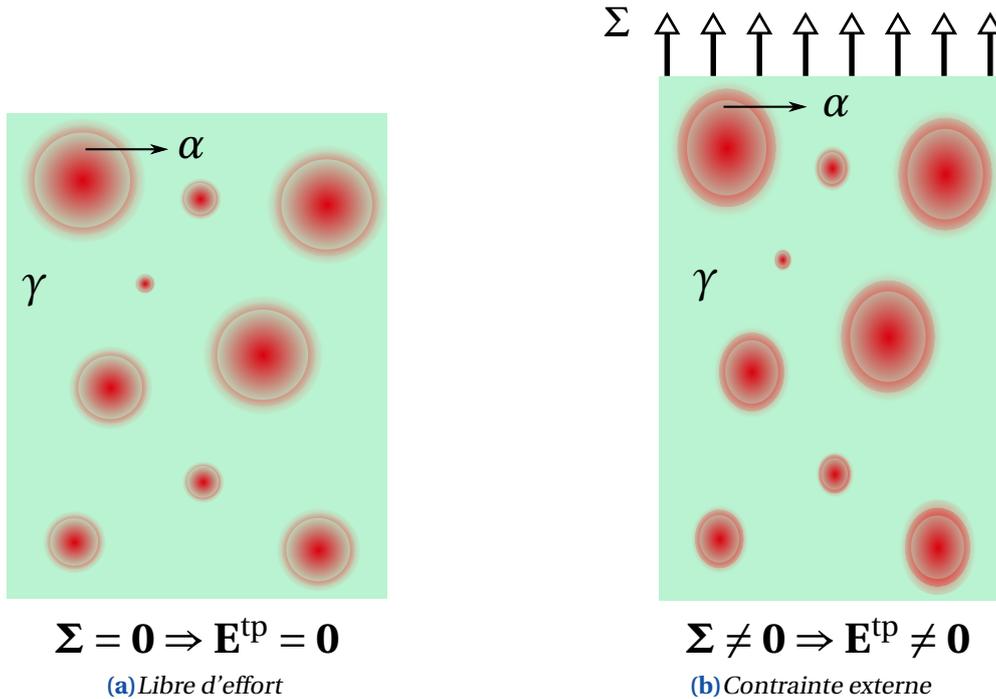
- une orientation des ségrégations aléatoires (cf. section I.1) (ou absence des ségrégations) ;
- et des orientations cristallographiques des grains de phase-mère globalement aléatoires.



**Figure II.8** – Micrographies typiques de l'acier 35NCD16 après différentes conditions d'austénitisation (Boudiaf *et al.*, 2011).

Dans ce cas de matériau isotrope, nous avons deux cas de figure possibles permettant d'illustrer le mécanisme de [Greenwood et Johnson \(1965\)](#) qui sont les suivants :

1. Au cours de la transformation aucune contrainte extérieure n'est appliquée ( $\Sigma = \mathbf{0}$ , [Figure II.9\(a\)](#)), les contributions de microplasticité dues à l'expansion volumique de chaque germe sphérique s'auto-annulent et la déformation plastique de transformation se moyenne à zéro ( $E^{tp} = \mathbf{0}$ ).
2. Puisque la transformation de phase produit à elle seule la microplasticité au sein du matériau, et si elle est de plus accompagnée d'une contrainte mécanique externe non nulle ( $\Sigma \neq \mathbf{0}$ , [Figure II.9\(b\)](#)), la déformation plastique sera "canalisée" dans la direction de celle-ci. En effet, la contrainte appliquée d'amplitude quelconque se superpose à la microplasticité préexistante pour orienter l'écoulement plastique de transformation ( $E^{tp} \neq \mathbf{0}$ ).



**Figure II.9** – Mécanisme de [Greenwood et Johnson \(1965\)](#) (adapté de [Gautier et al., 1989](#))

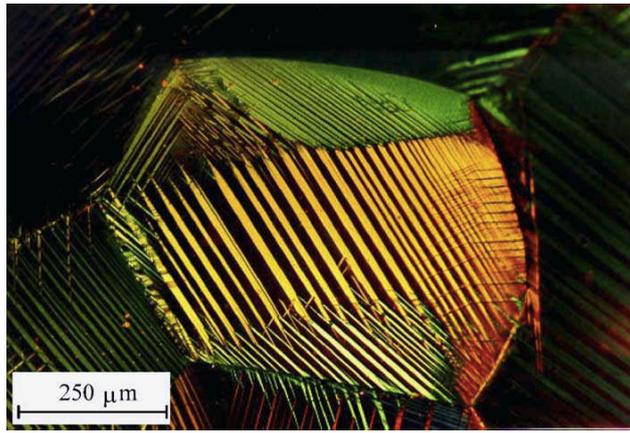
De manière générale, le mécanisme de [Greenwood et Johnson \(1965\)](#) est affecté aux transformations diffusives (cf. [section I.2](#)).

### II.2.2 Le mécanisme de Magee

Le mécanisme de [Magee et Paxton \(1966\)](#), est, lui, associé à un effet d'*orientation de la déformation de transformation*. La nouvelle phase naissante (dénotée plus communément  $\alpha'$ ) se déforme en structure "cubique centrée distordue". Les caractéristiques thermomécaniques des deux constituants ( $\alpha'$  et  $\gamma$ ) étant différentes, des sollicitations de cisaillement sont engendrées. À l'échelle microstructurale il s'agit de déformation de Bain ([Watanabe et Wayman, 1971](#)) qui se manifeste dans le réseau cristallin austénitique, associée à un glissement cristallographique ([Lecroisey et Pineau, 1972](#)). Ainsi le phénomène de plasticité de transformation est ici attribué directement à la zone en transformation, qui est le changement de forme, généralement sous forme de plaquette ou d'aiguille de martensite ([Figure II.8](#)).

Toujours pour un matériau macroscopiquement isotrope, c'est-à-dire pour :

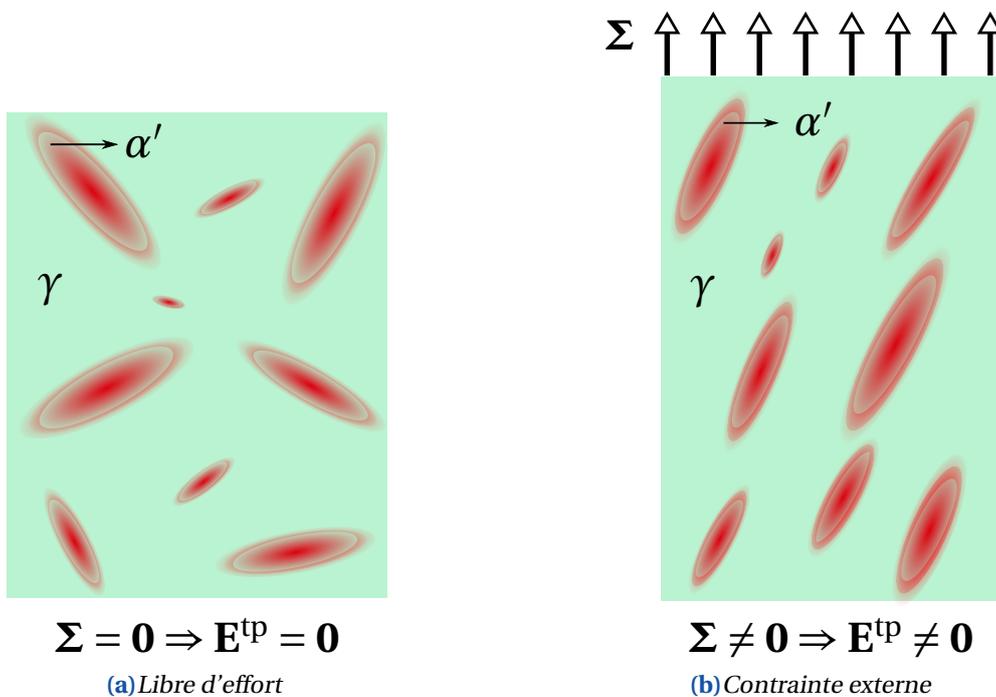
- une orientation des ségrégations aléatoire (ou sans ségrégations) dans le matériau ;
- et une orientation des variantes équiprobable ([Han et al., 2004](#)) lors de leur formation, donnant un effet global isotrope.



**Figure II.10** – Formation de différentes variantes martensitiques dans un seul grain d'un alliage polycristallin durant un chargement de traction (Patoor et al., 1996, 2006).

Dans ce cas de matériau isotrope, nous avons deux cas de figure possibles permettant d'illustrer le mécanisme de Magee et Paxton (1966), qui sont les suivants :

1. Lors d'une transformation sous aucune contrainte extérieure appliquée ( $\Sigma = \mathbf{0}$ , Figure II.11(a)), la déformation de transformation macroscopique est absente (hormis la variation de volume), les déformations de transformation propres à chaque variante se compensent mutuellement, car l'orientation des plaquettes est équiprobable (Han et al., 2004) lors de leur formation et a donc un effet global isotrope. Ainsi, la déformation plastique de transformation se moyenne à zéro ( $\mathbf{E}^{\text{tp}} = \mathbf{0}$ ), il s'agit d'auto-accommodation.
2. Au contraire, si la transformation est maintenant accompagnée d'une contrainte mécanique externe ( $\Sigma \neq \mathbf{0}$ , Figure II.11(b)), elle provoque une orientation préférentielle des aiguilles de martensite (Han et al., 2004; Marketz et Fischer, 1994; Turteltaub et Suiker, 2006), qui est à l'origine de la plasticité de transformation ( $\mathbf{E}^{\text{tp}} \neq \mathbf{0}$ ). L'orientation des plaquettes dans la direction de la contrainte, sera d'autant plus forte que l'est la contrainte appliquée et cela jusqu'à saturation.



**Figure II.11** – Mécanisme de Magee et Paxton (1966) (adapté de Gautier et al., 1989)

En général le mécanisme de Magee est associé aux transformations displacives (cf. section I.2).

**Remarque** (effet *pseudo-élastique* du mécanisme de Magee). *Le mécanisme de Magee et Paxton (1966) est souvent associé à un comportement de nature pseudo-élastique et non plastique. En effet, lors de ces transformations, les déformations de plasticité de transformation au sein du matériau sont récupérées après échauffement, car celles-ci sont dues uniquement au changement de la forme du réseau cristallin et non de son volume (Ganghoffer et Simonsson, 1998). Ce comportement est principalement présent dans les matériaux dits à mémoire de forme, contrairement aux matériaux qui présentent une irréversibilité complète de la déformation plastique. Cette différence de comportement plastique et pseudo-élastique, peut être mise en exergue par quelques expériences dilatométriques, qui consistent à faire subir à une éprouvette en acier plusieurs cycles thermiques avec un chargement externe appliqué. Deux réponses différentes sont alors observées :*

- Pour les matériaux à *effet mémoire*, les déformations engendrées par la contrainte sont à chaque fois totalement récupérées lors du réchauffement, soit un comportement réversible. L'explication du phénomène de la plasticité de transformation est alors donnée par le mécanisme de [Magee et Paxton \(1966\)](#).
- Pour d'autres matériaux, une *accumulation* de la déformation plastique, c'est-à-dire, une augmentation de cette déformation proportionnellement au nombre de cycles thermiques effectués est observée. L'explication du phénomène de la plasticité de transformation est alors donnée par le mécanisme de [Greenwood et Johnson \(1965\)](#).

### Mécanisme de MAGEE ou GREENWOOD-JOHNSON ?

Les deux mécanismes imaginés, considérés comme étant les phénomènes de base de la plasticité de transformation, ne rendent pas compte de la totalité du phénomène. En effet, chacun des deux modèles décrit uniquement un aspect particulier de cette plasticité " anormale " :

- le mécanisme de [Greenwood et Johnson \(1965\)](#) est important dans les transformations avec diffusion (transformations ferritique et perlitique), mais néglige l'existence de contrainte de cisaillement s'opérant sur le plan d'habitat (l'inter-phase) lors de l'avancement de transformation.
- le mécanisme de [Magee et Paxton \(1966\)](#) est quant à lui important dans les transformations displacives (transformations martensitique et bainitique) mais néglige la variation de volume intrinsèque au changement de phase de différentes densités.

Dans l'absolu, le mécanisme de [Magee et Paxton \(1966\)](#) peut être directement appliqué dans le cas des transformations à variation volumique nulle et le mécanisme de [Greenwood et Johnson \(1965\)](#) peut être directement appliqué dans le cas des transformations où le cisaillement est nul.

En réalité, les deux mécanismes sont généralement présents simultanément avec une prépondérance plus ou moins prononcée pour un mécanisme ou l'autre, selon le type de transformation donnée. De ce fait, de nombreux auteurs décrivent le phénomène avec des modèles fondés sur une combinaison des deux mécanismes précédemment énoncés.

Dans cette étude, le nouveau modèle, fondé sur une approche micromécanique rigoureuse, repose uniquement sur le mécanisme de [Greenwood et Johnson \(1965\)](#) pour des raisons de simplicité. En effet, ce mécanisme est plus accessible aux traitements théoriques mécaniques classiques, car de nature strictement mécanique, contrairement au mécanisme de [Magee et Paxton \(1966\)](#) comportant un couplage mécanique/métallurgique complexe. Dans la suite de ces travaux, le mécanisme de [Greenwood et Johnson \(1965\)](#) est supposé comme étant le seul responsable de l'apparition de la plasticité de transformation. Ainsi, l'étude concerne les matériaux où la composante sphérique de la déformation de transformation joue un rôle beaucoup plus important que la composante déviatorique.

## II.3 Principaux modèles analytiques de la plasticité de transformation

Il existe de nombreux modèles qui décrivent le phénomène de la plasticité de transformation, ces différents modèles reposent généralement sur le mécanisme de [Greenwood et Johnson \(1965\)](#). Dans le cas de chargements faibles et constants, les modèles existants peuvent se mettre sous la forme suivante ([Taleb et al., 2001](#)) :

$$\dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}} = K \left( \sigma_Y^M; \frac{\Delta V}{V} \right) G(\mathbf{S}; \sigma_Y(f)) \phi(f) \dot{f} \quad (\text{II.10})$$

$\mathbf{E}^{\text{tp}}$  : Tenseur du taux de déformation plastique de transformation

$K$  : Coefficient de la plasticité de transformation

$\sigma_Y^M$  : Limite d'élasticité de la phase-mère

$\frac{\Delta V}{V}$  : Variation volumique des phases

$\phi$  : Fonction d'avancement de la transformation

$f$  : Proportion de phase-fille

$\mathbf{S}$  : Déviateur du tenseur des contraintes  $\Sigma$

$\sigma_Y$  : Limite d'élasticité du mélange du matériau

En distinguant trois fonctions qui sont :

- La fonction  $K$  de coefficient de la plasticité de transformation, qui traduit la dépendance au modèle par rapport aux propriétés des phases, notamment leur différence de volume et la limite d'élasticité de la phase-mère.
- La fonction  $G$  dépend des type et magnitude du chargement mécanique appliqué et de la limite d'élasticité du mélange.
- La fonction  $\phi(f)$  de l'avancement de transformation exprime la cinétique de transformation. Au début de la transformation, la fraction de phase est nulle ( $f = 0$ ), dans ce cas  $\phi(0) = 0$  (pas de transformation). Pour une transformation complète ( $f = 1$ ), cette fonction est normalisée telle que  $\phi(1) = 1$ .

La plupart des modèles présentés dans la suite, décrivent de manière univoque la déformation plastique de transformation en fonction de la contrainte appliquée, de la variation volumique des phases et de la proportion de phase-fille présente.

### II.3.1 Premiers modèles

Les premiers essais expérimentaux effectués étaient à chargement extérieur appliqué constant et uniaxial (la direction de la contrainte  $\Sigma_{11}$  se trouve dans la direction axiale de l'éprouvette). Ainsi, les premiers modèles de la déformation plastique de transformation s'exprimaient de manière unidimensionnelle :

$$E_{11}^{\text{tp}} = K \Sigma_{11} \phi(f) \quad (\text{II.11})$$

La détermination des fonctions  $K$  et  $\phi$  est purement expérimentale.

#### • Modèles micromécaniques

##### — Modèle de GREENWOOD-JOHNSON

[Greenwood et Johnson \(1965\)](#) donnent un modèle théorique à l'aide de données expérimentales, fondé sur une analyse micromécanique, où la déformation s'effectue entièrement dans la phase la plus molle. Leur approche est établie sur la base de plusieurs hypothèses :

**H1** : La phase-fille est plastiquement indéformable et la matrice est un corps rigide parfaitement plastique.

**H2 :** Au niveau microscopique le critère de plasticité von Mises est applicable

**H3 :** La forme de l'interface n'a pas d'influence (la forme choisie par les auteurs est ici sphérique).

**H4 :**  $\varepsilon^{\text{tp}}$  est constant sur l'interface et est petit devant  $\frac{\Delta V}{V}$  ce qui induit que le rapport  $\frac{\sigma_Y}{\sigma_Y^M}$  est petit.

**H5 :** La transformation est supposée complète  $\phi(1) = 1$ .

Ils obtiennent alors la valeur de la déformation plastique de transformation suivante :

$$E_{xx}^{\text{tp}} = \underbrace{\frac{5}{6\sigma_Y^M} \frac{\Delta V}{V}}_K \Sigma_{11} \quad (\text{II.12})$$

Dans le cas d'une charge constante pendant toute la durée de la transformation, il vient  $\Delta\varepsilon_{M \rightarrow D}^{\text{th}} = \frac{\Delta V}{3V}$ , avec  $\Delta\varepsilon_{M \rightarrow D}^{\text{th}}$  la différence de la déformation thermique entre les deux phases. L'équation (II.12) devient :

$$E_{11}^{\text{tp}} = \underbrace{\frac{5}{2} \frac{\Delta\varepsilon_{M \rightarrow D}^{\text{th}}}{\sigma_Y^M}}_K \Sigma_{11} \quad (\text{II.13})$$

ici  $G = \Sigma_{11}$ .

Cette expression est valide pour des contraintes d'amplitude inférieure à la demi-valeur de la limite d'élasticité de la phase-mère, en plus d'être uniaxiale, elle ne concerne que les résultats de transformation complète.

#### — Modèle d'ABRASSART

Par la suite [Abrassart \(1972\)](#) établit un modèle dans lequel la plasticité de transformation est calculée en fonction de la phase-fille produite. Ainsi,  $\phi(f)$  est calculée pour toutes les valeurs de  $f$ . De plus, il propose une nouvelle valeur de la constante  $K$ ,

$$E_{11}^{\text{tp}} = \frac{3\Delta\varepsilon_{M \rightarrow D}^{\text{th}}}{4\sigma_Y^M} (3f - 2f^{2/3}) \Sigma_{11} \quad (\text{II.14})$$

En identifiant à l'équation (II.11), il vient :

$$\begin{cases} K = \frac{3\Delta\varepsilon_{M \rightarrow D}^{\text{th}}}{4\sigma_Y^M} \\ \phi(f) = 3f - 2f^{2/3} \\ G = \Sigma_{11} \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

Cette expression permet de calculer la plasticité de transformation non seulement en fonction de la contrainte appliquée, mais également en fonction de l'avancement de la transformation  $f$ .

#### — Modèle de MITTER

Ensuite, [Mitter \(1987\)](#) améliore le modèle de [Greenwood et Johnson \(1965\)](#) en introduisant une nouvelle expression pour  $K$ ,

$$E_{11}^{\text{tp}} = \underbrace{\frac{\Delta V}{V} \left( \frac{\alpha}{\sigma_Y^M} + \frac{\beta}{\sigma_Y^D} \right)}_K \Sigma_{11} \quad (\text{II.16})$$

avec  $\alpha$  et  $\beta$  des coefficients variant entre 0,45 et 0,78 pour  $\alpha$ , et 0,06 et 0,28 pour  $\beta$ . Et avec  $\sigma_Y^M$  et  $\sigma_Y^D$  la limite d'élasticité de la phase-mère et fille respectivement.

#### • Modèles heuristiques

— **Modèle de DESALOS**

À l'issue des essais de dilatométrie, réalisés par [Desalos \(1981\)](#), sous contrainte de compression imposée pendant les transformations de refroidissement sur l'acier A533, cette auteur propose l'expression suivante :

$$E_{11}^{\text{tp}} = 10^{-4} f(2-f) \Sigma_{11} \quad (\text{II.17})$$

En considérant la structure de l'équation (II.11), on identifie :

$$\begin{cases} K = 10^{-4} \\ \phi(f) = f(2-f) \\ G = \Sigma_{11} \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

— **Modèle de LEBLOND-GIUSTI**

[Leblond \(1980\)](#) et [Giusti \(1981b\)](#) généralisent l'expression de [Desalos \(1981\)](#) pour un modèle applicable à tous les cas de chargement, nécessaire pour les codes de calcul par éléments finis :

$$\dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}} = \frac{3}{2} K \mathbf{S} \phi'(f) \dot{f} \quad (\text{II.19})$$

avec  $\mathbf{S}$  le tenseur du déviateur des contraintes à l'échelle macroscopique, tel que  $\mathbf{S} = \boldsymbol{\Sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}) \mathbf{1}$  (avec  $\mathbf{1}$  le tenseur unité).

La construction de ce modèle a été établie sur une démarche totalement heuristique, et se fonde sur les arguments suivants :

- H1** : La relation doit être incrémentale et indépendante du temps physique, c'est-à-dire qu'elle doit relier linéairement le taux de déformation plastique au taux de transformation.
- H2** : Le taux de déformation de plasticité de transformation doit être nul en dehors des plages de transformations, c'est-à-dire que si la transformation avance, d'où la nécessité d'exprimer  $\dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}}$  en fonction de  $\dot{f}$ .
- H3** : La norme de  $\dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}}$  doit être proportionnelle à la contrainte appliquée, au moins pour de petites contraintes, comme les résultats expérimentaux des essais uniaxiaux ont pu le montrer.
- H4** : La vitesse de déformation de plasticité de transformation doit être, comme pour la plasticité classique, proportionnelle à la partie déviatorique  $S_{ij}$  du tenseur des contraintes c'est-à-dire qu'elle ne doit pas induire de changement de volume.

Les travaux expérimentaux de [Gigou \(1985\)](#) ont pu confirmer la colinéarité de  $\mathbf{S}$  par rapport  $\dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}}$  dans le cas de contraintes biaxiales. Ce modèle permet de déterminer la vitesse de plasticité de transformation en fonction de la contrainte appliquée et la fraction volumique de la nouvelle phase formée.

Dans la sous-section II.3.2 : “Modèle classique de [Leblond \(1989\)](#)” suivante, [Leblond et al. \(1989\)](#) complète ce modèle sur une base théorique fondée sur une approche micromécanique. Il est question de déterminer la constante  $K$  et la fonction  $\phi$  par une méthode d'homogénéisation. Ces auteurs supposent qu'à l'échelle microscopique seule la plasticité classique intervient et que la distinction, au niveau macroscopique, entre plasticité classique et plasticité de transformation n'est que la conséquence du processus d'homogénéisation.

### II.3.2 Modèle classique de [Leblond \(1989\)](#)

Dans cette étude, le tenseur de la déformation totale  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{t}}$  est d'abord défini, il se décompose en trois parties : le tenseur de déformation élastique  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{e}}$ , le tenseur de déformation thermique  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{th}}$  et le tenseur de déformation plastique  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}}$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{t}} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{e}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{th}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}} \quad (\text{II.20})$$

La déformation thermique  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{th}}$  inclut la partie sphérique de la déformation de transformation. La déformation plastique  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}}$  inclut la partie déviatorique de la déformation de transformation.

Selon la théorie de Hill (1967) et Mandel (1966), le tenseur de contrainte  $\boldsymbol{\Sigma}$  et le tenseur de la déformation totale  $\mathbf{E}^{\text{t}}$  à l'échelle macroscopique s'écrivent :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_V \\ \mathbf{E}^{\text{t}} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{t}} \rangle_V \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

Se déduit alors, à l'échelle macroscopique, l'équation (II.22), qui consiste en une partition du tenseur macroscopique de déformation totale  $\mathbf{E}^{\text{t}}$  en la contribution de déformation élastique  $\mathbf{E}^{\text{e}}$ , de déformation thermo-métallurgique  $\mathbf{E}^{\text{thm}}$ , et de déformation plastique  $\mathbf{E}^{\text{p}}$ .

$$\mathbf{E}^{\text{t}} = \mathbf{E}^{\text{e}} + \mathbf{E}^{\text{p}} + \mathbf{E}^{\text{thm}} \quad (\text{II.22})$$

*Hypothèse 1* : Le tenseur de souplesse à l'échelle macroscopique  $\mathbf{M}$  est supposé assimilé au tenseur de souplesse à l'échelle microscopique  $\mathbf{m}$ , ce qui permet d'écrire les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{\text{e}} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{e}} \rangle_V = \mathbf{M} : \boldsymbol{\Sigma} \\ \mathbf{E}^{\text{thm}} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{th}} \rangle_V = (1-f)\boldsymbol{\varepsilon}_M^{\text{th}} + f\boldsymbol{\varepsilon}_D^{\text{th}} \\ \mathbf{E}^{\text{p}} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}} \rangle_V \end{cases} \quad (\text{II.23})$$

La déformation thermo-métallurgique  $\mathbf{E}^{\text{thm}}$  est trouvée expérimentalement par l'essai de dilatométrie libre. Cependant, la déformation de plasticité  $\mathbf{E}^{\text{p}}$  n'est pas simple à déterminer, elle doit faire apparaître la plasticité classique  $\mathbf{E}^{\text{cp}}$  et la déformation de transformation  $\mathbf{E}^{\text{tp}}$ . Sachant que la déformation plastique prend en compte la variation volumique de chaque phase et donc de la position de la frontière  $F$  entre les deux phases. Lorsque l'on dérive  $\mathbf{E}^{\text{p}}$  par rapport au temps, il vient alors la formule suivante :

$$\dot{\mathbf{E}}^{\text{p}} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{\text{vol}(V)} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}} dv \right] = (1-f) \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_M^{\text{p}} \rangle_{V_M} + f \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_D^{\text{p}} \rangle_{V_D} + \dot{f} \langle \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{M \rightarrow D}^{\text{p}} \rangle_{F(U_n)} \quad (\text{II.24})$$

avec,

$$\begin{cases} \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{\text{p}} \rangle_{V_i} : \text{moyenne de } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{\text{p}} \text{ sur le volume } V_i \text{ (} i = M, D \text{)} \\ F : \text{front de la transformation} \\ U_n : \text{normale du front d'avancement de } F \end{cases} \quad (\text{II.25})$$

et  $\langle \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{M \rightarrow D}^{\text{p}} \rangle_{F(U_n)}$  est la moyenne de la surface de discontinuité de  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{M \rightarrow D}^{\text{p}}$  sous le front de transformation  $F$  pondérée par la normale de vitesse  $U_n$  :

$$\langle \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{M \rightarrow D}^{\text{p}} \rangle_{F(U_n)} = \frac{\int_F \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{M \rightarrow D}^{\text{p}} U_n dS}{\int_F U_n dS}. \quad (\text{II.26})$$

La discontinuité de  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}}$  à travers les deux phases, vient du fait que la partie déviatorique de la déformation de transformation est introduit dans la déformation plastique, qui engendre un saut de déformation au passage de ces deux zones. Par convention,  $\dot{f} > 0$  car la frontière  $F$  se déplace de la phase-fille  $\alpha$  ( $\equiv D$ ) vers la phase-mère  $\gamma$  ( $\equiv M$ ). Le comportement thermoplastique conduit à énoncer le taux déformation plastique classique  $\dot{\mathbf{E}}^{\text{cp}}$  comme relié à l'évolution  $\dot{T}$  de la température et au taux de contrainte  $\dot{\boldsymbol{\Sigma}}$  :

$$\dot{\mathbf{E}}^{\text{cp}} = \dot{\mathbf{E}}_{\boldsymbol{\Sigma}}^{\text{cp}} + \dot{\mathbf{E}}_T^{\text{cp}} \quad (\text{II.27})$$

Et pour le taux de déformation plastique de transformation  $\dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}}$ , il apparaît uniquement lors de la transformation, c'est-à-dire qu'il dépend de  $\dot{f}$ . Désormais, le taux de déformation plastique  $\dot{\mathbf{E}}^{\text{p}}$  défini à l'équation (II.24) peut s'écrire entièrement comme une décomposition de  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{p}}$  en termes proportionnels à  $\dot{\boldsymbol{\Sigma}}$ ,  $\dot{T}$  et  $\dot{f}$ .

Dans un problème de mécanique ordinaire à l'échelle locale, il vient :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = ( ) \dot{\boldsymbol{\sigma}} + ( ) \dot{T} \quad (\text{II.28})$$

sans le terme proportionnel à  $\dot{f}$  mais puisque

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = ( ) \dot{\boldsymbol{\Sigma}} + ( ) \dot{T} + ( ) \dot{f} \quad (\text{II.29})$$

il vient l'expression de  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$  :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \frac{\delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p}{\delta \boldsymbol{\Sigma}} \dot{\boldsymbol{\Sigma}} + \frac{\delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p}{\delta T} \dot{T} + \frac{\delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p}{\delta f} \dot{f} \quad (\text{II.30})$$

En utilisant l'équation ci-dessous pris dans le volume  $V_M$  et  $V_D$ , l'équation (II.24) devient :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}^p = & \underbrace{\left\{ (1-f) \left\langle \frac{\delta \boldsymbol{\epsilon}_M^p}{\delta \boldsymbol{\Sigma}} \right\rangle_{V_M} + f \left\langle \frac{\delta \boldsymbol{\epsilon}_D^p}{\delta \boldsymbol{\Sigma}} \right\rangle_{V_D} \right\}}_{\dot{\mathbf{E}}_\Sigma^{\text{cp}}} \dot{\boldsymbol{\Sigma}} + \underbrace{\left\{ (1-f) \left\langle \frac{\delta \boldsymbol{\epsilon}_M^p}{\delta T} \right\rangle_{V_M} + f \left\langle \frac{\delta \boldsymbol{\epsilon}_D^p}{\delta T} \right\rangle_{V_D} \right\}}_{\dot{\mathbf{E}}_T^{\text{cp}}} \dot{T} \\ & + \underbrace{\left\{ (1-f) \left\langle \frac{\delta \boldsymbol{\epsilon}_M^p}{\delta f} \right\rangle_{V_M} + f \left\langle \frac{\delta \boldsymbol{\epsilon}_D^p}{\delta f} \right\rangle_{V_D} \right\}}_{\text{Mécanisme de GREENWOOD\&JOHNSON}} \dot{f} + \underbrace{\left\langle \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{M \rightarrow D}^p \right\rangle_{F(U_n)}}_{\text{Mécanisme de MAGEE}} \dot{f} \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

Ainsi, dans l'équation (II.31), les termes moyennés sur le volume des phases sont dus au mécanisme de [Greenwood et Johnson \(1965\)](#) (accommodation volumique plastique) tandis que le terme intégré sur le front d'avancement de la transformation est relié au mécanisme de [Magee et Paxton \(1966\)](#) (effet d'orientation de la déformation de transformation).

Et afin d'aboutir à l'expression explicite (II.19) de [Leblond \(1980\)](#), celui-ci suppose tout d'abord que les transformations sont diffusives et que seul le mécanisme de [Greenwood et Johnson \(1965\)](#) compte

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}} = \left\{ (1-f) \left\langle \frac{\delta \boldsymbol{\epsilon}_M^p}{\delta f} \right\rangle_{V_M} + f \left\langle \frac{\delta \boldsymbol{\epsilon}_D^p}{\delta f} \right\rangle_{V_D} \right\} \dot{f} \quad (\text{II.32})$$

et les hypothèses suivantes sont faites :

**H1** : A déjà été mentionnée précédemment (cf. "Hypothèse 1" p. 25).

**H2** : Pour des efforts appliqués faibles, la phase  $\gamma$  est entièrement plastique, mais la phase  $\alpha$  reste élastique. Autrement dit le taux de déformation plastique de la phase-mère (austénite) est très inférieur à celui de la phase-fille (ferrite, martensite).

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}} = (1-f) \left\langle \frac{\delta \boldsymbol{\epsilon}_M^p}{\delta f} \right\rangle_{V_M} \dot{f} \quad (\text{II.33})$$

**H3** : et obéissent au critère de von Mises et à la loi d'écoulement associée de Prandtl-Reuss.

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}} = \frac{3(1-f)}{2\sigma_Y^M} \left\langle \frac{\delta \boldsymbol{\epsilon}_M^{eq}}{\delta f} \mathbf{s}_M \right\rangle_{V_M} \dot{f} \quad (\text{II.34})$$

avec,

$$\begin{cases} \sigma_Y^M : \text{limite d'élasticité de la phase-mère} \\ \mathbf{s}_M : \text{tenseur déviatorique microscopique} \\ \boldsymbol{\epsilon}_M^{eq} : \text{déformation équivalente} \end{cases} \quad (\text{II.35})$$

**H4 :** La corrélation entre  $\frac{\delta \epsilon_M^{eq}}{\delta f}$  et  $\mathbf{s}_M$  peut être négligée.

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{E}}^{tp} = \frac{3(1-f)}{2\sigma_Y^M} \left\langle \frac{\delta \epsilon_M^{eq}}{\delta f} \right\rangle_{V_M} \mathbf{S}_M \dot{f} \quad (\text{II.36})$$

où  $\mathbf{S}_M$  est la moyenne du déviateur des contraintes dans la phase  $M$  :

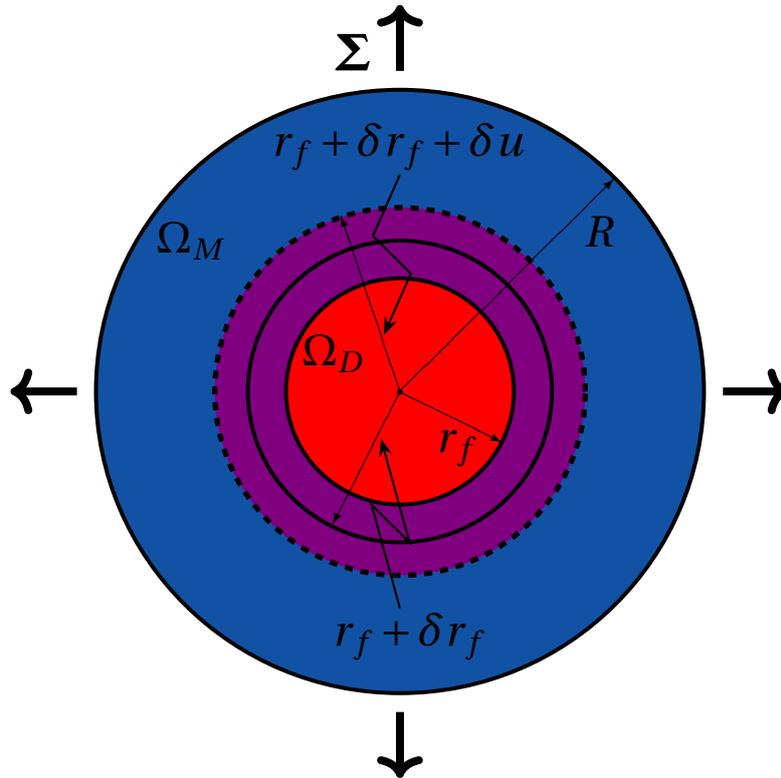
$$\mathbf{S}_M = \langle \mathbf{s}_M \rangle_{V_M} \quad (\text{II.37})$$

**H5 :** Pour de petites contraintes appliquées, la moyenne des contraintes déviatoriques dans la phase  $M$  est à peu près égale à la moyenne du déviateur des contraintes globales,  $\mathbf{S}_M = \mathbf{S} = \langle \mathbf{s} \rangle_V$ .

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{E}}^{tp} = \frac{3(1-f)}{2\sigma_Y^M} \left\langle \frac{\delta \epsilon_M^{eq}}{\delta f} \right\rangle_{V_M} \mathbf{S} \dot{f} \quad (\text{II.38})$$

### Modèle de croissance sphérique de LEBLOND (1989) du mécanisme de GREENWOOD-JOHNSON (1965)

Pour le calcul effectif de la grandeur  $\left\langle \frac{\delta \epsilon_M^{eq}}{\delta f} \right\rangle_{V_M}$  (et non plus  $\left\langle \frac{\delta \epsilon_M^p}{\delta f} \right\rangle_{V_M}$  qui se moyenne à zéro) Leblond propose dans le cas de faibles contraintes appliquées (ce calcul est fait en réalité pour  $\Sigma = \mathbf{0}$ ) que la structure ferritique (phase  $\alpha \equiv D$ ) est une inclusion sphérique qui croît à l'intérieur d'une sphère austénitique (phase  $\gamma \equiv M$ ) :



**Figure II.12** – Volume élémentaire représentatif considéré par Leblond et al. (1989)

À l'instant  $t$  la phase-mère occupe toute la zone  $\Omega_M$  en bleu et violet, et la phase-fille occupe toute la zone  $\Omega_D$  en rouge. Considérons à cet instant  $t$  une couronne d'épaisseur  $\delta r_f$  (couronne violette délimitée par un trait continu), et qu'à l'instant  $t + \delta t$  cette zone soit entièrement transformée en phase-fille (devient rouge). Or, l'effet de la transformation est caractérisé par le changement de volume, ainsi les points

localisés à  $r_f + \delta r_f$  se retrouvent en une nouvelle position  $r_f + \delta r_f + \delta u$ , i.e que la couronne, délimitée par un trait continu, gonfle pour occuper une couronne allant jusqu'au trait discontinu, à cet instant la zone de phase-fille occupe la sphère de rayon  $r_f + \delta r_f + \delta u$  (zone bleue plus violette).

L'objectif principal est d'évaluer la quantité  $\left\langle \frac{\delta \epsilon_M^{eq}}{\delta f} \right\rangle_{V_M}$  de l'expression (II.38), qui représente l'augmentation en moyenne de la déformation plastique équivalente de la phase-mère, induite par une légère augmentation de la proportion de la phase-fille.

Après un calcul micromécanique simplifié, ces auteurs trouvent finalement la formule du taux de déformation de transformation suivante :

$$\dot{\mathbf{E}}^{tp} = -3 \frac{\Delta \epsilon_{1 \rightarrow 2}^{th}}{\sigma_Y^M} \mathbf{S}(\ln(f)) \dot{f} \quad (\text{II.39})$$

Et en identifiant avec l'équation (II.11), il vient :

$$\begin{cases} K = \frac{2\Delta \epsilon_{M \rightarrow D}^{th}}{\sigma_Y^M} \\ \phi(f) = f(1 - \ln f) \end{cases} \quad (\text{II.40})$$

Enfin, [Leblond et al. \(1989\)](#) complètent cette approche théorique par des calculs numériques par éléments finis, sur une transformation diffusionnelle dans l'acier A508, afin de :

- vérifier la validité des hypothèses adoptées lors de la définition du modèle théorique
- chercher une expression de loi d'écoulement dont le domaine de validité est plus large que celui que cette expression théorique (II.39) le permet.

Ainsi le modèle de [Leblond et al. \(1989\)](#) a été développé sous plusieurs formes pour prédire différents types de comportement (plasticité parfaite, écrouissage isotrope ou écrouissage cinématique) et de niveau de chargement appliqué. Ces lois sont répertoriées aux tableaux [Tableau II.1](#), [Tableau II.2](#) et [Tableau II.3](#) :

**Tableau II.1** – Modèle de [Leblond et al. \(1989\)](#) sans écrouissage

Contraintes faibles	$\dot{\mathbf{E}}^{tp} = \begin{cases} 0 & \text{si } f \leq 0.003 \\ -3 \frac{\Delta \epsilon_{1 \rightarrow 2}^{th}}{\sigma_Y^M} h\left(\frac{\Sigma_{eq}}{\Sigma_Y}\right) \mathbf{S}(\ln(f)) \dot{f} & \text{si } f > 0.003 \end{cases}$
	$h\left(\frac{\Sigma_{eq}}{\Sigma_Y}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{\Sigma_{eq}}{\Sigma_Y} \leq 1/2 \\ 1 + 3.5\left(\frac{\Sigma_{eq}}{\Sigma_Y} - \frac{1}{2}\right) & \text{si } \frac{\Sigma_{eq}}{\Sigma_Y} > 1/2 \end{cases}$
Contraintes élevées	$\dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\Lambda} \mathbf{S}$

**Tableau II.2** – Modèle de *Leblond et al. (1989)* avec écrouissage isotrope

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}} &= \begin{cases} 0 & \text{si } f \leq 0.003 \\ -3 \frac{\Delta \varepsilon_{1 \rightarrow 2}^{\text{th}}}{\sigma_Y^M (E_M^{\text{eff}})} h\left(\frac{\Sigma_{eq}}{\Sigma_Y}\right) \mathbf{S} \ln(f) \dot{f} & \text{si } f > 0.003 \end{cases} \\
 \text{Contraintes faibles} & \quad h\left(\frac{\Sigma_{eq}}{\Sigma_Y}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{\Sigma_{eq}}{\Sigma_Y} \leq 1/2 \\ 1 + 3.5 \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\Sigma_Y} - \frac{1}{2}\right) & \text{si } \frac{\Sigma_{eq}}{\Sigma_Y} > 1/2 \end{cases} \\
 E_M^{\text{eff}} &= \begin{cases} -2 \frac{\Delta \varepsilon_{1 \rightarrow 2}^{\text{th}}}{1-f} h\left(\frac{\Sigma_{eq}}{\Sigma_Y}\right) \ln(f) \dot{f} + \frac{g(z)}{E} \dot{\Sigma}_{eq} & \text{si } f \leq 0.003 \\ -2 \frac{\Delta \varepsilon_{1 \rightarrow 2}^{\text{th}}}{1-f} h\left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_Y^M}\right) \ln(f) \dot{f} + \frac{g(z)}{E} \dot{\Sigma}_{eq} + \frac{2(\alpha_M - \alpha_D)}{1-f} f \ln(f) \dot{T} & \text{si } f > 0.003 \end{cases} \\
 \text{Contraintes élevées} & \quad \dot{\mathbf{E}}^{\text{p}} = \frac{3}{2} \frac{\dot{E}_{eq}}{\Sigma_{eq}} \mathbf{S}
 \end{aligned}$$

**Tableau II.3** – Modèle de *Leblond et al. (1989)* avec écrouissage cinématique

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}} &= \begin{cases} 0 & \text{si } f \leq 0.003 \\ -3 \frac{\Delta \varepsilon_{1 \rightarrow 2}^{\text{th}}}{\sigma_Y^M} (\mathbf{S} - \mathbf{A}_M) h\left(\frac{\Sigma_{eq}}{\Sigma_Y}\right) \ln(f) \dot{f} & \text{si } f > 0.003 \end{cases} \\
 \text{Contraintes faibles} & \quad h\left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_Y^M}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_Y^M} \leq 1/2 \\ 1 + 3.5 \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\Sigma_Y} - \frac{1}{2}\right) & \text{si } \frac{\Sigma_{eq}}{\Sigma_Y} > 1/2 \end{cases} \\
 \text{Contraintes élevées} & \quad \dot{\mathbf{E}}^{\text{p}} = \frac{3}{2} \frac{\dot{E}_{eq}}{\Sigma_{eq}} (\mathbf{S} - \mathbf{A})
 \end{aligned}$$

$\Sigma_{eq}$  : la contrainte équivalente.

$\Sigma_Y$  : la limite d'élasticité macroscopique homogénéisée (*Leblond, 1989*).

$\sigma_Y^M$  : la limite d'élasticité de la phase-mère.

$\Delta \varepsilon_{1 \rightarrow 2}^{\text{th}}$  : la différence de déformation thermique entre les deux phases.

$\mathbf{S}$  : déviateur du tenseur des contraintes  $\Sigma$ .

$f$  : proportion de phase-fille.

$E_M^{\text{eff}}$  : déformation plastique cumulée dans la phase-mère.

$E_D^{\text{eff}}$  : déformation plastique cumulée dans la phase-fille.

$g(f)$  : fonction liée à la phase formée.

$E$  : module de Young.

$A$  : variable d'écrouissage cinématique homogénéisée.

$A_M$  : variable d'écrouissage cinématique liée à la phase-mère.

$\alpha_M$  : coefficient de dilatation thermique de la phase-mère.

$\alpha_D$  : coefficient de dilatation thermique de la phase-fille.

$T$  : la température.

$\dot{\mathbf{E}}^{\text{p}}$  : taux de déformation plastique.

$\dot{E}_{eq}$  : taux de déformation plastique équivalent.

$h\left(\frac{\Sigma_{eq}}{\Sigma_Y}\right)$  : fonction traduisant la non-linéarité de la déformation plastique de transformation.

### II.3.3 Modèles améliorés de Leblond

- Modèles heuristiques

- Modèles Taleb-Sidoroff

Le modèle de Taleb et Sidoroff (2003a,b) propose une amélioration des hypothèses introduites par Leblond (1980) et synthétisées par Leblond et Devaux (1984), pour rectifier la singularité à l'origine. Ainsi les nouvelles hypothèses proposées par ces auteurs sont :

**H1** : la phase-fille  $\alpha$  en croissance reste élastique pendant toute la transformation.

**H2** : les déformations élastiques par rapport aux déformations plastiques ne sont plus négligeables au sein de la phase-mère. Ainsi la phase austénitique comporte une partie élastique et n'est plus totalement plastique.

**H3** : la compression de la phase-mère sur la phase-fille lors de son avancement n'est plus négligée et est prise en compte.

Un modèle géométrique sphérique est considéré comme le montre la figure ci-dessous :

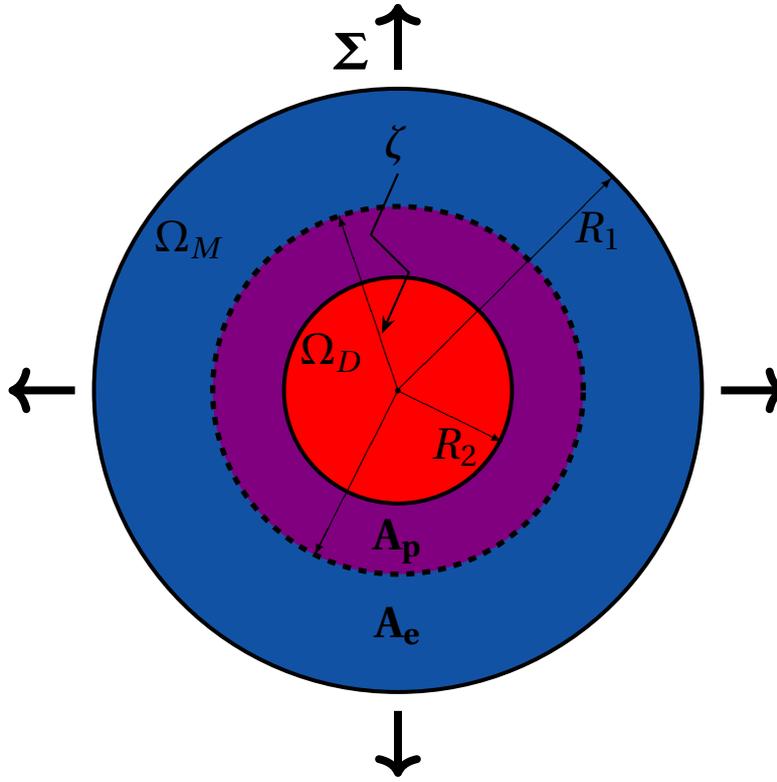


Figure II.13 – Volume élémentaire représentatif considéré par Taleb et Sidoroff (2003b)

Sur cette figure,  $A_e$  et  $A_p$  sont des régions élastique et plastique de la phase-mère  $\Omega_M$  respectivement.  $R_M$ ,  $R_D$  sont les rayons définissant les limites entre les deux phases et  $\zeta$  délimite les zones élastique et plastique de ce nouveau VER.

L'expression obtenue est la suivante :

$$\dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}} = \begin{cases} -3 \frac{\Delta \varepsilon_{1 \rightarrow 2}^{\text{th}}}{\sigma_Y^M} \ln(f_l) \dot{f} \mathbf{S} & \text{si } f \leq f_l \\ -3 \frac{\Delta \varepsilon_{1 \rightarrow 2}^{\text{th}}}{\sigma_Y^M} \ln(f) \dot{f} \mathbf{S} & \text{si } f > f_l \end{cases} \quad (\text{II.41})$$

où,

$$f_l = \frac{\sigma_Y^M}{2 \Delta \varepsilon_{1 \rightarrow 2}^{\text{th}}} \frac{4\mu + 3\kappa}{9\mu\kappa} \quad (\text{II.42})$$

avec,

$f_l$  : fraction volumique limite de la phase nouvellement formée à partir de laquelle toute l'austénite est plastifiée

$\kappa$  : module de compressibilité

$\mu$  : module de cisaillement

$\sigma_Y^M = \sigma_Y + h\varepsilon^{\text{eff}}$  : contrainte dans la phase austénitique à partir de laquelle toute l'austénite est plastifiée

$h$  : module d'écrouissage

$\mu$  : paramètre d'écrouissage de la phase austénitique

$\varepsilon^{\text{eff}}$  : taux de déformation effectif :

$$\dot{\varepsilon}^{\text{eff}} = \begin{cases} -2 \frac{\Delta \varepsilon_{1-2}^{\text{th}}}{\sigma_Y^M} \ln(f_l) \dot{f} & \text{si } f \leq f_l \\ -2 \frac{\Delta \varepsilon_{1-2}^{\text{th}}}{\sigma_Y^M} \ln(f) \dot{f} & \text{si } f > f_l \end{cases} \quad (\text{II.43})$$

Ainsi, la proportion de phase-fille  $f$  nouvellement formée est déterminée à partir d'un seuil si le comportement de la phase parente est élasto-plastique ou complètement plastique. Avec ces hypothèses la plasticité de transformation est modélisée dès le début de la transformation. Contrairement au modèle de [Leblond et al. \(1989\)](#), valable qu'à partir d'un seuil de 3% de la transformation.

Cependant, tous ces modèles analytiques ne permettent pas de donner une estimation de la déformation plastique de transformation pour des cas de contraintes d'amplitude équivalente appliquée élevée, c'est-à-dire au delà d'une certaine valeur généralement supérieure à la demi-valeur de la limite d'élasticité de la phase la plus faible. Pour obtenir une estimation de la déformation plastique de transformation quelle que soit la contrainte appliquée les ingénieurs de calcul ont souvent recours à des paramètres *ad-hoc* selon le type de transformation, du chargement et du type d'acier.

Ainsi, l'objectif de cette thèse est de pallier les lacunes du modèle classique de [Leblond et al. \(1989\)](#), afin d'aborder la gamme des contraintes élevées (proches de la limite d'élasticité austénitique), sans l'utilisation de paramètres supplémentaires ajustables. Pour cela, la modélisation du mécanisme de [Greenwood et Johnson \(1965\)](#) sera reconsidérée en utilisant la théorie d'homogénéisation de [Hill \(1967\)](#)-[Mandel \(1966\)](#) combiné à une approche cinématique qui est l'analyse limite, pour aboutir à une nouvelle formulation théorique plus complète de la déformation plastique de transformation ([El Majaty et al., 2018](#)). Cette nouvelle formulation nous permet ainsi de renoncer aux hypothèses excessives introduites dans l'analyse de 1989, et aussi de décrire des effets connus expérimentalement mais que cette analyse ne pouvait pas par nature appréhender, comme la croissance non-linéaire de l'effet du taux de déformation plastique de transformation en fonction de la contrainte appliquée.

D'autre part, l'élaboration de cette nouvelle théorie sera faite pour deux configurations géométriques différentes de croissance de germes, d'abord sphérique puis étendue au cas sphéroïdale, et seront accompagnées par des confrontations numériques. Ces nouvelles simulations numérique à base de FFT du mécanisme de [Greenwood et Johnson \(1965\)](#) permet alors d'améliorer le modèle analytique et de valider son champ de validité.

## II.4 Modèles numériques de la plasticité de transformation

En lien avec ces investigations, des modèles numériques micromécaniques ont été réalisés, reposant sur la méthode des éléments-finis (FEM). D'une part, les travaux ont d'abord considéré un matériau biphasé avec une plasticité classique de von Mises, et avec différentes règles de processus de germination/-croissance ([Barbe et al., 2007, 2008](#); [Ganghoffer et al., 1992](#); [Leblond et al., 1989, 1986](#)).

### II.4.1 Modèles numériques de Leblond

Dans un premier temps, la modélisation numérique étudiée par [Leblond \*et al.\* \(1989\)](#), sous SYSTUS, pour évaluer son modèle décrit plus haut, concerne une transformation martensitique de l'acier A508. La déformation de transformation est uniquement générée par la déformation thermique (l'expansion de la phase fille) sans n'inclure aucune partie déviatorique dans celle-ci (changement de forme négligé). Les propriétés thermomécaniques présentées pour les deux phases sont les suivantes :

	phase $\alpha$	phase $\gamma$
Module de Young (GPa)	182	182
Coefficient de Poisson	0.3	0.3
Limite élastique (MPa)	950	145
Taux d'écrouissage	0	0
Déformation thermique	0	0.84%

**Tableau II.4** – Propriétés matérielles (acier A508).

Le VER choisi pour la modélisation de la plasticité de transformation est un cube de maillage régulier  $5 \times 5 \times 5$ . Les phases ont un comportement parfaitement plastique (sans écrouissage). Deux types de transformations sont étudiés :

- les éléments sont transformés dans un ordre précis, du centre du VER jusqu'aux frontières de celui-ci
- les éléments sont transformés dans un ordre aléatoire dans le VER.

La transformation d'un élément se fait par le changement de ses propriétés thermoélastiques de la phase  $\gamma$  à la phase  $\alpha$ . Pendant cette transformation, une contrainte uniaxiale avec une amplitude constante d'environ 1/3 à la limite d'élasticité de la phase la plus faible est appliquée sur le VER. Cette étude montre que le premier type de transformation (progression "diffusive" des éléments à transformer) donne un meilleur accord avec les prédictions théoriques du modèle analytique de l'auteur (cf. Fig. 3 de [Leblond \*et al.\*, 1989](#)).

Dans un second temps, avec une modélisation des transformations de phases similaire à celle de [Leblond \*et al.\* \(1989\)](#), [Ganghoffer \*et al.\* \(1992\)](#) étudient l'effet de différents paramètres de modélisation comme la taille de maillage et l'effet d'un écrouissage isotrope linéaire pour des transformations perlitiques. Toujours inspirées par les travaux de modélisations de [Leblond \*et al.\* \(1989\)](#) et [Ganghoffer \*et al.\* \(1992\)](#) d'autres études numériques ont été développées.

### II.4.2 Modèles numériques récents

[Barbe \*et al.\* \(2007\)](#) étudient le cas où les deux phases, parente et produite, suivent une loi de comportement macroscopique homogène. Cependant, contrairement aux simulations numériques de [Leblond \*et al.\* \(1989\)](#) les germes de la nouvelle phase sont distribués de manière périodique au sein de la phase parente ([Barbe \*et al.\*, 2007](#) ; [Ganghoffer \*et al.\*, 1992](#)), de manière aléatoire dans l'espace ([Barbe \*et al.\*, 2007](#)) ou encore de manière aléatoire dans le temps et l'espace ([Barbe \*et al.\*, 2008](#) ; [Hoang \*et al.\*, 2008](#)) en utilisant parfois une mosaïque de Voronoï des grains d'austénite, à l'aide du logiciel NEPER, afin de définir les sites "préférentiels" de germinations de la phase naissante ([Barbe \*et al.\*, 2005, 2008](#) ; [Quey \*et al.\*, 2010, 2011](#)). Les effets de densité de maillage sont alors étudiés.

Dans un second temps, [Tahimi \*et al.\* \(2012\)](#) reprennent ces différents modèles numériques, énoncés dans le paragraphe précédent, pour étudier l'effet de viscosité ([Tahimi, 2011](#)). Ensuite, [Tahimi \*et al.\* \(2012\)](#) étudient le cas où les deux phases, parente et produite, suivent une loi de plasticité cristalline. Dans cette

étude les différentes possibilités de germinations vues précédemment sont abordées avec une analyse des effets d'orientations cristallographiques des phases poly- ou mono-cristallines, parente et produite, sur l'acier 100C6 pour une transformation perlitique.

Récemment, le schéma numérique à base de FFT (Moulinec et Suquet, 1998a) a montré à plusieurs reprises que son efficacité surpassait la méthode standard des éléments finis pour des simulations de cellule-unité de milieux périodiques, en termes de temps de calcul et d'allocation de mémoire (voir, parmi d'autres, Brenner *et al.*, 2009; Lebensohn *et al.*, 2008, 2012; Lee *et al.*, 2011; Suquet *et al.*, 2012). La méthode à base de FFT a été appliquée avec succès à la plasticité de transformation dans le cas de microstructures polycristallines (Otsuka, 2014; Otsuka *et al.*, 2018a) et pour des problèmes similaires comme la transformation métastable (TRIP/TWIP) (Wong *et al.*, 2016) utilisant le code DAMASK.

Dans notre étude, la nouvelle théorie sera confrontée à des simulations numériques à base de FFT (El Majaty *et al.*, 2020) dont le comportement des phases est de type macroscopique homogène. Cette étude permet d'analyser les effets d'interaction entre les germes de phase-fille lors de la transformation. Nous analyserons en particulier la densité des germes de phase-fille et les effets de dispersion associés. L'approche numérique sera ensuite consacrée à l'étude des effets de germination/croissance via le type de distribution des germes de phase-fille. Nous étudierons aussi l'influence de quelques paramètres comme la variation de la limite d'élasticité pendant la transformation ou encore la taille des régions en transformation. Et enfin, nous regarderons les effets de forme des germes de phase-fille et de la cellule élémentaire représentative.



## **Deuxième partie**

# **Étude pour des germes sphériques**



---

A novel treatment of Greenwood-Johnson’s mechanism of transformation plasticity -  
Case of spherical growth of nuclei of daughter-phase

---

Part from *El Majaty et al. (2018)* : *Cette partie propose un traitement innovant du mécanisme de transformation de la plasticité des métaux et alliages de Greenwood et Johnson (1965), basé sur la combinaison des théories puissantes des méthodes cinématiques d’analyse des limites et d’homogénéisation. Dans cette nouvelle approche, la cellule unitaire sphérique représentative considérée pour le processus d’homogénéisation comprend uniquement la phase mère entouré d’un noyau croissant de phase fille. Le chargement externe résultant de la contrainte macroscopique appliquée est complétée par une chargement interne résultant de la transformation volumétrique du germe croissant. Le traitement apporte une amélioration considérable au traitement classique de Leblond et al. (1989)*

**Sommaire**

---

<b>III.1 Introduction</b> . . . . .	<b>35</b>
<b>III.2 Elements of Leblond’s classical of transformation plasticity</b> . . . . .	<b>37</b>
III.2.1 Generalities . . . . .	37
III.2.2 Decomposition of microscopic strains . . . . .	38
III.2.3 Decomposition of macroscopic strains . . . . .	38
III.2.4 Additional hypoyheses . . . . .	39
III.2.5 The spherical growth model and its approximate treatmet . . . . .	39
<b>III.3 Limit-analysis of hollow sphere subjected to external and internal loadings</b> . . . . .	<b>41</b>
III.3.1 Preliminary remarks . . . . .	41
III.3.2 Generalities . . . . .	42
III.3.3 Trial displacement fields and load parameters . . . . .	43

---

III.3.4 Overall plastic dissipation . . . . .	45
III.3.5 Overall yield criterion . . . . .	45
III.3.6 Overall flow rule . . . . .	46
<b>III.4 Application to Greenwood-Johnson's mechanism of transformation plasticity . . . . .</b>	<b>47</b>
III.4.1 Principle ad preliminaries . . . . .	47
III.4.2 Special case : Small external stresses . . . . .	48
III.4.3 General case : Arbitrary external stresses . . . . .	49
III.4.4 Explicit formula for the beginning of the transformation . . . . .	50
III.4.5 A composite approximation . . . . .	50
<b>III.5 Comparison with other theorie, experiments, and micromechanical simulations . . . . .</b>	<b>51</b>
III.5.1 Element of comparison - Generalities . . . . .	51
III.5.2 Comparison of evolutions of the transformation plastic strain . . . . .	55
III.5.3 Comparison of final values of the transformation plastic strain . . . . .	55
III.5.4 Comparison with multiaxial experiments and michromechanical simulations . . . . .	55
<b>III.6 Synthesis and perspectives . . . . .</b>	<b>55</b>
III.6.1 Appendix A. Additional consideration on the thermal strains of individual phases and the overall thermomettarlurgical strain . . . . .	55
III.6.2 Appendix B. On the relative importance of Greenwood-Johnson's and Magee me- chanism and their experimental separation . . . . .	55

---



Contents lists available at ScienceDirect

## Journal of the Mechanics and Physics of Solids

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/jmps](http://www.elsevier.com/locate/jmps)

# A novel treatment of Greenwood–Johnson’s mechanism of transformation plasticity - Case of spherical growth of nuclei of daughter-phase

Youssri El Majaty, Jean-Baptiste Leblond\*, Djimedo Kondo

Sorbonne Université, Faculté des Sciences et Ingénierie, Campus Pierre et Marie Curie, CNRS, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d’Alembert, Paris, F-75005, France

## ARTICLE INFO

### Article history:

Received 12 April 2018

Revised 29 June 2018

Accepted 16 July 2018

Available online 20 July 2018

### Keywords:

Transformation plasticity

Greenwood–Johnson’s mechanism

Spherical phase growth

Limit-analysis

Finite element micromechanical simulations

## ABSTRACT

This paper proposes an innovative treatment of Greenwood and Johnson (1965)’s mechanism of transformation plasticity of metals and alloys, based on the disregard of elasticity and the powerful kinematic method of limit-analysis. In the new approach the spherical representative unit cell considered in the homogenization process includes only the mother-phase surrounding a growing nucleus of daughter-phase, but the external loading arising from the macroscopic stress applied is supplemented with an internal one arising from the volumetric transformation strain of the enclosed nucleus. The treatment brings considerable improvement to the classical one of Leblond et al. (1989), not only by eliminating the need for *ad hoc* hypotheses of limited validity, but more importantly by extending its results to more general situations involving large external stresses, comparable in magnitude to the yield stress of the weaker, mother-phase. The theoretical results are compared to other theories, experiments, and finite element micromechanical simulations considering a representative volume of shape identical to that in the theory. In addition, the methodology presented paves the way to incorporation, in a future work, of the effect of anisotropies of morphologic type (tied for instance to growth of nuclei of daughter-phase elongated in a certain privileged direction) upon transformation plasticity; this will be done through consideration of representative unit cells of more complex shape.

© 2018 Elsevier Ltd. All rights reserved.

## 1. Introduction

The wording *transformation plasticity* was coined to denote the anomalous plastic behaviour of metals and alloys during solid-solid phase transformations. Such transformations occur notably during the cooling phase of thermomechanical treatments such as welding and quenching. The major impact of transformation plasticity upon residual stresses and distortions resulting from such treatments has been underlined by various authors, see e.g. Fukumoto et al. (2001); Miyao et al. (1986); Taleb et al. (2004), among many others. This impact constitutes the major motivation for developing good models of transformation plasticity, to be implemented in finite element programmes and used for accurate predictions of residual stresses and distortions produced by thermomechanical treatments.

\* Corresponding author.

E-mail address: [jbl@lmm.jussieu.fr](mailto:jbl@lmm.jussieu.fr) (J.-B. Leblond).

It is widely accepted nowadays that transformation plasticity arises from two distinct physical mechanisms, which were proposed by [Greenwood and Johnson \(1965\)](#) and [Magee \(1966\)](#) respectively:

- In [Greenwood and Johnson \(1965\)](#)'s interpretation, transformation plasticity is due to standard, dislocation-induced plasticity at the microscopic scale in the weaker, mother-phase (that prevailing at high temperatures, with a generally much lower yield stress). Microscopic plasticity arises from the difference of specific volume between the phases coexisting during the transformation (volumetric part of the transformation strain), which generates internal stresses of sufficient magnitude to induce plasticity in the weaker one. The effect occurs even in the absence of external stress; but such a stress, when present, takes advantage of the internal “transformation-induced weakness” of the material to deform it plastically.
- In contrast, in [Magee \(1966\)](#)'s interpretation, transformation plasticity is not due to standard plasticity but to the deviatoric part of the transformation strain of the transforming regions. (In this interpretation the expression “transformation plasticity” is somewhat inappropriate, since the transformation strain responsible for the effect is of essentially pseudo-elastic, reversible nature; but the wording is classical). In Magee's view, when the external stress is zero the deviatoric part of the transformation strain varies randomly in direction in the material, and therefore averages out to zero; but when the external stress is nonzero, it “orients” this deviatoric part and the net result is a nonzero macroscopic strain.

In this paper, we concentrate on [Greenwood and Johnson \(1965\)](#)'s mechanism. (Some comments on this point will be offered below). The most classical - and still widely used, despite its age - constitutive model of this mechanism is due to [Leblond et al. \(1989, 1986a\)](#). The basis of this model was an additive decomposition of microscopic strains, followed by homogenization and detailed analysis of the decomposition of macroscopic strains ([Leblond et al., 1986a](#)); this led to an expression of the “transformation plastic strain rate” as an average value over the domain occupied by the mother-phase, which was finally evaluated explicitly using a simple model of growth of a spherical nucleus of daughter-phase within a concentric spherical shell of mother-phase, considered as a typical representative volume element (RVE) in the transforming material ([Leblond et al., 1989](#)).

The explanation of the popularity of this model probably lies in the fact that the expression of the transformation plastic strain rate it proposes involves only standard mechanical parameters of the two phases, the yield stress of the weaker phase and the volumetric transformation strain, in the absence of any *ad hoc* parameter to be determined experimentally. Such a feature is essential for applications to the numerical simulation of thermomechanical treatments, since most of the time no experimental data concerning transformation plasticity are available for the specific material considered.<sup>1</sup>

[Leblond et al. \(1989\)](#)'s model however suffered from serious drawbacks, which have long been noted. First, it relied on some technical hypotheses of doubtful applicability (recalled below). Also, the disregard of elasticity and the hypothesis of instantaneous total “plastification” of the mother-phase it relied upon, led to an infinite value of the transformation plastic strain rate at the very beginning of the transformation, which has repeatedly been criticized. But the most important drawback was that the treatment was by nature limited to small external stresses only (much smaller in magnitude than the yield stress of the weaker phase); as a consequence it failed to predict the well-documented nonlinear dependence of the transformation plastic strain rate upon the magnitude of the external stress tensor (see e.g. [Figs. 3 to 6](#) in the experimental section of [Greenwood and Johnson \(1965\)](#)'s paper).

