



**HAL**  
open science

# Les corrélations Breakdowns et les mesures de risque

Fatimetou Khabane

► **To cite this version:**

Fatimetou Khabane. Les corrélations Breakdowns et les mesures de risque. Economies et finances. Normandie Université, 2021. Français. NNT : 2021NORMLH11 . tel-03718679

**HAL Id: tel-03718679**

**<https://theses.hal.science/tel-03718679v1>**

Submitted on 9 Jul 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Normandie Université

## THÈSE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité Sciences économiques  
(Économétrie, Statistiques Appliquée et Finance)

Préparée au sein de Université Le Havre Normandie

### Les Correlations Breakdowns et les Mesures de Risque

Présentée et soutenue par  
Fatimetou KHABANE

Thèse soutenue publiquement le 08 juillet 2021  
devant le jury composé de

Madame Sandrine LARDIC	Professeur des universités – Université Le Havre	Directrice de thèse
Monsieur Mohammed AIT OUDRA	Professeur des universités – Université de Fès	Rapporteur
Monsieur Assane SOUMARÉ	Professeur des universités – Université des Sciences Technologies (USTM) de Nouakchott	Rapporteur
Monsieur Abderrazak EL HIRI	Professeur des Universités – Université Dar El Mehras Fès	Examineur

Thèse dirigée par Sandrine LARDIC, Université Le Havre Normandie, laboratoire EDEHN

Logo Etablissement



Logo Ecole Doctorale



Logo laboratoire





---

## Dédicaces

A ma mère et mon père.

Je vous rends hommage par ce modeste travail en guise de ma reconnaissance éternelle et de mon amour infini

Merci de m'avoir supportée et de m'avoir permise de me lever motivée, le cœur léger et l'esprit tranquille depuis le début de ma thèse. Très humblement, je voudrais vous dire merci pour votre soutien pendant mes périodes de doutes et pour vos encouragements répétés. Vous avez su mettre en musique les paroles de ma composition scientifique.

A mes frères et sœurs.

A tous ceux et celles que j'aime et qui me sont chers.

A tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

A tous ceux que je ne nomme pas, mais qui se reconnaîtront ce travail est dû en grande partie à vous! Qu'il soit pour vous le témoignage de toute ma reconnaissance pour ces années de compréhension, de privations et d'efforts communs.

Merci



---

## Remerciements

J'adresse en premier lieu ma reconnaissance à notre DIEU tout puissant, de m'avoir permis d'en arriver là, car sans lui rien n'est possible.

Il m'est offert ici, par ces quelques lignes, l'opportunité de remercier toutes les personnes qui ont contribué à la réussite de ce travail.

Je pense naturellement à ma directrice de thèse, je tiens à remercier vivement et à exprimer ma gratitude à Pr : Sandrine LARDIC, pour son encadrement, ses conseils prodigués, son soutien, ses compétences, ses qualités humaines et sa disponibilité tout au long de la réalisation de ce travail. Qu'il trouve ici le témoignage de mon admiration la plus profonde et de mon estime la plus grande. Les connaissances et le savoir-faire qu'elle m'a apportés sont et resteront précieux pour moi. C'est une femme d'une richesse exceptionnelle, d'une grande simplicité et d'un regard toujours constructif.

Je souhaiterais aussi remercier tout le corps professoral du Laboratoire EDEHN de m'accueillir parmi vous au sein de Université du Havre Normandie

Je ne saurais terminer sans remercier tous les membres du jury : AIT OUDRA Mohamed ; SOUMARÉ Assane et EL HIRI Abderrazak d'avoir accepté de participer à l'évaluation de ce travail.

Je remercie très chaleureusement mon mari Mohamed HEMMIDY, pour son soutien et d'être toujours là pour m'encourager.

Je souhaiterais aussi remercier chaleureusement mon oncle le Pr : Ahmedou HAUBA pour m'encourager et me motiver.

Je pense aussi naturellement à tous les amis, qui m'ont permis de penser à autre chose que ma thèse, à certains moments : Jaumane, Jérémy, pierre, Med Ali, Louis, Nadiya, Hamdi et Youssef, sans oublier Mariem AMAR je te remercie beaucoup et tous mes ami(e)s pour leurs soutiens indéfectibles et toutes les personnes qui, de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ce modeste travail et plus généralement à ma formation.

Mes dernières pensées vont à ma famille qui a toujours été présente et qui m'accompagne toujours dans tous mes projets. Merci à vous tous pour votre soutien, vos encouragements, votre confiance !

Bien-sûr tout cela n'aurait pu exister sans ma Mère Mariem Mint MOHAMED MOKHTAR, ni mon Père Mohamedou KHABANE, ainsi que mes Frères et Sœurs. Je n'ai jamais eu besoin de m'expliquer pour qu'ils devinent ce que je pense, ce qui a énormément facilité les choses, je les remercie pour leur soutien inestimable.

Une mention spéciale pour mon fils Hademine Hemmidy qui illumine mes journées et qui a toujours su trouver les mots pour me faire rire et me motiver à le finir et partir en vacances avec lui.



# Table des matières

Remerciements . . . . .	5
Résumé . . . . .	11
Introduction Générale . . . . .	13
<b>1 Le rôle de la corrélation dans le cadre de la composition de portefeuilles</b>	<b>17</b>
1.1 Introduction . . . . .	17
1.2 La corrélation : Définition et indicateurs alternatifs . . . . .	19
1.2.1 Le coefficient de corrélation linéaire . . . . .	20
1.2.2 Le rendement et la variance d'un portefeuille . . . . .	29
1.2.3 La volatilité . . . . .	33
1.3 Le rôle de la corrélation en finance de marché . . . . .	34
1.3.1 Risque de marché . . . . .	36
1.3.2 Value at Risk . . . . .	41
1.4 Stress testing . . . . .	59
1.4.1 Les approches du stress testing . . . . .	59
1.4.2 Recherche de scénarios spécifiques aux cas les plus défavorables du portefeuille . . . . .	62
1.5 Conclusion . . . . .	63
<b>2 Comment prendre en compte les ruptures de corrélation dans les modèles de risque</b>	<b>65</b>
2.1 Introduction . . . . .	65
2.2 Évidences empiriques et corrélations breakdowns : Modèles ARCH . . . . .	67
2.3 Corrélations Breakdowns et Value at risk (VaR) . . . . .	71
2.4 Les corrélations breakdowns dans autres modèles de résolutions . . . . .	75
2.5 Conclusion . . . . .	90
<b>3 Prise en compte du phénomène de corrélation Breakdown dans les modèles ARCH</b>	<b>93</b>
3.1 Modélisation dynamique de la matrice de variance-covariances du modèle GARCH	101
3.1.1 Les modèles à volatilité conditionnelle hétéroscédastique ARCH . . . . .	101
3.1.2 Modèles ARCH généralisés (GARCH) . . . . .	103
3.1.3 Modèles GARCH multivariés . . . . .	104
3.1.4 Modèle à corrélation dynamiques . . . . .	108
3.2 Estimation du Modèle DCC . . . . .	115

## TABLE DES MATIÈRES

---

3.2.1	Présentation du modèle . . . . .	115
3.2.2	Bases de données . . . . .	116
3.2.3	Estimation du modèle GARCH univarié (première étape du modèle) . . .	117
3.2.4	Estimation des paramètres de la corrélations conditionnelles dynamiques DCC-GARCH(1,1) . . . . .	118
3.3	Conclusion . . . . .	126
<b>4</b>	<b>Les anticipations des ruptures de Corrélacion, Corrélacion Breakdown en gestion de portefeuille</b> . . . . .	<b>127</b>
4.1	Peut-on anticiper une rupture de corrélacion ? . . . . .	128
4.1.1	Prévision . . . . .	128
4.1.2	Un modèle empirique pour l'actif à faible risque . . . . .	130
4.1.3	Dynamique de transition . . . . .	132
4.1.4	Le modèle généralisation . . . . .	136
4.2	L'effet de la rupture de corrélacion dans un modèle de gestion de portefeuille . .	153
4.2.1	La rentabilité de la base de données chimie et santé – Couple 1 : [NVS- PFIZER] – Portefeuille 1 . . . . .	153
4.2.2	La rentabilité de la base de données chimie et santé – Couple 2 : [SANOFI- MERCK] – Portefeuille 2 . . . . .	155
4.2.3	La rentabilité base de données CAC40 – Couple 3 : [SANOFI-MERCK] et Couple 4 [LVMH-MICHELIN] – Portefeuille 3 . . . . .	157
4.3	Conclusion . . . . .	158
4.4	Impact des anticipations des investisseurs d'une rupture de corrélacions dans le portefeuille optimal . . . . .	159
4.5	Modèle mathématique . . . . .	160
4.5.1	Le concept de choix de portefeuille optimal : . . . . .	160
4.5.2	Données du problème . . . . .	160
4.5.3	Variables de décision . . . . .	160
4.5.4	L'objectif : . . . . .	160
4.5.5	Contraintes : . . . . .	161
4.6	Étude de la fonction objectif . . . . .	161
4.6.1	La forme générale du problème . . . . .	162
4.6.2	La problématique . . . . .	163
4.7	Méthode de Newton pour la résolution du ratio Sharpe ( $S_p$ ) . . . . .	163
4.7.1	Le Système Karush-Kuhn-Tucker KKT . . . . .	167
4.7.2	La résolution par la méthode du pivot de Gauss . . . . .	171
4.7.3	Implémentation de la méthode de Newton avec le logiciel Matlab . . . . .	176
4.7.4	Comparer les resultats de la portefeuille efficient dans les deux période stress et normale . . . . .	182
4.8	Conclusion . . . . .	183
	Conclusion Générale et Perspectives . . . . .	185
	<b>Table des annexes</b> . . . . .	<b>201</b>
.1	Modèles ARCH et Corrélacion Breakdown . . . . .	203
.1.1	Le phénomène de corrélacion breakdowns dans les modèles ARCH . . . . .	203
.1.2	Statistiques descriptives des séries . . . . .	204

.1.3	Les paramètres du modèle dynamiques de corrélation conditionnelle (DCC) GARCH . . . . .	204
.1.4	Estimation DCC-GARCH . . . . .	205
.2	Corrélation Breakdown dans le Portefeuille Optimal . . . . .	212
.2.1	Méthode de Newton . . . . .	212
.2.2	Écriture matricielle de la fonction objectif Ratio Sharpe . . . . .	212
.2.3	La dérivée première de Ratio Sharpe . . . . .	213
.2.4	La dérivée seconde Ratio Sharpe . . . . .	214
.3	Anticipation d'une rupture de corrélation . . . . .	215
.3.1	Tableau des resultats de la minimisation du risque du portefeuille . . . . .	215
.3.2	Les données utiliser : La Base CAC40 et la Base Chimie et pharmacie (Santé) . . . . .	215
.4	Portefeuilles efficient en Période Breakdowns et Période de Stabilité . . . . .	220



---

## Résumé

Cette thèse présente quelques contributions à la modélisation des séries temporelles, notamment dans le développement de modèles de gestion de portefeuille. Nos travaux mettent en évidence le phénomène de Corrélation Breakdowns. Ce phénomène se matérialise par une convergence soudaine de la corrélation entre les rendements des actifs. En particulier, cet effet apparaît pendant les périodes de crises financières, mais parfois aussi au cours de périodes d'euphorie des marchés financiers.

Afin de mesurer et de gérer les risques de marché, les analystes financiers tiennent compte de la variabilité et de la corrélation des rendements des actifs détenus dans leurs portefeuilles. L'une des difficultés qu'ils rencontrent pour ce faire, est qu'en période de volatilité accrue des marchés, les corrélations entre les rendements des actifs peuvent différer sensiblement de celles observées sur les marchés plus calmes. Le problème de la "Corrélation Breakdown " pendant les périodes de plus grande volatilité est bien connu.

Dans un premier temps, nous nous sommes penchées sur la modélisation de la volatilité variant dans le temps et des corrélations conditionnelles des séries temporelles multivariées. Nous avons réalisé la modélisation de la volatilité variable dans le temps des séries chronologiques univariées en utilisant des GARCH multivariés (volatilité stochastique), dans le but de proposer un moyen de mesurer les périodes des chutes hétérogènes de la dynamique de la matrice de covariance du modèle GARCH. Le modèle ARCH peut nous donner des corrélations plus stables en négligeant l'hétéroscédasticité. L'ensemble des résultats est basé sur la procédure d'estimation du Maximum de Vraisemblance mis en œuvre sur des données réelles du CAC40, des secteurs de la chimie et de la pharmacie. Dans un second temps, nous nous sommes interrogées sur les stratégies d'anticipation d'un changement de corrélation. Nous avons donc réalisé un problème d'optimisation qui consiste à trouver des solutions en respectant des contraintes qui maximisent le rendement d'un portefeuille et minimisent le risque. En outre, nous nous sommes intéressées à l'impact des anticipations d'une rupture de corrélation dans un portefeuille optimal en maximisant le ratio Sharpe.

**Mots-clés :** Économétrie Des Corrélations Breakdowns, Optimisation Quadratique Convexe, Les Série Temporelle : Les Modèle ARCH GARCH, Les Modèle à Corrélation Dynamiques Conditionnelles (DCC), Diversification des Portefeuilles optimaux.



---

## Introduction Générale

Nos travaux mettent en évidence le phénomène de corrélation Breakdowns. Ce phénomène se matérialise par une convergence soudaine de la corrélation entre les rendements des actifs. En particulier, cet effet apparaît pendant les périodes de crises financières, mais parfois aussi au cours de périodes d'euphorie des marchés financiers. Ce phénomène a pour conséquence de réduire l'effet de diversification des portefeuilles, justement au moment où l'on en a le plus besoin. En outre, la connaissance de ruptures de corrélations entre les actifs est fondamentale pour les autorités du fait de ses implications pour la stabilité des marchés financiers.

Les corrélations Breakdowns sont ainsi des convergences imprévues ou encore soudaines de la corrélation entre les rendements des actifs. Nous pouvons aussi dire que c'est un changement imprévu dans les corrélations de la structure des actifs financiers.

L'effet Breakdown apparaît le plus souvent durant les périodes de crises financières. Cependant, il a été prouvé que cet effet peut également subsister en période d'euphorie du marché. Pour les investisseurs qui cherchent des protections contre le risque via la diversification de leurs portefeuilles, il s'agit alors de déterminer l'importance de la Corrélation Breakdown et d'analyser l'effet introduit sur le marché, afin de maximiser leurs gains en minimisant le risque qu'ils encourent.

En effet, nous savons que le risque d'un portefeuille peut être mesuré par la variance de sa rentabilité selon Markowitz (1952)[143], et que les investisseurs préfèrent bien entendu un rendement supérieur qu'un rendement faible pour un niveau de risque donné.

Les autorités monétaires sont également attentives au lien entre volatilité et corrélation. De toute évidence, la Corrélation Breakdowns pendant les périodes de turbulences sur les marchés financiers pourrait conduire les décideurs à réévaluer la position de la politique au regard du changement apparent dans les corrélations. Pour pouvoir parler de la Corrélation Breakdowns, on doit d'abord définir le risque et le procédé par lequel on le mesure sur le marché financier. Par ailleurs, il est aussi important de déterminer pourquoi la value-at-risk (VaR) est une notion utilisée généralement pour mesurer le risque de marché d'un portefeuille.

L'objectif de notre travail de recherche est de construire un modèle, permettant de minimiser les risques en période de crise financière. Pour ce faire, notre modèle doit prendre en compte les ruptures de corrélations (Corrélation Breakdown) entre les actifs financiers afin de minimiser les coûts et maximiser les gains des investisseurs. Le modèle doit permettre à terme de réduire l'effet sur la diversification des portefeuilles, à partir des modèles à changement de régime, et ainsi de déterminer le rôle des anticipations de ruptures de corrélations sur la dynamique du marché.

Les chercheurs se sont intéressés à la structure des corrélations. Bertero, Mayer (1987)[16], King et Wadhwani, (1990)[125], ont montré notamment qu'il y a eu une augmentation de la corrélation des rendements des actions au moment du crash boursier de 1987.

En examinant les liens entre les marchés boursiers internationaux grâce à la mise en place d'un modèle GARCH multivarié, King et Wadhwani (1990)[125], ont par ailleurs conclu que la prise en considération des variables économiques ne permet pas d'expliquer la variation des

corrélations, et que ces variables sont incapables de faire ressortir des preuves de leur causalité à la suite d'une augmentation de la corrélation.

Calvo et Reinhart (1997)[51], ont apporté des preuves des changements de corrélations associés à la crise mexicaine de 1994. En outre, Baig et Goldfajn (1999)[17], ont trouvé une augmentation de corrélations sur plusieurs marchés et devises asiatiques pendant la crise est-asiatique de 1997. Falbo et Grassi (2011)[77] ont montré que le modèle d'évaluation est cohérent en ce qui concerne l'hypothèse selon laquelle des agents rationnels (un agent rationnel est un agent qui agit d'une manière lui permettant d'obtenir le plus de succès possible dans la réalisation des tâches qu'on lui a assignées), modifient correctement leurs estimations de la variance et de la covariance des rendements des actifs, anticipant la demande excédentaire du marché.

Les changements dans les corrélations étudiées, impliquent que la distribution conjointe des rendements des actifs entraîne des modifications dans les périodes de volatilité qui ne peuvent être justifiées. Bien que le comportement des rendements des actifs est régi par un processus inchangé, on pourrait s'attendre à une relation entre la volatilité et les mesures de corrélation. En effet, un modèle d'actif traduit simplement le fait que la normale bi-variée peut expliquer pourquoi les périodes d'augmentation de la volatilité seront également associées à des périodes relativement élevées de corrélations. La pertinence et l'implication majeure de ce résultat dans les domaines de l'économie et des finances n'a pour autant pas été étudiée récemment (Ronn (1995)[164], Boyer, Gibson et Loretan (1999)[15], Forbes et Rigobon (1999)[78]).

Ainsi nous démontrons ici qu'une partie importante des changements dans les corrélations au fil du temps - y compris celles qui ont eu lieu à l'automne 1998 – peut ne refléter rien de plus que l'effet prévisible des différences de volatilités dans l'échantillon sur les corrélations évaluées, plutôt que des ruptures dans le processus de génération de données pour les rendements des actifs.

**L'objectif de cette thèse est d'étudier l'impact sur les marchés financiers des Corrélations Breakdowns, ainsi que les possibilités de modélisation et d'anticipation de ces phénomènes.**

Par ailleurs, nous examinerons les implications entre les mesures de volatilité et la corrélation des risques dans le but de déterminer une stratégie pour gérer les Corrélations Breakdowns dans les portefeuilles d'actifs financiers. Nous analyserons aussi le fait que l'augmentation de la volatilité des rendements matérialise la même chose que l'augmentation des corrélations, afin de déterminer les résultats de la Corrélation Breakdown entre deux actifs pour analyser l'effet introduit dans un marché financier. Enfin, nous étudierons un modèle qui mettra en évidence l'influence directe sur la variance et la Corrélation Breakdown des rendements des actifs.

Notre travail de thèse se compose au final de quatre chapitres :

**Dans le Premier Chapitre** nous nous intéressons dans un premier temps plus précisément à la définition et aux limites du coefficient de corrélation. Nous observons en particulier que ce

---

coefficient ne constitue qu'une mesure incomplète de la liaison entre des variables. Nous étudions d'autres mesures possibles : Campa et Chang (1998) ont par exemple suggéré l'utilisation de la corrélation implicite plutôt que de la corrélation historique. Dans un deuxième temps, nous réalisons une synthèse de la littérature sur le rôle de la corrélation dans le cadre de la composition de portefeuilles. La notion de corrélation est au cœur de l'estimation des modèles de risques. Nous introduisons alors la notion de rupture de corrélation. Les travaux empiriques sur le sujet montrent que la corrélation entre les actifs est au cœur de la gestion de portefeuille.

**Dans le Deuxième Chapitre**, nous effectuons une synthèse de la littérature afin de déterminer comment prendre en compte les ruptures de corrélation dans les modèles de risque. Les corrélations sont des intrants essentiels pour bon nombre des tâches courantes de la gestion financière. Les couvertures nécessitent des estimations de la corrélation entre les rendements des actifs de la couverture. Si les corrélations et les volatilités changent, le ratio de couverture doit alors être ajusté pour prendre en compte les informations les plus récentes. De même, les produits structurés tels que les options arc-en-ciel conçues avec plusieurs actifs sous-jacents ont des prix sensibles à la corrélation entre les rendements sous-jacents.

Une prévision des corrélations et des volatilités futures constitue la base de toute formule de tarification. L'allocation d'actifs et l'évaluation des risques reposent également sur des corrélations, mais dans ce cas, un grand nombre de corrélations est souvent requis. La construction d'un portefeuille optimal avec un ensemble de contraintes nécessite une prévision de la matrice de covariance des rendements. De même, le calcul de l'écart-type du portefeuille actuel nécessite une matrice de covariance de tous les actifs du portefeuille. Ces fonctions impliquent l'estimation et la prévision de grandes matrices de covariance, potentiellement avec des milliers d'actifs. (Robert Engle July 1999).

La littérature a considéré deux ensembles de modèles de risques, selon que la situation est considérée comme «normale» ou «critique». Les modèles à changement de régime de Markov, avec une matrice de corrélation différente selon le régime, ont été retenus dans la littérature (Angand Bekaert (1999), Chesnay et Jondeau (2001)). Nous cherchons également à explorer d'autres spécifications (modèles MVGARCH par exemple).

**Dans le Troisième Chapitre**, nous nous intéressons à la prise en compte du phénomène ARCH dans les modèles de corrélations breakdowns (, Kaplanis (1988), Bertero et Mayer (1989), King et Wadwhani (1990), Lee et Kim (1993), Bektros et A. Georgoutsos, EUI Working Paper MWP 2009/18, Jin X. et J.M.Maheu (2014)). Il existe très peu de littérature sur le sujet, mais en général, les auteurs supposent que la dynamique de la volatilité est régie par une spécification de type MGARCH. L'objectif de ce chapitre est de proposer un moyen de prendre en compte les périodes de chutes hétérogènes de la dynamique de la matrice de covariance du modèle GARCH.

**Dans le Quatrième chapitre**, cœur de notre travail de thèse, nous abordons le sujet des ruptures de corrélation d'un point de vue quelque peu différents au travers de la prise en compte des anticipations de ruptures de corrélation. Deux approches sont retenues.

Dans un premier temps, nous nous interrogeons sur les stratégies d'anticipation d'un changement de corrélation et l'effet de la rupture de corrélation dans un modèle de gestion de portefeuille. L'optimisation joue un rôle très important dans plusieurs domaines d'application

en finance : les investisseurs dans le secteur financier cherchent à minimiser le risque qui s'accroît avec le rendement espéré. Nous proposons un modèle qui possède la même structure de Falbo et Grassi (2011), mais avec une méthode de résolution différente qui est un problème de programme mono-objectif. Le modèle est implémenté sur le logiciel CPLEX avec le langage `c++`. Nous avons effectué des simulations sur neuf actifs à fréquence quotidienne du CAC40 de 2000 à 2019, du secteur Chimie et Pharmacie de 2010 à 2019, afin de calculer, pour chaque paire de titres, la corrélation puis de prévoir l'existence ou non d'une rupture de corrélation. On observe que les contraintes du modèle donnent le choix de chaque pondération sur chaque titre donnée. Aussi, si le coefficient de corrélation change, il y aura des évolutions remarquables sur la valeur de l'optimalité, nous précisons si le modèle peut nous donner la date exacte de changement de la corrélation. Le modèle montre une rupture de corrélation lorsque les corrélations se font à la hausse. Et inversement, lorsque l'état est stationnaire, il n'y a pas de rupture de corrélation.

Dans un second temps, nous nous intéressons à l'impact sur le marché des anticipations des investisseurs d'une rupture de corrélation dans le portefeuille optimal. Dans ce cadre, nous appuyons notre analyse sur le modèle développé par Falbo et Grassi (2011, 2015). Ce modèle a pour objectif d'étudier, par le biais de simulations, la dynamique d'un marché financier dans le cas où les agents anticipent une rupture de corrélation entre les actifs. Nous nous sommes intéressée à un modèle qui porte sur l'impact d'une rupture de corrélation sur la dynamique d'un marché financier, afin de déterminer comment anticiper l'apparition d'une chute de corrélation dans un portefeuille optimal. L'objectif de notre travail est de construire un modèle prenant en compte des ruptures de corrélations entre les actifs financiers et permettant de minimiser les risques en période de crise financière. Ainsi, nous avons implémenté à l'aide du logiciel MATLAB ce modèle mathématique. Nous avons réalisé des tests et des simulations montrant que lorsque la corrélation augmente, le point d'optimalité diminue (on associe à chaque niveau de risque, la rentabilité espérée la plus élevée). Ainsi, étant donné le rendement d'un actif, il devient facile de déterminer le point de tangence du Ratio Sharpe pour obtenir le portefeuille le plus efficient sur la base du rendement sans risque. La méthode de Newton, selon laquelle le portefeuille à risque optimal est le portefeuille représentatif du marché dans son ensemble, nous fournit une solution optimale rapidement.

# Le rôle de la corrélation dans le cadre de la composition de portefeuilles

## 1.1 Introduction

Le problème de chaque investisseur est de chercher le portefeuille maximisant son gain. La gestion du risque est une procédure qui vise à connaître et à maîtriser le risque inhérent à l'activité d'une entreprise.

Les crises boursières sont anciennes, la considération du risque sur les marchés financiers et sa modélisation, sa mesure et sa gestion sont pourtant plus récents. Les crises des années 90 pourraient expliquer le besoin qui s'est fait ressentir à ce moment de s'intéresser plus rigoureusement au risque avec notamment la mise en place du Comité de Bâle permettant de réguler les activités des institutions financières. La corrélation entre les rendements est une mesure de la force de relation entre deux actifs. L'évolution des rendements des actifs financiers est caractérisée par une corrélation entre les actifs et la covariance entre les actifs est donc non-nulle.

Un gestionnaire de risque a comme objectif de connaître et gérer un risque futur. Aujourd'hui, la gestion des risques est une activité incontournable des entreprises et particulièrement dans le domaine bancaire et des institutions financières. C'est la raison pour laquelle ces procédures de gestion de risques se doivent être parfaitement maîtrisées. Des organismes internationaux et nationaux ont pour but de surveiller et de contrôler la gestion du risque au sein des établissements bancaires. Plusieurs crises financières montrent encore que cette gestion des risques n'est pas toujours parfaite maîtrisée. Les marchés financiers se complexifient davantage et la gestion des risques doit suivre la cadence.

L'une des problématiques majeures en gestion financière est la détermination du risque financier d'un portefeuille d'actifs. Depuis quelques années, la Value at Risk (VaR) s'est imposée comme l'une des mesures du risque de marché. Le risque de marché représente le risque de perte financière découlant d'une fluctuation de la valeur des instruments financiers.

La question qui intéresse un investisseur est comment peut on gérer les corrélations dans le cadre de la composition de portefeuille en découvrant la relation entre le risque et la corrélation, comment minimiser le risque et en même temps avoir le taux de rentabilité le plus élevé ?

## CHAPITRE 1. LE RÔLE DE LA CORRÉLATION DANS LE CADRE DE LA COMPOSITION DE PORTEFEUILLES

---

Comment calcule-t-on la Valeur à Risque (VaR)? Quel est le problème lorsque la VaR est utilisée pour mesurer le risque? Quelle est le rôle de la VaR dans les mesures des risque de marché?

Dans ce chapitre nous discutons ces questions essentielles pour gérer le risque dans un portefeuille. Ce travail est composé comme suit, la première étape sera consacrée à une présentation de la notion de corrélation et des indicateurs alternatifs sur les marchés financiers. Dans une deuxième étape on s'intéresse au rôle de la de corrélation en finance de marché et à la mesure des risques par l'indicateur de Value-at-Risk (VaR) : définition statistique de la VaR ses méthodes d'estimation ainsi que ses limites.

### 1.2 La corrélation : Définition et indicateurs alternatifs

La corrélation est un lien statistique entre deux variables.

Au sein de la théorie moderne du portefeuille de Markowitz(1952), l'analyse des coefficients de corrélation a une place très importante. Le mot corrélation prend son origine de corrélation en latin lui-même issue de *coherentia* qui signifie cohérence. La corrélation est décrite en statistique comme une relation entre deux ou plusieurs valeurs et par extension, sur les marchés financiers, représente la relation statistique entre les rentabilités de deux actifs. La corrélation est représentée par ce qu'on appelle le coefficient de corrélation. Elle peut être positive ou négative et prendre des valeurs comprises entre 1 parfaitement corrélées, les deux valeurs évoluent exactement de la même façon, et -1 inversement corrélées, les deux valeurs évoluent à l'inverse l'une de l'autre. Les échelles de mesure utilisées doivent au moins être des échelles d'intervalles, mais il existe d'autres coefficients de corrélation pour traiter d'autres types de données.

Entre les deux, une corrélation nulle signifie que les deux valeurs n'ont absolument aucun mouvement, de près ou de loin, en commun. Prenons quelques exemples simples : la corrélation entre le prix des actions et la croissance économique, pour commencer. Ce coefficient de corrélation est plutôt compris entre 0 et 1 et même assez proche de 1... En effet, le prix des actions a tendance à augmenter en phase de croissance économique et a tendance à diminuer lorsque l'environnement économique est moins favorable. Le coefficient de corrélation entre la valeur des obligations et la croissance économique est inférieure à zéro. Parce qu'elles ont tendance à diminuer en valeur à cause de la hausse des taux en période de forte croissance alors que la récession économique provoque généralement une hausse de celles-ci. On notera que la corrélation donne une idée de la tendance mais aucune information sur l'ampleur des mouvements. La corrélation entre deux instruments financiers, mesure le comportement historique d'un instrument financier par rapport à un autre.

Comment s'appuyer sur la corrélation pour diversifier son portefeuille? la corrélation est un indicateur très important à prendre en compte dans la construction d'un portefeuille financier diversifié. Elle permet de comprendre comment ce portefeuille pourrait réagir en cas d'événements, positifs comme négatifs, sur les marchés financiers. En effet, un portefeuille composé de titres très corrélés présenterait une diversification très faible. Ce type de portefeuille est donc susceptible d'être particulièrement fragile dans des contextes où les marchés financiers réagiraient fortement à la baisse à la suite d'un événement, qu'il soit économique, politique ou technique. Il est important de revoir régulièrement dans quelle mesure le portefeuille de titres est suffisamment diversifié. Veiller à composer son portefeuille avec des titres peu corrélés, c'est-à-dire avec des comportements différents les uns des autres, passe donc par la prise en compte des corrélations entre les instruments financiers dans le portefeuille.

Néanmoins, pour une appréhension efficace des éléments influant sur un portefeuille, l'analyse "humaine" reste indispensable. En effet, si la corrélation reflète les effets sur un portefeuille, cette mesure ne reste qu'un chiffre et il ne suffit pas à prouver une causalité. On peut avoir une forte corrélation entre deux actions par exemple sans pour autant que cela ne prouve un lien dans le temps. De plus, les corrélations passées ne présagent pas toujours du futur et donc les corrélations qui ont pu être valables dans le passé peuvent changer. Le jugement humain de ces chiffres reste donc indispensable pour comprendre le sens des relations entre instruments financiers.

## CHAPITRE 1. LE RÔLE DE LA CORRÉLATION DANS LE CADRE DE LA COMPOSITION DE PORTEFEUILLES

---

### 1.2.1 Le coefficient de corrélation linéaire

Définition : Le coefficient de corrélation linéaire est la mesure spécifique qui quantifie la force de la relation linéaire entre deux variables d'une analyse de corrélation. Le coefficient est noté  $r$  dans un rapport de corrélation. On peut procéder par estimation de son allure graphique ou utiliser une formule mathématique. Le coefficient de corrélation aura toujours une valeur qui se situe dans l'intervalle  $[-1, 1]$ .

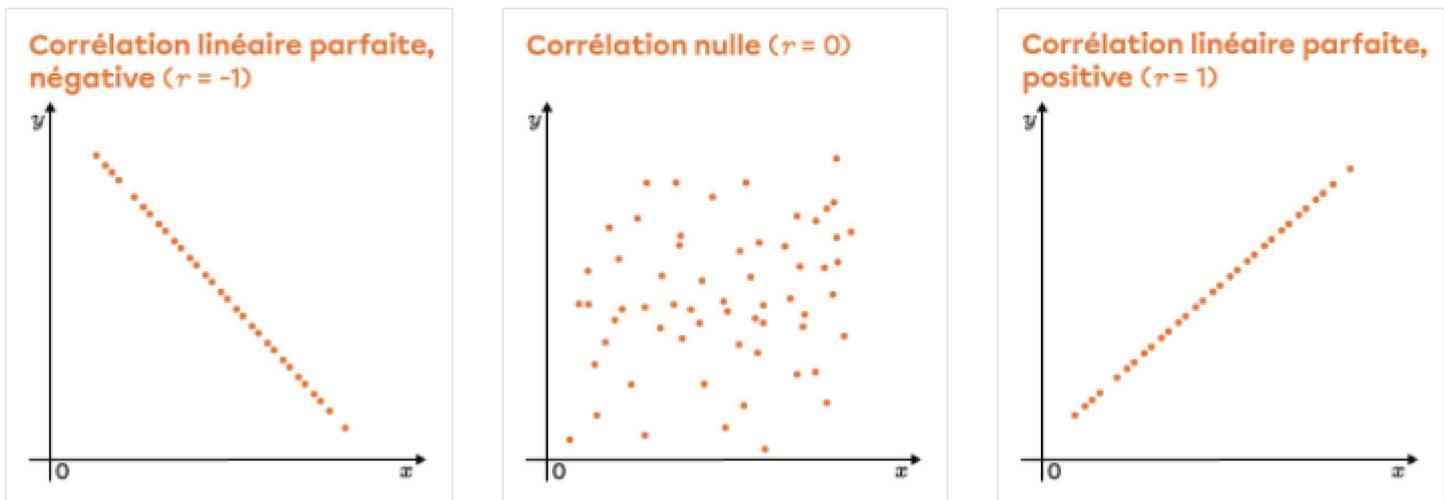


FIGURE 1.1 – Le coefficient de corrélation linéaire

Source : <https://www.alloprof.qc.ca/fr/élèves/bv/mathématiques>

En d'autres mots, plus la valeur du coefficient de corrélation linéaire est près de 1 ou -1, plus le lien linéaire entre les deux variables est fort. À l'inverse, plus sa valeur est près de 0, plus le lien linéaire entre les deux variables est faible.

## 1.2. LA CORRÉLATION : DÉFINITION ET INDICATEURS ALTERNATIFS

### Corrélations linéaires positives

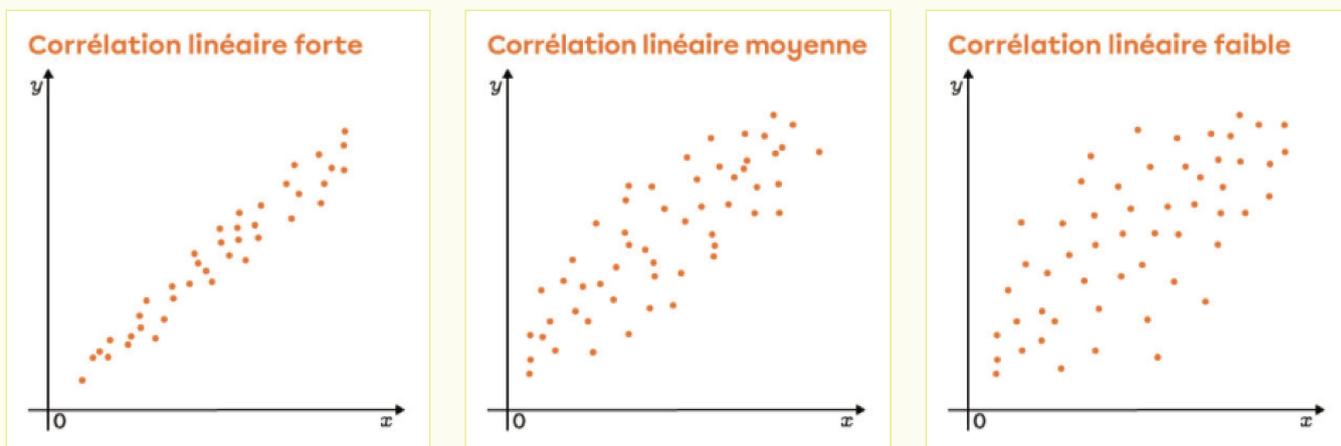


FIGURE 1.2 – La corrélation linéaire positives  
Source : <https://www.alloprof.qc.ca/fr/élèves/bv/mathématiques>

### Corrélations linéaires négatives

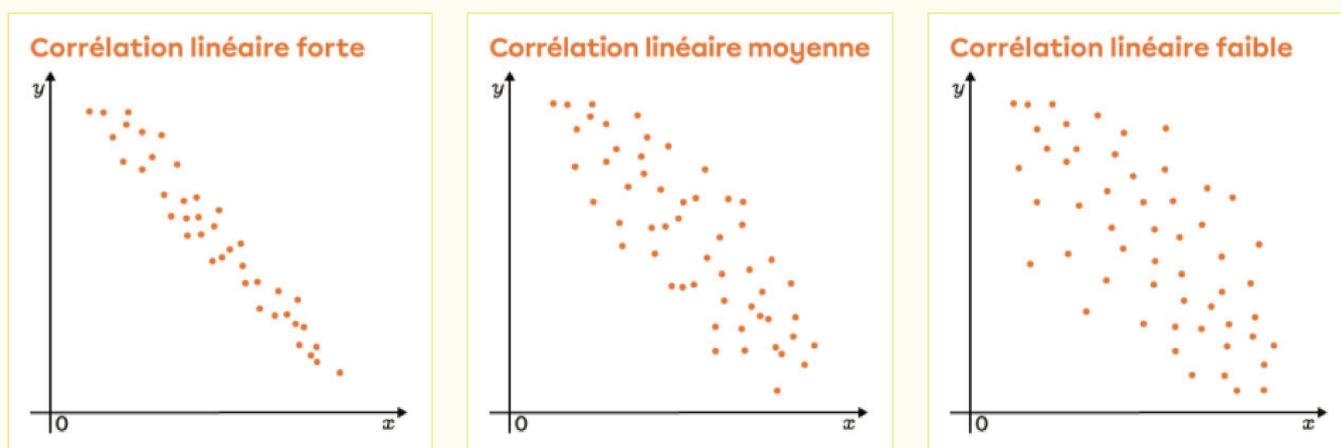


FIGURE 1.3 – La corrélation linéaires négatives  
Source : <https://www.alloprof.qc.ca/fr/élèves/bv/mathématiques>

Selon le qualificatif, on voit que le nuage est de plus en plus dispersé. Par contre, il est toujours possible de noter le sens du nuage (positif ou négatif). Lorsque les points sont tellement dispersés qu'il devient impossible d'en déterminer le sens, c'est souvent que le coefficient de corrélation linéaire est nul.

## CHAPITRE 1. LE RÔLE DE LA CORRÉLATION DANS LE CADRE DE LA COMPOSITION DE PORTEFEUILLES

---

Le calculer de la coefficient de corrélation linéaire  $r$  est le suivants :

$$r = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x - \bar{x})^2} \sqrt{\sum (y - \bar{y})^2}} \quad (1.1)$$

On peut calculer deux indicateurs de corrélations, la corrélation de Pearson et la corrélation de Spearman.

### Coefficient de corrélation de Bravais-Pearson

Le coefficient de corrélation de Bravais-Pearson, ou coefficient de corrélation linéaire, permet de mesure la liaison entre deux variables et donne une mesure de l'intensité et du sens de la relation de ces deux variables. Il est une normalisation de la covariance par le produit des écart-types des variables :

$$\rho = \frac{Cov[X, Y]}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} \quad (1.2)$$

D'où  $Cov(X, Y)$  désigne la covariance entre les variable  $X$  et  $Y$ ,  $\sigma_X$  et  $\sigma_Y$  désignent leur écart type.

La corrélation est estimée par le coefficient de corrélation d'échantillonnage qui est défini par :

$$r_{(x,y)} = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - X)(Y_i - Y)}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - X)^2} \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - Y)^2}} \quad (1.3)$$

Le coefficient de corrélation de Pearson que nous appellerons désormais corrélation implique que les deux variables soient au moins mesurées sur des échelles d'intervalles, et détermine dans quelle mesure les valeurs des deux variables sont proportionnelles les unes aux autres. Le coefficient de corrélation ne dépend pas des unités de mesure utilisées ; par exemple, la corrélation entre la hauteur et la largeur sera identique, que l'on utilise des mesures en pouces et livres ou en centimètres et kilogrammes. Le caractère proportionnel signifie une liaison linéaire ; c'est-à-dire que la corrélation sera forte si les points s'alignent bien sur une droite (de pente positive ou négative).

### Le Coefficient de corrélation de Spearman

La corrélation de Spearman est une méthode symétrique où les deux variables ont le même rôle, il a du mal à caractériser correctement l'association entre les variables, il peut nous donner l'évaluation d'une liaison entre deux variables, mais il évalue seulement un lien monotone. On peut dire que cette méthode est moins spécifique que la régression linéaire simple, puisqu'elle n'évalue pas la linéarité mais juste la monotonie. En résumé la corrélation de Spearman permet seulement de mesurer le degré de la corrélation entre les variables.

Le calcul du coefficient de corrélation de Spearman est basé sur les rangs des observations.

## 1.2. LA CORRÉLATION : DÉFINITION ET INDICATEURS ALTERNATIFS

Il se présente comme suit :

$$\rho_{(X,Y)} = 1 - \left( \frac{6 \sum_{i=1}^N d_i^2}{N(N^2 - 1)} \right) \quad \text{avec} \quad d_i = (r[X_i] - r[Y_i])$$

Où :

$r[X_i]$  : le rang de  $X_i$  dans la distribution  $X_1, \dots, X_N$

$r[Y_i]$  : le rang de  $Y_i$  dans la distribution  $Y_1, \dots, Y_N$

Pour obtenir le coefficient de Spearman on doit classer deux séries de données et calculer les différences de rangs au carré pour trouver la somme de ces différences qui est noté  $\sum d^2$ .

Il existe aussi le coefficient de corrélation de Kendall qui est une autre approche non paramétrique. Il permet d'évaluer la dépendance monotone entre deux variables, il n'est pas basé sur les rangs des observations comme dans la corrélation de Spearman, mais sur les paires concordantes et discordantes. Les deux corrélations sont très similaires dans une majorité de situations.

### La corrélation entre actifs financiers à long terme

Dans son un article "Stock-Bond Correlations", publié en (2003), a montré que la corrélation entre les actions et les obligations est passée de positive à négative. Il a retenu les séries de rendement annuel des actions et des obligations sur longue période depuis (1926). Selon lui, trois périodes se distinguent : année 1930, année 1960 et année 2000.

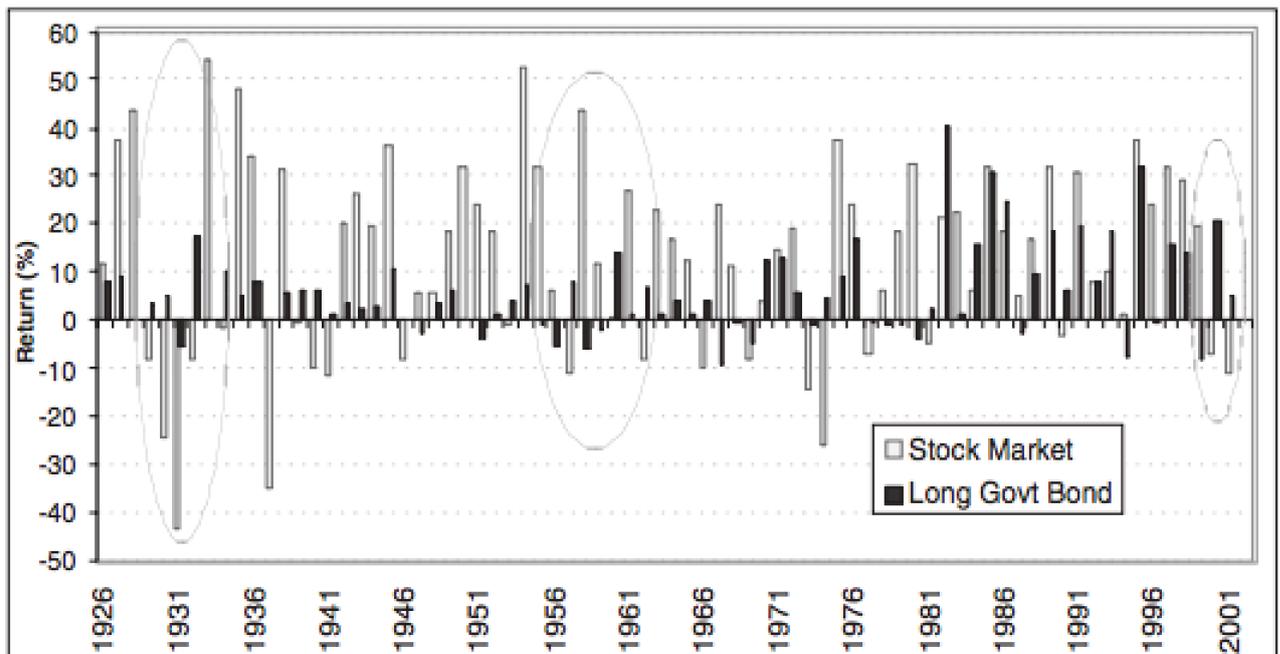


FIGURE 1.4 – Rendements annuels des actions et obligations américaines  
Source : Antti Ilmanen - Ibboston Associates and Schroder Salomon Smith Bamey

## CHAPITRE 1. LE RÔLE DE LA CORRÉLATION DANS LE CADRE DE LA COMPOSITION DE PORTEFEUILLES

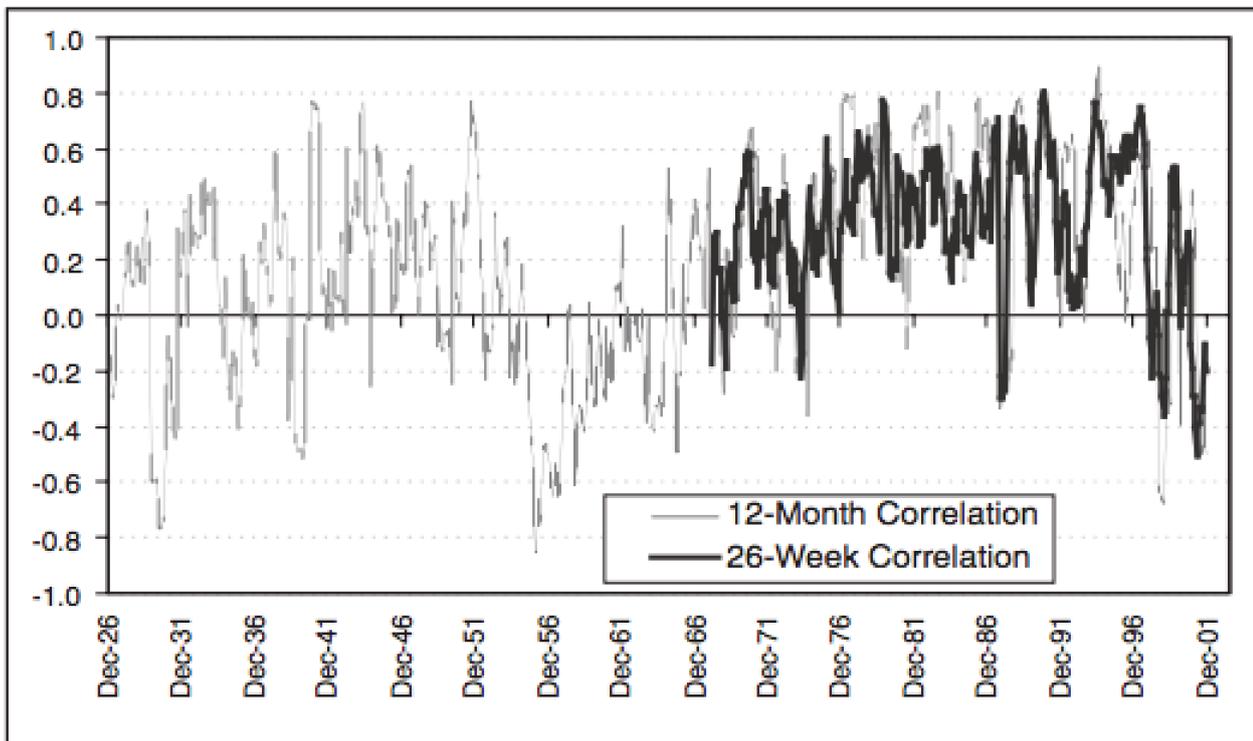


FIGURE 1.5 – Corrélation historique entre les actions et les obligations américaines  
Source : Antti Ilmanen - Ibbotson Associates and Schroder Salomon Smith Barney

La corrélation entre les rendements des marchés boursiers et des obligations d'État était positive pendant la majeure partie des années 1900, mais négative au début des années 30, à la fin des années 50 et récemment. Si la tendance se maintient, le passage à une corrélation négative devrait stimuler les valorisations des obligations d'État en raison des caractéristiques de couverture attrayantes des obligations. Cette exploration des sources de corrélation actions-obligations examine le comportement des classes d'actifs dans différentes conditions économiques. Les chocs de croissance et de volatilité ont tendance à pousser les actions et les obligations dans des directions opposées, tandis que les chocs d'inflation ont tendance à provoquer une variation commune des taux d'actualisation entre les classes d'actifs. Ce dernier effet a dominé dans les niveaux d'inflation variables de 1960–1990 et a maintenu les corrélations actions-obligations positives. Tant que les taux d'inflation restent bas, de faibles corrélations devraient prévaloir.

Il est clair que la relation entre les deux principales classes d'actifs n'a pas été particulièrement stable. La corrélation a eu tendance à être positive, mais a parfois chuté sous zéro pendant de longues périodes. Les trois épisodes de corrélations négatives 1929-1932, 1956-1965 et 1998-2001 coïncident avec le découplage des performances des actions et des obligations.

Selon Antti Ilmanen faut-il s'attendre à ce que la corrélation entre les actions et les obligations soit légèrement positive, il est importante pour les décisions d'allocation d'actifs à long terme, car les corrélations entre les classes d'actifs sont un élément clé de l'optimisation des portefeuilles et des exercices de gestion actif-passif ainsi que pour l'évaluation des dérivés hybrides. En outre, une corrélation négative fait des obligations d'État d'excellentes couvertures contre les risques systémiques majeurs récession, déflation, faiblesse des actions et autres crises des

## 1.2. LA CORRÉLATION : DÉFINITION ET INDICATEURS ALTERNATIFS

marchés financiers et cette caractéristique attrayante peut justifier une prime de risque obligataire exceptionnellement faible, c'est-à-dire une valorisation plus élevée des obligations d'État.

Antti Ilmanen évalué la durabilité de l'inversion de la corrélation, pour étudier les facteurs qui provoquent des co-movements positifs ou négatifs entre les actions et les obligations. Plus précisément, ils ont examiné la sensibilité des marchés boursiers et obligataires au cycle économique, à l'inflation, à la volatilité et aux conditions de la politique monétaire. Les chocs de croissance économique et de volatilité ont tendance à pousser les prix des actions et des obligations dans des directions opposées, et donc à provoquer un découplage. Le niveau d'inflation est également important, car les variations courantes des taux d'actualisation font que les actions et les obligations sont positivement corrélées à des niveaux d'inflation élevés. Lorsque l'inflation est faible, les taux d'actualisation sont plus stables et l'incertitude de la croissance domine, ce qui rend la corrélation entre les actions et les obligations plus faible.

Antti Ilmanen suppose qu'une raison immédiate du changement de signe de corrélation est le changement de direction de la causalité entre les marchés boursiers et obligataires.

Il existe trois situation de corrélation entre deux titres financiers :

1. Si deux titres sont parfaitement corrélés, la diversification n'apporte rien : le risque du portefeuille est simplement la moyenne pondérée du risque des 2 titres.
2. Si deux titres sont parfaitement inversement corrélés, alors la diversification est totale et le risque du portefeuille nul, mais cette situation est rare.
3. Sinon, la corrélation partielle de deux titres permet, si l'on diversifie son portefeuille, soit de réduire le risque pour un niveau de rentabilité donné, soit d'améliorer la rentabilité pour un niveau de risque donné.

Comme nous l'avons déjà dit, le coefficient de corrélation ( $r$ ), représente la relation linéaire entre deux variables. Si le coefficient de corrélation est élevé au carré, la valeur résultante  $r^2$ , le coefficient de détermination représente la part de dispersion commune aux deux variables c'est-à-dire la "force" ou "l'intensité" de la relation. Pour évaluer la corrélation entre des variables, il est important de connaître cette "intensité" ainsi que la significativité de la corrélation.

Le niveau de significativité calculé pour chaque corrélation est une information essentielle quant à la fiabilité de la corrélation étudiée. La significativité d'un coefficient de corrélation évolue avec la taille de l'échantillon. Le test de significativité fait l'hypothèse que la distribution des valeurs des résidus c'est-à-dire les écarts à la droite de régression de la variable dépendante suit la Loi Normale et que la dispersion des valeurs des résidus est identique pour toutes les valeurs de la variable indépendante. Cependant, les simulations de Monte-Carlo ont montré que la violation de ces hypothèses n'était pas dramatique avec une taille d'échantillon relativement élevée. Il est difficile de donner des règles précises sur ces simulations de Monte-Carlo, mais de nombreux chercheurs admettent la règle empirique qu'avec des échantillons de taille supérieure ou égale à 50, des biais sérieux sont peu probables, et si la taille de l'échantillon dépasse 100, vous pouvez ne pas tenir compte de ces hypothèses de normalité. Il faut tout de même prendre garde à l'interprétation d'un coefficient de corrélation.

Si une corrélation est calculée sur un échantillon non homogène, il peut s'agir d'un autre facteur

## CHAPITRE 1. LE RÔLE DE LA CORRÉLATION DANS LE CADRE DE LA COMPOSITION DE PORTEFEUILLES

---

biaisant la valeur de la corrélation. Prenons l'exemple d'un coefficient de corrélation calculé sur des données issues de deux groupes expérimentaux différents, sans que cette structure ne soit connue lors du calcul de la corrélation. Supposons qu'une manipulation expérimentale dans un des groupes ait fait augmenter les valeurs des deux variables corrélées et que les données de chaque groupe forment un "nuage" distinct dans le nuage de points. Dans ce cas, une forte corrélation peut être entièrement due à l'arrangement des deux groupes, sans représenter la "vraie" relation entre les deux variables, qui peut d'ailleurs être nulle comme on pourrait le voir si on regardait chaque groupe séparément.

La relation non-linéaire entre variables est une autre source possible de problèmes par rapport aux corrélations linéaires ( $r$  de Pearson). Comme nous l'avons déjà mentionné, le  $r$  de Pearson mesure la relation linéaire entre deux variables, une corrélation non linéaire augmentera la somme totale des carrés des distances à la droite de régression même si une corrélation existe entre deux variables. C'est la raison pour laquelle il est recommandé de représenter un nuage de points pour évaluer l'importance des corrélations. Peut-on mesurer des relations non linéaires lorsqu'une corrélation est forte mais non linéaire. Il n'y a pas de réponse simple à cette question, parce qu'il n'y a pas d'équivalent simple au  $r$  de Pearson capable de rendre compte de relations non linéaires. Si la courbe est monotone strictement croissante ou décroissante, nous pouvons tenter de transformer une, voire deux variables afin de supprimer la non linéarité, puis recalculer la corrélation. Par exemple, une transformation souvent utilisée dans ce cas est la fonction logarithmique qui permet de "compresser" les valeurs en fin d'intervalle. Une autre possibilité lorsque la relation est monotone, consiste à calculer une corrélation non-paramétrique qui n'est sensible qu'à la structure ordinale des valeurs, et donc, par définition, ignore les non linéarités monotones.

Toutefois, les corrélations non-paramétriques sont souvent moins sensibles et cette méthode ne donne parfois pas de meilleurs résultat. Malheureusement, les deux méthodes les plus précises ne sont pas les plus simples à utiliser et nécessitent de nombreuses expérimentations sur les données. Par conséquent nous pouvons :

1. Essayer d'identifier la fonction spécifique qui décrit au mieux la courbe. L'option Tracé de Fonction Personnalisé présente pour tous les graphiques vous permet d'explorer interactivement divers ajustements. Lorsque la fonction est trouvée, nous pouvons tester la "qualité d'ajustement" aux données en utilisant les options disponibles dans le module Estimation Non-Linéaire.
2. Nous pouvons également tenter de répartir l'une des variables en plusieurs segments de même largeur, puis utiliser cette nouvelle variable comme une variable de classement afin de réaliser une analyse de variance sur les données c'est-à-dire de recodifier la variable.

### La corrélation et le risque

Le coefficient de corrélation peut servir d'indicateur du degré de diversification d'un portefeuille d'investissement. La combinaison des investissements à faible corrélation peut être utile pour gérer les risques du portefeuille. Idéalement, deux actifs inversement corrélés, disposant donc d'un coefficient de corrélation négatif compris entre 0 et  $-1$  réduira la volatilité de l'ensemble du portefeuille d'investissement. La Volatilité et corrélation de bons signaux de crise, au sein

## 1.2. LA CORRÉLATION : DÉFINITION ET INDICATEURS ALTERNATIFS

d'un marché, sont les deux signaux pour calculer les indicateurs de crises. En effet, lorsque les corrélations augmentent et développent des comportements anormaux ou lorsque la volatilité, mesure de l'anxiété des acteurs du marché augmente, alors le risque de déclenchement d'une crise à court ou moyen terme est plus grand. Les signaux de volatilité et de corrélation dans le marché sont étudiés à travers la matrice de covariance, qui contient un mélange de volatilité et de corrélation et la matrice de corrélation qui contient le signal de corrélation pure. Kornprobst (2017), considéré en plus trois versions pondérées de la matrice de corrélation afin d'adopter un point de vue différent en donnant plus de poids dans ces calculs aux actifs présentant une certaine caractéristique.

Les trois pondérations utilisées sont le volume échangé, la capitalisation boursière et le levier financier. En utilisant des données de fréquence journalière, les indicateurs de crises construits sont de deux types. Tout d'abord, il y a ceux qui mesurent la distance à laquelle la distribution expérimentale du spectre tout entier des matrices se trouve par rapport à une distribution de référence qui représente soit un marché calme soit un marché agité. Ces indicateurs reposent sur un mélange de volatilité, de corrélation et du caractère Gaussien ou non des rendements. A notre connaissance, une telle approche en utilisant une fenêtre roulante sur des données journalières réelles, ainsi que l'utilisation de distributions de référence calculées numériquement pour refléter divers aspect d'un marché calme ou agité est une approche nouvelle, qui cependant s'insère bien dans la littérature existante puisque leurs approche utilise la volatilité et la corrélation qui sont les éléments classiques et reconnus par tous les acteurs du marché. Notre second type d'indicateurs calcule une propriété spectrale donnée (rayon spectral, trace et norme de Frobenius) de l'une des matrices que nous étudions. Selon Antoine Kornprobst (2017), les cas, ces indicateurs reposent sur la volatilité seule, la corrélation seule ou une mélange de volatilité et de corrélation. L'idée principale sur laquelle reposent ces indicateurs est que de grandes valeurs propres est un signe d'instabilité dynamique dans le système des actifs.

### Corrélation et causalité

La causalité au sens de Granger (1969), on dira que  $X$  cause  $Y$  si la prévision de  $Y$  fondée sur la connaissance des passes conjoints de  $X$  et de  $Y$  est meilleure que la prévision fondée sur la seule connaissance du passé. Si elle revêt un caractère indéniablement utile dans la construction de son portefeuille d'investissement, il conviendra néanmoins de ne pas considérer la corrélation comme une vérité absolue et universelle. Par définition, le coefficient de corrélation est construit et calculé sur la base d'historiques de cours et est susceptible de changer. Il est ainsi important de connaître l'intervalle de temps à partir duquel il a été calculé.

Certains actifs peuvent avoir une très forte corrélation en période de bulle spéculative sur une thématique donnée et se comporter très différemment en cas de Krach. Lorsque l'indice CAC40 et le cours du pétrole évoluent selon une tendance assez identique, et donc sont positivement corrélés, cela ne signifie en aucun cas qu'un niveau plus élevé de l'indice CAC40 provoquera une hausse du prix du baril. . . Il peut y avoir une troisième variable et certainement beaucoup d'autres qui influencent les deux actifs de manière parallèle mais qui ne prennent pas leur origine l'un de l'autre.

Corrélation et causalité détermine une relation entre deux variables. Cependant, le fait que ces deux variables évoluent ensemble ne signifie pas nécessairement qu'une variable est la cause

## CHAPITRE 1. LE RÔLE DE LA CORRÉLATION DANS LE CADRE DE LA COMPOSITION DE PORTEFEUILLES

---

de l'autre. C'est pourquoi on dit « Cum hoc ergo propter hoc ». Une forte corrélation pourrait indiquer un lien de cause à effet, mais il pourrait y avoir bien d'autres explications :

Cela peut être le fruit du hasard, lorsque les variables semblent être liées, mais qu'il n'existe aucune véritable relation sous-jacente. Il peut y avoir une troisième variable qui rôde et donne une apparence plus forte ou plus faible à la relation qu'elle ne l'est vraiment.

Pour les données observationnelles, les corrélations ne peuvent pas confirmer la causalité. Les corrélations entre variables nous montrent que les données forment un motif : les variables que nous avons évoluent ensemble. Toutefois, les corrélations à elles seules n'indiquent pas si les données évoluent ensemble parce que l'une est la cause de l'autre. Il est possible de trouver une corrélation statistiquement significative et fiable pour deux variables qui ne sont en fait liées par aucun lien de cause à effet. En fait, ce type de corrélation est fréquent ! Souvent, elles sont dues au fait que les deux variables sont associées à une variable causale différente, qui intervient en parallèle des données que nous mesurons.

Si elle revêt un caractère indéniablement utile dans la construction de son portefeuille d'investissement, il conviendra néanmoins de ne pas considérer la corrélation comme une vérité absolue et universelle. Par définition, le coefficient de corrélation est construit et calculé sur la base d'historiques de cours et est susceptible de changer. Il est aussi important de connaître l'intervalle de temps à partir duquel il a été calculé.

Prenons par exemple : nous observons une corrélation positive statistiquement significative entre activité physique et cancer de la peau, ce qui veut dire que les personnes qui ont plus d'activité physique tendent à être les personnes qui font un cancer de la peau. Cette corrélation semble forte et fiable et apparaît dans plusieurs populations de patients. Sans chercher plus loin, vous pourriez conclure que l'activité physique peut, d'une manière ou d'une autre, provoquer le cancer ! D'après ces résultats, nous pourrions même développer une hypothèse plausible : peut-être que le stress dû à l'activité physique prive l'organisme de sa capacité à se protéger des dommages du soleil. Mais imaginez qu'en réalité, cette corrélation existe dans votre ensemble de données parce que les personnes qui vivent dans des régions très ensoleillées toute l'année sont significativement plus actives au quotidien que celles qui vivent dans des régions moins bien loties. Cela apparaît dans leurs données sous la forme d'une activité physique supérieure. Dans le même temps, une exposition accrue au soleil implique un plus grand nombre de cancers de la peau. Les deux variables, activité physique et cancer de la peau, sont affectées par une troisième variable causale, l'exposition au soleil, mais elles ne sont pas liées par un lien de cause à effet. Mais avec des recherches empiriques bien conçues, on peut établir une causalité !

Faire la distinction entre ce qui constitue ou non une preuve de causalité est essentiel à la littérature des données. Dans le monde réel, déterminer la causalité n'est jamais parfait. Toutefois, il existe différentes techniques expérimentales, statistiques et de plan de recherche pour trouver des preuves de relations causales : par exemple, la randomisation, les expérimentations contrôlées et les modèles prédictifs à plusieurs variables. Au-delà des limitations propres aux tests de corrélation par ex., les corrélations ne peuvent pas mesurer des relations trivariées potentiellement causales, il est important de comprendre que les preuves de causalité ne proviennent généralement pas des analyses statistiques individuelles mais plutôt de plans d'expérience minutieux.

## 1.2. LA CORRÉLATION : DÉFINITION ET INDICATEURS ALTERNATIFS

---

Supposons que nous trouvons deux corrélations : l'augmentation des maladies cardiaques est en corrélation avec les régimes alimentaires plus gras (corrélation positive), et l'activité physique accrue est en corrélation avec la baisse des maladies cardiaques (corrélation négative). Deux de ces corrélations sont très marquées, et on les juge fiables. C'est sûrement un indice de causalité.

Dans le cas de données médicales, la corrélation pourrait suggérer un lien de cause à effet sous-jacent, mais sans étude supplémentaire rien n'est sûr. Imaginons qu'après avoir trouvé ces corrélations, nous élaborons une étude biologique qui examine les façons dont l'organisme absorbe les graisses, et leur effet sur le cœur. Peut-être que l'on trouve un mécanisme via lequel une consommation plus élevée de graisses exerce une pression spécifique sur le cœur. On pourrait également regarder de plus près l'activité physique et élaborer une expérimentation randomisée et contrôlée qui montre que l'activité physique inhibe le stockage des graisses, et donc réduit la pression exercée sur le cœur. Tous ces éléments de preuve s'imbriquent pour former une seule et même explication : un régime alimentaire plus gras peut effectivement causer des maladies cardiaques. Et les corrélations initiales sont toujours valables parce que nous avons approfondi la question : régime alimentaire très gras et maladies cardiaques sont liés ! Mais dans cet exemple, il convient de noter que la preuve causale n'a pas été fournie par le test de corrélation en lui-même, qui se contente d'examiner la relation entre des données observationnelles (comme les taux de maladies cardiaques, le régime alimentaire et l'activité physique). Comprendre la causalité n'est pas chose aisée. Dans le monde réel, on n'a jamais accès à toutes les données dont on a besoin pour cartographier chaque relation possible entre les variables. Mais il existe quelques stratégies clés nous permettant d'isoler et d'explorer les mécanismes entre différentes variables.

### 1.2.2 Le rendement et la variance d'un portefeuille

La notion de rendement, en gestion de portefeuilles, est une mesure sur un intervalle de temps donné, de l'appréciation ou la dépréciation relative de la valeur d'un actif de portefeuille d'actifs.

Le modèle de Markowitz (1952) distingue deux hypothèses :

- La première hypothèse est le lien aux actifs financiers, tout investissement est une décision prise dans une situation de risque : le rendement d'un actif financier pour toute période future est par conséquent une variable aléatoire, dont on fait l'hypothèse qu'elle est distribuée selon une loi normale, c'est-à-dire une distribution symétrique stable entièrement définie par deux paramètres, à savoir l'espérance mathématique du rendement et l'écart-type de la distribution de probabilité du rendement.
- La deuxième hypothèse est que les rendements des différents actifs financiers ne fluctuent pas indépendamment les uns des autres : les rendements sont corrélés.

Le rendement est défini comment l'accroissement de la fortune initiale que cherche à maximiser l'investisseur. Le rendement en temps discret est la relation  $r_t = (P_t - P_{t-1}) + C_t$ . Avec  $r_t$  égale

## CHAPITRE 1. LE RÔLE DE LA CORRÉLATION DANS LE CADRE DE LA COMPOSITION DE PORTEFEUILLES

---

au rendement de l'actif financier pour la période  $t$ ,  $P_t$  est le prix de marche au temps  $t$  de actifs financier et  $C_t$  est revenu liquide attache à la détention de l'actif financier durant la période  $t$ .

### Le rendement espéré

La gestion de portefeuille s'appuie sur le concept de rendement ou de taux de rentabilité, qui il mesure l'appréciation relative de valeur d'un portefeuille ou d'un actif financier pendant un intervalle de temps donné. La rentabilité obtenue par un investisseur sur une action ne regroupe non seulement au dividende net (cash-flow) que lui rapport ce titre, mais aussi, a la plus-value éventuelle qu'il y prélevé. De plus le taux de rentabilité comprend le rendement et la plus-value ou la moins-value, tandis que le taux de rendement (cash-flow net rapporté au cours de l'action et la plus-value en capital rapportée au cours d'achat de l'action).

Le rendement est définie comme une variation du prix de l'actif  $i$  entre  $[t - 1, t]$ , il est défini par la relation :  $r_t = P_{i,t} - P_{i,t-1} + C_{i,t}$

D'où  $i = 1, \dots, n$ , ou  $n$  le nombre d'actifs entre la période  $t - 1$  et  $t$ , et  $t = 1, \dots, T$  ou  $T$  le nombre de période.

- $C_{i,t}$ : dividende en cas d'actions.
- $P_{i,t}$ : représente le prix du titre  $i$  a la date  $t$ .
- $P_{i,t-1}$ : représente le prix du titre  $i$  a la date  $t-1$ .

Et le taux de rentabilité est défini comme suit  $r_t = \frac{(P_t - P_{t-1}) + C_t}{P_{t-1}}$  d'où  $r_t$  est le taux de rentabilité pour la période  $t$ .

On définit la rentabilité entre la date  $t$  et la date  $t-1$  est définie par :

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1} - 1} \quad (1.4)$$

et la log-rentabilité, est définie par :

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) \quad (1.5)$$

Si la rentabilité est proche de zéro, alors la rentabilité et la log- rentabilité sont presque équivalentes :  $r_t = \ln(1 + R_t) \sim R_t$ . Le rendement d'un portefeuille  $R_p$  est égal à la moyenne pondérée des rendements des actifs des différents titres  $i$  qui composent ce portefeuille. Les facteurs de pondération  $X_i$  des actifs sont tels que :  $\sum_{i=1}^n X_i = 1$

Le rendement d'un portefeuille est égale à :  $R_p = \sum_{i=1}^n X_i R_i$ , l'espérance du portefeuille est souvent prise comme étant la moyenne arithmétique elle est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} R_p &= E(\sum_{i=1}^n X_i R_i) = \sum_{i=1}^n X_i E(R_i) \\ R_p &= X_1 E(R_1) + \dots + X_n E(R_n) \\ R_p &= X_1 E(R_1) + X_2 E(R_2) + X_3 E(R_3) + \dots + X_n E(R_n) \end{aligned} \quad (1.6)$$

La rentabilité attendue du portefeuille sera égale à la moyenne pondérée des rentabilisés attendues des actions individuelles.

## 1.2. LA CORRÉLATION : DÉFINITION ET INDICATEURS ALTERNATIFS

Le rendement d'un actif : Si le rendement  $R$  d'un actif  $A$  possède une fonction de densité  $F_r$ , nous avons :  $\sigma_i^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (r - \bar{r})^2 f_r(r) dr$ .

Dans le cas discret, nous pouvons également utiliser l'expression :

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r - \bar{r}(t))^2 \quad (1.7)$$

Markowitz a utilisé la variance en raison de ses propriétés statistiques qui permettent d'explicitier la variance  $\sigma_P$  d'un portefeuille à partir des variances individuelles  $\sigma_i$  des  $n$  actifs le composant :

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n \omega_i \omega_j \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j} \quad (1.8)$$

Où  $\rho_{i,j}$ <sup>1</sup> est le coefficient de corrélation entre les rendements des actifs  $A_i$  et  $A_j$ . Ce modèle a fait l'objet de deux principales critiques, du fait de deux hypothèses fortes :

- Les rendements des actifs boursiers sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi normale (hypothèse utilisée pour exprimer la variance d'un portefeuille) ;
- La prise en compte de manière identique des variations positives et négatives des rendements autour de leur moyenne.

### La variance d'un portefeuille

D'après le modèle de Markowitz le risque du portefeuille est calculé en fonction de sa volatilité, où la volatilité est définie comme la variance des rentabilités. La variance globale du portefeuille est inférieure à la somme des variances parce que tous les actifs ne varient pas de la même façon, c.-à-d. il y a toujours des hausses pour compenser des baisses c'est pour cela que les indices boursier est forcément moins volatil que la plupart des actions qui le composent. Elle est la somme des produits des poids  $X_i$  de chaque couple d'actifs pour leur covariance  $\sigma_{i,j}$ , la somme de ce produits inclut les poids carré et les variances  $\sigma_i^2$ . On peut dire que la covariance est toujours exprimée en termes corrélation  $\rho_{i,j}$ . La variance d'un portefeuille peut s'écrire comme suit :

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{i,j} \quad \text{D'où} \quad \sigma_{i,j} = \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j} \quad (1.9)$$

Le choix de la variance comme mesure de risque suppose que la distribution des rendements est symétrique. Toutefois, la variance ne peut être calculée que sur des fluctuations passées du taux de rendement. Les études de Markowitz montrent qu'empiriquement la volatilité des variations des cours des actifs financiers est relativement stable, ceci donne la possibilité de l'estimation du risque d'un actif à partir de des données historiques.

---

1.  $\rho_{i,j} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} (r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)$

## CHAPITRE 1. LE RÔLE DE LA CORRÉLATION DANS LE CADRE DE LA COMPOSITION DE PORTEFEUILLES

---

On peut encore écrire la variance du portefeuille est donnée par :

$$\begin{aligned}
 V(R_p) &= \sum_{i=1}^n X_i^2 V(R_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n X_i X_j \text{COV}(R_i, R_j) \\
 \sigma_p^2 &= \sum_{i=1}^n X_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n X_i X_j \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j}
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

En posant :

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad X^T = (X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad \dots \quad X_n) \tag{1.11}$$

Et la matrice de variances covariances :

$$\begin{aligned}
 C_{i,j} &= \begin{pmatrix} \text{Cov}(R_1 R_1) & \text{Cov}(R_1 R_2) & \dots & \text{Cov}(R_1 R_n) \\ \text{Cov}(R_2 R_1) & \text{Cov}(R_2 R_2) & \dots & \text{Cov}(R_2 R_n) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(R_n R_1) & \dots & \ddots & \text{Cov}(R_n R_n) \end{pmatrix} \\
 C_{i,j} &= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \text{Cov}(R_1 R_2) & \dots & \text{Cov}(R_1 R_n) \\ \text{Cov}(R_2 R_1) & \sigma_2^2 & \dots & \text{Cov}(R_2 R_n) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(R_n R_1) & \dots & \ddots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Nous obtenons l'écriture de la variance sous forme matricielle :

$$\sigma_p^2 = X^T \cdot C_{i,j} \cdot X$$

n= nombre d'actifs du portefeuille.

nous aurons  $(1/n)^2$  fois de variance, et dans chacune des covariances nous aurons aussi  $(1/n)^2$  fois la covariance, donc finalement on trouve n fois des variances et  $(n^2 - n)$  fois des covariance. Avec l'augmentation de n la variance du portefeuille se rapproche de la covariance moyenne, il serait possible d'éliminer totalement le risque en détenant suffisamment de titres.

La contribution d'un titre au risque de portefeuille est fonction de son poids dans le portefeuille et de sa covariance moyenne avec les titres du portefeuille.

Au-delà du rendement, le risque occupe lui aussi une place prépondérante dans l'élaboration de la théorie de Markowitz. Comme cela fut énoncé dans les hypothèses générales de la théorie de Markowitz, un investisseur dit rationnel poursuivra toujours l'objectif de réduire le risque auquel il s'expose à niveau de rendement donné.

Afin de réduire le risque auquel un investisseur s'expose via son portefeuille, la diversification apparaît comme un élément majeur. La diversification est en effet une plaque tournante de cette thèse et se définit comme une stratégie cherchant à combiner dans un portefeuille, des actifs avec rendements qui ne sont pas parfaitement corrélés, dans l'objectif de réduire le risque du portefeuille (variance) sans pour autant sacrifier une part de rendement.

Les travaux de Markowitz ont pu mettre en exergue un point fondamental de la mesure du risque. En effet, il a permis de comprendre que le risque intrinsèque à un actif n'a que peu d'importance aux yeux d'un investisseur. L'apport de cet actif à la variance du portefeuille (dans sa globalité) est hautement plus pertinent. C'est ainsi qu'il a pu mettre en lumière l'importance de la covariance entre les actifs dans un portefeuille.

### 1.2.3 La volatilité

La mesure de la volatilité est facile à estimer et à interpréter si elle reste constante. Mais en réalité la variabilité des rendements d'un actif financier n'est pas constante.

La volatilité est positivement autocorrélée, il existe une dépendance de long terme des autocorrélations. Cont(2001) a montré qu'il existe un effet de levier dans la mesure de la volatilité sont négativement corrélées avec les rentabilités. Par ailleurs, il semble que le volume des échanges est corrélé avec toutes les mesures de volatilité. Bollerslev et Mikkelsen(1996), Liu et al. (1999) ainsi que Andersen et al. (2001) ont montré que la fonction d'autocorrélation de la volatilité présente une dépendance de long terme et est bien décrite par une loi de puissance décroissante. D'après Cizeau et al. (1997), Andersen et al. (2001), la distribution de la volatilité est log-normale tandis que Liu et al. (1999) estiment que les queues de distributions sont mieux décrites par une loi de puissance. La présence de clusters de volatilité a été remarquée pour la première fois par Kendall(1953). La volatilité présente des non-linéarités : Franses et Van Dijk(1996) ont montré qu'un modèle non-linéaire améliore les prévisions de la volatilité hebdomadaire des marchés d'actifs. Diaz et al. (2002) et Maheu et McCurdy(2002) ont détecté des structures non-linéaires dans la volatilité du taux de change. Martens et al. (2004) ont détaillé les non-linéarités détectées dans la volatilité du SP500. Liu et al. (1999), Andersen et al. (2001) et Gençay et al. (2001) ont analysé les propriétés d'échelles dans la volatilité pour différents intervalles temporels.

Certaines méthodes de calculs se basent sur la normalité des variations de prix. En d'autres termes, les variations des prix suivent une loi normale. En réalité, la variation des cours d'une position boursière peut varier d'un extrême à une autre. Cette volatilité (représenté par l'écart-type des rendements d'une position) est utilisée dans le calcul de la VaR. Plus cette volatilité est importante plus la pertinence et la précision de la VaR seront diminuées. En cas de crise, les marchés financiers s'affolent et il n'est pas toujours évident de pouvoir vendre des positions. Il se peut même que cela soit impossible. La crise des « Suprimes » est un excellent moyen d'illustrer ce problème. Les crédits à risques au centre de cette débâcle financière ne s'échangeaient pas ou à moins de la moitié de leur valeur nominale.

La volatilité a été introduite par Markowitz(1957)[143] dans son modèle fondateur d'allocation d'actifs dit « Moyenne-Variance ». Dans ce cadre, le risque d'un investissement provient du fait que les espérances de rendement ne sont pas toujours réalisées. La dispersion des renta-

## CHAPITRE 1. LE RÔLE DE LA CORRÉLATION DANS LE CADRE DE LA COMPOSITION DE PORTEFEUILLES

---

bilités autour de leur moyenne estimée traduit alors le risque du placement. L'écart-type  $\sigma$ , appelé également volatilité<sup>2</sup>, constitue une mesure de cette incertitude.

### 1.3 Le rôle de la corrélation en finance de marché

Un portefeuille de titres est généralement considéré comme diversifié si les titres qui le composent sont faiblement voire pas du tout corrélés entre eux. La notion de corrélation est née des travaux sur l'optimisation d'un portefeuille de Harry Markowitz, considéré comme l'un des fondateurs de la théorie financière moderne et encore appelée « théorie moderne du portefeuille ». Intuitivement, cette notion peut se comprendre : Si deux actifs ont des rendements peu corrélés, il est intéressant de les combiner dans un portefeuille, car ils auront tendance à ne pas évoluer dans le même sens et donc à protéger en partie l'investisseur des fluctuations du marché. La diversification est une notion centrale pour tout investisseur. La recherche d'actifs peu ou pas corrélés est donc nécessaire.

L'investisseur doit toutefois être conscient du fait que la corrélation entre actifs évolue dans le temps. Cela est particulièrement vrai dans les phases de stress sur les marchés financiers. Il doit aussi être très attentif au fait qu'un portefeuille de titres très corrélés entre eux peut être une source de risque et qu'il est important de revoir régulièrement dans quel mesure son portefeuille de titre est suffisamment diversifié.

Markowitz(1957)[143] a montré que les bénéfices de la diversification dépendent des corrélations, l'intérêt de la diversification ne repose pas sur l'absence de la corrélation entre les rentabilités, mais plutôt sur leur imparfaite corrélation. La réduction des risques permise par la diversification est limitée par le degré de corrélation entre les actifs.

#### Théorie moderne du portefeuille

La théorie moderne du portefeuille a été développée par Harry Markowitz en 1952. Il a apporté une solution au problème de sélection de portefeuille optimale, c'est à dire à la recherche d'un portefeuille possédant le risque minimum pour une rentabilité maximale. Plus précisément Markowitz a montré que l'investisseur cherche toujours à optimiser ses choix en tenant compte non seulement de la rentabilité attendue mais aussi du risque du portefeuille défini par la variance. L'objectif de Markowitz est la recherche d'un portefeuille qui minimise le risque pour un niveau d'espérance de rentabilité donné, il est appelé le portefeuille efficace. L'ensemble de tous les portefeuilles efficaces constitue la frontière efficiente de Markowitz.

En effet, Markowitz pense que la sélection des différents titres devient être choix par rapport à la variations de la corrélation et il ne peut pas être choix individuellement.

Le modèle Moyenne-Variance de Markowitz : Le modèle Moyenne-Variance de Markowitz, a donné un point de départ à la théorie moderne de gestion de portefeuille, d'après ce modèle tous les investisseurs ont le choix de maximiser le rendement ou de minimiser le risque mesuré par la variance du rendement. Il s'agit donc d'un programme d'optimisation quadratique. Un

---

2. lorsque les données financières sont annualisées

### 1.3. LE RÔLE DE LA CORRÉLATION EN FINANCE DE MARCHÉ

programme d'optimisation permet de construire de tels portefeuilles à partir des rentabilités et risque de chaque titre et de leur degré de co-variabilité.

La diversification réduit le risque : le risque qui peut être éliminé par la diversification est dénommé risque spécifique, mais il existe aussi un risque que l'on ne peut éliminer même si le portefeuille est diversifié. La diversification réduit le risque, mais pour maîtriser l'impact de la diversification, il faut maîtriser la relation entre le risque de portefeuille et le risque de l'action individuelle.

La théorie de Markowitz montre que chaque titre est composé de deux types de risque : le risque spécifique et le risque systématique. Le risque total est la somme de deux risques.

- Le risque systématique : non diversifiable, il est aussi d'origine macroéconomique, changements de goûts des consommateurs, etc. Il s'agit en fait du risque de marché dans son ensemble. Il correspond aussi au risque qu'à chaque investisseur quand il décide d'acheter un titre, il est considéré comme un risque irréductible.

Le risque systémique, également appelé systématique, est donc un risque de marché dans son ensemble que l'on a l'habitude de "mesurer" par des indices boursiers (Cac40, Dow-jones, Nikkei . . .) censés refléter l'activité d'un marché.

- Le risque spécifique : non symétrique, diversifiable, contrairement au risque systématique, le risque spécifique est lié à un actif en particulier. Supposons que l'on achète une valeur dite "valeur Internet", outre le risque systématique lié à ce type d'actions, la société peut très bien ne pas atteindre les objectifs de croissance qu'elle s'était fixée. Ceci aura un impact, négatif sur le cours de cette société. Ce risque spécifique peut être réduit au minimum en détenant un portefeuille identique à la composition d'un indice de marché. Ainsi seul subsistera le risque systématique. C'est typiquement le cas de la gestion dite par benchmark<sup>3</sup> qui gère des portefeuilles répliquant des indices boursiers.

La gestion du risque est une composante très importante de la gestion de portefeuille. Elle intervient de plus en plus dans les processus de sélection de portefeuille des gérants de portefeuille et les différentes méthodes de prévision du risque vont de l'utilisation des simples volatilités et corrélations historiques entre actions aux modèles à plusieurs facteurs.

