



**HAL**  
open science

# Modélisation d'un processus de mise en forme intégrant l'interaction entre procédés dans le comportement du matériau.

Diego Britez

► **To cite this version:**

Diego Britez. Modélisation d'un processus de mise en forme intégrant l'interaction entre procédés dans le comportement du matériau.. Mécanique [physics]. Université de Bordeaux, 2022. Français. NNT : 2022BORD0219 . tel-03783472

**HAL Id: tel-03783472**

**<https://theses.hal.science/tel-03783472v1>**

Submitted on 22 Sep 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse présentée  
pour obtenir le grade de

**Docteur  
de l'Université de Bordeaux**

École Doctorale  
Sciences Physiques et de l'Ingénieur

Spécialité  
Mécanique

Par **Diego BRÍTEZ**

Modélisation d'un processus de mise en forme intégrant  
l'interaction entre procédés dans le comportement du matériau

Sous la direction de : **Raynald LAHEURTE**  
Co-directeur : **Olivier CAHUC**

Soutenue le 11 juillet 2022

Membres du jury :

M. Samuel FOREST	Directeur de recherche CNRS	École des Mines de Paris	Rapporteur
M. José OUTEIRO	Maître de conférences	ENSAM de Cluny	Rapporteur
M. Franck GIROT MATA	Professeur	Universidad del Pais Vasco	Examinateur
M. Anis HOR	Maître de conférences	ISAE-SUPAERO Toulouse	Examinateur
Mme. Sana WERDA	Maître de conférences	Université de Bordeaux	Examinatrice
M. Olivier CAHUC	Professeur	Université de Bordeaux	Examinateur
M. Raynald LAHEURTE	Maître de conférences	Université de Bordeaux	Invité
M. Philippe DARNIS	Professeur	Université de Bordeaux	Invité

## Remerciements

*Je remercie mon équipe encadrante, Raynald Laheurte, Olivier Cahuc, Philippe Darnis et Sana Werda, pour leur confiance depuis le début de la thèse pour avoir toujours supporté mes démarches et idées. Je suis très reconnaissant de leur bons conseils et pour les grosses corrections qui a demandé ce travail (désolé). Je ne veux pas oublier aussi Mike Prime pour son inestimable collaboration dans le développement de la nouvelle méthodologie de résolution des problèmes liés à la mesure des contraintes résiduelles.*

*La période de ce travail a été particulièrement dure, en raison des difficultés propres du travail développé mais aussi du fait du contexte particulier généré par la pandémie. Néanmoins, ça ne signifie pas que je n'ai pas profité de ce temps, j'ai adoré faire ce travail et surtout j'ai aimé la bonne ambiance toujours présente dans le laboratoire. C'est impossible de prioriser mes remerciements et mes gratitudes à tous ceux qui ont fait partie de cette expérience.*

*A ma famille : mamá, papá, Eli, Guille, Mauri, Alvaro, Pablo et Jorge pour tout le soutien inconditionnel durant toute cette période, surtout pendant l'époque la plus dure du confinement. A mes cousins, très particulièrement à Sergio qui durant tout le temps est resté en contact permanent.*

*La convivialité et la bonne ambiance dans le laboratoire a été fondamentale durant ces trois ans et demi, ainsi je veux remercier tous ceux qui sont passés par le bureau 40 : Anna, Yang, Jacques, Cassiopée, Biswa, Danilo, Quentin, Constance, Alex et Timothée. Mais aussi aux doctorants, postdocs et ingénieurs de recherche, à ceux de l'étape pré-covid : Paul, Eileen, Tanguy, Abir, Florian et ceux qui sont arrivé durant le post-covid : Jean, Yann, Mael, David, Mohamed, Pinku.*

*A mes amis paraguayens en France et en Europe, nous avons tous traversé des moments similaires et leur soutien ainsi que leur compagnie (même à distance) sont appréciables : Ale, Sonia, Henry, Aldo, Caro, Nati, Juanpa, Olgui, Amaías, Jaz S. et Claudio. A mes amis du Paraguay qui sont restés en contact quotidiennement comme si j'étais toujours là : Midi, Magui, Jaz R., Debo, Silvia, Eni, Agustin, Emilio, Karen, Ricky, Rene, Nico, Tony, Evelio, Tutu et Julia.*

*Je veux remercier tous les professeurs et enseignants avec qui j'ai échangé durant cette période de thèse : François-Xavier, Jean-Christophe, Claire, Stéphane, Mathieu, Jean Marc (avec son traditionnel annonce de pause café), Olivier M., Arnaud, Nicolas B Je veux remercier très particulièrement dans ce groupe Christophe, Corinne et Eric qui ont répondu plusieurs fois à mes questions en consacrant un peu de leur temps. Aussi un grand merci à Catherine F. pour m'avoir aidé aux démarches bureaucratiques parfois difficiles.*

*Par ailleurs je veux remercier mes amis ici à Bordeaux : Eusebia, Ludo, Victor, Cécile, Ezequiel, Pia, Andre, Moni, Pauli, Méta et tous les argentins du groupe.*

---

*Je ne veux pas oublier non plus mes deux amis qui ont quitté ce monde durant ma thèse : Hugo et Juan. Hugo, qui a été une des personnes à m'avoir persuadé de continuer mes études avec une thèse et le responsable de ma passion pour le vélo. Juan, qui nous a quitté juste deux mois avant la présentation finale de mon travail, il avait la confiance en moi, alors que je ne l'avais pas moi-même.*

*Aussi un grand merci à mes colocos, qui ont créé une bonne ambiance à la maison : Michael et Céline (merci pour des bons plats du dimanche), et aussi Alex et Arthur.*

*Enfin, je remercie tous mes proches et ceux qui m'ont soutenu de près ou à distance. Aboutir à réaliser ce travail, plus qu'un travail c'était mon rêve.*

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Caractérisation de l'état de la matière en mécanique non linéaire</b>	<b>4</b>
Introduction . . . . .	4
1.1 Thermodynamique appliquée aux procédés mécaniques . . . . .	4
1.1.1 Premier principe de la thermodynamique . . . . .	5
1.1.2 Second principe de la thermodynamique . . . . .	6
1.2 Plasticité et processus non linéaires . . . . .	7
1.3 Écrouissage . . . . .	9
1.3.1 Modélisation du seuil élastique . . . . .	10
1.3.1.1 Modèle de Tresca . . . . .	11
1.3.1.2 Modèle de Von Mises . . . . .	11
1.3.1.3 Modèle de Hill 48 . . . . .	13
1.3.2 Fonction de charge . . . . .	14
1.3.3 Règle d'écrouissage associée et potentiel de flux . . . . .	15
1.3.4 Condition de cohérence . . . . .	16
1.3.5 Modélisation de l'écrouissage . . . . .	17
1.3.5.1 Écrouissage isotrope . . . . .	17
1.3.5.2 Écrouissage cinématique . . . . .	20
1.3.5.3 Écrouissage cinématique linéaire . . . . .	22
1.3.5.4 Modèles d'écrouissage cinématique non linéaires . . . . .	23
1.3.6 Modèles d'écrouissages combinés . . . . .	26
1.3.6.1 Adaptation du modèle de Chaboche au modèle combiné . . . . .	26
1.3.6.2 Modèle de YU . . . . .	27
1.3.7 Modèles d'écrouissages anisotropes . . . . .	28
1.3.7.1 Etude de l'anisotropie par Phillips et al. . . . .	28
1.3.7.2 Étude expérimentale de l'anisotropie par Shiratori et al. . . . .	31
1.3.7.3 Étude expérimentale par Wu et Yeh . . . . .	33
1.3.7.4 Régression analytique de Gupta et Meyer . . . . .	34
1.3.7.5 Modèle de François . . . . .	35
1.3.7.6 Le modèle HAH . . . . .	36
1.3.8 Modèles basés en multi-mécanismes et multi-critères . . . . .	38
1.3.9 Discussion sur le domaine de validité des modèles . . . . .	40
1.3.9.1 Choix du critère de la limite d'élasticité . . . . .	40
1.3.9.2 Influence de la température et de la vitesse de déformation . . . . .	42
Conclusion . . . . .	42
Bibliographie . . . . .	44
<b>2 Analyse inverse appliquée à la mesure du champ de contraintes résiduelles</b>	<b>48</b>
2.1 Introduction . . . . .	49
2.2 Résolution par analyse inverse . . . . .	50
2.2.1 Cadre théorique général de la méthode . . . . .	50
2.2.2 Erreurs et incertitudes . . . . .	53

2.2.2.1	Estimation des erreurs dans la mesure des déformations . . . . .	53
2.2.2.2	Propagation des erreurs de déformation sur la mesure des contraintes résiduelles . . . . .	54
2.2.2.3	Incertitude du modèle selon Prime-Hill . . . . .	55
2.2.2.4	Incertitude totale . . . . .	56
2.2.3	Fonctions de base . . . . .	56
2.2.3.1	Développement de la méthode basée sur les Polynômes de Legendre . . . . .	57
2.2.4	Développement de la méthode avec une base de fonctions échelons . . . . .	58
2.2.4.1	Estimation des incertitudes avec les fonctions échelons . . . . .	61
2.2.5	Nouvelle méthodologie d'estimation des incertitudes et optimisation du résultat final . . . . .	63
2.2.5.1	Méthodologie développée - justification . . . . .	63
2.2.5.2	Définitions et concepts . . . . .	66
2.2.5.3	Estimation de l'incertitude du modèle . . . . .	67
2.2.5.4	Algorithme proposé . . . . .	67
2.3	Conclusion . . . . .	70
	Bibliographie . . . . .	70
<b>3</b>	<b>Simulation numérique de l'état d'un matériau soumis à des sollicitations successives</b>	<b>73</b>
3.1	Démarche d'utilisation des solveurs proposés par le logiciel Abaqus . . . . .	73
3.1.1	Implémentation de lois de comportement . . . . .	75
3.1.2	Algorithme d'intégration des lois de comportement . . . . .	75
3.1.3	Solution numérique du système d'équations . . . . .	77
3.1.4	Méthode de résolution du système d'équations . . . . .	81
3.1.5	Calcul de $\theta^{(i)}$ dans le modèle d'Ohno et Wang . . . . .	82
3.1.6	Critère de convergence . . . . .	82
3.1.7	Calcul de la matrice Jacobienne . . . . .	82
3.2	Caractérisation de l'état initial du matériau . . . . .	83
3.2.1	Exportation/importation de la géométrie et remaillage de la géo- métrie de la pièce . . . . .	84
3.2.2	Interpolation des variables . . . . .	85
3.2.2.1	Méthodes d'interpolation . . . . .	87
3.2.3	Format du fichier des conditions initiales . . . . .	89
3.2.4	Synthèse et méthodologie proposée . . . . .	89
3.2.5	Présentation des outils numériques développés . . . . .	91
	Bibliographie . . . . .	92
<b>4</b>	<b>Analyse comparative des méthodes de mesure de champ de contraintes résiduelles</b>	<b>95</b>
4.1	Introduction . . . . .	95
4.2	Méthodologie . . . . .	95
4.2.1	Génération des données . . . . .	96
4.2.1.1	Profil de contraintes résiduelles . . . . .	96
4.2.1.2	Génération des données de déformation . . . . .	97
4.2.2	Résultats obtenus . . . . .	100
4.2.2.1	Évaluation de la nouvelle méthodologie en absence de bruit	100

---

4.2.2.2	Évaluation en présence de bruit . . . . .	102
4.3	Conclusion . . . . .	109
	Bibliographie . . . . .	110
<b>5</b>	<b>Simulation numérique de l'influence de l'effet Bauschinger.</b>	<b>111</b>
	Introduction . . . . .	111
5.1	Étude de l'effet Bauschinger dans un processus de sollicitations multiaxiales	112
5.1.1	Présentation du problème . . . . .	112
5.1.2	Résultats et analyse . . . . .	115
5.2	Caractérisation de l'état résiduel à partir de l'exportation/importation de variables d'écouissage . . . . .	118
5.2.1	Présentation du problème . . . . .	119
5.2.2	Résultats obtenus et analyse . . . . .	120
	Conclusion . . . . .	124
	Bibliographie . . . . .	124
	<b>Conclusion et Perspectives</b>	<b>126</b>
	Bibliographie . . . . .	130
	<b>Annexes</b>	<b>131</b>
<b>A</b>	<b>Schéma de la nouvelle méthodologie d'analyse inverse pour la mesure des contraintes résiduelles</b>	<b>131</b>
<b>B</b>	<b>Procédure de caractérisation numérique de l'état de la matière</b>	<b>132</b>
B.I	Étape 1 – Obtention des résultats aux points nodaux et d'intégration depuis la simulation source . . . . .	132
B.II	Étape 2 – Lecture des données de sortie et création des fichiers pré-exportation . . . . .	133
B.II.1	Compilation et Interface du code <code>ODB_extractor_V2.py</code> . . . . .	134
B.III	Étape 3 – Création du nouveau maillage. . . . .	136
B.IV	Étape 4 – Création des fichiers contenant les conditions initiales . . . . .	136
B.IV.1	Compilation et interfase du code <code>FEM_initial_conditions.py</code> . . . . .	137
<b>C</b>	<b>Codes pour la résolution des contraintes résiduelles par analyse inverse</b>	<b>140</b>
C.I	Méthodologie d'Olson <i>et al.</i> . . . . .	140
C.I.1	Description des paramètres d'entrée . . . . .	140
C.II	Méthodologie de Prime et Hill . . . . .	142
C.II.1	Description des paramètres d'entrée . . . . .	143
C.III	Nouvelle méthodologie . . . . .	145
C.III.1	Description des paramètres d'entrée . . . . .	145
	Bibliographie . . . . .	147

# Introduction générale

Le contexte industriel actuel connu comme la révolution industrielle 4.0 a pour objectif un contrôle total du processus de fabrication et ceci pour l'ensemble des opérations réalisées. Les systèmes d'information permettent d'interconnecter les actions des opérateurs et les données captées sur les moyens de production modernes. Cette interconnexion a pour finalité de générer une traçabilité totale du produit et du processus. Ce contrôle cherche l'optimisation globale, c'est à dire la réduction des coûts de logistique, la réduction des stocks, de l'utilisation de la matière première, de l'énergie, de l'impact environnemental ainsi que l'amélioration de la qualité des produits et sous produits, etc.

Une quantité importante de données est générée à partir des capteurs tout au long de la chaîne de production. Les mesures sont réalisées soit pour générer une traçabilité des propriétés, soit pour étudier l'influence d'un paramètre sur le processus global. En complément, les outils numériques de calcul jouent un rôle fondamental dans la prédiction et optimisation des procédés de fabrication. La pertinence de simulations réalisées est souvent liée à la loi de comportement et à son domaine de validité.

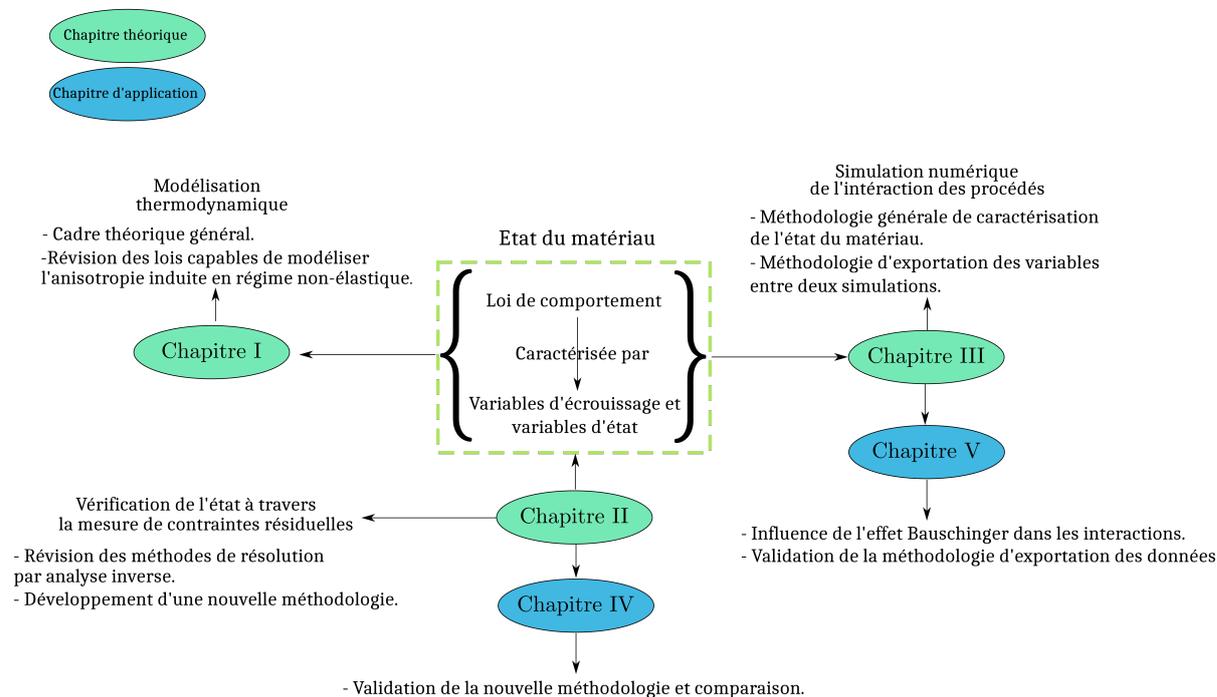
Dans ce contexte, l'optimisation d'une succession de procédés pour la mise en forme de pièces métalliques, a une relation directe avec la capacité du modèle utilisé à représenter fidèlement l'état du matériau. Une déformation inélastique a une influence très importante sur l'état et les propriétés développées par le matériau, induisant un comportement anisotrope. Les lois de comportement habituellement consacrées aux procédés de fabrication correspondent principalement à des modèles isotropes, par conséquent sont limitées à la simulation d'un seul procédé suivant la même direction de sollicitation.

Ce travail cherche à identifier les points nécessaires pour réaliser une modélisation de l'état de la matière soumise à une succession de sollicitations non proportionnelles, pour des matériaux métalliques. Un modèle capable de prendre en compte les changements de l'état du matériau dues à son historique de chargement, permettrait d'étudier l'influence entre les divers procédés constitutifs d'un processus. Si une telle capacité de prédiction est possible, l'optimisation du processus d'un point de vue global (prenant en compte l'interaction des procédés consécutifs) serait alors possible. Dans ce cadre, une optimisation du processus global n'est pas seulement restreinte à une évaluation énergétique mais à tous les paramètres de fabrication : topologie (contrôle des déformations), caractéristique de la matière première, etc.

L'étape prédictive doit être complétée par une étape de vérification de l'état du matériau. Dans ce cadre, les variables mesurables directement sont : la déformation, la variation de la température et indirectement le champs des contraintes résiduelles (à partir de la lecture des déformations). Ce travail constitue une révision des procédés de mesure de contraintes résiduelles et propose une méthodologie innovante d'évaluation de leur profil dans le matériau.

Le travail est divisé en cinq chapitres, schématisés dans la [figure 1](#). Les trois premiers chapitres sont consacrés au cadre théorique, composés par des révisions bibliographiques

et le développement des méthodologies proposées. Les chapitres 4 et 5 sont des chapitres d'application et de validation des méthodologies développées dans les chapitres 2 et 3 respectivement.



**Figure 1.** Organisation générale du travail.

Dans le chapitre 1, une étude bibliographique est réalisée pour définir le cadre thermodynamique que les lois de comportement doivent respecter afin de caractériser l'état du matériau. Une analyse des lois de comportements de référence est effectuée pour mettre en valeur leurs points forts et faibles en vue de l'application à une succession de sollicitations non proportionnelles.

Le chapitre 2, fait l'inventaire des méthodes d'analyse inverse appliquées à la mesure de contraintes résiduelles par des méthodes destructives de référence et une nouvelle méthodologie de définition du profil des contraintes résiduelles est proposée. Cette nouvelle méthodologie permet d'évaluer un espace de solutions plus vaste par rapport aux méthodes existantes, laquelle est possible grâce à une nouvelle estimation de l'erreur du modèle utilisé.

Le chapitre 3, présente les problématiques associées aux verrous numériques quand la simulation d'une série de chargements non-proportionnels est envisagée. Dans une première partie, une discussion sur le besoin de diviser le calcul en plusieurs étapes est mise en place. Le fait de diviser la simulation générale (composée par l'ensemble de simulations) en plusieurs étapes nécessite l'exportation puis l'importation de données entre les différentes étapes. Une méthodologie détaillée, ainsi que les outils développés pour cette opération sont présentés ici.

Le chapitre 4 est dédié à une évaluation des méthodes de mesure des contraintes résiduelles présentées dans le chapitre 2. Une base de données synthétique est générée en utilisant une simulation par éléments finis afin d'obtenir un champ de contraintes connu. Ensuite une étude comparative entre deux méthodologies de référence et la méthodologie proposée dans ce travail est mise en oeuvre.

Le chapitre 5 présente deux problèmes avec des objectifs différents mais complémentaires. Le premier problème vise à mettre en évidence les grandes différences obtenues entre les lois de comportement isotropes (type de loi la plus utilisée pour les simulations de mise en forme) et non isotrope lors d'un enchainement de sollicitations multiaxiales pour un chargement non proportionnel. Le second problème est la mise en oeuvre de la méthodologie d'exportation/importation des données proposée dans le chapitre 3. Dans le second problème, il a été mis en évidence que les phénomènes de plasticité peuvent aussi être présents durant un procédé lors du retour à l'équilibre quand les lois non isotropes sont utilisées.

## Caractérisation de l'état de la matière en mécanique non linéaire

### Introduction

Le fluage, l'écrouissage et plus généralement l'endommagement des matériaux sont des phénomènes générés par les procédés de mise en forme et qui dépendent de divers paramètres tels que la limite élastique, la température, la déformation, la vitesse de déformation, les contraintes. Pour les configurations dans lesquelles la limite d'élasticité du matériau est dépassée, la relation entre l'évolution de l'état du matériau et les efforts n'est plus linéaire et le principe de superposition forces/effets n'est plus valable. Par la suite, nous aborderons les principes de la mécanique non linéaire des solides déformables qui sont utilisés dans ce travail.

Ce chapitre est consacré à une analyse bibliographique non exhaustive des modèles d'écrouissage et des lois de comportement pertinentes pour modéliser l'évolution de l'état du matériau tout au long d'un processus de fabrication. On s'intéressera plus particulièrement aux interactions entre deux procédés consécutifs.

Avant d'introduire les concepts fondamentaux liés aux phénomènes de la plasticité, il convient de faire une présentation des éléments de la mécanique qui vont être utilisés. Le cadre théorique de base dans la première partie de ce chapitre est une adaptation des travaux tirés des ouvrages [1, 2, 3, 4] dédiés à la théorie de la mécanique des solides ainsi qu'à l'application de la théorie des principes de la thermodynamique appliqués aux solides.

### 1.1 Thermodynamique appliquée aux procédés mécaniques

En thermodynamique, la méthode de l'état local du milieu en un point et à un instant spécifique est définie par une combinaison unique des variables d'état [1]. L'interaction entre les efforts et les déformations permanentes dans le matériau entraîne une transformation irréversible qui peut être décrite par la thermodynamique comme

une fonction des variables d'état.

Il existe deux grands défis pour caractériser l'état d'un matériau et suivre son évolution durant un enchaînement de sollicitations générées par des procédés successifs. Le premier consiste à identifier les variables d'état qui décrivent correctement cet état dans le domaine de validité du problème étudié. Le deuxième défi est de lier les variables d'état à des phénomènes physiques observables au niveau macroscopique ou microscopique afin d'avoir la capacité d'évaluer l'évolution du matériau à n'importe quel moment du processus.

Pour répondre à ces deux questions, une évolution de la théorie développée par P. Germain [4] sera présentée dans les paragraphes §1.1.1 et §1.1.2. Les conditions nécessaires pour que la loi de comportement du matériau obéisse aux principes de la thermodynamique seront établies.

### 1.1.1 Premier principe de la thermodynamique

La première loi de la thermodynamique établit que le taux de variation de l'énergie interne est égal à la puissance développée par les forces externes plus le flux de chaleur qui traverse le domaine étudié :

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\mathcal{D}} \rho \frac{de}{dt} dV = \mathcal{P}^{(e)} + \dot{Q}, \quad (1.1)$$

avec la puissance des forces externes représentée par :

$$\mathcal{P}^{(e)} = \int_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} dV, \quad (1.2)$$

et le flux de chaleur  $\dot{Q}$  défini par :

$$\dot{Q} = \int_{\mathcal{D}} r dV - \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{q} \cdot \underline{n} dS = \int_{\mathcal{D}} (r - \text{div} \underline{q}) dV \quad (1.3)$$

et où  $r$  est le terme qui représente la source de chaleur dans le volume, comme par exemple les effets exothermiques et endothermiques des réactions chimiques, l'absorption du rayonnement, etc. Le terme  $\underline{q}$  est le vecteur courant de chaleur qui traverse le volume normal à la surface  $S$ . L'équation 1.1 peut être réécrite en fonction des variables spécifiques:

$$\rho \frac{de}{dt} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} + r - \text{div} \underline{q}, \quad (1.4)$$

### 1.1.2 Second principe de la thermodynamique

Le second principe établit le seuil minimal de génération d'entropie durant une transformation de l'état thermodynamique [1] :

$$\frac{dS}{dt} \geq \int_{\mathcal{D}} \frac{r}{T} dV - \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{q \cdot n}{T} dS. \quad (1.5)$$

En appliquant le théorème de la divergence :

$$\int_{\mathcal{D}} \left( \rho \frac{ds}{dt} - \frac{r}{T} + \operatorname{div} \left( \frac{q}{T} \right) \right) dV \geq 0, \quad (1.6)$$

avec  $dS = \rho ds$ , et  $\rho$  qui représente la masse volumique. D'autre part, l'énergie totale se décompose sous la forme :

$$e = \psi + Ts, \quad (1.7)$$

où  $\psi$  est appelée énergie libre et représente la fraction d'énergie reçue et stockée dans le matériau et  $Ts$  la fraction de l'énergie reçue utilisée pour changer l'état d'entropie du matériau.

A partir de l'expression du premier (Eq. (1.1)) et du second (Eq. (1.6)) principes de la thermodynamique, l'inégalité de Clausius-Duhem est obtenue :

$$\phi = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \rho \frac{d\psi}{dt} - \rho s \dot{T} - \frac{1}{T} \underline{\underline{q}} \cdot \underline{\underline{\operatorname{grad}}}(T) \geq 0. \quad (1.8)$$

Les variables d'état seront désormais représentées par  $\alpha_i$ . Une loi de comportement doit définir les variables d'état à utiliser ainsi que les critères et règles de variation. L'évolution du système est considérée comme une suite d'états d'équilibre [1].

A partir de l'énergie libre on peut établir un potentiel qui dépend des variables d'état :

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i} \dot{\alpha}_i. \quad (1.9)$$

Les variables thermodynamiques  $\alpha_i$  représentent les différents mécanismes à travers lesquels la variation de cette énergie peut se manifester. Ainsi les mécanismes peuvent être :

- une variation de la température,
- des changements de phases,
- une variation structurale du réseau cristallin,
- l'apparition de micro fractures et d'endommagements.

La dernière relation peut être incluse dans l'inégalité (1.8) :

$$\phi = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i - \frac{1}{T} \underline{\underline{q}} \cdot \underline{\underline{\text{grad}}}(T) \geq 0, \quad (1.10)$$

où l'entropie est :

$$s = - \frac{\partial \psi}{\partial T}. \quad (1.11)$$

Les forces thermodynamiques associées aux variables d'état internes (aussi appelées variables d'écrouissage) sont ensuite définies par [2] :

$$A_i = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i}. \quad (1.12)$$

La dissipation  $\phi$  peut être divisée dans une composante  $\phi_1$  appelée dissipation intrinsèque volumique et  $\phi_2$  la dissipation thermique volumique:

$$\phi_1 = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \quad (1.13)$$

$$\phi_2 = - \frac{1}{T} \underline{\underline{q}} \cdot \underline{\underline{\text{grad}}}(T). \quad (1.14)$$

La dissipation intrinsèque volumique est la différence entre l'énergie dissipée en vertu des déformations plastiques et l'énergie bloquée dans le matériau, par exemple, les réseaux de dislocations [2].

## 1.2 Plasticité et processus non linéaires

Afin de réaliser une évaluation par rapport au bilan énergétique d'un processus de transformation global de la matière, la première étape consiste à obtenir un modèle de comportement capable de prédire l'énergie nécessaire (avec les contraintes et déformations associées) pour chaque procédé impliqué dans le processus. En interprétant l'inégalité de Clausius Duhem, l'énergie provenant d'une source externe sera en partie absorbée et stockée dans le matériau et le reste sera dissipé sous la forme de chaleur.

La caractérisation des lois de comportements est réalisée habituellement à partir de tests monotones (en suivant une seule direction et un seul sens). Avec des éprouvettes possédant une structure cristalline normalisée, on cherche à établir la courbe contrainte - déformation expérimentalement de la façon la plus fidèle possible. La plupart des lois de comportement utilisées dans la simulation des procédés de fabrication sont caractérisées

par une variable scalaire.

Lors d'une première sollicitation au delà du domaine élastique initial, les phénomènes responsables de l'érouissage induisent une variation du domaine élastique du matériau. Caractériser le seuil du domaine élastique par une variable scalaire ne permet pas de modéliser la variation de la limite d'élasticité subissant des sollicitations successives dans des directions différentes, type de situation à laquelle la matière est confrontée lors du passage d'un procédé à un autre (en supposant que différents procédés sollicitent le matériau avec des charges multiaxiales différentes).

Néanmoins, il existe des modèles pour lesquels la variation de propriétés en fonction de la direction de sollicitation a été prise en compte. Ce type de lois de comportement a été développé pour modéliser l'effet Bauschinger durant des tests cycliques de fatigue. Ce type de modélisation intègre des règles d'érouissages cinématiques, combinées, multi-critères et anisotropes qui seront abordées dans la suite du document.

Ces modèles se distinguent par rapport aux lois utilisant une règle d'érouissage isotrope par l'utilisation de variables tensorielles et d'une variable scalaire afin de décrire l'état de la matière. Ils ne sont pas utilisés couramment pour modéliser les procédés de mise en forme, en conséquence de quoi leur domaine de validité en matière de dépendance de la vitesse de déformation et de température n'atteint pas les niveaux rencontrés dans les procédés de mise en forme.

Il existe fondamentalement deux approches de la modélisation du comportement des matériaux : l'approche physique et l'approche phénoménologique [5].

Les modèles basés sur la plasticité cristalline cherchent à modéliser les différents mécanismes de création des plans de dislocation dans un système cristallin, ainsi que les différentes interactions créées entre eux. L'ajout de nouvelles interactions équivaut à ajouter des nouvelles variables qui, pour un problème macroscopique, peut être incompatible avec la puissance de calcul actuelle. Cependant, ces modèles servent à comprendre comment le comportement macroscopique ou phénoménologique du matériau est généré [6]. Compte tenu des objectifs de ce travail, ce type de modèle ne sera pas utilisé. Les méthodes phénoménologiques consistent en une description expérimentale d'un point de vue macroscopique des interactions entre les paramètres qui interviennent dans un procédé de déformation plastique.

Dans la suite du document, les éléments présentés feront référence à des lois de com-

portement basées sur une approche phénoménologique sauf si le contraire est mentionné. L'endommagement, les effet visqueux et les variations de température ne seront pas pris en compte [2].

### 1.3 Écrouissage

L'écrouissage se manifeste par l'augmentation de la densité des dislocations dans le réseau cristallin du matériau. Cela se traduit, dans le cas de la traction simple, par une augmentation de la limite d'élasticité et une réduction des capacités du matériau à se déformer plastiquement.

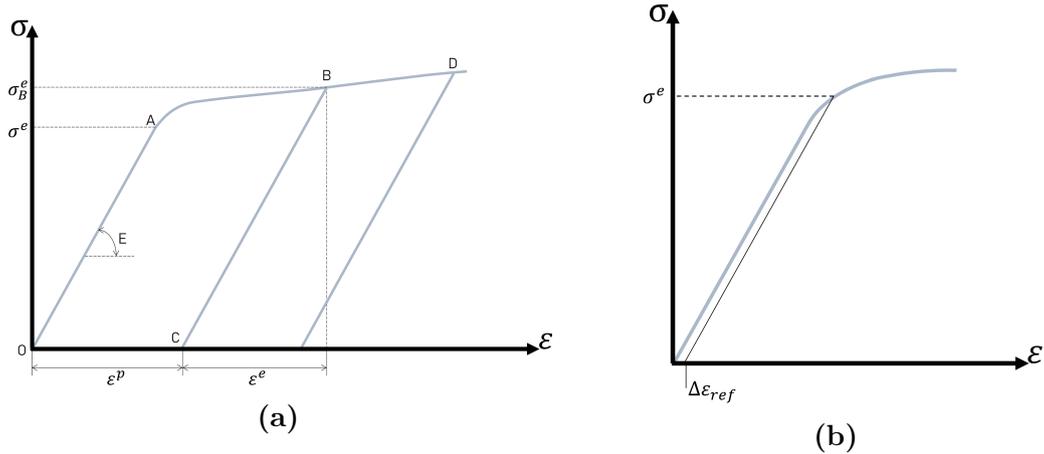
Dans le cas le plus général, la déformation est découpée comme la somme des déformations élastique et inélastique (cette dernière peut se découpler en déformation plastique, anélastique, viscoplastique, etc. selon la nature de l'effort qui génère la déformation) :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}^{in} + \underline{\underline{\epsilon}}^e. \quad (1.15)$$

La déformation élastique est la conséquence de la variation inter-atomique au sein du matériau due à l'application d'une force externe qui n'est pas assez intense pour générer des déplacements relatifs permanents des atomes. Quand l'effort appliqué disparaît, le réseau reprend sa disposition initiale. La déformation inélastique, se traduit par un glissement des plans inter-atomiques et la position relative entre les atomes subit un changement permanent. Dans ce travail, seulement la composante de déformation plastique  $\underline{\underline{\epsilon}}^p$  sera prise en compte parmi les composantes de la déformation inélastique, sauf indication contraire explicite.

Le schéma de la [figure 1.1a](#) représente un cas classique du comportement d'une éprouvette métallique en charge/décharge monotone uni-axiale. Il est considéré tout d'abord que l'éprouvette est soumise à un chargement à partir d'un état isotrope normalisé et libre de contrainte et de déformation résiduelles.

Dans le schéma de la [figure 1.1a](#) un chargement est initié au point  $O$  et évolue selon la direction  $OA$ . Dans cette région le matériau a un comportement linéaire et la relation entre la contrainte et la déformation est représentée par le module d'élasticité  $E$ . Les déformations résiduelles permanentes au cas de décharge sont négligeables.



**Figure 1.1.** Fig. 1.1a) Schéma typique d'un essai de chargement/déchargement uni-axial d'une éprouvette métallique. Fig. 1.1b) Procédé de détermination de la limite élastique. Adapté de [2].

Le point  $B$  représente un point quelconque dans le régime plastique (en respectant les conditions du domaine de validité prévues dans §1.2), situé entre  $A$  et  $D$ . Si un déchargement est effectué à partir du point  $B$ , le retour élastique du matériau se fera en suivant la droite  $BC$  parallèle à la droite  $OA$ . La limite d'élasticité évolue alors de  $\sigma^e$  à  $\sigma_B^e$ . Ce phénomène se traduit par un durcissement du matériau.

La loi de comportement phénoménologique est une description empirique du comportement du matériau, obtenue à partir d'une série d'essais, où un lien entre la contrainte, les déformations et les variables d'état est recherché. La même description est faite à partir de l'état normalisé du matériau.

### 1.3.1 Modélisation du seuil élastique

La limite d'élasticité dans un essai de traction uni-axial est notée par  $\sigma_o$ . La loi de Hooke généralise la relation entre les efforts et déformations à six dimensions [2].

La méthode conventionnelle pour trouver la limite élastique consiste à déterminer le point où la déformation plastique atteint une valeur de référence  $\Delta\epsilon_{ref}$ , comme l'illustre la figure 1.1b. A partir de la courbe de contrainte équivalente/déformation la limite élastique correspond au point d'intersection entre la courbe obtenue expérimentalement et la droite de pente  $E$  égale au module de Young déplacée  $\Delta\epsilon_{ref}$  par rapport à l'origine.

En pratique, la valeur de  $\Delta\epsilon_{ref}$  est prise à  $0,2\% \epsilon$  pour les applications industrielles courantes, mais dans le secteur de la recherche elle peut être à des valeurs très faibles comme  $0,02\%$  [2].

Dans ce contexte, le seuil élastique est exprimé en fonction des composantes du tenseur des contraintes afin de représenter mathématiquement l'ensemble des états de chargement pour lesquels la limite d'élasticité est atteinte. Le seuil élastique est un potentiel qui représente toutes les combinaisons possibles de charges pour lesquelles la limite élastique est atteinte.

Les modèles de seuil élastique sont basés sur des critères physiques (contraintes, énergie, etc.) ou tout simplement sur une régression des données expérimentales [7].

La contrainte équivalente est l'association de l'état de charge à une valeur scalaire. Cela permet facilement de faire la relation entre l'état de charge par rapport à sa situation dans le potentiel (loin ou près du seuil). Chaque modèle de seuil élastique a une expression de contrainte équivalente associée différente.

La valeur de la contrainte équivalente  $\sigma_{eq}$ , sera toujours inférieure ou égale à une valeur critique  $\sigma_c$  (normalement égale à  $\sigma_o$  pour le cas d'un matériau vierge). Pour les configurations où  $\sigma_{eq}$  est égale à  $\sigma_c$  l'état de contraintes atteint le seuil élastique. Si la charge externe est supérieure à cette limite, le seuil élastique doit évoluer de sorte que la charge reste toujours sur la frontière du seuil. Cette évolution dépend du modèle d'écroutissage.

Pour la suite de ce chapitre, seulement les modèles élémentaires les plus utilisés sont présentés.

### 1.3.1.1 Modèle de Tresca

Ce modèle a été le premier modèle à être proposé en 1864 par H. Tresca [8]. Il stipule que le seuil plastique est atteint quand la valeur maximale de cisaillement arrive. Dans ce cas la contrainte équivalente de Tresca atteint alors une valeur  $\sigma_o$  propre à chaque matériau :

$$J(\sigma_{ij})_{Tr} = \max_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j|. \quad (1.16)$$

### 1.3.1.2 Modèle de Von Mises

Le critère de Von Mises propose que la plasticité est atteinte quand l'énergie de cisaillement atteint une valeur constante et définie pour chaque matériau [9]. En considérant que dans le régime de charge élastique, l'énergie exprimée en fonction des efforts et des

déformations est donnée par :

$$w_e = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e, \quad (1.17)$$

la contrainte équivalente de Von Mises est :

$$J_{eqVM} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 + \sigma_{12}^2)]}. \quad (1.18)$$

Si le tenseur des contraintes est exprimé en fonction des composantes du tenseur déviatorique  $\underline{\underline{S}}$ , où :

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{\sigma}} - \sigma_m \underline{\underline{I}}, \quad (1.19)$$

avec :

$$\underline{\underline{\sigma}}_m = \text{trace}(\underline{\underline{\sigma}})/3. \quad (1.20)$$

Comme la pression hydrostatique (indépendante du système de coordonnées adopté), l'équation (1.18) peut s'exprimer sous la forme :

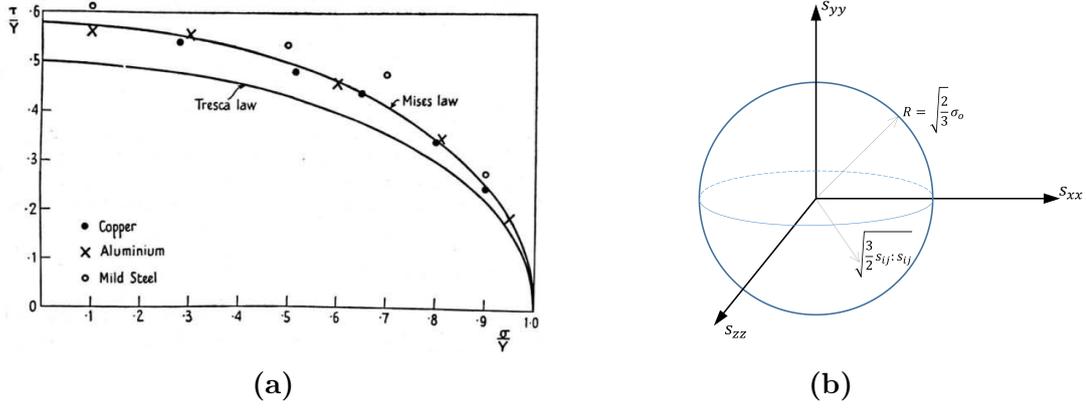
$$J_{eqVM} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{S}}} = \sqrt{3J_2(\underline{\underline{S}})}, \quad (1.21)$$

où  $J_2(\underline{\underline{S}})$  est le seconde invariant du tenseur déviatorique.

La [figure 1.2a](#) obtenue par Taylor et Quinney en 1931 montre l'approximation de cette régression aux valeurs expérimentales obtenues pour trois matériaux différents (cuivre, aluminium et acier).

Deux interprétations géométriques sont faites à partir des équations (1.18) et (1.21) :

- En utilisant les éléments du tenseur des contraintes : le seuil élastique initial pour un cas de chargement en contrainte plane correspond à une ellipse dont le demi grand axe est donné par  $\sigma_o$  et le demi petite axe par  $\frac{\sigma_o}{\sqrt{3}}$ , où  $\sigma_o$  est la limite élastique déterminée par un essai de traction simple. Dans le cas tridimensionnel (pour le cas particulière où  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{zz}$  sont les directions des efforts principaux), le seuil correspond à un cylindre avec l'axe orienté selon  $\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{y} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{z}$ .
- En utilisant les éléments du tenseur déviateur : la frontière élastique peut être interprétée aussi comme étant une hyper-sphère de rayon égal à  $s_o = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_o$ , voir [figure 1.2b](#) ([figure 1.2b](#)). Cette représentation reste plus pratique à utiliser et simple d'interprétation, même pour les cas multi-axiaux où le chargement ne coïncide pas avec la direction de charge principale.



**Figure 1.2.** Fig. 1.2a) Ajustement des critères de Von Mises et Tresca des données obtenues expérimentalement [10]. Fig. 1.2b) Interprétation de la frontière élastique proposée par Von Mises en fonction du tenseur déviatorique.

### 1.3.1.3 Modèle de Hill 48

Les matériaux ayant subi une déformation plastique, plus précisément les tôles minces soumises à un procédé de laminage, présentent une augmentation de la valeur de la limite d'élasticité dans la direction principale du laminage, mais dans les autres directions cette limite n'évolue pas dans les mêmes proportions. Le modèle de Hill 48 [11] a été le premier modèle à prendre en compte la variation des propriétés du matériau afin de mieux prédire son comportement et il est utilisé pour la simulation des procédés de mise en forme des tôles minces tels que l'emboutissage où les sollicitations de traction sont prédominantes.

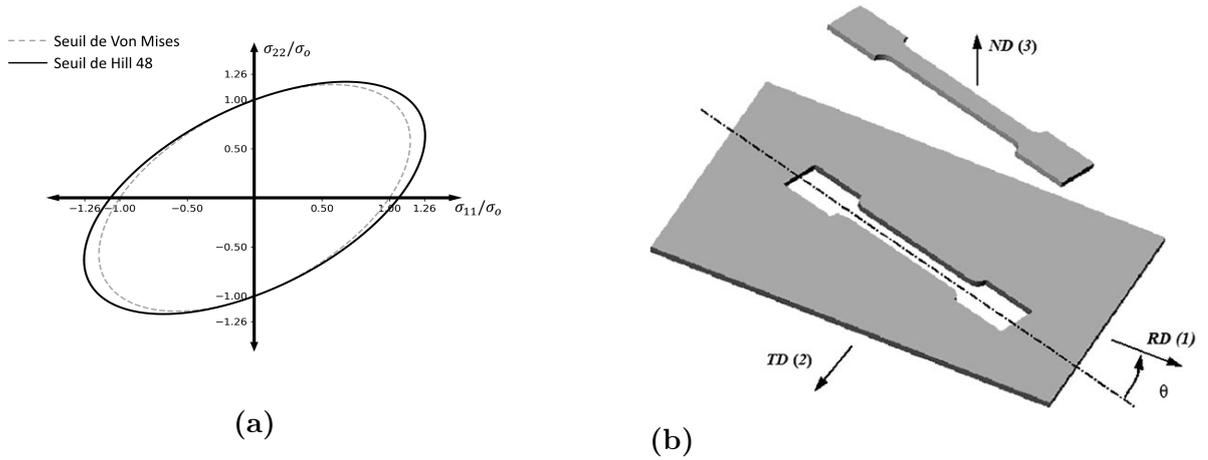
Le modèle caractérise un matériau en utilisant une généralisation du seuil proposée par Von Mises :

$$J(\underline{\sigma})_{Hill} = \sqrt{F(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + G(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + H(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 2L.\sigma_{12}^2 + 2M.\sigma_{23}^2 + 2N.\sigma_{31}^2} \quad (1.22)$$

Les facteurs  $F, G, H, L, M$  et  $N$  sont les facteurs qui contrôlent la "distorsion" du seuil obtenu par rapport au modèle de Von Mises, qui serait atteint si tous les paramètres valaient l'unité.

La figure 1.3a illustre une comparaison entre les modèles de Von Mises et Hill 48. Ici le paramètre  $H$  de l'équation (1.22) a une valeur de 0,75, ce qui représente l'état obtenu avec une sollicitation en traction dans la direction  $\sigma_{11}$ .

Les différents paramètres de cette loi sont obtenus à partir d'essais de traction selon différentes directions. La figure 1.3b illustre la réalisation d'une éprouvette dont l'axe de symétrie est orienté d'angle  $\theta$  par rapport à la direction du laminage (direction 1) [12].



**Figure 1.3.** Fig 1.2a)) Comparaison entre les seuils de Von Mises et Hill 48 (avec une valeur du paramètre  $H = 0,75$  pour un cas en contrainte plane. Fig 1.3b) Exemple d'éprouvette pour la caractérisation du seuil de Hill 48 [12].

La distorsion du seuil reste toujours symétrique par rapport aux axes principaux de l'ellipsoïde et centrée par rapport à l'origine.

Il n'y a pas de modèle du comportement de l'évolution de l'écroutissement qui permet de passer d'un état vierge (représenté par le seuil de Von Mises) vers un état altéré caractérisé par les paramètres  $F, G, H, M$  et  $N$  de l'équation 1.22. Le modèle de Hill modélise un état déjà non isotrope comme point de départ. Ce modèle a été le premier prenant en compte l'anisotropie induite dans le matériau et a servi de base pour d'autres modèles tels que Hill 79 [13], Hill 90 [14] et Hill 93 [15].

Trois modèles de seuil élastique initial et ses contraintes équivalentes correspondantes ont été introduits ; le modèle de Tresca, de Von Mises et de Hill 48. Quand la valeur de la contrainte équivalente a atteint une valeur maximale  $\sigma_0$ , la limite d'élasticité est atteinte aussi. Au-delà, toute déformation sera en régime inélastique. La limite d'élasticité est représentée par l'équation du seuil élastique. De façon à reproduire mathématiquement ce phénomène (l'évolution de la limite d'élasticité), le seuil élastique doit aussi évoluer. Dans les paragraphes suivants seront introduits les outils utilisés pour les différentes lois de comportement permettant de décrire cette évolution.

### 1.3.2 Fonction de charge

La fonction de charge  $f$  est une fonction qui caractérise le régime de l'état de charge, si elle se trouve en régime de charge élastique ou inélastique. Elle est fonction du tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  et des variables d'écroutissement  $A_i$  (définies dans §1.12). La valeur de  $f$  est telle que [1] :

- domaine élastique si :  $f < 0$  ( $d\varepsilon = d\varepsilon^e = d\sigma/E$ )
- décharge élastique si :  $f = 0$  et  $df < 0$  ( $d\varepsilon = d\varepsilon^e = d\sigma/E$ )
- écoulement plastique si :  $f = 0$  et  $df = 0$  ( $d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p$ )

La fonction de charge s'exprime par :

$$f(\underline{\sigma}, A_i, A_j) = J(\underline{\sigma}, A_i) - \sigma_c(A_j), \quad (1.23)$$

où  $J(\underline{\sigma}, A_i)$  est la contrainte équivalente du modèle adopté. La sous fonction  $\sigma_c$  qui caractérise la taille du domaine élastique, n'est pas une constante dans le cas général. Son évolution dépend des variables d'écrouissages scalaires  $A_j$ .

Connaissant toutes les valeurs des variables d'écrouissage  $A_i, A_j$ , la fonction de charge  $f = 0$  représente l'hyper surface (en considérant six dimensions) où le domaine élastique atteint la limite.

Pendant un procédé avec un phénomène d'écrouissage, les variables d'écrouissage varient en fonction de l'histoire, de la direction et de l'intensité de la charge. Leurs règles de variation sont définies par le potentiel d'écoulement et la règle d'écrouissage associée, développés dans le paragraphe suivant.

### 1.3.3 Règle d'écrouissage associée et potentiel de flux

Deux potentiels ont été décrits :

- Le potentiel de dissipation  $\phi$ , qui est fonction des variables d'état. Il décrit les mécanismes énergétiques de dissipation (sous la forme de chaleur) et de stockage d'énergie  $\psi$  dans le matériau (voir section §1.1.2).
- La fonction de charge  $f$ , est écrite en fonction des variables d'écrouissage en décrivant l'hyper-surface où le tenseur des contraintes atteint une limite en charge élastique (voir section §1.3.2).

Les variables d'écrouissage ont une relation duale avec les variables d'état. C'est ainsi qu'elles sont définies dans l'équation (1.12) comme le taux de variation d'énergie interne dû à une variation de la variable thermodynamique duale correspondante ( $A_i = \partial\psi/\partial\alpha_i$ ).

Mais toute variation d'une variable d'écrouissage entraîne aussi un changement de sa variable d'état duale.

Afin de prendre en compte un historique de chargement, un nouveau potentiel est

ainsi introduit : le potentiel de flux  $F(\underline{\underline{\sigma}}, A_i)$ . Ce potentiel est également une fonction des composantes du tenseur des contraintes et des variables d'écouissage. L'objectif de cette fonction est d'établir la relation existant entre la variation des variables d'état donnée par la variation des variables d'écouissage :

$$\begin{aligned} d\underline{\underline{\varepsilon}}^p &= d\lambda \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \\ -d\alpha_i &= d\lambda \frac{\partial F}{\partial A_i}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

où  $d\lambda$  est le multiplicateur plastique et  $\frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{n}}$  est la direction du tenseur de déformation.

L'équation (1.24) définit la règle d'écouissage associée au potentiel  $F$ .

Le potentiel de dissipation de l'équation (1.8) peut être réécrit en fonction des variables d'écouissage :

$$d\phi = \left[ \underline{\underline{\sigma}} : \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} + R \frac{\partial F}{\partial R} + \underline{\underline{X}} : \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{X}}} \right] d\lambda \geq 0. \quad (1.25)$$

Cette relation entraîne une convexité de la fonction de potentiel  $F$  (et par conséquent, la convexité de la fonction de charge  $f$ ) et elle garantit une valeur positive de la dissipation lors d'une déformation plastique.

Les configurations d'écouissage isotrope ou cinématique linéaire correspondent à  $F = f$ .

### 1.3.4 Condition de cohérence

Afin de compléter les conditions nécessaires pour modéliser une loi de comportement dans le cadre thermodynamique, la condition de cohérence, déjà exposée implicitement dans §1.3.2 est définie par :

$$df = 0, \quad (1.26)$$

avec  $f$ , la fonction de charge qui dépend des variables d'écouissage (ou forces thermodynamiques). Le modèle d'écouissage utilisé aura une influence sur la dérivée de la fonction de charge. Si les variables d'écouissage sont par exemple  $R$  et  $X$ , la fonction (1.26) peut être réécrite sous la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : d\underline{\underline{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial R} \cdot dR + \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{X}}} : d\underline{\underline{X}} = 0, \quad (1.27)$$

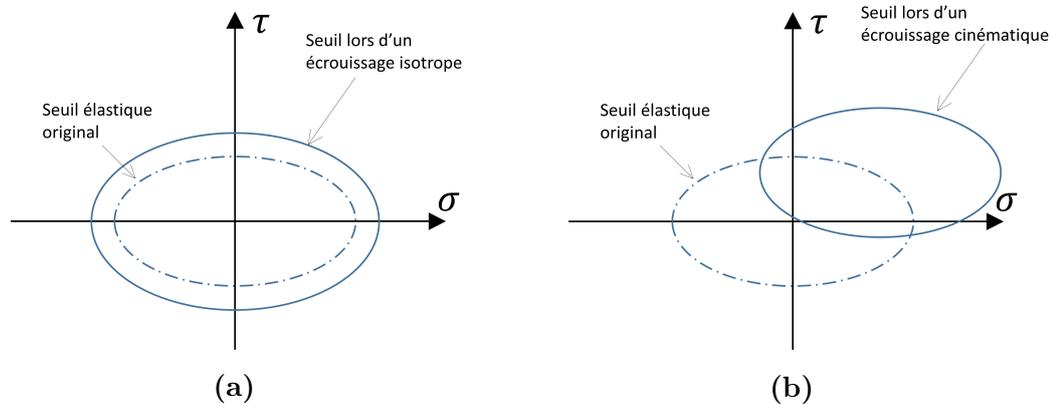
ici  $R$  et  $X$  représentent deux variables d'érouissage particulières (mais les plus utilisées), la variable d'érouissage isotrope et cinématique respectivement.

Les éléments développés : les tenseurs de contraintes, de déformations, les variables d'état et d'érouissage, la fonction de charge, l'énergie libre, le potentiel de flux, la règle d'érouissage associée, la fonction de cohérence et le multiplicateur plastique doivent être définis dans chaque modèle de façon à exprimer le processus d'érouissage comme un phénomène thermodynamique. Chaque modèle explique à travers ces éléments l'évolution de l'état du matériau. Le chapitre suivant illustre le principe de chacun des modèles existants et certaines des lois qui s'appliquent à ces modèles.

### 1.3.5 Modélisation de l'érouissage

La modélisation de l'érouissage permet d'évaluer l'évolution du seuil élastique durant l'étape de déformation plastique du matériau. Le modèle doit être cohérent avec les conditions thermodynamiques et les résultats expérimentaux.

Le seuil élastique avant toute sollicitation plastique est défini tel que  $J(\sigma) - \sigma_o = 0$ . Les deux modèles d'érouissage les plus simples sont le modèle isotrope (figure 1.4a) et le modèle cinématique (figure 1.4b).



**Figure 1.4.** Représentation des modèles d'érouissage dans l'espace tensoriel. **Fig. 1.4a)** Schéma d'érouissage isotrope. **Fig. 1.4b)** Schéma d'érouissage cinématique.