The model was improved in later years through refinement of the description of the mechanical behaviour of the mother-phase; see the works of [Cherkaoui et al. \(2000\)](#); [Diani et al. \(1995\)](#); [Fischlschweiger et al. \(2012\)](#); [Taleb and Sidoroff \(2003\)](#); [Vincent et al. \(2003\)](#); [Weisz-Paltrault \(2017\)](#), among others. For instance, the issue of the infinite initial value of the transformation plastic strain rate was settled by [Taleb and Sidoroff \(2003\)](#) and [Weisz-Paltrault \(2017\)](#) by accounting for elasticity and discarding the hypothesis of instantaneous complete plastification of the mother-phase. The very author of the model and coworkers contributed to the effort by introducing viscous effects, which are often important at the temperatures of interest ([Vincent et al., 2003](#)). [Weisz-Paltrault \(2017\)](#) extended the model by accounting for the possibility of consecutive or simultaneous formation of several phases. It seems fair to say, however, that in spite of these efforts the model has remained essentially the same over the years and still suffers from serious shortcomings, most notably its lack of generality.

The aim of this paper is to propose an enhanced theoretical framework for the analysis of [Greenwood and Johnson \(1965\)](#)'s mechanism. This framework will be based on the [Mandel \(1964\) - Hill \(1967\)](#) theory of homogenization like before; but [Leblond et al. \(1989\)](#)'s approximate treatment, based on specific and disputable hypotheses, of the problem of a spherical volume of mother-phase containing a growing spherical core of daughter-phase, will be replaced by a much more rigorous and efficient treatment of the same problem, based on the powerful “kinematic approach” of limit-analysis. (See e.g. [Leblond et al. \(2018\)](#) for a very recent summary and review of the theory). The idea of using limit-analysis is logical in view of the assumption - in line with [Leblond et al. \(1989\)](#)'s hypotheses - of negligible effect of elasticity. The main difficulty raised by use of this theory, in the context of transformation plasticity, is the presence within the material of some “internal active mechanism” - the growth, within the matrix of mother-phase, of a daughter-phase with a different specific volume - not accounted for in limit-analysis, which considers only “passive” materials. This difficulty will be settled by including only, in the volume considered, the domain - a hollow sphere - occupied by the plastically deforming mother-phase; the internal mechanism just mentioned will then simply become an additional loading condition imposed on the inner boundary of this

<sup>1</sup> Even data pertaining to the yield stress of the weaker phase at the temperatures of interest, necessary to apply the model, are often scarce.

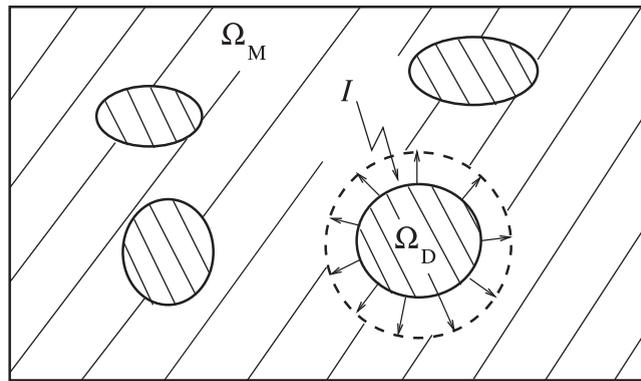


Fig. 1. The general RVE considered.

volume. The presence of this extra loading will constitute the sole difference with elementary cells and loadings considered in theoretical analyses of porous plastic materials (with traction-free voids); and this will permit to use, with some adaptations, the results of some previous works on the ductile rupture of metals (Gurson, 1977; Monchiet et al., 2011).

The benefits to be expected from the new approach are three-fold:

- Use of the variational framework of limit-analysis will permit to dispense with some of Leblond et al. (1989)'s most criticizable hypotheses. Also, the greater rigour of the treatment will be seen to lead to a finite value of the transformation plastic strain rate at the onset of the transformation without demanding incorporation of the effect of elasticity.
- More importantly, the wider generality of the treatment will permit to address not only small external stresses like before, but also stresses comparable in magnitude to the yield stress of the weaker mother-phase. The experimentally well-known nonlinear dependence of the transformation plastic strain rate upon the external stress tensor will thus be given a theoretical interpretation, apparently the first of its kind.
- But perhaps the most important benefit will not lie in the improvement of the treatment of the problem of spherical growth of nuclei of daughter-phase, but in the perspectives opened, thanks to the versatility of the method, for future extensions to more complex situations. Such situations could include for instance growth of spheroidal rather than spherical nuclei of daughter-phase; the treatment of such a problem could permit to study and model effects arising from anisotropies of morphological type (tied to development of domains of daughter-phase of anisotropic, for instance elongated shape).

The paper is organized as follows:

- As a necessary prerequisite, Section 2 recalls some elements of Leblond's general theory of transformation plasticity (Leblond et al., 1986a) and approximate treatment of the model problem of growth of a spherical nucleus of daughter-phase within a spherical RVE of mother-phase (Leblond et al., 1989).
- Section 3 then presents the limit-analysis of a spherical cell subjected to conditions of homogeneous boundary stress (Hill, 1967; Mandel, 1964) on both its outer and inner boundaries. The treatment makes an extensive use of Monchiet et al. (2011)'s generalization - based on trial velocity fields of Eshelby (1957)'s type - of Gurson (1977)'s classical analysis of the same problem but in the absence of internal loading.
- Section 4 explains how the results derived may be used to predict the value of the transformation plastic strain rate, assumed to arise only from Greenwood and Johnson (1965)'s mechanism. An analytical, albeit somewhat complex expression of this strain rate is derived in general, and shown to reduce to simple forms in two special cases: (i) small external stresses; (ii) beginning of the transformation, whatever the external stresses.
- Finally Section 5 compares the new theoretical predictions to (i) those of Leblond et al. (1989)'s former theory; (ii) some experimental results of Coret et al. (2002, 2004); Desalos (1981) for the A533 steel; and (iii) the results of some new finite element micromechanical simulations of the mechanism studied, considering the same typical spherical geometry as the theory.

## 2. Elements of Leblond's classical theory of transformation plasticity

### 2.1. Generalities

We consider, within some metal or alloy, a RVE  $\Omega$  containing "mother-" and "daughter-" phases occupying respectively the domains  $\Omega_M$  and  $\Omega_D$ , separated by an interface  $\mathcal{I}$  (Fig. 1). The volume fraction  $f$  of the daughter-phase is defined as

$$f \equiv \frac{\text{vol}(\Omega_D)}{\text{vol}(\Omega)} \quad (1)$$

where the symbol “vol” denotes the volume of a domain. The mother-phase may transform into the daughter-phase through motion of the interface  $\mathcal{I}$  in the direction of  $\Omega_M$ .

Use is made of the Mandel (1964) - Hill (1967) homogenization theory assuming conditions of homogeneous boundary stress or strain.

## 2.2. Decomposition of microscopic strains

The behaviour of both phases is thermo-elastic-plastic. The microscopic strain  $\epsilon_k$  in phase  $k$  ( $k = M, D$ ) thus splits into thermal, elastic and plastic parts:

$$\epsilon_k = \epsilon_k^{\text{th}} + \epsilon_k^e + \epsilon_k^p \quad (k = M, D). \quad (2)$$

- The thermal strain  $\epsilon_k^{\text{th}}$  of phase  $k$ , depending on the temperature  $T$ , is defined as the “free strain” which would exist in a small, unstressed volume of this phase at this temperature, measured in reference to a given phase - in dilatometric diagrams generally the daughter - and a given reference temperature  $T_0$ . It is of the form

$$\epsilon_k^{\text{th}}(T) = [\alpha_k(T - T_0) + \beta_k] \mathbf{1} \quad (k = M, D), \quad (3)$$

where  $\alpha_k$  is the thermal expansion coefficient of phase  $k$  and  $\beta_k$  is related to its free strain at the temperature  $T_0$ . The relative change of specific volume  $\frac{\Delta V}{V}$  from the mother- to the daughter-phase (volumetric part of the transformation strain) depends on the temperature  $T$  and is given by

$$\frac{\Delta V}{V}(T) \equiv \text{tr}[\epsilon_D^{\text{th}}(T) - \epsilon_M^{\text{th}}(T)] = 3[(\alpha_D - \alpha_M)(T - T_0) + \beta_M - \beta_D]. \quad (4)$$

Further comments on these strains and their macroscopic counterpart  $\mathbf{E}^{\text{thm}}$  (see below) are provided in Appendix A.

- The elastic strain  $\epsilon_k^e$  of phase  $k$  is related to the local stress  $\sigma_k$  in this phase through the relation

$$\epsilon_k^e = \mathbf{S} : \sigma_k \quad (5)$$

where  $\mathbf{S}$  is the (isotropic) elastic compliance tensor. No distinction is made here between the compliance tensor of the mother-phase, that of the daughter-phase and the overall compliance tensor; the idea being that the major factors influencing transformation plasticity are the standard plastic strain in the weaker mother-phase (Greenwood and Johnson (1965)'s mechanism), and the transformation strain (Magee (1966)'s mechanism); not the difference of elastic moduli between the phases nor the anisotropic nature of their crystal elasticity.

- The plastic strains  $\epsilon_k^p$  ( $k = M, D$ ) of the phases conventionally include, in Leblond et al. (1986a)'s definition, not only standard, dislocation-induced plastic strains (arising from Greenwood and Johnson (1965)'s mechanism), but also the deviatoric part of the transformation strain, possibly oriented by the external stress applied (Magee (1966)'s mechanism). (The inclusion of the latter strain in the *plastic* strain is admittedly illogical because of its different, pseudo-elastic nature; but it is in line with the equally illogical but widely accepted preservation of the wording “transformation *plasticity*” to designate Magee (1966)'s pseudo-elastic mechanism). With this definition, the plastic strain is discontinuous across the interface  $\mathcal{I}$  separating the phases, its discontinuity

$$\llbracket \epsilon^p \rrbracket \equiv \epsilon_D^p - \epsilon_M^p \quad (6)$$

being identical to the deviatoric part of the transformation strain.

## 2.3. Decomposition of macroscopic strains

With the hypothesis of identical elastic compliance tensors of the phases, the Mandel (1964) - Hill (1967) “localization tensors” appearing in the formulae connecting the microscopic thermal, elastic and plastic strains to their macroscopic counterparts, are identical to the unit tensor. The macroscopic strain tensor  $\mathbf{E}$  is thus given by

$$\mathbf{E} \equiv \langle \epsilon \rangle_\Omega = \mathbf{E}^{\text{thm}} + \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p, \quad \begin{cases} \mathbf{E}^{\text{thm}} & \equiv & \langle \epsilon^{\text{th}} \rangle_\Omega & = & (1 - f)\epsilon_M^{\text{th}}(T) + f\epsilon_D^{\text{th}}(T) \\ \mathbf{E}^e & \equiv & \langle \epsilon^e \rangle_\Omega & = & \mathbf{S} : \boldsymbol{\Sigma} \\ \mathbf{E}^p & \equiv & \langle \epsilon^p \rangle_\Omega, \end{cases} \quad (7)$$

where

$$\boldsymbol{\Sigma} \equiv \langle \sigma \rangle_\Omega \quad (8)$$

is the macroscopic stress tensor (the symbol  $\langle \cdot \rangle_\Omega$  denotes an average value over  $\Omega$ ).

The symbol “thm” in  $\mathbf{E}^{\text{thm}}$  stands for “thermo-metallurgical”; the word “metallurgical” is added to emphasize the fact that this strain does not only depend on the temperature  $T$ , but also on the volume fraction  $f$  of the daughter-phase, and hence on the “metallurgical structure”. Some additional comments on this strain are provided in Appendix A.

Time-differentiation of the expression (7)<sub>4</sub> of the overall plastic strain  $\mathbf{E}^p$  yields, account being taken of the discontinuity of  $\epsilon^p$  across the interface  $\mathcal{I}$ :

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \langle \dot{\epsilon}^p \rangle_\Omega + \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_{\mathcal{I}} \llbracket \epsilon^p \rrbracket V_n dS = \langle \dot{\epsilon}^p \rangle_\Omega + f \langle \llbracket \epsilon^p \rrbracket \rangle_{\mathcal{I}/V_n}, \quad (9)$$

where

$$\langle \llbracket \boldsymbol{\epsilon}^P \rrbracket \rangle_{\mathcal{I}/V_n} \equiv \frac{\int_{\mathcal{I}} \llbracket \boldsymbol{\epsilon}^P \rrbracket V_n dS}{\int_{\mathcal{I}} V_n dS} = \frac{\int_{\mathcal{I}} \llbracket \boldsymbol{\epsilon}^P \rrbracket V_n dS}{\dot{f} \text{vol}(\Omega)} \quad (10)$$

denotes the average value of the discontinuity  $\llbracket \boldsymbol{\epsilon}^P \rrbracket$  over the interface  $\mathcal{I}$ , with a weight identical to the normal velocity  $V_n$  of this interface.

The next step consists in distinguishing, in the local plastic strain rate  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P$ , those parts due to variations of the macroscopic parameters  $\boldsymbol{\Sigma}$ ,  $T$  and  $f$ :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P = \frac{\delta \boldsymbol{\epsilon}^P}{\delta \boldsymbol{\Sigma}} : \dot{\boldsymbol{\Sigma}} + \frac{\delta \boldsymbol{\epsilon}^P}{\delta T} \dot{T} + \frac{\delta \boldsymbol{\epsilon}^P}{\delta f} \dot{f} \quad (11)$$

where the notations are self-evident.<sup>2</sup> The unusual term proportional to  $\dot{f}$  here arises from the fact that even when the overall stress  $\boldsymbol{\Sigma}$  and the temperature  $T$  are fixed, the progress of the transformation induces a local plastic flow through Greenwood and Johnson (1965)'s mechanism. Inserting the expression (11) of  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P$  in Eq. (9), we get

$$\dot{\mathbf{E}}^P = \dot{\mathbf{E}}^{\text{CP}} + \dot{\mathbf{E}}^{\text{TP}} \quad , \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{E}}^{\text{CP}} & \equiv \left\langle \frac{\delta \boldsymbol{\epsilon}^P}{\delta \boldsymbol{\Sigma}} \right\rangle_{\Omega} : \dot{\boldsymbol{\Sigma}} + \left\langle \frac{\delta \boldsymbol{\epsilon}^P}{\delta T} \right\rangle_{\Omega} \dot{T} \\ \dot{\mathbf{E}}^{\text{TP}} & \equiv \left[ \left\langle \frac{\delta \boldsymbol{\epsilon}^P}{\delta f} \right\rangle_{\Omega} + \langle \llbracket \boldsymbol{\epsilon}^P \rrbracket \rangle_{\mathcal{I}/V_n} \right] \dot{f}. \end{cases} \quad (12)$$

The strain rate  $\dot{\mathbf{E}}^{\text{CP}}$  here may be interpreted as corresponding to “classical plasticity”, insofar as it arises from the sole variations of the external stress and the temperature. On the other hand the strain rate  $\dot{\mathbf{E}}^{\text{TP}}$  due to the sole variation of the fraction of the daughter-phase, that is to the progress of the transformation, may be interpreted as corresponding to “transformation plasticity”. Furthermore the latter strain rate naturally appears as a sum of two terms,  $\left\langle \frac{\delta \boldsymbol{\epsilon}^P}{\delta f} \right\rangle_{\Omega} \dot{f}$  and  $\langle \llbracket \boldsymbol{\epsilon}^P \rrbracket \rangle_{\mathcal{I}/V_n} \dot{f}$ . The first corresponds to Greenwood and Johnson (1965)'s mechanism since it arises from the standard (dislocation-induced) plastic flow generated by the progress of the transformation, and the second to Magee (1966)'s mechanism since it arises from the “plastic strain discontinuity” between the two phases, that is the deviatoric part of the transformation strain. (The dependence of  $\llbracket \boldsymbol{\epsilon}^P \rrbracket$  upon the external stress is implicit in Eq. (12)<sub>3</sub>).

#### 2.4. Additional hypotheses

Although the “classical plastic strain rate”  $\dot{\mathbf{E}}^{\text{CP}}$  has been studied in detail by Leblond et al. (1986b), we shall focus here on the sole “transformation plastic strain rate”  $\dot{\mathbf{E}}^{\text{TP}}$ . The reason is that numerous numerical calculations performed since Leblond et al. (1986a,b)'s work have shown that  $\dot{\mathbf{E}}^{\text{CP}}$  becomes much smaller than  $\dot{\mathbf{E}}^{\text{TP}}$  as soon as the transformation begins: in the former strain rate, the effect of the term  $\left\langle \frac{\delta \boldsymbol{\epsilon}^P}{\delta \boldsymbol{\Sigma}} \right\rangle_{\Omega} : \dot{\boldsymbol{\Sigma}}$  roughly amounts to a slight modification of the value of Young's modulus (Leblond et al., 1986b), of minor importance; and the other term  $\left\langle \frac{\delta \boldsymbol{\epsilon}^P}{\delta T} \right\rangle_{\Omega} \dot{T}$  is dominated by the term  $\left\langle \frac{\delta \boldsymbol{\epsilon}^P}{\delta f} \right\rangle_{\Omega} \dot{f}$  in  $\dot{\mathbf{E}}^{\text{TP}}$ , because during the transformation, the difference in the thermal contractions of the phases is small compared to the volume expansion due to the transformation (see Fig. A.6 of Appendix A).

Also, for the detailed calculation of  $\dot{\mathbf{E}}^{\text{TP}}$ , Leblond et al. (1989) considered only Greenwood and Johnson (1965)'s mechanism, and we shall follow the same path here. Two points of view are possible with regard to such a simplification.

- One may consider that the paper of Leblond et al. (1989) and the present one only provide a partial treatment of the problem, which should be completed by an additional independent modelling of Magee (1966)'s mechanism. (It must be stressed, however, that the theoretical treatment of this mechanism is much more difficult than that of Greenwood and Johnson (1965)'s mechanism; indeed in contrast to Greenwood and Johnson (1965)'s mechanism which is of purely “mechanical” nature, that of Magee (1966) involves complex couplings between metallurgical and mechanical aspects - so it seems impossible, when modelling it, to avoid introduction of some adjustable *ad hoc* parameter(s), thus impairing the practical application of the model, as explained above).
- One may also consider that Leblond et al. (1989)'s paper and the present one apply only to materials in which Greenwood and Johnson (1965)'s mechanism dominates. The relative importance of the two mechanisms, according to the type of material and situation considered, and their possible experimental separation, are discussed in Appendix B; with the conclusion that although Magee (1966)'s mechanism is present in different materials and situations, and may even completely dominate over that of Greenwood and Johnson (1965), in many cases the converse is true and Magee (1966)'s mechanism may safely be disregarded.

#### 2.5. The spherical growth model and its approximate treatment

To evaluate the contribution of Greenwood and Johnson (1965)'s mechanism to the expression (12)<sub>3</sub> of the transformation plastic strain rate  $\dot{\mathbf{E}}^{\text{TP}}$ , Leblond et al. (1989) consider the simplest possible model of growth of a spherical nucleus of daughter-phase within a concentric spherical matrix of mother-phase, subjected to some overall stress tensor  $\boldsymbol{\Sigma}$ . Fig. 2

<sup>2</sup> The rates  $\dot{T}$  and  $\dot{f}$  are formally considered as independent here. In reality these rates are tied through the kinetics of the transformation and latent heat effects; but it is not the object of this paper to discuss such aspects.

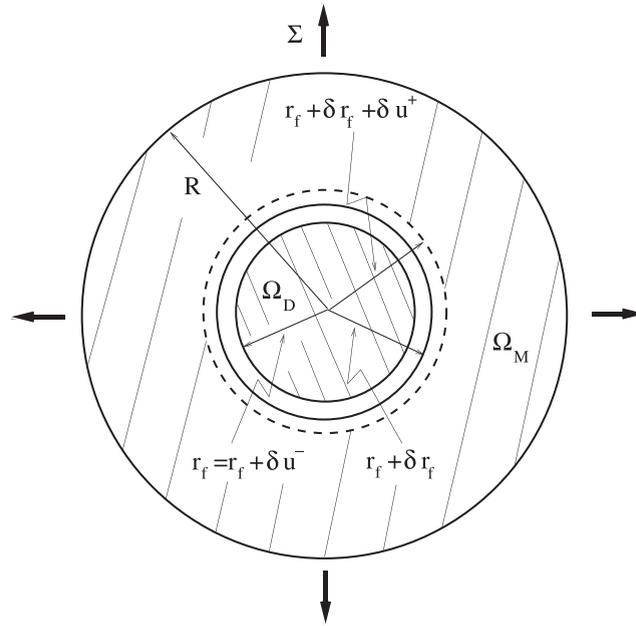


Fig. 2. The spherical RVE considered by Leblond et al. (1989).

shows the RVE; the external radius is denoted \$R\$, and that of the central core of daughter-phase \$r\_f\$, where the lower index underlines the connection with the fraction \$f\$ of this phase:

$$f = \frac{r_f^3}{R^3}. \tag{13}$$

Between times \$t\$ and \$t + \delta t\$, the spherical layer lying between the radii \$r\_f\$ and \$r\_f + \delta r\_f\$ transforms from the mother- to the daughter-phase; the accompanying expansion generates increments of radial displacement \$\delta u^-\$, \$\delta u^+\$ of the inner and outer boundaries of this layer. These displacements induce a plastic strain rate distribution within the RVE, which must be evaluated.

Leaving aside the contribution of Magee (1966)'s mechanism, and introducing the simplifying hypotheses of complete plastification of the weaker mother-phase and absence of plasticity in the stronger daughter-phase (justified by the large difference between their respective yield stresses), we transform the expression (12)<sub>3</sub> of \$\dot{\mathbf{E}}^{tp}\$ into

$$\dot{\mathbf{E}}^{tp} = (1 - f) \left\langle \frac{\delta \epsilon^p}{\delta f} \right\rangle_{\Omega_M} \dot{f}, \tag{14}$$

which reduces the problem to evaluating the average value \$\left\langle \frac{\delta \epsilon^p}{\delta f} \right\rangle\_{\Omega\_M}\$. The task is made more difficult by presence of the load \$\Sigma\$, which destroys spherical symmetry.

To obviate this difficulty, Leblond et al. (1989) write the local flow rule (for the von Mises criterion) in the classical form \$\frac{\delta \epsilon^p}{\delta f} = \frac{3}{2} \frac{\delta \epsilon\_{eq}}{\delta f} \frac{\sigma'}{\bar{\sigma}\_M}\$ where \$\delta \epsilon\_{eq} \equiv (\frac{2}{3} \delta \epsilon^p : \delta \epsilon^p)^{1/2}\$ denotes the equivalent increment of plastic strain, \$\sigma' \equiv \sigma - \frac{1}{3}(\text{tr } \sigma)\mathbf{1}\$ the local stress deviator and \$\bar{\sigma}\_M\$ the yield stress of the mother-phase, assumed to be ideal-plastic. They also introduce some approximations:

- Approximation (1): correlations between the quantities \$\frac{\delta \epsilon\_{eq}}{\delta f}\$ and \$\sigma'\$ are negligible so that \$\left\langle \frac{\delta \epsilon\_{eq}}{\delta f} \sigma' \right\rangle\_{\Omega\_M} \simeq \left\langle \frac{\delta \epsilon\_{eq}}{\delta f} \right\rangle\_{\Omega\_M} \langle \sigma' \rangle\_{\Omega\_M}\$ in Eq. (14);
- Approximation (2): the average value of \$\sigma'\$ over the mother-phase differs little from that over the entire RVE, so that \$\langle \sigma' \rangle\_{\Omega\_M} \simeq \Sigma'\$ where \$\Sigma' \equiv \Sigma - \frac{1}{3}(\text{tr } \Sigma)\mathbf{1}\$ is the overall stress deviator.

Eq. (14) then becomes

$$\dot{\mathbf{E}}^{tp} = \frac{3}{2} \frac{1 - f}{\bar{\sigma}_M} \left\langle \frac{\delta \epsilon_{eq}}{\delta f} \right\rangle_{\Omega_M} \Sigma' \dot{f}. \tag{15}$$

Whereas the tensorial average value \$\left\langle \frac{\delta \epsilon^p}{\delta f} \right\rangle\_{\Omega\_M}\$ appearing in Eq. (14) vanished with \$\Sigma\$, the scalar average value \$\left\langle \frac{\delta \epsilon\_{eq}}{\delta f} \right\rangle\_{\Omega\_M}\$ appearing in Eq. (15) does not. Thus a good estimate of this new average value, applicable to small overall stresses, may be derived by taking \$\Sigma = \mathbf{0}\$ - thus restoring spherical symmetry.

Elasticity being neglected, the radial increments of displacement  $\delta u^-$ ,  $\delta u^+$  of the bounding surfaces of the transforming shell are given by

$$\delta u^- = 0 \quad ; \quad \delta u^+ = \frac{\Delta V}{V} \delta r_f \tag{16}$$

where the first value results from complete rigidity (no elasticity, no plasticity) of the core of daughter-phase, and the second from the known variation of volume of the transforming shell. Then, with  $\Sigma = \mathbf{0}$  and spherical symmetry, plastic incompressibility in the mother-phase implies (in the absence of elasticity) that the purely radial increment of displacement there is given by

$$\delta u_r(r) = \delta u^+ \frac{r_f^2}{r^2} = \frac{\Delta V}{V} \frac{r_f^2}{r^2} \delta r_f. \tag{17}$$

It is then easy to calculate the local value of  $\delta \epsilon_{eq}$  and the average value  $\langle \frac{\delta \epsilon_{eq}}{\delta f} \rangle_{\Omega_M}$  through integration over  $r$ , and the result reads

$$\langle \frac{\delta \epsilon_{eq}}{\delta f} \rangle_{\Omega_M} = -\frac{2}{3} \frac{\Delta V}{V} \frac{\ln f}{1-f}. \tag{18}$$

The final expression of  $\dot{\mathbf{E}}^{tp}$  then follows by Eq. (15):<sup>3</sup>

$$\dot{\mathbf{E}}^{tp} = -\frac{1}{\bar{\sigma}_M} \frac{\Delta V}{V} (\ln f) \Sigma' \dot{f} \quad [\text{Leblond et al. (1989)}]. \tag{19}$$

**Remarks**

1. Eq. (19) predicts an infinite “slope”  $d\mathbf{E}^{tp}/df$  at the beginning of the transformation ( $f = 0$ ). This prediction does not seem to be confirmed by experiments (see e.g. Desalos (1981), among many other works), and has been repeatedly criticized (see e.g. Taleb and Sidoroff (2003) and Weisz-Paltrault (2017)), on the grounds that it is a consequence of the oversimplifying hypothesis of instantaneous complete plastification of the mother-phase, tied to the disregard of elasticity.
2. Leblond et al. (1989) have assessed Approximations (1) and (2) above through finite element micromechanical simulations. They found that whereas Approximation (1) is reasonable (see their Fig. 6), Approximation (2) gives a good value of  $\langle \sigma' \rangle_{\Omega_M}$  only during the first half of the transformation, the approximation  $\langle \sigma' \rangle_{\Omega_M} \simeq (1 - f) \Sigma'$  being in fact better (see their Fig. 7). With this improved approximation the expression (19) of  $\dot{\mathbf{E}}^{tp}$  becomes

$$\dot{\mathbf{E}}^{tp} = -\frac{1}{\bar{\sigma}_M} \frac{\Delta V}{V} (1 - f)(\ln f) \Sigma' \dot{f} \quad [\text{Leblond et al. (1989), improved}] : . \tag{20}$$

**3. Limit-analysis of a hollow sphere subjected to external and internal loadings**

3.1. Preliminary remarks

Since Leblond et al. (1989)’s approach of Greenwood and Johnson (1965)’s mechanism is based on disregard of elasticity, it seems natural to use the theory of limit-analysis - in which elasticity plays no role either, see e.g. Leblond et al. (2018)’s review - for an alternative treatment.<sup>4</sup> But this raises two difficulties.

- In Greenwood and Johnson (1965)’s interpretation, the “driving force” of transformation plasticity is an “internal active mechanism” (the gradual growth of nuclei of some new phase with a different specific volume), in practice due to the variation of the temperature. But limit-analysis considers only “passive” materials devoid of such mechanisms.
- An ancillary difficulty is that the object of limit-analysis is to define the set of limit-loads. Such loads are not arbitrary but lie on some hypersurface in their defining space. In contrast, when looking for an expression of the transformation plastic strain rate, we want the macroscopic stress to be arbitrary; how the two points of view can be reconciled is not *a priori* clear.

In this work the first, major difficulty will be obviated by excluding the growing core of daughter-phase from the volume considered. The internal mechanism just mentioned will then become an inner boundary condition (some prescribed displacement arising from the expansion of the embedded daughter-phase), perfectly accounted for by limit-analysis. The same trick will be seen to also solve the second difficulty, albeit in a more subtle way.

The aim of the limit-analysis will be to derive the explicit equation of the set of limit-loads of the RVE considered, together with the associated overall flow rule, that is the expression of the various components of its overall deformation

<sup>3</sup> Since various formulae for  $\dot{\mathbf{E}}^{tp}$  will be given, an indication of the authors or context of application of each one will be provided between brackets.

<sup>4</sup> In essence, the idea of employing such a theory could be found, in a sketchy form, in Abrassart (1972)’s thesis. Unfortunately rough approximations made in the choice of typical geometry and trial displacement fields led to large errors in the final result, the transformation plastic strain rate being underestimated by a factor of the order of 3.

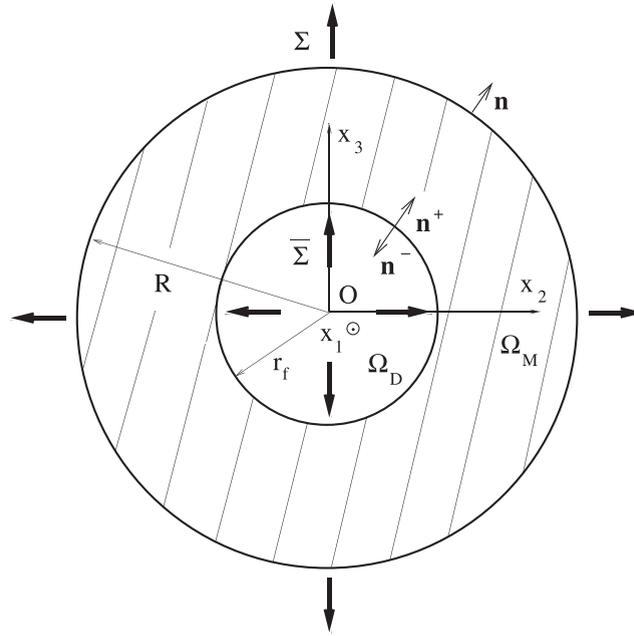


Fig. 3. The spherical RVE considered here.

rate. How these results can be applied to the modelling of Greenwood and Johnson (1965)’s mechanism of transformation plasticity will be explained in Section 4 below.

A final remark pertains to some important difference between the former treatment of the problem, presented in Section 2.5, and the new one to be discussed now. The old treatment relied on an assumption of small external stresses, since the average value  $\langle \frac{\delta \epsilon_{eq}}{\delta f} \rangle_{\Omega_M}$  was evaluated at order 0 in  $\Sigma$ , that is for  $\Sigma = \mathbf{0}$ . In contrast the new treatment will not make any hypothesis on the magnitude of the applied stress tensor  $\Sigma$ . This is the keypoint that will permit to treat the case of external stresses of the order of the yield stress of the weaker, mother-phase.

### 3.2. Generalities

We thus consider (Fig. 3) a hollow sphere made exclusively of mother-phase. In line with the notations of Section 2.5, the outer and inner radii are denoted  $R$  and  $r_f$ , respectively (with  $f$  given by Eq. (13)); the whole domain,  $\Omega$ ; the outer spherical shell of mother-phase,  $\Omega_M$ ; and the inner empty sphere,  $\Omega_D$ . For commodity in the calculations three sets of coordinates: Cartesian  $(x_1, x_2, x_3)$  with origin at the centre  $O$  of the sphere; cylindrical  $(\rho, \phi, z)$  with  $z \equiv x_3$ ; spherical  $(r, \theta, \phi)$ , will be used, together with the naturally associated orthonormal bases  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ;  $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$ ;  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$ . On the outer boundary  $\partial\Omega$ , a single unit normal vector oriented outwards,  $\mathbf{n} \equiv \mathbf{e}_r$ , is considered. On the inner boundary  $\partial\Omega_D$ , two unit normal vectors are considered,  $\mathbf{n}^+ \equiv \mathbf{e}_r$  oriented toward the exterior of  $\Omega_D$ , and  $\mathbf{n}^- \equiv -\mathbf{e}_r$  oriented toward the exterior of  $\Omega_M$ .

The outer and inner boundaries of the RVE  $\Omega_M$ , identical to  $\partial\Omega$  and  $\partial\Omega_D$ , are subjected to conditions of homogeneous stress (Hill, 1967; Mandel, 1964):

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) & \text{on } \partial\Omega & (r = R) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}^-(\mathbf{x}) &= -\bar{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \mathbf{n}^-(\mathbf{x}) & \text{on } \partial\Omega_D & (r = r_f) \end{cases} \quad (21)$$

where  $\boldsymbol{\Sigma}$  and  $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}$  are symmetric second-rank tensors, the first representing the macroscopic stress applied onto the volume considered and the second some internal loading. The minus sign in Eq. (21)<sub>2</sub> is introduced conventionally so as to produce a more natural-looking expression of the virtual power of external forces, see Eq. (24) below.

It should be noted that Eqs. (21) do not define the only possible choice of boundary conditions. It would be possible for instance to use, on the inner boundary, conditions of homogeneous boundary strain rate (Hill, 1967; Mandel, 1964), compatible with the kinematic conditions imposed in the transformation plasticity problem by the expansion of the inner core of daughter-phase. The limit-analysis based on such boundary conditions would be somewhat more involved but ultimately lead to the same results. The choice of conditions of homogeneous boundary stresses is therefore made here for the sake of simplicity, without any detrimental consequences on the results.

For any displacement field  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  defined over the domain of mother-phase  $\Omega_M$  and extended arbitrarily (but smoothly) over the void  $\Omega_D$ , we define some overall external and internal strain tensors  $\mathbf{E}, \bar{\mathbf{E}}$  through the natural formulae

$$\mathbf{E} \equiv \langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \rangle_{\Omega} \quad ; \quad \bar{\mathbf{E}} \equiv \langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \rangle_{\Omega_D}, \quad (22)$$

or equivalently by Green’s theorem:

$$E_{ij} = \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} (u_i n_j + u_j n_i) dS \quad ; \quad \bar{E}_{ij} = \frac{1}{\text{vol}(\Omega_D)} \int_{\partial\Omega_D} \frac{1}{2} (u_i n_j^+ + u_j n_i^+) dS. \tag{23}$$

Eqs. (23) make it clear that  $\mathbf{E}$  and  $\bar{\mathbf{E}}$  are in fact independent of the arbitrary extension of the displacement field over  $\Omega_D$ .

With the boundary conditions (21), the virtual power  $\mathcal{P}_e$  of external forces exerted on the boundary of the RVE considered, that is the domain  $\Omega_M$  occupied by the sole mother-phase, is given by

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_e &\equiv \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j \dot{u}_i dS + \int_{\partial\Omega_D} \sigma_{ij} n_j^- \dot{u}_i dS = \int_{\partial\Omega} \Sigma_{ij} n_j \dot{u}_i dS + \int_{\partial\Omega_D} \bar{\Sigma}_{ij} n_j^+ \dot{u}_i dS \\ &= \Sigma_{ij} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} (\dot{u}_i n_j + \dot{u}_j n_i) dS + \bar{\Sigma}_{ij} \int_{\partial\Omega_D} \frac{1}{2} (\dot{u}_i n_j^+ + \dot{u}_j n_i^+) dS, \end{aligned}$$

that is by Eqs. (23) and (13):

$$\mathcal{P}_e = \text{vol}(\Omega) \Sigma_{ij} \dot{E}_{ij} + \text{vol}(\Omega_D) \bar{\Sigma}_{ij} \dot{\bar{E}}_{ij} = \text{vol}(\Omega) \left( \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}} + f \bar{\boldsymbol{\Sigma}} : \dot{\bar{\mathbf{E}}} \right). \tag{24}$$

### 3.3. Trial displacement fields and load parameters

The limit-analysis problem can in principle tolerate any macroscopic stress and strain tensors  $\boldsymbol{\Sigma}$ ,  $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\bar{\mathbf{E}}$ . However in the problem of transformation plasticity of interest here, overall geometrical and material isotropy entails identity of the principal directions of all 4 tensors. Indeed the prescribed quantities in this problem consist of the external stress tensor  $\boldsymbol{\Sigma}$ , which introduces 3 orthogonal planes of symmetry defined by its principal directions, plus the internal strain  $\bar{\mathbf{E}}$ , a multiple of the unit tensor (see Eq. (45) below) which does not modify the group of symmetries. The “responses” to these prescribed quantities, consisting of the internal stress tensor  $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}$  plus the external strain tensor  $\mathbf{E}$ , must respect the planes of symmetry defined by  $\boldsymbol{\Sigma}$ , and therefore possess the same principal directions.

This means that we may choose the  $x_1$ -,  $x_2$ - and  $x_3$ -directions parallel to the common principal directions of the tensors  $\boldsymbol{\Sigma}$ ,  $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\bar{\mathbf{E}}$ ; they are then all diagonal in the Cartesian basis  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , and their diagonal components may be denoted with a single index,  $\Sigma_i, \bar{\Sigma}_i, E_i, \bar{E}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

This being said, the first issue to be addressed is that of the minimum number of incompressible trial displacement fields needed. The family of fields considered must account for all possible values of the kinematic parameters  $E_1, E_2, E_3, \bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3$ . But these 6 parameters are tied by the relation

$$\text{tr} \mathbf{E} = E_1 + E_2 + E_3 = f \text{tr} \bar{\mathbf{E}} = f(\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3) \tag{25}$$

resulting from incompressibility of the mother-phase. (This equation means that the volumetric strain of the RVE arises exclusively from the expansion of the core of daughter-phase). Thus there are only 5 independent kinematic parameters, so that a minimum of 5 independent incompressible trial displacement fields is required.

We shall exploit here an analogy with the problem of a spherical RVE containing a concentric spherical *traction-free* void; this problem has been considered many times, starting with the pioneering work of Gurson (1977), for the derivation of models for porous plastic materials, in the context of prediction of ductile rupture. The more complex boundary conditions considered here, with the additional internal loading, are of no consequence upon the space of kinematically admissible, incompressible displacement fields adapted to the problem. We shall therefore use the elementary fields introduced by Gurson (1977), completed by the more complex Eshelby (1957)-type fields proposed by Monchiet et al. (2011), which read as follows:

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}) &= \frac{R^3}{r^2} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}) &= -\frac{x_1}{2} \mathbf{e}_1 - \frac{x_2}{2} \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 = -\frac{\rho}{2} \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z \\ \mathbf{u}^{(3)}(\mathbf{x}) &= \frac{2}{5f} \frac{r_f^5}{r^4} \left( -\frac{\sin \theta}{2} \mathbf{e}_\rho + \cos \theta \mathbf{e}_z \right) + \frac{1}{2f} \frac{r_f^3}{r^2} \left( 1 - \frac{r_f^2}{r^2} \right) (3 \cos^2 \theta - 1) \mathbf{e}_r \\ \mathbf{u}^{(4)}(\mathbf{x}) &= x_1 \mathbf{e}_1 - x_2 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{u}^{(5)}(\mathbf{x}) &= \frac{2}{5f} \frac{r_f^5}{r^4} \sin \theta (\cos \phi \mathbf{e}_1 - \sin \phi \mathbf{e}_2) + \frac{1}{f} \frac{r_f^3}{r^2} \left( 1 - \frac{r_f^2}{r^2} \right) \sin^2 \theta \cos(2\phi) \mathbf{e}_r. \end{cases} \tag{26}$$

The first three fields are axisymmetric: the first and second, proposed by Gurson (1977), correspond to a radial incompressible expansion and a uniform deviatoric straining of the spherical shell, respectively; the third, introduced by Monchiet et al. (2011), is of Eshelby (1957)-type. The fourth and fifth fields are non-axisymmetric: again the fourth, proposed by Gurson (1977), corresponds to a uniform deviatoric straining of the shell, whereas the fifth, introduced by Monchiet et al. (2011), is of Eshelby (1957)-type.<sup>5</sup> Using Cartesian, cylindrical or spherical coordinates to calculate the in-

<sup>5</sup> The third field is obtained from Monchiet et al. (2011)’s expressions by taking, with their notations,  $d_{11}^* = d_{22}^* = -\frac{1}{27}$ ,  $d_{33}^* = \frac{1}{7}$ ,  $d_{12}^* = d_{13}^* = d_{23}^* = 0$ ; the fifth, by taking  $d_{11}^* = -d_{22}^* = \frac{1}{7}$ ,  $d_{33}^* = d_{12}^* = d_{13}^* = d_{23}^* = 0$ .

tegrals of Eqs. (23) providing the overall external and internal strain tensors corresponding to these 5 fields,<sup>6</sup> we get with obvious notations:

$$\begin{cases} E_1^{(1)} = E_2^{(1)} = E_3^{(1)} = 1 & ; \quad \bar{E}_1^{(1)} = \bar{E}_2^{(1)} = \bar{E}_3^{(1)} = \frac{1}{f} \\ E_1^{(2)} = E_2^{(2)} = -\frac{1}{2}, E_3^{(2)} = 1 & ; \quad \bar{E}_1^{(2)} = \bar{E}_2^{(2)} = -\frac{1}{2}, \bar{E}_3^{(2)} = 1 \\ E_1^{(3)} = E_2^{(3)} = -\frac{1}{5}, E_3^{(3)} = \frac{2}{5} & ; \quad \bar{E}_1^{(3)} = \bar{E}_2^{(3)} = -\frac{1}{5f}, \bar{E}_3^{(3)} = \frac{2}{5f} \\ E_1^{(4)} = 1, E_2^{(4)} = -1, E_3^{(4)} = 0 & ; \quad \bar{E}_1^{(4)} = 1, \bar{E}_2^{(4)} = -1, \bar{E}_3^{(4)} = 0 \\ E_1^{(5)} = \frac{2}{5}, E_2^{(5)} = -\frac{2}{5}, E_3^{(5)} = 0 & ; \quad \bar{E}_1^{(5)} = \frac{2}{5f}, \bar{E}_2^{(5)} = -\frac{2}{5f}, \bar{E}_3^{(5)} = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Note that all fields except  $\mathbf{u}^{(1)}$  have  $\text{tr} \mathbf{E}^{(i)} = 0$ ; that is, the volumetric strain of the RVE is to be described through a single field,  $\mathbf{u}^{(1)}$ .

We now consider an incompressible trial displacement field of the form

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \equiv \sum_{i=1}^5 q_i \mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{x}) \tag{28}$$

where the  $q_i$ 's ( $i = 1, \dots, 5$ ) are kinematic parameters. (Note that although any prescribed values of the kinematic parameters  $E_1, E_2, E_3, \bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3$  obeying relation (25) may be matched through some suitable choice of the  $q_i$ 's, this does not mean that the fields  $\mathbf{u}^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) define a basis of the space of general admissible fields; Eq. (28) just defines the projection of such fields onto the subspace generated by the fields  $\mathbf{u}^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, 5$ ).

The components of the corresponding overall external and internal strain tensors read, by Eqs. (27):

$$\begin{cases} E_1 & = q_1 - \frac{q_2}{2} - \frac{q_3}{5} + q_4 + \frac{2q_5}{5} \\ E_2 & = q_1 - \frac{q_2}{2} - \frac{q_3}{5} - q_4 - \frac{2q_5}{5} \\ E_3 & = q_1 + q_2 + \frac{2q_3}{5} \\ \bar{E}_1 & = \frac{q_1}{f} - \frac{q_2}{2} - \frac{q_3}{5f} + q_4 + \frac{2q_5}{5f} \\ \bar{E}_2 & = \frac{q_1}{f} - \frac{q_2}{2} - \frac{q_3}{5f} - q_4 - \frac{2q_5}{5f} \\ \bar{E}_3 & = \frac{q_1}{f} + q_2 + \frac{2q_3}{5f}. \end{cases} \tag{29}$$

The load parameters  $Q_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) “conjugate” to the kinematic parameters  $q_i$  are defined via the expression of the virtual power of external forces,  $\mathcal{P}_e \equiv \sum_{i=1}^5 Q_i \dot{q}_i$ , applicable to arbitrary values of the virtual velocities  $\dot{q}_i$ . By Eqs. (24) and (29), they are given by

$$\begin{cases} Q_1 & \equiv \text{vol}(\Omega) (\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \bar{\Sigma}_1 + \bar{\Sigma}_2 + \bar{\Sigma}_3) \\ Q_2 & \equiv \text{vol}(\Omega) \left[ \Sigma_3 - \frac{\Sigma_1}{2} - \frac{\Sigma_2}{2} + f \left( \bar{\Sigma}_3 - \frac{\bar{\Sigma}_1}{2} - \frac{\bar{\Sigma}_2}{2} \right) \right] \\ Q_3 & \equiv \text{vol}(\Omega) \cdot \frac{2}{5} \left( \Sigma_3 - \frac{\Sigma_1}{2} - \frac{\Sigma_2}{2} + \bar{\Sigma}_3 - \frac{\bar{\Sigma}_1}{2} - \frac{\bar{\Sigma}_2}{2} \right) \\ Q_4 & \equiv \text{vol}(\Omega) \left[ \Sigma_1 - \Sigma_2 + f (\bar{\Sigma}_1 - \bar{\Sigma}_2) \right] \\ Q_5 & \equiv \text{vol}(\Omega) \cdot \frac{2}{5} (\Sigma_1 - \Sigma_2 + \bar{\Sigma}_1 - \bar{\Sigma}_2). \end{cases} \tag{30}$$

**Remark.** Although the family of trial displacement fields considered is directly borrowed from the work of Monchiet et al. (2011), the fields  $\mathbf{u}^{(3)}, \mathbf{u}^{(5)}$  of Eshelby (1957)-type play different roles in the previous work and here. For a traction-free void, as considered by Monchiet et al. (2011), there are only 3 independent kinematic parameters,  $E_1, E_2, E_3$ , so that no more than 3 displacement fields are strictly necessary; the fields  $\mathbf{u}^{(3)}, \mathbf{u}^{(5)}$  were added by Monchiet et al. (2011) to Gurson (1977)'s fields  $\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{u}^{(4)}$  merely as an *improvement*, to get a better approximation of the overall yield criterion and flow rule (at the expense of an additional minimization of the overall dissipation). With the internal loading considered here, the fields  $\mathbf{u}^{(3)}, \mathbf{u}^{(5)}$  become *indispensable* since there are 5 independent kinematic parameters and therefore a minimum of 5 fields is required.

<sup>6</sup> The use of Eqs. (23) rather than (22) permits to circumvent the problem of defining smooth extensions of the fields  $\mathbf{u}^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) over the void domain  $\Omega_D$ ; a non-trivial task in view of the singularity of some of these fields at the origin.

### 3.4. Overall plastic dissipation

The local plastic dissipation in the mother-phase (rigid-ideal-plastic material obeying the von Mises criterion with yield stress  $\bar{\sigma}_M$ ) is defined as the product  $\bar{\sigma}_M \dot{\epsilon}_{eq}$  where  $\dot{\epsilon}_{eq} \equiv (\frac{2}{3} \dot{\epsilon} : \dot{\epsilon})^{1/2}$  is the equivalent strain rate. For any incompressible trial velocity field  $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$  defined by the rates  $\dot{q}_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ), identical to the time-derivative of a trial displacement field  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  of type (28), the overall plastic dissipation  $\mathcal{D}$  is then defined as

$$\mathcal{D}(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_5) \equiv \int_{\Omega_M} \bar{\sigma}_M \dot{\epsilon}_{eq} d\Omega. \tag{31}$$

This dissipation is independent of the value of the tensor  $\bar{\Sigma}$  characterizing the internal loading. It follows that its value is exactly the same as in the case considered by Monchiet et al. (2011) of a traction-free void. We shall therefore content ourselves with providing their final, approximate result for this value, referring the interested reader to their paper for details of their approximations and calculations:

$$\mathcal{D}(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_5) = \text{vol}(\Omega) \bar{\sigma}_M \int_1^{1/f} \left\{ \dot{q}_2^2 + \frac{4}{3} \dot{q}_4^2 + \left[ 4\dot{q}_1^2 + \frac{6g(f)}{25} \left( \dot{q}_3^2 + \frac{4}{3} \dot{q}_5^2 \right) \right] x^2 \right\}^{1/2} \frac{dx}{x^2} \tag{32}$$

where the change of variable  $x \equiv R^3/r^3$  has been used, and  $g(f)$  is the positive function defined by the formula

$$g(f) \equiv 1 - 4f \frac{(1 - f^{2/3})^2}{1 - f}. \tag{33}$$

(The integral in Eq. (32) may be calculated in closed form but the result will not be needed here).

### 3.5. Overall yield criterion

The fundamental inequality of the kinematic approach of limit-analysis reads (Hill, 1951)

$$\sum_{i=1}^5 Q_i \dot{q}_i \leq \mathcal{D}(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_5) \tag{34}$$

for all quintuplets of sustainable loads<sup>7</sup>  $(Q_1, \dots, Q_5)$  and rates of kinematic parameters  $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_5)$ . The set of limit-loads, that is the overall yield locus, is the boundary of the domain defined in the space of quintuplets  $(Q_1, \dots, Q_5)$  by inequalities (34) for all values of the quintuplet  $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_5)$ ; that is the envelope of the family of hyperplanes of equation  $\sum_{i=1}^5 Q_i \dot{q}_i = \mathcal{D}(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_5)$  parametrized by the quintuplet  $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_5)$ . The parametric equations of this envelope read

$$Q_i = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i}(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_5) \quad (i = 1, \dots, 5) \tag{35}$$

where the  $\dot{q}_i$ 's act as parameters; in these equations the quintuplets  $(Q_1, \dots, Q_5)$  and  $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_5)$  are no longer independent like in inequality (34), but tied through the macroscopic constitutive law - that is, the quintuplet of kinematic rates  $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_5)$  is that actually generated by the load  $(Q_1, \dots, Q_5)$ .

In order to get the explicit equation of the overall yield locus, we must eliminate the parameters  $\dot{q}_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) in Eqs. (35). This may be done by using Gurson's lemma, stated and proved with maximum clarity and economy by Madou and Leblond (2012):

**Gurson's lemma.** Let  $I(\alpha, \beta)$  denote the integral defined by

$$I(\alpha, \beta) \equiv \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2} \frac{dx}{x^2} \tag{36}$$

where  $x_1$  and  $x_2$  are fixed positive bounds. Then the partial derivatives of  $I$  are connected through the following relation independent of  $\alpha$  and  $\beta$ :

$$\left( \frac{\partial I}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{2}{x_1 x_2} \cosh \left( \frac{\partial I}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2} = 0. \tag{37}$$

This lemma, applied here to Eq. (32) with

$$x_1 \equiv 1, \quad x_2 \equiv \frac{1}{f}, \quad \alpha \equiv \sqrt{\dot{q}_2^2 + \frac{4}{3} \dot{q}_4^2}, \quad \beta \equiv \sqrt{4\dot{q}_1^2 + \frac{6g(f)}{25} \left( \dot{q}_3^2 + \frac{4}{3} \dot{q}_5^2 \right)}, \quad I(\alpha, \beta) \equiv \frac{\mathcal{D}}{\text{vol}(\Omega) \bar{\sigma}_M}, \tag{38}$$

yields

$$\left( \frac{\partial \mathcal{D} / \partial \alpha}{\text{vol}(\Omega) \bar{\sigma}_M} \right)^2 + 2f \cosh \left( \frac{\partial \mathcal{D} / \partial \beta}{\text{vol}(\Omega) \bar{\sigma}_M} \right) - 1 - f^2 = 0. \tag{39}$$

<sup>7</sup> This expression designates loads that may be applied to the structure without inducing plastic collapse.

But the definitions (38)<sub>3,4</sub> of  $\alpha$  and  $\beta$  imply that

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_1} &= \frac{4\dot{q}_1}{\beta} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_3} &= \frac{6g(f)\dot{q}_3}{25\beta} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_5} &= \frac{8g(f)\dot{q}_5}{25\beta} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \beta} \end{aligned} \right. ; \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{\dot{q}_2}{\alpha} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_4} &= \frac{4\dot{q}_4}{3\alpha} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \alpha} \end{aligned} \right. ,$$

and it follows, using again these definitions, that

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_1} \right)^2 + \frac{25}{6g(f)} \left( \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_3} \right)^2 + \frac{25}{8g(f)} \left( \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_5} \right)^2 &= \left( \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \beta} \right)^2 \\ \left( \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_2} \right)^2 + \frac{3}{4} \left( \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_4} \right)^2 &= \left( \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \alpha} \right)^2. \end{aligned} \right.$$

Inserting these expressions into Eq. (39), then using Eq. (35) and the definitions (30) of the load parameters  $Q_i$ , we get the equation of the overall yield locus in the form

$$\frac{1}{\bar{\sigma}_M^2} \left( T_3 - \frac{T_1}{2} - \frac{T_2}{2} \right)^2 + \frac{3}{4\bar{\sigma}_M^2} (T_1 - T_2)^2 + 2f \cosh \left\{ \frac{1}{\bar{\sigma}_M} \left[ \frac{(S_1 + S_2 + S_3)^2}{4} + \frac{2}{3g(f)} \left( S_3 - \frac{S_1}{2} - \frac{S_2}{2} \right)^2 + \frac{(S_1 - S_2)^2}{2g(f)} \right]^{1/2} \right\} - 1 - f^2 = 0 \tag{40}$$

where  $S_1, S_2, S_3, T_1, T_2, T_3$  are the diagonal components of the tensors  $\mathbf{S}$  and  $\mathbf{T}$  defined by

$$\mathbf{S} \equiv \boldsymbol{\Sigma} + \bar{\boldsymbol{\Sigma}} ; \quad \mathbf{T} \equiv \boldsymbol{\Sigma} + f\bar{\boldsymbol{\Sigma}}. \tag{41}$$

Re-expressing quantities in Eq. (40) in terms of the invariants of  $\mathbf{S}$  and  $\mathbf{T}$ , we get the final form of the overall yield criterion:

$$\Phi(\boldsymbol{\Sigma}, \bar{\boldsymbol{\Sigma}}, f) \equiv \frac{T_{eq}^2}{\bar{\sigma}_M^2} + 2f \cosh \left( \frac{S_H}{\bar{\sigma}_M} \right) - 1 - f^2 = 0, \quad S_H \equiv \left[ \frac{1}{4} (\text{tr} \mathbf{S})^2 + \frac{2}{3g(f)} S_{eq}^2 \right]^{1/2} \tag{42}$$

where  $X_{eq} \equiv \left( \frac{3}{2} \mathbf{X}' : \mathbf{X}' \right)^{1/2}$  denotes the von Mises norm of a given stress tensor  $\mathbf{X}$  ( $\mathbf{X}'$  is the deviator of  $\mathbf{X}$ );  $\Phi(\boldsymbol{\Sigma}, \bar{\boldsymbol{\Sigma}}, f)$  is the overall yield function.

In the absence of an internal loading ( $\bar{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{0}$ ),  $S_{eq}$  and  $T_{eq}$  become identical to  $\Sigma_{eq}$ ,  $\text{tr} \mathbf{S}$  to  $\text{tr} \boldsymbol{\Sigma}$  and the criterion (42) reduces to that of Monchiet et al. (2011) (their Eq. (41)). In the general case, however, it is new.

### 3.6. Overall flow rule

We follow here Hill (1951)'s classical approach, adapted to the present situation. Let  $\mathcal{E}$  denote the space of pairs  $(\mathbf{X}, \bar{\mathbf{X}})$  of symmetric second-rank tensors, equipped with the scalar product  $\bullet$  defined by  $(\mathbf{X}, \bar{\mathbf{X}}) \bullet (\mathbf{Y}, \bar{\mathbf{Y}}) \equiv \mathbf{X} : \mathbf{Y} + \bar{\mathbf{X}} : \bar{\mathbf{Y}}$ . Consider, within  $\mathcal{E}$ :

- a pair  $(\boldsymbol{\Sigma}, \bar{\boldsymbol{\Sigma}})$  of overall stress tensors defining a limit-load;
- the pair  $(\dot{\mathbf{E}}, \bar{\dot{\mathbf{E}}})$  of overall external and internal strain rates generated by this limit-load;
- another pair  $(\boldsymbol{\Sigma}^*, \bar{\boldsymbol{\Sigma}}^*)$  of overall stress tensors defining an arbitrary sustainable load.

Consider also the following fields:

- the stress field  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  resulting from application of the limit-load  $(\boldsymbol{\Sigma}, \bar{\boldsymbol{\Sigma}})$ ;
- the strain rate field  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x})$  generated by this stress field through the local plastic flow rule;
- a stress field  $\boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x})$  statically admissible with the pair  $(\boldsymbol{\Sigma}^*, \bar{\boldsymbol{\Sigma}}^*)$  and plastically admissible (respecting the inequality  $\sigma_{eq}^* \leq \bar{\sigma}_M$  at every point) - the existence of such a field being guaranteed by the very definition of a sustainable load.

Then, by the expression (24) of the virtual power of external forces and the principle of virtual work,

$$\text{vol}(\Omega) \left[ (\boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma}^*) : \dot{\mathbf{E}} + f(\bar{\boldsymbol{\Sigma}} - \bar{\boldsymbol{\Sigma}}^*) : \bar{\dot{\mathbf{E}}} \right] = \int_{\Omega_M} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \, d\Omega.$$

The integrand here is non-negative as a consequence of the local normality rule. It follows that

$$(\boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma}^*) : \dot{\mathbf{E}} + f(\bar{\boldsymbol{\Sigma}} - \bar{\boldsymbol{\Sigma}}^*) : \bar{\dot{\mathbf{E}}} = (\boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma}^*, \bar{\boldsymbol{\Sigma}} - \bar{\boldsymbol{\Sigma}}^*) \bullet (\dot{\mathbf{E}}, \bar{\dot{\mathbf{E}}}) \geq 0$$

for every sustainable load  $(\boldsymbol{\Sigma}^*, \bar{\boldsymbol{\Sigma}}^*)$ .

It results from there, following a classical reasoning, that the pair  $(\dot{\mathbf{E}}, \dot{f}\dot{\mathbf{E}})$  is positively collinear in the space  $\mathcal{E}$  to the outer normal vector to the set of limit-loads, that is the overall yield locus of equation  $\Phi(\boldsymbol{\Sigma}, \bar{\boldsymbol{\Sigma}}, f) = 0$ ; thus there exists a non-negative scalar  $\dot{\Lambda}$  - the overall plastic multiplier - such that

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\Lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{\Sigma}, \bar{\boldsymbol{\Sigma}}, f) \quad ; \quad f\dot{\mathbf{E}} = \dot{\Lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\boldsymbol{\Sigma}}}(\boldsymbol{\Sigma}, \bar{\boldsymbol{\Sigma}}, f). \tag{43}$$

Calculating the derivatives here, we get the final form of the two-part overall flow rule:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{E}} &= \frac{\dot{\Lambda}}{\bar{\sigma}_M^2} \left\{ 3\mathbf{T}' + f \frac{\sinh(S_H/\bar{\sigma}_M)}{S_H/\bar{\sigma}_M} \left[ \frac{1}{2} (\text{tr} \mathbf{S}) \mathbf{1} + \frac{2}{g(f)} \mathbf{S}' \right] \right\} \\ \dot{\mathbf{E}} &= \frac{\dot{\Lambda}}{\bar{\sigma}_M^2} \left\{ 3\mathbf{T}' + \frac{\sinh(S_H/\bar{\sigma}_M)}{S_H/\bar{\sigma}_M} \left[ \frac{1}{2} (\text{tr} \mathbf{S}) \mathbf{1} + \frac{2}{g(f)} \mathbf{S}' \right] \right\} \end{cases}, \quad \dot{\Lambda} \geq 0 \tag{44}$$

where again a prime applied to a tensor denotes its deviatoric part.

Note that Eqs. (44) are compatible with relation (25) connecting the traces of the outer and inner strain tensors.

#### 4. Application to Greenwood–Johnson’s mechanism of transformation plasticity

##### 4.1. Principle and preliminaries

An elementary volume in a metal or alloy undergoing a phase transformation under stress is represented by the RVE defined in Section 3.2, subjected to a prescribed external stress  $\boldsymbol{\Sigma}$  plus an internal strain rate  $\dot{\mathbf{E}}$  resulting from the expansion of the gradually growing core of daughter-phase. The elements of the problem are as follows:

- The data include the tensors  $\boldsymbol{\Sigma}$  and  $\dot{\mathbf{E}}$  - the calculation of the second is presented just below.
- The unknowns include the internal stress tensor  $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}$ , the overall strain rate  $\dot{\mathbf{E}}$  and the plastic multiplier  $\dot{\Lambda}$ . What is looked for is  $\dot{\mathbf{E}}$ ;  $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}$  and  $\dot{\Lambda}$  are ancillary unknowns of no intrinsic interest.
- The equations available to determine the unknowns from the data are the overall yield criterion (42) and two-part flow rule (44).

Note that this summary elucidates the second difficulty mentioned in Section 3.1, in that it shows how an expression of the transformation plastic rate may be derived for arbitrary values of the external stress from limit-analysis, even though this theory concentrates only on special (limit-) loads. The keypoint is that the overall yield criterion ties the external and internal stress tensors together but *does not constrain their values individually*, so that the value of the former may still be chosen at will - the value of the latter will simply “adjust” through the criterion.

The first, preliminary task is to determine the value of the internal strain rate  $\dot{\mathbf{E}}$  resulting from the transformation. Consider the situation of Section 2.5 wherein the spherical layer lying between  $r_f$  and  $r_f + \delta r_f$  transforms from the mother- to the daughter-phase within a small time-interval  $[t, t + \delta t]$ , generating a radial increment of displacement  $\delta u^+$  on its outer boundary. The diagonal components of the increment of the internal strain tensor are then obviously

$$\delta \bar{E}_1 = \delta \bar{E}_2 = \delta \bar{E}_3 = \frac{\delta u^+}{r_f} = \frac{\Delta V}{V} \frac{\delta r_f}{r_f} = \frac{1}{3} \frac{\Delta V}{V} \frac{\delta f}{f}$$

where equations (13) and (16) have been used; the value of the internal strain rate tensor follows:

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{3} \frac{\Delta V}{V} \frac{\dot{f}}{f} \mathbf{1}. \tag{45}$$

A straightforward consequence of Eq. (45) is that the deviatoric part of the internal strain rate tensor  $\dot{\mathbf{E}}$  is zero. By the flow rule (44)<sub>2</sub> combined with the definitions (41) of the tensors  $\mathbf{S}$  and  $\mathbf{T}$ , this implies that

$$\bar{\boldsymbol{\Sigma}}' = - \frac{3 + \frac{2}{g(f)} \frac{\sinh(S_H/\bar{\sigma}_M)}{S_H/\bar{\sigma}_M}}{3f + \frac{2}{g(f)} \frac{\sinh(S_H/\bar{\sigma}_M)}{S_H/\bar{\sigma}_M}} \boldsymbol{\Sigma}'. \tag{46}$$

A second preliminary task is to determine the relation between the transformation plastic strain rate  $\dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}}$  and the overall strain rate  $\dot{\mathbf{E}}$  resulting from the limit-analysis. This limit-analysis being carried out in the absence of elasticity and without any variations of  $\boldsymbol{\Sigma}$  and  $T$ , Eqs. (7)<sub>1</sub> in rate form plus (12)<sub>1</sub> yield  $\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}^{\text{thm}} + \dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}}$ . But  $\dot{\mathbf{E}}^{\text{thm}}$  is a multiple of the unit tensor by equation (7)<sub>2</sub>, and  $\dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}}$  is traceless by Eq. (12)<sub>3</sub>. It follows that  $\dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}}$  identifies with the deviatoric part of the overall strain rate

$\dot{\mathbf{E}}$  obtained in the limit-analysis:<sup>8</sup>

$$\dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}} \equiv \dot{\mathbf{E}}' = \frac{\dot{\Lambda}}{\bar{\sigma}_M^2} \left[ 3\mathbf{T}' + \frac{2f}{g(f)} \frac{\sinh(S_H/\bar{\sigma}_M)}{S_H/\bar{\sigma}_M} \mathbf{S}' \right] \tag{47}$$

where the flow rule (44)<sub>1</sub> has been used.

4.2. Special case: Small external stresses

In a first step, we shall consider the case of small applied stresses ( $\Sigma_{eq} \ll \bar{\sigma}_M$ ), in which a simple and explicit formula for the transformation plastic strain rate may be obtained;  $\dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}}$  will be formally calculated at order 1 in  $\Sigma'$ . Preliminary calculations of some quantities at order 0 will however be necessary.