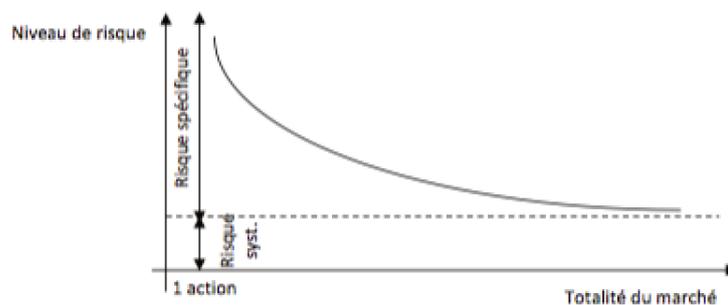


FIGURE 1.6 – Diversification, risque spécifique et risque systématique  
Source : Guillaume de Marnix (2017)

3. indice de référence

## CHAPITRE 1. LE RÔLE DE LA CORRÉLATION DANS LE CADRE DE LA COMPOSITION DE PORTEFEUILLES

---

La figure (1.6) montre que le niveau de risque est maximal lorsque l'investisseur ne possède qu'un, seul actif en portefeuille. Grâce à la diversification, ce niveau de risque peut être abaissé jusqu'à un niveau « incompressible », qui représente le risque systématique. Ce risque systématique a donc un effet transversal et affecte l'ensemble des titres du marché, mais pas de la même façon.

### 1.3.1 Risque de marché

Le risque de marché d'un portefeuille provient des variations des prix des actifs financiers et de leur effet négatif sur la valeur financière totale du portefeuille. Traduit en terme de rendement, les rentabilités des actifs deviennent alors des variables aléatoires dont l'évolution future n'est pas, à priori, connue et quantifiable. Dans le cas d'une obligation, les fluctuations des taux d'intérêts modifient leur valeur de marché. Ainsi le rendement  $R_i$  de l'actif  $i$  est considéré comme une variable aléatoire pouvant prendre, à l'instant  $t$ , des valeurs aléatoires  $r_i(t)$  dans un intervalle plus ou moins déterminé.

#### Les méthodes d'évaluation des risques du marché

Durant les années 80, les outils de gestion des risques de marché n'étaient pas efficaces et ne répondaient plus aux attentes des différents acteurs de la scène financière. Les outils de l'époque ne permettaient aucune comparaison entre les actifs. De plus l'apparition des produits dérivés, l'augmentation de la volatilité sur les marchés ainsi que plusieurs crises financières comme le cas de la banque Barings, ont poussés le développement d'un indicateur qui permettrait de regrouper un risque financier en un seul montant.

Et nous citons à cet égard la révolution de l'évaluation des risques par la méthode VaR introduite par La Banque JP Morgan qui est considérée comme la pionnière de cette méthode. C'est son directeur de l'époque, Dennis Weatherstone qui en avait assez de voir apparaître chaque jour des piles de rapports de risques sur son bureau. C'est la raison pour laquelle il demanda à ses employés de développer un rapport simplifié sur lequel l'exposition de la banque était clairement exprimée. C'est ainsi que la VaR fit son apparition. La banque décida ensuite de développer son propre programme de gestion interne : « RiskMetrics ». Ce programme regroupe un nombre important de données financières dont la méthodologie pour calculer une VaR. Sa distribution gratuite sur internet a encouragé le développement de la VaR sur l'ensemble des places financières internationales.

Ainsi, Les accords de Bâle I de 1996 autorisent les institutions financières à utiliser la VaR comme mesure de risque.

De nos jours, la VaR continue à évoluer, de nombreux scientifiques développent de nouveaux modèles plus ou moins complexes, pour améliorer la précision et la robustesse de cet indicateur de risque.

#### Le risque de marché : Value at Risk et corrélations

### 1.3. LE RÔLE DE LA CORRÉLATION EN FINANCE DE MARCHÉ

---

La conception du risque de marché représente le risque de perte financière découlant d'une fluctuation de la valeur des instruments financiers. Elle vise à résumer de manière concise par un montant ( $x$ ) la perte probable d'un portefeuille d'actifs sur un horizon de temps déterminé.

La caisse<sup>4</sup> gère l'ensemble des risques de marché de manière intégrée. Les principaux éléments contribuant au risque tels que les secteurs d'activité, les pays et les éléments sont pris en compte. La caisse peut utiliser des instruments financiers dérivés négociés en Bourse ou directement auprès de la banque et de courtiers en valeurs mobilières, aux fins de la gestion de risques de marché.

La conception du risque de marché dans le cadre réglementaire s'inscrit dans une approche quantifiable à travers l'instrument VaR (Value-at-RisK) et dans une approche analytique au travers des risques induits par une dépréciation des actifs. De manière similaire, les nombreux travaux économétriques qui se sont développés ces dernières années s'axent autour de deux grands thèmes à savoir la mesure et la validation des modèles utilisés pour quantifier le risque, et l'analyse des impacts du risque de marché d'un actif ou d'un indice sur un autre actif.

La VaR, en tant que mesure des risques extrêmes, demeure un instrument de mesure du risque de marché incontournable en dépit des nombreuses limites et des instruments alternatifs proposés. La popularité de cette mesure s'est confirmée avec les révisions de Bâle II, qui reconnaissent les vertus de cet instrument en proposant une version stressée de la VaR.

Les avancées théoriques concernent principalement les tests de validation de cette mesure qui ont connu un engouement sans précédent. La classification que nous proposons par génération de tests témoigne d'un développement conséquent des tests de validation avec un intérêt constant de l'amélioration des critères discriminants des modèles d'estimation. Sur le plan analytique, le risque de marché est étudié au travers des ruptures de corrélations et des risques qui lui sont associés, notamment le risque de contagion. La littérature économétrique, relativement récente, qui porte sur ces questions est à confronter aux avancées réglementaires : le risque de contagion est une problématique récurrente depuis de nombreuses années et les difficultés de détection et de modélisation de ce risque sont liées au caractère non-linéaire des séries temporelles financières qui invalide l'utilisation de mesures basées sur le coefficient de corrélation linéaire. Sur le plan réglementaire, l'interconnexion, de plus en plus importante des places financières conduit le comité à développer des recommandations plus strictes sur le risque de contagion d'autant plus que la crise des subprimes a révélé l'existence d'un risque de transmission.

Il existe plusieurs méthodes de calcul de la value at Risk classique et conditionnelle (simulation historique, simulation de Monte-Carlo, méthode de matrice variance-covariance...) qui présentent toutes des avantages et inconvénients.

Pour le calcul de la VaR, il faut modéliser la distribution des pertes et profits d'un portefeuille d'actifs.

---

4. Ce qui distingue la Caisse, c'est que l'équipe de gestion des risques est pleinement intégrée aux équipes d'investissement qui consiste à rattacher un expert-métier à chacune de ces équipes. Cette personne travaille au quotidien avec les membres d'une équipe d'investissement, mais a une responsabilité différente, voire concurrente : l'analyse des risques. En même temps, l'expert-métier bénéficie de l'appui des autres membres de la Direction des risques, que ce soit l'équipe d'analyse quantitative, qui lui fournit toutes les données nécessaires, ou l'équipe qualitative, qui analyse en profondeur les scénarios de risques.

## CHAPITRE 1. LE RÔLE DE LA CORRÉLATION DANS LE CADRE DE LA COMPOSITION DE PORTEFEUILLES

---

### La crise financière de la révolution à la frustration

La crise des subprimes marque les esprits à cause de son ampleur mais aussi de l'effet de surprise qu'elle a suscitée chez une grande partie des analystes financiers. À l'image de la crise du fond LTCM et de ses consultants, Merton et Scholes, futurs prix Nobel, la crise des subprimes n'a même pas effleurée l'esprit des responsables financiers.

Cette crise accentue des risques déjà existants, bien identifiés même s'ils ne sont pas bien intégrés. Mais elle révèle surtout de nouveaux risques ou des risques peu formalisés. Elle témoigne aussi de la fragilité du système financier international. Autant d'ingrédients qui ont conduit au déclenchement d'une crise particulière mais annonciatrice d'une nouvelle ère.

Ainsi, elle devient, peu à peu, le point de départ d'un renouveau à la fois théorique, réglementaire et dans une moindre mesure financier. Elle est clairement la matérialisation des limites du capitalisme financier tel qu'on le connaît et de la finance libérale telle qu'elle avait été défendue par ses partisans. Loin de l'idée d'une autorégulation et d'une discipline des marchés, la crise révèle surtout un laxisme réglementaire auquel il fallait remédier. C'est toute l'essence des accords Bâle III.

Le Comité de Bâle ou Basel Committee on Banking Supervision (BCBS) vise à assurer la stabilité et la fiabilité du système bancaire et financier. A travers l'établissement de standards minimaux en matière de contrôle prudentiel, la diffusion et la promotion des meilleures pratiques bancaires et de surveillance et la promotion de la coopération internationale en matière de contrôle prudentiel. Le Comité de Bâle a été créé fin 1974 par les gouverneurs des banques centrales du G 10 (onze pays : Allemagne, Belgique, Canada, Etats-Unis, France, Italie, Japon, Pays-Bas, Royaume-Uni, Suède et Suisse). Le Comité était initialement appelé le « Comité Cooke », du nom de Peter Cooke, directeur de la Banque d'Angleterre qui avait été un des premiers à proposer sa création et fut son premier président.

Le Comité se compose aujourd'hui de représentants des banques centrales et des autorités prudentielles de 27 pays : aux onze premiers se sont ajoutés le Luxembourg et l'Espagne, rejoints par l'Australie, le Brésil, la Chine, la Corée, l'Inde, le Mexique et la Russie en mars 2009, puis Hong Kong, Singapour, l'Afrique du Sud, l'Arabie Saoudite, l'Argentine, l'Indonésie et la Turquie en juin 2009. Historiquement, les travaux du Comité de Bâle ont abouti à la publication de trois grands accords : Bâle I en 1988, Bâle II en 2004 et Bâle III à la fin 2010.

- Bâle I : La création du Comité en 1974 faisait suite à un incident survenu lors de la liquidation de la banque allemande Herstatt, qui eut un effet domino sur d'autres banques. Le Comité se concentra sur le risque de crédit. L'Accord de Bâle de 1988 a placé au cœur de son dispositif le ratio Cooke, imposant que le ratio des fonds propres réglementaires d'un établissement de crédit par rapport à l'ensemble des engagements de crédit pondérés de cet établissement ne puisse pas être inférieur à 8%. Cela signifie que lorsqu'une banque prête 100€ à un client, elle doit disposer d'au minimum 8€ de fonds propres et utiliser au maximum 92€ de ses autres sources de financement tels que dépôt, emprunts, financement interbancaire, etc.

### 1.3. LE RÔLE DE LA CORRÉLATION EN FINANCE DE MARCHÉ

---

- Bâle II : Le Nouvel Accord prudentiel de Bâle de 2004, ou « Bâle II », vise à mieux évaluer les risques bancaires et à imposer un dispositif de surveillance prudentielle et de transparence. L'architecture du dispositif repose sur trois piliers complémentaires :
  - l'exigence de fonds propres (ratio de solvabilité McDonough) ;
  - la procédure de surveillance prudentielle ;
  - la discipline de marché : transparence dans la communication des établissements. Cette exigence de fonds propres fait passer d'un ratio Cooke où :Fonds propres de la banque  $> 8\%$  des risques de crédits à un ratio McDonough où :  
Fonds propres de la banque  $> 8\%$  des risques de crédits + risques de marché + risques opérationnels Où :

Risque de crédit = Actifs pondérés par les risques, Risque de marché = Capital exigé pour la couverture du risque de marché  $\times 12.5$  et Risque opérationnel = Capital exigé pour la couverture du risque opérationnel  $\times 12.5$ . Autrement dit : Fonds propres réglementaires  $> 8\%$  Actifs pondérés +  $8\% \times 12,5$  (Mesure des risques de marché et opérationnels)  
Comme  $8\% \times 12,5 = 1$  (le coefficient 12,5 a été choisi pour annuler le 8%), nous avons :  
Fonds propres réglementaires  $> 8\%$  Actifs pondérés + mesures des risques de marché et opérationnels.

Dans le ratio Mc Donough, les fonds propres réglementaires doivent ainsi couvrir le minimum de fonds propres exigé par le ratio Cooke, plus les risques de marché et les risques opérationnels. L'objectif du pilier 2 est double : d'une part, inciter les banques à développer des techniques de gestion de leurs risques et de leur niveau de fonds propres et, d'autre part, permettre aux autorités de régulation de majorer les exigences de capital réglementaire en cas de nécessité.

Cette nécessité doit s'appliquer de deux façons :

1. Le back testing : la banque doit prouver la validité de ses méthodes statistiques sur des périodes assez longues (5 à 7 ans).
2. Le stress testing : La banque doit prouver, lors de simulations de situations extrêmes, la validité de ses fonds propres en cas de crise économique. La logique qui sous-tend le pilier 3 est que l'amélioration de la communication financière permet de renforcer la discipline de marché, perçue comme un complément à l'action des autorités de contrôle. L'information est mise à la disposition du public sur les actifs, les risques et leur gestion. Les pratiques doivent être transparentes et uniformisées.

- Bâle III : La crise financière a mis en exergue les carences et les insuffisances du dispositif de Bâle II : problèmes de mauvais fonctionnement des marchés financiers, de liquidité, des agences de notations, etc.

De manière générale, la question soulevée était celle du rapport entre le niveau de fonds propres des établissements financiers et les risques encourus par leur activités (sub-primes par exemple). Concrètement, des actifs plus ou moins risqués étaient financés par très peu ou pas de fonds propres. Ce qu'on appelle « l'effet de levier » permettait alors d'obtenir une rentabilité très importante, dépassant les 100% dans certains métiers.

De Bâle I (1988) à Bâle III (2010) plus de 20 ans se sont écoulés entre les premiers accords de Bâle I signés suite à la faillite d'Herstatt et Bâle III, les nouveaux accords prudentiels adoptés

## CHAPITRE 1. LE RÔLE DE LA CORRÉLATION DANS LE CADRE DE LA COMPOSITION DE PORTEFEUILLES

---

suite à la crise des subprimes. De Bâle I à Bâle III, les accords du Comité de Bâle pour la supervision bancaire (CBSB) témoignent de l'évolution des marchés financiers, de la nécessité de mieux appréhender les risques, de les comprendre et de les intégrer. La stabilité financière internationale est au cœur de ces différents accords qui ne s'inscrivent pas dans le même cadre. Bâle I est surtout connu pour le ratio Cooke même si les recommandations formulées par le CBSB sont beaucoup plus larges. Bâle II introduit 3 piliers qui visent à couvrir intégralement le risque bancaire et à promouvoir l'utilisation des modèles internes pour la gestion des risques. Ces deux accords s'inscrivent surtout dans un cadre micro-prudentiel. Le risque systémique et révélé par la crise des subprimes ont conduit le CBSB à pousser de nouvelles recommandations dans un cadre micro et macro-prudentiel.

À la lecture des différents accords, il est possible de noter, au delà de l'évolution vers un cadre macroprudentiel, une évolution dans la prise en compte des risques financiers. Les risques standards (risque de crédit, et le risque de marché, ...) ont été intégrés dès les premiers accords alors que de nouveaux risques ou des risques déjà existants ne sont pris en compte que dans l'accord de Bâle III ou dans les amendements de Bâle II. Ces deux décennies d'accords soulignent aussi l'évolution des pratiques financières, qui ont créé de nouveaux risques, peu ou pas anticipés par les instances de réglementation et donc pris en compte plus tardivement aux recommandations. Par exemple le problème de la procyclicité dans la détermination des fonds propres a été mis en évidence par un rapport de la Banque des Règlements Internationaux (BRI) dès 2001 qui a mis en cause le rôle de la libéralisation financière : "Il est possible (...) qu'elle ait aussi accentué les cycles financiers qui, en contribuant à leur tour à amplifier les phases macroéconomiques, n'ont que trop fréquemment débouchés, par le passé, sur de coûteuses crises bancaires." La problématique de la procyclicité est intégrée dans les recommandations de Bâle 2,5<sup>5</sup>

### Risque de marché et ruptures de corrélations

Le rôle du risque de marché dans l'occurrence de divers risques financiers contribue à un renforcement des exigences des instances réglementaires. Il peut résulter d'un risque de contagion dans la mesure où la présence de ce dernier a influence sur les prix des actifs. Le risque de marché peut constituer une partie intégrante du risque systémique qu'il peut précipiter dès lors que son évolution est mal anticipée. Enfin, il est étroitement lié au risque de liquidité.

Aussi, le risque de marché peut être appréhendé dans un cadre analytique par la détection des liens susceptibles d'exister entre deux marchés. L'identification des relations d'interdépendances aptes à s'intensifier en période de crise doit permettre à l'investisseur de tenir compte ce phénomène dans le choix de ses actifs, aux instances de réglementation d'anticiper un risque systémique et/ou un risque de liquidité. Par ailleurs, la détection des interdépendances permet de comprendre les liens qui régissent un ensemble d'actifs et le schéma de propagation du risque de marché au sein d'un groupe particulier. Dans ces différents objectifs, l'économétrie non-linéaire développe, dans une littérature relativement récente, plusieurs modélisations qui visent à identifier et intégrer le phénomène de co-dépendances.

---

5. Ce sont les révisions à l'accord Bâle II suite à la crise des subprimes intitulées : Revisions to Basel II market risk framework (07/2009).

### 1.3.2 Value at Risk

#### La Modélisation Value-at-Risk (VaR)

La Value-at-Risk est définie comme la perte maximale potentielle qui ne devrait être atteinte qu'avec une probabilité donnée sur un horizon temporel donné (Engle et Manganelli, 2001). La Value at Risk est donc la pire perte attendue sur un horizon de temps donné pour un niveau de confiance donné. Cette définition constitue l'un des principaux atouts de la Value-at-Risk : il est en effet facile de communiquer sur la VaR et de proposer une mesure homogène et générale (quel que soit la nature de l'actif, la composition du portefeuille etc.) de l'exposition au risque.

Les mesures du risque ont beaucoup évolué depuis que Markowitz a énoncé sa célèbre théorie de la diversification de portefeuille à la fin des années 1950. L'écart-type était alors la mesure du risque d'un portefeuille efficient. Mais pour un titre, cette mesure n'est pas appropriée. En effet, dans le cas d'un titre individuel, l'écart-type du rendement comprend les risques diversifiable et non diversifiable. Or, seul le risque non diversifiable, le risque présentée par la covariance entre le rendement du titre et les rendements des titres qui constituent un portefeuille hautement diversifié, est rémunéré par le marché. Une des difficultés fondamentales de la modélisation concerne l'estimation des facteurs du risque. Si l'on suppose que le nombre de titres qui compose le portefeuille est de  $n$ , le modèle de Markowitz exige l'estimation de  $n$  variances et  $\frac{n(n-1)}{2}$  covariances. Quand  $n$  devient important, l'estimation de la matrice variance-covariance se présente comme un exercice très laborieux et les risques d'erreurs d'estimations sont loin d'être négligeables.

Durant les années 60, Sharpe a proposé le modèle CAPM (Capital Asset Pricing Model) de l'évaluation des actifs financiers. Ce modèle est monofactoriel en ce sens qu'il ne distingue qu'un seul facteur explicatif du risque d'un titre, soit la corrélation entre le rendement de ce titre et celui de portefeuille du marché. Au début des années 90, la VaR une nouvelle mesure du risque, a fait été propose. La VaR sert à quantifier le risque de marché auquel sont soumis les portefeuilles bancaires. L'Accord de Bâle a imposé aux banques, en 1997, de détenir un montant de capital réglementaire pour palier les risques de marché. Or, ce capital est calculé à partir de la VaR. Cette mesure est ensuite devenue de plus en plus populaire pour évaluer le risque de portefeuilles institutionnels ou individuels. Elle permet entre autres d'évaluer les risques de type asymétrique, comme celui qui est associé aux options, l'écart-type et le ratio de Sharpe ne permettant pas de prendre en compte ce risque de façon satisfaisante.

Quels types de risques mesure la VaR : La VaR est une mesure homogène permettant de mesurer différents risques, sur différents marchés, différents actifs (change, actions, dérivés...). L'objectif de la VaR fournit une mesure du risque total de portefeuille. Par conséquent, la VaR doit tenir compte des effets de levier et de diversification.

Les risques financiers sont généralement classés en grandes catégories par exemple : Le risque de marché désigne le risque de perte lié à l'évolution des niveaux ou des volatilités des prix de marché. Ces risques peuvent être exprimés sous deux formes : risques absolus (mesurés en unité monétaire) et risques relatifs (exprimés par rapport à un benchmark).

Depuis quelques années, la Value at Risk (VaR) s'est imposée comme l'une des mesures du risque de marché. La VaR peut être utilisée de trois façons principales : De façon défensive

## CHAPITRE 1. LE RÔLE DE LA CORRÉLATION DANS LE CADRE DE LA COMPOSITION DE PORTEFEUILLES

---

passive pour reporting d'information, de façon passive pour contrôle des risques et de façon active pour management des risques :

1. La VaR peut être utilisée de façon passive dans le cadre d'un reporting régulier sur les risques. Ce fut historiquement la première utilisation de la VaR en vue de mesurer un risque agrégé (JP Morgan). Elle est une mesure du risque simple à interpréter exprimée en unité monétaire et sur laquelle on peut communiquer de façon non technique. Elle permet de synthétiser en une seule mesure une appréciation sur le risque global.
2. La VaR peut être utilisée de façon défensive dans le cadre d'un contrôle des risques dans la mesure où elle est utilisée pour déterminer des positions limites qui seront imposées aux traders (limites individuelles) ou aux business units (limites collectives). Le principal avantage de la VaR est qu'elle fournit un dénominateur commun permettant de comparer les risques engendrés par les activités menées sur différents marchés, différents produits etc.
3. La VaR peut être utilisée de façon active dans le cadre d'un management des risques. Elle est utilisée notamment dans l'allocation du capital entre les traders, les business lines, les produits et/ou les institutions.

La VaR est généralement retenue pour le calcul des rendements ajustés du risque ou Riskadjusted performance measures (RAPM) comme elle peut être également utilisée dans l'optimisation de portefeuille avec des critères de type moyenne-VaR.

En raison de ces très nombreuses utilisations possibles, les utilisateurs de la VaR sont très différents : Institutions financières, Régulateurs, Entreprises non financières, Asset Managers, etc. Les institutions financières ont été à l'avant garde de la diffusion et l'utilisation de la VaR dans le cadre de la mise en place de systèmes centralisés de management / surveillance des risques nécessité liée à l'évolution de la réglementation nécessité liée à la complexité croissante des instruments financiers et à la diversification croissante des risques financiers nécessité liée à la connaissance de grands désastres financiers (Barings, Daiwa, ...).

Entons plus précisément dans le calcul de la VaR : L'adoption de cette mesure c'est faite en plusieurs étapes (Gouriéroux et Jasiak(2010)) : dans un premier temps, la VaR a visé à estimer le risque de marché des portefeuilles d'actifs liquides basiques (indices de marchés, bons du Trésor...). Ensuite, elle a été proposée pour les portefeuilles qui contiennent à la fois des actifs liquides basiques mais aussi des actifs dérivés liquides (options sur taux d'intérêt...). Dans un troisième temps, la VaR a été déclinée pour le risque de défaut et a conduit à la mise en place d'une CreditVaR. Enfin, le CBSB a développé des procédures pour juger de la fiabilité de cette mesure : ce sont les techniques du backtesting. Une autre étape a été franchie depuis la crise des subprimes. Les analyses de la crise des subprimes ont montré que les pertes encourues par les banques étaient supérieures aux exigences requises par le pilier 1. Les révisions aux accords Bâle II pour le risque de marché ont introduit une exigence supplémentaire en capital par le calcul d'une VaR stressée. Elle est déterminée à partir d'un échantillon de 12 mois de crise. La VaR stressée ne remplace pas la VaR classique, c'est un complément. Cette proposition vise principalement à briser la procyclicité des mesures de risques. Elle reste soumise, tout comme la

### 1.3. LE RÔLE DE LA CORRÉLATION EN FINANCE DE MARCHÉ

---

VaR classique, aux tests de validation qui permettent de vérifier la pertinence du modèle d'estimation retenu. Nous donnons une description de la VaR en détaillant l'approche paramétrique.

La Value-at-Risk (VaR) définie pour un taux de couverture de  $\alpha$  correspond au quantile d'ordre  $\alpha$  de la distribution de profits et pertes (profits and losses, P&L) associée à la détention d'un actif ou d'un portefeuille d'actifs sur une période donnée.

La mesure de Value-at-Risk reflète l'information contenue dans la queue gauche (associée aux pertes) de la distribution des rendements d'un actif. Si l'on considère un taux de couverture de  $\alpha$  (ou de façon équivalente un niveau de confiance de  $1-\alpha\%$ ) la Value-at-Risk correspond tout au fractile de niveau  $\alpha\%$  de la distribution de perte et profit sur la période de détention de l'actif :

$$VaR(\alpha) = F(.) - 1(\alpha) \quad (1.13)$$

Où  $F(.)$  désigne la fonction de répartition associée à la distribution des pertes et profits. De cette définition générale découlent plusieurs définitions techniques.

La Value-at-Risk dépend de trois éléments : la distribution des pertes et profits du portefeuille valable pour la période de détention, le niveau de confiance (ou de façon équivalente le taux de couverture égal à un moins le niveau de confiance) et la période de détention de l'actif.

Le niveau de confiance choisi est un paramètre compris entre 0 et 1 (95% ou 99% en général) qui permet de contrôler la probabilité que l'on obtienne un rendement supérieur ou égale à la Value-at-Risk. Supposons que la distribution des pertes et profits associée à la détention d'un actif sur une période corresponde à une distribution gaussienne normale. Sur la figure (1.7) est reproduite cette distribution de perte et profit : sur la partie gauche de l'axe des abscisses figurent les rendements négatifs (pertes) tandis qu'à droite figure les rendements positifs (profits). Dans ce cas, la Value-at-Risk définie pour un niveau de confiance de 95% est égale à -1,645. Autrement dit, dans cet exemple il y a 95% de chances que le rendement de l'actif, noté  $r$ , soit au moins égal à -1,645 sur la période de détention.

$$Pr[r < VaR(0,05)] = Pr[r < -1,645] = 0,05 \quad (1.14)$$

De la même façon, la Value-at-Risk définie pour un niveau de confiance de 99% est égale à -2,326.

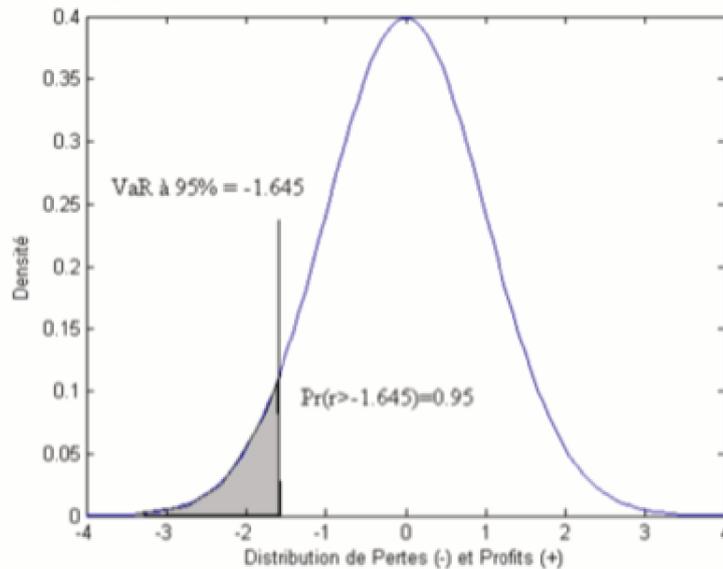


FIGURE 1.7 – Exemple de Value-at-Risque sous Distribution Normale  
Source : [99] Hurlin (2008)

Ainsi, la Value-at-Risk correspond généralement à une perte (valeur négative). Toutefois, on trouve souvent une Value-at-Risk définie non pas à partir de la distribution de perte et profit, mais à partir d'une distribution de profits (-) et pertes (+). Une telle définition revient à omettre le signe moins devant la perte et donc à afficher une Value-at-Risk positive. Dans ce cas, la définition de la Value-at-Risk correspond à l'opposé du fractile de la distribution de pertes et profits :

$$VaR(\alpha) = -F^{-1}(\alpha) \quad (1.15)$$

Si l'on reprend l'exemple de distribution gaussienne on a alors une Value-at-Risk pour un niveau de confiance de 95% ( $\alpha = 5\%$ ) égale à 1,645. Ce qui signifie qu'il y a 95% de chances que la perte associée à la détention de l'actif n'excède pas 1,645.

Le deuxième élément fondamental dans le calcul de la Value-at-Risk est la période de détention de l'actif ou du portefeuille d'actifs. La formule de calcul de la Value-at-Risk doit alors être ajustée de façon à tenir compte de la composition des rendements. Il n'existe aucune règle quant au choix de la période de détention dans le calcul de la Value-at-Risk puisque ce choix dépend fondamentalement de l'horizon de reporting ou d'investissement des opérateurs. Toutefois, les autorités de régulation peuvent spécifier des horizons de détention spécifiques notamment dans le cadre des procédures de validation de la Value-at-Risk.

Le principe des méthodes paramétriques de calcul de la VaR :

- Calculer le fractile correspondant.
- Donner une valeur aux paramètres de cette distribution (estimation ou étalonnage)
- Postuler une distribution paramétrique de P&L (normale, Student, GED etc...)

Les approches paramétriques présentent un intérêt particulier, elles prennent en compte des structures qui peuvent exister dans les séries temporelles financières et permettent de travailler

### 1.3. LE RÔLE DE LA CORRÉLATION EN FINANCE DE MARCHÉ

avec des modèles intégrant les avancées les plus récentes de l'économétrie financière. L'approche paramétrique standard est la méthode de la VaR normale. Cette méthode repose sur l'hypothèse de normalité de la distribution des P&L. Elle est particulièrement adaptée à des instruments dits linéaires. Damodaran(2007) propose, en cas d'un nombre trop important d'actifs dans le portefeuille, de procéder à un mapping qui permettrait de retenir des facteurs généraux du marché comme facteurs de risques des différents actifs.

**Hypothèse H1** : Comme on suppose que la distribution des P&L à la date  $t$  est une distribution normale d'espérance  $\mu_t$  et de variance  $\sigma_t^2$  au temps  $t$ , on peut écrire :

$$R_t \sim N(\mu_t, \sigma_t^2) \quad (1.16)$$

Par définition de la VaR :

$$Prob[R_t < -VaR_t(\alpha)] = \alpha$$

$$Prob\left[\frac{R_t - \mu_t}{\sigma_t} < \frac{-VaR_t(\alpha) - \mu_t}{\sigma_t}\right] = \alpha \quad (1.17)$$

Où sous l'hypothèse H1, la variable centrée et réduite  $(R_t - \mu_t)/\sigma_t$  suit une loi normale centrée et réduite  $N(0,1)$ .

Si on note  $\Phi(\cdot)$  la fonction de répartition de la loi normale, on obtient la VaR associée à un taux de couverture  $\alpha$  :

$$VaR_t(\alpha) = -\mu_t - \sigma_t \Phi^{-1}(\alpha) \quad (1.18)$$

En résumé, sous l'hypothèse de normalité de la distribution de P&L, la VaR associée à un taux de couverture de  $\alpha\%$  est égale à :  $VaR_t(\alpha) = -\mu - \sigma \Phi^{-1}(\alpha)$  où  $\mu$  désigne l'espérance et  $\sigma^2$  la variance de la distribution de P&L. La prévision de la VaR associée à un taux de couverture de  $\alpha\%$  peut être aussi définie par :

$$VaR_{t+1}|t(\alpha) = -\mu - \sqrt{h_{t+1}} \Phi^{-1}(\alpha) \quad (1.19)$$

Où  $h_{t+1}$  est la variance conditionnelle des rendements. Cette méthode, aussi appelée la méthode de la variance/covariance, est une fonction croissante de la volatilité du portefeuille. L'avantage de cette méthode réside dans sa simplicité.

Dans toute distribution elliptique, la prévision de la variance permet de prévoir la VaR car cette dernière est une transformée linéaire de la variance. Il est possible de retenir d'autres lois de probabilités (Student,...) plus adaptées aux distributions de P&L. Le principal problème de l'approche paramétrique réside dans le postulat d'une distribution i.i.d. des rentabilités. L'approche paramétrique est cependant très utilisée<sup>6</sup>

**Hypothèse H2** : On suppose que la distribution des P&L à la date  $t$  est une distribution de Student à  $v$  degrés de liberté.

$$R_t \sim t(v) \quad (1.20)$$

Sous l'hypothèse de distribution de Student, la VaR associée à un taux de couverture de  $\alpha\%$  est égale à :

$$VaR_t(\alpha) = G(\alpha, v)^{-1} \quad (1.21)$$

---

6. Pérignon et Smith(2008), Tang et Shieh(2006), Giot et Laurent(2003)

## CHAPITRE 1. LE RÔLE DE LA CORRÉLATION DANS LE CADRE DE LA COMPOSITION DE PORTEFEUILLES

---

Où  $G(\alpha, v)$  désigne la fonction de répartition d'une loi de Student à  $v$  degrés de liberté.

Généralement, on caractérise la distribution de P&L de façon conditionnelle et non de façon marginale. On définit alors une distribution de pertes et profits conditionnelle, c'est-à-dire une fonction de densité conditionnelle à un ensemble d'information disponible à la date  $t$ , noté  $\Omega$ . Cette densité conditionnelle est notée :

$$f_{R_t}(\alpha|\Omega) \quad (1.22)$$

Pour un taux de couverture (*coverage rate*) de  $\alpha\%$ , la Value-at-Risk conditionnelle à un ensemble d'information  $\Omega_t$ , notée  $VaR_t(\alpha|\Omega_t)$ , correspond à l'opposé du fractile d'ordre  $\alpha$  de la distribution conditionnelle de profits et pertes (P&L) :

$$VaR_t(\alpha|\Omega_t) = -F_{R_t}^{-1}(\alpha|\Omega_t) \quad (1.23)$$

Où  $F_{R_t}(\alpha|\Omega_t)$  désigne la fonction de répartition associée à la fonction de densité conditionnelle  $f_{R_t}(\alpha|\Omega_t)$ . Cette densité conditionnelle peut elle aussi être différente d'une date à l'autre, mais généralement on se restreint à des densités conditionnelles invariantes dans le temps, i.e. telles que :

$$f_{R_t}(\alpha|\Omega_t) = f_R(\alpha|\Omega_t) \forall t \quad (1.24)$$

Cela revient à supposer que conditionnellement à un ensemble d'information (ou lorsque l'on cherche à prévoir la Value-at-Risk), les rendements sont identiquement distribués.

La prévision de la Value-at-Risk pour la date  $t+1$  et pour un taux de couverture de  $\alpha\%$ , obtenue conditionnellement à l'ensemble d'information  $\Omega_t$  disponible à la date  $t$ , notée  $VaR_{t+1}(\alpha|\Omega_t)$ , est définie par :

$$VaR_{t+1|t}(\alpha) = VaR_{t+1}(\alpha|\Omega_t) = -F_{R_t}^{-1}(\alpha|\Omega_t) \quad (1.25)$$

Où  $F_{R_t}(\alpha|\Omega_t)$  désigne la fonction de répartition associée à la fonction de densité conditionnelle  $f_R(\alpha|\Omega_t)$ .

### Exemple : Prévision de VaR

Supposons que les P&L à la date  $t+1$ , notées  $R_{t+1}$ , soient normalement distribués. On cherche à prévoir la moyenne et la variance de cette distribution conditionnellement à l'information disponible. Supposons que ces estimateurs soient définis par les moments conditionnels suivants :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{t+1|t} &= \mathbb{E}(R_{t+1}|\Omega_t) \\ \hat{\sigma}_{t+1|t} &= \mathbb{V}(R_{t+1}|\Omega_t) \end{aligned} \quad (1.26)$$

La distribution de P&L conditionnelle est alors :

$$R_{t+1}|\Omega_t \sim N(\hat{\mu}_{t+1|t}, \hat{\sigma}_{t+1|t}^2) \quad (1.27)$$

On en déduit immédiatement une prévision de la VaR de  $t+1$  pour un taux de couverture de  $\alpha\%$ .

$$VaR_{t+1|t}(\alpha) = -\hat{\mu}_{t+1|t} - \hat{\sigma}_{t+1|t} \Phi^{-1}(\alpha) \quad (1.28)$$

Un autre élément fondamental dans le calcul de la Value-at-Risk est la période de détention (ou l'horizon de risque) de l'actif ou du portefeuille d'actifs.

### 1.3. LE RÔLE DE LA CORRÉLATION EN FINANCE DE MARCHÉ

Il n'existe aucune règle quant au choix de la période de détention dans le calcul de la Value-at-Risk puisque ce choix dépend fondamentalement de l'horizon de reporting ou de l'horizon d'investissement des opérateurs. Toutefois, les autorités de régulation peuvent spécifier des horizons de détention spécifiques notamment dans le cadre des procédures de validation de la Value-at-Risk.

Mais le problème se pose lorsque la fréquence d'observations des P&L (intra-day, quotidienne, hebdomadaire, mensuelle etc..) ne correspond pas à l'horizon de risque. On doit alors transformer une mesure de risque adaptée à un horizon en une mesure de risque adaptée en un autre horizon, généralement plus long : c'est le problème de l'agrégation temporelle.

Le problème de l'agrégation temporelle peut se poser de la même façon lorsque l'on cherche à prévoir la VaR à un horizon supérieur  $h$  à l'unité. Deux solutions existent :

1. Soit prévoir directement la VaR en  $t+h$ , c'est-à-dire  $VaR_{t+h|t}(\alpha)$ , dans ce cas le problème de l'agrégation temporelle ne se pose pas.
2. Soit on cherche à établir la prévision de la VaR en  $t+h$ ,  $VaR_{t+h|t}(\alpha)$ , à partir de prévisions réalisées à un horizon inférieur, typiquement à un horizon d'une période, c'est-à-dire  $VaR_{t+1|t}(\alpha), VaR_{t+2|t+1}(\alpha), \dots, VaR_{t+h|t+h-1}(\alpha)$

Dans le cadre du problème de l'agrégation temporelle des mesures de VaR, on doit distinguer deux cas :

- le cas où l'on suppose que les rendements sont i i d<sup>7</sup>,
- le cas où l'on suppose que les rendements ne sont pas i i d.

(-) Dans le cas où les rendements sont i i d., le problème est relativement simple. Supposons que l'on dispose de l'espérance et de la variance de la P&L exprimés en base annuelle. Soient  $\mu_t$  et  $\sigma_t^2$  ces valeurs. On cherche à déterminer les moments correspondants sur un horizon différent de l'année sous l'hypothèse de rendements i i d et sous l'hypothèse que les mêmes positions ont été maintenues sur l'année.

Sous l'hypothèse i i d, on a alors :

$$\mathbb{E}(R_t) = \mu_t T \quad \mathbb{V}(R_t) = \sigma_t^2 T \quad (1.29)$$

Où  $T$  désigne l'horizon du risque mesuré en nombre d'années. Par exemple 1/12 pour un horizon mensuel, 1/252 pour un horizon quotidien.

(-) Dans le cas où les rendements ne sont pas i i d, il convient de postuler un modèle de dépendance entre les rendements :

Supposons par exemple que les rendements vérifient

$$R_t = -\rho R_{t-1} + \varepsilon_t$$

Où  $\varepsilon_t$  est i i d :  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$

---

7. Rappelons la notation : i i d = identiquement et indépendamment distribué.

## CHAPITRE 1. LE RÔLE DE LA CORRÉLATION DANS LE CADRE DE LA COMPOSITION DE PORTEFEUILLES

Dans ce cas on peut montrer que :

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^T R_i\right) = \sigma_R^2[T + 2(T-1)\rho + 2(T-2)\rho^2 + \dots + 2(1)\rho^{T-1}] \quad (1.30)$$

Où  $\sigma_R^2 = \sigma_\varepsilon^2(1 - \rho^2)$  désigne la variance sur l'horizon de référence.

Supposons, par exemple<sup>8</sup>, que la volatilité quotidienne soit égale à 1%. Sur deux semaines (10 jours de cotations), la volatilité est multipliée par  $\sqrt{10} = 3,16$  si l'on suppose l'absence de dépendance des rendements ( $r = 0$ ). En revanche, si  $r = 0,2$ , la volatilité augmente de 3,79. Si  $r = 0,5$ , il faut multiplier la volatilité quotidienne par 5,10 pour obtenir la volatilité en base bi-hebdomadaire.

### Méthodes d'estimation de la Value-at-Risque : Méthodes paramétriques

Le calcul de la VaR repose sur l'évaluation de la distribution des pertes et profits futurs d'un portefeuille.

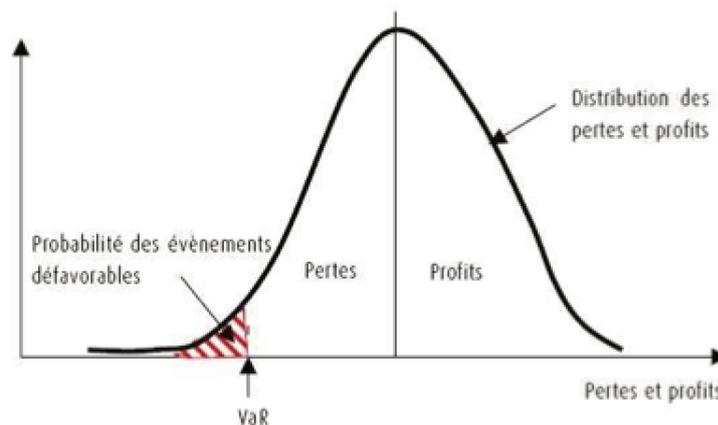


FIGURE 1.8 – Représentation de la VaR  
Source : Institut numérique (2013),[?]

Nous allons nous concentrer sur les méthodes classiques : La méthode historique, la méthode par simulation de Monte Carlo et la méthode paramétrique (variance/covariance).

- **La méthode historique** : La première méthode, appelé historique est sûrement la plus simple à utiliser. Cette dernière se base sur les variations historiques des rendements (cours, taux de changes, etc.), contrairement à la méthode paramétrique qui dépend d'hypothèses tirées de la loi normale. Le but de ce modèle est de faire ressortir, en prenant en compte les cours historiques, la valeur correspondant au seuil de confiance désiré. Pour illustrer ce calcul, nous avons choisi un titre suisse, ABB, qui figure dans le SMI.<sup>9</sup> Nous avons pris 504 cours journaliers afin de calculer la VaR historique (mêmes données utilisées pour l'exemple de la méthode

8. Jorion (2007)

9. SMI (Swiss Market Index) : Indice boursier suisse qui comprend les vingt plus grosses capitalisations boursières suisses

### 1.3. LE RÔLE DE LA CORRÉLATION EN FINANCE DE MARCHÉ

---

paramétrique). Le portefeuille est uniquement constitué de titres ABB et vaut 10'000 CHF. La démarche est assez simple. Il faut en premier lieu obtenir les cours historiques pour le titre en question. Il faut prendre un minimum de 250 données pour que les résultats soient pertinents. Dans notre cas, nous avons sélectionné 504 données (deux années complètes de jours ouvrés). Ensuite, il faut calculer les rendements journaliers pour ces cours.

Les rendements journaliers se déterminent en calculant la variation de valeur d'une date à une autre. Communément on utilise la formule suivante :  $(\text{Jour 2} / \text{Jour 1}) - 1$

Pour déterminer les plus mauvaises performances réalisées, il faut transformer les Rendements en valeurs. L'opération est assez simple, il suffit de multiplier la valeur du Portefeuille avec les rendements. On multiplie 10'000 par -0.54%.

La seconde étape consiste à classer ces performances afin de pouvoir trouver celle qui nous intéresse. Un simple tri par ordre croissant nous permet d'avoir les performances classées de la plus mauvaise à la meilleure. Au final, le but est de trouver la valeur correspondant au 95% du total des performances (504 valeurs). Une règle de trois permet de trouver la performance voulu. 95% de 504 nous indique la 478ème valeur. Concrètement, cette valeur nous donne la VaR historique à un jour pour ce portefeuille. La dernière étape consiste uniquement à transformer cette VaR à un jour pour l'horizon temporel souhaité.

- **La simulation de Monte Carlo** : La méthode de simulation de Monte Carlo est relativement similaire à la méthode historique à l'instar du fait qu'elle va simuler des rendements futurs à partir des rendements du passé. Son fonctionnement est plus complexe car il demande la compréhension de la loi normale qui régit la simulation des rendements.

Cette méthode est davantage adaptée aux produits optionnels. La simulation de Monte Carlo est sûrement la plus précise, mais c'est la plus difficile et longue à mettre en place. Il faut posséder une excellente infrastructure si l'ont veut générer des simulations de plusieurs milliers de positions.

- **La Value at Risk paramétrique (variance/covariance)** : La dernière méthode, paramétrique (aussi appelé variance/covariance) part de l'hypothèse que la distribution des rendements dépend de la loi normale. Ce modèle va se baser sur plusieurs estimateurs statistiques dont la variance, l'écart-type ainsi que la moyenne. La mise en commun de ces éléments permet de déterminer une VaR. Ces calculs se complexifient selon la taille d'un portefeuille. Il n'est pas toujours évident de calculer une variance de plusieurs positions qui possèdent une pondération différente. Ce modèle se complexifie selon la taille d'un portefeuille. Pour une seule position le calcul est relativement simple. Les tableurs comme Excel intègrent une formule qui permet de calculer directement une VaR paramétrique pour une position. Si on possède un portefeuille, il faut passer par une matrice de variance/covariance, afin de déterminer la variance du portefeuille et ainsi pouvoir déterminer un écart-type.

Il existe deux paramètres indispensables à la détermination de la VaR. Il s'agit de l'horizon temporel et du seuil de confiance (aussi appelé intervalle de confiance). Ces deux paramètres dépendent du choix de l'utilisateur. Toutefois, il existe une certaine convention dans le choix de ces derniers. Par exemple, les accords de Bâle I recommandent un horizon de 10 jours et un intervalle de confiance de 99% pour traduire les risques de marché.

L'horizon temporel : Il est important de noter que le choix de la période sur laquelle on veut

## CHAPITRE 1. LE RÔLE DE LA CORRÉLATION DANS LE CADRE DE LA COMPOSITION DE PORTEFEUILLES

---

calculer la VaR dépend principalement de son utilisation. Plus une position est liquide, plus on veut pouvoir réadapter sa stratégie d'investissement rapidement. C'est la raison pour laquelle, le calcul d'une VaR à un jour est conseillé pour une gestion de portefeuille active. Au contraire pour une gestion de fonds ou de fonds de pension (positions peu liquides), une VaR sur vingt jours ou trente jours est plus adaptée. Au-delà de ce délai la VaR perd en pertinence car les principales méthodes de calcul se basent sur des rendements historiques. Il est déjà difficile d'estimer une VaR pour un horizon à très court terme, alors plus nous rallongeons la période considérée plus l'estimation sera biaisée.

L'intervalle de confiance : Le seuil de confiance dépend de l'utilisation de la VaR et de la mesure de risque que l'on veut obtenir. Notons que le pourcentage représenté par l'intervalle de confiance s'interprète comme la chance que nous avons de ne pas perdre plus que X sur Y jours.

Chaque entreprise, gestionnaire ou client décidera de l'intervalle qui s'adapte le mieux à la situation. En règle générale on choisit un seuil de 99%, 97.5% ou de 95%.

Pratiquement trois grandes classes de méthodes d'estimation de la VaR sont envisageables :

- Méthodes non-paramétriques (Historical Simulation, Weighted Historical Simulation, Filtered Historical Simulation...).
- Méthodes semi-paramétriques (CAViaR, théorie des extrêmes).
- Méthodes paramétriques (ARCH, GARCH univarié, GARCH multivarié, RiskMetrics).

Nous limiterons notre analyse aux méthodes d'estimation de la VaR de type univariées applicables :

- Aux rendements associés à la détention d'un actif.
- Aux rendements associés à la détention d'un portefeuille d'actifs en négligeant les gains liés à la diversification des risques et les corrélations entre actifs.

De plus, nous restreindrons le cadre de notre analyse aux méthodes d'estimation<sup>10</sup> aux méthodes paramétriques.

Nous ne présenterons ici les méthodes paramétriques suivantes :

1. La méthode de Monte Carlo.
2. Le modèle RiskMetric.
3. Les modèles ARCH-GARCH.

---

10. On trouve dans certains ouvrages le terme "méthodes de calcul" de la VaR. Ce terme est impropre, on doit plutôt utiliser le terme de "méthodes d'estimation" de la VaR. La VaR est le fractile d'une distribution de P&L, dès lors deux solutions :

- Soit la distribution de P&L est connue, et à ce moment on calcule le fractile correspondant.
- Mais généralement, la distribution de P&L n'est pas connue ou les paramètres de cette distribution ne sont pas connus. On doit estimer la densité associée, ou les paramètres de cette densité, ou son fractile directement. On parle alors de méthodes d'estimation de la VaR.

### 1. La méthode de Monte Carlo

La méthode de Monte Carlo consiste à simuler un grand nombre de fois les comportements futurs possibles des facteurs de risque selon un certain nombre d'hypothèses, et d'en déduire une distribution des pertes et profits à partir de laquelle on estime finalement un fractile (HS). Si cette approche peut s'appliquer, en théorie, quelles que soient les lois de probabilité suivies par les facteurs de risque, elle est couramment utilisée en pratique, pour des raisons techniques, en supposant que les variations relatives des paramètres de marché suivent des lois normales. Cette méthode convient également à tous les types d'instruments, y compris optionnels, et permet de tester de nombreux scénarios et d'y inclure explicitement des queues de distribution épaisses (événements extrêmes pris en compte dans une certaine mesure).

### 2. Le modèle RiskMetric

RiskMetrics a été développé par la banque JP Morgan au début des années 90 et a permis de populariser le concept de VaR. Ce modèle repose sur des hypothèses théoriques assez contraignantes. Dans ce modèle, les principales hypothèses simplificatrices consistent à supposer, d'une part, que les lois de probabilité qui régissent les distributions des variations des prix de marché sont normales et, d'autre part, que les instruments présentent un profil de risque linéaire. Dans le cas d'une approche univariée, la VaR issue de RiskMetrics définie pour un taux de couverture de  $\alpha\%$  peut s'écrire sous la forme :

$$VaR_t(\alpha) = -\Phi(\alpha)\sqrt{h_t} - \mu \quad (1.31)$$

Où  $\mu$  désigne l'espérance des rendements et  $h_t$  la variance conditionnelle, telle que :

$$h_t = \lambda h_{t-1} + (1 - \lambda)r_{t-1}^2 \quad (1.32)$$

Où  $\lambda$  désigne un paramètre (*decay parameter*) généralement fixé à 0,97.

Dans le modèle RiskMetrics, la variance conditionnelle est supposée suivre un processus de type *EWMA* (*Exponential Weighted Moving Average*) : la prévision pour la date  $t$  est une combinaison linéaire de l'innovation passée et de la valeur passée de la variance. Ce processus est un cas particulier des modèles GARCH, et plus spécifiquement des modèles IGARCH.

Parmi les avantages de RiskMetrics, sous ces hypothèses, la matrice de variances/covariances peut être appliquée assez directement aux positions détenues pour calculer la VaR. Les calculs utilisés dans la méthode RiskMetrics sont rapides et simples, et requièrent uniquement la connaissance de la matrice des variances/covariances des rendements du portefeuille. Cependant, cette méthode s'avère être inadaptée aux portefeuilles non linéaires (instruments optionnels) et théoriquement peu adaptée aux queues de distribution épaisses et aux distributions non normales des rendements. Par ailleurs, la fixation du decay parameter peut poser problème sur certains échantillons (contrairement aux paramètres des modèles GARCH qui sont estimés par Maximum de Vraisemblance).

### 3. Les modèles GARCH

Les modèles GARCH permettent de modéliser et de prévoir la variance conditionnelle de la

## CHAPITRE 1. LE RÔLE DE LA CORRÉLATION DANS LE CADRE DE LA COMPOSITION DE PORTEFEUILLES

---

distribution de pertes et profits, ce qui permet dans un second temps de déduire une modélisation ou une prévision de la Value-at-Risk sous un certain nombre d'hypothèses concernant la distribution conditionnelle des rendements.

Sous l'hypothèse de normalité de la distribution conditionnelle des P&L, la prévision de VaR associée à un taux de couverture de  $\alpha\%$  est définie par :

$$VaR_{t+1|t}(\alpha) = -\mu - \sqrt{h_{t+1}}\Phi^{-1}(\alpha) \quad (1.33)$$

Où  $h_{t+1}$  désigne la variance conditionnelle des rendements. Pour toute distribution elliptique, la prévision de VaR est une transformée linéaire de la prévision de variance (volatilité). Prévoir la variance permet de prévoir la VaR.

Une distribution appartient à la famille des distributions elliptiques si le logarithme de sa densité peut s'écrire sous la forme :

$$\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2 = c \quad (1.34)$$

Où  $c$  désigne une constante,  $\mu$  est un paramètre de position (*location parameter*) et  $\sigma$  un terme d'échelle (*scale parameter*)<sup>11</sup>.

### Risque de portefeuille

Jusqu'à présent, nous avons considéré la VaR associée aux P&L d'un seul actif. Cependant, la question qui se pose est comment calculer la VaR d'un portefeuille composé de plusieurs actifs ? Cette question admet deux réponses possibles :

La première réponse consiste à considérer le rendement global du portefeuille comme celui d'un actif particulier et à calculer la VaR directement sur ce rendement agrégé. Cette méthode représente l'avantage de la simplicité. Mais elle a également l'inconvénient qu'elle néglige les covariances entre les rendements des actifs et par conséquent elle néglige toute diversification potentielle des risques.

La deuxième consiste à prendre en compte explicitement les corrélations entre les actifs du portefeuille pour le calcul de la VaR ; ce qui correspond à une approche multivariée de la VaR.

Nous présentons l'approche multivariée de la VaR, dans laquelle la VaR est construite comme une combinaison des risques associés aux différents actifs du portefeuille. Si les positions du portefeuille sont maintenues sur l'horizon du risque, le rendement du portefeuille est une combinaison linéaire des rendements des actifs qui le composent, dans laquelle les poids sont définis par montant relatif investi en début de période.

### Rendement d'un portefeuille :

Le rendement  $R_{p,t}$  un portefeuille de  $n$  actifs est défini par :  $R_{p,t} = \sum_{i=1}^n W_i R_{i,t}$

Où  $R_{i,t}$  désigne le rendement de l'actif  $i$  et  $w_i$  le poids associé à cet actif. Avec, par convention :  $w_i = \frac{w_i}{W}$   $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$

où  $\omega_i$  désigne le montant investi dans le titre  $i$  en début de période et  $W$  la valeur totale du portefeuille. Le rendement du portefeuille peut s'écrire sous forme vectorielle :

---

11. Par exemple, la distribution normale, la distribution de Student et la distribution normale inverse gaussienne (NIG) font partie de famille des distributions elliptiques

$$\begin{aligned}
 R_{p,t} &= w' R \\
 \omega &= (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \\
 R &= (R_1, R_2, \dots, R_n)
 \end{aligned}
 \tag{1.35}$$

Les poids  $w_i$  peuvent être positifs ou négatifs. On exclut en revanche le cas où la valeur totale du portefeuille serait nulle, i.e.  $W = 0$ , puisque dans ce cas, les poids  $w_i = W_i/W$  ne seraient pas définis. Les moments associés aux rendements du portefeuille sont :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(R_{p,t}) &= w' \mathbb{E}(R) = \mu_p \\
 \mathbb{V}(R_{p,t}) &= w' \Sigma w = \sigma_p^2
 \end{aligned}
 \tag{1.36}$$

où  $\Sigma$  désigne la matrice de variance covariance des rendements des  $n$  actifs<sup>12</sup>.

#### VaR d'un portefeuille :

A partir d'un portefeuille, certains reporting proposent deux types de VaR : la VaR diversifiée (diversified VaR) qui tient compte de la diversification des risques via la structure de covariance des rendements des titres et la VaR non diversifiée (undiversified VaR) qui néglige toute diversification des risques dans le portefeuille.

Pour commencer on se place dans le cas simple d'une distribution normale de P&L pour tous les actifs  $i=1, \dots, n$ , d'espérance de rendement nul. Par conséquent, le rendement du portefeuille  $R_{p,t}$  est lui aussi normal.

La Value-at-Risk diversifiée (ou Value-at-Risk) du portefeuille tient compte des bénéfices de la diversification des risques au sein du portefeuille. Pour un taux de couverture de  $\alpha\%$  et sous l'hypothèse de normalité, cette VaR, notée  $VaR_{p,t}(\alpha)$ , est définie par :

$$VaR_{p,t}(\alpha) = -\Phi^{-1}(\alpha) \sigma_P W = -\Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{X' \Sigma X}
 \tag{1.38}$$

La Value-at-Risk non diversifiée du portefeuille correspond à la somme des VaR individuelles ou à la VaR d'un portefeuille dans lequel il n'y a pas de position courte et où tous les rendements  $VaR_{\mu,t}(\alpha) = \sum_{i=1}^n VaR_{i,t}(\alpha)$ . L'écart entre  $VaR_{\mu,t}(\alpha)$  et  $VaR_{p,t}(\alpha)$  donne une mesure de la réduction du risque de portefeuille liée à la diversification.

La Value at Risk est un indicateur de risque très utilisé depuis les années 90, presque par les institutions financières. Cependant la VaR présente certaines limites qu'il ne faut pas perdre de vue. Les limites résident dans les modèles utilisés pour le calcul de la value at Risk. Ces derniers se basent sur des hypothèses qui ne coïncident pas toujours avec la réalité.

Comme nous l'avons vu auparavant, certaines méthodes de calculs se basent sur la normalité des variations de prix. En d'autres termes, les variations des prix suivent une loi normale. En réalité, la variation des cours d'une position boursière peut varier d'un extrême à un autre.

---

<sup>12</sup>.

$$\Sigma = \begin{pmatrix}
 var(R_1) & cov(R_1, R_2) & \dots & cov(R_1, R_N) \\
 \vdots & var(R_2) & \vdots & \\
 & & \ddots & \\
 cov(R_N, R_1) & cov(R_N, R_2) & \dots & var(R_N)
 \end{pmatrix}
 \tag{1.37}$$

## CHAPITRE 1. LE RÔLE DE LA CORRÉLATION DANS LE CADRE DE LA COMPOSITION DE PORTEFEUILLES

---

Cette volatilité (représenté par l'écart-type des rendements d'une position) est utilisée dans le calcul de la VaR. Plus cette volatilité est importante plus la pertinence et la précision de la VaR seront diminuées.

La VaR ne prend pas en compte la liquidité des marchés. En cas de crise, les marchés financiers s'affolent et il n'est pas toujours évident de pouvoir vendre des positions. Il se peut même que cela soit impossible. La crise des « Subprimes » est un excellent moyen d'illustrer ce problème. Les crédits à risques au centre de cette débâcle financière ne s'échangeaient pas ou à moins de la moitié de leur valeur nominale. Pour calculer une VaR pertinente, il faut posséder un historique de minimum de deux cours journaliers sur une période de douze mois. Avec moins d'information, la VaR perd en pertinence et en précision.

Enfin, une limite essentielle, est celle liée aux chutes de marchés. Lorsque les marchés financiers se trouvent au centre d'une crise, la volatilité a tendance à s'envoler. Comme nous l'avons vu, la volatilité est un estimateur de la VaR. Plus cet estimateur n'est élevé, plus la pertinence et la précision de la VaR se verront diminuées. Ce raisonnement peut paraître logique si nous partons de l'hypothèse qu'il est difficile de prédire l'évolution des marchés en cas de crise. Les modèles classiques de calcul de VaR utilisent les rendements historiques pour estimer la VaR. Si les marchés chutent, ces rendements historiques ne pourront pas estimer les pertes ou les gains liés à un événement extrême.

Au lieu de cela, ces séries chronologiques sont marquées par des queues épaisses. Il ensuite des changements extrêmes dans le risque facteurs sont considérablement plus probables que ce qui est pris en compte dans l'hypothèse d'une normalité de distribution. La chute des cours des actions provoquée par la crise des actions de 1987, par exemple, équivalait à quelque chose entre 10 et 20 écarts types. Considérant que sous Normalité, un changement de 7 écarts-types devrait en moyenne se produire un jour sur un milliard années, l'hypothèse de normalité semble insuffisante. Les tests de résistance ne sont pas basés sur des statistiques hypothèses sur la répartition des variations des facteurs de risque. C'est pourquoi les résultats de tests de stress ne sont pas faussés par les queues épaisses.

Notons que la VaR présente de nombreux avantages : sa simplicité d'interprétation, son caractère généraliste et la dimension probabiliste de la mesure de risque. Mais elle présente aussi certains inconvénients que nous évoquons maintenant :

- la VaR est sujette au risque de modèle : une erreur de spécification de la distribution de P&L par exemple.
- la VaR est sujette au risque d'implémentation liée à la structure des données requises pour estimer la P&L distribution ou la VaR directement.

Mais tous ces risques ne sont pas propres à la VaR.

- Cette mesure de risque ne donne aucune information sur les pertes au delà de la VaR
- Cette mesure peut conduire les agents à prendre de "mauvaise décision" d'investissement.
- Cette mesure peut conduire certains agents à prendre volontairement plus de risque dans un système de management des risques décentralisé.

### 1.3. LE RÔLE DE LA CORRÉLATION EN FINANCE DE MARCHÉ

La Value-at-Risk ne donne aucune information sur l'ampleur des pertes extrêmes (ou pertes en excès) qui peuvent apparaître au delà de la VaR. Par conséquent, deux positions peuvent avoir la même VaR avec des risques extrêmes totalement différents.

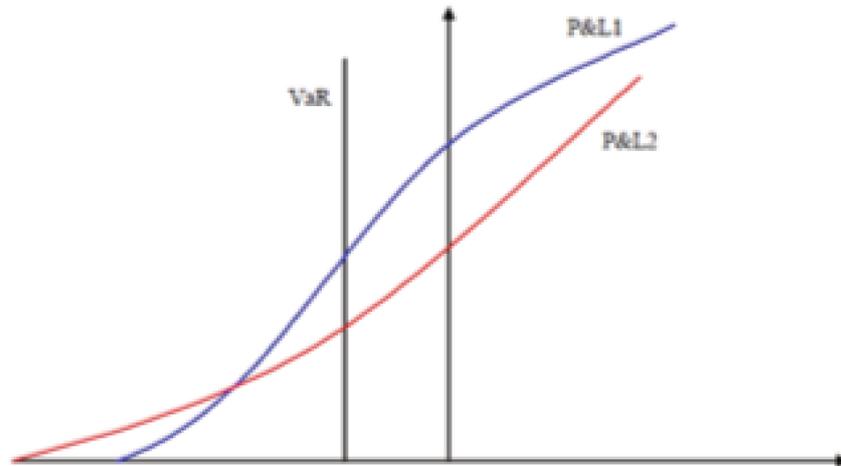


FIGURE 1.9 – Pertes extrêmes de la VaR  
Source : [99] Christophe Hurlin (2008)

Cette mesure de risque peut donc entraîner des agents à prendre de mauvaises décisions d'investissement ou à prendre volontairement plus de risques. C'est à dire, la Value-at-Risque d'un actif financier ou d'un portefeuille est la perte maximale attendue, peut être définie en unité monétaire sur une période donnée et à un seuil de probabilité fixé, sous les conditions normales du marché. Par exemple pour une  $VaR_{95\%} = 3\%$ , alors dans 95% des cas le portefeuille subira une perte inférieure à 3%.

Soient, par exemple, deux projets, dont les rendements notés respectivement  $R_1$  et  $R_2$  admettent associées aux projet 1 (P&L1) et projet 2 (P&L2) une distribution discrète et équiprobables sur les ensembles de valeurs suivantes :

$$R_1 = \{-10; -8; -6; -4; -2; 0; 2; 4; 6; 8\}$$
$$R_2 = \{-11; -7; -6; -4; -2; 0; 2; 4; 6; 8\}$$

les deux projets ont la même espérance et la même VaR à 10%

$$VaR_1(0, 1) = VaR_2(0, 1) = 9$$

Or le projet 2 peut engendrer des pertes en excès (-11) plus importante que le projet 1(-10). Cette limite peut avoir des conséquences importantes pour un investisseur :

- Supposons qu'un investisseur décide de financer un projet sur la base d'une analyse moyenne-VaR;

## CHAPITRE 1. LE RÔLE DE LA CORRÉLATION DANS LE CADRE DE LA COMPOSITION DE PORTEFEUILLES

---

- Supposons que ce projet peut générer de très forts rendements, mais aussi des très fortes pertes ;
- Une analyse fondée sur la VaR peut conduire à adopter le projet, si les plus fortes pertes n'affectent pas la VaR (parce que ces pertes excèdent la VaR), et cela quels que soient les rendements positif attendus et la taille des pertes potentielles.

L'analyse moyenne-VaR peut conduire à accepter des projets avec de forts rendements positifs, quelles que soient les possibles pertes associées, dès lors que la réalisation de ces pertes est suffisamment peu probable : une telle situation peut conduire les investisseurs à s'exposer à de très fortes pertes.

De la même façon, l'usage de la VaR dans un système de gestion des risques reposant sur une relation principal-agent peut conduire à des effets non désirables : Supposons que la gestion d'actif est décentralisée et que les traders ou les assets managers sont soumis à des limites de risques en termes de VaR.

Le trader peut avoir intérêt alors (politique de bonus) à prendre des positions très risquées, mais ayant des probabilités de réalisation faibles afin de ne pas atteindre les limites de risque établies par les systèmes de contrôle des risques. Plus généralement, on peut se poser la question de savoir si la VaR est vraiment une bonne mesure des risques ? On peut évoquer de la notion de mesure cohérente des risques.

La notion de mesure cohérente de risque a été développée par Artzner et al. (1997, 1999)<sup>13</sup> Artzner et al. (1997, 1999) ont postulé un ensemble d'axiomes (axiomes de cohérence) sur ce que doit vérifier une mesure de risque.

Soient  $X$  et  $Y$  deux distributions de P&L associées à deux portefeuilles et soit  $\varrho(\cdot)$  une mesure de risque sur un horizon donné. La mesure de risque  $\varrho(\cdot)$  est dite cohérente seulement si elle satisfait les axiomes suivants :

1. Monotonie :  $Y > X \Rightarrow \varrho(Y) \leq \varrho(X)$
2. Subadditivité :  $\varrho(X + Y) \leq \varrho(X) + \varrho(Y)$
3. Homogénéité positive :  $\varrho(hX) = h\varrho(X)$  pour  $h > 0$
4. Invariance translationnelle :  $\varrho(X + n) = \varrho(X) + n \quad \forall n$ .

L'axiome le plus important est celui de subadditivité. Il signifie qu'un portefeuille constitué de sous portefeuilles ne doit pas être plus risqué (au regard d'une mesure cohérente) que la somme des risques associés aux sous portefeuilles. Cet axiome se fonde sur l'idée que l'agrégation des risques individuels doit conduire à une diversification des risques et donc à une diminution du risque global, ou dans le pire des cas à son maintien de celui-ci. C'est cet axiome qui fonde la diversification des risques.

Si les risques sont subadditifs, l'addition des risques individuels donne une sorte d'enveloppe

---

13.

- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M., Heath, D., 1997. Thinking coherently. Risk 10 (11), 68-71.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M., Heath, D., 1999. Coherent measures of risk. Mathematical Finance 9(3), 203-228..

### 1.3. LE RÔLE DE LA CORRÉLATION EN FINANCE DE MARCHÉ

supérieure des risques ou une sorte d'estimation conservatrice des risques. Mais si ce n'est pas le cas, l'utilisation du risque agrégé comme indicateur de risque global peut conduire à sous évaluer le risque global. La Value-at-Risk est elle alors une mesure cohérente du risque ?

On peut montrer que la Value-at-Risk ne vérifie pas l'axiome de subadditivité.

Considérons, par exemple, deux titres A et B. La probabilité de défaut sur chaque titre est de 4% et on anticipe une perte de 100 en cas de défaut, et une perte nulle en cas d'absence de défaut. La VaR à 5% de chaque titre est nulle.

$$VaR_A(5\%) = VaR_B(5\%) = VaR_A(5\%) + VaR_B(5\%) = 0$$

Prenons l'exemple de (Dowd,2005) : Supposons que les défauts soient indépendants. Au niveau du portefeuille total (une obligation A et une obligation B), la P&L est la suivante : P/L=

$$\begin{cases} 0 & \text{avec une probabilité } p_1 = 0,96^2 = 0,9216 \\ -200 & \text{avec une probabilité } p_2 = 0,04^2 = 0,0016 \\ -100 & \text{avec une probabilité } p_3 = 0,0768 \end{cases}$$

Cela implique une VaR égale à :

$$VaR_{A+B}(5\%) = 100 > VaR_A(5\%) + VaR_B(5\%) = 0$$

La VaR n'est pas subadditive. On peut rendre la VaR subadditive en imposant des hypothèses fortes sur la distribution de P&L, notamment en supposant que la distribution appartient à la famille des distributions elliptiques.<sup>14</sup>

Remarque : *L'Expected Shortfall* (ES) associée à un taux de couverture de  $\alpha\%$  correspond à la moyenne des  $\alpha\%$  pires pertes attendues telle que :

$$ES_t(\alpha) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F_{R_t}^{-1}(p) dp \quad (1.39)$$

Où  $F_{R_t}(\cdot)$  désigne la fonction de répartition associée à la fonction de densité  $f_{R_t}(r)$ . Par convention, on exprime l'ES sous forme positive comme la VaR, alors qu'il s'agit d'une perte moyenne.

*L'Expected Shortfall* nous donne une information sur la moyenne des pertes dans les pires états de la nature, c'est à dire dans les  $\alpha\%$  situations où les pertes dépassant la  $VaR(\alpha)$ . Pour une distribution discrète, on a :

$$ES(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \sum_{p=0}^{\alpha} p^{\text{ème plus forte perte}} \times Pr(p^{\text{ème plus forte perte}}) \quad (1.40)$$

*L'Expected Shortfall* (ES) est une mesure cohérente de risque et vérifie en particulier l'axiome de sub-additivité. Considérons deux distributions discrètes de P&L, notées A et B, avec N quantiles équiprobables. Alors :

$ES_A(\alpha) + ES_B(\alpha) =$  moyenne des  $N\alpha$  plus fortes pertes sur A + moyenne des  $N\alpha$  plus fortes pertes sur B. Donc par conséquent :

$ES_A(\alpha) + ES_B(\alpha) \geq$  moyenne des  $N\alpha$  plus fortes pertes sur A+B =  $ES_{A+B}(\alpha)$

---

14. cf. Artzner et al., 1999

## CHAPITRE 1. LE RÔLE DE LA CORRÉLATION DANS LE CADRE DE LA COMPOSITION DE PORTEFEUILLES

---

Remarque : Selon Hurlin [99] pour calculer L'ES, pour certaines distributions de P&L (distribution normale notamment) il existe des formules analytiques. Dans les autres cas, on utilise des approximations numériques.

Dans le cas d'une distribution de P&L normale centrée réduite l'Expected Shortfall associée à un taux de couverture de  $\alpha\%$  vaut :

$$ES_t(\alpha) = \exp\left(\frac{-F_t^{-1}(\alpha)^2}{2}\right) \frac{\sigma}{\alpha\sqrt{2\pi}} \quad (1.41)$$

Dans le cas d'une loi  $N(0,1)$ , cette expression est équivalente à l'expression suivante :

$$ES_t(\alpha) = \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{0,05} \quad (1.42)$$

Où  $\phi$  et  $\Phi$  désignent respectivement la densité et la répartition de la loi normale standard.

Dans le cas général, il n'existe donc pas de formule analytique pour l'ES et on utilise des approximations numériques. Une méthode de calcul possible est alors celle de la moyenne des VaR (average VaR) : on calcule  $N$  VaR associées à  $N$  taux de couverture équi-répartis sur le segment  $[0, \alpha]$  et l'on calcule la moyenne de ces VaR. Lorsque  $N$  tend vers l'infini, la moyenne empirique des VaR converge vers l'ES.

Dans le travail de Nawroth A.P. Anfuso F. et Akesson F. (2014), ces auteurs ont proposé une méthode pour caractériser et mesurer les corrélations breakdowns. Leur analyse porte sur la structure des corrélations, et non sur le processus stochastique qui régit l'évolution des facteurs de risque individuels. Ils ont démontré dans quelle mesure le bénéfice de la diversification devrait être réduit, comment les corrélations les plus défavorables peuvent augmenter les calculs de la VaR standard, et ont fourni un moyen pragmatique d'identifier puis de corriger les spécifications de modèles à impact élevé dans les modèles VaR existants. Leur analyse commence par le choix de la mesure de dépendance entre deux séries temporelles. Cette approche est développée dans le chapitre 2.

Les tests de stress sont une contrepartie commune aux modèles objectifs utilisés pour la surveillance quotidienne des risques. La valeur à risque (VaR) est un exemple de modèle objectif. Un modèle de VaR ne fait pas la lumière sur la dimension de tels lourds pertes. Deux raisons sont possibles :

- La première raison pour laquelle des tests de résistance sont requis comme mesure complémentaire : Les tests de résistance servent à capturer les pertes extrêmes potentielles
- La deuxième raison importante pour laquelle les calculs de la VaR doivent être combinés à des tests de résistance réside dans l'attitude quelque peu sceptique à l'égard des hypothèses sur lesquelles la plupart des calculs de VaR sont basés.

## 1.4 Stress testing

### 1.4.1 Les approches du stress testing

Le stress testing est un outil important de gestion des risques utilisé par les institutions financières, les banques centrales et les organismes de régulation, permettant de mesurer la vulnérabilité d'une institution financière ou d'un système financier à des chocs macroéconomiques inhabituels mais susceptibles de se produire. On peut distinguer deux niveaux d'application des stress tests :

- Une application micro qui se focalise sur les impacts au niveau d'une seule institution financière, généralement conduite par un groupe bancaire sous la supervision de la banque centrale.
- Une application au niveau macro qui fait référence à l'impact sur l'ensemble d'un système bancaire ou encore sur une région géographique, généralement conduite par les banques centrales ou autres organes de régulation.

Dans un examen approfondi des méthodes macroéconomiques de stress testing, Sorge (2004) distingue deux approches générales du stress testing, une approche "piecewise" ou par morceaux et une approche intégrée. L'approche piecewise évalue la vulnérabilité à des facteurs de risque individuels. Elle implique généralement l'estimation de l'impact d'un choc macroéconomique sur une seule mesure de la solidité financière. L'approche intégrée vise à évaluer la sensibilité à de multiples facteurs de risques. Elle tente ainsi de modéliser l'impact d'un choc macroéconomique sur plusieurs risques à la fois (risque de crédit et risque de marché par exemple).

Pour ce qui est des méthodes utilisées pour la modélisation dans ces approches, Sorge (2004) parle de deux options de modélisation principales pour chacune des deux approches. Pour l'approche piecewise l'utilisation de séries temporelles ou de données en panel d'un côté et des modèles à forme réduite d'un autre côté. Pour l'approche intégrée Sorge cite l'utilisation des modèles de risque macroéconomique à la Wilson (1997) et des modèles micro-structurels à la Merton (1974). Toujours dans le même document, l'auteur fait également ressortir les avantages et les inconvénients de l'utilisation de chacune des approches.

Cependant, Antonella Foglia (2008) dans une enquête sur les approches du stress testing utilisées par les banques centrales, nous fait remarquer que les banques centrales ont acquis beaucoup d'expertise dans la modélisation durant les dernières années. Elle souligne aussi la complexité de la modélisation et de l'organisation des stress tests au niveau macro. Une opération qui implique un certain nombre d'étapes. Une première étape consiste à élaborer un scénario de stress macro, cohérent et compatible avec le modèle macroéconomique en vigueur. Une deuxième étape où l'on applique des modèles satellites pour mesurer le risque de crédit et enfin une troisième étape qui vise à évaluer les pertes en vertu des scénarios de stress.

## CHAPITRE 1. LE RÔLE DE LA CORRÉLATION DANS LE CADRE DE LA COMPOSITION DE PORTEFEUILLES

---

### Importance des tests de résistance spécifiques au portefeuille

#### Importance des tests de résistance dans la gestion des risques

*Le Comité de Bâle (1995) a justifié la nécessité de procéder à des tests de résistance :*

*"Banks that use the internal models approach for meeting market risk capital requirements must have in place a rigorous and comprehensive stress testing program. Stress testing to identify events or influences that could greatly impact banks is a key component of a bank's assessment of its capital position.*

*Understanding and protecting against the vulnerabilities of a financial company's risk-taking activities is of course one of the major responsibilities of its board of directors and senior management. Banks' stress scenarios need to cover a range of factors that can create extraordinary losses or gains in trading portfolios, or make the control of risk in those portfolios very difficult. These factors include low-probability events in all major types of risks, including the various components of market, credit, and operational risks. Stress scenarios need to shed light on the impact of such events on positions that display both linear and nonlinear price characteristics (i.e. options and instruments that have options-like characteristics).*

*Banks' stress tests should be both of a quantitative and qualitative nature. Quantitative criteria should identify plausible stress scenarios to which banks could be exposed. Qualitative criteria should emphasise that two major goals of stress testing are to evaluate the capacity of the bank's capital to absorb potential large losses and to identify steps the bank can take to reduce its risk and conserve capital. This assessment is integral to setting and evaluating the bank's management strategy and the results of stress testing should be routinely communicated to senior management and, periodically, to the bank's board of directors."*

#### Scénario de stress rudimentaire

Parmi les possibles Scénario de stress, ceux-ci sont plus ou moins réalistes et plus ou moins complexes à mettre en œuvre.

Un scénario simple est celui des chocs mono-factoriels. Cette méthodologie se base sur une dégradation générale des taux de défaut associés à chaque note client. Elle est assez simple, mais permet de mesurer rapidement les effets d'un stress non seulement sur les fonds propres, mais aussi par exemple sur les créances douteuses et les provisions.

L'inconvénient de cette méthode est que la comparaison des effets d'une même crise entre plusieurs banques n'est a priori pas directement possible à moins que les échelles de notation interne existantes soient calibrées de la même manière, c'est à dire que le nombre de notes client soit identique et que les taux de défaut par classes soient égaux. C'est généralement le cas sur les marchés Corporate, car les banques s'obligent à dresser une table de correspondance entre note interne et rating externe (des agences de notation). Ce type de benchmark externe n'existe pas pour la banque de détail.

Le scénario des chocs macroéconomiques est plus complexe. Ainsi, en plus des chocs monofactoriels, le FMI propose également les scénarios macro suivants :

- Chute de la demande mondiale de 20% entraînant une croissance nulle sur deux ans
- Hausse des prix du pétrole de 48% à 40\$ sur deux ans (sans réaction monétaire)
- Hausse des prix du pétrole de 48% à 40\$ sur deux ans (avec réaction monétaire)
- Hausse des taux courts et des taux longs de 150 points de base la première année et de 300 points de base la seconde.

Ces scénarios macro, exploités par les économistes, peuvent être traduits en termes de niveau attendu du taux de créances douteuses litigieuses (CDL) et par suite en variation relative de taux de défaut, lesquels sont utilisés pour effectuer des évolutions de fonds propres, de créances douteuses et de provisions. Dans ce cas, les scénarios de crise tiennent compte des combinaisons de différents facteurs macro-économiques qui, par le biais de modèles économétriques, sont traduits en taux de CDL.

### Tests de résistance par la méthode VaR

*Les régulateurs exigent des tests de résistance en complément des modèles de VaR.*

La méthodologie de la VaR est assez bien connue : une période de détention de  $t$  jours et un niveau de confiance de  $p\%$  sont donnés. La VaR est une mesure statistique de la perte d'un portefeuille - telle que mesurée en unités monétaires - à ne pas dépasser avec une probabilité de  $p\%$  compte tenu du portefeuille reste constant pendant toute la période de détention. Les pertes supérieures à la VaR ne se produisent qu'avec une faible probabilité  $[(1-p)\%]$ .

Dans la même veine, le facteur de multiplication appliqué à la VaR dans le calcul de l'exigence de fonds propres réglementaires permet d'absorber l'incertitude qui subsiste quant à la précision des modèles.

Il existe des hypothèses dont la validité est discutable. D'une part, le marché. Les caractéristiques sont supposées ne pas changer dans le futur. Seulement, dans le cas où les mouvements de ce marché futur ressemblent à ceux du passé, les modèles peuvent produire des résultats fiables. Pourtant, il y a toujours eu des ruptures dans les mouvements du marché. Ils peuvent être attribuables à diverses causes, par exemple, à des crises de grande ampleur, telles que des guerres ou des catastrophes environnementales, des modifications de la politiques de taux d'intérêt ou de change suivies par les banques centrales, attaques spéculatives devises et autres. Dans ce contexte, une situation de stress signifie une rupture dans le temps constance d'un marché. L'objectif des tests de résistance est, entre autres, d'évaluer la perte potentielle résultant de telles pauses.

## CHAPITRE 1. LE RÔLE DE LA CORRÉLATION DANS LE CADRE DE LA COMPOSITION DE PORTEFEUILLES

---

### 1.4.2 Recherche de scénarios spécifiques aux cas les plus défavorables du portefeuille

#### Description du problème

Le concept de test de résistance repose sur la notion que la valeur d'un portefeuille dépend de facteurs de risque.

Appelons les facteurs de risque ayant un impact sur le portefeuille  $r_1, r_2 \dots, r_n$  et la fonction déterminant la valeur du portefeuille lorsque les valeurs de tous les risques sont données,  $P$ . Les facteurs de risque peuvent être combinés en un vecteur unique décrivant la situation du marché. Dans une situation de marché  $r$ , la valeur du portefeuille est  $P(r)$ .  $P(r_{MM})$  représente le vecteur associé à la valeur courante des facteurs de risque, c'est-à-dire la situation actuelle du marché. représente donc le valeur actuelle du portefeuille.

Le choix des facteurs de risque dépend du portefeuille. Différents portefeuilles sont, en général, influencés par différents facteurs de risque. Le nombre de facteurs de risque doit être choisi de manière à inclure tous les paramètres susceptibles d'avoir un impact sur la valeur du portefeuille. La fonction  $p$  dépend du portefeuille : un portefeuille différent à une fonction de valorisation différente.

Les tests de résistance répondent à la question "Que se passerait-il dans telle situation de marché".

Pour les tests de résistance, un scénario ( $r_{stress}$ ) est sélectionné selon des critères spécifiques de la valeur du portefeuille actuel. En comparant avec la valeur actuelle du portefeuille  $P(r_{MM})$  on peut évaluer les pertes qui seraient encourus si le marché passait soudainement  $r_{MM}$  à  $r_{stress}$ .

#### Normes de plausibilité

La plausibilité des scénarios est importante pour l'interprétation des résultats des tests de résistance. Les normes de plausibilité devraient exclure les scénarios qui sont presque impossibles et pourraient compromettre la crédibilité des résultats des tests de résistance. Pour cette raison, les corrélations entre les facteurs de risque doivent être prises en compte lors de l'identification des scénarios de stress (Kupiec 1998). Un scénario dans lequel les mouvements des facteurs risque, violent directement les corrélations n'est pas retenu, même si le mouvement individuel de chacune facteur de risque est assez plausible. Pour cette raison, les corrélations doivent être prises en compte lors de la définition des conditions de plausibilité.

## 1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, l'accent a été mis sur les différentes modélisations économétriques sur le rôle de la corrélation dans le marché financiers.

Nous nous sommes intéressés aux mesures du risque de perte et au rôle de la corrélation dans le cadre de la composition de portefeuilles. Ainsi pour voir quelle est l'intérêt du VaR et quelle sont les risques qui peut être mesurés par le VaR et les méthodes utilisées. Ce type de mesure provient de la nature non-gaussienne des distributions de rendement et des dépendances entre ces rentabilités. Et encore faire la décomposer la VaR d'un portefeuille c'est une problématique qui peut être posée.

La notion de risque en finance concerne l'éventualité d'observer des évolutions défavorables d'une variable du marché, le plus souvent cette variable est le prix de transaction d'un actif ou d'un portefeuille d'actifs. Ces changements sont d'autant plus dommageables pour les investisseurs qu'ils sont importants. Les investisseurs sont alors préoccupés par les forts mouvements des conditions du marché, tant en matière de prix qu'en matière de liquidité. Les autorités de marché, quant à elles, sont chargées de protéger le système financier des conditions extrêmes qui peuvent entraîner un risque systémique.

Dans les chapitres suivants nous parlons de la tendance des marchés est essentiellement fonction des données économiques. Cependant, tout marché est influencé par le comportement psychologique et les anticipations des changements de corrélation des investisseurs. Un investissement particulier est encore plus influencé par ces éléments difficilement pondérables. Au moment où un intervenant veut opérer sur un marché, la liquidité de ce marché peut être insuffisante. Après que la transaction a été effectuée, la contrepartie peut faire défaut.

