



HAL
open science

Nouvelle classe d'expériences d'astrophysique de laboratoire : application aux processus d'accrétion autour des étoiles à neutrons

Victor Tranchant

► **To cite this version:**

Victor Tranchant. Nouvelle classe d'expériences d'astrophysique de laboratoire : application aux processus d'accrétion autour des étoiles à neutrons. Astrophysique [astro-ph]. Sorbonne Université, 2022. Français. NNT : 2022SORUS295 . tel-03879413

HAL Id: tel-03879413

<https://theses.hal.science/tel-03879413v1>

Submitted on 30 Nov 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Sorbonne Université

École doctorale d'Astronomie et d'Astrophysique d'Île de France

THÈSE DE DOCTORAT

**Nouvelle classe d'expériences
d'astrophysique de laboratoire :
Application aux processus d'accrétion
autour des étoiles à neutrons**

Par Victor TRANCHANT

Dirigée par :

M. Andrea CIARDI	Directeur
M. Émeric FALIZE	Co-Directeur
Mme Lucile VAN BOX SOM	Encadrante
M. Nicolas CHARPENTIER	Encadrant

Présentée et soutenue publiquement
le 10 octobre 2022

Devant un jury composé de :

Mme Laurence REZEAU	Présidente
M. Jürgen KNÖDLSEDER	Rapporteur
M. Xavier RIBEYRE	Rapporteur
Mme Annette CALISTI	Examinatrice
Mme Alessandra BENUZZI-MOUNAIX	Examinatrice
M. Benoît CERUTTI	Examineur

Remerciements

Les remerciements sont toujours la partie la plus lue d'une thèse, par les personnes concernées ou non. Ils me permettent ici d'insister sur l'aide, directe ou non, et plus encore le soutien, que certaines personnes m'ont apporté durant les trois années de ce projet. La trace indélébile laissée ici témoigne de la gratitude que j'éprouve envers l'ensemble des gens qui ont contribué à ces travaux ou à ma vie durant ceux-ci. Si jamais il vous arrive de lire ces remerciements et que, par hasard, vous y trouviez votre nom, sachez que chaque mot est pensé et teinté de vérité, mais également à présent de nostalgie. En effet, ces trois années ont été pour moi une aventure, voire même un match, éprouvant pour toute l'équipe mais qui mène à une victoire. Et comme on dit, de toute façon, l'important, c'est les trois points.

Tout d'abord, je tiens à remercier les membres de mon jury pour leur implication dans l'analyse de mes travaux de thèse : Laurence Rezeau pour avoir accepté la présidence du jury, ainsi qu'Annette Calisti, Alessandra Benuzzi-Mounaix et Benoît Cerutti en leur qualité d'examineurs. Je remercie chaleureusement Xavier Ribeyre et Jürgen Knödlseher pour leurs rapports détaillés sur mon manuscrit, et le temps qu'ils ont consacré à sa lecture. Je remercie également toutes les personnes des équipes administratives et informatiques du CEA, du LERMA, de Jussieu en général, ainsi que de l'ED127, qui m'ont aidé sur d'innombrables points durant ces trois années.

Mes remerciements se tournent à présent vers mes encadrants, qui sont au nombre de quatre. C'est beaucoup, comme on a pu me le souligner tout au long de ma thèse, mais leur apport personnel m'a été indispensable, et prendre le temps de les remercier à travers ces mots n'est qu'une faible récompense pour tout ce qu'ils m'ont apporté. De la même manière que durant ma soutenance de thèse, j'aimerais vous remercier de manière chronologique, en commençant par Andrea, que j'ai rencontré durant mon master. Le fait que tu te sois autant impliqué dans mes travaux m'a apporté de nombreuses choses, qu'il m'est impossible de lister ici sous peine de devoir empiéter sur mon introduction. Tu as su m'aider, me guider, tout en me laissant une des choses les plus importantes à mes yeux, ma liberté. Je te dois énormément, à commencer par quelques verres, et j'espère pouvoir te rendre un peu de ce que tu m'as donné durant les prochaines années. Je te l'ai déjà dit, mais continuer à travailler à tes côtés sera un plaisir et un honneur, ainsi qu'une source d'inspiration pour mon petit rêve de chercheur. Je remercie ensuite Emeric, qui m'a accordé sa confiance pour mener à bien ce projet, et qui m'a permis de découvrir le monde de l'astrophysique, du laboratoire, et mieux encore, de leur fusion : l'astrophysique de laboratoire. Merci pour ce temps passé avec moi durant mon stage, et pour m'avoir confié ce sujet à ton image : ambitieux, imprévisible, un peu dur parfois, mais surtout particulièrement intéressant. De Buffon à l'équivalence, en

passant par Vaschy-Buckingham et les concepts de similitude, mon voyage dans cet univers des possibles a commencé grâce à ta confiance, je ne l'oublierai jamais. Durant mes années passées à travailler à tes côtés, je me suis nourri de tes connaissances, de tes conseils, et aussi beaucoup de tes analogies et métaphores qui résonneront longtemps en moi j'en suis sûr. Pour reprendre la plus connue d'entre toutes me concernant, merci à toi et à toute l'équipe pour cette magnifique passe décisive qui m'a permis d'inscrire ce but tant attendu. Merci également à notre capitaine de tous les instants, Lucile. Je suis ton premier doctorant, et pourtant on pourrait croire que tu as fait ça toute ta vie. Faisant fi de tous les obstacles durant ces trois années particulièrement chargées, tu m'as souvent guidé dans mon voyage si particulier. Avoir pu partager ce projet à tes côtés a été une expérience incroyable, et ta bonne humeur permanente, tes "wonderful" et "amazing" illuminant les jours difficiles, et plus que tout ta motivation à toute épreuve, ont fait de toi un exemple pour moi durant ces trois années. Je me répète, mais si on dit souvent que les lois d'échelle sont le pilier de l'astrophysique de laboratoire, il me semble évident de dire que tu as été le mien durant ma thèse : encore merci pour tout. Avec deux piliers, c'est toujours mieux, et une équipe n'est rien sans un gardien qui ne laisse rien passer, alors merci à toi Nicolas. Je garderai des souvenirs très marquants de mon début de thèse, plongé dans ce marais de concepts incroyables mais difficiles que sont les symétries. Tu as su me guider à travers lui, comme si j'étais ton padawan, que cela soit à travers nos discussions pouvant nous prendre quelques heures, tes cours de mathématiques appliquées, mais surtout tes analogies toujours si directes qu'on en oublierait presque qu'elles ne sont que des métaphores. Merci encore pour le temps passé à m'aider, me conseiller, et surtout à travailler à mes côtés.

Je remercie chaleureusement mon comité de suivi, Franck et Charles, qui ont été à l'écoute, mais également intéressés par mes travaux. Je tiens globalement à remercier l'ensemble des chercheurs avec qui j'ai pu échanger durant ma thèse, avec en particulier une pensée pour Joki Rosdahl qui a été très réactif à mes questions sur l'implémentation du transfert radiatif dans RAMSES. L'interaction entre chercheurs et la volonté de toujours apprendre sont des particularités qui font de la recherche un domaine d'intérêt et de renouveau constant.

Ce monde de la recherche ne serait finalement rien sans tous ces apprentis-chercheurs que nous sommes, doctorants et post-doctorants. Durant ces trois années, j'ai eu la chance de côtoyer un grand nombre d'entre eux, qui m'ont marqué de différentes manières. Je remercie tout d'abord les membres du LERMA, et plus généralement les personnes rencontrées sur le site de Jussieu. Je remercie également Léa avec qui c'est toujours un plaisir de discuter et qui est toujours présente pour apporter son aide, même dans les situations les plus complexes. Un immense merci aux stagiaires, doctorants et post-doctorants du CEA qui rendent la vie plus facile au quotidien et qui présentent une source de bonne humeur, d'humour, mais aussi de connaissances, inépuisables. J'aimerais prendre le temps de les remercier individuellement, par ordre chronologique. Merci aux plus anciens, qui m'ont bien accueilli lors de mon arrivée : Mathieu, Marie, Grégoire, Cécile, Jean-Cédric, Corentin, et Antoine avec qui j'ai partagé mon bureau. Merci à Kilian aussi, qui fait quand même partie des plus anciens, qui a été mon voisin et un ami avec qui discuter lors de ces longs trajets de bus. Merci à Eric qui est un ancien mais pas trop non plus, et qui m'a fait connaître les joies du football en entreprise, permettant de souffler parfois (j'en profite pour remercier toutes les personnes ayant tapé le ballon avec moi durant ces trois années), et avec qui je partage les difficultés de supporter Arsenal. Merci également à Albertine (Sharapova dans le milieu) et Baptiste

(pour ses déclarations toujours aussi lunaires) qui sont arrivés en même temps que moi au CEA, très vite rejoints en thèse par Mathilde (ma coéquipière de trajet, cheffe des petits-déj), et Olivier (connu sous le nom de "y a pas de clavier" et caractérisé par sa vitesse de réaction particulièrement incroyable). Au milieu de tout cela se dresse Ronan, tel un phare breton au milieu du vent, jeune et ancien à la fois, avec qui j'ai partagé l'écriture du manuscrit et, il faut bien le dire, des moments très mémorables. Merci à toi camarade pour tes loyaux services, ton humour toujours piquant, et ta joie de vivre bien sûr. Merci aux plus jeunes : Louise, aventurière de passage mais qui nous a tous marqué, ainsi qu'à Bastien, aventurier solitaire qui arrive à présent en troisième année tout de même bien accompagné par les petits nouveaux, que je remercie également. Alors merci à Joël (deltaplane-man, inventeur du feeling unidirectionnel), Kevin (rempli d'amour pour tous, mais qui m'a toujours pas donné mes moules au plafond), Matthéo (vieux supporter de Chelsea complètement délu), Jean-Gab (j'ai pas les mots mais on t'aime tous), et Sébastien, mon co-bureau, super-héros dans l'âme, futur grand chef des doctorants, et esquiveur de football professionnel. On me souffle que j'oublie un doctorant ... Ah, oui, et pas des moindres. Merci à Corentin, grand amoureux des dinosaures, qui est une personne à qui je ressemble plus que je n'ose le dire, et avec qui j'ai partagé des nachos et des moments de rire mémorables qui ont aidé à passer les phases les plus difficiles de la thèse. Merci également au plus vieux, papa Étienne, dont je tairai ici le surnom mais qui le porte à merveille. Enfin, merci aux petits nouveaux avec qui la relève est bien assurée, Colin le stagiaire devenu maillot à pois, Ulrich le Ronaldinho en mousse, Marin l'expert en aurores polaires, et Léa qui a prouvé qu'elle avait sa place en attaque parmi les plus grands. La vie en dehors de la thèse est toute aussi importante, et elle ne serait pas la même sans mes plus vieux amis qui m'ont, au quotidien, permis de passer des moments de détente toujours teintés d'humour et bonne humeur. Alors merci à vous tous, et en particulier à Alix avec qui j'ai passé beaucoup de temps entre Toulouse, Paris, l'Italie ou Toronto. Ta rage permanente, nos débats ou délires, tes "tseeeuh" pendant ma soutenance, et plus que tout ton amitié sans faille (sheeeeeesh) m'ont souvent aidés à rendre mon départ en région parisienne bien plus agréable.

Un immense merci à ma famille, proche ou lointaine, pour leur soutien durant ces années de thèse, mais également pour leur présence durant les précédentes. Une pensée pour mon grand-père que j'aurais aimé pouvoir avoir à mes côtés lors de la conclusion de cette aventure. Merci à mon oncle et ma tante de s'être déplacés pour assister à ma soutenance de thèse en particulier. Merci à ma grande soeur, qui est un modèle de courage et de force, et qui est toujours là pour moi. Tes petits élèves ont vraiment la meilleure des institutrices. Merci à ma maman, pour prendre soin de moi chaque jour qui passe, pour s'inquiéter quand il n'y en pas besoin, et pour rire à absolument chacune de mes blagues, ainsi qu'à mon papa, océanographe devenu boulanger, et qui m'a inspiré pour devenir l'homme que je suis aujourd'hui, capable de mener à bien ce projet de thèse. Vous m'avez tous les deux montré que tout était possible si on s'en donnait les moyens, et vous avez toujours été un exemple pour moi. Merci du fond du coeur à vous deux.

Enfin, il m'est impossible d'oublier la personne qui a partagé, durant ces trois années, mes plaintes et mes joies, ainsi que mes changements d'humeur. Merci à toi, Anne, pour ta patience, ta présence malgré la distance, et pour l'amour que tu m'as donné durant toute cette période, et encore aujourd'hui. Tu es à quelques mètres de moi lorsque j'écris ces mots, et poser mon regard sur toi me suffit pour comprendre

l'importance que tu as eue dans la réussite de ce projet de thèse. Tu m'as rendu la vie plus simple, plus douce, plus drôle, et pour cela je ne te remercierai jamais assez.

Table des matières

Introduction	1
1 De l'astrophysique au laboratoire	7
1.1 Introduction	8
1.2 L'interaction rayonnement-matière	8
1.2.1 Une diversité de phénomènes énergétiques	8
1.2.2 Une interaction complexe entre rayonnement et matière	10
1.2.2.1 L'effet photoélectrique	10
1.2.2.2 Les mécanismes de diffusion	11
1.2.2.3 Transfert radiatif et loi d'opacité	12
1.2.3 Divers phénomènes et régimes physiques	15
1.2.3.1 Quelques exemples	15
1.2.3.2 Les fronts d'ionisation et ondes de chaleur	16
1.2.3.3 Les chocs radiatifs	18
1.2.4 Une problématique fondamentale en astrophysique	19
1.3 L'astrophysique de laboratoire	19
1.3.1 La physique des hautes densités d'énergie	19
1.3.2 Principe et expériences d'astrophysique de laboratoire	23
1.3.2.1 De l'échelle astrophysique à celle du laboratoire	23
1.3.2.2 Exemples d'expériences	25
1.4 Conclusion	26
2 La propagation d'ondes radiatives en astrophysique : Modélisation de l'interaction sursaut X de type I - Disque d'accrétion	29
2.1 Introduction	30
2.2 L'interaction entre un sursaut X de type I et le disque d'accrétion d'une étoile à neutrons	30
2.2.1 Les sursauts X de type I	30
2.2.2 Les disques d'accrétion	33
2.2.3 L'interaction entre un sursaut X de type I et un disque d'accrétion	34
2.3 Les ondes radiatives supersoniques	39

2.3.1	Une première description théorique	39
2.3.2	Les limites du régime supersonique	41
2.3.2.1	La séparation hydrodynamique	41
2.3.2.2	Gradient de pression et mise en mouvement	44
2.3.3	Étude paramétrique des régimes physiques d'onde radiative	44
2.3.3.1	La conduction radiative comme phénomène principal	44
2.3.3.2	Limites du régime supersonique	45
2.4	Le code de simulation astrophysique RAMSES-RT	48
2.4.1	Présentation du code	48
2.4.2	Résolution du transfert radiatif avec RAMSES-RT	49
2.4.3	Validation du code	50
2.5	Une situation typique de formation d'ondes radiatives supersoniques	52
2.5.1	Initialisation de la simulation	52
2.5.2	Résultats de la simulation	55
2.6	Différents régimes de formation d'ondes radiatives	56
2.6.1	Influence de la température initiale sur la position du front	56
2.6.2	Deux exemples de simulations numériques	58
2.6.3	Une séparation hydrodynamique rapide	59
2.6.4	Une compression radiative du disque	59
2.7	Conclusion	61
3	Lois d'échelles et propriétés de similarité des ondes radiatives	63
3.1	Introduction	64
3.2	Les ondes radiatives en laboratoire	64
3.2.1	Une configuration expérimentale typique pour la production d'ondes radiatives	64
3.2.2	De nombreuses études expérimentales	65
3.2.3	Un panel d'ondes radiatives	67
3.3	De l'astrophysique au laboratoire : Similitude et lois d'échelle	69
3.3.1	Similitude et lois d'échelle, piliers de l'astrophysique de laboratoire	69
3.3.2	Détermination des lois d'échelle des ondes radiatives supersoniques	70
3.3.3	Exemple d'application : De l'astrophysique au laboratoire	73
3.4	Les limites de la similitude : vers les concepts de ressemblance et d'analogie	77
3.4.1	Sur les problématiques d'étude des ondes radiatives en astrophysique de laboratoire	77
3.4.2	Vers des transformations généralisées basées sur des ressemblances et analogies	80
3.5	Conclusion	82
4	Symétries de Lie et équivalence pour les équations différentielles	83
4.1	Introduction	84
4.2	Les symétries de Lie des équations différentielles	84
4.2.1	Généralités sur le concept de symétries	84
4.2.2	Obtenir les symétries ponctuelles d'une équation différentielle	85

4.2.3	Application à l'équation décrivant la dynamique des ondes radiatives supersoniques	88
4.2.3.1	Détermination des fonctions de coordonnées	88
4.2.3.2	Détermination des générateurs de Lie	92
4.2.3.3	Détermination des symétries de Lie	93
4.3	Les symétries d'équivalence	99
4.3.1	Fonctions arbitraires et classes d'équations différentielles	99
4.3.2	Obtenir les symétries d'équivalence d'une équation différentielle	100
4.3.3	Application aux ondes radiatives	103
4.3.3.1	Détermination des générateurs d'équivalence	106
4.3.3.2	Détermination des symétries d'équivalence	107
4.3.3.3	Retrouver les lois d'échelle en invariance globale	110
4.4	Conclusion	112
5	L'équivalence : applications physiques et premier modèle de dimensionnement	113
5.1	Introduction	114
5.2	La physique des transformations d'équivalence	114
5.2.1	Analyse des transformations	115
5.2.2	De nouveaux invariants	116
5.3	Exemples d'application	117
5.3.1	Détails sur l'utilisation des transformations	117
5.3.2	Équivalence en régime peu radiatif	119
5.3.3	Équivalence en régime extrêmement radiatif	122
5.3.3.1	Imposer les répartitions d'énergie	122
5.3.3.2	Imposer les libre-parcours moyens	125
5.4	Les limites du groupe d'équivalence	127
5.4.1	Les mécanismes produisant des écarts à l'équivalence	127
5.4.2	Les écarts aux matériaux théoriques	128
5.4.2.1	Une méthode générale pour déterminer un système optimal	128
5.4.2.2	Résultats pour les différents matériaux	130
5.4.2.3	Choix du meilleur matériau	135
5.4.3	Limite de l'hypothèse supersonique : une réponse hydrodynamique du système	138
5.5	Conclusion	140
6	Dimensionnement d'une expérience équivalente	141
6.1	Introduction	142
6.2	Mise en place de l'expérience laser	142
6.2.1	Présentation de la configuration expérimentale	142
6.2.2	Une source de rayonnement à maîtriser : La cavité de conversion	144
6.2.3	L'expérience laser : Résultats attendus	144
6.2.4	Les diagnostics plasmas	145
6.3	Simulations de la configuration expérimentale	147

6.3.1	Résultats de simulation	147
6.3.2	Comparaison modèle 1D - dimensionnement 2D	147
6.3.3	Résultats de diagnostics	150
6.3.4	Résumé des résultats du dimensionnement	155
6.4	Études paramétriques sur les incertitudes expérimentales	157
6.4.1	Quantifier les incertitudes expérimentales	157
6.4.2	Simulations et résultats	160
6.4.3	Du laboratoire à l'échelle astrophysique	164
6.5	Conclusion	167
Conclusion		169
A Symétries de Lie et symétries d'équivalence pour les ondes radiatives		173
A.1	Obtention des symétries de Lie des ondes radiatives	173
A.1.1	Cas $D(T) \neq D_0$	175
A.1.2	Cas $D(T) = D_0$	177
A.2	Condition d'invariance pour les symétries d'équivalence	179
Bibliographie		181

Introduction

Le rayonnement joue un rôle prépondérant à l'échelle astrophysique, de la dynamique du milieu interstellaire aux échelles cosmologiques, car il interagit avec les différentes formes de matière présentes dans l'Univers. Les photons observés par nos télescopes et provenant de systèmes particulièrement éloignés permettent de témoigner de la physique des milieux rencontrés durant leur périple. Certains événements particulièrement intenses témoignant d'une physique des hautes densités d'énergie sont ainsi couramment détectés. Parmi ceux-ci, des sursauts thermonucléaires naissent à la surface d'étoiles à neutrons, impactant les disques d'accrétion les entourant. Les photons peuvent alors transporter, retirer ou déposer de l'énergie, modifiant la dynamique de ces milieux. Une bonne compréhension de l'interaction entre ce rayonnement intense et la matière accrétée pourrait permettre de caractériser la dynamique de ces écoulements. Cependant, de nombreux phénomènes physiques apparaissent à la lumière de l'interaction rayonnement-matière, et leur compréhension reste aujourd'hui un challenge pour les théoriciens, les numériciens et les observateurs.

Nous savons à présent que des phénomènes radiatifs violents sont produits à l'échelle stellaire, comme dans le cas de l'explosion d'une supernova ou encore lorsque des réactions nucléaires s'emballent à la surface d'une étoile à neutrons. Notre capacité observationnelle de tels systèmes continue de s'élargir à l'aide d'observations multi-longueurs d'onde. Cependant, une des problématiques principales posées par ces outils d'observation reste leur résolution spatiale limitée. Ceci rend parfois impossible la validation d'hypothèses théoriques ou modèles numériques censés représenter la physique se déroulant au sein de ces régions d'intérêt.

Durant les dernières décennies, l'avènement des lasers de puissance a permis le développement d'expériences reproduisant, en laboratoire, certains phénomènes se produisant à l'échelle astrophysique et dans lesquels la matière est soumise à des hautes densités d'énergie. C'est ce que l'on appelle l'astrophysique de laboratoire. Toute l'approche de l'astrophysique de laboratoire repose sur la possibilité de lier théoriquement les échelles astrophysique et de laboratoire par les concepts de similarité aboutissant à l'existence de lois d'échelle. Les phénomènes physiques observés doivent présenter des propriétés d'invariance d'échelle afin de pouvoir être modélisés à l'échelle du laboratoire, ceci dans le but de valider certains modèles théoriques ou numériques. Dans certains régimes physiques extrêmes, comme ceux où la pression radiative dépasse fortement la pression thermique au sein d'un plasma, on se heurte à une limite technologique, qu'il n'est pour l'heure possible de contourner que dans certains cas particuliers.

L'objectif principal de ces travaux de thèse est donc de proposer une approche alternative à la similitude

classique afin de palier aux difficultés expérimentales rencontrées. Cette nouvelle approche s'avère être une généralisation du concept de lois d'échelle, actuel pilier de l'astrophysique de laboratoire. Ces travaux théoriques sont ainsi à la base de la création d'une toute nouvelle classe d'expériences d'astrophysique de laboratoire, reposant sur une mathématisation des expériences de ressemblances en suivant la classification de Takabe [2001]. Nous nous sommes en particulier intéressés au problème du transport radiatif dans les disques d'accrétion lors de phénomènes d'explosion intervenant à la surface d'étoiles à neutrons. Ce transport se fait sous la forme d'une onde de conduction radiative aussi appelée onde de Marshak. Les installations laser les plus puissantes (LMJ, NIF) nous permettent aujourd'hui d'envisager reproduire cette physique dans des régimes de plus en plus radiatifs, ouvrant la voie au projet d'astrophysique de laboratoire nommé **MaTaLE**¹ qui vise à créer une plate-forme expérimentale pour cette nouvelle classe d'expériences.

Dans le chapitre 1, nous présenterons quelques exemples de mécanismes de production de rayonnement en astrophysique, ainsi que de l'interaction des photons avec la matière. L'objectif est d'identifier les environnements astrophysiques dans lesquels des ondes radiatives peuvent transporter de manière efficace l'énergie. Nous verrons également comment il est à présent possible de recréer de telles conditions physiques à l'échelle du laboratoire grâce aux lasers de puissance.

Dans le chapitre 2, nous détaillerons plus précisément la physique des ondes radiatives et des phénomènes associés dans le cadre de l'interaction entre les sursauts X produits à la surface des étoiles à neutrons et leur disque d'accrétion environnant. Nous montrerons le rôle central que jouent les ondes radiatives supersoniques dans le bilan d'énergie de tels systèmes. Pour cela, des simulations numériques 1D ont été effectuées avec le code d'hydrodynamique radiative RAMSES-RT.

Dans le chapitre 3, nous ferons un bilan des expériences d'ondes radiatives menées à l'aide des lasers de puissance, en parcourant les régimes physiques produits et les matériaux de laboratoire utilisés. Ensuite, nous appliquerons les concepts de similarité à l'interaction entre un sursaut X et un disque d'accrétion afin d'obtenir les lois d'échelle associées. L'application de ces relations permettra de mettre en perspective les contraintes théoriques à respecter pour obtenir des régimes similaires à l'échelle du laboratoire.

Dans le chapitre 4, nous décrirons comment une généralisation des symétries de Lie appelées symétries d'équivalence permet de briser les limites imposées par la similarité et de lier théoriquement des systèmes et des régimes physiques différents. Le cadre théorique nécessaire à la compréhension et l'application de ces concepts sera détaillé, ainsi que le calcul des symétries classiques et d'équivalence du modèle étudié.

Dans le chapitre 5, nous appliquerons ces nouveaux concepts d'équivalence au modèle d'ondes radiatives afin de construire un système théorique à l'échelle du laboratoire accessible expérimentalement. Des simulations effectuées à l'aide du code d'hydrodynamique radiative FCI2 seront présentées afin d'illustrer numériquement les résultats théoriques du chapitre précédent. Nous détaillerons la méthodologie de dimensionnement suivie ainsi que les outils numériques développés permettant de proposer une maquette d'un système équivalent de laboratoire. Nous définirons enfin les contours d'applicabilité de ces nouveaux outils théoriques.

1. **MaTaLE** est un acronyme pour **M**apping **T**heory and **L**aser **E**xperiments. Ce projet est piloté par É. Falize et implique le CEA, le LULI et le LERMA.

Dans le chapitre 6, nous proposerons un dimensionnement expérimental sur le Laser MégaJoule appuyé par des simulations 2D effectuées à l'aide du code FCI2. En particulier, nous détaillerons comment les diagnostics laser utilisables sur cette installation permettent de s'assurer du respect des hypothèses fondamentales de propagation d'une onde radiative supersonique équivalente à celles pouvant être attendues lors de l'interaction entre un sursaut X et le disque d'accrétion d'une étoile à neutrons. Les conclusions et perspectives de cette étude permettront d'ouvrir la porte à un élargissement du catalogue actuel de phénomènes étudiables à l'échelle du laboratoire, constituant ainsi la base d'une nouvelle classe d'expériences pour l'astrophysique de laboratoire.

CHAPITRE 1

De l'astrophysique au laboratoire

Sommaire

1.1	Introduction	8
1.2	L'interaction rayonnement-matière	8
1.2.1	Une diversité de phénomènes énergétiques	8
1.2.2	Une interaction complexe entre rayonnement et matière	10
1.2.3	Divers phénomènes et régimes physiques	15
1.2.4	Une problématique fondamentale en astrophysique	19
1.3	L'astrophysique de laboratoire	19
1.3.1	La physique des hautes densités d'énergie	19
1.3.2	Principe et expériences d'astrophysique de laboratoire	23
1.4	Conclusion	26

1.1 Introduction

L'interaction entre le rayonnement et la matière, qu'elle se déroule à l'échelle astrophysique ou à celle du laboratoire, produit une physique riche et encore sujette à des problématiques fondamentales. La compréhension et la modélisation d'une telle physique, au niveau observationnel, théorique et numérique, reste en effet un challenge pour les physiciens. Le développement des lasers de puissance a aujourd'hui permis de reproduire à l'échelle du laboratoire des écoulements hydro-radiatifs propres à l'échelle astrophysique, ainsi que d'en étudier la dynamique. Les données expérimentales produites apportent de nouveaux éléments de compréhension et permettent de valider les modèles théoriques et numériques déjà utilisés. Cette approche expérimentale constitue une opportunité unique d'enrichir la compréhension des phénomènes astrophysiques ainsi que de sonder des régions inobservables par les télescopes actuels.

Dans ce chapitre introductif, nous commencerons par présenter les différents mécanismes de production de rayonnement à l'échelle astrophysique. Ensuite, nous détaillerons différents mécanismes d'interactions entre ces événements énergétiques et la matière présente aux alentours. Cela mènera à la définition de quelques processus physiques d'importance capitale dans la structuration de ces environnements astrophysiques. Enfin, nous décrirons quels phénomènes mis en jeu dans l'interaction laser-matière peuvent permettre de reproduire cette physique à l'échelle du laboratoire à travers quelques expériences notables en physique des hautes densités d'énergie.

1.2 L'interaction rayonnement-matière

1.2.1 Une diversité de phénomènes énergétiques

Les mécanismes de production de rayonnement ne manquent pas à l'échelle astrophysique. De par la diversité des environnements présents à cette échelle, la gamme de photons émis parcourt l'ensemble du spectre électromagnétique, le domaine optique ne représentant qu'une infime partie des photons détectables dans l'Univers. Les longueurs d'onde des ondes électromagnétiques associées aux photons, notées λ , peuvent ainsi varier de quelques centaines de kilomètres (domaine radio) jusqu'à l'échelle de quelques dizaines de femtomètres (domaine γ). Il est possible d'associer une température de rayonnement de corps noir pour chaque énergie $h\nu$ de ce spectre, où $h = 6.62 \times 10^{-27}$ erg.s est la constante de Planck et ν la fréquence des photons. Ces températures, obtenues en considérant $k_B T = h\nu$, avec $k_B = 1.38 \times 10^{-16}$ erg.K⁻¹ la constante de Boltzmann, appartiennent à un intervalle allant de quelques Kelvins jusqu'à atteindre plusieurs centaines de millions de Kelvin.

De manière générale, il existe une grande diversité de mécanismes produisant des rayonnements parcourant l'ensemble de ce spectre. Commençons par le domaine des basses énergies, et les signaux appartenant au domaine radio. Le rayonnement synchrotron produit par l'accélération de particules chargées par un champ magnétique produit des ondes électromagnétiques dans une grande gamme d'énergies, et en particulier le domaine radio [Offringa *et al.*, 2022]. On peut également citer les sursauts radio rapides [Petroff *et al.*, 2019] dont la nature de la source est probablement liée aux pulsars. Ces rayonnements sont légèrement moins énergétiques que le rayonnement de fond diffus cosmologique ($T \sim 3K$), appartenant au domaine des micro-ondes.

Légèrement au-dessus, de la dizaine au millier de Kelvins, on trouve le domaine infra-rouge, qui peut correspondre à la température rayonnée par des grains de poussière présents dans certains nuages moléculaires froids [Steinacker *et al.*, 2010]. Des observations de nuages moléculaires dans l'infrarouge lointain (quelques centaines de K) ont révélé des structures complexes de gaz et poussières arrangées en filaments [Schisano *et al.*, 2014]. Ces filaments de matière semblent être liés à des processus de formation stellaire et de chocs d'accrétion [Priestley et Whitworth, 2022].

Pour des températures encore plus élevées, nous entrons dans le domaine du rayonnement visible observé en partie par le télescope James Webb [Gardner *et al.*, 2006] récemment déployé, et permettant d'étudier en majorité les étoiles et galaxies.

Dans la gamme de la centaine de milliers de K , on trouve le rayonnement ultraviolet (UV) qui est utilisé pour caractériser la densité, la température, et la composition chimique du milieu interstellaire et des étoiles chaudes [Gondhalekar *et al.*, 1980]. Ces longueurs d'onde sont en effet particulièrement importantes dans l'ionisation du milieu interstellaire par le rayonnement des étoiles [Haehnelt *et al.*, 2001].

Très haut dans le spectre énergétique du rayonnement, nous arrivons dans le domaine du rayonnement X, pour des températures pouvant atteindre des centaines de millions de Kelvin. Dans ces régimes, il est usuel d'utiliser des échelles d'électronvolts ($1 \text{ eV} = 11604 \text{ K}$) ou kiloélectronvolts (keV). Notons que c'est cette gamme d'énergie qui va nous intéresser dans ce manuscrit. À ces énergies extrêmes, la matière peut être totalement ionisée et le rayonnement peut influencer la dynamique des environnements dans lesquels il se propage. Un exemple particulièrement intéressant se trouve dans les processus de réactions thermonucléaires se produisant à la surface des naines blanches ou des étoiles à neutrons provenant de systèmes binaires [Pringle et Savonije, 1979; Lewin *et al.*, 1993]. Ces objets compacts accrètent de façon permanente de la matière de leur étoile compagnon, provoquant une accumulation à leur surface. Lorsque la densité et la température de ces régions augmentent trop fortement, des réactions de fusion se déclenchent. Une forte énergie s'échappe alors sous forme d'un sursaut de rayonnement, que l'on appelle nova pour les naines blanches [Pringle et Savonije, 1979], et sursaut X de type I pour les étoiles à neutrons [Lewin *et al.*, 1993]. Ces phénomènes de sursauts se déroulant à la surface d'objets compacts sont capables de produire des rayonnements X intenses, atteignant des luminosités $L_S \sim 10^{38-40} \text{ erg.s}^{-1}$ sur une plage de durée relativement conséquente (de la seconde à quelques mois). Ces sursauts vont alors altérer les écoulements d'accrétion proches de ces astres. Bien que la structure principale de ces écoulements prenne une forme de disque, les champs magnétiques intenses parfois présents autour de ces objets compacts peuvent permettre de collimater les flots de matière sous la forme d'une colonne d'accrétion [Warner, 1995]. De récentes observations ont ainsi permis de capturer le phénomène de nova en provenance de la colonne d'accrétion d'une naine blanche [Scaringi *et al.*, 2022]. Dans ces travaux de thèse, nous nous intéresserons tout particulièrement à l'effet des sursauts X de type I sur les disques d'accrétion proches des étoiles à neutrons.

Enfin, les rayonnements les plus énergétiques appartiennent à la catégorie du rayonnement γ , dont la température équivalente dépasse la centaine de kiloélectronvolts. On peut retrouver ce type de rayonnement proche des trous noirs supermassifs ou encore dans le cas des hypernovae [Paczynski, 1998] pour les étoiles de très grande masse. L'ensemble des processus précédemment décrits sont présentés sous une

forme synthétique sur la Figure 1.

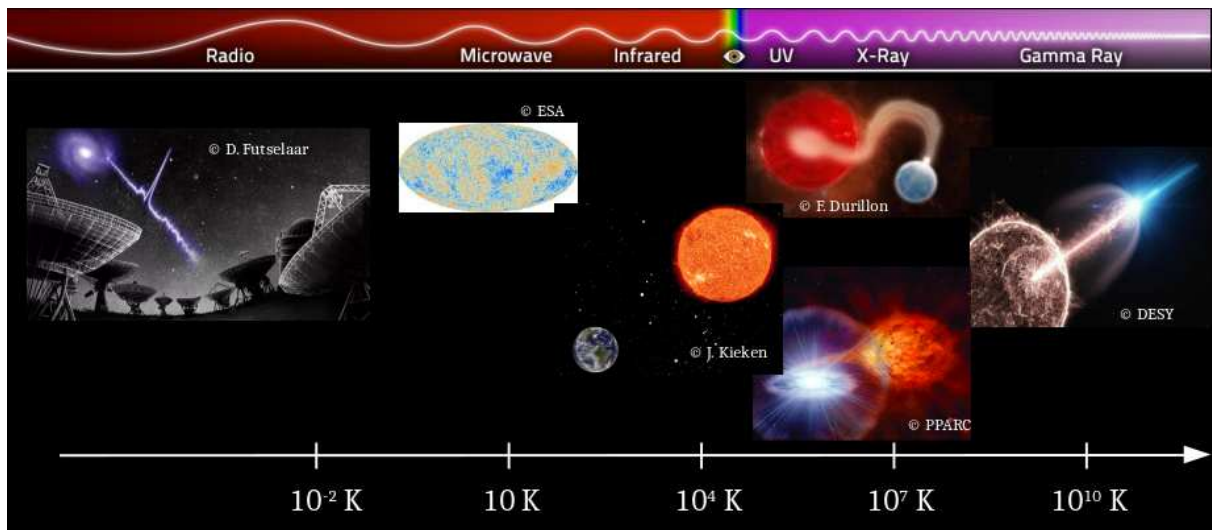


FIGURE 1 – Exemple de phénomènes physiques se déroulant à l'échelle astrophysique et parcourant le spectre électromagnétique. De gauche à droite se trouvent : un sursaut radio rapide, une carte du fond diffus cosmologique, le système terre-Soleil, la colonne d'accrétion à la surface d'une naine blanche dans un système binaire, un sursaut X irradiant le disque d'accrétion d'une étoile à neutrons dans un système binaire, un rayon γ s'échappant d'une étoile en effondrement.

1.2.2 Une interaction complexe entre rayonnement et matière

De manière générale, le rayonnement, quel que soit le domaine d'énergie, va interagir avec la matière environnante et potentiellement provoquer l'apparition ou la modification de structures à l'échelle astrophysique. En effet, quand les photons produits par ces mécanismes se propagent dans un milieu autre que le vide, il est possible qu'ils interagissent avec celui-ci de diverses manières. Dans la plupart des cas, ces photons interagissent avec les électrons liés du milieu, ou encore, dans un milieu ionisé, avec des électrons libres¹. Chaque mécanisme d'interaction dépend de l'énergie des photons incidents ainsi que de la nature du milieu qu'ils traversent.

1.2.2.1 L'effet photoélectrique

Un premier mécanisme est l'effet photoélectrique, appelé aussi photoionisation. C'est un mécanisme d'absorption du photon, dans lequel celui-ci transfère directement son énergie à un électron lié. Dans le cas où cette énergie est suffisante par rapport à l'énergie d'ionisation d'une couche de l'atome, l'électron peut être arraché de cette couche. Ce mécanisme est particulièrement présent dans le milieu interstellaire, lorsque le rayonnement UV des étoiles interagit avec le milieu ambiant. Ce dernier étant principalement composé d'hydrogène (seuil d'ionisation à 13.6 eV), les luminosités typiques de ces étoiles $10^{33} \text{ erg.s}^{-1}$ suffisent à ioniser le milieu. L'effet photoélectrique peut également être observé proche de nous, lorsque les poussières en lévitation à la surface de la Lune, sont impactées par le rayonnement

1. Pour les rayons γ , l'interaction se déroule même au niveau nucléaire.

UV du Soleil, conduisant à un phénomène de lueur d'horizon ². Plus précisément, la lumière du soleil cause des émissions et ré-absorptions d'électrons dans des micro-cavités formées entre des particules voisines. Cela peut générer des charges électriques élevées conduisant à des forces de répulsion mettant en lévitation les poussières à la surface de la lune. Ces poussières diffusent ensuite le rayonnement UV du soleil, conduisant au phénomène de lueur d'horizon. Notons que ce phénomène a été reproduit à l'échelle du laboratoire [Sickafoose *et al.*, 2001]. La Figure 2, à gauche, montre une photographie de cette lueur d'horizon, tandis qu'à droite se trouve un schéma illustrant le principe de base de l'effet photoélectrique.

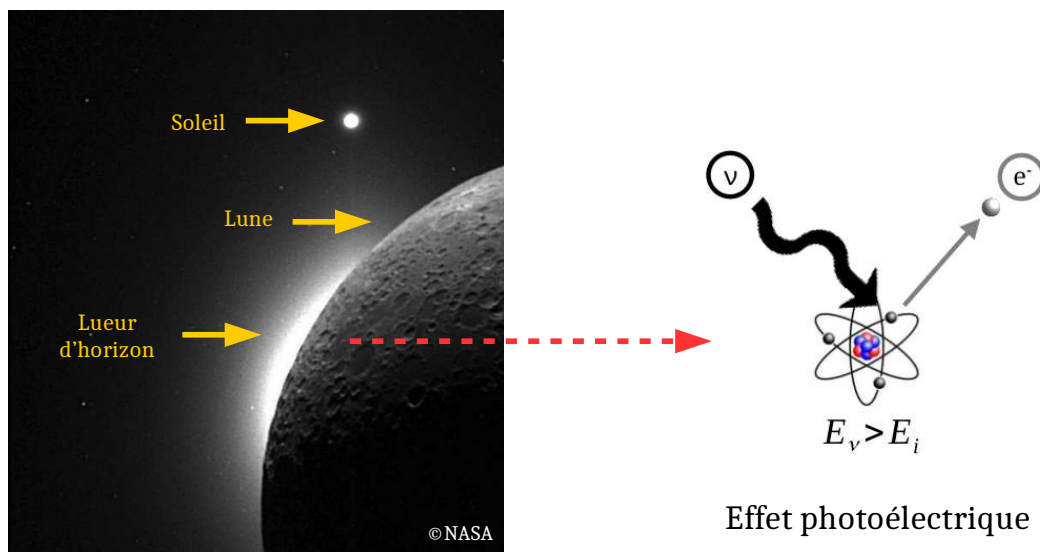


FIGURE 2 – À gauche, photographie en noir et blanc (Crédit : NASA) illustrant la lueur d'horizon produite à la surface de la Lune lorsque les poussières lévitent, un phénomène provoqué par l'effet photoélectrique. Le processus de photoionisation se déroulant grâce au rayonnement du Soleil est schématisé à droite, où E_ν représente l'énergie du photon incident et E_i l'énergie d'ionisation associée à l'atome représenté. On constate que le rayonnement incident arrache un électron à l'atome, permettant ainsi de l'ioniser et de créer un électron libre.

1.2.2.2 Les mécanismes de diffusion

À des énergies plus élevées, on retrouve des mécanismes de diffusion des photons par des électrons libres ou liés. Dans un premier temps, le photon peut être diffusé dans un milieu sans que sa longueur d'onde soit altérée. On parle alors de diffusion Thomson, dans laquelle il n'existe pas de transfert d'énergie : c'est une diffusion qualifiée d'élastique. Ce mécanisme joue un rôle dans le rayonnement de fond diffus cosmologique [Rees, 1968], ou encore dans des milieux ionisés soumis à des rayonnements d'intensités proches des dizaines d'eV à quelques keV. En effet, ce phénomène apparaît lorsque l'énergie du photon incident $h\nu$ n'est pas suffisante pour accélérer significativement l'électron d'énergie $E_m = m_e c^2$ avec

2. Ce phénomène a été observé pour la première fois dans les années 1960 par la NASA.

$m_e = 9.1 \times 10^{-28}$ g la masse de l'électron. Il faudrait en moyenne au photon une énergie d'environ $h\nu \approx 512$ keV pour que $E_m \approx h\nu$, menant à des photons X durs. Dans ce dernier cas de figure, l'interaction entre un électron et un photon conduit à un gain d'énergie pour l'électron (provenant du photon) et une perte d'énergie pour le photon. L'interaction entre l'onde électromagnétique et la particule chargée conduit à une mise en mouvement de l'électron, le photon lui transmettant de l'impulsion. Un photon est ensuite émis dans une direction autre que sa trajectoire initiale, d'énergie égale à la différence entre l'énergie initiale du photon et celle cédée à l'électron. Si le photon cède de l'énergie à la particule, on parle d'effet Compton. Si le photon gagne de l'énergie, on parle alors d'effet Compton inverse, particulièrement important pour les photons provenant du rayonnement diffus cosmologique [Gurzadyan et Margarian, 1996] ou des amas de galaxies [Sarazin, 1999; Moskalenko et Strong, 2000]. Pour qualifier ces phénomènes, on parle de diffusion inélastique, dans le sens où un échange d'énergie a lieu entre les deux particules. Ces deux régimes de diffusion (Compton et Thomson) sont illustrés sur la Figure 3.

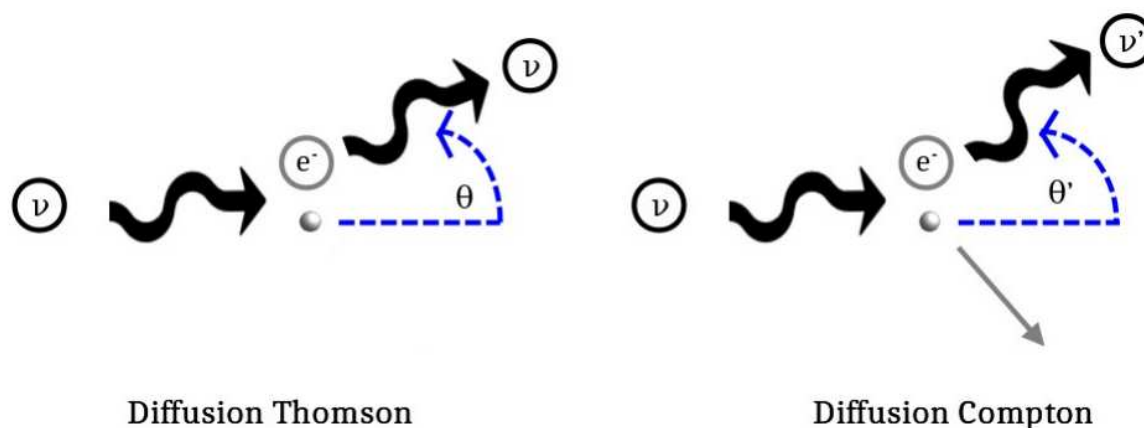


FIGURE 3 – Schéma des processus de diffusion Thomson (à gauche) et Compton (à droite). Dans le premier cas, à basse énergie, on retrouve un mécanisme de diffusion élastique durant lequel la fréquence (et donc longueur d'onde) du photon n'est pas modifiée, tandis qu'à haute énergie (à droite), ces grandeurs sont modifiées, conduisant ainsi à une diffusion inélastique et à un échange d'impulsion entre le photon et l'électron.

On note également qu'à des énergies extrêmement élevées ($> 10^3$ keV), d'autres phénomènes d'interaction peuvent prendre place comme les réactions photonucléaires ou la production de paires électron-positron provenant d'un photon [Hayward, 1970].

