



**HAL**  
open science

# Courbes à courbure totale localement bornée et leurs applications en géométrie discrète

Etienne Le Quentrec

► **To cite this version:**

Etienne Le Quentrec. Courbes à courbure totale localement bornée et leurs applications en géométrie discrète. Géométrie algorithmique [cs.CG]. Université de Strasbourg, 2021. Français. NNT : 2021STRAD031 . tel-03850443

**HAL Id: tel-03850443**

**<https://theses.hal.science/tel-03850443>**

Submitted on 13 Nov 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE 269 msii

UMR 7357

**THÈSE** présentée par:

**Étienne Le Quentrec**

soutenue le : 30 Novembre 2021

pour obtenir le grade de: **Docteur de l'université de Strasbourg**

Discipline/ Spécialité: Informatique

**Courbes à Courbure Totale Localement  
Bornée et leurs Applications en  
Géométrie Discrète**

**THÈSE dirigée par :**

**M. TAJINE Mohamed**

Professeur, université de Strasbourg

**RAPPORTEURS :**

**Mme KENMOCHI Yukiko**

Chargée de Recherche, CNRS (Université de Caen Normandie)

**M. LACHAUD Jacques-Olivier**

Professeur, Université Savoie Mont Blanc

**AUTRES MEMBRES DU JURY :**

**M. THIEL Édouard**

Professeur, Université d'Aix-Marseille

**M. ANDRES Eric**

Professeur, Université de Poitiers

**M. ROMON Pascal**

Maître de Conférences, Université Paris-Est Marne-la-Vallée

**M. BAUDRIER Étienne**

Maître de Conférences, Université de Strasbourg

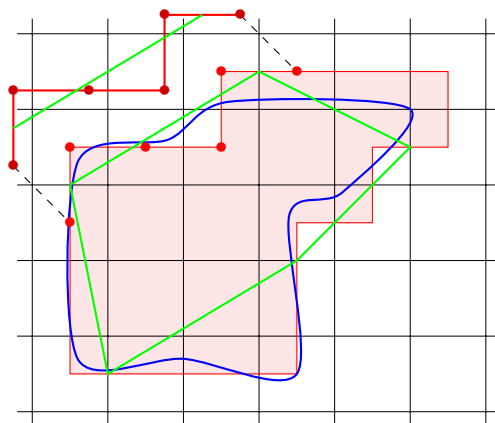
**M. MAZO Loïc**

Maître de Conférences, Université de Strasbourg

# Courbes à Courbure Totale Localement Bornée et leurs Applications en Géométrie Discrète

Étienne Le Quentrec

5 janvier 2022



# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Table des matières</b>   | <b>2</b>  |
| <b>1 Introduction</b>   | <b>5</b>  |
| <b>2 Hypothèses sur la forme continue</b>   | <b>11</b> |
| 2.1 État de l'art . . . . .   | 11        |
| 2.1.1 Par-régularité . . . . .  | 11        |
| 2.1.2 Semi-régularité . . . . .   | 13        |
| 2.1.3 $r$ -stabilité . . . . .  | 13        |
| 2.1.4 $\mu$ -portée . . . . .   | 14        |
| 2.1.5 Quasi-régularité . . . . .  | 15        |
| 2.1.6 Épaisseur de distorsion . . . . .   | 16        |
| 2.2 Courbes à Courbure Totale Localement Bornée . . . . .   | 17        |
| 2.2.1 Préliminaires sur la courbure totale . . . . .  | 19        |
| 2.2.2 Définition et exemples basiques . . . . .   | 29        |
| 2.2.3 Construction d'un arc CTLB avec des points angulaires denses . . . . .  | 31        |
| 2.2.4 Propriétés élémentaires . . . . .   | 34        |
| 2.2.5 Arc le plus droit . . . . .   | 38        |
| 2.2.6 Courbes à courbure totale lipschitzienne . . . . .  | 43        |
| 2.3 Lien des courbes CTLB avec d'autres notions . . . . .   | 44        |
| 2.3.1 Lien avec la par-régularité . . . . .   | 44        |
| 2.3.2 Lien avec la quasi-régularité . . . . .   | 51        |
| 2.3.3 Liens avec d'autres notions . . . . .   | 59        |
| 2.4 Conclusion . . . . .  | 60        |
| <b>3 Discrétisation d'une forme à bord CTLB</b>   | <b>63</b> |
| 3.1 Topologie d'une forme discrète . . . . .  | 63        |
| 3.2 Modèles de discrétisation . . . . .   | 66        |
| 3.2.1 Différents modèles de discrétisation . . . . .  | 67        |
| 3.2.2 Conventions dans le cadre de la discrétisation de Gauss sur $h\mathbb{Z}^2$ d'une forme ayant pour bord une courbe CTLB . . . . . | 70        |
| 3.2.3 Résultats de préservation de la topologie . . . . .   | 72        |
| 3.3 Propriétés locales de la discrétisation des courbes CTLB . . . . .  | 73        |
| 3.4 Configurations exclues de la discrétisation d'une courbe CTLB . . . . .   | 77        |
| 3.5 Préservation de la topologie d'une forme CTLB . . . . .   | 80        |

|  |            |
|--|------------|
| <i>TABLE DES MATIÈRES</i>  | 3          |
| 3.6 Conclusion . . . . .   | 85         |
| <b>4 Rétro-discrétisation</b>                                      | <b>89</b>  |
| 4.1 Semi-chaine . . . . .  | 90         |
| 4.2 Monotonicité des rétro-discrétisations . . . . .               | 92         |
| 4.3 Sous-suite normale de $\partial_G^h(\mathcal{C})$ . . . . .    | 97         |
| 4.4 Conclusion . . . . .   | 98         |
| <b>5 Estimation sur des courbes discrètes</b>                      | <b>99</b>  |
| 5.1 État de l'art . . . . .  | 99         |
| 5.1.1 Estimateurs locaux . . . . .                                 | 100        |
| 5.1.2 Estimateurs adaptatifs . . . . .                             | 100        |
| 5.1.3 Estimateurs non-locaux . . . . .                             | 102        |
| 5.1.4 Estimation d'intégrale le long d'une courbe . . . . .        | 104        |
| 5.2 Estimation d'intégrale le long d'une courbe discrète . . . . . | 105        |
| 5.3 Estimation de longueur . . . . .                               | 117        |
| <b>6 Conclusion</b>  | <b>119</b> |
| <b>Annexe A Configurations exclues</b>                             | <b>122</b> |
| <b>Annexe B Publications</b>                                       | <b>123</b> |
| <b>Bibliographie</b>   | <b>125</b> |



# Chapitre 1

## Introduction

La géométrie du plan euclidien  $\mathbb{R}^2$  est étudiée depuis des millénaires. En revanche la géométrie sur les espaces discrets ne s'est développée que plus récemment. Celle-ci est motivée par le traitement sur ordinateur d'images dont la position des pixels est décrite par des coordonnées entières.

La géométrie discrète diffère largement de la géométrie continue et de sa topologie «naturelle». En effet la topologie induite sur  $\mathbb{Z}^2$  par la distance euclidienne est discrète (c'est-à-dire que tous les ensembles sont ouverts). Toutes les applications dont le domaine est discret sont continues, les seules applications continues dont l'ensemble d'arrivée est discret sont les applications constantes, en conséquence, les seules courbes d'un espace discret sont alors les singletons qui sont également les seules composantes connexes de l'espace discret. Toutes ces notions doivent alors être redéfinies pour pouvoir proposer une géométrie sur les espaces discrets analogue à celle des espaces continus.

La géométrie discrète a pour objectifs, en tenant compte des spécificités des espaces discrets, de répliquer, d'adapter les propriétés des espaces continus aux espaces discrets ou au contraire de tirer partie de ces différences afin de concevoir des algorithmes. En effet, dans ce dernier cas, la transcription d'un problème du continu au discret peut permettre de rechercher les solutions d'un problème parmi un ensemble fini de possibilités dans l'espace discret plutôt que parmi un ensemble indénombrable de possibilités dans l'espace continu.

Par la suite, nous ne nous intéresserons pas aux images numériques elles-mêmes mais aux formes bi-dimensionnelles représentées dans ces images. Ces formes discrètes sont alors définies comme des sous-ensembles d'un espace discret, le plus souvent  $h\mathbb{Z}^2$  où  $h$  est la longueur d'un côté d'un pixel. Une forme discrète n'est pas forcément le résultat d'une acquisition numérique binaire d'un objet réel mais peut aussi avoir été artificiellement générée. Cependant, dans les deux cas, la forme discrète représente un objet continu  $S$  (celui-ci peut être réel ou purement hypothétique). C'est pourquoi nous supposons par la suite que toute forme discrète résulte de la discrétisation  $\text{Dig}(S)$  d'un objet continu  $S$ . La transformation de l'objet continu en un objet discret est alors modélisée par un processus de discrétisation (par exemple la discrétisation de Gauss, voir partie 3.2).

Dans plusieurs domaines de l'imagerie, notamment dans celui de la segmentation d'images, des modèles déformables sont employés. Ceux-ci consistent à définir une énergie composée d'un terme d'attache aux données (ressemblance à l'image) et d'un terme de régularisation de la forme (plus l'apparition d'une forme dans l'image est jugée improbable, plus la forme sera pénalisée dans le terme de régularisation). Les modèles déformables nécessitent souvent d'estimer des grandeurs géométriques (par exemple la longueur d'une courbe pour la fonctionnelle du Mumford-Shah).

Nous nous intéressons alors au problème de l'estimation géométrique sur une forme discrète et au contrôle de la différence entre une caractéristique géométrique de  $S$  et son estimation sur  $\text{Dig}(S)$ . Cette erreur d'estimation varie en fonction de la résolution  $\frac{1}{h}$  de l'image numérique. La *convergence multigrille* est souvent utilisée en géométrie comme critère d'évaluation des méthodes d'estimation ne nécessitant pas de fixer le pas de la grille  $h$ . Elle consiste à s'assurer que l'erreur d'estimation tend vers 0 lorsque le pas de la grille  $h$  tend vers 0.

La convergence multigrille des estimateurs discrets d'aire d'une forme  $S$  est connue depuis longtemps. Nous nous intéressons alors à la convergence multigrille d'estimateurs de quantités géométriques unidimensionnelles notamment du périmètre de la forme  $S$  et d'intégrales curvilignes le long de son bord  $\partial S$ .

Estimer des caractéristiques géométriques à partir d'un objet discret n'aurait pas de sens si celui-ci était la réunion de la discrétisation de plusieurs objets disjoints (et inversement si deux objets discrets disjoints étaient la discrétisation d'un seul objet continu). Il est alors nécessaire de s'assurer que la discrétisation traduise correctement certaines propriétés topologiques sur la forme  $S$ . Les deux principaux critères de préservation de la topologie sont, d'une part, le fait que le bord de la discrétisation soit homéomorphe à un cercle (on dit que l'objet est *bien composé*) et, d'autre part, le pendant discret de la connexité de  $S$  appelé *k-connexité* (avec  $k = 4$  ou  $k = 8$ ).

Pour que la discrétisation permette de reconstruire la topologie et la géométrie de l'objet continu  $S$ , il est nécessaire d'imposer certaines hypothèses à  $S$  (figure 1.1). La complexité de la forme  $S$  doit être suffisamment faible par rapport à la quantité d'information contenue dans sa discrétisation  $\text{Dig}(S)$  pour limiter la perte d'information. Les hypothèses imposées à  $S$  doivent alors permettre de déterminer la taille de pixels  $h$  en-deçà de laquelle la discrétisation  $\text{Dig}(S)$  contient suffisamment d'informations et de déterminer une majoration de l'erreur d'estimation. De plus, nous souhaitons que l'hypothèse sur  $S$  soit purement géométrique et ne tienne pas compte de la classe de régularité  $C^k$  de la paramétrisation du bord de  $S$ . En effet, des contraintes de régularité excluraient les polygones de la famille de formes recherchée alors qu'il existe des courbes  $C^\infty$  les approchant avec une précision arbitraire.

Notre objectif est de proposer des hypothèses sur les formes continues les plus générales permettant de travailler dans un cadre unifié pour l'estimation de longueur et la préservation de la topologie.

Dans le chapitre 2, nous exposons les différentes hypothèses développées dans le cadre de la géométrie discrète pour limiter la complexité des formes continues  $S$ . Nous proposons ensuite deux nouvelles hypothèses sur les formes continues appelées courbes à Courbure Totale Localement Bornée (CTLB) et à courbure totale lipschitzienne. Enfin, après avoir étudié le comportement local des courbes CTLB, nous établissons certains liens entre ces notions.

Dans le chapitre 3, nous établissons des résultats de reconstruction topologique pour différentes discrétisations d'une courbe CTLB.

Dans le chapitre 4, afin de permettre la comparaison du bord de la forme continue  $S$  et du bord de sa discrétisation, nous définissons une «rétro-discrétisation» permettant d'associer aux arcs du bord de  $\text{Dig}(S)$  les arcs du bord  $\partial S$  de  $S$ . Cette rétro-discrétisation permet par la suite de comparer la longueur du bord  $\partial S$  à celle de sa discrétisation.

Dans le chapitre 5, nous démontrons la convergence multigrille de certains estimateurs de longueur et d'intégrales le long du bord de  $S$ .



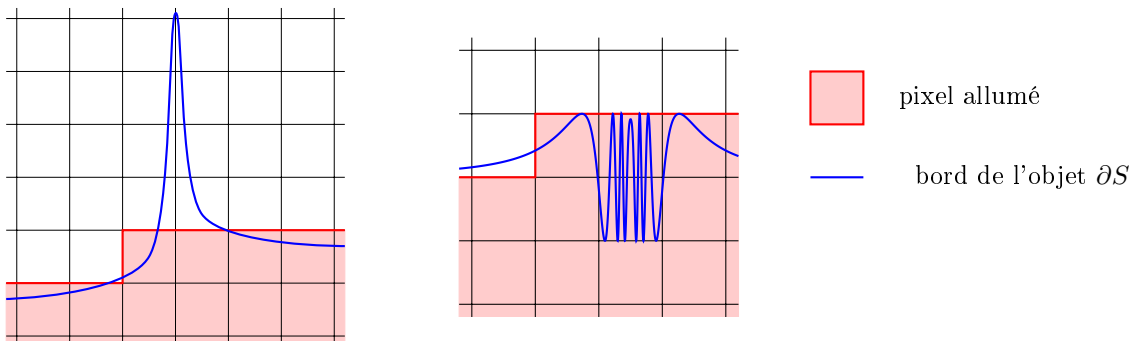


FIGURE 1.1 – A gauche, une forme  $S$  dont le bord s'écarte arbitrairement loin de sa discrétisation. A droite, une forme  $S$  dont le bord oscille beaucoup plus que sa discrétisation. Dans les deux cas, la discrétisation  $\text{Dig}(S)$  n'est pas suffisamment précise par rapport à la complexité de  $\partial S$  pour pouvoir estimer la plupart des caractéristiques géométriques de  $S$ .

## Préliminaires mathématiques et notations

Nous introduisons ici certaines notations et rappelons certaines notions qui seront utilisées tout au long du manuscrit.

Avertissement : dans tout le document nous travaillons uniquement en deux dimensions, la plupart des résultats de l'état de l'art sont également valides en dimension supérieure mais par simplicité, nous les énonçons uniquement dans le cadre de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{Z}^2$ .

### Ensembles

- Pour tous ensembles  $A$  et  $B$ , nous notons respectivement  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \sqcup B$ ,  $\text{Card } A$ , l'union de  $A$  et  $B$ , l'intersection de  $A$  et  $B$ , l'union disjointe de  $A$  et  $B$ , le cardinal de  $A$ .
- Un sous-ensemble  $A$  de  $B$  est dit *propre* si  $A \neq B$ .
- La notation  $\mathbb{Z}_N$  désigne le groupe  $\mathbb{Z}$  quotienté par le sous-groupe distingué  $N\mathbb{Z}$  (qui est alors aussi un groupe). Pour tout  $i, j \in \mathbb{Z}_N$ ,  $[[i, j]]$  désignera  $\{i, i + 1, \dots, j\}$ .

### Espaces métriques

1. L'intérieur d'un ensemble  $A$  est noté  $\overset{\circ}{A}$ , son adhérence topologique  $\bar{A}$  et sa frontière  $\partial A$ .
2. Nous nous plaçons le plus souvent dans l'ensemble euclidien  $\mathbb{R}^2$  muni de sa distance usuelle notée  $d$  et de sa norme notée  $\|\cdot\|$ . De plus le vecteur  $b - a$  sera parfois noté  $\overrightarrow{ab}$  avec  $a$  et  $b$  des points de  $\mathbb{R}^2$ .
3. Le disque ouvert de centre  $c$  et de rayon  $r$  est noté  $B(c, r)$ . Le disque fermé est alors noté  $\bar{B}(c, r)$ .
4. La distance minimale entre un point  $x \in \mathbb{R}^2$  et un ensemble  $Y \subset \mathbb{R}^2$  est définie par  $d(x, Y) := \inf_{y \in Y} d(x, y)$ .

5. La distance de Hausdorff entre deux sous-ensemble  $X$  et  $Y$  de  $\mathbb{R}^2$  est notée  $d_H(X, Y)$  et est définie par :

$$d_H(X, Y) := \max\{\inf_{y \in Y} d(X, y), \inf_{x \in X} d(x, Y)\}.$$

6. L'érosion morphologique d'un sous-ensemble  $X$  de  $\mathbb{R}^2$  par un élément structurant  $B$  notée  $X \ominus B$  est définie par :

$$X \ominus B := \{x | \{x\} + B \subset X\}.$$

7. La dilatation morphologique d'un sous-ensemble  $X$  de  $\mathbb{R}^2$  par un élément structurant  $B$  notée  $X \oplus B$  est définie par :

$$X \oplus B := \{x + b | b \in B\}.$$

8. L'ouverture morphologique d'un sous-ensemble  $X$  de  $\mathbb{R}^2$  par un élément structurant  $B$  notée  $X \circ B$  est définie par :

$$X \circ B := X \ominus B \oplus B.$$

## Courbes

1. Une courbe paramétrée (plane) est une application continue  $\gamma$  d'un intervalle  $[t_0, t_1]$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Une courbe paramétrée  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  est dite *simple* si sa restriction  $\gamma|_{[t_0, t_1[}$  est injective et *fermée* si  $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$ . Une *courbe (géométrique)* est l'image d'une courbe paramétrée. La courbe paramétrée est alors appelée *paramétrisation* de la courbe géométrique. Une *courbe de Jordan* est une courbe fermée simple.
2. Un sous-ensemble connexe non-vide d'une courbe  $\mathcal{C}$  et fermé pour la topologie induite sur  $\mathcal{C}$  est appelé *arc de  $\mathcal{C}$* . Si l'arc d'une courbe est distinct de la courbe entière, alors l'arc est dit *propre*.
3. Soit  $\mathcal{C}$  une courbe de Jordan. L'ensemble  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$  est constitué de deux composantes connexes l'une bornée l'autre non. La composante connexe bornée est appelée *composante intérieure de  $\mathcal{C}$*  et la composante connexe non-bornée est appelée *composante extérieure de  $\mathcal{C}$* .
4. Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée. Pour tout  $y \in \gamma([a, b])$ , une composante connexe de  $\gamma^{-1}(y)$  est soit réduite à un singleton soit à un intervalle de  $[a, b]$ . Notons  $X_1 := (x_1, \tau_1)$  et  $X_2 := (x_2, \tau_2)$  avec  $x_1$  et  $x_2$  deux points de  $\gamma([a, b])$  et  $\tau_1$  (respectivement  $\tau_2$ ) une composante connexe de  $\gamma^{-1}(x_1)$  (respectivement de  $\gamma^{-1}(x_2)$ ). On note  $X_1 <_\gamma X_2$  si pour tout  $t_1 \in \tau_1$  et tout  $t_2 \in \tau_2$ ,  $t_1 < t_2$ . Ceci définit une relation d'ordre  $\leq_\gamma$  sur la courbe paramétrée en notant  $X_1 \leq_\gamma X_2$  si  $X_1 <_\gamma X_2$  ou si  $x_1 = x_2$  et  $\tau_1 = \tau_2$  (voir [AR89, partie 1.1]). Une courbe orientée est un couple  $(\mathcal{C}, \leq_\gamma)$  où  $\mathcal{C}$  est une courbe géométrique,  $\gamma$  une de ses paramétrisations et  $\leq_\gamma$  l'ordre défini par  $\gamma$ .
5. Une suite de points  $(a_i)_{i \in [0, N-1]}$  d'une courbe de Jordan ou d'un arc simple  $\mathcal{C}$  forme une *chaîne* de  $\mathcal{C}$  s'il existe une orientation  $\leq_\gamma$  de  $\mathcal{C}$  telle que pour tout  $i < j$ ,  $a_i <_\gamma a_j$ . La notion de chaîne ne permet pas de comparer plusieurs points de la courbe entre eux, c'est-à-dire de définir un ordre cyclique sur une courbe fermée (l'axiome d'asymétrie n'est pas vérifié) mais permet d'indiquer si une suite de points de la courbe est ordonnée.
6. Nous notons  $[a, b]$  le segment fermé d'extrémités  $a$  et  $b$ . Une *ligne polygonale de sommets*  $(a_i)_{i \in [0, N]}$  est définie comme l'union  $\bigcup_{i=0}^{N-1} [a_i, a_{i+1}]$  et est notée  $[a_i]_{i \in [0, N]}$ . Un polygone de sommets  $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}_N}$  est défini comme l'union  $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}_N} [a_i, a_{i+1}]$  et est noté  $\langle a_i \rangle_{i \in \mathbb{Z}_N}$ .

7. Une ligne polygonale est dit *inscrite* dans un arc simple ou un arc orienté  $\mathcal{C}$  si la suite ordonnée de ses sommets forme une chaîne de  $\mathcal{C}$ . Un polygone est dit *inscrit* dans une courbe de Jordan ou une courbe fermée orientée  $\mathcal{C}$  si la suite ordonnée de ses sommets forme une chaîne de  $\mathcal{C}$ .
8. La distance de Fréchet  $d_F(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$  entre deux courbes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  est définie par

$$d_F(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) := \inf_{\gamma_2} \max_{t \in [a, b]} d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

avec  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  une paramétrisation de  $\mathcal{C}_1$  et  $\gamma_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  choisie parmi les paramétrisations de  $\mathcal{C}_2$  (voir [AR89, partie 1.4.1]).

9. L'espace des courbes est muni de la distance de Fréchet pour former un espace métrique complet ([AR89, théorèmes 1.4.1 et 1.4.2]).
10. Nous définissons respectivement les longueurs d'une ligne polygonale et d'un polygone par :

$$\mathcal{L}([a_i]_{i \in [0, N]}) := \sum_{i=0}^{N-1} d(a_i, a_{i+1})$$

et

$$\mathcal{L}(\langle a_i \rangle_{i \in \mathbb{Z}_N}) := \sum_{i \in \mathbb{Z}_N} d(a_i, a_{i+1})$$

La longueur  $\mathcal{L}(\mathcal{C})$  d'une courbe orientée ou d'une courbe géométrique simple (respectivement d'une courbe de Jordan simple) est la borne supérieure des longueurs des lignes polygonales (respectivement des polygones) inscrites dans  $\mathcal{C}$ .

11. Soit  $\mathcal{C}$  une courbe et  $L_m$  une suite de lignes polygonales inscrites dans  $\mathcal{C}$ . Soit  $\lambda_m$  le diamètre maximal d'un arc de  $\mathcal{C}$  délimité par deux sommets consécutifs de  $L_m$  et ne contenant aucun autre sommet de  $L_m$ . Si  $\lambda_m$  converge vers 0 lorsque  $m$  tend vers  $+\infty$ , alors  $L_m$  converge (pour la distance de Fréchet) vers  $\mathcal{C}$  ([AR89, corollaire lemme 1.4.2]).
12. Toute courbe rectifiable (c'est-à-dire de longueur finie) admet une paramétrisation  $\bar{\gamma} : [0, \mathcal{L}(\mathcal{C})] \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que pour tout  $s \in [0, \mathcal{L}(\mathcal{C})]$ ,  $\mathcal{L}(\bar{\gamma}([0, s])) = s$ . Cette paramétrisation  $\bar{\gamma}$  est appelée *paramétrisation par longueur d'arc* (voir [AR89, théorème 2.1.4]).
13. Soit  $(\mathcal{C}_m)$  une suite de courbes rectifiables convergeant vers  $\mathcal{C}$ , alors  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(\mathcal{C}_m) = \mathcal{L}(\mathcal{C})$  ( voir [AR89, théorème 2.2.6] ).
14. Une *homotopie entre deux courbes*  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  est une application continue  $H : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que  $H(0, \cdot) = \gamma_1$  et  $H(1, \cdot) = \gamma_2$ . Une application  $f : X \rightarrow Y$  est une *équivalence homotopique* s'il existe une application  $g : Y \rightarrow X$  telle que  $f \circ g$  est homotope à  $Id_Y$  et  $g \circ f$  est homotope à  $Id_X$ . Deux espaces  $X$  et  $Y$  sont *homotopiquement équivalents* (ou *ont le même type homotopique*) s'il existe une équivalence homotopique entre  $X$  et  $Y$ .

## Analyse

Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  des espaces métriques.

1. Une application  $f : X \rightarrow Y$  est *k-lipschitzienne* si pour tout  $x_1, x_2 \in X$ ,

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq k d_X(x_1, x_2)$$

et *(k,  $\alpha$ )-höldérienne* si pour tout  $x_1, x_2 \in X$ ,

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq k d_X(x_1, x_2)^\alpha$$

2. L'ensemble  $C^k$  désignera la classe d'applications  $k$  fois différentiables et de  $k$ -ème différentielle continue. L'ensemble  $C^{k,l}$  désignera la sous-classe de  $C^k$  formée des applications dont la  $l$ -ème dérivée est lipschitzienne.

## Chapitre 2

# Hypothèses sur la forme continue

L'objectif de ce chapitre est de présenter les différentes familles de formes dont la complexité est suffisamment restreinte pour pouvoir garantir certaines propriétés sur leur discrétisation. Dans une première partie, nous présenterons les différentes familles qui ont été utilisées en géométrie discrète. Nous introduirons ensuite deux nouvelles familles de formes et leurs propriétés : les formes à bord de courbure totale localement bornée et les formes dont le bord est de courbure totale lipschitzienne. Nous comparerons ensuite ces deux nouvelles notions à certaines notions préexistantes.

### 2.1 État de l'art

#### 2.1.1 Par-régularité

L'une des premières notions de contrôle de la complexité à avoir été utilisée en géométrie discrète est la par-régularité. Elle a été introduite en 1982 indépendamment par Theo Pavlidis [Pav82, Définition 7.4] (sous le nom *d'hypothèses de compatibilité*) et par Jean Serra [Ser82, partie 5.C] (sous le nom de *modèle régulier*). Pour le premier, une image binaire et une grille de pas  $h$  sont dites compatibles si, d'une part, il existe un nombre  $d > \sqrt{2}h$  tel que pour tout point à la frontière de chaque composante connexe de  $S$ , il existe un cercle tangent de diamètre  $d$  inclus à l'intérieur de  $S$  et si d'autre part la même condition est également vérifiée pour le complémentaire de  $S$  (sans préciser si  $S$  est un ensemble ouvert ou fermé). Pour le second, le modèle régulier est l'ensemble des ensembles compacts  $S$  stables sous ouverture et fermeture morphologique par une boule fermée de rayon  $r$ , c'est-à-dire

$$S = (S \ominus \bar{B}(0, r)) \oplus \bar{B}(0, r) = (S \oplus \bar{B}(0, r)) \ominus \bar{B}(0, r). \quad (2.1)$$

Ari Gross et Longin Latecki proposent une troisième définition de la par-régularité à partir de segments de rayon  $r$  orthogonaux au bord de  $S$  [GL95]. En 1998, ils redéfinissent de façon équivalente aux hypothèses de compatibilité la par-régularité en un énoncé plus facilement exploitable.

**Définition 2.1.1** (Par-régularité [LCG98, partie 2]). Soit  $S$  un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{R}^2$ .

- Un disque fermé  $\bar{B}(c, r)$  est appelée *disque osculateur intérieur (respectivement extérieur) de rayon  $r$  de  $S$  au point  $x$*  si  $\partial S \cap \partial \bar{B}(c, r) = \{x\}$  et  $\bar{B}(c, r) \subset \overset{\circ}{S} \cup \{x\}$  (respectivement si  $\partial S \cap \partial \bar{B}(c, r) = \{x\}$  et  $\bar{B}(c, r) \subset S^c \cup \{x\}$ ).

- Une forme  $S$  est *par( $r$ )-régulière* si pour tout point  $x \in \partial S$ , il existe un disque osculateur intérieur et un disque osculateur extérieur de rayon  $r$  au point  $x$  (voir figure 2.1).

Comme nous le verrons par la suite, la par-régularité contraint la courbure du bord de la forme et interdit les amincissements de la forme et de son complémentaire (partie 2.3.1 Théorème 2.3.8). Même si elles sont proches, les différentes définitions ne sont pas équivalentes. Une boule fermée de rayon  $r$  fait partie du modèle régulier (pour le rayon  $r$ ), mais n'est pas par( $r$ )-régulière, elle est seulement par( $r'$ )-régulière pour tout rayon  $r' < r$ . Les résultats de préservation de la topologie lors de la discrétisation de formes par-régulières sont rappelés dans la partie 3.1 .

Jacques-Olivier Lachaud et Boris Thibert ont établi le lien entre la par-régularité et la portée définie par Herbert Federer ([LT16]).

**Définition 2.1.2** (portée [Fed59, partie 4.1]). Soit  $S$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$ . En notant,  $\text{Unp}(S)$  l'ensemble des points  $p$  de  $\mathbb{R}^2$  ayant un unique point de  $S$  à distance minimale de  $p$ , la portée de  $S$   $\text{reach}(S)$  est alors la borne supérieure des réels  $r$  tel que

$$S \oplus B(0, r) \subset \text{Unp}(S).$$

Autrement dit  $\text{Unp}(S)$  est l'ensemble sur lequel la projection  $\xi$  d'un point  $x$  sur son plus proche voisin sur  $S$  est définie de façon unique. La portée de  $S$  est la plus grande distance  $r$  pour laquelle tout point distant à  $S$  de moins de  $r$  possède une projection  $\xi(x)$  définie de façon unique sur  $S$ .

**Propriété 2.1.3** ([LT16, Proposition 2], [Fed59, Théorème 4.8 (points 3 et 8), Remarque 4.20] ). Soit  $S$  un domaine compact de  $\mathbb{R}^2$ . La portée de  $\partial S$  est strictement positive si et seulement si  $\partial S$  est une courbe de classe  $C^{1,1}$ .

**Propriété 2.1.4** ([LT16, Lemme 1]). Soit  $S$  un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^2$ . Alors la portée de  $\partial S$  est supérieure ou égale à  $r$  si et seulement si pour tout  $r' < r$ ,  $S$  est par( $r'$ )-régulier.

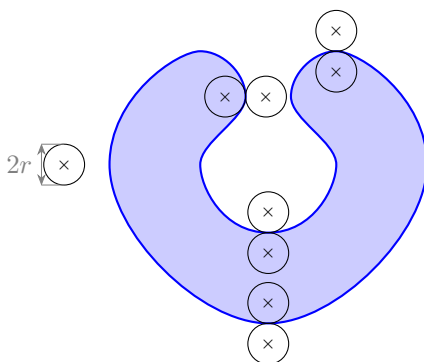


FIGURE 2.1 – La par( $r$ )-régularité requiert qu'en chaque point de la frontière de la forme  $S$  (en bleu), il existe un disque osculateur intérieur et un disque osculateur extérieur de rayon  $r$ .

Si la par-régularité est une hypothèse répandue en géométrie discrète, elle ne permet pas d'inclure les polygones. Nous listons dans la suite de cette partie différentes généralisations de la par-régularité introduites en géométrie discrète.

### 2.1.2 Semi-régularité

Constatant l'exclusion des formes  $S$  contenant des points anguleux de la famille des formes par-régulières, Theo Pavlidis suggère une méthode pour reconstruire une forme par-régulière à partir d'une forme quelconque  $S$  ([Pav82, suite de la définition 7.4]). Peer Stellinginger tente de formaliser cette reconstruction (l'ouverture morphologique) pour transformer un ensemble des formes, dites semi-régulières, en formes par-régulières avant d'être discrétisées et pouvoir ainsi garantir la préservation de la topologie de la discrétisation de l'ouverture morphologique de  $S$ .

**Définition 2.1.5** (Semi-régularité, [Ste05, Définition 5]). Soit  $S$  un ensemble et soit  $S'$  une composante de  $S \setminus (S \circ \bar{B}(0, r))$ . Soit  $n$  le nombre de disques ouverts inclus dans  $S$  de rayon  $r$  touchant  $S'$ . Ces disques sont appelés *disques bornant  $S'$* .

- Si  $n = 0$ ,  $S'$  est appelé une  *$r$ -tâche*.
- Si  $n = 1$ ,  $S'$  est appelé une  *$r$ -pointe*.
- Si  $n > 1$ ,  $S'$  est appelé une  *$r$ -ceinture*.

(voire figure 2.2) Un ensemble  $S$  est dit  *$r$ -semi-régulier* si pour tout point de la frontière, il existe un disque ouvert osculateur intérieur ou un disque ouvert osculateur extérieur de rayon  $r$  inclus à l'intérieur, respectivement à l'extérieur de  $S$  et si ni  $S$  ni  $S^c$  n'ont de  $s$ -ceinture pour  $s \leq r$ .

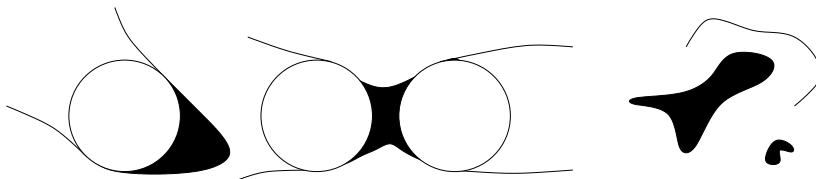


FIGURE 2.2 – De gauche à droite : la zone noire est une  $r$ -pointe, une  $r$ -ceinture et une  $r$ -tâche (figure reprise de [Ste05, figure 1] ).

Les formes semi-régulières peuvent contenir des  $r$ -tâches formant des pics de taille arbitrairement grande. Ce qui ne nous offre pas le contrôle souhaité sur les formes continues (voir figure 1.1 à gauche).

### 2.1.3 $r$ -stabilité

Généralisant la notion de semi-régularité, Hans Meine, Ullrich Köthe et Peer Stellinginger proposent la notion de stabilité permettant de reconstruire les frontières  $\partial P$  d'une partition du plan  $P$  à partir de points échantillonnant  $\partial P$  avec une erreur de positionnement contrôlée [MKS09, théorème 11].

**Définition 2.1.6** ( $r$ -stabilité, [MKS09, définition 2]). Une partition du plan est dite  *$r$ -stable* si sa frontière  $\partial P$  peut être dilatée par un disque de rayon  $s$  sans changer son type homotopique pour tout  $s \leq r$  (voir figure 2.3).

Si la définition de  $r$ -stabilité est très générale, elle semble difficile à vérifier concrètement sur une forme et ne semble que peu simplifier le problème de reconstruction à homéomorphisme près de la forme à partir d'un échantillonnage de points : vérifier la préservation du type homotopique

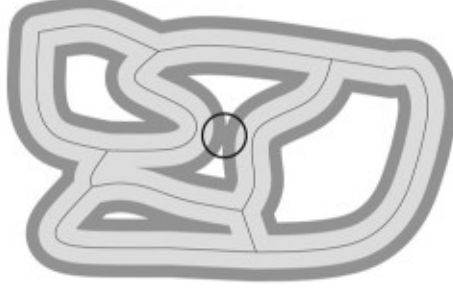


FIGURE 2.3 – [MKS09, Figure 1]. Les lignes en gris foncé correspondent aux frontières  $\partial P$  de la partition de  $\mathbb{R}^2$ . Le tube gris clair correspond à la dilatation de  $\partial P$  par  $r$ . Le tube gris foncé à la dilatation de  $\partial P$  par  $r' > r$ . L'ensemble  $\partial P$  est  $r$ -stable car le type homotopique n'est pas modifié, mais pas  $r'$ -stable (une nouvelle composante connexe s'est créée dans le complémentaire).

pour des dilatations de  $\partial P$  ne serait pas plus aisé que garantir la préservation de la topologie de la reconstruction de la partition  $P$  à partir d'un échantillonnage de points de  $\partial P$ . Aussi, les auteurs introduisent le concept de  $(\theta, d)$ -pics qu'ils préfèrent utiliser dans le cadre de la géométrie discrète ([MKS09, théorème 16]). De plus, pour certaines formes  $S$ , ne possédant pas de  $(\theta, d)$ -pics, le théorème 16 ([MKS09]) permet d'extraire du bord de la discrétisation d'un sous-ensemble  $S$  de  $\mathbb{R}^2$  des suites de points échantillonnant  $\partial S$ .

**Définition 2.1.7** ( $(\theta, d)$ -pics, [MKS09, définition 15]). Soit  $\partial P$  le bord d'une partition du plan. Deux points  $x_1, x_2 \in B$  délimitent un  $(\theta, d)$ -pic si la distance entre  $x_1$  et  $x_2$  est inférieure à  $d$  et s'il n'existe pas d'arc de  $\partial P$  entre  $x_1$  et  $x_2$  contenant des points  $y$  tels que  $\widehat{x_1 y x_2} \leq \theta$ .

Cependant cette notion ne suffit pas à elle seule à garantir que la forme est  $r$ -stable, il faut de plus supposer que chaque élément de la partition contient un disque d'une certaine taille ([MKS09, Théorème 16]). Elle ne serait pas alors suffisante pour exclure des amincissements dans les formes continues.

#### 2.1.4 $\mu$ -portée

Introduite en géométrie algorithmique, la  $\mu$ -portée est une généralisation de la notion de portée (et donc de la notion de par-régularité) aux courbes polygonales. Cette propriété permet de garantir une reconstruction de l'homotopie à partir de points échantillonnant une courbe avec une certaine  $\mu$ -portée. La définition de la  $\mu$ -portée repose sur une généralisation du gradient de la distance (voir [Fed59, Théorème 4.8.3]).

**Définition 2.1.8** ( $\mu$ -portée, [CCL09, définition 4.3]).

- Soit  $K$  un ensemble compact. Le *gradient généralisé*  $\nabla_K$  est le gradient de la distance de  $x$  à  $K$ ,  $d(x, K)$ , étendu à l'axe médian de  $K$  par

$$\nabla_K(x) := \frac{x - c(x)}{d(x, K)}$$



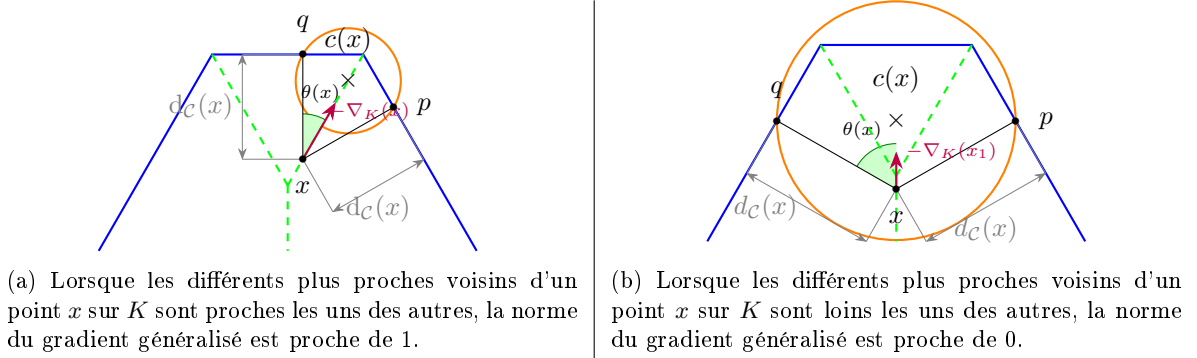


FIGURE 2.4 –  $K$  un ensemble compact.  $-\nabla_K(x)$  : généralisation du gradient de la distance à  $\mathcal{C}$ .  $\Gamma_K(x)$  : plus petit disque contenant les plus proches point de  $x$  sur  $K$ .

- avec  $c(x)$  le centre du plus petit cercle  $\Gamma_K(x)$  contenant les plus proches voisins de  $x$  sur  $K$  (voir Figure 2.4).
- Un point est  $\mu$ -critique si  $\|\nabla_K(x)\| \leq \mu$ .
  - La  $\mu$ -portée  $r_\mu(K)$  est la borne supérieure des distances entre  $K$  et un point  $\mu$ -critique.

*Remarque 2.1.9* ([CCL09, partie 4.2]). Notons que  $\|\nabla_K(x)\| = \cos(\theta(x))$  où  $\theta(x)$  est l'angle sous lequel  $x$  voit ses plus proches voisins sur  $K$  (voir figure 2.4). Ainsi la  $\mu$ -portée est la distance à  $K$ , en deçà de laquelle chaque point voit l'ensemble de ses plus proches voisins sur  $K$  sous un angle inférieur à  $2\arccos(\mu)$ . Ainsi pour  $\mu = 1$ , on obtient  $r_1(K) = \text{portée}(\mathcal{C})$ .

Le théorème 4.6 [CCL09] permet de reconstituer un ensemble  $K$  à homotopie près avec un ensemble  $K'$  l'échantillonnant et de  $\mu$ -portée strictement positive (voir figure 2.5).

### 2.1.5 Quasi-régularité

Phuc Ngô, Yukiko Kenmochi, Isabelle Debled-Rennesson et Nicolas Passat généralisent la définition de par-régularité donnée par Jean Serra (équation 2.1) en autorisant le bord de la forme à osciller dans une marge autour de son érosion par une boule.

**Définition 2.1.10** (Quasi-régularité, [PKNP19, Définition 3]). Soit  $S$  un sous-ensemble borné de  $\mathbb{R}^2$  simplement connexe. L'ensemble  $S$  est *quasi( $r$ )-régulier* si  $S$  vérifie les conditions suivantes :

- $S \ominus \bar{B}(0, r)$  est non-vide et connexe,
- $S^c \ominus \bar{B}(0, r)$  est connexe,
- $S \subset S \ominus \bar{B}(0, r) \oplus \bar{B}(0, \sqrt{2}r)$ ,
- $S^c \subset S^c \ominus \bar{B}(0, r) \oplus \bar{B}(0, \sqrt{2}r)$

(voir figure 2.6).

Les résultats de préservation de la topologie sont énoncés partie 3.2.

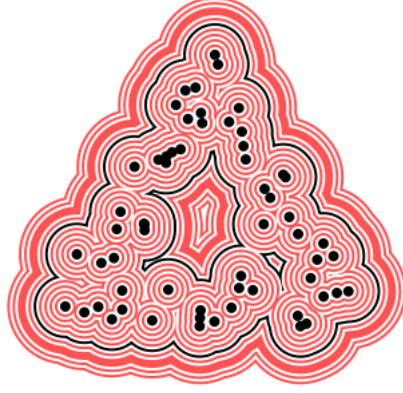


FIGURE 2.5 – ([CCL09, figure 5]) Les points noirs échantillonnent un triangle équilatéral  $K$  : l'ensemble des points noirs  $K'$  est proche, au sens de la distance de Hausdorff, du triangle  $K$ . Le théorème [CCL09, théorème 4.6] prédit des valeurs pour lesquels la dilatation de l'ensemble de points  $K'$  est homotopiquement équivalent à la dilatation de  $K$  (frontière rouge épaisse).

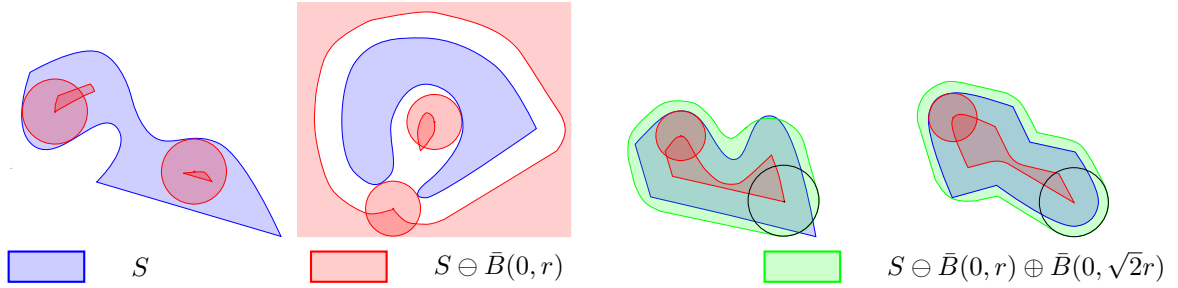


FIGURE 2.6 – Figure issue de [NPKD18, Figure 5]. De gauche à droite : sur la première figure, la forme  $S$  n'est pas quasi-régulière car  $S \ominus \bar{B}(0, r)$  n'est pas connexe ; sur la deuxième figure, la forme  $S$  n'est pas quasi-régulière car  $S^c \ominus \bar{B}(0, r)$  n'est pas connexe ; sur la troisième figure, la forme  $S$  n'est pas quasi-régulière car  $S$  n'est pas incluse dans  $S \ominus \bar{B}(0, r) \oplus \bar{B}(0, \sqrt{2}r)$  ; sur la quatrième figure,  $S$  vérifie toutes les conditions pour être quasi-régulière.

### 2.1.6 Épaisseur de distorsion

Si l'épaisseur de distorsion n'est pas une notion utilisée en géométrie discrète, nous la mentionnons ici car la définition des courbes CTLB en est inspirée.

**Définition 2.1.11** (Épaisseur de distorsion, [KS97]).

— La distorsion  $\delta(p, q)$  d'une courbe  $\mathcal{C}_p^q$  délimitée par deux points  $p$  et  $q$  est définie par :

$$\delta(p, q) := \frac{\mathcal{L}(\mathcal{C}_p^q)}{\|p - q\|}$$

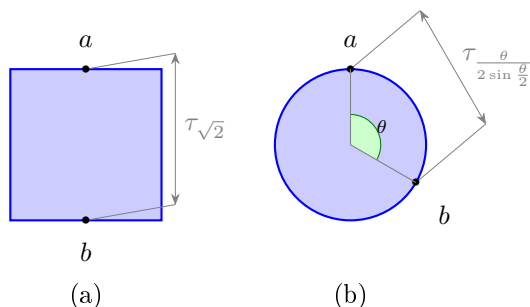


FIGURE 2.7 – Figure a) la courbe  $\mathcal{C}$  est un carré de côté de longueur 1. Deux points  $a$  et  $b$  sur deux côtés adjacents du carré  $\mathcal{C}$  et à égale distance du sommet commun aux deux côtés délimitent un arc de longueur  $\sqrt{2}d(a, b)$ . Ces deux points  $a$  et  $b$  pouvant être choisis arbitrairement proches, pour tout  $b < \sqrt{2}$ ,  $\tau_b(\mathcal{C}) = 0$ . De plus deux points  $a$  et  $b$  sur un même côté du carré  $\mathcal{C}$  délimitent un arc de distorsion 1 et la distorsion d'un arc délimité par deux points sur deux côtés adjacents du carré est majorée par  $\sqrt{2}$ . La distorsion d'un arc délimité par deux points situés sur deux côtés opposés du carré  $\mathcal{C}$  varie continûment de 1 (cas où les deux points sont les extrémités du même côté) à 2 (cas où les deux points sont milieux de deux côtés opposés). Ainsi pour  $b \in [\sqrt{2}, 2]$ ,  $\tau_b(\mathcal{C}) = 1$ . Figure b) la courbe  $\mathcal{C}$  est un cercle de rayon 1. Pour  $\theta \in [0, \pi]$ , l'arc de cercle le plus court entre deux points du cercle à distance  $2 \sin \frac{\theta}{2}$  est de longueur  $\theta$ . Donc  $\tau_{\frac{\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}}} = 2 \sin \frac{\theta}{2}$ .

où  $\mathcal{C}_p^q$  est l'arc de plus petite longueur entre  $p$  et  $q$ .

— Pour tout réel  $b \geq 1$ , l'épaisseur de distorsion  $\tau_b(\mathcal{C})$  d'une courbe  $\mathcal{C}$  est définie par

$$\tau_b(\mathcal{C}) := \inf_{\substack{\delta(p,q) > b \\ p,q \in \mathcal{C}}} |p - q|.$$

L'objectif de cette notion est de déterminer la longueur minimale de corde d'une épaisseur donnée pour nouer un certain nœud.

Si les généralisations de la par-régularité sont nombreuses, peu d'entre elles permettent de reconstituer les caractéristiques géométriques après la discrétisation de la forme. La semi-régularité, la  $r$ -stabilité n'interdisent pas l'existence de pics aigus dans le bord de la forme  $S$  et la quasi-régularité autorise de petites oscillations dans  $\partial S$ , la conservation de l'information géométrique est alors peu vraisemblable (voir figure 1.1). Si la  $\mu$ -portée semble exclure ces deux artefacts, les informations fournies par cette notion sur la géométrie de  $\partial S$  semblent indirectes et difficilement exploitables dans le cadre de l'estimation géométrique. Les généralisations de la par-régularité et leurs relations sont résumées dans la figure 2.8. Elle annonce aussi les relations de ces notions avec celles que nous introduisons.

## 2.2 Courbes à Courbure Totale Localement Bornée

Afin de pouvoir estimer des caractéristiques géométriques d'une forme à partir de sa discrétisation, nous introduisons une nouvelle généralisation de la par-régularité incluant les polygones : les

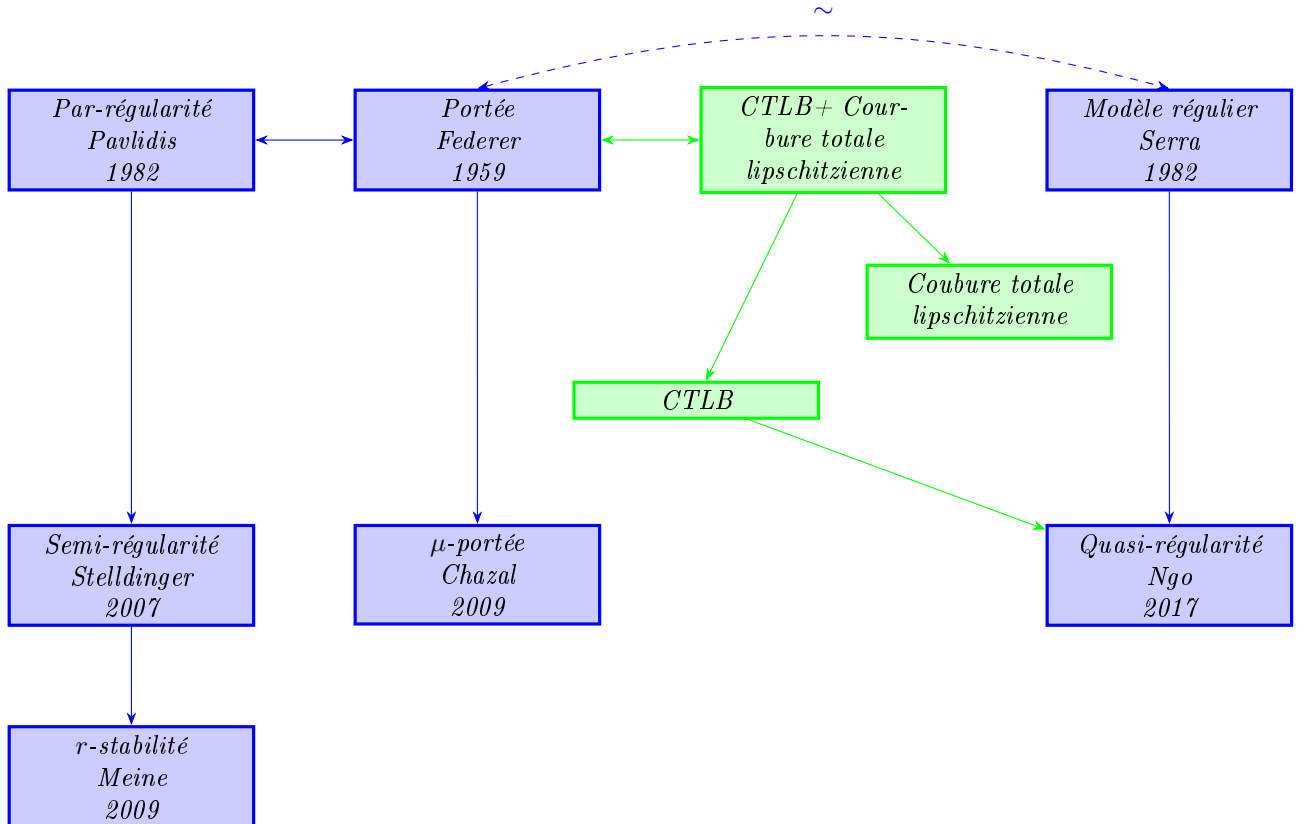


FIGURE 2.8 – Une flèche d'un rectangle  $R_1$  vers un rectangle  $R_2$  signifie que la notion  $R_2$  est une généralisation de la notion  $R_1$ . Les rectangles verts correspondent aux notions que nous introduirons dans la suite de ce chapitre et les implications indiquées par les flèches vertes seront l'objet de démonstrations dans ce même chapitre. La double flèche pointillée indique une forte similarité des notions mais sans équivalence entre elles.

*courbes à courbure totale localement bornée* (CTLB). Pour cela, nous nous basons sur une généralisation de l'intégrale de la courbure appelée *courbure totale* et qui a été introduite par Milnor en 1950 [Mil50].

Intuitivement la courbure totale mesure la variation de l'orientation des demi-tangentes sur une courbe (voir propriété 2.2.8), elle est nulle pour un segment de droite, et augmente d'autant plus que la courbe s'écarte de la ligne droite. Ainsi, la courbure totale peut être comprise comme une mesure de la complexité des courbes. Les deux notions que nous introduisons consistent alors à majorer localement la courbure totale pour restreindre la complexité des courbes.

Nous commençons par introduire la notion de courbure totale ainsi que les propriétés qui nous seront nécessaires par la suite (partie 2.2.1). Nous introduisons ensuite la notion de courbes à courbure totale localement bornée (partie 2.2.2) et présentons quelques exemples de courbes CTLB élémentaires. Dans la partie 2.2.3, nous présentons un exemple de courbe CTLB plus pathologique contenant des points anguleux denses dans la courbe. Dans la partie 2.2.4, nous démontrons les propriétés élémentaires des courbes CTLB permettant d'en avoir une vision plus précise. Dans la partie 2.2.5, nous introduisons la notion d'arc le plus droit facilitant l'utilisation de la majoration de la courbure totale sur les arcs des courbes CTLB. Enfin, dans la partie 2.2.6, nous introduisons la seconde notion utilisée, *les courbes à courbure totale localement lipschitzienne*.

## 2.2.1 Préliminaires sur la courbure totale

### 2.2.1.1 Définition et interprétations

Dans [AR89], les courbes sont toujours orientées, les définitions suivantes ont été légèrement adaptées pour les courbes géométriques non-orientées.

**Définition 2.2.1** (Courbure totale, [AR89, partie 5.1.1]).

- L'angle géométrique entre deux vecteurs  $u$  et  $v$ , noté  $\angle(u, v)$ , est défini comme la valeur absolue de l'angle de référence entre  $u$  et  $v$  dans  $] -\pi, \pi]$ .
- La *courbure totale*  $\kappa(L)$  d'une ligne polygonale  $L = [x_i]_{i=0}^{N-1}$  est définie par :

$$\kappa(L) := \sum_{i=1}^{N-2} \angle(\overrightarrow{x_{i-1}x_i}, \overrightarrow{x_i x_{i+1}}) .$$

- La *courbure totale*  $\kappa(P)$  d'un polygone  $P = \langle x_i \rangle_{i \in \mathbb{Z}_N}$  est définie par (voir figure 2.9) :

$$\kappa(P) := \sum_{i \in \mathbb{Z}_N} \angle(\overrightarrow{x_{i-1}x_i}, \overrightarrow{x_i x_{i+1}}) .$$

- La *courbure totale*  $\kappa(\mathcal{C})$  d'un arc simple (respectivement d'une courbe de Jordan)  $\mathcal{C}$  est la borne supérieure des courbures totales des lignes polygonales inscrites (respectivement des polygones inscrits) dans  $\mathcal{C}$ .

La courbure totale d'un polygone (et donc d'une courbe) ne dépend pas de l'orientation choisie. De plus, [AR89, Lemme 5.1.1], la courbure totale d'un polygone inscrit dans un polygone  $P$  est inférieure à  $\kappa(P)$ , ainsi la courbure totale de  $P$  vu comme un polygone coïncide avec la courbure totale de  $P$  vu comme une courbe de Jordan. Nous présentons maintenant trois interprétations complémentaires de la courbure totale.

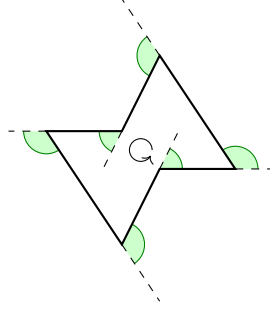


FIGURE 2.9 – La courbure totale du polygone est la somme des angles verts.

**La courbure totale comme intégrale de la courbure** La courbure totale est la généralisation de l'intégrale de la courbure d'une courbe paramétrée de classe  $C^2$  au sens suivant.

**Propriété 2.2.2** ([AR89, partie 5.3.1]). *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe de classe  $C^2$  et  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{C}$  une paramétrisation de  $\mathcal{C}$ .*

$$\kappa(\mathcal{C}) := \int_0^{\mathcal{L}(\mathcal{C})} |k(t)| dt$$

où  $k(t)$  est la courbure de  $\mathcal{C}$  au point  $\gamma(t)$ .

**Courbure totale comme longueur de l'indicatrice des tangentes** Cette interprétation suppose de définir l'indicatrice des tangentes qui nécessite les notions de vecteurs tangents à gauche et à droite. Nous utilisons une définition géométrique des vecteurs tangents à gauche et à droite sans faire appel à la paramétrisation de la courbe.

**Définition 2.2.3** (vecteurs tangents à gauche et à droite, [AR89, partie 3.1.1]). Soit  $(\mathcal{C}, \leq)$  une courbe géométrique orientée.

— Le vecteur unitaire  $e_l(x)$  est le *vecteur tangent unitaire à gauche* au point  $x \in \mathcal{C}$  si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists y_0 \in \mathcal{C}, y_0 < x, \forall y \in \mathcal{C}, y_0 < y \leq x, \\ \angle(x - y, e_l(x)) < \epsilon.$$

— Le vecteur unitaire  $e_r(x)$  est le *vecteur tangent unitaire à droite* au point  $x$  si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists y_0 \in \mathcal{C}, y_0 > x, \forall y \in \mathcal{C}, x \leq y < y_0, \\ \angle(y - x, e_r(x)) < \epsilon.$$

— Un point  $x \in \mathcal{C}$  est dit *anguleux* si  $\angle(e_l(x), e_r(x)) > 0$

Si  $\mathcal{C}$  est une courbe et  $\leq_1$  et  $\leq_2$  deux orientations opposées de  $\mathcal{C}$ , alors on vérifie aisément qu'en tout point  $p$  de la courbe possédant deux vecteurs unitaires tangents  $(e_l^2(p), e_r^2(p)) = (-e_r^1(p), -e_l^1(p))$  où  $e_l^k(p)$  (respectivement  $e_r^k(p)$ ) est le vecteur unitaire tangent à gauche (respectivement à droite) au point  $p$  pour l'orientation  $\leq_k$  avec  $k \in \{1, 2\}$ .

