



**HAL**  
open science

# Evaluation analytique des distorsions de signaux à porteuses multiples en présence d'amplification non-linéaire et en prenant en compte différentes techniques de réduction de la dynamique des signaux

Mariam El Hassan

► **To cite this version:**

Mariam El Hassan. Evaluation analytique des distorsions de signaux à porteuses multiples en présence d'amplification non-linéaire et en prenant en compte différentes techniques de réduction de la dynamique des signaux. Electronique. INSA de Rennes; Université Libanaise, 2021. Français. NNT : 2021ISAR0016 . tel-03783260

**HAL Id: tel-03783260**

**<https://theses.hal.science/tel-03783260>**

Submitted on 22 Sep 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THESE DE DOCTORAT DE

L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES  
APPLIQUEES RENNES

ECOLE DOCTORALE N° 601  
*Mathématiques et Sciences et Technologies  
de l'Information et de la Communication*  
Spécialité : *Télécommunications*

ET L'UNIVERSITE LIBANAISE  
*Ecole Doctorale des Sciences et de Technologie (EDST)*

Par

**Mariam EL HASSAN**

**Evaluation analytique des distorsions de signaux à porteuses multiples en présence d'amplification non-linéaire et en prenant en compte différentes techniques de réduction de la dynamique des signaux**

Thèse présentée et soutenue à Rennes, le 06/04/2021

Unités de recherche : Institut d'Électronique et des Technologies du numéRique (IETR), INSA Rennes  
Laboratoire HKS, Faculté des Sciences, Université Libanaise

Thèse N° : 21 ISAR 08 / D21-08

## Rapporteurs avant soutenance :

Daniel ROVIRAS      Professeur, CNAM de Paris  
Jean-Pierre CANCES      Professeur, ENSIL de Limoges

## Composition du Jury :

Président :	Jean-Marie GORCE	Professeur, INSA Lyon
Examineurs :	Daniel ROVIRAS	Professeur, CNAM de Paris
	Jean-Pierre CANCES	Professeur, ENSIL de Limoges
	Lina MROUEH	Professeur, ISEP
	Youssef NASSER	Maître de Conférences HDR, Université Américaine de Beyrouth
	Matthieu CRUSSIÈRE	Maître de Conférences HDR, INSA Rennes
Dir. de thèse :	Oussama BAZZI	Professeur, Université Libanaise
	Jean-François HELARD	Professeur, INSA Rennes



# Resumé

L'optimisation de l'énergie consommée dans le domaine des Technologies de l'Information et de la Communication (TIC) est d'une importance cruciale puisque la consommation énergétique de ces technologies présente un pourcentage important des émissions mondiales en CO<sub>2</sub>. L'amplification de puissance des signaux au niveau des émetteurs représente à son tour l'élément le plus consommateur de la chaîne de transmission, d'où l'importance d'optimiser l'efficacité énergétique des amplificateurs.

D'autre part, les modulations multi-porteuses et spécialement les modulations de type *Orthogonal Frequency Division Multiplexing* (OFDM) ont été largement déployées dans les systèmes de communication sans fils, présentant une solution pertinente pour faire face à l'interférence inter-symbole sur les canaux sélectifs en fréquence. Cependant, un inconvénient majeur de ces modulations est qu'elles se caractérisent par une forte dynamique du signal émis, mesurée par le rapport de la puissance crête sur la puissance moyenne ou *Peak to Average Power Ratio* (PAPR). Lors de l'amplification de ces signaux par des Amplificateurs de haute Puissance (AP) qui sont par essence non linéaires, cette grande dynamique du signal nécessite d'utiliser un certain recul ou *Input Back-Off* (IBO) par rapport au niveau de saturation de l'amplificateur afin de limiter les distorsions générées dans la bande et en dehors de la bande du signal. Ceci a alors pour conséquence que le point de fonctionnement utilisé conduit à une efficacité énergétique qui est d'autant plus faible que l'IBO est élevé.

Plusieurs techniques de réduction du PAPR ont été proposées dans la littérature afin de pouvoir utiliser un recul plus faible. La technique la plus simple est la technique de l'écrêtage ou *clipping*, mais elle introduit de fortes distorsions du signal. Des techniques avancées telles que la technique de réservation de pilotes ou *Tone Reservation* (TR) ont été retenues dans des standards de diffusion de la télévision numérique terrestre comme DVB-T2 et ATSC3.0. Cependant, malgré la grande variété des techniques de réduction du PAPR proposées dans la littérature, l'évaluation analytique des performances de ces techniques n'a que très peu été étudiée. La question globale de l'efficacité des techniques de réduction du PAPR de façon analytique, et non simplement algorithmique, reste donc ouverte. Dans cette perspective, l'objectif des travaux réalisés dans le cadre de cette thèse est d'évaluer analytiquement les performances des stratégies de réduction du PAPR basées sur la réservation de pilotes. La métrique de performance visée est l'EVM (*Error Vector Magnitude*), en tant que métrique universelle permettant d'évaluer le taux de distorsions causées par l'AP dans la bande du signal.

En premier lieu, une expression générale de l'EVM dans le cas de l'application de la technique TR est donnée en fonction de l'IBO. Cette expression se base sur les moments de la fonction de densité de probabilité (PDF)  $f_s(r)$  de l'amplitude du signal OFDM après réduction du PAPR par la technique TR. Une étude de cette PDF dans le cas

général de l'algorithme TR montre que cette PDF n'est pas dérivable analytiquement et nécessite d'être évaluée et modélisée pour chaque algorithme de la technique TR. Ainsi, cette PDF est évaluée dans un second temps pour trois algorithmes essentiels de type TR : l'algorithme optimal QCQP qui conduit aux meilleures performances de la technique TR au prix de sa complexité, l'algorithme du gradient, adopté dans les standards DVB-T2 et ATSC 3.0 ainsi que l'algorithme GICMP qui offre le meilleur compromis complexité-efficacité en réduction du PAPR. Les modèles de ces PDFs sont ensuite intégrés dans l'expression de l'EVM afin d'obtenir une forme fermée de cette expression pour chaque algorithme.

Ces résultats sont d'un grand intérêt afin de prévoir les gains en efficacité obtenus grâce à la technique TR et l'expression analytique de l'EVM permet de déterminer précisément les paramètres optimaux de la technique de réduction du PAPR sélectionnée en considérant l'optimisation globale de la chaîne de transmission. De plus, l'évaluation globale du compromis efficacité énergétique-linéarité après application de la technique TR permet de positionner d'une façon optimale le point de fonctionnement de l'AP.

# Remerciements

En premier lieu, je tiens à exprimer ma profonde et très sincère reconnaissance à Jean-François H elard, Professeur à l'INSA de Rennes, pour m'avoir proposé cette thèse et en avoir dirigé les travaux. J'exprime également toute ma gratitude à Matthieu Crussier, Maître de Conférences HDR à l'INSA de Rennes, pour avoir co-encadré l'ensemble de ces travaux de recherche ainsi que pour ses idées et discussions scientifiques pertinentes. Je les remercie tous les deux pour la confiance qu'ils m'ont témoignée pendant ces trois années, et pour m'avoir fait bénéficiaire de leurs compétences et de leurs conseils. Mais au delà des aspects techniques, je tiens à souligner leurs qualités humaines qui ont fait de cet encadrement en complémentarité une expérience très positive.

Cette thèse effectuée dans le cadre d'une co-tutelle entre l'INSA de Rennes et l'Université Libanaise, n'aurait pas eu succès sans les efforts de direction de Oussama Bazzi, Professeur de l'Université Libanaise et du co-encadrement de Youssef Nasser, Maître de Conférences HDR à l'Université Américaine de Beyrouth. Je les remercie donc sincèrement pour leur suivi de ces travaux de thèse, pour la confiance qu'ils m'ont accordée ainsi que pour leurs idées qui ont contribué à enrichir ces travaux. Je les remercie notamment pour leur patience et pour leur aisance de communication, j'avoue que sans cette aisance la tâche aurait été très compliquée de mener une thèse en co-tutelle qui doit garder le suivi de deux unités différentes et éloignées.

Je remercie également Ghais El Zein, Directeur de l'IEETR de l'INSA de Rennes pour m'avoir accueilli au sein de l'IEETR ces trois années ainsi que pour Mohammad Khalil, Directeur du Laboratoire EDST de l'Université Libanaise, pour m'avoir accueilli au sein de l'EDST durant la période de travail au Liban.

J'adresse tout naturellement mes remerciements à l'ensemble des membres du jury, sans qui mes travaux de recherche n'auraient pu donné lieu à cette thèse. C'est ainsi que je remercie Daniel Roviras, Professeur au CNAM de Paris et Jean-Pierre Canc s, Professeur à l'ENSIL de Limoges, pour avoir accepté de participer au jury en tant que rapporteurs et pour l'attention qu'ils ont accordée à la lecture de ce mémoire. Je remercie également Jean-Marie Gorce, Professeur à l'INSA de Lyon, président du jury, et Lina Mroueh, Professeur à l'ISEP pour avoir pris de leur temps et avoir participé au jury en tant qu'examineurs.

Je remercie grandement Pascal Richard, Odile Mazuret, Katell Kervella ainsi que Aurore Gouin et Justine Grommaire, qui gèrent des procédures administratives à l'IEETR et à l'INSA de Rennes, ainsi que Jana El Hajj à l'Université Libanaise, pour avoir facilité les démarches administratives et logistiques et être toujours disponibles et accueillants pour tout conseil au quotidien.

Par ailleurs, je tiens à remercier Yara Yaacoub pour le sérieux de son travail durant

son stage de fin d'étude de Master et d'ingénieur ainsi que pour son calme, sa patience et son encouragement. Ses résultats ont été très utiles à mon travail et son encadrement s'est révélé une expérience particulièrement enrichissante.

J'adresse un grand merci à l'ensemble des collègues que j'ai côtoyés durant ces trois années qui ont contribué à faire de l'ambiance des journées au labo une ambiance de travail très agréable et encourageante. Leur connaissance me présente un grand enrichissement au niveau professionnel comme au niveau personnel. Je les remercie très sincèrement.

Un grand merci pour tous mes amis à Rennes et spécialement à la résidence de la châtaigneraie et à Cesson-Sévigné, qui ont rendu ce nouvel endroit étranger un lieu auquel nous appartenons maintenant, et dans lequel je ne peut me rappeler que de très bons souvenirs avec ma famille de Rennes.

Je ne peut clore cette page sans adresser mes remerciements les plus profonds à ma chère famille, en particulier mes parents pour m'avoir soutenu tout au long de mes études et d'avoir toujours su appuyer mes choix et m'encourager. Je remercie également mes chères soeurs Hajar et Nawal qui m'ont toujours apporté tout le support indispensable surtout dans la dernière phase de rédaction.

Mariam El Hassan

le 15/08/2021

# Table des matières

Table des matières	x
Table des figures	xiv
Liste des tableaux	xv
Introduction	1
<b>1 Les systèmes OFDM et l'amplification de puissance, contexte et pré-requis</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	5
1.2 Les systèmes OFDM . . . . .	5
1.2.1 Canaux sélectifs et modulations mono-porteuse . . . . .	5
1.2.2 Modulations multi-porteuses de type OFDM . . . . .	6
1.2.3 Implémentation par IFFT . . . . .	7
1.2.4 L'intervalle de garde . . . . .	9
1.2.5 Les sous-porteuses de garde . . . . .	10
1.2.6 Déploiement des systèmes OFDM . . . . .	10
1.2.7 Avantages des modulations OFDM . . . . .	11
1.3 Caractérisation des AP . . . . .	11
1.3.1 Importance de l'amplification des signaux à l'émission . . . . .	11
1.3.2 Fonction de transfert non-linéaire de l'AP . . . . .	12
1.3.3 Efficacité énergétique des AP . . . . .	14
1.3.4 Choix du point de fonctionnement de l'AP . . . . .	14
1.3.5 Effet mémoire des AP . . . . .	15
1.3.6 Linéarisation des AP par les techniques de prédistorsion . . . . .	15
1.4 Modèles d'AP non-linéaires . . . . .	16
1.4.1 Modèle de Rapp . . . . .	17
1.4.2 Modèle polynomial . . . . .	17
1.4.3 Modèle de séries de Volterra . . . . .	20
1.4.4 Modèle de Wiener et Hammerstein . . . . .	21
1.5 Problématique du PAPR élevé des système OFDM . . . . .	23
1.5.1 Définition du PAPR . . . . .	23
1.5.2 PAPR des systèmes OFDM . . . . .	23
1.5.3 Problème du fort PAPR lors de l'amplification . . . . .	25
1.5.4 Figures de mérite . . . . .	25
1.5.4.1 Fonction de distribution du PAPR . . . . .	25



1.5.4.2	Amplitude du vecteur d'erreur (EVM) . . . . .	27
1.5.4.3	Rapport de puissance sur les canaux adjacents (ACPR) . . . . .	29
1.6	Techniques de réduction du PAPR . . . . .	29
1.6.1	Techniques à distorsion du signal . . . . .	30
1.6.1.1	<i>Clipping</i> . . . . .	30
1.6.1.2	<i>Windowing</i> . . . . .	32
1.6.1.3	<i>Companding</i> . . . . .	32
1.6.2	Techniques Probabilistes . . . . .	32
1.6.2.1	<i>Selected Mapping</i> . . . . .	32
1.6.2.2	<i>Partial Transmit séquence</i> . . . . .	33
1.6.2.3	Technique d'entrelacement ou <i>Interleaving</i> . . . . .	34
1.6.3	Techniques à ajout de signal . . . . .	34
1.6.3.1	<i>Tone Reservation</i> . . . . .	35
1.6.3.2	<i>Tone Injection</i> . . . . .	36
1.6.3.3	<i>Active Constellation Extension</i> . . . . .	37
1.6.4	Techniques de codage . . . . .	37
1.6.5	Caractéristiques des techniques de réduction du PAPR . . . . .	38
1.7	Conclusion . . . . .	40

## 2 État de l'art de la technique *Tone Reservation* et des études théoriques de l'EVM 41

2.1	Introduction . . . . .	41
2.2	La technique <i>Tone Reservation</i> . . . . .	42
2.2.1	Principaux avantages de la technique <i>Tone Reservation</i> . . . . .	42
2.2.2	Description de la technique <i>Tone Reservation</i> . . . . .	43
2.2.2.1	Principe de la technique TR . . . . .	43
2.2.2.2	Contrainte de puissance des PRTs . . . . .	44
2.2.2.3	Effet de perte de sensibilité au récepteur . . . . .	45
2.2.2.4	Orthogonalité par opérations linéaires . . . . .	45
2.2.2.5	Pourcentage et emplacement des sous-porteuses . . . . .	46
2.2.2.6	Algorithmes de la technique TR . . . . .	46
2.2.3	État de l'art sur les algorithmes de la technique TR . . . . .	46
2.2.4	Description des algorithmes de la technique TR . . . . .	49
2.2.4.1	Algorithme optimal : QCQP . . . . .	49
2.2.4.2	Algorithme du gradient . . . . .	50
2.2.4.3	Algorithmes ICMP et GICMP . . . . .	54
2.3	État de l'art sur l'étude théorique . . . . .	56
2.3.1	Évaluation de l'EVM pour les différentes distorsions du signal . . . . .	57
2.3.2	Évaluation de la CCDF du PAPR . . . . .	58
2.3.3	Autres études théoriques . . . . .	59
2.3.3.1	Étude théorique de la solvabilité du problème TR . . . . .	59
2.3.3.2	Évaluation de l'efficacité énergétique des AP . . . . .	59
2.3.4	Conclusion sur l'état de l'art théorique . . . . .	59
2.4	But de cette thèse : Évaluation analytique de l'EVM TR pour différents algorithmes . . . . .	60
2.5	Conclusion . . . . .	61

<b>3</b>	<b>Distribution statistique du signal OFDM avec <i>Tone Reservation</i> et expression générale de l'EVM</b>	<b>63</b>
3.1	Introduction . . . . .	63
3.2	Modèle du système . . . . .	63
3.2.1	Modèle de la chaîne de transmission OFDM . . . . .	64
3.2.1.1	Facteur de réglage de l'IBO, $F_{IBO}$ . . . . .	65
3.2.1.2	Facteur de normalisation $F_n$ . . . . .	65
3.2.2	Réduction du PAPR . . . . .	65
3.2.2.1	<i>Clipping</i> . . . . .	65
3.2.2.2	Tone Reservation . . . . .	66
3.2.3	Modèle de l'AP . . . . .	66
3.2.4	Expression de l'EVM . . . . .	67
3.2.5	Choix du signal de référence pour le calcul de l'EVM . . . . .	67
3.2.6	Notations mathématiques utiles pour la suite de ce travail . . . . .	69
3.3	Développement de l'expression de l'EVM en fonction de la distribution du signal . . . . .	69
3.4	Application : Expression de l'EVM sans réduction du PAPR . . . . .	73
3.5	Expression de l'EVM dans le cas du <i>clipping</i> . . . . .	75
3.6	Analyse de la PDF du signal OFDM après application de la technique TR	78
3.6.1	Allure générale de la PDF . . . . .	79
3.6.2	Examen de la possibilité d'appliquer le théorème de la limite centrale	79
3.6.3	PDFs des signaux $x(t)$ et $c(t)$ et distribution de la somme de deux v.a. gaussiennes indépendantes . . . . .	80
3.6.4	PDF de $s(t)$ à partir de la somme de deux v.a. dépendantes et de la fonction de probabilité conjointe . . . . .	82
3.7	Conclusion . . . . .	85
<b>4</b>	<b>Expression de l'EVM dans le cas de l'algorithme optimal TR-QCQP</b>	<b>87</b>
4.1	Introduction . . . . .	87
4.2	Analyse et modélisation de la PDF de l'amplitude du signal $s(t)$ avec application de la technique TR-QCQP . . . . .	87
4.2.1	Analyse de l'histogramme de $ s(t) $ pour chaque symbole OFDM . . . . .	88
4.2.2	Séparation des deux modes de la PDF . . . . .	88
4.2.3	Modélisation de chaque mode de la PDF . . . . .	89
4.2.3.1	Modèle de la PDF $f_{s2}(r)$ . . . . .	89
4.2.3.2	Modèle de la distribution $f_{s1}(r)$ . . . . .	90
4.2.4	Expression de la PDF et validation du résultat . . . . .	93
4.3	Expression de l'EVM dans le cas de l'application de l'algorithme TR-QCQP	94
4.3.1	Approximation de la PDF de $s(t)$ . . . . .	94
4.3.2	Calcul des moments de $f_{s1}(r)$ et $f_{s2}(r)$ . . . . .	95
4.3.2.1	Calcul des moments de $f_{s1}(r)$ . . . . .	96
4.3.2.2	Calcul des moments de $f_{s2}(r)$ . . . . .	97
4.3.3	Expression des moments de $f_s^{\text{QCQP}}(r)$ et expression de l'EVM . . . . .	98
4.4	Analyse des résultats numériques d'EVM . . . . .	100
4.4.1	Validation du résultat théorique . . . . .	100
4.4.2	Analyse des résultats d'EVM . . . . .	101

4.4.2.1	TR vs <i>clipping</i> - Analyse asymptotique . . . . .	101
4.4.2.2	Effet de la contrainte de puissance . . . . .	103
4.4.2.3	Comparaison des modes $1K$ et $8K$ . . . . .	103
4.4.3	Analyse du taux d'erreur binaire . . . . .	104
4.5	Conclusion . . . . .	106
<b>5</b>	<b>Étude de l'EVM dans le cas de l'application d'algorithmes sous-optimaux</b>	<b>107</b>
5.1	Introduction . . . . .	107
5.2	Étude des performances de l'algorithme du gradient . . . . .	108
5.2.1	Analyse de la PDF du signal temporel après l'application de l'algorithme du gradient . . . . .	108
5.2.2	Modélisation de la PDF du signal temporel après l'application de l'algorithme du gradient . . . . .	111
5.2.3	Expression des moments de $f_s^{\text{Grad}}(r)$ et expression de l'EVM en appliquant l'algorithme du gradient . . . . .	112
5.2.3.1	Calcul des moments de $f_s^{\text{Grad}}(r)$ . . . . .	112
5.2.3.2	Expression de l'EVM . . . . .	112
5.2.4	Performances de l'algorithme du gradient . . . . .	113
5.2.4.1	Validité de l'expression de l'EVM . . . . .	113
5.2.4.2	Étude du seuil d'amplitude $V_{clip}$ pour le standard DVB-T2 . . . . .	114
5.3	Étude et performances de l'algorithme GICMP . . . . .	115
5.3.1	Étude de la PDF $f_s(r)$ en appliquant l'algorithme GICMP . . . . .	116
5.3.2	Analyse de la PDF et de l'EVM sous l'effet des différents paramètres de l'algorithme . . . . .	117
5.3.2.1	Effet de la contrainte de puissance $\Delta P_b$ . . . . .	117
5.3.2.2	Effet du nombre $S$ de crêtes détectées à chaque itération . . . . .	118
5.3.2.3	Effet du nombre $G$ de groupes de PRTs . . . . .	119
5.3.3	Modélisation de la PDF en appliquant l'algorithme GICMP . . . . .	120
5.3.3.1	Premier schéma de séparation de modes . . . . .	121
5.3.3.2	Deuxième schéma de séparation de modes . . . . .	122
5.3.3.3	Troisième schéma de séparation de modes . . . . .	123
5.4	Comparaison des performances en EVM des algorithmes de la technique <i>Tone Reservation</i> . . . . .	126
5.5	Conclusion . . . . .	129
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>131</b>
	<b>Liste des abréviations</b>	<b>137</b>
	<b>Notations mathématiques</b>	<b>141</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>151</b>

# Table des figures

1.1	Exemple de la réponse fréquentielle de canaux plats et de canaux sélectifs en fréquence . . . . .	6
1.2	Interférence entre les symboles à la réception sur les canaux sélectifs en fréquence, pour une transmission mono-porteuse (a) et multi-porteuse (b)	7
1.3	Spectre des sous-fréquences OFDM orthogonales . . . . .	8
1.4	Modulation d'un symbole OFDM, de durée $T_s$ . . . . .	8
1.5	Schéma du modulateur OFDM sur $N$ sous-porteuses . . . . .	9
1.6	Insertion du préfixe cyclique constituant l'intervalle de garde entre les blocs OFDM . . . . .	9
1.7	Chaîne de transmission OFDM en présence des AP . . . . .	12
1.8	Caractéristique non-linéaire des AP . . . . .	13
1.9	Schéma de puissance de l'AP . . . . .	14
1.10	Schéma de linéarisation des AP par des techniques de prédistorsion . . . . .	16
1.11	Réponse AM/AM du modèle de Rapp pour différentes valeurs de $b$ . . . . .	18
1.12	Présentation du modèle polynomial à mémoire comme la somme de sous-modèles non-linéaires décalés dans le temps . . . . .	19
1.13	Divergence du modèle polynomial près de la zone de saturation et extension du modèle . . . . .	19
1.14	Schéma bloc du modèle de Wiener . . . . .	22
1.15	Schéma bloc du modèle de Hammerstein . . . . .	22
1.16	Schéma bloc du modèle de Wiener-Hammerstein . . . . .	22
1.17	Exemple de l'évolution de la puissance instantanée d'un signal OFDM à 1024 sous-porteuses . . . . .	23
1.18	PDF d'un signal qui suit la loi de Rayleigh . . . . .	24
1.19	Exemple de la CCDF du PAPR des signaux OFDM temporels pour différentes valeurs de $N$ avec l'application de symboles MDP-4 aux différentes sous-porteuses . . . . .	26
1.20	Représentation de l'EVM sur les points de constellation . . . . .	27
1.21	Représentation de l'ACPR au niveau du spectre de fréquence . . . . .	30
1.22	PDF de l'amplitude du signal OFDM avec application de la technique <i>clipping</i> . . . . .	31
1.23	Schéma bloc de la technique SLM . . . . .	33
1.24	Schéma bloc de la technique PTS . . . . .	34
1.25	Schéma bloc de la technique d'entrelacement . . . . .	34
1.26	Schéma de la technique TR . . . . .	35
1.27	Schéma de la technique TI . . . . .	36

1.28	Zones d'extension possibles pour la technique ACE pour les modulations MAQ-4(a) et MAQ-16(b) . . . . .	37
1.29	Calcul du gain de réduction du PAPR pour une valeur particulière de la CCDF du PAPR . . . . .	39
2.1	Principe de la technique TR dans le domaine fréquentiel et dans le domaine temporel . . . . .	44
2.2	Illustration de la contrainte de puissance maximale allouée aux PRTs par rapport à la puissance des porteuses de données . . . . .	45
2.3	Noyau fréquentiel utilisé par l'algorithme du gradient DVB-T2 ressemblant à une peigne de Dirac dans la limite du nombre de PRTs, $N = 8192$ . . .	51
2.4	Amplitude et phase du noyau temporel, ressemblant à une impulsion de Dirac, $N = 8192$ sous-porteuses . . . . .	51
2.5	Présentation du pic détecté à l'itération $i$ de l'algorithme du gradient . .	52
2.6	Cumul de la puissance des PRTs de l'algorithme du gradient en utilisant le schéma de TTPC . . . . .	53
2.7	Géométrie de l'ajout de symboles complexes en (2.21) aux PRTs à chaque itération de l'algorithme du gradient . . . . .	54
3.1	Schéma de la chaîne de transmission OFDM . . . . .	64
3.2	Signal de référence $x(t)$ dans le cas de la technique <i>clipping</i> . . . . .	68
3.3	Signal de référence $s(t)$ dans le cas de la technique TR . . . . .	68
3.4	Courbes d'EVM du signal OFDM amplifié sans réduction du PAPR en fonction de l'IBO, obtenues théoriquement et par simulation, en considérant les deux modèles d'AP avec mémoire et sans mémoire . . . . .	74
3.5	Courbes d'EVM du signal OFDM amplifié avec l'application de la technique <i>clipping</i> , en fonction de l'IBO, obtenues théoriquement et par des simulations, en considérant le Modèle II de l'AP sans effet mémoire, pour différents niveaux $\Lambda$ de <i>clipping</i> . . . . .	77
3.6	Courbes d'EVM du signal OFDM amplifié avec l'application de la technique <i>clipping</i> , en fonction de l'IBO, obtenues théoriquement et par des simulations, en considérant le Modèle I de l'AP à effets mémoire, pour différents niveaux $\Lambda$ de <i>clipping</i> . . . . .	78
3.7	PDF de l'amplitude du signal OFDM sans réduction du PAPR et avec l'application de la technique TR-QCQP avec différentes contraintes de puissance, normalisée tel que $P_s = 1$ , symboles en mode $1K$ . . . . .	79
3.8	PDFs des parties réelles, imaginaires, et amplitudes respectives des signaux $x(t)$ (a), $c(t)$ (b) et $s(t)$ (c), en appliquant l'algorithme QCQP de la technique TR, dans les cas où $\Delta P_b = 10$ dB et sans contrainte de puissance, symboles en mode $1K$ . . . . .	81
3.9	Fonctions de probabilité conjointe des v.a. $x$ et $c$ dans le cas où elles sont indépendantes (a) et dans le cas de l'algorithme QCQP, $\Delta P_b = 10$ dB, symboles en mode $1K$ (b) et la distribution résultante de la somme de ces deux variables dans chaque cas . . . . .	84
4.1	Présentation temporelle d'un seul symbole OFDM en mode $1K$ avec TR-QCQP sans contrainte de puissance (a) et histogramme correspondant (b)	88

4.2	Distributions $f_{s1}(r)$ et $f_{s2}(r)$ séparées, avec l'application de l'algorithme TR-QCQP sans contrainte de puissance, symboles en mode $1K$ . . . . .	89
4.3	Comparaison entre la PDF $f_{s2}(r)$ empirique et sa modélisation se basant sur une loi GEV pour $\Delta P_b = 10$ dB (a) et paramètres de position, d'échelle et de forme correspondants en fonction de $\Delta P_b$ (b) pour les modes $1K$ et $8K$ . . . . .	91
4.4	Comparaison entre les PDF $f_{s1}(r)$ et $f_{A_{max}}(r)$ empiriques et leur modélisation se basant sur une loi GEV et une loi de Rayleigh pour $\Delta P_b = 10$ dB (a) et paramètres de puissance, position, d'échelle et de forme correspondants en fonction de la contrainte de puissance $\Delta P_b$ (b) pour les modes $1$ et $8K$ . . . . .	92
4.5	Comparaison de $f_s(r)$ modélisée à la PDF obtenue par des simulations du signal OFDM temporel après l'application de la technique TR-QCQP avec $\Delta P_b = 10$ dB (a) et valeurs du facteur $p$ correspondant pour différentes valeurs de $\Delta P_b$ (b), pour les modes $1K$ et $8K$ . . . . .	94
4.6	Effet des approximations de $F_{s11}(r)$ sur la PDF $f_s(r)$ modélisée (a) et sur les valeurs calculées de l'EVM (b), obtenues par des intégrations numériques avec $\Delta P_b = 10$ dB et pour le mode $1K$ . . . . .	96
4.7	Courbes d'EVM obtenues théoriquement et par simulations en fonction de l'IBO avec l'application de l'algorithme QCQP, pour les modes $1$ et $8K$ , avec $\Delta P_b = 10$ dB et en considérant les modèles d'AP avec effets mémoire et sans effets mémoire. . . . .	100
4.8	Courbes d'EVM théorique en fonction de l'IBO pour différents schémas de réduction du PAPR, en considérant le mode $1K$ et le Modèle II de l'AP . . . . .	102
4.9	BER en fonction du SNR pour différentes valeurs de l'IBO avec et sans l'application de l'algorithme TR-QCQP, canal AWGN, constellation MAQ-64, $\Delta P_b = 10$ dB, en considérant les symboles en mode $1K$ et le Modèle II de l'AP . . . . .	104
5.1	PDF de l'amplitude du signal OFDM temporel après l'application de l'algorithme du gradient avec différentes valeurs de $V_{clip}$ , $I_{max} = 50$ , $\Delta P_b = 10$ dB, mode $8K$ - PDF normalisée tel que $P_s = 1$ . . . . .	108
5.2	Courbes d'EVM obtenues théoriquement et par simulations en fonction de l'IBO avec l'application de l'algorithme du gradient, pour différentes valeurs de $V_{clip}$ , $\Delta P_b = 10$ dB, $I_{max} = 50$ , mode $8K$ et en considérant le Modèle II de l'AP . . . . .	114
5.3	EVM en fonction de $V_{clip}$ pour différentes valeurs de l'IBO en utilisant l'algorithme du gradient du standard DVB-T2, $\Delta P_b = 10$ dB, $I_{max} = 50$ , mode $8K$ et en considérant le Modèle II de l'AP . . . . .	115
5.4	PDF de l'amplitude du signal OFDM avec l'application de l'algorithme GICMP avec $S = 80$ , $G = 8$ et $\Delta P_b = 10$ dB en mode $8K$ , comparée aux PDFs en appliquant l'algorithme QCQP avec $\Delta P = 10$ dB en $1K$ et sans réduction de PAPR normalisées telles que $P_s = 1$ . . . . .	116
5.5	PDF de l'amplitude du signal OFDM en appliquant l'algorithme GICMP pour différentes valeurs de $\Delta P_b$ avec $S = 80$ , $G = 8$ , mode $8K$ (a) et courbes d'EVM correspondantes obtenues par simulations en considérant le Modèle II de l'AP (b) . . . . .	117

5.6	PDF de l'amplitude du signal OFDM en appliquant l'algorithme GICMP pour différentes valeurs de $S$ avec $G = 8$ , $\Delta P_b = 10$ dB, mode 8K (a) et courbes d'EVM correspondantes obtenues par simulations en considérant le Modèle II de l'AP (b) . . . . .	118
5.7	PDF de l'amplitude du signal OFDM en appliquant l'algorithme GICMP pour différentes valeurs de $G$ avec $S = 80$ , $\Delta P_b = 10$ dB, mode 8K (a) et courbes d'EVM correspondantes obtenues par simulation en considérant le Modèle II de l'AP (b) . . . . .	119
5.8	Histogramme de l'amplitude d'un seul symbole OFDM en appliquant l'algorithme GICMP, $S = 80$ , $G = 8$ , $\Delta P_b = 10$ dB, mode 8K (a) et en appliquant l'algorithme QCQP $\Delta P_b = 10$ dB, mode 8K (b) . . . . .	120
5.9	Séparation des deux modes de la PDF par l'extraction des échantillons réduits au niveau de chaque symbole OFDM, algorithme GICMP avec $S = 80$ , $G = 8$ et $\Delta P_b = 10$ dB, mode 8K . . . . .	121
5.10	Modélisation du second mode de la PDF par une loi de Dagum . . . . .	122
5.11	Séparation des deux modes de la PDF par l'extraction des $N_s$ crêtes d'amplitudes les plus élevées de chaque symbole OFDM pour différentes valeurs de $N_s$ , algorithme GICMP avec $S = 80$ , $G = 8$ et $\Delta P_b = 10$ dB, mode 8K . . . . .	123
5.12	Modèle du premier mode de la PDF par une distribution de Rayleigh tronquée (a) et du second mode par une distribution GEV (b), pour différentes valeurs de $N_s$ , algorithme GICMP avec $S = 80$ , $G = 8$ et $\Delta P_b = 10$ dB . . . . .	124
5.13	Courbes d'EVM obtenues par l'intégration numérique du modèle obtenu pour différentes valeurs de $N_s$ en comparaison à l'EVM obtenue par simulations, algorithme GICMP avec $S = 80$ , $G = 8$ et $\Delta P_b = 10$ dB, mode 8K, Modèle II de l'AP . . . . .	124
5.14	Séparation des deux modes de la PDF par l'extraction d'une distribution gaussienne . . . . .	125
5.15	Comparaison de la PDF modélisée par rapport à la PDF empirique initiale (a) et courbe d'EVM obtenue par l'intégration numérique de ce modèle comparée à l'EVM obtenue par simulations (b) . . . . .	126
5.16	Courbes d'EVM vs IBO obtenues par simulations pour les différents algorithmes de TR, en considérant le mode 8K et le Modèle II de l'AP . . . . .	127
5.17	Courbes de MER vs IBO obtenues par simulations pour les différents algorithmes de TR, en considérant le mode 8K et le Modèle II de l'AP . . . . .	128

# Liste des tableaux

1.1	Valeurs limites d'EVM définies par le standard LTE pour les différents ordres de modulation . . . . .	28
1.2	Valeurs limites d'EVM définies par le standard IEEE 802.11ac pour les différents ordres de modulation et les différents rendements des codes . . . . .	28
1.3	PAPR des différentes configurations d'un système OFDM à 4 sous-porteuses en MDP-2 . . . . .	38
2.1	Comparaison des caractéristiques des techniques de réduction du PAPR les plus reconnues . . . . .	42
3.1	Nombre de sous-porteuses OFDM, sous-porteuses actives, et sous-porteuses PRTs pour chaque mode de fonctionnement, selon la définition de la trame DVB-T2 . . . . .	64
4.1	Valeurs d'EVM en % pour différentes valeurs de l'IBO avec et sans l'application de l'algorithme TR-QCQP à partir des résultats de la Fig. 4.8 . . . . .	104
5.1	Statistiques sur les conditions de sortie de l'algorithme du gradient pour différentes valeurs de $V_{clip}$ avec $I_{max} = 50$ , $\Delta P_b = 10$ dB, mode 8K . . . . .	109
5.2	Valeurs du facteur $p$ pour différentes valeurs de $V_{clip}$ en considérant une puissance $P_s$ normalisée à 1, $\Delta P_b = 10$ dB, $I_{max} = 50$ , mode 8K . . . . .	111





# Introduction générale

De nos jours l'aspect énergétique revient au premier plan pour le développement des futurs réseaux mobiles. En effet, les Technologies de l'Information et de la Communication (TIC) constituent 2% des émissions mondiales en CO<sub>2</sub> [1]. Ceci est équivalent à l'émission totale du domaine de l'aviation et au quart de l'émission véhiculaire pour l'ensemble du globe. Ce pourcentage risque d'augmenter jusqu'à 10% en 2030 sans l'adoption de solutions énergétiques efficaces [2]. Durant la pandémie du Covid-19, la consommation en CO<sub>2</sub> a fortement baissé à l'échelle mondiale. Par contre, le secteur des TIC est l'un des domaines dont la consommation d'énergie est restée inchangée au contraire d'autres secteurs polluants comme le secteur de l'aviation et le secteur véhiculaire. À noter que des études récentes montrent que malgré la charge des réseaux de communication durant la pandémie, la consommation en électricité de ces réseaux a été presque inchangée [3]. Par ailleurs, la consommation en électricité des stations de base constitue 80% du total de la consommation de l'infrastructure cellulaire [4]. L'amplification de puissance du signal émis est l'élément consommateur d'énergie le plus important de la chaîne de transmission au niveau de ces stations de base ainsi qu'au niveau des émetteurs des terminaux utilisateurs. À titre d'exemple, l'amplificateur de puissance représente à pleine charge 55 à 60% de la consommation d'énergie d'une station de base LTE pour des macro-cellules [5].

D'autre part, les modulations multi-porteuses et spécialement les modulations de type *Orthogonal Frequency Division Multiplexing* (OFDM) ont été largement déployées dans la dernière décennie. Ces modulations présentent une solution pertinente pour faire face à l'interférence inter-symboles sur les canaux sélectifs en fréquence. Les techniques multi-porteuses de type OFDM sont aujourd'hui largement déployées dans les systèmes de communication sans fils notamment dans les réseaux cellulaires de 4<sup>ème</sup> génération (LTE [6] et LTE Advanced [7]), les réseaux de diffusion de la télévision numérique (DVB-T, DVB-T2 [8], ATSC3.0 [9]) ou encore les réseaux WiFi [10]. De plus, les dernières *releases* des réseaux cellulaires de 5<sup>ème</sup> génération déploient aussi l'OFDM comme schéma de modulation [11].

Cependant, un inconvénient majeur des modulations multi-porteuses est qu'elles se caractérisent par une très grande dynamique du signal à l'entrée de l'Amplificateur de Puissance (AP) à la transmission. Cette dynamique est mesurée par le rapport de la puissance crête sur la puissance moyenne ou *Peak to Average Power Ratio* (PAPR). En effet, lors de l'amplification de la puissance de ces signaux par des AP qui sont par essence non linéaires, le signal subit des distorsions, en particulier lorsque le point de fonctionnement est trop proche de la zone de saturation. Afin de limiter les distorsions du signal, le calibrage du point de fonctionnement de l'AP est nécessaire, en utilisant un recul de puissance d'entrée ou *Input Back-Off* (IBO) par rapport au niveau de saturation de l'AP. Ceci a alors pour conséquence que le point de fonctionnement utilisé conduit à

une efficacité énergétique qui est d'autant plus faible que l'IBO est élevé. Ainsi, le PAPR élevé des signaux OFDM nécessite de faire un compromis entre l'efficacité énergétique et le taux de distorsions du signal amplifié. Ceci impacte fortement l'efficacité énergétique de l'AP qui joue un rôle clé dans l'efficacité énergétique de l'ensemble de la chaîne de transmission.

Afin de faire face à ce problème, les chercheurs travaillent selon deux axes essentiels et complémentaires. Le premier est la linéarisation de l'AP par des techniques de prédistorsion. Le second est la réduction de la dynamique du signal en bande de base par des techniques de réduction du PAPR afin d'exploiter l'AP à un point d'opération plus proche de la zone de saturation. Depuis l'introduction de l'OFDM, de nombreuses techniques de réduction du PAPR du signal à amplifier ont été proposées dans la littérature. La technique la plus simple est la technique *clipping* [12], mais elle introduit de fortes distorsions sur le signal. Des techniques avancées telles que les techniques *Tone Reservation* (TR) [13] et *Active Constellation Extension* (ACE) [14] ont été retenues dans des standards comme DVB-T2 [8] et ATSC3.0 [9]. Plusieurs recherches visent à améliorer ces algorithmes en évaluant leurs capacités à réduire le PAPR. Cette évaluation se fait par des métriques comme la métrique *Error Vector Magnitude* (EVM) qui évalue le taux de distorsions causées par l'AP dans la bande du signal. L'évaluation de telles métriques est d'un grand intérêt afin de prévoir les gains en efficacité énergétique offerts par ces techniques de réduction du PAPR. Ainsi, un certain nombre de standards tels que le standard IEEE 802.11ac WiFi [15], le standard IEEE 802.16e WiMAX [16] ainsi que le standard LTE [6] précisent la valeur de l'EVM que le signal amplifié puis émis ne doit pas dépasser.

## **Problématique et objectifs de la thèse**

Malgré le grand nombre de techniques de réduction du PAPR proposées dans la littérature, l'évaluation analytique des performances de ces techniques n'a pas été suffisamment étudiée. La question globale de l'efficacité des techniques de réduction du PAPR de façon analytique, et pas algorithmique, n'a toujours pas été adressée. En effet, d'après nos connaissances, aucune étude ne cherche à évaluer analytiquement l'effet de l'application de techniques avancées de réduction du PAPR (comme les techniques TR et ACE), sur la distorsion du signal émis, mesurée par l'EVM. Dans cette perspective, cette thèse propose d'évaluer analytiquement les performances de la technique TR, et ce, en donnant l'expression de l'EVM en fonction de l'IBO.

Une telle étude est d'un grand intérêt afin de prévoir les gains en efficacité obtenus grâce aux techniques de réduction du PAPR. L'évaluation analytique des métriques de performances permettrait de déterminer précisément les paramètres optimaux de la technique de réduction du PAPR sélectionnée en considérant l'optimisation globale de la chaîne de transmission. De plus, l'évaluation globale du compromis efficacité énergétique-linéarité après la réduction du PAPR permet de choisir d'une façon optimale le point de fonctionnement de l'AP.

# Organisation du manuscrit

Le reste de cette thèse est organisé en 5 chapitres. Le Chapitre 1 introduit le contexte de l'étude. En premier lieu, il détaille le principe des systèmes OFDM et leurs applications. Ensuite il présente une description détaillée des amplificateurs de puissance à l'émission ainsi que leurs différents modèles. Ainsi, il introduit le problème du PAPR élevé des signaux OFDM lors de l'amplification de puissance de ces signaux. Le problème du PAPR élevé est donc détaillé en précisant les différentes métriques du problème et les solutions existantes dans la littérature pour lui faire face.

Le Chapitre 2 vise à introduire la problématique de la thèse. L'état de l'art sur les algorithmes de la technique TR est détaillé ainsi qu'une description étendue de cette technique et des algorithmes les plus efficaces associés. Ensuite, les éléments de l'état de l'art sur l'étude analytique des techniques de réduction du PAPR sont détaillés. Cet état de l'art montre ainsi l'insuffisance des études faites à ce niveau et surtout pour la technique TR. Les objectifs détaillés de cette thèse sont ainsi introduits dans ce cadre.

Dans le Chapitre 3, le modèle du système est décrit. Ensuite, l'expression analytique de l'EVM est dérivée dans le cas général des techniques de réduction de PAPR n'introduisant pas de distorsions du signal, notamment la technique TR, et ce, par l'intermédiaire de la fonction de densité de probabilité (PDF) de l'amplitude du signal à PAPR réduit. Une application de cette méthodologie de calcul de l'EVM est menée dans le cas de la technique *clipping* afin de dériver l'expression de l'EVM en fonction de l'IBO. La dérivation portée dans le cas de la technique TR montre donc que le calcul se base sur l'évaluation de la PDF de l'amplitude du signal OFDM avec réduction de PAPR. Ainsi, des essais théoriques de base sont menés afin d'analyser l'allure de cette PDF dans le cas général de la technique TR. Cette analyse théorique montre que l'évaluation de la distribution nécessite de mener une étude de la PDF pour chaque algorithme de la technique TR, par sa simulation et sa modélisation.

Le Chapitre 4 concerne l'algorithme QCQP qui offre les performances optimales de réduction du PAPR atteignables en appliquant la méthode TR. La PDF du signal dans le cas de l'application de l'algorithme QCQP est simulée et modélisée analytiquement. Puis, les paramètres de cette distribution sont modélisés en fonction des paramètres du système. Ensuite, les moments de cette distribution sont dérivés afin de donner l'expression de l'EVM en fonction de l'IBO pour le cas de l'algorithme QCQP. Des courbes de validation et d'analyse de l'EVM sont enfin données.

Le Chapitre 5 traite des algorithmes sous-optimaux de la technique TR. La première partie de ce chapitre concerne l'algorithme du gradient, décrit et proposé dans les standards de diffusion terrestre de la télévision numérique, DVB-T2 et ATSC 3.0. La PDF dans le cas de l'application de l'algorithme du gradient est simulée et modélisée et l'expression de l'EVM est dérivée à partir de ce modèle. Ensuite, la seconde partie du chapitre s'intéresse à l'étude de l'algorithme GICMP, offrant un bon compromis complexité-efficacité de réduction du PAPR. Une analyse de la PDF du signal en appliquant cet algorithme est menée et les éléments de sa modélisation sont détaillés.

Finalement, la conclusion générale de ces travaux présente les potentiels futurs travaux et les perspectives à ce travail.

## Liste des publications

Les contributions de ce travail ont fait l'objet de publications dans les conférences et journaux suivants :

### Revue Internationale

- (J1) Mariam El Hassan, Matthieu Crussière, Jean-François Héland, Youssef Nasser, Ousama Bazzi, "EVM Closed-Form Expression for OFDM Signals with Tone Reservation-Based PAPR Reduction", *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 19, no. 4, pp. 2352–2366, 2020.

### Conférences Internationales

- (C1) Mariam El Hassan, Matthieu Crussière, Jean-François Héland, Youssef Nasser, Ousama Bazzi, "A Novel Statistical Model of OFDM Signals with Optimal Tone Reservation PAPR Reduction for EVM Theoretical Analysis", in 2018 IEEE 29<sup>th</sup> Annual International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC 2018), Bologna, Italy, 9-13 September 2018, pp. 1–6.
- (C2) Mariam El Hassan, Matthieu Crussière, Jean-François Héland, Youssef Nasser, Ousama Bazzi, "On Providing the Theoretical EVM Limit for Tone Reservation PAPR Reduction Technique", in 2020 IEEE 21<sup>st</sup> International Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC 2020), Atlanta, Georgia, USA (virtual conference), 26-29 May 2020 , pp. 1–5.
- (C3) Mariam El Hassan, Matthieu Crussière, Jean-François Héland, Youssef Nasser, Ousama Bazzi, "Theoretical Performance of the Gradient-Based Tone Reservation PAPR Reduction Algorithm", in 2020 IEEE 16<sup>th</sup> International Conference on Wireless and Mobile Computing, Networking and Communications (WiMob 2020), Thessalonik, Greece (virtual conference), 12-14 October 2020, pp. 1-6.

### Conférences Nationales

- (N1) Mariam El Hassan, Matthieu Crussière, Jean-François Héland, Youssef Nasser, Ousama Bazzi, "Modélisation de la statistique du signal OFDM pour l'étude analytique de l'EVM avec réduction du PAPR par porteuses réservées", in 2019 Groupe d'Études du Traitement du Signal et des Images (Gretsi 2019), Lille, France, 26-29 Aout 2019, pp. 1-4.

### Encadrement de stage

Stage de mastère de Yara Yaacoub : l'encadrement du stage de Yara Yaacoub a été effectué dans le cadre de cette thèse. Ce stage concerne l'étude de la distribution du signal dans le cas de l'application des algorithmes ICMP et GICMP de la technique TR.

# Chapitre 1

## Les systèmes OFDM et l'amplification de puissance, contexte et pré-requis

### 1.1 Introduction

Ce chapitre rappelle les éléments de base des systèmes OFDM et explicite la problématique de l'amplification non-linéaire de ces signaux. En premier lieu, les modulations multi-porteuses et en particulier la technique OFDM sont décrites en rappelant les avantages essentiels qui justifient leur déploiement quasi universel dans les systèmes de communications modernes. Dans un second temps, nous étudions les conséquences des non-linéarités des amplificateurs de puissance (AP) utilisés lors de la transmission des signaux à porteuses multiples. Les différents modèles d'amplificateurs de puissance utilisés dans la littérature sont d'abord présentés. Puis les métriques rendant compte des non-linéarités sont introduites. En particulier, La dynamique de l'amplitude du signal OFDM est étudiée afin de mettre en évidence le fort PAPR des signaux générés par ces systèmes. La problématique que pose ce PAPR élevé lors de l'amplification non-linéaire des signaux OFDM est alors énoncée. Pour terminer ce chapitre, les techniques de réduction du PAPR les plus reconnues sont décrites.

### 1.2 Les systèmes OFDM

Dans cette section, le principe des modulations OFDM est détaillé. Ces modulations sont largement déployées dans les systèmes de communications modernes en raison de leur capacité à lutter efficacement contre les dispersions temporelles et fréquentielles des canaux de propagation. Les principes fondamentaux de ces systèmes sont tout d'abord rappelés. Ensuite, leurs applications, avantages et inconvénients sont détaillés.

#### 1.2.1 Canaux sélectifs et modulations mono-porteuse

Les modulations mono-porteuse consistent à transmettre en série la séquence des symboles de données  $X_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Chacun de ces symboles est donc transmis pendant une durée symbole  $T_0$ , en occupant la totalité de la bande passante  $BP$ . Le signal émis peut

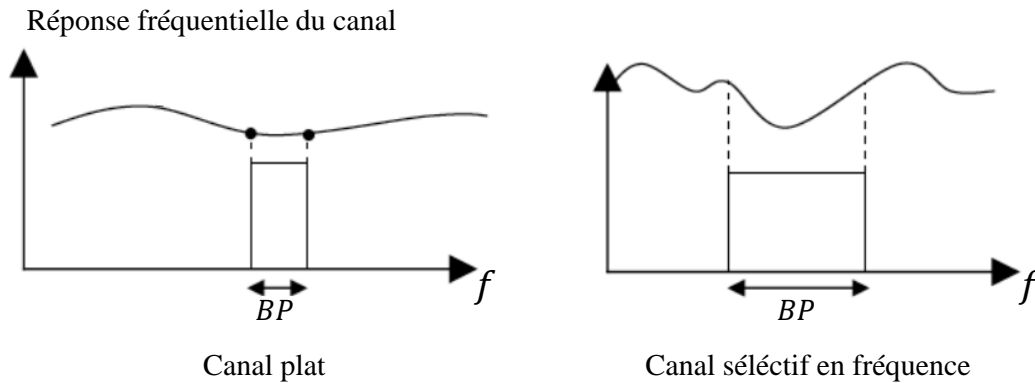


FIGURE 1.1 – Exemple de la réponse fréquentielle de canaux plats et de canaux sélectifs en fréquence

donc être exprimé par :

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} X_i h_0(t - iT_0), \quad (1.1)$$

où  $h_0(t)$  est la réponse impulsionnelle du filtre de mise en forme d'émission de support temporel  $T_0$ .

Nombre de canaux de propagation sont caractérisés par une forte sélectivité fréquentielle (*frequency selective channels*) au regard des bandes de transmission utilisées [17]. En effet, la montée en débit des systèmes conduit à l'utilisation d'une bande passante de transmission  $BP$  plus large que la bande de cohérence  $B_c$ . En d'autres termes, la réponse de ces canaux dans le domaine fréquentiel est variable sur la bande passante du signal (Fig. 1.1). De façon équivalente dans le domaine temporel, les durées des symboles sont bien plus faibles que l'étalement des multi-trajets ou *multi-path spread*  $T_m$ . Il en résulte une forte interférence entre les symboles ou *inter-symbol interference* (ISI) (Fig. 1.2).

## 1.2.2 Modulations multi-porteuses de type OFDM

Afin de réduire les interférences entre les symboles sur les canaux sélectifs en fréquence, les modulations multi-porteuses [18] consistent à diviser la bande passante en  $N$  sous-bandes de fréquence. Ainsi, ces modulations reviennent, dans le domaine temporel, à transmettre le signal par blocs de  $N$  symboles en parallèle. De cette façon, la durée de chaque symbole est multipliée par  $N$ , et devient ainsi bien plus longue que l'étalement des multi-trajets  $T_m$ . Ainsi, l'interférence inter-symboles est limitée à une faible part du symbole (Fig. 1.2). Chaque symbole d'un bloc,  $X_{i,k}$ , est porté sur une fréquence  $f_k$ , avec  $i \in (-\infty, +\infty)$  l'indice de ce bloc, et  $k \in [0, N-1]$  l'indice de la sous-bande de fréquence. Ainsi, le signal émis  $x(t)$  est exprimé par :

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} X_{i,k} h_s(t - iT_s) e^{j2\pi f_k t}, \quad (1.2)$$

Dans le domaine fréquentiel, la réponse de chacune de ces fenêtres rectangulaires  $h_s(t - iT_s)$  de largeur  $T_s = NT_0$ , où  $T_0$  est la période d'échantillonnage, est donc un sinus cardinal qui s'annule aux multiples de  $\Delta f = \frac{1}{T_s}$ .

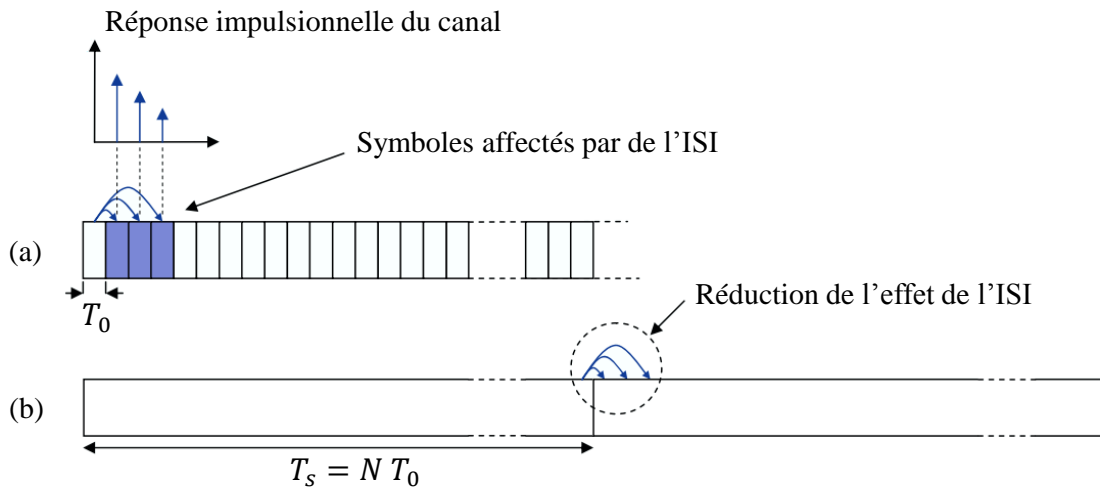


FIGURE 1.2 – Interférence entre les symboles à la réception sur les canaux sélectifs en fréquence, pour une transmission mono-porteuse (a) et multi-porteuse (b)

Les modulations multi-porteuses de type OFDM visent à assurer l'orthogonalité entre les sous-porteuses. Ainsi, les spectres des sous-porteuses se recouvrent partiellement mais les sous-porteuses n'interfèrent pas entre elles car elles vérifient des propriétés d'orthogonalité, et ce, par un espacement de  $\Delta f$  entre les fréquences  $f_k$  (Fig. 1.3). Sur chaque sous-bande, de largeur  $\frac{BP}{N}$ , le canal est quasiment constant, par rapport à ce qu'il était sur la totalité de la bande passante,  $\frac{BP}{N} = B_c$ . La décomposition fréquentielle des sous-porteuses se fait donc par :

$$f_k = f_0 + k\Delta f, \quad k \in [0 ; N - 1] \quad (1.3)$$

où  $f_0$  est la fréquence initiale du bloc OFDM. Cette opération de constitution d'un symbole OFDM est schématisée Fig. 1.4.

### 1.2.3 Implémentation par IFFT

En terme d'implémentation des modulations multi-porteuses, moduler les symboles sur  $N$  sous-porteuses conduit à une complexité supérieure à celle d'un système monoporteuse. Cette complexité est cependant largement diminuée grâce à l'utilisation des algorithmes de transformation de Fourier rapide ou *Fast Fourier Transform* (FFT) inverse et directe mises en oeuvre respectivement au sein des modulateurs/démodulateurs [20]. En effet, à partir de l'expression du signal émis en (1.2) et de la répartition de fréquence en (1.3), le signal émis peut être simplifié. En supprimant l'indice de temps sur  $i$ , un symbole OFDM transmis sur une fenêtre de temps rectangulaire correspondant à la durée d'un symbole OFDM est donné par :

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi kn/N} e^{j2\pi f_0 n}. \quad (1.4)$$



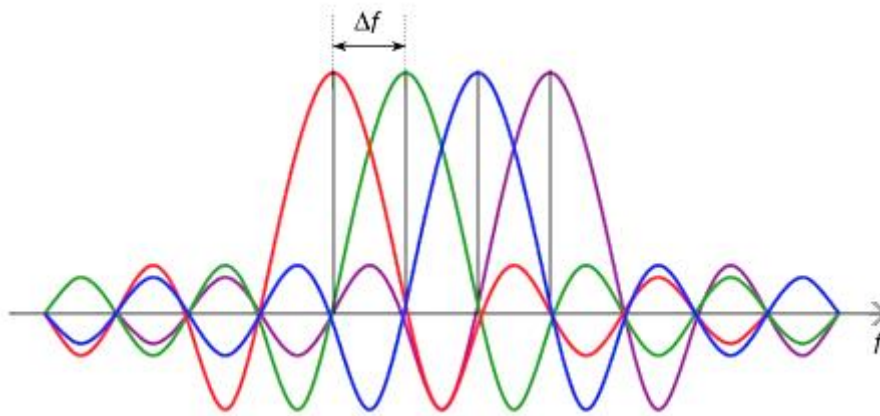


FIGURE 1.3 – Spectre des sous-fréquences OFDM orthogonales

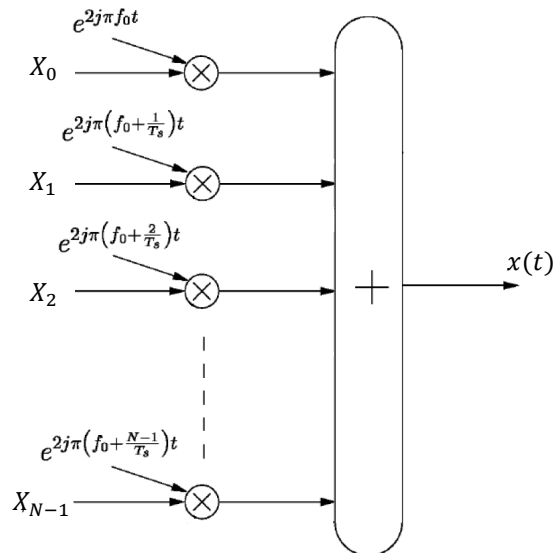
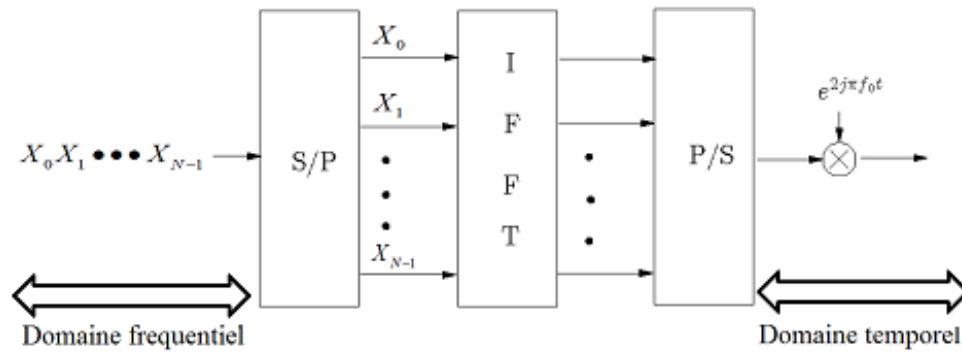


FIGURE 1.4 – Modulation d'un symbole OFDM, de durée  $T_s$  [19]

Il résulte donc que la formation des symboles OFDM à  $N$  sous-porteuses est équivalente à l'application d'une IFFT sur  $N$  flux de symboles complexes en bande de base, la résultante étant par la suite portée autour de la fréquence  $f_0$  par une transposition unique. Cette possibilité de réalisation des systèmes OFDM par une paire de IFFT/FFT [20] est une caractéristique essentielle de mise en oeuvre efficace de ces systèmes. Il est entendu que les algorithmes de IFFT/FFT garantissent par construction l'orthogonalité entre les sous-porteuses discutée précédemment. Cette implémentation des systèmes OFDM est schématisée Fig. 1.5. Les symboles complexes d'entrée associés aux sous-porteuses sont notés  $X_k$  en tant que symboles vus dans le domaine fréquentiel tandis que le signal obtenu à la sortie de la IFFT est noté  $x(t)$  en tant que signal décrit dans le domaine temporel.

FIGURE 1.5 – Schéma du modulateur OFDM sur  $N$  sous-porteuses

### 1.2.4 L'intervalle de garde

**L'interférence inter-symboles** Comme démontré dans les sections précédentes, l'OFDM permet de réduire l'ISI, puisque celle-ci n'affecte qu'une faible portion des symboles OFDM. Afin d'éliminer totalement l'ISI résiduelle, une solution consiste à insérer entre les symboles OFDM un intervalle de garde de durée  $T_g$  qui soit supérieure ou égale à l'étalement maximal des retards de la réponse impulsionnelle du canal. Ainsi, la partie utile de durée  $T_u = NT_0$  de chaque symbole OFDM n'est plus affectée par l'ISI. Cette séquence de  $c$  symboles de garde,  $c = \frac{T_g}{T_0}$ , est classiquement constituée des  $c$  derniers symboles de la partie utile du symbole OFDM courant (Fig. 1.6). On parle alors de préfixe cyclique. Même si cette solution est la plus courante pour les raisons explicitées juste après, d'autres possibilités de formation de l'intervalle de garde sont également possibles, comme par exemple la solution du *zero padding OFDM* consistant simplement à insérer des échantillons nuls entre les symboles OFDM.

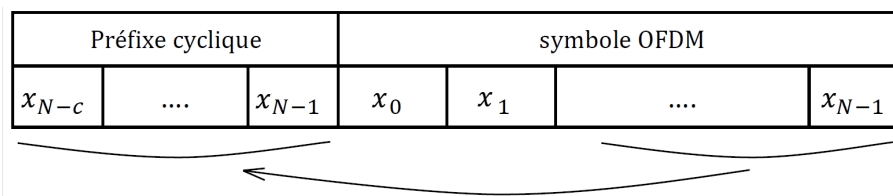


FIGURE 1.6 – Insertion du préfixe cyclique constituant l'intervalle de garde entre les blocs OFDM [21]

**L'interférence inter-porteuses** En plus de la production d'ISI, les trajets multiples du canal de propagation font apparaître une perte d'orthogonalité entre les sous-porteuses ou *inter-carrier interference* (ICI). Dans le cas d'utilisation de l'intervalle de garde sous forme de préfixe cyclique, cette orthogonalité est pourtant naturellement restituée par un simple fenêtrage des flux d'échantillons reçus sur  $N$  points avant l'application de la FFT de réception. Mathématiquement en effet, on peut aisément prouver que cette méthode permet de convertir l'opération de convolution linéaire résultant de la propagation des symboles dans le canal de propagation, par une convolution circulaire dont la propriété est d'être duale à une simple opération de multiplication après application de l'opération

de FFT. Dans le domaine fréquentiel donc, les sous-porteuses subissent le canal par une simple opération de multiplication par sa réponse en fréquence, sans apparition d'interférence.

Dans le cas d'un intervalle de garde composé d'échantillons nuls, la circularité doit être reconstruite en réception par une opération spécifique qualifiée de "*overlap and add*" et permettant d'aboutir aux mêmes propriétés de reconstruction de l'orthogonalité entre sous-porteuses.

Dans les deux cas donc, les systèmes OFDM sont caractérisés par le fait que les symboles véhiculés sur les sous-porteuses interagissent multiplicativement avec le canal de propagation. Il est donc aisé de compenser les effets de celui-ci par une opération d'égalisation scalaire sous-porteuse par sous-porteuse.

### 1.2.5 Les sous-porteuses de garde

Le filtrage de mise en forme étant rectangulaire, le spectre du signal OFDM généré est à bande infinie. Un filtrage est donc nécessaire à l'émission pour limiter l'occupation spectrale du signal. Or, ce filtrage introduit de l'ISI qui reste cependant plus faible que celle produite par les trajets multiples du canal de transmission. Afin de limiter cette interférence et obtenir exactement le spectre désiré, il est souvent nécessaire d'avoir recours à l'extinction de certaines sous-porteuses, appelées sous-porteuses de garde. Cette solution consiste simplement à ne rien émettre sur un certain nombre de ces sous-porteuses aux extrémités du spectre, au prix d'une légère perte d'efficacité spectrale.

### 1.2.6 Déploiement des systèmes OFDM

Les systèmes OFDM sont largement déployés dans les réseaux de diffusion de télévision numérique, notamment DVB-T2 [8] et ATSC 3.0 [9]. En Europe, après la réussite du standard DVB-T, l'ETSI a adopté le standard DVB-T2 en 2008. Jusqu'en 2019, le standard DVB-T2 a été implémenté dans les réseaux de diffusion au Royaume-Uni (Freeview Haute Définition (HD), 8 canaux sur 2 multiplex), en Italie (Europa 7 HD, 12 canaux), en Finlande (21 canaux, 5 en HD), en Allemagne (6 canaux HD), aux Pays-Bas (Digitenne, 30 canaux HD), au Suède (5 canaux), en Thaïlande (41 Définition Standard (SD), 9 HD), en Flandres (18 canaux SD), en Serbie (8 canaux), en Ukraine (32 canaux SD et HD), en Croatie (two pay-TV), au Danemark (*two pay-TV* avec 20 canaux), en Roumanie (8 canaux SD, 1 canal HD) et dans quelques autres pays. Ces systèmes considèrent donc tous la modulation OFDM comme schéma de modulation. Aux États Unis, le standard ATSC3.0 est adopté comme standard de diffusion de télévision numérique. Le standard ATSC3.0 utilise de même l'approche OFDM comme schéma de modulation et considère des paramètres OFDM très proches de ceux du standard DVB-T2.

D'autre part, les dernières générations de réseaux mobiles adoptent l'OFDM comme schéma de modulation en voie descendante (*downlink*). En 4G, les standards LTE [6] et LTE-A [7] ainsi que les dernières releases des réseaux 5G, en 3rd Generation Partnership Project (3GPP), jusqu'à 3GPP-Rel 16, utilisent l'OFDM comme schéma de modulation [11, 22].

### 1.2.7 Avantages des modulations OFDM

D'après la description des principes de l'OFDM rappelés précédemment, on peut identifier de nombreux avantages offerts par ces systèmes. Les plus significatifs sont listés ci-dessous :

1. Efficacité spectrale élevée par le déploiement de sous-porteuses orthogonales chevauchées, ce qui conduit à un spectre de fréquence presque rectangulaire.
2. Robustesse à l'interférence inter-symboles puisque la transmission en parallèle des symboles conduit à des durées de symboles plus longues.
3. Les interférences inter-symboles et les interférences inter-porteuses peuvent être combattues par l'insertion du préfixe cyclique.
4. Très bonne résistance aux effets des canaux sélectifs en fréquence en comparaison des systèmes mono-porteuse.
5. Implémentation simple par l'utilisation de la paire de transformées IFFT/FFT pour la modulation et la démodulation respectivement. Cette implémentation est devenue particulièrement efficace au sein des processeurs de signaux numériques ou *Digital Signal Processors* (DSPs).
6. Faible sensibilité aux erreurs de synchronisation temporelle.