## CHAPITRE 1. LE RÔLE DE LA CORRÉLATION DANS LE CADRE DE LA COMPOSITION DE PORTEFEUILLES

---

# Comment prendre en compte les ruptures de corrélation dans les modèles de risque

## 2.1 Introduction

La corrélation breakdown est une convergence soudaine de la corrélation entre les rendements des actifs négociés à la valeur initiale. On peut encore dire que c'est un changement imprévu dans les corrélations de la structure des « actifs financiers ». Le concept d'une corrélation breakdown décrit la tendance des corrélations à se déplacer vers un marché, réduit tous les avantages de la diversification juste au moment où elle est la plus nécessaire.

Cet effet apparaît notamment pendant les périodes de crises financières, mais il y a aussi des preuves qu'il apparaît au cours de phénomènes d'euphorie du marché. Les articles de Bertero et Mayer (1987)[16] et de King et Wadhvani (1990)[125] montrent une augmentation de la corrélation des rendements des actions au moment du Krach de 1987. Calvo et Reinhart (1987)[51] donnent des preuves du changement de corrélation associé à la crise mexicaine. Baig et Goldfajn (1999)[17] ont trouvé une augmentation de la corrélation sur les devises pendant la crise est-asiatique de 1997..

Pour mieux comprendre ce phénomène, nous nous intéressons d'abord aux corrélations entre les actifs financiers. Ensuite, nous cherchons à mettre en évidence les preuves d'une augmentation de la corrélation des rendements des actions en période de crises financière et comment le changement qui se produit peut affecter la dynamique des prix des actifs.

Les changements dans les corrélations mesurées impliquent que la distribution conjointe des rendements des actifs change dans les périodes de fortes volatilités. Même si le comportement des rendements des actifs est régi par un processus inchangé, on pourrait percevoir un lien entre la volatilité et les mesures de corrélation. En effet, un modèle simple normal bi-varié peut expliquer pourquoi des périodes d'augmentation (échantillonnage) de la volatilité correspondent également à des périodes relativement élevées (échantillonnage) de la corrélation. L'importance de ce dernier résultat a été illustrée par Ronn (1995) ; Boyer, Gibson et Loretan (1999) ; Forbes et Rigobon (1999). De même, Loretan et English (2000) ont démontré qu'une partie importante des changements dans les corrélations au fil du temps, y compris celles qui ont eu lieu à l'automne 1998, peut refléter rien de plus que l'effet prévisible des différences dans l'échan-

## CHAPITRE 2. COMMENT PRENDRE EN COMPTE LES RUPTURES DE CORRÉLATION DANS LES MODÈLES DE RISQUE

---

tillon de la volatilité sur les corrélations mesurées, plutôt que des ruptures dans le processus de génération de données pour les rendements des actifs.

King et Wadhvani (1990) ont souligné les modifications du coefficient de corrélation des rendements des actifs financiers associées à la notion de contagion. Ce terme fait référence à la propagation des chocs d'un marché à l'autre et peut s'expliquer par l'existence de liens entre les pays ou par le comportement rationnel et irrationnel des investisseurs internationaux (Karolyi, 2003). Cependant, avant de poursuivre avec les explications qui ont été données sur la question de la corrélation breakdown il faut vérifier que cette rupture a réellement eu lieu.

L'étude de la stabilité du coefficient de corrélation s'est révélée être une question difficile et les recherches récentes dans ce domaine ont mis en évidence deux problèmes majeurs.

Premièrement, le choix de «conditionner» l'indice de corrélation sur des périodes de forte volatilité n'est pas approprié si nous avons l'intention de tester une rupture de corrélation. De nombreuses études récentes ont montré que dans ce cas, nous obtenons des estimations biaisées de la corrélation vraie. Forbes et Rigobon (2002) ont étudié la corrélation entre le Mexique et 28 autres pays et ont montré que, lorsque la corrélation était ajustée pour tenir compte des variations de variance inférieures à 5%, les cas classifiés traditionnellement dans le groupe présentant une contagion présentaient encore des modifications significatives de corrélation. Boyer, Gibson et Loretan (1999)<sup>[15]</sup> ont montré comment les corrélations breakdowns sont générées, lors de la réalisation d'une variable conditionnement, pour les cas d'une paire de variables aléatoires normales à deux variables et d'un processus GARCH à deux variables avec un coefficient de corrélation contemporain constant. Rigobon (2003) a montré que l'hétéroscédasticité biaise les tests de contagion en fonction des coefficients de corrélation. Lorsque la contagion est définie comme une augmentation significative du co-movement du marché après un choc dans un pays, des travaux suggèrent que la contagion s'est produite lors de crises récentes.

Il a montré aussi que les coefficients de corrélation sont conditionnés par la volatilité du marché. Sous certaines hypothèses, il est possible de corriger ce biais. En utilisant cet ajustement, il n'y a pratiquement pas eu d'augmentation des coefficients de corrélation conditionnels (c'est-à-dire pas de contagion) pendant la crise asiatique de 1997, la dévaluation mexicaine de 1994 et le krach boursier américain de 1987. Il existe cependant un niveau élevé de co-movement du marché dans toutes les périodes, ce que nous appelons l'interdépendance. Il applique ensuite une nouvelle méthodologie qui permet de tester la stabilité du mécanisme de transmission, en tenant compte des problèmes qui se trouvent dans les dernières crises. Dans leur étude qui couvre 36 marchés boursiers au cours des trois dernières crises financières majeures (Mexique 1994, Asie 1997, Russie 1998), le mécanisme de transmission a changé dans moins de 10% des cas. Loretan et English (2000) ont calculé l'ajustement, pour tenir compte de la volatilité, les coefficients de corrélation entre les rendements quotidiens des indices boursiers britanniques FTSE 100 et DAX allemands. Ils n'ont donc pas mis en évidence de changement structurel lors de la crise mexicaine de 1994.

Le deuxième problème concerne la pertinence de la corrélation de Pearson. L'outil Index<sup>1</sup> en tant que mesure statistique de la dépendance lorsque les rendements ne sont pas issus de

---

1. Un indice est un outil statistique qui permet de mesurer l'évolution d'une valeur (V) dans le temps, à partir d'une même date de référence

## 2.2. ÉVIDENCES EMPIRIQUES ET CORRÉLATIONS BREAKDOWNS : MODÈLES ARCH

---

la classe des distributions elliptiques, dont la distribution normale multivariée est un membre. Embrechts, Meneil et Stramann (2001)[75] ont discuté du rôle du coefficient de corrélation linéaire et d'autres mesures de dépendance en dehors de la classe des distributions elliptiques. On sait, par exemple, que la corrélation conditionnelle d'une distribution normale multivariée tend vers zéro lorsque le seuil utilisé pour définir les queues de distribution tend vers l'infini. Cela contredit toutefois l'opinion largement répandue selon laquelle la corrélation entre les marchés augmente considérablement en présence de chocs négatifs importants.

Bien que Longin et Solnik (2001)[134] ont abordé cette question en utilisant les résultats asymptotiques du MEVT<sup>2</sup>, qui valent pour une large gamme de distributions paramétriques, ils ont appliqué leur méthodologie aux rendements boursiers mensuels de cinq marchés de capitaux matures et ont montré que les corrélations extrême gauche étaient nettement plus grandes que celles de droite et que leur distribution asymptotique était différente de celle de la normale multivariée. June M. L. Poon (2004) soutenu que les tests traditionnels de dépendance asymptotique extrême biaisent les résultats en faveur de cette hypothèse et ont suggéré une mesure supplémentaire de la dépendance extrême pour des variables asymptotiquement indépendantes. Ils ont appliqué la paire de mesures de dépendance aux données quotidiennes des rendements des indices boursiers des cinq plus grandes places boursières et ont conclu que la dépendance asymptotique entre les indices boursiers des pays européens (Royaume-Uni, Allemagne et France) a augmenté au fil du temps, mais que cette asymptotique entre l'Europe, les États-Unis et le Japon caractérisent le mieux leur comportement sur les marchés boursiers.

Dans le travail qui suit nous développons les méthodes utilisée dans la littérature. Dans un premier temps nous présentons le modèle multivarié GARCH et dans un second temps nous décrivons les mesures de VaR, puis nous comparons ces modèles.

## 2.2 Évidences empiriques et corrélations breakdowns : Mo- dèles ARCH

Jin et Maheu (2016) ont utilisé un modèle d'inférence bayésien de l'estimation dans leur article "Modeling covariance breakdowns in multivariate GARCH" proposent un moyen flexible afin d'accueillir les périodes des chutes hétérogènes de la dynamique de la matrice de covariance conditionnelle de modèles GARCH multivariés. Selon eux, la dynamique de la volatilité est régie par une spécification de MGARCH dans les périodes de l'activité normale des marchés. Ils proposent une procédure d'échantillonnage postérieure bayésienne efficace et démontrent comment calculer la probabilité marginale. Cette procédure, appliquée à des données quotidiennes sur les marchés boursiers, va conduire à une amélioration significative de la probabilité de gains et de choix du portefeuille marginal. On remarque que, la covariance breakdown a un écart temporaire très important de la matrice de covariance conditionnelle pour la dynamique implicite de (MGARCH).

Ils ont évoqué également le changement dans les variances conditionnelles pour les breakdowns

---

2. Multivariate extreme value theory : La théorie des valeurs extrêmes multivariées (MEVT) est la boîte à outils appropriée pour analyser plusieurs événements extrêmes simultanément. Cependant, la théorie des valeurs extrêmes multivariées est loin d'être facile d'accès ; ses principaux résultats sont formulés dans un cadre théorique de la mesure dans lequel un fil conducteur n'est pas visible.

## CHAPITRE 2. COMMENT PRENDRE EN COMPTE LES RUPTURES DE CORRÉLATION DANS LES MODÈLES DE RISQUE

dans chaque composant de la matrice de covariance conditionnelle. Cette dernière permettra de voir comment les corrélations conditionnelles sont touchées par les écarts. Afin d'éviter les problèmes des erreurs de spécification, ils ont créé les modélisations de la matrice de covariance, et se concentrent sur les corrélations en négligeant les hétéroscédasticités.

Le modèle d'inférence :

Pour le modèle d'inférence, on appelle bayésien, un modèle d'estimation associé à un coût et à une distribution qui minimise le risque ou la chaîne de Markov Monte Carlo, (MCMC). On applique une approche bayésienne pour montrer une inférence postérieure. Les paramètres inconnus du modèle sont  $\pi_1, \pi_2, \mu$  et  $\Theta$  avec  $\Theta$  l'ensemble de paramètres dans la spécification de GARCH que régit  $H_t$ . L'espace paramétrique augmente avec  $S_t$  et  $\Lambda_t$

La matrice de passage :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_t : \mu + H_t^{1/2} \Lambda_t^{1/2} Z_t \quad y_1 = 1, 2, 3 \dots \\ \mu : E(y_t | F_{t-1}) \quad \text{est le vecteur conditionnel constant et} \\ F_{t-1} : \quad \text{Sigma généré par les valeurs passées} \quad y_t \longrightarrow t - 1 \\ Z_t \sim NID(0, I)^5 \quad \text{Distributions} \\ H_t^{1/2} : \text{représente le facteur de Cholesky qui définit la matrice pour le modèle (MGARCH)} \\ \left( \begin{array}{cc} \pi_1, & 1 - \pi_1 \\ 1 & \pi_1, \pi_2 \end{array} \right) \end{array} \right.$$

$$\pi_1 | \pi_2, : \left\{ \begin{array}{l} p(S | \Theta, \pi_1, \pi_2, \mu, Y) \\ p(\pi_1, \pi_2 | S) \\ p(\Theta | S, \mu, Y) \\ p(\Lambda | S, \Theta, \mu, Y) \\ p(\mu | S, \Theta, Y) \end{array} \right\} \text{ Avec } S = \{S_t\}_{t=1}^T; Y = \{y_t\}_{t=1}^T; \Lambda = \{\Lambda_t\}_{t=1}^T$$

D'où l'échantillonnage  $S$ , conditionnel sur  $H$  et  $\mu$  est présenté comme suit :

$$\tilde{y}_t = H_t^{1/2} (y_t - \mu), \tilde{y}_t | \Lambda_t \sim (0, \Lambda_t)$$

L'échantillonnage  $\pi_1, \pi_2$  conditionnel postérieur distribué :

$$p(\pi_1 | S) \propto p(S, |\pi_1) p(\pi_1) \propto p(\pi_1) \pi_1^{n_1} (1 - \pi_1)^{n_2} \text{ De même pour } \pi_2 \text{ et l'échantillonnage } \Lambda, \mu.$$

Ils montrent que la probabilité marginale est un élément clé pour la comparaison avec le modèle d'inférence bayésien. Ce modèle permet d'évaluer les covariances breakdowns admises et compare la dynamique de la volatilité sous la spécification complète qui comprend l'impact des breakdowns  $V_t = H_t^{1/2} \Lambda_t (H_t)^{1/2}$  contre le composant du modèle (MGARCH).

Chesnay et Jondeau (2000) ont utilisé le modèle standard GARCH. Ce dernier met en évidence la croissance des corrélations entre les marchés d'actions internationaux en période de forte volatilité boursière. Ils ont estimé un modèle multivarié dans lequel la matrice de corrélation est dépendante des variations de régimes. Selon les données utilisées à partir des rendements

## 2.2. ÉVIDENCES EMPIRIQUES ET CORRÉLATIONS BREAKDOWNS : MODÈLES ARCH

---

boursiers de *SP*, DAX et le FTS pour la période de 1988 à 1999, leurs résultats montrent que les corrélations augmentent significativement en période de turbulence.

Boyer, Gibson et Loretan (1997)[15] ont appliquée le modèle VAR ainsi le modèle GARCH avec les simulations des variables normales bi-variées, ils ont démontré que les soucis de la stationnarité ne peuvent pas être justifiés par les corrélations breakdowns puisque les corrélations sont constantes. Ils ont aussi montré que les variations de corrélations dans le temps ne peuvent pas être détectées.

Les corrélations sont importantes pour la tarification et la couverture des dérivés dont le rendement dépend de plusieurs actifs. En conséquence, les gestionnaires des risques s'inquiètent que leurs couvertures soient inefficaces au moment où elles sont le plus nécessaires, notamment durant les situations où le marché est stressé. Bien que la décomposition des corrélations puisse être le résultat d'une analyse de données médiocre, d'autres preuves suggèrent que les corrections changent effectivement avec le temps.

Ainsi, l'instabilité des corrélations rendent difficile, voire impossible la couverture de l'exposition à un facteur de risque. Le but de cet article Boyer, Gibson et Loretan (1997) est de montrer que le test de changements de corrélations n'est pas aussi simple qu'on pourrait le penser. Plus spécifiquement, les auteurs démontrent que la division d'un échantillon de données se fait en fonction des réalisations ex-post d'une série. Disons par exemple entre des grandes valeurs et des petites valeurs de séries, il est possible d'avoir des résultats erronés et très trompeurs, car une telle procédure est susceptible de suggérer une rupture de corrélation, que les coefficients de corrélation varient ou non.

Boyer, Gibson et Loretan (1997)[15] examinent un ensemble de variables quotidiennes à données bi-variées des taux de change allemand et japonais. A partir de cet ensemble de données, ils trouvent que les modèles de corrélation conditionnelle calculé sont fortement similaires aux observations empiriques. Etant donné l'examen de données connues comme étant normales et bi-variées ; on admet que les variables aléatoires GARCH ne sont ni normales, ni identiquement distribuées, leurs variances évoluant dans le temps, cependant, comme dans le modèle de Bollerslev (1990), le coefficient de corrélation est constant. Les corrélations sont toujours observées sur des événements ou sur des mois avec des variances très élevées, même lorsque le processus de génération a une corrélation simultanée constante et une volatilité dans le temps.

En résumé, Boyer, Gibson et Loretan (1997) ont montré que les modifications des corrélations dans le temps ou entre les régimes ne peuvent pas être détectées de manière fiable en séparant un échantillon en fonction des données des valeurs obtenues. Ils sont montré que les changements de corrélation dans le temps ou entre les régimes ne peuvent pas être détectés de manière fiable en divisant un échantillon en fonction des valeurs des données anticipées.

Stelios et Dimitris (2009) ont étudié la structure de dépendance de la réalisation extrême de rendements entre les marchés du Japon et des États-Unis, et les marchés émergents de Chypre, de la Grèce et des six pays de la région Asie-Pacifique, en appliquant la théorie de la valeur extrême. Ils indiquent que les corrélations extrêmes gauches (risque de perte) ne sont pas substantiellement différentes des corrélations inconditionnelles ou de celles obtenues à partir d'un modèle multivarié à corrélation conditionnelle dynamique de GARCH (DCC) avec les variables

## CHAPITRE 2. COMMENT PRENDRE EN COMPTE LES RUPTURES DE CORRÉLATION DANS LES MODÈLES DE RISQUE

---

uni-variées asymétriques de GJR-GARCH. De plus, une analyse de regroupement montre que les pays examinés n'appartiennent pas à un bloc distinct sur la base des corrélations extrêmes. Les implications politiques sont que les avantages de la diversification du portefeuille entre le marché boursier chypriote et les marchés des pays de la région Asie-Pacifique, de la Grèce, du Japon et des États-Unis ne sont pas érodés pendant les périodes de crise, en ce sens qu'aucune rupture de corrélation n'a été constatée.

Stelios et Dimitris (2009) ont également choisi d'estimer les indices de corrélation à partir de modèles de volatilité à plusieurs variables. Le premier modèle qu'ils ont estimé est celui proposé par Bollerslev (1990) qui gère la grande dimensionnalité de l'espace paramétrique de la matrice de variance-covariance en adoptant l'hypothèse de corrélations contemporaines constantes (CCC). Dans la spécification du modèle CCC-GARCH, la matrice de variance conditionnelle est spécifiée. Dans ce modèle CCC-GARCH, la matrice de corrélation  $R$  est invariante dans le temps. Pour le cas GARCH à deux variables, le modèle CCC ne contient que 7 paramètres, contre 21 dans le modèle complet, et la position de la matrice de variance-covariance est facilement satisfaite. Dans ce cadre, le comportement asymétrique des covariances conditionnelles sur les marchés haussiers et baissiers est garanti par le paramétrage des variances conditionnelles. Dans leur cas, ils ont appliqué le modèle de Glosten-Jagannathan-Runkle (1993) GJR-GARCH. L'hypothèse selon laquelle les corrélations conditionnelles sont constantes peut sembler irréaliste dans de nombreuses applications empiriques telles que la dépendance des rendements des actions internationales.

Engle (2002) a étendu l'estimateur CCC en permettant aux corrélations conditionnelles de varier dans le temps. L'estimateur conditionnel dynamique (DCC) est obtenu en deux étapes. Dans la première étape, les modèles univariés GJR-GARCH sont estimés pour chaque série ; les résidus standardisés de la première étape, sont utilisés dans la deuxième étape de l'estimation des paramètres de corrélation. La structure de corrélation  $R$  est également la corrélation des données d'origine et est donnée par une matrice diagonale dont les éléments sont la racine carrée des éléments diagonaux de la matrice de covariance spécifiée par un processus GARCH.

On peut résumer que Stelios D et Dimitris (2009) trouvent que le degré de co-évolution des rendements n'a pas changé de manière significative au cours des dernières crises survenues dans les années 90. Mais encore ils sont estimés le degré de dépendance d'une extrême réalisation de rendements entre Chypre, six marchés boursiers de la région Asie-Pacifique, la Grèce et les marchés des États-Unis et du Japon.

Le principal avantage de l'approche en terme de valeurs extrêmes est qu'elle génère des mesures de dépendance même si la distribution gaussienne multivariée ne s'applique pas, comme c'est le cas pour les queues de rendements d'indices boursiers à haute fréquence. Les preuves qu'ils ont obtenues indiquent que les corrélations extrêmes ne sont pas substantiellement différentes de celles sans condition ni de celles obtenues à partir de modèles GARCH multivariés. Ces éléments de preuve corroborent la conclusion selon laquelle la rupture de la corrélation n'est pas prédominante en période de crise, comme on pouvait le penser a priori. De plus, ils ont appliqué une analyse de regroupement qui montre que les pays étudiés n'appartiennent pas à un bloc de pays distinct sur la base des corrélations extrêmes qu'ils ont estimé. La preuve de cette étude repose sur deux conditions : le premier est lié au choix du seuil. Une analyse de sensibilité a montré que les résultats sont robustes aux seuils choisis, bien que l'application de

seuils choisis de manière optimale corrobore les résultats obtenus. La deuxième condition est liée au choix de la mesure de dépendance de queue qu'ils ont utilisé et qui a été critiquée comme biaisant pour les résultats en faveur de la présence d'une dépendance asymptotique.

Les implications sont que des corrélations «extrêmes» devraient être attribuées à la volatilité accrue en période de turbulence et que les avantages tirés de la diversification du portefeuille avec les actifs des marchés des actifs étudiés ne sont pas modifiés pendant les périodes de crise. Selon Boyer, Gibson et Loretan (1997) montrent que les modifications des corrélations dans le temps ou entre les régimes ne peuvent pas être détectées et les corrélations breakdowns de ces séries ne peuvent pas être déterminées ou résolues, même avec la comparaison des coefficients de corrélation dans les mois à forte ou faible volatilité, ce processus de génération de données présente une corrélation non constante. De même, Stelios et Dimitris (2009) montrent que la corrélation des données d'origine est représentée par une matrice diagonale dont les éléments sont la racine carrée des éléments diagonaux de la matrice de covariance spécifiée par un processus GARCH. Parallèlement, Jin et Maheu (2016), la dynamique de la volatilité est régie par une spécification MGARCH dans les périodes d'activité normale des marchés et la probabilité marginale est un élément clé pour la comparaison avec le modèle d'inférence bayésien. Ce modèle permet d'évaluer les covariances breakdowns admises et compare la dynamique de la volatilité sous la spécification complète qui comprend l'impact des breakdowns contre le composant du modèle (MGARCH).

## 2.3 Corrélations Breakdowns et Value at risk (VaR)

Nawroth, Anfuso et Akesson (2014), ont utilisé une méthode pour caractériser et mesurer les corrélations. Ils ont eux aussi indiqué dans "la corrélation breakdown et l'influence des corrélations sur la VaR" que quand une baisse des marchés financiers se produit, les corrélations ont tendance à augmenter. En conséquence, l'effet de diversification de portefeuille est amoindri quand il est le plus nécessaire pour protéger les investisseurs contre les pertes importantes. Dans leur travail, ces auteurs ont proposé une méthode pour caractériser et mesurer les corrélations breakdowns.

Leur analyse porte sur la structure des corrélations, et non sur le processus stochastique qui régit l'évolution des facteurs de risque individuels. Ils ont démontré dans quelle mesure le bénéfice de la diversification devrait être réduit, comment les corrélations les plus défavorables peuvent augmenter les calculs de la VaR standard, et ont fourni un moyen pragmatique d'identifier et corriger les spécifications de modèles à impact élevé dans les modèles VaR existants. Leur analyse commence par le choix de la mesure de dépendance entre deux séries temporelles. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, les mesures de dépendance utilisées sont souvent basées sur le coefficient de corrélation de Pearson.

Selon eux les portefeuilles contenant des produits dérivés non linéaires peuvent avoir des caractéristiques qui sont incompatibles avec les hypothèses de répartition. Ils proposent une méthodologie qui permet d'estimer le niveau implicite de corrélations pour différents quantiles. Leur approche ne repose sur aucune hypothèse relative à la forme de la distribution conjointe. Dans leurs contributions postérieures, ils ont tenté d'écrire directement la variation des corrélations; si le niveau de confiance est plus élevé, ils ajoutent les impacts de corrélation breakdowns sur

## CHAPITRE 2. COMMENT PRENDRE EN COMPTE LES RUPTURES DE CORRÉLATION DANS LES MODÈLES DE RISQUE

l'estimation de la VaR, caractérisant également la variation des corrélations sous-jacentes structurées.

Ils ont analysée un portefeuille d'actions, où les seuls facteurs de risques pertinents considérés sont les processus stochastiques qui sous-tendent les valeurs des indices boursiers individuels. La Value at Risk (VaR) a été utilisé par ces auteurs pour mesurer la performance voir le chapitre 1.

Dans leur modèle, il n'y a que trois paramètres uni-variés : la moyenne, l'écart-type et les degrés de liberté de la distribution. La moyenne est supposée nulle, L'écart-type  $\sigma_t$  est estimé par une simple procédure EWMA<sup>3</sup> qui est définie comme suit :

$$\sigma_t^2 = \frac{\sum_{i=t-n}^{t-1} \lambda^{t-i} r_i^2}{\sum_{i=t-n}^{t-1} \lambda^{t-i}}$$

Nawroth, Anfuso, et Akesson (2014), ont donné une visualisation simple des corrélations breakdowns entre les différentes catégories de portefeuille. Pour ce qui est de la corrélation des rendements journaliers du portefeuille d'indices et la valeur à un jour estimée au risque (VaRe, les corrélations sont calculées à l'aide de 250 déclarations journalières pondérées égales). L'objectif est de déterminer si le portefeuille considéré est plus proche d'une corrélation non corrélée ou parfaitement corrélée. Et le point de départ est l'expression de la mesure de corrélation du quantile.

$$\text{Pour deux actifs, on a : } \rho_{VaR}(q) = \frac{r(q)^2 - \omega_x^2 r_x^2(q) - \omega_y^2 r_y^2(q)}{2\omega_x \omega_y r_x(q) r_y(q)} \quad (1)$$

où  $r(q)$  est le rendement du portefeuille. L'équation (1) a plus d'actifs et la baisse de la dépendance sur le niveau de confiance ( $q$ ) il est clair sur l'équation suivante :

$$\rho_{VaR} = \frac{r^2 - \sum_{k=1}^N \omega_k^2 r_k^2}{\sum_{k,l;k \neq l} \omega_k \omega_l r_k r_l} \quad (2)$$

$$\rho_{VaR} = \frac{r^2 - \sum_{k=1}^N \omega_k^2 r_k^2}{\sum_{k,l;k \neq l} \omega_k \omega_l r_k r_l - \sum_{k,l=1}^N \delta_{kl} \omega_i r_k \omega_j r_l} \quad (3)$$

$$\rho_{VaR} = \frac{r^2 - \sum_{k=1}^N \omega_k^2 r_k^2}{(\sum_{k=1}^N \omega_k^2 r_k^2) - \sum_{k=1}^N \omega_k^2 r_k^2} \quad (4)$$

En introduisant la VaR avec des hypothèses de corrélations différentes, on peut réécrire l'équation (4) en termes de VaR. Et VaRz est définie comme la VaR d'un portefeuille de composition identique à notre portefeuille historique (les mêmes volatilités que nos constituants historiques) mais avec des corrélations nulles entre les rendements des actifs. Cependant, en remplaçant les termes individuels de l'équation (4) avec VaRz VaRe et VaRwc, on obtient :

$$\rho_{VaR} = \frac{VaRe^2 - VaRz^2}{VaRwc^2 - VaRz^2}$$

Le principal avantage de l'expression de l'équation 4, est le lien avec les calculs de la Value-at-risk standard. Ce qui le rend pertinent pour les applications pratiques. En introduisant un ratio  $\rho_{VaR}$  dans cette l'équation on trouvera un lien direct entre la corrélation pondérée par la volatilité et une mesure de la VaR. Cela montre que dans la détermination paramétrique de la

3. The Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) où La moyenne mobile pondérée exponentiellement (EWMA) est une statistique de suivi du processus qui établit la moyenne des données d'une manière qui donne de moins en moins de poids aux données à mesure qu'elles sont éloignées dans le temps.

### 2.3. CORRÉLATIONS BREAKDOWNS ET VALUE AT RISK (VAR)

VaR, du moins si l'on limite l'analyse au cas des distributions elliptiques, l'équation ne porte pas de dépendance de quantile parce que la fonction de quantile tombe hors de l'expression. Pour extraire la caractéristique des données historiques, nous pouvons remplacer dans cette équation le paramétrique avec une détermination historique de la VaR (hVaR).

Donc l'équation peut se déduire de la fonction suivante :  $\rho_{VaR} = \frac{hVaR_e(q)^2 - hVaR_z^2}{hVaR_{wc}(q)^2 - hVaR_z(q)^2}$

Or  $hVaR_e$  est le portefeuille normal de  $hVaR$ , et  $hVaR_{wc}$  est le portefeuille partiel de  $hVaR$  et  $hVaR_z$  défini comme  $hVaR_e$  non corrélée, et simplement obtenu en traçant des événements aléatoirement à partir des distributions marginales historiques des données. Selon eux, la description de cette relation par la matrice de corrélation est souvent une mauvaise approximation et elle peut devenir de plus en plus inadéquate lorsqu'on considère des niveaux de confiance plus élevés.

Dans leurs travaux, ils ont proposé trois approches différentes pour identifier et modifier les limites principales de cette approximation. Cette analyse peut être facilement effectuée, fournissant une réponse qui dépendra du niveau de confiance choisi et de la composition du portefeuille. C'est un outil envisageable pour une situation de corrélation dans le pire des cas. Le concept de corrélations VaR a été généralisé, mettant en évidence le lien avec le cadre VaR standard. En se basant sur cette approche, nous pourrions dériver des corrélations dépendantes du niveau de confiance à partir de données historiques sans hypothèse de répartition forte pour les log de l'actif.

Ainsi, on propose un outil qui tient compte de l'hétéroscédasticité dans l'analyse de la corrélation. Ce dernier sert à ajuster le nombre calculé d'exceptions de VaR afin de corriger la spécification incorrecte du modèle des données utilisé. Ensuite, on montre que cet outil a la capacité de supprimer les effets de la mauvaise spécification sur deux niveaux. D'un côté, le premier niveau est la spécification du processus stochastique pour les facteurs de risque individuels, de l'autre, le deuxième niveau est la spécification de leur Co-mouvement.

Une analyse des corrélations asymétriques utilisant les statistiques en ce qui concerne le style, la taille, le bêta et les performances a été avancée, mais aucun modèle n'a été fourni pour reproduire l'asymétrie des corrélations observées dans les données. La méthode du facteur d'exception de la VaR  $f_p(\alpha)$  peut également être utilisée pour évaluer et améliorer les approches basées sur la copule comme (MCS) multivariate conditional Spearman'srho. Dans cet article, les auteurs n'ont pas utilisé le meilleur modèle pour décrire la relation entre les différentes séries temporelles. Mais ils ont bien montré comment comprendre la dépendance de l'évolution des prix entre deux facteurs de risque. Ils ont aussi fourni des outils concrets pour montrer et quantifier l'erreur produite par les calculateurs de VaR standard basés sur des modèles à risque multivarié. Après avoir précisé où les hypothèses simplifiées ont le plus d'impact, on peut choisir judicieusement le grand nombre de propositions de modèles d'évolution des facteurs de risque déjà disponibles dans la littérature financière. Boyer, Gibson et Loretan (1997) ont fait des simulations des variables aléatoires normales, ils ont noté que la connaissance de VaR permet de déterminer si le coefficient de corrélation  $\rho$  est inférieur ou supérieur à la corrélation conditionnel  $\rho_A$  entre les événements  $x$  et  $y$ , ils ont aussi montré comment on peut calculer la variance conditionnelle d'une variable aléatoire  $x$  normalement distribuée pour divers types d'événements de conditionnement.

Ils ont considéré quatre valeurs pour la corrélation inconditionnelle (20, 50, 80 et 95) et les

## CHAPITRE 2. COMMENT PRENDRE EN COMPTE LES RUPTURES DE CORRÉLATION DANS LES MODÈLES DE RISQUE

---

événements bilatéraux avec des probabilités de 50%, 10%, 5% et 1%. (Chaque partie à la moitié de la probabilité totale de l'événement). Le cas  $\Pr(A) = 50\%$  signifie que l'événement considéré consiste en une chute de  $x$  dans le quartile le plus inférieur ou le plus élevé de sa distribution. Cela correspond au cas où l'échantillon est scindé en sous-échantillons de taille égale, suivant la position de  $x$  par rapport à la médiane en matière de proximité, et qu'ils souhaitent pour vérifier si les corrélations des sous-échantillons diffèrent les unes des autres. Les cas de  $\Pr(A) = 10\%$  ou moins servent à comparer la corrélation entre les observations des données de queues (taille) avec la corrélation entre les observations ordinaires. Puis, on note que les paires de corrélations conditionnelles sont souvent très éloignées les unes des autres, en particulier lorsque le coefficient de corrélation est relativement petit. Sûrement, un analyste non méfiant pourrait être tenté de conclure que cette divergence est un exemple clair d'une rupture de corrélation.

Ils ont montré aussi que si  $x$  et  $y$  sont normales bivariées à deux variables avec une variance moyenne et une unité nulle. Les événements  $A$  sont des événements à deux côtés de la distribution marginale de  $x$  entre les données des observations ordinaires et inhabituelles. Mais, une fois de plus, les différences entre les corrélations conditionnelles sont causées par le choix des sous-échantillons uniquement et non par une modification des paramètres du processus de génération de données.

Une troisième forme de conditionnement consiste à examiner les sous-échantillons de données caractérisés par une forte volatilité. Supposons qu'un échantillon de  $(x; y)$  soit divisé en plusieurs sous-échantillons de taille égale (mois). Le sous-ensemble de mois à forte volatilité peut être défini comme l'ensemble au cours duquel le rapport de la variance (au cours d'un mois) de  $x$  à la variance globale (c'est-à-dire inconditionnelle) de  $x$  dépasse un certain seuil  $k$ . De plus, disons que  $x_t$  et  $y_t$  sont normales bi-variées avec des moyennes égales à 0, des variances égales à 1 et une corrélation de 0,5. Les mois à forte volatilité sont définis comme ceux où  $\text{VaR}(x)$  est supérieur ou égal à un seuil  $k$ . Et le mois de forte volatilité se manifeste par une corrélation conditionnelle plus grande en valeur absolue, que la corrélation inconditionnelle.

Là encore, il apparaît que les événements de conditionnement caractérisés par une volatilité élevée de  $x$  sont associés à une corrélation conditionnelle élevée entre  $x$  et  $y$ .

Boyer et Al (1997) montrent donc à nouveau des intervalles de confiance de 90% pour les corrélations conditionnelles théoriques sous l'hypothèse de normalité bi-variée. Et on observe, encore une fois, que les corrélations conditionnelles empiriques et théoriques sont assez similaires. Les corrélations conditionnelles empiriques ne sont jamais en dehors de l'intervalle de confiance de 90% pour des données normalement distribuées. Les auteurs ne peuvent pas conclure que les corrélations breakdown entre les deux séries empiriques est différente dans les queues de la distribution. Mais plutôt, ils concluent que, pour ces séries, la question des corrélations breakdown ne peut pas être résolue sur la base de cet exercice en divisant l'échantillon. Tandis que A.P. Nawroth, F. Anfuso, et F. Akesson (2014), montrent dans leurs contributions antérieures, qu'ils ont tenté d'écrire directement la variation des corrélations; si le niveau de confiance est plus élevé, ils ajoutent les impacts de corrélation breakdowns sur l'estimation du VaR, caractérisant également la variation des corrélations sous-jacentes structurées.

En proposant une méthodologie qui permet d'estimer le niveau implicite de corrélations pour différents quantiles. Leur approche ne repose sur aucune hypothèse sur la forme de la distribution conjointe.

## 2.4 Les corrélations breakdowns dans autres modèles de résolutions

Falbo et Grassi(2011)[77], ont proposé d'analyser l'effet introduit dans la dynamique d'un marché financier lorsque les agents anticipent l'apparition d'une baisse de corrélation Breakdowns. Il peut agir à la fois comme conséquence et comme un facteur déclenchant la crise financières. Ils ont développé un modèle où la demande excédentaire influe directement sur la variance et la corrélation des rendements des actifs. Ils ont montré également que, lorsque les agents anticipent l'effet de la demande excédentaire, ils peuvent générer à la fois un équilibre fondamental stable et une dynamique des prix instables.

Lorsque la demande excédentaire atteint, pour des raisons exogènes, des valeurs exceptionnellement élevées ou faibles, les investisseurs informés anticipent les rendements des actifs. Selon à la théorie du portefeuille standard, ils vont également modifier la composition de leur portefeuille en faveur des solutions extrêmes (à savoir, portefeuille composé par tous les actions ou les obligations).

En effet, les investisseurs peuvent anticiper l'origine de l'instabilité du marché, même si un comportement rationnel domine sur le marché. L'implication pour les investisseurs rationnels est d'être prudents dans leurs tentatives d'anticipation des breakdowns de corrélation, car ils peuvent finir par renforcer les effets de contagion plus que la protection de ceux-ci. D'après ces auteurs, le marché est composé des investisseurs rationnels informés et des spéculateurs mal informés mais grâce à une analyse de simulation, ils ont trouvé un pourcentage minimal d'investisseurs rationnels assurant un équilibre de marché fondamental local. Le but de cet article est d'analyser l'effet introduit dans la dynamique d'un marché financier. Pour plusieurs auteurs, la dynamique du marché est analysée sur plusieurs cadres :

Sur le Modèle discret (les variables ne sont pas continués en temps discret). Ce modèle explique comment les marchés peuvent s'effondrer et revenir aux conditions normales, et Modèle continu.

Les autres montrent que les agents rationnels peuvent générer des crises financières, même sans l'aide des spéculateurs. Ils montrent aussi la différence entre deux types d'agents. Les agents non renseignés se basent ou se fondent sur les décisions d'investissement grâce à un comportement imitatif. Tandis que les agents renseignés suivent une stratégie de portefeuille rationnelle qui est basée sur une information de la valeur fondamentale des actifs et de la structure de variance covariance des rendements des actifs, sauf les actifs risqués qui sont négociés sur le marché (stocks et obligations).

La demande non renseignée est donnée comme suit :  $\omega_t^\gamma = \gamma_{x^1} \frac{\omega_t^e}{1+|\omega_t^e|}$  or  $x^1 \in \mathbb{R} \rightarrow \{0\}$  est un paramètre de sensibilité.

L'équation de la demande excédentaire de l'actif risqué comme suit :  $\omega_t^R = (1-\gamma)_{x^2} (q_t^R(\omega_t^e, r_{s,t-1}) - q_t^R(0, r_{s,t-1}))$  où  $x^1 \in \mathbb{R} \rightarrow \{0\}$  est un paramètre de sensibilité pour la demande rationnelle et l'expression  $(q_t^R(\omega_t^e, r_{s,t-1}))$  montre la dépendance du rendement attendu. Cette équation montre que l'excès de la demande est généré par les agents rationnels et est une fonction linéaire de la différence entre  $q_t^R(\omega_t^e, r_{s,t-1})$  et  $q_t^R(0, r_{s,t-1})$  ou celui-ci est la quantité détenue par un investisseur rationnel en absence de toute demande excédentaire. D'où  $\omega_t^R$  et  $\omega_t^\gamma$  donne l'expression de

## CHAPITRE 2. COMMENT PRENDRE EN COMPTE LES RUPTURES DE CORRÉLATION DANS LES MODÈLES DE RISQUE

---

la demande excédentaire du marché.

$$\omega_t = \omega_t^R + \omega_t^\gamma \text{ Donc : } \Delta_{pt} = \ln\left(\frac{pt+k(p-p,t-1)}{p,t-1}\right) + \lambda\omega_{t-1}$$

Ce modèle dynamique est en effet comme une combinaison de deux éléments ; le 1<sup>er</sup> est lié à la valeur fondamentale du stock et le 2<sup>ème</sup> étant l'influence de la demande d'excédentaire. Les agents rationnels forment leur portefeuille à l'instant t et s'exprime ainsi :

$$g = \frac{E[r\pi]}{\text{var}[r\pi]} ; \text{ avec } [r\pi] = \text{rendement d'un portefeuille} ; g = \text{ratio Sharpe.}$$

Il est clair que dans cette équation, la variation du portefeuille est utilisée à la place de son écart-type. Comme il est connu dans la littérature, les indicateurs dans g exhibent des valeurs plus grandes pour les portefeuilles qui ont des moyenne-variance efficaces du faite qu'un portefeuille optimal de ratio Sharpe est égal à un Markowitz.

On présente la contagion des facteurs de référence pour générer une corrélation breakdowns des rendements d'actifs. Ils montrent tout d'abord que la variance des rendements est non homogène. D'un point de vu mathématique, si deux ordres de rendement ont la même valeur absolue, on trouverait une variance plus forte quand ils auront le même signe. Ils ont supposé que lorsque les agents rationnels attendent, la demande excédentaire augmente (-, +) :

- Si la variance du rendement diminue
- Si la corrélation des deux actifs tend a l'unité.

La fonction de la variance de corrélation est estimée suit a la variance ( $v$ ) :  $v_{t-1} = \alpha^2 e^{-2\mu\omega_{t-1}^2}$ , la corrélation( $\rho$ ) :  $\rho_{t-1} = e^{-\mu\omega_{t-1}^2} + 1$ ,  $\alpha \geq 0$  paramètre d'échelle de la variance,  $\mu \geq 0$  Paramètre de sensibilité et  $\mu = 0$  la corrélation ne dépend plus de la demande excédentaire, elle prend sa valeur naturelle. Et le modèle a été présenté comme suit :

$$v_{t-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 e^{-2\mu\omega_{t-1}^2} & \alpha_1 \alpha_2 e^{-2\mu\omega_{t-1}^2} \rho_{t-1} \\ \alpha_1 \alpha_2 e^{-2\mu\omega_{t-1}^2} \rho_{t-1} & \alpha_2^2 e^{-2\mu\omega_{t-1}^2} \end{bmatrix}$$

Ce modèle est défini comme une solution explicite et les données sont en fonction de et . En guise de conclusion, ils ont développé un modèle où la demande excédentaire influence directement la variance et la corrélation des rendements d'actifs. Et les investisseurs avertis suivent les décisions des portefeuilles rationnels, contrairement aux investisseurs non informés. Les anticipations des événements peuvent causer l'instabilité du marché, même si le marché est dominé par un comportement rationnel. Ainsi les investisseurs rationnels devraient utiliser de façon optimale leur avantage d'informations qui peut être l'objet d'études de plusieurs chercheurs.

Falbo et Grassi (2015), développent un modèle apparu dans la littérature qui a mis l'accent sur la façon dont les investisseurs raisonnables envers le risque anticipent les ruptures de corrélation des rendements d'actifs en périodes de demande excédentaire. Ce modèle analyse la dynamique des rendements «attendus» de l'actif risqué et sa cohérence avec les données empiriques. Cependant, le même modèle n'a fourni aucune preuve sur la corrélation réelle générée par la

## 2.4. LES CORRÉLATIONS BREAKDOWNS DANS AUTRES MODÈLES DE RÉSOLUTIONS

dynamique des rendements. Un modèle permettant de lier les rendements des actifs à la demande excédentaire est nécessaire pour analyser la corrélation implicite entre les titres négociés.

Falbo et Grassi (2015), ils ont estimé un tel modèle, ou les résultats confirment que la corrélation attendue et ex-post tendent à se rapprocher. En d'autres termes, une prophétie auto-réalisatrice sur la rupture de la corrélation peut avoir lieu, même lorsque les agents rationnels dominant le marché financier. GAO et MIZRACH (2015) ont utilisé le modèle linéaire de Baseline. dans Market quality breakdowns in Equities, ont montré que les corrélations breakdowns dans le marché en qualité se produisent quand l'extrême des mouvements des prix est observé. Ils montrent aussi les augmentations rapides de break-ups, qui se produisent aussi fréquemment que les augmentations Breakdowns en dépit de la fragmentation du marché. Le marché en qualité détérioration se traduit également par une augmentation rapide des prix d'offre, et les break-ups sont une manière symétrique pour utiliser les meilleurs prix nationaux des offres sur la période (1993-2013). Leur travail académique a suggéré un certain nombre d'explications possibles pour la qualité du marché Breakdowns qui sont :

- Les changements réglementaires
- La fragmentation
- Les corrélations immodérées (excessives)
- L'échange des fonds négociés en bourse (FNB) ou Exchange Traded Fund (ETF)
- Le trading haute fréquence (HFT)

Donc, ils développent un modèle explicatif avec des commandes pour le volume et la volatilité afin d'évaluer les effets marginaux de ces causes breakdowns potentielles. Le modèle de base est représenté de la façon suivante :

$$\text{logit}(E[\pi_t]) = \alpha + \beta_1 \sigma_t^{VIXopen} + \beta_2 \tilde{v}_t$$

Avec *logit* de  $[\pi_t]$  suit une distribution gamma  $\Gamma(k, \Theta)$  ou  $(k, \Theta)$  sont la forme d'échelle paramétrique. Ce modèle est linéaire ainsi que *VIXopen* est l'indice d'option d'échange de la volatilité pour modéliser la fréquence des événements de qualité du marché conditionnelle sur la volatilité du volume totale on a :  $\tilde{v}_t = I_\alpha = 0, 5 \left( \frac{v_t - \sum_{j=1}^{20} \frac{v_{t-j}}{20}}{\sigma_t^v} \right)$  avec  $I_\alpha$  fonction d'indicateur,  $\sigma_t^v$  écart-type du volume au cours procédure des 20 jours,  $\sigma_t^v$  est égale à 1 si la valeur est supérieure à la moyenne de 20 jours au niveau de 5% ; et si l'écart type est égale à 0 si la valeur est inférieur à la moyenne

Donc la fréquence breakdowns est toujours proche de zéro, dans la plupart du temps elle n'est pas normalement distribuée. En utilisant la méthode de vraisemblance quasi-maximale pour estimer le modèle avec les erreurs robusta, GAO et MIZRACH (2015) montrent des estimations pour le modèle et des panneaux de régression qui regroupent les titres individuels et les variables dépendantes de  $\pi_t$  qui est le nombre de fréquences breakdowns du (6 avril 1993) au (31 décembre 2013). Ils ont utilisé le modèle de base (numero equation) pour faire leurs estimations. Ensuite, ils ont utilisé un modèle théorique (Sandoz) pour inclure deux actions risquées, en considéré deux actions risques A et B dans le modèle, et les fonds  $i$ ,  $i = A$  ou  $i = B$ , et une valeur fondamentale  $X_t^i$  la période  $t$ .

Donc :  $X_{t+1}^i = X_t^i + \mu^i + \varepsilon_{t+1}^i$  avec  $\mu^i$  variable attendue pour la valeur fondamentale et  $\varepsilon_{t+1}^i$  innovation aléatoire dans la période  $t+1$ .

## CHAPITRE 2. COMMENT PRENDRE EN COMPTE LES RUPTURES DE CORRÉLATION DANS LES MODÈLES DE RISQUE

---

Il existe deux types d'agent de limite : les fournisseurs d'ordre et les commerçants d'ordre dans le marché. L'ordre de limite est une manière de fournir des liquidités en plaçant des ordres limites sur un ou deux actifs, donc il est neutre au risque, et en même temps, il maximise le profit.

Le but du modèle linéaire de Baseline de Gao et Mizrach (2015) de savoir comment maximiser le profit avec deux actifs risqués. Ils ont essayé de mesurer les corrélations entre les stocks qui ont été échangés en période d'échantillonnage. En 2008, ils ont trouvé des instruments qui mesurent directement les corrections implicites sur les corrélations du marché, mais ces instruments ne sont pas disponibles pour l'ensemble de leurs échantillons ; ils ont alors utilisé leurs propres mesures en utilisant des rendements quotidiens de 30 portefeuilles. Ainsi, ils ont calculé 20 jours consécutifs de la corrélation par paire en utilisant la médiane comme mesure de la corrélation du marché, testé la causalité pour voir s'il y a une augmentation du volume (ETF) et un changement dans les corrélations du marché ou l'inverse.

Ils ont trouvés que les Breakdowns dans le marché en qualité ont une fréquence de 1.03% par jour pour environ 74 actions par jour. La moyenne a diminué par rapport à l'année 1993, ainsi que la fréquence des breakdowns dans les marchés en qualité. Leur modèle montre que l'amélioration a une probabilité plus élevée par rapport à un modèle à un terme constant. Pour conclure, avec les résultats ce modèle nous ne pouvons pas dire que le modèle a résolu le problème, car la fréquence n'est pas toujours stable de plus on a des non prévisions sur le marché. Gupta et Mollik (2008) : Pour la régression linéaire on utilise un modèle dynamique de corrélation conditionnelle pour tester si les volatilités des marchés financiers provoquent un changement des corrélations.

Les résultats suggèrent que les corrélations entre le rendement des capitaux propres en Australie et les rendements des actions des marchés (représentés par les rendements des indices du marché respectifs émergents), changent dans le temps et la variation des corrélations est influencée par la volatilité des rendements des marchés émergents.

Ils montrent que dans certains cas, (le rapport de la volatilité des marchés émergents à la volatilité du marché australien) la volatilité relative des marchés a une influence sur le changement des corrélations. La relation entre les corrélations et les volatilités est plus forte au Brésil, Chili, Inde, Malaisie et Philippines contrairement en Sri Lanka et la Turquie, où elle reste très faible.

Les simulations de Tzani et Polychronakos(2009) du modèle gaussienne base sur la théorie de Merton, dans « Correlation breakdown, copula credit default models and arbitrage » les auteurs ont modélisé des swaps sur la défaillance de crédit (CDS). Ils ont identifié une situation dans laquelle le marché est régi de façon excessive par des événements de crédit et semble avoir un prix sur les crédits Default swap (CDS) qui sont aujourd'hui'hui des produits financiers courants très utilisées dans le domaine de la gestion de risque. Ils proposent que les données du marché ne puissent pas toujours être prises à leur valeur nominale lors de la tarification des dérivés de crédit ou d'autres produits financiers. Dans ce document, les auteurs soulignent l'importance de l'analyse fondamentale, de la modélisation et de la gestion des risques. Selon eux, un modèle est très satisfaisant lorsqu'il prend en compte les principes fondamentaux et intègre correctement les forces du marché sous-jacent, plutôt que d'essayer d'imiter les données du marché.

## 2.4. LES CORRÉLATIONS BREAKDOWNS DANS AUTRES MODÈLES DE RÉSOLUTIONS

Le modèle utilisé pour résoudre ce problème est le modèle gaussien, autrement dit modèle de corrélation, basé sur la théorie de Merton (1974). Le problème est de simuler les défauts d'un groupement d'entités sous la probabilité de défaut individuels, et déterminer la probabilité  $\pi$  sur un horizon de temps, ainsi que la corrélation de défaut  $\rho_{i,j}$ . Dans cet article, on se concentre sur le phénomène de «corrélation breakdown» en début 2008, dans lequel des modèles de corrélation supérieurs à 100% ont été évoqués pour expliquer les prix du marché, comme une étude de cas évidente d'éventuelles incohérences.

Tzani et Polychronakos (2008) ont montré en effet que cette situation indique un désaccord du marché et présente des ouvertures d'arbitrage identifiables. Leur analyse n'exclut en aucun cas le modèle actuel de corrélation, et donc il est impératif que le modèle soit affiné ou développé. Voici un aperçu des résultats qui sont obtenus :

- L'existence de limites supérieures pour les valeurs des éléments de la valeur par défaut de la Matrice de corrélation  $\tilde{\rho}_{t-1}$  pour les probabilités de défaut données.
- Le processus par défaut (probabilités de défaut conjointes) lorsque la limite ci-dessous est saturée.

Ils ont aussi démontré que le modèle de copule gaussien : « qui est une approche simplificatrice de la distribution jointe de variables aléatoires, dont les distributions marginales et la corrélation seraient connues... », et (tout autre modèle de copule) produit le processus unique ci-dessus lorsque les corrélations d'actifs prennent leur valeur maximale de 100%. Et soulignent que les situations où des corrélations d'actifs supérieures à 100% sont nécessaires pour reproduire les prix du marché des tranches révèlent des incohérences fondamentales dans les marchés des prix, puis ils ont construit des portefeuilles d'arbitrage appropriés qui exploitent les incohérences ci-dessus. A partir des valeurs par défaut dans les conditions de corrélation maximale Tzani et Polychronakos (2009) considèrent un ensemble de firme avec des probabilités de défaut individuelles à la fin d'un horizon de temps spécifique. Leur état de défaut est représenté par un ensemble d'indicateurs par défaut en supposant la valeur 1 si la firme  $i$  fait défaut et 0 sinon. Les corrélations de défaut sont données par :  $\tilde{\rho}_{i,j} = \frac{P(I_i=I_j=1) - p_i p_j}{\sqrt{p_i q_i p_j q_j}}$

Les corrélations de défaut sont définies par Tzani et Polychronakos (2008) Avec  $q_i = 1 - p_i$  est la probabilité de non-défaut de la firme  $i$ . Et  $\tilde{\rho}_{i,j}$  déterminent essentiellement les probabilités de défaut conjoint de deux firmes  $P(I_i, I_j)$  quelconques. Si la corrélation de défaut est égale à 0 c'est à dire que  $\tilde{\rho}_{i,j} = 0$  et la probabilité jointe de défaut est égale au produit de probabilité marginales alors la probabilité a une contrainte au niveau de la corrélation, par contre si égale à 1 on a :

$$\begin{aligned} P(1, 1) - P_i, P_j &= \tilde{\rho}_{i,j} \sqrt{p_i q_i p_j q_j} \\ P(1, 0) + P(1, 1) &= P_i \\ P(0, 1) + P(1, 1) &= P_j \\ P(0, 0) + P(0, 1) + P(1, 0) + P(1, 1) &= 1 \end{aligned}$$

Ils montrent qu'il existe quatre probabilités qui correspondent aux quatre possibilités pour les firmes de défaut  $i$  et  $j$ . C'est une condition de cohérence que chaque élément d'une matrice de corrélation par défaut (binaire) doit satisfaire. Il convient de souligner que la condition ci-dessus est distincte de la condition de positivité des valeurs propres de  $\tilde{\rho}_{i,j}$ . Il existe des

## CHAPITRE 2. COMMENT PRENDRE EN COMPTE LES RUPTURES DE CORRÉLATION DANS LES MODÈLES DE RISQUE

---

matrices de corrélation définies positives qui viennent remédier à la condition ci-dessus ; Inversement, il existe des matrices définies non positives satisfaisant la condition ci-dessus. Par conséquent, la satisfaction de la condition ci-dessus ne garantit pas  $\tilde{\rho}_{i,j}$  que soit une matrice de corrélation par défaut possible, ce qui signifie que des probabilités de défaut conjointes bien définies menant aux corrélations ci-dessus peuvent ne pas exister, pour les Modèles de copule maximale corrélés, le modèle le plus largement utilisé pour produire des événements par défaut avec  $\{p_i, \tilde{\rho}_{i,j}\}$  donné est les étapes de base d'une simulation pour ce modèle sont les suivantes :

- Affecter à chaque firme une variable continue , dont la valeur à la fin de la période d'intérêt est normalement distribuée.
- Supposer qu'une firme soit par défaut si la valeur de sa variable d'actif à la fin de la période est tombée en dessous d'une valeur minimale.
- Rendre les variables d'actif corrélées à une matrice de corrélation donnée.
- Ajuster les paramètres et de sorte que le modèle ci-dessus reproduise les résultats souhaités.

On détermine les entrées gaussiennes  $\{c_i, \rho_{i,j}\}$  en fonction des entrées binomiales  $\{p_i, \rho_{i,j}\}$  en utilisant des formules analytiques numériques pour les probabilités gaussiennes :  $P(X_i < c_i) = p_i$  avec  $P(X_i < c_i, X_j < c_j) = \rho_{i,j} \sqrt{p_i q_i p_j q_j}$

Le modèle de corrélation est toujours utilisé sur le marché pour définir des corrélations de base. Aussi, il simplifie le modèle de copule gaussienne. Si  $\rho_{i,j} = \rho =$  constante c'est à dire que toutes les firmes sont égales, de même probabilité de défaut et de même corrélation d'actif pour ce qui est du prix du marché et de la corrélation breakdowns. Ils considèrent le processus de défaut de crédit d'un ensemble de firme, en adoptant deux points de vue distincts sur la nature des probabilités de défaut conjoint :

D'un part, des probabilités fondamentales objectivement définies qui décrivent le processus par défaut. Ils peuvent être déduits des données historiques ou de l'analyse des meilleures estimations basées sur les fondamentaux actuels.

De l'autre part, des probabilités impliquées par le marché qui reproduisent les prix du marché par une évaluation sans risque. Ils peuvent être déduits en ajustant les paramètres du modèle pour correspondre à l'évaluation des entités à prix de marché.

D'après Tzani et Polychronakos (2008) c'est le deuxième point de vue qui est pertinent pour la présente discussion. Les probabilités implicites [ont dit que les probabilités implicites des cotes sont, dans le cas où il n'y a qu'un pari c'est-à-dire ajoutées de sorte que le gain moyen soit nul] ont été largement utilisées dans le domaine de la finance par exemple, les probabilités «martingales» de tarification des options selon des hypothèses de marché complètes et efficaces. Plus important, elles servent de base à l'étalonnage du «modèle de corrélation» qui est devenu la norme dans la fixation des prix des tranches sur mesure des swaps sur défaillance de crédit. Ces probabilités entreraient dans la discussion sur la compatibilité des prix l'arbitrage. Donc, les probabilités implicites ne sont pas des probabilités «vraies» au sens mathématique et peuvent donc ne pas avoir besoin de partager toutes les propriétés et de satisfaire toutes les contraintes

## 2.4. LES CORRÉLATIONS BREAKDOWNS DANS AUTRES MODÈLES DE RÉSOLUTIONS

---

de la théorie des probabilités. En outre, il est très important de se rendre compte que les probabilités implicites se comportent comme des probabilités régulières et que des déviations indépendantes du modèle du comportement régulier signalent des incohérences sur les prix du marché tout en créant la possibilité d'arbitrage.

De même que le signe le plus fort d'un tel écart par rapport au comportement régulier était la corrélation breakdowns, au début de 2008, en exigeant une corrélation de 100% dans le modèle de copule homogène pour reproduire les prix de marché des tranches supérieures il faut aussi noter que pour le modèle homogène, les corrélations d'actifs de 100% impliquent également des corrélations de défaut de 100%.

Selon Loretan et English (2000), les observateurs des marchés financiers ont noté que pendant les périodes de forte volatilité des marchés, les corrélations entre les prix des actifs peuvent différer considérablement de celles observées sur les marchés plus calmes. Par exemple, les corrélations entre les écarts de rendement étaient sensiblement plus élevées à l'automne 1998 qu'au cours des périodes précédentes ou ultérieures. Ces différences de corrélations ont été attribuées soit à des ruptures structurelles dans la distribution sous-jacente des rendements, soit à une "contagion" entre les marchés qui ne se produit que pendant les périodes de turbulence du marché. Toutefois, nous soutenons que les différences peuvent ne refléter rien de plus qu'une volatilité d'échantillonnage variable dans le temps. Comme l'ont noté Boyer, Gibson et Loretan (1999), les augmentations de la volatilité des rendements s'accompagnent généralement d'une augmentation des corrélations d'échantillonnage, même lorsque les corrélations réelles sont constantes. Il ont montré que ce résultat ne présente pas seulement un intérêt théorique : Lorsque ils considèrent les mesures trimestrielles de la volatilité et de la corrélation pour trois paires de rendements d'actifs, ils ont constaté que la relation théorique peut expliquer une grande partie de l'évolution des corrélations dans le temps. Ils ont examiné ensuite les implications de ce lien entre les mesures de la volatilité et de la corrélation pour la gestion des risques, la surveillance bancaire et l'élaboration de la politique monétaire.

Il est de connaissance commune, depuis les travaux de Markowitz(1952), qu'un investisseur tire profit du principe de diversification si les actifs composant son portefeuille sont peu corrélés, ce qui permet d'avoir un risque de portefeuille relativement faible. En dépit de l'approche simpliste de Markowitz(1952), de nombreux auteurs se sont attachés à remettre en cause les bénéfices attribués à la diversification en raison de l'hypothèse centrale de linéarité. La leptokurticité et les nombreuses non linéarités qui caractérisent les séries financières biaisent le coefficient de corrélation linéaire. Par ailleurs, le coefficient de corrélation utilisé est supposé constant et n'intègre pas d'éventuelles ruptures des corrélations. En effet, on pourrait s'attendre à un changement dans les corrélations en période de crise qui reflèterait une intensification des relations entre deux actifs. La problématique des corrélations breakdowns est basée sur la dichotomie entre une mesure de corrélations inconditionnelles et une mesure des corrélations conditionnelles. Cette dernière, déterminée sur un échantillon particulier, introduit un biais dans l'interprétation des corrélations breakdowns. Loretan et English(2000) analysent le phénomène de corrélations breakdowns en temps de crise. Selon ces auteurs, la différence entre les deux principales causes des corrélations breakdowns est à rechercher dans la variabilité temporelle de la volatilité qui de fait conduit à une variabilité des corrélations même quand les relations entre deux indices sont inchangées. Ils montrent que les corrélations breakdowns sont dues à des changements de la volatilité qui impactent les mesures de corrélations.

## CHAPITRE 2. COMMENT PRENDRE EN COMPTE LES RUPTURES DE CORRÉLATION DANS LES MODÈLES DE RISQUE

---

Ainsi que Loretan et English (2000), applique le modèle des régressions linéaire. Ils ont utilisé un modèle normal bi-varié pour expliquer la période de l'augmentation, d'où le fait que la période sera également élevée quand les corrélations sont relativement élevées. Loretan et English (2000) parlent des changements des mesures des corrélations qui impliquent que la distribution conjointe des changements de rendement d'actif dans les périodes volatiles ne peut pas être justifiée. Même si le comportement des rendements des actifs est régi par un processus inchangé, on pourrait attendre un lien entre la volatilité et les mesures des corrélations ; pour voir le lien entre la volatilité et la corrélation, considérons deux variables aléatoires  $x$  et  $y$  qui sont indépendantes et identiques distribuées, avec une variance et une corrélation de 0.5. En montrent que les ratios de la variable trimestrielle de ( $x$ ) à sa valeur de la population et aussi la répartition des valeurs de la corrélation trimestrielles compte tenu des fourchettes. Ils ont divisé l'échantillon complet en deux (échantillon à faible volatilité et échantillon de forte volatilité). Ils ont trouvé que le sous-échantillon de forte volatilité est supérieur à celle de faible volatilité, donc la faible volatilité du sous-échantillon devrait être réduite par rapport à l'échantillon de corrélation entre  $X$  et  $Y$ .

Comme indiqué dans la formule :

$$\begin{aligned}\rho((X, Y) | |X| < 1.96) &= 0.45 \\ \rho((X, Y) | |X| \geq 1.96) &= 0.81\end{aligned}$$

Ainsi que la corrélation conditionnelle entre  $x$  et  $y$  est plus grande que valeur absolue  $|\rho|$  et la variance conditionnelle de ( $x$ ),  $x \in A$  est plus grand que la variance inconditionnelle de  $x$ . Le résultat du théorème n'est pas limité aux données bi-variées normales, mais tient dans toutes les situations où  $y$  peut être déclaré comme une variable linéaire.

$$Y = \beta_{xt} + \mu_t \text{ avec } (\text{cov}(x_t, \mu_t)) = 0 \text{ et } t = 1, 2, \dots, T \text{ D'où } \rho(x, y) = \frac{\text{cov}_n(x, y)}{\sqrt{\text{Var}_n(x)}\sqrt{\text{Var}_n(y)}}$$

Les données économiques sont souvent observées en séries chronologiques, et il est intéressant de comprendre comment mesurer les corrélations par la variabilité d'échantillonnage des données. Donc, l'intérêt principal de cet article est de savoir comment ce coefficient de corrélation varie entre les sous-échantillons de temps. Sur la partie empirique, il y avait trop peu d'observations avec la variance de  $x$  inférieure à 0,3 ou supérieure à 1,9 et la valeur de la population pour des valeurs de Corr ( $x, y$ ) pour être rapportées avec confiance. Pour démontrer leurs intuitions, Boyer, Gibson et Loretan (1999) et Loretan et English(2000) dérivent un théorème<sup>4</sup> :

La preuve repose sur la propriété bien connue des variables aléatoires normales bivariées selon laquelle chaque élément peut être exprimé comme une somme pondérée de l'autre élément et d'une composante indépendante qui est également normalement distribuée Goldberger (1991) Soit  $u$  et  $v$  deux variables aléatoires normales standard indépendantes. Pour créer deux variables aléatoires  $x$  et  $y$  telles que  $x$  et  $y$  sont distribués normalement à deux variables avec des moyennes  $\mu_x$  et  $\mu_y$  et deux variances  $\sigma_x^2$   $\sigma_y^2$ , respectivement, et une coefficient corrélation  $\rho = \sigma_{xy}/(\sigma_x\sigma_y)$   $|\rho| \leq 1$ , les opérations suivantes peuvent être effectuées sur  $u$  et  $v$  :

---

4. Théorème Goldberger (1991)

## 2.4. LES CORRÉLATIONS BREAKDOWNS DANS AUTRES MODÈLES DE RÉSOLUTIONS

---

$$\begin{aligned}
 x &= \mu_x + \sigma_x u \\
 y &= \mu_y + \rho\sigma_y u + \sqrt{1 - \rho^2}\sigma_y v \\
 &= \mu_y + (\rho\sigma_y/\sigma_x)(x - \mu_x) + \sqrt{1 - \rho^2}\sigma_y v
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Sans perte de généralité pour ce qui suit, nous pouvons supposer que  $\mu_x = 0$  et  $\mu_y = 0$ . Considérons tout événement A tel que  $0 < Pr(A) < 1$ . le coefficient de corrélation conditionnelle  $\rho_A$  entre x et y, par définition, peut être exprimé comme :

$$\rho_A = \frac{Cov(x, y|A)}{\sqrt{Var(x|A)}\sqrt{Var(y|A)}} \tag{2.2}$$

Nous remplaçons maintenant les deux occurrences de y dans l'équation 2.2 par l'expression donnée dans l'équation 2.1. Le numérateur de l'équation 2.2 peut être réécrit comme :

$$Cov(x, y|A) = Cov(x, (\rho\sigma_y/\sigma_x)x + \sqrt{1 - \rho^2}\sigma_y v|A) \tag{2.3}$$

ou équivalent,

$$Cov(x, y|A) = Cov(x(\rho\sigma_y/\sigma_x)|A) + cov(x, \sqrt{1 - \rho^2}\sigma_y v|A) \tag{2.4}$$

Mais comme x et v sont indépendants, la covariance entre x et y est conditionnelles par l'événement A peut être simplifiée comme suit :

$$Cov(x, y|A) = (\rho\sigma_y/\sigma_x)var(x|A) \tag{2.5}$$

En rappelant que x et v sont indépendants et que v a une variance unitaire, on obtient :

$$Var(y|A) = (\rho^2\sigma_y^2/\sigma_x^2)Var(x|A) + (1 - \rho^2)\sigma_y^2 \tag{2.6}$$

Nous pouvons exprimer la corrélation conditionnelle entre x et y comme :

$$\rho_A = \frac{Cov(x, y|A)}{\sqrt{Var(x|A)}\sqrt{Var(y|A)}} \tag{2.7}$$

Cette preuve, on peut simplifier cette expression par :

$$\rho_A = \rho \left( \rho^2(1 - \rho^2) \frac{Var(x)}{Var(x|A)} \right)^{-1/2} \tag{2.8}$$

Soit dit en passant, ce résultat démontre également que au moins dans le cas où la distribution conjointe de x et y est normale le coefficient de corrélation conditionnelle ne dépend pas directement de la variance de y.

D'après le théorème Boyer, Gibson, et Loretan (1999), le lien entre la volatilité et la corrélation peut être déduit, le lien intuitif entre la volatilité et la corrélation peut être déduit formellement. Selon ce théorème la corrélation conditionnelle entre x et y est plus grande (ou plus petite) que la valeur absolue  $\rho$  si la variance conditionnelle de x (donnée  $x \in A$ ) est plus grande (ou plus petite) que la variance inconditionnelle de x.<sup>5</sup>

---

5. Henri Pagès a fourni l'interprétation heuristique suivante du résultat donné de l'équation 2.8 : Si le conditionnement sur un événement  $x \in A$  entraîne une augmentation de la variance conditionnelle de x,  $Var(x|x \in A)$ , il augmente également la corrélation conditionnelle de population entre x et y en raison d'une augmentation concomitante du rapport  $Var(x|x \in A)/Var(x)$ , qui peut être réécrit comme  $(Var(v)/Var(x))(Var(x|x \in A)/Var(v))$ , où le premier terme est une constante et le second un rapport signal/bruit ; cette augmentation du rapport signal/bruit qui augmente la corrélation conditionnelle

## CHAPITRE 2. COMMENT PRENDRE EN COMPTE LES RUPTURES DE CORRÉLATION DANS LES MODÈLES DE RISQUE

---

Ce théorème est basé sur plusieurs hypothèses qui sont irréalistes dans la pratique empirique, comme le fait que les données sont des données i.i.d. et sont tirées d'une distribution normale bivariée. Dans le cas présent, la normalité bivariée de  $x$  et  $y$  est utilisée l'équation 2.1 dans la preuve ci-dessus uniquement pour ré-exprimer la variable  $y$  comme une fonction affine de  $x$   $\mu_y + (\rho\sigma_y/\sigma_x)(x, -\mu_x)$ , plus une composante indépendante de  $x$ ,  $\sqrt{1 - \rho^2} \sigma_y v$ . Par conséquent, le résultat principal du Théorème n'est pas limité aux cas où les données sont normales à deux variables, mais s'applique à toute situation où  $y$  peut être exprimé comme une fonction linéaire (ou, plus généralement, une fonction affine) de  $x$  plus une composante indépendante (le "terme d'erreur"), un cadre qui englobe le modèle de régression linéaire à deux variables bien connu avec des erreurs indépendantes (mais pas nécessairement distribuées normalement).

Les données économiques sont souvent observées sous forme de séries chronologiques, et il est intéressant de comprendre comment les corrélations mesurées sont affectées par la variabilité d'échantillonnage des données. Les séries temporelles posent également la question de savoir comment la dépendance sérielle des données affecte les corrélations. En supposant le modèle général de régression linéaire,  $y_t = \beta x_t + \mu_t$ , avec  $Cov(x_t, u_t) = 0$  et  $t = 1, 2, \dots, n$  on peut écrire le coefficient de corrélation d'échantillonnage entre  $x$  et  $y$ , pour un échantillon de taille  $n$ , comme :

$$\rho_n(x, y) = \frac{Cov_n(x, y)}{\sqrt{Var_n(X)}\sqrt{Var_n(y)}} \quad (2.9)$$

$$\rho_n(x, y) = \frac{Cov_n(x, (\beta x_t + \mu_t))}{\sqrt{Var_n(X)}\sqrt{Var_n(\beta x_t + \mu_t)}} = \frac{\beta Cov_n(x, x) + Cov_n(x, \mu)}{\sqrt{Var_n(X)}\sqrt{\beta^2 Var_n(x) + Var_n(\mu) + \beta Cov_n(x, \mu_t)}} \quad (2.10)$$

où l'indice  $n$  désigne les moments d'échantillonnage, par opposition aux moments de population<sup>6</sup>.

D'après Loretan et English(2000), l'intérêt principal est de savoir comment ce coefficient de corrélation varie selon les sous-échantillons de temps. Il sera différent du moment de la population pour deux raisons : La covariance d'échantillonnage entre  $x_t$  et le terme "erreur"  $u_t$  peut être non nulle, ou la variance d'échantillonnage de  $u_t$  peut varier dans le temps et être corrélée avec  $Var_n(x)$ . Dans les séries chronologiques financières, ils ont constaté souvent que la moyenne de  $y_t$  est proche d'une fonction linéaire de  $x_t$ , et que  $Cov_n(x_t, u_t) \approx 0$  est une hypothèse raisonnable à faire. Cependant, même si les niveaux de  $x$  et  $u$  sont approximativement non corrélés, leurs variances peuvent très bien être en série corrélées en même temps. Par conséquent, le terme  $Var_n(u)$  peut se déplacer systématiquement d'un sous-échantillon à l'autre avec une variance d'échantillonnage de  $x$ . supposons, par exemple, que  $\beta > 0$  et que les volatilités contemporaines de  $x$  et  $u$  et donc les volatilités contemporaines de  $x$  et  $y$  sont positivement corrélées. Ensuite, les intervalles de temps présentant une forte variabilité d'échantillonnage de  $x$  auront également tendance à avoir des valeurs supérieures à la moyenne pour  $Var_n(u)$ . Chase Manhattan(1999) indique qu'elles utilisent les mouvements des prix des actifs pendant la vente du marché obligataire en 1994, la crise mexicain en 1994 et la crise des marchés asiatiques en

---

6. Le lien entre les équations 2.8 et 2.10 est établi en fixant  $\beta = \rho\sigma_y/\sigma_x$  et  $u_t = \sqrt{1 - \rho^2}\sigma_y v_t$ , et en divisant le numérateur et le dénominateur du côté droit de 2.10 par la variance inconditionnelle de population de  $x$   $Var(x) = \sigma_x^2$

## 2.4. LES CORRÉLATIONS BREAKDOWNS DANS AUTRES MODÈLES DE RÉSOLUTIONS

1997, ainsi que des scénarios élaborés en interne, pour évaluer le risque de leur portefeuille.

Ronn (1995) une autre façon dont le lien entre la volatilité et la corrélation au sein de l'échantillon pourrait poser des problèmes aux gestionnaires de risques est le calcul des scénarios les plus défavorables et les tests de stress. En termes simples, les gestionnaires de risques ne devraient pas envisager les effets possibles d'une période de forte volatilité sans tenir compte également de l'effet probable qu'une volatilité élevée aurait sur les corrélations entre les rendements des actifs. Au contraire, les gestionnaires de risques peuvent avoir besoin d'inclure des informations provenant de périodes historiques de forte volatilité pour former des estimations de corrélations conditionnées par la volatilité accrue<sup>7</sup>. Ces corrélations conditionnelles pourraient ensuite être utilisées pour évaluer la distribution probable des rendements dans un scénario de forte volatilité. En d'autres termes, la méthode utilisée pour tester un modèle ne doit pas exclure la possibilité que les périodes de forte volatilité soient également des périodes de corrélations élevées. Les autorités de surveillance des établissements financiers doivent également être conscientes du lien entre les volatilités et les corrélations lorsqu'elles évaluent la gestion des risques des entreprises.

La relation entre les corrélations conditionnelles et inconditionnelles, pour tester si la corrélation entre deux séries temporelles est constante ou change au fil du temps, on pourrait envisager de comparer les corrélations d'échantillonnage entre les deux séries calculées à partir de sous-ensembles de données<sup>8</sup>. Si l'on constate que ces corrélations conditionnelles sont statistiquement différent l'une par rapport à l'autre, on pourrait être tenté de conclure que la corrélation de la population n'est pas constante.

Les auteurs Kim et Finger (2000) présentent le test de stress de la flèche brisée, dans lequel ils estiment les niveaux de corrélation dans des situations de stress et appliquent ces niveaux de corrélation pour arriver à la perte attendue pour les actifs périphériques dans le test de stress. Pour identifier la corrélation dans les situations de stress, la distribution conjointe des actifs centraux et périphériques est spécifiée comme un mélange de normales. Dans la majorité des cas, les rendements des actifs sont tirés d'une distribution normale avec une volatilité plus faible et un niveau de corrélation ; lors de journées plus rares, les rendements des actifs sont tirés d'une distribution normale différente, avec des niveaux de volatilité plus élevés et un second niveau de corrélation. Dans l'exemple présenté, les niveaux de corrélation accentués illustrent des changements importants de corrélation pour quatre des 18 marchés examinés. Le stress test de la flèche brisée produit une estimation de la perte attendue plus raisonnable que les autres méthodes paramétriques et ne présente pas le problème des particularités observées avec les stress tests historiques.

De plus, les distributions conjointes estimées sur des périodes sans panique permettront de

---

7. Les entreprises peuvent aussi utiliser des données réelles provenant de périodes antérieures de forte volatilité pour soumettre leurs portefeuilles à des tests de résistance. Chase Manhattan indique qu'elles utilisent les mouvements des prix des actifs pendant - la liquidation du marché obligataire en 1994, la crise du peso mexicain en 1994 et la crise des marchés asiatiques en 1997 - ainsi que des scénarios élaborés en interne, pour évaluer le risque de leur portefeuille (Chase Manhattan, 1999, p.37)

8. L'accent mis sur les corrélations et donc sur la dépendance linéaire est tout à fait approprié lorsque la distribution conjointe des données est multivariée normale ou, plus généralement, multivariée elliptique. Dans la pratique empirique, les distributions conjointes de nombreuses variations de prix des actifs sont souvent assez proches de l'ellipse multivariée

## CHAPITRE 2. COMMENT PRENDRE EN COMPTE LES RUPTURES DE CORRÉLATION DANS LES MODÈLES DE RISQUE

---

mal estimer le degré de corrélation entre les rendements des actifs pendant les paniques. Dans ces circonstances, la peur et le désengagement des investisseurs se traduisent souvent par des baisses simultanées de la valeur des obligations privées, car les investisseurs ne font plus de distinction réaliste entre les degrés de risque et de liquidité, et par des augmentations de la valeur des titres d'État sans risque. Par conséquent, les avantages de la diversification des portefeuilles auront tendance à être surestimés lorsque les rares périodes de panique ne sont pas prises en compte.

Les tests de stress sont une contrepartie commune aux modèles objectifs utilisés pour la surveillance quotidienne des risques. La valeur à risque (VaR) est un exemple de modèle objectif. Les modèles objectifs prévoient généralement les pertes dans le pire des cas, à condition que les marchés se comportent généralement comme ils l'ont fait dans un passé récent. Pour faire des prévisions précises, ces modèles s'appuient sur un historique relativement court (un an au maximum) des rendements des facteurs de marché. Alors que certains modèles extrapolent à partir de ces rendements et prévoient des pertes plus importantes que celles observées dans la période historique, les prévisions de pertes sont toujours limitées par les rendements historiques. Les estimations de pertes du portefeuille basées sur les rendements des facteurs de marché qui ne se sont jamais produits ou qui se sont produits en dehors de la période historique pertinente pour le modèle complètent les prévisions objectives du modèle en fournissant une notion de pertes jugées non plausibles par le modèle, mais qui pourraient certainement se produire.

Le Comité de Bâle sur le contrôle bancaire (1996)<sup>9</sup> exige des banques qui utilisent l'approche des modèles internes pour les exigences de capital-risque de marché qu'elles mettent en œuvre un cadre de simulation de crise rigoureux et complet. En outre, le Comité de Bâle sur le contrôle bancaire et le Comité technique de l'Organisation internationale des commissions de valeurs (1996)<sup>10</sup> obligent les institutions ayant des activités de négociation importantes à effectuer régulièrement des tests de résistance, en utilisant diverses hypothèses qui couvrent à la fois des événements hypothétiques et historiques. Suite au sauvetage de Long Term Capital Management, le groupe de travail du Président sur les marchés financiers (1999)<sup>11</sup> a souligné qu'en plus de la gestion des risques de routine, les banques doivent effectuer des tests de stress sur les risques de crédit et de marché afin d'évaluer l'impact potentiel de conditions de marché défavorables sur les liquidités et les valeurs des actifs et des garanties qui soutiennent les transactions commerciales.

De manière générale, les tests de stress impliquent la spécification des mouvements défavorables du marché (scénarios) et la réévaluation du portefeuille dans le cadre de ces mouvements. Pour spécifier des scénarios, il est d'abord nécessaire de sélectionner les facteurs de marché (les actifs de base) à stresser, puis de déterminer le montant de stress à appliquer et la période de temps pendant laquelle le mouvement de stress aura lieu. Pour les autres actifs (périphériques), il existe un certain nombre de méthodes permettant de spécifier les mouvements qui coïncideraient avec les mouvements des actifs principaux. Kim et Finger(2000) utilise trois méthodes de test de stress, la spécification la plus simple pour les mouvements des actifs périphériques est de supposer simplement qu'il n'y a pas de changement (le test de stress "zéro"). Une deuxième spécification (le test de stress prédictif) utilise les estimations actuelles de la volatilité et de

---

9. Basle Committe on Banking Supervision(1996)

10. Basle Committe on Banking Supervision(1996)

11. The President's Working Group on Financial Markets(1999)

## 2.4. LES CORRÉLATIONS BREAKDOWNS DANS AUTRES MODÈLES DE RÉOLUTIONS

---

la corrélation pour estimer l'espérance conditionnelle de mouvements d'actifs périphériques compte tenu des mouvements de stress dans les actifs de base. Une troisième spécification (test de stress historique) applique les mouvements des actifs périphériques qui ont coïncidé avec des mouvements importants des actifs de base dans le passé. trois méthodes de test de stress.

Selon Kim et Finger(2000) le stress test prédictif semble le plus intéressant, si les estimations standard de volatilité et de corrélation produiront de bonnes prévisions de stress des mouvements des actifs périphériques. Bien que Kupiec (1998) montre que cette affirmation tend à se confirmer dans la pratique, le sentiment exprimé par le président Greenspan demeure et est soutenu par un certain nombre de les observations empiriques de la rupture de la corrélation. Avec cette rupture à l'esprit, ils ont tenté de calculer les corrélations en se basant uniquement sur les jours qui, semblent les plus volatiles. Boyer, Gibson et Loretan(1999) mettent explicitement en garde contre cette pratique, en citant le biais qu'elle introduit, et l'indiquent dans leur conclusion. Kim et Finger(2000) ont soutenu qu'il est nécessaire que le chercheur commence par un modèle cohérent du processus de génération des données qui intègre la possibilité de changements structurels, qu'il estime les paramètres du modèle et qu'il décide ensuite seulement si les paramètres estimés impliquent des corrélations changeantes.

Kim et Finger(2000) ont introduit le test de stress de la flèche brisée, dans lequel il ont appliqué la méthodologie de stress prédictif, mais en utilisant une estimation de la corrélation dans les situations de stress. Pour un actif central et un actif périphérique, ont spécifiée la distribution conjointe comme un mélange de normales bivariées. Dans la majorité des cas (jours calmes), les rendements des actifs sont tirés d'une distribution normale avec une volatilité plus faible et un niveau de corrélation ; lors de jours plus rares et plus agités, les rendements des actifs sont tirés d'une distribution normale différente, avec des niveaux de volatilité plus élevés et un second niveau de corrélation. En utilisant des données historiques sur l'actif principal, ils ont identifié les probabilités conditionnelles ex post que les rendements d'un jour donné soient tirés d'une distribution calme ou mouvementée. Avec ces probabilités conditionnelles, ils ont calculé les niveaux de corrélation pour les périodes calmes et mouvementées et testons la signification de la différence entre ces deux niveaux. selon Kim et Finger en appliquant la méthode de test de stress prédictif à nos estimations des niveaux de corrélation de l'agitation. Kim et Finger(2000) conclu que leur méthode d'estimation des niveaux de corrélation sous contrainte est simple et illustre les changements significatifs de corrélation pour quatre des 18 marchés. Étant donné que les tests de stress cherchent à représenter les pertes dans les périodes les plus volatiles, le test de stress de la flèche brisée produit des mesures de perte plus raisonnables que celles basées sur aucun actif périphérique.

Tandis que Ho et Al (2014) tester le trading algorithmique, ils ont utilise un modèle pour tester empiriquement le rôle des nouvelles arrivées publiques dans la situation correspondante à travers des contrats à terme sur des actions individuelles et des marchés boursiers sous-jacents. Les résultats montrent empiriquement que les breakdowns sont plus importants pour agrandir les stocks ; cet effet arrive pendant les périodes de forte volatilité des marchés boursiers, ainsi montre comment la corrélation de retour se décompose. Leur étude tente de tester empiriquement le rôle des arrivées d'informations dans un environnement commercial peuplé par le trading algorithmique. D'une manière générale, il existe deux types de trading algorithmique. Un type de commerçants algorithmiques utilise des ordinateurs pour réduire les coûts de transaction dans (par exemple, Cvitanic et Kirilenko (2010)) tandis que l'autre type joue le rôle

## CHAPITRE 2. COMMENT PRENDRE EN COMPTE LES RUPTURES DE CORRÉLATION DANS LES MODÈLES DE RISQUE

---

d'arbitragistes qui cherchent constamment des opportunités de prix erroné dans (par exemple, Jarrow and Protter (2012)).