#### 1.3.5.1 Érouissage isotrope

Ce modèle utilise l'hypothèse où le seuil élastique conserve sa forme mais subit une expansion isotrope (voir figure 1.4a), quand une sollicitation dépasse le seuil [16]. Autrement dit la frontière subit un gonflement. Par exemple un érouissage lié à une sollicitation en traction génère une augmentation de la limite d'élasticité identique à celle de la compression pour une charge de même valeur.

Dans la [figure 1.5](#), le seuil élastique dans l'espace déviatorique  $\underline{S}$  est représenté par une hypersphère de rayon initial  $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_o$  qui évolue à  $\sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_o + R(\varepsilon_{eq}^p))$ , lors de l'application d'un effort d'intensité  $\sigma_o + R$ . Ce résultat est indépendant de la direction de sollicitation. La [figure 1.4a](#) est équivalente à la représentation de la [figure 1.5](#) mais la première illustre l'expression du seuil élastique en fonction des composantes du tenseur des contraintes de Cauchy et la deuxième en fonction du tenseur déviatorique.

Ici  $R$  est la variable d'érouissage responsable de la dilatation du seuil. Lors d'un érouissage isotrope, la fonction de charge s'exprime par :

$$f(J(\underline{\sigma}), R(\varepsilon_{eq}^p)) = J(\underline{\sigma}) - (\sigma_o + R), \quad (1.28)$$

en utilisant le seuil de Von Mises et en exprimant en coordonnées déviatoriques :

$$f(J(\underline{S}), R(\varepsilon_{eq}^p)) = \sqrt{\frac{3}{2}S_{ij}S_{ij}} - (\sigma_o + R(\varepsilon_{eq}^p)) = 0. \quad (1.29)$$

Comme l'expansion est indépendante de la direction de sollicitation, la variable d'érouissage  $R$  est une variable scalaire.

Si on considère un érouissage non linéaire, un des modèles le plus simple à appliquer est donné par le potentiel de flux  $F$  :

$$F(\underline{\sigma}, R) = J(\sigma) - (\sigma_o + R) + \frac{R^2}{2Q}, \quad (1.30)$$

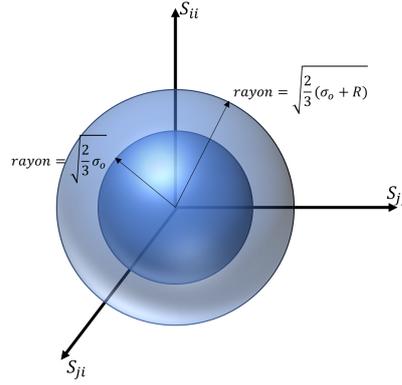
où  $Q$  est une constante. Ainsi la composante de l'énergie interne contenue dans le matériau dû aux phénomènes isotropes est [1] :

$$\psi_{iso} = \frac{1}{2}bQr^2, \quad (1.31)$$

où  $b$  est une constante du matériau et  $r$  est la variable thermodynamique isotrope, liée à la variable d'érouissage isotrope par l'application de l'équation (1.12) :

$$R = \frac{d\psi_{iso}}{dr} \quad \text{ou} \quad R = bQr. \quad (1.32)$$

Ces deux dernières relations permettent d'établir la liaison entre les observations phénoménologiques (changement de la limite d'élasticité) et l'estimation de l'énergie de stockage interne du matériau. Dans ce modèle en particulier, l'énergie consacrée à changer l'état du matériau ne peut pas être restituée.



**Figure 1.5.** Représentation dans l'espace déviateur de l'évolution du seuil élastique pour le cas d'un modèle isotrope avec le seuil de Von Mises.

Les déformations correspondantes sont obtenues à partir de l'application de la règle d'écrouissage associée (aussi connue comme la loi de normalité) présentée dans §1.3.3 :

$$d\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \underline{\underline{n}} d\lambda, \quad (1.33)$$

où  $\underline{\underline{n}}$  est la normale définie par :

$$\underline{\underline{n}} = \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}. \quad (1.34)$$

Il peut être facilement démontré que pour le cas de Von Mises :

$$\underline{\underline{n}} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{S}}} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{S}}}{(\sigma_o + R(\varepsilon_{eq}^p))}. \quad (1.35)$$

En appliquant la condition de cohérence sur la fonction de charge (équation (1.27)), et tenant compte de  $d\lambda = d\varepsilon_{eq}^p$  :

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : d\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\partial f}{\partial R} \cdot \frac{dR}{d\varepsilon_{eq}^p} \cdot d\varepsilon_{eq}^p = 0 \quad \text{ou} \quad \underline{\underline{n}} : d\underline{\underline{\sigma}} - \frac{dR}{d\varepsilon_{eq}^p} \cdot d\lambda = 0. \quad (1.36)$$

La relation  $dR/d\varepsilon_{eq}^p$  est la pente de la courbe entre la contrainte équivalente et la déformation équivalente quand le matériau est en plasticité. En identifiant  $h$  à la relation  $dR/d\varepsilon_{eq}^p$ , l'équation 1.36 peut se réécrire sous la forme :

$$d\lambda = \frac{\underline{\underline{n}} : d\underline{\underline{\sigma}}}{h}. \quad (1.37)$$

La loi de comportement est ainsi définie par la modélisation des trois potentiels  $f, F$  et  $\psi$  respectivement dans les équations (1.29), (1.30) et (1.31). Tous les modèles isotropes gardent en commun le potentiel de la fonction de charge  $f$ . Les deux autres potentiels peuvent varier d'un modèle à l'autre.

Il est courant que les lois de comportement soient exprimées à partir des potentiels  $f$  et  $F$ . L'absence de la modélisation de l'énergie libre  $\psi$  empêche d'estimer le rapport entre l'énergie stockée et l'énergie dissipée durant le procédé par la matière. La formulation

dans le cadre thermodynamique établie par Germain [4] permet de créer une traçabilité du flux énergétique dans le processus de chargement.

### 1.3.5.2 Écrouissage cinématique

Afin de modéliser la variation du seuil élastique durant l'écrouissage, l'hypothèse d'écrouissage cinématique ne prend pas en compte une expansion de la géométrie du seuil élastique mais une translation du seuil élastique. Les figures 1.4b et 1.6a illustrent respectivement l'expression de cette hypothèse pour un cas bidimensionnel dans l'espace des contraintes et pour un cas tridimensionnel dans l'espace déviatorique.

Cette translation entraîne un comportement anisotrope du matériau lors du premier écrouissage. Dans la figure 1.4b, le matériau est soumis à un effort de traction pure, le déplacement du seuil réduit la limite élastique en compression par rapport à la valeur initiale. Ce type de phénomène caractéristique du comportement des matériaux métalliques est appelé effet Baushinger.

Cette variation de la limite d'élasticité en fonction de la direction du chargement n'est pas restreinte au cas de la traction-compression. Dans ce travail, l'effet Bauschinger sera toujours pris en compte comme la variation de la limite d'élasticité comme conséquence d'un chargement précédent en comparaison du modèle isotrope dans le cas multi-axial.

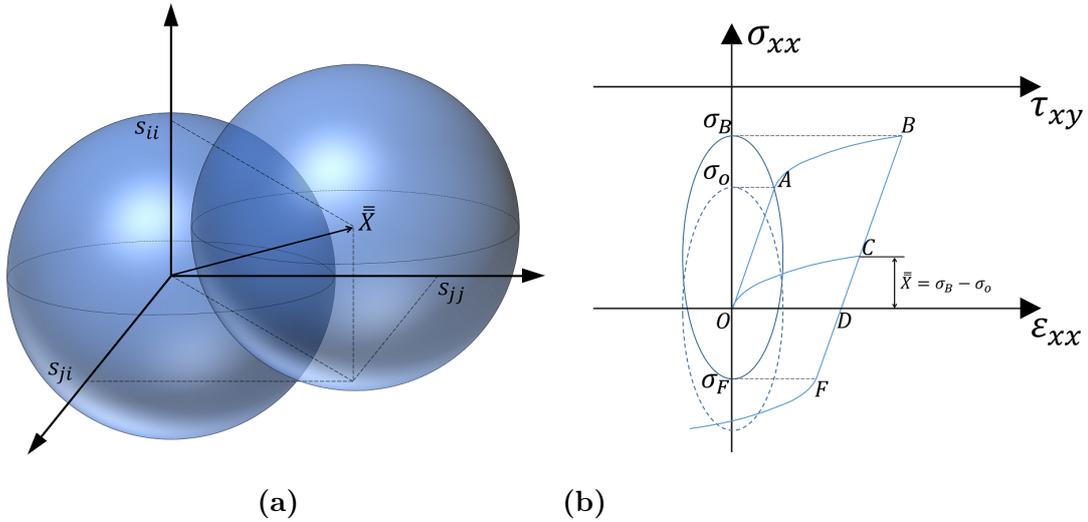
Contrairement au modèle isotrope, l'hypergéométrie du seuil ne change pas au cours des chargements. Dans ce cas, la variable d'écrouissage est la coordonnée du centre de l'hypersphère. Elle est connue sous le nom de contrainte interne (backstress en anglais) et elle est représentée par le tenseur  $\underline{X}$ . Dans cette modélisation, la variable d'écrouissage est un tenseur comparativement au cas isotrope où elle est un scalaire.

La fonction de charge pour un écrouissage cinématique est la suivante :

$$f(\sigma, X) = J(\underline{\sigma} - \underline{X}) - \sigma_o, \quad (1.38)$$

où la contrainte équivalente  $J(\underline{\sigma}, \underline{X})$  de Von Mises est donnée par :

$$J(\underline{\sigma}, \underline{X}) = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot (S_{ij} - X_{ij})(S_{ij} - X_{ij})} \quad (1.39)$$

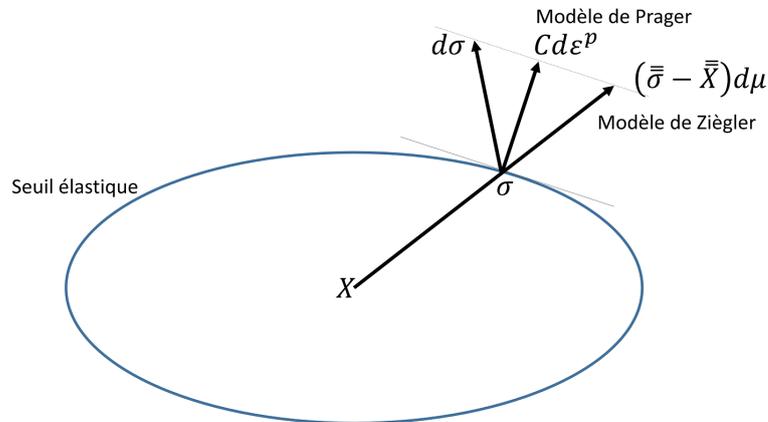


**Figure 1.6.** Fig. 1.6a) Interprétation géométrique de l'écrouissage cinématique en fonction des composantes du tenseur déviatorique. Fig. 1.6b) Schéma de l'effet Bauschinger dû à un écrouissage uni axial.

Un schéma qualitatif de l'effet Bauschinger pour un cas de traction-compression est donné dans la figure 1.6b. Le matériau est soumis à un effort de traction suivant la trajectoire  $OAB$ . Au point  $A$  correspond un effort égal à  $\sigma_o$ , le matériau atteint la limite élastique initiale. Le trajet de déformation plastique s'arrête au point  $B$  en arrivant à un chargement équivalent à  $\sigma_B$ . Ensuite le déchargement suit le trajet  $BD$ .

Soit la courbe  $OC$  parallèle au trajet d'écrouissage  $AB$  mais tracée à partir de l'origine ; soit  $C$  le point d'intersection entre  $OC$  et la décharge  $BD$  ; la contrainte interne ou autrement dit le déplacement du seuil sera égal à la projection du trajet  $CD$  sur l'axe des contraintes. Dans ce cas unidimensionnel  $\bar{X} = \sigma_B - \sigma_o$ , le volume du domaine élastique reste constant.

La limite élastique en traction est maintenant  $\sigma_B$  et la limite en compression est  $\sigma_F$ , dû au déplacement du seuil dans le sens positif  $|\sigma_B| > |\sigma_F|$ .



**Figure 1.7.** Comparaison de l'interprétation géométrique entre les modèles d'écrouissage cinématique de Prager et Ziègler. Image adaptée de [16]

Une observation importante réside dans le fait que les composantes du tenseur des contraintes internes  $\underline{\underline{X}}$  sont les mêmes dans l'espace des contraintes que dans l'espace déviatorique. Dans ce document, il sera toujours représenté par  $\underline{\underline{X}}$ .

### 1.3.5.3 Écrouissage cinématique linéaire

#### 1.3.5.3.1 Modèle de Prager-Ziègler

Le modèle d'écrouissage cinématique linéaire est caractérisé par un module d'écrouissage constant en régime plastique ( $h = Cste$ ), et l'utilisation d'une fonction de potentiel égale à la fonction de charge ( $F(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{X}}) = f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{X}})$ ). La règle de normalité devient :

$$\underline{\underline{n}} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = -\frac{df}{\underline{\underline{X}}} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}}{J(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}})}. \quad (1.40)$$

Dans cette modélisation de l'écrouissage, les modèles de Prager [19] et Ziegler [17] sont couramment utilisés (voir [figure 1.7](#)). Selon le modèle de Prager, le déplacement du centre du seuil prend la direction normale à l'hypersurface où la charge atteint le seuil :

$$d\underline{\underline{X}} = \frac{2}{3} C \underline{\underline{n}} d\lambda = \frac{2}{3} C \underline{\underline{\varepsilon}}^p. \quad (1.41)$$

Dans le modèle de Ziegler, la translation  $d\underline{\underline{X}}$  du centre du seuil prend la direction déterminée par  $(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}})$  avec une intensité  $d\mu$ , qui peut être déterminée par l'application de la condition de consistance :

$$\underline{\underline{n}} : d\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{n}} : d\underline{\underline{X}} = 0 \quad \text{ou} \quad d\mu = \frac{\underline{\underline{n}} : d\underline{\underline{\sigma}}}{(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) : \underline{\underline{n}}}. \quad (1.42)$$

Dans le cas de l'utilisation du seuil de Von Mises, le tenseur  $(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}})$  est normal au potentiel  $f$ . Cette configuration est plus évidente sur la représentation déviatorique où le rayon de l'hypersphère est toujours normal à la surface du seuil.

Pour reformuler le modèle dans le cadre thermodynamique, la composante de l'énergie libre attribuée aux mécanismes cinématiques de stockage est modélisée par :

$$\psi_k = \frac{1}{3} C \underline{\underline{\alpha}} : \underline{\underline{\alpha}}, \quad (1.43)$$

en appliquant la définition de l'équation (1.12) de la variable d'écrouissage (force thermodynamique) :

$$\underline{\underline{X}} = \frac{d\psi}{d\underline{\underline{\alpha}}} = \frac{2}{3} C \underline{\underline{\alpha}} \quad \text{ou} \quad d\underline{\underline{X}} = \frac{2}{3} C d\underline{\underline{\alpha}}, \quad (1.44)$$

avec la règle d'écrouissage associée :

$$d\underline{\underline{\alpha}} = -\frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{X}}} d\lambda, \quad (1.45)$$

en introduisant cette expression dans l'équation (1.44), on retrouve l'équation (1.41).

### 1.3.5.4 Modèles d'écroûissage cinématique non linéaires

#### 1.3.5.4.1 Modèle d'Armstrong-Frederick

Le modèle d'écroûissage cinématique linéaire même s'il est capable de représenter l'effet Baushinger, n'est pas fidèle aux données expérimentales. Pour palier à cet inconvénient, un nouveau terme qui régule la croissance de la frontière élastique est ajouté dans le potentiel de flux. Cette idée est proposée par Armstrong et Frederick [18]. Le potentiel  $F$  est ainsi défini :

$$F = J(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) - \sigma_o + \frac{3\gamma}{4C} \underline{\underline{X}} : \underline{\underline{X}}, \quad (1.46)$$

où  $C$  et  $\gamma$  sont des constantes propres au matériau. Ici  $C$  est la pente de la courbe de traction simple au début de la plasticité et  $C/\gamma$  l'effort qui correspond au fluage en traction (voir figure 1.8). La modélisation de l'énergie libre ne change pas par rapport à l'équation (1.43).

En appliquant la règle d'écroûissage associée au potentiel  $F$  :

$$\begin{aligned} d\underline{\underline{\varepsilon}}^p &= \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} d\lambda = \frac{3}{2} \frac{(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}})}{\sigma_o} d\lambda = \underline{\underline{n}} d\lambda, \\ d\underline{\underline{\alpha}} &= -\frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{X}}} d\lambda = \left( \underline{\underline{n}} - \frac{3}{2} \frac{\gamma}{C} \underline{\underline{X}} \right) d\lambda, \end{aligned} \quad (1.47)$$

à partir de la relation (1.44) l'expression de la variation de la contrainte interne est obtenue par :

$$d\underline{\underline{X}} = \left( \frac{2}{3} C \underline{\underline{n}} - \gamma \underline{\underline{X}} \right) d\lambda. \quad (1.48)$$

La fonction de charge  $f$  est donnée par l'équation 1.38, en conséquence la condition de cohérence est identique à celle du modèle de Prager-Ziègler qui apporte la relation suivante :

$$df = \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{n}} : d\underline{\underline{X}} = 0. \quad (1.49)$$

Si l'expression obtenue pour  $d\underline{\underline{X}}$  dans l'équation 1.48 est introduit dans 1.49, on obtient :

$$\underline{\underline{n}} : d\underline{\underline{\sigma}} - \underbrace{\left( \frac{2}{3} C \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{n}} - \gamma \underline{\underline{X}} : \underline{\underline{n}} \right)}_h d\lambda = 0, \quad (1.50)$$

où  $h$  est la raideur instantanée en plasticité, pour le cas particulier du seuil de Von Mises :

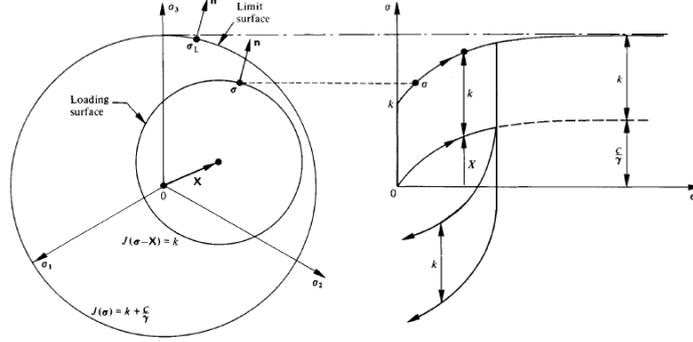
$$\underline{\underline{n}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \hat{\underline{\underline{n}}}, \quad (1.51)$$

où  $\hat{\underline{\underline{n}}}$  est le vecteur unitaire dans la direction de  $\underline{\underline{n}}$ . L'analyse de l'équation (1.47) montre que plus la contrainte interne est élevée, plus faible sera la valeur de la raideur jusqu'à la limite où  $h = 0$  qui représente un potentiel de saturation comme schématisé dans la figure 1.8.

A partir des relations (1.47) et (1.50), la déformation plastique obtenue est égale à :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{(\underline{\underline{n}} : d\underline{\underline{\sigma}})}{h} \cdot \underline{\underline{n}}. \quad (1.52)$$

Ainsi la valeur du module d'élasticité ne reste plus constante. Elle dépend directement de la valeur du produit doublement contracté entre contrainte interne et la normale.



**Figure 1.8.** Exemple d'application du modèle de Frederick et Armstrong et al. dans la modélisation de l'écroutissement cinématique [2].

L'équation (1.48) peut être intégrée dans le cas d'un chargement proportionnel. On obtient l'équation suivante :

$$X = \frac{C}{\gamma} + \left( X_o - \frac{C}{\gamma} \right) e^{-\gamma(\varepsilon_p - \varepsilon_{po})}. \quad (1.53)$$

Cela correspond à l'équation de la courbe obtenue dans la figure (1.8).

#### 1.3.5.4.2 Modèle de Chaboche

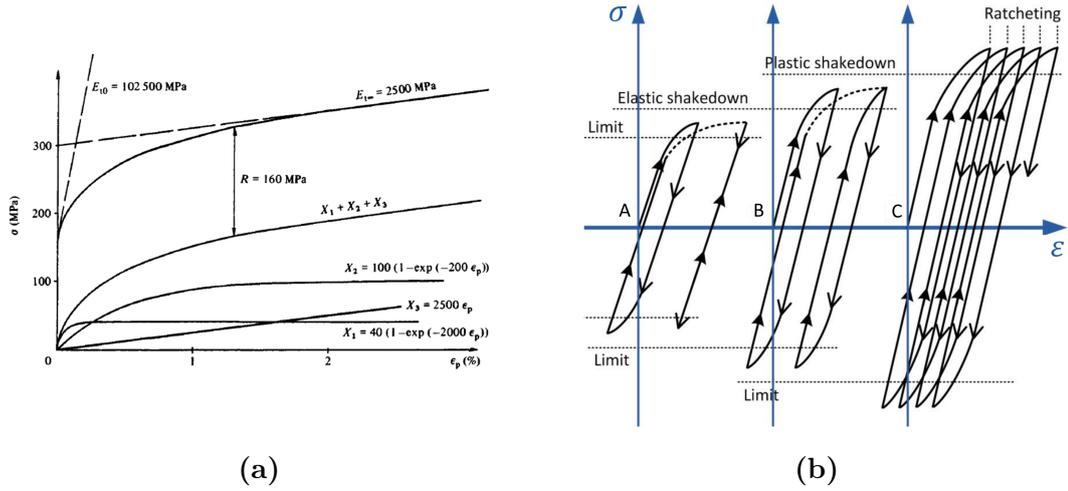
A partir du modèle de Armstrong et Frederick [18], une nouvelle proposition a été émise par J. L Chaboche [20]. Le tenseur de contraintes internes  $\underline{\underline{X}}$  est décomposé en une série de  $N$  composantes  $\underline{\underline{X}}_i$  :

$$\underline{\underline{X}} = \sum_{i=1}^N \underline{\underline{X}}_i. \quad (1.54)$$

En suivant le même cadre théorique, la variation de chaque élément de la série sera :

$$d\underline{\underline{X}}_i = \frac{2}{3} C_i d\underline{\underline{\varepsilon}}^p - \gamma_i \underline{\underline{X}}_i d\lambda. \quad (1.55)$$

Les valeurs des constantes  $C_i$  et  $\gamma_i$  qui paramètrent chaque composante  $\underline{\underline{X}}_i$  de la contrainte interne  $\underline{\underline{X}}$  sont obtenues à partir d'essais cycliques [21, 2]. Le nombre de composantes  $N$  de la contrainte interne est choisi pour obtenir un ajustement désiré entre la courbe expérimentale et le modèle.



**Figure 1.9.** **Fig. 1.9a)** Exemple d'application du modèle de Chaboche et al. dans la modélisation de l'érouissage cinématique [2]. **Fig. 1.9b)** Comportement du matériau durant un chargement cyclique non symétrique [19].

Dans l'exemple de la [figure 1.9a](#) (obtenue dans [2]), le comportement durant l'érouissage est caractérisé par la somme des trois composantes  $\underline{X}_1$ ,  $\underline{X}_2$  et  $\underline{X}_3$  dont la dernière est une droite et  $\underline{X}_1$  est utilisée pour caractériser l'entrée en plasticité où la courbure est prononcée (début de la plasticité).

### 1.3.5.4.3 Modèle d'Ohno-Wang

Les essais en traction-compression sous un chargement non symétrique ( $(\sigma_{trac} - \sigma_{comp})/2 = \sigma_m \neq 0$ ) peuvent présenter un des trois comportements suivants [1] :

- retour à un comportement élastique lors d'un comportement elastoplastique (elastic shakedown), correspondant au cas A de la [figure 1.9b](#),
- déformation progressive jusqu'à atteindre un cycle stable (plastic shakedown), correspondant au cas B de la [figure 1.9b](#),
- accumulation progressive de la déformation jusqu'à la rupture (effet de rochet), correspondant au cas C de la [figure 1.9b](#).

Le modèle d'Armstrong-Frederick ainsi que celui de Chaboche surestiment l'accumulation des déformations dues aux effets de la récupération dynamique (manifesté comme l'effet 'ratchetting') durant des chargements cycliques uni-axiaux ou multi-axiaux [22, 23, 24].

Afin de contrôler cette effet, Ohno et Wang [25, 26] proposent que la variation de la contrainte interne soit donnée par :

$$d\underline{X}_i = \frac{2}{3} C_i d\underline{\varepsilon}^p - H(\mathcal{F}) \frac{\gamma_i}{C_i} \underline{X}_i d\lambda, \quad (1.56)$$

où  $H(\mathcal{F})$  est la fonction de Heaviside évaluée sur un nouveau potentiel  $\mathcal{F}$  défini par :

$$\mathcal{F} = X_{eq_i}^2 - \left(\frac{C_i}{\gamma_i}\right)^2, \quad (1.57)$$

avec :

$$X_{eq_i}^2 = \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{X}}_i : \underline{\underline{X}}_i}. \quad (1.58)$$

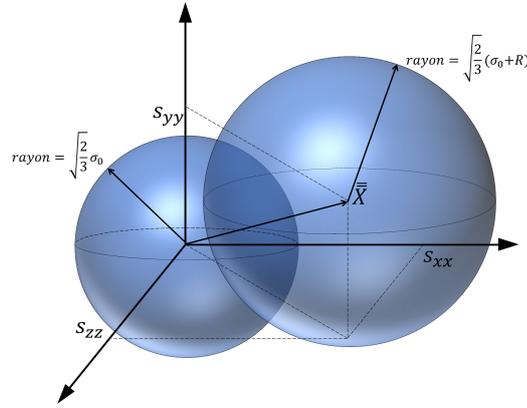
Le terme évanescent de la raideur de l'équation (1.56) est actif seulement quand la fonction  $\mathcal{F}$  a une valeur positive.

Néanmoins, dans [26] est montré que les résultats obtenus entre ce modèle (Ohno et Wang) et le modèle de Chaboche pour un nombre faible de chargements multi-axiaux sont presque identiques. La différence de la réponse devient plus importante durant le processus de chargement avec un grand nombre de cycles où l'accumulation des déformations dues à l'effet de rochet devient considérable.

### 1.3.6 Modèles d'écrouissages combinés

Les modèles d'écrouissages combinés utilisent une combinaison de modèles isotropes et cinématiques afin de reproduire plus fidèlement les phénomènes lorsqu'un seul type de variable d'écrouissage n'est pas suffisant, par exemple la saturation de contrainte durant un essai cyclique à déformation constante (courbe d'hystérésis).

La figure 1.10 illustre ce type de modèle défini par le déplacement du seuil avec une variable tensorielle  $\underline{\underline{X}}$  et une expansion du domaine élastique caractérisée par la variable scalaire  $R$ .



**Figure 1.10.** Schéma de l'évolution du seuil élastique en utilisant un modèle d'écrouissage combiné.

#### 1.3.6.1 Adaptation du modèle de Chaboche au modèle combiné

En combinant le modèle cinématique de Chaboche ou Armstrong-Frederick avec une modèle isotrope, le potentiel  $F$  sera donné par :

$$F = J(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) - (\sigma_o + R) + \frac{3\gamma}{4C} \underline{\underline{X}} : \underline{\underline{X}} + \frac{R^2}{2Q}, \quad (1.59)$$

et la composante de l'énergie libre liée à ces deux variables :

$$\psi_{comb} = \psi_{iso} + \psi_k, \quad (1.60)$$

où  $\psi_{iso}$  et  $\psi_k$  sont les composantes isotropes et cinématiques données dans les équations 1.31 et 1.43 respectivement.

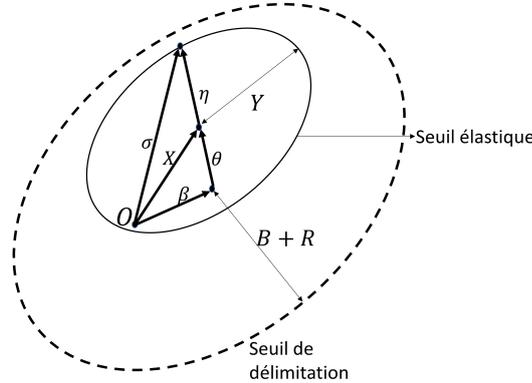
### 1.3.6.2 Modèle de YU

Le modèle de Yoshida et Uemori (YU) [27] est un modèle à multi-surfaces. Il est composé de deux seuils : le seuil élastique et le seuil de délimitation. Le seuil élastique, représente la fonction de chargement et tend à la tangence du seuil de délimitation pour les grandes sollicitations. Le seuil élastique n'a qu'une évolution cinématique tandis que le seuil de délimitation a une évolution combinée (cinématique et isotrope).

Le seuil élastique se déplace par rapport à un seuil de délimitation selon :

$$d\underline{\underline{\theta}} = c \left[ \frac{a}{Y} \underline{\underline{\eta}} - \sqrt{\frac{a}{\theta_{eq}}} \underline{\underline{\theta}} \right] dp, \quad (1.61)$$

avec  $c, a$  et  $Y$  des constantes du matériau et  $\underline{\underline{\theta}}$  représente la position de seuil élastique relative au centre du seuil de délimitation (voir figure 1.11),  $\underline{\underline{\eta}}$  est la différence entre le tenseur de contraintes ( $\underline{\underline{\sigma}}$ ) et le tenseur de contraintes internes ( $\underline{\underline{X}}$ ),  $\theta_{eq}$  est la valeur effective de  $\underline{\underline{\theta}}$  (écrite à partir de la fonction de charge choisie pour représenter le seuil élastique).



**Figure 1.11.** Schéma de l'interprétation des paramètres utilisés dans le modèle de YU [27]. *Image adaptée de [28].*

Le seuil de délimitation se déplace selon l'équation d'évolution suivante :

$$d\underline{\underline{\beta}} = k \left[ \frac{b}{Y} \underline{\underline{\eta}} - \underline{\underline{\beta}} \right] dp, \quad (1.62)$$

où  $k$  et  $b$  sont des constantes du matériau. La contrainte interne ( $\underline{\underline{X}}$ ) est donnée par :

$$d\underline{\underline{X}} = d\underline{\underline{\beta}} + d\underline{\underline{\theta}}. \quad (1.63)$$

L'expansion isotrope du seuil de délimitation est réglée par :

$$dR = k(R_{sat} - R)dp, \quad (1.64)$$

où  $R_{sat}$  correspond à la valeur maximale du paramètre qui caractérise la dimension du seuil. Cette dernière loi d'évolution a été modifiée dans [29] afin d'améliorer le résultat en grandes déformations.

Le modèle de YU a été appliqué en plusieurs occasions afin de caractériser le phénomène de plasticité durant le retour élastique pour des procédés à grandes déformations de forgeage à froid (emboutissage) [28, 30, 31]. En particulier, Kolpak [31] réalise une comparaison entre ce modèle et celui de Chaboche en obtenant des résultats avec une corrélation encore plus élevée avec des données expérimentales.

Une analyse des différentes lois de comportement qui utilisent la règle d'écrouissage combinée a été réalisée par Portier *et al.* [32]. Cinq modèles ont été comparés à partir de la même base de données : le modèle de Burlet et Cailletaud [33], de Chaboche [34], de Ohno [25], de Tanaka [35] et une nouvelle méthodologie [32] où sont combinés les paramètres de Ohno et Tanaka.

### 1.3.7 Modèles d'écrouissages anisotropes

Les modèles d'écrouissages anisotropes décrivent l'évolution du seuil élastique pas simplement due à une évolution du volume du domaine (modèle isotrope) ou de sa position par rapport à l'origine (modèle cinématique) mais par une distorsion du seuil.

De cette façon, le volume de l'hypersphère (décrite dans l'espace déviatorique) fluctue et sa position et sa forme varient en fonction de l'enchaînement des sollicitations.

L'objectif principal est d'identifier les effets de l'anisotropie et d'identifier les conséquences par rapport aux autres modèles.

#### 1.3.7.1 Etude de l'anisotropie par Phillips et al.

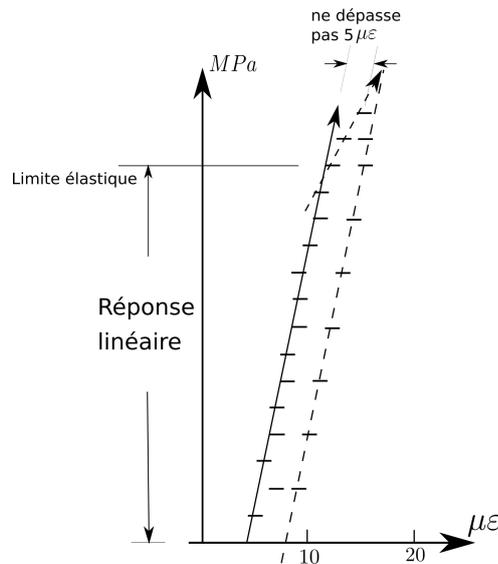
A. Phillips a été le pionnier des recherches sur l'évolution anisotrope du domaine élastique. Ce chapitre résume les principaux résultats de ces travaux [36, 37, 38, 39, 40, 41, 42].

Le critère fixant le seuil élastique est prépondérant dans la caractérisation du seuil. La limite élastique est définie quand la valeur de la déformation plastique atteint une valeur fixée entre 0,2% et 0,02% (présenté dans la section §1.3.1). Cette valeur n'est pas fixée à une valeur spécifique et déterminée par un standard, elle varie selon les critères de modélisation de chaque auteur. Ce concept est important car il va déterminer le domaine de validité du modèle. Dans les études réalisées par Phillips, la détermination de la limite d'élasticité n'est pas basée sur cette méthodologie (valeur fixe de la déformation plastique). Il est basé sur la sensibilité minimale pour trouver un changement dans la

valeur de la pente sur la courbe  $\sigma_{eq} - \varepsilon_{eq}$ .

La [figure 1.12](#) illustre la démarche issue de la méthode d'obtention de cette limite schématisée [38]. Elle se base sur le principe de la certitude que les points de mesure ne se trouvent pas dans le régime élastique. Finalement les valeurs sont similaires à celles obtenues avec une déformation équivalente autour de 0,02%.

Dans ces travaux, la déformation maximale atteinte ne dépasse pas 0.2% dans tous le processus de chargement. Cette valeur est considérée comme étant la fin du domaine élastique pour les applications industrielles.



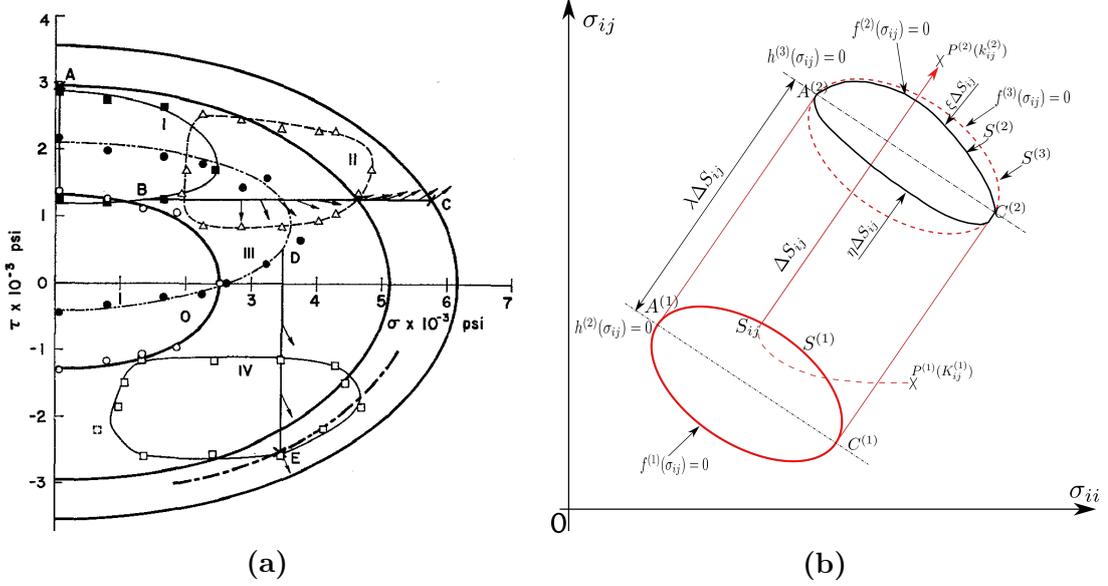
**Figure 1.12.** Schéma d'identification de la limite élastique utilisée par Phillips *et al.* Adapté de [38].

### 1.3.7.1.1 Description et évaluation des résultats expérimentaux

La [figure 1.13a](#) a été obtenue à partir des expériences décrites dans [39]. Les trois semi-ellipses en trait épais représentent les fonctions de chargement isotropes traditionnels de Von Mises (calculés), les autres surfaces sont les seuils obtenus expérimentalement. Les deux surfaces ( expérimentale et celle donnée par le modèle de Von Mises) sont seulement coïncidentes à l'état initial (état normalisé).

Au total, quatre chargements correspondant aux seuils *I*, *II*, *III* et *IV* ont été obtenus. Le seuil *I* est conséquent au chargement selon OA, le seuil *II* selon BC, le seuil *III* lors d'un déchargement total, et finalement le seuil *IV* selon DE. Les caractéristiques les plus remarquables sont les suivantes :

- La surface du seuil est contractée tant qu'elle s'éloigne du centre des coordonnées et reprend sa forme initiale à mesure qu'elle se rapproche de l'origine. Ce phénomène est confirmé par la phase de déchargement *III*.
- Si la durée d'application de la charge est assez longue, le seuil sera tangent au potentiel de Von Mises dans la direction du chargement (c'est le cas du seuil *I* où il est tangent au potentiel de Von Mises sur au A).
- Si la durée de l'application de la charge est courte, le seuil subit un léger mouvement de recul dans le sens de la charge. Dans ce cas particulier, le chargement maximal



**Figure 1.13.** Fig. 1.13a) Évolution de la géométrie du seuil élastique au long d'un chargement à multiples étapes [38]. Fig.1.13b) Modélisation de l'évolution du seuil élastique par Phillips *et al.* [42].

ne sera pas contenu dans le seuil. Ce phénomène est confirmé dans le cas du seuil *II* où le chargement *C* n'appartient pas à la frontière du seuil *II*.

- La déformation plastique entraîne des changements permanents au sein du matériau. Celui-ci est confirmé par le seuil *III* qui a été obtenu par une décharge totale. Le seuil obtenu n'est plus coïncident avec l'original.
- Le déplacement du seuil prend la direction de la sollicitation, pas la direction normale au seuil.

Plusieurs remarques peuvent être faites à partir de ces observations :

- Comme les essais expérimentaux ont été menés dans un domaine considéré généralement comme étant en régime élastique, il est prouvé qu'il existe des changements permanents (seuil *III*) pour de faibles déformations. Cela ouvre des perspectives d'études de phénomènes d'endommagement à faibles déformations par une approche énergétique.
- Selon le cadre théorique de la section §1.1, le chargement maximal responsable du dernier écrouissage doit appartenir au seuil élastique. Ce phénomène reste une perspective d'étude.
- Le fait que le déplacement du seuil coïncide avec la direction d'application du chargement contraste avec les modèles réalisés par [22, 25] où la direction du déplacement va prendre la direction normale au potentiel de flux. Les données expérimentales ne sont pas disponibles afin d'évaluer les différentes hypothèses.

### 1.3.7.1.2 Description analytique de l'écrouissage

Le modèle analytique décompose la modification du seuil en deux phénomènes : une translation et une déformation. La figure 1.13b représente un schéma de ce modèle.

La surface originale du seuil est représentée par  $f^{(1)}$  et la surface intermédiaire (translation de  $f^{(1)}$ ) par  $f^{(3)}$ . L'état final du seuil est finalement représenté par  $f^{(2)}$ , lors de

l'application d'une fonction de déformation sur  $f^{(3)}$ . La première étape de translation est ainsi représentée par :

$$f^{(3)}(\underline{\underline{\sigma}}) = f^{(1)}(\underline{\underline{\sigma}} - \lambda \Delta \underline{\underline{S}}), \quad (1.65)$$

où  $\Delta \underline{\underline{S}}$  est la variation de l'effort en plasticité (voir [figure 1.13a](#)) et  $\lambda$  un facteur de proportionnalité. La distorsion du seuil est obtenue à travers l'application de deux fonctions  $\eta$  et  $\xi$  :

$$\begin{aligned} f^{(2)}(\underline{\underline{\sigma}}) = f^{(1)}(\underline{\underline{\sigma}} - (\lambda + \eta) \Delta \underline{\underline{S}}) & \quad si \quad \frac{\partial f^{(3)}(\underline{\underline{\sigma}})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \Delta \underline{\underline{S}} < 0 \\ f^{(2)}(\underline{\underline{\sigma}}) = f^{(1)}(\underline{\underline{\sigma}} - (\lambda + \xi) \Delta \underline{\underline{S}}) & \quad si \quad \frac{\partial f^{(3)}(\underline{\underline{\sigma}})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \Delta \underline{\underline{S}} > 0 \end{aligned} \quad (1.66)$$

où  $\eta$  et  $\xi$  sont deux fonctions qui dépendent du tenseur de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$ , de la déformation plastique  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  et de l'historique des déformations. Ces fonctions ne sont pas détaillées dans le travaux de Phillips *et al.* [42].

De cette façon lors de chaque sollicitation le seuil sera divisé en deux hémisphères. Pour  $n$  sollicitations, le seuil sera divisé en  $2n$  sections différentes. Cette approche permet de caractériser le seuil d'une façon précise, lequel sera unique pour un historique de chargement donné.

Les auteurs n'ont pas établi de relation entre les variables d'érouissage et les variables thermodynamiques. Ils n'ont également pas exprimé l'énergie libre du matériau. Il n'est donc pas possible de réaliser une évaluation du modèle dans le cadre thermodynamique présenté dans la section §1.1.

Néanmoins, diviser le seuil en fonction du nombre de chargements successifs permet une description précise de l'état du matériau. Des recherches complémentaires sont requises pour vérifier l'influence de ce niveau de détail dans la description du seuil pour modéliser l'état de santé du matériau, au niveau énergétique et des déformations pour le cas d'un procédé de mise en forme.

### 1.3.7.2 Étude expérimentale de l'anisotropie par Shiratori et al.

Une méthodologie similaire aux travaux décrits dans la section précédente a été mise en oeuvre par Eriyo Shiratori *et al.* [43, 44, 45, 46].

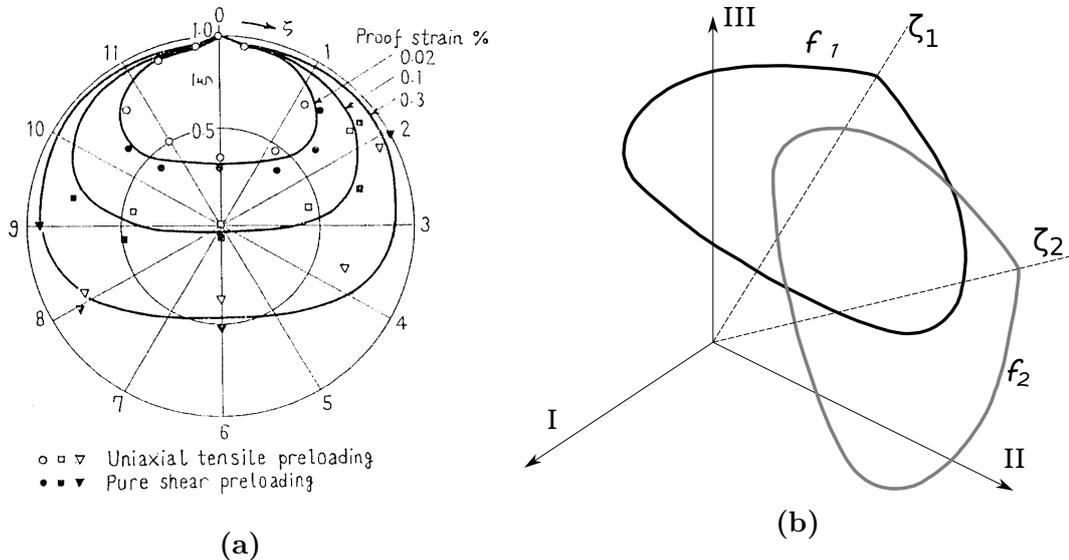
Les principales différences entre ces travaux et le précédent sont :

- Le matériau de l'éprouvette : les travaux ont été réalisés sur deux matériaux : un alliage de cuivre et un alliage d'aluminium. [38].
- L'espace de représentation des efforts : Shiratori *et al.* ont présenté les résultats dans l'espace déviatorique, en obtenant une description plus simple de l'évolution de la déformation du seuil.
- La définition de la limite d'élasticité : Shiratori *et al.* ont réalisé plusieurs essais avec différentes valeurs de déformation totale pour définir la limite élastique, 0.02%, 0.1% et 0.3%. L'influence de la définition de ces critères est illustrée sur la [figure 1.14a](#).

- Les études de Shitatori *et al.* ne font pas référence au temps d'application de la charge et son effet sur le seuil.

Sur la [figure 1.14a](#), les cercles représentent les potentiels de Von Mises avant et après un procédé d'érouissage (à partir de sollicitations en traction pure et en torsion pure). Les figures distordues représentent les seuils obtenus pour différentes définitions du seuil, avec des résultats remarquables :

- Avec une définition de la limite élastique à 0,02% de la déformation, le seuil voit une légère réduction de son volume. Cette observation est cohérente avec celles faites par Phillips *et al.* [38].
- Le seuil obtenu avec un critère à 0,1% de la déformation voit une légère dilatation du seuil en comparaison de l'original.
- La définition de la limite d'élasticité avec une valeur de 0,3% de la déformation entraîne une dilatation plus marquée par rapport aux deux autres configurations.

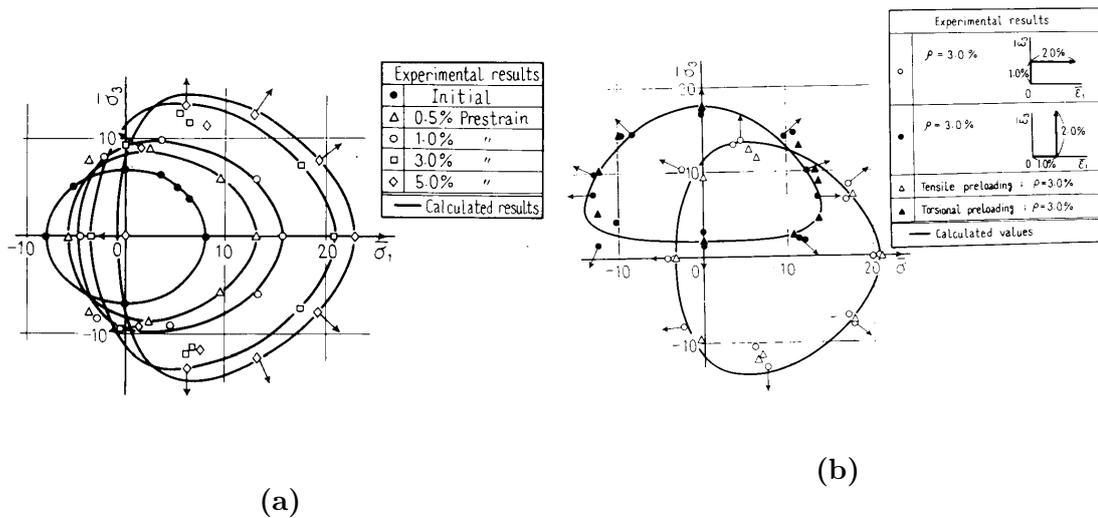


**Figure 1.14.** Fig. 1.14a) Influence de la définition de la limite d'élasticité sur le seuil élastique [46]. Fig. 1.14b) Influence de la direction de la sollicitation sur la géométrie du seuil. Image adaptée de [45]

En conclusion de cette étude, la variation de la taille du seuil lors d'un processus d'érouissage du matériau sera fonction de la définition de la limite d'élasticité. Cette observation est significative car elle va affecter les paramètres de la loi de comportement. Par exemple, avec une définition de la limite à 0,3% de la déformation, la variation de l'enveloppe d'élasticité devra nécessairement être prise en compte.

La déformation du seuil élastique est ainsi décrite [45] par la formation d'un coin ou surface de petit rayon autour du front de charge et aplati dans la direction opposée. Cet effet est clairement présenté dans la [figure 1.14a](#). Une autre caractéristique encore plus évidente dans la représentation dans l'espace déviatorique est la tangence du seuil au potentiel de Von Mises au point de chargement.

La forme développée par le seuil lors d'un chargement dépend seulement de l'intensité de la charge. La direction de la sollicitation définit l'orientation de la surface, comme l'illustre la [figure 1.14b](#).



**Figure 1.15.** Fig. 1.15a) Évolution du seuil élastique en traction pure [46]. Fig. 1.14b) Étude de l'influence de la direction de la charge sur le seuil obtenu [45].

La figure 1.15a montre aussi l'influence de l'intensité de la charge sur les dimensions et la forme du seuil. La figure 1.15b montre un autre résultat important : l'indépendance du chemin parcouru sur la géométrie finale du seuil. Deux historiques de charges différents avec la même charge finale mettent en évidence la même géométrie du seuil final obtenu.

Ce résultat contraste avec le résultat précédent obtenu par Phillips *et al.* [36, 38, 39] où le seuil obtenu est différent et unique pour un historique de charge particulier. Cette description de l'évolution simplifie la modélisation car la géométrie seuil est indépendante de l'historique.

### 1.3.7.3 Étude expérimentale par Wu et Yeh

Une procédure expérimentale similaire aux deux précédentes a été menée par Wu et Yeh [47], sur un acier inoxydable 304. La limite élastique correspond à la contrainte équivalente atteinte quand le décalage entre la déformation obtenue expérimentalement et celle prédite par la loi de Hooke est égale à  $5\mu$  (méthodologie similaire à celle prise par Phillips *et al.*, décrite dans la section § 1.3.7.1).

Dans ces travaux, la démarche expérimentale a pour objectif l'étude de l'évolution de la géométrie du seuil pour un chargement à direction constante et sens variable. Trois directions différentes ont été choisies : axiale pure (traction et compression), cisaillement pur et combiné. La vitesse de déformation durant ces tests a été fixée à 0.001% par seconde. A la différence du travail de Phillips, il n'y a pas eu de temps de stabilisation lorsque le chargement maximal est atteint.

Ces travaux ont conduit aux résultats suivants :

- La déformation du seuil exprimée en coordonnées déviatoriques est gérée par la direction et l'intensité de chargement.

- A la différence des études de Phillips *et al.*, le front de chargement se trouve toujours à la frontière du seuil, jamais à l'extérieur.
- La région aplatie postérieure est plus prononcée par rapport à l'expansion dans la direction du front de chargement. Cela conduit à une réduction du seuil tant que la valeur de la contrainte augmente. Cette observation est cohérente avec les autres études : Phillips *et al.* et Shiratori *et al.*, en tenant compte de la définition utilisée pour définir la limite d'élasticité.
- Le phénomène responsable du durcissement cyclique (augmentation de la limite d'élasticité durant un essai cyclique à déformation constante) est une translation du seuil, et pas une dilatation isotopique comme proposé par [34]. La [figure 1.16a](#) illustre la comparaison entre des seuils obtenus durant un chargement cyclique, dont la principale différence est effectivement la position et non le changement de la taille du seuil.

La validité du dernier item doit être évaluée en fonction du paramètre utilisé pour définir la limite d'élasticité, car le seuil peut évoluer avec des caractéristiques différentes en fonction de cette définition.

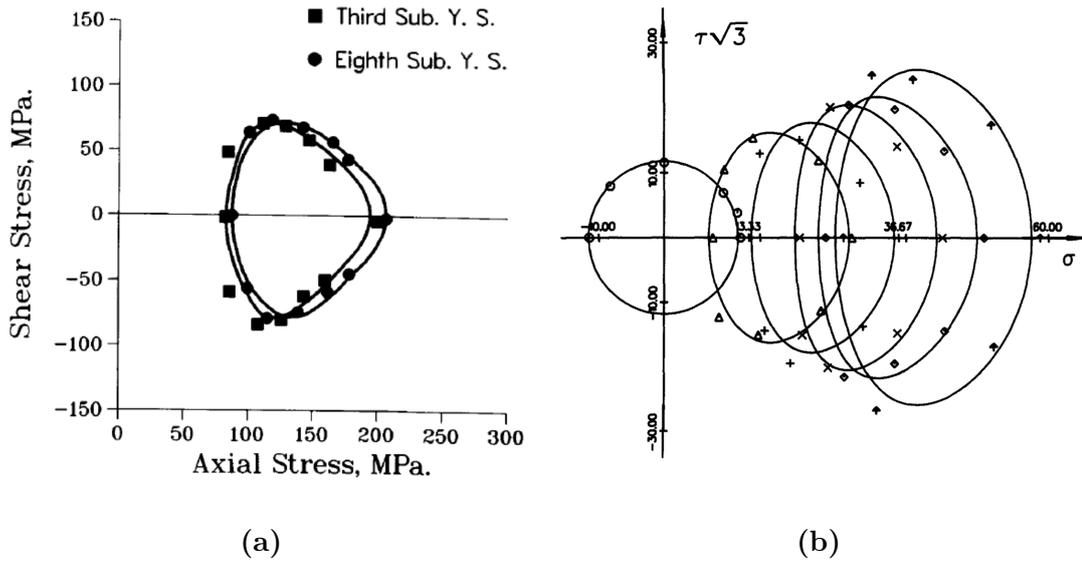
#### 1.3.7.4 Régression analytique de Gupta et Meyer

A partir des résultats expérimentaux obtenus par Shiratori *et al.* [46], Gupta et Meyer [48] ont développé une régression en fonction des coordonnées déviatoriques :

$$k^2 = J_2(\underline{S} - \underline{X}) + c_1 J_3^2(\underline{S} - \underline{X}), \quad (1.67)$$

où  $k$  et  $c_1$  sont deux paramètres qui dépendent du matériau utilisé et de l'historique du chargement,  $J_2(\underline{S} - \underline{X})$  est le deuxième invariant du tenseur  $(\underline{S} - \underline{X})$  et  $J_3^2(\underline{S} - \underline{X})$  le troisième invariant. La [figure 1.16b](#) montre la bonne corrélation entre les données expérimentales et le modèle. Comme le deuxième invariant  $J_2(\underline{S} - \underline{X})$  représente l'hypersphère du modèle cinématique, le terme  $c_1 J_3^2(\underline{S} - \underline{X})$  est lié à la modélisation de la distorsion du seuil.