La propriété 2.2.4 montre que les vecteurs tangents unitaires à gauche et à droite correspondent aux dérivées à gauche et à droite de la paramétrisation d'une courbe différentiable  $\mathcal{C}$ .

**Propriété 2.2.4** ([AR89, théorème 3.3.3]). *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe orientée admettant des vecteurs tangents unitaires à gauche et à droite. Soit  $\bar{\gamma}$  une paramétrisation par longueur d'arc de  $\mathcal{C}$  respectant son orientation. Alors pour tout  $s \in [0, \mathcal{L}(\mathcal{C})[$ ,  $\bar{\gamma}$  admet une dérivée à gauche  $\bar{\gamma}'_l(s)$  et à droite  $\bar{\gamma}'_r(s)$  et de plus  $\bar{\gamma}'_l(s)$  (respectivement  $\bar{\gamma}'_r(s)$ ) est continue à gauche (respectivement à droite) et  $\lim_{t \rightarrow s^-} \bar{\gamma}'_l(t)$  (respectivement  $\lim_{t \rightarrow s^+} \bar{\gamma}'_r(t)$ ) existe et est égale à  $e_l(\bar{\gamma}(s))$  (respectivement à  $e_r(s)$ ).*

**Propriété 2.2.5** ([AR89, théorèmes 2.1.4, 3.3.3 et 3.4.2]). *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe admettant des vecteurs tangents à gauche et droite en tout point. Alors le nombre de points anguleux est dénombrable et  $\mathcal{C}$  est rectifiable (c-à-d de longueur finie).*

La propriété suivante justifiera par la suite l'utilisation des vecteurs tangents à gauche et à droite.

**Propriété 2.2.6** (théorème 5.1.2 [AR89]). *Toute courbe de courbure totale finie admet en chaque point un vecteur tangent unitaire à gauche et un vecteur tangent unitaire à droite.*

L'indicatrice des tangentes est la donnée de la courbe  $\mathcal{C}$  et de toutes les demi-tangentes en chaque point de  $\mathcal{C}$  (appelée indicatrice des tangentes complètes dans [AR89]).

**Définition 2.2.7** (Indicatrice des tangentes, [AR89, partie 3.5.1]). *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe. Pour tout  $x \in \mathcal{C}$ , on note  $\tau(x)$  le plus petit arc joignant  $e_l(x)$  et  $e_r(x)$  dans le cercle  $\partial B(0, 1)$  si  $\angle(e_l(x), e_r(x)) < \pi$  et un des demi-cercles joignant  $e_l(x)$  et  $e_r(x)$  dans  $\partial B(0, 1)$  si  $\angle(e_l(x), e_r(x)) = \pi$ . Si  $e_l(x) = e_r(x)$ ,  $\tau(x)$  est réduit à un point. Pour tout  $x \in \mathcal{C}$ , soit  $\xi_x : [a_x, b_x] \rightarrow \tau(x)$  une paramétrisation de  $\tau(x)$ . Notons pour tout  $x \in \mathcal{C}$ ,  $\eta_x : [a_x, b_x] \rightarrow \mathcal{C} \times \tau(x)$  qui à  $t$  associe  $(x, \xi_x(t))$ . Pour tout  $x \in \mathcal{C}$ , soit  $\omega(x)$  la courbe géométrique dans  $\mathcal{C} \times \partial B(0, 1)$  paramétrée par  $\eta_x$ .*

L'indicatrice des tangentes  $\Gamma_{\mathcal{C}}$  de  $\mathcal{C}$  est la courbe de  $\mathbb{R}^2 \times \partial B(0, 1)$  définie par :

$$\Gamma_{\mathcal{C}} := \bigcup_{x \in \mathcal{C}} \omega(x)$$

(voir figure 2.10).

On définit la projection  $p_2$  par

$$p_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \partial B(0, 1) & \rightarrow \partial B(0, 1) \\ (x, e) & \mapsto e \end{cases}.$$

La projection  $p_2$  de  $\Gamma_{\mathcal{C}}$  est une courbe de  $\partial B(0, 1)$  qui n'est pas forcément simple.

La propriété suivante indique que la courbure totale de  $\mathcal{C}$  correspond à la variation de l'orientation des tangentes lors du parcours de  $\mathcal{C}$ .

**Propriété 2.2.8** ([AR89, Théorème 5.2.2]). *La courbure totale d'une courbe  $\mathcal{C}$  admettant des demi-tangentes à gauche et à droite est égale à la longueur de la projection de son indicatrice des tangentes  $p_2(\Gamma_{\mathcal{C}})$ .*

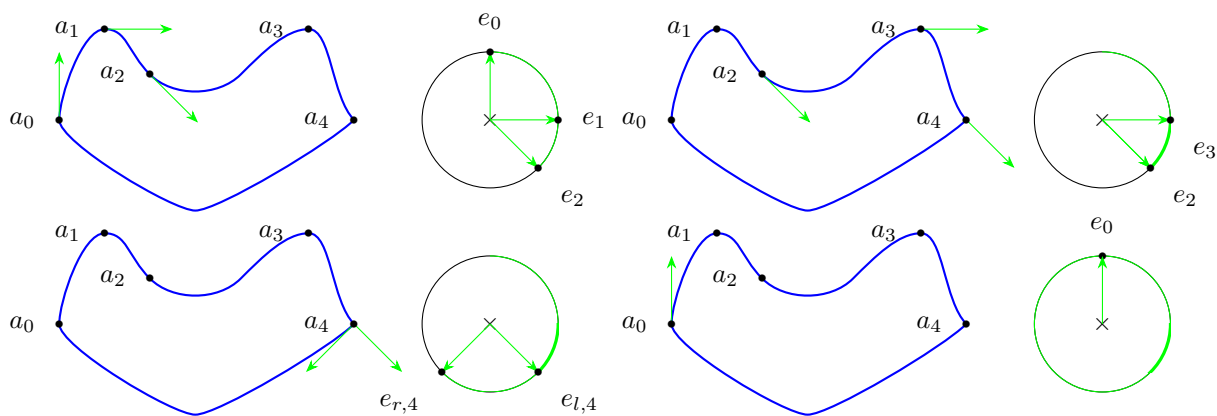


FIGURE 2.10 – Sur la courbe bleue  $\mathcal{C}$ , nous représentons les vecteurs tangents unitaires respectifs à gauche  $e_{l,k}$  et à droite  $e_{r,k}$  des points  $a_0, a_1, a_2, a_3$  et  $a_4$  qui sont reportés sur le cercle unité avec la projection  $p_2$  de l'indicatrice des tangentes. Lorsque  $e_{l,k} = e_{r,k}$ , les deux vecteurs unitaires tangents sont notés  $e_k$ . En haut à gauche, lorsque l'arc entre  $a_0$  et  $a_2$  passant par  $a_1$  est parcouru, l'orientation des tangentes est monotone. La projection de l'indicatrice des tangentes de cet arc sur le cercle est alors un arc simple entre  $e_0$  et  $e_2$ . En revanche (en haut à droite), l'arc entre  $a_2$  et  $a_3$  correspondant à un défaut de convexité de la courbe et l'orientation des tangentes de l'arc entre  $a_0$  et  $a_3$  passant par  $a_1$  n'est plus monotone. On observe alors que l'arc de cercle entre  $e_2$  et  $e_3$  est inclus dans l'arc de cercle entre  $e_0$  et  $e_2$ . Contrairement aux autres points  $a_k$ , le point  $a_4$  est anguleux (en bas à gauche). Lors du parcours de  $\mathcal{C}$ , la projection de l'indicatrice des tangentes sur le cercle est augmentée de l'arc de cercle entre  $e_{l,4}$  et  $e_{r,4}$ . Enfin (en bas à droite) en finissant le parcours de  $\mathcal{C}$  en  $a_0$ , on remarque que la projection de l'indicatrice de la courbe de Jordan  $\mathcal{C}$  sur le cercle est surjective.

**La courbure totale comme défaut de convexité** Pour une courbe fermée  $\mathcal{C}$ , on remarque que la projection  $p_2$  restreinte à  $\Gamma_{\mathcal{C}}$  est surjective. Donc  $\kappa(\mathcal{C}) \geq \mathcal{L}(\partial B(0, 1)) \geq 2\pi$ . Sur une courbe de Jordan  $\mathcal{C}$  de composante intérieure convexe, on remarque de plus que l'orientation des demi-tangentes est monotone, donc la projection  $p_2$  restreinte à  $\Gamma_{\mathcal{C}}$  est injective, donc  $\kappa(\mathcal{C}) = \mathcal{L}(\partial B(0, 1)) = 2\pi$ . Le théorème de Fenchel confirme ces intuitions (mais la preuve du théorème ne repose pas sur ces arguments).

La propriété suivante a été démontrée par Fenchel [Fen29] pour les courbes fermées deux fois différentiables et généralisée par Alexandrov et Reshetnyak pour l'ensemble des courbes fermées.

**Propriété 2.2.9** (Théorème de (Alexandrov-Reshetnyak)-Fenchel, [AR89, théorème 5.1.5]). *Pour toute courbe fermée  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\kappa(\mathcal{C}) \geq 2\pi$ . De plus, les seules courbes de Jordan pour lesquelles l'égalité est atteinte sont les courbes de Jordan de composante intérieure convexe.*

Dans le cas des courbes non simples l'égalité est également atteinte pour une courbe fermée parcourant un segment  $[a, b]$  de  $a$  à  $b$  puis de  $b$  à  $a$ . La courbure totale peut alors être comprise comme un défaut de convexité de la composante intérieure de la courbe de Jordan  $\mathcal{C}$ .



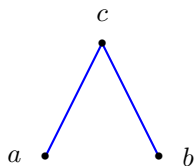


FIGURE 2.11 – La courbure totale de l’arc entre  $a$  et  $c$  et de l’arc entre  $c$  et  $b$  est nulle, mais la courbure de la courbe entre  $a$  et  $b$  est non-nulle. Ainsi, la courbure totale ne vérifie pas d’inégalité triangulaire.

*Remarque 2.2.10.* Dans [Lat98, partie 6.3], Longin Latecki propose une définition alternative de la courbure totale en choisissant de définir les angles sur  $] -\pi, \pi[$  au lieu de  $[0, \pi[$  (le signe de l’angle dépend du sens de parcours des points). La courbure totale d’une courbe de Jordan vaut alors toujours  $\pm 2\pi$ . Cette notion de courbure totale contient alors beaucoup moins d’information et ne permet pas de discriminer les courbes de composante intérieure convexe des autres.

### 2.2.1.2 Propriétés de convergence de la courbure totale

Nous présentons ici les résultats de convergence de la courbure totale lorsqu’une suite de courbes  $(\mathcal{C}_m)$  converge vers une courbe  $\mathcal{C}$  pour la distance de Fréchet (définition point 8 préliminaires mathématiques).

**Propriété 2.2.11** ([AR89, Théorème 5.1.1]). *Si la suite de courbes  $(\mathcal{C}_m)$  converge vers  $\mathcal{C}$  pour la distance de Fréchet lorsque  $m$  tend vers  $+\infty$ , alors  $\kappa(\mathcal{C}) \leq \liminf_{m \rightarrow +\infty} \kappa(\mathcal{C}_m)$ .*

**Propriété 2.2.12** ([AR89, Corollaire 1 du théorème 5.1.1]). *Soit  $\mathcal{C}$  un arc (respectivement une courbe de Jordan  $\mathcal{C}$ ) et  $(L_m)$  une suite de lignes polygonales (respectivement de polygones) inscrites dans  $\mathcal{C}$  et convergeant vers  $\mathcal{C}$  pour la distance de Fréchet. Si la suite de lignes polygonales (respectivement de polygones)  $(L_m)$  converge vers l’arc  $\mathcal{C}$  pour la distance de Fréchet lorsque  $m$  tend vers  $+\infty$ , alors  $\kappa(\mathcal{C}) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \kappa(L_m)$ .*

### 2.2.1.3 Propriétés d’additivité de la courbure totale

Les propriétés d’additivité de la courbure totale ne sont pas aussi simples que celles de la longueur (voir figure 2.11 pour un contre-exemple).

**Propriété 2.2.13** (Additivité de la courbure totale, [AR89, théorème 5.1.3]). *Soit  $\mathcal{C}_a^b$  un arc délimité par  $a$  et  $b$  et admettant des vecteurs tangent à gauche et à droite en tout point différent de  $a$  et  $b$ . Soit  $c \in \mathcal{C}_a^b$ . La courbure totale de  $\mathcal{C}_a^b$  est finie si et seulement si la courbure totale de  $\mathcal{C}_a^c$  et de  $\mathcal{C}_c^b$  est finie. Dans ce cas*

$$\kappa(\mathcal{C}_a^b) = \kappa(\mathcal{C}_a^c) + \angle(e_l(c), e_r(c)) + \kappa(\mathcal{C}_c^b).$$

*Dans le cas où  $a = b$  (possible si  $\mathcal{C}_a^b$  est fermé), l’inégalité précédente devient :*

$$\kappa(\mathcal{C}_a^b) = \kappa(\mathcal{C}_a^b \setminus \{c\}) + \angle(e_l(c), e_r(c)).$$

De la propriété 2.2.13, nous déduisons directement le corollaire suivant.

**Corollaire 2.2.14.** *Soit  $\mathcal{C}$  un arc simple d'extrémités  $a$  et  $d$  avec  $a \neq d$ . Soient  $b$  et  $c$  deux points de  $\mathcal{C}$  tel que  $(a, b, c, d)$  soit une chaîne de  $\mathcal{C}$ . En notant  $\mathcal{C}_a^c$  (respectivement  $\mathcal{C}_b^d$ ) l'arc de  $\mathcal{C}$  délimité par  $a$  et  $c$  (respectivement par  $b$  et  $d$ ),*

$$\kappa(\mathcal{C}) \leq \kappa(\mathcal{C}_a^c) + \kappa(\mathcal{C}_b^d).$$

De la propriété 2.2.13, nous déduisons que la courbure totale d'une courbe privée d'un point a une courbure totale strictement supérieure à  $\pi$  (proposition 2.2.16). Lorsque la courbe  $\mathcal{C}$  est de composante intérieure convexe, par le théorème de Fenchel (propriété 2.2.9),  $\kappa(\mathcal{C}) = 2\pi$  et par la propriété 2.2.6 les vecteurs tangents à gauche et à droite existent.

**Lemme 2.2.15.** *Une courbe de Jordan de composante intérieure convexe ne possède pas de point de rebroussement (point  $c$  où  $\angle(e_l(c), e_r(c)) = \pi$ ).*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{C}$  une courbe de Jordan de composante intérieure convexe. Soit  $p \in \mathcal{C}$ . Comme  $\mathcal{C}$  est une courbe de Jordan, il existe deux autres points distincts  $q, r$  de  $\mathcal{C}$  tels que  $p, q$  et  $r$  ne soient pas alignés. Soit  $P$  une droite dont l'intersection avec  $\mathcal{C}$  est réduite à  $p$  (voir figure 2.12). Cette droite existe car la composante intérieure de  $\mathcal{C}$  est convexe. Toujours par convexité de la composante intérieure de  $\mathcal{C}$ , la composante intérieure du triangle  $[p, q, r]$  est inclus dans la composante intérieure de  $\mathcal{C}$ . L'arc de  $\mathcal{C}$  entre  $q$  et  $r$  passant par  $p$  est inclus dans le demi plan fermé délimité par la droite  $P$  et contenant  $\mathcal{C}$  privé de la composante intérieure du triangle  $[p, q, r]$ . L'angle  $\angle(e_l(c), e_r(c))$  est alors majoré par  $\pi - \widehat{pqr}$ .  $\square$

**Proposition 2.2.16.** *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe de Jordan et  $c$  un point de  $\mathcal{C}$ . Alors  $\kappa(\mathcal{C} \setminus \{c\}) > \pi$ .*

*Démonstration.* Si  $\mathcal{C}$  n'est pas de courbure totale finie, alors on obtient directement  $\kappa(\mathcal{C} \setminus \{c\}) > \pi$ . Supposons que  $\mathcal{C}$  soit de courbure totale finie. Le point  $c$  possède alors un vecteur tangent à gauche  $e_l(c)$  et un à droite  $e_r(c)$ . Si  $\mathcal{C}$  n'est pas convexe, alors, par le théorème de Fenchel (propriété 2.2.9),  $\kappa(\mathcal{C}) > 2\pi$ . De plus  $\angle(e_l(c), e_r(c)) \leq \pi$ , donc par la propriété d'additivité de la courbure totale 2.2.13,  $\kappa(\mathcal{C} \setminus \{c\}) > \pi$ . Supposons que  $\mathcal{C}$  soit convexe. Alors par le théorème de Fenchel (propriété 2.2.9),  $\kappa(\mathcal{C}) = 2\pi$ . De plus, par le lemme 2.2.15,  $\angle(e_l(c), e_r(c)) < \pi$ . Par la propriété d'additivité de la courbure totale 2.2.13, nous obtenons  $\kappa(\mathcal{C} \setminus \{c\}) > \pi$ .  $\square$

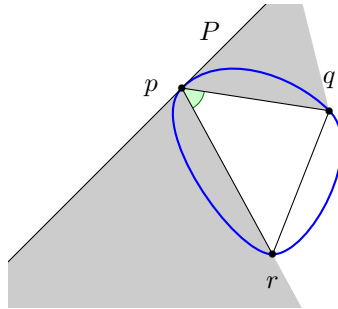


FIGURE 2.12 – Zone grise délimitant la portion du plan où se situent les arcs entre  $p$  et  $q$  et entre  $p$  et  $r$ .

### 2.2.1.4 Liens entre courbure totale et longueur d'un arc

La courbure totale d'une courbe permet de majorer sa longueur. Nous énonçons deux théorèmes. Le premier, plus général que le second, offre une majoration moins précise. En effet, le second théorème permet de comparer la longueur de deux courbes dont on peut comparer la courbure totale.

**Propriété 2.2.17** (Majoration de la longueur d'un arc (cas général) [AR89, Théorème 5.8.1]). *Soit  $\mathcal{C}$  un arc tel que  $\kappa(\mathcal{C}) < \pi$  et soit  $d$  la distance entre ses extrémités, alors*

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}) \leq \frac{d}{\cos \frac{\kappa(\mathcal{C})}{2}}.$$

*L'égalité est atteinte si et seulement si  $\mathcal{C}$  est une ligne polygonale formée de deux segments de même longueur.*

Le théorème de comparaison de Schur énonce que pour maximiser la distance entre les extrémités d'un arc de longueur fixée, il faut que l'arc soit le plus droit possible.

**Propriété 2.2.18** (Théorème de comparaison de Schur : [Bob08], p. 150). *Soit  $\gamma$  et  $\bar{\gamma}$  deux arcs simples paramétrés par longueur d'arc sur  $[0, L]$  tels que :*

- $[\bar{\gamma}(0), \bar{\gamma}(L)] \cup \bar{\gamma}([0, L])$  est une courbe de Jordan convexe.
- Pour tout sous-intervalle  $I \subset [0, L]$ ,

$$\kappa(\gamma(I)) \leq \kappa(\bar{\gamma}(I)) .$$

Alors ,

$$\|\bar{\gamma}(L) - \bar{\gamma}(0)\| \leq \|\gamma(L) - \gamma(0)\| .$$

### 2.2.1.5 Arc contournant un autre arc

Nous démontrons ici une proposition permettant de minorer la courbure totale d'une courbe contournant un ensemble convexe. Nous énoncerons et prouverons les résultats par ordre de généralité croissante.

Nous considérons d'abord le cas où une courbe polygonale contourne un polygone convexe.

**Lemme 2.2.19.** *Soit  $\langle a, c, d, b \rangle$  un polygone convexe de  $\mathbb{R}^2$  (les points  $c$  et  $d$  ne sont pas nécessairement distincts). Pour tout point  $c'$  de la demi-droite  $[b, c) \setminus [b, c[$  et pour tout point  $d'$  de la demi-droite  $[a, d) \setminus [a, d[$ , le polygone  $\langle a, c', d', b \rangle$  est convexe et de plus*

$$\kappa([a, c, d, b]) \leq \kappa([a, c', d', b]).$$

*De plus, si  $c' \neq c$  ou  $d' \neq d$ , et  $a, c, b, d$  ne sont pas alignés, alors,*

$$\kappa([a, c, d, b]) < \kappa([a, c', d', b]).$$

Le lemme 2.2.19 est illustré en figure 2.13).

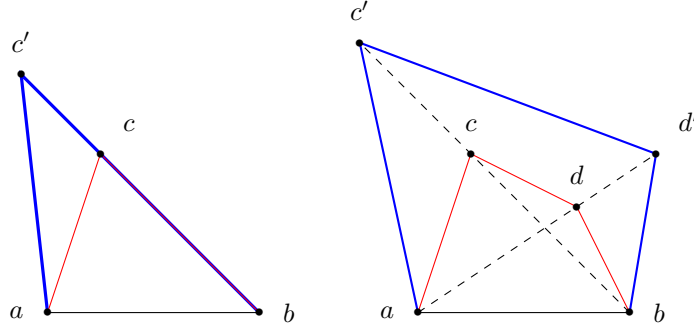


FIGURE 2.13 – La courbure totale de la ligne polygonale  $[a, c', b]$  est supérieure à la courbure totale de la ligne polygonale  $[a, c, b]$  (figure de gauche). De même la courbure totale de la ligne polygonale  $[a, c', d', b]$  est supérieure à la courbure totale de la ligne polygonale  $[a, c, d, b]$  et, de plus, le polygone  $[a, c', d', b]$  est convexe.

*Démonstration.* Montrons d'abord que le polygone  $\langle a, c', d', b \rangle$  est convexe. Si  $c' = d'$  le triangle  $\langle a, c', d', b \rangle$  est trivialement convexe. Supposons alors  $c' \neq d'$ . L'angle interne  $\widehat{c'}$  au polygone  $\langle a, c', d', b \rangle$  au point  $c'$  est inférieur à l'angle interne au polygone  $\langle a, c, d', b \rangle$  au point  $c$ , donc  $\widehat{c'} \leq \pi$ . De même, l'angle interne  $\widehat{d'}$  au polygone  $\langle a, c', d', b \rangle$  au point  $d'$  est inférieur ou égal à  $\pi$ . Le polygone  $\langle a, c', d', b \rangle$  est alors convexe. Montrons maintenant que  $\kappa([a, c, d, b]) \leq \kappa([a, c', d', b])$ . Par le théorème de Fenchel (propriété 2.2.9)

$$\kappa(\langle a, c', b \rangle) = \kappa(\langle a, c', d', b \rangle) = \kappa(\langle a, c, d, b \rangle) = \kappa(\langle a, c, d, b \rangle) = 2\pi.$$

De plus, par définition de  $c'$  les angles internes au polygone  $\langle a, c', b \rangle$  aux points  $a$  et  $b$  sont respectivement supérieurs ou égaux aux angles intérieurs au polygone  $\langle a, c, b \rangle$  aux points  $a$  et  $b$ . De même, les angles intérieurs au polygone  $\langle a, c', d', b \rangle$  aux points  $a$  et  $b$  sont respectivement supérieurs ou égaux aux angles intérieurs au polygone  $\langle a, c, d, b \rangle$  aux points  $a$  et  $b$ . Donc

$$\begin{aligned} \angle(\vec{ba}, \vec{ac'}) &\leq \angle(\vec{ba}, \vec{ac}) \\ \angle(\vec{c'b}, \vec{ba}) &= \angle(\vec{cb}, \vec{ba}) \\ \angle(\vec{d'b}, \vec{ba}) &\leq \angle(\vec{db}, \vec{ba}) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\kappa([a, c', b]) &= \angle(\overrightarrow{ac'}, \overrightarrow{c'b}) \\
&= \kappa(\langle a, c', b \rangle) - \angle(\overrightarrow{ba}, \overrightarrow{ac'}) - \angle(\overrightarrow{c'b}, \overrightarrow{ba}) \\
&\geq \kappa(\langle a, c, b \rangle) - \angle(\overrightarrow{ba}, \overrightarrow{ac}) - \angle(\overrightarrow{cb}, \overrightarrow{ba}) \\
&\geq \kappa([a, c, b]) \\
\kappa([a, c', d', b]) &= \angle(\overrightarrow{ac'}, \overrightarrow{c'd'}) + \angle(\overrightarrow{c'd'}, \overrightarrow{d'b}) \\
&\geq \kappa(\langle a, c', d', b \rangle) - \angle(\overrightarrow{ba}, \overrightarrow{ac'}) - \angle(\overrightarrow{d'b}, \overrightarrow{ba}) \\
&\geq \kappa(\langle a, b, c, d \rangle) - \angle(\overrightarrow{ba}, \overrightarrow{ac}) - \angle(\overrightarrow{db}, \overrightarrow{ba}) \\
&\geq \kappa([a, c, d, b]).
\end{aligned}$$

Si  $c' \neq c$  ou  $d' \neq d$ , on démontre de même que  $\angle(\overrightarrow{ba}, \overrightarrow{ac'}) < \angle(\overrightarrow{ba}, \overrightarrow{ac})$  ou  $\angle(\overrightarrow{d'b}, \overrightarrow{ba}) < \angle(\overrightarrow{db}, \overrightarrow{ba})$ , donc que  $\kappa([a, c', b]) > \kappa([a, c, b])$ . Dans le cas dégénéré où  $(c, a, b, d)$  est une chaîne du segment  $[c, d]$ ,  $\kappa([a, c, d, b]) = 2\pi$  et  $\kappa([a, c', d', b]) = 2\pi$ .  $\square$

L'étape suivante est de montrer le résultat pour une courbe quelconque contournant un polygone convexe. Cependant nous aurons besoin par la suite (lemme 2.3.13) d'un résultat dans une configuration un peu plus générale (lemme 2.2.20).

**Lemme 2.2.20.** *Soit  $\mathcal{C}$  un arc simple d'extrémités  $a$  et  $b$ . Soit  $A$  l'adhérence d'une composante connexe bornée de  $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathcal{C} \cup [a, b])$ . Soit  $P$  une ligne polygonale dans  $A$  d'extrémités  $c$  et  $d$  tel que  $P$  n'intersecte pas  $]a, b[$  et que la courbe de Jordan  $P \cup [c, a, b, d]$  soit de composante intérieure convexe, alors*

$$\kappa([a, c] \cup P \cup [d, b]) \leq \kappa(\mathcal{C}).$$

De plus, si  $P$  n'intersecte pas  $\mathcal{C}$  en dehors de  $a$  et  $b$ , alors

$$\kappa([a, c] \cup P \cup [d, b]) < \kappa(\mathcal{C}).$$

Le lemme 2.2.20 est illustré figure 2.14.

*Démonstration.* Soit  $T := P \cup [c, a, b, d]$ . Le polygone  $T$  inclut le segment  $[a, b]$  et est de composante intérieure non-vide car  $P$  n'est pas inclus dans  $]a, b[$ . Soit  $Q := [a, c] \cup P \cup [d, b]$ . Par le théorème de Fenchel (propriété 2.2.9), la courbure totale de  $T$  et du quadrilatère (ou triangle)  $\langle a, c, d, b \rangle$  sont égales à  $2\pi$ . De plus, si  $\langle a, c, d, b \rangle$  est dégénéré en un segment,  $(c, a, b, d)$  est une chaîne de  $[c, d]$  sinon  $P$  intersecterait  $[a, b]$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}
\kappa(Q) &= \kappa(T) - \angle(\overrightarrow{ba}, \overrightarrow{ac}) - \angle(\overrightarrow{db}, \overrightarrow{ba}), \\
&= 2\pi - \kappa([b, a, c]) - \kappa([a, b, d]), \\
&= \kappa(\langle c, a, b, d \rangle) - \kappa([b, a, c]) - \kappa([a, b, d]), \\
&= \kappa([a, c, d, b]).
\end{aligned}$$

Comme l'ensemble  $A$  est borné et  $c, d \in A$ , toute demi-droite issue de  $c$  ou  $d$  intersecte alors la courbe  $\mathcal{C}$ . Par le lemme 2.2.19, il existe  $c'$  et  $d'$  deux points de  $\mathcal{C}$  tels que  $\langle a, c', d', b \rangle$  est convexe. Soit

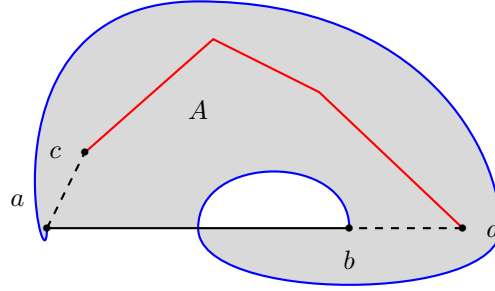


FIGURE 2.14 – En bleu l’arc  $\mathcal{C}$ , en gris, une composante connexe  $A$  de  $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathcal{C} \cup [a, b])$  et en rouge une ligne polygonale  $P$  dans  $A$  d’extrémités  $c$  et  $d$  telle que  $P \cup [d, b] \cup [b, a] \cup [a, c]$  soit convexe.

$[a, c', d', b]$ , soit  $[a, d', c', b]$  est inscrite dans  $\mathcal{C}$ . Notons  $R$  celle qui est inscrite dans  $\mathcal{C}$ . La courbure totale de  $R$  est la somme des angles en  $c'$  et  $d'$ . Comme  $\langle a, c', d', b \rangle$  est convexe, l’angle interne en  $c'$  de  $[a, c', d', b]$  est plus grand que l’angle interne en  $c'$  de  $[a, d', c', b]$ . De même pour le point  $d'$ . Nous obtenons alors les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \angle(\overrightarrow{c'd'}, \overrightarrow{d'b}) &\leq \angle(\overrightarrow{ad'}, \overrightarrow{d'c'}), \\ \angle(\overrightarrow{ac'}, \overrightarrow{c'd'}) &\leq \angle(\overrightarrow{d'c'}, \overrightarrow{c'b}). \end{aligned}$$

Donc  $\kappa(R) \geq \kappa([a, c', d', b])$ . Finalement par définition de la courbure totale de  $\mathcal{C}$  et par le lemme 2.2.19,

$$\kappa(\mathcal{C}) \geq \kappa(R) \geq \kappa([a, c', d', b]) \geq \kappa([a, c, d, b]) = \kappa(Q).$$

Si, de plus,  $P$  n’intersecte pas  $\mathcal{C}$  en dehors de  $a$  et  $b$

$$\kappa(\mathcal{C}) \geq \kappa(Q) \geq \kappa([a, c', d', b]) > \kappa([a, c, d, b]) = \kappa(Q). \quad \square$$

En passant à la borne supérieure des courbures totales des polygones inscrits dans un arc, nous pouvons substituer dans le lemme 2.2.20, la ligne polygonale  $P$  par un arc  $\mathcal{C}_2$ .

**Proposition 2.2.21.** *Soit  $\mathcal{C}_1$  un arc simple d’extrémités  $a$  et  $b$ . Soit  $A$  l’adhérence d’une composante connexe bornée de  $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathcal{C}_1 \cup [a, b])$ . Soit  $\mathcal{C}_2$  un arc simple dans  $A$  d’extrémités  $c$  et  $d$  tel que  $\mathcal{C}_2$  n’intersecte pas  $]a, b[$  et que la courbe de Jordan  $\mathcal{C}_2 \cup [c, a] \cup [a, b] \cup [b, d]$  soit de composante intérieure convexe, alors*

$$\kappa([a, c] \cup \mathcal{C}_2 \cup [d, b]) \leq \kappa(\mathcal{C}_1)$$

*Démonstration.* Soit  $Q$  une ligne polygonale inscrite dans  $[a, c] \cup \mathcal{C}_2 \cup [d, b]$ . Soit  $(q'_i)_{i \in [0, N-1]}$  la chaîne de  $[a, c] \cup \mathcal{C}_2 \cup [d, b]$  formée des sommets de  $Q$  et des points  $c$  et  $d$ . Notons  $Q'$  la ligne polygonale  $[q'_i]_{i \in [0, N-1]}$ . La ligne polygonale  $Q$  est alors inscrite dans  $Q'$ , donc  $\kappa(Q) \leq \kappa(Q')$ . Soit  $P'$  l’arc de  $Q'$  d’extrémités  $c$  et  $d$ . Alors  $P'$  est inscrit dans  $\mathcal{C}_2$ , donc  $\kappa(P') \leq \kappa(\mathcal{C}_2)$ . Par le lemme 2.2.20,  $\kappa([a, c] \cup P' \cup [d, b]) \leq \kappa(\mathcal{C}_1)$ . Donc

$$\begin{aligned} \kappa(Q) &\leq \kappa(Q') \\ &= \kappa([a, c] \cup P' \cup [d, b]) \\ &\leq \kappa(\mathcal{C}_1). \end{aligned}$$

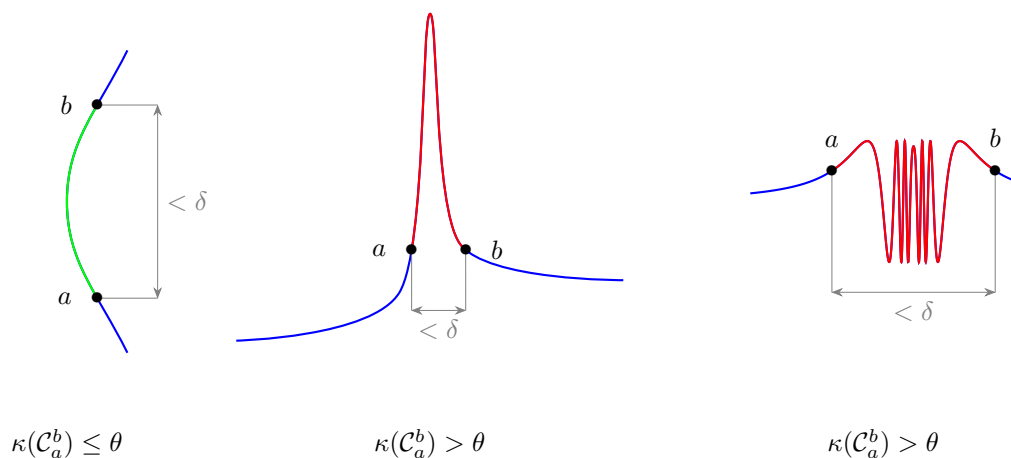


FIGURE 2.15 – A gauche, pour toute paire de points  $a, b$  à distance strictement inférieure à  $\delta$ , la courbure totale de l’arc délimité par  $a$  et  $b$  est inférieure à  $\theta$  : la courbe est  $(\theta, \delta)$ -CTLB. En revanche au centre et à droite, il existe deux points  $a$  et  $b$  à distance strictement inférieure à  $\delta$  tel qu’aucun arc de la courbe entre  $a$  et  $b$  ne soit de courbure totale inférieure à  $\theta$ .

Comme  $\kappa(\mathcal{C}_1)$  est un majorant des courbures totales des polygones inscrits dans  $[a, c] \cup \mathcal{C}_2 \cup [d, b]$ , et, par définition de la courbure totale,  $\kappa([a, c] \cup \mathcal{C}_2 \cup [d, b])$  est le plus petit des majorants des  $\kappa(Q)$  avec  $Q$  ligne polygonale inscrite dans  $[a, c] \cup \mathcal{C}_2 \cup [d, b]$ ,  $\kappa([a, c] \cup \mathcal{C}_2 \cup [d, b]) \leq \kappa(\mathcal{C}_1)$ .  $\square$

### 2.2.2 Définition et exemples basiques

Nous introduisons la notion de courbe CTLB contrôlant le bord de formes homéomorphes à un disque, c’est-à-dire dont le bord est une courbe de Jordan.

**Définition 2.2.22** (Courbe CTLB). Une courbe de Jordan  $\mathcal{C}$  est à *courbure totale localement bornée par*  $(\theta, \delta)$  ( $(\theta, \delta)$ -CTLB) si pour tout paire de points  $(a, b)$  de  $\mathcal{C}$  telle que  $d(a, b) < \delta$ , il existe un arc  $\mathcal{C}_a^b$  de  $\mathcal{C}$  délimité par  $a$  et  $b$  tel que  $\kappa(\mathcal{C}_a^b) \leq \theta$ .

Pour une valeur de  $\theta$  fixée, la famille des courbes  $(\theta, \delta)$ -CTLB est décroissante pour l’inclusion par rapport à  $\delta$  : si  $\delta_1 < \delta_2$  et  $\mathcal{C}$  est une courbe  $(\theta, \delta_2)$ -CTLB, alors  $\mathcal{C}$  est  $(\theta, \delta_1)$ -CTLB. Pour une valeur de  $\delta$  fixée, la famille des courbes  $(\theta, \delta)$ -CTLB est croissante pour l’inclusion par rapport à  $\theta$  : si  $\theta_1 \leq \theta_2$  et  $\mathcal{C}$  est une courbe  $(\theta_1, \delta)$ -CTLB, alors  $\mathcal{C}$  est une courbe  $(\theta_2, \delta)$ -CTLB. Nous nous efforcerons alors, pour gagner en généralité, de démontrer nos résultats pour des valeurs de  $\delta$  les plus faibles possibles et pour des valeurs de  $\theta$  les plus grandes possibles. Par la suite, la valeur de  $\theta$  utilisée sera  $\frac{\pi}{2}$  car au-delà de cette valeur, rares sont les résultats qui restent valides. Une courbe  $(\frac{\pi}{2}, \delta)$ -CTLB sera plus simplement dite à *courbure totale localement bornée par*  $\delta$  ( $\delta$ -CTLB).

Soit  $\mathcal{C}$  une courbe de courbure totale finie. Soit  $a$  et  $b$  deux points distincts de  $\mathcal{C}$  délimitant deux arcs  $\mathcal{C}_a^b$  et  $\mathcal{C}_b^a$ . Par la propriété 2.2.13,  $\kappa(\mathcal{C}_a^b) + \kappa(\mathcal{C}_b^a) \leq \kappa(\mathcal{C})$ . Donc soit  $\kappa(\mathcal{C}_a^b) \leq \frac{\kappa(\mathcal{C})}{2}$  soit

$\kappa(\mathcal{C}_b^a) \leq \frac{\kappa(\mathcal{C})}{2}$ . Donc pour tout  $\delta > 0$ , et tout  $\theta \geq \frac{\kappa(\mathcal{C})}{2}$ , une courbe de courbure totale finie est  $(\theta, \delta)$ -CTLB. Les valeurs  $\theta \geq \frac{\kappa(\mathcal{C})}{2}$  n'apportent peu d'information sur la courbe  $\mathcal{C}$ .

Nous listons quelques exemples élémentaires de courbes CTLB.

*Exemple 2.2.23* (Une courbe de composante intérieure convexe.). Soit  $\mathcal{C}$  une courbe de composante intérieure convexe. Par le théorème de Fenchel (propriété 2.2.9)  $\kappa(\mathcal{C}) = 2\pi$ . Une courbe de composante intérieure convexe est alors  $(\pi, \delta)$ -CTLB pour tout  $\delta > 0$ . En effet entre deux points quelconques de  $\mathcal{C}$  l'un des deux arcs a une courbure totale inférieure ou égale à  $\pi$

*Exemple 2.2.24* (Le cercle). Un cercle  $\partial B(x, r)$  admet une paramétrisation de classe  $\mathcal{C}^2$  et possède en chaque point une courbure  $\frac{1}{r}$ . Par la propriété 2.2.2, la courbure totale d'un arc  $\mathcal{A}$  du cercle  $\partial B(x, r)$  d'angle  $\theta$  est

$$\kappa(\mathcal{A}) = \frac{1}{r} \mathcal{L}(\mathcal{A}) = \frac{1}{r} \theta r = \theta.$$

Pour tout  $\theta \in ]0, \pi[$ , deux points  $a$  et  $b$  à distance inférieure à  $2r \sin(\frac{\theta}{2})$  délimitent deux arcs de cercles, l'un de courbure totale égale à  $\theta$ , l'autre à  $2\pi - \theta$ . Donc, tout cercle  $\partial B(x, r)$  est  $(\theta, 2r \sin(\frac{\theta}{2}))$ -CTLB. En particulier  $\partial B(x, r)$  est  $\sqrt{2}r$ -CTLB.

*Exemple 2.2.25* (Le rectangle). Soit  $\mathcal{C}$  un rectangle de côté de plus petite longueur  $c$ . La courbure totale d'un arc d'un rectangle est le nombre de sommets contenus dans l'arc multiplié par  $\frac{\pi}{2}$ . D'une part, les milieux de deux plus grands côtés du rectangle délimitent deux arcs de courbure totale égale à  $\pi$ . D'autre part deux points  $a$  et  $b$  à distance strictement inférieure à  $c$  sont soit sur deux côtés adjacents de  $\mathcal{C}$  soit sur le même côté de  $\mathcal{C}$ . Dans le premier cas,  $a$  et  $b$  délimitent un arc de courbure totale  $\frac{\pi}{2}$  et un second arc de courbure totale  $\frac{3\pi}{2}$ . Dans le second cas,  $a$  et  $b$  délimitent un arc de courbure totale nulle et un second arc de courbure totale  $2\pi$ . Donc pour  $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$  un rectangle de plus petit côté  $c$  est  $(\theta, c)$ -CTLB et pour  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , il n'est  $(\theta, \delta)$ -CTLB pour aucune valeur de  $\delta$ .

*Exemple 2.2.26* (Le triangle). Soit  $\langle a_0, a_1, a_2 \rangle$  un triangle dont on note  $\alpha_i$  l'angle interne en  $a_i$ . Soit  $i_0 := \operatorname{argmin}_{i \in \mathbb{Z}_3} (\alpha_i)$  et soit  $\theta \in ]0, \pi - \alpha_{i_0}[$ . Soient  $e_1 \in ]a_{i_0}, a_{i_0+1}[$  et  $e_2 \in ]a_{i_0}, a_{i_0+2}[$ . Les points  $e_1$  et  $e_2$  délimitent les arcs  $[e_1, a_{i_0}, e_2]$  et  $[e_1, a_{i_0+1}, a_{i_0+2}, e_2]$  de courbure totale respective  $\pi - \alpha_0$  et  $\pi + \alpha_0$ . Donc  $\langle a_0, a_1, a_2 \rangle$  n'est  $(\theta, \delta)$ -CTLB pour aucune valeur de  $\delta$ . Soit  $\theta \in [\pi - \alpha_{i_0}, \pi[$ . Soit  $i \in \mathbb{Z}_3$ . Pour tout  $e_{i,i+1} \in ]a_i, a_{i+1}[$  et  $e_{i,i+2} \in ]a_i, a_{i+2}[$ , les points  $e_{i,i+1}$  et  $e_{i,i+2}$  délimitent deux arcs : l'un de courbure totale  $\pi - \alpha_i \leq \pi - \alpha_{i_0}$ , l'autre de courbure totale inférieure à  $\pi + \alpha_i$ . De plus, deux points sur un même côté délimitent un arc de courbure totale nulle et un arc de courbure totale  $2\pi$ . Donc pour tout  $\delta > 0$ ,  $\langle a_0, a_1, a_2 \rangle$  est  $(\theta, \delta)$ -CTLB. En particulier, un triangle équilatéral est  $(\frac{2\pi}{3}, \delta)$ -CTLB pour tout  $\delta > 0$ .

*Exemple 2.2.27* (Polygone équilatéral inscrit dans un cercle). Montrons que pour  $\theta < \pi$  un polygone équilatéral  $P$  de  $n$  côtés inscrit dans un cercle de rayon  $r$  est  $(\theta, 2r \sin(\lfloor \frac{n\theta}{2\pi} \rfloor \frac{\pi}{n}))$ -CTLB. La courbure totale d'un arc de  $P$  est le nombre de points anguleux qu'il possède multiplié par  $\frac{2\pi}{n}$ . Ainsi les seuls arcs de courbure totale inférieure à  $\theta$  sont ceux possédant au plus  $\lfloor \frac{n\theta}{2\pi} \rfloor$  points anguleux. La plus grande distance entre deux points de  $P$  délimitant un arc possédant  $\lfloor \frac{n\theta}{2\pi} \rfloor$  points anguleux est  $2r \sin((\lfloor \frac{n\theta}{2\pi} \rfloor + 1) \frac{\pi}{n})$ .

*Exemple 2.2.28* (Un exemple non-convexe). Nous étudions l'exemple de la courbe  $\mathcal{C}$  représentée dans la figure 2.16 constituée uniquement de six demi-cercles de rayon  $r$  et de deux segments de longueur  $2r + l$ . Si  $\theta \leq 2 \arcsin(\frac{l}{2r})$ , alors pour toute paire de points de  $\mathcal{C}$ , à distance inférieure à  $2r \sin(\frac{\theta}{2})$ , il existe un arc de courbure totale inférieure à  $\theta$  joignant les deux points (plus précisément cet arc



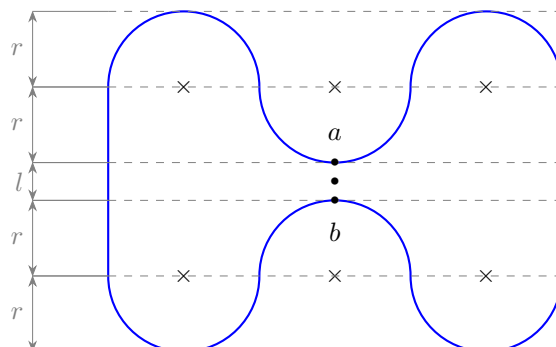


FIGURE 2.16 – La courbe bleue est formée de demi-cercles de rayon  $r$  et de segments de longueur  $l + 2r$ . Cette courbe est  $l$ -CTLB.

est de courbure totale égale à  $\theta$  si les deux points sont sur des demi-cercles et strictement inférieur à  $\theta$  sinon). La courbe  $\mathcal{C}$  est alors  $(\theta, 2r \sin(\frac{\theta}{2}))$ -CTLB. Si  $\theta \in [2 \arcsin(\frac{l}{2r}), \pi]$ , alors  $l \leq 2r \sin(\frac{\theta}{2})$ . En particulier, les points  $a$  et  $b$  délimitent deux arcs de courbure totale supérieure à  $\theta$  et ce sont les deux points de  $\mathcal{C}$  les plus proches vérifiant cette propriété. Donc  $\mathcal{C}$  est  $(\theta, l)$ -CTLB.

La prochaine sous-partie est dédiée à la construction d'un exemple plus pathologique de courbe CTLB.

### 2.2.3 Construction d'un arc CTLB avec des points angulaires denses

L'objectif de cette partie est de construire une courbe CTLB avec des points anguleux denses dans la courbe.

L'idée est de construire une suite de lignes polygonales  $\gamma_i : [0, 1]$  en partant d'un segment avec un nombre croissant de points angulaires d'angles  $\theta_i$  de somme convergente. Dans une première étape, nous définissons la suite d'arcs paramétrés  $\gamma_i$ . Dans une deuxième étape, nous démontrons que cette suite d'arcs paramétrés tend vers un arc paramétré  $\gamma_\infty$  pour la distance de Fréchet. Dans une troisième étape, nous démontrons que la tangente à droite en  $\gamma_\infty(0)$  et la tangente à gauche en  $\gamma_\infty(1)$  sont orthogonales. Dans une quatrième étape nous étendons par symétrie l'arc  $\gamma_\infty$  en une courbe de Jordan.

- Soit  $(\theta_i)$  une suite positive telle que  $\sum \theta_i = \frac{\pi}{2}$ . (Prendre par exemple  $(\theta_i) := \frac{\pi}{2} (\frac{1}{2})^{i+1}$ ). Comme  $\mathbb{Q} \cap ]0, 1[$  est dénombrable, il existe une bijection  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \cap ]0, 1[$ . Soit  $\gamma_0$  la paramétrisation par longueur d'arc d'un segment de longueur 1. Nous définissons récursivement la suite  $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  d'arcs paramétrés de longueur 1 par :

$$\gamma_{i+1}(t) := \begin{cases} \gamma_i(t) & \text{si } t \leq \varphi(i) \\ r_{\gamma(\varphi(i)), \theta_i} \circ \gamma_i(t) & \text{si } t \geq \varphi(i) \end{cases}$$

où  $r_{x, \theta}$  est la rotation de centre  $x$  et d'angle  $\theta$ .

- Montrons que  $(\gamma_i)$  est une suite de Cauchy pour la distance de Fréchet  $d_F$  (définition à l'item 8 des préliminaires mathématiques) .

Soit  $i \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} d_F(\gamma_i([0, 1]), \gamma_{i+1}([0, 1])) &\leq \sup_{t \in [0, 1]} d(\gamma_i(t), \gamma_{i+1}(t)) \\ &\leq \sup_{t \in [\varphi(i), 1]} d(\gamma_i(t), r_{\gamma(\phi(i)), \theta_i} \circ \gamma_i(t)) \\ &\leq \sup_{t \in [\varphi(i), 1]} d(\gamma_i(t), \gamma_i(\phi(i))) 2 \sin \frac{\theta_i}{2} \\ &\leq 2 \sin \frac{\theta_i}{2} \end{aligned}$$

Donc pour tout  $k, l \in \mathbb{N}$ ,

$$d_F(\gamma_k([0, 1]), \gamma_{k+l}([0, 1])) \leq \sum_{i=k}^l 2 \sin \frac{\theta_i}{2} \leq \sum_{i=k}^{+\infty} 2 \sin \frac{\theta_i}{2} \leq \sum_{i=k}^{+\infty} \theta_i$$

Comme la suite des restes  $\sum_{i \geq k} \theta_i$  tend vers 0,  $(\gamma_i)$  est une suite de Cauchy. De plus, par 9,  $\mathbb{R}^2$  muni de la distance de Fréchet est complet. Donc  $(\gamma_i)$  converge vers un arc  $\gamma_\infty$ .

— Montrons que  $e_l^{\gamma_\infty}(\gamma_\infty(1))$  est orthogonal à  $e_r^{\gamma_\infty}(\gamma_\infty(0))$ . Par la propriété 2.2.11,

$$\kappa(\gamma_\infty([0, 1])) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \theta_i = \frac{\pi}{2},$$

donc par la propriété 2.2.6, les vecteurs tangents à gauche et à droite existent. Par simplicité, nous notons pour tout  $k \in \bar{\mathbb{N}}$ ,  $e_l^k(t) := e_l^{\gamma_k}(\gamma_k(t))$  et  $e_r^k(t) := e_r^{\gamma_k}(\gamma_k(t))$ . Sur le segment  $\gamma_0([0, 1])$  :

$$e_r^0(0) = e_l^0(1)$$

De plus, pour chaque rotation  $r_k$

$$e_l^{k+1}(1) = r_{\theta_k} e_l^k(1),$$

donc

$$e_l^k(1) = r_{\sum_{i=0}^k \theta_i} e_r^0(0),$$

donc

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} e_l^k(1) &= r_{\sum_{i=0}^{+\infty} \theta_i} e_r^0(0), \\ &= r_{\frac{\pi}{2}} e_r^0(0). \end{aligned}$$

Notons

$$\begin{aligned} e_\infty &:= r_{\sum_{i=0}^{+\infty} \theta_i} e_r^0(0), \\ &= r_{\frac{\pi}{2}} e_r^0(0). \end{aligned}$$

Montrons que  $e_l^\infty(1) = e_\infty$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $k_0$  tel que  $\sum_{i=k_0}^{+\infty} \theta_i < \frac{\varepsilon}{2}$ . Notons

$s_0 := \max_{i \leq k_0} \phi(i)$ . Pour tout  $s \in [s_0, 1]$ ,

$$\angle(e_\infty, \gamma_\infty(1) - \gamma_\infty(s)) \leq \angle(e_\infty, \gamma_{k_0}(1) - \gamma_{k_0}(s)) + \angle(\gamma_{k_0}(1) - \gamma_{k_0}(s), \gamma_\infty(1) - \gamma_\infty(s))$$

D'une part, pour tout  $i \leq k_0$ ,  $\phi(i) \notin ]s_0, 1]$ . Donc pour tout  $s \in [s_0, 1]$ ,

$$\angle(e_l^{k_0}(1), \gamma_{k_0}(1) - \gamma_{k_0}(s)) = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} \angle(e_\infty, \gamma_{k_0}(1) - \gamma_{k_0}(s)) &\leq \angle(e_\infty, e_l^{k_0}(1)) + \angle(e_l^{k_0}(1), \gamma_{k_0}(1) - \gamma_{k_0}(s)), \\ &\leq \angle(e_\infty, e_l^{k_0}(1)), \\ &\leq \sum_{i=k_0}^{+\infty} \theta_i, \\ &< \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout  $s \in [s_0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} \angle(\gamma_{k_0}(1) - \gamma_{k_0}(s), \gamma_\infty(1) - \gamma_\infty(s)) &\leq \sum_{i=k_0}^{+\infty} \angle(\gamma_i(1) - \gamma_i(s), \gamma_{i+1}(1) - \gamma_{i+1}(s)) \\ &\leq \sum_{i=k_0}^{+\infty} \theta_i \\ &< \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Donc pour tout  $s \in ]s_0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} \angle(e_\infty, \gamma_\infty(1) - \gamma_\infty(s)) &\leq \angle(e_\infty, \gamma_{k_0}(1) - \gamma_{k_0}(s)) + \angle(\gamma_{k_0}(1) - \gamma_{k_0}(s), \gamma_\infty(1) - \gamma_\infty(s)), \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

- Soit  $\mathcal{C}$  la courbe fermée obtenu en étendant  $\gamma_\infty([0, 1])$  par symétrie par rapport à l'axe orthogonal à  $e_r^\infty(0)$  passant par  $\gamma_\infty(0)$  puis par symétrie par rapport à l'axe orthogonal à  $e_l^\infty(1)$  passant par  $\gamma_\infty(1)$ .

$$\begin{aligned} \kappa(\mathcal{C}) &= 4\kappa(\gamma_\infty) + 2\angle(e_l^\infty(0), e_r^\infty(0)) + 2\angle(e_l^\infty(1), e_r^\infty(1)), \\ &= 4\kappa(\gamma_\infty), \\ &\leq 2\pi. \end{aligned}$$

De plus, par la propriété 2.2.9,  $\kappa(\mathcal{C}) = 2\pi$  et  $\mathcal{C}$  est de composante intérieure convexe. Donc  $\mathcal{C}$  est  $\delta$ -CTLB avec  $\delta := d(\gamma_\infty(0), \gamma_\infty(1))$ .

La courbe ainsi construite est analytiquement très pathologique, elle n'est pas dérivable sur un ensemble dense de points mais est géométriquement très simple, elle est convexe. La courbure totale permet ainsi de s'abstraire de certaines considérations analytiques d'une courbe pour se concentrer uniquement sur sa géométrie.

### 2.2.4 Propriétés élémentaires

Dans cette partie nous exposons les premières propriétés des courbes CTLB. Ces propriétés nous permettront de décrire et discriminer cette famille de courbes.

La proposition suivante indique la principale restriction des courbes  $(\theta, \delta)$ -CTLB : l'angle des points anguleux est majoré par  $\theta$ . La condition d'existence des vecteurs tangents à gauche et à droite sera superflu après la proposition 2.2.32.

**Proposition 2.2.29** (points anguleux d'angle majoré). *Soit  $\theta \in ]0, \pi[$ . Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $(\theta, \delta)$ -CTLB. Pour tout point  $p \in \mathcal{C}$  pour lequel les vecteurs tangents à gauche et à droite sont définis,*

$$\angle(e_l(p), e_r(p)) \leq \theta.$$

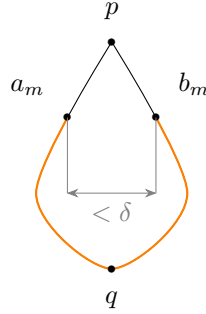


FIGURE 2.17 – Démonstration de la proposition 2.2.29. Les suite des points de  $\mathcal{C}$ ,  $(a_m)$  et  $(b_m)$  tendent vers  $p$  des deux côtés de  $p$ . La courbe  $(\mathcal{C}_m)$  est tracée en orange.

*Démonstration.* Les notations de la preuve sont illustrées figure 2.17. Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $(\theta, \delta)$ -CTLB et soit  $p$  un point de  $\mathcal{C}$ . Soit  $q \in \mathcal{C} \setminus \{p\}$ . Notons  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  les deux arcs de  $\mathcal{C}$  délimités par  $p$  et  $q$ . Notons  $(a_m)$  (respectivement  $b_m$ ) une suite de points de  $\mathcal{C}_1$  (respectivement de  $\mathcal{C}_2$ ) convergeant vers  $p$ . Par la proposition 2.2.16,  $\kappa(\mathcal{C} \setminus \{p\}) > \pi$ . De plus, par la propriété 2.2.11  $\kappa(\mathcal{C} \setminus \{p\}) \leq \liminf \kappa(\mathcal{C}_m)$  où  $\mathcal{C}_m$  est l'arc entre  $a_m$  et  $b_m$  inclus dans l'arc  $\mathcal{C} \setminus \{p\}$ . D'une part, il existe  $m_0$  tel que pour tout  $m > m_0$ ,  $\kappa(\mathcal{C}_m) > \pi$ , et d'autre part, il existe  $m_1 > m_0$  tel que pour tout  $d(a_m, b_m) < \delta$ . Soit  $m > m_1$ . Comme  $\mathcal{C}$  est  $(\theta, \delta)$ -CTLB et  $\kappa(\mathcal{C}_m) > \pi$ ,  $\kappa(\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_m) \leq \theta$ . Finalement par la propriété 2.2.13,  $\angle(e_l(p), e_r(p)) \leq \theta$ . □

Nous déduisons de la proposition 2.2.29 que les angles intérieurs des sommets d'un polygone  $(\theta, \delta)$ -CTLB sont minorés par  $\pi - \theta$ .

La proposition suivante permet de localiser une courbe CTLB à partir d'un échantillonnage de points de la courbe suffisamment fin. La figure 2.18 illustre la proposition.