Dans cet article, ils se sont intéressés à l'étude des compromis des créateurs de marché de deux actifs étroitement liés quand ils utilisent la mise à jour de la citation algorithmique pour réduire le risque mispricing (Mauvais prix) et les facteurs qui pourraient modifier la relation entre les nouvelles arrivées et les corrélations de retour entre ces deux actifs. Les paires d'actifs utilisés dans ce contexte empirique sont les contrats à terme sur actions (SSF) et leurs titres sous-jacents, puisque dans des circonstances normales, leurs corrélations de rendement devraient être proches du parfait et ne sont pas sujettes à une variation temporelle. En outre, l'étude du marché SSF nous permet d'examiner comment les caractéristiques de la firme transversale affectent la dynamique des nouvelles-corrélations.

Par la relation de coût du transport, (cost-of-carry) les décideurs du marché des contrats à terme attachent les devis aux devis du sous-jacent automatiquement à l'aide d'algorithmes informatisés. Cependant, les décideurs du marché à terme peuvent passer de la cote de citation à la surveillance manuelle du flux de nouvelles sur l'arrivée des nouvelles publiques si le contenu des nouvelles est vague sur la valeur fondamentale de l'actif. Le suivi du flux de nouvelles et l'analyse de son impact sur les prix peuvent être un exercice coûteux car l'interprétation correcte d'une annonce est difficile.

Ho et Al (2014) soulignent que leur modèle théorique donne trois implications empiriques : Premièrement, la forte corrélation contemporaine entre le spot et les contrats à terme diminue avec l'arrivée des nouvelles publiques, et la dispersion des accords sur les nouvelles publiques augmente, à condition que le coût de la surveillance manuelle ne soit pas trop élevé.

Deuxièmement, les corrélations breakdowns de retour sont plus susceptibles de se produire pour les grands stocks qui se caractérisent par des coûts de surveillance plus faibles (effet de taille). Enfin, l'effet de taille s'affaiblit lorsque le marché global connaît une turbulence (c'est-à-dire quand le coût d'opportunité de ne pas surveiller d'autres stocks est élevé).

Ils ont testé ces implications empiriques en utilisant les données de transactions à haute fréquence de tous les contrats SSF américains cotés sur One-Chicago Futures Exchange (bourse à terme) et leurs actions sous-jacentes à partir de la base de données Thomson Reuters Tick History (TRTH) et la base de données en temps réel du public de RavenPack. Pour mesurer les corrélations réalisées par spot-futures (Contrats à terme), nous désignons deux mesures de corrélation conditionnelle : La première mesure est basée sur les rendements logarithmiques des cotations spot futures et la seconde mesure est basée sur les résidus de filtrage des rendements logarithmiques des cotations spot-futures (Contrats à terme), par le modèle VEC-BEKK. Cette dernière construction est destinée à faire face au coût de la relation transporter et aux propriétés de Cointégration des prix de spot-futures (Contrats à terme).

En passant par les processus de la valeur et hypothèses du modèle, considèrent un actif risqué qui opère sur deux marchés : l'actif est négocié sur le marché spot, au lieu qu'un contrat à terme est écrit sous-jacent au spot. Pour la simplicité, le niveau de taux d'intérêt est supposé être nul et le stock ne paie pas de dividende. Leurs constructions de données et de variables décrivent les sources de données et la construction des variables utilisées pour tester empiriquement nos pré-

## 2.4. LES CORRÉLATIONS BREAKDOWNS DANS AUTRES MODÈLES DE RÉSOLUTIONS

---

dictions théoriques. Leur analyse empirique requiert des données sur les soumissions intraday, sur demande des contrats à terme et sur les titres sous-jacents correspondants, sur la couverture médiatique des médias publics et sur les caractéristiques des actions.

Leur modèle suggère que la corrélation des rendements diminue pendant les périodes de forte volatilité du marché.

Cependant J.Carmen Nappo (1991) : La filtration de l'analyse est faite par la loi de gauss, CARMEN J. NAPPO(1991), présente une analyse qui se porte sur les études de chutes sporadiques de stabilité dans la couche limite planétaire (PBL). Dans cette analyse, sont examinées la moyenne des vitesses de vent horizontal d'une minute et de températures observées pendant de nombreuses nuits dans des gares situées dans un terrain simple et complexe. L'analyse est basée sur le comportement temporel du vent covariance vitesse température, qui est obtenue par filtrage passe-bande numérique. Les résultats de leurs études démontrent que les pannes turbulentes sporadiques sont une caractéristique conséquente de la couche limite planétaire ferme (PBL) sur tous les types de terrain. Ils proposent que les portions significatives des échanges nocturnes de chaleur, vitesse et polluants atmosphériques entre l'atmosphère et la surface de terre se produisent pendant ces épisodes de panne. La théorie conventionnelle de diffusion de couche limite planétaire (PBL) ne représente pas ces épisodes et à cause de cela, les prédictions des modèles de flux verticaux nocturnes peuvent être inexacts.

Cela peut ne pas être un problème sérieux pour les considérations de qualité aériennes à long terme ; pourtant, pour les prédictions à court terme de concentrations de la surface de terre de matériel dangereux, l'échec de représenter la couche limite planétaire, (PBL) les breakdowns sont potentiellement dangereux.

### 2.5 Conclusion

Après une revue de la littérature sur la problématique étudiée, une comparaison des méthodes utilisées est faite entre les articles pour arriver à définir le modèle qui peut gérer et résoudre notre problème. Dans la revue de littérature, la plus part des chercheurs ont utilisé le modèle GARCH ou le modèle VAR. Les modèles GARCH multivariés sont un outil puissant pour l'étude de la transmission financière. Dès lors que la matrice des paramètres des modèles de corrélations ou de covariances conditionnelles est pleine, il est possible de mesurer la direction et l'amplitude de la transmission des chocs et des volatilités. Les modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques ou modèles GARCH (Engle, 1982 ; Bollerslev, 1986) ont contribué à l'émergence de l'économétrie financière en tant que discipline constituée.

L'intérêt de ces modèles tient principalement à leur capacité à reproduire les faits stylisés exhibés par les changements de prix d'actifs financiers. Ces caractéristiques se résument à trois types de régularités empiriques : l'autocorrélation du carré des rendements, l'observation de clusters de volatilité, c'est-à-dire le regroupement en paquets de fortes variations de prix, et l'excès de kurtosis pour la distribution marginale des rendements. Par la banque JP Morgan et son système Risk Metrics au début des années 90, la Value-at-Risk (VaR) est devenue en une décennie la mesure de référence du niveau d'exposition au risque de marché, tant pour les autorités de supervision des marchés financiers que pour la plupart des grandes institutions financières. La VaR d'un portefeuille d'actifs financiers correspond au montant de pertes qui ne serait pas dépassé sur un horizon de temps donné, si l'on exclut un ensemble d'événements défavorables ayant une faible probabilité de se produire.

Théoriquement, cette mesure correspond au quantile de la distribution des pertes et profits (Profit and Losses ou P&L) associée à la détention d'un portefeuille d'actifs sur un horizon donné. La VaR est une évaluation monétaire et probabiliste du risque de marché qui facilite d'autant plus la politique de communication de l'institution financière. A titre d'illustration, si un portefeuille est caractérisé par une VaR quotidienne à 99% égale à un million d'euros, cela signifie qu'il existe une probabilité de 1% que la perte quotidienne sur ce portefeuille soit supérieure à un million d'euros. Pour les tenants de la VaR, cette seule valeur, éventuellement complétée de mesures marginales ou incrémentales, permet de résumer à la manière d'un véritable thermomètre du risque, l'exposition au risque de marché du portefeuille de négociation ou des lignes d'affaires spécifiques des institutions financières.

D'abord, les auteurs Falbo et Grassi (2011) ont cherché à faire avancer l'analyse du modèle proposé. Les résultats ont montré que le modèle est cohérent en ce qui concerne l'hypothèse selon laquelle des agents rationnels (Un agent rationnel est un agent qui agit d'une manière lui permettant d'obtenir le plus de succès possible dans la réalisation des tâches qu'on lui a assignées), modifient correctement leurs estimations de la variance et de la covariance des actifs rendements, anticipant la demande excédentaire du marché. Tous les indicateurs de mesure des risques de marchés reposent sur le calcul des corrélations entre les actifs. La pertinence de cette constatation réside dans le fait de mettre sur les épaules des spéculateurs toute la responsabilité des causes de la crise financière ou des bulles spéculatives, qui se produisent de temps en temps sur les marchés financiers, n'est pas tout à fait justifié. En termes très simplifiés, cette analyse a montrée également que les investisseurs rationnels peuvent être victimes d'une prophétie qu'ils réalisent eux-mêmes dès qu'ils tentent d'anticiper ce que le marché va faire, cette mission d'an-

ticipation étant généralement attribuée plutôt aux spéculateurs.

De la même façon, Loretan and English (2000), ont démontré qu'une partie importante des changements dans les corrélations au fil du temps y compris celles qui ont eu lieu à l'automne 1998 peut refléter l'effet prévisible des différences dans l'échantillon volatilité sur les corrélations mesurées, plutôt que des ruptures dans le processus de génération de données pour les rendements des actifs. De plus, on montre le lien théorique entre la volatilité et la corrélation. On conclut que les autorités monétaires doivent être conscientes du lien qui existe entre la volatilité et la corrélation. De toute évidence, les corrélations breakdown pendant les périodes de turbulences sur les marchés financiers pourraient conduire les décideurs de réévaluer la position de la politique à la lumière du changement apparent dans les corrélations. Tant que les changements dans les corrélations reflètent dans l'échantillon que les mouvements de la volatilité, cependant, une telle réévaluation ne serait pas justifiée à moins que les ajustements des agents privés à la volatilité a fait un changement de orientations de la politique monétaire souhaitable. Selon X. Jin et J. M. Maheu, la dynamique de la volatilité est régie par une spécification de MGARCH, puis ont parlé d'une modélisation dynamique de la covariance hétérogène de breakdowns par le modèle GARCH multi-variés (MGARCH).

Cependant Nawroth, Anfuso, et Akesson, ont utilisé un modèle VaR pour décrire la relation entre les différentes séries temporelles, ces auteurs ont proposé une méthode pour caractériser et mesurer les corrélations breakdowns. D'un côté la volatilité pour le modèle var permet de dire qu'en fonction de temps, la relation entre la volatilité et les corrélations n'a pas stable. De l'autre le modèle GARCH modélisé le comportement des séries temporelles dont la volatilité dépend des innovations passées. Puis qu'en période normale d'activités de la marche, la dynamique de la volatilité est régie par la spécification du modèle MGARCH. Depuis que la covariance breakdowns est capturée en introduisant une composante stochastique à la matrice elle-même. Autant que Falbo et Grassi (2011) ont montré que la volatilité est très élevée. Les résultats du modèle de portefeuille optimal de Markowitz, montre qu'ils y a une différence de volatilité entre les actifs négociés et les coefficients c.-à-d. que les corrélations breakdowns ont augmentées. Le modèle Markowitz montre qu'une corrélation est croissante lorsque la persistance est extrêmement négative ou positive, cette corrélation semble plus forte après 10 jours. Cette évidence est fortement compatible avec la variance et les fonctions de corrélation. Aussi que les hypothèses pour les investisseurs rationnels anticipent dans l'événement de la corrélation breakdowns semblent justifier, avec les effets de la persistance contagion sur la corrélation et l'écart-type.

Cette preuve est également compatible avec certains des résultats qu'ils ont obtenus à l'aide de leur modèle, comme par exemple, la persistance d'une corrélation positive entre l'indice boursier et le lien après une contagion optimiste. Lorsque le marché est caractérisé par une partie des agents rationnels significative le modèle est stable car les rendements et la demande excédentaire changent, entre les périodes où elles sont nettement négatives ou positives, de sorte que la prévision de la corrélation reste proche d'une à plusieurs périodes.

Autant F. Chesnay et E. Jondeau(2000), ont utilisé un modèle standard l'ARCH-GARCH, formulé par Engle (1982) et Bollerslev(1986) et ont montré que les corrélations entre les marchés boursiers augmentent en période de forte volatilité. Gupta et Mollik (2008) ont utilisé des estimations des régressions linéaire asymétrique du modèle dynamique des corrélations

## CHAPITRE 2. COMMENT PRENDRE EN COMPTE LES RUPTURES DE CORRÉLATION DANS LES MODÈLES DE RISQUE

---

conditionnelle, ces estimations ont été utilisées pour tester si la volatilité relative provoque les changements des corrélations. Les résultats suggèrent que les corrélations entre les rendements changent dans le temps et la variation est influencée par la volatilité des rendements des marchés émergents, de plus que les volatilités sont plus fortes pour certains pays. R.Tzani et A. Polychronakos(2008) leurs simulations du modèle gaussien sont basées sur la théorie de Merton (1974) et identifie une situation dans laquelle le marché est régi de façon excessive par des événements de crédit et semble avoir un prix sur les crédits défaut Swap (CDS). De la même façon, Boyer et Al(1997) utilisent le modèle VaR ainsi le modèle GARCH avec les simulations de la variable normale bi variée avec les séries chronologiques en montrant que les soucis de la stationnarité ne peuvent pas être justifiés par les corrélations breakdowns puisque les corrélations sont constantes. Ils ont aussi montré que les changements dans les corrélations dans le temps ne peuvent pas être détectés. De même, G.Gao et B. Mizrach (2015) ont montré que la volatilité change en fonction du temps. M. Loretan et W. English (2000) ont dit que les changements de rendement dans les périodes volatilités ne peuvent pas être justifiés, mais on pourrait s'attendre à un lien très élevé entre les mesures des corrélations et la volatilité des marchés. Comme Ho et Al (2014) qui montre que les breakdowns sont importants pour agrandir les stocks, si on est en période de forte volatilité. Mais Fabo et Grassi (2015) ont trouvé qu'il y a une relation entre les moyennes des rendements journaliers des actifs à faible volatilité et la demande excédentaire pour l'indice boursier.

La comparaison de la volatilité et corrélation dans ces modèles et de donner une conclusion ; la comparaison est très complexe car, le risque sur les marchés n'est jamais stable, la plupart de ces modèles ont une volatilité élevée donc la possibilité de gain est plus importante, mais aussi le risque de perte. En réalité, le terme de volatilité concerne aussi bien le court terme, le moyen et le long terme.

## Prise en compte du phénomène de corrélation Breakdown dans les modèles ARCH

Les stratégies de diversification de portefeuilles utilisées par les investisseurs se basent généralement sur les corrélations des actifs financiers. Cela dit, les marchés financiers ont la particularité de répondre aux informations de manière quasi instantanée. Chaque nouvelle information impacte les prix des actifs et leurs corrélations, et à mesure que le système évolue, les prévisions de corrélations varient également. Cet environnement en évolution rapide présente aux économistes le défi de prévoir les corrélations dynamiques, qui sont des intrants essentiels pour la mesure du risque, l'allocation de portefeuille, la tarification des produits dérivés et de nombreuses autres activités financières. De plus, le calcul de la matrice de covariance et des écarts types des portefeuilles nécessite une matrice de covariance de tous les actifs du portefeuille.

La recherche d'estimations fiables des corrélations entre les variables financières a été la motivation d'innombrables articles universitaires. La littérature relate une forte augmentation de la corrélation conditionnelle pour les marchés mondiaux d'actions. Engle.R., Cappiello.L., and Sheppard.k.,(2003)[68] confirment bien la présence d'asymétries dans les corrélations des rendements d'actions. Cela signifie, en d'autres termes, que les corrélations entre actions augmentent plus fortement suite à une mauvaise nouvelle arrivant sur le marché que suite à une bonne nouvelle. Ils constatent par ailleurs que l'harmonisation des politiques monétaires européennes en (1999) a un impact considérable sur les corrélations mais pas sur les volatilités des actifs financiers. Wu.E., Moshirian., and Kim.S.J.,(2004)[187] remarquent que le processus d'intégration financière européen a eu pour conséquence d'augmenter les corrélations au sein des marchés d'actions et d'obligations.

D'après la théorie classique de Markowitz.H.M.,(1957)[143], tout changement de corrélations entre les différents actifs financiers implique un changement de pondérations des actifs détenus dans les portefeuilles, d'où l'intérêt de la question de la modélisation de la volatilité variable dans le temps et des corrélations des séries temporelles qui représente un point crucial de la gestion des risques financiers. Il existe une vaste littérature qui se penche sur la modélisation de la volatilité variable dans le temps des séries chronologiques univariées en utilisant les modèles GARCH ou les modèles de volatilité stochastique. Traditionnellement, les corrélations variables dans le temps sont souvent estimées à l'aide modèles GARCH multivariés qui

### CHAPITRE 3. PRISE EN COMPTE DU PHÉNOMÈNE DE CORRÉLATION BREAKDOWN DANS LES MODÈLES ARCH

---

sont linéaires au carré et produits croisés de données mais aussi à l'aide de méthodes telles que les corrélations historiques glissantes et le lissage exponentiel Engle.R., Bollerslev.T., and Wooldridge.J.M.,(1988)[69], Bollerslev.T.,(1990)[35], Kroner et Claessens(1991)[120], Engle.R., Mezrich.J.,(1996)[70], Engle, Ng et Rothschild(1990)[71], et Bollerslev.T, Chou.R and Kroner.F,(1992) [38], Bollerslev Engle.R and Nelson,D.B.,(1994)[36] et Ding et Engle.R, and Sheppard.K, (2001)[174]. Cependant ces modèles ont pour limite de prendre en compte un nombre très limité d'actifs malgré la nécessité réaliste de matrices de corrélation plus importantes. Plus récemment une nouvelle classe de modèles multivariés appelés modèles dynamiques a été proposée. Ces modèles combinent la flexibilité des modèles GARCH univariés et des modèles paramétriques parcimonieux pour les corrélations. Les modèles n'étant pas linéaires, ils peuvent souvent être estimés avec des méthodes univariées ou en deux étapes basées sur la fonction de vraisemblance. L'efficacité de ce type de modèle est démontrée dans diverses situations et ils fournissent des résultats empiriques cohérents.

Dans son ouvrage « Anticipating Correlations » le lauréat du prix Nobel, Engle.R.,(2009)[65] présente une nouvelle méthode importante d'estimation des corrélations pour les grand systèmes d'actifs : « Dynamic Conditional Correlation (CDD) <sup>1</sup>» Robert Engle,R.,(2002)[67]. Engle réaffirme l'existence du rôle des corrélations dans la prise de décision financière et ajoute des fondements économiques et des propriétés théoriques des corrélations et leur relation avec d'autres mesures de la dépendance. Pour ce faire, initialement, il présente un modèle asymétrique et l'illustre à l'aide d'un modèle multi-pays. Ensuite, il présente un nouveau modèle FACTOR DCC qui combine les modèles factoriels et le DCC pour aboutir à un modèle optimisé. Ainsi, Engle montre comment le surinvestissement dans les titres de créances garantis, ou CDO, est au cœur de de la crise des subprimes et surtout comment le modèle de corrélation qu'il propose aurait pu prévoir les risques liés à cette dernière. Ce type de modèle présente des avantages évidents en matière de calcul par rapport aux modèles GARCH multivariés classiques. Un grand nombre de paramètres à estimer étant un problème associé à l'estimation des modèles GARCH, cette méthode permet de le contourner car le nombre de paramètres à estimer dans le processus de corrélation est indépendant du nombre de séries corrélées. En effet, cette classe de modèle, aussi appelés modèle GARCH multivariés (MV-GARCH) diffère des autres spécifications du fait de sa procédure en deux étapes, il s'agit dans un premier temps d'effectuer une estimation préalable par des modèles GARCH univariés et dans un second temps d'utiliser des résidus normalisés découlant de l'étape précédente pour déterminer une matrice de corrélation à l'appui d'une spécification simple. Cette paramétrisation permet de préserver l'interprétation des modèles GARCH univariés et d'avoir un estimateur de corrélation relativement simple à calculer. Le modèle de Engle, comme beaucoup d'autres dans la littérature, impose de la structure à la matrice de variance covariance conditionnelle afin de garantir son caractère défini positif et de réduire le nombre de paramètres.

---

1. Engle.R,(2002) propose une généralisation du modèle CCC de Bollerslev (1990). Sa spécification permet d'obtenir une matrice de corrélation conditionnelle variant dans le temps tout en conservant une matrice de variance covariance définie positive et une simplicité d'implémentation. Les développements théoriques de cette nouvelle classe de modèle avec corrélation conditionnelle dynamique (CCD), sont exposés dans Engle.R et Sheppard.K.,(2001)[174]. Engle.R.,(2002)[67] une classe simple de modèles d'hétéroscédasticité conditionnelle autorégressive généralisée multivariée : Les corrélations variant dans le temps sont souvent estimées à l'aide de modèles d'hétéroscédasticité conditionnelle généralisée autorégressive multivariée (GARCH) qui sont linéaires en carrés et en produits croisés des données.

En outre, Bollerslev.T, Engle,R.F et Wooldridge,J.M.,(1988)[69] ont proposé à l'origine le modèle GARCH multivarié, (une généralisation des modèles GARCH multivarié a été utilisée dans un cadre simple (matrices diagonales, un seul retard dans toutes les variables) pour tester le CAPM<sup>2</sup> avec un portefeuille constitué de trois titres. Les résultats semblent meilleurs que ceux obtenus en traitant les séries séparément) dans la forme familière du demi-vech qui a fourni un cadre très général pour les modèles de la volatilité multivariée. Le modèle complet nécessite  $O(k^4)$ <sup>3</sup> à estimer par des paramètres maximum la probabilité, où  $k$  est le nombre de séries temporelles modélisées. Un modèle plus simple, Diagonal vech (dvech) a également été proposé, ce qui permet d'utiliser des coefficients non nuls uniquement pour les effets décalés propres et les effets croisés. En réduisant le nombre de paramètres à estimer à  $O(k^2)$ , la spécification diagonale permet une interprétation relativement simple, car chaque série a une spécification de type GARCH. Cependant, il devient extrêmement difficile de déterminer les restrictions nécessaires aux paramètres pour garantir la positivité de la covariance conditionnelle. Bollerslev.T.,(1990)[35] a introduit la spécification GARCH multivariée à corrélation conditionnelle constante, où les modèles GARCH univariés sont estimés pour chaque actif, puis la corrélation est estimée à l'aide de l'estimateur de corrélation standard de l'EML<sup>4</sup> sous forme fermée en utilisant des résidu. L'hypothèse de corrélation constante rend possible l'estimation d'un grand modèle et garantit que l'estimateur est défini positif, en exigeant simplement avec chaque variance conditionnelle univariée soit non nulle et la matrice de corrélation de plein rang. Cependant, la corrélation, ne fournit pas de méthode pour construire des écart types cohérent en utilisant le processus d'estimation en plusieurs étapes. Bollerslev.T.,(1990)[35] estime que la notion de corrélation constante est admissible. Pourtant, des études de Tsui.A et Yu.Q.,(1999)[183] ont montré qu'une corrélation constante peut être rejetée pour certains actifs financiers. Bera.A.K.,(1996)[22] et Tse Y.K.,(2000)[180] ont tous deux mis au point des tests de corrélation constante. Le premier étant un test bivarié, tandis que le second est un test multiplicateur de Lagrange (LM)<sup>5</sup> multivarié plus général.

Tse Y.K.,(2000)[179] introduit un test du multiplicateur de Lagrange (LM) pour l'hypothèse de corrélation constante dans un modèle GARCH multivarié. Le test examine les restrictions imposées à un modèle qui englobe le modèle GARCH multivarié à corrélation constante. Il requiert uniquement les estimations du modèle à corrélation constante et est pratique en termes de calcul. Is sont rapportée quelques résultats de Monte Carlo sur les propriétés de l'échantillon fini de la statistique LM. Le test LM est comparé au test Information Matrix (IM)<sup>6</sup> de Bera.A.K.,(1996)[22]. Le test LM semble avoir une bonne puissance par rapport aux alterna-

---

2. Le "Capital Asset Pricing Model" (CAPM) ou Modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF) est le modèle d'évaluation le plus célèbre et le plus utilisé malgré le fait que sa pertinence empirique soit très discutée.

3. Engle et Sheppard (2001), pour permettre d'estimer séparément les processus GARCH univariés et l'estimateur de corrélation dynamique, en permettant le retour à la corrélation inconditionnelle dans l'estimateur de corrélation, le nombre de paramètres nécessaire pour simultanément estimer les paramètres est de  $O(k^2)$ ,  $k$  étant le nombre de séries à l'étude, ce qui est seulement légèrement inférieur à la formulation BEKK typique.

4. Estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance

5. En mathématiques, et plus particulièrement en analyse, la méthode des multiplicateurs de Lagrange (LM) permet de trouver les points stationnaires (maximum, minimum. . .) d'une fonction dérivable d'une ou plusieurs variables, sous contraintes.

6. L'information de Fisher est une notion de statistique introduite par R.A. Fisher qui quantifie l'information relative à un paramètre contenue dans une distribution. Elle est définie comme l'espérance de l'information observée, ou encore comme la variance de la fonction de score. Dans le cas multi-paramétrique, on parle de matrice d'information de Fisher.

### CHAPITRE 3. PRISE EN COMPTE DU PHÉNOMÈNE DE CORRÉLATION BREAKDOWN DANS LES MODÈLES ARCH

tives considérées est plus robuste à la non-normalité. Il sont appliqué le test à trois ensembles de données, à savoir les prix à terme au comptant, les taux de change et les rendements boursiers. Les résultats montrent que les données sur les contrats à terme au comptant et les devises ont des corrélations constantes.

Pour examiner la puissance des tests LM et IM, nous menons quelques expériences avec des données générées à partir de modèles dont les corrélations varient dans le temps. Deux types de modèles GARCH multivariés sont considérés. Dans le premier type, ils suppose que les données sont générées à partir d'un modèle BEKK. Ce modèle a été appliqué dans la littérature par, entre autres, Baillie et Myers (1991)[28] et Karolyi.G.A.,(1995)[118]. Il s'est avéré correspondre aux données de manière satisfaisante. Un des avantages du modèle de la BEKK est que les matrices de variance conditionnelle sont toujours positives. Il s'agit sans aucun doute d'un avantage important dans les études de simulation. Selon Engle et Kroner (1995)[72], la matrice de variance conditionnelle  $\Omega_t$  du modèle s'écrit :

$$\Omega_t = \Omega + B\Omega_{t-1}B' + Cy_{t-1}y'_{t-1}C'$$

où  $\Omega = \{\sigma_{i,j}\}$ ,  $B = \{B_{i,j}\}$  et  $C = \{c_{i,j}\}$  sont k x k matrices de paramètres.

	Experiment								
	P1	P2	P3						
<i>Panel A: True parameter values</i>									
$\sigma_{11}$	0.20	0.20	0.80						
$\sigma_{12}$	0.10	0.04	0.20						
$\sigma_{13}$	—	—	0.20						
$\sigma_{22}$	0.20	0.20	0.80						
$\sigma_{23}$	—	—	0.20						
$\sigma_{33}$	—	—	0.80						
$b_{11}$	0.60	0.40	0.50						
$b_{12}$	0.20	0.20	0.20						
$b_{13}$	—	—	0.20						
$b_{22}$	0.60	0.40	0.50						
$b_{23}$	—	—	0.20						
$b_{33}$	—	—	0.50						
$c_{11}$	0.30	0.40	0.30						
$c_{12}$	0.10	0.20	0.10						
$c_{13}$	—	—	0.10						
$c_{22}$	0.30	0.40	0.30						
$c_{23}$	—	—	0.10						
$c_{33}$	—	—	0.30						
<i>Panel B: Maximum/minimum ranges of the correlation coefficients in the simulated samples and the empirical relative frequency (in %) of rejecting the constant-correlation hypothesis of LMC and IMC</i>									
Sample size $T$	300	500	1000	300	500	1000	300	500	1000
Range of $\{\rho_{ijk}\}$									
$\{\rho_{12i}\}$ Max	0.498	0.401	0.396	0.907	0.833	0.861	0.349	0.365	0.347
Min	0.174	0.188	0.206	0.489	0.528	0.573	0.121	0.155	0.166
$\{\rho_{13i}\}$ Max	—	—	—	—	—	—	0.349	0.362	0.356
Min	—	—	—	—	—	—	0.129	0.153	0.165
$\{\rho_{23i}\}$ Max	—	—	—	—	—	—	0.346	0.367	0.340
Min	—	—	—	—	—	—	0.136	0.148	0.169
Power of tests (%)									
LMC	56.7	73.5	91.3	86.8	97.7	100.0	56.0	49.9	52.8
IMC	6.0	5.9	9.0	7.6	9.6	16.0	—	—	—

FIGURE 3.1 – Estimation de la puissance des LMC et IMC du modèle BEKK. Source : Tse (2000)

---

Dans le deuxième type de modèles, Tse.Y.K.,(2000)[180] suppose que les variances conditionnelles suivent un processus GARCH, tandis que les corrélations conditionnelles suivent le processus spécifié. Une des difficultés de ce modèle est que la matrice de corrélation simulée n'est pas garantie d'être définie positive. Ce problème doit être contrôlé en fixant les paramètres à un niveau suffisamment bas. Il convient de noter que leur intention n'est pas de soutenir que ces deux types de modèles représentent des processus qui sont descriptifs de données réelles. Leur objectif est d'examiner la puissance des tests dans le cadre de certaines alternatives.

Les résultats des estimations du modèle Tse.Y.K.,(2000)[180] est présente sur le figure 3.1, d'où Le panel A donne les valeurs réelles des paramètres des expériences de Monte Carlo. P1 et P2 sont modèles bivariés, tandis que P3 est trivariée. Les matrices de paramètres B et C sont toutes deux symétriques. Panel B enregistre les maximales et minimales des plages des coefficients de corrélation conditionnelle  $\{\rho_{ijt}\}$  dans les échantillons simulés. Il donne également les probabilités estimées de rejet de la corrélation constante hypothèse utilisant les statistiques LMC et IMC à la taille nominale asymptotique de 5%. L'hypothèse de Monte Carlo, la taille de l'échantillon est de 1000.

Tse.Y.K.,(2000)[180] ont considéré deux modèles BEKK bivariés désignés par P1 et P2, et un modèle BEKK trivariant désigné par P3. Les paramètres du modèle sont résumés dans le panneau A du (figure 3.1). Ils ont considéré des tailles d'échantillon T de 300, 500 et 1000. Sur la base d'échantillons de Monte Carlo de 1000 chacun, ils ont estimé la puissance du LMC et du IMC par rapport aux modèles de corrélation conditionnelle variables dans le temps à une taille nominale de 5%. Comme mesure de la variabilité des coefficients de corrélation conditionnelle, en calculant la plage (c'est-à-dire le minimum maximum) des coefficients de corrélation conditionnelle dans chaque échantillon simulé d'observations t. Le panel B résume les fourchettes maximales et minimales des coefficients de corrélation conditionnelle dans les échantillons de Monte Carlo de 1000. On peut voir que P2 a une plus grande variabilité des corrélations que P1. Le test LM s'avère très puissant dans toutes les expériences. Il est assez remarquable que pour l'expérience P1, pour laquelle la plage de  $\rho_{1,2,t}$  semble assez faible, le LM a encore une très bonne puissance. Par exemple, pour P1 lorsque T=1000, la gamme maximale de  $\rho_{1,2,t}$  n'est que de 0,396 et pourtant la puissance empirique du LMC est de 91,3%. En revanche, le LMC a une très faible puissance dans tous les cas. En effet, la puissance empirique de l'IMC est inférieure à 10% dans tous les cas, sauf pour P2 avec T=1000.

Pour les modèles alternatifs du second type, ils sont considéré deux modèles bivariés désignés par Q1 et Q2, et un modèle trivarié désigné par Q3, les valeurs des paramètres sont établis après quelques expérimentations pour générer des matrices de corrélation conditionnelle soit bien définies positives.

Dans tous les échantillons simulés, le panel B montre que la variabilité des coefficients de corrélation sont généralement plus élevés que ceux des modèles de la BEKK. Cependant, la puissance du test LM est plus faible par rapport à ce deuxième type de modèles.

### CHAPITRE 3. PRISE EN COMPTE DU PHÉNOMÈNE DE CORRÉLATION BREAKDOWN DANS LES MODÈLES ARCH

---

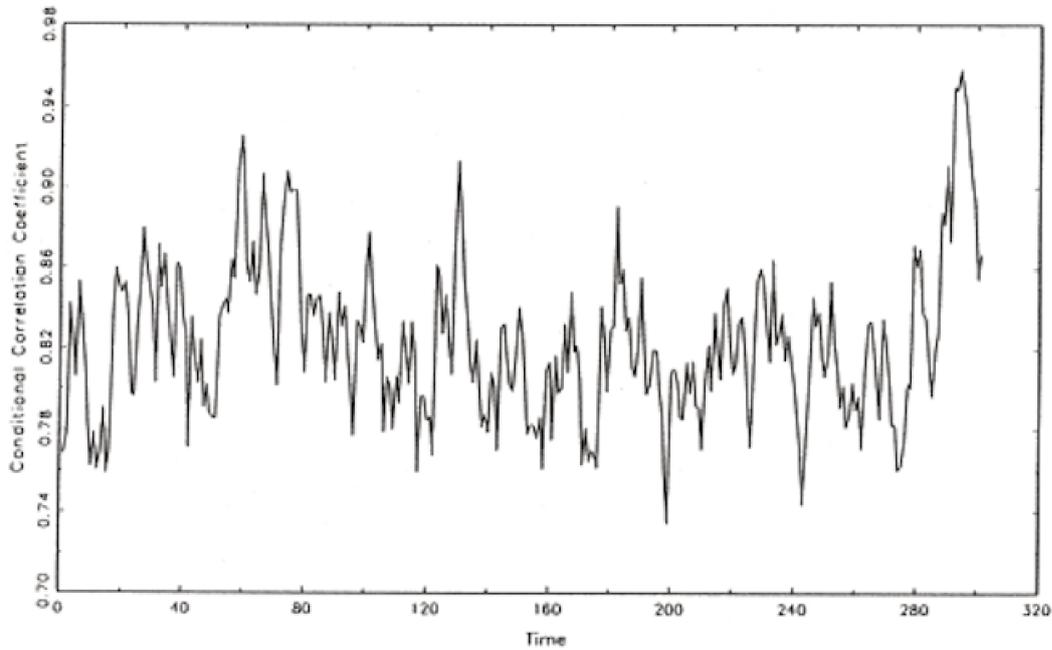


FIGURE 3.2 – Corrélations conditionnelles d'un échantillon de P1, T=300.  
Source : Tse (2000)

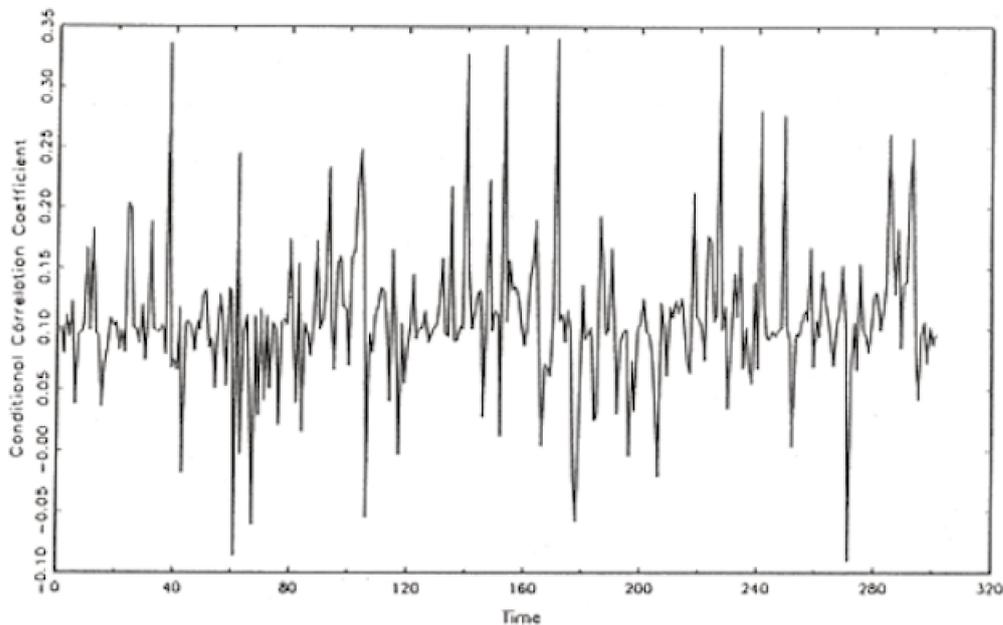


FIGURE 3.3 – Corrélations conditionnelles d'un échantillon de Q1, T=300.  
Source : Tse (2000)

Cependant, la puissance du test LM est plus faible par rapport à ce deuxième type de modèles. Par exemple, la puissance maximale atteinte dans les expériences est pour Q2 avec T=1000, qui a une estimation de seulement 47,1%. Comme pour le test IM, la puissance empirique se révèle à nouveau très faible. En effet, parmi les cas considérés, la puissance empirique

maximale atteinte n'est que de 6,7 %. Pour comparer les caractéristiques des corrélations variables dans le temps dans les deux types de modèles, ils examineront les trajectoires des coefficients de corrélation générés. Les figures 3.2 et 3.3 présentent les tracés de deux trajectoires simulées de coefficients de corrélation conditionnelle basées sur P1 et Q1, respectivement, pour  $T=300$ . Il est évident que les deux modèles produisent des structures de corrélation très différentes qui varient dans le temps. La figure 3.3 présente un exemple de cheminement de coefficients de corrélation conditionnelle non corrélés en série. Cela est dû au fait que  $\varepsilon_{1,t-1}$  et  $\varepsilon_{2,t-1}$  sont non corrélés en série. D'autre part, la figure 3.2 est caractéristique d'un cheminement d'échantillon d'une série chronologique corrélée en série. La boîte Statistiques Pierce Q basées sur les 10 premières corrélations en série décalées les coefficients des trajectoires d'échantillonnage sont de 72,95 pour la trajectoire de la figure 3.2 et de 8,89 pour celle de la figure 3.3. En effet, les coefficients d'autocorrélation de la trajectoire de l'échantillon de  $\rho_t$  généré à partir de P1 diminuent très lentement, ce qui est caractéristique d'une série chronologique à longue mémoire. Ainsi, que Q1 génère des corrélations temporelles non corrélées en série, P1 génère des séries de coefficients de corrélation avec de longues mémoires. Comme  $y_{i,t-1}y_{j,t-1}$  sont spécifiés comme les covariables pour suivre les variations des coefficients de corrélation dans le test LM, cela peut aider à expliquer la différence de puissance du test LM trouvée dans les deux types de modèles de corrélation variant dans le temps. Il convient de noter que nos résultats de Monte Carlo n'ont en aucun cas présenté une étude complète de la puissance des tests, comme d'autres tests de Monte Carlo.

La formulation du BEKK<sup>7</sup>, proposée par Engle et Kroner (1995)[72] qui a développé un test quadratique général pour l'équation de covariance conditionnelle, a permis d'éliminer le problème de la garantie de l'estimation de la covariance conditionnelle du modèle original de la Vech. D'autres formulations plus maniables de modèle de la BEKK comprend des diagonales et des scalaires qui imposent des restrictions à certains paramètres pour être égal à zéro, bien que ces restrictions soient généralement rejetées. Outre le grand nombre de paramètres devant être estimés pour la forme générale .

En effet, Longin, F. et Solnik, B., (1995)[135] montrent que les corrélations entre les marches boursières augmentent progressivement avec le temps. De ce fait, supposer que dans les modèles ARCH multivariés, les corrélations sont constantes pour éviter un nombre très grand de paramètres à estimer devient une spécification très restrictive en comparaison avec des résultats empiriques. De plus Tse Y.K., (2000)[180], avec le test du multiplicateur de Lagrange, rejettent l'hypothèse nulle de constance des corrélations entre les marches boursières de Hong Kong.

Il y a 20 ans, Alexander (2000)[10] a proposé l'utilisation de modèles GARCH factoriels, pour l'estimation des grandes matrices de covariance. Les modèles factoriels ou orthogonaux MV-GARCH fournissent une méthode pour estimer toute matrice de covariance dynamique en utilisant uniquement des modèles GARCH univariés. Alexander montre comment un nombre limité de facteurs peut expliquer dans un modèle MV-GARCH une part importante de la volatilité des séries. Toutefois, cette approche, tout en réduisant le nombre de paramètres à estimer à  $o(k)$ , est limitée à la fois par la difficulté d'interprétation des coefficients des modèles GARCH univariés et par les mauvaises performances.

---

7. la spécification BEKK du modèle GARCH multivarié de Engle et Kroner (1995)[72]. Cet algorithme BEKK permet la variation dans le temps de la covariance conditionnelle laquelle assure le caractère défini positif de la matrice de variance covariance conditionnelle

### CHAPITRE 3. PRISE EN COMPTE DU PHÉNOMÈNE DE CORRÉLATION BREAKDOWN DANS LES MODÈLES ARCH

---

L'objectif de ce chapitre est de se pencher sur la dynamique d'une volatilité qui serait régie par une spécification de type MGARCH et de trouver un paramètre qui prend en compte les périodes de chute hétérogène de la dynamique de la matrice de covariance du modèle GARCH. Notre objectif est bien de nous interroger sur les possibilités de prise en compte des ruptures de corrélation dans le cadre d'une modélisation dynamique de cette corrélation.

L'objectif général de ce chapitre est donc de proposer un moyen de prendre en compte les périodes des chutes hétérogènes de la dynamique de la matrice de covariances du modèle GARCH. Autrement dit est de chercher un paramètre qui peut nous permettre de mesurer les périodes de chute hétérogène. Nous commençons dans un premier temps par rappeler les caractéristiques des modèles à corrélations conditionnelles et à corrélations dynamiques puis appliquons la méthodologie à des données quotidiennes d'actif du secteur de la Chimie pharmaceutique et des actifs de CAC40.

## 3.1 Modélisation dynamique de la matrice de variance-covariances du modèle GARCH

### 3.1.1 Les modèles à volatilité conditionnelle hétéroscédastique ARCH

Les modèles ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity) est développé par Engle, R.,(1982)[66] afin de permettre à la variance d'une série de dépendre de l'ensemble d'information disponible, et notamment du temps. Cette classe de modèle a pour objet de pallier les insuffisances des représentations Autorégressive Moyenne Mobile (ARMA) traditionnelles non adaptées aux problématiques financières. Les séries financières sont en effet caractérisées par une volatilité variable et par des phénomènes d'asymétrie qui ne peuvent être pris en compte par les modélisations de type ARMA. Or, d'un point de vue économique, il est particulièrement important de comprendre et de modéliser la volatilité d'une série. En effet, les décisions d'investissement dépendent fortement, non seulement de l'évaluation des rentabilités futures, mais également des risques afférents aux diverses actions constituant les portefeuilles. L'estimation de la volatilité de la rentabilité d'une action fournit une mesure du risque qui y est attaché. En outre, si le processus suivi par la volatilité est correctement spécifique, celui-ci peut fournir des informations utiles à la détermination du processus générant les rentabilités. Les modèles ARCH sont basés sur une paramétrisation endogène de la variance conditionnelle.

Les modèles ARCH se sont révélés particulièrement adaptés à la prise en compte de caractéristiques importantes des séries financières (volatilité, leptokurticité, asymétrie...). Ils fournissent également un cadre adapté au test des principales théories financières classiques. Les problèmes probabilistes, statistiques et économétriques qu'ils suscitent ont donné lieu à une littérature importante. Revenons succinctement sur les propriétés de la modélisation ARCH.

#### Formulation générale du modèle ARCH

De manière générale un processus ARCH univarié peut être défini comme solution d'un modèle de la forme suivants, nous adaptons les notations T. Bollerslev.T.,(1992)[38].

Considérons un processus univarié,  $\{\varepsilon_t, t = 1 \dots T\}$  tel que :

$$\begin{aligned} Y_t - \mu_t &= \varepsilon_t = \sigma_t z_t \\ \varepsilon_t &= \sigma_t z_t \end{aligned} \tag{3.1}$$

avec  $Y_t$  la série des rentabilités observées,  $\mu_t = E_{t-1}[Y_t]$  l'espérance conditionnelle de  $Y_t$  par rapport à la tribu<sup>8</sup>  $F_{t-1}$  et  $(z_t)$  un processus i.i.d, indépendant du passé de  $\varepsilon_t$ , centré, de variance unitaire.

$$E(z_t) = 0 \quad \text{et} \quad V(z_t) = 1 \tag{3.2}$$

---

8. La théorie des processus (l'étude probabiliste de phénomènes variant avec le temps) permet de donner une interprétation intuitive de certaines tribus. Par exemple, supposons qu'on s'intéresse à l'évolution du prix d'un actif financier en fonction du temps. L'espace des événements X est l'ensemble des évolutions possibles de cet actif, c'est-à-dire des fonctions associant à chaque instant un prix. Pour chaque valeur t du temps, on définit ainsi une tribu  $\mathcal{A}_t$  : étant donné un ensemble  $\mathcal{A}$  d'événements, on décidera que  $\mathcal{A}$  est dans  $\mathcal{A}_t$  si on peut le décrire par une formulation qui, lue par un observateur vivant à la date t, ne se réfère qu'au passé.

### CHAPITRE 3. PRISE EN COMPTE DU PHÉNOMÈNE DE CORRÉLATION BREAKDOWN DANS LES MODÈLES ARCH

Engle.R.,(1982)[66] souligne que l'amélioration des prévisions des séries chronologiques provient de l'exploitation de l'information contenue dans la moyenne conditionnelle du processus.

Notons  $F_{t-1} = (\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2})$  la tribu engendrée par les valeurs passées de  $\varepsilon_t$ .

Et  $\varepsilon_t$  un processus tel que :

$$\begin{cases} E(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}) = 0 \\ V(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}) = \sigma_t^2 \end{cases} \quad (3.3)$$

où  $\sigma_t^2$  représente la variance conditionnelle du processus  $\varepsilon_t$ .

$\varepsilon_t$  est un processus centré non corrélé mais sa variance conditionnelle, qui est un indicateur de la volatilité d'un titre peut, varier au cours du temps. En général le processus  $\varepsilon_t$  n'est pas observable, il peut correspondre à l'innovation d'un processus du type Autorégressive Moyenne Mobile (ARMA) pour la série étudiée, écrit sous forme polynomiale ARMA(r,s) :

$$\Phi(L)Y_t = \Theta(L)\varepsilon_t \quad (3.4)$$

avec :  $\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_r L^r$

$\Theta(L) = 1 - \theta_1 L - \dots - \theta_s L^s$  et  $\varepsilon_t$  est un processus GARCH(p, q)

Ou encore à l'innovation, sous forme général dans un modèle de régression :

$$Y_t = f(X_{t-1}, \beta) + \varepsilon_t \quad (3.5)$$

avec  $(X_{t-1}, \beta)$  une fonction des variables explicative  $X$  en t-1.

Le processus ARCH(q) est le modèle de base des processus ARCH définis par Engle.R.,(1982)[66]. Le modèle ARCH(q) est basé sur une paramétrisation quadratique de la variance conditionnelle  $\sigma_t^2$ . Le processus ARCH(q) est défini par :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad (3.6)$$

$$= \alpha_0 + \alpha(L)\varepsilon_t^2 \quad (3.7)$$

Où,  $\alpha_0 > 0$  et  $\alpha_i \geq 0$ , et L désigne l'opérateur retard.

Les premiers travaux sur la volatilité (modèles ARCH/GARCH) par Bollerslev.T.,(1986)[39] été conçus pour fournir des estimations de la volatilité conditionnelle.

Leurs caractérisations reposent essentiellement sur le concept de variance conditionnelle, qui ne dépend que des valeurs passées : l'effet sur la volatilité de la date présente des innovations passées positives et négatives est donc identique. Or, nous reconnaissons depuis les années 1970 que les rendements passés négatifs augmentent plus fortement la volatilité que les rendements passés positifs.

Selon Berra, A.K., et Higgins, M.L.,(1993)[46], la modélisation GARCH et ses extensions correspondent à une représentation spécifique de la non linéarité, qui permet une modélisation simple de l'incertitude.

### 3.1. MODÉLISATION DYNAMIQUE DE LA MATRICE DE VARIANCE-COVARIANCES DU MODÈLE GARCH

#### 3.1.2 Modèles ARCH généralisés (GARCH)

Bollerslev (1986)[39] a généralisé le modèle initial d'Engle en établissant le modèle GARCH (p,q) (Generalized ARCH). Cette extension consiste en l'introduction de valeurs retardées de la variance dans son équation. Ce qui permet une description plus parcimonieuse de la structure des retards. Le modèle AR simple qui se présente, soit sous la forme d'une équation ou encore par une forme compagnon. La forme compagnon intègre une matrice dont la dimension dépend du nombre de retards et du nombre de variables explicatives qui la rend plus simple à modéliser.

Le choix du nombre  $p$  optimal de retards est une étape déterminante dans le processus d'estimation. En effet, un nombre insuffisant de retards fait perdre de l'information au processus étudié (sa mémoire n'est alors pas assez longue) tandis qu'un nombre trop important de retards augmente le nombre de paramètres à estimer et réduit donc d'autant le degré de liberté du processus.

D'après Bollerslev (1986)[39], Il s'agit d'un modèle ARCH généralisé, car dans ce type de modèles, l'information plus éloignée dans le passé sur la variance conditionnelle des erreurs est prise en compte dans la spécification de celle-ci en y incluant les valeurs des variances décalées. L'introduction d'un grand nombre de retards  $p$  dans l'équation de la variance conditionnelle du modèle ARCH(p) est nécessaire pour tenir compte de la longue mémoire de la volatilité qui caractérise certaines séries financières. Ce nombre important de paramètres peut conduire à la violation de la contrainte de non-négativité de la variance et poser des problèmes d'estimations.

Cette classe de modèles est rapidement devenue très populaire pour expliquer les dynamiques des rendements financiers puisqu'elle est en mesure de reproduire une multitude de faits stylisés, Le modèle GARCH (p,q) de Bollerslev modélise la variance conditionnelle dans l'équation précédente par la médiation de la relation paramétrique suivante :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (3.8)$$

où  $\sigma_t^2$  l'estimation historique de la variance,  $\varepsilon_{t-i}^2$  est le carres des rentabilités historiques (ou l'erreur issue d'un modèle explicatifs de la rentabilité), ainsi que  $(\alpha_0, \alpha_i, \beta_j)$  sont les paramètres du modèle.  $\alpha_0 > 0$  et  $\alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0, \forall_i \forall_j$ . Lorsque  $p = 0$ , le processus GARCH(p,q) se réduit au processus ARCH(q).

On n'induit pas les corrélations dans les rendements sur les modèles GARCH, mais il génère d'une autocorrélation positive dans le processus ( $\varepsilon_t^2$ ) et permet donc de diminuer les périodes de forte et faible volatilités. Ainsi, le coefficient d'aplatissement de la distribution inconditionnelle est toujours supérieur ou égal à celui du terme d'erreur.

L'identification des ordres  $p$  et  $q$  d'un processus GARCH s'effectue à partir de l'étude des autocorrélations et autocorrélations partielles de la série des ( $\varepsilon_t^2$ ). De plus, pour un processus ARCH(q), la fonction d'autocorrélation s'annule à partir du rang  $(q + 1)$ . Pour un processus GARCH (p.q.), la fonction est nulle et décroît lorsque le nombre de retards augmente.

Les modèles GARCH restent fortement contraints à ce que la variance conditionnelle soit positive. Par conséquence, un choc, quel que soit son signe à toujours un effet positif sur la volatilité.

### 3.1.3 Modèles GARCH multivariés

Il est établi que la volatilité et les corrélations entre les valeurs boursières varient dans le temps. De plus, la réaction de la volatilité et des corrélations à un choc peut être différente selon le signe du choc. Nous examinons la performance hors échantillon des modèles GARCH multivariés dans un cadre de gestion de portefeuille et dans le calcul de risque (VaR)<sup>9</sup>, (Koon Chung Hui (2007)[122]).

Une approche proposée par Engle, R., (2002)[67] il y a 20 ans pour la modéliser à la fois les variances et les corrélations conditionnelles est le modèle à corrélations conditionnelles dynamiques (DCC), (Koon Chung Hui, 2007).

Les corrélations variant dans le temps sont souvent estimées à l'aide de modèles de GARCH à plusieurs variables, linéaires dans les carrés et les produits croisés des données. Cette nouvelle classe de modèles multivariés est appelée modèles de corrélation conditionnelle dynamique (DCC). Ceux-ci ont la flexibilité des modèles GARCH univariés, couplés à des modèles paramétriques parcimonieux pour les corrélations. Ils ne sont pas linéaires mais peuvent souvent être estimés très simplement avec des méthodes univariées ou en deux étapes basées sur la fonction de vraisemblance. Il est démontré qu'ils fonctionnent bien dans une variété de situations et fournissent des résultats empiriques raisonnables dans (Engle, R. 1999)[67].

Les extensions des modèles GARCH Multivariés n'est pas directe<sup>10</sup> et cause des difficultés. Une généralisation immédiate du modèle univarié entraînerait une inflation du nombre de paramètres à estimer conduisant très rapidement à des problèmes numériques. Les développements de modèles GARCH multivariés doivent donc concilier une spécification plus ou moins parcimonieuse en paramètres tout en préservant une certaine flexibilité pour ne pas perdre de leur pouvoir explicatif. Deux classes de modèles permettent ces extensions. Dans la première, la matrice de covariances conditionnelles est modélisée directement. Dans la seconde, cette matrice est obtenue en intégrant les corrélations conditionnelles. Dans ce cas, la volatilité conditionnelle d'une série vectorielle de rendements  $y_t$ , de dimension  $(N \times 1)$  peut s'écrire comme suit.

Considère un modèle GARCH multivarié d'une série temporelle vectorielle à  $N$  dimensions :

$$Y_t = (y_{1t}, \dots, y_{Nt})'(N \times 1) \quad (3.9)$$

$$Y_t - \mu_t = \varepsilon_t = H_t^{-1/2} Z_t \quad (3.10)$$

où  $Z_t$  une suite de  $(N \times 1)$  i.i.d. vecteur aléatoire avec les caractéristiques suivantes :  $E[Z_t] =$

---

9. voir le chapitre 1 pour plus de détails sur VaR

10. La spécification de référence est celle d'un GARCH multivarié de type DCC c'est-à-dire avec corrélations conditionnelles dynamiques. L'extension des modèles GARCH univariés au cadre multivarié est de décrire la volatilité de plusieurs séries temporelles, pour pouvoir exploiter le plus possible des liens qui peuvent exister entre ces séries.

### 3.1. MODÉLISATION DYNAMIQUE DE LA MATRICE DE VARIANCE-COVARIANCES DU MODÈLE GARCH

0,  $E[Z_t Z_t'] = I_N$  et  $Z_t \sim F(0, I_N)$ , avec  $F$  la fonction de densité continue :

$$E_{t-1}(\varepsilon_t \varepsilon_t') = H_t \quad (3.11)$$

$$E_{(\varepsilon_t \varepsilon_t')} = \Sigma \quad (3.12)$$

$$E_{t-1}[\cdot] = E[\cdot | \phi_{t-1}] \quad (3.13)$$

où  $\phi_{t-1}$  est le champ  $\sigma_t$  généré par les valeurs passées des variables observables. Et  $H_t$  est une matrice ( $N \times N$ ) définie positive et mesurable avec l'ensemble de données de  $\phi_{t-1}$ , c'est-à-dire que le champ  $\sigma_t$  généré par les observations passées qui est  $\{\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-3} \dots\}$ .

La matrice de corrélation est présente comme suit :

$$corr_{t-1}(\varepsilon_t \varepsilon_t') = R_t = D_t^{-1/2} H_t D_t^{-1/2} \quad (3.14)$$

$$D_t = diag(h_{11,t}, \dots, h_{NN,t}) \quad (3.15)$$

Où  $R_t$  est une matrice de corrélation contenant les corrélations conditionnelles.

Les Modèles de volatilité multivariés fournissent une structure paramétrique pour l'évolution dynamique de la matrice  $H_t$ . Ils doivent satisfaire si les éléments diagonaux de  $H_t$  doivent être strictement positifs, et il existe une stationnarité. De plus l'estimation doit être flexible pour augmenter le  $N$ , il devrait permettre des diminuer et d'augmenter la covariance puis les coefficients doit avoir une interopération économique ou financiers. La paramétrisation de  $H_t$  sous forme de GARCH multivariée, ce qui signifie que une fonction de l'ensemble d'informations de  $\phi_{t-1}$ , permet à chaque élément de  $H_t$  de dépendre de valeurs  $q$  passées du processus du carrés et des produits croisés de  $\varepsilon_t$ , ainsi que  $P$  des valeurs passées des éléments de  $H_t$ . De plus, les éléments de la matrice de variance suivent un vecteur du processus ARMA en carrés et en produits croisés des perturbations.

L'extension d'un modèle GARCH univarié à un  $N$ -variable, modèle nécessite de permettre la matrice de variance-covariance conditionnelle à  $N$  dimensions, la moyennes nulles des variables aléatoires  $\varepsilon_t$  dépendent de l'ensemble des éléments d'informations.

Le processus de GARCH ( $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ ) qui est défini en équation (3.8) par :

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \\ &= \alpha_0 + \alpha(L) \varepsilon_t^2 + \beta(L) \sigma_t^2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Nelson et Cao(1991) montre que des contraintes sur les coefficients assurant la positivité de la variance conditionnelle. Lorsque  $p = 1$  et  $q = 1$ , le processus GARCH (1,1) devient :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (3.17)$$

La condition nécessaire de stationnarité du processus GARCH (1,1) :

$$\alpha + \beta = \sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1 \quad (3.18)$$

### CHAPITRE 3. PRISE EN COMPTE DU PHÉNOMÈNE DE CORRÉLATION BREAKDOWN DANS LES MODÈLES ARCH

Le GARCH multivariée est noté MGARCH, ou hétéroscédasticité conditionnelle autorégressive généralisée multivariée. MGARCH permet à la matrice de covariance des variables dépendantes de suivre une structure dynamique flexible.

MGARCH implémente des modèles de corrélation Diagonale Vech et Conditionnelle. Les modèles de corrélation conditionnelle utilisent des combinaisons non linéaires de modèles GARCH univariés pour représenter les covariances conditionnelles. MGARCH fournit des estimateurs pour trois modèles de corrélation conditionnelle populaires CCC, DCC, VCC, également connus sous le nom de corrélation conditionnelle constante, dynamique et variable.

Vech de Woolbridge du modèle ARCH multivarié est probablement le modèle le plus général proposé par Bollerslev et Engle, R.,(1988)[69]. Dans ce modèle Vech, la matrice de covariance conditionnelle est spécifique comme suit :

$$vech(H_t) = C + \sum_{i=1}^q A_i vech(\varepsilon_{t-i} \varepsilon'_{t-i}) + \sum_{j=1}^p B_j vech(H_{t-j}) \quad (3.19)$$

où Vech ( $\cdot$ ) est l'opérateur des colonnes inférieure de la matrice symétrique. Pour une matrice de covariance ( $H_t$ ), ( $N \times N$ ) le  $Vech(H_t)$  est un vecteur de  $N(N+1)/2 \times 1$ ,  $C$  est égale à  $N(N+1)/2 \times 1$  et  $A_i B_j$   $i = 1 \dots, q, j = 1 \dots, p$  sont des matrices de  $N(N+1)/2 \times N(N+1)/2$ . Le modèle Vech représente toujours des inconvénients majeurs dans les applications, par exemple il implique (uniquement pour l'équation de covariance conditionnelle) les paramètres  $N(N+1)/2 + (p+q) + N^2(N+1)^2/4$ , même pour un système de petite taille, le nombre de paramètres à estimer est prohibitif. Pour faciliter la présentation, on supposera toujours que  $p$  et  $q$  sont égaux à 1 de sorte que seuls les modèles GARCH (1,1) à plusieurs variables soient discutés. Il est simple de généraliser le modèle à  $p, q > 1$ . Pour résoudre ces problèmes, Bollerslev et al. (1988) ont proposé le modèle beaucoup plus simple de Vech en diagonale en limitant les matrices de coefficients  $A$  et  $B$  de l'équation (3.19) à une diagonale de sorte que chaque la matrice covariance conditionnelle ne dépende que de ses propres valeurs et surprises passées. C'est-à-dire que la covariance conditionnelle est décidée par l'équation suivante :

$$h_{ijt} = \omega_{i,j} + \alpha_{ij} \varepsilon_{it-1} + \beta_{ij} h_{ijt-1} \quad i, j = 1, \dots, N \quad (3.20)$$

Avec cette restriction, seuls  $(p+q+1)N(n+1)/2$  sont des paramètres implique pour un système ( $N \times N$ ), ce qui est plus petit que celui d'un le modèle de vech.

La question qu'on peut poser est comment donner une condition suffisante pour que le modèle de Vech en diagonale soit définie positive. Et sur cette base, une séquence de modèles simplifiés garantissant que la matrice de covariance conditionnelle soit définie positive. Le modèle de Vech en diagonale équation (3.20) peut aussi s'écrire sous cette forme :

$$H_t = C + A \otimes \varepsilon_{t-1} \varepsilon'_{t-1} + B \otimes H_{t-1} \quad (3.21)$$

avec  $H_t$  est la matrice de covariance conditionnelle à l'instant  $t$ ,  $C, A$  et  $B$  sont des matrices de paramètres de ( $N \times N$ ).  $H_t$  et les matrices  $C, A$  et  $B$  doit être symétrique. Par conséquent, seule la partie inférieure des matrices  $C, A$  et  $B$  doit être paramétrée et estimée.

### 3.1. MODÉLISATION DYNAMIQUE DE LA MATRICE DE VARIANCE-COVARIANCES DU MODÈLE GARCH

Le modèle Diagonaux Vech GARCH permet à la matrice de covariance conditionnelle des variables dépendantes de suivre une structure dynamique flexible. MGARCH DVecH estime les paramètres des modèles Diagonaux Vech GARCH dans lesquels chaque élément de la matrice de covariance conditionnelle actuelle des variables dépendantes ne dépend que de son propre passé et de chocs passé.

**Propriété 1** (*Queues épaisses conditionnelles*) Même une fois corrigée de la volatilité clustering (par exemple avec des modèles ARCH), la distribution des résidus demeure leptokurtique même si la kurtosis est plus faible que dans le cas non conditionnel.

**Propriété 2** (*Effet de levier*) Il existe une asymétrie entre l'effet des valeurs passées négatives et l'effet des valeurs passées positives sur la volatilité des cours ou de rendements. Les baisses de cours tendent à engendrer une augmentation de la volatilité supérieure à celle induite par une hausse des cours de même ampleur.

On a  $H_t$  un processus MGARCH, il existe plusieurs spécifications de modèle pour la matrice  $H_t$ , par exemple : le modèle à corrélation conditionnelle constante CCC-GARCH, de Bollerslev (1990)[35], les modèles à Covariances Dynamique de Tse et Tsui (2002).,[179], le modèle Diagonal Vech de Bollerslev, Engle et Wooldridge., (1988)[69], ainsi, le modèle BEKK Diagonal Engle et kroner (1995)[72], Engle, Shepphard (2001) [64], tandis que Bauwens, L., Laurent, S., and Bombouts, V.K.,(2006)[47], dans l'ensemble le modèle MGARCH, est défini comme suit :

$$H_t = D_t R_t D_t = \begin{bmatrix} h_{11,t} & \dots & h_{11,t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{11,t} & \dots & h_{11,t} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Où,  $h_{iit}$  sont les variances conditionnelle des  $m$  matrices et  $h_{ijt}$  la covariance conditionnelle, avec  $i = \overline{1, N}, j = \overline{1, N}, i \neq j$ . Et  $D_t, R_t$  sont des matrices tel que :

$$D_t = \text{diag}(H_t^{1/2}) = D_t = [h_{11,t}^{1/2}, \dots, h_{NN,t}^{1/2}], \quad \text{et } R_t = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \rho_{1N,t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N1,t} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Où  $\rho_{ijt}$  est corrélation conditionnelle dynamique entre  $(i, j)$ . La matrice  $R_t$  est symétrique d'où ( $\rho_{iit} = \rho_{ijt}$ ).

La corrélation conditionnelle entre deux séries peut s'écrire :

$$\rho_{1,2,t} = \frac{E_{t-1}(\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t})}{\sqrt{E_{t-1}(\varepsilon_{1,t}^2) E_{t-1}(\varepsilon_{2,t}^2)}} \quad (3.24)$$

Le choix du modèle doit nous assurer que la matrice des variances-covariances est définie positive, et nous permettrons de saisir la transmission en variance et en covariance. Malgré cela, les modèles DCC n'intègrent pas les effets de la transmission en variance sur la corrélation conditionnelle. D'ailleurs ces modèles donnent une structure linéaire à la dynamique des corrélations tout en imposant une dynamique similaire aux des équations de la corrélation conditionnelle.

## CHAPITRE 3. PRISE EN COMPTE DU PHÉNOMÈNE DE CORRÉLATION BREAKDOWN DANS LES MODÈLES ARCH

### 3.1.4 Modèle à corrélation dynamiques

Selon Engle et Sheppard,(2001) [64] les rendements de  $k$  actifs sont conditionnellement normale multivariée avec valeur attendue nulle et matrice de covariance. Les retours peuvent être soit la moyenne zéro, soit les résidus d'une série chronologique filtrée. La dynamique de la corrélation conditionnelle est présente comment suit :

$$y_t|F_{t-1} \sim N(0, H_t)$$

$$H_t \equiv D_t R_t D_t$$

$$D_t = \text{diag} \sqrt{h_{i,t}}$$

Où  $D_t$  est la matrice diagonale ( $K \times K$ ) de la volatilité conditionnelle des modèles GARCH univariés dont le  $i$ ème élément se note,  $R_t$  est la matrice de corrélations qui varie avec le temps,  $\sqrt{h_{i,j}}$  et le  $i$ ème élément diagonale de  $R$  et  $F_{t-1}$  est l'ensemble informationnel disponible sur les évènements mesurables passés. La volatilité conditionnelle est calculer en utilisant le processus GARCH univariés.

$$h_{it} = \omega_i + \sum_{p=1}^{p_i} \alpha_{ip} y_{it-p} \sum_{q=1}^{Q_i} \beta_j h_{it-p}^2 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.25)$$

Ainsi que on doit imposer les restrictions de stationnarité et de non négative de la volatilité du modèle GARCH univariés. Et  $\sum_{p=1}^{p_i} \alpha_{ip} \sum_{q=1}^{Q_i} \beta_j$  de même que les indices  $P$  et  $Q$  doit être identique pour chaque série.

Un des premiers phénomènes étudiés concernant la dynamique des volatilités est le « Volatility Clustering» découvert par Mandelbrot (1963)[145]. Il fait apparaitre très clairement que des fortes variations des rendements d'actifs tendent à être suivies par d'autres grandes variations de même signe et que des faibles variations de rendements d'actifs tendent à être suivies par d'autres faibles variations. Ce phénomène démontre qu'en période de récession, la volatilité a tendance à varier énormément tandis qu'en période plus calme, les volatilités subissent de plus faibles variations.

Un autre phénomène intéressant a été découvert suite aux travaux empiriques de Black, Fischer., (1976)[48] et de Christie, A and Andrew, A., (1982)[100]. Il semblerait qu'il existe une relation asymétrique entre le rendement et la volatilité. Ils constatent que la volatilité est plus grande en période de récession, ce qui traduirait une augmentation plus grande de la volatilité des actions après un choc négatif qu'après un choc positif de même amplitude. L'étude réalisée par Schwert(1989)[177] sur le crash boursier de 1987 a largement confirmé ce phénomène.

Schwert (1989)[177] analyse la dynamique de la volatilité des actifs financiers sur une période de 130 ans. Il tente d'expliquer les différents facteurs qui influencent cette dynamique. Une des premières explications qu'il donne trouve sa source dans l'incertitude économique. En effet, au niveau macroéconomique, la valeur de marché d'une entreprise dépend clairement de la santé de l'économie. Pour un taux d'actualisation constant, la variance conditionnelle du prix des actions est proportionnelle à la variance conditionnelle des dividendes futurs espérés. Ces dividendes espérés se basent sur des prévisions futures qui dépendent essentiellement des nouvelles informations et du niveau d'incertitude qui règnent sur les marchés financiers. Par exemple, si le niveau d'incertitude est grand, les prévisions des dividendes futurs espérés seront plus faibles

### 3.1. MODÉLISATION DYNAMIQUE DE LA MATRICE DE VARIANCE-COVARIANCES DU MODÈLE GARCH

---

et par conséquent le prix des actions diminuera, ce qui implique finalement une hausse de la volatilité des rendements d'actions.

D'autre part, Schwert (1989)[177] démontre en partie l'influence du levier financier sur le phénomène d'asymétrie. Si le levier financier augmente, la proportion de la dette par rapport aux fonds propres augmente, ce qui rend la détention d'actions plus risquée pour les actionnaires et provoque une augmentation de la volatilité de ces actions. Ceci explique en partie le phénomène d'asymétrie qui suppose qu'un choc négatif a un impact plus important sur la variance conditionnelle qu'un choc positif de même ampleur. Ce phénomène d'asymétrie sera d'ailleurs étudié grâce à l'apparition de modèles dérivés du GARCH. L'introduction des « News Impact Curves » par Engle et Ng.,(1993)[73] fut un autre grand pas réalisé pour l'étude de cet effet asymétrique des chocs sur la volatilité conditionnelle car ces courbes permettent de visualiser l'ampleur d'un choc sur la variance.

D'autres travaux tentent d'expliquer ce phénomène d'asymétrie en déterminant la relation entre la volatilité et la prime de risque d'une action. D'après Braun, Nelson et Seunier (1995)[49], une augmentation de la volatilité du marché augmente la prime de risque du marché. A taux d'actualisation constant, une hausse de la volatilité provoque une baisse des cours sur le marché d'actions ce qui renforce la hausse de la volatilité. Ils analysent la présence d'asymétrie pour le bêta conditionnel en utilisant un modèle GARCH multivarié et constatent qu'il n'y a pas d'effet d'asymétrie des chocs sur le bêta.

Kroner et Ng (1998)[119] analysent la présence d'asymétrie des chocs pour les covariances conditionnelles des actifs financiers. Pour ce faire, ils introduisent une généralisation multivariée des courbes d'Engle et Kroner (1993)[73] : « Les news Impact Surface ». Ces surfaces permettent d'analyser l'impact des chocs sur la covariance conditionnelle. Ils vont d'ailleurs analyser la dynamique des volatilités des portefeuilles composés d'entreprises de grandes et petites capitalisations boursières. Ils constatent que l'asymétrie est plus grande pour des indices de marché que pour une action prise individuellement. Wu et Bekaert (2000)[188] introduisent une nouvelle explication au phénomène d'asymétrie. D'après eux, ce phénomène peut aussi être expliqué par l'existence d'une prime de risque qui varie avec le temps. La causalité est cependant différente de celle de l'effet levier. En effet l'effet levier explique en partie qu'une variation des rendements provoque un changement dans les volatilités conditionnelles tandis que la théorie de la dynamique de la prime de risque suppose que les changements de volatilité provoquent des variations de rendements. Ce phénomène appelé « volatility feedback » suppose que la volatilité est persistante et démontre qu'il existe une relation intertemporelle positive entre le rendement attendu et la variance conditionnelle.

Cet effet de « Volatility Feedback » n'avait jamais été étudié auparavant au niveau de l'entreprise individuelle. Or d'après la théorie du CAPM, la prime de risque d'une action est égale à la prime de risque du marché multiplié par un coefficient Beta. Ce coefficient, qui représente le risque non diversifiable de l'actif, est égal à la covariance entre l'actif et le marché divisé par la variance de ce marché. Cela signifie que si la covariance entre un actif et son marché augmente, le Beta augmente et donc le rendement attendu augmente ce qui provoque finalement une hausse de la volatilité.

Le phénomène d'asymétrie au niveau de l'entreprise individuelle est assez complexe à analyser.

### CHAPITRE 3. PRISE EN COMPTE DU PHÉNOMÈNE DE CORRÉLATION BREAKDOWN DANS LES MODÈLES ARCH

Une mauvaise nouvelle a deux impacts sur les volatilités. Premièrement, celle-ci va augmenter la volatilité générale du marché et cette augmentation va être compensée par l'attente des investisseurs de rendements plus élevés ce qui provoque une diminution des valeurs de marché des entreprises. Cette diminution des prix continuera jusqu'à ce que le rendement attendu soit suffisamment haut. Le phénomène de volatility feedback provoque donc une augmentation de la volatilité. Deuxièmement, la diminution des prix des actions provoque une augmentation du levier financier au niveau du marché ce qui a pour conséquence d'augmenter à nouveau la volatilité des rendements d'actifs. L'effet levier renforce donc encore l'effet de feedback de la volatilité. Dans le cas d'une bonne nouvelle, l'impact sur la volatilité n'est pas encore très clair. Ces deux effets tendent à se contrebalancer et donc l'effet est plus ou moins mixte.

Les modèles à corrélation conditionnelle : Les corrélations conditionnelles est une formulation ou la matrice de corrélation conditionnelle réunir une matrice de covariance conditionnelle. Cette classe d'estimateurs, initiée par Bollerslev.,(1990)[35], qui peut être considéré comme une généralisation de l'estimation de la corrélation conditionnelle constante (CCC), se présente comme suit :

$$H_t = D_t R D_t \quad (3.26)$$

Où  $R$  est la matrice ( $k \times k$ ) de la corrélation conditionnelle constante (CCC) dans le temps.  $D_t$  représente la matrice ( $k \times k$ ) diagonale des racines des variances covariances conditionnelles, contenant les écarts types conditionnels pour chaque série :

$$D_t = \text{diag}(H_{i,t}^{-1/2}) \quad i = 1, \dots, k \quad (3.27)$$

La modélisation de la matrice de covariance conditionnelle s'effectue en deux étapes. Dans un premier temps, l'information concernant la volatilité individuelle est extraite avec une filtration de type GARCH qui est l'étape d'extraction de la volatilité individuelle est appelée par Engle.,(2009)[65] degarching. Avec cette flexibilité des processus GARCH univariés nous obtiendrons les résidus standardisés de la série vectorielle de rendements qui est définie comme suit :

$$\varepsilon_t = D_t^{-1} y_t \quad (3.28)$$

Les corrélations conditionnelles correspondent à l'espérance des résidus standardisés :

$$E_{t-1}(\varepsilon_t \varepsilon_t') = D_t^{-1} H_t D_t^{-1} = R \quad (3.29)$$

La matrice de covariance conditionnelle est la combinaison des variances conditionnelles individuelles et de la variance conditionnelle des résidus standardisés. Il présente un avantage numérique indéniable en termes pratiques. En effet, la première étape relative à la filtration GARCH des séries individuelles correspond à une somme de problèmes numériques faciles à traiter.

Corrélations dynamiques conditionnelles : Les modèles à corrélations conditionnelles dynamiques (DCC), ont la flexibilité des processus GARCH univariés et la parcimonie des modèles paramétriques d'estimation des corrélations dynamique, ils ne sont pas linéaires mais ils peuvent être estimés simplement et sont plus performants la plupart des modèles existants. Ces modèles, qui paramétrisent directement les corrélations conditionnelles sont estimées en deux phases :

### 3.1. MODÉLISATION DYNAMIQUE DE LA MATRICE DE VARIANCE-COVARIANCES DU MODÈLE GARCH

---

- Les paramètres univariés des séries des rendements sont estimés avec un processus GARCH.
- Les corrélations conditionnelles sont ensuite estimées en se basant sur les résidus standardisés des modèles univariés.

Etant donné que l'on se base sur les résidus standardisés du modèle univarié, la matrice des corrélations conditionnelles n'est rien d'autre que la matrice des variance-covariances conditionnelles des termes d'erreurs, les erreurs de ces résidus standards sont de moyenne nulle et de variance unitaire.

La matrice de corrélation conditionnelle est présentée comme suit :

$$corr_{t-1}(\varepsilon_t, \varepsilon'_t) = R_t = D_t^{-1/2} H_t D_t^{-1/2} \quad (3.30)$$

$$E_{t-1}(\varepsilon_t, \varepsilon'_t) = D_t^{-1/2} H_t D_t^{-1/2} = R_t \quad (3.31)$$

La corrélation conditionnelle entre deux séries avec une moyenne nulle, est définie comme suit :

$$\rho_{1,2,t} = E_{t-1}(\varepsilon_{1,t} \varepsilon_{2,t}) \quad (3.32)$$

où  $\varepsilon$  est une perturbation standardisée qui a une moyenne nulle et une variance de unitaire. La corrélation conditionnelle au temps  $t$  est basée sur l'information connues à la période précédente. La relation entre les rendements et la volatilité conditionnelle est présentée comme suit :  $h_{i,t} = E_{t-1}(y_{i,t}^2)$ ,  $y_{i,t} = \sqrt{(h_{i,t} \varepsilon_{i,t})}$

$$h_{i,t} = E_{t-1}(y_{i,t}^2) \quad y_{i,t} = \sqrt{(h_{i,t} \varepsilon_{i,t})}, \quad i = 1, 2 \quad (3.33)$$

On peut observe dans l'équation (3.33) la relation entre la volatilité conditionnelle et la corrélations conditionnelle. La matrices des variances conditionnelles se définit comme suit :

$$E_{t-1}(\varepsilon_t, \varepsilon'_t) = H_t \quad (3.34)$$

Soit sous forme matricielle :

$$H_t = \frac{1}{N} + \sum_{j=1}^N (y_{t-j}, y'_{t-j}) = \lambda(y_{t-1}, y'_{t-1}) + (1 - \lambda)H_{t-1} \quad (3.35)$$

avec  $\lambda =$

Selon Engle et Sheppard.,(2001)[64] les modèle des dynamiques de corrélations conditionnelles à pour objectif de construire une matrices de corrélations qui varie avec le temps. Le choix du modèle doit nous assurer que la matrice des variances-covariances est définie positive, et nous permettrons de saisir la transmission en variance et en covariance. Malgré cela, les modèles (DCC) n'intègrent pas les effets de la transmission en variance sur la corrélation conditionnelle. D'ailleurs ces modèles donnent une structure linéaire à la dynamique des corrélations tout en imposant une dynamique similaire aux équations de la corrélation conditionnelle.

Le modèles (DCC) suppose que les rentabilités des  $k$  actifs financiers sont conditionnellement normaux et de moyenne nulle.

### CHAPITRE 3. PRISE EN COMPTE DU PHÉNOMÈNE DE CORRÉLATION BREAKDOWN DANS LES MODÈLES ARCH

---

Et la structure des corrélations des conditionnelles dynamiques est définie comme suit :

$$Q_t = \left(1 - \sum_{m=1}^M \alpha_m - \sum_{n=1}^N \beta_n\right) \bar{Q} + \sum_{p=1}^{p_i} \alpha_m (\varepsilon'_{t-m} \varepsilon_{t-m}) + \sum_{n=1}^N \beta_n Q_{t-n} \quad (3.36)$$

$$R_t = Q_t^{*-1} Q_t Q_t^{*-1}$$

Où  $\bar{Q}$  est la matrice des covariances marginales des résidus standards des modèles univariés de chaque série de rendements d'actifs  $Q_t^*$  est une matrice diagonale composée par la racine carrée des éléments de  $Q_t$ . La matrice de covariances non conditionnelle des rendements standardisés obtenus lors de la première étape d'estimation et le Nième élément diagonal de  $R_t$  est de la forme :

$$\rho_{ijt} = \frac{q_{i,j,t}}{\sqrt{q_{i,i,t} q_{j,j,t}}} \quad (3.37)$$

Engle et Sheppard.,(2001)[64], applique ces formules est que  $R_t$  est une matrice des corrélations d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Pour que la matrice de corrélations soit définie positive, il suffit que la matrice  $Q_t$  soit définie positive. Cette hypothèse leur permet d'établir les propriétés du modèle de dynamique des corrélations conditionnelles.

L'introduction de corrélations conditionnelles dynamiques (DCC) consiste à donner un caractère temporel à la matrice de corrélation, Le modèle de corrélation dynamique ne change pas sauf qu'il permet à  $R$  de l'équation (3.26) varier dans le temps, Supposons que les rendements  $y_1, y_2$  admettant la normalité conditionnelle  $y_t|F \sim (0, H_t)$  et  $H_t$  est la matrice de covariance conditionnelle. Bollerslev (1990) [35] décompose cette matrice en une matrice diagonale et une matrice de corrélation.

$$H_t = D_t R_t D_t \quad \text{et} \quad D_t = \text{diag}(h_{i,t}) \quad (3.38)$$

où  $R_t$  est la matrice de corrélation conditionnelle variant dans le temps,  $D_t$  est une matrice diagonale dont les éléments sont des écarts type variant dans le temps respectant individuellement la spécification d'un GARCH univarié. Nous utilisons la spécification de Engle (2002)[67] pour modéliser cette corrélation dynamique :

$$R_t = E_{t-1}(\varepsilon_t, \varepsilon_t') = \text{diag}(Q_t)^{-1/2} Q_t \text{diag}(Q_t)^{-1/2} \quad (3.39)$$

$$Q_t = \left(1 - \sum_m \alpha_m^* - \sum_n \beta_n^*\right) \bar{Q} + \sum_m \alpha_m^* (\varepsilon_{t-m} \varepsilon'_{t-m}) + \sum_n \beta_n^* Q_{t-n} \quad (3.40)$$

où  $\bar{Q}$  est une matrice diagonale contenant les écarts type de la diagonale de  $Q_t$  et  $Q_{t-n}$  est la matrice de covariances non conditionnelle des rendements standardisés obtenus lors de la première étape d'estimation. L'avantage du modèle Engle.R, (2002)[67] est qu'il permet de réduire le nombre les paramètres, cela revient à réduire le temps de calcul.

Tse and Tsui (2002)[179] proposent ainsi d'écrire les corrélations conditionnelles à partir d'un processus autorégressif :

$$Q_t = (1 - \alpha - \beta) \bar{Q} + \alpha_{\varepsilon'_{t-1} \varepsilon_{t-1}} + \beta Q_{t-1} \quad (3.41)$$

### 3.1. MODÉLISATION DYNAMIQUE DE LA MATRICE DE VARIANCE-COVARIANCES DU MODÈLE GARCH

D'où  $\bar{Q}$  est la matrice des corrélations non conditionnelles,  $Q_{t-1}$  une matrice de corrélation empirique des résidus standardisés et  $\alpha + \beta \leq 1$ . L'hypothèse de ce modèle est donc basé sur que les corrélations sont une fonction des corrélations passées ainsi que des corrélations empiriques. Les même l'hypothèses à Tse et Tsui.,(2002)[179], Engle et Sheppard.,(2001)[64] proposent également une écriture autorégressive des corrélations conditionnelles dynamiques DCC. Ainsi, leur approche diffère de la précédente car les corrélations ne sont pas formulées comme une fonction des corrélations retardées. De cette façon, au lieu de modéliser directement les corrélations, Engle et Sheppard.,(2001)[64] imposent une dynamique de type BEKK au processus des covariances des résidus standardisés.

Les modèles BEKK-GARCH qui est proposé par Engle et kroner(1995) [72], supprime le problème du modèle précédant, le modèle Diagonal, en garantissant une variance positive le modèle BEKK-GARCH s'écrit :

$$H_t = C'C + A'A \otimes \varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-1} + B'B \otimes H_{t-1} \quad (3.42)$$

Où  $C$  est une matrice symétrique ( $N \times N$ ),  $A, B$  sont des matrices ( $N \times N$ ) de paramètres constants. Le processus des covariances des résidus standardisés de Engle et Sheppard (2001) dynamique de type BEKK est présente comme suit :

$$Q_t = \Omega + \alpha_{\varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-1}} + \beta Q_{t-1} \quad (3.43)$$

Ou les paramètres,  $\alpha$  et  $\beta$  vérifient que  $\alpha + \beta < 1$ . Les corrélations sont définie comme suit :

$$R_t = \text{diag}(Q_t)^{-1/2}(Q_t)\text{diag}(Q_t)^{-1/2} \quad (3.44)$$

Cette expression se simplifie dans le cas scalaire et diagonal de la BEKK. Par exemple, pour le scalaire BEKK l'interception est simplement :

$$\Omega = (1 - \alpha - \beta)\bar{Q} \quad \text{et} \quad \bar{Q} = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T (\varepsilon_j \varepsilon_j) \quad (3.45)$$

où  $\Omega$  est une constante estimée indépendamment par variance targeting. Ainsi, les auteurs contournent le problème délicat de l'estimation de la constante en ayant uniquement recours à un estimateur des moments. Dans Engle et Sheppard (2001)[64], le processus suivi par les corrélations ne nécessite que deux paramètres. Les modèles DCC ont rapidement connu un grand succès, le fait d'introduire les corrélations dans l'écriture des covariances conditionnelles, ca facilite l'estimation.