1.2.2.3 Transfert radiatif et loi d'opacité

De manière générale, le rayonnement interagissant avec un milieu peut être absorbé, diffusé ou encore réémis. Les lois de diffusion et d'absorption peuvent varier selon le milieu traversé par les photons incidents et ses conditions thermodynamiques. Afin de caractériser la façon dont ces mécanismes se produisent dans ces différents milieux, on utilise une loi d'opacité que l'on note κ_ν et contenant l'information sur les différents processus microscopiques mis en jeu. Cette fonction apparaît explicitement dans l'équation du transfert radiatif qui permet d'obtenir la variation de l'intensité du rayonnement en

fonction des mécanismes d'absorption/diffusion et des termes sources d'émission :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} I_\nu + \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} I_\nu = \rho j_\nu - \kappa_\nu \rho I_\nu \quad (1.1)$$

où I_ν représente l'intensité spécifique des photons de fréquence ν , ou plus précisément l'énergie par unité de surface, de temps, de fréquence, et d'angle solide, $c = 3 \times 10^{10} \text{ cm.s}^{-1}$ est la vitesse de la lumière dans le vide, t est la variable temporelle, $\vec{\Omega}$ l'angle solide dans lequel on calcule l'intensité spécifique (représenté sur la Figure 4), ρ la densité du matériau, j_ν le terme d'émission et κ_ν la loi d'opacité présente dans le terme d'absorption du rayonnement.

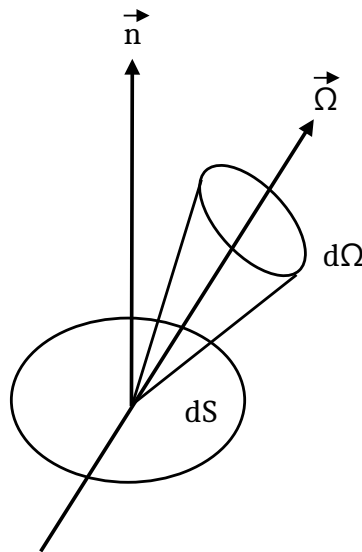


FIGURE 4 – Représentation de l'angle solide $d\Omega$ dans lequel sont contenus les photons traversant la surface dS , et qui constituent donc l'intensité spécifique I_ν .

Concrètement, cette relation indique comment le rayonnement, représenté par un faisceau de photon, gagne, perd et redistribue de l'énergie par différents processus d'émission, d'absorption, et de diffusion. En pratique, cette équation est trop difficile à résoudre de manière directe, mais il est possible d'en obtenir des solutions dans certaines limites, comme la limite de diffusion [Castor, 2004]. Généralement, on simplifie également l'approche en considérant un milieu à l'équilibre thermodynamique local (ETL), où la distribution du rayonnement est une Planckienne, notée $B_\nu(T)$. Dans ce cas, la loi de Kirchoff est vérifiée : $j_\nu = \kappa_\nu B_\nu$ [Mihalas et Mihalas, 2013], décrivant l'état stationnaire de l'équation (1.1), pour $I_\nu = B_\nu$. Dans le cas où l'on chercherait à simplifier encore plus l'approche, il est possible de moyenniser les différents termes présents dans l'équation (1.1) sur les fréquences des photons. On parle alors d'approximation grise.

Le terme qui nous intéresse tout particulièrement est celui d'absorption, dont l'objectif est de décrire, par exemple, les différents processus d'interaction rayonnement-matière présentés précédemment, à savoir la photoionisation et les mécanismes de diffusion. La loi d'opacité κ_ν dépend donc, de manière générale, de la fréquence des photons incidents (et donc de leur énergie $h\nu$). Le régime diffusif fait apparaître

une opacité moyennée sur la plage de fréquences des photons incidents, pondérée par la variabilité de la Planckienne en fonction de la température : c'est la moyenne de Rosseland. On obtient alors l'expression suivante :

$$\kappa_R = \frac{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu(T)} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu}, \quad \text{avec} \quad B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad (1.2)$$

De manière générale, la forme de l'opacité Rosseland κ_R dépend de la physique microscopique du milieu parcouru par le rayonnement par l'intermédiaire de κ_ν , ainsi que de ses conditions thermodynamiques en termes de densité ρ et de température T . Lors d'un processus de diffusion Thomson, par exemple, l'opacité Rosseland du milieu s'avère devenir complètement indépendante de la température, pour un gaz ionisé, et prend la forme [Paczynski, 1983] :

$$\kappa_R = \frac{n_e(\rho)\sigma_{Th}}{\rho} \quad (1.3)$$

où n_e est sa densité électronique et $\sigma_{Th} = 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$ est la section efficace de Thomson pour un électron. Dans le cas d'un gaz composé d'hydrogène, on peut aboutir à l'expression suivante :

$$\kappa_R [\text{cm}^2 \cdot \text{g}^{-1}] = 0.2 (1 + X) \quad (1.4)$$

où X est la fraction massique d'hydrogène du milieu traversé par les photons incidents. Par exemple, pour un milieu composé en grande partie d'hydrogène, on considère usuellement $X = 0.5$, ce qui donne $\kappa_R = 0.3 \text{ cm}^2 \cdot \text{g}^{-1}$. Lors d'un processus de diffusion Compton, la détermination de la loi d'opacité Rosseland correspondante est beaucoup plus complexe, et mène à des formulations différentes [Poutanen, 2017]. Enfin, on peut citer également la formule de Klein-Nishina [Klein et Nishina, 1929; Krajewska et al., 2015] qui décrit de manière continue la transition entre l'effet Thomson et l'effet Compton dans le cas d'un plasma où l'énergie cinétique des électrons est faible par rapport à leur énergie de masse.

La connaissance de la loi d'opacité d'un matériau est d'une importance capitale pour comprendre la dynamique de l'interaction entre rayonnement et matière. En particulier, connaissant la densité du milieu, elle permet d'obtenir le libre-parcours moyen $\lambda_R = 1/(\kappa_R \rho)$ des photons. Cette quantité donne la longueur caractéristique que peut parcourir un photon sans être absorbé ou diffusé dans un milieu. En prenant un axe de propagation de photon arbitraire noté x , on peut ainsi définir la quantité sans dimension suivante :

$$\tau = \int_0^L \frac{dx}{\lambda_R} = \int_0^L \kappa_R \rho dx \quad (1.5)$$

qui représente l'épaisseur optique d'un matériau de longueur L . Cette grandeur caractérise le nombre d'interactions que va subir un photon, en moyenne, sur une longueur L . Lorsque $\tau > 1$, on parle de milieu optiquement épais. Lorsque $\tau < 1$, on parle de milieu optiquement mince. Dans le cas intermédiaire, pour $\tau \simeq 1$, on parle de milieu semi-transparent.

1.2.3 Divers phénomènes et régimes physiques

1.2.3.1 Quelques exemples

Nous avons pu voir dans les sections précédentes que le rayonnement prenait une place centrale dans de nombreux environnements astrophysiques, et sur une gamme d'énergies conséquente. Son interaction avec certaines régions de l'espace a provoqué des modifications aussi bien à l'échelle atomique qu'à l'échelle des plus grandes structures observées jusqu'ici. En particulier, les "Piliers de la création" présents dans la nébuleuse de l'Aigle résultent de l'ablation de nuages moléculaires par le rayonnement UV des étoiles aux alentours [Mizuta *et al.*, 2005]. Dans ce cas, la photoionisation du milieu conduit à un mécanisme de photoévaporation. On peut également observer des mécanismes de photoexcitation pour la *ring nebula* [Barker, 1980; Burrows *et al.*, 1995], nébuleuse planétaire dont les données actuelles permettent de constater une répartition du rayonnement visible en anneaux, dépendant de la composition du milieu à ces endroits, ainsi que de l'intensité du rayonnement fourni par l'étoile centrale. Des images de ces deux phénomènes sont présentées sur la Figure 5.

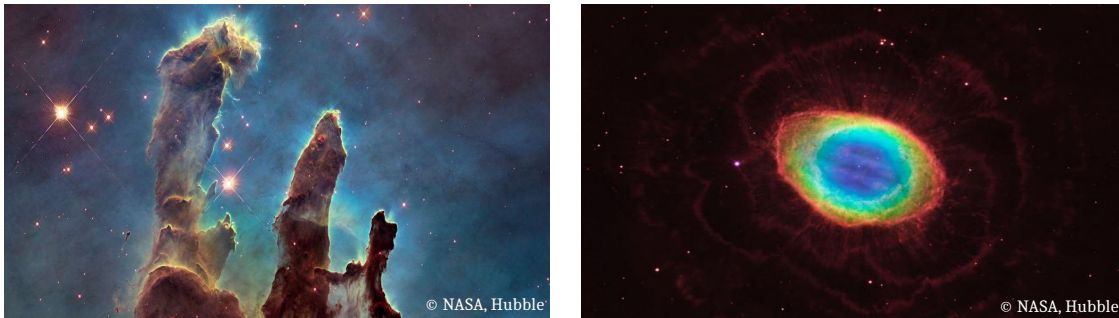


FIGURE 5 – L'image de gauche représente les "Piliers de la création", des nuages moléculaires s'ablatant par un mécanisme de photoionisation dû au rayonnement ultraviolet des étoiles aux alentours. Les régions les plus denses de ces piliers sont des régions de formation d'étoiles, et les couleurs représentées sur cette photographie du télescope Hubble représentent des éléments chimiques différents (bleu pour l'oxygène, orange pour le soufre, et vert pour l'azote et l'hydrogène). À droite est présentée une photographie du télescope spatial Hubble de la *ring nebula*, dans laquelle l'étoile centrale (10^5 K), une naine blanche en formation, est entourée d'hélium chaud (en bleu), d'hydrogène ionisé (en vert), et enfin d'azote ionisé (en rouge) dans les zones les plus lointaines de l'étoile.

À l'échelle astrophysique, le rayonnement est parfois si important qu'il peut guider la dynamique de certains milieux. Aux abords de trous noirs super-massifs, il est par exemple possible qu'un rayonnement ultra-intense conduise à des pressions de rayonnement, notées \mathbb{P}_{rad} , si fortes qu'elles pourraient provoquer un phénomène de vents radiatifs [King et Pounds, 2003; Yamamoto et Fukue, 2021], expulsant la matière environnante. Ces régimes physiques sont encore peu compris mais sont d'une importance capitale dans ces systèmes ainsi que dans des étapes de la cosmologie primordiale où le rayonnement jouait un rôle central [Omukai et Palla, 2001; Baumann, 2018].

1.2.3.2 Les fronts d'ionisation et ondes de chaleur

Un des phénomènes les plus répandus en astrophysique correspond à la propagation supersonique d'un rayonnement ionisant dans un milieu neutre. En pratique, les photons incidents ionisent le gaz, ce qui provoque l'apparition d'une zone de séparation entre l'environnement neutre et le gaz ionisé que l'on nomme front de photoionisation, mais aussi plus généralement front d'ionisation [Kahn, 1954; Goldsworthy, 1958]. L'exemple le plus étudié théoriquement reste à ce jour celui de la sphère de Strömgen [Strömgen, 1939], où un front d'ionisation (limite entre la matière ionisée et non-ionisée) se propage au sein d'un milieu impacté par le rayonnement d'une étoile centrale, typiquement de quelques dizaines de milliers de K. Les mécanismes de chauffage sont assez négligeables par rapport à l'ionisation du milieu, caractérisée par un bilan entre photoionisation et recombinaison. Il constitue encore aujourd'hui un test classique de validation des codes astrophysiques incluant une résolution du transfert radiatif [Iliev *et al.*, 2006, 2009]. Notons que les fronts de photoionisation jouent un rôle primordial dans les régions de formation d'étoiles [Franco *et al.*, 2000], et les phases de transition des nébuleuses planétaires [Gledhill et Forde, 2015].

De manière générale, les fronts d'ionisation présentent également des mécanismes de chauffage ainsi qu'une réponse hydrodynamique du milieu à leur propagation. Ces mécanismes ont mené à une classification théorique des fronts d'ionisation en quatre régions [Axford, 1961]. Ces régions décrivent différentes situations dans lesquelles le chauffage et la réponse hydrodynamique du système modifient plus ou moins la structure d'un front d'ionisation théorique se propageant dans un milieu statique sans chauffage. Dans la littérature, on retrouve les appellations suivantes : fronts d'ionisation de type D fort, type D faible, type R fort, et type R faible. Le type D est appelé ainsi car il caractérise un front se propageant dans un milieu Dense, tandis que le type R est appelé ainsi car il caractérise un front se propageant dans un milieu Raréfié. Les fronts d'ionisation de type D sont caractérisés par une vitesse de propagation subsonique dans le milieu neutre, pouvant ainsi être précédés par des ondes de choc ou de raréfaction. Notons que les fronts de type D fort se propagent tout de même supersoniquement par rapport au gaz ionisé. Les fronts d'ionisation de type R sont quant à eux caractérisés par une vitesse de propagation supersonique dans le milieu neutre. Lors de la propagation d'un front de type R fort, le matériau doit être fortement comprimé, et la vitesse du gaz ionisé devrait être subsonique par rapport au front. Cette solution théorique n'est pas physiquement réalisable car des perturbations acoustiques mèneraient alors directement à une transition au type D. Notons enfin que les fronts d'ionisation se situant à la limite entre les catégories "fort" et "faible" sont appelés "critiques".

Pour illustrer ces concepts, intéressons-nous plus en détails au cas d'un nuage moléculaire froid ($T \sim 100$ K) touché par le rayonnement ionisant ($T \sim 10^4$ K) d'une étoile à proximité [Whitworth, 1979; Walch *et al.*, 2012]. Dans une première phase, on observe une expansion rapide du front d'ionisation accompagné d'une onde chaleur, dans une phase supersonique de type R faible (Figure 6 *a*)). Les recombinaisons à l'avant du front d'ionisation conduisent à son ralentissement et mène à la mise en place d'un régime R critique (Figure 6 *b*)), pour une vitesse égale à la vitesse du son dans le milieu neutre. Une onde de choc se libère alors depuis le front d'ionisation et se propage devant celui-ci, comprimant le milieu neutre avant le passage du front d'ionisation. On arrive dans une situation de type D fort (Figure

6 c)), où le front d'ionisation se propage à une vitesse subsonique, précédé par un choc.

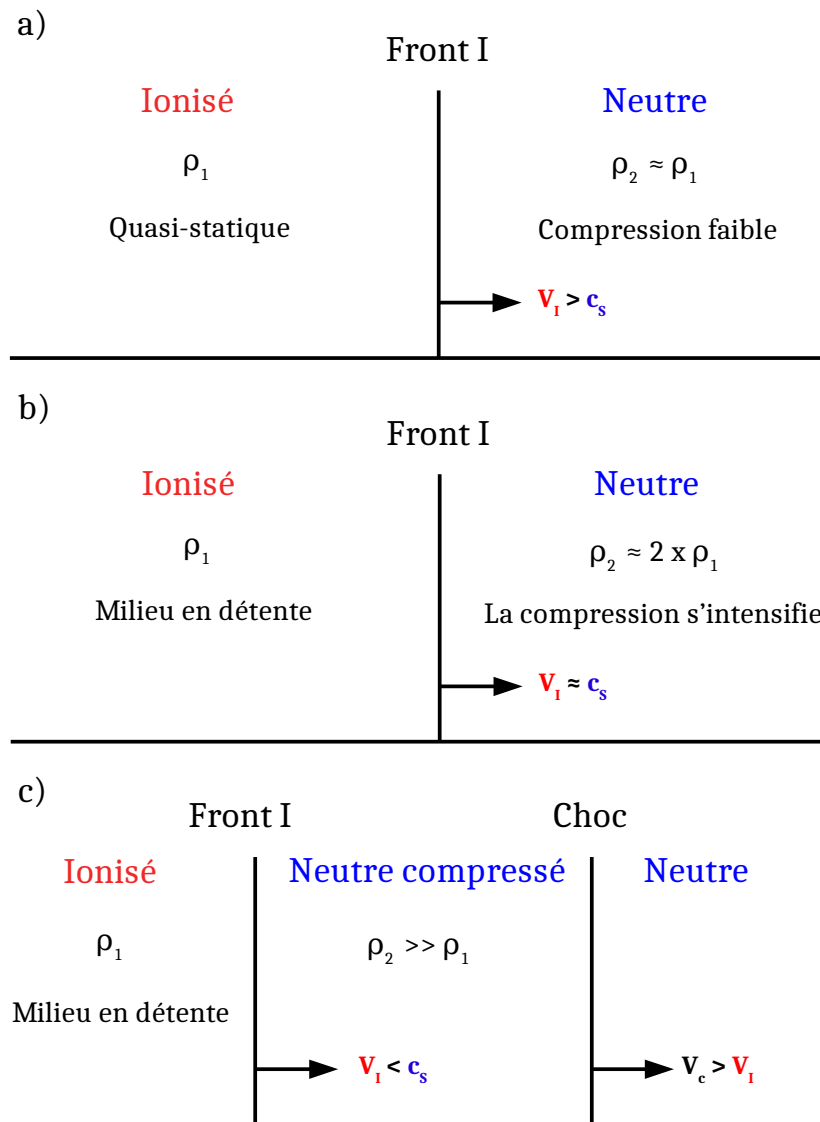


FIGURE 6 – Illustration des différents types de fronts d'ionisation, avec de haut en bas : a) un front de type R faible, b) un front de type R critique, c) un front de type D fort. Figure adaptée de Mihalas et Mihalas [2013].

Lors du chauffage intense d'un milieu (> 0.1 keV), on s'attend donc, de manière générale, à observer en plus de ces fronts d'ionisation des ondes radiatives, aussi appelées ondes de Marshak [Marshak, 1958]. Elles sont dues au chauffage du milieu et à la diffusion des photons en son sein sans qu'aucune réponse hydrodynamique ne soit observée dans un premier temps : c'est la phase supersonique de l'onde correspondant au type R faible pour les fronts d'ionisation. Lorsque les perturbations acoustiques

rattrapent ce front de chaleur, une transition au type D fort peut être observée pour les fronts d'ionisation. Pour une onde radiative, c'est ce que l'on appelle la phase subsonique, avec apparition d'un choc dit de séparation hydrodynamique [Garnier *et al.*, 2006]. Nous reviendrons plus en détails sur cette physique dans le chapitre 2.

On s'attend à observer de telles entités au sein des disques d'accrétion d'étoiles à neutrons soumis à d'intenses sursauts X à la surface de celles-ci [Tranchant *et al.*, 2022]. À ces températures de plusieurs centaines d'eV, les milieux astrophysiques principalement composés d'hydrogène sont instantanément ionisés par le passage d'une onde radiative. De manière générale, ces ondes radiatives jouent un rôle important dans de nombreux systèmes astrophysiques [Mihalas et Mihalas, 2013]. Cependant, leur observation est particulièrement difficile dans les milieux opaques qu'elles traversent, et leur impact n'est pas toujours discuté. Notons qu'une onde de chaleur a été récemment observée proche d'une proto-étoile [Burns *et al.*, 2020] conduisant à penser que le processus de formation de telles ondes peut jouer un rôle important en astrophysique. Nous reviendrons plus en détails sur la physique et la modélisation de ces phénomènes dans le prochain chapitre, et plus globalement tout au long de ces travaux.

1.2.3.3 Les chocs radiatifs

À l'échelle astrophysique, des phénomènes plus violents peuvent apparaître, tels que des chocs radiatifs [Drake, 2005], que ce soit dans des environnements optiquement minces [Chevalier et Theys, 1975] ou optiquement épais [Bouquet *et al.*, 2000; Drake, 2007; Koenig *et al.*, 2006]. Les chocs radiatifs sont des ondes de choc d'une intensité assez élevée pour que les énergie, pression, et flux radiatifs influencent leur dynamique. Cela peut se produire dans le cas où la matière choquée est suffisamment chaude pour émettre une quantité non-négligeable de rayonnement. Dans des environnements optiquement épais, les photons ainsi émis par la matière choquée interagissent avec le milieu de propagation en aval du front de choc. Ces photons peuvent chauffer et ioniser le milieu à la manière d'une onde de Marshak, créant un précurseur radiatif devant le choc. La discontinuité hydrodynamique se propage alors dans un milieu profondément modifié par ce précurseur, entraînant des modifications des relations de Rankine-Hugoniot pour un choc hydrodynamique [Michel *et al.*, 2019].

Dans des régimes optiquement minces, la matière non choquée est bien moins impactée par le rayonnement de la matière choquée. Les effets du rayonnement sont alors usuellement modélisés par une fonction de refroidissement agissant comme une perte d'énergie. Cette perte d'énergie est due aux photons émis par la zone post-choc pouvant librement quitter le système optiquement mince par la suite [Michaut *et al.*, 2009]. Enfin, notons qu'à la limite entre ces chocs en régime optiquement épais et optiquement minces, des travaux ont été réalisés pour comprendre la nature de ces chocs radiatifs et lier ces deux régimes [McClarren *et al.*, 2010].

Les chocs radiatifs, en régimes optiquement épais ou optiquement mince, peuvent se produire dans un grand nombre de systèmes astrophysiques, comme les jets d'étoiles jeunes [del Valle *et al.*, 2022], les écoulements super-Eddington proches des trous noirs [Okuda et Singh, 2021], ou encore dans les restes de supernovae [Dopita *et al.*, 2019]. Une des applications correspond au choc radiatif présent dans le milieu entourant la supernova SN1987A. Ce gaz circumstellaire est ionisé par le rayonnement émis par la

matière choquée par les éjecta de la supernova qui sont propulsés à la vitesse de l'ordre de 1000 km.s^{-1} [Michel, 2019]. Un choc intense se crée ainsi, présentant les caractéristiques typiques d'un choc radiatif, comme en atteste la présence d'un précurseur radiatif [Pun *et al.*, 2002].

1.2.4 Une problématique fondamentale en astrophysique

Comme nous venons de le voir, l'interaction rayonnement-matière joue un rôle fondamental dans un grand nombre d'environnements à l'échelle astrophysique, du transport d'énergie au sein des étoiles aux disques d'accrétion autour d'objets compacts, en passant par les restes de supernovae. Bien que la plupart de ces objets soient observés dans un grand domaine de fréquences, les mécanismes d'interaction du rayonnement intervenant dans des régions opaques sont impossibles à observer directement. De plus, d'autres facteurs limitent l'obtention de données observationnelles précises comme la limite de sensibilité des télescopes et les résolutions spatiales nécessaires inatteignables. En effet, les extensions spatiales de certaines régions étudiées peuvent atteindre la centaine de kilomètres environ, comme dans les parties internes des disques d'accrétion autour des étoiles à neutrons [Fragile *et al.*, 2020] influencées par les sursauts X à leur surface.

De manière générale, il existe donc de grandes incertitudes sur la plupart des paramètres caractéristiques et propriétés thermodynamiques des objets astrophysiques (densité, température, masse, distance, ...) et des modèles qui leur sont associés. En effet, même les outils numériques de plus en plus puissants manquent de données empiriques permettant de les valider. L'interprétation des phénomènes physiques ayant lieu à ces échelles devient donc particulièrement ardue, voire impossible dans certains cas. Malgré la constante progression des télescopes spatiaux et terrestres, ou encore de notre capacité de calcul numérique, ainsi que l'accroissement des données observationnelles apportant une solide base de données pour ces études, la caractérisation physique des mécanismes d'interaction entre le rayonnement et la matière reste difficile.

1.3 L'astrophysique de laboratoire

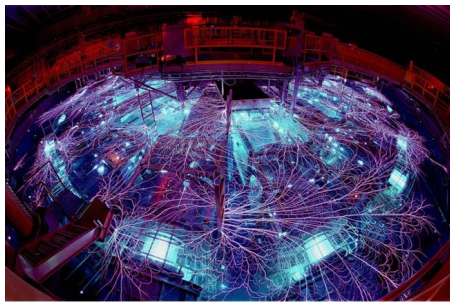
Les différents phénomènes évoqués dans la section précédente proviennent de l'interaction entre une source de rayonnement et des milieux aux propriétés microscopiques connues. Ces deux ingrédients ne sont pas propres à l'astrophysique, et sont accessibles à l'échelle du laboratoire depuis quelques décennies. Il est tout à fait commun, aujourd'hui, de reproduire des conditions et des mécanismes physiques propres aux systèmes astrophysiques dans des volumes millimétriques : c'est ce que l'on appelle l'astrophysique de laboratoire des hautes densités d'énergie [Remington *et al.*, 2006].

1.3.1 La physique des hautes densités d'énergie

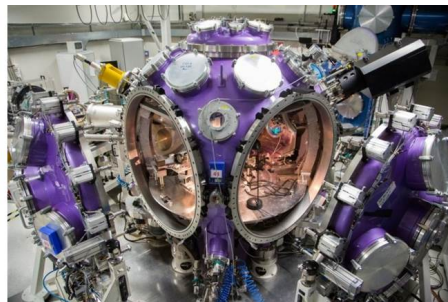
Dans le domaine des machines permettant d'atteindre des conditions physiques extrêmes, avec des températures de plusieurs millions de Kelvins et des densités autour de la centaine de grammes par centimètre cube, on retrouve une catégorie se servant de champs magnétiques intenses. Citons par exemple les sphéromaks [Bellan, 2000] ayant récemment permis de modéliser les éjections de masses

coronales [Asvestari *et al.*, 2022], mais également les tokamaks [Kikuchi et Azumi, 2012], principalement utilisés dans le cadre de la fusion par confinement magnétique [Pitts *et al.*, 2011]. Citons également les Z-pinches, pouvant générer des pressions gigantesques à l'aide de champs électro-magnétiques intenses sur plusieurs centaines de nanosecondes (voir Ryutov *et al.* [2000a] pour une revue). Parmi ces installations, on peut retrouver la machine Z du laboratoire national de Sandia aux États-Unis (voir sur la Figure 7 a)).

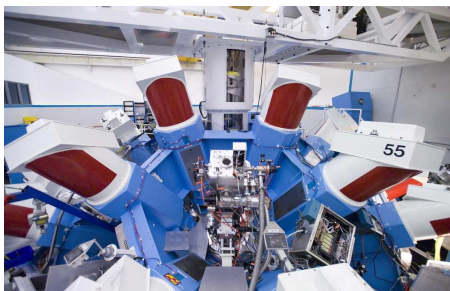
Une grande partie des autres installations utilisent la focalisation de lasers de puissance dans des volumes millimétriques afin d'y produire des hautes densités d'énergie. Il est possible de les répartir en trois classes selon l'énergie laser délivrée. Tout d'abord, nous avons les lasers kilojoules, comme le laser LULI2000 du *Laboratoire pour l'Utilisation des lasers Intenses* (LULI) à l'école polytechnique (France, voir sur la Figure 7 b)) qui sont les moins intenses. Ensuite vient la catégorie des lasers multi-kilojoules, tels que le laser OMEGA au *Laboratory for laser Energetics* de Rochester aux États-unis, (voir sur la Figure 7 c)), ou encore les installations GEKKO au Japon et ORION en Angleterre. Enfin, une dernière catégorie, plus récente, de lasers de puissance a permis de franchir un cap dans les régimes accessibles en laboratoire, et permet d'espérer atteindre les conditions requises pour la fusion par confinement inertiel (FCI). Ces installations visant l'obtention d'énergies de l'ordre du mégajoule sont le *National Ignition Facility* (NIF) aux États-unis et le *Laser Mégajoule* (LMJ) en France, représenté sur la Figure 7 d).



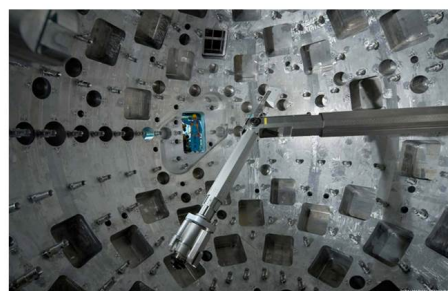
(a) Chambre d'expériences de la machine Z
© Sandia Nat. Lab.



(b) Chambre d'expériences du LULI2000
© Ecole Polytechnique



(c) Chambre d'expériences du laser OMEGA
© Université de Rochester



(d) Intérieur de la chambre d'expériences
du LMJ © CEA

FIGURE 7 – Chambres d'expériences de la machine Z (a) et des lasers de puissance LULI2000 (b), OMEGA (c) et LMJ (d).

À l'aide de ces installations, il est devenu possible de produire des conditions et des régimes physiques

comparables à celles qui règnent au sein des planètes, étoiles, ou encore dans des processus d'accrétion. De plus, il est possible de caractériser physiquement des flots de matière produits sur des échelles temporelles de l'ordre de la nanoseconde grâce aux outils de diagnostics disponibles en laboratoire. La sophistication de ces outils permet aujourd'hui d'obtenir des données expérimentales exploitables pour valider les modèles théoriques et numériques à l'échelle astrophysique. Sur la Figure 8 est représenté le diagramme de phase de l'hydrogène en fonction des conditions de température et densité, illustrant les régimes physiques accessibles par les installations laser de puissance actuelles (LULI2000, OMEGA, NIF, LMJ). Quelques exemples de chemins thermodynamiques de l'intérieur d'étoiles et planètes sont également représentés. Il apparaît clairement que les installations de puissance permettent actuellement de reproduire les conditions thermodynamiques d'un grand nombre d'objets astrophysiques.

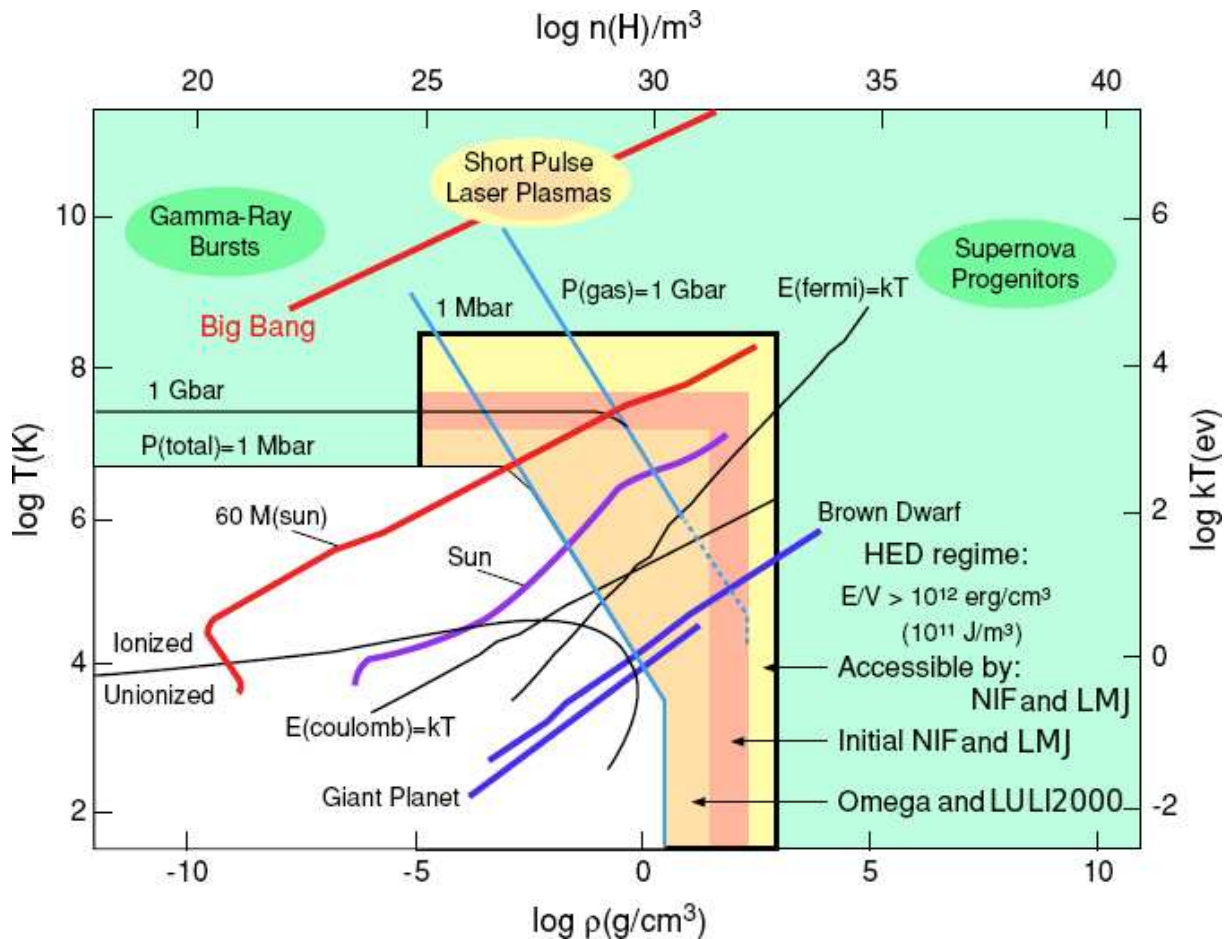


FIGURE 8 – Diagramme de phase (température-densité) de l'hydrogène couplé aux régimes accessibles avec les lasers de puissance (LULI2000, OMEGA, NIF et LMJ) et les objets astrophysiques (Soleil, planètes géantes, naines brunes), tiré de Van Box Som [2018], adapté de Casner *et al.* [2015], et originellement publié dans [Council *et al.*, 2003].

L'interaction laser-matière

Afin de mettre en condition la matière dans des états plasmas avec les lasers de puissance, deux approches sont utilisées : l'attaque directe et l'attaque indirecte. Dans le cas de l'attaque directe, le laser est directement dirigé sur la cible. L'énergie laser ainsi déposée va arracher des électrons, créant un plasma en amont de la cible sur une échelle temporelle de l'ordre de la picoseconde. Le faisceau laser est absorbé dans la zone de densité électronique n_e inférieure à une densité critique (appelée couronne sous-critique) qui est donnée par l'expression :

$$n_c = 1.1 \times 10^{21} \left[\frac{\lambda_l}{1\mu\text{m}} \right]^{-2} \text{ cm}^{-3} \quad (1.6)$$

où λ_l est la longueur d'onde du laser. Une fois l'énergie laser absorbée, elle est transportée vers l'intérieur de la cible par conduction électronique. Dans cette zone de conduction, la température diminue et la densité augmente jusqu'au front de conduction, comme nous pouvons le voir sur la Figure 9.

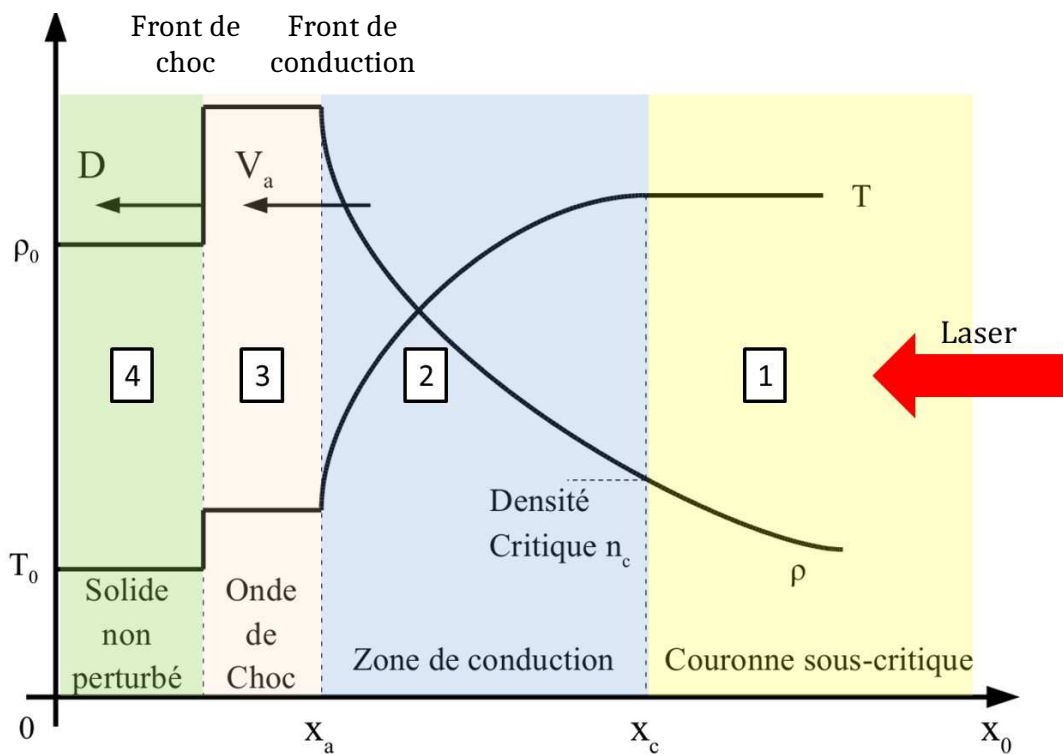


FIGURE 9 – Absorption et transport lors de l'interaction entre le laser et la matière. Les profils de température et de densité sont tracés en fonction de la position. Figure tirée de Van Box Som [2018].

L'ablateur est composé, dans la majorité des cas, de mousses de plastique (CH) d'ionisation $Z^* = 3.5$, pouvant être dopées avec des éléments de numéro atomique Z plus élevés. Suivant le processus

d'absorption dominant, la pression d'ablation peut être obtenue théoriquement [Mora, 1982], par :

$$P_{abl}[\text{Mbar}] = 11.6 \left[\frac{A}{2Z} \right]^{7/16} \left[\frac{I_l}{10^{14} \text{ W.cm}^{-2}} \right]^{3/4} \left[\frac{\lambda_l}{1 \mu\text{m}} \right]^{-1/4} \left[\frac{Z^*}{3.5} \right]^{-1/8} \left[\frac{t_{imp}}{1 \text{ ns}} \right]^{-1/8} \quad (1.7)$$

où A est le nombre de masse du matériau, Z son numéro atomique, I_l l'intensité du laser, et t_{imp} la durée d'impulsion de ce dernier. Dans le cas d'un laser kilojoule à 2ω (521 nm) d'impulsion nanoseconde, et pour une intensité d'environ $10^{14} \text{ W.cm}^{-2}$, la relation (1.7) montre que l'on peut atteindre une pression d'environ 13 Mbar. Par effet fusée, un choc est produit devant le matériau ablaté. La matière est ainsi chauffée et ionisée, mais également mise en mouvement à plusieurs dizaines voire centaines de kilomètres par seconde.

Dans ces travaux, nous nous intéresserons à un autre schéma de production de régime de hautes énergies : l'attaque indirecte (voir la Figure 10). Dans cette configuration, le laser interagit avec les parois d'un matériau de Z élevé (en général de l'or). L'énergie laser ainsi déposée est convertie en rayonnement X caractérisé par des températures allant de 100 eV à 300 eV. Les photons produits au sein de la cavité interagissent alors avec la matière en contact avec la cavité de conversion. Si la matière est optiquement épaisse au rayonnement, le chauffage induit la propagation d'une onde radiative supersonique [Marshak, 1958]. Durant cette phase, le système est considéré comme statique. Le chauffage de la matière induit ensuite la mise en mouvement de la partie chauffée menant à une réponse hydrodynamique du matériau. Nous verrons au cours du chapitre 3 sous quelles conditions expérimentales le régime supersonique des ondes radiatives peut être observé.

1.3.2 Principe et expériences d'astrophysique de laboratoire

1.3.2.1 De l'échelle astrophysique à celle du laboratoire

L'obtention de régimes physiques de plus en plus variés à l'aide des différentes installations de puissance a permis à la communauté scientifique de produire un certain nombre de phénomènes physiques en laboratoire [Savin *et al.*, 2012; Takabe et Kuramitsu, 2021]. Dans cette optique, deux cas sont à distinguer. Les expériences statiques, qui visent à caractériser le comportement de la matière en termes d'équations d'état et d'opacité par exemple, tentent de reproduire les conditions physiques du système étudié. On cherche à recréer un même processus physique afin d'obtenir des données comparables à des modèles théoriques, des simulations numériques, ou des données observationnelles des phénomènes astrophysiques associés. Le laser GEKKO XII a par exemple permis d'étudier les conditions au voisinage d'objets compacts tels que Cygnus X-3 ou Vela X-1, pour un mécanisme de photoionisation [Fujioka *et al.*, 2009b,a].

Les expériences dynamiques, quant à elles, ont pour but d'étudier l'évolution spatio-temporelle de phénomènes similaires ou ressemblants aux systèmes astrophysiques. De manière plus générale, des écarts existent entre les échelles spatio-temporelles astrophysique et de laboratoire, ainsi que certaines propriétés thermodynamiques (densité, température, . . .) des milieux étudiés. Dans ce cas, il est tout de même possible, sous certaines conditions, de créer des expériences pouvant être comparées aux environnements astrophysiques de base, en liant théoriquement les différentes échelles d'un même système. Cette

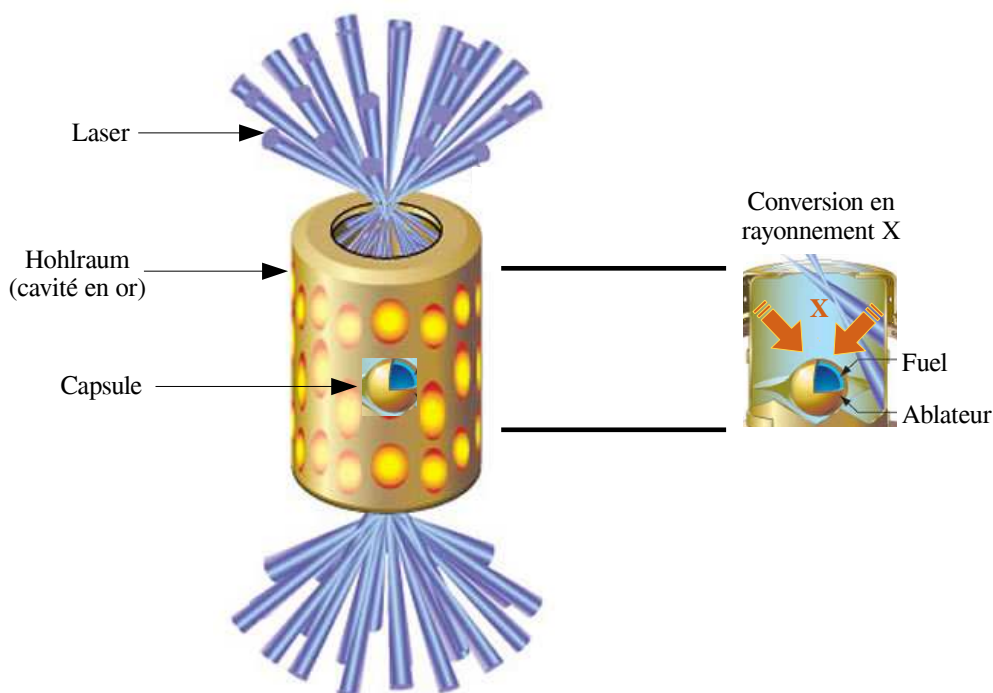


FIGURE 10 – Schéma d'une expérience typique de fusion par confinement inertiel menée en configuration d'attaque indirecte. Le rayonnement laser impactant la cavité est converti en rayonnement X chauffant intensément une capsule composée d'un ablateur et d'un matériau pour la fusion (le fuel). Figure adaptée de la page officielle du *Lawrence Livermore National Ignition Facility*.

manipulation est rendue possible grâce au concept de lois d'échelles que l'on développera plus en détails au chapitre 3. En pratique, ces lois d'échelle constituent le pilier de l'astrophysique de laboratoire actuelle [Ryutov *et al.*, 1999, 2000b; Falize *et al.*, 2009], et permettent de justifier la pertinence des expériences censées reproduire des phénomènes observés à l'échelle astrophysique. On parle alors de similarité, ou similitude, entre les deux systèmes aux échelles si éloignées.

Cependant, afin de respecter parfaitement l'hypothèse de similarité, ces outils conditionnent très fortement les propriétés du système de laboratoire en terme de micro-physique (loi d'état, opacité, . . .), de régime physique ³, et de conditions initiales et aux limites. En effet, il apparaît nécessaire de conserver les hypothèses fondamentales d'évolution des lois décrivant la micro-physique des plasmas ⁴, ce qui peut constituer une véritable limitation. Une autre limite de ces concepts apparaît également dans le phénomène d'effets d'échelle. Ces effets caractérisent la non prise en compte de certains comportements physiques propres à l'échelle étudiée (ici du laboratoire) par rapport au système initial observé à l'échelle

3. Des nombres sans dimension provenant du concept d'analyse dimensionnelle doivent être conservés.

4. Par exemple, un système décrit comme un gaz parfait à l'échelle astrophysique doit continuer de se comporter ainsi à l'échelle du laboratoire dans un système similaire.

astrophysique. Citons par exemple, dans notre cas, les défauts d'une cible laser pouvant être à la source d'instabilités hydrodynamiques propres au laboratoire. Ces effets questionnent ainsi notre modélisation de la physique de tels environnements, et le degré de précision utilisé pour les décrire. En pratique, bien que cette similarité soit difficile à atteindre, notons qu'il n'est pas impossible de procéder à une réconciliation des échelles astrophysique et de laboratoire.

1.3.2.2 Exemples d'expériences

Un grand nombre de phénomènes physiques ont en effet pu être étudiés dans le contexte de l'astrophysique de laboratoire (voir [Takabe et Kuramitsu \[2021\]](#) pour une revue récente). Certains projets ont même permis d'apporter de réels approfondissements quant à la compréhension de phénomènes aux échelles astrophysiques. En particulier, des mesures de photoabsorption du fer chauffé par rayons X [[Da Silva et al., 1992](#)] ont permis de démontrer expérimentalement la variation de l'opacité de celui-ci avec la température pour des énergies autour de la centaine d'eV. Cela a permis en partie d'expliquer les oscillations non-linéaires de température dans les régions visibles des étoiles Céphéïdes [[Drake, 2010](#)]. On peut également citer les expériences du projet POLAR [[Cross et al., 2016](#); [Van Box Som et al., 2018b](#)] visant à reproduire des colonnes d'accrétion à la surface de naines blanches en laboratoire à l'aide de lasers de puissance. Dans un domaine différent, il a également été possible de reproduire la physique des jets magnétisés d'étoiles jeunes à l'échelle du laboratoire [[Ciardi et al., 2013](#); [Revet et al., 2021](#)]. Des phénomènes physiques divers et variés sont donc à présent accessibles grâce aux installations de puissance à travers le monde.