**Proposition 2.2.30.** *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $(\theta, \delta)$ -CTLB. Soient  $a$  et  $b$  deux points de  $\mathcal{C}$  tels que  $d(a, b) < \delta$ . L'arc de  $\mathcal{C}$  délimité par  $a$  et  $b$  de plus petite courbure totale est inclus dans l'union de deux portions de disques correspondant à l'ensemble des points  $c$  tels que  $\widehat{acb} \geq \pi - \theta$ .*

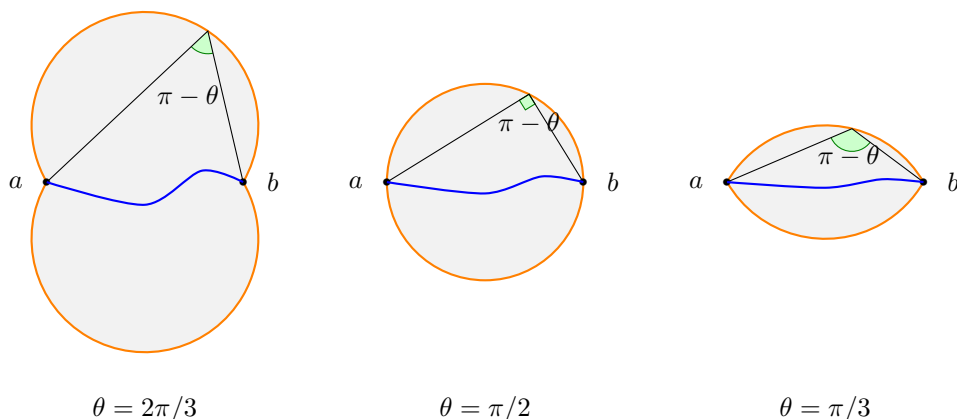


FIGURE 2.18 – Illustration de la proposition 2.2.30 pour trois valeurs de  $\theta$  :  $\pi/3$ ,  $\pi/2$ ,  $2\pi/3$ . Étant donnés deux points  $a, b \in \mathcal{C}$  tels que  $d(a, b) < \delta$ , l'un des arcs entre  $a$  et  $b$  de la courbe  $\delta$ -CTLB  $\mathcal{C}$  appartient à la zone grise.

*Démonstration.* Comme  $d(a, b) < \delta$ , par définition des courbes CTLB, la courbure totale de l'un des arcs de  $\mathcal{C}$  est inférieure ou égale à  $\theta$ . Donc l'arc  $\mathcal{C}_0$  de plus petite courbure totale entre  $a$  et  $b$  est de courbure totale majorée par  $\theta$ . Soit  $c$  un point de  $\mathcal{C}_0$ . Par définition de la courbure totale,  $\kappa([a, c, b]) \leq \kappa(\mathcal{C}_0) \leq \theta$ . Donc  $\widehat{acb} \geq \pi - \theta$ .  $\square$

La proposition 2.2.31 énonce une propriété de connexité locale des courbes  $\delta$ -CTLB. Cette propriété implique que la composante intérieure de la courbe possède une certaine épaisseur. En effet, cette connexité locale implique que le type homotopique est stable par dilatation par disque ouvert de rayon  $\epsilon < \delta/2$  (aucune composante connexe n'est supprimée ou créée dans  $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathcal{C} \oplus B(0, \epsilon))$ ).

Cette proposition peut également être comprise comme une propriété de sous-variété topologique dont on contrôlerait la taille des voisinages (un ensemble  $S$  est une sous-variété topologique de dimension  $d$  de  $\mathbb{R}^n$  si l'intersection d'un voisinage dans  $\mathbb{R}^n$  d'un point de  $S$  avec  $S$  est homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ .)

**Proposition 2.2.31.** *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $\delta$ -CTLB. Alors, pour tout point  $a$  de  $\mathcal{C}$ , pour tout  $\epsilon \leq \delta$ , l'intersection de  $\mathcal{C}$  avec le disque ouvert  $B(a, \epsilon)$  est connexe par arc.*

*Démonstration.* Soit  $a$  un point de  $\mathcal{C}$ . Soient  $b_1$  et  $b_2$  deux points de  $\mathcal{C} \cap B(a, \epsilon)$ . Alors par définition des courbes CTLB, la courbure totale de l'un des arcs délimités par  $a$  et  $b_1$  (respectivement  $b_2$ ) est inférieure ou égale à  $\frac{\pi}{2}$ . Cet arc est noté  $\mathcal{C}_a^{b_1}$  (respectivement  $\mathcal{C}_a^{b_2}$ ). Par la proposition 2.2.30,  $\mathcal{C}_a^{b_1}$  (respectivement  $\mathcal{C}_a^{b_2}$ ) est inclus dans un disque de diamètre  $[a, b_1]$  (respectivement de diamètre  $[a, b_2]$ ) qui est lui-même inclus dans  $B(a, \epsilon)$ . Ainsi  $\mathcal{C} \cap B(a, \epsilon)$  est connexe par arc.  $\square$

Le contre-exemple décrit figure 2.19 montre que la proposition 2.2.31 n'est plus valide pour les courbes  $(\theta, \delta)$ -CTLB avec  $\theta > \frac{\pi}{2}$ . C'est une des raisons pour lesquelles nous travaillerons surtout avec des valeurs  $\theta \leq \frac{\pi}{2}$  par la suite.

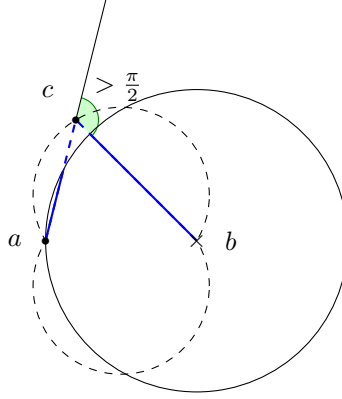


FIGURE 2.19 – Un arc de courbure totale supérieure à  $\frac{\pi}{2}$  peut sortir d'un disque de rayon inférieur à  $\delta$  et centré en un des points de l'arc (par exemple la courbe polygonale bleue  $[a, c, b]$ ). Ainsi la proposition 2.2.31 n'est plus valide pour les courbes  $(\theta, \delta)$ -CTLB avec  $\theta > \frac{\pi}{2}$ .

La rectifiabilité d'une courbe  $\delta$ -CTLB est une conséquence de la proposition 2.2.31.

**Proposition 2.2.32.** *Une courbe  $\delta$ -CTLB a une courbure totale et une longueur finie, possède des vecteurs tangents à gauche et droite en tout point et ses points anguleux sont dénombrables.*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $\delta$ -CTLB. Les boules ouvertes  $B(a, \min(\frac{\delta}{2}, \frac{\text{diam}(\mathcal{C})}{4}))$  avec  $a \in \mathcal{C}$  recouvrent l'ensemble compact  $\mathcal{C}$ . Il existe alors un sous-ensemble fini de boules ouvertes  $B(a_k, \min(\frac{\delta}{2}, \frac{\text{diam}(\mathcal{C})}{4}))$  avec  $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$  recouvrant  $\mathcal{C}$ . Par la proposition 2.2.31, pour tout  $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$ ,  $\mathcal{C} \cap B(a_k, \min(\frac{\delta}{2}, \frac{\text{diam}(\mathcal{C})}{4}))$  est un arc ouvert de  $\mathcal{C}$ , notons le  $\mathcal{C}_k$ . Par définition des courbes CTLB, il existe un arc  $\mathcal{C}'_k$  de  $\mathcal{C}$  de courbure totale inférieure à  $\frac{\pi}{2}$  entre les deux extrémités de  $\mathcal{C}_k$ . Par la proposition 2.2.30, l'arc  $\mathcal{C}'_k$  est dans le disque de diamètre le segment joignant les deux extrémités de  $\mathcal{C}_k$ . Si  $\mathcal{C}_k \neq \mathcal{C}'_k$ , alors  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_k \cup \mathcal{C}'_k$  et  $\text{diam}(\mathcal{C}) < \text{diam}(\mathcal{C})$ . Contradiction! Donc  $\mathcal{C}_k = \mathcal{C}'_k$ . Donc  $\mathcal{C}$  est recouvert par des arcs  $\mathcal{C}_k$  de courbure totale inférieure ou égale à  $\frac{\pi}{2}$ . Comme les arcs sont ouverts et se recouvrent, par le corollaire 2.2.14.  $\kappa(\mathcal{C}) \leq \sum_{k=0}^m \kappa(\mathcal{C}_k)$ . Ainsi  $\kappa(\mathcal{C}) \leq (m+1)\frac{\pi}{2}$ . Comme  $\mathcal{C}$  est de courbure totale finie, par la propriété 2.2.6, les vecteurs tangents à gauche et à droite sont définis en tout point de la courbe  $\mathcal{C}$  et par la propriété 2.2.5 la longueur  $\mathcal{C}$  est finie et les points anguleux sont dénombrables.  $\square$

La proposition 2.2.32 montre que les points anguleux sont dénombrables, ils peuvent cependant être denses dans une courbe CTLB (voir partie 2.2.3).

**Proposition 2.2.33.** *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $\delta$ -CTLB. Alors  $\delta$  est inférieur ou égal au diamètre de  $\mathcal{C}$ .*

*Démonstration.* Par contradiction, supposons que  $\delta > \text{diam}(\mathcal{C})$ . La preuve consiste à construire un arc ouvert égal à la courbe  $\mathcal{C}$  privée d'un point  $p$  tel que la courbure totale est inférieure à  $\frac{\pi}{2}$  pour contredire la proposition 2.2.16. Cet arc est défini comme «limite» d'une suite d'arcs  $(\mathcal{C}_n)$  construite récursivement par dichotomie : à chaque itération, on divise l'arc  $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_n$  en deux arcs, et on ajoute à  $\mathcal{C}_n$  l'arc de  $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_n$  de courbure totale inférieure à  $\frac{\pi}{2}$ .

Par la proposition 2.2.32, le nombre de points anguleux de  $\mathcal{C}$  est dénombrable, il existe alors des points non-anguleux de  $\mathcal{C}$ . Soit  $a$  un point non-anguleux de  $\mathcal{C}$ . Soit  $\lambda \in [0, \frac{1}{2}[$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $H_n$  l'hypothèse de récurrence : «Il existe un arc ouvert  $\mathcal{C}_n$  de  $\mathcal{C}$  contenant  $a$  de courbure totale inférieure à  $\frac{\pi}{2}$  et de longueur supérieure ou égale à  $(1 - (1 - \lambda)^n)\mathcal{L}(\mathcal{C})$  et dont les extrémités sont des points non-anguleux. De plus, pour tout  $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$   $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{C}_{i+1}$ . »

- Soit  $b_1$  un point non-anguleux de  $\mathcal{C}$  tel que l'arc de plus petite longueur entre  $a$  et  $b_1$  soit de longueur supérieure à  $\lambda\mathcal{L}(\mathcal{C})$ . Comme  $\delta > \text{diam}(\mathcal{C})$  et  $\mathcal{C}$  est CTLB, l'un des deux arcs entre  $a$  et  $b_1$ , noté  $\mathcal{C}_1$ , a une courbure totale inférieure à  $\frac{\pi}{2}$ . Donc  $H_1$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons  $H_n$ . Notons  $a_n$  et  $b_n$  les extrémités de l'arc  $\mathcal{C}_n$  défini par  $H_n$ . Il existe un point non-anguleux  $c \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_n$  tel que les longueurs des plus courts arcs entre d'une part  $c$  et  $a_n$  et, d'autre part,  $c$  et  $b_n$  soient supérieures ou égale à  $\lambda(\mathcal{L}(\mathcal{C}) - \mathcal{L}(\mathcal{C}_n))$ . Notons  $\mathcal{C}_{a_n}^c$  (respectivement  $\mathcal{C}_{b_n}^c$ ) l'arc de  $\mathcal{C}$  entre  $c$  et  $a_n$  (respectivement entre  $c$  et  $b_n$ ) ne passant pas par  $b_n$  (respectivement par  $a_n$ ).
- Si  $\kappa(\mathcal{C}_{a_n}^c) \leq \frac{\pi}{2}$ , notons  $a_{n+1} := c$  et  $b_{n+1} := b_n$  et  $\mathcal{C}_{n+1}$  l'arc entre  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  passant par  $a_n$ . Comme  $b_n, c$  et  $a_n$  ne sont pas des points anguleux et par la propriété d'additivité de la courbure totale 2.2.13 et le théorème de Fenchel (propriété 2.2.9),

$$\begin{aligned} \kappa(\mathcal{C}_{b_n}^c) &= \kappa(\mathcal{C}) - \kappa(\mathcal{C}_n) - \kappa(\mathcal{C}_{a_n}^c), \\ &\geq 2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}, \\ &\geq \pi. \end{aligned}$$

Par définition des courbes  $\delta$ -CTLB, comme  $d(a_{n+1}, b_{n+1}) \leq \text{diam}(\mathcal{C}) < \delta$  et  $\kappa(\mathcal{C}_{b_n}^c) \geq \pi$ , la courbure totale de  $\mathcal{C}_{n+1}$  est majorée par  $\frac{\pi}{2}$ . De plus,  $\mathcal{C}_n \subset \mathcal{C}_{n+1}$ .

- Si  $\kappa(\mathcal{C}_{a_n}^c) > \frac{\pi}{2}$ , nous notons  $a_{n+1} := a_n$ ,  $b_{n+1} := c$  et  $\mathcal{C}_{n+1}$  l'arc entre  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  passant par  $b_n$ . Par la propriété d'additivité de la courbure totale 2.2.13,  $\kappa(\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{n+1}) = \kappa(\mathcal{C}_{a_n}^c) + \kappa(\mathcal{C}_n) > \frac{\pi}{2}$ . Donc, par définition des courbes CTLB,  $\kappa(\mathcal{C}_{n+1}) \leq \frac{\pi}{2}$ .

Dans les deux cas,  $\mathcal{C}_n \subset \mathcal{C}_{n+1}$  et  $\mathcal{L}(\mathcal{C}_{n+1}) \geq \mathcal{L}(\mathcal{C}_n) + \lambda(\mathcal{L}(\mathcal{C}) - \mathcal{L}(\mathcal{C}_n))$ . Par  $H_n$ ,  $\mathcal{L}(\mathcal{C}_n) \geq (1 - (1 - \lambda)^n)\mathcal{L}(\mathcal{C})$ , donc

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathcal{C}_{n+1}) &\geq (1 - (1 - \lambda)^n)\mathcal{L}(\mathcal{C}) + \lambda\mathcal{L}(\mathcal{C}) - \lambda(1 - (1 - \lambda)^n)\mathcal{L}(\mathcal{C}), \\ &\geq (1 - (1 - \lambda)^{n+1})\mathcal{L}(\mathcal{C}). \end{aligned}$$

Donc, dans les deux cas,  $\kappa(\mathcal{C}_{n+1}) \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $\mathcal{L}(\mathcal{C}_{n+1}) \geq (1 - (1 - \lambda)^{n+1})\mathcal{L}(\mathcal{C})$  et ses extrémités  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  sont des points non-anguleux, donc  $H_{n+1}$ .

Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $H_n$ . Soit l'arc ouvert  $\mathcal{C}_\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{C}_n$ . Comme pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{C}_n \subset \mathcal{C}_\infty$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{L}(\mathcal{C}_\infty) \geq (1 - (1 - \lambda)^n)\mathcal{L}(\mathcal{C})$ . Donc  $\mathcal{L}(\mathcal{C}_\infty) = \mathcal{L}(\mathcal{C})$ . De plus,  $\mathcal{C} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{C}_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_n)$ . Comme pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{n+1} \subset \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_n$  et le diamètre de l'arc fermé  $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_n$  tend vers 0,  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_n)$  est réduit à un point  $p$  et  $\mathcal{C}_\infty = \mathcal{C} \setminus \{p\}$ .

De plus, tout polygone inscrit dans  $\mathcal{C}_\infty$  est inscrit dans un des arcs  $\mathcal{C}_n$ . Donc la courbure totale de  $\mathcal{C}_\infty$  est la borne supérieure des courbures totales des polygones inscrits dans les arcs  $\mathcal{C}_n$  qui sont tous de courbure totale majorée par  $\frac{\pi}{2}$ . Donc  $\kappa(\mathcal{C}_\infty) = \frac{\pi}{2}$ . Ce qui contredit la proposition 2.2.16.  $\square$

Il est possible que la majoration  $\delta \leq \text{diam}(\mathcal{C})$  ne soit pas optimale, nous conjecturons que  $\delta \leq \sqrt{2} \text{diam}(\mathcal{C})$ , comme c'est le cas pour le carré et le cercle. En effet, ces deux courbes semblent être les courbes  $\delta$ -CTLB de plus petit diamètre.

Nous montrons que la distance euclidienne  $d(c, b)$  entre deux points  $c$  et  $b$  d'une courbe paramétrée CTLB est localement monotone. Intuitivement, la proposition 2.2.34 montre qu'une courbe CTLB ne peut pas faire de «petits demi-tours».

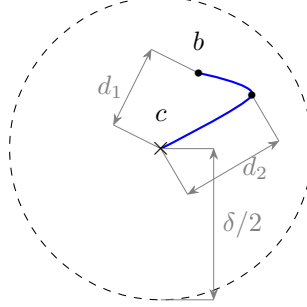


FIGURE 2.20 – Cette configuration ne peut pas apparaître sur une courbe  $\delta$ -CTLB car la distance au point  $c$  n'est pas localement croissante ( $d_1 < d_2$ ).

**Proposition 2.2.34.** *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $\delta$ -CTLB. Soit  $\gamma : [0, t_M[ \rightarrow \mathcal{C}$  une paramétrisation injective de  $\mathcal{C}$  et  $t_m \in ]0, t_M[$  tels que l'arc  $\gamma([0, t_m])$  est inclus dans le disque ouvert  $B(\gamma(0), \frac{\delta}{2})$ . La restriction de l'application  $t \mapsto d(\gamma(0), \gamma(t))$  à  $[0, t_m]$  est strictement croissante.*

*Démonstration.* Soit  $\varphi$  l'application définie pour tout  $t \in [0, t_m]$  par  $\varphi(t) := \|\gamma(t) - \gamma(0)\|$ . Par contradiction, supposons que  $\varphi$  n'est pas strictement croissante. Il existe alors  $t_1, t_2 \in ]0, t_m[$  tels que  $t_1 < t_2$  et  $\varphi(t_1) \geq \varphi(t_2)$ . Par conséquent, la courbure totale de la ligne polygonale  $[\gamma(0), \gamma(t_1), \gamma(t_2)]$  est strictement supérieure à  $\frac{\pi}{2}$  (voir figure 2.20). La courbure totale de l'arc  $\gamma([0, t_2])$  est alors strictement supérieure à  $\frac{\pi}{2}$ . Comme  $\mathcal{C}$  est  $\delta$ -CTLB, la courbure totale de  $\gamma([t_2, t_M])$  est inférieure ou égale à  $\frac{\pi}{2}$  et par la proposition 2.2.30, l'arc  $\gamma([t_2, t_M])$  est inclus dans le disque de diamètre  $[\gamma(t_2), \gamma(t_M)]$  lui-même inclus dans le disque ouvert  $B(\gamma(0), \frac{\delta}{2})$ . La courbe  $\mathcal{C}$  est donc entièrement incluse dans le disque ouvert  $B(\gamma(0), \frac{\delta}{2})$ . Le diamètre de  $\mathcal{C}$  est alors strictement inférieur à  $\delta$ , ce qui contredit la proposition 2.2.33.  $\square$

La proposition 2.2.34 ne s'étend pas pour des courbes  $(\theta, \delta)$ -CTLB avec  $\theta > \frac{\pi}{2}$  : un contre-exemple est fourni figure 2.19.

### 2.2.5 Arc le plus droit

Une des difficultés récurrentes lors de l'utilisation de la définition des courbes CTLB (définition 2.2.22) est que deux points  $a$  et  $b$  à distance inférieure  $\delta$  d'une courbe CTLB  $\mathcal{C}$  délimitent deux arcs de  $\mathcal{C}$ . Il est alors nécessaire de déterminer lequel des deux arcs a une courbure totale majorée par  $\frac{\pi}{2}$ . Nous appellerons cet arc (de  $\mathcal{C}$ ) le plus droit entre  $a$  et  $b$ . Cette sous-partie est dédiée à la définition et à la caractérisation des arcs les plus droits. Le lemme 2.2.35 permet de définir de façon univoque l'arc le plus droit entre  $a$  et  $b$ .



**Lemme 2.2.35.** *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $\delta$ -CTLB. Pour toute paire de points  $a, b$  de  $\mathcal{C}$  tels que  $d(a, b) < \delta$ , il existe un unique arc de  $\mathcal{C}$  entre  $a$  et  $b$  de courbure totale majorée par  $\frac{\pi}{2}$ . Cet arc est le seul arc de  $\mathcal{C}$  délimité par  $a$  et  $b$  inclus dans le disque de diamètre  $[a, b]$ .*

*Démonstration.* Soit  $a, b$  des points de  $\mathcal{C}$  tels que  $d(a, b) < \delta$ . Supposons par l'absurde que les deux arcs  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  de  $\mathcal{C}$  délimités par  $a$  et  $b$  ont une courbure totale majorée par  $\frac{\pi}{2}$ . Par la proposition 2.2.30,  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont inclus dans le disque de diamètre  $[a, b]$  et alors le diamètre de  $\mathcal{C}$  est strictement inférieur à  $\delta$ , ce qui contredit la proposition 2.2.33.  $\square$

**Définition 2.2.36** (Arc le plus droit). Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $\delta$ -CTLB. Soient  $a$  et  $b$  deux points de  $\mathcal{C}$  tels que  $d(a, b) < \delta$ . L'unique arc de  $\mathcal{C}$  de courbure totale majorée par  $\frac{\pi}{2}$  et délimité par  $a$  et  $b$  est appelé *arc de  $\mathcal{C}$  le plus droit entre  $a$  et  $b$*  et est noté  $\mathcal{C}|_a^b$  ou indifféremment  $\mathcal{C}|_b^a$ . De plus, nous

noterons  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}|_a^b$  l'arc ouvert  $\mathcal{C}|_a^b \setminus \{a, b\}$ .<sup>1</sup>

Si les extrémités de l'arc le plus droit entre  $a$  et  $b$  sont des points anguleux de  $\mathcal{C}$ , nous obtenons une majoration de l'angle des points anguleux  $a$  et  $b$ .

**Lemme 2.2.37.** *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $\delta$ -CTLB. Soient  $a$  et  $b$  deux points de  $\mathcal{C}$  tels que  $d(a, b) < \delta$ . La courbure totale de l'arc le plus droit entre  $a$  et  $b$  vérifie la majoration suivante :*

$$\langle e_l(a), e_r(a) \rangle + \kappa(\mathcal{C}|_a^b) + \langle e_l(b), e_r(b) \rangle \leq \frac{\pi}{2}.$$

*Démonstration.* L'idée de la preuve est d'étendre légèrement l'arc le plus droit  $\mathcal{C}|_a^b$  pour inclure les points  $a$  et  $b$  dans son intérieur tout en maintenant la distance entre ses extrémités  $a'$  et  $b'$  inférieure à  $\delta$ . Il reste à justifier qu'un tel arc est encore l'arc le plus droit entre  $a'$  et  $b'$ . Soit  $\varepsilon := \min\left(\frac{\delta - d(a, b)}{4}, \frac{d(a, b)}{2}\right)$ . Soit  $a'$  et  $b'$  deux points appartenant à  $\mathcal{C}$  tels que  $d(a, a') < \varepsilon$  et  $d(b, b') < \varepsilon$ . Nous obtenons alors,  $d(a', b') < \delta + 2\varepsilon < \delta$  (voir figure 2.21). De plus, la distance du centre du disque  $D$  de diamètre  $[a, b]$  et du centre du disque  $D'$  de diamètre  $[a', b']$  est inférieure à  $\varepsilon$ . Par l'inégalité triangulaire, le disque  $D'$  est inclus dans l'intérieur du disque  $D_+$  de centre le milieu de  $[a, b]$  et de diamètre  $\delta$ . De plus, les arcs les plus droits  $\mathcal{C}|_{a'}^a$  et  $\mathcal{C}|_b^{b'}$  sont inclus dans  $D_+$  par la proposition 2.2.30. L'arc  $\mathcal{C}|_{a'}^a \cup \mathcal{C}|_a^b \cup \mathcal{C}|_b^{b'}$  est alors inclus dans  $D_+$  et  $D' \subset D_+$  mais la courbe  $\mathcal{C}$  n'est pas incluse dans  $D_+$  (par la proposition 2.2.33). Donc  $\mathcal{C} \setminus (\mathcal{C}|_{a'}^a \cup \mathcal{C}|_a^b \cup \mathcal{C}|_b^{b'})$  n'est pas inclus dans  $D_+$  et n'est donc pas l'arc le plus droit entre  $a'$  et  $b'$ . Donc  $\mathcal{C}|_{a'}^a \cup \mathcal{C}|_a^b \cup \mathcal{C}|_b^{b'}$  est l'arc le plus droit entre  $a'$  et  $b'$ . De plus, par la proposition 2.2.13,

$$\langle e_l(a), e_r(a) \rangle + \kappa(\mathcal{C}|_a^b) + \langle e_l(b), e_r(b) \rangle \leq \kappa(\mathcal{C}|_{a'}^a \cup \mathcal{C}|_a^b \cup \mathcal{C}|_b^{b'}) \leq \frac{\pi}{2}.$$

$\square$

Le corollaire 2.2.38 est une amélioration de la proposition 2.2.31 pour des disques fermés de rayon strictement inférieur à  $\frac{\delta}{2}$  centrés en un point de la courbe. Il montre que l'intersection d'une courbe CTLB avec de tels disques sont des arcs les plus droits.

---

1. Il s'agit bien entendu d'un commode abus de notation, l'arc  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}|_a^b$  n'est pas un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  mais seulement l'intérieur de  $\mathcal{C}|_a^b$  pour la topologie induite sur  $\mathcal{C}$ .

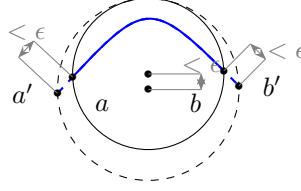


FIGURE 2.21 – La preuve du lemme 2.2.37 consiste à étendre l’arc le plus droit entre  $a$  et  $b$  en un arc  $\mathcal{C}_{a',b'}$  entre  $a'$  et  $b'$  et à montrer alors que  $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{a',b'}$  n’est pas inclus dans le disque de diamètre  $[a', b']$ .

**Corollaire 2.2.38.** *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $\delta$ -CTLB. Alors, pour tout point  $p$  de  $\mathcal{C}$ , pour tout  $\epsilon < \frac{\delta}{2}$ , l’intersection de  $\mathcal{C}$  avec le disque fermé  $\bar{B}(p, \epsilon)$  est un arc de  $\mathcal{C}$  de courbure totale inférieure ou égale à  $\frac{\pi}{2}$ .*

*Démonstration.* Par la proposition 2.2.33, l’intersection de  $\mathcal{C}$  avec  $B(p, \epsilon)$  est un arc  $\mathcal{C}_{a,b}$  propre de  $\mathcal{C}$ , notons  $a$  et  $b$  ses extrémités. Par la proposition 2.2.30, les arcs les plus droits  $\mathcal{C}|_a^p$  et  $\mathcal{C}|_b^p$  sont respectivement inclus dans les disques de diamètre  $[a, p]$  et  $[b, p]$  et donc dans  $B(p, \epsilon) \cup \{a\} \cup \{b\}$ .

Par le lemme 2.2.37,

$$\begin{aligned} \langle e_l(a), e_r(a) \rangle + \kappa(\mathcal{C}|_a^p) + \langle e_l(p), e_r(p) \rangle &\leq \frac{\pi}{2}, \\ \langle e_l(b), e_r(b) \rangle + \kappa(\mathcal{C}|_b^p) + \langle e_l(p), e_r(p) \rangle &\leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Donc par la propriété d’additivité de la courbure totale 2.2.13,

$$\begin{aligned} \langle e_l(a), e_r(a) \rangle + \kappa(\mathcal{C}_{a,b}) + \langle e_l(b), e_r(b) \rangle &= \kappa(\mathcal{C}|_a^p) + \langle e_l(p), e_r(p) \rangle + \kappa(\mathcal{C}|_b^p) \\ &\leq \langle e_l(a), e_r(a) \rangle + \kappa(\mathcal{C}|_a^p) + \langle e_l(p), e_r(p) \rangle \\ &\quad + \langle e_l(p), e_r(p) \rangle + \kappa(\mathcal{C}|_b^p) + \langle e_l(b), e_r(b) \rangle \\ &\leq \pi \end{aligned}$$

Par le théorème de Fenchel (propriété 2.2.9),  $\kappa(\mathcal{C}) \geq 2\pi$  et par la propriété 2.2.13,

$$\begin{aligned} \kappa(\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_a^b) &= \kappa(\mathcal{C}) - (\langle e_l(a), e_r(a) \rangle + \kappa(\mathcal{C}_{a,b}) + \langle e_l(b), e_r(b) \rangle), \\ &\geq \pi. \end{aligned}$$

Donc par la définition des courbes CTLB,  $\kappa(\mathcal{C}_{a,b}) \leq \frac{\pi}{2}$ . □

Le lemme 2.2.39, nous permet de montrer pour trois points  $a, b, c$  à distance mutuelle inférieure à  $\delta$  que l’union des deux arcs les plus droits  $\mathcal{C}|_a^b$  et  $\mathcal{C}|_b^c$  est l’arc le plus droit entre  $a$  et  $c$ .

**Lemme 2.2.39.** *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $\delta$ -CTLB. Soient  $a, b$  et  $c$  trois points de  $\mathcal{C}$  tels que  $d(a, b) < \delta$  et  $d(b, c) < \delta$ . L’un des trois arcs constituant l’union disjointe  $\mathcal{C} \setminus \{a, b, c\}$  est de courbure totale strictement supérieure à  $\frac{\pi}{2}$ .*

*Démonstration.* Soit  $A$  l'arc de  $\mathcal{C}$  délimité par les points  $a$  et  $b$  et ne contenant pas  $c$  et soit  $B$  l'arc de  $\mathcal{C}$  délimité par les points  $b$  et  $c$  et ne contenant pas  $a$ .

- Si  $A$  n'est pas l'arc le plus droit, en appliquant le théorème de Fenchel (propriété 2.2.9), et la propriété d'additivité de la courbure totale (propriété 2.2.13),

$$\kappa(A) + \langle e_l(a), e_r(a) \rangle + \kappa(\mathcal{C}|_a^b) + \langle e_l(b), e_r(b) \rangle \geq 2\pi$$

( $\mathcal{C}|_a^b$  existe car  $d(a, b) < \delta$ ). De plus, par le lemme 2.2.37,

$$\langle e_l(a), e_r(a) \rangle + \kappa(\mathcal{C}|_a^b) + \langle e_l(b), e_r(b) \rangle \leq \frac{\pi}{2}.$$

Donc  $\kappa(A) \geq 2\pi - \frac{\pi}{2}$ .

- Si  $B$  n'est pas l'arc le plus droit, pour les mêmes raisons que précédemment,  $\kappa(B) > \frac{\pi}{2}$ .
- Si  $A$  et  $B$  sont des arcs les plus droits, notons  $C$  l'arc de  $\mathcal{C}$  entre  $a$  et  $c$  et ne contenant pas  $b$ . Par le théorème de Fenchel (propriété 2.2.9), l'additivité de la courbure totale (propriété 2.2.13) et le lemme 2.2.37.

$$\begin{aligned} \kappa(\mathcal{C}) &\geq 2\pi - (\langle e_l(a), e_r(a) \rangle + \kappa(A) + \langle e_l(b), e_r(b) \rangle + \kappa(B) \\ &\quad + \langle e_l(c), e_r(c) \rangle) \\ &\geq 2\pi - (\langle e_l(a), e_r(a) \rangle + \kappa(A) + \langle e_l(b), e_r(b) \rangle) \\ &\quad - (\langle e_l(b), e_r(b) \rangle + \kappa(B) + \langle e_l(c), e_r(c) \rangle) \\ &\geq 2\pi - \pi/2 - \pi/2 \\ &\geq \pi. \end{aligned}$$

Dans les trois cas, il existe un arc de  $\mathcal{C}$  de courbure totale strictement supérieure à  $\frac{\pi}{2}$  ayant pour extrémités deux des trois points  $a$ ,  $b$  et  $c$ .  $\square$

**Définition 2.2.40** ( $T$ -arc le plus droit). Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $\delta$ -CTLB. Soit  $T$  un ensemble fermé de diamètre strictement inférieur à  $\delta$ . Le  $T$ -arc le plus droit de  $\mathcal{C}$  noté  $\mathcal{C}|_T$  est défini par

$$\mathcal{C}|_T := \bigcup_{a, b \in T \cap \mathcal{C}} \mathcal{C}|_a^b. \quad (2.2)$$

La définition du  $T$ -arc le plus droit est illustrée figure 2.22.

Le  $T$  arc le plus droit vérifie la propriété caractéristique suivante.

**Proposition 2.2.41.** *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $\delta$ -CTLB et soit  $T$  un ensemble fermé inclus dans un disque ouvert  $B(c, r)$  avec  $r \leq \min(\frac{1}{2}\delta, \frac{\sqrt{2}-1}{2} \text{diam}(\mathcal{C}))$ , ou  $r \leq \min(\frac{1}{2}\delta, \frac{\sqrt{2}}{4} \text{diam}(\mathcal{C}))$  si  $T$  est un carré. Le  $T$ -arc le plus droit est alors l'unique arc de  $\mathcal{C}$  de courbure totale inférieure à  $\frac{\pi}{2}$  ayant ses extrémités dans  $T$  et tel que tout arc le plus droit entre deux points de  $T$  est inclus dans  $\mathcal{C}|_T$ . De plus,*

$$(\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}|_T) \cap T = \emptyset.$$

*Démonstration.* Par définition de  $\mathcal{C}|_T$ , tout arc le plus droit entre deux points de  $T$  est inclus dans  $\mathcal{C}|_T$ . De plus,

$$\mathcal{C} \cap T = \bigcup_{a \in \mathcal{C} \cap T} \mathcal{C}_a^a \subset \mathcal{C}|_T,$$

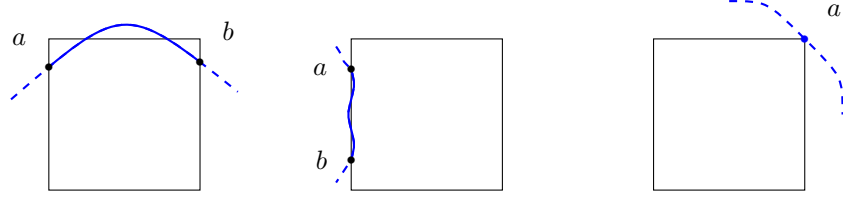


FIGURE 2.22 – Les trois arcs bleus représentent le  $T$ -arc le plus droit pour  $T$  un carré. Pour les deux carrés de gauche, les points  $a$  et  $b$  représentent les extrémités de  $\mathcal{C}|_T$ . Pour le carré à droite,  $\mathcal{C}|_T$  est réduit au point  $a$ .

où  $\mathcal{C}_a^a = \{a\}$  est l'arc le plus droit entre  $a$  et  $a$ . Ainsi,

$$(\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}|_T) \cap T = \emptyset.$$

La preuve est divisée en six étapes. Dans la première étape, nous montrons que  $\mathcal{C}|_T$  est un arc de  $\mathcal{C}$ . Dans la deuxième étape nous montrons que  $\mathcal{C}|_T \subset T \oplus B(0, \sqrt{2}r)$ . Dans la troisième étape, nous montrons que  $\mathcal{C}|_T$  est un arc propre de  $\mathcal{C}$ . Dans la quatrième étape, nous montrons que  $\mathcal{C}|_T$  est un arc propre de  $\mathcal{C}$  dans le cas particulier où  $T$  est un carré. Dans la cinquième étape, nous montrons que les extrémités  $q_1$  et  $q_2$  appartiennent à  $T$ . Dans la sixième étape, nous montrons que  $\mathcal{C}|_T$  est l'arc le plus droit entre  $q_1$  et  $q_2$ . Dans la septième étape, nous montrons que  $\mathcal{C}|_T$  est l'unique arc de  $\mathcal{C}$  de courbure totale inférieure à  $\frac{\pi}{2}$  ayant ses extrémités dans  $T$  et tel que tout arc le plus droit entre deux points de  $T$  est inclus dans  $\mathcal{C}|_T$ .

Étape 1 . Soit  $p_1$  et  $p_2$  deux points de  $\mathcal{C}|_T$ . Par définition du  $T$ -arc le plus droit (définition 2.2.40), il existe quatre points  $a_1, b_1, a_2, b_2$  dans  $T \cap \mathcal{C}$  tel que  $p_1$  appartienne à l'arc  $\mathcal{C}|_{a_1}^{b_1}$  et  $p_2$  appartienne à l'arc  $\mathcal{C}|_{a_2}^{b_2}$ . Ainsi l'arc le plus droit entre  $a_1$  et  $a_2$  est inclus dans  $\mathcal{C}|_T$  et relie les arcs  $\mathcal{C}|_{a_1}^{b_1}$  et  $\mathcal{C}|_{a_2}^{b_2}$ . De plus, par définition de  $\mathcal{C}|_T$ ,  $p_1$  et  $p_2$  sont reliés par un chemin dans  $\mathcal{C}|_T$ . L'ensemble  $\mathcal{C}|_T$  est alors un arc de  $\mathcal{C}$ .

Étape 2 Par définition de  $\mathcal{C}|_T$ , tout point de  $\mathcal{C}|_T$  est un point d'un arc le plus droit d'extrémités dans  $T$ . Par la proposition 2.2.30, tout point de  $\mathcal{C}|_T$  appartient à un disque de diamètre  $[a, b]$  avec  $a$  et  $b$  des points de  $T$ . Donc tout point de  $\mathcal{C}|_T$  est à distance au plus  $\sqrt{2}r$  de  $T$ . Donc tout point de  $\mathcal{C}|_T$  est dans  $T \oplus B(0, \sqrt{2}r)$ .

Étape 3 Par hypothèse,  $r < \frac{\sqrt{2}-1}{2} \text{diam}(\mathcal{C})$ , donc  $(2 + 2\sqrt{2})r < \text{diam}(\mathcal{C})$ . Le diamètre  $\text{diam}(T \oplus B(0, \sqrt{2}r)) = (2 + 2\sqrt{2})r$  est strictement inférieur au diamètre de  $\mathcal{C}$ . Donc la courbe  $\mathcal{C}$  n'est pas incluse dans  $T \oplus B(0, \sqrt{2}r)$ , comme par l'étape 2,  $\mathcal{C}|_T \subset T \oplus B(0, \frac{\sqrt{2}}{2}r)$ ,  $\mathcal{C} \neq \mathcal{C}|_T$ , autrement dit  $\mathcal{C}|_T$  est un arc propre de  $T$ .

Étape 4 Supposons que  $T$  soit un carré. Soit  $p \in \mathcal{C}|_T \setminus T$ . Par définition de  $\mathcal{C}|_T$ ,  $p$  appartient à un arc le plus droit d'extrémités dans  $T$ . Cet arc le plus droit contient un arc ouvert  $\mathcal{C}_{c,d}$  contenant  $p$  d'extrémités  $c$  et  $d$  sur  $\partial T$ . Par le lemme 2.2.20, il n'y a pas de sommet de  $T$  dans la composante intérieure de  $\mathcal{C}_{c,d} \cup [c, d]$ . Donc les extrémités  $c$  et  $d$  appartiennent au même côté de  $T$ . Donc, par la proposition 2.2.30, tout arc le plus droit d'extrémités dans  $T$  est dans l'union  $U$  de  $T$  avec les quatre disques fermés centrés en les milieux de chaque côté de  $T$ . Donc l'arc  $\mathcal{C}|_T$  est inclus dans  $U$ . Comme  $\text{diam}(U) \leq 2\sqrt{2}r$ ,  $\text{diam}(U) < \text{diam}(\mathcal{C})$ , donc  $\mathcal{C}|_T \neq \mathcal{C}$ .

Étape 5 Soient  $q_1$  et  $q_2$  les extrémités de  $\mathcal{C}|_T$ . Par définition de  $\mathcal{C}|_T$ ,  $q_1$  et  $q_2$  appartiennent à des arcs les plus droits entre deux points de  $T$  et chacun d'eux est nécessairement une extrémité de cet arc. Ils appartiennent alors à  $T$ .

Étape 6 Si  $\mathcal{C}|_T$  est réduit à un point, alors  $q_1 = q_2$  et  $\mathcal{C}|_T$  est bien l'arc le plus droit entre  $q_1$  et  $q_2$ . Sinon l'arc  $\mathcal{C}|_T$  est un des deux arcs de  $\mathcal{C}$  ayant  $q_1$  et  $q_2$  pour extrémités et n'intersecte l'autre arc qu'en  $q_1$  et  $q_2$ . Or par définition de  $\mathcal{C}|_T$ ,  $\mathcal{C}|_{q_1}^{q_2} \subset \mathcal{C}|_T$ . Donc  $\mathcal{C}|_T$  est l'arc le plus droit entre  $q_1$  et  $q_2$ .

Étape 7 Soit  $\mathcal{C}'$  un arc de  $\mathcal{C}$  de courbure totale inférieure ou égale à  $\frac{\pi}{2}$  ayant ses extrémités dans  $T$  et tel que tout arc le plus droit entre deux points de  $T$  est inclus dans  $\mathcal{C}'$ . D'une part, par définition de  $\mathcal{C}|_T$ ,  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}|_T$ . D'autre part, par l'étape 6,  $\mathcal{C}|_T$  est un arc le plus droit d'extrémités dans  $T$ , donc  $\mathcal{C}|_T \subset \mathcal{C}'$ . Donc  $\mathcal{C}' = \mathcal{C}|_T$ . □

Par la suite  $T$  sera un pixel (c'est-à-dire un carré).

### 2.2.6 Courbes à courbure totale lipschitzienne

Dans la partie 2.3.1, nous montrons que les courbes par-régulières sont CTLB et qu'en imposant en plus à la courbure totale d'être une fonction lipschitzienne de la longueur, nous obtenons la réciproque.

**Définition 2.2.42** (Courbe à courbure totale lipschitzienne). Une courbe  $\mathcal{C}$  est à courbure totale  $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne si pour tout arc  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{C}$ ,

$$\kappa(\mathcal{A}) \leq \frac{1}{r} \mathcal{L}(\mathcal{A}). \quad (2.3)$$

Pour tout arc  $\mathcal{A}$  d'un cercle de rayon  $r$ ,  $\kappa(\mathcal{A}) = \frac{1}{r} \mathcal{L}(\mathcal{A})$ . Ainsi tout arc d'une courbe à courbure totale  $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne est de courbure totale majorée par celle d'un arc de cercle de rayon  $r$  de même longueur. Cette hypothèse exclut les courbes possédant des points anguleux. En effet, en prenant des arcs de longueur décroissante contenant le même point anguleux, l'inégalité 2.3 est mise en défaut. Une courbe à courbure totale lipschitzienne, est à courbure totale finie, elle possède donc des tangentes à gauche et à droite en chaque point et ne possède pas de points anguleux, elle est de classe  $C^1$  d'après la propriété 2.2.4. En revanche, elle n'est pas forcément de classe  $C^2$  (voir exemple figure 2.16 qui est à courbure totale  $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne).

Nous démontrons une majoration de la longueur d'un arc à courbure lipschitzienne qui s'appliquera aux courbes CTLB (corollaire 2.2.44) et aux courbes par-régulières (corollaire 2.3.5).

**Lemme 2.2.43.** Soit  $\mathcal{C}$  une courbe de Jordan à courbure totale  $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne avec  $r > 0$  et soit  $\gamma$  une paramétrisation par longueur d'arc de  $\mathcal{C}$ . S'il existe  $t_m$  tel que l'application  $t \mapsto d(\gamma(0), \gamma(t))$  soit croissante sur  $[0, t_m]$  alors, pour tout  $t \in [0, t_m]$  tel que  $d(\gamma(0), \gamma(t)) < 2r$ , la longueur de l'arc le plus droit  $\mathcal{C}|_a^b$  est majorée par

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}|_a^b) \leq 2r \arcsin \left( \frac{d(a, b)}{2r} \right),$$

avec  $a := \gamma(0)$  et  $b := \gamma(t)$ .

*Démonstration.* Soit  $\bar{\gamma}$  la paramétrisation par longueur d'arc d'un cercle de rayon  $r$  débutant en  $a$ . Soit  $s_0 := 2r \arcsin\left(\frac{d(a,b)}{2r}\right)$ , ainsi  $\bar{\gamma}(s_0) = b$ . Par contradiction, supposons que  $t > s_0$ . Notons  $c := \gamma(s_0)$ . Par hypothèse, pour tout intervalle  $I \subset [0, s_0]$ ,

$$\begin{aligned} \kappa(\gamma(I)) &\leq \frac{1}{r}|I|, \\ &\leq \kappa(\bar{\gamma}(I)). \end{aligned}$$

Ainsi, par le théorème de comparaison de Schur 2.2.18

$$\begin{aligned} d(a, c) &= d(\gamma(0), \gamma(s_0)), \\ &\geq d(\bar{\gamma}(0), \bar{\gamma}(s_0)), \\ &\geq d(a, b). \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité contredit la propriété de croissance locale de  $s \mapsto d(\gamma(0), \gamma(s))$ .  $\square$

**Corollaire 2.2.44.** *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $\delta$ -CTLB à courbure totale  $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne avec  $r > 0$ . Soit  $r_1 := \min(r, \frac{\delta}{2})$ . Soient  $a, b$  deux points de  $\mathcal{C}$  tels que  $d(a, b) < 2r_1$ , la longueur de l'arc le plus droit  $\mathcal{C}|_a^b$  est majorée par*

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}|_a^b) \leq 2r_1 \arcsin\left(\frac{d(a, b)}{2r_1}\right)$$

*Démonstration.* Comme  $\mathcal{C}$  est  $\delta$ -CTLB, par la proposition 2.2.34, pour toute paramétrisation injective  $\gamma : [0, t_M[ \rightarrow \mathcal{C}$  et tout  $t_m \in ]0, t_M[$  tels que l'arc  $\gamma([0, t_m])$  est inclus dans le disque ouvert  $B(\gamma(0), \frac{\delta}{2})$ , la restriction de l'application  $t \mapsto d(\gamma(0), \gamma(t))$  à  $[0, t_m]$  est croissante. Donc, par le lemme 2.2.43, pour toute paire de points  $a, b$  de  $\mathcal{C}$  telle que  $d(a, b) < 2r_1$ , la longueur de l'arc le plus droit  $\mathcal{C}|_a^b$  est majorée par

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}|_a^b) \leq 2r_1 \arcsin\left(\frac{d(a, b)}{2r_1}\right)$$

$\square$

Dans le corollaire 2.2.44, la majoration de la longueur d'un arc provient de la comparaison avec la longueur d'un arc de cercle de rayon  $r$  et l'égalité est atteinte dans ce dernier cas.

## 2.3 Lien des courbes CTLB avec d'autres notions

L'objectif de cette partie est de situer les notions de courbe CTLB et de courbe à courbure totale lipschitzienne par rapport à d'autres notions déjà existantes : la par-régularité et la quasi-régularité.

### 2.3.1 Lien avec la par-régularité

La par-régularité est une notion régulièrement utilisée en géométrie discrète aussi bien pour étudier la topologie de la discrétisation que pour l'estimation géométrique. Dans cette partie nous montrons que toute forme par( $r$ )-régulière est  $\delta$ -CTLB. Plus précisément, il s'agit de montrer que

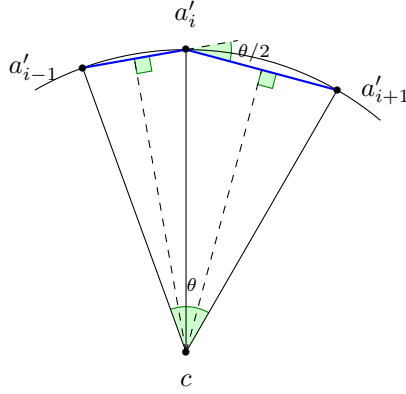


FIGURE 2.23 – La ligne bleue épaisse est une ligne polygonale  $[a'_{i-1}, a'_i, a'_{i+1}]$  tel que  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  passent par un cercle centré en  $c$  de rayon  $r$ . La courbure totale de  $[a'_{i-1}, a'_i, a'_{i+1}]$  est égale à la moitié de l'angle  $\theta := \widehat{a'_{i-1}ca'_{i+1}}$ . Cet angle vaut  $\arcsin\left(\frac{\|a'_i - a'_{i-1}\|}{2r}\right) + \arcsin\left(\frac{\|a'_{i+1} - a'_i\|}{2r}\right)$ .

l'hypothèse de par-régularité se décompose en deux hypothèses formulées à partir de la courbure totale : toute courbe  $\text{par}(r)$ -régulière est  $(\pi, 2r)$ -CTLB et à courbure totale  $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne (l'objectif ne sera que partiellement atteint). Les deux hypothèses sont nécessaires pour obtenir l'équivalence. En effet, une courbe CTLB possédant un point anguleux n'est pas par-régulière et une courbe  $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne peut ne pas être  $\text{par}(r')$ -régulière pour des valeurs de  $r'$  arbitrairement petites (voir contre-exemple 2.2.28). Dans une première étape (partie 2.3.1.1), nous montrons que les courbes  $\text{par}(r)$ -régulières sont à courbure totale  $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne. Dans une deuxième étape (partie 2.3.1.2), nous montrons que les courbes  $\text{par}(r)$ -régulières sont également CTLB. Dans une troisième étape, nous établissons une forme de réciproque partielle.

### 2.3.1.1 Les courbes par-régulières sont à courbure totale lipschitzienne

La preuve se décompose en deux étapes. D'abord, nous calculons d'abord la courbure totale d'un polygone inscrit dans le bord d'une forme  $\text{par}(r)$ -régulière en fonction de la longueur de ses côtés et de  $r$  (lemme 2.3.1). Dans la deuxième étape, nous prouvons qu'une courbe  $\text{par}(r)$ -régulière est à courbure totale  $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne en faisant converger une certaine suite de polygones inscrits dans la courbe  $\text{par}(r)$ -régulière.

**Lemme 2.3.1.** *Soit  $P := [a_i]_{i \in [0, N]}$  une ligne polygonale inscrite dans une courbe  $\text{par}(r)$ -régulière.*

Si la longueur maximale d'un côté de  $P$  est inférieure ou égale à  $2r$ , alors

$$\begin{aligned} \kappa(P) &\leq \arcsin\left(\frac{\|a_1 - a_0\|}{2r}\right) \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^{N-2} \arcsin\left(\frac{\|a_{i+1} - a_i\|}{2r}\right) \\ &\quad + \arcsin\left(\frac{\|a_N - a_{N-1}\|}{2r}\right). \end{aligned}$$

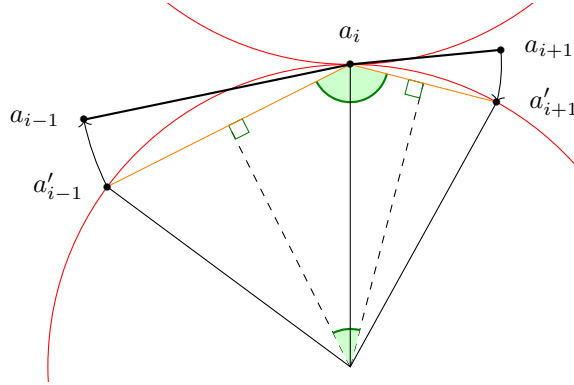


FIGURE 2.24 – La ligne épaisse représente une ligne polygonale  $[a_{i-1}, a_i, a_{i+1}]$  inscrite dans une courbe  $\text{par}(r)$ -régulière. Les cercles osculateurs intérieur et extérieur sont représentés en rouge. En orange, la courbe polygonale  $[a'_{i-1}, a'_i, a'_{i+1}]$  inscrite dans un cercle de rayon  $r$ . Les deux lignes polygonales ont leurs côtés de longueur deux à deux égale.

*Démonstration.* La figure 2.24 illustre l'argument principal de la preuve. Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $\text{par}(r)$ -régulière et soit  $P := [a_i]_{i \in [0, N]}$  une ligne polygonale inscrite dans  $\mathcal{C}$  telle que pour tout  $i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ ,  $\|a_{i+1} - a_i\| \leq 2r$ . Soit  $P' = [a'_i]_{i=0}^N$  une ligne polygonale inscrite dans un cercle de rayon  $r$  et telle que pour tout  $i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ ,  $\|a'_{i+1} - a'_i\| = \|a_{i+1} - a_i\|$ . D'une part (voir figure 2.23),

$$\kappa([a'_{i-1}, a'_i, a'_{i+1}]) = \arcsin\left(\frac{\|a'_i - a'_{i-1}\|}{2r}\right) + \arcsin\left(\frac{\|a'_{i+1} - a'_i\|}{2r}\right).$$

D'autre part, les courbures totales  $\kappa([a_{i-1}, a_i, a_{i+1}])$  et  $\kappa([a'_{i-1}, a'_i, a'_{i+1}])$  correspondent aux angles supplémentaires de  $\widehat{a_{i-1}a_i a_{i+1}}$  et  $\widehat{a'_{i-1}a'_i a'_{i+1}}$ . Par définition de la  $\text{par}$ -régularité (définition 2.1.1),  $\kappa([a_{i-1}, a_i, a_{i+1}]) \leq \kappa([a'_{i-1}, a'_i, a'_{i+1}])$  (voir figure 2.24). Comme  $\kappa(P) = \sum_{i=1}^N \kappa([a_{i-1}, a_i, a_{i+1}])$  et



$$\kappa(P') = \sum_{i=1}^N \kappa([a'_{i-1}, a'_i, a'_{i+1}]),$$

$$\begin{aligned} \kappa(P) &\leq \arcsin\left(\frac{\|a_1 - a_0\|}{2r}\right) \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^{N-2} \arcsin\left(\frac{\|a_{i+1} - a_i\|}{2r}\right) \\ &\quad + \arcsin\left(\frac{\|a_N - a_{N-1}\|}{2r}\right). \end{aligned}$$

□

**Proposition 2.3.2.** *Toute courbe par( $r$ )-régulière est à courbure totale  $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne.*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{C}$  une courbe par( $r$ )-régulière. Soit  $\mathcal{A}$  un arc de  $\mathcal{C}$ . Notons  $a$  et  $b$  les extrémités de  $\mathcal{A}$ . Pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ , soit  $(a_{m,i})_{i \in \llbracket 0, N_m \rrbracket}$  la suite ordonnées des sommets d'une ligne polygonale inscrite dans  $\mathcal{A}$  telle que  $a_{m,0} := a$  et  $a_{m,N_m} := b$  et

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 0, N_m - 2 \rrbracket, \|a_{m,i+1} - a_{m,i}\| &= \frac{1}{m} < 2r, \\ \|a_{m,N_m} - a_{m,N_m-1}\| &\leq \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Pour tout  $m$ , notons  $L_m := [a_{m,i}]_{i \in \llbracket 0, N_m \rrbracket}$ . Alors par le lemme 2.3.1 et comme la fonction arcsinus est croissante,

$$\kappa(L_m) \leq 2(\lceil m\mathcal{L}(L_m) \rceil - 1) \arcsin\left(\frac{1}{2rm}\right), \quad (2.4)$$

$$\leq 2m\mathcal{L}(L_m) \arcsin\left(\frac{1}{2rm}\right). \quad (2.5)$$

Comme  $\mathcal{C}$  est par( $r$ )-régulière, que pour tout  $i \in \llbracket 0, N_m - 2 \rrbracket$ ,  $d(a_{m,i+1}, a_{m,i}) < 2r$ , le diamètre de l'arc de  $\mathcal{A}$  délimité par  $a_{m,i+1}$  et  $a_{m,i}$  est égal à  $d(a_{m,i+1}, a_{m,i})$ . Par l'item 11 des préliminaires mathématiques,  $L_m$  converge vers  $\mathcal{A}$ , de plus par la propriété 2.2.12 et par l'item 13,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(L_m) &= \mathcal{L}(\mathcal{A}) \\ \text{et } \lim_{m \rightarrow +\infty} \kappa(L_m) &= \kappa(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

De plus,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} 2rm \arcsin\left(\frac{1}{2rm}\right) = 1.$$

Finalement par l'équation (2.5)

$$\kappa(\mathcal{A}) \leq \frac{1}{r} \mathcal{L}(\mathcal{A}).$$

□

### 2.3.1.2 Les courbes par-régulières sont CTLB

Les courbes par-régulières vérifient également la propriété de croissance locale de la distance à un point (proposition 2.2.34). Comme cette propriété intervient dans la démonstration que les courbes par-régulières sont CTLB, elle ne peut être directement déduite de la proposition 2.2.34 et est redémontrée dans le lemme 2.3.4 pour les courbes par-régulières.

**Lemme 2.3.3.** *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe de Jordan par( $r$ )-régulière. Soit  $p \in \mathcal{C}$ . Les disques osculateurs intérieurs et extérieurs de rayon  $r$  au point  $p$   $\bar{B}(c_i, r)$  et  $\bar{B}(c_e, r)$  (voir définition 2.1.1) sont uniques. Le point  $p$  est le milieu du segment  $[c_i, c_e]$  et le segment  $[c_i, c_e]$  est orthogonal à la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $p$ .*

*Démonstration.* Notons  $S$  l'adhérence de la composante intérieure de  $\mathcal{C}$ . Soient  $\bar{B}(c_i, r)$  et  $\bar{B}(c_e, r)$  des disques osculateurs intérieur et extérieur au point  $p$  de rayon  $r$ . Par définition (définition 2.1.1), le point  $p$  appartient à l'intersection des cercles  $\partial B(c_i, r)$  et  $\partial B(c_e, r)$  et  $\bar{B}(c_i, r) \subset \overset{\circ}{S} \cup \{p\}$  et  $\bar{B}(c_e, r) \subset S^c \cup \{p\}$ . Donc les disques ouverts  $B(c_i, r)$  et  $B(c_e, r)$  ne s'intersectent pas et les cercles  $\partial B(c_i, r)$  et  $\partial B(c_e, r)$  sont alors tangents au point  $p$ . Les points  $c_i$ ,  $p$  et  $c_e$  sont alors alignés. Les disques osculateurs intérieurs et extérieurs sont alors uniques. Montrons que le segment  $[c_i, c_e]$  est orthogonal à la tangente de  $\mathcal{C}$  en  $p$ . Soit  $e$  un vecteur unitaire orthogonal à  $c_e - c_i$ . Par la propriété 2.1.3,  $\mathcal{C}$  est une courbe de régularité  $C^1$ . Montrons que  $e$  ou  $-e$  est le vecteur unitaire tangent à  $\mathcal{C}$  au point  $p$ . Soit  $\varepsilon \in ]0, \frac{\pi}{4}[$ . Soit  $\gamma$  une paramétrisation par longueur d'arc de  $\mathcal{C}$  d'origine  $p$ . Pour tout  $s \in [0, 2r \sin(2\varepsilon)[$ ,  $d(\gamma(s), p) < 2r \sin(2\varepsilon)$ . Donc pour tout  $s \in [0, 2r \sin(2\varepsilon)[$ ,  $\gamma(s) \in \bar{B}(p, 2r \sin(2\varepsilon)) \setminus (\bar{B}(c_i, r) \cup \bar{B}(c_e, r))$ . Donc soit  $\angle(e, \gamma(s) - p) < \varepsilon$ , soit  $\angle(-e, \gamma(s) - p) < \varepsilon$  (voir figure 2.25). Donc  $e$  ou  $-e$  est le vecteur tangent unitaire à  $\mathcal{C}$  en  $p$ .  $\square$

**Lemme 2.3.4.** *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe par( $r$ )-régulière. Soit  $\gamma : [0, t_M[ \rightarrow \mathcal{C}$  une paramétrisation par longueur d'arc de  $\mathcal{C}$  et  $t_m \in ]0, t_M[$  tels que l'arc  $\gamma([0, t_m])$  soit inclus dans le disque ouvert  $B(\gamma(0), 2r)$ . L'intersection de  $\mathcal{C}$  avec le disque ouvert  $B(\gamma(0), 2r)$  est connexe par arc. De plus, la restriction de l'application  $t \mapsto \|\gamma(t) - \gamma(0)\|$  à  $[0, t_m]$  est croissante.*

*Démonstration.* Étape 1 Notons  $\mathcal{A}$  l'intersection de  $\mathcal{C}$  et de  $B(\gamma(0), 2r)$ . Comme  $\mathcal{C}$  possède un disque osculateur intérieur de rayon  $r$  en  $\gamma(0)$ , il existe un point de  $\mathcal{C}$  en-dehors de  $B(\gamma(0), 2r)$ . Chaque composante connexe de  $\mathcal{A}$  est alors un arc ouvert de  $\mathcal{C}$  dont les extrémités sont sur le cercle  $\partial B(\gamma(0), 2r)$ .