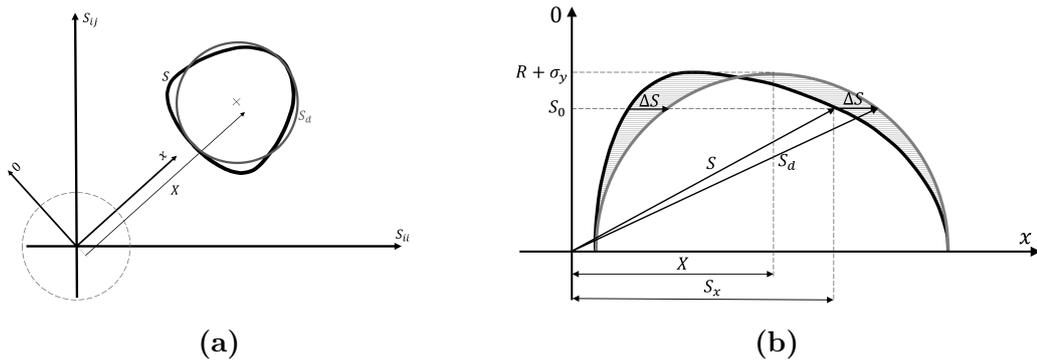
Néanmoins ce modèle n'inclut pas une analyse dans le cadre thermodynamique. Le modèle est présenté comme une régression sur les différents états pendant un chargement et pas comme un modèle de loi de comportement. Il peut représenter la base d'un modèle très puissant vue la simplicité avec laquelle il a été formulé et la faible quantité de paramètres. Il reste à étudier la relation entre les paramètres  $k$  et  $c_1$  avec l'état énergétique du matériau.



**Figure 1.16.** Fig. 1.16a) Comparaison entre les seuils obtenus durant le 7ème et 8ème chargement au cours d'un essai de chargement cyclique uni-axial [47]. Fig. 1.16b) Régression de Gupta et Meyer [48] à partir de données obtenues par [46].

### 1.3.7.5 Modèle de François

Le modèle de loi de comportement anisotropique de François [49] se base sur la distorsion d'un seuil obtenu par un modèle combiné (cinématique + isotrope). Par exemple le modèle cinématique de Chaboche [20] (présenté dans §1.3.5.4.2 et §1.3.6), avec durcissement cyclique se caractérise par une variable isotrope. La figure 1.17a illustre le schéma de l'obtention du seuil distordu  $S$  à partir d'un seuil sphérique  $S_d$ .



**Figure 1.17.** Fig. 1.17a) Interprétation du seuil distordu par rapport à celui obtenu par un modèle cinématique. Fig. 1.17b) Schéma de d'application de la fonction de distorsion sur le seuil. Figures adaptées de [49].

La modélisation est basée sur les trois hypothèses suivantes :

- La forme finale du seuil représenté dans les coordonnées déviatoriques est un hyper-ovoïde, voir figure 1.17a. Cette observation est en cohérence avec les descriptions faites par Wu et Yeh [47] et Shiratori [44, 46, 43].
- La direction de la pointe de l'ovoïde est déterminée par la direction du tenseur

de contrainte interne  $\underline{X}$ , voir [figure 1.17a](#). La forme ovoïdale est symétrique par rapport à l'axe défini par la direction de la contrainte interne ; le demi-hémisphère est schématisé dans la [figure 1.17b](#).

- La distorsion de la sphère à la forme ovoïdale est proportionnelle au rapport de la norme de la contrainte interne  $X$  à la nouvelle limite de durcissement cinématique  $X_1$ .

Le seuil distordu  $S$  de la [figure 1.17b](#) est obtenu en appliquant une fonction de distorsion au seuil hyper-sphérique  $S_d$ . Le seuil  $S_d$  représente la frontière élastique obtenue avec une loi de comportement cinématique où combiné (loi de Chaboche) .

Soit 0 l'axe perpendiculaire à la direction  $\underline{X}$ , voir [figure 1.17b](#). La fonction de distorsion a uniquement un effet dans la direction parallèle à la direction de la contrainte interne  $\underline{X}$ . La variation  $\Delta S$  du seuil par rapport à l'hyper-sphère est donné par :

$$\Delta \underline{S} = \underline{S}_d - \underline{S} = \frac{\underline{S}_0 : \underline{S}_0}{2X_1(\sigma_0 + R)} \underline{X}, \quad (1.68)$$

où  $S_0$  est la projection de  $S_d$  sur l'axe 0. Le paramètre  $X_1$  permet de contrôler le niveau de la distorsion du seuil. Il est propre à chaque matériau. Le seuil anisotrope défini de cette manière, n'introduit pas de nouvelle variable d'érouissage.

Les travaux de Shiratori *et al* [45] ainsi que de Wu et Yeh [47] stipulent que l'orientation du seuil est donnée par l'orientation du tenseur de chargement  $S$ .

Le modèle de François évalue l'évolution graduel de la direction du seuil au cas où la direction de la sollicitation change abruptement (i.e les composantes du tenseur  $\underline{S}$ ). Dans ce modèle l'orientation du seuil est donnée par le tenseur de contraintes internes  $\underline{X}$ , qui tend à s'aligner avec  $\underline{S}$ . Ceci est cohérent avec la nature physique des dislocations au niveau microstructurel, qui se réarrangent progressivement en suivant la direction du chargement [50, 51, 52].

La simplicité de ce modèle pour représenter un phénomène aussi complexe que l'évolution anisotrope du seuil est remarquable, néanmoins il reste à le valider pour un ensemble de matériaux. Un point important à vérifier est l'orientation du seuil en fonction de la charge qui contraste par rapport aux observations d'autres auteurs [46, 43, 47].

### 1.3.7.6 Le modèle HAH

Contrairement aux modèles basés sur une stratégie cinématique pour modéliser l'effet Bauschinger, le modèle HAH proposé par Barlat *et al.* [53, 54, 55] établit une modélisation au travers de la distorsion d'un seuil statique par rapport à l'origine des coordonnées déviatoriques. La distorsion est une fonction de deux quantités tensorielles : le tenseur déviatorique  $\underline{S}$  et une nouvelle variable qui caractérise l'évolution de la micro-structure du matériau et les plans de glissement : le tenseur déviatorique de la micro-structure  $\underline{h}$ .

Le tenseur  $\underline{h}$  capture l'histoire de la déformation du matériau et caractérise les effets de l'évolution de la micro-structure. Quand la direction du chargement change, les composantes du tenseur déviatorique prennent des valeurs différentes instantanément. Le

tenseur déviatorique de la micro-structure tend à s'aligner avec  $\underline{S}$  progressivement et ses composantes varient d'une manière continue.

Le changement de direction du chargement est caractérisé par :

$$\cos \chi = \frac{\hat{s} : \hat{h}}{\sqrt{\hat{s} : \hat{s}} \sqrt{\hat{h} : \hat{h}}}, \quad (1.69)$$

où  $\hat{s}$  et  $\hat{h}$  sont les tenseurs normalisés de  $\underline{S}$  et  $\underline{h}$  respectivement. Le paramètre  $\cos \chi$  varie entre 1 (cas de charge proportionnelle) et -1 (pour le cas un chargement complètement inversé par rapport au premier).

Ici, les fonctions qui gèrent l'anisotropie sont appliquées sur une fonction de charge isotrope homogène ou anisotrope (par exemple les seuils de Von Mises, Tresca[8], Hershey[56], Hill[14], YLD2004-18P[57] sont applicables). Si la fonction de charge initiale est représentée par  $\phi$ , la fonction du seuil du modèle HAH est représentée par :

$$\phi_B(\underline{S}, \underline{h}, \varepsilon_{eq}^p, g_1, g_2) = [\phi^q + \phi_h^q]^{\frac{1}{q}} = \sigma(\varepsilon_{eq}^p), \quad (1.70)$$

où  $q$  est une valeur scalaire du modèle et  $\phi_h^q$  est la composante fluctuante donnée par :

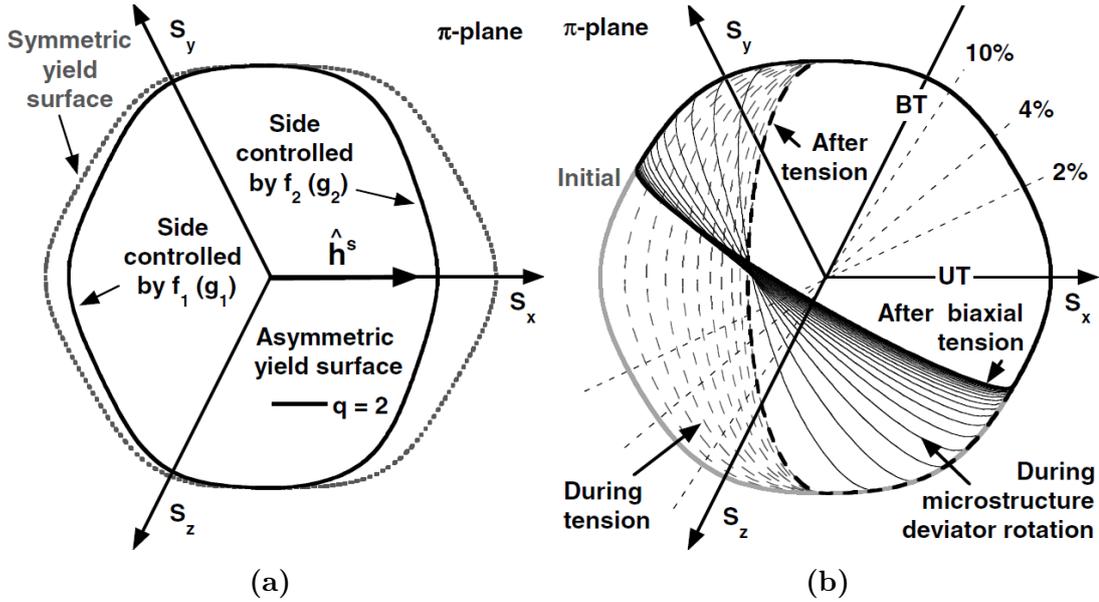
$$\phi_h^q = f_1 \left| \underline{\hat{h}} : \underline{S} - |\underline{\hat{h}} : \underline{S}| \right|^q + f_2 \left| \underline{\hat{h}} : \underline{S} + |\underline{\hat{h}} : \underline{S}| \right|^q, \quad (1.71)$$

où  $f_1$  est la fonction qui contrôle la distorsion du seuil quand  $\cos \chi < 0$  alors que la fonction  $f_2$  régule la distorsion quand  $\cos \chi > 0$  (vue dans la [figure 1.18a](#)). Les valeurs des fonctions  $f_1$  et  $f_2$  dépendent des variables d'écrouissage scalaires  $g_1$  et  $g_2$  respectivement. L'évolution de ces variables d'état est fonction de la déformation plastique équivalente  $\varepsilon_{eq}^p$ . Les valeurs des paramètres  $f_1$  et  $f_2$  sont aussi fonctions de la déformation équivalente  $\varepsilon_{eq}$  et de ses variables d'écrouissage  $g_i$  associées.

Comme l'hyper-géométrie anisotrope est un seuil distordu obtenu à partir d'une dilatation isotrope, l'origine des coordonnées se trouvera toujours à l'intérieur du domaine élastique (voir [figure 1.18b](#)).

Finalement ce modèle utilise une seule variable tensorielle ( $\underline{h}$ ) et cinq variables scalaires pour caractériser l'évolution anisotrope du seuil, ce qui constitue un bon rapport entre la complexité du problème à résoudre et le coût de calcul.

Ce modèle permet d'estimer la densité des dislocations en fonction des variables d'écrouissage. Cependant, il ne comprend pas explicitement une analyse de l'état énergétique du matériau, c'est-à-dire la formulation de l'énergie libre en fonction des variables utilisées.



**Figure 1.18.** Fig 1.18a) Schéma de la géométrie du seuil contrôlé par les fonctions  $f_1$  et  $f_2$ . Fig.1.18b) Influence de la direction de chargement sur la géométrie du seuil [53].

### 1.3.8 Modèles basés en multi-mécanismes et multi-critères

Il y a plusieurs mécanismes physiques capables de produire des non linéarités dans le matériau au niveau phénoménologique ou macroscopique comme : les glissements du joint de grain, les glissements des dislocations, l'endommagement, etc. Dans les lois de comportements étudiées, toutes les sources de non linéarité sont considérées par un seul mécanisme, représentées par le tenseur  $\underline{\varepsilon}_p$ . Ces modèles ont un bon rapport entre la qualité de la réponse et le coût de calcul [58]. Cependant il existe certains phénomènes qui ne sont pas pris en compte comme la sensibilité à la vitesse de déformation qui n'est pas négligeable dans la simulation d'un procédé de fabrication.

D'autre part, dans les modèles basés sur la plasticité cristalline, le seuil est obtenu comme le résultat de la contribution d'une somme de critères dans chaque système de glissement local, telles que les textures, les contraintes et les déformations locales dans les grains entre autres. Le comportement macroscopique est obtenu comme la somme des contributions de chaque système de glissement. Le problème pratique de l'application de ces modèles réside dans le fait que plusieurs interactions entre les divers systèmes restent encore inconnues. D'autre part, en considérant chaque système indépendant, le nombre de variables peut se chiffrer à plusieurs centaines [59]. Pour cette raison, ces types de modèles ne sont pas abordés dans ce travail.

Les modèles basés sur des multi-mécanismes et multicritères se situent à mi-chemin des deux approches précédentes. Le premier modèle a été proposé par Saï [58]. L'objectif est de profiter des meilleures caractéristiques de chaque approche, de créer plusieurs mécanismes possibles de création des déformations inélastiques mais avec un nombre réduit de variables.

L'idée est d'exprimer la déformation inélastique totale par l'action de différents méca-

nismes :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_1^{in} = A_1 \underline{\underline{\varepsilon}}_1 + A_2 \underline{\underline{\varepsilon}}_2, \quad (1.72)$$

Dans ce type de loi de comportement, il peut y avoir plusieurs critères pour définir si la limite élastique a été atteinte. Si tel est le cas, chaque critère sera représenté par une fonction de chargement différente. Finalement, un modèle comportant un grand nombre de mécanismes avec plus d'un critère tend vers les modèles de plasticité cristalline. Les mécanismes multiples avec un seul critère présentent des résultats encourageants pour les travaux futurs [6].

Le [tableau 1.1](#) résume les équations constitutives du modèle 2M1C de Cailletaud et Saï [59] (deux mécanismes et une fonction de charge  $f$ ), où en particulier la composante  $\underline{\underline{\varepsilon}}_1^{in}$  représente la déformation plastique à basse vitesse et  $\underline{\underline{\varepsilon}}_2^{in}$  représente le mécanisme visco-plastique. Les deux composantes de la déformation inélastique ont des directions de déformation différentes.

Équations constitutives du modèle 2M1C de Cailletaud et Saï	
$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + A_1 \underline{\underline{\varepsilon}}_1^{in} + A_2 \underline{\underline{\varepsilon}}_2^{in}$	
$\underline{\underline{\sigma}}_1 = A_1 \underline{\underline{\sigma}}$ ; $\underline{\underline{\sigma}}_2 = A_2 \underline{\underline{\sigma}}$	
$f = (J(\underline{\underline{\sigma}}_1 - \underline{\underline{X}}_1)^2 + J(\underline{\underline{\sigma}}_2 - \underline{\underline{X}}_2)^2)^{1/2} - R - R_0$	
$\underline{\underline{X}}_1 = (2/3)(C_{11}\alpha_1 + C_{12}\alpha_2)$	
$\underline{\underline{X}}_2 = (2/3)(C_{12}\alpha_1 + C_{22}\alpha_2)$	
$R = Qr$	
$\underline{\underline{\varepsilon}}_1^{in} = \lambda \underline{\underline{n}}_1$ ; $\underline{\underline{\varepsilon}}_2^{in} = \lambda \underline{\underline{n}}_2$	
$\underline{\underline{\alpha}}_1 = \lambda(\underline{\underline{n}}_1 - (3D_1/2C_{11})\underline{\underline{X}}_1)$ , ; $\underline{\underline{\alpha}}_2 = \lambda(\underline{\underline{n}}_2 - (3D_2/2C_{22})\underline{\underline{X}}_2)$	
$r = \lambda(1 - (b/Q)R)$	

Tableau 1.1 – Synthèse des équations du modèle 2M1C [58].

Le [tableau 1.2](#) regroupe les équations constitutives pour le cas du modèle 2M2C (deux mécanismes et deux critères). La principale différence avec le modèle précédent est l'apparition de deux fonctions de charge au lieu d'une, de sorte qu'une déformation inélastique peut être la conséquence d'un mécanisme particulier (également lié à un critère indépendant). Dans ce cas, il y a une normale pour chaque fonction de charge  $f_i$ , qui définit la direction de chaque composante de la déformation inélastique  $\underline{\underline{\varepsilon}}_i^{in}$ . Par conséquent il y a aussi deux multiplicateurs plastiques  $\lambda_i$  associés à chaque fonction de charge respective.

Équations constitutives du modèle 2M2C de Cailletaud et Sai	
$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + A_1 \underline{\underline{\varepsilon}}_1^{in} + A_2 \underline{\underline{\varepsilon}}_2^{in}$	
$\underline{\underline{\sigma}}_1 = A_1 \underline{\underline{\sigma}} \quad ; \quad \underline{\underline{\sigma}}_2 = A_2 \underline{\underline{\sigma}}$	
$f_1 = J(\underline{\underline{\sigma}}_1 - \underline{\underline{X}}_1) - R_1 - R_{0_1} \quad ; \quad f_2 = J(\underline{\underline{\sigma}}_2 - \underline{\underline{X}}_2) - R_2 - R_{0_2}$	
$\underline{\underline{X}}_1 = (2/3)(C_{11}\alpha_1 + C_{12}\alpha_2)$	
$\underline{\underline{X}}_2 = (2/3)(C_{12}\alpha_1 + C_{22}\alpha_2)$	
$R_1 = Q_{11}r_1 + Q_{12}r_2$	
$R_2 = Q_{12}r_1 + Q_{22}r_2$	
$\underline{\underline{\varepsilon}}_1^{in} = \lambda_1 \underline{\underline{n}}_1 \quad ; \quad \underline{\underline{\varepsilon}}_2^{in} = \lambda_2 \underline{\underline{n}}_2$	
$\underline{\underline{\alpha}}_1 = \lambda_1(\underline{\underline{n}}_1 - (3D_1/2C_{11})\underline{\underline{X}}_1), \quad ; \quad \underline{\underline{\alpha}}_2 = \lambda_2(\underline{\underline{n}}_2 - (3D_2/2C_{22})\underline{\underline{X}}_2)$	
$r = \lambda(1 - (b/Q)R)$	

Tableau 1.2 – Synthèse des équations du modèle 2M2C [59].

Une amélioration de ce modèle, pour le cas d'un chargement caractérisé par un nombre élevé de cycles (qui ne correspond pas au contexte ce travail) est présentée dans [69]. Une revue et une étude comparative des résultats des principaux modèles est effectuée dans [6, 60]. Avec les modèles multi-mécanismes l'effet de la viscoplasticité peut s'intégrer au modèle comme un mécanisme de déformation, ce qui permet d'élargir le domaine d'application de ces lois à de grandes vitesses de déformation.

### 1.3.9 Discussion sur le domaine de validité des modèles

#### 1.3.9.1 Choix du critère de la limite d'élasticité

Dans la section §1.3.7.2, l'influence du paramètre  $\varepsilon_0$  utilisé pour définir la limite d'élasticité sur le comportement et la taille du seuil pendant le processus d'écrouissage a été discutée. Si la valeur est faible ( $\varepsilon_0 < 0,2\%$ ), le seuil diminue sa taille quand le chargement augmente et le seuil s'éloigne de l'origine des coordonnées. Si la valeur est élevée ( $\varepsilon > 0,2\%$ ), le seuil se dilate et l'origine des coordonnées se trouve à l'intérieur du seuil.

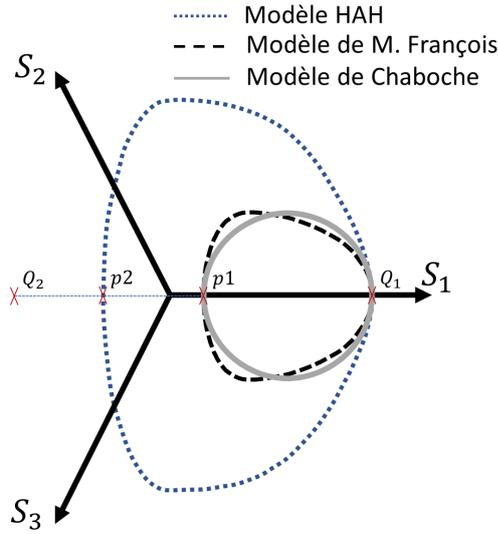
En considérant le modèle HAH, afin d'éviter que l'origine des coordonnées ne se trouve pas en dehors de la limite élastique (limitation du modèle), le paramètre  $\varepsilon_0$  doit être élevé. Cette observation est en accord avec les valeurs utilisées dans [53], où les valeurs de  $\varepsilon_0$  utilisées sont égales à  $1.10^{-2}\varepsilon$  et  $5.10^{-3}\varepsilon$  pour un acier générique et AISI409L respectivement. Ces valeurs restent loin des valeurs utilisées par Phillips *et al.* [36, 39] et Wu et Yeh [47] qui sont beaucoup plus faibles. Avec une définition de  $\varepsilon_0$  faible, le seuil a nécessairement des caractéristiques cinématiques (le centre des coordonnées ne se trouve pas à l'intérieur du domaine élastique).

Cette différence dans la définition de la limite d'élasticité modifiera nécessairement la prédiction de la déformation plastique cumulée et par conséquent l'énergie libre et la dissipation d'énergie.

Pour faciliter la compréhension de cette idée, la réponse de trois modèles (HAH, M. François et Chaboche) à une contrainte uniaxiale monotone  $Q_1$  est illustrée dans la

figure 1.19. La limite élastique initiale utilisée dans le modèle HAH est identifiée par  $\varepsilon_0^{HAH}$ , et celle utilisée dans le modèle de Chaboche est  $\varepsilon_0^{Cha}$ . Le modèle anisotrope de François est obtenu à partir du modèle de Chaboche, les valeurs de  $\varepsilon_0$  sont donc identiques.

Les limites initiales sont telles que  $\varepsilon_0^{HAH} > \varepsilon_0^{Cha}$ . Par conséquent, le domaine élastique du modèle de HAH est plus grand que les deux autres modèles. Ces résultats sont cohérents avec les observations expérimentales réalisées dans [44] (voir figure 1.14a). Si le chargement est inversé ( $Q_2$  sur la figure 1.19), les modèles de Chaboche et François commencent la plasticité lorsque le chargement est égal à la valeur  $p_1$ , alors que le modèle HAH commence à  $p_2$ .



**Figure 1.19.** Schéma de la réponse des modèles HAH [53], M. François [49] et Chaboche [20].

En admettant que les deux modèles soient précis dans leur domaine d'application, cela signifie que le modèle HAH identifie le chargement  $p_2p_1$  (voir figure 1.19) comme élastique alors que dans les autres modèles, il est en régime inélastique. Cela signifie que dans cette zone de chargement, bien que la réponse du matériau soit plastique, elle est très proche de la réponse élastique.

Pour permettre au modèle de Chaboche de gagner en précision durant cette étape transitoire, il est nécessaire d'utiliser plusieurs composantes dans la représentation de la contrainte interne. Cette action permet de gagner en fidélité avec cette méthode, mais chaque composante ajoutée est une variable tensorielle supplémentaire au système d'équations, ce qui augmente le coût de calcul.

Ces conclusions permettent également d'estimer que la différence de la réponse entre le modèle anisotrope de François et celui de Chaboche doit être très proche d'une réponse élastique, la différence des déformations inélastiques sera faible. Des études complémentaires sont nécessaires pour évaluer si les réponses plastique et élastique montrent une différence substantielle dans ce régime de transition quand la simulation d'un enchaînement de sollicitations est envisagée.

### 1.3.9.2 Influence de la température et de la vitesse de déformation

La température et la vitesse de déformation ont des effets opposés dans le domaine élastique. Bien que la température et la vitesse de déformation soient des paramètres qui n'ont pas été abordés, la température réduit le seuil élastique au point de fusion (selon les paramètres de Johnson Cook). A contrario, une augmentation de la vitesse de déformation engendre une augmentation du domaine élastique. Il peut être abordé de deux façons différentes ; comme un nouveau potentiel qui est fonction de la déformation plastique [2, 1] ou comme un mécanisme de la déformation inélastique totale (utilisé dans les modèles de multi-mécanismes).

Dans un procédé de mise en forme il existe un compromis entre les deux paramètres. Ce type d'interaction étant couvert presque exclusivement pour les modèles isotropes (comme ne sont pas capables de modéliser l'effet Bauschinger), il reste un vaste champ de recherche dans ce domaine.

## Conclusion

Les lois comportementales qui respectent le cadre des lois de la thermodynamique sont physiquement cohérentes. Cela permet de caractériser l'état du matériau grâce à l'identification des variables d'état décrites dans la loi. Dans un procédé de chargement multi-axial d'une pièce, chaque point de la pièce suit un historique de chargement différent. L'état du matériau ne sera pas seulement caractérisé par le champ de contraintes et les déformations inélastiques, mais par l'ensemble des variables d'état qui seront uniques à chaque point considéré de la pièce.

Les modèles de comportement basés sur l'hypothèse d'écrouissage isotrope, ne sont pas capables de capter la variation de la limite d'élasticité en fonction de la direction de la charge durant un enchaînement de sollicitations (effet Bauschinger). Cela limite leur domaine d'application aux procédés impliquant un chargement proportionnel.

Les modèles phénoménologiques capables de décrire l'effet Bauschinger peuvent être regroupés dans les familles suivantes : modèles cinématiques, modèles combinés, modèles anisotropes et modèles basés sur des multi-mécanismes. Plusieurs modèles ont été examinés et évalués afin d'estimer leur pertinence pour une utilisation ultérieure dans la simulation d'un enchaînement de procédés de fabrication.

Les modèles cinématiques sont capables de reproduire l'effet Bauschinger. Plusieurs modèles ont été introduits dans ce chapitre : les modèles linéaires de Prager et Ziègler, les modèles non linéaires de Frederick et Armstrong, de Chaboche, d'Ohno et Wang et finalement le modèle de Yoshida et Uemori. Le modèle de Frederick et Armstrong est caractérisé par une composante évanescence de la pente en permettant de reproduire la non linéarité de l'écrouissage et en même temps de caractériser le stockage d'énergie associé au modèle. La généralisation du modèle précédent pour un cas où chaque composante de la contrainte interne  $\underline{X}$  est exprimée par une série finie, le modèle de Chaboche, permet de réaliser une régression plus fidèle de la non-linéarité. Le modèle d'Ohno et Wang en présentant une variation du modèle de Chaboche tenant en compte

les effets accumulation de déformation en charges cycliques, montre un réponse similaire à la loi de Chaboche pour un nombre faible de chargements.

Toutes ces lois cinématiques peuvent être étendues à des lois combinées, si en complément du déplacement du seuil on établit une loi d'expansion du domaine élastique. Cela permet soit de caractériser un phénomène spécifique (par exemple le durcissement cyclique), soit de caractériser la variation du domaine élastique due à l'utilisation de valeurs élevées ou faibles de  $\varepsilon_0$  (par rapport à la valeur 0,2%). Un autre modèle combiné, mais avec une approche différente, est le modèle YU, où le seuil élastique a des caractéristiques entièrement cinématiques, mais où son déplacement est fonction d'un second seuil limitant, qui a des propriétés cinématiques et isotropes. Ce modèle a montré des résultats prometteurs pour les cas de grande déformation.

Il est évident que le critère de choix de la limite élastique joue un rôle important dans la description de l'évolution du seuil. A faibles valeurs de  $\varepsilon_0$  ( $< 0.2\%$ ) le seuil élastique diminue tant que la sollicitation augmente, alors que pour des valeurs plus grandes ( $> 0,2\%$ ) le seuil se dilate. Compte tenu de cette dépendance de la description du seuil sur  $\varepsilon_0$ , il est important de noter qu'aucun modèle ne mentionne explicitement l'étendu des valeurs de  $\varepsilon_0$  à utiliser, pour que les hypothèses de modélisation soient valides. Ce paramètre est crucial lors de la comparaison de différentes lois de comportement.

Les différents travaux de recherche s'accordent sur le fait que le seuil a tendance à prendre une forme ovoïde quand il est exprimé dans l'espace déviatorique. Il n'existe pas un consensus par rapport au paramètre qui gère précisément la direction du seuil distordu lors d'un enchaînement de sollicitations. Plusieurs théories ont été présentées : la direction de la sollicitation finale, la direction de la contrainte interne et une fonction tensorielle de l'historique de sollicitations.

Les modèles anisotropes étudiés sont basés sur la distorsion du seuil obtenue soit par un modèle combiné ou par une dilatation isotrope. Le modèle de Barlat [53, 54, 55] intègre une variable qui capitalise l'historique des sollicitations en caractérisant d'un point de vue physique l'état des plans de glissement dans le matériau et d'un point de vue phénoménologique avec l'orientation du seuil. L'origine des coordonnées sera toujours à l'intérieur du seuil dans ce modèle. Cela risque de limiter le domaine d'utilisation pour une valeur de  $\varepsilon_0$  est faible. Une recherche expérimentale peut être menée pour vérifier cette hypothèse.

La famille des modèles multicritères reprend les meilleures caractéristiques des modèles phénoménologiques et des modèles cristallins. La déformation inélastique totale étant le résultat de la somme des différents mécanismes impliqués, les phénomènes visco-plastiques peuvent être interprétés comme un nouveau mécanisme au sein du système, ce qui représente un grand potentiel pour ce type de modèle compte tenu des caractéristiques des procédés de fabrication.

La plupart des modèles présentés dans ce chapitre ont été développés dans le but de reproduire les phénomènes observés lors d'essais cycliques. La modification de la vitesse de déformation, de la température, des grandes déformations et d'autres paramètres impor-

tants dans les procédures de fabrication peuvent ne pas être dans le champ d'application et doivent être revus dans ces circonstances dans les travaux futurs.

## Bibliographie

- [1] Besson, J. and Cailletaud, G. and Chaboche, J-L. and Forest, S. *Mécanique non linéaire des matériaux*. Hermes Science Publ. 2001.
- [2] Lemaitre, J. and Chaboche, J-L. *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press. 1994.
- [3] Oliver, X. and Agelet, C. *Continuum mechanics for engineers. Theory and problems*. 2017.
- [4] Germain, P. and Suquet, P. and Nguyen, Q.S. Continuum thermodynamics. *ASME Transactions Series E-Journal of Applied Mechanics*. 50 :1010-1020 1983.
- [5] Huang, W. *Crystal Plasticity Model With Back Stress Evolution*. Doctoral dissertation, Louisiana State University and Agricultural & Mechanical College. 1996.
- [6] Sai, K. Multi-mechanism models : Present state and future trends. *International Journal of Plasticity*. 27(2) :250-281. 2011
- [7] Zyczkowski, M. *Combined loadings in the theory of plasticity*. Springer Science & Business Media. 1981.
- [8] Tresca, H. On the yield of solids at high pressures. *Comptes Rendus Academie des Sciences*. 59 :754. 1864.
- [9] Mises, R.V. Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* 1913 :582-592 1913.
- [10] Taylor, G.I. and Quinney, H. The plastic distortion of metals *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. 250(681-693) :323-362. 1931.
- [11] Hill, R. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proceedings of the Royal Society of London*. 193(1033) :281-297. 1948.
- [12] Banabic, D. *Sheet metal forming processes : constitutive modelling and numerical simulation*. Springer Science & Business Media. 2010.
- [13] Hill, R. Theoretical plasticity of textured aggregates *Cambridge University Press*. 85(1) :179-191 1979.
- [14] Hill, R. Constitutive modelling of orthotropic plasticity in sheet metals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 38(3) :405-417. 1990.
- [15] Hill, R. A user-friendly theory of orthotropic plasticity in sheet metals. *International Journal of Mechanical Sciences* 35(1) :19-25 1993
- [16] Craveur, J-C. and Jetteur, P. *Introduction à la mécanique non linéaire : Calcul des structures par éléments finis*. Dunond. 2020.
- [17] Ziegler, H. A modification of Prager's hardening rule. *Quarterly of Applied mathematics*. 17(1) :55-65. 1959.
- [18] Armstrong, P.J. and Frederick, C.O. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. *Central Electricity Generating Board and Berkeley Nuclear Laboratories*. 731. 1966.

- [19] Dollevoet, R. *Design of an anti head check profile based on stress relief*. Doctoral dissertation. University of Twente Host. 2010.
- [20] Chaboche, J.L. Viscoplastic constitutive equations for the description of cyclic and anisotropic behaviour of metals. *Bull. Acad. Polon. Sci.* 25(1) :33-42. 1977.
- [21] Chaboche, J.L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. *International Journal of Plasticity*. 24(10) :1642-1693. 2008.
- [22] Chaboche, J.L. and Nouilhas, D. Constitutive modeling of ratchetting effects—part i : experimental facts and properties of the classical models. *Journal of Engineering Materials and Technology*. 111(4) :384-392. 1989.
- [23] Freed, A. and Walker, K.P. Model development in viscoplastic ratchetting *Technical report of National Aeronautics and Space Administration, Cleveland, OH (USA). Lewis Research Center.* N-90-20431 ; NASA-TM-102509 ; E-5311 ; NAS-1.15 : 102509, 1990.
- [24] Chaboche, J.L. On some modifications of kinematic hardening to improve the description of ratchetting effects. *International Journal of Plasticity*. 7(7) :661-678. 1991.
- [25] Ohno, N. and Wang, J-D. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, part I : formulation and basic features for ratchetting behavior. *International Journal of Plasticity*. 9(3) :375-390. 1993.
- [26] Ohno, N. and Wang, J-D. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, part II : formulation and basic features for ratchetting behavior. *International Journal of Plasticity*. 9(3) :391-403. 1993.
- [27] Yoshida, F. and Uemori, T. A model of large-strain cyclic plasticity describing the Bauschinger effect and work hardening stagnation. *International Journal of Plasticity*. 18(5-6) :661-686.
- [28] Ghaei, A. and Green, D.E. Numerical implementation of Yoshida–Uemori two-surface plasticity model using a fully implicit integration scheme. *Computational Materials Science*. 48(1) :195-205.
- [29] Yoshida, F. and Hamasaki, H. and Uemori, T. Modeling of anisotropic hardening of sheet metals. *AIP Conference Proceedings*. 1567(1) :482-487. 2013.
- [30] Narita, S. and Uemori, T. and Hayakawa, K. and Kubota, Y. Effect of hardening rule on analysis of forming and strength of multistage cold forged bolt without heat treatment. *Journal of Japan Society for Technology of Plasticity*. 57(670) :1070-1076. 2016.
- [31] Kolpak, F. and Hering, O. and Tekkaya, A. Consequences of large strain anisotropic work-hardening in cold forging *International Journal of Material Forming* 14(6) :1463-1481. 2021.
- [32] Portier, L. and Calloch, S. and Marquis, D. and Geyer, P. Ratchetting under tension-torsion loadings : experiments and modelling. *International Journal of Plasticity* 16(3-4) :303-335. 2000.
- [33] Burlet, H. Cailletaud, G. Modeling of cyclic plasticity in finite element codes. *2nd Int. Conf. on Constitutive Laws for Engineering Materials : Theory and Applications*. 1157-1164. 1987.

- [34] Chaboche, J-L. Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity. *International Journal of Plasticity*. 5(3) :247-302. 1989.
- [35] Tanaka, E. A nonproportionality parameter and a viscoplastic constitutive model describing both cyclic hardening and cyclic. *International Seminar on Multiaxial Plasticity, MECAMAT*. 198-223. 1992.
- [36] Phillips, A. and Gray, G.A. Experimental investigation of corners in the yield surface *Journal of Fluids Engineering*. 83(2) :275-288 1961
- [37] Phillips, A. Yield surfaces of pure aluminum at elevated temperatures *Thermoelasticity*. 241-258. 1970.
- [38] Phillips, A. and Liu, C.S. and Justusson, J.W. An experimental investigation of yield surfaces at elevated temperatures. *Acta Mechanica*. 14(2) :119-146. 1972.
- [39] Phillips, A. and Moon, H. An experimental investigation concerning yield surfaces and loading surfaces. *Acta Mechanica*. 27(1) :91-102. 1977.
- [40] Phillips, A. and Lee, C-W. Yield surfaces and loading surfaces. Experiments and recommendations. *International Journal of Solids and Structures*. 15(9) :715-729. 1979.
- [41] Phillips, A. and Sierakowski, R.L. On the concept of the yield surface *Acta Mechanica*. 1(1) :29-35. 1965.
- [42] Phillips, A. and Weng, G.J. An Analytical Study of an Experimentally Verified Hardening Law. *Journal of Applied Mechanics*. 42(2) :375-378. 1975.
- [43] Shiratori, E. and Ikegami, K. and Yoshida, F. and Kaneko, K. and Koike, S. The subsequent yield surfaces after preloading under combined axial load and torsion. *Bulletin of JSME*. 19(134) :877-883. 1976.
- [44] Shiratori, E. and Ikegami, K. Experimental study of the subsequent yield surface by using cross-shaped specimens. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 16(6) :373-394. 1968.
- [45] Shiratori, E. and Ikegami, K. and Kaneko, K. The influence of the Bauschinger effect on the subsequent yield condition. *Bulletin of JSME*. 16(100) :1482-1493. 1973.
- [46] Shiratori, E. and Ikegami, K. and Kaneko, K. and Sugibayashi, T. Subsequent yield surfaces after large tensile or torsional prestrain. *Bulletin of JSME*. 75(7-2) :41-44. 1975.
- [47] Wu, H.C. and Yeh, W.C. On the experimental determination of yield surfaces and some results of annealed 304 stainless steel *International Journal of Plasticity*. 7(8) :803-826. 1991.
- [48] Gupta, N.K. and Meyers, A. An alternative formulation for interpolating experimental yield surfaces. *International Journal of Plasticity*. 10(7) :795-805. 1994.
- [49] François, M. A plasticity model with yield surface distortion for non proportional loading. *International Journal of Plasticity*. 17(5) :703-717. 2001.
- [50] Fernandes, J.V. and Gracio, J.J. and Schmitt, J.H. and Rauch, E.F. Development and persistence of microbands in copper deformed under complex strain paths. *Scripta Metallurgica et Materialia*. 28(11). 1993.
- [51] Rauch, E.F. and Gracio, J.J. and Barlat, F. and Lopes, A.B. and Duarte, J. Hardening behavior and structural evolution upon strain reversal of aluminum alloys. *Scripta Materialia*. 46(12) :881-886. 2002.

- [52] Vincze, G. and Rauch, E.F. and Gracio, J.J. and Barlat, F. and Lopes, A.B. A comparison of the mechanical behaviour of an AA1050 and a low carbon steel deformed upon strain reversal. *Acta Materialia*. 53(4) :1005-1013. 2005.
- [53] Barlat, F. and Gracio, J.J. and Lee, M-G. and Rauch, E.F. and Vincze, G. An alternative to kinematic hardening in classical plasticity. *International Journal of Plasticity*. 27(9) :1309-1327. 2011.
- [54] Barlat, F. and Gracio, J.J. and Lee, M-G. and Rauch, E.F. and Vincze, G. Extension of homogeneous anisotropic hardening model to cross-loading with latent effects. *International Journal of Plasticity*. 46 :130-142. 2013.
- [55] Barlat, F. and Vincze, G. and Grácio, J.J. and Lee, M-G. and Rauch, E.F. and Tomé, C.N. Enhancements of homogenous anisotropic hardening model and application to mild and dual-phase steels *International Journal of Plasticity*. 58 :2012-218. 2014.
- [56] Hershey, A.V. The plasticity of an isotropic aggregate of anisotropic face-centered cubic crystals *Journal of Applied Mechanics*. 21(3) : 241-249 1954
- [57] Barlat, F. and Aretz, H. and Yoon, J.W. and Karabin, M.E. and Brem, J.C. and Dick, R.E. Linear transformation-based anisotropic yield functions. *International journal of plasticity*. 21(5) :1009-1039. 2005.
- [58] Sai, K. *Modèles à grand nombre de variables internes et méthodes numériques associées*. Doctoral dissertation. École Nationale Supérieure des Mines de Paris. 1993.
- [59] Cailletaud, G. and Sai, K. Study of plastic/viscoplastic models with various inelastic mechanisms. *International Journal of Plasticity*. 11(8) :991-1005. 1995.
- [60] Cailletaud, G. and Taleb, L. and Sai, K. *Multi-mechanism Modeling of Inelastic Material Behavior*. 2017.
- [61] Taleb, L. and Cailletaud, G. and Blaj, L. Numerical simulation of complex ratcheting tests with a multi-mechanism model type. *International Journal of Plasticity*. 22(4) :724-753. 2006.
- [62] Drucker, D. Charles and Prager, W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design. *Quarterly of Applied Mathematics*. 10(2) :157-165. 1952.
- [63] Prager, W. The theory of plasticity : a survey of recent achievements *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*. 169(1) :41-57 1955.
- [64] Hill, R. *The mathematical theory of plasticity*. 1998.
- [65] Abaqus. 6.14, *Online Documentation, Theory manual : Dassault Systms*. 2016.
- [66] Ohno, N. Recent topics in constitutive modeling of cyclic plasticity and viscoplasticity *Applied Mechanics Reviews*. 43(11) : 283-295. 1990.
- [67] Rousset, M. *Thèse de Docteur Ingénieur, Surface seuil de plasticité : détermination automatique et modélisation*. Université Paris 6, Cachan. 1985.
- [68] Sai, K. and Cailletaud, G. Multi-mechanism models for the description of ratcheting : effect of the scale transition rule and of the coupling between hardening variables. *International Journal of Plasticity*. 23(9) :1589-1617. 2007.
- [69] Taleb, L. and Cailletaud, G. An updated version of the multimechanism model for cyclic plasticity. *International Journal of Plasticity*. 26(6) :859-874. 2010
- [70] Hassan, T. and Taleb, L. and Krishna, S. Influence of non-proportional loading on ratcheting responses and simulations by two recent cyclic plasticity models. *International Journal of Plasticity*. 24(10) :1863-1889. 2008.

## Analyse inverse appliquée à la mesure du champ de contraintes résiduelles

Symbole	Description
$\varepsilon_{meas}$	Déformation mesurée.
$\varepsilon_{calc}$	Déformation calculée.
$\sigma$	Contrainte.
$\mathcal{P}$	Fonction de base.
$P$	Fonction de base polynômiale.
$A$	Facteur multiplicateur de fonction de base.
$m$	Nombre total de coupes.
$n$	Nombre total de fonctions de base utilisées.
$[K]$	Matrice de complaisance.
$u_\varepsilon$	Incertitude des déformations.
$u_{\varepsilon_{mf}}$	Incertitude des déformations due au décalage.
$e$	Erreur inhérente à l'instrument de mesure.
$[G]$	Matrice de complaisance avec une base de fonctions échelons.
$s_{Total}$	Incertitude totale de contrainte.
$s_\varepsilon$	Incertitude de la contrainte due à la propagation des incertitudes des déformations.
$s_{mod}$	Incertitude de contrainte due au modèle.
$W$	Épaisseur totale de la pièce.
$\beta$	Paramètre de régularisation utilisé dans la méthodologie d'Olson.
$\mathcal{O}_{r_{max}}$	Ordre maximal à évaluer.
$\mathcal{O}_{r_{min}}$	Ordre minimal à évaluer.
$\mathcal{Q}$	Liste des ordres des polynômes à évaluer.
$\mathcal{N}\mathcal{Q}$	Nombre total d'éléments dans la liste $\mathcal{Q}$ .
$\underline{p}_{max}$	Nombre maximal de polynômes à mettre dans une base.
$\underline{p}_{min}$	Nombre minimal de polynômes à mettre dans une base.
$Nts$	Nombre total de solutions possibles à évaluer.
$\alpha$	Paramètre de triage des solutions. Valeur entre 1, $5 \leq \alpha \leq 2$ .
$s_{rms}$	Incertitude moyenne quadratique des contraintes. .
$s_{ref}$	Incertitude des contraintes de la solution de référence.
$[P], \underline{P}$	Matrice $P$ d'ordre deux.
$\{\varepsilon\}, \underline{\varepsilon}$	Vecteur $\varepsilon$ .

Tableau 2.1 – Nomenclature et symboles utilisés dans le chapitre.

## 2.1 Introduction

Les méthodes destructives de mesure des contraintes résiduelles sont indirectes. Elles ont pour objectif d'estimer le profil des contraintes résiduelles à partir de la lecture des déformations en un point précis sensible de la pièce lors d'un enlèvement de matière tels que la méthode de la coupe incrémentale [1], d'enlèvement de couches [2], du perçage [3], etc. La connaissance du comportement mécanique de la structure est utilisée pour faire le lien entre l'historique des déformations générées pendant le processus d'enlèvement de matière et le profil des contraintes résiduelles.

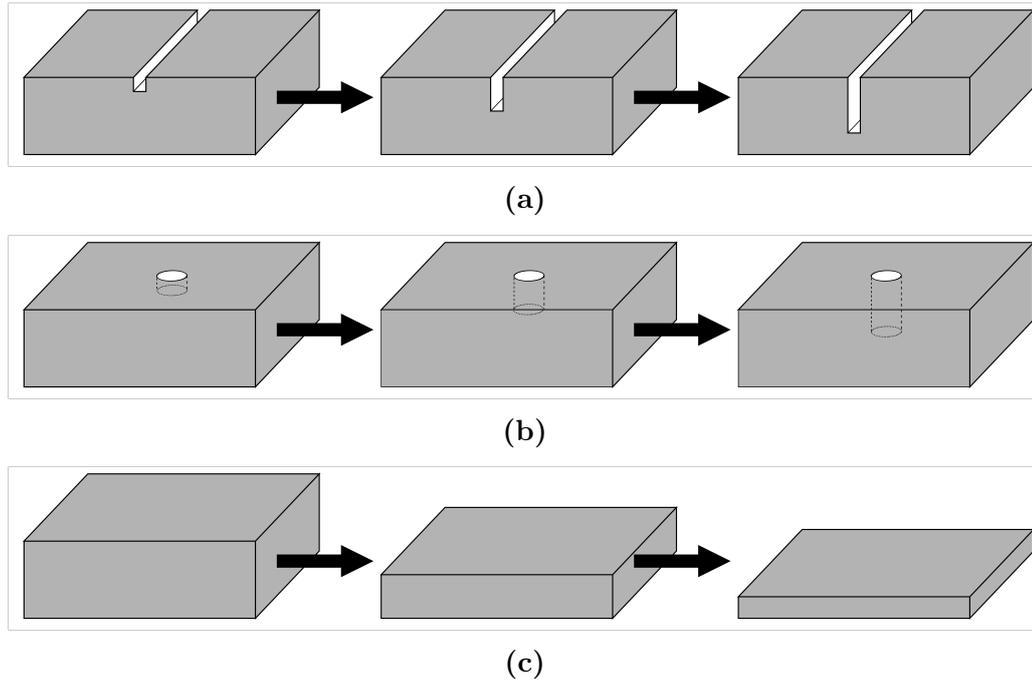
Avant l'avènement du calcul numérique, entre les années 40s et 60s, deux méthodes semi-analytiques ont été développées. Elles permettent d'obtenir le champ des contraintes résiduelles en fonction de la déformation de la pièce obtenue lors d'une série de coupes : la méthode de Sachs [4] applicable aux pièces cylindriques et la méthode d'enlèvement des couches [2] appliquée aux tôles. Ces solutions présentent l'inconvénient d'un terme dérivatif dans la courbe d'évolution du champ des déformations. L'évaluation des quantités différentielles d'un champ discrétisé des données est bien connue pour sa sensibilité aux erreurs [5]. Un aperçu de l'évolution des coupes de ces différentes méthodes est représenté dans la [figure 2.1](#).

Pendant les décades suivantes, d'autres méthodes ont été développées telles que la méthode de la coupe incrémentale [6, 7, 8], le perçage [3], le perçage profond [9]. La différence entre ces méthodes réside dans le type de coupe réalisée et le point de mesure de la déformation. La [figure 2.1](#) schématise ces trois cas particuliers : la méthode multi-fentes ([fig. 2.1a](#)), la méthode du perçage ([fig. 2.1b](#)) et la méthode multi-couches [2.1c](#).

En général, toutes ces méthodes peuvent être écrites sous la forme d'une intégrale de Volterra de premier type [5], où le terme  $\sigma_{yy}$  du champ des contraintes se trouve dans l'intégrale :

$$\varepsilon_{yy}(a) = \int_{a_{min}}^a g(a, x) \sigma_{yy}(x) dx, \quad (2.1)$$

et où  $\varepsilon_{yy}(a)$  est la déformation mesurée selon  $y$  dans la pièce, lors d'une coupe de profondeur égale à  $a$  selon la direction  $x$ . L'équation (2.1) relie la déformation obtenue avec le champ des contraintes  $\sigma_{yy}(x)$  qui a été libéré lors de la coupe. La fonction noyau  $g(a, x)$  décrit la sensibilité à la déformation de la pièce lors de la coupe de profondeur  $a$ .



**Figure 2.1.** Schéma des différentes méthodes destructives de mesure des contraintes résiduelles. **Fig. 2.1a)** Méthode de coupe incrémentale. **Fig. 2.1b)** Méthode du perçage. **Fig. 2.1c)** Méthode d'élimination par multicouches.

Le terme inconnu  $\sigma(x)$  dans l'équation 2.1 n'est pas possible à isoler, la méthode d'analyse inverse est utilisée pour résoudre ce type de problème.

Dans ce travail, afin de trouver le profil d'un champ de contraintes, deux types de fonctions seront utilisées comme base : les échelons unitaires et les polynômes de Legendre. Une méthode innovante d'optimisation en utilisant des fonctions polynômiales sera également développée et appliquée.

## 2.2 Résolution par analyse inverse

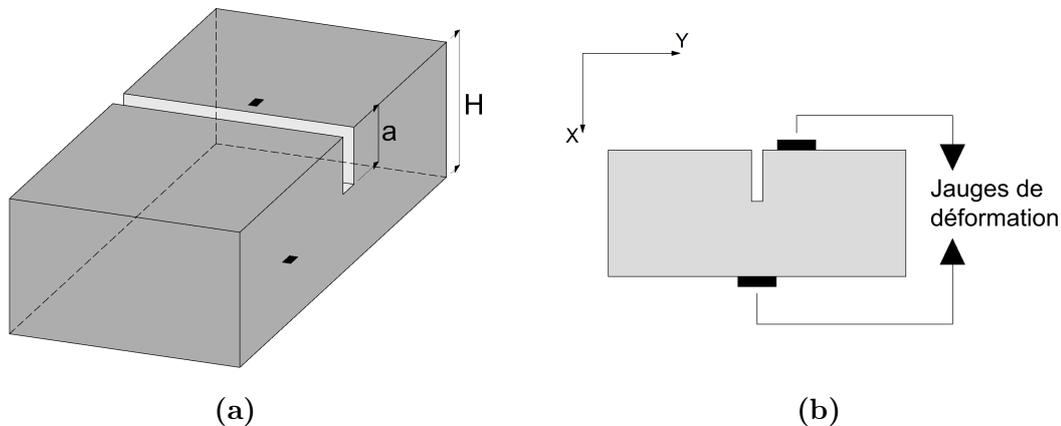
La méthode de résolution par analyse inverse est utilisée quand le terme inconnu dans un système d'équations ne peut pas être isolé. La stratégie consiste à représenter la solution comme une combinaison ou une série de fonctions connues. Ainsi le problème se réduit à un problème linéaire qui peut être résolu par une simple pseudo inversion matricielle.

### 2.2.1 Cadre théorique général de la méthode

Pour expliquer le principe de résolution par analyse inverse appliquée à ce problème, le champ de contraintes  $\sigma_{yy}$  est exprimé comme la somme finie des fonctions  $A_j \mathcal{P}_j$  :

$$\sigma_{yy}(x) \approx \sum_{j=1}^n A_j \cdot \mathcal{P}_j(x). \quad (2.2)$$

Si les fonctions de base  $\mathcal{P}_j(x)$  sont connues, le problème se réduit au calcul des valeurs scalaires  $A_j$ , appelées multiplicateurs.



**Figure 2.2.** Géométrie du bloc et des coupes pour la méthode de la coupe incrémentale, identification des positionnements possibles des jauges,  $a$  = hauteur de la fente,  $H$  = hauteur du bloc. **Fig. 2.2a)** Vue isométrique. **Fig. 2.2b)** Vue frontale.

En considérant un procédé d'enlèvement de matière d'une profondeur  $a$ , comme le cas de la [figure 2.2a](#), la pièce se déforme sous l'action de la libération des contraintes présentes dans la pièce.

En considérant maintenant un nombre fini  $m$  de coupes de profondeur  $a_i$  et  $n$  le nombre de fonctions de base utilisées dans la composition linéaire de la solution, la différence  $m - n$  représente les degrés de liberté du problème. Cette différence doit être toujours positive ou nulle afin de résoudre le problème.

Le choix du système de fonctions de base  $\mathcal{P}_j(x)$ , doit être justifié afin d'obtenir la plus grande précision avec un nombre réduit de fonctions pour réduire l'erreur de la solution.

Différentes fonctions de base sont proposées dans la bibliographie [8], [7], [10], [11], telles que les fonctions échelons unitaires, les polynômes de Legendre, de Chebyshev, les puissances, les fonctions gaussiennes par exemple.

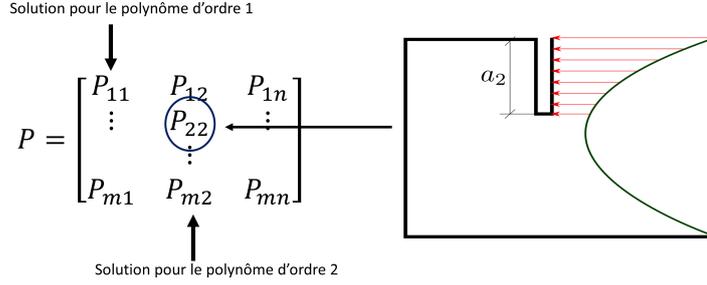
La relation [2.2](#) peut être réécrite sous sa forme matricielle :

$$\sigma_{yy}(x) = \sum_{j=1}^n A_j \mathcal{P}_j(x_i) = [\mathcal{P}]\{A\} = \underline{\underline{\mathcal{P}}}.A \quad (2.3)$$

où la matrice  $\mathcal{P}$  est d'ordre  $(m \times n)$ ,  $m$  représente le nombre de coupes réalisées et  $n$  le nombre de polynômes présents dans la série. Chaque élément  $p_{ij}$  de la matrice  $[\mathcal{P}]$  est l'évaluation du polynôme  $[\mathcal{P}_j]$  à une distance  $a_i$  (voir [figure 2.2](#)) de la surface.