Par contre, quelques problèmes des systèmes OFDM sont à énoncer face à ces avantages :

1. La synchronisation fréquentielle entre l'émetteur et le récepteur OFDM est une opération critique. En effet toute erreur de synchronisation de fréquence entre l'émetteur et le récepteur pourra détruire la caractéristique d'orthogonalité du système et peut aboutir à de l'interférence entre porteuses.
2. Le PAPR élevé des signaux temporels est un désavantage majeur pour les systèmes OFDM. Ce fort PAPR pose problème lors de l'amplification de puissance des signaux OFDM. Ce point précis, au coeur de la problématique de cette thèse sera détaillé dans la suite de ce chapitre.

## 1.3 Caractérisation des AP

Comme expliqué dans l'introduction, l'amplificateur de puissance est un élément de base dans toute chaîne de transmission. L'efficacité énergétique de l'AP est prépondérante dans l'efficacité énergétique de la station de base. Dans cette section, l'importance de l'AP à la transmission est justifiée, puis la caractéristique non-linéaire de ces AP est décrite. Ensuite, les aspects d'efficacité énergétique ainsi que le compromis qui existe entre l'efficacité et la linéarité des AP sont précisés. Afin de traiter ces amplificateurs dans la suite de ce travail, les modèles les plus importants d'AP existants dans la littérature sont décrits.

### 1.3.1 Importance de l'amplification des signaux à l'émission

L'amplificateur de puissance constitue l'élément essentiel de la puissance des émetteurs [5]. Son rôle est d'amplifier le signal avant de le transmettre sur le canal de propagation,

où il subit des effets d'atténuation (*path loss*) et d'ajout de bruit [23]. Le rôle de l'AP est d'amplifier le signal émis afin de compenser cette atténuation et d'assurer une puissance reçue suffisante comparée au bruit ajouté. Cette amplification est donc fondamentale afin de maintenir un rapport signal sur bruit acceptable ou *Signal to Noise Ratio* (SNR) qui permet, dans une zone de couverture donnée, de démoduler le signal au sein du récepteur avec un taux d'erreur binaire ou *Bit Error Rate* (BER) minimal. On parle de marge de bruit du récepteur. La Fig. 1.7 montre le schéma de la chaîne de transmission OFDM simplifiée en présence de l'AP, où  $H_{AP}$  est la réponse impulsionnelle de cet AP.

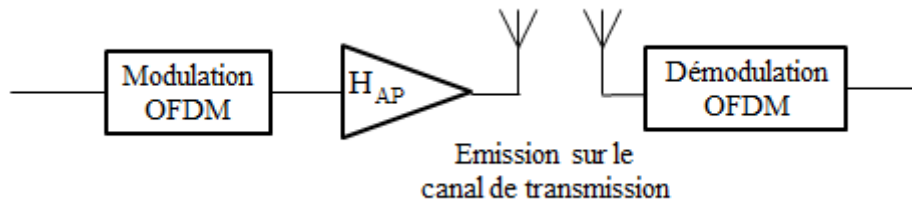


FIGURE 1.7 – Chaîne de transmission OFDM en présence des AP

### 1.3.2 Fonction de transfert non-linéaire de l'AP

Idéalement, c'est-à-dire pour un fonctionnement linéaire, le signal amplifié conserve la même forme que le signal original. Le signal en sortie de l'AP est ainsi simplement multiplié par le gain  $G$  de l'amplificateur. En pratique cependant, l'amplificateur est constitué de composants actifs, typiquement des transistors comme des MOSFET, qui présentent des caractéristiques non-linéaires. Il en résulte qu'au-delà d'une certaine puissance d'entrée, l'amplificateur ne fonctionne plus en mode linéaire mais présente au contraire un fonctionnement en saturation. Ceci cause donc des distorsions apportées à l'amplitude et à la phase du signal amplifié. Afin de traiter cet effet, deux fonctions de transfert caractérisent l'opération d'amplification : la réponse amplitude-amplitude (AM/AM) et la réponse amplitude-phase (AM/PM). La réponse AM/AM représente l'amplitude du signal à la sortie de l'AP en fonction de son amplitude à l'entrée. D'autre part, la réponse AM/PM représente l'offset de la phase du signal à la sortie par rapport à la phase à l'entrée en fonction de l'amplitude du signal d'entrée. La forme générale de la caractéristique AM/AM de l'AP est montrée Fig. 1.8. Sur cette figure, on identifie que le fonctionnement de l'AP peut être divisé en 3 régions :

**I. Zone linéaire :** dans cette zone, l'amplificateur fonctionne dans son mode idéal où le signal de sortie est proportionnel au signal d'entrée qui est donc multiplié par le gain  $G$  de l'amplificateur. Les distorsions sont considérées négligeables dans cette zone.

**II. Zone de compression :** dans cette zone, l'amplificateur commence à ne plus présenter un comportement linéaire et la puissance de sortie n'est plus proportionnelle à la puissance d'entrée. Ainsi, les distorsions d'amplitude et de phase commencent à apparaître dès lors que certains niveaux d'amplitude du signal d'entrée empiètent dans cette zone. Un point de référence communément utilisé pour caractériser la zone de compression

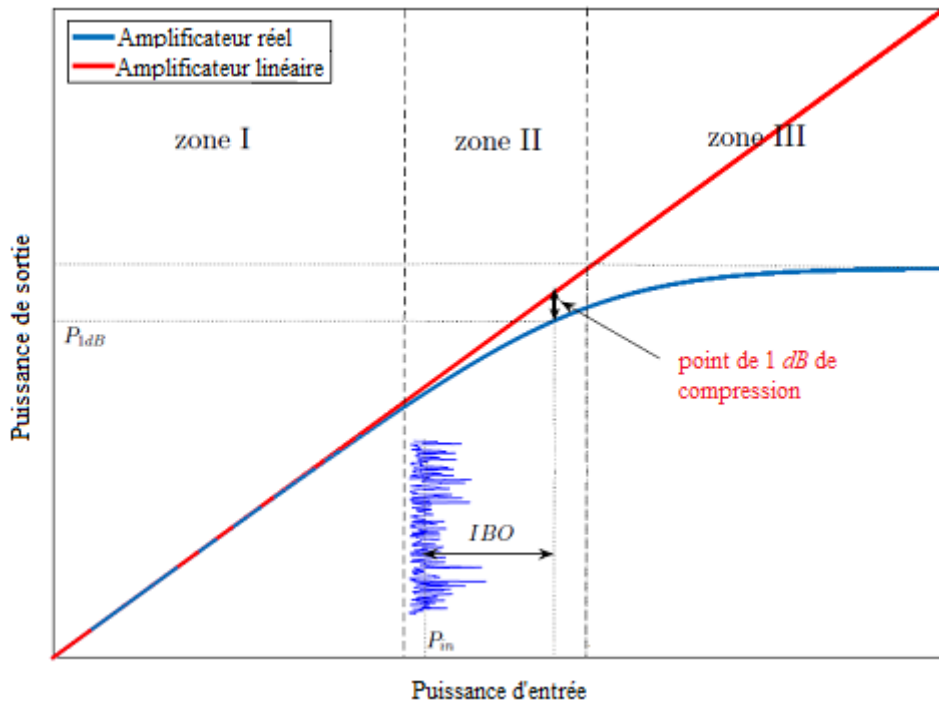


FIGURE 1.8 – Caractéristique non-linéaire des AP

est le point de 1 *dB* de compression. À ce point, une différence de 1 *dB* en puissance de sortie existe entre les courbes de caractéristique non-linéaire de l'AP et la courbe idéale de fonctionnement linéaire. Ce point est donc défini comme suit.

**Définition 1.1** (Point de 1 *dB* de compression). *Le point de 1 dB de compression représente la puissance de sortie de l'AP qui se situe à 1 dB de la puissance de sortie qui serait obtenue si l'AP fonctionnait en mode linéaire. À noter que dans la littérature, le point à 1 dB de compression peut être défini par rapport à la puissance de sortie, comme défini ci-dessus, ou bien par rapport à la puissance d'entrée correspondante. Dans ce travail, la définition du point de 1 dB de compression de sortie de l'AP est considérée.*

**III. Zone de saturation :** à partir d'une certaine puissance, le gain de l'AP décroît fortement. Ainsi, dans cette région, la puissance de sortie devient presque constante et les non-linéarités sont de plus en plus évidentes.

**Effet de la non-linéarité de l'AP** À partir de cette description, les amplificateurs se caractérisent par une fonction de transfert non-linéaire, ce qui signifie une multiplication par un facteur de gain différent pour les différentes amplitudes à l'entrée. Ceci donne lieu à des distorsions dans la bande et en dehors de la bande du signal. Ceci conduit à la dégradation des performances du système en termes de taux d'erreurs, et affecte donc au final l'efficacité spectrale du système complet.

### 1.3.3 Efficacité énergétique des AP

Les AP sont alimentés par une source de puissance continue  $P_{DC}$  qui représente le maximum possible de la puissance de sortie de l'AP. La puissance de sortie  $P_{out}$  est bien entendu toujours inférieure à la puissance d'alimentation car une partie  $P_d$  de cette puissance est dissipée par effet joule. Le schéma de puissance de l'AP peut donc être représenté comme dans la Fig. 1.9, où  $P_{in}$  est la puissance d'entrée.

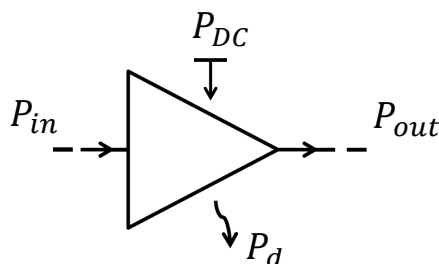


FIGURE 1.9 – Schéma de puissance de l'AP

L'efficacité énergétique (EE) de l'AP est définie comme le taux de la puissance d'alimentation  $P_{DC}$  convertie en radio fréquence, en considérant que la puissance d'entrée de l'AP est très faible par rapport à cette puissance  $P_{DC}$ . L'EE de l'AP peut être donc définie comme le rapport entre la puissance de sortie  $P_{out}$  et la puissance d'alimentation  $P_{DC}$  :

$$EE = \frac{P_{out}}{P_{DC}} . \quad (1.5)$$

À partir de cette formulation et de la caractéristique non-linéaire de l'AP, on comprend que l'efficacité énergétique de l'amplificateur est d'autant plus faible que le point de fonctionnement s'éloigne de la zone de saturation. À l'inverse, de plus faibles distorsions du signal sont occasionnées par l'AP lorsque ce point de fonctionnement est positionné au coeur de la zone linéaire. Ainsi donc, un compromis entre l'efficacité énergétique et la linéarité de l'AP est à trouver lors du choix de son point de fonctionnement.

### 1.3.4 Choix du point de fonctionnement de l'AP

Le point de fonctionnement de l'AP est déterminé par la puissance moyenne du signal à l'entrée de l'AP  $P_{in}$ . Ce point de fonctionnement précise ainsi la position du signal d'entrée par rapport à la caractéristique non-linéaire de l'AP. Comme décrit à l'instant, ce choix doit se faire selon un compromis entre la linéarité et l'EE de l'AP.

La calibration visant à positionner le point de fonctionnement au regard du compromis précédent se fait par un recul par rapport au point de 1 *dB* de compression de l'AP. Ce recul de la puissance d'entrée ou Input Power Backoff (IBO) est généralement défini par rapport à ce point de 1 *dB* de compression comme suit. Notons que l'IBO peut aussi être défini par rapport à la puissance d'entrée de saturation, mais dans ce cas ce point pris en référence est moins précis.

**Définition 1.2** (Input power Back-Off). *Le recul de la puissance d'entrée ou Input Power Backoff (IBO),  $\rho_{IBO}$ , représente le rapport entre la puissance de sortie au point de 1 dB de compression  $P_{1dB}$  et la puissance d'entrée moyenne  $P_{in}$  :*

$$\rho_{IBO} = \frac{P_{1dB}}{P_{in}} . \quad (1.6)$$

**IBO et efficacité énergétique** Le positionnement du point de fonctionnement par l'IBO reflète le taux du recul par rapport à la zone de saturation de l'AP. Ainsi, l'efficacité énergétique de l'AP est directement liée à l'IBO. En effet, un fort IBO reflète une faible efficacité énergétique de l'AP. Par contre, un faible IBO signifie un fonctionnement près de la zone de saturation qui conduit à une meilleure efficacité énergétique. Pour ces raisons, le recul de puissance évalué par l'IBO est considéré dans cette thèse comme la métrique qui reflète directement l'efficacité énergétique de l'AP.

### 1.3.5 Effet mémoire des AP

Les modèles conventionnels d'AP statiques peuvent représenter avec une précision raisonnable le comportement des AP des signaux à bande étroite. Par contre, les réponses de la plupart des AP à haute puissance ne dépendent pas que des amplitudes et des phases de l'entrée instantanée de l'AP, mais aussi des entrées aux instants précédents, par l'effet mémoire des AP. C'est le cas des AP à haute puissance tels que ceux utilisés au niveau des stations de base, qui présentent de forts effets mémoire. Cet effet est encore plus important pour les signaux multi-porteuses en large bande. Ces signaux à large bande introduisent plus d'effet mémoire au niveau des AP avec l'augmentation de la bande passante. Dans de tels cas, la considération d'AP sans mémoire n'est plus suffisante. Dans [24], les auteurs divisent les effets mémoire des AP en deux classes : l'effet électrique et l'effet thermique. Les effets mémoire électriques sont essentiellement causés par la variation d'enveloppe, l'impact d'ionisation, les fréquences harmoniques et les défauts de conception de circuits. D'autre part, les effets thermiques proviennent du couplage électromagnétique au niveau des transistors [25]. Il est donc important lors de l'étude et la modélisation des AP, de considérer leurs effets mémoire.

### 1.3.6 Linéarisation des AP par les techniques de prédistorsion

D'après tout ce qui précède, la caractéristique non-linéaire de l'AP conduit à des distorsions du signal ce qui affecte la linéarité de la chaîne de transmission surtout lorsque le point d'opération est proche de la zone de saturation. Afin de faire face à ce problème, plusieurs techniques ont été proposées afin de compenser les non-linéarités de l'AP. Une solution consiste à utiliser des techniques de prédistorsion (PD). Le principe de ces techniques est d'appliquer l'inverse de la fonction de transfert de l'AP afin d'en annuler les non-linéarités [26, 27]. Généralement, la prédistorsion du signal est appliquée au signal avant de l'amplifier comme montré Fig. 1.10, où  $H_{PD}$  est la réponse impulsionnelle du module de prédistorsion. Par conséquent, la cascade du module de prédistorsion et de l'AP conduit à une réponse équivalente linéaire. L'avantage de la prédistorsion, par rapport à d'autres techniques de linéarisation d'AP, est qu'elle est relativement facile à mettre



en œuvre à faible coût. Pour cela, les techniques de prédistorsion sont fréquemment appliquées dans les produits industriels, en tant que bloc fonctionnel directement intégré aux amplificateurs de puissance [28].

Cependant, il existe deux types de prédistorsion : la prédistorsion analogique et la prédistorsion numérique ou *digital predistortion* [27]. Cette distinction provient simplement du lieu où la prédistorsion est effectuée, en partie radio-fréquence (RF) via le traitement du signal analogique, ou en bande de base via le traitement numérique du signal ou *Digital Signal Processing* (DSP). En pratique, en raison de sa bonne efficacité et de sa mise en œuvre relativement simple, la pré-distorsion numérique supplante les autres approches. En fait, la pré-distorsion numérique est l'une des techniques de linéarisation les plus populaires [29–31]. Selon les derniers résultats connus au niveau de l'amélioration des composants matériels, par ex. FPGA et DAC de fréquences de fonctionnement élevées, la bande passante de fonctionnement d'un organe de prédistorsion numérique peut aujourd'hui être étendue jusqu'à 60 MHz [32].

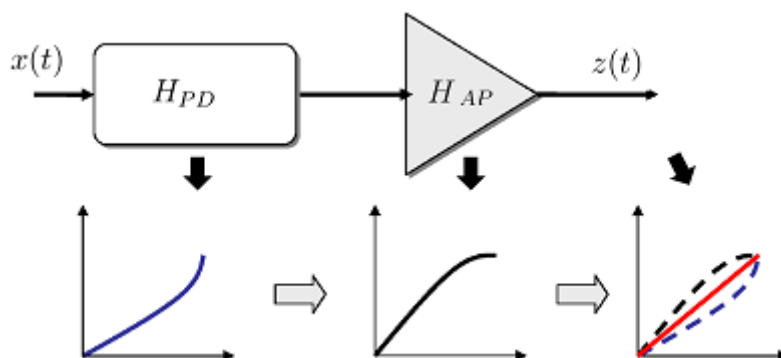


FIGURE 1.10 – Schéma de linéarisation des AP par des techniques de prédistorsion

Pour des raisons de simplifications du modèle de la chaîne OFDM dans cette thèse, on considèrera dans ce qui suit que les éventuelles prédistorsions des AP sont incluses dans le bloc d'amplification et ainsi peuvent être prises en compte par les modèles des AP, décrits ci-après.

## 1.4 Modèles d'AP non-linéaires

Afin de pouvoir évaluer les performances théoriques de la chaîne OFDM avec l'étage d'amplification de puissance, une phase importante est la modélisation des AP. Cette section décrit les modèles d'AP les plus reconnus et détaille leurs paramètres. Notons que les modèles décrits dans ce qui suit sont considérés à gain unitaire. Ces modèles seront multipliés par  $G$  pour passer à la forme réelle de l'AP à gain.

Deux types de modèles d'AP sont décrits, amplificateurs à effet mémoire et amplificateurs sans effet mémoire. Les amplificateurs sans effet mémoire sont considérés tels qu'ils ne dépendent que du signal instantané à l'entrée de l'AP. D'autre part, les amplificateurs à effet mémoire considèrent l'effet des  $Q$  échantillons de temps précédents à l'entrée de l'AP en plus de l'échantillon instantané, où  $Q$  est l'ordre de mémoire de l'AP.

**Notations** Les notations des signaux à l'entrée de l'AP peuvent donc être récapitulées comme suit. Rappelons qu'un échantillonnage temporel de période  $T_s$  est considéré. Le signal à l'entrée de l'AP à l'instant  $t$  est noté  $z_{in}(t)$ . Le vecteur  $\mathbf{z}_{in} = \{z_{in,0}, \dots, z_{in,Q}\} \in \mathbb{C}^{Q+1}$  représente le signal à l'entrée de l'AP. Il est constitué du signal instantané à l'entrée  $z_{in,0} = z_{in}(t_0)$ , et des signaux d'entrée aux  $Q$  échantillons de temps précédents, t.q.,  $z_{in,q} = z_{in}(t_0 - qT_s)$ . Les vecteurs d'amplitudes et de phases respectives de ce vecteur sont notés  $\mathbf{r}_{in} = \{r_{in,0}, \dots, r_{in,Q}\}$  et  $\boldsymbol{\theta}_{in} = \{\theta_{in,0}, \dots, \theta_{in,Q}\}$  t.q.  $r_{in,q} = |z_{in}(t_0 - qT_s)|$  et  $\theta_{in,q} = \angle z_{in}(t_0 - qT_s)$ . Pour les modèles sans mémoire, les notations d'entrée sont restreintes à  $r_{in,0}$  et  $\theta_{in,0}$  qui seront simplifiées à  $r_{in}$  et  $\theta_{in}$  respectivement, car ces modèles sans mémoire ne dépendent que de l'entrée instantanée.

Ainsi, à la sortie de l'AP, la réponse  $H_{AP}(\mathbf{z}_{in})$  représente la sortie complexe de l'AP à mémoire. D'autre part,  $H_{AP}(\mathbf{r}_{in})$  est l'amplitude de sortie de l'AP représentant la réponse AM/AM.

### 1.4.1 Modèle de Rapp

Le modèle de Rapp [33] est un modèle simple mais populaire des AP. Ce modèle est convenable pour la modélisation des amplificateurs à état solide ou *Solid State Power Amplifier* (SSPA). Le modèle de Rapp est un modèle sans mémoire et ne considère aucune distorsion de phase. La fonction de transfert AM/AM de l'AP est donnée par :

$$H_{AP}(r_{in}) = \frac{r_{in}}{\left(1 + \left(\frac{r_{in}}{A}\right)^{2b}\right)^{\frac{1}{2b}}}, \quad (1.7)$$

où  $A$  est la tension de saturation de sortie et  $b$  est le facteur qui contrôle la transition entre la zone linéaire et la zone de saturation, connu par *knee factor*. La Fig. 1.11 montre l'exemple des courbes de la réponse AM/AM de l'amplificateur pour  $A = 1$  et pour différentes valeurs du facteur  $b$ . En augmentant  $b$  la transition entre la zone linéaire et la zone de saturation devient plus marquée.

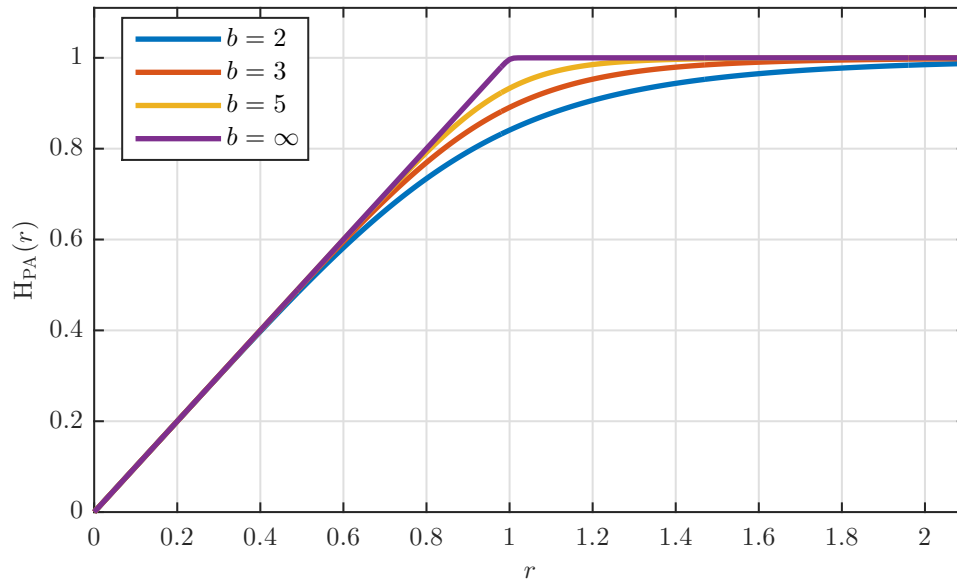
### 1.4.2 Modèle polynomial

Une approche courante de la modélisation des AP est le modèle polynomial à partir de paramètres de la série de Taylor. Cette approche offre un bon compromis entre la précision et la simplicité du modèle. Deux approches du modèle polynomial existent comme décrit ci-dessous. Le premier ne considère pas l'effet mémoire tandis que le second considère les effets mémoire des AP dans une approche plus générale.

**Modèle polynomial sans mémoire** Le modèle sans mémoire apporte des distorsions sur l'amplitude du signal, sans affecter sa phase, tel que sa caractéristique AM/AM est modélisée par le polynôme suivant :

$$H_{AP}(r_{in}) = \sum_{l=0}^{L-1} b_{2l+1} r_{in}^{2l+1}, \quad (1.8)$$

où  $L$  est l'ordre du polynôme du modèle de l'AP et  $b_{2l+1}$  sont ses coefficients complexes, d'indice impair [34, p. 160]. L'ordre du polynôme dépend essentiellement de l'importance des non-linéarités que le polynôme doit être en capacité de modéliser.


 FIGURE 1.11 – Réponse AM/AM du modèle de Rapp pour différentes valeurs de  $b$ 

**Modèle polynomial à mémoire** Le modèle polynomial à effet mémoire [35], d'ordre  $Q$  modélise la sortie complexe de l'AP, en fonction de son entrée à l'instant  $t_0$ , et aux  $Q$  instants précédents, par l'expression suivante :

$$H_{\text{AP}}(\mathbf{z}_{in}) = \sum_{q=0}^Q \sum_{l=0}^{L-1} b_{q,2l+1} z_{in}(t_0 - qT_s) |z_{in}(t_0 - qT_s)|^{2l+1}, \quad (1.9)$$

où  $L$  est l'ordre du polynôme (comme précédemment) et  $b_{q,2l+1}$  sont les coefficients complexes d'indices impairs, pour chaque composante mémoire  $q$ . Ces paramètres reflètent les non-linéarités et les effets mémoire de l'AP et peuvent être obtenus par des mesures et des algorithmes d'estimation pour un AP particulier [36]. En fonction des modules et des phases des signaux d'entrée,  $r_q$  et  $\theta_q$ ,  $q = [0 : Q]$ , cette expression est équivalente à :

$$H_{\text{AP}}(\mathbf{z}_{in}) = \sum_{q=0}^Q \sum_{l=0}^{L-1} b_{q,2l+1} r_{in,q} e^{j\theta_{in,q}}. \quad (1.10)$$

Ce modèle est une représentation générale pour les AP à mémoire et sans mémoire. En effet, sans considérer l'effet mémoire, cette expression se réduit à un ordre de mémoire  $Q = 0$ . Les coefficients de l'amplificateur sont modélisés dans ce cas par des nombres réels, n'affectant ainsi pas la phase du signal. L'expression de la sortie de l'AP sans mémoire se réduit donc comme en (1.8).

Le modèle polynomial à mémoire peut être vu comme la superposition de plusieurs modèles non-linéaires sans mémoire connectés en parallèle, chacun avec un signal d'entrée retardé et déphasé de sorte que les sorties de ces sous-modèles non-linéaires sont additionnés, comme le montre la Fig. 1.12.

**Extension de la zone de saturation du modèle polynomial** Les modèles polynomiaux fournissent une modélisation précise des AP, à mémoire et sans mémoire,

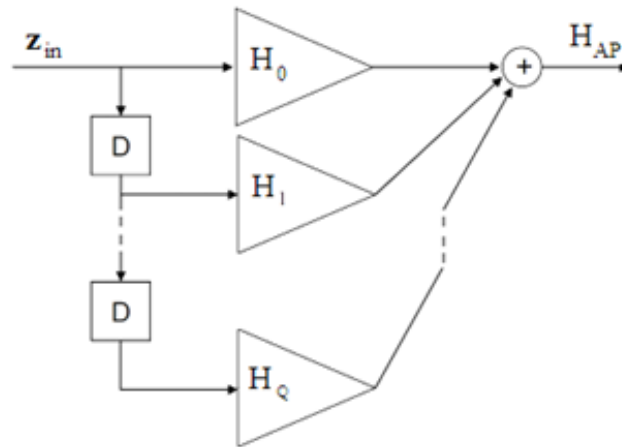


FIGURE 1.12 – Présentation du modèle polynomial à mémoire comme la somme de sous-modèles non-linéaires décalés dans le temps

surtout en augmentant l'ordre  $L$  de ces polynômes. Ces modèles sont bien valides pour la modélisation de la progression de la réponse de l'AP jusqu'à la zone de saturation. Par contre, puisque ces modèles sont basés sur des polynômes, leur réponse commence à diverger à partir d'un certain point comme montré ci-après. Pour cela, on propose dans cette thèse de fournir une extension de ce type de modèles afin de préserver sa validité au-delà de la zone de saturation.

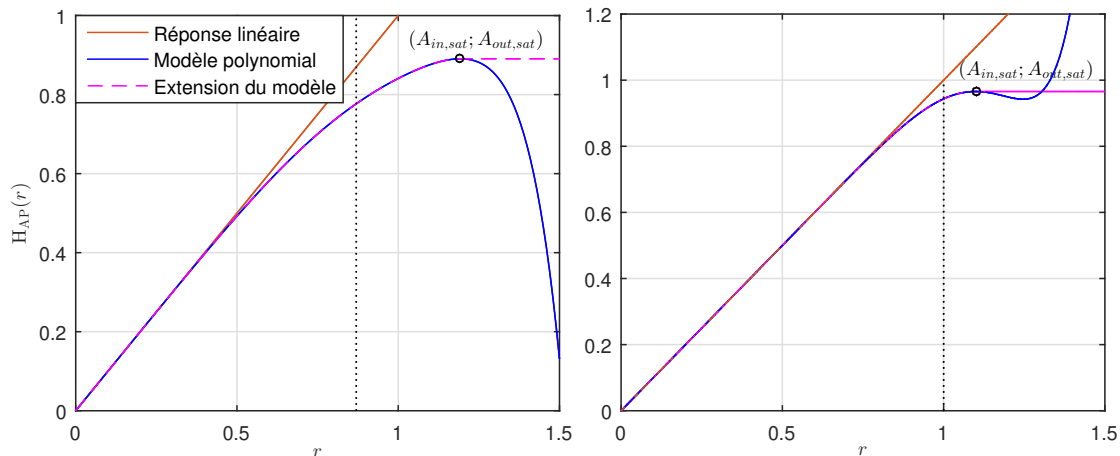


FIGURE 1.13 – Divergence du modèle polynomial près de la zone de saturation et extension du modèle

**Sans mémoire** La Fig. 1.13 montre des exemples de la réponse du modèle polynomial sans mémoire de l'AP, avec  $L = 6$  et modélisant l'amplificateur de Rapp avec  $b = 2$  et  $b = 6$  respectivement sur la figure de gauche et de droite. La formulation de base en (1.8) offre un bon modèle des zones linéaires et des zones de compression des AP. Par contre, à partir d'une certaine amplitude d'entrée  $A_{in,sat}$ , au début de la zone saturation, la réponse du modèle polynomial se dégrade et présente certaines divergences par rapport

à la réponse réelle de l'AP. Ce point de divergence est le premier extrémum du polynôme. L'AP réel doit par contre saturer à une amplitude de sortie presque constante  $A_{out,sat}$ . Ainsi, il apparaît que la zone de saturation n'entre pas dans la validité du modèle, ce qui n'est pas sans poser de problème lors de l'intégration du modèle dans des algorithmes d'optimisation ou des calculs de performance. Afin de compenser cet effet, on propose d'étendre le modèle polynomial sans mémoire de l'AP comme suit :

$$H_{AP}(r) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{L-1} b_{2l+1} r^{2l+1} & r \leq A_{in,sat} \\ A_{out,sat} & r > A_{in,sat} \end{cases} \quad (1.11)$$

L'amplitude de sortie de l'AP en (1.11) est donc étendue pour  $r > A_{in,sat}$  à la zone de saturation telle qu'elle sature à la valeur  $A_{out,sat}$ , (voir Fig. 1.13). Ce niveau de saturation est choisi de façon à maintenir la continuité de la réponse de l'AP à partir de  $A_{in,sat}$ , tel que  $A_{out,sat} = \sum_{l=0}^{L-1} b_{2l+1} A_{in,sat}^{2l+1}$ .

**Avec mémoire** Comme schématisé Fig. 1.12, le modèle polynomial à mémoire est une superposition de réponses AM/AM sans mémoire, chacune de phase et de délai spécifiques, en effet :

$$H_{AP}(\mathbf{z}_{in}) = \sum_{q=0}^Q \underbrace{\sum_{l=0}^{L-1} b_{q,2l+1} r_{in_q}^{2l+1}}_{\text{Réponse en amplitude d'une composante mémoire } q} e^{j\theta_{in_q}} \quad (1.12)$$

L'expression suivante est donc une présentation adéquate du modèle polynomial à mémoire en fonction de cette composition :

$$H_{AP}(\mathbf{r}_{in}, \boldsymbol{\theta}_{in}) = \sum_{q=0}^Q H_q(r_{in_q}) e^{j\theta_{in_q}} \quad (1.13)$$

où  $H_q(r_{in_q})$  est la réponse AM/AM de la  $q^{ème}$  composante mémoire. Ainsi, pour le modèle polynomial à mémoire, l'extension de la réponse en amplitude est faite sur l'amplitude de chaque composante mémoire. Le modèle de chaque composante  $q$  sera donc étendu par un prolongement par continuité sur chaque composante  $H_q$ , à partir de son point de divergence ( $A_{in,sat_q}; A_{out,sat_q}$ ), comme suit :

$$H_q(r_q) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{L-1} b_{q,2l+1} r_q^{2l+1} & r_q \leq A_{in,sat_q} \\ A_{out,sat_q} & r_q > A_{in,sat_q} \end{cases} \quad (1.14)$$

### 1.4.3 Modèle de séries de Volterra

Une série de Volterra est une combinaison de convolutions linéaires et de séries non-linéaires de puissance qui peut être utilisée pour la modélisation de n'importe quel système non-linéaire stable à mémoire [37]. Une série de Volterra discrète dans le domaine temporel peut être exprimée mathématiquement par :

$$H_{AP}(\mathbf{z}_{in}) = \sum_{l=0}^{L-1} z_l, \quad (1.15)$$

$$\text{où } z_l = \sum_{i_1=0}^Q \dots \sum_{i_l=0}^Q h_l(i_1, \dots, i_l) \prod_{q=1}^l z_{in, i_q}, \quad (1.16)$$

$z_{in}$  représente l'entrée de la fonction du dispositif à modéliser,  $L$  et  $Q$  sont les ordres des non-linéarités et de mémoire respectivement,  $h_l(i_1, \dots, i_l)$  sont reconnus comme les "noyau de Volterra" d'ordre  $l$ . Le modèle de Volterra peut permettre d'obtenir une grande précision par rapport à d'autres modèles à mémoire, mais ceci au détriment d'une très forte complexité de calcul. En effet, le désavantage principal de ces modèles est que le nombre de coefficients croît exponentiellement avec l'ordre de mémoire et l'ordre des noyaux. C'est pourquoi ce modèle est rarement utilisé en pratique. Ainsi, d'autres modèles comme le modèle de Wiener, le modèle de Hammerstein et le modèle de Wiener-Hammerstein présentés dans la suite et qui correspondent à des cas spécifiques simplifiés du modèle de Volterra, sont bien souvent préférés en pratique.

Une autre simplification importante du modèle de Volterra est le modèle polynomial à mémoire. En effet, le modèle polynomial est une troncature du modèle général de Volterra. Il consiste à ne conserver que les termes diagonaux dans les noyaux de Volterra. Ainsi, le nombre de paramètres est considérablement réduit par rapport au modèle Volterra conventionnel, et la complexité de calcul de l'identification des coefficients est remarquablement diminuée.

#### 1.4.4 Modèle de Wiener et Hammerstein

Comme mentionné ci-dessus, le modèle en séries de Volterra est complexe et non utilisable en pratique. Pour surmonter le problème de complexité associé à la représentation de la série Volterra, des cas particuliers de la série Volterra ont été étudiés pour modéliser des amplificateurs de puissance non-linéaires avec moins de complexité. Le modèle Wiener, le modèle Hammerstein et le modèle Wiener-Hammerstein font partie de la catégorie de ces cas spéciaux du modèle de Volterra [38–40].

**Modèle de Wiener** Le modèle de Wiener est un système linéaire invariant dans le temps ou *Linear Time Invariant system* (LTI) suivi d'une non-linéarité (NL) sans mémoire, comme illustré Fig. 1.14. La sortie d'un modèle de Wiener est donnée par :

$$H_{AP}(\mathbf{z}_{in}) = \sum_{l=0}^{L-1} b_l |z|^{2l} z, \quad (1.17)$$

avec

$$z = \sum_{q=0}^Q h_q z_{in, q}, \quad (1.18)$$

où (1.17) est la fonction de transfert de la non-linéarité sans mémoire.  $b_l$  et  $h_q$  sont respectivement les coefficients de la non-linéarité statique et de la réponse impulsionnelle de la partie LTI du système de Wiener.

**Modèle de Hammerstein** Le modèle de Hammerstein est l'inverse du modèle de Wiener. Il est composé d'un polynôme non-linéaire sans mémoire suivi d'un filtre LTI.

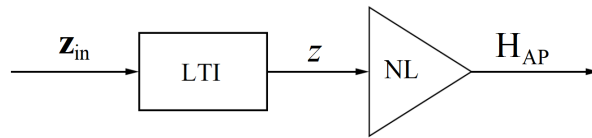


FIGURE 1.14 – Schéma bloc du modèle de Wiener

Son principe est illustré Fig. 1.15. La sortie du polynôme NL en bande de base est modélisée comme :

$$z_q = \sum_{l=0}^{L-1} b_l |z_{in,q}|^{2l} z_{in,q}. \quad (1.19)$$

Par conséquent, la sortie d'un modèle de Hammerstein est donnée par :

$$H_{AP}(\mathbf{z}_{in}) = \sum_{q=0}^Q h_q z_q. \quad (1.20)$$

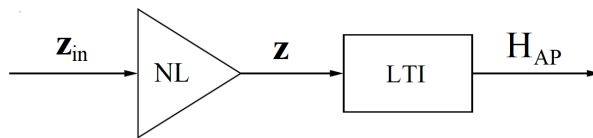


FIGURE 1.15 – Schéma bloc du modèle de Hammerstein

**Modèle de Wiener-Hammerstein** Le modèle Wiener-Hammerstein est un système LTI suivi d'une non-linéarité sans mémoire, qui à son tour est suivie d'un autre système LTI (voir Fig. 1.16). Les sous-systèmes de ce modèle sont décrits par :

$$z_{1,q} = \sum_{q=0}^{Q_1} h_{1q} z_{in,q}, \quad (1.21)$$

$$z_{2,q} = \sum_{l=0}^{L-1} b_l |z_{1,q}|^{2l} z_{1,q}, \quad (1.22)$$

$$H_{AP}(\mathbf{z}_{in}) = \sum_{q=0}^{Q_2} h_{2q} z_{2,q}. \quad (1.23)$$

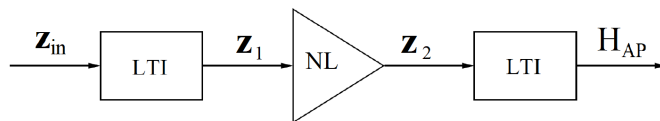


FIGURE 1.16 – Schéma bloc du modèle de Wiener-Hammerstein

## 1.5 Problématique du PAPR élevé des système OFDM

### 1.5.1 Définition du PAPR

**Définition 1.3** (PAPR du signal OFDM). *Le PAPR d'un signal  $\mathbf{x}$  est défini comme le rapport entre la puissance maximale et la puissance moyenne de ce signal sur une fenêtre de temps. Ainsi, le PAPR est exprimé par :*

$$PAPR_{\mathbf{x}} = \frac{\|\mathbf{x}\|_{\infty}^2}{\mathbb{E}[\|\mathbf{x}\|_2^2]}, \quad (1.24)$$

où  $\mathbb{E}[\cdot]$  dénote l'espérance,  $\|\cdot\|_{\infty}$  la norme infinie, c.à d. la valeur maximale, et  $\|\cdot\|_2$  la norme euclidienne.

### 1.5.2 PAPR des systèmes OFDM

Les systèmes OFDM se caractérisent par une grande dynamique du signal dans le domaine temporel. Un exemple de l'évolution de la puissance instantanée d'un signal OFDM pour un système à 1024 sous-porteuses est montré Fig. 1.17, ainsi que les niveaux de la puissance moyenne et de la puissance crête. Il est remarqué que la plus grande partie des symboles ont une puissance proche de la puissance moyenne tandis que de rares symboles ont une puissance proche de la valeur crête. La remarque la plus importante est la grande différence entre la valeur de la puissance crête et de la puissance moyenne ce qui justifie le rapport élevé entre ces deux puissances ou le fort PAPR des systèmes OFDM.

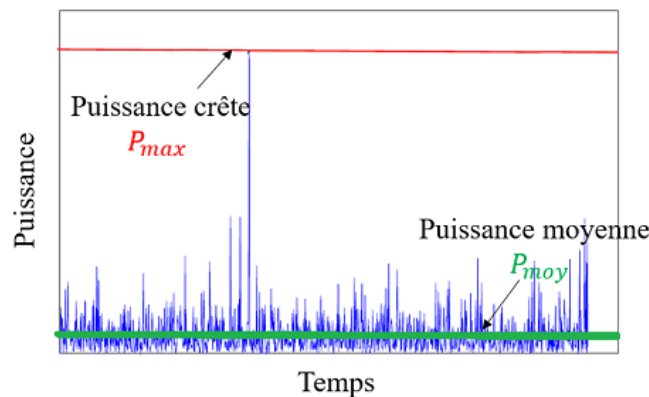


FIGURE 1.17 – Exemple de l'évolution de la puissance instantanée d'un signal OFDM à 1024 sous-porteuses

En effet, les symboles MAQ qui suivent une loi uniforme à l'entrée de la IFFT conduisent à une grande dynamique du signal à sa sortie. Un exemple extrême de ce PAPR élevé des systèmes OFDM peut être observé dans le cas où les  $N$  sous-porteuses OFDM portent des symboles MAQ de même valeur complexe  $x_c$ . Dans ce cas, la réponse de ce signal par IFFT est un vecteur dont le premier élément est non nul de valeur  $x_c\sqrt{N}$  et dont les  $N-1$  éléments restants sont nuls. Ainsi, la puissance crête serait  $|x_c|^2 \times N$  et la puissance moyenne serait  $\frac{|x_c|^2 \times N}{N}$ . Ainsi le PAPR de ce signal est de valeur  $N$ . Cet exemple



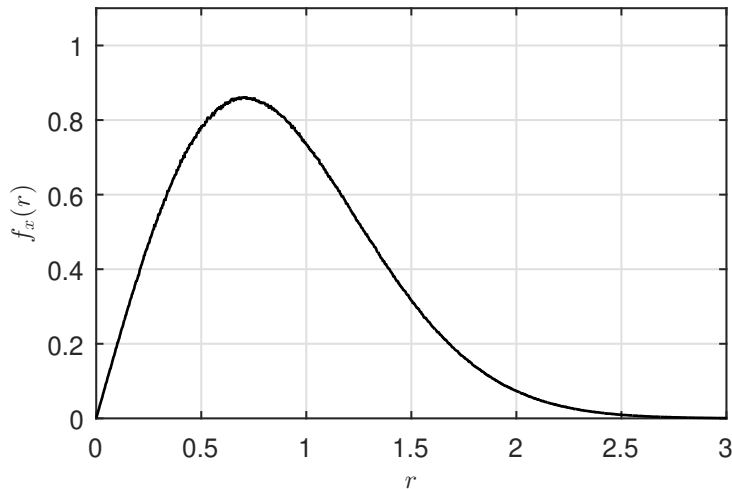


FIGURE 1.18 – PDF d'un signal qui suit la loi de Rayleigh

illustre le cas extrême théorique qui permet de comprendre l'origine du fort PAPR des signaux OFDM.

**PDF de l'amplitude du signal OFDM temporel** Afin d'évaluer quantitativement la grande dynamique du signal OFDM, il est pertinent la fonction de densité de probabilité de l'amplitude du signal OFDM temporel. En effet, les symboles  $X_k$  présentés à l'entrée de la IFFT sont indépendants et identiquement distribués (IID) et déterminent la constellation appliquée aux sous-porteuses, MAQ par exemple. D'après l'expression de la IFFT en (1.4), chaque symbole à la sortie est la somme des symboles à l'entrée multipliés respectivement par des phases indépendantes. Ainsi, cette IFFT est donc la somme de symboles IID. Soient les symboles de sortie de la IFFT,  $x_n = \mathcal{R}(x_n) + j\mathcal{I}(x_n)$ , où  $\mathcal{R}(x_n)$  présente la partie réelle du symbole complexe  $x_n$  et  $\mathcal{I}(x_n)$  présente sa partie imaginaire. D'après le théorème de la limite centrale, ces parties réelles et imaginaires respectives à la sortie de la IFFT suivent des lois normales :

$$\mathcal{R}(x_n) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_x^2); \quad \mathcal{I}(x_n) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_x^2), \quad (1.25)$$

où  $\sigma_x^2$  est la variance du signal  $x(t)$ , c.à.d.  $\sigma_x^2 = \mathbb{E}(|x_n|^2)$ . Comme démontré en [41], si la partie réelle et la partie imaginaire suivent une loi normale, l'amplitude du signal résultant suit une loi de Rayleigh. Les auteurs dans [42] montrent que le théorème de la limite centrale reste valide en diminuant  $N$  (jusqu'à 10 sous-porteuses). On en déduit la définition de la Fonction de densité de probabilité (PDF) de l'amplitude du signal OFDM temporel comme dans le lemme suivant.

**Lemme 1.1** (PDF de l'amplitude du signal OFDM). *D'après le théorème de la limite centrale, l'amplitude du signal OFDM dans le domaine temporel suit une loi de Rayleigh, et sa fonction de densité de probabilité peut être exprimée par :*

$$f_x(r) = f_{\text{Ray}}(r; P_r), \quad (1.26)$$

en rappelant que loi de Rayleigh est définie comme suit.

**Définition 1.4** (Loi de Rayleigh). *La PDF d'un signal qui suit la loi de Rayleigh est exprimé par :*

$$f_{\text{Ray}}(r; P_r) = \frac{2r}{P_r} e^{-r^2/P_r} ; r \geq 0 . \quad (1.27)$$

où  $P_r$  est le paramètre de puissance de la PDF.

La Fig. 1.18 montre cette PDF  $f_x(r)$  qui suit la loi de Rayleigh, où  $r$  est l'amplitude du signal  $x(t)$ . La fonction de Rayleigh se caractérise par sa longue traîne (*long tailed function*), tandis que la plus grande concentration de cette fonction se situe autour de sa moyenne. Ceci signifie que des valeurs crêtes d'amplitude existent avec de faibles occurrences, ce qui explique bien l'allure de la figure 1.17 donnant l'évolution temporelle de la puissance instantanée et montrant qu'une grande partie des échantillons se situe autour de la puissance moyenne et que de rares échantillons présentent des valeurs crêtes très élevées. Théoriquement, d'après la fonction de Rayleigh, ces crêtes tendent vers l'infini. Par contre, pratiquement, cette crête a toujours une valeur finie à cause du nombre fini de symboles à l'entrée de la IFFT. En effet, comme expliqué dans l'exemple extrême ci-haut, la valeur maximale de l'amplitude du signal OFDM temporel est  $N$ .

### 1.5.3 Problème du fort PAPR lors de l'amplification

Comme détaillé précédemment, les signaux OFDM se caractérisent par une grande dynamique du signal dans le domaine temporel, mesurée par le PAPR. Lors de l'amplification de ces signaux par les AP qui sont par essence non-linéaires, ces signaux risquent de subir des distorsions. Ces distorsions peuvent être limitées si le point de fonctionnement de l'AP se caractérise par un IBO élevé traduisant un recul significatif par rapport à la zone de saturation. Cependant, l'utilisation de ce recul de puissance conduit à une diminution de l'efficacité énergétique de l'AP et donc de l'efficacité globale du système.

La perte de linéarité conduit quant à elle à une augmentation du BER et ainsi à une réduction de l'efficacité spectrale du système.

Ainsi, le PAPR élevé des signaux OFDM impose de réaliser un compromis entre l'efficacité énergétique du système et la qualité des signaux émis en sortie d'antenne. C'est ainsi qu'est décrit le problème de PAPR des systèmes OFDM.

### 1.5.4 Figures de mérite

Comme expliqué précédemment, le fort PAPR des systèmes OFDM conduit à différents effets comme la distorsion du signal dans la bande et en dehors de la bande de transmission. De plus, il nécessite de faire des compromis entre la perte d'efficacité énergétique et les distorsions du signal. Pour cela, l'évaluation de l'effet du fort PAPR nécessite des métriques fines qui quantifient séparément les différents éléments de ce compromis. Dans ce qui suit, les figures de mérite essentielles du problème du PAPR sont détaillées.

#### 1.5.4.1 Fonction de distribution du PAPR

Afin d'évaluer théoriquement le PAPR des systèmes OFDM, la borne supérieure d'amplitude est facilement calculable en prenant en compte les configurations conduisant à des puissances extrêmes comme expliqué précédemment. Par contre, cette borne supérieure

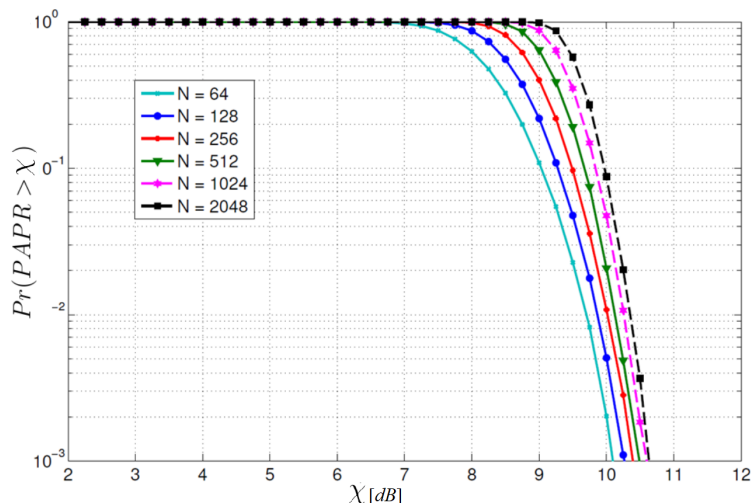


FIGURE 1.19 – Exemple de la CCDF du PAPR des signaux OFDM temporels pour différentes valeurs de  $N$  avec l'application de symboles MDP-4 aux différentes sous-porteuses

semble être très loin de la réalité et presque jamais atteinte en raison du comportement aléatoire du signal. En conséquence, une manière courante proposée afin de fournir un modèle complet du PAPR est de dériver sa fonction de distribution complémentaire cumulative ou *Complementary Cumulative Distribution Function* (CCDF) considérant le PAPR comme une variable aléatoire due au caractère aléatoire du signal lui-même. La CCDF du PAPR est une caractéristique largement utilisée qui représente la probabilité que la valeur du PAPR d'un symbole OFDM choisi aléatoirement dépasse une valeur prédéfinie  $\chi$ . Pour le signal OFDM en bande de base, [43] propose une expression analytique de la CCDF du PAPR, valide pour un facteur de sur-échantillonnage égal à 1 (fréquence de Nyquist), exprimé par :

$$\mathcal{P}(PAPR > \chi) = 1 - (1 - e^{-\chi})^N, \quad (1.28)$$

où  $N$  est le nombre de sous-porteuses du signal OFDM.

La fonction  $\mathcal{P}(PAPR > \chi)$  est donc étudiée comme montré Fig. 1.19. L'intérêt de cette figure de mérite est qu'elle permet d'estimer la probabilité que le PAPR dépasse un certain seuil. Ainsi, l'estimation du pourcentage de réduction de PAPR nécessaire afin d'obtenir des performances prédéfinies est possible. On peut remarquer sur cette figure que conformément à l'équation (1.28), le PAPR dépend du nombre  $N$  de sous-porteuses du signal OFDM considéré. Pour ces résultats, une constellation MDP-4 a été appliquée aux différentes sous-porteuses. Cependant, on peut montrer que le PAPR ne dépend pratiquement pas du type de constellation appliquée aux sous-porteuses si le nombre  $N$  de sous-porteuses est suffisamment élevé, ce qui est le cas ici. De plus, la CCDF du PAPR permet de comparer les schémas de réduction du PAPR par les valeurs obtenues des crêtes avant et après cette opération. Par contre, les performances montrées par la CCDF du PAPR sont liées uniquement aux crêtes les plus élevées et ne montrent pas l'effet des distorsions de l'AP sur le reste du signal.

### 1.5.4.2 Amplitude du vecteur d'erreur (EVM)

Une figure de mérite importante est l'amplitude du vecteur d'erreur ou *Error Vector Magnitude* (EVM). L'EVM est une métrique qui mesure le taux de distorsions dans la bande du signal et est définie comme suit :

**Définition 1.5** (Amplitude du vecteur d'erreur). *L'EVM est une métrique qui mesure le taux de déviation des points de constellation du signal reçu  $\mathbf{Z}$  par rapport au signal fréquentiel d'origine  $\mathbf{X}$ , comme montré Fig. 1.20. Ainsi, l'EVM peut être exprimé par :*

$$EVM = \sqrt{\frac{\mathbb{E}(|\mathbf{Z} - \mathbf{X}|^2)}{\mathbb{E}(|\mathbf{X}|^2)}} . \quad (1.29)$$

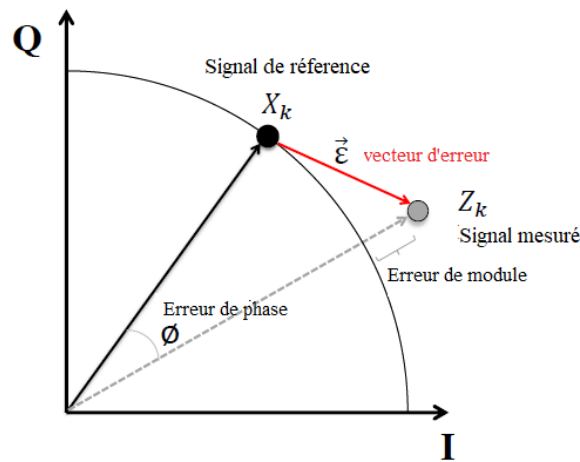


FIGURE 1.20 – Représentation de l'EVM sur les points de constellation

Une métrique équivalente à l'EVM est le rapport d'erreur de modulation ou *Modulation Error Ratio*. Le MER, comme l'EVM, mesure le taux de déviation des points de constellation de  $\mathbf{Z}$  par rapport à  $\mathbf{X}$ . Par contre l'approche de représentation du MER diffère de l'EVM, et est généralement mesuré avec une échelle logarithmique de l'inverse de l'EVM et le MER est donc exprimé par :

$$MER = -20 \log_{10} EVM . \quad (1.30)$$

**Exigences d'EVM et de MER dans les standards** En général, la métrique MER est typiquement définie dans l'industrie des systèmes de radiodiffusion (*Broadcasting Industry*) tandis que l'EVM est une figure de mérite adoptée dans l'industrie des systèmes de communications sans-fil (*Wireless Industry*). Ainsi, la plupart des standards de communication sans-fil comme le standard IEEE 802.11ac Wifi [10], le standard IEEE 802.16e WiMAX [16] ainsi que le standard LTE [6] spécifient leurs exigences en terme d'EVM, exprimée dans ce cas en %.

Dans le cas du standard LTE, les mesures d'EVM sont faites au niveau de tous les *resource blocks* et des sous-trames de la voie descendante sur des périodes de mesure de 10 ms, et ce, pour toutes les bandes de fréquence. L'EVM sur les canaux *Physical*

Tableau 1.1 – Valeurs limites d'EVM définies par le standard LTE pour les différents ordres de modulation [6]

Modulation	EVM requis (%)
MDP-4	17.5 %
MAQ-16	12.5 %
MAQ-64	8%

*Downlink Shared Channels* (PDSCH) doit être inférieure aux limites données Tableau 1.1.

De même, les limites d'EVM définies dans le standard IEEE 802.11ac sont présentées pour les différents ordres de constellation et les différents rendements de codage comme présenté dans le Tableau 1.2.

Tableau 1.2 – Valeurs limites d'EVM définies par le standard IEEE 802.11ac pour les différents ordres de modulation et les différents rendements des codes [10]

Modulation	Rendement du code	EVM requis (%)
MDP-2	1/2	56%
MDP-4	1/2	32%
MDP-4	3/4	22%
MAQ-16	1/2	16%
MAQ-64	3/4	11%
MAQ-64	2/3	8%
MAQ-64	3/4	6%
MAQ-64	5/6	5%
MAQ-256	3/4	3%
MAQ-256	5/6	2.5%

D'autre part, les standards des réseaux de diffusion terrestre de la télévision numérique tels que le standard DVB-T2 et le standard ATSC 3.0 ne définissent pas les limites de MER. Ainsi, en se basant sur les différentes conditions de transmission telles que les zones de couverture et les canaux de diffusion, et après avoir mené différentes mesures, les équipementiers pour les réseaux de diffusion ajustent les paramètres de ces réseaux avec des valeurs empiriques de MER, typiquement obtenues par des mesures sur le terrain, permettant de garantir une qualité de service acceptable. Généralement, la contrainte de MER imposée par ces fabricants est entre 32 dB et 36 dB qui correspond à une valeur d'EVM entre 2.5% et 1.5% respectivement.

**Comparaison de l'EVM et de la CCDF du PAPR** Bien que la CCDF du PAPR est une figure de mérite bien connue pour évaluer les performances d'un système OFDM,

la CCDF du PAPR ne s'appuie que sur la mesure du pic le plus élevé dans une fenêtre d'observation et ne donne pas d'information sur le nombre d'échantillons qui ont subi des distorsions dans cette fenêtre. De plus, la mesure de la réduction de PAPR ne prend pas en compte les éventuelles distorsions causées par la technique de réduction de PAPR utilisée. L'EVM est une métrique complémentaire de la mesure de la CCDF du PAPR, car elle permet de mesurer la distorsion sur le signal émis *après* l'amplification non-linéaire pour un point de fonctionnement donné. L'EVM dépend de l'énergie du signal distordu complet et reflète les non-linéarités et les effets mémoire des AP, l'ensemble résultant de l'effet de la technique de réduction de PAPR utilisée. L'EVM est ainsi très utile pour la conception et la spécification des paramètres du système. De plus, comme décrit précédemment, les guides d'applications de plusieurs standards, comme le standard IEEE 802.11 ac Wifi et le standard LTE, ont déjà défini leurs conditions exigées en termes d'EVM. Une autre importance de l'EVM est qu'elle peut être traduite en mesures du BER selon le schéma de modulation utilisé [44]. Ainsi, l'EVM est une figure de mérite essentielle qui peut être étendue à différents niveaux d'analyse.

#### 1.5.4.3 Rapport de puissance sur les canaux adjacents (ACPR)

La réponse non-linéaire de l'amplificateur de puissance provoque des distorsions du signal transmis dans la bande, mais provoque également des distorsions en dehors de la bande qui se traduisent par une remontée du spectre ou des "shoulders" dans cette zone. Ceci se traduit par des distorsions en dehors de la bande et est mesuré par le rapport entre la puissance dans le canal utile et la puissance du signal généré dans les canaux adjacents ou *Adjacent Channel Power Ratio* (ACPR). L'ACPR est défini comme suit.

**Définition 1.6** (Rapport de puissance aux canaux adjacents (ACPR)). *L'ACPR est une métrique qui mesure le taux de distorsions en dehors de la bande. C'est le rapport entre la puissance émise dans le canal "utile" et la puissance émise dans le canal adjacent, comme représente la Fig. 1.21. L'ACPR peut donc être exprimé par :*

$$ACPR(dB) = 10 \log \frac{\int_{f_{canal}} PSD(f) df}{\int_{f_{adj}} PSD(f) df}, \quad (1.31)$$

où  $PSD(f)$  dénote la densité spectrale de puissance du signal émis.  $f_{canal}$  et  $f_{adj}$  sont les bandes de fréquences dans le canal direct et les canaux adjacents respectivement.

L'ACPR est une métrique importante pour vérifier que le signal transmis ne cause pas d'interférences inacceptables pour les canaux adjacents. Les standards imposent des conditions minimales d'ACPR précisées par le masque spectral qui doit être respecté à l'émission.

## 1.6 Techniques de réduction du PAPR

Afin de faire face au problème du PAPR, de nombreuses études depuis l'introduction des systèmes OFDM ont été menées pour chercher à réduire le PAPR des signaux OFDM en bande de base par des techniques dites de réduction du PAPR. De nombreux papiers depuis l'année 2000 proposent des analyses et des améliorations de ces techniques. Des

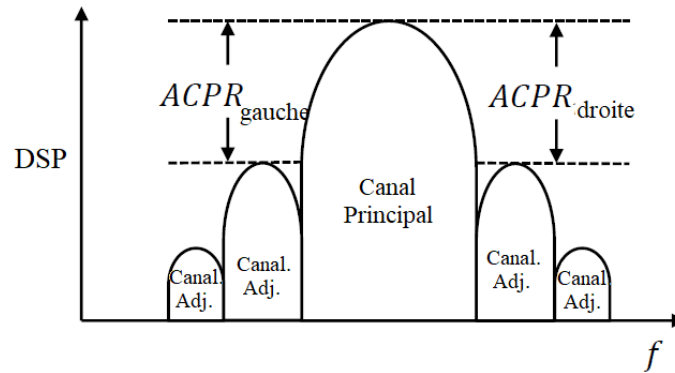


FIGURE 1.21 – Représentation de l'ACPR au niveau du spectre de fréquence

papiers de revues récentes montrent les avancements et les détails de ces techniques [45–49]. De plus, la référence [47] fournit un bilan d'analyse de complexité de ces techniques. D'autre part, le papier [48] analyse les implémentations jointes possibles des techniques de réduction du PAPR ainsi que les nouveaux axes d'étude du problème du PAPR élevé.

Dans ce qui suit, les techniques de réduction du PAPR les plus reconnues sont décrites brièvement en mentionnant leurs principes et leurs caractères principaux. Ensuite, les critères essentiels de sélection de techniques de réduction du PAPR sont décrits afin d'en fournir une brève comparaison.

### 1.6.1 Techniques à distorsion du signal

Ces techniques opèrent sur le signal dans le domaine temporel et se caractérisent par leur simplicité et leur grand potentiel de réduction de PAPR. Par contre, ces techniques apportent des distorsions au signal dans la bande et en dehors de la bande, par elles-mêmes. Ceci atténue donc fortement les bienfaits de la réduction du PAPR. Ainsi, l'application de ces techniques en pratique est limitée.

#### 1.6.1.1 Clipping

La technique la plus simple pour réduire le PAPR du signal OFDM est la technique *clipping*. Elle consiste à écrêter l'amplitude du signal OFDM temporel à un certain seuil noté  $A_{clip}$ . Ainsi, le signal après *clipping*  $s^{clip}$  peut être exprimé en fonction du signal OFDM temporel initial  $\mathbf{x}$  par [50] :

$$s^{clip}(k) = \begin{cases} x(k) & \text{if } |x(k)| \leq A_{clip} \\ A_{clip} e^{j\angle x(k)} & \text{if } |x(k)| > A_{clip} \end{cases} \quad (1.32)$$

La technique *clipping* est une opération non-linéaire qui cause des distorsions dans la bande et en dehors de la bande du signal. Les distorsions en dehors de la bande de fréquence du signal peuvent être atténuées par un filtrage du signal après *clipping*. Par contre, les distorsions dans la bande dégradent les performances du système en taux d'erreurs binaires et ne peuvent pas être atténuées par filtrage [51]. Le filtrage après *clipping* peut être une source de renaissance d'amplitudes crêtes tel que le signal après

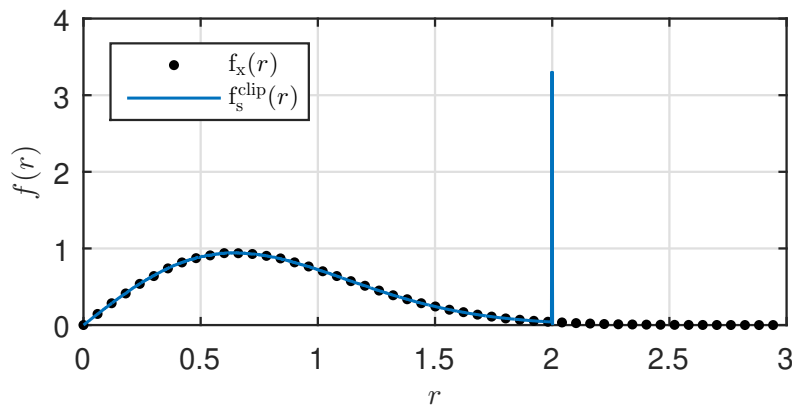


FIGURE 1.22 – PDF de l’amplitude du signal OFDM avec application de la technique *clipping*

filtrage dépasse le seuil maximum d’amplitude précisé par *clipping*. Afin de réduire cet effet, des opérations de répétition par boucles de *clipping* et filtrages peuvent être utilisées (repeated *clipping* and filtering [52]). Ces techniques requièrent plusieurs itérations afin d’atteindre le niveau de *clipping* désiré. L’utilisation de la technique *clipping-and-filtering* répété conjointement à d’autres techniques de réduction de PAPR décrites dans la suite peut aboutir à de meilleures performances de réduction de PAPR.

En réalité, l’effet de l’application de la technique *clipping* en pratique ne réduit pas les distorsions, mais constitue une phase de protection des amplificateurs contre les surtensions et au fonctionnement après la zone de saturation.

**PDF du signal OFDM après l’application de la technique *clipping*** D’après la description du problème du fort PAPR dans 1.5.2 à partir de la PDF de l’amplitude du signal OFDM temporel qui suit une loi de Rayleigh, une approche pour visualiser les performances de la technique *clipping* en réduction du PAPR peut être de visualiser cette PDF après l’application de la technique *clipping*. En effet, d’après (3.4), la PDF du signal  $s(t)$  peut être exprimée comme suit.

**Lemme 1.2.** *La PDF de l’amplitude du signal après clipping peut être exprimée par [19] :*

$$f_s^{\text{clip}}(r) = \begin{cases} f_x(r) & \text{if } r < A_{\text{clip}} \\ \mathcal{P}\{r \geq A_{\text{clip}}\} \delta(r - A_{\text{clip}}) & \text{if } r \geq A_{\text{clip}} \end{cases}, \quad (1.33)$$

où  $\delta(r)$  est l’impulsion de Dirac et  $\mathcal{P}\{r \geq A_{\text{clip}}\}$  est la probabilité que  $x(k)$  dépasse  $A_{\text{clip}}$  :

$$\mathcal{P}\{r \geq A_{\text{clip}}\} = \int_{A_{\text{clip}}}^{\infty} f_x(r) dr = e^{-\Lambda}. \quad (1.34)$$

En effet, la technique *clipping* préserve les valeurs d’amplitude au dessous de  $A_{\text{clip}}$ , ce qui explique la première partie de la PDF qui suit la loi de Rayleigh. Par contre, l’effet du *clipping* est de reporter tous les symboles au dessus de  $A_{\text{clip}}$  à cette valeur, ce qui crée une crête de la PDF à la valeur de  $A_{\text{clip}}$ , comme illustré Fig. 1.22.



### 1.6.1.2 *Windowing*

Au contraire de la technique *clipping* qui écrête l'amplitude du signal qui dépasse un certain seuil, la technique *windowing* limite ces crêtes en les multipliant par une fonction de pondération nommée fonction de fenêtrage (*peak windowing*) [53]. Idéalement, le spectre de ces fonctions est une fenêtre rectangulaire dans la bande du signal. Plusieurs fonctions de fenêtrage peuvent être utilisées dans ce processus tant qu'elles présentent de bonnes propriétés spectrales. Les fonctions de fenêtrages les plus utilisées incluent les fenêtres de Hamming, Hanning et Kaiser. Afin de réduire le PAPR, ces fenêtres sont alignées au signal de façon que les "vallées" de ces fenêtres atténuent les crêtes du signal tandis que leurs amplitudes élevées amplifient les faibles amplitudes du signal. Cette technique atténue donc les crêtes d'une manière plus souple que la technique *clipping* et il en résulte des distorsions moins importantes.

### 1.6.1.3 *Companding*

Les techniques *companding* (*compression and expanding*) sont typiquement appliquées pour les signaux de parole afin d'optimiser le nombre de bits par échantillon. Ces techniques sont appliquées aux signaux OFDM afin d'en réduire le PAPR puisque les signaux OFDM se comportent de façon similaire aux signaux de parole en terme d'occurrence des crêtes du signal [54]. Ces techniques se caractérisent par une faible complexité de calcul qui n'est en plus pas affectée par le nombre de sous-porteuses. De plus, ces techniques ne requièrent pas d'informations additionnelles et donc ne réduisent pas le débit du signal. Comme les autres techniques de réduction de PAPR à distorsion du signal, la simplicité de ces techniques est obtenue au prix de la dégradation du taux d'erreur binaire.