Étape 2 Soit  $\mathcal{A}_0$  la composante connexe de  $\mathcal{A}$  contenant  $\gamma(0)$ . Par contradiction supposons qu'il existe une deuxième composante connexe  $\mathcal{A}_1$  de  $\mathcal{A}$ . Soit  $t_c \in [0, t_M[$  tel que  $d(\gamma(0), \gamma(t_c)) = d(\gamma(0), \overline{\mathcal{A}_1})$ . Par la propriété 2.1.3, les courbes par-régulières sont  $C^1$ . Donc

$$\langle \gamma'(t_c), \gamma(t_c) - \gamma(0) \rangle = 0,$$

Par le lemme 2.3.3,  $\langle \gamma'(t_c), \gamma(t_c) - \gamma(0) \rangle = 0$  et  $d(\gamma(t_c), \gamma(0)) < 2r$ , donc  $\gamma(0) \in \bar{B}(c_i, r)$  ou  $\gamma(0) \in \bar{B}(c_e, r)$ , ce qui contredit la définition de la par( $r$ )-régularité. Donc  $\mathcal{A}$  est connexe.

Étape 3 Par contradiction supposons que l'application  $\varphi$  définie pour tout  $t \in ]0, t_m[$  par  $\varphi(t) := \|\gamma(t) - \gamma(0)\|$  ne soit pas monotone. L'application  $\varphi$  admet alors un extremum local en  $t'_c \in ]0, t_m[$ . Par la propriété 2.1.3,  $\gamma$  est de classe  $C^1$  et  $\varphi$  est alors de classe  $C^1$  sur  $]0, t_m[$ . Donc

$$\langle \gamma'(t'_c), \gamma(t'_c) - \gamma(0) \rangle = 0,$$

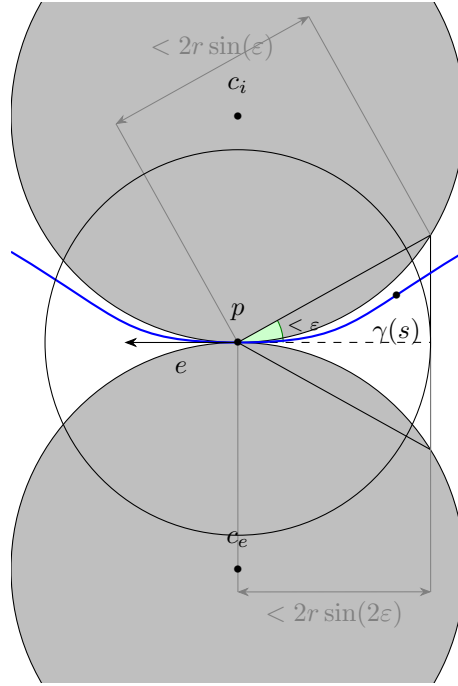


FIGURE 2.25 – Pour tout  $s \in [0, 2r \sin(2\varepsilon)]$ ,  $\gamma(s)$  est à l'intérieur du disque ouvert  $B(p, 2r \sin(2\varepsilon))$  sans appartenir aux disques ouverts  $B(c_i, r)$  et  $B(c_e, r)$ . Donc  $\gamma(s) - p$  forme un angle inférieur à  $\varepsilon$  avec  $e$  ou  $-e$ .

Comme précédemment, par le lemme 2.3.3,  $\gamma(0) \in \bar{B}(c_i, r)$  ou  $\gamma(0) \in \bar{B}(c_e, r)$ , ce qui contredit la définition de la par-régularité. Donc  $\varphi$  est monotone, positive ou nulle et nulle en 0, donc  $\varphi$  est croissante sur  $[0, t_m]$ .

□

**Corollaire 2.3.5.** Soit  $\mathcal{C}$  une courbe par( $r$ )-régulière avec  $r > 0$ . Soient  $a, b$  deux points de  $\mathcal{C}$  tels que  $d(a, b) < 2r$ , la longueur de l'arc le plus droit  $\mathcal{C}|_a^b$  est majorée par

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}|_a^b) \leq 2r \arcsin\left(\frac{d(a, b)}{2r}\right)$$

*Démonstration.* Par la proposition 2.3.2,  $\mathcal{C}$  est à courbure totale  $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne et par le lemme 2.3.4 pour toute paramétrisation par longueur d'arc  $\gamma : [0, t_m[ \rightarrow \mathcal{C}$  et pour tout  $t_m \in ]0, t_M[$  tels que l'arc  $\gamma([0, t_m])$  est inclus dans le disque ouvert  $B(\gamma(0), 2r)$ , la restriction de l'application  $t \mapsto \|\gamma(t) - \gamma(0)\|$  à  $[0, t_m]$  est croissante. Donc par le lemme 2.2.43, pour tout  $a, b \in \mathcal{C}$  tels que  $d(a, b) \leq 2r$  la longueur de l'arc le plus droit  $\mathcal{C}|_a^b$  est majorée par

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}|_a^b) \leq 2r \arcsin\left(\frac{\|b - a\|}{2r}\right)$$

□

**Proposition 2.3.6.** *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe par( $r$ )-régulière et soit  $\theta \in ]0, \pi]$ . Alors  $\mathcal{C}$  est  $(\theta, 2r \sin(\theta/2))$ -CTLB.*

*Démonstration.* Par le corollaire 2.3.5, pour toute paire de points  $a$  et  $b$  à distance strictement inférieure à  $2r \sin(\frac{\theta}{2})$ , il existe un arc de  $\mathcal{C}$  d'extrémités  $a$  et  $b$  de longueur inférieure à  $\theta r$ . De plus, par la proposition 2.3.2,  $\mathcal{C}$  est à courbure totale  $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne, donc pour toute paire de points  $a$  et  $b$  à distance inférieure ou égale à  $2r \sin(\frac{\theta}{2})$ , il existe un arc de  $\mathcal{C}$  d'extrémités  $a$  et  $b$  de courbure totale inférieure à  $\theta$ . □

### 2.3.1.3 Les courbes CTLB à courbure totale lipschitzienne sont par-régulières

Le cercle n'étant pas  $(\theta, \delta)$ -CTLB pour  $\delta > 2r \sin(\frac{\theta}{2})$  (exemple 2.2.24), la valeur de  $\delta$  de la proposition 2.3.6 est optimale.

**Proposition 2.3.7.** *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $\delta$ -CTLB à courbure totale  $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne. La portée de  $\mathcal{C}$  (définition 2.1.2) est supérieure ou égale à  $\min(\frac{\delta}{2}, r)$ .*

*Démonstration.* Par contradiction supposons que  $\text{reach}(\mathcal{C}) < r_1 = \min(\frac{\delta}{2}, r)$ . Il existe alors un point  $o$  sur l'axe médian de  $\mathcal{C}$  et deux points  $a$  et  $b$  de  $\mathcal{C}$  tels que  $d(o, a) = d(o, b) = d(o, \mathcal{C}) < r_1$ . Ainsi  $d(a, b) < 2r_1$ . D'une part, par le corollaire 2.2.44

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}|_a^b) \leq 2r_1 \arcsin\left(\frac{d(a, b)}{2r_1}\right).$$

Par croissance de la fonction sinus sur  $[0, \pi/2]$ ,

$$d(a, b) \geq 2r_1 \sin\left(\frac{\mathcal{L}(\mathcal{C}|_a^b)}{2r_1}\right). \quad (2.6)$$

D'autre part, soit  $r' := d(o, a)$  ( $r' < r_1 \leq r$ ). Par définition de  $o$ ,  $a$  et  $b$ , la courbe  $\mathcal{C}$  n'intersecte pas la composante intérieure du cercle  $\partial B(o, r')$ . Soit  $\bar{C}$  l'arc de  $\partial B(o, r')$  délimité par  $\mathcal{C}|_a^b \cup [a, o, b]$ .

Comme  $\bar{C} \cup [a, b]$  est convexe, par la proposition 2.2.21,

$$\kappa(\bar{C}) \leq \kappa(\mathcal{C}|_a^b).$$

Ainsi, par croissance du sinus sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  et comme  $\kappa(\mathcal{C}|_a^b) \leq \frac{\pi}{2}$ ,

$$\begin{aligned} d(a, b) &= 2r' \sin\left(\frac{\kappa(\bar{C})}{2}\right) \\ &\leq 2r' \sin\left(\frac{\kappa(\mathcal{C}|_a^b)}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Par les inégalités (2.6) et (2.7),

$$2r_1 \sin\left(\frac{\mathcal{L}(\mathcal{C}|_a^b)}{2r_1}\right) \leq 2r' \sin\left(\frac{\kappa(\mathcal{C}|_a^b)}{2}\right) < 2r_1 \sin\left(\frac{\kappa(\mathcal{C}|_a^b)}{2}\right).$$

Donc, par croissance de la fonction arcsinus,

$$\frac{1}{r_1} \mathcal{L}(\mathcal{C}|_a^b) < \kappa(\mathcal{C}|_a^b).$$

Finalement, comme  $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{r_1}$ ,

$$\frac{1}{r} \mathcal{L}(\mathcal{C}|_a^b) < \kappa(\mathcal{C}|_a^b).$$

ce qui contredit la définition de courbe à courbure totale  $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne.  $\square$

**Théorème 2.3.8.** *Toute courbe par( $r$ )-régulière est  $(\theta, 2r \sin(\theta/2))$ -CTLB à courbure totale  $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne pour  $\theta \in ]0, \pi]$ . De plus, toute courbe  $\delta$ -CTLB à courbure totale  $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne est par( $r'$ )-régulière pour tout  $r' < \min(\frac{\delta}{2}, r)$ .*

*Démonstration.* La première assertion correspond aux propositions 2.3.6 et 2.3.2. De plus, par la proposition 2.3.7, toute courbe  $\delta$ -CTLB à courbure totale  $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne a sa portée minorée par  $\min(\frac{\delta}{2}, r)$  et, par la propriété 2.1.4, est par( $r'$ )-régulière pour tout  $r' < \min(\frac{\delta}{2}, r)$ .  $\square$

Le théorème ne permet pas d'utiliser le sens réciproque pour des courbes  $(\theta, \delta)$ -CTLB avec  $\theta > \frac{\pi}{2}$ . Étendre le sens réciproque pour ces valeurs de  $\theta$  permettrait d'obtenir une équivalence conservant les constantes : une courbe par( $r$ )-régulière  $\mathcal{C}$  est  $(\pi, 2r)$ -CTLB à courbure totale  $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne en appliquant le théorème dans le sens réciproque, nous déduirions que  $\mathcal{C}$  est par( $r$ )-régulière.

*Conjecture 2.3.9.* Une courbe  $\mathcal{C}$  est par( $r$ )-régulière si et seulement si  $\mathcal{C}$  est  $(\pi, 2r)$ -CTLB et à courbure totale  $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne.

### 2.3.2 Lien avec la quasi-régularité

Dans la partie 2.3.1, nous avons démontré que les courbes par( $r$ )-régulières étaient  $\delta$ -CTLB pour des valeurs de  $\delta$  suffisamment petites devant  $r$ . La quasi-régularité et les courbes CTLB étant deux généralisations de la par-régularité, nous étudions dans cette partie les liens entre ces deux notions. La quasi-régularité autorise les angles aigus (voir figure 2.26).

Nous démontrons dans cette partie que toute forme de bord  $\delta$ -CTLB est quasi( $r$ )-régulière pour des valeurs suffisamment faibles de  $r$  par rapport à  $\delta$ .

Dans un premier temps, nous démontrons que les courbes  $\delta$ -CTLB vérifient une propriété de «carré-régularité» (proposition 2.3.11). Celle-ci consiste à remplacer le disque osculateur par un carré dans la définition de par-régularité.

- Un carré fermé  $Q$  est appelée *carré osculateur intérieur (respectivement extérieur) de demi-diamètre  $r$  au point  $c$*  si  $c$  est un sommet de  $Q$  et  $Q \subset S$  (respectivement et  $Q \subset \overline{S^c}$ ).
- Une forme  $S$  est *carré( $r$ )-régulière* si pour tout point  $c \in \partial S$ , il existe un carré osculateur intérieur et un carré osculateur extérieur de demi-diamètre  $r$  au point  $c$ .

La proposition 2.3.11 est même plus générale que la définition de carré-régularité. Elle montre que tout point dans l'adhérence de la composante intérieure d'une courbe CTLB est inclus dans un carré de demi-diamètre  $r$ , carré, lui-même inclus dans l'adhérence de la composante intérieure d'une courbe CTLB. Pour démontrer la proposition 2.3.11, nous utilisons le lemme suivant qui permet de délimiter les zones dans lesquelles se situe un arc de courbure totale strictement inférieure à  $\pi$ .

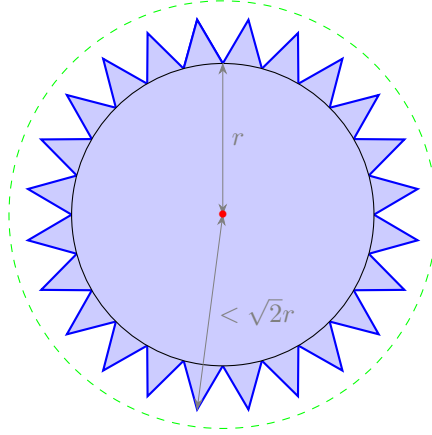


FIGURE 2.26 – Le fermé  $S$  représenté par la forme bleue est quasi- $(r)$ -régulier mais n'est  $\delta$ -CTLB pour aucune valeur de  $\delta > 0$ . En effet l'érosion est réduite au point rouge, de plus  $S \ominus \bar{B}(0, r) \oplus \bar{B}(0, \sqrt{2}r)$  est le disque fermé délimité par le cercle vert pointillé.

**Lemme 2.3.10.** *Soit  $C$  un arc de courbure totale  $\theta \leq \pi$  d'extrémités  $a$   $b$  et orienté de  $a$  vers  $b$ . L'arc  $C$  est inclus dans le demi-cône des points  $p$  tels que  $\angle(p - a, e_r(a)) \leq \theta$  et dans le demi-cône des points  $p$  tels que  $\angle(p - b, -e_l(b)) \leq \theta$ .*

*Démonstration.* La preuve est illustrée dans la figure 2.27. Supposons par l'absurde qu'il existe un point  $p$  de  $C$  en-dehors du demi-cône  $I := \{p \mid \angle(p - a, e_r(a)) \leq \theta\}$ . Par définition du vecteur tangent à droite (définition 2.2.3), il existe un point  $a' \in C \setminus \{a\}$  tel que

$$\angle(e_r(a), a' - a) \leq \frac{\angle(e_r(a), p - a) - \theta}{2} < \angle(e_r(a), p - a).$$

Donc

$$\begin{aligned} \kappa([a, a', p]) &= \angle(a' - a, p - a'), \\ &\geq \angle(a' - a, p - a), \\ &\geq \angle(e_r(a), p - a) - \angle(e_r(a), a' - a), \\ &\geq \angle(e_r(a), p - a) - \frac{\angle(e_r(a), p - a) - \theta}{2}, \\ &\geq \frac{\angle(e_r(a), p - a) + \theta}{2}, \\ &> \theta. \end{aligned}$$

De plus,

$$\kappa(C) \geq \kappa([a, a', p]) > \theta.$$

Contradiction! Donc, l'arc  $C$  est inclus dans le demi-cône des points formant un angle inférieur ou égal à  $\theta$  avec  $e_r(a)$ . En orientant l'arc  $C$  dans le sens contraire nous obtenons que l'arc  $C$  est inclus dans le demi-cône des points formant un angle inférieur ou égal à  $\theta$  avec  $-e_l(b)$ .

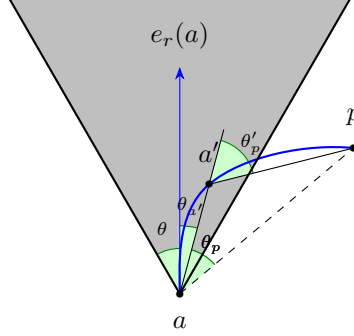


FIGURE 2.27 – L’arc bleu a une courbure totale strictement supérieure à  $\theta$ . Le demi-cône gris correspond à l’ensemble des points formant un angle inférieur ou égal à  $\theta$  avec  $e_r(a)$ . Les angles sont notés de la façon suivante  $\theta_{a'} := \angle(a' - a, e_r(a))$ ,  $\theta_p := \angle(a' - a, p - a)$ ,  $\theta'_p := \angle(a' - a, p - a')$ . On remarque que  $\theta'_p \geq \theta_p$  (car  $\theta'_p = \theta_p + \angle(a' - p, a - p)$ ) et de plus  $a'$  est choisi suffisamment «proche de  $e_r(a)$ » pour que  $\theta'_p \geq \theta_p + \theta'_a > \theta$ . D’où la contradiction avec  $\kappa(\mathcal{C}) = \theta$ .

□

**Proposition 2.3.11.** *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $\delta$ -CTLB et  $S$  l’adhérence de la composante intérieure ou de la composante extérieure de  $\mathcal{C}$ . Pour tout point  $p \in S$ , il existe un carré de côté de longueur  $\frac{\delta}{2}$  inclus dans  $S$  et contenant  $p$ .*

*Démonstration.* La preuve est divisée en trois parties. Dans la première, nous prouvons la proposition pour les points  $p$  de  $\mathcal{C}$ . Dans la seconde partie, nous prouvons la proposition pour les points  $p \in S \setminus (S \ominus \bar{B}(0, \delta/2))$ . La dernière partie traite le cas des points  $p \in S \ominus \bar{B}(0, \delta/2)$ .

1. Dans une première étape, nous prouvons que pour tout  $p \in \mathcal{C}$ , il existe un secteur circulaire de centre  $p$  et rayon  $\frac{\delta}{2}$  inclus dans  $S$ . Dans une seconde étape, nous prouvons que ce secteur circulaire s’étend en carré dans  $S$ .

- a) Cette partie de la preuve est illustrée sur la figure 2.28. Soit  $p \in \mathcal{C}$ . Par le corollaire 2.2.38, l’intersection de la courbe  $\mathcal{C}$  avec tout disque centré en  $p$  et de rayon inférieur à  $\frac{\delta}{2}$  est un arc propre de  $\mathcal{C}$  et possède une courbure totale inférieure ou égale à  $\frac{\pi}{2}$ . Pour tout  $\epsilon < \frac{\delta}{2}$ , notons  $a_\epsilon$  et  $b_\epsilon$  les extrémités de l’intersection de  $\mathcal{C}$  avec  $\bar{B}(p, \epsilon)$  de telle sorte que pour  $\epsilon_1 \leq \epsilon_2 < \frac{\delta}{2}$ ,  $a_{\epsilon_1} \in \mathcal{C}|_{a_{\epsilon_2}}$ . Soit  $\epsilon < \frac{\delta}{2}$ . Par la proposition 2.2.34, la distance à  $p$  le long de  $\mathcal{C}|_{a_\epsilon}^p$  et de  $\mathcal{C}|_{b_\epsilon}^p$  est strictement croissante, l’intersection de  $\mathcal{C}|_{a_\epsilon}^{b_\epsilon}$  avec le cercle  $\partial B(p, \epsilon)$  est réduite aux points  $a_\epsilon$  et  $b_\epsilon$ . Soit  $a'$  (respectivement  $b'$ ) le point d’intersection du cercle  $\partial B(p, \frac{\delta}{2})$  et de la demi-droite d’origine  $p$  et dirigée par  $-e_l(p)$  (respectivement par  $e_r(p)$ ) lorsqu’on oriente l’arc  $\mathcal{C}|_{a_\epsilon}^{b_\epsilon}$  de  $a_\epsilon$  vers  $b_\epsilon$ . La ligne polygonale  $[a', p, b']$  délimite deux portions du disque  $\bar{B}(p, \frac{\delta}{2})$ , notées  $A_1$  et  $A_2$ . Pour  $i \in \{1, 2\}$ , notons  $a_{i,\epsilon}$  et  $b_{i,\epsilon}$  les points de  $A_i$  tels que  $\angle(-e_l(p), a_{i,\epsilon} - p) = \kappa(\mathcal{C}|_{a_\epsilon}^p)$  et  $\angle(e_r(p), b_{i,\epsilon} - p) = \kappa(\mathcal{C}|_{b_\epsilon}^p)$ .

Pour  $i \in \{1, 2\}$ , soit  $I_{i,\epsilon}$  la portion du disque  $\bar{B}(p, \frac{\delta}{2})$  délimitée par les demi-droites  $[p, a_{i,\epsilon})$  et  $[p, b_{i,\epsilon})$  et inclus dans  $A_i$  et notons  $\theta_{i,\epsilon}$  l’angle de  $I_{i,\epsilon}$ . Par la propriété 2.2.13,

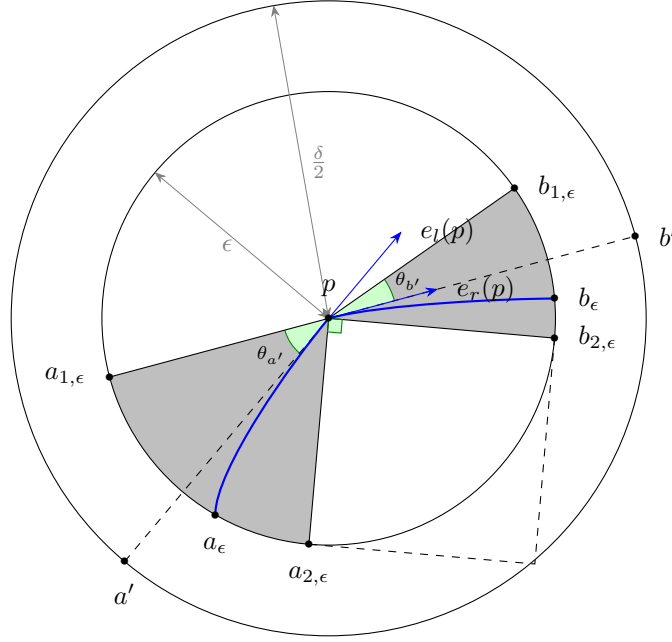


FIGURE 2.28 – Les points  $a'$  et  $b'$  sont les points d'intersection du cercle  $\partial B(p, \frac{\delta}{2})$  avec les demi-droites issues de  $p$  et dirigées par  $-e_l(p)$  et par  $e_r(p)$ . Les deux secteurs angulaires gris correspondent à l'ensemble des rayons formant un angle  $\theta_{a'} := \kappa(\mathcal{C}|_{a_\epsilon}^p)$  (respectivement  $\theta_{b'} := \kappa(\mathcal{C}|_{b_\epsilon}^p)$ ) avec le segment  $[p, a']$  (respectivement avec le segment  $[p, b']$ ).

$\kappa(\mathcal{C}|_{a_\epsilon}^p) + \angle(e_l(p), e_r(p)) + \kappa(\mathcal{C}|_{b_\epsilon}^p) = \kappa(\mathcal{C}|_{a_\epsilon}^{b_\epsilon}) \leq \frac{\pi}{2}$ . Pour  $i \in \{1, 2\}$ , l'angle  $\theta_{i,\epsilon}$  vérifie les majorations suivantes (voir la figure 2.28) :

$$\begin{aligned} \theta_{i,\epsilon} &\geq (\pi - \angle(e_l(p), e_r(p))) - \kappa(\mathcal{C}|_{a_{i,\epsilon}}^p) - \kappa(\mathcal{C}|_{b_{i,\epsilon}}^p), \\ &\geq \pi - \frac{\pi}{2}, \\ &\geq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

De plus, par le lemme 2.3.10, l'arc  $\mathcal{C}|_{a_\epsilon}^{b_\epsilon}$ , et donc la courbe  $\mathcal{C}$  n'intersecte pas l'intérieur de  $I_{1,\epsilon}$  et de  $I_{2,\epsilon}$ . Donc pour  $i \in \{1, 2\}$ ,  $I_{i,\epsilon}$  contient un secteur angulaire  $A_{i,\epsilon}$  de  $\bar{B}(p, \epsilon)$  d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et dont l'intérieur n'intersecte pas  $\mathcal{C}$ .

De plus, si  $\epsilon_1 \leq \epsilon_2$ , alors  $\kappa(\mathcal{C}|_p^{a_{\epsilon_1}}) \leq \kappa(\mathcal{C}|_p^{a_{\epsilon_2}})$ . Donc, si  $\epsilon_1 \leq \epsilon_2$  alors  $I_{i,\epsilon_2} \subset I_{i,\epsilon_1}$ . Donc l'union  $U_i$  des  $I_{i,\epsilon}$  avec  $\epsilon < \frac{\pi}{2}$  contient un quart du disque  $B(p, \frac{\delta}{2})$ .

- b) Pour  $i \in \{1, 2\}$ , soit  $Q_i$  le carré de côté de longueur  $\frac{\delta}{2}$  prolongeant  $U_i$ . Par contradiction supposons qu'il existe  $c$  un point de  $\mathcal{C}$  à l'intérieur de  $Q_i$ . Alors  $d(c, p) < \delta$ . Par la proposition 2.2.30, l'arc le plus droit  $\mathcal{C}|_c^p$  est inclus dans le disque  $D$  de diamètre  $[c, p]$ .



Mais le cercle  $\partial D$  intersecte le cercle  $\partial B(p, \epsilon)$  en deux points à l'intérieur de  $Q_i$ . Donc  $\mathcal{C}$  intersecte l'intérieur de  $I_i$ . Contradiction!

Pour tout  $\epsilon < \frac{\delta}{2}$ , il existe deux carrés de côté de longueur  $\epsilon$  ayant  $p$  pour sommet et dont l'intérieur du premier est inclus dans  $S$  et dont l'intérieur du second est inclus dans  $S^c$ . Cette famille de paires de carrés peut être construite pour être croissante en fonction de  $\epsilon$  pour l'inclusion. Ainsi, il existe deux carrés de côté de longueur  $\frac{\delta}{2}$  ayant  $p$  pour sommet et dont l'intérieur du premier est inclus dans  $S$  et dont l'intérieur du second est inclus dans  $S^c$ .

2. Soit  $p \in \overset{\circ}{S} \setminus (S \ominus \bar{B}(0, \delta/2))$ . Cette partie de la preuve est illustrée figure 2.29. Il existe un point  $q \in \mathcal{C}$  tel que  $d(p, q) = d(p, \mathcal{C}) < \delta/2$ . Ainsi le disque ouvert  $B(p, d(p, \mathcal{C}))$  est inclus dans l'intérieur de  $S$  et ne contient alors aucun point de  $\mathcal{C}$ . Soit  $\epsilon \in ]d(p, q), \frac{\delta}{2}[$ . Par le corollaire 2.2.38, l'intersection de  $\bar{B}(q, \epsilon)$  avec  $\mathcal{C}$  est un arc propre de  $\mathcal{C}$  de courbure totale inférieure à  $\frac{\pi}{2}$ . Notons  $a$  et  $b$  ses extrémités. Montrons que  $\angle(e_l(q), p - q) \leq \frac{\pi}{2}$  (en orientant l'arc  $\mathcal{C}|_a^b$  de  $a$  vers  $b$ ). Supposons par contradiction que  $\angle(e_l(q), p - q) > \frac{\pi}{2}$ . Alors  $\angle(-e_l(q), p - q) < \frac{\pi}{2}$ . De plus, par définition du vecteur tangent à gauche, il existe un point  $q' \in \mathcal{C}$  tel que pour tout point  $q''$  tel que  $q' \leq q'' \leq q$ ,

$$\angle(-e_l(q), q'' - q) < \frac{\frac{\pi}{2} - \angle(-e_l(q), p - q)}{2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \angle(p - q, q'' - q) &\leq \angle(p - q, -e_l(q)) + \angle(-e_l(q), q'' - q), \\ &< \angle(p - q, -e_l(q)) + \frac{\frac{\pi}{2} - \angle(-e_l(q), p - q)}{2}, \\ &< \frac{\angle(-e_l(q), p - q) + \frac{\pi}{2}}{2}, \\ &< \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Donc il existe un point de  $\mathcal{C}$  sur le segment  $[p, q']$  à l'intérieur du disque  $B(p, d(p, \mathcal{C}))$ . Contradiction! Donc  $\angle(-e_l(q), p - q) \geq \frac{\pi}{2}$ . Par les mêmes arguments,  $\angle(e_r(q), p - q) \leq \frac{\pi}{2}$ .

Notons  $a'$  (respectivement  $b'$ ) le point d'intersection de  $\partial B(q, \epsilon)$  et de la demi-droite issue de  $q$  et dirigée par  $-e_l(q)$  (respectivement par  $e_r(q)$ ). Notons  $\mathcal{A}_1$  l'arc du cercle  $\partial B(q, \epsilon)$  délimitée par  $a'$  et  $b'$  tel que la portion de disque délimitée par  $[a', q, b']$  et  $\mathcal{A}_1$  contienne  $p$ . Soient  $a_1$  et  $b_1$  les points de  $\mathcal{A}_1$  tels que  $\angle(a_1 - q, a' - q) = \kappa(\mathcal{C}|_a^q)$  et  $\angle(b_1 - q, b' - q) = \kappa(\mathcal{C}|_q^b)$ . Soit  $I_1$  la portion du disque  $\bar{B}(q, \epsilon)$  délimitée par  $[a_1, q, b_1]$  contenant  $p$ . Comme  $\kappa(\mathcal{C}|_a^q) + \angle(e_l(q), e_r(q)) + \kappa(\mathcal{C}|_q^b) = \kappa(\mathcal{C}|_a^b) \leq \frac{\pi}{2}$ , l'angle de  $I_1$  est supérieur ou égal à  $\frac{\pi}{2}$  et par le lemme 2.3.10, l'intérieur de  $I_1$  n'intersecte pas  $\mathcal{C}$ .

Par les mêmes arguments que dans la première partie de la preuve, il existe alors un carré de sommet  $q$  de côté de longueur  $\frac{\delta}{2}$  contenant  $p$  et dont l'intérieur n'intersecte pas  $\mathcal{C}$ .

3. Si  $p \in S \ominus \bar{B}(0, \delta/2)$ , il existe un carré de côté de longueur  $\frac{\delta}{2}$  inclus dans  $\bar{B}(0, \delta/2) \subset S$  et contenant  $p$ . □

Grâce à la proposition précédente, nous pouvons montrer dans le corollaire 2.3.12 qu'une forme  $S$  de bord CTLB vérifie les deux derniers points de la définition 2.1.10 si  $r \leq \delta/4$

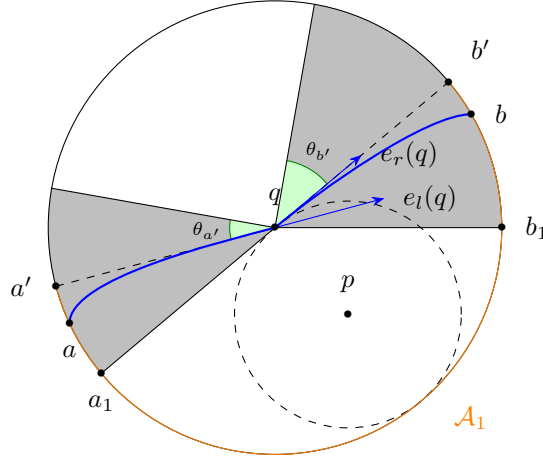


FIGURE 2.29 – Comme l’arc le plus droit  $\mathcal{C}|_a^b$  est inclus dans les deux portions de disque définies par  $\{x \in \bar{B}(p, \epsilon) | \angle(x - q, e_r(q)) \leq \theta_{b'}\}$  et  $\{x \in \bar{B}(p, \epsilon) | \angle(x - q, -e_l(q)) \leq \theta_{a'}\}$  avec  $\theta_{a'} := \kappa(\mathcal{C}|_a^b)$  et  $\theta_{b'} := \kappa(\mathcal{C}|_q^b)$  et que  $\angle(-e_l(q), q - p) \geq \frac{\pi}{2}$  et  $\angle(e_r(q), q - p) \geq \frac{\pi}{2}$ , il existe un quart de disque contenant  $p$  et n’intersectant pas  $\mathcal{C}$ .

**Corollaire 2.3.12.** *Soit  $S$  un ensemble fermé ayant une courbe  $\delta$ -CTLB pour frontière. Soit  $r \leq \delta/4$ .*

- $S \ominus \bar{B}(0, r)$  est non-vide,
- $S \subset S \ominus \bar{B}(0, r) \oplus \bar{B}(0, \sqrt{2}r)$ ,
- $S^c \subset S^c \ominus \bar{B}(0, r) \oplus \bar{B}(0, \sqrt{2}r)$ ,

*Démonstration.* Soit  $p \in S$ . Par la proposition 2.3.11, il existe un carré  $Q$  de côté de longueur  $2r$  contenant  $p$  et inclus dans  $S$ . Le centre  $q$  de  $Q$  appartient alors à  $S \ominus \bar{B}(0, r)$ . L’ensemble érodé  $S \ominus \bar{B}(0, r)$  est alors non-vide. De plus,  $Q \subset S \ominus \bar{B}(0, r) \oplus \bar{B}(0, \sqrt{2}r)$ . Donc,  $S \subset S \ominus \bar{B}(0, r) \oplus \bar{B}(0, \sqrt{2}r)$ . De même, en appliquant la proposition 2.3.11 à  $\bar{S}^c$ ,  $S^c \subset S^c \ominus \bar{B}(0, r) \oplus \bar{B}(0, \sqrt{2}r)$ .  $\square$

Dans la preuve de la quasi-régularité des courbes CTLB, il reste à prouver que l’érosion par un disque de rayon  $r$  d’une composante connexe du plan privée d’une courbe CTLB est connexe par arcs (pour un rapport  $r/\delta$  suffisamment faible). Ce dernier point est démontré par contradiction : nous supposons que  $S \ominus \bar{B}(0, r)$  possède au moins deux composantes connexes distinctes et nous considérons la distance minimale  $d_0$  entre deux composantes connexes. Le raisonnement se divise en deux cas :  $d_0 \leq 2\sqrt{2}r$  (lemme 2.3.13) et  $d_0 > 2\sqrt{2}r$  (lemme 2.3.14).

**Lemme 2.3.13.** *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $\delta$ -CTLB et  $A$  une composante connexe de  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$ . Soit  $r < \frac{\delta}{2\sqrt{10-4\sqrt{2}}}$ . Deux points de  $A \ominus \bar{B}(0, r)$  distants au plus de  $2\sqrt{2}r$  sont connectés par un chemin dans  $A \ominus \bar{B}(0, r)$ .*

*Démonstration.* La figure 2.30 illustre et rappelle les notations utilisées dans la preuve. Soient  $x_0$  et  $x_1$  deux points de  $A \ominus \bar{B}(0, r)$  à distance inférieure ou égale à  $2\sqrt{2}r$  l’un de l’autre. Construisons un arc dans  $A \ominus \bar{B}(0, r)$  connectant  $x_0$  et  $x_1$ . Si  $[x_0, x_1] \subset A \ominus \bar{B}(0, r)$ , alors  $x_0$  et  $x_1$  sont connectés

dans  $A \ominus \bar{B}(0, r)$ . Supposons alors que  $[x_0, x_1]$  n'est pas inclus dans  $A \ominus \bar{B}(0, r)$  et construisons un autre arc  $P$  joignant  $x_0$  et  $x_1$ . Comme  $[x_0, x_1] \not\subseteq \bar{B}(0, r)$ , il existe alors un point  $a \in \mathcal{C}$  dans la dilatation du segment  $[x_0, x_1]$  par  $B(0, r)$  privée de  $\bar{B}(x_0, r) \cup \bar{B}(x_1, r)$ . Le point  $a$  se situe dans un rectangle  $[x_0, u_0, u_1, x_1]$  avec  $u_0 \in \partial B(x_0, r)$  et  $u_1 \in \partial B(x_1, r)$ . Soient  $i_0$  et  $i_1$  les intersections respectives du segment  $[x_0, x_1]$  avec les cercles  $\partial B(x_0, r)$  et  $\partial B(x_1, r)$ . Pour  $k \in \{0, 1\}$ , soit  $l_k$  le symétrique de  $u_k$  par rapport à  $x_k$ . Soient  $p_0$  et  $p_1$  les intersections respectives du segment  $[l_0, l_1]$  et des cercles  $\partial B(i_0, r)$  et  $\partial B(i_1, r)$ . Soit  $P$  l'union de l'arc de cercle de centre  $i_0$  d'extrémités  $x_0$  et  $p_0$  n'intersectant pas la composante intérieure de  $[x_0, x_1, u_1, u_0]$ , du segment  $[p_0, p_1]$  et de l'arc de cercle de centre  $i_1$  d'extrémités  $x_1$  et  $p_1$  n'intersectant pas la composante intérieure de  $[x_0, x_1, u_1, u_0]$ . Montrons que  $P$  est inclus dans  $A \ominus \bar{B}(0, r)$ . Par contradiction supposons que  $P \not\subseteq A \ominus \bar{B}(0, r)$ . Il existe alors un point  $b \in \mathcal{C}$  dans  $P \oplus \bar{B}(0, r)$  et de plus  $b \notin B(x_0, r) \cup B(x_1, r)$ . La distance entre  $a$  et  $b$  est majorée par la distance entre  $o_0$  et  $u_1$  où  $o_0$  est le symétrique de  $i_0$  par rapport à  $x_0$ , c'est-à-dire majoré par  $\sqrt{10 + 4\sqrt{2}}r$ . Ainsi,  $d(a, b) < \frac{\sqrt{10+4\sqrt{2}}}{2\sqrt{10-4\sqrt{2}}}\delta < \delta$ .

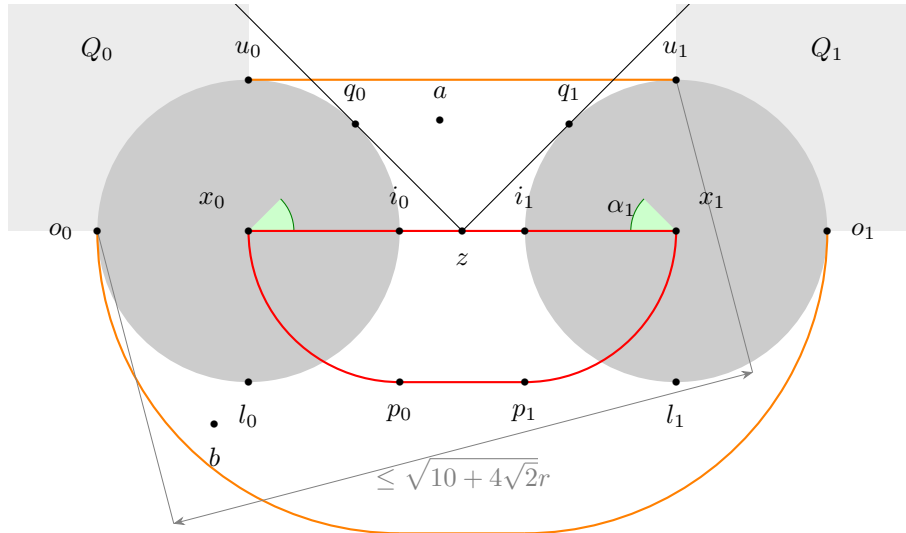


FIGURE 2.30 – La figure illustre les notations utilisées dans la preuve du lemme 2.3.13. La preuve consiste à montrer que l'un des deux chemins rouges joignant  $x_0$  et  $x_1$  est inclus dans  $A \ominus \bar{B}(0, r)$ .

- Montrons que  $\mathcal{C}_a^b$  n'intersecte pas  $[i_0, i_1]$ . Par contradiction, supposons que  $\mathcal{C}_a^b$  intersecte  $[i_0, i_1]$ . Soit  $z$  un point d'intersection de l'arc  $\mathcal{C}_a^b$  et du segment  $[i_0, i_1]$ .
- Pour  $k \in \{0, 1\}$  soit  $t_k$  la tangente au quart de cercle  $\partial B(x_0, r)$  délimité par  $i_0$  et  $u_0$  passant par  $z$ . Notons  $q_k$  le point de tangence et  $\alpha_k := \widehat{i_k x_k q_k}$  pour  $k \in \{0, 1\}$ . Comme

$d(x_0, x_1) \leq 2\sqrt{2}r$  et la fonction sécante ( $\sec := \frac{1}{\cos}$ ) est croissante et strictement convexe,

$$\sec\left(\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}\right) \leq \frac{\sec(\alpha_0) + \sec(\alpha_1)}{2} \leq \sqrt{2} \leq \sec\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad (2.8)$$

c'est-à-dire  $\alpha_0 + \alpha_1 \leq \pi/2$  et l'égalité est vérifiée seulement si  $\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{\pi}{4}$ . Comme  $\widehat{q_0 z q_1} = \alpha_0 + \alpha_1$ ,  $\widehat{q_0 z q_1} \leq \frac{\pi}{2}$ .

- Par la proposition 2.3.11, il existe un carré  $S$  de côté de longueur  $\delta/2$ , ayant  $z$  pour sommet et dont l'intérieur est inclus dans le complémentaire de l'adhérence de  $A$ . Comme  $d(x_0, x_1) \leq 2\sqrt{2}r$ , les distances  $d(q_0, z)$  et  $d(q_1, z)$  sont majorées par  $d(i_0, u_1) = \sqrt{10 - 4\sqrt{2}}r$  qui est inférieur à la longueur d'un côté de  $S$ . Ainsi, le carré  $S$  est inclus dans le secteur délimité par les tangentes  $t_0$  et  $t_1$  ne contenant ni  $x_0$  ni  $x_1$ . Donc  $\widehat{q_0 z q_1} \geq \frac{\pi}{2}$  et par l'équation 2.8,  $\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{\pi}{4}$ , c'est-à-dire  $z$  est le milieu de  $[i_0, i_1]$ . Ainsi  $z$  est l'unique intersection de  $\mathcal{C}$  avec  $[i_0, i_1]$ . De plus, deux des côtés de  $S$  sont inclus dans  $t_0 \cup t_1$ , donc  $q_0$  et  $q_1$  sont dans l'intersection respective de  $\partial S$  avec les cercles  $\partial B(x_0, r)$  et  $\partial B(x_1, r)$ , donc appartiennent à  $\mathcal{C}$ .
- Comme  $d(q_0, z) < \delta/2$ , par le corollaire 2.2.38, l'intersection du disque  $\bar{B}(z, d(q_0, z))$  avec  $\mathcal{C}$  est un arc propre de  $\mathcal{C}$  de courbure totale inférieure ou égale à  $\frac{\pi}{2}$ . De plus, cet arc contient les points  $q_0, q_1$  et  $z$ . La seule ligne polygonale de sommets  $q_0, q_1$  et  $z$  de courbure totale inférieure à  $\frac{\pi}{2}$  est  $[q_0, z, q_1]$  qui est alors exactement l'intersection de  $\bar{B}(z, d(q_0, z))$  avec  $\mathcal{C}$ .
- Comme  $z$  est un point anguleux de  $\mathcal{C}$  d'angle  $\frac{\pi}{2}$ , par le lemme 2.2.37 l'arc le plus droit  $\mathcal{C}|_z^b$  est de courbure totale nulle, donc  $\mathcal{C}|_z^b = [z, b]$ . De plus  $[z, b]$  n'est pas inclus dans  $[q_0, z, q_1]$ , donc  $\mathcal{C}$  n'est pas une courbe simple. Contradiction! Donc  $\mathcal{C}|_a^b$  n'intersecte pas  $[x_0, x_1]$ .
- Pour  $k \in \{0, 1\}$ , notons  $O_k$ , le quart de cercle  $\partial B(x_k, r)$  délimité par  $u_k$  et  $o_k$ . Comme l'arc  $\mathcal{C}|_a^b$  n'intersecte pas  $[i_0, i_1]$ , un des deux quarts de cercle  $O_k$  est inclus dans la composante connexe bornée de  $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathcal{C}|_a^b \cup [a, b])$  et de plus la courbe de Jordan  $O_k \cup [u_k, a, b, o_k]$  est de composante intérieure convexe. Ainsi comme  $\kappa(\mathcal{C}|_a^b) \leq \frac{\pi}{2}$  et par la proposition 2.2.21,  $\kappa(\mathcal{C}|_a^b) \geq \kappa([a, u_k] \cup O_k \cup [o_k, b])$ . De plus,  $a \in [x_0, x_1] \oplus B(0, r)$  et  $b \in P \oplus B(0, r)$ , donc  $a$  et  $b$  n'appartiennent pas aux tangentes à  $\partial B(x_k, r)$  en  $u_k$  et  $o_k$ , donc  $\kappa([a, u_k] \cup O_k \cup [o_k, b]) > \frac{\pi}{2}$ , donc  $\kappa(\mathcal{C}|_a^b) > \frac{\pi}{2}$ , ce qui contredit  $\kappa(\mathcal{C}|_a^b) \leq \frac{\pi}{2}$ .

Le chemin  $P$  est alors inclus dans  $A \ominus \bar{B}(0, r)$ . Donc les points  $x_0, x_1$  sont connectés par un arc de  $A \ominus \bar{B}(0, r)$ .  $\square$

Le lemme 2.3.14 permet d'exclure le cas où la distance minimale entre deux composantes connexes de  $S \ominus B(0, r)$  (respectivement  $S^c \ominus B(0, r)$ ) est trop grande.

**Lemme 2.3.14.** *Soit  $S$  un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{R}^2$  dont la frontière est une courbe  $\delta$ -CTLB. Soit  $r < \frac{\delta}{4}$ . La distance entre deux composantes connexes de la forme érodée  $S \ominus \bar{B}(0, r)$  (respectivement  $S^c \ominus \bar{B}(0, r)$ ) est majorée par  $2\sqrt{2}r$ .*

*Démonstration.* Soit  $A := S \ominus \bar{B}(0, r)$  (le cas  $A := S^c \ominus \bar{B}(0, r)$  est similaire). Supposons par contradiction qu'il existe deux composantes connexes de  $A$  à distance  $d_0 > 2\sqrt{2}r$ . L'ensemble  $A$  possède alors au moins deux composantes connexes, donc  $A \oplus \bar{B}(0, \sqrt{2}r)$  possède également deux composantes connexes car la dilatation d'un ensemble connexe par arcs par un élément structurant contenant l'origine et lui-même connexe par arcs est connexe par arcs et le rayon de dilatation

est inférieur à  $d_0/2$ . C'est pourquoi l'ensemble connexe  $S$ , inclus dans  $A \oplus \bar{B}(0, \sqrt{2}r)$  est, d'après le corollaire 2.3.12, inclus dans une seule des composantes connexes de  $A \oplus \bar{B}(0, \sqrt{2}r)$ . Ainsi, les autres composantes connexes de  $A \oplus \bar{B}(0, \sqrt{2}r)$  ne contiennent aucun point de  $S$ . Il existe alors une composante connexe non-vide de  $S \ominus \bar{B}(0, r)$  qui ne contient aucun point de  $S$ , ce qui contredit la définition de l'érosion.  $\square$

**Théorème 2.3.15.** *Soit  $S$  un compact de  $\mathbb{R}^2$  dont la frontière est une courbe  $\delta$ -CTLB. L'ensemble  $S$  est alors quasi( $r$ )-régulier avec une marge de  $(\sqrt{2} - 1)r$  pour tout  $r < \frac{\delta}{2\sqrt{10-4\sqrt{2}}}$ .*

*Démonstration.* Par le corollaire 2.3.12 :

- $S \ominus \bar{B}(0, r) \neq \emptyset$ ,
- $S \subset S \ominus \bar{B}(0, r) \oplus \bar{B}(0, \sqrt{2}r)$ ,
- $S^c \subset S^c \ominus \bar{B}(0, r) \oplus \bar{B}(0, \sqrt{2}r)$ .

Soit  $r < \frac{\delta}{2\sqrt{10-4\sqrt{2}}}$ . Supposons par contradiction que  $S \ominus \bar{B}(0, r)$  ou  $S^c \ominus \bar{B}(0, r)$  n'est pas connexe par arcs. Comme  $S$  est un ensemble compact,  $S$  peut être recouvert par un nombre fini de disques de rayon  $\frac{r}{2}$ , alors  $S \ominus \bar{B}(0, r)$  est aussi recouvert par un nombre fini de disques de rayon  $\frac{r}{2}$ . De plus, par le lemme 2.3.13, dans chaque disque de rayon  $\frac{r}{2}$ , il y a au plus une composante connexe de  $S \ominus \bar{B}(0, r)$ . Donc  $S \ominus \bar{B}(0, r)$  possède un nombre fini de composantes connexes. Comme  $S$  est compact  $S^c \ominus \bar{B}(0, r)$  ne possède qu'une seule composante connexe non-bornée — appelons-la  $S_0^c$  — et  $(S^c \ominus \bar{B}(0, r)) \setminus S_0^c$  est borné. Ainsi, par le même raisonnement que pour  $S \ominus \bar{B}(0, r)$ ,  $S^c \ominus \bar{B}(0, r)$  possède un nombre fini de composantes connexes. La distance minimale  $d_0$  entre deux composantes connexes est alors bien définie pour  $S \ominus \bar{B}(0, r)$  et  $S^c \ominus \bar{B}(0, r)$ . Plus précisément,  $d_0$  est définie par :

$$d_0 := \min \left\{ \inf_{x_0 \in A_0, x_1 \in A_1} d(x_0, x_1) \mid A_0, A_1 \text{ composantes connexes distinctes de } A \right\},$$

où  $A$  est  $S \ominus \bar{B}(0, r)$  ou  $S^c \ominus \bar{B}(0, r)$ . De plus, l'intersection d'une boule fermée avec  $S$  ou  $S^c$  est compacte ou vide, donc la distance  $d_0$  est atteinte par deux points de  $S$  ou  $S^c$ . Donc par les lemmes 2.3.13 et 2.3.14  $d_0 > 2\sqrt{2}r$  et  $d_0 \leq 2\sqrt{2}r$ . Contradiction! Donc  $S \ominus \bar{B}(0, r)$  ou  $S^c \ominus \bar{B}(0, r)$  sont connexes par arcs. Donc  $S$  est quasi( $r$ )-régulier.  $\square$

### 2.3.3 Liens avec d'autres notions

Les liens avec les notions de pics et d'épaisseur de distorsion sont aisément établis. Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $(\theta, \delta)$ -CTLB.

- Par définition de la courbure totale (définition 2.2.1), pour toute paire de points  $(x_1, x_2)$  de  $\mathcal{C}$  telle que  $d(x_1, x_2) < \delta$  et tout point  $y \in \mathcal{C}|_{x_1}^{x_2}$ ,  $\widehat{x_1 y x_2} \geq \theta$ . Donc  $\mathcal{C}$  ne contient pas de  $(\theta', \delta)$ -pics (définition 2.1.7) avec  $\theta' < \theta$ .
- Pour toute paire de points  $(x_1, x_2)$  de  $\mathcal{C}$  distants d'au plus  $\delta$ ,  $\kappa(\mathcal{C}|_{x_1}^{x_2}) \leq \theta$ , donc par la propriété 2.2.17,  $\frac{\mathcal{L}(\mathcal{C}|_{x_1}^{x_2})}{d(x_1, x_2)} \leq \sqrt{2}$ . Donc l'épaisseur de distorsion  $\tau_{1/\cos \frac{\theta}{2}}(\mathcal{C})$  de  $\mathcal{C}$  (définition 2.1.11) est supérieure à  $\delta$ .

## 2.4 Conclusion

La courbure totale, extension de l'intégrale de la courbure à l'ensemble des courbes continues, nous a permis d'introduire deux notions contrôlant la complexité des courbes du plan. La notion de courbes  $(\theta, \delta)$ -CTLB impose, pour toute paire de points de la courbe distants de moins de  $\delta$ , que l'un des deux arcs délimités par ces deux points soit de courbure totale majorée par  $\theta$ . Ce contrôle de la courbe ne contraint pas la distribution de la courbure entre ces deux points et autorise ainsi les courbes possédant des points anguleux comme les polygones. La deuxième notion, les courbes à courbure totale lipschitzienne impose un contrôle plus strict sur les courbes : elle impose que la courbure totale d'un arc de la courbe soit une fonction lipschitzienne de sa longueur.

Dans ce chapitre nous avons également démontré certaines propriétés permettant de mieux décrire les courbes  $(\frac{\pi}{2}, \delta)$ -CTLB : elle ne possèdent pas de points anguleux d'angle supérieur à  $\frac{\pi}{2}$  (proposition 2.2.29), il est possible de localement délimiter le domaine dans lequel se situe un arc (proposition 2.2.30), leur topologie locale, c'est-à-dire leur intersection avec un disque de rayon majoré, est connue (corollaire 2.2.38 et proposition 2.2.41), le diamètre est minoré par  $\delta$  (proposition 2.2.33) et la longueur des arcs d'une courbe CTLB peut être majorée (propriété 2.2.17 et corollaire 2.2.44). Les propriétés des courbes CTLB et de la courbure totale sont suffisamment précises pour permettre d'établir des liens entre courbes CTLB et d'autres notions. Nous avons prouvé que les courbes  $(\theta, \delta)$ -CTLB sont une généralisation des courbes par-régulières mais un cas particulier de courbes quasi-régulières. De plus, les courbes  $(\theta, \delta)$ -CTLB à courbure totale lipschitzienne sont par-régulières pour  $\theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

Cette majoration de  $\theta$  par  $\frac{\pi}{2}$  est présente dans la plupart des propriétés des courbes CTLB, elle constitue une des restrictions majeures de ce travail. Elle est due au contre-exemple présenté figure 2.19 qui met en défaut la connexité locale (proposition 2.2.31) des courbes  $(\theta, \delta)$ -CTLB si  $\theta > \frac{\pi}{2}$ . Ainsi, étendre les résultats obtenus pour  $\theta > \frac{\pi}{2}$  nécessiterait, si cela est possible, de se passer de cette propriété. Un enjeu de cette extension serait d'obtenir une véritable équivalence entre d'une part, être par( $r$ )-régulière et, d'autre part, être  $(\pi, 2r)$ -CTLB à courbure totale  $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne. De plus, dans les hypothèses de plusieurs propositions, les valeurs des constantes exprimées en fonction de  $\delta$  semblent sous-optimales. Par exemple, il semblerait que le diamètre d'une courbe  $\delta$ -CTLB soit  $\sqrt{2}$  fois supérieur ou égal à  $\delta$  (et pas seulement supérieur ou égal à  $\delta$ , proposition 2.2.33). En effet, deux possibilités pour «refermer» une courbe en tournant seulement de  $\frac{\pi}{2}$  à chaque fois que l'on s'éloigne de  $\delta$  pour former une courbe de diamètre minimale sont le carré et le cercle pour lesquels  $\text{diam}(\mathcal{C}) \geq \sqrt{2}\delta$ . Cette extension permettrait d'étendre les majorations dans les hypothèses de certaines propositions.

La définition de la plupart des notions présentées dans l'état de l'art (par-régularité, semi-régularité,  $\mu$ -portée, quasi-régularité) reste valide pour des surfaces en trois dimensions. La définition des courbes CTLB s'étend directement aux surfaces dans un espace en trois dimensions : une surface  $S$  est  $(\theta, \delta)$ -CTLB, si pour toute paire de points  $a$  et  $b$  tels que  $d(a, b) < \delta$ , il existe un arc  $\mathcal{C}_a^b$  de la surface  $S$  d'extrémités  $a$  et  $b$  et de courbure totale inférieure ou égale à  $\theta$ . En revanche, les propriétés des surfaces CTLB ne semblent pas pouvoir être déduites des courbes CTLB : l'intersection d'une surface CTLB avec un plan ne forme pas forcément une courbe (ou une union de courbes) CTLB. De plus, si deux points d'une courbe CTLB à distance strictement inférieure à  $\delta$  délimitent deux arcs de la courbe, deux points d'une surface CTLB peuvent être joints par une infinité d'arcs de la surface, ce qui complexifie l'utilisation de cette définition. L'un des premiers résultats à obtenir sur les surfaces CTLB concernerait leur topologie locale : montrer que l'intersection d'une telle surface avec une boule centrée en un point de la surface et de rayon suffisamment faible est homéomorphe

à un disque.

Les propriétés démontrées dans ce chapitre sur les courbes CTLB nous autorisent un contrôle local de ces courbes. Dans le chapitre suivant nous montrerons que ce contrôle nous permet d'exclure certaines formes de leur discrétisation et ainsi d'obtenir des résultats de reconstruction de la topologie des courbes continues CTLB.





## Chapitre 3

# Discrétisation d'une forme à bord CTLB

Le chapitre 5 traite de l'estimation des quantités géométriques sur le bord d'un objet continu homéomorphe à un disque fermé à partir du bord de sa discrétisation. L'objectif de ce chapitre est alors de garantir que le bord de la discrétisation est également une courbe de Jordan. Pour cela, nous rappelons dans la partie 3.1, les notions topologiques utilisées pour décrire une forme discrète. Dans la partie 3.2, nous présentons différents modèles de discrétisation utilisés en géométrie discrète et les propriétés de préservation de la topologie. Dans la partie 3.3, nous montrons comment il est possible de déduire la position de certains points de la courbe  $\mathcal{C}$  à partir de sa discrétisation. Nous appliquons ensuite les outils développés dans la partie 3.3 dans la partie 3.4, où nous excluons certaines configurations de la discrétisation d'une courbe CTLB, ce qui nous permet d'obtenir partie 3.5 les propriétés topologiques souhaitées.

### 3.1 Topologie d'une forme discrète

L'espace  $h\mathbb{Z}^2$  muni de la topologie induite par la distance euclidienne est discret au sens où tous les ensembles sont des ouverts. Cette topologie n'est pas utilisable en géométrie. En effet, les sous-ensembles connexes sont réduits aux singletons (tout sous-ensemble contenant au moins deux éléments peut se décomposer en deux ouverts). De plus, les seules applications continues d'un intervalle  $I$  dans un espace discret sont les applications constantes. En conséquence les seules courbes d'un espace discret sont réduites à un point. C'est pourquoi plusieurs notions ont été développées pour décrire la topologie de formes discrètes de façon similaire aux formes continues.

Nous définissons d'abord les notions d'intérieur, d'extérieur et de bord pour un ensemble discret  $A$ .

**Définition 3.1.1** (points intérieurs, extérieurs, bord d'une forme discrète).

Soit  $A$  un sous-ensemble de  $h\mathbb{Z}^2$ .