Pour faciliter la compréhension, on considère le cas particulier où la base  $\mathcal{P}$  est composée de polynômes, ce qui signifie que le champ de contraintes résiduelles sera exprimé par une composition linéaire de polynômes. La première colonne de la matrice sera l'évaluation du polynôme de degré 1, la deuxième colonne sera l'évaluation du polynôme de

degré 2, et ainsi de suite. L'élément  $\mathcal{P}_{22}$  sera l'évaluation du polynôme d'ordre 2 pour une distance  $a_2$  (voir [figure 2.3](#)).



**Figure 2.3.** Interprétation d'un élément de la matrice de base  $\mathcal{P}$ .

Lorsqu'une coupe  $a$  est effectuée, comme dans la [figure 2.2](#), les contraintes résiduelles de la pièce vont se libérer en produisant une distorsion dans la géométrie de la pièce. La déformation perpendiculaire à la coupe peut être enregistrée par un capteur de déformation placé à proximité de la fente ([figure 2.2b](#)) et cette déformation est représentée par  $\varepsilon_m$ . Si plusieurs coupes  $a_i$  avec un niveau de profondeur incrémentale sont considérées, à chaque coupe va correspondre une lecture de déformation  $\varepsilon_{m_i}$ .

En prenant l'hypothèse que les déformations se trouvent dans le régime élastique linéaire, le principe de superposition peut être appliqué. La déformation  $\varepsilon_i$  peut être exprimée également comme la somme des contributions  $A_j \varepsilon_{ij}$  :

$$\varepsilon_i = A_1 \varepsilon_{i1} + \dots + A_j \varepsilon_{ij} + \dots + A_n \varepsilon_{in} \quad (2.4)$$

où chaque composante de cette somme correspond à la déformation générée par la composante  $A_j \mathcal{P}_j$  à la position  $a_i$  :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \sigma_{yy}(x) & = & A_1 \mathcal{P}_1(x) + & \dots & + A_j \mathcal{P}_j(x) + & \dots & + A_n \mathcal{P}_n(x) \\ \downarrow \text{Déformation Associée} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \varepsilon_i & = & A_1 \varepsilon_{i1} + & \dots & + A_j \varepsilon_{ij} + & \dots & + A_n \varepsilon_{in} \end{array} \quad (2.5)$$

Ici, un élément  $\varepsilon_{ij}$  représente la déformation qui serait obtenue par l'application d'un champ de contrainte  $\mathcal{P}_j(x)$  entre la position  $x = x_0$  (la surface) jusqu'à  $x = a_i$  ([figure 2.3](#)). L'équation 2.5 réécrite en notation matricielle prend la forme suivante :

$$\{\varepsilon\} = [K] \{A\}, \quad (2.6)$$

où  $K$  est un tenseur d'ordre  $(m \times n)$  appelé matrice de calibration où de complaisance. Cette matrice est composée des éléments  $\varepsilon_{ij}$ , tandis que le vecteur  $\varepsilon_m$  est composé des  $m$  déformations mesurées au cours des  $m$  coupes réalisées.

La seule inconnue dans l'équation (2.6) est le vecteur des multiplicateurs  $A$ . Il est obtenu par la pseudo-inversion de la matrice  $K$  :

$$\{A\} = [(K^T K)^{-1} K^T] \{\varepsilon_{mes}\} = [B] \{\varepsilon_{mes}\}, \quad (2.7)$$

avec  $[B] = [(K^T K)^{-1} K^T]$ . Comme il a été déjà mentionné précédemment, avec la connaissance de  $\{A\}$  en utilisant l'équation (2.3), le problème est résolu.

Pour le cas où il existe plusieurs points de mesure (par exemple la figure 2.2), la procédure pour trouver la solution reste similaire [12]. Le vecteur des déformations mesurées et la matrice de complaisance seront obtenus par la concaténation des vecteurs et matrices de complaisances individuelles qui correspondent à chaque jauge et leur position sur la pièce :

$$\underline{\varepsilon}_{1,2,\dots,n}^{meas} = \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_1^{meas} \\ \underline{\varepsilon}_2^{meas} \\ \vdots \\ \underline{\varepsilon}_n^{meas} \end{bmatrix} \quad \underline{K}_{1,2,\dots,n} = \begin{bmatrix} \underline{K}_1 \\ \underline{K}_2 \\ \vdots \\ \underline{K}_n \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

## 2.2.2 Erreurs et incertitudes

L'erreur sera toujours présente dans un procédé de mesure. Ces erreurs génèrent des incertitudes dans la valeur finale de la contrainte calculée. La connaissance ou l'estimation de ces incertitudes est indispensable pour une mesure rigoureuse.

Il existe deux sources principales d'erreurs dans l'estimation des contraintes résiduelles à partir de mesures réalisées. La première est la propagation de l'erreur de la mesure de la déformation (représentée par  $s_\varepsilon$ ). La deuxième erreur est due aux limites de la base de fonctions utilisée pour représenter fidèlement le profil de contraintes (représentée par  $s_{mod}$ ), tenant en compte que  $\{\sigma\} \approx [P]\{A\}$  n'est qu'une approximation.

D'autres sources d'incertitudes peuvent aussi être considérées : la profondeur de la coupe, le capteur : sa localisation et son orientation, la différence entre la géométrie théorique de la coupe et l'incertitude de la géométrie réelle de la pièce. Quand ces valeurs sont connues, les erreurs peuvent être significatives et doivent être prises en compte [13].

Toute déformation plastique, pendant le procédé de libération des contraintes introduira des erreurs. L'hypothèse que l'outil de coupe ne produit pas de déformation plastique est très importante. Une procédure prudente, la bonne choix du fil de coupe (pour le cas d'une coupe par EDM) et la vitesse de coupe restreint ce genre d'erreur [13].

### 2.2.2.1 Estimation des erreurs dans la mesure des déformations

Il existe deux possibilités qui permettent d'estimer l'incertitude des déformations  $u_\varepsilon$  : à travers les incertitudes inhérentes aux instruments (représentées par  $e_i$ ) et à travers le décalage entre les déformations obtenues par calcul  $\varepsilon_{calc}$  (équation 2.6) et les déformations mesurées  $\varepsilon_{mes}$ . Cette deuxième estimation est représentée par  $u_{\varepsilon_{mf}}$ .

Dans le premier cas,  $e_i$  est donnée par la fidélité de l'appareil de mesure. L'incertitude obtenue par le décalage entre les déformations calculées et mesurées est donnée par :

$$u_{\varepsilon_{mf},i} = \sqrt{\frac{m}{m-n}} |\varepsilon_{mes,i} - \varepsilon_{calc,i}|, \quad (2.9)$$

où  $u_{\varepsilon_{mf},i}$  est l'incertitude quand la profondeur de la coupe est égale à  $a = a_i$ , ou autrement dit l'erreur individuelle.

L'incertitude de la déformation  $u_\varepsilon$  qui sera prise en compte sera celle qui donnera l'incertitude la plus élevée entre ces deux possibilités :

$$u_{\varepsilon,i} = \max(e_i, u_{\varepsilon_{mf},i}), \quad (2.10)$$

### 2.2.2.2 Propagation des erreurs de déformation sur la mesure des contraintes résiduelles

Une des sources les plus importantes d'incertitudes se trouve dans le procédé de la mesure des déformations [13]. La notation et la terminologie décrites par Bevington et Robinson [14] seront utilisées. Les incertitudes des contraintes calculées à chaque coupe pratiquée sur la pièce sont déterminées par :

$$s_i^2 = u_{A_1}^2 \left( \frac{\partial \sigma_i}{\partial A_1} \right)^2 + u_{A_2}^2 \left( \frac{\partial \sigma_i}{\partial A_2} \right)^2 + \dots + 2u_{A_1 A_2}^2 \left( \frac{\partial \sigma_i}{\partial A_1} \right) \left( \frac{\partial \sigma_i}{\partial A_2} \right) + \dots, \quad (2.11)$$

où  $u_{A_i}$  est l'incertitude de la déformation due au paramètre  $A_i$ . Il est habituel que les contributions des covariants  $u_{A_k A_l}^2$  (avec  $k \neq l$ ) soient négligées. Ces termes ont des contributions importantes sur les incertitudes durant la régression déterminée par la méthode des moindres carrés et ne doivent pas être négligés [14]. En différenciant  $\sigma_i$  par rapport à  $A_j$  dans l'équation (2.2), on obtient :

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial A_j} = P_j(x_i). \quad (2.12)$$

Dans l'équation 2.11 et en exprimant le résultat dans sa forme matricielle :

$$\{s_i^2\} = \text{diag} ([P] [V] [P^T]), \quad (2.13)$$

où  $V$  est la matrice de covariance  $u_{A_k A_l}^2$ ,  $\text{diag}$  indique la formation du vecteur à partir des éléments diagonaux de la matrice évaluée. Les valeurs individuelles  $s_i$  seront obtenues à partir de la racine carrée des éléments du vecteur  $\{s_i^2\}$ .

La matrice de covariance  $V_{kl}$  sera calculée en considérant les incertitudes :

$$V_{kl} = u_{A_k A_l}^2 = \sum_{i=1}^m \left[ u_{\varepsilon,i}^2 \frac{\partial A_k}{\partial \varepsilon_i} \frac{\partial A_l}{\partial \varepsilon_i} \right], \quad (2.14)$$

où  $u_{\varepsilon,i}$  est l'incertitude relative aux erreurs individuelles quand  $a = a_i$ . En différenciant l'équation 2.7 on obtient :

$$\frac{\partial A_k}{\partial \varepsilon_i} = B_{ki}, \quad (2.15)$$

avec la matrice  $B$  définie dans l'équation 2.7. A partir des équations 2.14 et 2.15 :

$$[V] = [B] [DIAG\{u_\varepsilon^2\}] [B]^T, \quad (2.16)$$

où  $DIAG\{u_\varepsilon\}$  représente une matrice diagonale avec les erreurs de la mesure des déformations  $u_{\varepsilon,i}$ , comme éléments de la diagonale. Dans l'équation 2.13 nous trouvons finalement :

$$\{s_{\varepsilon,i}^2\} = diag \left( [P] [B] [DIAG\{u_{\varepsilon,i}^2\}] [B]^T [P]^T \right). \quad (2.17)$$

### 2.2.2.3 Incertitude du modèle selon Prime-Hill

L'incertitude du modèle est liée à l'impossibilité de la base de fonctions  $\mathcal{P}$  de la série à reproduire exactement le profil de contraintes.

Pour mieux comprendre cette source d'erreur, il faut considérer le cas hypothétique où l'expression  $\sigma = \mathcal{P}A$  (en absence totale de bruit), où le nombre de fonctions qui composent la base  $\mathcal{P}$  est suffisamment large, de telle sorte que l'erreur soit négligeable.

Dans le cas d'une mesure réelle, le nombre fini de données ( $m$ ) limite le nombre de fonctions à utiliser dans la solution, parce que mathématiquement il est possible de faire la régression d'une quantité de fonctions au maximum égal au nombre de données. Cette situation force la troncature de la base  $\mathcal{P}$  à un nombre égal ou inférieur au nombre de données expérimentales. La réduction du nombre de fonctions dans la base  $\mathcal{P}$  réduit l'information pour reproduire précisément le profil de contraintes. Cette erreur est appelé : l'erreur du modèle.

Le cas contraire est aussi possible mais moins probable, si le profil de la contrainte est donné exactement par un nombre fini de fonctions inférieur au nombre de fonctions utilisées pour reproduire le profil, le surplus de fonctions utilisées va générer du bruit qui sera ajouté à la solution durant la régression, générant ainsi de l'erreur.

Une approche statistique est prise en compte pour estimer ce type erreur. L'idée est d'utiliser la déviation standard d'un ensemble de solutions similaires, données par des fonctions de bases différentes [13] :

$$s_{mod,i}^2(q) \approx \frac{1}{N-1} \sum_{k=b}^c (\sigma_{k_i} - \bar{\sigma}_i)^2 \quad (2.18)$$

où le sous index  $i$  se réfère au calcul de l'estimation de l'erreur quand la profondeur est égale à  $a_i$ . Les indices  $b$  et  $c$  sont les identificateurs des solutions où leurs valeurs représentent l'ordre du polynôme maximal dans la série de la solution considérée. Le paramètre  $q$  est l'identificateur de la solution pour lequel l'incertitude est calculée, et représente aussi le polynôme avec l'ordre maximal dans la série.

Le sous-ensemble de  $N$  solutions considérées pour estimer l'incertitude est tel que  $b < q < c$ . Avec  $N = 3$  comme valeur recommandée par [13] et les valeurs  $b = q - 1$  et  $c = q + 1$ . Dans le cas proposé où chaque solution possible est composée par un nombre différent de polynômes, ce qui correspond à la méthodologie développée par Prime et

Hill [13]. La valeur de  $\bar{\sigma}_i$  est la contrainte moyenne des solutions dans le sous-ensemble de solutions  $b < k < c$ .

Cette formulation est applicable quand les fonctions qui composent la base sont caractérisées par l'ordre du polynôme d'ordre maximal, comme les fonctions polynomiales. Donc par exemple, si  $k = 6$ , les ordres des polynômes qui composent la base sont 1, 2, 3, 4, 5, 6 (quand un polynôme d'ordre 1 est considéré).

#### 2.2.2.4 Incertitude totale

En appliquant le principe de propagations des erreurs, la variance totale est égale à la somme des variances partielles :

$$s_{Total,i}^2 = s_{\varepsilon,i}^2 + s_{mod,i}^2 + \sum_{j=1}^k s_{k,i}^2, \quad (2.19)$$

où  $s_{k,i}$  représente d'autres sources d'incertitudes qui ne sont pas considérées dans ce travail, mentionnées dans §2.2.2.

Le résultat final dépend de la base  $\mathcal{P}$  utilisée pour générer la solution. Le choix de la base des fonctions à utiliser doit être telle qu'elle minimise l'incertitude totale de la mesure de du champ de contraintes [13]. Ce critère est aussi utilisé par [15] et dans la méthodologie développée dans ce travail dans le chapitre § 2.2.5.

La résolution du problème par la pseudo-inversion de  $[K]$  sera toujours limitée par le nombre de données disponibles. Le nombre maximal de fonctions composant une base  $\mathcal{P}$  sera toujours égal au nombre de mesures disponibles.

Une augmentation du nombre de polynômes utilisés peut être liée à une diminution de l'incertitude du modèle (parce que la troncature du système est moins sévère) avec une conséquente réduction de l'incertitude totale. Mais une augmentation de la quantité de fonctions utilisées dans la base  $\mathcal{P}$ , réduit les degrés de liberté du système, augmentant l'incertitude  $u_{\varepsilon,i}$  dans l'équation 2.9, ce qui finit par augmenter la valeur de l'incertitude  $s_{\varepsilon}$  et donc l'incertitude totale.

La solution finale est trouvée itérativement en cherchant à minimiser l'incertitude totale  $S_{Total,i}$ .

### 2.2.3 Fonctions de base

Différentes fonctions de base peuvent être utilisées pour résoudre un problème par analyse inverse, par exemple les polynômes de Legendre, les fonctions Gaussiennes les fonctions échelons bornées, etc. [8]. L'important est d'obtenir le maximum d'information avec un nombre minimal de fonctions, ce qui garantit une réduction de l'incertitude.

Dans ce travail, nous détaillerons particulièrement les cas de l'utilisation des polynômes de Legendre et des fonctions échelons bornées.

### 2.2.3.1 Développement de la méthode basée sur les Polynômes de Legendre

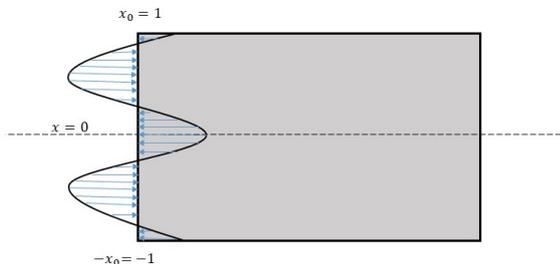
Les polynômes de Legendre sont un ensemble de polynômes définis dans le rang  $(-1,1)$  et ont été développés par le mathématicien français Adrien-Marie Legendre en 1782 [16]. Ils ont une large application dans le domaine de la physique grâce à leur caractéristique principale qui est l'orthogonalité entre tous les polynômes. Cette propriété peut être exprimée par :

$$\int_{-1}^1 P_i(x).P_j(x)dx = 0, \quad (2.20)$$

$\forall i \neq j$ , où les premiers polynômes sont :

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ P_5(x) &= \frac{1}{8}(65x^5 - 70x^3 + 15x) \\ &\vdots \\ P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \end{aligned} \quad (2.21)$$

Tous les polynômes peuvent être obtenus à partir de la formule de Rodrigues [17] (donnée par  $P_n(x)$  dans 2.21). Pour mettre en évidence la praticité de l'utilisation de ces polynômes pour la mécanique des solides, il faut considérer une pièce d'épaisseur normalisée entre les surfaces  $x_0 = 1$  et  $-x_0$  comme dans la figure 2.4 :



**Figure 2.4.** Représentation du profil de contraintes résiduelles dans une pièce d'épaisseur normalisée.

Les équations qui décrivent l'équilibre des contraintes et moments dans la pièce sont

respectivement :

$$\int_{-1}^1 \sigma_{yy} \cdot \underbrace{1}_{P_0} dx = 0, \quad (2.22)$$

et,

$$\int_{-1}^1 \sigma_{yy} \cdot \underbrace{x}_{P_1} dx = 0, \quad (2.23)$$

L'équation (2.22) peut être interprétée comme l'intégrale de la multiplication du champ des contraintes résiduelles  $\sigma_{yy}$  par le polynôme de Legendre d'ordre 0, sur une pièce d'épaisseur normalisée  $[-1,1]$ , de manière analogue l'équation 2.23 avec le polynôme d'ordre 1. En considérant ces deux équations ainsi que la définition de l'orthogonalité exprimée dans l'équation 2.20, il est conclu qu'il existe une combinaison linéaire entre les polynômes de Legendre dont l'ordre est supérieur à l'unité capable de représenter un champ de contraintes résiduelles :

$$\sigma_{yy}(x) \approx \sum_{j=2}^{\infty} A_j P_j(x_i). \quad (2.24)$$

L'équation (2.24) est interprétée comme suit : le champ de contraintes résiduelles d'un corps peut être représenté par une série de base orthogonale, qui sera formée par les polynômes de Legendre d'ordre supérieur à l'unité . Le champ de contraintes ainsi représenté a l'avantage d'être toujours un champ en équilibre statique.

La résolution du problème est limitée par un nombre maximal de  $m$  inconnues (nombre de mesures prises). Une troncature de la base utilisée dans l'équation (2.24) est réalisée pour faire une approximation :

$$\sigma_{yy}(x) \approx \sum_{j=2}^n A_j P_j(x_i) = [P_{m \times n}] [A_{n \times 1}], \quad \forall n \leq m. \quad (2.25)$$

L'ordre maximal  $n$  de la série est choisi par minimisation des erreurs [13], et varie normalement entre 4 et 12 [18]. Une nouvelle méthode sera proposée dans une section ultérieure pour la sélection des polynômes qui minimisent l'erreur dans le champ de contraintes obtenu par le décalage entre les déformations mesurées et calculées.

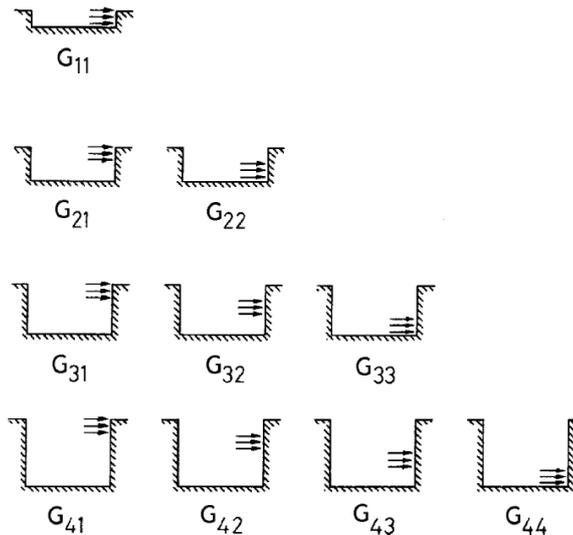
## 2.2.4 Développement de la méthode avec une base de fonctions échelons

Le but de cette approche est de reproduire le profil de contraintes d'une façon approximative par un ensemble de fonctions échelons bornées pondérées appliquées selon l'épaisseur de la pièce.

L'ensemble des fonctions de base  $\mathcal{P}(x)$  pour la résolution du problème inverse sera composé de  $m$  fonctions échelons bornées (égal au nombre de coupes effectuées dans l'essai) de valeur égale à l'unité. De la même façon que dans le cas précédent, le problème sera résolu une fois que les valeurs des multiplicateurs ou pondérateurs  $A_j$  seront trouvées.

Dans son travail Schajer [19] propose une interprétation de cette base de fonctions (voir figure 2.5).

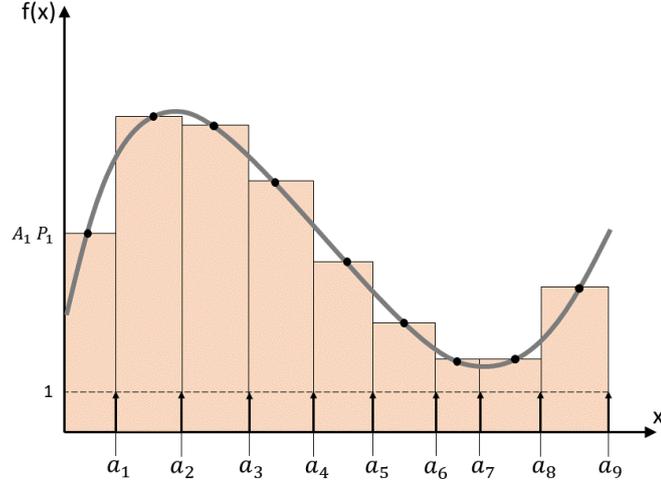
Pour le cas particulier des fonctions échelons, les éléments de la matrice de complaisances  $K_{ij}$  sont représentées par  $G_{ij}$  pour mettre en évidence que les fonctions utilisées sont des fonctions échelons. Par exemple, tous les éléments  $G_{i1}$  (première colonne) représentent les déformations calculées lors de chaque coupe  $a_i$  dues à l'application d'une contrainte distribuée (de valeur constante) tout au long de la coupe  $a_1$ .



**Figure 2.5.** Interprétation des composants de la matrice de complaisance en utilisant un ensemble de fonctions échelons comme base de la solution du problème [19].

La matrice de complaisance exprimée de cette façon sera nécessairement triangulaire inférieure. La deuxième colonne correspond à l'application d'une fonction de valeur constante (fonction échelon bornée) selon la deuxième coupe et ainsi de suite. Autrement dit, la composante  $G_{ij}$  correspond à la déformation à l'incrément  $j$  due au champ de contraintes sous la forme d'une fonction échelon bornée appliquée à la position située entre  $i$  et  $i - 1$  ( $\forall i, 1 \leq i \leq m$ ). La matrice  $G$  sera toujours une matrice carrée.

En effet, il est toujours possible d'exprimer une fonction continue d'une façon approximative par la valeur moyenne dans un intervalle (une idée similaire à la discrétisation pour l'intégration de la méthode des rectangles), comme représenté schématiquement dans la figure 2.6.



**Figure 2.6.** Interprétation de l'approximation d'une fonction continue  $f(x)$  par un ensemble de fonctions échelons pondérées.

Dans un procédé de mesure, les données expérimentales comporteront toujours la présence de bruit. Le bruit cause des distorsions locales qui vont produire des distorsions proportionnellement plus grandes sur la solution [5]. Une solution à ce problème consiste à prendre une quantité de données réduite avec une distribution non-homogène des coupes [20].

Cette approche est efficace pour diminuer l'accumulation des distorsions mais engendre la réduction de l'information recueillie, avec une conséquente augmentation de l'incertitude, surtout pour les cas où le gradient de la fonction est important [5].

Une autre approche pour résoudre ce problème consiste à augmenter le nombre de fentes réalisées et réduire la distorsion occasionnée en appliquant la régularisation de Tikhonov [21, 5, 15, 15]. Le but de cette régularisation est de pénaliser des valeurs locales extrêmes qui apparaissent à cause de la présence du bruit.

En première instance, une matrice diagonale  $F$  est dans l'équation 2.6. Cette matrice a pour but d'atténuer la possibilité de la singularité qui a lieu quand la coupe est réalisée à une profondeur proche de l'épaisseur de la pièce [15] :

$$[G][F]\{\sigma\} = [F]\{\varepsilon\}, \quad (2.26)$$

où  $F_{i,i} = [(W - a_i)/W]^2$  sont les éléments de la diagonale, avec  $W$  l'épaisseur totale de la pièce. L'équation 2.26 est une formulation qui suppose l'absence de bruit. Si le champ de contraintes est calculé directement à partir de l'équation 2.26, l'allure du profil obtenu sera très accidenté. Afin de régulariser la réponse du champ des contraintes résiduelles en présence de bruit dans les données de déformation, la régularisation de Tikhonov est appliquée. Le système qui résulte est le suivant :

$$[(G)[F])^T[G][F] + \beta[C]^T[S]^T[H][S][C]\{\sigma\} = ((G)[F])^T[F]\{\varepsilon\}, \quad (2.27)$$

avec  $C$  une matrice tridiagonale avec les première et dernière lignes nulles ( $i = 1$  et  $i = m$ ), et pour les lignes  $i = 2; m - 1$ , avec les entités tridiagonales égales à :

$$\frac{-2(W/m)^2}{(a_{i+1} - a_{i-1})(a_i - a_{i-1})} \quad \frac{2(W/m)^2}{(a_i - a_{i-1})(a_{i+1} - a_i)} \quad \frac{-2(W/m)^2}{(a_{i+1} - h_i)(a_{i+1} - a_{i-1})}. \quad (2.28)$$

La matrice  $S$  est diagonale, avec les erreurs standards des déformations dans les entrées  $S_{ii}$ , elle ajuste la régularisation pour chaque déformation mesurée. Pour le cas où les erreurs standards ne sont pas connues, la matrice  $S$  peut être remplacée par  $F$ , en laissant le paramètre  $\beta$  absorber cette différence. Le facteur  $\beta$  est le facteur de régularisation. La valeur  $\beta = 0$  correspond au cas sans régularisation et  $\beta > 0$  à un taux de régularisation croissant [5].

Le facteur  $\beta$  est la seule variable utilisée dans tout le système pour trouver les différentes solutions possibles. Il peut prendre des valeurs très faibles comme ( $\approx 10^{-15}$ ). Pour réduire cette difficulté, il est exprimé en fonction d'une autre variable  $\alpha$ , donnée par [15] :

$$\beta = 10^\alpha / E^2. \quad (2.29)$$

Maintenant l'équation (2.27) peut s'écrire sous la forme :

$$\{\sigma\} = [\mathcal{V}]\{\varepsilon_{mes}\}, \quad (2.30)$$

où,

$$[\mathcal{V}] = [([G][F])^T[G][F] + \beta[C]^T[S]^T[H][S][C]]^{-1}([G][F])^T[F]. \quad (2.31)$$

Les deux expressions précédentes permettent de calculer les valeurs des contraintes résiduelles à chaque point de mesure en fonction des déformations mesurées  $\varepsilon_{meas}$  (connues), de la matrice de complaisances  $G$  (connue) et du paramètre  $\beta$  (inconnu).

#### 2.2.4.1 Estimation des incertitudes avec les fonctions échelons

La procédure de calcul des incertitudes des solutions par analyse inverse qui utilise des fonctions échelons comme fonctions de base doit être adaptée car ce type de fonction n'est pas continu. Comme la solution demande nécessairement la même quantité de fonctions échelons que le nombre de coupes  $m = n$ , voir figure 2.6, l'incertitude de la déformation prend la valeur infinie (donnée par l'équation 2.9 réécrite ci dessous) :

$$u_{\varepsilon_{mf},i} = \sqrt{\frac{m}{m-n}} |\varepsilon_{mes,i} - \varepsilon_{calc,i}|.$$

La stratégie utilisée par Olsont *et al.* [15] est présentée ci-dessous pour résoudre ce type de cas.

##### 2.2.4.1.1 Estimation des incertitudes par la propagation des erreurs de mesure

Comme dans le cas de fonctions polynomiales, la source d'incertitude des déformations sera la valeur la plus importante entre le décalage entre les valeurs mesurées et calculées

( $\varepsilon_{mf}$ ) et l'erreur inhérente à l'appareil de mesure ( $e$ ) :

$$u_{\varepsilon_i} = \max(\varepsilon_{mf_i}, e_i). \quad (2.32)$$

Dans le premier cas, les déformations qui seraient obtenues par le profil calculé sont données par :

$$\{\varepsilon_{calc}\} = [G]\{\sigma\}. \quad (2.33)$$

Le décalage entre les déformations mesurées et calculées est donné par :

$$\varepsilon_{mf} = \sqrt{(\varepsilon_{mes} - \varepsilon_{calc})^2}. \quad (2.34)$$

La variance des contraintes due à la propagation des incertitudes des déformations sera finalement calculée par :

$$\{s_{\varepsilon,i}^2\} = \text{diag}([\mathcal{V}][DIAG(\{u_{\varepsilon,i}\}^2)][\mathcal{V}]^T), \quad (2.35)$$

où  $u_{\varepsilon,i}$  est identifiée lors de l'application de l'équation 2.32.

#### 2.2.4.1.2 Estimation des incertitudes dues aux erreurs du modèle

Comme il a été introduit précédemment, la matrice de base sera toujours la même. Les différentes solutions sont obtenues en faisant varier le paramètre de régularisation  $\gamma$ .

L'espace des solutions sera réglé par la variable  $\gamma$ . Olson *et al.* [15], fixent la valeur minimale de cette variable à  $\gamma_{min} = -15$ , qui varie vers les valeurs positives jusqu'à obtenir une erreur de décalage de la déformation égale à  $u_{mf_{max}} = 100\mu\varepsilon$ , laquelle est considérée comme excessive.

Les erreurs occasionnées par le modèle sont traitées avec une approche statistique d'une façon similaire à celle des fonctions polynomiales. Pour estimer l'incertitude due au modèle d'une solution particulière (une solution avec une valeur particulière du paramètre  $\gamma$ ), il faut prendre un ensemble de solutions similaires à la fonction évaluée.

La stratégie pour choisir cet ensemble est de prendre un rang de  $M = 60$  solutions autour du  $\gamma_j$  évalué entre  $(-R+\gamma_j) \leq \alpha_j \leq (\gamma_i+R)$ , avec  $R$  comme paramètre de l'étendue. L'incertitude estimée due au modèle pour une coupe d'une hauteur  $a_i$  est exprimée par :

$$s_{mod_i}(\gamma) = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M [\sigma_{i,j} - \bar{\sigma}_i]^2}, \quad (2.36)$$

où  $\bar{\sigma}_i$  est la valeur moyenne de tous les profils de contraintes de l'ensemble considéré à la hauteur de coupe  $a_i$  considérée.

## 2.2.5 Nouvelle méthodologie d'estimation des incertitudes et optimisation du résultat final

### 2.2.5.1 Méthodologie développée - justification

Une nouvelle méthodologie d'estimation des incertitudes et de l'optimisation du résultat final est proposée dans ce travail pour le cas des fonctions polynômiales. Dans la section 2.2.2.3 a été présentée la méthodologie utilisée pour le calcul de l'estimation de l'incertitude du modèle développé par Prime et Hill [13]. La nouvelle méthodologie peut être vue comme une extension ou une généralisation de cette méthode.

Dans ce cas, la base de fonctions utilisée pour chaque solution possible est composée de polynômes de différents degrés, où chaque fonction de la série est d'un ordre supérieur à la précédente. Par exemple, la solution avec cinq polynômes sera composée par les polynômes d'ordre [2,3,4,5,6].

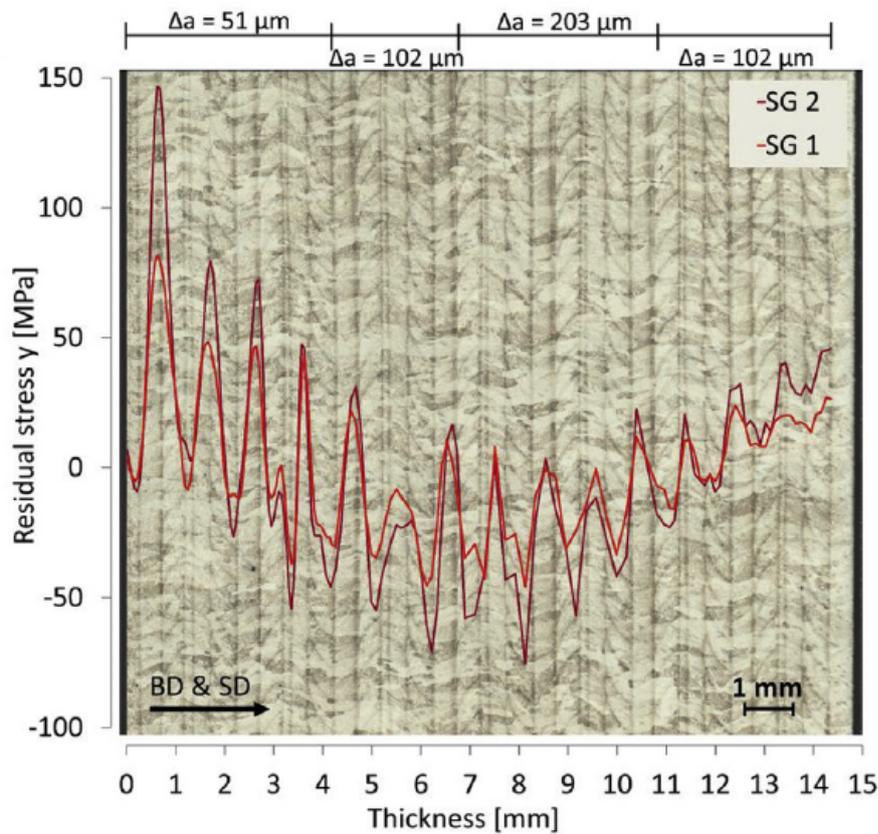
Le nombre de fonctions à utiliser sera toujours inférieur au nombre de coupes réalisées. Une nouvelle fonction sera ajoutée à la série de base seulement si l'information apportée réduit l'incertitude totale. L'ajout d'une fonction a deux effets sur l'incertitude : *i*) elle permet de réduire le décalage entre les déformations calculées et mesurées, *ii*) cette réduction dans le décalage a aussi un effet de réduction de l'incertitude, mais en même temps elle réduit le nombre de degrés de liberté du système, augmentant ainsi l'incertitude. Il est nécessaire de réaliser une évaluation de vérification si effectivement l'incertitude a été réduite par l'ajout de la nouvelle fonction.

De façon à exposer les limitations de l'approche de Prime et Hill, il faut considérer que dans le cas de bases orthogonales (comme c'est le cas pour les polynômes de Legendre) chaque polynôme peut être vu comme une source d'information unique. Dans la procédure de troncature de la base (réduction du nombre de polynômes de la base), il existe une potentielle perte d'information qui ne sera pas reproduite fidèlement par les fonctions qui restent dans la base.

Ceci met en évidence une limitation de cette méthodologie. Comme les ordres des polynômes varient de façon consécutive et la quantité de polynômes à utiliser dans la série est limitée, implicitement l'ordre maximal du polynôme dans la série sera aussi limité. Il y aura donc, des polynômes d'ordre supérieur qui ne seront jamais évalués, qui ont potentiellement une information importante et unique pour la reproduction du profil des contraintes. Une recommandation explicite donnée consiste à ne pas dépasser l'utilisation de 12 polynômes [13].

Le fait de ne pas avoir accès aux polynômes d'ordre élevés, limite la capacité de reproduire les profils avec de multiples pics et des creux tel que par exemple ceux de la figure 2.7, qui correspond à un profil de contraintes d'une pièce obtenue par fabrication additive. Dans ce cas, le profil de contraintes possède un pic pour chaque couche de matériau déposée. Ce type de courbe nécessite des polynômes de degrés supérieurs pour réussir à réaliser une régression avec une haute corrélation.

Cette méthodologie implique l'utilisation de tous les polynômes définis par le poly-

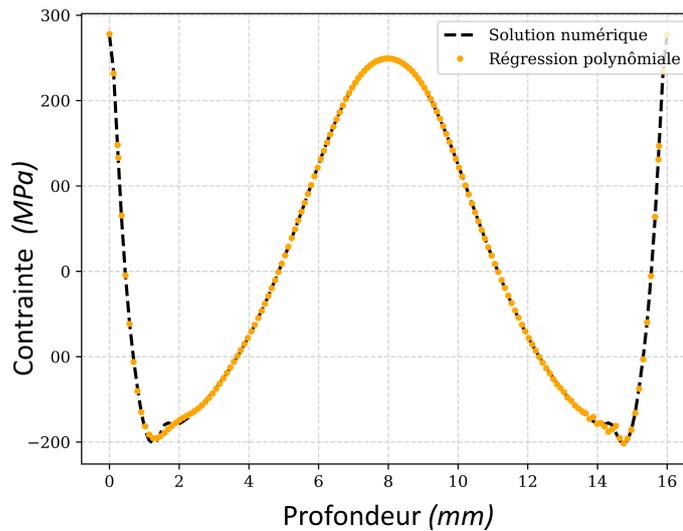


**Figure 2.7.** Micro structure de la section transversale superposée avec le profil de contraintes résiduelles évalué à la méso-échelle et déterminée par la méthode de la coupe incrémentale (avec des fonctions échelons unitaires bornés de base) [22]

nôme d'ordre minimal et la quantité totale des fonctions à utiliser.

La [figure 2.8](#) représente le résultat d'une simulation numérique (ligne discontinue noire) et sa régression polynômiale correspondante (ligne pointillée orange). La simulation numérique correspond à l'état de contraintes résiduelles d'un procédé de laminage d'une tôle en acier avec 16mm d'épaisseur finale. Dans le [tableau 2.2](#) sont exposées les données de la composition de la série polynômiale de la régression.

La tôle ayant une géométrie symétrique par rapport à la fibre neutre et le chargement du procédé de laminage étant symétrique aussi par rapport à elle, il est logique de penser qu'une approximation polynômiale sera composée principalement de fonctions symétriques (dans le cas des fonctions polynômiales, d'ordre pair). Cette situation est vérifiée dans la composition de la série polynômiale (de Legendre) dans le [tableau 2.2](#), où le poids de chaque fonction est représenté par des multiplicateurs. Les fonctions d'ordre impair (si elles apparaissent) sont accompagnées d'un multiplicateur de valeur faible.



**Figure 2.8.** Comparaison d'une régression polynomiale à partir des données obtenues par une simulation numérique.

Ordre Polynômial	Multiplicateur	Ordre Polynômial	Multiplicateur
2	-199.65	15	-6.98
4	363.84	16	-23.78
5	-3.93	17	-4.70
6	42.53	18	-0.48
7	-4.31	21	3.12
8	117.71	23	4.59
9	0.18	24	-3.61
10	12.59	25	0.55
12	-17.07	26	0.16
13	-4.61	28	-0.01
14	-30.33		

Tableau 2.2 – Comparaison entre le résultat numérique et sa régression polynomiale.

En général les contributions des polynômes ont tendance à diminuer quand l'ordre augmente. Cependant, il n'est pas vrai qu'un polynôme d'ordre supérieur ait une contribution plus faible que toutes les fonctions d'ordre inférieur à lui. Dans l'exemple, le polynôme d'ordre 16 a un multiplicateur plus important que les polynômes d'ordre (3, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 15).

En effet, dans ce cas particulier, il est vérifié que si les 8 premiers polynômes sont d'ordre pair, le décalage par rapport à la solution proposée dans le tableau 2.2 varie de moins de 3%. Ceci démontre l'importance d'évaluer des fonctions d'ordre non consécutif et d'explorer la possibilité d'inclure des polynômes d'ordre supérieur dans la solution.

La nouvelle méthodologie développée ici, exploite ces deux faiblesses ; *i*) L'ordre du polynôme maximal à évaluer est un paramètre du problème avec une seule limitation qui est le coût de calcul. *ii*) Les polynômes qui composent la base ne sont nécessairement pas

d'ordres consécutifs. Par exemple il sera possible d'obtenir un résultat avec une base composée par des polynômes d'ordre (2,8,13,17,22), ce qui n'est pas possible avec le modèle précédent. Pour ce faire, un algorithme itératif en évaluant chaque combinaison possible sera mis en place, pour l'estimation de l'incertitude due au modèle utilisé.

### 2.2.5.2 Définitions et concepts

Avant d'entrer dans la description de l'algorithme, il est nécessaire d'introduire certains concepts et définitions qui seront utilisés dans la méthodologie proposée.

**Polynôme d'ordre maximal** ( $\mathcal{O}r_{max}$ ) : c'est l'ordre du polynôme maximal à être évalué dans les composantes de la base qui génère la solution. Il sera un paramètre d'entrée dans l'algorithme, sa valeur étant seulement limitée par la croissance exponentielle du coût de calcul de la solution finale.

**Polynôme d'ordre minimal** ( $\mathcal{O}r_{min}$ ) : d'une façon analogue au cas précédent, c'est l'ordre minimal à prendre en compte dans la série de solution. C'est aussi un paramètre à donner dans l'algorithme. La valeur n'est pas triviale, si par exemple les fonctions de base correspondent aux polynômes de Legendre, les ordres 0 et 1 normalement ne sont pas pris en compte. Dans ce cas là valeur, de ce paramètre est égal à 2.

$\mathcal{Q}$  : liste avec tous les ordres des polynômes à étudier. Pour le cas le plus général, cette liste sera composée par tous les ordres entre les polynômes d'ordre minimal et maximal inclus. Ex : [2, 3, ...,  $\mathcal{O}r_{max}$ ] avec  $\mathcal{O}r_{min} = 2$ .

$\mathcal{N}\mathcal{Q}$  : est le nombre d'éléments dans la liste  $\mathcal{Q}$ .

$\mathcal{N}\underline{p}_{max}$  : quantité maximale des polynômes qui peuvent composer la série de la base.

$\mathcal{N}\underline{p}_{min}$  : quantité minimale des polynômes qui peuvent composer la série de la base.

**La gamme ou l'espace des solutions possibles** : est constitué par tous les profils de contraintes qui peuvent être obtenus à partir de chaque combinaison possible donnée par les paramètres d'entrée de l'algorithme :  $\mathcal{O}r_{max}$ ,  $\mathcal{O}r_{min}$ ,  $\mathcal{N}\underline{p}_{max}$  et  $\mathcal{N}\underline{p}_{min}$ .

Ainsi le nombre total de solutions à évaluer dans la gamme de solutions ( $Nts$ ) sera donné par l'expression :

$$Nts = C_{\mathcal{N}\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}\underline{p}_{min}} + C_{\mathcal{N}\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}\underline{p}_{min}+1} + \dots + C_{\mathcal{N}\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}\underline{p}} + \dots + C_{\mathcal{N}\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}\underline{p}_{max}+1} + C_{\mathcal{N}\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}\underline{p}_{max}}, \quad (2.37)$$

où  $C_{\mathcal{N}\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}\underline{p}}$  représente la valeur de tous les groupements de  $\mathcal{N}\mathcal{Q}$  éléments pris en groupes de  $\mathcal{N}\underline{p}$  éléments, calculée par l'expression :

$$C_{\mathcal{N}\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}\underline{p}} = \frac{\mathcal{N}\mathcal{Q}!}{\mathcal{N}\underline{p}!(\mathcal{N}\mathcal{Q} - \mathcal{N}\underline{p})!} \quad (2.38)$$

**Famille de solutions** : c'est l'ensemble des solutions obtenues par la combinaison linéaire avec la même quantité de polynômes dans la série. Ainsi dans l'équation 2.37

chaque terme à droite de l'expression représente la quantité de solutions possibles avec  $\mathcal{N}_p$  polynômes dans la gamme totale des solutions.

### 2.2.5.3 Estimation de l'incertitude du modèle

Une nouvelle méthodologie pour l'estimation de l'incertitude du modèle est proposée ici, donnée par la relation suivante :

$$s_{mod,q_i}^2 = \frac{1}{p-1} \sum_{j=1}^p (\sigma_{q,i} - \sigma_{j,i})^2. \quad (2.39)$$

Dans ce cas,  $\sigma_q$  représente la solution particulière pour laquelle l'incertitude est calculée. Cette relation établit que l'estimation de la variance de l'erreur due au modèle d'un profil  $\sigma_q$ , sera fonction de la différence entre ce profil de contraintes ( $\sigma_q$ ) et l'ensemble de  $p$  solutions considérées pour estimer l'incertitude, évaluées au point de mesure  $i$ .

L'ensemble de  $p$  solutions, doit être l'ensemble des solutions proches de la solution considérée  $\sigma_q$ . Cette méthodologie se base sur l'hypothèse que l'erreur de la solution choisie est similaire à la déviation standard de la solution par rapport à l'ensemble des solutions de comparaison utilisées dans l'équation 2.39.

Le principal avantage de ce modèle par rapport au modèle utilisé par Prime et Hill (voir l'équation 2.18 ) est de permettre le calcul d'une incertitude différente pour chaque profil qui compose l'ensemble des solutions.

Le défi pour achever une bonne estimation consiste à choisir l'ensemble des fonctions qui participeront au calcul de l'estimation dans l'équation 2.39. Un algorithme itératif a été développé pour déterminer cet ensemble de fonctions.

### 2.2.5.4 Algorithme proposé

La solution est fondée sur la base de la réduction de l'incertitude totale (équation 2.19), composée principalement de la propagation des déformations (donnée par l'équation 2.35) et de l'incertitude du modèle (développée dans le cadre de ce travail, équation 2.39).

La composante de l'incertitude due aux déformations, dépend seulement de la composition de la base polynômes et des erreurs provenant des appareils de mesure. Cette composante est calculée en suivant la procédure décrite dans la section §2.2.2.1.

L'estimation de l'erreur du modèle se base sur l'application de l'équation 2.39, où les  $p$  solutions de l'ensemble de comparaison utilisé pour l'estimation doivent être semblables de telle sorte à ne pas surestimer l'erreur. Pour ce faire un algorithme de tri de solutions est proposé. Il est composé de quatre étapes et décrit par la suite de façon schématique dans la figure A.1.

#### 2.2.5.4.1 Première étape de tri

Comme il a été décrit dans la section §2.2.5.2 pour chaque famille, il existe  $C_{N\mathbb{Q}}^{N\mathbb{P}}$  solutions possibles. En général, la plupart de ces solutions va donner une mauvaise approximation du profil des contraintes résiduelles réelles. L'idée est de réaliser un premier tri en gardant seulement les meilleures options dans chaque famille de solutions.

Un nouveau paramètre sera ajouté à l'algorithme qui est la quantité de solutions à retenir dans chaque famille de solutions lors du premier tri : *PPT* (Paramètre du Premier Tri). A partir des calculs et des exemples réalisés, le paramètre est fixé entre  $8 \leq PPT \leq 11$ .

Ce choix peut sembler arbitraire, mais le but de ce premier tri est de réduire considérablement le nombre de fonctions à évaluer dans les étapes qui suivent, mais en même temps de s'assurer que les meilleures options perdurent dans la suite de la procédure.

En considérant l'intervalle, des valeurs pour le paramètre *PPT* : *i*) en prenant une valeur inférieure à 8, il y a un risque d'éliminer des solutions potentiellement bonnes pour les étapes suivantes, *ii*) en prenant au-dessus de 11 il y a un risque d'introduire des solutions avec du bruit excessif qui pourra éventuellement surestimer l'incertitude.

Le critère pour le tri dans cette première étape est l'incertitude moyenne dans l'épaisseur due à la déformation :

$$\bar{u}_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{m-n} \sum_{i=1}^m u_{\varepsilon,i}^2}, \quad (2.40)$$

où  $u_{\varepsilon,i}$  est défini par l'équation 2.10.

Seules les *PPT* solutions qui donnent les plus faibles incertitudes moyennes dues à la déformation dans chaque famille seront retenues.

#### 2.2.5.4.2 Deuxième tri

Le but dans cette étape est de réduire le nombre de solutions possibles dans chaque famille (solutions avec le même nombre de polynômes dans la base) de *PPT* à un seul candidat.

Pour ce faire, une première estimation de l'incertitude du modèle sera faite en prenant les autres solutions de la famille comme l'ensemble des solutions à prendre en compte pour appliquer l'équation 2.39.

Ceci permettra de calculer une première estimation de l'incertitude totale pour chaque solution dans la famille en utilisant l'équation 2.19. Seule la solution avec l'incertitude minimale va rester comme "représentante" de sa famille de solutions.

### 2.2.5.4.3 Troisième tri

A la fin de l'étape précédente il ne reste qu'une solution pour chaque famille. Il peut être alors raisonnable de répéter les calculs réalisés dans l'étape précédente. Afin de calculer l'erreur du modèle, l'ensemble des fonctions de comparaison est composé de toutes les solutions qui restent, en choisissant comme solution optimale celle qui minimise l'incertitude totale. Soit  $\sigma_{ref}$  et  $s_{ref}$  le profil de contraintes de référence et son incertitude totale correspondante.

Il est important de se souvenir des paramètres utilisés pour arriver à ce point et leur possibles influences sur le résultat. Le nombre de résultats qui restent est une fonction des paramètres  $\mathcal{N}_{\underline{p}_{max}}$  et de  $\mathcal{N}_{\underline{p}_{min}}$  (nombres maximal et minimal de polynômes à inclure dans une série).

En effet, si le nombre minimal de polynômes est trop faible, le manque d'information va amener à une solution trop éloignée de la solution idéale.

A contrario si le nombre de polynômes est trop élevé, des polynômes d'ordre supérieur avec une faible qualité de régression vont générer du bruit dans la solution.

Les deux derniers cas sont des cas particuliers où il existe au moins une solution dans l'ensemble de comparaison avec une différence importante avec  $\sigma_{ref}$ . La présence de solutions avec une différence importante avec  $\sigma_{ref}$  cause une surestimation de l'incertitude du modèle.

Afin de réduire cette surestimation, il est proposé un dernier tri basé sur la variance moyenne quadratique tout au long du spécimen. Une solution de l'ensemble des solutions possibles sera éliminée lors du tri si la condition suivante est vérifiée :

$$\overline{s_{rms_j}^2} > \alpha \overline{s_{ref}^2}, \quad (2.41)$$

où  $\alpha$  est un paramètre qui régule la sévérité du tri et  $\overline{s_{rms_j}^2}$  est la moyenne quadratique de la variance de la solution 'j' de l'ensemble de solutions possibles :

$$\overline{s_{rms_j}^2} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\sigma_{ref_i} - \sigma_{j_i})^2. \quad (2.42)$$

Une valeur de  $\alpha$  égale à l'unité éliminerait en moyenne la moitié des solutions de l'ensemble (critère trop sévère). Une valeur élevée (au-dessus de 3) n'éliminerait aucune solution (sauf si le décalage d'une solution en particulier est trop important avec  $\sigma_{ref}$ , et cette étape de tri n'aurait aucun intérêt). La valeur du paramètre  $\alpha$  doit se placer dans l'intervalle  $1.5 \leq \alpha \leq 2$ . Dans cette gamme de valeurs, il est attendu d'éliminer seulement les solutions avec une différence significative avec  $\sigma_{ref}$ .

#### 2.2.5.4.4 Sélection finale

L'élimination des solutions possibles durant l'étape précédente modifie la composition finale de l'ensemble des solutions possibles. Cette situation force à une dernière étape de re-calcul de l'incertitude du modèle et finalement de l'incertitude totale.

Comme dans les étapes précédentes, la solution finale sera donnée pour une incertitude totale minimale.

## 2.3 Conclusion

Le profil de contraintes résiduelles reste la seule variable d'état mesurable. En considérant une pièce métallique soumise à des contraintes résiduelles, l'énergie et les déformations libérées sont une fonction directe du profil. La mesure correcte de ce profil sera toujours un point clé pour la vérification de l'état de santé de la pièce et la comparaison entre les profils prédits par les modèles et le profil obtenu durant un procédé réel ou une succession de procédés.

Ce chapitre développe un cadre théorique complet pour comprendre le procédé de mesure des contraintes résiduelles par des méthodes destructives au travers de l'analyse inverse. En particulier deux méthodologies de référence sont développées à partir de fonctions de base différentes dont celle de Prime-Hill et Olson (séries polynômiales et des fonctions et fonctions échelons unitaires respectivement).

Une nouvelle méthodologie pour l'estimation du profil des contraintes résiduelles par analyse inverse a été proposée. La méthodologie est basée sur la généralisation de la méthode de Prime-Hill, appliquée au cas de bases polynômiales. A la différence de cette méthodologie, la nouvelle proposition permet d'évaluer des bases avec des polynômes d'ordres non-consécutifs. La modélisation de l'incertitude due au modèle proposée, présente aussi des avantages par rapport à la méthode de Prime-Hill.

Une comparaison de la performance des trois méthodologies : Olson *et al.*, Prime-Hill et la nouvelle méthodologie est réalisée dans le chapitre 4.

Finalement, une librairie de fonctions et d'outils numériques a été développée afin de réaliser tous les calculs décrits dans ce chapitre.

## Bibliographie

- [1] Prime, M.B. Residual stress measurement by successive extension of a slot : the crack compliance method. *Applied Mechanics Reviews*. 52(2) :75-96. 1999.
- [2] Treuting, R.G. and Read Jr, W.T. A mechanical determination of biaxial residual stress in sheet materials. *Journal of Applied Physics*. 22(2) :130-134. 1951.
- [3] Rendler, N.J.. and Vigness, I. Hole-drilling strain-gage method of measuring residual stresses. *Experimental Mechanics*. 6(12) :577-586. 1966.