En particulier, on peut s'intéresser plus en détails aux expériences visant à mieux comprendre ou reproduire les mécanismes d'interaction entre le rayonnement et la matière. Un des phénomènes hydro-radiatifs les plus étudiés en laboratoire sont les chocs radiatifs. Ces chocs sont produits dans un schéma d'attaque directe, où un laser impacte une cible constituée d'un ablateur (le plus souvent CH) et d'un bouclier (le plus souvent de l'or, de l'étain ou du titane) limitant les effets d'un éventuel préchauffage de la cible. Le choc ainsi créé se propage ensuite généralement dans une cellule de gaz de Z élevé, comme par exemple du xénon ou de l'argon. En effet, pour favoriser les effets radiatifs dans ces situations, on recherche souvent des matériaux à haut nombre atomique Z ou basses densités, d'où l'utilisation de gaz. Les applications recherchées sont nombreuses et variées, de l'étude des chocs retours observés dans les variables cataclysmiques [[Krauland et al., 2012, 2013](#)], à celle du ralentissement dû aux effets radiatifs pour la supernova SN1987A [[Michel et al., 2019](#)], ou encore dans le but de valider des codes de simulation numérique [[Drake, 2018](#); [Suzuki Vidal et al., 2021](#)] (Figures 11 *a*) et *b*). On peut citer également l'étude de l'interaction entre une onde de souffle et un nuage moléculaire récemment effectuée à l'échelle du laboratoire [[Albertazzi et al., 2022](#)].

La formation et l'étude des fronts d'ionisation et ondes de chaleur en laboratoire se fait, elle, souvent dans une configuration du type attaque indirecte, où l'énergie laser est convertie en rayonnement X impactant une cible basse densité [[Afshar Rad et al., 1994](#); [Back et al., 2000b](#)]. Dans ce cas, le matériau étant généralement initialement neutre, un front d'ionisation se forme en même temps que la propagation d'une onde radiative, pour des températures assez conséquentes de l'ordre de quelques centaines

d'électronvolts.

De manière générale, peu d'expériences présentent l'observation de la propagation d'un front d'ionisation motivée par des considérations astrophysiques, comme par exemple les travaux de [Afshar Rad et al. \[1994\]](#) et [Willi et al. \[2000\]](#). Cependant, un front de photoionisation astrophysique nécessite la présence de mécanismes de recombinaisons en amont du front, et l'absence de mécanismes de transport d'énergie comme la conduction électronique ou le transport radiatif. Il n'a que récemment été prouvé théoriquement [[Drake et al., 2016](#)] et numériquement [[Gray et al., 2018, 2019](#); [LeFevre et al., 2021](#)], que, sous certaines conditions, ce phénomène physique pourrait être produit en laboratoire. En particulier, l'usage de gaz tels que l'hélium ou l'azote semble être privilégié, à des densités assez conséquentes pour obtenir des systèmes optiquement épais, et à des températures de l'ordre de la centaine d'électronvolts pour la source de rayonnement [[Drake et al., 2016](#)].

Dans des conditions proches de celles-ci, il est possible d'observer la propagation d'ondes radiatives dans diverses mousses métalliques [[Back et al., 2000b](#); [Moore et al., 2015](#)] optiquement épaisses. Un rayonnement X intense est tout d'abord produit dans un scénario d'attaque indirecte. Une onde radiative va alors se propager dans la mousse étudiée, provoquant un chauffage et une ionisation de celui-ci. Les récentes expériences de [Courtois et al. \[2021\]](#) ont par exemple permis d'étudier plus en détails la transition entre régimes supersonique et subsonique pour des ondes radiatives (Figure 11 c)).

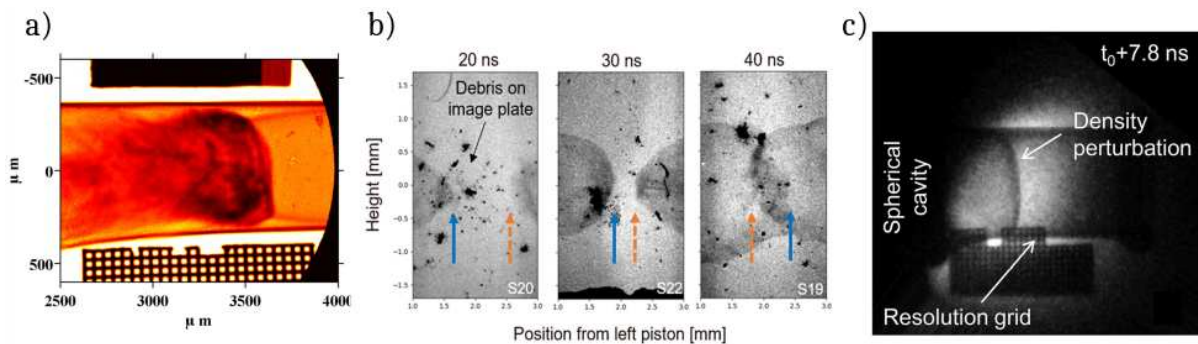


FIGURE 11 – La figure a), tirée de [Drake et al. \[2016\]](#), présente une radiographie expérimentale de choc radiatif accompagnée d'une grille représentant l'échelle de distance (quelques millimètres). Au centre, la figure b) présente une radiographie tirée de [Suzuki Vidal et al. \[2021\]](#) visant à étudier l'interaction entre deux chocs radiatifs. La figure c), tirée de [Courtois et al. \[2021\]](#), présente une radiographie de la cible de CHOBr dans laquelle une onde de Marshak se propage dans un régime subsonique, et où l'on peut clairement observer les perturbations en densité.

1.4 Conclusion

Nous avons montré que le rayonnement joue un rôle prépondérant dans la dynamique de nombreux écoulements astrophysiques. Les différents mécanismes d'interaction entre photons et matière structurent ainsi de nombreux systèmes à cette échelle. Malgré l'existence reconnue de ces environnements, il est encore actuellement impossible d'obtenir des données observationnelles assez précises dans un grand nombre de situations. Les modèles théoriques et les simulations numériques des phénomènes physiques y

prenant place sont ainsi confrontés à un manque de validation. Nous avons montré que l'astrophysique de laboratoire était à présent un outil vers lequel peut se tourner la communauté scientifique, car permettant, sous certaines contraintes, d'obtenir des données expérimentales approfondissant et validant les modèles existants.

Cependant, nous verrons dans la suite de ces travaux que cette discipline apporte son lot de contraintes, aussi bien théoriques que technologiques, qui limitent dans de nombreux cas son domaine d'application. En particulier, l'étendue des régimes physiques et états de la matière observés à l'échelle astrophysique ne peuvent être obtenus en laboratoire. Afin d'étendre le spectre d'objets astrophysiques pouvant être reproduits à cette échelle, nous proposons maintenant d'étudier la possible propagation d'ondes radiatives dans les milieux soumis à des phénomènes de sursauts intenses de rayonnement. Dans le prochain chapitre, nous présenterons plus en détails la physique contenue dans ces phénomènes ainsi que les environnements susceptibles de les produire.

CHAPITRE 2

La propagation d'ondes radiatives en astrophysique : Modélisation de l'interaction sursaut X de type I - Disque d'accrétion

Sommaire

2.1	Introduction	30
2.2	L'interaction entre un sursaut X de type I et le disque d'accrétion d'une étoile à neutrons	30
2.2.1	Les sursauts X de type I	30
2.2.2	Les disques d'accrétion	33
2.2.3	L'interaction entre un sursaut X de type I et un disque d'accrétion	34
2.3	Les ondes radiatives supersoniques	39
2.3.1	Une première description théorique	39
2.3.2	Les limites du régime supersonique	41
2.3.3	Étude paramétrique des régimes physiques d'onde radiative	44
2.4	Le code de simulation astrophysique RAMSES-RT	48
2.4.1	Présentation du code	48
2.4.2	Résolution du transfert radiatif avec RAMSES-RT	49
2.4.3	Validation du code	50
2.5	Une situation typique de formation d'ondes radiatives supersoniques	52
2.5.1	Initialisation de la simulation	52
2.5.2	Résultats de la simulation	55
2.6	Différents régimes de formation d'ondes radiatives	56
2.6.1	Influence de la température initiale sur la position du front	56
2.6.2	Deux exemples de simulations numériques	58
2.6.3	Une séparation hydrodynamique rapide	59
2.6.4	Une compression radiative du disque	59
2.7	Conclusion	61

2.1 Introduction

L'interaction entre le rayonnement et la matière joue donc un rôle prépondérant dans la formation et l'évolution de nombreuses structures à l'échelle astrophysique. Parmi les phénomènes physiques décrits dans le chapitre précédent, nous allons nous intéresser plus précisément à la formation et à la propagation d'ondes radiatives supersoniques. La modélisation de ce mécanisme de transport d'énergie est d'un intérêt premier afin de comprendre la structure et les conditions thermodynamiques de la matière dans certains environnements. En particulier, on s'attend à observer ces phénomènes lors de l'interaction entre les sursauts X présents à la surface d'étoiles à neutrons et leur disque d'accrétion.

Ainsi, après une introduction à la physique présente dans cette interaction et aux difficultés observationnelles qui leur sont liées, nous développerons les outils de modélisation utilisés pour les décrire. Nous proposerons un modèle simplifié d'interaction entre le rayonnement et la matière dans ces conditions, permettant de démontrer la propagation d'ondes radiatives dans ces milieux. Une partie du chapitre sera ensuite consacrée à la présentation du code RAMSES-RT qui a été adapté afin de simuler des environnements de hautes énergies. Enfin, un ensemble de simulations numériques viendront illustrer l'analyse proposée et décrire les différents régimes de propagation que nous pouvons attendre lors de l'interaction d'un sursaut X avec le disque d'accrétion d'une étoile à neutrons.

2.2 L'interaction entre un sursaut X de type I et le disque d'accrétion d'une étoile à neutrons

Les étoiles à neutrons sont des objets compacts d'une masse comprise entre 1.4 et 3 fois la masse du Soleil et d'un rayon R_{EN} compris entre 5 et 20 kilomètres. Lorsqu'ils appartiennent à un système binaire (appelés systèmes binaires X) [Lewin *et al.*, 1997; Schatz et Rehm, 2006], ces objets compacts accrètent épisodiquement de la masse depuis leur étoile compagnon, composée majoritairement d'hydrogène et d'hélium. La compréhension et la caractérisation des paramètres physiques (masse, rayon, équation d'état, ...) de ces étoiles à neutrons constitue une problématique centrale dans l'astrophysique actuelle. Une des manières de contraindre la physique de ces objets est d'utiliser les événements particulièrement énergétiques se déroulant dans leur environnement proche. C'est le cas des sursauts thermonucléaires apparaissant à la surface de certaines étoiles à neutrons.

2.2.1 Les sursauts X de type I

Un sursaut X de type I (que l'on notera SXI), aussi appelé sursaut thermonucléaire de type I, est le relâchement soudain d'une grande quantité d'énergie à la surface d'une étoile à neutrons (voir Lewin *et al.* [1993] et Galloway et Keek [2021] pour des revues). Ces explosions sont provoquées par le déclenchement de réactions de fusion du matériel accrété (majoritairement H et He) au niveau de la couche externe de l'étoile à neutrons [Hansen et Van Horn, 1975]. Les premiers SXI ont été observés dans les années 1970 dans l'amas globulaire NGC 6624 [Grindlay *et al.*, 1976]. Aujourd'hui, de nombreux autres systèmes binaires dans lesquels on suppose l'existence d'une étoile à neutrons ont montré de tels sursauts dans

le domaine X, observés à l'aide des télescopes NICER [Keek *et al.*, 2018; Bult *et al.*, 2021; Güver *et al.*, 2022] et NuStar [Buisson *et al.*, 2020]. La modélisation théorique et numérique des phénomènes nucléaires menant à ces libérations d'énergie a fait l'objet de nombreuses études [Woosley *et al.*, 2004; Fisker *et al.*, 2008] mais l'observation de la surface de l'étoile à neutrons où se déroulent ces réactions nucléaires est en revanche toujours impossible, rendant particulièrement complexe la validation de ces modèles. Notons que ces sursauts thermonucléaires sont de plus en plus exploités pour contraindre les propriétés fondamentales des étoiles à neutrons [Lo *et al.*, 2013; Suleimanov *et al.*, 2017].

Ces sursauts thermonucléaires de type I produisent d'intenses flux X [Galloway *et al.*, 2008], caractérisés par des temps de montée variant entre moins d'une seconde [Day et Tawara, 1990], et une dizaine de secondes [Galloway *et al.*, 2017]. Le refroidissement se produit lui sur une plage de temps plus longue, autour d'une dizaine de secondes à quelques minutes [Tawara *et al.*, 1984]. Le profil des sursauts dépend fortement de l'énergie des photons émis : la phase de refroidissement est ainsi beaucoup plus courte pour des hautes énergies (dizaines de keV). Enfin, les luminosités maximales atteintes par ces sursauts varient entre 10^{36} et 10^{40} erg.s⁻¹, quelques ordres de grandeur au-dessus des luminosités attendues à la surface des étoiles à neutrons en l'absence de sursaut. Ces observations conduisent à la création de divers profils temporels pour les SXI [Lewin *et al.*, 1993], dont certains sont présentés en Figure 12.

Lors d'une étude sur les sursauts γ , Norris *et al.* [2005] ont proposé une formule analytique décrivant les phases de montée et de descente de ce type de sursauts à l'aide de la formule suivante :

$$L_S(t) = L_p \exp \left[2\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}} + \frac{\tau_1}{t_0 - t} + \frac{t_0 - t}{\tau_2} \right] \quad (2.1)$$

où τ_1 , τ_2 et t_0 sont des constantes de temps et L_p est la luminosité maximale atteinte par le sursaut. Dans des études sur les SXI, Fragile *et al.* [2018, 2020] ont proposé d'utiliser la même formulation (2.1) qui constitue de fait une première approximation pour ces profils. De plus, une grande partie des sursauts observés disposent d'un spectre qui peut être approché par une loi de type corps noir en première approximation. Les températures maximales de corps noir atteintes par les SXI varient autour de quelques keV (il est généralement admis que cette limite se situe autour de 3 keV) [Cumming, 2004]. Ainsi, la luminosité se déduit de la température par l'expression suivante :

$$L_S(t) = 4\pi R_{EN}^2 \sigma T_S(t)^4 \quad (2.2)$$

où σ est la constante de Stefan-Boltzmann, et $T_S(t)$ la température de la source de rayonnement. La loi de Norris (2.1) s'exprime alors sous la forme suivante :

$$T_S(t) = T_p \exp \left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}} + \frac{1}{4}\frac{\tau_1}{t_0 - t} + \frac{1}{4}\frac{t_0 - t}{\tau_2} \right], \quad \text{avec} \quad T_p = \left(\frac{L_p}{4\pi R_{EN}^2 \sigma} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.3)$$

où T_p correspond donc à la température maximale du SXI. Dans la suite de ces travaux, nous utiliserons l'équation en température (2.3) pour modéliser les SXI.

Dans le cas où des réactions de fusion impliquant du carbone se produisent [Schatz *et al.*, 2003], le profil donné par (2.3) n'est plus valable. En effet, dans ce cas on parle de *superbursts*, ou supersursauts

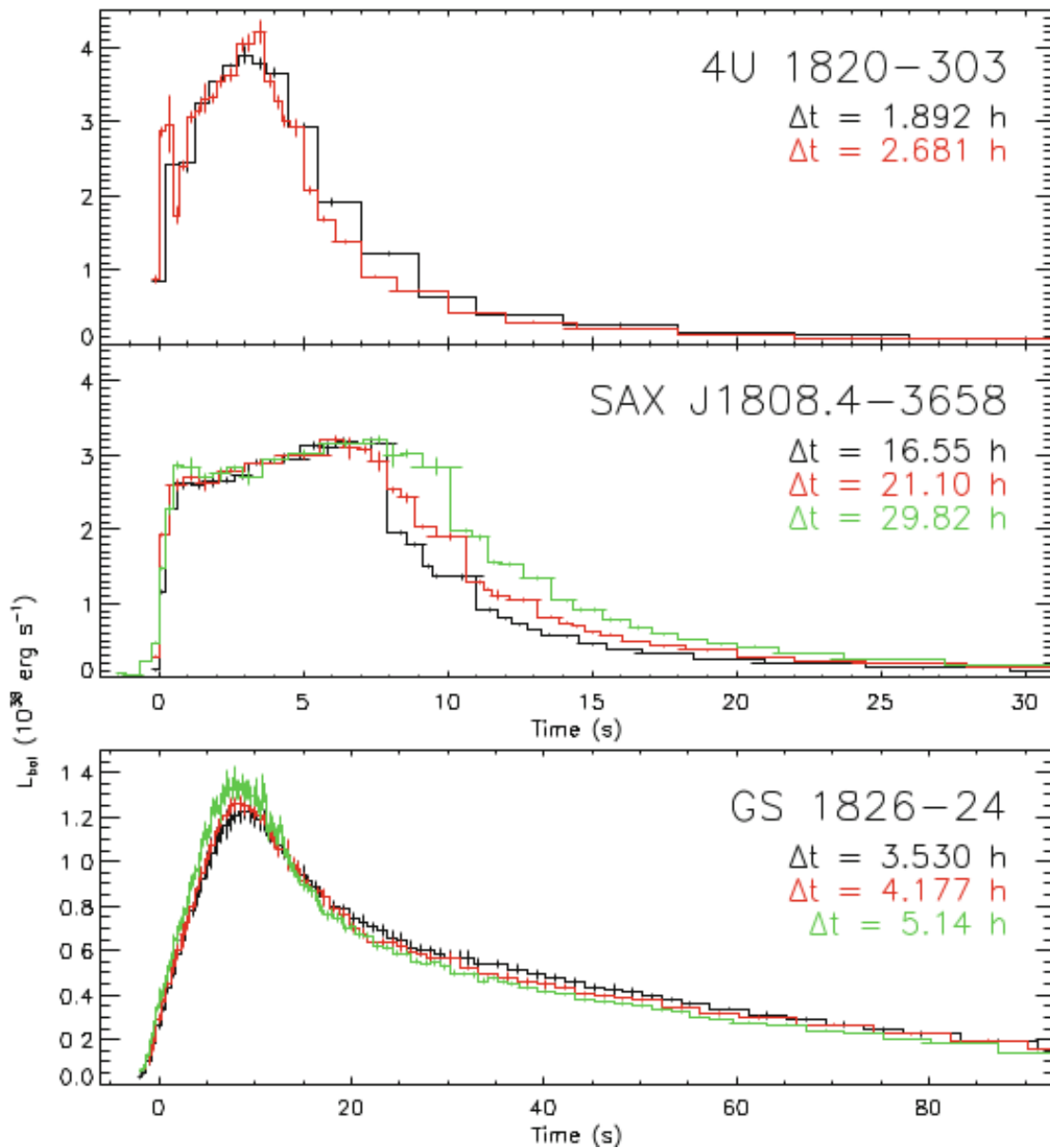


FIGURE 12 – Courbes de luminosité de sursauts X observés à l’aide du télescope *Rossi X-ray Timing Explorer* (RXTE), sur lesquelles sont indiqués le nom de la source et l’intervalle de temps Δt entre les répétitions de tels sursauts. Les trois systèmes présentent respectivement des sursauts X de type I dans différentes configurations avec, de haut en bas : une ignition d’hélium pur, une ignition d’un mélange d’hydrogène et d’hélium avec une majorité d’hélium, et enfin une ignition d’un mélange d’hydrogène et d’hélium en quantités équivalentes. Figure tirée de [Galloway et Keek \[2021\]](#).

[[Cumming, 2003](#)]. Ces sursauts se déroulent sur des temps beaucoup plus longs, de l’ordre de quelques heures à quelques jours, impliquant des luminosités légèrement supérieures aux sursauts classiques. Ils sont donc des milliers de fois plus énergétiques, atteignant des énergies de l’ordre de 10^{42} ergs. Notons également l’existence de sursauts X de type II [[Basinska et al., 1980](#)] produits par des mécanismes de conversion d’énergie gravitationnelle au sein du matériel accrété loin de la surface de l’étoile à neutron,

et qui ne seront pas étudiés dans ce manuscrit.

Dès les premières observations de sursauts X de type I, il est apparu nécessaire de prendre en compte leur interaction avec l'environnement accrétant autour de l'étoile à neutrons [Fujimoto *et al.*, 1981; Lewin *et al.*, 1993]. En effet, le rayonnement intense provenant des SXI interagit fortement avec l'environnement de l'objet compact, ici composé d'un disque d'accrétion [Ballantyne et Everett, 2005]. Notons que les SXI peuvent ainsi servir de sonde pour déterminer les propriétés physiques des disques [Degenaar *et al.*, 2018].

2.2.2 Les disques d'accrétion

Afin d'étudier théoriquement et numériquement ces disques d'accrétion, de nombreux modèles ont été créés, tous basés sur des hypothèses de géométries diverses et d'épaisseurs optiques plus ou moins grandes. Dans ces travaux, afin de modéliser l'interaction d'un SXI avec un disque d'accrétion, nous allons nous baser sur le modèle de disque α développé par Shakura et Sunyaev [1973]. Ces disques sont caractérisés par une dissipation visqueuse d'amplitude proportionnelle à un paramètre sans dimension α . De manière générale, la structure complète du disque en termes de paramètres géométriques et de conditions thermodynamiques est donnée par une résolution des équations de la mécanique des fluides, où l'on peut inclure des effets supplémentaires en fonction des régimes étudiés, comme l'ajout de rayonnement par exemple [Frank *et al.*, 2002]. Pour simplifier, considérons un disque géométriquement mince, pour lequel sa hauteur H et sa longueur L vérifie $H/L \ll 1$, et pris initialement à l'équilibre stationnaire. La modélisation choisie pour cette viscosité dans le cas des modèles de disque α est donnée par la relation suivante [Shakura et Sunyaev, 1973] :

$$\nu = \alpha H c_s \quad (2.4)$$

où c_s est la vitesse du son dans le disque. Le choix de α est alors principalement guidé par la comparaison entre des prédictions de ce modèle et des simulations numériques ou données observationnelles. Il est intéressant de noter qu'aucun consensus n'est trouvé sur sa valeur effective dans un cas général [King *et al.*, 2007], oscillant entre 10^{-1} et 10^{-2} selon les situations. Cela va grandement modifier la dynamique au sein du disque, puisque le temps caractéristique de dissipation visqueuse est donné par :

$$t_{visc} = \frac{x^2}{\nu} = \frac{x^2}{\alpha c_s H} \quad (2.5)$$

où x est la coordonnée spatiale en longueur du disque. Ce temps caractéristique est donc inversement proportionnel à la valeur de α . Rappelons que cette modélisation de la viscosité sert à modéliser la physique microscopique complexe au sein du disque d'accrétion.

En terme d'équation d'état, les conditions thermodynamiques attendues au sein des disques permettent de justifier une hypothèse de gaz parfait, principalement composé d'hydrogène ionisé de capacité calorifique spécifique à volume constant $c_v \simeq 2.5 \times 10^8 \text{ erg.g.K}^{-1}$ et de coefficient adiabatique $\gamma = 5/3$. La relation liant la pression, notée P , et la densité d'énergie interne, notée ρe , est prise sous la forme :

$$\rho_e = \frac{P}{(\gamma - 1)} \quad (2.6)$$

Enfin, la loi d'opacité est considérée dominée par le processus de diffusion Thomson détaillé au chapitre 1, dont l'opacité Rosseland théorique est donnée par la relation (1.4) pour une fraction massique d'hydrogène $X = 1/2$.

Nous nous intéressons ici en particulier aux régions internes du disque, comprises entre quelques mètres jusqu'à plusieurs centaines de kilomètres (soit 1% de la taille totale du disque au maximum). Afin de modéliser les conditions thermodynamiques de ces régions, nous considérons qu'elles présentent des densités et températures uniformes, en première approximation. Bien que très restrictive, cette hypothèse permet de créer un premier modèle simplifié dans lequel la physique du disque pourra être étudiée. Pour les valeurs de densité et température au sein des régions internes de ces disques, nous avons considéré des ordres de grandeurs sur des intervalles relativement grands donnés par :

$$\rho_0 \in [10^{-5}; 1] \text{ g.cm}^{-3} \quad \text{et} \quad T_0 \in [10^4; 10^6] \text{ K} \quad (2.7)$$

Ces valeurs ont été obtenues en moyennant les valeurs données par des profils de densité et température typiques de disques pour des valeurs de α comprises entre 1 et 10^{-3} [Frank *et al.*, 2002]. Nous avons délibérément élargi les intervalles considérés étant donné notre faible connaissance des conditions thermodynamiques réellement atteintes au sein de ces régions. Ces grandeurs permettent de calculer les épaisseurs optiques présentes au sein de ces régions à l'aide de la relation (1.5). De manière générale, en fonction de la densité considérée, la taille de la région optiquement épaisse va varier. En effet, l'expression de l'épaisseur optique dans le cas d'une limite Thomson pour l'opacité donne :

$$\tau = 0.2 \times L\rho_0 (1 + X) \quad (2.8)$$

On a représenté sur la Figure 13 les valeurs de l'épaisseur optique en fonction de la densité du disque et de la taille des régions considérées. Pour des densités supérieures à $10^{-5} \text{ g.cm}^{-3}$, on s'aperçoit que la taille des régions optiquement épaisses est inférieure à quelques centaines de kilomètres, qui constitue la limite haute de notre approximation. Ces épaisseurs optiques élevées limitent complètement nos capacités d'observations de ces régions.

Notons enfin que les caractéristiques physiques des régions internes de nos disques d'accrétion sont au final très peu contraintes. En effet, étant donné le modèle simplifié utilisé, considérer des intervalles conséquents de densité et de température de disques permet d'explorer une grande gamme de régimes physiques variés.

2.2.3 L'interaction entre un sursaut X de type I et un disque d'accrétion

Modélisation de l'interaction

La plupart des travaux récents visant à étudier l'interaction entre un SXI et un disque d'accrétion se basent sur le travail pionnier de Ballantyne et Everett [2005] qui décrit cette interaction comme

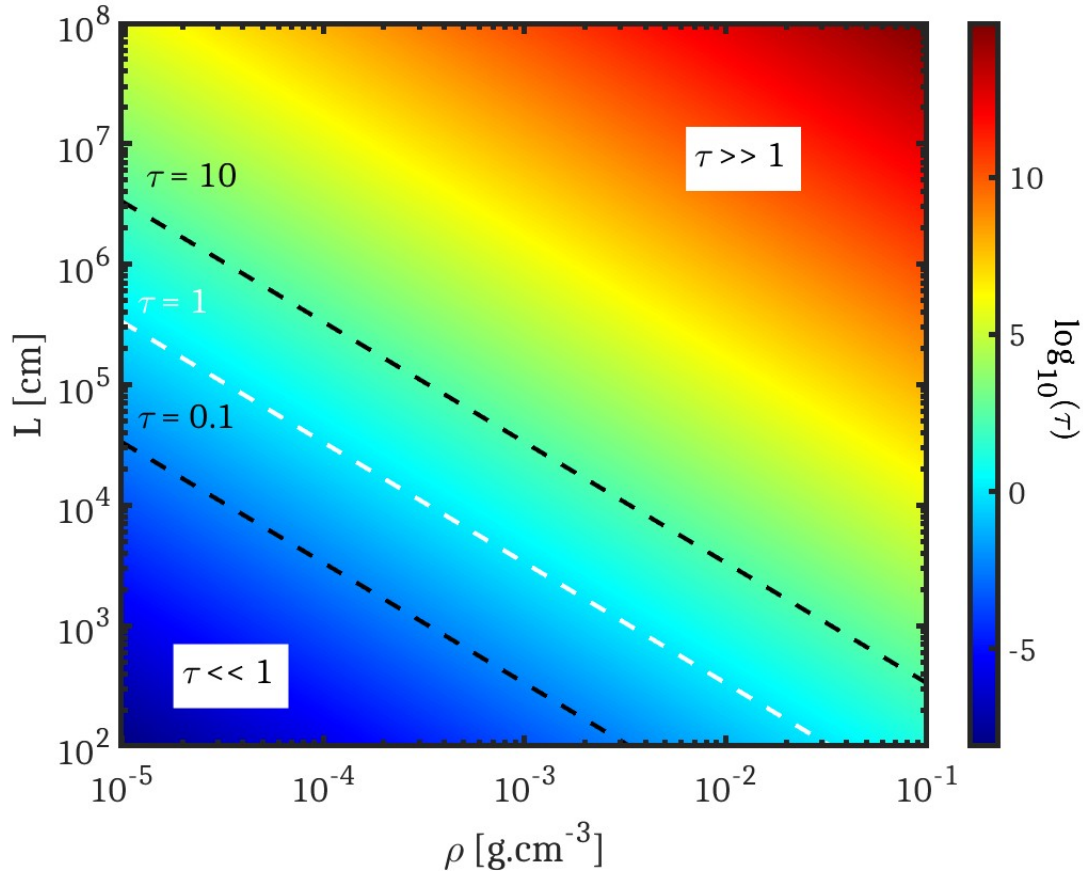


FIGURE 13 – Carte de l'épaisseur optique en fonction de la densité (en abscisse) et de la taille des régions du disque considérées (en ordonnée), pour $X = 0.5$.

gouvernée par trois mécanismes principaux : les vents radiatifs propulsant la matière dans la direction opposée à l'étoile [Nobili *et al.*, 1994], les effets liés à la traînée dite de Poynting-Robertson (effet PR) [Blumenthal, 1974] et les changements structurels liés au chauffage X des régions internes du disque. Dans le cas du supersursaut 4U 1820–30, Ballantyne et Everett [2005] ont montré que l'énergie libérée pouvait mener à des flux de matière plus importants que les taux d'accrétion supposés au sein du disque d'accrétion. Globalement, les cas de luminosités super-Eddington sont les seuls à pouvoir produire des énergies radiatives suffisamment intenses pour outrepasser l'énergie gravitationnelle de la matière du disque d'accrétion. Dans ce cas de figure, les temps caractéristiques de création et propagation de ces vents radiatifs sont de l'ordre d'une dizaine de secondes [Ballantyne et Everett, 2005], environ cent fois inférieurs à l'échelle de temps caractéristique du supersursaut. Ainsi, ce mécanisme semble jouer un rôle prépondérant dans la dynamique de l'interaction lorsqu'il peut exister. De plus, l'interaction entre le rayonnement intense du sursaut X et le disque d'accrétion peut produire, à l'inverse, des flux de matière tournés vers l'étoile centrale. Le mécanisme de traînée de Poynting-Robertson détaille la façon dont le rayonnement incident peut faire perdre du moment angulaire à l'écoulement d'accrétion, augmentant localement le taux d'accrétion. Ce mécanisme semble efficace au sein du disque, et ce sur des échelles temporelles faibles devant l'évolution du sursaut, aux alentours de 10^{-1} s pour des sursauts typiques

[Fragile *et al.*, 2020].

Ces modèles théoriques ont récemment été confrontés à des simulations numériques d'hydrodynamique radiative prenant en compte les corrections de la relativité générale [Fragile *et al.*, 2018, 2020]. Dans ce but, Fragile *et al.* [2020] ont étudié l'interaction entre un sursaut X de type I et les régions internes (quelques dizaines de kilomètres) du disque d'accrétion d'une étoile à neutrons. Ces simulations leur ont permis de montrer que sur l'échelle de temps typique des sursauts X, et dans des régions de disque d'environ quelques dizaines de kilomètres, le rayonnement avait un fort impact sur la dynamique de l'écoulement d'accrétion. En particulier, Fragile *et al.* [2020] constatent une augmentation locale d'un facteur 3 à 4 du taux d'accrétion due à l'effet PR, ainsi qu'une augmentation de la hauteur du disque de près d'un facteur 2, cette fois due aux mécanismes de chauffage au sein du disque. Ces résultats ont récemment été mis en lumière par des observations provenant du sursaut X de type I nommé 4U 1636–536 et d'une durée de quelques secondes [Zhao *et al.*, 2022].

Les difficultés d'observations des régions internes des disques d'accrétion rendent pour le moment impossible la validation de ces modèles. En effet, la taille réduite de ces régions (de quelques mètres à quelques centaines de kilomètres), ainsi que leurs épaisseurs optiques élevées empêchent l'obtention de données observationnelles utilisables pour contraindre leur physique. Notons que des approches théoriques permettent de modéliser de manière qualitative les processus se déroulant dans les régions internes de ces disques. Une solution pour comprendre de manière plus détaillée la physique de cette interaction peut être d'étudier chaque mécanisme susceptible de jouer un rôle dans la dynamique de ces systèmes séparément afin de simplifier l'approche dans un premier temps. Cette façon de faire présente l'avantage d'améliorer pas à pas notre compréhension des mécanismes d'interaction entre le rayonnement et la matière dans divers régimes physiques. Dans la suite, nous nous intéressons donc aux premiers instants de l'interaction sursaut X-disque d'accrétion, cruciaux pour comprendre les modifications induites sur la dynamique de l'écoulement. La Figure 14 récapitule la modélisation de l'interaction entre un SXI et un disque d'accrétion.

Nous considérons donc un milieu de température initiale T_0 et de densité initiale ρ_0 soumis à son extrémité, en $x = 0$, à une température de sursaut $T_S(0, t)$ donnée par le modèle (2.3). Concrètement, les photons émis à la source de rayonnement vont immédiatement parcourir le milieu en subissant différents processus de diffusion dépendant de la composition et de l'état physique de celui-ci. Ces effets peuvent être représentés théoriquement, comme nous l'avons décrit dans le premier chapitre, par la fonction d'opacité κ_R donnée par l'équation (1.4) prise ici dans la limite de diffusion Thomson. Nous nous plaçons dans le cas où l'épaisseur optique du milieu (2.8) est grande devant l'unité. Le milieu sera alors supposé à l'équilibre thermodynamique local (ETL). Les températures de la matière et du rayonnement sont alors les mêmes.

Suite à l'influence de la source de rayonnement, la quantité d'énergie au sein du milieu est profondément modifiée, étant transportée radiativement par un flux radiatif, noté $\vec{\mathbb{F}}_{rad}$. Étant donné les niveaux de température, il est également nécessaire de prendre en compte la densité d'énergie radiative, notée \mathbb{E}_{rad} et la pression radiative, notée \mathbb{P}_{rad} , dans le bilan énergétique global du système. La densité d'énergie radiative et la pression radiative sont données respectivement par :

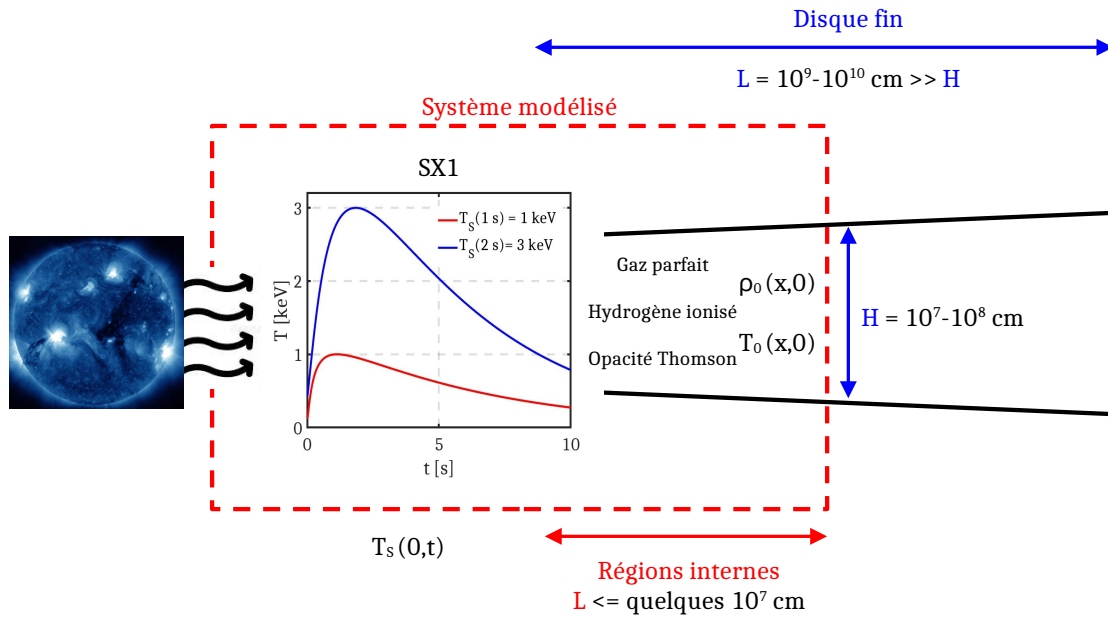


FIGURE 14 – Illustration de la modélisation choisie pour l'interaction entre un sursaut X de type I et les régions internes d'un disque d'accrétion. Des sursauts X typiques à différentes luminosités maximales sont indiqués pour servir d'exemples de source de rayonnement dans nos modèles.

$$\mathbb{E}_{rad}(T) = a_R T^4, \quad \mathbb{P}_{rad}(T) = \frac{\mathbb{E}_{rad}(T)}{3} = \frac{a_R T^4}{3} \quad (2.9)$$

avec la constante radiative $a_R = 4\sigma/c = 7.56 \times 10^{-15} \text{ erg.cm}^{-3}.\text{K}^{-4}$ où σ est la constante de Stefan-Boltzmann. La forme du flux radiatif sera discutée dans la suite. Il devient alors impératif de résoudre les équations de l'hydrodynamique en présence de rayonnement [Mihalas et Mihalas, 2013] :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.10)$$

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right] \vec{v} = -\vec{\nabla} (P + \mathbb{P}_{rad}) \quad (2.11)$$

$$\frac{d}{dt} (\rho e + \mathbb{E}_{rad}) - \frac{\rho e + P + \mathbb{E}_{rad} + \mathbb{P}_{rad}}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbb{F}}_{rad} \quad (2.12)$$

qui sont respectivement la conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie d'un fluide radiatif sans conduction électronique. Notons que d/dt est ici une dérivée lagrangienne. Dans ce système d'équations, ρ représente la densité du fluide, \vec{v} son champ de vitesse, P la pression de la matière et $e(\rho, T)$ l'énergie

interne spécifique du plasma. Ces quantités "matière" apparaissent maintenant aux côtés de leurs homologues radiatives données par l'équation (2.9), provenant directement de l'influence du rayonnement sur la dynamique du fluide.

Pour les équations de l'hydrodynamique en absence de rayonnement, on peut caractériser les régimes physiques de l'écoulement par des nombres sans dimension [Ryutov *et al.*, 1999]. L'introduction des termes d'énergie et flux radiatifs entraîne l'ajout de nombres sans dimension caractérisant les régimes physiques liés au système d'équations (2.10-2.12). Ces nombres sans dimension doivent permettre de quantifier l'importance du mécanisme de transport radiatif par rapport au transport hydrodynamique, mais également la relative importance de densité d'énergie apportée par le rayonnement comparée à la densité d'énergie interne du plasma. Falize *et al.* [2011b] ont montré que les effets du rayonnement sur l'hydrodynamique d'un système pouvaient en effet être caractérisés par deux nombres sans dimension supplémentaires : le nombre de Boltzmann, noté Bo , et le nombre de Mihalas, noté R .

Le nombre de Boltzmann caractérise le mécanisme de transport d'énergie dominant dans le plasma, et est défini par la relation suivante :

$$Bo = \frac{[\rho e(\rho, T) + P(\rho, T)] |\vec{v}|}{|\vec{F}_{rad}(\rho, T)|} \quad (2.13)$$

Lorsque $Bo \gg 1$, le transport d'énergie se fait essentiellement par des processus hydrodynamiques. Dans le cas des systèmes étudiés, les forts flux radiatifs attendus mènent à des nombres de Boltzmann $Bo \ll 1$. Dans ces régimes, c'est le transport radiatif qui prend le pas sur l'hydrodynamique et devient le mécanisme de transport d'énergie dominant au sein du plasma. La vitesse $|\vec{v}|$ présente dans la relation (2.13) doit alors être vue comme une vitesse caractéristique de l'écoulement. Dans le cas d'un régime supersonique, la vitesse sera celle du son, tandis que dans le cas d'un régime subsonique, ce sera celle du choc. Dans ce cas, le nombre de Boltzmann nous informe donc bien sur le processus de transport d'énergie dominant au sein du système.

Le nombre de Mihalas, quant à lui, quantifie la contribution de la densité d'énergie interne du plasma par rapport à la densité d'énergie radiative. Étant donné les définitions données pour ces deux grandeurs (voir équation (2.9)), il apparaît que ce nombre sans dimension quantifie également, à un facteur multiplicatif près, le rapport des pressions radiative et matière, comme nous pouvons le voir dans sa définition :

$$R = \frac{\rho e(\rho, T)}{\mathbb{E}_{rad}(T)} = \frac{1}{3(\gamma - 1)} \frac{P(\rho, T)}{\mathbb{P}_{rad}(T)} \quad (2.14)$$

Lorsque $R \gg 1$, les régimes sont dit faiblement radiatifs. Notons que le nombre de Boltzmann Bo peut être inférieur ou supérieur à 1 dans ces régimes. Il est donc possible que les mécanismes de transport radiatif soient dominants au sein du plasma sans que la densité d'énergie radiative ne prenne le pas sur la densité d'énergie interne du milieu. Dans le cas où $R \leq 1$, les régimes sont caractérisés comme étant extrêmement radiatifs, la densité d'énergie radiative prenant rapidement le pas sur toute autre forme d'énergie lorsque les températures augmentent.

Nous pouvons à présent évaluer les températures critiques T_{Bol} et T_{Mih} à partir desquelles la prise en compte du flux radiatif et de la densité d'énergie radiative est nécessaire. Le flux radiatif est approché,

pour un corps noir, par $\mathbb{F}_{rad} = \sigma T^4$. Dans le cas d'un gaz parfait d'hydrogène, on obtient :

$$T_{Boltz} [\text{eV}] \simeq 51.8 \times \left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right]^{1/3} \left[\frac{\rho}{1 \text{ g.cm}^{-3}} \right]^{1/3} \left[\frac{v}{1 \text{ km.s}^{-1}} \right]^{1/3} \quad (2.15)$$

$$T_{Miha} [\text{eV}] \simeq 3.4 \times 10^3 \left[\frac{1}{\gamma - 1} \right]^{1/3} \left[\frac{\rho}{1 \text{ g.cm}^{-3}} \right]^{1/3} \quad (2.16)$$

Ainsi, pour $T \geq T_{Boltz}$, le transport radiatif sera dominant, et pour $T \geq T_{Miha}$ la densité d'énergie radiative sera plus importante que la densité d'énergie interne du plasma étudié. On constate que les milieux à faible densité sont d'autant plus propices à des régimes extrêmement radiatifs à faibles températures. Au contraire, plus le milieu sera dense, et plus des températures élevées seront nécessaires pour atteindre des régimes extrêmement radiatifs. Ces considérations sont à prendre avec précaution puisqu'il faut, dans tous les cas, conserver l'hypothèse de diffusion avec $\tau \geq 1$.

2.3 Les ondes radiatives supersoniques

2.3.1 Une première description théorique

Le transport d'un rayonnement intense à travers un milieu optiquement épais ($\tau \gg 1$) donne lieu à la naissance et à la propagation d'ondes radiatives en son sein [Marshak, 1958]. Ces ondes radiatives sont caractérisées par l'apparition d'un front radiatif, limite entre la partie du système chauffée et celle non impactée par le rayonnement. Dans le cas où le rayonnement de la source est assez intense pour que la vitesse de ce front radiatif (notée v_f) soit très supérieure à la vitesse des perturbations acoustiques se propageant depuis cette source de rayonnement, l'onde radiative se propage au sein du milieu de manière supersonique. Dans ce cas, on peut négliger la réponse hydrodynamique de la matière ($|\vec{v}| \sim 0$). Dans cette limite, on considère que l'évolution du système est quasi-statique, de densité constante. Des profils spatiaux de température typiques de ces ondes radiatives sont présentés en Figure 15.