- Un point  $p$  de  $h\mathbb{Z}^2$  est dit *intérieur* si  $p \in A$  et *extérieur* si  $p \in A^c$ .
- Un *bel* est une paire de points la grille  $h\mathbb{Z}^2$  distants de  $h$ , l'un intérieur, l'autre extérieur. Un bel sera identifié au segment joignant le point intérieur au point extérieur.
- Le *bord de  $A$*  est l'ensemble des bels de la grille  $h\mathbb{Z}^2$ .

La  $k$ -connexité, avec  $k \in \{4, 8\}$  propose deux notions pour imiter la connexité de  $\mathbb{R}^2$ .

**Définition 3.1.2** ( $k$ -connexité).

- Deux points  $x, y$  de  $h\mathbb{Z}^2$  sont  $4$ -adjacents (respectivement  $8$ -adjacents) si  $d(x, y) = h$  (respectivement si  $d(x, y) \leq \sqrt{2}h$ ).
- La relation de  $4$ -adjacence (respectivement  $8$ -adjacence) s'étend en une relation d'équivalence par transitivité et réflexivité appelée  $4$ -connexité (respectivement  $8$ -connexité).

Un sous-ensemble  $C$  de  $h\mathbb{Z}^2$  est une  $k$ -courbe de Jordan discrète avec  $k \in \{4, 8\}$  si  $C$  est  $k$ -connexe et chaque point de  $C$  possède exactement deux voisins  $k$ -adjacents dans  $C$ .

De manière générale, la  $k$ -connexité ne permet pas de traduire correctement le théorème de Jordan dans l'espace discret  $h\mathbb{Z}^2$  (voir contre exemple figure 3.1). Il est nécessaire d'utiliser différents types de connexité pour pouvoir obtenir un équivalent du théorème de Jordan.

**Proposition 3.1.3** ([Ros70, proposition 3], [Ros79, théorème 3.3]). *L'espace discret  $h\mathbb{Z}^2$  privé d'une  $4$ -courbe de Jordan possède exactement une composante  $8$ -connexe finie. L'espace discret  $h\mathbb{Z}^2$  privé d'une  $8$ -courbe de Jordan possède exactement une composante  $4$ -connexe finie.*



FIGURE 3.1 – Les losanges gris représentent les points de  $h\mathbb{Z}^2$  appartenant à la courbe discrète et les carrés vides représentent les points de  $h\mathbb{Z}^2$  n'appartenant pas à  $h\mathbb{Z}^2$ . A gauche, exemple de  $4$ -courbe de Jordan discrète dont le complémentaire dans  $h\mathbb{Z}^2$  est constitué de deux composantes  $4$ -connexes bornées et une composante  $4$ -connexe non-bornée. A droite, exemple de  $8$ -courbe de Jordan dont le complémentaire dans  $h\mathbb{Z}^2$  est constitué d'une seule composante  $8$ -connexe.

**Propriété 3.1.4** ([Lat97, théorème 6.2]). *La frontière  $\partial(A \oplus P_0)$ , avec  $A$  un sous-ensemble fini de  $h\mathbb{Z}^2$ , est une courbe de Jordan (c'est-à-dire si chaque segment de  $\partial(A \oplus P_0)$  est adjacent à exactement deux autres segments de droite de  $\partial(A \oplus P_0)$ ) si et seulement si  $A$  et  $A^c$  sont  $4$ -connexes, en notant  $P_0 := h[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$ .*

La notion de formes discrètes bien composées permet d'obtenir un équivalent du théorème de Jordan pour les  $k$ -courbes de Jordan discrètes.

Longin Latecki *et al.* fournissent trois définitions équivalentes des ensembles bien composés. La première définition est motivée par la propriété 3.1.4.

**Définition 3.1.5** (ensemble bien-composé [LER95, définition 3.2]). Un sous-ensemble  $A \subset h\mathbb{Z}^2$  est dit *bien composé* si toute composante 8-connexe de  $A$  et de  $A^c$  est également 4-connexe.

La première caractérisation permet de déterminer si une forme discrète est bien composée par une vérification locale.

**Propriété 3.1.6** ([LER95, théorème 3.1]). *Un sous-ensemble  $A \subset h\mathbb{Z}^2$  est bien composé si et seulement si pour tout point  $p \in A$ , tout point  $q \in A$  8-adjacent à  $p$  est dans la même composante 4-connexe de  $V_8(p)$  que  $p$  (où  $V_8(p)$  est l'ensemble des points de  $h\mathbb{Z}^2$  8-adjacents à  $p$ ,  $p$  y compris).*

La deuxième caractérisation offre une propriété topologique du bord d'une forme discrète bien composée.

**Propriété 3.1.7** ([Lat97, théorème 6.1]). *Un sous-ensemble  $A$  de  $h\mathbb{Z}^2$  est bien composé si et seulement si le bord de  $A \oplus P_0$  est une variété topologique de dimension 1 (c'est-à-dire que chaque point du bord possède un voisinage dans  $\mathbb{R}^2$  dont l'intersection avec le bord de  $A \oplus P_0$  est homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}$ , où  $P_0$  est le carré  $h[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$ ).*

La notion de forme discrète bien composée permet d'obtenir un théorème de Jordan pour les  $k$ -courbes de Jordan discrètes.

**Propriété 3.1.8** (Théorème de Jordan discret, [LER95, définition 2.5, théorème 4.1]).

*Soit  $C$  une 4-courbe de Jordan discrète de  $h\mathbb{Z}^2$  bien composée (en tant qu'ensemble discret), alors  $h\mathbb{Z}^2 \setminus C$  possède deux composantes 4-connexes.*

Pour plus de détails sur les formes bien composées, un état de l'art a été réalisé [BGN18]. Nous préférons utiliser une autre définition pour les courbes discrètes.

**Définition 3.1.9** (Courbe discrète).

- Un *pixel dual* est un carré de côté de longueur  $h$  et de sommets des points de  $h\mathbb{Z}^2$ .
- Nous appelons *courbe discrète* toute suite de segments de droite de longueur  $h$  et d'extrémités dans  $h\mathbb{Z}^2$  telle que deux segments consécutifs appartiennent au même pixel dual.
- Si le premier et le dernier segment de la grille  $b_0$  et  $b_{N-1}$  appartiennent au même pixel dual, alors la courbe discrète est dite *fermée* et est indexée par  $\mathbb{Z}_N$ .
- Si chaque pixel dual  $P_i$  ayant pour côtés  $b_i$  et  $b_{i+1}$  ne possède aucun autre terme  $b_j$  de la courbe discrète ( $b_i$ ) pour côté alors ( $b_i$ ) est une courbe discrète *simple*.
- Une courbe discrète fermée simple est appelée *courbe de Jordan discrète*.

Les notions définies dans la définition 3.1.9 sont illustrées à la figure 3.2.

Nous redémontrons le lemme suivant (voir aussi [LM00]).

**Lemme 3.1.10.** *Le bord d'un sous-ensemble fini  $A$  de  $h\mathbb{Z}^2$  bien composé est l'union disjointe de courbes de Jordan discrètes.*

*Démonstration.* Chaque bel possède un point extérieur et un point intérieur pour extrémités. Si un pixel dual possède pour côtés un nombre impair de bels (c'est-à-dire 1 ou 3), en parcourant le bord du pixel dual, la nature des sommets (intérieurs ou extérieurs) change un nombre impair de fois. Donc, en parcourant le bord du pixel dual à partir d'un sommet fixé, cela montre que

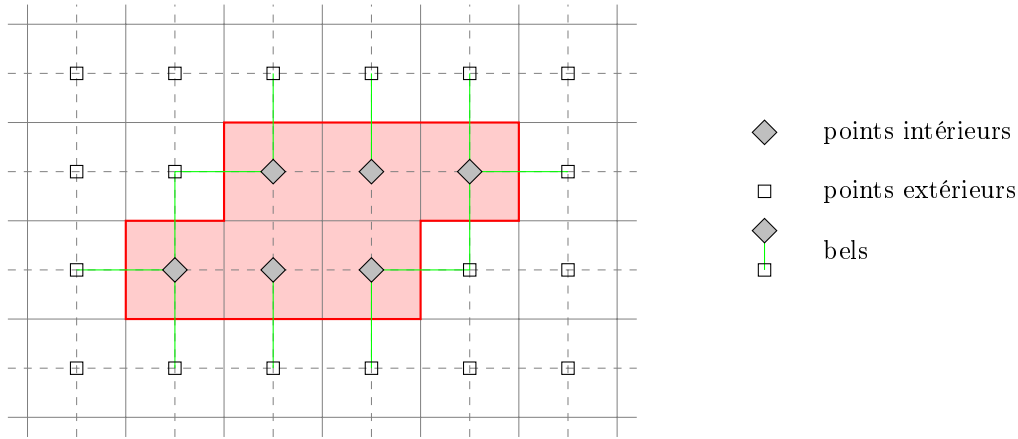


FIGURE 3.2 – Les pixels sont délimités par les lignes continues et les pixels duaux par les lignes pointillées. Les carrés évidés représentent les points extérieurs à la forme discrète les losanges gris les points intérieurs à la forme discrète. Les bels sont représentés en vert. Le bord de la forme discrète est formellement défini comme l'ensemble des bels. Ici l'ensemble des bels forme une courbe de Jordan discrète.

tout sommet extérieur est intérieur et tout sommet extérieur est intérieur. Contradiction! Donc le nombre de bels contenu dans un pixel dual est pair. De plus, si le pixel dual possédait quatre bels, alors il aurait pour sommets deux points intérieurs diagonalement opposés et deux points extérieurs diagonalement opposés, ce qui contredirait la propriété caractéristique locale des formes bien composées (propriété 3.1.6). Donc chaque pixel dual contient soit aucun bel soit deux bels. Ainsi chaque bel appartient à un pixel dual ayant exactement deux bels pour côtés. Donc l'ensemble des bels forme un graphe dont les sommets sont les bels et les arêtes les pixels duaux contenant deux bels. Chaque composante connexe de ce graphe est alors une courbe de Jordan discrète.  $\square$

Lorsque le bord d'une forme discrète  $A$  forme une courbe de Jordan (unique à permutation circulaire et inversion de l'ordre des termes près), nous noterons  $\partial^h A$  cette courbe de Jordan.

### 3.2 Modèles de discrétisation

Dorénavant, nous supposons que chaque forme discrète est la discrétisation d'un objet continu. Pour décrire ces images, nous considérons alors un sous-ensemble  $S$  de  $\mathbb{R}^2$  représentant l'objet continu, l'arrière plan est alors  $\mathbb{R}^2 \setminus S$ . Afin de comparer le premier plan  $S$  à sa discrétisation, plusieurs modèles de discrétisation existent et sont présentés dans cette sous-partie. Pour modéliser une image numérique pavée par des pixels carrés, nous nous intéressons plus spécifiquement aux ensembles discrets  $h\mathbb{Z}^2$  avec  $h > 0$ . Nous noterons  $\text{Dig}^h(S)$  la discrétisation de l'ensemble  $S$  sur  $h\mathbb{Z}^2$ . Nous appelons alors *pixel* au point  $p \in h\mathbb{Z}^2$  l'ensemble  $P_p := p \oplus h[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$ .

### 3.2.1 Différents modèles de discrétisation

Selon [KR04], le premier modèle de discrétisation a été introduit par C.F. Gauss. Il est appelé *discrétisation de Gauss*.

**Définition 3.2.1** (Discrétisation de Gauss). *La discrétisation de Gauss* d'un sous-ensemble  $S$  de  $\mathbb{R}^2$  est notée  $\text{Dig}_G^h(S)$  est définie sur  $h\mathbb{Z}^2$  par :

$$\text{Dig}_G^h(S) := S \cap h\mathbb{Z}^2.$$

Si la forme discrète considérée est la discrétisation de Gauss d'une forme continue  $S$  fermée, alors un point  $p \in h\mathbb{Z}^2$  est intérieur si et seulement si  $p \in S$  et extérieur si et seulement si  $p \in S^c$ . De par sa simplicité, ce modèle de discrétisation reste majoritairement utilisé. A la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, Camille Jordan fait successivement appel à plusieurs procédés de discrétisation dans une de ses preuves, [Jor92] : *la discrétisation de Jordan intérieure* et *la discrétisation de superrecouvrement* (aussi appelée *discrétisation de Jordan extérieure*). Le modèle de discrétisation le plus restrictif parmi ceux présentés ici, c'est-à-dire le plus petit pour l'inclusion est *la discrétisation de Jordan intérieure*.

**Définition 3.2.2** (Discrétisation de Jordan intérieure). *La discrétisation de Jordan intérieure* d'un sous-ensemble  $S$  de  $\mathbb{R}^2$ , notée  $\text{Dig}_C^h(S)$ , est définie sur  $h\mathbb{Z}^2$  de  $\mathbb{R}^2$  par :

$$\text{Dig}_C^h(S) := \{p \in h\mathbb{Z}^2 | P_p \subset S\}.$$

Ainsi pour la discrétisation de Jordan, seuls les pixels entièrement inclus dans  $S$  sont considérés comme allumés. A l'opposé pour *la discrétisation de Jordan extérieure* aussi appelée *discrétisation de superrecouvrement* contient tous les pixels qui sont intersectés par  $S$ .

**Définition 3.2.3** (Discrétisation de superrecouvrement). *La discrétisation de superrecouvrement* d'un sous-ensemble  $S$  de  $\mathbb{R}^2$  est notée  $\text{Dig}_\cap^h(S)$  est définie sur  $h\mathbb{Z}^2$  par :

$$\text{Dig}_\cap^h(S) := \{p \in h\mathbb{Z}^2 | P_p \cap S \neq \emptyset\}.$$

Soit  $\mathcal{C}$  une courbe de Jordan. La différence entre la discrétisation de superrecouvrement et de la discrétisation de Jordan intérieure de la composante intérieure de  $\mathcal{C}$  définit une discrétisation de la courbe  $\mathcal{C}$ . Cette discrétisation est l'ensemble des pixels intersectant  $\mathcal{C}$ .

**Définition 3.2.4** (Discrétisation de Jordan d'une courbe). *La discrétisation de Jordan d'une courbe*  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^2$  est notée  $J_h(\mathcal{C})$  et est définie par :

$$J_h(\mathcal{C}) := \{p \in h\mathbb{Z}^2 | P_p \cap \mathcal{C} \neq \emptyset\}.$$

*La discrétisation surfacique*, introduite par Gross et Latecki [GL95] est une des discrétisations les plus réalistes : un pixel est allumé si une portion suffisamment grande de celui-ci est recouverte par  $S$ .

**Définition 3.2.5** (Discrétisation surfacique). Soit  $\lambda \in [0, 1]$ . La discrétisation surfacique d'un sous-ensemble mesurable  $S$  de  $\mathbb{R}^2$  est notée  $\text{Dig}_\lambda^h(S)$  est définie sur un sous-ensemble discret  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  par :

$$\text{Dig}_\lambda^h(S) := \{p \in h\mathbb{Z}^2 | A(P_p \cap S) \geq \lambda A(P_p)\}$$

où  $A(E)$  désigne l'aire de l'ensemble  $E$ .

Certaines discrétisations peuvent être décrites à l'aide de la distance de Hausdorff à l'objet continu  $S$ .

**Définition 3.2.6** (Discrétisation de Hausdorff [RT00]). Soit  $S$  un sous-ensemble compact non-vide de  $\mathbb{R}^2$ . Une partie d'un sous-ensemble discret  $D$  est une *discrétisation de Hausdorff* de  $S$  si elle minimise la distance de Hausdorff avec  $S$  parmi les sous-ensembles de  $D$ .

Une discrétisation de Hausdorff n'est pas uniquement définie : pour un ensemble  $S$  donné, il peut exister plusieurs sous-ensembles de  $D$  minimisant la distance de Hausdorff. En revanche, la réunion de plusieurs discrétisation de Hausdorff de  $S$  est encore une discrétisation de Hausdorff. Il existe donc un unique élément maximal parmi les discrétisations de Hausdorff, cet élément est appelé *discrétisation de Hausdorff maximale* et est noté  $\text{Dig}_H^h(S)$ . Si dans la suite nous utilisons  $D = h\mathbb{Z}^2$ , les résultats de [RT00] sont obtenus dans un cadre beaucoup plus général.

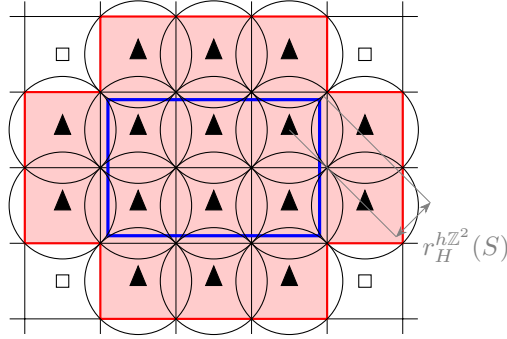


FIGURE 3.3 – Ici l'espace discret choisi est  $h\mathbb{Z}^2$ . Les cercles noirs délimitent les disques fermés de rayon  $r_H^h$ . Les triangles sont les points intérieurs de la discrétisation de Hausdorff du rectangle  $S$  délimité en bleu.

**Définition 3.2.7** (rayon de recouvrement [RT00]). *Le rayon de recouvrement  $r_H^D$  d'un sous-ensemble discret  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  est défini par*

$$r_H^D := \sup_{x \in \mathbb{R}^2} d(x, D).$$

**Propriété 3.2.8** ([RT00, Théorème 24]).

- *Le rayon de recouvrement  $r_H^D$  est le plus petit rayon tel que l'union des boules centrées en un point de  $D$  recouvre  $\mathbb{R}^2$ .*
- *Soit  $S$  un sous-ensemble compact non-vide de  $\mathbb{R}^2$  et  $D$  un sous-ensemble discret. Un point  $p \in D$  appartient à  $\text{Dig}_H^D(S)$  si et seulement si  $\bar{B}(p, r_H^D)$  intersecte  $S$ .*

Un des défauts de la discrétisation de Hausdorff munie de la distance euclidienne est que certains points  $p \in h\mathbb{Z}^2$  peuvent faire partie de  $\text{Dig}_H^h(S)$  sans que le pixel  $P_p$  intersecte  $S$  (voir figure 3.3). La distance  $d_\infty$  est alors plus adaptée (on retrouve alors la discrétisation de superrecouvrement si  $D = h\mathbb{Z}^2$ ).

Dans le cas particulier où la courbe  $\mathcal{C}$  est le graphe d'une fonction  $g$ , il est possible de définir un autre modèle de discrétisation (utilisée par exemple dans [MB16]).

**Définition 3.2.9** (Discrétisation inférieure d'un graphe). Soit  $g$  une fonction et  $[a, b]$  un intervalle inclus dans son domaine de définition. La *discrétisation inférieure* du couple  $(g, [a, b])$  est définie par :

$$\text{Dig}_{[\cdot]}^h(g, [a, b]) := \left\{ \left( hk, h \left\lfloor \frac{g(kh)}{h} \right\rfloor \right) \mid k \in \mathbb{Z} \text{ et } kh \in [a, b] \right\}$$

Décomposer le bord d'un objet  $S$  en graphes de fonctions sur un repère compatible avec la grille  $h\mathbb{Z}^2$  pour utiliser la discrétisation inférieure d'un graphe pose plusieurs problèmes empêchant de définir cette discrétisation. Il se peut qu'il soit nécessaire d'opérer plusieurs changements de repères pour décrire le bord de  $S$  entre deux points distants de moins de  $h$ . Il peut exister plusieurs repères permettant de décrire le bord de l'objet mais produisant une discrétisation inférieure différente.

Enfin les propriétés de cette discrétisation dépendent du repère choisi localement, ce qui peut rendre difficile d'obtenir une propriété valide sur tout l'objet.

Une fois la discrétisation d'un objet continu  $S$  obtenue, il est possible de proposer une reconstruction de l'objet  $S$  à partir des pixels centrés aux points de la discrétisation.

**Définition 3.2.10** (Reconstruction). Nous appelons *reconstruction de  $S$*  l'ensemble  $\square^h(S)$  défini par

$$\square^h(S) := \text{Dig}^h(S) \oplus P_0$$

où  $P_0$  est le pixel centré en 0.

### 3.2.2 Conventions dans le cadre de la discrétisation de Gauss sur $h\mathbb{Z}^2$ d'une forme ayant pour bord une courbe CTLB

Nous ferons l'hypothèse dans la suite du manuscrit que le bord de  $S$  est une courbe CTLB  $\mathcal{C}$ .

Par abus de langage, la discrétisation  $\text{Dig}_*^h(\mathcal{C})$  de  $\mathcal{C}$  désignera la discrétisation de l'adhérence de la composante intérieure de la courbe de Jordan  $\mathcal{C}$  avec  $*$   $\in \{G, \subset, \cap, \lambda \in [0, 1], [\cdot]\}$ . De plus, le bord discret de  $\partial^h \text{Dig}_*^h(\mathcal{C})$  sera noté  $\partial_*^h(\mathcal{C})$  avec  $*$   $\in \{G, \subset, \cap, \lambda \in [0, 1], [\cdot]\}$ .

Si pour une forme générale de  $\mathbb{R}^2$ , la discrétisation de Gauss peut produire des résultats peu réalistes, sur les courbes CTLB, elle produit un résultat plus satisfaisant au sens de la proposition 3.2.11.

**Proposition 3.2.11.** *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $\delta$ -CTLB et soit une grille de pas  $h$  compatible avec  $\mathcal{C}$*

$$\text{Dig}_{\frac{3}{4}}^h(\mathcal{C}) \subset \text{Dig}_G^h(\mathcal{C}) \subset \text{Dig}_{\frac{1}{4}}^h(\mathcal{C})$$

*Démonstration.* Nous démontrons d'abord l'inclusion de gauche puis l'inclusion de droite. La preuve est illustrée figure 3.4. Notons  $S$  l'adhérence de la composante intérieure de la courbe de Jordan  $\mathcal{C}$ .

- Par contradiction supposons que  $p \in \text{Dig}_{\frac{3}{4}}^h(S)$  mais  $p \notin \text{Dig}_G^h(S)$ , donc  $p \notin S$ . Donc par la proposition 2.3.11, il existe un carré de côté de longueur  $\frac{\delta}{2}$  inclus dans  $S^c$  contenant  $p$ . Ce carré occupe plus que le quart de la surface du pixel  $P_p$  centré en  $p$ . Donc  $S$  occupe moins que  $\frac{3}{4}$  de la surface du pixel  $P_p$ . Contradiction! Donc tout  $p \in \text{Dig}_{\frac{3}{4}}^h(S)$  appartient également à  $\text{Dig}_G^h(S)$ .
- Soit  $p \in \text{Dig}_G^h(S)$ . Par définition  $p \in S$ , par la proposition 2.3.11, il existe un carré de côté  $\frac{\delta}{2}$  inclus dans  $S$  et contenant  $p$ . Comme  $\sqrt{2}h < \delta$ , ce carré occupe au minimum  $\frac{1}{4}$  de la surface du pixel  $P_p$ . Donc  $p \in \text{Dig}_{\frac{1}{4}}^h(S)$ .  $\square$

Les valeurs de  $\lambda$  ( $\lambda = \frac{1}{4}$  et  $\lambda = \frac{3}{4}$ ) dans  $\text{Dig}_\lambda^h$  obtenues dans la proposition 3.2.11 sont optimales. La figure 3.5 présente des cas où les inclusions sont prises à défaut lorsque l'on diminue (pour l'inclusion à gauche) et augmente (pour l'inclusion à droite) la valeur de  $\lambda$ .

Notre objectif, dans le chapitre 5, est d'estimer des quantités géométriques (longueur, intégrale curviligne) sur une courbe de Jordan  $\mathcal{C}$  à partir de sa discrétisation. Cette courbe de Jordan  $\mathcal{C}$  est définie comme étant le bord  $S$  d'une forme de  $\mathbb{R}^2$  homéomorphe à un disque fermé. Nous souhaitons savoir à quelles conditions le bord d'une forme discrète est également une courbe de Jordan afin de pouvoir comparer les grandeurs géométriques de ces deux courbes. Cependant afin de garantir que le bord d'une forme discrète  $A$  est une courbe de Jordan discrète, il ne suffit pas que  $A$  soit



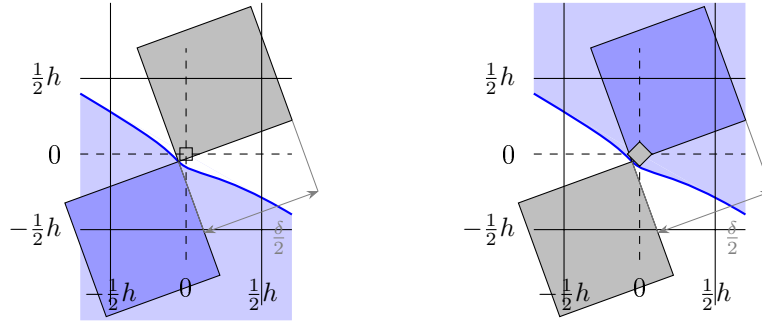


FIGURE 3.4 – Dans la preuve de la proposition 3.2.11, nous utilisons la proposition 2.3.11, pour montrer que le point  $p := (0, 0)$  est inclus dans un carré (en gris) de côté de longueur  $\frac{\delta}{2}$  lui-même inclus dans  $\bar{S}^c$  lorsque  $p \notin \text{Dig}_G^h(S)$  (à gauche) et dans un carré en bleu foncé de côté de longueur  $\frac{\delta}{2}$  lui-même inclus dans  $S$  (en bleu clair) lorsque  $p \in \text{Dig}_G^h(S)$  (à droite). Cela nous permet de déduire une majoration (à gauche) et une minoration (à droite) de la surface du pixel  $P_p$  recouverte par  $S$ .

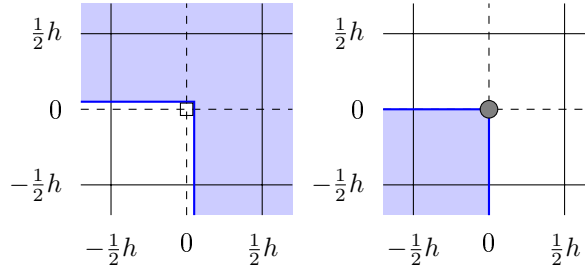


FIGURE 3.5 – A gauche, une forme  $S$  de bord  $\delta$ -CTLB recouvrant une surface  $\lambda h^2$  du pixel  $P_{(0,0)}$  avec  $\lambda < \frac{3}{4}$  telle que  $(0, 0) \notin \text{Dig}_G^h(S)$ . A droite, une forme  $S$  de bord  $\delta$ -CTLB recouvrant une surface  $\frac{1}{4}h^2$  du pixel  $P_{(0,0)}$  avec  $(0, 0) \in \text{Dig}_G^h(S)$  mais telle que pour tout  $\lambda > \frac{1}{4}$ ,  $(0, 0) \notin \text{Dig}_\lambda^h(S)$ .

bien composée (configuration (e) figure 3.6). Dans la figure 3.6, nous présentons plusieurs formes discrètes dont le bord n'est pas une courbe de Jordan. La discrétisation  $\text{Dig}(\mathcal{C})$  peut ne pas être connexe (configuration (c) figure 3.6), la frontière de la forme discrète peut être l'union disjointe de plusieurs courbes (configuration (e) figure 3.6), ou encore la frontière de la forme discrète peut ne pas être une courbe simple (configuration (a) figure 3.6).

L'objectif principal de ce chapitre est alors de garantir que le bord de la reconstruction d'une courbe CTLB  $\mathcal{C}$  est une courbe de Jordan discrète.

Afin d'écarter certaines configurations de la discrétisation des courbes CTLB, nous aurons besoin de distinguer les points du bord de l'objet continu  $S$  (qui est une courbe CTLB) et les points qui sont dans l'intérieur topologique de  $S$ .

**Définition 3.2.12** (point intérieur strict, point frontalier). Soit  $S$  un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{R}^2$ . Nous considérons la discrétisation de Gauss de  $S$  comme forme discrète. Un point intérieur  $p$  de

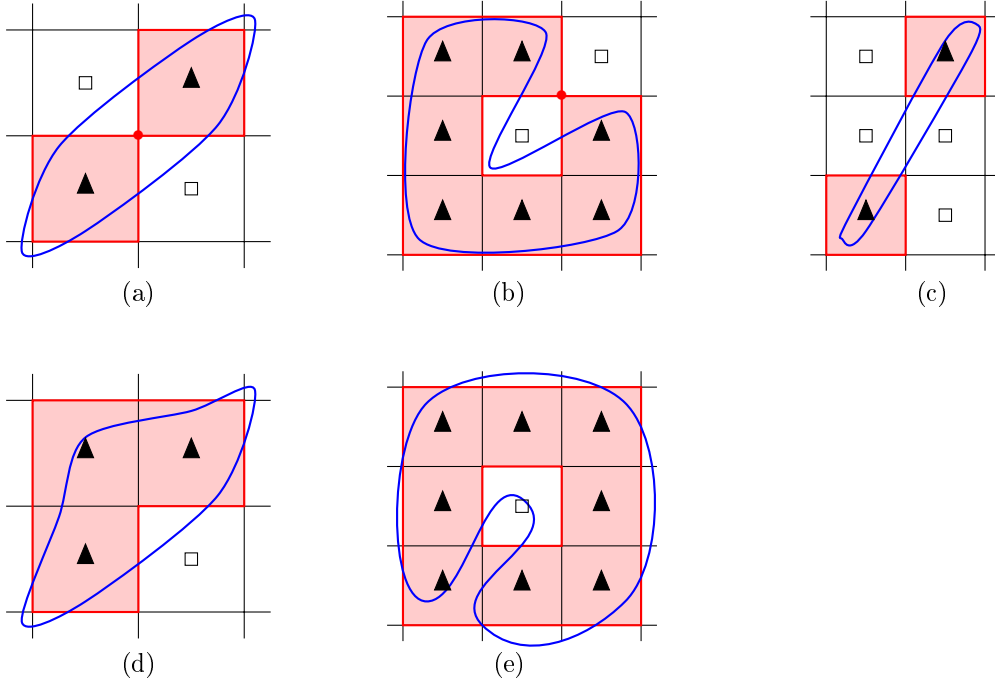


FIGURE 3.6 – Configuration (a) : la forme discrète (en rouge) est 8-connex mais n'est pas 4-connex, donc n'est pas bien composée. Configuration (b) : la forme discrète est 4-connex mais n'est pas bien composée (le complémentaire de la forme discrète est 8-connex mais pas 4-connex). Configuration (c) : la forme discrète est bien composée mais pas 4-connex ni 8-connex. Configuration (d) : la forme discrète est 4-connex et bien composée. Configuration (e) : la forme discrète est 4-connex, bien composée en revanche, mais n'est pas simplement connexe (la forme possède deux frontières). Pour chacune de ces configurations la courbe bleue représente le bord d'une forme continue simplement connexe ayant la forme discrète pour discrétisation de Gauss.

$h\mathbb{Z}^2$  est dit *frontalier* si  $p \in \partial S$  et *intérieur strict* dans le cas contraire.

La figure 3.7 présente les notations de ces points utilisés dans toute la suite du manuscrit.

### 3.2.3 Résultats de préservation de la topologie

Plusieurs résultats garantissant certaines propriétés topologiques sur la discrétisation sur certaines familles de formes continues  $S$  ont été démontrées. En 1982, Pavlidis affirme que la discrétisation de Gauss  $\text{Dig}_G^h(S)$  d'une forme  $\text{par}(r)$ -régulière  $S$  est homéomorphe à  $S$  pour  $h \leq \sqrt{2}r$  ([Pav82, Théorème 7.1])<sup>1</sup>.

**Propriété 3.2.13** ([GL95, théorème 13], [LCG98, théorème 8]). *Soit  $S$  un ensemble  $\text{par}(r)$ -régulier, alors  $\text{Dig}_\lambda^{\sqrt{2}r}(S)$ ,  $\text{Dig}_\lambda^{\sqrt{2}r}(S)$  et  $\text{Dig}_\lambda^{\sqrt{2}r}(S)$  sont bien composés pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ .*

1. mais les arguments de la preuve mériteraient d'être formalisés

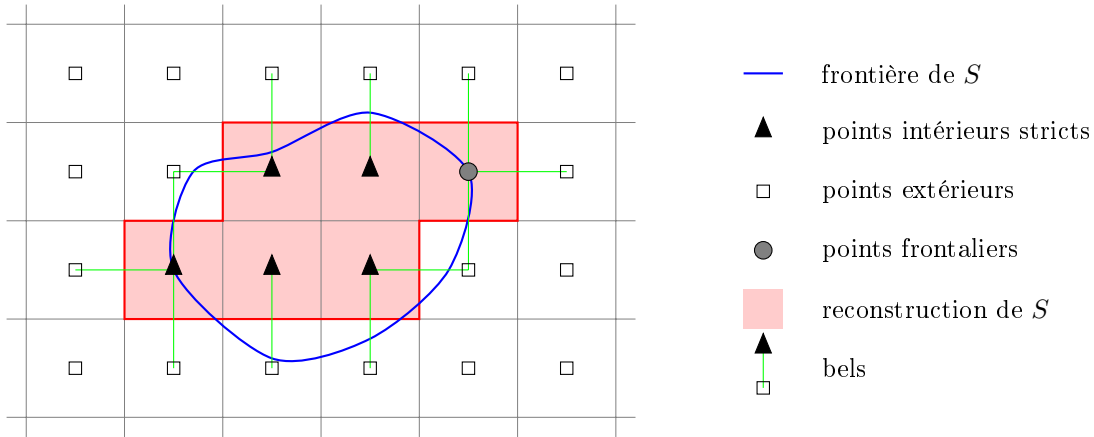


FIGURE 3.7 – Les notations présentées dans la figure seront utilisées dans tout le reste du manuscrit.

Le résultat garantissant que la discrétisation soit bien composée et 4-connecte pour la plus grande famille de formes a été proposé en 2019.

**Propriété 3.2.14** ([PKNP19, Proposition 4]). *Soit  $S$  un ensemble quasi( $r$ )-régulier avec marge  $(\sqrt{2} - 1)r$ . Alors la discrétisation de Gauss  $\text{Dig}_G^{\sqrt{2}r}(S)$  de  $S$  est bien composée et 4-connecte.*

L'objectif de la suite de ce chapitre est de montrer que certaines discrétisations de courbes CTLB sont bien composées et 4-connectes et que leur bord définit une unique courbe de Jordan discrète.

### 3.3 Propriétés locales de la discrétisation des courbes CTLB

Le but de cette partie est de développer des outils permettant de déduire des informations sur la position des arcs de la courbe à partir de la discrétisation d'une courbe CTLB. Cela permettra dans la partie 3.4 d'exclure certaines configurations de la discrétisation des courbes CTLB en raisonnant par l'absurde : nous supposons que de telles configurations appartiennent à la discrétisation d'une courbe CTLB et montrerons que la courbure totale d'un arc le plus droit excède  $\frac{\pi}{2}$ . Pour cela, nous utilisons l'arc le plus droit  $\mathcal{C}|_T$  passant par un pixel  $T$  (nous rappelons que  $\mathcal{C}|_T$  est le plus petit arc de  $\mathcal{C}$  contenant l'intersection  $\mathcal{C} \cap T$ , définition 2.2.40 et proposition 2.2.41).

Afin de manipuler le  $T$ -arc le plus droit, nous nous plaçons dans toute la suite du manuscrit dans le cadre des hypothèses de la proposition 2.2.41, appelées *hypothèses de compatibilité*.

**Définition 3.3.1** (Hypothèses de compatibilité). Une grille de pas  $h$  ou un carré de côté de longueur  $h$  est dit *compatible avec la courbe  $\mathcal{C}$*  si

1. la courbe  $\mathcal{C}$  est  $\delta$ -CTLB,
2.  $h$  est strictement inférieur à  $\min(\frac{\sqrt{2}}{2}\delta, \frac{1}{2} \text{diam}(\mathcal{C}))$ .

Nous commençons par délimiter le domaine du plan dans lequel se situe l'arc le plus droit passant par un carré  $T$ , appelé *boursoufflure de  $T$* .

**Définition 3.3.2** (Boursouffure).

- La boursouffure d'un carré  $T$  de côté de longueur  $h$  est l'union de  $T$  et des quatre disques fermés de rayon  $\frac{h}{2}$  et de centres les milieux des côtés de  $T$ .
- La boursouffure d'une courbe discrète  $(b_i)_{i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$  (respectivement d'une courbe discrète fermée  $(b_i)_{i \in \mathbb{Z}_N}$ ) est la réunion des boursouffures des pixels duaux ayant  $b_i$  et  $b_{i+1}$  pour côtés pour  $i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$  (respectivement pour  $i \in \mathbb{Z}_N$ ).

**Proposition 3.3.3.** *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $\delta$ -CTLB et  $T$  un carré compatible avec  $\mathcal{C}$ . Alors l'arc le plus droit  $\mathcal{C}|_T$  passant par  $T$  est inclus dans la boursouffure de  $T$*

*Démonstration.* Par la proposition 2.2.41, le  $T$ -arc le plus droit est un arc de courbure totale inférieure ou égale à  $\frac{\pi}{2}$  d'extrémités  $a$  et  $b$  sur le bord de  $T$ . Soit  $c \in \mathcal{C}|_T$ . Supposons que  $c \notin T$ . Le point  $c$  appartient alors à un arc ouvert  $\mathcal{C}|_{a'}^{b'}$  inclus dans  $\mathcal{C}|_T \setminus T$  avec  $a'$  et  $b'$  appartenant à  $T$ . Supposons par l'absurde que  $a'$  et  $b'$  appartiennent à deux côtés distincts de  $T$ . La courbe de Jordan  $\mathcal{C}|_{a'}^{b'} \cup [a', b']$  contient alors un sommet de  $T$ . Par la proposition 2.2.21,  $\kappa(\mathcal{C}|_{a'}^{b'}) > \frac{\pi}{2}$ . Ce qui contredit la définition de l'arc le plus droit  $\mathcal{C}|_{a'}^{b'}$ . Donc  $a'$  et  $b'$  appartiennent au même côté de  $T$ . Par la proposition 2.2.30,  $\mathcal{C}|_{a'}^{b'}$  est inclus dans un disque de diamètre  $[a, b]$ , donc dans la boursouffure de  $T$ . Donc  $c$  appartient à la boursouffure de  $T$ .  $\square$

La proposition 3.3.4 permet d'exclure certaines configurations de la discrétisation des courbes CTLB. En premier lieu, montrons que l'appartenance de deux sommets du même pixel dual  $T$  à la même composante connexe de  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$  se déduit à partir de la position des extrémités de  $\mathcal{C}|_T$ . Ainsi, pour exclure les configurations de sommets impossibles, au lieu de considérer une infinité des cas (l'ensemble des courbes CTLB intersectant  $T$ ), il suffit de considérer un nombre fini de possibilités (l'appartenance de chacune des extrémités de  $\mathcal{C}_T$  à un côté de  $T$ ).

**Proposition 3.3.4.** *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe CTLB et  $T$  un carré compatible avec  $\mathcal{C}$ . Soient  $a$  et  $b$  les extrémités du  $T$ -arc le plus droit. Deux sommets de  $T$  appartiennent à la même composante connexe de  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$  si et seulement s'ils appartiennent à la même composante connexe de  $T \setminus [a, b]$  et ils n'appartiennent pas à  $\mathcal{C}$ .*

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{C}' := (\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}|_T) \cup [a, b]$  et soit  $K$  l'ensemble compact délimité par la courbe fermée (mais pas nécessairement simple)  $\mathcal{C}|_T \cup [a, b]$ . La preuve est divisée en quatre étapes. Dans la première étape, nous montrons que  $\mathcal{C}'$  est une courbe de Jordan. Dans la deuxième étape, nous montrons que si un sommet de  $T$  appartient à  $K$ , alors ce sommet appartient à  $\mathcal{C}$ . Dans la troisième étape, nous montrons que si deux sommets de  $T$  appartiennent à la même composante connexe de  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$ , ils appartiennent à la même composante connexe de  $T \setminus [a, b]$ . Dans la quatrième étape, nous montrons la réciproque : si deux sommets de  $T$  appartiennent à la même composante connexe de  $T \setminus [a, b]$  et n'appartiennent pas à  $\mathcal{C}$ , alors ils appartiennent à la même composante connexe de  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$ .

- *Étape 1.* Par la proposition 2.2.41,  $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}|_T$  n'intersecte pas  $T$  et comme  $T$  est convexe,  $]a, b[ \subset T$ , donc  $[a, b]$  n'intersecte pas l'arc simple  $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}|_T$ , ce qui prouve que  $\mathcal{C}'$  est une courbe de Jordan.
- *Étape 2.* Par la proposition 3.3.3  $\mathcal{C}|_T$  est inclus dans la boursouffure de  $T$ , donc les sommets de  $T$  appartenant à  $K$  appartiennent à  $\mathcal{C}|_T$ .

- *Étape 3.* Soient  $v_1$  et  $v_2$  deux sommets de  $T$  appartenant à la même composante connexe de  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$ . Les sommets  $v_1$  et  $v_2$  n'appartiennent pas à  $\mathcal{C}$ . Supposons par l'absurde qu'ils appartiennent à  $\mathcal{C}'$ . Donc ils appartiennent à  $]a, b[ = \mathcal{C}' \setminus \mathcal{C}$ . Cependant si un sommet de  $T$  appartient au segment  $[a, b]$  alors il est une des deux extrémités de  $[a, b]$ . Contradiction! Donc  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus (\mathcal{C} \cup K)$  et  $v_1$  et  $v_2$  n'appartiennent pas à  $\mathcal{C}'$ . De plus, par l'étape 2,  $v_1$  et  $v_2$  n'appartiennent pas à l'intérieur de  $K$ . Donc  $v_1$  et  $v_2$  appartiennent à la même composante connexe de  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}'$ . De plus, comme  $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}|_T$  n'intersecte pas  $T$ ,  $v_1$  et  $v_2$  appartiennent à la même composante connexe de  $T \setminus [a, b]$ .
- *Étape 4.* Réciproquement supposons que  $v_1$  et  $v_2$  appartiennent à la même composante connexe de  $T \setminus [a, b]$  et n'appartiennent pas à  $\mathcal{C}$ . Alors comme  $\mathcal{C}' \setminus [a, b]$  n'intersecte pas  $T$ ,  $v_1$  et  $v_2$  appartiennent à la même composante connexe de  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}'$ . Comme l'intérieur de  $K$  ne contient pas de sommet de  $T$ ,  $v_1$  et  $v_2$  appartiennent à la même composante connexe de  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$ . □

La proposition 3.3.4 ne permet pas de traiter le cas des points frontaliers. Pour ce cas, nous utiliserons le lemme 3.3.5.

**Lemme 3.3.5.** *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $\delta$ -CTLB et  $T$  un carré compatible avec  $\mathcal{C}$ . Si  $\mathcal{C}$  contient un sommet  $v$  de  $T$ , alors soit ce sommet  $v$  est une extrémité du  $T$ -arc le plus droit, soit l'arc  $\mathcal{C}|_T$  est inclus dans les deux côtés de  $T$  ayant  $v$  pour extrémité.*

*Démonstration.* Notons  $a$  et  $b$  les extrémités de  $\mathcal{C}|_T$ . Supposons qu'il existe un sommet  $v$  de  $T$  tel que  $v \in \mathcal{C}|_T \setminus \{a, b\}$ . Alors  $\widehat{avb} \leq \frac{\pi}{2}$ . Par la proposition 2.2.41,  $\kappa(\mathcal{C}|_T) \leq \frac{\pi}{2}$ . Donc  $\frac{\pi}{2} \leq \pi - \widehat{avb} \leq \kappa(\mathcal{C}|_T) \leq \frac{\pi}{2}$ . Donc  $\widehat{avb} = \frac{\pi}{2}$  et  $\kappa(\mathcal{C}|_T) = \frac{\pi}{2}$ . Donc  $a$  et  $b$  se situent sur les deux côtés adjacents de  $T$  contenant  $v$ . Soit  $c$  un point de  $\mathcal{C}|_T$  entre  $a$  et  $v$ . Par définition de la courbure totale,

$$\frac{\pi}{2} = \kappa([a, v, b]) \leq \kappa([a, c, v, b]) \leq \kappa(\mathcal{C}|_T) \leq \frac{\pi}{2},$$

donc  $\kappa([a, c, v, b]) = \frac{\pi}{2}$ , donc  $\widehat{cvb} = \frac{\pi}{2}$ , donc  $c \in [v, a]$ . De même, tout point de  $\mathcal{C}|_T$  entre  $v$  et  $b$  appartient au segment  $[v, b]$ . Donc  $\mathcal{C}|_T$  est inclus dans  $[a, v, b]$ . □

Le lemme 3.3.6 précise le lemme 3.3.5 en donnant une condition suffisante pour qu'un point frontalier d'un pixel dual  $T$  soit une extrémité de  $\mathcal{C}|_T$ .

**Lemme 3.3.6.** *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $\delta$ -CTLB et  $T$  un pixel dual compatible avec  $\mathcal{C}$  ayant un point frontalier  $v$  pour sommet. Si  $v$  appartient à un bel de  $T$  (c'est-à-dire si  $v$  est 4-adjacent à un point extérieur de  $T$ ), alors le sommet  $v$  est une extrémité de  $\mathcal{C}|_T$ .*

*Démonstration.* Soit  $a$  un point extérieur de  $T$  4-adjacent à  $v$  et  $b$  le second sommet de  $T$  4-adjacent à  $v$ . Par contradiction, supposons que  $v$  n'est pas une extrémité de  $\mathcal{C}|_T$ . Alors par le lemme 3.3.5, l'arc  $\mathcal{C}|_T$  est inclus dans les deux côtés de  $T$  ayant  $v$  pour extrémité  $]a, v[$  et  $]b, v[$ . Le  $T$  arc le plus droit est alors une ligne polygonale  $[p, v, q]$  de courbure totale égale à  $\frac{\pi}{2}$  avec  $p \in ]a, v[$  et  $q \in ]b, v[$  (voir figure 3.8). Par hypothèses de compatibilité, le diamètre de  $T$  est strictement inférieur à  $\delta$ , donc il existe un point  $p' \in \mathcal{C} \setminus T$  tel que l'arc  $\mathcal{C}_{p', q}$  de  $\mathcal{C}$  entre  $p'$  et  $q$  incluant  $\mathcal{C}|_T$  soit inclus dans un disque fermé de rayon strictement inférieur à  $\frac{\delta}{2}$ .

D'une part, la courbure totale de l'arc  $\mathcal{C}_{p',q}$  est strictement supérieure à  $\frac{\pi}{2}$ . Donc l'arc  $\mathcal{C}_{p',q}$  est distinct de  $\mathcal{C}_{p'}^q$ . D'autre part, par la proposition 2.2.30, l'arc le plus droit  $\mathcal{C}_{p'}^q$  est inclus dans le disque de diamètre  $[p',q]$ . Le diamètre de la courbe  $\mathcal{C}$  est alors strictement inférieure à  $\delta$ , ce qui contredit la proposition 2.2.33.  $\square$

La proposition 3.3.4 et le lemme 3.3.6 permettent de situer les extrémités de l'arc le plus droit d'un pixel dual. Ce qui nous permet de déduire pour un pixel dual  $T$  contenant des bels que les extrémités de  $\mathcal{C}|_T$  sont situés sur les bels de  $T$  (lemme 3.3.7) et de déduire la position relative de deux pixels duaux dont les arcs les plus droits s'intersectent (lemme 3.3.8).

**Lemme 3.3.7.** *Soient  $\mathcal{C}$  une courbe  $\delta$ -CTLB et une grille de pas  $h$  compatible avec  $\mathcal{C}$ .*

1. *Chaque bel de  $T$  contient une extrémité de  $\mathcal{C}|_T$ .*
2. *Soient  $b$  un bel et  $T_1$  et  $T_2$  les deux pixels duaux contenant  $b$ . Les arcs les plus droits de  $\mathcal{C}$  entre une extrémité de  $\mathcal{C}|_{T_1}$  sur  $b$  et une extrémité de  $\mathcal{C}|_{T_2}$  sur  $b$  sont inclus dans  $\mathcal{C}|_{T_1} \cap \mathcal{C}|_{T_2}$ .*

*Démonstration.*

1. Soit  $T$  un pixel dual contenant un bel  $b$ . Soit  $p_{\text{in}}$  l'extrémité intérieure de  $b$ . Si  $p_{\text{in}}$  est strictement intérieur alors par la proposition 3.3.4,  $b$  contient une extrémité de  $\mathcal{C}|_T$ . Si  $p_{\text{in}}$  est un point frontalier, alors par le lemme 3.3.6  $p_{\text{in}}$  est une extrémité de  $\mathcal{C}|_T$ .
2. Soient  $e_1$  et  $e_2$  des extrémités respectives des arcs  $\mathcal{C}|_{T_1}$  et  $\mathcal{C}|_{T_2}$  situées sur  $b$  ( $e_1$  et  $e_2$  existent d'après l'item 1). Comme  $T_1$  et  $T_2$  sont compatibles avec  $\mathcal{C}$ ,  $d(e_1, e_2) < \delta$ . L'arc le plus droit  $\mathcal{C}|_{e_1}^{e_2}$  est, par définition du  $T$ -arc le plus droit, inclus dans  $\mathcal{C}|_{T_1}$  et dans  $\mathcal{C}|_{T_2}$ , donc dans  $\mathcal{C}|_{T_1} \cap \mathcal{C}|_{T_2}$ .  $\square$

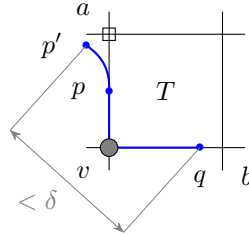


FIGURE 3.8 – Pixel dual possédant un sommet extérieur et un sommet frontalier. Tout arc contenant l'arc le plus droit de  $T$  sans posséder  $p$  pour extrémité est de courbure totale strictement supérieure à  $\frac{\pi}{2}$ .

**Lemme 3.3.8.** *Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux pixels duaux. Si l'intersection des arcs les plus droits  $\mathcal{C}|_{T_1}$  et  $\mathcal{C}|_{T_2}$  est non-vide, alors l'intersection  $T_1 \cap T_2$  est soit un segment de la grille soit un point frontalier.*

*Démonstration.* Si deux arcs de la courbe Jordan  $\mathcal{C}$  s'intersectent alors au moins une des deux extrémités de l'un des deux arcs appartient à l'autre arc. Supposons que  $\mathcal{C}|_{T_1}$  possède une extrémité  $a_1$  appartenant à  $\mathcal{C}|_{T_2}$  (le cas contraire se traite pareillement). Le point  $a_1$  appartient alors à  $T_1$  et à  $\mathcal{C}|_{T_2}$ , donc par la proposition 3.3.3, est inclus dans l'intersection de  $T_1$  et de la boursouffure de  $T_2$ .

La boursouffure de  $T_2$  intersecte le pixel dual  $T_1$  si et seulement si  $T_1$  et  $T_2$  partagent un côté ou un sommet. Dans le second cas, l'extrémité  $a_1$  appartient à l'intersection de  $T_1$  et de la boursouffure de  $T_2$ , réduite au sommet commun, qui est alors un point frontalier.  $\square$

### 3.4 Configurations exclues de la discrétisation d'une courbe CTLB

L'objectif de cette partie est d'exclure certaines configurations de la discrétisation d'une courbe CTLB. L'exclusion de ces configurations servira à démontrer des propriétés topologiques de la discrétisation des courbes CTLB (partie 3.5) ainsi qu'à mettre en correspondance le bord de la discrétisation et de l'objet continu (chapitre 4). Toutes les configurations sont décrites à isométrie de la grille  $h\mathbb{Z}^2$  près et à l'aide des notations définies dans la figure 3.7. Les configurations exclues sont listées dans l'annexe A.

**Lemme 3.4.1** (Configuration A,B,C exclues). *Soit  $C$  une courbe  $\delta$ -CTLB et un pas de grille  $h$  compatible avec  $C$ . Alors les configurations A,B et C (figure 3.9) sont exclues de la discrétisation de Gauss de  $C$ .*

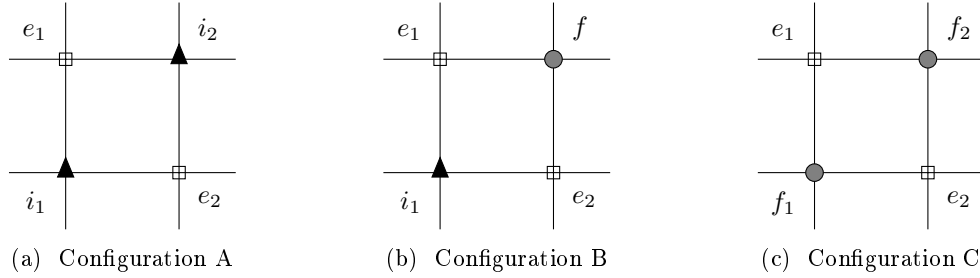


FIGURE 3.9 – Configurations A, B et C.

*Démonstration.* Configuration A. Par contradiction supposons que la configuration A apparaisse dans la discrétisation de  $C$ . Il existe alors un pixel dual  $T := \langle i_1, e_2, i_2, e_1 \rangle$  avec  $i_1$  et  $i_2$  deux points intérieurs stricts et  $e_1$  et  $e_2$  deux points extérieurs. Par le point 1) du lemme 3.3.7, chaque bel de  $T$  possède une extrémité de  $C_T$ . Comme les sommets de  $T$  n'appartiennent pas à  $C$ , l'arc  $C_T$  possède quatre extrémités. Contradiction!

Configuration B. Par contradiction supposons que la configuration B apparaisse dans la discrétisation de  $C$ . Il existe alors un pixel dual  $T := \langle i_1, e_2, f, e_1 \rangle$  avec  $i_1$  un point intérieur strict et  $e_1$  et  $e_2$  deux points extérieurs et  $f$  le point frontalier. Par le point 1) du lemme 3.3.7, les extrémités de l'arc  $C|_T$  se situent sur les bords ouverts  $]i_1, e_2[$  et  $]i_1, e_1[$ . Ce qui contredit que  $f$  est une extrémité de l'arc  $C|_T$  (lemme 3.3.6).

Configuration C. Par contradiction supposons que la configuration C apparaisse dans la discrétisation de  $C$ . Il existe alors un pixel dual  $T := \langle f_1, e_2, f_2, e_1 \rangle$  avec  $f_1$  et  $f_2$  deux points frontaliers et  $e_1$  et  $e_2$  deux points extérieurs. Par le lemme 3.3.6, les sommets  $f_1$  et  $f_2$  sont les extrémités de l'arc  $C|_T$ . Donc, par la proposition 3.3.4, les sommets extérieurs  $e_1$  et  $e_2$  appartiennent à deux composantes connexes distinctes de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ . Contradiction!  $\square$

**Lemme 3.4.2** (Configurations D, E, F exclues). *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $\delta$ -CTLB et un pas de grille  $h$  compatible avec  $\mathcal{C}$ . Alors les configurations D, E, F (figure 3.10) sont exclues de la discrétisation de Gauss de  $\mathcal{C}$ .*

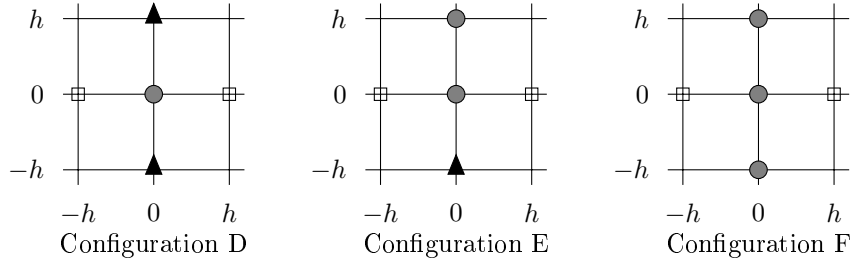


FIGURE 3.10 – Configurations D,E et F exclues

*Démonstration.* Par contradiction supposons qu'une des configurations D, E ou F apparaisse dans la discrétisation de  $\mathcal{C}$ . Pour les trois configurations D, E et F. Soit  $V$  le carré qui est l'union des quatre pixels duaux contenant le milieu des deux points extérieurs. Nous définissons un repère orthonormal d'origine le point frontalier et en fixant les coordonnées des deux points extérieurs à  $h(-1, 0)$  et  $(1, 0)$ . Par le lemme 3.3.6, le point frontalier  $(0, 0)$  est une extrémité de chaque  $T$ -arc le plus droit avec  $T$  un des quatre pixels duaux ayant  $(0, 0)$  pour sommet. L'union de ces quatre  $\mathcal{C}|_T$  est alors connexe par arcs.

**Configuration D** Soit  $T$  l'un de ces quatre pixels duaux inclus dans  $V$  et soit  $p$  l'extrémité de  $\mathcal{C}|_T$  distincte de  $(0, 0)$ . Par le lemme 3.3.6, si le dernier sommet de  $T$  (également sommet de  $V$ ) est un point frontalier, alors ce point est une extrémité de  $\mathcal{C}|_T$ . Sinon, par la proposition 3.3.4, le segment  $[(0, 0), p]$  sépare les points intérieurs et les points extérieurs de  $T$ . Dans les deux cas, le point  $p$  se situe alors sur  $\partial V$ . De plus, le point  $p$  ne se situe pas dans la boursouffure d'un des trois autres pixels duaux  $T'$  de  $V$ . Donc le point  $p$  n'appartient pas au  $T'$ -arc le plus droit. Ainsi les quatre arcs les plus droits des quatre pixels duaux ont une intersection réduite à  $\{(0, 0)\}$ . Étant donné  $n$  arcs d'une courbe de Jordan ayant un point en commun, il y a au plus deux extrémités qui n'appartiennent qu'à un seul arc. Ce qui contredit la simplicité de  $\mathcal{C}$ .

**Configuration E** Supposons que le point intérieur strict a pour coordonnées  $(0, -1)$ . D'une part, par les mêmes arguments que pour la configuration D, les arcs les plus droits des pixels duaux  $P_{h(-0.5, -0.5)}$  et  $P_{h(0.5, -0.5)}$  possède le point frontalier  $(0, 0)$  comme extrémité ainsi qu'une second extrémité sur  $\partial V$ . D'autre part les arcs  $\mathcal{C}|_{P_{h(-0.5, 0.5)}}$  et  $\mathcal{C}|_{P_{h(0.5, 0.5)}}$  sont respectivement inclus dans les boursouffures des pixels duaux  $P_{h(-0.5, 0.5)}$  et  $P_{h(0.5, 0.5)}$  (proposition 2.2.30) et contiennent le point frontalier  $h(0, 1)$ . La courbe de Jordan  $\mathcal{C}$  possède alors trois arcs s'intersectant en  $(0, 0)$  et dont l'union possède trois extrémités. Ce qui contredit la simplicité de  $\mathcal{C}$ .