*Calculations at order 0.* At this order,  $\Sigma'$  is considered as nil. It then follows from Eq. (46) that  $\bar{\Sigma}'$  is also zero, so that by Eq. (42)<sub>2</sub>,  $S_H = \frac{1}{2} |\text{tr} \mathbf{S}|$ . The criterion (42)<sub>1</sub> then yields

$$2f \cosh\left(\frac{S_H}{\bar{\sigma}_M}\right) - 1 - f^2 = 0 \Rightarrow \cosh\left(\frac{S_H}{\bar{\sigma}_M}\right) = \frac{1}{2} \left(f + \frac{1}{f}\right) \Rightarrow \frac{S_H}{\bar{\sigma}_M} = -\ln f$$

where we have discarded the negative solution  $\frac{S_H}{\bar{\sigma}_M} = \ln f$  since  $S_H$  is by definition non-negative. From there follows that

$$\frac{\sinh(S_H/\bar{\sigma}_M)}{S_H/\bar{\sigma}_M} = \frac{1 - f^2}{-2f \ln f} \tag{48}$$

Combination of the flow rule (44)<sub>2</sub> and the expression (45) of  $\dot{\mathbf{E}}$  then yields

$$\frac{\dot{\Lambda}}{\bar{\sigma}_M^2} \frac{1 - f^2}{-4f \ln f} \text{tr} \mathbf{S} = \frac{1}{3} \frac{\Delta V}{V} \frac{\dot{f}}{f}$$

Since  $\dot{\Lambda}$  is positive and in practice so is also  $\frac{\Delta V}{V}$  (see Fig. A.6 of Appendix A), this equation entails that  $\text{tr} \mathbf{S} > 0$  and therefore, by what precedes,  $\text{tr} \mathbf{S} = 2S_H = -2\bar{\sigma}_M \ln f$ ; the value of the plastic multiplier follows:

$$\frac{\dot{\Lambda}}{\bar{\sigma}_M^2} = \frac{2}{3\bar{\sigma}_M} \frac{\Delta V}{V} \frac{\dot{f}}{1 - f^2} \tag{49}$$

*Calculations at order 1.* Eq. (46) shows that  $\bar{\Sigma}'$  is of order 1 in  $\Sigma'$ ; more precisely, using the value of  $\frac{\sinh(S_H/\bar{\sigma}_M)}{S_H/\bar{\sigma}_M}$  at order 0, Eq. (48), we get

$$\bar{\Sigma}' = -\frac{1 - f^2 - 3fg(f) \ln f}{1 - f^2 - 3f^2g(f) \ln f} \Sigma'$$

and therefore by the definitions (41) of  $\mathbf{S}$  and  $\mathbf{T}$ ,

$$\mathbf{S}' = \frac{3f(1 - f)g(f) \ln f}{1 - f^2 - 3f^2g(f) \ln f} \Sigma' \quad ; \quad \mathbf{T}' = \frac{(1 - f)^2(1 + f)}{1 - f^2 - 3f^2g(f) \ln f} \Sigma'$$

We then see that in the expression (47) of  $\dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}}$ , we only need the values of  $\frac{\sinh(S_H/\bar{\sigma}_M)}{S_H/\bar{\sigma}_M}$  and  $\frac{\dot{\Lambda}}{\bar{\sigma}_M^2}$  at order 0; using Eqs. (48) and (49), we finally get the desired value of  $\dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}}$  at order 1:

$$\dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}} = \frac{2}{\bar{\sigma}_M} \frac{\Delta V}{V} \frac{(1 - f)^2}{1 - f^2 - 3f^2g(f) \ln f} \Sigma' \dot{f} \quad [\Sigma_{eq} \ll \bar{\sigma}_M] \tag{50}$$

Comments on this result will be made below, but it is worth noting immediately that the “slope”  $d\mathbf{E}^{\text{tp}}/df$  at the onset of the transformation is no longer infinite like in Leblond et al. (1989)’s work, but amounts to

$$\frac{d\mathbf{E}^{\text{tp}}}{df}(f = 0) = \frac{2}{\bar{\sigma}_M} \frac{\Delta V}{V} \Sigma' \quad [\Sigma_{eq} \ll \bar{\sigma}_M] \tag{51}$$

This shows that the infinite slope obtained in the previous work was primarily due to the inadequacy of the “uncontrolled” Approximations (1) and (2) it relied upon, see Section 2.5. (The disregard of elasticity however also contributed to this incorrect result, see the works of Taleb and Sidoroff (2003) and Weisz-Paltraut (2017)).

<sup>8</sup> And, of course,  $\dot{\mathbf{E}}^{\text{thm}}$  identifies with the hydrostatic part of  $\dot{\mathbf{E}}$ ; this is confirmed by Eqs. (25) and (45) which yield the value  $\frac{1}{3} \frac{\Delta V}{V} \dot{f} \mathbf{1}$  for this hydrostatic part.

4.3. General case: Arbitrary external stresses

We shall now see that for arbitrary external stresses ( $\Sigma_{eq}$  comparable to  $\bar{\sigma}_M$ ), the transformation plastic strain rate  $\dot{\mathbf{E}}^{tp}$  still admits an analytical expression, but now involving a quantity which must be evaluated numerically by solving a transcendental equation.

Let us define the following dimensionless quantities:

$$X \equiv \frac{\Sigma_{eq}}{\bar{\sigma}_M} \quad ; \quad \bar{X} \equiv \frac{\bar{\Sigma}_{eq}}{\bar{\sigma}_M} \quad ; \quad Y \equiv \frac{\frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{S}}{\bar{\sigma}_M} \quad ; \quad Z \equiv \frac{S_H}{\bar{\sigma}_M}, \tag{52}$$

the first of which is supposedly known whereas the other three are not.

Let us first show how the values of  $Y$  and  $Z$  may be deduced from that of  $\bar{X}$ . Eq. (46) implies that the tensors  $\Sigma'$  and  $\bar{\Sigma}'$  are negatively collinear so that

$$\bar{\Sigma}' = -\frac{\bar{\Sigma}_{eq}}{\Sigma_{eq}} \Sigma' = -\frac{\bar{X}}{X} \Sigma'. \tag{53}$$

It then follows from the definition of  $\mathbf{S}$ , Eq. (41)<sub>1</sub>, that  $\mathbf{S}' = (1 - \bar{X}/X)\Sigma'$  so that  $S_{eq}^2 = (1 - \bar{X}/X)^2 \Sigma_{eq}^2 = \bar{\sigma}_M^2 (\bar{X} - X)^2$ . The definition (42)<sub>2</sub> of  $S_H$  then implies that

$$Z = \left[ \frac{9}{4} Y^2 + \frac{2}{3g(f)} (\bar{X} - X)^2 \right]^{1/2} \Rightarrow Y = \frac{2}{3} \left[ Z^2 - \frac{2}{3g(f)} (\bar{X} - X)^2 \right]^{1/2} \tag{54}$$

(the positivity of  $Y$  is justified below). Also, it follows from the definition of  $\mathbf{T}$ , Eq. (41)<sub>2</sub>, and Eq. (53) that  $\mathbf{T}' = (1 - f\bar{X}/X)\Sigma'$  so that  $T_{eq}^2 = (1 - f\bar{X}/X)^2 \Sigma_{eq}^2 = \bar{\sigma}_M^2 (X - f\bar{X})^2$ . The criterion (42) then yields

$$(X - f\bar{X})^2 + 2f \cosh Z - 1 - f^2 = 0 \Rightarrow$$

$$Z = F(X - f\bar{X}; f) \quad \text{where} \quad F(x; f) \equiv \arg \cosh \left( \frac{1 + f^2 - x^2}{2f} \right). \tag{55}$$

Thus, if the value of  $\bar{X}$  is known, those of  $Z$  and  $Y$  follow from Eqs. (55) and (54)<sub>2</sub>.

To now derive an equation on  $\bar{X}$ , combine Eqs. (46) and (53) to get

$$\begin{aligned} \frac{3 + \frac{2}{g(f)} \frac{\sinh Z}{Z}}{3f + \frac{2}{g(f)} \frac{\sinh Z}{Z}} &= \frac{\bar{X}}{X} \Rightarrow \\ 3(X - f\bar{X}) + \frac{2}{g(f)} \frac{\sinh[F(X - f\bar{X}; f)]}{F(X - f\bar{X}; f)} (X - \bar{X}) &= 0 \end{aligned} \tag{56}$$

where Eq. (55) has been used. The transcendental Eq. (56) on  $\bar{X}$  permits to deduce its value from that of  $X$  at least numerically.

Let us finally show how to calculate  $\dot{\mathbf{E}}^{tp}$  once  $\bar{X}$ ,  $Y$  and  $Z$  are known. It follows from the deviatoric part of the flow rule (44)<sub>2</sub> and the fact that  $\dot{\mathbf{E}}' = \mathbf{0}$  that  $3\mathbf{T}' + \frac{2}{g(f)} \frac{\sinh Z}{Z} \mathbf{S}' = \mathbf{0}$ , so that the expression (47) of  $\dot{\mathbf{E}}^{tp}$  simplifies into

$$\dot{\mathbf{E}}^{tp} = -\frac{\dot{\Lambda}}{\bar{\sigma}_M^2} \frac{2(1-f)}{g(f)} \frac{\sinh Z}{Z} \mathbf{S}'.$$

Now combination of the hydrostatic part of the flow rule (44)<sub>2</sub> and the expression (45) of  $\dot{\mathbf{E}}$  implies that

$$\frac{\dot{\Lambda}}{\bar{\sigma}_M^2} \frac{\sinh Z}{2Z} \text{tr} \mathbf{S} = \frac{1}{3} \frac{\Delta V}{V} \frac{\dot{f}}{f}.$$

(Incidentally, since  $\dot{\Lambda}$  and  $\frac{\Delta V}{V}$  are positive, this equation shows that  $\text{tr} \mathbf{S}$  and therefore  $Y$  are positive, as anticipated above). The preceding expression of  $\dot{\mathbf{E}}^{tp}$  then becomes

$$\dot{\mathbf{E}}^{tp} = -\frac{4(1-f)}{3fg(f)} \frac{\Delta V}{V} \frac{\dot{f}}{f} \frac{\mathbf{S}'}{\text{tr} \mathbf{S}}.$$

Using finally the relations  $\text{tr} \mathbf{S} = 3Y\bar{\sigma}_M$  and  $\mathbf{S}' = (1 - \bar{X}/X)\Sigma'$ , we get from there the final expression of  $\dot{\mathbf{E}}^{tp}$ :

$$\dot{\mathbf{E}}^{tp} = \frac{4}{9\bar{\sigma}_M} \frac{1-f}{fg(f)} \frac{\Delta V}{V} \frac{\bar{X}/X - 1}{Y} \Sigma' \dot{f} \quad \text{[General formula].} \tag{57}$$

To summarize, the procedure to get the transformation plastic strain rate is as follows: get  $\bar{X}$  by solving the transcendental Eq. (56); then get  $Z$  and  $Y$  from Eqs. (55) and (54)<sub>2</sub>; finally get  $\dot{\mathbf{E}}^{tp}$  from Eq. (57).

#### 4.4. Explicit formula for the beginning of the transformation

As a particular case of formula (57), an explicit, remarkably simple expression of the transformation plastic strain rate at the beginning of the transformation ( $f \rightarrow 0^+$ ) may be derived, even for arbitrary external stresses. The keypoint here is that provided that the quantity  $f\bar{X}$  is assumed to be of order  $O(f)$  (which will be verified *a posteriori*), the value of  $Z$  may be calculated directly from Eq. (55) independently of that of  $\bar{X}$ :

$$Z = \arg \cosh \left[ \frac{1-X^2}{f} (1 + O(f)) \right] = \ln \left( \frac{1-X^2}{f} \right) + O(f),$$

implying that

$$\frac{\sinh Z}{Z} = \frac{1-X^2}{2f \ln \left( \frac{1-X^2}{f} \right)} (1 + O(f)).$$

One then gets from Eqs. (56) (upon division by  $X$ ) and (54)<sub>2</sub>:

$$\frac{\bar{X}}{X} - 1 = \frac{3f \ln \left( \frac{1-X^2}{f} \right)}{1-X^2} (1 + O(f)) \quad ; \quad Y = \frac{2}{3} \ln \left( \frac{1-X^2}{f} \right) + O(f).$$

(The first equation shows that  $\bar{X} = O(1)$  and therefore  $f\bar{X} = O(f)$ , as announced). Eq. (57) then finally yields

$$\dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}} = \frac{2}{\bar{\sigma}_M} \frac{\Delta V}{V} \frac{\Sigma'}{1 - \Sigma_{eq}^2 / \bar{\sigma}_M^2} (1 + O(f)) \dot{f} \quad [f \rightarrow 0^+]. \quad (58)$$

This formula evidences the amplifying effect of the factor  $\frac{1}{1 - \Sigma_{eq}^2 / \bar{\sigma}_M^2}$  upon the transformation plastic strain rate  $\dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}}$ , when the von Mises equivalent stress  $\Sigma_{eq}$  becomes comparable to the yield stress  $\bar{\sigma}_M$  of the mother-phase.

#### 4.5. A composite approximation

Use of the general formula (57) for  $\dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}}$  is somewhat hampered by the necessity of solving Eq. (56) numerically to get the value of  $\bar{X}$ . It is therefore tempting to propose the following simple “composite approximation” of  $\dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}}$ , based on a heuristic mix of formulae (50), applicable for  $\Sigma_{eq} \ll \bar{\sigma}_M$  but arbitrary  $f$ , and (58), applicable for arbitrary  $\Sigma_{eq}$  but  $f \ll 1$ :

$$\dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}} = \frac{2}{\bar{\sigma}_M} \frac{\Delta V}{V} \frac{(1-f)^2}{1-f^2-3f^2g(f)\ln f} \frac{\Sigma'}{1 - \Sigma_{eq}^2 / \bar{\sigma}_M^2} \dot{f} \quad [\text{Approximation}]. \quad (59)$$

### 5. Comparison with other theories, experiments, and micromechanical simulations

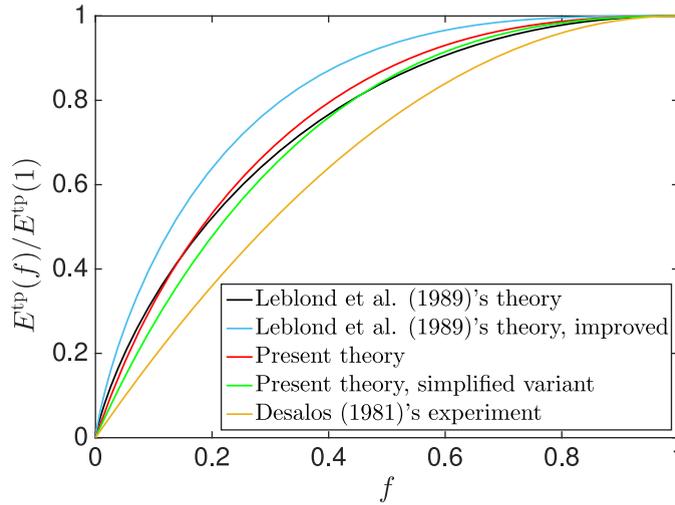
#### 5.1. Elements of comparison - Generalities

The comparisons presented in this section are based on the following theoretical, experimental and numerical elements:

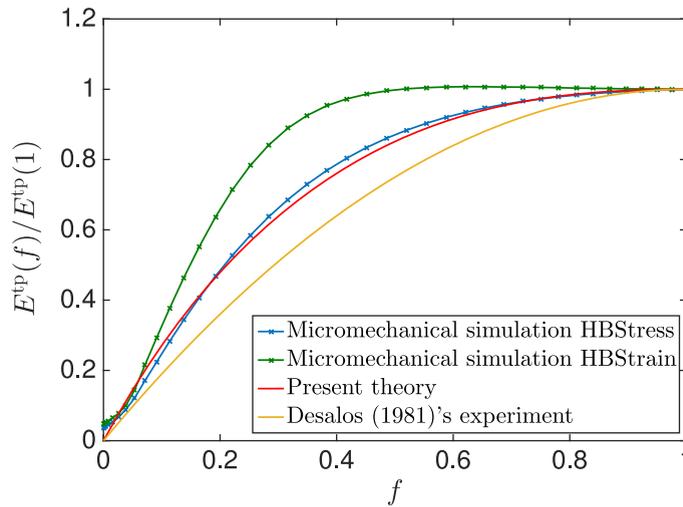
- Leblond et al. (1989)'s theoretical formula (19) for  $\dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}}$  and its supposedly improved variant (20); our general formula (57) and its approximation (59);
- Desalos (1981)'s old, but high-quality experimental study of transformation plasticity in the A533 steel, completed more recently with respect to multiaxial aspects by Coret et al. (2002, 2004);
- new finite element micromechanical simulations of Greenwood and Johnson (1965)'s mechanism, performed with the commercial programme SYSWELD® developed by ESI-Group (ESI-Group, 2017).

Although it is not the object of this paper to present and discuss these new micromechanical simulations in detail, a few comments on them are in order here. In principle, they are analogous to many previous ones (see the pioneering work of Leblond et al. (1989) and those of Barbe and Quey (2011); Barbe et al. (2007, 2008); Ganghoffer et al. (1993); Otsuka et al. (2018), to cite just a few of its many successors). However they differ from them through consideration of a RVE of spherical shape, exactly identical to that used in the theoretical homogenization process; the aim being to provide the “cleanest” possible assessment of the model predictions by eliminating all sources of discrepancies tied to differences in the RVEs considered. A spherical volume made of elastic-plastic material is thus meshed in concentric spherical layers, which are “transformed” one after another from the centre to the external surface by artificially modifying the values of their specific volume and yield stress from those of the mother-phase to those of the daughter-phase. This volume is loaded externally<sup>9</sup> through conditions of homogeneous boundary stress (HBStress) or homogeneous boundary strain (HBStrain) - the aim being to complete the theoretical analysis based exclusively on HBStress conditions, by studying the effect of boundary conditions.

<sup>9</sup> There is no internal boundary - and therefore no internal loading - since the core of daughter-phase is included in the mesh.



(a) Theories and experiment.



(b) Theory and micromechanical simulations.

**Fig. 4.** Comparison of evolutions of the transformation plastic strain.

The physical constants used correspond to the  $\gamma$ - and  $\alpha$ - phases of the A533 steel employed in the experimental studies of Desalos (1981) and Coret et al. (2002, 2004), and are as follows: Young’s modulus and Poisson’s ratio,  $E = 182,000$  MPa and  $\nu = 0.3$  (identical values for both phases); yield stress,  $\bar{\sigma}_M = 145$  MPa for the mother-phase,  $\bar{\sigma}_D = 950$  MPa for the daughter-phase; relative change of specific volume from the mother- to the daughter-phase,  $\frac{\Delta V}{V} = 0.0252$ .

In the cases considered for comparison in Sections 5.2 and 5.3, the RVE is subjected to a *uniaxial and constant* stress denoted  $\Sigma$ , and the resulting transformation plastic strain in the direction of the load is denoted  $E^{tp}(f)$ . (The other components are of no interest since they are either zero or trivially tied to  $E^{tp}(f)$  through incompressibility).

### 5.2. Comparison of evolutions of the transformation plastic strain

In a first step we focus on the evolution of the transformation plastic strain as the transformation proceeds, characterized by the ratio  $E^{tp}(f)/E^{tp}(1)$  which increases from 0 to 1. Fig. 4 shows this ratio as a function of the volume fraction  $f$  of the daughter-phase. Fig. 4(a) compares the predictions of Leblond et al. (1989)’s original formula (19); its supposedly improved variant (20); our general formula (57); its approximation (59); and Desalos (1981)’s phenomenological formula  $E^{tp}(f)/E^{tp}(1) \simeq f(2 - f)$ , which he found applicable to all his experimental results for the A533 steel irrespective of the value of the stress applied. The predictions of Eqs. (19), (20) and (59) are independent of the value of the von Mises equiva-

lent stress  $\Sigma_{eq}$ , but those of Eq. (57) are not; for this equation the curve shown corresponds to the value  $\Sigma_{eq} \equiv \Sigma = 100$  MPa (to be compared to the yield stress of the mother-phase,  $\bar{\sigma}_M = 145$  MPa). Several points are noteworthy.

- All theoretical curves, except that corresponding to the supposedly improved variant (20) of Leblond et al. (1989)'s original formula (19), provide reasonable representations of Desalos (1981)'s experimental results. However in all cases the increase of the transformation plastic strain they predict is a bit fast during the first half of the transformation.
- The infinite slope  $dE^{tp}/df$  at the onset of the transformation ( $f = 0$ ) predicted by both Leblond et al. (1989)'s original formula (19) and its supposedly improved variant (20), is in clear contradiction with Desalos (1981)'s experimental results.
- In contrast our new formulae (57) and (59) both predict a finite slope at  $f = 0$ , in better agreement with Desalos (1981)'s results. Nevertheless the predicted slopes are still a bit too large. The discrepancy may be due to the total disregard of elasticity in the theoretical treatment, which leads to an overestimation of the plastic strains in the deforming mother-phase; see the works of Taleb and Sidoroff (2003) and Weisz-Paltrault (2017) on this topic.
- Use, instead of Leblond et al. (1989)'s original formula (19), of its supposedly improved variant (20), in fact results in a degradation of the agreement of model predictions and experimental results. This observation is a bit surprising since formula (20) is based on a better estimate of the mean value of the stress deviator in the mother-phase, and underlines the limitations of Leblond et al. (1989)'s original approach based on the specific Approximations (1) and (2), see Section 2.5.
- There is little difference between the predictions of our general formula (57) and its simplified variant (59), in spite of the fact that the value of the ratio  $\Sigma_{eq}/\bar{\sigma}_M$  is high (0.69).

Fig. 4(b) compares the predictions of our general formula (57) to the results of micromechanical simulations obtained with HBStress and HBStrain conditions, this time for a low stress,  $\Sigma = 20$  MPa. (The curve corresponding to Desalos (1981)'s heuristic formula mentioned above, applicable to all values of the stress he considered, is also again provided for reference).

- There is a non-negligible gap between the numerical results obtained with HBStress and HBStrain conditions. This emphasizes the influence of boundary conditions, and evidences the limitations of an approach based on such a simple and small RVE as a spherical volume of mother-phase containing a single growing core of daughter-phase.
- The theoretical predictions agree extremely well with these numerical results obtained with HBStress conditions, much less so with those obtained with HBStrain conditions.
- Desalos (1981)'s experimental results serving as a reference, the numerical simulation based on HBStrain conditions predicts an evolution of the transformation plastic strain which is too fast during the first half of the transformation, and too slow during the second half.

### 5.3. Comparison of final values of the transformation plastic strain

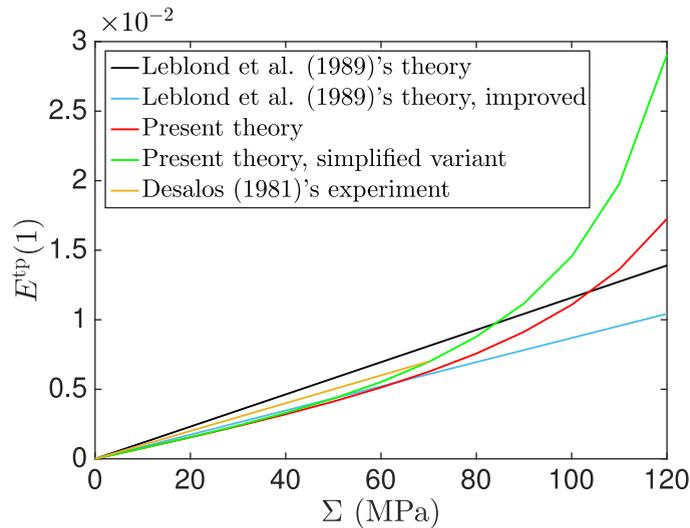
We now study the “amplitude” of transformation plasticity, characterized by the value of the transformation plastic strain after complete transformation,  $E^{tp}(1)$ . Fig. 5 shows this quantity as a function of the overall stress applied  $\Sigma$ . Fig. 5(a) compares the predictions of Leblond et al. (1989)'s original formula (19); its variant (20); our general formula (57); its approximation (59); and Desalos (1981)'s experimental results for the A533 steel up to a stress of 70 MPa, which he found to be well reproduced by the heuristic formula  $E^{tp}(1) \simeq 10^{-4} \Sigma$  (with  $\Sigma$  in MPa).

- All theoretical curves provide acceptable representations of Desalos (1981)'s experimental results. In particular, the predictions of Leblond et al. (1989)'s original formula (19) and its variant (20) are of comparable quality.
- For large stresses, there is a large difference between model predictions obtained with our general formula (57) and its approximation (59). But Desalos (1981)'s experimental results limited to moderate stress levels do not permit to decide which is the better one.

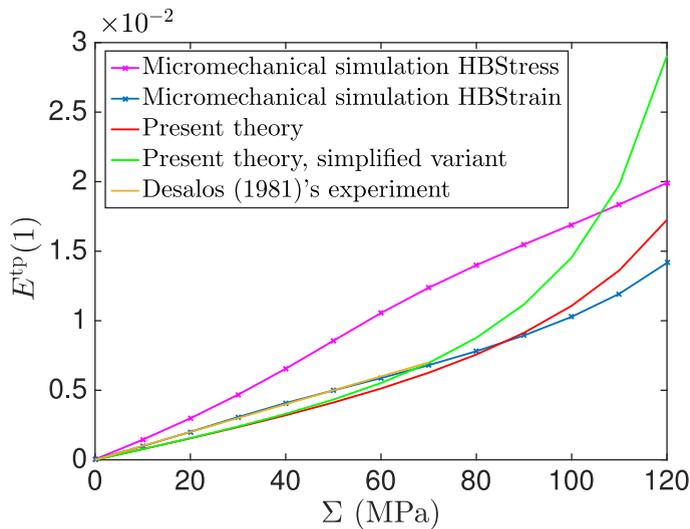
Fig. 5(b) compares the predictions of our general formula (57) to the results of micromechanical simulations obtained with HBStress and HBStrain conditions (Desalos (1981)'s experimental results being again provided for reference).

- The numerical results obtained with HBStress and HBStrain conditions are again markedly different. But the situation is opposite to that for the ratio  $E^{tp}(f)/E^{tp}(1)$ , see Section 5.2 above: the results corresponding to HBStrain conditions are here better than those corresponding to HBStress conditions, Desalos (1981)'s experimental results being taken as a reference. HBStress conditions clearly seem to lead to an overestimation of the amplitude of transformation plasticity.
- The predictions of our general formula (57) agree quite well with the numerical results obtained with HBStrain conditions;<sup>10</sup> they reproduce in particular the tendency of numerical values of  $E^{tp}(1)$  to increase nonlinearly with the stress applied.
- Numerical simulations permit to settle the question of the compared quality of our general formula (57) and its simplified variant (59): the former formula is definitely better, the latter leading to a clear overestimation of the transformation plastic strain after complete transformation.

<sup>10</sup> This is maybe not as surprising as it may seem. Indeed although the limit-analysis presented in Section 3 was, strictly speaking, developed for HBStress conditions, it is probably also appropriate, in some approximate sense, for HBStrain conditions insofar as the trial displacement fields used satisfy the latter conditions in an average sense, if not exactly.



(a) Theories and experiment.



(b) Theory and micromechanical simulations.

Fig. 5. Comparison of transformation plastic strains after complete transformation.

#### 5.4. Comparison with multiaxial experiments and micromechanical simulations

Another interesting aspect deserving to be checked versus experiments and micromechanical simulations is the prediction of our general formula (57) - in line with that of Leblond et al. (1989)'s earlier one (19) - of collinearity of the transformation plastic strain rate and the overall stress deviator. It will just be mentioned here that the said collinearity has been approximately verified experimentally by Coret et al. (2002, 2004) for the A533 steel, and is also approximately confirmed by extra finite element micromechanical simulations, analogous to those discussed above but with various multiaxial loadings instead of uniaxial ones.

## 6. Synthesis and perspectives

The aim of this paper was to propose a new theoretical treatment of Greenwood and Johnson (1965)'s mechanism of transformation plasticity of metals and alloys, based on limit-analysis. The new approach rests upon the same basic elements as Leblond et al. (1989)'s classical one, including in particular an approximate solution to the model problem of growth of a spherical core of daughter-phase within a concentric spherical volume of mother-phase subjected to a general 3D loading.

But use of the powerful variational framework of the kinematic approach of limit-analysis makes it both more general and versatile.

In a first step, we have developed an approximate limit-analysis of a hollow sphere subjected to both external and internal loadings through classical conditions of homogeneous boundary stress (Hill, 1967; Mandel, 1964). The internal loading is intended to represent the effect, upon the external shell of mother-phase, of the expansion of the core of daughter-phase due to the volumetric part of the transformation strain. The treatment is based on an extension of a work of Monchiet et al. (2011) on plastic porous materials - containing traction-free voids - which itself stood as an extension of the classical work of Gurson (1977) supplementing this author's elementary trial velocity fields with more complex, Eshelby (1957)-type ones. The output consists of some approximate overall yield locus and associated plastic flow rule obeying the normality property, extending those found by Monchiet et al. (2011) through incorporation of some additional internal loading.

In a second step, we have shown how to apply these results to the treatment of Greenwood and Johnson (1965)'s mechanism of transformation plasticity. An analytical formula for the transformation plastic strain rate has been found for fully general 3D loading conditions; this formula unfortunately contains an auxiliary unknown which must be determined by numerically solving a transcendental equation. However it reduces to simpler ones free of such complexities, in two distinct special cases: (i) small external stresses; (ii) beginning of the transformation (whatever the magnitude of the external stress tensor). All these theoretical results have been compared, with globally satisfying results, to experiments performed on the A533 steel (Coret et al., 2002; 2004; Desalos, 1981), and also fresh finite element micromechanical simulations of the mechanism investigated, based on exactly the same spherical RVE as the theoretical analysis.

There are several advantages to the new approach. A minor one consists in dispensing with some *ad hoc* technical hypotheses made in Leblond et al. (1989)'s classical treatment, among which one of highly questionable validity. A more important one is that the value of the transformation plastic strain rate at the onset of the transformation is no longer infinite like in the previous treatment - a non-physical prediction which did not fail to raise numerous criticisms. A third one lies in the possibility to consider external stresses of arbitrary magnitude instead of small ones only; the new theory predicts a nonlinear increase of the transformation plastic strain with the stress applied, in line with experimental observations (Greenwood and Johnson, 1965).

However the major advantage of the new approach probably lies in the new perspectives it opens, thanks to the power and efficiency of the kinematic method of limit-analysis.

- Refining the approximate overall yield criterion and plastic flow rule by including extra trial velocity fields, for instance, would not raise major difficulties.
- In this work the hypothesis was made, in line with Greenwood and Johnson (1965)'s ideas, that internal stresses generating microplasticity in the weaker mother-phase essentially arise from the difference of specific volume between the phases, that is the volumetric part of the transformation strain. However in reality this transformation strain is not a multiple of the unit tensor, and it is perfectly conceivable that its deviatoric part also contributes to the microplasticity of the mother-phase. This effect could be accounted for by modifying the expression of the overall strain rate imposed on the inner boundary of the domain of mother-phase, without making the limit-analysis significantly more complex.<sup>11</sup>
- Another interesting extension would consist of considering growth of a spheroidal, instead of spherical, core of daughter-phase, using Monchiet et al. (2014)'s extension of their earlier work on plastic materials containing spherical voids (Monchiet et al., 2014) to such a pore geometry. The spheroidal geometry would permit to represent, in an approximate way, growing nuclei of daughter-phase of elongated shape; such nuclei have been observed in rolled plates and are known to result in a strong anisotropy of transformation plasticity (see e.g. Desalos (1981), among other authors) - for instance, the transformation plastic strain is no longer zero in the absence of external stress.

In addition, the notable gap found between the results of finite element micromechanical simulations performed with conditions of homogeneous boundary strain and stress, underlines the influence of boundary conditions for such a small and simplistic RVE as a spherical volume containing a single growing core of daughter-phase; and suggests to perform more realistic simulations on much larger RVEs containing many cores of daughter-phase, subjected to rigorous periodic boundary conditions. In addition to settling the issue of the effect of boundary conditions, these simulations would permit to study the respective influences of nucleation and growth of nuclei of daughter-phase, unlike those discussed here which automatically ruled out nucleation of multiple nuclei through consideration of a single one. Such simulations will be performed in the near future using Moulinec and Suquet (1998)'s FFT-based method of numerical homogenization, much better adapted to calculations of this type than the standard finite element method.

## Appendix A. Additional considerations on the thermal strains of individual phases and the overall thermometallurgical strain

As a typical example, Fig. A.6 show the dilatometric diagram (free strain vs. temperature) of the A533 steel heated at  $30^{\circ}\text{Cs}^{-1}$  and cooled at  $-2^{\circ}\text{Cs}^{-1}$ , determined experimentally by Desalos (1981). The diagram evidences both transformations

<sup>11</sup> Such an extension would however raise the difficult issue of accounting for the *self-accommodation* of the transforming regions, that is the partial or complete compensation of the deviatoric parts of the transformation strains from one region to another.

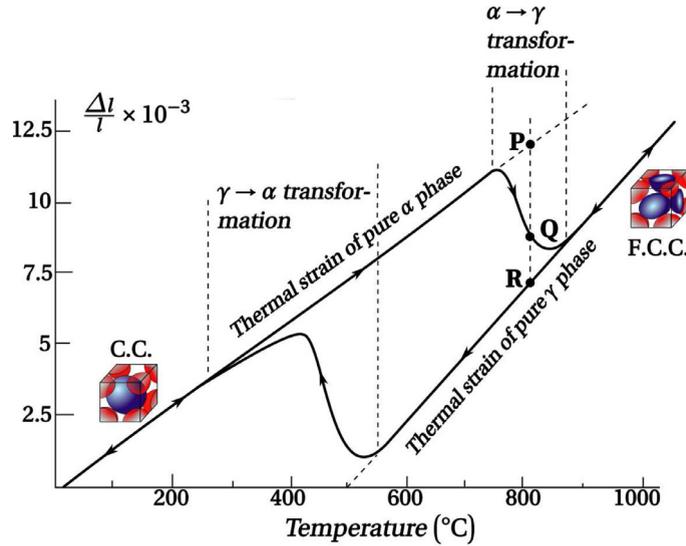


Fig. A1. The dilatometric diagram of the A533 steel (after Desalos (1981)).

from the  $\alpha$ -phase (ferrite, bainite or martensite) to the  $\gamma$ -phase (austenite) during heating, and from the  $\gamma$ -phase to the  $\alpha$ -phase during cooling; but our focus in the present paper is on the latter transformation - the effect of transformation plasticity during heating being erased by the subsequent vanishing of the stresses at high temperatures. Hence the mother- and daughter-phases are considered to be the  $\gamma$ - and  $\alpha$ -phases respectively. Note that the observed strains are defined in reference to the daughter ( $\alpha$ ) phase at a temperature of 20°C. The thermal expansions of the two phases, with different coefficients  $\alpha_M$  and  $\alpha_D$ , are conspicuous here; and the temperature-dependent relative difference of specific volume  $\frac{\Delta V}{V}(T)$  between them, given by Eq. (4), is apparent in the vertical gap between the two straight lines corresponding to the pure phases.

During the transformations the two phases coexist so that the overall strain observed lies between the thermal strains of individual phases at the temperature considered. Now by definition the dilatometric diagram is obtained in the absence of any external load so that the overall elastic and plastic strains  $\mathbf{E}^e$ ,  $\mathbf{E}^p$  are zero; under such conditions the overall strain coincides with the thermo-metallurgical strain  $\mathbf{E}^{\text{thm}}$  defined by Eq. (7)<sub>2</sub>. The geometrical interpretation of the simple “linear mixture rule” giving this strain in terms of the thermal strains of individual phases is that the volume fraction  $f$  of the daughter-phase may be obtained from the dilatometric diagram by a simple “lever rule”,  $f \equiv \frac{QR}{PR}$  at a temperature of 800°C in Fig. A.6.

A final remark is that as a consequence of Eq. (7)<sub>2</sub>, the rate  $\dot{\mathbf{E}}^{\text{thm}}$  of the thermometallurgical strain naturally splits into a “thermal part” proportional to  $\dot{T}$  and a “transformation part” proportional to  $\dot{f}$ :

$$\dot{\mathbf{E}}^{\text{thm}} = [(1-f)\alpha_M \mathbf{1} + f\alpha_D \mathbf{1}]\dot{T} + [\epsilon_D^{\text{th}}(T) - \epsilon_M^{\text{th}}(T)]\dot{f}.$$

But it must be stressed that the thermometallurgical strain  $\mathbf{E}^{\text{thm}}$  itself cannot be decomposed in a similar way, as some authors have wrongly claimed; that is, it is not a simple sum of a function of  $T$  and a function of  $f$ , as is obvious from Eq. (7)<sub>2</sub>.

## Appendix B. On the relative importance of Greenwood and Johnson (1965)’s and Magee (1966)’s mechanisms and their experimental separation

In some cases Magee (1966)’s mechanism is important and may even completely dominate over that of Greenwood and Johnson (1965). The most obvious case is that of shape memory alloys, in which the difference of specific volume between the phases is very small so that Greenwood and Johnson (1965)’s mechanism is virtually absent. As a result, the thermo-mechanical behaviour of such materials during phase transformations is governed by the pseudo-elastic transformation strain; the origin of the “memory effects” observed lies in the reversible nature of this strain.

Another example is that of “TRIP steels”. Although the acronym TRIP stands for “Transformation Induced Plasticity”, the situation it refers to is rather different from that considered here. TRIP steels are characterized by the presence of a significant amount of untransformed austenite at room temperature. When such steels are subjected to an increasing stress at this temperature, this “retained” austenite is transformed into  $\alpha$ -phase with a significant accompanying deformation, and this generates an important increase of ductility. Since the stress applied has a decisive impact upon the kinetics of

the transformation,<sup>12</sup> it is highly probable that it also has a large influence upon the orientation of the transformation strain (Magee (1966)'s mechanism). This large impact of the stress applied upon the transformation marks a significant difference with the case considered here of transformations essentially governed by the decrease of the temperature, rather than by application of a stress.

In the case considered here of transformations occurring during the cooling period of thermomechanical processes, the situation is less clear. The classical metallurgical view is that Greenwood and Johnson (1965)'s mechanism should dominate for diffusion-controlled transformations, and that of Magee (1966) for martensitic ones. To go beyond these qualitative ideas, one may try to experimentally distinguish between the two mechanisms by using the different physical natures - plastic for Greenwood and Johnson (1965)'s mechanism, pseudo-elastic for that of Magee (1966) - of the microscopic strains assumed to be responsible for transformation plasticity. One possibility is to subject a stressed specimen to repeated thermal cycles. The transformation plastic strain must be perfectly cumulative with the number of cycles if it arises from Greenwood and Johnson (1965)'s mechanism, because nothing prevents the accumulation of standard plastic strains; but it must "saturate" at some stage if it is due to Magee (1966)'s mechanism, because a maximum value of the overall strain is obtained when the transformation strains of the various transforming regions are all collinear. The experiment has been performed several times on different metals and alloys (Desalos, 1981; Greenwood and Johnson, 1965; Taleb and Petit, 2006) with the conclusion, for the materials considered, of perfect cumulation of the transformation plastic strain with the number of cycles, and therefore of domination of Greenwood and Johnson (1965)'s mechanism.

Another possibility is to exploit memory effects expected to arise, for Magee (1966)'s mechanism, from the reversibility of the transformation strain. This can be done by applying some stress on the material during cooling, then eliminating this stress and reheating. If Greenwood and Johnson (1965)'s mechanism prevails, the transformation plastic strain obtained at the end of cooling must not be recovered during re-heating since standard plasticity is irreversible; but if Magee (1966)'s mechanism dominates, this strain must be at least partially recoverable. The experiment was performed at least once, by Gigou (1985), with the result that the recoverable part of the transformation plastic strain did not amount to more than 10% of this strain; the ensuing conclusion was again that Greenwood and Johnson (1965)'s mechanism was dominant in the alloy considered.

The general conclusion is that for the materials and types of thermomechanical histories considered in the present paper, although Magee (1966)'s mechanism cannot be ruled out *a priori* without a dedicated experimental study, Greenwood and Johnson (1965)'s mechanism often dominates.

## References

- Abarrassart, F., 1972. Influence des transformations martensitiques sur les propriétés mécaniques des alliages du système Fe-Ni-Cr-C. Université de Nancy I Ph.D. thesis.
- Barbe, F., Quey, R., 2011. A numerical modelling of 3d polycrystal-to-polycrystal diffusive phase transformations involving crystal plasticity. *Int. J. Plasticity* 27, 823–840.
- Barbe, F., Quey, R., Taleb, L., 2007. Numerical modelling of the plasticity induced during diffusive transformation. Case of a cubic array of nuclei. *Eur. J. Mech. A/Solids* 26, 611–625.
- Barbe, F., Quey, R., Taleb, L., de Cursi E., S., 2008. Numerical modelling of the plasticity induced during diffusive transformation. An ensemble averaging approach for the case of random arrays of nuclei. *Eur. J. Mech. A/Solids* 27, 1121–1139.
- Cherkaoui, M., Berveiller, M., Lemoine, X., 2000. Couplings between plasticity and martensitic phase transformation : overall behavior of polycrystalline TRIP steels. *Int. J. Plasticity* 16, 1215–1241.
- Coret, M., Calloch, S., Combescure, A., 2002. Experimental study of the phase transformation plasticity of 16MND5 low carbon steel under multiaxial loading. *Int. J. Plasticity* 18, 1707–1727.
- Coret, M., Calloch, S., Combescure, A., 2004. Experimental study of the phase transformation plasticity of 16MND5 low carbon steel induced by proportional and nonproportional biaxial loading paths. *Eur. J. Mech. A/Solids* 23, 823–842.
- Desalos, Y., 1981. Comportement dilatométrique et mécanique de l'austénite métastable d'un acier A533. IRSID report 95349401.
- Diani, J.M., Sabar, H., Berveiller, M., 1995. Micromechanical modelling of the transformation induced plasticity (TRIP) phenomenon in steels. *Int. J. Engng. Sci.* 33, 1921–1934.
- Eshelby, J., 1957. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proc. Roy. Soc. London A* 241, 376–396.
- ESI-Group, 2017. SYSWELD user's manual.
- Fischlschweiger, M., Cailletaud, G., Antretter, T., 2012. A mean field model for transformation induced plasticity including backstress effects for non-proportional loadings. *Int. J. Plasticity* 37, 53–71.
- Fukumoto, M., Yoshizaki, M., Imataka, H., Okamura, K., 2001. Three-dimensional FEM analysis of helical gear subjected to the carburized quenching process. *J. Soc. Mater. Sci. Japan* 50, 598–605.
- Ganghoffer, J.F., Denis, S., Gautier, E., Simon, A., 1993. Finite element calculation of the micromechanics of a diffusional transformation. *Eur. J. Mech. A/Solids* 12, 21–32.
- Gigou, D., 1985. Plasticité de transformation : Cas de la transformation martensitique. Mémoire de DEA. Université Paris 11.
- Greenwood, G.W., Johnson, R.H., 1965. The deformation of metals under small stresses during phase transformations. *Proc. Roy. Soc. London A* 283, 403–422.
- Gurson, A.L., 1977. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I - yield criteria and flow rules for porous ductile media. *ASME J. Engng. Mater. Technol.* 99, 2–15.
- Hill, R., 1951. On the state of stress in a plastic-rigid body at the yield point. *Phil. Mag.* 42, 868–875.
- Hill, R., 1967. The essential structure of constitutive laws of metal composites and polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids* 15, 79–95.
- Leblond, J.B., Devaux, J., Devaux, J.C., 1989. Mathematical modelling of transformation plasticity in steels I: case of ideal-plastic phases. *Int. J. Plasticity* 5, 551–572.
- Leblond, J.B., Kondo, D., Morin, L., Remmal, A., 2018. Classical and sequential limit-analysis revisited. *C.R. Mécanique* 346, 336–349.

<sup>12</sup> This is a consequence of the highly unstable character of retained austenite at room temperature: a small increase of "driving force" is sufficient to trigger the transformation.

- Leblond, J.B., Mottet, G., Devaux, J.C., 1986a. A theoretical and numerical approach to the plastic behaviour of steels during phase transformations - I. derivation of general relations. *J. Mech. Phys. Solids* 34, 395–409.
- Leblond, J.B., Mottet, G., Devaux, J.C., 1986b. A theoretical and numerical approach to the plastic behaviour of steels during phase transformations - II. study of classical plasticity for ideal-plastic phases. *J. Mech. Phys. Solids* 34, 411–432.
- Madou, K., Leblond, J.B., 2012. A Gurson-type criterion for porous ductile solids containing arbitrary ellipsoidal voids - I: limit-analysis of some representative cell. *J. Mech. Phys. Solids* 60, 1020–1036.
- Magee, C.L., 1966. Transformation kinetics, microplasticity and ageing of martensite in Fe-31 Ni. Carnegie-Mellon University, Pittsburgh Ph.D. thesis.
- Mandel, J., 1964. Contribution Théorique à L'Étude De L'Écrouissage Et Des Lois De L'Écoulement Plastique. In: Proc. 11th Int. Congr. on Applied Mechanics, Munich, pp. 502–509.
- Miyao, K., Wang, Z.G., Inoue, T., 1986. Analysis of temperature, stress and metallic structure in carburized-quenched gear considering transformation plasticity. *J. Soc. Mater. Sci. Japan* 35, 1352–1357.
- Monchiet, V., Charkaluk, E., Kondo, D., 2011. A micromechanics-based modification of the Gurson criterion by using Eshelby-like velocity fields. *Eur. J. Mech. A/Solids* 30, 940–949.
- Monchiet, V., Charkaluk, E., Kondo, D., 2014. Macroscopic yield criteria for ductile materials containing spheroidal voids: an Eshelby-like velocity fields approach. *Mech. Mater.* 72, 1–18.
- Moulinec, H., Suquet, P., 1998. A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructures. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.* 157, 69–94.
- Otsuka, T., Brenner, R., Bacroix, B., 2018. FFT-Based modelling of transformation plasticity in polycrystalline materials during diffusive phase transformation. *Int. J. Engng. Sci.* 127, 92–113.
- Taleb, L., Sidoroff, F., 2003. A micromechanical modeling of the Greenwood-Johnson mechanism in transformation induced plasticity. *Int. J. Plasticity* 19, 1821–1842.
- Taleb, T., Petit, S., 2006. New investigations on transformation induced plasticity and its interaction with classical plasticity. *Int. J. Plasticity* 22, 110–130.
- Taleb, T., Petit, S., Jullien, J.F., 2004. Prediction of residual stresses in the heat-affected zone. *J. Physique IV* 120, 705–712.
- Vincent, Y., Bergheau, J.M., Leblond, J.B., 2003. Viscoplastic behavior of steels during phase transformations. *C.R. Mécanique* 331, 587–594.
- Weisz-Paltrault, 2017. Multiphase model for transformation induced plasticity. Extended Leblond's model. *J. Mech. Phys. Solids* 106, 152–175.



---

FFT-based micromechanical simulations of transformation plasticity. Comparison with  
a limit-analysis-based theory

---

*This work addresses the numerical simulation of transformation plasticity by using a numerical scheme based on the fast Fourier transform (FFT). A two-phase material with isotropic thermo-elastoplastic phases is considered. Together with prescribed transformation kinetics, this permits to describe the plasticity induced by the accommodation of the volume change accompanying the phase transformation (Greenwood-Johnson mechanism). We consider random distributions of  $\alpha$ -phase nuclei within a homogeneous  $\gamma$ -phase matrix, with an isotropic growth law of the nuclei. The numerical results are compared to a recently proposed limit-analysis-based theory (El Majaty et al., 2018), which permits in particular to account for a nonlinear dependence of the “transformation plastic strain” with the stress applied. A very good agreement between the FFT simulations and the theory is obtained, for uniaxial and multiaxial loadings, over a wide range of stresses applied.*

**Sommaire**

---

<b>IV.1 Introduction</b> . . . . .	<b>65</b>
<b>IV.2 General hypotheses and notations</b> . . . . .	<b>66</b>
<b>IV.3 Constitutive equations of the phases</b> . . . . .	<b>67</b>
<b>IV.4 The FFT-based numerical scheme in the context of transformation plasticity</b> . . . . .	<b>69</b>
IV.4.1 Lippmann-Schwinger’s equation for periodic media . . . . .	69
IV.4.2 Microstructure evolution . . . . .	69
IV.4.3 Preliminary study of dispersion effects . . . . .	74
<b>IV.5 A summary of a limit-analysis-based theory of transformation plasticity</b> . . . . .	<b>78</b>
<b>IV.6 Assessment of the model using FFT numerical simulations</b> . . . . .	<b>80</b>

---

<b>IV.7 Conclusion</b> . . . . .	<b>82</b>
<b>IV.8 Appendix A. Effect of homogeneous/heterogeneous nucleation</b> . . . . .	<b>83</b>
<b>IV.9 Appendix B. Influence of some parameters of the numerical representation of the transformation</b> . . . . .	<b>85</b>
IV.9.1 B.1 Yield stress variation during the transformation . . . . .	85
IV.9.2 B.2 Thickness of the transforming layer . . . . .	85

---

## IV.1 Introduction

Transformation plasticity occurs during thermomechanical treatments of steels and metallic alloys, such as welding or quenching processes. This phenomenon induces residual stresses and distortions inside the materials, which modify their macroscopic mechanical behaviour ; see, among others (Fukumuto *et al.*, 2001 ; Miyao *et al.*, 1986 ; Taleb *et al.*, 2004). It is commonly accepted that transformation plasticity is due to two main mechanisms, a *diffusive* one (Greenwood et Johnson, 1965) and a *displacive* one (Mazzeo et Paxton, 1966). The latter mechanism is not considered in the present study - see comments on this topic in El Majaty *et al.* (2018).

The origin of Greenwood et Johnson (1965)'s mechanism of transformation plasticity lies in the plastic accommodation of the austenite (softer phase) during the phase transformation. Indeed during cooling, the austenitic phase (face centered cubic structure) gives birth to a ferritic, bainitic or martensitic phase (body centered cubic or tetragonal structure) which has a larger specific volume. The volume difference between the two phases, equivalent to a heterogeneous eigenstrain field, generates internal stresses which cause local plastic deformations, even without any applied macroscopic stress. If present, such a stress takes advantage of this "pre-existing" microplasticity to deform the material more easily than in the absence of a transformation.

The first truly micromechanical modelling of this mechanism is due to Leblond *et al.* (1989), who considered a volume element made of a growing spherical ferritic, bainitic or martensitic nucleus ( $\alpha$ -phase) surrounded by a concentric spherical austenitic shell ( $\gamma$ -phase). Assuming a low applied macroscopic stress, this approach led to an expression of the overall transformation plastic strain rate depending linearly on the overall stress deviator.

Leblond *et al.* (1989)'s model was not, however, free of drawbacks and limitations. For instance, it predicted a physically unrealistic infinite value for the transformation plastic strain rate at the very start of the transformation. In addition, its derivation was based on the assumption of small stresses applied, so that it could not account for the well documented nonlinear increase of the transformation plastic strain rate with the stress applied when it becomes comparable to the yield stress of austenite (see for example Figures 3 to 6 in the experimental section of Greenwood et Johnson (1965)'s paper).

Extensions of this model have been proposed in various directions. The issue of the infinite initial value of the transformation plastic strain rate was dealt with, among others, by Taleb et Sidoroff (2003a) and Weisz-Patruault (2017). Viscous effects were introduced by Vincent *et al.* (2003). Various mean-field models were used to refine the description of the mechanical behaviour of the mother-phase undergoing plastic deformations (see, for instance, Cherkaoui *et al.*, 2000 ; Diani *et al.*, 1995 ; Fischlschweiger *et al.*, 2012, among others).

In connection with these investigations, numerical micromechanical simulations of transformation plasticity were performed by various authors, with different hypotheses concerning the processes of nucleation and growth of nuclei of daughter-phase. Most of these studies used the finite element method ; see, among others, the works of Barbe et Quey (2011) ; Barbe *et al.* (2007, 2008) ; Ganghoffer *et al.* (1992) ; Leblond *et al.* (1989), which used von Mises's standard macroscopic model to describe plastic accommodation in the austenitic phase. However more recently another, FFT-based numerical scheme (Moulinec et Suquet, 1998a) was used by Otsuka (2014) ; Otsuka *et al.* (2018a) in conjunction with a more refined description of plasticity in the austenite based on a crystal plasticity model.

However, in spite of these efforts, Leblond *et al.* (1989)'s model predictions remain consistent with experimental observations only for macroscopic applied stresses less than approximately half of the yield stress of austenite. Thus, to tackle the range of high stresses close to the yield stress of austenite, the theory requires additional adjustable parameters. To overcome the shortcomings of Leblond *et al.* (1989)'s model, the modelling of the Greenwood-Johnson mechanism was reconsidered by El Majaty *et al.* (2018) by

making use of the Hill-Mandel theory of homogenization, combined with a limit-analysis kinematical approach. El Majaty *et al.* (2018)'s new model of transformation plasticity was compared, with globally satisfying results, to experiments performed on the A533 steel (Coret *et al.*, 2002, 2004; Desalos, 1981).

The present study aims at investigating the relevance of El Majaty *et al.* (2018)'s new theory through numerical simulations performed on representative microstructures, consisting of random distributions of growing ferrite, bainite or martensite nuclei in an austenitic matrix. This allows to specifically investigate the effect of mechanical interactions between the nuclei (Barbe *et al.*, 2007, 2008). To envisage large scale microstructures, with reasonable computation times and memory allocation, Moulinec et Suquet (1998a)'s FFT-based numerical scheme is adopted. Indeed, such a scheme has repeatedly been shown to outperform the standard finite element method for elementary cell computations of periodic media, and has been successfully applied to a wide variety of problems and constitutive relations (see, among others, Brenner *et al.*, 2009; Lebensohn *et al.*, 2008, 2012; Lee *et al.*, 2011; Otsuka *et al.*, 2018a; Suquet *et al.*, 2012).

The article is organized as follows. Section 2 expounds general hypotheses and notations. Section 3 presents the constitutive equations of the individual phases. Section 4 details Moulinec et Suquet (1998a)'s numerical method, based on some FFT treatment of Lippmann-Schwinger's equation for periodic media, in the context of transformation plasticity - implying evolving microstructures. Section 5 presents a summary of El Majaty *et al.* (2018)'s new theory of transformation plasticity, based on the limit-analysis of a hollow sphere loaded both internally and externally. Section 6 is finally devoted to numerical results, and their comparison with the predictions of the limit-analysis-based theory.

## IV.2 General hypotheses and notations

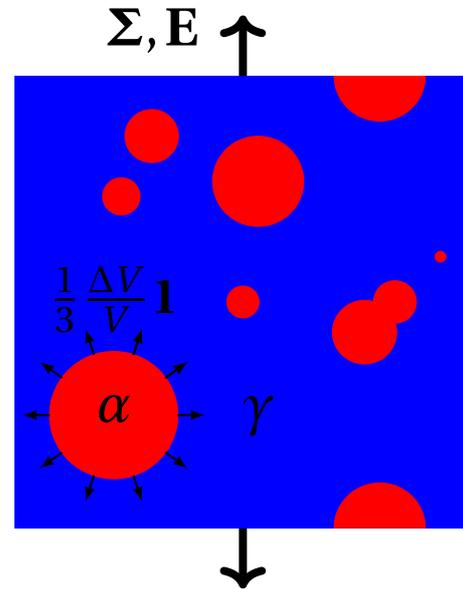
In the whole paper, we use a geometrically linearized setting; the measures of strain and stress used are therefore the linearized strain and the Cauchy stress tensor.

We consider (Figure IV.1) a domain  $\Omega$  made of a material containing two phases, one (denoted  $\alpha$ ) ferritic, bainitic or martensitic, and the other (denoted  $\gamma$ ) austenitic. A transformation (in practice induced by cooling) from the "mother"  $\gamma$ -phase to the "daughter"  $\alpha$ -phase may take place. When this occurs at a given point, the thermomechanical constants at this point vary from these values corresponding to the mother phase to those corresponding to the daughter phase.

At the local or microscopic scale, each point unambiguously belongs to one and one only of the two phases; the characteristic function of the daughter  $\alpha$ -phase is denoted  $\zeta(\mathbf{x})$ , so that  $\zeta(\mathbf{x}) = 0$  if  $\mathbf{x}$  lies in the  $\gamma$ -phase and  $\zeta(\mathbf{x}) = 1$  if  $\mathbf{x}$  lies in the  $\alpha$ -phase. The local or microscopic linearized strain and Cauchy stress tensors are denoted  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x})$  and  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ , respectively.

At the global or macroscopic scale, the domain  $\Omega$  contains both phases; the volume fraction of the daughter  $\alpha$ -phase is denoted  $f$  and is given by

$$f = \langle \zeta(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} \quad (\text{IV.1})$$



**Figure IV.1** – A 2D section of a periodic medium with cubic elementary cell, made of a  $\gamma$ -phase matrix containing growing nuclei of  $\alpha$ -phase, and subjected to some prescribed macroscopic load  $\boldsymbol{\Sigma}$  or  $\mathbf{E}$ .

where the symbol  $\langle \cdot \rangle_\Omega$  denotes an average value over  $\Omega$ . The domain  $\Omega$  is subjected to classical periodic boundary conditions. The global or macroscopic strain and stress tensors are denoted  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{\Sigma}$ , respectively. These tensors satisfy the following relations ((Hill, 1967; Mandel, 1966)'s macrohomogeneity conditions) :

$$\mathbf{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \rangle_\Omega ; \mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) \rangle_\Omega ; \mathbf{\Sigma} : \mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) \rangle_\Omega. \quad (\text{IV.2})$$

Time-derivatives of quantities will be denoted with an upper dot; thus, for instance,  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{\Sigma}}$  will represent the rates of the microscopic strain and stress tensors and their macroscopic counterparts. This notation will classically be used to write the constitutive laws of the two phases; but since the behaviour of each of these phases will be assumed to be time-independent (no viscous effects), these laws could equally well be written in ‘‘incremental’’ form, thus replacing rates of all quantities by small increments.

### IV.3 Constitutive equations of the phases

The behaviour of each phase is assumed to be thermo-elasto-plastic. Thus the local strain  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x})$  can be split into thermal, elastic and plastic parts :

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\epsilon}^{\text{th}}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\epsilon}^e(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\epsilon}^p(\mathbf{x}). \quad (\text{IV.3})$$

The ‘‘thermal’’ strain  $\boldsymbol{\epsilon}^{\text{th}}(\mathbf{x})$  is in fact related to both the thermal expansion *and* the volume change accompanying the transformation, according to the relation

$$\boldsymbol{\epsilon}^{\text{th}}(\mathbf{x}) = [\delta(\mathbf{x})(T(\mathbf{x}) - T_0) + \beta(\mathbf{x})] \mathbf{1}. \quad (\text{IV.4})$$

In this expression  $\mathbf{1}$  is the unit second-rank tensor,  $\delta(\mathbf{x})$  the local thermal expansion coefficient,  $T_0$  and  $T(\mathbf{x})$  the ‘‘reference’’ and actual temperatures, and  $\beta(\mathbf{x})$  a scalar related to the difference of specific volume  $\frac{\Delta V}{V}$  between the phases at the temperature  $T_0$ , defined as :

$$\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{3} \frac{\Delta V}{V} \zeta(\mathbf{x}). \quad (\text{IV.5})$$

(Thus  $\beta(\mathbf{x})$  is zero in the  $\gamma$ -phase and equal to  $\frac{1}{3} \frac{\Delta V}{V}$  in the  $\alpha$ -phase). Note that according to equations (IV.4) and (IV.5), the thermal strain is zero in the  $\gamma$ -phase at the temperature  $T_0$ , implying that such conditions define the ‘‘reference state’’ for the measure of strains.

The elastic strain  $\boldsymbol{\epsilon}^e(\mathbf{x})$  is related to the stress  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  through the elasticity law :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\epsilon}^e(\mathbf{x}) \quad (\text{IV.6})$$

where  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  denotes the local fourth-rank elastic stiffness tensor. In this paper, we disregard both the variation of  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  within each phase (arising from the anisotropy of grains and their varying orientations), and the difference of elastic moduli between the phases; thus  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  is identified to  $\mathbf{C}^0$ , the global, *isotropic* elastic stiffness tensor.

Finally the plastic strain rate is given by the classical equations of *time-independent, ideal*-plasticity, for an (isotropic) von Mises criterion and a plastic flow rule following Hill's normality property. Thus the yield criterion reads

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) = \sqrt{3J_2(\mathbf{x})} - \sigma_Y(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (\text{IV.7})$$

where  $J_2(\mathbf{x})$  is the second (deviatoric) stress invariant, and  $\sigma_Y(\mathbf{x})$  the local yield stress (depending on the phase the point  $\mathbf{x}$  belongs to). Also, the flow rule reads

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x}) = \dot{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) = \dot{\lambda}(\mathbf{x}) \frac{3}{2\sigma_Y(\mathbf{x})} \mathbf{s}(\mathbf{x}) \quad (\text{IV.8})$$

where  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$  denotes the local stress deviator, and  $\dot{\lambda}(\mathbf{x})$  the local plastic multiplier, satisfying the Kühn-Tucker conditions :

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) \leq 0 \quad ; \quad \dot{\lambda}(\mathbf{x}) \geq 0 \quad ; \quad \phi(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}))\dot{\lambda}(\mathbf{x}) = 0. \quad (\text{IV.9})$$

Since the plastic flow rule inevitably involves the rate (or increment) of the plastic strain, it is necessary to express the constitutive equations in rate (or incremental) form. Equation (IV.3) thus becomes

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{th}}(\mathbf{x}) + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{e}}(\mathbf{x}) + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{p}}(\mathbf{x}). \quad (\text{IV.10})$$

In this expression :

- $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{p}}(\mathbf{x})$  is given by equation (IV.8).
- $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{th}}(\mathbf{x})$  is given by

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{th}}(\mathbf{x}) \simeq \dot{\beta}(\mathbf{x}) \mathbf{1} \quad , \quad \dot{\beta}(\mathbf{x}) \simeq \frac{1}{3} \frac{\Delta V}{V} \dot{\zeta}(\mathbf{x}) \quad (\text{IV.11})$$

where the variation of volume due to the variation of temperature has been neglected compared to that due to the transformation ( $\delta(\mathbf{x}) \dot{T}(\mathbf{x}) \ll \dot{\beta}(\mathbf{x})$ ), and the dependence of the difference of specific volume between the phases upon temperature has also been disregarded ( $\frac{d}{dt} \frac{\Delta V}{V} \simeq 0$ ). Note also that the derivative  $\dot{\zeta}(\mathbf{x})$  in the second of equations (IV.11) must be understood in the sense of generalized functions since the function  $\zeta(\mathbf{x})$  only takes the values 0 and 1.

- $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{e}}(\mathbf{x})$  is given by

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^0 : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{e}}(\mathbf{x}) \quad (\text{IV.12})$$

where the dependence of the overall elastic stiffness tensor  $\mathbf{C}^0$  upon temperature has been neglected ( $\dot{\mathbf{C}}^0 \simeq \mathbf{0}$ ).

(Note that the approximations made to get equations (IV.11) and (IV.12) are equivalent to artificially considering the transformation as isothermal).

#### Remarks on the hypotheses made.

1. In reality, and especially in the case of martensitic transformations, the transformation strain does not include only an isotropic part  $\beta(\mathbf{x}) \mathbf{1}$  but also a deviatoric part. In principle, accounting for such a deviatoric part would not raise any problem of principle, either in the theoretical description or the numerical simulations. The difficulty, however, would be to properly account for the partial or total compensation of the deviatoric transformation strain from one point to a neighbouring one (that is, for the *self-accommodation* of the transforming regions). In this work we follow [Greenwood et Johnson \(1965\)](#)'s point of view, which consisted in accounting for the sole part of the transformation strain that cannot average out to zero, that is its isotropic part  $\beta(\mathbf{x}) \mathbf{1}$ .
2. Replacing the local elastic stiffness tensor  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  with the overall tensor  $\mathbf{C}^0$  seems reasonable insofar as elasticity is not expected to play a major role in transformation *plasticity*.
3. With regard to plasticity, the use of the *global* isotropic model of von Mises instead of some *local* crystal plasticity model is more debatable. We again follow here [Greenwood et Johnson \(1965\)](#)'s approach, in which crystal plasticity effects were considered as second-order. Such effects (in the context of transformation plasticity) were considered in the work of [Otsuka et al. \(2018a\)](#), to which the reader is referred on this topic.
4. Making the assumption of ideal-plasticity means neglecting all effects tied to strain hardening; this is acceptable in a first approximation, consideration of such effects being postponed to some later work. This simplification is made to eliminate several complicating factors, and notably the possible memory/recovery of hardening during the transformation (tied to the modification of the arrangement of dislocations arising from the structural change).
5. A similar remark applies to the neglect of viscous effects (which are bound to be of some importance at the temperatures of interest).

## IV.4 The FFT-based numerical scheme in the context of transformation plasticity

Moulinec et Suquet (1998a)'s FFT-based numerical method iteratively solves the integral Lippmann-Schwinger (LS) equation, the solution of which represents the strain field in a fictitious homogeneous medium with a heterogeneous “polarization stress field”. In the present study, periodic elastoplastic problems with prescribed growth kinetics of nuclei are considered (Figure IV.2).

### IV.4.1 Lippmann-Schwinger's equation for periodic media

Combination of equations (IV.10) and (IV.12) yields

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^0 : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) + \dot{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x}) \quad (\text{IV.13})$$

where  $\dot{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x})$  is a “polarization stress rate field” given by

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{C}^0 : \left[ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{th}}(\mathbf{x}) + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{p}}(\mathbf{x}) \right]. \quad (\text{IV.14})$$

In the solution of the quasi-static global problem thus defined, the strain rate may be expressed as a function of the polarization field, through the LS integral equation involving the Green operator  $\mathbf{\Gamma}^0$  associated to the stiffness tensor  $\mathbf{C}^0$  :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) = -(\mathbf{\Gamma}^0 * \dot{\boldsymbol{\tau}})(\mathbf{x}) + \dot{\mathbf{E}} \quad (\text{IV.15})$$

where  $\dot{\mathbf{E}}$  denotes the average of the strain rate  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x})$  over any elementary cell of the periodic medium considered. The Fourier transform of the LS equation reads

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\xi}) = -\hat{\mathbf{\Gamma}}^0(\boldsymbol{\xi}) : \hat{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0} \quad , \quad \hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{0}) = \dot{\mathbf{E}} \quad (\text{IV.16})$$

where  $\hat{\mathbf{\Gamma}}^0$  denotes the Green operator in Fourier's space (this operator is explicitly known for an isotropic  $\mathbf{C}^0$ ), and  $\boldsymbol{\xi}$  the wavevector. Note that formula (IV.16) does not directly provide the value of  $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\xi})$  but rather an equation on this quantity, since the polarization rate field  $\hat{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\xi})$  in the right-hand side depends upon  $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\xi})$ , through equation (IV.14) plus the thermo-elasto-plastic constitutive law which relates  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{p}}(\mathbf{x})$  to  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x})$ . For each time increment, the problem is solved iteratively by alternating between the spatial domain for the solution of the constitutive equations (calculation of  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{p}}(\mathbf{x})$  from  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x})$ ), and the Fourier domain for the application of equation (IV.16). Note that this permits to solve only *local* equations in each domain. The case of an imposed macroscopic *stress* may be handled with an additional step, aimed at computing the corresponding macroscopic strain rate tensor (Moulinec et Suquet, 1998a).