En termes de régimes physiques, l'hypothèse supersonique est caractérisée par le fait que le nombre de Boltzmann tend vers une valeur faible devant l'unité, puisque le transport radiatif devient l'unique mécanisme de transport d'énergie au sein du système. Le nombre de Mihalas peut, quant à lui, prendre des valeurs supérieures ou inférieures à l'unité selon les conditions thermodynamiques du système et l'intensité de la source de rayonnement. Dans ce régime supersonique, le système d'équations de l'hydrodynamique radiative (2.10- 2.12) se réduit à une équation de transport pour l'énergie totale du système prenant la forme [Mihalas et Mihalas, 2013] :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e + \mathbb{E}_{rad}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbb{F}}_{rad} \quad (2.17)$$

Dans les systèmes optiquement épais que l'on considère, les photons interagissent un grand nombre de fois avec le plasma sur les distances caractéristiques étudiées. Ainsi, un régime diffusif est rapidement atteint, et il devient alors possible de se placer dans le cadre de l'hypothèse dite de limite diffusion [Castor, 2004; Mihalas et Mihalas, 2013]. Dans ce cas, nous disposons d'une expression analytique pour le flux

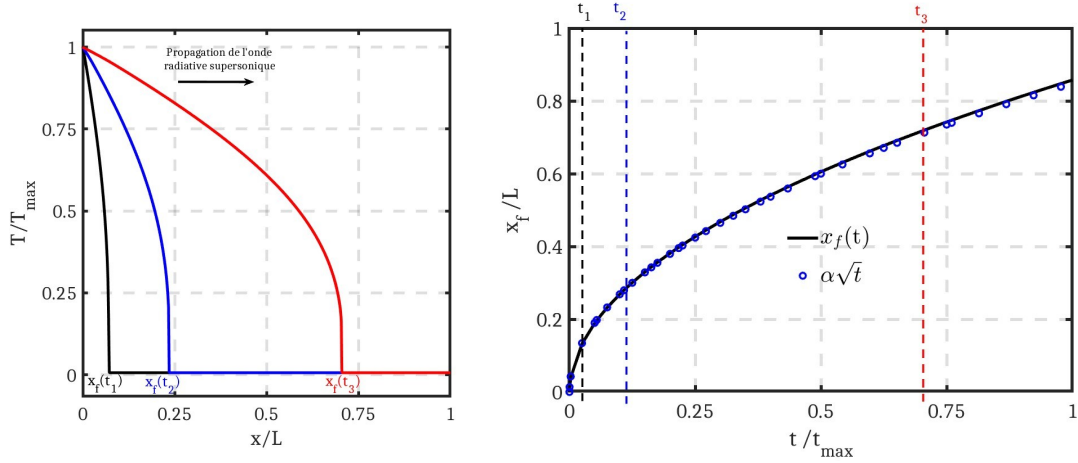


FIGURE 15 – À gauche, profils spatiaux adimensionnés de température typiques d'une onde radiative supersonique pour trois temps $t_1 < t_2 < t_3$. À droite, représentation de la position du front radiatif en fonction du temps, évoluant en \sqrt{t} pour une température source constante.

radiatif, donnée par :

$$\vec{F}_{rad} = -\kappa_{rad} \vec{\nabla} T, \quad \text{avec} \quad \kappa_{rad} = \frac{4a_{RC}}{3} \lambda_R T^3 \quad (2.18)$$

où λ_R est le libre parcours moyen Rosseland et $\kappa_{rad}(T)$ est la conduction radiative. On constate que le flux radiatif tend bien à propager l'énergie des zones dont les densités d'énergie radiative sont les plus intenses aux zones les moins touchées par le rayonnement. Plus le libre parcours moyen des photons est faible (régime de plus en plus optiquement épais), et plus le gradient d'énergie radiative doit être important (grande différence d'amplitude énergétique ou faible extension spatiale) pour que le flux radiatif puisse jouer un rôle majeur dans le transport d'énergie du système.

Dans la suite de ce manuscrit, nous considérons que les interactions entre photons incidents et milieu de propagation sont suffisantes pour permettre la mise en place de l'ETL entre le rayonnement et la matière. Dans ce cas, on rappelle que les température du rayonnement et de la matière sont les mêmes. Sous ces hypothèses, et en insérant la définition (2.18) dans l'équation de transport (2.17), nous obtenons l'équation décrivant l'évolution des ondes radiatives en régime optiquement épais pour un milieu à l'ETL :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e + a_R T^4) = \frac{4a_{RC}}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_R T^3 \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (2.19)$$

qui sera le modèle principal étudié dans le reste de ce manuscrit. Notons que cette relation constitue une équation différentielle sur la variable T .

Les premiers travaux sur cette équation dans le cadre de l'étude de la propagation des ondes radiatives au sein d'un milieu statique sont attribués à [Marshak \[1958\]](#). Des solutions particulières de cette équation sont communément développées dans le cas d'une alimentation par une température constante [[Mihalas et Mihalas, 2013](#)] ou par une température de type distribution de Dirac [[Zel'Dovich et Raizer, 2002](#); [Mihalas](#)

et Mihalas, 2013]. Ces ondes de Marshak ont également connu un grand nombre de développements théoriques, dans le but, pour la plupart, d'obtenir des solutions auto-semblables de leur évolution [Barrero et Sanmartin, 1977; Sanmartin et Barrero, 1978] et de leur transition au régime subsonique [Garnier *et al.*, 2006; Malka et Heizler, 2022]. Hammer et Rosen [2003] ont également développé une théorie perturbative permettant d'obtenir des solutions approchées de l'équation pour des équations d'état et lois d'opacité prenant la forme suivante :

$$e = fT^\beta \rho^{-\mu}, \quad \frac{1}{\kappa_R} = gT^\alpha \rho^{-\lambda} \quad (2.20)$$

où $f, g, \beta, \mu, \alpha, \lambda$ sont des paramètres constants. Dans ce cas la pente de l'onde radiative est caractérisée par le coefficient $\epsilon = \beta/(4 + \alpha)$. Un calcul perturbatif en fonction de ce paramètre permet de déterminer une solution analytique pour la position du front radiatif sous la forme suivante :

$$x_f(t) = \sqrt{\frac{2 + \epsilon}{1 - \epsilon} \frac{4a_{RC}}{3(4 + \alpha)} \frac{g}{f\rho^{2-\mu+\lambda}} T_S(t)^{-\beta} \int T_S(t)^{4+\alpha} dt} \quad (2.21)$$

qui découle de l'équation (2.19) et où $T_S(t)$ est la température source du rayonnement. Notons que dans le cas d'une température source T_S constante, on retrouve un résultat typique des phénomènes de diffusion : $x_f \propto \sqrt{t}$ comme on peut le voir sur la Figure 15. Enfin, des modèles plus complets prenant en compte d'éventuels effets d'albedo aux conditions de bord ont récemment été développés [Hurricane et Hammer, 2006; Cohen *et al.*, 2020].

2.3.2 Les limites du régime supersonique

Dans cette section, nous allons décrire quels phénomènes peuvent venir perturber la propagation supersonique d'ondes radiatives au sein d'un système.

2.3.2.1 La séparation hydrodynamique

Le régime supersonique ne peut être maintenu indéfiniment. Cela est principalement dû au ralentissement du front radiatif, que nous pouvons, par exemple, intuitivement dans le cas d'une température source constante : $v_f \propto 1/\sqrt{t}$. Cela conduit inévitablement à une transition vers un régime subsonique [Garnier *et al.*, 2006; Shussman et Heizler, 2015], dans lequel l'hydrodynamique du système n'est plus négligeable. Cette transition s'effectue de manière progressive, et on parle, lorsqu'elle est atteinte, de séparation hydrodynamique. Ce phénomène provient de l'accumulation de perturbations acoustiques nées du chauffage intense du système à son extrémité. Cela se traduit par la propagation d'ondes de pression se déplaçant à la vitesse du son notée $c_s = \sqrt{(\partial P / \partial \rho)_S}$, avec S l'entropie du système. Initialement, la vitesse des perturbations acoustiques est plus faible que celle correspondant au front radiatif (notée v_f), permettant de négliger la réponse hydrodynamique du système. Lorsque l'apport en énergie du sursaut X ne permet plus de maintenir une vitesse suffisante de front radiatif $v_f > c_s$, les perturbations acoustiques commencent à rattraper le front radiatif, et à s'accumuler proche de celui-ci. Lorsque la vitesse du front diminue trop fortement, jusqu'à atteindre $v_f = c_s$, l'accumulation de perturbations devient trop impor-

tante, et un choc se forme alors en aval du front radiatif. Cet instant correspond au temps de séparation hydrodynamique, noté t_{sep} . Une transition apparaît alors durant laquelle, dans le cas classique où le front radiatif continue de décélérer, le front de choc se propage devant le front radiatif modifiant profondément la dynamique du système. Des profils spatiaux de densité et température typiques d'ondes radiatives subsoniques sont présentés en Figure 16. On peut en particulier les comparer aux profils typiques dans le cas du régime supersonique (voir la Figure 15), afin de constater les modifications induites par la séparation hydrodynamique.

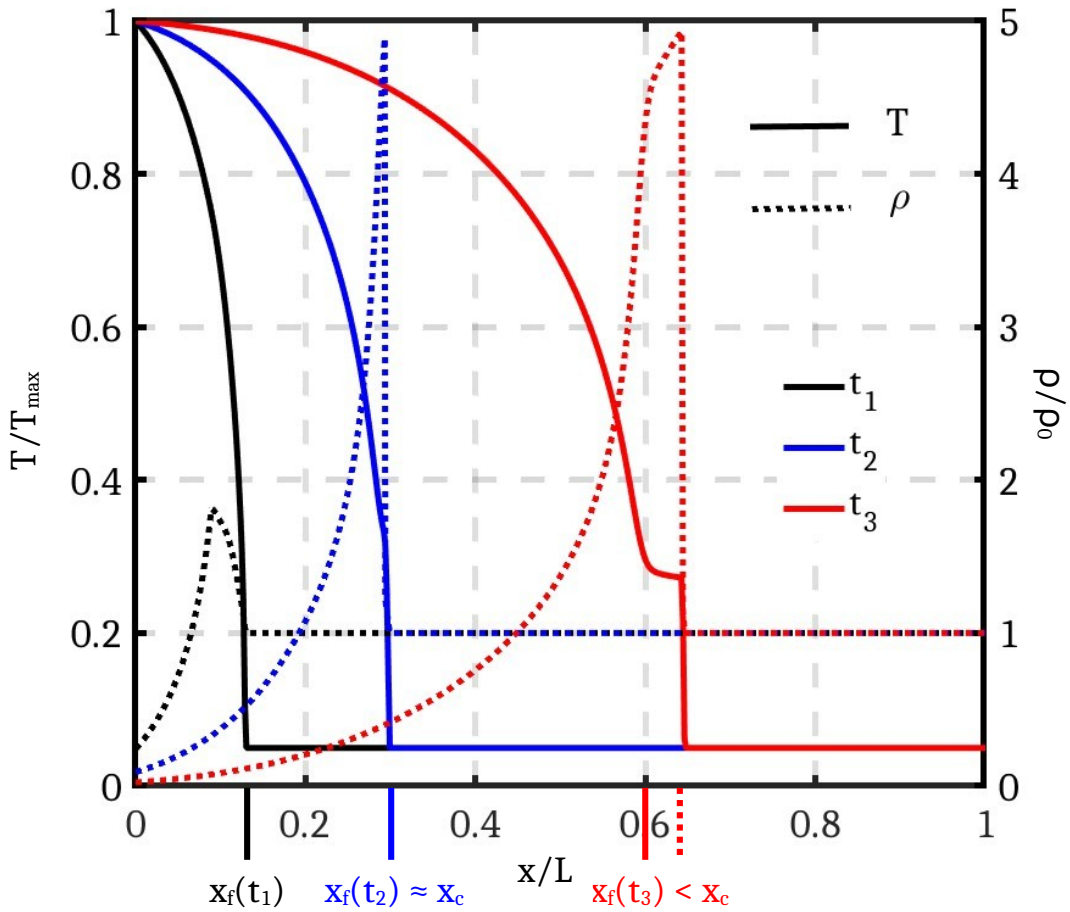


FIGURE 16 – Profils spatiaux adimensionnés de température (en traits pleins) et densité (en pointillés) typiques d'ondes radiatives présentant une séparation hydrodynamique pour des temps $t_1 < t_2 < t_3$. Un plateau de température s'installe sur la distance séparant le front radiatif x_f et le front de choc x_c .

Il est possible de donner une estimation théorique de ce temps de séparation hydrodynamique en fonction des propriétés thermodynamiques du plasma et de la température de la source T_S . Le temps de séparation hydrodynamique correspond ainsi au moment où la vitesse du front radiatif atteint la valeur de

la vitesse du son au niveau de la source de rayonnement à la température T_S . Nous pouvons écrire cette contrainte en fonction d'un nombre sans dimension que l'on nomme le nombre de Mach radiatif (noté Ma), défini comme le rapport entre les vitesses du front radiatif et celle du son au niveau de la source de rayonnement. Le critère de séparation hydrodynamique s'écrit alors :

$$Ma = \frac{v_f(t_{sep})}{c_s(T_S)} = 1 \quad (2.22)$$

La connaissance du paramètre t_{sep} requiert donc celle de la vitesse de l'onde radiative, qui, même si elle n'est pas connue exactement, peut être approchée dans certains cas [Hammer et Rosen, 2003], et en particulier de manière simple dans le cas d'une température source constante.

On considère une source de rayonnement à température constante, irradiant un milieu de densité d'énergie interne ρe et de loi d'opacité $\kappa_R = \frac{1}{\lambda_R \rho}$. Dans le cas où la densité d'énergie radiative est négligeable, on peut approcher le flux d'énergie arrivant au niveau du front radiatif sur un intervalle de temps δt par la formule suivante :

$$\frac{\rho e(T_S)}{\delta t} \simeq \frac{4a_{RC}}{3} \frac{\lambda_R(T_S) T_S^4}{x_f^2} \quad (2.23)$$

où T_S est la température de la source considérée constante. Dans ce cas, il est possible d'obtenir une équation approchée d'évolution du front radiatif en fonction des caractéristiques du matériau calculées au niveau de la condition aux limites, ici à la température T_S . En considérant qu'à l'instant initial le front radiatif ne s'est pas encore formé, on obtient :

$$x_f(t) \simeq \sqrt{\frac{4a_{RC}}{3} \frac{\lambda_R T_S^4}{\rho e}} \sqrt{t} \quad (2.24)$$

Le calcul de la vitesse $v_f(t)$ associée est alors immédiat, et permet d'obtenir la relation suivante :

$$v_f(t) = \frac{dx_f(t)}{dt} \simeq \sqrt{\frac{a_{RC}}{3} \frac{\lambda_R T_S^4}{\rho e}} \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (2.25)$$

En considérant que $Ma = 1$ à la séparation hydrodynamique, on peut donc obtenir t_{sep} pour des régimes peu radiatifs $R \gg 1$ donné par :

$$t_{sep} [s] \simeq \frac{a_{RC}}{3} \frac{\lambda_R T_S^4}{\rho e c_s^2} = 1.26 \times \left[\frac{\lambda_R}{10^3 \text{ cm}} \right] \left[\frac{T_S}{1 \text{ keV}} \right]^4 \left[\frac{\rho e}{10^{12} \text{ erg.cm}^{-3}} \right]^{-1} \left[\frac{c_s}{10^7 \text{ cm.s}^{-1}} \right]^{-2} \quad (2.26)$$

On observe, à partir de cette relation, qu'une forte densité d'énergie interne ou un faible libre parcours moyen des photons conduisent à un ralentissement du front et donc à une séparation hydrodynamique plus précoce. Cette approche peut présenter un intérêt pour suivre l'évolution du temps de séparation théorique dans le cas de températures $T_S(t)$ dépendant explicitement du temps. Elle permet en effet de vérifier si cette augmentation de température est assez intense, en termes d'amplitude et de durée caractéristique, pour fournir au front radiatif une vitesse suffisante pour tenir à distance le front de

perturbations acoustiques. Dans cette configuration, l'accumulation de ces perturbations ne se ferait alors jamais de manière suffisante sur les échelles de longueur étudiées pour produire le choc de séparation attendu, comme nous le verrons plus tard dans le chapitre. De manière intuitive, pour deux systèmes identiques, une augmentation de température mène à des régimes de plus en plus radiatifs et à des vitesses d'ondes radiatives de plus en plus élevées. Ainsi, dans le cas de régimes extrêmement radiatifs où $R \leq 1$, la vitesse du front radiatif ne peut qu'être approchée à l'aide de la relation (2.25).

2.3.2.2 Gradient de pression et mise en mouvement

Dans des régimes $R \leq 1$, une montée en température ou une baisse en densité au niveau de la source de rayonnement peut conduire à l'obtention de pressions radiatives dépassant fortement la pression thermique du milieu. Comme nous l'avons vu précédemment avec l'équation (2.9), la pression radiative varie en T^4 . Cette quantité est également indépendante de la densité du milieu, ce qui provoque des gradients de pression extrêmement plus importants que dans le cas d'une pression thermique pour un gaz parfait par exemple, variant en ρT . Ainsi, l'apparition de forts gradients de pression provoque irrémédiablement une compression du milieu à partir d'un temps noté t_{comp} . La température du plasma augmentant (et sa densité chutant) au niveau de la source de rayonnement, cela provoque de plus un emballement du phénomène de compression. Cet instant correspond plus ou moins au moment où la pression radiative commence à dominer nettement la pression thermique au niveau de la source de rayonnement. En utilisant la relation (2.14), nous estimons que cet instant correspond à l'obtention de nombres de Mihalas $R \leq 10^{-1}$. Une illustration de ce phénomène sera présentée dans la suite du chapitre, au paragraphe 2.5.2.

2.3.3 Étude paramétrique des régimes physiques d'onde radiative

L'échelle temporelle d'existence du régime supersonique dépend donc directement des conditions thermodynamiques du système, telle que sa densité ρ_0 , et de l'intensité de la source de rayonnement l'irradiant. Il existe une grande variabilité de régimes physiques due à la variation des conditions thermodynamiques (ρ_0, T_0) du disque d'accrétion qui sont ici comprises dans les intervalles de valeur donnés par (2.7). Ainsi, nous pouvons estimer théoriquement pour quels systèmes décrivant l'interaction d'un sursaut X de type I avec un disque d'accrétion, des ondes radiatives supersoniques peuvent se propager.

2.3.3.1 La conduction radiative comme phénomène principal

Rappelons tout d'abord que nous nous sommes placés dans le cadre de la théorie des disques α pour donner des ordres de grandeur des conditions thermodynamiques de leurs régions internes. Il est donc primordial de vérifier que le transport d'énergie par rayonnement est plus important que la dissipation de cette énergie par effets visqueux présente dans ces disques. Pour cela, nous cherchons à comparer les échelles de temps caractéristique de ces deux phénomènes. Une onde radiative en régime supersonique se propage sur des temps caractéristiques t_{front} , obtenu en inversant la relation (2.24). L'échelle de temps caractéristique de diffusion visqueuse est, elle, donnée par la relation (2.5) que l'on peut calculer au niveau de la position du front radiatif x_f . Pour les disques d'accrétion étudiés, le rapport de ces deux temps caractéristiques peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{t_{visc}}{t_{front}} \simeq 1.13 \times \left[\frac{T_S}{500 \text{ eV}} \right]^{7/2} \left[\frac{\rho_0}{10^{-2} \text{ g.cm}^{-3}} \right]^{-2} \left[\frac{\alpha}{10^{-1}} \right]^{-1} \left[\frac{H}{10^7 \text{ cm}} \right]^{-1} \quad (2.27)$$

Pour des valeurs du paramètre α comprises¹ entre 0.01 et 0.1, et des hauteurs de disque de l'ordre de quelques centaines de kilomètres, le rapport des temps donné par la relation (2.27) semble très supérieur à 1 dans les régions étudiées, comme on peut le voir sur la Figure 17 a). Les seules régions où cette hypothèse n'est pas vérifiée sont atteintes lorsque l'on baisse la température source et que l'on augmente la densité du disque. L'échelle de temps de dissipation visqueuse est donc, de manière générale, quelques ordres de grandeur supérieure à l'échelle temporelle de propagation d'une onde radiative supersonique.

Enfin, abordons la possible compétition entre les phénomènes de conduction électronique et conduction radiative. En effet, le transport d'énergie peut également se produire par conduction électronique dans les milieux étudiés. Afin de s'assurer de la validité du modèle théorique (2.19) dans les régimes physiques présentés, comparons les flux d'énergie caractérisant ces deux phénomènes physiques. Dans le cadre de notre modèle, le flux radiatif est donné par la relation (2.18). Dans un milieu composé majoritairement d'hydrogène complètement ionisé, Spitzer et Härm [1953] ont montré que le flux d'énergie provoqué par la conduction électronique prenait quant à lui la forme suivante :

$$\vec{F}_{cond}(T) = -\kappa_{cond}(T)\vec{\nabla}T, \quad \text{avec} \quad \kappa_{cond}(T) = \frac{k_B(k_B T)^{5/2}}{e^4 m_e^{1/2} \ln \Lambda} \quad (2.28)$$

où e est la charge élémentaire d'un électron, $\ln \Lambda$ est le logarithme Coulombien² et $\kappa_{cond}(T)$ le coefficient de diffusion associé au flux électronique. Cette formulation est analogue à celle du flux radiatif (2.18). Une comparaison de ces flux dans le cas des systèmes étudiés, pour un libre parcours moyen en limite Thomson, nous donne alors la relation suivante :

$$\frac{F_{rad}}{F_{cond}} = \frac{\kappa_{rad}}{\kappa_{cond}} \simeq 1.2 \times 10^7 \times \left[\frac{T}{500 \text{ eV}} \right]^{1/2} \times \left[\frac{\rho}{10^{-2} \text{ g.cm}^{-3}} \right]^{-1} \quad (2.29)$$

Cette grandeur est toujours très grande devant l'unité pour les régimes physiques considérés, comme nous pouvons le constater sur la Figure 17 b). La conduction radiative est donc le phénomène principal impliqué dans le transport d'énergie au sein des régions internes optiquement épaisses des disques modélisés.

2.3.3.2 Limites du régime supersonique

Nous nous intéressons à présent aux grandeurs caractérisant l'évolution de l'onde radiative se propageant dans les disques étudiés. Les trois paramètres définissant des régimes critiques sont : l'épaisseur optique du milieu $\tau(\rho, T)$, le nombre de Mihalas calculé à la source de rayonnement³ $R(\rho, T_S)$, et le temps de séparation hydrodynamique $t_{sep}(\rho, T)$. Ces trois grandeurs dépendent des conditions thermodynamiques du milieu parcouru par l'onde radiative. L'épaisseur optique, le nombre de Mihalas et le temps

1. Rappelons qu'aucun consensus n'a été établi quant à la valeur de ce paramètre entre les estimations observationnelles et les suggestions provenant de simulations numériques [King et al., 2007].

2. Dans les régimes étudiés, le logarithme Coulombien est proche de l'unité.

3. Ce paramètre donne indirectement le temps t_{comp} limitant l'applicabilité de l'hypothèse statique pour le milieu étudié.

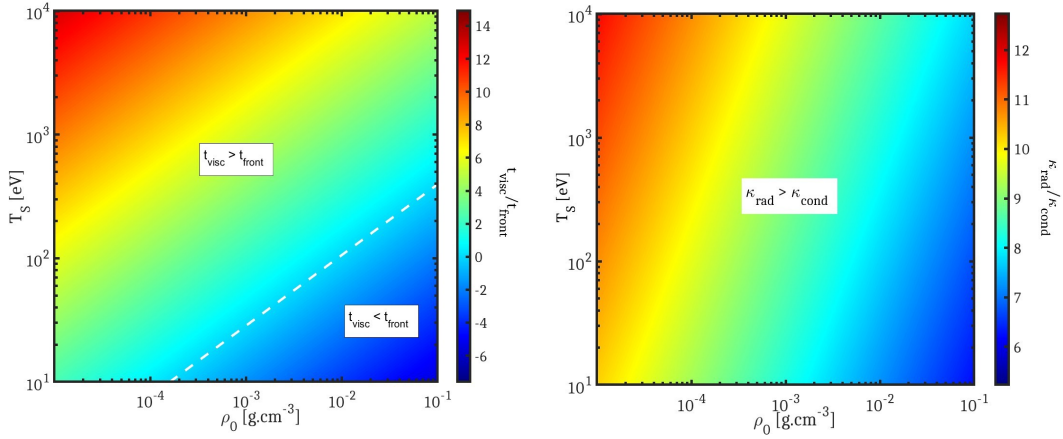


FIGURE 17 – Cartes des rapports de temps visqueux et radiatifs (équation (2.27)) et des rapports de flux radiatifs et de conduction électronique (équation (2.29)) en fonction des densités de disque et températures de la source choisies pour $\alpha = 0.1$ et $H = 10^7$ cm. Les pointillés blancs en Figure a) indiquent la séparation entre les régimes où le transport radiatif est prédominant et celui où les effets visqueux le sont.

de séparation hydrodynamique peuvent se calculer directement à partir de leurs définitions respectives et des hypothèses de modélisation du disque, ce qui nous donne les expressions suivantes :

$$\tau \simeq 3 \times 10^4 \left[\frac{\rho_0}{10^{-2} \text{ g.cm}^{-3}} \right] \quad (2.30)$$

$$R \simeq 2.6 \left[\frac{\rho_0}{10^{-2} \text{ g.cm}^{-3}} \right] \left[\frac{T_S}{500 \text{ eV}} \right]^{-3} \quad (2.31)$$

$$t_{sep} [\text{s}] \simeq 7.2 \times 10^{-4} \left[\frac{\rho_0}{10^{-2} \text{ g.cm}^{-3}} \right]^{-2} \left[\frac{T_S}{500 \text{ eV}} \right]^2 \quad (2.32)$$

La distance caractéristique utilisée pour calculer l'épaisseur optique est égale à une centaine de kilomètres pour rester cohérent avec les régions étudiées. Le temps de séparation hydrodynamique est ici calculé en utilisant l'hypothèse de gaz parfait pour calculer la vitesse du son au sein du milieu. La Figure 18 représente l'évolution du temps de séparation hydrodynamique en fonction des conditions thermodynamiques au niveau de la source de rayonnement, où sont également indiquées les limites théoriques du modèle en terme d'épaisseur optique et régime physique.

Comme nous pouvons le voir, l'hypothèse de régime optiquement épais est respectée pour les densités de disque supérieures à $10^{-5} \text{ g.cm}^{-3}$. La limite de nombre de Mihalas fixée à $R = 0.1$ correspond à l'instant où la pression radiative devient importante devant la pression thermique du système (voir relation (2.14)). Dans ce cas, une compression du système liée à l'augmentation de la pression radiative commence et l'hypothèse de milieu statique n'est plus valable pour toute la région se situant au-dessus des pointillés blancs. Les seules conditions thermodynamiques permettant d'observer des ondes supersoniques radiatives non perturbées par ce phénomène se trouvent donc en dessous de la courbe blanche $R = 0.1$ sur la

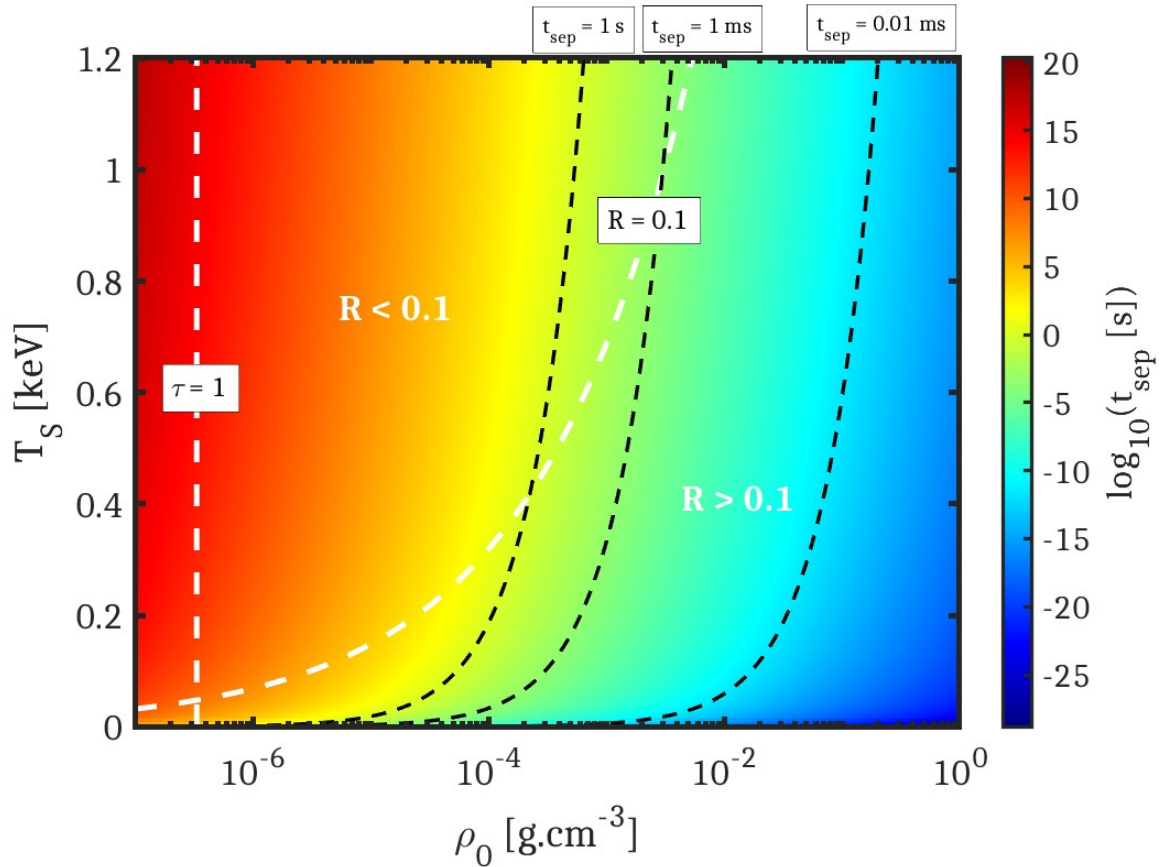


FIGURE 18 – Carte du temps de séparation hydrodynamique des systèmes étudiés (gaz parfait en limite de diffusion Thomson) en fonction de la densité du disque et de la température du sursaut. Sur cette figure sont également représentées les limites du modèle théorique (2.19) en tirets blancs, en termes de nombre de Mihalas et d'épaisseur optique, ainsi que des iso-contours de temps de séparation pour des valeurs $t_{sep} = 1 \text{ s}$, 10^{-3} s , 10^{-5} s , en tirets noirs. Ces différentes courbes définissent un domaine d'application du modèle théorique (2.19) pour nos systèmes.

Figure 18. Dans ce cas, on peut constater qu'une augmentation de la densité tend à faire diminuer fortement le temps de séparation hydrodynamique attendu, à température source constante, jusqu'à atteindre des valeurs inférieures à la milliseconde, bien plus faibles que l'échelle temporelle des SXI étudiés. Enfin, il existe une zone correspondant à des températures ($\sim 400 \text{ eV}$) et densités ($\sim 10^{-4} \text{ g.cm}^{-3}$) relativement faibles pour le système astrophysique dans laquelle on retrouve des temps de séparation hydrodynamique de l'ordre de l'échelle temporelle des sursauts X qui est de quelques secondes. Ces régions correspondent à des régimes physiques intermédiaires⁴, dans lesquels les conditions physiques permettent d'observer des ondes radiatives supersoniques sur une échelle temporelle proche de celle du sursaut. Pour tous les systèmes se situant dans les régimes $R > 0.1$, des ondes radiatives supersoniques se propagent. Les temps de séparation faibles (aux fortes densités) impliquent cependant que la durée caractéristique du régime supersonique est beaucoup moins importante que l'échelle temporelle du sursaut. Les ondes radiatives su-

4. Le terme intermédiaire fait référence au fait que l'on se trouve entre les deux limitations du régime supersonique, que ce soit au niveau de la séparation hydrodynamique ou de la compression du milieu.

personiques peuvent donc se propager initialement dans n'importe quel système témoin d'une interaction entre un sursaut X et de la matière.

2.4 Le code de simulation astrophysique RAMSES-RT

Afin de décrire la dynamique de ces environnements hydro-radiatifs, nous avons décidé d'adapter le code de simulations numériques RAMSES-RT pour simuler des environnements de hautes densités d'énergie.

2.4.1 Présentation du code

RAMSES⁵ [Teyssier, 2002] est un code 3D de simulation numérique résolvant des problèmes astrophysiques multi-échelles en géométrie cartésienne, initialement développé pour étudier les formations de galaxies. Plusieurs modules ont depuis été ajoutés, de la résolution des équations de la magnétohydrodynamique [Fromang *et al.*, 2006] à un solveur FLD (*Flux limited diffusion*) [Commerçon *et al.*, 2011] pour l'équation du transfert radiatif, le tout en présence d'auto-gravitation. Depuis quelques années maintenant, une branche du code baptisée RAMSES-RT [Rosdahl *et al.*, 2013] propose une résolution multi-groupe du transfert radiatif à l'aide de la méthode M1, avec certaines adaptations permettant de retrouver correctement la limite diffusion et les effets de pression radiative [Rosdahl et Teyssier, 2015]. Ce code a permis, entre autres, d'étudier un large éventail de systèmes astrophysiques tels que la formation d'étoiles [Hennebelle *et al.*, 2011], la croissance de trous noirs supermassifs [Dubois *et al.*, 2012], les disques protoplanétaires [Faure *et al.*, 2014; Hennebelle *et al.*, 2020], les nuages moléculaires [Iffrig et Hennebelle, 2015; Kakiichi et Gronke, 2021] le *feedback* des rayons cosmiques sur les disques de galaxies [Farcy *et al.*, 2022] et les colonnes d'accrétion à la surface de naines blanches magnétiques [Van Box Som *et al.*, 2018a].

Dans le code RAMSES, les équations de l'hydrodynamique sont résolues en considérant une approche de type volumes finis, en utilisant une méthode de Godunov d'ordre deux [Toro, 1999]. Différents solveurs de Riemann sont implémentés au sein du code pour résoudre ces équations, à savoir : HLL (Hartex-Lax-von Leer), HLLC (HLL Contact), acoustique ou Lax-Friedrich. Notons que RAMSES est un code disposant d'un maillage adaptatif (AMR), d'intérêt tout particulier pour des simulations 3D. Pour le transfert radiatif, la résolution est effectuée à l'aide d'une méthode calculant les moments de l'équation du transfert radiatif, avec une relation de fermeture utilisant le tenseur d'Eddington [Levermore, 1984; Gonzalez *et al.*, 2007; Aubert et Teyssier, 2008]. Deux solveurs sont implémentés pour cette approche, à savoir HLL et GLF (Global Lax-Friedrich). Pour finir, le code est écrit de manière à être utilisé sur des architectures massivement parallèles.

5. Le code est disponible en libre accès sur bitbucket, voir <https://bitbucket.org/rteyssie/ramses/src/master/> pour la version actuelle.

2.4.2 Résolution du transfert radiatif avec RAMSES-RT

RAMSES-RT a été principalement développé dans le but de produire des simulations numériques dans des régimes relativement peu radiatifs, avec des températures n'atteignant pas les niveaux de sursauts X. Dans cette optique, la résolution de l'interaction rayonnement-matière a été codée de manière à ce que le rayonnement, séparé en divers groupes de photons, ne puisse se diffuser qu'au contact de poussières. En particulier, une distinction est effectuée entre des photons appartenant au groupe IR (pour infrarouges) et les autres. Ces photons IR sont en pratique les seuls à pouvoir être diffusés plusieurs fois sans altération de fréquence. Tous les photons d'énergies supérieures peuvent photoioniser le gaz, et être absorbés par les poussières, pour être ensuite réémis dans le domaine IR. Ces particularités numériques sont présentes au sein de RAMSES de par son objectif initial qui était de modéliser, entre autres, l'évolution de galaxies en cosmologie.

Diffusion de photons dans un plasma ionisé

Durant ces travaux de thèse, il a ainsi été nécessaire d'adapter RAMSES-RT pour simuler des environnements de hautes énergies. En effet, les options initiales étaient problématiques, en particulier dans le cas où l'on souhaite simuler la diffusion de rayonnement par des électrons libres dans un plasma ionisé. La première difficulté avec l'utilisation de RAMSES-RT est la disparition complète de phénomènes de diffusion lorsque le milieu est dépourvu de poussière, ce qui arrive lorsque l'on étudie des plasmas fortement ionisés. Afin de pouvoir effectuer ces simulations de diffusion dans des milieux dépourvus de poussières, il a donc été nécessaire d'adapter certaines parties du code.

En particulier, un paramètre noté f_{dust} représentant la fraction de poussières présentes dans le milieu a été fixé à une valeur unitaire quoiqu'il arrive, malgré l'ionisation du disque, tout en coupant les phénomènes de refroidissement liés à la présence effective de ces poussières. Concrètement, cela revient à forcer la présence d'un milieu pouvant diffuser les photons qui n'est pas considéré comme une poussière au niveau physique. Les lois d'opacité normalement utilisées pour décrire l'interaction rayonnement-poussière peuvent donc toujours être utilisées pour ce matériau, en adaptant les valeurs aux phénomènes physiques étudiés. Dans notre cas, l'opacité $\kappa_{Sc} = \kappa_R$ du plasma est gardée constante pour retrouver la limite Thomson évoquée précédemment. Dans cette configuration, RAMSES-RT est à présent capable de simuler la diffusion de rayonnement dans un milieu optiquement épais dépourvu de poussières. Nous indiquerons pour chaque simulation la grille de simulation utilisée afin de vérifier la bonne résolution du libre parcours moyen des photons, nécessaire lors de l'utilisation des solveurs HLL et GLF disponibles dans le code.

Les conditions initiale et aux limites

L'initialisation dans RAMSES se fait par zones dans lesquelles il est possible de fixer les conditions physiques (densité et pression) du système étudié. Un problème apparaît dans les cas où la température initiale du milieu est particulièrement élevée (de quelques eV à plusieurs centaines d'eV). En effet, il est ici question de la température de la matière, qui diffère dans ce cas profondément de la température radiative T_r , aucun photon n'étant a priori présent initialement dans le milieu. Dans le cas où l'on cherche à simuler

un milieu initialement à l'ETL dont les processus de refroidissement sont beaucoup plus lents que la propagation d'ondes radiatives supersoniques en son sein, il est nécessaire d'initialiser différemment le milieu. Dans ce cas, nous avons choisi d'initialiser des densités de photons dans les zones choisies, de sorte à pouvoir modéliser un ETL initial pour les systèmes particulièrement chauds.

Enfin, deux modèles de conditions aux limites ont été ajoutés pour traiter la source de rayonnement X irradiant le système. Le premier ajout est la possibilité de créer une source de rayonnement respectant le modèle de Norris (2.3), où les différents paramètres sont directement donnés en initialisation de la simulation. Un second ajout est la possibilité de créer un fichier de données en termes de température ou luminosité pour la source de rayonnement qui sera automatiquement lu et traduit par RAMSES en terme de densité de photons.

2.4.3 Validation du code

Afin de valider les modifications apportées au code, nous effectuons des simulations d'ondes radiatives dans des régimes pour lesquels nous connaissons certains résultats théoriques.

Limite diffusion à température source constante

La première étape de validation correspond à l'obtention de la limite diffusion pour des simulations statiques⁶ à température source constante. Dans ce cas précis, nous savons que la position du front radiatif est donnée par $x_f \sim \sqrt{t}$. Retrouver ce comportement est gage d'un accord entre la résolution du transfert radiatif en méthode M1 et la limite diffusion théoriquement modélisée par l'équation (2.19). Il est cependant nécessaire de comparer la solution $x_f(t)$ à une solution analytique pour valider quantitativement la résolution de RAMSES-RT. Nous avons choisi de comparer les solutions obtenues à l'expression analytique développée par [Hammer et Rosen \[2003\]](#) et introduite précédemment (voir relation (2.21)). Le système étudié est composé d'un gaz parfait en limite Thomson, ce qui, en considérant l'équation (2.20), donne $\beta = 1$ et $\alpha = 0$, fixant ainsi le paramètre ϵ à la valeur $\epsilon = 0.25$. Le système est initialement à la densité $\rho_0 = 0.02 \text{ g.cm}^{-3}$ et température $T_0 = 2.5 \text{ eV}$. Le disque est éclairé par une température source $T_S = 400 \text{ eV}$ fixée constante. Cette configuration n'est physiquement valable que pour des temps de propagation faibles par rapport à l'échelle temporelle de variation de la source de rayonnement, qui est d'environ 10^{-1} s . Ainsi, pour des échelles temporelles inférieures à 10^{-2} s , l'hypothèse d'une source de rayonnement constante peut être appliquée. On obtient un nombre de Mihalas calculé en $x = 0$ de l'ordre de $R \simeq 10$, correspondant à un régime dans lequel l'énergie radiative du plasma peut être négligée, rendant possible l'application de la solution analytique de [Hammer et Rosen \[2003\]](#). Les simulations numériques sont effectuées à l'aide du code RAMSES-RT en bloquant toute réponse hydrodynamique du système, de sorte à obtenir un phénomène purement radiatif décrit par l'équation (2.19) en limite diffusion. Deux maillages sont utilisés dans cette étude : l'un est résolu en terme de libre parcours moyen des photons, avec une taille de maille de $\Delta x \simeq 5 \text{ cm}$, tandis que l'autre ne l'est pas, avec une taille de maille $\Delta x \simeq 640 \text{ cm}$. Dans ces deux cas, on dispose respectivement de résolutions $\Delta x/\lambda_R \simeq 0.1 \ll 1$ pour

6. Une simulation statique correspond à une simulation dans laquelle la réponse hydrodynamique du système est artificiellement bloquée.

le cas bien résolu, et $\Delta x/\lambda_R \simeq 10 \gg 1$ dans le second cas. Les résultats de simulation et la comparaison avec cette solution sont présentés sur la Figure 19.

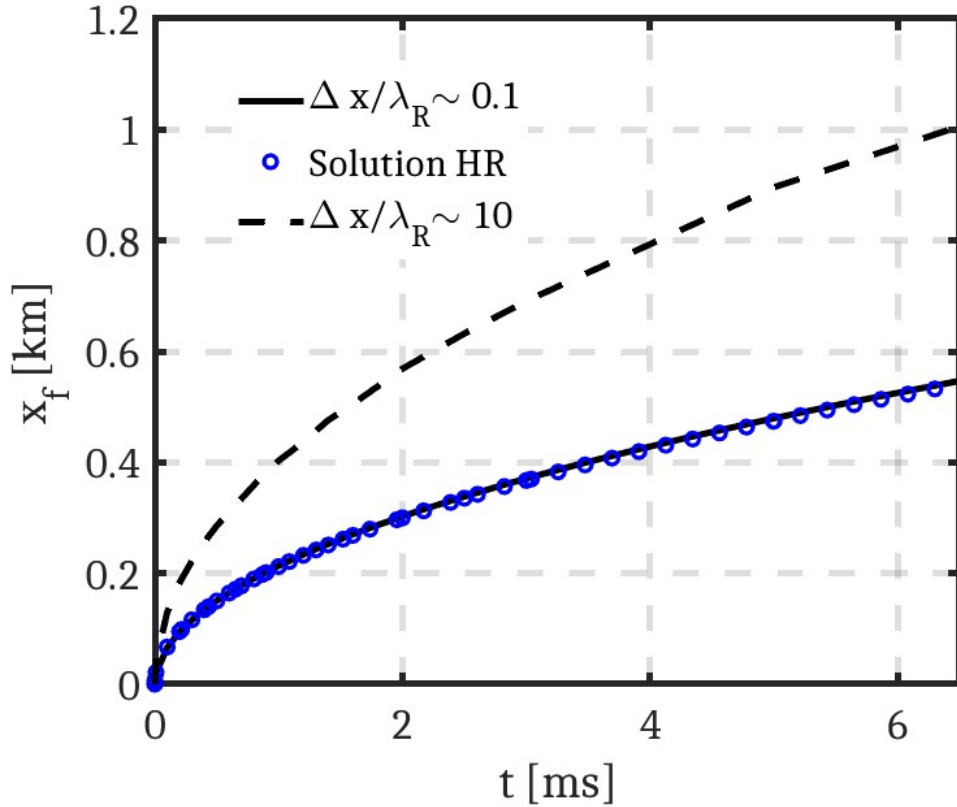


FIGURE 19 – Évolution temporelle de la position des fronts radiatifs $x_f(t)$ pour une température source $T_S \simeq 400$ eV obtenues à l'aide de simulations statiques RAMSES-RT. La courbe noire en traits pleins représente le cas spatialement résolu, contrairement à la courbe en pointillés noirs représentant le cas où le libre parcours moyen des photons n'est pas bien résolu. Les cercles bleus représentent la solution analytique de [Hammer et Rosen \[2003\]](#), en totale adéquation avec la simulation RAMSES-RT résolue.

Comme on peut le constater, la simulation pour laquelle le libre parcours moyen des photons est plus faible que la longueur des mailles ne reproduit pas du tout la solution analytique attendue. Ce résultat n'est pas surprenant, sachant que la diffusion numérique présente dans RAMSES-RT prend le pas sur la diffusion naturelle des photons dans le milieu étudié. En pratique, les photons se diffusent donc sur un libre parcours moyen numérique plus important que λ_R , de l'ordre de la taille de la maille Δx . Dans le cas résolu, et sur l'intervalle de temps étudié, le front radiatif de la simulation suit la solution analytique (2.21) de façon très précise, avec un écart global $\leq 1\%$. Grâce à cet exemple, nous pouvons conclure que la limite diffusion est retrouvée dans RAMSES-RT, et qu'une résolution spatiale suffisante permet d'obtenir des résultats valides, au moins dans les régimes testés.

Temps de séparation hydrodynamique à température source constante

Dans le cas où la réponse hydrodynamique du système n'est pas bloquée artificiellement, on s'attend à observer une séparation hydrodynamique à un certain temps t_{sep} donné par (2.32). Pour effectuer une validation dans le cadre d'une simulation d'hydrodynamique radiative, il est possible de vérifier le temps d'apparition du choc de séparation par rapport à son estimation théorique. En reprenant les conditions physiques de l'exemple précédent à l'exception d'une température source maintenant de $T_S \simeq 1$ keV, on obtient un nombre de Mihalas $R \simeq 0.7$ en $x = 0$. Nous nous sommes ainsi placés dans un régime typique où une certaine compétition existe entre les effets de compression liés à \mathbb{P}_{rad} et de transition au régime subsonique à l'instant $t_{sep} \simeq 7.2 \times 10^{-4}$ s donné par la relation (2.32). Ces régimes diffèrent de l'exemple précédent, nous permettant de valider la prise en compte de l'énergie radiative dans RAMSES-RT. Pour ce système, nous avons choisi une région de disque de longueur $L \sim 5$ km, et de résolution $\Delta x = 20$ cm. Les résultats de simulation sont présentés en Figure 20.