Ce modèle s'estime en plusieurs étapes, (estimation de la volatilité avec un processus GARCH, estimation du modèle par la méthode du maximum de vraisemblance et estimation de la constante  $\Omega$ ) contrairement aux modèles à covariances conditionnelles qui s'estimaient en une étape. Nous appliquant l'estimation de ce modèle dans la section suivante.

Engle, R.,(2002)[67] propose une écriture matricielle qui permet d'avoir des coefficients des covariations spécifiques, l'équation peut s'écrire comme suit :

$$Q_t = (\bar{Q} - A'\bar{Q}A' - B'\bar{Q}B) + A'\varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-1}A + B'Q_{t-1}B \quad (3.46)$$

Où  $A$  et  $B$  sont deux matrices ( $K \times K$ ). Cette formulation très générale impose cependant des conditions de stationnarité délicates à respecter puisque  $(\bar{Q} - A'\bar{Q}A - B'\bar{Q}B)$  doit être

### CHAPITRE 3. PRISE EN COMPTE DU PHÉNOMÈNE DE CORRÉLATION BREAKDOWN DANS LES MODÈLES ARCH

---

une matrice semi-définie positive. L'objectif est de réduire le nombre de paramètres, l'écriture vectorisée des modèles GARCH multivariés, clairement plus complexes, pourra être utilisée pour le paramétrage de la corrélation tant que les moments inconditionnels sont fixés à la corrélation de l'échantillon matrice :

$$Q_t = (u' - A - B) \circ Q + A \circ \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' B \circ Q_{t-1} \quad (3.47)$$

Où  $u$  est un vecteur unité et  $\circ$  est le produit Hadamard de deux matrices de taille identique qui est calculé simplement par multiplication élément par élément. Engle Engle et Kroner(1995)[72], montrent que si  $A$ ,  $B$  et  $(u' - A - B)$  sont semi-définis positifs, alors  $Q$  sera semi-défini positif. Si l'une des matrices est définie positive, alors  $Q$  le sera également. De même Billio, M., Caporin, M et Gobbo (2006)[30] ont proposé une écriture DCC vectorisée identique pour accumuler des paramètres :

$$Q_t = cc' + aa' \circ \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' bQ_{t-1} \quad (3.48)$$

où  $a$ ,  $b$ , et  $c$  sont des vecteurs partitionnés. Diverses extensions ont alors été proposées afin d'apporter davantage de flexibilité et enrichir le processus suivi par les corrélations, Hafner et Franses (2009)[112], Cappiello, Engle, et Sheppard (2006)[74], Billio, M et caporin, M.,(2009)[29], So et Yip (2010)[172], Franses, Hafner.,(2009)[112], Tong et Lim (1980)[181] ainsi que Kwan, Li, et Ng (2010), les auteurs ont utiliser un modèle de corrélation conditionnelle variable à seuil multivarié, leurs modèles étend l'idée d'Engle (2002) et de Tse et Tsui (2002), le modèle conserve l'interprétation du modèle GARCH à seuil univarié et permet des corrélations conditionnelles dynamiques. Des techniques d'identification, d'estimation et de vérification du modèle sont développées. Certains résultats de simulation sont présentés sur la distribution d'échantillon fini de l'estimation du maximum de vraisemblance, de même démontrent le comportement asymétrique de la moyenne et de la variance dans les séries chronologiques financières.

Puisque le modèle CCC-GARCH est un cas particulier du DCC-GARCH, on s'intéresse directement à l'estimation du modèle DCC. L'estimation via la méthode du maximum de vraisemblance est celle proposée par Engle, R F.,(2002) [67].

## 3.2 Estimation du Modèle DCC

Engle et Sheppard (2001) dans [64] et Engle (2002) dans [67] proposent utiliser comme méthode d'estimation le maximum de vraisemblance. L'un des avantages du corrélation conditionnelle dynamique d'Engle (2002) est la possibilité d'estimer le modèle selon une approche en deux étapes :

Dans un première étape l'idée est d'estimer les paramètres liés aux volatilités univariées  $L_v(\theta)$ . Et dans une second étape d'estimation est liées aux corrélations  $L_c(\theta\phi)$ . La fonction de vraisemblance, noté  $L(\theta\phi)$ , se décompose en un terme de volatilité  $L_v(\theta)$  et un terme de corrélation  $L_c(\theta\phi)$ . Où  $L(\theta\phi) = L_v(\theta) + L_c(\theta\phi)$ . La maximisation de cette fonction est en deux étapes la première<sup>11</sup> est de trouver  $\hat{\theta}$  tel que  $\hat{\theta} = \arg \max L_v(\theta)$  et la deuxième<sup>12</sup>  $\max_{\phi} L_c(\hat{\theta}\phi)$ , sous l'hypothèse suivante :

$$\begin{aligned}
 L &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (N \log(2\pi) + \log | H_t | + y_t' H_t^{-1} y_t) \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (N \log(2\pi) + \log | D_t R_t D_t | + y_t' D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} y_t) \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (N \log(2\pi) + 2 \log | D_t | + \log | R_t | + \varepsilon_t' R_t^{-1} \varepsilon_t) \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (N \log(2\pi) + 2 \log | D_t | + y_t' D_t^{-1} D_t^{-1} y_t - \varepsilon_t' \varepsilon_t + \log | R_t | + \varepsilon_t' R_t^{-1} \varepsilon_t) \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (N \log(2\pi) + 2 \log | D_t | + y_t' D_t^{-1} D_t^{-1} y_t) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\varepsilon_t' \varepsilon_t + \log | R_t | + \varepsilon_t' R_t^{-1} \varepsilon_t) \\
 &= L_v(\theta) + L_c(\theta\phi)
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

### 3.2.1 Présentation du modèle

On estime un modèle GARCH(p,q) pour la variance conditionnelle de chaque actif, on obtient la volatilité de chaque actifs individuellement. Pour la deuxième l'étape l'estimation des coefficients de volatilité obtenus en première étapes sont considérés constants, et la fonction de vraisemblance est utilisée pour estimer les paramètres de la dynamique de corrélation. Avec cette procédure nous réduisons le temps de calcul.

11. Étape 1 : En effet cette étape consiste, en pratique, à estimer séparément les modèles GARCH univariés. L'estimateur du maximum de vraisemblance pour  $\theta$  qui contient les paramètres des modèles GARCH univariés qui est présenté par :  $\hat{\theta} = \arg \max$  où  $\theta = (\alpha_{0,1}, \alpha_1, \beta_1 \dots, \alpha_{0,N}, \alpha_N, \beta_N)$ . Dans cette première estimation, un modèle GARCH(p,q) univarié est appliqué au variance conditionnelle de chaque actif. À l'issue de celle-ci, les coefficients qui expliquent la volatilité de chaque actif pris individuellement sont obtenus.

12. Étape 2 : Calcul l'estimateur de  $\phi$  en maximisant la log-vraisemblance reliée aux corrélations, soit  $L_c(\hat{\theta}\phi) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\varepsilon_t' \varepsilon_t + \log | R_t | + \varepsilon_t' R_t^{-1} \varepsilon_t)$ . Dans cette seconde étape d'estimation, les coefficients des volatilités obtenues

lors de la première étape,  $\hat{\theta}$ , sont maintenues constants, et servent à conditionner la fonction de vraisemblance utilisée pour estimer les paramètres de la dynamique des corrélations,  $\phi$ , cette procédure réduit grandement le temps de calcul mais au prix d'une perte d'efficacité dans la mesure où ce n'est qu'une partie de la vraisemblance, celle des corrélations  $L_c(\hat{\theta}\phi)$ , qui est maximisé lors de la seconde étape

## CHAPITRE 3. PRISE EN COMPTE DU PHÉNOMÈNE DE CORRÉLATION BREAKDOWN DANS LES MODÈLES ARCH

Engle et Sheppard (2002) dans [67] ont établi les propriétés asymptotiques des estimateurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_t | F_{t-1} \sim N(0, D_t R_t D_t) \\ D_t^2 = \text{diag}(\sigma_{1t}^2, \dots, \sigma_{nt}^2) \\ \sigma_{it}^2 \sim GARCH(1, 1); \quad i = 1, \dots, N \\ R_t = \text{diag}(Q_t)^{-1/2} (Q_t) \text{diag}(Q_t)^{-1/2} \\ Q_t = (\bar{Q} + A(\varepsilon_{t-1} \varepsilon'_{t-1} - \bar{Q}) + B(Q_{t-1} - \bar{Q})) \end{array} \right.$$

### 3.2.2 Bases de données

- Description des données :

Dans notre étude, nous considérons 17 actifs à fréquence journalières sur une bases de données de chimie et pharmacie, soit 1488 observations journalières entre 11/01/2011 et 28/12/2019, ainsi que 14 actifs à fréquence mensuelle du Cac40 de 2000 à 2019, il est présenté dans tableaux suivants :

	NVS	PFIZER	SANOFI	Merck	JOHNSON	BAYER	EUROFINS	GUERBET	SARTORIUS	VETOQUINOL	LNA	BASTIDE	CELYAD	Nanobiotix	AB	RAMSAY	INNATE	BONE
Date																		
2010-11-01	-0.007420	0.011481	-0.002563	-0.001652	-0.000784	0.000933	-0.004494	0.017532	0.000606	0.014445	0.010989	0.001078	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
2010-11-02	0.013213	-0.009648	0.015991	0.009931	0.002983	0.017710	-0.018059	-0.017230	0.001213	-0.020712	-0.001359	0.024758	0.000000	0.000000	0.003141	0.018836	0.006623	0.000000
2010-11-03	0.005834	0.008023	-0.003092	-0.002732	0.004853	0.008766	-0.000230	-0.021818	-0.001211	-0.003635	-0.004762	-0.002101	0.000000	0.000000	-0.003132	-0.019816	0.000000	0.000000
2010-11-04	0.007335	-0.011939	0.023682	0.003835	0.008880	0.025032	0.011957	0.000531	0.003031	-0.001658	-0.004785	0.005263	0.000000	0.000000	-0.001047	0.007640	0.026316	0.000000
2010-11-05	-0.007113	-0.011507	-0.011842	-0.025921	-0.001699	-0.009237	0.007271	-0.002256	0.000906	0.013289	0.013049	-0.004188	0.000000	0.000000	-0.015723	-0.001336	-0.006410	0.000000
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
2019-10-22	0.004737	-0.000823	-0.013496	-0.038097	0.009217	-0.017496	0.007601	0.000000	-0.022455	0.000000	0.011555	0.000000	-0.078916	0.013699	-0.012658	0.000000	-0.024540	-0.023290
2019-10-23	-0.003909	0.009333	0.009929	0.019311	0.005418	0.030607	0.007544	0.015119	-0.022205	0.000000	-0.019730	-0.007692	0.030691	-0.022258	-0.005128	0.005714	-0.020665	0.013413
2019-10-24	0.007041	-0.010335	0.013328	-0.003499	-0.018476	0.006479	0.019186	0.005319	0.018794	0.000000	-0.009534	0.002584	0.012407	-0.015447	-0.007732	-0.022727	0.003670	0.010294
2019-10-25	0.000802	0.010442	-0.000431	-0.003875	0.006667	-0.011803	0.013315	0.066667	0.006918	0.003610	-0.003209	0.011598	-0.011029	0.040462	0.023377	0.005814	-0.014625	-0.018923
2019-10-28	-0.004467	0.013870	0.000863	-0.000729	0.006467	-0.002714	0.036248	-0.005952	0.003817	0.025180	0.016094	-0.031847	-0.008674	0.022222	-0.020305	0.011561	0.010204	-0.007418

FIGURE 3.4 – Les données de chimie et pharmacie sur la période du 01/11/2010 au 28/10/2019

Le tableau des données contiens 17 actifs de la bases de chimie et pharmacie NVS, PFIZER, SANOFI, JOHNSON, BAYER, EUROFINS, GUERBET, SARTORIUS, VETOQUINOL, LNA, BASTIDE, CELYAD, NONOBIOTIX, AB, RAMSAY, INNATE et BONE.

### 3.2. ESTIMATION DU MODÈLE DCC

	Observations	NAs	Minimum	Quartile 1	Median	Arithmetic Mean	Geometric Mean	Quartile 3	Maximum	SE Mean	LCL Mean (0.95)	UCL Mean (0.95)	Variance	Stdev	Skewness	Kurtosis
NVS	1488	0	-0.0538	-0.0057	0.0002	0.0002	0.0001	0.0061	0.0485	0.0003	-0.0004	0.0007	0.0001	0.0109	0.0688	2.2357
PFIZER	1488	0	-0.0642	-0.0054	0.0000	0.0002	0.0001	0.0059	0.0707	0.0003	-0.0004	0.0007	0.0001	0.0113	0.0502	3.5739
SANOFI	1488	0	-0.0899	-0.0077	0.0000	0.0000	-0.0001	0.0077	0.0556	0.0003	-0.0007	0.0007	0.0002	0.0132	-0.3819	3.3715
Merck	1488	0	-0.0606	-0.0061	0.0005	0.0004	0.0004	0.0072	0.1041	0.0003	-0.0002	0.0011	0.0002	0.0124	-0.4472	6.4231
JOHNSON	1488	0	-0.1004	-0.0044	0.0003	0.0003	0.0002	0.0058	0.0496	0.0003	-0.0003	0.0008	0.0001	0.0101	-1.0405	9.4892
BAYER	1488	0	-0.1128	-0.0086	0.0000	-0.0003	-0.0004	0.0083	0.0920	0.0004	-0.0011	0.0006	0.0003	0.0166	-0.3288	4.3111
EUROFINS	1488	0	-0.1023	-0.0088	0.0009	0.0007	0.0005	0.0103	0.1061	0.0005	-0.0003	0.0017	0.0004	0.0194	0.1005	3.8994
GUERBET	1488	0	-0.1461	-0.0102	0.0000	0.0007	0.0005	0.0110	0.2083	0.0006	-0.0004	0.0019	0.0005	0.0225	0.5629	8.7030
SARTORIUS	1488	0	-0.1252	-0.0089	0.0017	0.0015	0.0013	0.0109	0.1520	0.0005	0.0006	0.0024	0.0003	0.0183	0.3844	6.5708
VETOQUINOL	1488	0	-0.1013	-0.0064	0.0000	0.0006	0.0005	0.0073	0.1043	0.0004	-0.0002	0.0013	0.0002	0.0151	0.2067	5.2593
LNA	1488	0	-0.0610	-0.0070	0.0000	0.0010	0.0008	0.0088	0.1106	0.0004	0.0002	0.0017	0.0002	0.0155	0.5440	4.2403
BASTIDE	1488	0	-0.0851	-0.0090	0.0000	0.0010	0.0008	0.0101	0.0761	0.0005	0.0000	0.0019	0.0003	0.0186	0.2210	1.5477
CELYAD	1488	0	-0.4042	-0.0174	-0.0025	0.0002	-0.0006	0.0152	0.2618	0.0010	-0.0018	0.0021	0.0014	0.0376	-0.4139	17.0094
Nanobiotix	1488	0	-0.2996	-0.0139	-0.0019	0.0008	0.0001	0.0103	0.7953	0.0011	-0.0013	0.0029	0.0018	0.0419	8.0139	135.4671
AB	1488	0	-0.3231	-0.0155	-0.0024	-0.0004	-0.0010	0.0103	0.3964	0.0009	-0.0022	0.0015	0.0013	0.0357	1.2322	25.4171
RAMSAY	1488	0	-0.1454	-0.0071	0.0000	0.0003	0.0002	0.0074	0.0950	0.0005	-0.0005	0.0012	0.0003	0.0174	-0.0364	6.2135
INNATE	1488	0	-0.4007	-0.0163	-0.0017	0.0013	0.0005	0.0135	0.4883	0.0010	-0.0007	0.0033	0.0015	0.0392	2.4034	35.5205

FIGURE 3.5 – Statistiques descriptives, les séries de rendements chimie et pharmacie

La descripteur des données montre les caractéristiques usuelles des données financières. Les rendements des différents actifs boursiers s'échelonnent de 0,01% pour le CELYAD, à 0,16% pour SARTORIUS. Les actifs ont un rendement de même échelle, bien que au niveau de la volatilité des rendements des séries, les valeurs sont comprises entre 0,96% pour JOHNSON et 3,92% pour Nanobiotix. Nous remarquons une certaine homogénéité des valeurs prises par la volatilité des rendements. Le coefficient d'asymétrie skewness est égal le coefficient d'aplatissement kurtosis, mesure l'aplatissement de la distribution de la série. La Kurtosis de la distribution Normale est égale à 3, dans notre cas il est inférieur à 3, la distribution est donc plutôt platikurtique. Nous avons remplacé toutes les valeurs manquantes par la moyenne des variables correspondantes.

#### 3.2.3 Estimation du modèle GARCH univarié (première étape du modèle)

Interprétons les résultats de l'estimation du modèle GARCH<sup>13</sup> pour chaque actifs, en général ( $\alpha + \beta < 1$ ). L'estimation des paramètres de ces différents modèles est présentée dans le tableau suivant :

	mu	omega	alpha1	beta1
NVS	0.0002587	0.0000106	0.0448789	0.8663895
PFIZER	0.0005107	0.0000157	0.2008204	0.6876207
SANOFI	0.0000072	0.0000060	0.0432586	0.9231969
Merck	0.0003959	0.0000007	0.0005548	0.9948086
JOHNSON	0.0003331	0.0000045	0.0605518	0.8990565
BAYER	0.0000502	0.0000028	0.0253962	0.9652122
EUROFINS	0.0008853	0.0000021	0.0381544	0.9580981
GUERBET	0.0006624	0.0000032	0.0001472	0.9935933
SARTORIUS	0.0016680	0.0000203	0.0275583	0.9123403
VETOQUINOL	0.0006553	0.0000387	0.1237679	0.7130599
LNA	0.0012896	0.0000185	0.1026602	0.8257204
BASTIDE	0.0008688	0.0000078	0.0684546	0.9104634
CELYAD	0.0002352	0.0002115	0.0928536	0.7632987
Nanobiotix	0.0000764	0.0000373	0.1736239	0.8253760
AB	-0.0003812	0.0000011	0.0000000	0.9989998
RAMSAY	0.0003530	0.0000235	0.1263904	0.8049047
INNATE	0.0006074	0.0000637	0.0579957	0.9093127

FIGURE 3.6 – Les paramètres du modèle univarié pour les séries de rendements de Chimie et pharmacie

13.  $h_{it} = \omega_i + \sum_{p=1}^{p_i} \alpha_{ip} y_{it-p} \sum_{q=1}^{Q_i} \beta_j h_{it-p}^2 \quad i = 1, 2, \dots, N$

### CHAPITRE 3. PRISE EN COMPTE DU PHÉNOMÈNE DE CORRÉLATION BREAKDOWN DANS LES MODÈLES ARCH

Toutes les valeurs obtenues dans la figure (3.6) sont tout à fait comparables à celles que l'on observe dans la littérature. Le paramètre  $\beta$  indiquant une forte persistance de la volatilité pour chaque actif. Et la somme de deux coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  qui est proche de l'unité. Les actifs qui ont une volatilité plus sensible aux innovations sont Pfizer, Vetoquinol, Nanobiotix et Ramsay, il sont  $\alpha$  très élevé par rapport au autres actifs. Par contre a AB, Merck et Guerbet ont une volatilité qui semble moins affectée par les chocs. Les autres actifs ont une sensibilité aux chocs oscillant entre 0.09 et 0.02. AB, Guerbet et Merck, ont la volatilité le plus élevée. En ce qui concerne les effets des coefficients autorégressifs de ces volatilités, on remarque que AB, Guerbet et Merck, ont la volatilité le plus élevée.

	mu	omega	alpha1	beta1
CAPGEMINI	0.0006333	1.2e-06	0.1948384	0.7609099
CARREFOUR	-0.0001608	0.0e+00	0.0002247	0.9950093
DANONE	0.0003034	5.0e-07	0.0884817	0.8280276
ENGIE	0.0000575	2.3e-06	0.2052842	0.6153511
GENERALE	0.0002795	1.7e-06	0.0380464	0.8834700
LOREAL	0.0004282	0.0e+00	0.0138985	0.9820327
LVMH	0.0005610	1.0e-06	0.1705020	0.7586320
MICHELIN	0.0005624	1.6e-06	0.1538719	0.7444858
ORANGE	-0.0000761	1.1e-06	0.2126789	0.7348771
PEUGEOT	0.0003480	2.7e-06	0.0693845	0.8159648
SODEX	0.0004717	5.0e-07	0.1296636	0.8276897
TOTAL	0.0002431	0.0e+00	0.0009901	0.9979086
VINCI	0.0006355	3.0e-07	0.0519613	0.9144643
VIVENDI	0.0002051	6.0e-07	0.1157848	0.8332182

FIGURE 3.7 – Les paramètres du GARCH de CAC40

Les actifs qui ont une volatilité plus sensible aux innovations pour CAC40 sont Engie, Orange, Capgemini et Lvmh, inversement a Carrefour, Total, Loreal et Vinci ont une volatilité moins affectée par les chocs.

#### 3.2.4 Estimation des paramètres de la corrélations conditionnelles dynamiques DCC-GARCH(1,1)

On a vu, il existe un univers particulièrement large de modèles appartenant à l'univers de modélisation de type GARCH. Une partie importante de cette famille de modèles porte sur la paramétrisation de toute la matrice de variance covariance conditionnelles des sous jacents, (Les modèles GARCH si on ajuste sur des sous périodes d'une très longues séries, on remarque qu'il exister des différences pour les estimations des paramètres très importantes), permettant aussi la construction de séries de corrélations conditionnelles (d'après cette matrice nous pouvons voir le changement en période de corrélation Breakdown). Dans ce cadre, Engle et Bollerslev wooldridge (1988) dans [69] présume que la matrice de variance covariance conditionnelle dépend de façon linéaire de sa valeur retardée et des erreurs aux carres croisées. Afin de diminuer le nombre de paramètres en jeu dans le modèle, ils sont imposent une structure diagonale aux

matrices de coefficients de corrélations. D'après les modèles présentés permettent de prévoir la volatilité conditionnelle pour la prochaine période, et ainsi, de prévoir l'espérance de rendement. Après avoir estimés des séries univariées, soit le vecteur de paramètre  $\theta^{14}$ , nous l'utilisons pour obtenir les estimés des corrélations, ce qui correspond à la deuxième étape de la maximisation par rapport à  $\phi L_c(\hat{\theta}\phi)$ .

```

=====
Dependent Variable: CAC 40 Returns -- Garch                Method: MLE
Start Date: 2010-11-03 00:00:00                          Log Likelihood: 1614.1908
End Date: 2019-10-28 00:00:00                            AIC: -3220.3816
Number of observations: 2236                              BIC: -3197.5318
=====
Latent Variable      Estimate  Std Error  z      P>|z|    95% C.I.
=====
Vol Constant         0.0039
q(1)                 0.3147
p(1)                 0.4578
Returns Constant     0.0001    0.002     0.0639  0.9491   (-0.0037 | 0.004)
=====

```

FIGURE 3.8 – Estimation DCC-GARCH Chimie et Pharmacie

Les résultats de l'estimation de DCC (1,1) GARCH (1,1) montre que les corrélations conditionnelles dynamiques existant entre ces actifs ont un effet autorégressif à 0.45. Ce comportement ne semble pas proche de celui qu'on retrouve avec les actifs de CAC40 et les actifs de Chimie et pharmacie, il est beaucoup plus faible que celle des volatilités conditionnelles de chacune des séries prises individuellement.

Pour ce qui est de la sensibilité aux chocs de nos corrélations, 0.31 elle est plus importante que celle que l'on trouve pour les séries. Par conséquent, une volatilité avec une sensibilité aux chocs plus importants pour les corrélations comparativement à celle des rendements d'actifs.

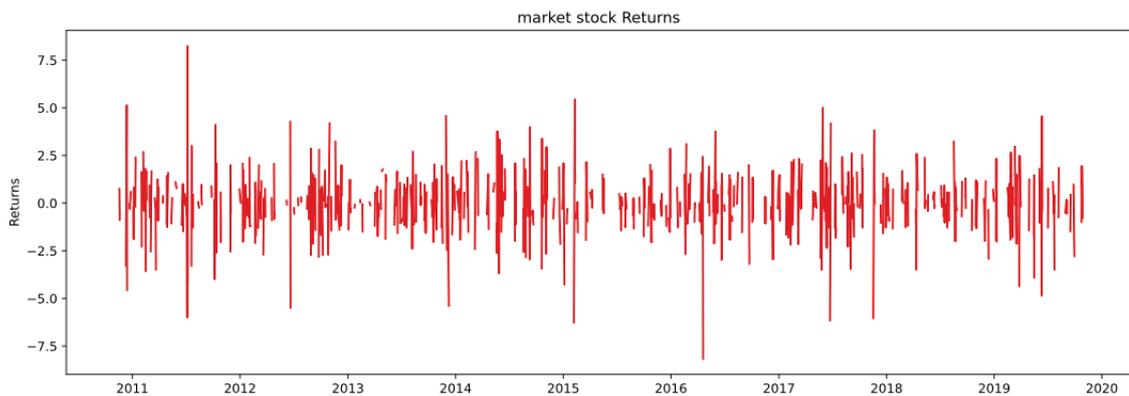


FIGURE 3.9 – Le rendement de Chimie Pharmacie

14. Après l'obtention  $\hat{\theta}$  des estimés des séries univariées, soit le vecteur de paramètre nous l'utilisons pour obtenir les estimés des corrélations, ce qui correspond à la deuxième étape de Engle (2002) soit la maximisation par rapport

### CHAPITRE 3. PRISE EN COMPTE DU PHÉNOMÈNE DE CORRÉLATION BREAKDOWN DANS LES MODÈLES ARCH

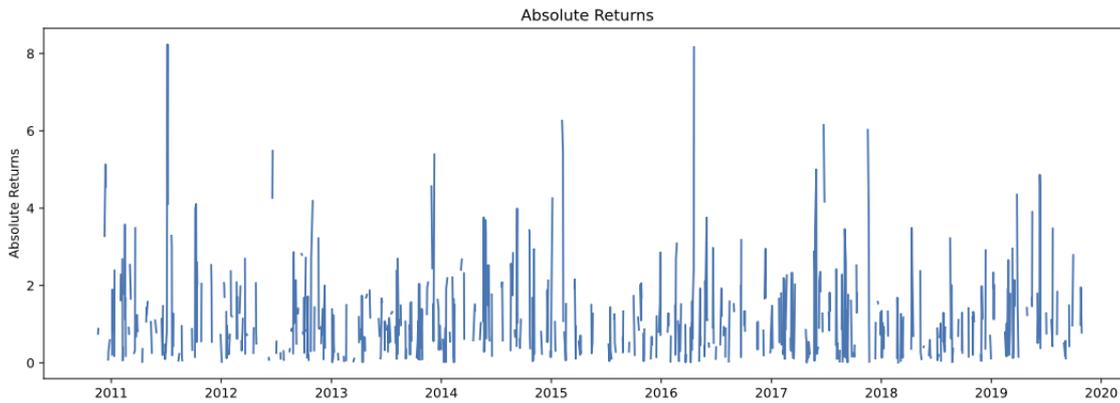


FIGURE 3.10 – Le rendement en valeur absolue de Chimie Pharmacie

On remarque sur les figures 3.9 et 3.10, qu'elles présentent des périodes de fortes corrélations sur les périodes de novembre 2010 à octobre 2019, aux alentours de juin 2011, ainsi que entre décembre 2015 et janvier 2016 et entre mars 2016 et avril 2016, pour toutes les actifs. Ces constats peuvent nous laisser penser à estimer le modèle DCC en différentes périodes pour chaque actif.

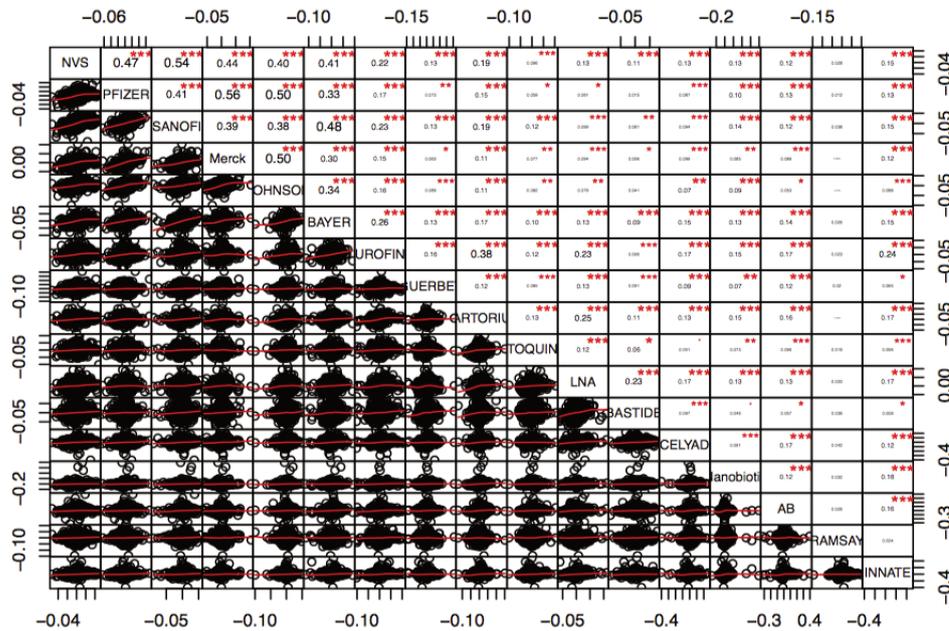


FIGURE 3.11 – La corrélation chimie et pharmacie

Les corrélations entre les actifs varient, c'est-à-dire que la corrélation varie plus sur la base de données chimie pharmacie que sur la base de CAC40, nous continuons les estimations avec la base de données chimie et pharmacie car il existe plusieurs ruptures de corrélations entre les actifs.

### 3.2. ESTIMATION DU MODÈLE DCC

```

=====
Dependent Variable: CAC 40 Returns -- Diag Veech          Method: MLE
Start Date: 2010-11-03 00:00:00                        Log Likelihood: 1200.8683
End Date: 2019-10-28 00:00:00                          AIC: -2393.7366
Number of observations: 2236                             BIC: -2370.8868
=====
Latent Variable      Estimate      Std Error      z          P>|z|      95% C.I.
=====
Vol Constant         0.0052
q(1)                 0.3122
p(1)                 0.481
Returns Constant     -0.0001      0.0024        -0.0247   0.9803     (-0.0047 | 0.0046)
=====

```

FIGURE 3.12 – Estimation Diag Vech chimie et pharmacie

```

=====
Dependent Variable: CAC 40 Returns -- BEKK model        Method: MLE
Start Date: 2010-11-03 00:00:00                        Log Likelihood: 1023.4914
End Date: 2019-10-28 00:00:00                          AIC: -2038.9827
Number of observations: 2236                             BIC: -2016.1329
=====
Latent Variable      Estimate      Std Error      z          P>|z|      95% C.I.
=====
Vol Constant         0.0058
q(1)                 0.3115
p(1)                 0.4915
Returns Constant     -0.0002      0.0026        -0.0678   0.9459     (-0.0052 | 0.0048)
=====

```

FIGURE 3.13 – Estimation BEKK chimie et pharmacie

En comparant les estimation des trois spécifications du modèle GARCH : VECH, BEKK, DCC. Les trois estimation ont donne presque le même resultats nous choisirons le DCC car il permet de réduire le nombre de paramètres.

## CHAPITRE 3. PRISE EN COMPTE DU PHÉNOMÈNE DE CORRÉLATION BREAKDOWN DANS LES MODÈLES ARCH

La période 1 : [01/11/2010]-[31/12/2013] entre JOHNSON et BAYER

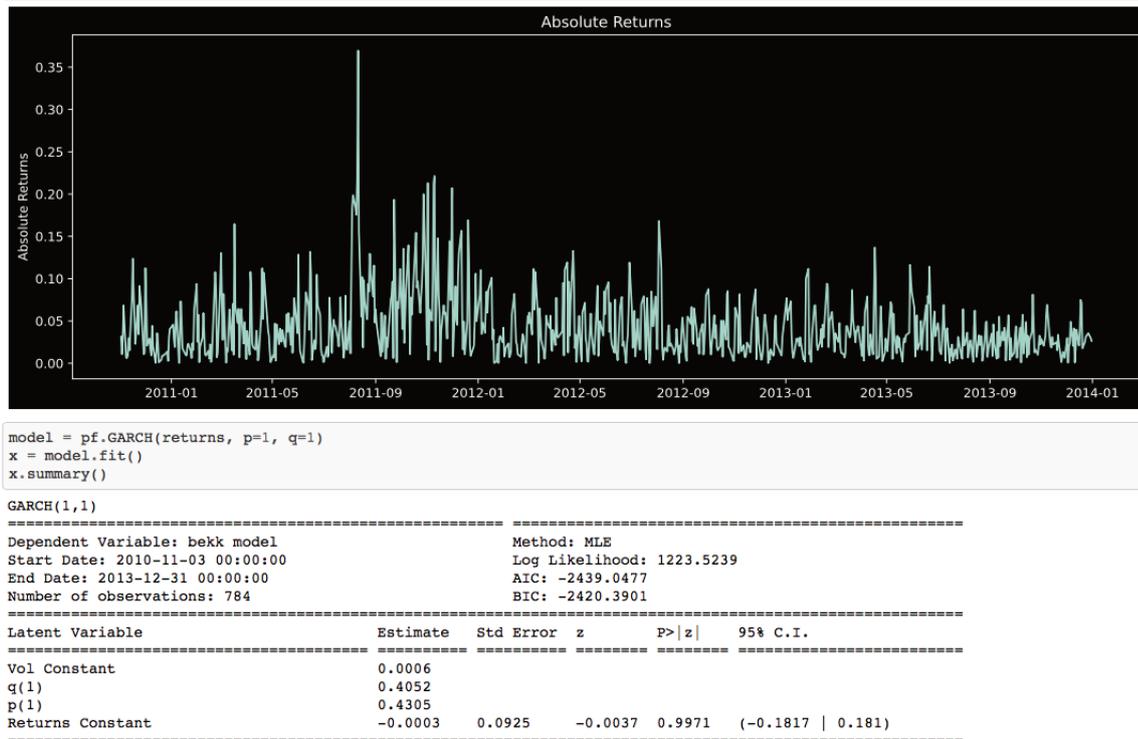


FIGURE 3.14 – Estimation DCC-GARCH entre JOHNSON et BAYER (turbulence : Trois-ruptures dans cette période)

Graphiquement il est très clair qu'une pic apparaît entre le 08/2011 et le 09/2011 et nous remarquons que après la corrélation est devenu stable jusqu'au janvier 2014.

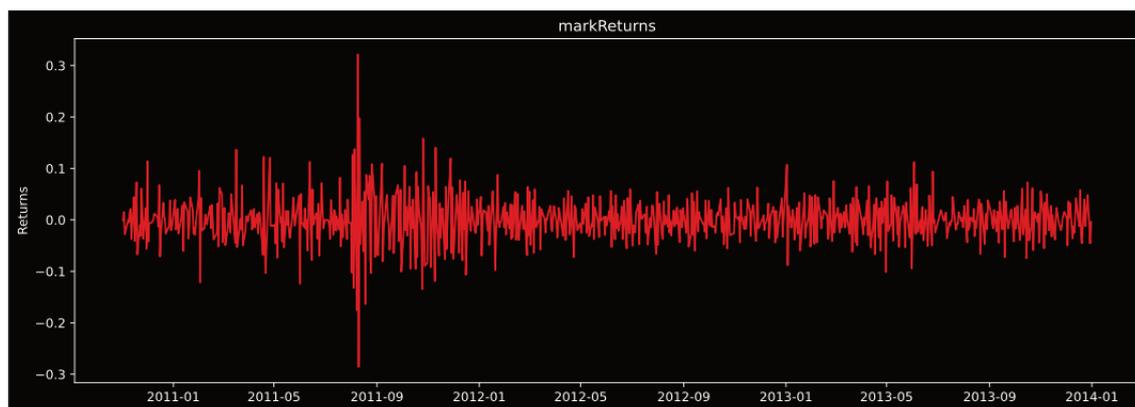


FIGURE 3.15 – Rendement DCC-GARCH entre JOHNSON et BAYER

Ont observe que cette rupture a fait apparentes d'une augmentation de la variance conditionnelle, ainsi que la volatilité est très proche de la corrélation. On voit une persistance des chocs sur les corrélations dynamiques cela dit a la valeur de la corrélation qui n'est pas stable.

La période 2 : [06/01/2014]-[28-10-2019] entre JOHNSON et BAYER

Entre 06/01/2014 et 28/10/2019 la volatilité ont une faibles sensible aux chocs tandis que la variance aussi est très faibles par rapport à la période 1 ou il existe une rupture de corrélation.

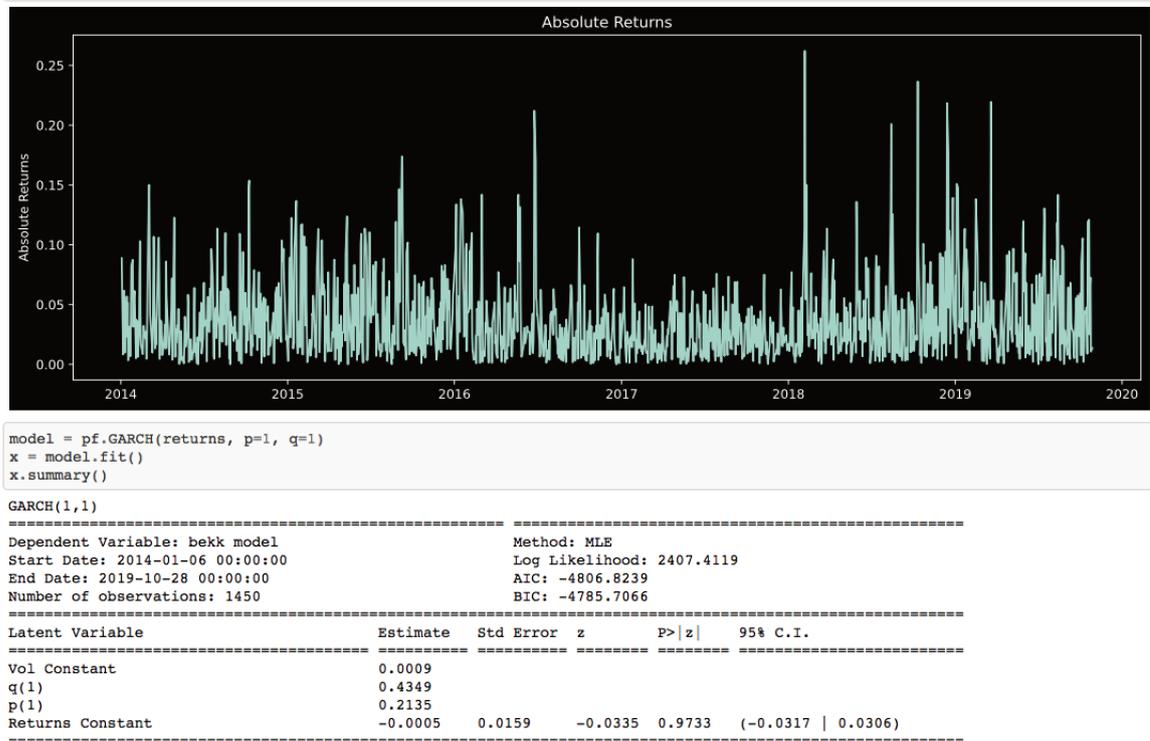


FIGURE 3.16 – Estimation DCC-GARCH-JOHNSON BAYER STABLE

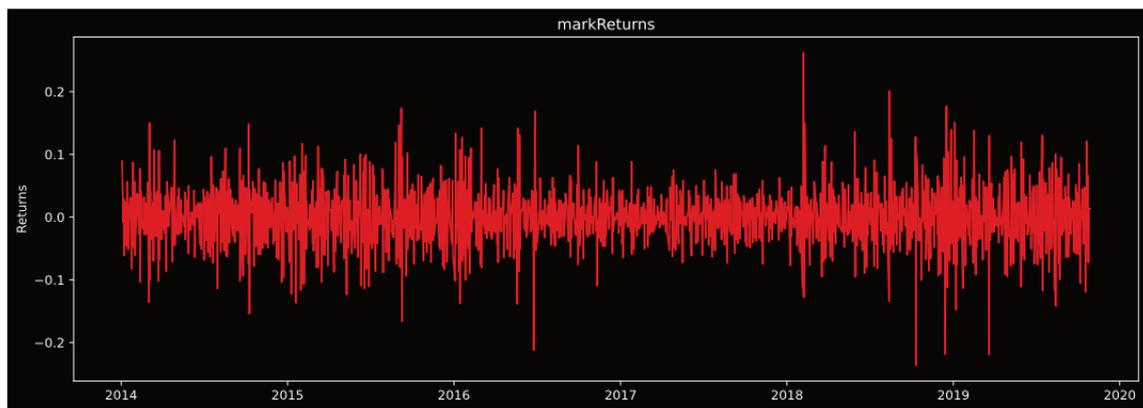


FIGURE 3.17 – Rendement DCC-GARCH-JOHNSON BAYER

Dans cette période la corrélation est stable, l'estimation DCC montre que les corrélation conditionnelles dynamiques sont plus importants si la période est stable, nous avons, par conséquent, une faible volatilité c'est qui parie normale car la corrélation est stable il varie très lentement du début à la fin du période la corrélation varie entre 0.42 et 0.34 a chaque la valeur de la corrélation à la date  $t$  à  $t-1$  est inférieur à 0.05 qui est le seuil fixer d'une rupture de corrélation. Nous estimons la période 3 et 4 puis nous comparerons effet du modèle DCC-GARCH.

## CHAPITRE 3. PRISE EN COMPTE DU PHÉNOMÈNE DE CORRÉLATION BREAKDOWN DANS LES MODÈLES ARCH

La période 3 : [01/11/2010]-[31/12/2013] entre NVS et PFIZER

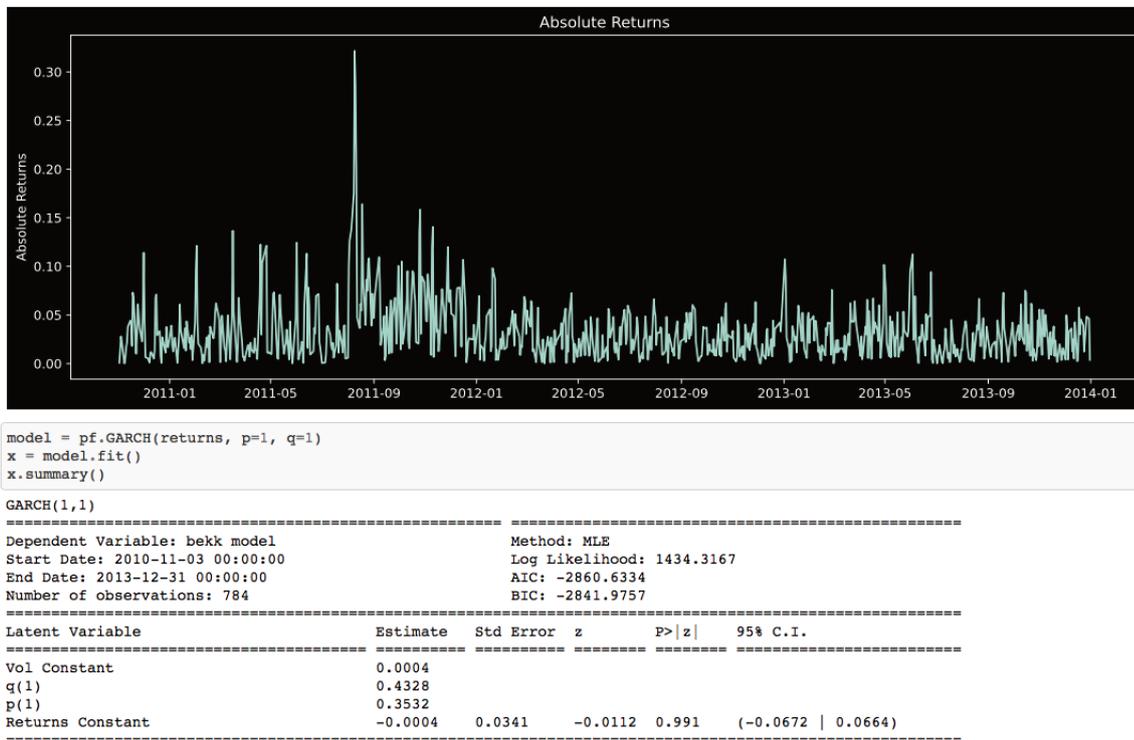


FIGURE 3.18 – Estimation DCC-GARCH NVS-PFIZER 1-ruptures

On observe une pic entre le mois 8 et le mois 9 de l'année 2011, c'est veux dire qu'il existe une rupture dans cette période, une volatilité avec une sensibilité aux chocs beaucoup plus faible comparativement à la corrélation, le principal effet est sur la variance conditionnelle qui tombe à des niveaux inférieurs à cella dans la période 1 ou il existe trois rupture. Il est à noter que les ruptures apparentes de ces corrélations ont leur source dans la baisse de la variance conditionnelle.

La période 4 : [06/01/2014]-[28-10-2019] entre NVS-PFIZER

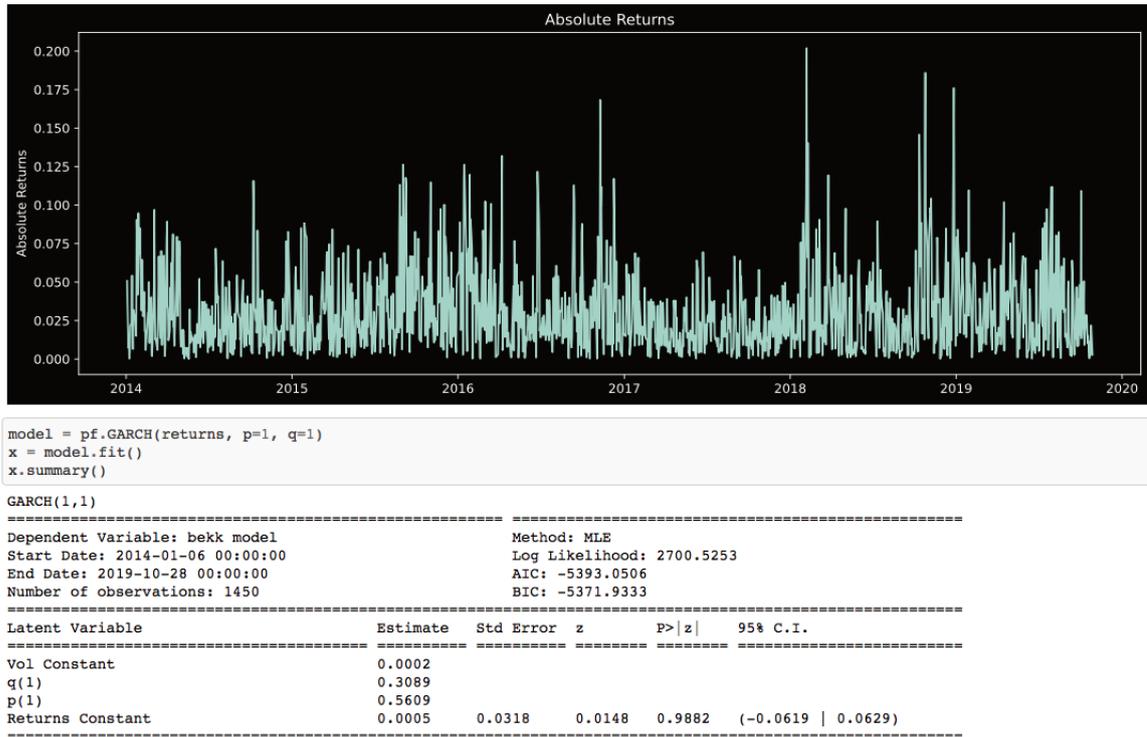


FIGURE 3.19 – Estimation DCC-GARCH-NVS-PFIZER

Les résultats de l'estimation DCC (1,1), montre que les corrélations conditionnelles dynamiques existant entre les actifs ont une sensibilité aux chocs beaucoup plus faible que celle des volatilités conditionnelles de chacune des séries pris individuellement. De même dans la période 3 qui est une période rupture la volatilité a fait une sensibilité au chocs et non la variance conditionnelle.

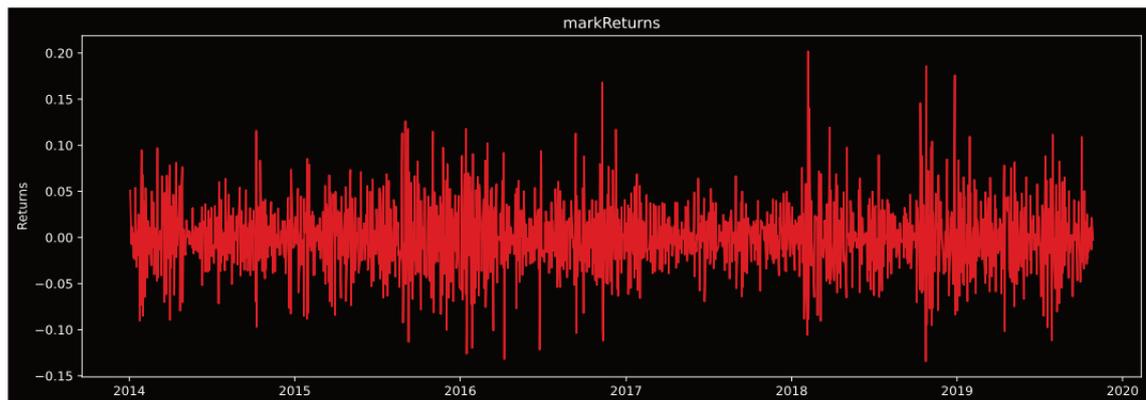


FIGURE 3.20 – Rendement DCC-NVS-PFIZER

En comparant les 4 périodes nous pouvons conclure que pendant les 3 période de rupture de corrélation (1,3,4), les périodes de corrélation Breakdowns ces périodes ont été calculés historiquement entre chaque couple d'actifs d'une période de mois à chaque fois la différents

## CHAPITRE 3. PRISE EN COMPTE DU PHÉNOMÈNE DE CORRÉLATION BREAKDOWN DANS LES MODÈLES ARCH

---

de la corrélation entre période  $t$  et la période  $t-1$  est supérieurs à 0.05 nous le considérons qu'il existe une rupture de corrélations dans cette période, par exemple dans la période 1 du 01/11/2010 au 31/12/2013, entre Johnson et Bayer la corrélation en début de la période été 0.47 est passera à 0.63 en Août 2011 puis diminue en septembre 2011 passera à 0.56 c'est qui montre un forte rupture de corrélation dans cette période, ainsi que la période 2 du 06/01/2014 au 28/10/2019, entre l'actif Johnson et Bayer en début de la période la corrélation été 0.42 puis passera à 0.48 puis augmente à 0.51 et diminue en 0.47 et continue de variable légèrement jusqu'à la fin du période 2 c'est qui montre que la corrélation dans cette période est stable et la période 3 du 01/11/2010 au 31/12/2013, entre NVS et Pfizer la corrélation en début de la période été 0.29 est varie légèrement jusqu'à juillet passera de 0.30 à 0.52 c'est qui montre un forte rupture de corrélation dans cette période c'est est très remarquablement sur (3.16). Finissons avec la période 4 du 01/06/2014 au 28/10/2019, entre NVS et Pfizer la remarque que la corrélation passer de 0.60 à 0.40 d'où il existe une forte rupture de corrélation dit au changement de la corrélation en plusieurs fois dans cette période.

On voit que a chaque fois il existe une rupture de corrélation période de turbulence comme dans les période 1, 3 et 4, la variance conditionnelle qui a un impact sur cette rupture même en comparant les variances de la période avec la variance une période normale on remarque que la variance conditionnelle est beaucoup plus petite a celle des 3 périodes. En conclusion, les figure (voir 3.13 3.15 3.17) montrent bien que la corrélation n'est pas constante pour les séries financières. On observe donc des fortes variations par rapport à la corrélation constante période 2.

### 3.3 Conclusion

L'objectif de ce chapitre était d'appliquer le modèle dynamique de la volatilité régie par une spécification de type MGARCH, Le cadre de notre étude a été construit à partir de la spécification de type GARCH multivarié qui a été choisie pour prélever la structure dynamique des moments conditionnels dans des actifs financiers. Les différents spécification du modèle MGARCH, VECH, BEKK, CCC et DCC. Le DCC qui été retenue comme modèle économétrique de référence et ses résultats ont été comparés à ceux de trois autres modèles. Le choix DCC du modèle est lié à la simplification d'estimation et il permet de réduire de manière significative le nombre de paramètres à estimer et il fournit une interprétation relativement simple des corrélations. Ce type de GARCH est donc beaucoup plus convivial lorsque vient le moment d'interpréter les coefficients, c'est ce l'avantage qu'il offre aux professionnels de la finance. Les résultats de l'estimation de DCC-MGARCH (1,1), Nous nous sommes arrêtés au GARCH(1,1) pour simplifier les calculs. Les périodes de corrélations Breakdowns ont une volatilité très élevée par rapporte à la période normale la volatilités bien différents avec effet ARCH. Nous remarquons a chaque fois que actifs dans l'intervalle a une volatilité très élevée cela signifie que son cours varie fortement, voire de façon exagérée sur cette période à l'inverse, de l'actif qui a une volatilité faible.

## Les anticipations des ruptures de Corrélation, Corrélation Breakdown en gestion de portefeuille

Nous avons vu l'existence des ruptures de corrélations, nous nous interrogeons maintenant, sur les stratégies d'anticipation d'un changement de corrélation. La question qui pose est de savoir comment anticiper une rupture de corrélations en prenant en compte, cette information dans la gestion de portefeuille. Le problème est un modèle d'optimisation combinatoire mono-objectifs, qui consiste à trouver des solutions tout en respectant les contraintes. Ils ressort deux objectifs dans cette l'optimisation d'un portefeuille : d'une part est de maximiser le rendement d'un portefeuille, d'autre part et de minimiser le risque. Ce modèle nous permettra de voir le changement qui c'est produit dans la période d'une rupture de corrélation.

Le problème à été implémenté sur CPLEX avec le langage c++, En effectuant des simulations sur 9 Couples d'actifs à fréquence quotidienne sur une basse de données du Chimie-Santé de (01 – 11 – 2010 à 28 – 10 – 2019). Ainsi sur 9 Couple d'actifs à fréquence mensuelle du Cac40 de (2000 à 2019), pour calculer chaque paire de titres de corrélation. Puis de prévoir l'existence ou non d'une rupture de corrélation. On observe que les contraintes du modèle donnent le choix de chaque pondération sur chaque titre. Aussi, si le coefficient de corrélation change il y aura des évolutions remarquables sur la valeur des proportions, avec les résultats du modèle nous pouvons voir le changement de la corrélation.

Nous cherchons à mettre en évidence, les preuves d'une augmentation de la corrélation des rendements des actions en période de crise financière. Pour se faire, nous procédons à l'étude de l'influence des changements qui se produit sur les marchés concernant la dynamique des risques des prix des actifs. Nous utilisons le modèle de ratio Sharpe et nous changeons l'écriture de ce modèle à un problème mono-objectif, en maximisant la fonction objectif, et on prévoit l'existence ou non d'une rupture, c'est à dire nous anticipons l'évolution futur de la structure de corrélation entre les rendements des actifs.

Notre analyse se compose donc de deux étapes : la première est d'essayer d'anticiper une rupture de corrélation entre deux actifs, la deuxième est d'étudier l'effet de cette rupture de corrélation dans un modèle de gestion de portefeuille.

## 4.1 Peut-on anticiper une rupture de corrélation ?

### 4.1.1 Prévision

En partant des paramètres de Falbo and Grassi (2011)[77] nous considérons un marché avec deux types d'agents, les investisseurs rationnels et les spéculateurs. Ces agents interagissent dans un cadre temporel discret en échangeant deux types d'actifs, une action  $s$  et une obligation  $b$ , avec différents niveaux de risque et différents rendements attendus,  $r_s$  et  $r_b$  respectivement. Les deux types d'investisseurs examinent la demande excédentaire, avec des informations différentes. Les spéculateurs ne sont pas informés de la valeur réelle de l'actif risqué au moment  $t$  et ils placent leur décision d'investissement sur la base de la demande excédentaire de la période précédente. En particulier, ils introduisent une demande excédentaire  $\omega$  pour l'actif risqué sur la base de la formule  $\omega_t^s = x_1(\omega_{t-1}/(1 + |\omega_{t-1}|))$ .

Le paramètre  $x_1 > 0$  ou  $x_1 < 0$  décrit, respectivement, des stratégies momentum<sup>1</sup> ou contrarian<sup>2</sup>. Les investisseurs rationnels se comportent différemment : au début de chaque période  $t$ , ils mettent à jour leur estimation du rendement attendu  $r_s$  de l'actif à haut risque en comparant son prix actuel  $P_t$  avec sa valeur fondamentale  $\bar{P}$  (cette connaissance est leur information avantage).

$$r_{s,t} = \ln \frac{P_t + k(\bar{P} - P_t)}{P_t} \quad (4.1)$$

Cette formule décrit une dynamique de retour à la moyenne du rendement attendu, où  $k \in (0,1)$  est un coefficient de vitesse de réversion. En général, le rendement attendu diffère du rendement réel, car il dépend de la demande excédentaire :

$$\Delta P_t = \ln \left( \frac{P_t}{P_{t-1}} \right) = r_{s,t-1} + \lambda \omega_{t-1} \quad (4.2)$$

Les agents rationnels diversifient leur investissement en utilisent un modèle de gestion de portefeuille de type Markowitz, estimant la corrélation entre deux actifs en fonction de la demande excédentaire. En particulier, ils estiment que pendant les phases de marché avec une demande excédentaire élevée ou faible, la corrélation entre les actifs tend vers l'unité. La demande excédentaire influence donc la décision de leur portefeuille, comme nous le verrons plus tard.

Une rétroaction se développe à ce stade, puisque les agents rationnels influencent également la

---

1. Le momentum est ce que l'on appelle un facteur d'investissement, il permet de classer les actions en fonction de la tendance récente de leur cours de bourse. Il existe d'autres facteurs d'investissement comme la croissance, la valeur, la volatilité etc. Le momentum n'est pas réellement une stratégie d'investissement en soi. C'est un style d'investissement qui regroupe une multitude de stratégies. Il définit en lui-même un univers d'investissement qui « performe » dans certaines conditions de marché. Il est utile de bien le comprendre pour adapter le style de stratégie à utiliser selon que l'on soit dans un marché en tendance, volatile, stable etc.

- Momentum : suivre la tendance
- Une performance attendue à plus court terme
- Stratégies volatiles.

2. La stratégie momentum consiste à acheter des actions ayant un historique récent de bonnes performances et à vendre des actions ayant de mauvaises performances (Jegadeesh & Titman, 1993). Au contraire, la stratégie contrariante propose une stratégie commerciale consistant à acheter des actions peu performantes et à vendre des actions plus performantes (De Bondt & Thaler, 1985). La stratégie contrariante repose sur la conviction que les prix vont s'inverser, alors que les partisans de la stratégie momentum affirment que les rendements vont se poursuivre. Les deux stratégies sont efficaces à des horizons temporels différents : à moyen terme pour la stratégie momentum et à long terme pour la stratégie contrariante.

demande excédentaire. L'équation modélisant la demande excédentaire générée par les agents rationnels est  $\omega_t^R = x_2(q_t^*(\omega_{t-1}, r_{s,t-1}) - q_t^*(0, r_{s,t-1}))$  où  $q_t^*(\omega_{t-1}, r_{s,t-1})$  est la quantité optimale d'actions du portefeuille Markowitz. La demande excédentaire rationnelle est une fonction (linéaire) de la différence entre  $q_t^*(\omega_{t-1}, r_{s,t-1})$  et  $q_t^*(0, r_{s,t-1})$  modulée par un paramètre de sensibilité  $x_2 \in R - \{0\}$ , la part des spéculateurs sur le marché.

La demande excédentaire totale du marché est alors une combinaison convexe de celles générées par les deux types d'agents  $\omega_t = Y\omega_t^s + (1 - Y)\omega_t^R$  avec  $Y \in [0, 1]$  étant la part des spéculateurs sur le marché.

Le système bidimensionnel est alors le suivant :

$$\begin{cases} \omega_t &= Yx_1(\omega_{t-1}/(1 + |\omega_{t-1}|)) + (1 - Y)x_2(q_t^*(\omega_{t-1}, r_{s,t-1}) - q_t^*(0, r_{s,t-1})) \\ r_{s,t} &= \ln\left(\frac{\exp(r_{s,t-1} + k - 1)}{\exp(r_{s,t-1} + \lambda\omega_{t-1})} + k - 1\right) \end{cases} \quad (4.3)$$

Qui décrit pleinement l'évolution des variables fondamentales de ce marché,  $\omega$  et  $r_s$ . La quantité optimale  $q^*$  dans la première équation de (4.3) est calculée par des investisseurs informés résolvant un problème d'optimisation de portefeuille. L'expression de la solution est reportée comme suit :

$$q^*(\omega_{t-1}, r_{s,t-1}) = \begin{cases} -\frac{r_b}{r_{s,t-1} - r_b} + \frac{\sqrt{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2(e^{-\mu\omega_{t-1}^2} - 1))((r_{s,t-1}\alpha_2 - r_b\alpha_1)^2 + 2\alpha_1\alpha_2r_b r_{s,t-1}e^{-\mu\omega_{t-1}^2})}}{(r_{s,t-1} - r_b)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2)(-e^{-\mu\omega_{t-1}^2} + 1)} & \text{si } r_{s,t-1} \neq r_b \\ \frac{\alpha_1\alpha_2(-e^{-\mu\omega_{t-1}^2} + 1) - \alpha_2^2}{2\alpha_1\alpha_2(-e^{-\mu\omega_{t-1}^2} + 1) - \alpha_1^2 - \alpha_2^2} & \text{si } r_{s,t-1} = r_b \end{cases} \quad (4.4)$$

D'après l'équation (4.4),  $q^*(0, r_{s,t-1})$  peut être facilement obtenu comme

$$q^*(0, r_{s,t-1}) = \left\{ -\frac{r_b}{r_{s,t-1} - r_b} + \frac{\sqrt{r_{s,t-1}^2\alpha_2^2 + r_b^2\alpha_1^2}}{(r_{s,t-1} - r_b)\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} \right. \quad (4.5)$$

Dans une telle solution, l'hypothèse centrale consiste à laisser les agents rationnels estimer la matrice de variance et de corrélation  $V_{t-1}$  des deux actifs par les équations suivantes.

$$V_t = \alpha^2 e^{2s\omega_t^2} \quad (4.6)$$

$$\rho_t = 1 - e^{-\mu\omega_t^2} \quad (4.7)$$

Le modèle de Falbo and Grassi (2011)[77] génère des rendements cohérent avec la fonction de variance de (4.6), équation liant les rendements des actifs à faible risque à la demande excédentaire  $\omega_t$ . En introduisant une équation pour l'actif à faible risque, nous étudions dans quelles conditions le modèle est capable de générer une corrélation entre les deux actifs et vérifions la cohérence interne de l'hypothèse dans (4.7). Prouver cette cohérence est d'une importance théorique primordiale. S'il est effectivement confirmé, le modèle fournirait une explication robuste du phénomène des ruptures de corrélation, qui, à notre connaissance, fait encore défaut

## CHAPITRE 4. LES ANTICIPATIONS DES RUPTURES DE CORRÉLATION, CORRÉLATION BREAKDOWN EN GESTION DE PORTEFEUILLE

dans la littérature. En particulier, le modèle explique l'origine de la rupture de corrélation en l'attribuant à deux causes (éventuellement concurrentes) : le comportement mimétique des spéculateurs de momentum et la tentative procyclique des investisseurs rationnels à se protéger contre la rupture de corrélation. La contribution à la modélisation de cette étude consiste à inclure dans l'étude une équation décrivant la dynamique des prix de l'actif à faible risque ( $\widehat{r}_{b,t}$ ). Grâce à cette modification, le modèle de marché devient un système à trois dimensions :

$$\begin{cases} \omega_t &= Yx_1(\omega_{t-1}/(1 + |\omega_{t-1}|)) + (1 - Y)x_2(q_t^*(\omega_{t-1}, r_{s,t-1}) - q_t^*(0, r_{s,t-1})) \\ r_{s,t} &= \ln\left(\frac{\exp(r_{s,t-1} + k - 1)}{\exp(r_{s,t-1} + \lambda\omega_{t-1})} + k - 1\right) \\ \widehat{r}_{b,t} &= \alpha\omega_{t-1}^3 - \beta\omega_{t-1} + r_{s,t} \end{cases} \quad (4.8)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres. Observons que la nouvelle équation implique qu'en l'absence de demande excédentaire, les rendements réalisés des actifs à faible risque coïncident avec leur valeur attendue. De plus, l'ajout d'une telle équation au système (4.3) n'introduit pas de rétroaction et ne modifie donc pas les propriétés théoriques de ce modèle.

### 4.1.2 Un modèle empirique pour l'actif à faible risque

Dans leur application empirique, Falbo and Grassi (2011[77]) développent un proxy de la demande excédentaire d'un indice boursier. Nous retrouvons les mêmes équations, puisque cette variable est également nécessaire ici pour modéliser les rendements des actifs à faible risque. Bien entendu, la demande excédentaire n'est pas une variable directement observable. En outre, la définition elle-même de la demande excédentaire n'est pas précise, étant donné qu'elle exigerait une notion claire de ce qu'est la demande « régulière » ou « normale », ce qui n'est pas du tout évident. Néanmoins, le concept de demande excédentaire sur les marchés financiers est familier et il est souvent utilisé dans la littérature financière pour expliquer les mouvements de prix importants, lorsque les marchés prennent une direction claire soit à la hausse soit à la baisse. Le proxy de la demande excédentaire pour un indice boursier peut être obtenu en comptant le nombre de fois où les rendements quotidiens prennent un signe positif ou négatif sur une période donnée. La raison pour laquelle la prévalence d'un signe donné dans les rendements (dans une période donnée) peut être considérée comme une approximation de la demande excédentaire est liée à des arguments de contagion. En effet, on peut supposer que plus un signe donné prévaut longtemps en bourse, plus la probabilité que les agents partagent un sentiment commun au cours de la même période est élevée. Les deux expressions suivantes comptent le nombre de fois où des retours positifs et négatifs sont observés de  $t$  à  $t-6$  :

$$\delta_t^+ = \sum_{i=0}^6 I_{R^+}(r_{s,t-i}) \quad (4.9)$$

$$\delta_t^- = \sum_{i=0}^6 I_{R^-}(r_{s,t-i}) \quad (4.10)$$

où  $I(\cdot)$  est la fonction de l'indicateur et  $\widehat{r}_{s,t}$  est le rendement observé sur un indice boursier au moment  $t$ . Ces expressions sont en fait légèrement modifiées par rapport à la proposition originelle de Falbo et Grassi (2011), étendant les sommations à 6 au lieu de 5 pour capter des cas plus extrêmes. Les auteurs soutiennent que si, à tout moment  $t$ , le "compteur" de l'un ou l'autre signe dépasse l'autre, le marché exprime un « consensus » qui peut être considéré

#### 4.1. PEUT-ON ANTICIPER UNE RUPTURE DE CORRÉLATION ?

comme une mesure de la demande excédentaire. En particulier, cette variable de consensus,  $c_t$ , est définie comme

$$c_t = \begin{cases} \delta_t^+ & \text{si } \delta_t^+ > \delta_t^- \\ -\delta_t^- & \text{si } \delta_t^+ < \delta_t^- \\ 0 & \text{si } \delta_t^+ = \delta_t^- \end{cases} \quad (4.11)$$

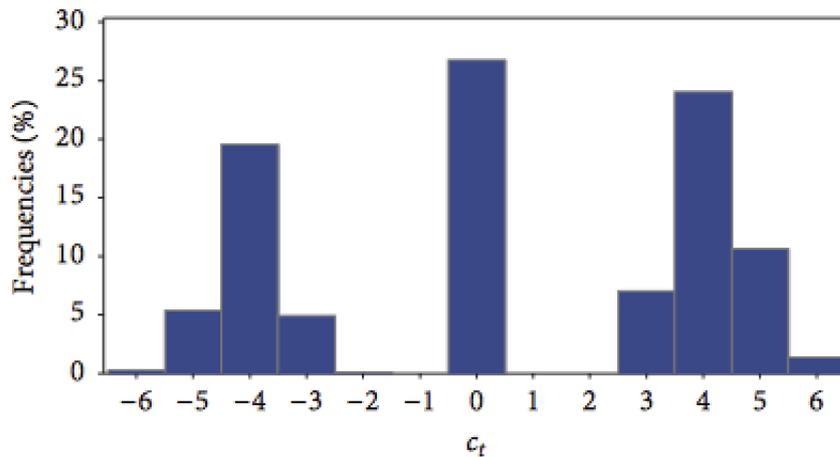


FIGURE 4.1 – Distribution de fréquence de la variable de consensus  $c_t$  pour le Indice boursier américain (Datastream) calculé sur la période de 1 janvier 1993, au 31 mars 2008.

La variable prend des valeurs dans des conditions normales (c'est-à-dire pas d'arrêt du marché dans la période  $t-6$  à  $t$ ) dans la plage  $\{-6, -5, -4, 0, 4, 5, 6\}$ . Habituellement,  $c_t$  ne prend pas les valeurs  $\{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ , étant donné que dans la période  $t-6$  à  $t$  ces valeurs seraient dépassées par leur compteur opposé (par exemple, en supposant que, de  $t-6$  à  $t$ , 4 rendements négatifs et 3 positifs ont été observés,  $\delta_t^+ = 3$ ,  $\delta_t^- = 4$  on obtiendrait  $c_t = -4$ ). Cependant, il est parfois possible que, sauf les samedis et dimanches (qui sont au préalable exclu de l'analyse), le marché s'arrête pour les célébrations ou d'autres raisons. Par exemple, il peut occasionnellement arriver que le marché ne fonctionne que 5 jours entre  $t-6$  et  $t$ . Alors un résultat possible pourrait être  $\delta_t^+ = 3$ ,  $\delta_t^- = 2$ , on obtiendrait puis  $c_t = 3$ .

Parameter	Estimate	Std. error	$t$	$P(t \neq 0)$
$a$	$9.138E-6$	$2.727E-6$	3.35	0.0154
$b$	-0.00005	0.000076	-0.72	0.5008
$d$	0.000286	0.000114	2.51	0.0457

Tableau 4.1 – Résultats de l'analyse de régression sur le rendement quotidien observés : estimations des paramètres, erreur type des estimations,  $t$  de l'étudiant et probabilité de rejet.

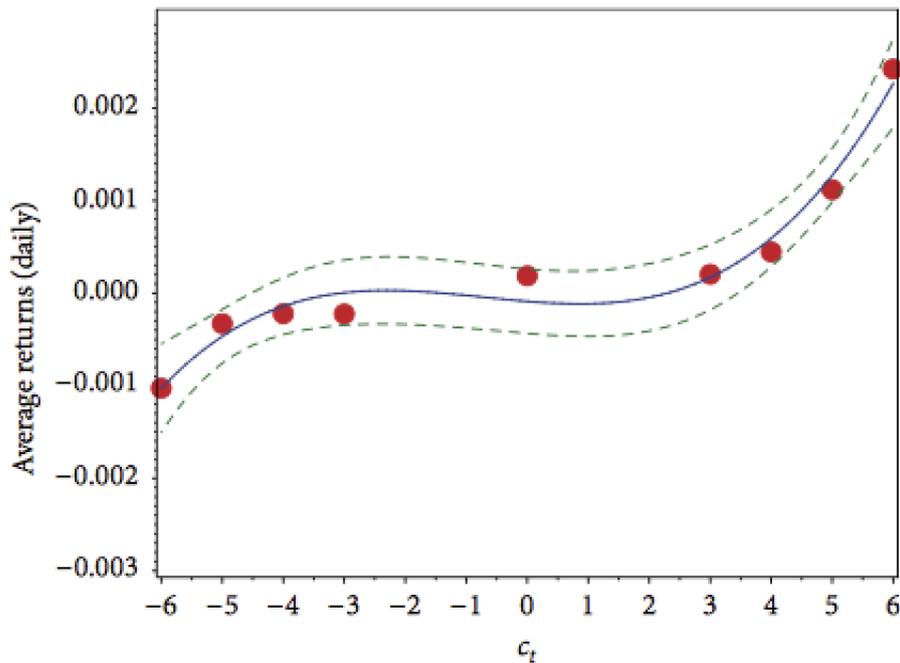


FIGURE 4.2 – Relation entre la variable de substitution de la demande excédentaire ( $c_t$ ) et les rendements quotidiens moyens des obligations du Trésor américain sur 30 ans (points rouges : période d’observation 1993-2008).  $c_t$  est calculé sur la base des données de un indice boursier du NYSE

La ligne continue de la figure 2 représente l’expression de  $\widehat{r}_{b,t}$  dans le système (4.8), où les valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $\beta^3$  sont fixes comme dans le tableau 1. Ce que montre la figure 2, est que les deux marchés (c’est-à-dire les actions et les obligations) renforcent leur lien lorsqu’un « sentiment » clair persiste sur le marché boursier. En effet, lorsque les rendements des actifs Euronext ont tous le même signe pendant 5 jours, les rendements de l’obligation à long terme s’éloignent sensiblement de zéro et montrent également le même signe.

### 4.1.3 Dynamique de transition

L’analyse de la dynamique du modèle peut être développée en simulant le comportement du système (4.8) à partir de différentes valeurs initiales de la demande excédentaire. On considère ici deux niveaux de la demande excédentaire initiale : Un niveau grand et un niveau proche de zéro. Nous combinons en outre ces deux cas avec deux configurations de marché : l’une où les investisseurs rationnels prévalent et l’autre où les investisseurs “irrationnels”(de type contrarian) prévalent. Nous analysons donc quatre scénarios. Pour vérifier la cohérence interne du modèle, nous comparons deux types de corrélations, que nous appelons ici *ex-ante* et *ex-post*. Nous désignons la corrélation *ex-ante* comme la corrélation estimée par des agents rationnels *via* (4.6) et appelons la corrélation *ex-post* celle résultant de la simulation du modèle (4.8). Bien entendu, pour que le modèle soit cohérent, les deux types de corrélations doivent prendre des valeurs similaires sous les mêmes conditions. Pour obtenir l’estimation de la corrélation *ex-post*,

3.  $\alpha$  et  $\beta$  est égal à a et b dans le tableau 1

#### 4.1. PEUT-ON ANTICIPER UNE RUPTURE DE CORRÉLATION ?

nous simulons les rendements des deux actifs (*i.e.*,  $r_{s,t}^\varepsilon$  et  $r_{b,t}^\varepsilon$ ). Ces résultats ont été obtenus en ajoutant une perturbation aléatoire à  $\Delta p_t$  et  $\widehat{r}_{b,t}$

$$\begin{cases} r_{s,t}^\varepsilon = \Delta p_t + e_{s,t} \\ r_{b,t}^\varepsilon = \widehat{r}_{b,t} + e_{b,t} \end{cases} \quad (4.12)$$

où  $e_{s,t}$  et  $e_{b,t}$  sont perturbations i.i.d. distribuées avec zéro valeur attendue et écarts types, respectivement, égaux à 0.02 et 0.00002.

Assets	Model returns	Expected value of returns for rational agents	Empirical returns
High-risk	$\Delta p_t$	$r_{s,t}$	$\bar{r}_{s,t}$
Low-risk	$\widehat{r}_{b,t}$	$r_b$	$\bar{r}_{b,t}$

Tableau 4.2 – Différents types de déclaration.

Le tableau (4.2) résume les différents types de renvoi utilisés. Le but de l'ajout d'une perturbation aléatoire est celui de réduire l'effet de la simulation purement déterministe, où la corrélation entre les deux variables serait soit 1 soit -1.

La corrélation *ex-post* sur les rendements simulés par le modèle (4.8) est alors calculée avec la formule standard :

$$\frac{\text{cov}(r_{s,t}^\varepsilon, r_{b,t}^\varepsilon)}{\sigma(r_{s,t}^\varepsilon)\sigma(r_{b,t}^\varepsilon)} \quad (4.13)$$

où  $\text{cov}(\cdot, \cdot)$  et  $\sigma(\cdot)$  sont respectivement la covariance usuelle et les fonctions d'écart type.

Prevalence in the market		
Initial excess demand	Rational investors	Contrarian speculators
	$\chi_2 = 30, \chi_1 = 0.5$	$\chi_2 = 3, \chi_1 = -4$
Largely high or low	0.998	0.112
Close to zero	0.000	0.113

Tableau 4.3 – Corrélation entre les rendements des produits à haut risque et à faible risque les actifs estimés par les agents rationnels (corrélation *ex ante*).

Prevalence in the market		
Initial excess demand	Rational investors	Contrarian speculators
	$\chi_2 = 30, \chi_1 = 0.5$	$\chi_2 = 3, \chi_1 = -4$
Largely high or low	0.971	0.001
Close to zero	0.064	0.207

Tableau 4.4 – Corrélation entre les rendements des actifs à haut risque et à faible risque résultant de la simulation du modèle (*ex-post* corrélation).

Les tableaux (4.2) et (4.2) présentent les valeurs de la corrélation (resp., *ex-ante* et *ex-post*) entre les rendements des deux actifs dans les quatre scénarios. En comparant les deux tableaux, nous pouvons conclure que les corrélations *ex-ante* et *ex-post* changent en conséquence. En observant le tableau 3, la plus grande valeur de la corrélation *ex-ante* se produit lorsque les agents

## CHAPITRE 4. LES ANTICIPATIONS DES RUPTURES DE CORRÉLATION, CORRÉLATION BREAKDOWN EN GESTION DE PORTEFEUILLE

rationnels dominant le marché et le niveau de la demande excédentaire devient très important. Comme déjà discuté, dans ces contextes, les agents rationnels estiment que la corrélation entre les actifs échangés (sur la base de (4)) atteindra l'unité. Au contraire, dans toutes les autres combinaisons, l'estimation de la corrélation *ex-ante* se maintient à zéro ou est légèrement supérieure. Des conclusions similaires si obtiennent avec le tableau d'observations 4.

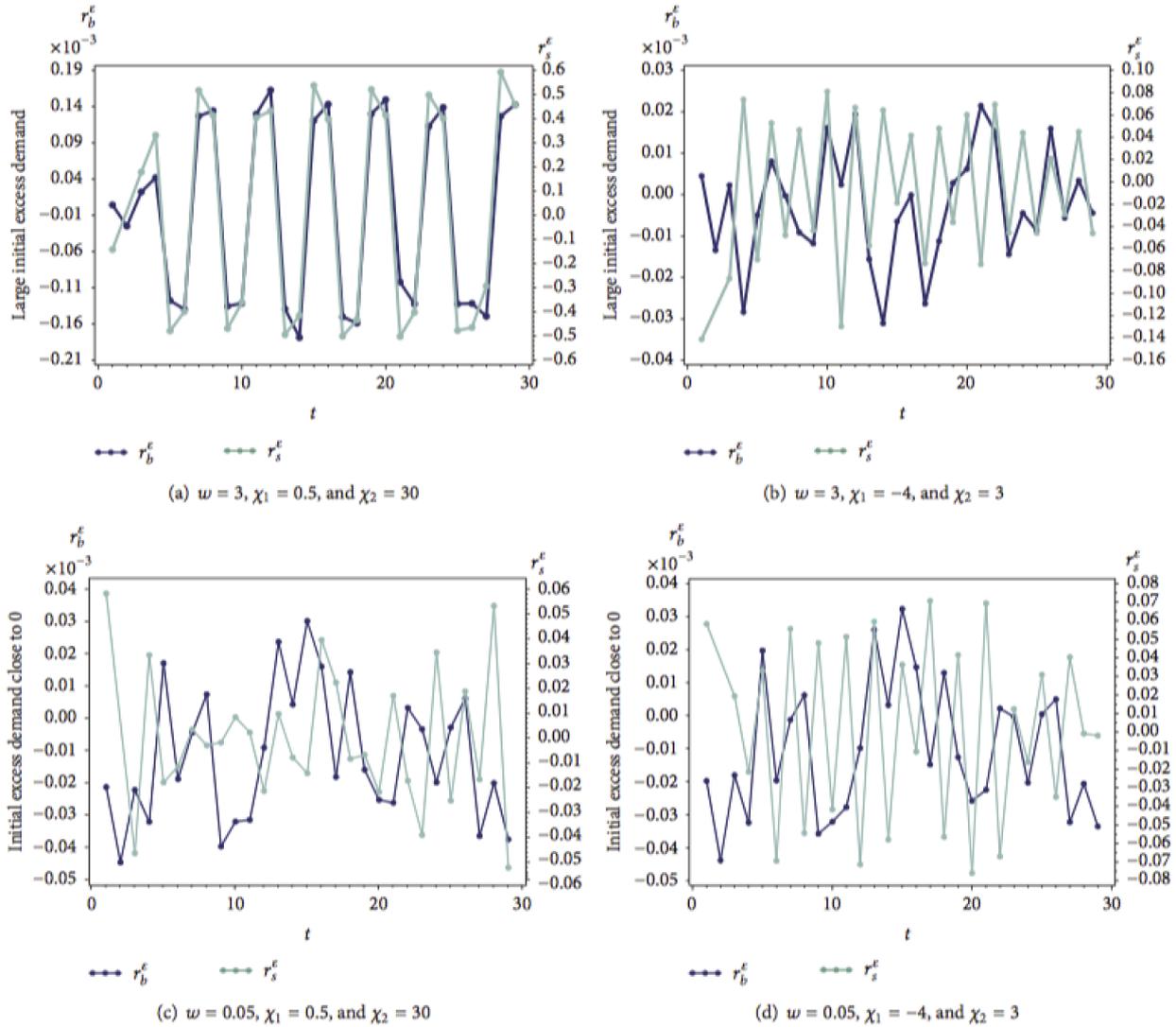


FIGURE 4.3 – Trajectoires simulées des actifs à risque et des actifs à faible risque.

Pour tous les graphiques, les valeurs des paramètres sont :  $\alpha_1 = 0.02$ ,  $\alpha_2 = 0.06$ ,  $\lambda = 0.05$ ,  $Y = 0.5$ ,  $r_b = 0$ ,  $p = 1$ ,  $k = 0.20$ , et  $\mu = 0.15$ .

a) Prévalence des investisseurs rationnels ( $x_2 = 30$ ) et moindre importance des spéculateurs sur la lancée ( $x_1 = 0.5$ ); b) prévalence des spéculateurs à contre-courant ( $x_1 = -4$ ) et moindre importance des investisseurs rationnels ( $x_2 = 3$ ). (c) et (d) montrant la même composition du marché qu'aux points a) et b), mais la valeur de départ de la simulation est  $\omega = 0,05$ .

La figure (4.3) montre les trajectoires simulées de  $r_{s,t}^e$  (couleur de la lumière) et  $r_{b,t}^e$  (couleur

foncée). Les cas où l'excédent initial de la demande est important se trouvent dans la première rangée (panneaux (a) et (b)) et ceux où la demande excédentaire initiale est proche de 0 sont dans la deuxième rangée (panneaux (c) et (d)). Ces trajectoires ont été obtenues dans le même cadre que celui utilisé pour l'estimation du tableau (4.4). L'inspection visuelle de la figure 3 confirme les résultats du tableau 4. Cependant, la même figure nous suggère également quelque chose sur la dynamique à l'origine des corrélations *ex post*. On sait que le modèle théorique dans (4.3) a un équilibre stable en  $w_t = 0$  et  $r_{r,t} = 0$ .