*The facilities at the HPCaVe Center at Sorbonne Université are used for these calculations.*

### IV.4.2 Microstructure evolution

#### Preliminary considerations

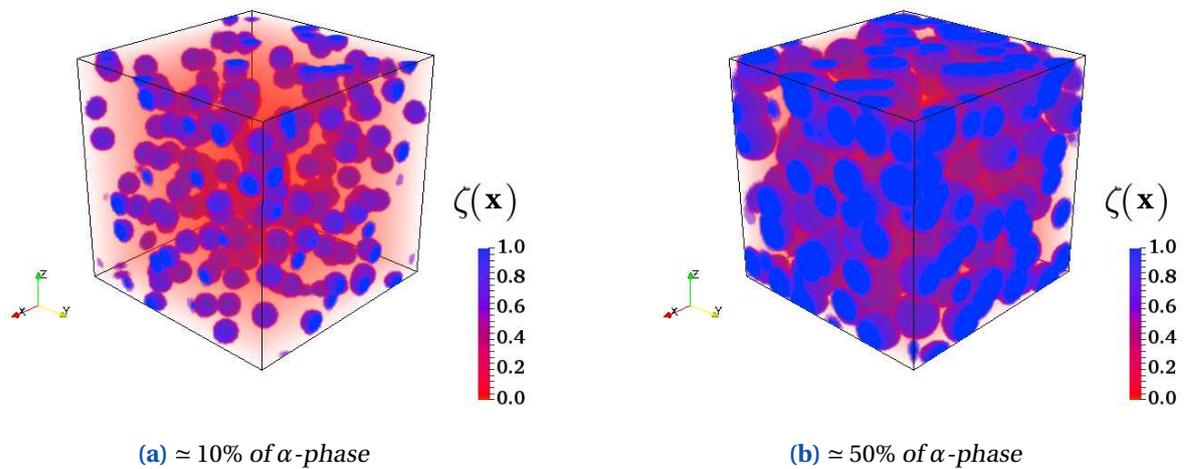
Two important preliminary remarks are in order. First, in all numerical simulations discussed below, the sequence of successive configurations of the two phases, defining the geometric evolution of the transformation, will result from some pre-specified rules *independent of the internal stresses and plastic strains generated by the external load and the transformation*. In other words, the transformation will be considered to be governed by *given* external factors, but not by the *a priori* unknown mechanical fields.

Second, the numerical model depicted below will involve no absolute characteristic lengthscale (all

distances could be multiplied by a given, fixed factor without changing the results). This means disregarding, among other things, the initial “critical” nucleus size introduced by classical nucleation theory from thermodynamic considerations.

Both of these approximations will be justified *a posteriori* by the observation that transformation plasticity is essentially independent of the details of the geometric modelling of the transformation.

To model the  $\gamma \rightarrow \alpha$  transformation in successive time-steps, we “switch”, between some discretized instant  $t$  and the next one  $t + \Delta t$ , a certain number of pre-specified voxels from the  $\gamma$ - to the  $\alpha$ -phase; in practice this means changing the values of  $\beta(\mathbf{x})$  and  $\sigma_\gamma(\mathbf{x})$  at these points from those of the  $\gamma$ -phase to those of the  $\alpha$ -phase. The voxels thus “transformed” at each step are selected in such a way as to simulate the nucleation and growth of a set of *spherical* nuclei. Figure IV.2 illustrates such a process by showing the geometrical distribution of the two phases at two different stages of the transformation, in a typical simulation.



**Figure IV.2** – Spherical growth of  $\alpha$ -phase nuclei. (For the explanation of values of  $\zeta(\mathbf{x})$  differing from 0 and 1, see section IV.4.2).

### The local nucleation and growth processes

During any time-step  $[t, t + \Delta t]$ , the transformation may proceed in two ways :

- Through *growth* of pre-existing  $\alpha$ -phase nuclei, *via* superposition of an external concentric layer with a certain thickness. The value of this thickness is set here to the size of a voxel.
- Through *nucleation* of new nuclei of  $\alpha$ -phase, chosen at random within the entire un-transformed zone of the elementary cell considered. Again, the initial size of new nuclei is set to the size of a voxel.

Of course, various combinations of these two mechanisms are possible.

#### Remarks.

1. Voxels potentially available for transformation, be it through growth of pre-existing nuclei or nucleation of new ones, are rejected for transformation if they happen to fall within the already transformed region.
2. Growing nuclei of  $\alpha$ -phase are allowed to overlap (this means accounting, albeit in a rough way, for coalescence of nuclei). This occurs more and more in time, as a natural result of the growth process; see Figure IV.2 which compares the geometric configurations of the phases at two distinct stages of the transformation, in a typical simulation.

### Kinetic model of nucleation and growth

The following features of the modelling of nucleation and growth processes are noteworthy :

- Nucleation occurs randomly and homogeneously within the entire un-transformed part of the material (*homogeneous nucleation*).
- The rate of growth of nuclei is the same in all directions (spherical growth).
- The radial rate of growth of nuclei is constant during the entire transformation.

With these three assumptions, the overall transformed volume fraction  $f = \langle \zeta(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega}$  should follow the Johnson-Mehl-Avrami-Kolmogorov (JMAK) equation for solid-state transformations at constant temperature :

$$f(t) = 1 - \exp(-K t^n) \quad (\text{IV.17})$$

where the symbol  $t$  denotes time, the parameter  $K$  governs the overall growth rate, and the exponent  $n$  is connected to the *type* of nucleation :

- For *instantaneous nucleation* (IN), all nuclei are “activated” (transformed from the  $\gamma$ -phase to the  $\alpha$ -phase) right from the beginning of the transformation ; in other words, the nucleation and growth processes are disjoint in time : nucleation occurs first without any growth, then growth takes over without any further nucleation. The value of the JMAK exponent  $n$  is then 3.
- For *sporadic nucleation* (SN), new  $\alpha$ -phase nuclei are “activated” throughout the transformation. This means nucleation and growth occur simultaneously throughout the entire transformation. The value of  $n$  is then 4.

It is worth noting here that the question of whether the transformations simulated here (following the geometric rules expounded above) do or do not obey a JMAK-type kinetic equation, is in some sense irrelevant in the present context. Indeed, since the constitutive laws adopted for the individual phases are independent of time, what really matters is only the succession of geometric configurations of the two phases, not the instants at which these configurations occur. However the verification that the transformations simulated as explained above do obey a JMAK-type kinetic equation is useful for two purposes : (i) validate the physical soundness of the numerical procedure proposed ; (ii) show that such a procedure would remain reasonable for future studies incorporating time-dependent constitutive laws of the phases.

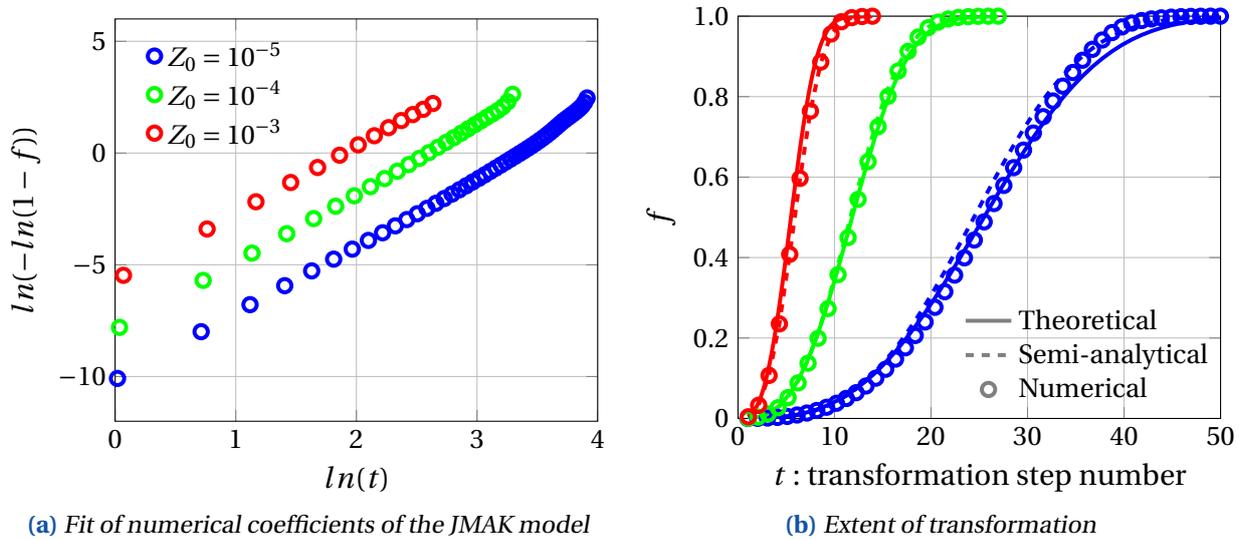
Before discussing this topic in detail, it is necessary to introduce some conventions and notations :

- The side of the cubical elementary cell considered is taken to be of unit length. Thus the volume of the cell is unity.
- The length  $\Delta t$  of each time-step (corresponding to one transformation step) is also considered to be unity. The “time”  $t$  is thus identical to the number of successive transformation steps.
- The total number of voxels in the cell is denoted  $v^3$  (there are thus  $v$  voxels in each direction).
- The number of “ $\alpha$ -phase voxels” appearing instantaneously at the beginning of the transformation is denoted  $N_0$ . The “density of instantaneous nucleation” is  $Z_0 \equiv N_0/v^3$  ; it represents the volume fraction of voxels transformed instantaneously.
- The number of new  $\alpha$ -phase voxels generated by nucleation at each transformation step is denoted  $\dot{N}_0$ .<sup>1</sup> The “density of sporadic nucleation” is  $\dot{Z}_0 \equiv \dot{N}_0/v^3$  ; it represents the volume fraction of newly nucleated voxels at each step.
- The “radial growth rate” of the nuclei is denoted  $G$  ; since at each transformation step, of duration  $\Delta t = 1$ , one voxel, of size  $1/v$ , is added to each nucleus in the radial direction, the value of this growth rate is  $G = 1/v$ .

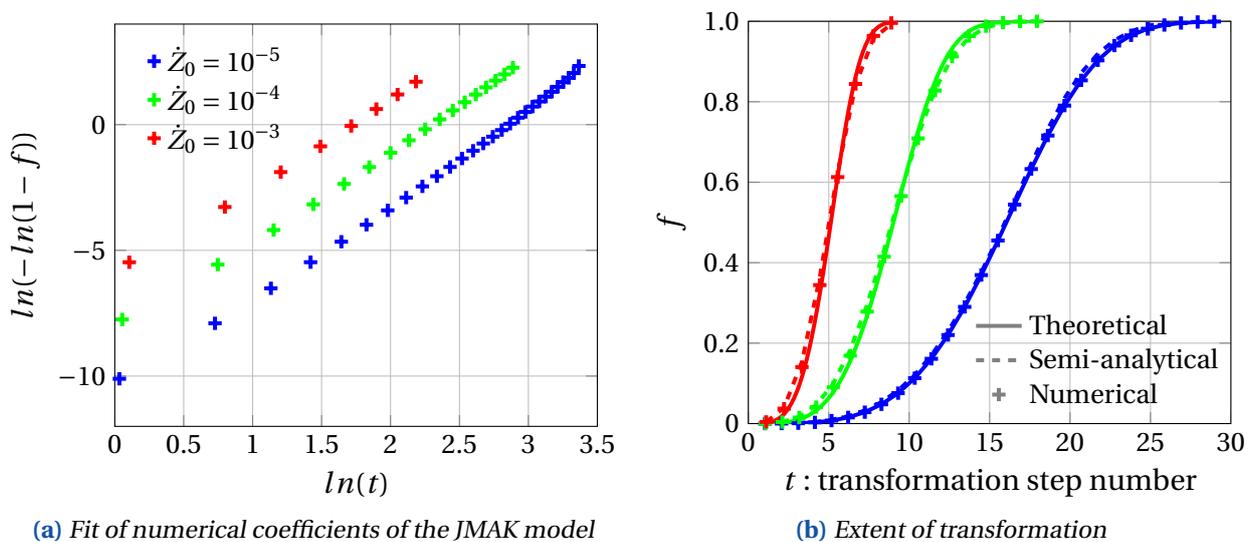
1. In this definition one does not account for the fact that some of these voxels must in fact be eliminated, because they happen to fall within the already transformed region ; see section IV.4.2.

Numerical simulations were performed, with the values  $N_0 = 10, 10^2, 10^3$  and  $\dot{N}_0 = 10, 10^2, 10^3$ , in a cell discretized with  $\nu^3 = 100^3$  voxels; therefore the values of the instantaneous nucleation density were  $Z_0 = 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}$ , and those of the sporadic nucleation density,  $\dot{Z}_0 = 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}$ , respectively.

Numerical plots of  $\ln(-\ln(1-f))$  versus  $\ln(t)$ , shown in Figure IV.3(a) and Figure IV.4(a), were used to determine values of the JMAK parameters  $n$  and  $K$  matching best the simulated transformations. Tableau IV.1 shows the results obtained and compares them to the theoretical values. As can be seen, the simulations lead to numerical JMAK parameters  $n$  and  $K$  consistent with the theory for both types of nucleation, instantaneous and sporadic. (The theoretical  $K$  value is equal to  $4.19 \times 10^{-5}$ ,  $4.19 \times 10^{-4}$ ,  $4.19 \times 10^{-3}$  and  $1.0472 \times 10^{-5}$ ,  $1.0472 \times 10^{-4}$ ,  $1.0472 \times 10^{-3}$  for instantaneous and sporadic nucleation respectively, with  $Z_0$  or  $\dot{Z}_0$  equal to  $10^{-5}$ ,  $10^{-4}$ ,  $10^{-3}$  respectively). The slight discrepancies in Tableau IV.1 may be due to the representation of the microstructure in the simulations, which does not exactly match the theoretical hypotheses (since it is periodic and discrete, instead of infinite and continuous).



**Figure IV.3** – Comparison between the predictions of the JMAK model and the results of instantaneous nucleation simulations, for three values of the instantaneous nucleation density  $Z_0$  (IN).



**Figure IV.4** – Comparison between the predictions of the JMAK model and the results of sporadic nucleation simulations, for three values of the sporadic nucleation density  $\dot{Z}_0$  (SN).

	IN		SN	
	$n$	$K$	$n$	$K$
Theoretical	3	$4\pi N_0 G^3/3$	4	$\pi \dot{N}_0 G^3/3$
Num. $N_0, \dot{N}_0=10$	3.18	$2.67 \times 10^{-5}$	3.78	$2.18 \times 10^{-5}$
Num. $N_0, \dot{N}_0=100$	3.13	$3.15 \times 10^{-4}$	3.58	$2.72 \times 10^{-4}$
Num. $N_0, \dot{N}_0=1000$	3.00	$3.40 \times 10^{-3}$	3.65	$2.60 \times 10^{-3}$

**Tableau IV.1** – Values of JMAK parameters  $n$  and  $K$ .

Figure IV.3(b) and Figure IV.4(b) illustrate the excellent agreement obtained for the transformation kinetics. These figures display three types of curves : (i) “Numerical”, showing the simulated kinetics ; (ii) “Theoretical”, showing the kinetics corresponding to the JMAK model, with the theoretical parameters shown in Tableau IV.1 ; (iii) “Semi-analytical”, showing the kinetics corresponding to the JMAK model, but now with the parameters  $n$  and  $K$  determined from the simulations, again shown in Tableau IV.1.

### Time sub-stepping

In fact, in what precedes the description of the numerical procedure has been slightly simplified, for clarity of the presentation. But in reality, transforming each voxel from the  $\gamma$ -phase to the  $\alpha$ -phase in just one time-step, as suggested above, reveals impossible, because the large and brutal variation of the thermal strain in the region transformed between times  $t$  and  $t + \Delta t$  makes convergence of the global iterations (aimed at solving the global nonlinear mechanical problem between these instants) impossible.

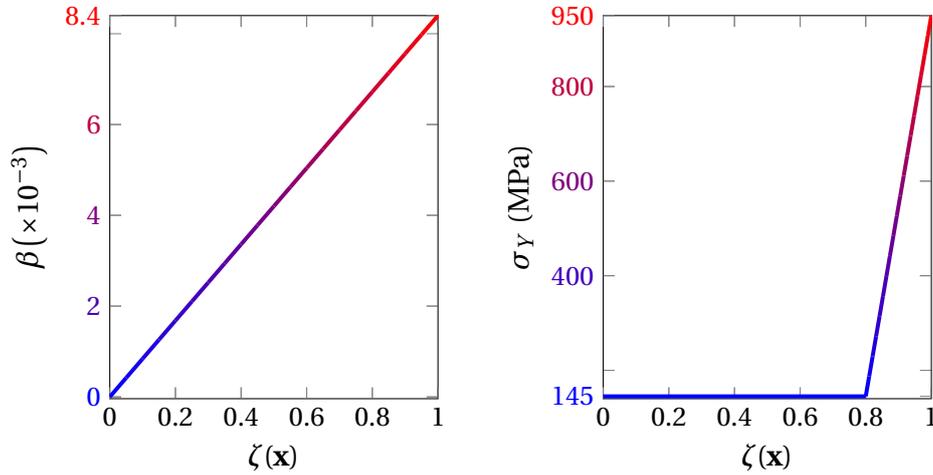
For this reason each time-step  $[t, t + \Delta t]$ , corresponding to a given transformation step, that is to transformation of a given region, is divided into a number of substeps ; in practice 5. During the time-interval  $[t, t + \Delta t]$ , the region to be transformed is in fact transformed *gradually*, using the substeps to do so : in this region, the function  $\zeta(\mathbf{x})$  is artificially ascribed the successive values 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1 instead of just 0 and 1 ; and the parameter  $\beta(\mathbf{x})$  and the yield stress  $\sigma_Y(\mathbf{x})$  are also varied gradually, according to the value of  $\zeta(\mathbf{x})$ . (Of course, in the complementary region not undergoing any transformation during the time-interval  $[t, t + \Delta t]$ ,  $\beta(\mathbf{x})$  and  $\sigma_Y(\mathbf{x})$  remain constant at each point throughout this time-interval).

The parameter  $\beta(\mathbf{x})$  may be taken in a natural way as a linear function of  $\zeta(\mathbf{x})$ . However, how the yield stress  $\sigma_Y(\mathbf{x})$  should be considered to vary with  $\zeta(\mathbf{x})$  is a less trivial matter. Indeed numerical experience shows that the transformation plastic strain rate obtained after a complete transformation depends, to some extent, on the way  $\sigma_Y(\mathbf{x})$  is considered to vary with  $\zeta(\mathbf{x})$  ; see Appendix IV.9.1 for some details on this topic. In all simulations presented below (except a few ones discussed in Appendix IV.9.1), the yield stress has been assumed to retain the value corresponding to the mother,  $\gamma$ -phase until  $\zeta(\mathbf{x})$  reaches the value 0.8 ; and then to evolve linearly toward the value corresponding to the daughter,  $\alpha$ -phase over the interval  $\zeta(\mathbf{x}) \in [0.8, 1]$ . This evolution of the yield stress, which implies a low resistance to stresses during the major part of the transformation, seems reasonable since the motion of atoms during the structural change must make the material prone to yielding.

Figure IV.5 illustrates the evolutions thus assumed for both the parameter  $\beta(\mathbf{x})$  and the yield stress  $\sigma_Y(\mathbf{x})$  at a given voxel, as functions of the substeps of the time-step during which this voxel is transformed.

**Tableau IV.2** – Material properties (A508 steel).

	$E$ (GPa)	$\nu$	$\sigma_Y$ (MPa)	$\beta$	$(\zeta)$
$\gamma$ -phase	182	0.3	145	0	(0)
$\alpha$ -phase	182	0.3	950	0.0084	(1)

**Figure IV.5** – Evolutions of the thermal strain and yield stress during the transformation process.

### Thermomechanical properties of the phases

The transformation studied in all simulations discussed below is the martensitic transformation of the A533 steel. All thermal and mechanical properties are displayed in [Tableau IV.2](#).

### IV.4.3 Preliminary study of dispersion effects

Values of the transformation plastic strain after complete transformation obtained numerically are dispersed for various reasons. A preliminary study of dispersion effects, according to their origin, is therefore in order.

#### Effect of the realization of the microstructure

Different possible “realizations” of the random distribution of positions of nuclei lead to different transformation plastic strains after complete transformation. We therefore perform a study aimed at determining the number of realizations required to obtain an accurate (averaged) estimate of the transformation plastic strain. This is done in the special case of a *zero* applied macroscopic stress, in which the theoretical transformation plastic strain is known to be zero for spherical (isotropic) growth of nuclei; the total strain after complete transformation then reduces to that part arising from the volume change induced by the transformation,  $\frac{1}{3} \frac{\Delta V}{V} \mathbf{1}$  ([Leblond et al., 1989](#)).

Envisageable situations are too numerous to be all considered; we therefore decide to focus on the sole case of instantaneous nucleation (IN). FFT simulations are thus performed for instantaneous nucleation densities  $Z_0 = 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}$ . Seven realizations are considered for each density. [Figure IV.6](#) displays the histograms of the overall strain components in three orthogonal directions. (The results of individual

realizations are plotted in grey). As expected, the fluctuations of the overall strain arising from the fluctuations of the spatial distribution of nuclei decrease when the number of nuclei increases ; see [Figure IV.6](#) and [Tableau IV.3](#). Note also that when the density  $Z_0$  increases, the number of transformation steps decreases, which probably makes the simulations less representative.

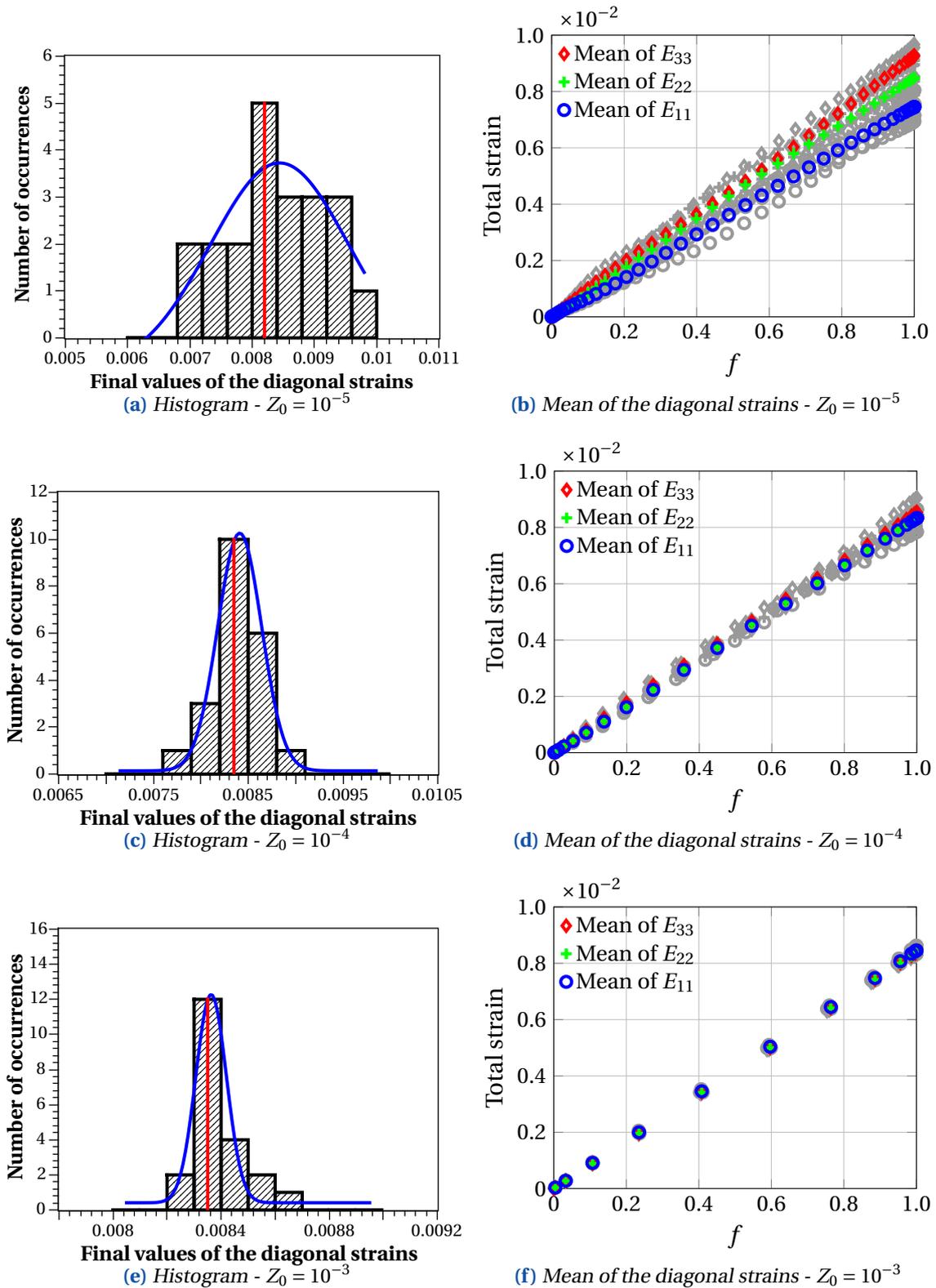
**Tableau IV.3** – Statistics of the histograms of the overall strain shown in [Figure IV.6](#) : Mean ( $M$ ) - Standard deviation ( $SD$ ) - Coefficient of variation =  $SD/M$  ( $CV$ ).

	$Z_0 = 10^{-5}$	$Z_0 = 10^{-4}$	$Z_0 = 10^{-3}$
M	$8.4 \times 10^{-3}$	$8.4 \times 10^{-3}$	$8.4 \times 10^{-3}$
SD	$7.7 \times 10^{-4}$	$2.5 \times 10^{-4}$	$0.9 \times 10^{-4}$
CV	9.2%	3.0%	1.1%

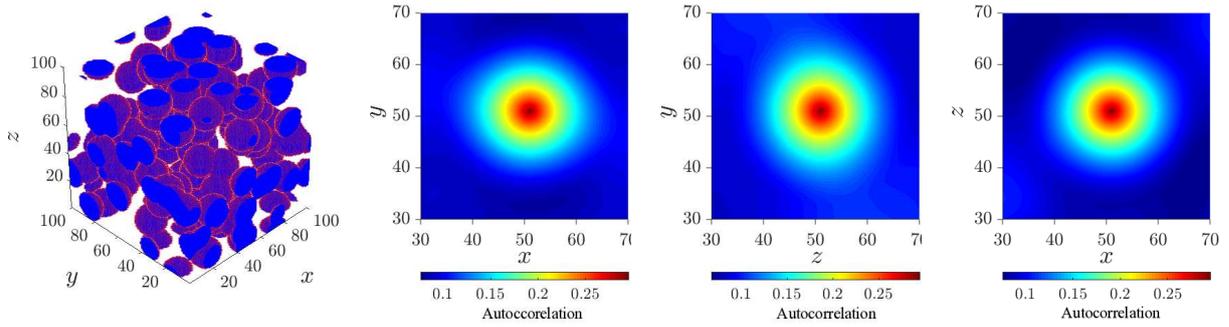
These results lead to the decision of performing, in each case considered, averages over 5 realizations of cells discretized with  $\nu^3 = 100^3$  voxels and containing  $N_0 = 100$  nuclei. For each realization, the overall isotropy of the microstructure is assessed by checking the quasi-spherical character of the autocorrelation function : see [Figure IV.7](#).<sup>2</sup>

---

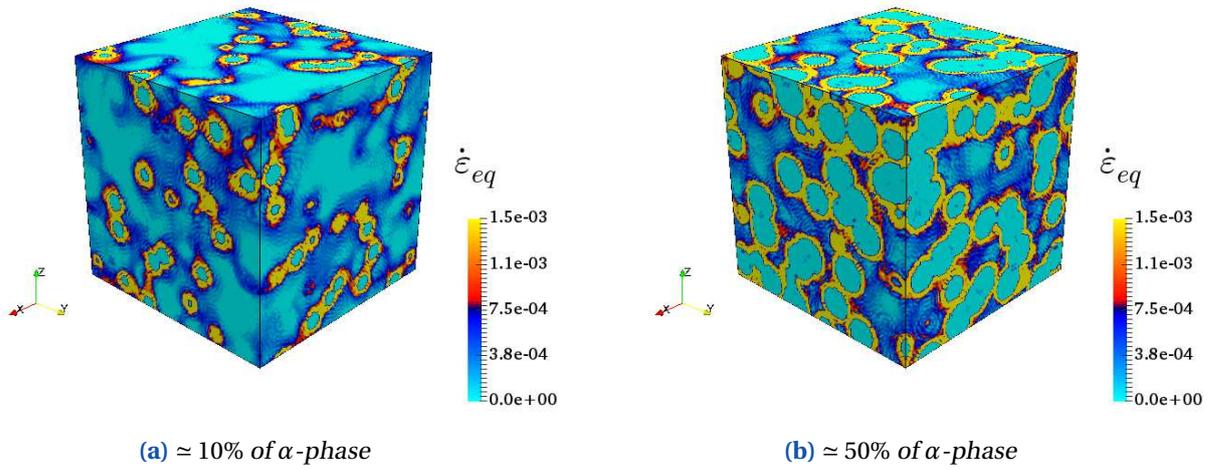
2. The autocorrelation technique calculates the similarity of an image with itself when gradually displaced in all directions. If the pattern of the autocorrelation function is spherical, the structure is globally isotropic.



**Figure IV.6** – Histograms of the diagonal components of the overall strain after complete transformation, and evolution of these components during the transformation, for various instantaneous nucleation densities  $Z_0$ . No macroscopic stress applied.



**Figure IV.7** – Autocorrelation function of an evolving microstructure at  $f = 30\%$ . Microstructure image and isovalues of the function in three orthogonal planes.

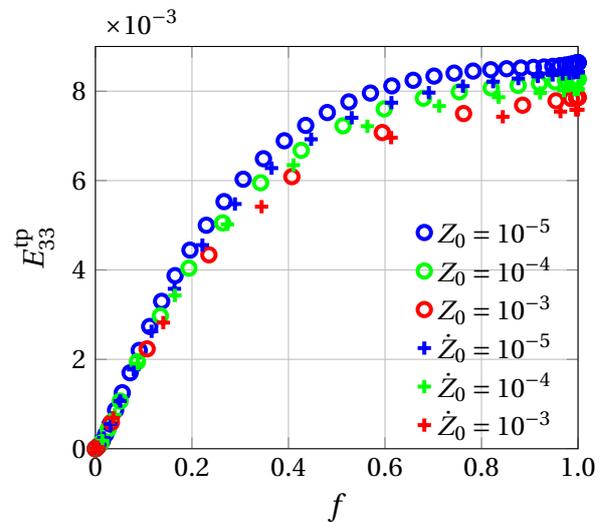


**Figure IV.8** – Distribution of the equivalent plastic strain rate within the austenitic phase during the transformation.

As a complement, [Figure IV.8](#) shows the distribution of the equivalent strain rate in the austenitic phase at two stages of the transformation. This figure emphasizes the effect of interactions between  $\alpha$ -phase nuclei upon strain heterogeneities in the surrounding  $\gamma$ -phase.

**Effect of the nature (instantaneous/sporadic) of nucleation**

A preliminary remark is that although a number of theoretical works were based on the hypothesis that no new nucleus appears once the growth of the daughter-phase has started (IN), see for instance ([Kempen et al., 2002](#)), some experimental works have shown that new nuclei continue to appear during the entire transformation (SN) : see notably the microtomographic studies of [Offer-](#)



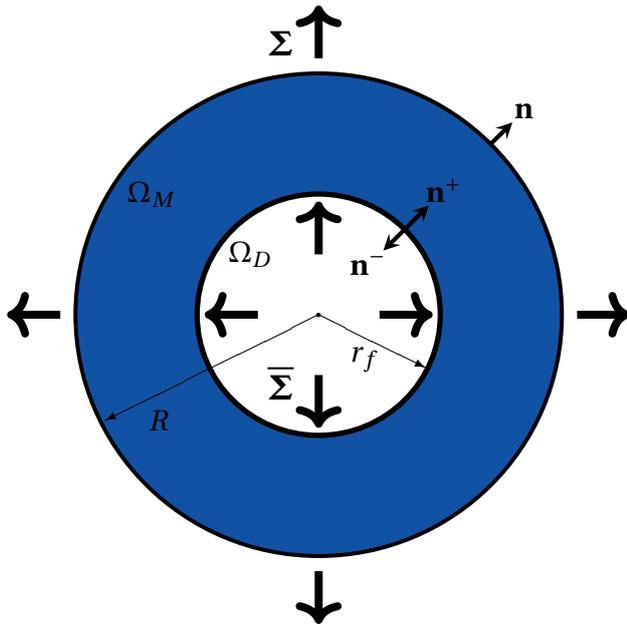
**Figure IV.9** – Comparison of transformation plastic strains with instantaneous (IN) and sporadic (SN) nucleation processes, for an applied stress of 80 MPa.

man *et al.* (2003) and (Offerman *et al.*, 2006). It is therefore necessary to envisage SN, in addition to IN. Figure IV.9 displays the evolutions of the transformation plastic strain versus the progress of the transformation, for both IN and SN, for various values of the instantaneous nucleation density ( $Z_0 = 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}$ ) and the sporadic nucleation density ( $\dot{Z}_0 = 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}$ ). In all cases an overall tensile stress of 80 MPa was applied on the cell in the direction  $x_3$ . One observes on this figure that neither the *value* of the instantaneous or sporadic nucleation density, nor the *nature* (instantaneous versus sporadic) nature of nucleation have an important influence upon the transformation plastic strain.

### Other sources of dispersion

Other dispersion effects are discussed in appendices : section IV.8 is devoted to the effect of the possible *heterogeneous* character of nucleation, and section IV.9 to that of certain parameters of the numerical scheme used to represent the transformation.

## IV.5 A summary of a limit-analysis-based theory of transformation plasticity



**Figure IV.10** – Microstructure considered for the limit-analysis-based approach of El Majaty *et al.* (2018).

conditions of homogeneous stress :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) & \text{on } \partial\Omega \quad (r = R) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}^-(\mathbf{x}) &= -\bar{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \mathbf{n}^-(\mathbf{x}) & \text{on } \partial\Omega_D \quad (r = r_f) \end{cases} \quad (\text{IV.19})$$

where  $\boldsymbol{\Sigma}$  represents the macroscopic applied stress and  $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}$  the internal loading stress. The components of the overall and internal strain tensors ( $\mathbf{E}, \bar{\mathbf{E}}$ ) are defined as

$$\begin{cases} E_{ij} = \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} (u_i n_j + u_j n_i) dS \\ \bar{E}_{ij} = \frac{1}{\text{vol}(\Omega_D)} \int_{\partial\Omega_D} \frac{1}{2} (u_i n_j^+ + u_j n_i^+) dS \end{cases} \quad (\text{IV.20})$$

where  $\mathbf{u}$  denotes the displacement. The virtual power  $\mathcal{P}_e$  of external forces then reads

$$\mathcal{P}_e = \text{vol}(\Omega) \Sigma_{ij} \dot{E}_{ij} + \text{vol}(\Omega_D) \bar{\Sigma}_{ij} \dot{\bar{E}}_{ij}. \quad (\text{IV.21})$$

An analogy with problems of ductile rupture is exploited, through use of trial velocity fields similar to those considered in studies of hollow spheres with *traction-free* inner boundaries (no internal loading). However, the incompressible trial displacement fields needed are more numerous here; indeed they must account for all possible values of the 6 kinematics parameters  $E_1, E_2, E_3$  and  $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3$  (eigenvalues of the tensors  $\mathbf{E}$  and  $\bar{\mathbf{E}}$ ) tied through the relation

$$E_1 + E_2 + E_3 = f (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3) \quad (\text{IV.22})$$

resulting from incompressibility of the  $\gamma$ -phase. Five trial velocity fields are therefore used: three borrowed from the work of Gurson (1977) and two Eshelby-type fields proposed by Monchiet *et al.* (2011) to refine Gurson's analysis.

The calculation of the overall plastic dissipation is then the same as in the work of Monchiet *et al.* (2011); but the outputs, that is the overall yield criterion and the "double" overall plastic flow rule providing the values of both strain rates  $\dot{\mathbf{E}}$  and  $\dot{\bar{\mathbf{E}}}$ , are different. The yield criterion reads:

$$\Phi(\Sigma, \bar{\Sigma}, f) = \left( \frac{T_{eq}}{\sigma_Y^M} \right)^2 + 2f \cosh \left( \frac{S_H}{\sigma_Y^M} \right) - 1 - f^2 = 0, \quad (\text{IV.23})$$

where  $\sigma_Y^M$  denotes the yield stress of the mother,  $\gamma$ -phase, and

$$\begin{cases} \mathbf{S} = \Sigma + \bar{\Sigma} \\ \mathbf{T} = \Sigma + f \bar{\Sigma} \\ S_H = \left[ \frac{1}{4} (\text{tr} \mathbf{S})^2 + \frac{2}{3g(f)} \mathbf{S}_{eq}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ g(f) = 1 - 4f \frac{(1-f^{2/3})^2}{1-f}. \end{cases} \quad (\text{IV.24})$$

Furthermore the double flow rule reads:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{E}} = \frac{\dot{\Lambda}}{(\sigma_Y^M)^2} \left\{ 3\mathbf{T}' + f \frac{\sinh(S_H/\sigma_Y^M)}{S_H/\sigma_Y^M} \left[ \frac{1}{2} (\text{tr} \mathbf{S}) \mathbf{1} + \frac{2}{g(f)} \mathbf{S}' \right] \right\} \\ \dot{\bar{\mathbf{E}}} = \frac{\dot{\Lambda}}{(\sigma_Y^M)^2} \left\{ 3\mathbf{T}' + \frac{\sinh(S_H/\sigma_Y^M)}{S_H/\sigma_Y^M} \left[ \frac{1}{2} (\text{tr} \mathbf{S}) \mathbf{1} + \frac{2}{g(f)} \mathbf{S}' \right] \right\} \end{cases} \quad (\text{IV.25})$$

where a prime applied to a tensor denotes its deviatoric part, and  $\dot{\Lambda} (\geq 0)$  is the overall plastic multiplier.

Application of this formalism to Greenwood-Johnson's mechanism (with the internal strain rate imposed by the growth of the nucleus of the rigid daughter  $\alpha$ -phase) leads to the following expression of the transformation plastic strain rate (El Majaty *et al.*, 2018):

$$\dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}} = \frac{4}{9} \frac{1}{\sigma_Y^M} \frac{\Delta V}{V} \frac{1-f}{f} \frac{1}{g(f)} \frac{\bar{X}/X - 1}{Y} \Sigma' \dot{f}, \quad (\text{IV.26})$$

where the quantities

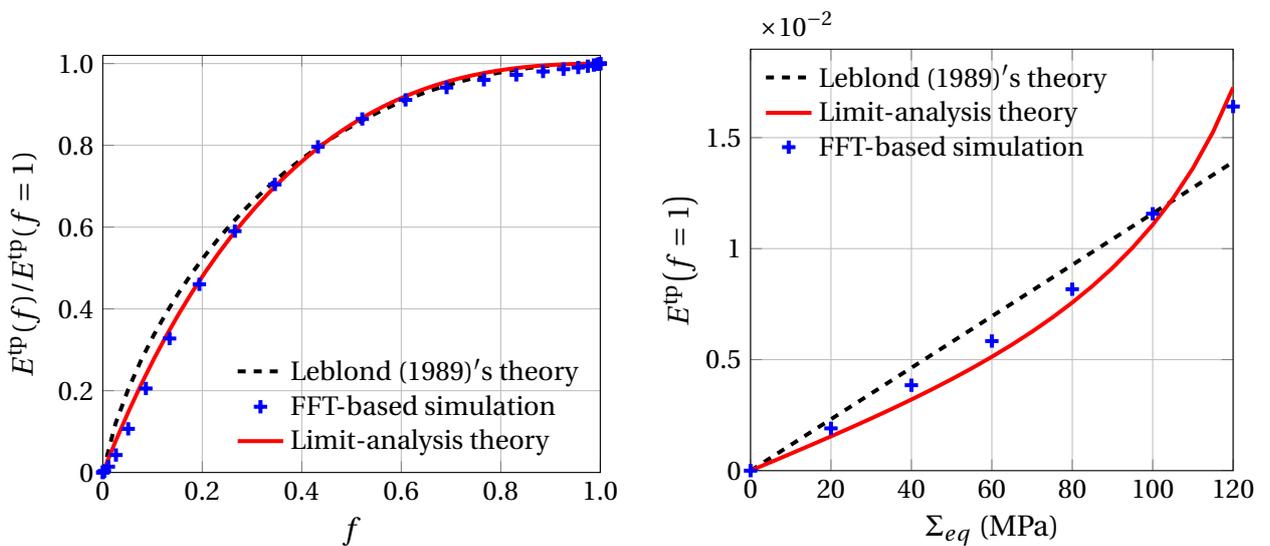
$$X = \frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_Y^M}, \quad \bar{X} = \frac{\bar{\Sigma}_{eq}}{\sigma_Y^M} \quad \text{and} \quad Y = \frac{1}{3} \frac{\text{tr} \mathbf{S}}{\sigma_Y^M}$$

may be calculated by combining the yield criterion and the flow rule.

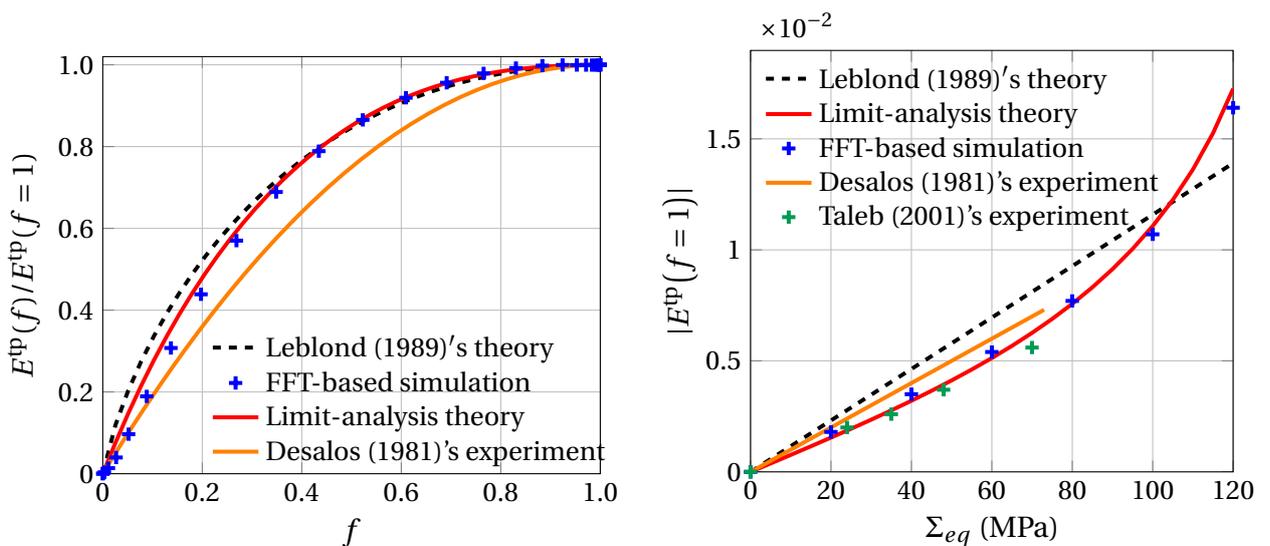
This new approach brings major improvements to [Leblond \*et al.\* \(1989\)](#)'s classical model of transformation plasticity. It notably suppresses the need for *ad hoc* assumptions, and permits to consider more general loading situations, with overall applied stresses comparable in magnitude to the yield stress of the weaker  $\gamma$ -phase.

## IV.6 Assessment of the model using FFT numerical simulations

We now present comparisons of FFT numerical results and predictions of the limit-analysis theory. With this aim in view, we consider : (i) the normalized transformation plastic strain,  $E^{\text{tp}}(f)/E^{\text{tp}}(f=1)$ , as a function of the volume fraction  $f$ , for an equivalent stress applied of 40 MPa; and (ii) the value of the transformation plastic strain after complete transformation,  $E^{\text{tp}}(f=1, \Sigma)$ , as a function of the applied stress.



(a) Evolution of the normalized transformation plastic strain (tension)      (b) Transformation plastic strain after full transformation (tension)



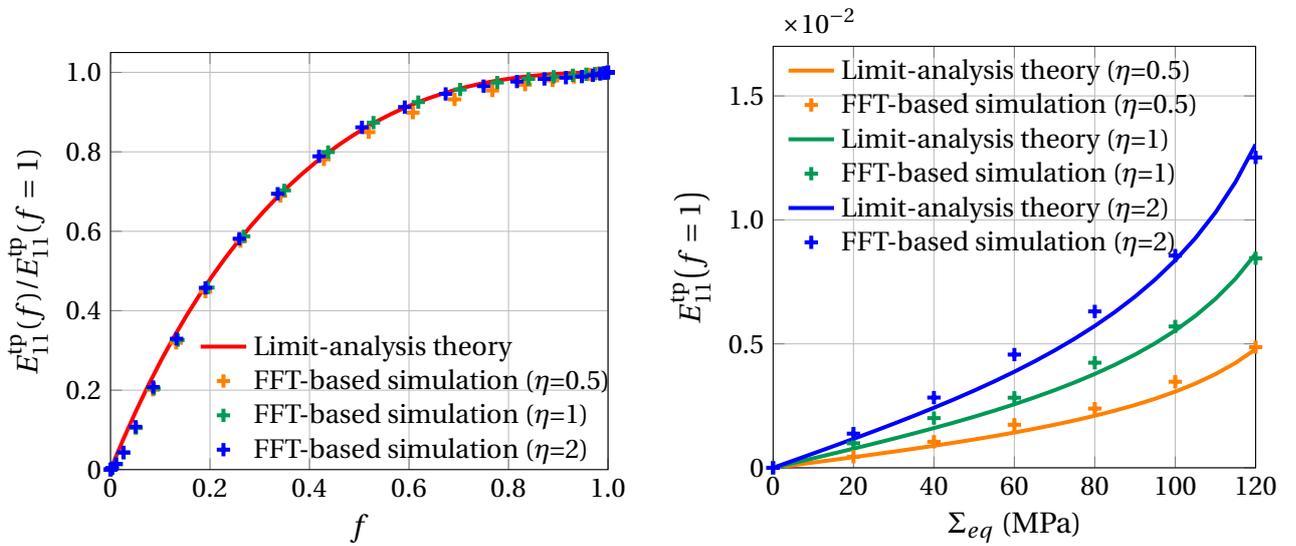
(c) Evolution of the normalized transformation plastic strain (compression)      (d) Transformation plastic strain after full transformation (compression)

**Figure IV.11** – Transformation plasticity for uniaxial loadings.

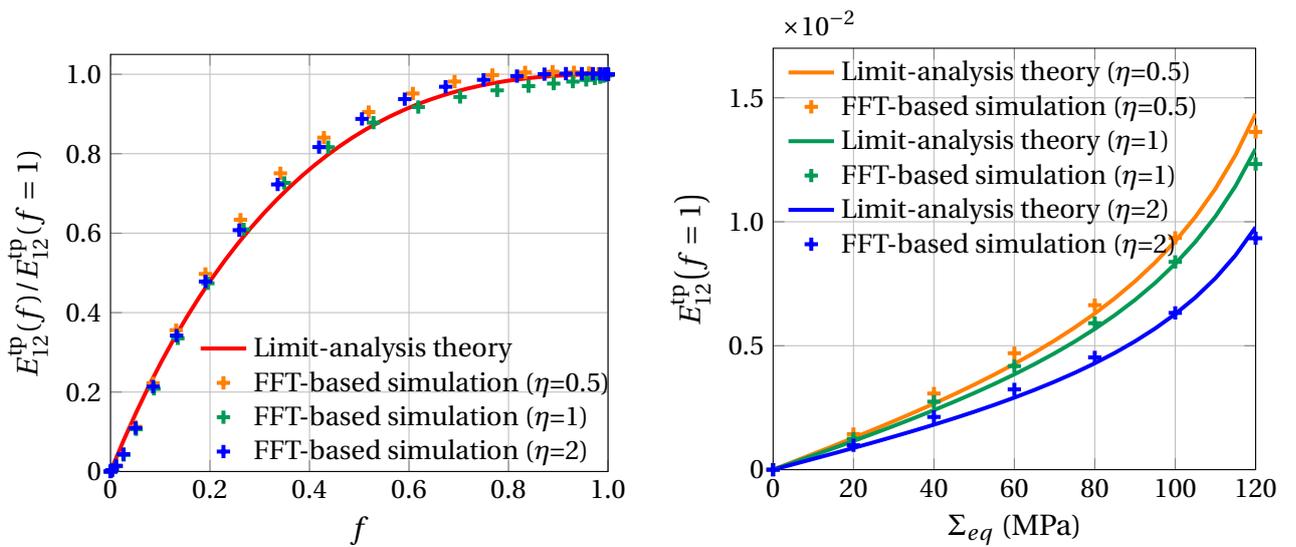
Figure IV.11 shows the results obtained for uniaxial loadings, for both tensile stresses (Figure IV.11(a) and Figure IV.11(b)) and compressive ones (Figure IV.11(c) and Figure IV.11(d)). The predictions of Leblond *et al.* (1989)'s original model are also displayed for reference; and Figure IV.11(c) and Figure IV.11(d) show in addition the old, but high-quality experimental results obtained by Desalos (1981) for compressive stresses not exceeding half of the yield stress of austenite, completed by those of Taleb *et al.* (2001) for the transformation plastic strain after complete transformation.

For further comparisons, we present the results of FFT simulations performed for multiaxial loadings. The form of the overall stress tensor applied corresponds to a combined tension/shear test :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma & \mathcal{T} & 0 \\ \mathcal{T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.27})$$



(a) Evolution of the normalized transformation plastic strain  $E_{11}^{\text{tp}}$  (b) Transformation plastic strain  $E_{11}^{\text{tp}}$  after full transformation



(c) Evolution of the normalized transformation plastic strain  $E_{12}^{\text{tp}}$  (d) Transformation plastic strain  $E_{12}^{\text{tp}}$  after full transformation

Figure IV.12 – Transformation plasticity for tension-shear tests, with different values of the ratio  $\eta = \Sigma/\mathcal{T}$ .

Various values of the ratio  $\eta = \Sigma/\mathcal{F}$  are considered,  $\eta = 0.5, 1, 2$ . FFT results are reported in [Figure IV.12](#) for the strain components  $E_{11}^{\text{tp}}$  and  $E_{12}^{\text{tp}}$ , together with the predictions of [El Majaty et al. \(2018\)](#)'s new theory. An almost perfect agreement is again obtained for all values of the  $\eta$  ratio in the whole stress range.

Several points are noteworthy here :

- The predictions of [El Majaty et al. \(2018\)](#)'s new model of transformation plasticity are in excellent agreement with the results of the FFT simulations, for both the evolution of the normalized transformation plastic strain, and the value of the transformation plastic strain after complete transformation. The new model reproduces in particular the complex dependence, resulting from the simulations, of the transformation plastic strain after complete transformation upon the stress applied (linear for stresses less than about half of the yield stress of austenite, nonlinear above this value).
- The results of the FFT simulations being taken as a reference, the predictions of [Leblond et al. \(1989\)](#)'s old theory are poorer than those of [El Majaty et al. \(2018\)](#)'s new one. For the evolution of the normalized transformation plastic strain, the old theory fails to predict a finite initial slope, as already noted in the Introduction. For the transformation plastic strain after complete transformation, it misses the nonlinear increase with the stress applied, for values of this stress exceeding half of the yield stress of austenite. Both of these points are captured by the new theory.
- The experimental results of [Desalos \(1981\)](#) for the evolution of the normalized transformation plastic strain agree slightly better with the predictions of [El Majaty et al. \(2018\)](#)'s new theory than with those of [Leblond et al. \(1989\)](#)'s old one. For the transformation plastic strain after complete transformation, the experimental results (for moderate stresses only) of [Desalos \(1981\)](#) do not permit to discriminate between the two theories, but those of [Taleb et al. \(2001\)](#) favour the new theory. (For large stresses comparable to the yield stress of austenite, no experiments have been performed for the material considered here; but the nonlinear increase of the transformation plastic strain after complete transformation with the stress applied is well-known experimentally for other materials, see for instance ([Greenwood et Johnson, 1965](#))).

## IV.7 Conclusion

In this article, we provided new results on transformation plasticity induced by ([Greenwood et Johnson, 1965](#))'s mechanism, by making use of an FFT-based numerical scheme. Elementary cells with a number of  $\alpha$ -phase nuclei growing spherically were considered, in order to take into account the effect of mechanical interactions between nuclei.

It was found that instantaneous and sporadic nucleation processes lead to basically similar results for the overall transformation plastic strain.

The numerical computations were used to assess, upon consideration of realistic microstructures, a recently proposed limit-analysis-based theory of transformation plasticity ([El Majaty et al., 2018](#)). It was shown that this new theory leads to accurate estimates of the transformation plasticity phenomenon over a wide range of applied stresses, for both uniaxial and multiaxial loadings. In particular, the nonlinear increase of the transformation plastic strain after complete transformation with the stress applied is very well predicted.

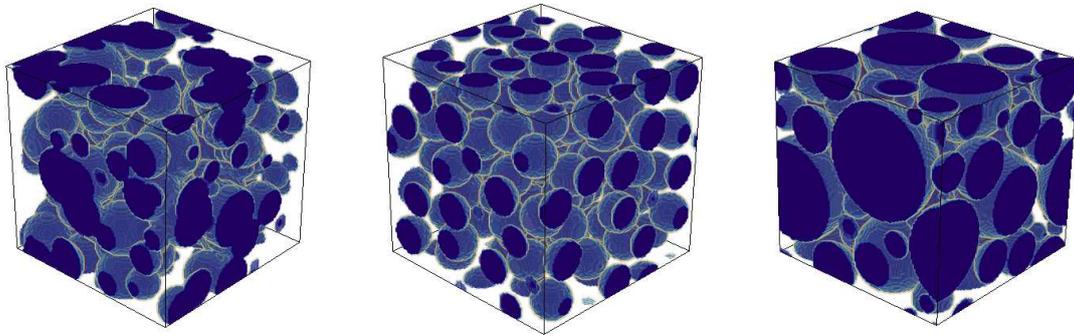
This work paves the way for further numerical studies of transformation plasticity, using [Moulinec et Suquet \(1998a\)](#)'s powerful FFT-based numerical scheme. One point of special interest would be the effect of the possible *spheroidal* growth of  $\alpha$ -phase nuclei, which may happen in austenitic (anisotropic) microstructures exhibiting segregation bands ([Desalos, 1981](#)). This type of growth is known to destroy the overall geometric isotropy of the material, and thus lead to interesting new effects, such as the non-vanishing of the transformation plastic strain in the absence of any external stress ([Desalos, 1981](#)). This feature will be

investigated in a future work.

## IV.8 Appendix A. Effect of homogeneous/heterogeneous nucleation

Some observations of the microstructure during the  $\gamma \rightarrow \alpha$  transformation have shown that most of the nuclei appear at grain boundaries (Offerman *et al.*, 2006). This phenomenon is named *heterogeneous* nucleation, in contrast to *homogeneous* nucleation for which nuclei appear totally randomly in space (stochastic events).

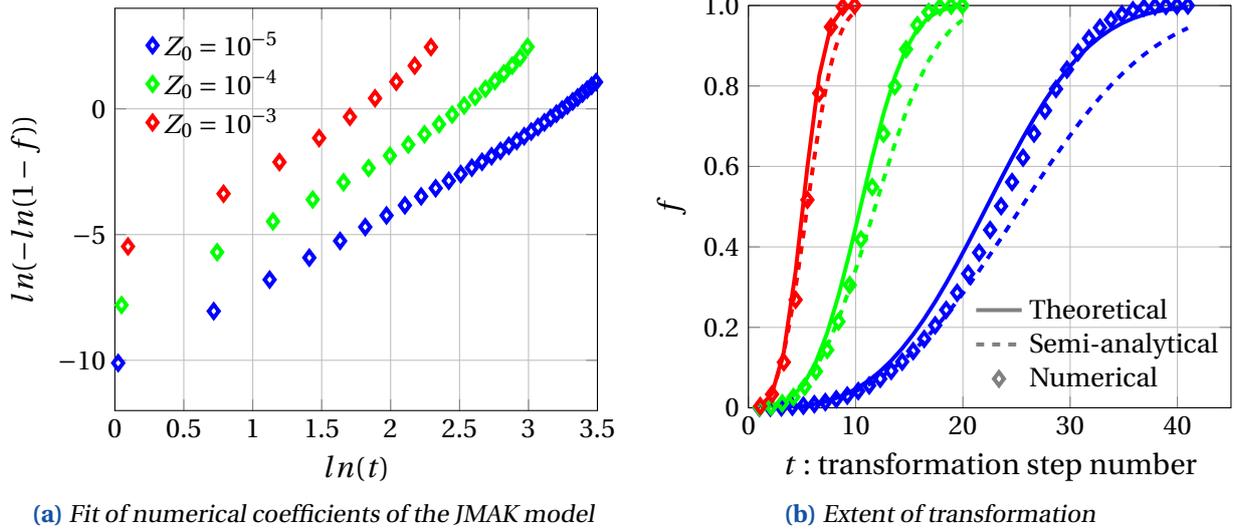
A natural consequence of this new type of nucleation is the increase of the *continuum percolation threshold*  $p_c$ , defined as the critical value of the fraction of  $\alpha$ -phase giving rise to a percolating cluster (there exists a continuous path between opposite faces of the cell, lying entirely within the  $\alpha$ -phase). The reason is that for heterogeneous nucleation, the centres of nuclei are more spaced on average than for homogeneous nucleation, so that the growing nuclei remain separated from each other for a longer time ; see Figure IV.13 which shows three different microstructures at the percolation threshold.



**Figure IV.13** – Various isotropic microstructures at the percolation threshold : (left) sporadic homogeneous nucleation,  $p_c \simeq 0.29$  ; (centre) instantaneous heterogeneous nucleation,  $p_c \simeq 35\%$  ; (right) sporadic heterogeneous nucleation  $p_c \simeq 60\%$ .

To simulate heterogeneous nucleation, some authors modelled the austenite microstructure with a Voronoï tessellation, and then took the vertices as nucleation sites (Quey *et al.*, 2011). The method employed here, which permits an easier control of the percolation threshold, is different. We first use a random sequential adsorption (RSA) algorithm to generate a microstructure with monodisperse or polydisperse non-overlapping nuclei, with a volume fraction of 35%. Then we take the centre of each nucleus as an instantaneous or latent site of nucleation activation.

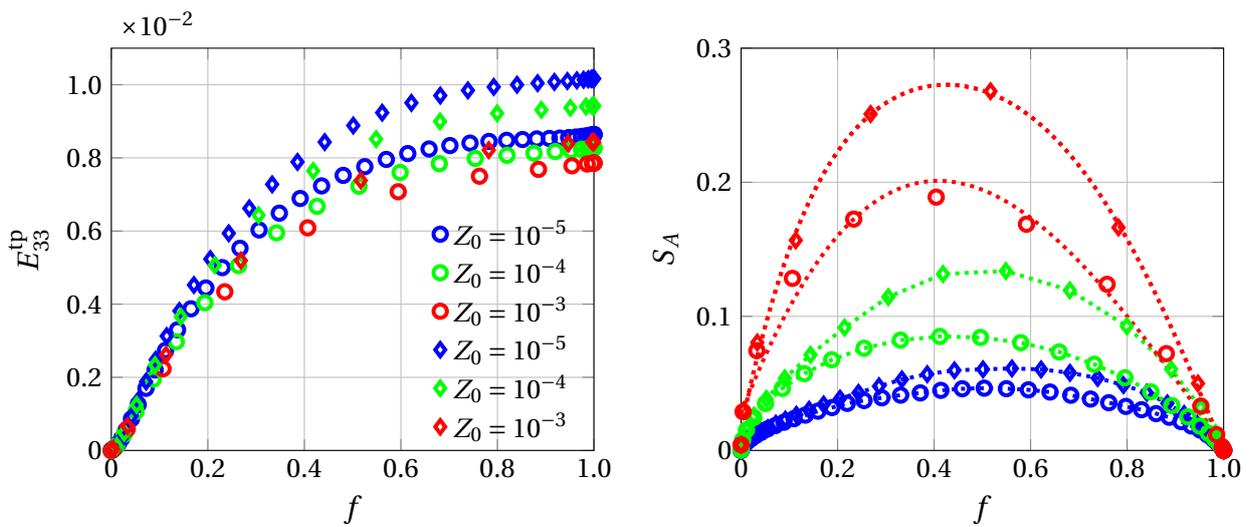
New FFT simulations are then performed for instantaneous heterogeneous nucleation, considering the same values of the instantaneous nucleation density as for homogeneous nucleation,  $Z_0 = 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}$ . The percolation threshold  $p_c$  is almost independent of the value of  $Z_0$  but is larger than for homogeneous nucleation ( $p_c = 0.35$  instead of 0.29).



**Figure IV.14** – Comparison between the JMAK model and instantaneous heterogeneous nucleation simulations based on a RSA algorithm, for three values of the instantaneous density of nucleation  $Z_0$ .

Figure IV.14 shows the results obtained for the transformation kinetics, as Figure IV.3 and Figure IV.4 did for homogeneous nucleation. One can observe that the kinetics no longer perfectly follow a JMAK-type model; this is certainly because the derivation of this model was based on the hypothesis of homogeneous nucleation, which is no longer respected here.

Figure IV.15(a) compares the results obtained for the transformation plastic strain, for instantaneous homogeneous and heterogeneous nucleation. One sees that the transformation plastic strain is slightly larger for heterogeneous nucleation than for homogeneous nucleation. This can be explained through the correlation which exists between the homogeneous or heterogeneous character of nucleation and the value of the “specific area”  $S_A$  of the interfacial surface, defined as the total number of voxels undergoing the transformation between two successive transformation steps, divided by the total number of voxels in the cell.



(a) Transformation plastic strain vs volume fraction of  $\alpha$ -phase

(b) Specific surface area  $S_A$  vs volume fraction of  $\alpha$ -phase

**Figure IV.15** – Comparison between instantaneous heterogeneous nucleation (symbols  $\diamond$ ) and instantaneous homogeneous nucleation (symbols  $o$ ), for an applied stress of 80 MPa.

Figure IV.15(b) illustrates this correlation : the specific area is systematically larger for heterogeneous nucleation than for homogeneous nucleation. Since transformation plasticity, in Greenwood et Johnson (1965)'s mechanism, is due to the plastic accommodation of the mother phase which surrounds the daughter phase, the larger the area of the interfacial surface, the larger this mechanism must be ; thus it is only to be expected that heterogeneous nucleation generate a larger transformation plastic strain.

## IV.9 Appendix B. Influence of some parameters of the numerical representation of the transformation

### IV.9.1 B.1 Yield stress variation during the transformation

It was explained in section IV.4.2 that each time-interval  $[t, t + \Delta t]$  corresponding to a given transformation step is divided into 5 substeps, the function  $\zeta(\mathbf{x})$  taking the successive values 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1 at each voxel  $\mathbf{x}$  undergoing the transformation over this time-interval. It was also mentioned that the yield stress  $\sigma_Y(\mathbf{x})$  at such a voxel is considered to vary from the value  $\sigma_Y^\gamma$  for the  $\gamma$ -phase to that,  $\sigma_Y^\alpha$  for the  $\alpha$ -phase, over the interval  $\zeta(\mathbf{x}) \in [0.8, 1]$ , that is at the *end* of the transformation rather than at its beginning or during the entire transformation.

The physical reason for doing so was explained above. Nevertheless, one may study the effect of the position of the interval of  $\zeta(\mathbf{x})$ -values over which  $\sigma_Y(\mathbf{x})$  is considered to vary from  $\sigma_Y^\gamma$  to  $\sigma_Y^\alpha$ . We thus decided to vary  $\sigma_Y(\mathbf{x})$  over various intervals  $[\zeta_Y, \zeta_Y + 0.2]$ , with  $\zeta_Y$  taking the values 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8. Figure IV.16 shows the evolution of the transformation plastic strain for the various values of  $\zeta_Y$  (for the same, single realization of the microstructure). The transformation plastic strain is somewhat smaller when the value of  $\zeta_Y$  is low ; this is natural since the zone transformed becomes harder earlier then.

### IV.9.2 B.2 Thickness of the transforming layer

It was mentioned in section IV.4.2 that each spherical nucleus of  $\alpha$ -phase is considered to increase by one voxel in the radial direction at each transformation step ; this defines a "radial growth rate"  $G = 1/\nu^3$  in an elementary cell containing  $\nu^3$  voxels (see section IV.4.2).

One may investigate the effect of the number of voxels added in the radial direction to each nucleus at each transformation step. This is equivalent to examining the influence of the thickness of the transforming layer, or in other terms that of the number of transformation steps used to discretize the full transformation of the cell. We did so by performing three simulations with 1, 2 and 3 voxels added in the radial direction per transformation step, corresponding to radial growth rates  $G = 1/\nu^3, 2/\nu^3, 3/\nu^3$ , in a cell containing  $\nu^3 = 100^3$  voxels.