## 1.6.2 Techniques Probabilistes

Les techniques probabilistes consistent à générer un ensemble suffisamment grand de symboles OFDM différents, chacun de longueur  $N$ . Tous ces symboles représentent la même information portée par le signal d'origine,  $\mathbf{X}$ . Ensuite, la séquence ayant le PAPR le plus faible est sélectionnée et émise. Ces techniques ont l'avantage de ne pas introduire de distorsions au signal et permettent d'obtenir une réduction de PAPR importante. Par contre, de telles techniques souffrent de la perte du débit utile à cause de la transmission de données secondaires précisant quelle est la séquence qui a été choisie à l'émission. Elles risquent aussi d'augmenter la complexité des systèmes et d'introduire des délais de transmission. Dans ce qui suit, les exemples les plus connus de ces techniques sont présentés.

### 1.6.2.1 *Selected Mapping*

Selon la technique *Selected Mapping* (SLM), les symboles OFDM générés sont obtenus par la multiplication du bloc de donnée original  $\mathbf{X}$ , par un vecteur de séquences de phases, élément par élément [55]. Ainsi, le signal OFDM temporel à PAPR réduit est la IFFT du résultat de cette multiplication. Le schéma bloc de cette technique est montré Fig. 1.23. Cette multiplication se traduit par une rotation de phase des symboles MAQ présentés à l'entrée de l'IFFT. La réduction de PAPR obtenue dépend du

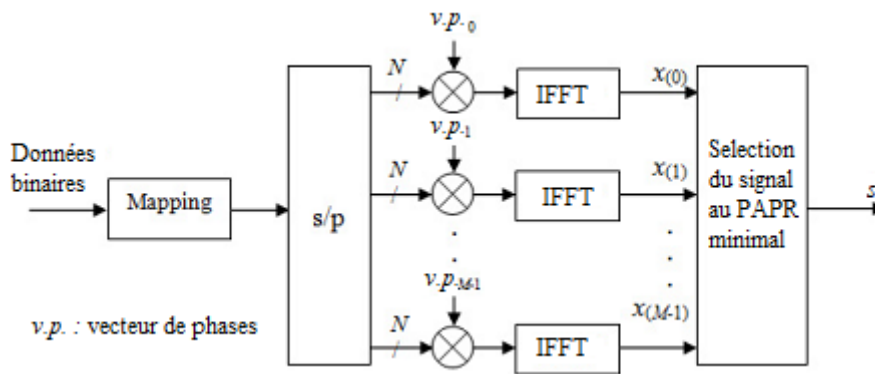


FIGURE 1.23 – Schéma bloc de la technique SLM

nombre  $M$  de séquences de phases générées. L'information sur les phases considérées doit être transmise comme information complémentaire afin de permettre la récupération des séquences d'information initiales, ce qui réduit le débit utile. Ces informations requièrent  $\log_2 M$  bits comme information supplémentaire. De plus, les séquences de phase doivent être enregistrées au niveau de l'émetteur et du récepteur. Une erreur dans l'émission des données d'informations supplémentaires entraîne un échec de récupération du symbole OFDM, ainsi une transmission très bien protégée de ces données doit être mise en œuvre. Plusieurs recherches complémentaires sont menées afin de faire face à tous ces problèmes telles que les solutions blind SLM [56, 57].

### 1.6.2.2 *Partial Transmit séquence*

Dans la technique *Partial Transmit Sequence* (PTS) [58, 59], un bloc de données de longueur  $N$  est subdivisé en un nombre de sous-blocs disjoints. La IFFT de chacun de ces sous-blocs est calculée séparément et ensuite multipliée par un facteur de phase. Ces facteurs de phase sont sélectionnés de façon à minimiser le PAPR du signal combiné de ces sous-blocs. Ce signal à PAPR réduit est le signal émis. La Fig. 1.24 donne le schéma de la technique PTS, où chaque symbole  $X_m$  représente le sous-bloc d'indice  $m$  tels que ces  $M$  blocs sont orthogonaux et  $b_m$  représentent les facteurs de phase respectifs. Dans la sélection des facteurs de phase optimaux, la recherche est généralement limitée à un nombre fini d'éléments afin de réduire la complexité de la recherche. La réduction de PAPR obtenue dépend du nombre de sous-blocs  $M$  et du nombre de facteurs de phase  $W$ . En effet, un plus grand nombre de sous-blocs conduit à une meilleure réduction de PAPR. Par contre, la complexité de recherche croît exponentiellement avec l'augmentation de  $M$ . De plus,  $M$  blocs IFFT doivent être mis en place afin d'implémenter le schéma de PTS et requièrent  $\log_2 W^{M-1}$  bits d'information secondaires pour que l'information soit récupérée à la réception. Dans la littérature, plusieurs techniques sont suggérées afin de réduire la complexité d'implémentation des techniques PTS et conserver une réduction de PAPR acceptable. On note qu'un algorithme de gradient est proposé dans [60] afin de calculer les facteurs de phase. Cette approche réduit la complexité au prix de quelques dégradations de performance.

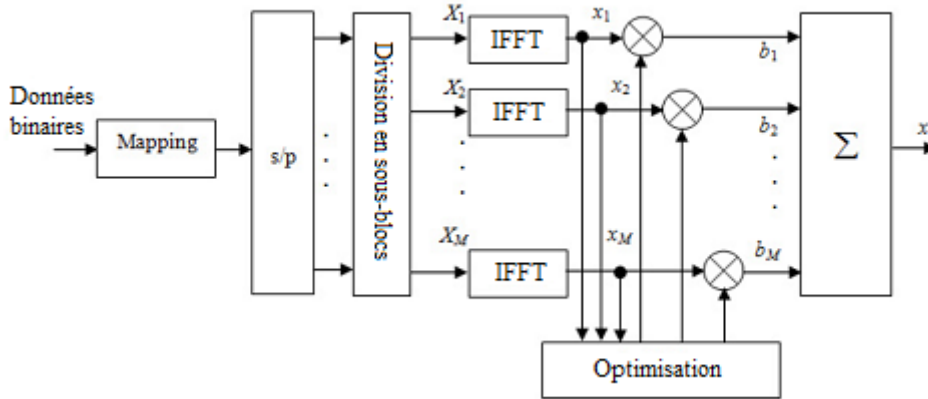


FIGURE 1.24 – Schéma bloc de la technique PTS

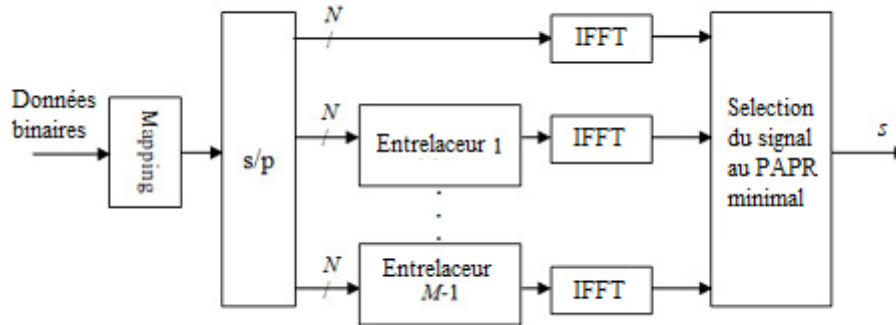


FIGURE 1.25 – Schéma bloc de la technique d'entrelacement

### 1.6.2.3 Technique d'entrelacement ou *Interleaving*

Cette technique, similaire à la technique SLM utilise des entrelaceurs à la place des séquenceurs de phase [61]. Afin d'obtenir une réduction de PAPR significative, plusieurs entrelaceurs sont mis en place afin d'avoir un nombre suffisant de permutations du vecteur de données d'origine. Les permutations peuvent être appliquées aux symboles comme aux éléments binaires. La IFFT est appliquée pour chacune de ces permutations et le signal ayant le plus faible PAPR est ainsi émis. Un schéma de la technique d'entrelacement est montré Fig. 1.25. Ainsi,  $M$  comparaisons,  $M - 1$  entrelaceurs, et  $M$  opérations IFFT sont requises. De plus,  $\log_2(M)$  informations secondaires doivent être transmises afin que le récepteur sache quel entrelaceur est choisi pour récupérer le signal d'information d'origine. Les indices des permutations doivent de plus être enregistrés au niveau de l'émetteur et du récepteur.

### 1.6.3 Techniques à ajout de signal

Ces techniques consistent à ajouter un signal additionnel  $\mathbf{c}$  au signal d'intérêt  $\mathbf{x}$  afin d'en réduire le PAPR. Ces techniques se caractérisent par de bonnes performances de réduction du PAPR sans ajouter des distorsions au signal ni avoir besoin d'informa-

tions secondaires. Les techniques *Tone Reservation* et *Active Constellation Extension*, décrites ci-après, ont notamment été retenues dans les standards de diffusion terrestre de la télévision numérique DVB-T2 et ATSC3.0 [8, 9].

### 1.6.3.1 *Tone Reservation*

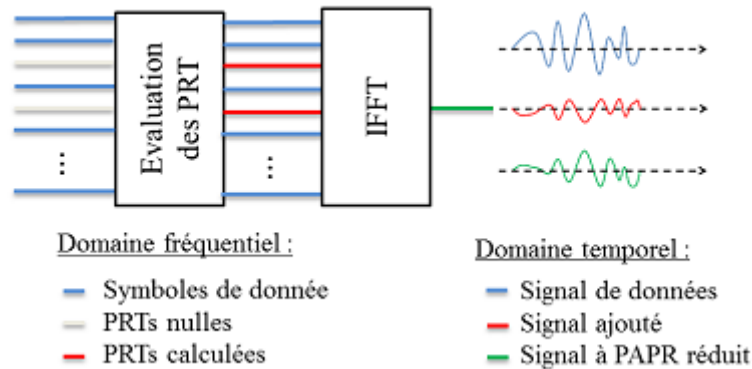


FIGURE 1.26 – Schéma de la technique TR

La technique *Tone Reservation* (TR) [13] est une des techniques les plus intéressantes pour la réduction de PAPR. Elle consiste à insérer un faible pourcentage de sous-porteuses dites porteuses réservées ou Peak Reserved Tones (PRTs). Ces porteuses sont évaluées de façon à réduire le PAPR du signal OFDM dans le domaine temporel. Puisque les sous-porteuses OFDM sont orthogonales, ces PRTs peuvent être ignorées à la réception sans ajouter de distorsions au signal. Leur seul rôle est donc de réduire le PAPR du signal OFDM dans le domaine temporel qui va être amplifié par l'AP non-linéaire. Cette technique peut être vue dans le domaine temporel comme un ajout d'un signal noyau orthogonal au signal initial afin d'en réduire le PAPR, comme illustré Fig. 1.26.

Pour chaque symbole OFDM, la recherche des valeurs optimales des PRTs est un problème d'optimisation convexe qui peut être résolu par différents algorithmes. L'algorithme optimal consiste à résoudre ce problème quadratique à contrainte quadratique ou Quadratically Constrained Quadratic Problem d'où sa nomination QCQP. Malgré sa performance optimale en terme de réduction de PAPR, cet algorithme est complexe à implémenter dans les systèmes réels. Pour cela, plusieurs algorithmes sous-optimaux sont proposés dans la littérature, comme l'algorithme du gradient [62] décrit dans le standard DVB-T2. Ces algorithmes diffèrent par leur simplicité et leur capacité à réduire le PAPR du signal. La technique TR sera détaillée dans le Chapitre 2. Un état de l'art des algorithmes de TR ainsi que la description de ces algorithmes les plus performants seront présentés.

La technique TR est considérée comme une des techniques les plus prometteuses qui a été retenue dans les standards DVB-T2 et ATSC 3.0. C'est une technique à compatibilité descendante, ce qui signifie qu'aucune complexité n'est ajoutée au récepteur, ce dernier se contentant d'ignorer les sous-porteuses PRTs. La technique TR ne requiert pas d'informations secondaires et ainsi n'affecte pas l'efficacité spectrale. Par contre, un point

problématique de cette technique est la recherche d'un algorithme qui n'augmente pas de façon trop importante la complexité de l'émetteur tout en offrant une réduction significative du PAPR. En outre, lors de l'utilisation de la technique TR, une faible augmentation de la puissance du signal émis est requise, soit pour une puissance émise identique, la puissance du signal utile diminue.

### 1.6.3.2 Tone Injection

Le principe de la technique *Tone Injection* (TI) [63] consiste à augmenter la taille de constellation, de façon à ce que chaque point du plan complexe d'origine soit mappé par plusieurs points différents dans une constellation étendue. Ce degré de liberté de plus facilite la réduction de PAPR. De plus, remplacer un point de la constellation d'origine par un point de la constellation étendue est équivalent à injecter une porteuse de la même fréquence et phase que le signal OFDM d'où le nom de la technique. La Fig. 1.27 illustre graphiquement le principe de la technique TI pour le cas d'une constellation MAQ-16 où le point d'origine libellé  $A$  est mappé par  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$ . Chacun de ces points est à une distance euclidienne  $D$  de  $A$ , où  $D$  est connue à l'émetteur et au récepteur. Un de ces points  $A_i$  est choisi de façon à réduire le PAPR du signal émis. Le signal d'origine est récupéré à la réception en appliquant une opération modulo- $D$  aux symboles, suivie de la démodulation.

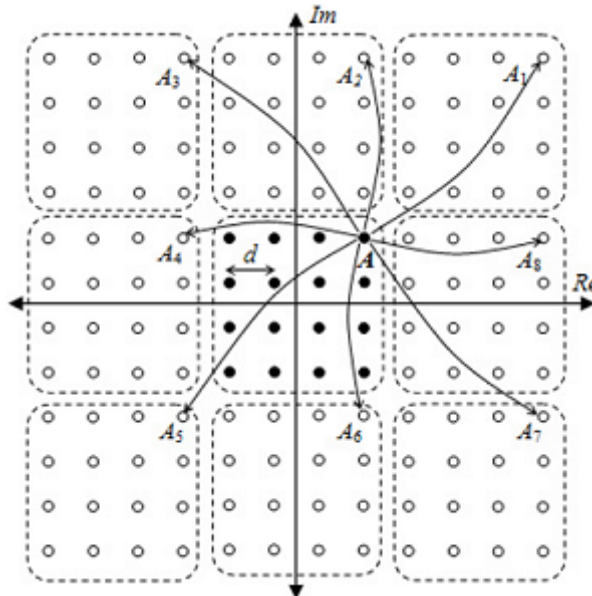


FIGURE 1.27 – Schéma de la technique TI

La technique TI ne requière pas d'informations secondaires et ainsi n'affecte pas l'efficacité spectrale. La complexité ajoutée au récepteur est mineure puisqu'elle ajoute deux opérateurs modulo  $D$ , un pour la partie imaginaire et un pour la partie réelle. Par contre, l'inconvénient de cette méthode est la grande complexité ajoutée à l'émetteur, ainsi qu'une faible augmentation de la puissance du signal émis et une réduction des performances vis à vis du bruit à puissance reçue identique.

### 1.6.3.3 *Active Constellation Extension*

La technique *Active Constellation Extension* (ACE) [14] est une technique similaire à la technique TI. Dans cette technique, les points de constellation situés sur la partie externe de la constellation sont élargis vers la zone extérieure de la constellation d'origine, de façon à réduire le PAPR du signal. L'idée générale de cette technique peut être expliquée pour l'exemple simple d'une constellation MDP-4. En considérant un canal à bruit additif gaussien les régions de décision pour chaque symbole en réception sont les quatre quadrants séparés par les axes du plan complexe. D'où, les changements apportés au niveau des positions des points émis, tant que ces points sont toujours dans le même quadrant, ne causeront pas de distorsions du signal. L'idée de la technique ACE peut être appliquée pour d'autres constellations telles que les constellations MAQ. Les points qui appartiennent aux bordures extérieures peuvent donc être modifiés sans affecter les performances en BER. Ce principe est illustré Fig. 1.28 pour les exemples de constellations MDP-4 et MAQ-16. Les zones hachurées ainsi que les flèches sont les zones où le point de constellation peut être modifié. Ainsi, une utilisation intelligente de ces modifications possibles pourra diminuer le PAPR du signal.

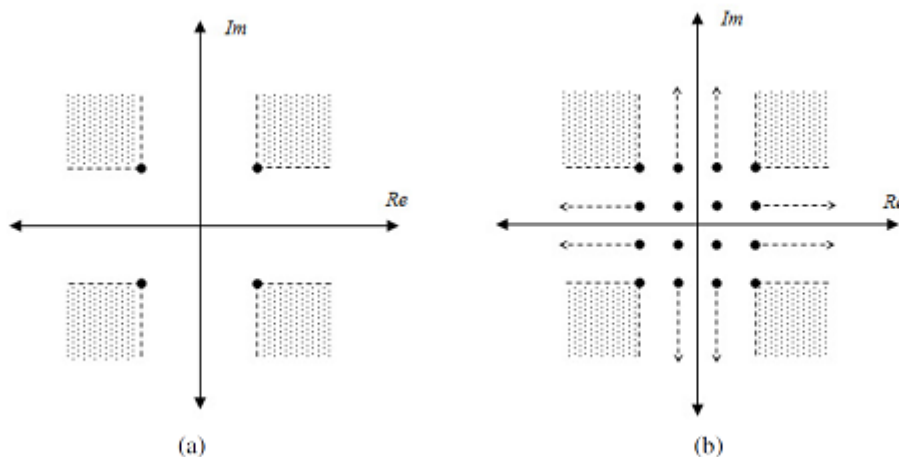


FIGURE 1.28 – Zones d'extension possibles pour la technique ACE pour les modulations MAQ-4(a) et MAQ-16(b)

Un avantage important de cette technique est qu'elle ne nécessite aucune information supplémentaire au récepteur. Par contre, la limitation majeure de cette technique est sa modeste efficacité pour les constellations d'ordre élevé. En effet, moins de degrés de liberté existent dans ces cas et la réduction de PAPR obtenue est bien plus faible. En plus, la technique ACE augmente légèrement la puissance du signal émis ce qui affecte le taux d'erreurs binaires obtenu pour un rapport signal à bruit donné.

## 1.6.4 Techniques de codage

Ces techniques consistent à éviter certaines configurations de symboles qui conduisent à des PAPR élevés du signal généré résultant. Une caractéristique intéressante de ces méthodes est leur capacité à offrir les fonctions de détection et de correction d'erreur tout en contribuant à la réduction du PAPR. Un exemple simplifié pour illustrer cette

technique est celui d'une modulation OFDM à 4 sous-porteuses modulés en MDP-2. Le PAPR de toutes les configurations possibles pour ce cas sont montrés Tableau 1.3. Il est donc remarquable que 4 configurations résultent en un PAPR de 6.02 dB et d'autres de 3.01 dB. Il est donc logique d'éviter l'émission de telles configurations afin de réduire le PAPR. Ceci peut être obtenu en codant 3 bits de données sur des mots de code à 4 bits tels que les mots de code permis ne contiennent pas les configurations à fort PAPR. Le PAPR du signal résultant une grande réduction par rapport au cas sans codage. Plusieurs études ont été menées dans la littérature pour des exemples plus compliqués. Par contre, cette réduction de PAPR vient au prix de perte d'efficacité spectrale surtout en augmentant le nombre de bits ou en montant dans l'ordre des constellations. Ainsi, les avantages de ces techniques pour la réduction de PAPR sont limités. Leur utilisation n'est pas donc envisageable pour les applications à grand nombre de sous-porteuses.

Tableau 1.3 – PAPR des différentes configurations d'un système OFDM à 4 sous-porteuses en MDP-2

Trame de symboles	PAPR(dB)	Trame de symboles	PAPR(dB)
[1, 1, 1, 1]	6.02	[-1, 1, 1, 1]	2.3
[1, 1, 1, -1]	2.3	[-1, 1, 1, -1]	3.01
[1, 1, -1, 1]	2.3	[-1, 1, -1, 1]	6.02
[1, 1, -1, -1]	3.01	[-1, 1, -1, -1]	2.3
[1, -1, 1, 1]	2.3	[-1, -1, 1, 1]	3.01
[1, -1, 1, -1]	6.02	[-1, -1, 1, -1]	2.3
[1, -1, -1, 1]	3.01	[-1, -1, -1, 1]	2.3
[1, -1, -1, -1]	2.3	[-1, -1, -1, -1]	6.02

### 1.6.5 Caractéristiques des techniques de réduction du PAPR

En outre des métriques d'évaluation de l'effet du PAPR définies dans la section 1.5.4, tels que l'EVM, l'ACPR et la CCDF du PAPR, certains critères des techniques de réduction de PAPR sont utiles pour bien les qualifier. En effet, ces caractéristiques qualitatives permettent de catégoriser les techniques de réduction du PAPR et de déterminer les différents compromis existants lors du choix de la méthode à utiliser.

**Performance en réduction de PAPR** Ce critère est prépondérant. Généralement, il est calculé en utilisant les courbes de CCDF du PAPR obtenu pour un certain niveau de probabilité  $\iota$  comme montré Fig. 1.29 où  $\mathbf{x}$  est le signal original et  $\mathbf{s}$  est le signal à PAPR réduit. Ainsi, le gain en réduction de PAPR peut être exprimé par :

$$\Delta PAPR(\iota) = PAPR_{\mathbf{s}}(\iota) - PAPR_{\mathbf{x}}(\iota) [dB] , \quad (1.35)$$

où  $PAPR_{\mathbf{s}}(\iota)$  et  $PAPR_{\mathbf{x}}(\iota)$  désignent les PAPR de  $\mathbf{s}(\iota)$  et  $\mathbf{x}(\iota)$  respectivement.

**Ajout de distorsions dans la bande et en dehors de la bande** Comme mentionné précédemment, certaines techniques de réduction de PAPR provoquent des distorsions du

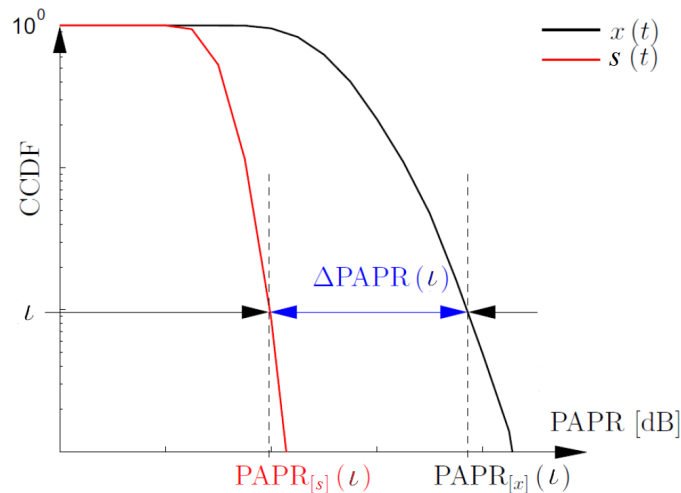


FIGURE 1.29 – Calcul du gain de réduction du PAPR pour une valeur particulière de la CCDF du PAPR

signal par elles mêmes. Ceci apporte un contre effet aux bienfaits de la réduction de PAPR qui a pour but de réduire les distorsions sur le signal émis. Par exemple, la technique *clipping* a un effet similaire à celui de la saturation de l'amplificateur. La technique *clipping* est utilisée en pratique dans le but de protéger les AP contre les éventuelles brûlures dues aux hautes puissances d'entrée, et non pas pour réduire les distorsions causées par l'AP.

**Compatibilité descendante** Une technique de réduction du PAPR est dite à compatibilité descendante si elle n'implique aucun changement de l'implémentation au récepteur. Par exemple, la technique TR ne requière au récepteur que la non considération des sous-porteuses PRTs. De même, l'utilisation de la technique *clipping* ne nécessite pas la mise en oeuvre de traitements supplémentaires au sein du récepteur. Par contre, les techniques de type codage ou les techniques probabilistes nécessitent l'ajout de fonctions complémentaires induisant une complexité additionnelle au sein du récepteur ainsi que certaines "*lookup tables*" à sauvegarder à ce niveau.

**Complexité de l'émetteur** Même si la méthode choisie permet d'obtenir une réduction importante du PAPR et des distorsions, il est primordial de considérer la complexité ajoutée au point d'émission. Les techniques très complexes peuvent apporter une grande consommation de ressources d'implémentation. Ainsi, un compromis entre la performance et la complexité de la technique de réduction du PAPR doit être soigneusement pris en considération.

**Perte de débit** Certaines techniques nécessitent de transmettre des informations secondaires afin de récupérer les données transmises. Ceci dégrade la capacité du système car cela entraîne une perte d'efficacité spectrale. Si la bande passante est maintenue constante ceci implique une perte de débit utile. C'est le cas des techniques de codage et des techniques probabilistes.



**Dépendance de la qualité du canal** Par ailleurs, ces informations secondaires doivent être transmises avec une fiabilité maximale même en présence de canaux affectés de trajets multiples. En effet, un mauvais décodage de ces informations en réception peut dégrader très fortement les performances de la liaison.

**Augmentation de la puissance du signal émis** Certaines techniques mènent à un ajout ou à une diminution de la puissance moyenne du signal émis. Par exemple, la technique *clipping* diminue cette puissance tandis que les techniques d'ACE et de TR apportent un faible ajout de la puissance émise. Par conséquent, la variation en puissance moyenne  $\Delta E$  peut être définie par :

$$\Delta E = P_s - P_x , \quad (1.36)$$

où  $P_s$  et  $P_x$  sont les puissances moyennes respectives de  $\mathbf{s}$  et  $\mathbf{x}$ . Ce critère peut impacter la sensibilité du récepteur et diminuer légèrement les performances en terme de BER.

## 1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, les éléments essentiels du contexte de la problématique du PAPR élevé des systèmes OFDM a été décrit. Les principes de base des systèmes OFDM ainsi que leurs applications et avantages ont été détaillés. Ensuite, ce chapitre décrit les éléments les plus essentiels de caractérisation des amplificateurs de puissance, ainsi que leur modèles à mémoire et sans mémoire. Le PAPR élevé des systèmes OFDM impose un fort compromis entre la linéarité du système et l'efficacité énergétique de l'amplificateur. Les figures de mérites essentielles de ce problème telles que l'EVM et l'ACPR sont définies. Les techniques de réduction de PAPR essentielles proposées dans la littérature ont été détaillées dans ce chapitre, telles que les techniques *clipping* et *Tone Reservation*. Ensuite, les caractéristiques essentielles de ces techniques sont listées. Ainsi, le contexte général du problème de PAPR des systèmes OFDM lors de l'amplification de puissance a été détaillé dans ce chapitre.

Le chapitre suivant va présenter de façon plus approfondie la technique *Tone Reservation* et décrire les algorithmes essentiels associés. De plus, un état de l'art des études analytiques de l'EVM sera décrit afin de montrer l'insuffisance des études menées à ce niveau, surtout pour la technique *Tone Reservation*. Les objectifs de cette thèse et le contexte des études menées seront aussi précisés.

# Chapitre 2

## État de l'art de la technique *Tone Reservation* et des études théoriques de l'EVM

### 2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, les différents éléments relatifs au problème du PAPR élevé des systèmes OFDM ont été fournis. Dans la littérature, le problème du PAPR a été largement étudié et différents éléments du problème ont été développés. Par contre, les études qui ont été menées sur les techniques de réduction du PAPR, décrites dans le premier chapitre, sont restreintes aux études empiriques qui considèrent l'évaluation des performances des techniques de réduction du PAPR à partir de simulations et non pas à partir d'études théoriques. Dans ce cadre, cette thèse s'intéresse à un point de vue théorique du problème du PAPR et à l'évaluation analytique de ses métriques de performance, notamment l'EVM.

Comme expliqué au premier chapitre, la technique TR est l'une des techniques les plus prometteuses de réduction du PAPR, qui n'ajoute pas de distorsions du signal, caractérisée par sa compatibilité en voie descendante et décrite dans des standards comme DVB-T2 et ATSC 3.0. Cette thèse s'intéresse essentiellement à la technique TR en utilisant différents algorithmes. La première partie de ce chapitre fournit une description détaillée du principe de la technique TR. Les avantages de cette méthode par rapport aux autres techniques de réduction du PAPR sont de plus mis en évidence. Un résumé sur l'état de l'art des algorithmes de la technique TR est décrit. Les algorithmes essentiels de cette méthode qui seront étudiés dans cette thèse sont développés. Ensuite, la deuxième partie du chapitre décrit l'état de l'art sur l'étude théorique des techniques de réduction du PAPR, en détaillant surtout l'étude analytique de l'EVM. Dans ce contexte, les problématiques sur l'étude analytique de l'EVM sont posées et ainsi les objectifs essentiels de cette thèse sont détaillés.

## 2.2 La technique *Tone Reservation*

### 2.2.1 Principaux avantages de la technique *Tone Reservation*

D'après les caractéristiques des techniques de réduction du PAPR présentées dans le Chapitre 1, la technique TR est une des techniques les plus prometteuses. Le Tableau 2.1 récapitule les principales caractéristiques de cette méthode en comparaison aux autres techniques de réduction de PAPR les plus reconnues.

Tableau 2.1 – Comparaison des caractéristiques des techniques de réduction du PAPR les plus reconnues

Caractéristiques	Techniques à distorsion	Techniques probabilistes	Techniques de codage	Technique ACE	Technique TR
Efficace pour réduire le PAPR	+	+	+	+	+
N'ajoute pas de distorsions	-	+	+	+	+
Les performances ne dépendent pas du canal	+	-	-	+	+
Compatibilité descendante	+	-	-	+	+
N'ajoute pas de complexité à l'émetteur	+	-	-	-	-
N'affecte pas le débit utile	+	-	-	+	-
Limitée dans l'ordre de constellation	+	-	-	-	+
Ne requière pas des données secondaires	+	-	-	+	+
N'augmente pas la puissance du signal émis	+	-	-	-	-
Adoptée dans des standards	-	-	-	+	+

**Les techniques à distorsion** Les techniques à distorsion se caractérisent par leur simplicité. Par contre, elles entraînent une augmentation du taux de distorsions apportées au signal, ce qui pondère fortement leur intérêt pour la réduction du PAPR.

**Les techniques probabilistes et les techniques de codage** Les techniques probabilistes et les techniques de codage permettent de réduire de façon significative le PAPR mais au prix d'une complexité importante à l'émission et de la nécessité d'apporter des changements en réception, ces techniques n'étant pas à compatibilité descendante. De plus, contrairement à la technique TR, les techniques probabilistes requièrent l'envoi d'informations secondaires et leurs performances sont très dépendantes de la qualité du

canal qui transmet ces informations secondaires. Les informations portées risquent d'être perdues si des erreurs sont introduites sur ces données secondaires. En outre, la complexité de ces méthodes augmente de façon exponentielle avec l'ordre de la constellation et avec le nombre de sous-porteuses OFDM, ce qui limite leur application car la plupart des systèmes OFDM comprennent un très grand nombre de sous-porteuses.

**La technique ACE** Les techniques TR et ACE sont les seules techniques de réduction de PAPR sélectionnées dans des standards comme DVB-T2 et ATSC 3.0. La technique ACE offre des performances intéressantes mais uniquement pour les constellations à faible nombre d'états telles que les constellations MDP-4, voir MAQ-16.

**La technique TR** La technique TR est une technique performante de réduction du PAPR. C'est une technique à compatibilité descendante qui n'ajoute pas de distorsions au signal. Ses performances ne dépendent pas de la qualité du canal comme les techniques probabilistes. Cependant, l'augmentation de la complexité à l'émission dépend de l'algorithme utilisé, comme on le verra dans la suite de ce chapitre, et des algorithmes simplifiés peuvent offrir de bons compromis performances/complexité. L'influence de la technique TR sur le débit utile dépend du pourcentage de PRTs qui est limité dans les standards tels que DVB-T2 à 1%, ce qui est considéré comme une perte acceptable de débit utile. De plus, la technique TR ne requière pas la transmission de données secondaires et donc ne cause pas de pertes du débit utile. La technique TR requière une augmentation de la puissance utile, due à la puissance des PRTs. Par contre, cette augmentation de puissance en bande de base peut offrir des gains importants de puissance au niveau de l'AP, ce qui peut largement compenser cette perte. Qui plus est, la technique TR offre des performances qui sont indépendantes de l'ordre de la constellation.

Pour toutes ces raisons, cette thèse s'intéresse surtout à l'étude de la technique TR qui sera détaillée dans ce qui suit.

## 2.2.2 Description de la technique Tone Reservation

Dans cette section, la technique TR est détaillée ainsi que ses propriétés essentielles.

### 2.2.2.1 Principe de la technique TR

La technique TR consiste à ajouter un signal noyau  $c(t)$  orthogonal au signal OFDM temporel d'origine  $x(t)$  de façon à obtenir un signal  $s(t)$  à PAPR réduit tel que :

$$s(t) = x(t) + c(t) . \quad (2.1)$$

Notons que les signaux  $x(t)$ ,  $c(t)$  et  $s(t)$  sont respectivement composés de la séquence des signaux  $\mathbf{x}_i$ ,  $\mathbf{c}_i$  et  $\mathbf{s}_i \in \mathbb{C}^N$  où  $i \in [-\infty; +\infty]$  représente l'indice du symbole OFDM. Dans ce qui suit les notations de ces vecteurs sont simplifiées à  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{c}$  et  $\mathbf{s}$  respectivement.

Le signal  $\mathbf{c}$  ajouté, orthogonal à  $\mathbf{x}$  est le résultat de la IFFT d'un signal fréquentiel sur  $N_{PRT}$  sous-porteuses OFDM appelées PRTs et réservées à la réduction du PAPR. Ces sous-porteuses PRTs appartiennent à un sous-ensemble  $S_l$ . Soit  $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^N$  ce vecteur

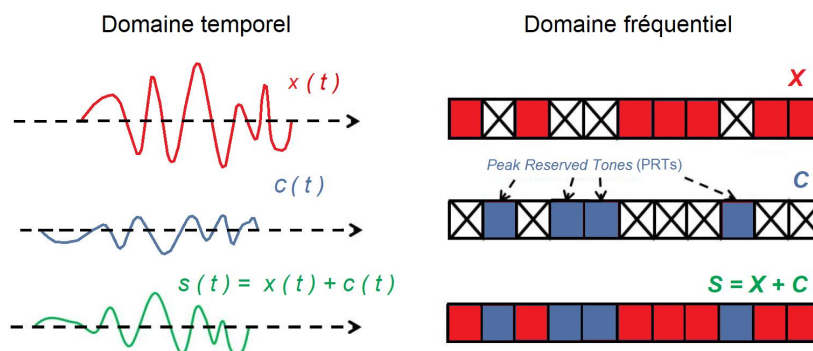


FIGURE 2.1 – Principe de la technique TR dans le domaine fréquentiel et dans le domaine temporel

fréquentiel, contenant ainsi les PRTs aux positions  $S_l$  et des valeurs nulles aux autres positions. En effet,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{X}$  appartiennent à des sous-espaces de fréquences disjoints c.à.d. :

$$\mathbf{S} = \mathbf{X} + \mathbf{C} \begin{cases} X_k = 0 \quad \forall k \in S_l^c \\ C_k = 0 \quad \forall k \in S_l \end{cases} . \quad (2.2)$$

Ceci assure que le signal  $c(t)$  est orthogonal à  $x(t)$  et que donc la technique TR n'ajoute pas de distorsion dans la bande du signal comme mentionné Fig. 2.1. En effet, le signal  $c(t)$  a pour rôle de réduire le PAPR du signal qui sera amplifié par l'AP non-linéaire et ainsi apporter des gains en efficacité énergétique. Par contre, ce signal  $c(t)$  transmis par les porteuses PRTs est tout simplement ignoré au niveau du récepteur. On rappelle que l'opération de IFFT est une opération linéaire et donc les vecteurs  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{c}$  et  $\mathbf{s}$  sont tels que :

$$\mathbf{X} \Leftrightarrow \mathbf{x} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{C} \Leftrightarrow \mathbf{c} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} + \mathbf{X} \Leftrightarrow \mathbf{s} = \mathbf{c} + \mathbf{x} \quad (2.5)$$

Le vecteur  $\mathbf{c}$  est donc optimisé pour chaque vecteur de données  $\mathbf{x}$ , afin de réduire les amplitudes crêtes de ce signal. Ainsi, cette technique consiste à chercher le niveau minimum possible, soit  $\tau$ , de la puissance maximale du signal temporel qui soit atteignable pour chaque symbole OFDM. Ce maximum est noté par  $\|\mathbf{s}\|_\infty = \|\mathbf{x} + \mathbf{c}\|_\infty$  où  $\|\cdot\|_\infty$  est la norme infinie. Ainsi, le problème basique de la technique TR consiste à résoudre le problème d'optimisation énoncé par :

$$\begin{aligned} \min \tau \\ \text{tel que } \|\mathbf{x} + \mathbf{QC}\|_\infty^2 \leq \tau, \end{aligned} \quad (2.6)$$

où  $\mathbf{Q}$  est la matrice de IFFT appliquée à  $\mathbf{C}$ .

### 2.2.2.2 Contrainte de puissance des PRTs

La puissance allouée aux PRTs ne contribue pas à transmettre les données utiles et donc diminue, à puissance totale émise identique, la puissance attribuée aux porteuses

qui transmettent des données. C'est pourquoi, les standards comme DVB-T2 imposent une contrainte sur la limite maximale de la puissance attribuée aux PRTs. Ainsi, soit  $\zeta = 10^{\frac{\Delta P_b}{10}}$  le rapport entre la puissance maximale autorisée à chacune des PRTs et la puissance moyenne d'une porteuse de données  $\frac{P_x}{N}$ , avec  $\Delta P_b$  la valeur de ce boost de puissance en *dB* et  $P_x$  la puissance moyenne du signal  $x(t)$ . Ainsi, la condition suivante s'ajoute :

$$\|\mathbf{C}\|_\infty^2 \leq \Delta P_b + \frac{P_x}{N} \text{ [dB]} . \quad (2.7)$$

Typiquement, cette contrainte de puissance est de  $\Delta P_b = 10 \text{ dB}$  dans les standards

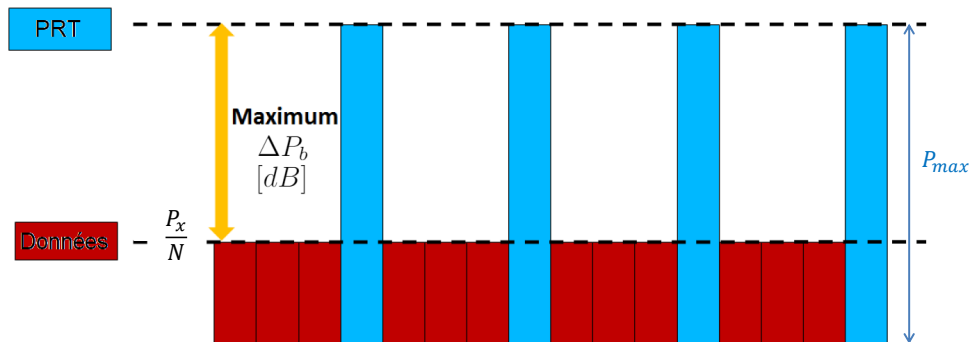


FIGURE 2.2 – Illustration de la contrainte de puissance maximale allouée aux PRTs par rapport à la puissance des porteuses de données

comme DVB-T2. L'illustration de cet effet dans le signal fréquentiel transmis est visualisée Fig. 2.2. Dans ce qui suit, soit  $P_{max}$  la puissance maximale permise d'une PRT, telle que définie en (2.7) et soit  $A_{max} = \sqrt{P_{max}}$  l'amplitude correspondante.

### 2.2.2.3 Effet de perte de sensibilité au récepteur

En considérant une puissance totale émise constante, la puissance allouée aux PRTs signifie que moins de puissance est allouée aux porteuses qui transmettent des données. Cette puissance allouée aux PRTs conduit donc à une perte au niveau de la sensibilité du récepteur notée  $\nu$ . En fonction de la puissance allouée aux PRTs, ce facteur peut être exprimé par :

$$\nu = 10 \log_{10} \frac{(100 - \kappa) + \kappa \times 10^{\Delta P_b/10}}{100} , \quad (2.8)$$

où  $\kappa$  est le pourcentage de porteuses PRTs (par exemple,  $\kappa = 1\%$  dans le cas du standard DVB-T2). Ainsi, en limitant la puissance additionnelle allouée aux PRTs  $\Delta P_b$ , la perte de sensibilité du récepteur causée par la technique TR est atténuée. Cependant, notons que si la puissance des porteuses qui transmettent des données est inchangée, ceci signifie que la puissance totale émise doit être augmentée.

### 2.2.2.4 Orthogonalité par opérations linéaires

Une propriété importante à prendre en compte lors de l'étude de la technique TR est la conservation de l'orthogonalité lors de l'application d'opérations linéaires au noyau

temporel. En effet, D'après les propriétés de la FFT, si la réponse de  $\mathbf{c}$  est  $\mathbf{C}$  telle que  $C_k = 0 \forall k \in S_l$ , alors la réponse fréquentielle de  $\mathbf{c}'$ , obtenu par opérations linéaires sur  $\mathbf{c}$  aura une réponse fréquentielle  $\mathbf{C}' = \mathbf{Q}\mathbf{c}'$  telle que  $C'_k = 0 \forall k \in S_l$ . Par exemple, les opérations de décalage, rotation, déphasage et multiplication par une constante sont toutes des opérations qui conservent la propriété d'orthogonalité du signal ajouté en TR.

### 2.2.2.5 Pourcentage et emplacement des sous-porteuses

Afin de conserver un débit utile acceptable, le nombre alloué des PRTs,  $N_{PRT}$ , représente un faible pourcentage du total des sous-porteuses  $N$ ,  $N_{PRT} \ll N$ . Par exemple, dans le standard DVB-T2 ce pourcentage est égal à 1%. L'emplacement des  $N_{PRT}$  PRTs ne doit pas être uniforme et les indices de  $S_l$  doivent être dispersés sur  $N$  de façon à tirer parti de l'ensemble des degrés de liberté par le choix de la meilleure séquence et ainsi offrir de meilleures performances. Dans le standard DVB-T2, cet emplacement est fixé et défini dans la norme (cf. Tableau 67 dans [8]).

Par exemple, pour l'algorithme du gradient décrit plus tard, l'emplacement des sous-porteuses influe sur la forme du signal noyau ajouté à chaque itération, et donc, cet emplacement joue un rôle important dans les performances de l'algorithme. En effet, plus ce signal se rapproche d'une impulsion de Dirac, plus l'algorithme est performant.

### 2.2.2.6 Algorithmes de la technique TR

La partie la plus importante de la technique TR qui diffère d'une application à l'autre est la méthode de calcul du signal ajouté  $\mathbf{C}$  dans le domaine fréquentiel ou  $\mathbf{c}$  dans le domaine temporel. En effet, chaque algorithme présente une solution différente pour résoudre ce problème avec un certain compromis efficacité de réduction du PAPR - complexité d'implémentation. Dans la section qui suit, cette problématique est développée par un état de l'art de ces algorithmes et une description détaillée des algorithmes les plus intéressants.

## 2.2.3 État de l'art sur les algorithmes de la technique TR

### Algorithme optimal et algorithme standardisé

Le concept de la technique TR a été introduit à l'origine par Tellado dans [13]. Dès lors, la question essentielle est le choix de l'algorithme qui calcule les symboles appliqués aux PRTs, soit le signal temporel ajouté, orthogonal au signal OFDM. La solution optimale est à l'origine présentée comme un problème d'optimisation convexe de type *Quadratically Constrained Quadratic Problem* (QCQP). La formulation du problème QCQP est la solution optimale pour la technique TR et donne la limite supérieure du niveau de réduction du PAPR en utilisant la technique TR. Cependant, l'algorithme QCQP est complexe et introduit une latence élevée en raison de son temps de calcul.

Pour résoudre ce problème de complexité de la méthode QCQP, plusieurs algorithmes sous-optimaux ont été proposés dans la littérature. Ceci est généralement effectué par des opérations linéaires sur le signal noyau  $\mathbf{c}$ . En effet, cet algorithme peut être facilement transformé en un problème linéaire. Ainsi, le calcul des valeurs complexes des PRTs peut être effectué de manière itérative. Dans les standards DVB-T2, DVB-NGH et ATSC 3.0, le concept de la technique TR est présenté comme un algorithme basé sur le gradient,

qui sera détaillé dans la suite de ce chapitre. À chaque itération, l'algorithme calcule le pic d'amplitude le plus élevé du signal dans le domaine temporel et décale une copie du noyau pour qu'elle coïncide avec la position de ce pic. Ensuite, l'amplitude du noyau est mise à l'échelle et sa phase est ajustée afin d'abaisser le pic détecté du signal résultant. L'algorithme se termine lorsque le nombre maximal d'itérations est atteint ou lorsque tous les pics d'amplitude du signal sont inférieurs à une valeur prédéfinie  $V_{clip}$ . Cet algorithme de la technique TR est détaillé dans [8] pour les standards DVB-T2 et DVB-NGH et dans [9] pour l'ATSC 3.0.

Malheureusement, cet algorithme est relativement complexe et offre aujourd'hui un compromis performance/complexité modeste. Ceci explique que cet algorithme, bien qu'il soit décrit dans le détail dans les différents standards mentionnés précédemment, ne soit pas implémenté en vraie grandeur dans les différents modulateurs de télévision numérique existant aujourd'hui.

### Algorithmes de la technique TR proposés dans la littérature

Ces dernières années, de multiples recherches se sont concentrées sur l'amélioration des performances des algorithmes basés sur l'approche TR. Dans [64] les auteurs proposent une formulation simplifiée par rapport à l'algorithme QCQP et le problème est ramené à un problème convexe de second ordre ou *Second Order Convex Programming Problem* (SOCP). Malgré sa simplification, le problème garde, comme avec le QCQP, sa complexité d'implémentation.

Afin de faire face à cette complexité, les auteurs dans [65] proposent une solution TR appelée un noyau un pic ou *One Kernel One Peak* (OKOP). Cette solution consiste à changer la définition existante du noyau tout en restant totalement compatible avec la norme DVB-T2. Une sélection améliorée des amplitudes crêtes et une dynamique de calcul du seuil ont été développées pour optimiser l'algorithme du gradient du standard DVB-T2. Cependant, les noyaux OKOP souffrent du même inconvénient que les noyaux DVB-T2, les deux étant complexes à générer en temps réel ou nécessitent des espaces mémoire importants.

Dans [66], une solution basée sur l'algorithme génétique a été proposée pour rechercher un ensemble sous-optimal d'emplacements de PRTs avec un algorithme adaptatif de *clipping* d'amplitude pour les techniques de réduction du PAPR basées sur l'approche TR. Une solution sous-optimale basée sur l'entropie croisée a été proposée dans [67], afin de rechercher les valeurs d'amplitudes et de phases sous-optimales de ces configurations de PRTs.

Dans [68], Chen et Li ont proposé une solution basée sur l'entropie croisée pour trouver l'ensemble de PRTs optimal. Un algorithme itératif a été présenté pour rechercher la distribution optimale de l'ensemble des PRTs en tenant compte de la minimisation de pics secondaires du noyau, avec le nombre limité de ces PRTs.

Un algorithme basé sur un schéma de la technique TR en multi-étages est proposé dans [69]. Il consiste à utiliser ces étages multiples afin de traiter le signal OFDM. Un exemple en deux étages a été présenté, où les pics d'amplitude du signal OFDM au-dessus d'une première amplitude seuil sont traités avec le premier bloc de la technique TR. Puis, le signal traité est transmis si son PAPR est inférieur à un deuxième seuil cible. Sinon, le signal est traité avec un second module de la technique TR.

Dans [70], un nouvel algorithme de la technique TR basé sur la sélection de la sous-



porteuse ayant une phase proche à  $\phi$ ,  $\phi + \pi/2$ ,  $\phi + \pi$  et  $\phi - \pi/2$  est présenté, où  $\phi$  est la phase du pic détecté le plus élevé. Dans [71], basée sur l'approximation des moindres carrés, une méthode TR avec une convergence rapide pour la réduction du PAPR a été proposée. Cette méthode est capable de générer de meilleurs signaux d'annulation de crêtes d'amplitude avec une convergence rapide qui nécessite seulement deux itérations pour offrir presque les mêmes performances que celles de la méthode *clipping controle*.

Dans [72], un algorithme basé sur la technique TR est proposé afin d'ajuster une forme d'onde d'annulation de crêtes. Cependant, une opération d'IFFT supplémentaire à chaque itération, en plus d'une opération d'inversion de matrice de taille égale au carré du nombre de PRTs, sont requises. Dans [73], Rosati et al ont présenté un algorithme basé sur la technique TR appelé *Rotation Invariant Subcarrier Mapping* proposé pour le standard DVB-T2 et offrant des performances similaires à la méthode du gradient de ce standard. L'algorithme consiste à utiliser les PRTs pour la réduction du PAPR ainsi que pour transporter des informations ou des données de signalisation. Dans [74], Tosato et al ont proposé un algorithme de la technique TR basé sur le codage sphérique avec contrainte de puissance afin de rechercher le signal optimal de réduction du PAPR.

Dernièrement, un algorithme modifié de la technique TR a été proposé dans [75]. Il consiste à modifier la structure du signal ajouté en décomposant le symbole OFDM en une superposition de plusieurs symboles plus courts avec moins de sous-porteuses. Dans [76], Bai et al ont proposé une modification de l'algorithme TR pour les systèmes OFDM avec *clipping*. Afin d'approximer le bruit de *clipping*, ils proposent un schéma d'approximation des moindres carrés pour trouver le facteur multipliant le signal d'annulation, de manière à augmenter la vitesse de convergence. Dans le même but, [77] décrit un version parallélisée de l'algorithme TR original. D'autre part, Wang et al [78] introduisent un algorithme itératif essayant de résoudre le problème QCQP à moindre coût de complexité. Cependant, toutes ces techniques de réduction du PAPR proposées restent soit trop complexes, soit offrent un gain réduit du PAPR.

### Algorithmes ICMP et GICMP

Dans [79] un algorithme prometteur de la technique TR nommé *Grouped Individual Carriers for Multiple Peaks* (GICMP) a été proposé pour la norme DVB-T2. L'idée principale de cet algorithme consiste en une nouvelle définition du signal d'annulation de crêtes. En fait, les auteurs définissent un nouveau noyau en activant un sous-groupe de PRTs à chaque itération. Au lieu du noyau en forme d'impulsion défini par l'algorithme du gradient standard en DVB-T2, un noyau en peigne qui cible la réduction de plusieurs pics du signal à chaque itération est proposé. Par rapport à l'algorithme du gradient standard, l'algorithme GICMP offre de très bonnes performances avec une complexité réduite et est compatible avec la norme DVB-T2.

Cependant, l'algorithme GICMP nécessite le stockage de tous les échantillons du signal dans le domaine temporel, en plus d'une opération de tri pour détecter les différents pics du signal. Pour cela, les auteurs développent dans [80] cet algorithme pour diminuer encore plus sa complexité et pour qu'il soit compatible avec la norme ATSC 3.0, nommé *Grouped Carrier Peak Windowing* (GCPW). L'algorithme proposé définit une nouvelle méthode pour la détection des pics afin de réduire la latence, les ressources matérielles telles que la mémoire de stockage ainsi que la complexité de l'algorithme. Les résultats de simulations présentés montrent que l'algorithme GCPW proposé offre de très bonnes

performances avec moins de complexité et d'exigences de ressources de mise en œuvre que les autres algorithmes sous-optimaux proposés dans la littérature.

### Algorithmes étudiés dans cette thèse

Pour résumer, plusieurs algorithmes de la technique TR ont été proposés dans la littérature. La formulation optimale de cette technique consiste à résoudre le problème convexe de type QCQP. C'est un algorithme complexe qui introduit des délais. Malgré cette complexité, cet algorithme atteint les limites théoriques de réduction du PAPR de la technique TR.

D'autre part, un algorithme simplifié est l'algorithme du gradient qui est décrit dans les standards DVB-T2, DVB-NGH et ATSC 3.0. Cet algorithme offre un compromis complexité/performance relativement modeste. Cependant, comme il a été sélectionné pour un grand nombre de standards de télévision numérique, il constitue une référence. En outre, l'étude de cet algorithme du gradient permet de prévoir les performances en réduction du PAPR pour les standards qui l'utilisent et permet donc d'optimiser les paramètres de ces standards.

Par ailleurs, l'algorithme GICMP, précédemment cité est un algorithme prometteur qui offre de très bonnes performances par rapport à l'algorithme du gradient standard, avec une complexité réduite et il est en plus implémentable et compatible avec la norme DVB-T2. Ainsi, cette thèse considère l'étude de ces trois algorithmes essentiels de la technique TR : QCQP, Gradient et GICMP.

## 2.2.4 Description des algorithmes de la technique TR

L'objectif principal d'un algorithme TR est le calcul de symboles complexes attribués aux PRTs afin d'abaisser le PAPR du signal résultant. Dans ce paragraphe, les algorithmes essentiels, étudiés dans cette thèse sont décrits : l'algorithme optimal QCQP qui conduit aux meilleures performances de la technique TR au prix de sa complexité, l'algorithme du gradient, adopté dans les standards DVB-T2 et ATSC 3.0 ainsi que l'algorithme GICMP qui offre le meilleur compromis complexité-efficacité en réduction du PAPR.

### 2.2.4.1 Algorithme optimal : QCQP

Le problème d'optimisation de la technique TR tel que formulé par (2.9) auquel s'ajoute la contrainte de puissance en (2.7) est un programme quadratique à contrainte quadratique (QCQP) [13], formulé donc comme suit :

$$\begin{aligned} & \min \tau \\ & \text{tel que } \|\mathbf{x} + \mathbf{QC}\|_{\infty}^2 \leq \tau, \\ & \text{avec } \|\mathbf{C}\|_{\infty}^2 \leq \Delta P_b + \frac{P_x}{N} [dB], \end{aligned} \tag{2.9}$$

Le problème QCQP est un problème d'optimisation pour lequel à la fois la fonction objective et les contraintes sont des fonctions quadratiques, dont la résolution est possible par des logiciels tel que le logiciel CVX [81,82]. La solution du QCQP fournit les valeurs optimales à attribuer aux PRTs, qui permettent de réduire au plus bas le PAPR du signal émis. La résolution du problème conduit cependant à une complexité de calcul très

élevée. Pour cette raison, malgré les résultats optimaux offerts par l'algorithme QCQP, de nombreux algorithmes sous-optimaux mais plus simples sont proposés dans la littérature.

Malgré sa grande complexité, la formulation du problème de QCQP reste la solution optimale de la technique TR et offre la borne supérieure de réduction du PAPR atteignable en utilisant la technique TR. Ceci est d'un grand intérêt pour l'évaluation des performances de la technique TR, surtout dans le cadre de l'étude analytique, qui est le cas de cette thèse.

### 2.2.4.2 Algorithme du gradient

Comme déjà mentionné, l'algorithme du gradient est proposé et décrit dans le standard DVB-T2 [8, pages 119-121]. C'est un algorithme itératif qui repose sur une procédure d'annulation d'un pic à chaque itération comme détaillé dans ce qui suit.

**Noyau utilisé** L'algorithme du gradient considère un noyau ressemblant, dans la limite du nombre des PRTs, à une impulsion de Dirac. En effet, comme la réponse fréquentielle d'une impulsion de Dirac est un signal constant continu, le noyau fréquentiel utilisé  $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^N$  est constitué de sous-porteuses PRTs égales entre elles à une amplitude constante  $\beta$ , et le noyau temporel  $\mathbf{h} \in \mathbb{C}^N$  est le résultat de la IFFT de ce noyau fréquentiel :

$$\mathbf{H}_k = \begin{cases} \beta e^{j0}, & k \in S_l \\ 0, & k \notin S_l \end{cases}, \forall k \in [0 : N - 1] \rightarrow \mathbf{h} = \mathbf{Q}\mathbf{H}. \quad (2.10)$$

L'amplitude  $\beta$  est calculée de façon à ce que l'élément d'indice 0 du noyau  $\mathbf{h}$  soit d'amplitude égale à 1, à noter que la phase à l'indice 0 est de plus égale à 0 puisque les éléments de  $K(f)$  sont réels, ainsi :

$$\beta = \frac{\sqrt{N}}{N_{PRT}} \Leftrightarrow h_0 = 1. \quad (2.11)$$

Les Fig. 2.3 et 2.4 montrent un exemple de ce noyau en fréquentiel et en temporel respectivement, pour les emplacements des PRTs définis dans le standard DVB-T2 pour  $N = 8192$  (8K sous-porteuses). On voit bien la ressemblance avec une impulsion de Dirac pour  $h_0 = 1$ . La figure 2.4 montre que puisque le nombre des PRTs est limité, le noyau n'est pas une pure impulsion et présente des échantillons de fuite, qui empêchent une parfaite annulation de pics. En ce sens, l'algorithme basé sur le gradient est sous-optimal et, dans le cas où la convergence est possible, peut nécessiter plusieurs dizaines d'itérations avant d'atteindre cette convergence.

**But de l'algorithme** L'algorithme vise à réduire tous les pics d'amplitude supérieures à un seuil prédéfini  $V_{clip}$ , et ce, par une procédure de réduction d'un pic par itération. À chaque itération  $i$  un noyau temporel qui ressemble à une impulsion de Dirac est ajouté. Ce noyau a pour rôle de ramener à  $V_{clip}$  l'amplitude du plus grand pic du signal temporel à chaque itération, dans la limite des imperfections de ce noyau, de la contrainte de puissance et du nombre maximal d'itérations  $I_{max}$ .

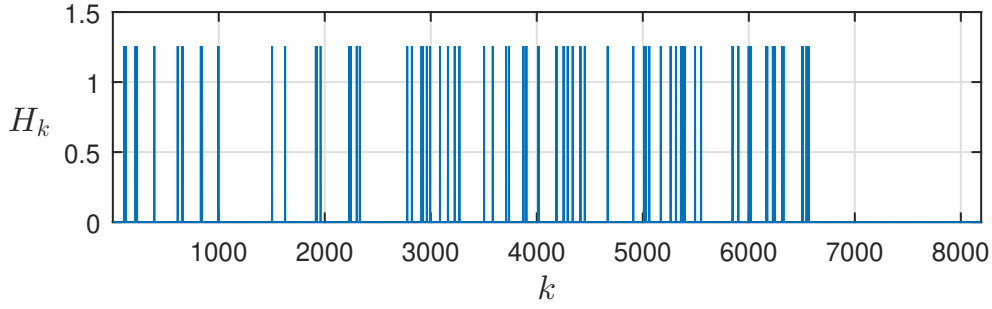


FIGURE 2.3 – Noyau fréquentiel utilisé par l’algorithme du gradient DVB-T2 ressemblant à une peigne de Dirac dans la limite du nombre de PRTs,  $N = 8192$

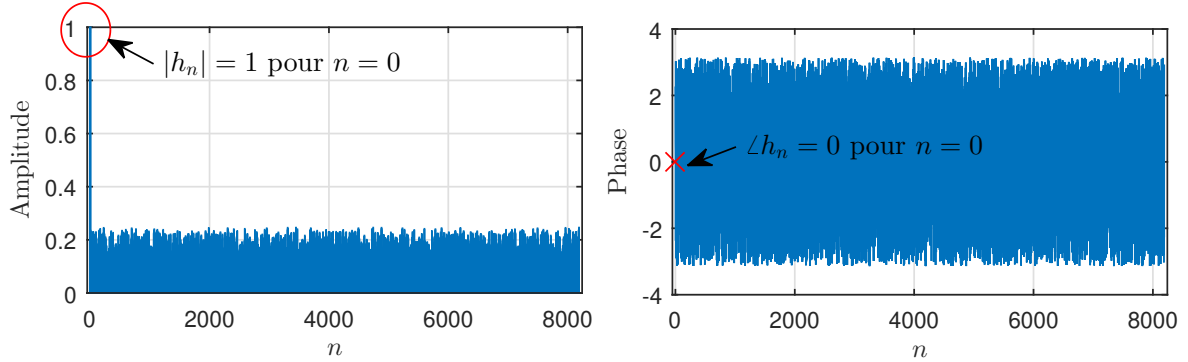


FIGURE 2.4 – Amplitude et phase du noyau temporel, ressemblant à une impulsion de Dirac,  $N = 8192$  sous-porteuses

**Notations et état initial** Soit le signal OFDM temporel d’origine temporel  $\mathbf{x}$ , auquel s’ajoute le signal  $\mathbf{c}$  de réduction du PAPR, pour obtenir le signal à PAPR réduit  $\mathbf{s}$ . À chaque itération, s’ajoute au signal de l’itération précédente  $\mathbf{x}^{(i)}$  un signal  $\mathbf{c}^{(i)}$  de réduction du pic de cette itération. Ainsi :

$$\mathbf{s} = \mathbf{c} + \mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{S} = \mathbf{C} + \mathbf{X} , \quad (2.12)$$

$$\mathbf{c} = \sum_{i=1}^{i_f} \mathbf{c}^{(i)} \Leftrightarrow \mathbf{C} = \sum_{i=1}^{i_f} \mathbf{C}^{(i)} , \quad (2.13)$$

où  $i_f$  est l’indice de la dernière itération. Le signal initial au début de l’algorithme est le signal OFDM d’origine, tandis que le résultat de la dernière itération est le signal à PAPR réduit  $\mathbf{s}$  :

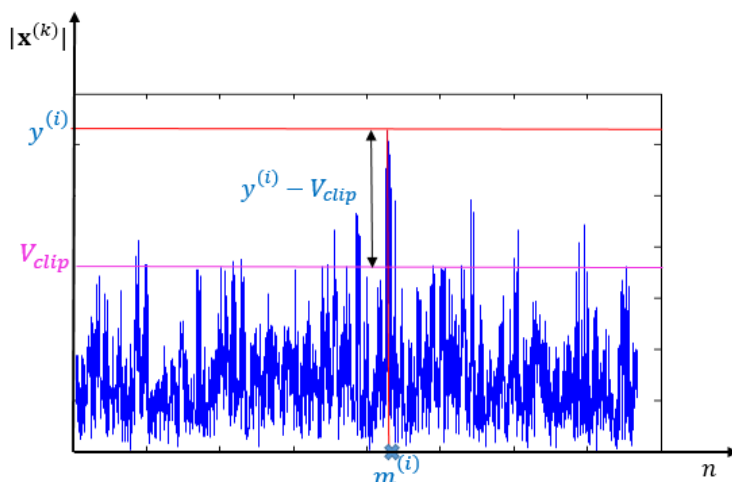
$$\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{x}^{(i_f)} \quad (2.15)$$

Au démarrage, le signal ajouté initial en temporel et en fréquentiel est nul :

$$c_n^{(0)} = 0 ; \forall n \in [0 : N - 1] \Leftrightarrow C_k^{(0)} = 0 ; \forall k \in S_l . \quad (2.16)$$

**Fonctionnement de l’algorithme** À chaque itération, l’algorithme vise à réduire la plus grande valeur du signal et à la ramener à la valeur  $V_{clip}$ . Ainsi, l’algorithme détecte


 FIGURE 2.5 – Présentation du pic détecté à l'itération  $i$  de l'algorithme du gradient

le plus grand pic du signal,  $x_{m^{(i)}}^{(i-1)}$ , d'amplitude  $y^{(i)}$  et de phase  $\phi^{(i)}$  :

$$y^{(i)} = \max(|\mathbf{x}^{(i-1)}|) , \quad (2.17)$$

$$m^{(i)} = \operatorname{argmax}(|\mathbf{x}^{(i-1)}|) , \quad (2.18)$$

$$\phi^{(i)} = \angle x_{m^{(i)}}^{(i-1)} . \quad (2.19)$$

Ces valeurs sont représentées Fig. 2.5. Le noyau  $\mathbf{h}$  est donc décalé de façon à positionner l'échantillon d'indice 0 du noyau, équivalent à l'impulsion de Dirac, à l'indice de ce pic avec une même phase. L'amplitude  $\alpha^{(i)}$  de cette impulsion devrait être idéalement (sans contrôle de puissance) égale à  $\alpha^{(i)} = |y^{(i)} - V_{clip}|$  qui permet de réduire ce pic à la valeur  $V_{clip}$ . Le signal ajouté sera donc le noyau  $\mathbf{h}$ , décalé de  $m^{(i)}$ , d'amplitude  $\alpha^{(i)}$  et de phase  $\phi^{(i)}$ . Ainsi, le signal ajouté à cette itération peut être exprimé par :

$$c_n^{(i)} = -\alpha^{(i)} e^{j\phi^{(i)}} h_{n-m^{(i)}[\bmod N]}; \quad \forall n \in [0 : N - 1] . \quad (2.20)$$

Puisque la réponse fréquentielle du décalage du noyau se traduit par un déphasage de sa réponse en fréquence, la réponse de ce signal ajouté est :

$$C_k^{(i)} = -\alpha^{(i)} \beta \underbrace{e^{j\phi^{(i)}} e^{j\frac{2\pi(k-1)(m^{(i)}-1)}{N}}}_{V_k^{(i)}}; \quad \forall k \in S_l , \quad (2.21)$$

où  $V_k^{(i)}$  est le vecteur unitaire suivant lequel s'ajoute la puissance de la porteuse  $C_k^{(i)}$ . À noter que cette opération de décalage conserve bien la propriété d'orthogonalité entre  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{X}$ , comme décrit au paragraphe (2.2.2.4).

## Contrôle de puissance des PRTs

**Contrôle dans le domaine fréquentiel** Les premières versions de la norme DVB-T2 [8] ne spécifiaient pas de contrôle de puissance dans l'algorithme. Une approche simple consiste à permettre à l'algorithme TR d'exécuter dans tous les cas le nombre maximal

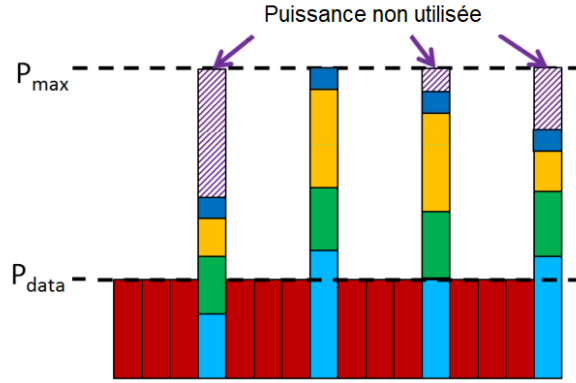


FIGURE 2.6 – Cumul de la puissance des PRTs de l'algorithme du gradient en utilisant le schéma de TTPC

autorisé d'itérations pour chaque symbole OFDM donné, puis d'écrêter l'amplitude des sous-porteuses dont la puissance dépasse la valeur  $P_{max}$  autorisée. Dans ce cas, le contrôle de puissance est effectué symbole par symbole. Cette technique est appelée contrôle de puissance par écrêtage dans le domaine fréquentiel ou *Frequency-domain Clipping Power Control* (FCPC). Cependant, le processus de réduction du PAPR est exécuté dans le domaine temporel, tandis que la contrainte de contrôle de puissance est définie pour chaque sous-porteuse dans le domaine fréquentiel. Cela implique que le FCPC nécessite une FFT supplémentaire à calculer. Le traitement d'un symbole OFDM, y compris la réduction du PAPR, doit être terminé avant la réception du symbole suivant. Ce contrôle de puissance nécessite donc la mise en oeuvre d'une opération FFT supplémentaire pour le contrôle de puissance de chaque symbole OFDM, en plus de l'opération IFFT déjà requise pour la génération des symboles OFDM. Cela augmente donc de façon significative la complexité de l'algorithme du gradient.