En effet, en observant la deuxième rangée de la figure 3 lorsque la demande excédentaire est suffisamment proche de zéro, les rendements montrent une faible corrélation à la fois lorsque les agents rationnels prévalent et lorsque les spéculateurs l'emportent. Les choses changent considérablement si la demande excédentaire initiale est très importante et que les agents rationnels dominent, ce qui est le cas analysé dans le panneau (a). Il est clair dans ce cas que le système entre dans une dynamique orbitale, où les rendements des deux actifs oscillent de manière synchrone. En effet, des valeurs positives importantes de la demande excédentaire soutiennent des rendements importants à la fois des actifs risqués et des actifs à faible risque, après respectivement (4.2) et (4.12). Le modèle explique pourquoi les deux rendements reviennent et deviennent négatifs. Lorsque le prix de l'actif risqué est suffisamment élevé et se combine à une forte demande excédentaire, les agents rationnels modifient profondément leur portefeuille en raison de deux circonstances :

1. La réversion moyenne des prix génère des rendements attendus (voir (4.1)) ;
2. Une demande excédentaire importante génère une estimation de corrélation élevée, ce qui réduit à son tour la possibilité de former le portefeuille « équilibré », comme il ressort de l'équation (4.4) qui détermine le poids du portefeuille de l'actif risqué en fonction de la demande excessive. En outre, des portefeuilles extrêmement déséquilibrés sont le résultat attendu selon la théorie standard de Markowitz lorsque la corrélation entre les valeurs des actifs tend vers l'unité.

Nous rappelons brièvement la solution de l'optimisation du portefeuille pour le modèle de Falbo et Grassi (2011). Nous nous référons pour une explication du calcul. La quantité optimale  $q_t^*$  s'obtient en effectuant une recherche dans le maximum de l'indicateur de performance suivant :  $g = \frac{q_t^T r}{q_t^T V_{t-1} q_t}$  où  $r^T = [r_{s,t-1} r_b]$  est le vecteur des rendements attendus des actifs à risque élevé et à faible risque et  $q_t^T = [q_t 1 - q_t]$  est le vecteur de leur portefeuille. La matrice de variance-covariance  $V_{t-1}$  est estimée comme fonction de  $\omega_{t-1}$ .  $g$  est l'équivalent de la fonction Ratio de Sharpe, afin que le portefeuille optimal  $q_t^* = \arg \max g$  est également efficace à Markowitz. La solution du problème d'optimisation du portefeuille, en fonction des variables dynamiques  $r_s$  et  $\omega$ , est l'équation (4.4) en dessus.

Nous utilisons le même modèle de Ratio de Sharpe pour généraliser notre objectif qui est de prévoir l'existence ou non d'une rupture de corrélation entre les rendements des actifs. L'écriture de ce modèle est changer un problème mono-objectif en ajoutant un paramètre  $\lambda$ , c'est à dire nous maximisons la fonction de ration Sharpe qui est une fonction fractionnaire noté  $Sp = g = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$  qui devient  $\max R_p - R_f - \lambda \sigma_p$ . En minimisant le risque d'une part et maximiser le rendement d'autre part

## CHAPITRE 4. LES ANTICIPATIONS DES RUPTURES DE CORRÉLATION, CORRÉLATION BREAKDOWN EN GESTION DE PORTEFEUILLE

### 4.1.4 Le modèle généralisation

Notre fonction objectif est donc la minimisation de ratio Sharpe qui est une fonction quadratique : L'optimisation quadratique présente un cas particulier de l'optimisation non linéaire. Elle traite en fait, la minimisation ou la maximisation d'une fonction objectif de type quadratique convexe. Les contraintes peuvent être linéaires comme quadratiques. Dans ce travail, nous plaçons dans le cas de l'optimisation quadratique convexe.

Supposons un investisseur souhaite constituer un portefeuille de  $n$  actifs financiers. Pour chaque titre, nous calculons les estimations du rendement espéré  $R_i$ <sup>4</sup>, et de la variance  $\sigma_i^2$  et les coefficients de corrélation des rendements de chaque couple de titres  $\rho_{i,j}$ . Si nous représentons la proportion du montant investi dans le titre  $i$  par  $\omega_i$ <sup>5</sup>, nous pouvons calculer le rendement espéré et la variance du portefeuille comme suivant :

$$E(\omega) = \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 + \dots + \omega_n R_n = R_{\omega t} \quad (4.14)$$

$$\text{où } R_i = (R_{i,1}, R_{i,2}, \dots, R_{i,T}) \quad \text{et} \quad \omega_i = (\omega_{i,1}, \omega_{i,2}, \dots, \omega_{i,T}) \quad (4.15)$$

$$\text{var}(\omega) = \sum_{i,j} \omega_i \omega_j \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j = \omega_t \Sigma \omega \quad (4.16)$$

$$\rho_{i,j} = \frac{\text{cov}(R_{i,t}, R_{j,t})}{\sigma_i \sigma_j} \quad (4.17)$$

La matrice de variance-covariance<sup>6</sup> est présentée comme suit :

$$\text{Cov}(R_i R_j) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_{i,t} - \bar{R}_i)(R_{j,t} - \bar{R}_j) \quad (4.18)$$

Dans un premier temps, l'objectif est de minimiser le risque du portefeuille sans prendre en considération le gain, pour pouvoir étudier l'effet de la rupture de corrélation sur le portefeuille. Dans un second temps nous maximisons le Ratio Sharpe, nous nous intéressons à un portefeuille optimal à deux actifs. nous allons créer une boucle qui récupère à chaque fois le portefeuille efficients avec le moins de risque et un rendement maximal. De ce fait, le problème devient un problème d'optimisation combinatoire mono-objectif, c'est à dire la maximisation du rendement d'une part et la minimisation du risque d'autre part.

#### 4.1.4.1 Le concept de choix de portefeuille optimal :

Nous proposons en premier lieu une approche mathématique et implémentons en utilisant la méthode d'optimisation mono-objectif dans le but de résoudre un problème quadratique et d'anticiper la rupture de corrélation du rendement des actifs. Dans un second temps, nous établissons le modèle de Markowitz qui présente le problème d'optimisation de portefeuille financier.

L'objectif est la maximisation de la rentabilité d'un portefeuille en fonction du risque ainsi que

---

4.  $R_i$  : Le rendement

5.  $\omega_i$  : La proportion

6.  $\Sigma$  : La matrice variance covariance

## 4.1. PEUT-ON ANTICIPER UNE RUPTURE DE CORRÉLATION ?

l'effet d'une rupture de corrélation entre les rendements des actifs en gestion de portefeuille. La fonction objectif pour une maximisation de risque est présente comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max R_p - R_f - \lambda \sigma_p \\ sc : \\ \forall i \in [1, R] \\ 0 \leq \omega_i \leq 1 \\ R_{\omega,t} \geq R_{max} \end{array} \right. \quad (4.19)$$

Où  $\lambda$  est un paramètre,  $R_p$  est le rendement du portefeuille,  $R_f$  est le taux sans risque,  $\sigma_p$  est le risque du portefeuille,  $\omega_i$  correspond aux poids proportions des titres leur somme est toujours égale à l'unité,  $\sum \omega_i = 1$ .

### 4.1.4.2 Application pour un portefeuille composé de 2 actifs

Nous appliquons le modèle sur deux actifs en anticipant les changement des coefficients de corrélation des rendements de chaque couple de titres  $\rho_{i,j}$ , et voir quel est l'effet de cette rupture de corrélation dans le portefeuille. Par la suite, comparer la rentabilité d'un portefeuille qui prend des décisions à partir des résultats du modèle et un autre portefeuille qui prend pas en considération les résultats du modèle. Considérons un portefeuille P composé de deux actifs de type actions A et B,  $R_i$  le rendement de chaque actif,  $\omega_i$  le poids de chaque actif dans le portefeuille.

Le cas pour n actif :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \omega_i R_i + \dots + \omega_n R_n - R_f - \lambda \sum_{i,j} \omega_i \omega_j \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j \\ sc : \\ \forall i \in [1, R] \\ 0 \leq \omega_i \leq 1 \\ r_{\omega,t} \geq R_{max} \end{array} \right. \quad (4.20)$$

Le ratio Sharpe ( $S_p$ ) est égal à la mesure de l'écart de rentabilité d'un portefeuille en fonction du risque.

On suppose un portefeuille de 2 actions A,B avec  $\omega$  de A et  $(1 - \omega)$  actions de B.

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \omega R_1 + (1 - \omega) R_2 - R_f - \lambda. [\omega^2 \sigma_1^2 + (1 - \omega)^2 \sigma_2^2 + 2\omega(1 - \omega) cov(R_1, R_2)] \\ sc : \\ \forall i \in [1, R] \\ 0 \leq \omega_i \leq 1 \\ R_{\omega,t} \geq R_{max} \end{array} \right. \quad (4.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 - R_f - \lambda. [\omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 . cov(R_1, R_2)] \\ sc : \left\{ \begin{array}{l} \forall i \in [1, R] \\ 0 \leq \omega_i \leq 1 \\ R_{\omega,t} \geq R_{max} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.22)$$

## CHAPITRE 4. LES ANTICIPATIONS DES RUPTURES DE CORRÉLATION, CORRÉLATION BREAKDOWN EN GESTION DE PORTEFEUILLE

---

Données du problème :

$$R = \{R_1, R_2\} : \text{L'ensemble de rendements.} \quad (4.23)$$

$$\Sigma_{R_1, R_2} : \text{La matrice carré} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{1,2}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

**L'objectif :**

Notre objectif est de maximiser le rendement d'une part et de minimiser le risque d'autre part. Nous nous intéressons donc à un portefeuille optimaux à deux actifs, dont les expressions sont données par :

$$\max \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 - R_f - \lambda \cdot [\omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2] \quad (4.25)$$

**Contraintes :**

$$\forall i \in [1, R], \quad 0 \leq \omega_i \leq 1 \quad (4.26)$$

$$\omega \in [0, 1] \quad (4.27)$$

$$\sum_{i=1}^R \omega_i = 1 \quad (4.28)$$

On remarque que notre fonction objectifs est quadratique, symétrique et semi-définie positive avec des contraintes linéaires.

### Étude de la fonction objectif

Il existe plusieurs méthodes pour la résolution des problèmes d'optimisation mono-objectif dans cette partie on va utiliser la résolution paramétrisation.

La forme générale du problème : notre problème de maximisation avec le paramètre  $\lambda$  revient à un problème de maximisation et de minimisation sous contrainte consiste à déterminer le max et le min de la fonction d'objectif (4.22).

$$\begin{aligned} \max S_p &= \max \frac{R_p - R_f}{\sigma_p} \\ &= \max \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 - R_f - \min \lambda \omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Sc :

$$\sum_{i=1}^R \omega_i = 1 \quad (4.30)$$

$$\forall i \in [1, R], \quad 0 \leq \omega_i \leq 1 \quad (4.31)$$

$$R = (R_1, R_2); \quad \omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

**La fonction objectif sous forme matricielle**

L'écriture de la fonction objectif sous forme matricielle :

$$S_p = \frac{\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 - R_f}{\omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2}$$

SC :

$$0 \leq \omega_i \leq 1, \quad \forall i = 1, 2$$

$$\sum_{i=1}^2 \omega_i = 1$$

Posons :  $\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 - R_f \implies (R_1 \quad R_2) \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} - R_f I_1$

$$\iff R^\top \omega - R_f I_1$$

Où

$$\sigma_p = \omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2$$

$$\sigma_p = \begin{pmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

$$\omega^\top \Sigma \omega$$

$S_p$  peut s'écrire sous forme matricielle comme suit :

$$(R_1, R_2) \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} - R_f - \lambda \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{1,2} \sigma_{1,2} \\ \rho_{1,2} \sigma_{1,2} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

$$= R^\top \omega - R_f I_1 - \lambda \omega^\top \Sigma \omega$$

Objectif peut s'écrire sous forme matricielle comme suit :

$$S_p = R^\top \omega - R_f I_1 - \lambda \omega^\top \Sigma \omega$$

Preuve du calcul de variance covariance  $\Sigma^7$ , on a :

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{1,2} \sigma_{1,2} \\ \rho_{1,2} \sigma_{1,2} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

$$= \begin{pmatrix} \omega_1 \sigma_1^2 & + & \omega_2 \rho_{1,2} \sigma_{1,2} \\ \omega_1 \rho_{1,2} \sigma_{1,2} & + & \omega_2 \sigma_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

$$= (\omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_1 \omega_2 \rho_{1,2} \sigma_{1,2} + \omega_1 \omega_2 \rho_{1,2} \sigma_{1,2} + \omega_2^2 \sigma_2^2)$$

$$= (\omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \rho_{1,2} \sigma_{1,2})$$

---

7. la matrice de variance-covariance de la fonction

**CHAPITRE 4. LES ANTICIPATIONS DES RUPTURES DE CORRÉLATION, CORRÉLATION BREAKDOWN EN GESTION DE PORTEFEUILLE**

---

$$= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \Sigma \quad (4.35)$$

La matrice hessienne, la dérivée première est égale à :

$$\frac{\partial Sp}{\partial \omega_1} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = R_1 - \lambda(2\omega_1\sigma_1 + 2\omega_2\text{cov}(R_1, R_2))$$

$$\frac{\partial Sp}{\partial \omega_2} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = R_2 - \lambda(2\omega_2\sigma_2 + 2\omega_1\text{cov}(R_1, R_2))$$

Et la dérivée seconde est égale à :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 Sp}{\partial \omega_1^2} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} & \frac{\partial^2 Sp}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2 Sp}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} & \frac{\partial^2 Sp}{\partial \omega_2^2} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \text{matrice Hessienne}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 Sp}{\partial \omega_1^2} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = -\lambda 2\sigma_1 \\ \frac{\partial^2 Sp}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = -\lambda 2\text{cov}(r_1, r_2) \\ \frac{\partial^2 Sp}{\partial \omega_2^2} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = -\lambda 2\sigma_2 \\ \frac{\partial^2 Sp}{\partial \omega_2 \partial \omega_1} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = -\lambda 2\text{cov}(r_1, r_2) \end{array} \right. \quad (4.36)$$

Où la matrice Hessienne est égale à :

$$H = -\lambda \begin{pmatrix} 2\sigma_1 & 2\text{cov}(r_1, r_2) \\ 2\text{cov}(r_1, r_2) & 2\sigma_2 \end{pmatrix} = -\lambda \Sigma \quad (4.37)$$

Ont peut voir l'évaluation de la valeur de  $\rho$  par rapport à la matrice Hessienne par exemple :

$$\begin{aligned} |H| &= \lambda^2(4\sigma_1\sigma_2 - 4\text{cov}(R_1, R_2)) \\ &= \lambda^2(4\sigma_1\sigma_2 - 4\rho_{1,2}(R_1, R_2)) \\ |H| &= 4\lambda^2\sigma_1\sigma_2(1 - \rho) \end{aligned}$$

La matrice hessienne  $|H|$  est  $> 0$  si  $R \leq 0$  d'ou  $r = -\lambda 2\sigma_1$ .

#### 4.1. PEUT-ON ANTICIPER UNE RUPTURE DE CORRÉLATION ?

---

Le problème de maximisation sous contrainte consiste à déterminer le maximum de la fonction d'objectif..

$$\left\{ \begin{array}{l} \max S_p = (R^t \omega - R_f \cdot I_1) - \lambda(\omega^t \Sigma \omega) \\ Sc : \sum_{i=1}^R \omega_i = 1 \\ \omega_i \in [0, 1]. \end{array} \right. \quad (4.38)$$

Le problème de maximisation et minimisation avec un paramètre  $\lambda$  revient donc est un problème de minimisation de risque sans prend en considération le gain,  $\lambda = 1$  dans un premier temps puis trouver le portefeuille optimal dans un second temps.

Le problème peut s'écrire comment suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max(R^t \omega - R_f \cdot I_1) - \min \lambda(\omega^t \Sigma \omega) \\ \min(R^t \omega - R_f \cdot I_1) - \lambda(\omega^t \Sigma \omega) \\ Sc : \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^R \omega_i = 1 \\ 0 \leq \omega_i \leq 1 \\ \omega \in [0, 1] \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.39)$$

## CHAPITRE 4. LES ANTICIPATIONS DES RUPTURES DE CORRÉLATION, CORRÉLATION BREAKDOWN EN GESTION DE PORTEFEUILLE

### 4.1.4.3 Implémentation de la methode mono-objectif

Nous implémentons le problème mono-objectif sur neuf couples de rendements d'actifs de 2010 à 2019, afin de minimiser pour chaque paire de titres le risque et anticiper la ruptures de corrélation entre les actifs. Nous appliquons la méthode au modèle de Markowitz pour la construction d'un portefeuille optimal. Nous utilisons des données historiques sur 18 rentabilités : NVS, PFIZER, SANOFI, MERCK, JOHNSON, BAYER, EUROFINS, GUERBET, SARTORIUS, VETOQUINOL, LNA, BASTIDE, CELYAD NANOBOTIX, AB, RAMSAY, INNATE, BONE, pour estimer leurs rendements espérés futurs. Nous utilisons une base de rentabilités d'actifs du secteur chimie et santé<sup>8</sup>. Les séries sont journalières<sup>9</sup>. Nous notons  $\omega = \alpha$  pour simplifier les notations de l'écritures de l'algorithme.

#### Interprétations des résultats :

Instance 1	Nom/date l'Instance Base : Santé - Chimie	Coefficient de corrélation ( $\rho$ )	Si $ \rho_0 - \rho_1  > 0.05$ Il existe une rupture	Si $\rho < 0.5$ , $ \alpha_1 - \alpha_2  > 0.5$ il n'existe pas une rupture pour le mois suivant, mais si $ \alpha_1 - \alpha_2 $ est proche de zéro $\cong 0.0010$ et $\rho < 0.5$ , il est tres probable qu'il aura une forte rupture pour le mois suivant si la variance 1 est $\cong$ à la variance 2. Sinon si la différences entre la valeur $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.05$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant $ \sigma_1 - \sigma_2  \cong 0.01$	Présence / non d'une rupture de corrélation le mois prochain	La valeur : $\alpha_1, \alpha_2$ , Objective pour une minimisation du risque sans prend en considération le cout.	$ \alpha_1 - \alpha_2 $
1.	Inst1 : 1-0 01-11-2010 30-11-2010	0.323908954		L'hypothèse n'est pas vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ n'est pas $> 0.5$ est $\rho < 0.5$ d'où $\sigma_1 > \sigma_2$ qui pourriez avoir une petite rupture pour le mois suivant avec c'est changement d'hypothèses	Oui	$\alpha_1 = 0.406582$ $\alpha_2 = 0.593418$ Obj=0.0010550 3	0.186836
2.	Inst1-1 01-11-2010 30-12-2010	0.259973017	0.063935936	L'hypothèse n'est pas vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ n'est pas $> 0.5$ est $\rho < 0.5$ donc on conclure qui pourriez avoir une petite rupture pour le mois suivant avec c'est changement d'hypothèses	Oui	$\alpha_1 = 0.35038$ $\alpha_2 = 0.649762$ Obj=0.0010589 2	0.299523
3.	Inst1-2 01-11-2010 31-01-2011	0.183491973	0.076481044	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très grande $> 0.5$ est $\rho < 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.830024$ $\alpha_2 = 0.169976$ Obj= 0.00112994	0.660049
4.	Inst1-3 01-11-2010 28-02-2011	0.188775472	0.005283499	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très grande $> 0.6$ est $\rho < 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.837721$ $\alpha_2 = 0.162279$ Obj =0.00106847	0.675442

Tableau 4.5 – [Instance1-0 à Instance1-3]<sup>10</sup> – Couple 1 – NVS&PFIZER<sup>11</sup>

8. Ce secteur à était choisie, en remarquant qu'il existe plusieurs rupture de corrélation entre les actifs, en calculant le coefficient de corrélation historique, d'ou cela nous aidera de voir le changement dans le modèle facilement

9. En remarquant que la corrélation changer d'un jour à autre nous avons choisir de travail avec les séries journalières

10. Instance : Dans l'univers de la programmation objet, l'instance désigne une occurrence d'une classe. Cette dernière est elle-même définie comme la structure d'un objet, c'est-à-dire comme l'ensemble des fonctionnalités et des comportements qui caractérisent cet objet. Ou bien Une instance du moteur de base de données est une copie de l'exécutable qui s'exécute en tant que service du système d'exploitation. Chaque instance gère plusieurs bases de données système et une ou plusieurs bases de données utilisateur. Chaque ordinateur peut exécuter plusieurs instances du Moteur de base de données. Les applications se connectent à l'instance afin d'effectuer des travaux dans une base de données gérée par l'instance. Ou bien dans l'univers de la programmation objet, l'instance désigne une occurrence d'une classe. Cette dernière est elle-même définie comme la structure d'un objet, c'est-à-dire comme l'ensemble des fonctionnalités et des comportements qui caractérisent cet objet. Dans notre algorithme chaque instance à un intervalle de temps donnée

11. Le couple est un couple de deux actifs, et chaque couple peut avoir plusieurs instance

Commentaire des resultats : Tableau 4.5

Dans le tableau (4.5), on observe le changement du coefficient de corrélation au couple 1 [NVS-PFIZER], entre le 01/11/2010 à 28/09/2019, sur plusieurs périodes ce que indique que la corrélation n'est pas stable dans le temps pour le couple 1. Par exemple, entre 01/11/2010 à 30/11/2010 le coefficient de corrélation est de (0.32) tandis que entre 01/11/2010 à 30/12/2010 elle a diminué de 0.06. C'est qui explique l'existence d'une rupture de corrélation car  $|\rho_0 - \rho_1| > 0.05$ .

En minimisant le Ratio Sharpe, les résultats montrent des changements très remarquables de la proportion des actifs dans chaque période de temps calculée. Nous avons distingué des changements dans chaque instance teste, nous allons donc fixer des hypothèses par rapport aux resultats du modèle après plusieurs simulations :

**Hypothèse 1** : Si  $\rho < 0.5$ , la différence de la valeur des proportions  $|\alpha_1 - \alpha_2|$  est très grande  $> 0.5$  c'est à dire qu'il existe pas une rupture de corrélation pour le mois suivant. (l'hypothèses est vérifié sur l'instance [Inst1-2]).

**Hypothèse 2** : Si  $|\alpha_1 - \alpha_2|$  est proche de zéro et  $\rho < 0.5$ , il est très probable qu'il y aura une forte rupture pour le mois suivant, si la variance 1, est un peu prêt égale à la variance 2.

**Hypothèse 3** : Si la différences entre la valeur  $|\alpha_1 - \alpha_2| \cong 0.05$  et  $\rho \geq 0.5$  donc il existe pas une rupture de corrélation pour le mois suivant  $|\sigma_1 - \sigma_2| \cong 0.01$

Par exemple, on voit que  $\alpha_1 = 0.83$  et  $\alpha_2 = 0.16$  il y a une grande différence entre les deux proportions et  $\rho = 0.18$  qui est inférieur à 0.5 c'est qui induit que l'hypothèses précédent est vérifiée, donc il n'existe pas de rupture de corrélation pour le mois suivant qui est confirmé par l'instance [Inst1-3].

De même, pour l'instance [Inst1-3], la corrélation est inférieur 0.5 et la différence de deux proportions est très grande c'est qui montre qu'il n'existe pas de rupture de corrélation pour le mois suivant. C'est qui nous confirmé aussi pour le cas de l'instance [Inst1-4], la valeur de  $\rho = 0.21$  et  $|\rho_0 - \rho_1| = 0.02$  qui est inférieur à 0.05. Voir l'annexe pour le résultat de l'instance [Inst1-4].

Tandis que pour l'instance [Inst1-0] la valeur de la corrélation  $\rho$  est inférieur à 0.5, mais la différence entre les deux proportions n'est pas supérieure à 0.5 ce qui rejete l'hypothèse 1, donc il existe une rupture de corrélations dans le mois suivant, c'est qui est confirmé sur l'instance [Inst1-2].

On a également remarquer que à chaque fois si la variance d'actifs 1 est inférieure à la variance d'actifs 2 alors la proportion  $\alpha_1$  est supérieur à la proportion de  $\alpha_2$ . En conclue que le modèle minimiser le risque de ratio Sharpe.

## CHAPITRE 4. LES ANTICIPATIONS DES RUPTURES DE CORRÉLATION, CORRÉLATION BREAKDOWN EN GESTION DE PORTEFEUILLE

8.	Inst1-7 01-11-2010 30-06-2011	0.309558392	0.04013096	L'hypothèse n'est pas vérifiée nous pouvons pas conclure le prévoir ou non de la rupture	Non	$\alpha_1 = 0.491286$ $\alpha_2 = 0.508714$ Obj = 0.00106913	0.0174271
9.	Inst1-8 01-11-2010 29-07-2011	0.305115545	0.004442847	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très proche de zéro $\cong 0.007$ et $\rho < 0.5$ , il existe une forte rupture pour le mois suivant Nb: la variance 1 est $\cong$ à la variance 2 d'où $\text{Var}1 = 0,00013$ et $\text{Var}2 = 0,00013$	Oui	$\alpha_1 = 0.496431$ $\alpha_2 = 0.503569$ Obj = 0.00106637	0.00713771
10.	Inst1-9 01-11-2010 31-08-2011	0.527456963	0.035688113	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.02$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.511981$ $\alpha_2 = 0.488019$ Obj = 0.00109983	0.0239629
11.	Inst1-10 01-11-2010 30-09-2011	0.537197301	0.009740338	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.04$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.522161$ $\alpha_2 = 0.477839$ Obj = 0.00109947	0.0443217
12.	Inst1-11 01-11-2010 31-10-2011	0.57156668	0.034369379	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.05$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.516296$ $\alpha_2 = 0.483704$ Obj = 0.00110438	0.0325914
13.	Inst1-12 01-11-2010 30-11-2011	0.587142209	0.01557553	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.05$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.526687$ $\alpha_2 = 0.473313$ Obj = 0.00110721	0.0533749
14.	Inst1-13 01-11-2010 30-12-2011	0.5854079	0.00173431	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.03$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.519493$ $\alpha_2 = 0.480507$ Obj = 0.00110369	0.0389869
15.	Inst1-14 01-11-2010 30-01-2012	0.561505725	0.023902175	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.01$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.505395$ $\alpha_2 = 0.494605$ Obj = 0.0110243	0.0107897

Tableau 4.6 – [Instance1-7 à Instance1-14 ] – Couple 1 – NVS&PFIZER

### Commentaire des resultats : Tableau 4.6

En général dans ce le modèle, nous distinguons sur l'instance [Inst1-7] que la corrélation est inférieure à 0.5 mais la valeur absolue des proportions des actifs est inférieure à 0.5, ce qui est indique que notre l'hypothèse 1 n'est pas vérifiée. Donc il existe pas de rupture de corrélation pour le mois suivants, nous ne pouvez pas conclure n'existant ou non d'une rupture de corrélation pour cette instance.

Mais ont remarque que la valeur de la corrélation sur l'instance [Inst1-8] est égale celle de l'instance [Inst1-7], par contre la différence entre la value absolue de deux proportions d'actifs est très faible, ( $|\rho_0 - \rho_1| > 0.01$  sur [Inst1-7] et sur l'instance [Inst1-8]  $|\rho_0 - \rho_1| > 0.00$ ). Même si la corrélation dans [Inst1-7] est supérieure à celle de [Inst1-8] de 0,44%, cela peut être interprété comme un signe d'une forte rupture puis que sur [Inst1-8], la variance d'actifs 1 = 0,0131% et la variance l'actifs 2=0,0132%, on déduis que les variance sont très proche. Tandis que pour [Inst1-7], la variance 1 = 0,014% et la variance 2 = 0,013%, le cas de l'hypothèses 2.

De l'instance [inst1-9] à l'instance [inst1-14], on constate que la corrélation  $\rho$  est supérieur ou égal à 0.5 et la différence entre les proportions est inférieure ou égale à 0.05. Ce qui montre qu'il n'existe pas une rupture de corrélation dans cette période de temps. L'hypothèses 3 est vérifiée, de même jusqu'à l'instance [inst1-30], ainsi que dans toutes les intervalle de temps leurs deux variances sont presque égale. (voir l'annexe pour autre instance).

## 4.1. PEUT-ON ANTICIPER UNE RUPTURE DE CORRÉLATION ?

Instance 2	Nom/date l'Instance Base : Santé - Chimie	Coefficient de corrélation ( $\rho$ )	Si $ \rho_0 - \rho_1  > 0.05$ Il existe une rupture	Si $\rho < 0.5,  \alpha_1 - \alpha_2  > 0.5$ il n'existe pas une rupture pour le mois suivant, mais si $ \alpha_1 - \alpha_2 $ est proche de zéro $\cong 0.0010$ et $\rho < 0.5$ , il est très probable qu'il aura une forte rupture pour le mois suivant si la variance 1 est $\cong$ à la variance 2. Sinon si la différence entre la valeur $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.05$ et $\rho \geq 0.5$ , donc il existe pas une rupture pour le mois suivant $ \sigma_1 - \sigma_2  \cong 0.01$	Présence / non d'une rupture de corrélation le mois prochain	La valeur : $\alpha_1, \alpha_2$ , Objective pour une minimisation du risque sans prendre en considération le cout.	$ \alpha_1 - \alpha_2 $
1.	Inst2-1 01-11-2010 30-11-2010	0.677025749			Non	$\alpha_1 = 0.358556$ $\alpha_2 = 0.641444$ Obj = - 0.00109138	0.282888
2.	Inst2-2 01-11-2010 30-12-2010	0.671907438	0.005118311	L'hypothèse n'est pas vérifiée car $\rho \geq 0.5$ et la différence entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est $> 0.05$ $ \alpha_1 - \alpha_2  = 0.353$ et la différence entre la variance 1 et la variance 2 n'est pas proche de zéros. D'où l'hypothèse qu'il existe pas une rupture pour le mois suivant ne pas vérifier	Oui [forte rupture]	$\alpha_1 = 0.32316$ $\alpha_2 = 0.67684$ Obj = - 0.00106358	0.35368
3.	Inst2-3 01-11-2010 31-01-2011	0.232459739	0.439447699	L'hypothèse n'est pas vérifiée nous pouvons pas conclure le prévoir ou non la rupture Il existe aussi une forte différence entre la variance 1 et la variance 2	Oui	$\alpha_1 = 0.357304$ $\alpha_2 = 0.642696$ Obj = - 0.00109621	0.285392

Tableau 4.7 – [Instance2-1 à Instance2-3] – Couple 2 – SANOFI & MERCK

### Commentaire des résultats : Tableau 4.7

Dans l'instance 2 l'interprétation des résultats est très compliquée à chaque fois qu'il existe une forte rupture de corrélation, il aura une forte différence entre les deux variances (de l'actifs 1 et de l'actifs 2). Tout d'abord que la variance de actifs 1 ne pas proche de la variance de actifs 2, nous pouvons souligner, que notre modèle peut anticiper une rupture de corrélation que si dans instance t+1 (est égale à [Inst2-2] dans le tableau), la volatilité de deux actifs ne varie pas beaucoup par rapport à celle de l'instance t ([Inst2-1] dans le tableau), c'est qui n'est pas le cas. Aussi que les deux variances doit être très proche, même si la valeur de la corrélation passe d'une forte corrélation à une faible corrélation que ce soit (positive ou négative) et le contraire aussi, passe d'une corrélation faible à une forte corrélation.

### Les résultats du modèle teste sur la base CAC40

Nous allons tester le modèle sur la base de donnée de CAC40 et avec un intervalle de temps de trois mois entre chaque instance tester afin d'observe l'anticipation du modèle d'une rupture de corrélation. Les résultats CAC40 est tester par groupe d'instance noté (inst-b) qui est présente dans le tableau (4.8), pour le couple LVMH& GÉNÉRAL et dans le tableau (4.9), pour le couple LVMH&MICHELIN.

Instance b	Nom/date Instance Base : CAC40	coefficient de corrélation ( $\rho$ )	Si $ \rho_0 - \rho_1  > 0.05$ Il existe une rupture	Si $\rho < 0.5,  \alpha_1 - \alpha_2  > 0.5$ il n'existe pas une rupture pour le mois prochaine, mais si $ \alpha_1 - \alpha_2 $ est proche de zéro $\cong 0.0010$ et $\rho < 0.5$ , il est très probable qu'il aura une forte rupture pour le mois prochaine si la variance 1 est $\cong$ à la variance 2. Sinon si différences entre $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.05$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant $ \sigma_1 - \sigma_2  \cong 0.01$	Présence / non d'une rupture de corrélation le mois prochain	La valeur : $\alpha_1, \alpha_2$ , Objective pour une minimisation du risque sans prendre en considération le cout.	$ \alpha_1 - \alpha_2 $
1.	Inst-b 1-1 2000M01 2005M12	0.108850823		L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très grande $> 0.5$ est $\rho < 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.95304$ $\alpha_2 = 0.0469602$ Objective = - 0.00101885	0.90608
2.	Inst-b 1-2 2000M01 2006M03	0.108095301	0.000755522	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très grande $> 0.5$ est $\rho < 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.952787$ $\alpha_2 = 0.0472129$ Obj = - 0.00101819	0.905574

Tableau 4.8 – [Instance-b : 1-1 à 1-2]<sup>12</sup> – Couple 1 – LVMH&GÉNÉRAL

12. Instance-b : Ces sont les instances de la basse de données du CAC40

## CHAPITRE 4. LES ANTICIPATIONS DES RUPTURES DE CORRÉLATION, CORRÉLATION BREAKDOWN EN GESTION DE PORTEFEUILLE

### Commentaire des resultats : Tableau 4.8

Dans la base de données du CAC40, on remarque que entre les actifs sélectionnés qui n'existe pas de rupture de corrélation entre GÉNÉRAL et LVMH sur [Instb :1-1] et [Instb :1-2]. Et la corrélation  $\rho = 0.10$  dans les deux périodes, ce qui montre que la corrélation est stable sur cette période. Les résultats de l'instance [b 1-1] montre que  $\alpha_1$  est supérieur à  $\alpha_2$  et  $\rho$  est inférieur à 0.5, cela veut dire qu'il n'existe pas de rupture de corrélation pour le mois suivant : l'hypothèse 1 est vérifiée. Les corrélations pour les mois suivants est égale à  $\rho_{[2000M01-2006M01]} = 0, 108969798$ ,  $\rho_{[2000M01-2006M02]} = 0, 10906421$ . Nous appliquons le même procédé pour l'instance [Instb :1-2], est  $\rho$  est toujours égal à 0.10, ce qui confirme que dans [Instb :1-2], l'hypothèse est vérifiée il n'y aura pas de rupture de corrélation dans les mois suivants entre GÉNÉRAL et LVMH et les corrélation pour les trois prochaine mois sont :  $\rho_{[2000M01-2006M04]} = 0, 106647814$ ,  $\rho_{[2000M01-2006M05]} = 0, 10833473$  et  $\rho_{[2000M01-2006M06]} = 0, 107722026$ .

Instance b Couple 2 :	Nom/date Instance Base :	coefficient de corrélation ( $\rho$ )	Si $ \rho_0 - \rho_1  > 0.05$ Il existe une rupture	Si $\rho < 0.5$ , $ \alpha_1 - \alpha_2  > 0.5$ il n'existe pas une rupture pour le mois prochaine, mais si $ \alpha_1 - \alpha_2 $ est proche de zéro $\cong 0.0010$ et $\rho < 0.5$ , il est très probable qu'il aura une forte rupture pour le mois prochaine si la variance 1 est $\cong$ à la variance 2. Sinon si différences entre $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.05$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant $ \sigma_1 - \sigma_2  \cong 0.01$	Présence / non d'une rupture de corrélation le mois prochain	La valeur : $\alpha_1, \alpha_2$ , Objective pour une minimisation du risque sans prend en considération le cout.	$ \alpha_1 - \alpha_2 $
LVMH & MICHELIN	CAC40						
3.	Inst-b 2-1 2000M01 2009M03	0.472605809		L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.05$ et $\rho < 0.5$ mais proche de 0.5 ont peut conclure qu'il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.526915$ $\alpha_2 = 0.473085$ Obj = - 0.00100847	0.0538303
4.	Inst-b 2-2 2000M01 2009M06	0.515009271	0.042403462	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.05$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.552859$ $\alpha_2 = 0.447141$ Obj = - 0.00100921	0.105718
5.	Inst-b 3-1 2000M01 2010M03	0.526534582		L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.1$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.555108$ $\alpha_2 = 0.444892$ Obj = - 0.00100901	0.110217
6.	Inst-b 3-2 2000M01 2010M06	0.527448423	0.000913841	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.1$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.555305$ $\alpha_2 = 0.444695$ Obj = - 0.00110609	0.110609
7.	Inst-b 4-1 2000M01 2011M12	0.540818579		L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.05$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.557285$ $\alpha_2 = 0.442715$ Obj = 0.0010857	0.114571
8.	Inst-b 4-2 2000M01 2012M03	0.546181369	0.00536279	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.1$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.557941$ $\alpha_2 = 0.442059$ Obj = - 0.00100852	0.115883
9.	Inst-b 4-3 2000M01 2012M06	0.544646272	0.001535097	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.1$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.564088$ $\alpha_2 = 0.435912$ Obj = - 0.00100847	0.128176
10.	Inst-b 4-4 2000M01 2012M09	0.534250292	0.01039598	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.1$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.562069$ $\alpha_2 = 0.437931$ Obj = - 0.00100841	0.124138

Tableau 4.9 – [Instance-b : 2-1 à 4-4] – Couple 2 – LVMH&MICHELIN

Pour [Inst-b : 2-2 à Inst-b : 4-4], la corrélation  $\rho$  est supérieur où égal à 0.5 et la différence entre  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  est petite, donc nous pouvons dire que l'hypothèse 3 est vérifiée. Le modèle anticiper la présence ou non d'une rupture de corrélation dans toutes les instances teste sur la base CAC40, avec un intervalle de temps de trois mois entre deux instances teste. Nous remarquons toujours que à chaque fois que les hypothèses sont vérifiées, la variance de l'actif 1 est à peu près égale à la variance de l'actif 2.

### 4.1.4.4 Vérification des résultats du modèle

#### Commentaire des résultats pour toutes les instances teste, dans deux secteurs Chimie&santé et CAC40

Les résultats du modèle montrent que lorsque on minimise le Ratio Sharpe, on peut en retenir quelque hypothèses comme une synthèse après plusieurs simulations entre des différentes classes d'actifs de deux secteurs.

Première hypothèses 1 si  $\rho$  est inférieur ou égal à 0.5 et  $|\alpha_1 - \alpha_2| \geq 0.05$  c'est à dire qu'il y a une grande différence entre proportion d'actif 1 et proportion d'actifs 2. Nous pouvons anticiper qu'il n'existe pas de rupture pour le mois suivant le cas de [Inst1-2] et [Inst1-3], dans le tableau (4.1).

La deuxième hypothèse si  $|\alpha_1 - \alpha_2| \simeq 0.010$  et  $\rho$  inférieur à 0.5, il est très probable qu'il aura une forte rupture de corrélation le cas de [Inst1-8] dans le tableau (4.1).

Enfin la troisième hypothèse, si  $|\alpha_1 - \alpha_2| \simeq 0.01$  et  $\rho$  est supérieur à 0.5 il n'existe pas de rupture de corrélation pour le mois suivant, la quatrième hypothèse si  $\rho$  est supérieur à 0.5 et  $|\alpha_1 - \alpha_2| \simeq 0.3$  il est très probable qu'il y aura une forte rupture de corrélation pour le mois suivant.

La conclusion à retenir et pour que les hypothèses soit vérifiée (c'est à dire que le modèle prévoir l'existence ou non de rupture de corrélation), il faut que la volatilité à la date t, reste constante où varie très légèrement par rapport à la date t+1, exemple : Si à la date t entre [01-11-2010 à 31-01-2011] la volatilité est de 0.0001 et dans la date t+1 entre [01-11-2010 à 28-02-2011] la volatilité est de 0.0002.

Et que la variance de l'actif 1, doit être presque égale à la variance de l'actif 2. D'après ces hypothèses ont peut dire que le modèle peut anticiper la corrélation Breakdown. Cela n'est vérifié que si la variance de l'actif 1 est très proche de la variance de l'actifs 2. Nous avons teste sur plusieurs instance à chaque moment nous anticipons un changement de corrélation dans le temps et nous pouvons prévoir l'existence ou non d'une rupture de corrélation les hypothèses sont vérifiées.

On a remarqué aussi que chaque fois le modèle anticipe la corrélation, la variance de deux actifs sont très proches, c'est pour cette raison que nous allons retenir ces l'hypothèses, même si pour la valeur de la coefficient de corrélation élevé ou faible, (si 'hypothèse est vérifiée le variance d'actifs 1 et très proche à la variance de l'actif 2). De plus, on a testé le même modèle avec d' autres couples des actifs (voir l'annexe). On a trouvé que si les variances ne sont pas proches nous ne pouvons pas conclure sur l'existence ou non d'une rupture de corrélation, mais nous pouvons diversifier le portefeuille. Pour les testes de la base de CAC40, les hypothèses sont vérifiés presque sur tout les instances tester pour un intervalle de temps entre chaque instance de trois mois.

Après vérification le modèle peut anticiper la corrélation Breakdown si et seulement-si les hypothèses cités ci-dessus sont vérifiées.

## CHAPITRE 4. LES ANTICIPATIONS DES RUPTURES DE CORRÉLATION, CORRÉLATION BREAKDOWN EN GESTION DE PORTEFEUILLE

---

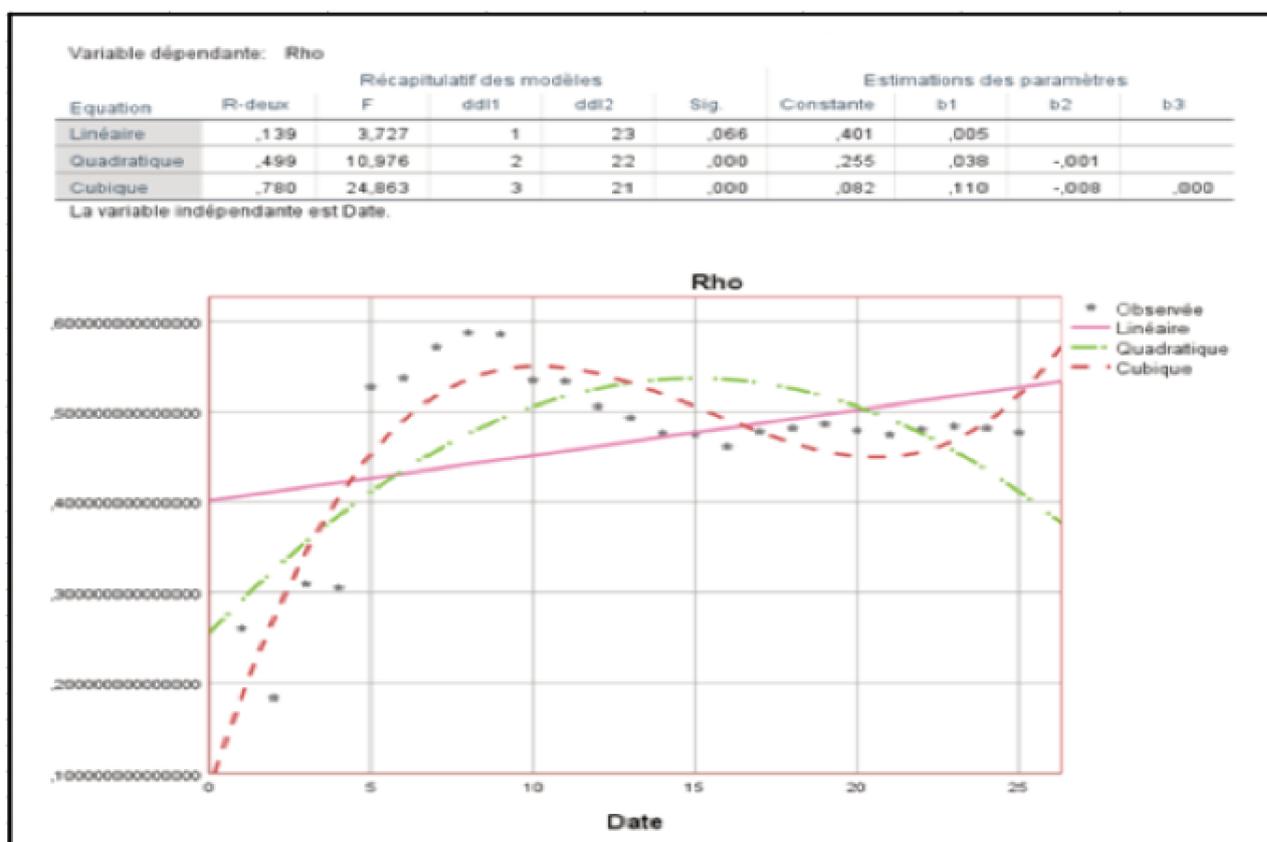
### Méthode Nuage de points

On a appliqué la méthode du nuage de points, par le biais du logiciel Spss, pour le couple NVS&PFIZER, pour estimer la corrélation entre les actifs pour les prochains mois. Afin de vérifier que si on maximiser le Ratio Sharpe peut anticiper la rupture de corrélation, dans le cas où les variances de deux actifs sont très proches. On peut confirmer que le modèle anticipe une rupture de corrélation si les hypothèses fixées sont vérifiées. On va comparer les résultats du modèle avec l'estimation de la méthode de nuage de points qui possède une régression  $R^2$  qui égale à 78%. La méthode du nuage de points n'est pas toujours fiable car la régression dépend de la valeur du  $R^2$  qui doit être proche de 1 pour avoir une estimation proche de la valeur réelle.

Estimation de paramètre et l'équation de la droite de régression méthode du nuage de points.  
La date  $t_1 = [\text{Inst1-1}]$ .

#### 4.1. PEUT-ON ANTICIPER UNE RUPTURE DE CORRÉLATION ?

Récapitulatif du modèle et estimation de paramètres :

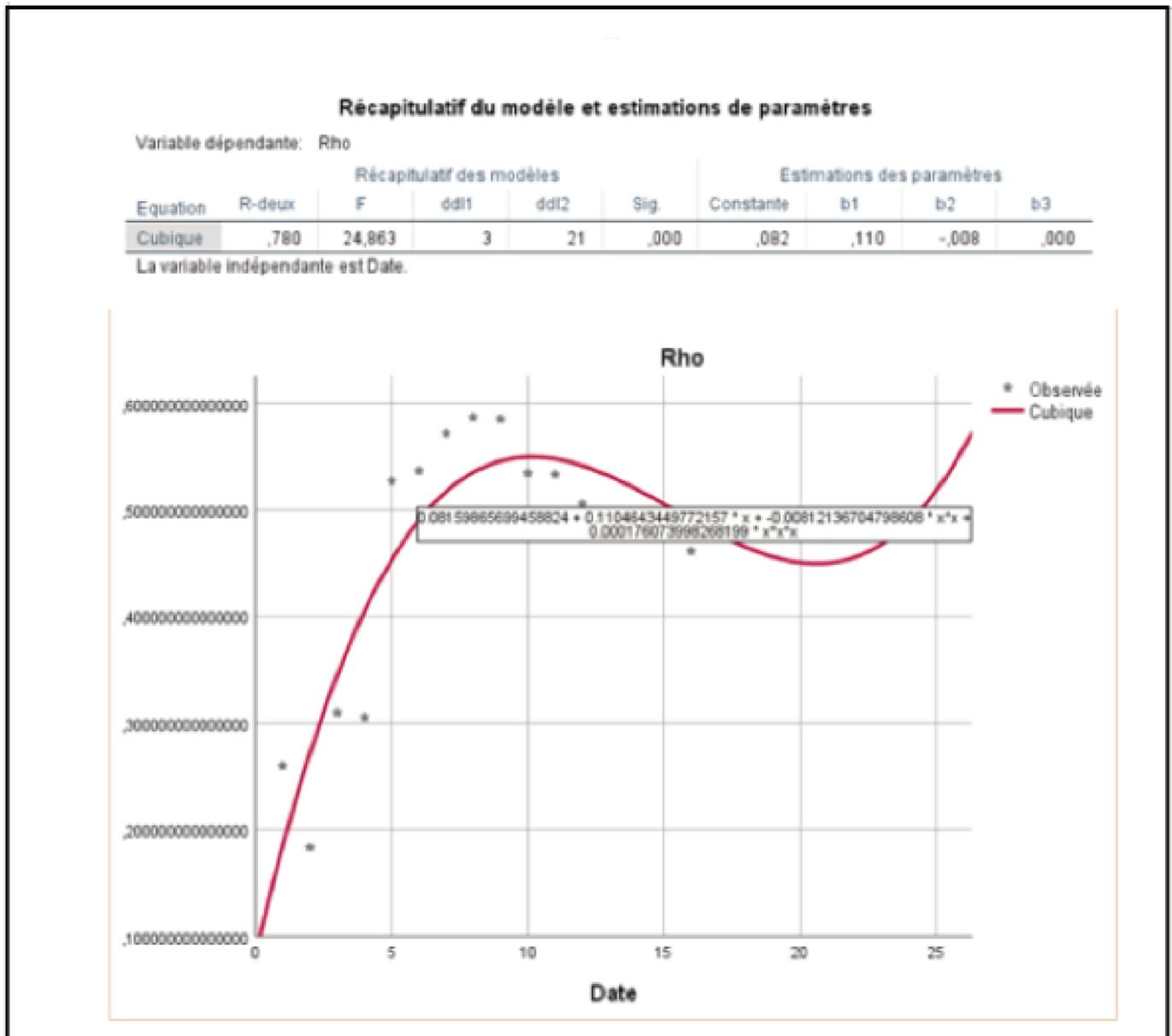


Graphique 4.1 – Linéaire – Quadratique – Cubique

Le modèle cubique nous fournit un  $R^2$  élevé avec 78% de variabilité expliquée, alors que le modèle linéaire et quadratique fournissent des pourcentages de variabilité assez faibles. Donc on retient le modèle cubique.

## CHAPITRE 4. LES ANTICIPATIONS DES RUPTURES DE CORRÉLATION, CORRÉLATION BREAKDOWN EN GESTION DE PORTEFEUILLE

### Récapitulatif du modèle cubique



Graphique 4.2 – Cubique

$$\hat{R}_t = 0,08159865699458824 + 0,1104643449772157 \times t + -0,00812136704798608 \times t^2 + 0,000176073998268199 \times t^3$$

Après la vérification des résultats de l'estimation de la corrélation. Tout en comparant avec la méthode du nuage de points. On remarque que le modèle de maximisation de Ratio Sharpe peut anticiper la corrélation Breakdown, si les variances de deux actifs sont proches. C'est qui

## 4.1. PEUT-ON ANTICIPER UNE RUPTURE DE CORRÉLATION ?

a été valider d'après les résultats de la méthode du nuage de points en retenant l'estimation de paramètre de l'équation cubique qui nous donne la valeur estimée avec 78% de variabilité expliquée qui est très proches de la valeur réelle du coefficient de corrélation. Nous présentons les résultats de la valeur de la corrélation estimée avec la méthode du nuages des points. Nous comparons ces résultats avec les résultats du modèle de maximisation de Ratio Sharpe qui prévoir existence ou non d'une rupture de corrélation pour chaque instance donne.

### L'estimation de la méthode nuage du points, entre [NVS-PFIZER]

t	Date	La corrélation
1	01/11/2010-30/12/2010	0,259973017
2	01/11/2010-31/01/2011	0,183491973
3	01/11/2010-30/06/2011	0,309558392
4	01/11/2010-29/07/2011	0,305115545
5	01/11/2010-31/08/2011	0,527456963
6	01/11/2010-30/09/2011	0,537197301
7	01/11/2010-31/10/2011	0,57156668
8	01/11/2010-30/11/2011	0,547142209
9	01/11/2010-31/12/2011	0,5854079
10	01/11/2010-29/06/2012	0,534842664
11	01/11/2010-28/12/2012	0,533779609
12	01/11/2010-29/06/2013	0,505561666
13	01/11/2010-31/12/2013	0,49291936
14	01/11/2010-30/06/2014	0,476073047
15	01/11/2010-31/12/2014	0,47502382
16	01/11/2010-30/06/2015	0,461559357
17	01/11/2010-30/12/2015	0,47772377
18	01/11/2010-30/06/2016	0,481753652
19	01/11/2010-30/12/2016	0,486200802
20	01/11/2010-30/06/2017	0,479026129
21	01/11/2010-29/12/2017	0,474281438
22	01/11/2010-29/06/2018	0,480308772
23	01/11/2010-31/12/2018	0,483728528
24	01/11/2010-28/06/2019	0,481694943
25	01/11/2010-28/10/2019	0,476754133

$\hat{R}_t = 0,08159865699458824 + 0,1104643449772157 \times t + -0,00812136704798608 \times t^2 + 0,000176073998268199 \times t^3$ $\hat{R}_t = 0,184117709$
$\hat{R}_t = 0,08159865699458824 + 0,1104643449772157 \times 2 + -0,00812136704798608 \times 2^2 + 0,000176073998268199 \times 2^3$ $\hat{R}_t = 0,271450471$
$\hat{R}_t = 0,08159865699458824 + 0,1104643449772157 \times 8 + -0,00812136704798608 \times 8^2 + 0,000176073998268199 \times 8^3$ $\hat{R}_t = 0,535695813$
$\hat{R}_t = 0,08159865699458824 + 0,1104643449772157 \times 10 + -0,00812136704798608 \times 10^2 + 0,000176073998268199 \times 10^3$ $\hat{R}_t = 0,5501794$
$\hat{R}_t = 0,08159865699458824 + 0,1104643449772157 \times 13 + -0,00812136704798608 \times 13^2 + 0,000176073998268199 \times 13^3$ $\hat{R}_t = 0,531958685$
$\hat{R}_t = 0,08159865699458824 + 0,1104643449772157 \times 25 + -0,00812136704798608 \times 25^2 + 0,000176073998268199 \times 25^3$ $\hat{R}_t = 0,518509099$
$\hat{R}_t = 0,08159865699458824 + 0,1104643449772157 \times 26 + -0,00812136704798608 \times 26^2 + 0,000176073998268199 \times 26^3$ $\hat{R}_t = 0,558304096$

t=1 oui α1= 0.35038 α2= 0.649762	t=2 non α1= 0.830024 α2= 0.169976	t=8 non α1= 0.526687 α2= 0.473313
t=10 non α1= 0.494821 α2= 0.505179	t=13 non α1= 0.5117036 α2= 0.482964	t=25 non α1= 0.517036 α2= 0.482052

t=26 $\hat{R}_t = 0,558304096$
-----------------------------------

Tableau 4.10 – Résultats de l'estimation de la méthode du nuage de points

Nous allons utiliser cette méthode pour prévoir ou anticiper la valeur de  $t+1$  où  $t = 1$  est l'instance [Inst1-1]). Les résultats du modèle montre qu'il existe une rupture de corrélation, de même pour l'estimation de la méthode du nuage de points, montre que la valeur de la corrélation est égale à (0.184) c'est qui très proche de la valeur réelle de la corrélation (0.183). Ainsi que pour  $t = 2$ , le modèle anticipe qu'il n'existe pas une rupture de corrélation à cette date suivante l'instance [Inst1-3]), l'hypothèse 1 est vérifiée.

L'estimation de cette méthode, nous donne la valeur de la corrélation  $\rho$  à  $t+1 = (0.27)$ , celle-ci est très proches de la valeur réelle de la corrélation (0.30).

Tandis que, pour  $t = 8, t = 10, t = 13$  et  $t = 25$ , le modèle anticipe qu'il n'existe pas de rupture de corrélation sur ces périodes donc l'hypothèse 3 est vérifiée. De plus, pour la valeur estimée par la régression du modèle cubique admet l'absence de rupture, c'est à dire que la valeur de la corrélation est stable ou la différence entre  $\rho_0^{13}$  et  $\rho_1^{14}$  est inférieure ou égale à 0.05, il n'existe

13. La valeur de la corrélation à la date t

14. La valeur de la corrélation à la date t+1

## CHAPITRE 4. LES ANTICIPATIONS DES RUPTURES DE CORRÉLATION, CORRÉLATION BREAKDOWN EN GESTION DE PORTEFEUILLE

---

pas des énorme variations de la corrélation. Voir les valeurs de  $\rho$  en  $t = 8, t = 10, t = 13$  et  $t = 25$  dans tableau (4.10) en dessus.

## 4.2 L'effet de la rupture de corrélation dans un modèle de gestion de portefeuille

Nous avons d'abord résolu le problème des optimisations qui minimisent le risque du ratio de Sharpe, en modélisant la diversification du portefeuille qui minimise le risque pour toute les couples. Tous les indicateurs de mesure du risque de marché sont basés sur le calcul des corrélations entre les actifs. Les résultats montrent que la théorie du portefeuille et la diversification sont très efficaces.

### 4.2.1 La rentabilité de la base de données chimie et santé – Couple 1 : [NVS-PFIZER] – Portefeuille 1

Portefeuille entre 01/11/2010 à 30/12/2011, [NVS&PFIZER]				
Portefeuille 1 : Entre [01/11/2010 à 29/07/2011] Période stable				
alpha1	alpha2	alpha 1,2, le choix du modèle		
49,64%	50,36%			
Actif	E(R <sub>i</sub> )	$\sigma_i$	$\sigma_i^2$	$\rho_{ij}$
A	0,73%	1,1562%	0,0134%	0,3051
B	0,06%	1,1489%	0,0132%	
Rt	0,3945%			
$\sigma_p^2$	0,0087%			
$\sigma_p$	0,9307%			
Portefeuille 2 : Entre [01/08/2011 à 30/12/2011] Période de rupture				
alpha1	alpha1	alpha 1,2, le choix du modèle		
53,97%	46,03%			
Actif	E(R <sub>i</sub> )	$\sigma_i$	$\sigma_i^2$	$\rho_{ij}$
A	-0,05%	1,7808%	0,0317%	0,7789
B	0,13%	1,9281%	0,0372%	
Rt	0,0332%			
$\sigma_p^2$	0,0304%			
$\sigma_p$	1,7436%			
La rentabilité et le risque du portefeuille				
Rt	$\sigma_p$			
0,4277%	2,6743%			

Portefeuille entre 01/11/2010 à 30/12/2011				
alpha1	alpha2	alpha 1,2, le choix du modèle		
40,00%	60,00%			
Actif	E(R <sub>i</sub> )	$\sigma_i$	$\sigma_i^2$	$\rho_{ij}$
A	0,01%	1,4127%	0,0200%	0,59
B	0,09%	1,4766%	0,0218%	
La rentabilité et le risque du portefeuille				
Rt	0,0532%			
$\sigma_p^2$	0,0169%			
$\sigma_p$	1,3002%			

Portefeuille entre 01/11/2010 à 30/12/2011				
alpha1	alpha2	alpha 1,2, le choix du modèle [Inst1-13]		
52%	48%			
Actif	E(R <sub>i</sub> )	$\sigma_i$	$\sigma_i^2$	$\rho_{ij}$
A	0,01%	1,4142%	0,0200%	0,5931
B	0,09%	1,4765%	0,0218%	
La rentabilité et le risque du portefeuille				
Rt	0,0484%			
$\sigma_p^2$	0,0104%			
$\sigma_p$	1,0213%			

Tableau 4.11 – La rentabilité et le risque du portefeuille pour le couple 1 : NVS&PFIZER

Dans tableau (4.11) on a retenu trois portefeuilles sur le même intervalle de temps, entre 01/11/2010 à 30/12/2011 pour le couple [NVS&PFIZER]. Dans un premier temps nous avons opté de sous diviser cette période en deux sous périodes, puisque entre le mois juillet et le mois Août, il existe une forte rupture de corrélation, le coefficient de corrélation passe de 0.30 à 0.52. Nous utilisons le choix des proportions pour le deux sous périodes. De ce fait nous allons calculer la rentabilité et le risque dans cette période avec les proportions du modèle (portefeuille 1-1). Dans un second temps nous choisirons un portefeuille 1-2 de deux valeurs de propositions par hasard par la suite déterminer la rentabilité et le risque du portefeuille. Et enfin le dernière portefeuille 1-3, on ne le divisera pas la période en sous deux périodes, alors on choisira le choix

## CHAPITRE 4. LES ANTICIPATIONS DES RUPTURES DE CORRÉLATION, CORRÉLATION BREAKDOWN EN GESTION DE PORTEFEUILLE

---

du modèle pour cette intervalle de temps qui cumule les deux sous périodes. Puis nous calculons la rentabilité et le risque de cette portefeuille.

Ensuite nous comparerons, les trois rentabilités des ses trois portefeuilles du tableau (4.11) pour voir l'effet de la corrélation Breakdown dans un portefeuille qui minimise le risque : Est ce que le choix des proportions du modèle donne une rentabilité et un risque plus élevée?. On remarque pour la première sous partie (portefeuille 1-1) entre [01/11/2010 à 29/07/2011], nous avons un risque de 0.93% qui est faible et une rentabilité de 0.394%, ce qui veut dire que la rentabilité pour cette période est faible, mais le risque du portefeuille est moins que le risque pour chaque actif car on avait  $\sigma_1 = 1.15\%$  et  $\sigma_2 = 1.14\%$ , cela signifie une diversification du portefeuille dans cette sous période avec un risque du portefeuille qui est égal à 0.930%. Pour la deuxième sous période entre [01/08/2011 à 30/12/2011], on a une rentabilité faible de 0.03% et un risque plus élevé que celui dans la premier sous partie de l'intervalle. On voit aussi que le risque des deux actifs sont très élevés puisque c'est une période de rupture de corrélation, et la corrélation qui été 0.30% devient 0.70%, ainsi que le risque de la deuxième sous période est très élevé par rapport à celle de la première sous période ou il n'existe pas de rupture de corrélation.

Dans le deuxième (portefeuille 1-2) entre [01/11/2010 à 30/12/2011], où le choix de la proportion ne dépend pas du modèle, on trouve une rentabilité très faible de 0.05% par rapport au (portefeuille 1-1) et un risque de 1.30%. En déduit que le coefficient de corrélation à diminué par rapport à la deuxième sous période entre [01/08/2011 à 30/12/2011]. Cela montre que la corrélation peut diminuer même après une forte rupture sans supprimer cette rupture de corrélation.

En comparant les resultats, on voit qu'avec le choix des proportions du modèle, on a une rentabilité de (0.4277%) - coût de transaction et le risque est de (2.67%) par rapport à la deuxième (portefeuille 1-2), la rentabilité est de (0.0532%) et le risque est de (1.30%). On peut conclure que le modèle nous a donné un (portefeuille 1-1) avec une rentabilité plus élevée (0.4277%) que celui du deuxième (portefeuille 1-2) qui égal à (0.043%), mais avec un risque de (2.67%) qui est le double du risque du deuxième (portefeuilles 1-2) de (1.30%). On à aussi utilisé pour le troisième (portefeuille 1-3), les proportions du modèle qui sont,  $\alpha_1 = 52\%$  et  $\alpha_2 = 48\%$ , pour la période [01/11/2010 à 30/12/2011], même si on connait que entre (juillet et Août), il aurait une forte rupture. On voit bien que cette période est la même période de l'instance [inst 1-13], on trouver une rentabilité de 0.048% ce qui est faible mais avec un risque qui est aussi très faible 1.02% par rapport aux deux première portefeuilles (portefeuille 1-1 et portefeuille 1-2).

## 4.2. L'EFFET DE LA RUPTURE DE CORRÉLATION DANS UN MODÈLE DE GESTION DE PORTEFEUILLE

### 4.2.2 La rentabilité de la base de données chimie et santé – Couple 2 : [SANOFI-MERCK] – Portefeuille 2

Portefeuille entre 01/11/2010 à 30/12/2011, [SANOFI&MERCK]				
Portefeuille 1 : Entre [01/11/2010 à 31/01/2011] Période de rupture				
alpha1	alpha2	alpha 1,2, le choix du modèle		
35,73%	64,27%			
	E(R_i)	$\sigma_i$	$\sigma_i^2$	$\rho_{ij}$
A	-0,02%	1,6409%	0,0269%	0,2325
B	-0,14%	1,2235%	0,0150%	
Rt	-0,0960%			
$\sigma_p^2$	0,0118%			
$\sigma_p$	1,0846%			
Portefeuille 2 : Entre [01/02/2011 à 30/12/2011] Période de rupture				
alpha1	alpha1	alpha 1,2, le choix du modèle		
30,96%	69,04%			
	E(R_i)	$\sigma_i$	$\sigma_i^2$	$\rho_{ij}$
A	0,05%	2,0937%	0,0438%	0,7719
B	0,07%	1,4021%	0,0197%	
Rt	0,0601%			
$\sigma_p^2$	0,0233%			
$\sigma_p$	1,5251%			
La rentabilité et le risque du portefeuille				
Rt	$\sigma_p$			
-0,0356%	2,6097%			

Portefeuille entre 01/11/2010 à 30/12/2011				
alpha1	alpha2	alpha 1,2, le choix du modèle		
60,00%	40,00%			
	E(R_i)	$\sigma_i$	$\sigma_i^2$	$\rho_{ij}$
A	0,03%	2,0037%	0,0401%	0,69
B	0,02%	1,3667%	0,0187%	
La rentabilité et le risque du portefeuille				
Rt	$\sigma_p$			
0,0292%	1,6273%			
Portefeuille entre 01/11/2010 à 30/12/2011				
alpha1	alpha2	alpha 1,2, le choix du modèle [Inst2-11]		
31,75%	68,25%			
	E(R_i)	$\sigma_i$	$\sigma_i^2$	$\rho_{ij}$
A	0,03%	2,0037%	0,0401%	0,6877
B	0,02%	1,3667%	0,0187%	
La rentabilité et le risque du portefeuille				
Rt	$\sigma_p$			
0,0259%	1,4460%			

Tableau 4.12 – La rentabilité et le risque du portefeuille pour le couple 2 : SANOFI&MERCK – Période 1

Dans le tableau (4.12), on a utilisé le même scénario que celui du tableau (4.11) précédent, on a aussi divisé la période [01/11/2010 à 31/12/2011], en deux sous période [01/11/2010 à 31/01/2011] et [01/02/2011 à 30/12/2011], avec chacune une proportion donnée par le modèle pour la première sous période  $\alpha_1 = 35,73$  et  $\alpha_2 = 64,27$ . Puis pour la deuxième sous période  $\alpha_1 = 30,69$  et  $\alpha_2 = 69,04$ , ces proportions sont données par le modèle qui minimiser le risque pour chaque période donner.

Dans cette intervalle de temps entre [01/11/2010 à 30/12/2011], il existe une forte rupture entre le mois 12/2010 et le mois 01/2011 (la corrélation passe de 0.67% à 0.23%) .

On voit que dans la première sous période (portefeuille 2-1) ente [01/11/2010 à 31/01/2011], la rentabilité du (portefeuille 2-1) est de - 0.096% et le risque est de 1.0846%, d'où (le portefeuille 2-1) est diversifié car le risque à diminué par rapport aux risques de chaque actif. Dans la second sous période (portefeuille 2-2), entre [01/02/2011-30/12/2011], ou la corrélation a changé presque chaque mois, c'est une période ou la rupture de corrélation est très forte. On voit que le  $\sigma_1 = 2.09\%$  est très élevée par rapport à  $\sigma_2 = 1.40\%$  et le risque du portefeuille est de 1.52%, cela montre une diversification du risque du portefeuille avec une rentabilité très faible de 0.06%. Par conséquence le portefeuille global à une rentabilité très faible (-0.035%) et un risque aussi très élevée (2.609%). Dans un second temps on test le modèle entre la période [01/11/2010 à 31/12/2010]. De ce fait dans cette l'intervalle la corrélation est stable mais pour le mois janvier 2011, il y aura une forte rupture, nous testerons ainsi la deuxième périodes entre [03/01/2011 à 30/12/2010] et [03/01/2011 à 30/12/2011].

## CHAPITRE 4. LES ANTICIPATIONS DES RUPTURES DE CORRÉLATION, CORRÉLATION BREAKDOWN EN GESTION DE PORTEFEUILLE

Portefeuille entre 01/11/2010 à 30/12/2011, [SANOFI&MERCK]				
Portefeuille 1: entre [01/11/2010 à 30/12/2010]				
alpha1	alpha2			
32,32%	67,68%			
	E(R <sub>i</sub> )	$\sigma_i$	$\sigma_i^2$	$\rho_{ij}$
A	-0,19%	1,4025%	0,0197%	0,6719
B	-0,02%	0,9691%	0,0094%	
La rentabilité et le risque du portefeuille 1				
Rt	-0,07%			
$\sigma_p^2$	0,010%			
$\sigma_p$	1,017%			
Portefeuille 2 : [entre 03/01/2011 à 30/12/2011]				
alpha1	alpha2			
30,75%	69,25%			
	E(R <sub>i</sub> )	$\sigma_i$	$\sigma_i^2$	$\rho_{ij}$
A	0,07%	2,0877%	0,0436%	0,6892
B	0,03%	1,4241%	0,0203%	
La rentabilité et le risque du portefeuille 2				
Rt	0,0417%			
$\sigma_p^2$	0,0226%			
$\sigma_p$	1,5024%			
La rentabilité et le risque du portefeuille 1 et 2				
Rt	$\sigma_p$			
-0,0283%	2,5194%			

Tableau 4.13 – La rentabilité et le risque du portefeuille pour le couple 2 : SANOFI&MERCK – Période 2

Dans le tableau (4.13), on observe que la rentabilité dans cette période est très faible ainsi que le risque est très élevé. On remarque que dans les deux sous périodes (les deux portefeuilles de la tableau (4.13)), le coefficient de corrélation est très élevé même si dans la première sous période la corrélation est stable. On peut dire que dans ce couple 2 [Sanofi- Merck] entre [03/01/2011 à 30/12/2011], est une période de corrélation Breakdown car dans presque tous les mois la corrélation n'est pas stable donc il y aurait un fort changement de la stabilité de la corrélation. La rentabilité globale du portefeuille dans la période 2 couple 2 est de -0.0283% (moins le coût de transaction) qui est supérieure à la rentabilité globale du portefeuille entre [01/11/2010 à 30/12/2011] du couple [Sanofi- Merck] sous période 1 en dessus le tableau (4.8), qui est égal à -0.0356%. De même le risque global de la période 2 tableau (4.9) qui est égal à 2.5194% et aussi inférieur à 2.609% du risque global de deux sous période du portefeuille entre [01/11/2011 à 30/12/2011] tableau (4.12).

On revient dans le portefeuille [01/11/2011 à 30/12/2011] dans le couple 2 période 1 le tableau (4.12), avec une seule proportion pour toute la période qui ne dépend pas du résultat du modèle  $\alpha_1 = 60$  et  $\alpha_2 = 40$ . La rentabilité est élevée par rapport à celle du premier portefeuille qui est divisé en deux sous périodes dans le même couple 2 et même période 1. Le risque est aussi inférieur à celui du portefeuille en sous période.

Nous comparerons cette portefeuille entre [01/11/2011 à 30/12/2011] tableau (4.12), avec le choix de la proportion qui ne dépend pas du modèle avec le portefeuille dans la même période [01/11/2011 à 30/12/2011], mais le choix est donné par le modèle du tableau (4.12). Le premier portefeuille on a le choix de deux proportions  $\alpha_1 = 60$  et  $\alpha_2 = 40$ . Et le deuxième portefeuille on a  $\alpha_1 = 31,75$  et  $\alpha_2 = 68,25\%$  le choix est donné par le modèle.

Le risque du deuxième portefeuille qui suit les données du modèle est inférieur à celui du premier portefeuille ( $1.4460 < 1.6273$ ), par contre la rentabilité est presque égale dans les deux cas.

## 4.2. L'EFFET DE LA RUPTURE DE CORRÉLATION DANS UN MODÈLE DE GESTION DE PORTEFEUILLE

On constate que dans le couple 2 entre [Sanofi- Merck], le portefeuille [01/11/2011 à 30/12/2011] qui prend une proportion avec le choix du modèle dans le tableau (4.12), est le portefeuille qui à le moins de risque.

### 4.2.3 La rentabilité base de données CAC40 – Couple 3 : [SANOFI-MERCK] et Couple 4 [LVMH-MICHELIN] – Portefeuille 3

Portefeuille avec une faible corrélation 0.10 dans une période stable				
Entre [2000M01-2006M03], LVMH-GENERALE, Couple 3				
alpha1	alpha2			
95,28%	4,72%			
	E(R <sub>i</sub> )	$\sigma_i$	$\sigma_i^2$	$\rho_{ij}$
A	0,01%	0,4369%	0,0019%	0,1081
B	0,38%	1,9651%	0,0386%	
La rentabilité et le risque du portefeuille				
Rt	0,0313%			
$\sigma_p^2$	0,0019%			
$\sigma_p$	0,4362%			
Portefeuille avec une forte corrélation 0.53 dans une période stable				
Entre [2000M01-2010M03], LVMH-MICHELIN, Couple 4				
alpha1	alpha2			
55,51%	44,49%			
	E(R <sub>i</sub> )	$\sigma_i$	$\sigma_i^2$	$\rho_{ij}$
A	0,02%	0,4029%	0,0016%	0,5265
B	0,04%	0,4500%	0,0020%	
La rentabilité et le risque du portefeuille				
Rt	0,0289%			
$\sigma_p^2$	0,0014%			
$\sigma_p$	0,3705%			

Tableau 4.14 – La rentabilité et le risque du portefeuille 3 pour le Couple 3 : LVMH&GENERALE et Couple 4 : LVMH& MICHELIN

On peut conclure d'après les résultats du tableau (4.14) que la corrélation Breakdowns a un effet dans un modèle de gestion de portefeuille.

On voit dans ce tableau deux portefeuilles avec deux corrélations différentes : La première à une corrélation très faible (0.10%) et la deuxième une forte corrélation (0.52%). De plus dans les deux cas la variation de la corrélation est stable, il ne s'agit pas d'une période de stress<sup>15</sup>. Dans les deux cas, la variance est presque nulle et le risque est très faible par rapport aux portefeuilles dans les tableaux (4.12) et (4.13) où il existe plusieurs corrélations Breakdown. La rentabilité est toujours faible, mais le risque du portefeuille 3 tableau (4.14) est très faible, c'est qui veut dire que les corrélations Breakdowns on a effet dans un modèle de gestion de portefeuille.

15. donc les deux périodes sont des périodes stabilité de corrélation

### 4.3 Conclusion

Le problème mono-objectif de ratio Sharpe nous permet d'anticiper une rupture de corrélation pour le mois suivant en minimisant le risque. Mais cette hypothèse n'est pas toujours vraie. Elle est vérifiée que si la valeur absolue de la variance des deux actifs est très proche de zéro. Avec la méthode du nuage de points on remarque que les résultats du modèle sont très proches de la valeur réelle du coefficient de corrélation. Nous pouvons conclure que le modèle prévoit l'existence ou non de la rupture de corrélation si les hypothèses sont vérifiées. Nous avons essayé d'égaliser les deux variances pour un couple, (la variance 1 est égale à 1 et la variance 2 est égale à 1), pour voir comment le modèle va réagir de ce changement, nous déduisons que à chaque fois la valeur de deux variances est égale à 1, le choix du modèle de la proportion est de 0.5 pour l'actif 1 et 0.5 pour l'actif 2 ( $\alpha_1=0.5$  et  $\alpha_2=0.5$ ).

Mais par ailleurs nous pouvons pas observer le changement de la corrélation, les choix de deux proportions sont toujours égales à 0.5. C'est qui paraît très logique avec un portefeuille qui minimise le risque.

Le modèle nous donne à chaque fois le bon choix de la proportion en minimisant le risque, avec pour objectif la diversification du portefeuille. Nous remarquons, par rapport aux résultats du modèle que si la valeur du coefficient de corrélation est supérieure à 0.5, il est très rare d'observer une forte augmentation ou une forte diminution de la corrélation dans les périodes suivantes.

## 4.4 Impact des anticipations des investisseurs d'une rupture de corrélations dans le portefeuille optimal

Nous s'intéressons à l'impact des anticipations de ruptures de corrélations dans le portefeuille efficient. Le but du problème consiste à maximiser la fonction de ratio Sharpe ( $Sp$ ) du modèle de [143], en utilisant une méthode de résolution de Newton avec le système de conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker KKT (1951) associé à ce problème.

Nous considérons le problème de la résolution des programmes fractionnaire. Dans ces programmes, la fonction objectif renvoie à un problème d'optimisation quadratique convexe sous contrainte linéaire qui se trouve dans plusieurs domaines de la recherche opérationnelle en finance, l'économie, microéconomie et en statistique pour l'estimation du maximum de vraisemblance d'une distribution pour la recherche de stratégies dans le cadre de la théorie des jeux, et qui permettent de donner des solutions optimales très efficaces.

Nous proposons un modèle prenant en compte les différents aspects de la problématique. Nous proposons, dans un premier temps, une écriture matricielle de l'objectif et une méthode de résolution innovante, puis nous présentons des résultats de simulations dans un second temps.

Nous nous intéressons aux corrélations des actifs financiers. Plus particulièrement, nous cherchons à mettre en évidence les preuves d'une augmentation de la corrélation des rendements des actions en période de crise financière. Pour ce faire, nous procédons à l'étude de l'influence des changements qui se produisent dans les marchés sur la dynamique de l'alternative des risques des prix des actifs.

Cette problématique a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs. D'abord, Falbo.P and Grassi(2011) [77] ont cherché à faire avancer l'analyse du modèle proposé. Les résultats ont montré que le modèle est cohérent en ce qui concerne l'hypothèse selon laquelle des agents rationnels, mettent à jour les estimations de la variance-covariance en fonction de la demande excédentaire des actifs.

Nous utilisons le ratio Sharpe et nous modifions l'écriture de ce modèle en une fonction mono-objectif et en minimisant le risque nous pouvons voir l'impact d'une rupture de corrélation entre les rendements des actifs.

Enfin nous avons appliqué cette méthode sur l'optimisation de portefeuille optimal dans deux périodes (période normale et période de rupture).

## 4.5 Modèle mathématique

### 4.5.1 Le concept de choix de portefeuille optimal :

Notre fonction est donc la maximisation du Ratio Sharpe qui est une fonction quadratique : L'optimisation quadratique présente un cas particulier de l'optimisation non linéaire. Elle traite en fait, la minimisation ou la maximisation d'une fonction objectif de type quadratique. Les contraintes peuvent être linéaires comme quadratiques. Dans ce travail, nous nous plaçons dans le cas de l'optimisation quadratique convexe.

Un programme quadratique est dit convexe s'il s'agit de la minimisation d'une fonction quadratique convexe sur un espace convexe. Les contraintes sont alors linéaires ou quadratiques convexes.

Nous minimisons les risques en période de rupture de corrélations en anticipant les changements de la corrélation entre les rentabilises et trouver une solution réalisable.

Nous proposons, dans un premier temps une écriture matricielle de l'objectif et nous exploitons la solutions puis nous présentons des résultats des simulations dans un second temps, qui à était trouver à aide du logiciel Matlab.

### 4.5.2 Données du problème

Nous considérons un portefeuilles P composé de deux actifs A et B. Le rendement de chaque actif est  $R_i$ . Notons  $\omega_i$  le poids,  $n$  est la dimension du problème c'est à dire le nombre des variables, et  $m$  est le nombre de contraintes, A est une matrice de type  $(m, n)$ .

### 4.5.3 Variables de décision

Le ratio Sharpe ( $S_p$ ) est égal a la mesure de l'écart de rentabilité d'un portefeuille en fonction du risque pris. On suppose un portefeuille de 2 actions A,B, avec  $\omega$  de A et  $(1 - \omega)$  actions de B.

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \omega_1.A + \omega_2.B \\ \text{avec : } S_p = \frac{R_p - R_f}{\frac{\sigma_p}{2}} \\ R_p = \sum_{i=1}^2 \omega_i R_i. \quad \omega \in [0, 1]. \end{array} \right. \quad (4.40)$$

### 4.5.4 L'objectif :

$$\max S_p = \frac{\sum_{i=1}^2 \omega_i R_i - R_f}{\omega^2 \sigma_1^2 + (1 - \omega)^2 \sigma_2^2 + 2\omega(1 - \omega)\sigma_1\sigma_2\rho_{1,2}} \quad (4.41)$$

### 4.5.5 Contraintes :

$$\sum_{i=1}^2 \omega_i = 1; \quad \omega \in [0, 1] \quad (4.42)$$

## 4.6 Étude de la fonction objectif

La fonction objectif est fractionnaire. On dispose de trois grandes stratégies de résolution d'un programme fractionnaire :

- La résolution directe ;
- La résolution par paramétrisation ;
- La résolution d'un programme équivalent.

Si la fonction que l'on optimise est convexe on trouve le points optimale rapide après 2 à 3 dérivations. Si elle est concave, on peut faire plusieurs dérivée pour trouver optimale. Mais aussi pour un problème de maximisation sans contrainte, si la fonction objectif est concave, alors tout optimum locale est global. Donc, il suffit de trouver un optimum.

### Convexité de la fonctions

#### Définition

La fonction  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  défini sur un sous-ensemble  $Q$  non vide de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs réelles est convexe, si le domaine  $Q$  est convexe ; pour tous  $x, y \in Q$  et chaque  $\lambda \in [0, 1]$ ,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

$$S_p = \frac{\omega R_1 + (1 - \omega)R_2 - R_f}{\omega^2 \sigma_1^2 + (1 - \omega)^2 \sigma_2^2 + 2\omega(1 - \omega).cov(R_1, R_2)} \quad (4.43)$$

Posons :

$$\omega_2 = 1 - \omega \geq 0 \quad R_1 = x_1, \quad R_2 = x_2, \quad R_f = x_3$$

On calcule le déterminant de la fonction :

$$\theta_\omega = \frac{\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 - x_3}{\omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 cov(x_1, x_2)} \implies \theta_{\omega''} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \omega_1^2} & \frac{\partial^2 \theta}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} & \frac{\partial^2 \theta}{\partial \omega_2^2} \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

$$\implies det\theta'' = \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha_1^2} \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha_2^2} \right) - \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \right)^2 \neq 0 \quad (4.45)$$

On trouve que le déterminant est différent de zéro donc la fonction objectif est convexe, d'où notre fonction objectif est convexe, donc nous pouvons appliquer la méthode de Newton sur une fonction convexe.

## CHAPITRE 4. LES ANTICIPATIONS DES RUPTURES DE CORRÉLATION, CORRÉLATION BREAKDOWN EN GESTION DE PORTEFEUILLE

### 4.6.1 La forme générale du problème

Soit  $R_p$  le rendement d'un portefeuille composé de deux actifs caractérisés par les rendements respectifs  $R_1$  et  $R_2$ . Nous posons, en outre, que chaque actif  $i$  entre une proportion  $\omega_i$  dans la composition du portefeuille  $P$  tel que :

$$\sum_{i=1}^2 \omega_i = 1 \quad (4.46)$$

Et l'espérance du portefeuille est donnée par l'expression suivants :

$$E(R_p) = E\left(\sum_{i=1}^2 \omega_i R_i\right) = \sum_{i=1}^2 \omega_i E(R_i). \quad (4.47)$$

Nous supposons que les rendements des actifs financiers ne fluctuent pas indépendamment les uns des autres, ils sont corrélés, c'est-à-dire, ont des covariances non nulles :

$$\text{cov}(R_i, R_j) \neq 0. \quad (4.48)$$

La variance est :

$$V(R_p) = \sum_{i=1}^2 \omega_i^2 V(R_i) + 2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \omega_i \omega_j \text{cov}(R_i, R_j) \quad (4.49)$$

Pour la résolution utilisant la méthode de Newton on transforme notre objectif sous forme matricielle. On a  $C_{i,j}$  la matrice des covariances :

$$C_{i,j} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \text{cov}(R_1, R_2) \\ \text{cov}(R_2, R_1) & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Nous obtenons finalement la relation du ratio Sharpe ( $S_p$ ) qui est l'objectif (4.38) sous forme matricielle (voir annexe 7.3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_p = (R^t \omega - R_f \cdot I_1)(\omega^t \Sigma \omega)^{-1} \\ \frac{\partial S_p(\omega)}{\partial \omega} = R^t (\omega^t \Sigma \omega)^{-1} + \frac{-2 \Sigma \omega}{(\omega^t \Sigma \omega)^2} (R^t \omega - R_f \cdot I_n) \\ \frac{\partial S_p(\omega)}{\partial(\omega)} = (R^t + 1) \left( \frac{-2 \Sigma \omega}{(\omega^t \Sigma \omega)^2} \right) + \frac{2 \Sigma [(R^t \omega - R_f \cdot I_n)(2 \Sigma \omega^2 - \omega^t \Sigma \omega)]}{(\omega^t \Sigma \omega)^4} \end{array} \right. \quad (4.51)$$

Nous pourrions écrire la fonction objectifs ( $S_p$ ) comme suite :

$$S_p = (R^t \omega - R_f \cdot I_1) - \beta(\omega^t \Sigma \omega) \quad (4.52)$$

Où  $\beta$  est un paramètre. Nous voyons souvent dans la littérature, que sélectionner un portefeuille revient donc à résoudre le problème de maximisation sous les contraintes de minimiser la variance et  $\sum \omega_i = 1$ .