Figure IV.17 shows the results obtained for the transformation kinetics. Apart from the trivial quicker evolution of the fraction  $f$  of daughter-phase resulting from the increase of  $G$ , these results show little

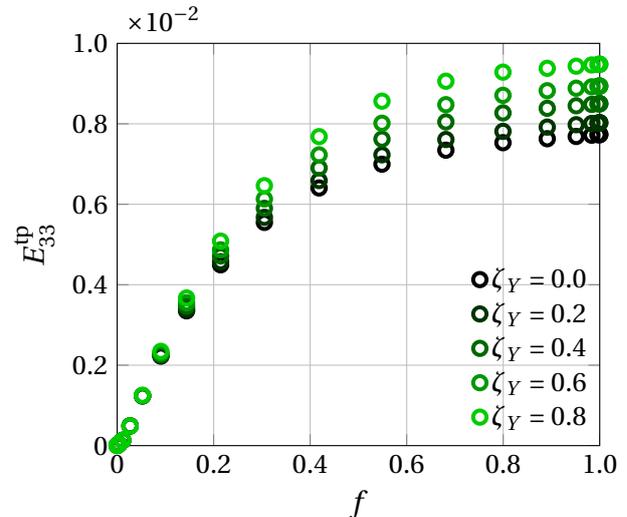
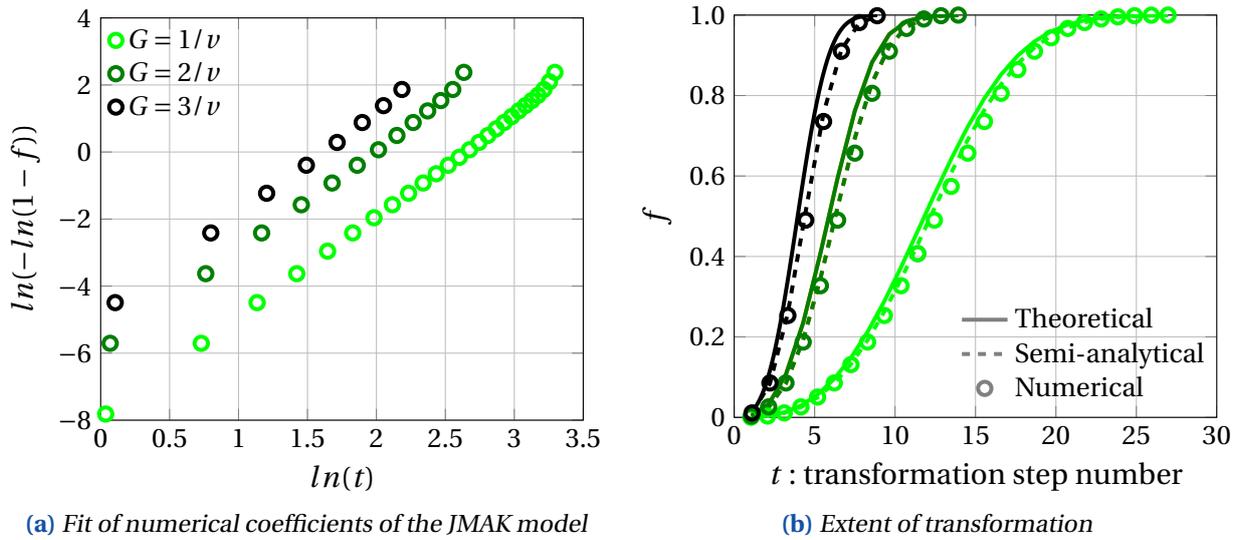


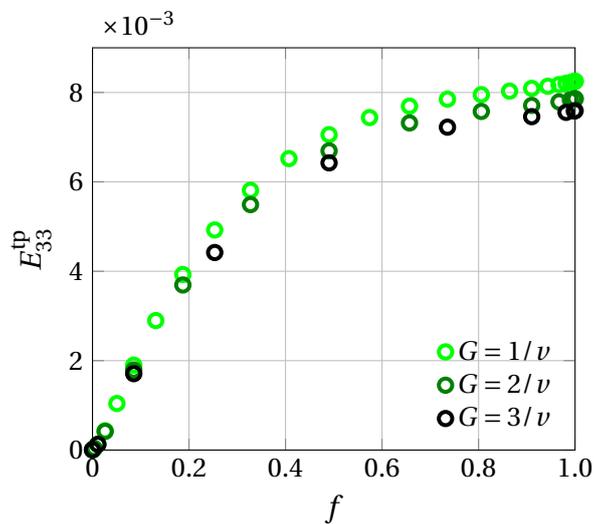
Figure IV.16 – Comparison of transformation plastic strains with different evolutions of the yield stress during the transformation, for an applied stress of 80 MPa. Instantaneous heterogeneous nucleation.

qualitative influence of this parameter.



**Figure IV.17** – Comparison between the JMAK model and instantaneous homogeneous nucleation simulations, for different radial growth rates  $G$ .

Figure IV.18 illustrates the results obtained for transformation plasticity (for the same, single realization of the microstructure). Again, the influence of the value of the radial growth  $G$  is quite small. Figure IV.17 and Figure IV.18 thus lead to the conclusion that the number of transformation steps corresponding to the value  $G = 1/v$  is sufficient to get converged, meaningful results for both the transformation kinetics and transformation plasticity.



**Figure IV.18** – Comparison of transformation plastic strains for different radial growth rates  $G$ , for an applied stress of 80 MPa. Instantaneous homogeneous nucleation.





## **Troisième partie**

# **Étude pour des germes sphéroïdaux**



---

## Approche renouvelée de la plasticité de transformation due au mécanisme de Greenwood-Johnson : Cas de croissance sphéroïdale des germes

---

*Cette partie étend le nouveau modèle analytique de la plasticité de transformation, établi au chapitre III pour le cas de croissance de germes sphériques, à celui de sphéroïdes allongés. Le traitement analytique est de nouveau construit à l'aide des outils de l'analyse limite et de l'homogénéisation. Dans le cas de chargements axisymétriques, un champ cinématiquement admissible supplémentaire de Monchiet et al. (2014), adapté aux cavités sphéroïdales, est repris. Le critère obtenu et la loi d'écoulement associée sont ensuite utilisés pour calculer le taux de déformation plastique de transformation. Une extension heuristique du modèle pour des chargements arbitraires est proposée.*

### Sommaire

---

<b>V.1 Généralités . . . . .</b>	<b>93</b>
V.1.1 Motivation . . . . .	93
V.1.2 Généralités géométriques . . . . .	95
V.1.3 Généralités mécaniques . . . . .	99
<b>V.2 Analyse-limite d'un sphéroïde allongé contenant une cavité sphéroïdale confocale et soumis à des chargements externe et interne . . . . .</b>	<b>101</b>
V.2.1 Choix des champs de déplacements tests . . . . .	102
V.2.2 Calcul des paramètres cinématiques et de chargement . . . . .	103
V.2.3 Dissipation plastique . . . . .	105
V.2.4 Critère de plasticité . . . . .	110
V.2.5 Loi d'écoulement plastique . . . . .	113
<b>V.3 Application à la plasticité de transformation . . . . .</b>	<b>114</b>
V.3.1 Préliminaires . . . . .	114

---

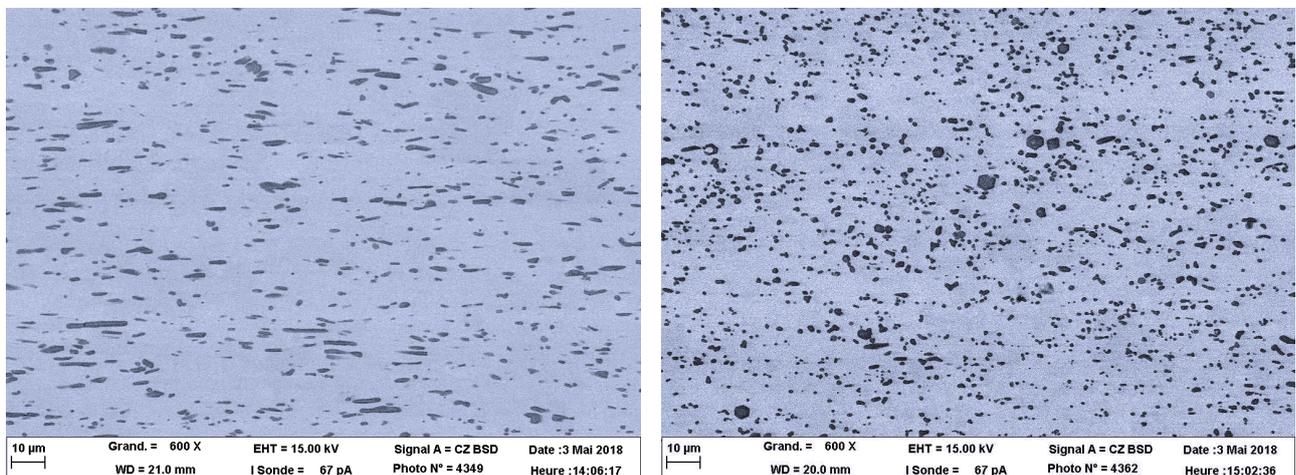
V.3.2	Cas de contraintes nulles ( $\Sigma = 0$ ) . . . . .	118
V.3.3	Cas de contraintes arbitraires . . . . .	121

---

## V.1 Généralités

La nouvelle approche par analyse limite et homogénéisation de la plasticité de transformation, pour des germes de phase fille croissant suivant une géométrie sphérique, a été traitée au [chapitre III](#) : “A novel treatment of Greenwood-Johnson’s mechanism of transformation plasticity - Case of spherical growth of nuclei of daughter-phase”. Dans cette analyse le problème à résoudre présentait une analogie avec celui traité dans le travail de [Gurson \(1977\)](#), dédié au comportement des solides ductiles poreux contenant des cavités sphériques.

Cependant, les morphologies de croissance (de cavités ou de germes) rencontrées dans les matériaux réels sont souvent non sphériques, étant la conséquence de certains procédés industriels. À titre d’exemple, lors de la fabrication de tôles laminées constituées de matériaux composites ductiles à matrice métallique, une élévation des particules composites favorise la croissance de cavités allongées dans cette même direction lors de l’endommagement ([Shen et al., 2017](#) ; [Vincent et al., 2014](#)). Ceci est illustré sur la [Figure V.1](#) (figures tirées du poster : “A homogenization-based damage model for ductile metal-matrix composites” par K. DORHMI ; lors du Workshop : “Scientific symposium in honor of Jean-Baptiste LEBLOND”, 2019).



(a) Dans un plan contenant la direction du laminage

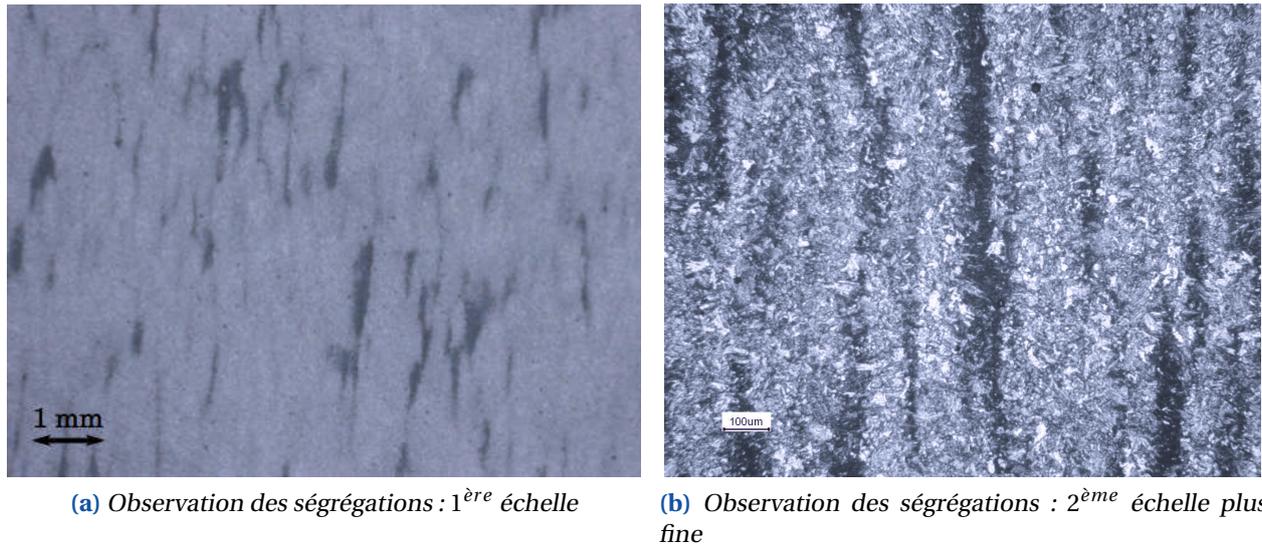
(b) Dans un plan perpendiculaire à la direction du laminage

**Figure V.1** – Microstructure d’un matériau composite à matrice métallique  $FeTiB_2$  (K. Dorhmi, 2019).

### V.1.1 Motivation

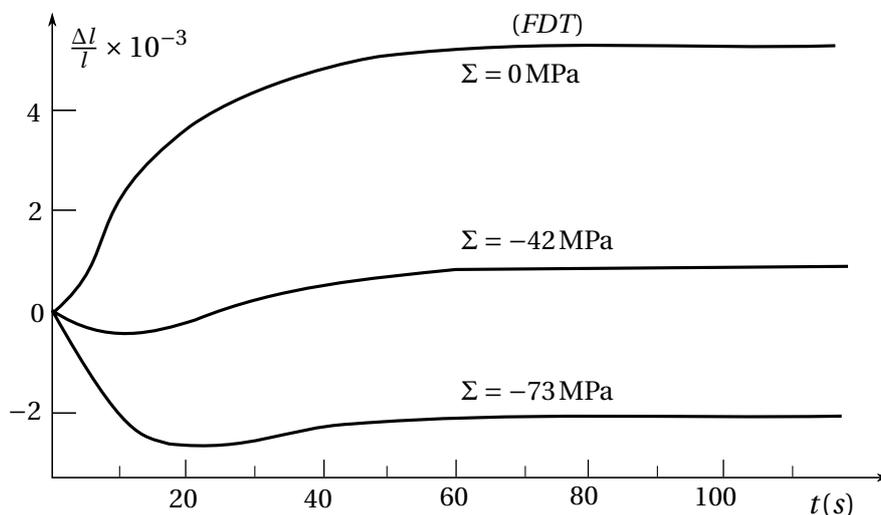
Dans le contexte de la plasticité de transformation, la croissance non-sphérique des germes est très possible. En effet, lors des procédés de laminage, les ségrégations sont allongées dans la direction du laminage sous forme de bandes parallèles, comme le montre la [Figure V.2](#). Ultérieurement, lors des transformations de phase au refroidissement, les germes de phase ferrite  $\alpha$  sont très probablement contraints à croître entre les bandes ségréguées ne se transformant que plus tard, prenant ainsi un aspect de forme allongé dans la direction du laminage, puisque les zones ségréguées se comportant comme des zones en retard de transformation ([Desalos, 1981](#)).

L’intérêt de l’étude des effets de la possible croissance non-sphérique des germes de phase fille réside dans la prise en compte de l’anisotropie géométrique globale du matériau, connue pour entraîner une forte anisotropie de la plasticité de transformation (cf. [Côté, 2007](#) ; [Desalos, 1981](#), parmi d’autres).



**Figure V.2** – Acier 18MND5 issu d'une tôle laminée : coupe dans le plan de laminage après attaque au Nital (Andrieu, 2013)

En effet, dans certains cas, la déformation plastique de transformation n'est plus nulle en l'absence de contrainte externe appliquée (cf. chapitre II), comme l'a mis en évidence l'essai effectué par Desalos (1981), illustré sur la Figure V.3. Sur cette figure, décrivant l'élongation de l'éprouvette en fonction du temps, se manifeste sous une contrainte appliquée nulle (courbe FDT : Free Dilatometric Test) une déformation plastique importante, due exclusivement à la transformation. Desalos (1981) interprète cette déformation comme due à l'accommodation plastique de l'austénite sous l'effet d'un changement de volume de germes a priori non sphériques.



**Figure V.3** – Variation de longueur d'un spécimen A533 soumis à plusieurs efforts de compression pendant une transformation bainitique isotherme à 500°C, en fonction du temps, figure issue de Desalos (1981)

Desalos (1981) met ainsi en évidence un effet d'anisotropie en prélevant des éprouvettes d'acier A533 suivant deux directions de la tôle laminée, l'une dans le plan contenant la direction du laminage et l'autre dans un plan perpendiculaire à la direction du laminage, et montre que les déformations plastiques de transformation pour des essais de dilatométrie libre ne sont plus nulles, et qu'elles dépendent du sens de prélèvement de l'éprouvette.

“Le phénomène de plasticité de transformation est donc lié à l’avancement de la transformation mais les mécanismes qu’il met en jeu dépendent du type de transformation et/ou des niveaux et des directions des contraintes appliquées. Les contraintes internes liées à la mise en forme et à la présence de zones ségréguées au sein du matériau peuvent également influencer ce phénomène.”, Desalos (1981)

Pour traiter ce type de croissance non-sphérique de germe, nous allons étendre l’analogie utilisée au chapitre III, entre la plasticité de transformation avec croissance sphérique des germes et la rupture ductile avec des trous sphériques. C’est-à-dire, nous allons étendre l’analogie à la plasticité de transformation avec croissance sphéroïdale des germes et la rupture ductile avec trous sphéroïdaux.

Plusieurs études sur la rupture ductile visant à incorporer les effets de forme dans les modèles constitutifs ont été réalisées depuis les travaux pionniers de Gurson (1977) ; Rice et Tracey (1969), en étendant les travaux de rupture ductile avec des trous sphériques aux trous sphéroïdaux.

Ainsi Lee et Mear (1992) ont réalisé des études numériques des effets de forme des cavités. Leur étude étendait, en fait, les travaux de Rice et Tracey (1969) et Budiansky *et al.* (1982) au cas des vides sphéroïdaux, pour lesquels une classe de champs de vitesses tests axisymétriques adaptée était considérée. Cette classe incluant, comme cas particuliers, les champs de vitesses tests utilisés par Gurson (1977) dans les cas de cavités sphériques ou cylindriques. Une autre extension a été établit par Madou et Leblond (2012b) aux cavités éllipsoïdales générales.

Plus tard, Gologanu *et al.* (1993, 1994) ont étendu le modèle de Gurson (1977) aux vides de géométrie sphéroïdale. Leur modèle étendu est actuellement connu sous le nom de modèle *GLD*. Pour établir ce modèle *GLD*, les auteurs ont de nouveau combiné l’homogénéisation et l’analyse limite pour obtenir des estimations de la surface de charge-limite d’un sphéroïde allongé (Gologanu *et al.*, 1993), ou aplati (Gologanu *et al.*, 1994), contenant une cavité sphéroïdale confocale. Le traitement reposait sur l’utilisation de champs de vitesse-tests axisymétriques, incompressibles et cinématiquement admissibles avec des conditions de taux de déformation homogène sur le bord extérieur de la cellule.

Le modèle a ensuite été amélioré (Gologanu, 1997) en considérant davantage de champs de vitesse-tests et en utilisant certains résultats généraux de Castañeda (1991) ; Michel et Suquet (1992) ; Willis (1991) portant sur l’homogénéisation de composites non linéaires. Ceci a permis par la suite une extension heuristique aux cas de chargements arbitraires (Gologanu *et al.*, 1997).

Ainsi, cette partie est dédiée à une approche renouvelée du mécanisme de Greenwood et Johnson (1965) de la plasticité de transformation, utilisant l’analyse limite et l’homogénéisation pour des germes ayant une croissance sphéroïdale. Une analogie avec le modèle *GLD* et ses variantes se présente, de sorte qu’une utilisation des champs de vitesse tests issus des travaux de Monchiet *et al.* (2014) (étendant ceux de Gologanu *et al.* (1993)) est possible.

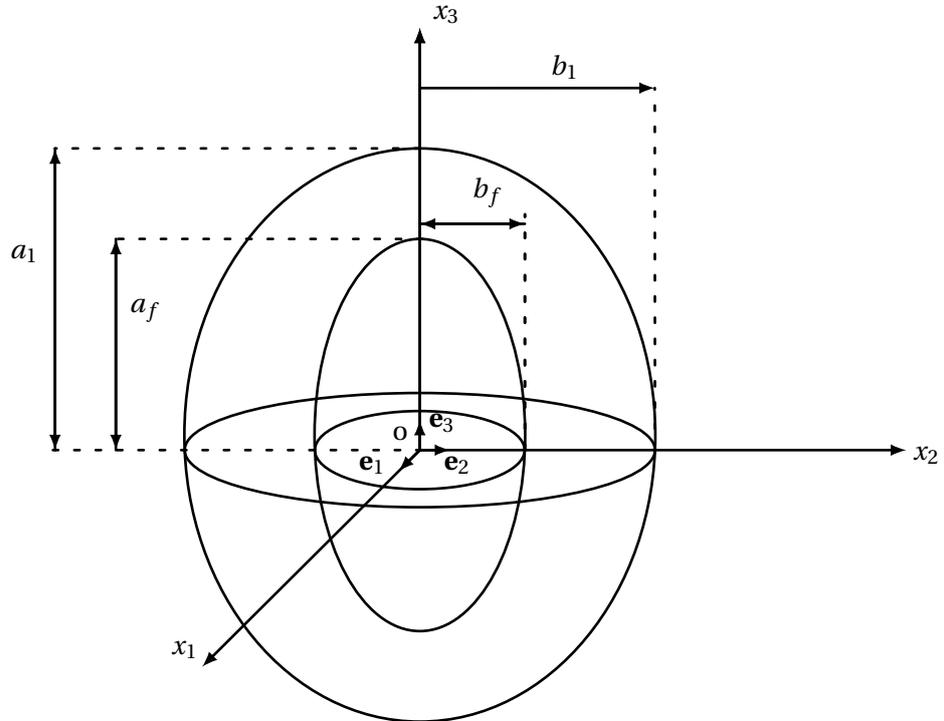
## V.1.2 Généralités géométriques

Pour l’étude par analyse limite, la géométrie sphéroïdale allongée du germe de phase fille est supposée confocale à tout instant avec le volume sphéroïdal de phase-mère. Ce choix est lié aux champs de vitesse-tests cinématiquement admissibles repris des travaux de Monchiet *et al.* (2014), qui considèrent une géométrie analogue, c’est-à-dire un sphéroïde allongé contenant une cavité sphéroïdale confocale. Notons que ce choix implique une variation de la forme des germes au cours de la transformation.

Ainsi, les axes  $x_1$  et  $x_2$  sont les directions principales géométriquement équivalentes, et l’axe  $x_3$  l’axe de révolution des sphéroïdes (ellipsoïdes axisymétriques). On associe au repère cartésien  $(x_1, x_2, x_3)$  la base orthonormée  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . Pour un sphéroïde quelconque confocal avec le volume sphéroïdal de phase mère et le germe sphéroïdal de phase fille, les paramètres géométriques utilisés sont le demi-grand axe  $a$  du sphéroïde selon  $x_3$  et son demi-petit axe  $b$  selon  $x_1$  ou  $x_2$ . Les demi-axes pourront être indexés par le rapport du volume du sphéroïde considéré au volume du sphéroïde extérieur ; ainsi les demi-axes du germe seront notés  $a_f$  et  $b_f$  où  $f$  désigne la fraction volumique de phase fille, et ceux du volume extérieur

$a_1$  et  $b_1$ . La fraction volumique de phase fille  $f$  est ainsi donnée par :

$$f = \frac{a_f b_f^2}{a_1 b_1^2} \quad (\text{V.1})$$



**Figure V.4** – Géométrie étudiée : deux sphéroïdes allongés confocaux

L'aspect de forme d'un sphéroïde confocal quelconque est déterminé via le rapport  $a/b$ , ce rapport vaut 1 pour une sphère ( $a = b$ ), et 0 pour un cylindre ( $a \gg b$ ). La distance focale  $c$  est la même pour tous les sphéroïdes confocaux, ce qui implique que :

$$c = \sqrt{a_f^2 - b_f^2} = \sqrt{a_1^2 - b_1^2}. \quad (\text{V.2})$$

Les excentricités de l'inclusion de phase  $\alpha$  et de la matrice de phase  $\gamma$  sont notées par  $e_f$  et  $e_1$  respectivement et valent :

$$\begin{cases} e_f = \frac{c}{a_f} \\ e_1 = \frac{c}{a_1} \end{cases} \quad (\text{V.3})$$

Avec ces notations, la fraction de phase fille peut aussi s'écrire comme suit, comme on le déduit des équations (V.2) et (V.3) :

$$f = \frac{e_1^3}{e_f^3} \frac{1 - e_f^2}{1 - e_1^2} \quad (\text{V.4})$$

Pour la facilité des calculs analytiques qui suivront, trois systèmes de coordonnées, cartésien, cylindrique et elliptique seront utilisés :

- un système de coordonnées cartésiennes  $(x_1, x_2, x_3)$  avec comme origine le centre O du sphéroïde, associé à la base orthonormée  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  ;
- un système de coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$  associé à la base orthonormée locale  $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$  ;
- un système de coordonnées elliptiques  $(\lambda, \phi, \theta)$  associé à la base orthonormée locale  $(\mathbf{e}_\lambda, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_\theta)$ .

Les relations entre les différents systèmes de coordonnées sont les suivantes :

1) Pour les systèmes de coordonnées cartésiennes et elliptiques, on a :

$$\begin{cases} x_1 = b \sin(\phi) \cos(\theta) \\ x_2 = b \sin(\phi) \sin(\theta) \\ x_3 = a \cos(\phi) \end{cases} \quad (\text{V.5})$$

où les paramètres  $a$  et  $b$  sont reliés au paramètre  $\lambda$  caractérisant le sphéroïde confocal (surface iso- $\lambda$ ) de la manière suivante :

$$\begin{cases} a = c \cosh(\lambda) \\ b = c \sinh(\lambda). \end{cases} \quad (\text{V.6})$$

On notera que le paramètre  $\lambda$  du sphéroïde est relié à son excentricité  $e$  par :

$$\cosh(\lambda) = \frac{a}{c} = \frac{1}{e}. \quad (\text{V.7})$$

2) Les systèmes de coordonnées cylindriques et elliptiques sont reliés par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \rho = b \sin(\phi) \\ \theta = \theta \\ z = x_3 = a \cos(\phi). \end{cases} \quad (\text{V.8})$$

Notons que normalement les rôles de  $\theta$  et  $\phi$  sont inversés :  $\rho = b \sin(\theta)$  et  $z = a \cos(\theta)$ . Mais puisque les conventions de [Monchiet \*et al.\* \(2014\)](#) et celles de [Gologanu \*et al.\* \(1993\)](#) sont incompatibles, il nous faut faire un choix ; nous choisissons celles de [Monchiet \*et al.\* \(2014\)](#).

Les bases locales cylindrique et elliptique sont reliées par :

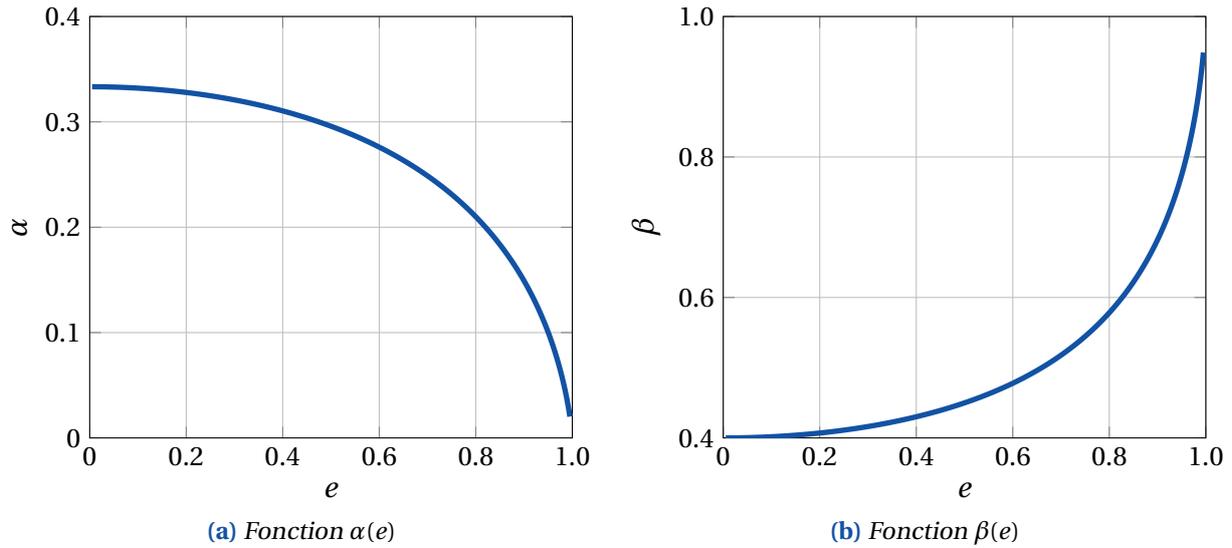
$$\begin{cases} \mathbf{e}_\lambda = \frac{1}{L_\lambda} \{a \sin(\phi) \mathbf{e}_\rho + b \cos(\phi) \mathbf{e}_3\} \\ \mathbf{e}_\phi = \frac{1}{L_\lambda} \{b \cos(\phi) \mathbf{e}_\rho - a \sin(\phi) \mathbf{e}_3\} \\ \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\theta \end{cases} \quad , \quad L_\lambda = \sqrt{a^2 \sin^2(\phi) + b^2 \cos^2(\phi)}. \quad (\text{V.9})$$

Deux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  utiles dans la suite sont maintenant introduits en suivant les notations de [Monchiet \*et al.\* \(2014\)](#) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(e) = \frac{1-e^2}{e^3} \operatorname{atanh}(e) - \frac{1-e^2}{e^2} \\ \beta(e) = -(1-3\alpha(e)) \frac{1-e^2}{e^2} \end{array} \right. \quad (\text{V.10a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(e) = \frac{1-e^2}{e^3} \operatorname{atanh}(e) - \frac{1-e^2}{e^2} \\ \beta(e) = -(1-3\alpha(e)) \frac{1-e^2}{e^2} \end{array} \right. \quad (\text{V.10b})$$

Les paramètres sont représentés sur la figure suivantes en fonction de l'excentricité  $e$  :



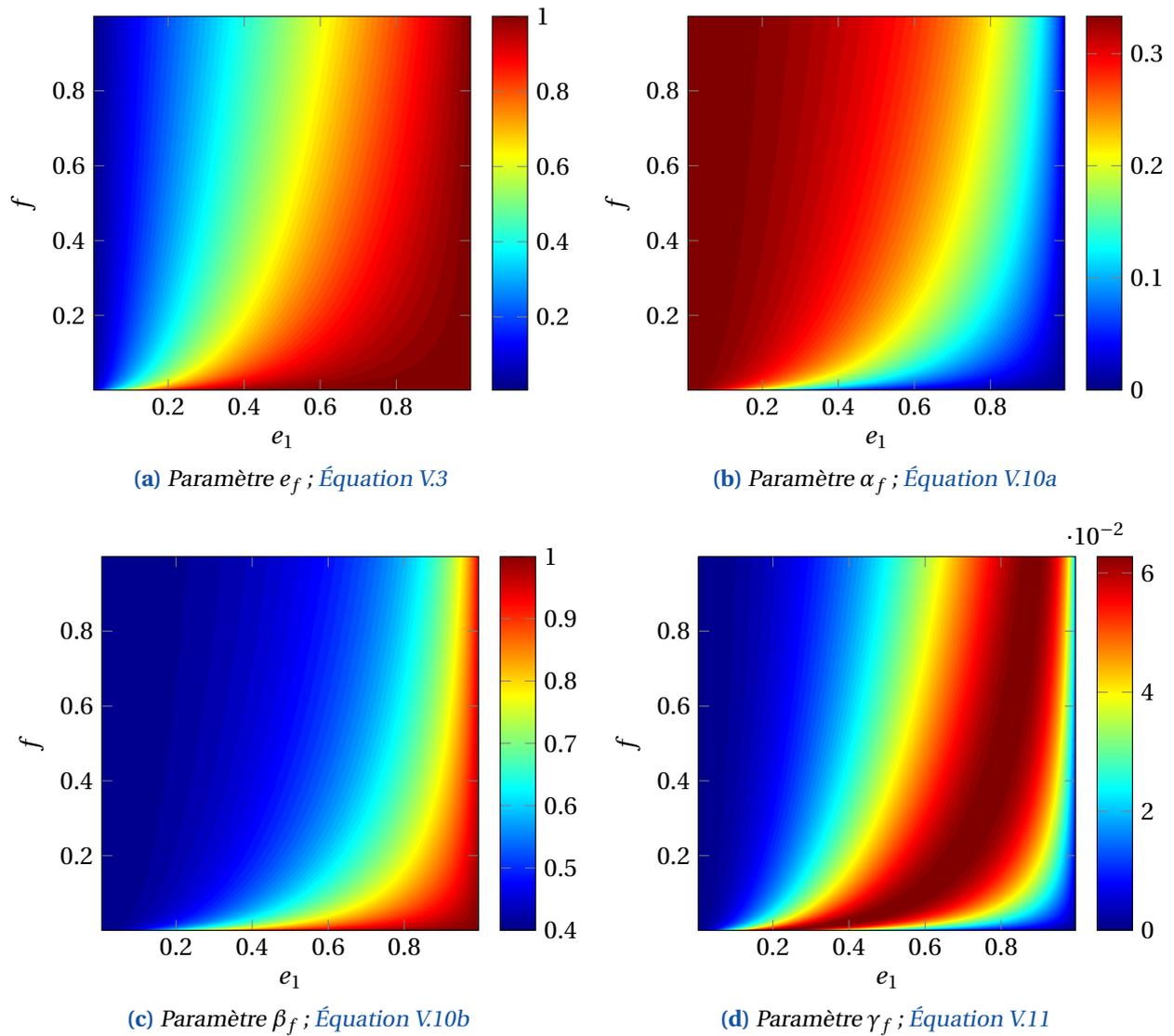
**Figure V.5** – Fonctions  $\alpha(e)$  et  $\beta(e)$

Un paramètre supplémentaire  $\gamma_f$  est également introduit pour alléger certaines expressions :

$$\gamma_f = \alpha_f - \frac{1 - e_f^2}{3 - e_f^2} \quad (\geq 0) \quad (\text{V.11})$$

où  $\alpha_f = \alpha(e_f)$  et  $\beta = \beta(e_f)$ .

Les variations des principaux paramètres géométriques ( $e_f, \alpha_f, \beta_f, \gamma_f$ ) en fonction de la proportion de phase fille  $f$  et de l'excentricité de la phase mère  $e_1$  sont représentées sur la [Figure V.6](#). Il est à noter que sur la [Figure V.6\(a\)](#), la variation de  $e_f$  en fonction de  $f$ , pour un sphéroïde différent d'une sphère et d'un cylindre, est non linéaire, en raison de la croissance supposée confocale du germe de phase-fille. Cette excentricité serait constante pour une croissance de type homothétique.

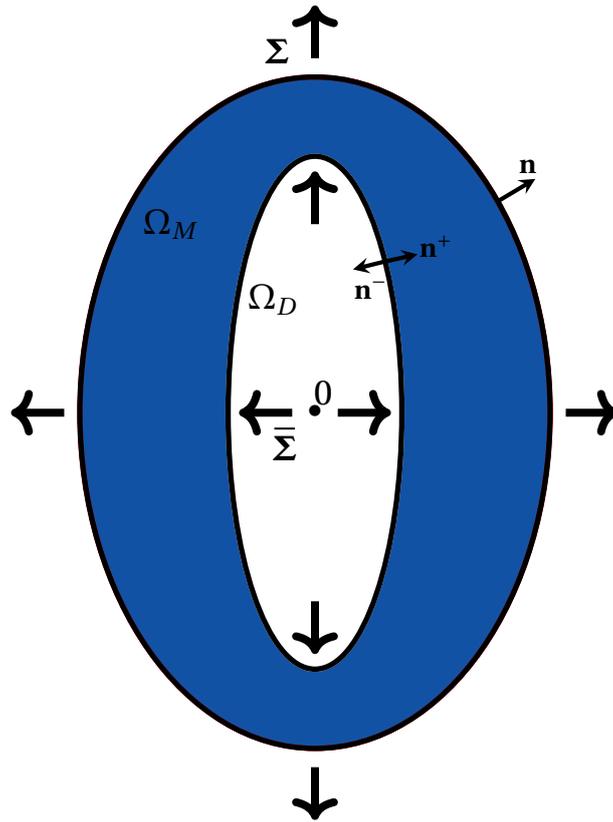


**Figure V.6** – Principaux paramètres géométriques en fonction de  $e_1$  et  $f$

### V.1.3 Généralités mécaniques

Afin de définir un modèle analytique de la plasticité de transformation pour des germes croissant de manière sphéroïdale, à l'aide de l'analyse limite, la phase fille est à nouveau exclue du VER, pour les raisons déjà discutées au [chapitre III](#). Au mécanisme interne consistant en la croissance de la phase fille se substitue une condition sur le bord interne du VER.

Ainsi, le VER considéré ([Figure V.7](#)) est un sphéroïde allongé constitué uniquement de phase-mère, contenant une *cavité* confocale sphéroïdale allongée, et soumis à des conditions aux limites tant internes qu'externes.



**Figure V.7** – VER considéré : sphéroïde allongé contenant une cavité sphéroïdale confocale.

Le domaine global, celui de la phase fille et celui de la phase mère sont désignés par  $\Omega$ ,  $\Omega_D$  et  $\Omega_M$  respectivement. Les volumes de  $\Omega_D$  et  $\Omega$  sont reliés par :

$$f = \frac{\text{vol}(\Omega_D)}{\text{vol}(\Omega)}. \quad (\text{V.12})$$

On introduit le vecteur normal sortant unitaire  $\mathbf{n} \equiv \mathbf{e}_\lambda$  sur le bord extérieur  $\partial\Omega$  du VER. De plus, deux autres vecteurs normaux unitaire sur le bord  $\partial\Omega_D$ ,  $\mathbf{n}^+ \equiv \mathbf{e}_\lambda$  orienté vers l'extérieur de  $\Omega_D$  et  $\mathbf{n}^- \equiv -\mathbf{e}_\lambda$  orienté vers l'intérieur de  $\Omega_D$ , sont considérés.

Les frontières externe  $\partial\Omega$  et interne  $\partial\Omega_D$  du domaine  $\Omega_M$  sont soumises à des conditions de contraintes homogènes (Hill, 1967 ; Mandel, 1966) :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) & \text{sur } \partial\Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}^-(\mathbf{x}) = -\bar{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \mathbf{n}^-(\mathbf{x}) & \text{sur } \partial\Omega_D \end{cases} \quad (\text{V.13})$$

Le champ de déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , a priori défini uniquement sur  $\Omega_M$ , est étendu arbitrairement mais de manière régulière sur le domaine  $\Omega_D$ . Les déformations macroscopiques extérieure  $\mathbf{E}$  et intérieure  $\bar{\mathbf{E}}$  sont ensuite définies comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{E} \equiv \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \rangle_\Omega = \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega & (\text{V.14a}) \\ \bar{\mathbf{E}} \equiv \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \rangle_{\Omega_D} = \frac{1}{\text{vol}(\Omega_D)} \int_{\Omega_D} \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega & (\text{V.14b}) \end{cases}$$

où  $\langle \cdot \rangle_\Omega$  et  $\langle \cdot \rangle_{\Omega_D}$  désignent les opérateurs de moyenne sur les volumes  $\Omega$  et  $\Omega_D$ . On peut ré-exprimer ces intégrales à l'aide de la formule de GREEN afin d'obtenir des intégrales sur les bords interne et externe,

soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{ij} = \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} (u_i n_j + u_j n_i) dS \\ \bar{E}_{ij} = \frac{1}{\text{vol}(\Omega_D)} \int_{\partial\Omega_D} \frac{1}{2} (u_i n_j^+ + u_j n_i^+) dS \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(V.15a)} \\ \text{(V.15b)} \end{array}$$

La puissance virtuelle des efforts extérieurs est donnée par :

$$\mathcal{P}_e \equiv \int_{\partial\Omega_M} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{u}} dS = \int_{\partial\Omega_M} \sigma_{ij} n_j \dot{u}_i dS \quad \text{(V.16)}$$

avec  $\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  vecteur de contrainte de CAUCHY, et  $\mathbf{n}$  vecteur normal unitaire orienté vers l'extérieur de  $\Omega_M$ . Puisque  $\partial\Omega_M = \partial\Omega \cup \partial\Omega_D$  et que  $\boldsymbol{\sigma}$  est symétrique ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ), il vient :

$$\mathcal{P}_e \equiv \int_{\partial\Omega_M} \sigma_{ij} \frac{1}{2} (\dot{u}_i n_j + \dot{u}_j n_i) dS = \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} \frac{1}{2} (\dot{u}_i n_j + \dot{u}_j n_i) dS + \int_{\partial\Omega_D} \sigma_{ij} \frac{1}{2} (\dot{u}_i n_j^- + \dot{u}_j n_i^-) dS \quad \text{(V.17)}$$

Avec les conditions aux limites choisies (éq. (V.13)) il vient alors :

$$\mathcal{P}_e \equiv \int_{\partial\Omega} \Sigma_{ij} \frac{1}{2} (\dot{u}_i n_j + \dot{u}_j n_i) dS - \int_{\partial\Omega_D} \bar{\Sigma}_{ij} \frac{1}{2} (\dot{u}_i n_j^- + \dot{u}_j n_i^-) dS \quad \text{(V.18)}$$

$$= \Sigma_{ij} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} (\dot{u}_i n_j + \dot{u}_j n_i) dS + \bar{\Sigma}_{ij} \int_{\partial\Omega_D} \frac{1}{2} (\dot{u}_i n_j^+ + \dot{u}_j n_i^+) dS \quad \text{(V.19)}$$

soit d'après les expressions (V.15a)&(V.15b) :

$$\mathcal{P}_e = \text{vol}(\Omega) \Sigma_{ij} \dot{E}_{ij} + \text{vol}(\Omega_D) \bar{\Sigma}_{ij} \dot{\bar{E}}_{ij} \quad \text{(V.20)}$$

$$= \text{vol}(\Omega) \left( \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}} + f \bar{\boldsymbol{\Sigma}} : \dot{\bar{\mathbf{E}}} \right) \quad \text{(V.21)}$$

De par la géométrie axisymétrique (sphéroïdale) et le chargement  $\boldsymbol{\Sigma}$  également axisymétrique considérés ici, les tenseurs  $\mathbf{X}$  rencontrés dans la suite de ce chapitre sont tous de la forme suivante :

$$\mathbf{X} \rightarrow \begin{pmatrix} X_1 & 0 & 0 \\ & X_1 & 0 \\ \text{sym.} & & X_3 \end{pmatrix}_{(x_1, x_2, x_3)} \quad \text{(V.22)}$$

ou encore :

$$\mathbf{X} = X_1 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + X_3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \quad \text{(V.23)}$$

## V.2 Analyse-limite d'un sphéroïde allongé contenant une cavité sphéroïdale confocale et soumis à des chargements externe et interne

Dans cette partie, dédiée à la modélisation par approche micromécanique, on présente les étapes classiques de l'analyse-limite qui sont le choix des champs des déplacements tests, le calcul des paramètres cinématiques et de chargement, et le calcul de la dissipation plastique. Ces étapes permettent d'obtenir l'équation explicite du critère et la loi d'écoulement plastique. Ces résultats sont ensuite appliqués à la modélisation du mécanisme de [Greenwood et Johnson \(1965\)](#) de la plasticité de transformation avec croissance sphéroïdale des germes, pour obtenir une loi de comportement décrivant ce phénomène.

### V.2.1 Choix des champs de déplacements tests

Le premier problème qui se pose est de choisir le nombre minimal possible de champs de déplacements tests incompressibles. Ce nombre doit permettre de reproduire toutes les valeurs possibles des paramètres cinématiques (composantes des tenseurs de déformation  $\mathbf{E}$  et  $\bar{\mathbf{E}}$ ). Cependant, le nombre de champs tests requis est réduit pour les raisons suivantes :

- D'une part, dans cette partie l'hypothèse d'un chargement extérieur  $\Sigma$  axisymétrique sera faite, c'est-à-dire  $\Sigma_1 = \Sigma_2 \neq \Sigma_3$  (éq. (V.23)). Les tenseurs  $\mathbf{E}$  et  $\bar{\mathbf{E}}$  seront donc de la forme (V.23), impliquant seulement 4 paramètres  $E_1, E_3, \bar{E}_1$  et  $\bar{E}_3$ .
- D'autre part, l'hypothèse faite sur l'élasticité, négligée dans la phase-mère seule prise en compte dans l'analyse-limite, conduit à la relation suivante entre les déformations  $\bar{\mathbf{E}}$  et  $\mathbf{E}$  :

$$2E_1 + E_3 = f \left( 2\bar{E}_1 + \bar{E}_3 \right). \quad (\text{V.24})$$

*Démonstration.* La décomposition de l'intégrale de l'équation (V.15a) sur les deux domaines  $\Omega_D$  et  $\Omega_M$  donne :

$$E_{ij} = \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_{\Omega} \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \, d\Omega = \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \left( \int_{\Omega_D} \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \, d\Omega + \int_{\Omega_M} \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \, d\Omega \right) \quad (\text{V.25})$$

ce qui donne en prenant la trace :

$$E_{ii} = \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \left( \int_{\Omega_D} u_{i,i} \, d\Omega_D + \int_{\Omega_M} u_{i,i} \, d\Omega \right) \quad (\text{V.26})$$

Le comportement rigide-plastique de la phase mère se traduit par des déformations purement déviatoriques, donc telles que  $\text{tr} \, \boldsymbol{\varepsilon} = u_{i,i} = 0$  sur  $\Omega_M$ . Par conséquent, la trace de la déformation macroscopique extérieure est donnée par :

$$E_{ii} = \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_{\Omega_D} u_{i,i} \, d\Omega \quad (\text{V.27})$$

De plus, la trace de la déformation macroscopique intérieure, donnée par l'expression (V.15a), vaut :

$$\bar{E}_{ii} = \frac{1}{\text{vol}(\Omega_D)} \int_{\Omega_D} u_{i,i} \, d\Omega \quad (\text{V.28})$$

La relation entre les déformations macroscopiques extérieure et intérieure du sphéroïde,  $\mathbf{E}$  et  $\bar{\mathbf{E}}$  respectivement, s'écrit donc :

$$\text{tr} \, \mathbf{E} = \frac{\text{vol}(\Omega_D)}{\text{vol}(\Omega)} \text{tr} \, \bar{\mathbf{E}} = f \text{tr} \, \bar{\mathbf{E}} \quad (\text{V.29})$$

□

Cette relation implique que les paramètres cinématiques indépendants sont au nombre de 3 seulement. Par conséquent, le nombre de champs de déplacements tests requis pour en reproduire toutes les valeurs se réduit finalement à 3.

A partir de là, plusieurs résultats de calculs sont repris des travaux de [Monchiet et al. \(2014\)](#) et sont appliqués à notre problème, afin d'obtenir l'équation explicite du critère et la loi d'écoulement plastique. On considère ainsi les champs test  $\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}$  et  $\mathbf{u}^{(3)}$  suivants, tous incompressibles, issus des travaux de [Monchiet et al. \(2014\)](#) et [Gologanu et al. \(1993\)](#) :

1. un champ d'expansion du sphéroïde
2. un champ correspondant à un taux de déformation déviatorique uniforme axisymétrique
3. un champ axisymétrique de type ESHELBY

Les champs s'écrivent respectivement :

$$\mathbf{u}^{(1)} = \frac{L_1^3}{L_\lambda^2} \mathbf{e}_\lambda = \frac{[a_1^2 \sin^2 \phi + b_1^2 \cos^2 \phi]^{3/2}}{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi} \boldsymbol{\varepsilon}^{*(1)} \mathbf{e}_\lambda \quad (\text{V.30})$$

$$\mathbf{u}^{(2)} = -\frac{x_1}{2} \mathbf{e}_1 - \frac{x_2}{2} \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 \quad (\text{V.31})$$

$$\mathbf{u}^{(3)} = [\mathbb{T}(\lambda) : \boldsymbol{\varepsilon}^{*(3)}] \mathbf{x} + \frac{a_f b_f^2}{a^2 b^3} (a^2 - a_f^2) L_\lambda \boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda\lambda}^{*(3)} \mathbf{e}_\lambda \quad (\text{V.32})$$

où  $\mathbf{u}^{(3)}$  est le champ d'ESHELBY axisymétrique (Eshelby, 1957, 1959) adapté, provenant des travaux de Monchiet *et al.* (2014) ;  $\boldsymbol{\varepsilon}^{*(1)}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^{*(3)}$  sont des tenseurs de déformation virtuel arbitraire sphérique et déviatorique respectivement (Monchiet *et al.*, 2014), et  $\mathbb{T}$  un tenseur du quatrième ordre défini par l'équation (13) de Monchiet *et al.* (2014). Les champs cinématiques considérés sont des combinaisons linéaires des trois champs  $\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{u}^{(3)}$  :

$$\mathbf{u} = q_1 \mathbf{u}^{(1)} + q_2 \mathbf{u}^{(2)} + q_3 \mathbf{u}^{(3)} \quad (\text{V.33})$$

où  $q_1, q_2, q_3$  sont trois paramètres cinématiques indépendants.

## V.2.2 Calcul des paramètres cinématiques et de chargement

### Calcul des déformations macroscopiques issues du champ (1) :

Le champ  $\mathbf{u}^{(1)}$  (V.30) dépend du tenseur sphérique virtuel  $\boldsymbol{\varepsilon}^{*(1)}$ . On choisit pour ce tenseur la normalisation suivante :

$$\varepsilon_{11}^{*(1)} = \varepsilon_{22}^{*(1)} = \varepsilon_{33}^{*(1)} = \frac{1}{f} \quad (\text{V.34})$$

Les composantes de déformation macroscopique traduisant le champ d'expansion du sphéroïde peuvent être calculées en injectant le champ de déplacement  $\mathbf{u}^{(1)}$  (V.30) dans les expressions (V.15b) et (V.15a). Cependant, puisque ces composantes de déformation macroscopique sont déjà calculées dans les équations (26) de l'article de Monchiet *et al.* (2014), alors nous les reprenons :

— en  $\lambda = \lambda_1$  :

$$\begin{cases} E_{11}^{(1)} = E_{22}^{(1)} = \frac{3}{2} (1 - \alpha_1) \\ E_{33}^{(1)} = 3\alpha_1 \\ E_{12}^{(1)} = E_{13}^{(1)} = E_{23}^{(1)} = 0 \end{cases} \quad (\text{V.35})$$

— en  $\lambda = \lambda_f$  :

$$\begin{cases} \bar{E}_{11}^{(1)} = \bar{E}_{22}^{(1)} = \frac{3}{2f} (1 - \alpha_f) \\ \bar{E}_{33}^{(1)} = \frac{3}{f} \alpha_f \\ \bar{E}_{12}^{(1)} = \bar{E}_{13}^{(1)} = \bar{E}_{23}^{(1)} = 0 \end{cases} \quad (\text{V.36})$$

### Calcul des déformations issues du champ (2) :

Par définition  $\mathbf{u}^{(2)}$  (V.31) peut s'écrire comme suit pour tout  $\mathbf{x}$  :

$$\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{E}^{(2)} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (\text{V.37})$$

donc,

$$\begin{cases} E_{11}^{(2)} = E_{22}^{(2)} = \bar{E}_{11}^{(2)} = \bar{E}_{22}^{(2)} = -\frac{1}{2} \\ E_{33}^{(2)} = \bar{E}_{33}^{(2)} = 1 \\ E_{12}^{(2)} = E_{13}^{(2)} = E_{23}^{(2)} = \bar{E}_{12}^{(2)} = \bar{E}_{13}^{(2)} = \bar{E}_{23}^{(2)} = 0 \end{cases} \quad (\text{V.38})$$

**Calcul des déformations issues du champ (3) :**

Le champ  $\mathbf{u}^{(3)}$  (V.32) dépend du tenseur déviatorique de déformation virtuel  $\boldsymbol{\varepsilon}^{*(3)}$ . On choisit pour ce tenseur la normalisation suivante :

$$\varepsilon_{11}^{*(3)} = \varepsilon_{22}^{*(3)} = -\frac{1}{2f}; \quad \varepsilon_{33}^{*(3)} = \frac{1}{f} \quad (\text{V.39})$$

Toujours d'après les équations (26) de l'article de [Monchiet et al. \(2014\)](#), les expressions suivantes sont alors obtenues pour les composantes de déformation macroscopiques associées au champ  $\mathbf{u}^{(3)}$  :

— en  $\lambda = \lambda_1$  :

$$\begin{cases} E_{11}^{(3)} = E_{22}^{(3)} = \frac{3}{4}(\alpha_1 + \beta_1 - 1) \\ E_{33}^{(3)} = \frac{3}{2}(1 - \alpha_1 - \beta_1) \\ E_{12}^{(3)} = E_{13}^{(3)} = E_{23}^{(3)} = 0 \end{cases} \quad (\text{V.40})$$

— en  $\lambda = \lambda_f$  :

$$\begin{cases} \bar{E}_{11}^{(3)} = \bar{E}_{22}^{(3)} = \frac{3}{4f}(\alpha_f + \beta_f - 1) \\ \bar{E}_{33}^{(3)} = \frac{3}{2f}(1 - \alpha_f - \beta_f) \\ \bar{E}_{12}^{(3)} = \bar{E}_{13}^{(3)} = \bar{E}_{23}^{(3)} = 0 \end{cases} \quad (\text{V.41})$$

Finalement, en regroupant les contributions des champs  $\mathbf{u}^{(1)}$ ,  $\mathbf{u}^{(2)}$  et  $\mathbf{u}^{(3)}$ , les composantes principales des déformations macroscopiques associées au champ cinématique général sont,

— en  $\lambda = \lambda_1$  :

$$\begin{cases} E_1 = E_2 = \frac{3}{2}q_1(1 - \alpha_1) - \frac{1}{2}q_2 + \frac{3}{4}q_3(\alpha_1 + \beta_1 - 1) \\ E_3 = 3q_1\alpha_1 + q_2 + \frac{3}{2}q_3(1 - \alpha_1 - \beta_1) \end{cases} \quad (\text{V.42})$$

— en  $\lambda = \lambda_f$  :

$$\begin{cases} \bar{E}_1 = \bar{E}_2 = \frac{3}{2f}q_1(1 - \alpha_f) - \frac{1}{2}q_2 + \frac{3}{4f}q_3(\alpha_f + \beta_f - 1) \\ \bar{E}_3 = \frac{3}{f}q_1\alpha_f + q_2 + \frac{3}{2f}q_3(1 - \alpha_f - \beta_f) \end{cases} \quad (\text{V.43})$$

Ces expressions vont permettre de calculer le vecteur  $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix}$  des paramètres conjugués au vecteur

$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ . Le vecteur  $\mathbf{Q}$  est défini par

$$\mathcal{P}_e = \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{V.44})$$

où  $\mathcal{P}_e$  désigne la puissance virtuelle des efforts extérieurs. Ainsi, d'après l'équation (V.21),

$$\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \text{vol}(\Omega) \left( \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}} + f \bar{\boldsymbol{\Sigma}} : \dot{\bar{\mathbf{E}}} \right). \quad (\text{V.45})$$

D'après (V.42) et (V.43) les paramètres de chargement conjugués aux paramètres cinématiques sont définis par :

$$\begin{cases} Q_1 = 3\text{vol}(\Omega) \left[ \alpha_1 \left( \Sigma_{33} - \frac{1}{2}\Sigma_{11} - \frac{1}{2}\Sigma_{22} \right) + \alpha_f \left( \bar{\Sigma}_{33} - \frac{1}{2}\bar{\Sigma}_{11} - \frac{1}{2}\bar{\Sigma}_{22} \right) + \frac{1}{2}\Sigma_{11} + \frac{1}{2}\Sigma_{22} + \frac{1}{2}\bar{\Sigma}_{11} + \frac{1}{2}\bar{\Sigma}_{22} \right] \\ Q_2 = \text{vol}(\Omega) \left[ \Sigma_{33} - \frac{1}{2}\Sigma_{11} - \frac{1}{2}\Sigma_{22} + f \left( \bar{\Sigma}_{33} - \frac{1}{2}\bar{\Sigma}_{11} - \frac{1}{2}\bar{\Sigma}_{22} \right) \right] \\ Q_3 = \frac{3}{2}\text{vol}(\Omega) \left[ (1 - \alpha_1 - \beta_1) \left( \Sigma_{33} - \frac{1}{2}\Sigma_{11} - \frac{1}{2}\Sigma_{22} \right) + (1 - \alpha_f - \beta_f) \left( \bar{\Sigma}_{33} - \frac{1}{2}\bar{\Sigma}_{11} - \frac{1}{2}\bar{\Sigma}_{22} \right) \right] \end{cases} \quad (\text{V.46})$$

où l'on a distingué formellement  $\Sigma_{11}$  et  $\Sigma_{22}$ , ainsi que  $\bar{\Sigma}_{11}$  et  $\bar{\Sigma}_{22}$ .

### V.2.3 Dissipation plastique

Il faut à présent calculer l'expression de la dissipation plastique au sein de la phase mère, de limite élastique  $\bar{\sigma}_M$  et obéissant au critère de VON MISES. Au niveau local, la dissipation plastique est définie comme le produit  $\bar{\sigma}_M \dot{\epsilon}_{\text{eq}}$  où  $\dot{\epsilon}_{\text{eq}} = \left( \frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}' : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}' \right)^{\frac{1}{2}}$  est le taux de déformation équivalent calculé à l'aide du champ de vitesse test  $\dot{\mathbf{u}}$ , avec  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}'$  la partie dévitorique de  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ . Mais puisque  $\boldsymbol{\epsilon}$  est incompressible nous avons  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}' = \boldsymbol{\epsilon}$ . Par intégration sur tout le volume il vient la dissipation plastique macroscopique :

$$\mathcal{D}(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) = \bar{\sigma}_M \int_{\Omega_M} \dot{\epsilon}_{\text{eq}} d\Omega \quad (\text{V.47})$$

Ainsi, cette dissipation ne dépend que du champ de vitesse-test, et est la même *que le bord intérieur du sphéroïde soit chargé ou non*. De ce fait, il est tout à fait possible de reprendre intégralement l'expression finale de la dissipation plastique par unité de volume établie par Monchiet *et al.* (2014) pour un sphéroïde creux sans chargement interne, qui est :

$$\Gamma \equiv \frac{\mathcal{D}(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)}{\text{vol}(\Omega)} = \bar{\sigma}_M f \int_{w_1=f}^{w_2=1} \left( A_{\text{eq}}^2 + \frac{2}{3} [2\mathbf{A} : \mathbb{Q} : \boldsymbol{\epsilon}^* + \boldsymbol{\epsilon}^* : \mathbb{P} : \boldsymbol{\epsilon}^*] w^2 \right)^{1/2} \frac{dw}{w^2} \quad (\text{V.48})$$

avec

$$\boldsymbol{\epsilon}^* = q_1 \boldsymbol{\epsilon}^{*(1)} + q_3 \boldsymbol{\epsilon}^{*(3)}; \quad (\text{pas de } \boldsymbol{\epsilon}^{*(2)} \text{ associé au champs } \mathbf{u}^{(2)}) \quad (\text{V.49})$$

$$\mathbf{A} = \dot{q}_2 \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \right] \quad (\text{V.50})$$

$$\mathbb{Q} = \frac{1}{1-f} (\mathbb{S}(e_1) - \mathbb{S}(e_f)) \quad (\text{V.51})$$

$$\mathbb{P} = \frac{1}{1-f} (\mathbb{S}^T(e_f) : \mathbb{L}(e_f) - f \mathbb{S}^T(e_1) : \mathbb{L}(e_1)) \quad (\text{V.52})$$

Dans ces expressions  $\mathbb{S}(e)$  désigne le tenseur d'Eshelby classique du quatrième ordre pour un milieu incompressible, fonction de l'excentricité  $e$  de l'inclusion sphéroïdale. Ses composantes dans le système de coordonnées cartésiennes sont données par l'équation (20) de Monchiet *et al.* (2014) et réécrites ci-après :

$$\begin{cases} S_{1111} = S_{2222} = 3S_{1122} = 3S_{2211} = 3S_{1212} = \frac{3}{8}(3 - 3\alpha - \beta) \\ S_{1133} = S_{2233} = \frac{1}{2}\beta; \quad S_{3311} = S_{3322} = \frac{1}{2}(\beta + 3\alpha - 1) \\ S_{3333} = 1 - \beta; \quad S_{1313} = S_{2323} = \frac{1}{4}(2\beta + 3\alpha - 1) \end{cases} \quad (\text{V.53})$$

De plus  $\mathbb{L}(e)$  désigne un autre tenseur du quatrième ordre, aussi fonction de l'excentricité  $e$ , dont les composantes cartésiennes sont données par [Mura \(1987\)](#) et réécrites ci-après :

$$\begin{cases} L_{1111} = L_{2222} = \frac{1}{8}(3\beta + 13\alpha + 3); & L_{1122} = L_{2211} = \frac{1}{8}(\beta + 7\alpha + 1) \\ L_{1133} = L_{3311} = \frac{1}{2}(2 - \beta - 2\alpha); & L_{3333} = 1 + \beta - \alpha \\ L_{1313} = L_{2323} = \frac{1}{4}(3 - 3\alpha - 2\beta); & L_{1212} = \frac{1}{8}(1 + \beta + 3\alpha) \end{cases} \quad (\text{V.54})$$

### Notations simplifiées pour les tenseurs axisymétriques :

Pour alléger les calculs, les tenseurs  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{P}$ ,  $\mathbb{S}$  et  $\mathbb{L}$  du quatrième ordre seront remplacés par des tenseurs d'ordre inférieur, en distinguant les parties sphérique et déviatorique des tenseurs axisymétriques d'ordre 2. Les composantes tensorielles de tels tenseurs notés génériquement  $\mathbf{T}$  sont :

$$T_{11} = T_{22} \neq 0; \quad T_{33} \neq 0; \quad T_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \quad (\text{V.55})$$

Dans le sous-espace ainsi défini, des variables réduites, indicées  $m$  pour la partie sphérique et  $d$  pour la partie déviatorique, sont introduites :

$$\begin{cases} \tilde{T}_m = \lambda(2T_{11} + T_{33}) \\ \tilde{T}_d = \mu(T_{33} - T_{11}) \end{cases} \quad (\text{V.56})$$

Les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  sont choisis de telle manière que quels que soient les tenseurs  $\mathbf{T}^1$  et  $\mathbf{T}^2$ ,

$$\mathbf{T}^1 : \mathbf{T}^2 = \tilde{\mathbf{T}}^1 \cdot \tilde{\mathbf{T}}^2 \quad (\text{V.57})$$

avec

$$\tilde{\mathbf{T}}^1 = \begin{pmatrix} \tilde{T}_m^1 \\ \tilde{T}_d^1 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{T}}^2 = \begin{pmatrix} \tilde{T}_m^2 \\ \tilde{T}_d^2 \end{pmatrix} \quad (\text{V.58})$$

Il vient alors le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2\lambda^2 - \mu^2 = 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 = 1 \end{cases} \quad (\text{V.59})$$

dont la solution est :

$$\begin{cases} \lambda = \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \mu = \sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases} \quad (\text{V.60})$$

Dans l'espace à deux dimensions des tenseurs  $\tilde{\mathbf{T}}$ , les tenseurs du quatrième ordre, notés génériquement  $\mathbb{L}$ , se réduisent à des tenseurs notés génériquement  $\tilde{\mathcal{L}}$  avec :

$$\tilde{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{mm} & \mathcal{L}_{md} \\ \mathcal{L}_{dm} & \mathcal{L}_{dd} \end{pmatrix} \quad (\text{V.61})$$

Ainsi une opération telle que :

$$\tilde{\mathbf{T}}^2 = \tilde{\mathcal{L}} \cdot \tilde{\mathbf{T}}^1 \quad (\text{V.62})$$

donnant les expressions de  $\tilde{T}_m^2$  et  $\tilde{T}_d^2$  à l'aide des composantes  $\mathcal{L}_{ij}$  :

$$\begin{cases} \tilde{T}_m^2 = \mathcal{L}_{mm}\tilde{T}_m^1 + \mathcal{L}_{md}\tilde{T}_d^1 \\ \tilde{T}_d^2 = \mathcal{L}_{dm}\tilde{T}_m^1 + \mathcal{L}_{dd}\tilde{T}_d^1 \end{cases} \quad (\text{V.63})$$

est équivalente à l'opération :

$$\mathbf{T}^2 = \mathbb{L} : \mathbf{T}^1 \quad (\text{V.64})$$

donnant les expressions de  $T_{11}^2$  et  $T_{33}^2$  en fonction des composantes  $L_{ijkl}$  :

$$\begin{cases} T_{11}^2 = T_{11} (L_{1111} + L_{1122}) + T_{33} L_{1133} \\ T_{33}^2 = 2T_{11} L_{3311} + T_{33} L_{3333}. \end{cases} \quad (\text{V.65})$$

En injectant ces dernières expressions dans les équations (V.56) il vient les composantes  $\mathcal{L}_{ij}$  en fonction des composantes  $L_{ijkl}$  :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{mm} = \frac{2}{3} (L_{1111} + L_{1122} + L_{3311} + L_{1133}) + \frac{1}{3} L_{3333} \\ \mathcal{L}_{md} = -\frac{\sqrt{2}}{3} (L_{1111} + L_{1122} + L_{3311}) + \frac{\sqrt{2}}{3} (2L_{1133} + L_{3333}) \\ \mathcal{L}_{dm} = \frac{\sqrt{2}}{3} (2L_{3311} - L_{1111} - L_{1122} + L_{3333} - L_{1133}) \\ \mathcal{L}_{dd} = -\frac{1}{3} (2L_{3311} - L_{1111} - L_{1122} + 2L_{3333} - 2L_{1133}) \end{cases} \quad (\text{V.66})$$

Ainsi, les tenseurs  $\mathbb{Q}, \mathbb{P}, \mathbb{S}, \mathbb{L}$  du quatrième ordre ((V.51), (V.52), (V.53), (V.54)) deviennent les tenseurs  $\tilde{\mathbf{Q}}, \tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{S}}, \tilde{\mathbf{L}}$  du deuxième ordre respectivement, définis par :

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \frac{1}{1-f} (\tilde{\mathbf{S}}(e_1) - \tilde{\mathbf{S}}(e_f)) \quad (\text{V.67})$$

$$\tilde{\mathbf{P}} = \frac{1}{1-f} (\tilde{\mathbf{S}}^T(e_f) : \tilde{\mathbf{L}}(e_f) - f \tilde{\mathbf{S}}^T(e_1) : \tilde{\mathbf{L}}(e_1)) \quad (\text{V.68})$$

$$\tilde{\mathbf{S}} = S_{mm} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_m + S_{md} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_d + S_{dm} \mathbf{e}_d \otimes \mathbf{e}_m + S_{dd} \mathbf{e}_d \otimes \mathbf{e}_d \quad (\text{V.69})$$

$$\tilde{\mathbf{L}} = L_{mm} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_m + L_{md} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_d + L_{dm} \mathbf{e}_d \otimes \mathbf{e}_m + L_{dd} \mathbf{e}_d \otimes \mathbf{e}_d \quad (\text{V.70})$$

• Les composantes du tenseur d'Eshelby  $\tilde{\mathbf{S}}$  sont obtenues en injectant les composantes du tenseur  $\mathbb{S}$ , (V.53), dans les expressions (V.66) :

$$\begin{cases} S_{mm} = 1 \\ S_{md} = 0 \\ S_{dm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (3\alpha - 1) \\ S_{dd} = \frac{3}{2} (1 - \alpha - \beta) \end{cases} \quad (\text{V.71})$$

• Les composantes du tenseur  $\tilde{\mathbf{L}}$ , sont obtenues de la même façon en injectant les composantes du tenseur  $\mathbb{L}$ , (V.54), dans les expressions (V.66) :

$$\begin{cases} L_{mm} = 2 \\ L_{md} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - 3\alpha) \\ L_{dm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - 3\alpha) \\ L_{dd} = \frac{3}{2} (3\alpha + 3\beta - 1) \end{cases} \quad (\text{V.72})$$

• Calcul des composantes du tenseur  $\tilde{\mathbf{P}}$  :

Définissons le tenseur  $\tilde{\mathbf{N}}$  comme suit,

$$\tilde{\mathbf{N}} = \tilde{\mathbf{S}}^T : \tilde{\mathbf{L}} \quad (\text{V.73})$$

Les composantes de ce tenseur sont calculées à l'aide de (V.71), (V.72) :

$$\begin{cases} N_{mm} = 2 - \frac{1}{2}(1 - 3\alpha)^2 \\ N_{md} = N_{dm} = \frac{3}{2\sqrt{2}}(1 - 3\alpha)(1 - \alpha - \beta) \\ N_{dd} = -\frac{3}{4}(1 - \alpha - \beta)(1 - 3\alpha - 3\beta) \end{cases} \quad (\text{V.74})$$

Alors d'après (V.52) :

$$\tilde{\mathbf{P}} = \frac{1}{1-f} (\tilde{\mathbf{N}}(e_f) - f\tilde{\mathbf{N}}(e_1)) \quad (\text{V.75})$$

si bien que les composantes de  $\tilde{\mathbf{P}}$  sont :

$$\begin{cases} P_{mm} = \frac{1}{1-f} \left[ 2 - \frac{1}{2}(1 - 3\alpha_f)^2 - f \left( 2 - \frac{1}{2}(1 - 3\alpha_1)^2 \right) \right] \\ P_{md} = P_{dm} = \frac{1}{1-f} \left[ \frac{3}{2\sqrt{2}}(1 - 3\alpha_f)(1 - \alpha_f - \beta_f) - f \frac{3}{2\sqrt{2}}(1 - 3\alpha_1)(1 - \alpha_1 - \beta_1) \right] \\ P_{dd} = \frac{3}{4(1-f)} \left[ (1 - \alpha_f - \beta_f)(3\alpha_f + 3\beta_f - 1) - f(1 - \alpha_1 - \beta_1)(3\alpha_1 + 3\beta_1 - 1) \right] \end{cases} \quad (\text{V.76})$$

L'expression de  $P_{dd}$  donnée par l'équation (V.76) pose cependant un problème. Il n'est pas difficile de vérifier que dans le cas sphérique, elle donne  $P_{dd} = \frac{6}{25}$ . Or, si l'on se réfère au chapitre III : "A novel treatment of Greenwood-Johnson's mechanism of transformation plasticity - Case of spherical growth of nuclei of daughter-phase", on constate que cette valeur devrait valoir  $\frac{6}{25}g(f)$  dans ce cas,  $g(f)$  étant la fonction définie par l'équation :

$$g(f) = 1 - 4f \frac{(1 - f^{2/3})}{1 - f}. \quad (\text{V.77})$$

L'origine du problème est la suivante. L'expression (V.52) du tenseur  $\mathbb{P}$  a été obtenue par Monchiet *et al.* (2014) moyennant une approximation qui revient finalement, dans le cas sphérique à approcher la fonction  $g(f)$  par l'unité. Cette approximation était acceptable dans le cas de la rupture ductile où  $f$  représente la porosité, toujours petite en pratique :  $g(f) \simeq 1$  pour  $f \ll 1$ . Elle ne l'est plus dans le cas de la plasticité de transformation où  $f$  représente la fraction de phase-fille, qui prend toutes les valeurs de 0 à 1 au cours de la transformation.