- [4] Sachs, G. and Espey, G. The measurement of residual stresses in metal. *Iron age*. 148(61-71) :148. 1941.
- [5] Schajer, G.S. and Prime, M.B Use of inverse solutions for residual stress measurements. *Journal of engineering materials and technology*. 128(3) :375-382. 2006.
- [6] Kang, K.J. and Song, J.H. and Earmme, Y-Y. A method for the measurement of residual stresses using a fracture mechanics approach. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. 24(1) :23-30. 1989.
- [7] Cheng, W. and P., M.B. and Finnie, I. Measurement of residual stresses through the thickness of a strip using the crack compliance method. *Residual Stresses) III : Science and Technology*. 2 :1127-1132. 1991.
- [8] Cheng, W. and Finnie, I. *Residual stress measurement and the slitting method*. 2007.
- [9] Smith, D.J. *Practical residual stress measurement methods - Deep hole drilling*. 65-87. 2013.
- [10] Cheng, W. and Finnie, I. and Vardar, O. Measurement of residual stresses near the surface using the crack compliance method. *Journal of Engineering Materials and Technology*. 113(2) :199-204. 1991.
- [11] Cheng, W. and Finnie, I. and Gremaud, M. and Prime, M.B. Measurement of near surface residual stresses using electric discharge wire machining. *Journal of Engineering Materials and Technology*. 116(1) :1-7. 1994.
- [12] Hill, M.R. *Practical Residual Stress Measurement Methods-The slitting method*. 89-108. 2013.
- [13] Prime, M.B. and Hill, M.R. Uncertainty, model error, and order selection for series-expanded, residual-stress inverse solutions. *Journal of Engineering Materials and Technology*. 128(2) :175-185. 2006.
- [14] Bevington, P.R. and Robinson, D.K. *Data Reduction and Error Analysis for Physical Sciences*. 1992
- [15] Olson, M.D. and DeWald, A.T. and Hill, M.R. An uncertainty estimator for slitting method residual stress measurements including the influence of regularization. *Experimental Mechanics*. 60(1)65-79. 2020.
- [16] Dunster, T.M. Legendre and related functions. *NIST handbook of mathematical functions*. 351-381. 2010.
- [17] Arfken, G.B. and Weber, H.J. *Mathematical Methods for Physicists*. 2005.
- [18] Schajer, Gary S. *Practical residual stress measurement methods*. 2013.
- [19] Schajer, G.S. Advances in hole-drilling residual stress measurements. *Experimental Mechanics*. 50(2) :159-168. 2010.
- [20] Schajer, G.S. Measurement of non-uniform residual stresses using the hole-drilling method. Part I—Stress calculation procedures. *Journal of Engineering Materials and Technology*. 110(4) :338-343. 1988.
- [21] Tikhonov, A.N. and Goncharsky, A.V. and Stepanov, V.V. and Yagola, A.G. *Numerical methods for the solution of ill-posed problems*. 2013.
- [22] Strantza, M. and Vrancken, B. and Prime, M.B. and Truman, C.E. and Rombouts, M. and Brown, D.W. and Guillaume, P. and Van Hemelrijck, D. Directional and oscillating residual stress on the mesoscale in additively manufactured Ti-6Al-4V. *Acta Materialia*. 168 :299-308. 2019.

- [23] Cheng, W. and Finnie, I. Measurement of residual stress distributions near the toe of an attachment welded on a plate using the crack compliance method. *Engineering Fracture Mechanics*. 46(1) :79-91. 1993.
- [24] Prime, M.B. Plasticity effects in incremental slitting measurement of residual stresses. *Engineering Fracture Mechanics*. 77(10) :1552-1566. 2010.
- [25] Mansilla, C. and Martínez-Martínez, D. and Ocelík, V. and De Hosson, J.T.M. On the determination of local residual stress gradients by the slit milling method. *Journal of Materials Science*. 50(10) :3646-3655. 2015.
- [26] Rankin, J.E. and Hill, M.R. Measurement of thickness-average residual stress near the edge of a thin laser peened strip. *Journal of Engineering Materials and Technology*. 125(3) :283-293. 2003.
- [27] Cheng, W. and Finnie, I. and Vardar, Ö. Deformation of an edge-cracked strip subjected to normal surface traction on the crack faces. *Engineering Fracture Mechanics*. 42(1) :97-107. 1992.
- [28] Mahmoudi, A.H. and Hossain, S. and Truman, C.E. and Smith, D.J. and Pavier, M.J. A new procedure to measure near yield residual stresses using the deep hole drilling technique. *Experimental Mechanics*.. 49(4) :595-604. 2009.
- [29] Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Krieger, S. *Theory of plates and shells*. 1959
- [30] Cheng, W. and Finnie, I. *Residual Stress Measurement and the Slitting Method*. Springer Science & Business Media, 2007.

## Simulation numérique de l'état d'un matériau soumis à des sollicitations successives

### Introduction

Si l'on envisage de simuler un processus composé de procédés caractérisés par des types de sollicitation, des conditions aux frontières ou des vitesses de déformations différentes, il est nécessaire d'adapter les paramètres de simulation pour chaque étape. Le maillage, les conditions aux limites, les conditions de contact, le solveur utilisé doivent tenir compte de l'historique des sollicitations à laquelle la pièce a été soumise. Cet héritage est réalisé par une procédure d'exportation/importation des données entre chaque simulation.

Ce chapitre est dédié à la présentation de la méthodologie de la simulation d'un processus en utilisant différents solveurs ou logiciels. Les principales méthodes utilisées dans les logiciels utilisant la méthode des éléments finis (résolution implicite et explicite) sont présentées. L'algorithme qui permet d'implémenter deux lois de comportement présentées dans le chapitre 1 est également décrit. Un code développé dans ce travail permet d'appliquer la méthodologie proposée aux solveurs implicite et explicite sur Abaqus [1].

### 3.1 Démarche d'utilisation des solveurs proposés par le logiciel Abaqus

La modélisation et la simulation par la méthode des éléments finis appliquée à la mise en forme des matériaux métalliques sont principalement appliquées avec deux méthodes de discrétisation du problème : les méthodes implicite et explicite.

La différence entre les deux réside dans la méthodologie de calcul de l'incrément du tenseur des déformations. En général, le déplacement est fonction du temps et de lui-même. Il s'écrit sous la forme d'une fonction continue :

$$u = \mathcal{F}(t, u). \quad (3.1)$$

Si la fonction est exprimée sous une forme discrétisée en fonction du temps, pour un incrément  $\Delta t$  la forme explicite s'écrit, à partir de l'équation (3.1) sous la forme :

$$u_{t+\Delta t} - u_t = \mathcal{F}(\Delta t + u_t). \quad (3.2)$$

Comme  $u_t$  est connu, la solution de  $u_{t+\Delta t}$  trouve une solution directe. Dans ce cas  $\mathcal{F}(\Delta t + u_t) \approx \mathcal{F}(\Delta t + u_{t+\Delta t})$ , avec  $\Delta t$  suffisamment petit pour éviter un erreur considérable.

Le modèle implicite utilise l'approximation suivante de l'équation (3.1) :

$$u_{t+\Delta t} - u_t = \mathcal{F}(\Delta t + u_{t+\Delta t}). \quad (3.3)$$

Le terme  $u_{t+\Delta t}$  apparaît dans les deux côtés de l'équation (3.3), ce qui rend la résolution plus complexe. Pour résoudre cette problématique, la matrice de souplesse de toute la structure modélisée doit être calculée. La solution finale d'un nouvel incrément est déterminée par une méthode itérative (ici, la méthode de Newton-Raphson [1]). Afin de calculer la matrice de raideur totale de la pièce, il est nécessaire de fournir la matrice Jacobienne à chaque point d'intégration.

Enfin, la méthode implicite est capable de donner des résultats plus fiables par rapport à la méthode explicite. Néanmoins, avec la méthode explicite, lorsque les phénomènes modélisés deviennent non linéaires (frottement, impact, etc.), la présence de forts gradients impose un raffinement du maillage (autour des contacts ou autour des régions avec des concentrations de contraintes). Cela a pour conséquence des coûts de calcul prohibitifs.

Si l'équilibre de la pièce est recherché (retour élasto-plastique ou refroidissement par exemple), il peut être envisagé l'utilisation de deux étapes dans la simulation :

- i*) une première étape pour la mise en forme où le solveur explicite est le plus approprié et,
- ii*) une étape de retour à l'équilibre avec le solveur implicite.

Ce cas particulier montre d'ailleurs la pertinence d'utiliser plusieurs solveurs pour un seul procédé.

Dans ce travail, une méthodologie générale est proposée afin de suivre l'état de la matière. Cela commence par l'implémentation de la loi de comportement pour les différents solveurs. Cette méthodologie est applicable quelle que soit la solution logicielle qui permet l'implémentation de lois de comportement.

### 3.1.1 Implémentation de lois de comportement

L'implémentation de lois de comportements par le codage de sous-routines permet l'utilisation de n'importe quelle loi, notamment celles qui ne se trouvent pas dans les bibliothèques des logiciels. Cette approche donne accès à toutes les variables d'érouissage et leurs composantes à la sortie du calcul, lesquelles sont nécessaires pour la caractérisation de l'état d'un matériau. L'accès à ces variables n'est pas toujours possible avec les lois présentes dans les bibliothèques des solutions des logiciels. Les variables ainsi disponibles peuvent être aisément formatées pour une exportation vers un solveur plus adapté.

### 3.1.2 Algorithme d'intégration des lois de comportement

Les lois de comportement à appliquer dans les sous-routines sont basées sur l'algorithme développé par Kobayashi et Ohno [2, 3], qui peut être utilisé à la fois pour l'application de la loi de Chaboche et la loi d'Ohno et Wang décrites dans le chapitre 1. D'autres algorithmes appliqués à la loi de Chaboche peuvent être trouvés dans [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. Des algorithmes appliqués à des lois qui permettent de décrire l'effet Bauschinger se trouvent aussi dans la bibliographie : loi YU (modèle Yoshida et Uemori) dans [11], loi anisotrope HAH (modèle de Barlat) dans [12, 13] et des codes implicite et explicite appliqués à trois logiciels de référence (Zebulon, Abaqus et Ansys) pour les modèles multi-mécanismes et multi-critères dans [14].

La solution dans une sous-routine de loi de comportement ne doit pas être confondue avec l'algorithme utilisé par le logiciel pour prédire la variation du tenseur de déformations total  $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}$  lors d'un incrément. Dans la sous-routine sont calculés  $\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^e$ ,  $\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^p$ ,  $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}$  et  $\underline{\underline{X}}_{n+1}$  à partir de l'incrément  $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}$  et des relations données par la loi de comportement. La solution à l'intérieur de la sous-routine peut être obtenue par n'importe quelle méthode numérique (implicite ou explicite).

L'algorithme utilisé ici correspond à une intégration implicite d'Euler. Dans le cas particulier de l'utilisation d'Abaqus, deux sous-routines différentes sont nécessaires en fonction du solveur. L'utilisation d'Abaqus Standard et Explicit nécessite l'implémentation respective des sous-routines (écrites en FORTRAN) UMAT et VUMAT. La différence principale entre ces deux routines réside dans la nécessité de donner la matrice Jacobienne pour la routine UMAT et le formatage des composantes des tenseurs.

La connaissance des différences dans le format des variables va permettre par la suite un réarrangement et une adaptation des données pour réaliser la caractérisation de l'état

du matériau, pour changer de solveur ou réaliser un remaillage.

Les tenseurs de déformation et de contraintes dans Abaqus/Standard sont donnés par :

$$\begin{aligned}\{\varepsilon\}_{\text{UMAT}} &= [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23}]^T, \\ \{\sigma\}_{\text{UMAT}} &= [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}]^T.\end{aligned}$$

Le fait d'exprimer les composantes du tenseur de déformation de cisaillement par  $\gamma_{ij}$  ( $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}, \forall i \neq j$ ) empêche la multiplication directe d'un scalaire par le vecteur sans passer par une opération de multiplication de matrices.

En revanche, le solveur ABAQUS/Explicit organise les composantes des variables dans l'ordre suivant :

$$\begin{aligned}\{\varepsilon\}_{\text{VUMAT}} &= [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}]^T, \\ \{\sigma\}_{\text{VUMAT}} &= [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}]^T.\end{aligned}$$

Dans ce cas les composantes des déformations de cisaillement correspondent directement aux composants du tenseur de déformation de Green. Dans ce travail, les cas des deux lois de comportements qui sont traitées (la loi de Chaboche et celle d'Ohno et Wang) et répondent aux méthodes numériques décrites dans cette section.

Une notation matricielle du système d'équations facilite l'implémentation de l'algorithme aux sous-routines. Le fait : *i*) qu'on n'utilise que trois composantes de cisaillement (compte tenu de la symétrie des composantes) et, *ii*) il existe une différence dans les composantes de déformation entre les deux solveurs ( $\gamma_{ij}$  pour UMAT et  $\varepsilon_{ij}$  pour VUMAT) exige l'utilisation de matrices auxiliaires pour résoudre cette problématique.

La matrice  $\mathbf{I}_1$  est utilisée pour le calcul contraintes équivalentes à travers une opération de multiplication matricielle :

$$[\mathbf{I}_1] = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

La matrice  $\mathbf{I}_2$  prend en compte  $\gamma_{ij}$  à la place des composantes de Green :

$$[\mathbf{I}_2]_{UMAT} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1/2 & & \\ & & & & 1/2 & \\ & & & & & 1/2 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Pour ce motif et pour appliquer le même algorithme à VUMAT (solveur explicite) la matrice  $\mathbf{I}_2$  doit être remplacée par la matrice identité  $\mathbf{I}$  du même ordre (6x6). Finalement,  $\mathbf{I}_d$  est utilisée pour extraire la partie déviatorique d'une matrice de contraintes :

$$[\mathbf{I}_d] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ -1 & -1 & 2 & & & \\ & & & 3 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 3 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Avec ces outils matriciels, il est possible de réécrire l'algorithme développé par Kobayashi et Ohno [2] en notation matricielle, exposé par la suite dans la section 3.1.3 .

### 3.1.3 Solution numérique du système d'équations

Par la suite sont réécrites sous une notation matricielle les équations de la lois de comportement de Chaboche (vue dans 1.3.5.4.1 et §1.3.5.4.2) et de la loi de Ohno et Wang (vue dans §1.3.5.4.3). Le système d'équations est le même pour les deux modèles sauf pour la dépendance de l'activation du terme évanescent en fonction du potentiel  $\mathcal{F}$  dans le modèle d'Ohno et Wang afin d'éviter la surestimation de l'accumulation de la déformation plastique (détaillé dans §1.3.5.4.3).

La stratégie consiste à implémenter la méthode implicite d'Euler pour résoudre les systèmes d'équations. Par convention, les tenseurs de première ordre (de dimension 6x1) seront représentés entre accolades, les tenseurs de deuxième ordre (6x6) entre crochets tandis que les valeurs scalaires seront libres. Ces équations peuvent être réécrites sous la



unidimensionnel.

La résolution du problème débute avec les variables constitutives connues à l'incrément  $n$  et à l'incrément de la déformation  $\Delta\varepsilon_{n+1}$ . En connaissant la valeur d'une des variables à l'incrément  $n + 1$ , il est possible de résoudre le système d'équations. Il est logique de proposer de résoudre la variation de la déformation plastique  $\Delta p_{n+1}$  en première instance puisqu'il s'agit d'une variable scalaire.

La variable  $\sigma_{n+1}^*$  représente le prédicteur du champs de contraintes. Il est obtenu en prenant l'hypothèse que la relation entre contraintes et déformations est élastique (voir [figure 3.1](#)).

$$\{\sigma_{n+1}^*\} = [\mathbf{D}^e][\mathbf{I}_2]\{\{\varepsilon_{n+1}\} - [\mathbf{I}_2]\{\varepsilon_n\}\}. \quad (3.17)$$

Afin de vérifier si le prédicteur ne se trouve pas à l'extérieur du seuil, la fonction de charge est vérifiée :

$$F_{n+1}^* = \frac{3}{2}\{\{S_{n+1}^*\} - \{X_n\}\}^T[\mathbf{I}_1]\{\{S_{n+1}^*\} - \{X_n\}\} - Y_n^2, \quad (3.18)$$

où  $\{S_{n+1}^*\}$  est la partie déviatorique de  $\sigma_{n+1}^*$ . Si  $F_{n+1}^* \geq 0$ . La sollicitation se trouve hors du seuil élastique et la valeur de  $\sigma_{n+1}$  doit être corrigée, en effectuant des substitutions dans (3.8), (3.9) et (3.17) :

$$\{\sigma_{n+1}\} = \{\sigma_{n+1}^*\} - [\mathbf{D}^e][\mathbf{I}_2]\{\Delta\varepsilon_{n+1}^p\}, \quad (3.19)$$

le terme  $\{\Delta\varepsilon_{n+1}^p\}$  est le correcteur plastique. Comme la plasticité est basée sur l'hypothèse d'un écoulement incompressible ( $trace \Delta\varepsilon^p = 0$ ) et compte tenu de l'hypothèse de l'isotropie élastique, il est possible d'établir la relation suivante :

$$[\mathbf{D}^e][\mathbf{I}_2]\{\Delta\varepsilon_{n+1}^p\} = 2\mu[\mathbf{I}_2]\{\Delta\varepsilon_{n+1}^p\}. \quad (3.20)$$

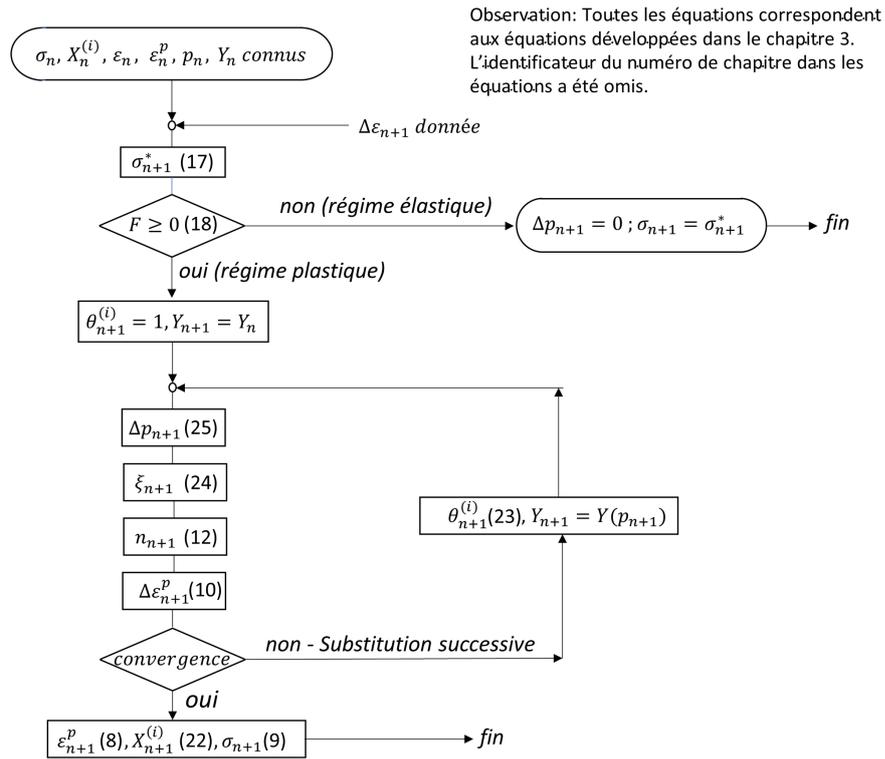


ment :

$$\begin{aligned} \{\xi'_{n+1}\} &= \{S_{n+1}^*\} - \sum_{i=1}^M \theta_{n+1}^{(i)} \{X_n^{(i)}\}, \\ \Delta p_{n+1} &= \frac{[\frac{3}{2}(\{\xi'_{n+1}\})^T [\mathbf{I}_1] \{\xi'_{n+1}\}]^{1/2} - Y_{n+1}}{3\mu + \sum_{i=1}^M \theta_{n+1}^{(i)} C^{(i)}}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

### 3.1.4 Méthode de résolution du système d'équations

Une méthodologie itérative est nécessaire pour déterminer la valeur  $\Delta p_{n+1}$ . En effet, celle-ci est fonction de  $\Delta \theta_{i+1}^{(i)}$  qui dépend de  $\Delta p_{n+1}$ . L'algorithme pour trouver la valeur est résumé dans le schéma de la figure 3.2. Une première solution de la valeur de  $\Delta \theta_{i+1}^{(i)}$  doit être estimée. Cette valeur permet de calculer  $\Delta p_{n+1}$ , puis  $n_{n+1}$  et  $\varepsilon_{n+1}^p$ . La connaissance de  $\Delta p_{n+1}$  permet aussi de recalculer une nouvelle valeur de  $\Delta \theta_{i+1}^{(i)}$ . Cette boucle est répétée jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit vérifié.



**Figure 3.2.** Diagramme de flux de l'algorithme intégrant les substitutions successives. *Adapté et modifié de [2]*

Cette méthodologie de résolution est connue sur le nom de méthode du point fixe ou de substitutions successives. Quand la valeur de  $\theta^{(i)}$  est égale à l'unité et  $Y$  est constant, le cas particulier d'écroissage cinématique linéaire de Prager est retrouvé. Si  $\Delta p^{(i)} = \Delta p$  correspond au modèle de Chaboche, pour le modèle d'Ohno et Wang une dernière condition est nécessaire où la variation de déformation plastique  $\Delta p^{(i)}$  dépend d'un nouveau

potentiel. L'équation (3.23) sera alors remplacée par les étapes décrites dans la section exposée ci-dessous.

### 3.1.5 Calcul de $\theta^{(i)}$ dans le modèle d'Ohno et Wang

Dans le chapitre 1, le modèle de Chaboche surestime les effets de récupération dynamique dûs au cumul de la déformation plastique lors de chargements cycliques. Le modèle de Ohno et Wang corrige cet effet en modifiant l'évolution de la déformation cumulée (qui se traduit aussi sur la variable  $\Delta\theta_{i+1}^{(i)}$ ). Soit le prédicteur de  $\{X_{n+1}^{(i)}\}$  donné par :

$$\{X_{n+1}^{*(i)}\} = \{X_{n+1}^{(i)}\} + \frac{2}{3}C^{(i)}[\mathbf{I}_2]\{\varepsilon_{n+1}^{(i)}\}, \quad (3.26)$$

et sa valeur scalaire équivalente associée :

$$\bar{X}_{n+1}^{*(i)} = \sqrt{\frac{3}{2}\{X_{n+1}^{*(i)}\}^T[\mathbf{I}_1]\{X_{n+1}^{*(i)}\}}. \quad (3.27)$$

L'équation (3.23) dans la boucle est substituée par :

$$\theta_{n+1}^{(i)} = \begin{cases} 1, & \bar{X}_{n+1}^{*(i)} \leq \frac{C^{(i)}}{\gamma^{(i)}} \\ \frac{C^{(i)}}{\gamma^{(i)}\bar{X}_{n+1}^{*(i)}}, & \bar{X}_{n+1}^{*(i)} > \frac{C^{(i)}}{\gamma^{(i)}} \end{cases} \quad (3.28)$$

### 3.1.6 Critère de convergence

Afin d'évaluer si la valeur  $\Delta p_{n+1}(k)$  converge, où  $k$  représente le numéro d'itération dans l'incrément, la condition de Lipschitz peut être appliquée :

$$|\Delta p_{n+1}(k+1) - p_{n+1}(k)| \leq L|\Delta p_{n+1}(k) - \Delta p_{n+1}(k-1)|, \quad (3.29)$$

où  $L$  est donné par :

$$L = \frac{|Y'_{n+1}|_{max} + \sum_{i=1}^M C^{(i)}}{3\mu + \sum_{i=1}^M C^{(i)}}. \quad (3.30)$$

Si le problème traité est un modèle cinématique pur (pas de variation de la taille de la surface du domaine élastique caractérisée par  $Y$ ), la valeur de  $L$  est réduite à [2] :

$$L = \frac{\sum_{i=1}^M C^{(i)}}{3\mu + \sum_{i=1}^M C^{(i)}}. \quad (3.31)$$

### 3.1.7 Calcul de la matrice Jacobienne

Dans les simulations par des éléments finis en utilisant une méthode implicite d'intégration (Abaqus/Standard) il faut déterminer la matrice jacobienne (ici représentée par  $d\Delta\sigma_{n+1}/d\Delta\varepsilon_{n+1}$ ) dans la sous-routine. Cette matrice est utilisée pour calculer la variation des déformations pour le nouvel incrément. Les équations qui donnent la réponse finale pour les deux cas étudiés sont fournies par la suite (le développement de la solution se trouve dans [2]).

La matrice Jacobienne prend la forme (pour le deux cas) :

$$\left[ \frac{d\Delta\sigma_{n+1}}{d\Delta\varepsilon_{n+1}} \right] = ([\mathbf{D}^e] - 4\mu^2[\mathbf{L}_{n+1}]^{-1}[\mathbf{I}_d])[\mathbf{I}_2]. \quad (3.32)$$

La matrice  $[\mathbf{L}_{n+1}]$  est calculée par :

$$[\mathbf{L}_{n+1}] = 2\mu[\mathbf{I}] + \sum_{i=1}^M [\mathbf{H}_{n+1}^{(i)}] + \frac{2}{3} \left( \frac{dY}{dp} \right)_{n+1} [\mathbf{I}][\{n_{n+1}\}\{n_{n+1}\}^T] + \frac{2}{3} \frac{Y_{n+1}}{\Delta p_{n+1}} ([\mathbf{I}] - [\{n_{n+1}\}\{n_{n+1}\}^T]). \quad (3.33)$$

La matrice  $[\mathbf{H}_{n+1}^{(i)}]$  prend des valeurs différentes en fonction du modèle.

Pour le modèle de Chaboche, la matrice  $[\mathbf{H}_{n+1}^{(i)}]$  est donnée par :

$$[\mathbf{H}_{n+1}^{(i)}] = \theta_{i+1}^{(i)} \left( \frac{2}{3} C^{(i)} [\mathbf{I}] - \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma^{(i)} [\{X_{n+1}^{(i)}\}\{n_{n+1}\}^T] \right). \quad (3.34)$$

Pour le modèle d'Ohno et Wang avant de donner l'expression de la matrice  $\mathbf{H}_{n+1}^{(i)}$  il faut d'abord considérer la fonction suivante :

$$g_{n+1}^{*(i)} = \frac{3}{2} \{X_{n+1}^{*(i)}\}^T \{X_{n+1}^{*(i)}\} - \left( \frac{C^{(i)}}{\gamma^{(i)}} \right)^2, \quad (3.35)$$

et le vecteur auxiliaire de première ordre  $m^{(i)}$  afin de simplifier l'expression finale :

$$\{m^{(i)}\} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\gamma^{(i)}}{C^{(i)}} \{X^{(i)}\}. \quad (3.36)$$

Finalement la fonction  $\mathbf{H}_{n+1}^{(i)}$  dans le modèle d'Ohno et Wang est donnée par l'expression :

$$\mathbf{H}_{n+1}^{(i)} = \frac{2}{3} \theta_{n+1}^{(i)} C^{(i)} ([\mathbf{I}] - \mathcal{H}(g_{n+1}^{*(i)}) \{m^{(i)}\} \{m^{(i)}\}^T), \quad (3.37)$$

où  $[\mathbf{I}]$  est la matrice identité de 6x6 et  $\mathcal{H}(g_{n+1}^{*(i)})$  est la fonction de Heaviside appliquée sur la fonction  $g_{n+1}^{*(i)}$ .

## 3.2 Caractérisation de l'état initial du matériau

Dans le chapitre 1 le cadre théorique d'une loi de comportement respectant les principes de la thermodynamique est développé. L'état du matériau est caractérisé par un ensemble de variables d'état qui dépendent du champ des contraintes, des déformations élastiques et inélastiques et des variables d'érouissage.

Les variables d'érouissage peuvent varier en fonction de chaque modèle spécifique.

Pour citer deux exemples : le modèle combiné de Chaboche utilise par exemple la variable scalaire  $R$  et une variable tensorielle (contrainte interne)  $\underline{X}$ , alors que le modèle anisotrope de HAH de Barlat utilise une variable scalaire  $R$  et le tenseur déviatorique de la micro-structure  $\underline{h}$ .

Afin de caractériser l'état du matériau, il est nécessaire de fournir les valeurs de ces variables. Chaque point de la pièce suit un historique de chargement différent, en fonction de la géométrie, des conditions aux limites et bien évidemment de la sollicitation. Ainsi les variables qui caractérisent l'état du matériau évoluent donc différemment pour chaque point.

Dans un problème utilisant la méthode des éléments finis, la pièce est discrétisée et les propriétés de chaque élément sont représentées par les valeurs des variables aux points d'intégration de l'élément. La variation continue de l'évolution des valeurs des variables est pourtant représentée par une cartographie des valeurs des variables aux points d'intégration de la pièce. En conséquence chaque élément va développer ces propres caractéristiques en fonction de son historique de chargement mais qui finalement dépend de l'ensemble de la pièce.

En considérant le cadre théorique exposé, les conditions initiales d'une pièce pour un procédé de déformation inélastique seront caractérisées par ses contraintes résiduelles, les déformations inélastiques et les variables d'écrouissage pour l'ensemble des points d'intégration.

En effet, quand le calcul est réalisé en plusieurs étapes mais dans une seule simulation, le logiciel prend en compte les valeurs de ces variables comme point de départ de l'étape suivante. Quand un remaillage n'est pas possible dans la même simulation, soit par une limitation du logiciel ou pour un changement de solveur, une nouvelle simulation avec le nouveau maillage est imposée. Les variables d'état doivent ainsi être interpolées aux nouveaux points d'intégration.

Selon le problème rencontré, les procédés à simuler ou les contraintes liées aux utilisateurs, il est parfois nécessaire d'utiliser des logiciels adaptés à chaque situation. Les solutions pour traiter ce type de problématique sont développées par la suite.

### **3.2.1 Exportation/importation de la géométrie et remaillage de la géométrie de la pièce**

Toute simulation de processus qui cumule plusieurs procédés successifs hérite de l'état de contraintes, de déformations et de variables d'écrouissage du procédé précédent. Dans la suite du document la simulation qui a permis de déterminer ces états est appelée "simulation source". En conséquence la géométrie obtenue constitue la géométrie de départ de la nouvelle simulation. Cette étape qui peut sembler triviale d'un point de vue logique, constitue un des verrous les plus importants pour initier la nouvelle simulation, plus spécialement pour les cas où la géométrie de la pièce est complexe.

Le logiciel Abaqus permet d'importer un maillage à partir du fichier résultat de la simulation source. Il est possible de réaliser alors une simulation mais il n'est pas possible

de modifier le maillage. Ce dernier peut néanmoins être utilisé pour créer une nouvelle géométrie et ensuite réaliser un remaillage. La géométrie obtenue à partir de ce maillage est facettisée et peut demander un travail important de lissage avant remaillage.

D'un point de vue général, cette opération peut également être réalisée en utilisant une méthodologie différente plus générale et indépendante d'Abaqus. Toutes les positions nodales à la fin de la simulation source sont connues, à partir de l'information des déplacements totaux. En conséquence, il est possible de créer un nuage de points à partir des positions de ces points nodaux. Cette information peut être utilisée pour créer un fichier `.stl` (fichier de stéréolithographie), en utilisant par exemple le logiciel ouvert MeshLab [15], ou des librairies comme `numpy-stl` [16], `open3d` [17], etc.

Le fichier de stéréolithographie peut être utilisé pour créer la nouvelle pièce maillée grâce à l'utilisation des logiciels de CAO tels que CATIA [18], PTC Creo Parametrics [19], FreeCAD [20] où des logiciels avec des outils de pré-traitement des données comme Altair HyperMesh [21]. Cette dernière étape peut être également implémentée. A partir d'une base de données de points, une géométrie peut être construite via un algorithme de morphologie. Cette méthode est abordée dans [22]. La figure 3.3 représente une synthèse graphique de la chaîne logique des opérations proposées pour adapter le maillage de la pièce aux besoins de la nouvelle simulation.

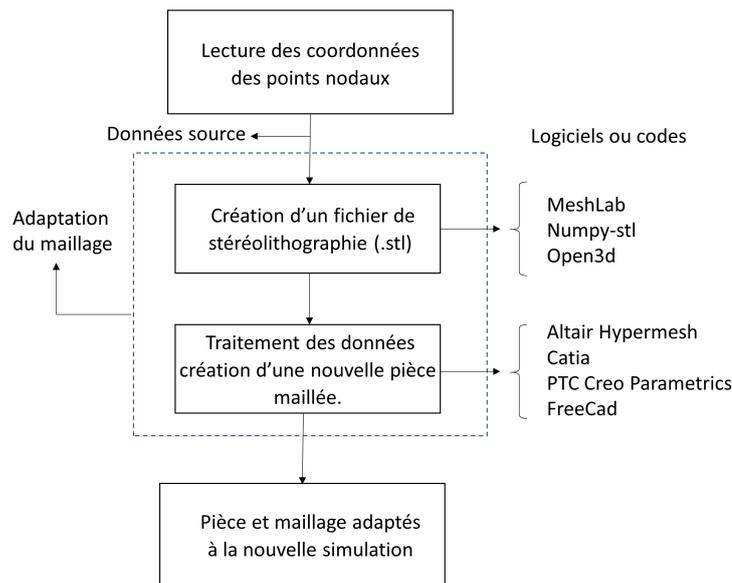


Figure 3.3. Diagramme des opérations pour adapter le maillage de la pièce pour une nouvelle simulation.

### 3.2.2 Interpolation des variables

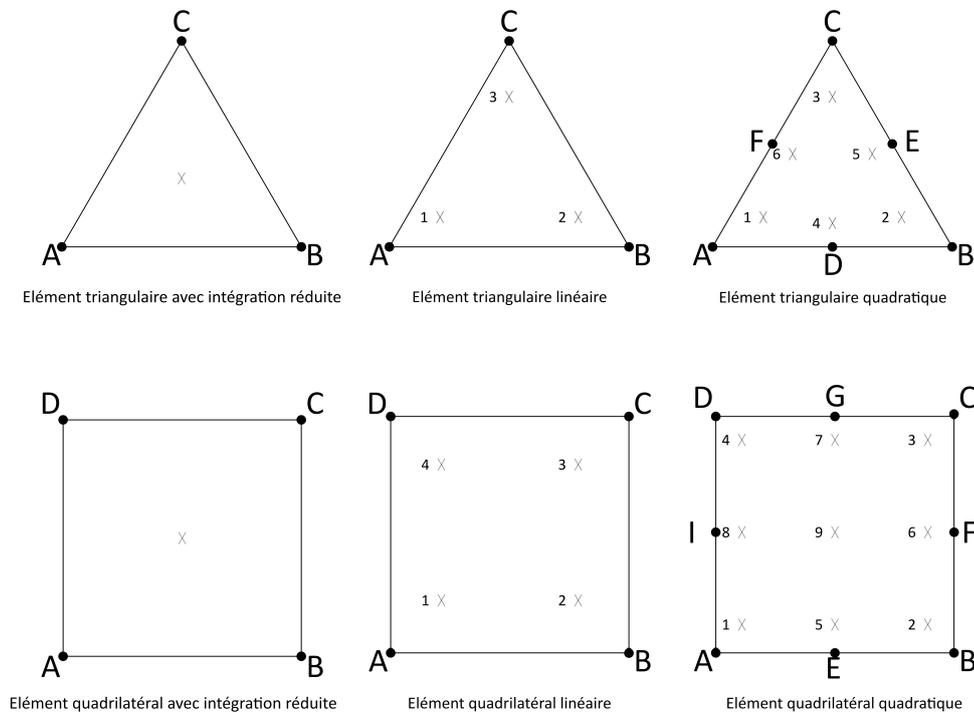
La distribution des valeurs des variables comme la déformation plastique, des contraintes résiduelles et des variables d'écrouissage est continue. Dans un problème d'éléments finis cette distribution de valeurs est représentée par la fonction d'interpolation à l'intérieur de chaque élément, qui est évaluée aux points d'intégration. La quantité et la position des points d'intégration sont données par le type d'élément choisi (linéaire réduit, linéaire, quadratique) et par la méthode d'intégration numérique (quadrature de

Gauss-Legendre).

Les figures 3.4 et la 3.5 représentent un cas bidimensionnel mais la démarche peut être appliquée en 3D. La figure 3.4 illustre les schémas d'intégration pour les éléments les plus utilisés.

La cartographie des variables de la simulation source, qui sera appelée le "maillage source" peut être composé par les points d'intégration, les point nodaux ou la combinaison de ces deux. L'inclusion des données aux points nodaux permet de conserver l'information sur la surface de la pièce en évitant de réaliser des extrapolations. Cette région est caractérisée par de forts gradients de contraintes, ce qui représente un double avantage du fait de l'augmentation de la densité des données de la simulation source.

• Point nodal    x Point d'intégration

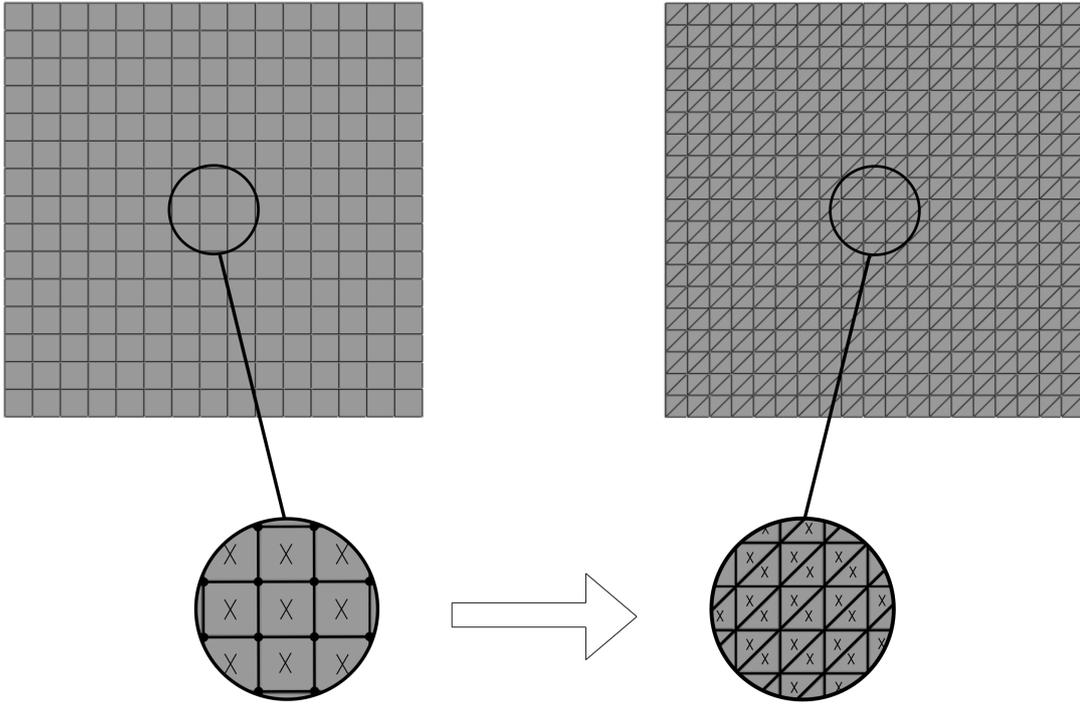


**Figure 3.4.** Comparaison de la quantité et position des nœuds et points d'intégration dans les éléments à deux dimensions.

L'interpolation des données nécessite de connaître la position exacte des points d'intégration de la pièce remaillée. Il faut donc définir le type d'élément à utiliser (linéaire avec intégration réduite, linéaire, quadratique, etc). Il est alors possible de générer un nuage de points avec l'ensemble des informations des points d'intégration. La figure 3.5 illustre un schéma de la distribution des données entre le maillage source (nœuds + points d'intégration) et le maillage ciblé (points d'intégration).

Il existe deux types de variables à interpoler : les variables scalaires et les variables tensorielles. L'interpolation des variables tensorielles est réduite à des interpolations scalaires où chaque composante du tenseur est traitée comme un scalaire. L'interpolation

du tenseur de contraintes par exemple, est composée de l'interpolation de ses six composantes (en tenant en compte de la symétrie du tenseur).



**Figure 3.5.** Schématisation d'interpolation des données dans le cas d'un raffinement de maillage.

### 3.2.2.1 Méthodes d'interpolation

Plusieurs méthodologies d'interpolation sont évaluées pour des cas 2D et 3D dans [23, 24, 25, 26, 27]. Certaines sont introduites par la suite.

#### 3.2.2.1.1 Méthode du point le plus proche

Soit  $M(x)$ ,  $M(y)$  et  $M(z)$  les coordonnées d'un point  $M$  (point à interpoler), et soit  $N_i$  la représentation générique d'un point dans la maille source avec des coordonnées données par  $N(x)$ ,  $N(y)$  et  $N(z)$ .  $N_{proche}$  sera le point  $N_i$  qui minimise la fonction  $d_i$  :

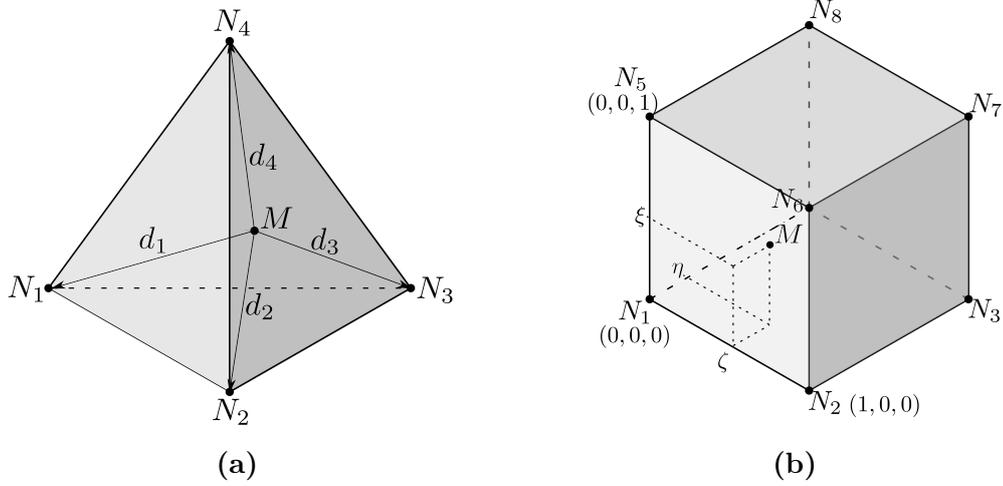
$$d_i = \sqrt{(N_i(x) - M(x))^2 + (N_i(y) - M(y))^2 + (N_i(z) - M(z))^2}. \quad (3.38)$$

Cette méthodologie indique que les valeurs de variables au point  $M$  seront les mêmes que  $N_{proche}$ . Cette stratégie peut être utilisée dans les cas où la maille source est plus dense que la maille cible. Le cas contraire peut générer des erreurs importantes donc son usage est déconseillé [23].

#### 3.2.2.1.2 Méthode de la pondération linéaire

La méthode de la pondération linéaire permet de déterminer la valeur de la variable au point  $M$  par une interpolation multi-linéaire en fonction des quatre points les plus proches dans le maillage source. Si  $N_1, N_2, N_3$  et  $N_4$  sont des points du maillage source,

tels qu'ils forment les apex du tétraèdre de volume le plus faible possible contenant  $M$ , et  $d_1, d_2, d_3$  et  $d_4$  les distances du point  $M$  par rapport à ces points (voir [figure 3.6a](#)).



**Figure 3.6.** **Fig. 3.6a)** Interprétation des variables utilisées dans la méthode d'interpolation de la pondération linéaire. **Fig. 3.6b)** Position du point à interpoler en fonction des coordonnées locales.

La fonction d'interpolation est exprimée par la fonction suivante :

$$D_M = D_{N_1} \frac{k_1}{\sum_{n=1}^4 k_n} + D_{N_2} \frac{k_2}{\sum_{n=1}^4 k_n} + D_{N_3} \frac{k_3}{\sum_{n=1}^4 k_n} + D_{N_4} \frac{k_4}{\sum_{n=1}^4 k_n}, \quad (3.39)$$

où  $D_{N_i}$  est la valeur de la variable à chaque point  $N_i$  considéré, et le facteur  $k_i$  est un facteur de pondération obtenu en fonction de sa distance  $d_i$  au point  $M$  :

$$k_i = \frac{\sum_{n=1}^4 d_n}{d_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (3.40)$$

Cette méthode est satisfaisante tant pour un raffinement comme pour un grossissement du maillage.

### 3.2.2.1.3 Méthode d'interpolation par des fonctions de forme

De manière analogue à la méthode des éléments finis qui définit une fonction de forme pour chaque élément afin d'évaluer la valeur d'une variable à l'intérieur ou sur la surface de l'élément, il est possible de définir des fonctions de forme en fonction des coordonnées locales (voir [figure 3.6b](#)) pour réaliser une interpolation. Ces fonctions de forme peuvent être linéaires, quadratiques, cubiques, etc.

De la même façon que la méthode précédente, il faut identifier les points du maillage source qui déterminent le tétraèdre ou hexaèdre de volume le plus faible qui contient le point à interpoler. Des algorithmes pour cette opération ont été développés dans [23] et [27]. Ainsi la valeur de la variable  $D_M$  (composante de déformation, de contrainte, de contrainte interne, etc.) interpolée par des fonctions de forme linéaires entre 8 points (hexaèdre) s'exprime sous la forme :

$$D_M = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} (1 - \zeta)(1 - \eta)(1 - \xi)D_1 + (1 + \zeta)(1 - \eta)(1 - \xi)D_2 + \\ +(1 + \zeta)(1 + \eta)(1 - \xi)D_3 + (1 - \zeta)(1 + \eta)(1 - \xi)D_4 + \\ +(1 - \zeta)(1 - \eta)(1 + \xi)D_5 + (1 + \zeta)(1 - \eta)(1 + \xi)D_6 + \\ +(1 + \zeta)(1 + \eta)(1 + \xi)D_7 + (1 - \zeta)(1 + \eta)(1 + \xi)D_8 \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

où  $\zeta, \eta$  et  $\xi$  sont les coordonnées du point  $M$  dans le repère local de l'élément formé. Pour le cas de l'interpolation entre quatre points (tétraèdre), la fonction d'interpolation devient :

$$D_M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 - \zeta - \eta)(1 - \xi)D_1 + \zeta(1 - \xi)D_2 + \eta(1 - \xi)D_3 + \\ +(1 - \zeta - \eta)(1 + \xi)D_4 + \zeta(1 + \xi)D_5 + \eta(1 + \xi)D_6 \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Cette méthodologie présente les mêmes avantages que la méthodologie précédente, mais l'obtention des coordonnées dans le repère local implique un calcul non linéaire ([23, 27]).

### 3.2.3 Format du fichier des conditions initiales

Une fois le processus d'interpolation des variables termine, il faut tenir compte du format d'arrangement des variables pour le solveur de destination.

Afin de générer le tableau avec les conditions initiales de la nouvelle simulation il faudra prendre en compte :

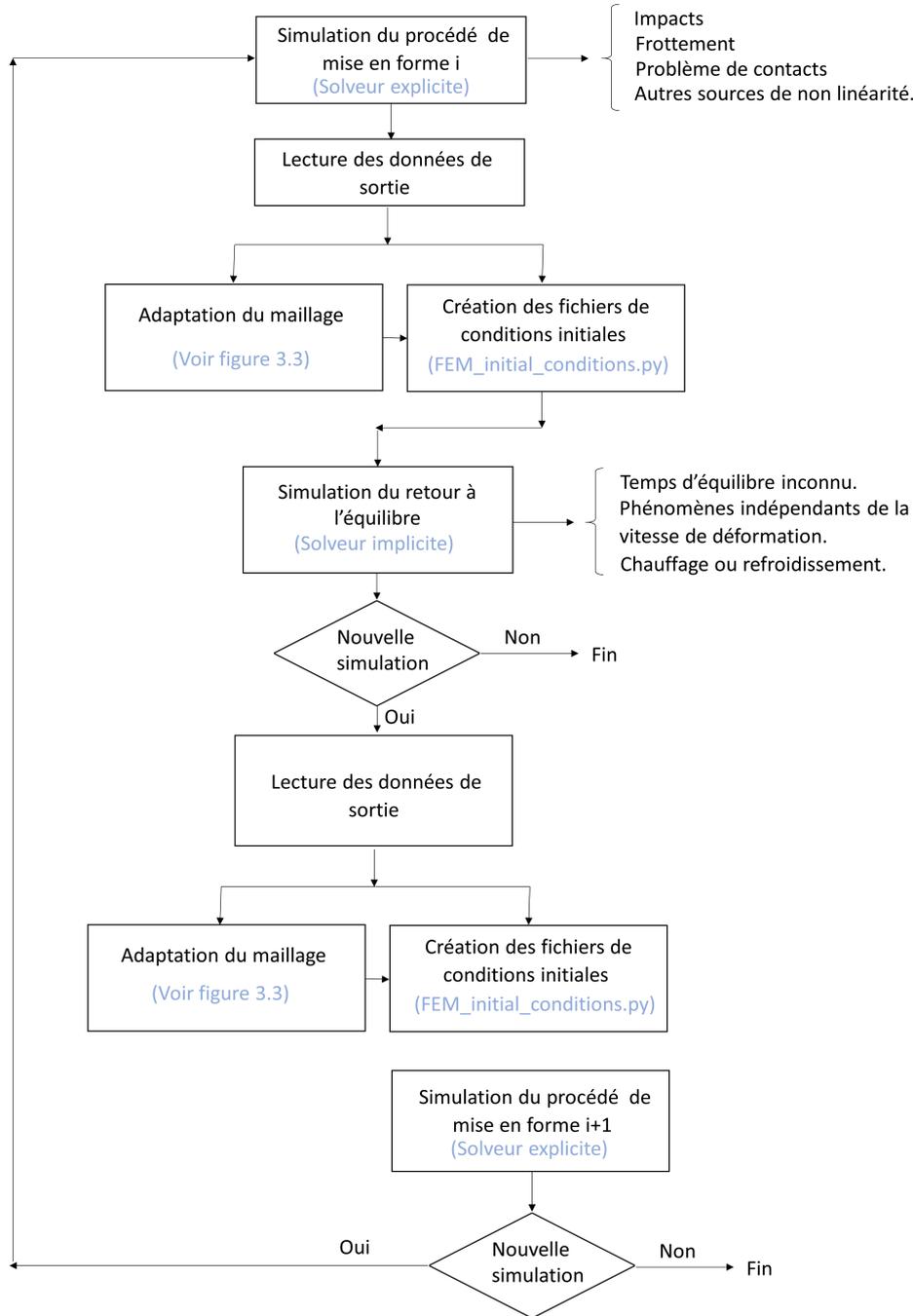
- Le format général : éléments à fournir (le nom de pièce et le numéro du point d'intégration), élément pour séparer les variables (virgule, tabulation, etc.), quantité maximale de variables à fournir dans une seule ligne.
- L'ordre des variables : ordre des composantes des variables tensorielles en fonction de la direction de la composante.
- Le système de représentation des composantes de déformation : les composantes de cisaillement sont habituellement représentées soit par  $\varepsilon_{ij}$  ou par  $\gamma_{ij}$  avec  $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ .

### 3.2.4 Synthèse et méthodologie proposée

Les différents éléments présentés dans ce chapitre sont nécessaires pour réaliser la simulation d'une succession de procédés. Une méthodologie générale à appliquer est présentée dans le schéma de la [figure 3.7](#).

Ce schéma montre la simulation d'un procédé en considérant deux étapes (avec deux solveurs différents). La première étape dont la mise en forme est réalisée et caractérisée par des impacts, chocs, frottement ou autre source de haute non linéarités, elle utilise un solveur explicite (discuté dans la section §3.1). La deuxième étape de la simulation (du même procédé) consiste à trouver la configuration d'équilibre de la pièce lorsque les sollicitations externes s'arrêtent. Ce type de simulation permet de déterminer la solution de manière plus efficace avec une méthode implicite (dans les conditions de simulation adéquates établies dans §3.1). Néanmoins, il peut y avoir des procédés qui ne nécessitent

pas deux étapes de modélisation.



**Figure 3.7.** Méthodologie générale proposée pour caractériser les l'interaction entre les procédés.

L'implémentation de sous-routines permet d'avoir accès à toutes les variables à la fin de toute simulation, ce qui n'est pas toujours possible en utilisant des lois de comportement intégrées dans les bibliothèques du logiciel. La lecture des données doit associer à chaque nœud et point d'intégration ses coordonnées et valeurs des variables afin de créer le nuage de points source. Les outils créés pour la lecture des données de sortie seront présentés au §3.2.5.

## 3.2.5 Présentation des outils numériques développés

Les données nécessitent une étape de traitement pour réaliser la lecture, l'interpolation et l'exportation. Un ensemble de fonctions appelé `FEM_initial_conditions.py` développé en langage Python a été créé afin de faciliter cette tâche. La version du code présentée est liée au logiciel de calcul Abaqus. Il est formaté pour être généralisé à d'autres codes de calcul.

Cette partie est une présentation du code créé et expose ses capacités et limitations. La documentation et les conditions d'application sont données dans les annexes.

### 3.2.5.0.1 Lecture des données de sortie

Pour le code Abaqus, il existe trois possibilités de récupération des données :

- À travers d'un fichier `.odb` (fichier crypté et exploitable uniquement avec Abaqus).
- À travers un fichier texte de sortie `.dat` pour Abaqus/Standard et un fichier `.fill` dans le cas d'Abaqus/Explicit. La sortie des données sous ces formats doit être demandée avant de lancer le calcul (plus de détails dans l'annexe B.II).
- À travers un fichier de texte `.rpt` à la fin de la simulation. L'ordre et le format de sortie des données avec ce formatage rend complexe l'automatisation de la lecture des données (plus de détails dans les annexes B.II) .

L'ensemble de fonctions `FEM_initial_conditions.py` travail avec le fichier `.odb`.

### 3.2.5.0.2 Création des nuages de points source et cible

La création du maillage source avec `FEM_initial_conditions.py` est réalisée à partir du résultat de la simulation source. Il peut être créé avec les résultats obtenus aux points nodaux ou à partir de la combinaison des valeurs aux points nodaux et aux points d'intégration. Le maillage source est enregistré comme une matrice de dimension  $m \times 3$  où  $m$  est le nombre de points dans le nuage. La description des étapes à suivre pour réaliser cette tâche se trouve dans la documentation dans l'annexe B.

Dès que la géométrie de la pièce est récupérée lors de la simulation source et le nouveau maillage réalisé, la position des points d'intégration doit être calculée. Une simulation sans condition initiale et sans chargement se réalise avec le nouveau maillage. Les fichiers de sortie vont générer les coordonnées des points d'intégration. Avec cette information `FEM_initial_conditions.py` va générer la matrice de points de  $n \times 3$  où  $n$  est le nombre des points d'intégration de la modélisation cible.

A partir des coordonnées du nuage de points et des valeurs de variables en ces points, `FEM_initial_conditions.py` est capable de réaliser l'interpolation et produire les fichiers avec les conditions initiales.

### 3.2.5.0.3 Interpolation et création des fichiers de conditions initiales

La méthode d'interpolation utilisée est la méthode de pondération linéaire (méthode `griddata` de la librairie `Scipy` de Python). A partir de l'interpolation, l'application `FEM_initial_conditions.py` génère des fichiers de conditions initiales au format requis par Abaqus.

La version proposée ne s'applique qu'aux deux solveurs présentés. Il pourra être développé des interfaces qui permettent d'utiliser d'autres fonctions d'interpolation et d'autres solveurs en respectant la méthodologie présentée.

## Conclusion

Dans ce chapitre ont été développés les éléments nécessaires pour caractériser numériquement l'état de la matière et réaliser la simulation d'un enchaînement de procédés.

La création de sous-routines a deux avantages quand ce type de modélisation est envisagé : *i*) toute loi de comportement qui est thermodynamiquement bien définie, est utilisable avec différents logiciels, *ii*) on peut obtenir toutes les données liées aux variables d'érouissage ce qui n'est pas forcément possible lorsqu'on utilise les lois de comportement implémentées dans les bibliothèques natives du logiciel. Dans cette situation, il est possible de généraliser une méthodologie à suivre pour réaliser le procédé d'importation/exportation des données entre deux simulations successives laquelle peut être étendue à une chaîne de plusieurs procédés.