Les profils de température observés dans la simulation 20 a) sont parfaitement représentatifs de la phénoménologie des ondes radiatives supersoniques et de leur transition en ondes radiatives subsoniques pour une température source constante évoquées au chapitre 1 (voir Figure 16). La propagation initiale d'un front de température non perturbé témoigne d'un régime supersonique. Il se termine aux alentours de $t \simeq 7 \times 10^{-4}$ s, lorsque l'accumulation de perturbations acoustiques conduit à l'apparition d'un pic de densité de rapport $\rho/\rho_0 \simeq 2$. À partir de ce moment, un choc de séparation hydrodynamique va se former en aval du front, ce qui est conforme à la prédiction théorique effectuée : $t_{sep} = 7.2 \times 10^{-4}$ s. Quelques millisecondes plus tard, on retrouve un profil typique d'une onde subsonique. RAMSES-RT est donc capable de reproduire la phénoménologie attendue des ondes radiatives dans ces régimes, du régime supersonique à la transition au régime subsonique. Le phénomène d'accumulation de perturbations acoustiques se fait en même temps qu'une pré-compression du milieu apportée par l'excès de pression radiative en $x = 0$. Ainsi, la matière est mise en mouvement de manière plus importante que dans le cas où seule une séparation hydrodynamique serait présente, amplifiant le phénomène de modification de l'allure du choc. Notons cependant que la transition supersonique-subsonique n'est pas altérée par cette modification, comme en atteste l'obtention du temps de séparation hydrodynamique théorique par RAMSES-RT. Les modifications du code RAMSES-RT permettent donc de retrouver la phénoménologie attendue lors de la propagation d'ondes radiatives.

2.5 Une situation typique de formation d'ondes radiatives supersoniques

Dans cette section, nous allons étudier un scénario typique de formation d'ondes radiatives supersoniques lors de l'interaction SXI-disque. Le système décrit constituera l'exemple principal étudié dans ce manuscrit [Tranchant *et al.*, 2022].

2.5.1 Initialisation de la simulation

Le milieu étudié est considéré comme principalement composé d'hydrogène ionisé, de densité initiale $\rho_0 = 10^{-4}$ g.cm⁻³, et de température initiale $T_0 \simeq 50$ eV. L'épaisseur optique du milieu est quant à elle de

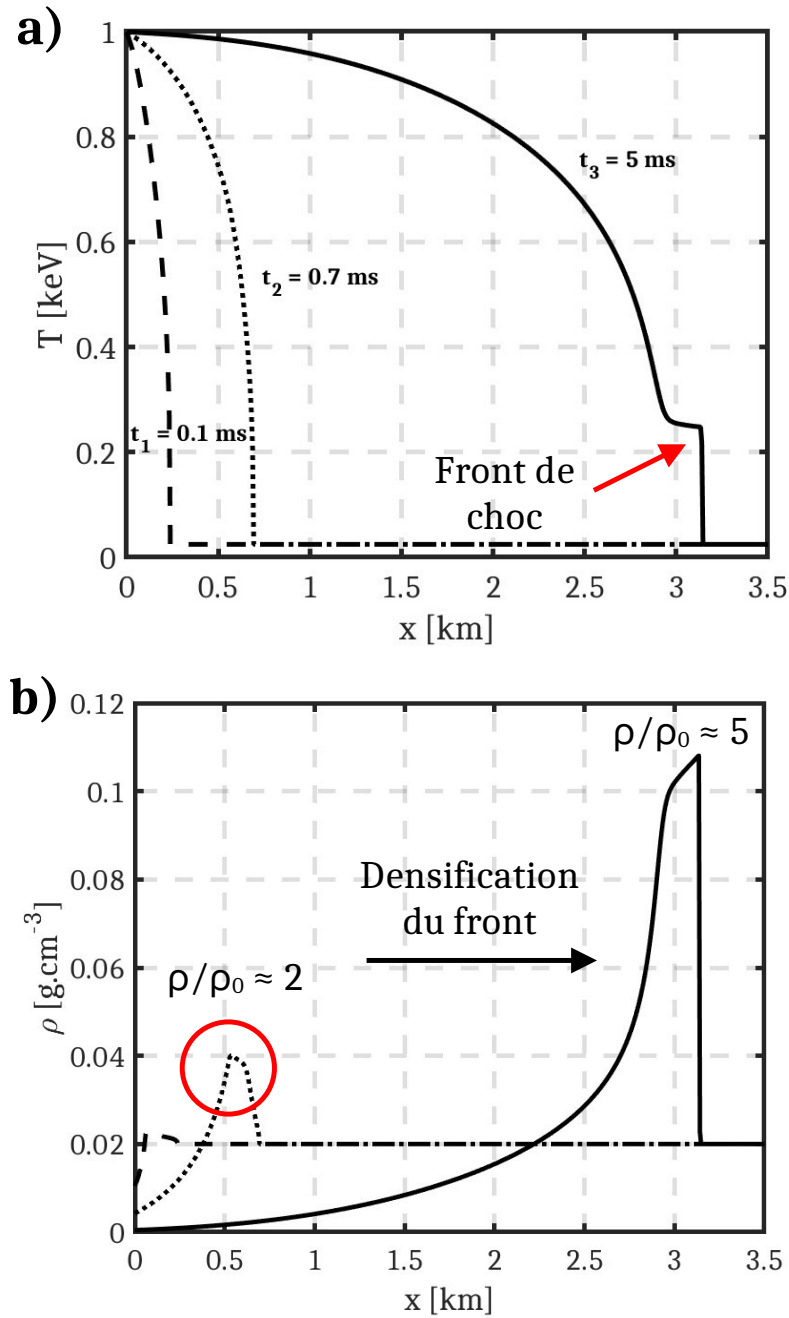


FIGURE 20 – En figure a) et b) sont respectivement représentés les profils spatiaux de température et densité pour une température source $T_S = 1$ keV, obtenus à différents temps à l'aide de simulations dynamiques RAMSES-RT.

l'ordre de $\tau \approx 100$, ce qui correspond bien à un environnement optiquement épais. La taille de maille est prise telle que le rapport $\Delta x/\lambda_R \approx 0.05$, de manière à obtenir une bonne résolution du transfert radiatif

même dans les zones les plus denses. La source de rayonnement est un sursaut X modélisé par l'équation (2.3), dont les paramètres sont donnés par :

$$T_p = 1 \text{ keV}, \quad \tau_1 = 1 \text{ s}, \quad \tau_2 = 1.5 \text{ s}, \quad t_0 = -0.09 \text{ s} \quad (2.33)$$

donnant ainsi la loi de dépôt de température dont l'allure générale est présentée sur la Figure 21. Ce sursaut typique a été choisi pour permettre l'obtention, dans un premier temps, d'un régime supersonique pour la propagation de l'onde radiative au sein du plasma.

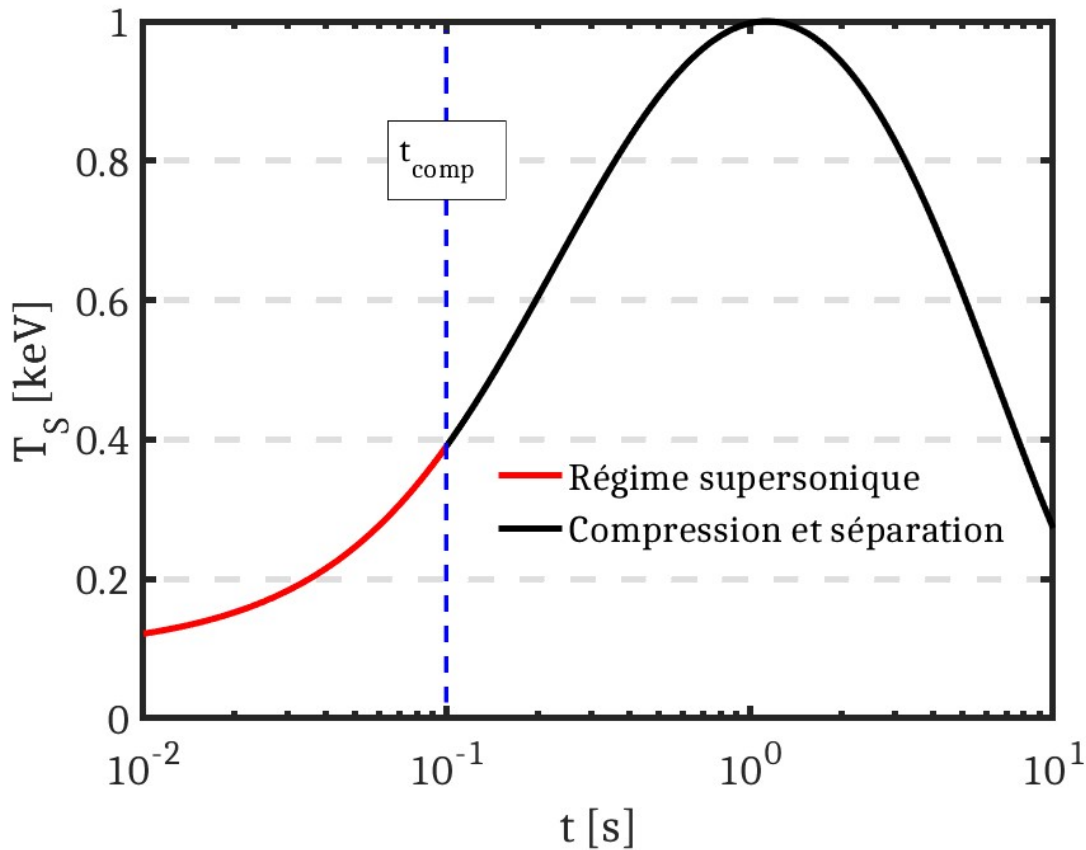


FIGURE 21 – Profil de température du sursaut défini par les paramètres (2.33). En rouge sont représentés les premiers instants de la phase de montée du sursaut qui vont nous intéresser pour étudier un régime supersonique d'onde radiative. En noir est représenté le reste du sursaut durant lequel des phénomènes hydrodynamiques prennent le pas sur la propagation d'onde radiative supersonique.

En utilisant la forme de ce sursaut et la Figure 18, on constate que, pour des températures inférieures à environ 300 eV, et donc pour des temps inférieurs à 0.1 s, le régime supersonique devrait être atteint. En effet, les temps de séparation hydrodynamique parcourus semblent être de l'ordre de grandeur ou supérieurs à l'échelle temporelle de compression radiative du système ainsi qu'au temps caractéristique de propagation de l'onde radiative. Cependant, après ce temps, et pour une température T_S proche de 300 eV, la pression radiative va provoquer une compression du système qui conduit à la brisure de l'hypothèse d'une propagation énergétique en milieu statique. Durant le sursaut, le nombre de Mihalas

varie de l'ordre de 10 à des valeurs beaucoup plus basses dépassant la limite de $R = 0.1$. Les régimes physiques peuvent ainsi être décrits comme étant extrêmement radiatifs. Les résultats des simulations RAMSES-RT de ce système sont présentés dans la section suivante en Figure 22.

2.5.2 Résultats de la simulation

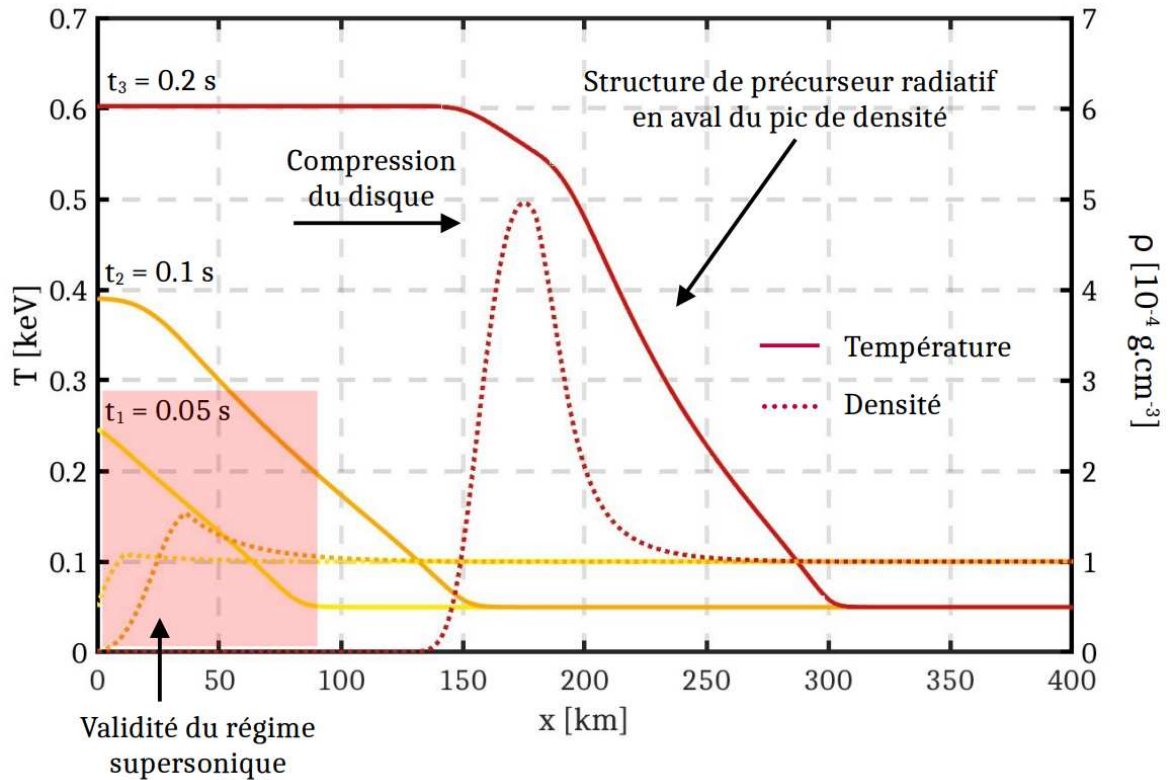


FIGURE 22 – Simulations 1D RAMSES-RT de la propagation d'une onde radiative à travers les régions internes d'un disque d'accrétion simplifié. Les profils de température (en traits pleins) et de densité (en pointillés) sont représentés à trois temps différents ($t = 0.05 \text{ s}$ en jaune, $t = 0.1 \text{ s}$ en orange, $t = 0.2 \text{ s}$ en rouge). La compression du milieu arrive autour de $t_{comp} \approx 0.1 \text{ s}$ et provoque un changement drastique pour la densité du milieu. La transition entre régime supersonique et subsonique devrait arriver autour de $t_{sep} \approx 0.2 \text{ s}$, mais est complètement cachée par la compression importante du milieu à ces temps et l'accélération du front ainsi provoquée. La zone d'applicabilité de l'hypothèse supersonique est représentée en rouge en terme d'avancée du front radiatif et de température de sursaut.

Nous pouvons constater que la source de rayonnement X produit une onde radiative qui, dans sa phase initiale de propagation pour un temps $t_1 = 0.05 \text{ s}$, conduit à un profil de température caractéristique des ondes supersoniques. La différence fondamentale intervient dans la température initiale choisie, ici $T_0 \approx 50 \text{ eV}$. Cette valeur est plus proche de la température source que dans les cas plus classiques de formation d'ondes radiatives, comme ceux développés dans la section de validation de RAMSES-RT. Nous verrons dans la suite que la valeur de la température T_0 n'influe que très peu sur la position du front radiatif, mais modifie la courbure des profils spatiaux de température. La physique globale n'est quant à elle pas modifiée. Le front radiatif, à ce temps, est donc situé aux alentours de $x = 80 \text{ km}$, ce qui

indique une vitesse moyenne de propagation d'environ 1200 km.s^{-1} , bien plus grande que les vitesses caractéristiques du son ($c_s \sim 300 \text{ km.s}^{-1}$) et de l'écoulement ($|\vec{v}| \sim 100 \text{ km.s}^{-1}$). Près du bord interne du disque, le profil de densité n'est que légèrement modifié par l'augmentation de pression radiative, comme on s'y attendait. Cependant, à $t_2 = 0.1 \text{ s}$, en raison de la montée rapide de la température, la pression radiative croît énormément à la frontière et commence à comprimer les régions internes du disque. En effet, pendant ce temps, le nombre de Mihalas pris à la frontière interne pour une densité ρ_0 diminue de $R \simeq 0.2$ à $t_1 = 0.05 \text{ s}$ à $R \simeq 0.05$ à $t_2 = 0.1 \text{ s}$. À des temps plus tardifs ($t_3 \simeq 0.2 \text{ s}$) la pression radiative surpasse localement la pression thermique du plasma ($R \simeq 1.5 \times 10^{-2}$). Le rayonnement agit comme un piston qui balaie la région interne du disque conduisant à une région de faible densité à température constante, devenue optiquement mince, s'étendant jusqu'à $x \sim 150 \text{ km}$. À ce moment, les perturbations acoustiques provenant de la frontière interne, qui est à la température $T_S \sim 600 \text{ eV}$, devraient provoquer une séparation hydrodynamique. Ici, étant donné le temps de montée rapide de la température du SXI, le front radiatif ne décélère pas. Il continue ainsi à se propager devant le front de perturbation de densité, ce qui les empêche de s'accumuler au niveau du front radiatif. La compression radiative du système a, elle, mené à un pic de densité de rapport $\rho/\rho_0 \simeq 5$ à $x = 175 \text{ km}$. Le front radiatif se déplace alors devant ce pic de densité, dans une situation rappelant un précurseur de choc radiatif [Drake, 2007], visible sur la Figure 22 entre 200 km et 300 km.

2.6 Différents régimes de formation d'ondes radiatives

2.6.1 Influence de la température initiale sur la position du front

Un paramètre n'apparaissant pas explicitement dans la solution analytique de position du front radiatif (2.24) est la température initiale du plasma T_0 . Cependant, celle-ci joue un rôle primordial dans l'allure du profil de température de l'onde radiative. En effet, plus T_0 est élevée et moins les gradients de température seront forts, ce qui implique que le front radiatif sera moins marqué. Cela peut alors provoquer un aplatissement du profil de température, et même une disparition du front de conduction radiative dans les cas les plus extrêmes. La question qui se pose est de savoir si des variations de ce paramètre peuvent entraîner des modifications de la vitesse du front radiatif. Pour s'assurer de la possibilité de fixer librement cette température initiale de plasma, nous avons effectué plusieurs simulations de la situation typique développée dans la section précédente en la faisant varier, de $T_0 = 1 \text{ eV}$ à $T_0 = 50 \text{ eV}$. Les résultats sont présentés sur la Figure 23.

Dans un premier temps, on constate que pour des températures initiales relativement faibles par rapport à celle de la source $T_S = 400 \text{ eV}$, les écarts sont négligeables ($\sim 1\%$). Cette observation est valable pour des températures inférieures ou égales à 10 eV . Ensuite, comme nous le constatons sur la Figure 23, lorsque l'on se rapproche de valeurs supérieures à un dixième de la température source, les vitesses de front commencent à augmenter légèrement. Cette observation est à prendre avec précaution, car la position du front radiatif est de plus en plus difficile à obtenir lorsque les gradients de température diminuent. Pour des températures d'environ 50 eV , les écarts avec la situation à 1 eV restent peu importants, autour de 5% pour des temps longs. De plus, ajoutons que cela ne modifie donc que très peu la dynamique des ondes

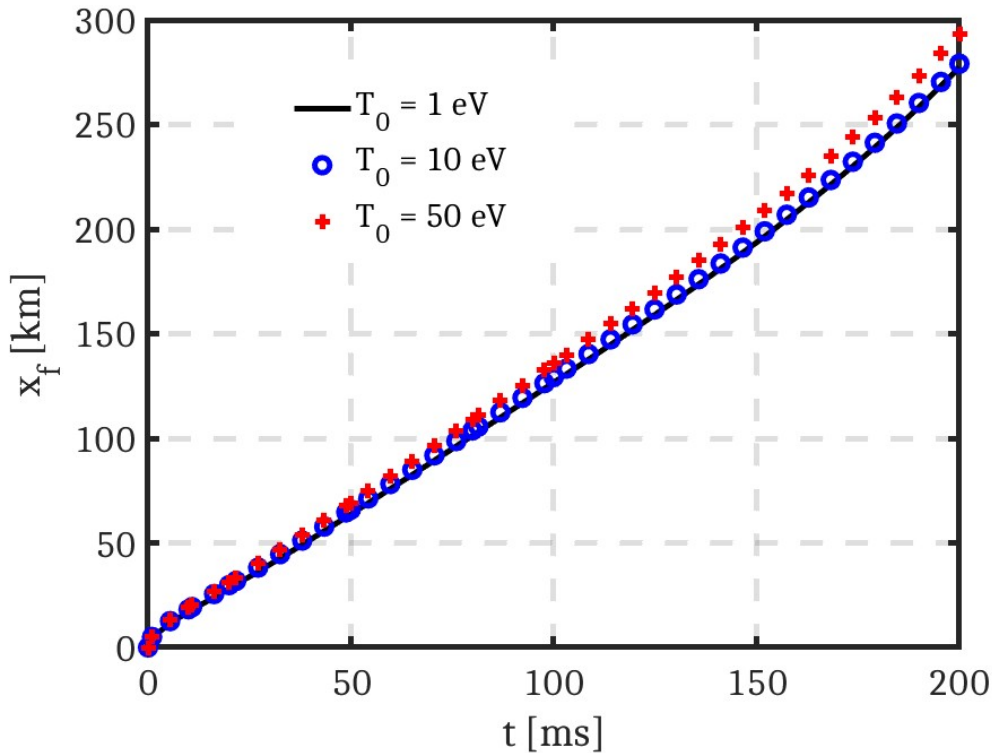


FIGURE 23 – Évolution temporelle des positions de fronts radiatifs $x_f(t)$ représentant en traits pleins noirs le cas $T_0 \approx 1$ eV, en ronds bleus le cas $T_0 \approx 10$ eV, et en croix rouges le cas $T_0 \approx 50$ eV.

radiatives, et plus particulièrement les mécanismes de compression ou de séparation hydrodynamique. En augmentant la vitesse du front, et en diminuant le gradient de pression proche de la condition aux limites, il est simplement possible de repousser légèrement les temps caractéristiques d'apparition de ces phénomènes, respectivement t_{comp} et t_{sep} . De manière générale, dans la suite de l'étude, nous considérerons que la température initiale du plasma T_0 est suffisamment faible devant la température de la source pour ne pas modifier la dynamique attendue ainsi que la position du front radiatif en régime supersonique.

Globalement, la plus grande influence de la température initiale T_0 est la forme de l'onde radiative. En effet, elle modifie la structure du gradient de température dans la tête de l'onde radiative. Notons que cette température peut varier selon le flux persistant émis par l'étoile à neutrons ainsi que les mécanismes de refroidissement au sein du disque. Observons alors comment des variations de ce paramètre influent sur des profils spatiaux de température et densité des ondes radiatives. Nous présentons des simulations effectuées pour les différentes valeurs de T_0 sur la Figure 24.

Comme on peut le constater, les profils de température ne diffèrent que très peu entre les deux premiers cas, pour des températures relativement basses par rapport à la température source. Dès lors que la température initiale du milieu augmente trop fortement, pour le cas $T_0 = 50$ eV par exemple, le profil de température commence à être fortement modifié. La physique de propagation de l'onde radiative supersonique est alors modifiée par une baisse des gradients de température en amont du front pour le

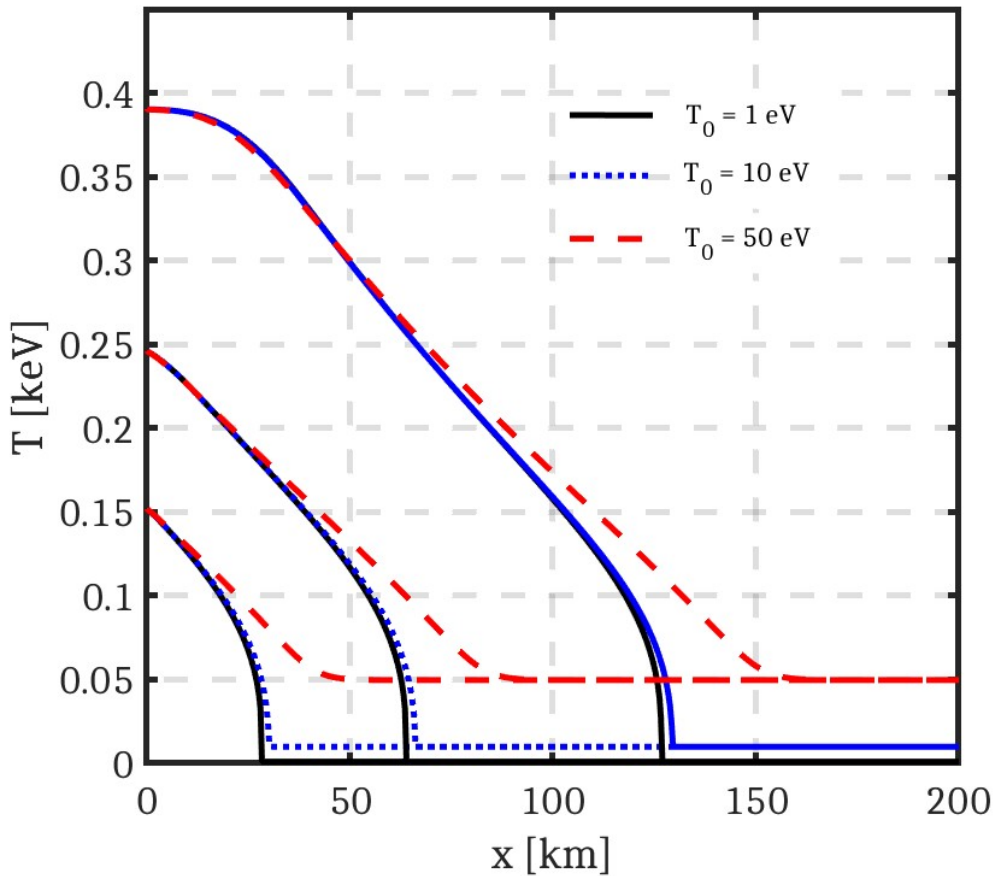


FIGURE 24 – Comparaison des profils spatiaux de température pour les différentes températures initiales $T_0 = 1$ eV (traits pleins noirs), 10 eV (pointillés bleus), 50 eV (tirets rouges).

cas à $T_0 = 50$ eV par rapport à ceux où $T_0 = 1$ eV et $T_0 = 10$ eV. Dans la suite de ce manuscrit, nous considérerons que les simulations peuvent être menées à des températures initiales T_0 arbitrairement basses devant la température source du système, ce paramètre étant peu contraint par les modèles théoriques et données observationnelles à disposition. Nous verrons dans les prochains chapitres que cette hypothèse est nécessaire pour pouvoir comparer des situations aux échelles astrophysique et de laboratoire. En se permettant de faire varier ce paramètre sur une plage importante de valeurs, nous gardons également une certaine généralité dans notre modélisation.

2.6.2 Deux exemples de simulations numériques

Les résultats présentés dans la section 2.5 sont typiques d'un sursaut X intense irradiant les régions internes d'un disque d'accrétion. Ils montrent que des ondes radiatives supersoniques peuvent exister dans de telles situations. Cependant, comme nous l'avons vu précédemment, il existe d'autres régimes et échelles temporelles de propagation de ces ondes dans le cadre de notre étude. Dans cette section, nous allons observer un peu plus en détails les résultats de simulation de RAMSES-RT dans ces régimes et parcourir les différents phénomènes physiques que l'on peut rencontrer. En particulier, nous nous placerons

dans deux régimes physiques que l'on peut qualifier de "régime limite" pour le modèle supersonique, à savoir lorsqu'une séparation hydrodynamique quasiment immédiate a lieu, ou lorsque la compression du système liée à \mathbb{P}_{rad} est très forte dès les premiers instants de propagation énergétique.

2.6.3 Une séparation hydrodynamique rapide

Le premier exemple correspond à l'irradiation d'une région à la densité $\rho_0 = 10^{-1} \text{g.cm}^{-3}$ par un sursaut de température $T_S = 1 \text{ keV}$ considérée constante sur l'intervalle temporel observé. Notons que ce résultat n'est valable que pour des durées inférieures ou égales à quelques millisecondes, car très inférieures à l'échelle temporelle de variation des sursauts X étudiés. Ce système se situe donc dans une zone de temps de séparation hydrodynamique très faible ($t_{sep} \simeq 0.03 \text{ ms}$), ce qui indique que le régime supersonique ne devrait exister que pour des durées particulièrement courtes ($\leq 0.03 \text{ ms}$) par rapport à l'échelle temporelle du sursaut X. Les simulations numériques sont menées dans les mêmes conditions que celles présentées dans les sections précédentes, en prenant un maillage donné par $\Delta x \simeq 2 \text{ cm}$. Les résultats sont présentés sur les Figure 25 a) et b).

Cette simulation présente une séparation hydrodynamique immédiatement provoquée par l'accumulation rapide ($t_{sep} \simeq 0.03 \text{ ms}$) de perturbations acoustiques près du front radiatif par rapport à la situation typique évoquée dans la section précédente. Après seulement 0.5 ms , le choc de séparation est déjà quelques dizaines de mètres en avance par rapport au front radiatif, provoquant une séparation claire et visible sur les profils de température en figure 25 a), sous la forme d'un plateau. Sur la figure b), nous pouvons observer la propagation du choc à une vitesse plus grande que celle du front radiatif, tendant à étendre la zone de plateau de température.

2.6.4 Une compression radiative du disque

Dans un tout autre régime ($R < 0.1$), considérons un système de densité $\rho_0 = 10^{-2} \text{g.cm}^{-3}$ irradié par un sursaut de température $T_S = 3 \text{ keV}$ également prise constante sur un intervalle temporel de 1 ms . Pour cette situation, on trouve un temps de séparation hydrodynamique de l'ordre de 10^{-2} s , mais une pression radiative $\mathbb{P}_{rad} \sim 100 \times P_{th}$. Dans ce système, on s'attend alors à observer une intense compression du milieu dès les premiers instants du sursaut, produite par le gradient de pression imposé en $x = 0$. Les simulations numériques sont menées dans les mêmes conditions que celles présentées dans les sections précédentes, en prenant un maillage donné par $\Delta x \simeq 15 \text{ cm}$. Les résultats sont présentés sur les Figures 25 c) et d).

Pour le second exemple (Figures 25 c) et d)), une compression du système se déroule de manière extrêmement rapide, soufflant les zones du plasma les plus proches du sursaut X. Ainsi, le profil spatial de température prend une forme très marquée par rapport au cas précédent. En effet, la zone soufflée par la pression radiative devient optiquement mince, avec des densités extrêmement faibles atteignant une limite numérique de $10^{-10} \text{g.cm}^{-3}$ dans les régions supposées vides. Les photons se déplacent donc librement du bord $x = 0$ jusqu'au front de densité où le mécanisme de conduction radiative reprend le dessus. Au bout de $t = 1 \text{ ms}$, on constate d'ailleurs l'apparition d'un profil typique d'onde radiative entre 6.5 km et 7.5 km , correspondant à la position du front radiatif. Notons que le rapport de compression est

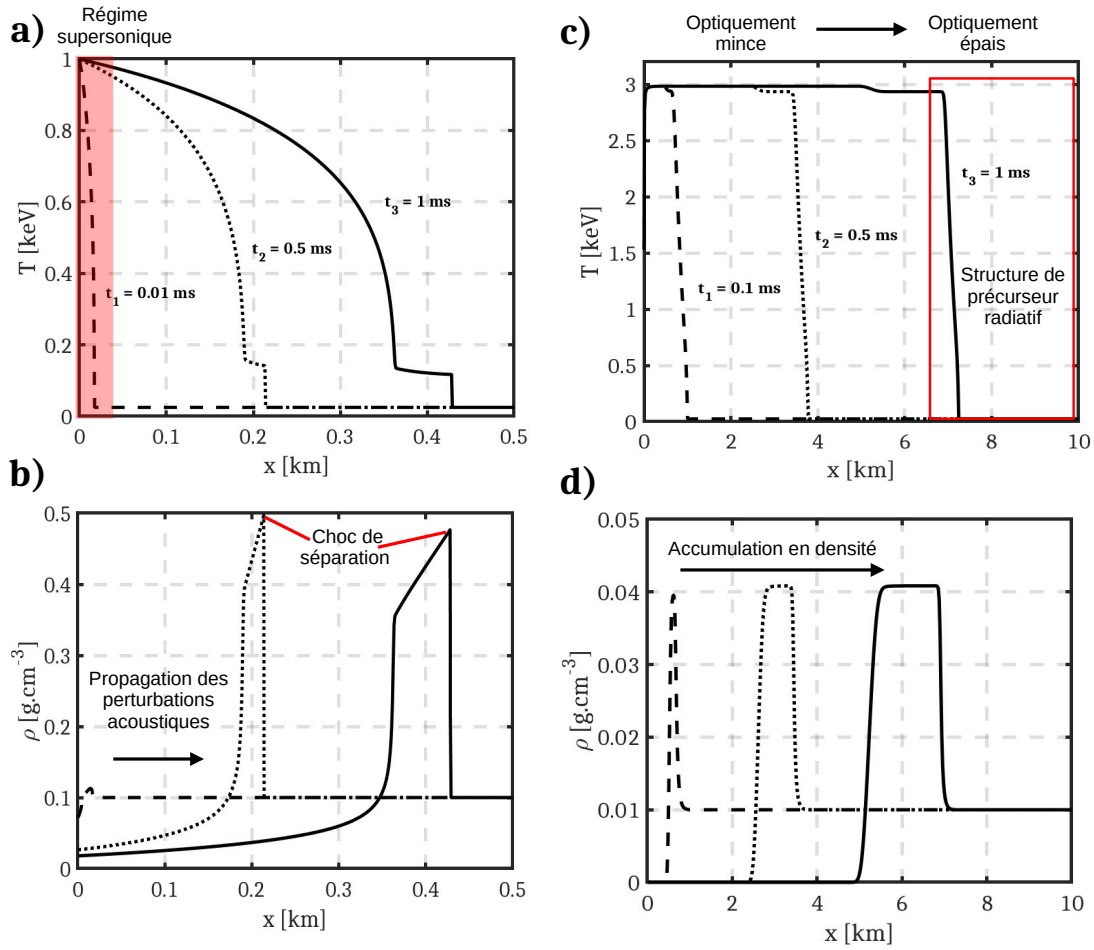


FIGURE 25 – Sur les Figures a) et b) sont respectivement représentés les profils spatiaux de température et densité pour une densité initiale de matériau $\rho_0 = 0.1 \text{ g.cm}^{-3}$ et une température source $T_S = 1 \text{ keV}$, obtenus à différents temps $t_1 = 0.01 \text{ ms}$, $t_2 = 0.5 \text{ ms}$, et $t_3 = 1 \text{ ms}$, à l'aide de simulations d'hydrodynamique radiative RAMSES-RT. De la même façon, en figures c) et d) sont respectivement représentés les profils spatiaux de température et densité pour une densité initiale de matériau $\rho_0 = 0.01 \text{ g.cm}^{-3}$ et une température source $T_S = 3 \text{ keV}$ obtenus à différents temps $t_1 = 0. \text{ ms}$, $t_2 = 0.5 \text{ ms}$, et $t_3 = 1 \text{ ms}$, à l'aide de simulations dynamiques RAMSES-RT.

fixe, de valeur $\rho/\rho_0 \approx 4$ (correspondant à un choc fort pour un gaz parfait) dû à la température supposée constante durant le faible intervalle temporel simulé.

Que ce soit dans le cas d'une compression radiative instantanée du milieu, ou dans celui de l'apparition d'une séparation hydrodynamique tout aussi rapide, RAMSES-RT permet de suivre la réponse dynamique du système au rayonnement intense du sursaut X appliqué en $x = 0$. De manière générale, RAMSES-RT a donc permis de simuler la propagation d'ondes radiatives supersoniques au sein des régions étudiées, ainsi que la réponse hydrodynamique de ces systèmes dans divers régimes physiques. En particulier, nous avons pu montrer que le régime supersonique était atteint sur des échelles temporelles proches de celle du

sursaut dans des cas typiques de régimes dits intermédiaires. Ces régimes intermédiaires se situent entre faibles nombres de Mihalas et temps de séparation élevés, et sont donc ceux qui permettront d'étudier les ondes radiatives dans nos systèmes, sur l'échelle temporelle de montée d'un sursaut.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons pu démontrer que, sous certaines conditions, l'interaction entre un sursaut X de type I et un disque d'accrétion donne lieu à la naissance et à la propagation d'ondes radiatives au sein de ce dernier, modifiant ainsi sa structure et ses conditions thermodynamiques. Dans le cas de notre modèle, un ensemble de régimes ont pu être étudiés, montrant la richesse de phénomènes pouvant se produire dans ces systèmes selon les conditions thermodynamiques imposées. L'approche suivie dans ce chapitre peut, de plus, être généralisée à toute interaction entre rayonnement X intense et un quelconque modèle de disque, quelles que soient ses caractéristiques en termes d'équations d'état et lois d'opacité du moment que le régime de diffusion est atteint. Il est cependant nécessaire de mettre en perspective ces résultats purement théoriques et numériques. Une des possibilités est de chercher à reproduire le phénomène physique de propagation énergétique par des ondes radiatives dans des milieux à l'échelle du laboratoire. Des données expérimentales comparables aux simulations astrophysiques RAMSES-RT pourront alors permettre de valider les résultats présentés dans ce chapitre.

CHAPITRE 3

Lois d'échelles et propriétés de similarité des ondes radiatives

Sommaire

3.1	Introduction	64
3.2	Les ondes radiatives en laboratoire	64
3.2.1	Une configuration expérimentale typique pour la production d'ondes radiatives	64
3.2.2	De nombreuses études expérimentales	65
3.2.3	Un panel d'ondes radiatives	67
3.3	De l'astrophysique au laboratoire : Similitude et lois d'échelle	69
3.3.1	Similitude et lois d'échelle, piliers de l'astrophysique de laboratoire	69
3.3.2	Détermination des lois d'échelle des ondes radiatives supersoniques	70
3.3.3	Exemple d'application : De l'astrophysique au laboratoire	73
3.4	Les limites de la similitude : vers les concepts de ressemblance et d'analogie	77
3.4.1	Sur les problématiques d'étude des ondes radiatives en astrophysique de laboratoire	77
3.4.2	Vers des transformations généralisées basées sur des ressemblances et analogies	80
3.5	Conclusion	82

3.1 Introduction

Les installations de puissance présentes à travers le monde permettent à présent d'atteindre des densités d'énergie proches de celles observées à l'échelle astrophysique. L'utilité d'expériences d'astrophysique de laboratoire repose sur le développement de lois d'échelle et propriétés de similarité [Ryutov *et al.*, 1999; Falize *et al.*, 2011a] des systèmes physiques étudiés. Ces lois d'échelle, piliers de l'astrophysique de laboratoire actuelle, permettent de tisser des liens théoriques entre les échelles de l'astrophysique et du laboratoire. Ces concepts, bien qu'ayant contribué à l'essor des expériences laser, sont soumis à un ensemble de contraintes à confronter aux possibilités expérimentales actuelles. Le développement de ces outils permet de mieux appréhender la physique des systèmes auxquels ils sont appliqués, et, parfois, de mener à des lois d'échelle dont les contraintes sont physiquement et expérimentalement réalisables. Notons que notre degré d'avancement technologique permet à présent d'envisager un agrandissement conséquent du catalogue de systèmes astrophysiques reproductibles à l'échelle du laboratoire.

L'objectif de ce chapitre est de développer les transformations de similitude associées aux ondes radiatives étudiées dans ces travaux, et d'explorer l'espace des expériences similaires envisageables. Dans une première partie, nous présentons une synthèse exhaustive des différentes conditions expérimentales atteintes lors de la production d'ondes radiatives à l'aide des lasers de puissance. Dans un second temps, nous développons et appliquons les lois d'échelle associées au modèle théorique d'ondes radiatives en régime supersonique. Pour cela, nous présenterons le code de simulations numériques FCI2 utilisé pour simuler les systèmes de laboratoire. Cela conduira, dans une dernière partie, à analyser les limites des concepts de similitude pour l'étude des ondes radiatives, mettant ainsi en lumière la problématique principale à laquelle ces travaux tenteront de répondre : comment aller au-delà de la similitude ?

3.2 Les ondes radiatives en laboratoire

3.2.1 Une configuration expérimentale typique pour la production d'ondes radiatives

Comme nous avons pu le voir au chapitre précédent, c'est le chauffage intense d'un milieu optiquement épais qui produit une onde radiative supersonique. Ce processus physique de propagation d'énergie n'est pas cantonné à des systèmes astrophysiques. Grâce à l'avènement des lasers de puissance, il est en effet désormais possible de créer des sursauts X intenses à l'échelle du laboratoire. En particulier, l'irradiation d'une cavité de conversion (*hohlraum*) en or permet la production d'un important flux X dont les températures de corps noir peuvent à présent atteindre environ 300 eV [Moore *et al.*, 2015]. Ce rayonnement se propage dans un tube contenant un matériau qui, le plus souvent, est une mousse à basse densité [Cohen *et al.*, 2020]. Une illustration d'un dispositif expérimental typique est présentée sur la Figure 26.

Contrairement à notre système astrophysique idéalisé, des effets parasites propres à l'échelle du laboratoire peuvent modifier la propagation d'ondes radiatives au sein du tube. En particulier, l'absorption du rayonnement au niveau des parois de ce tube peut modifier la structure du front radiatif, en le ralentissant à ses extrémités, comme schématisé sur la Figure 26. Cela conduit à des ondes radiatives courbées [Hurricane et Hammer, 2006; Cohen et Heizler, 2018] s'éloignant de la configuration étudiée dans le

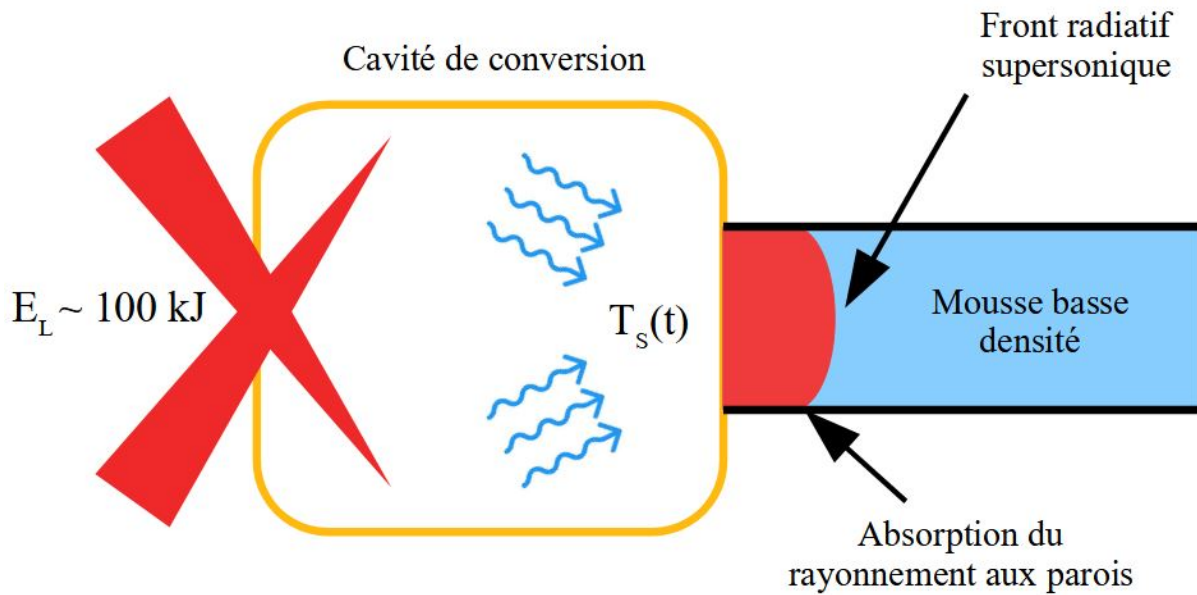


FIGURE 26 – Schéma 2D d'expérience typique menant à la création d'ondes radiatives en laboratoire, où l'on a noté l'ordre de grandeur des énergies laser (E_L) maintenant accessibles sur les installations lasers les plus énergétiques.

chapitre précédent. À l'échelle du laboratoire, la transition entre les phases supersonique et subsonique de propagation des ondes radiatives peut également être mesurée [Courtois *et al.*, 2021]. Cette étape de séparation hydrodynamique peut intervenir sur des échelles temporelles si courtes comparées à la durée de l'expérience de l'ordre de 10^{-8} s qu'il peut devenir impossible d'étudier la phase supersonique de l'onde.

3.2.2 De nombreuses études expérimentales

Depuis les débuts de l'utilisation généralisée de lasers de puissance, un grand nombre d'expériences de production d'ondes radiatives ont été menées, en particulier, dans le régime supersonique qui nous intéresse. En pratique, on cherche à identifier s'il est possible de créer des ondes radiatives supersoniques susceptibles de permettre la modélisation de l'interaction sursaut-disque simulée dans le chapitre 2. En parcourant les différentes avancées expérimentales effectuées au cours des dernières années, nous pourrions obtenir un premier aperçu de l'existence de matériaux de laboratoire et configurations expérimentales répondant à cette problématique.

Très tôt, des ondes radiatives supersoniques ont été observées dans du Xenon [Bozier *et al.*, 1986], se propageant devant un choc créé par un piston accéléré par laser. Cependant, la première observation expérimentale d'ondes radiatives générées par laser dans des cibles solides fut l'œuvre de Sigel *et al.* [1990]. L'onde radiative se propageait alors dans une mince feuille d'or ($\sim 1 \mu\text{m}$) sur une échelle de temps extrêmement courte, de l'ordre de la nanoseconde, pour des températures de cavité de l'ordre de 220 eV. Cette première étude expérimentale a permis de poser les bases des campagnes qui ont suivi. En particulier, dans les années 1990, Afshar Rad *et al.* [1994] et Massen *et al.* [1994] publient les premiers

résultats concernant la propagation d'ondes radiatives supersoniques dans des mousses à basse densité. Les expériences d'[Afshar Rad et al. \[1994\]](#) ont été réalisées sur l'installation laser VULCAN [[Ross et al., 1981](#)], avec des mousses basse densité ($\rho_0 \simeq 30 \text{ mg.cm}^{-3}$) de CHOCl et pour une température de l'ordre de 140 eV. Dans cette expérience, la position du front en température coïncide avec la position relevée du front d'ionisation. De plus, on constate que les perturbations hydrodynamiques ne prennent pas le pas sur la propagation d'énergie, conduisant à l'observation d'un régime supersonique. Notons enfin que les ondes radiatives sont ici présentées comme des fronts d'ionisation, bien que les deux phénomènes se déroulent simultanément.