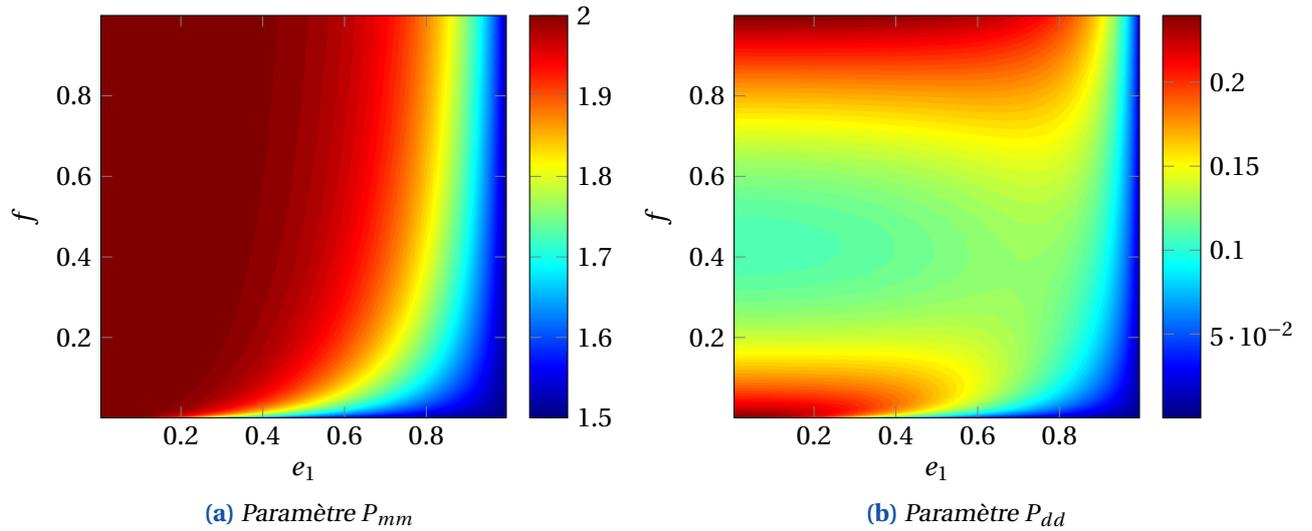
Il convient donc de reprendre le traitement de Monchiet *et al.* (2014) en abandonnant leur approximation, et ceci non seulement dans le cas particulier sphérique mais dans le cas général sphéroïdal. Nous n'entrerons pas dans le détail de ce traitement et nous contenterons d'indiquer qu'il conduit à multiplier l'expression (V.76) du coefficient  $P_{dd}$  par une certaine fonction  $\Psi(f, e_1)$  :

$$P_{dd} = \frac{3}{4(1-f)} \left[ (3\alpha_f + 3\beta_f - 1)(1 - \alpha_f - \beta_f) - f(3\alpha_1 + 3\beta_1 - 1)(1 - \alpha_1 - \beta_1) \right] \Psi(f, e_1) \quad (\text{V.78})$$

où,

$$\Psi(f, e_1) = 1 + \frac{3f \left( 1 - \left( \frac{e_1}{e_f} \right)^2 \right) \left( 1 - f \frac{e_f}{e_1} \right) \left[ \alpha_1(1 - 3\beta_1) - (1 - \beta_1)^2 \right]}{(3\alpha_f + 3\beta_f - 1)(1 - \alpha_f - \beta_f) - f(3\alpha_1 + 3\beta_1 - 1)(1 - \alpha_1 - \beta_1)} \quad (\text{V.79})$$

où  $e_f$  est défini implicitement en fonction de  $f$  et  $e_1$  par l'équation (V.3).



**Figure V.8** – Paramètre  $P_{mm}$  et  $P_{dd}$  en fonction de  $e_1$  et  $f$

On vérifie alors que dans le cas sphérique, l'expression de  $P_{dd}$  se réduit à celle établie au [chapitre III](#) :

$$P_{dd} = \frac{6}{25} \underbrace{\left( 1 - 4f \frac{(1-f^{2/3})^2}{1-f} \right)}_{g(f)} \quad (\text{V.80})$$

- Calcul du tenseur  $\tilde{\mathbf{Q}}$  :

D'après les expressions (V.67) et (V.71), les composantes  $\tilde{\mathbf{Q}}$  s'écrivent,

$$\begin{cases} Q_{mm} = 0 \\ Q_{md} = 0 \\ Q_{dm} = \frac{3}{\sqrt{2}} (\alpha_1 - \alpha_f) \\ Q_{dd} = \frac{3}{2} (\alpha_f - \alpha_1 + \beta_f - \beta_1) \end{cases} \quad (\text{V.81})$$

Dans les deux cas extrêmes d'un sphéroïde allongé, c'est-à-dire pour la sphère et le cylindre, les excentricités interne et externe sont identiques, soit  $e_f = e_1$  ( $= 0$  ou  $1$ ). Par conséquent :

$$\tilde{\mathbf{S}}(e_f) = \tilde{\mathbf{S}}(e_1) \quad (\text{V.82})$$

et puisque :

$$\tilde{\mathbf{Q}} \propto (\tilde{\mathbf{S}}(e_1) - \tilde{\mathbf{S}}(e_f)) \quad (\text{V.83})$$

ceci conduit à :

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{0} \quad (\text{V.84})$$

En approximant également  $\tilde{\mathbf{Q}}$  à  $\mathbf{0}$  (dans le cas de la rupture ductile, il a été vérifié que l'approximation  $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}$  est légitime dans le cas des sphéroïdes allongés, comme envisagé ici, mais pas dans le cas des sphéroïdes aplatis) pour des valeurs intermédiaires de l'excentricité  $e_1$  comprises entre 0 et 1, pour lesquelles  $e_f \neq e_1$ , l'expression de l'intégrand  $\dot{\epsilon}_{\text{eq}}^2$  de la dissipation plastique de l'équation (V.48) devient :

$$\dot{\epsilon}_{\text{eq}}^2 = A_{\text{eq}}^2 + \frac{2}{3} \left[ \dot{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}}^* \cdot \tilde{\mathbf{P}} \cdot \dot{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}}^* \right] w^2 \quad (\text{V.85})$$

Ainsi, l'équation (V.85) devient :

$$\dot{\epsilon}_{\text{eq}}^2 = A_{\text{eq}}^2 + \frac{2}{3} [P_{mm}\dot{\epsilon}_m^{*2} + 2P_{md}\dot{\epsilon}_d^*\dot{\epsilon}_m^* + P_{dd}\dot{\epsilon}_d^{*2}] w^2 \quad (\text{V.86})$$

La dernière étape consiste à simplifier l'expression du crochet  $[P_{mm}\dot{\epsilon}_m^{*2} + 2P_{md}\dot{\epsilon}_d^*\dot{\epsilon}_m^* + P_{dd}\dot{\epsilon}_d^{*2}]$  dans l'expression (V.86). Dans les deux cas extrêmes d'un sphéroïde allongé, c'est-à-dire sphérique ( $e_1 = e_f = 0$ ) et cylindrique ( $e_1 = e_f \rightarrow 1$ ), le coefficient  $P_{md}$  du "terme croisé"  $2P_{md}\dot{\epsilon}_d^*\dot{\epsilon}_m^*$  s'annule. En effet, pour  $e_1 = e_f = 0$  il vient  $\alpha_1 = \alpha_f = \frac{1}{3}$  et  $\beta_1 = \beta_f = \frac{2}{5}$  ce qui donne  $P_{md} = 0$ . Et pour  $e_1 = e_f \rightarrow 1$  une étude asymptotique de la fonction  $\dot{\epsilon}_{\text{eq}}^2$  montre que le terme en  $P_{md}$  est bien négligeable devant les deux autres en  $P_{mm}$  et  $P_{dd}$ . Ainsi, en supposant que le terme en  $P_{md}$  est toujours négligeable pour une excentricité quelconque comprise entre 0 et 1, l'équation (V.86) devient :

$$\dot{\epsilon}_{\text{eq}}^2 = A_{\text{eq}}^2 + \frac{2}{3} (P_{mm}\dot{\epsilon}_m^{*2} + P_{dd}\dot{\epsilon}_d^{*2}) w^2 \quad (\text{V.87})$$

De plus compte tenu des expressions de  $\dot{\epsilon}_m^{*2}$  et  $\dot{\epsilon}_d^{*2}$  suivantes, résultant de (V.36), (V.2.2) et (V.51) :

$$\dot{\epsilon}_m^{*2} = \frac{3}{f^2} \dot{q}_1^2; \quad \dot{\epsilon}_d^{*2} = \frac{3}{2f^2} \dot{q}_3^2 \quad (\text{V.88})$$

et de celle de  $A_{\text{eq}}^2$  résultant de (V.50) :

$$A_{\text{eq}}^2 = \dot{q}_2^2 \quad (\text{V.89})$$

il vient :

$$\dot{\epsilon}_{\text{eq}}^2 = \dot{q}_2^2 + \left( 2P_{mm} \frac{\dot{q}_1^2}{f^2} + P_{dd} \frac{\dot{q}_3^2}{f^2} \right) w^2. \quad (\text{V.90})$$

L'expression de la dissipation plastique est donc finalement :

$$\Gamma(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) = \bar{\sigma}_M f \int_{w_1=f}^{w_2=1} \underbrace{\sqrt{\dot{q}_2^2 + \left( 2P_{mm} \frac{\dot{q}_1^2}{f^2} + P_{dd} \frac{\dot{q}_3^2}{f^2} \right) w^2}}_{\dot{\epsilon}_{\text{eq}}} \frac{dw}{w^2}. \quad (\text{V.91})$$

## V.2.4 Critère de plasticité

L'inégalité fondamentale de l'approche cinématique de l'analyse limite s'écrit (Hill, 1951) :

$$\sum_{i=1}^3 Q_i \dot{q}_i \leq \mathcal{D}(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) \quad \forall \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3 \quad (\text{V.92})$$

où  $\mathbf{Q}$  est le vecteur des paramètres de chargement ( $Q_1, Q_2, Q_3$ ) et  $\mathbf{q}$  celui des paramètres cinématiques conjugués ( $q_1, q_2, q_3$ ). L'ensemble des chargements limites est la frontière du domaine des charges potentiellement supportables, intersection des demi-espaces définis par les équations précédentes ; les équations *paramétriques* de cet ensemble s'écrivent :

$$Q_i = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i}(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{V.93})$$

Pour obtenir le critère de plasticité *explicite*, les paramètres  $\dot{q}_1, \dot{q}_2$  et  $\dot{q}_3$  sont éliminés dans les équations (V.93).

Cette tâche est facilitée par l'utilisation du lemme de GURSON (cf. Madou et Leblond, 2012a) qui consi-

dère une intégrale du type :

$$I(\alpha, \beta) = \int_{w_1}^{w_2} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 w^2} \frac{dw}{w^2} \quad (\text{V.94})$$

où  $w_1$  et  $w_2$  sont des paramètres positifs. Les dérivées  $\frac{\partial I}{\partial \alpha}$  et  $\frac{\partial I}{\partial \beta}$  sont alors connectées par la relation suivante indépendante de  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right)^2 + \frac{2}{w_1 w_2} \cosh\left(\frac{\partial I}{\partial \beta}\right) - \frac{1}{w_1^2} - \frac{1}{w_2^2} = 0. \quad (\text{V.95})$$

En effet la différentiation de l'intégrale  $I(\alpha, \beta)$  par rapport  $\alpha$  et  $\beta$  donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int_{w_1}^{w_2} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 w^2}} \frac{dw}{w^2} = \frac{1}{w_1} \sqrt{1 + \frac{\beta^2 w_1^2}{\alpha^2}} - \frac{1}{w_2} \sqrt{1 + \frac{\beta^2 w_2^2}{\alpha^2}} \\ \frac{\partial I}{\partial \beta} = \int_{w_1}^{w_2} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 w^2}} dw = \sinh^{-1}\left(\frac{\beta w_2}{\alpha}\right) - \sinh^{-1}\left(\frac{\beta w_1}{\alpha}\right) \end{cases} \quad (\text{V.96})$$

et la relation (V.95) découle de ces expressions comme on le vérifie aisément.

Pour utiliser ce lemme nous prenons :

$$\begin{cases} I = \frac{\Gamma}{f \bar{\sigma}_M} \\ w_1 = f; \quad w_2 = 1 \\ \alpha = \dot{q}_2 \\ \beta = \sqrt{2P_{mm} \frac{\dot{q}_1^2}{f^2} + P_{dd} \frac{\dot{q}_3^2}{f^2}} \end{cases} \quad (\text{V.97})$$

Il faut alors relier la dérivée  $\frac{\partial I}{\partial \beta}$  apparaissant dans le lemme de GURSON aux dérivées  $\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_1}$  et  $\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_3}$ , elles-mêmes reliées aux paramètres de chargement  $Q_1$  et  $Q_3$ . Les dérivées de  $\beta$  par rapport à  $\dot{q}_1$  et  $\dot{q}_3$  donnent :

$$\frac{\partial \beta}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \sqrt{2P_{mm} \frac{\dot{q}_1^2}{f^2} + P_{dd} \frac{\dot{q}_3^2}{f^2}} = \frac{1}{2} \frac{2}{f^2} \frac{2P_{mm} \dot{q}_1}{\sqrt{2P_{mm} \frac{\dot{q}_1^2}{f^2} + P_{dd} \frac{\dot{q}_3^2}{f^2}}} = \frac{2P_{mm} \dot{q}_1}{f^2 \beta} \quad (\text{V.98})$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \dot{q}_3} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_3} \sqrt{2P_{mm} \frac{\dot{q}_1^2}{f^2} + P_{dd} \frac{\dot{q}_3^2}{f^2}} = \frac{1}{2} \frac{2}{f^2} \frac{P_{dd} \dot{q}_3}{\sqrt{2P_{mm} \frac{\dot{q}_1^2}{f^2} + P_{dd} \frac{\dot{q}_3^2}{f^2}}} = P_{dd} \frac{\dot{q}_3}{f^2 \beta} \quad (\text{V.99})$$

D'autre part,  $\beta^2 = 2P_{mm} \frac{\dot{q}_1^2}{f^2} + P_{dd} \frac{\dot{q}_3^2}{f^2}$ . Par conséquent,

$$1 = 2P_{mm} \frac{\dot{q}_1^2}{\beta^2 f^2} + P_{dd} \frac{\dot{q}_3^2}{\beta^2 f^2} \quad (\text{V.100})$$

ce qui donne en utilisant les relations précédentes :

$$1 = \frac{f^2}{2P_{mm}} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \dot{q}_1}\right)^2 + \frac{f^2}{P_{dd}} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \dot{q}_3}\right)^2 \quad (\text{V.101})$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} \frac{f^2}{2P_{mm}} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_1} \right)^2 + \frac{f^2}{P_{dd}} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_3} \right)^2 &= \frac{f^2}{2P_{mm}} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \dot{q}_1} \right)^2 + \frac{f^2}{P_{dd}} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \dot{q}_3} \right)^2 \\ &= \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \beta} \right)^2 \underbrace{\left[ \frac{f^2}{2P_{mm}} \left( \frac{\partial \beta}{\partial \dot{q}_1} \right)^2 + \frac{f^2}{P_{dd}} \left( \frac{\partial \beta}{\partial \dot{q}_3} \right)^2 \right]}_{=1} \end{aligned} \quad (\text{V.102})$$

d'où :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \beta} = \sqrt{\frac{f^2}{2P_{mm}} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_1} \right)^2 + \frac{f^2}{P_{dd}} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_3} \right)^2} \quad (\text{V.103})$$

En utilisant la relation (V.93) et le lien entre  $\mathcal{D}$  et  $\Gamma$  (relation (V.48)), il vient les relations suivantes :

$$\begin{cases} Q_1 = \text{vol}(\Omega) \frac{\partial \Gamma(\mathbf{q})}{\partial \dot{q}_1} \\ Q_2 = \text{vol}(\Omega) \frac{\partial \Gamma(\mathbf{q})}{\partial \dot{q}_2} \\ Q_3 = \text{vol}(\Omega) \frac{\partial \Gamma(\mathbf{q})}{\partial \dot{q}_3} \end{cases} \quad (\text{V.104})$$

Compte tenu des expressions suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_2} = \frac{Q_2}{\text{vol}(\Omega)} \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial \beta} = \sqrt{\frac{f^2}{2P_{mm}} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_1} \right)^2 + \frac{f^2}{P_{dd}} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_3} \right)^2} = \sqrt{\frac{f^2}{2P_{mm}} \left( \frac{Q_1}{\text{vol}(\Omega)} \right)^2 + \frac{f^2}{P_{dd}} \left( \frac{Q_3}{\Omega} \right)^2} \end{cases} \quad (\text{V.105})$$

le lemme de GURSON (V.95) donne alors l'expression explicite du critère :

$$\left( \frac{1}{f \bar{\sigma}_M} \frac{Q_2}{\text{vol}(\Omega)} \right)^2 + \frac{2}{f} \cosh \left( \frac{1}{f \bar{\sigma}_M} \sqrt{\frac{f^2}{2P_{mm}} \left( \frac{Q_1}{\text{vol}(\Omega)} \right)^2 + \frac{f^2}{P_{dd}} \left( \frac{Q_3}{\text{vol}(\Omega)} \right)^2} \right) - \frac{1}{f^2} - 1 = 0 \quad (\text{V.106})$$

soit plus explicitement en fonction des contraintes macroscopiques  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{33}$ ,  $\bar{\Sigma}_{11}$ ,  $\bar{\Sigma}_{33}$  :

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{1}{\bar{\sigma}_M} \left[ \Sigma_{33} - \Sigma_{11} + f \left( \bar{\Sigma}_{33} - \bar{\Sigma}_{11} \right) \right] \right\}^2 + 2f \cosh \left\{ \frac{1}{f \bar{\sigma}_M} \left[ \frac{f^2}{2P_{mm}} \left( 3 \left[ \alpha_1 \left( \Sigma_{33} - \Sigma_{11} \right) + \alpha_f \left( \bar{\Sigma}_{33} - \bar{\Sigma}_{11} \right) + \Sigma_{11} + \bar{\Sigma}_{11} \right] \right) \right]^2 + \right. \\ &\left. \frac{f^2}{P_{dd}} \left( \frac{3}{2} \left[ \left( 1 - \alpha_1 - \beta_1 \right) \left( \Sigma_{33} - \Sigma_{11} \right) + \left( 1 - \alpha_f - \beta_f \right) \left( \bar{\Sigma}_{33} - \bar{\Sigma}_{11} \right) \right] \right)^2 \right]^{1/2} \right\} - 1 - f^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{V.107})$$

On peut écrire le critère de manière plus compacte en introduisant les notations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_1 = \frac{3}{2} (1 - \alpha_1) (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + 3\alpha_1 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{X}_f = \frac{3}{2} (1 - \alpha_f) (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + 3\alpha_f \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \\ S = \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{X}_1 + \bar{\boldsymbol{\Sigma}} : \mathbf{X}_f \\ \mathbf{T} = \boldsymbol{\Sigma} + f \bar{\boldsymbol{\Sigma}} \\ \tilde{\mathbf{T}} = \frac{3}{2} (1 - \alpha_1 - \beta_1) \boldsymbol{\Sigma} + \frac{3}{2} (1 - \alpha_f - \beta_f) \bar{\boldsymbol{\Sigma}} \\ S_H = \sqrt{\frac{S^2}{2P_{mm}} + \frac{\tilde{T}_{\text{eq}}^2}{P_{dd}}} \end{cases} \quad (\text{V.108})$$

Le critère (V.109) s'écrit alors :

$$\Phi(\boldsymbol{\Sigma}, \bar{\boldsymbol{\Sigma}}) = \frac{T_{\text{eq}}^2}{\bar{\sigma}_M^2} + 2f \cosh \left( \frac{S_H}{\bar{\sigma}_M} \right) - 1 - f^2 = 0 \quad (\text{V.109})$$

On peut alors étendre ce critère heuristiquement au cas de chargements arbitraires, en supposant qu'il reste valable sous cette forme pour de tels chargements.

### V.2.5 Loi d'écoulement plastique

Pour déterminer la loi d'écoulement plastique, nous suivons ici la démarche de HILL (1967) mais en l'adaptant à la situation présente. Comme dans le cas sphérique (cf. chapitre III), définissons  $\mathcal{E}$ , l'espace des paires  $(\mathbf{X}, \bar{\mathbf{X}})$  de tenseurs symétriques d'ordre deux, équipé du produit scalaire  $\bullet$  défini de la manière suivante :

$$(\mathbf{X}, \bar{\mathbf{X}}) \bullet (\mathbf{Y}, \bar{\mathbf{Y}}) \equiv \mathbf{X} : \mathbf{Y} + \bar{\mathbf{X}} : \bar{\mathbf{Y}}. \quad (\text{V.110})$$

Considérons à l'intérieur de  $\mathcal{E}$  les paires suivantes :

- une paire de tenseurs des contraintes  $(\boldsymbol{\Sigma}, \bar{\boldsymbol{\Sigma}})$  définissant une charge limite
- une paire de tenseurs de taux de déformation  $(\dot{\mathbf{E}}, \bar{\dot{\mathbf{E}}})$  générée par cette charge limite (via la loi de comportement)
- une autre paire de tenseurs des contraintes  $(\boldsymbol{\Sigma}^*, \bar{\boldsymbol{\Sigma}}^*)$  admissible (potentiellement supportable).

Considérons aussi les différents champs suivants :

- le champ de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  résultant de l'application de la paire  $(\boldsymbol{\Sigma}, \bar{\boldsymbol{\Sigma}})$  (via la loi de comportement)
- un champ de taux de déformation  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x})$  généré par le champ de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  (via la loi de comportement)
- un champ de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x})$  statiquement admissible avec la paire  $(\boldsymbol{\Sigma}^*, \bar{\boldsymbol{\Sigma}}^*)$  et plastiquement admissible (respectant  $\sigma_{\text{eq}}^* \leq \bar{\sigma}_M$  en tout point).

De manière générale le principe des puissances virtuelles s'écrit :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} d\Omega = -\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_e = \text{vol}(\Omega) [\boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}} + f \bar{\boldsymbol{\Sigma}} : \dot{\bar{\mathbf{E}}}] \quad (\text{V.111})$$

En utilisant le principe du travail plastique maximal (PTPM ou principe de HILL), il vient alors :

$$(\boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma}^*) : \dot{\mathbf{E}} + f(\bar{\boldsymbol{\Sigma}} - \bar{\boldsymbol{\Sigma}}^*) : \dot{\bar{\mathbf{E}}} = \langle (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle_{\Omega} \geq 0 \quad (\text{V.112})$$

ce qui s'écrit encore avec la notation introduite plus haut :

$$(\boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma}^*, \bar{\boldsymbol{\Sigma}} - \bar{\boldsymbol{\Sigma}}^*) \bullet (\dot{\mathbf{E}}, f \dot{\bar{\mathbf{E}}}) \geq 0 \quad (\text{V.113})$$

pour tout chargement admissible  $(\boldsymbol{\Sigma}^*, \bar{\boldsymbol{\Sigma}}^*)$ . Il existe alors, suivant le raisonnement classique, un unique multiplicateur plastique positif ou nul  $\dot{\Lambda}$  tel que :

$$(\dot{\mathbf{E}}, f \dot{\bar{\mathbf{E}}}) = \dot{\Lambda} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\Sigma}}, \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\boldsymbol{\Sigma}}} \right) \quad \text{soit,} \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{E}} = \dot{\Lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} \\ \dot{\bar{\mathbf{E}}} = \frac{\dot{\Lambda}}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\boldsymbol{\Sigma}}} \end{cases} \quad (\text{V.114})$$

Compte tenu de l'expression (V.109) du critère  $\Phi$ , les expressions suivantes sont déterminées :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{T}_{\text{eq}}^2}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} = \frac{9}{2} \tilde{\mathbf{T}} (1 - \alpha_1 - \beta_1) \\ \frac{\partial \tilde{T}_{\text{eq}}^2}{\partial \bar{\boldsymbol{\Sigma}}} = \frac{9}{2} \tilde{\mathbf{T}} (1 - \alpha_f - \beta_f) \\ \frac{\partial S^2}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} = 2\mathbf{X}_1 S \\ \frac{\partial S^2}{\partial \bar{\boldsymbol{\Sigma}}} = 2\mathbf{X}_f S \end{cases} \quad (\text{V.115})$$

La loi d'écoulement plastique "double" s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{E}} = \frac{\dot{\Lambda}}{\bar{\sigma}_M^2} \left\{ 3\mathbf{T}' + f \frac{\sinh(S_H/\bar{\sigma}_M)}{S_H/\bar{\sigma}_M} \left[ \mathbf{X}_1 \frac{S}{P_{mm}} + \frac{9}{2P_{dd}} \tilde{\mathbf{T}}' (1 - \alpha_1 - \beta_1) \right] \right\} \\ \dot{\mathbf{E}} = \frac{\dot{\Lambda}}{\bar{\sigma}_M^2} \left\{ 3\mathbf{T}' + \frac{\sinh(S_H/\bar{\sigma}_M)}{S_H/\bar{\sigma}_M} \left[ \mathbf{X}_f \frac{S}{P_{mm}} + \frac{9}{2P_{dd}} \tilde{\mathbf{T}}' (1 - \alpha_f - \beta_f) \right] \right\} \end{cases} \quad (\text{V.116})$$

### V.3 Application à la plasticité de transformation

Le volume élémentaire représentatif d'une pièce d'acier ou d'alliage en cours de transformation de phase est soumis à (i) un chargement externe résultant de la contrainte macroscopique  $\Sigma$ ; (ii) un chargement interne caractérisé par le taux de déformation  $\dot{\mathbf{E}}$ , résultant de l'expansion des germes de phase fille progressivement croissants. Le problème est alors constitué des éléments suivants :

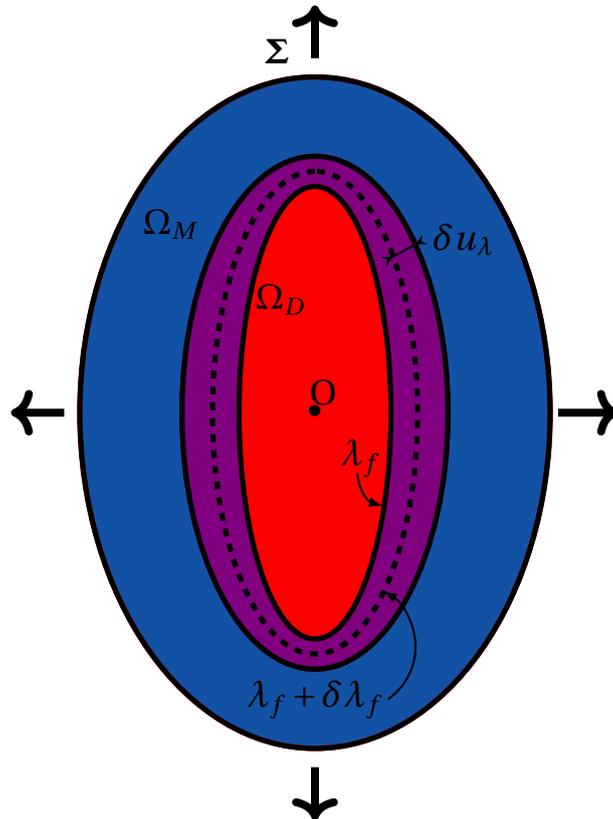
- les données du problème sont la contrainte externe  $\Sigma$  et le taux de déformation interne  $\dot{\mathbf{E}}$  (à calculer en fonction des caractéristiques de la transformation).
- les inconnues du problème sont la contrainte interne  $\bar{\Sigma}$ , le taux de déformation extérieur  $\dot{\mathbf{E}}$  et le multiplicateur plastique  $\dot{\Lambda}$ . La quantité réellement recherchée parmi ces trois inconnues est  $\dot{\mathbf{E}}$  (ou du moins sa partie déviatorique), les deux autres quantités  $\bar{\Sigma}$  et  $\dot{\Lambda}$  sont des inconnues auxiliaires d'un intérêt moindre.

Les équations disponibles permettant de déterminer ces inconnues sont :

- le critère  $\Phi(\Sigma, \bar{\Sigma}, f)$ , dont l'expression a été établie dans la sous-section V.2.4 : "Critère de plasticité", et est donnée par (V.109).
- la loi d'écoulement plastique double qui a été déterminée dans la sous-section V.2.4 : "Loi d'écoulement plastique", et est donnée par (V.116).

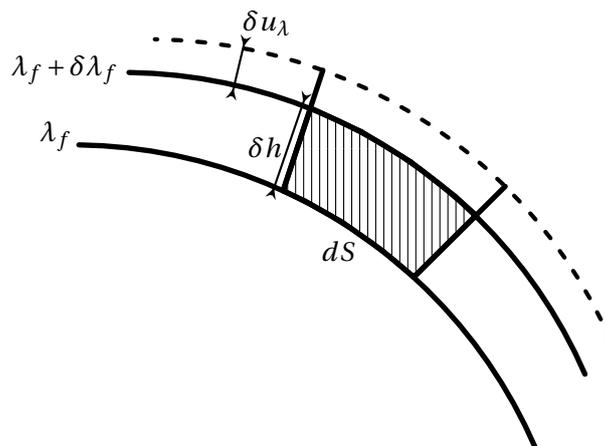
#### V.3.1 Préliminaires

Nous allons ici reprendre en partie les travaux de stage de T. LE HUNG (rapport de stage M2 : réalisé à l'UPMC sous l'encadrement de J.B. Leblond), afin de déterminer le taux de déformation interne  $\dot{\mathbf{E}}$  dû à l'avancement de la transformation. La situation considérée est représentée sur la Figure V.9. La couche située entre les coordonnées elliptiques  $\lambda_f$  et  $\lambda_f + \delta\lambda_f$  se transforme de la phase mère à la phase fille pendant un petit intervalle de temps  $[t, t + \delta t]$ , générant un incrément de déplacement  $\delta u_\lambda$  sur son bord extérieur.



**Figure V.9** – Transformation étudiée - Adaptation de l'ancienne analyse de *Leblond et al. (1989)*

Dans une portion de la couche en cours de transformation de la [Figure V.9](#), schématisée sur la [Figure V.10](#), la quantité  $\delta h$  désigne l'épaisseur locale de la couche en cours de transformation, et la quantité  $\delta u_\lambda$  représente le déplacement dû au changement de volume de la couche qui accompagne cette transformation.



**Figure V.10** – Géométrie étudiée, issue des travaux de *TRAN LE HUNG*

Sur une petite surface  $dS$ , le volume final  $dV$  de la portion de couche peut s'écrire de deux manières différentes :

$$\begin{cases} dV = dS(\delta h + \delta u_\lambda) \\ dV = dS\delta h(1 + \frac{\Delta V}{V}) \end{cases} \quad (\text{V.117})$$

où  $\frac{\Delta V}{V}$  désigne la différence relative de volume spécifique entre les deux phases.

L'égalité des deux expressions précédentes donne :

$$\delta u_\lambda = \delta h \frac{\Delta V}{V} \quad (\text{V.118})$$

Il s'agit maintenant de relier ce déplacement  $\delta u_\lambda$  aux composantes de l'incrément de déformation interne  $\delta \bar{\mathbf{E}}$ . La couche en cours de transformation est comprise entre les deux sphéroïdes de paramètres  $\lambda_f$  et  $\lambda_f + \delta \lambda_f$ , donc son épaisseur locale  $\delta h$  est donnée par :

$$\delta h = \sqrt{\delta \rho^2 + \delta z^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2} \cdot \delta \lambda_f \quad (\text{V.119})$$

On peut ensuite calculer l'incrément de déplacement  $\delta u_\lambda$  qui décrit l'expansion de la couche. Soit M un point situé sur le sphéroïde  $\lambda_f + \delta \lambda_f$ , dont le vecteur  $\mathbf{x} = \mathbf{OM}$  représente la position. De plus, supposons a priori (sous réserve de vérification ultérieure) le vecteur incrément de déplacement  $\delta \mathbf{u}$  fonction linéaire de la position :

$$\delta \mathbf{u} = \delta \bar{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x} \quad (\text{V.120})$$

où  $\delta \bar{\mathbf{E}}$  est un tenseur axisymétrique, dont les composantes non nulles sont :

$$\begin{cases} \delta \bar{E}_{11} \equiv \delta \bar{E}_1 \\ \delta \bar{E}_{22} \equiv \delta \bar{E}_1 \\ \delta \bar{E}_{33} \equiv \delta \bar{E}_3 \end{cases} \quad (\text{V.121})$$

En remplaçant dans l'équation (V.120), il vient :

$$\delta \mathbf{u} = \delta \bar{E}_1 \rho \mathbf{e}_\rho + \delta \bar{E}_3 z \mathbf{e}_z \quad (\text{V.122})$$

Le calcul de la composante  $\delta u_\lambda = \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_\lambda$  donne alors :

$$\delta u_\lambda = \delta \bar{E}_1 \rho \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\lambda + \delta \bar{E}_3 z \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\lambda \quad (\text{V.123})$$

Les deux produits scalaires  $\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\lambda$  et  $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\lambda$  dans cette expression peuvent se calculer à l'aide de la dérivée partielle du vecteur  $\mathbf{OM}$  par rapport à  $\lambda$  :

$$\frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} \mathbf{e}_\rho + \frac{\partial z}{\partial \lambda} \mathbf{e}_z \quad (\text{V.124})$$

où l'on a utilisé l'indépendance des vecteurs  $\mathbf{e}_\rho$  et  $\mathbf{e}_z$  vis-à-vis de  $\lambda$  (les autres coordonnées sphéroïdales  $\theta$  et  $\phi$  étant fixées). Le vecteur unitaire  $\mathbf{e}_\lambda$  est alors calculé par :

$$\mathbf{e}_\lambda = \frac{\partial \mathbf{OM} / \partial \lambda}{\|\partial \mathbf{OM} / \partial \lambda\|} \quad (\text{V.125})$$

La combinaison des équations (V.124) et (V.125) donne :

$$\frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \lambda} \cdot \mathbf{e}_\rho = \|\partial \mathbf{OM} / \partial \lambda\| \mathbf{e}_\lambda \cdot \mathbf{e}_\rho = \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} \Rightarrow \mathbf{e}_\lambda \cdot \mathbf{e}_\rho = \frac{\partial \rho / \partial \lambda}{\|\partial \mathbf{OM} / \partial \lambda\|} \quad (\text{V.126})$$

Par le même raisonnement :

$$\mathbf{e}_\lambda \cdot \mathbf{e}_z = \frac{\partial z / \partial \lambda}{\|\partial \mathbf{OM} / \partial \lambda\|} \quad (\text{V.127})$$

En substituant ces deux produits dans l'équation (V.123), on obtient :

$$\delta u_\lambda = \left[ \rho \delta \bar{E}_1 \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} + z \delta \bar{E}_3 \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right] \frac{1}{\|\partial \mathbf{OM} / \partial \lambda\|} \quad (\text{V.128})$$

À partir des équations (V.118), (V.119) et (V.128) il vient :

$$\frac{1}{\|\partial \mathbf{OM} / \partial \lambda\|} \left[ \rho \delta \bar{E}_1 \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} + z \delta \bar{E}_3 \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right] = \delta \lambda_f \frac{\Delta V}{V} \sqrt{\left( \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)^2}. \quad (\text{V.129})$$

Étant donné que :

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \lambda} \right\| = \left\| \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} \mathbf{e}_\rho + \frac{\partial z}{\partial \lambda} \mathbf{e}_z \right\| = \sqrt{\left( \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)^2} \quad (\text{V.130})$$

on obtient finalement la relation nécessaire :

$$\rho \delta \bar{E}_1 \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} + z \delta \bar{E}_3 \frac{\partial z}{\partial \lambda} = \delta \lambda_f \frac{\Delta V}{V} \left[ \left( \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)^2 \right]. \quad (\text{V.131})$$

Or d'après les équations (V.6) et (V.8) les coordonnées cylindriques  $\rho$  et  $z$  sont données en fonction des coordonnées elliptiques  $\lambda, \phi$  et de la distance focale  $c$  par :

$$\begin{cases} \rho = c \sinh(\lambda) \sin(\phi) \\ z = c \cosh(\lambda) \cos(\phi) \end{cases} \quad (\text{V.132})$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} = c \cosh(\lambda) \sin(\phi) \\ \frac{\partial z}{\partial \lambda} = c \sinh(\lambda) \cos(\phi) \end{cases} \quad (\text{V.133})$$

Compte tenu des équations (V.132) et (V.133), la relation (V.131) devient :

$$\delta \bar{E}_1 \cosh(\lambda_f) \sinh(\lambda_f) + \cos^2(\phi) \cosh(\lambda_f) \sinh(\lambda_f) (\delta \bar{E}_3 - \delta \bar{E}_1) = \delta \lambda_f \frac{\Delta V}{V} (\cosh^2(\lambda_f) - \cos^2(\phi)) \quad (\text{V.134})$$

En séparant dans l'équation (V.134) les termes en 1 et  $\cos^2(\phi)$ , on obtient un système d'équations à deux inconnues  $\delta \bar{E}_1$  et  $\delta \bar{E}_3$  :

$$\begin{cases} \cosh(\lambda_f) \sinh(\lambda_f) (\delta \bar{E}_1 - \delta \bar{E}_3) = \frac{\Delta V}{V} \delta \lambda_f \\ \cosh(\lambda_f) \sinh(\lambda_f) \delta \bar{E}_1 = \frac{\Delta V}{V} \cosh^2(\lambda_f) \delta \lambda_f \end{cases} \quad (\text{V.135})$$

La solution pour  $\delta \bar{E}_1$  et  $\delta \bar{E}_3$  s'écrit :

$$\begin{cases} \delta \bar{E}_1 = \frac{\Delta V}{V} \coth \lambda_f \delta \lambda_f = \frac{\Delta V}{V} \coth \lambda_f \frac{d\lambda_f}{df} \delta f \Leftrightarrow \dot{\bar{E}}_1 = \frac{\Delta V}{V} \coth \lambda_f \frac{d\lambda_f}{df} \dot{f} \\ \delta \bar{E}_3 = \frac{\Delta V}{V} \sinh \lambda_f \delta \lambda_f = \frac{\Delta V}{V} \sinh \lambda_f \frac{d\lambda_f}{df} \delta f \Leftrightarrow \dot{\bar{E}}_3 = \frac{\Delta V}{V} \sinh \lambda_f \frac{d\lambda_f}{df} \dot{f} \end{cases} \quad (\text{V.136})$$

où, d'après (V.1), (V.6), (V.7) :

$$\frac{df}{d\lambda_f} = \frac{c^3}{a_1 b_1^2} (\sinh^2(\lambda_f) + 2 \cosh^2(\lambda_f)) \quad (\text{V.137})$$

On aura noté au passage que l'existence de la solution donnée par (V.136) confirme l'hypothèse (V.120) faite a priori sur le déplacement du bord intérieur (au moins pour la composante  $\delta u_\lambda$  seule considérée ici).

Il est à noter que le système d'équation (V.136) peut être sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\bar{E}}_3 = (1 - e_f^2) \dot{\bar{E}}_1 \\ \text{tr} \dot{\bar{\mathbf{E}}} = \frac{\dot{f}}{f} \frac{\Delta V}{V} \end{cases} \quad (\text{V.138a})$$

$$(\text{V.138b})$$

La première de ces relations est en faite évidente, car elle résulte de l'équation (V.29) combiné avec l'observation que lors de la transformation d'une fraction  $\delta_f$  de phase-mère, l'augmentation relative du volume extérieur vaut  $\frac{\Delta V}{V} \delta f$  (la plasticité de la phase-mère se faisant sans changement de volume). La seconde de ces relations est moins triviale, et liée à la forme du germe en transformation via son excentricité  $e_f$ . On observera que dans le cas sphérique, elle se réduit à  $\dot{\bar{E}}_3 = \dot{\bar{E}}_1$  (taux de déformation intérieur, dû à la transformation, multiple de l'identité).

### V.3.2 Cas de contraintes nulles ( $\Sigma = 0$ )

Dans cette section la contrainte extérieure est nulle :

$$\Sigma = 0 \quad (\text{V.139})$$

L'autre donnée du problème est le taux de déformation interne  $\dot{\bar{\mathbf{E}}}$ , et la quantité recherchée est la partie déviatorique du taux de déformation externe  $\dot{\bar{\mathbf{E}}}$ . D'après (V.108) et (V.139), les expressions des différentes quantités se réduisent à :

$$\begin{cases} S = \bar{\Sigma} : \mathbf{X}_f \\ \mathbf{T} = f \bar{\Sigma} \\ \tilde{\mathbf{T}} = \frac{3}{2}(1 - \alpha_f - \beta_f) \bar{\Sigma} \\ \tilde{T}_{\text{eq}} = \frac{3}{2}(1 - \alpha_f - \beta_f) \bar{\Sigma}_{\text{eq}} \\ S_H = \sqrt{\frac{S^2}{2P_{mm}} + \frac{\tilde{T}_{\text{eq}}^2}{P_{dd}}} \end{cases}$$

Ainsi le critère s'écrit simplement :

$$\Phi = \frac{f^2 \bar{\Sigma}_{\text{eq}}^2}{\bar{\sigma}_M^2} + 2f \cosh(S_H / \bar{\sigma}_M) - 1 - f^2 = 0 \quad (\text{V.140})$$

et la loi d'écoulement plastique "interne" s'écrit :

$$\dot{\bar{\mathbf{E}}} = \frac{\dot{\Lambda}}{\bar{\sigma}_M^2} \left\{ 3f \bar{\Sigma}' + \frac{\sinh(S_H / \bar{\sigma}_M)}{S_H / \bar{\sigma}_M} \left[ \mathbf{X}_f \frac{S}{P_{mm}} + \frac{27}{4P_{dd}} \bar{\Sigma}' (1 - \alpha_f - \beta_f)^2 \right] \right\} \quad (\text{V.141})$$

ce qui donne dans le cas axisymétrique pour les composantes :

$$\begin{cases} \dot{\bar{E}}_1 = \frac{\dot{\Lambda}}{\bar{\sigma}_M^2} \left\{ f (\bar{\Sigma}_1 - \bar{\Sigma}_3) + \frac{\sinh(S_H / \bar{\sigma}_M)}{S_H / \bar{\sigma}_M} \left[ \frac{S}{P_{mm}} \frac{3}{2} (1 - \alpha_f) + \frac{9}{4P_{dd}} (\bar{\Sigma}_1 - \bar{\Sigma}_3) (1 - \alpha_f - \beta_f)^2 \right] \right\} \\ \dot{\bar{E}}_3 = \frac{\dot{\Lambda}}{\bar{\sigma}_M^2} \left\{ 2f (\bar{\Sigma}_3 - \bar{\Sigma}_1) + \frac{\sinh(S_H / \bar{\sigma}_M)}{S_H / \bar{\sigma}_M} \left[ \frac{S}{P_{mm}} 3\alpha_f + \frac{9}{2P_{dd}} (\bar{\Sigma}_3 - \bar{\Sigma}_1) (1 - \alpha_f - \beta_f)^2 \right] \right\} \end{cases} \quad (\text{V.142})$$

Passons à la résolution. D'après la relation (V.138a), il vient :

$$\bar{\Sigma}_3 - \bar{\Sigma}_1 = \frac{-\frac{S}{P_{mm}} \gamma_f}{\frac{2}{3} f \frac{S_H / \bar{\sigma}_M}{\sinh(S_H / \bar{\sigma}_M)} + \frac{3}{2P_{dd}} (1 - \alpha_f - \beta_f)^2} \quad (\text{V.143})$$

**Remarque.**  $\bar{\Sigma}_1 > \bar{\Sigma}_3$  car  $S > 0$ ,  $P_{mm} > 0$ ,  $P_{dd} > 0$  et  $\frac{x}{\sinh x} > 0$ .

De plus, d'après (V.142) il vient :

$$2\dot{\bar{E}}_1 + \dot{\bar{E}}_3 = \frac{\dot{\Lambda}}{\bar{\sigma}_M^2} \frac{\sinh(S_H / \bar{\sigma}_M)}{S_H / \bar{\sigma}_M} \frac{3S}{P_{mm}}$$

Cette dernière relation et la relation (V.138b) permettent alors de donner l'expression de  $\dot{\Lambda}$  :

$$\frac{\dot{\Lambda}}{\bar{\sigma}_M^2} = \frac{\dot{f}}{f} \frac{\Delta V}{V} \frac{1}{3S} \frac{P_{mm} S_H / \bar{\sigma}_M}{\sinh(S_H / \bar{\sigma}_M)} \quad (\text{V.144})$$

Maintenant, d'après le critère (V.140) et la positivité de  $\bar{\Sigma}_1 - \bar{\Sigma}_3$  il vient :

$$\frac{\bar{\Sigma}_1 - \bar{\Sigma}_3}{\bar{\sigma}_M} = \frac{1}{f} [1 + f^2 - 2f \cosh(S_H / \bar{\sigma}_M)]^{1/2} \quad (\text{V.145})$$

La fonction "réduite" suivante est alors introduite :

$$\frac{\bar{\Sigma}_1 - \bar{\Sigma}_3}{\bar{\sigma}_M} = F(S_H / \bar{\sigma}_M) \quad \text{avec } F(X) = \sqrt{1 + \frac{1}{f^2} - \frac{2}{f} \cosh X} \quad \text{et } X = \frac{S_H}{\bar{\sigma}_M}. \quad (\text{V.146})$$

On obtient alors à partir de (V.143) :

$$\frac{S}{\bar{\sigma}_M} = G\left(\frac{S_H}{\bar{\sigma}_M}\right) = G(X) = \frac{F(X)}{\gamma_f} \left( \frac{2}{3} f \frac{X}{\sinh(X)} + \frac{3}{2} \frac{(1 - \alpha_f - \beta_f)^2}{P_{dd}} \right) P_{mm} \quad (\text{V.147})$$

De plus, d'après la définition (V.140) de  $S_H$ ,

$$\frac{S_H^2}{\bar{\sigma}_M^2} = X^2 = \frac{S^2}{2P_{mm}\bar{\sigma}_M^2} + \frac{\left[ \frac{3}{2} (1 - \alpha_f - \beta_f) \left( \frac{\bar{\Sigma}_1 - \bar{\Sigma}_3}{\bar{\sigma}_M} \right) \right]^2}{P_{dd}} \quad (\text{V.148})$$

si bien que

$$X^2 = \frac{G^2(X)}{2P_{mm}} + \frac{1}{P_{dd}} \left( \frac{3}{2} F(X) (1 - \alpha_f - \beta_f) \right)^2. \quad (\text{V.149})$$

La résolution numérique, à l'aide d'une méthode de Newton-Raphson, de cette équation non-linéaire sur l'inconnue  $X$  permet alors d'en obtenir la valeur.

Comme évoqué dans le cas sphérique (cf. chapitre III), le taux de déformation plastique de transformation  $\dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}}$ , peut alors être déterminé à partir du taux de déformation total  $\dot{\mathbf{E}}$  résultant de l'analyse-limite. En l'absence d'élasticité comme supposé ici, nous avons (en négligeant les terme en  $\dot{\mathbf{\Sigma}}$  et  $\dot{T}$ , cf. Leblond *et al.*, 1989) :

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}} + \dot{\mathbf{E}}^{\text{thm}} \quad (\text{V.150})$$

En prenant ensuite le déviateur  $\dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}} = \dot{\mathbf{E}}'$ , on obtient d'après la première expression de (V.116) et des expressions (V.144)-(V.149), le taux de déformation plastique de transformation  $\dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}}$  (donné dans la direction  $\mathbf{e}_z$  du sphéroïde) :

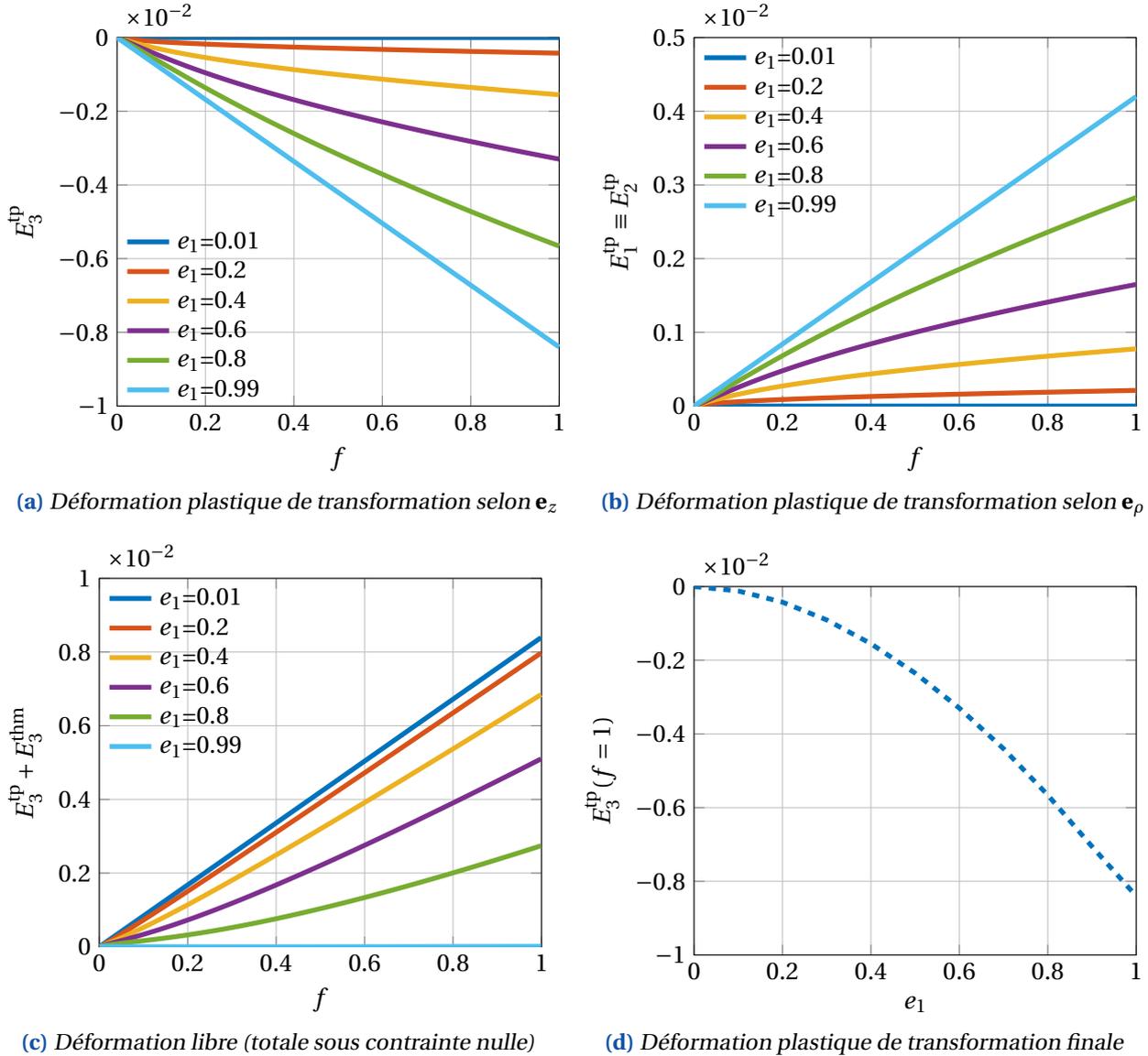
$$\dot{E}_3^{\text{tp}} = \dot{E}_3' = \dot{f} \frac{\Delta V}{V} \left[ \alpha_1 - \frac{1}{3} - \frac{P_{mm}}{3S} F(X) \bar{\sigma}_M \left( \frac{2X}{\sinh(X)} + \frac{9}{2P_{dd}} (1 - \alpha_f - \beta_f) (1 - \alpha_1 - \beta_1) \right) \right] \quad (\text{V.151})$$

De plus, puisque  $\text{tr} \dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}} \equiv 2\dot{E}_1^{\text{tp}} + \dot{E}_3^{\text{tp}} = 0$ , le taux de déformation plastique de transformation dans la direction  $\mathbf{e}_\rho$  du sphéroïde est donné par :

$$\dot{E}_1^{\text{tp}} \equiv \dot{E}_2^{\text{tp}} = -\frac{1}{2} \dot{E}_3^{\text{tp}} \quad (\text{V.152})$$

La loi de comportement ainsi obtenue sous contrainte nulle est illustrée sur la Figure V.11, pour différentes excentricités  $e_1$  finales des germes. Les figures V.11(a) et V.11(b) illustrent les déformations plastiques de transformation  $\dot{E}_1^{\text{tp}}$  et  $\dot{E}_3^{\text{tp}}$  respectivement, en fonction de la proportion  $f$  de phase fille. La Figure V.11(c) illustre la somme de la déformation plastique de transformation  $\dot{E}_3^{\text{tp}}$  et de la déformation

thermo-métallurgique  $\dot{E}_3^{\text{thm}} = \frac{1}{3} \frac{\Delta V}{V}$ , en fonction de la fraction de phase fille  $f$ . La Figure V.11(d) montre la déformation plastique de transformation  $\dot{E}_3^{\text{tp}}$  pour une transformation complète ( $f = 1$ ), en fonction de l'excentricité finale  $e_1$  des germes sphéroïdaux.



**Figure V.11** – Résultats analytiques pour différentes excentricités finales des germes, en l’absence de contrainte externe.

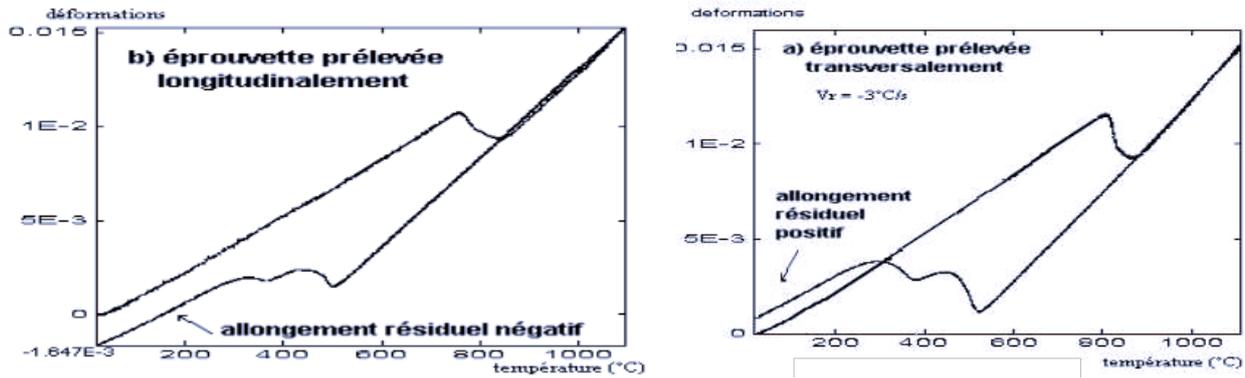
Quelques remarques peuvent être faites sur ces résultats :

- La déformation plastique de transformation  $\mathbf{E}^{\text{tp}}$  est nulle dans le cas sphérique, c’est-à-dire pour une excentricité nulle ( $e_1 = 0$ ) et donc une géométrie isotrope des germes. En revanche, elle n’est plus nulle dans le cas sphéroïdal, c’est-à-dire pour une excentricité non nulle ( $e_1 \neq 0$ ) et donc une géométrie anisotrope des germes. Cela confirme l’effet d’anisotropie de croissance des germes sur la plasticité de transformation sous contrainte nulle, connu expérimentalement (Desalos, 1981, voir Figure V.3).

“Le phénomène de plasticité de transformation est donc lié à l’avancement de la transformation mais les mécanismes qu’il met en jeu dépendent du type de transformation et/ou des niveaux et des directions des contraintes appliquées. Les contraintes internes liées à la mise en forme et à la présence de zones ségréguées au sein du matériau peuvent également influencer ce phénomène.”, Desalos (1981)

- Pour une excentricité comprise dans l'intervalle ]0;1[, les déformations plastiques de transformation  $E_3^{tp}$ , dans la direction de l'axe de révolution  $e_z$  du germe sphéroïdal allongé, et  $E_1^{tp}$  dans la direction  $e_\rho$  perpendiculaire à cet axe de révolution, sont négative [Figure V.11\(a\)](#) et positive [Figure V.11\(b\)](#) respectivement.

Cette dernière remarque confirme les observations expérimentales de dilatométrie libre, effectuées dans les travaux de thèse de [Côté \(2007\)](#), qui montrent un allongement négatif ([Figure V.12\(a\)](#)), et positif ([Figure V.12\(b\)](#)), pour une éprouvette prélevée longitudinalement et transversalement respectivement, à la direction du laminage. Ceci à condition d'admettre que les germes de phase-fille sont allongés dans la direction du laminage (c'est-à-dire accepter les observations de [Desalos \(1981\)](#) sur l'effet de la forme des ségrégations sur celle des germes).



(a) Éprouvette prélevée longitudinalement à la direction du laminage (b) Éprouvette prélevée transversalement à la direction du laminage

**Figure V.12** – Courbes dilatométriques en fonction du sens de prélèvement des éprouvettes dans la tôle, issues de [Côté \(2007\)](#)

En effet en admettant cela :

- (a) Si l'on prélève dans la direction du laminage, la direction d'observation de  $E^{pt}$ , coïncidant avec celle de l'axe de l'éprouvette, coïncide avec la direction  $e_z$ , on observe donc  $E_3^{tp} < 0$ .
- (b) Si l'on prélève dans une direction perpendiculaire à celle du laminage, la direction d'observation de  $E^{pt}$  est perpendiculaire à  $e_z$ , on observe donc  $E_1^{tp} > 0$ .

### V.3.3 Cas de contraintes arbitraires

L'objectif est ici d'établir l'expression générale de  $\dot{\bar{E}}^{tp}$  pour une contrainte appliquée  $\Sigma$  arbitraire. Les données et inconnues du problème ont été définis au début de cette [section V.3](#) : "Application à la plasticité de transformation".

La démarche précédente nous a permis d'établir un critère de type GURSON à deux chargements au lieu d'un seul :

$$\Phi(\Sigma, \bar{\Sigma}, f) = 0$$

La fonction de ce second chargement  $\bar{\Sigma}$  est de s'ajuster avec la contrainte appliquée  $\Sigma$ , et la finalité du critère est donc changée, il ne sert plus à chercher un chargement extrême, mais va nous permettre de calculer le taux de déformation plastique de transformation quel que soit le chargement  $\Sigma$  imposé.

Dans un premier temps, il faut exploiter la partie déviatorique de la loi d'écoulement interne. On introduit à cet effet, pour tout tenseur  $Y$  symétrique du second ordre, un tenseur  $DY$  symétrique à trace nulle,

défini par :

$$D\mathbf{Y} = \mathbf{Y} - \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{Y} \left[ \frac{\mu}{2} (e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2) + (3 - \mu) e_3 \otimes e_3 \right] \quad (\text{V.153})$$

où  $\mu$  est un paramètre.

Le coefficient  $\mu$  est déterminé de manière que la condition  $DY_1 = 0$  (équivalente à  $D\mathbf{Y} = \mathbf{0}$  pour un tenseur  $\mathbf{Y}$  axisymétrique, puisque  $\text{tr} D\mathbf{Y} = 0$ ) soit équivalente à

$$Y_1(1 - e_f^2) - Y_3 = 0$$

Un calcul facile donne la valeur de  $\mu$  :

$$\mu = \frac{6}{3 - e_f^2} \quad (\text{V.154})$$

Ainsi, puisque le tenseur  $\dot{\bar{\mathbf{E}}}$  vérifie la relation (V.138a), il vérifie la condition  $D\dot{\bar{\mathbf{E}}} = \mathbf{0}$ .

Afin d'appliquer donc l'opérateur  $D$  à la loi d'écoulement interne, il faut d'abord calculer  $D\mathbf{X}_f$  :

$$D\mathbf{X}_f = \mathbf{X}_f - \frac{1}{3 - e_f^2} \text{tr} \mathbf{X}_f \left( e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 + (1 - e_f^2) e_3 \otimes e_3 \right) \quad (\text{V.155})$$

soit, après calcul :

$$D\mathbf{X}_f = -\frac{3}{2} \gamma_f (e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2) + 3\gamma_f e_3 \otimes e_3 \quad (\text{V.156})$$

En appliquant maintenant l'opérateur  $D$  à la loi d'écoulement interne, il vient (puisque  $D(\mathbf{T}') = \mathbf{T}'$ ) :

$$3\mathbf{T}' + \frac{\sinh(S_H/\bar{\sigma}_M)}{S_H/\bar{\sigma}_M} \left[ D\mathbf{X}_f \frac{S}{P_{mm}} + \frac{9}{2P_{dd}} \tilde{\mathbf{T}}' (1 - \alpha_f - \beta_f) \right] = \mathbf{0}. \quad (\text{V.157})$$

D'après les relations (V.108) donnant les expressions de  $\mathbf{T}$  et  $\tilde{\mathbf{T}}$  en fonction de  $\Sigma$  et  $\bar{\Sigma}$ , il vient alors

$$\bar{\Sigma}' = -\frac{\frac{S_H/\bar{\sigma}_M}{\sinh(S_H/\bar{\sigma}_M)} + \frac{9}{4P_{dd}} (1 - \alpha_1 - \beta_1) (1 - \alpha_f - \beta_f)}{\frac{S_H/\bar{\sigma}_M}{\sinh(S_H/\bar{\sigma}_M)} f + \frac{9}{4P_{dd}} (1 - \alpha_f - \beta_f)^2} \Sigma' + \frac{S\gamma_f \left[ \frac{1}{2} (e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2) - e_3 \otimes e_3 \right]}{P_{mm} \left[ \frac{S_H/\bar{\sigma}_M}{\sinh(S_H/\bar{\sigma}_M)} f + \frac{9}{4P_{dd}} (1 - \alpha_f - \beta_f)^2 \right]}. \quad (\text{V.158})$$

### Méthode pour la résolution sur $S$ et $S_H$ :

La procédure de résolution consiste à éliminer  $S$  et pour se ramener à une équation sur la seule inconnue  $S_H$ . L'expression  $\bar{\Sigma}'$  (V.158) est du type :

$$\bar{\Sigma}' = \mathbf{V}S + \mathbf{W} \quad ; \quad \begin{cases} \mathbf{V} = \frac{S\gamma_f}{P_{mm} \left[ \frac{S_H/\bar{\sigma}_M}{\sinh(S_H/\bar{\sigma}_M)} f + \frac{9}{4P_{dd}} (1 - \alpha_f - \beta_f)^2 \right]} \mathbf{U} \\ \mathbf{U} = \left[ \frac{1}{2} (e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2) - e_3 \otimes e_3 \right] \\ \mathbf{W} = \frac{\frac{S_H/\bar{\sigma}_M}{\sinh(S_H/\bar{\sigma}_M)} + \frac{9}{4P_{dd}} (1 - \alpha_1 - \beta_1) (1 - \alpha_f - \beta_f)}{\frac{S_H/\bar{\sigma}_M}{\sinh(S_H/\bar{\sigma}_M)} f + \frac{9}{4P_{dd}} (1 - \alpha_f - \beta_f)^2} \Sigma' \end{cases} \quad (\text{V.159})$$

Les tenseurs  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{W}$  dépendent (de manière complexe) de  $S_H$  (et pour de  $\mathbf{W}$  de  $\Sigma'$ ), mais pas de  $S$ ; en d'autres termes  $\bar{\Sigma}'$  est linéaire par rapport à  $S$ .