L'algorithme d'application de deux lois de comportement capables de modéliser l'effet Bauschinger a été revu et les équations ont été adaptées à une notation matricielle afin de simplifier l'écriture de sous-routines pour toutes les conventions utilisées.

En utilisant la méthodologie proposée d'exportation des données, la simulation d'un seul procédé en deux ou plusieurs étapes peut être avantageuse en utilisant des solveurs différents, en fonction de leur attributs et des caractéristiques de l'étape à simuler.

Le code `FEM_initial_conditions.py`, qui applique la méthodologie proposée, a été développé afin de faire l'exportation des données entre deux simulations avec Abaqus. Ce code est construit pour permettre l'intégration de nouvelles fonctionnalités pour faciliter les échanges de données entre plusieurs solveurs.

## Bibliographie

- [1] Hibbitt and Karlsson and Sorensen. *ABAQUS : theory manual*. 1997.
- [2] Kobayashi, M. and Ohno, N. Implementation of cyclic plasticity models based on a general form of kinematic hardening. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 53(9) :2217-2238. 2002

- [3] Kobayashi, M. and Mukai, M. and Takahashi, H. and Ohno, N. and Kawakami, T. and Ishikawa, T. Implicit integration and consistent tangent modulus of a time-dependent non-unified constitutive model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 58(10) :1523-1543. 2003.
- [4] Hartmann, S. and Haupt, P. Stress computation and consistent tangent operator using non-linear kinematic hardening models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 36(22) :3801-3814. 1993.
- [5] Han, J. and Marimuthu, K.P. and Koo, S. and Lee, H. Numerical implementation of modified Chaboche kinematic hardening model for multiaxial ratcheting. *Computers & Structures*. 231 :106222. 2020.
- [6] Lopes, J.P. and Malcher, L. Implicit implementation of Chaboche cyclic plasticity model. *CILAMCE 2015 proceedings of the XXXVI Iberian Latin-American congress on computational methods in engineering*. 2015
- [7] Doghri, I. Fully implicit integration and consistent tangent modulus in elasto-plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 36(22) :3915-3932. 1993
- [8] Sawyer, J.P.G. and Wang, C.H. and Jones, R. An implicit algorithm using explicit correctors for the kinematic hardening model with multiple back stresses. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 50(9) :2093-2107. 2001.
- [9] Kumar, S. and Patel, B.P. A novel accurate and computationally efficient integration approach to viscoplastic constitutive model *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 122(1) :219-234. 2021.
- [10] Kullig, E. and Wippler, S Numerical integration and FEM-implementation of a viscoplastic Chaboche-model with static recovery. *Computational Mechanics*. 38(6) :1-13. 2006.
- [11] Ghaei, A. and Green, D.E. Numerical implementation of Yoshida-Uemori two-surface plasticity model using a fully implicit integration scheme. *Computational Materials Science*. 48(1) :195-205. 2010.
- [12] Lee, J. and L., M-G. and Barlat, F. and Kim, Ji H. Stress integration schemes for novel homogeneous anisotropic hardening model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 247 :73-92. 2012.
- [13] Yoon, S-Y. and Lee, S-Y. and Barlat, F. Numerical integration algorithm of updated homogeneous anisotropic hardening model through finite element framework *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 372 :113449. 2020.
- [14] Cailletaud, G. and Taleb, L. and Sai, K. *Multi-mechanism Modeling of Inelastic Material Behavior*. 2017.
- [15] Cignoni, P., Corsini, M. and Ranzuglia, G. MeshLab : an Open-Source 3D Mesh Processing System. *ERCIM News*, 2008.
- [16] Van Hattem,R. *Numpy-stl 2.11.2*. 2020.
- [17] Zhou, Q. Y., Park, J., and Koltun, V. (2018). *Open3D : A modern library for 3D data processing*.2018.
- [18] BIOVIA, Dassault Systèmes, CATIA V5, *Dassault Systèmes*, 2022.
- [19] Lamit, L.G. *PTC Creo TM Parametric 3.0*. Cengage Learning. 2015.

- [20] Riegel, J. and Mayer, W. and Van Havre, Y. *FreeCAD*. 2022.
- [21] HyperWorks. HyperMesh. *Altair Engineering, Inc.* 2017.
- [22] Mocanu, B.C. Doctoral dissertation, Evry, Institut national des télécommunications. *3D mesh morphing*. 2012.
- [23] Afazov, Shukri. Doctoral dissertation - University of Nottingham. *Simulation of manufacturing processes and manufacturing chains using finite element techniques*. 2009.
- [24] Oostendorp, T.F. and Van Oosterom, A. and Huiskamp, G. Journal of Computational Physics. *Journal of Computational Physics*. 80(2) :331-343. 1989.
- [25] Shirman, Leon A. and Séquin, Carlo H. Local surface interpolation with Bézier patches : Errata and improvements. *Computer Aided Geometric Design*. 8(3) :217-221. 1991.
- [26] Bourke, P. Interpolation methods *Miscellaneous : projection, modelling, rendering*. 1(10). 1999.
- [27] Silva, G. HC and Le Riche, R. and Molimard, J. and Vautrin, A. Exact and efficient interpolation using finite elements shape functions *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*. 18(3-4) :307-331. 2009.
- [28] Ohno, N. and Wang, J-D. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, part I : formulation and basic features for ratchetting behavior. *International Journal of Plasticity*. 9(3) :375-390. 1993.

## Analyse comparative des méthodes de mesure de champ de contraintes résiduelles

### 4.1 Introduction

Ce chapitre est dévolu à la comparaison de deux modèles d'évaluation des contraintes résiduelles présentés dans le chapitre 2 (modèles de Prime Hill et d'Olson) avec la méthodologie développée. Les profils de contraintes utilisés sont générés numériquement pour évaluer de manière objective l'erreur effective de chaque modèle. Un niveau de bruit sévère est appliqué aux données de déformation générées afin de simuler des conditions de mesure plus défavorables qu'en utilisant un bon protocole, ceci afin d'évaluer la performance de chaque méthodologie.

### 4.2 Méthodologie

Les trois méthodes seront évaluées à partir de données générées numériquement. La connaissance d'un profil de contraintes connu permettra d'évaluer l'erreur et les incertitudes de chaque méthode. Les étapes générales (décrites en détail dans les sections suivantes) sont :

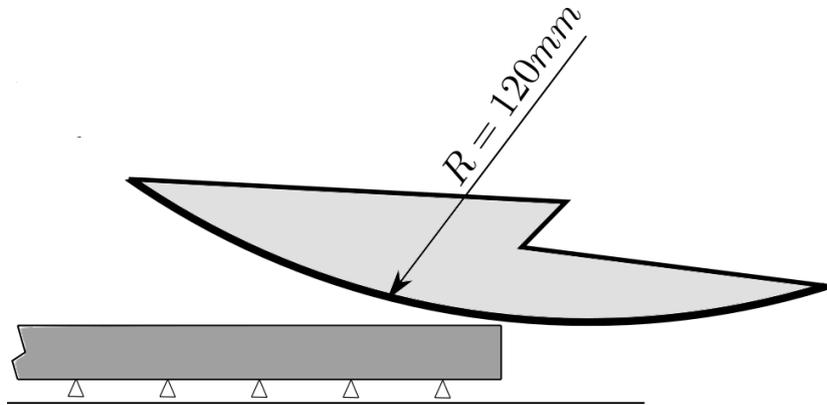
- Simulation numérique d'un procédé de laminage afin de créer un profil de contraintes résiduelles (PCR) connu. Étape détaillée dans la section §4.2.1.1
- Calcul des déformations qui seraient obtenues en appliquant la méthode de coupe incrémentale pour la mesure de contraintes résiduelles. Étape détaillée dans la section 4.2.1.2
- Ajout de bruit aux champs de déformations obtenues dans l'étape précédente, afin de simuler le bruit d'une mesure réelle. Étape détaillée dans la section §4.2.1.2
- La méthodologie développée ainsi que celles de référence [1, 2] seront appliquées sur l'ensemble des données de déformation, sans et avec bruit ajouté.

## 4.2.1 Génération des données

### 4.2.1.1 Profil de contraintes résiduelles

L'idée est de générer un *PCR* complexe. Cela apportera de la pertinence aux résultats de comparaison entre la méthodologie développée et les méthodologies de référence [1, 2].

La simulation numérique d'un procédé de laminage sur quatre passages de rouleaux est utilisée pour générer un *PCR* sur une pièce prismatique métallique. Le méplat d'épaisseur originale égale à 16,16 mm est aminci en 4 passes entre deux rouleaux de rayon 120 mm. La distance entre la fibre neutre de la pièce et l'axe d'un rouleau est respectivement 128; 127,97; 127,97 et 127,97 mm pour chaque passe (figure 4.1).



**Figure 4.1.** Schéma partiel des conditions de simulation du laminage du méplat.

L'épaisseur finale obtenue du méplat est de 15,99 mm.. La simulation a été menée en utilisant la loi de comportement de Johnson Cook :

$$\sigma = [A + B(\varepsilon_p)^n] \left[ 1 + C \left( \frac{\dot{\varepsilon}_p}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right] \left[ 1 - \left[ \frac{(T - T_0)}{(T_m - T_0)} \right]^m \right], \quad (4.1)$$

où  $\dot{\varepsilon}_0$  est la vitesse de déformation de référence laquelle a été utilisée pour calculer les paramètres  $A$  et  $B$  à la température ambiante  $T_0$ . Les paramètres de l'acier AISI 1045 de cette loi sont présentés dans le tableau 4.1 :

E	$\nu$	A	B	n	m	C	$\dot{\varepsilon}$
205000	0,29	615,8	667,7	0,255	1,078	0,0134	1

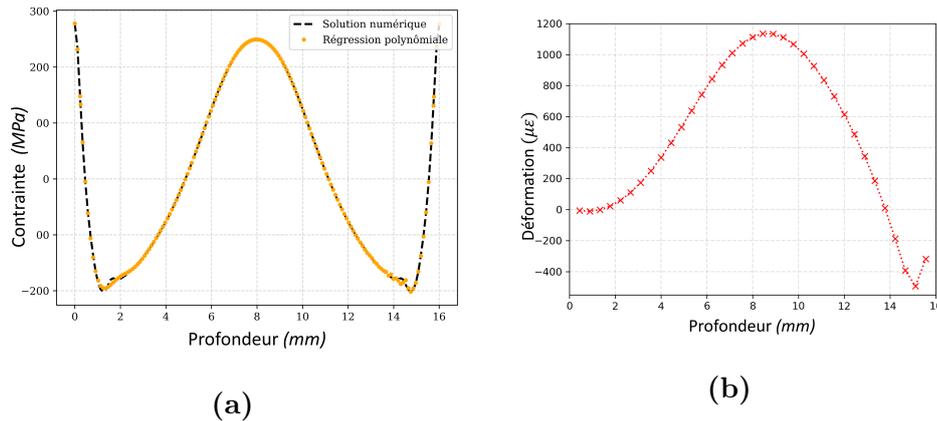
Tableau 4.1 – Paramètres de la loi de Johnson Cook correspondants à l'acier AISI 1045. Module de Young et contraintes en MPa. Données extraites de [3].

Les rouleaux sont considérés parfaitement rigides. Leurs vitesses de rotation pour les 4 passes sont respectivement de 8,33; 9; 9,1 et 9,2 rad/s. La simulation considère que le problème est symétrique par rapport à la fibre neutre, des effets thermiques négligeables et un état de contraintes plane. Un total de 82 éléments CPE4R de la même taille dans

Ordre Polynôme	Multiplicateur	Ordre Polynôme	Multiplicateur
2	-199.65	15	-6.98
4	363.84	16	-23.78
5	-3.93	17	-4.70
6	42.53	18	-0.48
7	-4.31	21	3.12
8	117.71	23	4.59
9	0.18	24	-3.61
10	12.59	25	0.55
12	-17.07	26	0.16
13	-4.61	28	-0.01
14	-30.33		

Tableau 4.2 – Multiplicateurs des polynômes de Legendre utilisés pour reproduire la solution numérique.

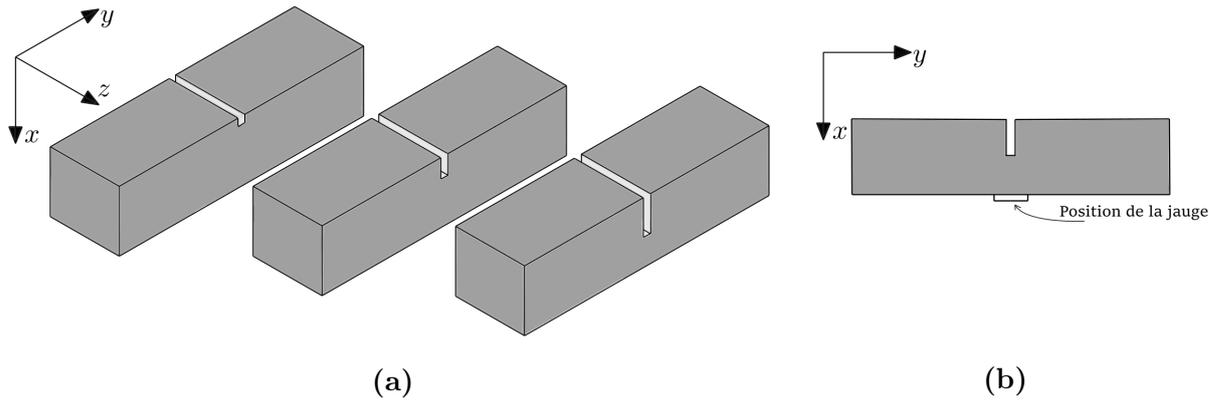
la direction de l'épaisseur ont été utilisés. Le *PCR* obtenu est situé sur une section non soumise à des effets de bord.



**Figure 4.2.** **Fig. 4.2a)** Comparaison d'une régression polynomiale à partir des données obtenues par une simulation numérique. **Fig. 4.2b)** Historique des déformations obtenues au point de mesure en fonction de la profondeur de la coupe.

#### 4.2.1.2 Génération des données de déformation

Le champ discrétisé du *PCR* est ensuite soumis à une régression polynomiale sur une épaisseur normalisée (de 0 à 1) de façon à obtenir une expression analytique du profil. Ce profil de contraintes sera utilisé comme profil de donnée  $\sigma_D$  dans le problème, avec lequel les différentes solutions seront comparées afin d'évaluer l'erreur. L'expression analytique permet l'application des équations développées par Cheng et Finnie [7] pour calculer l'historique des déformations (figure 4.2b) qui seraient générées lors d'une campagne de coupe orthogonale à la direction du laminage (direction selon  $z$  dans le schéma de la figure 4.3). Les valeurs des déformations (obtenues dans la direction du laminage) sont prises sur la base opposée à la coupe ( figure 4.3b et la figure 4.3a).



**Figure 4.3.** Fig.

**4.3a)** Schéma de l'évolution de la campagne des coupes/fentes sur le méplat, dans la direction perpendiculaire à l'effort à mesurer. **Fig. 4.3b** ) Position considérée de la jauge pour le calcul des déformations dans l'exemple.

Le résultat de la régression est illustré sur la [figure 4.2a](#) en lignes pointillées oranges. Le résultat correspond à une composition linéaire des polynômes de Legendre dont la composition est décrit dans le tableau [4.2](#), défini pour une épaisseur normalisée entre 0 et 1.

Ainsi les déformations qui seraient obtenues au point de mesure indiqué avec cette PCR sont illustrées dans la tableau [4.3](#) :

Profondeur (mm)	Déformation ( $\mu\varepsilon$ )	Profondeur (mm)	Déformation ( $\mu\varepsilon$ )	Profondeur (mm)	Déformation ( $\mu\varepsilon$ )
0,44	-6,20	3,56	249,57	6,67	933,17
0,89	-10,55	4,00	335,84	7,11	1010,67
1,33	-1,45	4,44	430,99	7,55	1071,58
1,78	22,22	4,89	532,63	8,00	1113,45
2,22	59,52	5,33	637,67	8,44	1134,50
2,67	110,23	5,78	742,35	8,89	1133,61
3,11	173,91	6,22	842,35	9,33	1110,70
	Profondeur (mm)	Déformation ( $\mu\varepsilon$ )	Profondeur (mm)	Déformation ( $\mu\varepsilon$ )	
	9,78	1067,02	12,89	344,33	
	10,22	1004,84	13,33	186,46	
	10,67	926,72	13,78	10,01	
	11,11	834,85	14,22	-188,05	
	11,55	730,63	14,67	-393,43	
	12,00	614,70	15,11	-493,57	
	12,44	486,47	15,55	-319,09	

Tableau 4.3 – Déformations calculées pour les différentes épaisseurs des coupes à partir du profil de contraintes résiduelles (PCR) obtenu par simulation numérique.

Néanmoins, dans tout procédé de mesure il y a des sources d'erreur. Afin de simuler un procédé réel de mesure, on se propose d'ajouter du bruit de mesure au champ de

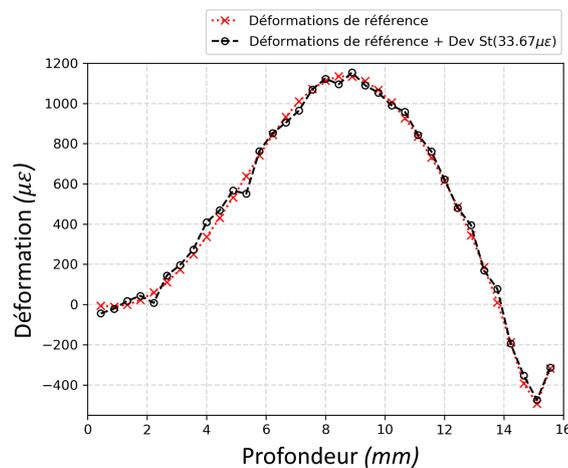
déformation de référence. Le bruit ajouté est aléatoire avec une distribution normale moyenne pour chaque ensemble (tableau 4.4) :

N <sup>o</sup>	Bruit moyen $\mu\epsilon$	N <sup>o</sup>	Bruit moyen $\mu\epsilon$
1	33,67	#7	46,89
2	39,63	#8	43,67
3	41,05	#9	42,44
4	33,39	#10	38,83
5	41,39	#11	45,11
6	41,66	#12	0

Tableau 4.4 – Déviation standard du bruit ajouté à chaque ensemble de données.

Le niveau de bruit durant ce type de mesure, quand la coupe est réalisée en utilisant un procédé d'électro érosion a une déviation standard de  $\approx 2\mu\epsilon$  et l'erreur moyenne de la jauge de déformation  $e \approx 0,5\mu\epsilon$  [2]. Le bruit synthétique moyen ajouté pour évaluer la méthode d'évaluation des contraintes résiduelles proposée est largement supérieur (déviation standard  $\approx 40\mu\epsilon$ ).

La figure 4.4 montre une comparaison entre les déformations de référence et l'ensemble des données de déformations N1 du tableau 4.4 (bruit ajouté de déviation standard de  $33,67\mu\epsilon$ ).



**Figure 4.4.** Comparaison entre les déformations de référence sans bruit et l'ensemble des données N<sup>o</sup>1 avec un bruit de déviation standard égal à  $33,67\mu\epsilon$ .

Avec ce type de procédé il est possible de mesurer des contraintes résiduelles à la méso-échelle, des essais avec un incrément de profondeur de passe égal à  $0.05mm$  ont été réalisés par [8].

## 4.2.2 Résultats obtenus

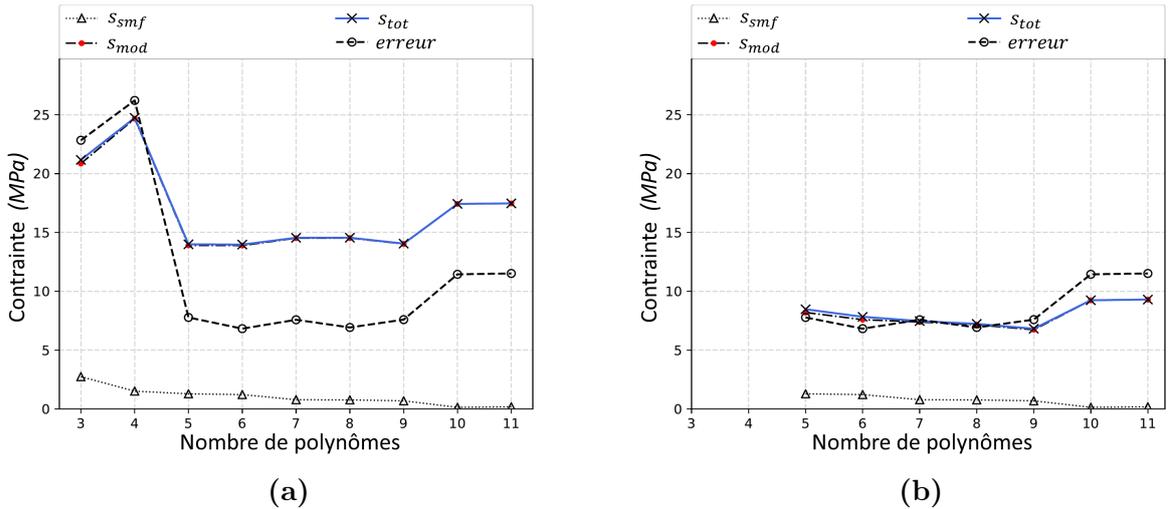
### 4.2.2.1 Évaluation de la nouvelle méthodologie en absence de bruit

Les critères utilisés pour évaluer les résultats sont : la valeur moyenne de l'incertitude évaluée sur tous les points de mesure, la précision moyenne de cette incertitude ainsi que l'erreur réelle de la solution obtenue. La précision de l'incertitude est vérifiée si la contrainte donnée  $\sigma_{D_i}$  tombe dans l'intervalle :

$$\sigma_{calc,i} - s_{tot,i} \leq \sigma_{D_i} \leq \sigma_{calc,i} + s_{tot,i}. \quad (4.2)$$

L'hypothèse selon laquelle l'erreur varie avec une distribution normale autour de la moyenne est prise en compte. Cela signifie que si l'incertitude est correcte, 68% des mesures doivent être à l'intérieur de l'intervalle de l'équation 4.2 [1].

Afin d'évaluer la capacité de la nouvelle méthodologie à estimer l'erreur due à la troncature de la série (erreur du modèle), il faut vérifier son comportement pour une configuration sans bruit de mesure, où le seul paramètre qui provoque d'erreur est la troncature (élimination du nombre de polynômes) du système.



**Figure 4.5.** Fig 4.5a) Évolution des composantes des incertitudes et de l'erreur réelle en fonction du nombre de polynômes avant la dernière étape de tri. Fig 4.5b) Évolution des composantes des incertitudes et de l'erreur réelle en fonction du nombre de polynômes après la dernière étape de tri avec un paramètre  $\alpha = 2$ .

La figure 4.5 montre deux graphiques où des erreurs et incertitudes moyennes sont exprimées en fonction du nombre de polynômes utilisés, pour le cas où les données de déformation sont libres de bruit (ensemble de données N12). La figure 4.5a correspond aux résultats obtenus avant le dernier triage (détaillé dans la section §2.2.5.4.3) et la figure 4.5b le résultat après cette dernière étape de tri avec un paramètre  $\alpha = 2$ . Dans les deux cas, l'incertitude due à la propagation de l'incertitude dans les déformations ( $s_{smf}$ ) est faible et laisse l'incertitude du modèle comme la principale variable à étudier.

Dans le cas de la figure 4.5a, l'incertitude totale  $S_{tot}$  trouve un minimum pour la solution correspondante à 5 polynômes. Bien que l'erreur minimale corresponde à la solution composée par 6 polynômes, tous les résultats entre 5 et 10 polynômes présentent

des erreurs avec le même ordre de grandeur. Même si le résultat prédit est correct, l'écart entre les courbes des erreurs et incertitudes reste important, cela que signifie que les incertitudes sont surestimées.

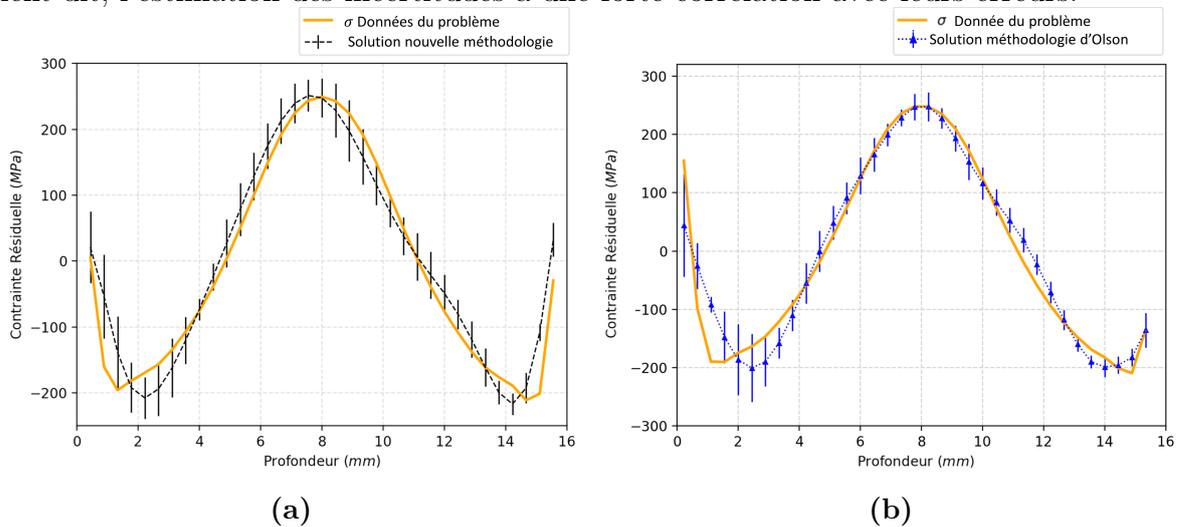
Un des objectifs de la dernière étape de tri est de réduire cette surestimation en éliminant l'ensemble des solutions qui ne satisfont pas la condition de l'équation 2.41, dans ce cas, les solutions les plus éloignées de la solution avec 5 polynômes.

Le résultat de ce tri est illustré dans la figure 4.5b, où les solutions avec 2 et 3 polynômes ont été éliminées de l'ensemble des solutions.

Modifier l'ensemble des solutions fait varier l'estimation de l'incertitude totale (en ligne bleu de la figure 4.5a à la figure 4.5b). La corrélation finale (figure 4.5b) entre les erreurs réelles (ligne pointillée) et l'incertitude totale (ligne bleu) est élevée.

La solution composée de la combinaison linéaire de 9 polynômes (incertitude minimale lors de la dernière étape de triage) est comparée avec le *PCR* utilisé comme donnée pour générer les déformations dans la figure 4.6a. Bien que l'incertitude totale moyenne pour ce résultat soit inférieure à l'erreur moyenne, il y a une précision de l'incertitude égale à 80% (proportion des contraintes réelles dans l'intervalle d'incertitude), ce qui signifie qu'il n'existe pas de sous-estimation de l'erreur.

Les incertitudes les plus élevées sont coïncidentes avec les erreurs maximales, autrement dit, l'estimation des incertitudes a une forte corrélation avec leurs erreurs.



**Figure 4.6.** Comparaisons entre le profil de données initial et les profils obtenus en utilisant différentes fonctions de base. **Fig. 4.6a)** Solution avec la nouvelle méthodologie développée. **Fig. 4.6b)** Solution avec les fonctions échelons unitaires.

Ce premier cas permet d'établir deux conclusions partielles :

- La méthodologie pour réaliser l'estimation de l'incertitude du modèle est sensible aux variations des erreurs en absence de bruit.
- La dernière étape de tri permet de réduire l'incertitude sans perdre la précision requise (68%).

Le résultat obtenu en utilisant les fonctions échelons comme base (méthodologie de référence principale [2]) est illustré dans la [figure 4.6b](#). Dans ce cas, le profil de contraintes calculé est proche du profil de données initial, mais la qualité de l'estimation des incertitudes est faible et la précision de l'estimation des incertitudes est faible (45,71%). La méthodologie développée montre ainsi une meilleure réponse pour le cas où le bruit n'est pas considéré.

En utilisant les polynômes de Legendre avec la méthode de Prime-Hill pour réaliser le tri des polynômes dans ce cas particulier, la précision de l'estimation des incertitudes est de 71.42%, une valeur correcte mais sensiblement inférieure à celle obtenue par la nouvelle méthodologie (80%).

#### 4.2.2.2 Évaluation en présence de bruit

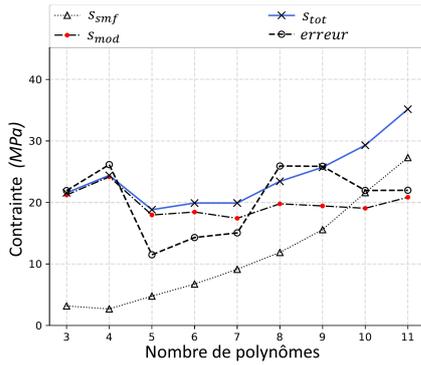
Les [figures 4.7](#) à [4.17](#) montrent les résultats obtenus en appliquant la nouvelle méthodologie avant et après la dernière étape de tri pour les ensembles des données du  $N1$  au  $N11$  respectivement. La valeur du paramètre du troisième tri est  $\alpha = 1,5$ .

La principale différence par rapport au cas précédent réside dans le fait que les incertitudes de la contrainte dues au modèle et des déformations augmentent de façon considérable en augmentant le nombre de polynômes dans les solutions.

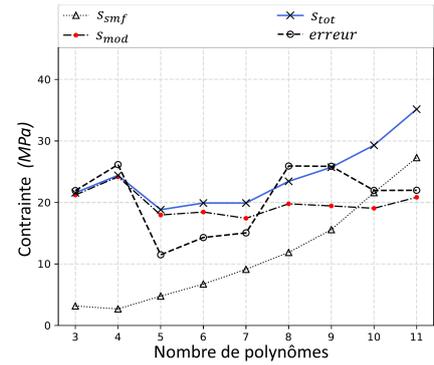
Néanmoins, la corrélation qui existe entre l'évolution des erreurs réelles et l'incertitude totale reste bonne. Quand la base d'une solution est composée de 7 polynômes ou plus, les erreurs réelles et les incertitudes augmentent significativement. Cela signifie que la variation de l'incertitude en ajoutant de nouveaux polynômes à la solution est proportionnelle à la variation de l'erreur, même en présence de bruit.

Le troisième ou dernier tri sert à réduire la surestimation de l'incertitude. Si l'utilisateur cherche des résultats conservateurs, il peut opter pour ne pas utiliser la dernière étape de tri, le résultat final sera normalement le même mais avec des incertitudes plus grandes.

Entre les 11 ensembles, le 6<sup>ème</sup> est le seul à obtenir des résultats totalement inacceptables (voir [figure 4.12](#)) avec la nouvelle méthodologie. Cette situation peut être détectée dans un procédé réel de mesure si la valeur d'incertitude moyenne entre les différentes solutions est trop élevée par rapport au niveau de bruit attendu, si celui-ci est connu.

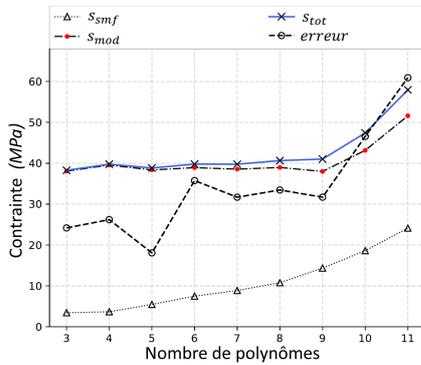


(a)

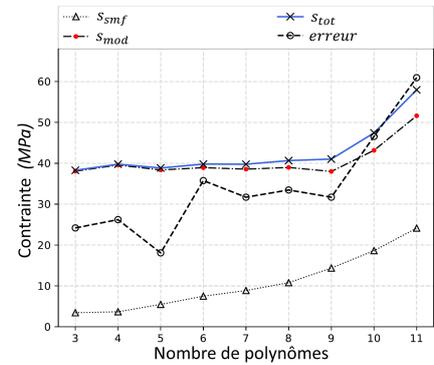


(b)

**Figure 4.7.** **Fig. 4.7a)** Erreur moyenne, incertitude totale moyenne ( $S_{tot}$ ), incertitude du modèle ( $S_{mod}$ ) et incertitude due au décalage entre les déformations calculées et mesurées ( $S_{smf}$ ) en fonction du nombre de polynômes utilisés avant la dernière étape de tri pour l'ensemble des données  $N^{\circ}1$ . **Fig. 4.7b)** Erreur moyenne, incertitude totale moyenne, incertitude due au modèle et incertitude due au décalage entre les déformations calculées et mesurées en fonction du nombre de polynômes utilisés après la dernière étape de tri pour l'ensemble des données  $N^{\circ}1$ .

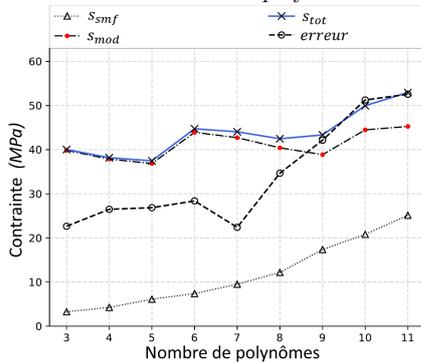


(a)

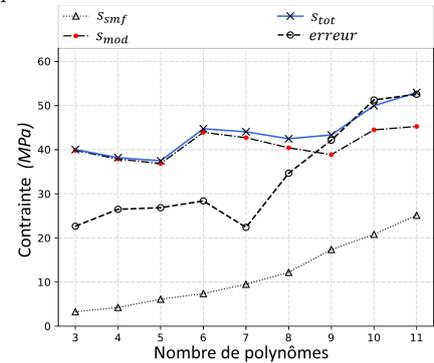


(b)

**Figure 4.8.** **Fig. 4.8a)** Erreur moyenne, incertitude totale moyenne ( $S_{tot}$ ), incertitude du modèle ( $S_{mod}$ ) et incertitude due au décalage entre les déformations calculées et mesurées ( $S_{smf}$ ) en fonction du nombre de polynômes utilisés avant la dernière étape de tri pour l'ensemble de données  $N^{\circ}2$ . **Fig. 4.8b)** Erreur moyenne, incertitude totale moyenne, incertitude due au modèle et incertitude due au décalage entre les déformations calculées et mesurées en fonction du nombre de polynômes utilisés après la dernière étape de tri pour l'ensemble des données  $N^{\circ}2$ .

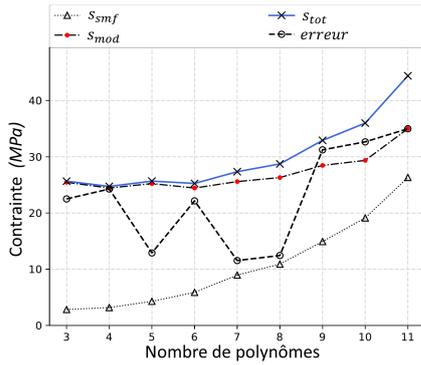


(a)

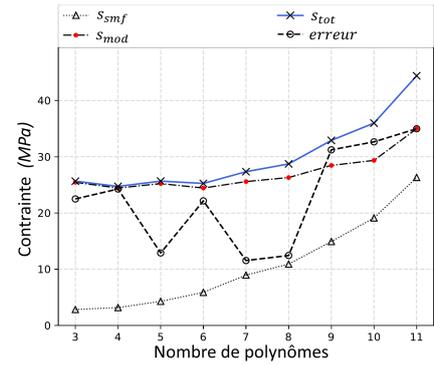


(b)

**Figure 4.9.** **Fig. 4.9a)** Erreur moyenne, incertitude totale moyenne ( $S_{tot}$ ), incertitude du modèle ( $S_{mod}$ ) et incertitude due au décalage entre les déformations calculées et mesurées ( $S_{smf}$ ) en fonction du nombre de polynômes utilisés avant la dernière étape de tri pour l'ensemble de données  $N^{\circ}3$ . **Fig. 4.9b)** Erreur moyenne, incertitude totale moyenne, incertitude due au modèle et incertitude due au décalage entre les déformations calculées et mesurées en fonction du nombre de polynômes utilisés après la dernière étape de tri pour l'ensemble des données  $N^{\circ}3$ .

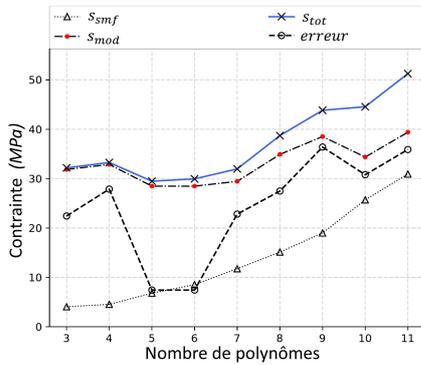


(a)

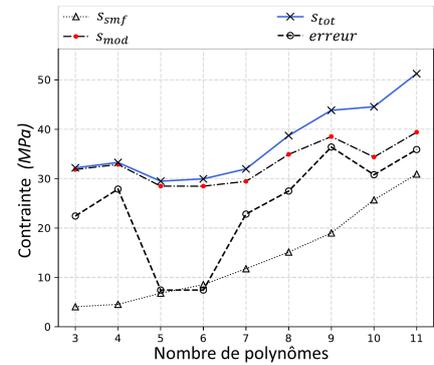


(b)

**Figure 4.10.** **Fig. 4.10a**) Erreur moyenne, incertitude totale moyenne ( $S_{tot}$ ), incertitude du modèle ( $S_{mod}$ ) et incertitude due au décalage entre les déformations calculées et mesurées ( $S_{smf}$ ) en fonction du nombre de polynômes utilisés avant la dernière étape de tri pour l'ensemble de données  $N^o4$ . **Fig. 4.10b**) Erreur moyenne, incertitude totale moyenne, incertitude due au modèle et incertitude due au décalage entre les déformations calculées et mesurées en fonction du nombre de polynômes utilisés après la dernière étape de tri pour l'ensemble des données  $N^o4$ .

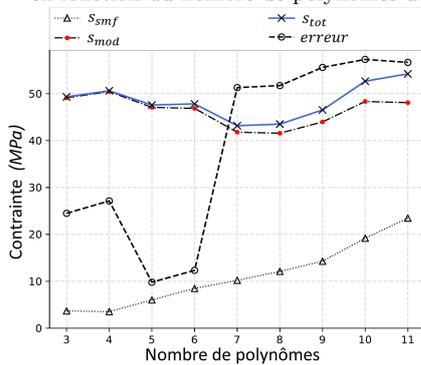


(a)

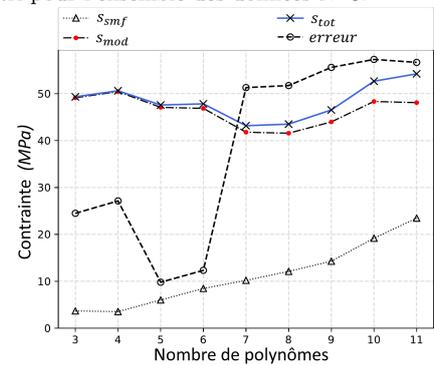


(b)

**Figure 4.11.** **Fig. 4.11a**) Erreur moyenne, incertitude totale moyenne ( $S_{tot}$ ), incertitude du modèle ( $S_{mod}$ ) et incertitude due au décalage entre les déformations calculées et mesurées ( $S_{smf}$ ) en fonction du nombre de polynômes utilisés avant la dernière étape de tri pour l'ensemble de données  $N^o5$ . **Fig. 4.11b**) Erreur moyenne, incertitude totale moyenne, incertitude due au modèle et incertitude due au décalage entre les déformations calculées et mesurées en fonction du nombre de polynômes utilisés après la dernière étape de tri pour l'ensemble des données  $N^o5$ .

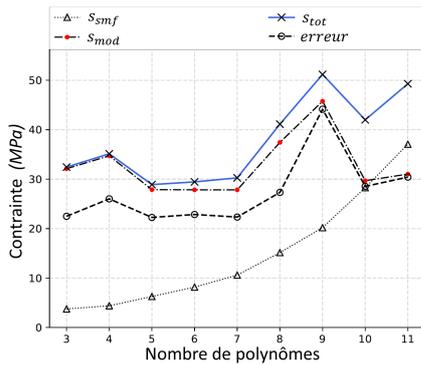


(a)

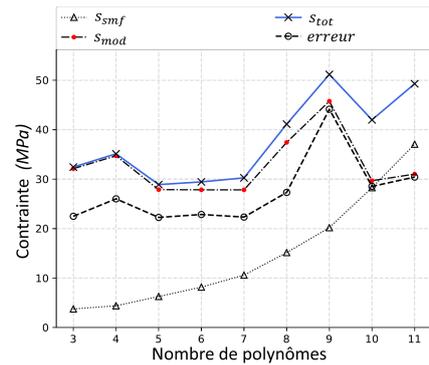


(b)

**Figure 4.12.** **Fig. 4.12a**) Erreur moyenne, incertitude totale moyenne ( $S_{tot}$ ), incertitude du modèle ( $S_{mod}$ ) et incertitude due au décalage entre les déformations calculées et mesurées ( $S_{smf}$ ) en fonction du nombre de polynômes utilisés avant la dernière étape de tri pour l'ensemble de données  $N^o6$ . **Fig. 4.12b**) Erreur moyenne, incertitude totale moyenne, incertitude due au modèle et incertitude due au décalage entre les déformations calculées et mesurées en fonction du nombre de polynômes utilisés après la dernière étape de tri pour l'ensemble de données  $N^o6$ .

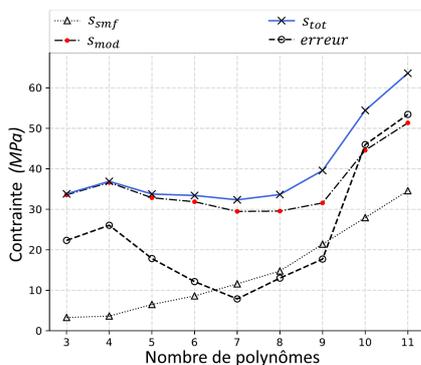


(a)

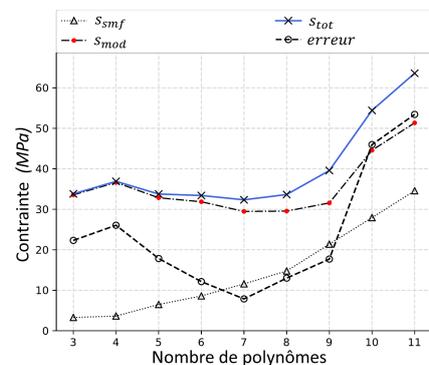


(b)

**Figure 4.13.** **Fig. 4.13a** Erreur moyenne, incertitude totale moyenne ( $S_{tot}$ ), incertitude du modèle ( $S_{mod}$ ) et incertitude due au décalage entre les déformations calculées et mesurées ( $S_{smf}$ ) en fonction du nombre de polynômes utilisés avant la dernière étape de tri pour l'ensemble de données  $N^o7$ . **Fig. 4.13b** Erreur moyenne, incertitude totale moyenne, incertitude due au modèle et incertitude due au décalage entre les déformations calculées et mesurées en fonction du nombre de polynômes utilisés après la dernière étape de tri pour l'ensemble des données  $N^o7$ .

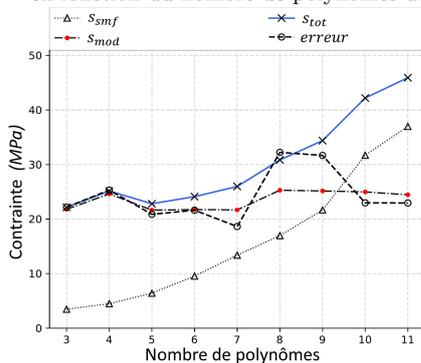


(a)

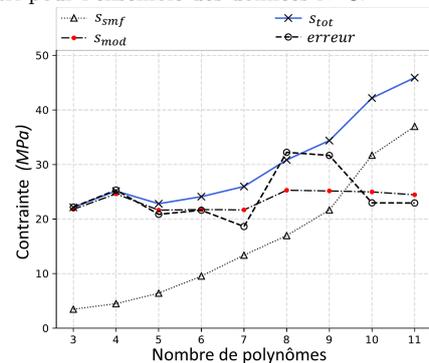


(b)

**Figure 4.14.** **Fig. 4.14a** Erreur moyenne, incertitude totale moyenne ( $S_{tot}$ ), incertitude du modèle ( $S_{mod}$ ) et incertitude due au décalage entre les déformations calculées et mesurées ( $S_{smf}$ ) en fonction du nombre de polynômes utilisés avant la dernière étape de tri pour l'ensemble de données  $N^o8$ . **Fig. 4.14b** Erreur moyenne, incertitude totale moyenne, incertitude due au modèle et incertitude due au décalage entre les déformations calculées et mesurées en fonction du nombre de polynômes utilisés après la dernière étape de tri pour l'ensemble des données  $N^o8$ .

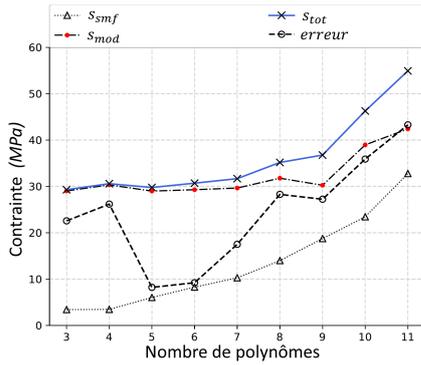


(a)

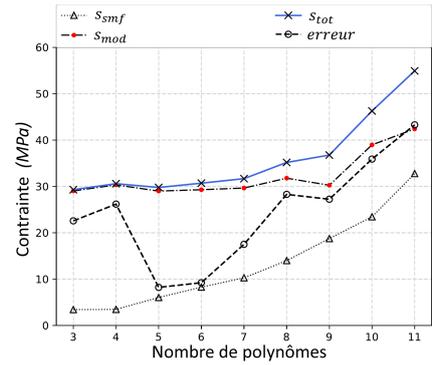


(b)

**Figure 4.15.** **Fig. 4.15a** Erreur moyenne, incertitude totale moyenne ( $S_{tot}$ ), incertitude du modèle ( $S_{mod}$ ) et incertitude due au décalage entre les déformations calculées et mesurées ( $S_{smf}$ ) en fonction du nombre de polynômes utilisés avant la dernière étape de tri pour l'ensemble de données  $N^o9$ . **Fig. 4.15b** Erreur moyenne, incertitude totale moyenne, incertitude due au modèle et incertitude due au décalage entre les déformations calculées et mesurées en fonction du nombre de polynômes utilisés après la dernière étape de tri pour l'ensemble des données  $N^o9$ .

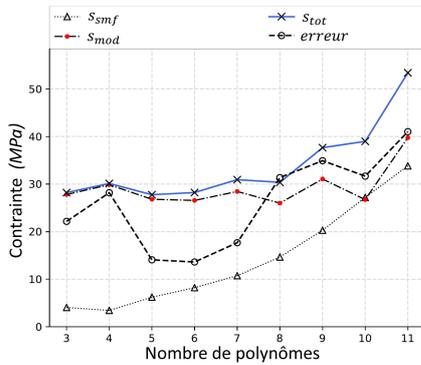


(a)

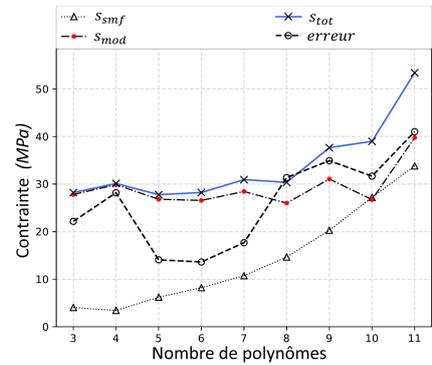


(b)

**Figure 4.16.** **Fig. 4.16a**) Erreur moyenne, incertitude totale moyenne ( $S_{tot}$ ), incertitude du modèle ( $S_{mod}$ ) et incertitude due au décalage entre les déformations calculées et mesurées ( $S_{smf}$ ) en fonction du nombre de polynômes utilisés avant la dernière étape de tri pour l'ensemble de données  $N^{\circ}10$ . **Fig. 4.16b**) Erreur moyenne, incertitude totale moyenne, incertitude due au modèle et incertitude due au décalage entre les déformations calculées et mesurées en fonction du nombre de polynômes utilisés après la dernière étape de tri pour l'ensemble des données  $N^{\circ}10$ .



(a)



(b)

**Figure 4.17.** **Fig. 4.17a**) Erreur moyenne, incertitude totale moyenne ( $S_{tot}$ ), incertitude du modèle ( $S_{mod}$ ) et incertitude due au décalage entre les déformations calculées et mesurées ( $S_{smf}$ ) en fonction du nombre de polynômes utilisés avant la dernière étape de tri pour l'ensemble de données  $N^{\circ}11$ . **Fig. 4.17b**) Erreur moyenne, incertitude totale moyenne, incertitude due au modèle et incertitude due au décalage entre les déformations calculées et mesurées en fonction du nombre de polynômes utilisés après la dernière étape de tri pour l'ensemble des données  $N^{\circ}11$ .

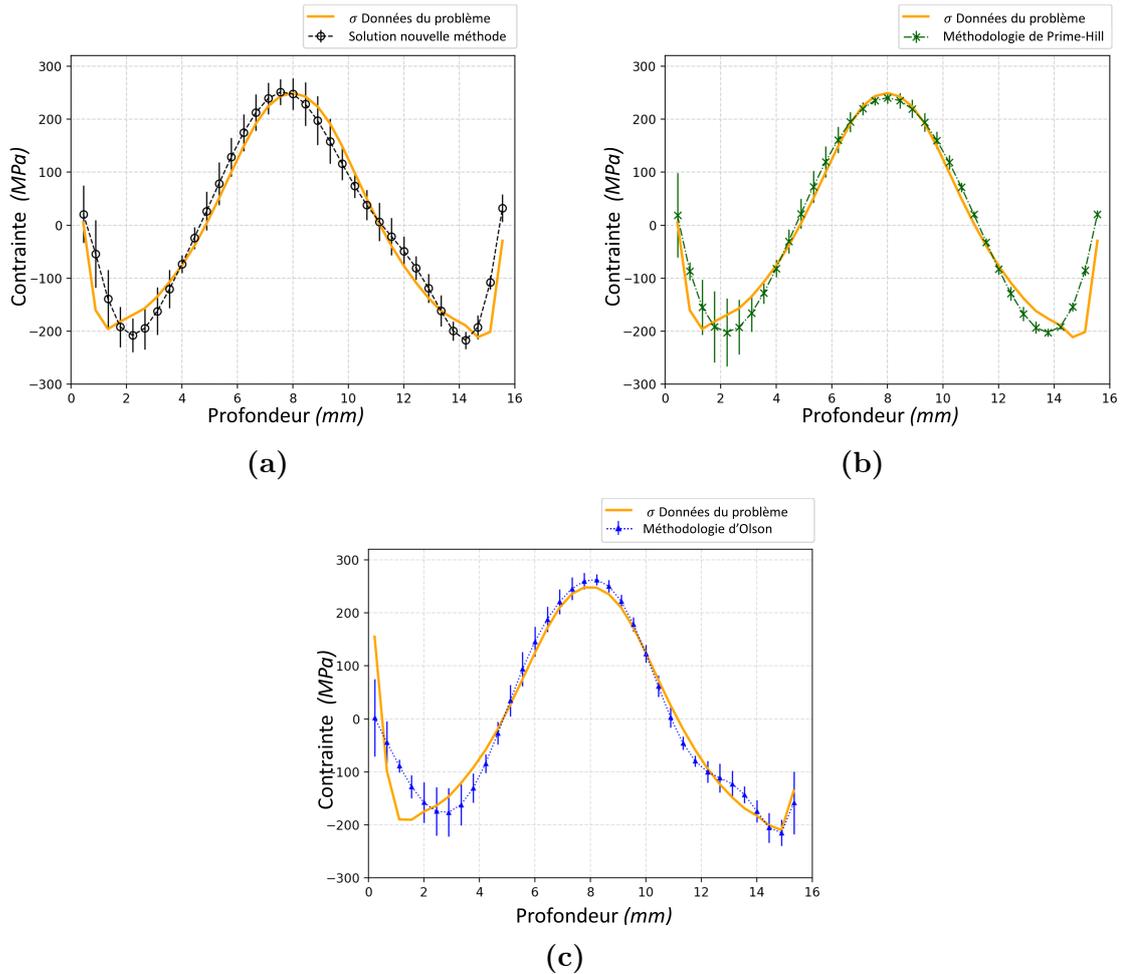
Afin d'évaluer l'influence du bruit sur la réponse des trois méthodes d'analyse, le tableau 4.5 montre les résultats des précisions de l'incertitude ainsi que les erreurs obtenues avec chaque méthode pour chaque ensemble. L'ensemble  $N^{\circ}12$  correspondre aux données sans bruit.

Ensemble N°	Bruit moyen ( $\mu\varepsilon$ )	Méthodologie développée		Prime-Hill		Olson (fonction échelon)	
		Précision de l'incertitude (%)	erreur (MPa)	Précision de l'incertitude (%)	erreur (MPa)	Précision de l'incertitude (%)	erreur (MPa)
1	33.67	80	11.49	34.28	23.33	65.71	20.14
2	39.63	74.29	24.18	37.14	27.2	51.42	25.04
3	41.05	71.43	26.86	62.86	22.91	60	25.24
4	33.39	60	24.27	51.43	23.63	68.57	22.28
5	41.39	97.14	7.43	51.43	25	60	26.48
6	41.66	8.57	51.29	40	28.63	68.57	23.76
7	46.89	57.14	22.25	57.14	23.03	65.71	24.88
8	43.67	94.29	7.87	51.42	25.35	68.71	23.51
9	42.44	54.29	22.18	42.86	26.7	57.14	27.04
10	38.83	68.57	22.57	60	23.35	80	18.15
11	45.11	60	22.16	22.86	31.73	65.71	23.68
12	0	80	7.59	71.42	11.48	45.71	12.28

Tableau 4.5 – Comparaison des résultats obtenus avec les différentes bases ou méthodologies d'estimation des incertitudes.