Les expériences de [Massen et al. \[1994\]](#), réalisées sur GEKKO-XII avec des mousses de CHPb ($\rho_0 \sim 80 \text{ mg.cm}^{-3}$) ont permis d'observer le même type d'ondes radiatives à l'aide de matériaux plus adaptés. En effet, l'utilisation d'un dopant de numéro atomique Z élevé permet d'obtenir une épaisseur optique τ plus importante, et donc de respecter d'autant plus la condition de limite diffusion. On note que la configuration expérimentale de [Massen et al. \[1994\]](#) correspond, sur le principe, à celle présentée sur la Figure 26, et que c'est celle qui sera reprise par la suite dans de nombreuses expériences de propagation d'ondes radiatives. En particulier, sur l'installation OMEGA, [Back et al. \[2000a,b\]](#) ont mené des expériences similaires sur des mousses de SiO_2 et de Ta_2O_5 qui restent encore aujourd'hui à la base de toutes les études d'ondes radiatives en laboratoire. Ces mousses subissent un rayonnement allant de 85 eV à 190 eV, permettant dans tous les cas d'observer le régime supersonique voulu. Sur la même installation laser, nous pouvons également citer les expériences de [Keiter et al. \[2008\]](#) visant à étudier l'effet d'inhomogénéités dans des mousses de type CHOAu ($\rho_0 \simeq 45 - 70 \text{ mg.cm}^{-3}$).

Au début des années 2000, l'installation laser de puissance Shengguang II a permis la création d'ondes radiatives se propageant dans des mousses pures de CH [[Xu et al., 2006](#); [Ji Yan et al., 2010](#)] ou dopées avec du cuivre [[Jiang et al., 2005](#)]. Les températures de cavité atteintes dans ces expériences sont typiquement de l'ordre de 160 eV, et permettent d'observer différents régimes d'ondes radiatives. Par exemple, [Xu et al. \[2006\]](#) étudient les différents comportements de groupes de photons pour lesquels le milieu est optiquement fin ou optiquement épais. En particulier, des temps de propagation différents sont observés entre ces deux groupes pour ces expériences dont l'épaisseur optique typique était de l'ordre de $\tau \sim 1$, pour des densités de CH de l'ordre de $\rho_0 = 0.05 \text{ g.cm}^{-3}$. Dans des conditions beaucoup plus denses ($\rho_0 = 0.16 \text{ g.cm}^{-3}$), [Ji Yan et al. \[2010\]](#) ont obtenu des épaisseurs optiques bien plus importantes ($\tau \sim 10$), mais ont, en conséquence, perdu l'hypothèse de régime supersonique. Dans ces expériences, on observe un profil typique de séparation hydrodynamique où une onde de choc se forme en aval du front radiatif et se propage plus rapidement que ce dernier.

Enfin, l'avènement des installations laser de type mégajoule (NIF, LMJ) a permis l'obtention de températures de cavité typiques de plus en plus importantes (autour de 300 eV), et donc la possibilité d'étudier des régimes de plus en plus diversifiés de façon systématique. Les expériences "Pléiades" (citons par exemple les expériences de [Guymer et al. \[2015\]](#) et [Moore et al. \[2015\]](#)) menées sur l'installation NIF ont permis d'atteindre des nombres de Mach radiatif (donné par l'équation (2.22)) extrêmement élevés ($\text{Ma} > 10$) pour des milieux optiquement épais ($\tau \sim 4$), à l'aide des mousses de CHCl et SiO_2 à des densités $\rho_0 \simeq 0.1 \text{ g.cm}^{-3}$. Parmi les expériences menées sur l'installation du LMJ, [Courtois et al. \[2021\]](#) ont récemment mis en évidence la transition entre les régimes supersoniques et subsoniques d'ondes

radiatives se propageant dans des mousses de CH₂Br à basse densité ($\rho_0 = 0.05 \text{ g.cm}^{-3}$).

3.2.3 Un panel d'ondes radiatives

En quelques dizaines d'années les expériences se sont ainsi succédées. Des disparités existent entre ces expériences, que ce soit au niveau de leurs durées, leurs dimensions spatiales, leurs conditions thermodynamiques, ou encore les régimes physiques atteints. De manière générale, ce panorama d'expériences donne une idée précise des configurations expérimentales caractéristiques pour l'étude de la propagation d'ondes radiatives. Les différentes situations présentées dans la section précédente constituent donc un étalon des possibilités expérimentales actuellement offertes par les installations laser de puissance. Les différents régimes et conditions physiques obtenus lors de certaines de ces expériences sont répertoriés au sein du Tableau 3.1.

Parcourons ce tableau de la gauche vers la droite afin de déterminer les ordres de grandeur typiques des expériences présentées. Notons que des contraintes technologiques apparaissent en termes d'échelles spatiales et temporelles. En effet, les ondes radiatives se propagent sur une échelle temporelle typique de 1 à 10 ns, dans des mousses de l'ordre du dixième de mm jusqu'à quelques mm. De plus, dans certaines configurations, comme celle de [Courtois et al. \[2021\]](#), le temps de séparation hydrodynamique est inférieur à la durée de l'expérience ($t \simeq 7 \text{ ns}$), ce qui conduit à des régimes supersoniques encore plus courts¹. Ces échelles caractéristiques proviennent en partie du choix en densité de matériaux ρ_0 et en température de la source T_S . Globalement, les densités initiales ρ_0 varient entre quelques dizaines de mg.cm^{-3} jusqu'à une centaine de mg.cm^{-3} . La limite basse de cette densité s'explique par le fait que l'on cherche à obtenir des systèmes optiquement épais au rayonnement incident. Les libres parcours moyens des photons λ_R diminuant lorsque la densité du milieu augmente², l'épaisseur optique peut alors diminuer jusqu'à des valeurs inférieures à 1, brisant l'hypothèse de diffusion et la validité du modèle (2.19). La limite haute de ρ_0 s'explique elle par la diminution du temps de séparation hydrodynamique lorsque la densité du milieu augmente [[Garnier et al., 2006](#)], ce qui aurait pour conséquence de briser l'hypothèse supersonique sur des temps caractéristiques bien plus faibles que la durée caractéristique de l'expérience, comme observé dans les expériences de [Ji Yan et al. \[2010\]](#). Enfin, les températures des sources X varient globalement de 100 eV à 300 eV, majoritairement limitées par les énergies laser disponibles sur les différentes installations.

Les régimes physiques atteints lors de ces expériences sont caractérisés par les nombres sans dimension Bo et R présentés dans le tableau 3.1. Les nombres de Boltzmann obtenus sont tous inférieurs à l'unité, indiquant que la conduction radiative est bien le mécanisme privilégié de transport de l'énergie. Cependant, ces valeurs sont limitées autour de 10^{-2} au minimum par les caractéristiques de matériaux et énergies laser E_L actuellement disponibles. Les nombres de Mihalas sont toujours largement supérieurs à l'unité, avec quelques dizaines pour les valeurs les plus basses obtenues sur OMEGA [[Back et al., 2000a,b](#)] et le NIF [[Guymer et al., 2015](#); [Moore et al., 2015](#)]. Ainsi, il n'est possible d'obtenir que des

1. Notons que dans ce cas particulier, l'expérience avait été dimensionnée de façon à obtenir une transition au régime subsonique. Dans notre cas, nous chercherons à éviter ce phénomène sur la durée de l'expérience.

2. La forme de cette dépendance dépend fortement de la nature du milieu considéré, comme le montrent par exemple les approximations théoriques d'opacité donnés par [Cohen et al. \[2020\]](#).

Références	Installation	Matériau	L [mm]	t [ns]	ρ_0 [mg.cm ⁻³]	E_L [kJ]	T_R [eV]	Bo	R	Ma	τ
Afshar Rad et al. [1994]	VULCAN	CHOCI	0.1	1	50	~ 1	140	0.19	165	2.65	2
Massen et al. [1994]	GEKKO XII	CHPb	1 – 3	1	80	2.5	150	0.21	200	3.1	4
Back et al. [2000a,b]	OMEGA	SiO ₂ /Ta ₂ O ₅	0.25 – 1	4	50/40	10	190	0.05	45	2.5	6
Jiang et al. [2005]	SG-II	CH/CHCu	0.3	5	50	16	140	0.2	170	5.7	3
Xu et al. [2006]	SG-II	CH	0.4	3	50	16	160	0.14	110	3	4
Ji Yan et al. [2010]	SG-II	CH	0.3	2	160	1.5	160	0.43	345	1	10
Guymer et al. [2015]	NIF	CHCI	2.8	6	100 – 125	370	250	0.06	37	8	4.5
Moore et al. [2015]	NIF	CHCI/SiO ₂	2.8	7	100 – 125	370	300	0.045	30	6.25	6
Courtois et al. [2021]	LMJ	CHObR	2	10	50	22	170	0.12	90	2	10

TABLEAU 3.1 – Récapitulatif des paramètres caractéristiques provenant des expériences d'ondes radiatives supersoniques citées précédemment. Dans l'ordre, nous avons indiqué la longueur de la mousse étudiée L , le temps d'acquisition des données t , la densité initiale du matériau ρ_0 , l'énergie laser utilisée pour la conversion en rayonnement X notée E_L , la température maximale diagnostiquée de la source X notée T_R , les nombres de Mihalas R et de Boltzmann Bo donnés respectivement par les relations (2.14-2.13), le nombre de Mach radiatif Ma donné par l'équation (2.22) et l'épaisseur optique du milieu donnée par la relation (1.5). Les différentes valeurs de nombres sans dimension Bo, R et Ma sont calculées aux températures T_R , tandis que l'épaisseur optique est un ordre de grandeur obtenu pour chaque expérience.

régimes faiblement radiatifs dans le sens où la densité d'énergie radiative du système est négligeable devant sa densité d'énergie interne ($R \gg 1$). Ceci est principalement dû au fait que les températures atteintes sont au maximum d'environ 300 eV. Cependant, nous avons vu au chapitre précédent, à l'aide de l'équation (2.16) que des densités moins importantes permettaient d'abaisser la température requise pour avoir un nombre de Mihalas unitaire³. Le problème se déplace alors sur le libre parcours moyen des photons qui, lors d'une baisse de densité ou d'une augmentation en température, tend à augmenter fortement, et peut même dépasser l'échelle de longueur caractéristique de l'expérience. Dans ce cas, l'hypothèse optiquement épaisse est perdue. On s'aperçoit que lors du dimensionnement d'une expérience, il est donc particulièrement important de choisir des caractéristiques de température et densité en adéquation avec les équation d'état et lois d'opacité des matériaux utilisés. Enfin, notons que les valeurs des nombres de Mach radiatif et épaisseurs optiques permettent de caractériser le régime statique diffusif que l'on cherche à observer. De manière générale, le nombre de Mach radiatif varie entre 1, qui est la valeur limite de l'hypothèse statique (au temps de séparation hydrodynamique t_{sep}), et une dizaine. Il en va de même pour l'épaisseur optique τ , pour laquelle la valeur de 1 signifie que le milieu n'est plus optiquement épais.

Les expériences décrites dans le Tableau 3.1 ont ainsi permis de caractériser les paramètres typiques nécessaires à l'obtention d'ondes radiatives supersoniques en laboratoire. La diversité de matériaux utilisés implique une richesse de comportements en termes d'équations d'état et de lois d'opacité. De manière générale, on observe deux types de mousses : les mousses de plastique (CH) dopées à l'aide d'un élément de Z plus élevé (Cl, Cu, Br), et des mousses de Z plus élevé telles que le SiO_2 et le Ta_2O_5 . Ce sont ces dernières qui permettent d'obtenir les régimes les plus radiatifs. Concrètement, cela s'explique par leur nature plus diffuse, qui permet d'obtenir des épaisseurs optiques conséquentes ($\tau \sim 6$) pour des densités moindres ($\rho_0 \sim 40 - 50 \text{ mg.cm}^{-3}$), comme on peut le voir pour les expériences de [Back et al. \[2000a,b\]](#) par exemple, où $Bo \approx 0.05$. Ces mousses à basses densités conduisent en effet à des nombres de Mihalas plus faibles à température source équivalente. De manière générale, toutes ces données ont aidé à fixer le cadre à respecter pour imaginer une expérience de production d'ondes radiatives supersoniques, aussi bien en termes d'échelles et régimes physiques, qu'en termes de matériaux disponibles.

3.3 De l'astrophysique au laboratoire : Similitude et lois d'échelle

3.3.1 Similitude et lois d'échelle, piliers de l'astrophysique de laboratoire

Nous cherchons à étudier expérimentalement la propagation d'ondes radiatives supersoniques à l'échelle astrophysique dans des milieux dont les descriptions théoriques et les simulations numériques ne peuvent être validées observationnellement. Dans cette optique, nous avons proposé la possibilité de s'intéresser à la propagation de telles ondes à l'échelle du laboratoire à l'aide des lasers de puissance. Maintenant que les conditions expérimentales typiques requises ont été détaillées, nous souhaitons obtenir les outils théoriques permettant de lier quantitativement les systèmes évoluant à ces deux échelles, de quelques kilomètres à quelques millimètres. Dans ce genre de situations, une grande partie de la communauté d'astrophysique de laboratoire s'est alors tournée vers la détermination de lois d'échelle et

3. Bien que cette équation (2.16) ait été obtenue à l'aide d'une hypothèse de gaz parfait, la dépendance décroissante en densité est conservée pour des matériaux typiques de laboratoire.

de propriétés de similarité des écoulements astrophysiques, de l'hydrodynamique [Ryutov *et al.*, 1999] à l'hydrodynamique radiative [Falize *et al.*, 2011b], en passant par la magnétohydrodynamique [Ryutov *et al.*, 2000b; Biskamp et Müller, 2000]. Ces concepts reposent sur le principe de similitude [Buckingham, 1915] qui consiste à créer un lien explicite entre un même phénomène physique exprimé à des échelles différentes.

Détaillons maintenant en quoi consistent de telles lois d'échelles. La base de ces transformations est d'effectuer un changement d'échelle sur les variables caractérisant le système physique étudié. Ces mises à l'échelle correspondent en réalité à l'action de transformations d'homothétie sur ces variables. Notons qu'à chaque transformation de variable Y est associé un paramètre que l'on note a_Y , de telle sorte que l'on puisse écrire la relation suivante :

$$\hat{Y} = a_Y Y \quad (3.1)$$

où \hat{Y} est la nouvelle variable transformée à une échelle différente. Dans ces travaux, les variables du type \hat{Y} seront principalement celles exprimées à l'échelle du laboratoire. L'application de telles transformations de changement d'échelle au modèle théorique étudié permet d'obtenir un nouveau système d'équations qui diffère du système originel par l'apparition de facteurs multiplicatifs dépendant explicitement des paramètres de transformation. Les systèmes sont alors déclarés similaires si ces transformations préservent la forme du système initial : c'est ce que l'on appelle des symétries d'invariance d'échelle. Réclamer une telle invariance conduit à fixer un ensemble de contraintes sur les paramètres des transformations de type (3.1). Ce sont les homothéties et leurs contraintes qui constituent ce que l'on appelle couramment des lois d'échelle. De plus, ces contraintes revêtent une signification physique particulièrement importante. Elles correspondent en effet à la conservation d'entités décrivant le régime physique dans lequel évoluent les systèmes. Celles-ci sont mathématiquement transcrites par la conservation des nombres sans dimension qui sont associés à la caractérisation de ces régimes, et qui proviennent de l'analyse dimensionnelle [Vaschy, 1892; Buckingham, 1914] du modèle théorique étudié. Sous réserve de l'existence de telles transformations, il est alors possible de créer des systèmes à deux échelles très distinctes mais évoluant de façon similaire.

3.3.2 Détermination des lois d'échelle des ondes radiatives supersoniques

Il existe plusieurs notions rattachées au principe de similitude et qui vont influencer la forme des lois d'échelle développées. En effet, en fonction du nombre de paramètres possiblement affectés par les homothéties de la forme (3.1), il est possible d'obtenir plus ou moins de liberté dans le redimensionnement du système de base. Dans cette partie, nous allons illustrer ces concepts dans le cas de la propagation d'ondes radiatives supersoniques, décrite par l'équation d'évolution (2.19), que l'on rappelle ici sous sa forme générale mono-dimensionnelle :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_0 e(\rho_0, T) + a_R T^4] = \frac{c}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_R(\rho_0, T) \frac{\partial a_R T^4}{\partial x} \right] \quad (3.2)$$

L'ensemble des six variables constituant le modèle théorique étudié sont : $x, t, \rho_0, T, e(T)$, et $\lambda_R(T)$. Ainsi,

la recherche de lois d'échelle du système décrit par l'équation (3.2) repose sur l'étude de l'invariance de celle-ci sous l'action des transformations suivantes :

$$\hat{x} = a_x x, \quad \hat{t} = a_t t, \quad \hat{\rho}_0 = a_\rho \rho_0, \quad \hat{T} = a_T T \quad (3.3)$$

$$\hat{e} = a_e e, \quad \hat{\lambda}_R = a_\lambda \lambda_R \quad (3.4)$$

où les six paramètres a_x , a_t , a_ρ , a_T , a_e et a_λ sont ce que l'on appelle les facteurs d'échelle associés respectivement aux variables x , t , ρ_0 , T , e et λ_R . Lorsque ces paramètres sont tous égaux à 1, on parle de transformation d'identité.

Dans un premier temps, si on choisit de ne redimensionner que les échelles spatiales et temporelle du système, on obtient seulement un paramètre libre que l'on choisit comme étant a_x . Cela permet d'écrire les lois d'échelle sous la forme :

$$\hat{x} = a_x x \quad \Rightarrow \quad \hat{t} = a_x^2 t \quad (3.5)$$

qui témoignent de la nature diffusive ($x_f \sim \sqrt{t}$) du système. Les autres variables, telle que la température par exemple, sont pour le moment invariante, ce qui signifie que les équation d'état et lois d'opacité sont strictement conservées.

En ajoutant un degré de liberté, nous arrivons au concept de similarité absolue [Falize *et al.*, 2009] où les grandeurs physiques macroscopiques du système initial sont mises à l'échelle. Ici, cela revient à autoriser un changement d'échelle sur la température T entre les deux systèmes. Les propriétés émanant de la microphysique des systèmes, et régissant le comportement interne des matériaux caractérisé par les fonctions $e(T)$ et $\lambda_R(T)$ conservent leur structure.

Lorsque ces propriétés microscopiques peuvent être mises à l'échelle également, nous pouvons parler de similarité globale. Dans cette dernière configuration, nous donnons un maximum de degrés de liberté aux transformations de changement d'échelle recherchées. Dans un premier temps, l'application des homothéties (3.3-3.4) au modèle (3.2) donne :

$$a_t \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \left[\frac{\hat{\rho}_0 \hat{e}}{a_\rho a_e} + \frac{a_R \hat{T}^4}{a_T^4} \right] = \frac{a_x^2 c}{3} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[\frac{\hat{\lambda}_R}{a_T^4 a_\lambda} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} a_R \hat{T}^4 \right] \quad (3.6)$$

En réclamant l'invariance du modèle théorique par ces homothéties, on obtient alors un ensemble de contraintes sur les paramètres de transformation, prenant la forme :

$$\frac{a_\rho a_e}{a_T^4} = 1, \quad \frac{a_x^2 a_\rho a_e}{a_t a_T^4 a_\lambda} = 1 \quad (3.7)$$

On dispose donc de six variables et deux contraintes, ce qui conduit à l'obtention de quatre degrés de liberté. À partir des contraintes (3.7), il est possible d'obtenir les lois d'échelle des ondes radiatives supersoniques, sous la forme générale :

$$\hat{x} = a_x x, \quad \hat{t} = a_t t, \quad \hat{\rho}_0 = a_\rho \rho, \quad \hat{T} = a_T T$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{e}}{e} = \frac{a_T^4}{a_\rho}, \quad \frac{\hat{\lambda}_R}{\lambda_R} = \frac{a_x^2}{a_t} \quad (3.8)$$

Les deux facteurs d'échelle a_e et a_{λ_R} sont donc contraints par le choix des quatre autres (a_x , a_t , a_ρ , a_T). Ces lois d'échelle permettent de lier quantitativement les différentes variables décrivant les ondes radiatives à différentes échelles.

Afin de conserver une certaine généralité tout en permettant l'obtention de résultats analytiques, on propose de considérer que la densité d'énergie interne $\rho_0 e(T)$ et le libre parcours moyen $\lambda_R(T)$ peuvent s'écrire sous la forme de lois de puissance sur les intervalles de température étudiés. Cette hypothèse est valide pour le système astrophysique du chapitre 2, mais également de manière assez générale pour les matériaux de laboratoire [Cohen *et al.*, 2020]. Cela permet d'écrire les fonctions $e(\rho_0, T)$ et $\lambda_R(\rho_0, T)$ sous la forme générale suivante :

$$e(\rho_0, T) = e(T) = e_0 T^\beta, \quad \lambda_R(\rho_0, T) = \lambda_R(T) = \lambda_0 T^\alpha \quad (3.9)$$

La recherche d'homothéties implique que la forme de ces fonctions se conserve entre les deux échelles considérées, ce qui permet d'écrire également :

$$\hat{e}(\hat{T}) = \hat{e}_0 \hat{T}^\beta, \quad \hat{\lambda}_R(\hat{T}) = \hat{\lambda}_0 \hat{T}^\alpha \quad (3.10)$$

Ainsi, les lois de comportement du système transformé sont aussi des lois de puissance de la température, d'exposants égaux au système initial. Cette contrainte est particulièrement importante et sera discutée plus en détails dans la suite.

En choisissant $\alpha = 0$ (processus Thomson) et $\beta = 1$ (gaz parfait) nous pouvons constater que nous obtenons les propriétés du système astrophysique décrit au précédent chapitre. Le redimensionnement des constantes e_0 et λ_0 a permis d'absorber la dépendance en densité initiale ρ_0 . Cela est seulement permis par le fait qu'elle soit considérée constante. Dans ce cas, on s'aperçoit que le paramètre a_ρ est lié aux transformations sur les paramètres e_0 et λ_0 . Concrètement, une homothétie sur la densité s'accompagne d'une contrainte sur le redimensionnement de ces constantes, ce qui ne permet pas d'ajouter un degré de liberté supplémentaire aux lois d'échelle recherchées. Ainsi, nous disposons de trois paramètres libres a_x , a_t et a_T pour ces transformations. Sous ces hypothèses, le modèle théorique (3.2) vérifie un ensemble de lois d'échelle correspondant à la limite statique des lois d'échelles développées par Falize *et al.* [2011b] pour des écoulements radiatifs. En utilisant les relations (3.8), on obtient ces transformations de changement d'échelle sous la forme suivante :

$$\frac{\hat{x}}{x} = a_x, \quad \frac{\hat{t}}{t} = a_t, \quad \frac{\hat{T}}{T} = a_T, \quad \Rightarrow \frac{\hat{e}_0}{e_0} = a_T^{4-\beta}, \quad \frac{\hat{\lambda}_0}{\lambda_0} = \frac{a_x^2}{a_t a_T^\alpha} \quad (3.11)$$

Il est intéressant de noter que, dans ce formalisme, c'est la liberté prise sur les transformations des constantes e_0 et λ_0 qui a permis l'obtention de trois paramètres libres. Si l'on se place dans le cadre du

concept de similitude absolue ($a_\lambda = a_e = 1$), nous disposons seulement des trois paramètres modifiables a_x , a_t , et a_T , mais du même nombre de contraintes sur ceux-ci, à savoir deux. Cela impose l'existence d'un unique paramètre libre pour les lois d'échelle définies par :

$$\frac{\hat{x}}{x} = a_x \quad \Rightarrow \quad \frac{\hat{t}}{t} = a_x^2, \quad a_T = 1 \quad (3.12)$$

Analyse physique des transformations

Nous venons de voir que, dans le cadre de la similitude globale, les transformations de changement d'échelle (3.8) impliquent de modifier les propriétés internes des systèmes en conservant toutefois la structure mathématique des lois d'état et d'opacité. On dispose donc de trois paramètres libres qui sont les facteurs d'échelle associés à l'espace x , au temps t , et à la température T . Le choix de ces paramètres contraint les relations sur les fonctions e et λ_R , comme nous l'avons vu dans l'équation (3.11). En pratique, cela peut limiter l'approche si la nature des matériaux disponibles en laboratoire ne correspond pas du tout à celle que l'on retrouve en astrophysique, une problématique dont nous discuterons dans la dernière section de chapitre. En plus de la nature des systèmes, les lois d'échelle (3.8) conduisent à la conservation de deux quantités, comme le montrent les relations (3.7). Il est possible de réécrire ces quantités sous la forme de nombres sans dimension, qui sont donc invariants par les transformations (3.3-3.4). Dans un premier temps, il est possible de construire un nombre sans dimension basé sur le modèle du nombre de Boltzmann donné par l'équation (2.13) introduit précédemment. On obtient l'invariant suivant :

$$I_1 = \frac{\rho_0 e(T) x}{\mathbb{F}_{rad} t} \quad (3.13)$$

Bien que, dans sa structure, le nombre I_1 corresponde à un nombre de Boltzmann comme celui introduit au chapitre 2, sa signification n'est pas strictement conservée⁴. En effet, la définition de I_1 fait intervenir une vitesse caractéristique par le rapport x/t . Dans le cas des ondes supersoniques, cette vitesse peut être la vitesse du front radiatif ou encore la vitesse du son locale. C'est cette dernière qui est souvent utilisée dans la littérature pour les ondes de Marshak. En utilisant la première quantité conservée dans les relations (3.7), on peut obtenir un second invariant qui est le nombre de Mihalas R , donné par :

$$I_2 = \frac{\rho_0 e(T)}{\mathbb{E}_{rad}} = R \quad (3.14)$$

Cet invariant représente toujours le rapport des densités d'énergie considérées dans le système, à savoir la densité d'énergie interne du milieu et la densité d'énergie radiative. En plus de la conservation de la physique globale du système initiale, les lois d'échelle (3.8) imposent donc la conservation du régime physique de l'onde en terme de répartition d'énergie.

3.3.3 Exemple d'application : De l'astrophysique au laboratoire

Commençons par rappeler les caractéristiques du système astrophysique que l'on cherche à reproduire à l'échelle du laboratoire. Nous avons modélisé de façon simplifiée un disque de densité uniforme

4. Il est cependant concevable de décrire cet invariant comme un nombre de Boltzmann en limite statique.

$\rho_0 = 10^{-4} \text{ g.cm}^{-3}$ et de température uniforme $T_0 = 50 \text{ eV}$. Nous avons supposé que, sous ces conditions, le plasma se comporte comme un gaz parfait ($\rho_0 e(T) = \rho_0 c_v T$) dont le libre parcours moyen est décrit par la limite Thomson ($\lambda_R = \lambda_0$). À l'une des extrémités de ce disque se produit un sursaut X modélisé par la loi définie par (2.3). Une onde radiative supersonique se propage alors en son sein sur une distance caractéristique de 100 km et sur une échelle de temps de 10^{-1} s , avant que les effets hydrodynamiques ne prennent le dessus. À cet instant, le sursaut atteint une température maximale $T_R = 400 \text{ eV}$. Notons que le système est dans un régime extrêmement radiatif ($R \leq 1$) pour des températures de la source $T_S > 100 \text{ eV}$.

Afin d'étudier ces régimes, on propose donc de créer, dans un premier temps, une expérience similaire à l'échelle du laboratoire. Pour cela, en utilisant les expériences présentées en début de chapitre, nous considérons que les mousses de laboratoire ont une longueur caractéristique de $\hat{L} = 0.2 \text{ cm}$, permettant la propagation d'ondes radiatives supersoniques sur des échelles de temps de $\hat{t} = 10 \text{ ns}$. Ces choix contraignent ainsi les paramètres $a_x = 2 \times 10^{-8}$ et $a_t = 10^{-7}$, de telle sorte qu'il n'est maintenant possible de fixer qu'un seul des paramètres a_T, a_e, a_λ restants. À ce stade, rappelons que pour que la similitude soit vérifiée entre les deux échelles, les hypothèses fondamentales sur ρe et λ_R doivent être conservées à l'échelle du laboratoire. Si on choisit de fixer $\hat{e}_0 = \hat{c}_v = 5 \times 10^6 \text{ erg.g}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et $\hat{\rho}_0 = 0.1 \text{ g.cm}^{-3}$ pour des expériences typiques de laboratoire, on obtient $a_e = 125$, ce qui, en utilisant les relations (3.11) dans le cas $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, donne les contraintes suivantes :

$$a_T = 5, \quad a_\lambda = 4 \times 10^{-9} \quad (3.15)$$

Notons en particulier que les conditions initiale (T_0) et aux limites (T_S) sont transformées par la simple application du facteur d'échelle a_T . Cela conduit à des températures de matériaux initiales très élevées ($\hat{T}_0 = 250 \text{ eV}$), qui sont en pratique impossibles à atteindre pour des expériences de laboratoire. Comme on a pu le constater dans le chapitre précédent, ce paramètre n'altère que très peu la physique globale mise en jeu à l'échelle astrophysique, on se permet d'effectuer les transformations d'échelle pour des disques caractérisés par $T_0 = 1 \text{ eV}$. Ce choix ne modifiant en rien l'application des lois d'échelle (3.11), ni les résultats énoncés dans ce chapitre, il sera conservé dans la suite du manuscrit ⁵. On obtient alors, dans le cas présent, $\hat{T}_0 = 5 \text{ eV}$ pour le système de laboratoire. Notons également que dans de tels milieux, l'hypothèse optiquement épaisse est toujours vérifiée ($\hat{\tau} \simeq 1500 \gg 1$).

Dans ce chapitre, ainsi que dans la suite du manuscrit, les simulations 1D et 2D menées à l'échelle du laboratoire ont été réalisées à l'aide du code d'hydrodynamique radiative nommé FCI2, et développé au CEA [Schurtz *et al.*, 2000; Sentis *et al.*, 2011]. Le traitement du transfert radiatif est pris en compte via un algorithme de transport multi-groupe (100 groupes). Le code est lagrangien et comporte un algorithme d'ALE (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*). Les équations d'état et les opacités nécessaires à la résolution sont tabulées. La figure 27 présente la structure générale du code [Busschaert, 2013; Van Box Som, 2018]. Une simulation du système de laboratoire a ainsi été réalisée avec le code FCI2, en bloquant volontairement la réponse hydrodynamique du système. Une application des lois d'échelle décrites précédemment, et résumées sur la Figure 28, permet d'obtenir les résultats présentés sur la Figure 29.

La superposition des profils de température entre l'échelle astrophysique (du jaune au rouge) et du

5. Nous reviendrons plus en détails sur cette limite expérimentale dans les chapitres 5 et 6.

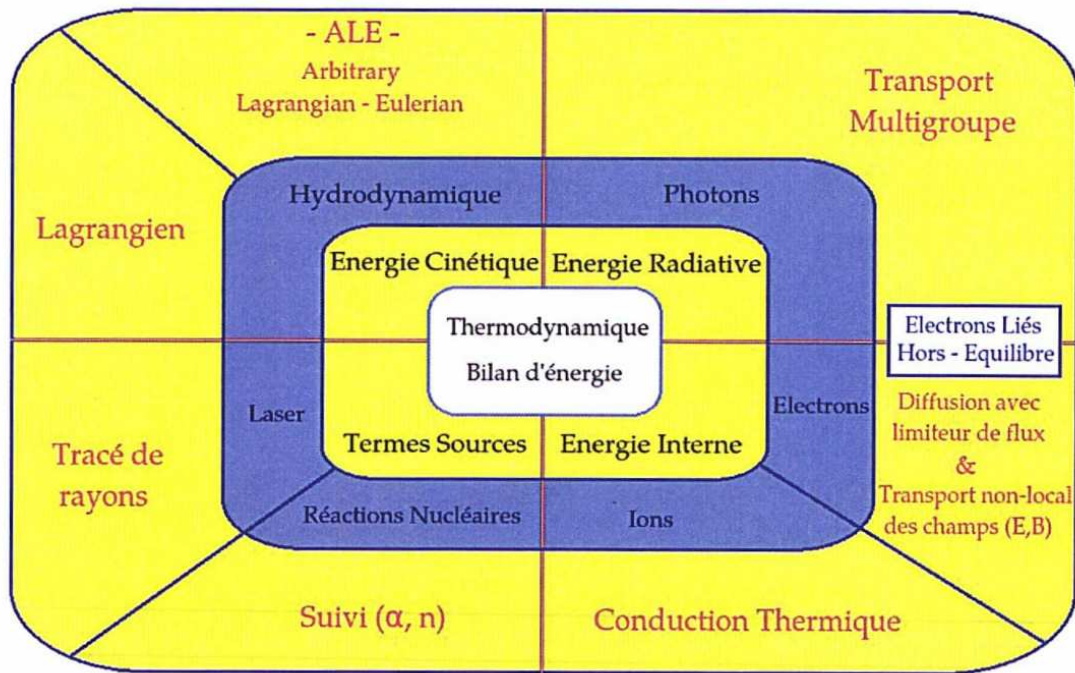


FIGURE 27 – Structure générale du code d'hydrodynamique radiative FCI2.

laboratoire (en bleu) est parfaite durant l'entièreté des simulations. D'un point de vue théorique, ce résultat est tout à fait attendu, si tant est que l'hypothèse de limite diffusion soit vérifiée dans tout le système et que l'onde reste supersonique. Bien que ces résultats soient encourageants, certaines contraintes liées au modèle théorique (3.2) limitent l'application des transformations (3.11).

En effet, des limitations engendrées par la non prise en compte d'effets supplémentaires, comme la réponse hydrodynamique du système, peuvent apparaître. De plus, le système de laboratoire similaire obtenu dans cet exemple nécessite d'être comparé aux caractéristiques typiques des expériences de propagation d'ondes radiatives supersoniques étudiées au début de ce chapitre. En particulier, les épaisseurs optiques présentées dans le Tableau 3.1 sont inférieures ou égales à 10, bien loin de la valeur $\hat{\tau} = 1500$ obtenue. De plus, les régimes physiques théoriques ($\hat{R} \leq 1$) sont inatteignables pour les installations de puissance actuelle. La valeur de température similaire nécessaire $\hat{T}_R = 2$ keV est en effet un ordre de grandeur supérieure aux températures communément atteintes en laboratoire. L'approche de la similitude présente donc des limitations fortes qui contrebalancent l'attrait mathématique qu'elles représentent pour le physicien.

	Système initial	Système similaire
ρ_0 [g.cm ⁻³]	10 ⁻⁴	10 ⁻¹
T_R [eV]	400	2000
t [s]	10 ⁻¹	10 ⁻⁸
L [cm]	10 ⁷	0.2
β	1	1
e_0 [erg.cm ⁻³ .K ^{-β}]	4 × 10 ⁴	5 × 10 ⁶
α	0	0
λ_0 [cm.K ^{-α}]	3.33 × 10 ⁴	1.33 × 10 ⁻⁴
R	5 × 10 ⁻²	5 × 10 ⁻²
Paramètres d'équivalence		
a_x	2 × 10 ⁻⁸	
a_t	10 ⁻⁷	
a_T	5	
a_e	125	
a_λ	4 × 10 ⁻⁹	

FIGURE 28 – Tableau regroupant les différents paramètres pour l'application des lois d'échelle.

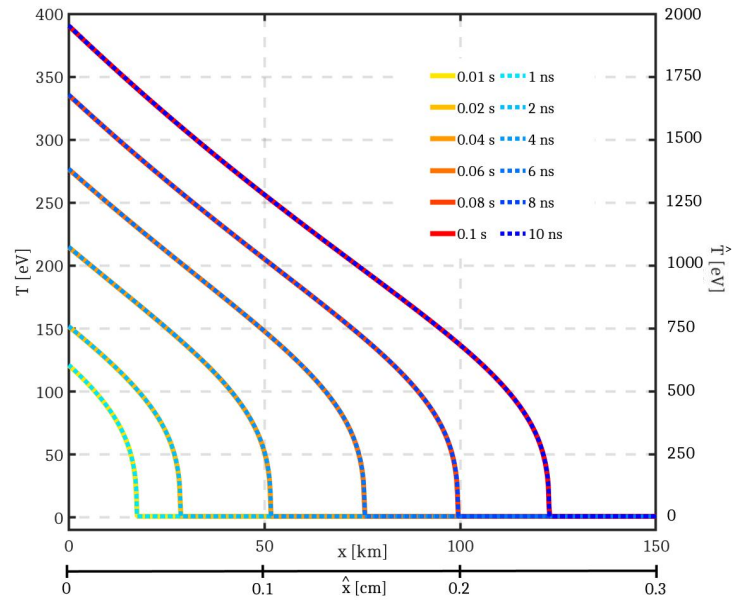


FIGURE 29 – Superposition des profils spatiaux de température du système de base (RAMSES-RT, en traits pleins du jaune au rouge) et du système similaire (FCI2, en pointillés bleus) transformé après application des lois d'échelle (3.11).

3.4 Les limites de la similitude : vers les concepts de ressemblance et d'analogie

3.4.1 Sur les problématiques d'étude des ondes radiatives en astrophysique de laboratoire

Bien que l'application théorique des lois d'échelle soit toujours possible, la mise en place d'une expérience réelle vérifiant toutes les contraintes de la similitude à l'échelle du laboratoire est donc loin d'être évidente. En effet, malgré les progrès fulgurants effectués en termes d'énergies laser allant à présent du kilojoule au Mégajoule sur ces installations, certains régimes extrêmes de rayonnement restent inaccessibles, comme nous l'avons vu dans la première partie de ce chapitre (voir tableau 3.1). Cette limitation est importante puisque la comparaison de données expérimentales aux modélisations ou données des systèmes à l'échelle astrophysique ne se fait actuellement quasiment que par identité ou similitude. Ainsi, la non-conservation des régimes physiques pose un problème pour un certain nombre de systèmes astrophysiques, et en particulier les ondes radiatives supersoniques étudiées. Pour s'en convaincre, nous pouvons représenter sur un diagramme en densité et température les régimes physiques atteints par les expériences typiques présentées précédemment, et y indiquer le système similaire venant d'être développé en exemple. Ces considérations sont présentées sur la Figure 30.

Comme nous pouvons le voir, l'énergie laser accessible et les densités des matériaux contraignent l'espace pris par les systèmes de laboratoire, hachuré en bleu. En suivant la courbe iso-R des expériences de Moore *et al.* [2015], nous parcourons l'espace des possibilités engendrées par la similitude absolue (il en va de même pour l'iso-R du système astrophysique, en rouge). Force est de constater qu'il nous est pour l'instant impossible d'accéder aux régimes souhaités représentés par la zone hachurée en rouge. Utiliser les concepts de similitude globale revient alors à se déplacer sur le diagramme entre des courbes de nombre de Mihalas constants, pour deux matériaux similaires. Ici, ce sont des gaz parfaits aux c_v de valeurs différentes comme nous l'avons vu au cours de ce chapitre. Cependant, il nous est encore une fois impossible de lier les deux zones voulues (hachurées en rouge et bleu) entre elles, malgré une liberté plus grande dans le redimensionnement du système astrophysique. Ces régimes physiques semblent donc pour le moment complètement hors de portée des installations de puissance actuelles, tout du moins si l'on cherche à produire des expériences similaires.

En plus des régimes physiques non atteignables à l'échelle du laboratoire, les simulations statiques présentées en Figure 29 ne prennent pas en compte l'une des principales limitations de la physique des ondes radiatives supersoniques : la séparation hydrodynamique entraînant la transition au régime subsonique. Cette étape de séparation est caractérisée par le nombre de Mach radiatif des expériences. Comme l'ont fait Back *et al.* [2000b] ainsi que de nombreux auteurs par la suite, nous proposons de représenter l'évolution de ce nombre sans dimension en fonction de l'épaisseur optique du milieu. Cela permet de caractériser plus globalement le régime dans lequel se trouve l'onde radiative similaire théorique par rapport aux paramètres caractéristiques des expériences laboratoire. Ces considérations sont présentées en Figure 31.

Comme nous pouvons le constater, il existe plusieurs ordres de grandeurs de différence entre les systèmes produits en laboratoire et ceux observés à l'échelle astrophysique. Les ondes radiatives produites

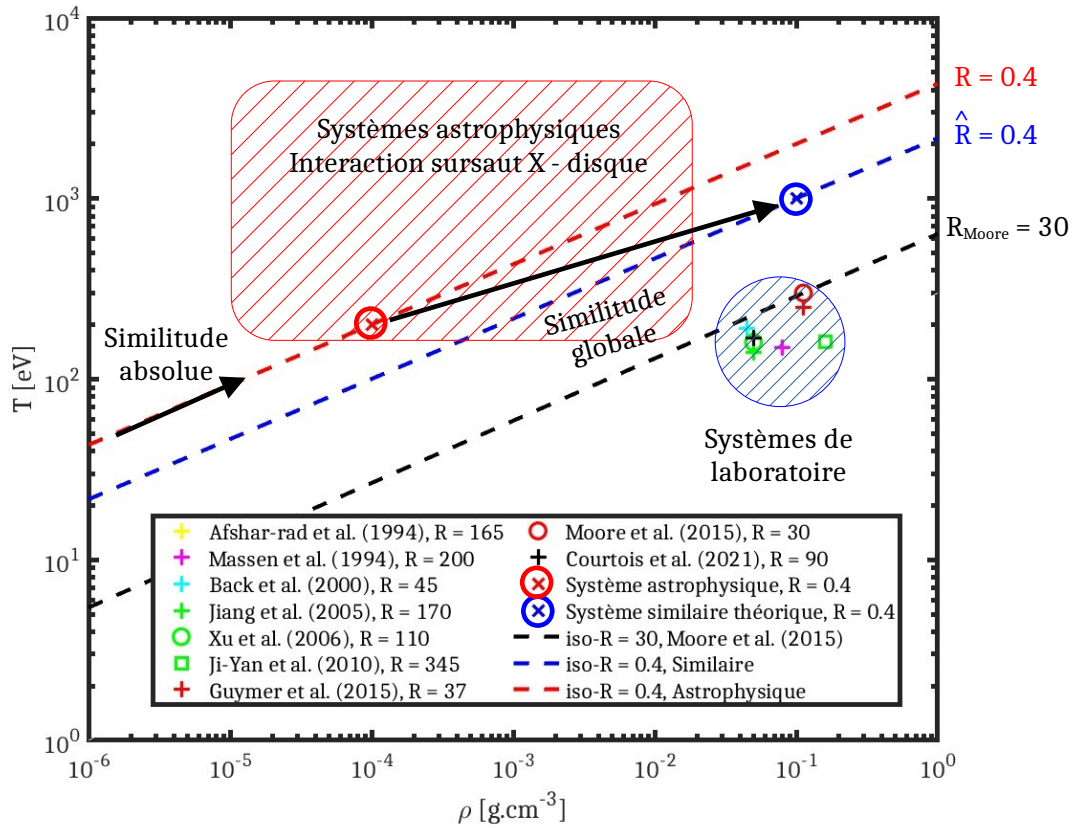


FIGURE 30 – Diagramme en densité-température représentant les conditions thermodynamiques typiques atteintes par les systèmes astrophysiques étudiés (zone hachurée rouge) et les expériences de laboratoire du Tableau 3.1. Des lignes iso- R (Mihalas constants) sont tracées en pointillés pour l'exemple typique astrophysique (en rouge) et son système similaire à l'échelle du laboratoire étudié dans ce chapitre (en bleu), mais également pour l'expérience de Moore *et al.* [2015] (en noir). Cette dernière ligne iso-Mihalas a été calculée en utilisant des estimations théoriques d'évolution d'énergie interne. Notons que la similitude globale nous permet d'obtenir deux lignes iso-Mihalas non confondues mais de valeur identique $R = 0.4$ en ayant considéré $\hat{e}_0 \neq e_0$. Ces valeurs de nombres de Mihalas sont calculées à des températures $T_S \approx 200$ eV et $\hat{T}_S \approx 1$ keV pour illustrer le fait que même à des temps plus courts, et donc des températures plus faibles, les conditions requises par la similitude sont impossibles à vérifier.

en laboratoire apparaissent bien moins diffusives (τ plus faibles) et supersoniques (Ma plus faibles) que leurs homologues astrophysiques. Notons que les valeurs de nombres de Mach radiatifs correspondent aux valeurs prises au maximum de température T_R des expériences. Ce nombre sans dimension évolue au cours de l'expérience, et, dans le cas de Courtois *et al.* [2021], prend des valeurs inférieures à 1 après un certain temps, lorsque l'énergie de la source ne permet plus au front radiatif d'avoir une vitesse supérieure à la vitesse du son. Remarquons également que, lors de l'application des concepts de similitude globale, nous avons construit un système qui, comme on peut le voir, présente des caractéristiques ($\tau \sim 10^3$, $Ma \sim 0.5$)

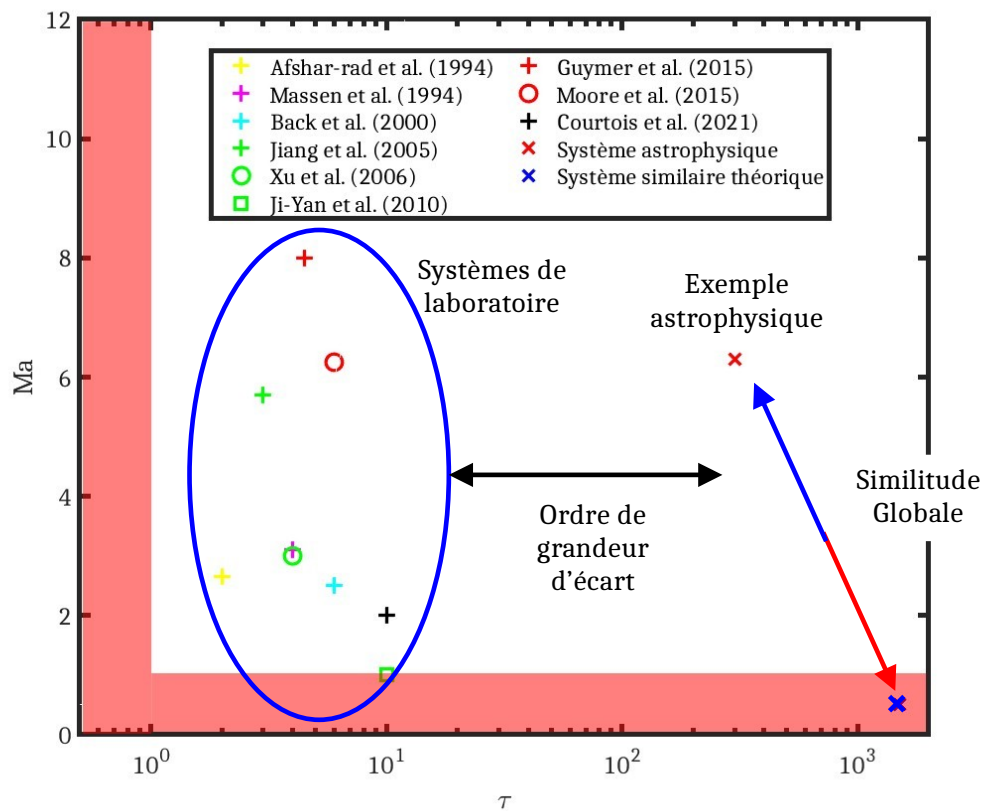


FIGURE 31 – Diagramme du nombre de Mach radiatif caractéristique Ma en fonction de l'épaisseur optique τ calculée à la température du matériau pour différentes expériences présentées dans la section précédente. Ma est une grandeur qui évolue au cours des expériences, et les valeurs indiquées sur ce graphique sont prises à la température source maximum T_R , comme indiqué dans le tableau 3.1. La zone rouge correspond à la non-vérification du régime d'ondes diffusives supersoniques ($\tau \leq 1$, $Ma \leq 1$). La croix jaune correspondant aux expériences de Afshar Rad *et al.* [1994] est confondue avec celle des expériences de Jiang *et al.* [2005], comme le montre les valeurs de densité et pression prises dans le Tableau 3.1.

très éloignées des conditions typiques obtenues en laboratoire. L'hypothèse de diffusion est complètement vérifiée dans ce système optiquement épais. Cependant, le nombre de Mach radiatif caractéristique de cette expérience se trouve être plus petit que l'unité, indiquant l'apparition d'un choc de séparation hydrodynamique dès les premiers instants de l'expérience⁶. Cela brise alors la validité de la similitude sur l'intervalle temporel étudié d'une dizaine de nanosecondes. Concrètement, la similitude entre les deux systèmes n'est donc ni réellement applicable, ni valide dans ces régimes.