On a alors :

$$\mathbf{T}' = \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{B} \quad ; \quad \begin{cases} \mathbf{A} = f\mathbf{V} \\ \mathbf{B} = \boldsymbol{\Sigma}' + f\mathbf{W} \end{cases} \quad (\text{V.160})$$

$$\tilde{\mathbf{T}}' = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{S} + \tilde{\mathbf{B}} \quad ; \quad \begin{cases} \tilde{\mathbf{A}} = \frac{3}{2}(1 - \alpha_f - \beta_f)\mathbf{V} \\ \tilde{\mathbf{B}} = \frac{3}{2}(1 - \alpha_1 - \beta_1)\boldsymbol{\Sigma}' + \frac{3}{2}(1 - \alpha_f - \beta_f)\mathbf{W} \end{cases} \quad (\text{V.161})$$

et donc :

$$T_{\text{eq}}^2 = A_{\text{eq}}^2 S^2 + 3\mathbf{A} : \mathbf{B}\mathbf{S} + B_{\text{eq}}^2 \quad (\text{V.162})$$

$$\tilde{T}_{\text{eq}}^2 = \tilde{A}_{\text{eq}}^2 S^2 + 3\tilde{\mathbf{A}} : \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{S} + \tilde{B}_{\text{eq}}^2 \quad (\text{V.163})$$

Le critère (V.109) et la définition de  $S_H$  (V.108) deviennent respectivement :

$$\frac{A_{\text{eq}}^2 S^2 + 3\mathbf{A} : \mathbf{B}\mathbf{S} + B_{\text{eq}}^2}{\bar{\sigma}_M^2} + 2f \cosh(S_H / \bar{\sigma}_M) - 1 - f^2 = 0 \quad (\text{V.164})$$

$$\frac{S^2}{2P_{mm}} + \frac{\tilde{A}_{\text{eq}}^2 S^2 + 3\tilde{\mathbf{A}} : \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{S} + \tilde{B}_{\text{eq}}^2}{P_{dd}} - S_H^2 = 0 \quad (\text{V.165})$$

soit,

$$A_1 S^2 + B_1 S + C_1 = 0 \quad ; \quad \begin{cases} A_1 = \frac{A_{\text{eq}}^2}{\bar{\sigma}_M^2} \\ B_1 = \frac{3\mathbf{A} : \mathbf{B}}{\bar{\sigma}_M^2} \\ C_1 = \frac{B_{\text{eq}}^2}{\bar{\sigma}_M^2} + 2f \cosh(S_H / \bar{\sigma}_M) - 1 - f^2 \end{cases} \quad (\text{V.166})$$

$$A_2 S^2 + B_2 S + C_2 = 0 \quad ; \quad \begin{cases} A_2 = \frac{1}{2P_{mm}} + \frac{\tilde{A}_{\text{eq}}^2}{P_{dd}} \\ B_2 = \frac{3\tilde{\mathbf{A}} : \tilde{\mathbf{B}}}{P_{dd}} \\ C_2 = \frac{\tilde{B}_{\text{eq}}^2}{P_{dd}} - S_H^2 \end{cases} \quad (\text{V.167})$$

Comme les deux équations sont quadratiques en  $S$ , on peut les combiner pour obtenir une équation du 1<sup>er</sup> degré résoluble explicitement ; formons (V.166)  $\times A_2$  - (V.167)  $\times A_1$ , on obtient :

$$S = \frac{A_1 C_2 - A_2 C_1}{A_2 B_1 - A_1 B_2} \quad (\text{V.168})$$

Ensuite, on peut reporter  $S$  dans l'équation (V.166) pour obtenir une équation sur  $S_H$  seul, que l'on écrit  $\mathcal{F}(S_H) = 0$ , et que l'on résout à l'aide d'une dichotomie, sachant a priori dans quel intervalle se trouve l'inconnue  $\frac{S_H}{\bar{\sigma}_M}$ , c'est-à-dire  $[0, -\ln(f)]$ .

Dans un second temps, le calcul de l'expression générale du taux de déformation plastique de transformation  $\dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}}$  est effectué. La procédure est expliquée plus en détail dans le paragraphe au-dessus de l'expression (V.151). Elle repose sur la partie déviatorique de la loi d'écoulement plastique externe (V.116) :

$$\dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}} = \dot{\mathbf{E}}' = \frac{\dot{\Lambda}}{\bar{\sigma}_M^2} \left\{ 3\mathbf{T}' + f \frac{\sinh(S_H / \bar{\sigma}_M)}{S_H / \bar{\sigma}_M} \left[ \mathbf{X}'_1 \frac{S}{P_{mm}} + \frac{9}{2P_{dd}} \tilde{\mathbf{T}}' (1 - \alpha_1 - \beta_1) \right] \right\} \quad (\text{V.169})$$

Le multiplicateur plastique  $\dot{\Lambda}$  est donné par la trace de la loi d'écoulement plastique interne (V.116), soit :

$$\frac{\dot{\Lambda}}{\bar{\sigma}_M^2} = \frac{\dot{f}}{f} \frac{\Delta V}{V} \frac{S_H / \sigma_M}{\sinh(S_H / \sigma_M)} \frac{P_{mm}}{3S} \quad (\text{V.170})$$

Par conséquent, dans la direction  $\mathbf{e}_z$  :

$$\dot{E}_3^{\text{tp}} = \frac{1}{3} \frac{\Delta V}{V} \frac{f}{\dot{f}} \left[ 3T'_3 \frac{S_H/\sigma_M}{\sinh(S_H/\sigma_M)} \frac{P_{mm}}{S} + f \left( (3\alpha_1 - 1) + \frac{9P_{mm}}{2SP_{dd}} \tilde{T}'_3 (1 - \alpha_1 - \beta_1) \right) \right] \quad (\text{V.171})$$

avec les expressions de  $T'_3$  et  $\tilde{T}'_3$  données par (V.161) et (V.160).

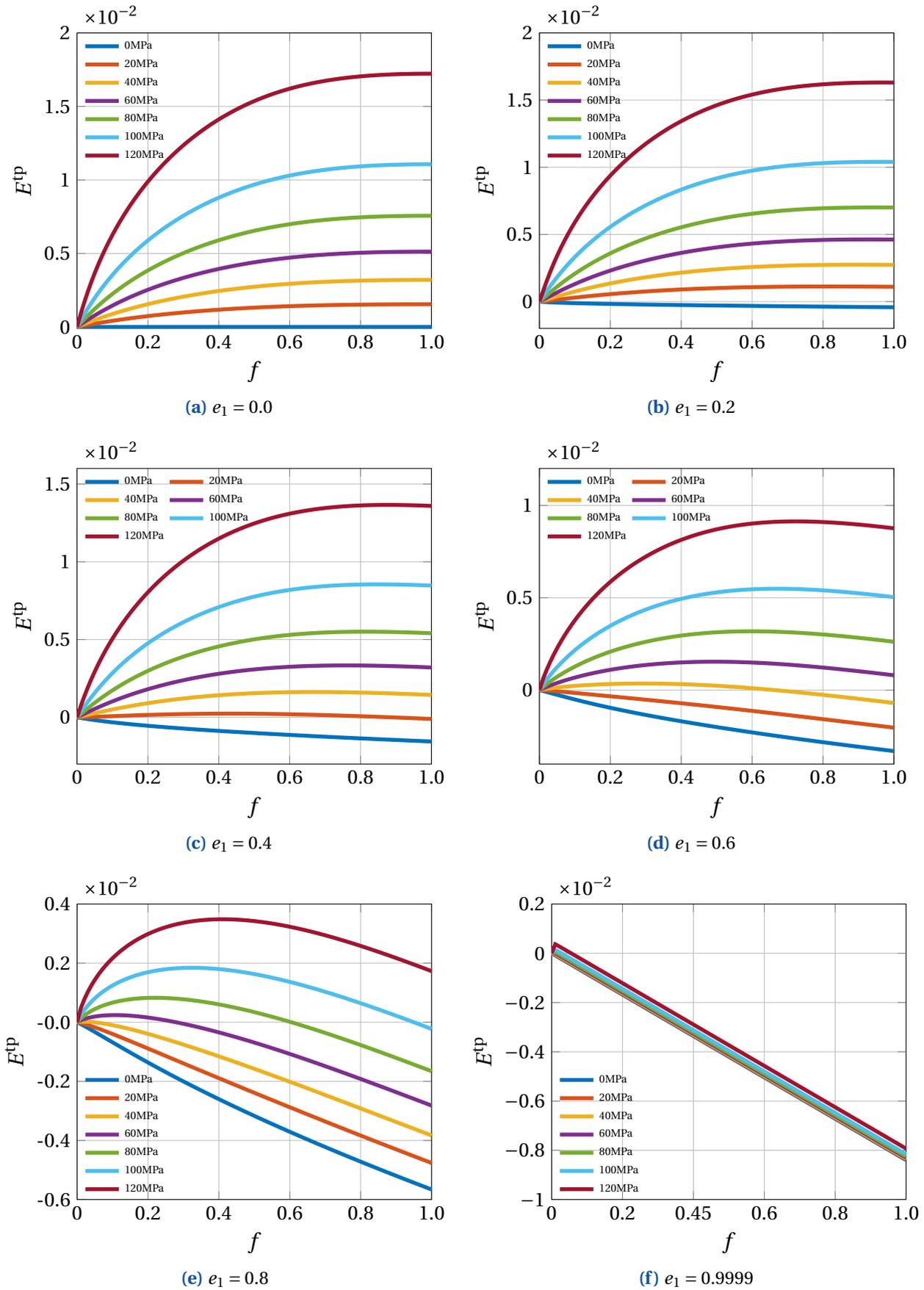


Figure V.13 – Courbes théoriques en traction (classées par excentricité)

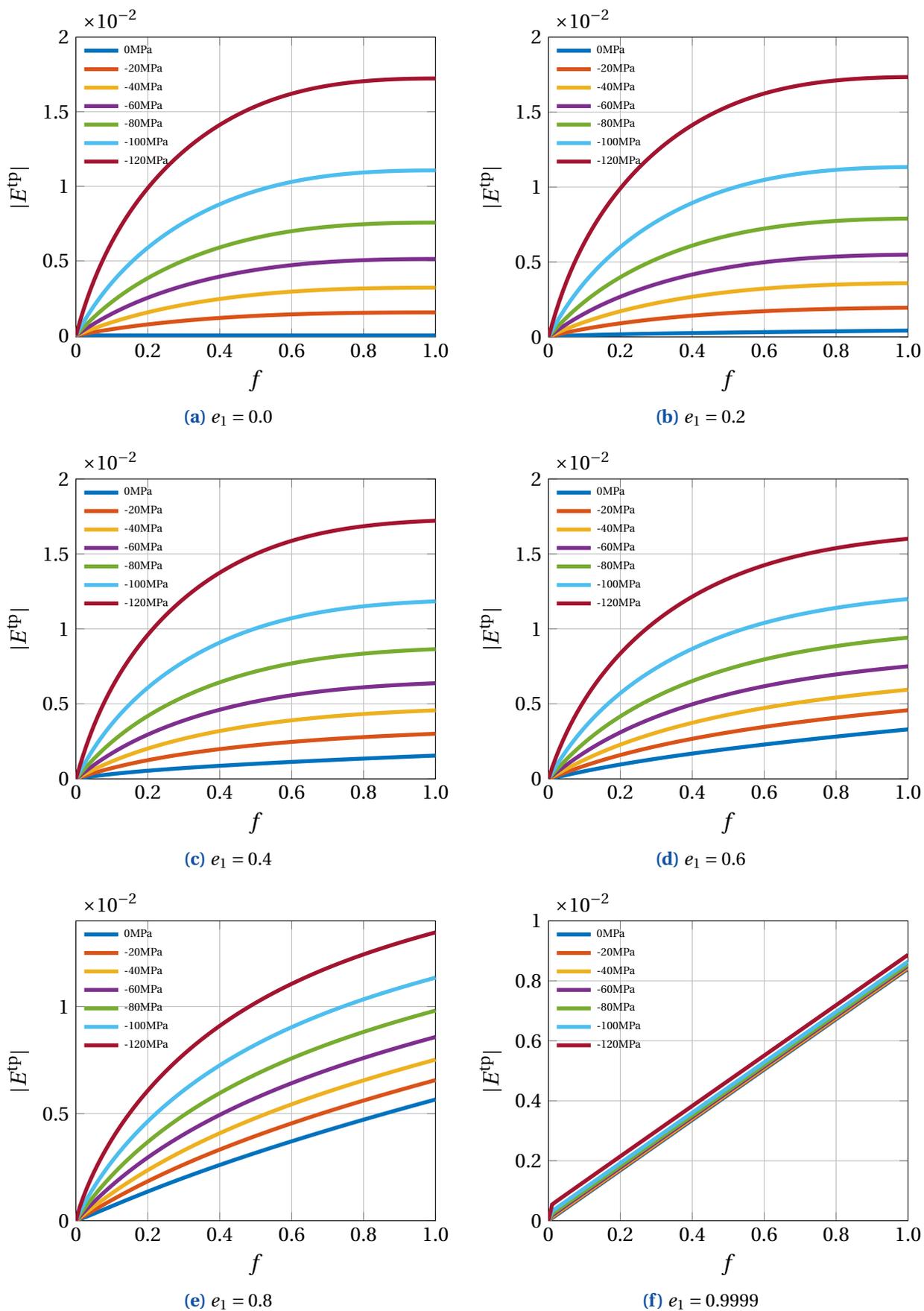


Figure V.14 – Courbes théoriques en compression (classées par excentricité)

L'implémentation numérique de cette loi de comportement (V.169), permet d'obtenir les courbes théoriques de la déformation plastique de transformation  $E_3^{\text{tp}} = E^{\text{tp}}$  dans la direction  $\mathbf{e}_z$ , correspondant à la direction du chargement appliqué, en traction (Figure V.13), et en compression (Figure V.14), en fonction de la fraction  $f$  de phase-fille, pour différentes excentricités finales  $e_1$  des germes et différentes amplitudes de chargement  $\Sigma_{\text{eq}}$ .

Quelques remarques peuvent être faites sur ces résultats :

- Dans le cas de germes cylindriques, la déformation plastique de transformation obtenue dans la direction axiale  $E_z^{\text{tp}}$  est identique à l'opposé de la dilatation de transformation dans une direction soit  $-\frac{1}{3} \frac{\Delta V}{V} f$ , et cela quelle que soit la contrainte équivalente appliquée dans la direction axiale du cylindre (inférieure à la limite élastique de la phase mère  $\Sigma_{\text{eq}} < \sigma_Y^M$ ).

Ceci s'explique par le fait qu'aucune déformation ne s'effectue dans cette direction, l'expansion s'effectue uniquement dans la direction  $\mathbf{e}_\rho$  perpendiculaire à l'axe de révolution du germe, contrairement aux autres cas de figure d'excentricité  $e_1 \in [0; 1[$  (cf. Figure V.15). Ceci est dû au "blocage axial" total résultant de la présence du cylindre central de phase-fille, dépourvu d'élasticité et ne plastifiant pas. De ce fait, dans ce cas, le mécanisme de Greenwood-Johnson ne peut pas s'effectuer dans la direction  $\mathbf{e}_z$ , il n'y a pas d'accommodation plastique dans cette direction pour induire une déformation de type plasticité de transformation.

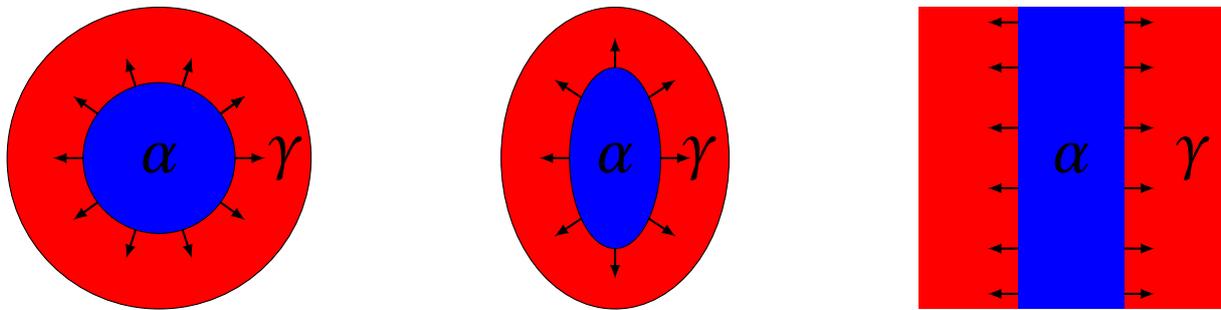


Figure V.15 – Directivité de la déformation en fonction de la géométrie des germes croissants de phase fille  $\alpha$

- Hormis le cas cylindrique, quelle que soit l'excentricité  $e_1$ , un effet de non linéarité de la déformation plastique de transformation en fonction de la contrainte appliquée est observé.
- Il existe une dissymétrie de la déformation plastique de transformation  $\mathbf{E}^{\text{tp}}$  entre les résultats obtenus pour des contraintes de traction et de compression (cf. Figure V.13 et Figure V.14). En effet, pour la même contrainte équivalente appliquée, la déformation plastique de transformation  $E^{\text{tp}}$  est plus grande lorsque cette contrainte macroscopique appliquée est négative que lorsqu'elle est positive. Ce résultat pouvait être prédit en observant les résultats obtenus dans le cas d'une contrainte appliquée nulle (cf. Figure V.11).



---

## Simulations numériques du mécanisme de GREENWOOD-JOHNSON : cas de croissance de germes allongés sphéroïdaux

---

*Cette partie est consacrée aux simulations numériques de la plasticité de transformation pour des germes sphéroïdaux, afin d'évaluer et valider la nouvelle approche établie au chapitre V. Le travail présenté reprend la méthode numérique à base de FFT utilisée dans le cas sphérique au chapitre IV, mais avec un ajustement pour la cellule élémentaire choisie, dont la géométrie est adaptée à l'aspect de forme des germes. La cinétique de croissance des germes non-sphériques est à nouveau en parfait accord avec la cinétique du modèle JMAK. Une première comparaison des résultats théoriques/numériques de la déformation plastique de transformation montre des erreurs assez importantes dues à ce que l'hypothèse de phases rigides-plastiques n'est plus valable. Ceci nous conduit à introduire deux paramètres empiriques d'ajustement de couplage élasto-plastique, afin de corriger la loi donnant le taux de déformation plastique de transformation  $\dot{E}^{tp}$ .*

### Sommaire

---

<b>VI.1 Approche numérique . . . . .</b>	<b>130</b>
VI.1.1 Choix de la cellule élémentaire représentative . . . . .	130
VI.1.2 Cinétique JMAK de croissance sphéroïdale . . . . .	132
VI.1.3 Validation de la cinétique de nucléation/croissance . . . . .	135
VI.1.4 Étude numérique paramétrique de la plasticité de transformation . . . . .	138
<b>VI.2 Comparaison du modèle théorique et des résultats numériques . . . . .</b>	<b>144</b>
VI.2.1 Correction de couplage élastoplastique en l'absence de contrainte extérieure . . . . .	144
VI.2.2 Correction supplémentaire en présence d'une contrainte extérieure . . . . .	144
VI.2.3 Comparaison théorique/numérique : Traction . . . . .	146
VI.2.4 Comparaison théorique/numérique : Compression . . . . .	147

---

## VI.1 Approche numérique

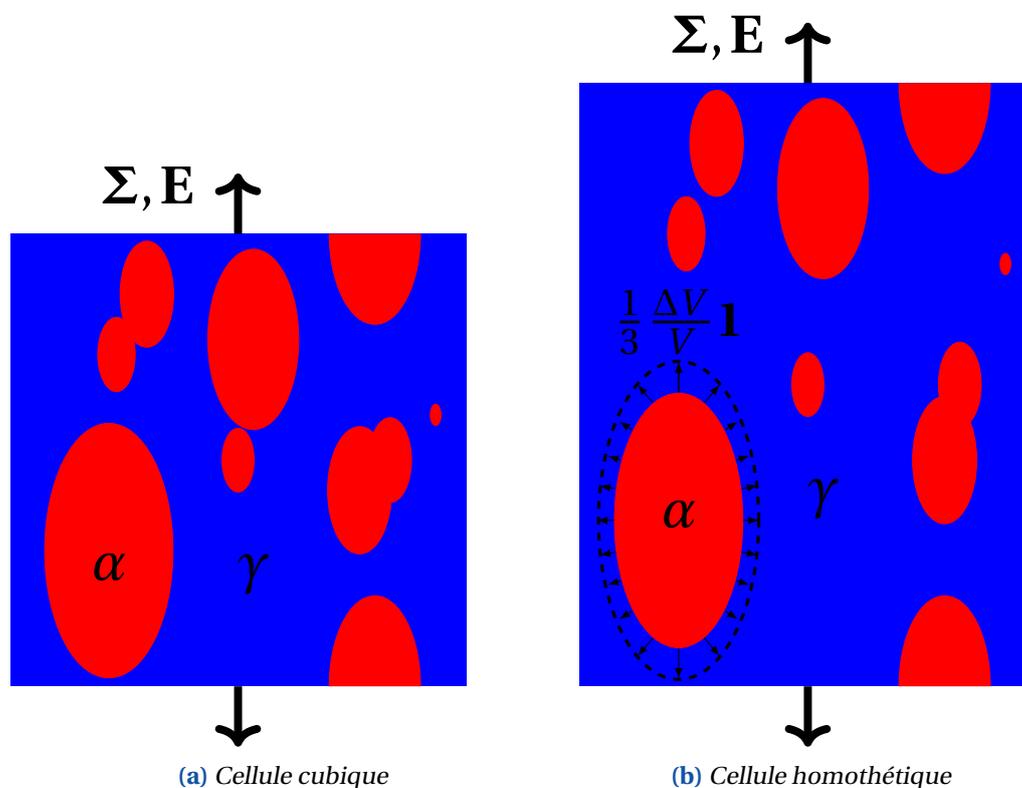
Cette section est consacrée à la mise en place de l’approche numérique pour les simulations de plasticité de transformation dans le cas de croissance sphéroïdale de germes. Cette approche reprend en majeure partie celle déjà définie au chapitre IV : “FFT-based micromechanical simulations of transformation plasticity. Comparison with a limit-analysis-based theory”, dans le cas de germes croissant de manière sphérique. Ainsi, les hypothèses et notations sont celles exposées à la section IV.2 : “General hypotheses and notations”. Les équations constitutives pour le comportement des deux phases sont données à la section IV.3 : “Constitutive equations of the phases”. Le schéma numérique de résolution à base de FFT utilisé est lui décrit à la section IV.4 : “The FFT-based numerical scheme in the context of transformation plasticity”.

L’évolution microstructurale correspond aussi à celle définie à la sous-section IV.4.2 : “Microstructure evolution”, où se trouvent les considérations préliminaires, et le modèle de nucléation/croissance. Cependant, une modification est apportée spécifiquement dans le cas présent de croissance non-sphérique de germes. Cette modification porte sur la géométrie de la cellule élémentaire considérée (sous-section VI.1.1).

### VI.1.1 Choix de la cellule élémentaire représentative

Pour les simulations de croissance de germes sphéroïdaux, nous allons étudier deux types de VER :

- Cellule cubique : VER dont les trois côtés sont égaux (Figure VI.1(a)).
- Cellule homothétique : VER dont les côtés sont dans les mêmes rapports que les axes des germes (Figure VI.1(b)).

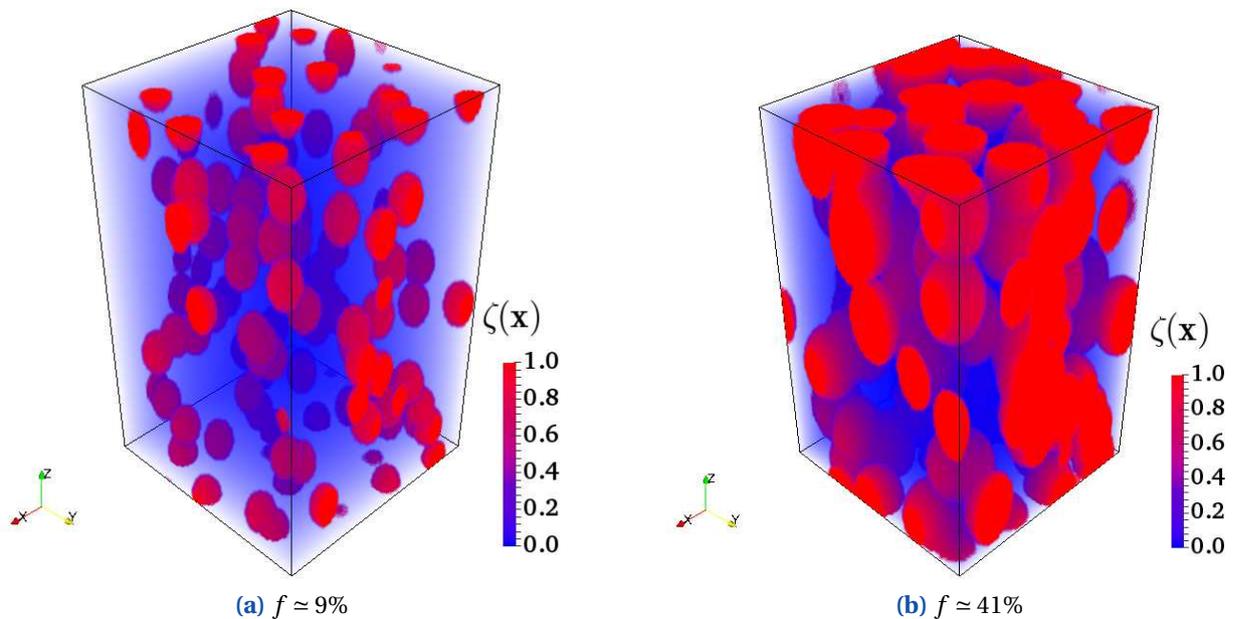


**Figure VI.1** – Coupe 2D des cellules élémentaires étudiées, constituées d’une matrice de phase  $\gamma$  contenant des germes de phase  $\alpha$  en croissance sphéroïdale allongée, et soumise à un chargement macroscopique imposé  $\Sigma$  ou  $\mathbf{E}$ .

Les germes sphéroïdaux croissent de manière homothétique au sein de ces volumes, c'est-à-dire qu'ils conservent leur aspect de forme au cours de la transformation, contrairement à une croissance confocale où la distance des foyers est conservée.

**Remarque** (croissance homothétique ou confocale des germes). *Le type de croissance des germes de phase-fille dans le modèle numérique présenté ici est homothétique. Or, la croissance définie dans le modèle théorique est confocale (cf. chapitre V). Les effets du type de croissance, confocale ou homothétique, ont été étudiés numériquement, dans le cas d'un germe unique en transformation couche après couche, au cours du stage de T. LE HUNG. Il en conclut que les résultats de plasticité de transformation pour une croissance homothétique sont les plus proches des résultats théoriques du modèle classique de Leblond et al. (1989) étendu au cas de croissance sphéroïdale (bien que ce modèle repose sur l'hypothèse d'une croissance confocale, cf. Figure V.9). Ainsi, cette étude justifie notre choix numérique d'une croissance homothétique des germes de phase-fille.*

L'intérêt d'un VER homothétique (Figure VI.2) est qu'il permet de rendre compte d'une géométrie plus réaliste pour simuler les croissances des germes non-sphériques. En effet, le VER cubique considéré dans le cas sphérique (Figure IV.1) peut s'apparenter à une partie d'une pièce industrielle à l'état antérieur au laminage, qui lorsqu'elle est laminée donne un VER étiré dans la direction du laminage. Par conséquent, le choix de VER homothétique permet de rendre compte de la réalité physique.



**Figure VI.2** – Croissance sphéroïdale de phase-fille  $\alpha$  ; cellule homothétique.

Le nombre de voxels  $\nu$  dans chaque direction est toujours égal à  $\nu = 100$  voxels quelle que soit l'excentricité des germes en croissance, soit un nombre total de voxels de  $\nu^3 = 100^3$ . La transformation observée est toujours celle induite par le refroidissement, pendant lequel la phase-mère  $\gamma$  produit une phase-fille  $\alpha$ . La transformation ne dépend pas du temps, c'est-à-dire que la fraction de phase-fille est déterminée uniquement par la température. Chaque pas de temps  $\Delta t$  (considéré comme unité) correspond à une étape de transformation. Le "temps"  $t$  est donc identique au nombre d'étapes de transformation déjà réalisées. En un point donné  $\mathbf{x}$  de la microstructure, les constantes thermomécaniques varient des valeurs de la phase-mère à celles de la phase-fille lors de la transformation.

À l'échelle locale ou microscopique, chaque point appartient sans ambiguïté à une et une seule des deux phases ; la fonction caractéristique de la phase-fille  $\alpha$  est notée  $\zeta(\mathbf{x})$ , de sorte que  $\zeta(\mathbf{x}) = 0$  si  $\mathbf{x}$  est dans la phase  $\gamma$  et  $\zeta(\mathbf{x}) = 1$  si  $\mathbf{x}$  est dans la phase  $\alpha$ . À l'échelle globale ou macroscopique, le domaine  $\Omega$

contient les deux phases et la fraction volumique de la phase-fille  $\alpha$ , notée  $f$  est donnée par :

$$f = \langle \zeta(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} \quad (\text{VI.1})$$

où le symbole  $\langle \rangle_{\Omega}$  désigne une valeur moyenne sur  $\Omega$ .

**Remarque** (cas cylindrique). *Dans le cas de croissance cylindrique la cellule élémentaire est cubique (Figure VI.3) pour des raisons pratiques. En effet, dans ce cas particulier l'aspect de forme du germe est théoriquement infini, ainsi l'implémentation d'une cellule de type homothétique devient problématique.*

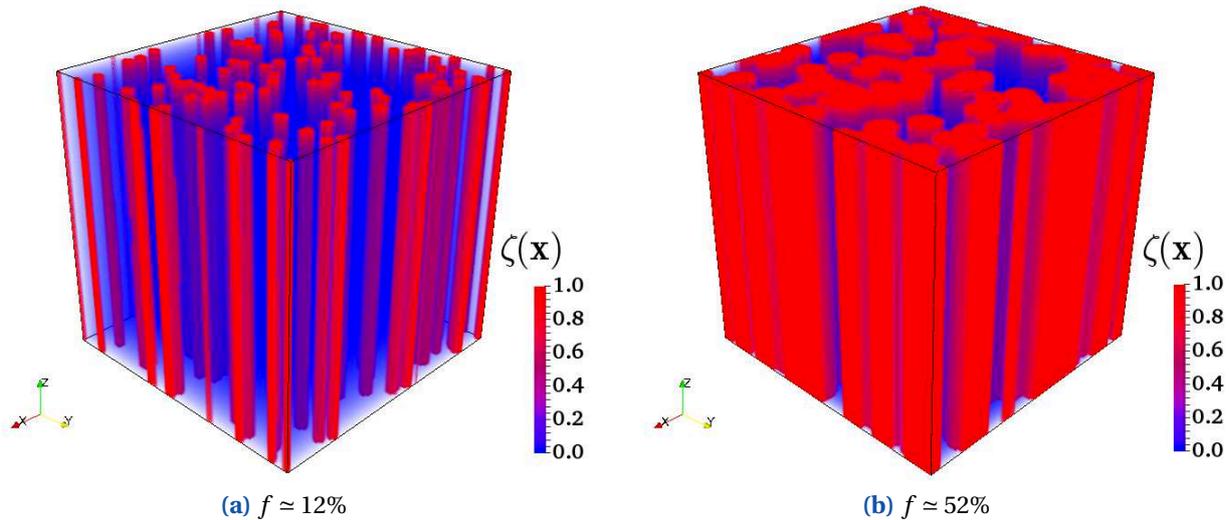


Figure VI.3 – Croissance cylindrique de phase-fille  $\alpha$  ; cellule cubique.

### VI.1.2 Cinétique JMAK de croissance sphéroïdale

L'étude des cinétiques numériques de croissance des germes de phase-fille  $\alpha$  en réalité peu d'importance du point de vue de la plasticité de transformation. En effet, le comportement local étant supposé indépendant du temps (effets visqueux négligés), la plasticité de transformation ne dépend que des géométries successives des deux phases et non des instants auxquels ces géométries sont atteintes. Cependant, cette étude permet de vérifier la robustesse physique des cinétiques numériques de transformation, et donc d'envisager par la suite des comportements élastoviscoplastiques.

Dans cette étude numérique, le type de nucléation choisi est instantané (IN), c'est-à-dire que la nucléation et la croissance sont disjointes dans le temps. Cela signifie que tous les germes sont "activés" dès le début de la transformation, et la croissance s'effectue sans que d'autres germes puissent apparaître. La nucléation de type sporadique ne sera pas étudiée du fait qu'une différence peu significative sur la déformation plastique de transformation a été obtenue entre les deux types de nucléation, dans le cas de la croissance sphérique (Figure IV.9).

Numériquement le processus de nucléation instantanée et de croissance s'effectue donc en deux étapes successives.

- Au début de la transformation, à  $t = 0$ , la nucléation de germes de phase-fille s'effectue de manière aléatoire dans toute la cellule élémentaire de phase-mère. (Une nucléation correspond à la transformation d'un voxel unique).
- Puis, au cours de la transformation, à chaque pas de temps  $[t, t + \Delta t]$ , la croissance de chaque germe de phase-fille préexistant s'effectue par addition d'une couche homothétiquement concentrique

externe, d'épaisseur constante dans chaque direction au cours de la transformation. (L'épaisseur de la couche vaut la taille d'un voxel dans la direction équatoriale  $\mathbf{e}_\rho$  du germe, et vaut cette taille multipliée par le rapport de forme dans la direction polaire  $\mathbf{e}_z$ ).

Par conséquent, trois caractéristiques remarquables de la modélisation numérique sont à noter :

- 1) La nucléation se produit de manière aléatoire et homogène dans tout le matériau (nucléation homogène).
- 2) La vitesse de croissance de chaque germe est constante dans chaque direction pendant toute la transformation.
- 3) La vitesse de croissance des germes n'est pas identique dans toutes les directions (croissance non-sphérique).

Dans ces conditions, nous allons vérifier la robustesse physique de la cinétique de nucléation/croissance dans notre approche numérique, à l'aide du modèle cinétique de Johnson-Mehl-Avrami-Kolmogorov (JMAK) défini par l'équation (VI.2) suivante

$$f(t) = 1 - \exp(-K t^n) \tag{VI.2}$$

où  $f$  est la fraction de phase-fille,  $t$  le temps. Les interprétations physiques des constantes  $n$  et  $K$  sont les suivantes :

- L'exposant d'Avrami  $n$  est supposé refléter la nature de la transformation, c'est-à-dire la dimension temporelle (nucléation instantanée (IN) ou sporadique (SN)) et spatiale (croissance 1D, 2D ou 3D) de la cinétique, comme indiqué sur le [Tableau VI.1.2](#) ci-dessous.

	1D	2D	3D
IN	1	2	3
SN	2	3	4

**Tableau VI.1** – Valeurs de  $n$  en fonction de la dimension spatiale de croissance et du type de nucléation (IN ou SN) des germes.

- Le coefficient d'Avrami  $K$  dépend de la forme géométrique des entités croissantes, de la densité de nucléation instantanée  $Z_0 = N_0/v^3$  (ou sporadique  $\dot{Z}_0 = \dot{N}_0/v^3$ ) et de la vitesse radiale  $G$  de croissance des germes. Le [Tableau VI.1.2](#) ci-dessous donne les expressions de  $K$  pour deux types de géométrie classiques lors d'une nucléation instantanée.

	sphère	aiguille
$K(s^{-n})$	$4\pi N_0 G^3/3$	$\pi N_0 G^2$
$n$	3	2

**Tableau VI.2** – Expressions de  $K$  et  $n$  en fonction de la forme des germes, pour une nucléation de type instantané (IN).

La théorie JMAK n'a été développée que dans des cas particuliers de croissance géométrique, comme ceux évoqués ci-dessous (sphère et aiguille), et non dans le cas général de croissance sphéroïdale. Par conséquent pour comparer les résultats numériques de croissance sphéroïdale à la théorie JMAK, il convient d'abord d'étendre cette dernière, de manière heuristique en l'absence de toute approche théorique applicable.

Ainsi, nous procédons à une extension des expressions des paramètres  $K$  et  $n$  pour la cinétique de croissance des germes de forme sphéroïdale. L'exposant  $n$  devrait en théorie dépendre de manière continue du facteur de forme des germes, puisqu'il vaut 3 lorsque ce facteur vaut 1 (croissance sphérique), mais 2 lorsque ce facteur vaut  $+\infty$  (croissance cylindrique). Mais il est extrêmement difficile de proposer une formule raisonnable pour  $n$  en fonction du facteur de forme, en particulier parce que la valeur de  $K$  est influencée par celle de  $n$ .

On adopte donc une approche simplifiée dans laquelle  $n$  est fixé à 3 (IN) (ou 4 dans le cas SN), et on ajuste seulement  $K$  en fonction du facteur de forme. Ces paramètres sont présentés dans le [Tableau VI.1.2](#) suivant :

	Nucléation instantanée	Nucléation sporadique
$K(s^{-n})$	$4\pi N_0 P Q^2 / 3$	$\pi \dot{N}_0 P Q^2 / 3$
$n$	3	4

**Tableau VI.3** – Expressions de  $K$  et  $n$  pour une croissance sphéroïdale des germes, pour deux types de nucléation.

L'expression de  $K$  comporte deux paramètres  $P$  et  $Q$  introduits heuristiquement. La constante  $P$  représente la vitesse de croissance polaire, dans la direction de l'axe de révolution du sphéroïde, et la constante  $Q$  la vitesse de croissance équatoriale, dans la direction perpendiculaire à l'axe de révolution ; ces constantes sont reliées par la relation :

$$P = \lambda Q \quad (\text{VI.3})$$

où  $\lambda$  désigne le rapport de forme du sphéroïde, qui peut s'exprimer en fonction de son excentricité  $e_1$  par la formule

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - e_1^2}} \quad (\text{VI.4})$$

(Numériquement, la vitesse de croissance équatoriale vaut  $Q = 1/\nu$ ).

Le nombre de voxels de phase-fille  $N_0$  apparaissant simultanément au début de la transformation est fixé à 100, ainsi la densité de nucléation instantanée  $Z_0 = N_0/\nu^3$  vaut  $10^{-4}$ . Le paramètre  $K$  s'exprime alors comme suit :

$$K = \frac{4}{3}\pi N_0 P Q^2 = \frac{4}{3}\pi N_0 \lambda (1/\nu)^3 = \frac{4}{3}\pi Z_0 \lambda \quad (\text{VI.5})$$

Cependant, cette approche est limitée à des formes de germes pas trop éloignées de la sphère, ainsi l'extrapolation du modèle sphérique ne sera pas applicable aux cas extrêmes d'aiguille. En effet, pour une forte excentricité ( $e_1 \simeq 1$ ), c'est-à-dire pour le cas du cylindre infini, les expressions de  $K$  et  $n$  introduites ne sont plus valables, comme le montre la [Figure VI.4](#) où la courbe "JMAK sphéroïde" pour  $e_1 \simeq 1$  correspondant au modèle heuristique est différente de la courbe "JMAK aiguille" correspondant au modèle rigoureux dans ce cas. Ceci s'explique par le fait que dans ce cas le paramètre  $n$  du modèle rigoureux vaut 2 (croissance bimensionnelle), et non 3 comme dans le modèle heuristique. Par conséquent, la cinétique numérique dans ce cas uniquement ( $e_1 \simeq 1$ ) sera comparée au modèle de croissance JMAK rigoureux établi pour une croissance d'aiguilles (cf. [Tableau VI.1.2](#)).

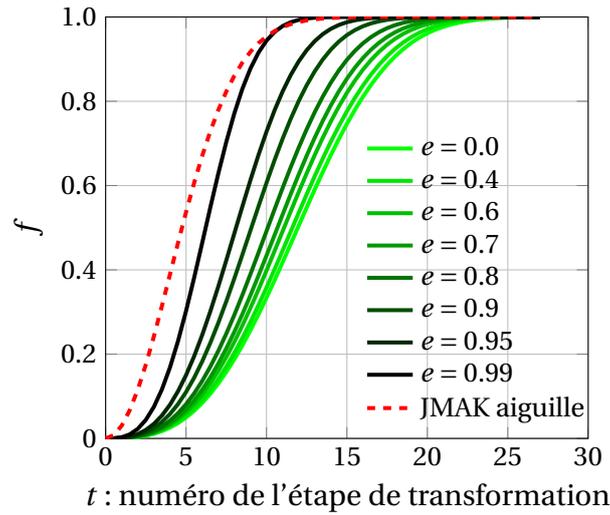


Figure VI.4 – Cinétique JMAK de croissance sphéroïdale.

### VI.1.3 Validation de la cinétique de nucléation/croissance

Pour vérifier la pertinence des cinétiques de croissance des germes sphéroïdaux obtenues numériquement, il semble raisonnable de comparer ces cinétiques avec le modèle JMAK de croissance sphéroïdale défini précédemment par extension heuristique du modèle rigoureux correspondant à la croissance sphérique. Ainsi, dans un premier temps, on réalise des simulations numériques pour un nombre de germes générés instantanément de  $N_0 = 10, 10^2, 10^3$  dans une cellule cubique (Figure VI.5) discrétisée en  $\nu^3 = 100^3$  voxels ; ceci donc pour une densité de nucléation instantanée (IN)  $Z_0 = 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}$ .

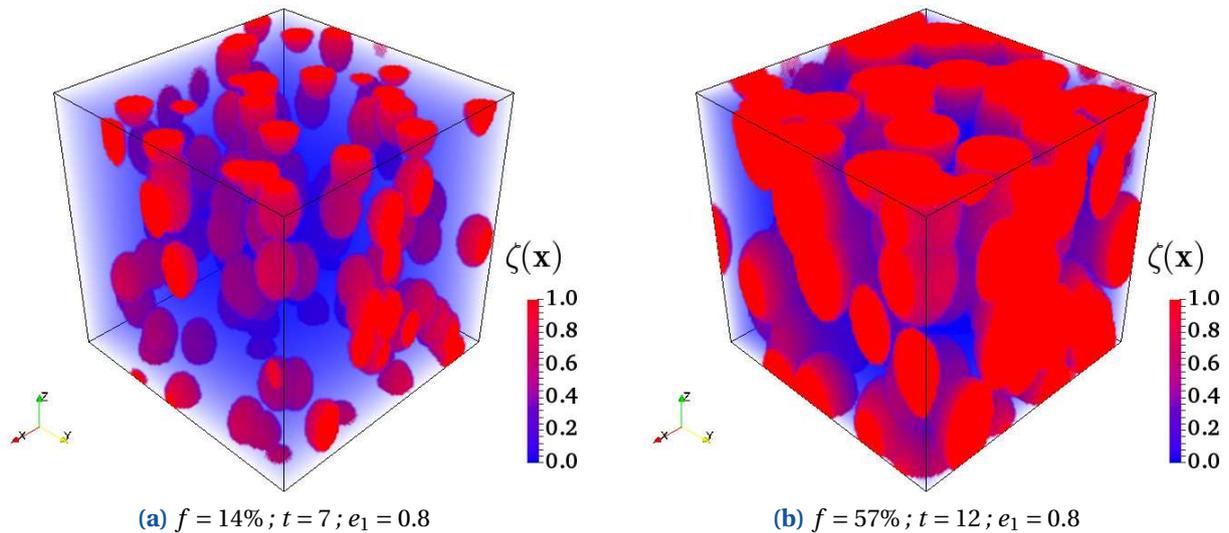
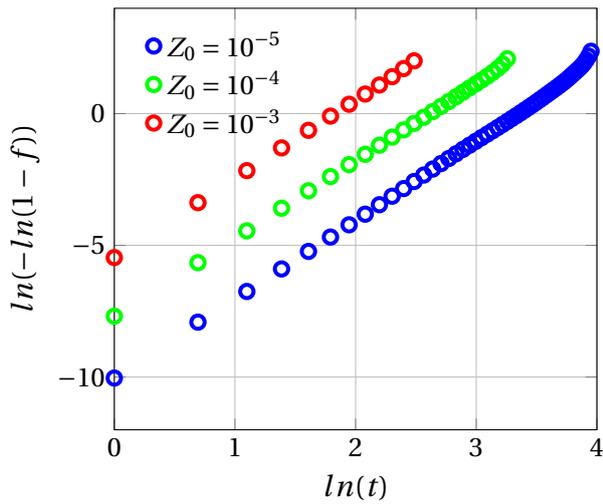
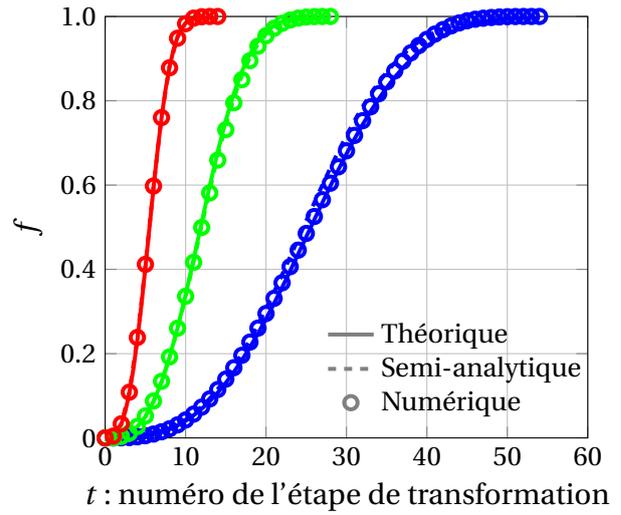
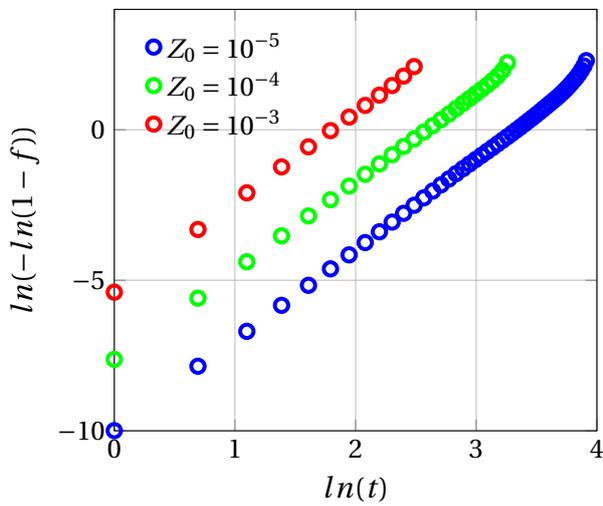
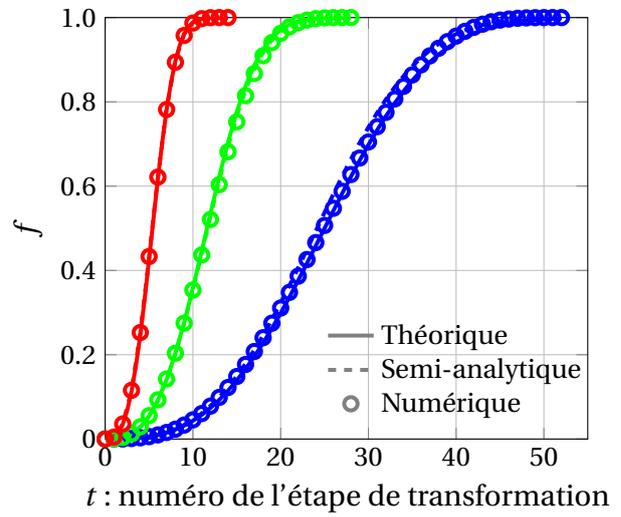
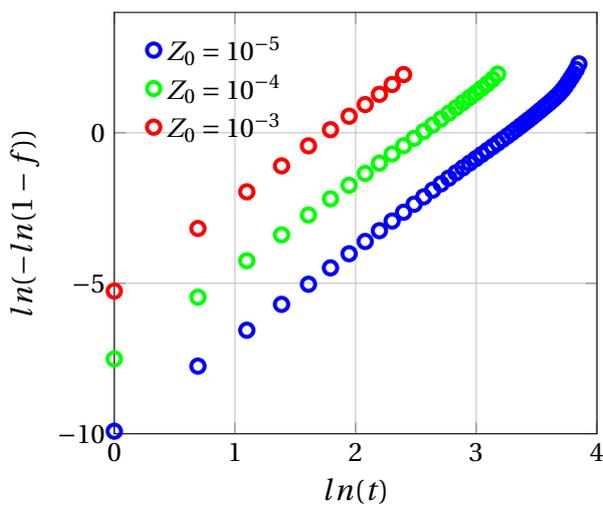
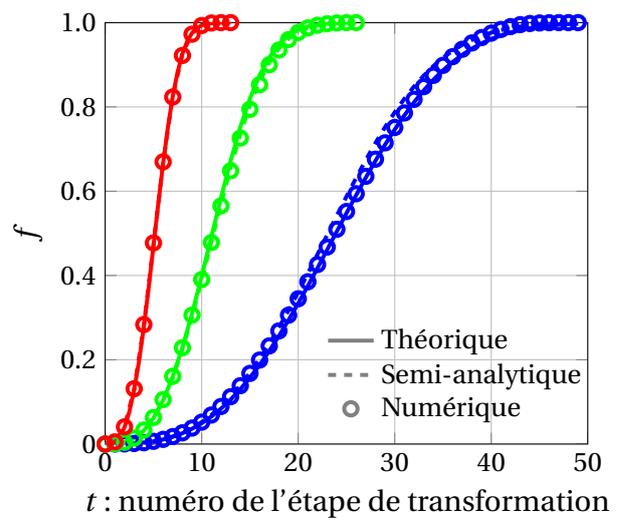
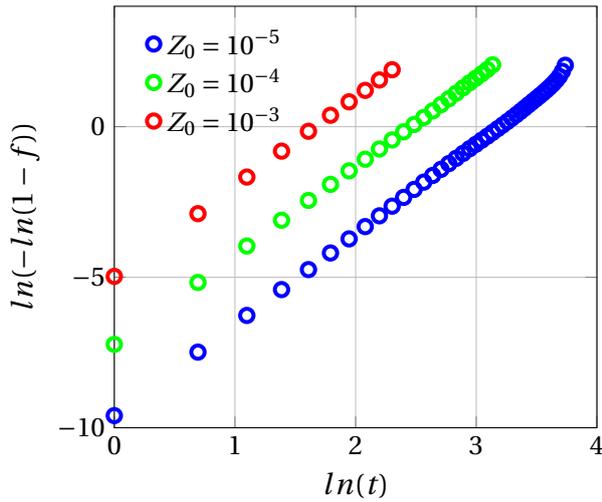
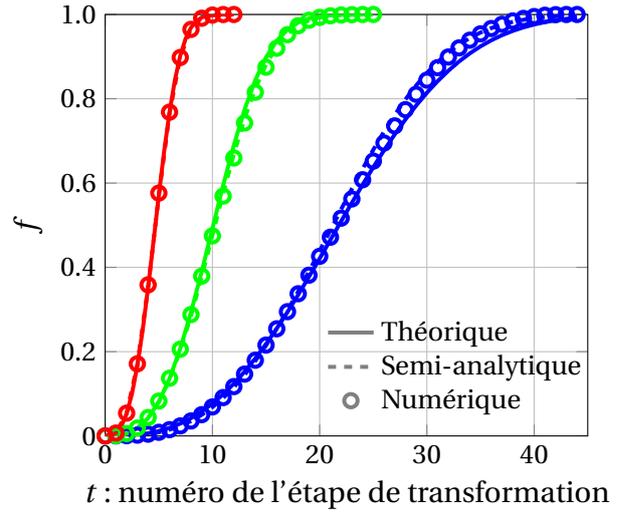
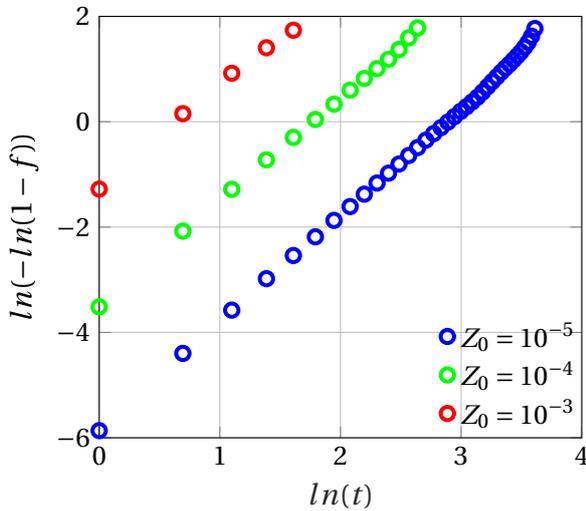
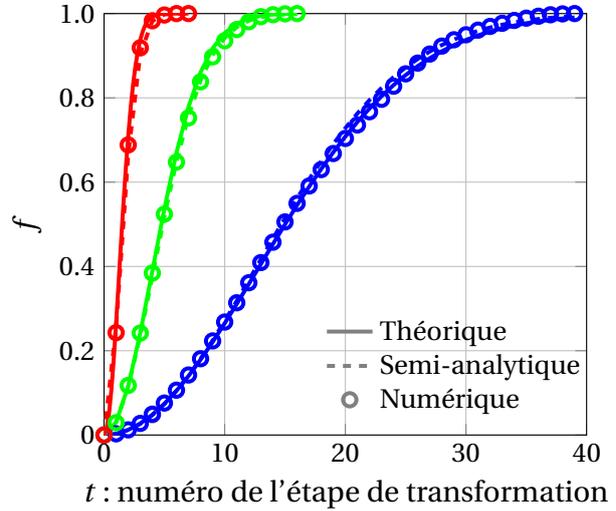


Figure VI.5 – Croissance sphéroïdale de phase-fille  $\alpha$  ; cellule cubique.

Un très bon accord, comme illustré sur les figures VI.6 et VI.7, est obtenu entre la cinétique numérique de transformation des germes en croissance sphéroïdale et les prédictions théoriques JMAK pour des excentricités des sphéroïdes de  $e_1 = 0.2$  (Figure VI.6(b)),  $e_1 = 0.4$  (Figure VI.6(d)),  $e_1 = 0.6$  (Figure VI.6(f)),  $e_1 = 0.8$  (Figure VI.7(b)) et  $e_1 = 0.999$  (Figure VI.7(d)).


 (a) Fit des coefficients JMAK numériques pour  $e_1 = 0.2$ 

 (b) Évolution de la transformation pour  $e_1 = 0.2$ 

 (c) Fit des coefficients JMAK numériques pour  $e_1 = 0.4$ 

 (d) Évolution de la transformation pour  $e_1 = 0.4$ 

 (e) Fit des coefficients JMAK numériques pour  $e_1 = 0.6$ 

 (f) Évolution de la transformation pour  $e_1 = 0.6$ 

**Figure VI.6** – Comparaisons entre les prédictions du modèle JMAK et les résultats des simulations numériques, pour trois valeurs de densité  $Z_0$  de nucléation instantanée (IN).


 (a) Fit des coefficients JMAK numériques pour  $e_1 = 0.8$ 

 (b) Évolution de la transformation pour  $e_1 = 0.8$ 

 (c) Fit des coefficients JMAK numériques pour  $e_1 \approx 1.0$ 

 (d) Évolution de la transformation pour  $e_1 \approx 1.0$ 

**Figure VI.7** – Comparaisons entre les prédictions du modèle JMAK et les cinétiques numériques, pour trois valeurs de densité  $Z_0$  de nucléation instantanée (IN).

Les courbes numériques de  $\ln(-\ln(1-f))$  en fonction de  $\ln(t)$ , pour des excentricités des sphéroïdes de  $e_1 = 0.2$  (Figure VI.6(a)),  $e_1 = 0.4$  (Figure VI.6(c)),  $e_1 = 0.6$  (Figure VI.6(e)),  $e_1 = 0.8$  (Figure VI.7(a)) et  $e_1 = 0.999$  (Figure VI.7(c)) permettent de déterminer les valeurs numériques de  $K$  et  $n$  utilisées pour tracer les courbes semi-analytiques à partir de l'expression (IV.17). Les courbes théoriques et semi-analytiques des figures VI.6(b), VI.6(d), VI.6(f), VI.7(b) et VI.7(d) sont obtenues avec les valeurs  $K$  et  $n$  théorique et numérique respectivement. On obtient un excellent accord entre la théorie JMAK et les résultats numériques pour une cellule cubique.

Dans un second temps, les simulations numériques sont réalisées avec une cellule *homothétique* (Figure VI.2) dont les dimensions respectent l'aspect de forme des germes croissants en son sein. Nous constatons sur la Figure VI.8(a) que la vitesse de transformation augmente avec l'excentricité des germes pour une cellule cubique. Cependant, pour une cellule homothétique, il apparaît sur la Figure VI.8(b) que la cinétique de transformation est toujours identique à celle d'une croissance sphérique des germes, quel que soit l'aspect de forme des germes. (Ceci étant d'ailleurs évident a priori, car dans le cas d'une cellule homothétique la totalité des géométries successives des phases sont les mêmes que dans le cas sphérique à une affinité axiale près).

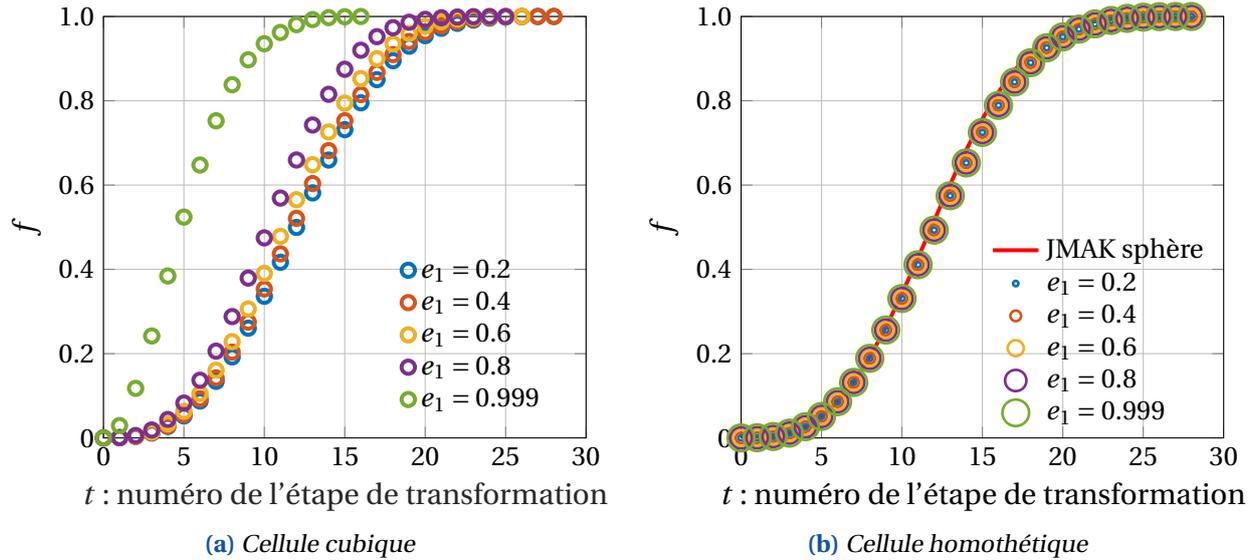


Figure VI.8 – Évolution de la transformation pour  $Z_0 = 10^{-4}$  et  $e_1 = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.999$

#### VI.1.4 Étude numérique paramétrique de la plasticité de transformation

Les simulations numériques de la plasticité de transformation sont analogues à celles réalisées dans le cas sphérique ([chapitre III](#)). Ainsi nous étudions toujours la transformation martensitique de l'acier A508, avec les propriétés thermiques et mécaniques décrites au [Tableau IV.2](#).

Les évolutions de la limite d'élasticité  $\sigma_Y$  et de la variation volumique  $\beta$ , en fonction de la proportion de phase locale  $\zeta$  dans une couche en cours de transformation, s'effectuent comme illustré sur la [Figure IV.5](#). Ces évolutions se réalisent en plusieurs sous-pas de temps pour des raisons de convergence numérique, comme expliqué à la [sous-sous-section IV.4.2](#).

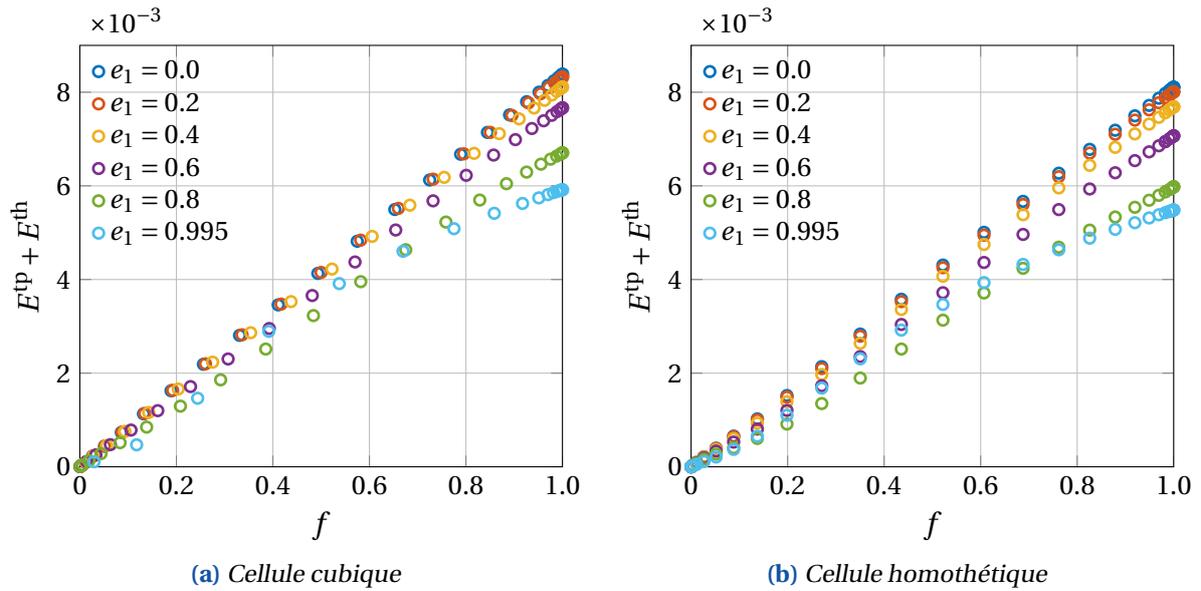
Ainsi, le paramètre  $\beta(\mathbf{x})$  est encore pris comme une fonction linéaire de  $\zeta(\mathbf{x})$ , et la limite d'élasticité est supposée conserver la valeur correspondant à la phase-mère  $\gamma$  jusqu'à ce que  $\zeta(\mathbf{x})$  atteigne une certaine valeur comprise entre 0 et 1, pour que cette limite d'élasticité évoluant ensuite linéairement vers la valeur correspondant à la phase-fille  $\alpha$  quand  $\zeta(\mathbf{x})$  atteint la valeur 1.

Nous allons étudier l'effet de divers paramètres de l'algorithme numérique. Dans un premier temps, nous regarderons l'effet de la forme du volume extérieur, et dans un second temps nous examinerons l'effet de l'évolution de la limite d'élasticité  $\sigma_Y$  pendant la transformation.

##### Effet de la forme du volume extérieur

Nous comparons les deux types de VER précédemment définis ([Figure VI.1](#)), dans le cas d'une transformation se produisant en l'absence de contrainte extérieure, et pour différentes valeurs d'excentricité  $e_1$  des germes, allant de 0 à  $\approx 1$ . D'autre part, le nombre de germes nucléés instantanément est de  $N_0 = 10^2$  et les cellules sont discrétisées avec  $\nu^3 = 100^3$  voxels; ainsi la densité de nucléation instantanée est de  $Z_0 = 10^{-4}$ . Ces choix correspondent à ceux adoptés à l'issue de la première analyse sur des germes sphériques (cf. [chapitre III](#)).

La [Figure VI.9](#) montre peu de différence entre les deux types de VER, cubique et homothétique. Il n'y a donc quasiment pas d'effet de forme du volume extérieur sur la déformation plastique de transformation.



**Figure VI.9** – Comparaison entre deux types de VER en l’absence de contrainte extérieure appliquée.

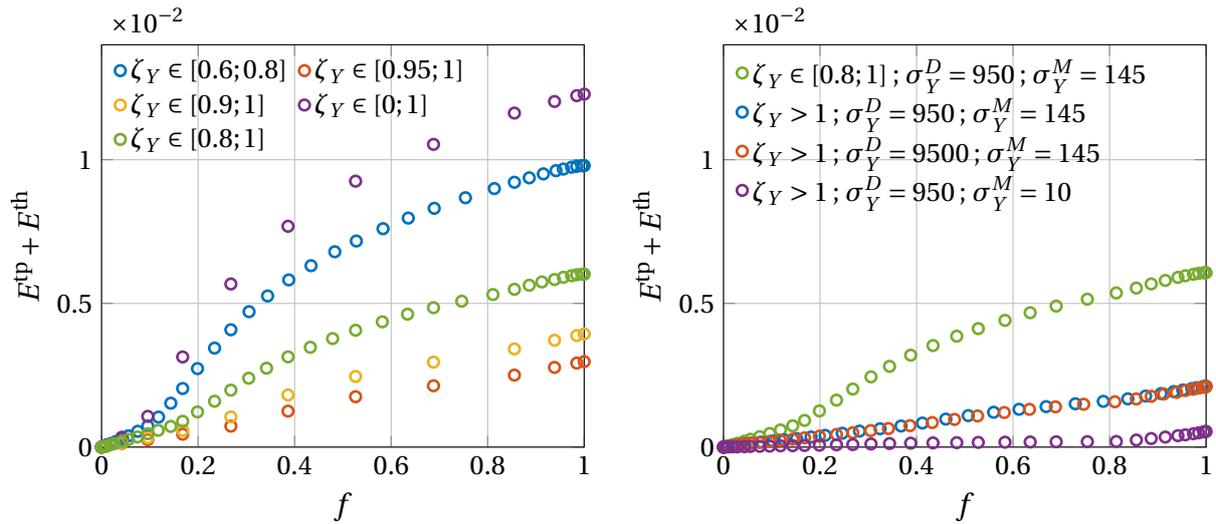
Dans la suite de l’étude nous gardons le VER homothétique, qui lie les dimensions de ses côtés à l’aspect de forme des germes, et semble correspondre plus à la réalité physique.