Il est important de rappeler que le niveau de bruit utilisé est généré (sauf évidemment pour le cas de l'ensemble N°12). Il a été nécessaire de changer deux paramètres  $u_{mf_{max}}$  (par rapport aux valeurs recommandées dans [2]) ; *i*) l'erreur de décalage de déformation maximale, voir §2.2.4.1.1) de  $100\mu\varepsilon$  à  $400\mu\varepsilon$  , *ii*) le paramètre  $R$  d'une valeur recommandée  $R = 1,5$  à  $R = 1$ . Ce paramètre contrôle l'étendue des solutions de comparaison pour l'estimation de l'erreur du modèle (section§2.2.4.1.1). Les autres paramètres n'ont pas été modifiés par rapport à l'article original 2.2.4.1.1.

La méthode développée garantit une précision de l'incertitude supérieure ou égale à 68%, soit 7/11 des cas, suivie par la méthode d'Olson avec 3/11 des cas. La méthode de Prime-Hill ne permet pas d'obtenir une bonne estimation de l'incertitude pour ce niveau de bruit car aucun ensemble n'atteint la précision minimale. Le faible taux de précision est dû évidemment à un niveau de bruit important ajouté.



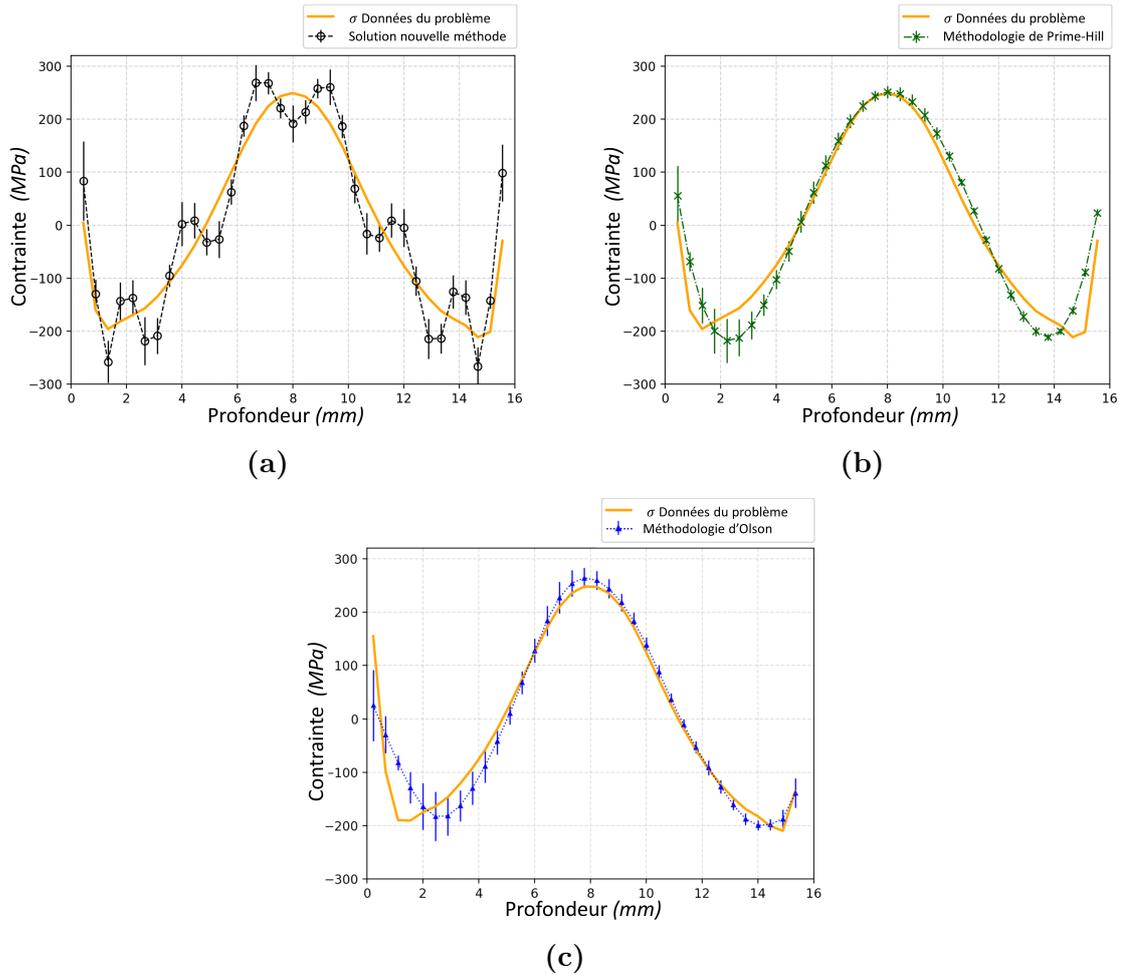
**Figure 4.18.** Résultats obtenus avec les différentes méthodologies pour l'ensemble des données N° 3. **Fig 4.18a)** Nouvelle méthodologie. **Fig 4.18b)** Méthodologie de Prime-Hill. **Fig 4.18c)** Méthodologie d'Olson.

Néanmoins il est intéressant d'observer que la méthode d'Olson donne la meilleure précision sur l'ensemble  $N6$  par rapport aux autres méthodes. Les erreurs obtenues avec cette méthode varient proportionnellement avec niveau de bruit ajouté.

La méthode développée génère une erreur moyenne de seulement  $7,87 MPa$  pour un niveau de bruit de  $43,67\mu\epsilon$ . Cela signifie que cette méthode a le potentiel d'agir comme un filtre du bruit. Cependant il existe aussi la possibilité que le bruit induise un résultat totalement faux comme dans le cas de l'ensemble  $N6$ .

La [figure 4.18](#) montre les résultats obtenus pour les contraintes et les erreurs respectives avec l'ensemble de données N°3.

La différence entre le résultat des contraintes de la nouvelle méthodologie et celle de Prime-Hill est très faible (une différence moyenne dans l'erreur d'environ  $3MPa$  selon le [tableau 4.5](#)). La principale différence se trouve sur la capacité d'estimer les incertitudes, avec plus de précision par la méthode développée.



**Figure 4.19.** Résultats obtenus avec les différentes méthodologies pour l'ensemble des données N° 6. **Fig 4.19a)** Nouvelle méthodologie. **Fig 4.19b)** Méthodologie de Pime-Hill. **Fig 4.19c)** Méthodologie d'Olson.

Le résultat de l'ensemble  $N_6$  est illustré dans la [figure 4.19](#). On constate que les incertitudes dans la [figure 4.19a](#) sont relativement faibles. Il sera alors fidèle au profil généré par les données de déformation (avec bruit).

### 4.3 Conclusion

L'évolution des incertitudes donnée par la méthodologie développée montre une forte corrélation avec les erreurs réelles obtenues. En conséquence, les résultats présentent une réduction du niveau d'erreur et des incertitudes par rapport aux méthodes de référence dans la plupart des cas étudiés. La précision des incertitudes est aussi supérieure même si les incertitudes sont plus faibles (par rapport au modèle d'Olson). Ces résultats montrent une amélioration importante par rapport aux méthodes existantes.

En présence d'un niveau de bruit important dans les données, il existe la possibilité d'obtenir des résultats faux. Ce phénomène apparaît quand le procédé de tri reproduit le bruit au lieu de l'homogénéiser. Afin d'éviter ce type de résultats avec la méthode d'Olson deux paramètres ont été modifiés par rapport à la recommandation originale. La

méthodologie développée possède moins de paramètres à régler même si un des résultats obtenus n'est pas satisfaisant. L'analyse d'un ensemble de données par différentes méthodes permet de vérifier la consistance des résultats obtenus.

Finalement, une librairie de fonctions et outils numériques a été développée afin de réaliser tous les calculs décrits dans ce chapitre, tant pour les méthodes de Prime-Hill, Olson que pour la méthode proposée.

## Bibliographie

- [1] Prime, M.B. and Hill, M.R. Uncertainty, model error, and order selection for series-expanded, residual-stress inverse solutions. *Journal of Engineering Materials and Technology*. 128(2) :175-185. 2006.
- [2] Olson, M.D. and DeWald, A.T. and Hill, M.R. An uncertainty estimator for slitting method residual stress measurements including the influence of regularization. *Experimental Mechanics*. 60(1)65-79. 2020.
- [3] Wang, K. Doctoral dissertation. *Calibration of the Johnson-Cook failure parameters as the chip separation criterion in the modelling of the orthogonal metal cutting process*. McMaster University. 2016.
- [4] Prime, M.B. Residual stress measurement by successive extension of a slot : the crack compliance method. *Applied Mechanics Reviews*. 52(2) :75-96. 1999.
- [5] Cheng, W. and Finnie, I. and Vardar, O. Measurement of residual stresses near the surface using the crack compliance method. *Journal of Engineering Materials and Technology*. 113(2) :199-204. 1991.
- [6] Schajer, G.S. and Prime, M.B Use of inverse solutions for residual stress measurements. *Journal of engineering materials and technology*. 128(3) :375-382. 2006.
- [7] Cheng, W. and Finnie, I. *Residual stress measurement and the slitting method*. 2007.
- [8] Strantza, M. and Vrancken, B. and Prime, M.B. and Truman, C.E. and Rombouts, M. and Brown, D.W. and Guillaume, P. and Van Hemelrijck, D. Directional and oscillating residual stress on the mesoscale in additively manufactured Ti-6Al-4V. *Acta Materialia*. 168 :299-308. 2019.

Simulation numérique de l'influence de l'effet Bauschinger.

## Introduction

L'effet Bauschinger présenté dans le chapitre 1 a été initialement décrit pour un chargement cyclique à partir d'essais de traction-compression. Les premiers modèles développés cherchent à expliquer le phénomène en associant l'effet Bauschinger à d'autres phénomènes qui apparaissent dans un chargement cyclique tels que le durcissement cyclique, l'accumulation de déformation, le durcissement lié à l'effet mémoire.

Cet effet peut avoir une influence non négligeable sur les chargements non proportionnels (qui changent de direction), les chargements non cycliques et ceux avec un nombre réduit de cycles ou d'étapes. De telles caractéristiques sont courantes dans un processus de fabrication, où chaque procédé soumet la pièce à des contraintes différentes : direction et intensité. Comme ces procédés visent à former la pièce, le matériau est soumis à de grandes déformations, parfois jusqu'à la rupture en considérant la coupe comme une rupture du matériau, de sorte que la région autour de la coupe est également affectée.

Ce chapitre vise à étudier l'influence de l'effet Bauschinger dans deux situations à travers deux applications. Le premier cas est une représentation simplifiée d'un processus de fabrication. La pièce est soumise à de multiples sollicitations suivant des directions différentes. L'énergie développée dans le régime plastique étant fonction de la limite d'élasticité (laquelle varie en fonction de la direction du chargement au cours du processus de sollicitation), ainsi l'énergie cumulée sera également fonction de la géométrie finale de la pièce. Ces résultats sont importants tant pour le calcul global de la consommation d'énergie dans le processus global que pour la maîtrise des tolérances géométriques à réaliser sur la pièce.

Dans le second cas, une pièce est soumise à un chargement de forte intensité. L'objectif est d'étudier la possibilité de trouver des phénomènes plastiques en l'absence d'un chargement externe (retour non-élastique). Ce phénomène aurait non seulement des conséquences sur la tolérance dimensionnelle de la pièce mais aussi sur les procédés de mesure des contraintes résiduelles par des méthodes destructives, qui utilisent toujours

l'hypothèse d'un retour élastique.

Au cours du développement du second problème, la méthodologie et les outils développés pour la caractérisation et l'exportation des données de l'état résiduel de la pièce sont mis en œuvre.

## **5.1 Étude de l'effet Bauschinger dans un processus de sollicitations multiaxiales**

Chaque procédé soumet la pièce à des sollicitations multiaxiales particulières. Par exemple un procédé de laminage génère une contrainte de compression selon l'épaisseur, de la traction dans la direction longitudinale mais aussi du cisaillement dû à la friction générée par les rouleaux.

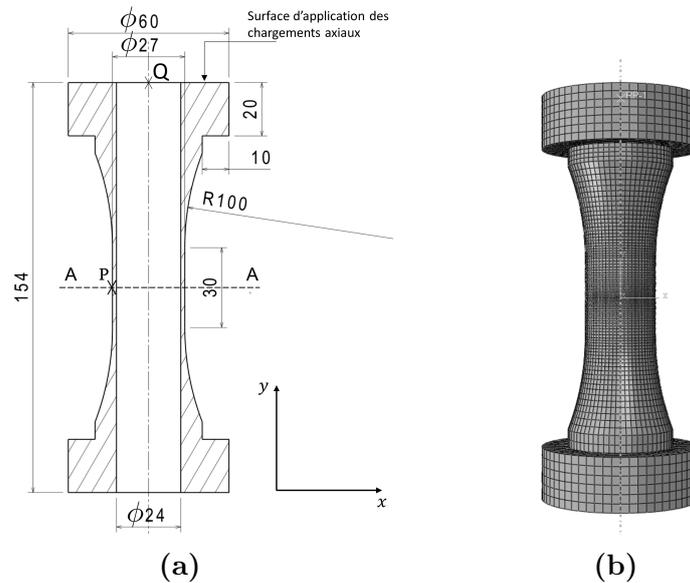
Pour chaque procédé, des propriétés différentes vont être générées après sollicitation. Ces propriétés caractérisées par les variables d'état thermodynamiques doivent être enregistrées car elles constituent l'état initial du matériau pour le procédé suivant dans l'enchaînement des procédés de fabrication.

Usuellement, la règle d'écrouissage utilisée pour caractériser les lois de comportement associées aux procédés de mise en forme correspond à la famille isotrope. Par définition ce type de modèle n'est pas capable de caractériser l'effet Bauschinger. Ce phénomène, en fonction des caractéristiques intrinsèques du matériau, peut avoir des conséquences importantes sur l'interaction d'une succession de chargements multiaxiaux, à la fois sur les déformations plastiques développées et sur l'énergie dissipée. Les règles d'écrouissage cinématique et combiné ont été conçues pour reproduire l'effet Bauschinger, initialement identifié dans les chargements cycliques mais rarement appliqué aux procédés de mise en forme ou de coupe.

### **5.1.1 Présentation du problème**

Afin de réaliser un étude comparative de l'évolution de l'état de la matière entre un modèle qui prend en compte l'effet Bauschinger durant un enchaînement de sollicitations multiaxiales et le résultat d'un modèle isotrope en régime non linéaire, des simulations par éléments finis d'un processus de charges et décharges sur une éprouvette ont été réalisées en utilisant le logiciel commercial Abaqus/Standard. La simulation a été effectuée en trois dimensions en utilisant une méthode d'intégration implicite avec des

éléments linéaires hexaédriques C3D8R.



**Figure 5.1.** Fig. 5.1a) Dimensions en mm de l'éprouvette utilisée dans les simulations. Fig. 5.1b) Pièce maillée.

Les dimensions de l'éprouvette avec une symétrie de révolution sont données dans la figure 5.1a. Dans ce cas simple, le maillage reste constant au cours des différents chargements, et le calcul est réalisé en plusieurs étapes. Le maillage de l'éprouvette est variable et raffiné dans la région du point P (voir figure 5.1a), où les contraintes sont maximales.

Trois étapes de chargement multiaxial et de déchargement sont réalisées. Leurs valeurs sont résumées dans le tableau 5.2. Les forces de traction et de compression (correspondant aux données de la première colonne) dans la direction axiale  $y$  sont appliquées à la surface supérieure de la pièce, sur une surface totale de  $3275\text{mm}^2$ , la surface indiquée sur la figure 5.1a .

Modèle Isotrope	
Décomposition des déformations	$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p$
Foction de charge	$f(\underline{\underline{S}}, R) = J_2(\underline{\underline{S}}) - \sigma_0 - R$ avec $J_2(\underline{\underline{S}}) = \sqrt{\frac{3}{2}\underline{\underline{S}} : \underline{\underline{S}}}$ et $R = Q(1 - e^{-bp})$
Energie libre	$\psi = \frac{1}{2} \frac{R^2}{bQ}$
Modèle Cinématique	
Décomposition des déformations	$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p$
Foction de charge	$f(\underline{\underline{S}}, \underline{\underline{X}}) = J_2(\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{X}}) - \sigma_0$ avec $J_2(\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{X}}) = \sqrt{\frac{3}{2}(\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{X}}) : (\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{X}})}$
Potentiel de flux	$F(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{X}}) = J_2(\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{X}}) - \sigma_0 + \frac{\gamma_i}{2C_i} J_2^2(\underline{\underline{X}})$ avec $J_2(\underline{\underline{X}}) = \sqrt{\frac{3}{2}(\underline{\underline{X}}) : (\underline{\underline{X}})}$
Energie libre	$\psi = \frac{3}{4C} \underline{\underline{X}} : \underline{\underline{X}}$
Paramètres du modèle	$C_1 = 246193(MPa)$ ; $\gamma_1 = 2550$ $C_2 = 3627,6(MPa)$ ; $\gamma_2 = 28,997$
Modèle Combiné	
Décomposition des déformations	$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p$
Fonction de charge	$f(\underline{\underline{S}}, \underline{\underline{X}}) = J_2(\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{X}}) - \sigma_0 - R$
Potentiel de flux	$F(\underline{\underline{S}}, \underline{\underline{X}}) = J_2(\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{X}}) - \sigma_0 + \frac{\gamma_i}{2C_i} J_2^2(\underline{\underline{X}}) + \frac{R^2}{2Q}$
Energie libre	$\psi = \frac{1}{2} \frac{R^2}{bQ} + \frac{3}{4} \frac{1}{C} \underline{\underline{X}} : \underline{\underline{X}}$
Paramètres du modèle	$C_1 = 2067,9(MPa)$ $\gamma_1 = 44,749$ $C_2 = 246194(MPa)$ $\gamma_2 = 2551.4$ $Q = 120(MPa)$ $b = 13,2$

Tableau 5.1 – Paramètres des modèles utilisés : Isotrope, cinématique et combiné de Chaboche

Les moments de torsion sont appliqués au point  $Q$  situé sur l'axe de symétrie. Les valeurs des moments pour chaque étape se trouvent dans la deuxième colonne. Les valeurs de charge équivalente présentées dans la troisième colonne sont celles obtenues au point  $P$  (point de concentration maximale des contraintes, situé à l'intersection du plan A-A et de la surface externe de la pièce).

Cadre des chargements au point P			
	$\sigma_{yy}$	$T_y$	$\sigma_{eq}$
	MPa	N.mm	MPa
1 <sup>ère</sup> chargement	0	162975	180
1 <sup>ère</sup> déchargement	0	0	0
2 <sup>ème</sup> chargement	180	0	180
2 <sup>ème</sup> déchargement	0	0	0
3 <sup>ème</sup> chargement	-120	-153388	200
3 <sup>ème</sup> déchargement	0	0	0

Tableau 5.2 – Détail des étapes de chargement.

Les propriétés du matériau utilisé correspondent à l'acier inoxydable austénitique de type 316. Les paramètres des lois de comportement ont été obtenus à partir de régressions basées sur des données de [1]. Trois lois de comportement ont été caractérisées avec trois règles d'écrouissage différentes : isotrope (Ramberg-Osgood), cinématique pure (Chaboche) et combinée (Chaboche combinée). Les équations et les paramètres qui caractérisent chaque loi se trouvent dans le [tableau 5.1](#).

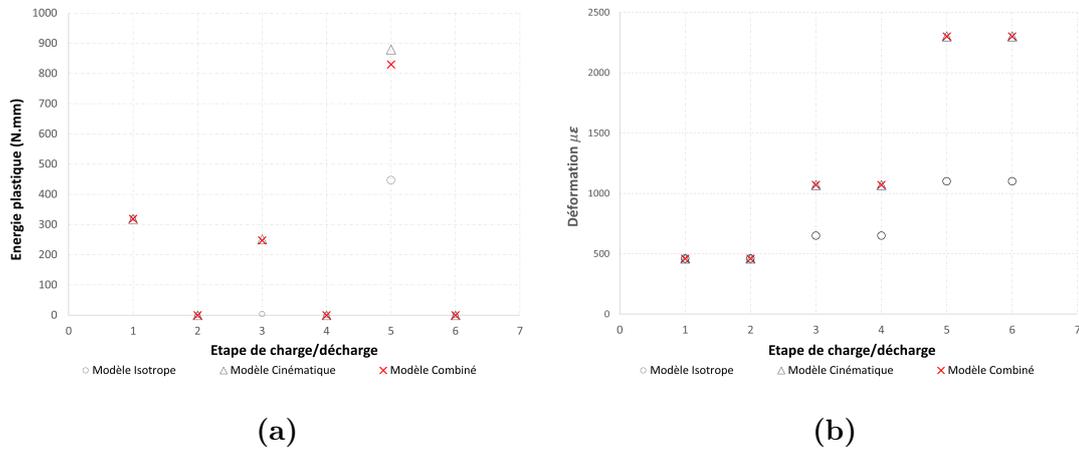
### 5.1.2 Résultats et analyse

La [figure 5.2a](#) représente l'énergie plastique (dans toute la pièce) pour chaque modèle. La [figure 5.2b](#) décrit la déformation plastique cumulée équivalente au point  $P$  développée au cours des différentes étapes de chargement pour les trois lois considérées. Lors des trois déchargements, les retours se trouvent dans le régime élastique.

A la fin de la première étape de charge/décharge, l'énergie dissipée, les déformations et les contraintes résiduelles coïncident pour les différents modèles. Cela démontre la raison de l'application des lois de comportement isotropes : si le chargement d'une pièce initialement isotrope suit une seule direction (uniaxiale ou multiaxiale) les contraintes résiduelles et l'énergie développée ne dépendent pas de la direction de sollicitation s'il n'y a pas de phénomène plastique lors du déchargement. Ce cas sera traité dans la section §5.2. Les lois de comportement isotropes permettent une modélisation et une interprétation simple des résultats de la simulation, mais les limites du domaine d'application ne sont pas négligeables pour les chargements suivants, où la variation des propriétés élastiques est évidente.

Afin de faciliter l'interprétation de l'évolution du seuil en fonction des différents modèles, la [figure 5.3](#) représente un schéma comparatif des modèles isotrope et cinématique en considérant l'état de la matière du point  $P$  de la [figure 5.1a](#) (Compte tenu de la similitude avec le modèle cinématique, le modèle combiné n'est pas inclus pour éviter d'alourdir

la schématisation). La géométrie axi-symétrique de la pièce, ainsi que ses caractéristiques géométriques font que la concentration des contraintes se situe dans la partie centrale de la pièce. En fait, toute la déformation plastique se produit dans cette région, ce qui justifie le choix du point **P** comme référence pour le suivi de l'évolution des propriétés.



**Figure 5.2.** Fig. 5.2a) Énergie plastique (non cumulée) développée à chaque étape. Fig. 5.2b) Déformation plastique équivalente développée à chaque étape.

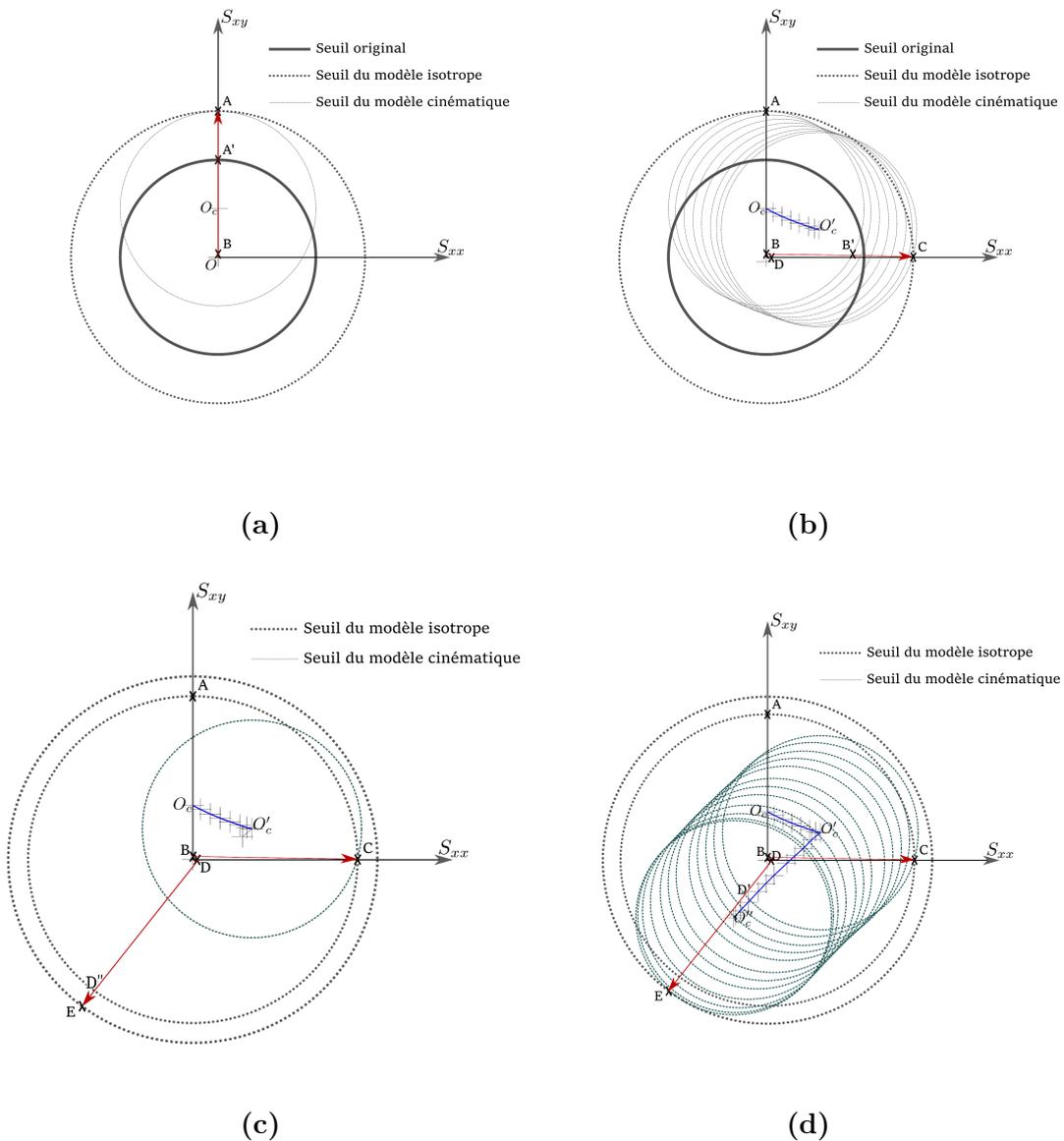
La figure 5.3a montre le seuil initial (identique pour les deux modèles) et l'état après le premier chargement/déchargement. Le point **A** représente l'état du chargement 1. Dans le modèle purement cinématique, la géométrie du seuil ne change pas. Pour que la charge appartienne au domaine élastique le centre de l'hyper sphère se déplace de l'origine des coordonnées (exprimées dans le système déviatorique) au point  $O_c$  [2]. Au contraire, pour le modèle l'isotrope le seuil se dilate de manière homogène dans toutes les directions, ce qui signifie que le domaine élastique augmente indépendamment de la direction considérée.

Il est nécessaire de définir le front de chargement plastique comme la trajectoire dans l'espace déviatorique du chargement pendant la plasticité. Dans le cas des deux modèles considérés dans la figure 5.3a, le front de chargement est représenté par  $A'A$  : i) ils trouvent la limite élastique au même point (point **A'** pour le chargement 1), ii) la direction normale au seuil est la même, les déformations plastiques, les contraintes et donc l'énergie plastique coïncideront dans les différents modèles. Cependant, les mécanismes de stockage de cette énergie dans le matériau diffèrent. Il s'agit d'une explication phénoménologique de la raison pour laquelle les deux modèles coïncident pendant un processus de chargement proportionnel.

Compte tenu des conditions aux limites du problème et de la géométrie de la pièce, les contraintes résiduelles après le premier déchargement sont pratiquement nulles, l'état de chargement est représenté par le point **B**, qui coïncide pratiquement avec l'origine des coordonnées. Comme l'intensité de la contrainte est faible à modérée (pour un régime non linéaire), le point **B** se trouve à l'intérieur du régime élastique dans les deux modèles, ce qui signifie qu'il n'y a pas des phénomènes de plasticité pendant le déchargement.

Le deuxième chargement est représenté par **BC** dans la figure 5.3b. Dans le modèle

cinématique, la fin de la limite élastique est représentée par **B'** et le front de chargement dans le régime plastique **B'C**. Comme le chargement équivalente est identique au premier chargement, le point C se trouve exactement à la frontière du seuil isotrope, pourtant tout le chargement BC est en régime élastique selon ce modèle. Ceci est clairement mise en évidence dans la [figure 5.2](#) où l'énergie plastique développée durant l'étape 3 (deuxième chargement) correspond à un développement d'énergie plastique nulle et à une déformation cumulée sans variation par rapport au stade précédent (pour le modèle isotrope). Le déplacement du seuil cinématique généré par l'application du chargement **C** est représenté par la trajectoire  $OcO'_c$  sur la [figure 5.3b](#). Elle tend à s'aligner selon la direction du chargement lorsque celle-ci augmente en intensité.



**Figure 5.3.** Représentation des chargements et déchargements du point **P** dans l'espace déviatorique. **Fig. 5.3a)** Premier chargement et déchargement. **Fig. 5.3b)** Deuxième chargement et déchargement. **Fig. 5.3c)** Troisième chargement pour le cas du modèle isotrope. **Fig. 5.3d)** Troisième chargement pour le cas du modèle cinématique.

Le deuxième déchargement est représenté par le point **D**, encore une fois comme dans le cas précédent, ce point de chargement coïncide pratiquement avec l'origine des coordonnées et les deux seuils élastiques contiennent **D**. Par conséquent, il n'y a pas d'énergie plastique développée dans ce déchargement. Cela se voit dans les résultats de la [figure 5.2a](#) et [5.2b](#), où l'énergie plastique développée est nulle pour les trois modèles et la déformation plastique cumulée est identique à l'étape précédente.

Le dernier chargement est celui correspondant au chargement équivalent à la plus forte intensité ( $200\text{MPa}$ ). Cela permet une expansion du seuil isotrope, ainsi un travail plastique dans les trois modèles considérés. Cependant, la différence de travail plastique prédit par les modèles cinématique et combiné est beaucoup plus importante par rapport au modèle isotrope (voir [figure 5.2a](#)). Ceci est expliqué en utilisant les [figures 5.3c](#) et [5.3d](#). Le front de charge plastique **D'E** dans le modèle cinématique (voir [figure 5.3d](#)) est beaucoup plus grand que le front correspondant dans le modèle isotrope **D'E** (voir [figure 5.3c](#)). Les différences d'énergie plastique et de déformation cumulée sont proportionnelles à cette différence, bien que seule l'évolution du point **P** soit étudiée dans la [figure 5.3](#).

La différence entre l'énergie plastique du corps entier ainsi que la déformation plastique prévue pour les modèles cinématiques et combinés par rapport au modèle isotrope sont supérieures à 100 %.

Afin d'évaluer les résultats numériques obtenus, il convient de considérer les résultats expérimentaux de Ohno et Wang [3] et plus récemment de Kolpak *et al.* [4], où les modèles cinématiques (Ohno et Wang, Chaboche et Yoshida) montrent des résultats proches par rapport aux données expérimentales pour les cas d'un faible nombre de chargements multi-axiaux. Sur la base de ce fait, il peut être conclu que les modèles isotropes négligent un pourcentage non négligeable de l'énergie et de la déformation dans le régime plastique dans les chargements ultérieurs lorsque la direction et le sens du chargement sont différents du premier.

Cette conclusion pourrait être étendue aux chargements non proportionnels, où l'effet Bauschinger est présent et joue un rôle important. De tels types de sollicitation, peuvent être rencontrés dans les procédés de fabrication où un même point du matériau est sollicité dans différentes directions tout au long du processus, comme le soudage par friction FSW.

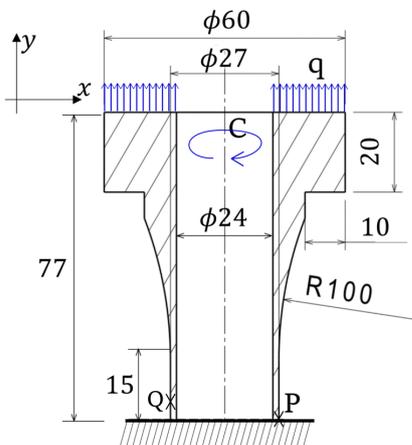
## 5.2 Caractérisation de l'état résiduel à partir de l'exportation/importation de variables d'écouissage

Un processus de fabrication global est composé de plusieurs procédés (obtention du brut, laminage, fraisage, etc.). Si la simulation d'un tel processus est réalisée, elle sera généralement effectuée par des simulations indépendantes en raison des situations et conditions décrites dans le chapitre 3. Pour répondre à cette problématique, il sera nécessaire :

- D'utiliser les outils créés en langage Python pour la création des conditions initiales dans un enchaînement de simulation.
- D'évaluer le retour inélastique en certains points d'une pièce soumise à des contraintes de mouvement, dans le cas d'un chargement modéré à élevé.

### 5.2.1 Présentation du problème

La pièce à étudier (figure 5.4) possède une géométrie avec symétrie axiale et est encastree dans la base inférieure. Cet encastrement empêche la libération des contraintes, contrairement au cas étudié précédemment.



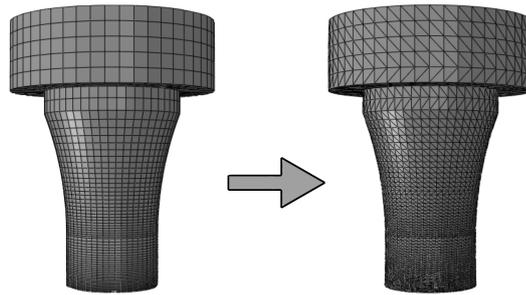
**Figure 5.4.** Schéma de la pièce étudiée.

Afin d'obtenir un chargement multi-axial aux points **Q** et **P**, où **Q** est un point placé à 3 mm de la base et **P** sur la base où la concentration de contraintes est plus forte, deux chargements simultanés sont appliqués à la pièce. Le premier chargement est de la traction uniformément distribuée  $q$  sur la surface supérieure de 10,12 MPa, appliquée dans la direction normale à la surface (donc parallèle à la direction  $y$ ). Le second chargement correspond à un couple  $C$  de 177,11 N.m appliqué autour de l'axe de symétrie.

Le matériau considéré a une limite élastique initiale égale à 120 MPa et une règle d'écrouissage combinée (Chaboche), dont la formulation a été décrite au chapitre 1 et est à nouveau résumée avec ses paramètres respectifs dans le tableau 5.1. La deuxième étape de la simulation est l'étude du comportement une fois que la charge cesse et que la pièce cherche à revenir à la configuration d'équilibre. Ces deux premières étapes ont été réalisées en utilisant une méthode d'intégration implicite (Abaqus/Standard), où tous les éléments d'intégration correspondent à C3D8R (éléments hexaédriques). Lors de la phase de retour, le comportement inélastique du matériau au point P est étudié. Les variables caractérisant l'état résiduel de la pièce sont cartographiées :

- Contraintes résiduelles.
- Déformations non élastiques.
- Contraintes internes.
- Position finale de chaque nœud.

Une nouvelle simulation est effectuée, avec une géométrie de la pièce obtenue à partir de la pièce déformée à la fin de la première simulation. La pièce est maillée à l'aide d'éléments C3D4 (tétraèdres linéaires). Une comparaison entre le maillage utilisé dans la première simulation (avec des éléments C3D8R) et la deuxième simulation (avec des éléments C3D4) est montrée dans la figure 5.5.



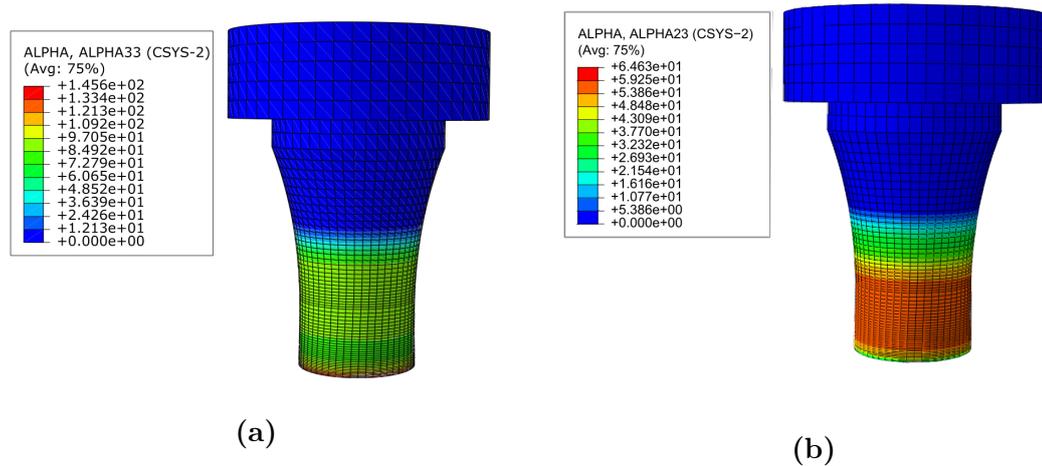
**Figure 5.5.** Comparaison entre les maillages de la première et la deuxième simulation

Afin de caractériser l'état initial de la pièce, les variables de durcissement, les contraintes résiduelles et les déformations plastiques de la pièce cartographiée dans la première simulation sont interpolées aux positions des points d'intégration de la nouvelle pièce.

À partir de cette géométrie et de ces conditions initiales, une nouvelle simulation est effectuée, sans aucun chargement externe. L'objectif de cette simulation est de vérifier l'efficacité de la méthodologie pour caractériser l'état de la pièce. Étant donné que l'état importé pour la deuxième est une configuration qui correspond à un état d'équilibre, la simulation ne devrait pas présenter de changement par rapport à l'état initial, ou alors très négligeables.

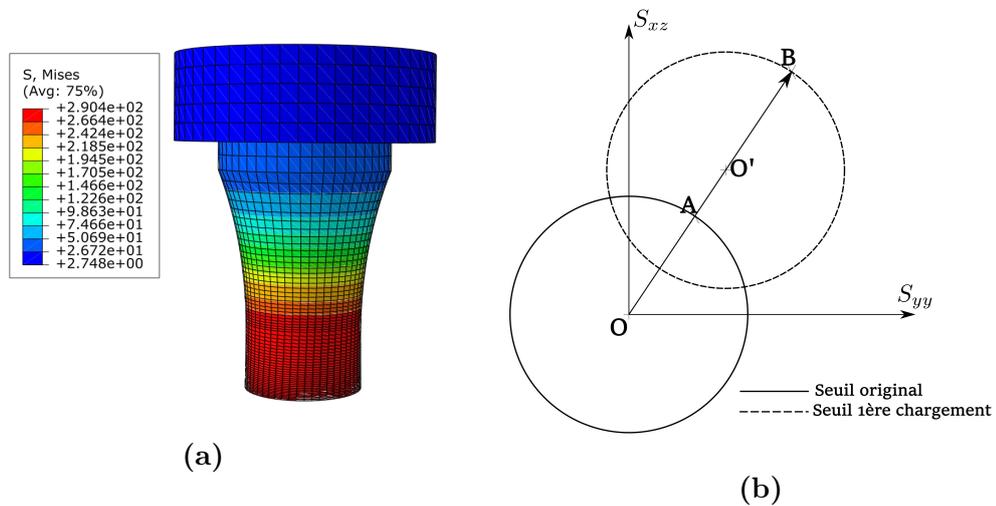
## 5.2.2 Résultats obtenus et analyse

Les principales composantes de la contrainte interne obtenues lors de l'application du premier chargement sont présentées sur les figures 5.6a et 5.6b et correspondent respectivement à la direction axiale  $y$  et à la direction de cisaillement principale. Le point **P** présente une concentration de contraintes due à l'encastrement. Les valeurs obtenues au point **Q** sont identiques à celles calculées analytiquement en appliquant le principe de Saint-Venant. La figure 5.7a représente la distribution de la contrainte équivalente de Von Mises (par rapport à l'origine des coordonnées de l'espace des contraintes) obtenue après l'application du premier chargement, ce qui donne une indication de l'intensité totale de la contrainte à laquelle le matériau est soumis.



**Figure 5.6.** **Fig. 5.6a)** Composante axiale selon la direction  $y$  de la contrainte interne lors du chargement 1. **Fig. 5.6b)** Composante de cisaillement de la contrainte interne lors du chargement 1.

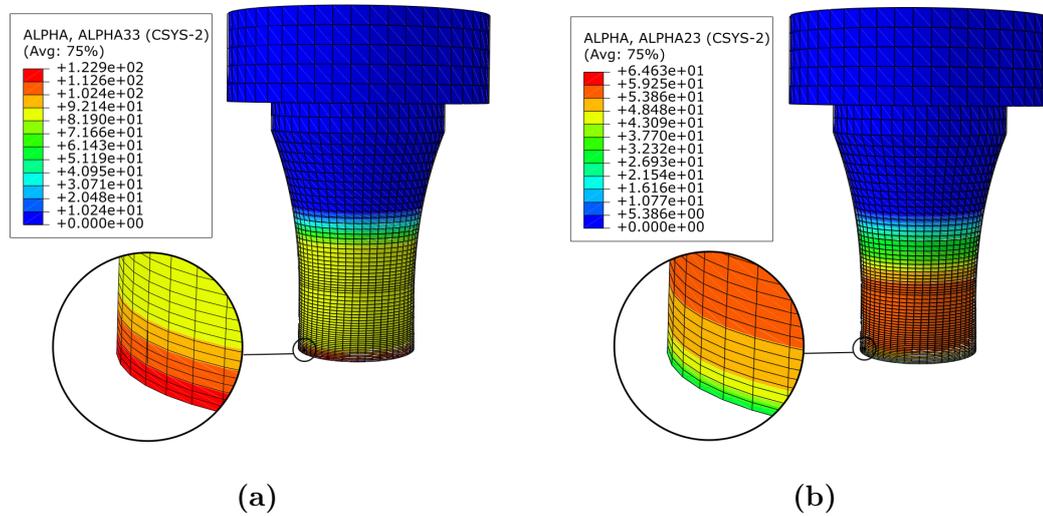
L'interprétation de la réponse de l'évolution de l'état du matériau après un tel chargement au point  $Q$  de la pièce est schématisée sur la figure 5.7b.  $B$  représente la contrainte après chargement et  $O'$  la contrainte interne (coordonnées du centre du seuil élastique). Contrairement au problème précédent, l'intensité du chargement est suffisante pour que l'origine des coordonnées  $O$  soit à l'extérieur du seuil. Dans ce cas, le front de chargement en plasticité est donné par le segment  $AB$  du chargement total  $OB$ .



**Figure 5.7.** **Fig. 5.7a)** Contrainte équivalente de Von Mises (par rapport à l'origine de coordonnées des contraintes) lors du chargement 1. **Fig. 5.7b)** Interprétation dans l'espace des contraintes déviateuriques de l'évolution du seuil élastique au point  $Q$  lors du première chargement.

Durant le déchargement, le matériau cherche à retrouver une nouvelle configuration d'équilibre, en particulier le point  $Q$  cherche à revenir à l'état de sollicitation nulle. La figure 5.8 représente les composantes de la contrainte interne après le déchargement, tandis que la figure 5.9a représente la contrainte de Von Mises par rapport à l'origine des coordonnées. Le retour du point  $Q$  est schématisé dans la figure 5.9b et est représenté

par B0 où clairement le segment C0 est dans le régime plastique. Cette modélisation est cohérente par rapport aux observations réalisées par [4, 5, 6, 7] où des phénomènes de plasticité ont été présents durant le retour à l'équilibre de la pièce.



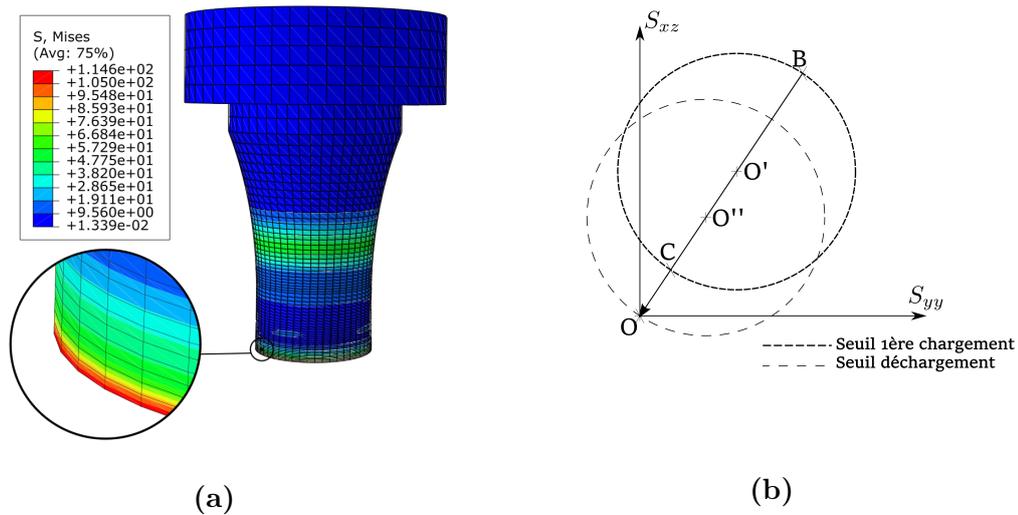
**Figure 5.8.** **Fig. 5.8a)** Composante axiale selon la direction  $y$  de la contrainte interne lors du déchargement obtenue dans la simulation 1. **Fig. 5.8b)** Composante de cisaillement de la contrainte interne lors du déchargement obtenue dans la simulation 1. Interprétation dans l'espace des contraintes déviatoriques de l'évolution du seuil élastique au point Q lors du déchargement.

C'est précisément pour cette raison que le terme "retour élastique", couramment utilisé pour décrire le processus dans lequel la pièce trouve une nouvelle configuration d'équilibre après le déchargement, doit être utilisé avec prudence afin d'éviter les généralisations erronées.

Ce phénomène se retrouve principalement dans les processus de fabrication où les contraintes atteignent des valeurs particulièrement élevées. Le retour non élastique n'a pas seulement des conséquences sur la description des variables d'état du matériau et la façon dont celui-ci réagit aux charges ultérieures dans la succession de procédés de fabrication, mais aussi sur l'estimation de la déformation plastique prévue par le modèle. Une erreur dans la prédiction de la déformation plastique entraîne une erreur de l'évaluation de la géométrie finale de la pièce.

Enfin, il reste à analyser la capacité de la méthodologie mise en œuvre à exporter correctement les variables qui caractérisent l'état du matériau dans une pièce avec un nouveau maillage. En considérant que l'état final de la première simulation à exporter correspond à un état d'équilibre facilite cette vérification. Une nouvelle simulation sans chargement externe devrait fournir des déplacements nuls ou négligeables.

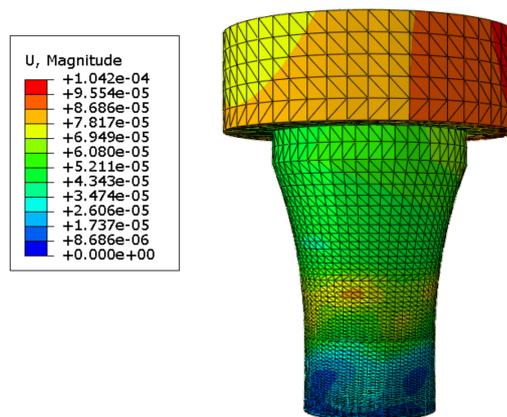
La figure 5.10 montre les déplacements obtenus après avoir effectué cette simulation, les déplacements totaux les plus importants sont de l'ordre de  $1.10^{-4}mm$ . En considérant que les déplacements obtenus lors du retour à l'équilibre dans l'étape précédente sont de l'ordre du  $mm$ , on peut considérer que les déplacements obtenus dans cette simulation ne correspondent qu'à du bruit numérique ou à des erreurs provenant du processus



**Figure 5.9.** Fig. 5.9a) Contrainte équivalente de Von Mises (par rapport à l'origine de coordonnées des contraintes) lors du déchargement obtenue dans la simulation 1. Fig. 5.9b) Schéma comparatif du seuil résultante lors du premier chargement et déchargement.

d'interpolation des valeurs des variables entre les deux maillages.

Il faut noter que les fonctions d'interpolation utilisées sont linéaires. Un point à considérer est la relation entre la taille des mailles et le déplacement obtenu. Dans les régions où la densité du maillage est plus élevée, le déplacement est pratiquement nul (même dans la région où les contraintes résiduelles n'étaient pas négligeables). En revanche, les régions où la densité du maillage est faible présentent les déplacements les plus importants, même dans les régions où il n'y a aucune contrainte résiduelle ou déformation plastique. Ce fait indique que, de toute évidence, la densité du maillage et la technique d'interpolation jouent un rôle important dans la qualité de l'exportation, comme prévu.



**Figure 5.10.** Déplacements obtenus lors de l'importation des conditions initiales.

## Conclusion

Les différences relatives obtenues dans les résultats de l'énergie plastique développée après un chargement (faible à modéré) et un déchargement consécutifs entre les modèles basés sur un déplacement cinématique et un modèle isotrope peuvent dépasser 100%. Un résultat proportionnel est obtenu par rapport aux déformations inélastiques au point P étudiées dans le premier cas d'application.

Sur la base des résultats expérimentaux (issus de la bibliographie) montrant que les modèles basés sur un écrouissage cinématique et anisotrope sont capables de reproduire l'effet Bauschinger (dans le cas d'un faible nombre de chargements) et considérant les différences dans les résultats obtenus entre les différents modèles, les modèles isotropes doivent être limités aux applications où la direction de la charge est constante autrement dit un chargement proportionnel. Dans le cas où l'intensité de la charge est élevée, l'effet Bauschinger peut apparaître pendant le processus de déchargement. Dans ces conditions les déformations obtenues avec des modèles isotropes ne sont pas correctes même dans les cas de chargement proportionnel.

Le second problème développé, a servi pour évaluer la capacité des outils numériques développés pour caractériser correctement l'état résiduel du matériau, en créant les conditions initiales de la simulation suivante. Comme l'état exporté lors de la première simulation correspond à un état d'équilibre, les déplacements de la deuxième simulation (sans chargement externe) doivent être négligeables. Les résultats issus des simulations réalisées vérifient cette hypothèse.

## Bibliographie

- [1] Portier, L. and Calloch, S. and Marquis, D. and Geyer, P. Ratchetting under tension-torsion loadings : experiments and modelling. *International journal of plasticity* 16(3-4) :303-335. 2000.
- [2] Chaboche, J.L. Viscoplastic constitutive equations for the description of cyclic and anisotropic behaviour of metals. *Bull. Acad. Polon. Sci.* 25(1) :33-42. 1977.
- [3] Ohno, N. and Wang, J-D. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, part I : formulation and basic features for ratchetting behavior, *International journal of plasticity* 9(3) :375-390. 1993.
- [4] Kolpak, F. and Hering, O. and Tekkaya, A. Consequences of large strain anisotropic work-hardening in cold forging *International Journal of Material Forming* 14(6) :1463-1481. 2021.
- [5] Banu, M. and Takamura, M. and Hama, T. and Naidim, O. and Teodosiu, C. and Makinouchi, A. Simulation of springback and wrinkling in stamping of a dual phase steel rail-shaped part *Journal of Materials Processing Technology*. 173(2) :178-184. 2006
- [6] Pagliaro, P. and Prime, M. B. and Clausen, B. and Lovato, M. L and Zuccarello, B. Known residual stress specimens using opposed indentation *Journal of Engineering Materials and Technology*. 130(3). 2009.

- [7] Barlat, F. and Gracio, J. J. and Lee, M-G. and Rauch, E. F and Vincze, G. An alternative to kinematic hardening in classical plasticity. *International Journal of Plasticity*. 27(9) :1309-1327. 2011.
- [8] Chung, K. and Lee, M-G. and Kim, D. and Kim, C. and Wenner, M. L and Barlat, F. Spring-back evaluation of automotive sheets based on isotropic-kinematic hardening laws and non-quadratic anisotropic yield functions : Part I : theory and formulation. *International Journal of Plasticity*. 21(5) :861-882. 2005.

# Conclusions et Perspectives

## Conclusions

L'objectif principal de ce travail de thèse a été de défricher une voie de recherche qui vise à caractériser l'influence de l'historique des sollicitations pendant un processus global de fabrication, et de développer des outils qui permettent de créer une méthodologie d'optimisation et d'évaluation d'un processus global en prenant en compte l'influence de chaque procédé sur le résultat final.

Cette problématique doit être abordée dans une première étape par un modèle prédictif de l'état du matériau. Comme chaque point de la pièce suit un historique de sollicitation différent à cause de la géométrie et des conditions aux limites, les propriétés développées seront fonction de cet historique. Dans une deuxième étape toute prédiction d'un modèle doit être vérifiée à travers la mesure d'une ou plusieurs variables.

L'approche adoptée pour répondre à la première problématique a été l'identification des phénomènes qui se produisent lors d'un changement dans la direction de sollicitation en présence des déformations plastiques dans le matériau, où notamment l'effet Bauschinger est le responsable de la variation de la limite élastique en comparaison du comportement isotrope. Une analyse bibliographique approfondie a été réalisée afin d'identifier les différents modèles capables de modéliser l'effet Bauschinger.

Dans cet ensemble de lois de comportement ont été identifiés principalement trois éléments pour modéliser l'évolution du seuil élastique. Ces éléments agissent de façon indépendante ou en combinaison selon chaque loi en particulier : une expansion isotrope du modèle par rapport à son barycentre géométrique, un déplacement et une distorsion. Une dernière stratégie basée sur la prise en compte de multiples mécanismes a été aussi étudiée, cette dernière représente un point intermédiaire entre les modèles phénoménologiques et ceux basés sur la plasticité cristalline.

Les lois de comportement étudiées (à exception du modèle HAH) ont été conçues principalement pour modéliser le comportement des métaux durant un chargement cyclique avec une direction et/ou un sens variable et ne pas forcément pour modéliser les processus de fabrication. Le domaine d'application est encore limité, la plupart de ces lois ne prennent pas en compte la variation de la vitesse de déformation, la température ou l'endommagement.

La traçabilité de l'état du matériau est donnée par l'évolution des variables d'état à chaque point de la pièce tout au long du processus. Dans une simulation numérique, le domaine (la pièce) est discrétisé et l'information de la distribution de valeurs de ces variables est stockée aux points d'intégration des éléments. Chaque procédé intégrant le processus considère une caractéristique particulière qui va demander une stratégie de simulation aussi particulière (solveur, maillage, type d'éléments etc.). À cet effet une méthodologie de travail d'exportation/importation des données entre deux simulations consécutives a été mise place, en tenant compte de la possibilité de travailler avec des

solveurs et/ou des logiciels différentes.

Les lois de comportement peuvent être implémentées dans un logiciel ou un solveur d'éléments finis à travers le codage de sous routines. Les lois de comportement de Chaboche ainsi que la loi d'Ohno et Wang ont été implémentées à travers UMAT et VUMAT, pour les utiliser avec le logiciel Abaqus. Un code en langage Python a été implémenté en respectant la méthodologie décrite précédemment afin d'exporter l'état final de la pièce pour réaliser une nouvelle simulation, soit pour un remaillage, soit pour un changement de solveur.