Le problème de maximisation sous contrainte consiste à déterminer le maximum de la fonction d'objectif (4.41).

$$\max S_p = (R^t \omega - R_f \cdot I_1) - \beta(\omega^t \Sigma \omega) \quad (4.53)$$

$$Sc : A.\omega \leq b$$

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}; \quad \omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}; \quad I_1 = 1$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \rho\sigma_{1,2} \\ \rho\sigma_{1,2} & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} . [4, 2], \text{ 4 contraintes d'inégalités linéaire et 2 variables. } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

### 4.6.2 La problématique

Nous considérer le problème quadratique ( $S_p$ ) sous la forme générale :

$$(S_p) : \max\{(R^t\omega - R_f.I_1) - \beta(\omega^t\Sigma\omega)\} \tag{4.54}$$

$$Sc : \{A.\omega \leq b, \quad \omega \in [0, 1]\}$$

Les données du problème sont les suivantes :

- $A'$  = la matrice de type (m,n).
- $b \in \mathbb{R}^m$ .
- $n$  = est le nombre de variables du problème.
- $m$  = est le nombre de contraintes linéaire.
- $\Sigma$  = la matrice symétrique de la variance-covariance.
- $R^t$  = un vecteur donné de  $\mathbb{R}^n$
- $R_f$  = constante
- $\omega$  est l'inconnue du problème  $\omega \in [0, 1]^n$ , d'ou  $\sum \omega_i = 1$ .

## 4.7 Méthode de Newton pour la résolution du ratio Sharpe ( $S_p$ )

La méthode de Newton est une résolution numérique a été initié par Isaac Newton vers (1669), et elle est toujours d'actualité. La méthode de Newton pour la résolution des équations  $f(\omega) = 0$ , si le point de départ  $\omega_0$  est assez voisin (proche) de  $\omega^*$ , et si  $\nabla_f^2$  est définie positive, alors la méthode converge vers  $\omega^*$ ; ceci de façon quadratique. C'est à dire que lorsque la suite converge, elle converge de façon quadratique, que les nombres des chiffres significatifs double à chaque itération.

### Proposition 1 : Convergence quadratique de la méthode de Newton

Autrement dit, soit  $\omega^* \in \mathbb{R}$  un minimiser local non-dégénéré de la fonction régulière  $f$ , c-a-d., un point tels que  $f$  est trois fois continûment différentiable dans un voisinage de  $\omega^*$  avec  $f(\omega^*) = 0$ , et  $f''(\omega^*) > 0$ . Alors itérations de Newton convergent vers  $\omega^*$  quadratiquement, à condition que le point de départ  $\omega_o$  soit assez proche de  $\omega^*$ .

## CHAPITRE 4. LES ANTICIPATIONS DES RUPTURES DE CORRÉLATION, CORRÉLATION BREAKDOWN EN GESTION DE PORTEFEUILLE

---

### La résolution de la méthode de Newton

Est une application dérivable, pour déterminer une approximation numérique des solutions d'une équation c'est à dire soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , on na  $f(k+1) = 0$  la méthode de Newton part d'une solution approchée  $\omega$  et remplace l'équation  $f(k+1) = 0$  par l'équation approchée  $f(\omega) + (k+1)f'(\omega) = 0$  d'ou la solution est  $k+1 = \omega - \frac{f(\omega)}{f'(\omega)}$

La méthode de Newton consiste à prendre pour  $\omega_{K+1}$  la racine du développement de Taylor de premier ordre autour de  $\omega_k$  c'est à dire que, pour autant que  $f'(\omega_k) \neq 0$  et à déterminer  $\omega_{K+1}$  avec  $f(\omega_K) + f'(\omega_K)(\omega_{K+1} - \omega_K) = 0$

On na donc :

$$\omega_{K+1} = \omega_K - \frac{f(\omega_K)}{f'(\omega_K)} \quad (4.55)$$

D'abord ont doit passer par la méthode de Newton dans le cas d'un système non linéaire à  $n$  inconnues de  $n$  équation donc  $n$  dimensionnel (multidimensionnel),  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_k)$  c'est à dire trouver un zéro ou racines d'une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  qui est différentiable et satisfaisant. Si algorithme de Newton pour trouver zéro  $\omega^* = 0$  de la fonction  $\omega \in \mathbb{R}$  est itéré initial et pour tout  $K \in \mathbb{N}$ ,  $\omega_{K+1} = \omega_K$  donc si  $\omega_0$  est proche de zéro  $\omega^* = 0$ .

On peut dire aussi que, le principe de la méthode de Newton est de déterminer la tangente a la fonction d'approximation  $f$  avec une itération initial  $\omega_0$  qui est proche de zéro, d'ou le point d'intersection de la tangent avec l'abscisses de la fonction  $f(\omega) = 0$  a ce point  $\omega_1$  est l'itéré suivant, c'est à dire on approche a nouveau de la fonction par sa tangente en  $\omega_1$  pour trouver un nouveau point  $\omega_2$  (répéter jusqu'à l'arrêt) ainsi de suit jusqu'au arrive au critère d'arrêt.

Le critère d'arrêt est un point  $\varepsilon$  qu'on fixer et qui doit être proche au solution optimale, on arrête si :  $\|\omega_{K+1} - \omega_k\| \leq \varepsilon$  ou  $f(\omega_{K+1}) - f(\omega_K) \leq \varepsilon$

## 4.7. MÉTHODE DE NEWTON POUR LA RÉOLUTION DU RATIO SHARPE ( $S_P$ )

### Schéma de la méthode de Newton

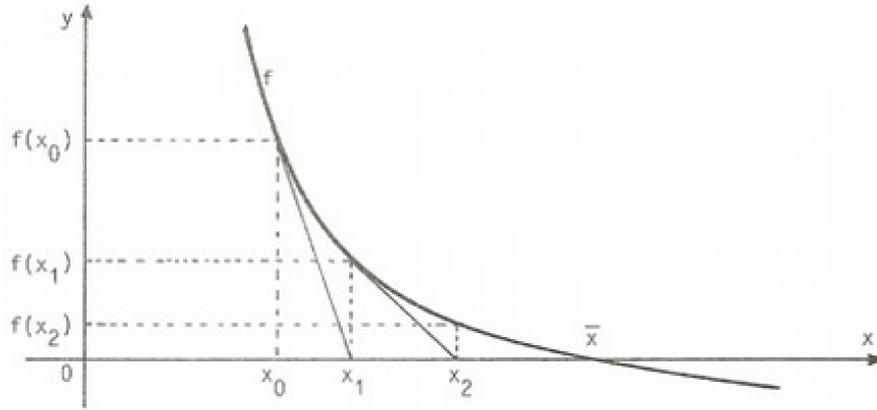


FIGURE 4.4 – Schéma de la méthode Newton  $x=\omega$

Supposons que la variable inconnue  $\omega$  est un vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , le système à résoudre est le suivant :

$$\omega_{K+1} = \omega_K - \frac{f(\omega_k)}{f'(\omega_k)} \implies f(\omega_k) + f'(\omega_k)(\omega - \omega_K) = 0 \quad (4.56)$$

ce qui exprime que  $\omega_{K+1} = f(\omega_k)$  est l'abscisse de l'interaction avec l'axe de la droite  $y = f(\omega_k) + f'(\omega_k)(\omega_{K+1} - \omega_K) = 0$ , qui est la tangente de la fonction au point d'abscisse  $\omega_k$  avec  $f'(\omega_k)$  la dérivée et la solution de l'équation est  $\omega_{K+1}$ . En multipliant par l'inverse de la matrice Jacobienne :

$$f'(\omega_k)(\omega_{K+1} - \omega_k) = -f(\omega_k) \implies \omega_{K+1} = \omega_K - f'(\omega_k)^{-1}f(\omega_k). \quad (4.57)$$

avec :  $f'(\omega)$  est la matrice Jacobienne

Le système d'équation non linéaire avec n équations et n inconnues est présenté comme suit :

$$(f_1, f_2, \dots, f_n) = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = 0 \quad (4.58)$$

On peut encore écrire équation (4.56) comme suite :

$$f_1 = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = 0 \quad (4.59)$$

$$f_2 = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = 0$$

$$f_n = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = 0$$

avec  $f_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sont des fonctions continues.

On définit l'espace  $\mathbb{R}^n$  par l'ensemble des éléments s'écrivant sous la forme  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ , avec  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \in \mathbb{R}$ . Le système vectoriel est présenté comme suit :

Sous forme matricielle on a  $f(\omega) = 0$

avec :

$$f(\omega) = f(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \begin{pmatrix} f_1(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \\ f_2(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \\ \vdots \\ f_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ telles que } \omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$$

## CHAPITRE 4. LES ANTICIPATIONS DES RUPTURES DE CORRÉLATION, CORRÉLATION BREAKDOWN EN GESTION DE PORTEFEUILLE

---

On cherche à déterminer les zéros c'est à dire une ou plusieurs solutions réelles de  $\omega$ .  
Si  $f$  est différentiable on peut déterminer l'actualisation de Newton avec :

$$\omega_K = \begin{pmatrix} \omega_{1,k} \\ \omega_{2,k} \\ \vdots \\ \omega_{n,k} \end{pmatrix} \quad \text{et } \omega^* = \begin{pmatrix} \omega_{1^*} \\ \omega_{2^*} \\ \vdots \\ \omega_{n^*} \end{pmatrix} \quad \text{est la solution optimale.}$$

La méthode de Newton permet de déterminer l'approximation. On a la matrice gradient.

$$\nabla f(\omega_K) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \omega_{1,k}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \omega_{n,k}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \omega_{1,k}} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial \omega_{n,k}} \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

Donc avec la méthode de Taylor du premier ordre :

$$\begin{pmatrix} \omega_{1,k+1} \\ \omega_{2,k+1} \\ \vdots \\ \omega_{n,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{1,k} \\ \omega_{2,k} \\ \vdots \\ \omega_{n,k} \end{pmatrix} - \nabla F^{-1} \begin{pmatrix} \omega_{1,k} \\ \omega_{2,k} \\ \vdots \\ \omega_{n,k} \end{pmatrix} * f \begin{pmatrix} \omega_{1,k} \\ \omega_{2,k} \\ \vdots \\ \omega_{n,k} \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

La Méthode de Newton consiste à résoudre des problèmes quadratique pour trouver la solution optimale. Le point recherché est celui où la courbe ni ne monte ni ne descend (la courbe attende son maximum). En terme technique cela correspond a un point ou la différentielle de notre fonction objectif  $S_p$  possède un noyau orthogonal au gradient  $\phi$  (la contrainte) en ce point. La multiplicateur de Lagrange offre une condition nécessaire.

- Les fonctions  $S_p$  et  $\phi$  sont différentiables et leurs différentielles continues, on parle de fonctions de classe  $C^1$ .

- On considère  $\lambda$  un vecteur pris dans l'ensemble d'arrivée de  $\phi$  et la fonction L définie par :

$$L(\omega, \lambda) = Sp(\omega) + \lambda(b - A\omega)_i$$

Si  $\omega_0$  est une solution recherche, on montre qu'il existe un vecteur  $\lambda_0$  tel-que la fonction L admet une différentielle nulle au point  $(\omega_0, \lambda_0)$ . Les coordonnées du vecteurs  $\lambda_0$  sont appelées multiplicateurs de Lagrange.

Cette technique permet de passer d'une question d'optimisation sous contrainte à une optimisation sans contrainte, celle de la fonction L dans un espace de dimension  $n+m$ .  $\nabla_J$  est le gradient de J :

$$\nabla_L(\omega_K, \lambda_K) = \nabla_L(\omega_{K+1}, \lambda_{K+1}) \implies \|\nabla_L(\omega_{K+1}, \lambda_{K+1})\| < \|\nabla_L(\omega_K, \lambda_K)\|$$

Le principe de la méthode de Newton est une méthode qui permet de donner la solution optimale d'un système d'équations non linéaires.

## 4.7. MÉTHODE DE NEWTON POUR LA RÉOLUTION DU RATIO SHARPE ( $S_P$ )

Pour l'itération de Newton, soit  $U \subset \mathbb{R}^m$  un ouvert et  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  on cherche à résoudre une équation  $f(\omega) = 0$  dans  $\mathbb{R}^m$  dont on connaît une solution approchée  $\omega_n$ . Donc la méthode de Newton permet de transformer  $f(\omega) = 0$  en un problème de point fixe  $\phi(\omega) = \omega$ . Son intérêt est que les zéros de l'équation  $f$  deviennent des points fixes pour  $\phi$ , ce qui permettra des calculs très efficaces. On approche donc la fonction  $f$  par la tangente en  $\omega_n$  c'est à dire  $t(\omega) = f(\omega_n) + f'(\omega_n)(\omega - \omega_n)$  (c'est l'approximation de Taylor d'ordre 1). Pour  $\omega_{n+1}$  quand  $t(\omega) = 0$  pour approcher les zéros de  $f$  on itère l'application  $\phi(\omega) = \omega - f'(\omega)^{-1}f(\omega)$ . Pour résoudre le problème  $S_P$  par la méthode de Newton on définit tout d'abord le système de Conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker KKT Kuhn H, Tucher.A,(1951)[126] associés à ce problème.

### 4.7.1 Le Système Karush-Kuhn-Tucker KKT

soit  $\omega^*$  un minimum local régulier d'un programme non linéaire, avec  $g_i(\omega), h_j(\omega)$  les contraintes. Il existe des multiplicateurs  $\lambda^* \in \mathbb{R}$  et  $\mu^* \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\nabla f(\omega^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \nabla h_j(\omega^*) + \sum_{i=1}^k \mu_i^* \nabla g_i(\omega^*) = 0 \quad (4.62)$$

le Lagrangien

$$(\nabla_{\omega} L(\omega^*, \lambda^*, \mu^*)) = 0$$

Les conditions(KKT )

$$\begin{aligned} \mu_i^* &\geq 0, & i = 1, \dots, k \\ \mu_i^* g_i(\omega^*) &= 0 & i = 1 \dots, k \\ g_i(\omega^*) &\leq 0, & i = 1 \dots, k \\ h_j(\omega^*) &= 0, & j = 1 \dots, m. \end{aligned}$$

Les conditions (KKT) Kuhn H, Tucher.A,(1951)[126] sont souvent appelées les conditions de Karush-Kuhn-Tucker ou Kuhn-Tucker. Dans le cas convexe c'est à dire lorsque  $f(\omega)$  et  $g_i(\omega)$  sont des fonctions convexes et  $h_j(\omega)$  des fonctions affines, un point  $\omega^*$  régulier est un minimum global pour le programme si et seulement si il satisfait les conditions de Karush-Kuhn-Tucker. L'importance de la programmation provient du fait que plusieurs problèmes réels sont quadratiques, c'est le cas de l'optimisation de portefeuille dans le domaine de la finance.

**Théorème :**[Conditions d'optimalité de Karush- Kuhn-Tucker dans le cas convexe]

Soit  $F(x)$  un programme convexe,  $x^* \in X$  une solution faisable intérieure de  $F(x)$  ( $x^* \in \text{int } X$ ), et soit  $(f, g_1, \dots, g_m)$  différentiables en  $x^*$  d'où  $X$  un ensemble convexe.

**(i) - Suffisance :** La condition de Karush- Kuhn-Tucker (KKT)

Il existe des multiplicateurs non-négatifs de Lagrange,  $\lambda_j^*, j = 1 \dots, m$ , tels que :

$$\lambda_j^* g_j(x^*) = 0, \quad j = 1 \dots, m \quad \text{complémentarité} \quad (4.63)$$

et

$$\nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \nabla g_j(x^*) = 0 \quad (4.64)$$

## CHAPITRE 4. LES ANTICIPATIONS DES RUPTURES DE CORRÉLATION, CORRÉLATION BREAKDOWN EN GESTION DE PORTEFEUILLE

est suffisante pour que  $x^*$  soit une solution optimale de  $F(x)$ .

**(ii) - Nécessité et suffisance :** sous la condition de Slater<sup>16</sup> restante il existe  $\bar{x} \in X$  tel que les  $g_j$  non linéaires sont strictement négatives, et  $g_j$  linéaires sont non-positives en  $\bar{x} \in X$ , la condition de Karush-Kuhn-Tucker de (i) est nécessaire et suffisante pour que  $x^*$  soit une solution optimale de  $f(x)$

Pour les problèmes quadratiques convexes on peut traiter l'approche des points intérieurs qui est très fréquente dans l'optimisation quadratique et linéaire.

### Approche des points intérieurs

Nous utilisons l'approche des points intérieurs qui est l'une des approches permettant de résoudre les problèmes quadratiques.

Le problème s'écrit sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max S_p = (R^t \omega - R_f \cdot I_1) - \beta(\omega^t \Sigma \omega) \\ Sc : \quad \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \\ \omega_i \in [0, 1]^n \quad \forall i = 1, \dots, n \\ A \cdot \omega \leq b \end{array} \right. \quad (4.65)$$

Nous avons :

$$\omega \in [0, 1]^n = 0 \leq \omega \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \omega_i \leq 1 \\ -\omega \leq 0 \end{cases} \quad (4.66)$$

Alors :

$$I_n \omega \leq \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ et } -I_n \omega \leq \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \text{ on a } \begin{bmatrix} I_n \\ -I_n \end{bmatrix} \omega \leq \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ce qui implique } A' \omega \leq b'$$

comme on a

16. Conditions de Slater : si  $f$  et  $D$  sont convexes,  $h_i$  affines et  $g_j$  convexes et il existe un point strictement faisable ( $\exists \bar{x} \in D^*$  tel que  $\forall_j, g_j(\bar{x}) < 0$ ), alors  $d^* = p^*$  (dualité forte)

**4.7. MÉTHODE DE NEWTON POUR LA RÉOLUTION DU RATIO SHARPE ( $S_P$ )**

---

$$A\omega \leq b \text{ donc } \begin{bmatrix} A \\ A' \end{bmatrix} \omega \leq \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ce qui donne : } \begin{bmatrix} A \\ I_n \\ -I_n \end{bmatrix} \omega \leq \begin{bmatrix} b \\ 1_n \\ 0_n \end{bmatrix} \in R^{2n+m}$$

La lecture du problème devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max S_p = (R^t \omega - R_f \cdot I_1) - \beta(\omega^t \Sigma \omega) \\ Sc : \quad \omega \in [0, 1]^n \\ \quad \quad A\omega \leq b \quad \text{avec } A = \begin{bmatrix} A \\ I_n \\ -I_n \end{bmatrix} \text{ et } b = \begin{bmatrix} b \\ 1_n \\ 0_n \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (4.67)$$

Comme que la contrainte  $\omega \in [0, 1]^n$  est linéaire le système devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max S_p = (R^t \omega - R_f \cdot I_1) - \beta(\omega^t \Sigma \omega) \\ A\omega \leq b \quad \text{avec } A = \begin{bmatrix} A \\ I_n \\ -I_n \end{bmatrix} \text{ et } b = \begin{bmatrix} b \\ 1_n \\ 0_n \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (4.68)$$

Pour résoudre le problème par la méthode des points intérieurs, nous allons utiliser d'abord les conditions d'optimalité d'ordre 1 du système de Karush-Kuhn-Tucker(K.K.T) associées à ce problème. Le problème est convexe donc les conditions d'optimalité sont nécessaires.

Considérons le système de Karush-Kuhn-Tucker(K.K.T) associe à ce problème :

On note :

$$G(\omega) = \frac{\partial S_p(\omega)}{\partial(\omega)} + A^t \lambda \quad (4.69)$$

$$\frac{\partial S_p(\omega)}{\partial \omega} = R^t - \beta(-2\Sigma\omega) \quad (4.70)$$

$$G(\omega, \lambda) = 0 \quad (4.71)$$

Donc le système devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S_p(\omega)}{\partial \omega} + A^t \lambda = 0 \\ R^t - \beta(-2\Sigma\omega) + A^t \lambda = 0 \\ \lambda_i (A\omega - b)_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, r, \quad r = 2n + m \\ Sc : \quad A\omega \leq b \\ \quad \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array} \right. \quad (4.72)$$

## CHAPITRE 4. LES ANTICIPATIONS DES RUPTURES DE CORRÉLATION, CORRÉLATION BREAKDOWN EN GESTION DE PORTEFEUILLE

où  $\lambda$  est le multiplicateur de Lagrange et  $\beta$  est un paramètre

Soit  $L(\omega, \lambda) = Sp(\omega) + \lambda(b - A\omega)$  le lagrangien du problème. Les conditions nécessaires d'ordre 1 et  $\omega^*$  le maximum local, donc il existe un unique  $\lambda^*$  tel que  $\Delta L(\omega^*, \lambda^*) = 0$ , d'où  $(\omega^*, \lambda^*)$  est un point stationnaire du lagrangien.

la première condition d'optimalité du système d'équations montre que le gradient du lagrangien doit être nul à la solution optimalité et la conditions de complémentarité qui est la deux équation montre que la multiplicateur de Lagrange  $\lambda_i$  est nul aussi si la contraintes ne pas saturée.

L'idée générale de la méthode des points intérieurs est d'ajouter un paramètres positif sur la contrainte pour le perturber, et les itérés sont toujours convergents vers la solution optimale. Le système devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} R^t - \beta(-2\Sigma\omega) + A^t\lambda = 0 \\ \lambda_i(A\omega - b) = \eta_i \quad \forall i = 1, \dots, r \\ (A\omega - b)_i \leq 0 \\ \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, r \end{array} \right. \quad (4.73)$$

où  $\eta$ , sont des paramètres de perturbation

Posons :

$$G(\omega, \lambda_i) = R^t - \beta(-2\Sigma\omega) + A^t\lambda_i \quad (4.74)$$

Les conditions d'optimalité de premier ordre sont données par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} G(\omega, \lambda_i) = 0 \\ \lambda_i(b - A\omega)_i = 0 \quad \lambda_i \geq 0, \quad (b - A\omega)_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, r \end{array} \right. \quad (4.75)$$

### Proposition : 2

Une fonction  $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  est appelé une fonction NCP si :

$$\phi(a, b) = 0 \iff ab = 0, a \geq 0, b \geq 0$$

Avec la fonction NCP de Fischer-Burmeister on a :  $\phi(a, b) = a + b - \sqrt{a^2 + b^2}$

On obtient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} G(\omega, \lambda_i) = R^t - \beta(-2\Sigma\omega) + A^t\lambda_i = 0_n \\ \psi_i(\lambda_i(b - A\omega)_i) = \lambda_i + (b - A\omega)_i - \sqrt{\lambda_i^2 + (b - A\omega)_i^2} = 0_r \quad i = 1, \dots, r \end{array} \right. \quad (4.76)$$

soit,

$$g(\omega, \lambda_i) = (G(\omega, \lambda_i), \psi_i(\omega\lambda_i)) = 0_{n+r} \quad (4.77)$$

### 4.7.2 La résolution par la méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss est une méthode directe de résolution des systèmes linéaires qui permet de transformer un système en un autre système équivalent qui est triangulaire et facile à résoudre. Elle permet aussi de réduire le temps d'exécution pour donner des résultats. La résolution de Gauss peut résoudre un système d'équation  $AX = B$  où  $A$  est une matrice comportant  $m$  ligne et  $n$  colonnes, et  $X$  est la solution du système. On résout le système à l'aide d'un algorithme, cet algorithme permet de créer des zéros en effectuant des changements réversibles sur les lignes d'une matrice. Les lignes représentant les coefficients du système linéaire. Le principe est de transformer le système initial, en système triangulaire supérieur, ensuite de le résoudre en commençant par la dernière des équations transformées. La décomposition du pivot de Gauss effectue les manipulations sur les lignes comme par exemple :  $l_i \leftarrow l_i + \alpha l_j$ . Les conditions KKT et la fonction de lagrange, combinent toutes les informations sur le problème en une fonction en utilisant les multiplicateurs lagrangiens  $\lambda$  pour les contraintes d'égalité et  $\mu$  pour les contraintes d'inégalité. Le lagrangien associé au problème :

$$L(\omega, \lambda) = \frac{\partial Sp(\omega)}{\partial \omega} + \sum_i^m (b - A\omega)_i \quad (4.78)$$

La fonction peut être optimisée en trouvant des points critiques où le gradient est nul. A partir de ce gardien ont peut construire le système de conditions de KKT.

$$\nabla g = \begin{bmatrix} \frac{dg}{d\omega} \\ \frac{dg}{d\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \frac{\partial Sp(\omega)}{\partial \omega} + \lambda \nabla (b - A\omega) \\ (b - A\omega) \end{bmatrix} = 0 \quad (4.79)$$

Les points critiques de la fonction objectif seront également des points critiques de la fonction lagrangienne et l'inverse aussi, car la fonction lagrangienne est égale à la fonction objectif à un point KKT. L'algorithme consiste donc simplement à répéter la méthode de Newton pour trouver les points critiques de la fonction lagrangienne. Puisque les multiplicateurs lagrangiens sont des variables additionnelles, la méthode de Newton est les l'itérations sont présenté par le système suivants :

A partir du système (4.72) on a :

$$g(\omega_i, \lambda_i) = (G(\omega_i, \lambda_i), \psi_i(\omega_i, \lambda_i)) = 0_{n+r} \quad (4.80)$$

En résolvant le système par la méthode de Newton on trouve l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} \omega_{K+1} \\ \lambda_{K+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_K \\ \lambda_K \end{pmatrix} - \nabla g^{-1} \begin{pmatrix} \omega_K \\ \lambda_K \end{pmatrix} \cdot g \begin{pmatrix} \omega_K \\ \lambda_K \end{pmatrix} \quad (4.81)$$

Cela revient à la même chose en appliquant la méthode du Pivot de Gauss, donc la matrice Hessienne est la suivante :

$$\nabla g \begin{pmatrix} \omega_K \\ \lambda_K \end{pmatrix} \cdot \Delta \gamma_K = -g \begin{pmatrix} \omega_K \\ \lambda_K \end{pmatrix} \quad (4.82)$$

## CHAPITRE 4. LES ANTICIPATIONS DES RUPTURES DE CORRÉLATION, CORRÉLATION BREAKDOWN EN GESTION DE PORTEFEUILLE

Avec  $\Delta\gamma_K = \begin{pmatrix} \omega_{K+1} - \omega_K \\ \lambda_{K+1} - \lambda_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta\omega_K \\ \Delta\lambda_K \end{pmatrix}$  et  $\omega^* = \begin{pmatrix} \omega_1^* \\ \vdots \\ \omega_n^* \end{pmatrix}$  la solution du problème,  $\nabla g^{-1} \begin{pmatrix} \omega_K \\ \lambda_K \end{pmatrix}$  est l'inverse de la matrice Hessienne et  $\omega_K = \begin{pmatrix} \omega_{1,K} \\ \omega_{2,K} \end{pmatrix}$

Théorème : Pour une fonction différentiable à valeurs réelles  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , la matrice Hessienne  $D^2f(x)$  est la matrice dérivée de la fonction de gradient vectorielle  $\nabla f(x)$ , c'est-à-dire :

$$D^2f(x) = D[\nabla f(x)]$$

L'opérateur dérivé  $D$  appliqué à un vecteur nous indique comment chaque composant change avec chaque direction. Pour être plus explicite avec la notation, nous avons :

- $D^2f(x)$  est la dérivée de matrice.
- Le gradient :

$$\nabla f(x) : D^2f(x) = D[\nabla f(x)].$$

C'est qui donne :

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &= D[f(x)] \\ \nabla f(x) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \end{aligned}$$

Maintenant, on applique la dérivée ( $D$ ) à chaque élément de ce vecteur individuellement

$$\begin{aligned} D[\nabla f(x)] &= D[D[f(x)]] \\ &= \left( D\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right]^T \quad \dots \quad D\left[\frac{\partial f}{\partial x_n}\right]^T \right) \end{aligned}$$

En développant, on a la matrice Hessienne :

$$D^2[f(x)] = H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \quad (4.83)$$

On revient sur la dérivé de la fonction objectif (4.66) pour calculer la dérivée seconde : La dérivée de la fonction objectif est égale à :

$$\frac{\partial Sp(\omega)'}{\partial \omega} = R^t - \beta(2\Sigma\omega)$$

D'ou la dérivée seconde est (voir l'annexe) :

$$\frac{\partial Sp(\omega)''}{\partial(\omega)} = -2\beta\Sigma$$

## 4.7. MÉTHODE DE NEWTON POUR LA RÉOLUTION DU RATIO SHARPE ( $S_P$ )

Donc la matrice Hessienne du problème est égale à :

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial G(\omega)}{\partial \omega} & \dots & \frac{\partial G(\omega)}{\partial \lambda} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi(\omega)}{\partial \omega} & \dots & \frac{\partial \psi(\omega)}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \nabla g \begin{pmatrix} \omega_K \\ \lambda_K \end{pmatrix} \quad (4.84)$$

Avec

$$g = \begin{pmatrix} G \\ \psi \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (4.85)$$

comme que le gradient est :

$$\begin{aligned} \nabla g \begin{pmatrix} \omega_K \\ \lambda_K \end{pmatrix} \cdot \Delta \gamma_k &= -g \begin{pmatrix} \omega_K \\ \lambda_K \end{pmatrix} \\ \Delta \gamma_k &= \begin{pmatrix} \omega_{K+1} - \omega_K \\ \lambda_{K+1} - \lambda_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta \omega_K \\ \Delta \lambda_K \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De plus le vecteur dérivé du système KKT est égal à

$$g(\omega \lambda_i) = \begin{pmatrix} G(\omega \lambda_i) \\ \psi((b - A\omega)_i, \lambda_i) \end{pmatrix} = 0_{n+r} \quad (4.86)$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial G(\omega)}{\partial \omega} & \dots & \frac{\partial G(\omega)}{\partial \lambda} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi(\omega)}{\partial \omega} & \dots & \frac{\partial \psi(\omega)}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Sp(\omega)''}{\partial(\omega)}_{[2,2]} & \dots & A_{[2,4]}^t \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -A + \frac{(b-A\omega)_i A}{\sqrt{\lambda_i^2 + (b-A\omega)_i^2}}_{[4,2]} & \dots & \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_i^2 + (b-A\omega)_i^2}\right) \cdot I_{[4,4]} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} [6,6]=[n+r,n+r] \\ (4.87) \end{matrix}$$

Donc la matrice hessienne est :

$$H = \begin{pmatrix} -2\beta\Sigma_{[2,2]} & \dots & A_{[2,4]}^t \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -A + \frac{(b-A\omega)_i A}{\sqrt{\lambda_i^2 + (b-A\omega)_i^2}}_{[4,2]} & \dots & \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_i^2 + (b-A\omega)_i^2}\right) \cdot I_{[4,4]} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} [6,6]=[n+r,n+r] \\ (4.88) \end{matrix}$$

La matrice hessienne est à la forme suivante

$$H = \begin{pmatrix} A & \dots & B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C & \dots & D \end{pmatrix} \quad (4.89)$$

## CHAPITRE 4. LES ANTICIPATIONS DES RUPTURES DE CORRÉLATION, CORRÉLATION BREAKDOWN EN GESTION DE PORTEFEUILLE

---

Avec :

$$\begin{pmatrix} A & = & -2\beta\Sigma_{[2,2]} \\ B & = & A_{[4,2]}^t \\ C & = & -A + \frac{(b-A\omega)_i A}{\sqrt{\lambda_i^2 + (b-A\omega)_i^2}}_{[4,2]} \\ D & = & \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_i^2 + (b-A\omega)_i^2}\right) \cdot I_{[4,4]} \end{pmatrix} \quad (4.90)$$

### Programmation quadratique séquentielle

On peut aussi résoudre ce problème avec (SQP), Il suffit juste de trouver des variables primales  $\omega^*$  et des variables Duales  $\lambda^*$  telles que le gradient du lagrangien s'annule, c'est-à-dire

$$\nabla L(\omega^*, \lambda^*) = 0 \quad (4.91)$$

avec :

$$L(\omega, \lambda) = Sp(\omega) + \lambda^T (b - A\omega)_i \quad (4.92)$$

donc :

$$\nabla L(\omega, \lambda) = \begin{bmatrix} \nabla Sp(\omega) + \lambda \nabla (b - A\omega) \\ (b - A\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_{\omega} L(\omega, \lambda) \\ (b - A\omega) \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

$$\nabla^2 L(\omega, \lambda) = \begin{bmatrix} \nabla^2 Sp(\omega) + \sum_{i=1}^m \lambda^2 (b - A\omega)_i & \nabla (b - A\omega) \\ \nabla (b - A\omega)^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_{\omega\omega}^2 L(\omega, \lambda) & \nabla (b - A\omega) \\ \nabla (b - A\omega)^T & 0 \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

On cherche les itérations de Newton. Le point courant est le vecteur  $Z_k = \begin{pmatrix} \omega_k \\ \lambda_k \end{pmatrix}$ .

Résoudre un système par la méthode de Newton avec SQP revient à chercher une direction de déplacement  $d$  qui vérifie :

$$\nabla F(Z_k)^t d = -F(Z_k) \quad (4.95)$$

$$\nabla F(\omega_k, \lambda_k) \begin{pmatrix} d_{\omega} \\ d_{\lambda} \end{pmatrix} = -F(\omega_k, \lambda_k) \quad (4.96)$$

ou aussi

$$\nabla_{\omega\omega}^2 L(\omega, \lambda) d = -\nabla L(\omega, \lambda) \quad (4.97)$$

#### 4.7. MÉTHODE DE NEWTON POUR LA RÉOLUTION DU RATIO SHARPE ( $S_P$ )

Une itération de la méthode de Newton consiste à trouver une direction, c'est-à-dire à trouver  $d_\omega \in \mathbb{R}^n$  et  $d_\lambda \in \mathbb{R}^m$  tels-que :

$$\begin{cases} \nabla_{\omega,\omega}^2 L(\omega,\lambda) d_\omega + \nabla_\omega L(\omega,\lambda) d_\lambda = -\nabla_\omega L(\omega,\lambda) \\ \nabla(b - A\omega) = -(b - A\omega) \end{cases} \quad (4.98)$$

D'où le déplacement  $d = \begin{pmatrix} d_\omega \\ d_\lambda \end{pmatrix}$  avec  $d \in \mathbb{R}^{n+r}$

La matrice jacobienne des contraintes est  $f(Z) = (\omega, \lambda)$ .

Les itérations pour résoudre les conditions de KKT à partir d'un point initial au vecteur  $(\omega_K, \lambda_K)$  sont :

$$\begin{pmatrix} \omega_{K+1} \\ \lambda_{K+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_K \\ \lambda_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_\omega \\ d_\lambda \end{pmatrix} \quad (4.99)$$

La stratégie SQP constitue une alternative à la résolution directe du système linéaire (4.94). Il est intéressant de noter que, les équations dans le système (4.95) sont les conditions d'optimalité du problème d'optimisation quadratique suivant :

En posant :

$$\begin{cases} d_{QP} = d_\omega \in \mathbb{R}^n \\ \lambda_{QP} = d_\lambda \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (4.100)$$

L'itération de Newton au point  $(\omega_k, \lambda_k)$  équivaut à la résolution du problème quadratique :

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} d^T \nabla_{\omega\omega}^2 L(\omega_k, \lambda_k) d + \nabla_\omega L(\omega_k, \lambda_k) d \\ \text{sous contrainte} \quad \nabla(b - A\omega)^T d + (b - A\omega) = 0 \end{cases} \quad (4.101)$$

Le problème quadratique linéaire (QP) en variables  $d_{QP} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \min_{d_{QP} \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} d_{QP}^T \nabla_{\omega\omega}^2 L(\omega_k, \lambda_k) d_{QP} + \nabla_\omega L(\omega_k, \lambda_k)^T d_{QP} \\ \text{sous} \quad \nabla(b - A\omega)^T d_{QP} + (b - A\omega) = 0 \end{cases} \quad (4.102)$$

Le système en variables  $(d_{QP}, \lambda_{QP})$

$$\begin{cases} \nabla_{\omega\omega}^2 L(\omega_k, \lambda_k) d_{QP} + \nabla_\omega L(\omega_k, \lambda_k) + \nabla(b - A\omega) \lambda_{QP} = 0 \\ \text{sous} \quad \nabla(b - A\omega)^T d_{QP} + (b - A\omega) \quad \text{avec} \quad \lambda_{QP} \text{ Le multiplicateurs} \end{cases} \quad (4.103)$$

Le principe de la méthode (SQP) consiste à résoudre le problème quadratique (4.97) avec  $\omega_{K+1} = \omega_K + d_{QP}$ , et à prendre  $d_\omega = d_{QP}$ ,  $d_\lambda = \lambda_{QP} - \lambda_K$ , et  $f(\omega, \lambda) = 0$  et si le point initial  $(\omega_0, \lambda_0)$  est proche de l'optimum alors la méthode converge. Il existe de nombreuses méthodes qui permettent de résoudre des problèmes quadratiques convexes. On peut utiliser l'approche (SDP) pour les fonctions quadratiques convexe. Il transfère un problème quadratique convexe en un problème semi-défini positif (SDP), qui est un problème linéaire avec des contraintes matricielles.

## CHAPITRE 4. LES ANTICIPATIONS DES RUPTURES DE CORRÉLATION, CORRÉLATION BREAKDOWN EN GESTION DE PORTEFEUILLE

---

### 4.7.3 Implémentation de la méthode de Newton avec le logiciel Matlab

Nous implémentons la méthode de Newton pour un problème quadratique convexe sous contraintes linéaires avec le logiciel Matlab, puis nous appliquons cette méthode au portefeuille efficient et l'on observe l'impact de la rupture de corrélation dans le portefeuille.

## 4.7. MÉTHODE DE NEWTON POUR LA RÉOLUTION DU RATIO SHARPE ( $S_P$ )

– Insérer fiche sortie de algorithme –

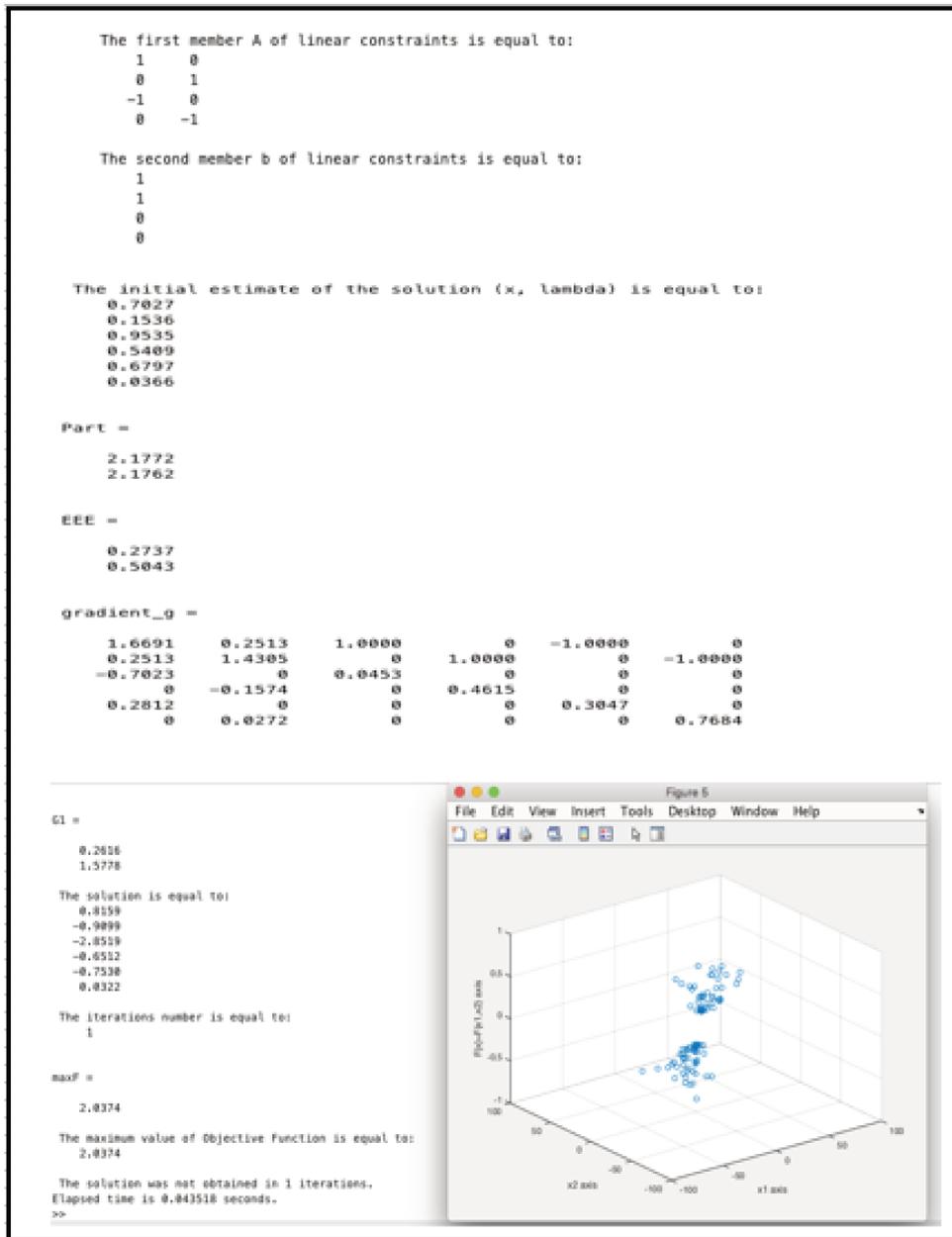


FIGURE 4.5 – Algorithme de Newton

## CHAPITRE 4. LES ANTICIPATIONS DES RUPTURES DE CORRÉLATION, CORRÉLATION BREAKDOWN EN GESTION DE PORTEFEUILLE

Nous allons appliquer le problème de maximisation d'un portefeuille efficient de ratio Sharpe pour pouvoir minimiser le risque et maximiser le gain de notre objectif. Nous nous appliquons à deux périodes différentes : Dans un première temps l'intervalle de temps est en période de corrélation Breakdowns,(Période de corrélation Breakdowns). Et dans un second temps l'intervalle est en période ou la corrélation est stable, il existe pas de rupture de corrélation dans cette période (Période de stabilité de la corrélation). Nous réalisons plusieurs tests afin d'en tirer des observations plus sertiventès.

### – Période de corrélation breakdowns –

```
optimize(path, 'SANOFI', 'Merck', '2010-11-01', '2011-08-31')
```

	Returns	Volatility
portfolio1	-4.033775	0.212102
SANOFI	-6.495299	0.300915
Merck	-3.214651	0.208003

Tableau 4.15 – Portefeuille 1 – Période de stress [SANOFI-MERCK]

Durant la période (01/11/2010 à 31/08/2011), nous remarquons<sup>17</sup> que la corrélation ne pas stable entre le mois décembre 2010 à janvier 2011. La corrélation passe de 0.67 à 0.23, ce qui montre une forte rupture de corrélation dans cette période de temps et entre janvier 2011 à février 2011 elle passe de 0.23 à 0.33, ce qui correspond à une faible rupture de corrélation. Même chose entre février à mars 2011, la corrélation passe de 0.33 à 0.44. Ainsi de suite il aura une petite stabilité entre le mois mars 2011 à juillet 2011. Puis une autre forte rupture de corrélation entre juillet 2011 à août 2011, la corrélation passant de 0.48 à 0.63, ce qui montre que le portefeuille 1 est dans un période de corrélation breakdowns. On voit que le rendement espéré du portefeuille 1 est négatif (-4.03), et la volatilité est de (0.210). Ce qui paraît logique dans une période de turbulence.

### – Période de stabilité de la corrélation –

```
optimize(path, 'SANOFI', 'Merck', '2011-09-01', '2012-12-28')
```

	Returns	Volatility
portfolio1	9.832478	0.181503
SANOFI	-8.961737	0.259615
Merck	16.095129	0.180800

Tableau 4.16 – Portefeuille 2 – Période stable [SANOFI-MERCK]

17. Par la simulation et le calcul de la matrice de la corrélation du modèle, qui est visible d'après le graphique de la corrélation

#### 4.7. MÉTHODE DE NEWTON POUR LA RÉOLUTION DU RATIO SHARPE ( $S_P$ )

On remarque que la corrélation est très forte durant cette période entre (01/09/2011 à 28/12/2012), dans le même couple [SANOFI-MERCK], mais avec des périodes différentes. Par contre il existe pas de rupture de corrélation (la corrélation est stable) dans cette période la corrélation varie d'une manière stable d'un mois à autre. En appliquant un portefeuille efficient dans cette période on distingue des changements de la volatilité et de rendements. Puis que on est dans une période où la corrélation est stable, on a observé que le rendement du portefeuille efficient est de (9.83) ainsi que la volatilité est de (0.18), c'est qui est différents dans le portefeuille 1 tableau (4.15), d'où c'était une période de corrélation breakdowns. Il y a une forte changement entre la période de rupture de corrélation de portefeuille 1 en dessus tableau (4.15) et celle de la période de portefeuille 2 tableau (4.16). Le rendement à augmente dans la période où la corrélation est stable et la volatilité à diminué, ce qui montre que la rupture de corrélation à un impact très important dans le portefeuille optimal, ceci est notre objectif dans cette partie, nous testons avec d'autre couple des actifs pour argumenter notre résultat.

– Période de corrélation breakdowns –

<code>optimize(path, 'SANOFI', 'Merck', '2010-11-01', '2011-12-30')</code>		
	Returns	Volatility
<b>portfolio1</b>	-1.114010	0.224971
<b>SANOFI</b>	-1.887867	0.318461
<b>Merck</b>	-0.856048	0.216909

Tableau 4.17 – Portefeuille 3 – Période de stress [SANOFI-MERCK]

Pour le portefeuille 3 tableau (4.17), nous savons essayé de ne pas supprimer la rupture qui intervient dans le mois de Août 2011 entre le couple [SANOFI-MERCK], pour voir le changement qui ce produit dans les resultats. Nous remarquons que si on surprime pas la rupture de corrélation, elle peut rester plusieurs mois consécutive, comme dans le portefeuille 2 tableau (4.16), nous avons pris la période après l'exécutions de la forte rupture, cela montre que si ont supprime la rupture nous pouvons avoir une période de stabilité de la corrélation si dans la période la corrélation est stable et il y aura pas une nouvelle rupture de corrélation. Cela est visible sur le portefeuille 3, puisque que nous avons pas supprimer la rupture de corrélation qui se produit dans le Août 2011. Cela nous conduit à une portefeuille dans une période de stress (Période de corrélation Breakdowns), avec une rendement négatif et une volatilité élevé par rapport une portefeuille d'une une période ou la corrélation est stable.

## CHAPITRE 4. LES ANTICIPATIONS DES RUPTURES DE CORRÉLATION, CORRÉLATION BREAKDOWN EN GESTION DE PORTEFEUILLE

---

– Période de stabilité de la corrélation –

```
optimize(path, 'NVS', 'PFIZER', '2011-09-01', '2014-12-31')
```

	Returns	Volatility
<b>portfolio1</b>	-0.333686	0.146797
<b>NVS</b>	-5.364720	0.157213
<b>PFIZER</b>	1.343222	0.166452

Tableau 4.18 – Portefeuille 4 – Période stable [NVS-PFIZER]

– Période de stabilité de la corrélation –

```
optimize(path, 'JOHNSON', 'BAYER', '2014-01-02', '2019-10-28')
```

	Returns	Volatility
<b>portfolio1</b>	31.795065	0.216699
<b>JOHNSON</b>	-0.616739	0.161743
<b>BAYER</b>	42.572181	0.266138

Tableau 4.19 – Portefeuille 5 – Période stable [JOHNSON-BAYER]

Dans les deux portefeuilles 4 et 5, la corrélation était stable dans les deux périodes et entre les deux couples (avec des différents actifs), c'est qui montre un portefeuille avec un rendement très élevés surtout pour le portefeuille 5 tableau(4.19) et une volatilité faible par rapport à la période de rupture de corrélation. Pour le portefeuille 4, est le portefeuille qui à la volatilité le plus faible parmi les portefeuille teste.

– Période de corrélation breakdowns –

```
optimize(path, 'NVS', 'PFIZER', '2010-11-01', '2011-08-31')
```

	Returns	Volatility
<b>portfolio1</b>	-3.351491	0.203602
<b>NVS</b>	-7.860334	0.220389
<b>PFIZER</b>	-1.847466	0.225279

Tableau 4.20 – Portefeuille 6 – Période de stress [NVS-PFIZER]

#### 4.7. MÉTHODE DE NEWTON POUR LA RÉOLUTION DU RATIO SHARPE ( $S_P$ )

– Période de corrélation breakdowns –

```
optimize(path, 'JOHNSON', 'BAYER', '2010-11-01', '2011-03-31')
```

	Returns	Volatility
<b>portfolio1</b>	-1.332590	0.218088
<b>JOHNSON</b>	-0.284104	0.114904
<b>BAYER</b>	-1.682819	0.269560

Tableau 4.21 – Portefeuille 7 – Période de stress [JOHNSON-BAYER]

– Période de corrélation breakdowns –

```
optimize(path, 'JOHNSON', 'BAYER', '2010-11-01', '2013-12-31')
```

	Returns	Volatility
<b>portfolio1</b>	-1.332417	0.259176
<b>JOHNSON</b>	0.428039	0.135192
<b>BAYER</b>	-1.919245	0.318685

Tableau 4.22 – Portefeuille 8 – Période de stress [JOHNSON-BAYER]

– Période de corrélation breakdowns –

```
optimize(path, 'CELYAD', 'BONE', '2015-10-27', '2016-09-30')
```

	Returns	Volatility
<b>portfolio1</b>	-0.521677	0.319275
<b>CELYAD</b>	-0.231961	0.741441
<b>BONE</b>	-0.618380	0.329063

Tableau 4.23 – Portefeuille 9 – Période de stress [CELYAD-BONE]

Les quatre tableaux (Tableau 4.20, Tableau 4.21, Tableau 4.22 et Tableau 4.23), d'où sont dans une périodes de corrélation breakdowns, ont remarque que dans toutes les portefeuilles le rendement est négatifs dans toutes les portefeuilles autant que la volatilité est très élevés par

## CHAPITRE 4. LES ANTICIPATIONS DES RUPTURES DE CORRÉLATION, CORRÉLATION BREAKDOWN EN GESTION DE PORTEFEUILLE

---

rapport aux portefeuilles dans un période de stabilité de corrélation pour les neuf portefeuilles. Nous remarquons aussi la volatilité pour les portefeuilles (8 et 9) est la plus élevés par rapport aux autres portefeuilles qui sont dans le même période de corrélation breakdowns. Après une vérifications, nous remarques entre le couple [CELYAD–BONE] entre la périodes [01/11/2010 à 31/03/2011], la corrélation n'est pas stable, ainsi que le coefficient de corrélation est toujours supérieur à 0.60.

### 4.7.4 Comparer les resultats de la portefeuille efficient dans les deux période stress et normale

On observe les resultats de plusieurs portefeuille efficient en dessus, en périodes de stress et en périodes normale.

On remarque dans le tableau (4.16), la corrélation entre [01/09/2011 à 28/12/2012] est stable entre le paire de couple à chaque mois la différence entre la corrélation  $|\rho_0 - \rho_1|$ <sup>18</sup> est toujours inférieur à 0.05. C'est qui montre qu'il existe pas de rupture de corrélation entre ces deux actifs dans cette période (donc période de stabilité de la corrélation). Nous observons que le rendement est de 9.83% avec une faible volatilité de 0.18%, nous constatons que par rapport aux resultats de la tableau (4.17), qui est période de rupture de corrélation i.e que la corrélation ne pas stable. Il existe deux forte rupture dans cette période, la corrélation diminue elle passe de 0.67 à 0.23 puis après 7 mois elle passe de 0.48 à 0.63 c'est qui montre deux forte rupture entre [01/11/2010 à 30/12/2011]. Nous observons aussi que la volatilité à augmente et le rendement à diminuée dans cette période de rupture de corrélation de le tableau (4.17), ce que nous retenons qu'il existe une forte impact de la rupture corrélation dans le portefeuille optimal par rapport au tableau (4.16) d'où la corrélation été stable.

De même pour le tableau (4.15), d'où la corrélation ne pas stable période de corrélation breakdowns, il existe deux forte rupture de corrélation dans cette intervalle de temps entre [01/11/2010 à 31/08/2011], c'est qui montre que dans le même couple d'actif [SANOFI-MERCK], le rendement d'un portefeuille efficient dans la période où la corrélation est stable augmente fortement et le risque diminue par rapport à une période où la corrélation ne pas stable. De cela nous pouvons déduire que la rupture de corrélation un à impact très important dans un portefeuille efficient.

Nous observons la même tendance entre le tableau (4.18) et le tableau (4.20), par conséquent dans le tableau (4.18) où la corrélation est stable le rendement est supérieur à celle du tableau (4.20), qui est dans une période de rupture de corrélation. Il existe une forte rupture dans le tableau (4.20)(la corrélation passe de 0.33 à 0.52) et une faible rupture (elle passe de 0.32 à 0.25). On peut considérer que à chaque fois dans une période de rupture de corrélation la volatilité augmente et le rendement diminue dans un couple d'actif donne. En comparant le tableau

---

18.

- Si la corrélation  $|\rho_0 - \rho_1|$  est  $> 0.05$  il existe une rupture de corrélation.
- Si la corrélation  $|\rho_0 - \rho_1|$  est  $< 0.05$  il n'existe pas de rupture de corrélation.

Nous avons fixer de test la rupture mensuellement, c'est à dire après chaque mois on regard l'existant ou non pour le mois suivants pour la base chimie et santé

(4.21), le tableau (4.22) et le tableau (4.19), qui sont le même couple d'actifs [JOHNSON-BAYER], mais des périodes différentes, le tableau (4.21) et le tableau (4.22), la corrélation ne pas stable dans le tableau (4.21), il existe deux rupture corrélation (la corrélation passe de 0.79 à 0.66) et la deuxième rupture de corrélation (la corrélation passe de 0.66 à 0.43) qui est une forte rupture. Même chose pour le tableau (4.22), il existe trois fortes ruptures de corrélation et le risque à augmenté avec un rendement négatif pour cette portefeuille efficient qui est une période période breakdowns. En comparant ceci avec le tableau (4.19) (période où la corrélation est stable), la corrélation  $|\rho_0 - \rho_1|$  est passé d'un mois à l'autre avec une variation inférieure à 0.05, le portefeuille à un rendement très supérieur à celui du tableau (4.21), et le tableau (4.22) avec un faible risque.

Nous pouvons conclure, que la corrélation Breakdowns à un impact sur le portefeuille optimal, nous ajoutons que si il existe une rupture de corrélation qui n'est pas faible (c'est à dire la variation de la corrélation est faible, il existe une rupture de corrélation mais la rupture est faible par exemple  $|\rho_0 - \rho_1| = 0.06$ ) dans une période donne, nous pouvons avoir dans le mois suivant une stabilité de la corrélation, la rupture peut ne pas avoir effet sur le calcul de la portefeuille, c'est à dire la rupture peut disparaître avec le temps sans qu'on supprime la rupture, mais celle est vraie si la rupture est très faible et la corrélation aussi peut diminuer après une forte corrélation<sup>19</sup>. Si la valeur de la corrélation au début de la période est connue nous pouvons donne une estimation pour le mois ou le deux mois, avec une valeur proche de la corrélation réelle.

## 4.8 Conclusion

Dans ce travail, nous avons analysé l'impact sur un portefeuille efficient lorsque nous anticipons l'apparition d'une chute de corrélation. Les corrélations Breakdowns peuvent agir à la fois comme conséquence et comme un facteur déclenchant la crise de l'émergence des bulles financières. Le développement du modèle où la période est divisée en deux périodes différence influe directement sur la corrélation des rendements des actifs. Lorsque la volatilité du portefeuille est très faible et le rendement négatif ou faible, nous pouvez anticiper qu'il est liée à une rupture de corrélation dans cette période d'intervalle. Cependant, suite à la théorie du portefeuille standard, on doit modifier la composition du portefeuille (ne pas mettre tous ses œufs dans le même panier). Enfin, les événements peuvent anticiper l'origine de l'instabilité de la corrélation, avec le changement qui se produit sur la volatilité. Nous devons être très prudent dans d'anticiper des corrélation breakdowns possibles, car ils peuvent finir par renforcer les effets de contagion plus que la protection de notre portefeuille. Tous les indicateurs de mesure des risques de marché reposent sur le calcul des corrélations entre les actifs. Nous avons appliqué la méthode de Newton pour la résolution du modèle de maximisation de Ratio Sharpe, qui présente un exemple de programme quadratique convexe. Nous avons fourni des résultats optimaux à l'échelle de la seconde en garantissant une erreur de précision (et une erreur maximale) qui ne dépasse pas  $10^{-7}$ .

---

19. Par exemple la corrélation passe d'une forte corrélation qui est égale à 0.60 par exemple peut diminuer avec des variations très faible est sans l'existant d'une rupture de corrélation jusqu'au avoir une corrélation faible de 0.30



---

## Conclusion Générale et Perspectives

Dans cette thèse, nous avons analysé l'effet d'une rupture de la corrélation entre actifs introduite dans la dynamique d'un marché financier.

Les Corrélations Breakdowns peuvent agir à la fois comme une conséquence et comme un facteur déclenchant la crise de l'émergence des crises financières. Pour tester si la corrélation entre deux séries temporelles est constante ou change au fil du temps, on pourrait envisager de comparer les corrélations d'échantillonnage entre les deux séries calculées à partir de sous-ensembles de données. L'accent mis sur les corrélations et donc sur la dépendance linéaire est tout à fait logique lorsque la distribution conjointe des données est multivariée normale ou, plus généralement multivariée elliptique. Si l'on observe que les corrélations conditionnelles sont statistiquement différentes les unes par rapport aux autres, on pourrait être tenté de conclure que la corrélation n'est pas constante dans le temps. Ce fût justement notre objectif d'étudier le changement de la corrélation dans le temps et son effet sur les portefeuilles. Cette approche numérique est intuitivement attrayante pour tester les ruptures de corrélations qui peuvent être très trompeuses.

Nous avons estimé les différentes spécifications de la modélisation GARCH multivariée. Ainsi, nous avons considéré le cadre général de la modélisation GARCH multivariée en appliquant les différentes spécifications. Le modèle GARCH multivarié avec des structures de corrélations dynamiques s'accompagne de la méthode d'estimation DCC. Par conséquent, grâce aux écarts réalisés par paires, on obtient les estimations des paramètres stables où les matrices des covariances sont assurées d'être positives définitives. Nous avons testé les différentes périodes de ruptures de corrélations ayant des effets différents sur la matrice de covariance conditionnelle. Le cadre théorique de notre étude a été construit à partir de la modélisation des séries chronologiques univariées et une spécification de type GARCH multivariée a été choisie pour capter la structure dynamique des seconds moments conditionnels des actifs de notre portefeuille.

Nous avons retenu la spécification de la corrélation conditionnelle dynamique DCC MVGARCH pour la simplicité d'implantation et la facilité de calcul. Notre modèle a ensuite été appliqué aux données des secteurs de la chimie et de la pharmacie en valeurs journalières pour 18 actifs, ainsi qu'au CAC40. Les rendements des actifs avec leurs volatilités et leurs corrélations réalisées par paires, et se révèlent plus performants que les modèles existants en ce qui concerne la minimisation du risque dans le cadre de la stratégie d'optimisation de portefeuille.

Lorsque nous anticipons l'effet d'une rupture de corrélation, nous pouvons penser que ce changement est lié au coefficient de corrélation qui est instable, ainsi qu'à la dynamique des prix elle aussi instable. Le modèle mono-objectif est proposé pour prévoir l'existence ou non d'une rupture de corrélation en vue de minimiser le risque de portefeuille par paire de couples. Le modèle nous donne alors le choix de la proportion en fonction du risque de l'actif en question. Dans le but d'anticiper une rupture, nous avons remarqué que cet objectif n'est pas toujours réalisable. Nous avons donc aussi testé le modèle en plusieurs fois, avec de nouvelles données afin de trouver une preuve. Finalement, nous avons essayé de vérifier la période où nous pouvons observer des changements de la corrélation par rapport à la date  $t$ , pour distinguer les variables qui ont provoqué ce changement. En résumé, nous remarquons que le modèle montre clairement une rupture de corrélation entre les deux actifs, qui ont une variance qui n'est pas

égale bien que très proche.

En revanche, nous avons démontré que si nous pouvons anticiper l'existence d'une rupture, la variance d'un de nos deux actifs varie plus que l'autre. Ainsi, les résultats montrent que la corrélation peut se rétablir dans le temps en minimisant le risque du portefeuille grâce à la proportion donnée par le modèle ; on peut alors avoir une rentabilité moyenne avec le moins de risque possible. Toutefois, si on divisait la période de rupture en deux parties, nous trouverions un risque plus élevé avec une rentabilité également plus élevée par rapport au choix des autres portefeuilles. Cela montre ainsi que l'impact de la volatilité est plus élevé que celui d'une rupture de corrélation dans un portefeuille.

Autrement dit, si un investisseur applique le choix de proportion donné par le modèle dans un intervalle de temps, il aura une rentabilité plus élevée que celui qui va appliquer les deux proportions prenant en compte la rupture de corrélation. Cela montre alors que la minimisation du risque d'un portefeuille grâce à la diversification, nous garantit une rentabilité élevée avec un risque minimal dans un portefeuille.

Nous avons ensuite, par le biais de simulations, étudié l'impact, en termes d'allocation d'actifs d'un portefeuille, des anticipations des investisseurs d'une rupture de corrélation. Dans le portefeuille optimal, nous avons appliqué la méthode de Newton pour trouver le point optimal de la courbe (où la courbe atteint son maximum). En termes techniques, cela correspond à un point où la différentielle de la fonction Ratio Sharpe  $Sp$ , notre objectif étant de maximiser le ratio Sharpe afin de construire un portefeuille efficient et de voir l'impact de la Corrélation Breakdown dans le portefeuille optimal, possède un noyau orthogonal au gradient en ce point.

La fonction peut être alors optimisée en trouvant des points critiques où le gradient est nul. A partir de ce gradient, on peut construire le système des conditions de KKT avec  $\lambda$  comme vecteur. Les points critiques de la fonction objectif seront également des points critiques de la fonction lagrangienne et inversement, car la fonction lagrangienne est égale à la fonction objectif à un point KKT.

L'algorithme consiste donc simplement à répéter la méthode de Newton pour trouver les points critiques de la fonction lagrangienne. Puisque les multiplicateurs lagrangiens sont des variables additionnelles, nous procédons par le biais de l'itération. Dans le cadre de l'optimisation quadratique en finance, notre objectif était de présenter une méthode efficace et rapide pour l'optimisation de portefeuilles financiers. Les résultats montrent que les Corrélations Breakdowns ont un impact très important dans le portefeuille efficient, en comparant les rendements dans chaque période de temps donné.

Nous remarquons notamment que dans une période de stress, ou période de Corrélation Breakdowns, le coefficient de corrélation est instable et présente une variabilité plus importante. Nous soulignons, d'après les résultats, que l'effet d'une forte rupture de corrélation peut donner des rendements négatifs. De fait les investisseurs peuvent anticiper cela après qu'un changement se soit produit dans les résultats et soit causé par une rupture de corrélation.

Il est tentant d'expliquer la corrélation accrue des rendements pendant les périodes de stress (ou d'agitation) des marchés, par un changement dans la distribution conjointe des rendements

---

des actifs en raison de la contagion de certains marchés à d'autres, de la nature particulière des chocs ou des changements dans les structures et les pratiques du marché. Toutefois, à moins de disposer d'un modèle indiquant quand de telles périodes sont susceptibles de se produire, ou du moins à quelle fréquence, et quel type de corrélations particulières en découleront, cette approche rend la gestion des risques extraordinairement difficile, car la relation entre les rendements des actifs dans le futur n'est pas connue.

Nos perspectives futures sont de proposer une amélioration de la méthode de Newton par une matrice de variance-covariance qui dépendrait du temps. Il en va de même avec la fonction du ratio Sharpe qui dépendrait aussi du temps. Il pourrait s'agir également de trouver un rendement qui dépendrait du temps passé dans le but de prévoir la rupture de corrélation. Nous pourrions modéliser dans un premier temps la matrice variance-covariance dynamique du ratio Sharpe identique à celle de la volatilité classique ARCH, soit un modèle à changement de régime.

A la suite de ce procédé, nous obtiendrions un modèle avec des corrélations (éventuellement des variances conditionnelles, c'est-à-dire qui dépendent de l'information passée). Ainsi, nous pourrions anticiper l'évolution future de la structure de corrélation et avoir des poids optimaux qui dépendraient du temps pour enfin appliquer cette méthode à un problème d'optimisation combinatoire qui pourrait nous permettre d'anticiper l'évolution future de la corrélation et ainsi d'avoir des poids optimaux qui dépendraient du temps.



# Bibliographie

- [1] Abraham-Frois, G. Berrebi, E.,(1995), Instabilité, cycles, chaos, *Economica*.
- [2] Aftalion F.,(2004), La Nouvelle Finance et la gestion de portefeuille, *Economica*.
- [3] Adouka L, Boucheta Y, Chenini A, and El kchirid M.,(2015), Modèles GARCH : Application aux Taux de Change Algérien, *International Journal of Innovation and Applied Studies* ISSN 2028-9324 Vol. 11 No. 3 Jun, pp. 699-715 ©Innovative Space of Scientific Research Journals <http://www.ijias.issr-journals.org>.
- [4] Adamou, Y. A.,(2013), Estimation d'un modèle ARCH- GARCH avec primes d'asymétrie, Québec, Canada.
- [5] Aftalion F.,(2004), La Nouvelle Finance et la gestion de portefeuille. *Economica*.
- [6] Arthur C.,(2003), Théorie et applications, Cours de séries temporelles, vol 1, Université Paris Dauphine.
- [7] Arthur G S (1991) A Course in Econometrics Harvard University Press.
- [8] Aglietta, M.,(2003), Le risque systémique dans la finance libéralisée. In *Revue d'économie financière*, vol. 70(1) :pp. 33-50.
- [9] Andreas Nawroth, Fabrizio Anfuso and Fredrik.,(2014), Akesson Correlation Breakdown and the Influence of Correlations on VaR. JEL Classification : C02, C46, C52, C58.
- [10] Alexander, C.,(2000), Orthogonal methods for generating large positive semi-definite covariance matrices, Discussion Papers in Finance 2000–06, ISMA Centre.
- [11] Alphonse P., G. Desmuliers, P. Grandin et Levasseur M.,(2010), Gestion de portefeuille et marchés financiers, Pearson Education France.
- [12] Alphonse P., G. Desmuliers, P. Grandin et Levasseur M.,(2010), Gestion de portefeuille et marchés financiers, Pearson Education France.
- [13] Augustyniak. M.,(2013), Estimation du modèle GARCH à changement de régimes et son utilité pour quantifier le risque de modèle dans les applications financières en actuariat, Thèse présentée à la Faculté des études supérieures en vue de l'obtention du grade de Philosophiæ Doctor (Ph.D.) en Statistique.
- [14] Ayadi. M., Boudhina. R., Khallouli. W et Sandretto. R.,(2006), La contagion de la crise asiatique : Dynamique de court terme et de long terme, *Économie internationale* 105 p.113-135.
- [15] Boyer, B. H., Gibson M. S. and M. Loretan.,(1999), Pitfalls in tests for changes in correlations, *International Finance Papers* No. 597, Board of Governors of the Federal Reserve System.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [16] Bertero, E. and C. Mayer.,(1987), Structure and performance : Global interdependence of stock markets around the crash of October 1987, *European Economic Review*, vol.34 ( ) 1990 : 1155-80.
- [17] Baig T and Goldfajn L.,(1999), Financial Market Contagion in the Asian Crisis, Full Text of this Article (PDF 170 K), Volume 46, Number 2
- [18] Bae, K H Karolyi G A, and Stulz M R.,(2003), A new approach to measuring financial contagion,. *Review of Financial Studies*, vol. 16, no. 3, pp. 717–763.
- [19] Anselin.L, Bera,A.K Florax.R., and Yoon,M.J.,(1996), Simple diagnostic tests for spatial dependence, *Regional science and urban economics*. Volume,26., Issue :1., Pages 77-104. doi :10.1016/0166-0462(95)02111-6. Publisher North-Holland.
- [20] Bera, A.K. and Ra, S.,(1997). Testing for the Regression Coefficient Stability. *Journal of Quantitative Economics*. 13 : 17–35.
- [21] Bera, A.K., Higgins, M.L. and Lee, S.,(1996), Random Coefficient Formulation of Conditional Heteroskedasticity and Augmented ARCH Models, *Sankhyā*. 58 (2) : 199–220. JSTOR 25052946.
- [22] Bera,A. K.; Zuo, X.L.,(1996), Specification Test for a Linear Regression Model with ARCH Process, *Journal of Statistical Planning and Inference*. 50 (2) : 283–308. doi :10.1016/0378-3758(95)00059-3.
- [23] Bera, Anil K.; Ng, P.T.,(1995), Tests for Normality Using Estimated Score Function, *Journal of Statistical Computation and Simulation*. 52 (3) : 273–287. doi :10.1080/00949659508811678.
- [24] Bera, Anil K.; Ra, S.,(1995), A Test for the Presence of Conditional Heteroskedasticity within ARCH M Framework, *Econometric Reviews*. 14 (4) : 473–485. doi :10.1080/07474939508800332.
- [25] Bera, Anil K. and Higgins, M.L.,(1994), ARCH Models : Properties Estimation and Testing, *Survey in Econometrics*, pp. 215–272.
- [26] Bera, Anil K., Park, H. and Bubnys, E.,(1993), The ARCH Effects and Efficient Estimation of Hedge Ratios for Stock Index Futures, *Advances in Futures and Options Research*, pp. 313–328.
- [27] Bera, Anil K. and Lee, S.,(1993), Information Matrix Test, Parameter Heterogeneity and ARCH : A Synthesis, *Review of Economic Studies*. 60 (1) : 229–240. doi :10.2307/2297820. hdl :2142/29901. JSTOR 2297820.
- [28] Baillie, R. and Myers, R.,(1991), Bivariate GARCH Estimation of the Optimal Commodity Futures Hedge, *Journal of Applied Econometrics*6, (2), pp. 109-124.
- [29] Billio,M.,and Caporin, M.,(2009). A generalized Dynamic Conditional Correlation model for portfolio risk evaluation, *Mathematics and Computers in Simulation*, Volume 79, Issue 8, April 2009, Pages 2566-2578.
- [30] Billio, M., Caporin, M. and Gobbo, M.,(2006), Flexible Dynamic Conditional Correlation Multivariate Garch Models for asset allocation. *Applied Financial Economics Letters*, 2, 123-130. <https://doi.org/10.1080/17446540500428843>
- [31] Ben Salah.H.,(2015), Gestion des actifs financiers : de l'approche classique a la modélisation non paramétrique en estimation du downside risk pour la constitution d'un portefeuille efficient, thèses, Université Claude Bernard-Lyon I, français. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01242267>.

- [32] Bloomberg Commerzbank Corporates Markets.,(2017), Techniques de gestion de portefeuille : La corrélation. . . Ou la recherche de la bonne combinaison,Article tiré du magazine Strike 181.
- [33] Billionnnet.A et Djebali.K.,(2006), Restitution d'un problème combinatoire fractionnaire par la programmation linéaire mixte, Rairo Operations Research 97-111,doi :10.1051/ro :2006013.
- [34] Bourbonnais R.,(1998),Econométrie Manuel et exercices corrigés,Dunod, 1998.
- [35] Bollerslev T.,(1990), Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates : A Multivariate Generalized ARCH Model,Review of Economics and Statistics, 72, pp 498505.
- [36] Bollerslev,T., Engle, R.F.,and Nelson,D.B.,(1994), ARCH models,In : Engle R, McFadden D (eds) Handbook of Econometrics. North Holland, Amsterdam, pp 2959–3038 [https://doi.org/10.1016/S1573-4412\(05\)80018-2](https://doi.org/10.1016/S1573-4412(05)80018-2).
- [37] Bollerslev.TP, Wooldridge JM.,(1992), Quasi maximum likelihood estimation of dynamic models with time-varying covariances,Econom Rev 11 :143–172
- [38] Bollerslev, T., Chou,R., and Kenneth, F. Kroner,K,F.,(1992),ARCH modeling in finance : A review of the theory and empirical evidence,Journal of Econometrics, 52, (1-2), 5-59
- [39] Bollerslev, T.,(1986), General Autoregressive Conditional Heteroscedasticity,Journal of Econometrics, 31, 307-327. [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(86\)90063-1](https://doi.org/10.1016/0304-4076(86)90063-1)
- [40] Bruce E H.,(1994), Time series analysis james,D. Hamilton Princeton University Press, 1994 DOI : <https://doi.org/> Published online by Cambridge University Press : 11 February 2009
- [41] Bertrand P. et Prigent J.L.(2006), Gestion de portefeuille, Economica.
- [42] Bressoud E. et Kahané J.-C.,(2008), Statistique descriptive,Coll. Synthex Sciences de Gestion, Pearson Education France, 2008.
- [43] Broihanne M., M. Merli et Roger P.,(2004), Finance comportementale Economica.
- [44] Black,F., et Litterman R.,(1992), Global Portfolio Optimization, Financial Analysts Journal, septembre, 28-43.
- [45] Breuer.T.,and Krenn.,(2000),Identifying Stress Test Scenarios,Oesterreichische Nationalbank Otto Wagner-Platz 3, A-1090 Wien, Austria.
- [46] Bera, A. K., et Higgins, M. L.,(1993), ARCH Models : Properties, Estimation and Testing,Journal of Economic Surveys, 7(4), 307-366.
- [47] Bauwens, L., Laurent, .S and Jeroen V. K. Rombouts.,(2006),Multivariate GARCH models : a survey,Journal of Applied EconometricsVolume 21, Issue 1 p79-109 Research Article Free Access 16, <https://doi.org/10.1002/jae.842> Citations : 996
- [48] Black, Fischer.,(1976), The pricing of commodity contracts,Journal of Financial Economics, 3, 167-179.
- [49] Braun, P., Nelson, D., and Sunier, A.,(1995),Good news, Bad news, Volatility and Betas. Journal of Finance, 50(5), 1575-1603.
- [50] Carol. A and Sheedy.,(2007), Model-Based Stress Tests : Linking Stress Tests to VaR for Market Risk,ICMA Centre Discussion Papers in Finance DP2007-02.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [51] Calvo.S and Reinhart.M.,(1996), Capital Flows to Latin America :Is There Evidence of Contagion Effects.
- [52] Chen.B, Chen.X and Kanzow.,(1997). A Penalized Fischer Burmeister NCP Function : Theoretical Investigation And Numerical Results,Results of this paper were presented at The International Symposium on Mathematical Programming in Lausanne,Switzerland,August 24-29.
- [53] Ciarlet.P.G.,(1982), Introduction à l'analyse numerique matricielle et a l'optimisation,Masson,ISBN 2-225-68893-1.
- [54] Cours de la bourse.,(1998), Cours, cotations des actions et conseils boursiers sur les titres,[en ligne]. site : <http://www.boursier.com/>.
- [55] Carmen J. N.,(1990), Sporadic breakdowns of stability in the PBL,Atmospheric Turbulence Atmospheric and Diffusion Admintitration, Division, Air Resources Laboratory, National P.O. Box 23456, Oak Ridge, TN 37831, U.S.A.
- [56] Collie, R.,(2015). Perspectives on Risk Management : Ten Conversations, Russell Investments Research.
- [57] Dodge Y and Rousson V.,(2004),Analyse de régression appliquée », Dunod.
- [58] Demailly.J.P.,(1996). Analyse Numerique Et Équation Différentielles ,collection Grenoble Sciences.
- [59] Danny C.Sorensen.,(1985),Analysis of Pairwise Pivoting in Gaussian Elimination, Vol.C-34,NO.3.IEEE Transactions On Computers.
- [60] Desquilbet J B. Le MEDAF Modèle d'évaluation des actifs financiers Université d'Artois.
- [61] Dor E.,(2004),Économétrie,Coll. Synthex Sciences de gestion, Pearson Education France.
- [62] Dussart J, Joukoff N., Loulit A. et Szafarz A.,(2004), Mathématiques appliquées à la gestion,Coll. Synthex Sciences de Gestion, Pearson Education France, 2004.
- [63] De Marnix,G. et Vrins,F.,(2017),Analyse du phénomène de concentration dans la théorie de Markowitz et étude comparative d'approches alternatives,Louvain School of Management, université catholique de Louvain.
- [64] Engle, R.Ding, Z.,(2001),Large scale conditional covariance matrix modeling, estimation and testing,NYU Working Paper No. FIN-01-029.
- [65] Engle, R. F.,(2009), Anticipating correlations : a new paradigm for risk management. Princeton,Princeton University Press.
- [66] Engle , R. F.,(1982), Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of variance of u.k inflation,Econometrica, 50, 987- 1008.
- [67] Engle, R. F.,(2002),Dynamic conditional correlation : a simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity model,Journal of Buiness, Economie Statistics, 20(3), 339-350.
- [68] Engle R.,Cappiello L. and Sheppard K.,(2003),Asymmetric dynamics in the correlations of global equity and bond returns,European Central Bank Working Paper Series, Working Paper No. 204.
- [69] Engle, R. F. Bollerslev T. and Wooldridge, J. M.,(1988), A capital asset pricing model with time-varying covariance,Journal of Political Economy, 96, pp 116-31.

- 
- [70] Engle.R. and Mezrich.J.,(1996), Garch for Groups : A round-up of recent developments in Garch techniques for estimating correlation,risk-london,risk magazine, risk magazine limited
- [71] Engle R.,VK Ng. and Rothschild.M.,(1990),Asset pricing with a factor-ARCH covariance structure : Empirical estimates for treasury bills,Journal of econometrics. Elsevier.
- [72] Engle,R., and Kroner, K. F.,(1995), Multivariate Simultaneous Generalized ARCH,Econometric Theory, 11, issue 1, p. 122-150.
- [73] Engle,R.,and V. Ng.,(1993),Measuring and testing the impact of news on volatility, Journal of Finance 48, 1749–1778.
- [74] Engle, R.F., Cappiello,L ., and Sheppard,K.,(2006), Asymmetric dynamics in the correlations of global equity and bond returns,Journal of Financial Econometrics, 25,pp. 537 - 572
- [75] Embrechts.P. E., Mcneil A. and Stramann.D.,(1999),Correlation and dependence in risk management : properties and pitfalls,Departement mathematik, ethz CH-8092 z.urich, switzerland
- [76] Falbo.P and Grassi.R.,(2012), Does Expectation of Correlation Breakdown in Financial Market Fulfill Itself,Department of statistics and quantitative methods, university of milanobicocca, milano, Italy.
- [77] Falbo.P and Grassi.R.,(2011), Market Dynamics When Agents Anticipate Correlation Breakdown, Hindawni Publishing Corporation, Discrete Dynamics in Nature and Society, Article ID 95987,33 page, doi 10.1155/959847.
- [78] Forbes.C and Rigobon.R.,(1999),No Contagion, Only Interdependence : Measuring Stock Market Co-movements,Article in The Journal of Finance ·August.
- [79] François Longin and Bruno Solnik.(1999), Correlation structure of international equity markets during extremey volatile periods,Keywords : international equity markets, volatility, correlation and extreme value theory.JEL classification numbers : G15, F3.
- [80] Francq.C. (2007). Modèles à volatilité stochastique, modèles à changement de régime markovien, Université de Montréal.
- [81] Peter Grundke, Kamil Pliszka and Michael Tuchscherer.,(2019), Model and estimation risk in credit risk stress tests,deutsche bundesbank discussion paper no :3
- [82] Fokou,R.,(2006),Mesure du risque de marché d'un portefeuille de type Actions (ValueAt-Risk, Value-At-Risk Conditionnelle), euro institut, d'actuariat jean dieudonne-euria.
- [83] Franck Moraux.,(2010), Analyse de la rentabilité et du risque des portefeuilles actions,Pearson Education France, Finance de marché.
- [84] Fama E.,(1970), Efficient Capital Markets : A Review of Theory and Empirical Work,Journal of Finance, 25 (2), 383–417.
- [85] Fama E.,(1976),Foundation of Finance,New York : Basic Book
- [86] Fama E.,(1991),.newblockEfficient Markets,Journal of Finance , 46, 1575-1617.
- [87] Fama E.,(1998),Market Efficiency, Long-Term Returns, and Behavioural Finance,Journal of Financial Economics, 49 , 283-306.
- [88] Grundke.P.,Tuchscherer.M. and Pliszka.K.,(2019), Model and estimation risk in credit risk stress tests,Osnabrück University, Chair of Banking and Finance, KatharinenstraBe 7, Discussion Papers represent the authors' personal opinions and do not necessarily reflect the views of the Deutsche Bundesbank or the Eurosystem.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [89] Genin.M.,(2015), Corrélation Régression linéaire Université de Lille 2 EA 2694-Santé Publique : Épidémiologie et Qualité des soins.
- [90] Goffin.R.,(2004), Principe de Finance moderne 4ème Édition, Paris : Economica EAN1 :9782717848731.
- [91] Gerad G.S.,(2001), Introduction aux Méthodes de points intérieurs, Département de Mathématique et Génie industriel École Polytechnique de Montréal.
- [92] Gill.P.E,murray.W. and Wright.M.H.,(1981), Partical Optimisation Academic Press,London.
- [93] Granger C. W. J.,(1969), Investigating causal relations by econometric models and cross spectral methods,Econometrica, 424 – 438.
- [94] Goffin.R.,(2004), Principe de finance moderne,4ème Édition, Paris : Economica EAN1 :9782717848731.
- [95] Gerad G.S.(2001), Introduction aux méthodes de points intérieurs, département de mathématique et génie industriel École polytechnique de Montréal.
- [96] Guillet L,Hermand D.,(2012), Critique de la mesure du stress, Annee Psychologique, Centre Henri Pieron/Armand Colin, pp.129-164.hal-00755690.
- [97] Giraud R and Chaix N.,(1997),« Econométrie », PUF, 1994.
- [98] Hurlin,C., (2006), Econométrie pour la Finance Modèles ARCH – GARCH Applications à la VaR. Documents et Supports, [www.univ-orleans.fr/deg/masters/ESA/](http://www.univ-orleans.fr/deg/masters/ESA/)
- [99] Hurlin,C., (2008), Intoduction à la Value-at-Risk, Université d’Orléans, Laboratoire d’Economie d’Orléans (UMR CNRS 6221) Master Econométrie et Statistique Appliquée (ESA), Université d’Orléans.
- [100] CHRISTIE A. et ANDREW A.,(1982), The Stochastic Behavior of Common Stocks Variances : Value, Leverage, and Interest Rate Effects,Journal of Financial Economics 23, 1982, 407-432.
- [101] Hurlin, C. and Tokpavi, S.,(2007), Une évaluation des procédures de backtesting, tout va pour le mieux dans le meilleur des mondes, In Finance, vol. 29(1) :pp. 53–80.
- [102] Hurlin, C.,(2010), Econométrie pour la finance, Modèles garch univariés.
- [103] Hurlin, C., and Pérignon, C.,(2012), Margin Backtesting, Working Papers halshs-00746274, HAL.
- [104] Hurlin, C. and Pérignon, C.,(2013), Systemic Risk Score, A Suggestion, Working Papers halshs-00867063, HAL.
- [105] Hurlin, C. Tokpavi, S.,(2006), Backtesting VaR Accuracy : A New Simple Test, Working Papers halshs-00068384, HAL.
- [106] Hurlin, C. Tokpavi, S.,(2007), Un test de validité de la value at risk. In Revue économique, vol. 58(3) :pp. 599–608.
- [107] Hennani,R.,(2015), Les approches chaos-stochastiques du risque de marché thèses délivrée par l’université de Montpellier .
- [108] Hartmann.P and Straetmans.S.,(2004), Asset market linkages in crisis periods Review of Economics and Statistics, vol. 86, no. 1, pp. 313– 326.
- [109] Haas M, Mittnik S, and Paoletta M S.,(2008), Asymmetric Multivariate Normal Mixture GARCH, Center for Financial Studies

- [110] Halilbegovic.S, and Vehabovic.M.,(2016), Backtesting Value at Risk Forecast : the Case of Kupiec Pof-Test. Published in the Russian Federation European Journal of Economic Studies Has been issued since 2012. ISSN : 2304-9669 E-ISSN : 2305-6282,Vol. 17, Is. 3, pp. 393-404.
- [111] Hunaut.G.,(2005), quelques Rappels sur les Analyses Statistiques.Université d'Angers.
- [112] Hafner,C.M.,and Franses, P.H.,(2009), A generalized dynamic conditional correlation model : simulation and application to many assets, *Econometric Reviews* 28 (6), 612-631.
- [113] Ilmanen, A.,(2003), Stock-bond correlations. *The Journal of Fixed Income*.
- [114] Jansen B., Swinkels P C.J., Teeuwen G J.A., Antwerpen B V F., and Fleuren, H.A.,(2003), Operational planning of a large scale multi modal transportation system, Centre for Quantitative Methods CQM b.v., P.O. Box 414, 5600 AK Eindhoven, The Netherlands b Altera Corp. 101 Innovation Drive, San Jose, CA 95134, USA c Tilburg University, P.O. Box 90153, 5000 LE Tilburg, The Netherlands.
- [115] Jin.X. et Maheu.J.M.,2016, Modélisation de la répartition des covariances dans GARCH multivariée,<https://doi.org/10.1016/j.jeconom>. *Journal d'économétrie*, Volume 194, numéro 1, Pages 1-23.
- [116] Jorion P.,(1986), International Portfolio Diversification with Estimation Risk, *Journal of Business*, 58, pp. 259-278.
- [117] Johnston J and Dinardo J.,(1997), Méthodes économétriques,*Economica*.
- [118] Karolyi,G. A.,(1995), A Multivariate GARCH Model of International Transmissions of Stock Returns and Volatility : The Case of the United States and Canada,*Journal of Business Economic Statistics*,Vol. 13, No. 1 , pp. 11-25 (15 pages),Published By : Taylor,Francis, Ltd.<https://doi.org/10.2307/1392517>.
- [119] Kroner, K.F., and Ng, V.K.,(1998), Modeling Asymmetric Comovements of Asset Returns, *Review of financial Studies*, 11, 817-844.<http://dx.doi.org/10.1093/rfs/11.4.817>.
- [120] Kroner,.KF., and Claessens.S.,(1991), Optimal dynamic hedging portfolios and the currency composition of external debt,*Journal of International Money and Finance*, vol. 10, issue 1, 131-148.
- [121] Kozan, E.,(2003), Container Transfer Logistics at Multimodal Container Terminals,School of Mathematical Sciences, Queensland University of Technology Brisbane Qld 4001 Australia
- [122] Koon Chung Hui.,(2007), Développement d'un modèle GARCH multivarié pour les marchés boursiers asiatiques avec une application en gestion de risque international,HEC Montréal Éditeur,École des hautes études commerciales.
- [123] Kozhemyak, A.,(2006), Modélisation de séries financières à l'aide de processus invariants d'échelle. Application à la prédiction du risque,thèse : école polytechnique centre de mathématique appliquées.
- [124] Kim S, Shephard N, and Chib S.,(1998), Stochastic volatility : likelihood inference and comparison with ARCH models,*Rev Econ Stud* 65 :361-393.
- [125] King A Mervyn and Wadhvani Sushil.,(1990), Transmission of Volatility between Stock Markets,*Review of Financial Studies*, 1990, vol. 3, issue 1, 5-33.
- [126] Kuhn H.Tucker, A.,(1951), Programming Nonlinear,Actes du 2e Symposium Berkeley. Berkeley : University of California Press. pp. 481-492. M. 0047303.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [127] Kornprobst A.,(2017), Anticiper le risque de crise financière : nouveaux outils pour les investisseurs,European institute of Financial Regulation.
- [128] Kharroubi I.,(2015), Gestion de Portefeuilles,Cours Mathématiques de la modélisation et de décision .
- [129] Kim.J and Finger.C.C.,(2000), , A stress test to incorporate correlation breakdown.RiskMetrics Group, 44 Wall St., New York, New York 10005, USA.
- [130] Kupiec.P.,(2000), Stress tests and risk capital.Article in Journal of Risk.DOI : 10.21314/JOR.2000.030.
- [131] Kwan, W., Li, W. K. and Ng, K. W.,(2010), A Multivariate Threshold Varying Conditional Correlations Model.January Econometric Reviews 29(1) :20-38,DOI : 10.1080/07474930903327260.
- [132] Lardic S., Mignon V.,(2002), Econométrie des series temporelles macroéconomiques et financière,Economica,
- [133] LE Gallo.J and Mult. J.,(2014),Autocorrélation Spatiale des erreurs et erreurs de mesure : quelles interactions,Région et Développement n :40.,Classification JEL-C13, C21.
- [134] Longin, F. and Solnik, B.,(1999), Correlation structure of international equity markets during extremely volatile periods,First version : May 1996 This version : July 2, 1999.
- [135] Longin, F. and Solnik, B.,(1995), Is the Correlation in International Equity Returns Constant,Journal of International Money and Finance, 14, 3-26.
- [136] Loretan.M and English W. B.,(2000).Evaluating correlation breakdowns during periods of market volatility,Board of Governors of the Federal Reserve System International Finance Working Paper 658.
- [137] Loretan.M and English, W.,(2000), Special feature : Evaluating changes in correlations during periods of high market volatility,Board of Governors of the Federal Reserve System International Finance.
- [138] Iouditski.A,Optimisation analyse convexe théorie de programmation non-linéaire Université Joseph Fourier Magistère de Mathématique.
- [139] Longin,F and Bruno S.,(1998), Correlation Structure of International Equity Markets During Extremely Volatile Periods, mimeo, Group HEC, April.
- [140] Liu W.M, Yu.I and Ho.I.Y.,(2017), Public News Arrival and Cross-Asset Correlation Breakdown : Implications for Algorithmic Trading Australian National University.International Review of Finance.
- [141] Mahamat H.S.,(2017), Estimation de la volatilité des données financières à haute fréquence : une approche par le Modèle Score-GARCH,thèse Laboratoire Montpellierain d'Economie Théorique et Appliquée (LAMETA).
- [142] H. Markowitz.,(1952),Portfolio selection, The journal of finance, 7(1), 77-91.
- [143] Markowitz, H.M.,(1957), The Elimination Form of the Inverse and Its Application to Linear Programming,Management Science. 3 (3) : 255–269. doi :10.1287/mnsc.3.3.255.
- [144] .Markowitz.,(1990),Présentation Le modèle d'Harry Markowitz,(Travaux de 1954 et prix Nobel en1990)Transcription de la présentation.
- [145] Mandelbrot, B. B., (1963). The Variation of Certain Speculative Prices. The Journal of Business 36, No. 4, (1963), 394-419.