**Contrôle dans le domaine temporel** Afin d'éviter le problème de complexité du schéma FCPC, la dernière version de la norme DVB-T2 spécifie un schéma de contrôle de puissance qui suit, itération par itération, l'évolution de la puissance cumulée au niveau de chaque PRT et alloue la puissance afin de ne pas dépasser le seuil. Ce schéma est appelé *Time-domain tracking power control* (TTPC) et est illustré sur la Fig. 2.6. Ce schéma cherche, pour chaque porteuse PRT d'indice  $k$ , la contrainte de puissance imposée telle que l'amplitude de cette porteuse ne dépasse pas  $A_{max}$ . Ainsi, cette contrainte est calculée à partir de la valeur cumulée sur la  $k^{\text{ème}}$  PRT à l'itération précédente,  $R_k^{(i-1)}$ , et du vecteur  $\mathbf{V}^{(i)}$  défini dans (2.21), qui porte la phase sur laquelle l'amplitude de cette porteuse sera ajoutée. Notons que la  $k^{\text{ème}}$  PRT à l'itération  $i$ , cumule les symboles ajoutés aux  $i - 1$  itérations précédentes t.q.,  $R_k^{(i-1)} = \sum_{i=1}^{i-1} C_k^{(i-1)}$ . Ainsi, l'amplitude maximale  $\alpha_{max_k}^{(i)}$  peut être exprimée par :

$$\alpha_{max_k}^{(i)} = \frac{1}{\beta} \left( \sqrt{A_{max}^2 - \mathcal{I}\{V_k^{(i)*} R_k^{(i-1)}\}^2} + \mathcal{R}\{V_k^{(i)*} R_k^{(i-1)}\} \right). \quad (2.22)$$

L'explication géométrique de cette équation est montrée Fig. 2.7. En effet, soient  $\theta = \angle R_k^{(i-1)}$  et  $\varphi = \angle V_k^{(i)}$ , l'expression ci dessus est équivalente à :

$$A_{max}^2 = \left( \beta \alpha_{max_k}^{(i)} - |R_k^{(i-1)}| \cos(\theta - \varphi) \right)^2 + \left( |R_k^{(i-1)}| \sin(\theta - \varphi) \right)^2, \quad (2.23)$$

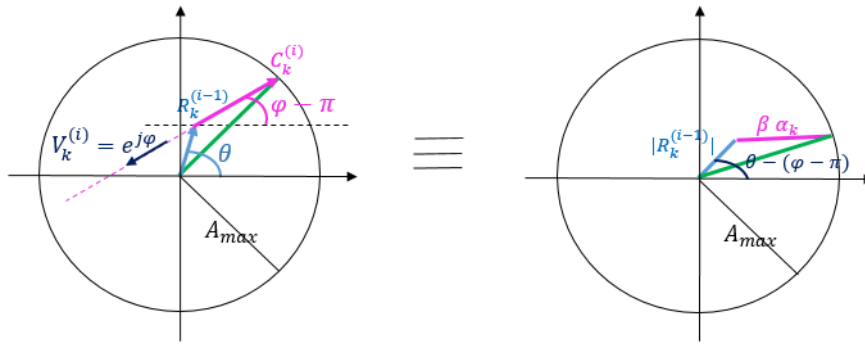


FIGURE 2.7 – Géométrie de l'ajout de symboles complexes en (2.21) aux PRTs à chaque itération de l'algorithme du gradient

ce qui explique son analyse géométrique. L'amplitude  $\alpha^{(i)}$  du noyau temporel, à chaque itération  $i$ , doit être soumise aux  $N_{PRT}$  contraintes  $\{\alpha_{max_k}^{(i)}\}_{\forall k \in S_i}$ , avant de prendre sa valeur idéale  $|y^{(i)} - V_{clip}|$ . Ainsi,  $\alpha^{(i)}$  dans (2.20), avec contrôle de puissance TTPC est exprimée par :

$$\alpha^{(i)} = \max \left( |y^{(i)} - V_{clip}|, \min \left( \{\alpha_{max_k}^{(i)}\}_{\forall k \in S_i} \right) \right). \quad (2.24)$$

La Fig. 2.6 montre l'accumulation de puissance après chaque itération.

**Sortie de l'algorithme** L'algorithme itératif du gradient, sort de la boucle  $i = i_f$ , si l'une des trois conditions suivantes est vérifiée :

- 1- L'indice de l'itération,  $i$ , atteint le nombre alloué maximal d'itérations  $I_{max}$ . Cette valeur  $I_{max}$  est définie dans le standard DVB-T2 afin de limiter le délai de traitement et la complexité calculatoire. De plus, au bout d'un certain nombre d'itérations, le gain de réduction du PAPR avec l'algorithme du gradient devient négligeable.
- 2- L'amplitude  $y^{(i)}$  du pic détecté est inférieure à  $V_{clip}$ . Ceci signifie que l'algorithme a réussi à réduire tous les pics au dessus du seuil  $V_{clip}$  et donc s'arrête, l'objectif fixé ayant été atteint.
- 3- La contrainte de puissance  $\alpha^{(i)} = 0$ , l'algorithme ne peut plus réduire le pic en cours avec la puissance allouée et donc n'a pas d'intérêt à passer au pic suivant. En effet, comme illustré Fig. 2.6, cela veut dire qu'au moins une des PRTs a atteint la limite de puissance autorisée, et le vecteur  $V_k^{(i)}$  impose un ajout de puissance sur cette porteuse.

### 2.2.4.3 Algorithmes ICMP et GICMP

Un des inconvénients de l'algorithme du gradient, illustré Fig. 2.6, est que toute la puissance disponible sur l'ensemble des PRTs n'est pas utilisée, puisque l'algorithme du gradient s'arrête dès qu'une des PRTs atteint la valeur de puissance maximale autorisée. Pour remédier à cela, les auteurs dans [79] proposent des algorithmes basés sur une nouvelle définition du noyau et un nouveau schéma d'allocation de puissance des PRTs, afin de bénéficier de toute la quantité d'énergie disponible pour la réduction du PAPR. Par conséquent, un premier algorithme appelé ICMP a été introduit offrant un bon compromis

performance/complexité. Puis, un deuxième algorithme nommé GICMP est proposé afin de réduire la latence de l'algorithme précédent pour les systèmes OFDM à grand nombre de sous-porteuses. Contrairement à la méthode du gradient qui suit une approche pic par pic, ces nouveaux schémas traitent plusieurs pics à chaque itération.

**Nouvelle définition du noyau** Au lieu d'un noyau de type Dirac comme suggéré par les spécifications DVB-T2, il est possible de générer un noyau en forme de peigne, associé aux PRTs. En déphasant le noyau. L'algorithme essaie de réduire les pics du signal de données. Ce noyau est défini pour chaque itération  $i$ , comme suit :

$$C_k^{(i)} = \begin{cases} A_{max} e^{-j\phi}, & k \in S_l \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}, \quad (2.25)$$

où  $\phi$  est la phase du noyau. Dans le domaine temporel, le nouveau noyau  $\mathbf{c}^{(i)}$  se calcule facilement comme suit :

$$c_n^{(i)} = \frac{A_{max}}{N} e^{-j\phi} e^{-j\frac{S_l(i)n}{N}}, \quad 0 \leq n \leq N, \quad (2.26)$$

où  $S_l(i)$  est le  $i^{\text{ème}}$  élément du sous-ensemble de PRTs,  $S_l$ . Par conséquent,  $A_{max}$  est directement calculé comme l'amplitude des PRTs comme dans (2.25) afin de satisfaire la contrainte de puissance. Une caractéristique intéressante d'un tel noyau est qu'il a une amplitude constante et que le déphasage entre deux échantillons consécutifs est constant qui est égal à  $e^{j2\pi S_l(i)/N}$ . Grâce à cette dernière propriété, la génération en temps réel du nouveau noyau ne nécessite qu'une simple opération de déphasage, alors qu'une génération du noyau en temps réel est requise en utilisant l'algorithme du gradient du standard DVB-T2. Qui plus est, le contrôle de puissance est assuré implicitement via  $A_{max}$ .

**Évaluation de la phase optimale du noyau** L'algorithme du gradient considère la phase du pic détecté le plus élevé  $\phi$ , afin d'ajuster la phase du noyau. Par contre, les méthodes ICMP et GICMP identifient une nouvelle phase optimale du noyau, qui prend en considération plusieurs pics réduits en même temps. En considérant que  $S$  pics sont réduits dans une même itération, cette phase optimale peut être exprimée à l'itération  $i$  par :

$$\phi^{(i)} = \frac{3\pi}{2} - \text{atan2}(B^{(i)}, A^{(i)}), \quad (2.27)$$

où

$$A^{(i)} = \sum_{s \in H^{(i)}} \mathcal{R}\{d_s^{(i)}\} \cdot \mathcal{R}\{c_s^{(i)}\} + \mathcal{I}\{d_s^{(i)}\} \cdot \mathcal{I}\{c_s^{(i)}\}, \quad (2.28)$$

$$B^{(i)} = \sum_{s \in H^{(i)}} \mathcal{I}\{d_s^{(i)}\} \cdot \mathcal{R}\{c_s^{(i)}\} + \mathcal{I}\{d_s^{(i)}\} \cdot \mathcal{I}\{c_s^{(i)}\}. \quad (2.29)$$

$H^{(i)}$  représente l'ensemble des indices des  $S$  pics les plus élevés détectés.  $d_s^{(i)}$  et  $c_s^{(i)}$  représentent les échantillons de données et ceux du signal ajouté respectivement sur ces positions.



**Algorithme ICMP** D'après ce qui précède, l'algorithme ICMP procède comme suit, à chaque itération. Premièrement, pour chaque PRT, les  $S$  pics les plus élevés sont identifiés. Deuxièmement, le noyau est calculé dans le domaine fréquentiel selon (2.25) et sa réponse dans le domaine temporel est obtenue selon (2.26). Ensuite, la phase optimale est calculée selon (2.27). Il est à noter que l'algorithme ICMP assure un contrôle de puissance implicite dans le domaine fréquentiel.

Avec l'algorithme ICMP, le nombre d'itérations est égal au nombre de PRTs. Ainsi, pour un faible nombre de sous-porteuses, tels que  $2K$ ,  $4K$  et  $8K$ , la latence introduite par le nombre d'itérations est raisonnable et l'algorithme ICMP peut bien être utilisée.

**Algorithme GICMP** Pour des modes de fonctionnement plus élevés, tels que les modes  $16K$  et  $32K$ , où 144 et 288 PRTs sont respectivement utilisées dans les standards DVB-T2, le nombre d'itérations nécessaires pour appliquer l'algorithme ICMP devient très grand et introduit des latences importantes. Pour cela, l'algorithme GICMP propose de découper l'ensemble de PRTs en  $G$  sous-groupes. Ensuite, un pic est détecté pour chacun de ces groupes de PRTs, à la place de un pic détecté par PRT en ICMP. Ainsi, l'algorithme GICMP est résumé comme suit. Premièrement, les  $S$  pics d'amplitude les plus élevés sont recherchés pour chaque groupe de PRTs. Ensuite, suivant le même principe qu'avec l'algorithme ICMP, le calcul du noyau et de la phase sont effectués à l'aide de (2.26) et (2.27), pour chaque PRT de chaque groupe. Bien que le calcul de phases soit basé sur un traitement en parallèle, les phases des PRTs d'un même groupe sont indépendantes les unes des autres et le nombre d'opérations nécessaires pour calculer les phases reste le même que dans le cas de l'algorithme ICMP. La contrepartie du traitement parallèle est l'augmentation de la complexité du calcul à chaque itération. Ainsi, un compromis entre la latence et la complexité du calcul doit être étudié afin de choisir  $G$ .

Notons que, comme pour l'algorithme ICMP, la puissance allouée avec l'algorithme GICMP est égale à  $P_{max}$  pour chaque PRT. La valeur de la phase appliquée à chaque PRT est calculée selon (2.27). L'intérêt principal d'effectuer une recherche par groupe est de réduire la latence qui devient alors proportionnelle au nombre de groupes  $G$ .

## 2.3 État de l'art sur l'étude théorique

Au cours des dernières années, les chercheurs se sont intéressés à l'évaluation des performances des différentes méthodes de réduction du PAPR (voir [45–49] et les références qui y figurent). Cependant, la majorité de ces études ont été menées à partir de simulations et n'ont pas tenu compte de l'évaluation analytique des performances.

Dans cette section, un état de l'art des études qui considèrent l'aspect théorique des métriques de performances des techniques de réduction du PAPR est mené. Comme décrit au Chapitre 1, les performances de ces techniques de réduction sont généralement évaluées suivant deux axes essentiels. Le premier est l'évaluation des distorsions du signal causées par l'AP avec et sans l'application de ces techniques par des métriques comme l'EVM. Le second axe est l'évaluation de la CCDF du PAPR du signal avant et après réduction du PAPR, afin de déterminer l'efficacité de la technique à réduire le PAPR du signal. L'état de l'art sur ces deux axes est présenté dans cette section.

De plus, d'autres études théoriques diverses sont citées. Par exemple, un troisième axe étudié par un groupe d'auteurs, sur la technique TR, concerne la solvabilité théorique de

son problème d'optimisation, comme détaillé dans ce qui suit.

### 2.3.1 Évaluation de l'EVM pour les différentes distorsions du signal

Comme expliqué au premier chapitre, l'évaluation des distorsions dans la bande, notamment par la métrique d'EVM, est une des études les plus essentielles lors de l'évaluation d'un système OFDM avec réduction du PAPR. En ce qui concerne les dérivations analytiques de l'EVM, quelques contributions se trouvent dans la littérature comme suit.

Dans [83–86], les auteurs calculent indépendamment l'EVM dû au *clipping* en fonction du niveau du *clipping*. Plus précisément, [86] étudie la technique *clipping* pour les systèmes WCDMA en voie descendante (*downlink*). Le calcul de l'EVM proposé dans ce contexte est équivalent au cas de l'OFDM considéré dans les autres papiers. [83] propose en outre un schéma de *clipping et filtering* adaptatif dans le but de réduire l'EVM. Dans [84], les calculs reposent sur la simplification du modèle de l'AP comme un simple écrêtage le rendant imprécis pour toute mise en œuvre pratique. Ainsi, ces études considèrent les distorsions causées par la technique *clipping* elle-même sans considérer l'effet de l'AP, soit en considérant des simplifications non pratiques de cet AP.

Les auteurs dans [87–89] considèrent un calcul du rapport signal sur distorsion ou *Signal to Distorsion Ratio*(SDR), qui est une métrique directement liée à l'EVM puisqu'elle mesure le taux de distorsions. [87] évalue le SDR lors de l'application de la méthode du *clipping* en considérant le sur-échantillonnage (*oversampling*) et la limitation de la bande du signal (*band-limiting*). En outre, les auteurs dans [88] considèrent ce calcul du SDR pour les distorsions causées par la technique *clipping* en proposant d'y joindre les techniques SLM afin de réduire les distorsions. De même, les auteurs dans [89] calculent le SDR pour la technique *peak cancellation* qu'ils proposent dans [90]. Cette technique consiste à ajouter une version décalée du signal afin de réduire le PAPR, par contre sans considération de l'orthogonalité des porteuses au contraire de la technique TR. De même, toutes ces études ne considèrent aucun effet des distorsions causées par l'AP et les distorsions mesurées sont celles causées par les techniques de réduction du PAPR elles-mêmes.

[85, 91] considèrent l'EVM comme une variable aléatoire gaussienne. Ils évaluent l'espérance du bruit de phase sur l'EVM et les distorsions causées par l'AP, sans réduction du PAPR, et ce, en considérant un modèle polynomial de l'AP. Dans [92], ce dernier résultat a été aussi dérivé indépendamment, pour l'évaluation de l'EVM sans réduction du PAPR.

Dans [93–95], les auteurs étudient la linéarité des AP dans le contexte OFDM, en considérant la métrique d'EVM. Par conséquent, une limite supérieure de l'EVM du signal amplifié en utilisant le modèle de Rapp sans mémoire est dérivée. Les dérivations sont faites en tenant compte de l'utilisation d'une technique de réduction du PAPR suivie d'une technique de prédistorsion. Les techniques de réduction considérées sont les techniques *clipping* et SLM. Ensuite, une analyse du compromis efficacité-linéarité de l'AP sont proposées sur la base de ces expressions dérivées de l'EVM. Il est intéressant de mentionner que ces contributions sont des travaux pionniers qui ont proposé d'explorer l'analyse théorique de la linéarité de l'AP lorsque la réduction du PAPR et des techniques de linéarisation sont utilisées. Cependant, malgré l'intérêt que présentent ces études,

l'expression d'EVM proposée n'est qu'une limite supérieure. Ainsi, la valeur théorique dans certains cas est éloignée de la valeur d'EVM réelle. Cela entraîne des problèmes lorsque le compromis optimal entre la linéarité et l'efficacité de l'AP est recherché. Par conséquent, cette expression d'EVM peut être inefficace dans certains scénarios pratiques.

Tous ces résultats ont mis en lumière l'importance de l'évaluation analytique des distorsions. Cependant, ils sont encore loin de l'évaluation réelle de la distorsion totale du signal en tenant compte du système complet, en considérant la non-linéarité de l'AP ainsi que les techniques de réduction du PAPR.

**Évaluation analytique de l'EVM du signal amplifié en considérant la technique *clipping*** Dans ce cadre d'évaluation analytique de l'EVM, un travail précédent, mené dans le cadre de la thèse de A. Cheaito [19], a permis d'évaluer l'EVM théoriquement en considérant la technique *clipping* pour la réduction du PAPR. Ces travaux publiés dans [96–100] ont permis de dériver l'EVM analytique du signal amplifié en fonction de l'IBO ainsi que du niveau de *clipping* et des caractéristiques de l'AP. Différents modèles d'AP sont considérés, le modèle de Rapp, le modèle polynomial sans mémoire ainsi que le modèle polynomial avec mémoire. Ces modèles reflètent les effets réels de l'AP dans les cas pratiques. De plus, ces études montrent les divergences significatives des travaux dans [84] par rapport aux AP réels, qui ne pouvaient pas être négligées. Ce travail est le premier à donner des expressions précises de l'EVM et qui prennent en compte une vue globale du système et des modélisations réalistes des AP. Par contre, elles sont limitées à la simple technique *clipping*.

### 2.3.2 Évaluation de la CCDF du PAPR

Le second axe d'évaluation des performances des techniques de réduction du PAPR, consiste à évaluer la fonction de distribution cumulative complémentaire du PAPR (CCDF du PAPR) du signal OFDM, avant et après l'application de la réduction du PAPR, afin d'évaluer l'efficacité de ces techniques à réduire le PAPR. Pour le signal OFDM d'origine, les dérivations théoriques faites à ce niveau sont comme suit.

Considérant un grand nombre de sous-porteuses  $N$ , les auteurs dans [101, 102] fournissent une expression simple de la CCDF du PAPR pour un facteur de sur-échantillonnage égal à 1, qui présente l'une des dérivations les plus populaires. Ensuite, les auteurs dans [101–106] étendent ces travaux, et fournissent une approximation de la CCDF du PAPR valable pour différents facteurs de sur-échantillonnage et pour différents schémas d'allocation de puissance aux sous-porteuses. Ces travaux sont basés sur la théorie des valeurs extrêmes qui caractérise les liens entre des pics des signaux échantillonnés et continus. Cependant, ces expressions suggérées ne sont valides que pour un nombre élevé de sous-porteuses  $N \geq 128$ . Pour cela, une étude récente [107], prolonge les travaux précédentes pour un faible nombre de sous-porteuses, utile dans le cas des systèmes Internet des objets à bande étroite (NB IoT), en se basant sur la distribution gaussienne de  $|x_n|$  et la distribution de chi-deux de  $|x_n|^2$  (théorème des valeurs extrêmes).

En outre, les auteurs de [108] ont approximé la distribution du PAPR pour les signaux *carrier aggregated* OFDM utilisant la distribution des pics. Dans [109], une limite supérieure pour le PAPR du signal final est calculée en tenant compte des filtres de mise en forme du bruit (*noise-shaping filters*) lors de l'implémentation électronique de ces

systèmes.

Toutes ces expressions dérivent la CCDF du PAPR du signal OFDM sans application de techniques de réduction du PAPR. Elles pourront être utilisées pour évaluer la CCDF du PAPR après application des schémas de réduction. Par contre, rares sont les auteurs qui s'intéressent à cette évaluation après réduction du PAPR. En effet, les courbes du PAPR après application de ces techniques sont d'habitude données dès la proposition de ces schémas [13, 14, 110], où les auteurs essayent de montrer les performances des techniques proposées pour réduire le PAPR. Ainsi, un comparatif des techniques de réduction du PAPR, au niveau des performances de réduction du PAPR, peut être mené en simple comparaison de ces courbes. Par contre, comme expliqué dans le Chapitre 1, l'étude de la CCDF du PAPR ne fournit pas d'éléments d'analyse globale de l'effet de la technique de réduction du PAPR en prenant en compte l'effet de l'AP et les éventuelles distorsions au niveau de la technique. De plus, la mesure de la CCDF du PAPR ne s'appuie que sur la mesure du pic le plus élevé du signal. En revanche, la mesure de l'EVM intègre toutes les distorsions subies par le signal.

### 2.3.3 Autres études théoriques

#### 2.3.3.1 Étude théorique de la solvabilité du problème TR

Dans [111–117], un groupe d'auteurs étudie la technique TR. Leurs études concernent la solvabilité théorique de son problème d'optimisation. En effet, comme la technique TR consiste à résoudre un problème d'optimisation, ces auteurs se focalisent sur la possibilité de trouver une solution à ce problème en fonction de la forme des symboles OFDM. On note que ces études ne concernent pas l'évaluation analytique des métriques des performances et concernent juste l'étude théorique du problème d'optimisation de la technique TR en fonction des formes de symboles, et donc, ils n'intéressent pas notre cadre d'étude.

#### 2.3.3.2 Évaluation de l'efficacité énergétique des AP

D'autres études cherchent à modéliser l'efficacité énergétique comme en [118]. Dans le but d'étudier un schéma combiné d'écrêtage et du SLM, les auteurs de [118] ont évalué la fonction de densité de probabilité (PDF) simulée du signal du domaine temporel après application de l'écrêtage, du SLM, et des techniques combinées respectivement, afin de visualiser les distorsions causées par les méthodes de réduction du PAPR. En outre, ils ont proposé un modèle empirique de l'expression de la puissance de distorsion moyenne due à l'écrêtage en utilisant les techniques combinées, basées sur la puissance de distorsion calculée dans [83]. Par contre, ces études présentent quelques modèles simples qui prévoient et modélisent l'EE par l'étude des différentes sorties des simulations des systèmes. Ainsi, ces expressions ne sont pas dérivées analytiquement en fonction des paramètres du système.

### 2.3.4 Conclusion sur l'état de l'art théorique

Cette section a permis de décrire les éléments de l'état de l'art théorique des études des signaux OFDM amplifiés par des AP non-linéaires, en considérant des techniques de

réduction du PAPR. À partir de cet état de l'art, on conclut que, malgré le grand nombre d'études menées sur les techniques de réduction du PAPR, le nombre d'études théoriques est très limité. En particulier, en ce qui concerne l'EVM qui est considérée comme une des métriques les plus essentielles lors de l'étude de l'effet des AP non-linéaires, et en présence de techniques de réduction du PAPR, rares sont les études analytiques qui considèrent l'effet réaliste de ces AP, et qui prennent en compte une vue globale du système. De plus, le nombre de ces études est très limité et presque inexistant lors de l'application de techniques avancées de réduction du PAPR comme les technique TR, SLM et ACE.

Ceci montre donc l'insuffisance des études théoriques menées dans ce domaine, d'où la nécessité de développer ces aspects pour une optimisation précise et adéquate des systèmes OFDM en présence d'AP non-linéaires.

## 2.4 But de cette thèse : Évaluation analytique de l'EVM TR pour différents algorithmes

La technique TR est une des techniques les plus prometteuses pour la réduction du PAPR. De nombreuses études dans la littérature cherchent à développer cette technique et à évaluer ses performances à différents niveaux. Néanmoins, d'après l'état de l'art mené sur les études théoriques, il s'avère que la littérature manque de résultats mathématiques et théoriques de l'EVM pour les systèmes OFDM avec la mise en oeuvre de techniques avancées de réduction du PAPR. À notre connaissance, aucune recherche n'a encore été menée sur l'évaluation analytique des distorsions pour la plupart des techniques de réduction du PAPR. Plus précisément, en ce qui concerne la technique TR, malgré le grand nombre d'algorithmes de la technique TR et d'études qui évaluent les performances empiriques de ces algorithmes, l'évaluation analytique de ces algorithmes est presque inexistante dans la littérature.

Dans cette étude, nous mettons l'accent sur la dérivation de mesures de performances théoriques des distorsions dans la bande qui sont nécessaires pour une optimisation rigoureuse lors de la conception du système.

Dans cette thèse, nous visons à évaluer analytiquement l'EVM du signal OFDM amplifié, lors de l'application de réduction du PAPR de type TR.

Ainsi, il sera possible analytiquement pour un système OFDM donné et des contraintes d'EVM données, de déterminer le point de fonctionnement optimal de l'amplificateur, et ce, avec ou sans mise en oeuvre de réduction du PAPR.

Il est important de noter ici que de nombreuses études sur le problème de réduction du PAPR sont basées sur des modèles d'AP sans mémoire. Cependant, rappelons que de nombreux AP tels que ceux qui équipent les stations de base présentent de forts effets de mémoire. Ces effets deviennent encore plus importants pour les systèmes à porteuses multiples large bande tels que l'OFDM lorsque la bande passante augmente. Par conséquent, une approche plus complète pour révéler le comportement exact des AP dans une chaîne de communication consiste à utiliser des modèles à mémoire. Pour cela, nous considérons un modèle polynomial à mémoire de l'AP.

## 2.5 Conclusion

Ce chapitre donne les éléments de la problématique que traite cette thèse. En premier lieu, l'intérêt de la technique TR est montré, en la comparant aux autres techniques et en citant son utilisation dans les standards comme DVB-T2 et ATSC 3.0. Ensuite, cette technique est détaillée ainsi que ses caractéristiques telles que l'orthogonalité entre le signal ajouté et le signal OFDM d'origine. Un état de l'art des algorithmes qui calculent le signal ajouté est mené, montrant les différents compromis complexité de l'algorithme-efficacité en réduction du PAPR. Les algorithmes les plus essentiels sont ensuite détaillés : l'algorithme optimal QCQP qui fournit une borne supérieure des performances de la technique TR à réduire le PAPR, l'algorithme du gradient adopté par les standards, ainsi que l'algorithme GICMP qui est un algorithme récent et prometteur qui donne un bon compromis efficacité-complexité.

Dans une seconde étape, l'état de l'art sur l'étude théorique des métriques qui évaluent les systèmes OFDM à amplification non-linéaire est mené. En particulier en ce qui concerne l'EVM qui est une des métriques les plus essentielles dans l'évaluation de tels systèmes. Cet état de l'art montre l'insuffisance des études théoriques dans l'état de l'art et la nécessité de développer de tels aspects lors de l'étude des techniques de réduction du PAPR des systèmes OFDM.

Dans ce cadre, les problématiques conduisant à ce travail sont mises en évidence afin de détailler l'objectif de cette thèse. Cette thèse vise à évaluer analytiquement l'EVM en considérant la technique avancée de la technique TR pour la réduction du PAPR, et ce, en considérant différents algorithmes de cette technique.



# Chapitre 3

## Distribution statistique du signal OFDM avec *Tone Reservation* et expression générale de l'EVM

### 3.1 Introduction

Comme expliqué dans les chapitres précédents, l'EVM est une métrique essentielle pour mesurer l'impact des distorsions causées par l'AP sur le signal émis. Rappelons que l'EVM est une mesure du taux de déviation des points de constellation du signal réellement généré par rapport au signal théorique idéal sans distorsion. Le but principal de cette thèse est l'obtention d'une expression analytique de l'EVM du signal OFDM amplifié après application d'une technique de réduction de PAPR de type *Tone Reservation* (TR). C'est dans ce chapitre que nous mettons en place la méthodologie nécessaire à cet objectif, et menons les calculs fondamentaux permettant d'aboutir à une telle expression. Nous proposons une approche générique que l'on appliquera tout d'abord au calcul de l'EVM du signal OFDM amplifié dans les deux cas de référence de non réduction du PAPR d'une part, et d'application de la technique de *clipping* d'autre part. En effet, selon notre méthodologie, l'expression de l'EVM proposée est essentiellement basée sur l'évaluation de la fonction de densité de probabilité (PDF) de l'amplitude du signal OFDM, cette dernière étant dépendante de la technique TR utilisée. En prolongement des deux cas d'école mentionnés à l'instant, la deuxième partie de ce chapitre s'intéressera donc à l'analyse de l'allure générale de cette fonction de densité de probabilité, dans le cas général de l'application d'une technique TR quelconque. Ainsi, dans cette deuxième partie, nous introduirons les bases théoriques qui pourront mener à des calculs simplifiées de cette fonction de densité de probabilité.

### 3.2 Modèle du système

En se basant sur les différentes notations décrites dans les chapitres précédents, cette section récapitule les éléments essentiels du modèle du système considéré pour la suite de cette thèse.



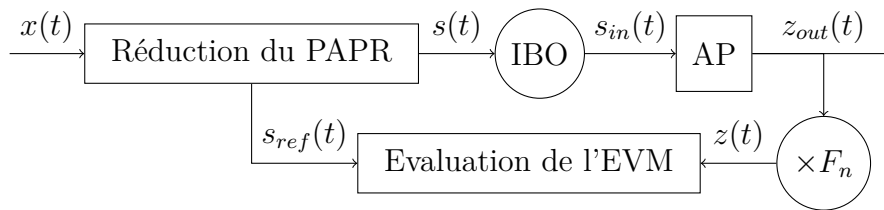


FIGURE 3.1 – Schéma de la chaîne de transmission OFDM

### 3.2.1 Modèle de la chaîne de transmission OFDM

Dans le domaine fréquentiel, le symbole OFDM d'origine est représenté par le vecteur  $\mathbf{X}$  de taille  $N$  correspondant aux  $N$  symboles de modulation associés aux  $N$  sous-porteuses. Conformément aux spécifications du standard DVB-T2, la valeur de  $N$  varie selon le mode de mise en oeuvre. Sans perte de généralité, nous utiliserons dans nos simulations les modes  $1K$  à  $8K$ , dont les paramètres sont détaillés dans le Tableau 3.1. Les  $N$  symboles sont divisés en  $N_{active}$  sous-porteuses actives et en sous-porteuses de garde (voir 1.2.5). Les sous-porteuses actives peuvent être des sous-porteuses de données, au nombre de  $N_{data}$ , ou des sous-porteuses réservées PRTs, au nombre de  $N_{PRT}$ . La trame OFDM décrite dans le standard DVB-T2 [8] est considérée pour les emplacements de ces PRTs.

Dans le domaine temporel, la chaîne de transmission OFDM en bande de base est considérée dans la suite de ce travail comme schématisée Fig. 3.1. Dans le domaine temporel, le signal OFDM d'origine est soumis à la réduction du PAPR puis est amplifié par l'AP selon un point de fonctionnement géré par l'IBO (cf. Chapitre 1). Un facteur de normalisation  $F_n$  est considéré afin de garantir des niveaux d'énergie égaux entre le signal de référence et le signal de sortie lors de l'évaluation de l'EVM. La fréquence nominale d'échantillonnage des signaux, de période  $T_s$ , est considérée. Soient, dans le domaine temporel, les signaux  $x(t)$ ,  $s(t)$ ,  $s_{in}(t)$ ,  $z_{out}(t) \in \mathbb{C}^N$  représentant respectivement le signal OFDM d'origine, le signal après réduction du PAPR, le signal à l'entrée de l'AP après application de l'IBO et le signal amplifié en sortie de l'AP. Notons par  $P_x$ ,  $P_s$ ,  $P_{in}$  et  $P_{out}$  leurs puissances moyennes respectives.  $s_{ref}(t)$  et  $z(t)$  représentent respectivement le signal de référence, de puissance moyenne  $P_{ref}$ , et le signal de sortie, de puissance moyenne  $P_z$ , tel que le signal  $z(t)$  a la même puissance que le signal de référence  $P_z = P_{ref}$ .

Notre objectif est de dériver l'expression de l'EVM entre  $z(t)$  et  $s_{ref}(t)$ , en fonction de la technique de PAPR utilisée.

Tableau 3.1 – Nombre de sous-porteuses OFDM, sous-porteuses actives, et sous-porteuses PRTs pour chaque le mode de fonctionnement, selon la définition de la trame DVB-T2 [8]

mode	$N$	$N_{active}$	$N_{data}$	$N_{PRT}$
$1K$	1024	853	843	10
$2K$	2048	1705	1687	18
$4K$	4096	3409	3373	36
$8K$	8192	6817	6745	72

### 3.2.1.1 Facteur de réglage de l'IBO, $F_{IBO}$

Comme défini au Chapitre 1, l'IBO de l'AP représente le rapport entre son point de 1 dB de compression et la puissance moyenne à l'entrée de l'AP :

$$\rho_{IBO} = \frac{P_{1dB}}{P_{in}} . \quad (3.1)$$

Ainsi, afin de garantir un IBO prédéfini  $\rho_{IBO}$ , la puissance moyenne à l'entrée de l'AP doit être égale à  $\frac{P_{1dB}}{\rho_{IBO}}$ . Ainsi, le signal  $s_{in}(t)$  est obtenu en multipliant le signal  $s(t)$ , de puissance moyenne  $P_s$ , par un facteur  $F_{IBO}$  tel que :

$$F_{IBO} = \left( \frac{P_{in}}{P_s} \right)^{1/2} = \left( \frac{P_{1dB}}{\rho_{IBO} P_s} \right)^{1/2} . \quad (3.2)$$

### 3.2.1.2 Facteur de normalisation $F_n$

Comme décrit précédemment, le signal  $z_{out}(t)$  doit être normalisé au même niveau de puissance que le signal  $s_{ref}(t)$  afin de mesurer correctement l'EVM entre ces deux signaux. Ainsi, on utilise le facteur de normalisation  $F_n$  suivant, à appliquer sur le signal de sortie de l'AP,  $z_{out}(t)$ , de puissance  $P_{out}$ , pour obtenir un signal  $z(t)$  normalisé,

$$F_n = \left( \frac{P_{ref}}{P_{out}} \right)^{1/2} . \quad (3.3)$$

## 3.2.2 Réduction du PAPR

Dans la suite, les stratégies de réduction du PAPR considérées seront la technique du *clipping* d'une part, et les techniques de type TR d'autre part. En référence, le cas simple de la transmission sans réduction du PAPR sera aussi considéré, où  $s(t) = x(t)$ . À noter que ce dernier cas est équivalent au cas de l'application de la technique TR avec un signal ajouté nul et au cas de l'application de la technique *clipping* avec un niveau de seuil d'écrêtage infini. Les notations de ces techniques, définies dans les chapitres précédents, sont rappelées ci-dessous.

### 3.2.2.1 *Clipping*

Dans le cas de l'application du *clipping*, l'amplitude du signal  $x(t)$  est limitée au niveau  $A_{clip}$ . Le signal après écrêtage est donc exprimé par :

$$s^{clip}(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } |x(t)| \leq A_{clip} , \\ A_{clip} e^{j\angle x(t)} & \text{si } |x(t)| > A_{clip} . \end{cases} \quad (3.4)$$

Le taux de *clipping* est ainsi défini par  $\Lambda = \frac{A_{clip}^2}{P_x}$ . Par la suite, les différents résultats des simulations seront donnés en fonction de ce paramètre  $\Lambda$  qui définit le niveau de saturation imposé par la méthode *clipping*. Il faut noter que dans le cas sans réduction du PAPR ainsi que dans le cas de l'application du *clipping*, les  $N$  sous-porteuses constituant le signal OFDM  $\mathbf{X}$  sont considérées comme des sous-porteuses actives transmettant des données.

La PDF de l'amplitude du signal OFDM  $s(t)$  après application du *clipping* est donnée par le Lemme 1.2. Il est alors possible d'exprimer la puissance de ce signal  $s(t)$  en fonction de la puissance moyenne  $P_x$  du signal OFDM d'origine avant *clipping* comme suit, [19] :

$$P_s = P_x(1 - e^{-\Lambda}) . \quad (3.5)$$

### 3.2.2.2 Tone Reservation

Comme détaillé dans le Chapitre 2, la technique TR consiste à ajouter un signal  $c(t)$  de réduction du PAPR au signal de données d'origine  $x(t)$  de façon à réduire son PAPR. Ainsi, on a :

$$s(t) = x(t) + c(t) . \quad (3.6)$$

Le signal  $c(t)$  est la réponse temporelle du vecteur  $\mathbf{C}$  transmis sur  $N_{PRT}$  sous-porteuses réservées pour la réduction du PAPR. Les signaux  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{C}$  sont orthogonaux puisqu'ils appartiennent à des sous-ensembles disjoints en fréquence. L'ensemble  $S_l$ , de taille  $N_{PRT}$ , définit les emplacements de ces PRTs. Ces emplacements sont considérés, sans restreindre le cas général, conformément aux spécifications du standard DVB-T2, où ils composent 1% du total des sous-porteuses. Un boost de puissance  $\Delta P_b$  définit la contrainte de puissance de ces PRTs par rapport à la puissance des sous-porteuses de données. Dans les standards DVB-T2 et ATSC 3.0,  $\Delta P_b$  est fixée à 10 dB. Au-delà de cette valeur de référence, nous considérerons dans notre étude d'autres valeurs de contraintes de puissance, ainsi que le cas sans contrainte, c'est-à-dire autorisant  $\Delta P_b$  à prendre une valeur arbitraire selon la convergence des algorithmes de réduction de PAPR.

### 3.2.3 Modèle de l'AP

Afin de fournir une modélisation générique, réaliste et simplifiée de l'AP, notre travail s'appuie sur le modèle d'AP polynomial à mémoire, décrit dans la section 1.4.2.2. Puisque cette thèse présente des travaux analytiques qui requièrent une modélisation adéquate des AP dans les différentes zones de l'AP, notamment la zone de saturation, l'extension du modèle à la zone de saturation par le prolongement proposé dans le Chapitre 1 est considérée. Cet amplificateur a un ordre de non-linéarité  $L$ , un ordre de mémoire  $Q$ , ainsi que des coefficients complexes  $b_{q,2l+1}$ . Ainsi, l'expression de la sortie de l'AP en fonction de son entrée à l'instant  $t_0$  et aux  $Q$  échantillons de temps précédents est donnée par :

$$\mathbf{H}_{\text{AP}}(\mathbf{r}_{\text{in}}, \boldsymbol{\theta}_{\text{in}}) = \sum_{q=0}^Q \mathbf{H}_q(r_{\text{in}_q}) e^{j\theta_{\text{in}_q}} , \quad (3.7)$$

$$\text{avec, } \mathbf{H}_q(r_q) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{L-1} b_{q,2l+1} r_q^{2l+1} & r_q \leq A_{\text{in},\text{sat}_q} \\ A_{\text{out},\text{sat}_q} & r_q > A_{\text{in},\text{sat}_q} \end{cases} , \forall q \in \{0, \dots, Q\} . \quad (3.8)$$

Rappelons que  $\mathbf{H}_q(r_q)$  représente la réponse AM/AM de la  $q^{\text{ème}}$  composante mémoire. Le modèle de chaque composante de mémoire d'ordre  $q$  de l'AP,  $\mathbf{H}_q(r_q)$ , est donc étendu par un prolongement par continuité sur chaque composante à partir de son point de divergence  $(A_{\text{in},\text{sat}_q}; A_{\text{out},\text{sat}_q})$ .

Le modèle de l'AP est considéré dans sa forme générale lors de la dérivation des expressions d'EVM. Lors des simulations et de l'application de ces expressions à des

valeurs numériques, deux exemples d'AP seront considérés en référence. Le premier - Modèle I - est l'AP à mémoire dont les coefficients  $b_{q,2l+1}$  sont extraits de [119]. Ces coefficients, donnés ci-dessous, correspondent à un modèle réaliste de classe AB :

$$\begin{aligned} b_{01} &= 1.0513 + 0.0904j & b_{03} &= -0.0542 - 0.29j & b_{05} &= -0.9657 - 0.7028j \\ b_{11} &= -0.068 - 0.0023j & b_{13} &= 0.2234 + 0.2317j & b_{15} &= -0.2451 - 0.3735j \\ b_{21} &= 0.0289 - 0.0054j & b_{23} &= -0.0621 + 0.0932j & b_{25} &= 0.1229 + 0.1508j . \end{aligned} \quad (3.9)$$

Le second - Modèle II - est le cas particulier sans mémoire ( $Q = 0$ ) pour lequel les coefficients  $b_{0,2l+1}$  sont dérivés par identification de la caractéristique AM/AM de l'AP de Rapp avec un facteur de raideur  $b = 6$  entre la région linéaire à la région de saturation [120]. Un coefficient polynomial d'ordre élevé ( $L = 6$ ) est considéré afin d'obtenir une précision d'identification suffisante. Les paramètres de l'AP du Modèle II de référence sont les suivants :

$$\begin{aligned} b_1 &= 0.9993, \quad b_3 = 0.0189, \quad b_5 = -0.1449, \quad b_7 = 0.4402, \quad b_9 = -0.5506, \quad b_{11} = 0.1805, \\ P_{1dB} &= 1, \quad A_{in,sat} = 1.1, \quad A_{out,sat} = 0.9657 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Notons que les coefficients d'AP sont choisis de manière à avoir un gain d'amplificateur donné  $G$ . Cependant, à cause des non-linéarités de l'AP,  $P_{out}$  reste toujours inférieur à  $GP_{in}$ . De ce fait, la puissance réelle de sortie  $P_{out}$  est recalculée systématiquement à partir du modèle de l'AP. Rappelons que lorsque le point de fonctionnement de l'AP est s'approche de la zone linéaire, alors la valeur de  $P_{out}$  tend vers  $GP_{in}$ .

### 3.2.4 Expression de l'EVM

L'expression de l'EVM est définie en 1.5.4.2 par l'équation (1.29) comme la puissance de l'écart entre le signal fréquentiel d'origine et le signal fréquentiel après amplification. Cependant, d'après le théorème de Parseval, les signaux exprimés dans le domaine temporel et fréquentiel ont les mêmes énergies. Sur cette base, les calculs analytiques de l'EVM dans la suite de ce travail seront effectués dans le domaine temporel car dans ce cas l'approche de calcul est plus simple. Ainsi, l'EVM peut être exprimé par :

$$EVM = \sqrt{\frac{\mathbb{E}(|z(t) - s_{ref}(t)|^2)}{\mathbb{E}(|s_{ref}(t)|^2)}} \quad (3.11)$$

### 3.2.5 Choix du signal de référence pour le calcul de l'EVM

L'évaluation de l'EVM permet de prendre compte des distorsions apportées sur le signal par l'effet conjoint de la réduction de PAPR et de l'amplification de puissance. De façon évidente, la réduction de PAPR modifie l'allure du signal temporel, mais sans nécessairement apporter de distorsion sur les données utiles. Ainsi donc, en fonction du type de technique de réduction de PAPR, avec ou sans distorsion, le signal de référence à prendre en considération dans l'expression de l'EVM précédente doit être correctement choisi. Ces deux cas sont explicités ci-après.

### Technique à distorsion : exemple de la technique *clipping*

Pour les techniques de réduction du PAPR introduisant de la distorsion sur le signal, le signal temporel d'origine  $x(t)$  en entrée du module de réduction de PAPR est choisi comme signal de référence, auquel le signal final après amplification  $z_{out}(t)$  est comparé (cf. Fig. 3.2). Ainsi, le calcul de  $z_{out}(t)$  en fonction de  $r = |x(t)|$  prend en compte les distorsions causées par la technique de réduction du PAPR ainsi que celles introduites par l'AP.

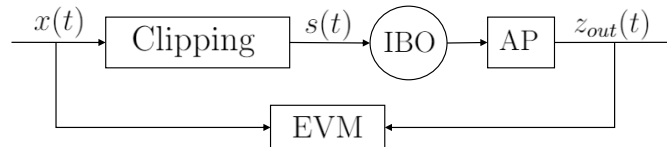


FIGURE 3.2 – Signal de référence  $x(t)$  dans le cas de la technique *clipping*

### Techniques sans distorsion : exemple de la technique TR

Pour les techniques sans distorsion telles que la technique TR, le signal  $z_{out}(t)$ , est suivi à la réception d'une suppression du signal de réduction du PAPR ajouté à l'émission. Précisons que cette opération n'est pas réalisable dans le cas de l'application de la technique *clipping*, puisque la part de signal implicitement ajoutée au signal utile lors de l'écrêtage n'est pas connue du récepteur, ni même séparable. Soit  $z'(t)$  le signal temporel ainsi obtenu, comme représenté Fig. 3.3. En raison de l'orthogonalité entre le signal noyau et le signal de données dans le domaine fréquentiel, la technique TR ne cause pas de distorsions du signal et les distorsions mesurées sont uniquement dues aux non-linéarités de l'AP. De ce fait, en conservant une normalisation adéquate, pour un nombre d'échantillons suffisamment grand, l'EVM peut être évalué de manière équivalente soit en comparant le signal final  $z'(t)$  au signal d'origine  $x(t)$ , soit en comparant les signaux intermédiaires  $z_{out}(t)$  et  $s(t)$ . La première approche nécessite une expression formelle du noyau ajouté, résultant du problème d'optimisation de la technique TR, en fonction du signal  $x(t)$ . Une telle expression n'est donc pas connue dans le cas général. Au contraire, l'approche qui consiste à comparer les signaux  $z_{out}(t)$  et  $s(t)$  permet de s'affranchir de l'expression du noyau. Nous verrons plus loin que le problème se réduit alors à celui de l'évaluation de la PDF de  $s(t)$  après l'application de la technique TR. C'est pourquoi cette thèse propose de suivre la seconde approche pour le calcul de l'EVM. Le signal de référence dans le cas de la technique TR est donc le signal  $s(t)$ .

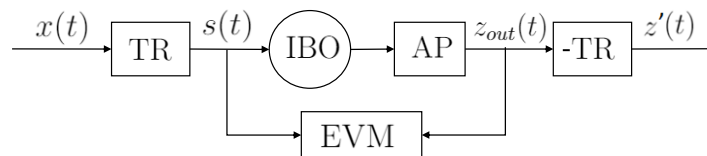


FIGURE 3.3 – Signal de référence  $s(t)$  dans le cas de la technique TR

### 3.2.6 Notations mathématiques utiles pour la suite de ce travail

Les signaux de la chaîne OFDM suivent des processus aléatoires. Ainsi, pour un signal  $s(t)$ , soient  $f_s(r)$ ,  $g_s(\theta)$ ,  $f_{\text{Re}(s)}(a)$  et  $f_{\text{Im}(s)}(b)$  les fonctions de densité de probabilité (PDF) respectives de son amplitude  $r$ , de sa phase  $\theta$ , de sa partie réelle  $a$  et de sa partie imaginaire  $b$ . Les moments de la PDF de l'amplitude  $f_s(r)$  de ce signal sont définis comme suit.

**Définition 3.1** (Moments ordinaires incomplets).  $m_s(n, \varphi)$  et  $M_s(n, \varphi)$  sont définis comme étant les moments d'ordre  $n$  ordinaires (c.à.d. centrés en 0), incomplets respectivement inférieur et supérieur à une limite  $\varphi$ . Ils sont exprimés par :

$$m_s(n, \varphi) = \int_{-\infty}^{\varphi} r^n f_s(r) dr , \quad (3.12)$$

$$M_s(n, \varphi) = \int_{\varphi}^{\infty} r^n f_s(r) dr . \quad (3.13)$$

Par exemple, la puissance moyenne  $P_s$  du signal  $s(t)$  est égale au moment ordinaire complet d'ordre 2 de  $f_s(r)$ .

## 3.3 Développement de l'expression de l'EVM en fonction de la distribution du signal

Dans ce paragraphe, l'expression de l'EVM donnée en (3.11) est développée en fonction des éléments du modèle du système. En prenant en compte le signal de référence  $s(t)$ , ce développement s'applique pour tous les schémas de réduction du PAPR sans distorsion, en particulier pour la méthode TR. Afin de le simplifier, ce développement est divisé en cinq étapes comme suit.

### Étape 1 : développement du carré

Note : Cette étape s'applique quel que soit le signal de référence. Ainsi, le signal de référence général  $s_{ref}(t)$  est considéré à la place de  $s(t)$  et sa puissance moyenne  $P_{ref}$  est utilisée à la place de la puissance  $P_s$ .

En rappelant que  $z(t) = F_n z_{out}(t) = \sqrt{\frac{P_{ref}}{P_{out}}} z_{out}(t)$  et que  $\mathbb{E}(|s_{ref}|^2) = P_{ref}$ , puis en développant le carré dans l'expression de l'EVM par  $|\epsilon|^2 = \epsilon\epsilon^*$ , l'expression de l'EVM

peut être développée comme suit :

$$\begin{aligned}
 EVM &= \sqrt{\frac{\mathbb{E}(|z(t) - s_{ref}(t)|^2)}{\mathbb{E}(|s_{ref}(t)|^2)}} \\
 &= \left[ \frac{1}{P_{ref}} \mathbb{E} \left( \left| \sqrt{\frac{P_{ref}}{P_{out}}} z_{out}(t) - s_{ref}(t) \right|^2 \right) \right]^{1/2} \\
 &= \frac{1}{P_{ref}^{1/2}} \left[ \frac{P_{ref}}{P_{out}} \underbrace{\mathbb{E}(|z_{out}(t)|^2)}_{P_{out}} + \underbrace{\mathbb{E}(|s_{ref}(t)|^2)}_{P_{ref}} \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{\frac{P_{ref}}{P_{out}}} \left[ \mathbb{E}(z_{out}(t) s_{ref}^*(t)) + \mathbb{E}(z_{out}^*(t) s_{ref}(t)) \right] \right]^{1/2} \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

Ainsi, l'expression de l'EVM se réduit simplement à :

$$EVM = \sqrt{2} \left( 1 - \frac{T_1}{P_{out}^{1/2}} \right)^{1/2} \quad (3.15)$$

$$\text{avec } \begin{cases} T_1 = \frac{1}{2\sqrt{P_{ref}}} \left[ \underbrace{\mathbb{E}(z_{out}(t) s_{ref}^*(t))}_{T_{01}} + \underbrace{\mathbb{E}(z_{out}^*(t) s_{ref}(t))}_{T_{02}} \right] \\ P_{out} = \mathbb{E}(|z_{out}|^2) \end{cases} \quad (3.16)$$

## Étape 2 : développement en fonction des éléments du modèle du système

Le développement des espérances dans l'expression de l'EVM ci-dessus se fait de façon plus naturelle en effectuant un changement de coordonnées polaires pour exprimer les signaux  $z_{out}(t)$  et  $s_{ref}(t)$ . On définit donc  $r_q = |s_{ref}(t_0 - qT_s)| = |s(t_0 - qT_s)|$  et  $\theta_q = \angle s_{ref}(t_0 - qT_s) = \angle s(t_0 - qT_s)$ ,  $\forall q \in \{0, \dots, Q\}$ , les amplitudes et les phases respectives du signal de référence  $s_{ref}(t)$  à l'instant  $t_0$  et aux  $Q$  échantillons de temps précédents (en rappelant qu'une fréquence d'échantillonnage nominale de période  $T_s$  est considérée).

Puisque l'AP introduit un effet mémoire d'ordre  $Q$ ,  $z_{out}(t)$  dépend des coordonnées  $r_q$  et  $\theta_q$ ,  $q = \{0, \dots, Q\}$ . On le notera donc par  $z_{out}(r_0, \dots, r_Q, \theta_0, \dots, \theta_Q)$ . Au contraire,  $s_{ref}(t)$  est le signal instantané sans effet mémoire. On a donc  $s_{ref}(t_0) = s_{ref}(r_0, \theta_0) = r_0 e^{j\theta_0}$  et  $s_{ref}(t_0 - qT_s) = s_{ref}(r_q, \theta_q) = r_q e^{j\theta_q}$ . De là et à partir du modèle de l'AP à effet mémoire donné en équation (3.7),  $z_{out}(t_0)$  est exprimé par :

$$z_{out}(r_0, \dots, r_Q, \theta_0, \dots, \theta_Q) = \sum_{q=0}^Q H_q(F_{IBO} r_q) e^{j\theta_q} \quad (3.17)$$

Ainsi,  $P_{out}$ ,  $T_{01}$  et  $T_{02}$  dans (3.16) peuvent être exprimés par :

$$T_{01} = \mathbb{E} \left( \sum_{q=0}^Q H_q(F_{IBO} r_q) e^{j(\theta_q - \theta_0)} \right) = \sum_{q=0}^Q \mathbb{E} \left( H_q(F_{IBO} r_q) e^{j(\theta_q - \theta_0)} \right) \quad (3.18)$$

$$T_{02} = \mathbb{E} \left( \sum_{q=0}^Q H_q^*(F_{IBO} r_q) e^{j(\theta_0 - \theta_q)} \right) = \sum_{q=0}^Q \mathbb{E} \left( H_q^*(F_{IBO} r_q) e^{j(\theta_0 - \theta_q)} \right) \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}
 P_{out} &= \mathbb{E} \left( \left| \sum_{q=0}^Q H_q(F_{IBO} r_q) e^{j\theta_q} \right|^2 \right) \\
 &= \sum_{q,q'=0}^Q \mathbb{E} \left( H_q(F_{IBO} r_q) H_{q'}^*(F_{IBO} r_{q'}) e^{j(\theta_q - \theta_{q'})} \right) \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

### Étape 3 : expression de l'espérance

Dans cette étape, nous développons l'espérance de l'erreur  $\epsilon$ . Soient  $f_{\text{ref}_q}(r_q)$  et  $g_{\text{ref}_q}(r_q)$  les PDFs respectives de  $r_q$  et de  $\theta_q$ ,  $q \in \{0, \dots, Q\}$ . Si  $\epsilon$  est une variable qui dépend de  $r_q$  et  $\theta_q$ ,  $q \in \{0, \dots, Q\}$ , alors l'espérance de  $\epsilon$  peut être exprimée par :

$$\mathbb{E}(\epsilon) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \epsilon f_{\text{ref}_0}(r_0) \dots f_{\text{ref}_Q}(r_Q) g_{\text{ref}_0}(\theta_0) \dots g_{\text{ref}_Q}(\theta_Q) dr_0 \dots dr_Q d\theta_0 \dots d\theta_Q \quad (3.21)$$

Puisque  $s_{\text{ref}}(t)$  suit un processus aléatoire stationnaire,  $f_{\text{ref}_q}(r_q) = f_{\text{ref}_0}(r_0)$  et  $g_{\text{ref}_q}(r_q) = g_{\text{ref}_0}(r_0)$ ,  $\forall q \in \{0, \dots, Q\}$  et leurs notations seront respectivement écrites dans la suite  $f_{\text{ref}}(r_q)$  et  $g_{\text{ref}}(r_q)$ . Ainsi,  $T_{01}$ ,  $T_{02}$  et  $P_{\text{out}}$  s'expriment comme :

$$T_{01} = \sum_{q=0}^Q \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \underbrace{r_0 H_q(F_{IBO} r_q)}_{\epsilon_{01}} e^{j(\theta_q - \theta_0)} f_{\text{ref}_0}(r_0) \dots f_{\text{ref}_Q}(r_Q) g_{\text{ref}_0}(\theta_0) \dots g_{\text{ref}_Q}(\theta_Q) dr_0 \dots dr_Q d\theta_0 \dots d\theta_Q \quad (3.22)$$

$$T_{02} = \sum_{q=0}^Q \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \underbrace{r_0 H_q^*(F_{IBO} r_q)}_{\epsilon_{02}} e^{j(\theta_0 - \theta_q)} f_{\text{ref}_0}(r_0) \dots f_{\text{ref}_Q}(r_Q) g_{\text{ref}_0}(\theta_0) \dots g_{\text{ref}_Q}(\theta_Q) dr_0 \dots dr_Q d\theta_0 \dots d\theta_Q \quad (3.23)$$

$$P_{\text{out}} = \sum_{q,q'=0}^Q \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \underbrace{H_q(F_{IBO} r_q) H_q^*(F_{IBO} r_{q'})}_{\epsilon_{\text{out}}} e^{j(\theta_q - \theta_{q'})} f_{\text{ref}_0}(r_0) \dots f_{\text{ref}_Q}(r_Q) g_{\text{ref}_0}(\theta_0) \dots g_{\text{ref}_Q}(\theta_Q) dr_0 \dots dr_Q d\theta_0 \dots d\theta_Q \quad (3.24)$$

### Étape 4 : réduction de l'intégrale multiple

En remarquant que  $\epsilon_{01}$ ,  $\epsilon_{02}$  et  $\epsilon_{\text{out}}$ , dans (3.22)-(3.24), sont indépendants des phases  $\theta_q \forall q \in \{0, \dots, Q\}$ , et puisque chaque composante  $q$  de l'AP affecte l'amplitude du signal seulement (voir le modèle de l'AP), en rappelant que les amplitudes et les phases sont des variables aléatoires indépendantes,  $T_{01}$ ,  $T_{02}$  et  $P_{\text{out}}$  peuvent être simplifiés par :

$$T_{01,02} = \sum_q \left( \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \epsilon_{01,02} f_{\text{ref}_0}(r_0) \dots f_{\text{ref}_Q}(r_Q) dr_0 \dots dr_Q \underbrace{\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} e^{j(\theta_q)} g_{\text{ref}_0}(\theta_0) \dots g_{\text{ref}_Q}(\theta_Q) d\theta_0 \dots d\theta_Q}_{\delta(q)} \right), \quad (3.25)$$

$$P_{\text{out}} = \sum_{q,q'} \left( \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \epsilon_{\text{out}} f_{\text{ref}_0}(r_0) \dots f_{\text{ref}_Q}(r_Q) dr_0 \dots dr_Q \underbrace{\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} e^{j(\theta_q - \theta_{q'})} g_{\text{ref}_0}(\theta_0) \dots g_{\text{ref}_Q}(\theta_Q) d\theta_0 \dots d\theta_Q}_{\delta(q-q')} \right), \quad (3.26)$$



où les derniers termes sont respectivement égaux à  $\delta(q)$  et  $\delta(q - q')$ , avec  $\delta$  le symbole de Kronecker, puisque  $\int e^{j\theta_q} g_{\text{ref}Q}(\theta_Q) = 0$  et  $\int g_{\text{ref}Q}(\theta_Q) = 1$ . Ainsi,  $T_{01}$  et  $T_{02}$  sont réduits à une simple intégrale suivant  $r_0$  puisque la somme suivant  $Q$  est réduite. De même,  $P_{out}$  se réduit à une simple somme suivant  $q$ . On a donc :

$$\begin{aligned} T_{01,02} &= \int_0^\infty \epsilon_{01,02} f_{\text{ref}}(r_0) dr_0 \\ P_{out} &= \sum_q \int_0^\infty \epsilon_{out} f_{\text{ref}}(r_q) dr_q \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ainsi, à partir de (3.16)  $T_1$  et  $P_{out}$  sont réduits à :

$$\begin{cases} T_1 = \int_0^\infty \frac{r_0}{\sqrt{P_{ref}}} \mathcal{R}(H_0(F_{IBO}r_0)) f_{\text{ref}}(r_0) dr_0 \\ P_{out} = \sum_q \int_0^\infty |H_q(F_{IBO}r_q)|^2 f_{\text{ref}}(r_q) dr_q \end{cases} \quad (3.28)$$

### Étape 5 : développement de l'expression de l'AP et extraction des moments

À cette étape, la réponse de la composante  $q$  de l'AP est remplacée par son expression dans (3.8). L'intégrale dans (3.28) est divisée en deux parties, suivant la valeur de  $F_{IBO} r_q = \sqrt{\frac{P_{in}}{P_s}} r_q$  dans  $(-\infty; A_{in,sat}]$  ou dans  $[A_{in,sat}; \infty)$ . Soit  $\varphi_q = \sqrt{\frac{P_s}{P_{in}}} A_{in,sat_q}$  cette limite de séparation suivant la composante mémoire  $q$ . En arrangeant les termes,  $T_1$  et  $P_{out}$  peuvent alors s'écrire :

$$T_1 = \sum_{l=0}^{L-1} \mathcal{R}(b_{0,2l+1}) P_{in}^{\frac{2l+1}{2}} \int_{-\infty}^{\varphi_0} \frac{r}{\sqrt{P_s}} \left( \frac{r}{\sqrt{P_s}} \right)^{2l+1} f_s(r) dr + A_{out,sat_0} \int_{\varphi_0}^\infty \frac{r}{\sqrt{P_s}} f_s(r) dr \quad (3.29)$$

$$P_{out} = \sum_{q=0}^Q \sum_{l,l'=0}^{L-1} b_{q,2l+1} b_{q,2l'+1} P_{in}^{\frac{2(l+l'+1)}{2}} \int_{-\infty}^{\varphi_q} \left( \frac{r}{\sqrt{P_s}} \right)^{2(l+l'+1)} f_s(r) dr + A_{out,sat_q}^2 \int_{\varphi_q}^\infty f_s(r) dr \quad (3.30)$$

### Formule générale de l'EVM

En utilisant l'expression des moments ordinaires incomplets dans la Définition 3.1 pour les moments de  $f_s(r)$ , les intégrales dans (3.29) et (3.30) sont substituées par les moments ordinaires incomplets correspondants. Ainsi, les expressions obtenues de  $T_1$  et  $P_{out}$  sont substituées dans l'expression de l'EVM donnée en (3.15), en rappelant que  $P_{in} = P_{1dB} \rho_{IBO}^{-1}$  (eq. (3.1)) et en arrangeant les termes. On aboutit alors à l'expression synthétique de l'EVM telle que donnée selon le lemme suivant.

**Lemme 3.1.** *L'EVM du signal OFDM amplifié, après application d'une technique à réduction de PAPR sans distortion, et en considérant un modèle polynomial à mémoire de l'AP, s'écrit en fonction de l'IBO comme :*

$$\begin{aligned} EVM^{TR} &= \sqrt{2} \left( 1 - \eta^{TR} \right)^{1/2} \text{ avec} \\ \eta^{TR} &= \frac{\sum_{l=0}^{L-1} u_l \rho_{IBO}^{-(\alpha_1 - \frac{1}{2})} M_{1,q} + A_{in,sat_q} M_{3,q}}{\left( \sum_{q=0}^Q \left( \sum_{l,l'=0}^{L-1} v_{q,l} \rho_{IBO}^{-\alpha_2} M_{2,q} + A_{in,sat_q}^2 M_{4,q} \right) \right)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

### 3.4. Application : Expression de l'EVM sans réduction du PAPR

avec  $u_l = \mathcal{R}(b_{0,2l+1}) P_{1dB}^{\alpha_1 - \frac{1}{2}}$  ;  $v_{q,l} = b_{q,2l+1} b_{q,2l'+1} P_{1dB}^{\alpha_2}$  ;  $\alpha_1 = l + 1$  ;  $\alpha_2 = l + l' + 1$

$$\text{et } M_{i,q} = \frac{1}{P_s^{\alpha_i}} m_s^{TR}(2\alpha_i, \varphi_q); \quad i = \{1, 2\}, \quad (3.32)$$

$$M_{3,q} = \frac{1}{P_s^{1/2}} M_s^{TR}(1, \varphi_q), \quad (3.33)$$

$$M_{4,q} = M_s^{TR}(0, \varphi_q), \quad (3.34)$$

$$\varphi_q = \sqrt{\frac{P_s}{P_{in}}} A_{in,sat_q} \quad (3.35)$$

où  $M_s^{TR}$  et  $m_s^{TR}$  sont les moments incomplets respectivement inférieur et supérieur de la PDF du signal  $s(t)$  ayant subi la réduction de PAPR.

#### Importance de l'étude de la distribution

D'après cette équation générale de l'EVM du signal OFDM amplifié dans le cas de l'utilisation de la technique TR, l'étape essentielle pour la dérivation de l'expression directe de l'EVM en fonction de l'IBO est la dérivation de l'expression de la PDF  $f_s(r)$  de l'amplitude du signal OFDM temporel après application de l'algorithme TR. Ainsi dans la suite, les moments de cette fonction de distribution seront calculés et intégrés directement dans l'expression de l'EVM. L'enjeu devient donc celui du calcul ou de la mesure de ces moments.

## 3.4 Application : Expression de l'EVM sans réduction du PAPR

Dans le cas sans réduction du PAPR, les signaux  $x(t)$  et  $s(t)$  sont égaux, ce qui est équivalent à l'application de la technique TR avec un signal ajouté nul. Ainsi, l'expression de l'EVM dans le Lemme 3.1 peut s'appliquer simplement en remplaçant  $P_s$  par  $P_x$  et  $f_s(r)$  par  $f_x(r)$ . Rappelons que  $f_x(r)$  est la PDF de l'amplitude du signal OFDM d'origine, qui suit d'après le Lemme 1.1, une loi de Rayleigh, rappelée à la Définition 1.4. Par la suite, en utilisant les résultats d'intégration de [121, Sec. 8.35, p. 899], les moments de  $f_x(r)$  peuvent être directement obtenus. On obtient alors l'expression de l'EVM sous la forme du théorème suivant.

**Théorème 3.1** (Expression de l'EVM sans réduction du PAPR). *L'expression de l'EVM du signal OFDM amplifié sans réduction du PAPR est celle de l'équation (5.4) du Lemme 3.1 avec les paramètres  $\varphi_q$ ,  $u_l$ ,  $v_{q,l}$  qui y sont définis, et avec les moments  $M_{1,q} - M_{4,q}$  exprimés comme :*

$$M_{1,q} = \gamma \left( l + 2, \frac{\varphi_q^2}{P_x} \right) \quad (3.36) \quad M_{2,q} = \gamma \left( l + l' + 2, \frac{\varphi_q^2}{P_x} \right) \quad (3.38)$$

$$M_{3,q} = \Gamma \left( \frac{3}{2}, \frac{\varphi_q^2}{P_x} \right) \quad (3.37) \quad M_{4,q} = \Gamma \left( 1, \frac{\varphi_q^2}{P_x} \right) = e^{-\frac{\varphi_q^2}{P_x}} \quad (3.39)$$

où  $\gamma(n, \varphi)$  et  $\Gamma(n, \varphi)$  sont les fonctions de Gamma incomplètes respectivement inférieure et supérieure.

Ce théorème donne donc une expression directe de l'EVM du signal sans réduction du PAPR et après amplification polynomiale en fonction de l'IBO. À noter que [85,91] et [92] avaient déjà proposé une expression de l'EVM sans réduction du PAPR. Cependant, les expressions obtenues ne prennent pas en considération une normalisation précise de la chaîne OFDM. De plus, l'EVM proposée dans ces papiers n'est pas exprimée explicitement en fonction de l'IBO. Par ailleurs, l'expression de l'EVM que nous proposons dans le Théorème 3.1 est présentée et développée de façon unifiée et générique ce qui va dans la suite permettre de mener des analyses et comparaisons approfondies des différentes méthodes.

### Validation de l'expression théorique par simulations

Afin de valider l'expression de l'EVM obtenue, des simulations de l'EVM du signal OFDM sont menées dans le cas sans réduction du PAPR, en comparant les signaux fréquentiels  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Z}$ . La Fig. 3.4 montre les courbes d'EVM obtenues analytiquement d'après le Théorème 3.1 ainsi que les courbes obtenues par simulations du signal OFDM en fonction de l'IBO. Ces simulations considèrent une puissance moyenne normalisée du signal de donnée,  $P_x = 1$ . Les cas d'AP avec mémoire - Modèle I - et sans mémoire - Modèle II - sont considérés. Notons que la PDF du signal OFDM et les performances du système sans réduction de PAPR sont indépendantes du nombre de sous-porteuses OFDM, et les performances obtenues en EVM sont les mêmes pour les modes 1K et 8K. La correspondance parfaite des courbes obtenues permet de valider les dérivations théoriques menées.