**Configuration F** Par le lemme 3.3.6, le point  $(0, 0)$  est l'une des deux extrémités des deux arcs  $\mathcal{C}|_{P_{h(-0.5, 0.5)}}$ ,  $\mathcal{C}|_{P_{h(0.5, 0.5)}}$ . Par la proposition 2.2.41, le point  $h(0, 1)$  appartient aux deux arcs  $\mathcal{C}|_{P_{h(-0.5, 0.5)}}$ ,  $\mathcal{C}|_{P_{h(0.5, 0.5)}}$ , donc par le lemme 3.3.5 et la proposition 2.2.30 l'union des deux



arcs  $\mathcal{C}|_{P_h(-0.5,0.5)} \cup \mathcal{C}|_{P_h(0.5,0.5)}$  est incluse dans l'union du disque de diamètre  $[(0,0), h(0,1)]$  et du segment  $[h(-1,1), h(1,1)]$ . De plus, par la proposition 2.2.41, l'intersection de  $\mathcal{C}$  avec  $P_h(-0.5,0.5) \cup P_h(0.5,0.5)$  est incluse dans  $\mathcal{C}|_{P_h(-0.5,0.5)} \cup \mathcal{C}|_{P_h(0.5,0.5)}$ . Enfin l'union des deux arcs  $\mathcal{C}|_{P_h(-0.5,0.5)}$  et  $\mathcal{C}|_{P_h(0.5,0.5)}$  de  $\mathcal{C}$  d'intersection non-vide est un arc de  $\mathcal{C}$ . De même  $\mathcal{C} \cap (P_h(-0.5,-0.5) \cup P_h(0.5,-0.5)) \subset \mathcal{C}|_{P_h(-0.5,-0.5)} \cup \mathcal{C}|_{P_h(0.5,-0.5)}$  est un arc de  $\mathcal{C}$  passant par les points  $h(0,-1)$  et  $(0,0)$  et inclus dans l'union du disque de diamètre  $[h(0,-1), (0,0)]$  avec le segment  $[h(-1,-1), h(1,-1)]$ . Ainsi  $\mathcal{C} \cap V$  est un arc de  $\mathcal{C}$  qui sépare deux points extérieurs dans deux composantes connexes de  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$  distinctes. Contradiction!

□

**Lemme 3.4.3** (Configuration G exclue). *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $\delta$ -CTLB et un pas de grille  $h$  compatible avec  $\mathcal{C}$ . Alors la configuration G (figure 3.11) est exclue de la discrétisation de Gauss de  $\mathcal{C}$ .*

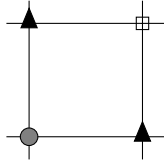


FIGURE 3.11 – Configuration G

*Démonstration.* Par contradiction, supposons que la configuration G apparaisse dans la discrétisation de  $\mathcal{C}$ . D'après le lemme 3.3.7, les extrémités du  $T$ -arc le plus droit sont sur les deux bords de la configuration G, ce qui contredit le lemme 3.3.5. □

**Lemme 3.4.4** (Configuration H exclue). *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $\delta$ -CTLB et un pas de grille  $h$  compatible avec  $\mathcal{C}$ . Alors la configuration H (figure 3.12) est exclue de la discrétisation de  $\mathcal{C}$ .*

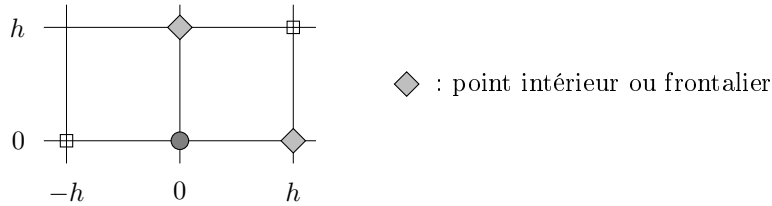


FIGURE 3.12 – Configuration H

*Démonstration.* Par contradiction, supposons que la configuration H apparaisse dans la discrétisation de  $\mathcal{C}$ . Nous définissons un repère orthonormal en fixant les coordonnées du point frontalier à  $(0,0)$ , des points intérieurs à  $h(0,1)$  et  $h(1,0)$  et des points extérieurs à  $h(-1,0)$  et  $h(1,1)$ . Par le lemme 3.3.7, les extrémités de l'arc  $\mathcal{C}|_{P_h(0.5,0.5)}$  se situent sur les bords de  $P_h(0.5,0.5)$ . Donc le point

frontalier  $(0,0)$  n'est pas une extrémité de  $\mathcal{C}|_{P_h(0.5,0.5)}$ . Par le lemme 3.3.6, l'arc  $\mathcal{C}|_{P_h(0.5,0.5)}$  est inclus dans  $[h(0,1), (0,0), h(1,0)]$ , et comme ses extrémités sont situées sur les bords  $[h(0,1), h(1,1)]$  et  $[h(1,1), h(1,0)]$ ,  $\mathcal{C}|_{P_h(0.5,0.5)} = [h(0,1), (0,0), h(1,0)]$ .

De plus, par la proposition 2.2.31, l'intersection de la courbe de Jordan  $\mathcal{C}$  avec la boule fermée  $\bar{B}((0,0), h)$  est connexe par arc. Comme la ligne polygonale  $[h(0,1), h(0,0), h(1,0)]$  est de courbure totale égale à  $\frac{\pi}{2}$ , alors l'intersection de la boule fermée  $\bar{B}((0,0), h)$  avec  $\mathcal{C}$  est réduite à  $[h(0,1), (0,0), h(1,0)]$ . L'intersection de la courbe  $\mathcal{C}$  avec l'ensemble fermé  $P_h(0.5,0.5) \cup B((0,0), h)$  est alors également la ligne polygonale  $[h(0,1), (0,0), h(1,0)]$ . Ainsi les deux points extérieurs de la configuration  $G$ , les points  $h(-1,0)$  et  $h(1,1)$ , appartiennent à deux composantes connexes distinctes de  $P_h(0.5,0.5) \cup B((0,0), h) \setminus [h(0,1), (0,0), h(1,0)]$ . Donc les deux points extérieurs  $h(-1,0)$  et  $h(1,1)$  appartiennent à deux composantes connexes distinctes de  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$ , ce qui contredit le théorème de Jordan.  $\square$

### 3.5 Préservation de la topologie d'une forme CTLB

L'exclusion de certaines configurations (partie 3.4) ainsi que le lemme 3.5.1 nous permettent de démontrer le résultat principal du chapitre garantissant que le bord de la discrétisation de Gauss d'une courbe CTLB sur une grille compatible est une courbe de Jordan discrète (théorème 3.5.2).

**Lemme 3.5.1.** *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe CTLB et soit une grille de pas  $h$  compatible avec  $\mathcal{C}$ . Soit  $(b_j)_{j \in \mathbb{Z}_N}$  une suite de bords de la discrétisation de Gauss de  $\mathcal{C}$  formant une courbe de Jordan discrète. Alors :*

1. la courbe  $\mathcal{C}$  est l'union des arcs les plus droits  $\mathcal{C}|_{T_j}$  avec  $T_j$  le pixel dual contenant  $b_j$  et  $b_{j+1}$
2. tout bord n'appartenant pas à  $\{b_j\}_{j \in \mathbb{Z}_N}$  possède un point frontalier pour extrémité.

*Démonstration.* 1. Par le lemme 3.3.7.1), l'arc le plus droit  $\mathcal{C}|_{T_j}$  possède une extrémité sur  $b_j$  et la seconde sur  $b_{j+1}$ . De plus, par le point 2 du lemme 3.3.7 pour tout  $j \in \mathbb{Z}_N$ , l'intersection de  $\mathcal{C}|_{T_j}$  et de  $\mathcal{C}|_{T_{j+1}}$  est non-vide. L'union  $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}_N} \mathcal{C}|_{T_j}$  est alors un arc fermé de  $\mathcal{C}$ , c'est-à-dire la courbe de Jordan  $\mathcal{C}$  en entier.

2. Pour tout  $i \in \mathbb{Z}_N$ , notons  $T_i$  le pixel dual contenant les bords  $b_i$  et  $b_{i+1}$ . Le bord  $b_i$  est alors inclus dans l'intersection de  $T_i$  et  $T_{i-1}$ . Supposons par contradiction que l'extrémité intérieure de  $b_i$  soit un point intérieur strict (voir figure 3.13). Le bord ouvert  $b_i$  contient alors un point  $p$  de  $\mathcal{C}$  (par le lemme 3.3.7). Par le point 1), le point  $p$  appartient à un arc le plus droit  $\mathcal{C}|_{T_j}$  avec  $j \in \mathbb{Z}_N$ . Donc par la proposition 3.3.3, le bord ouvert  $b_i$  intersecte la boursouffure de  $T_j$ . Or les deux seuls pixels dont la boursouffure intersecte le bord ouvert  $b_i$  sont  $T_i$  et  $T_{i-1}$ . Donc  $T_j = T_i$  ou  $T_j = T_{i-1}$ . Ce qui contredit  $b_i \notin \{b_j\}_{j \in \mathbb{Z}_N}$ . Donc une des extrémités de  $b_i$  est un point frontalier.  $\square$

**Théorème 3.5.2.** *Soit  $S$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  homéomorphe à un disque fermé dont la frontière est une courbe  $\delta$ -CTLB. Alors pour toute grille de pas  $h$  compatible avec  $\mathcal{C}$ ,*

1. la discrétisation de Gauss  $\text{Dig}_G^h(S)$  est bien composée et 4-connexe,
2. le bord  $\partial_G^h(S)$  est une courbe de Jordan discrète  $(b_i)_{i \in \mathbb{Z}_N}$ ,
3. la courbe  $\mathcal{C}$  est incluse dans la boursouffure de la courbe discrète  $\partial^h(S)$  et est l'union  $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}_N} \mathcal{C}|_{T_i}$  où  $T_i$  est le pixel dual contenant  $b_i$  et  $b_{i+1}$ .

Le théorème est illustré figure 3.14.

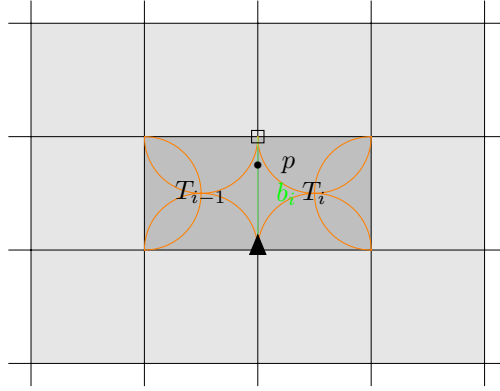


FIGURE 3.13 – Le bel ouvert  $b_i$  (en vert), côté commun des pixels duaux  $T_{i-1}$  et  $T_i$ , n'intersecte pas la boursofflure (délimité par un arc orange) d'un autre pixel dual que  $T_{i-1}$  et  $T_i$ .

*Démonstration.* — Par le lemme 3.4.1, les configurations A,B et C (Annexe A) sont exclues de la discrétisation de Gauss de  $S$ . Donc par la propriété 3.1.6,  $\text{Dig}_G^h(S)$  est bien composée.

- Par le lemme 3.1.10, le bord  $\partial_G^h(S)$  est une union disjointe de courbes de Jordan. Soit  $(b_i)_{i \in \mathbb{Z}_N}$  une des courbes de Jordan du bord  $\partial_G^h(S)$  et soit  $(b'_j)_{j \in \mathbb{Z}_{N'}}$  une autre courbe de Jordan du bord  $\partial_G^h(S)$ . Notons pour tout  $i \in \mathbb{Z}_N$ , respectivement pour tout  $j \in \mathbb{Z}_{N'}$ ,  $T_i$ , respectivement  $T'_j$ , le pixel dual contenant  $b_i$  et  $b_{i+1}$  (respectivement  $b'_j$  et  $b'_{j+1}$ ). Montrons que tous les points intérieurs des pixels duaux  $T_i$  sont des points frontaliers  $f_k$  formant une suite de points de  $h\mathbb{Z}^2$  tels que  $f_k$  et  $f_{k+1}$  sont 4-adjacents.

Notons  $f_0$  le point frontalier du bel  $b_0$  et  $\phi(0) := 0$  et construisons itérativement  $(f_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\phi(N)}}$ . Pour tout  $i \in \mathbb{Z}_N$ , par le lemme 3.5.1, le bel  $b_{i+1}$  possède un point frontalier,

- soit le point frontalier du bel  $b_{i+1}$  est confondu avec le point frontalier  $f_{\phi(i)}$  et nous définissons alors  $\phi(i+1) := \phi(i)$ .
- soit le point frontalier du bel  $b_{i+1}$  est 4-adjacent au point frontalier  $f_{\phi(i)}$  et nous définissons alors  $\phi(i+1) := \phi(i) + 1$  et  $f_{\phi(i+1)}$  comme étant le point frontalier de  $b_{i+1}$ .
- soit le point frontalier du bel  $b_{i+1}$  est diagonalement opposé au point frontalier  $f_{i+1}$ . Comme  $T_i$  contient exactement deux bels, le sommet de  $T_i$  n'appartenant pas aux bels  $b_i$  et  $b_{i+1}$  est un point intérieur, notons le  $g$  (voir figure 3.15). Montrons que ce point  $g$  est un point frontalier. Nous définissons un repère orthonormé (à symétrie par rapport à la droite  $((0,0), (1,1))$  près) en fixant les coordonnées de  $g$  à  $(1,1)$  et les coordonnées des points frontaliers à  $(0,1)$  et  $(1,0)$  (voir figure 3.15). Par le lemme 3.3.8, les seuls pixels duaux  $T'_j$  dont l'arc le plus droit intersecte  $\mathcal{C}|_{T_i}$  sont les voisins 8-adjacents partageant soit un côté soit un point frontalier. De plus, les pixels duaux  $T'_j$  sont distincts de  $T_{i+1} = P_{(1.5,2.5)}$  et de  $T_{i-1} = P_{(2.5,1.5)}$ . Donc les seuls pixels duaux  $T'_j$  dont l'arc le plus droit intersecte  $\mathcal{C}|_{T_i}$  sont  $P_{(0.5,2.5)}$ ,  $P_{(0.5,1.5)}$ ,  $P_{(1.5,0.5)}$  et  $P_{(2.5,0.5)}$ . De plus, l'intersection de  $T_i = P_{(1.5,1.5)}$  et des boursofflures de  $P_{(0.5,2.5)}$  et de  $P_{(2.5,0.5)}$  est réduite aux points frontaliers  $(1,2)$  et  $(2,1)$  qui appartiennent aux arcs les plus droits de  $P_{(0.5,1.5)}$  et  $P_{(1.5,0.5)}$ . Donc l'arc le plus droit  $\mathcal{C}|_{T_i}$  est inclus dans l'union  $\mathcal{C}|_{P_{(0.5,1.5)}} \cup \mathcal{C}|_{P_{(1.5,0.5)}}$ . Donc  $\mathcal{C}|_{P_{(0.5,1.5)}}$  et  $\mathcal{C}|_{P_{(1.5,0.5)}}$  sont d'intersection non-vide et par lemme 3.3.8, le sommet  $(1,1)$  commun à  $\mathcal{C}|_{P_{(0.5,1.5)}}$  et

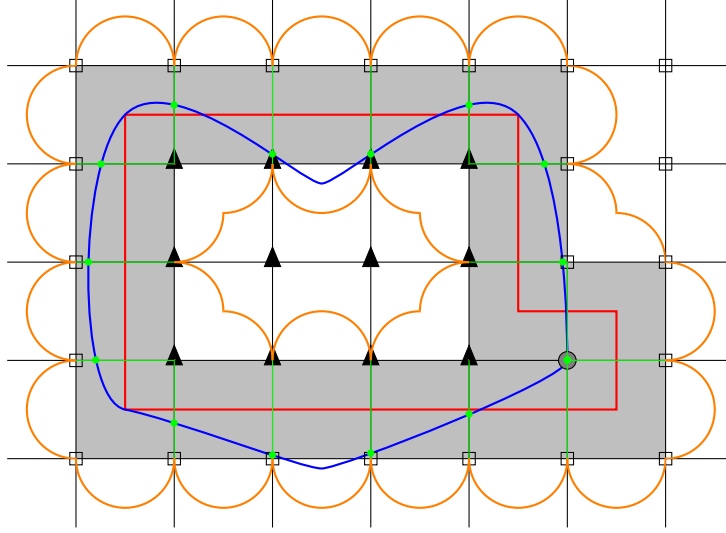


FIGURE 3.14 – En bleu, une courbe  $\mathcal{C}$   $\delta$ -CTLB sur une grille compatible. Sa discrétisation de Gauss est alors bien composée et 4-connexe (la reconstruction du bord  $\partial\Box_G^h(\mathcal{C})$  est représentée en rouge). De plus, le bord de la discrétisation forme une courbe de Jordan discrète ( $b_i$ ) (suite de bords vertes) et  $\mathcal{C}$  est égale à l'union des arcs les plus droits (délimités par les points verts) des pixels dans  $T_i$  (représentés en gris) contenant  $b_i$  et  $b_{i+1}$ . La courbe  $\mathcal{C}$  est incluse dans la boursouffure de la courbe discrète ( $b_i$ ) (délimité par les arcs de cercles oranges).

$\mathcal{C}|_{P_{(1.5, 0.5)}}$  est un point frontalier. Nous notons alors  $\phi(i+1) := \phi(i) + 2$  avec  $f_{\phi(i)+1} := g$  et  $f_{\phi(i+1)}$  le point frontalier du bel  $b_{i+1}$ .

L'union  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}_{\phi(N)}} \mathcal{C}|_{f_k}^{f_{k+1}}$  est alors un arc fermé de  $\mathcal{C}$ , c'est-à-dire la courbe  $\mathcal{C}$  en entier. Comme, par le lemme 3.5.1,  $\mathcal{C} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_N} \mathcal{C}|_{T_i} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}_{N'}} \mathcal{C}|_{T'_j}$  et que pour tout  $k$ ,  $\mathcal{C}|_{f_k}^{f_{k+1}}$  est inclus dans le disque de diamètre  $[f_k, f_{k+1}]$ , chaque segment  $[f_k, f_{k+1}]$  est un côté commun d'un  $T_i$  et d'un  $T'_j$  contenant chacun au moins un point extérieur pour sommet (figure 3.16). Ainsi la composante intérieure de la courbe de Jordan  $\mathcal{C}$  contient au moins un point extérieur. Contradiction! Le bord de  $\text{Dig}_G^h(\mathcal{C})$  est formé d'une seule courbe de Jordan discrète. Donc  $\text{Dig}_G^h(\mathcal{C})$  est 4-connexe. □

Les majorations  $\theta \leq \frac{\pi}{2}$  et  $\sqrt{2}h < \delta$  sont optimales dans le théorème 3.5.2. En effet les figures 3.17 et 3.18 présentent des contre-exemples lorsqu'une des deux majorations n'est pas vérifiée.

L'usage des courbes CTLB ne se restreint pas à la discrétisation de Gauss. En modifiant les hypothèses de compatibilité, nous pouvons montrer que certaines discrétisations sont bien composées (propositions 3.5.3 et 3.5.4).

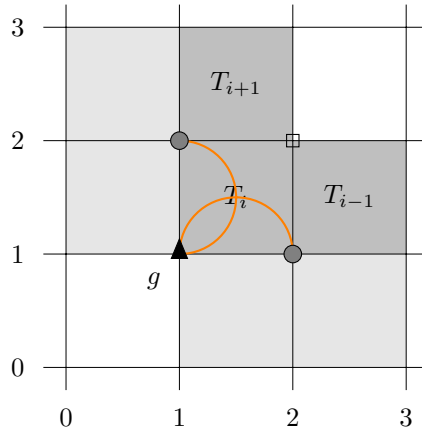


FIGURE 3.15 – Les seuls pixels duaux  $T'_j$  dont l'arc le plus droit intersecte  $T_i$  sont  $P_{(0.5,2.5)}$ ,  $P_{(0.5,1.5)}$ ,  $P_{(1.5,0.5)}$ ,  $P_{(2.5,0.5)}$ . L'intersection des boursouffures de ces pixels duaux est délimitée par les arcs de cercle orange.

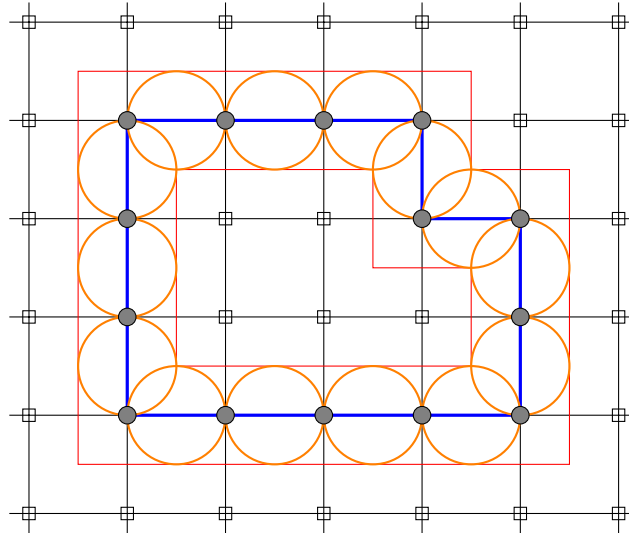


FIGURE 3.16 – La courbe  $\mathcal{C}$  (en bleu) passe par la suite fermée  $(f_k)$  de points frontaliers 4-connexe. La courbe  $\mathcal{C}$  est alors incluse dans l'union de disques de diamètre  $[f_k, f_{k+1}]$  (délimités par les cercles oranges). L'une des courbes de Jordan discrètes est dans la composante intérieure de  $\mathcal{C}$  alors que l'autre est à l'extérieur de  $\mathcal{C}$  (en rouge).

**Proposition 3.5.3** (Discrétisation de superrecouvrement d'une courbe CTLB). *Soit  $S$  un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{R}^2$  à bord CTLB. Si  $h < \frac{\sqrt{2}}{4} \delta$  alors  $\text{Dig}_\Gamma^h(S)$  est bien composé.*

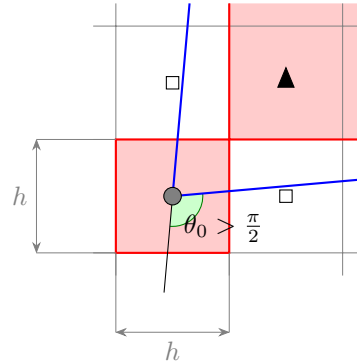


FIGURE 3.17 – Le pic bleu ayant son sommet au point frontalier est  $(\theta, \delta)$ -CTLB et  $\sqrt{2}h < \delta$  mais  $\theta > \frac{\pi}{2}$ . La discrétisation de Gauss du pic n'est alors pas bien composée.

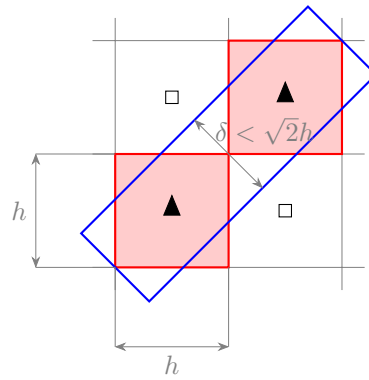


FIGURE 3.18 – La discrétisation de Gauss du rectangle bleu n'est pas bien composée bien que sa frontière soit  $\delta$ -CTLB. Le pas de la grille  $h$  est trop grand par rapport à  $\delta$ .

*Démonstration.* Supposons par l'absurde qu'il existe  $p_1, p_2 \in \text{Dig}_{\cap}^h$  8-adjacents mais pas 4-adjacents. Autrement dit les deux pixels  $P_{p_3}, P_{p_4}$  4-adjacents à  $P_{p_1}$  et  $P_{p_2}$  n'intersectent pas  $S$ . Les pixels  $P_{p_3}$  et  $P_{p_4}$  ayant chacun un côté commun avec  $P_{p_1}$  et  $P_{p_2}$ , les pixels  $P_{p_1}$  et  $P_{p_2}$  contiennent tous deux un point de  $S$  et un point de  $S^c$ , ils contiennent alors tous deux un point de  $\mathcal{C}$ . Soient  $a_1, a_2 \in \mathcal{C}$  qui appartiennent respectivement à  $P_{p_1}$  et à  $P_{p_2}$ . La distance entre  $a_1$  et  $a_2$  est strictement inférieure à  $\delta$ . Par la proposition 2.2.30, l'arc le plus droit  $\mathcal{C}|_{a_1}^{a_2}$  est inclus dans le disque de diamètre  $[a_1, a_2]$ . Donc l'arc le plus droit  $\mathcal{C}|_{a_1}^{a_2}$  intersecte  $P_{p_3}$  ou  $P_{p_4}$ . Donc l'un de ces deux pixels appartient à  $\text{Dig}_{\cap}^h$ . Contradiction! Donc  $\text{Dig}_{\cap}^h$  est bien composé.  $\square$

**Proposition 3.5.4.** *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $\delta$ -CTLB pour  $2\sqrt{2}h < \delta$ , la discrétisation de Hausdorff maximale est bien composée.*

*Démonstration.* Pour une grille carrée, le rayon de recouvrement  $r_H^{h\mathbb{Z}^2}$  (définition 3.2.7) vaut  $\frac{\sqrt{2}}{2}h$ . Par la propriété 3.2.8, un pixel  $P_p$  appartient à la discrétisation de Hausdorff maximale si et seulement si  $\bar{B}(p, r_H) \cap S \neq \emptyset$ . Supposons par contradiction qu'il existe une configuration croisée, c'est-à-dire qu'il existe un carré  $\langle i_1, e_1, i_2, e_2 \rangle$  de côté  $h$  tel que  $i_1, i_2 \in \text{Dig}_H^h$  et  $e_1, e_2 \in \mathbb{Z}^2 \setminus \text{Dig}_H^h$  (figure 3.19). Tous les points de  $\bar{B}(e_1, r_H)$  et de  $\bar{B}(e_2, r_H)$  appartiennent à  $S^c$ . De plus, il existe un point de  $S$  dans  $\bar{B}(i_1, r_H)$  et un autre point de  $S$  dans  $\bar{B}(i_2, r_H)$ . Les disques  $\bar{B}(i_1, r_H)$  et  $\bar{B}(i_2, r_H)$  contiennent tous deux des points de  $S$  et de  $S^c$ , ils contiennent donc tous deux des points de  $\mathcal{C}$ . Soient  $a_1 \in \mathcal{C} \cap \bar{B}(i_1, r_H)$  et  $a_2 \in \mathcal{C} \cap \bar{B}(i_2, r_H)$ . L'arc le plus droit entre  $a_1$  et  $a_2$  est inclus dans le disque  $D$  de diamètre  $[a_1, a_2]$ , mais n'intersecte pas  $\bar{B}(e_1, r_H) \cup \bar{B}(e_2, r_H)$ . De plus,  $a_1, a_2$  sont dans deux composantes connexes distinctes de  $D \setminus (\bar{B}(e_1, r_H) \cup \bar{B}(e_2, r_H))$ . Contradiction!  $\square$

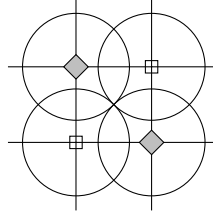


FIGURE 3.19 – Configuration croisée dans la discrétisation de Hausdorff. La forme  $S$  n'intersecte pas les disques fermés de rayon  $r_h$  centrés aux points extérieurs mais intersecte les disques fermés de rayon  $r_h$  centrés aux points intérieurs.

### 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé des outils mathématiques permettant d'établir des résultats locaux, à l'échelle d'un pixel, sur la discrétisation d'une courbe CTLB (partie 3.3). Ces outils nous ont permis d'écarter certaines configurations de la discrétisation de Gauss d'une courbe CTLB (partie 3.4). Nous en avons ainsi déduit que la discrétisation de Gauss d'une courbe CTLB est bien composée et 4-connexe (théorème 3.5.2) et que son bord discret forme une unique courbe de Jordan discrète.

Le problème réciproque — *est-ce que tout ensemble bien-composé et 4-connexe est la discrétisation de Gauss d'une courbe CTLB compatible avec la grille?* — est également pertinent. Une réponse positive permettrait en suivant la stratégie indiquée dans [PKNP19] d'appliquer des transformations rigides à une forme discrète en préservant ses propriétés topologiques (être bien composée et 4-connexe). L'idée consiste à construire algorithmiquement une courbe  $\mathcal{C}$  CTLB à partir d'une forme discrète donnée, à appliquer ensuite la transformation rigide  $\mathcal{T}$  à la courbe  $\mathcal{C}$ , puis à rediscrétiser la courbe  $\mathcal{T}(\mathcal{C})$  pour obtenir la transformation rigide discrète. Comme remarqué dans [PKNP19, partie 5.1], pour un ensemble discret  $A$  bien composé et 4-connexe de  $h\mathbb{Z}^2$ , la reconstruction  $A \oplus P_0$  est quasi- $(\sqrt{2}h)$ -régulière (définition 2.1.10). Donc la discrétisation d'une transformation rigide de  $A \oplus P_0$  est prouvée d'être bien composée et 4-connexe seulement pour des pas de grille inférieurs à  $\frac{\sqrt{2}}{2}h$  (proposition 3.2.14). Le même problème se produit pour les courbes CTLB (la discrétisation d'une courbe  $\delta$ -CTLB sur une grille compatible de pas  $h$  est  $h$ -CTLB). Pour certaines

formes discrètes  $S$ , nous pouvons cependant trouver des courbes CTLB compatibles avec la grille de discrétisation  $S$ . Pour la recherche d'une réponse positive au problème, il suffit probablement de ne rechercher que des polygones CTLB. En effet une courbe  $\mathcal{C}$   $\delta$ -CTLB possédant une certaine discrétisation possède un polygone inscrit de courbure totale inférieure à  $\mathcal{C}$  et possédant la même discrétisation.

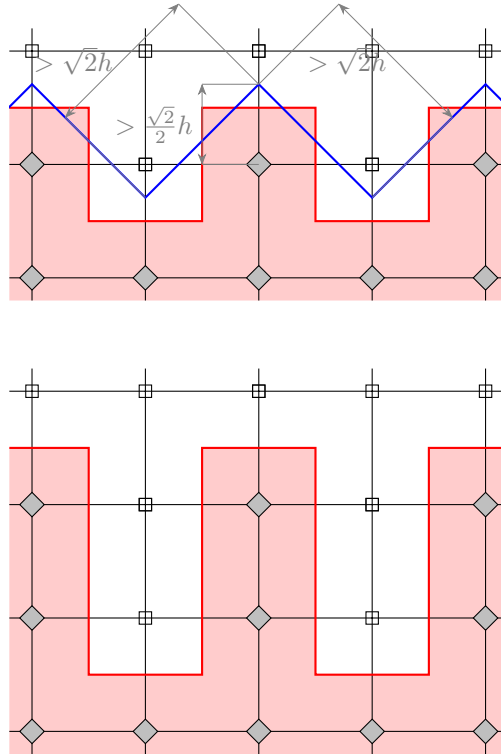


FIGURE 3.20 – En haut, exemple de courbe CTLB compatible avec la grille ayant la forme discrète rouge comme discrétisation de Gauss. En bas, forme discrète dont nous ne connaissons pas de courbe compatible dont elle est la discrétisation.

Une autre perspective est d'étendre le théorème 3.5.2 aux surfaces CTLB dans  $\mathbb{R}^3$  (voir conclusion du chapitre précédent 2.4). Cependant Steddinger propose une surface très régulière mais dont la discrétisation n'est pas bien composée [SLS07, Figure 4]. Il serait en revanche possible de montrer que la discrétisation d'une surface CTLB est 6-connexe. Une telle preuve pourrait s'appuyer sur le résultat [PKNP19, Proposition 2] (indiquant que la discrétisation de tout ensemble quasi( $r$ )-régulier avec marge  $\frac{2}{\sqrt{3}} - 1$ , ainsi que de son complémentaire, est 6-connexe) en montrant qu'une surface CTLB est quasi-régulière (extension du théorème 2.3.15).

Dans ce chapitre nous avons démontré que le bord de la discrétisation d'une courbe CTLB est une courbe de Jordan discrète. Dans le chapitre suivant, nous définissons une rétro-discrétisation permettant d'associer aux termes de la courbe de Jordan discrète des points  $\mathcal{C}$  tout en respectant



l'ordre de parcours de  $\mathcal{C}$ . Pour cela, nous nous appuyerons sur les résultats obtenus dans les parties 3.3 et 3.4.



## Chapitre 4

# Rétro-discrétisation

Dans le chapitre 5, afin de calculer l'erreur commise par un estimateur, nous comparerons l'estimation basée sur des points échantillonnant la courbe continue  $\mathcal{C}$  à l'estimation basée sur des points échantillonnant la courbe de Jordan discrète  $\partial_G^h(\mathcal{C})$ . Dans le chapitre précédent (chapitre 3), nous avons montré que le bord  $\partial_G^h(\mathcal{C})$  de la discrétisation d'une forme  $\mathcal{C}$  CTLB est une courbe de Jordan discrète pour  $h$  suffisamment petit (définition 3.1.9 et théorème 3.5.2). L'objectif de ce chapitre est de déterminer comment associer des points échantillonnant la courbe continue  $\mathcal{C}$  aux points échantillonnant la courbe discrète  $\partial_G^h(\mathcal{C})$ . De plus, afin d'approcher correctement les quantités géométriques sur la courbe continue, les points associés doivent respecter l'ordre induit sur la courbe continue.

Dans [LT16], la projection étudiée par Federer [Fed59] permet d'associer chaque point de la reconstruction du bord  $\partial\Box_G^h(\mathcal{C})$  à un point de  $\mathcal{C}$ . Cette projection est bien définie sur les courbes à portée strictement positive (définition 2.1.2). Même si la restriction de cette projection à une marge autour de la courbe  $\mathcal{C}$  n'est pas injective, une majoration de la taille de l'ensemble des points de  $\mathcal{C}$  ayant au moins deux antécédents par  $\xi$  est démontrée dans [LT16, Théorème 3].

Ici, nous proposons d'associer des points du bord de la discrétisation à des points d'une courbe  $\mathcal{C}$  n'ayant pas nécessairement une portée strictement positive. Remarquons également que la seule information apportée par l'ensemble des points d'une arête de  $\partial\Box_G^h(\mathcal{C})$  est la séparation entre un point intérieur et un point extérieur. Ainsi autant d'information est conservée en associant uniquement les arêtes de  $\partial\Box_G^h(\mathcal{C})$  (ou de façon équivalente les bels de  $\partial_G^h(\mathcal{C})$ ) à des points de la courbe qu'en associant l'ensemble de la courbe  $\partial\Box_G^h(\mathcal{C})$ . Chaque bel contenant un point intérieur et un point extérieur de  $\text{Dig}_G^h(\mathcal{C})$ , la courbe  $\mathcal{C}$  intersecte le bel (sinon il y aurait un segment qui relierait deux composantes connexes de  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$  sans intersecter  $\mathcal{C}$ ). Cela nous permet de définir la notion de *rétro-discrétisation*. En revanche, cette intersection n'est pas nécessairement unique.

**Définition 4.0.1** (Rétro-discrétisation). Soit  $\mathcal{C}$  une courbe de Jordan et un pas de grille  $h > 0$ . Une application  $\xi : \partial_G^h(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$  est appelée *rétro-discrétisation* si pour tout bel  $p \in \partial_G^h(\mathcal{C})$ ,  $\xi(p) \in p$ .

Sur  $\mathbb{R}$  une application continue est un homéomorphisme sur son image si et seulement si l'application est strictement monotone. Si nous ne pouvons pas définir de bijection entre  $\partial_G^h(\mathcal{C})$  et  $\mathcal{C}$  nous pouvons en revanche vérifier si l'application  $\xi : \partial_G^h(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$  est «monotone». Pour cela il est nécessaire de définir une notion d'ordre sur la courbe de Jordan  $\mathcal{C}$ . Nous étendons alors dans la

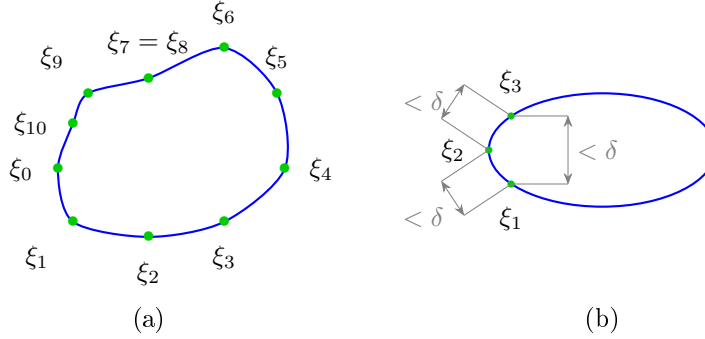


FIGURE 4.1 – Sous-figure a) La suite  $(\xi_k)_{k \in \llbracket 0,10 \rrbracket}$  est une semi-chaîne de la courbe de Jordan bleue. Par exemple les intersections des ensembles  $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{Z}_{11}}$  avec les deux arcs de la courbe bleue délimités par  $\xi_3$  et  $\xi_8$  sont les sous-ensembles  $\{\xi_8, \xi_9, \xi_{10}, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3\}$  et  $\{\xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7, \xi_8\}$  (car  $\xi_7 = \xi_8$ ). Sous-figure b) Exemple de semi-chaîne n'étant pas une semi-chaîne d'échantillonnage. Deux points de  $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$  sont toujours à distance strictement inférieure à  $\delta$  mais l'arc le plus droit entre  $\xi_1$  et  $\xi_3$  contient  $\xi_2$ .

partie 4.1 la notion de chaîne (item 5 Préliminaires sur les courbes) pour inclure les suites de points «croissantes» avec plusieurs occurrences consécutives du même terme.

## 4.1 Semi-chaîne

En plus d'avoir une notion d'ordre pour une suite de points d'une courbe de Jordan, nous souhaitons être capable de définir quand cette suite de points échantillonne correctement  $\mathcal{C}$ . La figure 4.1.b présente un exemple de suite de points de  $\mathcal{C}$  à distance mutuelle inférieure à  $\delta$  mais n'échantillonnant pas correctement  $\mathcal{C}$ .

**Définition 4.1.1** (semi-chaîne). Soit  $N \geq 1$ . Une suite  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}_N}$  de points d'une courbe de Jordan forme une *semi-chaîne* si pour toute paire  $(i, j) \in (\mathbb{Z}_N)^2$  les intersections des deux arcs fermés de  $\mathcal{C}$  entre  $\xi_i$  et  $\xi_j$  avec l'ensemble  $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{Z}_N}$  sont les sous-ensembles  $\{\xi_k\}_{k \in \llbracket i, j \rrbracket}$  et  $\{\xi_k\}_{k \in \llbracket j, i \rrbracket}$ . Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $\delta$ -CTLB. Une semi-chaîne  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}_N}$  de  $\mathcal{C}$  est une *semi-chaîne d'échantillonnage* si, pour tout  $k \in \mathbb{Z}_N$ , la distance  $d(\xi_k, \xi_{k+1}) < \delta$  et les arcs ouverts les plus droits de  $\mathcal{C}$  entre  $\xi_k$  et  $\xi_{k+1}$  n'intersectent pas  $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{Z}_N}$ .

La figure 4.1 illustre la définition de semi-chaîne et de semi-chaîne d'échantillonnage. Un exemple de semi-chaîne n'étant pas une semi-chaîne d'échantillonnage est donné en figure 4.1.a. Remarquons que toute suite de points d'une courbe de Jordan de cardinal inférieur à 4 est une semi-chaîne. Cependant, le fait d'être une semi-chaîne ne donne pas un ordre cyclique au sens classique (l'axiome d'asymétrie est pris à défaut).

Les deux lemmes suivants fournissent quelques propriétés des semi-chaînes.

**Lemme 4.1.2.** Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $\delta$ -CTLB et  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}_N}$  une semi-chaîne de  $\mathcal{C}$ . Si  $\xi_i = \xi_j$  pour  $i, j \in \mathbb{Z}_N$  alors  $\{\xi_k\}_{k \in \llbracket i, j \rrbracket}$  ou  $\{\xi_k\}_{k \in \llbracket j, i \rrbracket}$  est un singleton.

*Démonstration.* Si  $\xi_i = \xi_j$ , par définition d'une semi-chaine (définition 4.1.1), l'un des ensembles  $\{\xi_k\}_{k \in \llbracket i, j \rrbracket}$  ou  $\{\xi_k\}_{k \in \llbracket j, i \rrbracket}$  est l'intersection de  $\mathcal{C}$  avec  $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{Z}_N}$  l'autre est l'intersection de  $\{\xi_i\}$  avec  $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{Z}_N}$  qui est réduite au singleton  $\{\xi_i\}$ .  $\square$

Le lemme 4.1.3 montre qu'une semi-chaine d'échantillonnage partitionne une courbe  $\delta$ -CTLB en arcs les plus droits et justifie ainsi l'appellation : les points de la semi-chaine forment un échantillonnage suffisamment fin.

**Lemme 4.1.3.** *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $\delta$ -CTLB et  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}_N}$  une semi-chaine d'échantillonnage de  $\mathcal{C}$  telle que le cardinal de l'ensemble  $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{Z}_N}$  est strictement supérieur à 2. Alors,*

$$\mathcal{C} = \{\xi_k\}_{k \in \mathbb{Z}_N} \sqcup \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}_N} \overset{\circ}{\mathcal{C}}_{|\xi_k}^{\xi_{k+1}}.$$

où  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}_{|a}^b$  est l'arc le plus droit ouvert entre  $a$  et  $b$  si  $a \neq b$  et l'ensemble vide sinon.  
En particulier pour tout  $(i, j) \in (\mathbb{Z}_N)^2$ , les arcs de  $\mathcal{C}$  entre  $\xi_i$  et  $\xi_j$  sont

$$\{\xi_k\}_{k \in \llbracket i, j \rrbracket} \sqcup \bigsqcup_{k \in \llbracket i, j \rrbracket} \overset{\circ}{\mathcal{C}}_{|\xi_k}^{\xi_{k+1}} \quad \text{et} \quad \{\xi_k\}_{k \in \llbracket j, i \rrbracket} \sqcup \bigsqcup_{k \in \llbracket j, i \rrbracket} \overset{\circ}{\mathcal{C}}_{|\xi_k}^{\xi_{k+1}}.$$

*Démonstration.* Observons tout d'abord que, grâce à l'hypothèse  $d(\xi_k, \xi_{k+1}) < \delta$ , l'arc  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}_{|\xi_k}^{\xi_{k+1}}$  est bien défini.

- Montrons que les trois ensembles  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}_{|\xi_i}^{\xi_{i+1}}$ ,  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}_{|\xi_{i'}}^{\xi_{i'+1}}$  et  $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{Z}_N}$  sont disjoints lorsque  $i \neq i'$ . Soit  $i$  et  $i'$  deux éléments distincts de  $\mathbb{Z}_N$ . Comme la suite  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}_N}$  est une semi-chaine d'échantillonnage de  $\mathcal{C}$ , l'arc ouvert  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}_{|\xi_i}^{\xi_{i+1}}$  ne contient aucun  $\xi_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}_N$ . Ainsi,  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}_{|\xi_i}^{\xi_{i+1}} \cap \{\xi_k\}_{k \in \mathbb{Z}_N} = \emptyset$ , de plus, si  $\{\xi_i, \xi_{i+1}\} \neq \{\xi_{i'}, \xi_{i'+1}\}$ ,  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}_{|\xi_i}^{\xi_{i+1}} \cap \overset{\circ}{\mathcal{C}}_{|\xi_{i'}}^{\xi_{i'+1}} = \emptyset$ . Supposons maintenant que  $\{\xi_i, \xi_{i+1}\} = \{\xi_{i'}, \xi_{i'+1}\}$ . Si  $\xi_i = \xi_{i+1}$ , alors  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}_{|\xi_i}^{\xi_{i+1}} = \emptyset$ , et donc  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}_{|\xi_i}^{\xi_{i+1}} \cap \overset{\circ}{\mathcal{C}}_{|\xi_{i'}}^{\xi_{i'+1}} = \emptyset$ . Supposons par contradiction que  $\xi_i \neq \xi_{i+1}$  (et donc que  $\xi_{i'} \neq \xi_{i'+1}$ ). Deux cas sont possibles : soit  $\xi_i = \xi_{i'}$  et  $\xi_{i+1} = \xi_{i'+1}$ , soit  $\xi_i = \xi_{i'+1}$  et  $\xi_{i+1} = \xi_{i'}$ .
  - Dans le premier cas,  $\mathcal{C}$  est l'union de deux arcs fermés entre  $\xi_i$  et  $\xi_{i'}$ . Comme  $\xi_i = \xi_{i'}$ , les deux arcs sont  $\{\xi_i\}$  et  $\mathcal{C}$ . Comme  $i+1 \in \llbracket i, i' \rrbracket$  et  $i'+1 \in \llbracket i', i \rrbracket$  (car  $i \neq i'$ ), par définition d'une semi-chaine, l'un des deux points  $\xi_{i+1}$  ou  $\xi_{i'+1}$  appartient à l'arc entre  $\xi_i$  et  $\xi_{i'}$  réduit à  $\{\xi_i\}$ . De plus,  $\xi_{i+1} = \xi_{i'+1}$ , donc  $\{\xi_i, \xi_{i+1}\}$  est réduit à un singleton. Contradiction!
  - Dans le second cas, ( $\xi_i = \xi_{i'+1}$  et  $\xi_{i+1} = \xi_{i'}$ ), par le lemme 4.1.2, soit  $\{\xi_k\}_{k \in \llbracket i, i'+1 \rrbracket}$  soit  $\{\xi_k\}_{k \in \llbracket i'+1, i \rrbracket}$  est un singleton et soit  $\{\xi_k\}_{k \in \llbracket i', i+1 \rrbracket}$  soit  $\{\xi_k\}_{k \in \llbracket i+1, i' \rrbracket}$  est un singleton. Il y a alors quatre possibilités réduites à deux par symétrie des rôles des indices  $i$  et  $i'$ .

Si  $\{\xi_k\}_{k \in \llbracket i, i'+1 \rrbracket}$  et  $\{\xi_k\}_{k \in \llbracket i', i+1 \rrbracket}$  sont des singletons et comme  $\xi_{i+1} \neq \xi_i$  et  $\xi_{i'+1} \neq \xi_{i'}$ ,  $\xi_{i+1} \notin \{\xi_k\}_{k \in \llbracket i, i'+1 \rrbracket}$  et  $\xi_{i'+1} \notin \{\xi_k\}_{k \in \llbracket i', i+1 \rrbracket}$ , donc  $i = i' + 1$  et  $i + 1 = i'$ . Donc  $i = i + 2$  dans  $\mathbb{Z}_N$ . Donc  $N \leq 2$ . Contradiction! Si  $\{\xi_k\}_{k \in \llbracket i, i'+1 \rrbracket}$  et  $\{\xi_k\}_{k \in \llbracket i+1, i' \rrbracket}$  sont des singletons, alors  $i = i' + 1$  et l'ensemble  $\{\xi_k\}_{k \in \llbracket i+1, i'+1 \rrbracket} = \{\xi_k\}_{k \in \llbracket i+1, i \rrbracket}$  ne contient que deux éléments. Comme  $\{\xi_k\}_{k \in \llbracket i, i+1 \rrbracket}$  ne contient également que deux éléments,  $N = 2$ . Contradiction!

- L'arc  $\bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}_N} \overset{\circ}{\mathcal{C}}_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \sqcup \{\xi_k\}_{k \in \mathbb{Z}_N}$ , qui peut être écrit  $\{\xi_0\} \sqcup \overset{\circ}{\mathcal{C}}_{\xi_0}^{\xi_1} \sqcup \{\xi_1\} \sqcup \dots \sqcup \overset{\circ}{\mathcal{C}}_{\xi_{-1}}^{\xi_0}$ , est un arc simple fermé de  $\mathcal{C}$  qui n'est pas réduit à un singleton car le cardinal de la semi-chaine  $(\xi_k)$  est strictement supérieur à 1. Donc  $\bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}_N} \overset{\circ}{\mathcal{C}}_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \sqcup \{\xi_k\}_{k \in \mathbb{Z}_N}$  est égal à  $\mathcal{C}$ .
- De même, les arcs  $\bigsqcup_{k \in \llbracket i, j \rrbracket} \overset{\circ}{\mathcal{C}}_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \sqcup \{\xi_k\}_{k \in \llbracket i, j \rrbracket}$  et  $\bigsqcup_{k \in \llbracket j, i \rrbracket} \overset{\circ}{\mathcal{C}}_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \sqcup \{\xi_k\}_{k \in \llbracket j, i \rrbracket}$  sont des arcs simples de  $\mathcal{C}$  entre  $\xi_i$  et  $\xi_j$  et sont distincts si  $\{\xi_k\}_{k \in \llbracket i, j \rrbracket} \neq \{\xi_k\}_{k \in \llbracket j, i \rrbracket}$ . Par contradiction supposons alors que  $\{\xi_k\}_{k \in \llbracket i, j \rrbracket} = \{\xi_k\}_{k \in \llbracket j, i \rrbracket}$ . Comme  $\text{Card}\{\xi_k\} > 2$ , il existe  $\ell \in \llbracket i, j \rrbracket$  et  $\ell' \in \llbracket j, i \rrbracket$  tels que  $\xi_\ell = \xi_{\ell'}$  et  $\xi_\ell \notin \{\xi_i, \xi_j\}$ . Finalement, par le lemme 4.1.2, nous obtenons  $\xi_i = \xi_\ell$  ou  $\xi_j = \xi_\ell$  : une contradiction.  $\square$

Nous pouvons maintenant définir les notions de monotonie pour une rétro-discrétisation et de rétro-discrétisation d'échantillonnage.

**Définition 4.1.4** (Rétro-discrétisation monotone). Soit  $\mathcal{C}$  une courbe de Jordan et un pas de grille  $h > 0$ .

- Une rétro-discrétisation  $\xi: \partial_G^h(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$  est dite *monotone* si  $(\xi(b_i))_{i \in \mathbb{Z}_N}$  est une semi-chaine de  $\mathcal{C}$  en notant  $(b_i)_{i \in \mathbb{Z}_N}$  la suite de bels  $\partial_G^h(\mathcal{C})$ .
- Si  $\mathcal{C}$  est une courbe CTLB, une rétro-discrétisation  $\xi: (b_i)_{i \in \mathbb{Z}_N} \rightarrow \mathcal{C}$  est une *rétro-discrétisation d'échantillonnage* si  $(\xi(b_i))_{i \in \mathbb{Z}_N}$  est une semi-chaine d'échantillonnage de  $\mathcal{C}$ .

Comme montré en figure 4.2, il existe des courbes possédant une rétro-discrétisation non-monotone (figure b), ou même, ne possédant aucune rétro-discrétisation monotone (figure c). L'objectif est alors de montrer que la rétro-discrétisation associée à une courbe CTLB  $\mathcal{C}$  est une rétro-discrétisation d'échantillonnage de  $\mathcal{C}$  (corollaire 4.2.3).

## 4.2 Monotonie des rétro-discrétisations

L'objectif de cette partie est de démontrer la monotonie des rétro-discrétisations.

**Lemme 4.2.1.** Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $\delta$ -CTLB compatible avec la grille de pas  $h > 0$ . Dans la configuration  $I$  (figure 4.3) l'intersection de la courbe  $\mathcal{C}$  avec le bel du milieu  $[(0, 0), (0, 1)]$  est réduit au point frontalier  $(0, 0)$ . Toute rétro-discrétisation  $\xi: \partial_G^h(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$  associe alors au bel  $[(0, 0), (0, 1)]$  le point  $(0, 0)$ .

*Démonstration.* Nous fixons un repère orthonormé en fixant les coordonnées  $(0, 0)$  au point frontalier et les coordonnées  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$  et  $(1, 0)$  aux trois points extérieurs. Les arcs les plus droits des pixels duaux  $P_1 := P_{(-0.5, 0.5)}$  et  $P_2 := P_{(0.5, 0.5)}$  sont connectés par le point frontalier  $(0, 0)$ . Par le théorème 3.5.2, la discrétisation est bien composée, les sommets  $(-1, 1)$  et  $(1, 1)$  sont aussi des

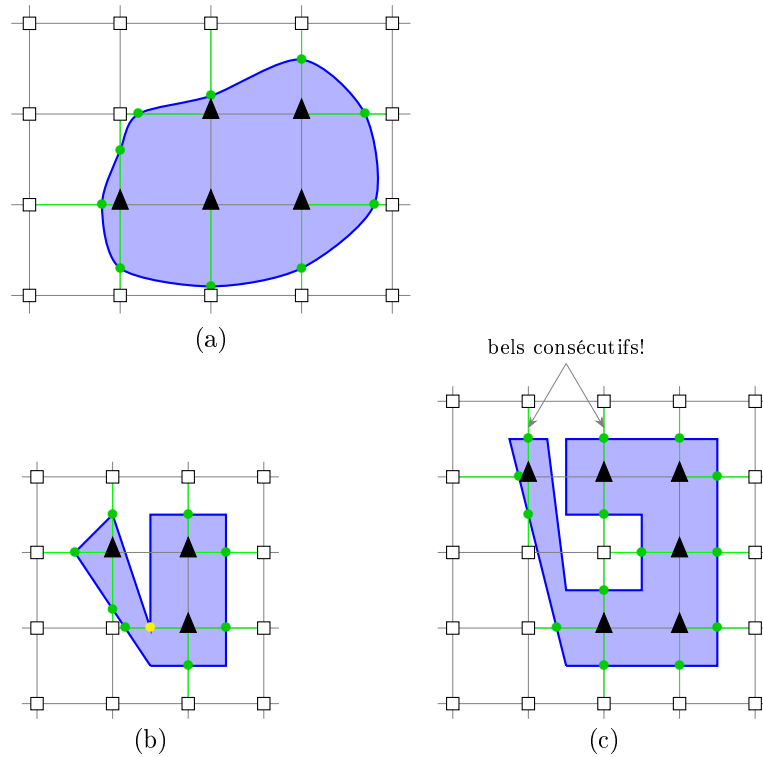


FIGURE 4.2 – Bleu clair : une forme continue délimitée par une courbe de Jordan (ligne bleue épaisse). Les segments verts représentent les bays. Les points verts correspondent aux intersections choisies du bord de la forme continue avec les bays pour définir une rétro-discrétisation. Exemple (a) : cas simple où il existe une unique rétro-discrétisation injective et correctement ordonnée. Exemple (b) : il existe plusieurs rétro-discrétisations et certaines ne sont pas correctement ordonnées (point jaune). Exemple (c) : il existe une unique rétro discrétisation et celle-ci ne préserve pas l'ordre défini par la courbe.

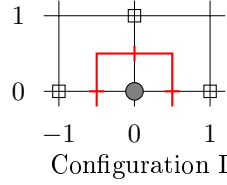


FIGURE 4.3 – L'intersection de  $\mathcal{C}$  et du bel  $[(0, 0), (0, 1)]$  est réduit au point frontalier  $(0, 0)$ .

points extérieurs. Par le lemme 3.3.7, les extrémités  $p$  et  $q$  de l'arc  $\mathcal{C}|_{P_1} \cup \mathcal{C}|_{P_2}$  ne sont pas sur les côtés  $[(-1, 0), (-1, 1)]$ ,  $[(-1, 1), (0, 1)]$ ,  $[(0, 1), (1, 1)]$  et  $[(0, 1), (1, 1)]$ . Donc  $p$  et  $q$  sont sur les côtés  $[(-1, 0), (0, 0)]$  et  $[(0, 0), (0, 1)]$ . Par contradiction, supposons que  $(\mathcal{C}|_{P_1} \cup \mathcal{C}|_{P_2}) \cap [(0, 0), (0, 1)]$  ne soit pas réduit au point  $(0, 0)$ . Montrons que  $p \neq q$ . Par contradiction supposons que  $p = q$ . Alors, par le lemme 3.3.7, les deux arcs  $\mathcal{C}|_{P_1}$  et  $\mathcal{C}|_{P_2}$  ont chacun le point frontalier  $(0, 0)$  pour extrémité (lemme 3.3.6) et une extrémité sur  $[(0, 0), (0, 1)]$  (comme  $p \in [(-1, 0), (0, 0)]$  et  $q$ ). Donc par la proposition 2.2.30 les arcs  $\mathcal{C}|_{P_1}$  et  $\mathcal{C}|_{P_2}$  sont inclus dans le disque de diamètre  $[(0, 0), (0, 1)]$ . Comme  $p = q$ ,  $\mathcal{C}|_{P_1} \cup \mathcal{C}|_{P_2} = \mathcal{C}$ . Donc  $\mathcal{C}$  est de diamètre strictement inférieur à  $\delta$ . Ce qui contredit la proposition 2.2.33. Donc  $p \neq q$ . Soit  $m$  un point de  $\mathcal{C}|_{P_1} \cup \mathcal{C}|_{P_2} \cap (0, 0), (0, 1]$ . Soit  $\mathcal{C}_1$  (respectivement  $\mathcal{C}_2$ ) le plus petit arc de  $\mathcal{C}|_{P_1} \cup \mathcal{C}|_{P_2}$  contenant  $(0, 0)$ ,  $m$  et  $p$  (respectivement contenant  $(0, 0)$ ,  $m$  et  $q$ ). Soit  $(p, (0, 0), m, q)$ , soit  $(p, m, (0, 0), q)$  est une chaîne de  $\mathcal{C}|_{P_1} \cup \mathcal{C}|_{P_2}$ . Dans le premier cas,  $\kappa([(0, 0), m, q]) > \frac{\pi}{2}$ , dans le second cas  $\kappa([p, m, (0, 0)]) > \frac{\pi}{2}$ . La courbure totale de  $\mathcal{C}_1$  ou de  $\mathcal{C}_2$  est alors strictement supérieure à  $\frac{\pi}{2}$  alors qu'ils sont des arcs de  $\mathcal{C}|_{P_1}$  et  $\mathcal{C}|_{P_2}$ . Contradiction! Donc  $\xi([(0, 0), (0, 1)]) = (0, 0)$ .  $\square$

Le cœur de la preuve de la monotonie d'une rétro-discrétisation est dans la proposition 4.2.2. Le corollaire 4.2.3 est la vérification formelle que le résultat de la proposition 4.2.2 correspond bien à la définition de la monotonie (définition 4.0.1).