6. La similitude était vérifiée sur la Figure 29 car nous avons simulé des systèmes en bloquant volontairement leur réponse hydrodynamique.

En plus de tout cela, une autre limitation apparaît lorsque l'on considère les effets de la micro-physique associée aux milieux astrophysiques et aux matériaux de laboratoire. Les différences fondamentales de physique microscopique ou de conditions thermodynamiques entre ces deux échelles conduisent en effet à l'apparition d'écarts significatifs entre les lois de comportement (loi d'état, opacité, ...) des systèmes astrophysique et de laboratoire. Ces décalages peuvent conduire à des différences de comportements entre deux écoulements pourtant observés dans un même régime physique. De la même façon, certains comportements physiques provoqués en laboratoire mais non observés à l'échelle astrophysique peuvent modifier la dynamique des écoulements obtenus. C'est ce que l'on appelle des effets d'échelle. Ils peuvent en particulier se manifester dans l'étude d'écoulements hydrodynamiques présentant des différences fondamentales au niveau de leur équation d'état. Ce comportement a été mis en évidence lors du développement d'outils numériques visant justement à prendre en compte différentes formes de lois d'état [Carver *et al.*, 2010], où il est apparu évident que le choix d'une loi d'état pouvait grandement perturber la morphologie de jets entre les échelles astrophysique et de laboratoire. En plus de constituer une problématique technologique, il est ici également question de limitation théorique dans le lien fait entre les échelles astrophysique et de laboratoire, qui ne prend donc pour le moment pas en compte ces effets d'échelle.

Dans le cas de certains matériaux présentés dans le Tableau 3.1, il est possible d'obtenir une expression analytique approchée pour les équations d'état et libres parcours moyens, de la forme donnée par les relations (3.9). Cependant, les exposants alors obtenus diffèrent grandement du cas théorique développé à l'échelle astrophysique, où $\alpha = 0$ et $\beta = 1$. Si l'on considère le cas des mousses de plastique dopées au chlore (CHCl) utilisées en particulier par Guymier *et al.* [2015] et Moore *et al.* [2015] sur le NIF, les exposants donnés par Cohen *et al.* [2020] sont de l'ordre de $\hat{\alpha} = 5.7$ et $\hat{\beta} = 0.96$. Ainsi, même si l'hypothèse de gaz parfait peut potentiellement être très proche de la réalité, celle d'un libre parcours moyen Thomson constant l'est beaucoup moins. Il est possible de se rapprocher de ce type d'hypothèses ($\alpha = 0$) en laboratoire en considérant une mousse de Ta₂O₅ utilisée par Back *et al.* [2000a,b], où $\hat{\alpha} = 1.78$ et $\hat{\beta} = 1.37$ (voir Cohen *et al.* [2020]). Ainsi, même dans les cas les plus favorables, il est impossible de vérifier les contraintes imposées par la similitude, que ce soit la conservation des régimes physiques ou encore les contraintes sur les propriétés internes des matériaux.

3.4.2 Vers des transformations généralisées basées sur des ressemblances et analogies

Malgré l'existence de lois d'échelle, capables de modéliser une même physique à deux échelles distinctes, les contraintes imposées par la similitude se révèlent donc particulièrement difficiles à respecter d'un point de vue expérimental. Il semble cependant possible de limiter les écarts à ces contraintes, moyennant de pouvoir obtenir des matériaux dont les propriétés internes (lois d'état et d'opacité) se rapprochent de celles attendues pour les systèmes astrophysiques. Même dans ce cas de figure, nous ne pourrions tout de même pas affirmer pouvoir vérifier exactement la similitude entre les échelles astrophysique et du laboratoire, tant les écarts observés entre régimes et systèmes physiques semblent être rédhibitoires. En particulier, rappelons que les régimes extrêmement radiatifs ($\hat{R} \leq 1$) sont pour le moment inatteignables en laboratoire, comme nous l'avons remarqué dans le Tableau 3.1. L'astrophysique

de laboratoire semble ainsi, de manière générale, très limitée par cette problématique dans le cas des écoulements d'hydrodynamique radiative. Elle n'est cependant pas totalement démunie, puisque des concepts permettant de contourner certaines contraintes induites par la similitude existent, dans les cas où celles-ci ne pourraient être respectées.

En effet, lorsque la similitude n'est pas exactement vérifiée entre deux systèmes modélisant la même physique, on parle de systèmes ressemblants [Takabe, 2001]. Dans cette catégorie, il est possible de prendre en compte ce que l'on nomme la similarité partielle [Basko et Johner, 1998], qui consiste à reproduire seulement une partie de la physique du système. On peut également citer les concepts d'invariance paramétrique [Falize *et al.*, 2011a], utilisés dans le cadre des expériences POLAR [Cross *et al.*, 2016]. Dans ce cadre, l'utilisation d'une relation analytique à l'échelle astrophysique pour l'extension de la zone hydro-radiative de la colonne d'accrétion est extrapolée à l'échelle du laboratoire dans des conditions expérimentales fondamentalement différentes. Concrètement, une définition plus générale du concept de ressemblance indique que l'on peut étudier qualitativement la même physique à deux échelles différentes. Dans ce manuscrit, nous montrerons qu'il est possible de développer systématiquement des transformations quantitatives entre deux systèmes ressemblants. Ainsi, la ressemblance apparaîtra comme l'extension naturelle des concepts de similitude, et nous pourrons alors plus globalement parler de similitude généralisée.

Pour aller encore plus loin que cela, il est possible de s'intéresser aux expériences dites d'analogie. On modélise alors le système étudié par une physique complètement différente, mais dont le modèle physique correspond exactement à celui du système étudié après l'obtention de transformations liant leurs variables entre elles. De manière générale, les transformations d'analogie s'obtiennent de manière évidente, comme pour l'analogie électro-mécanique [Feynman *et al.*, 1965], ou après des développements théoriques, comme pour les trous noirs acoustiques [Unruh, 1981]. Dans cette analogie, la dynamique d'un fluide en écoulement tourbillonnant permet de reproduire partiellement la physique des trous noirs, et d'étudier des mécanismes tels que le rayonnement d'Hawking que des expériences récentes [Steinhauer, 2016] ont permis d'observer à l'aide de condensats de Bose-Einstein.

Une des différences fondamentales entre ces types de transformations est la possibilité d'obtenir systématiquement, à l'aide de méthodes générales, la forme de celles-ci pour un modèle donné. Falize *et al.* [2011b] ont montré que la détermination de lois d'échelle se ramenait à l'obtention des symétries (d'homothéties) des modèles théoriques étudiés. La notion d'invariance qui leur est associée guide la possibilité d'avoir une telle méthode générale de développement de lois d'échelle. Cette notion d'invariance est plus compliquée à théoriser pour les ressemblances et analogies, puisque ce n'est plus simplement l'équation modélisant le système de base qui est conservée. L'objectif de ces travaux est, en partie, de proposer des solutions quant à l'obtention de méthodes générales permettant de déterminer des transformations de ce type de façon systématique. Dans ce manuscrit, une réflexion sera menée sur la possibilité de déterminer des transformations de ressemblance permettant de dépasser les concepts de similitude. Enfin, dans les perspectives de ces travaux seront indiquées des pistes quant à la généralisation de l'obtention de transformations d'analogie par les méthodes de *mapping* [Bluman *et al.*, 2010].

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une synthèse exhaustive des différentes conditions expérimentales pouvant être atteintes par les lasers de puissance. Nous avons également pu évaluer l'étendue de nos connaissances en termes de matériaux utilisables pour la génération d'ondes radiatives supersoniques en laboratoire. Ces paramètres constituent des éléments nécessaires au dimensionnement d'expériences laser et permettent de définir les régimes physiques accessibles en laboratoire. À la suite de cela, nous avons introduit les concepts de similitude et lois d'échelles. Ces concepts, appliqués aux ondes radiatives en régime supersonique, ont permis de développer des transformations de changement d'échelles liant explicitement les échelles astrophysique et du laboratoire. L'utilisation des codes FCI2 et RAMSES-RT a permis d'illustrer l'exploitation des lois d'échelle dans le cadre d'une expérience numérique. Enfin, les limitations intrinsèques de ces lois de transformations ont été explicitées et illustrées afin de démontrer la nécessité du développement d'outils mathématiques capables de dépasser les contraintes de la similitude. Les prochains chapitres se concentrent exclusivement à la détermination de ces outils ainsi que leur application dans le cadre de l'étude des ondes radiatives supersoniques en laboratoire.

CHAPITRE 4

Symétries de Lie et équivalence pour les équations différentielles

Sommaire

4.1	Introduction	84
4.2	Les symétries de Lie des équations différentielles	84
4.2.1	Généralités sur le concept de symétries	84
4.2.2	Obtenir les symétries ponctuelles d'une équation différentielle	85
4.2.3	Application à l'équation décrivant la dynamique des ondes radiatives supersoniques	88
4.3	Les symétries d'équivalence	99
4.3.1	Fonctions arbitraires et classes d'équations différentielles	99
4.3.2	Obtenir les symétries d'équivalence d'une équation différentielle	100
4.3.3	Application aux ondes radiatives	103
4.4	Conclusion	112

4.1 Introduction

Ce chapitre présente le développement des outils théoriques permettant d'étudier ce que l'on nomme les symétries de Lie des équations différentielles. Un premier objectif est de faire le lien entre ces théories et les transformations de similitude obtenues au chapitre précédent. Un second objectif est de proposer une première généralisation des concepts de similitude appliquée aux équations décrivant la propagation des ondes radiatives en régime supersonique. À travers la théorie des symétries de Lie, nous développerons ainsi de nouvelles transformations pouvant contourner les contraintes parfois trop restrictives de la similitude.

Dans une première partie, nous développons les concepts à la base de la détermination des symétries de Lie des équations différentielles et appliquons ces résultats à l'étude des ondes radiatives en régime supersonique. L'obtention des symétries du modèle théorique étudié permettra alors de détailler les limites de ces transformations. Dans une seconde partie, ces limites définiront les caractéristiques manquantes de l'approche de la similitude, ce qui mènera vers le développement d'outils plus généraux : les symétries d'équivalence.

4.2 Les symétries de Lie des équations différentielles

4.2.1 Généralités sur le concept de symétries

Une symétrie est une transformation qui laisse invariante une équation. Cette transformation consiste en un changement de variable qui laisse la forme des équations étudiées inchangées. Une symétrie de Lie [Lie, 1880] correspond à une symétrie dépendant continûment d'un paramètre. En physique, on étudie très souvent des équations dites différentielles, qui lient une fonction à ses dérivées. L'ordre différentiel de l'équation correspond à l'ordre maximal de dérivée de la fonction en ses différentes variables. Si on considère une fonction f dépendant de N variables $\mathbf{x} = x_{i_{1 \leq i \leq N}}$, une équation différentielle d'ordre n sur f est de la forme :

$$F \left(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}), \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^n f(\mathbf{x})}{\partial x_N^n} \right) = 0 \quad (4.1)$$

Dans ce formalisme, les variables x_i sont qualifiées de variables indépendantes et que $f(\mathbf{x})$ est une variable qualifiée de dépendante, dans le sens où elle dépend explicitement des variables x_i . La forme de l'équation différentielle conservée par les symétries étant F , les changements de variables :

$$\mathbf{x} \rightarrow \hat{\mathbf{x}} \quad \text{et} \quad f \rightarrow \hat{f} \quad (4.2)$$

conservent la forme de l'équation (4.1) si l'égalité :

$$F \left(\hat{\mathbf{x}}, \hat{f}, \dots, \frac{\partial^n \hat{f}(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{x}_N^n} \right) = F \left(\mathbf{x}, f, \dots, \frac{\partial^n f(\mathbf{x})}{\partial x_N^n} \right) = 0 \quad (4.3)$$

est vérifiée. Autrement dit, après transformation, l'équation différentielle définie sur \hat{f} a la même forme que l'équation initiale sur f .

Dans la littérature, il existe plusieurs types de transformations qui dépendent du degré de liberté qui leur est laissé. Celles qui sont le plus étudiées se nomment les symétries ponctuelles [Olver, 1986], pour lesquelles seules les variables dépendantes et indépendantes sont modifiées. Les transformations sur les dérivées de la variable dépendante f sont alors directement induites par le changement de variables sur cette même fonction. Ce type de transformations prend la forme générale :

$$\hat{x}_i = \Phi_i(\mathbf{x}, f, a), \quad \hat{f} = \Psi(\mathbf{x}, f, a), \quad \forall i \in [1, N] \quad (4.4)$$

où a est le paramètre associé à la transformation et Φ_i, Ψ sont des fonctions supposées continues de a . Certaines formes de transformation impliquent de modifier également les dérivées des variables dépendantes, et présentent très souvent un intérêt physique limité. On les appelle les transformations de contact [Ibragimov, 2006] et les symétries de Lie-Backlund [Ibragimov *et al.*, 1998]. Dans ces travaux, nous étudierons exclusivement la catégorie des symétries dites ponctuelles. Ce sont les symétries les plus couramment analysées et qui permettent de conserver la cohérence physique des variables d'une équation à l'autre.

4.2.2 Obtenir les symétries ponctuelles d'une équation différentielle

Dans cette section, nous détaillons la méthode développée par Lie [1880] et reprise par de nombreux auteurs (voir [Hydon et Hydon, 2000] par exemple) permettant d'obtenir systématiquement l'ensemble de symétries ponctuelles d'une équation différentielle du type (4.1). On cherche un changement de variables du type (4.4) où l'on suppose l'existence d'une valeur a_0 du paramètre a pour laquelle la transformation se résume à la transformation d'identité, tel que :

$$\hat{x}_i = \Phi_i(\mathbf{x}, f, a_0) = x_i, \quad \hat{f} = \Psi(\mathbf{x}, f, a_0) = f \quad (4.5)$$

Pour déterminer ce changement de variables quelle que soit la valeur du paramètre a , on utilise le fait que les fonctions Φ_i et Ψ sont continues en a . On considère alors une variation infinitésimale de a autour de l'élément a_0 , sous la forme :

$$a = a_0 + \delta a, \quad \delta a \ll a_0 \quad (4.6)$$

En effectuant un développement limité des fonctions Φ_i et Ψ sur δa , on obtient :

$$\hat{x}_i = \Phi_i(\mathbf{x}, f, a_0 + \delta a) = x_i + \xi_i(\mathbf{x}, f)\delta a + o(\delta a), \quad \text{où} \quad \xi_i(\mathbf{x}, f) = \left. \frac{d\Phi_i(\mathbf{x}, f, a)}{da} \right|_{a=a_0} \quad (4.7)$$

$$\hat{f} = \Psi(\mathbf{x}, f, a_0 + \delta a) = f + \eta(\mathbf{x}, f)\delta a + o(\delta a), \quad \text{où} \quad \eta(\mathbf{x}, f) = \left. \frac{d\Psi(\mathbf{x}, f, a)}{da} \right|_{a=a_0} \quad (4.8)$$

Les fonctions ξ_i et η sont appelées les fonctions de coordonnées associées respectivement aux variables indépendantes x_i et dépendante f . On les nomme de cette façon car elles représentent un déplacement infinitésimal entre les variables de départ et d'arrivée dans leur espace respectif. À partir de ces fonctions,

on peut reconstruire la loi de transformation recherchée. En effet, prenons par exemple la fonction $\eta(\mathbf{x}, f)$. La relation (4.8) permet d'écrire :

$$\lim_{a \rightarrow a_0} \left[\eta(\hat{\mathbf{x}}, \hat{f}) - \frac{d\hat{f}}{da} \right] = 0 \quad (4.9)$$

En remarquant que l'expression (4.9) est invariante par translation par rapport à a , ou, autrement dit, qu'elle reste valable quelque soit la valeur de a_0 , on obtient les relations suivantes :

$$\frac{d\hat{f}}{da} = \eta(\hat{\mathbf{x}}, \hat{f}), \quad \hat{f}(a_0) = f \quad (4.10)$$

En suivant le même raisonnement pour les fonctions $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$, on obtient :

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{da} = \xi(\hat{\mathbf{x}}, \hat{f}), \quad \hat{\mathbf{x}}(a_0) = \mathbf{x} \quad (4.11)$$

On note donc que la connaissance des fonctions ξ et η permet de reconstruire complètement les symétries recherchées. La question est à présent de savoir comment obtenir explicitement ces fonctions de coordonnées. En pratique, on exploite l'invariance de l'équation différentielle par application des symétries. Cette condition d'invariance va dépendre de l'ordre différentiel de l'équation étudiée. Si on considère une équation différentielle d'ordre 0, qui est donc une équation algébrique de type $F(\mathbf{x}, f) = 0$, l'action d'une transformation infinitésimale s'écrit :

$$F(\hat{\mathbf{x}}, \hat{f}) = F(\mathbf{x} + \xi \delta a, f + \eta \delta a) = F(\mathbf{x}, f) + \delta a \left[\sum_{i=1}^N \xi_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial F}{\partial f} \right] + o(\delta a) = 0 \quad (4.12)$$

que l'on peut réécrire :

$$F(\mathbf{x}, f) + GF(\mathbf{x}, f) \delta a + o(\delta a) = 0 \quad (4.13)$$

L'opérateur G est appelé le générateur infinitésimal de la transformation recherchée et est défini par :

$$G = \left[\sum_{i=1}^N \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial}{\partial f} \right] \quad (4.14)$$

Il contient les fonctions de coordonnées permettant la génération des transformations infinitésimales de l'équation étudiée. Notons que les dérivées partielles présentes dans l'expression de G s'écrivent de manière générale sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \Big|_{x_j \neq x_i, f} \quad (4.15)$$

signifiant que, dans ce formalisme, les variables x_i et f sont indépendantes. Dans la suite du manuscrit nous conserverons, comme ce qui est usuellement fait dans la littérature, les notations de l'équation (4.14) par soucis de simplification. D'après l'équation (4.13), la condition d'invariance associée à l'équation

$F = 0$ est donc donnée par :

$$GF(\mathbf{x}, f) = 0 \quad \text{quand} \quad F(\mathbf{x}, f) = 0 \quad (4.16)$$

Si on considère une équation différentielle d'ordre 1, de la forme :

$$F(\mathbf{x}, f, f_{x_1}, \dots, f_{x_N}) = 0, \quad \text{où} \quad f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \forall i \in [1, N] \quad (4.17)$$

la transformation ponctuelle recherchée va induire une transformation sur les dérivées premières de f apparaissant maintenant dans l'équation différentielle. On montre que les transformations infinitésimales induites sur ces dérivées prennent la forme :

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{x}_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \pi_{1i} \delta a \quad (4.18)$$

où la notation $1i$ correspond à la variable dépendante numéro 1 (dans ce cas la fonction f) et à la variable indépendante numéro i . La grandeur π_{1i} dépend des fonctions de coordonnées ξ_i et η et on peut montrer qu'elles sont données par la relation suivante [Coggeshall et Axford, 1986] :

$$\pi_{1i} = \frac{d\eta}{dx_i} - \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{d\xi_j}{dx_i} \quad (4.19)$$

En utilisant ce résultat, on peut obtenir, de la même façon que pour les équations (4.12)-(4.13), la relation :

$$F(\hat{\mathbf{x}}, \hat{f}, \hat{f}_{\hat{x}_1}, \dots, \hat{f}_{\hat{x}_N}) = F(\mathbf{x}, f, \dots, f_{x_N}) + G^{(1)} F \delta a + o(\delta a) = 0 \quad (4.20)$$

où l'opérateur $G^{(1)}$ est donné par :

$$G^{(1)} = G + \sum_{i=1}^N \pi_{1i} \frac{\partial}{\partial f_{x_i}} \quad (4.21)$$

Cet opérateur est appelé le générateur prolongé à l'ordre 1 du générateur infinitésimal (4.14). On note que les dérivées f_{x_i} de la variable dépendante f sont également considérées comme des variables indépendantes par rapport aux autres paramètres que sont x_i et f . Dans ce cas, la condition d'invariance de l'équation différentielle $F = 0$ donnée par l'équation (4.16) se traduit par la relation :

$$G^{(1)} F(\mathbf{x}, f, f_{x_1}, \dots, f_{x_N}) = 0 \quad \text{quand} \quad F(\mathbf{x}, f, f_{x_1}, \dots, f_{x_N}) = 0 \quad (4.22)$$

De la même façon, ces résultats peuvent être généralisés à une équation différentielle d'ordre n et la condition d'invariance s'écrit alors :

$$G^{(n)} F = 0 \quad \text{quand} \quad F = 0 \quad (4.23)$$

Le générateur prolongé à l'ordre n , noté $G^{(n)}$ tient compte de tous les prolongements d'ordre inférieur, de telle sorte qu'on puisse l'écrire sous la forme :

$$G^{(n)} = G^{(1)} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \kappa_{1ij} \frac{\partial}{\partial f_{x_i x_j}} + \dots \quad (4.24)$$

où les κ_{1ij} apparaissent dans le prolongement d'ordre 2 du générateur infinitésimal. Ces fonctions sont données par [Coggeshall et Axford, 1986] :

$$\kappa_{1ij} = \frac{d\pi_{1i}}{dx_j} - \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \frac{d\xi_k}{dx_i} \quad (4.25)$$

La condition d'invariance (4.23) permet alors d'obtenir un système d'équations différentielles linéaires sur les fonctions de coordonnées ξ et η . C'est là tout l'intérêt de cette approche infinitésimale qui permet de linéariser le problème de recherche de symétries de l'équation différentielle (4.1). On note que cette analyse se généralise directement au cas d'un système d'équations différentielles faisant intervenir plusieurs variables dépendantes [Olver, 1986; Coggeshall et Axford, 1986; Hydon et Hydon, 2000]. Notons pour terminer que l'ensemble des symétries ponctuelles ainsi obtenu est ce que l'on appelle un groupe de Lie. Dans la littérature, on peut donc rencontrer la notion de groupes de transformations [Ibragimov, 2006] y faisant référence. Enfin, l'ensemble des générateurs infinitésimaux constitue une algèbre de Lie [Erdmann et Wildon, 2006]. Nous allons à présent illustrer ces concepts mathématiques à travers la détermination des symétries ponctuelles de l'équation décrivant la propagation d'ondes radiatives supersoniques.

4.2.3 Application à l'équation décrivant la dynamique des ondes radiatives supersoniques

4.2.3.1 Détermination des fonctions de coordonnées

On reprend notre modèle théorique d'ondes radiatives défini et étudié aux chapitres 2 et 3, qui est décrit par l'équation différentielle suivante (voir équation (2.19)) :

$$\frac{\partial E(T)}{\partial t} = \frac{4a_R c}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_R(T) T^3 \frac{\partial T}{\partial x} \right], \quad \text{avec} \quad E(T) = \rho_0 e(T) + a_R T^4 \quad (4.26)$$

L'intérêt de cette notation est de réunir les densités d'énergie interne $\rho_0 e(T)$ et radiative $a_R T^4$ en une seule fonction de répartition de densité d'énergie, notée $E(T)$. Cette fonction prend donc la forme $E(T) = \rho_0 e(T)$ pour des régimes $R \gg 1$ et $E(T) = \rho_0 e(T) + a_R T^4$ pour des régimes $R \leq 1$. On peut classer les différentes variables de l'équation différentielle de la même façon que dans la section précédente. Les variables spatiale x et temporelle t sont les variables indépendantes, et le champ de température T est l'unique variable dépendante du système. On cherche des changements de variables prenant la forme :

$$\hat{x} = \Phi_1(x, t, T, a), \quad \hat{t} = \Phi_2(x, t, T, a), \quad \hat{T} = \Psi(x, t, T, a) \quad (4.27)$$

Le générateur infinitésimal associé à l'équation (4.26) peut alors s'écrire :

$$G = \xi(x, t, T) \frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t, T) \frac{\partial}{\partial t} + \eta(x, t, T) \frac{\partial}{\partial T} \quad (4.28)$$

où les fonctions de coordonnées ξ , τ et η sont données par :

$$\xi(x, t, T) = \left. \frac{d\Phi_1}{da} \right|_{a=0}, \quad \tau(x, t, T) = \left. \frac{d\Phi_2}{da} \right|_{a=0}, \quad \eta(x, t, T) = \left. \frac{d\Psi}{da} \right|_{a=0} \quad (4.29)$$

Notons que l'on a choisi l'élément neutre $a_0 = 0$, que nous conserverons dans la suite. On a délibérément modifié les notations de la section précédente, en prenant $\xi_1 = \xi$ et $\xi_2 = \tau$ afin de ne pas surcharger les différentes expressions qui vont suivre. Les fonctions ξ , τ et η sont donc associées respectivement aux variables indépendantes x et t et à la variable dépendante T . Les fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$ sont quant à elles des fonctions données de la température. En remarquant que :

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = E_T T_t, \quad \text{et} \quad \frac{\partial \lambda_R}{\partial x} = \frac{\partial \lambda_R}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda_{RT} T_x \quad (4.30)$$

on peut réécrire l'équation différentielle (4.26) sous la forme :

$$F(x, t, T(x, t), T_t, T_x, T_{xx}) = T_t - \frac{4a_{RC}}{3E_T} \left[\left(\lambda_{RT} T^3 + 3T^2 \lambda_R \right) T_x^2 + \lambda_R T^3 T_{xx} \right] = 0 \quad (4.31)$$

qui fait apparaître explicitement les dérivées de la température. La relation (4.31) constitue donc une équation différentielle sur la variable T , d'ordre 1 en temps, et d'ordre 2 en espace. Cette équation est donc globalement d'ordre 2, et la condition d'invariance (4.23) est obtenue en appliquant le générateur prolongé deux fois :

$$G^{(2)} F = 0, \quad \text{lorsque} \quad F = T_t - \frac{4a_{RC}}{3E_T} \left[\left(\lambda_{RT} T^3 + 3T^2 \lambda_R \right) T_x^2 + \lambda_R T^3 T_{xx} \right] = 0 \quad (4.32)$$

où $G^{(2)}$ est donné par :

$$G^{(2)} = G + \pi_{11} \frac{\partial}{\partial T_x} + \pi_{12} \frac{\partial}{\partial T_t} + \kappa_{111} \frac{\partial}{\partial T_{xx}} \quad (4.33)$$

et où des couleurs sont utilisées pour mettre en valeur les différentes dérivées de la variable dépendante T . Les fonctions π_{11} , π_{12} et κ_{111} sont données par les relations (4.19) et (4.25), qui s'écrivent ici :

$$\pi_{11} = \eta_x + T_x [\eta_T - \xi_x] - T_t \tau_x - T_x^2 \xi_T - T_t T_x \tau_T \quad (4.34)$$

$$\pi_{12} = \eta_t + T_t [\eta_T - \tau_t] - T_x \xi_t - T_t^2 \tau_T - T_t T_x \xi_T \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{111} = & \eta_{xx} + 2\eta_{xT} T_x + T_{xx} [\eta_T - 2\xi_x] + T_x [\eta_{TT} T_x - \xi_{xx} - 2\xi_{xT} T_x] - 2T_{tx} \tau_x \\ & - T_t (\tau_{xx} + 2\tau_{xT} T_x) - 3T_x T_{xx} \xi_T - T_x^3 \xi_{TT} - 2T_{xt} T_x \tau_T - T_t T_{xx} \tau_T - T_t T_x^2 \tau_{TT} \end{aligned} \quad (4.36)$$

L'application de $G^{(2)}$ à l'équation (4.31) donne alors :

$$\begin{aligned}
 & E_{TT}T_t\eta + E_T\pi_{12} - \frac{4a_{RC}}{3} \left[\lambda_R \left(6T^2T_x^2\eta + 6T^2T_x\pi_{11} + 3T^2T_{xx}\eta + T^3\kappa_{111} \right) \right] \\
 & - \frac{4a_{RC}}{3} \left[\lambda_{RTT} \left(T_x^2T^3\eta \right) + \lambda_{RT} \left(6T_x^2T^2\eta + 2T_xT^3\pi_{11} + T^3T_{xx}\eta \right) \right] = 0 \\
 & \text{lorsque } T_t - \frac{4a_{RC}}{3E_T} \left[\left(\lambda_{RT}T^3 + 3T^2\lambda_R \right) T_x^2 + \lambda_RT^3T_{xx} \right] = 0 \tag{4.37}
 \end{aligned}$$

En remplaçant à présent les variables T_t , π_{11} , π_{12} , et κ_{111} par leurs expressions respectives (4.31), (4.34), (4.35), (4.36), on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \left(E_T\eta_t - \frac{4a_{RC}}{3}\lambda_RT^3\eta_{xx} \right) - \left(E_T\xi_t + \frac{4a_{RC}}{3} \left[2 \left(\lambda_RT^3\eta_x \right)_T - \lambda_RT^3\xi_{xx} \right] \right) \mathbf{T}_x \\
 & + \frac{4a_{RC}}{3} \left(\left[\frac{E_{TT}}{E_T}\eta + (2\xi_x + \eta_T - \tau_t) \right] \left(\lambda_RT^3 \right)_T - \left(\eta\lambda_RT^3 \right)_{TT} + \frac{4a_{RC}}{3E_T}\tau_{xx}\lambda_RT^3 \left(\lambda_RT^3 \right)_T \right) \mathbf{T}_x^2 \\
 & + \frac{4a_{RC}}{3} \left(\left(\xi_T\lambda_RT^3 \right)_T + \frac{4a_{RC}}{3E_T} \left[2 \left(\lambda_RT^3 \right)_T \left(\tau_x\lambda_RT^3 \right)_T + 2\tau_x\lambda_RT^3 \left(\left(\lambda_RT^3 \right)_{TT} - \frac{E_{TT}}{E_T} \left(\lambda_RT^3 \right)_T \right) \right] \right) \mathbf{T}_x^3 \\
 & + \left(\frac{4a_{RC}}{3} \right)^2 \frac{1}{E_T} \left(\tau_T \left(\lambda_RT^3 \right)_T^2 + \tau_{TT}\lambda_RT^3 \left(\lambda_RT^3 \right)_T + 2\tau_T \left[\left(\lambda_RT^3 \right)_{TT} + \frac{E_{TT}}{E_T} \left(\lambda_RT^3 \right)_T \right] \right) \mathbf{T}_x^4 \\
 & + \frac{4a_{RC}}{3} \left(\eta \left[\frac{\lambda_RT^3E_{TT}}{E_T} - \left(\lambda_RT^3 \right)_T \right] + \lambda_RT^3 \left[2\xi_x - \tau_t \right] + \tau_{xx} \frac{4a_{RC}}{3E_T}\lambda_RT^3 \right) \mathbf{T}_{xx} \\
 & \frac{4a_{RC}}{3}\lambda_RT^3 \left(2\xi_T + \frac{4a_{RC}}{3E_T} \left[8\tau_x \left(\lambda_RT^3 \right)_T + 2\tau_{xT}\lambda_RT^3 - \frac{E_T T}{E_T} 2\tau_x \right] \right) \mathbf{T}_x\mathbf{T}_{xx} \\
 & \left(\frac{4a_{RC}}{3} \right)^2 \frac{\lambda_RT^3}{E_T} \left(7\tau_T \left(\lambda_RT^3 \right)_T + \tau_{TT}\lambda_RT^3 - 2\tau_T \frac{E_T T}{E_T}\lambda_RT^3 \right) \mathbf{T}_x^2\mathbf{T}_{xx} \\
 & + \left(\frac{4a_{RC}}{3} \right)^2 \frac{1}{E_T} 2\tau_x \left(\lambda_RT^3 \right)^2 \mathbf{T}_{xxx} + \left(\frac{4a_{RC}}{3} \right)^2 \frac{1}{E_T} 2\tau_T \left(\lambda_RT^3 \right)^2 \mathbf{T}_x\mathbf{T}_{xxx} = 0 \tag{4.38}
 \end{aligned}$$

L'équation (4.38) est une équation polynomiale en les dérivées de la variable dépendante T , que l'on a mises en évidence en couleurs. Étant donné que les fonctions de coordonnées ne dépendent pas de ces dérivées, cette équation ne peut être satisfaite qu'à la condition où chaque terme en facteur d'une dérivée est nul. On obtient alors un système de 11 équations aux dérivées partielles qui constituent l'ensemble des contraintes nécessaires à la détermination des fonctions de coordonnées $\xi(x, t, T)$, $\tau(x, t, T)$ et $\eta(x, t, T)$. La résolution complète de ce système d'équations est présentée en Annexe A.1.

On peut montrer que ces 11 équations peuvent se réduire à 7 équations déterminantes pour les différentes fonctions de coordonnées, données par :

$$\xi_T = 0, \quad \tau_T = 0, \quad \tau_x = 0 \quad (4.39)$$

$$E_T \eta_t = \frac{4a_{RC}}{3} \lambda_R T^3 \eta_{xx} \quad (4.40)$$

$$-E_T \xi_t = \frac{4a_{RC}}{3} \left[2 \left(\lambda_R T^3 \eta_x \right)_T - \lambda_R T^3 \xi_{xx} \right] \quad (4.41)$$

$$\left[\frac{E_{TT}}{E_T} \eta + (2\xi_x - \tau_t) \right] \left(\lambda_R T^3 \right)_T = \left(\eta \lambda_R T^3 \right)_{TT} \quad (4.42)$$

$$\eta \left[\left(\lambda_R T^3 \right)_T - \frac{\lambda_R T^3 E_{TT}}{E_T} \right] = \lambda_R T^3 [2\xi_x - \tau_t] \quad (4.43)$$

On constate que ces contraintes font explicitement intervenir les fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$. Cela signifie que le choix de la forme de ces fonctions joue sur les dépendances des fonctions de coordonnées. Après une résolution détaillée dans l'Annexe A.1, on constate en effet que les fonctions de coordonnées vont dépendre de l'expression d'une fonction notée $D(T)$ et associé aux éléments $E(T)$ et $\lambda_R(T)$:

$$D(T) = \frac{4a_{RC}}{3} \left[\frac{\lambda_R T^3}{E_T} \right] \quad (4.44)$$

Dans le cas où le coefficient $D(T)$ est une fonction non constante quelconque de la température, on obtient la forme générale des fonctions de coordonnées donnée par :

$$\xi(x) = b_1 + b_3 x, \quad \tau(t) = b_2 + 2b_3 t, \quad \eta(x, t, T) = 0 \quad (4.45)$$

où les b_i sont des paramètres constants et indépendants. La nullité de la fonction η indique que la seule transformation possible pour la température T est la transformation identité ($\hat{T} = T$). Cette contrainte s'explique par le fait que l'on a laissé les fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$ (et donc $D(T)$) libres, ce qui donne une forme très générale à l'équation (4.26). Lorsque l'on impose les contraintes :

$$D(T) = D_0 \exp(T), \quad \text{ou} \quad D(T) = D_0 T^b \quad (4.46)$$

où b est une constante non nulle, de nouvelles symétries apparaissent. Les fonctions de coordonnées s'écrivent en effet :

$$\xi(x) = b_1 + (b_3 + b_4)x + b_5 x^2, \quad \tau(t) = b_2 + 2b_3 t, \quad \eta(x, T) = \frac{D}{D_T} [2b_4 + 4b_5 x] \quad (4.47)$$

où les b_i sont des paramètres constants et indépendants. Ici, la fonction η n'est plus nulle et fait intervenir directement le coefficient $D(T)$ et sa dérivée. Cette fonction de coordonnée est donc contrainte par la

forme que prend ce coefficient et donc par les fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$. Cela se traduit par l'existence de contraintes sur les paramètres b_4 et b_5 . Les différentes étapes de calculs de ces contraintes sont présentées en Annexe A.1.1, et s'écrivent :

$$b_4 \neq 0 \iff E(T) = e_0 \exp\left(\frac{T}{T_1}\right), \lambda_R(T) = \frac{\lambda_0}{T^3} \exp\left(\frac{T}{T_2}\right) \quad \text{ou} \quad E(T) = e_0 T^\beta, \lambda_R(T) = \lambda_0 T^\alpha \quad (4.48)$$

$$b_5 \neq 0 \iff T_1 = -\frac{1}{3}T_2, \quad \text{ou} \quad \beta = -3(4 + \alpha) \quad (4.49)$$

où T_1, T_2, α et β sont des paramètres constants et conservés par les changements de variables.

Ces différentes contraintes traduisent le fait que la structure interne de l'équation différentielle (4.20) dépend fortement du choix de $E(T)$ et $\lambda_R(T)$. Ainsi, les symétries de Lie de l'équation (4.26) sont conditionnées au choix arbitraire de ces paramètres. Les différentes contraintes sont regroupées dans les trois premières colonnes du Tableau 4.1. Notons que si le coefficient $D(T)$ est indépendant de la température (de valeur notée $D(T) = D_0$), l'équation (4.26) se ramène à l'équation linéaire de la chaleur. La recherche des symétries dans ce cas particulier est alors modifiée, comme le montrent les calculs en Annexe A.1.2. On obtient un ensemble de contraintes regroupées dans les trois premières colonnes du Tableau 4.2.

4.2.3.2 Détermination des générateurs de Lie

On s'intéresse ici au cas général où le coefficient $D(T) \neq D_0$ n'est pas constant, ce qui permet de considérer seulement les fonctions de coordonnées et contraintes données par les équations (4.47) à (4.49). On peut alors écrire le générateur infinitésimal des symétries de l'équation (4.26) sous la forme (4.28), ce qui donne dans notre cas :

$$G = b_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial t} + b_3 \left[x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t} \right] + b_4 \left[x \frac{\partial}{\partial x} + 2 \frac{D}{D_T} \frac{\partial}{\partial T} \right] + b_5 \left[x^2 \frac{\partial}{\partial x} + 4x \frac{D}{D_T} \frac{\partial}{\partial T} \right] \quad (4.50)$$

Le générateur infinitésimal G est une composition de cinq générateurs en facteur des cinq constantes b_i . Ces paramètres étant indépendants entre eux, on peut légitimement les considérer tous nuls sauf un, et ce à tour de rôle. À chaque choix arbitraire d'un paramètre non nul, on va donc obtenir un générateur associé. Il est alors possible de complètement séparer le générateur infinitésimal donné par la relation (4.50) en un ensemble de cinq opérateurs indépendants générant chacun une symétrie¹. On dispose donc d'un ensemble de cinq générateurs infinitésimaux G_1 à G_5 . Les trois premiers générateurs existent quelle que soit la forme des fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$ et sont donnés par :

$$G_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad G_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad G_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t} \quad (4.51)$$

1. On peut résumer cela en déclarant que toute combinaison linéaire de générateurs de Lie de l'équation (4.26) reste un générateur de Lie de cette équation.

Il existe également deux générateurs notés G_4 et G_5 , n'apparaissant que si les contraintes (4.48-4.49) pesant sur les fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$ sont vérifiées. Dans le cas où le paramètre b_4 est non nul, on obtient alors :

$$G_4 = x \frac{\partial}{\partial x} + 2 \frac{D}{D_T} \frac{\partial}{\partial T} \quad (4.52)$$

tandis que dans le cas où le paramètre b_5 est non nul, on obtient :

$$G_5 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + 4x \frac{D}{D_T} \frac{\partial}{\partial T} \quad (4.53)$$

On note que ces générateurs, de même que leurs contraintes, font intervenir explicitement le coefficient $D(T)$ et donc les fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$. Les différents générateurs calculés en fonction des contraintes (4.48-4.49) sont regroupés dans la quatrième colonne du Tableau 4.1. Les seuls générateurs faisant intervenir explicitement la variable dépendante T sont G_4 et G_5 . On peut l'expliquer par le fait que ce sont également les seuls générateurs contraints par la forme des fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$.

4.2.3.3 Détermination des symétries de Lie

On dispose donc de trois générateurs infinitésimaux, quelle que soit la forme des fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$. Ce nombre peut atteindre au maximum la valeur de cinq, si les contraintes (4.48-4.49) sont vérifiées. On peut alors obtenir la forme explicite des transformations sur les variables indépendantes x , t et la variable dépendante T en utilisant les relations (4.7-4.8). Prenons par exemple le cas particulier où les fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$ peuvent s'écrire sous la forme de lois de puissance satisfaisant les contraintes (4.48-4.49). On a dans ce cas :

$$E(T) = e_0 T^\beta, \quad \lambda_R(T) = \lambda_0 T^\alpha, \quad \beta = -3(4 + \alpha), \quad \Rightarrow \quad D(T) = \frac{4a_{RC}}{3} \frac{\lambda_0 T^{4(4+\alpha)}}{\beta e_0} \quad (4.54)$$

Notons que, dans ce cas particulier, la densité d'énergie radiative est négligée dans la fonction $E(T)$, ce qui conduit à des régimes caractérisés par $R \gg 1$. Le générateur G_5 s'écrit alors (voir le Tableau 4.1) :

$$G_5 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{xT}{(4 + \alpha)} \frac{\partial}{\partial T} \quad (4.55)$$

La transformation associée à ce générateur est obtenue en résolvant les équations (4.7-4.8), qui s'écrivent :

$$\frac{d\hat{x}}{da} = \hat{x}^2, \quad \frac{d\hat{t}}{da} = 0, \quad \frac{d\hat{T}}{da} = \frac{\hat{x}\hat{T}}{4 + \alpha} \quad (4.56)$$

$$\hat{x}(0) = x, \quad \hat{t}(0) = t, \quad \hat{T}(0) = T \quad (4.57)$$

En intégrant ces relations, on obtient :

$$\int_x^{\hat{x}} \frac{d\hat{x}}{\hat{x}^2} = \int_0^a da, \quad \int_t^{\hat{t}} d\hat{t} = 0, \quad (4 + \alpha) \int_T^{\hat{T}} \frac{d\hat{T}}{\hat{T}} = \int_x^{\hat{x}} \frac{d\hat{x}}{\hat{x}} \quad (4.58)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\hat{x}}\right) = a, \quad \hat{t} - t = 0, \quad (4 + \alpha) \ln\left(\frac{\hat{T}}{T}\right) = \ln\left(\frac{\hat{x}}{x}\right) \quad (4.59)$$

où a est le paramètre de la transformation. Nous choisissons de noter $\gamma_5 = a$ le paramètre associé à la symétrie provenant du générateur G_5 , afin de le différencier des paramètres provenant des différents générateurs G_1 à G_4 . Cela nous conduit à la transformation de paramètre γ_5 :

$$S_5 : \hat{x} = \frac{x}{1 - \gamma_5 x}, \quad \hat{t} = t, \quad \hat{T} = T \left(\frac{1}{1 - \gamma_5 x}\right)^{\frac{1}{4+\alpha}} \quad (4.60)$$

On constate que cette symétrie ne modifie pas la variable temporelle qui est donc invariante pour cette transformation. Cependant, elle modifie la structure spatiale de l'onde radiative de façon bien différente de ce que l'on a pu obtenir pour les lois d'échelle au chapitre 3. On peut choisir de vérifier que cette transformation laisse invariante l'équation (4.26). On a donc :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} = \left(\frac{\hat{x}}{x}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \hat{x}}, \quad T = \hat{T} \left(\frac{\hat{x}}{x}\right)^{-\frac{1}{4+\alpha}}, \quad \frac{\hat{x}}{x} = \frac{1}{1 - \gamma_5 x} \quad (4.61)$$

qui, injectée dans l'équation (4.26), donne :

$$\left(\frac{1}{1 - \gamma_5 x}\right)^3 \frac{\partial e_0 \hat{T}^{-3(4+\alpha)}}{\partial t} = \frac{4a_{RC}}{3} \left(\frac{\hat{x}}{x}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[\lambda_0 \left(\frac{1}{1 - \gamma_5 x}\right)^{-1} \hat{T}^{3+\alpha} \left(\frac{1}{1 - \gamma_5 x}\right)^2 \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} \right] \quad (4.62)$$

En simplifiant par les différentes puissances du terme $1/(1 - \gamma_5 x)$ de chaque côté de l'équation, et en notant que $\hat{t} = t$ pour cette transformation, on obtient ainsi :

$$\frac{\partial E(\hat{T})}{\partial \hat{t}} = \frac{4a_{RC}}{3} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[\lambda_R(\hat{T}) \hat{T}^3 \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} \right], \quad E(\hat{T}) = e_0 \hat{T}^{-3(4+\alpha)}, \quad \lambda_R(\hat{T}) = \lambda_0 \hat{T}^\alpha \quad (4.63)$$

On a bien conservé la structure de l'équation différentielle (4.20), en laissant les fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$ invariantes. Plus précisément les paramètres e_0 , β , λ_0 , α sont conservés d'un système à l'autre.