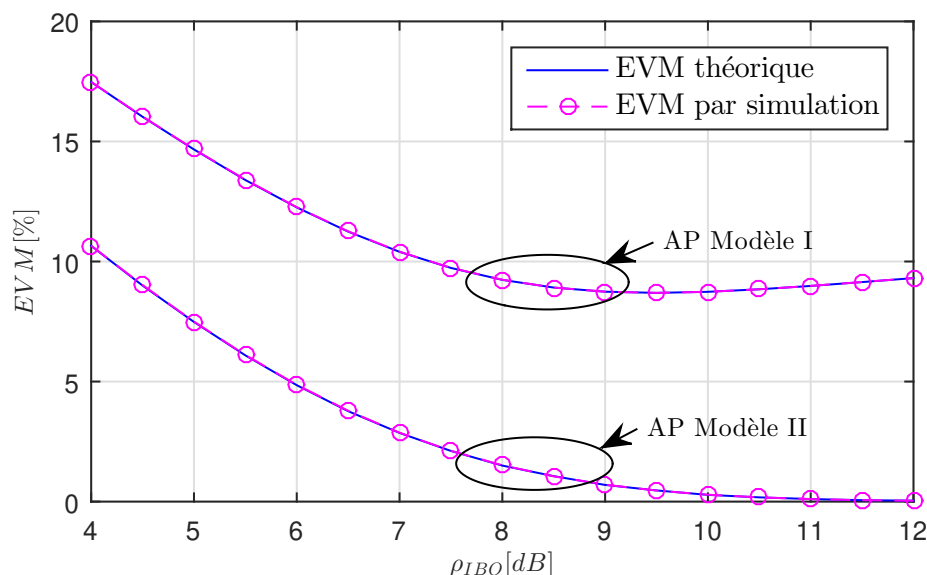


FIGURE 3.4 – Courbes d'EVM du signal OFDM amplifié sans réduction du PAPR en fonction de l'IBO, obtenues théoriquement et par simulation, en considérant les deux modèles d'AP avec mémoire et sans mémoire

### 3.5 Expression de l'EVM dans le cas du *clipping*

Dans ce paragraphe, l'expression de l'EVM du signal OFDM avec réduction du PAPR par la technique *clipping* est calculée par une démarche analogue à celle précédemment suivie pour la technique TR. Le calcul présenté ici fait suite aux travaux de [19] en apportant un calibrage plus précis des paramètres. En effet, ce travail prend en considération une normalisation plus fine de l'entrée de l'AP, afin de déterminer exactement son point de fonctionnement, ainsi qu'une normalisation adéquate à la sortie de l'AP  $P_z$  à 1, afin de comparer les points de constellation de même énergie lors de l'évaluation de l'EVM.

À noter que pour que le *clipping* appliqué soit effectif, l'amplitude du signal à l'entrée de l'AP ne doit pas dépasser  $A_{insat_q}$ , pour les  $Q$  composantes mémoire. Cette condition est considérée dans la suite et ainsi le modèle de l'AP dans le cas de l'application de la technique *clipping* est réduit à sa première partie (3.8). En effet, si l'amplitude dépasse  $A_{insat_q}$ , alors l'AP entre en saturation avant que le niveau de *clipping* soit atteint. Dans ce cas, le système est équivalent au cas sans réduction du PAPR, pour lequel la dérivation de l'expression de l'EVM a été détaillée précédemment.

Afin de calculer l'EVM, nous suivons la même méthodologie que précédemment. La première étape s'applique pareillement au cas de la technique TR, puisque le développement dans cette étape considère le cas général, indépendamment du choix du signal de référence. Dans l'étape 2, qui concerne le passage aux coordonnées polaires, le signal de référence est  $s_{ref}(t) = x(t)$  dans le cas du *clipping*, comme expliqué en section 3.2.5. Ainsi,  $r_q = |s_{ref}(t - qTs)| = |x(t - qTs)|$  et  $\theta_q = \angle s_{ref}(t - qTs) = \angle x(t - qTs)$ ,  $\forall q \in \{0, \dots, Q\}$ . Par suite,  $z_{out}$  s'exprime par :

$$z(r_0, \dots, r_Q, \theta_0, \dots, \theta_Q) = \sum_{q=0}^Q H_q(F_{IBO} \text{clip}(r_q)) e^{j\theta_q} \quad (3.40)$$

Ainsi, les expressions (3.18)-(3.20), ainsi que les étapes 3 et 4 qui concernent le développement de l'expression de l'espérance et la réduction de l'intégrale multiple s'appliquent de la même manière, en remplaçant  $H_q(F_{IBO} r_q)$  par  $H_q(F_{IBO} \text{clip}(r_q))$ , puisque  $\theta = \angle \mathbf{s}_{ref} = \angle \mathbf{s} = \angle \mathbf{x}$ . Ainsi, (3.28) devient :

$$\begin{cases} T_1 = \int_0^\infty \frac{r_0}{\sqrt{P_{ref}}} \mathcal{R}(H_0(F_{IBO} \text{clip}(r_0))) f_{ref}(r_0) dr_0 \\ P_{out} = \sum_q \int_0^\infty |H_q(F_{IBO} \text{clip}(r_q))|^2 f_{ref}(r_q) dr_q \end{cases} \quad (3.41)$$

Afin d'exprimer  $F_{IBO}$  en fonction de la puissance moyenne du signal de référence  $P_x$ , rappelons que  $F_{IBO} = \frac{\sqrt{P_{in}}}{\sqrt{P_s}}$  à partir de l'équation (3.2) et  $P_s^{clip} = P_x(1 - e^{-\Lambda})$  à partir de (3.5). Ainsi, on pose  $F'_{IBO} = \sqrt{\frac{P_{in}}{1 - e^{-\Lambda}}}$  tel que  $F_{IBO} = \frac{F'_{IBO}}{\sqrt{P_x}}$ .

À cette étape l'expression de  $\text{clip}(r)$  est développée comme donnée dans (3.4), ce qui divise l'intégrale en deux parties selon la valeur de  $r$ , comparée à  $A_{clip}$ . On a donc :

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_0^{A_{clip}} \frac{r_0}{\sqrt{P_x}} \mathcal{R} \left[ H_0 \left( F'_{IBO} \frac{r_0}{\sqrt{P_x}} \right) \right] f_{Ray}(r_0; P_x) dr_0 + \int_{A_{clip}}^\infty \frac{r_0}{\sqrt{P_x}} H_0 \left( \frac{A_{clip}}{\sqrt{P_x}} \right) f_{Ray}(r_0; P_x) dr_0 \\ P_{out} &= \sum_{q=0}^Q \left[ \int_0^{A_{clip}} \left| H_q \left( F'_{IBO} \frac{r_q}{\sqrt{P_x}} \right) \right|^2 f_{Ray}(r_q; P_x) dr_q + \int_{A_{clip}}^\infty \left| H_q \left( F'_{IBO} \frac{A_{clip}}{\sqrt{P_x}} \right) \right|^2 f_{Ray}(r_q; P_x) dr_q \right] \end{aligned}$$

Ensuite, l'expression de l'AP dans (3.7) est développée en ne considérant que la partie polynomiale de ce modèle. Ainsi,  $H_q(r) = \sum_{l=0}^{L-1} b_{q,2l+1} r^{2l+1} \forall r \in \mathbb{R}^+$  et  $|H_q(r)|^2$  peut s'écrire :

$$|H_q(r)|^2 = \left( \sum_{l=0}^{L-1} b_{q,2l+1} r^{2l+1} \right) \left( \sum_{l'=0}^{L-1} b_{q,2l'+1} r^{2l'+1} \right) = \sum_{l,l'=0}^{L-1} b_{q,2l+1} b_{q,2l'+1} r^{2(l+l'+1)} \quad (3.42)$$

Ainsi,  $T_1$  et  $P_{out}$  peuvent être exprimés par :

$$T_1 = \sum_{l=0}^{L-1} \mathcal{R}(b_{q,2l+1}) F_{IBO}^{2l+1} (I_1 + I_2) ; \quad P_{out} = \sum_{q=0}^Q \sum_{l,l'=0}^{L-1} b_{q,2l+1} b_{q,2l'+1} F_{IBO}^{2(l+l'+1)} (I_3 + I_4) \quad (3.43)$$

avec :

$$I_1 = \int_0^{A_{clip}} \frac{r}{\sqrt{P_x}} \left( \frac{r}{\sqrt{P_x}} \right)^{2l+1} f_{\text{Ray}}(r; P_x) dr, \quad I_2 = \int_{A_{clip}}^{\infty} \frac{r}{\sqrt{P_x}} \left( \frac{A_{clip}}{\sqrt{P_x}} \right)^{2l+1} f_{\text{Ray}}(r; P_x) dr, \quad (3.44)$$

$$I_3 = \int_0^{A_{clip}} \left( \frac{r}{\sqrt{P_x}} \right)^{2(l+l'+1)} f_{\text{Ray}}(r; P_x) dr, \quad I_4 = \int_{A_{clip}}^{\infty} \left( \frac{A_{clip}}{\sqrt{P_x}} \right)^{2(l+l'+1)} f_{\text{Ray}}(r; P_x) dr. \quad (3.45)$$

Finalement, en utilisant la définition des moments ordinaires, les intégrales dans  $I_{1-4}$  sont substituées par les moments ordinaires correspondants. On aboutit alors à l'expression de l'EVM dans le cas du *clipping* telle que formulée dans le théorème suivant.

**Théorème 3.2.** *L'EVM d'un signal OFDM amplifié après application d'une limitation d'amplitude par clipping, en considérant un modèle polynomial à mémoire de l'AP, est exprimé en fonction de l'IBO par :*

$$EVM^{clip} = \sqrt{2} \left( 1 - \eta^{clip} \right)^{1/2} \quad \text{with} \quad (3.46)$$

$$\eta^{clip} = \frac{\sum_{l=0}^{L-1} u \rho_{IBO}^{-(\alpha_1 - \frac{1}{2})} \left( \gamma(\alpha_1 + 1, \Lambda) + \Lambda^{\alpha_1 - \frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}, \Lambda\right) \right)}{\left( \sum_{q=0}^Q \sum_{l,l'=0}^{L-1} v \rho_{IBO}^{-\alpha_2} \left( \gamma(\alpha_2 + 1, \Lambda) + \Lambda^{\alpha_2} e^{-\Lambda} \right) \right)^{\frac{1}{2}}}$$

avec  $\alpha_1 = l + 1$ ,  $\alpha_2 = l + l' + 1$ ,  $u_l = b_{0,2l+1} \left( \frac{P_{1dB}}{1 - e^{-\Lambda}} \right)^{\alpha_1 - \frac{1}{2}}$  et  $v_{l,l',q} = b_{q,2l+1} b_{q,2l'+1} \left( \frac{P_{1dB}}{1 - e^{-\Lambda}} \right)^{\alpha_2}$ .

### Analogie par rapport au cas de la technique TR

Par analogie avec l'expression de l'EVM dans le cas de la technique TR, les fonctions de Gamma incomplètes dans l'expression de l'EVM dans le cas de l'application de la technique *clipping* peuvent être substituées comme suit :  $\gamma(\alpha + 1, \Lambda) = \frac{1}{P_x} m_x(2\alpha, A_{clip})$  et  $\Gamma(\alpha + 1, \Lambda) = \frac{1}{P_x} M_x(2\alpha, A_{clip})$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{N}$ . Ainsi, en comparant les expressions de l'EVM dans le cas de l'application de la technique *clipping* et de la technique TR, la différence essentielle entre ces deux méthodes est que les moments incomplets supérieurs dans le cas de la technique *clipping* sont dus à l'opération de *clipping* elle-même. Par contre, dans le cas de la technique TR, ces moments sont dus à la réponse de l'AP lorsqu'il fonctionne

dans sa zone de saturation. Cependant, lorsqu'un IBO élevé est utilisé, l'AP fonctionne dans sa région linéaire, et les moments supérieurs dans le cas de la technique TR sont réduits à 0, ce qui n'est pas le cas pour la technique *clipping*. Ceci révèle le fait que l'approche *clipping*, comparée à la technique TR, introduit à elle seule une augmentation de l'EVM provoquée par les distorsions apportées sur le signal par écrêtage.

### Validation du résultat théorique par simulations

Afin de valider l'expression de l'EVM obtenue, des simulations de l'EVM du signal OFDM sont menées dans le cas de l'application de la technique *clipping*. Les Fig. 3.5 et 3.6 montrent respectivement les courbes d'EVM dans le cas d'un AP avec mémoire - Modèle I - et sans mémoire - Modèle II. Les courbes obtenues analytiquement d'après le Théorème 3.2 sont comparées aux courbes obtenues par simulations du signal OFDM, en fonction de l'IBO. Ces simulations considèrent une puissance moyenne normalisée du signal de donnée,  $P_x = 1$  et des niveaux de *clipping*  $\Lambda = 5, 6, \text{ et } 7 \text{ dB}$  tel que défini en (3.4). Pareillement au cas sans réduction du PAPR, la PDF du signal OFDM et les performances du système en appliquant la technique *clipping* sont indépendantes du nombre de sous-porteuses OFDM. Comme précédemment, les valeurs d'EVM obtenues par simulation permettent de valider parfaitement les expressions théoriques proposées car on observe une parfaite convergence des résultats théoriques et des résultats de simulation.

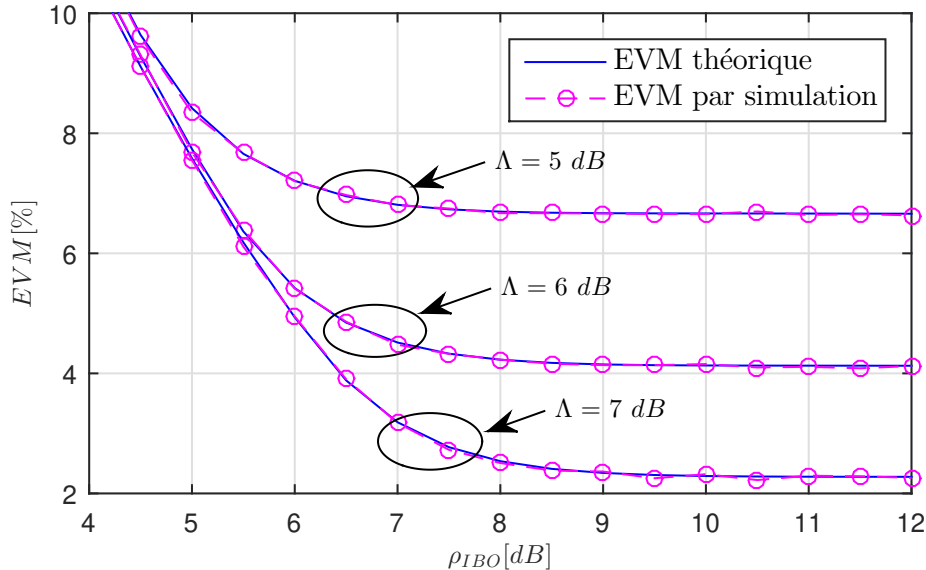


FIGURE 3.5 – Courbes d'EVM du signal OFDM amplifié avec l'application de la technique *clipping*, en fonction de l'IBO, obtenues théoriquement et par des simulations, en considérant le Modèle II de l'AP sans effet mémoire, pour différents niveaux  $\Lambda$  de *clipping*

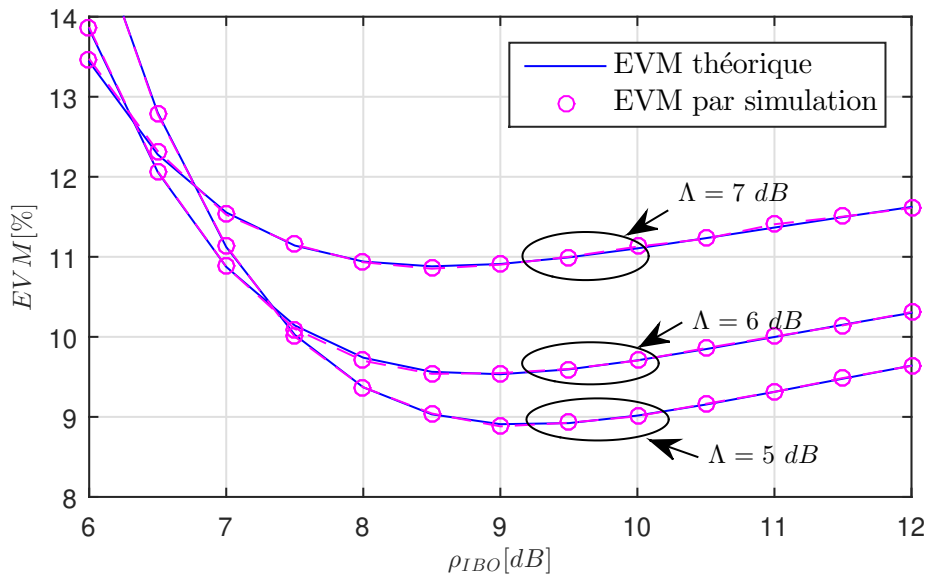


FIGURE 3.6 – Courbes d'EVM du signal OFDM amplifié avec l'application de la technique *clipping*, en fonction de l'IBO, obtenues théoriquement et par des simulations, en considérant le Modèle I de l'AP à effets mémoire, pour différents niveaux  $\Lambda$  de *clipping*

### 3.6 Analyse de la PDF du signal OFDM après application de la technique TR

L'expression générale de l'EVM du signal OFDM amplifié, après l'application de la technique TR, développée dans le Lemme 3.1, montre que l'obtention de l'expression de l'EVM repose sur la connaissance de la PDF de l'amplitude du signal temporel à PAPR réduit  $s(t)$ . La connaissance de cette PDF est en effet nécessaire au calcul des moments ordinaires incomplets. Le signal à PAPR réduit est obtenu par l'ajout du signal  $c(t)$  au signal OFDM d'origine  $x(t)$ . Cependant, l'expression de cette PDF n'est pas simple à obtenir puisque la réduction de PAPR est le fruit d'un processus itératif non-linéaire dont la solution analytique n'est pas connue. Dans cette partie on expose donc quelques unes des stratégies possibles pour aboutir à une expression théorique de la PDF du signal après réduction de PAPR. Trois approches sont suivies. La première repose sur le théorème de la limite centrale pour approximer la PDF de  $s(t)$ . La seconde exprime la PDF en tant que somme des PDFs des signaux  $x(t)$  et  $c(t)$ . La dernière se base sur une évaluation empirique de la PDF de  $s(t)$  par simulation, de laquelle une identification/correspondance à un modèle statistique adéquat est opérée.

Sans restriction sur le cas général, ces analyses théoriques de la PDF seront menées pour le cas de l'application de l'algorithme QCQP dans le cas de la technique TR. Une analyse similaire peut être faite pour tous les autres algorithmes de la technique TR, comme cela sera fait dans le Chapitre 5 de cette thèse.

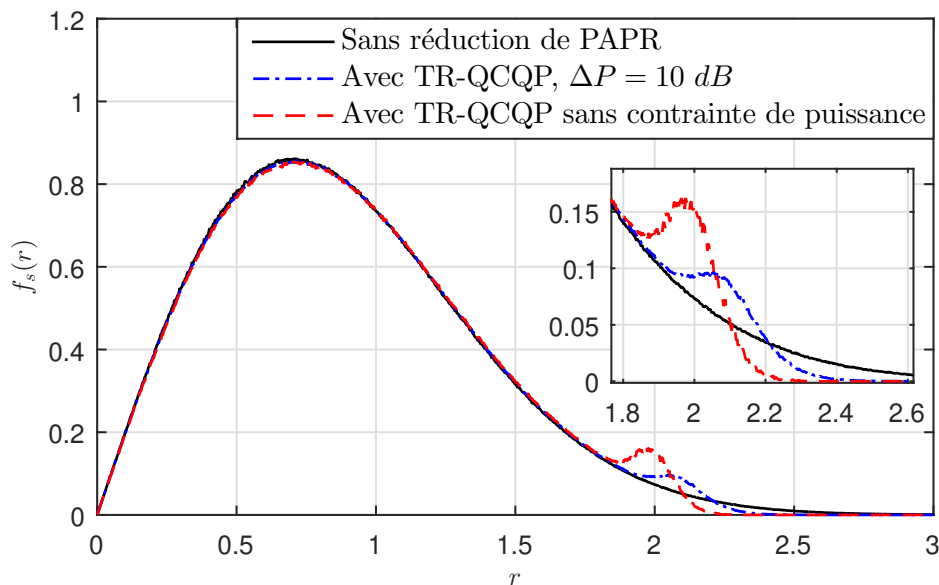


FIGURE 3.7 – PDF de l'amplitude du signal OFDM sans réduction du PAPR et avec l'application de la technique TR-QCQP avec différentes contraintes de puissance, normalisée tel que  $P_s = 1$ , symboles en mode  $1K$

### 3.6.1 Allure générale de la PDF

Avant de commencer l'analyse, il est intéressant d'illustrer la PDF obtenue par simulation. La Fig. 3.7 donne la PDF  $f_s(r)$  de l'amplitude du signal  $s(t)$  après l'application de la technique TR-QCQP en comparaison à la PDF  $f_x(r)$  du signal original  $x(t)$  sans réduction du PAPR. Une normalisation de la puissance moyenne du signal  $s(t)$  à  $P_s = 1$  est considérée. Comme remarqué, la PDF obtenue est bimodale, l'allure du second mode étant dépendant de la puissance additionnelle  $\Delta P_b$  allouée aux PRTs. De façon tout à fait attendue, l'effet de l'algorithme est de réduire la probabilité des amplitudes élevées, en augmentant en contrepartie la probabilité des amplitudes inférieures à ces pics. Cet effet est d'autant plus important que la puissance allouée aux PRTs est élevée.

### 3.6.2 Examen de la possibilité d'appliquer le théorème de la limite centrale

Comme expliqué au premier chapitre, l'amplitude du signal OFDM dans le domaine temporel suit une PDF de Rayleigh puisque les parties réelles et imaginaires de ce signal  $x(t)$  suivent des lois gaussiennes centrées. Cette propriété est une conséquence directe de l'application du théorème de la limite centrale, les échantillons de chaque symbole OFDM  $\mathbf{x}$  résultant de la IFFT d'un vecteur  $\mathbf{X}$  fréquentiel, dont les éléments sont des symboles de données, indépendants et identiquement distribués (IID).

Après l'application de la technique TR, les échantillons de chaque symbole OFDM  $\mathbf{s}$  à PAPR réduit, résultent de la IFFT du vecteur  $\mathbf{S}$ , dont les éléments sont soit des symboles de donnée  $X_k$ ,  $k \notin S_l$ , soit des PRTs,  $C_k$ ,  $k \in S_l$ . Par contre, ces PRTs, constituant le signal  $\mathbf{C}$ , sont calculées à partir des symboles de données  $X_k$ . Ainsi, les éléments du



vecteur  $\mathbf{S}$  sont directement dépendants entre eux. Donc, le théorème de la limite centrale ne peut plus être appliqué afin d'obtenir la PDF du signal  $s(t)$ , dû à la dépendance des éléments du signal fréquentiel  $\mathbf{S}$ .

### 3.6.3 PDFs des signaux $x(t)$ et $c(t)$ et distribution de la somme de deux v.a. gaussiennes indépendantes

D'après l'analyse de la section précédente, le théorème de la limite centrale ne peut pas être appliqué pour dériver la PDF du signal  $s(t)$ . Une autre approche étudiée dans cette section est d'analyser les fonctions de probabilité des signaux  $x(t)$  et  $c(t)$  et d'utiliser ce résultat afin de dériver la PDF du signal  $s(t)$  comme étant la somme de ces deux variables aléatoires.

#### Allure des PDFs des signaux

En premier lieu, à partir de simulations des signaux  $x(t)$ ,  $c(t)$  et  $s(t)$  en appliquant l'algorithme QCQP, la Fig. 3.8 donne les PDFs des parties réelles, parties imaginaires, et amplitudes respectives de ces signaux  $x(t)$ ,  $c(t)$  et  $s(t)$ . L'application de l'algorithme QCQP avec  $\Delta P_b = 10$  dB ainsi que le cas sans contrainte de puissance sont considérés. Les courbes obtenues sont analysées dans ce qui suit.

#### PDF du signal $x(t)$

Comme déjà expliqué, l'amplitude du signal  $x(t)$  suit une loi de Rayleigh :

$$\mathcal{R}(x_i) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_x^2); \quad \mathcal{I}(x_i) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_x^2); \quad |x_i| \sim \text{Rayleigh}(\sigma_x); \quad (3.47)$$

Ces PDFs obtenues à partir de simulations du signal  $x(t)$ , sont données en Fig. 3.8 (a). Puisque la puissance du signal de donnée  $x(t)$  est indépendante de la puissance du noyau ajouté, les distributions obtenues sont les mêmes pour les cas de l'application de l'algorithme QCQP avec ou sans contrainte de puissance.

#### PDF du signal $c(t)$

La Fig. 3.8 (b) montre les PDFs de la partie réelle, de la partie imaginaire et de l'amplitude du signal  $c(t)$ . La puissance du signal  $c(t)$  est égale à la puissance allouée aux PRTs, et dépend donc de la contrainte de puissance. Il est remarqué que les parties réelle et imaginaire suivent des lois normales centrées, ce qui explique que l'amplitude suit une loi de Rayleigh.

$$\mathcal{R}(c_i) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_c^2); \quad \mathcal{I}(c_i) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_c^2); \quad |c_i| \sim \text{Rayleigh}(\sigma_c); \quad (3.48)$$

Comme pour le signal  $x(t)$ , ceci revient au théorème de la limite centrale, puisque le signal  $c(t)$  est le résultat de la IFFT des PRTs. Ces PRTs suivent un processus IID puisqu'elles présentent le résultat de l'algorithme TR qui les génère indépendamment les unes des autres.

### 3.6. Analyse théorique de l'allure de la PDF

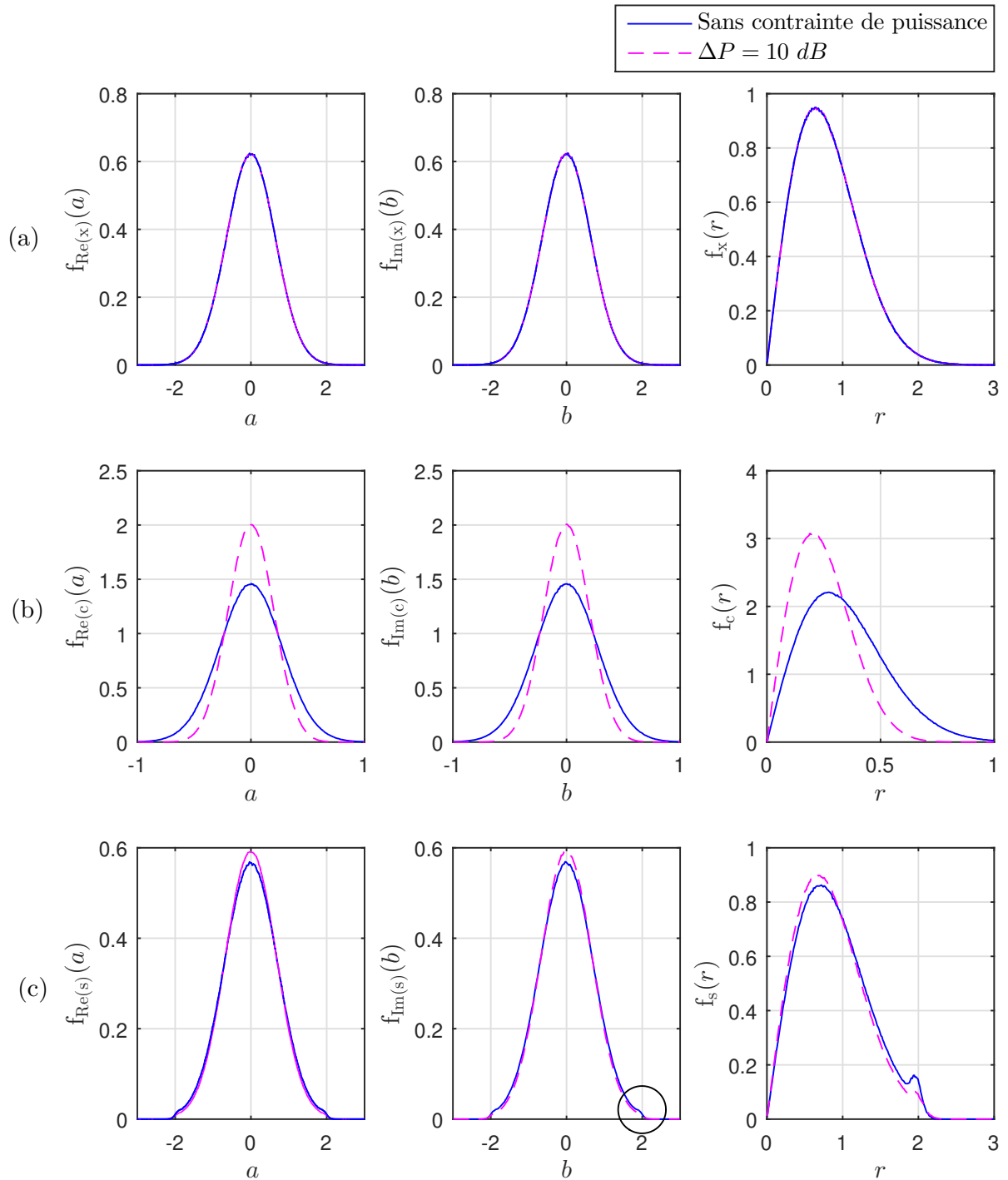


FIGURE 3.8 – PDFs des parties réelles, imaginaires, et amplitudes respectives des signaux  $x(t)$  (a),  $c(t)$  (b) et  $s(t)$  (c), en appliquant l’algorithme QCQP de la technique TR, dans les cas où  $\Delta P_b = 10 \text{ dB}$  et sans contrainte de puissance, symboles en mode 1K

### PDF de la somme de deux v.a. normales centrées indépendantes

Puisque les parties réelles et imaginaires de signaux  $c(t)$  et  $x(t)$  suivent des lois normales centrées, et afin d'analyser la PDF du signal  $s(t)$  qui est la somme de ces deux signaux, le lemme suivant rappelle la propriété de la somme de deux v.a. gaussiennes centrées indépendantes.

**Lemme 3.2.** *Si une v.a.  $s_{12}$  est la somme de deux variables aléatoires gaussiennes centrées  $s_1$  et  $s_2$ , de variances respectives  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  alors  $s_{12}$  suit une loi gaussienne centrée de variance  $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ .*

### Analyse de l'allure de la PDF du signal $s(t)$

La condition nécessaire pour l'application du Lemme 3.2 est l'indépendance entre les signaux  $s_1$  et  $s_2$ . Par contre, le signal  $s(t)$  est la somme des signaux  $x(t)$  et  $c(t)$  qui sont directement liés, puisque  $\mathbf{c}$  est calculé en se basant sur les éléments de  $\mathbf{x}$ . Ainsi, cette propriété n'est pas applicable au signal  $s(t)$ . Cette analyse est donc équivalente à l'étude menée dans 3.6.2 pour tester la possibilité d'appliquer le théorème de la limite centrale. Ces deux études montrent donc que l'amplitude de  $s(t)$  ne suit pas une loi de Rayleigh à cause de la dépendance de  $x(t)$  et  $c(t)$ .

La Fig. 3.8 (c) montre les PDFs des parties réelle et imaginaire ainsi que de l'amplitude du signal  $s(t)$ . Comme remarqué, les PDFs des parties réelle et imaginaire du signal  $s(t)$  sont constituées d'un mode principal qui suit une loi gaussienne, et d'un second mode qui s'ajoute au mode principal autour de la valeur  $\pm 2$ . Cet effet est donc à l'origine du second mode de la PDF de l'amplitude de  $s(t)$ , qui s'ajoute au mode principal qui suit la loi de Rayleigh. Cette analyse montre donc que la dérivation de la PDF du signal  $s(t)$  n'est pas simple comme dans le Lemme 3.2 dû à la dépendance des signaux  $x(t)$  et  $c(t)$ .

### 3.6.4 PDF de $s(t)$ à partir de la somme de deux v.a. dépendantes et de la fonction de probabilité conjointe

Puisque les signaux  $x(t)$  et  $c(t)$  sont dépendants, la propriété de l'addition de telles v.a. est rappelée dans le lemme suivant.

**Lemme 3.3.** *Si une v.a.  $s$  définie sur  $\Omega_s$  est une somme de deux v.a.  $x$  et  $c$  définies respectivement sur  $\Omega_x$  et  $\Omega_c$ , de fonction de probabilité conjointe  $f_{x,c}(x, c)$ , alors la fonction de densité de probabilité de  $s$ ,  $f_s(r)$ , peut être exprimée par :*

$$f_s(r) = \int_{-\infty}^r f_{x,c}(x, r-x) dx \quad (3.49)$$

Donc, la dérivation de  $s(t)$  à partir des PDFs des signaux  $x(t)$  et  $c(t)$  nécessite l'étude de la fonction de probabilité conjointe  $f_{x,c}(x, c)$  de ces deux signaux.

### Fonction conjointe dans le cas de deux v.a. indépendantes

**Propriété 3.1.** *La fonction de densité de probabilité conjointe de deux v.a.  $x$  et  $c$ , définies respectivement sur  $\Omega_x$  et  $\Omega_c$ , indépendantes, de PDFs respectives  $f_x(x)$  et  $f_c(c)$ , est exprimée par :*

$$f_{x,c}(x, c) = f_x(x) f_c(c) \quad (3.50)$$

Une application directe de cette propriété est la dérivation de la fonction de probabilité conjointe des signaux  $x$  et  $c$ , gaussiennes centrées, dans le cas où elles sont indépendantes, cette fonction de distribution conjointe est ainsi exprimée par :

$$f_{x,c}^{\text{indép}}(x, c) = f_{\text{Gauss}}(x; \sigma_x) f_{\text{Gauss}}(c; \sigma_c) \quad (3.51)$$

Afin de mieux visualiser cette propriété, cette fonction de probabilité conjointe  $f_{x,c}^{\text{indép}}(x, c)$ , obtenue par la multiplication des PDFs des signaux  $x(t)$  et  $c(t)$ , est montrée Fig. 3.9 (a). D'après le Lemme 3.3, la PDF  $f_s^{\text{indép}}(r)$  de la somme de ces deux v.a. peut être vue comme la somme des points de  $f_{x,c}(x, c)$  suivant les droites de pente  $-1$ . Ainsi, en utilisant cette propriété, le résultat du Lemme 3.2, qui définit la PDF de la somme de deux v.a. gaussiennes centrées indépendantes, peut être visualisé. Cette PDF  $f_s^{\text{indép}}(r)$  de variance  $\sqrt{\sigma_c^2 + \sigma_s^2}$  est montrée Fig. 3.9 (a).

À partir de cette analyse, comme expliqué aux paragraphes précédents, si les signaux  $x(t)$  et  $c(t)$  étaient indépendants, les parties réelle et imaginaire du signal  $s(t)$  auraient suivi des lois gaussiennes et son amplitude une loi de Rayleigh. Cependant ceci n'est pas le cas des signaux  $x(t)$  et  $c(t)$  en appliquant la technique TR puisque ces signaux sont dépendants.

### Fonction conjointe en appliquant la technique TR

Afin de visualiser cette dépendance entre les signaux  $x(t)$  et  $c(t)$  et étudier leur fonction de probabilité conjointe, des simulations de cette fonction sont menées en appliquant l'algorithme TR-QCQP. La Fig. 3.9(b) montre cette fonction de probabilité conjointe  $f_{x,c}^{\text{QCQP}}(x, c)$ . La comparaison de cette distribution  $f_{x,c}^{\text{QCQP}}(x, c)$  à la distribution  $f_{x,c}^{\text{indép}}(x, c)$ , dans le cas de deux v.a. indépendantes, Fig. 3.9(a), montre la dépendance qui existe entre les signaux  $x$  et  $c$  dans le cas de l'application de l'algorithme TR-QCQP.

La PDF de la somme de ces deux v.a. est montrée 3.9(b). En effet, à partir du Lemme 3.3, la PDF de la somme de ces deux v.a.  $f_s^{\text{indép}}(r)$  peut être vue comme la somme des points  $f_{x,c}(x, c)$  qui se situent sur les droites de pente  $-1$ . Ainsi, il est remarqué que l'origine du second mode de la PDF de  $f_s^{\text{QCQP}}(r)$  est la dépendance entre les signaux  $x$  et  $c$ .

### Nécessité de dériver l'expression analytique de la fonction conjointe

Cette analyse de la PDF conjointe de  $x(t)$  et  $c(t)$  dans le cas de l'application de la technique TR permet de justifier l'allure de la PDF des parties réelles et imaginaires du signal  $s(t)$  et du second mode de sa PDF d'amplitude. Par contre, cette PDF n'a pas une forme simple, et sa dérivation analytique n'est pas possible car la technique TR résout un problème d'optimisation en programmation linéaire et n'a pas de forme mathématique directe. Ainsi, l'étude de la fonction de probabilité conjointe des signaux  $x(t)$  et  $c(t)$

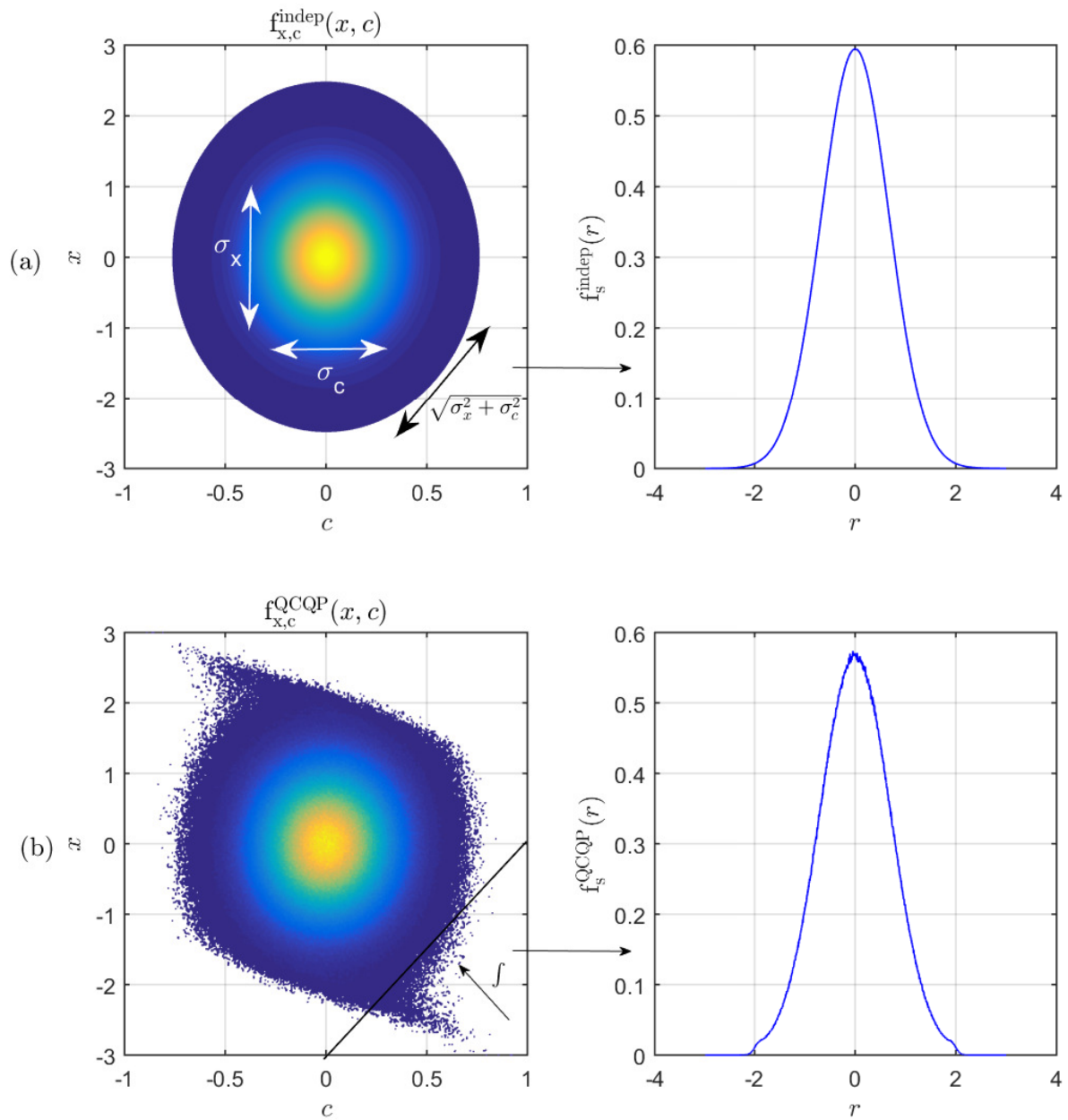


FIGURE 3.9 – Fonctions de probabilité conjointe des v.a.  $x$  et  $c$  dans le cas où elles sont indépendantes (a) et dans le cas de l’algorithme QCQP,  $\Delta P_b = 10 \text{ dB}$ , symboles en mode  $1K$  (b) et la distribution résultante de la somme de ces deux variables dans chaque cas

n'est pas suffisante pour dériver l'expression de  $f_s(r)$ , recherchée pour la dérivation de l'expression de l'EVM.

On conclut donc que la dérivation de la PDF de  $f_s(r)$  ne peut pas être menée analytiquement comme dans le cas sans réduction du PAPR ou le cas de l'application de la technique *clipping*. La seule solution est donc d'étudier cette PDF à partir de simulations du signal OFDM en appliquant la technique TR, puis la modéliser (analytiquement ou empiriquement) à partir de ces simulations. Cette approche sera envisagée dans les chapitres suivants pour différents algorithmes de la technique TR.

## 3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, l'expression générale de l'EVM en fonction de l'IBO dans le cas de l'application de la technique TR est dérivée. Cette expression se base sur les expressions des moments de la PDF  $f_s(r)$  de l'amplitude du signal OFDM après réduction du PAPR par la technique TR, où cette PDF est directement liée à l'algorithme de TR utilisé.

Ensuite, par une application de cette démarche générale, l'expression directe de l'EVM en fonction de l'IBO est dérivée dans les cas sans réduction du PAPR et avec la réduction du PAPR par la technique *clipping*. Des simulations de l'EVM dans ces deux cas sont menées afin de montrer la validité de ces expressions.

Puisque l'expression de l'EVM dans le cas de la technique TR est basée sur l'expression de la PDF de l'amplitude du signal OFDM après l'application de cette technique, l'allure de cette PDF est examinée. C'est une PDF bimodale dont l'allure du mode principal ressemble à une distribution de Rayleigh. Différentes analyses théoriques de base de l'allure de cette PDF sont étudiées, telles que le théorème de la limite centrale, et les propriétés d'une somme de deux variables aléatoires. Ces analyses justifient l'allure générale de la PDF, par contre, elles montrent que la dérivation analytique de la PDF nécessite une expression directe de la solution des algorithmes de la technique TR, ce qui est impossible. Ainsi, la seule solution sera donc d'étudier cette PDF à partir de simulations du signal OFDM en appliquant la technique TR, puis la modéliser à partir de ces simulations. Cette approche sera le sujet des chapitres suivants pour différents algorithmes de la technique TR.



# Chapitre 4

## Expression de l'EVM dans le cas de l'algorithme optimal TR-QCQP

### 4.1 Introduction

Le chapitre précédent a permis de présenter un cadre d'études analytiques générales de l'EVM du signal OFDM amplifié en fonction de l'IBO à l'entrée de l'AP dans le cas de l'application de la technique TR. Ce chapitre considère une expression directe détaillée dans le cas spécifique de l'application de l'algorithme TR-QCQP. On rappelle ici l'importance d'étudier cet algorithme qui représente la solution optimale de la technique TR en terme de réduction du PAPR.

D'après les résultats du Chapitre 3, une étape essentielle dans la dérivation de l'expression directe de l'EVM dans le cas de la technique TR est de modéliser la PDF du signal OFDM à PAPR réduit. Une analyse statistique rigoureuse de la PDF du signal  $s(t)$  est donc menée dans ce chapitre afin de la modéliser proprement. L'expression de la PDF ainsi obtenue est intégrée afin de dériver ses moments incomplets et ainsi obtenir l'expression directe de l'EVM du signal OFDM lors de l'application de l'algorithme QCQP. L'expression obtenue est ensuite validée par des simulations de l'EVM et les résultats numériques obtenus sont exploités afin d'analyser théoriquement les performances de l'algorithme.

### 4.2 Analyse et modélisation de la PDF de l'amplitude du signal $s(t)$ avec application de la technique TR-QCQP

Comme première étape, la distribution empirique obtenue par des simulations du signal OFDM avec application ou non de l'algorithme TR-QCQP a été donnée dans le Chapitre 3, Fig. 3.7, pour le mode  $1K$ . Les cas avec une contrainte  $\Delta P_b = 10$  dB et sans contrainte de puissance sont testés. La distribution de l'amplitude du signal OFDM sans réduction du PAPR suit une loi de Rayleigh par application du théorème de la limite centrale. Il s'avère cependant que la distribution obtenue après application de l'algorithme TR-QCQP suit une loi bimodale qui dépend du gain de puissance  $\Delta P_b$  imposé sur les PRTs. Dans ce qui suit, cette bimodalité est analysée afin d'en dériver un modèle adéquat.



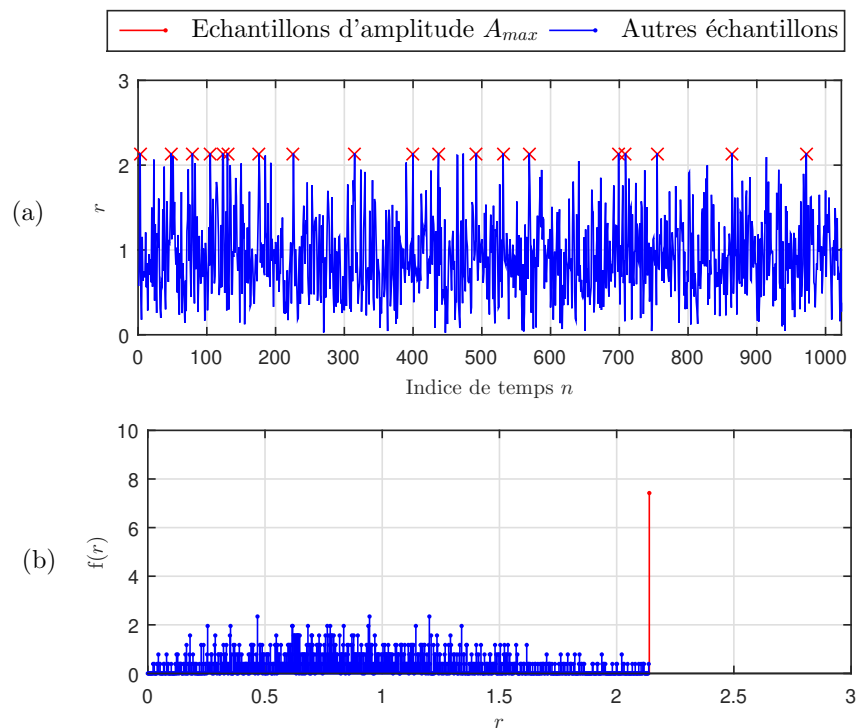


FIGURE 4.1 – Présentation temporelle d'un seul symbole OFDM en mode  $1K$  avec TR-QCQP sans contrainte de puissance (a) et histogramme correspondant (b)

#### 4.2.1 Analyse de l'histogramme de $|s(t)|$ pour chaque symbole OFDM

Afin de comprendre l'origine de la bimodalité de la PDF de l'amplitude du signal  $s(t)$ , l'histogramme de l'amplitude d'un seul symbole OFDM  $\mathbf{s}$  dans le domaine temporel en mode  $1K$  est représenté Fig. 4.1 (b) pour le cas sans contrainte de puissance. La figure 4.1 (a) montre les valeurs des amplitudes de ce symbole OFDM après l'application de l'algorithme TR-QCQP à laquelle correspond cet histogramme. Il se trouve donc que chaque symbole est composé de deux groupes d'échantillons. Le premier groupe contient les échantillons ayant une amplitude égale à l'amplitude maximale sur ce symbole,  $A_{max} = \|\mathbf{s}\|_{\infty}$ , et donne lieu au pic dans l'histogramme pour  $r = A_{max}$ . Le second groupe est composé du reste des échantillons, ayant une amplitude inférieure à  $A_{max}$ .

Il est important de noter ici qu'au contraire de la technique *clipping* simple, cette valeur  $A_{max}$  est différente pour chaque symbole OFDM car elle dépend de la solution trouvée par l'algorithme QCQP pour ce symbole. Il est aussi important de noter que les valeurs des échantillons ayant une amplitude inférieure à  $A_{max}$  ne sont pas les mêmes que celles avant l'application de l'algorithme TR-QCQP. En effet tous les symboles prennent de nouvelles valeurs et l'algorithme n'agit pas en simple écrêteur d'amplitude.

#### 4.2.2 Séparation des deux modes de la PDF

À partir de ces observations, des simulations du signal  $s(t)$  sont menées par une séparation des deux groupes d'échantillons décrits ci-haut pour chaque symbole OFDM.

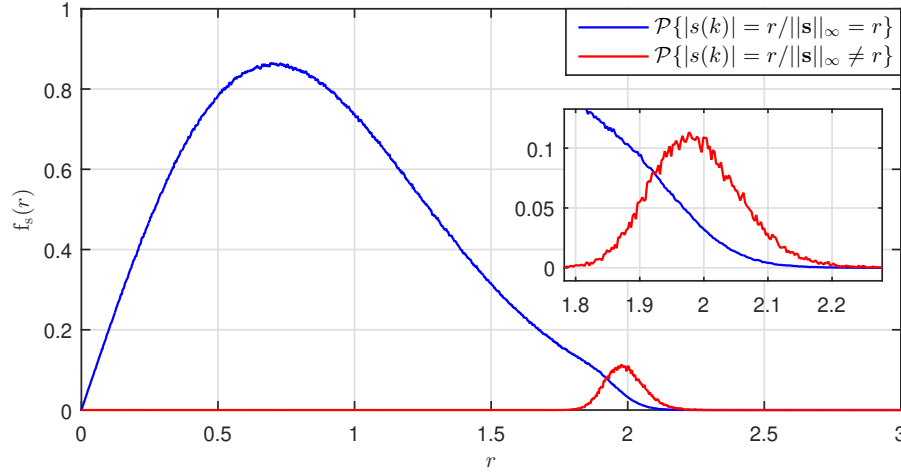


FIGURE 4.2 – Distributions  $f_{s1}(r)$  et  $f_{s2}(r)$  séparées, avec l'application de l'algorithme TR-QCQP sans contrainte de puissance, symboles en mode  $1K$

Sans restreindre le cas général, la Fig. 4.2 illustre les distributions séparées ainsi obtenues, pour le cas sans contrainte de puissance, en considérant des symboles en mode  $1K$ .

À partir de ce résultat, la PDF bimodale  $f_s(r)$  peut donc être modélisée comme étant une superposition de deux PDFs séparées, mais pas indépendantes,  $f_{s1}(r)$  et  $f_{s2}(r)$ , comme suit :

$$f_s(r) = (1 - p) f_{s1}(r) + p f_{s2}(r) , \quad (4.1)$$

$$\text{avec } \begin{cases} f_{s1}(r) = \mathcal{P}\{|s_n| = r \mid r \neq \|\mathbf{s}\|_\infty\} \\ f_{s2}(r) = \mathcal{P}\{|s_n| = r \mid r = \|\mathbf{s}\|_\infty\} \end{cases} , \quad (4.2)$$

où  $p$  est la moyenne du rapport entre le nombre d'échantillons d'un symbole OFDM à  $A_{max} = \|\mathbf{s}\|_\infty$  et le nombre total  $N$  d'échantillons de ce symbole. Dans ce qui suit, la modélisation de ces deux composantes de la PDF est menée.

### 4.2.3 Modélisation de chaque mode de la PDF

#### 4.2.3.1 Modèle de la PDF $f_{s2}(r)$

À partir de ce qui précède, la PDF  $f_{s2}(r)$  présente la distribution des amplitudes maximales des symboles OFDM à PAPR réduit, qui présentent des séquences IID. Ainsi, un modèle convenable de  $f_{s2}(r)$  est la distribution de type Generalised Extreme Value (GEV), de paramètres  $\mu_2$ ,  $\sigma_2$  et  $k_2$  :

$$f_{s2}(r) = f_{\text{GEV}}(r; \mu_2, \sigma_2, k_2) . \quad (4.3)$$

La loi GEV a été choisie comme étant la loi qui modélise les maximums des séquences IID, et est définie sur son support  $D$  comme suit.

**Définition 4.1.** La PDF d'un signal qui suit la loi Generalised Extreme Value (GEV) est définie par :

$$f_{\text{GEV}}(r; \mu, \sigma, k) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} G(r)^{k+1} e^{-t(r)} & \text{si } r \in D \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\text{avec } G(r) = \begin{cases} \left(1 + k \frac{(r-\mu)}{\sigma}\right)^{-1/k} & \text{si } k \neq 0 \\ e^{-(x-\mu)/\sigma} & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

$\mu$ ,  $\sigma$  et  $k$  sont les paramètres respectifs reflétant la position, la dispersion et la forme de la PDF. Le domaine de définition  $D$  de la loi GEV est défini par :

$$D = \begin{cases} [\mu - \sigma/k; +\infty) & \text{si } k > 0 \\ (-\infty; +\infty) & \text{si } k = 0 \\ (-\infty; \mu - \sigma/k] & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

À noter que la CDF d'une distribution qui suit la loi GEV est exprimée sur  $D$  par  $F_{\text{GEV}}(r) = e^{-G(r)}$ .

Afin d'estimer les paramètres de cette distribution, la méthode d'estimation par les moments pondérés (*probability weighted moments* (PWM)) [122] est considérée en utilisant les expressions des paramètres de la GEV en fonction de ces moments, comme donnés dans [123]. Ces paramètres  $\mu_2$ ,  $\sigma_2$  et  $k_2$  sont ainsi évalués en fonction des valeurs de  $\Delta P_b$  pour les modes 1K et 8K, en considérant une normalisation de la puissance  $P_s$  à 1 afin de normaliser ces paramètres par rapport à  $P_s$  (puisque l'expression générale de l'EVM introduit des PDFs qui doivent être normalisées par rapport à  $P_s$ ). Les valeurs ainsi obtenues sont données Fig. 4.3 (b) et représentent les valeurs de référence des paramètres de  $f_{\text{GEV}}(r; \mu_2, \sigma_2, k_2)$  pour la modélisation de  $f_{s_2}(r)$ . Un exemple de la PDF  $f_{s_2}(r)$  en comparaison à ce modèle, pour les modes 1K et 8K est en plus donné Fig. 4.3 (a) pour  $\Delta P_b = 10$  dB, ce qui permet de valider le modèle. Il est à noter que les PDFs  $f_{s_2}(r)$  obtenue par les simulations et  $f_{\text{GEV}}(r; \mu_2, \sigma_2, k_2)$  représentant son modèle sont bien normalisées à 1. Comme détaillé ultérieurement dans la section 4.4.2.3, les valeurs de  $\mu_2$ , la moyenne de  $f_{s_2}(r)$ , pour le mode 1K sont inférieures à celles correspondantes en mode 8K, tandis que les valeurs de  $\sigma_2$ , qui reflète la dispersion de la PDF, sont plus élevées en 1K qu'en 8K. Ceci indique que des valeurs plus importantes des crêtes d'amplitudes persistent dans le cas du mode 8K, tandis que les valeurs de ces crêtes réduites sont plus éloignées pour le mode 1K. Ceci revient à deux effets qui agissent différemment sur la PDF. Le premier est que l'algorithme QCQP en mode 8K a un pouvoir de réduction du PAPR plus important qu'en 1K à cause du nombre de PRTs plus élevé (72 PRTs en 8K contre 10 PRTs en 1K). D'autre part, le signal OFDM initial en 8K présente des crêtes d'amplitudes plus élevées (d'après le théorème de la limite centrale), donc même après une réduction plus importante, des amplitudes élevées persistent après la réduction du PAPR.

#### 4.2.3.2 Modèle de la distribution $f_{s_1}(r)$

D'après la Fig. 4.1, on observe que pour une valeur particulière de l'amplitude  $A_{max} = \|\mathbf{s}\|_{\infty}$ , l'amplitude des échantillons dans un seul symbole suit une loi de Rayleigh tronquée

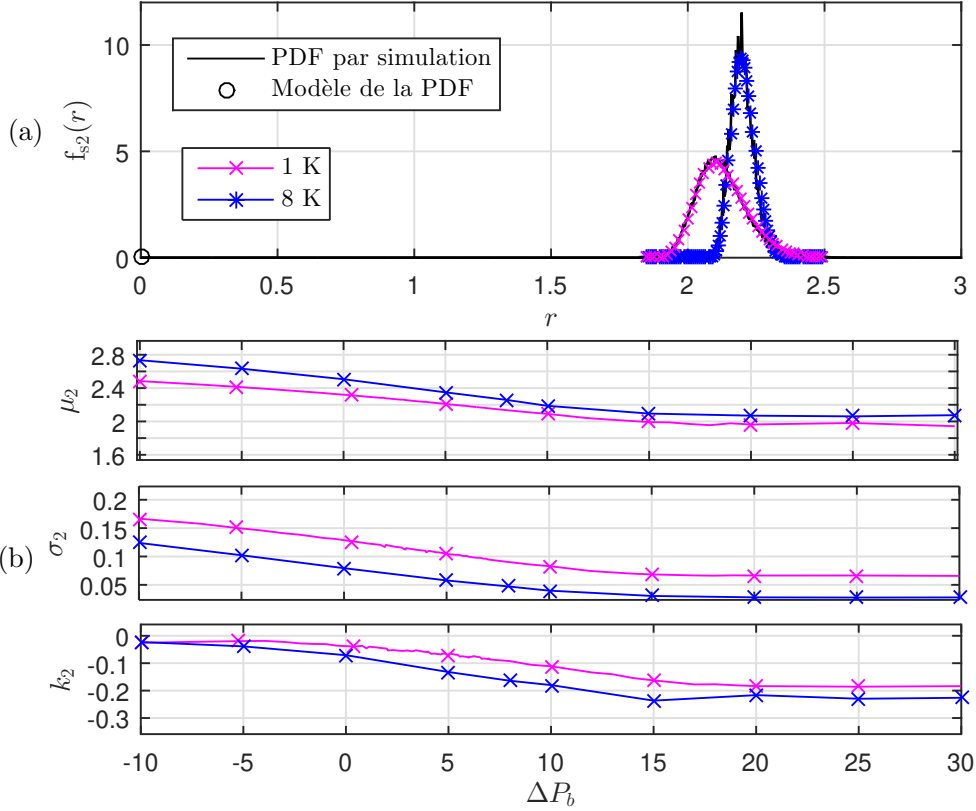


FIGURE 4.3 – Comparaison entre la PDF  $f_{s_2}(r)$  empirique et sa modélisation se basant sur une loi GEV pour  $\Delta P_b = 10$  dB (a) et paramètres de position, d'échelle et de forme correspondants en fonction de  $\Delta P_b$  (b) pour les modes 1K et 8K

(et non écrêtée) à l'amplitude  $A_{max}$ . Il est donc convenable d'introduire la distribution suivante pour chaque symbole OFDM sachant la valeur de  $A_{max}$  :

$$f_{s_1}(r|A_{max}) = f_{\text{Ray}}(r; P_{r1})(1 - u(r - A_{max})) , \quad (4.4)$$

où  $f_{\text{Ray}}(r; P_{r1})$  est la loi de Rayleigh de paramètre  $P_{r1}$  et  $u(r)$  est la fonction échelon unité. Cette distribution de Rayleigh est tronquée pour chaque symbole OFDM à une valeur de  $A_{max}$  éventuellement différente, ainsi,  $f_{s_1}(r)$  peut être exprimée par la loi marginale obtenue par :

$$f_{s_1}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{s_1}(r|A_{max}) f_{A_{max}}(A) dA , \quad (4.5)$$

$f_{A_{max}}(A)$  est la densité de probabilité que suit l'amplitude maximale de chaque symbole :

$$f_{A_{max}}(A) = P\{\|\mathbf{s}\|_{\infty} = A\} . \quad (4.6)$$

Ainsi, l'intégration de (4.4) dans (4.5) donne :

$$f_{s_1}(r) = f_{\text{Ray}}(r; P_{r1}) \times \left( 1 - \int_{-\infty}^{\infty} u(r - A) f_{A_{max}}(A) dA \right) . \quad (4.7)$$

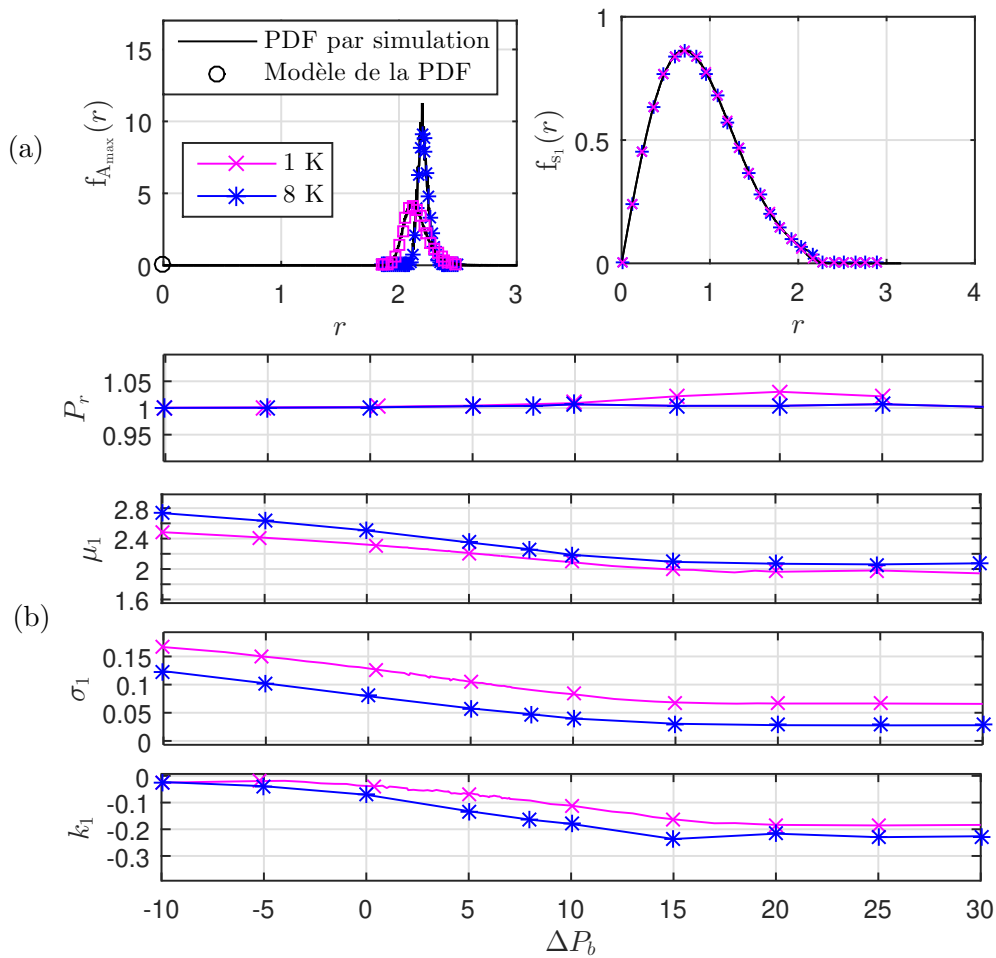


FIGURE 4.4 – Comparaison entre les PDF  $f_{s_1}(r)$  et  $f_{A_{\max}}(r)$  empiriques et leur modélisation se basant sur une loi GEV et une loi de Rayleigh pour  $\Delta P_b = 10$  dB (a) et paramètres de puissance, position, d'échelle et de forme correspondants en fonction de la contrainte de puissance  $\Delta P_b$  (b) pour les modes 1 et 8K

Cette dernière intégrale peut être simplifiée par :

$$\left(1 - \int_{-\infty}^{\infty} u(r - A) f_{A_{\max}}(A) dA\right) = \int_{-\infty}^r f_{A_{\max}}(A) dA, \quad (4.8)$$

qui correspond à la fonction de répartition de la variable aléatoire  $A_{\max}$  qu'on propose de modéliser par une deuxième GEV :  $F_{A_{\max}}(r) = F_{\text{GEV}}(r; \mu_1, \sigma_1, k_1)$ . Le modèle de la distribution  $f_{s_1}(r)$  est donc exprimé finalement par :

$$f_{s_1}(r) = \frac{1}{p'} f_{\text{Ray}}(r; P_{r1}) (1 - F_{\text{GEV}}(r; \mu_1, \sigma_1, k_1)) , \quad (4.9)$$

où  $p'$  est le facteur de normalisation qui assure que  $\int f_{s_1}(r) dr = 1$ .

Ainsi, pareillement aux paramètres de  $f_{s_2}(r)$ , les paramètres  $\mu_1$ ,  $\sigma_1$  et  $k_1$  de  $f_{A_{\max}}(r)$  sont estimés en utilisant la méthode PWM. Ensuite, la distribution de Rayleigh, qui est tronquée par cette CDF de type GEV est obtenue en multipliant  $f_{s_1}(r)$  par le facteur  $1/(1 - F_{A_{\max}}(r))$ , et ce, afin d'estimer sa puissance  $P_{r1}$ . Les résultats de simulation

montrent que  $P_{r1}$  peut être approximée à  $P_s$ , soit en normalisant la puissance moyenne  $P_s$  à 1,  $P_{r1}$  peut être approximée à 1. Ceci reflète le fait que pour chaque symbole OFDM, bien que les valeurs des échantillons au dessous de l'amplitude  $A_{max}$  correspondante sont modifiés par l'algorithme QCQP, la puissance moyenne de ces échantillons est presque inchangée. La Fig. 4.4 (a) montre un exemple de la PDF  $f_{A_{max}}(r)$  empirique et modélisée par une GEV ainsi que la comparaison entre  $f_{s1}(r)$  empirique et son modèle obtenu, pour les modes 1K et 8K et en appliquant une contrainte de puissance des PRTs  $\Delta P_b = 10$  dB. Les paramètres correspondants  $P_{r1}$ ,  $\mu_1$ ,  $\sigma_1$  et  $k_1$  sont montrés Fig. 4.4 (b) pour différentes valeurs de  $\Delta P_b$ , pour les modes 1K et 8K. Ces résultats illustrent le cas où la puissance  $P_s$  est normalisée à 1, et donc les paramètres de la distribution sont normalisés par rapport à  $P_s$  et sont considérés comme référence pour le modèle statistique de  $f_{s1}(r)$ .

Une comparaison des modes 1K et 8K conduit à la même analyse menée lors de la comparaison de ces deux modes pour la PDF  $f_{s2}(r)$ . Cette analyse sera ultérieurement détaillée dans la section 4.4.2.3.

#### 4.2.4 Expression de la PDF et validation du résultat

À partir de ce qui précède, le modèle obtenu de la distribution  $f_s(r)$  peut être exprimé comme dans la proposition suivante.