**Proposition 4.2.2.** *Soient  $\mathcal{C}$  une courbe CTLB et une grille de pas  $h$  compatible avec  $\mathcal{C}$ . Notons  $(b_i)_{i \in \mathbb{Z}_N} := \partial_G^h(\mathcal{C})$  la courbe de Jordan discrète définie par le bord de  $\text{Dig}_G^h(\mathcal{C})$ . Si pour  $i$  et  $j$  dans  $\mathbb{Z}_N$ ,  $\xi(b_j) \in \mathcal{C}_{\xi(b_i)}^{\xi(b_{i+1})}$ , alors soit  $j \in \llbracket i-2, i \rrbracket$  et  $\xi(b_j) = \xi(b_i)$  soit  $j \in \llbracket i+1, i+3 \rrbracket$  et  $\xi(b_j) = \xi(b_{i+1})$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $\xi(b_j) \in \mathcal{C}_{\xi(b_i)}^{\xi(b_{i+1})}$  pour  $j \notin \{i, i+1\}$ . Le point  $\xi(b_j)$  appartient alors  $T_i$ -arc le plus droit  $\mathcal{C}|_{T_i}$  où  $T_i$  est le pixel dual contenant  $b_i$  et  $b_{i+1}$ . Par la proposition 3.3.3,  $\mathcal{C}|_{T_i}$  est dans la boursouffure de  $T_i$  dont l'intersection avec un segment de la grille autre que les bels  $b_i$  et  $b_{i+1}$  est réduite à un sommet de  $T_i$ . Le pixel dual  $T_i$  possède alors comme sommets le point frontalier  $\xi(b_j)$  et un point extérieur (car  $T_i$  contient un bel). Supposons par contradiction que les bels  $b_i$  et  $b_{i+1}$  ne possèdent pas  $\xi(b_j)$  pour extrémité. Par le théorème 3.5.2,  $\text{Dig}_G^h(\mathcal{C})$  est bien composée, le sommet diagonalement opposé à  $\xi(b_j)$  dans  $T_i$  ne peut pas être un point intérieur, il est donc un point extérieur et les deux sommets de  $T_i$  adjacents à  $\xi(b_j)$  sont des points intérieurs. Autrement dit, la discrétisation  $\text{Dig}_G^h(\mathcal{C})$  contient la configuration H (figure 3.12), ce qui contredit le lemme 3.4.4. L'un des bels  $b_i$  ou  $b_{i+1}$  possède alors  $\xi(b_j)$  pour extrémité. Nous supposons que  $\xi(b_j) \in b_i$  (le cas  $\xi(b_j) \in b_{i+1}$  se traite avec les mêmes arguments). Par le lemme 3.3.6, le point frontalier  $\xi(b_j)$  est une extrémité de  $\mathcal{C}|_{T_i}$ . Par définition de  $\mathcal{C}|_{T_i}$  (définition 2.2.40), l'arc le plus droit  $\mathcal{C}_{\xi(b_i)}^{\xi(b_{i+1})}$  est un



arc de  $\mathcal{C}|_{T_i}$ . Si  $\xi(b_j) \neq \xi(b_i)$  et  $\xi(b_j) \neq \xi(b_{i+1})$ , alors  $\xi(b_j)$  n'appartient pas à l'arc le plus droit  $\mathcal{C}|_{\xi(b_i)}^{\xi(b_{i+1})}$ , ce qui contredit les hypothèses. Nous avons ainsi démontré :

1. soit  $\xi(b_j) = \xi(b_i)$ , soit  $\xi(b_j) = \xi(b_{i+1})$ .
2.  $\xi(b_j)$  est un sommet de  $T_i$ .

Soit  $b_k$  l'un des bels tels que  $\xi(b_k) = \xi(b_j)$  avec  $k \in \{i, i+1\}$ . Deux cas sont possibles : soit  $b_k$  et  $b_j$  sont orthogonaux (figure 4.4-a), soit ils sont alignés (figure 4.4-b). Dans le premier cas,  $b_k$  et  $b_j$  appartiennent à un même pixel dual contenant exactement deux bels (théorème 3.5.2). Donc  $|k-i| = 1$ , de plus  $j \notin \{i, i+1\}$ , donc soit  $k = i$  et  $j = i-1$ , soit  $k = i+1$  et  $j = i+2$ . Dans le second cas  $b_k$  et  $b_j$  sont alignés. Par le lemme 3.4.2, les configurations D, E et F (figure 3.10) sont exclues de  $\text{Dig}_G^h(\mathcal{C})$ . Il existe alors un troisième bel  $b_{k'}$  ayant  $\xi(b_j)$  comme extrémité. Donc  $|k-j| = 2$ . Ainsi  $j \in \llbracket i-2, i+3 \rrbracket$ . Soit  $(k, j) = (i, i-2)$  ou  $(k, j) = (i+1, i+3)$  (et il ne reste plus rien à prouver car  $\xi(b_k) = \xi(b_j)$ ), soit  $(k, j) = (i, i+2)$  ou  $(k, j) = (i+1, i-1)$ . Dans ce dernier cas, montrons que  $\xi(b_{i+2}) = \xi(b_{i+1})$  ou  $\xi(b_{i-1}) = \xi(b_i)$ . Supposons que  $(k, j) = (i, i+2)$  (le cas  $(k, j) = (i+1, i-1)$  est traité par les mêmes arguments). Par le lemme 4.2.1,  $\xi(b_{i+1}) = \xi(b_j)$ . Finalement, quatre cas sont possibles :

- si  $\xi(b_j) = \xi(b_i)$  et les bels  $b_i$  et  $b_j$  sont orthogonaux, alors  $j = i-1$ ,
- si  $\xi(b_j) = \xi(b_i)$  et les bels  $b_i$  et  $b_j$  sont alignés, alors  $j = i-2$  ou  $j = i+2$  et dans ce dernier sous-cas  $\xi(b_j) = \xi(b_{i+1})$ ,
- si  $\xi(b_j) = \xi(b_{i+1})$  et les bels  $b_{i+1}$  et  $b_j$  sont orthogonaux, alors  $j = i+2$ ,
- si  $\xi(b_j) = \xi(b_{i+1})$  et les bels  $b_{i+1}$  et  $b_j$  sont alignés, alors  $j = i+3$  ou  $j = i-1$  et dans ce dernier sous-cas  $\xi(b_j) = \xi(b_i)$ .

□

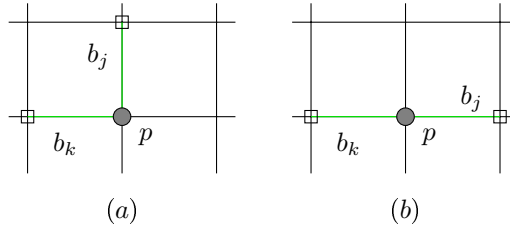


FIGURE 4.4 – (Preuve de la Proposition 4.2.2) Les bels  $b_j$  et  $b_k$  partagent la même image  $p$  par une rétro-discrétisation.

**Corollaire 4.2.3.** *Soient  $\mathcal{C}$  une courbe  $\delta$ -CTLB et une grille de pas  $h$  compatible avec  $\mathcal{C}$ . Toute rétro-discrétisation est une rétro-discrétisation d'échantillonnage.*

*Démonstration.* Par le théorème 3.5.2  $\partial_G^h(\mathcal{C})$  est une courbe de Jordan discrète que nous noterons  $(\xi(b_i))_{i \in \mathbb{Z}_N}$ . Dans cette preuve nous appellerons cardinal de la sous-suite  $(\xi(b_k))_{k \in \llbracket i, j \rrbracket}$  de  $(\xi(b_i))_{i \in \mathbb{Z}_N}$  le cardinal de l'ensemble  $\{\xi(b_k)\}_{k \in \llbracket i, j \rrbracket}$  et nous notons  $M$  ce cardinal (autrement dit les différentes occurrences du même élément dans la suite ne comptent que pour un). Comme le résultat est trivial pour  $M \leq 2$ , nous supposons  $M \geq 3$ . Montrons d'abord que  $(\xi(b_i))_{i \in \mathbb{Z}_N}$  est une semi-chaine. Pour tout  $n \in [2, M/2 + 1] \cap \mathbb{N}$ , soit  $H_n$  l'hypothèse de récurrence «pour tout  $i, j \in \mathbb{Z}_N$  et

toute sous-suite  $(\xi(b_k))_{k \in \llbracket i, j \rrbracket}$  de  $(\xi(b_i))_{i \in \mathbb{Z}_N}$  de cardinal inférieur ou égal à  $n$ , les deux ensembles résultant de l'intersection des arcs fermés de  $\mathcal{C}$  délimités par  $\xi(b_i)$  et  $\xi(b_j)$  avec  $\xi(\partial_G^h(\mathcal{C}))$  sont égaux à  $\{\xi(b_k)\}_{k \in \llbracket i, j \rrbracket}$  et  $\{\xi(b_k)\}_{k \in \llbracket j, i \rrbracket}$ . Remarquons qu'entre deux termes de la suite  $(\xi(b_i))_{i \in \mathbb{Z}_N}$ , il existe un arc contenant au plus  $\lfloor M/2 + 1 \rfloor$  termes de la suite. Ainsi  $H_{\lfloor M/2 + 1 \rfloor}$  traduit que  $(\xi(b_i))_{i \in \mathbb{Z}_N}$  est une semi-chaîne.

— (Cas  $n=2$ ) Par la proposition 4.2.2, pour tout  $i \in \mathbb{Z}_N$ , les intersections des deux arcs fermés de  $\mathcal{C}$  délimités par  $\xi(b_i)$  et  $\xi(b_{i+1})$  avec  $\xi(\partial_G^h(\mathcal{C}))$  sont égales à  $\{\xi(b_k)\}_{k \in \llbracket i, i+1 \rrbracket}$  (pour l'arc le plus droit) et à  $\{\xi(b_k)\}_{k \in \llbracket i+1, i \rrbracket}$  (pour l'arc complémentaire). Donc pour tout  $i, j \in \mathbb{Z}_N$  tels que  $\{\xi_k\}_{k \in \llbracket i, j \rrbracket} = \{\xi_i, \xi_j\}$  ou  $\{\xi_k\}_{k \in \llbracket j, i \rrbracket} = \{\xi_i, \xi_j\}$ , les intersections des deux arcs fermés de  $\mathcal{C}$  délimités par  $\xi(b_i)$  et  $\xi(b_j)$  avec  $\xi(\partial_G^h(\mathcal{C}))$  sont égales à  $\{\xi(b_k)\}_{k \in \llbracket i, j \rrbracket}$  et à  $\{\xi(b_k)\}_{k \in \llbracket j, i \rrbracket}$ . Donc  $H_2$ .

— Soit  $n \geq 3$ . Supposons  $H_{n-1}$ . Soient  $i, j \in \mathbb{Z}_N$  tels que

$\text{Card}\{\xi(b_k)\}_{k \in \llbracket i, j \rrbracket} = n$ . Remarquons qu'il est possible que  $\xi(b_j) \in \{\xi(b_k)\}_{k \in \llbracket i, j-1 \rrbracket}$ . Il existe  $\ell \in \llbracket i, j \rrbracket$  tel que  $\text{Card}\{\xi(b_k)\}_{k \in \llbracket i, \ell \rrbracket} = n-1$  et  $\text{Card}\{\xi(b_k)\}_{k \in \llbracket i, \ell+1 \rrbracket} = n$ . Par  $H_{n-1}$ , les deux arcs entre  $\xi(b_i)$  et  $\xi(b_\ell)$  ont pour intersections respectives avec  $\partial_G^h(\mathcal{C})$   $\{\xi(b_k)\}_{k \in \llbracket i, \ell \rrbracket}$  et  $\{\xi(b_k)\}_{k \in \llbracket \ell, i \rrbracket}$ . Nous notons  $\mathcal{C}_{i, \ell}$  le premier arc et  $\mathcal{C}_{\ell, i}$  le second. Par définition de  $\ell$ , le point  $\xi(b_{\ell+1})$  n'appartient pas à  $\{\xi(b_k)\}_{k \in \llbracket i, \ell \rrbracket}$ , donc  $\xi(b_{\ell+1})$  est à l'intérieur de  $\mathcal{C}_{\ell, i}$ . De plus, par

la proposition 4.2.2, l'arc le plus droit ouvert  $\mathcal{C}_{\xi(b_\ell)}^{\xi(b_{\ell+1})}$  ne contient aucun point de  $\xi(\partial_G^h(\mathcal{C}))$ .

Donc l'arc  $\mathcal{C}_{i, \ell+1} := \mathcal{C}_{i, \ell} \sqcup \mathcal{C}_{\xi(b_\ell)}^{\xi(b_{\ell+1})} \sqcup \{\xi(b_{\ell+1})\}$  est un arc de  $\mathcal{C}$  délimité par  $\xi(b_i)$  et  $\xi(b_{\ell+1})$  dont

l'intersection avec  $\xi(\partial_G^h(\mathcal{C}))$  est  $\{\xi(b_k)\}_{k \in \llbracket i, \ell+1 \rrbracket}$ . De même l'arc  $\mathcal{C}_{\ell, i} \setminus (\{\xi(b_\ell)\} \sqcup \mathcal{C}_{\xi(b_\ell)}^{\xi(b_{\ell+1})})$  est un arc de  $\mathcal{C}$  délimité par  $\xi(b_i)$  et  $\xi(b_{\ell+1})$  dont l'intersection avec  $\xi(\partial_G^h(\mathcal{C}))$  est  $\{\xi(b_k)\}_{k \in \llbracket \ell+1, i \rrbracket}$ . Montrons que les points  $\xi(b_k)$ ,  $k \in \llbracket \ell+1, j \rrbracket$  sont tous égaux à  $\xi(b_{\ell+1})$  (c'est-à-dire que pour tout  $k \in \llbracket \ell+1, j \rrbracket$ ,  $\xi(b_k) \notin \{\xi(b_m)\}_{m \in \llbracket i, \ell \rrbracket}$ ). Pour tout  $k \in \llbracket \ell+1, j \rrbracket$ , soit  $P_k$  l'hypothèse de récurrence « $\xi(b_k) = \xi(b_{\ell+1})$ ».

—  $P_{\ell+1}$  est trivial.

— Soit  $k \in \llbracket \ell+2, j \rrbracket$ , supposons  $P_{\ell+1}, \dots, P_{k-1}$ , c'est-à-dire  $\xi(b_{\ell+1}) = \xi(b_{\ell+2}) = \dots = \xi(b_{k-1})$ .

— Par définition de  $\ell$ ,  $\xi(b_k) \in \mathcal{C}_{i, \ell+1}$  et  $\xi(b_k) \in \mathcal{C}_{\ell, i}$ . Alors,

$$\begin{aligned} \xi(b_k) &\in \mathcal{C}_{i, \ell+1} \cap \mathcal{C}_{\ell, i} \cap \xi(\partial_G^h(\mathcal{C})), \\ &= (\mathcal{C}_{i, \ell} \sqcup \mathcal{C}_{\xi(b_\ell)}^{\xi(b_{\ell+1})}) \cap \mathcal{C}_{\ell, i} \cap \xi(\partial_G^h(\mathcal{C})), \\ &= (\mathcal{C}_{i, \ell} \cap \mathcal{C}_{\ell, i} \cap \xi(\partial_G^h(\mathcal{C}))) \sqcup \{\xi(b_{\ell+1})\}, \\ &= \{\xi(b_i), \xi(b_\ell), \xi(b_{\ell+1})\}. \end{aligned}$$

— Par contradiction supposons que  $\xi(b_k) = \xi(b_\ell)$ . Alors, d'une part, l'un des arcs de  $\mathcal{C}$  délimités par  $\xi(b_\ell)$  et  $\xi(b_k)$  est réduit à un point alors que le second arc est la courbe  $\mathcal{C}$  tout entière. D'autre part, par l'hypothèse de récurrence  $P_{k-1}$ , l'un des arcs entre  $\xi(b_\ell)$  et  $\xi(b_k)$  contient exactement deux points de  $\xi(\partial_G^h(\mathcal{C}))$  :  $\xi(b_\ell)$  et  $\xi(b_{\ell+1})$ . Le cardinal de  $\xi(\partial_G^h(\mathcal{C}))$  est alors 2, ce qui contredit l'hypothèse  $M \geq 3$ . Ainsi  $\xi(b_k) \neq \xi(b_\ell)$ .

— Par contradiction supposons que  $\xi(b_k) = \xi(b_i)$ . Alors, d'une part, l'un des arcs de  $\mathcal{C}$  délimités par  $\xi(b_{\ell+1})$  et  $\xi(b_k)$  est  $\mathcal{C}_{i, \ell+1}$ . Par définition de  $\ell$ , cet arc contient exactement

$n$  points de  $\xi(\partial_G^h(\mathcal{C}))$  avec  $n \geq 3$ . D'autre part, par l'hypothèse de récurrence  $P_{k-1}$ , l'un des arcs entre  $\xi(b_{\ell+1})$  et  $\xi(b_k)$  contient au plus deux points de  $\xi(\partial_G^h(\mathcal{C}))$  alors que l'autre arc contient tous les points de  $\xi(\partial_G^h(\mathcal{C}))$ . Le cardinal de  $\xi(\partial_G^h(\mathcal{C}))$  est alors égal à  $n$ , ce qui contredit les hypothèses :  $n \leq M/2 + 1$  et  $M \geq 3$ . Alors  $\xi(b_k) \neq \xi(b_i)$ .

Comme  $\xi(b_k) \in \{\xi(b_i), \xi(b_l), \xi(b_{l+1})\}$ ,  $P_k$ .

Finalement,  $\xi(b_{\ell+1}) = \xi(b_{\ell+2}) = \dots = \xi(b_j)$ .

Donc,  $\mathcal{C}_{i,\ell+1}$  est un arc de  $\mathcal{C}$  délimité par  $\xi(b_i)$  et  $\xi(b_j)$  dont l'intersection avec  $\xi(\partial_G^h(\mathcal{C}))$  est

$\{\xi(b_k)\}_{k \in \llbracket i, j \rrbracket}$ . De même, l'arc  $\mathcal{C}_{\ell, i} \setminus (\{\xi(b_\ell)\} \sqcup \mathcal{C}_{\xi(b_\ell)}^{\xi(b_{\ell+1})})$  est un arc de  $\mathcal{C}$  dont l'intersection avec  $\xi(\partial_G^h(\mathcal{C}))$  est  $\{\xi(b_k)\}_{k \in \llbracket j, i \rrbracket}$ . Donc  $H_n$ . De plus, la grille est compatible avec  $\mathcal{C}$ , donc pour tout

$k \in \mathbb{Z}_N$ ,  $d(b_k, b_{k+1}) < \delta$ , et l'arc ouvert le plus droit  $\mathcal{C}_{\xi(b_k)}^{\xi(b_{k+1})}$  ne contient aucun point de  $\xi(\partial_G^h(\mathcal{C}))$  par la proposition 4.2.2.  $\square$

### 4.3 Sous-suite normale de $\partial_G^h(\mathcal{C})$

Dans cette partie, nous étendons le corollaire 4.2.3 aux sous-suites de  $\partial_G^h(\mathcal{C})$ . Cela nous permettra dans le chapitre 5 d'utiliser des sous-suites de  $\partial_G^h(\mathcal{C})$  pour construire des estimateurs géométriques.

**Lemme 4.3.1.** *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $\delta$ -CTLB. Soit  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}_N}$ ,  $N \geq 3$  une chaîne de  $\mathcal{C}$  telle que pour tout  $i, j \in \mathbb{Z}_N$ ,  $d(a_i, a_j) < \delta$  et pour tout  $k \in \mathbb{Z}_N \setminus \{0\}$ , l'arc de  $\mathcal{C}$  délimité par  $a_{k-1}$  et  $a_k$  dont l'intersection avec la chaîne est  $\{a_{k-1}, a_k\}$  est un arc le plus droit. Alors l'arc entre  $a_0$  et  $a_{N-1}$  passant par  $a_1, \dots, a_{N-2}$  est un arc le plus droit.*

*Démonstration.* Pour tout  $n \geq 3$ , notons  $H_n$  l'hypothèse de récurrence «l'arc entre  $a_0$  et  $a_n$  passant par  $a_1, \dots, a_{n-1}$  est un arc le plus droit.»

- Par lemme 2.2.39, l'arc de  $\mathcal{C}$  entre  $a_0$  et  $a_2$  et ne contenant pas  $a_1$  a une courbure totale strictement supérieure à  $\frac{\pi}{2}$ . Donc l'arc de  $\mathcal{C}$  délimité par  $a_0$  et  $a_2$  passant par  $a_1$  est un arc le plus droit. Donc  $H_2$ .
- Soit  $n \in \llbracket 3, N-2 \rrbracket$ , supposons  $H_n$ . D'une part, par hypothèse de récurrence  $H_n$ , l'arc  $\mathcal{C}_n$  entre  $a_0$  et  $a_n$  ne contenant pas  $a_{N-1}$  est l'arc le plus droit. D'autre part, par hypothèse, l'arc de  $\mathcal{C}$  délimité par  $a_n$  et  $a_{n+1}$  ne contenant pas  $a_0$  est un arc le plus droit. Alors, par le lemme 2.2.39, l'arc entre  $a_{n+1}$  et  $a_0$  contenant les points  $a_i$ , avec  $i \in \llbracket n+1, N \rrbracket$  est de courbure totale strictement supérieure à  $\frac{\pi}{2}$ . Ainsi cet arc ne peut pas être l'arc le plus droit entre  $a_0$  et  $a_{n+1}$ . Donc l'arc entre  $a_0$  et  $a_{n+1}$  passant par  $a_i, \dots, a_n$  est un arc le plus droit. Donc  $H_{n+1}$ .

$\square$

**Théorème 4.3.2.** *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe  $\delta$ -CTLB compatible avec une grille de pas  $h$ . Soit  $\xi : \partial_G^h(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$  une rétro-discrétisation. Nous notons  $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$  la courbe de Jordan  $\partial_G^h(\mathcal{C})$  et supposons  $N \geq 3$ . Soit  $(b_{\sigma(i)})_{i \in \mathbb{Z}_{N_\sigma}}$  une sous-suite de  $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$  telle que  $h \text{Card}[\sigma(i), \sigma(i+1)] < \delta$ . Alors,*

$$\mathcal{C} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_{N_\sigma}} \mathcal{C}_{\xi(b_{\sigma(i)})}^{\xi(b_{\sigma(i+1)})},$$

et l'intersection  $\mathcal{C}_{\xi(b_{\sigma(i)})}^{\xi(b_{\sigma(i+1)})} \cap \mathcal{C}_{\xi(b_{\sigma(j)})}^{\xi(b_{\sigma(j+1)})}$  est soit vide soit réduite à un point.

*Démonstration.* Par le corollaire 4.2.3 et le lemme 4.1.3,  $\mathcal{C} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_{N_\sigma}} \mathcal{C}|_{\xi(b_i)}^{\xi(b_{i+1})}$ . Ainsi,  $\mathcal{C} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_{N_\sigma}} \mathcal{C}'_i$  où  $\mathcal{C}'_i := \bigcup_{j=\sigma(i)}^{\sigma(i+1)-1} \mathcal{C}|_{\xi(b_j)}^{\xi(b_{j+1})}$ .

Montrons que pour tout  $i \in \mathbb{Z}_{N_\sigma}$ ,  $\mathcal{C}'_i$  est un arc le plus droit. Soit  $i \in \mathbb{Z}_{N_\sigma}$ . Notons pour tout  $j \in \mathbb{Z}_N$ ,  $m_j$  le milieu du bel  $b_j$ . Comme,  $\text{Card}[\sigma(j), \sigma(i+1)] < \delta/h$  et la distance de Manhattan  $d_1$  entre deux milieux consécutifs  $m_i$  et  $m_{i+1}$  est égal à  $h$ , la distance  $d_1$  entre toute paire de points  $m_j$  et  $m_k$  avec  $\sigma(i) \leq j < k \leq \sigma(i+1)$  majorée par  $\delta-h$ . De plus, par définition d'une rétro-discrétisation (définition 4.0.1),  $|\xi(a_j) - m_j| \leq h/2$  pour tout  $j \in [\sigma(i), \sigma(i+1)]$ . Ainsi  $d_1(\xi(b_j), \xi(b_k)) < \delta$  si  $\sigma(i) \leq j < k \leq \sigma(i+1)$ . La distance euclidienne entre  $\xi(b_j)$  et  $\xi(b_k)$  est également majorée par  $\delta$  car elle est inférieure à la distance  $d_1$ . Si  $(\xi(b_{\sigma(j)}))_{j \in \mathbb{Z}_{N_\sigma}}$  forme une chaîne de  $\mathcal{C}$ , alors, par le lemme 4.3.1,  $\mathcal{C}'_i$  est un arc le plus droit. Sinon, notons  $M := \text{Card}\{\xi(b_{\sigma(k)})\}_{k \in \mathbb{Z}_{N_\sigma}}$ ,  $\tau(0) := 0$  et pour tout  $i \in [1, M-1]$ , notons  $\tau(i)$  le premier  $k \in [\tau(j)+1, M-1]$  telle que  $b_k \neq b_{k-1}$ . Par construction,  $(\xi(b_{\tau(j)}))_{j \in \mathbb{Z}_M}$  forme une chaîne de  $\mathcal{C}$ . Donc par le lemme 4.3.1, pour tout  $j \in \mathbb{Z}_M$  l'arc de  $\mathcal{C} \bigcup_{k=\tau(j)}^{\tau(j+1)} \mathcal{C}'_k$  est l'arc le plus droit entre  $b_{\tau(j)}$  et  $b_{\tau(j+1)}$ . Comme  $\mathcal{C}'_i$  est un arc de  $\bigcup_{k=\tau(j)}^{\tau(j+1)} \mathcal{C}'_k$ ,  $\kappa(\mathcal{C}'_i) \leq \frac{\pi}{2}$ . De plus, par la proposition 4.2.2, avec  $\mathcal{C}|_{\xi(b_i)}^{\xi(b_{i+1})} \cap \mathcal{C}|_{\xi(b_j)}^{\xi(b_{j+1})} = \emptyset$  si  $j \notin [i-2, i+3]$  et  $\mathcal{C}|_{\xi(b_i)}^{\xi(b_{i+1})} \cap \mathcal{C}|_{\xi(b_j)}^{\xi(b_{j+1})}$  est un singleton ou vide sinon.  $\square$

Les sous-suites vérifiant les hypothèses du théorème 4.3.2 sont appelées *sous-suite normales*.

**Définition 4.3.3** (Sous-suite normale). Soit  $\mathcal{C}$  une courbe CTLB et  $h$  un pas de grille compatible avec  $\mathcal{C}$ ,  $(b_{\sigma(i)})_{i \in \mathbb{Z}_{N_h}}$  une sous-suite de la courbe de Jordan  $\partial_G^h(\mathcal{C})$  est dite *normale* si pour tout  $i \in \mathbb{Z}_{N_h}$ ,  $(\text{Card}[\sigma(i), \sigma(i+1)])h < \delta$ .

## 4.4 Conclusion

Nous avons défini une application, appelée rétro-discrétisation qui à chaque bel, élément de  $\partial_G^h(\mathcal{C})$ , associe un point de la courbe  $\mathcal{C}$  et nous avons démontré qu'une telle application préserve l'ordre des points. Nous avons également démontré que cette propriété de préservation de l'ordre reste vraie pour certaines sous-suites de bels de  $\partial_G^h(\mathcal{C})$  appelées sous-suites normales. Cette préservation de l'ordre est une transcription dans le discret de la propriété d'homéomorphisme entre deux courbes. Cependant, cette démarche n'est pas généralisable en dimension supérieure, comme indiqué en conclusion du chapitre précédent (partie 3.6) le bord d'une surface CTLB et de sa discrétisation ne sont pas nécessairement homéomorphes. De plus, une surface ne définit pas d'ordre canonique sur ses points. Une autre notion doit être utilisée pour exprimer correctement que les points de la surface continue l'échantillonnent et cette notion doit être préservée lorsque les points de la surface discrète sont associés à la surface continue.

Dans le chapitre suivant (chapitre 5), nous nous servons de cette rétro-discrétisation afin de comparer les quantités géométriques estimées sur  $\mathcal{C}$  et sa discrétisation  $\partial_G^h(\mathcal{C})$ .

## Chapitre 5

# Estimation sur des courbes discrètes

Dans cette partie nous nous intéressons à l'évaluation de certains estimateurs géométriques sur des objets discrétisés sur une grille de pas  $h$ . Une première approche consisterait pour chaque forme  $S$  donnée, à discrétiser  $S$  sur ordinateur pour des pas de grilles décroissants, à calculer l'erreur d'estimation de la caractéristique géométrique pour chaque discrétisation de  $S$ . Cette approche indique la performance de la méthode d'estimation sur la forme  $S$ . Elle nécessite de connaître le périmètre de  $S$ , de pouvoir implémenter la forme  $S$  sur ordinateur et d'être capable de la discrétiser. Nous utiliserons une autre approche consistant à vérifier théoriquement *la convergence multigrille* [KR04, Partie 2.4.3] d'un estimateur géométrique sur une famille de formes  $S$ . Un estimateur géométrique est *multigrille convergent* pour un objet  $S$  si l'estimation d'une quantité géométrique de  $S$  à partir de sa discrétisation  $\text{Dig}_h(S)$  tend vers la quantité géométrique de  $S$ . La convergence multigrille est un critère indépendant du choix du pas de grille  $h$ . Les résultats de convergence multigrille que nous démontrons sont valides sur des familles de formes (à bord CTLB ou à courbure totale lipschitzienne). De plus, les vitesses de convergence ou les majorations d'erreur d'estimation sont établies dans le pire des cas de ces familles de formes. Dans cette seconde approche, il s'agit donc plus de s'assurer de la robustesse de ces estimateurs sur une famille de formes que d'estimer leur performance. C'est-à-dire de garantir pour une résolution suffisamment faible que l'estimation n'est pas trop erronée, plutôt que de donner une idée de la performance de celle-ci. Plus spécifiquement nous établissons des résultats de convergence multigrille d'estimateurs de longueur dits «non-locaux» (partie 5.3). Ces résultats de convergence sont des cas particuliers de résultats portant sur les estimateurs d'intégrales curvilignes 5.2.

### 5.1 État de l'art

La convergence multigrille d'estimateurs géométriques de même dimension que l'espace ambiant comme l'aire ou les moments est connue depuis longtemps :

- Selon [KR04, chapitre 2.4], Gauss et Dirichlet ont montré la convergence de l'aire  $A(\square_G^h(S))$  vers l'aire  $A(S)$  de  $S$  à vitesse  $O(h)$  pour tout objet  $S$  convexe du plan et on rappelle que  $\square_G^h(S)$  est la dilatation de la discrétisation de Gauss  $G_h(C)$  par un pixel centré (définition 3.2.10),
- plus généralement en 1892 [Jor92], Jordan montre que si l'aire de l'ensemble des pixels intersectés par  $\partial S$  tend vers 0, alors les aires  $A(\square_C^h(S))$  et  $A(\square_\cap^h(S))$  convergent vers  $A(S)$

pour tout objet  $S$  d'un seul tenant (c'est-à-dire ne pouvant être décomposé en deux sous-ensembles fermés à distance strictement positive l'un de l'autre) .

- l'estimateur  $h^2 \sum_{x,y \in \text{Dig}_G^h(S)} x^p y^q$  converge vers les moments  $\int_{(x,y) \in S} x^p y^q dx dy$  de  $S$  à vitesse  $O(h)$  [KŽ00].

En revanche l'estimation de quantités unidimensionnelles sur le bord d'un objet  $\partial S$  reste un sujet de recherche actif. Les quantités unidimensionnelles peuvent se diviser en deux grandes catégories : les quantités différentielles définies en chaque point  $p$  de  $\partial S$  et dépendant d'un voisinage arbitrairement petit autour de  $p$  comme la tangente, la normale ou la courbure et les quantités intégrales de  $\partial S$  comme la longueur d'un arc, sa courbure totale ou encore l'intégrale de fonctions dont on connaît la valeur en certains points le long de  $\partial S$ . Nous ne nous intéresserons uniquement qu'à l'estimation de ces dernières quantités et plus particulièrement à l'estimation de longueur d'une courbe.

La plupart des méthodes d'estimation de longueur consistent à partitionner la courbe discrète  $\partial_G^h$  en motifs, puis à sommer le poids de chaque motif pour estimer la longueur de  $\mathcal{C}$ . La façon de partitionner la courbe discrète  $\partial_G^h$  définit une classification de ces estimateurs en trois classes : les estimateurs locaux, les estimateurs adaptatifs et les estimateurs non-locaux. Certaines méthodes basées sur l'estimation de tangente échappent à cette classification [EPRR79]. Nous présentons dans cette partie chacune de ces trois classes d'estimateurs.

### 5.1.1 Estimateurs locaux

Les premiers estimateurs de longueur à apparaître dans les années 1980 sont les estimateurs *locaux*. Un estimateur est dit *local* si le nombre de pixels par motif de  $\partial_G^h$  ne dépend pas du pas  $h$  de la grille.

Il existe plusieurs méthodes [VS82, DS87] pour affecter à chaque motif une longueur estimée. Par exemple en minimisant l'erreur quadratique moyenne, l'estimateur obtenu est appelé Best Linear Unbiased Estimator [DS87] et est défini sur une courbe 8-connexe par :

$$E_{\text{BLUE}}(\partial \text{Dig}_G^h(S)) := h(0, 948n_i + 1, 343n_d)$$

avec  $n_i$  nombre de pas horizontaux ou verticaux et  $n_d$  nombre de pas diagonaux de  $\partial_G^h$ .

Cependant il a été prouvé que les estimateurs locaux ne vérifient pas le critère de convergence multigrille pour des droites de pentes trop faibles [KMRT93, Théorème 1] (en utilisant la discrétisation de Jordan des droites), des droites de pentes irrationnelles [TD03] et pour presque toutes les paraboles [DTZ09, TD11].

Des estimateurs plus complexes ont alors été développés.

### 5.1.2 Estimateurs adaptatifs

Un estimateur est dit *adaptatif* si la longueur des motifs est déterminée algorithmiquement et dépend de la reconstruction  $\partial_G^h(S)$  du bord de la forme  $S$ . L'union de tous ces motifs définit un polygone  $\mathcal{A}_h$ . Selon l'algorithme de construction du polygone  $\mathcal{A}_h$  les estimateurs adaptatifs se scindent en deux sous-familles : d'une part les estimateurs basés sur les SDD (Segments de Droite Discrète) et d'autre part les estimateurs basés sur les PLM (Polygones de Longueur Minimale) et les Saucisses d'Approximation-PLM. La longueur estimée est alors la longueur du polygone  $\mathcal{A}_h$ .

### 5.1.2.1 Segments de Droites Discrets (SDD)

Le principe des Segments de Droite Discrète (SDD) est d'identifier dans le bord de la forme discrète des segments de droite. Il existe plusieurs algorithmes réalisant cet objectif (voir [KR04, partie 9.6]). Le théorème suivant prouve la convergence multirésolution d'un estimateur de longueur basé sur une méthode SDD.

**Propriété 5.1.1** ([KŽ00, Théorème 13]). *Soit  $S$  un sous-ensemble polygonal convexe de  $\mathbb{R}^2$ . Il existe un pas de grille  $h_0$  tel que pour tout pas de grille  $h \leq h_0$ , si le polygone  $\mathcal{A}_h$  obtenu par un algorithme SDD est également convexe, alors,*

$$|\mathcal{L}(\partial S) - \mathcal{L}(\mathcal{A}_h)| \leq 2\pi d_H(\partial S, \mathcal{A}_h)h + \sqrt{2}\pi h.$$

L'algorithme SDD le plus couramment utilisé est l'algorithme des Segments de Droite Discrète Maximaux (SDDM) développé par Isabelle Debled-Rennesson et Jean-Pierre Réveillès [Deb95]. Il a l'avantage de s'exécuter en temps linéaire et de reposer sur des définitions mathématiquement exploitables. Une droite standard discrète de pente  $\frac{a}{b}$  et de borne inférieure  $\mu \in \mathbb{Z}$  avec  $a$  et  $b$  deux entiers premiers entre eux et  $b$  non-nul est l'ensemble des points  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  vérifiant la double inéquation diophantienne

$$\mu \leq ax - by < \mu + \omega. \quad (5.1)$$

Il a été prouvé qu'une droite discrète est 8-connexe si et seulement si son épaisseur  $\omega$  est supérieure ou égale à  $\max(|a|, |b|)$ . Elle est alors appelée *droite naïve discrète* si  $\omega = \max(|a|, |b|)$ . Une droite discrète est 4-connexe si et seulement si son épaisseur  $\omega$  est supérieure ou égale à  $|a| + |b|$ . Elle est alors appelée *droite standard discrète* si  $\omega = |a| + |b|$ . Supposons que  $(x_j, y_j)_{j \in [1, N]}$  est une suite de points tel que deux termes consécutifs sont 4-adjacents. Un segment de droite standard est une sous-suite dont les termes consécutifs sont 4-adjacents et sont solutions de la double inéquation 5.1. A partir d'un point initial  $(x_0, y_0)$ , l'algorithme étend itérativement le segment discret jusqu'à atteindre un point tel que la suite  $((x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{j_1}, y_{j_1}))$  ne soit plus un segment standard auquel cas, l'algorithme démarre la reconnaissance d'un nouveau segment. Le polygone  $\mathcal{A}_h$  construit par les Segments de Droite Discrète Maximaux est l'union des segments  $[x_{j_k}, x_{j_{k+1}}]$ .

### 5.1.2.2 Polygones de Longueur Minimale (PLM)

L'idée des Polygones de Longueur Minimale (PLM) est de construire le polygone de plus petite longueur à l'intérieur d'une couronne définie autour de  $\partial^h(S)$ . Deux procédés de constructions ont été proposés les PLM et les PLM des Saucisses d'Approximation (PLM-SA). Le *Polygone de Longueur Minimale* de  $\text{Dig}_C^h(S)$  est le polygone  $\mathcal{A}_h$  de plus petit périmètre contenant  $\overset{\circ}{D}$  inclus dans la discrétisation de Jordan intérieure  $\text{Dig}_C^h(S)$  où

$$D := \{p \in h\mathbb{Z}^2 \mid P_p \subset \overset{\circ}{\square}_C^h(S)\}.$$

Un algorithme de construction des PLM a été proposé dans [SZ96] (rapport technique introuvable) et plus récemment dans [LP11]. La longueur de la courbe est estimée par  $\mathcal{L}(\mathcal{A}_h)$ . La convergence multigrille de l'estimateur de longueur basé sur les PLM repose sur le théorème suivant.

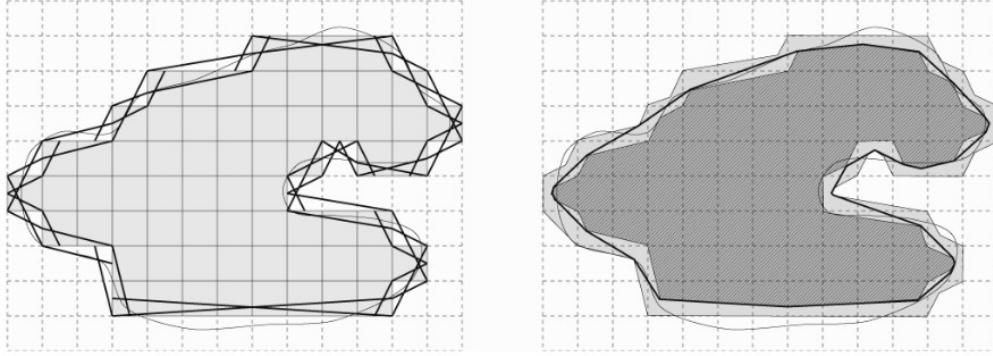


FIGURE 5.1 – Sur la figure de gauche les segments construits à partir des milieux et des sommets du bord de  $\square_G^h(S)$ . A droite la construction des polygones  $L_1$  et  $L_2$  délimitant l’anneau à l’intérieur duquel est défini le PLM-SA.

**Propriété 5.1.2** ([SZS98, Théorème 4.13]). *Soit  $S$  un compact de  $\mathbb{R}^2$  délimité par une courbe de Jordan  $\mathcal{C}$  de classe  $C^\infty$ . Notons  $D$  le sous-ensemble de  $h\mathbb{Z}^2$  défini par l’équation 5.1.2.2. Soit  $\mathcal{A}_h$  le plus petit polygone contenant  $\mathring{D}$  inclus dans la discrétisation de Jordan intérieure  $\text{Dig}_G^h(S)$ , alors :*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{L}(\mathcal{A}_h) = \mathcal{L}(\mathcal{C}).$$

D’autres versions de ce théorème sont présentées dans [SZS98].

D’autres PLM appelés PLM des Saucisses d’Approximation sont définis en construisant deux autres polygones frontières [AKKO01]. Ils consistent à construire un grand nombre de segments en reliant certains milieux de faces et certains sommets de  $\partial \square_G^h(S)$ , puis à définir un polygone intérieur  $L_1$  et un polygone extérieur  $L_2$ . Le *PLM des Saucisses d’Approximation* est le polygone  $\mathcal{A}_h$  de plus petit périmètre contenant  $L_1$  et inclus dans  $L_2$  (figure 5.1). La longueur de  $\partial S$  est alors estimée par  $\mathcal{L}(\mathcal{A}_h)$ .

**Propriété 5.1.3** ([AKKO01, Théorème 2]). *Soit  $S$  un compact convexe délimité par un polygone  $P$ . Il existe alors un pas de grille  $h_0$  tel que pour tout  $h < h_0$ , tout PLM-AS est un polygone  $\mathcal{A}_h$  tel que*

$$\|\mathcal{L}(P) - \mathcal{L}(\mathcal{A}_h)\| \leq (4\sqrt{2} + 0,1872)h.$$

### 5.1.3 Estimateurs non-locaux

Constatant l’absence de convergence multigrille pour les estimateurs locaux, Alain Daurat et Mohamed Tajine introduisent les estimateurs *semi-locaux* [DTZ11]. Un estimateur semi-local est le couple de fonctions qui à un pas de grille  $h$  donné associe une taille de motifs  $\mathcal{M}(h)$  et à un motif  $\omega$  associe un poids  $p(\omega)$ . Ils démontrent, dans le cas où la courbe est le graphe d’une fonction  $C^2$ , la convergence des estimateurs semi-locaux sous les hypothèses suivantes :

1.  $\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{M}(h) = 0$ ,
2.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathcal{M}(h) = +\infty$ , (le nombre de pixels par motif tend vers  $+\infty$ )



$$3. \sup_{\omega \text{ de taille } \frac{\mathcal{M}(h)}{h}} |p(\omega) - \mathcal{L}(\omega)| = o_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\mathcal{M}(h)}{h} \right).$$

La taille des motifs assurant la convergence est alors un compromis entre les deux premières contraintes. La meilleure vitesse de convergence multigrille  $O(h^{\frac{1}{2}})$  de l'erreur d'estimation est obtenue en choisissant  $\mathcal{M}(h) = \Theta(h^{\frac{1}{2}})$  [DTZ11, Proposition 1].

Généralisant la démarche d'Alain Daurat et de Mohamed Tajine, Loïc Mazo et Étienne Baudrier [MB16] définissent les *estimateurs non-locaux*. Ces estimateurs ont été introduits pour des discrétisations de graphes de fonctions et permettent d'assouplir les contraintes sur la taille des motifs en autorisant des tailles variables. Contrairement aux estimateurs semi-locaux, la forme des motifs n'intervient pas dans l'estimation mais seulement la distance entre les extrémités des motifs.

**Définition 5.1.4** (Estimateur non-local, [MB16]). — La *moyenne*  $\alpha$  d'une suite partitionnant un intervalle  $[a, b]$   $(x_i)_{i \in \llbracket 0, N \rrbracket}$  avec  $a = x_0$  et  $b = x_N$  est définie par

$$M_\alpha((x_i)_{i \in \llbracket 0, N \rrbracket}) := \left( \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |x_{i+1} - x_i|^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

— La *moyenne*  $\infty$  d'une suite partitionnant un intervalle  $[a, b]$   $(x_i)_{i \in \llbracket 0, N \rrbracket}$  avec  $a = x_0$  et  $b = x_N$  est définie par

$$M_\infty((x_i)_{i \in \llbracket 0, N \rrbracket}) := \max_{i \in \llbracket 0, N \rrbracket} (|x_{i+1} - x_i|).$$

- Une *fonction de motifs* est une fonction qui à un pas de grille  $h$  et un à intervalle  $[a, b]$  associe une sous-suite de  $(kh)_{kh \in [a, b], k \in \mathbb{Z}}$ .
- Une  $\alpha$ -*fonction de motifs*  $\mathcal{M}$  est une fonction de motifs telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} M_\alpha(\mathcal{M}(h, [a, b])) = +\infty$$

(Autrement dit le nombre moyen de pixels par motif tend vers  $+\infty$  lorsque  $h$  tend vers 0).

- Une  $(\alpha, \beta)$ -*fonction de motifs*  $\mathcal{M}$  est une  $\alpha$ -fonction de motifs telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0} M_\beta(\mathcal{M}(h, [a, b])) = 0$$

(Autrement dit la taille réelle moyenne des motifs tend vers 0 lorsque  $h$  tend vers 0).

- Pour une fonction  $g$  donnée de graphe  $\mathcal{C}$ , une fonction de motifs  $\mathcal{M}$ , on note  $\mathcal{A}_h$  la ligne polygonale de sommets  $g(\mathcal{M}(h, [a, b]))$ . L'*estimation non-locale de la longueur de*  $\mathcal{C}$  est alors  $\mathcal{L}(\mathcal{A}_h)$ .

Le principal résultat de [MB16] est le théorème 8. Le théorème est très général, permet d'inclure les graphes de fonctions non-régulières et offre également une majoration de l'erreur d'estimation des MDSS. Le prix à payer est un énoncé long et difficilement interprétable. Nous présentons ici seulement les corollaires de ce théorème.

**Propriété 5.1.5** ([MB16, corollaire 1]). *Soit*  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  *une fonction lipschitzienne de graphe*  $\mathcal{C}$  *et*  $\mathcal{M}$  *une*  $(1, +\infty)$ -*fonction de motifs, alors*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{L}(\mathcal{A}_h) = \mathcal{L}(\mathcal{C}).$$

En renforçant les hypothèses sur la fonction  $g$ , ils obtiennent, en plus de la convergence multi-grille, une vitesse de convergence.

**Propriété 5.1.6** ([MB16, corollaire 2]). *Soit  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^{1,1}$  de graphe  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{M}$  une  $(1, 1)$ -fonction de motifs, alors*

$$|\mathcal{L}(\mathcal{A}_h) - \mathcal{L}(\mathcal{C})| = O_{h \rightarrow 0}(hM(h)) + O_{h \rightarrow 0}\left(\frac{h}{M(h)}\right)$$

avec  $M(h) := M_1(\mathcal{M}(h, [a, b]))$ .

Ces hypothèses «renforcées» peuvent être assouplies pour inclure des fonctions non-dérivables. Cependant un terme plus difficilement contrôlable apparaît alors dans l'erreur d'estimation.

**Propriété 5.1.7** ([MB16, corollaire 3]). *Soit  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lipschitzienne de graphe  $\mathcal{C}$  dont la dérivée est lipschitzienne sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition. Soit  $\mathcal{M}$  une  $(1, +\infty)$ -fonction de motifs, alors*

$$|\mathcal{L}(\mathcal{A}_h) - \mathcal{L}(\mathcal{C})| = O_{h \rightarrow 0}(M'(h)) + O_{h \rightarrow 0}\left(\frac{h}{M}\right) + O_{h \rightarrow 0}(H(h))$$

avec  $M := M_1(\mathcal{M}(h, [a, b]))$ ,  $M'(h) := M_{+\infty}(\mathcal{M}(h, [a, b]))$  et  $H(h)$  la somme des longueurs des intervalles de  $\mathcal{M}(h, [a, b])$  sur lesquels  $g$  n'est pas dérivable.

Dans la partie 5.3, nous étendrons les résultats de convergence des estimateurs non-locaux sur des graphes de fonctions à des courbes paramétrées. Ces résultats sont les cas particuliers de résultats d'estimation d'intégrale curviligne (partie 5.2).

#### 5.1.4 Estimation d'intégrale le long d'une courbe

Les résultats que nous avons établi pour les estimateurs de longueur s'étendent aisément aux estimateurs d'intégrales curvilignes. S'il existe de nombreux résultats en analyse numérique sur l'estimation d'intégrales (par exemple [Dem06, chapitre 3]), les résultats sur l'estimation d'intégrales curvilignes en géométrie discrète sont plus rares et se basent sur l'estimation des normales de la courbe  $\mathcal{C}$ .

**Propriété 5.1.8** ([LT16, Théorème 4]). *Soit  $f$  une fonction  $k$ -lipschitzienne et  $S$  une forme par( $r$ )-régulière*

$$\left\| \int_{\mathcal{C}} f(x) dx - h \sum_{a_i \in m\partial_G^h(S)} f(a_i) n(a_i) \cdot n_{est}(a_i) \right\| \leq \mathcal{L}(\mathcal{C}) (\max |f| + k) (O_{h \rightarrow 0}(h) + O_{h \rightarrow 0}(\|n_{est} - n\|_{est}))$$

avec

$$\|n_{est} - n\|_{est} := \sup_{y \in \partial \square_G^h(\mathcal{C})} \|n(\xi(y)) - n_{est}(y)\|$$

où  $\xi$  est la projection de  $\partial \square_G^h(S)$  sur  $\mathcal{C}$   $n_{est}(y)$  un estimateur de la normale à  $\partial S$  au point  $y$ ,  $n(\xi(y))$  la normale à  $\mathcal{C}$  au point  $\xi(y)$  et on rappelle que  $m\partial_G^h$  est la suite des milieux des bords.

Dans la partie 5.2, nous proposons une méthode d'estimation d'intégrale curviligne ne nécessitant pas d'estimation des normales.

## 5.2 Estimation d'intégrale le long d'une courbe discrète

L'objectif de cette partie est d'estimer l'intégrale d'une fonction  $f$  le long d'une courbe CTLB  $\mathcal{C}$  connaissant les valeurs de  $f$  sur la discrétisation de  $\mathcal{C}$  en utilisant le principe de l'estimation non-locale. Nous généralisons l'usage des  $\alpha$ -moyennes aux polygones afin de pouvoir définir l'estimation non-locale pour des courbes paramétrées.

### Définition 5.2.1.

— La *moyenne*  $\alpha$  d'un polygone  $\langle a_i \rangle_{i \in \mathbb{Z}_N}$  est définie par

$$M_\alpha(\langle a_i \rangle_{i \in [0, N]}) := \left( \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \|a_{i+1} - a_i\|^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

— La *moyenne*  $\infty$  d'un polygone  $\langle a_i \rangle_{i \in \mathbb{Z}_N}$  est définie par

$$M_\infty(\langle a_i \rangle_{i \in \mathbb{Z}_N}) := \max_{i \in \mathbb{Z}_N} (\|a_{i+1} - a_i\|).$$

Dans le cadre des courbes paramétrées, un estimateur non-local est une caractéristique géométrique d'une ligne polygonale  $\mathcal{A}_h$  dont les segments ont une taille moyenne  $M_\alpha(\mathcal{A}_h)$  tendant vers 0, tandis que le nombre moyen de pixels par segment  $\frac{1}{h} M_\beta(\mathcal{A}_h)$  tend vers  $+\infty$  quand  $h$  tend vers 0.

Usuellement l'intégrale de la fonction  $f$  le long d'une courbe  $C^1$  par morceaux est définie par  $\int_{t_0}^{t_1} f \circ \gamma(t) |\gamma'(t)| dt$  qui est indépendante du choix de la paramétrisation  $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$  de  $\mathcal{C}$ . Cependant, les courbes CTLB ne sont pas toutes  $C^1$  par morceaux (contre-exemple 2.2.3). Il est toujours possible de définir l'intégrale le long de  $\mathcal{C}$  en utilisant l'intégrale de Stieltjes comme étant la borne supérieure des sommes  $\sum_{i=0}^N f(\gamma(t_i))(s_{i+1} - s_i)$  où  $\gamma : [t_0, t_N] \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une paramétrisation de  $\mathcal{C}$ ,  $(t_i)$  partitionne  $[t_0, t_N]$ ,  $s_i$  est la longueur de  $\gamma([t_0, t_i])$ .

Afin de contrôler ses variations, nous supposons que  $f$  est  $(k_2, \alpha_2)$ -höldérienne (par rapport à l'abscisse curviligne) sur  $\mathcal{C}$ . De plus, pour contrôler l'erreur due à l'écart entre la courbe  $\mathcal{C}$  et sa discrétisation, nous supposons que  $f$  est  $(k_1, \alpha_1)$ -höldérienne sur  $\mathbb{R}^2$ . Le lecteur attentif remarquera que nous pourrions nous contenter de supposer que  $f$  est  $(k_1, \alpha_1)$ -höldérienne sur  $\mathcal{C} \oplus \bar{B}(0, \frac{h}{2})$  seulement. Il est à noter qu'une fonction  $f$   $(k_1, \alpha_1)$ -höldérienne sur  $\mathbb{R}^2$  est aussi  $(k_1, \alpha_1)$ -höldérienne par rapport à l'abscisse curviligne de n'importe quelle courbe  $\mathcal{C}$ . En effet soient  $f$  une fonction  $(k_1, \alpha_1)$ -höldérienne sur  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{C}$  une courbe de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\bar{\gamma}$  une paramétrisation par longueur d'arc de  $\mathcal{C}$ , et  $s_1, s_2 \in [0, \mathcal{L}(\mathcal{C})[$  alors :

$$\begin{aligned} \|f \circ \bar{\gamma}(s_2) - f \circ \bar{\gamma}(s_1)\| &\leq k_1 \|\bar{\gamma}(s_2) - \bar{\gamma}(s_1)\|^{\alpha_1}, \\ &\leq k_1 |s_2 - s_1|^{\alpha_1}. \end{aligned}$$

Nous utilisons la méthode des rectangles à gauche pour estimer l'intégrale le long de la courbe  $\mathcal{C}$ . Cela nécessite d'utiliser la longueur des arcs sur lesquels sont définis les «rectangles». On estime la longueur des arcs discrets par la distance entre leurs extrémités (voir figure 5.2). Ainsi nous définissons l'estimation de l'intégrale curviligne de  $f$  le long de  $\mathcal{C}$  à partir d'échantillons de points de la courbe discrète  $(a_i)$  par

$$\text{Int}(f, (a_i)) := \sum_{i=0}^{N_h-1} f(a_i) \|a_{i+1} - a_i\|.$$

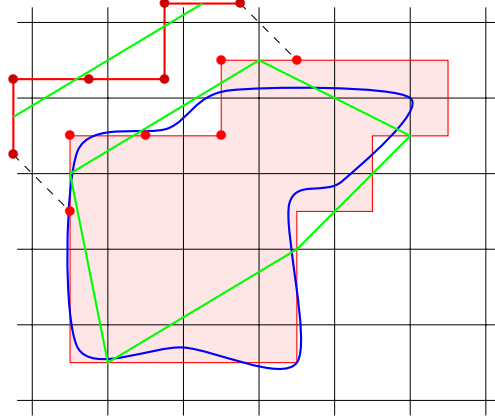


FIGURE 5.2 — En bleu, une courbe CTLB  $\mathcal{C}$ . La reconstruction  $\partial\Box_G^h(\mathcal{C})$  de  $\mathcal{C}$  (bord rouge) est partitionnée en arcs. Pour chacun de ces arcs correspond un segment dont les extrémités sont sur les bords délimitant l'arc. La longueur de chacun de ces segments est un estimateur de la longueur de l'arc de  $\mathcal{C}$  associé par une rétro-discrétisation. L'union de tous ces segments forme un polygone  $\mathcal{A}_h = [a_i^h]_{i \in \mathbb{Z}_{N_h}}$ .

Les deux théorèmes suivants proposent une majoration de l'erreur d'estimation de l'intégrale curviligne pouvant être calculée algorithmiquement *a posteriori*, ainsi qu'une vitesse de convergence et des hypothèses pour lesquelles l'estimateur converge. Le premier théorème concerne le cas dit «régulier» de courbes CTLB à courbure totale lipschitzienne et utilise le corollaire 2.2.44 alors que le second, dit cas «général» concerne l'ensemble des courbes CTLB et se base sur la propriété 2.2.17.

**Théorème 5.2.2** (Estimation d'intégrale, cas régulier). *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe CTLB et de courbure totale  $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne. Soit  $\bar{\gamma}$  une paramétrisation de  $\mathcal{C}$  par longueur d'arc. Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable sur  $\mathcal{C}$ ,  $(k_1, \alpha_1)$ -höldérienne et telle que  $f \circ \bar{\gamma}$  soit  $(k_2, \alpha_2)$ -höldérienne. Soit  $\{\mathcal{A}_h\}_{h>0}$  une famille de polygones telle que pour tout  $h$  compatible avec  $\mathcal{C}$ , la suite des sommets de  $\mathcal{A}_h$  est une sous-suite normale de  $\partial_G^h$  (Définition 4.3.3). Notons  $r_1 := \min(r, \frac{\delta}{2})$ . Pour tout  $h$  compatible avec la courbe  $\mathcal{C}$ , nous obtenons la majoration suivante :*

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f dx - \text{Int}(f, (a_i)) \right| \leq N_h \frac{k_2(\sqrt{2})^{\alpha_2+1}}{\alpha_2+1} M_{1+\alpha_2} (\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h)^{1+\alpha_2} \quad (5.2)$$

$$+ k_1 \sqrt{2} \left(\frac{h}{2}\right)^{\alpha_1} N_h (M_1(\mathcal{A}_h) + h) \quad (5.3)$$

$$+ \sum_{i=0}^{N_h-1} |f(a_i^h)| \left( 2r_1 \arcsin \left( \frac{\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h}{2r_1} \right) - \|a_{i+1}^h - a_i^h\| \right) \quad (5.4)$$

où  $[a_i^h]_{i \in \mathbb{Z}_{N_h}} := \mathcal{A}_h$ .

De plus,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{C}} f dx - \text{Int}(f, (a_i^h)) \right| &= O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{M_{1+\alpha_2} (\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h)^{1+\alpha_2}}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right) \\ &+ O_{h \rightarrow 0}(h^{\alpha_1}) \\ &+ O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{M_3(\mathcal{A}_h)^3}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right) \\ &+ O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{h}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right). \end{aligned}$$

Enfin, si nous supposons que :

- $h = o_{h \rightarrow 0}(M_1(\mathcal{A}_h))$ ,
- $\lim_{h \rightarrow 0} M_{\infty}(\mathcal{A}_h) = 0$ ,

alors :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \text{Int}(f, (a_i^h)) = \int_{\mathcal{C}} f dx.$$

*Démonstration.* Soit  $h$  un pas de grille compatible avec  $\mathcal{C}$ . Soit  $\xi : \text{Bel}_h(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$  une rétro-discrétisation et notons  $\xi_i^h := \xi(a_i^h)$  et  $s_i^h := \bar{\gamma}^{-1}(\xi_i^h)$ .