#### Effet de l’évolution de $\sigma_Y$ pendant la transformation

Le paramètre  $\zeta_Y$  représente la position inférieure de l’intervalle de  $\zeta(\mathbf{x})$  sur lequel la valeur de  $\sigma_Y(\mathbf{x})$  est considéré comme variant linéairement de  $\sigma_Y^D$  à  $\sigma_Y^M$  lorsque  $\zeta(\mathbf{x})$  augmente jusqu’à  $\zeta_Y + \delta\zeta_Y$ .

Dans le cas de croissance sphérique des germes l’effet de l’évolution de la limite d’élasticité  $\sigma_Y$  pendant la transformation était faible sur la déformation plastique de transformation (voir Figure IV.16).

Cependant, l’effet observé dans le cas de croissance non-sphérique est substantiel, comme le montre la Figure VI.10 obtenue dans le cas cylindrique, en l’absence de contrainte appliquée. En effet, sur la Figure VI.10(a), on observe que la déformation plastique de transformation est notablement plus faible lorsque l’évolution de la limite élastique  $\sigma_Y$  s’effectue dans un intervalle pris en fin de transformation.

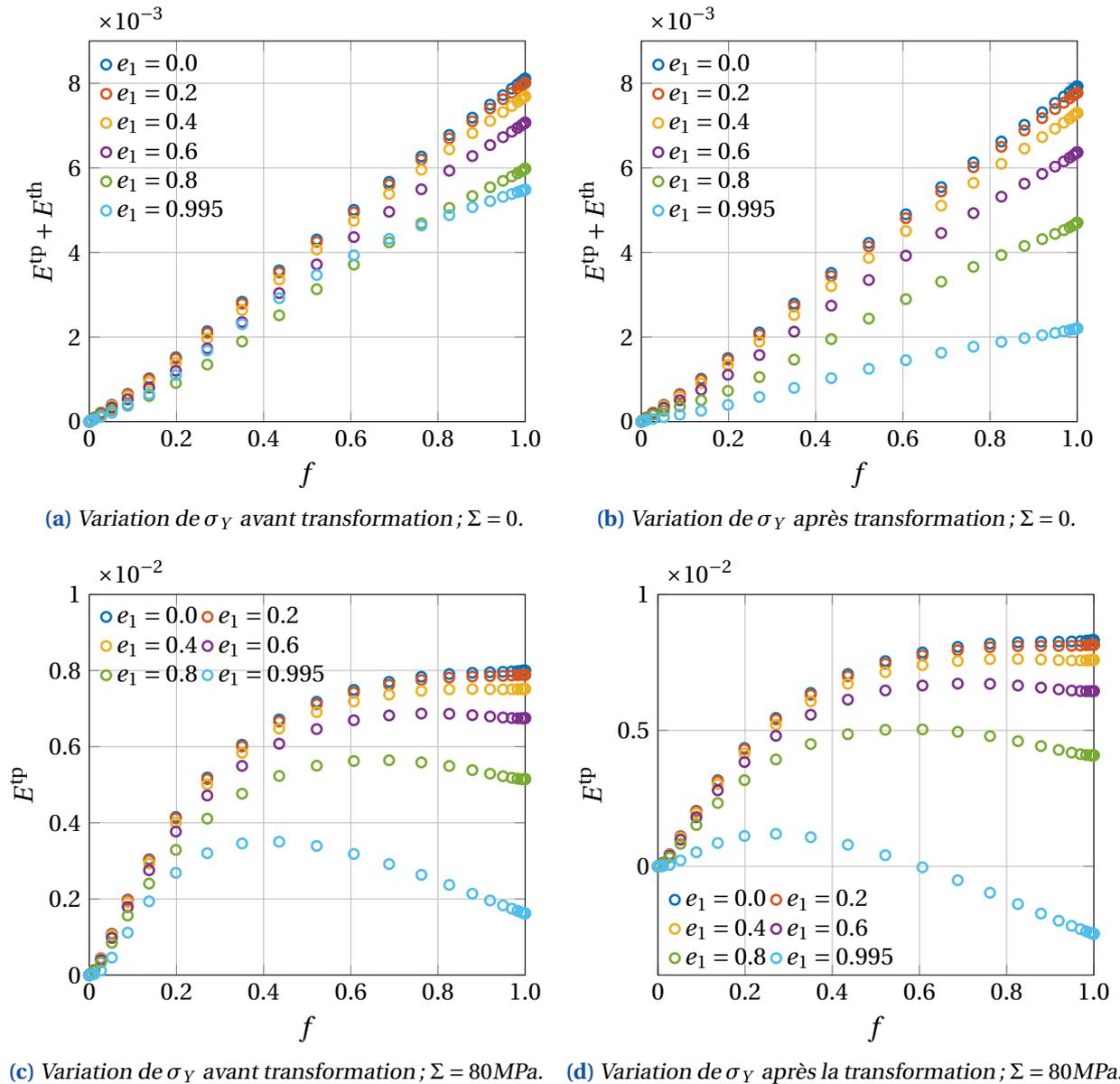


(a) Comparaisons pour différentes évolutions de la limite d'élasticité  $\sigma_Y$  durant la transformation ( $\sigma_Y^M = 145$  MPa et  $\sigma_Y^D = 950$  MPa) (b) Comparaisons pour différentes valeurs des limites d'élasticité  $\sigma_Y^M$  et  $\sigma_Y^D$  (en MPa)

**Figure VI.10** – Effet de l'évolution et de l'amplitude de  $\sigma_Y$  sur la déformation plastique de transformation ; pas de contrainte extérieure appliquée et excentricité  $e_1 = 0.99$  (germes quasi-cylindriques).

Puisqu'il est logique de faire varier la limite d'élasticité  $\sigma_Y$  à la fin de la transformation (peu de cohérence de la matière pendant la transformation, du fait du mouvement des atomes pendant le changement de réseau), on va jusqu'au bout de cette logique en faisant varier  $\sigma_Y^M$  *immédiatement après* la fin de la transformation. La Figure VI.11 montre l'effet de l'intervalle de variation de  $\sigma_Y$  :

- pris juste avant la transformation, de  $f = 0.8$  à  $f = 1$  ( $\zeta_Y \in [0.8; 1]$ )
- ou variation réalisée *juste après* la transformation.



**Figure VI.11** – Comparaison pour deux niveaux de seuil  $\zeta_Y$  avec (Figure VI.11(c) et Figure VI.11(d)), ou sans (Figure VI.11(a) et Figure VI.11(b)) contrainte appliquée ; cellule homothétique.

### Résultats numériques/théoriques – cas cylindrique

Rappelons que la théorie, fondée entre autres hypothèses sur celle de l'absence d'élasticité, prédit que la déformation totale axiale doit rester nulle au cours de la transformation dans le cas cylindrique (Figure V.11(c)). Ce résultat est contredit par les résultats numériques (Figure VI.11(b)) obtenus ici, qui montrent un écart notable dans le cas cylindrique.

Cette déformation supplémentaire obtenue numériquement par rapport au résultat prédit par le modèle théorique provient du coeur cylindrique de phase-fille. En effet, théoriquement, le coeur cylindrique de phase-fille ne se déforme pas axialement, il y a un blocage axial total du fait des valeurs élevées du module d'Young et de la limite d'élasticité de cette phase. Numériquement cependant, ce blocage axial n'est pas complet. Deux explications sont *a priori* possibles :

- La plasticité de la phase-fille est en cause. Cependant, en augmentant la limite d'élasticité  $\sigma_Y^D$ , pour augmenter la rigidité plastique de la phase-fille et éliminer la déformation plastique supposée du

coeur cylindrique, on constate qu'il n'y a toujours pas de blocage axial (**Figure VI.10(b)**). Cette explication n'est donc pas la bonne.

- La seule explication possible est donc l'élasticité de la phase-fille. Les observations suivantes confirment cette idée. En l'absence de plasticité importante de la phase-fille, les importances relatives de l'élasticité et de la plasticité sont caractérisées par le rapport sans dimension  $R = \sigma_Y^M / E$  ( $\sigma_Y^M$  limite d'élasticité de la phase-mère et  $E$  module d'Young) : si  $R$  est bas, l'élasticité est négligeable, si  $R$  est plus élevé elle ne l'est pas. Or, si l'on fait varier  $\sigma_Y^M$  (cf. **Figure VI.10(b)**), on constate que lorsque  $R$  augmente (élasticité plus importante) l'écart théorie/numérique augmente. Cet écart est donc bien dû à l'élasticité.

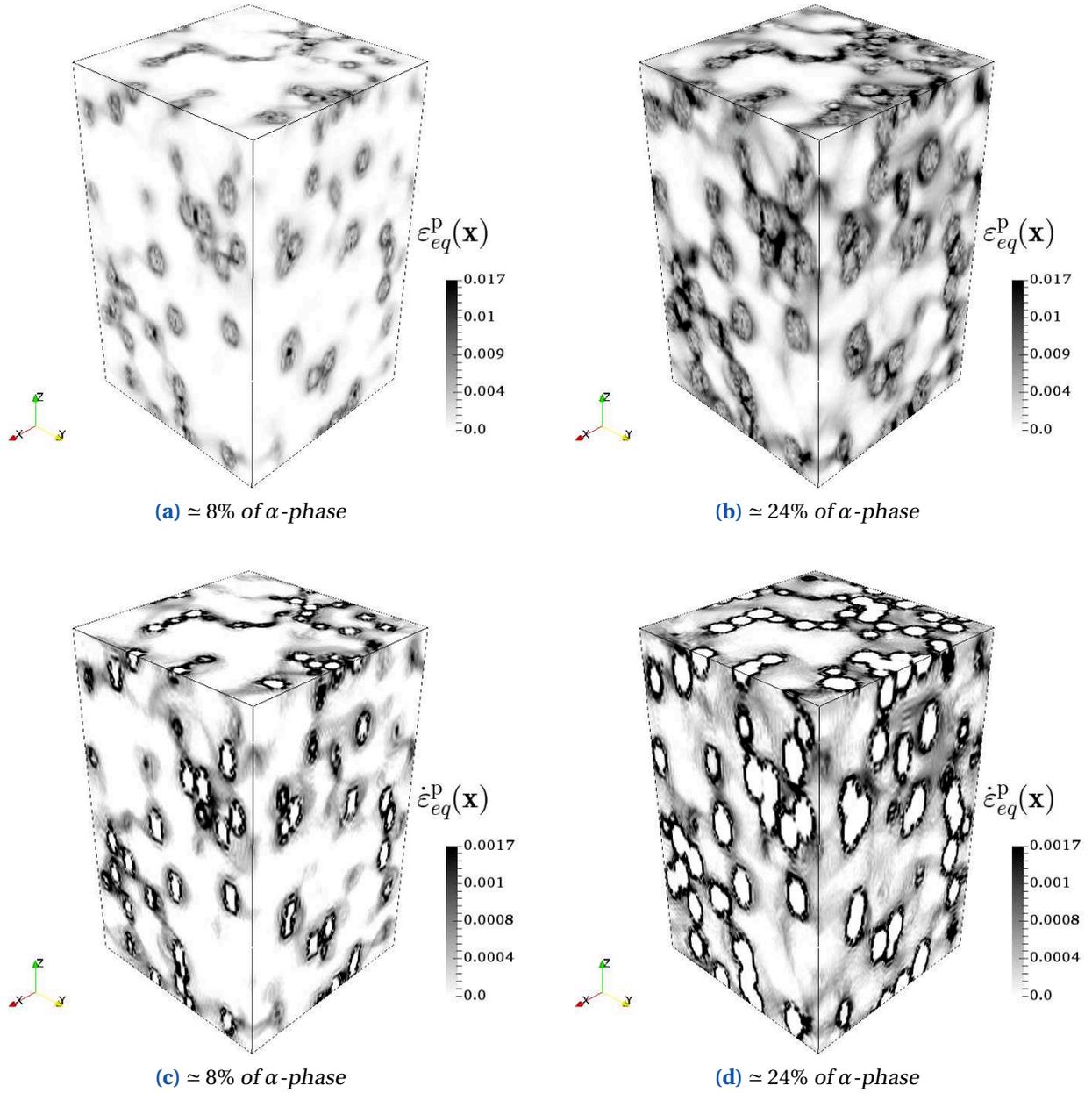
L'effet de l'élasticité sur la plasticité de transformation peut être qualitativement attribué à un couplage élastique/plastique. L'expansion dans la zone transformée engendre une déformation élastique axiale du cylindre central de phase-fille, d'où un blocage axial seulement partiel (à la fin  $E_3 > 0$  donc  $E_3^{tp} > -1/3 \frac{\Delta V}{V}$ ). Il va falloir dans la section suivante décrire ce couplage élasticité/plasticité, puisqu'il joue un rôle important. Ceci ne pourra pas être fait que de manière heuristique puisqu'il n'existe pas à l'heure actuelle de théorie simple et facilement utilisable pour traiter ce couplage.

### Cartographies de la déformation plastique de transformation

La déformation équivalente et la déformation équivalente cumulée (**Figure VI.12**) nous permet de constater les effets d'interaction entre les germes déjà mis en évidence au **chapitre III** dans le cas de croissance sphérique.

Nous remarquons sur cette figure, trois principales régions de déformation plastique :

- les régions de teinte blanche : dans ces zones aucune déformation ne se manifeste. Elles sont situées dans la phase-mère, loin des germes croissants de phase-fille.
- les régions de teinte grise : ces zones sont présentes au sein de la phase-mère sous forme de ligaments reliant les germes de phase-fille entre eux. Les déformations élasto-plastiques dans ces zones constituent les effets d'interaction entre les germes croissants.
- les régions de teinte noire : se situent dans la phase-mère, autour des germes de phase-fille se transformant. La déformation élasto-plastique de transformation locale est ici à son maximum.
- les régions de teinte tachetée noire et blanche (uniquement sur les figures **VI.12(a)** et **VI.12(b)**) : se situent à l'intérieur des germes de phase-fille, la déformation plastique locale permanente est héritée de la déformation élasto-plastique précédente de la phase-mère.



**Figure VI.12** – Répartition de la déformation élasto-plastique équivalente  $\varepsilon_{eq}^p$  et du taux déformation élasto-plastique équivalent  $\dot{\varepsilon}_{eq}^p$  au cours de la transformation.

## VI.2 Comparaison du modèle théorique et des résultats numériques

Nous avons vu dans la section précédente qu'il est nécessaire d'introduire des corrections de couplage élasto-plastique. Un premier terme de correction est introduit en l'absence de contrainte extérieure, et un second terme de correction supplémentaire est ajouté en présence d'une telle contrainte. Les valeurs des paramètres introduits sont déterminées par ajustement sur la base des données numériques, pour des chargements en traction et compression simples.

### VI.2.1 Correction de couplage élastoplastique en l'absence de contrainte extérieure

Le terme de correction heuristique introduit en l'absence de contrainte extérieure appliquée doit respecter les conditions suivantes :

- Être présent dans le cas cylindrique mais pas dans le cas sphérique (l'accord théorie/numérique étant bon dans ce cas). D'où l'idée de prendre la correction proportionnelle à  $e_1$  (ou une de ses puissances).
- Être proportionnelle au rapport  $\frac{\Delta V}{V}$  qui engendre la plasticité de transformation (sans différence de volume entre les phases, il n'y a pas de plasticité de transformation, ni par conséquent de correction due à l'élasticité).
- Dépendre du rapport  $\frac{\bar{\sigma}_M}{E}$  caractérisant les importances relatives de l'élasticité et de la plasticité, et s'annuler lorsque ce rapport est nul (phases très rigides élastiquement).

Ces considérations suggèrent une formule du type

$$\dot{E}^{c1} = k_1 e_1^2 \frac{\Delta V}{V} \frac{\bar{\sigma}_M}{E} \Phi_1(f) \dot{f} \quad (\text{VI.6})$$

Par ajustement avec les simulations numériques, nous prenons  $k_1 = 1.2 \times 10^2$  et  $\Phi_1 = (1 - f)^4$ . Le choix dans cette formule du carré de  $e_1$  plutôt que de  $e_1$  lui-même est dicté par les comparaisons.

### VI.2.2 Correction supplémentaire en présence d'une contrainte extérieure

Ce deuxième terme de correction heuristique doit être nul en l'absence de contrainte extérieure appliquée et respecter les considérations a) et b) décrites précédemment. Pour les influences de  $\Sigma$ ,  $E$  et  $\sigma_M$  il y a d'autres conditions :

- Pour un  $\Sigma$  donné, la correction doit disparaître pour  $E \rightarrow +\infty$  (phases très rigides élastiquement, donc pas de correction de couplage élastoplastique).
- Pour  $\Sigma$  fixé, la correction doit de même disparaître pour  $\bar{\sigma}_M \rightarrow \infty$  (phase-mère non déformable plastiquement, donc pas de plasticité de transformation ni de correction).
- La correction doit changer de signe avec  $\Sigma$  (étant liée à la déformation élastique de la phase-fille).

Une formule compatible avec ces exigences est :

$$\dot{E}^{c2} = k_2 [1 + k_3 e_1 (1 - e_1)] e_1 \frac{\Delta V}{V} \frac{\Sigma_{\text{eq}}^2}{E \bar{\sigma}_M} \Phi_2(f) \text{sgn}(\Sigma) \dot{f} \quad (\text{VI.7})$$

avec  $k_2 = 2.4 \times 10^2$ ,  $k_3 = 1.85$  et  $\Phi_2 = (1 - f)^4$ .

Les expressions données de  $\dot{E}^{c1}$  et  $\dot{E}^{c2}$  ne sont applicables qu'à la traction et la compression simples, il faut les étendre au cas général.

1. Pour  $\dot{\mathbf{E}}^{c1}$  il n'y a par définition pas de contrainte extérieure  $\Sigma$  appliquée. Il s'agit juste de respecter l'axisymétrie de la géométrie et l'incompressibilité. On prend donc :

$$\dot{\mathbf{E}}^{c1} = k_1 e_1^2 \frac{\Delta V}{V} \frac{\bar{\sigma}_M}{E} \Phi_1(f) \dot{f} \left( -\frac{1}{2} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \right) \quad (\text{VI.8})$$

(la composante  $\mathbf{e}_3$  donne bien la formule (VI.6) en traction/compression simple).

2. Pour  $\dot{\mathbf{E}}^{c2}$  il faut faire une hypothèse de plus, qui est la colinéarité avec le déviateur des contraintes. Le plus simple est de prendre :

$$\dot{\mathbf{E}}^{c2} = k_2 [1 + k_3 e_1 (1 - e_1)] e_1 \frac{\Delta V}{V} \frac{\Sigma_{\text{eq}}^2}{E \bar{\sigma}_M} \Phi_2(f) \dot{f} \frac{3\Sigma'}{2\Sigma_{\text{eq}}} \quad (\text{VI.9})$$

(la composante  $\mathbf{e}_3$  donne bien la formule (VI.7) en traction/compression simple).

Notons que le signe de  $\Sigma$  a disparu de la formule, le terme  $\frac{3\Sigma'}{2\Sigma_{\text{eq}}}$  étant suffisant pour assurer l'imparité de  $\dot{\mathbf{E}}^{c2}$  vis-à-vis de  $\Sigma$ .

Finalement, la loi de comportement de la déformation plastique de transformation utilisée pour la comparaison des résultats numériques est la suivante :

$$\dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}} = \dot{\mathbf{E}}_{\text{théor.}}^{\text{tp}} + \dot{\mathbf{E}}^{c1} + \dot{\mathbf{E}}^{c2} \quad (\text{VI.10})$$

VI.2.3 Comparaison théorique/numérique : Traction

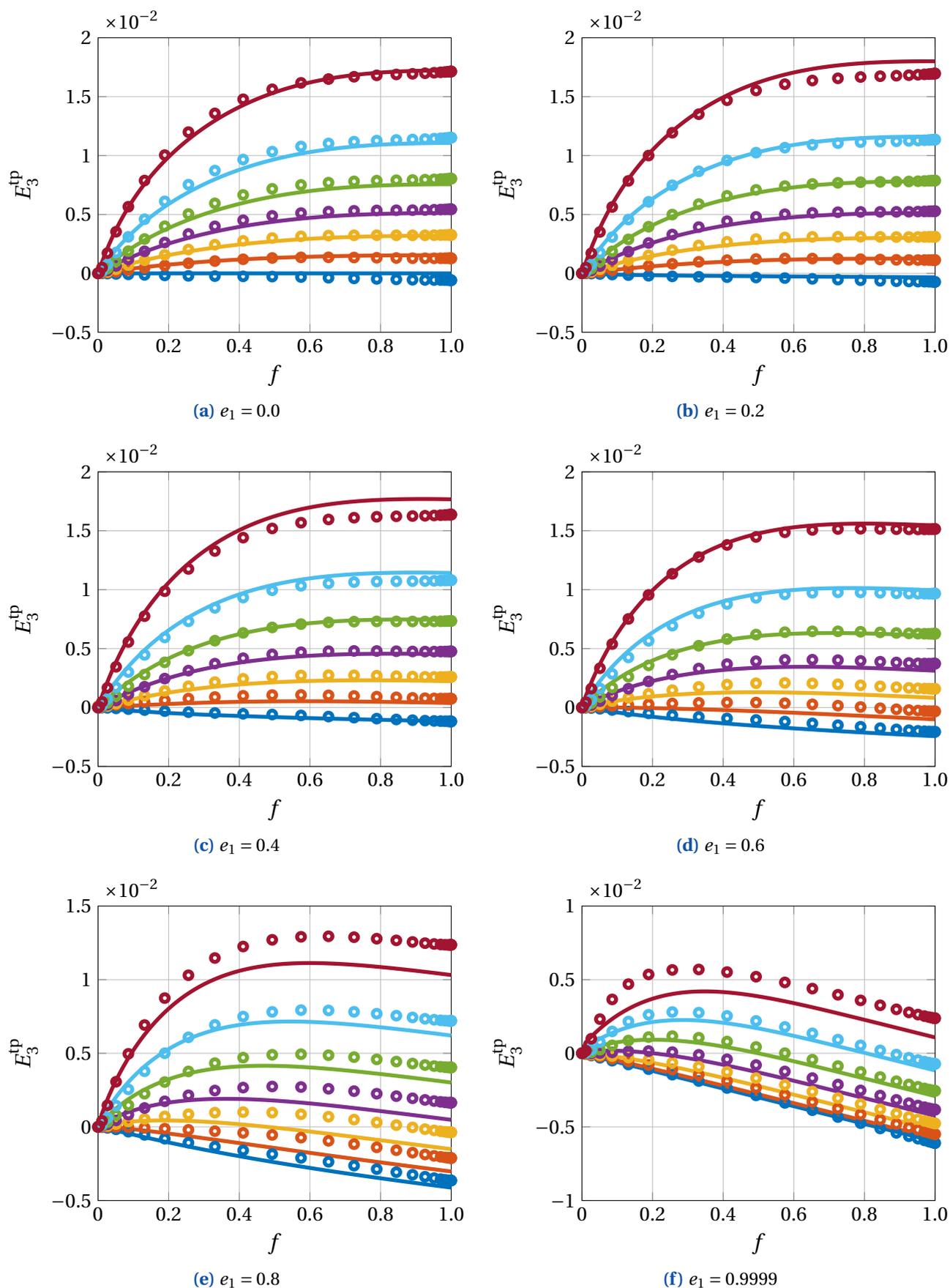


Figure VI.13 – Courbes théoriques (par excentricité, contrainte : 0MPa à 120MPa par pas de 20MPa).

VI.2.4 Comparaison théorique/numérique : Compression

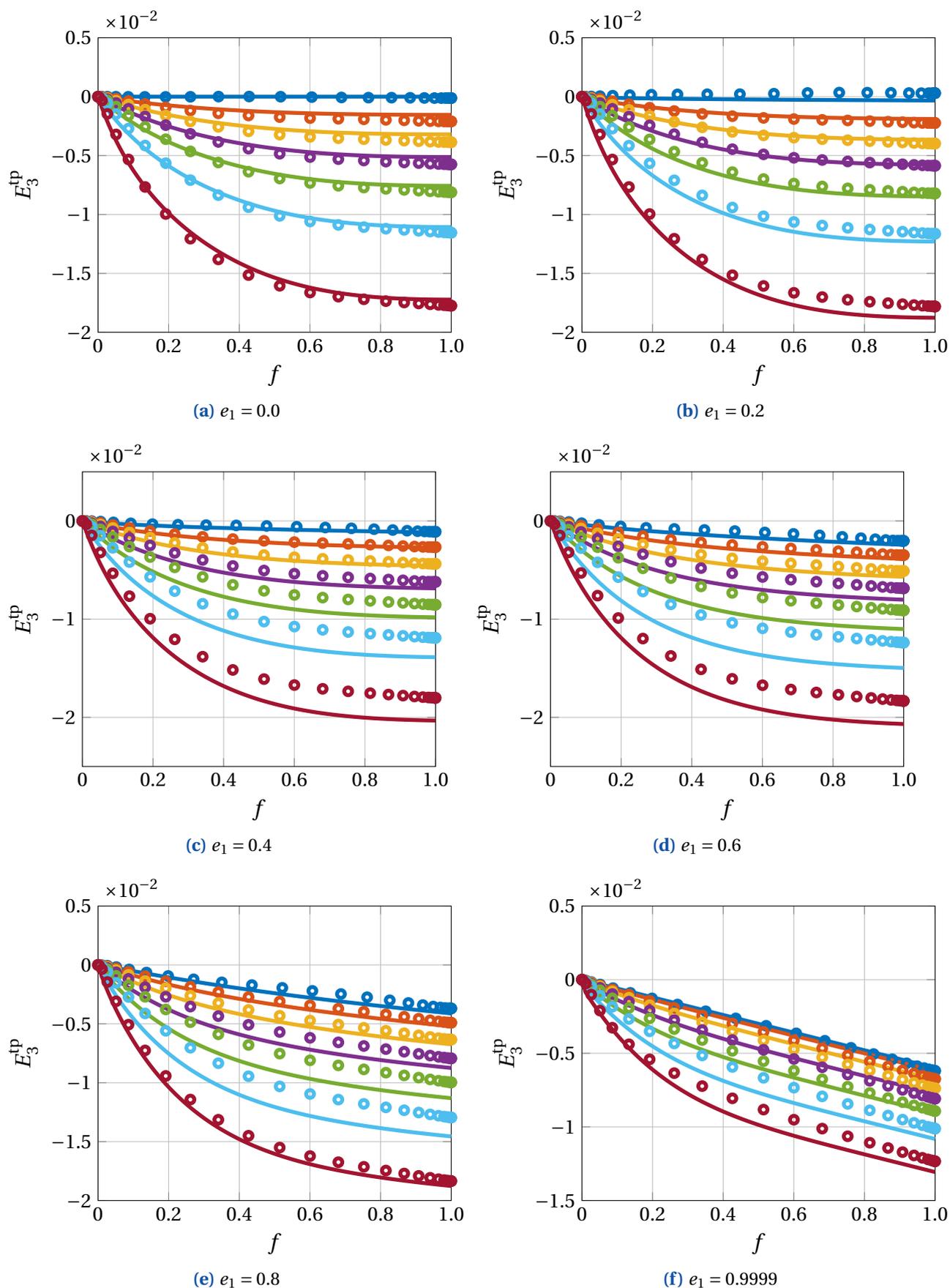
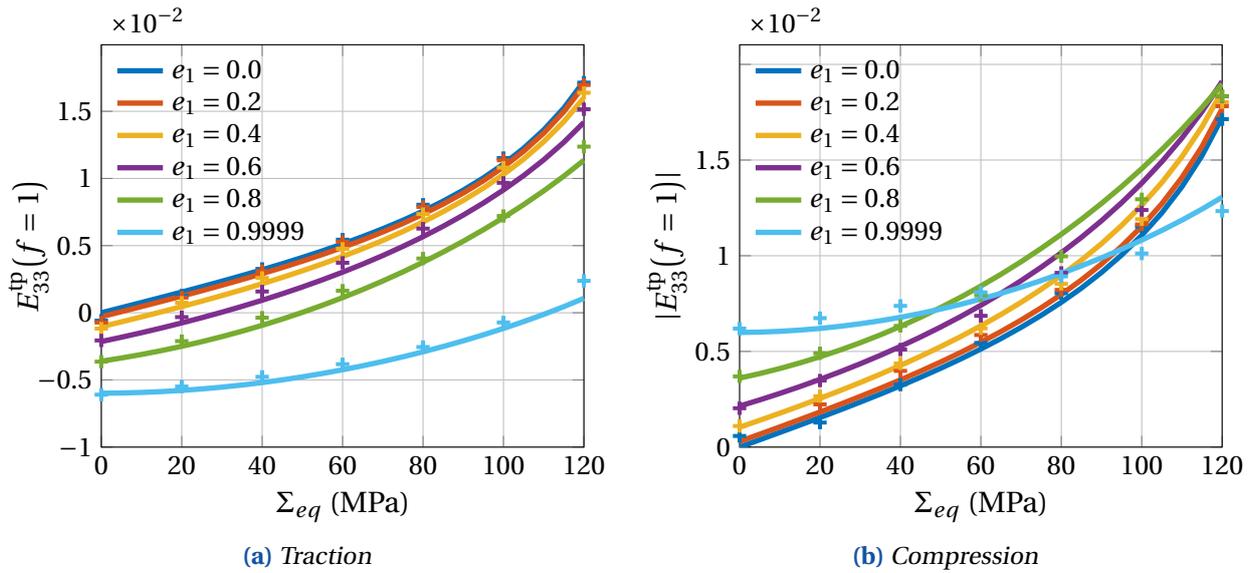


Figure VI.14 – Courbes théoriques (par excentricité, contrainte : 0MPa à 120MPa par pas de -20MPa)



**Figure VI.15** – Déformation plastique de transformation après transformation complète.

Avec la prise en compte des corrections incorporant le couplage élastoplastique, un très bon accord est observé pour différentes excentricités et contraintes appliquées. L'effet de non linéarité de la déformation plastique de transformation en fonction de la contrainte appliquée est présent numériquement et théoriquement. La dissymétrie constatée dans les résultats numériques entre des contraintes uniaxiales de traction et compression est parfaitement reproduite par le modèle théorique.





Le but du travail effectué était de proposer un nouveau traitement théorique du mécanisme de [Greenwood et Johnson \(1965\)](#) de la plasticité de transformation, afin d'améliorer les modèles utilisés dans les simulations numériques des procédés thermomécaniques, tels que le soudage et la trempe des métaux et alliages. Ces nouveaux modèles théoriques ont pu être validés par une approche numérique à base de FFT.

La nouvelle approche est fondée sur les mêmes éléments de base que l'analyse micromécanique simplifiée, développée par [Leblond et al. \(1989\)](#), reposant sur un modèle de croissance d'un noyau sphérique de phase fille  $\alpha$  au sein d'un volume sphérique concentrique de phase mère  $\gamma$ , et soumis à un chargement mécanique extérieur. Le nouveau traitement plus rigoureux, fondé sur une combinaison de l'approche cinématique de l'analyse-limite et de l'homogénéisation, rend la solution du problème à la fois plus générale et plus versatile.

En effet, ce travail permet de renoncer aux hypothèses excessives introduites dans l'analyse classique ([Leblond et al., 1989](#)), et conduit à une formulation plus complète de la loi de comportement de plasticité de transformation, permettant de décrire des effets connus expérimentalement, comme la croissance non-linéaire de la déformation plastique de transformation en fonction de la contrainte extérieure appliquée ([Greenwood et Johnson, 1965](#)).

Les difficultés rencontrées dans l'utilisation de l'analyse-limite étaient les suivantes :

- D'une part, l'analyse-limite traite de matériaux *passifs*, or ici, le matériau contient un *mécanisme interne* qui est l'expansion de la phase fille  $\alpha$  résultant de la transformation de phase.
- D'autre part, l'analyse-limite est une approche variationnelle qui permet de calculer des états limites de structures, la solution étant donnée sous forme de *critère d'écoulement plastique*; or ici, nous recherchons une *loi de comportement* donnant le taux de déformation plastique de transformation pour une contrainte appliquée variant continûment.

Pour résoudre ces problèmes, nous avons remplacé le mécanisme interne – l'expansion de la phase fille  $\alpha$  due à la transformation – par des conditions de chargement interne. Ainsi, l'expansion de la phase fille  $\alpha$  devient une condition à la limite interne au volume représentatif considéré, permettant l'utilisation de l'analyse-limite. Mais il y'a plus. En effet, l'introduction de ce chargement interne permet également de résoudre la seconde difficulté, mentionnée ci-dessus, puisqu'un chargement externe pourra être fixé librement; le chargement interne s'ajustera à celui-ci, de manière que le couple constitué par les deux chargements constitue un état-limite global.

De plus, nous avons remarqué une analogie avec les problèmes de rupture ductile et le modèle de [Gurson \(1977\)](#) de la sphère creuse, ce qui nous a permis de "recycler" pour notre problème des champs de

vitesse-tests déjà définis dans ces problèmes. Cependant puisque notre nouveau problème comporte non seulement un chargement sur le bord extérieur de la sphère creuse de phase-mère, mais aussi un chargement sur le bord intérieur (tous deux de type contraintes homogènes (Hill, 1967 ; Mandel, 1966)), il a fallu davantage de champs cinématiques pour résoudre le problème que pour traiter le problème classique de Gurson (1977) de sphère creuse non chargée intérieurement. Ainsi, nous avons utilisé d'autres champs plus complexes de type Eshelby (1957), empruntés aux travaux de Monchiet *et al.* (2011) dans le cas de cavités sphériques.

Ensuite, nous nous sommes intéressés à une extension du modèle dans un contexte plus réaliste, considérant l'anisotropie de la forme des germes (Desalos, 1981). La généralisation de l'analyse de la croissance sphérique au cas de géométrie sphéroïdale allongée a été effectuée en réutilisant l'analogie avec la rupture ductile, mais cette fois pour des trous sphéroïdaux (modèle *GLD*, Gologanu *et al.* (1997)). Ce type de croissance est connu pour détruire l'isotropie de la répartition des phases en cours de transformation, et donc conduire à de nouveaux effets intéressants, comme la non-disparition de la déformation plastique de transformation en l'absence de contrainte externe (Desalos, 1981). Ainsi, nous avons de nouveau emprunté des champs cinématiques de Monchiet *et al.* (2014) adaptés au cas de milieux poreux comprenant des cavités non-sphériques (complétant le travail Gurson (1977) limité aux cavités sphériques et cylindriques).

Nous avons appliqué la solution issue du traitement par analyse-limite au mécanisme de plasticité de transformation de Greenwood et Johnson (1965). Une formulation du taux de déformation plastique de transformation a été obtenue. Ce résultat présente plusieurs avantages, qui sont entre autres de se passer des paramètres *ad-hoc* introduits dans l'analyse de Leblond *et al.* (1989), mais également d'obtenir un taux de déformation plastique de transformation non infini en début de transformation (Leblond *et al.*, 1989), et de reproduire l'effet de non-linéarité de ce taux en fonction de la contrainte appliquée. Cette loi permet en effet de considérer des contraintes externes d'amplitude arbitraire au lieu de faible uniquement. De plus, l'extension du modèle au cas de croissance sphéroïdale des germes permet la prise en compte des effets d'anisotropie morphologique sur la plasticité de transformation.

En parallèle de la construction du nouveau modèle, analytique, des simulations numériques du mécanisme de Greenwood et Johnson (1965) ont été réalisées, afin de valider les prédictions du modèle théorique développé El Majaty *et al.* (2020). Cette approche numérique simule la nucléation et la croissance isotrope progressive de plusieurs germes de phase fille  $\alpha$ , avec différentes loi de répartition spatio-temporelle des germes, dans un VER de phase mère  $\gamma$  homogène, soumis à des conditions de périodicité. Les deux phases sont constituées d'un matériau isotrope de comportement thermo-élastoplastique, dont les seuls paramètres physiques qui diffèrent entre eux sont le volume spécifique et la limite d'élasticité. De telles simulations ont été réalisées par la méthode FFT d'homogénéisation numérique (Moulinec et Suquet, 1998a), plus adaptée que la méthode standard des éléments finis à ce type de simulations.

Ces simulations ont permis d'étudier les effets d'interaction entre les germes et les effets de germination/croissance. Il a été constaté, qu'il n'y avait quasiment aucune différence sur la plasticité de transformation entre des germinations sporadique (SN) et instantanée (IN). En revanche, la différence est plus notable entre germinations homogène et hétérogène, en raison de la différence d'aire de l'interface  $\alpha/\gamma$ , plus ou moins importante selon le type de germination lors de l'avancement de la transformation.

Dans le cas de la croissance sphérique, un très bon accord entre les résultats de la nouvelle théorie fondée sur l'analyse limite et les simulations numériques à base de FFT, a été obtenu à la fois pour des chargements uniaxiaux et multiaxiaux, et pour une large gamme d'amplitude de contraintes appliquées. Dans le cas de croissance sphéroïdale, il a fallu ajuster la loi de comportement à l'aide de termes correctifs prenant en compte le couplage élasto-plastique, du fait de la non-considération de l'élasticité dans le modèle analytique. Après cet ajustement, un très bon accord est observé avec les simulations numériques pour des croissances non-sphériques, et cela quelle que soit l'excentricité des germes et la contrainte appliquée.

L'effet non-linéaire de la déformation plastique de transformation en fonction de la contrainte appliquée, pour une transformation complète, a été parfaitement prédit pour tout type de croissance, sphérique ou sphéroïdale. En conclusion, les résultats sont globalement satisfaisants par rapport aux simulations numériques et aux expériences réalisées sur l'acier A533 (Coret *et al.*, 2002, 2004; Desalos, 1981; Taleb *et al.*, 2001).

La perspective la plus importante à réaliser serait de valider les résultats théoriques et numériques par des essais expérimentaux portant sur les effets d'anisotropie de la plasticité de transformation. Un début de campagne expérimentale a été mis en oeuvre dans le cadre de cette thèse afin de caractériser le comportement mécanique et d'identifier l'anisotropie de microstructure d'un acier 16MND5. Cependant, les effets d'anisotropie observés sont très faibles sur les éprouvettes analysées, car elles ont malheureusement été prélevées dans des pièces n'ayant pas subi de traitement devant conduire à des anisotropies significatives.

D'autres perspectives peuvent être envisagées, comme la prise en compte des effets d'écrouissage, ou encore l'élaboration de sous-programmes permettant l'implémentation numérique des nouvelles lois dans les codes d'éléments finis.



## Bibliographie

- Les ségrégations dans l'acier. 10(7) :280–282. URL <https://doi.org/10.1051/mattech/192710070280>.
- Les ségrégations dans l'acier. *Prat. Ind. Méc.*, 10(7) :280–282, 1927. URL <https://doi.org/10.1051/mattech/192710070280>.
- F. ABRASSART : *Influence des transformations martensitiques sur les propriétés mécaniques des alliages Fe–Ni–Cr–C*. Thèse de doctorat, thèse de Doctorat ès sciences physiques, université Nancy 1, 1972.
- A. ANDRIEU : *Mécanismes et modélisation multi-échelle de la rupture fragile trans-et inter-granulaire des aciers pour réacteurs à eau sous pression, en lien avec le vieillissement thermique*. Thèse de doctorat, 2013.
- M. AVRAMI : Kinetics of phase change. ii transformation-time relations for random distribution of nuclei. *J. Chem. Phys.*, 8(2) :212–224, 1940.
- F. BARBE, R. QUER, L. TALEB et E. CURSI : Fe determination of the effective trip during diffusive transformation in a volume with randomly positioned nuclei. *In Proceedings of 1st International Conference on Distortion Engineering, Bremen*, p. 149–148, 2005.
- F. BARBE et R. QUEY : A numerical modelling of 3d polycrystal-to-polycrystal diffusive phase transformations involving crystal plasticity. *International Journal of Plasticity*, 27(6) :823–840, 2011.
- F. BARBE, R. QUEY et L. TALEB : Numerical modelling of the plasticity induced during diffusive transformation. case of a cubic array of nuclei. *Eur. J. Mech. A. Solids*, 26(4) :611–625, 2007.
- F. BARBE, R. QUEY, L. TALEB et E. S. de CURSI : Numerical modelling of the plasticity induced during diffusive transformation. an ensemble averaging approach for the case of random arrays of nuclei. *Eur. J. Mech. A. Solids*, 27(6) :1121–1139, 2008.
- S. BAUVAIS : Du prestige à la proto-industrie : évolution des pratiques sidérurgiques au second âge du fer dans le nord du bassin parisien. *The Arkeotek Journal*, 2(4), 2008.
- A. A. BENZERGA et J.-B. LEBLOND : Ductile fracture by void growth to coalescence. *In Advances in applied mechanics*, vol. 44, p. 169–305. Elsevier, 2010.
- H. BHADESHIA : The bainite transformation : unresolved issues. *Materials science and engineering : A*, 273 :58–66, 1999.
- H. BHADESHIA : Carbon-carbon interactions in iron. *Journal of materials science*, 39 :3949–3955, 2004.
- A. BOUDIAF, L. TALEB et M. BELOUCHRANI : Experimental analysis of the correlation between martensitic transformation plasticity and the austenitic grain size in steels. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 30(3) :326–335, 2011.
- J. G. BOYD et D. C. LAGOUDAS : A thermodynamical constitutive model for shape memory materials. part i. the monolithic shape memory alloy. *International journal of plasticity*, 12(6) :805–842, 1996.
- R. BRENNER, R. LEBENSOHN et O. CASTELNAU : Elastic anisotropy and yield surface estimates of polycrystals. *Int. J. Solids Struct.*, 46(16) :3018–3026, 2009.
- A. BROSE : *Modélisation expérimentale et numérique des effets induits par la rectification. Application à la rectification haute productivité*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2009.
- R. HILL : The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 15 :79 – 95, 1967.

- J. MANDEL : Contribution théorique à l'étude de l'écroutissage et des lois de l'écoulement plastique. *In Applied Mechanics*, p. 502–509. Springer, 1966.
- MATLAB® : *version 8.6.0 (R2015a)*. The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts, 2015.
- B. BUDIANSKY, J. HUTCHINSON et S. SLUTSKY : Void growth and collapse in viscous solids. *In Mechanics of solids*, p. 13–45. Elsevier, 1982.
- P. P. CASTAÑEDA : The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39(1) :45–71, 1991.
- P. P. CASTAÑEDA : Second-order homogenization estimates for nonlinear composites incorporating field fluctuations : I applications. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50(4) :759–782, 2002.
- P. P. CASTANEDA : Second-order homogenization estimates for nonlinear composites incorporating field fluctuations : I theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50(4) :737–757, 2002.
- N. CAVALLO : *Contribution à la validation expérimentale de modèles décrivant la ZAT lors d'une opération de soudage*. Thèse de doctorat, Lyon, INSA, 1998.
- M. CHERKAOUI, M. BERVEILLER et X. LEMOINE : Couplings between plasticity and martensitic phase transformation : overall behavior of polycrystalline trip steels. *Int. J. Plast.*, 16(10-11) :1215–1241, 2000.
- G. COLETTE : Comportement thermomécanique des matériaux et des structures métalliques. *these de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine*, 1980.
- J. COMON et P. BASTIEN : Etude expérimentale des relations entre la solidification et les hétérogénéités de lingots d'acier de 3 à 30 tonnes. *Revue de Métallurgie*, 65(1) :13–23, 1968.
- M. CORET, S. CALLOCH et A. COMBESCURE : Experimental study of the phase transformation plasticity of 16mnd5 low carbon steel under multiaxial loading. *International Journal of plasticity*, 18(12) :1707–1727, 2002.
- M. CORET, S. CALLOCH et A. COMBESCURE : Experimental study of the phase transformation plasticity of 16mnd5 low carbon steel induced by proportional and nonproportional biaxial loading paths. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 23(5) :823–842, 2004.
- M. CÔTÉ : *Étude des cinétiques de transformation de phase d'un acier inoxydable martensitique 13% Cr-4% Ni*. Thèse de doctorat, École de technologie supérieure, 2007.
- K. DANAS et P. P. CASTAÑEDA : A finite-strain model for anisotropic viscoplastic porous media : I–theory. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 28(3) :387–401, 2009a.
- K. DANAS et P. P. CASTAÑEDA : A finite-strain model for anisotropic viscoplastic porous media : II–applications. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 28(3) :402–416, 2009b.
- M. DE JONG et G. RATHENAU : Mechanical properties of iron and some iron alloys while undergoing allotropic transformation. *Acta Metallurgica*, 7(4) :246–253, 1959.
- M. DE JONG et G. RATHENAU : Mechanical properties of an iron-carbon alloy during allotropic transformation. *Acta Metallurgica*, 9(8) :714–720, 1961.
- Y. DESALOS : Comportement mécanique et dilatométrie de l'austénite métastable de l'acier a533, 1981.
- J. DIANI, H. SABAR et M. BERVEILLER : Micromechanical modelling of the transformation induced plasticity (trip) phenomenon in steels. *Int. J. Eng. Sci.*, 33(13) :1921–1934, 1995.
- G. E. DIETER et D. J. BACON : *Mechanical metallurgy*, vol. 3. McGraw-hill New York, 1986.

- Y. EL MAJATY, R. BRENNER et J.-B. LEBLOND : Fft-based micromechanical simulations of transformation plasticity. comparison with a limit-analysis-based theory. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, p. 104152, 2020.
- Y. EL MAJATY, J.-B. LEBLOND et D. KONDO : A novel treatment of greenwood–johnsons mechanism of transformation plasticity-case of spherical growth of nuclei of daughter-phase. *J. Mech. Phys. Solids*, 121 :175–197, 2018.
- J. D. ESHELBY : The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proc. R. Soc. London, Ser. A. Mathematical and Physical Sciences*, 241(1226) :376–396, 1957.
- J. D. ESHELBY : The elastic field outside an ellipsoidal inclusion. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 252(1271) :561–569, 1959.
- ESI-GROUP *et al.* : User's manual. In *SYSWELD User Guide*, 2017.
- F. FISCHER : A micromechanical model for transformation plasticity in steels. *Acta Metallurgica et Materialia*, 38(8) :1535–1546, 1990.
- F. FISCHER, Q. SUN et K. TANAKA : Transformation-induced plasticity (trip). *Applied Mechanics Reviews*, 49(6) :317, 1996.
- F. FISCHER et K. TANAKA : A micromechanical model for the kinetics of martensitic transformation. *International journal of solids and structures*, 29(14-15) :1723–1728, 1992.
- M. FISCHLSCHWEIGER, G. CAILLETAUD et T. ANTRETTTER : A mean-field model for transformation induced plasticity including backstress effects for non-proportional loadings. *Int. J. Plast.*, 37 :53–71, 2012.
- M. FUKUMUTO, M. YOSHIZAKI, H. IMATAKA, K. OKAMUA et K. YAMAMOTO : Three-dimensional fem analysis of helical gear subjected to the carburized quenching process. *Zairyo*, 50(6) :598–605, 2001.
- V. GALLICAN et R. BRENNER : Homogenization estimates for the effective response of fractional viscoelastic particulate composites. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 31(3) :823–840, 2019.
- J.-E. GANGHOFFER et K. SIMONSSON : A micromechanical model of the martensitic transformation. *Mechanics of Materials*, 27(3) :125–144, 1998.
- J. GANGHOFFER, S. DENIS, E. GAUTIER, A. SIMON et S. SJOSTROM : Finite element calculation of the micromechanics of a diffusional transformation. In *Mechanical Behaviour of Materials VI*, p. 165–170. Elsevier, 1992.
- M. GARAJEU : *Contribution à l'étude du comportement non linéaire de milieux poreux avec ou sans renfort*. Thèse de doctorat, Aix-Marseille 2, 1995.
- E. GAUTIER, X. ZHANG et A. SIMON : Role of internal stress state on transformation induced plasticity and transformation mechanisms during the progress of stress induced phase transformation. In *International Conference on Residual Stresses*, p. 777–783. Springer, 1989.
- E. A. GAUTIER : *Transformations perlitique et martensitique sous contrainte de traction dans les aciers*. 1985.
- D. GIGOU : *Plasticité de transformation : Cas de la transformation martensitique*. 1985.
- J. GIUSTI : *Contraintes et déformations résiduelles d'origine thermique : application au soudage et à la trempe des aciers*. Thèse de doctorat, 1981a.
- J. GIUSTI : *Contraintes et déformations résiduelles d'origine thermique : application au soudage et à la trempe des aciers*. Thèse de doctorat, Université Paris VI (France), 1981b.

- M. GOLOGANU : *Etude de quelques problèmes de rupture ductile des métaux*. Thèse de doctorat, Paris 6, 1997.
- M. GOLOGANU, J.-B. LEBLOND, G. PERRIN et J. DEVAUX : Recent extensions of gursons model for porous ductile metals. *In Continuum micromechanics*, p. 61–130. Springer, 1997.
- M. GOLOGANU, J.-B. LEBLOND et J. DEVAUX : Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids case of axisymmetric prolate ellipsoidal cavities. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41(11) :1723–1754, 1993.
- M. GOLOGANU, J.-B. LEBLOND et J. DEVAUX : Approximate models for ductile metals containing nonspherical voids case of axisymmetric oblate ellipsoidal cavities. 1994.
- G. W. GREENWOOD et R. JOHNSON : The deformation of metals under small stresses during phase transformations. *Proc. R. Soc. London, Ser. A. Mathematical and Physical Sciences*, 283(1394) :403–422, 1965.
- G. GRIMMETT : *Percolation*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-662-03981-6. URL <https://books.google.fr/books?id=Vnz1CAAQBAJ>.
- J. GURLAND : A structural approach to the yield strength of two-phase alloys with coarse microstructures. *Materials Science and Engineering*, 40(1) :59–71, 1979.
- A. L. GURSON : Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : Part I yield criteria and flow rules for porous ductile media. *J. Eng. Mater. Technol.*, 99(1) :2–15, 1977.
- H. N. HAN, C. G. LEE, C.-S. OH, T.-H. LEE et S.-J. KIM : A model for deformation behavior and mechanically induced martensitic transformation of metastable austenitic steel. *Acta Materialia*, 52(17) :5203–5214, 2004.
- J.-M. HAUDIN : Développement de structures dans les polymères-concepts généraux. 2015.
- R. HILL : Lxxxviii. on the state of stress in a plastic-rigid body at the yield point. *The London, Edinburgh, and Dublin Philos. Mag. and J. Sci.*, 42(331) :868–875, 1951.
- R. HILL : The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 15(2) :79–95, 1967.
- H. HOANG, F. BARBE, R. QUEY et L. TALEB : Fe determination of the plasticity induced during diffusive transformation in the case of nucleation at random locations and instants. *Computational Materials Science*, 43(1) :101–107, 2008.
- M. IDIART et P. P. CASTAÑEDA : Second-order estimates for nonlinear isotropic composites with spherical pores and rigid particles. *Comptes Rendus Mécanique*, 333(2) :147–154, 2005.
- T. INOUE, S. NAGAKI, T. KISHINO et M. MONKAWA : Description of transformation kinetics, heat conduction and elastic-plastic stress in the course of quenching and tempering of some steels. *Ingenieur-Archiv*, 50(5) :315–327, 1981.
- T. INOUE et Z. WANG : Coupling between temperature, stress and metallic structures during phase transformation and the analysis of carburized quenching of a steel gear. *In Computational Mechanics* 86, p. 691–696. Springer, 1986.
- T. INOUE et Z. WANG : Coupling between stress, temperature, and metallic structures during processes involving phase transformations. *Materials Science and Technology*, 1(10) :845–850, 1985.
- M. KAILASAM et P. P. CASTANEDA : A general constitutive theory for linear and nonlinear particulate media with microstructure evolution. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(3) :427–465, 1998.

- A. KEMPEN, F. SOMMER et E. MITTEMEIJER : Determination and interpretation of isothermal and non-isothermal transformation kinetics ; the effective activation energies in terms of nucleation and growth. *Journal of materials science*, 37(7) :1321–1332, 2002.
- S. M. KERALAVARMA et A. A. BENZERGA : An approximate yield criterion for anisotropic porous media. *Comptes Rendus Mécanique*, 336(9) :685–692, 2008.
- R. A. LEBENSOHN, R. BRENNER, O. CASTELNAU et A. D. ROLLETT : Orientation image-based micromechanical modelling of subgrain texture evolution in polycrystalline copper. *Acta Mater.*, 56(15) :3914–3926, 2008.
- R. A. LEBENSOHN, A. K. KANJARLA et P. EISENLOHR : An elasto-viscoplastic formulation based on fast fourier transforms for the prediction of micromechanical fields in polycrystalline materials. *Int. J. Plast.*, 32 :59–69, 2012.
- J. LEBLOND : Simulation numérique du soudage–modélisation mathématique des transformations métallurgiques–état d'avancement des travaux. Rap. tech., Technical Report TM/C DC/80.066, Framatome, 1980.
- J. LEBLOND et J. DEVAUX : A new kinetic model for anisothermal metallurgical transformations in steels including effect of austenite grain size. *Acta Metallurgica*, 32(1) :137–146, 1984.
- J.-B. LEBLOND : Mathematical modelling of transformation plasticity in steels ii : coupling with strain hardening phenomena. *International journal of plasticity*, 5(6) :573–591, 1989.
- J.-B. LEBLOND : *Mécanique de la rupture fragile et ductile*. Hermès science publications, 2003.
- J.-B. LEBLOND, J. DEVAUX et J. DEVAUX : Mathematical modelling of transformation plasticity in steels i : case of ideal-plastic phases. *Int. J. Plasticity*, 5(6) :551–572, 1989.
- J.-B. LEBLOND, G. MOTTET et J. DEVAUX : A theoretical and numerical approach to the plastic behaviour of steels during phase transformations. derivation of general relations. *J. Mech. Phys. Solids*, 34(4) :395–409, 1986.
- F. LECROISEY et A. PINEAU : Martensitic transformations induced by plastic deformation in the fe-ni-cr-c system. *Metallurgical and Materials Transactions B*, 3(2) :391–400, 1972.
- B. LEE et M. MEAR : Axisymmetric deformation of power-law solids containing a dilute concentration of aligned spheroidal voids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40(8) :1805–1836, 1992.
- S.-B. LEE, R. LEBENSOHN et A. D. ROLLETT : Modeling the viscoplastic micromechanical response of two-phase materials using fast fourier transforms. *Int. J. Plast.*, 27(5) :707–727, 2011.
- K. MADOU et J.-B. LEBLOND : A Gurson-type criterion for porous ductile solids containing arbitrary ellipsoidal voids I : limit-analysis of some representative cell. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 60 :1020–1036, 2012a.
- K. MADOU et J.-B. LEBLOND : A gurson-type criterion for porous ductile solids containing arbitrary ellipsoidal voids I : Limit-analysis of some representative cell. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 60(5) :1020–1036, 2012b.
- K. MADOU et J.-B. LEBLOND : A gurson-type criterion for porous ductile solids containing arbitrary ellipsoidal voids II : Determination of yield criterion parameters. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 60(5) :1037–1058, 2012c.
- K. MADOU et J.-B. LEBLOND : Numerical studies of porous ductile materials containing arbitrary ellipsoidal voids–i : Yield surfaces of representative cells. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 42 :480–489, 2013.

- K. MADOU, J.-B. LEBLOND et L. MORIN : Numerical studies of porous ductile materials containing arbitrary ellipsoidal voids–ii : Evolution of the length and orientation of the void axes. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 42 :490–507, 2013.
- C. L. MAGEE et H. W. PAXTON : Transformation kinetics, microplasticity and aging of martensite in fe-31 ni. Rap. tech., Carnegie Inst of tech Pittsburgh PA, 1966.
- J. MANDEL : Contribution théorique à l'étude de lécrouissage et des lois de lécoulement plastique. *In Applied Mechanics*, p. 502–509. Springer, 1966.
- E. MARKETZ et F. FISCHER : A micromechanical study on the coupling effect between microplastic deformation and martensitic transformation. *Computational materials science*, 3(2) :307–325, 1994.
- M. MARTINEZ : *Jonction 16mnd5-Inconel 690-316ln par soudage-diffusion : élaboration et calcul des contraintes résiduelles de procédé*. Thèse de doctorat, ENSMP, 1999.
- I. MATHWORKS : *Statistics Toolbox : For Use with Matlab : User's Guide, Version 5*. MathWorks, 2005.
- S. MEFTAH : *Modélisation de la plasticité due à une transformation martensitique dans les aciers*. Thèse de doctorat, Rouen, INSA, 2007.
- J. MICHEL et P. SUQUET : The constitutive law of nonlinear viscous and porous materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40(4) :783–812, 1992.
- W. MITTER : *Umwandlungsplastizität und ihre Berücksichtigung bei der Berechnung von Eigenspannungen*. Schweizerbart Science Publishers, Stuttgart, Germany, 1987.
- K. MIYAO, Z. WANG et T. INOUE : Analysis of temperature, stress and metallic structure in carburized-quenched gear considering transformation plasticity. *J. Soc. Materials Science, Japan*, 35(399) :1352–1357, 1986.
- V. MONCHIET, O. CAZACU, E. CHARKALUK et D. KONDO : Macroscopic yield criteria for plastic anisotropic materials containing spheroidal voids. *International Journal of Plasticity*, 24(7) :1158–1189, 2008.
- V. MONCHIET, E. CHARKALUK et D. KONDO : An improvement of gurson-type models of porous materials by using eshelby-like trial velocity fields. *Comptes Rendus Mecanique*, 335(1) :32–41, 2007.
- V. MONCHIET, E. CHARKALUK et D. KONDO : A micromechanics-based modification of the gurson criterion by using eshelby-like velocity fields. *Eur. J. Mech. A. Solids*, 30(6) :940–949, 2011.
- V. MONCHIET, E. CHARKALUK et D. KONDO : Macroscopic yield criteria for ductile materials containing spheroidal voids : an eshelby-like velocity fields approach. *Mechanics of Materials*, 72 :1–18, 2014.
- L. MORIN, J.-B. LEBLOND et D. KONDO : A gurson-type criterion for plastically anisotropic solids containing arbitrary ellipsoidal voids. *International Journal of Solids and Structures*, 77 :86–101, 2015.
- H. MOULINEC et P. SUQUET : A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 157 (1-2) :69–94, 1998a.
- H. MOULINEC et P. SUQUET : A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 157 (1-2) :69–94, 1998b.
- T. MURA : Micromechanics of defects in solids. vol. 3. *Springer Science & Business Media*, 580 :21, 1987.
- K. NAGAYAMA, Y. KITAJIMA, S. KIGAMI, K. TANAKA, F. D. FISCHER et G. CAILLETAUD : Transformation induced plasticity in maraging steel : an experimental study. *Key Engineering Materials*, 177(pt. 2) :443–448, 2000.

- S. OFFERMAN, N. VAN DIJK, J. SIETSMA, E. LAURIDSEN, L. MARGULIES, S. GRIGULL, H. POULSEN et S. van der ZWAAG : Phase transformations in steel studied by 3dxrd microscopy. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B : Beam Interactions with Materials and Atoms*, 246(1) :194–200, 2006.
- S. OFFERMAN, L. VAN WILDEREN, N. VAN DIJK, J. SIETSMA, M. T. REKVELDT et S. Van der ZWAAG : In-situ study of pearlite nucleation and growth during isothermal austenite decomposition in nearly eutectoid steel. *Acta Materialia*, 51(13) :3927–3938, 2003.
- H. OSWALD, J. ALLEN et B. GOUGH : Sharelatex, the online latex editor, 2015.
- T. OTSUKA : *Modélisation micromécanique de la plasticité de transformation dans les aciers par homogénéisation numérique fondée sur la TFR*. Thèse de doctorat, Paris 13, 2014.
- T. OTSUKA, R. BRENNER et B. BACROIX : Fft-based modelling of transformation plasticity in polycrystalline materials during diffusive phase transformation. *International Journal of Engineering Science*, 127 :92–113, 2018a.
- T. OTSUKA, R. BRENNER et B. BACROIX : Fft-based modelling of transformation plasticity in polycrystalline materials during diffusive phase transformation. *International Journal of Engineering Science*, 127 :92–113, 2018b.
- E. PATOOR, A. EBERHARDT et M. BERVEILLER : Micromechanical modelling of superelasticity in shape memory alloys. *Le Journal de Physique IV*, 6(C1) :C1–277, 1996.
- E. PATOOR, D. C. LAGOUDAS, P. B. ENTCHÉV, L. C. BRINSON et X. GAO : Shape memory alloys, part i : General properties and modeling of single crystals. *Mechanics of materials*, 38(5-6) :391–429, 2006.
- L. PORTER et P. ROSENTHAL : Effect of applied tensile stress on phase transformations in steel. *Acta Metallurgica*, 7(7) :504–514, 1959.
- R. QUEY, F. BARBE, H. HOANG et L. TALEB : Effect of the random spatial distribution of nuclei on the transformation plasticity in diffusively transforming steel. *International Journal of Microstructure and Materials Properties*, 5(4-5) :354–364, 2010.
- R. QUEY, P. DAWSON et F. BARBE : Large-scale 3d random polycrystals for the finite element method : Generation, meshing and remeshing. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200 (17-20) :1729–1745, 2011.
- J. R. RICE et D. M. TRACEY : On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17(3) :201–217, 1969.
- M. D. RINTOUL et S. TORQUATO : Reconstruction of the structure of dispersions. *Journal of colloid and interface science*, 186(2) :467–476, 1997.
- A. L. ROYTBURD : Kurdjumov and his school in martensite of the 20 th century. *Materials Science & Engineering A*, (273-275) :1–10, 1999.
- A. SAUVEUR : Quest-ce que l'acier?(what is steel?). *Trans. AIME*, 70 :3–24, 1924a.
- A. SAUVEUR : What is steel? another answer. *Iron Age*, 113(51.8), 1924b.
- A. SAUVEUR : The current theories of the hardening of steel thirty years later. *TRANSACTIONS OF THE AMERICAN INSTITUTE OF MINING AND METALLURGICAL ENGINEERS*, 73 :859–908, 1926.
- A. SAUVEUR : *The metallography and heat treatment of iron and steel*. , 1938.
- E. SCHEIL et W. THIELE : Aenderungen von mechanischen spannungen bei der austenit-martensitumwandlung. *Archiv für das Eisenhüttenwesen*, 10(10) :477–480, 1937.

- W. SHEN, J.-F. SHAO et D. KONDO : Macroscopic criteria for green type porous materials with spheroidal voids : application to double porous materials. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 41(13) :1453–1473, 2017.
- J. M. S. SIDOROFF : *Contribution à la validation expérimentale de modèles décrivant la ZAT lors d'une opération de soudage*. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 1998.
- A. SIMON, S. DENIS et E. GAUTIER : Effet des sollicitations thermomécaniques sur les transformations de phases dans l'état solide. aspects métallurgique et mécanique. *Le Journal de Physique IV*, 4(C3) :C3–199, 1994.
- P. SUQUET, H. MOULINEC, O. CASTELNAU, M. MONTAGNAT, N. LAHELLEC, E. GRENNERAT, P. DUVAL et R. BRENNER : Multi-scale modeling of the mechanical behavior of polycrystalline ice under transient creep. *Procedia IUTAM*, 3 :76–90, 2012.
- A. TAHIMI : *Plasticité induite par transformations de phases dans les aciers : Expérience vs modélisations*. Thèse de doctorat, INSA de Rouen, 2011.
- A. TAHIMI, F. BARBE, L. TALEB, R. QUEY et A. GUILLET : Evaluation of microstructure-based transformation plasticity models from experiments on 100c6 steel. *Computational materials science*, 52(1) :55–60, 2012.
- L. TALEB et F. SIDOROFF : A micromechanical modeling of the Greenwood–Johnson mechanism in transformation induced plasticity. *Int. J. Plast.*, 19 :1821–1842, 2003a.
- L. TALEB, N. CAVALLO et F. WAECKEL : Experimental analysis of transformation plasticity. *Int. J. Plast.*, 17(1) :1–20, 2001.
- L. TALEB, S. PETIT et J.-F. JULLIEN : Prediction of residual stresses in the heat affected zone. *In J. Phys. IV (Proceedings)*, vol. 120, p. 705–712. EDP sciences, 2004.
- L. TALEB et F. SIDOROFF : A micromechanical modeling of the greenwood–johnson mechanism in transformation induced plasticity. *Int. J. Plast.*, 19(10) :1821–1842, 2003b.
- I. TEAM : Inkscape, 2013.
- S. TURTELTAUB et A. SUIKER : Transformation-induced plasticity in ferrous alloys. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 53(8) :1747–1788, 2005.
- S. TURTELTAUB et A. SUIKER : A multiscale thermomechanical model for cubic to tetragonal martensitic phase transformations. *International Journal of Solids and Structures*, 43(14–15) :4509–4545, 2006.
- V. TVERGAARD : Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions. *International Journal of fracture*, 17(4) :389–407, 1981.
- V. TVERGAARD : Material failure by void growth to coalescence. *Advances in applied Mechanics*, 27 :83–151, 1989.
- V. TVERGAARD et A. NEEDLEMAN : Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta metallurgica*, 32(1) :157–169, 1984.
- J.-C. VIDEAU, G. CAILLETAUD et A. PINEAU : Experimental study of the transformation-induced plasticity in a cr-ni-mo-al-ti steel. *Le Journal de Physique IV*, 6(C1) :C1–465, 1996.
- P.-G. VINCENT, P. SUQUET, Y. MONERIE et H. MOULINEC : Effective flow surface of porous materials with two populations of voids under internal pressure : Ii. full-field simulations. *International Journal of Plasticity*, 56 :74–98, 2014.
- Y. VINCENT, J.-M. BERGHEAU et J.-B. LEBLOND : Viscoplastic behaviour of steels during phase transformations. *Comptes Rendus Mécanique*, 331(9) :587–594, 2003.

- S. WANSER : *Simulation des phénomènes de chauffage par induction. Application à la trempe superficielle.* Thèse de doctorat, 1995.
- G. WASSERMANN : Untersuchungen an einer eisen-nickel-legierung über die verformbarkeit während der  $\gamma$ - $\alpha$ -umwandlung. *Archiv für das Eisenhüttenwesen*, 10(7) :321–325, 1937.
- M. WATANABE et C. WAYMAN : Crystallography of the martensite transformation in fe- al- c alloys. *Metallurgical and Materials Transactions B*, 2(8) :2229–2236, 1971.
- D. WEISZ-PATRAULT : Multiphase model for transformation induced plasticity. extended leblonds model. *J. Mech. Phys. Solids*, 106 :152–175, 2017.
- J. WILLIS : On methods for bounding the overall properties of nonlinear composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39(1) :73–86, 1991.
- S. L. WONG, M. MADIVALA, U. PRAHL, F. ROTERS et D. RAABE : A crystal plasticity model for twinning-and transformation-induced plasticity. *Acta Materialia*, 118 :140–151, 2016.