**Proposition 4.1** (Modèle de la PDF  $f_s^{\text{QCQP}}(r)$ ). *La PDF du signal OFDM temporel avec l'application de l'algorithme TR-QCQP,  $f_s^{\text{QCQP}}(r)$ , est modélisée comme suit :*

$$f_s^{\text{QCQP}}(r) = (1 - p) f_{s1}(r) + p f_{s2}(r), \quad \text{où :} \quad (4.10)$$

$$f_{s1}(r) = \begin{cases} \frac{1}{p'} f_{\text{Ray}}(r; P_{r1})(1 - F_{s11}(r)) & \text{si } r \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.11)$$

$$f_{s2}(r) = \begin{cases} f_{\text{GEV}}(r; \mu_2, \sigma_2, k_2), & \text{si } r \in D_2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.12)$$

$$F_{s11}(r) = \begin{cases} F_{\text{GEV}}(r; \mu_1, \sigma_1, k_1) & \text{si } r \in D_1 \\ 1 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.13)$$

où  $p$  est le paramètre défini comme le rapport moyen entre les échantillons ayant une amplitude égale à l'amplitude maximale d'un symbole OFDM et le nombre total d'échantillons de ce symbole et  $p'$  est un facteur de normalisation qui assure que  $\int f_{s1}(r) = 1$ .  $f_{\text{Ray}}(r)$ ,  $f_{\text{GEV}}(r)$  and  $F_{\text{GEV}}(r)$  sont les PDFs des lois définies dans les Définitions 1.4 et 4.1.  $P_{r1}$ ,  $\mu_2$ ,  $\sigma_2$ ,  $k_2 < 0$  et  $\mu_1$ ,  $\sigma_1$ ,  $k_1 < 0$  sont leurs paramètres respectifs et  $\mathbb{R}^+$ ,  $D_2 = [r_{min2}; r_{max2}] = \left(-\infty; \mu_2 - \frac{\sigma_2}{k_2}\right]$  et  $D_1 = \left(-\infty, \mu_1 - \frac{\sigma_1}{k_1}\right]$  sont leurs domaines de définition respectifs exprimés dans les Définitions 1.4 and 4.1.

La Fig. 4.5 (a) montre la distribution  $f_s(r)$  simulée en comparaison au modèle proposé pour  $\Delta P_b = 10$  dB pour les modes 1K et 8K. La Fig. 4.5 (b) montre les valeurs du facteur  $p$ , représentant le pourcentage de symboles appartenant au second mode, en fonction de  $\Delta P_b$  pour ces deux modes pareillement. Cette figure permet de valider le modèle de  $f_s(r)$ . Les valeurs des paramètres de  $f_s(r)$  dans les Fig. 4.3, 4.4 et 4.5 peuvent être considérés comme des références du modèle statistique global.

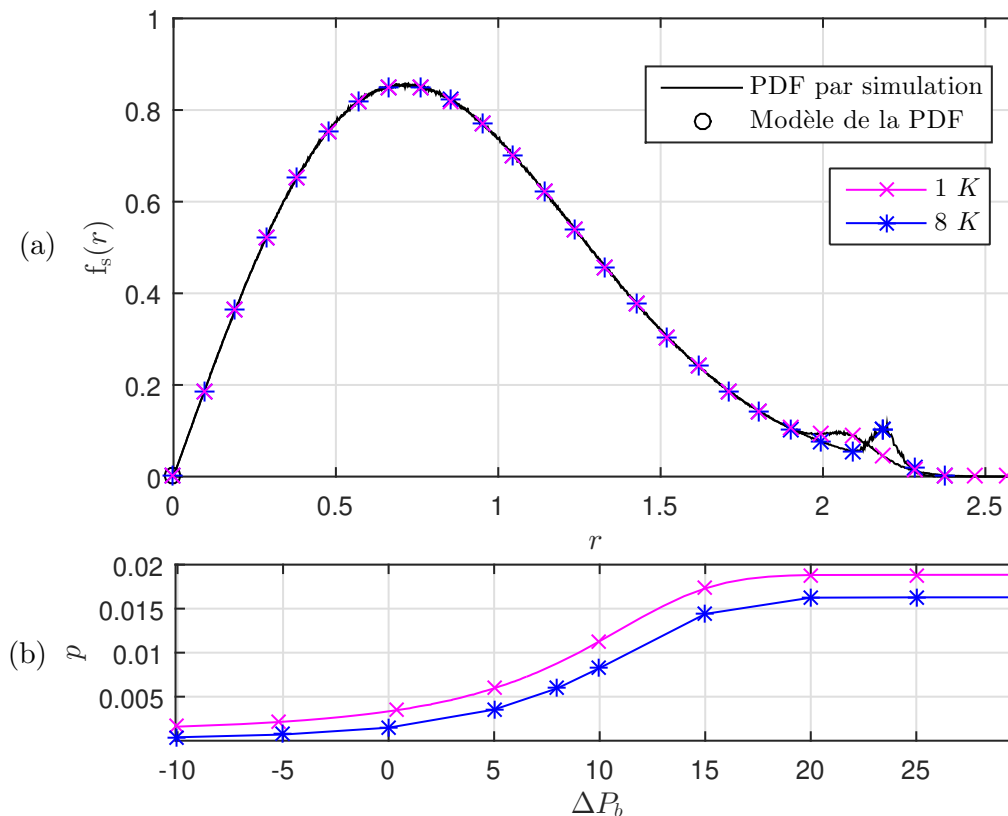


FIGURE 4.5 – Comparaison de  $f_s(r)$  modélisée à la PDF obtenue par des simulations du signal OFDM temporel après l'application de la technique TR-QCQP avec  $\Delta P_b = 10$  dB (a) et valeurs du facteur  $p$  correspondant pour différentes valeurs de  $\Delta P_b$  (b), pour les modes 1K et 8K

### 4.3 Expression de l'EVM dans le cas de l'application de l'algorithme TR-QCQP

#### 4.3.1 Approximation de la PDF de $s(t)$

L'expression de  $f_s(r)$  introduite dans la Proposition 4.1 doit maintenant être intégrée afin de calculer ses moments incomplets. Cette intégration s'avère délicate, surtout pour le facteur  $f_{\text{Ray}}(r)F_{\text{GEV}}(r)$ . Pour cela, deux approximations principales de  $F_{s11}(r)$  sont proposées dans ce qui suit afin de simplifier cette intégrale.

La première approximation proposée consiste à remplacer  $F_{s11}(r)$  qui est une CDF qui suit la loi GEV par une CDF gaussienne  $F_{\text{gauss}}(r)$ , en notant que ces deux distributions peuvent être équivalentes dans certains cas. Cependant, l'intégrale du facteur  $f_{\text{Ray}}(r)F_{\text{gauss}}(r)$  reste complexe à calculer et aboutit à une somme de séries de la fonction  $\text{erfc}(r)$ , définissant la fonction d'erreur complémentaire de Gauss, qui devient complexe lors du calcul numérique.

Comme détaillé dans la section 4.2.3.2,  $F_{s11}(r)$  contrôle la manière dont la distribution de Rayleigh que suivent les échantillons n'ayant pas des amplitudes maximales est pro-

### 4.3. Expression de l'EVM dans le cas de l'application de l'algorithme TR-QCQP

gressivement tronquée. Une autre approximation plus simple de  $F_{s11}(r)$  considère donc de la modéliser comme une fonction échelon unité, ce qui revient à modéliser une troncature brusque de la distribution de Rayleigh, ce qui conduit à des dérivations bien plus simples. La figure 4.6 (a) montre les PDFs approximées dans chacun de ces deux cas en comparaison au modèle initial. L'impact de ces deux approximations sur la valeur calculée de l'EVM, obtenues par des intégrations numériques de l'expression de l'EVM est montré 4.6 (b) . Sans restreindre le cas général, ces courbes concernent le mode  $1K$  et la contrainte de puissance  $\Delta P_b = 10 \text{ dB}$  en utilisant les modèles de l'AP avec mémoire - Modèle I - et sans mémoire - Modèle II. D'après ces courbes, l'erreur de calcul de l'EVM sous l'effet de ces approximations ne dépasse pas 0.3%, il s'avère donc que les deux approximations ont un impact négligeable sur les valeurs calculées de l'EVM, à noter que pour les autres modes et les autres valeurs de  $\Delta P_b$  le même effet de cette approximation est observé. Ainsi, l'approximation de la CDF  $F_{s11}(r)$  par une fonction échelon unité est considérée dans la suite de ce travail comme indiqué dans la proposition suivante, puisqu'elle permet de simplifier fortement l'intégration de l'EVM.

**Proposition 4.2.** *La PDF du signal OFDM avec l'application de l'algorithme TR-QCQP modélisée dans la Proposition 4.1 peut être approximée tel que  $F_{s11}(r)$  est modélisée par une fonction échelon unité à l'amplitude  $r_{step}$  qui représente l'amplitude médiane de  $F_{GEV}(r; \mu_1, \sigma_1, k_1)$ , soit  $F_{GEV}(r_{step}; \mu_1, \sigma_1, k_1) = 0.5$  et ainsi :*

$$\begin{aligned} F_{s11}(r) &= u(r - r_{step}) , \\ \text{avec } r_{step} &= \mu_1 + \frac{\sigma_1}{k_1} \left( (\ln(2))^{-k_1} - 1 \right) , \end{aligned} \quad (4.14)$$

où  $\ln(a)$  est le logarithme naturel de  $a$ .

#### 4.3.2 Calcul des moments de $f_{s1}(r)$ et $f_{s2}(r)$

À cette étape le calcul des moments de  $f_s^{QCQP}(r)$  est mené. Rappelons que  $f_s^{QCQP}(r)$  est une PDF bimodale composée de deux PDFs  $f_{s1}(r)$  et  $f_{s2}(r)$  comme définies dans les Propositions 4.1 et 4.2 tel que :

$$f_s^{QCQP}(r) = (1 - p) f_{s1}(r) + p f_{s2}(r) . \quad (4.15)$$

Ainsi, puisque les moments ordinaires incomplets sont des opérations linéaires,  $\forall n \in N$  et  $\varphi \in \mathbb{R}$ , les moments incomplets respectivement inférieurs et supérieurs de  $f_s^{QCQP}(r)$ ,  $m_s^{QCQP}(n, \varphi)$  et  $M_s^{QCQP}(n, \varphi)$ , peuvent être exprimés comme suit en fonction des moments incomplets respectivement inférieurs et supérieurs de  $f_{s1}(r)$ ,  $m_{s1}(n, \varphi)$  et  $M_{s1}(n, \varphi)$ , et de  $f_{s2}(r)$ ,  $m_{s2}(n, \varphi)$  et  $M_{s2}(n, \varphi)$  :

$$m_s^{QCQP}(n, \varphi) = (1 - p) m_{s1}(n, \varphi) + p m_{s2}(n, \varphi) , \quad (4.16)$$

$$M_s^{QCQP}(n, \varphi) = (1 - p) M_{s1}(n, \varphi) + p M_{s2}(n, \varphi) . \quad (4.17)$$

Pour cela, les moments de  $f_{s1}(r)$  et  $f_{s2}(r)$  sont calculés dans ce qui suit comme première étape afin de dériver les moments de  $f_s^{QCQP}(r)$ .



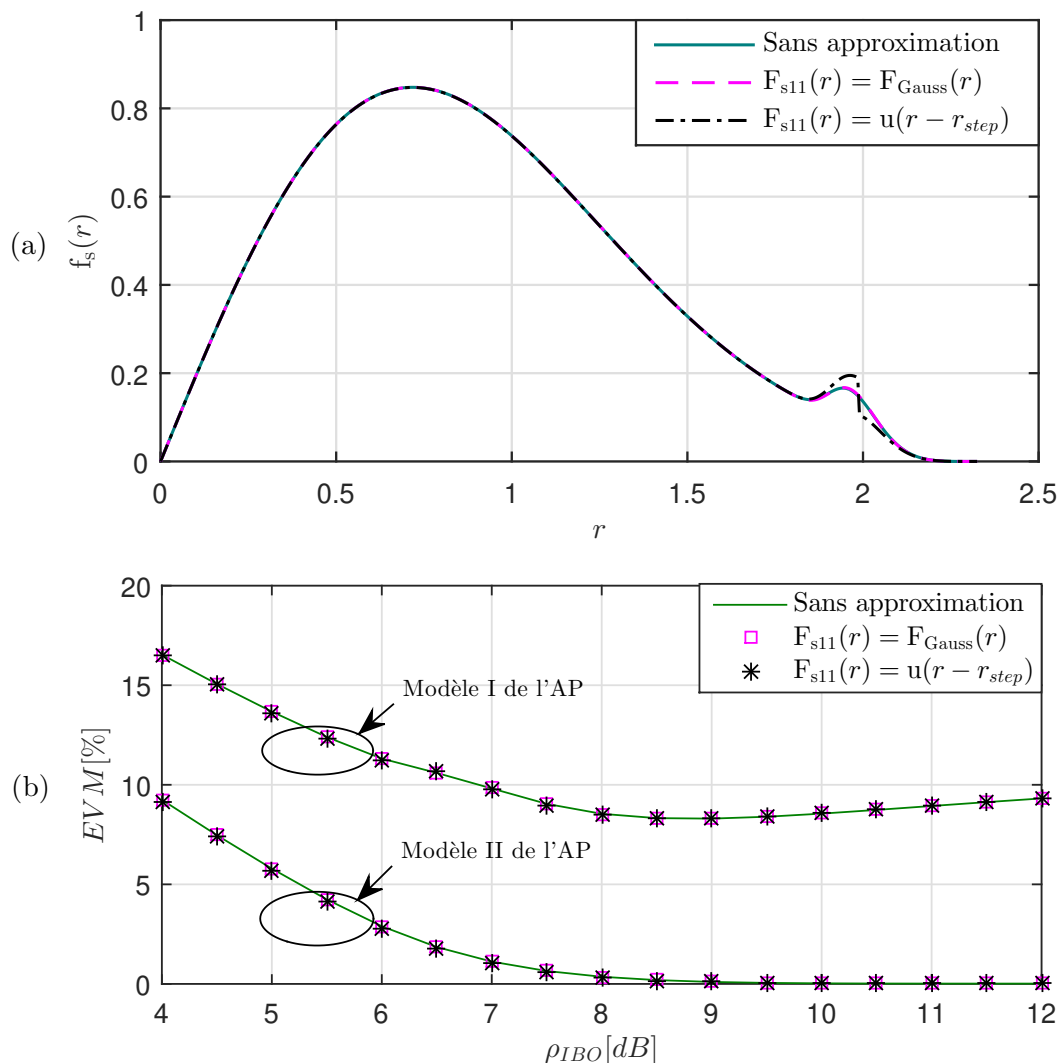


FIGURE 4.6 – Effet des approximations de  $F_{s11}(r)$  sur la PDF  $f_s(r)$  modélisée (a) et sur les valeurs calculées de l'EVM (b), obtenues par des intégrations numériques avec  $\Delta P_b = 10$  dB et pour le mode 1K

#### 4.3.2.1 Calcul des moments de $f_{s1}(r)$

À partir des Propositions 4.1 et 4.2, il est déduit que l'expression de  $f_{s1}(r)$  est finalement simplifiée par :

$$f_{s1}(r) = \begin{cases} \frac{1}{p'} f_{\text{Ray}}(r; P_{r1}) & \text{si } r \leq r_{\text{step}} \\ 0 & \text{si } r > r_{\text{step}} \end{cases} \quad (4.18)$$

Ainsi, le lemme suivant peut être démontré, et ce, en utilisant la simple propriété d'intégrale dans [121, Sec. 8.35, p. 899].

**Lemme 4.1.** *Les moments inférieurs et supérieurs de  $f_{s1}(r)$  d'ordre  $n$  à une limite  $\varphi$*

### 4.3. Expression de l'EVM dans le cas de l'application de l'algorithme TR-QCQP

peuvent être exprimés par :

$$m_{s1}(n, \varphi) = \begin{cases} \int_0^{\varphi} \frac{1}{p'} f_{\text{Ray}}(r) dr = w_n \gamma\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{\varphi^2}{P_{r1}}\right) & \text{si } \varphi \leq r_{\text{step}} \\ \int_0^{r_{\text{step}}} \frac{1}{p'} f_{\text{Ray}}(r) dr = w_n \gamma\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{r_{\text{step}}^2}{P_{r1}}\right) & \text{si } \varphi > r_{\text{step}} \end{cases} \quad (4.19)$$

$$M_{s1}(n, \varphi) = \begin{cases} \int_{\varphi}^{r_{\text{step}}} \frac{1}{p'} f_{\text{Ray}}(r) dr = w_n \left( \gamma\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{r_{\text{step}}^2}{P_{r1}}\right) - \gamma\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{\varphi^2}{P_{r1}}\right) \right) & \text{si } \varphi \leq r_{\text{step}} \\ \int_{r_{\text{step}}}^{\varphi} \frac{1}{p'} f_{\text{Ray}}(r) dr = 0 & \text{si } \varphi > r_{\text{step}} \end{cases} \quad (4.20)$$

$$\text{avec } w_n = \frac{1}{p'} P_{r1}^{n/2}. \quad (4.21)$$

#### 4.3.2.2 Calcul des moments de $f_{s2}(r)$

De la même manière,  $f_{s2}(r)$  est définie par une loi GEV sur le support  $D = [0, r_{\text{max}2}]$  et 0 ailleurs. En premier lieu, l'intégrale qui définit le moment ordinaire incomplet d'une PDF qui suit une loi GEV est calculé comme suit.

#### Intégrale de la fonction $r^n f_{\text{GEV}}(r)$

L'intégrale de la fonction  $r^n f_{\text{GEV}}(r)$  sur  $[a, b] \subset D$  est exprimé comme :

$$J = \int_a^b r^n f_{\text{GEV}}(r; \mu, \sigma, k) dr = \int_a^b r^n \frac{1}{\sigma} G(r)^{k+1} e^{-G(r)} dr. \quad (4.22)$$

Considérons un changement de variable par  $\psi = G(r)$  :

$$\psi = \left(1 + k \frac{r - \mu}{\sigma}\right)^{-1/k}; \quad \frac{d\psi}{dr} = -\frac{1}{\sigma} G(r)^{k+1}; \quad r = \mu + \frac{\sigma}{k} (\psi^{-k} - 1), \quad (4.23)$$

$$\text{ainsi : } J = \int_{G(b)}^{G(a)} \underbrace{\left(\mu + \frac{\sigma}{k} (\psi^{-k} - 1)\right)^n}_{T_2} e^{-\psi} d\psi. \quad (4.24)$$

En utilisant le théorème binomial [124],  $T_2$  peut être développé par :

$$T_2 = \left(\mu + \frac{\sigma}{k} (\psi^{-k} - 1)\right)^n = \sum_{p_1, p_2, p_3=n} w'_{p_1-3} \psi^{-kp_1}, \quad (4.25)$$

$$\text{avec } w'_{p_1-3} = \binom{n}{p_1, p_2, p_3} (-1)^{p_2} \left(\frac{\sigma}{k}\right)^{p_1+p_2} \mu^{p_3} \psi^{-kp_1}, \quad (4.26)$$

$$\text{Ainsi } J = \sum_{p_1, p_2, p_3=n} w'_{p_1-3} \int_{G(b)}^{G(a)} \psi^{-kp_1} e^{-\psi} d\psi. \quad (4.27)$$

À partir de ce qui précède, en utilisant la propriété d'intégrale dans [121, Sec. 8.35, p. 899], l'intégrale  $J$  est exprimée finalement par :

$$J = \sum_{p_1, p_2, p_3=n} w'_{p_1-3} \left( \gamma(-kp_1 + 1, G(a)) - \gamma(-kp_1 + 1, G(b)) \right). \quad (4.28)$$

Pour les conditions limites de l'intégrale, il est à noter que pour  $k < 0$  :

$$G(r_{min}) = \lim_{r \rightarrow -\infty} G(r) = \lim_{r \rightarrow -\infty} \left(1 - |k| \frac{r - \mu}{\sigma}\right)^{+1/|k|} = \infty, \quad (4.29)$$

$$G(r_{max}) = G\left(\mu - \frac{\sigma}{k}\right) = \left(1 + k \frac{\mu - \frac{\sigma}{k} - \mu}{\sigma}\right)^{-1/k} = 0. \quad (4.30)$$

Il est important de noter en plus que  $G(r)$  est une fonction strictement décroissante sur  $[r_{min}; r_{max}]$ . Les résultats obtenus ci-haut peuvent être dérivés autrement en utilisant la fonction caractéristique de la loi GEV calculée dans [125].

### Expression des moments de $f_{s2}(r)$

En rappelant que  $f_{s2}(r)$  est égal à  $f_{GEV}(r)$  sur  $[-\infty; \mu - \frac{\sigma}{k}]$  et 0 ailleurs (puisque  $k < 0$ ), par la même démarche suivie pour le calcul des moments de  $f_{s1}(r)$ , en utilisant la propriété d'intégrale ci-haut et ses conditions limites, les moments de  $f_{s2}(r)$  peuvent être exprimés comme dans le lemme suivant.

**Lemme 4.2.** *Les moments inférieurs et supérieurs de  $f_{s2}(r)$  d'ordre  $n$  à une limite  $\varphi$  peuvent être exprimés par :*

$$m_{s2}(n, \varphi) = \begin{cases} \sum_{p_1+p_2+p_3=n} w'_{p_{\{1-3\}}} \Gamma(-k_2 p_1 + 1, G(\varphi)) & \text{si } \varphi \leq r_{max2} \\ \sum_{p_1+p_2+p_3=n} w'_{p_{\{1-3\}}} \Gamma(-k_2 p_1 + 1) & \text{si } \varphi > r_{max2} \end{cases} \quad (4.31)$$

$$M_{s2}(n, \varphi) = \begin{cases} \sum_{p_1+p_2+p_3=n} w'_{p_{\{1-3\}}} \gamma(-k_2 p_1 + 1, G(\varphi)) & \text{si } \varphi \leq r_{max2} \\ 0 & \text{si } \varphi > r_{max2} \end{cases} \quad (4.32)$$

$$\text{avec } w'_{p_{\{1-3\}}} = \binom{n}{p_1, p_2, p_3} (-1)^{p_2} \left(\frac{\sigma_2}{k_2}\right)^{p_1+p_2} \mu_2^{p_3}. \quad (4.33)$$

### 4.3.3 Expression des moments de $f_s^{QCQP}(r)$ et expression de l'EVM

À partir du Lemme 3.1, l'expression de l'EVM repose sur le calcul des moments  $m(n, \varphi_q)$  et  $M(n, \varphi_q)$ . D'après ce qui précède, en notant que la valeur de  $r_{max2}$  est toujours supérieure à la valeur de  $r_{step}$ , les moments de  $f_s^{QCQP}(r)$  sont exprimés différemment dans 3 zones suivant la valeur de  $\varphi_q$ . Rappelons que la valeur de  $\varphi_q$  est liée à la valeur de  $\rho_{IBO}$  par  $\varphi_q = \sqrt{\frac{P_s}{P_{in}}} A_{in,sat_q} = \sqrt{\frac{P_s \rho_{IBO}}{P_{dB}}} A_{in,sat_q}$ . Ainsi, ces 3 zones sont définies comme suit :

$$1 - \varphi_q < r_{step} \iff \rho_{IBO} < \lambda_q \frac{r_{step}^2}{P_s} \quad (4.34)$$

$$2 - r_{step} < \varphi_q < r_{max2} \iff \lambda_q \frac{r_{step}^2}{P_s} < \rho_{IBO} < \lambda_q \frac{r_{max2}^2}{P_s} \quad (4.35)$$

$$3 - \varphi_q > r_{max2} \iff \rho_{IBO} > \lambda_q \frac{r_{max2}^2}{P_s} \quad (4.36)$$

Ainsi, le calcul des moments de  $f_s^{QCQP}(r)$  se fait simplement comme dans (4.16), à partir des expressions des moments de  $f_{s1}(r)$  et  $f_{s2}(r)$  dans chacune de ces zones, et

### 4.3. Expression de l'EVM dans le cas de l'application de l'algorithme TR-QCQP

l'expression de l'EVM dans le cas de l'application de l'algorithme TR-QCQP est donnée dans le théorème suivant.

**Théorème 4.1.** *L'EVM du signal OFDM amplifié, après l'application de l'algorithme TR-QCQP pour la réduction du PAPR, en considérant un modèle polynomial de l'AP, peut être exprimé par :*

$$EVM^{TR} = \sqrt{2} \left(1 - \eta^{TR}\right)^{1/2} \quad \text{avec} \quad (4.37)$$

$$\eta^{TR} = \frac{\sum_{l=0}^{L-1} u_l \rho_{IBO}^{-(\alpha_1 - \frac{1}{2})} M_{1,q} + A_{in,sat_q} M_{3,q}}{\left(\sum_{q=0}^Q \left(\sum_{l,l'=0}^{L-1} v_{q,l} \rho_{IBO}^{-\alpha_2} M_{2,q} + A_{in,sat_q}^2 M_{4,q}\right)\right)^{1/2}},$$

avec  $\{M_{i,q}\}_{1 \leq i \leq 4; 0 \leq q \leq Q}$  exprimés, selon la valeur de l'IBO, comme suit :

$$- \text{ Si } \rho_{IBO} \in \left(-\infty; \lambda_q \frac{r_{step}^2}{P_s}\right) \quad (4.38)$$

$$M_{i,q} = \frac{1}{P_s^{\alpha_i}} \left( (1-p) w_{2\alpha_i} \gamma\left(\alpha_i + 1, \frac{\varphi_q^2}{P_{r1}}\right) + p \sum_{p_1+p_2+p_3=2\alpha_i} w'_{p_{\{1-3\}}} \Gamma(-k_2 p_1 + 1, G(\varphi_q)) \right), \quad i = \{1, 2\}$$

$$M_{3,q} = \frac{1}{P_s^{\frac{1}{2}}} \left( (1-p) w_1 \left( \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_{step}^2}{P_{r1}}\right) - \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{\varphi_q^2}{P_{r1}}\right) \right) + p \sum_{p_1+p_2+p_3=1} w'_{p_{\{1-3\}}} \gamma(-k_2 p_1 + 1, G(\varphi_q)) \right),$$

$$M_{4,q} = \frac{1-p}{p'} \left( e^{-\frac{r_{step}^2}{P_{r1}}} - e^{-\frac{\varphi_q^2}{P_{r1}}} \right) + p \left(1 - e^{-G(\varphi_q)}\right),$$

$$- \text{ Si } \rho_{IBO} \in \left[\lambda_q \frac{r_{step}^2}{P_s}; \lambda_q \frac{r_{max2}^2}{P_s}\right) \quad (4.39)$$

$$M_{i,q} = \frac{1}{P_s^{\alpha_i}} \left( (1-p) w_{2\alpha_i} \gamma\left(\alpha_i + 1, \frac{r_{step}^2}{P_{r1}}\right) + p \sum_{p_1+p_2+p_3=2\alpha_i} w'_{p_{\{1-3\}}} \Gamma(-k_2 p_1 + 1, G(\varphi_q)) \right), \quad i = \{1, 2\}$$

$$M_{3,q} = \frac{1}{P_s^{\frac{1}{2}}} \left( p \sum_{p_1+p_2+p_3=1} w'_{p_{\{1-3\}}} \gamma(-k_2 p_1 + 1, G(\varphi_q)) \right), \quad M_{4,q} = p \left(1 - e^{-G(\varphi_q)}\right),$$

$$- \text{ Si } \rho_{IBO} \in \left[\lambda_q \frac{r_{max}^2}{P_s}; \infty\right) \quad (4.40)$$

$$M_{i,q} = \frac{1}{P_s^{\alpha_i}} \left( (1-p) w_{2\alpha_i} \gamma\left(\alpha_i + 1, \frac{r_{step}^2}{P_{r1}}\right) + p \sum_{p_1+p_2+p_3=2\alpha_i} w'_{p_{\{1-3\}}} \Gamma(-k_2 p_1 + 1) \right), \quad i = \{1, 2\}$$

$$M_{3,q} = 0; \quad M_{4,q} = 0,$$

avec  $\lambda_q = \frac{P_{1dB}}{A_{in,sat_q}^2} \cdot \varphi_q$ ,  $u, v, \alpha_1, \alpha_2$  définis dans le Lemme 3.1 et  $w_n, w'_n$  définis respectivement dans les Lemmes 4.1 et 4.2.

Ce théorème donne une expression générique de l'EVM dans le cas de l'application de l'algorithme TR-QCQP quelle que soit la valeur de l'IBO. De plus, le dernier cas qui correspond à l'IBO dans l'intervalle  $\left[\lambda_q \frac{r_{max}^2}{P_s}; \infty\right)$  fournit une expression relativement simple de l'EVM. Plus précisément, l'expression de l'EVM dans cette zone requière seulement

le calcul de  $M_1$  et  $M_2$  qui à leur tour ne dépendent plus dans cette zone de l'IBO ni de l'ordre de mémoire de l'AP (ces deux facteurs qui sont implicitement inclus dans les valeurs de  $\varphi_q$  pour les autres intervalles de l'IBO). En effet, cette zone de l'IBO représente le cas le plus intéressant pour l'analyse du système, puisque les valeurs pratiques de l'IBO doivent être relativement élevées afin d'assurer des valeurs acceptables de l'EVM.

## 4.4 Analyse des résultats numériques d'EVM

L'expression de l'EVM introduite dans le Théorème 5.1 est d'une grande importance pour l'optimisation des paramètres d'un système OFDM où la technique TR-QCQP est appliquée pour la réduction du PAPR du signal OFDM temporel à l'entrée de l'AP non-linéaire. Les équations obtenues sont facilement implémentables et peuvent être évaluées dans un temps relativement court, au contraire des simulations qui nécessitent un temps important afin d'évaluer les performances du système en terme d'EVM. En effet, en utilisant les valeurs des paramètres des distributions données dans les courbes des figures 4.3, 4.4 et 4.5 et en utilisant l'expression de l'EVM donnée dans le Théorème 5.1, les valeurs d'EVM peuvent être obtenues instantanément pour n'importe quelle valeur de l'IBO.

Dans ce qui suit, les expressions dérivées de l'EVM sont validées par des simulations adéquates du signal OFDM et sont ensuite exploitées pour l'analyse des performances du systèmes en EVM.

### 4.4.1 Validation du résultat théorique

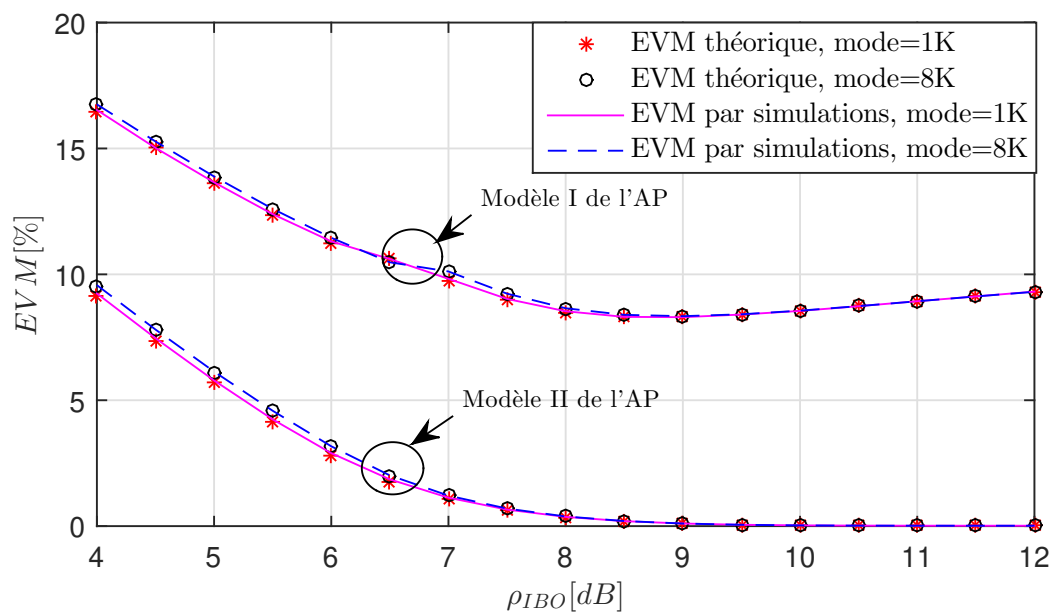


FIGURE 4.7 – Courbes d'EVM obtenues théoriquement et par simulations en fonction de l'IBO avec l'application de l'algorithme QCQP, pour les modes 1 et 8K, avec  $\Delta P_b = 10$  dB et en considérant les modèles d'AP avec effets mémoire et sans effets mémoire.

Afin de valider l'expression analytique de l'EVM donnée dans le Théorème 5.1, des simulations de l'EVM entre les signaux fréquentiels à l'émission et à la réception et en appliquant l'algorithme TR-QCQP sont menées. La Fig. 4.7 montre les courbes d'EVM en fonction de l'IBO obtenues par des simulations, en comparaison aux courbes obtenues analytiquement d'après le Théorème 5.1. Sans restreindre le cas général, les cas des modes OFDM  $1K$  et  $8K$  sont considérés avec une contrainte de puissance  $\Delta P_b = 10 \text{ dB}$  et avec les modèles d'AP avec mémoire - Modèle I - et sans mémoire - Modèle II. Comme observé à partir de cette figure, la comparaison des courbes d'EVM obtenues analytiquement aux courbes obtenues par des simulations permettent de valider les résultats théoriques, et confirment la précision des approximations considérées pour le modèle de la PDF du signal temporel données dans la Proposition 4.2.

Il est à noter que les effets mémoire de l'AP ajoutent des distorsions du signal amplifié, ce qui justifie que l'EVM prend des valeurs importantes dans le cas de l'AP à effet mémoire (Modèle I) par rapport au modèle de l'AP sans effet mémoire (Modèle II), comme observé Fig. 4.7.

## 4.4.2 Analyse des résultats d'EVM

Dans cette section, les expressions théoriques de l'EVM sont exploitées afin d'évaluer ces résultats dans le cas de l'application de la technique TR-QCQP ainsi que dans le cas de l'application de la technique *clipping*. Dans ce qui suit, le modèle de l'AP sans effets mémoire - Modèle II - est considéré afin d'évaluer les distorsions dues aux non-linéarités de l'AP indépendamment des effets mémoire. La Fig. 4.8 (a) montre les résultats théoriques de l'EVM en fonction de l'IBO, obtenus en utilisant les expressions des Théorèmes 3.2 pour la technique *clipping* et 5.1 pour la technique TR-QCQP. Le cas sans réduction du PAPR est considéré en plus comme cas de référence à partir du Théorème 3.1. Deux niveaux de *clipping* sont considérés,  $\Lambda = 6$  et  $7 \text{ dB}$ , tandis que les contraintes de puissance de  $\Delta P_b = 5$  et  $10 \text{ dB}$  ainsi que le cas sans contrainte de puissance sont considérés dans le cas de l'algorithme TR-QCQP. Un agrandissement de ces courbes à l'intervalle de l'IBO entre  $4$  et  $12 \text{ dB}$  est montré Fig. 4.8 (b), qui correspond aux valeurs de l'IBO utilisées en pratique.

### 4.4.2.1 TR vs *clipping* - Analyse asymptotique

D'après la Fig. 4.8, pour des valeurs élevées du PAPR, l'EVM converge vers 0% en utilisant la technique TR-QCQP tandis qu'il atteint un seuil de pourcentage constant lors de l'utilisation de la technique *clipping*. Ceci est dû au fait que la technique *clipping* introduit des distorsions par elle-même au contraire de la technique TR. Par conséquent, puisque les distorsions ajoutées par l'AP sont presque négligeables pour des valeurs élevées de l'IBO, cette grande différence entre les deux approches de réduction du PAPR apparaît.

Ceci peut être déduit à partir des équations d'EVM données dans le Théorème 5.1 et le Lemme 3.1 comme suit. En effet, pour les valeurs élevées de l'IBO, avec l'application de la technique TR, l'expression de l'EVM est simplifiée à des moments complets puisque l'expression de l'AP dans 3.7 est réduite à sa partie polynomiale seulement. En plus, pour ces valeurs élevées de l'IBO, lorsque  $r_{max}$  est finie, la sortie de l'AP est idéalement égale à son entrée,  $H_{PA}(r) = r$ . Ainsi, lors de la dérivation de l'expression générique de l'EVM

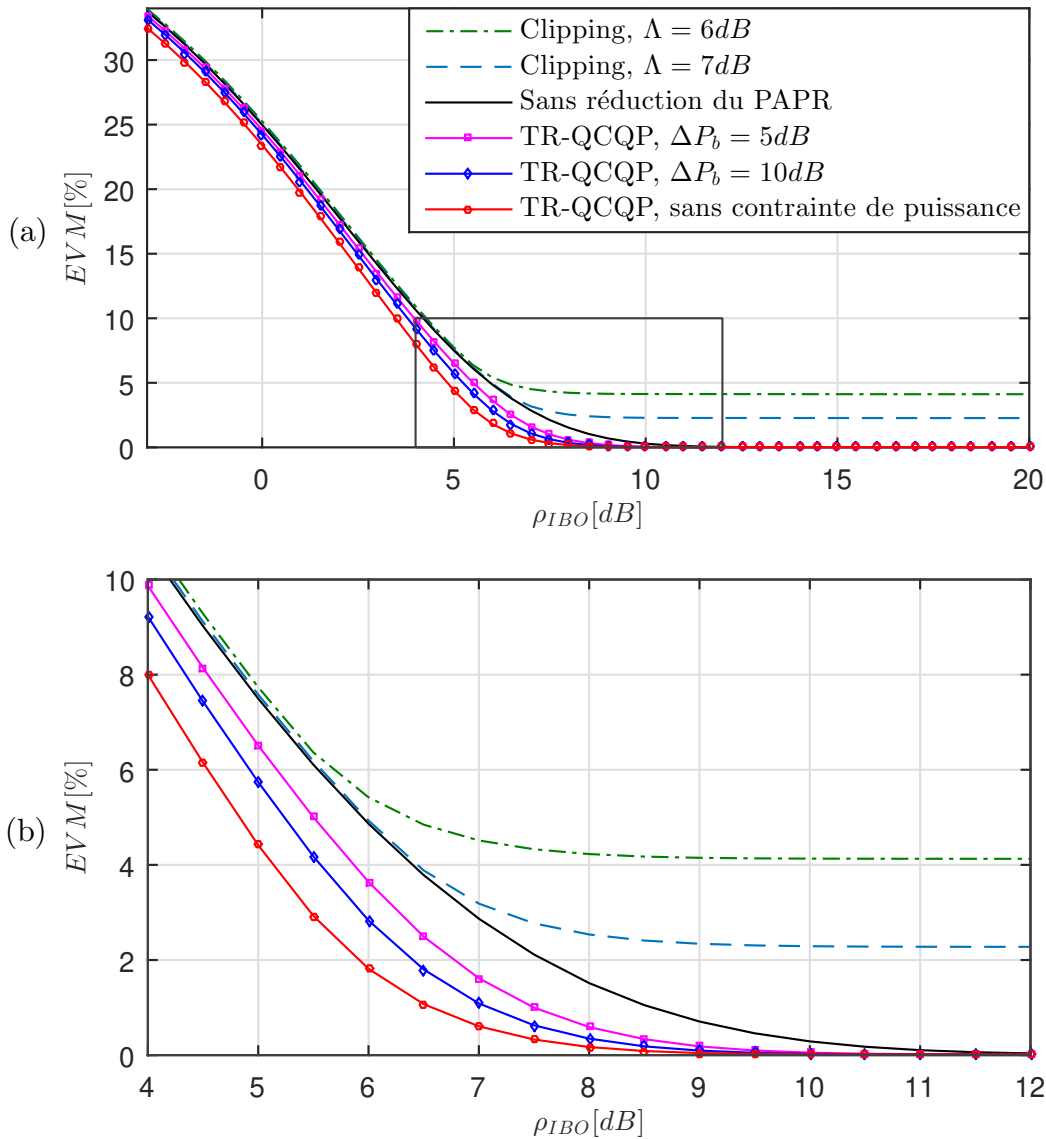


FIGURE 4.8 – Courbes d'EVM théorique en fonction de l'IBO pour différents schémas de réduction du PAPR, en considérant le mode 1K et le Modèle II de l'AP

en utilisant (3.28),  $T_1$  et  $P_{out}$  peuvent être exprimés par :

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{P_s^{1/2}} \int_0^\infty r \left( \sqrt{\frac{P_{in}}{P_s}} r \right) f_{ref}(r) dr ; \\ P_{out} = \int_0^\infty \left( \sqrt{\frac{P_{in}}{P_s}} r \right)^2 f_{ref}(r) dr \end{cases} \quad (4.41)$$

Ainsi,  $T_1/P_{out} = 1$  et l'EVM dans l'équation 3.15 est asymptotiquement égal à 0.

D'autre part, dans le cas du *clipping*, les moments incomplets proviennent de l'opération de *clipping* elle-même et non pas de la saturation de l'AP. Ainsi, même pour des valeurs d'IBO élevées où l'AP n'inclut pas de distorsions, les distorsions dues au *clipping* persistent. Ceci se traduit par un plancher d'EVM atteint asymptotiquement lors de l'utilisation de la technique *clipping* dont le niveau dépend du seuil de *clipping*. Des seuils de *clipping* plus bas conduisent à des valeurs d'EVM plus élevées, puisque plus de distorsions

sont introduites. À noter que pour les faibles valeurs de l'IBO, l'EVM dans le cas de l'application de la technique *clipping* aboutit à des valeurs équivalentes au cas sans réduction du PAPR, puisque à ces valeurs de l'IBO, le *clipping* n'a pas un effet pratique, dû à la saturation de l'AP dans cette zone, l'effet pris en considération lors de la dérivation des expressions d'EVM.

#### 4.4.2.2 Effet de la contrainte de puissance

Comme observé Fig. 4.8, l'algorithme TR-QCQP améliore les performances du système en terme d'EVM par rapport au cas sans réduction du PAPR, et ce, pour n'importe quelle valeur de l'IBO. Ceci est dû au changement qu'apporte la technique TR-QCQP à la PDF du signal à l'entrée de l'AP sans introduire de distorsions par elle-même, au contraire de la technique *clipping*.

De plus, ces améliorations de performances en terme d'EVM apportées par la technique TR-QCQP dépendent de la contrainte de puissance appliquée aux PRTs, tel que des valeurs plus élevées de  $\Delta P_b$  conduisent à des pourcentages d'EVM plus faibles. Ceci reflète l'aptitude de l'approche TR à convertir la partie de l'énergie allouée aux PRTs en réduction du PAPR. La puissance ajoutée permet de changer la PDF du signal temporel comme montré Fig. 3.7, de façon à concentrer l'énergie des échantillons au dessous d'une certaine valeur tel qu'il réduit la traînée de la PDF aux amplitudes élevées. L'efficacité de la réduction du PAPR est reflétée par cet effet de concentration. Plus précisément, la contribution du second mode de la PDF est plus importante lorsque la puissance allouée aux PRTs est plus élevée.

Cependant, la distribution du signal OFDM reste inchangée (pas de second mode), si la puissance des PRTs est nulle, qui est équivalent au cas sans réduction du PAPR. D'autre part, l'algorithme TR-QCQP utilisé sans appliquer de contraintes de puissance correspond au cas de la plus forte réduction possible de la traînée de la PDF, et l'EVM correspondant peut être revendiqué comme étant la limite inférieure de l'EVM, puisque l'algorithme TR-QCQP constitue la solution optimale de réduction du PAPR. Donc, l'utilisation de différentes valeurs de la contrainte de puissance  $\Delta P_b$  conduisent à des performances intermédiaires entre ces deux cas extrêmes, comme le montre la Fig. 4.8. Ce qui est encore plus important, est que n'importe quel algorithme de TR doit conduire à des performances intermédiaires en EVM situées entre les deux situations discutées ci-haut. À noter que des analyses et résultats similaires peuvent être dérivés pour d'autres modèles d'AP, tels que le Modèle I avec mémoire.

#### 4.4.2.3 Comparaison des modes 1K et 8K

Revenant aux figures 4.3, 4.4 et 4.5, la différence entre les PDFs  $f_s(r)$  en mode 1K et 8K est observée. En effet, d'après les valeurs de  $p$  légèrement plus élevées en 1K qu'en 8K, le second mode est plus important en 1K, et donc la réduction du PAPR est plus importante pour ce mode. Cependant, la forme de ce second mode est plus étroite en 8K qu'en 1K, comme reflété par les paramètres  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , et donc les crêtes réduites ont des valeurs plus rapprochées en 8K. En outre, la moyenne du second mode  $\mu_2$  est plus faible en 1K qu'en 8K et donc les amplitudes réduites en 1K ont des valeurs moyennes plus basses. Ceci indique que la réduction du PAPR en 1K conduit à des crêtes d'amplitude plus faibles qu'en 8K pour lequel des amplitudes plus élevées persistent. Ceci traduit



deux effets qui agissent différemment sur la PDF. Le premier est que l'algorithme QCQP en mode  $8K$  a un pouvoir de réduction du PAPR plus important qu'en  $1K$  à cause du nombre de PRTs plus élevé (72 PRTs en  $8K$  contre 10 PRTs en  $1K$ ). D'autre part, le signal OFDM initial en  $8K$  présente des crêtes d'amplitudes plus élevées (d'après le théorème de la limite centrale), donc même après une réduction plus importante, des amplitudes élevées persistent après la réduction du PAPR.

Par contre, les observations des valeurs d'EVM dans la figure 4.7 montrent que très peu de différence existe entre les modes  $1K$  et  $8K$  (moins que 0.1%). Ainsi, la différence observée lors de la comparaison des PDFs n'est pas observée pour les valeurs d'EVM qui dépendent principalement de l'énergie totale des crêtes d'amplitude au delà d'un certain seuil, qui est donc égale dans les cas  $1K$  et  $8K$ . Par contre, la PDF montre la probabilité d'avoir les valeurs de ces crêtes pour chaque amplitude, et offre donc un niveau d'analyse plus détaillé.

### 4.4.3 Analyse du taux d'erreur binaire

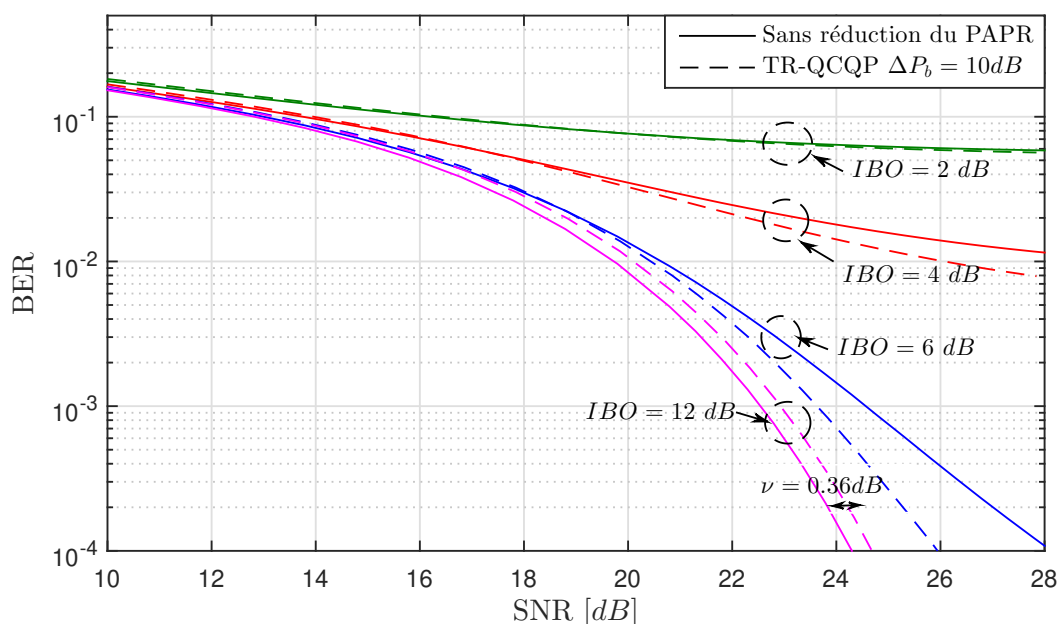


FIGURE 4.9 – BER en fonction du SNR pour différentes valeurs de l'IBO avec et sans l'application de l'algorithme TR-QCQP, canal AWGN, constellation MAQ-64,  $\Delta P_b = 10 \text{ dB}$ , en considérant les symboles en mode  $1K$  et le Modèle II de l'AP

Tableau 4.1 – Valeurs d'EVM en % pour différentes valeurs de l'IBO avec et sans l'application de l'algorithme TR-QCQP à partir des résultats de la Fig. 4.8

IBO	12 dB	6 dB	4 dB	2 dB
sans réduction du PAPR	0.073	6.559	12.97	20.29
TR-QCQP, $\Delta P_b = 10 \text{ dB}$	0	2.782	9.165	16.79

L'EVM mesure le taux de distorsions causées par les non-linéarités de l'AP. Comme mentionné dans le Chapitre 1, les mesures d'EVM peuvent être traduites en mesures du taux d'erreur binaire (BER) en considérant le processus de démappage des points de la constellation utilisée pour un rapport signal sur bruit (SNR) donné. Pour illustrer ce fait, la Fig. 4.9 montre les résultats en BER en fonction du SNR en considérant un canal à bruit additif blanc gaussien ou *Additif White Gaussian Noise* (AWGN) et un signal OFDM avec  $N = 1024$  sous-porteuses OFDM chargées par des symboles de constellation MAQ-64, sans réduction du PAPR et avec réduction du PAPR par l'algorithme TR-QCQP, tel que  $\Delta P_b = 10 \text{ dB}$ . Aucun codage de canal n'est ici appliqué. Lorsque la réduction de PAPR n'est pas mise en oeuvre, toutes les sous-porteuses actives (c.à.d porteuses de données et porteuses aux indices des PRTs) transmettent des données et sont émises avec la même puissance. Lorsque la réduction du PAPR est mise en oeuvre, les PRTs dont le pourcentage est  $\kappa = 1\%$  sont émises avec une puissance additionnelle  $\Delta P_b = 10 \text{ dB}$ . Sans perte de généralité, des valeurs de l'IBO à 2, 4, 6 et 12  $\text{dB}$  sont considérées. Les valeurs d'EVM correspondantes respectives à partir de la Fig. 4.8 sont représentées dans le Tableau 4.1.

En premier lieu, à un IBO de 12  $\text{dB}$  sans réduction du PAPR, l'EVM est approximativement égal à 0 puisque l'AP fonctionne dans sa région linéaire et n'introduit pas de distorsions. Ainsi, les courbes de BER à un tel IBO sont justifiées tel que ce BER ne provient que du bruit AWGN au niveau du canal de propagation, en fonction de la puissance utile émise. En particulier la perte de performances observée lors de la comparaison des cas avec et sans l'application de l'algorithme TR à un IBO de 12  $\text{dB}$  est simplement expliquée à partir de la puissance supplémentaire allouée aux PRTs dans le cas de l'application de l'algorithme. En effet, à puissance émise constante, cela implique que moins de puissance est attribuée aux sous-porteuses de données, et conduit donc à une sensibilité du récepteur plus faible. Comme expliqué dans la section 2.2.2.3, rappelant le pourcentage des PRTs  $\kappa = 1\%$ , pour  $\Delta P_b = 10 \text{ dB}$ , la perte de sensibilité du récepteur est donnée par :

$$\nu = 10 \log_{10} \frac{(100 - \kappa) + \kappa \times 10^{\Delta P_b/10}}{100} \quad (4.42)$$

La perte de sensibilité maximale du récepteur est donc égale à 0,43  $\text{dB}$ . Cependant, l'algorithme QCQP n'utilise pas la puissance maximale autorisée pour toutes les PRTs et la puissance moyenne des PRTs, obtenue par des mesures de cette puissance, est égale à  $\overline{\Delta P_b} = 9,227 \text{ dB}$ , ce qui conduit à une perte de puissance de 0,36  $\text{dB}$  comme observé à partir des courbes de BER obtenues.

D'un autre côté, les valeurs faibles de l'IBO correspondant à un EVM supérieur à 16% conduisent à des taux d'erreur élevés pour la constellation MAQ-64 en raison des niveaux de distorsion importants. Ceci peut être observé par les valeurs de BER saturées avec et sans réduction du PAPR pour un IBO de 2  $\text{dB}$ .

L'impact attendu de la technique TR sur la réduction des distorsions dues à l'amplificateur et ainsi sur le BER apparaît significativement pour un IBO entre 4 et 6  $\text{dB}$ . À ce niveau, l'EVM est dans une plage où la distorsion subie par le signal rapproche les points de la constellation des frontières de décision du démappage MAQ, mais l'application de la technique TR réduit le BER en raison de la réduction de l'EVM. Par exemple, à un IBO de 6  $\text{dB}$ , la technique TR-QCQP ne compense pas seulement la perte de puissance du récepteur (de valeur 0.36 $\text{dB}$ ), mais offre également un gain en SNR de 2  $\text{dB}$

supplémentaires pour un BER de  $10^{-4}$ .

Des résultats similaires ont été obtenus pour des ordres de constellation supérieurs. Cependant, l'impact de la technique TR apparaît significativement pour les valeurs d'IBO plus élevées avec ces ordres de constellation supérieurs. En effet, augmenter l'ordre des constellations signifie une sensibilité croissante à l'EVM à cause du rapprochement des zones de décision, et donc un intérêt à des niveaux d'IBO plus élevés.

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, une étude analytique de l'algorithme TR-QCQP a été détaillée. En premier lieu, la PDF du signal OFDM temporel après l'application de cet algorithme a été étudiée en fonction de la contrainte de puissance des PRTs pour les modes  $1K$  et  $8K$ . Ensuite, par une analyse du comportement de l'algorithme pour chaque symbole OFDM, un modèle adéquat de cette PDF a été proposé et validé par rapport à la PDF simulée. Ainsi, à partir du modèle de la PDF, une formule générale de ses moments incomplets inférieurs et supérieurs est dérivée afin de l'intégrer dans l'expression de l'EVM.

L'expression de l'EVM du signal OFDM amplifié lors de l'application de la technique TR-QCQP est donc donnée en forme fermée en fonction des paramètres du système sur les différents intervalles de valeurs de l'IBO. Cette expression est validée en comparaison aux valeurs d'EVM obtenues par des simulations du signal OFDM. Cette expression est simple à évaluer en particulier pour les faibles à moyennes valeurs de l'IBO qui constituent la zone d'étude la plus intéressante. En outre, cette expression dépend directement de l'IBO, ce qui aide à l'évaluation du compromis entre l'IBO et l'EVM lors de la conception du système, soit à déterminer la valeur de l'IBO minimal de l'AP afin de garantir un niveau d'EVM fixé.

Cette expression a été ensuite exploitée pour analyser les performances en EVM de la technique TR-QCQP. Premièrement, une comparaison par rapport à la technique *clipping* montre l'effet des distorsions ajoutées par la technique *clipping* pour des valeurs élevées de l'IBO où l'AP n'apporte plus de distorsions. Pour ces valeurs, l'EVM dans le cas de l'application de la technique TR-QCQP est nul tandis qu'il atteint un plancher constant pour le cas de la technique *clipping*. Ensuite, l'effet de la contrainte imposée sur la puissance des PRTs est étudié en démontrant que lorsque la puissance allouée aux PRTs est plus élevée, les performances en EVM s'améliorent jusqu'à atteindre la limite inférieure d'EVM qui correspond au cas sans contrainte de puissance. De plus, une comparaison des modes  $1K$  et  $8K$  montre des performances en EVM presque identiques pour ces deux modes malgré la différence qui existe entre les PDFs correspondantes respectives, puisque l'EVM dépend avant tout de l'énergie totale au dessus d'un seuil d'amplitude. Enfin, des études des performances du système en terme de taux d'erreur binaire ont été menées pour les différentes valeurs de l'EVM afin de montrer la réduction du BER apportée par la réduction du PAPR.

Ainsi, l'algorithme optimal TR-QCQP a été théoriquement étudié en détails, l'intérêt du chapitre suivant sera d'étudier les algorithmes sous-optimaux de la technique TR.

# Chapitre 5

## Étude de l'EVM dans le cas de l'application d'algorithmes sous-optimaux

### 5.1 Introduction

Comme déjà mentionné, l'algorithme QCQP est l'algorithme optimal pour la réduction du PAPR par la technique TR mais reste très complexe à implémenter dans les systèmes réels. Pour cette raison, les standards considèrent plutôt des algorithmes sous-optimaux dont la mise en oeuvre est compatible avec les contraintes de complexité des équipements matériels. Par exemple, les standards DVB-T2 et ATSC 3.0 considèrent l'algorithme du gradient qui offre un bon compromis complexité - efficacité de réduction du PAPR grâce au calcul assez simple du noyau TR au niveau des émetteurs. D'autre part, des algorithmes simplifiés et performants tels que l'algorithme GICMP ont été récemment proposés dans la littérature [79] et atteignent des performances prometteuses par rapport à la solution du gradient en conservant la simplicité attendue. Dans cette optique, ce chapitre s'intéresse à l'analyse de quelques-uns des algorithmes sous-optimaux de la technique TR et au calcul théorique de l'EVM qui en découle, conformément à la méthodologie établie dans cette thèse.

Premièrement, nous nous intéressons donc au cas des signaux OFDM amplifiés avec application de la réduction du PAPR basée sur l'algorithme du gradient. En suivant les propositions du Chapitre 4, la PDF de l'amplitude du signal après réduction du PAPR est d'abord analysée puis modélisée en fonction du seuil d'amplitude utilisé, qui représente le paramètre de réglage principal de l'algorithme du gradient. Le modèle statistique obtenu, qui est l'ingrédient essentiel à l'obtention de l'EVM théorique selon notre approche, est ensuite utilisé pour déterminer l'expression formelle de l'EVM. Par conséquent, en complément à l'expression de l'EVM donnée dans le Chapitre 4 pour l'algorithme QCQP, non implémentable en pratique, l'expression de l'EVM est donnée dans ce chapitre pour l'algorithme du gradient sous-optimal.

La deuxième partie du chapitre propose ensuite d'étudier l'algorithme sous-optimal de type GICMP récemment proposé dans la littérature, et qui fournit de très bonnes performances par rapport à l'algorithme du gradient standard avec une complexité réduite. En suivant la même démarche que celle utilisée pour l'algorithme QCQP et l'algorithme

du gradient, la PDF du signal temporel dans le cas de l'algorithme GICMP est étudiée et les éléments de l'analyse et de la modélisation de cette PDF sont donnés.

L'ensemble de ces analyses permet d'effectuer des comparaisons globales de performances entre les algorithmes sélectionnés, à partir des calculs théoriques d'EVM obtenus.

## 5.2 Étude des performances de l'algorithme du gradient

### 5.2.1 Analyse de la PDF du signal temporel après l'application de l'algorithme du gradient

Comme détaillé dans le Chapitre 2, l'algorithme du gradient vise à réduire les amplitudes crêtes supérieures à un seuil prédéfini  $V_{clip}$ , et ce, en maintenant la puissance des PRTs inférieure à la contrainte  $\Delta P_b$  imposée et sans dépasser un nombre d'itérations maximal  $I_{max}$ . En premier lieu, la PDF empirique du signal OFDM temporel après l'application de l'algorithme du gradient est donc analysée. La Fig. 5.1 montre cette PDF pour différentes valeurs de  $V_{clip}$  en utilisant le mode 8K et les positions des PRTs correspondantes définies dans le standard DVB-T2, en considérant une contrainte de puissance  $\Delta P_b = 10 \text{ dB}$  et un nombre d'itérations limité à  $I_{max} = 50$ . Ces paramètres sont sélectionnés comme étant les valeurs typiquement utilisées dans le standard DVB-T2.

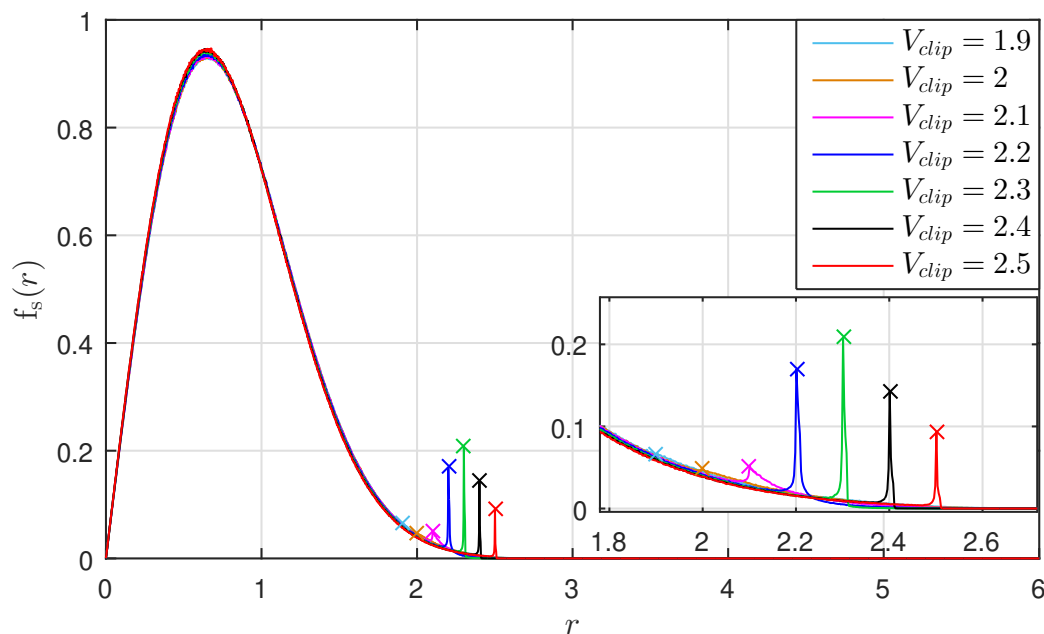


FIGURE 5.1 – PDF de l'amplitude du signal OFDM temporel après l'application de l'algorithme du gradient avec différentes valeurs de  $V_{clip}$ ,  $I_{max} = 50$ ,  $\Delta P_b = 10 \text{ dB}$ , mode 8K - PDF normalisée tel que  $P_s = 1$

À partir de cette figure, il est remarqué que l'algorithme commence à impacter de façon significative la distribution à partir de  $V_{clip} = 2.1$ , tandis que pour les valeurs

## 5.2. Étude des performances de l'algorithme du gradient

Tableau 5.1 – Statistiques sur les conditions de sortie de l'algorithme du gradient pour différentes valeurs de  $V_{clip}$  avec  $I_{max} = 50$ ,  $\Delta P_b = 10$  dB, mode 8K

$V_{clip}$	$N_I$	$N_V$	$I_V$	$N_P$	$I_P$	$P_{max}$
1.7	0	0	–	10000	5.15	10
1.8	0	0	–	10000	5.61	10
1.9	0	0	–	10000	6.48	10
2.0	5	0	–	9995	8.51	10
2.1	666	25	44.76	9309	13.76	10
2.2	1524	3553	36.25	4932	17.54	10
2.3	70	9014	21.99	916	16.15	10
2.4	0	9921	11.05	79	12.22	9.4852
2.5	0	9993	5.88	7	9.85	9.2128
2.6	0	10000	3.36	0	–	3.1247
2.7	0	10000	2.18	0	–	2.7118

inférieures de  $V_{clip}$ , la PDF est très peu modifiée et reste similaire à la loi de Rayleigh qui caractérise le signal OFDM d'origine. L'effet de l'algorithme du gradient apparaît donc dans la réduction de l'amplitude des échantillons au-dessus de  $V_{clip}$  en les contraignant à une amplitude de valeur  $V_{clip}$ . Ceci conduit donc à la réduction des amplitudes crêtes du signal, mais l'effet n'est véritablement effectif que pour les valeurs relativement élevées de  $V_{clip}$ , compte-tenu de la sous-optimalité de l'algorithme.

Pour aller plus loin dans l'analyse du fonctionnement de l'algorithme, le Tableau 5.1 regroupe les statistiques obtenues concernant les paramètres de l'algorithme pour les différentes valeurs de  $V_{clip}$  pour un total de 10000 symboles OFDM.  $N_V$ ,  $N_P$  et  $N_I$  représentent le nombre de symboles OFDM pour lequel l'algorithme prend fin, selon les critères d'arrêts suivants : (i) car tous les échantillons du signal sont au-dessous de  $V_{clip}$ , (ii) car la puissance maximale est atteinte ou (iii) car le nombre maximal d'itérations est atteint.  $I_V$  et  $I_P$  représentent le nombre moyen d'itérations exécutées par l'algorithme avant de s'arrêter à cause des critères (i) et (ii) respectivement.  $P_{max}$  représente la puissance maximale atteinte par une PRT lors de l'application de la technique du gradient.

### Analyse pour les valeurs élevées de $V_{clip}$

À partir des valeurs du Tableau 5.1, on peut remarquer que l'algorithme réussit à réduire un pourcentage élevé des amplitudes des symboles au-dessus de  $V_{clip}$  pour les valeurs relativement élevées de  $V_{clip}$  sans dépasser la limite de puissance allouée. Cet effet apparaît à partir de  $V_{clip} = 2.5$  où l'algorithme réussit sa tâche pour 9993 symboles OFDM parmi 10000 ce qui représente un pourcentage de symboles très élevé. Ceci reflète la faisabilité de l'algorithme pour ces valeurs élevées de  $V_{clip}$  pour  $\Delta P_b = 10$  dB. Par contre, malgré la convergence rapide de l'algorithme pour ces valeurs de  $V_{clip}$ , il est important de noter que si la valeur de  $V_{clip}$  est trop élevée, l'algorithme n'est plus efficace puisque ces valeurs élevées de  $V_{clip}$  ne permettent pas une réduction du fort PAPR du signal OFDM. En effet, l'amplitude maximale ciblée est élevée et l'algorithme ne réduit dans ce cas que les amplitudes très élevées. Ceci est observé par les valeurs de la puissance maximale  $P_{max}$  atteintes par une PRT, qui sont relativement faibles pour les valeurs élevées de

$V_{clip}$ . Par exemple, pour  $V_{clip} = 2.6$ ,  $P_{max} = 3.1247$  tandis que pour les valeurs de  $V_{clip}$  inférieures à 2.4, la puissance allouée qui est égale à  $10^{\Delta P_b/10} = 10$  est toujours atteinte. Ceci reflète donc l'effet mineur de l'algorithme dans les cas des fortes valeurs de  $V_{clip}$ . Cet effet est en outre reflété par le nombre moyen d'itérations avant de réussir à réduire tous les symboles au-dessous de  $V_{clip}$ , comme l'exemple de  $V_{clip} = 2.6$  où le nombre moyen d'itérations est  $I_V = 3.36$ . Tous ces éléments montrent donc qu'il n'y a pas d'intérêt à appliquer l'algorithme du gradient pour les valeurs élevées de  $V_{clip}$  et que l'analyse de ses performances devrait être faite pour des valeurs de  $V_{clip}$  typiquement inférieures à 2.5.

### Analyse pour les faibles valeurs de $V_{clip}$

À partir du Tableau 5.1, nous remarquons à présent que pour les valeurs inférieures de  $V_{clip}$  telles que  $V_{clip} = 2.1$ , l'algorithme réussit sa tâche pour seulement 25 symboles, alors que pour le reste des symboles, l'algorithme dépasse soit la limite de puissance soit le nombre maximum d'itérations avant de réussir à réduire tous les échantillons sous ce seuil. En effet, pour des faibles valeurs de  $V_{clip}$ , une grande différence en amplitude existe entre les valeurs crêtes du signal OFDM et la valeur de  $V_{clip}$  ciblée. Ainsi, la contrainte de puissance des PRTs est atteinte après quelques itérations (par exemple, d'après le Tableau 5.1, en moyenne  $I_{max} = 6.48$  itérations pour  $V_{clip} = 1.9$ ), et l'algorithme s'arrête en ne réduisant que les plus fortes crêtes dans la limite de puissance permise. Notons que la valeur  $N_P = 10000$  pour  $V_{clip} = 1.7, 1.8$  et  $1.9$  vient à l'appui de cette analyse puisque l'algorithme s'arrête pour la totalité des symboles car la contrainte de puissance est atteinte. Ceci explique ainsi le fait que la PDF du signal de sortie ne soit pas modifiée, comme visualisé par les courbes de la Fig. 5.1 lorsque  $V_{clip} \leq 2$ . L'algorithme dans ces cas devient donc inefficace et son utilisation ne bénéficie pas des avantages du mécanisme de l'algorithme du gradient dans la réduction du PAPR. Cela signifie que l'algorithme ne doit pas être utilisé avec des valeurs trop faibles de  $V_{clip}$  pour lesquelles l'algorithme ne converge pas correctement.