Par le théorème 4.3.2, les arcs les plus droits entre  $\xi_i^h$  et  $\xi_{i+1}^h$  pour  $i \in \mathbb{Z}_{N_h}$  partitionne la courbe  $\mathcal{C}$ . L'erreur d'estimation se décompose en quatre sommes :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{C}} f dx - \text{Int}(f, (a_i^h)) \right| &\leq \sum_{i=0}^{N_h-1} \left| \int_{s_i^h}^{s_{i+1}^h} f \circ \bar{\gamma} ds - f(a_i^h) \|a_{i+1}^h - a_i^h\| \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{N_h-1} \left| \int_{s_i^h}^{s_{i+1}^h} f \circ \bar{\gamma} ds - f(\xi_i^h)(s_{i+1}^h - s_i^h) \right| + \sum_{i=0}^{N_h-1} |f(\xi_i^h)(s_{i+1}^h - s_i^h) - f(a_i^h)(s_{i+1}^h - s_i^h)| \\ &+ \sum_{i=0}^{N_h-1} |f(a_i^h)(s_{i+1}^h - s_i^h) - f(a_i^h) \|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\|| + \sum_{i=0}^{N_h-1} |f(a_i^h) \|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\| - f(a_i^h) \|a_{i+1}^h - a_i^h\|| \end{aligned}$$

- Le premier terme correspond à l'erreur due à la méthode des rectangles à gauche. Par la propriété 2.2.17 et l'hypothèse hölderienne sur  $f \circ \gamma$ , nous obtenons successivement,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N_h-1} \left| \int_{s_i^h}^{s_{i+1}^h} f \circ \bar{\gamma} ds - f(\xi_i^h)(s_{i+1}^h - s_i^h) \right| &\leq \frac{1}{\alpha_2 + 1} \sum_{i=0}^{N_h-1} k_2 (s_{i+1}^h - s_i^h)^{\alpha_2+1} \\ &\leq \frac{k_2 (\sqrt{2})^{\alpha_2+1}}{\alpha_2 + 1} \sum_{i=0}^{N_h-1} \|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\|^{\alpha_2+1} \\ &\leq N_h \frac{k_2 (\sqrt{2})^{\alpha_2+1}}{\alpha_2 + 1} M_{1+\alpha_2} (\|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\|)^{1+\alpha_2} \\ &\leq N_h \frac{k_2 (\sqrt{2})^{\alpha_2+1}}{\alpha_2 + 1} M_{1+\alpha_2} (\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h)^{1+\alpha_2} \end{aligned}$$

Nous retrouvons alors le terme 5.2 et de plus,

$$\sum_{i=0}^{N_h-1} \left| \int_{s_i^h}^{s_{i+1}^h} f \circ \bar{\gamma} ds - f(\xi_i^h)(s_{i+1}^h - s_i^h) \right| = O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{M_{1+\alpha_2}(\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h)^{1+\alpha_2}}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right)$$

$$\text{car } N_h = \frac{\mathcal{L}([\xi_i^h])}{M_1([\xi_i^h])} \leq \frac{\mathcal{L}(\mathcal{C})}{M_1(\mathcal{A}_h) - h}.$$

- Le deuxième terme correspond à la différence d'aire dans la méthode des rectangles à gauche lorsque l'on remplace  $(\xi_i^h)$  par  $(a_i^h)$ .

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N_h-1} |f(\xi_i^h)(s_{i+1}^h - s_i^h) - f(a_i^h)(s_{i+1}^h - s_i^h)| &\leq k_1 \left(\frac{h}{2}\right)^{\alpha_1} \sum_{i=0}^{N_h-1} (s_{i+1}^h - s_i^h) \\ &\leq k_1 \sqrt{2} \left(\frac{h}{2}\right)^{\alpha_1} \sum_{i=0}^{N_h-1} \|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\| \\ &\leq k_1 \sqrt{2} \left(\frac{h}{2}\right)^{\alpha_1} N_h M_1(\|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\|) \\ &\leq k_1 \sqrt{2} \left(\frac{h}{2}\right)^{\alpha_1} N_h (M_1(\mathcal{A}_h) + h) \end{aligned}$$

Nous retrouvons alors le terme 5.3 et de plus,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N_h-1} |f(\xi_i^h)(s_{i+1}^h - s_i^h) - f(a_i^h)(s_{i+1}^h - s_i^h)| &\leq k_1 \left(\frac{h}{2}\right)^{\alpha_1} \sum_{i=0}^{N_h-1} (s_{i+1}^h - s_i^h) \\ &\leq k_1 \left(\frac{h}{2}\right)^{\alpha_1} \mathcal{L}(\mathcal{C}) \\ &= O(h^{\alpha_1}). \end{aligned}$$

- Le troisième terme correspond à l'erreur due à l'estimation de la longueur des arcs  $\mathcal{C}_i^h$  par la distance entre leurs extrémités. Par le corollaire 2.2.44 et par croissance de la fonction  $x \mapsto 2r_1 \arcsin\left(\frac{x}{2r_1}\right) - x$ , nous obtenons successivement :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N_h-1} |f(a_i^h)(s_{i+1}^h - s_i^h) - f(a_i^h)\|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\|| &\leq \sum_{i=0}^{N_h-1} |f(a_i^h)|(s_{i+1}^h - s_i^h - \|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\|) \\ &\leq \sum_{i=0}^{N_h-1} |f(a_i^h)| \left( 2r_1 \arcsin\left(\frac{\|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\|}{2r_1}\right) - \|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\| \right) \\ &\leq \sum_{i=0}^{N_h-1} |f(a_i^h)| \left( 2r_1 \arcsin\left(\frac{\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h}{2r_1}\right) - \|a_{i+1}^h - a_i^h\| - h \right) \end{aligned}$$

Or,

$$\arcsin(x) = x + O(x^3).$$

Donc

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{N_h-1} |f(a_i^h)(s_{i+1}^h - s_i^h) - f(a_i^h)| |\xi_{i+1}^h - \xi_i^h| \\
& \leq \max_{i \in \mathbb{Z}_{N_h}} (|f(a_i^h)|) N_h O_{h \rightarrow 0} (M_3(\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h)^3) \\
& \leq \max_{i \in \mathbb{Z}_{N_h}} (|f(a_i^h)|) \frac{\mathcal{L}(\mathcal{C})}{M_1(\mathcal{A}_h)} O_{h \rightarrow 0} (M_3(\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h)^3) \\
& = O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{M_3(\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h)^3}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right)
\end{aligned}$$

— Le quatrième terme est du à la différence de longueur entre les segments  $[a_i^h a_{i+1}^h]$  et  $[\xi_i^h \xi_{i+1}^h]$ .

$$\sum_{i=0}^{N_h-1} |f(a_i^h)| |\xi_{i+1}^h - \xi_i^h| - f(a_i^h) \|a_{i+1}^h - a_i^h\| \leq h \sum_{i=0}^{N_h-1} |f(a_i^h)|$$

De plus,

$$\begin{aligned}
h \sum_{i=0}^{N_h-1} |f(a_i^h)| & \leq h N_h \max(|f|) \\
& \leq \mathcal{L}(\mathcal{C}) \max(|f|) \frac{h}{M_1(\mathcal{A}_h)} \\
& = O\left(\frac{h}{M_1(\mathcal{A}_h)}\right)
\end{aligned}$$

Finalement, en regroupant les quatre termes, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathcal{C}} f dx - \text{Int}(f, (a_i)) \right| & \leq N_h \frac{k_2(\sqrt{2})^{\alpha_2+1}}{\alpha_2+1} M_{1+\alpha_2} (\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h)^{1+\alpha_2} \\
& \quad + k_1 \sqrt{2} \left(\frac{h}{2}\right)^{\alpha_1} N_h (M_1(\mathcal{A}_h) + h) \\
& \quad + \sum_{i=0}^{N_h-1} |f(a_i^h)| \left( 2r_1 \arcsin \left( \frac{\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h}{2r_1} \right) - \|a_{i+1}^h - a_i^h\| - h \right) \\
& \quad + h \sum_{i=0}^{N_h-1} |f(a_i^h)| \\
& \leq N_h \frac{k_2(\sqrt{2})^{\alpha_2+1}}{\alpha_2+1} M_{1+\alpha_2} (\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h)^{1+\alpha_2} \\
& \quad + k_1 \sqrt{2} \left(\frac{h}{2}\right)^{\alpha_1} N_h (M_1(\mathcal{A}_h) + h) \\
& \quad + \sum_{i=0}^{N_h-1} |f(a_i^h)| \left( 2r_1 \arcsin \left( \frac{\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h}{2r_1} \right) - \|a_{i+1}^h - a_i^h\| \right)
\end{aligned}$$

De plus, en rassemblant les majorations obtenues

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathcal{C}} f dx - \text{Int}(f, (a_i^h)) \right| &= O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{M_{1+\alpha_2} (\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h)^{1+\alpha_2}}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right) \\
&\quad + O_{h \rightarrow 0}(h^{\alpha_1}) \\
&\quad + O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{M_3 (\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h)^3}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right) \\
&\quad + O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{h}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right) \\
&= O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{M_{1+\alpha_2} (\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h)^{1+\alpha_2}}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right) \\
&\quad + O_{h \rightarrow 0}(h^{\alpha_1}) \\
&\quad + O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{M_3(\mathcal{A}_h)^3}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right) \\
&\quad + O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{h}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right).
\end{aligned}$$

Enfin, si nous supposons que  $h = o_{h \rightarrow 0}(M_1(\mathcal{A}_h))$  et que  $\lim_{h \rightarrow 0} M_\infty(\mathcal{A}_h) = 0$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{M_{1+\alpha_2} (\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h)^{1+\alpha_2}}{M_1(\mathcal{A}_h)} &= \frac{\sum_{i=0}^{N_h-1} (\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h)^{1+\alpha_2}}{\sum_{i=0}^{N_h-1} \|a_{i+1}^h - a_i^h\|} \\
&\leq \frac{(M_\infty(\mathcal{A}_h))^{\alpha_2} \sum_{i=0}^{N_h-1} (\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h)}{\sum_{i=0}^{N_h-1} \|a_{i+1}^h - a_i^h\|}.
\end{aligned}$$

Or  $hN_h = o_{h \rightarrow 0}(\sum_{i=0}^{N_h} \|a_{i+1}^h - a_i^h\|)$ . Donc  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=0}^{N_h-1} (\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h)}{\sum_{i=0}^{N_h-1} \|a_{i+1}^h - a_i^h\|} = 1$ . Par hypothèses  $\lim_{h \rightarrow 0} M_\infty(\mathcal{A}_h) = 0$ , donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{M_{1+\alpha_2} (\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h)^{1+\alpha_2}}{M_1(\mathcal{A}_h)} = 0.$$

De même

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{M_3(\mathcal{A}_h)}{M_1(\mathcal{A}_h)} = 0.$$

Finalement,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \int_{\mathcal{C}} f dx - \text{Int}(f, (a_i^h)) \right| = 0.$$

□

**Théorème 5.2.3** (Estimation d'intégrale, cas général). *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe CTLB. Soit  $\bar{\gamma}$  une paramétrisation de  $\mathcal{C}$  par longueur d'arc. Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable sur  $\mathcal{C}$ ,  $(k_1, \alpha_1)$ -höldérienne et telle que  $f \circ \bar{\gamma}$  soit  $(k_2, \alpha_2)$ -höldérienne. Soit  $\{\mathcal{A}_h\}_{h>0}$  une famille de polygones telle*



que pour tout  $h$  compatible avec  $\mathcal{C}$ , la suite des sommets de  $\mathcal{A}_h$  est une suite normale d'une discrétisation de Gauss de  $\mathcal{C}$ . Soit  $\mu \in ]0, 1[$ . Pour tout  $h$  compatible avec la courbe  $\mathcal{C}$ , nous obtenons la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{C}} f dx - \text{Int}(f, (a_i^h)) \right| &\leq N_h \frac{k_2(\sqrt{2})^{\alpha_2+1}}{\alpha_2+1} M_{1+\alpha_2} (\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h)^{1+\alpha_2} \\ &\quad + k_1 \sqrt{2} \left(\frac{h}{2}\right)^{\alpha_1} N_h (M_1(\mathcal{A}_h) + h) \\ &\quad + N_h \max_{i \in \mathbb{Z}_{N_h}} |f(a_i^h)| \left( \frac{1}{\cos \frac{\pi(M_\infty(\mathcal{A}_h)+h)^\mu}{4}} - 1 \right) M_2(\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h) \\ &\quad + (\sqrt{2}-1) (M_\infty(\mathcal{A}_h) + h)^{1-\mu} \max_{i \in \mathbb{Z}_{N_h}} |f(a_i^h)| \\ &\quad + h \sum_{i=0}^{N_h-1} |f(a_i^h)| \end{aligned}$$

où  $\langle a_i^h \rangle_{i \in \mathbb{Z}_{N_h}} := \mathcal{A}_h$ .

De plus,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{C}} f dx - \text{Int}(f, (a_i^h)) \right| &= O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{M_{1+\alpha_2} (\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h)^{1+\alpha_2}}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right) \\ &\quad + O_{h \rightarrow 0} (h^{\alpha_1}) \\ &\quad + O_{h \rightarrow 0} \left( (M_\infty(\mathcal{A}_h) + h)^{1-\mu} \right) \\ &\quad + O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{(M_\infty(\mathcal{A}_h) + h)^{2\mu}}{M_1(\mathcal{A}_h)^{1/2}} \right) \\ &\quad + O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{h}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right). \end{aligned}$$

Enfin, si nous supposons que :

- $h = o_{h \rightarrow 0}(M_1(\mathcal{A}_h))$ ,
- $\lim_{h \rightarrow 0} M_\infty(\mathcal{A}_h) = 0$ ,
- $M_\infty(\mathcal{A}_h)^{4\mu} = o_{h \rightarrow 0}(M_1(\mathcal{A}_h))$ .

alors :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \text{Int}(f, \mathcal{A}_h) = \int_{\mathcal{C}} f dx.$$

*Démonstration.* Soit  $h$  un pas de grille compatible avec  $\mathcal{C}$ . Soit  $\xi : \text{Bel}_h(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$  une rétro-discrétisation. Notons  $\xi_i^h := \xi(a_i^h)$  et  $s_i^h := \bar{\gamma}^{-1}(\xi_i^h)$  et  $\mathcal{C}_i^h := \mathcal{C}_{\xi_i^h}^{\xi_{i+1}^h}$ . Comme dans la preuve du

théorème 5.2.2, l'erreur se décompose en quatre sommes (par le théorème 4.3.2) :

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathcal{C}} f dx - \text{Int}(f, (a_i^h)) \right| \leq \sum_{i=0}^{N_h-1} \left| \int_{s_i^h}^{s_{i+1}^h} f \circ \bar{\gamma} ds - f(a_i^h) \|a_{i+1}^h - a_i^h\| \right| \\
& \leq \sum_{i=0}^{N_h-1} \left| \int_{s_i^h}^{s_{i+1}^h} f \circ \bar{\gamma} ds - f(\xi_i^h)(s_{i+1}^h - s_i^h) \right| + \sum_{i=0}^{N_h-1} |f(\xi_i^h)(s_{i+1}^h - s_i^h) - f(a_i^h)(s_{i+1}^h - s_i^h)| \\
& \quad + \sum_{i=0}^{N_h-1} |f(a_i^h)(s_{i+1}^h - s_i^h) - f(a_i^h) \|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\|| + \sum_{i=0}^{N_h-1} |f(a_i^h) \|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\| - f(a_i^h) \|a_{i+1}^h - a_i^h\||
\end{aligned}$$

En reprenant la preuve du théorème 5.2.2, nous retrouvons les majorations suivantes :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{N_h-1} \left| \int_{s_i^h}^{s_{i+1}^h} f \circ \bar{\gamma} ds - f(\xi_i^h)(s_{i+1}^h - s_i^h) \right| \leq N_h \frac{k_2(\sqrt{2})^{\alpha_2+1}}{\alpha_2+1} M_{1+\alpha_2} (\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h)^{1+\alpha_2} \\
& \sum_{i=0}^{N_h-1} \left| \int_{s_i^h}^{s_{i+1}^h} f \circ \bar{\gamma} ds - f(\xi_i^h)(s_{i+1}^h - s_i^h) \right| = O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{M_{1+\alpha_2} (\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h)^{1+\alpha_2}}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right) \\
& \sum_{i=0}^{N_h-1} |f(\xi_i^h)(s_{i+1}^h - s_i^h) - f(a_i^h)(s_{i+1}^h - s_i^h)| \leq k_1 \sqrt{2} \left(\frac{h}{2}\right)^{\alpha_1} N_h (M_1(\mathcal{A}_h) + h) \\
& \sum_{i=0}^{N_h-1} |f(\xi_i^h)(s_{i+1}^h - s_i^h) - f(a_i^h)(s_{i+1}^h - s_i^h)| = O_{h \rightarrow 0} (h^{\alpha_1}) \\
& \sum_{i=0}^{N_h-1} |f(a_i^h) \|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\| - f(a_i^h) \|a_{i+1}^h - a_i^h\|| \leq h \sum_{i=0}^{N_h-1} |f(a_i^h)| \\
& \sum_{i=0}^{N_h-1} |f(a_i^h) \|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\| - f(a_i^h) \|a_{i+1}^h - a_i^h\|| = O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{h}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right)
\end{aligned}$$

En revanche la majoration du troisième terme correspondant à l'erreur d'estimation de la longueur des arcs  $\mathcal{C}_i^h$  par la distance entre leurs extrémités diffère de la preuve du théorème 5.2.2. Soient  $I_0$  et  $I_1$  deux sous-ensembles de  $\mathbb{Z}_{N_h}$  définis par :

$$\begin{aligned}
I_0 & := \{i \mid \kappa(\mathcal{C}_i^h) \leq \kappa(\mathcal{C}) M_\infty(\langle \xi_i^h \rangle)^\mu\}, \\
I_1 & := \mathbb{Z}_{N_h} \setminus I_0.
\end{aligned}$$

Par la propriété 2.2.17,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{N_h-1} |f(a_i^h)(s_{i+1}^h - s_i^h) - f(a_i^h) \|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\|| & \leq \sum_{i \in I_0}^{N_h-1} |f(a_i^h)| \left( \frac{1}{\cos \frac{\kappa(\mathcal{C}_i^h)}{2}} - 1 \right) \|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\| \\
& \quad + \sum_{i \in I_1}^{N_h-1} |f(a_i^h)| \left( \frac{1}{\cos \frac{\kappa(\mathcal{C}_i^h)}{2}} - 1 \right) \|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\|
\end{aligned}$$

D'une part, il y a au plus  $\lfloor M_{+\infty}(\|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\|)^{-\mu} \rfloor$  arcs  $\mathcal{C}_i^h$  de courbure totale strictement plus grande que  $M_{+\infty}(\|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\|)^\mu \kappa(\mathcal{C})$ , (sinon la courbure totale de  $\mathcal{C}$  serait supérieure à  $\kappa(\mathcal{C})$ ), donc

$$\text{Card } I_1 \leq M_\infty(\|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\|)^{-\mu},$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_1} |f(a_i^h)| \left( \frac{1}{\cos \frac{\kappa(\mathcal{C}_i^h)}{2}} - 1 \right) \|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\| &\leq (\sqrt{2} - 1) \sum_{i \in I_1} |f(a_i^h)| \|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\| \\ &\leq (\sqrt{2} - 1) M_\infty(\|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\|)^{1-\mu} \max_{i \in \mathbb{Z}_{N_h}} |f(a_i^h)| \\ &\leq (\sqrt{2} - 1) (M_\infty(\mathcal{A}_h) + h)^{1-\mu} \max_{i \in \mathbb{Z}_{N_h}} |f(a_i^h)|. \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{i \in I_1} |f(a_i^h)| \left( \frac{1}{\cos \frac{\kappa(\mathcal{C}_i^h)}{2}} - 1 \right) \|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\| = O_{h \rightarrow 0} (M_\infty(\mathcal{A}_h) + h)^{1-\mu}$$

D'autre part, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout  $h$  suffisamment petit pour que  $\kappa(\mathcal{C})M_\infty(\langle x_i^h \rangle)^\mu < \pi$  ( $\lim_{h \rightarrow 0} M_\infty = 0$ ),

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_0} |f(a_i^h)| \left( \frac{1}{\cos \frac{\kappa(\mathcal{C}_i^h)}{2}} - 1 \right) \|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\| &\leq \sum_{i \in I_0} |f(a_i^h)| \left( \frac{1}{\cos \frac{\kappa(\mathcal{C})M_\infty(\|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\|)^\mu}{2}} - 1 \right) \|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\| \\ &\leq \sqrt{N_h \left( \max_{i \in \mathbb{Z}_{N_h}} |f(a_i^h)| \right)^2 \left( \frac{1}{\cos \frac{\kappa(\mathcal{C})M_\infty(\|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\|)^\mu}{2}} - 1 \right)^2} \sqrt{\sum_{i=0}^{N_h-1} \|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\|^2} \\ &\leq \sqrt{N_h} \max_{i \in \mathbb{Z}_{N_h}} |f(a_i^h)| \left( \frac{1}{\cos \frac{\kappa(\mathcal{C})M_\infty(\|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\|)^\mu}{2}} - 1 \right) \sqrt{N_h} M_2(\|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\|) \\ &\leq N_h \max_{i \in \mathbb{Z}_{N_h}} |f(a_i^h)| \left( \frac{1}{\cos \frac{\kappa(\mathcal{C})(M_\infty(\mathcal{A}_h) + h)^\mu}{2}} - 1 \right) M_2(\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h) \end{aligned}$$

De plus, si  $M_\infty(\mathcal{A}_h) + h \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} &\sqrt{N_h \left( \max_{i \in \mathbb{Z}_{N_h}} |f(a_i^h)| \right)^2 \left( \frac{1}{\cos \frac{\kappa(\mathcal{C})M_\infty(\|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\|)^\mu}{2}} - 1 \right)^2} \sqrt{\sum_{i=0}^{N_h-1} \|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\|^2} \\ &\leq \sqrt{N_h} \max_{i \in \mathbb{Z}_{N_h}} |f(a_i^h)| \left( \frac{1}{\cos \frac{\kappa(\mathcal{C})M_\infty(\|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\|)^\mu}{2}} - 1 \right) \sqrt{\sum_{i=0}^{N_h-1} \|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\|} \\ &\leq \mathcal{L}(\mathcal{C}) \frac{\max |f|}{\sqrt{M_1(\mathcal{A}_h)}} \left( \frac{1}{\cos \frac{\kappa(\mathcal{C})(M_\infty(\mathcal{A}_h) + h)^\mu}{2}} - 1 \right), \end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{\cos(y/2)} - 1 = O(y^2).$$

Donc

$$\sum_{i \in I_0} |f(a_i^h)| \left( \frac{1}{\cos \frac{\kappa(C_i^h)}{2}} - 1 \right) \|\xi_{i+1}^h - \xi_i^h\| = O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{(M_\infty(\mathcal{A}_h) + h)^{2\mu}}{M_1(\mathcal{A}_h)^{1/2}} \right).$$

Finalement, en regroupant tous les termes,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{C}} f dx - \text{Int}(f, (a_i^h)) \right| &\leq N_h \frac{k_2(\sqrt{2})^{\alpha_2+1}}{\alpha_2 + 1} M_{1+\alpha_2} (\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h)^{1+\alpha_2} \\ &\quad + k_1 \sqrt{2} \left(\frac{h}{2}\right)^{\alpha_1} N_h (M_1(\mathcal{A}_h) + h) \\ &\quad + N_h \max_{i \in \mathbb{Z}_{N_h}} |f(a_i^h)| \left( \frac{1}{\cos \frac{\pi(M_\infty(\mathcal{A}_h) + h)^\mu}{4}} - 1 \right) M_2 (\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h) \\ &\quad + (\sqrt{2} - 1) (M_\infty(\mathcal{A}_h) + h)^{1-\mu} \max_{i \in \mathbb{Z}_{N_h}} |f(a_i^h)| \\ &\quad + h \sum_{i=0}^{N_h-1} |f(a_i^h)|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{C}} f dx - \text{Int}(f, (a_i^h)) \right| &= O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{M_{1+\alpha_2} (\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h)^{1+\alpha_2}}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right) \\ &\quad + O_{h \rightarrow 0} (h^{\alpha_1}) \\ &\quad + O_{h \rightarrow 0} \left( (M_\infty(\mathcal{A}_h) + h)^{1-\mu} \right) \\ &\quad + O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{(M_\infty(\mathcal{A}_h) + h)^{2\mu}}{M_1(\mathcal{A}_h)^{1/2}} \right) \\ &\quad + O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{h}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right). \end{aligned}$$

Enfin, si nous supposons que :

- $h = o_{h \rightarrow 0}(M_1(\mathcal{A}_h))$ ,
- $M_\infty(\mathcal{A}_h)^{4\mu} = o_{h \rightarrow 0}(M_1(\mathcal{A}_h))$

alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \int_{\mathcal{C}} f dx - \text{Int}(f, (a_i^h)) \right| = 0.$$

□

Dans les deux théorèmes, l'erreur d'estimation de l'intégrale se décompose en quatre parties.

La première partie est l'erreur d'estimation due à la méthode des rectangles à gauche et est commun aux deux théorèmes :

$$N_h \frac{k_2(\sqrt{2})^{\alpha_2+1}}{\alpha_2 + 1} M_{1+\alpha_2} (\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h)^{1+\alpha_2}.$$

Le deuxième est la différence d'aire de ces rectangles lorsque l'on remplace  $f(\xi_i^h)$  par  $f(a_i^h)$  et est commun aux deux théorèmes :

$$k_1 \sqrt{2} \left(\frac{h}{2}\right)^{\alpha_1} N_h (M_1(\mathcal{A}_h) + h)$$

Le troisième est l'erreur d'estimation de la longueur des arcs  $\mathcal{C}|_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}$  par leurs cordes. C'est la seule partie qui diffère dans les deux théorèmes. Dans le cas régulier, cette partie est

$$\sum_{i=0}^{N_h-1} |f(a_i^h)| \left( 2r_1 \arcsin \left( \frac{\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h}{2r_1} \right) - \|a_{i+1}^h - a_i^h\| - h \right).$$

Dans le cas général, cette partie se décompose en deux sous-termes, le premier correspondant aux arcs de  $\mathcal{C}$  de forte courbure totale

$$N_h \max_{i \in \mathbb{Z}_{N_h}} |f(a_i^h)| \left( \frac{1}{\cos \frac{\pi(M_\infty(\mathcal{A}_h) + h)^\mu}{4}} - 1 \right) M_2(\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h),$$

et le second,

$$(\sqrt{2} - 1) (M_\infty(\mathcal{A}_h) + h)^{1-\mu} \max_{i \in \mathbb{Z}_{N_h}} |f(a_i^h)|,$$

aux arcs de  $\mathcal{C}$  de faible courbure totale. La quatrième partie est due à la différence de longueur entre les segments  $[a_{i+1}, a_i]$  et  $[\xi_{i+1}, \xi_i]$  :

$$h \sum_{i=0}^{N_h-1} |f(a_i^h)|.$$

Dans la majoration de l'erreur du cas régulier, le troisième terme résulte de la fusion de deux termes. Cette simplification est purement formelle et n'améliore pas la vitesse de convergence en  $O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{M_3(\mathcal{A}_h)^3}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right) + O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{h}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right)$ . Alors que les trois premières parties correspondent à une erreur d'estimation à partir de points échantillonnant la courbe  $\mathcal{C}$  avec une incertitude sur la valeur de  $f(\xi_i)$ , le dernier terme est lui dû à l'écart entre les points échantillonnant  $\mathcal{C}$  et des points échantillonnant la discrétisation de  $\mathcal{C}$ . Cette quatrième partie ne tend pas vers 0 si la taille des segments échantillonnant la courbe discrète croît linéairement en fonction du pas de la grille  $h$ . Ainsi pour ces deux théorèmes, la taille de segment optimale à choisir pour une courbe  $\mathcal{C}$  inconnue dépend d'un compromis à faire entre la troisième et la quatrième partie.

Dans le cas général (théorème 5.2.3), pour une taille maximale de segments  $M_\infty(\mathcal{A}_h)$  fixée, la meilleure vitesse de convergence est obtenue lorsque  $M_\infty(\mathcal{A}_h) = M_1(\mathcal{A}_h)$  : les polygones inscrits  $\mathcal{A}_h$  sont équilatéraux. En supposant de plus que  $h = o_{h \rightarrow 0} M_1(\mathcal{A}_h)$  (ce qui est nécessaire pour que le quatrième terme converge), la vitesse de convergence est de

$$O_{h \rightarrow 0} \left( M_1(\mathcal{A}_h)^{\alpha_2} + h^{\alpha_1} + M_1(\mathcal{A}_h)^{1/2} + h M_1(\mathcal{A}_h)^{-1} \right)$$

(en choisissant  $\mu = \frac{1}{2} = \max_{\mu \in ]0,1[} \min(2\mu - 1/2, 1 - \mu)$ ). La meilleure vitesse de convergence  $h^{\min(\alpha_1, \frac{\min(\alpha_2, 1/2)}{1 + \min(\alpha_2, 1/2)})}$ , est obtenue pour

$$M_1(\mathcal{A}_h) \sim \begin{cases} h^{\alpha_1} & \text{si } \alpha_2 \leq \frac{1}{2} \text{ et } \alpha_1 \leq \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2} \\ h^{\frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2}} & \text{si } \alpha_2 \leq \frac{1}{2} \text{ et } \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2} \leq \alpha_1 \\ h^{\alpha_1} & \text{si } \frac{1}{2} \leq \alpha_2 \text{ et } \alpha_1 \leq \frac{1}{3} \\ h^{\frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2}} & \text{si } \frac{1}{2} \leq \alpha_2 \text{ et } \alpha_1 \leq \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Dans le cas régulier (théorème 5.2.2), pour une taille maximale de segments  $M_\infty(\mathcal{A}_h)$  fixée, la meilleure vitesse de convergence de l'erreur d'estimation est obtenue lorsque  $M_3(\mathcal{A}_h)$  est minimal, ce qui est atteint en choisissant les polygones inscrits  $\mathcal{A}_h$  équilatéraux. En supposant de nouveau  $h = o_{h \rightarrow 0} M_1(\mathcal{A}_h)$  la vitesse de convergence obtenue est alors :

$$O_{h \rightarrow 0} (M_1(\mathcal{A}_h)^{\alpha_2} + h^{\alpha_1} + M_1(\mathcal{A}_h)^2 + hM_1(\mathcal{A}_h)^{-1}).$$

La meilleure vitesse de convergence  $h^{\min(\alpha_1, \frac{\min(\alpha_2, 2)}{1 + \min(\alpha_2, 2)})}$ , est obtenue pour  $M_1(\mathcal{A}_h) \sim h^{\frac{\min(\alpha_2, 2)}{1 + \min(\alpha_2, 2)}}$ .

$$M_1(\mathcal{A}_h) \sim \begin{cases} h^{\alpha_1} & \text{si } \alpha_2 \leq 2 \text{ et } \alpha_1 \leq \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2} \\ h^{\frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2}} & \text{si } \alpha_2 \leq 2 \text{ et } \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2} \leq \alpha_1 \\ h^{\alpha_1} & \text{si } 2 \leq \alpha_2 \text{ et } \alpha_1 \leq \frac{2}{3} \\ h^{\frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2}} & \text{si } 2 \leq \alpha_2 \text{ et } \alpha_1 \leq \frac{2}{3} \end{cases}$$

Dans le cas régulier, la majoration est presque atteinte si  $\mathcal{C}$  est un cercle et avec

$$f \circ \bar{\gamma}(s) := \begin{cases} k_2 s^{\alpha_2} & \text{si } s \in [0, \frac{\mathcal{L}(\mathcal{C})}{2}], \\ -k_2 s^{\alpha_2} & \text{si } s \in [\frac{\mathcal{L}(\mathcal{C})}{2}, \mathcal{L}(\mathcal{C})], \end{cases}$$

où  $\bar{\gamma}$  est une paramétrisation par longueur d'arc de  $\mathcal{C}$ . Plus précisément la majoration est atteinte si  $\mathcal{C}$  est un cercle,  $f$  est défini comme ci-dessus et de plus, pour tout  $i \in \mathbb{Z}_N$ ,  $\|a_i - \xi(a_i)\| = \frac{h}{2}$  mais la réalisation de cette dernière hypothèse est peu vraisemblable.

Dans le cas général, une courbe atteignant la majoration pour un pas de grille fixé est une ligne polygonale faite de côtés de même longueur. L'erreur d'estimation est donc bien inférieure à la majoration proposée pour un pas de grille plus faible. Une amélioration des vitesses de convergence nécessiterait alors d'étudier une même courbe à plusieurs pas de grilles différents. Cependant il ne faut probablement pas espérer une vitesse de convergence très importante dans le cas général : les courbes CTLB incluent certaines courbes possédant des points angulaires denses (partie 2.2.3).

Les résultats de convergence d'estimation d'intégrale nous permettent de déduire des résultats de convergence d'estimation de longueur dans la partie suivante 5.3.

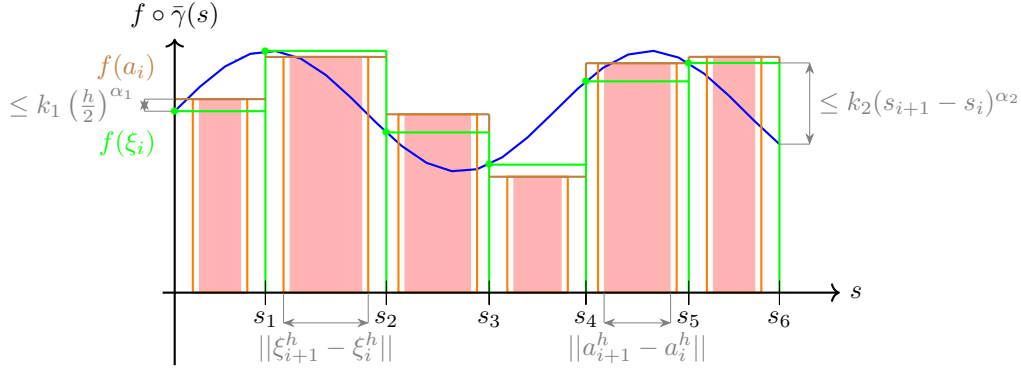


FIGURE 5.3 – L’intégrale curviligne correspond à l’aire comprise sous la courbe bleue. Cette aire est estimée par les rectangles rouges. L’erreur d’estimation se décompose en plusieurs parties. La première est l’écart entre l’intégrale curviligne et l’aire estimée par la méthode des rectangles à gauche (rectangles verts). La deuxième est l’écart dû à l’écart entre  $f(\xi_i^h)$  et  $f(a_i^h)$ . La troisième est due à l’écart entre la longueur d’un arc le plus droit entre  $\xi_i^h$  et  $\xi_{i+1}^h$  et son estimation, c’est-à-dire la longueur entre ses extrémités (rectangles oranges). Enfin, la quatrième partie de l’erreur est due à l’écart entre la distance  $d(a_i^h, a_{i+1}^h)$  et la distance  $d(\xi_i^h, \xi_{i+1}^h)$  des points associés sur la courbe par une rétro-discrétisation  $\xi$ .

### 5.3 Estimation de longueur

Comme

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} 1 dx,$$

en appliquant les deux théorèmes précédents avec  $f = 1$ ,  $k_1 = k_2 = 0$ , nous déduisons les deux corollaires suivants pour l’estimation de longueur.

**Corollaire 5.3.1** (Estimation de longueur, cas régulier). *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe CTLB et de courbure totale  $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne. Soit  $\{\mathcal{A}_h\}_{h>0}$  une famille de polygones telle que pour tout pas de grille  $h$  compatible avec  $\mathcal{C}$ , la suite des sommets de  $\mathcal{A}_h$  est une suite normale de la discrétisation de Gauss de  $\mathcal{C}$ . Pour tout  $h$  compatible avec la courbe  $\mathcal{C}$  et pour  $\mu \in ]0, 1[$ , nous obtenons la majoration suivante :*

$$|\mathcal{L}(\mathcal{C}) - \mathcal{L}(\mathcal{A}_h)| \leq \sum_{i=0}^{N_h-1} \left( 2r_1 \arcsin \left( \frac{\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h}{2r_1} \right) - \|a_{i+1}^h - a_i^h\| \right).$$

avec  $[a_i^h]_{i \in \mathbb{Z}_{N_h}} := \mathcal{A}_h$ .

De plus,

$$|\mathcal{L}(\mathcal{C}) - \mathcal{L}(\mathcal{A}_h)| = O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{M_3(\mathcal{A}_h)^3}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right) + O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{h}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right).$$

Enfin, si nous supposons que :

—  $h = o_{h \rightarrow 0}(M_1(\mathcal{A}_h))$ ,

—  $\lim_{h \rightarrow 0} M_\infty(\mathcal{A}_h) = 0$ ,

alors :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{L}(\mathcal{A}_h) = \mathcal{L}(\mathcal{C}).$$

**Corollaire 5.3.2** (Estimation de longueur, cas général). *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe CTLB. Soit  $\{\mathcal{A}_h\}_{h>0}$  une famille de polygones telle que pour tout pas de grille  $h$  compatible avec  $\mathcal{C}$ , la suite des sommets de  $\mathcal{A}_h$  est une suite normale de la discrétisation de Gauss de  $\mathcal{C}$ . Pour tout  $h$  compatible avec la courbe  $\mathcal{C}$ , nous obtenons la majoration suivante :*

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(\mathcal{C}) - \mathcal{L}(\mathcal{A}_h)| &\leq N_h \left( \frac{1}{\cos \frac{\pi(M_\infty(\mathcal{A}_h) + h)^\mu}{4}} - 1 \right) M_2(\|a_{i+1}^h - a_i^h\| + h) \\ &\quad + (\sqrt{2} - 1) (M_\infty(\mathcal{A}_h) + h)^{1-\mu} \\ &\quad + hN_h \end{aligned}$$

où  $\langle a_i^h \rangle_{i \in \mathbb{Z}_{N_h}} := \mathcal{A}_h$ .

De plus,

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(\mathcal{C}) - \mathcal{L}(\mathcal{A}_h)| &= O_{h \rightarrow 0} \left( (M_\infty(\mathcal{A}_h) + h)^{1-\mu} \right) \\ &\quad + O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{(M_\infty(\mathcal{A}_h) + h)^{2\mu}}{M_1(\mathcal{A}_h)^{1/2}} \right) \\ &\quad + O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{h}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right). \end{aligned}$$

Enfin, si nous supposons que :

- $h = o_{h \rightarrow 0}(M_1(\mathcal{A}_h))$ ,
- $\lim_{h \rightarrow 0} M_\infty(\mathcal{A}_h) = 0$ ,
- $M_\infty(\mathcal{A}_h)^{4\mu} = o_{h \rightarrow 0}(M_1(\mathcal{A}_h))$ ,

alors,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{L}(\mathcal{A}_h) = \mathcal{L}(\mathcal{C}).$$

L'erreur commise par un estimateur de longueur sur une courbe discrète  $m\partial_G^h(\mathcal{C})$  dépend d'une part de la vitesse de convergence de la longueur d'un polygone inscrit  $\langle \xi_i^h \rangle_{i \in \mathbb{Z}_{N_h}}$  dans la courbe continue  $\mathcal{C}$  et d'autre part de la somme des erreurs (majorée par  $hN_h$ ) dues à l'écart  $\frac{h}{2}$  entre les points échantillonnant  $\mathcal{C}$   $\langle \xi_i^h \rangle_{i \in \mathbb{Z}_{N_h}}$  et les points  $\mathcal{A}_h := \langle a_i^h \rangle_{i \in \mathbb{Z}_{N_h}}$  échantillonnant sa discrétisation  $m\partial_G^h(\mathcal{C})$ . Si la première partie de l'erreur converge en faisant tendre la taille des segments de  $\mathcal{A}_h$  vers 0, la seconde partie de l'erreur tend vers  $+\infty$  lorsque l'on augmente le nombre de segments plus vite que  $\frac{1}{h}$ . Ce phénomène est due à la robustesse de l'estimation non-locale par rapport à une erreur  $\epsilon(h)$  de positionnement des sommets de  $\mathcal{A}_h$ .



## Chapitre 6

# Conclusion

Notre objectif initial était d'étendre les résultats d'estimation non-locale de longueur des courbes fonctionnelles aux courbes paramétrées [MB16]. Sur une courbe fonctionnelle  $\mathcal{C}(g)$ , un estimateur de longueur non-local consiste d'abord à segmenter l'abscisse en segments dont la taille moyenne tend vers 0 plus lentement que le pas de la grille, puis à construire une ligne polygonale  $L$  inscrite dans la courbe discrète  $\text{Dig}_{[\cdot, \cdot]}^h(\mathcal{C}(g))$  dont les sommets sont à la verticale des extrémités des segments de l'abscisse et à estimer la longueur par  $\mathcal{L}(L)$ . La majoration de l'erreur d'un estimateur non-local est calculée en construisant une ligne polygonale inscrite dans  $\mathcal{C}(g)$  et dont les sommets sont les projections des sommets de  $L$  sur  $\mathcal{C}(g)$  dans la direction de l'ordonnée. Pour une courbe de Jordan  $\mathcal{C}$ , il n'existe pas de construction aussi simple d'un polygone inscrit dans  $\mathcal{C}$  à partir d'un polygone inscrit dans la courbe discrète  $\partial_G^h(\mathcal{C})$ . Pour des courbes de Jordan  $\mathcal{C}$  par-régulières, il est possible d'utiliser la projection orthogonale sur  $\mathcal{C}$ . Cependant les résultats de [MB16] concernent une famille de courbes plus grande que les courbes par-régulières. Afin de généraliser ces résultats, nous avons alors introduit la notion de courbes à courbure totale localement bornée (CTLB). La notion de courbure totale permet en effet de contrôler la complexité des courbes tout en incluant certaines courbes polygonales.

Afin de s'assurer que le bord  $\partial_G^h(\mathcal{C})$  de la discrétisation forme bien une courbe de Jordan discrète, nous avons étudié la topologie de la discrétisation des courbes CTLB et avons montré qu'elle était bien composée et 4-connexe. Pour cela, nous avons développé des outils théoriques permettant d'exclure certaines configurations de la discrétisation des courbes CTLB.

Sur les courbes CTLB, nous avons défini une famille d'applications (rétro-discrétisations) permettant d'associer les sommets d'un polygone inscrit dans le bord de la discrétisation  $\partial_G^h(\mathcal{C})$  aux sommets d'un polygone inscrit dans  $\mathcal{C}$ . Ces applications associent à chaque bel (élément de  $\partial_G^h(\mathcal{C})$ ) un point de  $\mathcal{C}$ , formant ainsi une suite de points respectant l'ordre défini sur  $\mathcal{C}$ . Les rétro-discrétisations permettent alors de mettre en correspondance les éléments d'une partition d'une courbe discrète à ceux de la partition d'une courbe continue  $\mathcal{C}$  dont elle est la discrétisation. Nous pouvons ainsi comparer une grandeur géométrique définie sur un arc de  $\mathcal{C}$  à son estimation sur l'arc discret associé.

Ces résultats intermédiaires nous ont permis d'établir la convergence des estimateurs non-locaux sur des courbes CTLB. Nous avons étendu cette preuve aux estimateurs non-locaux d'intégrale curviligne.

Plusieurs liens ont été établis entre les courbes CTLB et d'autres notions de contrôle de la complexité des formes continues. Nous avons non seulement montré que les courbes CTLB sont bien

une généralisation des courbes par-régulières mais aussi que les courbes CTLB sont par-régulières si et seulement si elles sont de courbure totale lipschitzienne (équivalence qualitative mais pas quantitative).

Dans [LT16], une méthode d'estimation de l'intégrale le long d'une courbe discrète est définie en se basant sur l'estimation de la normale à la courbe. Les quantités différentielles définies en un point  $p$  d'une courbe  $\mathcal{C}$ , comme la normale à  $\mathcal{C}$ , dépendent d'un voisinage de  $p$  dans  $\mathcal{C}$ . Il est alors nécessaire d'imposer des conditions de régularité suffisamment fortes sur  $\mathcal{C}$  pour que ce voisinage de  $p$  soit suffisamment grand et être ainsi correctement discrétiser.

Cependant plusieurs quantités géométriques définies à l'aide du calcul différentiel, comme la longueur ou la courbure totale d'une courbe s'étendent aux courbes non-différentiables. La définition de ces extensions se basent sur des polygones échantillonnant ces courbes. Ce qui nous permet d'éviter d'employer le calcul différentiel pour la géométrie. Ces quantités géométriques peuvent être estimées par des estimateurs non-locaux sur des courbes ne vérifiant pas ces conditions de régularité. Pour obtenir une erreur d'estimation non-locale faible, l'erreur de discrétisation contraint à choisir les sommets échantillonnant la courbe  $\mathcal{C}$  suffisamment loin les uns des autres. Ainsi, pour estimer une quantité géométrique sur un arc discret, telle la longueur ou la courbure totale, il est nécessaire que l'arc discret contienne plusieurs points d'échantillonnage suffisamment loin les uns des autres. L'estimation géométrique ne peut alors être précise que sur les arcs suffisamment grands pour contenir plusieurs points d'échantillonnage. L'estimation de quantités géométriques sur un petit arc discret issu d'une courbe continue non-différentiable reste un problème ouvert (au moins sur les courbes d'intérieur non-convexe).

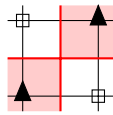
En plus de l'amélioration de certains résultats (par exemple montrer que le diamètre d'une courbe  $\delta$ -CTLB est au moins  $\sqrt{2}$  fois supérieur à  $\delta$  ou obtenir une équivalence quantitative entre les courbes CTLB à courbure lipschitzienne et les courbes par-régulières) de nombreuses questions restent ouvertes.

- Les propriétés des courbes CTLB nous permettent d'écarter certaines configurations de leurs discrétisations, mais est-il possible pour une forme discrète  $A$  de déterminer algorithmiquement si  $A$  est la discrétisation d'une courbe CTLB ? Et si  $A$  est bien la discrétisation d'une courbe CTLB  $\mathcal{C}$  de construire algorithmiquement une telle courbe  $\mathcal{C}$  ? Une réponse positive à ces questions permettrait de définir des transformations rigides de formes discrètes préservant leurs propriétés topologiques et géométriques (voir discussion partie 3.6).
- Nous avons démontré que le bord de la discrétisation d'une courbe de Jordan CTLB est une courbe de Jordan discrète. En étendant la définition des courbes CTLB à une union de courbes de Jordan, ce résultat de préservation de la topologie reste-t-il valide ?
- Mais la question la plus cruciale est probablement celle d'une potentielle extension des courbes CTLB du plan à des surfaces dans l'espace euclidien. La définition d'une surface CTLB  $S$  serait identique à celle d'une courbe  $\delta$ -CTLB : entre deux points  $a$  et  $b$  de  $S$  distants de moins  $\delta$ , il existe un arc de la surface de courbure totale inférieure ou égale à  $\frac{\pi}{2}$ . En revanche la généralisation des résultats obtenus sur les courbes CTLB aux surfaces CTLB semble plus délicate. Il existe un contre-exemple montrant que la discrétisation des surfaces CTLB n'est pas bien composée (voir [SLS07, Figure 4]). Il serait cependant possible de montrer que la discrétisation d'une surface CTLB est 6-connexe en étendant la preuve de la quasi-régularité des courbes CTLB aux surfaces CTLB (la discrétisation d'une surface quasi-régulière est 6-connexe [PKNP19, Proposition 2]).

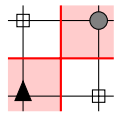


## Annexe A

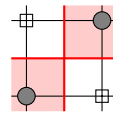
### Configurations exclues



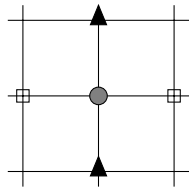
Configuration A



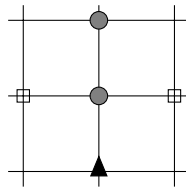
Configuration B



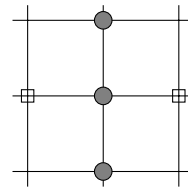
Configuration C



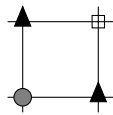
Configuration D



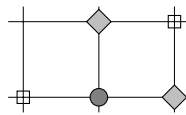
Configuration E



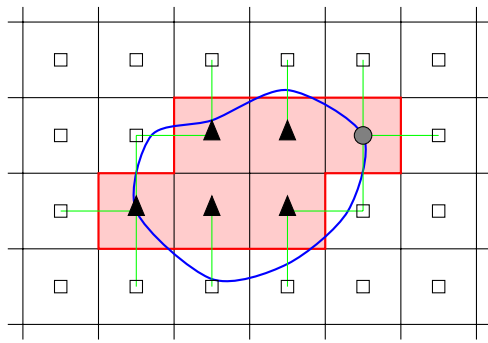
Configuration F



Configuration G



Configuration H



- frontière de  $S$
- ◆ points intérieurs
- ▲ points intérieurs stricts
- points extérieurs
- points frontaliers
- reconstruction de  $S$
- ▲  
 bels

## Annexe B

# Publications

### Articles soumis

É. Le Quentrec, L. Mazo, É. Baudrier, M. Tajine Monotonic sampling of a continuous closed curve from its Gauss digitization,

### Articles de Journal

- |   |   |
|---|---|
| 1. É. Le Quentrec, L. Mazo, É. Baudrier, M. Tajine <i>Local Turn-Boundedness</i> , a curvature control for continuous curves with application to digitization, Journal of Mathematical Imaging and Vision, Springer Verlag, page 673–692, Volume 62, may 2020 | IF : 1.353,<br>SNIP : 1.329,<br>SJR : 0.669 |
|---|---|

### Communications dans une Conférence Internationale

- |  |                 |
|--|-----------------|
| 2. É. Le Quentrec, L. Mazo, É. Baudrier, M. Tajine <i>Locally turn-bounded curves are quasi-regular</i> , International Conference on Discrete Geometry and Mathematical Morphology (DGMM), Uppsala, Sweden, may 2021  | C Rank TA : 44% |
| 3. É. Le Quentrec, L. Mazo, É. Baudrier, M. Tajine <i>Local turn-boundedness : a curvature control for a good digitization</i> , Discrete Geometry for Computer Imagery. DGCI 2019, Marne-la-Vallée, France, Springer, Lecture Notes in Computer Science, march 2019 | C Rank TA : 44% |



# Bibliographie

- [AKKO01] Tetsuo Asano, Yasuyuki Kawamura, Reinhard Klette, and Koji Obokata. Minimum-Length Polygons in Approximation Sausages. *Lecture Notes in Computer Science*, 2059 :103–112, January 2001. pages 102
- [AR89] A. D. Alexandrov and Yu. G. Reshetnyak. *General Theory of Irregular Curves*, volume 29 of *Mathematics and Its Applications*. Springer Netherlands, Dordrecht, 1989. pages 8, 9, 19, 20, 21, 22, 23, 25
- [BGN18] Nicolas Boutry, Thierry Géraud, and Laurent Najman. A Tutorial on Well-Composedness. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 60(3) :443–478, March 2018. pages 65
- [Bob08] Alexander Bobenko. *Discrete Differential Geometry*, volume 98 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, December 2008. pages 25
- [CCL09] Frédéric Chazal, David Cohen-Steiner, and André Lieutier. A Sampling Theory for Compact Sets in Euclidean Space. *Discrete & Computational Geometry*, 41(3) :461–479, April 2009. pages 14, 15, 16
- [Deb95] Isabelle Debled-Rennesson. *Etude et Reconnaissance Des Droites et Plans Discrets*. These de doctorat, Strasbourg 1, January 1995. pages 101
- [Dem06] Jean-Pierre Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. Collection Grenoble Sciences. EDP Sciences, Les Ulis, France, nouv. ed edition, 2006. pages 104
- [DS87] Leo Dorst and Arnold W. M. Smeulders. Length estimators for digitized contours. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 40(3) :311–333, December 1987. pages 100
- [DTZ09] Alain Daurat, Mohamed Tajine, and Mahdi Zouaoui. Patterns in Discretized Parabolas and Length Estimation. In Srečko Brlek, Christophe Reutenauer, and Xavier Provençal, editors, *Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume 5810, pages 373–384. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009. pages 100
- [DTZ11] Alain Daurat, Mohamed Tajine, and Mahdi Zouaoui. Les estimateurs semi-locaux de périmètre. Technical report, 2011. pages 102, 103
- [EPRR79] T. J. Ellis, D. Proffitt, D. Rosen, and W. Rutkowski. Measurement of the lengths of digitized curved lines. *Computer Graphics and Image Processing*, 10(4) :333–347, August 1979. pages 100

- [Fed59] Herbert Federer. Curvature measures. *Transactions of the American Mathematical Society*, 93(3) :418–418, March 1959. pages 12, 14, 89
- [Fen29] Werner Fenchel. Über Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven. *Mathematische Annalen*, 101(1) :238–252, December 1929. pages 22
- [GL95] Ari Gross and Longin Latecki. Digitizations Preserving Topological and Differential Geometric Properties. *Computer Vision and Image Understanding*, 62(3) :370–381, November 1995. pages 11, 67, 72
- [Jor92] Camille Jordan. Remarques sur les intégrales définies. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 8 :69–100, 1892. pages 67, 99
- [KMRT93] S. R. Kulkarni, S. K. Mitter, T. J. Richardson, and J. N. Tsitsiklis. Local versus non-local computation of length of digitized curves. In Rudrapatna K. Shyamasundar, editor, *Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science*, Lecture Notes in Computer Science, pages 94–103, Berlin, Heidelberg, 1993. Springer. pages 100
- [KR04] Reinhard Klette and Azriel Rosenfeld. *Digital Geometry : Geometric Methods for Digital Picture Analysis*. The Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics and Geometric Modeling. Elsevier ; Morgan Kaufman Publishers, Amsterdam ; Boston, 2004. pages 67, 99, 101
- [KS97] Robert B. Kusner and John M. Sullivan. On Distortion and Thickness of Knots. *arXiv :dg-ga/9702001*, February 1997. pages 16
- [KŽ00] Reinhard Klette and Joviša Žunić. Multigrid Convergence of Calculated Features in Image Analysis. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 13(3) :173–191, December 2000. pages 100, 101
- [Lat97] Longin Jan Latecki. 3D Well-Composed Pictures. *Graphical Models and Image Processing*, 59(3) :164–172, May 1997. pages 64, 65
- [Lat98] L. J. Latecki. *Discrete Representation of Spatial Objects in Computer Vision*. Computational Imaging and Vision. Springer Netherlands, 1998. pages 23
- [LCG98] Longin Jan Latecki, Christopher Conrad, and Ari Gross. Preserving Topology by a Digitization Process. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, page 29, 1998. pages 11, 72
- [LER95] L. Latecki, U. Eckhardt, and A. Rosenfeld. Well-Composed Sets. *Computer Vision and Image Understanding*, 61(1) :70–83, January 1995. pages 65
- [LM00] Jacques-Olivier Lachaud and Annick Montanvert. Continuous Analogs of Digital Boundaries : A Topological Approach to Iso-Surfaces. *Graphical Models*, 62(3) :129–164, May 2000. pages 65
- [LP11] Jacques-Olivier Lachaud and Xavier Provençal. Lecture Notes in Computer Science. *Discrete Applied Mathematics*, 159 :2229–2250, December 2011. pages 101
- [LT16] Jacques-Olivier Lachaud and Boris Thibert. Properties of Gauss Digitized Shapes and Digital Surface Integration. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 54(2) :162–180, February 2016. pages 12, 89, 104, 120



- [MB16] Loïc Mazo and Étienne Baudrier. Non-local estimators : A new class of multigrid convergent length estimators. *Theoretical Computer Science*, 645 :128–146, September 2016. pages 69, 103, 104, 119
- [Mil50] J. W. Milnor. On the Total Curvature of Knots. *The Annals of Mathematics*, 52(2) :248, September 1950. pages 19
- [MKS09] Hans Meine, Ullrich Köthe, and Peer Stelldinger. A topological sampling theorem for Robust boundary reconstruction and image segmentation. *Discrete Applied Mathematics*, 157(3) :524–541, February 2009. pages 13, 14
- [NPKD18] Phuc Ngo, Nicolas Passat, Yukiko Kenmochi, and Isabelle Debled-Rennesson. Convexity invariance of voxel objects under rigid motions. In *2018 24th International Conference on Pattern Recognition (ICPR)*, pages 1157–1162, Beijing, August 2018. IEEE. pages 16
- [Pav82] Theo Pavlidis. *Algorithms for Graphics and Image Processing*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1982. pages 11, 13, 72
- [PKNP19] Nicolas Passat, Yukiko Kenmochi, Phuc Ngo, and Kacper Pluta. Rigid Motions in the Cubic Grid : A Discussion on Topological Issues. In Michel Couprie, Jean Cousty, Yukiko Kenmochi, and Nabil Mustafa, editors, *Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume 11414, pages 127–140. Springer International Publishing, Cham, 2019. pages 15, 73, 85, 86, 120
- [Ros70] Azriel Rosenfeld. Connectivity in Digital Pictures. *Journal of the ACM*, 17(1) :146–160, January 1970. pages 64
- [Ros79] Rosenfeld. Digital Topology. *The American Mathematical Monthly*, 86(8) :621–630, 1979. pages 64
- [RT00] Christian Ronse and Mohamed Tajine. Discretization in Hausdorff Space. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 12(3) :219–242, 2000. pages 68, 69
- [Ser82] Jean Paul Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, London; New York, 1982. pages 11
- [SLS07] Peer Stelldinger, Longin Latecki, and Marcelo Siqueira. Topological Equivalence between a 3D Object and the Reconstruction of Its Digital Image. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 29(1) :126–140, January 2007. pages 86, 120
- [Ste05] Peer Stelldinger. Digitization of Non-Regular Shapes. In Christian Ronse, Laurent Najman, and Etienne Decencière, editors, *Mathematical Morphology : 40 Years On*, volume 30, pages 269–278. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 2005. pages 13
- [SZ96] F. Sloboda and B. Zatko. On Linear Time Algorithm for the Shortest Path Problem Solution in a Polygonally Bounded Compact Set. Technical report, Institute of Control Theory and Robotics, Bratislava, 1996. pages 101
- [SZS98] F. Sloboda, B. Zatko, and J Stoer. On approximation of planar one-dimensional continua. *Advances in Digital and Computational Geometry*, January 1998. pages 102

- [TD03] Mohamed Tajine and Alain Daurat. On Local Definitions of Length of Digital Curves. In Gerhard Goos, Juris Hartmanis, Jan van Leeuwen, Ingela Nyström, Gabriella Sanniti di Baja, and Stina Svensson, editors, *Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume 2886, pages 114–123. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2003. pages 100
- [TD11] Mohamed Tajine and Alain Daurat. Patterns for multigrid equidistributed functions : Application to general parabolas and length estimation. *Theoretical Computer Science*, 412(36) :4824–4840, August 2011. pages 100
- [VS82] A. M. Vossepoel and A. W. M. Smeulders. Vector code probability and metrication error in the representation of straight lines of finite length. *Computer Graphics and Image Processing*, 20(4) :347–364, December 1982. pages 100

# Courbes à Courbure Totale Localement Bornée et leurs Applications en Géométrie Discrète

## Résumé

Lorsqu'un objet est pris en photo, l'image obtenue est pixelisée. La position d'un point sur une telle image est décrite par des coordonnées entières contrairement à celle d'un point de l'objet initial décrite par des coordonnées réelles. Ce passage de la géométrie euclidienne usuelle décrivant l'objet initial à la géométrie discrète décrivant l'image obtenue, appelé discrétisation, cause une importante perte d'informations. Si la résolution de l'image discrète est trop faible par rapport au niveau de détails de l'objet initial, l'information topologique et les quantités géométriques peuvent être perdues. Il est alors nécessaire d'imposer certaines hypothèses à cet objet réel pour permettre de reconstituer ces informations.

géométrie discrète, estimation géométrique, courbure

## Résumé en anglais

When an object is numerically captured, the resulting picture is pixelated. The position of a point on a such a picture is described by integral coordinates on the contrary of those of the initial object that are real coordinates. This transition from usual Euclidean geometry describing the initial object to the digital geometry describing the resulting picture, called digitization, may produce an important loss of information. If the resolution of the picture is not accurate in comparison with the level of detail of the initial object, the topological information and the geometric quantities can be lost. Thus, it is necessary to assume some hypotheses on this real object in order to recover this information.

digital geometry, geometric estimation, curvature