- 
- [146] Medio A. and Lines. M.,(2001), *Nonlinear Dynamics* Cambridge University Press, Cambridge.
- [147] Michael Genin.,(2015), *Corrélation régression linéaire*, université de Lille 2 EA 2694-Santé Publique : Épidémiologie et Qualité des soins.
- [148] Merton R.,(1972), *An Analytical Derivation of the Efficient Portfolio Frontier*, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 10, 1851-1872.
- [149] Michaud R.,(1989), *The Markowitz Optimization Enigma : Is Optimized Optimal*, *Journal Financial Analyst Journal*, 45(1), 31-42.
- [150] Mignon V.,(2008), *Les ambiguïtés de la théorie de l'efficience informationnelle des marchés financiers*, *Regards Croisés sur l'Economie*, Numéro 3.
- [151] Nagih.A, Gerard P.,(1999), *Problème Fractionnaire :tour d'horizon sur les application et méthode de résolution*, *Rairo. recherche opérationnelle*, tome 33,no :4,p.383-419.
- [152] *Optimal Sup/Spé.*,(2015), *Calculer une covariance Maths Spé - Concours 2015*, 11, rue Geoffroy l'Angevin 75004 Paris.
- [153] Pastre.D.,(2003), *Résolutions des système linéaire Méthode de Gauss*.
- [154] Perold.A.,(2004), *The capital Asset Pricing Model*, *Journal of Economica Perspectives-Vol 18,no3.page-3-24*.
- [155] *Portrait R. et Poncet.P.*,(2008), *Finance de Marché*, Dalloz.
- [156] Perold A.,(2004), *The CAPM* , *Journal of Economic Perspectives*, vol.18
- [157] PROÏA.F.,(2003), *Autocorrélation et Stationnarité dans le Processus Autorégressif* Thèses de l'Université de Bordeaux I, N d'ordre : 4877.
- [158] Qi.L and Sun.D.,(2002), *Smoothing Functions and Smoothing Newton Method For Complementarity and Variational Inequality Problems* *journal of Optimization Theory and Applications* :vol.133,no.1,pp.121-147.
- [159] Rakotomalala,R.,(2017), *Analyse de corrélation,étude des dépendances variables quantitatives Version 1.1*, Université Lumière Lyon 2.
- [160] Rakotomalala,R.,(2010), *Régression linéaire multiple,Prédire les valeurs d'une variable continue*.
- [161] Roy.M.,(2007), *Prévision de la corrélation réalisée à l'aide du modèle midas*, HEC, Montréal Affiliée à l'université de Montréal.
- [162] Ronn Ehud.,(1998), *The investement portfolio user's manual*,Livre, Edité par WILEY - 1998 -Langue anglais,Description physique,Non paginé ISBN,0-471-24610-7
- [163] Ronn E, Peter D. Rubinstein, and Fung-Shine Pan.,(1995), *An Empirical Estimate of the Prepayment Option Value in Fixed-Rate GNMA Mortgage-Backed Securities*. *Journal of the American Real Estate and Urban Economics Association* 23, 1-20.
- [164] Ehud I. Ronn and Senbet L W.,(1995), *Debt and Market Incompleteness*. *Journal of Banking and Finance* 19, 1379-1400.
- [165] Ronn.E.I and Sayrak.A.,(2000), *The Impact of Large Changes in Asset Prices on Intra-Market Correlations in the Domestic and International Markets*,Stathis Tompaidis Information, Risk and Operations Management Department and Department of Finance McCombs School of Business University of Texas at Austin.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [166] Rioux, D.,(2013), Stratégie à volatilité constante,Sciences de la gestion (Finance) Hec Montréal.
- [167] Saïmi, N.,(2002), Estimation de la volatilité et filtrage non linéaire,Département de mathématiques et d'informatique,l'Université du Québec à Trois-Rivières.
- [168] Sfez, M.,(2017), La corrélation entre les actions et les obligations est-elle positive ou négative, Bob Collie Chef Stratégiste, Directeur Général,Russell Investments.
- [169] W. F. Sharpe.,(1966),Mutual fund performance, Journal of Business, pp. 119–138.
- [170] Souad.H.,(2017), Étude prévisionnelle de la volatilité des prix du pétrole par les modèles ARCH et GARCH,Université Abdelhamid ibn badisse mostaganem Faculté des sciences économiques, sciences commerciales et des sciences de gestion Département des sciences économiques, 20.
- [171] Sonko.,(2016),Modélisation de la dépendance dynamique en tarification en tarification et en gestion des risques des risques financiers sous Modèles Garch, Université du Québec à Montréal, Mémoire présenté Comme exigence partielle de la maitrise en mathématiques.
- [172] So Mike K. P., and Yip,Iris W.H.,(2010),Multivariate GARCH Models with Correlation Clustering,Hong Kong University of Science Technology (HKUST) - Department of Information Systems, Business Statistics Operations Management,affiliation not provided to SSRN.
- [173] Serge, V.O.,(2017), La dynamique des volatilités et des corrélations des marchés européens des actions et des obligations, Mémoire présenté en vue de l'obtention du master d'ingénieur de gestion.
- [174] Sheppard.K., and Engle.R. F.,(2001), Theoretical and empirical properties of dynamic conditional correlation multivariate garch.
- [175] Silvo Dajcman.,(2013), Forbes and Rigobon's Method of Contagion Analysis with Endogenously Defined Crisis Periods-an Application to Some of Eurozone's Stock Markets,Inzinerine Ekonomika-Engineering Economics, 2013, 24(4), 291-299,<http://dx.doi.org/10.5755/j01.ee.24.4.5419>
- [176] Schachter.B.,(2001),Stress Testing For Fun And Profit,Article in Journal of Risk, Source : CiteSeer.
- [177] Schwert, G.W.,(1989), Why does Stock Market Volatility Change over Time,volume 44, p. 1115 -1153,<https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1989.tb02647.x>.
- [178] Terraza.M et ZATOUI Zatoui.A.,(1993), Modélisation l'hétéroscédasticité conditionnelle,Journal de la Société de Statistique de Paris, tome 134, no :3, 1993.
- [179] Tse Y. K., and Tsui A.,(2002), A Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Model with Time-Varying Correlations,Journal of Business and Economics Statistics, 20, pp. 351-362.
- [180] Tse Y.K.,(2000),A test for constant correlations in a multivariate GARCH, model, Journal of Econometrics, 98, 107–127.
- [181] Tong, H., and Lim, K. S.,(1980), Threshold Autoregression, Limit Cycles and Cyclical,Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), Vol. 42, No. 3. (1980), pp.245-292.
- [182] Tully, E., and Lucey B.M.,(2006),A power Garch examination of the gold market,School of Business Studies, University of Dublin, Trinity College, Dublin 2, Ireland. Research in International Business and Finance 21 (2007) 316–325.

- 
- [183] Tsui, Albert and Yu, Qiao., (1999), Constant conditional correlation in a bivariate GARCH model : evidence from the stock markets of China, *Mathematics and Computers in Simulation (MATCOM)*, vol. 48, issue 4, 503-509
- [184] Ilmanen, A., (2003), Stock-Bond Correlations, *The Journal of Fixed Income*.
- [185] Viviane, P., (2005), Traitement des valeurs aberrantes : concepts actuels et tendances générales. Section Biométrie, Gestion des Données et Agrométéorologie. Centre wallon de Recherches agronomiques. Rue de Liroux, 9. B-5030 Gembloux (Belgique). *Biotechnol. Agron. Soc. Environ.* 2005 9 (1), 19–34.
- [186] Vuibert., (2017), Utiliser la théorie du portefeuille, *Gestion financière*, 978-2-311-40174-5.
- [187] Wu, Eliza., arborz Moshirian and Suk-Joong Kim (2000), Dynamic Stock Market Integration Driven by the European Monetary Union : An Empirical Analysis *Journal of Banking , Finance (J BANK FINANC)*. DOI : 10.1016/j.jbankfin.
- [188] Guojun Wu and Geert Bekaert., (2000), Asymmetric Volatility and Risk in Equity Markets. *Review of Financial Studies* 13(1) :1-42 DOI : 10.1093/rfs/13.1.1.
- [189] Wooldridge. J., (2000), *Introductory Econometrics, A modern Approach*.
- [190] Wang, S., Mun, H.C. and Dollery, B., (2003), An Analysis of Stress Testing for Asian Stock Portfolios, *Working Paper Series in Economics*, ISSN 1442 2980. <http://www.une.edu.au/febl/EconStud/wps.htm>
- [191] Zamor, E., (2017), Théorie des valeurs extrêmes et stress tests, Société Générale CIB, Mémoire présenté le pour l'obtention du diplôme de Statisticien Mention Actuariat et l'admission à l'Institut des Actuaire, Isup.
- [192] Zangari. P., (1996), An improved methodology for measuring VaR, *RiskMetrics Monitor*, Second Quarter.

## BIBLIOGRAPHIE

---

# Annexes



## .1. MODÈLES ARCH ET CORRÉLATION BREAKDOWN

### .1 Modèles ARCH et Corrélation Breakdown

#### .1.1 Le phénomène de corrélation breakdowns dans les modèles ARCH

	NVS	PFIZER	SANOFI	Merck	JOHNSON	BAYER	EUROFINS	GUERBET	SARTORIUS	VETOQUINOL	LNA	BASTIDE	CELYAD	Nanobiotix	AB	RAMSAY	INNATE	BONE	
<b>Date</b>																			
2010-11-01	-0.007420	0.011481	-0.002563	-0.001652	-0.000784	0.000933	-0.004494	0.017532	0.000606	0.014445	0.010989	0.001078	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
2010-11-02	0.013213	-0.009648	0.015991	0.009931	0.002983	0.017710	-0.018059	-0.017230	0.001213	-0.020712	-0.001359	0.024758	0.000000	0.000000	0.003141	0.018836	0.006623	0.000000	0.000000
2010-11-03	0.005834	0.008023	-0.003092	-0.002732	0.004853	0.008766	-0.000230	-0.021818	-0.001211	-0.003635	-0.004762	-0.002101	0.000000	0.000000	-0.003132	-0.019816	0.000000	0.000000	0.000000
2010-11-04	0.007335	-0.011939	0.023682	0.003835	0.008880	0.025032	0.011957	0.000531	0.003031	-0.001658	-0.004785	0.005263	0.000000	0.000000	-0.001047	0.007640	0.026316	0.000000	0.000000
2010-11-05	-0.007113	-0.011507	-0.011842	-0.025921	-0.001699	-0.009237	0.007271	-0.002256	0.000906	0.013289	0.013049	-0.004188	0.000000	0.000000	-0.015723	-0.001336	-0.006410	0.000000	0.000000
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
2019-10-22	0.004737	-0.000823	-0.013496	-0.038097	0.009217	-0.017496	0.007601	0.000000	-0.022455	0.000000	0.011555	0.000000	-0.078916	0.013699	-0.012658	0.000000	-0.024540	-0.023290	-0.023290
2019-10-23	-0.003909	0.008333	0.009929	0.019311	0.005418	0.030607	0.007544	0.015119	-0.022205	0.000000	-0.019730	-0.007692	0.030691	-0.022258	-0.005128	0.005714	-0.020665	0.013413	0.013413
2019-10-24	0.007041	-0.010335	0.013328	-0.003499	-0.018476	0.006479	0.019186	0.005319	0.018794	0.000000	-0.009534	0.002584	0.012407	-0.015447	-0.007732	-0.022727	0.003670	0.010294	0.010294
2019-10-25	0.000802	0.010442	-0.000431	-0.003875	0.006667	-0.011803	0.013315	0.066667	0.006918	0.003610	-0.003209	0.011598	-0.011029	0.040462	0.023377	0.005814	-0.014625	-0.018923	-0.018923
2019-10-28	-0.004467	0.013870	0.000863	-0.000729	0.006467	-0.002714	0.036248	-0.005952	0.003817	0.025180	0.016094	-0.031847	-0.008674	0.022222	-0.020305	0.011561	0.010204	-0.007418	-0.007418

Tableau .1.1 – Les données

```
In [12]: data = pf.GARCH.transformer(data)
```

```
Out[12]:
```

	High	Low	Open	Close	Volume	Adj Close
<b>Date</b>						
2010-11-01	0.017532	-0.007420	0.018870	0.007734	0.057649	0.033629
2010-11-02	0.024758	-0.020712	0.018929	0.007793	0.058618	0.034194
2010-11-03	0.008766	-0.021818	0.013952	0.002816	-0.023503	-0.013710
2010-11-04	0.026316	-0.011939	0.022279	0.011144	0.113905	0.066444
2010-11-05	0.013289	-0.025921	0.012590	0.001454	-0.045979	-0.026821
...	...	...	...	...	...	...
2019-10-22	0.013699	-0.078916	0.003848	-0.007288	-0.190216	-0.110959
2019-10-23	0.030691	-0.022258	0.019053	0.007917	0.060671	0.035391
2019-10-24	0.019186	-0.022727	0.016747	0.005612	0.022628	0.013199
2019-10-25	0.066667	-0.018923	0.025033	0.013897	0.159338	0.092947
2019-10-28	0.036248	-0.031847	0.019798	0.008662	0.072960	0.042560

Tableau .1.2 – Transforme les données

## .1.2 Statistiques descriptives des séries

	Observations	NAs	Minimum	Quartile 1	Median	Arithmetic Mean	Geometric Mean	Quartile 3	Maximum	SE Mean	LCL Mean (0.95)	UCL Mean (0.95)	Variance	Stdev	Skewness	Kurtosis
NVS	1488	0	-0.0538	-0.0057	0.0002	0.0002	0.0001	0.0061	0.0485	0.0003	-0.0004	0.0007	0.0001	0.0109	0.0688	2.2357
PFIZER	1488	0	-0.0642	-0.0054	0.0000	0.0002	0.0001	0.0059	0.0707	0.0003	-0.0004	0.0007	0.0001	0.0113	0.0502	3.5739
SANOFI	1488	0	-0.0899	-0.0077	0.0000	0.0000	-0.0001	0.0077	0.0556	0.0003	-0.0007	0.0007	0.0002	0.0132	-0.3819	3.3715
Merck	1488	0	-0.0606	-0.0061	0.0005	0.0004	0.0004	0.0072	0.1041	0.0003	-0.0002	0.0011	0.0002	0.0124	0.4472	6.4231
JOHNSON	1488	0	-0.1004	-0.0044	0.0003	0.0003	0.0002	0.0058	0.0496	0.0003	-0.0003	0.0008	0.0001	0.0101	-1.0405	9.4892
BAYER	1488	0	-0.1128	-0.0086	0.0000	-0.0003	-0.0004	0.0083	0.0920	0.0004	-0.0011	0.0006	0.0003	0.0166	-0.3288	4.3111
EUROFINS	1488	0	-0.1023	-0.0088	0.0009	0.0007	0.0005	0.0103	0.1061	0.0005	-0.0003	0.0017	0.0004	0.0194	0.1005	3.8994
GUERBET	1488	0	-0.1461	-0.0102	0.0000	0.0007	0.0005	0.0110	0.2083	0.0006	-0.0004	0.0019	0.0005	0.0225	0.5629	8.7030
SARTORIUS	1488	0	-0.1252	-0.0089	0.0017	0.0015	0.0013	0.0109	0.1520	0.0005	0.0006	0.0024	0.0003	0.0183	0.3844	6.5708
VETOQUINOL	1488	0	-0.1013	-0.0064	0.0000	0.0006	0.0005	0.0073	0.1043	0.0004	-0.0002	0.0013	0.0002	0.0151	0.2067	5.2593
LNA	1488	0	-0.0610	-0.0070	0.0000	0.0010	0.0008	0.0088	0.1106	0.0004	0.0002	0.0017	0.0002	0.0155	0.5440	4.2403
BASTIDE	1488	0	-0.0851	-0.0090	0.0000	0.0010	0.0008	0.0101	0.0761	0.0005	0.0000	0.0019	0.0003	0.0186	0.2210	1.5477
CELYAD	1488	0	-0.4042	-0.0174	-0.0025	0.0002	-0.0006	0.0152	0.2618	0.0010	-0.0018	0.0021	0.0014	0.0376	-0.4139	17.0094
Nanobiotix	1488	0	-0.2996	-0.0139	-0.0019	0.0008	0.0001	0.0103	0.7953	0.0011	-0.0013	0.0029	0.0018	0.0419	8.0139	135.4671
AB	1488	0	-0.3231	-0.0155	-0.0024	-0.0004	-0.0010	0.0103	0.3964	0.0009	-0.0022	0.0015	0.0013	0.0357	1.2322	25.4171
RAMSAY	1488	0	-0.1454	-0.0071	0.0000	0.0003	0.0002	0.0074	0.0950	0.0005	-0.0005	0.0012	0.0003	0.0174	-0.0364	6.2135
INNATE	1488	0	-0.4007	-0.0163	-0.0017	0.0013	0.0005	0.0135	0.4883	0.0010	-0.0007	0.0033	0.0015	0.0392	2.4034	35.5205

Tableau .1.3 – Statistiques descriptives, des séries de rendements chimie et pharmacie

	NVS	PFIZER	SANOFI	Merck	JOHNSON	BAYER	EUROFINS	GUERBET	SARTORIUS	VETOQUINOL	LNA	BASTIDE	CELYAD	Nanobiotix	AB	RAMSAY	INNATE	BONE
count	2238.000000	2238.000000	2238.000000	2238.000000	2238.000000	2238.000000	2238.000000	2234.000000	2234.000000	2236.000000	2238.000000	2238.000000	1492.000000	1739.000000	2235.000000	2237.000000	2237.000000	996.000000
mean	0.000292	0.000406	0.000230	0.000439	0.000382	0.000154	0.001240	0.000712	0.001589	0.000393	0.000631	0.000784	0.000090	0.000611	0.000252	0.000376	0.001233	-0.001305
std	0.011098	0.011504	0.014523	0.012184	0.009637	0.018040	0.019941	0.023213	0.018156	0.014648	0.014489	0.017597	0.037690	0.039233	0.037613	0.016781	0.037235	0.028760
min	-0.055203	-0.064174	-0.089928	-0.066218	-0.100379	-0.112824	-0.102285	-0.177305	-0.125191	-0.101307	-0.061706	-0.085142	-0.404180	-0.299611	-0.323115	-0.145380	-0.400681	-0.275701
25%	-0.005501	-0.005523	-0.007735	-0.005991	-0.004238	-0.009226	-0.009062	-0.009985	-0.008358	-0.006252	-0.006522	-0.008412	-0.017458	-0.012844	-0.015429	-0.006897	-0.015525	-0.011993
50%	0.000579	0.000297	0.000268	0.000459	0.000307	0.000443	0.000875	0.000000	0.001054	0.000000	0.000000	0.000000	-0.002467	-0.001643	-0.002463	0.000000	0.000000	-0.001042
75%	0.006261	0.006325	0.008684	0.007043	0.005595	0.009501	0.011139	0.011223	0.010841	0.008820	0.007489	0.009315	0.015206	0.009312	0.010166	0.007799	0.013423	0.009232
max	0.056600	0.070667	0.058159	0.104080	0.053821	0.102511	0.106094	0.208295	0.152027	0.104348	0.110647	0.116643	0.261830	0.795276	0.715210	0.094986	0.496241	0.198986

Tableau .1.4 – Les séries de rendements chimie et pharmacie

## .1.3 Les paramètres du modèle dynamiques de corrélation conditionnelle (DCC) GARCH

	mu	omega	alpha1	beta1	shape
CAPGEMINI	0.0006609	1.30e-06	0.1947564	0.7535185	13.511239
CARREFOUR	-0.0001064	0.00e+00	0.0002433	0.9987536	15.585519
DANONE	0.0003337	0.00e+00	0.0158035	0.9789572	10.009001
ENGIE	0.0000321	0.00e+00	0.0017445	0.9964514	6.116185
GENERALE	0.0003477	2.67e-05	0.3982509	0.0000000	3.308930
LOREAL	0.0004594	0.00e+00	0.0158769	0.9782820	6.463259
LVMH	0.0005954	9.00e-07	0.1315878	0.7987643	7.325261
MICHELIN	0.0005246	2.00e-06	0.1360813	0.7317740	13.542924
ORANGE	-0.0002052	1.60e-06	0.1977470	0.7096024	4.463714
PEUGEOT	0.0006464	3.39e-05	0.9541004	0.0000000	2.637216
SODEX	0.0005580	3.00e-07	0.0859965	0.8836250	8.105773
TOTAL	0.0002543	0.00e+00	0.0051049	0.9925423	15.261711
VINCI	0.0006626	2.00e-07	0.0570057	0.9115088	16.125290
VIVENDI	0.0002511	5.00e-07	0.1147605	0.8388101	10.426794

Tableau .1.5 – Paramètres du DCC-GARCH student du CAC40

## .1. MODÈLES ARCH ET CORRÉLATION BREAKDOWN

	mu	omega	alpha1	beta1	shape
NVS	0.0003358	0.0000065	0.0705295	0.8836314	4.268562
PFIZER	0.0004449	0.0000103	0.1858244	0.7537463	4.769785
SANOFI	0.0001028	0.0000015	0.0149721	0.9762670	6.046696
Merck	0.0005082	0.0000194	0.1233785	0.7576605	4.444887
JOHNSON	0.0005635	0.0000053	0.0818493	0.8703485	4.347358
BAYER	0.0001064	0.0000043	0.0404391	0.9466020	4.468602
EUROFINS	0.0009861	0.0000023	0.0449992	0.9540006	4.001510
GUERBET	0.0004441	0.0001006	0.1484109	0.7091604	3.119732
SARTORIUS	0.0015213	0.0000866	0.1455225	0.6048172	4.422074
VETOQUINOL	0.0001166	0.0000506	0.3644520	0.6345456	2.681044
LNA	0.0005998	0.0000073	0.1024540	0.8859842	3.779448
BASTIDE	0.0004477	0.0000045	0.0806293	0.9158789	4.700939
CELYAD	-0.0019995	0.0003964	0.4373503	0.4039770	3.252740
Nanobiotix	-0.0016409	0.0000779	0.3202519	0.6787481	3.124028
AB	-0.0026691	0.0005782	0.5575424	0.4414561	2.367411
RAMSAY	-0.0001179	0.0000055	0.0572320	0.9417680	2.867567
INNATE	-0.0015879	0.0000116	0.0165032	0.9725528	2.916925

Tableau .1.5 – Paramètres du DCC-GARCH student de chimie et pharmacie

## .1.4 Estimation DCC-GARCH

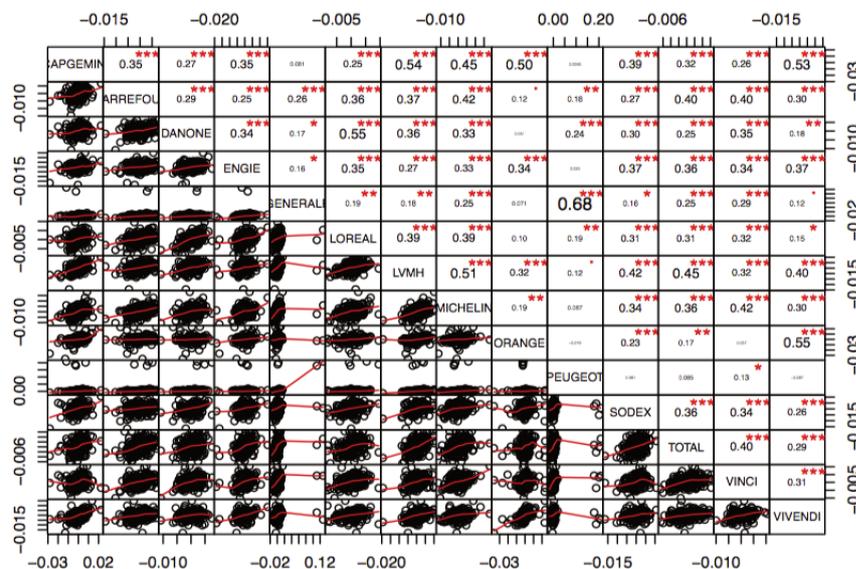


Tableau .1.6 – La corrélation CAC40

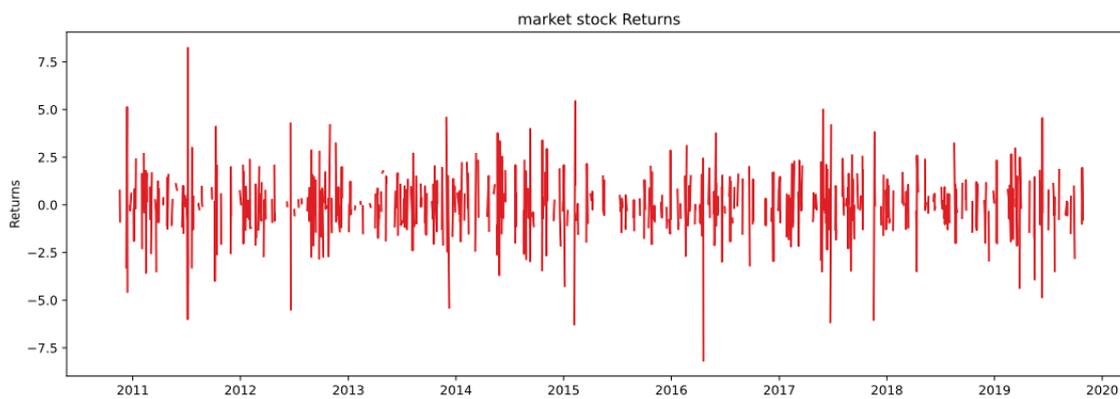
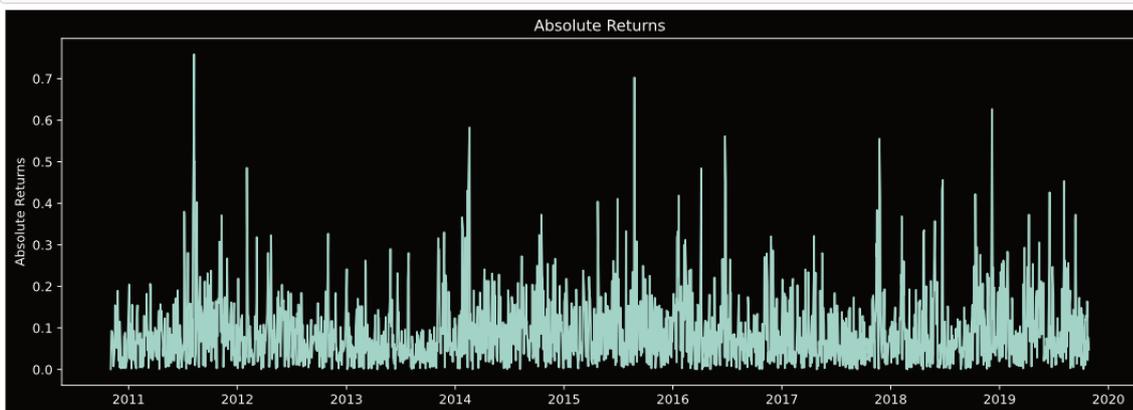


FIGURE 6 – Rendement



```
model = pf.GARCH(returns, p=1, q=1)
x = model.fit()
x.summary()
```

GARCH(1,1)

```
=====
Dependent Variable: vech model          Method: MLE
Start Date: 2010-11-03 00:00:00        Log Likelihood: 1674.0227
End Date: 2019-10-28 00:00:00         AIC: -3340.0454
Number of observations: 2236           BIC: -3317.1956
=====
```

Latent Variable	Estimate	Std Error	z	P> z	95% C.I.
Vol Constant	0.0037				
q(1)	0.3151				
p(1)	0.4547				
Returns Constant	0.0001	0.0019	0.0754	0.9399	(-0.0036   0.0039)

Tableau .1.7 – Estimation DCC-GARCH chimie et pharmacie

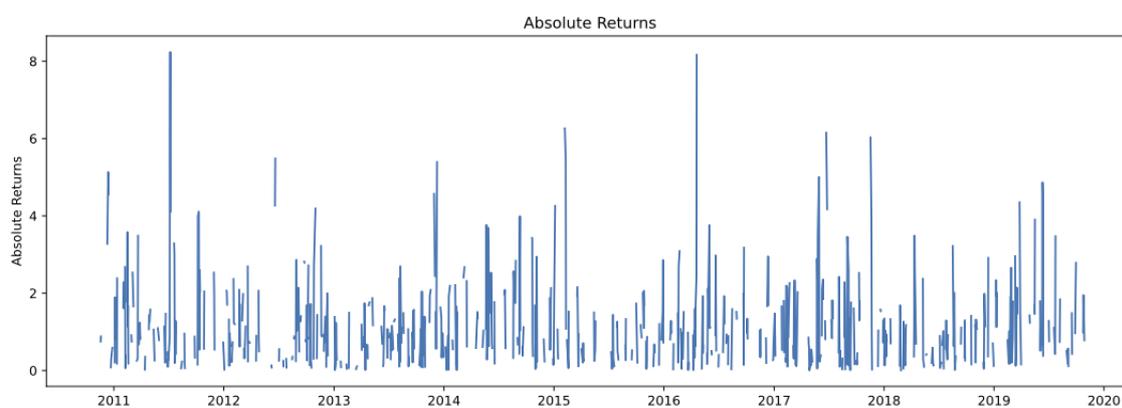


FIGURE 7 – valeur absolue du Rendement

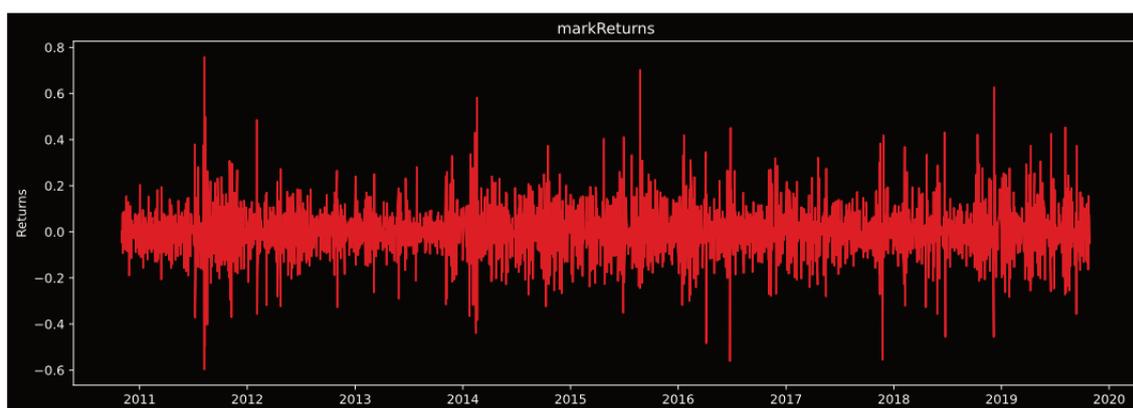
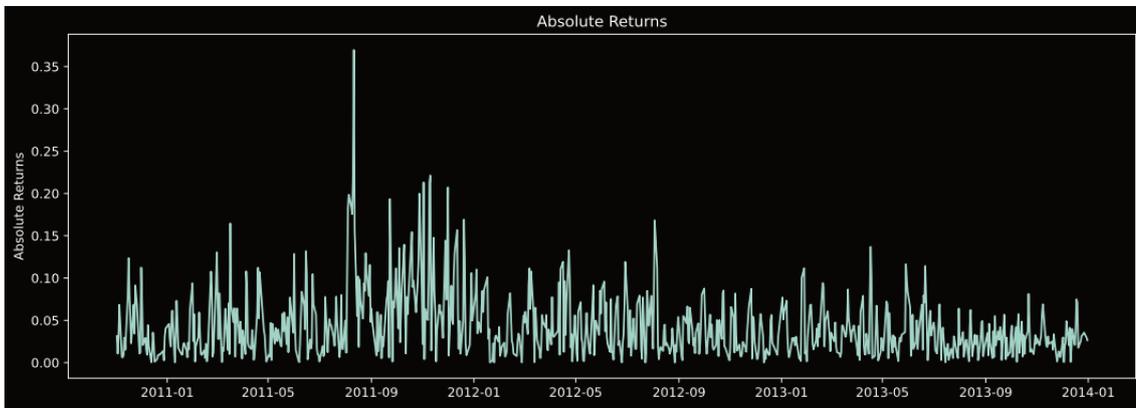


FIGURE 8 – Rendement DCC-GARCH chimie et pharmacie



```

model = pf.GARCH(returns, p=1, q=1)
x = model.fit()
x.summary()

```

```

GARCH(1,1)
=====
Dependent Variable: bekk model          Method: MLE
Start Date: 2010-11-03 00:00:00        Log Likelihood: 1223.5239
End Date: 2013-12-31 00:00:00         AIC: -2439.0477
Number of observations: 784            BIC: -2420.3901
=====
Latent Variable      Estimate  Std Error  z      P>|z|  95% C.I.
=====
Vol Constant         0.0006
q(1)                 0.4052
p(1)                 0.4305
Returns Constant     -0.0003   0.0925    -0.0037 0.9971  (-0.1817 | 0.181)
=====

```

Tableau .1.8 – Estimation DCC-GARCH JOHNSON BAYER 3-ruptures

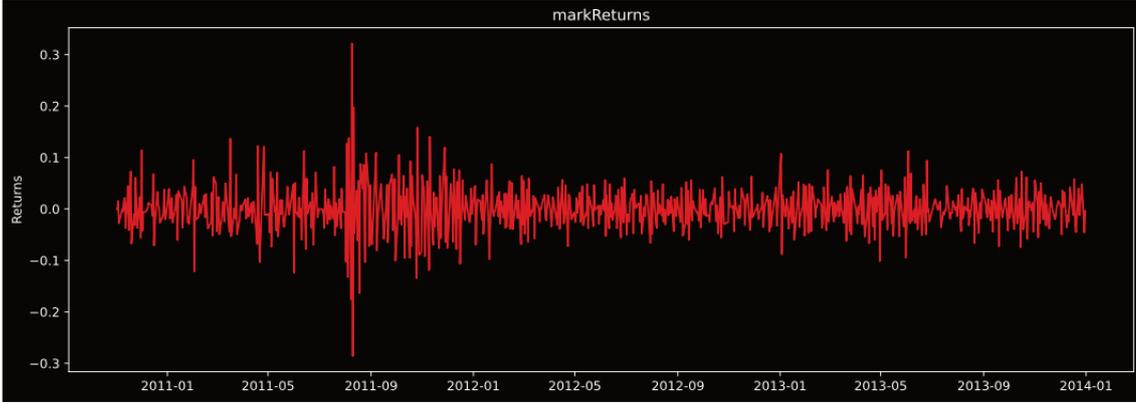


FIGURE 9 – Rendement DCC-GARCH-JOHNSON BAYER

## .1. MODÈLES ARCH ET CORRÉLATION BREAKDOWN

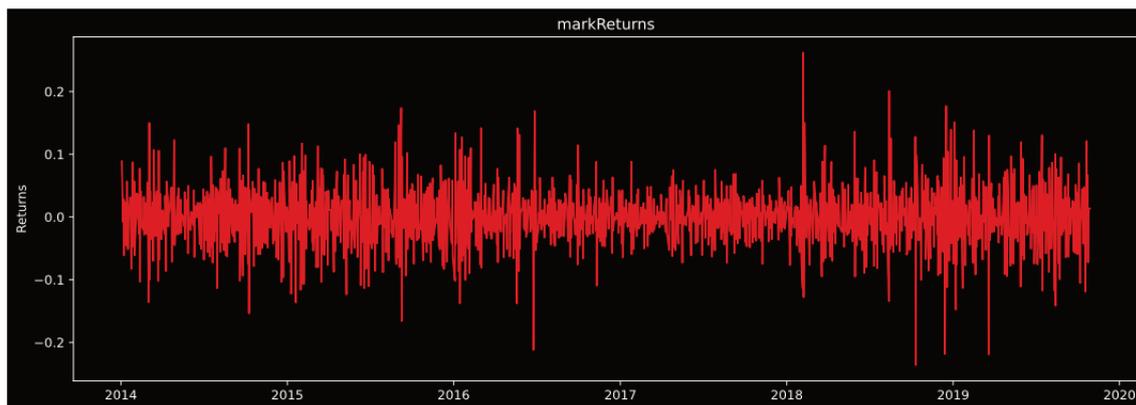


FIGURE 10 – Rendement DCC-GARCH-JOHNSON BAYER

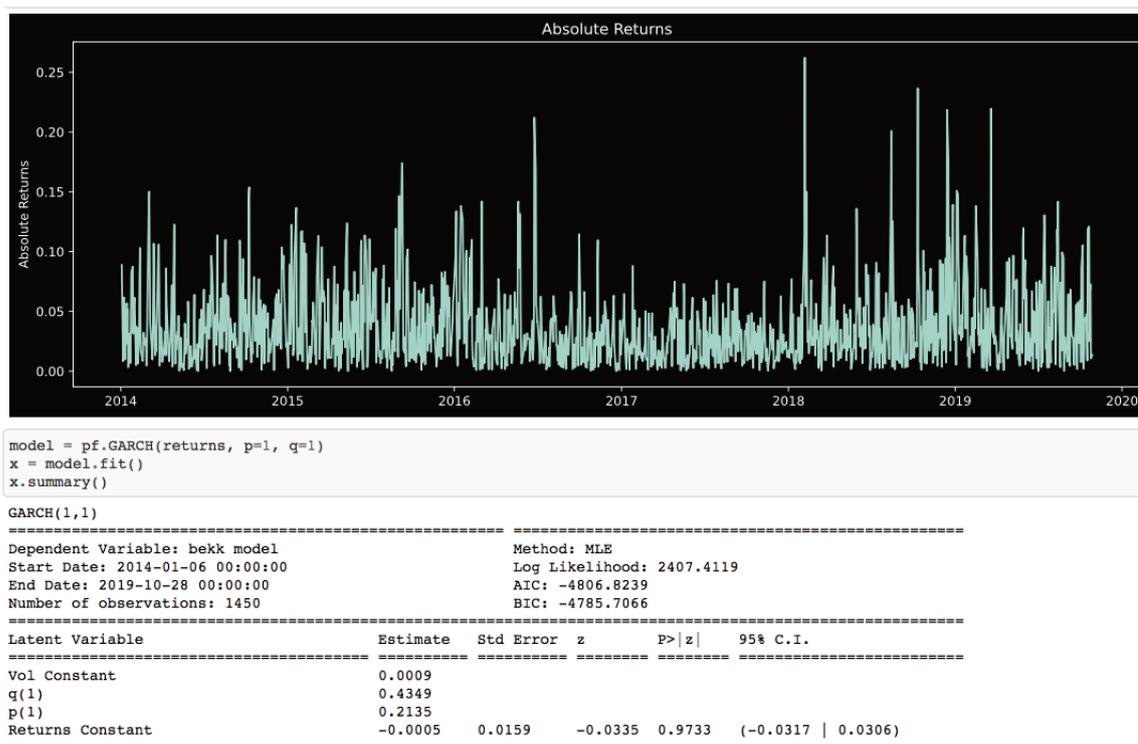


Tableau .1.9 – Estimation DCC-GARCH-JOHNSON BAYER STABLE

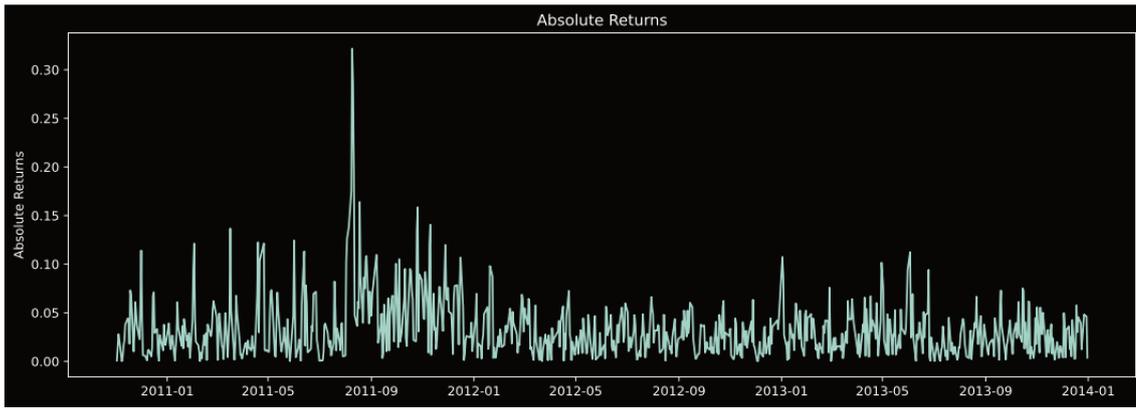
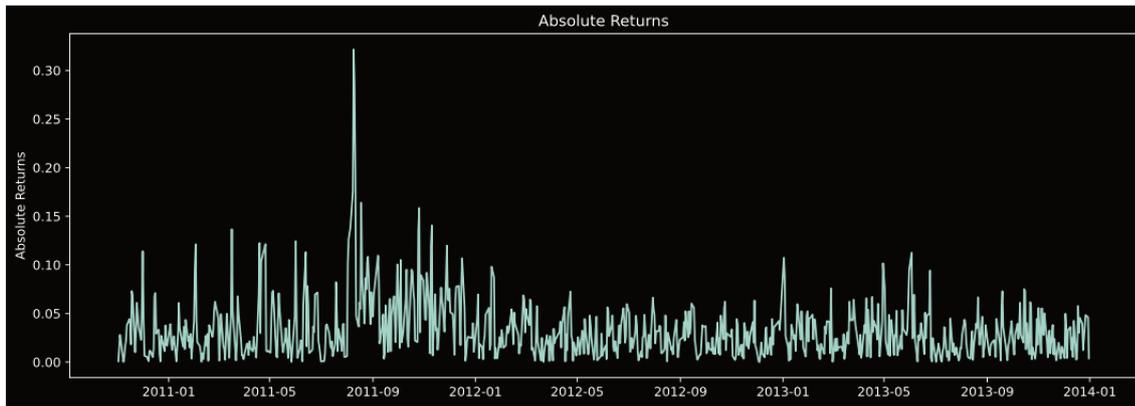


FIGURE 11 – Rendement DCC-GARCH-NVS-PFIZER



```
model = pf.GARCH(returns, p=1, q=1)
x = model.fit()
x.summary()
```

```
GARCH(1,1)
=====
Dependent Variable: bekk model                Method: MLE
Start Date: 2010-11-03 00:00:00              Log Likelihood: 1434.3167
End Date: 2013-12-31 00:00:00                AIC: -2860.6334
Number of observations: 784                   BIC: -2841.9757
=====
```

Latent Variable	Estimate	Std Error	z	P> z	95% C.I.
Vol Constant	0.0004				
q(1)	0.4328				
p(1)	0.3532				
Returns Constant	-0.0004	0.0341	-0.0112	0.991	(-0.0672   0.0664)

```
=====
```

Tableau .1.10– Estimation DCC-GARCH NVS-PFIZER 1-ruptures

## .1. MODÈLES ARCH ET CORRÉLATION BREAKDOWN

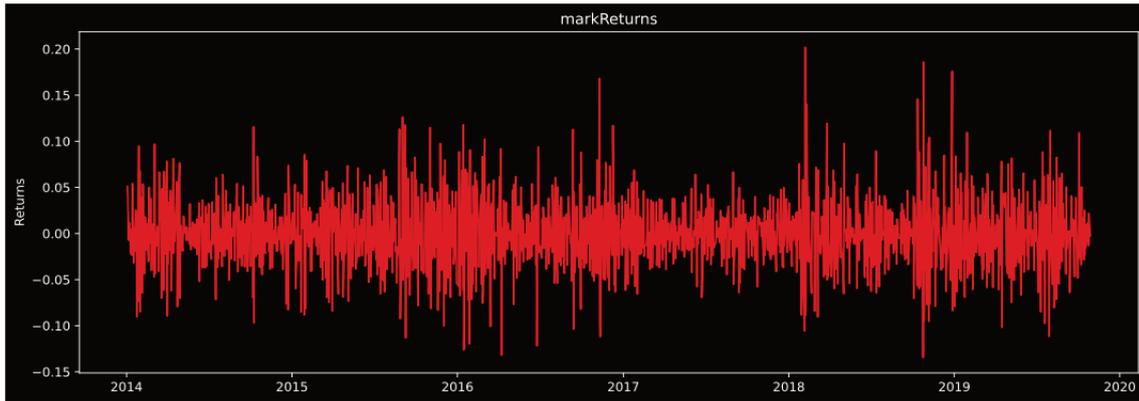
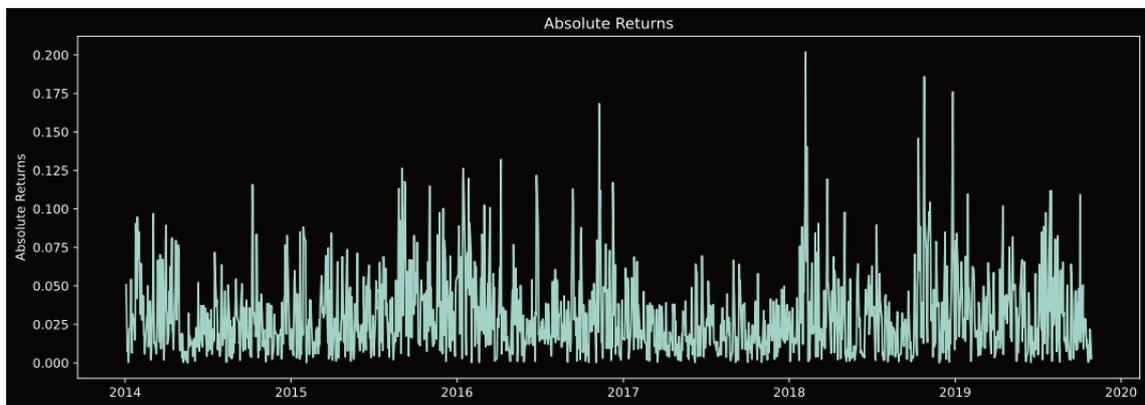


FIGURE 12 – Rendement DCC-NVS-PFIZER



```
model = pf.GARCH(returns, p=1, q=1)
x = model.fit()
x.summary()
```

GARCH(1,1)

```
=====
Dependent Variable: bekk model                Method: MLE
Start Date: 2014-01-06 00:00:00              Log Likelihood: 2700.5253
End Date: 2019-10-28 00:00:00               AIC: -5393.0506
Number of observations: 1450                 BIC: -5371.9333
=====
```

Latent Variable	Estimate	Std Error	z	P> z	95% C.I.
Vol Constant	0.0002				
q(1)	0.3089				
p(1)	0.5609				
Returns Constant	0.0005	0.0318	0.0148	0.9882	(-0.0619   0.0629)

Tableau .1.11 Estimation DCC-GARCH-NVS-PFIZER

---

## .2 Corrélation Breakdown dans le Portefeuille Optimal

### .2.1 Méthode de Newton

#### .2.2 Écriture matricielle de la fonction objectif Ratio Sharpe

$$\max S_p = \max \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$$

L'écriture de la fonction objectif sous forme matricielle :

On pose :

$$\alpha_1 = \omega_1, \quad \alpha_2 = \omega_2$$

$$\max S_p = \frac{\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 - R_f}{\omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \rho \sigma_1 \sigma_2}$$

SC :

$$0 \leq \omega_i \leq 1, \forall i = 1, 2$$

$$\sum_{i=1}^2 \omega_i = \omega_1 + \omega_2 = 1$$

$$\max S_p = \frac{\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 - R_f}{\omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \rho \sigma_1 \sigma_2}$$

SC :

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = 1$$

$$\max S_p = \frac{\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 - R_f}{\omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \rho \sigma_1 \sigma_2}$$

SC :

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_1 + \omega_2 \leq 1$$

$$\omega_1 + \omega_2 \geq 1 \implies -\omega_1 - \omega_2 \leq -1$$

$$\max S_p = \frac{\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 - R_f}{\omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \rho \sigma_1 \sigma_2}$$

SC :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \leq 1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = 1$$

$$\max S_p = \frac{\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 - R_f}{\omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \rho \sigma_1 \sigma_2}$$

$$\Rightarrow S_p = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = S_p(\omega)$$

SC :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Est de la forme :

$$A.\omega \leq b$$

$$\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 - R_f = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} - R_f I_1 = R^\top \omega - R_f I_1$$

avec :

$$\omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \rho \sigma_1 \sigma_2 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

$$= (\omega^t \Sigma \omega)^{-1}$$

$$= (\omega_1 \ \omega_2) \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \omega_1 + \rho \sigma_1 \sigma_2 \omega_2 \\ \sigma_2^2 \omega_2 + \rho \sigma_1 \sigma_2 \omega_1 \end{pmatrix} = (\omega_1^2 \sigma_1 + \omega_2^2 \sigma_2)$$

$$= \frac{\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 - R_f}{\omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \rho \sigma_1 \sigma_2} = (R^t \omega - R_f \cdot I_1) (\omega^t \Sigma \omega)^{-1}$$

### .2.3 La dérivée première de Ratio Sharpe

$$\frac{\partial S_p(\omega)}{\partial \omega} = R^t (\omega^t \Sigma \omega)^{-1} + \frac{-2 \Sigma \omega}{(\omega^t \Sigma \omega)^2} (R^t \omega - R_f \cdot I_n)$$

## .2.4 La dérivée seconde Ratio Sharpe

$$\frac{\partial Sp(\omega)''}{\partial(\omega)} = \frac{-2\Sigma\omega}{(\omega^t\Sigma\omega)^2} + \left[ \frac{-2R^t\Sigma\omega}{(\omega^t\Sigma\omega)^2} + (R^t\Sigma - R_f \cdot I_n) \times \frac{-2\Sigma(\omega^t\Sigma\omega) + (2\Sigma\omega)^2}{(\omega^t\Sigma\omega)^4} \right]$$

On pose  $\partial = \omega^t\Sigma\omega$

$$\frac{\partial Sp(\omega)''}{\partial(\omega)} = \frac{-2\Sigma\omega}{\partial^2} + \left[ \frac{-2R^t\Sigma\omega}{\partial^2} + (R^t\Sigma - R_f \cdot I_n) \times \frac{-2\Sigma\partial + 4(\Sigma\omega)^2}{\partial^4} \right]$$

$$\frac{\partial Sp(\omega)''}{\partial(\omega)} = \frac{-2\Sigma\omega}{\partial^2} + \frac{-2R^t\Sigma\omega}{\partial^2} + \frac{-2\Sigma\partial R^t\omega + 2\Sigma\partial R_f I_n}{\partial^4} + \frac{4(\Sigma\omega)^2 R^t\omega - 4(\Sigma\omega)^2 R_f I_n}{\partial^4}$$

$$\frac{\partial Sp(\omega)''}{\partial(\omega)} = (R^t + 1) \left( \frac{-2\Sigma\omega}{\partial^2} \right) + \frac{2\Sigma[\partial(R_f I_n - R^t\omega) + 2(\Sigma\omega)^2(R^t\omega - R_f I_n)]}{\partial^4}$$

$$\frac{\partial Sp(\omega)''}{\partial(\omega)} = (R^t + 1) \left( \frac{-2\Sigma\omega}{\partial = \omega^t\Sigma\omega^2} \right) + \frac{2\Sigma[\partial(R_f I_n - R^t\omega) + 2(\Sigma\omega)^2(R^t\omega - R_f I_n)]}{\partial = \omega^t\Sigma\omega^4}$$

Enfin la dérive seconde est la suivante :

$$\frac{\partial Sp(\omega)''}{\partial(\omega)} = (R^t + 1) \left( \frac{-2\Sigma\omega}{\partial^2} \right) + \frac{2\Sigma[(R^t\omega - R_f I_n)(2(\Sigma\omega)^2 - \partial)]}{\partial^4}$$

### .3 Anticipation d'une rupture de corrélation

.3.1 Tableau des resultats de la minimisation du risque du portefeuille

.3.2 Les données utiliser : La Base CAC40 et la Base Chimie et pharmacie (Santé)

Instance 1 Couple1 : NVS& PFIZER	Nom/date l'Instance Base : Santé - Chimie	Coefficient de corrélation ( $\rho$ )	Si $ \rho_0 - \rho_1  > 0.05$ Il existe une rupture	Si $\rho < 0.5$ , $ \alpha_1 - \alpha_2  > 0.5$ il n'existe pas une rupture pour le mois suivant, mais si $ \alpha_1 - \alpha_2 $ est proche de zéro $\cong 0.0010$ et $\rho < 0.5$ , il est très probable qu'il aura une forte rupture pour le mois suivant si la variance 1 est $\cong$ à la variance 2. Sinon si la différences entre la valeur $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.05$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant $ \sigma_1 - \sigma_2  \cong 0.01$	Présence / non d'une rupture de corrélation le mois prochain	La valeur : $\alpha_1, \alpha_2$ , Objective pour une minimisation du risque sans prend en considération le cout.	$ \alpha_1 - \alpha_2$
1.	Inst1 : 1-0 01-11-2010 30-11-2010	0.323908954		L'hypothèse n'est pas vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ n'est pas $> 0.5$ est $\rho < 0.5$ d'où $\sigma_1 > \sigma_2$ qui pourriez avoir une petite rupture pour le mois suivant avec c'est changement d'hypothèses	Oui	$\alpha_1 = 0.406582$ $\alpha_2 = 0.593418$ Obj=0.0010550 3	0.186836
2.	Inst1-1 01-11-2010 30-12-2010	0.259973017	0.063935936	L'hypothèse n'est pas vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ n'est pas $> 0.5$ est $\rho < 0.5$ donc on conclure qui pourriez avoir une petite rupture pour le mois suivant avec c'est changement d'hypothèses	Oui	$\alpha_1 = 0.35038$ $\alpha_2 = 0.649762$ Obj=0.0010589 2	0.299523
3.	Inst1-2 01-11-2010 31-01-2011	0.183491973	0.076481044	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très grande $> 0.5$ est $\rho <$ $0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.830024$ $\alpha_2 = 0.169976$ Obj= 0.00112994	0.660049
4.	Inst1-3 01-11-2010 28-02-2011	0.188775472	0.005283499	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très grande $> 0.6$ est $\rho <$ $0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.837721$ $\alpha_2 = 0.162279$ Obj =0.00106847	0.675442
5.	Inst1-4 01-11-2010 31-03-2011	0.216622583	0.027847111	L'hypothèse n'est pas vérifiée nous pouvons pas conclure le prévoir ou non de la rupture	Non	$\alpha_1 = 0.472511$ $\alpha_2 = 0.527489$ Obj = 0.00106863	0.0549779
6.	Inst1-5 01-11-2010 29-04-2011	0.235848388	0.019225805	L'hypothèse n'est pas vérifiée nous pouvons pas conclure le prévoir ou non de la rupture	Non	$\alpha_1 = 0.452486$ $\alpha_2 = 0.547514$ Obj =- 0.00107079	0.0950271
7.	Inst1-6 01-11-2010 31-05-2011	0.269427432	0.033579044	L'hypothèse n'est pas vérifiée nous pouvons pas conclure le prévoir ou non de la rupture	Non	$\alpha_1 = 0.464898$ $\alpha_2 = 0.535102$ Obj =0.0106939	0.0702035
8.	Inst1-7 01-11-2010 30-06-2011	0.309558392	0.04013096	L'hypothèse n'est pas vérifiée nous pouvons pas conclure le prévoir ou non de la rupture	Non	$\alpha_1 = 0.491286$ $\alpha_2 = 0.508714$ Obj =0.00106913	0.0174271
9.	Inst1-8 01-11-2010 29-07-2011	0.305115545	0.004442847	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très proche de zéro $\cong$ $0.007$ et $\rho < 0.5$ , il existe une forte rupture pour le mois suivant Nb: la variance 1 est $\cong$ à la variance 2 d'où Var1= 0,00013 et Var2 =0,00013	Oui	$\alpha_1 = 0.496431$ $\alpha_2 = 0.503569$ Obj= 0.00106637	0.0071377
10.	Inst1-9 01-11-2010 31-08-2011	0.527456963	0.035688113	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.02$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.511981$ $\alpha_2 = 0.488019$ Obj = 0.00109983	0.0239629
11.	Inst1-10 01-11-2010 30-09-2011	0.537197301	0.009740338	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.04$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.522161$ $\alpha_2 = 0.477839$ Obj = 0.00109947	0.0443217
12.	Inst1-11 01-11-2010 31-10-2011	0.57156668	0.034369379	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.05$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.516296$ $\alpha_2 = 0.483704$ Obj=0.0011043 8	0.0325914
13.	Inst1-12 01-11-2010 30-11-2011	0.587142209	0.01557553	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.05$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.526687$ $\alpha_2 = 0.473313$ Obj =0.00110721	0.0533749
14.	Inst1-13 01-11-2010 30-12-2011	0.5854079	0.00173431	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.03$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.519493$ $\alpha_2 = 0.480507$ Obj =0.00110369	0.0389869
15.	Inst1-14 01-11-2010 30-01-2012	0.561505725	0.023902175	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.01$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.505395$ $\alpha_2 = 0.494605$ Obj = - 0.0110243	0.0107897

16.	Inst1-15 01-11-2010 29-02-2012	0.542155713	0.019350012	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.004$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.49773$ $\alpha_2 = 0.50227$ Obj = - 0.00109947	0.004539
17.	Inst1-16 01-11-2010 30-03-2012	0.538832709	0.003323004	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.002$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.498796$ $\alpha_2 = 0.501204$ Obj = - 0.00109524	0.00240751
18.	Inst1-17 01-11-2010 30-04-2012	0.535111236	0.003721473	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.008$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.49594$ $\alpha_2 = 0.50406$ Obj = - 0.00109247	0.0081192
19.	Inst1-18 01-11-2010 30-05-2012	0.531725046	0.00338619	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.005$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.497423$ $\alpha_2 = 0.502577$ Obj = - 0.00108906	0.00515470
20.	Inst1-19 01-11-2010 29-06-2012	0.534842664	0.003117618	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.010$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.494821$ $\alpha_2 = 0.505179$ Obj = - =0.00108662	0.0103581
21.	Inst1-20 01-11-2010 30-07-2012	0.535473683	0.000631019	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.02$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.51299$ $\alpha_2 = 0.48701$ Obj = - 0.00106645	0.0259808
22.	Inst1-21 01-11-2010 30-08-2012	0.532336023	0.00313766	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.03$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.516649$ $\alpha_2 = 0.483351$ Obj = - 0.0106631	0.0332978
23.	Inst1-22 01-11-2010 30-09-2012	0.53462471	0.002288687	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.01$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.500964$ $\alpha_2 = 0.49036$ Obj = - 0.00106413	0.0192793
24.	Inst1-23 01-11-2010 30-10-2012	0.53617017	0.001545459	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.01$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.507646$ $\alpha_2 = 0.492354$ Obj = - 0.00106163	0.0152912
25.	Inst1-24 01-11-2010 30-11-2012	0.535333326	0.000836844	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.01$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.506694$ $\alpha_2 = 0.493306$ Obj = - 0.00106261	0.0133872
26.	Inst1-25 01-11-2010 30-12-2012	0.533779609	0,001553717	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.005$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.502785$ $\alpha_2 = 0.497215$ Obj = - =0.00107419	0.00557061
27.	Inst1-26 01-11-2010 30-01-2013	0.525185895	0,008593713	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.000$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.500297$ $\alpha_2 = 0.499703$ Obj = - 0.00107583	0.00059482
28.	Inst1-27 01-11-2010 28-02-2013	0,516258277	0,008927619	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.01$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.507365$ $\alpha_2 = 0.492635$ Obj = - 0.0010732	0.0147306
29.	Inst1-28 01-11-2010 31-03-2013	0.513662673	0,002595603	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.05$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.505716$ $\alpha_2 = 0.494284$ Obj = - 0.00107184	0.0011433
30.	Inst1-29 01-11-2010 30-04-2013	0.506220379	0.007442294	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.05$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.514466$ $\alpha_2 = 0.485534$ Obj = - 0.00107194	0.0289328
31.	Inst1-30 01-11-2010 30-05-2013	0.503237003	0.002983376	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.03$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.518853$ $\alpha_2 = 0.481147$ Obj = - 0.00107178	0.0377065
32.	Inst1-31 01-11-2010 30-06-2013	0.505561666		L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.04$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant		$\alpha_1 = 0.520169$ $\alpha_2 = 0.479831$ Obj = - 0.00107145	0.0403372

Instance 2 Couple 2 : SANOFI &Merck	Nom/date l'Instance Base : Santé - Chimie	Coefficient de corrélation ( $\rho$ )	Si $ \rho_0 - \rho_1  > 0.05$ Il existe une rupture	Si $\rho < 0.5$ , $ \alpha_1 - \alpha_2  > 0.5$ il n'existe pas une rupture pour le mois suivant, mais si $ \alpha_1 - \alpha_2 $ est proche de zéro $\approx 0.0010$ et $\rho < 0.5$ , il est très probable qu'il aura une forte rupture pour le mois suivant si la variance 1 est $\approx$ à la variance 2. Sinon si la différence entre la valeur $ \alpha_1 - \alpha_2  \approx 0.05$ et $\rho \geq 0.5$ , donc il existe pas une rupture pour le mois suivant $ \sigma_1 - \sigma_2  \approx 0.01$	Présence / non d'une rupture de corrélation le mois prochain	La valeur : $\alpha_1, \alpha_2$ , Objective pour une minimisation du risque sans prendre en considération le cout. Obj =-	$ \alpha_1 - \alpha_2 $
1.	Inst2-1 01-11-2010 30-11-2010	0.677025749			Non	$\alpha_1 = 0.358556$ $\alpha_2 = 0.641444$ Obj =- 0.00109138	0.282888
2.	Inst2-2 01-11-2010 30-12-2010	0.671907438	0.005118311	L'hypothèse n'est pas vérifiée car $\rho \geq 0.5$ et la différence entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est $> 0.05$ $ \alpha_1 - \alpha_2  = 0.353$ et la différence entre la variance 1 et la variance 2 n'est pas proche de zéros. D'où l'hypothèse qu'il existe pas une rupture pour le mois suivant ne pas vérifier	Oui [forte rupture]	$\alpha_1 = 0.32316$ $\alpha_2 = 0.67684$ Obj =- 0.00106358	0.35368
3.	Inst2-3 01-11-2010 31-01-2011	0.232459739	0.439447699	L'hypothèse n'est pas vérifiée nous pouvons pas conclure le prévoir ou non la rupture Il existe aussi une forte différence entre la variance 1 et la variance 2	Oui	$\alpha_1 = 0.357304$ $\alpha_2 = 0.642696$ Obj =- 0.00109621	0.285392
4.	Inst2-4 01-11-2010 28-02-2011	0.331440747	0.098981008	L'hypothèse n'est pas vérifiée nous pouvons pas conclure le prévoir ou non la rupture Il existe aussi une forte différence entre la variance 1 et la variance 2	Oui	$\alpha_1 = 0.355636$ $\alpha_2 = 0.644364$ Obj =- 0.00109064	0.288728
5.	Inst2-5 01-11-2010 31-03-2011	0.413581938	0.0821411191	L'hypothèse n'est pas vérifiée nous pouvons pas conclure le prévoir ou non la rupture Il existe aussi une forte différence entre la variance 1 et la variance 2	Non	$\alpha_1 = 0.349845$ $\alpha_2 = 0.650155$ Obj =- 0.00108817	0.30031
6.	Inst2-6 01-11-2010 29-04-2011	0.444683375	0.031101	L'hypothèse n'est pas vérifiée nous pouvons pas conclure le prévoir ou non la rupture Il existe aussi une forte différence entre la variance 1 et la variance 2	Non	$\alpha_1 = 0.361032$ $\alpha_2 = 0.638968$ Obj =- 0.00108556	0.277935
7.	Inst2-7 01-11-2010 31-05-2011	0.446979905	0.00229653	L'hypothèse ne pas vérifier nous pouvons pas conclure le prévoir ou non la rupture Il existe aussi une forte différence entre la variance 1 et la variance 2	Non	$\alpha_1 = 0.340402$ $\alpha_2 = 0.659598$ Obj =- 0.00108048	0.319196
8.	Inst2-8 01-11-2010 30-06-2011	0.477562631	0.030582726	L'hypothèse n'est pas vérifiée nous pouvons pas conclure le prévoir ou non la rupture Il existe aussi une forte différence entre la variance 1 et la variance 2	Non	$\alpha_1 = 0.321135$ $\alpha_2 = 0.67865$ Obj =- 0.00107859	0.35730
9.	Inst2-9 01-11-2010 29-07-2011	0.484663618	0.007100987	L'hypothèse n'est pas vérifiée nous pouvons pas conclure le prévoir ou non la rupture Il existe aussi une forte différence entre la variance 1 et la variance 2	Oui	$\alpha_1 = 0.319668$ $\alpha_2 = 0.680332$ Obj =- 0.00107801	0.360664
10.	Inst2-10 01-11-2010 31-08-2011	0.638258275	0.153594657	L'hypothèse n'est pas vérifiée car $\rho \geq 0.5$ et la différence entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est $> 0.05$ $ \alpha_1 - \alpha_2  = 0.355$ et la différence entre la variance 1 et la variance 2 ne pas proche de zéros. Nous ne pouvez pas conclure	Non	$\alpha_1 = 0.323669$ $\alpha_2 = 0.676331$ Obj =- 0.00111546	0.3552663
11.	Inst2-11 01-11-2010 30-09-2011	0.656888604	0.018630329	L'hypothèse n'est pas vérifiée car $\rho \geq 0.5$ et la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est $> 0.05$ $ \alpha_1 - \alpha_2  = 0.362$ et la différence entre la variance 1 et la variance 2 ne pas proche de zéros. Nous ne pouvez pas conclure	Non	$\alpha_1 = 0.318779$ $\alpha_2 = 0.681221$ Obj =- 0.00111859	0.362443
12.	Inst2-12 01-11-2010 31-10-2011	0.667217486	0.010328882	L'hypothèse n'est pas vérifiée car $\rho \geq 0.5$ et la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est $> 0.05$ $ \alpha_1 - \alpha_2  = 0.366$ et la différence entre la variance 1 et la variance 2 ne pas proche de zéros. Nous ne pouvez pas conclure	Non	$\alpha_1 = 0.316976$ $\alpha_2 = 0.683024$ Obj =- 0.00112445	0.366049
13.	Inst2-13 01-11-2010 30-11-2011	0.685229226	0.01801174	L'hypothèse n'est pas vérifiée car $\rho \geq 0.5$ et la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est $> 0.05$ $ \alpha_1 - \alpha_2  = 0.353$ et la différence entre la variance 1 et la variance 2 ne pas proche de zéros. Nous ne pouvez pas conclure	Non	$\alpha_1 = 0.318947$ $\alpha_2 = 0.681053$ Obj =- 0.00113195	0.362106
14.	Inst2-14 01-11-2010 30-12-2011	0.687722743	0.002493517	L'hypothèse n'est pas vérifiée car $\rho \geq 0.5$ et la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est $> 0.05$ $ \alpha_1 - \alpha_2  = 0.353$ et la différence entre la variance 1 et la variance 2 ne pas proche de zéros. Nous ne pouvez pas conclure	Non	$\alpha_1 = 0.317487$ $\alpha_2 = 0.682513$ Obj =- 0.0011275	0.365025

Instance b Couple1 : GÉNÉRAL &LVMH Couple2,3 ,4: LVMH & MICHELIN	Nom/date Instance Base : CAC40	coefficient de corrélation ( $\rho$ )	Si $ \rho_0 - \rho_1  > 0.05$ Il existe une rupture	Si $\rho < 0.5$ , $ \alpha_1 - \alpha_2  > 0.5$ il n'existe pas une rupture pour le mois prochaine, mais si $ \alpha_1 - \alpha_2 $ est proche de zéro $\cong 0.0010$ et $\rho < 0.5$ , il est tres probable qu'il aura une forte rupture pour le mois prochaine si la variance 1 est $\cong$ à la variance 2. Sinon si différences entre $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.05$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant $ \sigma_1 - \sigma_2  \cong 0.01$	Présence / non d'une rupture de corrélatio n le mois prochain	La valeur : $\alpha_1, \alpha_2$ , Objective pour une minimisation du risque sans prend en considération le cout.	$ \alpha_1 - \alpha_2$
1.	Inst-a 1-1 2000M01 2005M12	0.108850823		L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très grande $>0.5$ est $\rho <$ $0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.95304$ $\alpha_2 = 0.0469602$ Objective = - 0.00101885	0.90608
2.	Inst-a 1-2 2000M01 2006M03	0.108095301	0.000755522	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très grande $>0.5$ est $\rho <$ $0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.952787$ $\alpha_2 = 0.0472129$ Obj = - 0.00101819	0.905574
3.	Inst-b 3-1 2000M01 2010M03	0.526534582		L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.1$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.555108$ $\alpha_2 = 0.444892$ Obj = - 0.00100901	0.110217
4.	Inst-b 3-2 2000M01 2010M06	0.527448423	0.000913841	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.1$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.555305$ $\alpha_2 = 0.444695$ Obj = - 0.00110609	0.110609
5.	Inst-b 2-1 2000M01 2009M03	0.472605809		L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.05$ et $\rho < 0.5$ mais proche de 0.5 ont peut conclure qu' il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.526915$ $\alpha_2 = 0.473085$ Obj = - 0.00100847	0.0538303
6.	Inst-b 2-2 2000M01 2009M06	0.515009271	0.042403462	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.05$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.552859$ $\alpha_2 = 0.447141$ Obj = - 0.00100921	0.105718
7.	Inst-b 4-1 2000M01 2011M12	0.540818579		L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.05$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.557285$ $\alpha_2 = 0.442715$ Obj = 0.0010857	0.114571
8.	Inst-b 4-2 2000M01 2012M03	0.546181369	0.00536279	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.1$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.557941$ $\alpha_2 = 0.442059$ Obj = - 0.00100852	0.115883
9.	Inst-b 4-3 2000M01 2012M06	0.544646272	0.001535097	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.1$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.564088$ $\alpha_2 = 0.435912$ Obj = - 0.00100847	0.128176
10.	Inst-b 4-4 2000M01 2012M09	0.534250292	0.01039598	L'hypothèse est vérifiée la différences entre la valeur $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est très petite $ \alpha_1 - \alpha_2  \cong 0.1$ et $\rho \geq 0.5$ donc il existe pas une rupture pour le mois suivant	Non	$\alpha_1 = 0.562069$ $\alpha_2 = 0.437931$ Obj = - 0.00100841	0.124138

## .4 Portefeuilles efficient en Période Breakdowns et Période de Stabilité

– Période de corrélation breakdowns –

```
optimize(path, 'SANOFI', 'Merck', '2010-11-01', '2011-08-31')
```

	Returns	Volatility
portfolio1	-4.033775	0.212102
SANOFI	-6.495299	0.300915
Merck	-3.214651	0.208003

Tableau 4.11 – Portefeuille 1 – Période de stress [SANOFI-MERCK]

– Période de stabilité de la corrélation –

```
optimize(path, 'SANOFI', 'Merck', '2011-09-01', '2012-12-28')
```

	Returns	Volatility
portfolio1	9.832478	0.181503
SANOFI	-8.961737	0.259615
Merck	16.095129	0.180800

Tableau 4.12 – Portefeuille 2 – Période stable [SANOFI-MERCK]

– Période de corrélation breakdowns –

```
optimize(path, 'SANOFI', 'Merck', '2010-11-01', '2011-12-30')
```

	Returns	Volatility
portfolio1	-1.114010	0.224971
SANOFI	-1.887867	0.318461
Merck	-0.856048	0.216909

Tableau 4.13 – Portefeuille 3 – Période de stress [SANOFI-MERCK]

#### .4. PORTEFEUILLES EFFICIENT EN PÉRIODE BREAKDOWNS ET PÉRIODE DE STABILITÉ

– Période de stabilité de la corrélation –

```
optimize(path, 'NVS', 'PFIZER', '2011-09-01', '2014-12-31')
```

	Returns	Volatility
portfolio1	-0.333686	0.146797
NVS	-5.364720	0.157213
PFIZER	1.343222	0.166452

Tableau 4.14 – Portefeuille 4 – Période stable [NVS-PFIZER]

– Période de stabilité de la corrélation –

```
optimize(path, 'JOHNSON', 'BAYER', '2014-01-02', '2019-10-28')
```

	Returns	Volatility
portfolio1	31.795065	0.216699
JOHNSON	-0.616739	0.161743
BAYER	42.572181	0.266138

Tableau 4.15 – Portefeuille 5 – Période stable [JOHNSON-BAYER]

– Période de corrélation breakdowns –

```
optimize(path, 'NVS', 'PFIZER', '2010-11-01', '2011-08-31')
```

	Returns	Volatility
portfolio1	-3.351491	0.203602
NVS	-7.860334	0.220389
PFIZER	-1.847466	0.225279

Tableau 4.16 – Portefeuille 6 – Période de stress [NVS-PFIZER]

– Période de corrélation breakdowns –

```
optimize(path, 'JOHNSON', 'BAYER', '2010-11-01', '2011-03-31')
```

	Returns	Volatility
portfolio1	-1.332590	0.218088
JOHNSON	-0.284104	0.114904
BAYER	-1.682819	0.269560

Tableau 4.17 – Portefeuille 7 – Période de stress [JOHNSON-BAYER]

– Période de corrélation breakdowns –

```
optimize(path, 'JOHNSON', 'BAYER', '2010-11-01', '2013-12-31')
```

	Returns	Volatility
portfolio1	-1.332417	0.259176
JOHNSON	0.428039	0.135192
BAYER	-1.919245	0.318685

Tableau 4.18 – Portefeuille 8 – Période de stress [JOHNSON-BAYER]

– Période de corrélation breakdowns –

```
optimize(path, 'CELYAD', 'BONE', '2015-10-27', '2016-09-30')
```

	Returns	Volatility
portfolio1	-0.521677	0.319275
CELYAD	-0.231961	0.741441
BONE	-0.618380	0.329063

Tableau 4.19 – Portefeuille 9 – Période de stress [JOHNSON-BAYER]



## Résumé

**Sujet :** Les Correlations Breakdowns et les Mesures de Risque

Cette thèse présente quelques contributions à la modélisation des séries temporelles, notamment dans le développement de modèles de gestion de portefeuille. Nos travaux mettent en évidence le phénomène de Corrélation Breakdowns. Ce phénomène se matérialise par une convergence soudaine de la corrélation entre les rendements des actifs. En particulier, cet effet apparaît pendant les périodes de crises financières, mais parfois aussi au cours de périodes d'euphorie des marchés financiers. Afin de mesurer et de gérer les risques de marché, les analystes financiers tiennent compte de la variabilité et de la corrélation des rendements des actifs détenus dans leurs portefeuilles. L'une des difficultés qu'ils rencontrent pour ce faire, est qu'en période de volatilité accrue des marchés, les corrélations entre les rendements des actifs peuvent différer sensiblement de celles observées sur les marchés plus calmes. Le problème de la "Corrélation Breakdown" pendant les périodes de plus grande volatilité est bien connu.

Dans un premier temps, nous nous sommes penchées sur la modélisation de la volatilité variant dans le temps et des corrélations conditionnelles des séries temporelles multivariées. Nous avons réalisé la modélisation de la volatilité variable dans le temps des séries chronologiques univariées en utilisant des GARCH multivariés (volatilité stochastique), dans le but de proposer un moyen de mesurer les périodes des chutes hétérogènes de la dynamique de la matrice de covariance du modèle GARCH. Le modèle ARCH peut nous donner des corrélations plus stables en négligeant l'hétéroscédasticité. L'ensemble des résultats est basé sur la procédure d'estimation du Maximum de Vraisemblance mis en œuvre sur des données réelles du CAC40, des secteurs de la chimie et de la pharmacie. Dans un second temps, nous nous sommes interrogées sur les stratégies d'anticipation d'un changement de corrélation. Nous avons donc réalisé un problème d'optimisation qui consiste à trouver des solutions en respectant des contraintes qui maximisent le rendement d'un portefeuille et minimisent le risque. En outre, nous nous sommes intéressées à l'impact des anticipations d'une rupture de corrélation dans un portefeuille optimal en maximisant le ratio Sharpe.

**Mots-clés :** Économétrie Des Corrélations Breakdowns, Optimisation Quadratique Convexe, Les Série Temporelle : Les Modèle ARCH GARCH, Les Modèle à Corrélation Dynamiques Conditionnelles (DCC), Diversification des Portefeuilles optimaux.

## Abstract

**Subject :** Correlation Breakdown and Risk Measures

This thesis presents some contributions to time series modeling, especially in the development of portfolio management models. Our work highlights the phenomenon of Correlation Breakdowns. This phenomenon is materialized by a sudden convergence of the correlation between asset returns. In particular, this effect appears during periods of financial crisis, but sometimes also during periods of financial market euphoria. In order to measure and manage market risks, financial analysts take into account the variability and correlation of the returns of the assets held in their portfolios. One of the difficulties they face in doing so is that during periods of increased market volatility, the correlations between asset returns can differ significantly from those observed in calmer markets. The problem of "Correlation Breakdown" during periods of higher volatility is well known.

As a first step, we focused on modeling time-varying volatility and conditional correlations of multivariate time series. We performed time-varying volatility modeling of univariate time series using multivariate GARCH (stochastic volatility), with the aim of proposing a way to measure the periods of heterogeneous drops in the dynamics of the covariance matrix of the GARCH model. The ARCH model can give us more stable correlations by neglecting the heteroscedasticity. All the results are based on the Maximum Likelihood estimation procedure implemented on real data from the CAC40, chemical and pharmaceutical sectors. In a second step, we asked ourselves about the strategies for anticipating a change in correlation. We have thus realized an optimization problem which consists in finding solutions by respecting constraints that maximize the return of a portfolio and minimize the risk. In addition, we are interested in the impact of expectations of a correlation break in an optimal portfolio by maximizing the Sharpe ratio.

**Keywords :** Correlation Breakdown Econometrics, Convex Quadratic Optimization, Time Series : ARCH GARCH Models, Dynamic Conditional Correlation (DCC), Models Diversification of Optimal Portfolios.