### Analyse des valeurs intermédiaires de $V_{clip}$ où l'algorithme est efficace

D'après les analyses précédentes, nous concluons que l'algorithme du gradient doit être utilisé pour des valeurs intermédiaires de  $V_{clip}$ . En effet, pour ces valeurs telles que  $V_{clip} = 2.3$ , l'effet de l'algorithme apparaît sur la PDF du signal OFDM et comme prévu, les amplitudes crêtes sont réduites à la valeur  $V_{clip}$ . D'après le Tableau 5.1, l'algorithme se comporte correctement pour  $N_V = 9014$  symboles, ce qui représente un pourcentage très élevé de symboles. Cependant, pour  $N_P = 916$  symboles, la contrainte de puissance des PRTs est atteinte avant de réduire tous les échantillons à  $V_{clip}$ .

Par contre, pour un certain nombre de symboles, soit par exemple  $N_I = 70$  pour  $V_{clip} = 2.3$ , il n'est pas possible de réduire tous les pics au-dessous de  $V_{clip}$  avec l'algorithme du gradient, même en augmentant le nombre d'itérations. Pour ces configurations, lors de la réduction d'un pic, les imperfections du noyau aboutissent à la naissance de nouveaux pics au-dessus de  $V_{clip}$ , et cet effet perdure tant que l'algorithme itère. Dans ces cas de configuration, l'algorithme du gradient n'atteint pas son objectif même avec une contrainte de puissance suffisamment élevée. Ainsi, pour ces valeurs intermédiaires de  $V_{clip}$ , l'algorithme devient inefficace pour certaines configurations de symboles puisque l'hypothèse d'un noyau parfait de type Dirac, sur lequel est basé l'algorithme, n'est pas strictement valide.

### 5.2.2 Modélisation de la PDF du signal temporel après l'application de l'algorithme du gradient

Dans la section précédente, il a été démontré que l'algorithme du gradient doit être utilisé avec des valeurs de  $V_{clip}$  supérieures à 2.1 afin que l'algorithme soit efficace. À partir des courbes de la Fig. 5.1, pour  $V_{clip} > 2.1$ , on observe que la distribution est composée de deux modes principaux. Le premier mode suit la loi de Rayleigh qui caractérise le signal OFDM d'origine, qui est tronquée à l'amplitude  $V_{clip}$ , tandis que le second mode reflète le nombre d'échantillons autour de  $V_{clip}$  qui résultent du fonctionnement de l'algorithme.

Ainsi, il est proposé de modéliser la PDF du signal  $s(t)$  comme une superposition de deux fonctions. La première est la distribution de Rayleigh tronquée à l'amplitude  $V_{clip}$  et la seconde est modélisée par une impulsion de Dirac localisée à la valeur  $V_{clip}$ . Cette modélisation consiste à considérer uniquement les échantillons ayant la valeur  $V_{clip}$  sans considérer les amplitudes autour de  $V_{clip}$  résultant de la réduction des crêtes apportée par l'algorithme. Cette analyse conduit donc à la proposition suivante.

**Proposition 5.1.** *La PDF du signal  $s(t)$  après l'application de l'algorithme du gradient peut être modélisée comme :*

$$f_s^{\text{Grad}}(r) = \frac{(1-p)}{p'} f_{\text{Ray}}(r; P_r')(1 - u(r - V_{clip})) + p \delta(r - V_{clip}) \quad (5.1)$$

où  $p$  est le rapport entre les échantillons ayant une amplitude égale à  $V_{clip}$  et le nombre total des échantillons,  $p'$  est le facteur de normalisation qui assure que l'intégrale du premier mode est égal à 1,  $f_{\text{Ray}}(r; P_r')$  est la distribution de Rayleigh de puissance  $P_r'$ ,  $u(r)$  est la fonction échelon unité et  $\delta(r)$  est l'impulsion de Dirac.

Comme observé sur la Fig. 5.1, cette modélisation est valable pour des valeurs de  $V_{clip}$  supérieures à 2.2, qui définit le début de la zone d'intérêt de l'algorithme où il est véritablement efficace. La validité de cette approximation sera étudiée ultérieurement lors de l'étude des résultats théoriques d'EVM.

Pareillement au cas de l'algorithme QCQP, les résultats de simulations montrent que la valeur  $P_r$  du paramètre de puissance de la fonction de Rayleigh est presque égale à celle de  $P_s$ , la puissance moyenne du signal OFDM d'origine. En effet, les simulations montrent que la puissance moyenne des échantillons au dessous de  $V_{clip}$  est conservée bien que l'algorithme du gradient modifie les valeurs de ces échantillons. En outre, le Tableau 5.2 donne les valeurs du facteur  $p$  pour une puissance  $P_s$  normalisée à 1. Ces valeurs sont considérées comme des valeurs de référence pour le modèle statistique proposé.

Tableau 5.2 – Valeurs du facteur  $p$  pour différentes valeurs de  $V_{clip}$  en considérant une puissance  $P_s$  normalisée à 1,  $\Delta P_b = 10$  dB,  $I_{max} = 50$ , mode 8K

$V_{clip}$	2	2.1	2.2	2.3	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7
$p[\times 10^{-3}]$	0.1244	0.1386	0.4062	0.8733	0.4948	0.3773	0.2442	0.1526	0.0952



### 5.2.3 Expression des moments de $f_s^{\text{Grad}}(r)$ et expression de l'EVM en appliquant l'algorithme du gradient

#### 5.2.3.1 Calcul des moments de $f_s^{\text{Grad}}(r)$

À cette étape, après la proposition du modèle de  $f_s^{\text{Grad}}(r)$ , le calcul des moments de cette PDF est mené. D'après la propriété de linéarité des moments de la PDF, le calcul des moments se fait par simple intégration des deux modes de la PDF. En utilisant les propriétés d'intégration issues de [121, Sec. 8.35, p. 899] pour la distribution de Rayleigh et l'intégrale issue de [121, Sec. 15.3, p. 1200] pour la fonction de Dirac, l'expression des moments de  $f_s^{\text{Grad}}(r)$  peut simplement être exprimée comme dans le lemme suivant.

**Lemme 5.1.** *Les moments inférieurs et supérieurs de  $f_s^{\text{Grad}}(r)$  d'ordre  $n$  à une limite  $\varphi$  peuvent être exprimés par :*

$$\begin{cases} m_s^{\text{Grad}}(n, \varphi) = \frac{1-p}{p'} \gamma\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{\varphi^2}{P'_{r1}}\right), & \text{si } \varphi \leq V_{clip} \\ m_s^{\text{Grad}}(n, \varphi) = \frac{1-p}{p'} \gamma\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{V_{clip}^2}{P'_{r1}}\right) + p V_{clip}^n, & \text{si } \varphi > V_{clip} \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\begin{cases} M_s^{\text{Grad}}(n, \varphi) = \frac{1-p}{p'} \left[ \gamma\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{V_{clip}^2}{P'_{r1}}\right) - \gamma\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{\varphi^2}{P'_{r1}}\right) \right] + p V_{clip}^n, & \text{si } \varphi \leq V_{clip} \\ M_s^{\text{Grad}}(n, \varphi) = 0, & \text{si } \varphi > V_{clip} \end{cases} \quad (5.3)$$

#### 5.2.3.2 Expression de l'EVM

À partir de cette expression des moments, en appliquant le Lemme 3.1, l'EVM dans le cas de l'application de l'algorithme du gradient peut être exprimé comme dans le théorème suivant.

**Théorème 5.1.** *L'EVM du signal OFDM amplifié, après l'application de l'algorithme de gradient pour la réduction du PAPR, en considérant un modèle polynomial de l'AP, peut être exprimée par :*

$$\begin{aligned} EVM^{TR} &= \sqrt{2} \left(1 - \eta^{TR}\right)^{1/2} \quad \text{avec} \\ \eta^{TR} &= \frac{\sum_{l=0}^{L-1} u_l \rho_{IBO}^{-(\alpha_1 - \frac{1}{2})} M_{1,q} + A_{in,sat_q} M_{3,q}}{\left(\sum_{q=0}^Q \left(\sum_{l,l'=0}^{L-1} v_{q,l} \rho_{IBO}^{-\alpha_2} M_{2,q} + A_{in,sat_q}^2 M_{4,q}\right)\right)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

avec  $\{M_{i,q}\}_{1 \leq i \leq 4; 0 \leq q \leq Q}$  exprimés, selon la valeur de l'IBO, comme suit :

$$- Si \rho_{IBO} \in \left( -\infty; \lambda_q \frac{V_{clip}^2}{P_s} \right) \quad (5.5)$$

$$M_{i,q} = \frac{1}{P_s^{\alpha_i}} \frac{1-p}{p'} \gamma \left( \alpha_i + 1, \frac{\varphi_q^2}{P_{r1}'} \right), \quad i = \{1, 2\}$$

$$M_{3,q} = \frac{1}{P_s^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{1-p}{p'} \left( \gamma \left( \frac{3}{2}, \frac{V_{clip}^2}{P_{r1}'} \right) - \gamma \left( \frac{3}{2}, \frac{\varphi_q^2}{P_{r1}'} \right) \right) + p V_{clip}^2 \right),$$

$$M_{4,q} = \frac{1-p}{p'} \left( e^{-\frac{V_{clip}^2}{P_{r1}'}} - e^{-\frac{\varphi_q^2}{P_{r1}'}} \right).$$

$$- Si \rho_{IBO} \in \left[ \lambda_q \frac{r_{max}^2}{P_s}; \infty \right) \quad (5.6)$$

$$M_{i,q} = \frac{1}{P_s^{\alpha_i}} \left( \frac{1-p}{p'} \gamma \left( \frac{\alpha_i}{2} + 1, \frac{V_{clip}^2}{P_{r1}'} \right) + p V_{clip}^n \right), \quad i = \{1, 2\}$$

$$M_{3,q} = 0; \quad M_{4,q} = 0,$$

avec  $\lambda_q = \frac{P_{1dB}}{A_{in,sat_q}^2}$ ,  $\varphi_q$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  définis dans le Lemme 3.1 et  $w_n$ ,  $w'_n$  définis respectivement dans les Lemmes 4.1 et 4.2.

Par une analyse équivalente à celle de l'expression de l'EVM dans le cas de l'application de l'algorithme QCQP, notons que la zone d'intérêt pour l'étude du système correspond aux valeurs relativement élevées de l'IBO, soit appartenant à l'intervalle  $\left[ \lambda_q \frac{r_{max}^2}{P_s}; \infty \right)$ . Dans cet intervalle il est remarqué que l'expression de l'EVM est simplifiée et ne requière que le calcul de  $M_1$  et  $M_2$  qui ne dépendent dans cet intervalle ni de l'ordre de mémoire, ni de la valeur de l'IBO.

## 5.2.4 Performances de l'algorithme du gradient

Dans cette section, les résultats numériques de l'EVM en appliquant l'algorithme du gradient sont analysés. Tout d'abord, la validité de l'expression théorique proposée de l'EVM est discutée en comparant les résultats de simulation aux résultats théoriques. Ensuite, une analyse des performances de l'algorithme du gradient est menée afin d'étudier ses paramètres optimaux pour le standard DVB-T2. Enfin, l'algorithme du gradient est comparé à l'algorithme optimal TR-QCQP afin d'évaluer le compromis complexité/efficacité à réduire le PAPR de ces deux algorithmes.

Dans ce qui suit, lors de l'évaluation des valeurs numériques de l'EVM, le Modèle II de l'AP est considéré. Rappelons que ce modèle représente le modèle polynomial sans mémoire dont les coefficients sont obtenus par identification de la caractéristique de l'AP de Rapp avec un facteur de raideur  $b = 6$  (cf. Chapitre 3).

### 5.2.4.1 Validité de l'expression de l'EVM

La Fig. 5.2 présente les courbes d'EVM théorique et simulée en fonction de l'IBO en appliquant l'algorithme du gradient, avec une contrainte de puissance des PRTs  $\Delta P_b = 10$  dB,  $I_{max} = 50$  et différentes valeurs de  $V_{clip}$ . Comme on peut le voir, les résultats

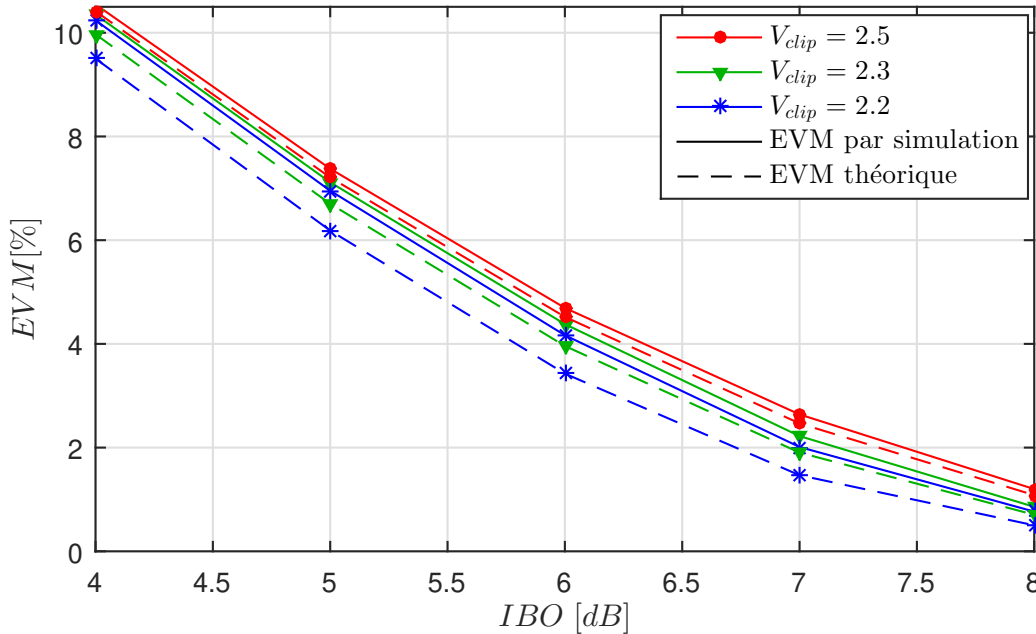


FIGURE 5.2 – Courbes d'EVM obtenues théoriquement et par simulations en fonction de l'IBO avec l'application de l'algorithme du gradient, pour différentes valeurs de  $V_{clip}$ ,  $\Delta P_b = 10$  dB,  $I_{max} = 50$ , mode 8K et en considérant le Modèle II de l'AP

analytiques montrent une bonne correspondance avec l'EVM simulée pour des valeurs élevées de  $V_{clip}$ . Plus précisément, la différence entre l'EVM théorique et simulée est inférieure à 0.2% pour des valeurs de  $V_{clip}$  supérieures ou égales à 2.3. De même, une différence inférieure à 0.9% est observée pour  $V_{clip} = 2.2$ . Cette différence est causée par les valeurs résiduelles se situant autour de  $V_{clip}$ . Par contre, notons que des différences plus importantes sont remarquées pour les valeurs de  $V_{clip}$  plus faibles où l'algorithme du gradient ne réussit pas à ramener les échantillons à l'amplitude du seuil  $V_{clip}$  de façon efficace. Dans ce cas, l'effet de l'approximation dans le modèle de la PDF devient visible et cette approximation n'est plus valide.

Il est donc conclu que l'approximation est valide pour  $V_{clip} \geq 2.3$ . D'après l'analyse de la PDF dans 5.2.1 cette condition correspond à la zone la plus intéressante du fonctionnement de l'algorithme du gradient pour qu'il soit efficace.

#### 5.2.4.2 Étude du seuil d'amplitude $V_{clip}$ pour le standard DVB-T2

Comme mentionné ci-dessus, la norme DVB-T2 spécifie une contrainte de puissance pour la réduction du PAPR à  $\Delta P_b = 10$  dB. Afin de garantir un algorithme implémentable sur les stations de base avec des délais acceptables, le nombre d'itérations doit être inférieur à  $I_{max}$  qui est limité à 50 itérations. En se basant sur les conditions d'arrêt de l'algorithme dans le Tableau 5.1, les performances de l'algorithme du gradient du standard DVB-T2 sont analysées dans ce qui suit en termes d'EVM. La Fig. 5.3 montre les valeurs d'EVM en fonction de  $V_{clip}$  pour différentes valeurs de l'IBO en utilisant le paramétrage du standard DVB-T2 décrit ci-dessus en utilisant les positions des PRTs qui y sont définies pour le mode 8K, avec  $I_{max} = 50$  et en considérant le Modèle II de l'AP.

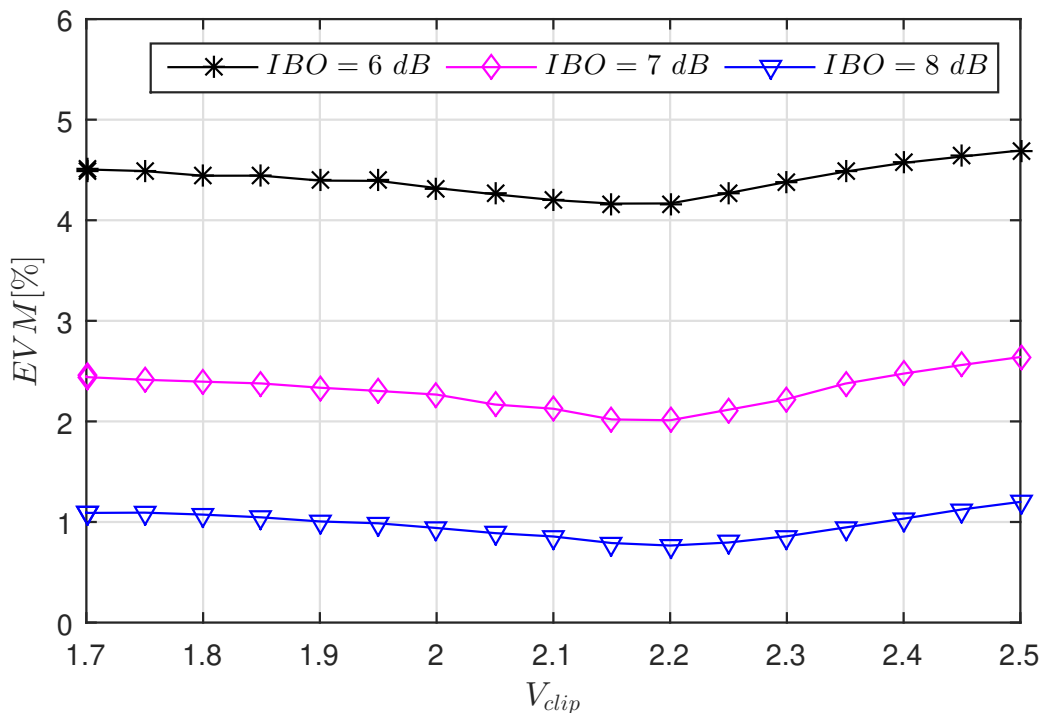


FIGURE 5.3 – EVM en fonction de  $V_{clip}$  pour différentes valeurs de l'IBO en utilisant l'algorithme du gradient du standard DVB-T2,  $\Delta P_b = 10$  dB,  $I_{max} = 50$ , mode 8K et en considérant le Modèle II de l'AP

Comme on peut le voir, les meilleures performances de l'algorithme sont obtenues pour  $V_{clip} = 2.2$ . Comme expliqué précédemment, malgré la faisabilité de l'algorithme pour des valeurs supérieures de  $V_{clip}$ , le PAPR n'est pas suffisamment diminué pour de telles valeurs. Par contre, comme détaillé précédemment, pour des valeurs de  $V_{clip}$  inférieures à 2.2, la contrainte de puissance est rapidement atteinte en raison de la grande différence entre  $V_{clip}$  et les pics les plus élevés détectés. Entre ces deux cas opposés, la Fig. 5.3 montre que  $V_{clip} = 2.2$  fournit le meilleur compromis entre l'utilisation de la puissance autorisée des PRTs et la réduction efficace des pics.

Cependant, il est important de noter ici que de faibles changements d'EVM sont remarqués entre les différentes valeurs de  $V_{clip}$  et l'amélioration de performances en EVM apportée par l'algorithme du gradient reste modeste. Ainsi, malgré la simplicité de l'algorithme du gradient, ses performances modestes nous conduisent à nous intéresser à des algorithmes plus efficaces tels que l'algorithme GICMP analysé dans la suite de ce chapitre.

### 5.3 Étude et performances de l'algorithme GICMP

Comme expliqué dans le Chapitre 2, bien que l'algorithme du gradient soit décrit par les standards DVB-T2 et ATSC3.0, l'algorithme GICMP est un algorithme plus prometteur qui offre un niveau plus élevé de réduction du PAPR en conservant une simplicité comparable à celle de l'algorithme du gradient. Pour cela, le reste de ce chapitre s'intéresse à

l'étude de l'algorithme GICMP, sous-optimal mais prometteur de la technique TR.

Rappelons que l'algorithme GICMP consiste à utiliser un noyau sous forme de peigne afin de réduire plusieurs pics d'amplitude par itération. Les amplitudes des PRTs sont égales à la puissance maximale  $P_{max}$  allouée et le rôle de l'algorithme est de déterminer la phase du noyau constitué par ces PRTs. Ainsi, un avantage essentiel de l'algorithme est qu'il bénéficie de la totalité de la puissance allouée à la réduction du PAPR  $\Delta P_b$ . Le calcul est basé sur la détection des  $S$  pics d'amplitude les plus élevés et se fait selon  $G$  sous-groupes de PRTs où  $G$  constitue le nombre d'itérations de l'algorithme.

### 5.3.1 Étude de la PDF $f_s(r)$ en appliquant l'algorithme GICMP

En premier lieu, la PDF de l'amplitude du signal  $s(t)$  est examinée afin de comprendre le comportement de l'algorithme dans la réduction des crêtes. La Fig. 5.4 montre cette PDF pour le cas où  $S = 80$ ,  $G = 8$  et  $\Delta P_b = 10$  dB. Une normalisation de la PDF est considérée tel que  $P_s = 1$ . Ces paramètres constituent les paramètres optimaux du fonctionnement de l'algorithme choisis dans [80]. Afin de bien situer la PDF, les courbes de PDF sans réduction du PAPR et avec l'application de l'algorithme QCQP, où  $\Delta P_b = 10$  dB, déjà obtenue dans le Chapitre 4 pour le mode  $1K$ , sont de plus montrées (notons que la PDF de l'amplitude du signal OFDM ainsi que les performances en EVM ne dépendent pas du nombre de sous-porteuses dans le cas où aucune réduction du PAPR n'est appliquée).

Comme remarqué, c'est une distribution bimodale dont le mode principal se situe aux faibles amplitudes et le mode secondaire correspond aux amplitudes relativement élevées. En comparaison au second mode dans le cas de l'algorithme QCQP, ce mode secondaire correspond à une plage plus allongée située à des valeurs d'amplitudes inférieures et donc les crêtes réduites sont substituées par des amplitudes plus faibles que celles qui

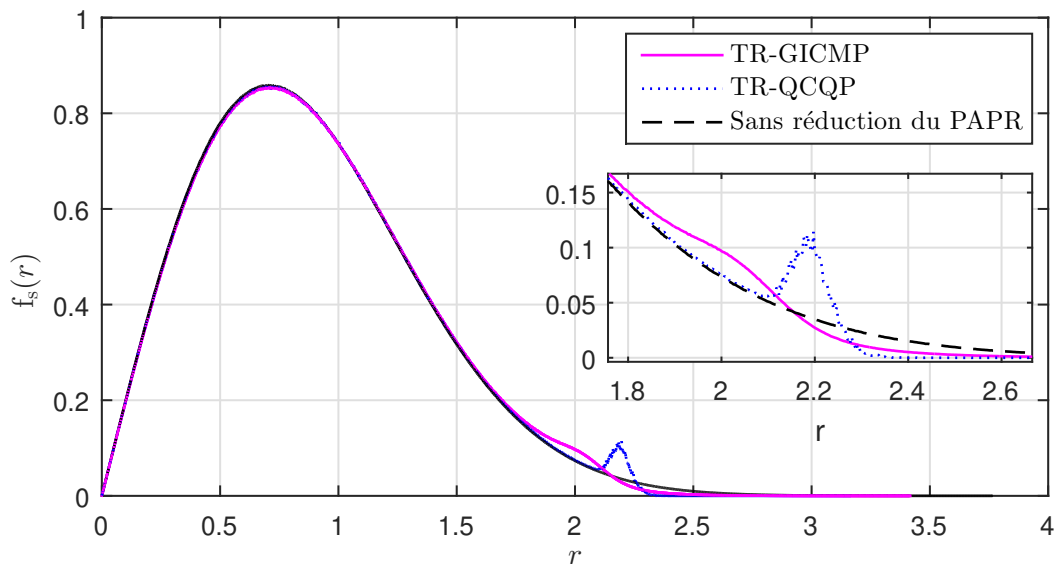


FIGURE 5.4 – PDF de l'amplitude du signal OFDM avec l'application de l'algorithme GICMP avec  $S = 80$ ,  $G = 8$  et  $\Delta P_b = 10$  dB en mode  $8K$ , comparée aux PDFs en appliquant l'algorithme QCQP avec  $\Delta P = 10$  dB en  $1K$  et sans réduction de PAPR normalisées telles que  $P_s = 1$

apparaissent dans le cas du QCQP. Par contre, en observant les valeurs de la PDF autour de  $r = 2.4$ , il est remarqué que l'algorithme QCQP apporte plus de réduction de la probabilité des pics d'amplitude les plus élevés.

### 5.3.2 Analyse de la PDF et de l'EVM sous l'effet des différents paramètres de l'algorithme

Dans ce qui suit, l'effet des différents paramètres de l'algorithme GICMP sur la PDF ainsi que son effet sur les valeurs de l'EVM sont étudiés afin de fournir une analyse plus globale de la forme de cette PDF pour différents paramétrages de l'algorithme.

Les résultats obtenus dans cette section concernent le signal OFDM en appliquant l'algorithme GICMP en mode  $8K$ . Les PDFs sont normalisées tel que  $P_s = 1$  et les résultats en EVM considèrent le Modèle II de l'AP.

#### 5.3.2.1 Effet de la contrainte de puissance $\Delta P_b$

Afin d'évaluer l'impact de la puissance allouée aux PRTs sur le fonctionnement de l'algorithme, la Fig. 5.5 (a) montre la PDF de l'amplitude du signal  $s(t)$  après l'application de l'algorithme GICMP avec  $S = 80$  et  $G = 8$  pour le cas de l'application de différentes contraintes de puissance  $\Delta P_b = 5, 10$  ou  $15$  dB. La Fig. 5.5 (b) montre les courbes d'EVM correspondantes respectives obtenues par simulations. Comme prévu, pour des valeurs plus élevées de  $\Delta P_b$ , on observe une réduction plus importante de l'EVM. Cet effet est visualisé sur les courbes de PDFs en remarquant que les amplitudes crêtes les plus élevées sont bien réduites dans les trois cas. Cependant, ces valeurs font apparaître un second mode autour de  $r = 2.2$  pour  $\Delta P_b = 5$  dB, tandis que ce second mode est distribué sur des valeurs inférieures de  $r$  pour  $\Delta P_b = 10$  dB. Ce second mode ajouté correspond à des amplitudes encore plus faibles pour  $\Delta P_b = 15$  dB et est distribué sur une plage plus large. Ceci conduit donc à plus de réduction de l'EVM en allouant plus de

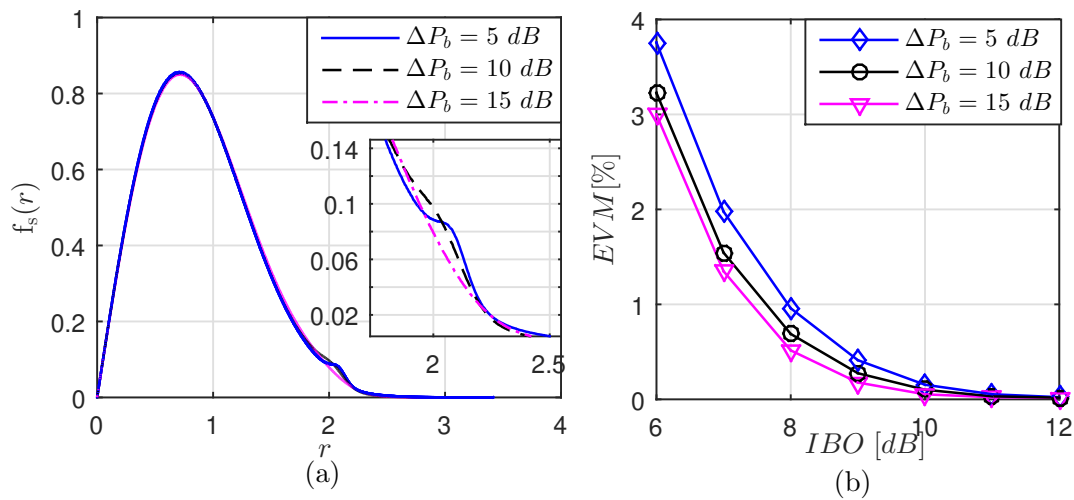


FIGURE 5.5 – PDF de l'amplitude du signal OFDM en appliquant l'algorithme GICMP pour différentes valeurs de  $\Delta P_b$  avec  $S = 80$ ,  $G = 8$ , mode  $8K$  (a) et courbes d'EVM correspondantes obtenues par simulations en considérant le Modèle II de l'AP (b)

puissance aux PRTs puisque l'effet de la réduction du PAPR conduit à des amplitudes inférieures pour des valeurs  $\Delta P_b$  élevées.

Par ailleurs, notons qu'une augmentation supérieure de la puissance des PRTs avec des valeurs de  $\Delta P_b$  au delà de 15 dB n'améliore pas les performances et même les dégrade. En effet, une augmentation trop importante de la puissance des PRTs contribue à augmenter la puissance du noyau sans pour autant contribuer à diminuer les amplitudes crêtes du signal résultant.

### 5.3.2.2 Effet du nombre $S$ de crêtes détectées à chaque itération

En ce qui concerne le nombre  $S$  de crêtes détectées à chaque itération, la Fig. 5.6 (a) montre la PDF de l'amplitude du signal OFDM en appliquant l'algorithme GICMP pour différentes valeurs de  $S$  avec  $\Delta P_b = 10$  dB,  $G = 8$ . La Fig. 5.6 (b) montre les courbes d'EVM correspondantes respectives obtenues par simulations. À partir de ces courbes d'EVM, il est remarqué que l'effet de l'augmentation de  $S$  dépend de la zone de l'IBO concernée. Pour les faibles valeurs de l'IBO, l'augmentation de  $S$  conduit à une diminution de l'EVM tandis que pour les valeurs élevées de l'IBO l'EVM augmente en augmentant  $S$ . Il est de plus important de noter que pour les valeurs intermédiaires de l'IBO, l'EVM minimale correspond à  $S = 80$ .

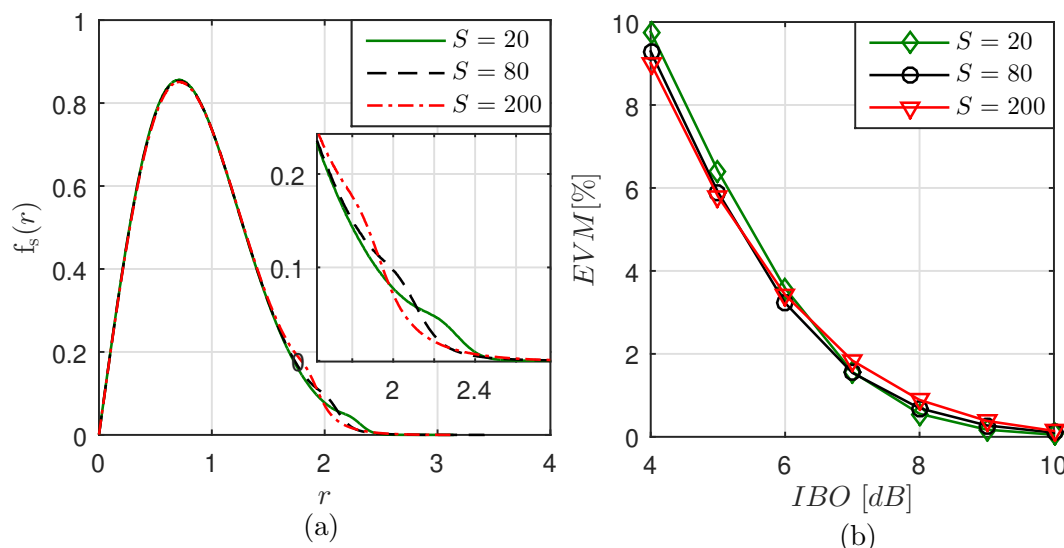


FIGURE 5.6 – PDF de l'amplitude du signal OFDM en appliquant l'algorithme GICMP pour différentes valeurs de  $S$  avec  $G = 8$ ,  $\Delta P_b = 10$  dB, mode 8K (a) et courbes d'EVM correspondantes obtenues par simulations en considérant le Modèle II de l'AP (b)

Cependant, la PDF de l'amplitude du signal se comporte comme suit. Bien que les valeurs élevées de  $S$  donnent lieu à un second mode qui correspond à des niveaux d'amplitudes plus faibles, dû à la réduction d'un nombre plus grand de crêtes, certaines amplitudes élevées persistent et ne sont pas efficacement réduites. Par contre, pour les faibles valeurs de  $S$  comme l'exemple de  $S = 20$ , les crêtes les plus élevées sont totalement réduites mais donnent naissance à un second mode à des amplitudes plus élevées. Ainsi, ces courbes montrent que l'augmentation de  $S$  conduit à la réduction des amplitudes d'un nombre plus grand de pics mais n'apporte pas la réduction optimale des pics les plus élevés.

Le comportement en EVM est donc justifié en analysant le positionnement de cette PDF par rapport à la réponse non-linéaire de l'AP pour les différentes plages de l'IBO. Pour les faibles valeurs de l'IBO, les distorsions de l'AP influent les amplitudes correspondantes au second mode ainsi que les valeurs crêtes et donc l'EVM présente des valeurs élevées égales quelle que soit la valeur de  $S$ . Cependant, en montant dans les valeurs de l'IBO (dans la plage de 4 à 5 dB), le second mode pour  $S = 200$  entre dans la zone de fonctionnement linéaire de l'AP, tandis que les seconds modes pour  $S = 20$  et  $S = 80$  subissent des distorsions. Ainsi, pour ce cas de configuration correspondant aux valeurs de l'IBO entre 4 et 5 dB l'EVM minimale est atteinte pour  $S = 200$ . En augmentant l'IBO, les seconds modes de la PDF pour  $S = 20$  et  $S = 80$  commencent à entrer progressivement dans la zone de fonctionnement linéaire de l'AP. Au bout de ces valeurs de l'IBO (au delà de 7 dB), l'effet des crêtes les plus élevées est dominant et donc pour  $S = 20$  où les crêtes les plus élevées sont totalement réduites, l'EVM minimale est obtenue.

### 5.3.2.3 Effet du nombre $G$ de groupes de PRTs

Comme mentionné dans le Chapitre 2, l'algorithme GICMP propose de découper l'ensemble de PRTs en  $G$  sous-groupes, à traiter sur  $G$  itérations. la Fig. 5.6 (a) montre la PDF de l'amplitude du signal OFDM en appliquant l'algorithme GICMP pour différentes valeurs de  $G$  avec  $\Delta P_b = 10$  dB,  $S = 80$ . La Fig. 5.7 (b) montre les courbes d'EVM correspondantes respectives obtenues par simulations. Comme remarqué, très peu de différences en EVM existent entre ces trois cas. Il en est de même pour les courbes de PDF.

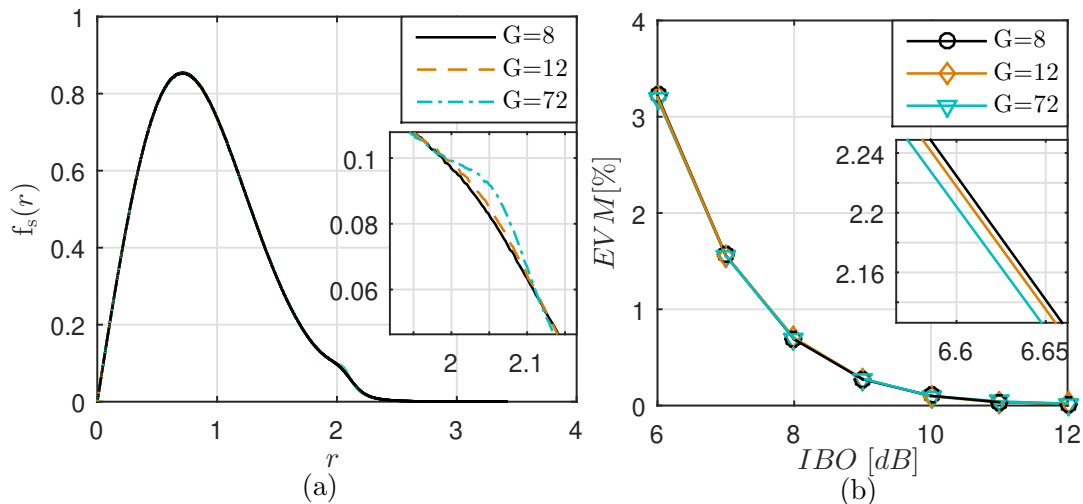


FIGURE 5.7 – PDF de l'amplitude du signal OFDM en appliquant l'algorithme GICMP pour différentes valeurs de  $G$  avec  $S = 80$ ,  $\Delta P_b = 10$  dB, mode 8K (a) et courbes d'EVM correspondantes obtenues par simulation en considérant le Modèle II de l'AP (b)

Vu que l'algorithme calcule les phases des PRTs de chaque groupe en parallèle, il faut noter que le calcul de ces phases est plus précis lorsque le nombre de sous-groupes est plus grand puisque chaque itération prend en compte l'effet du calcul de phases précédentes. Par contre, à partir de ces figures, l'effet de cette précision est mineur en terme de réduction de l'EVM. Ainsi, le mécanisme de l'algorithme dans la réduction du PAPR en



considérant des groupes de PRTs simplifié de façon efficace la complexité de l'algorithme sans affecter significativement les performances de l'algorithme en terme d'EVM. Le seul compromis à considérer lors du choix du paramètre  $G$  de l'algorithme est celui qui existe entre la latence introduite par l'algorithme qui diminue avec la diminution de  $G$  et la complexité du calcul de la phase du noyau à chaque itération.

### 5.3.3 Modélisation de la PDF en appliquant l'algorithme GICMP

Comme montré dans la section précédente, la PDF de l'amplitude du signal en appliquant l'algorithme GICMP suit une loi bimodale dont le second mode peut prendre différentes formes en fonction du paramétrage de l'algorithme. Dans la suite de cette section, le signal OFDM en appliquant l'algorithme GICMP en mode  $8K$  est considéré et la PDF de ce signal est normalisée tel que  $P_s = 1$ . En outre, les résultats en EVM considèrent le Modèle II de l'AP.

En essayant d'expliquer l'origine du second mode de la PDF, et en suivant le même raisonnement suivi pour l'algorithme QCQP, nous proposons de visualiser l'histogramme d'amplitude d'un seul symbole OFDM. La Fig. 5.8 (a) montre cet histogramme en appliquant l'algorithme GICMP pour  $S = 80$ ,  $G = 8$  et  $\Delta P_b = 10$  dB, mode  $8K$ . Rappelons que dans le cas de l'algorithme QCQP cet histogramme est composé de deux groupes d'échantillons comme le montre la Fig. 5.8 (b) pour le cas de l'algorithme QCQP avec  $\Delta P_b = 10$  dB en  $8K$ . Comme détaillé dans le Chapitre 4, le premier groupe contient les échantillons ayant l'amplitude maximale de ce symbole tandis que le second correspond au reste des échantillons.

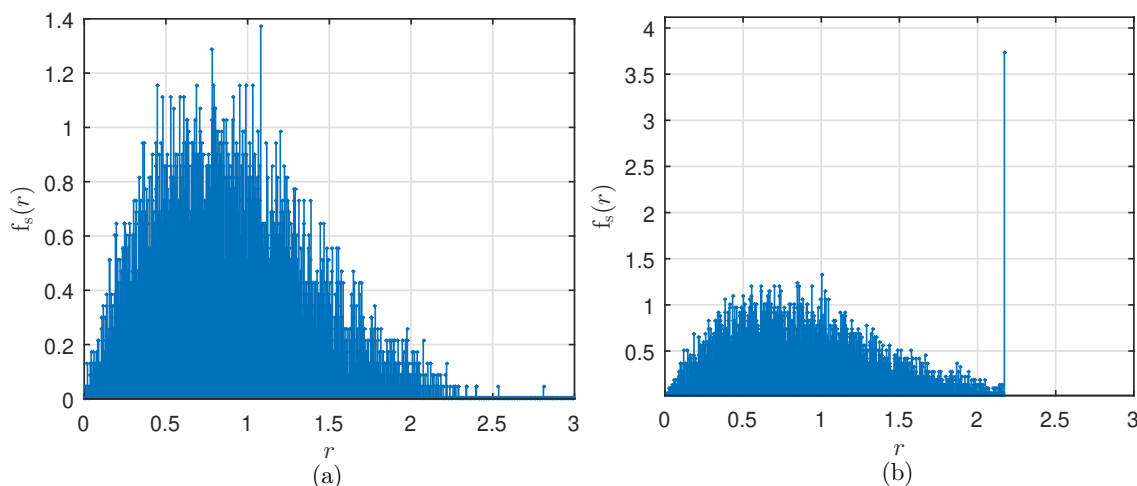


FIGURE 5.8 – Histogramme de l'amplitude d'un seul symbole OFDM en appliquant l'algorithme GICMP,  $S = 80$ ,  $G = 8$ ,  $\Delta P_b = 10$  dB, mode  $8K$  (a) et en appliquant l'algorithme QCQP  $\Delta P_b = 10$  dB, mode  $8K$  (b)

À partir de cette figure, il est remarqué que pour l'algorithme GICMP, au contraire de l'algorithme QCQP, l'histogramme ne présente aucune forme particulière, et la séparation des deux modes n'est pas évidente à faire à partir de l'analyse d'un seul symbole OFDM. Ainsi, plusieurs schémas de séparation des deux modes sont proposés et testés dans ce qui suit dans le but de modéliser la PDF.

### 5.3.3.1 Premier schéma de séparation de modes

Comme premier essai de séparation des deux modes de la PDF, il est proposé de procéder à cette séparation au niveau de chaque symbole OFDM. Ainsi, chacun des deux groupes d'échantillons de ces symboles constitue un mode de la PDF. Rappelons que l'algorithme GICMP consiste à détecter à chaque itération les  $S$  pics ayant les amplitudes les plus élevées et vise ensuite à réduire leurs amplitudes. Ainsi, chaque symbole OFDM est constitué de deux groupes d'échantillons. Le premier est celui dont l'indice a été détecté et dont l'amplitude a été réduite par l'algorithme GICMP au moins dans une des itérations. Le second est constitué du reste des échantillons dont les indices n'ont pas été détectés et qui font partie des  $N - S$  amplitudes les plus faibles à chaque itération de l'algorithme. On propose donc de séparer ces deux groupes d'échantillons au niveau de chaque symbole OFDM et d'en étudier la distribution marginale.

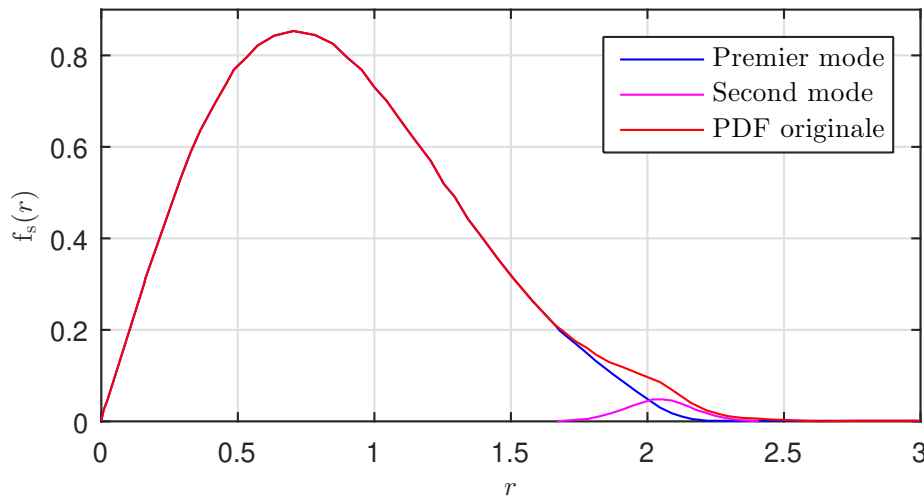


FIGURE 5.9 – Séparation des deux modes de la PDF par l'extraction des échantillons réduits au niveau de chaque symbole OFDM, algorithme GICMP avec  $S = 80$ ,  $G = 8$  et  $\Delta P_b = 10$  dB, mode 8K

La Fig. 5.9 montre le résultat de cette séparation au niveau de la PDF résultante. Deux modes bien séparés sont ainsi obtenus. Comme dans le cas des algorithmes QCQP et gradient, le premier mode suit une distribution de Rayleigh tronquée dont le paramètre de puissance  $P_r$  est à peu près égal à  $P_s$ . Le second mode n'a cependant pas une forme bien reconnue. Des tests de correspondance statistique sur ce second mode utilisant des modèles connus, comme par exemple les lois gaussienne, GEV [125], Nakagami [126], logistique et Log-logistique [127], ont été menés. Après des tests approfondis de ces différentes distributions, ces lois n'ont cependant pas donné de résultats suffisamment convenables pour la modélisation de ce second mode. Une autre loi testée qui convient pour la modélisation du second mode est la loi de Dagum [128], de paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $k$ , définie sur son domaine de définition par :

$$f_{\text{Dagum}}(r; \alpha, \beta, k) = \frac{\alpha k \left(\frac{r-\gamma}{\beta}\right)^{\alpha k - 1}}{\beta \left(1 + \left(\frac{r-\gamma}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^{k+1}}. \quad (5.7)$$

La Fig. 5.10 montre cette distribution ajustée à la PDF du second mode. Malgré la précision tout à fait convenable de ce modèle sur le second mode, l'expression de la distribution de Dagum est peu adaptée aux manipulations mathématiques et notamment à son intégration pour le calcul de l'EVM. Pour cette raison, nous avons cherché à mettre au point d'autres schémas de séparation de modes comme décrit dans la suite.

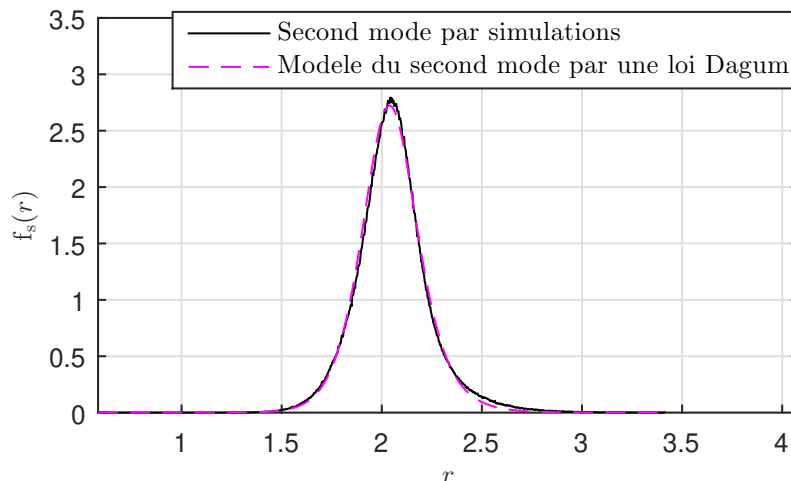


FIGURE 5.10 – Modélisation du second mode de la PDF par une loi de Dagum

### 5.3.3.2 Deuxième schéma de séparation de modes

De la même manière que pour la première approche, ce second schéma considère la séparation au niveau de chaque symbole OFDM en deux groupes d'échantillons qu'on propose de définir comme suit. Le premier groupe est constitué d'un nombre prédéfini  $N_s$  d'échantillons, correspondant aux  $N_s$  crêtes d'amplitudes les plus élevées de chaque symbole OFDM après l'application de l'algorithme GICMP. Le second groupe est constitué du reste des échantillons. La Fig. 5.11 montre les deux modes de la PDF ainsi obtenus pour différentes valeurs de  $N_s$ , pour le mode  $8K$  dans lequel chaque symbole OFDM est constitué d'un total de  $N = 8192$  échantillons. Comme prévu, l'augmentation de  $N_s$  conduit à un second mode plus important puisqu'il prend en compte un nombre plus grand de crêtes d'amplitude.

Dans une seconde étape, nous essayons de modéliser chacun des deux modes de la PDF. En s'inspirant du modèle de la PDF dans le cas de l'algorithme QCQP, on propose de modéliser le second par une distribution GEV, dont les paramètres sont estimés par la méthode des moments pondérés (PWM) [122]. Ensuite, le premier mode est modélisé par une distribution de Rayleigh tronquée, dont la troncature suit la CDF de la distribution GEV ainsi obtenue (cf. éq. (4.11)). La Fig. 5.12 (a) montre la comparaison du premier mode de la PDF à son modèle par une loi de Rayleigh tronquée, et la Fig. 5.12 (b) montre celle du modèle du second mode par une loi GEV, et ce, pour différentes valeurs de  $N_s$ . Comme remarqué, pour le premier mode, le modèle est plus précis pour les valeurs élevées de  $N_s$  au contraire du second mode où le modèle par une loi GEV est plus adéquat lorsque  $N_s = 100$ . Ceci revient au fait que la loi GEV présente un modèle de la distribution de la crête d'amplitude la plus élevée d'un signal, et donc, le modèle par une

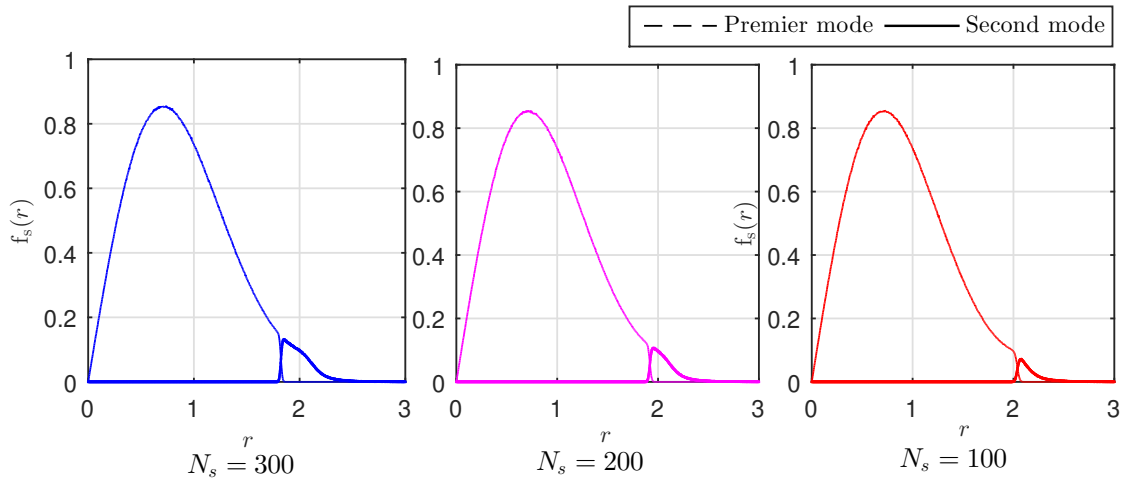


FIGURE 5.11 – Séparation des deux modes de la PDF par l'extraction des  $N_s$  crêtes d'amplitudes les plus élevées de chaque symbole OFDM pour différentes valeurs de  $N_s$ , algorithme GICMP avec  $S = 80$ ,  $G = 8$  et  $\Delta P_b = 10$  dB, mode 8K

GEV reste adéquat pour un nombre relativement faible de crêtes détectées. Cependant, pour les faibles valeurs de  $N_s$  une montée des valeurs de la PDF commence à apparaître pour les amplitudes élevées du premier mode, ce qui cause une divergence par rapport à la distribution de Rayleigh. Un compromis est donc à considérer entre la précision des modèles du premier et du second mode lors du choix de la valeur de  $N_s$ .

Afin d'évaluer la précision du modèle pour les différentes valeurs de  $N_s$ , les résultats en EVM obtenus par intégration numérique du modèle, par l'expression générale de l'EVM (cf. Lemme 3.1), pour chaque valeur de  $N_s$  sont montrés Fig. 5.13. Comme prévu, les résultats d'EVM présentent un écart par rapport aux simulations pour  $N_s = 100$  et  $N_s = 300$ , tandis que pour  $N_s = 200$  une différence de moins de 0.1% d'EVM est présente entre les résultats de simulation et les résultats d'intégration numérique, qui est donc d'une précision acceptable.

Cette approche de modélisation offre donc une précision acceptable pour le calcul de l'EVM. En outre, un avantage important de cette approche est que le modèle obtenu de la PDF du signal OFDM après l'application de l'algorithme GICMP suit la même loi que la PDF dans le cas de l'algorithme QCQP. L'expression de l'EVM dans ce cas peut donc être directement obtenue, et la comparaison des deux algorithmes est basée sur la comparaison des paramètres des distributions obtenues. Par contre, le choix de la valeur de  $N_s$  doit être fait manuellement pour chaque jeu de paramètres de l'algorithme, en testant la précision du modèle pour différentes valeurs de  $N_s$ .

### 5.3.3.3 Troisième schéma de séparation de modes

La dernière approche proposée suit une stratégie différente. Au lieu de définir les deux modes de la PDF en séparant les échantillons selon un critère donné comme précédemment, nous cherchons ici à exprimer la PDF finale du signal comme la combinaison de deux PDF dont on impose les lois respectives. Plus précisément, nous prenons l'hypothèse dans cette approche que le second mode suit une loi normale tandis que le premier suit une loi de

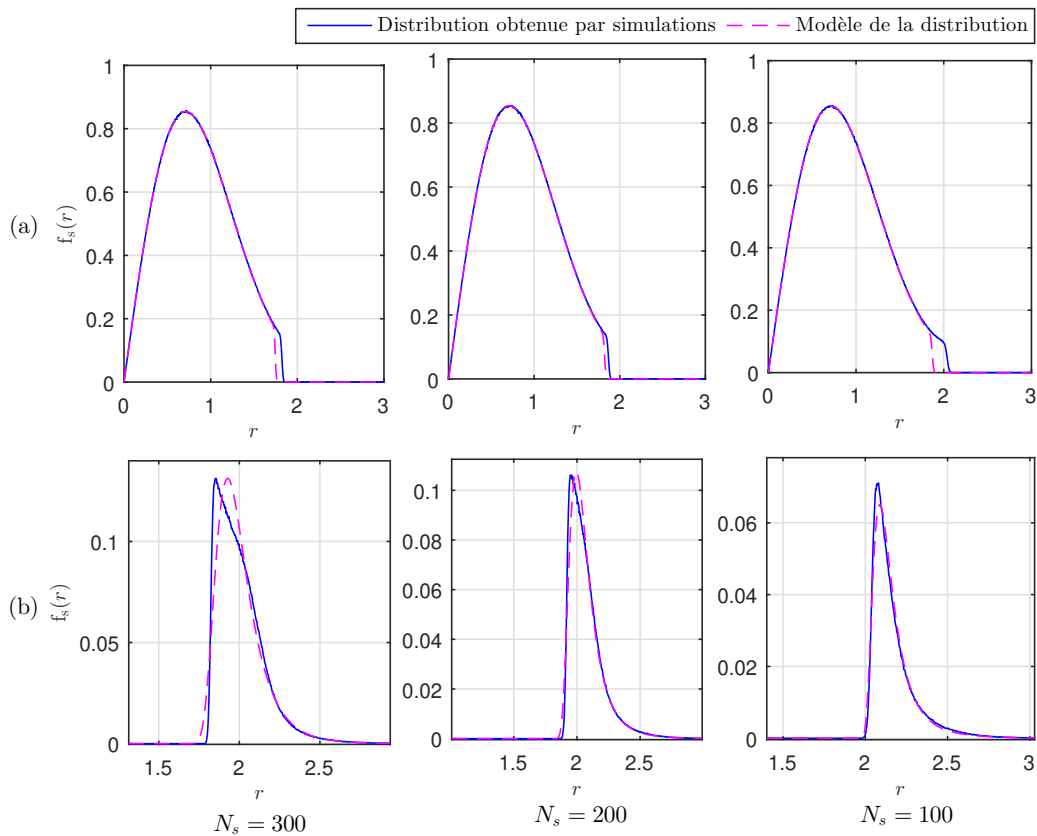


FIGURE 5.12 – Modèle du premier mode de la PDF par une distribution de Rayleigh tronquée (a) et du second mode par une distribution GEV (b), pour différentes valeurs de  $N_s$ , algorithme GICMP avec  $S = 80$ ,  $G = 8$  et  $\Delta P_b = 10$  dB

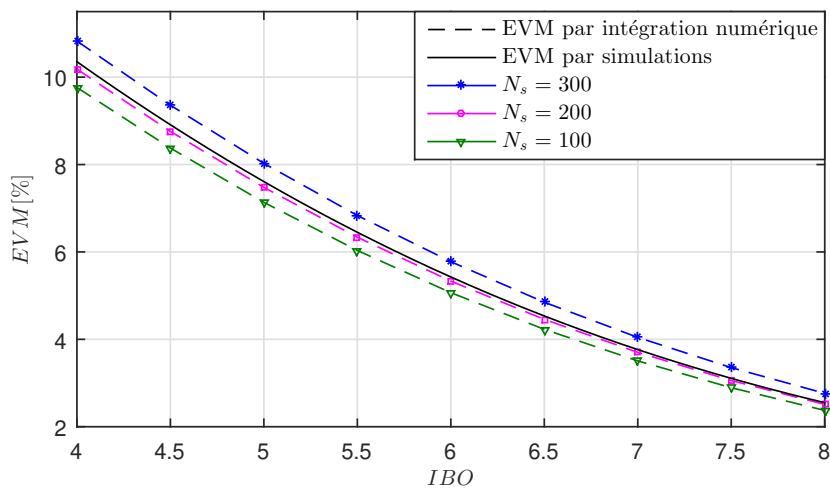


FIGURE 5.13 – Courbes d'EVM obtenues par l'intégration numérique du modèle obtenu pour différentes valeurs de  $N_s$  en comparaison à l'EVM obtenue par simulations, algorithme GICMP avec  $S = 80$ ,  $G = 8$  et  $\Delta P_b = 10$  dB, mode 8K, Modèle II de l'AP

Rayleigh tronquée par la loi normale obtenue.

En imposant cette structure à la PDF finale, la séparation de ces deux modes doit être

optimisée selon les valeurs des paramètres  $p$ ,  $\mu$  et  $\sigma$  générateurs de la PDF gaussienne qui présente le second mode. Ainsi, pour différentes valeurs de paramètres, le second mode est soustrait de la PDF initiale afin d'obtenir le premier mode. Les paramètres optimaux sont ceux qui permettent d'aboutir à une loi de Rayleigh progressivement tronquée, et ce afin de vérifier la structure imposée. Le problème peut donc être posé comme suit :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } p, \mu, \sigma, \\ &\text{t.q. } f_s^{\text{GICMP}}(r) - p f_{\text{Gauss}}(r; \mu, \sigma) \sim (1 - p) f_{\text{ray}}(r, P_r) (1 - F_{\text{Gauss}}(r; \mu, \sigma)) \end{aligned} \quad (5.8)$$

La Fig. 5.14 montre un exemple de cette séparation des deux modes, qui représente ainsi un schéma de séparation simple et de forme adéquate. Afin de tester la convergence de ce modèle par rapport à la PDF initiale, la Fig. 5.15 (a) montre une comparaison entre les PDFs simulée et modélisée et met en évidence leur très bonne correspondance. En outre, la Fig. 5.15 (b) montre les résultats d'EVM obtenus par intégration numérique du modèle en comparaison de l'EVM obtenue par simulations. Une différence de moins de 0.2% existe entre les deux courbes, ce qui permet de conclure que le modèle proposé est de précision acceptable.

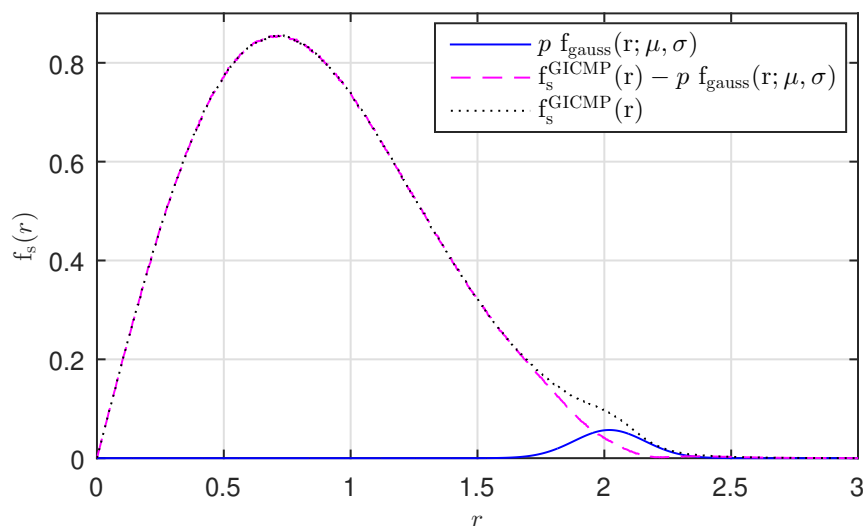


FIGURE 5.14 – Séparation des deux modes de la PDF par l'extraction d'une distribution gaussienne

Malgré les résultats intéressants présentés par cette approche, son inconvénient est qu'elle nécessite un algorithme d'ajustement des paramètres  $p$ ,  $\mu$  et  $\sigma$  du second mode pour chaque jeu de paramètres de l'algorithme. Ainsi, cette approche n'est pas générale et requiert des tests exhaustifs pour chaque cas. Notons qu'il serait intéressant de suivre cette même approche en considérant une loi GEV  $f_{\text{GEV}}(r; \mu_2, \sigma_2, k_2)$  à la place de la loi normale, afin de rapprocher le modèle de celui de la PDF obtenue dans le cas de l'algorithme QCQP. Cependant, cette approche présente le même inconvénient et nécessite de rechercher manuellement les paramètres  $p$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  et  $k$  de la GEV pour chaque paramétrage de l'algorithme.

En résultat de cette étude, plusieurs modèles intéressants de la PDF ont été proposés, présentant des degrés de précision tout à fait intéressants. Cependant, ces modèles sont

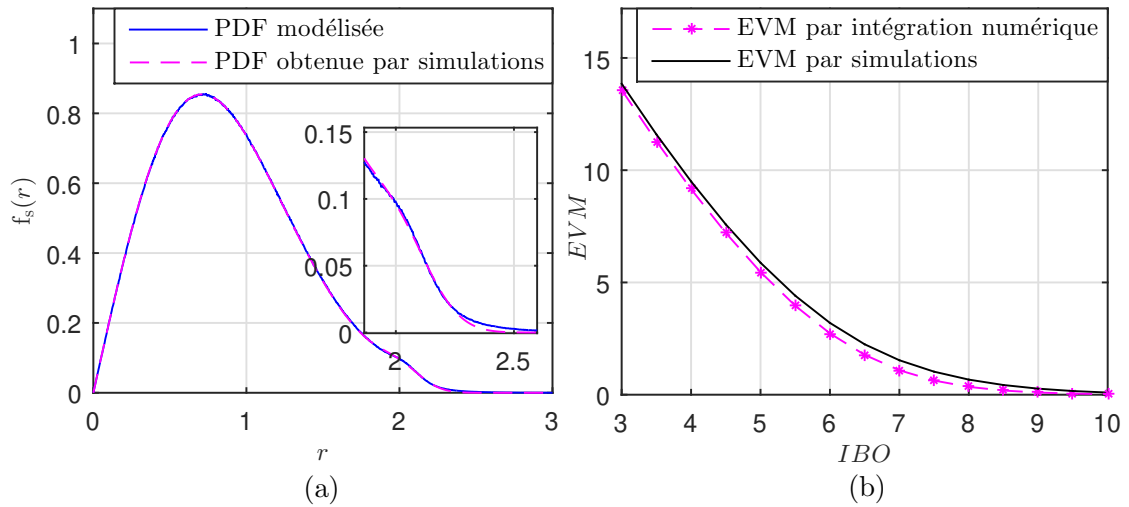


FIGURE 5.15 – Comparaison de la PDF modélisée par rapport à la PDF empirique initiale (a) et courbe d'EVM obtenue par l'intégration numérique de ce modèle comparée à l'EVM obtenue par simulations (b)

soit très complexes soit requièrent une recherche manuelle des paramètres du modèle. La question de la modélisation de la PDF en appliquant l'algorithme GICMP reste donc ouverte, sur la base de cette analyse.

## 5.4 Comparaison des performances en EVM des algorithmes de la technique *Tone Reservation*

Après avoir étudié les PDFs des amplitudes des signaux OFDM dans les cas des algorithmes QCQP, gradient et GICMP et les performances de ces algorithmes en fonction des différents paramètres du système, il est intéressant de rappeler la comparaison des performances de ces trois algorithmes afin de prévoir les gains apportés par ces méthodes au regard de leurs différents niveaux de complexité. À noter que de telles comparaisons ont été faites dans [79] et [80]. On propose donc dans cette section de comparer les performances en EVM de ces algorithmes et d'analyser leurs différences par rapport aux PDFs obtenues et aux analyses théoriques menées au cours de ce travail.

La Fig. 5.16 (a) montre les valeurs de l'EVM en utilisant les algorithmes QCQP, gradient avec  $V_{clip} = 2.2$  et GICMP avec  $S = 80$ ,  $G = 8$ . Pour les trois algorithmes, le mode  $8K$  est considéré avec les indices correspondants des PRTs définis dans le standard DVB-T2, une contrainte de puissance  $\Delta P_b = 10$  dB est imposée. Rappelons que le modèle sans mémoire de l'AP (Modèle II) est utilisé. Le cas sans réduction du PAPR est de plus montré. La Fig. 5.16 (b) présente un agrandissement de ces courbes à l'intervalle de l'IBO entre 6 et 9 dB.