Le résultat du premier exemple du chapitre 6 montre que le fait de négliger l'effet Bauschinger (utilisation d'une loi isotrope) sur un enchaînement de sollicitations peut sous-prédire dramatiquement la déformation inélastique cumulée. Ce résultat prouve que l'utilisation de ce type de loi de comportement doit être restreint à un seul procédé où le chargement sur tous les points de la pièce suit un parcours proportionnel. Cela signifie que même les simulations tenant en compte un seul procédé mais avec un chargement hautement non-proportionnel telle que soudure FSW où une même particule suit une histoire de sollicitation hétérogène, l'anisotropie induite par le chargement doit être prise en compte.

Le résultat de la deuxième simulation du chapitre 6 montre que les effets de plasticité peuvent apparaître durant une étape de décharge connue normalement sous le nom de retour '*élastique*'. Ce résultat est en accord avec des résultats expérimentaux issus de la bibliographie où le retour élastique durant des procédés d'emboutissage a été étudié. La considération de l'effet Bauschinger prend aussi une importance pour le cas où de petites déformations peuvent générer de grands déplacements dans la pièce.

La deuxième partie du travail de thèse, cible la vérification de l'état du matériau. Une attention spéciale a été portée à la vérification des contraintes résiduelles par des méthodes destructives a été abordée. La plupart des méthodes destructives peuvent être résolues par analyse inverse dont deux méthodes de références ont été étudiées en détail. Dans ce travail de thèse a été proposée une généralisation de la méthodologie de Prime et Hill, qui se base sur la solution du champ de contraintes résiduelles comme une combinaison de fonctions polynomiales. La méthodologie proposée a été évaluée à travers un cas d'application où les résultats obtenus montrent une réduction de l'erreur et de l'incertitude comparativement aux méthodes de référence actuellement utilisées.

Toutes les méthodes de résolution de champs de contraintes résiduelles par analyse inverse utilisent certains critères arbitraires afin de créer un tirage de fonctions qui vont composer le résultat final. Cette action apporter une mauvaise solution au problème, surtout dans le cas où le niveau de bruit des données expérimentales est élevé. Les trois méthodologies de résolution étudiées (les deux de référence et celle développée) utilisent les mêmes données expérimentales. Pourtant avec les mêmes données, trois profils de contraintes peuvent être obtenus et comparés, afin de valider la pertinence de résultats.

Des codes d'application en langage Python ont été implémentés afin de calculer le profil de contraintes résiduelles à partir de la méthode de la coupe incrémentale en

utilisant les méthodes d'analyse inverse proposées par : Prime et Hill, Olson *et al.* et celle proposée dans ce travail (Brítez *et al.*).

Néanmoins, une observation spéciale doit être prise en compte par rapport aux méthodes destructives. Elles sont toutes basées sur l'hypothèse d'un retour élastique. A partir d'une des conclusions précédentes, il existe la possibilité d'expérimenter des phénomènes de plasticité durant le retour à l'équilibre d'une pièce lors d'un relâchement. Ce phénomène va à l'encontre l'hypothèse linéaire de base de ces méthodes. Les méthodes basées sur la diffraction de rayons de faible longueur d'onde mesurent directement la distance entre les plans atomiques déterminant la déformation élastique réelle. Ces méthodes doivent être toujours prises comme référence.

## Perspectives

Le travail réalisé a demandé une analyse bibliographique sur un grand nombre de sujets, ce qui permet de proposer une méthodologie de travail à suivre par la suite afin d'aboutir à l'objectif de ce nouvel axe de recherche au sein du laboratoire : la prédiction et la vérification de l'état du matériau afin de réaliser un étude d'optimisation du processus global de fabrication.

### **Extension du domaine d'application des lois de comportement**

La plupart des lois de comportement traitées dans ce travail, capables de modéliser l'effet Bauschinger, possèdent un domaine d'application limité. Les effets de la variation de la vitesse de déformation, même l'influence de hautes vitesses de déformation ou de la température ne sont pas prises en compte. Pour modéliser les procédés de fabrication, l'intégration de ces paramètres aux lois de comportement obligatoire.

### **Prise en compte de l'endommagement du matériau**

Tous les procédés impliquant la découpe ont besoin d'une loi d'endommagement couplée à la loi de comportement utilisée. La loi d'endommagement doit être compatible avec la loi de comportement utilisée et répondre au cadre thermodynamique. Les variables qui caractérisent l'état d'endommagement s'ajoutent aux variables d'érouissage pour caractériser l'état du matériau. Certains modèles d'endommagement couplés avec la lois de Chaboche, les modèles basés sur des considérations multi-critère et multi-mécanismes ont été développés dans la bibliographie. Pour le cas des modèles de YU, HAH et François aucune loi d'endommagement compatible n'a été identifiée.

Les variables qui caractérisent l'endommagement peuvent être traitées en suivant le même protocole que les autres variables du problème.

## **Étude de l'influence du paramètre de définition de la limite d'élasticité**

Le chapitre 1 a mis en évidence la dépendance de la taille du seuil élastique en fonction de la valeur du paramètre utilisé pour définir la limite d'élasticité. Quand le paramètre a une valeur faible, le domaine élastique diminue quand l'intensité de la sollicitation augmente. A contrario avec une grande valeur de ce paramètre la taille du domaine élastique augmente quand l'intensité de la sollicitation augmente.

Cet effet a une influence importante sur les lois de comportement. Par exemple la loi HAH définit l'évolution du seuil par une dilatation et une distorsion. Cela ne serait pas possible si la limite d'élasticité est définie avec une valeur faible. De façon analogue une loi qui définit l'évolution du seuil uniquement par un déplacement cinématique ne serait pas précise avec une définition de la limite d'élasticité au-dessus de 0,3%.

Cela montre la nécessité d'approfondir la compréhension de ce phénomène et des mécanismes responsables de ce comportement. Cela permettra d'améliorer et de généraliser les lois de comportement phénoménologiques.

Une des expériences qui pourrait aider à réaliser telle travail est exposée dans le point suivant.

## **Étude des déformations élastiques par diffraction durant un essai de traction**

Une expérience d'étude de diffraction de rayons de haute fréquence (rayons X, diffraction de neutrons, synchrotron) permet d'étudier la distance existante entre les plans atomiques i.e la déformation élastique [1]. Si la mesure des déformations élastiques par diffraction est réalisée ainsi que la déformation totale durant un test de traction (ou une autre sollicitation) il sera possible de faire la discrimination des composantes élastiques et inélastiques réels durant la sollicitation.

## **Étude de la fatigue comme résultat de l'accumulation d'énergie actuellement négligée dans le matériau**

Il est connu que les déformations inélastiques sont présentes même en régime élastique, mais dans ce cas elles sont tellement faibles qu'elles sont négligées. L'expérience exposée précédemment, permettrait de quantifier la proportion des déformations inélastiques au sein du matériau durant un chargement cyclique. Dans ce cas, il serait possible d'étudier la possibilité d'apparition de micro-fractures comme conséquence d'un cumul de déformation inélastique, laquelle est habituellement négligée.

## Développement de la capacité de la bibliothèque FEM\_export à travailler avec plusieurs logiciels

La version actuelle de l'outil FEM\_export travaille seulement avec le logiciel Abaqus, notamment avec les solveurs Abaqus/Standard et Abaqus/Explicit. La méthodologie appliquée peut être étendue à d'autres logiciels, notamment ANSYS, ZEBULON, HYPERMESH, DEFORM entre autres. Ce développement favoriserait l'échange des résultats entre les différents travaux traitant de la simulation des processus de fabrication. L'application d'une interface graphique favoriserait également sa diffusion et l'utilisation courante.

## Amélioration de la nouvelle méthodologie de mesure par analyse inverse

La généralisation de la méthodologie de mesure par analyse inverse présentée dans le chapitre 2 a l'avantage par rapport à la méthode de Prime-Hill que l'ordre des polynômes à considérer dans la série de la solution n'est pas restreint. Néanmoins d'une façon pratique si tous les ordres entre l'ordre minimal et le maximal sont considérés le coût du calcul explose à partir de 23 polynômes compte tenu des combinaisons possibles à évaluer. Cette situation complique ou rend très coûteuse l'évaluation des polynômes d'ordre supérieur à 24.

Une façon d'analyser la possibilité d'évaluer un polynôme d'ordre supérieur à 24 améliore la réponse sans passer par un calcul trop coûteux serait :

- Étape 1 : La méthodologie proposée s'applique sans aucun changement, et la solution obtenue est prise comme la solution de référence (en utilisant un polynôme d'ordre maximal qui rend un coût de calcul acceptable).
- Étape 2 : Les polynômes qui n'ont pas été pris en compte pour la génération de la solution de référence, vont remplacer un par un chaque polynôme de la base de la solution de référence, les nouveaux résultats seront évalués. Si une des solutions évaluées a une incertitude moyenne inférieure à la solution de base, cette combinaison devient la nouvelle base de la solution de référence.

De cette manière au lieu d'évaluer des milliers de combinaisons possibles seulement moins de 25 combinaisons seront évaluées pour chaque nouveau polynôme. Une façon de voir cette procédure est la suivante : un polynôme fera partie de la base seulement s'il est capable de réduire l'incertitude totale de la solution de référence en remplaçant l'un de ses polynômes constitutifs.

## Bibliographie

- [1] Noyan, I. C. and Cohen, J. B. *Residual stress : measurement by diffraction and interpretation*. Springer. 2013.

## Schéma de la nouvelle méthodologie d'analyse inverse pour la mesure des contraintes résiduelles

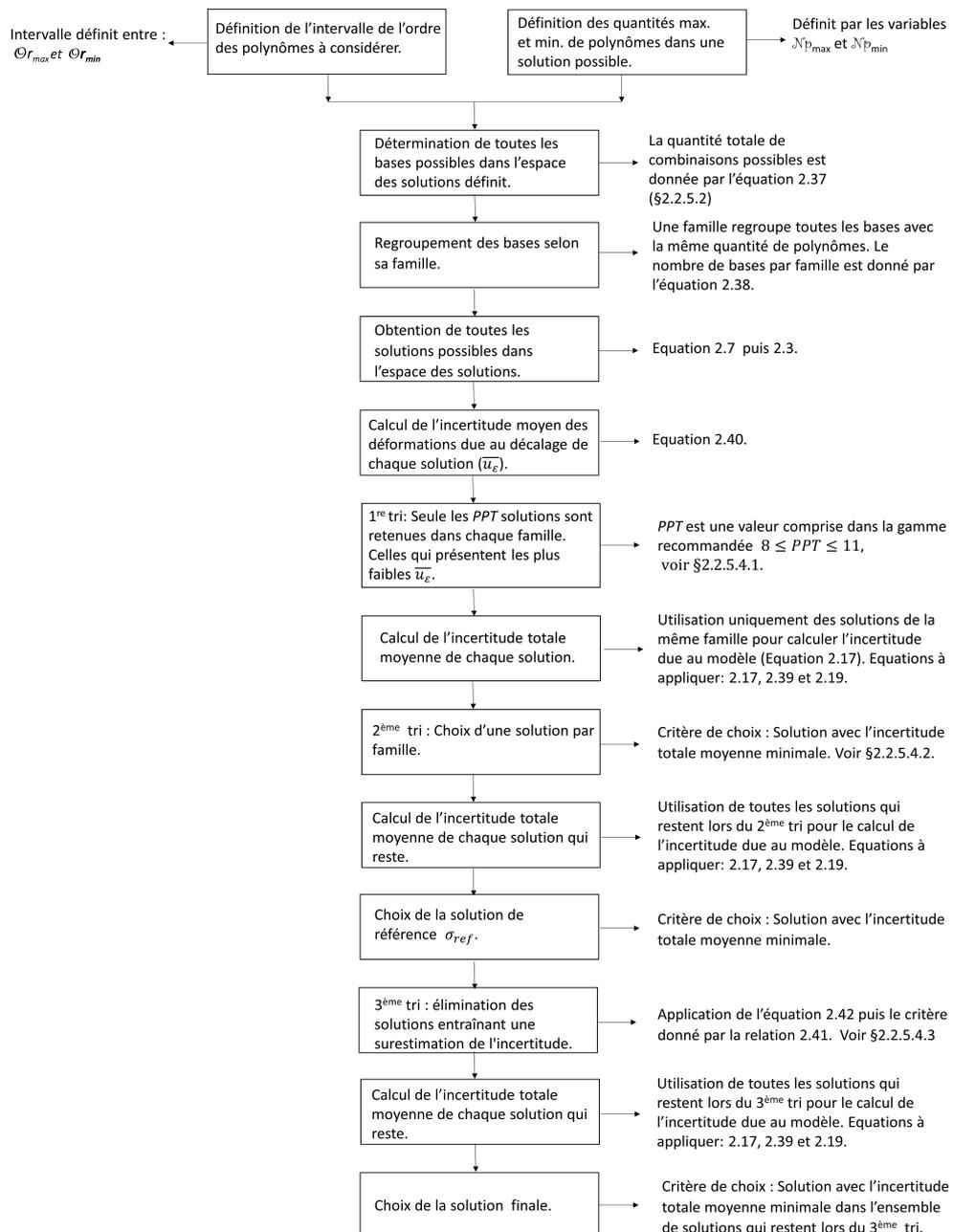


Figure A.1. Algorithme de la méthodologie proposée.

## Procédure de caractérisation numérique de l'état de la matière

### B.I Étape 1 – Obtention des résultats aux points nodaux et d'intégration depuis la simulation source

Le chapitre 3 présente les principes utilisés pour la création des outils qui permettent la caractérisation numérique de l'état de la matière. Cette section présente dans le détail les étapes à suivre durant la simulation source, et l'utilisation des outils créés en langage python pour exporter ce résultat vers une nouvelle simulation. La version actuelle des codes créés, n'est utilisable qu'avec le logiciel Abaqus.

Il existe différentes méthodes pour lire des données de sortie d'une simulation. Elles varient selon le solveur utilisé. Celui qui a été choisi dans ce travail a deux avantages : il fonctionne avec les deux solveurs considérés et la lecture de la base de données est réalisée directement en conservant la précision.

Par défaut, Abaqus met à disposition les résultats des variables aux points d'intégration, mais il est possible de demander l'interpolation et l'extrapolation des résultats aussi aux points nodaux. Pour le réaliser, une d'instruction dans le fichier de lignes de commandes (nom\_du\_fichier.inp) doit être ajoutée avant de lancer le calcul :

```
Element Output, position=nodes, directions=YES
LE, PE, PEEQ, S
Element Output, position=integration point, directions=YES
coord
```

Les variables de sortie à la seconde ligne correspondent aux variables de sortie désirées. L'utilisateur doit s'assurer de demander les variables nécessaires selon le modèle utilisé. Pour le cas où la loi est implémentée par l'utilisateur, les variables d'érouissage sont donnés par SDV (state dependent variables). La dernière ligne sert à obtenir les coordonnées des points d'intégration.

Grâce à cette action, lors du calcul, les résultats des variables tant aux points d'intégration comme aux points nodaux sont désormais disponibles dans le fichier de résultats

(`nom_du_fichier.odb`). L'information contenu dans ce fichier est accessible grâce à une interface entre Abaqus et Python. La lecture de cette information sera réalisée avec le code `ODB_extractor_V2.py`.

## B.II Étape 2 – Lecture des données de sortie et création des fichiers pré-exportation

Lors de la lecture des données, les valeurs de chaque variable sont enregistrées dans des fichiers indépendants grâce à la création du code `ODB_extractor_V2.py`. L'ordre d'écriture des données dans ces fichiers sera désormais standardisé. Cela permettra de réaliser une opération similaire si la lecture est réalisée dans un autre logiciel.

Le nom de chaque fichier créé par `ODB_extractor_V2.py` est composé par la `racine` + `_variable` + `.txt`. Ici le mot `racine` prend le nom du fichier de la base de données de sortie (fichier `odb`). Les fichiers qui seront générés selon les différents cas sont :

- **`racine_initial_mesh.txt`** : Chaque ligne de ce fichier correspond aux coordonnées d'un point du nuage de points dans leur position initiale (au début de la simulation). Chaque ligne possède 3 colonnes, qui correspondent aux coordonnées selon x,y et z respectivement. Pour cette version, les coordonnées cylindriques et polaires ne sont pas encore considérées. Le numéro de la ligne sera respecté dans tous les fichiers pour le même point, définit dans ce fichier.

- **`racine_Displacements.txt`** : Chaque ligne de ce fichier détermine les déplacements des points définis dans `racine_initial_mesh.txt` selon les axes x, y et z.

- **`racine_Output_mesh.txt`** : Chaque ligne de ce fichier donne la position finale de chaque point du nuage des points à la fin de la simulation. Le format est identique à celui du `racine_initial_mesh.txt`.

- **`racine_Stress.txt`** : Chaque ligne de ce fichier correspond à l'état de contraintes à chaque point du nuage. Chaque ligne est composée de six colonnes, l'ordre dans lequel les composantes du tenseur de contraintes sont stockés respectent le format d'Abaqus/Standard.

- **`racine_SDV.txt`** : Ce fichier sera généré quand une loi de comportement définie par l'utilisateur est utilisée (UMAT ou VUMAT) dans la simulation. Chaque ligne de ce fichier correspond aux variables qui caractérisent l'état du matériau au point du nuage. Les valeurs de déformations (élastiques et plastiques) sont données comme une variable d'état. Par convention, les six premières variables sont les composantes élastiques et les six suivantes sont les composantes de déformation plastique. L'ordre et les valeurs des variables correspondent à la convention utilisée par Abaqus/Standard.

- **racine\_PE.txt** : Ce fichier sera généré au cas où une loi de comportement de la librairie d'Abaqus est utilisée. Ce fichier offre une seule colonne, chaque ligne correspond à la valeur de la déformation équivalente à chaque point du nuage.

-**racine\_EPLAS.txt** : Ce fichier sera généré au cas où une loi de comportement de la librairie d'Abaqus est utilisée. Chaque ligne est composée de six colonnes, qui représentent chacune des composantes du tenseur de déformation plastique d'un point du nuage.

-**racine\_ALPHA\_N.txt** : La lettre N dans le nom de ces fichiers correspond au numéro de composante de la contrainte interne de la loi de Chaboche quand elle est appliquée à travers la librairie des lois d'Abaqus. Les colonnes de chaque ligne de ces fichiers donnent les valeurs des sous-composantes de la composante N à chaque point du nuage. L'ordre d'arrangement des composantes respecte la convention utilisée par Abaqus/Standard.

## B.II.1 Compilation et Interface du code ODB\_extractor\_V2.py

Le code ODB\_extractor\_V2.py ne peut pas être compilé directement avec python. Il y a des fonctions qui ne sont actives que quand le code est compilé depuis Abaqus, nécessitant une licence.

Les premières lignes du code donnent accès aux variables d'entrée comme le montre la [figure B.1](#).

```

15 #####
16                                     #Input Data
17 #####
18 path_odb='C:/Users/diego/Documents/formationAbaqus/pubi/complete_epru/'
19 odb_Name ='First_multiaxial_load.odb'
20 path_file_output='C:/Users/diego/Documents/formationAbaqus/pubi/complete_epru/'
21 step_name='Step-2'
22 frame_to_read=-1  #-1 in order to extract the values of the last frame
23 instanceName ='PART-1-1'
24
25 #General variables, boolean variables
26 Stresses=True
27 Final
28 mesh_only_integration_points=False
29 Final_mesh=True
30 Displacements=False
31 nodes_coordinates_final=True
32 nodes_coordinates_initial=False
33
34 #Wanted results to extract from an Abaqus .odb file
35 #Only if user defined UMAT or VUMAT is used
36 SDV=False
37 Number_of_DEPVAR=30
38
39 #Wanted results for Abaqus libraries models
40 Plastic_strain=True
41 Equivalent_plastic_strains=True
42
43 ##### ONLY IF BACKSTRESS IS REQUIRED WITH CHABOCHE RULE IN ABAQUS, NO USER
44 # USER SUBROUTINE
45 Backstress=True
46 N_Backstress=2

```

Figure B.1. Entrée des paramètres dans le code ODB\_extractor\_V2.py

Les paramètres à définir sont les suivants (entrée des données dans le code représenté dans la [figure B.1](#) :

- **path\_odb** : Chaîne de caractères qui sert à donner l'emplacement du dossier où se trouve le fichier de sortie des résultats d'Abaqus (fichier .odb).

- **odb\_Name** : Chaîne de caractères contenant le nom du fichier de sortie des résultats d'Abaqus.

- **path\_file\_output** : Chaîne de caractères contenant l'adresse et le dossier avec la destination des fichiers créés par le code.

- **step\_name** : Chaîne de caractères avec nom de l'étape dans la simulation à considérer pour l'extraction des données.

- **frame\_to\_read** : Nombre entier. Cadre (pas de temps) à considérer pour l'extraction de données. La valeur -1 prendra les valeurs obtenues à la fin de l'étape considérée.

- **Instance\_name** : Chaîne de caractères avec le nom de la pièce pour laquelle les données doivent être extraites.

- **Stresses** : Variable booléenne. Égale à True si la création du fichier avec les données des composantes du tenseur des contraintes est souhaitée, à contrario égale à False.

- **mesh\_only\_integration\_points** : Variable booléenne. Égale à True si la création d'un fichier avec les coordonnées des points d'intégration uniquement est souhaitée. À contrario égale à False.

- **Final\_mesh** : Variable booléenne. Égale à True si la création d'un fichier avec le nuage de points à la fin de la simulation est souhaitée (points d'intégration et points nœuds), à contrario égale à False.

- **Displacements** : Variable booléenne. Égale à True si la création d'un fichier avec l'information des déplacements des points du nuage est souhaitée, à contrario, égale à False. Ce fichier en particulier n'est pas nécessaire pour la caractérisation de l'état du matériau.

- **nodes\_coordinates\_final** : Variable booléenne. Égale à True si la création d'un fichier avec les coordonnées finales des points nœuds est souhaitée, à contrario, égale à False. Ce fichier en particulier n'est pas nécessaire pour la caractérisation de l'état du matériau.

- **nodes\_coordinates\_initial** : Variable booléenne. Égale à True si la création d'un fichier avec les coordonnées initiales des points nœuds est souhaitée, à contrario, égale à False. Ce fichier en particulier n'est pas nécessaire pour la caractérisation de l'état du matériau.

- **SDV** : Variable booléenne. Égale à True pour le cas où la loi de comportement est définie par l'utilisateur à travers UMAT ou VUMAT, égale à False pour le cas d'une loi de comportement de la bibliothèque d'Abaqus.

- **Plastic\_strain** : Variable booléenne. Égale à True si la création d'un fichier avec les données des composantes du tenseur des déformations plastiques pour les points du nuage est souhaitée, à contrario égale à False. Ce fichier est nécessaire quand une loi de comportement de

la librairie d'Abaqus est utilisée.

- **Equivalent\_plastic\_strain** : Variable booléenne. Égale à True si la création d'un fichier avec les contraintes plastiques équivalentes est souhaitée, à contrario, égale à False. Ce fichier est nécessaire quand une loi de comportement de la librairie d'Abaqus est utilisée.

- **Backstress** : Variable booléenne. Égale à True au cas où la loi de comportement de Chaboche en utilisant la librairie d'Abaqus a été choisie. Des fichiers contenant les composantes des contraintes internes seront créés, à contrario, égale à False.

**N\_Backstress** : Nombre entier. Cette variable est utilisée uniquement dans le cas où la variable Backstress est active. Elle indique le nombre de composantes de la contrainte interne à prendre en compte.

### B.III Étape 3 – Création du nouveau maillage.

A la fin de la simulation source, la géométrie de la pièce obtenue peut être traitée et remaillée par les méthodologies vues dans le chapitre 3. Cette géométrie (ou maillage) doit être enregistrée avec un fichier compatible avec Abaqus.

Une simulation en absence totale des chargements et des conditions initiales doit être réalisée avec la pièce remaillée. Ce calcul sert à générer les nouveaux points d'intégration et de connaître leur placement. La seule condition à respecter est que les éléments utilisés doivent correspondre à ceux qui seront utilisés lors de la simulation suivante. A l'aide du code `ODB_extractor_V2.py` en activant la variable d'entrée `mesh_only_integration_points` avec la variable booléenne à True, un fichier avec un nuage de points correspondant aux points d'intégration de la nouvelle pièce sera créée.

### B.IV Étape 4 – Création des fichiers contenant les conditions initiales

L'ensemble des contraintes résiduelles, déformations plastiques et variables d'écrouissage définit l'état du matériau. Cet ensemble d'informations doit être fourni à chaque point d'intégration de la pièce dans laquelle l'état initial est caractérisé.

Le code `FEM_initial_conditions.py` profite des fichiers créés pendant les étapes 2 et 3 pour générer deux types de nouveaux fichiers : *i*) les fichiers avec l'information des déformations, des contraintes et des variables d'écrouissage de la pièce à chaque point d'intégration et *ii*) un fichier contenant les instructions à ajouter dans les lignes de commandes d'Abaqus pour appliquer ces conditions initiales.

Dans le cas où la loi de comportement est implémentée à travers UMAT ou VUMAT, Abaqus a besoin de deux informations : la définition des contraintes résiduelles et la définition des variables d'état à chaque point d'intégration la pièce. Deux fichiers sont créés pour donner ces deux informations respectives, un troisième fichier appelé `INCLUDING_LINES.txt` avec les

lignes suivantes :

```
#The following lines should be pasted just before the Step-1 declaration
Initial conditions, type =stress
include, input=C:/adresse_du_dossier_du_fichier/Remeshed_RESIDUAL_STRESS.txt
Initial conditions, type =solution
include, input=C:/adresse_dossier_du_fichier Remeshed_SDV.txt
```

La première ligne indique que l'information qui sera donnée par la suite correspond aux contraintes. La deuxième ligne est un fichier qui contient l'information des valeurs d'initialisation des contraintes pour chaque point d'intégration.

Dans le cas, où la loi de comportement utilisée correspond à une loi qui se trouve dans la librairie d'Abaqus, des informations sont requises : la définition des contraintes résiduelles, les composantes de la déformation plastique, la déformation plastique équivalente et les composantes du tenseur des contraintes internes (si la loi de Chaboche est utilisée) à chaque point d'intégration de la pièce. Trois fichiers sont créés pour fournir cette information. Un quatrième fichier appelé `INCLUDING_LINES.txt` es crée est avec le contenu suivant :

```
#The following lines should be pasted just before the Step-1 declaration
Initial conditions, type= hardening, NUMBER BACKSTRESSES=2, FULL TENSOR
include, input=C:/adresse_du_dossier_du_fichier /Remeshed_HARDENING.txt
Initial conditions, type =stress
include, input=C:/adresse_du_dossier_du_fichier /Remeshed_RESIDUAL_STRESS.txt
Initial conditions, type= plastic strain
include, input=C:/adresse_du_dossier_du_fichier /Remeshed_PE.txt
```

Dans ce, cas la première ligne indique que le la loi utilisée correspond à la loi cinématique avec deux composantes de contraintes internes. La deuxième ligne indique la localisation du fichier contenant les données d'érouissage : déformations plastiques équivalentes et composantes de la contrainte interne à chaque point d'intégration. De manière similaire la troisième et quatrième ligne donnent la localisation et le nom du fichier avec les composantes des contraintes. Finalement les deux dernières lignes correspondent aux informations de l'initialisation des déformations plastiques.

## **B.IV.1 Compilation et interfase du code FEM\_initial\_conditions.py**

Le code `FEM_initial_conditions.py` fonctionne avec la version python 3.7, l'installation des paquets Scipy, Numpy et Pandas est également nécessaire. L'autre condition est d'avoir réalisé les étapes 1 à 3 afin de créé' les fichiers nécessaires.

```

48 #####
49 #                               Data input                               #
50 #####
51 #Initial source data
52 #The source path is the path where the files generated with ODB_extractor_V2.py
53 #where placed
54 source_path='C:path_to_source_files_directory/'
55
56 #source file name without extension of the .odb file (without the extension .odb)
57 odb_file_source= 'name_of_the_odb_source_file'
58
59 number_of_backstress=2           #Only if applicable
60                               #The case for backstresses higher than 2
61                               #is not yet generalized !!!!! attention
62
63 #New mesh source data
64 new_mesh_file_path='C:path_to_new_mesh_file/'
65 file_new_mesh='new_mesh.txt'
66
67 #Solver dependence arrangement
68 #'Abaqus/Standard' or 'Abaqus/Explicit' options
69 Abaqus_Sandard=True
70 Abaqus_Explicit=False
71
72 #Initial condition hardening variables
73 hardening_rule='combined'       #'combined', 'isotropic' or 'user'
74
75 #Initial conditions files data
76 result_path='C:path_of_initial_conditions_data_files_directory/'
77 #Itshould always added a -1 to the name that appears in Abaqus
78 instance_name='PART-1-1'
79
80 #####
81 #####

```

**Figure B.2.** Entrée des données dans le code FEM\_initial\_conditions.py

Les noms des paramètres utilisés dans la section d'entrée des données sont auto-explicatives, pour simplifier l'utilisation :

- `source_path` : Chaîne des caractères. Localisation du dossier où se trouvent les fichiers créés précédemment avec `ODB_extractor_V2.py`.
- `odb_file_source` : Chaîne de caractères. Le nom du fichier de sortie de base des données d'Abaqus (l'extension `.odb` n'est pas nécessaire).
- `number_of_backstress` : Nombre entier. Le nombre de composantes utilisées pour exprimer la contrainte interne dans le cas où cette donnée est applicable, dans le cas contraire cette entrée sera ignorée. Pour la version actuelle du code, le nombre maximal de composantes est de deux. Une prochaine version devra permettre de généraliser à n'importe quel nombre définit par l'utilisateur.
- `New_mesh_file_path` : Chaîne de caractères. Localisation désirée pour les fichiers générés pour le code.
- `file_new_mesh` : Chaîne de caractères. Nom du fichier contenant les données du nouveau maillage créé avec `ODB_extractor_V2.py` à l'étape 3.
- `Abaqus_Standard` : Variable booléenne. L'option égale à `True` génère des fichiers avec la convention adoptée par Abaqus/Standard. L'option `False` ne produit pas de résultat.

- **Abaqus\_Explicit** : Variable booléenne. L'option égale à True génère des fichiers avec la convention adoptée par Abaqus/Explicit. L'option False ne produit pas de résultat.

- **hardening\_rule** : Chaîne de caractères. Trois options sont reconnues : 'combined', 'isotropic' et 'user'. La première option sera choisie pour l'utilisation d'une loi combinée de Chaboche de librairie d'Abaqus. L'option 'isotropic' est utilisée pour n'importe quelle loi isotrope de la librairie d'Abaqus. La dernière option 'user', pour une implémentation d'une loi implémentée à travers des sous-routines.

- **result\_path** : Chaîne de caractères. Localisation désirée pour l'enregistrement des fichiers du résultat du code.

- **Instance\_name** : Chaîne de caractères. Nom de la pièce à caractériser. Le nom de la pièce doit correspondre avec le nom donné dans la simulation de destination.

## Codes pour la résolution des contraintes résiduelles par analyse inverse

Dans cette section sont présentés les codes pour le calcul des contraintes résiduelles par analyse inverse à travers 3 méthodologies de calcul différentes : la méthode proposée par Olson *et al.* [1], la méthode de Prime et Hill [2] et la nouvelle méthodologie développée dans ce travail de thèse. Tous les codes sont appliqués à la méthode destructive de coupe incrémentale. Tous les codes ont été programmés en Python.

Les trois méthodes nécessitent en entrée un fichier de texte contenant la matrice de complaisance. Cette matrice peut toujours être calculée par la méthode des éléments finis. Pour les cas particuliers des plaques rectangulaires et anneaux plans, des solutions semi analytiques sont disponibles [3].

### C.I Méthodologie d’Olson *et al.*

Cette méthodologie discutée dans §2.2.4.1 à partir du travail réalisé par *Olson et al.* [1] qui utilise les fonctions échelons bornés comme base pour la création de la matrice de complaisances.

Le code va générer deux fichiers de sortie, un tableur en format `csv` et un graphique de la courbe du profil des contraintes résiduelles notamment avec les barres des incertitudes. Le format du fichier de la courbe est vectorisé avec l’extension `svg`. Le tableur sera composé de cinq colonnes en indiquant respectivement : la distance en mm, la contrainte résiduelle, l’incertitude totale, l’incertitude due au décalage des déformations et l’incertitude due au modèle.

#### C.I.1 Description des paramètres d’entrée

`-Compliance_matrix_file` : Chaîne des caractères contenant l’adresse et le nom du fichier de texte où se trouve les données de la matrice de complaisance.

Cette méthodologie utilise les fonctions échelons unitaires comme fonctions de base. Chaque colonne de la matrice représente les déformations qui sont obtenues pour l’application d’un échelon borné spécifique pour chaque coupe réalisée. Elle doit être nécessairement une matrice carrée triangulaire inférieure.

`-strains_file` : Chaîne des caractères. Nom du fichier (avec l’adresse précise) qui contient l’information des déformations obtenues durant la prise de données expérimentales appliquant la méthode de la coupe incrémentale. Chaque lecture obtenue lors d’une nouvelle coupe doit être enregistrée sur une nouvelle ligne. Le fichier résultant possédera une colonne avec le nombre d’éléments égal au nombre de coupes. Les valeurs sont exprimées en microdéformations.

```

35 #####
36 #                               Input Data
37 #####
38 Compliance_matrix_file='C:/Compliance_matrix_file_path/Compliance_pulses_quad.txt'
39 strains_file='C:/Strains_file_path/strains.txt'
40 cuts_file='C:/cuts_file_path/cuts.txt'
41 Compliance_matrix_column_delimiter='None'
42 #poisson coefficient
43 v=0.29
44 #Elastic modulus in Pascal
45 E=205e9 #in Pascal
46 #Part thickness in mm
47 thickness=16
48
49
50 #Supossed uncertainty inherent from the apparatus in deformation
51 min_e=2.0e-6
52
53 """
54 Output parameters
55 """
56 path_result='C:output_path/'
57 filename_svg='file_name.svg'
58 output_dpi=300
59 filename_csv='file_name.csv'
60
61 """
62 Methodology parameters
63 -----
64 The user should consider review the original article before changing the recomended
65 parameters given by Olson et. al.
66 """
67
68 #Lower alpha value to be considered
69 #Alpha is a parameter of the methodology, more information in original paper
70 #Default value (recomended by the author is -15)
71 min_alpha=-15
72 #R is the parameter that controls the span range of the subset of the pameter alpha,
73 # Olson recommendation R=1.5
74 R=1.5
75 #Methodology parameter, Olson's recommendation is 60
76 M=60
77 #Maximal strain misfit used as stop criteria, recomended value 100 microdef
78 max_u_allowed=100e-6 #in deformation

```

Figure C.1. Lignes d'entrée des données dans le code Olson\_method.py

-Cuts\_file : Chaîne de caractères. Nom du fichier (avec localisation précise) qui contient l'information des profondeurs des coupes réalisées durant la phase expérimentale. Les valeurs des profondeurs doivent évoluer avec une forme incrémentale. Les valeurs doivent être exprimées en mm.

-Compliance\_matrix\_delimiter : Chaîne de caractères. Si un élément a été utilisé comme séparateur des colonnes dans le fichier contenant la matrice de complaisances, cela doit être indiqué dans ce paramètre. Au cas où aucun élément n'a été utilisé comme séparateur, l'option 'None' doit être utilisée.

-v : Valeur positive réelle. Coefficient de poisson du matériau utilisé.

-E : Valeur positive réelle. Module d'élasticité du matériau utilisé exprimé en Pascal. ATTENTION : Le code prend l'hypothèse que le module d'élasticité utilisé pour créer la matrice de complaisance est égal à l'unité. Si la matrice de complaisance a été créée en prenant compte le module d'élasticité, la valeur à fournir ici doit être égale à l'unité.

-Thickness : Valeur positive réelle. Épaisseur totale de l'échantillon mesuré. Valeur exprimée

en mm.

`-min_e` : Valeur positive réelle. Incertitude propre de l'appareil de mesure utilisé, prenant en compte les conditions de mesure. Si cette valeur n'est pas connue, la valeur minimale recommandée est  $2.10^{-6}\varepsilon$ .

Paramètres de sortie :

`-path_result` : Chaîne de caractères contenant l'adresse où seront enregistrés les deux fichiers de sortie.

`-file_name_svg` : Chaîne de caractères contenant le nom du fichier du graphique du profil de contraintes optimal calculé. Le nom du fichier doit se terminer avec l'extension `.svg`.

`-output_dpi` : Valeur réelle. Elle indique la quantité de pixels par pouce à générer dans l'image.

`-filename_csv` : Chaîne de caractères contenant le nom du fichier du tableur généré. Le nom du fichier doit se terminer avec l'extension `.csv`.

Par la suite, les paramètres propres à la méthodologie, sont décrits en détail dans le chapitre 2 et dans l'article original où la méthodologie est présentée [1]

`-Min_alpha` : Valeur réelle. Le paramètre  $\alpha$  règle la sévérité de la régularisation. La valeur donnée dans cette entrée correspond à la première valeur qui sera analysée comme paramètre de régularisation. Ensuite, l'algorithme propose de la faire varier vers des valeurs positives à la recherche de la solution optimale. La valeur proposée par l'auteur de l'article original est -15. Cette valeur est assez faible pour assurer que la valeur optimale de  $\alpha$  est nécessairement évaluée.

`-R` : Valeur positive réelle. Valeur recommandée par l'auteur égale à 1,5. Ce paramètre règle l'étendue des valeurs autour du paramètre  $\alpha$  considéré pour estimer l'incertitude du modèle.

`-M` : Valeur réelle entière positive. Valeur recommandée par l'auteur égale à 60. Ce paramètre représente la quantité de solutions utilisées de chaque côté de l'étendue des valeurs du paramètre  $\alpha$  pour réaliser l'estimation de l'incertitude du modèle.

`-max_u_allowed` : Valeur positive réelle. Ce paramètre représente le critère d'arrêt de l'algorithme. La valeur recommandée par l'auteur est de 100. Si la valeur absolue de la différence entre une déformation calculée et mesurée est supérieure à la valeur de ce paramètre, l'algorithme s'arrête.

## C.II Méthodologie de Prime et Hill

La documentation théorique originale de cette méthodologie de résolution du problème inverse est décrite dans [2], abordée dans ce travail dans §2.2.2.3. Le nom du code est `prime_hill_method.py`, écrit en `Python`.

Le code va générer deux fichiers de sortie : un tableur en format `csv` et un graphique de la courbe du profil des contraintes résiduelles notamment avec les barres de incertitudes. Le tableur

sera composé de cinq colonnes en indiquant respectivement : la distance en mm, la contrainte résiduelle, l'incertitude totale, l'incertitude due au décalage des déformations et l'incertitude due au modèle.

### C.II.1 Description des paramètres d'entrée

La figure C.2 illustre le format d'entrée des paramètres du code. Les noms des paramètres décrivent l'information à fournir, sauf pour ceux qui règlent la méthodologie i.e `minimal_order`, `max_order`, `minimal_number_of_polynomial` et `N`.

```

17 #####
18 #                               Input Data
19 #####
20 '''
21 Elastic properties
22 '''
23 #Elastic modulus in pascal
24 Eprim=210e3
25 #The poisson's coefficient
26 v=0.29
27
28 #Geometric properties
29 thickness=15
30
31 #I/O informations
32 path_data='C:data_path/'
33 Compliance_Matrix_file_name='Compliance_Matrix.txt'
34 Strains_file_name='strains_file.txt'
35 cuts_file_name='cuts_file.txt'
36 result_directory='C:results_path/'
37 file_name_csv='Result_prime_hill.csv'
38 file_name_svg='Rult_prime_hill.svg'
39 output_dpi=300
40
41 #Method parameters
42 minimal_order=2
43 max_order=8
44 minimal_number_of_polynomial=3
45
46 """
47 Number of solutions to considerate in the model uncertainty estimation
48 (recommended value in the original article N=3)
49 """
50 N=3
51

```

**Figure C.2.** Lignes d'entrée des données dans le code `prime_hill_method.py`

L'information relative au comportement élastique du matériau est donnée par :  
**Eprim** : Valeur positive réelle. Module d'élasticité du matériau utilisé exprimé en Pascal.  
 ATTENTION : Le code prend l'hypothèse que le module d'élasticité utilisé pour créer la matrice de complaisance est égale à l'unité. Si la matrice de complaisance a été créée en prenant en compte le module d'élasticité, la valeur à fournir ici doit être égale à l'unité.

-**v** : Valeur réelle positive. Coefficient de poisson du matériau utilisé.

Le seul paramètre relatif à la géométrie est :

-**thickness** : Valeur réelle positive. Épaisseur de la pièce en mm.

Les informations relatives au placement des fichiers de données et sorties sont gérées à

travers les paramètres suivants :

**path\_data** : Chaîne de caractères. Indique le placement du dossier où se trouvent les fichiers utilisés comme données (matrice de complaisance et données de déformation). Si ce paramètre est laissé sans information, les noms de fichiers avec la localisation exacte dans la machine doivent être fourni dans les trois paramètres décrits par la suite.

**-Compliance\_Matrix\_file\_name** : Chaîne de caractères contenant l'adresse et le nom du fichier de texte où se trouve les données de la matrice de complaisances.

Chaque élément de cette matrice est associé à la déformation calculée qui correspond à l'application d'un profil de contraintes donné par un polynôme. Les différentes lignes correspondent aux déformations obtenues pour des différentes profondeurs de coupes. Les différentes colonnes correspondent aux solutions pour des différents polynômes.

La première colonne doit être associée au polynôme d'ordre le plus faible à évaluer. A chaque incrément de l'ordre des colonnes, le polynôme auquel il correspond augmente également d'un degré par rapport à la colonne précédente.

**-strains\_file\_name** : Chaîne des caractères. Nom du fichier qui contient l'information des déformations obtenues durant la prise de données expérimentales appliquant la méthode de la coupe incrémentale. Chaque lecture de déformation obtenue lors d'une nouvelle coupe doit être enregistrée sur une nouvelle ligne. Le fichier résultant sera une colonne avec le nombre d'éléments égale au nombre de coupes. Les valeurs doivent être exprimées en microdéformations.

**-cuts\_file\_name** : Chaîne de caractères. Nom du fichier qui contient l'information des profondeurs de coupes réalisées durant la phase expérimentale. Les valeurs des profondeurs doivent évoluer de forme incrémentale. Les valeurs doivent être exprimées en mm.

**-result\_directory** : Chaîne de caractères. Indique le placement du dossier où seront déposés les fichiers résultats. Si ce paramètre est laissé sans information (i.e égal à ), les noms des fichiers résultats doivent être fournis avec leur emplacement.

**-file\_name\_csv** : Chaîne de caractères. Nom du fichier à utiliser pour l'enregistrement du résultat final. L'extension du fichier doit être `csv`.

**-file\_name\_svg** : Chaîne de caractères avec nom du fichier du graphique du profil de contraintes optimal calculé. Le nom du fichier doit finir avec l'extension `.svg`.

**-output\_dpi** : Valeur réelle et positive. Elle indique la quantité de pixels par pouce de l'image.

Finalement il existent trois paramètres à fournir dont dépend le résultat final de la méthode :

**-minimal\_order** : Valeur entière, réelle et positive. Elle représente l'ordre du polynôme d'ordre le plus faible à inclure dans la base utilisée pour générer la solution.

**-max\_order** : Valeur entière, réelle et positive. Elle représente l'ordre maximal à évaluer pour générer la solution. Ce paramètre doit être nécessairement égal ou inférieur au polynôme maximal utilisé pour créer la matrice de complaisance.

**-minimal\_number\_of\_polynomial** : Valeur entière réelle positive. Ce paramètre représente

le nombre minimal de polynômes qui peuvent composer une base. Habituellement, les valeurs de 2 ou 3 sont utilisées.

-N : Valeur entière, réelle et positive. Elle indique le nombre de polynômes à prendre en compte pour générer l'incertitude du modèle. L'article original recommande une valeur égale 3.

## C.III Nouvelle méthodologie

La documentation théorique originale de cette méthodologie de résolution le problème inverse est décrite dans la section §2.2.5 . Le nom du code où la méthodologie a été développée est `Britez_et_all_unified.py`.

Le code va générer trois fichiers de sortie :

- Un tableur au format `csv`, contenant cinq colonnes : la profondeur de la mesure (en *mm*), la contrainte résiduelle en (*MPa*) à cette profondeur, l'incertitude totale, l'incertitude due au modèle et l'incertitude due au décalage des déformations.

- Un graphique de la courbe du profil des contraintes résiduelles notamment avec les barres des incertitudes.

- Et finalement un fichier récapitulatif final de la solution trouvée dans le format `txt`. Ce fichier est constitué des informations suivantes : Ordre des polynômes de Legendre dans la solution finale, leurs multiplicateurs, les coefficients du polynôme final obtenu comme résultat de la combinaison linéaire des polynômes de Legendre.

### C.III.1 Description des paramètres d'entrée

La [figure C.3](#) illustre le format d'entrée des paramètres du code. Les noms des paramètres décrivent l'information à fournir, sauf pour ceux qui règlent la méthodologie i.e `minimal_quantity_poly`, `max_quantity_poly`, `alpha`, `lowest_legendre_order`, `highest_order_to_evaluate` et `n_solutions_pol_or`.

- `data_path` : Chaîne des caractères. Indique le placement du dossier où se trouvent les fichiers des données d'entrée (matrice de complaisance et données de de déformation). Si ce paramètre est laissé sans information, les noms de fichiers avec la localisation exacte dans la machine doivent être renseignés dans les trois paramètres décrits par la suite.

- `Compliance_Matrix_file_name` : Chaîne des caractères le nom du fichier de texte où se trouve les données de la matrice de complaisances.

- `Strains_file_name` : Chaîne des caractères. Nom du fichier qui contient l'information des déformations obtenues à partir des données expérimentales appliquant la méthode de la coupe incrémentale. Chaque lecture de déformation obtenue lors d'une nouvelle coupe doit être enregistrée sur une nouvelle ligne. Les valeurs doivent être exprimés en microdéformations.

- `cuts_file_name` : Chaîne des caractères. Nom du fichier qui contient l'information de profondeurs de coupes réalisées durant la phase expérimentale. Les valeurs des profondeurs doivent évoluer de forme incrémentale. Les valeurs doivent être exprimées en mm.

- `result_path` : Chaîne des caractères. Indique le placement du dossier où seront déposés les fichiers du résultat. Si ce paramètre est laissé sans information (i.e égal à `''`), les noms de fichiers

```

24 #####
25 #####          DATA INPUT          #####
26 #####
27
28 data_path='C:data_path'
29 Compliance_Matrix_file_name=data_path+'Compliance_Matrix.txt'
30 #strains expressed in microstrains
31 Strains_file_name= data_path+'strains_file.txt'
32 #Cuts data in mm
33 cuts_file_name= data_path + 'cuts.txt'
34
35 result_path='C:/Users/diego/Desktop/Britez_et_al_mehtod/Results/'
36
37 pre_result_file_name = result_path + 'Pre_result.txt'
38
39 # Final result name without extension
40 Final_result_file_name= result_path+ 'Final_result'
41
42 file_name_svg= result_path + 'result_graphic.svg'
43
44 dpi_output= 300
45 #Part thickness in mm.
46 thickness=16
47
48 #Elastic modulus in MPa
49 E=210.5e3
50 #poisson number
51 v=0.29
52
53 #Method parametrs
54 min_quantity_poly=3
55 max_quantity_poly=8
56 #Alpha should be kepted between 1 and 2
57 alpha= 1.5
58 #The lowest legendre order to be evaluated is normally equal to 2
59 lowest_legendre_order=2
60
61 highest_order_to_evaluate=18
62
63 #Number of solutions to save for stress uncertainty due to polynomials orders
64 #This parameter is recomended between 8 and 11
65 n_solutions_pol_or=11

```

**Figure C.3.** Environnement du code `Britez_et_al_unified.py` pour l'entrée des paramètres.

des résultats doivent être renseignés avec son emplacement dans la machine.

`-pre_result_file_name` : Chaîne des caractères. Dans ce fichier, le code écrira la meilleure base pour chaque famille, c'est-à-dire les solutions avec le plus faible décalage des déformations par rapport aux données de mesure. C'est le résultat obtenu après la première étape de tri. Chaque base est représentée par une liste avec les ordres de polynômes de Legendre qui la composent. Ce pré-résultat peut être intéressant si une analyse particulière du processus de tri est effectuée.

`-Final_result_file_name` : Chaîne des caractères. Nom du fichier à utiliser pour l'enregistrement du résultat final. Ce nom doit être donné sans aucune extension particulière. Deux fichiers sont générés avec ce nom, mais avec des différentes extensions `csv` et `txt`.

`-final_name_svg` : `-file_name_svg` : Chaîne de caractères contenant le nom du fichier du graphique du profil de contraintes optimal calculé. Le nom du fichier doit finir avec l'extension `.svg`.

`-dpi_output` : Valeur réelle et positive. Elle indique la quantité de pixels par pouce à rendre dans l'image à être produit.

`-thickness` : Valeur réelle positive. Épaisseur de la pièce.

#### Propriétés élastiques du matériau :

`-E` : Valeur positive réelle. Module d'élasticité du matériau utilisé exprimé en Pascal. ATTENTION : Le code prend l'hypothèse que le module d'élasticité utilisé pour créer la matrice de complaisance est égale à l'unité. Si la matrice de complaisance a été créée prenant en compte le module d'élasticité, la valeur à fournir ici doit être égale à l'unité.

`-v` : Valeur réelle positive. Coefficient de poisson du matériau utilisé.

#### -Paramètres de la méthodologie :

`-min_quantity_poly` : Valeur entière, réelle et positive. Ce paramètre représente le nombre minimal de polynômes pouvant composer une base. Les valeurs habituellement utilisées sont 2 ou 3.

`-max_quantity_poly` : Valeur entière, réelle et positive. Ce paramètre représente le nombre minimal de polynômes pouvant composer une base. Le coût de calcul a une relation exponentielle avec cette paramètre.

`-lowest_legendre_order` : Valeur entière, réelle et positive. Elle représente l'ordre du polynôme d'ordre le plus faible à être inclut dans la base utilisée pour générer la solution.

`-highest_order_to_evaluate` : Valeur entière, réelle et positive. Elle représente l'ordre maximal à être évalué pour être partie de la base utilisée pour générer la solution. Ce paramètre doit être nécessairement égal ou inférieur au polynôme maximal utilisé pour créer la matrice de complaisances.

`-PPT` : Valeur entière, réelle et positive. Nombre des solutions à retenir dans chaque famille de solutions lors du premier tri. Une information précise de sa fonction se trouve dans §2.2.5.4.1. La valeur recommandée se trouve dans la gamme  $8 \leq PPT \leq 11$ .

## Bibliographie

- [1] Olson, M.D. and DeWald, A.T. and Hill, M.R. An uncertainty estimator for slitting method residual stress measurements including the influence of regularization. *Experimental Mechanics*. 60(1)65-79. 2020.
- [2] Prime, M.B. and Hill, M.R. Uncertainty, model error, and order selection for series-expanded, residual-stress inverse solutions. *Journal of Engineering Materials and Technology*. 128(2) :175-185. 2006.
- [3] Cheng, W. and Finnie, I. *Residual Stress Measurement and the Slitting Method*. Springer Science & Business Media, 2007.

## **Modélisation d'un processus de mise en forme intégrant l'interaction entre procédés dans le comportement du matériau.**

**Résumé :** Le contexte industriel actuel impose l'optimisation des ressources de production, notamment des matières premières et de l'énergie consommée. Cet engagement ne répond pas seulement aux critères de compétitivité liés aux coûts de production mais aussi à l'impact environnemental du processus global de fabrication. Pour répondre à ce problème, il est nécessaire de disposer de modèles pour définir des stratégies d'optimisation efficaces tout au long du processus complet de mise en forme d'une pièce mécanique.

La plupart des lois de comportement habituellement utilisées pour modéliser le comportement des matériaux métalliques dans les procédés de transformation, sont caractérisées par un comportement isotrope. Ces modèles sont efficaces pour prédire le comportement d'un procédé sous chargement proportionnel, mais par définition ne peuvent pas prendre en compte l'anisotropie développée durant l'érouissage. Cette caractéristique ne permet pas de prendre en compte les effets de l'interaction entre les différents procédés constitutifs du processus. Ce travail explore les lois de comportement phénoménologiques capables de modéliser ce phénomène afin d'obtenir un modèle précis du processus global. Sachant que la modélisation de chaque procédé nécessite un solveur et des mises en œuvre particulières, une méthodologie de travail ainsi que les outils numériques nécessaires pour gérer les variables d'état du processus ont été développés. Cette méthodologie permet un suivi des valeurs de variables d'érouissage tout au long de la simulation du processus.

Ce travail explore également des l'estimation du profil des contraintes résiduelles obtenu par des méthodes de mesure destructives en confrontant les résultats de simulations avec des données expérimentales. Une nouvelle méthodologie basée sur l'analyse inverse est développée et mise en œuvre. La nouvelle méthode est comparée avec les résultats obtenus avec deux méthodes destructives de référence. Les résultats obtenus dans cette application montrent une diminution à la fois de l'erreur et du niveau d'incertitude.

**Mots-clés :** loi de comportement, plasticité, anisotropie, modélisation des interactions, contraintes résiduelles, analyse inverse.

---

## **A forming process modeling integrating the interaction between processes in the material behavior.**

**Abstract:** The current industrial context requires the optimization of production resources, particularly raw materials and energy consumption. This commitment does not only meet the criteria of competitiveness related to production costs but also to the environmental impact of the overall manufacturing process. To solve this problem, is required a mode to define optimization strategies through a complete forming process during a mechanical part manufacturing.

Most behavior laws used for metals, dedicated to perform simulations of forming and machining processes are characterized by an isotropic behavior. These models are effective in predicting the behavior under proportional loading, but by definition cannot consider the anisotropy developed during work hardening. This limitation makes it impossible to consider the interaction effects between the different stages of the manufacturing process. This work goes through the phenomenological behavior laws capable of modeling this phenomenon, in order to obtain an accurate model of the overall process. Knowing that the modeling of each process stage requires a solver and specific definitions, a methodology as well as numerical tools necessary to manage the hardening variables along the process have been developed. This methodology allows a traceability of the values of hardening variables throughout the simulation of the process, dividing the global simulation, admitting the use of different solvers or software.

This work explores the profile estimation obtained with destructive residual stresses measurement methods in order to compare simulation results with experiments. A new methodology using inverse analysis is developed and implemented. From numerical generated data, the new method is applied and compared with two destructive reference methods. The results in this application show, a decrease in both: the error and the uncertainty level.

**Keywords:** behavior law, plasticity, anisotropy, interaction modelling, residual stresses, inverse analysis

---