Comme prévu, les performances optimales sont fournies par l'algorithme QCQP qui à son tour nécessite une complexité d'implémentation et un temps de calcul important. L'algorithme GICMP fournit cependant des performances intermédiaires, meilleures que celles dans le cas de l'algorithme du gradient. En remarquant les courbes d'EVM des

#### 5.4. Comparaison des performances en EVM des algorithmes de la technique TR

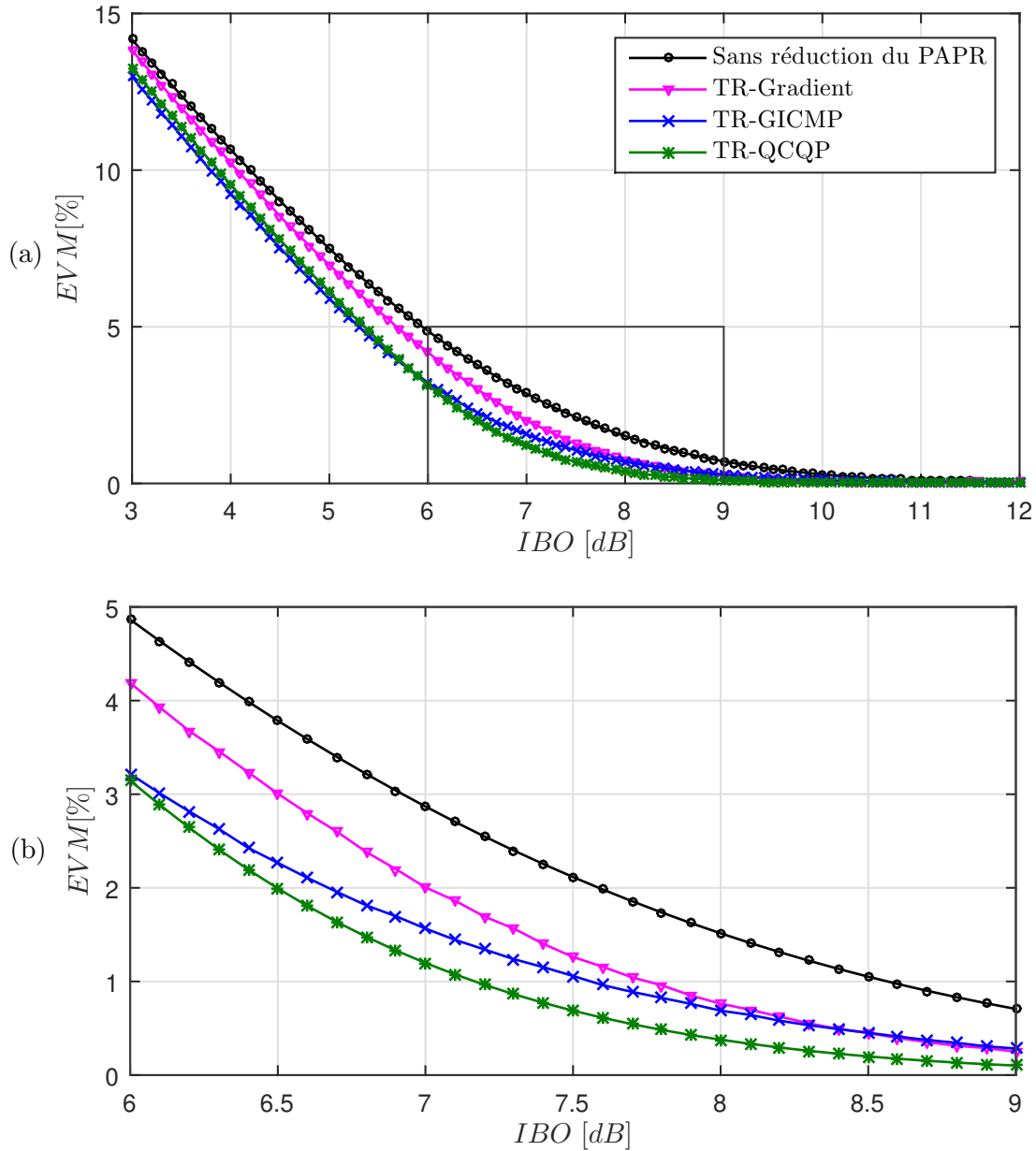


FIGURE 5.16 – Courbes d'EVM vs IBO obtenues par simulations pour les différents algorithmes de TR, en considérant le mode 8K et le Modèle II de l'AP

algorithmes GICMP et QCQP, la comparaison de ces deux méthodes dépend de la zone considérée de l'IBO. En effet, pour les faibles valeurs de l'IBO, entre 3 et 5 dB, les performances en terme d'EVM sont très proches pour les deux algorithmes, tandis que pour les valeurs relativement élevées de l'IBO, au-delà de 6 dB l'algorithme QCQP présente de meilleures performances. Ceci peut être expliqué à partir des PDFs des signaux en appliquant les deux algorithmes. En se référant à la Fig. 5.4, il est remarqué que les crêtes les plus élevées autour de  $r = 2.4$  sont totalement réduites par l'algorithme QCQP, cependant, un pourcentage de ces crêtes persiste après l'application de l'algorithme GICMP. Ceci explique les meilleures performances en EVM de l'algorithme QCQP pour les valeurs



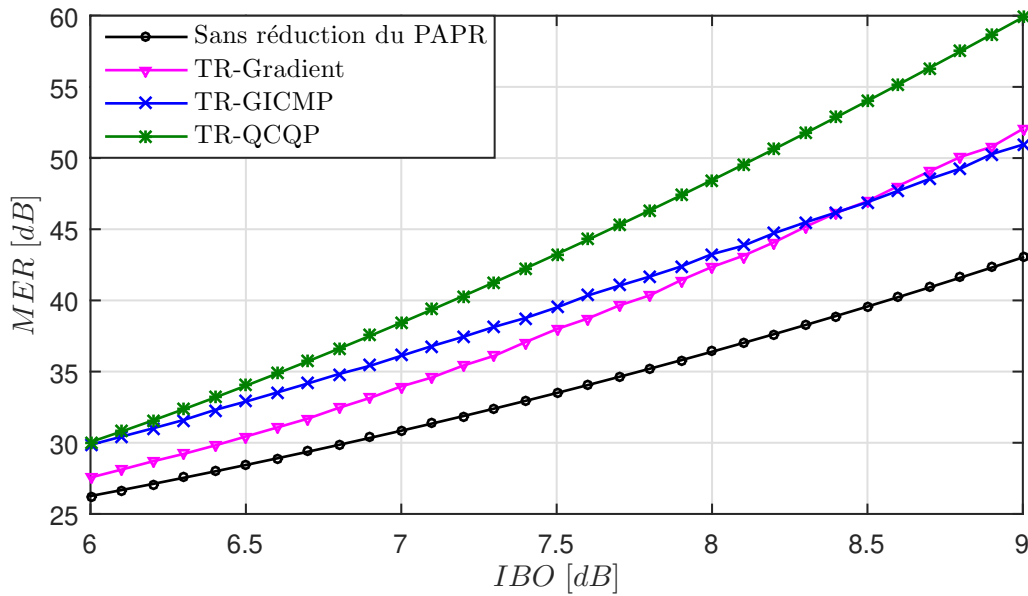


FIGURE 5.17 – Courbes de MER vs IBO obtenues par simulations pour les différents algorithmes de TR, en considérant le mode 8K et le Modèle II de l'AP

élevées de l'IBO, où seule la zone d'amplitudes élevées entre dans la saturation de l'AP. Cependant, le second mode de la PDF dans le cas de l'algorithme GICMP est présent pour des amplitudes plus faibles que celles du second mode de l'algorithme QCQP. Ainsi, pour les faibles valeurs de l'IBO, le second mode de l'algorithme QCQP peut entrer dans la zone de saturation de l'AP lorsque le second mode de l'algorithme GICMP est dans la zone linéaire du fonctionnement de l'AP. Ceci peut donc compenser l'effet observé au niveau des fortes amplitudes et l'EVM dans le cas des algorithmes QCQP et GICMP prend presque les mêmes valeurs.

L'importance de ces algorithmes de réduction de PAPR est mise en évidence par ces courbes de l'EVM et du MER en les comparant au cas sans réduction du PAPR. La Fig. 5.17 compare également les performances des trois algorithmes, mais cette fois exprimées en MER en fonction de l'IBO, obtenues à partir de l'EVM en utilisant l'équation (1.30). Par exemple, pour un IBO de 7 dB, un gain en MER de 13 dB est obtenu par l'utilisation de l'algorithme QCQP. En d'autres termes, si par exemple 3% d'EVM doit être garanti (qui est l'exemple de la valeur requise dans le standard 802.11ac pour une constellation MAQ-256 avec un rendement de code de 3/4, cf. Tableau 1.2), un gain en IBO de 1 dB est obtenu avec les techniques QCQP et GICMP par rapport au cas sans réduction du PAPR, et de 0.5 dB avec l'algorithme du gradient. De même, pour les systèmes de diffusion de télévision numérique terrestre, une valeur de MER de l'ordre de 35 dB est typiquement exigée. Pour cette valeur, les algorithmes du gradient, GICMP et QCQP permettent d'obtenir respectivement un gain en IBO de 0.7, 1 et 1.2 dB. Ceci reflète donc l'importance de ces techniques dans l'optimisation de l'efficacité énergétique des AP au niveau des émetteurs.

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, les algorithmes sous optimaux de la technique TR de type gradient et GICMP ont été étudiés. En premier lieu, une étude analytique de l'algorithme du gradient a été menée. Cette étude est basée sur l'analyse de la PDF de l'amplitude du signal OFDM en appliquant l'algorithme du gradient qui suit une forme bimodale. Un modèle de cette PDF a été proposé comme une superposition d'une fonction de Rayleigh tronquée et d'une impulsion de Dirac reflétant les échantillons réduits à l'amplitude  $V_{clip}$ . Une bonne convergence est observée entre les valeurs d'EVM théoriques et simulées pour  $V_{clip}$  égale ou supérieure à 2.2, qui constitue la zone d'intérêt du fonctionnement de la méthode. Ceci permet de valider le modèle de distribution utilisé et l'approche analytique pour ces valeurs de  $V_{clip}$ . De plus, les paramètres optimaux de l'algorithme du gradient ont été déterminés sur la base des résultats de simulation en tenant compte des conditions réalistes de la norme DVB-T2.

Dans un second temps, ce chapitre s'est intéressé à l'étude de l'algorithme GICMP. La PDF du signal en appliquant cet algorithme a été étudiée en comparaison à la PDF obtenue dans le cas de l'algorithme QCQP. En outre, l'effet des différents paramètres de l'algorithme sur cette PDF et sur les performances en EVM ont été analysés en détails. Par la suite, le travail a consisté à modéliser cette PDF dans le but d'établir formellement l'expression de l'EVM obtenue avec un tel algorithme. Pour cela, trois schémas de séparation et de modélisation des deux modes de la PDF ont été proposés et testés présentant différents compromis précision-complexité.

L'étude s'est conclue par une analyse comparée des performances en EVM des trois algorithmes de TR permettant de mettre en évidence les gains apportés par ces techniques.



# Conclusion et perspectives

L'optimisation de la consommation énergétique des Technologies de l'Information et de la Communication (TIC) est d'une importance capitale. En effet, la consommation énergétique de ces technologies présente un pourcentage important des émissions mondiales en CO<sub>2</sub>. En particulier, l'amplification de puissance des signaux au niveau des émetteurs représente l'élément le plus consommateur de la chaîne de transmission. L'importance de l'optimisation de l'efficacité énergétique des processus d'amplification prend alors tout son sens.

Il s'avère par ailleurs que les modulations multi-porteuses et spécialement les modulations de type Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM) ont été largement déployées dans les systèmes de communication sans fils. Ces formes d'onde représentent en effet une solution efficace pour lutter contre l'interférence inter-symbole sur les canaux sélectifs en fréquence. Cependant, un inconvénient majeur de ces modulations est qu'elles se caractérisent par une forte dynamique de l'amplitude des signaux émis, mesurée par le rapport de la puissance crête sur la puissance moyenne ou *Peak to Average Power Ratio* (PAPR). Ceci rend difficile leur amplification à la fois à fort rendement et sans distorsion. Ainsi, le choix de ces formes d'onde se heurte aux contraintes énergétiques rappelées précédemment.

Dans un premier temps, les travaux de cette thèse ont ainsi permis de rappeler dans le Chapitre 1 les éléments de base des systèmes OFDM et d'explicitier la problématique de l'amplification non-linéaire de ces signaux. Les métriques essentielles du problème ainsi que les techniques de réduction du PAPR les plus reconnues ont été décrites.

Dans un second temps, la technique *Tone Reservation* qui présente plusieurs avantages par rapport aux autres techniques de réduction du PAPR et retenue dans les standards DVB-T2 et ATSC 3.0 a été décrite de façon approfondie dans le Chapitre 2. Un état de l'art sur les développements des algorithmes de cette technique a été mené et les algorithmes les plus essentiels ont été ainsi détaillés : l'algorithme optimal QCQP qui fournit une borne supérieure des performances de la technique TR à réduire le PAPR, l'algorithme du gradient adopté par les standards, ainsi que l'algorithme GICMP qui est un algorithme récent et prometteur qui offre un bon compromis efficacité-complexité.

Ensuite, un état de l'art sur les études théoriques des performances des techniques de réduction du PAPR a permis de montrer que malgré la grande variété de ces techniques proposées dans la littérature, un nombre très limité d'études a jusqu'alors cherché à évaluer analytiquement les performances de ces techniques. La question globale de l'efficacité des techniques de réduction du PAPR, posée de façon analytique, et non simplement algorithmique, reste donc ouverte.

Dans cette perspective, ces travaux de thèse ont été consacrés à l'évaluation analytique des performances des stratégies de réduction du PAPR basées sur la technique TR, et ce,

essentiellement par l'évaluation de l'expression de l'EVM du signal OFDM amplifié en appliquant de telles techniques.

## Contributions

Les contributions essentielles de cette thèse dans ce contexte peuvent être résumées comme suit.

L'expression de l'EVM du signal OFDM amplifié en considérant les non-linéarités et les effets mémoire de l'AP a été développée dans le cas général de l'application de la technique TR. Cette nouvelle expression se base sur les expressions des moments de la PDF  $f_s(r)$  de l'amplitude du signal OFDM après réduction du PAPR et peut en tant que telle être appliquée à toute technique de réduction du PAPR sans distorsion.

Une application directe de cette méthode de calcul a permis de dériver l'expression formelle de l'EVM dans les cas sans réduction du PAPR et avec l'application de la technique dite de *clipping*. Ces expressions se caractérisent par rapport aux travaux précédents de la littérature par la prise en considération d'un calibrage plus précis des paramètres et par une normalisation fine de la chaîne OFDM. En outre, elles permettent d'exprimer l'EVM explicitement en fonction de l'IBO et sont présentées de façon unifiée et générique, ce qui permet de mener des analyses et des comparaisons approfondies des différentes méthodes.

Afin de définir une expression formelle de l'EVM dans le cas de l'application de la technique TR, l'expression générale de l'EVM proposée a été formulée à partir de l'évaluation des moments de la PDF du signal OFDM temporel, où cette PDF est directement liée à l'algorithme TR utilisé. En pratique, une telle PDF ne peut généralement pas être obtenue analytiquement et son évaluation nécessite de la modéliser en fonction de l'algorithme TR considéré. En particulier, dans ce travail, cette PDF a été évaluée pour les trois algorithmes sélectionnés de la technique TR.

Ainsi, dans le cas de l'application de l'algorithme QCQP, l'amplitude du signal dans le domaine temporel suit une distribution bimodale, c'est-à-dire une superposition de deux distributions unimodales correctement modélisées. Les moments de cette PDF ont été donc calculés en considérant des approximations appropriées.

L'expression de l'EVM pour la technique TR-QCQP en utilisant l'algorithme QCQP a ainsi été dérivée et validée par simulations. Comme l'algorithme QCQP est un algorithme optimal, ce résultat analytique représente la borne inférieure de l'EVM associée à la réduction du PAPR par la technique TR. Il s'agit là d'un résultat nouveau et majeur pour la communauté.

Sur la base de ces expressions analytiques, une analyse comparative des techniques de *clipping* et TR a été menée avec un accent particulier sur la contrainte de puissance des sous-porteuses réservées à la réduction du PAPR. En outre, les performances en BER lors de l'application de la technique TR ont été analysées afin de visualiser l'impact de la réduction de l'EVM sur l'amélioration du BER.

Ensuite, l'étude d'algorithmes sous-optimaux a été menée. L'étude du signal OFDM en appliquant l'algorithme simple du gradient montre que la PDF de l'amplitude suit encore une distribution bimodale dont le second mode peut être modélisé par une impulsion de Dirac. Ce modèle permet de dériver les moments de la PDF afin de donner l'expression formelle de l'EVM lors de l'application de l'algorithme du gradient. Cette expression est validée par des simulations du signal OFDM et les paramètres optimaux de l'algorithme

sont exploités.

Enfin, la PDF du signal dans le cas de l'application de l'algorithme prometteur GICMP a été étudiée et analysée en fonction des différents paramètres du système. Plusieurs approches de modélisation de cette PDF ont été proposées et comparées et fournissent ainsi les éléments d'étude essentiels de cette PDF afin de l'intégrer et l'inclure dans l'expression de l'EVM.

## Perspectives

Le champ d'application des techniques multi-porteuses reste encore très vaste et la problématique de leur optimisation énergétique est plus que jamais d'actualité.

Bien que ces travaux de thèse fournissent une étude théorique étendue de l'EVM dans le cas de l'application de la technique TR, le domaine d'étude est encore ouvert pour l'étude analytique d'autres techniques avancées de réduction du PAPR afin de prévoir les gains en efficacité offerts par ces techniques. De telles expressions permettent de comparer ces techniques de manière rigoureuse et de définir les points forts et les points faibles de chaque technique et quantifier les différents compromis entre ces techniques. L'étude approfondie des moments des distributions des amplitudes des signaux résultant de la réduction du PAPR est notamment un axe d'analyse qu'il est possible de développer.

En particulier, l'expression générale de l'EVM donnée dans cette thèse peut être appliquée pour d'autres techniques avancées de réduction du PAPR telles que les techniques ACE et SLM, et ce, par une étude des PDFs des signaux OFDM après l'application de ces techniques. La plupart des algorithmes proposés dans la littérature repose sur des choix de paramètres qu'il convient en pratique d'optimiser. L'expression de l'EVM proposée est un outil de mesure pouvant être exploitée pour mener ce type d'optimisation algorithmique.

D'autre part, l'approche développée dans le cadre de cette thèse peut aussi s'appliquer à tout type de formes d'ondes autre que l'OFDM et notamment les formes d'onde à porteuses multiples qui pourraient être retenus dans les futures *releases* des standards de réseaux mobiles de données B5G et 6G, et ce, dès que l'on dispose des moments de la PDF, de façon analytique ou simulée.

Qui plus est, cette même problématique de l'optimisation énergétique se pose également de façon tout aussi cruciale au niveaux des terminaux utilisateurs pour l'émission des signaux pour la voie montante des futurs réseaux cellulaires afin d'améliorer l'autonomie des terminaux utilisateurs. En effet, dans les dernières *releases* des réseaux B5G, les modulations OFDM sont utilisées en voie montante comme en voie descendante. L'évaluation de l'EVM proposée peut être ainsi vue comme un outil de paramétrage en temps réel de la chaîne d'amplification au sein des émetteurs comme des terminaux, pour peu que les statistiques des signaux soient mesurées. Il est alors envisageable de monitorer les moments généralisés des signaux en temps réel, les injecter dans l'expression de l'EVM et ainsi mesurer l'impact des différents paramètres ou algorithmes choisis. Une boucle de réaction adéquate peut ainsi être envisagée afin de garantir un régime d'optimalité de la chaîne en terme de performance/efficacité énergétique.



# Glossaire

3GPP	<i>Third Generation Partnership Project</i>
4G	4 <sup>ème</sup> génération des standard pour les réseaux mobiles
5G	5 <sup>ème</sup> génération des standard pour les réseaux mobiles
6G	6 <sup>ème</sup> génération des standard pour les réseaux mobiles
ACE	Extension active de constellation ou <i>Active Constellation Extension</i>
ACPR	Rapport de puissance aux canaux adjacents ou <i>Adjacent Channels Power Ratio</i>
AM/AM	amplitude/amplitude
AM/PM	amplitude/phase
AP	Amplificateur de Puissance
ATSC 3.0	<i>Advanced Television Systems Committee version 3.0</i>
AWGN	Bruit additif blanc gaussien ou <i>Additive White Gaussian Noise</i>
B5G	<i>Beyond5G</i>
BER	Taux d'erreur binaire ou <i>Bit Error Rate</i>
BP	Bande passante
CCDF	Fonction de distribution complémentaire cumulative ou <i>Complementary Cumulative Distribution Function</i>
CDF	Fonction de répartition ou <i>Cumulative Density Function</i>
CVX	Convexe
DAC	Convertisseur numérique-analogique ou <i>Digital to Analog Converter</i>
DSP	processeurs de signaux numériques ou <i>Digital Signal Processor</i>
DVB	Diffusion vidéo-numérique ou <i>Digital Video Broadcasting</i>
DVB-NGH	Diffusion vidéo numérique mobile de prochaine generation ou <i>Next Generation Handheld</i>
DVB-T2	Diffusion vidéo numérique terrestre de deuxième génération ou <i>Digital Video Broadcasting - Terrestrial, second generation</i>
EE	Efficacité Energetique ou <i>Energy Efficiency</i>
ETSI	Institut européen des normes de télécommunication ou <i>European Telecommunications Standards Institute</i>
EVM	Amplitude du vecteur d'erreur ou <i>Error Vector Magnitude</i>
FCPC	Contrôle de puissance par écrêtage dans le domaine fréquentiel ou <i>Frequency Domain Clipping Power Control</i>
FFT	Transformation de Fourier rapide ou <i>Fast Fourier Transform</i>
FPGA	<i>Field-Programmable Gate Array</i>
GCPW	<i>Grouped Carrier Peak Windowing</i>
GEV	<i>Generalised Extreme Value</i>
GICMP	<i>Grouped Individual Carriers for Multiple Peaks</i>
HD	Haute definition ou <i>High definition</i>



IBO	Recul de la puissance d'entrée ou <i>Input Power Back-Off</i>
ICI	Interférence inter-porteuse ou <i>Inter-Carrier Interference</i>
IEEE	<i>Institute of Electrical and Electronics Engineers</i>
IFFT	Transformation de Fourier inverse rapide ou <i>Inverse Fast Fourier Transform</i>
IID	Indépendants et Identiquement Distribués
ISI	interférence inter-symboles ou <i>Inter-Symbol Interference</i>
LTE	<i>Long Term Evolution</i>
LTE-A	<i>Long Term Evolution - Advanced</i>
LTI	Linéaire invariant dans le temps ou <i>Linear Time Invariant System</i>
MAQ	Modulation d'amplitude en quadrature
MAQ- $M$	Modulation d'amplitude en quadrature à $M$ états
MDP- $M$	Modulation par changement de phase à $M$ états
MER	Rapport d'erreur de modulation ou <i>Modulation Error Ratio</i>
MOSFET	Transistor à effet de champ à grille isolée ou <i>Metal-Oxide-Semiconductor Field-Effect Transistor</i>
NB-IOT	Internet des objets à bande étroite ou <i>Narrow-Band Internet Of Things</i>
NL	Non-linéarité
OFDM	<i>Orthogonal Frequency Division Multiplexing</i>
OKOP	Un noyau un pic ou <i>One Kernel One Peak</i>
PAPR	Rapport de la puissance crête sur la puissance moyenne ou <i>Peak to Average Power Ratio</i>
PD	Prédistorsion
PDF	Fonction de densité de probabilité ou <i>Probability Density Function</i>
PDSCH	Physical Downlink Shared Channels
PRT	Peak Reserved Tone
PSD	Power Spectral Density
PTS	Partial Transmit Sequence
PWM	Estimation par moments pondérés ou <i>Probability Weighted Moments</i>
QCQP	Problème quadratique à contrainte quadratique ou <i>Quadratically Constrained Quadratic Problem</i>
RF	Radio-Fréquence
Rel	<i>Release</i>
S2P	Conversion série-parallèle ou <i>Serial to Parallel conversion</i>
SD	Définition standard ou <i>Standard Definition</i>
SDR	Rapport signal sur distorsion ou <i>Signal to Distorsion Ratio</i>
SLM	<i>SeLected Mapping</i>
SNR	Rapport signal sur bruit ou <i>Signal to Noise Ratio</i>
SOCP	Problème convexe du second ordre ou <i>Second Order Convex Problem</i>
SSPA	Amplificateurs à état solide ou <i>Solid State Power Amplifier</i>
TI	<i>Tone Injection</i>
TIC	Technologies de l'Information et de la Communication
TR	Réservation de pilotes ou <i>Tone Reservation</i>
TTPC	Contrôle de puissance dans le domaine temporel ou <i>Time Domain Tracking Power Control</i>
TV	Télévision
WiMax	<i>Worldwide Interoperability for Microwave Access</i>

# Notations Mathématiques

## Opérations, fonctions et ensembles de base

$\mathcal{R}(\cdot)$	partie réelle
$\mathcal{I}(\cdot)$	partie imaginaire
$\mathcal{P}(\cdot)$	probabilité
$\Gamma(n)$	fonction Gamma d'ordre $n$
$\gamma(n, \varphi)$	fonction Gamma incomplète inférieure d'ordre $n$ à une limite $\varphi$
$\Gamma(n, \varphi)$	fonction Gamma incomplète supérieure d'ordre $n$ à une limite $\varphi$
$\log_2(\cdot)$	logarithme de base 2
$\log_{10}(\cdot)$	logarithme de base 10
$\tan(\cdot)$	fonction arc-tangente
$ \cdot $	amplitude
$\angle(\cdot)$	phase
$\mathbf{Q}$	matrice de l'opération FFT
$\delta(q)$	symbole de Kronecker où $q$ est un entier relatif
$\delta(t)$	impulsion de Dirac où $t \in \mathbb{R}$
$PSD(f)$	densité spectrale de puissance du signal émis
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
$\mathbb{N}$	ensemble des nombres entiers relatifs
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes
$\mathbb{E}[\cdot]$	espérance
$\ \cdot\ _\infty$	norme infinie, c.à d. la valeur maximale
$\ \cdot\ _2$	norme euclidienne

## Éléments de la chaîne OFDM

$\mathbf{X}$	signal OFDM initial dans le domaine fréquentiel
$\mathbf{S}$	signal OFDM à PAPR réduit dans le domaine fréquentiel
$\mathbf{Z}$	signal OFDM reçu dans le domaine fréquentiel
$x(t)$	signal OFDM initial dans le domaine temporel
$s(t)$	signal OFDM après réduction du PAPR dans le domaine temporel
$s_{in}(t)$	signal à l'entrée de l'AP après réglage de l'IBO
$z_{out}(t)$	signal amplifié à la sortie de l'AP
$s_{ref}(t)$	signal de référence lors de l'évaluation de l'EVM
$z(t)$	signal de sortie de l'AP normalisé à la puissance du signal de référence
$P_x$	puissance moyenne du signal $x(t)$
$P_s$	puissance moyenne du signal $s(t)$

$P_{in}$	puissance moyenne du signal $s_{in}(t)$
$P_{out}$	puissance moyenne du signal $z_{out}(t)$
$P_{ref}$	puissance moyenne du signal $s_{ref}(t)$
$P_z$	puissance moyenne du signal $z(t)$
$F_n$	facteur de normalisation du signal de sortie de l'AP
$F_{IBO}$	facteur de réglage de l'IBO du signal à l'entrée de l'AP
$\mathbf{x}$	vecteur constitué des échantillons du signal $x(t)$
$\mathbf{s}$	vecteur constitué des échantillons du signal $s(t)$
$\mathbf{z}_{in}$	vecteur constitué des échantillons du signal à l'entrée de l'AP à l'instant $t_0$ et aux $Q$ échantillons de temps précédents
$\mathbf{r}_{in}$	vecteur des amplitudes du vecteur $\mathbf{z}_{in}$ à l'entrée de l'AP
$\boldsymbol{\theta}_{in}$	vecteur des phases du vecteur $\mathbf{z}_{in}$ à l'entrée de l'AP
$x_c$	symbole complexe porté par une sous-porteuse OFDM
$A_{insat,q}$	amplitude d'entrée correspondante à la saturation de la $q^e$ composante mémoire de l'AP
$A_{outsat,q}$	amplitude de sortie correspondante à la saturation de la $q^e$ composante mémoire de l'AP

## Paramètres de modulation OFDM

$N$	nombre de sous-porteuses OFDM
$N_{active}$	nombre de sous-porteuses portant des données utiles
$N_{data}$	nombre de sous-porteuses de données utiles
$N_{PRT}$	nombre de sous-porteuses PRTs réservées à la réduction du PAPR
$f_0$	fréquence initiale d'un bloc OFDM
$f_k$	sous-bande de fréquence d'indice $k$
$\Delta_f$	espacement entre les fréquences $f_k$
$BP$	bande passante
$B_c$	bande de cohérence
$T_0$	durée d'un symbole de données en modulation mono-porteuse
$T_s$	durée d'un symbole de données en modulation mono-porteuse
$T_m$	étalement des multi-trajets du canal
$T_g$	durée de l'intervalle de garde entre deux symboles OFDM
$c$	nombre de symboles constituant l'intervalle de garde
$f_{canal}$	bandes de fréquences dans le canal direct
$f_{adj}$	bandes de fréquences dans les canaux adjacents
$k$	indice dans le domaine fréquentiel
$n$	indice dans le domaine temporel

## Paramètres de l'AP

$P_{DC}$	puissance d'alimentation continue de l'AP
$P_{out}$	puissance du signal à la sortie de l'AP
$P_d$	puissance dissipée par l'AP par effet joule
$P_{in}$	puissance du signal à l'entrée de l'AP
$P_{1dB}$	puissance de 1 dB de saturation de l'AP

$EE$	efficacité énergétique
$\rho_{IBO}$	recul de puissance d'entrée ou <i>Input Power Back-off</i> (IBO) de l'AP
$H_{AP}$	réponse impulsionnelle de l'AP
$H_{PD}$	réponse impulsionnelle du prédistorteur
$H_q$	réponse AM/AM de la $q^{\text{ème}}$ composante mémoire de l'AP
$Q$	ordre de mémoire de l'AP de modèle polynomial
$q$	indice de mémoire de l'AP de modèle polynomial
$L$	ordre de la non-linéarité de l'AP de modèle polynomial
$l$	indice de la non-linéarité de l'AP de modèle polynomial
$A$	tension de saturation de sortie du modèle de Rapp
$b$	facteur de raideur du modèle de Rapp
$b_l$	coefficients de l'AP d'indice $l$ du modèle polynomial sans mémoire
$b_{l,q}$	coefficients de l'AP d'indices $l$ et $q$ du modèle polynomial avec mémoire
$\lambda$	rapport entre $P_{1dB}$ et $A_{in,sat}$

### Lois statistiques, fonctions de distribution et moments

$f_{\text{Ray}}(r; P_s)$	loi de Rayleigh de puissance $P_s$
$f_{\text{GEV}}; \mu, \sigma, (r)$	loi GEV de position $\mu$ , dispersion $\sigma$ et facteur de forme $k$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	loi gaussienne de moyenne $\mu$ et de variance $\sigma^2$
$f_s(r)$	PDF du signal $s(t)$
$m_s(n, \varphi)$	moment incomplet inférieur de la PDF du signal $s(t)$
$M_s(n, \varphi)$	moment incomplet supérieur de la PDF du signal $s(t)$
$f_{x,c}(r)$	fonction de probabilité conjointe des signaux $x$ et $c$
$f_x(r A)$	fonction de densité de probabilité de $x$ sachant $A$

### Paramètres de la technique *clipping*

$A_{clip}$	amplitude de <i>clipping</i>
$\Lambda$	taux de <i>clipping</i> défini comme le rapport entre la puissance du seuil $A_{clip}^2$ et $P_x$

### Paramètres de la technique *Partial Transmit Sequence*

$M$	nombre de blocs de phases générées
$W$	nombre de facteurs de phases possibles
$m$	indice du sous-bloc OFDM
$b_m$	facteur de phase du bloc $m$

### Paramètres de la technique *Selected Mapping*

$M$	nombre des séquences de phases générées
-----	---

### Paramètres de la technique d'entrelacement

$M$	nombre d'entrelaceurs y compris l'état initial du symbole
-----	---

### Paramètres de la technique *Tone Injection*

- $A$  libelle du point d'origine
- $A_i$  libelles des mappages possibles du point d'origine
- $D$  distance euclidienne entre les points de mappage et le point d'origine

### Paramètres de la technique *Tone Reservation*

- $\kappa$  pourcentage que constituent les PRTs du total  $N$  de sous-porteuses
- $S_l$  ensemble constitué des indices des sous-porteuses PRTs
- $P_{max}$  puissance maximale permise ou atteinte par une PRT
- $A_{max}$  amplitude maximale permise ou atteinte par une PRT
- $\zeta$  rapport entre la puissance maximale autorisée à chacune des PRTs et la puissance moyenne d'une porteuse de données
- $\Delta P_b$  puissance valeur de ce boost  $\zeta$  de puissance
- $\tau$  puissance maximale du signal temporel
- $\nu$  facteur de perte de sensibilité au niveau du récepteur

### Paramètres de l'algorithme du gradient

- $V_{clip}$  seuil d'amplitude cible de l'algorithme du gradient
- $I_{max}$  nombre d'itérations maximal permis pour l'algorithme du gradient
- $N_V$  nombre de symboles OFDM pour lesquels l'algorithme prend fin car tous les échantillons du signal sont au-dessous de  $V_{clip}$
- $N_P$  nombre de symboles OFDM pour lesquels l'algorithme prend fin car la puissance maximale est atteinte
- $N_I$  nombre de symboles OFDM pour lesquels l'algorithme prend fin car le nombre maximal d'itérations est atteint
- $I_V$  nombre moyen d'itérations exécutées par l'algorithme avant de s'arrêter car tous les échantillons du signal sont au-dessous de  $V_{clip}$
- $I_P$  nombre moyen d'itérations exécutées par l'algorithme avant de s'arrêter car la puissance maximale est atteinte
- $\mathbf{H}$  noyau fréquentiel utilisé pour générer les noyaux de chaque itération
- $\mathbf{h}$  noyau temporel utilisé pour générer les noyaux de chaque itération
- $y^{(i)}$  l'amplitude la plus élevée détectée à l'itération  $i$
- $m(i)$  l'indice du pic d'amplitude le plus élevé détecté à l'itération  $i$
- $\phi^i$  la phase du pic d'amplitude le plus élevé détecté à l'itération  $i$
- $\alpha_i$  différence entre le seuil d'amplitude  $V_{clip}$  et  $y^{(i)}$
- $i_f$  indice de la dernière itération de l'algorithme
- $V_k^{(i)}$  vecteur unitaire suivant lequel s'ajoute la puissance de la porteuse  $C_k^{(i)}$
- $R_k^{(i)}$  valeur cumulée sur la  $k^e$  PRT à l'itération  $i$
- $\beta$  amplitude du noyau initial pour la méthode du gradient

### Paramètres de l'algorithme GICMP

$S$	nombre de crêtes détectées à chaque itération
$G$	nombre de groupes de PRTs
$\phi^{(i)}$	phase optimale calculée à l'itération $i$
$A^{(i)}$	facteur pour le calcul de $\phi^{(i)}$
$B^{(i)}$	facteur pour le calcul de $\phi^{(i)}$
$H^{(i)}$	représente l'ensemble des indices des $S$ pics détectés
$d_S^{(i)}$	échantillons de données sur les positions $H^{(i)}$
$c_S^{(i)}$	échantillons du signal ajouté sur les positions $H^{(i)}$



# Bibliographie

- [1] T. E. A. Andrae, “Malmodin, J. ; Lundén, D. The Energy and Carbon Footprint of the Global ICT and EM Sectors 2010–2015. Sustainability 2018, 10, 3027.” Tech. Rep., 2018.
- [2] ———, “On Global Electricity Usage of Communication Technology : Trends to 2030, Challenges, 2015,” Tech. Rep., 2015.
- [3] F. v. I. G. C. Natasha Veligura, Karl Ka-Ki Chan, “COVID-19’s Impact on the Global Telecommunications Industry,” Telecommunications, Media and Technology unit, Global Infrastructure Department, International Finance Corporation (IFC), member of the World Bank Group, Tech. Rep., 2020.
- [4] M. A. Imran and P. Partners, “Energy efficiency analysis of the reference systems, areas of improvements and target breakdown,” EARTH Project Report, Deliverable D2.3, Tech. Rep., 2012.
- [5] G. Auer, V. Giannini, I. Godor, P. Skillermark, M. Olsson, M. A. Imran, D. Sabella, M. J. Gonzalez, C. Desset, and O. Blume, “Cellular energy efficiency evaluation framework,” in *Vehicular Technology Conference (VTC Spring), 2011 IEEE 73rd*, May 2011, pp. 1–6.
- [6] “Technical Specification Group Radio Access Network ; Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA) ; LTE physical layer ; General description (Release 15),” Tech. Rep., 2018.
- [7] “Technical Specification Group Radio Access Network ; Requirements for further advancements for Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA) (LTE-Advanced) (Release 16),” Tech. Rep., 2020.
- [8] *Frame structure channel coding and modulation for a second generation digital terrestrial television broadcasting system (DVB-T2), EN 302 55 v1.4.1*, Std., 2015.
- [9] *ATSC Standard : Physical Layer Protocol, A/322 :2018*, Std., 2018.
- [10] *IEEE 802.11a-1999, C/LM - LAN/MAN Standards Committee*, Std., 1999.
- [11] “3rd Generation Partnership Project ; Technical Specification Group Services and System Aspects ; Release 16 Description ; Summary of Rel-16 Work Items(Release 16),” Tech. Rep., 2020-09.
- [12] Y.-C. Wang and Z.-Q. Luo, “Optimized iterative clipping and filtering for PAPR reduction of OFDM signals,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 59, no. 1, pp. 33–37, 2011.
- [13] J. Tellado and J. M. Cioffi, “Efficient algorithms for reducing par in multicarrier systems,” in *proc. of IEEE ISIT*. IEEE, 1998, p. 191.



- [14] B. S. Krongold and D. L. Jones, "PAR reduction in OFDM via active constellation extension," *IEEE Trans. Broadcast.*, vol. 49, no. 3, pp. 258–268, 2003.
- [15] "IEEE Standard for Information technology–Telecommunications and information exchange between systems Local and metropolitan area networks–Specific requirements Part 11 : Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications," *IEEE Std 802.11-2012 (Revision of IEEE Std 802.11-2007)*, pp. 1–2793, 2012.
- [16] *IEEE Standard for Local and Metropolitan Area Networks, Part 16, Amendment 2*, IEEE 802.16e Std., 2005.
- [17] P. Tse, David; Viswanath, *Fundamentals of Wireless Communication*, 4th ed. Cambridge University Press., 2006.
- [18] R. Prasad, *Universal Wireless Personal Communications*, 1st ed. Norwood, MA, USA : Artech House, Inc., 1998.
- [19] A. Cheaito, "Analyse théorique des distorsions dans la bande et en dehors de la bande de transmission pour les signaux à porteuses multiples : Impact conjoint des non-linéarités de l'amplificateur de puissance et effets de mémoire et prédistorsion," Theses, INSA de Rennes, Mar. 2017. [Online]. Available : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01553518>
- [20] S. Weinstein and P. Ebert, "Data transmission by frequency-division multiplexing using the discrete fourier transform," *IEEE Transactions on Communication Technology*, vol. 19, no. 5, pp. 628–634, October 1971.
- [21] J. Le Masson, "Systèmes de transmission avec précodage linéaire et traitement itératif : application à l'ofdm et aux techniques mimo," Ph.D. dissertation, 2005, thèse de doctorat dirigée par Berrou, Claude Sciences pour l'ingénieur Lorient 2005. [Online]. Available : <http://www.theses.fr/2005LORIS062>
- [22] "Technical Specification Group Services and System Aspects, Release 15 Description, Summary of Rel-15 Work Items (Release 15)," Tech. Rep., 03-2019.
- [23] A. Goldsmith, *Wireless Communications*. Stanford University (2005).
- [24] J. H. K. Vuolevi, T. Rahkonen, and J. P. A. Manninen, "Measurement technique for characterizing memory effects in RF power amplifiers," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 49, no. 8, pp. 1383–1389, Aug 2001.
- [25] W. Bosch and G. Gatti, "Measurement and simulation of memory effects in pre-distortion linearizers," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 37, no. 12, pp. 1885–1890, Dec 1989.
- [26] N. Imai, T. Nojima, and T. Murase, "Novel linearizer using balanced circulators and its application to multilevel digital radio systems," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 37, no. 8, pp. 1237–1243, Aug 1989.
- [27] S. P. Stapleton and F. C. Costescu, "An adaptive predistorter for a power amplifier based on adjacent channel emissions [mobile communications]," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 41, no. 1, pp. 49–56, Feb 1992.
- [28] W. B. Sander, S. V. Schell, and B. L. Sander, "Polar modulator for multi-mode cell phones," in *Custom Integrated Circuits Conference, 2003. Proceedings of the IEEE 2003*, Sept 2003, pp. 439–445.

- [29] M. J. Franco, “Wideband digital predistortion linearization of radio frequency power amplifiers with memory,” Ph.D. dissertation, Drexel University.
- [30] L. Ding, “Digital Predistortion of Power Amplifiers for Wireless Applications,” Ph.D. dissertation, School of Electrical and Computer Engineering, Georgia Institute of Technology, 2004.
- [31] H. D. Wasaff, “Adaptive Pre-Distortion for Nonlinear High Power Amplifiers in OFDM Systems,” Ph.D. dissertation, Universitat Politècnica de Catalunya, 2004.
- [32] “Analog devices, 250 mhz bandwidth dpd observation receiver (ad6641).”
- [33] C. Rapp, “Effects of HPA-nonlinearity on a 4-DPSK/OFDM-signal for a digital sound broadcasting signal,” in *ESA Special Publication*, ser. ESA Special Publication, P. S. Weltevreden, Ed., vol. 332, Oct. 1991.
- [34] M. C. Jeruchim, P. Balaban, and K. S. Shanmugan, Eds., *Simulation of Communication Systems : Modeling, Methodology and Techniques*, 2nd ed. Norwell, MA, USA : Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [35] J. Kim and K. Konstantinou, “Digital predistortion of wideband signals based on power amplifier model with memory,” *Electronics Letters*, vol. 37, no. 23, pp. 1417–1418, Nov 2001.
- [36] D. R. Morgan, Z. Ma, J. Kim, M. G. Zierdt, and J. Pastalan, “A generalized memory polynomial model for digital predistortion of rf power amplifiers,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 54, no. 10, pp. 3852–3860, Oct 2006.
- [37] M. Schetzen, *The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems*. Melbourne, FL, USA : Krieger Publishing Co., Inc., 2006.
- [38] S. Billings and S. Fakhouri, “Identification of systems containing linear dynamic and static nonlinear elements,” *Automatica*, vol. 18, no. 1, pp. 15 – 26, 1982. [Online]. Available : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/000510988290022X>
- [39] P. Gilabert, G. Montoro, and E. Bertran, “On the wiener and hammerstein models for power amplifier predistortion,” in *2005 Asia-Pacific Microwave Conference Proceedings*, vol. 2, Dec 2005, pp. 4 pp.–.
- [40] K. Narendra and P. Gallman, “An iterative method for the identification of nonlinear systems using a hammerstein model,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 11, no. 3, pp. 546–550, Jul 1966.
- [41] R. DISNEY and A. Clarke, “Probability and random processes : A first course with applications 2nd ed,” *Wiley Series in Probability and Mathematics*, 1985.
- [42] A. Rudziński, “Normalized gaussian approach to statistical modeling of ofdm signals,” *Journal of Telecommunications and Information Technology*, 2014.
- [43] R. v. Nee and R. Prasad, *OFDM for wireless multimedia communications*, 1st ed. Norwood, MA, USA : Artech House, Inc., 2000.
- [44] R. Schmogrow and B. Nebendahl et al, “Error vector magnitude as a performance measure for advanced modulation formats,” *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 24, no. 1, pp. 61–63, 2011.
- [45] S. H. Han and J. H. Lee, “An overview of peak-to-average power ratio reduction techniques for multicarrier transmission,” *IEEE wireless communications*, vol. 12, no. 2, pp. 56–65, 2005.

- [46] T. Jiang and Y. Wu, “An overview : Peak-to-average power ratio reduction techniques for ofdm signals,” *IEEE Transactions on broadcasting*, vol. 54, no. 2, pp. 257–268, 2008.
- [47] Y. Rahmatallah and S. Mohan, “Peak-to-average power ratio reduction in OFDM systems : A survey and taxonomy,” *IEEE Commun. Surveys Tuts.*, vol. 15, no. 4, pp. 1567–1592, 2013.
- [48] G. Wunder, R. F. Fischer, H. Boche, S. Litsyn, and J.-S. No, “The PAPR problem in OFDM transmission : New directions for a long-lasting problem,” *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 30, no. 6, pp. 130–144, 2013.
- [49] F. Sandoval, G. Poitau, and F. Gagnon, “Hybrid peak-to-average power ratio reduction techniques : Review and performance comparison,” *IEEE Access*, vol. 5, pp. 27 145–27 161, 2017.
- [50] R. O’Neill and L. B. Lopes, “Envelope variations and spectral splatter in clipped multicarrier signals,” in *Proceedings of 6th International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications*, vol. 1. IEEE, 1995, pp. 71–75.
- [51] H. Ochiai and H. Imai, “Performance analysis of deliberately clipped ofdm signals,” *IEEE Transactions on communications*, vol. 50, no. 1, pp. 89–101, 2002.
- [52] J. Armstrong, “Peak-to-average power reduction for ofdm by repeated clipping and frequency domain filtering,” *Electronics letters*, vol. 38, no. 5, pp. 246–247, 2002.
- [53] S.-E. Lee, K.-J. Bang, M.-H. Park, Y.-S. Lee, and D.-S. Hong, “A new peak-windowing algorithm with window-length adaptation for papr reduction of ofdm systems,” in *Proceedings of the IEEK Conference*. The Institute of Electronics and Information Engineers, 2005, pp. 185–188.
- [54] X. Huang, J. Lu, J. Zheng, J. Chuang, and J. Gu, “Reduction of peak-to-average power ratio of ofdm signals with companding transform,” *Electronics letters*, vol. 37, no. 8, pp. 506–507, 2001.
- [55] R. W. Bauml, R. F. Fischer, and J. B. Huber, “Reducing the peak-to-average power ratio of multicarrier modulation by selected mapping,” *Electronics letters*, vol. 32, no. 22, pp. 2056–2057, 1996.
- [56] A. D. S. Jayalath and C. Tellambura, “Slm and pts peak-power reduction of ofdm signals without side information,” *IEEE transactions on Wireless communications*, vol. 4, no. 5, pp. 2006–2013, 2005.
- [57] H.-S. Joo, S.-J. Heo, H.-B. Jeon, J.-S. No, and D.-J. Shin, “A new blind slm scheme with low decoding complexity for ofdm systems,” *IEEE transactions on broadcasting*, vol. 58, no. 4, pp. 669–676, 2012.
- [58] S. H. Muller and J. B. Huber, “Ofdm with reduced peak-to-average power ratio by optimum combination of partial transmit sequences,” *Electronics letters*, vol. 33, no. 5, pp. 368–369, 1997.
- [59] S. H. Han and J. H. Lee, “Papr reduction of ofdm signals using a reduced complexity pts technique,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 11, no. 11, pp. 887–890, 2004.
- [60] L. J. Cimini and N. R. Sollenberger, “Peak-to-average power ratio reduction of an ofdm signal using partial transmit sequences,” *IEEE Communications letters*, vol. 4, no. 3, pp. 86–88, 2000.

- [61] A. D. Jayalath and C. Tellambura, “Reducing the peak-to-average power ratio of orthogonal frequency division multiplexing signal through bit or symbol interleaving,” *Electronics Letters*, vol. 36, no. 13, pp. 1161–1163, 2000.
- [62] S. Janaaththanan, C. Kasparis, and B. G. Evans, “A gradient based algorithm for papr reduction of ofdm using tone reservation technique,” in *VTC Spring 2008-IEEE Vehicular Technology Conference*. IEEE, 2008, pp. 2977–2980.
- [63] J. Hou, C. Tellambura, and J. Ge, “Tone injection for papr reduction using parallel tabu search algorithm in ofdm systems,” in *2012 IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM)*. IEEE, 2012, pp. 4899–4904.
- [64] S. Zabré, J. Palicot, Y. Louët, and C. Lereau, “Socp approach for ofdm peak-to-average power ratio reduction in the signal adding context,” in *2006 IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology*. IEEE, 2006, pp. 834–839.
- [65] M. Mroué, A. Nafkha, J. Palicot, B. Gavalda, and N. Dagorne, “Performance and implementation evaluation of tr papr reduction methods for dvb-t2,” in *International Journal of Digital Multimedia Broadcasting, vol. 2010, Article ID 797393*. hindawi, 2010, pp. 834–839.
- [66] Y. Wang, W. Chen, and C. Tellambura, “Genetic algorithm based nearly optimal peak reduction tone set selection for adaptive amplitude clipping papr reduction,” *IEEE transactions on broadcasting*, vol. 58, no. 3, pp. 462–471, 2012.
- [67] J.-C. Chen, M.-H. Chiu, Y.-S. Yang, and C.-P. Li, “A suboptimal tone reservation algorithm based on cross-entropy method for papr reduction in ofdm systems,” *IEEE Transactions on Broadcasting*, vol. 57, no. 3, pp. 752–756, 2011.
- [68] J.-C. Chen and C.-P. Li, “Tone reservation using near-optimal peak reduction tone set selection algorithm for papr reduction in ofdm systems,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 17, no. 11, pp. 933–936, 2010.
- [69] D.-W. Lim, H.-S. Noh, H.-B. Jeon, J.-S. No, and D.-J. Shin, “Multi-stage tr scheme for papr reduction in ofdm signals,” *IEEE transactions ON broadcasting*, vol. 55, no. 2, pp. 300–304, 2009.
- [70] Y. Jiao, X. Liu, and X. Wang, “A novel tone reservation scheme with fast convergence for papr reduction in ofdm systems,” in *2008 5th IEEE Consumer Communications and Networking Conference*. IEEE, 2008, pp. 398–402.
- [71] H. Li, T. Jiang, and Y. Zhou, “An improved tone reservation scheme with fast convergence for papr reduction in ofdm systems,” *IEEE Transactions on Broadcasting*, vol. 57, no. 4, pp. 902–906, 2011.
- [72] T. Jiang, C. Ni, C. Xu, and Q. Qi, “Curve fitting based tone reservation method with low complexity for papr reduction in ofdm systems,” *IEEE Communications Letters*, vol. 18, no. 5, pp. 805–808, 2014.
- [73] S. Rosati, E. A. Candreva, and G. E. Corazza, “Rotation invariant subcarrier mapping over dvb-t2 reserved tones,” in *2013 IEEE 77th Vehicular Technology Conference (VTC Spring)*. Ieee, 2013, pp. 1–5.
- [74] F. Tosato, M. Sandell, and M. Tanahashi, “Tone reservation for papr reduction : An optimal approach through sphere encoding,” in *2016 IEEE International Conference on Communications (ICC)*. IEEE, 2016, pp. 1–6.

- [75] M. L. Diallo, M. Chafii, J. Palicot, and F. Bader, "Modified tone reservation for papr reduction in ofdm systems," in *2016 24th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*. IEEE, 2016, pp. 697–701.
- [76] J. Bai, Y. Li, W. Cheng, H. Du, and Y. Wang, "A novel peak-to-average power ratio reduction scheme via tone reservation in ofdm systems," *China Communications*, vol. 14, no. 11, pp. 279–290, 2017.
- [77] P. Yu and S. Jin, "A low complexity tone reservation scheme based on time-domain kernel matrix for papr reduction in ofdm systems," *IEEE transactions on broadcasting*, vol. 61, no. 4, pp. 710–716, 2015.
- [78] Y. Wang, S. Xie, and Z. Xie, "Fista-based papr reduction method for tone reservation's ofdm system," *IEEE Wireless Communications Letters*, vol. 7, no. 3, pp. 300–303, 2017.
- [79] S. K. C. Bulusu, M. Crussière, J.-F. Héland, R. Mounzer, Y. Nasser, O. Rousset, and A. Untersee, "Quasi-optimal tone reservation papr reduction algorithm for next generation broadcasting systems : A performance/complexity/latency tradeoff with testbed implementation," *IEEE Transactions on Broadcasting*, vol. 64, no. 4, pp. 883–899, 2018.
- [80] N. Lahbabi, S. K. C. Bulusu, J.-F. Héland, and M. Crussiere, "Very efficient tone reservation papr reduction fully compatible with atsc 3.0 standard : Performance and practical implementation analysis," *IEEE Access*, vol. 6, pp. 58 355–58 372, 2018.
- [81] M. Grant and S. Boyd, "CVX : Matlab software for disciplined convex programming, version 2.1," <http://cvxr.com/cvx>, Mar. 2014.
- [82] —, "Graph implementations for nonsmooth convex programs," in *Recent Advances in Learning and Control*, ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences, V. Blondel, S. Boyd, and H. Kimura, Eds. Springer-Verlag Limited, 2008, pp. 95–110.
- [83] B. M. Lee and Y. Kim, "An adaptive clipping and filtering technique for PAPR reduction of OFDM signals," *Circuits, Systems, and Signal Processing*, vol. 32, no. 3, pp. 1335–1349, 2013.
- [84] I. Kotzer, S. Har-Nevo, S. Sodin, and S. Litsyn, "An analytical approach to the calculation of EVM in clipped multi-carrier signals," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 60, no. 5, pp. 1371–1380, 2012.
- [85] C. Zhao and R. J. Baxley, "Error vector magnitude analysis for OFDM systems," in *proc. of IEEE Fortieth Asilomar Conf. on Signals, Systems and Computers*, 2006, pp. 1830–1834.
- [86] O. Vaananen, J. Vankka, and K. Halonen, "Effect of baseband clipping in wideband CDMA system," in *proc. of IEEE ISSSTA'02*, vol. 2, 2002.
- [87] H. Ochiai and H. Imai, "Performance analysis of deliberately clipped ofdm signals," *IEEE Transactions on communications*, vol. 50, no. 1, pp. 89–101, 2002.
- [88] R. Yoshizawa and H. Ochiai, "Effect of clipping and filtering with distortionless papr reduction for ofdm systems," in *2015 IEEE 82nd Vehicular Technology Conference (VTC2015-Fall)*. IEEE, 2015, pp. 1–5.

- [89] J. Song and H. Ochiai, "Performance analysis for ofdm signals with peak cancellation," *IEEE transactions on communications*, vol. 64, no. 1, pp. 261–270, 2015.
- [90] —, "Fpga implementation of peak cancellation for papr reduction of ofdm signals," in *2014 IEEE International Conference on Communication Systems*. IEEE, 2014, pp. 414–418.
- [91] R. J. Baxley, C. Zhao, and G. T. Zhou, "Constrained clipping for crest factor reduction in OFDM," *IEEE Trans. Broadcast.*, vol. 52, no. 4, pp. 570–575, 2006.
- [92] A. Cheaito, M. Crussière, J.-F. Hélar, and Y. Louët, "Quantifying the memory effects of power amplifiers : EVM closed-form derivations of multicarrier signals," *IEEE Wireless Commun. Lett.*, vol. 6, no. 1, pp. 34–37, 2017.
- [93] O. A. Gouba and Y. Louët, "Theoretical analysis of the trade-off between efficiency and linearity of the high power amplifier in ofdm context," in *European Wireless 2012; 18th European Wireless Conference 2012*. VDE, 2012, pp. 1–7.
- [94] —, "Predistortion performance considering peak to average power ratio reduction in OFDM context," in *proc. of IEEE WCNC'12*, 2012, pp. 204–208.
- [95] —, "Adding signal for peak-to-average power reduction and predistortion in an orthogonal frequency division multiplexing context," *IET Signal Processing*, vol. 7, no. 9, pp. 879–887, 2013.
- [96] A. Cheaito, M. Crussière, Y. Louët, and J.-F. Hélar, "Quantifying the Memory Effects of Power Amplifiers : EVM Closed-Form Derivations of Multicarrier Signals," submitted to *IEEE Wireless Communications Letters*.
- [97] A. Cheaito, M. Crussière, J.-F. Hélar, and Y. Louët, "Energy-Efficiency Optimization of the High Power Amplifier for Multicarrier Systems :Analytical EVM Derivation," in *2016 IEEE International Conference on Computer Communications (INFOCOM)*, San Francisco, United States, Apr. 2016, 6 pages. [Online]. Available : <https://hal-centralesupelec.archives-ouvertes.fr/hal-01318219>
- [98] A. Cheaito, M. Crussière, Y. Louët, and J.-F. Hélar, "Expression analytique de l'EVM pour les signaux multiporteuses : Impact conjoint des non-linéarités de l'amplificateur de puissance et de la fonction de prédistorsion," in *GRETSI 2015*, Lyon, France, Sep. 2015, 4 pages. [Online]. Available : <https://hal-supelec.archives-ouvertes.fr/hal-01255157>
- [99] —, "EVM Derivation for Multicarrier Signals : Joint Impact of Non-Linear Amplification and Predistortion," in *2015 IEEE 81st Vehicular Technology Conference (VTC Spring)*, Glasgow, United Kingdom, May 2015, pp. 1–6. [Online]. Available : <https://hal-supelec.archives-ouvertes.fr/hal-01109408>
- [100] A. Cheaito, J.-F. Hélar, M. Crussière, and Y. Louët, "EVM Derivation of Multicarrier Signals to Determine the Operating Point of the Power Amplifier Considering Clipping and Predistortion," submitted to *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*.
- [101] R. Van Nee and A. De Wild, "Reducing the peak-to-average power ratio of ofdm," in *VTC'98. 48th IEEE Vehicular Technology Conference. Pathway to Global Wireless Revolution (Cat. No. 98CH36151)*, vol. 3. IEEE, 1998, pp. 2072–2076.
- [102] R. v. Nee and R. Prasad, *OFDM for wireless multimedia communications*. Artech House, Inc., 2000.

- [103] H. Ochiai and H. Imai, “On the distribution of the peak-to-average power ratio in ofdm signals,” *IEEE transactions on communications*, vol. 49, no. 2, pp. 282–289, 2001.
- [104] M. Sharif, M. Gharavi-Alkhansari, and B. H. Khalaj, “On the peak-to-average power of ofdm signals based on oversampling,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 51, no. 1, pp. 72–78, 2003.
- [105] T. Jiang, M. Guizani, H.-H. Chen, W. Xiang, and Y. Wu, “Derivation of papr distribution for ofdm wireless systems based on extreme value theory,” *IEEE transactions on wireless communications*, vol. 7, no. 4, pp. 1298–1305, 2008.
- [106] S. Wei, D. L. Goeckel, and P. E. Kelly, “A modern extreme value theory approach to calculating the distribution of the peak-to-average power ratio in ofdm systems,” in *2002 IEEE International Conference on Communications. Conference Proceedings. ICC 2002 (Cat. No. 02CH37333)*, vol. 3. IEEE, 2002, pp. 1686–1690.
- [107] V. Savaux and Y. Louët, “Papr analysis as a ratio of two random variables : Application to multicarrier systems with low subcarriers number,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 66, no. 11, pp. 5732–5739, 2018.
- [108] M. Issa, A.-k. Ajami, H. Artail, and Y. Nasser, “An approximation for the distribution of the peak-to-average power ratio in carrier-aggregated ofdm signals using level crossing rate analysis,” in *2017 IEEE 13th International Conference on Wireless and Mobile Computing, Networking and Communications (WiMob)*. IEEE, 2017, pp. 1–8.
- [109] N. Lashkarian, E. Hemphill, H. Tarn, H. Parekh, and C. Dick, “Reconfigurable digital front-end hardware for wireless base-station transmitters : Analysis, design and fpga implementation,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Regular Papers*, vol. 54, no. 8, pp. 1666–1677, 2007.
- [110] R. W. Bauml, R. F. Fischer, and J. B. Huber, “Reducing the peak-to-average power ratio of multicarrier modulation by selected mapping,” *Electronics letters*, vol. 32, no. 22, pp. 2056–2057, 1996.
- [111] H. Boche and U. J. Mönich, “Tone reservation and solvability concepts for the papr problem in general orthonormal transmission systems,” in *2018 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*. IEEE, 2018, pp. 3669–3673.
- [112] E. Tampubolon and H. Boche, “Probabilistic analysis of tone reservation method for the papr reduction of ofdm systems,” in *2017 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*. IEEE, 2017, pp. 3799–3803.
- [113] H. Boche and E. Tampubolon, “Asymptotic analysis of tone reservation method for the papr reduction of cdma systems,” in *2017 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*. IEEE, 2017, pp. 2723–2727.
- [114] H. Boche and U. J. Mönich, “Optimal tone reservation for peak to average power control of cdma systems,” in *2018 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*. IEEE, 2018, pp. 3674–3678.
- [115] —, “Peak-to-average power control via tone reservation in general orthonormal transmission systems,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 66, no. 13, pp. 3520–3528, 2018.

- [116] G. Wunder and H. Boche, "Upper bounds on the statistical distribution of the crest-factor in ofdm transmission," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 49, no. 2, pp. 488–494, 2003.
- [117] H. Boche and E. Tampusolon, "Papr problem for walsh systems and related problems," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 64, no. 8, pp. 5531–5548, 2018.
- [118] B. M. Lee, Y. S. Rim, and W. Noh, "A combination of selected mapping and clipping to increase energy efficiency of OFDM systems," *PloS one*, vol. 12, no. 10, p. e0185965, 2017.
- [119] L. Ding, G. T. Zhou, D. R. Morgan, Z. Ma, J. S. Kenney, J. Kim, and C. R. Giardina, "A robust digital baseband predistorter constructed using memory polynomials," *IEEE Transactions on communications*, vol. 52, no. 1, pp. 159–165, 2004.
- [120] C. Rapp, "Effects of HPA-nonlinearity on a 4-DPSK/OFDM-signal for a digital sound broadcasting signal," in *proc. of ESA, Second European Conf. on Satellite Communications*, 1991, pp. 179–184.
- [121] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*. Academic press, 2014.
- [122] P. Ribereau, E. Masiello, and P. Naveau, "Skew generalized extreme value distribution : PWM estimation and application to block maxima procedure," *Communications in Statistics-Theory and Methods*, vol. 45, no. 17, pp. 5037–5052, 2016.
- [123] J. R. M. Hosking, J. R. Wallis, and E. F. Wood, "Estimation of the generalized extreme-value distribution by the method of probability-weighted moments," *Technometrics*, vol. 27, no. 3, pp. 251–261, 1985.
- [124] J. L. Coolidge, "The story of the binomial theorem," *The American Mathematical Monthly* 56, no. 3, pp. 147–57.
- [125] G. Muraleedharan, C. G. Soares, and C. Lucas, "Characteristic and moment generating functions of generalised extreme value distribution ," in *Sea Level Rise, Coastal Engineering, Shorelines and Tides*. Nova, 2011, pp. 269–276.
- [126] J. Cheng and N. C. Beaulieu, "Maximum-likelihood based estimation of the nagami m parameter," *IEEE Communications letters*, vol. 5, no. 3, pp. 101–103, 2001.
- [127] F. Ashkar and S. Mahdi, "Fitting the log-logistic distribution by generalized moments," *Journal of Hydrology*, vol. 328, no. 3, pp. 694–703, 2006, the ICWRER - Symposium in Dresden, Germany. [Online]. Available : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002216940600045X>
- [128] C. Kleiber, "A guide to the dagum distributions," in *Modeling income distributions and Lorenz curves*. Springer, 2008, pp. 97–117.





## AVIS DU JURY SUR LA REPRODUCTION DE LA THESE SOUTENUE

**Titre de la thèse:**

Evaluation analytique des distorsions de signaux à porteuses multiples en présence d'amplification non-linéaire et en prenant en compte différentes techniques de réduction de la dynamique des signaux

**Nom Prénom de l'auteur : EL HASSAN MARIAM**

**Membres du jury :**

- Monsieur CANCES Jean-Pierre
- Monsieur ROVIRAS Daniel
- Monsieur HELARD Jean-François
- Monsieur GORCE Jean-Marie
- Madame MROUEH Lina
- Monsieur BAZZI Oussama
- Monsieur CRUSSIÈRE Mathieu
- Monsieur NASSER Youssef

**Président du jury :** *Mathieu Jean-Marie Gorce*

**Date de la soutenance :** 06 Avril 2021

Reproduction de la thèse soutenue

- Thèse pouvant être reproduite en l'état  
 Thèse pouvant être reproduite après corrections suggérées

Fait à Rennes, le 06 Avril 2021

Signature du président de jury

Le Directeur,

*Abdellatif MIRAOUI*  
Abdellatif MIRAOUI







**Titre :** Evaluation analytique des distorsions de signaux à porteuses multiples en présence d'amplification non-linéaire et en prenant en compte différentes techniques de réduction de la dynamique des signaux

**Mots clés :** Modulations OFDM, Amplificateur de puissance, EVM, *Tone Reservation*

**Résumé :** Les techniques multi-porteuses de type OFDM, largement déployées dans les systèmes de communication sans fils, se caractérisent par une grande dynamique du signal transmis qui est mesurée par le rapport de la puissance crête sur la puissance moyenne ou PAPR. Lors de l'amplification de ces signaux par des amplificateurs de puissance qui sont par essence non linéaires, cette dynamique du signal nécessite d'utiliser un certain recul ou *Input Back-Off* (IBO) par rapport au niveau de saturation de l'amplificateur afin de limiter les distorsions générées dans la bande (mesurées par l'EVM) et en dehors de la bande du signal. Ceci conduit à une efficacité énergétique qui est d'autant plus faible que ce recul est élevé.

Plusieurs techniques de réduction de PAPR ont été proposées dans la littérature pouvant être appliquées au signal avant amplification pour réduire sa dynamique, telles que la technique

*Tone Reservation* (TR) retenue dans le standard DVB-T2. Cependant, malgré le grand nombre d'algorithmes de réduction du PAPR proposés dans la littérature, l'évaluation analytique de leurs performances n'a pas été suffisamment étudiée.

Dans ce contexte, cette thèse vise à évaluer analytiquement les performances des stratégies de réduction du PAPR basées sur la technique TR, et ce, essentiellement par l'évaluation de l'expression de l'EVM du signal OFDM amplifié en appliquant de telles techniques.

Ces résultats sont d'un grand intérêt afin de prévoir les gains en efficacité obtenus grâce à la technique TR et l'expression analytique de l'EVM permet de déterminer précisément les paramètres optimaux de la technique sélectionnée en considérant l'optimisation globale de la chaîne de transmission.

**Title :** Analytical evaluation of multi-carrier signals distortions in the presence of non-linear amplification and considering different techniques of PAPR reduction

**Keywords:** OFDM modulations, Power amplifier, PAPR reduction, EVM, Tone Reservation

**Abstract:** OFDM multi-carrier modulations widely used in today's wireless communication systems are characterized by a high dynamic range of the transmitted signal power measured by the Peak to Average Power Ratio (PAPR). At the amplification stage, the power amplifiers are usually characterized by a non-linear response, and thus the high PAPR of the OFDM signal requires the use a certain Input Power Back-off (IBO) relatively to the saturation level of the power amplifier. The role of this IBO is to limit the distortions generated in-band (measured by the EVM metric) and out-of-band of the signal due to the amplifier non-linearities. This leads to an energy efficiency that is as low as the IBO is high.

Several PAPR reduction techniques have been proposed in the literature that can be applied to the signal before amplification to reduce its

dynamic, such as Tone Reservation (TR) technique retained in standards like DVB-T2 and ATSC3.0. However, despite the large number of PAPR reduction algorithms proposed in the literature, the analytical evaluation of their performance has not been sufficiently studied.

In this context, this thesis aims to analytically evaluate the performance of PAPR reduction strategies based on the TR technique, essentially by evaluating the EVM expression of the amplified OFDM signal while applying such techniques. These results are of high interest in order to predict the efficiency gains obtained using the TR technique. Moreover, the analytical expression of the EVM helps to precisely determine the optimal parameters of the selected technique by considering the overall optimization of the transmission chain.