Il est possible d'effectuer le même raisonnement pour les différents générateurs présentés dans le Tableau 4.1. Dans le cas des fonctions en loi de puissance, on dispose du générateur G_4 donné en sixième ligne du Tableau 4.1, et qui génère une homothétie sur les variables indépendantes x et t et le champ de température T . Nous pouvons le vérifier en écrivant, de la même façon que pour les relations (4.58-4.59) :

$$\frac{d\hat{x}}{da} = \hat{x}, \quad \frac{d\hat{t}}{da} = 0, \quad \frac{d\hat{T}}{da} = \frac{2}{4 + \alpha - \beta} \quad (4.64)$$

qui conduisent à :

$$\ln\left(\frac{\hat{x}}{x}\right) = a, \quad \hat{t} - t = 0, \quad \ln\left(\frac{\hat{T}}{T}\right) = \frac{2a}{4 + \alpha - \beta} \quad (4.65)$$

On obtient alors la transformation de paramètre $\gamma_4 = e^a$:

$$\mathcal{S}_4 : \hat{x} = \gamma_4 x, \quad \hat{t} = t, \quad \hat{T} = \gamma_4^{\frac{1}{2(4+\alpha)}} T \quad (4.66)$$

Pour finir, il existe dans le cas général uniquement trois symétries associées aux générateurs G_1 , G_2 et G_3 qui sont respectivement deux translations spatiale (notée \mathcal{T}_1) et temporelle (notée \mathcal{T}_2), et une homothétie (notée \mathcal{H}_3), qui s'écrivent :

$$\mathcal{T}_1 : \hat{x} = x + \gamma_1, \quad \hat{t} = t, \quad \hat{T} = T \quad (4.67)$$

$$\mathcal{T}_2 : \hat{x} = x, \quad \hat{t} = t + \gamma_2, \quad \hat{T} = T \quad (4.68)$$

$$\mathcal{H}_3 : \hat{x} = \gamma_3 x, \quad \hat{t} = \gamma_3^2 t, \quad \hat{T} = T \quad (4.69)$$

où $\gamma_1 = a$, $\gamma_2 = a$ et $\gamma_3 = e^a$ sont les paramètres libres associés aux transformations. On remarque que ces trois symétries laissent invariant le champ de température T . Tous ces résultats sont regroupés au sein du Tableau 4.1 qui résume les différentes symétries de l'équation (4.20) ainsi que leurs contraintes et générateurs infinitésimaux associés. De la même façon, les résultats du cas $D(T) = D_0$ sont regroupés dans le Tableau 4.2.

Considérons alors en particulier le quatrième cas du Tableau 4.1, correspondant au choix des fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$ en loi de puissance. On obtient dans ce cas les quatre symétries \mathcal{T}_1 , \mathcal{T}_2 , \mathcal{H}_3 , et \mathcal{S}_4 . En composant ces symétries entre elles, on obtient le groupe de transformations à quatre paramètres :

$$\begin{cases} \hat{x} = \gamma_3 \gamma_4 (x + \gamma_1) \\ \hat{t} = \gamma_3^2 (t + \gamma_2) \\ \hat{T} = \gamma_4^{\frac{2}{4+\alpha-\beta}} T \end{cases} \quad (4.70)$$

qui laisse invariante l'équation (4.26). Ces symétries se trouvent être les lois d'échelles en invariance absolue [Falize *et al.*, 2011b] des ondes radiatives, dans la limite de nombres de Mihalas $R, \hat{R} \gg 1$.

Dans le cas d'un $D(T)$ quelconque (voir les trois premières lignes du Tableau 4.1), la seule transformation possible sur le champ de température est une transformation d'identité ($T = \hat{T}$). Cela conduit directement à la perte de la symétrie associée au générateur G_4 . Ainsi, seules les translations et homothéties spatio-temporelles² sont conservées dans ce cas. C'est aussi le cas lorsque l'on ne néglige plus la densité d'énergie radiative dans la fonction $E(T)$. De manière générale, on retrouve le résultat que l'on ne peut pas construire de lois d'échelles sur le champ de température dans ces régimes ou pour des fonctions $D(T)$ quelconques.

2. Ces symétries sont complètement indépendantes du choix des fonctions arbitraires, car découlent des générateurs de Lie non-contraints G_1 , G_2 et G_3 .

Ces symétries de Lie ont donc conduit en partie aux lois d'échelles de l'invariance absolue décrites dans le précédent chapitre. Cela ne permet pas pour autant de répondre à la problématique initiale posée par les concepts de similitude. En effet, on rappelle que l'on cherche à obtenir des lois de transformation permettant de lier différents régimes d'ondes radiatives, ou encore des matériaux à la microphysique fondamentalement différente. De manière générale, aucune des lois de transformation présentées dans la dernière colonne des Tableaux 4.1 et 4.2 ne permettent d'obtenir l'effet escompté. Cela est dû à la conservation des fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$ dans l'approche classique de Lie. Afin de généraliser ces concepts, ces éléments doivent maintenant être considérés comme des variables à part entière.

$D(T)$	$E(T)$	$\lambda_R(T)$	Générateurs	Symétries
Quelconque	Quelconque	Quelconque	$G_1 = \frac{\partial}{\partial x}$	$\hat{x} = x + \gamma_1 \quad \hat{t} = t \quad \hat{T} = T$
			$G_2 = \frac{\partial}{\partial t}$	$\hat{x} = x \quad \hat{t} = t + \gamma_2 \quad \hat{T} = T$
			$G_3 = \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t}$	$\hat{x} = \gamma_3 x \quad \hat{t} = \gamma_3^2 t \quad \hat{T} = T$
$\frac{T_1 \lambda_0}{e_0} \exp\left(\frac{T}{T_2} - \frac{T}{T_1}\right)$	$e_0 \exp\left(\frac{T}{T_1}\right)$	$\lambda_R(T) = \frac{\lambda_0}{T^3} \exp\left(\frac{T}{T_2}\right)$	$G_4 = x \frac{\partial}{\partial x} + 2 \frac{T_1 T_2}{(T_1 - T_2)} \frac{\partial}{\partial T}$	$\hat{x} = \gamma_4 x \quad \hat{t} = t \quad \hat{T} = T + 2 \frac{T_1 T_2}{(T_1 - T_2)} \ln(\gamma_4)$
			Si $T_1 = -\frac{T_2}{3}$, alors : $G_5 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + x T_2 \frac{\partial}{\partial T}$	$\hat{x} = \frac{x}{1 - \gamma_5 x} \quad \hat{t} = t \quad \hat{T} = T + T_2 \ln\left(\frac{1}{1 - \gamma_5 x}\right)$
$\frac{\lambda_0}{\beta e_0} T^{(4+\alpha)-\beta}$	$e_0 T^\beta$	$\lambda_R(T) = \lambda_0 T^\alpha$	$G_4 = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2T}{4+\alpha-\beta} \frac{\partial}{\partial T}$	$\hat{x} = \gamma_4 x \quad \hat{t} = t \quad \hat{T} = T \gamma_4^{\frac{2}{4+\alpha-\beta}}$
			Si $\beta = -3(4+\alpha)$, alors : $G_5 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{xT}{4+\alpha} \frac{\partial}{\partial T}$	$\hat{x} = \frac{x}{1 - \gamma_5 x} \quad \hat{t} = t \quad \hat{T} = T \left(\frac{1}{1 - \gamma_5 x}\right)^{\frac{1}{4+\alpha}}$

TABLEAU 4.1 – Générateurs et symétries de Lie de l'équation différentielle (4.20) sous différentes contraintes pour les fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$ dans le cas $D(T) \neq D_0$.

$D(T)$	$E(T)$	$\lambda_R(T)$	Générateurs	Symétries
Quelconque	Quelconque	Quelconque	$G_1 = \frac{\partial}{\partial x}$	$\hat{x} = x + \gamma_1 \quad \hat{t} = t \quad \hat{T} = T$
			$G_2 = \frac{\partial}{\partial t}$	$\hat{x} = x \quad \hat{t} = t + \gamma_2 \quad \hat{T} = T$
			$G_3 = \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t}$	$\hat{x} = \gamma_3 x \quad \hat{t} = \gamma_3^2 t \quad \hat{T} = T$
D_0	$e_0 \exp\left(\frac{T}{T_1}\right)$	$\lambda_R(T) = \frac{\lambda_0}{T^3} \exp\left(\frac{T}{T_1}\right)$	$G_4 = xt \frac{\partial}{\partial x} + t^2 \frac{\partial}{\partial t} - T_1 \left(\frac{t}{2} + \frac{x^2}{4D_0}\right) \frac{\partial}{\partial T}$	$\hat{x} = x \left(\frac{1}{1-\gamma_4 t}\right) \quad \hat{t} = \left(\frac{t}{1-\gamma_4 t}\right)$ $\hat{T} = T - \frac{T_1}{2} \left[\ln\left(\frac{1}{1-\gamma_4 t}\right) + \frac{\gamma_4 x^2}{2D_0} \left(\frac{1}{1-\gamma_4 t}\right) \right]$
			$G_5 = t \frac{\partial}{\partial x} - \frac{T_1 x}{2D_0} \frac{\partial}{\partial T}$	$\hat{x} = x + \gamma_5 t \quad \hat{t} = t \quad \hat{T} = T - \frac{T_1}{4D_0} \gamma_5 [2x + \gamma_5 t]$
			$G_6 = \frac{\partial}{\partial T}$	$\hat{x} = x \quad \hat{t} = t \quad \hat{T} = T + \gamma_6$
	$e_0 T^{4+\alpha}$	$\lambda_0 T^\alpha$	$G_4 = xt \frac{\partial}{\partial x} + t^2 \frac{\partial}{\partial t} - \frac{T}{(4+\alpha)} \left(\frac{t}{2} + \frac{x^2}{4D_0}\right) \frac{\partial}{\partial T}$	$\hat{x} = x \left(\frac{1}{1-\gamma_4 t}\right) \quad \hat{t} = \left(\frac{t}{1-\gamma_4 t}\right)$ $\hat{T} = T \left[\left(\frac{1}{1-\gamma_4 t}\right)^{-\frac{1}{2(4+\alpha)}} \exp\left(-\frac{\gamma_4 x^2}{4D_0(4+\alpha)} \frac{1}{1-\gamma_4 t}\right) \right]$
			$G_5 = t \frac{\partial}{\partial x} - \frac{T x}{2D_0(4+\alpha)} \frac{\partial}{\partial T}$	$\hat{x} = x + \gamma_5 t \quad \hat{t} = t \quad \hat{T} = T \exp\left(-\frac{\gamma_5(2x+\gamma_5 t)}{4D_0(4+\alpha)}\right)$
			$G_6 = T \frac{\partial}{\partial T}$	$\hat{x} = x \quad \hat{t} = t \quad \hat{T} = \gamma_6 T$
	Équation linéaire de la chaleur : $\alpha = -3$		$G_\infty = \Gamma_2(x, t) \frac{\partial}{\partial T}$	$\hat{x} = x \quad \hat{t} = t \quad \hat{T} = T(x, t) + \Gamma_2(x, t)$

TABLEAU 4.2 – Générateurs et symétries de Lie de l'équation différentielle (4.20) sous différentes contraintes pour les fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$ dans le cas $D(T) = D_0$.

4.3 Les symétries d'équivalence

4.3.1 Fonctions arbitraires et classes d'équations différentielles

Dans la méthode de détermination des symétries de Lie ponctuelles d'une équation différentielle de type (4.1), la possibilité de modifier des fonctions ou éléments arbitraires³ n'est pas traitée. Dans notre cas, ces éléments arbitraires sont les fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$, déterminées par la nature du plasma. Elles subissent ainsi l'effet des transformations sur les variables dépendantes et indépendantes sans pouvoir être elles-mêmes modifiées. Cependant, au chapitre 3, on a insisté sur le fait que la structure de ces éléments pouvait être très différente entre les échelles astrophysique et de laboratoire. Or, l'hypothèse d'invariance de ces fonctions est propre aux symétries de Lie classiques développées précédemment et qui nous ont permis de retrouver les lois d'échelles du chapitre 3. C'est en particulier pour cela que le groupe de symétries de Lie (4.70) obtenu dans la section précédente dépend de la forme que prennent ces fonctions.

L'objet de cette section est donc l'introduction des fonctions arbitraires comme des variables modifiables au sens de Lie. Cette modification des fonctions arbitraires que l'on cherche à maîtriser doit être intégrée à la méthode développée dans la section précédente. En pratique, cela revient à réclamer l'invariance d'une structure plus générale que la seule donnée de l'équation différentielle (4.26). L'invariance de la forme de l'équation n'est alors plus seulement considérée, car on s'intéresse à présent à celle de l'ensemble du modèle. En particulier, les symétries classiques permettent d'obtenir une invariance stricte, ou absolue, de l'équation différentielle (4.26), prenant la forme :

$$\frac{\partial E(T)}{\partial t} = \frac{4a_{RC}}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_R(T) T^3 \frac{\partial T}{\partial x} \right] \rightarrow \frac{\partial E(\hat{T})}{\partial \hat{t}} = \frac{4a_{RC}}{3} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[\lambda_R(\hat{T}) \hat{T}^3 \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} \right] \quad (4.71)$$

Les fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$ sont écrites en bleu pour souligner leur importance ainsi que les changements structurels les concernant. On constate donc ici que les fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$ n'ont pas été modifiées. Considérer l'invariance de l'ensemble du modèle, en tenant compte d'une possible modification de ces éléments, permet alors d'écrire :

$$\frac{\partial E(T)}{\partial t} = \frac{4a_{RC}}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_R(T) T^3 \frac{\partial T}{\partial x} \right] \rightarrow \frac{\partial \hat{E}(\hat{T})}{\partial \hat{t}} = \frac{4a_{RC}}{3} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[\hat{\lambda}_R(\hat{T}) \hat{T}^3 \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} \right] \quad (4.72)$$

où on observe la présence des nouvelles fonctions $\hat{E}(\hat{T})$ et $\hat{\lambda}_R(\hat{T})$. On cherche donc à obtenir de nouvelles symétries qui reposent sur un principe d'invariance généralisée de l'équation (4.26). Dans ce contexte, on parle alors de l'invariance d'une classe d'équations [Ovsiannikov, 1982]. Ce concept de classe d'équations intervient dans le cadre de la recherche d'une classification des équations différentielles et permet de tenir compte des différentes formes que peuvent revêtir les éléments arbitraires apparaissant au sein des modèles théoriques étudiés. Les symétries de Lie de telles entités sont appelées symétries de Lie d'équivalence pour une classe d'équations [Ovsiannikov, 1982; Olver, 1986; Lisle, 1992]. Dans la suite du manuscrit, on se réfère à ces transformations par le nom de symétries d'équivalence, et aux symétries de Lie de la section précédente par le nom de symétries classiques.

3. Dans la littérature, on retrouve parfois la notion de fonctions constitutives qui se rapporte au même concept [Lisle, 1992].

4.3.2 Obtenir les symétries d'équivalence d'une équation différentielle

Reprenons à présent l'équation différentielle (4.1), où l'on considère l'existence de M fonctions arbitraires $\mathbf{g} = g_{i \leq i \leq M}(f)$ dépendant explicitement de la variable dépendante f . La classe de cette équation différentielle est alors définie comme l'ensemble formé par l'équation différentielle :

$$F \left(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}), \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^n f(\mathbf{x})}{\partial x_N^n}, g_1(f), \dots, g_M(f), \frac{\partial g_1(f)}{\partial f}, \dots, \frac{\partial g_M(f)}{\partial f} \right) = 0 \quad (4.73)$$

ainsi que les équations définissant la dépendance des éléments arbitraires $g_{i \leq i \leq M}$, données ici ⁴ par :

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \quad 1 \leq i \leq M, \quad 1 \leq j \leq N \quad (A) \quad (4.74)$$

où le système d'équations (A) est appelé système auxiliaire. Considérer l'invariance d'une telle classe d'équations permet de modifier les fonctions arbitraires g_i , mais pas leurs dépendances. C'est ce qu'on appelle le principe d'équivalence forte, en opposition à l'équivalence faible [Torrisi et Tracina, 1998] où la conservation de la dépendance des fonctions arbitraires n'est plus assurée. C'est sur ce concept d'équivalence forte que notre attention se porte naturellement, afin de conserver une cohérence physique pour les fonctions arbitraires.

À présent, on montre comment généraliser le cheminement effectué pour l'analyse classique de Lie, dans le cas où les éléments arbitraires propres à l'équation étudiée ne sont plus considérés comme fixés. Cela revient à choisir l'objet étudié comme la classe (4.73-4.74), et non plus seulement l'équation différentielle (4.1). Dans ce cadre, on propose de considérer les éléments arbitraires g_i de la classe d'équations (4.73-4.74) comme des variables dépendantes au sens de Lie. On dispose alors d'un espace étendu de variables par rapport au cas classique pour les ondes radiatives :

$$\text{Approche classique : } (x, t, T) \rightarrow \text{Approche d'équivalence : } (x, t, T, E, \lambda_R) \quad (4.75)$$

On cherche donc un changement de variables sur cet espace étendu, de la même façon que pour l'analyse classique (4.2), sous la forme :

$$\mathbf{x} \rightarrow \hat{\mathbf{x}}, \quad f \rightarrow \hat{f} \quad \text{et} \quad \mathbf{g} \rightarrow \hat{\mathbf{g}} \quad (4.76)$$

tels que :

$$F \left(\hat{\mathbf{x}}, \hat{f}(\hat{\mathbf{x}}), \dots, \frac{\partial^n \hat{f}(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{x}_N^n}, \hat{\mathbf{g}}(\hat{f}), \frac{\partial \hat{\mathbf{g}}(\hat{f})}{\partial \hat{f}} \right) = F \left(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial^n f(\mathbf{x})}{\partial x_N^n}, \mathbf{g}(f), \frac{\partial \mathbf{g}(f)}{\partial f} \right) = 0 \quad (4.77)$$

Après transformation, on conserve la forme de l'équation différentielle $F = 0$ ainsi que les dépendances

4. On traite ici le cas de fonctions arbitraires dépendant de la variable f , qui servira pour l'application de la section suivante. En pratique, la dépendance des fonctions arbitraires peut être quelconque. De plus, on se cantonne à la présence de dérivées d'ordre 1 maximum pour ces dérivées arbitraires, la généralisation au cas de dérivées d'ordre n étant immédiate, comme pour l'analyse de la section précédente.

des fonctions arbitraires. En ce sens, on conserve la classe définie par les relations (4.73-4.74).

Dans cette section, nous allons montrer comment déterminer les symétries ponctuelles d'équivalence de cette classe. Tout d'abord, cela revient à reprendre le changement de variables défini par la relation (4.4), et à y ajouter celui sur les nouvelles variables dépendantes $E(T)$ et $\lambda_R(T)$. On obtient :

$$\hat{x}_i = \Phi_i(\mathbf{x}, f, a), \quad \hat{f} = \Psi(\mathbf{x}, f, a), \quad \hat{g}_j = \zeta_j(\mathbf{x}, f, \mathbf{g}, a), \quad \forall i \in [1, N], \quad \forall j \in [1, M] \quad (4.78)$$

où a est toujours le paramètre associé à la transformation et Φ_i, Ψ, ζ_j sont des fonctions supposées continues de a . Pour garantir la cohérence physique des variables de l'équation différentielle (4.73), les transformations sur les variables indépendantes \hat{x}_i et la variable dépendante \hat{f} ne dépendent pas des éléments arbitraires g_j .

En suivant le même raisonnement que pour les relations (4.5), on note a_0 la valeur de a telle que le changement de variables (4.78) évalué en a_0 se rapporte à la transformation identité :

$$\hat{x}_i = \Phi_i(\mathbf{x}, f, a_0) = x_i, \quad \hat{f} = \Psi(\mathbf{x}, f, a_0) = f, \quad \hat{g}_j = \zeta_j(\mathbf{x}, f, \mathbf{g}, a_0) = g_j \quad (4.79)$$

On considère de nouveau une variation infinitésimale de a autour de l'élément a_0 donnée par la relation (4.6). En utilisant la continuité des fonctions ζ_j en a , et en effectuant un développement limité en δa de la même façon que pour les relations (4.7-4.8), on obtient :

$$\hat{g}_j = g_j + \epsilon_j(\mathbf{x}, f, \mathbf{g})\delta a + o(\delta a), \quad \text{où} \quad \epsilon_j(\mathbf{x}, f, \mathbf{g}) = \left. \frac{d\zeta_j(\mathbf{x}, f, \mathbf{g}, a)}{da} \right|_{a=a_0} \quad (4.80)$$

où les fonctions ϵ_j sont donc les fonctions de coordonnées associées aux éléments arbitraires g_j . À partir de ces fonctions, il est possible de reconstruire les transformations d'équivalence recherchées, en résolvant :

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{da} = \xi(\hat{\mathbf{x}}, \hat{f}), \quad \hat{\mathbf{x}}(a_0) = \mathbf{x} \quad (4.81)$$

$$\frac{d\hat{f}}{da} = \eta(\hat{\mathbf{x}}, \hat{f}), \quad \hat{f}(a_0) = f \quad (4.82)$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{g}}}{da} = \epsilon(\hat{\mathbf{x}}, \hat{f}, \hat{\mathbf{g}}), \quad \hat{\mathbf{g}}(a_0) = \mathbf{g} \quad (4.83)$$

On remarque par ailleurs que les fonctions de coordonnées ξ et η ne dépendent pas des éléments arbitraires g_j . Cela provient du fait que l'on a considéré que les changements de variable associés aux entités \mathbf{x} et f donnés par (4.79) ne dépendaient pas de ces fonctions.

Afin d'obtenir les fonctions de coordonnées ξ, η et ϵ , on procède de façon similaire à l'analyse classique, en exploitant l'invariance de l'équation différentielle (4.71). On procède alors par étapes, en considérant tout d'abord l'action de transformations infinitésimales sur une équation algébrique du type $F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}), \mathbf{g}(f)) = 0$. De la même façon que pour la relation (4.13), on obtient alors :

$$F(\hat{\mathbf{x}}, \hat{f}, \hat{\mathbf{g}}) = F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}), \mathbf{g}(f)) + GF\delta a + o(\delta a) \quad (4.84)$$

L'opérateur différentiel G est appelé le générateur infinitésimal d'équivalence et prend la forme suivante :

$$G = \left[\sum_{i=1}^N \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial}{\partial f} + \sum_{j=1}^M \epsilon_j \frac{\partial}{\partial g_j} \right] \quad (4.85)$$

On constate que ce générateur est quasiment identique à celui des symétries classiques (4.14), à la différence près de la présence du terme supplémentaire lié à l'introduction des éléments arbitraires comme variables dépendantes. D'après l'équation (4.84), la condition d'invariance associée à l'équation $F = 0$ est donc donnée par :

$$GF(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}), \mathbf{g}(f)) = 0 \quad \text{quand} \quad F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}), \mathbf{g}(f)) = 0 \quad (4.86)$$

qui correspond bien à celle de la méthode classique (4.16). Pour ce qui est des équations différentielles faisant intervenir les dérivées des variables dépendantes, on a vu dans la première partie de ce chapitre que l'on pouvait obtenir le même genre de conditions d'invariance (4.23) en faisant intervenir les différents prolongements du générateur infinitésimal G donnés par (4.24). De la même façon, les dérivées des éléments arbitraires peuvent également être présentes dans l'équation différentielle, en tant que dérivées d'une variable dépendante à présent. Dans le cadre de la recherche de symétries ponctuelles d'équivalence, les transformations infinitésimales d'équivalence vont ainsi induire des transformations infinitésimales sur ces dérivées. Dans le cas de dérivées d'ordre 1, présentes dans l'équation différentielle (4.73), ces transformations prennent la forme suivante :

$$\frac{\partial \hat{g}_j}{\partial f} = \frac{\partial g_j}{\partial f} + \pi_{(j+1)(N+1)} \delta a \quad (4.87)$$

où la notation $(j+1)(N+1)$ correspond à l'élément arbitraire numéro $j =$ variable dépendante numéro $(j+1)$ et à la variable indépendante numéro $(N+1)$. On constate que, dans ce cadre, la variable dépendante f est traitée comme une variable indépendante, ce qui explique le chiffre $(N+1)$ dans les notations, bien que l'on ait seulement deux variables indépendantes dans l'étude. Cette propriété de la variable dépendante f ne concerne que l'approche d'équivalence. On peut obtenir la grandeur $\pi_{(j+1)(N+1)}$ en fonction des fonctions de coordonnées ξ_i , η et ϵ_j [Lisle, 1992], ce qui donne :

$$\pi_{(j+1)(N+1)} = \frac{d\epsilon_j}{df} - \frac{\partial g_j}{\partial f} \left[\frac{\partial \eta}{\partial T} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{d\xi_i}{df} \right] \quad \text{avec} \quad \frac{d\epsilon_j}{df} = \left[\frac{\partial}{\partial f} + \sum_{i=1}^M \frac{\partial g_i}{\partial f} \frac{\partial}{\partial g_i} \right] \epsilon_j \quad (4.88)$$

Ces fonctions apparaissent dans l'expression du générateur prolongé $G^{(1)}$, qui, de la même façon que pour l'analyse classique et l'équation (4.22), intervient dans une condition d'invariance du type :

$$G^{(1)}F(\mathbf{x}, f, f_{\mathbf{x}}, \mathbf{g}, \mathbf{g}_f) = 0 \quad \text{quand} \quad F = 0 \quad (4.89)$$

Le générateur d'équivalence prolongé à l'ordre 1 s'écrit alors, en considérant les relations (4.20) et (4.21), de la façon suivante :

$$G^{(1)} = G + \sum_{j=1}^M \pi_{(j+1)(N+1)} \frac{\partial}{\partial g_{f_j}} \quad (4.90)$$

Cette analyse se généralise directement au cas de dérivées d'ordre n , comme pour l'analyse de Lie de la première section, mais aussi au cas d'un système d'équations différentielles [Lisle, 1992]. À ce stade, on a donc adapté l'approche des symétries classiques dans le cas où les fonctions arbitraires sont considérées comme des variables dépendantes. Cependant, l'analyse d'équivalence requiert une étape supplémentaire.

En effet, la classe d'une équation est, comme on a pu le voir, définie par la donnée d'une équation différentielle mais aussi des dépendances des éléments arbitraires la constituant, modélisée par le système auxiliaire (A) donné en (4.74). Ainsi, réclamer l'invariance d'un tel objet ne peut se faire sans prendre en compte l'invariance de la dépendance des éléments arbitraires associés, et donc du système auxiliaire (A). On dispose donc de $N \times M$ relations supplémentaires devant être soumises à la condition d'invariance (4.89). Cependant, de nouvelles dérivées de variables dépendantes sont maintenant apparues, ce qui conduit à ajouter de nouveaux termes au générateur prolongé $G^{(1)}$. En reprenant l'expression de ce générateur (4.90), on ajoute simplement les termes manquants en facteur des dérivées des variables non contenues dans l'équation de départ (4.73). On obtient, dans le cas de notre étude, les relations suivantes :

$$G^{(1)} = G + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \pi_{(j+1)i} \frac{\partial}{\partial g_{jx_i}} \quad \Rightarrow \quad \pi_{(j+1)i} = 0, \quad 1 \leq i \leq N \quad (4.91)$$

où les fonctions $\pi_{(j+1)i}$ sont données, pour une variable indépendante de numéro $1 \leq i \leq N$, par :

$$\pi_{(j+1)i} = \frac{d\epsilon_j}{dx_i} - \left[\frac{\partial g_j}{\partial f} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial g_j}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \right] \quad \text{avec} \quad \frac{d\epsilon_j}{dx_i} = \frac{\partial \epsilon_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^M \frac{\partial g_k}{\partial x_i} \frac{\partial \epsilon_j}{\partial g_k} \quad (4.92)$$

Ces relations vont contraindre les dépendances des fonctions de coordonnées plus ou moins fortement selon la taille du système auxiliaire, et donc des dépendances des éléments arbitraires. En pratique, l'invariance du système auxiliaire permet de propager cette dépendance des éléments arbitraires à celle des fonctions de coordonnées qui leur sont associées. On s'assure donc que les transformations ne modifient pas ces dépendances. Nous allons à présent illustrer ces concepts mathématiques à travers notre exemple d'application sur les ondes radiatives.

4.3.3 Application aux ondes radiatives

On rappelle que l'on cherche à obtenir les symétries d'équivalence associées au modèle d'ondes radiatives suivant :

$$E_T T_t = \frac{4a_{RC}}{3} \left[T_x^2 \left(\lambda_{RT} T^3 + 3\lambda_R T^2 \right) + \lambda_R T^3 T_{xx} \right] \quad (4.93)$$

De la même façon que pour l'analyse classique, on peut classer les différentes variables de l'équation différentielle, en considérant à présent que les fonctions E et λ_R en font partie. Les variables x et t sont

toujours des variables indépendantes, tandis que les variables T , E et λ_R sont des variables dépendantes. On cherche donc des changements de variables sous la forme (4.78) qui s'écrivent :

$$\hat{x} = \Phi_1(x, t, T, a), \quad \hat{t} = \Phi_2(x, t, T, a), \quad \hat{T} = \Psi(x, t, T, a) \quad (4.94)$$

$$\hat{E} = \zeta_1(x, t, T, E, \lambda_R, a), \quad \hat{\lambda}_R = \zeta_2(x, t, T, E, \lambda_R, a) \quad (4.95)$$

Le générateur infinitésimal associé à l'équation (4.93) prend alors la forme :

$$G = \xi(x, t, T) \frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t, T) \frac{\partial}{\partial t} + \eta(x, t, T) \frac{\partial}{\partial T} + \epsilon_1(x, t, T, E, \lambda_R) \frac{\partial}{\partial E} + \epsilon_2(x, t, T, E, \lambda_R) \frac{\partial}{\partial \lambda_R} \quad (4.96)$$

avec les fonctions de coordonnées ξ , τ , η , ϵ_1 et ϵ_2 données par :

$$\xi(x, t, T) = \left. \frac{d\Phi_1}{da} \right|_{a=a_0}, \quad \tau(x, t, T) = \left. \frac{d\Phi_2}{da} \right|_{a=a_0}, \quad \eta(x, t, T) = \left. \frac{d\Psi}{da} \right|_{a=a_0} \quad (4.97)$$

$$\epsilon_1(x, t, T, E, \lambda_R) = \left. \frac{d\zeta_1}{da} \right|_{a=a_0}, \quad \epsilon_2(x, t, T, E, \lambda_R) = \left. \frac{d\zeta_2}{da} \right|_{a=a_0} \quad (4.98)$$

Les notations de la section précédente ont été respectées afin de pouvoir faire un parallèle entre les deux méthodes. Les fonctions de coordonnées ξ , τ , η , ϵ_1 et ϵ_2 sont donc associées respectivement aux variables indépendantes x et t , et aux variables dépendantes T , E , et λ_R .

On réécrit à présent le modèle (4.93) étudié sous une forme appropriée aux notations de la section précédente. On considère ainsi la classe définie par l'ensemble de l'équation différentielle :

$$F(x, t, T, E, \lambda_R) = E_T T_t - \frac{4a_{RC}}{3} \left[(\lambda_{RT} T^3 + 3\lambda_R T^2) T_x^2 + \lambda_R T^3 T_{xx} \right] = 0 \quad (4.99)$$

et du système auxiliaire (A) donné par (4.74), s'écrivant ici :

$$E_x = 0 \quad (4.100)$$

$$E_t = 0 \quad (4.101)$$

$$\lambda_{R_x} = 0 \quad (4.102)$$

$$\lambda_{R_t} = 0 \quad (4.103)$$

Pour se référer à ces relations, nous parlerons dans la suite de la classe d'équation (4.99-4.103). La condition d'invariance associée à la classe d'équation (4.99-4.103) s'écrit alors en deux temps. Premièrement, l'invariance du système auxiliaire (A) donne :

$$G^{(1)}(A) = 0 \quad \text{quand } (A) \text{ est vérifié} \quad (4.104)$$

où le générateur infinitésimal prolongé une fois $G^{(1)}$ est donné par :

$$G^{(1)} = G + \pi_{21} \frac{\partial}{\partial E_x} + \pi_{22} \frac{\partial}{\partial E_t} + \pi_{31} \frac{\partial}{\partial \lambda_{R_x}} + \pi_{32} \frac{\partial}{\partial \lambda_{R_t}} \quad (4.105)$$

pour la condition d'invariance associée au système auxiliaire (A). On obtient alors l'ensemble de contraintes décrit par :

$$\begin{cases} \pi_{21} = 0 & \Rightarrow & \epsilon_{1_x} + E_T \eta_x = 0 & \Rightarrow & \epsilon_{1_x} = \eta_x = 0 \\ \pi_{22} = 0 & \Rightarrow & \epsilon_{1_t} + E_T \eta_t = 0 & \Rightarrow & \epsilon_{1_t} = \eta_t = 0 \\ \pi_{31} = 0 & \Rightarrow & \epsilon_{2_x} + \lambda_{R_T} \eta_x = 0 & \Rightarrow & \epsilon_{2_x} = \eta_x = 0 \\ \pi_{32} = 0 & \Rightarrow & \epsilon_{2_t} + \lambda_{R_T} \eta_t = 0 & \Rightarrow & \epsilon_{2_t} = \eta_t = 0 \end{cases} \quad (4.106)$$

où l'on s'est servi de la définition des $\pi_{(j+1)i}$ donnée par les relations (4.92). Les couleurs utilisées servent à mettre en valeur les différentes combinaisons des dérivées des éléments arbitraires. On a également utilisé l'hypothèse que les fonctions de coordonnées ne peuvent dépendre des dérivées des variables dépendantes E_T et λ_{R_T} dans le cas de la recherche de symétries ponctuelles. On constate que l'invariance du système auxiliaire impose des contraintes fortes sur les dépendances des fonctions de coordonnées des variables dépendantes ϵ_1 et ϵ_2 . Ces contraintes sont directement liées à la dépendance initiale des fonctions arbitraires E et λ_R qui leur sont respectivement associées. En effet, ces éléments ne dépendant pas des variables indépendantes x et t , l'équivalence forte propage cette dépendance aux symétries obtenues. Enfin, on constate que la fonction de coordonnée η est elle aussi touchée par ces mêmes contraintes. Cela provient également de la dépendance des fonctions arbitraires en la variable T associée à cette fonction de coordonnée. L'équivalence forte propage donc la dépendance des fonctions arbitraires aux transformations de toutes les variables intervenant dans leur définition, ici T , E et λ_R .

Dans un second temps, l'invariance de l'équation différentielle (4.99) donne :

$$G^{(2)}F = 0 \quad \text{lorsque} \quad T_t = \frac{4a_{RC}}{3E_T} \left[\left(\lambda_{R_T} T^3 + 3T^2 \lambda_R \right) T_x^2 + \lambda_R T^3 T_{xx} \right] \quad (4.107)$$

où le générateur infinitésimal prolongé deux fois $G^{(2)}$ est donné par :

$$G^{(2)} = G + \pi_{11} \frac{\partial}{\partial T_x} + \pi_{12} \frac{\partial}{\partial T_t} + \pi_{23} \frac{\partial}{\partial E_T} + \pi_{33} \frac{\partial}{\partial \lambda_{R_T}} + \kappa_{111} \frac{\partial}{\partial T_{xx}} \quad (4.108)$$

Ainsi, la dernière contrainte de la condition d'invariance associée à la classe d'équations (4.99-4.103) s'écrit :

$$\begin{aligned} & E_T \pi_{12} + \pi_{23} T_t - \frac{4a_{RC}}{3} \left[\lambda_R \left(6T T_x^2 \eta + 6T^2 T_x \pi_{11} + 3T^2 T_{xx} \eta + T^3 \kappa_{111} \right) \right] \\ & - \frac{4a_{RC}}{3} \left[\epsilon_2 \left(T^3 T_{xx} + 3T^2 T_x^2 \right) + \pi_{33} \left(T^3 T_x^2 \right) + \lambda_{R_T} \left(3T_x^2 T^2 \eta + 2T_x T^3 \pi_{11} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\text{lorsque } T_t = \frac{4a_{RC}}{3E_T} \left[\left(\lambda_{RT} T^3 + 3T^2 \lambda_R \right) T_x^2 + \lambda_R T^3 T_{xx} \right] \quad (4.109)$$

Les fonctions π_{11} , π_{12} et κ_{111} n'ont pas été modifiées par rapport à l'analyse classique, et sont donc décrites par les relations (4.34-4.36). Les fonctions π_{23} et π_{33} sont quant à elles données par l'équation (4.88), s'écrivant ici :

$$\pi_{23} = \epsilon_{1T} + (\epsilon_{1E} - \eta_T) E_T - E_T (\xi_T T_x + \tau_T T_t) + \lambda_{RT} \epsilon_{1\lambda_R} \quad (4.110)$$

$$\pi_{33} = \epsilon_{2T} + (\epsilon_{2\lambda_R} - \eta_T) \lambda_{RT} - \lambda_{RT} (\xi_T T_x + \tau_T T_t) + E_T \epsilon_{2E} \quad (4.111)$$

La condition d'invariance d'équivalence (4.109) diffère de la contrainte d'invariance classique (4.37) de par la nature de variable dépendante des éléments E et λ_R . Ici, en remplaçant T_t , π_{11} , π_{12} , π_{23} , π_{33} et κ_{111} par leurs expressions, on obtient une contrainte explicite faisant intervenir des combinaisons des variables dépendantes et de leurs dérivées. Afin d'éviter de surcharger le propos, on détaille le système d'équations et sa résolution complète en Annexe A.2. On montre que la condition d'invariance (4.109) donne lieu à un ensemble de contraintes sur les fonctions de coordonnées $\xi(x, t, T)$, $\tau(x, t, T)$, $\eta(T)$, $\epsilon_1(T, E, \lambda_R)$ et $\epsilon_2(T, E, \lambda_R)$, qui peuvent, au final, s'écrire :

$$\xi(x) = b_1 + (b_3 + b_4 + b_5)x, \quad \tau(t) = b_2 + 2b_3t, \quad \eta = \eta(T) \quad (4.112)$$

$$\epsilon_1(E) = -2b_4E, \quad \epsilon_2(T, \lambda_R) = \lambda_R \left(2b_5 - \left[\eta_T + 3\frac{\eta}{T} \right] \right) \quad (4.113)$$

où les b_i sont des paramètres réels indépendants. On constate que les contraintes sur les fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$ de l'analyse classique (4.47) à (4.49) ont disparu. En particulier, le coefficient $D(T)$ n'apparaît plus dans les fonctions de coordonnées. Cela est dû à la prise en compte des éléments arbitraires en tant que variables dépendantes au sens de Lie, qui vont maintenant être transformées au même titre que les autres variables du système. On constate également que la fonction $\eta(T)$ n'est à présent seulement contrainte que par sa dépendance en la température. De manière générale, on obtient donc des fonctions coordonnées très différentes de ce que l'on a pu obtenir pour les symétries classiques (4.47), à la différence des termes faisant intervenir les paramètres b_1 , b_2 et b_3 . Cette particularité témoigne de la conservation de certaines symétries, comme on le verra dans la suite.

4.3.3.1 Détermination des générateurs d'équivalence

On peut ainsi écrire le générateur de Lie d'équivalence G associé à la classe (4.99-4.103) de la façon suivante :

$$G = b_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial t} + b_3 \left[x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t} \right] + b_4 \left[x \frac{\partial}{\partial x} - 2E \frac{\partial}{\partial E} \right] \quad (4.114)$$

$$+ b_5 \left[x \frac{\partial}{\partial x} + 2\lambda_R \frac{\partial}{\partial \lambda_R} \right] + \eta(T) \left[\frac{\partial}{\partial T} - \lambda_R \left(\frac{\eta_T}{\eta} + \frac{3}{T} \right) \frac{\partial}{\partial \lambda_R} \right]$$

Cet opérateur est une composition de six générateurs en fonction des cinq paramètres b_i et de la fonction $\eta(T)$. De la même façon que pour l'analyse classique, on peut donc séparer l'opérateur G en un ensemble de six générateurs, notés de G_1 à G_6 . Les trois premiers générateurs sont G_1 , G_2 et G_3 (voir Tableau 4.1), conservés depuis l'analyse classique, et qui, on le rappelle, prennent la forme suivante :

$$G_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad G_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad G_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t} \quad (4.115)$$

Les trois derniers générateurs sont complètement nouveaux par rapport à l'analyse classique puisqu'ils font intervenir explicitement les opérateurs de dérivée par rapport aux nouvelles variables dépendantes E et λ_R . Ils sont donnés par les relations :

$$G_4 = x \frac{\partial}{\partial x} - 2E \frac{\partial}{\partial E}, \quad G_5 = x \frac{\partial}{\partial x} + 2\lambda_R \frac{\partial}{\partial \lambda_R}, \quad G_6 = \eta(T) \frac{\partial}{\partial T} - \lambda_R \left[\eta_T + 3 \frac{\eta}{T} \right] \frac{\partial}{\partial \lambda_R} \quad (4.116)$$

La connaissance de ces générateurs va maintenant permettre d'obtenir explicitement les symétries d'équivalence de la classe des ondes radiatives.

4.3.3.2 Détermination des symétries d'équivalence

L'existence des générateurs G_1 à G_6 n'étant conditionnée à aucune contrainte, il existe donc toujours six symétries d'équivalence pour la classe (4.99-4.103). On constate que l'on a conservé les translations spatiale \mathcal{T}_1 (4.67) et temporelle \mathcal{T}_2 (4.68) ainsi que la symétrie d'homothétie \mathcal{H}_3 (4.69) sur ces mêmes variables, associées aux trois premiers générateurs du groupe d'équivalence, et présentées dans les trois premières lignes du Tableau 4.1. On note que dans notre cas, les contraintes $\hat{E}(\hat{T}) = E(T)$ et $\hat{\lambda}_R(\hat{T}) = \lambda_R(T)$ sont ajoutées. Il existe également deux nouvelles symétries d'homothétie faisant intervenir explicitement les éléments arbitraires E et λ_R , données par :

$$\mathcal{H}_4 : \hat{x} = \gamma_4 x, \quad \hat{t} = t, \quad \hat{T} = T, \quad \hat{E}(\hat{T}) = \frac{1}{\gamma_4^2} E(T), \quad \hat{\lambda}_R(\hat{T}) = \lambda_R(T) \quad (4.117)$$

$$\mathcal{H}_5 : \hat{x} = \gamma_5 x, \quad \hat{t} = t, \quad \hat{T} = T, \quad \hat{E}(\hat{T}) = E(T), \quad \hat{\lambda}_R(\hat{T}) = \gamma_5^2 \lambda_R(T) \quad (4.118)$$

Les γ_i sont ici toujours les paramètres indépendants des transformations associées aux G_i . Enfin, il existe une dernière symétrie prenant la forme d'une transformation arbitraire sur la variable dépendante T induisant celle sur la fonction $\lambda_R(T)$. De la même façon que pour l'analyse classique, on peut écrire, en utilisant les relations (4.81-4.83) :

$$\mathcal{S}_6 : \frac{d\hat{T}}{da} = \eta(\hat{T}), \quad \frac{d\hat{\lambda}_R}{da} = -\hat{\lambda}_R \left(\frac{d\eta(\hat{T})}{d\hat{T}} + 3 \frac{\eta}{\hat{T}} \right) \quad (4.119)$$

où a est toujours le paramètre de groupe. La dernière transformation est clairement différente de ce que l'on a pu rencontrer jusqu'à présent, car elle est a priori valable pour n'importe quelle fonction η liée à la loi de transformation sur la température. On peut obtenir la transformation sur λ_R explicitement si l'on remplace da dans le second membre par son expression obtenue dans le premier :

$$\hat{T} = \phi(T, a), \quad \text{avec} \quad \frac{d\phi}{da} = \frac{d\hat{\lambda}_R}{\hat{\lambda}_R} = - \left(\frac{d\eta(\hat{T})}{\eta} + 3 \frac{d\hat{T}}{\hat{T}} \right) \quad (4.120)$$

En gardant à l'esprit que $\hat{\lambda}_R(T, \lambda_R, 0) = \lambda_R$ et $\hat{T}(T, 0) = T$, on obtient :

$$\frac{\hat{\lambda}_R}{\lambda_R} = \frac{\eta(T) T^3}{\eta(\hat{T}) \hat{T}^3} = \left(\frac{d\hat{T}}{dT} \right)^{-1} \frac{T^3}{\hat{T}^3} \quad (4.121)$$

Dans la suite, on remplacera a par γ_6 pour conserver la cohérence des différentes notations. Ainsi, la symétrie d'équivalence de paramètre γ_6 et associée au générateur G_6 s'écrit, sous une forme générale :

$$\mathcal{S}_6 : \hat{x} = x, \quad \hat{t} = t, \quad \hat{T} = \phi(T, \gamma_6), \quad \hat{E}(\hat{T}) = E(T), \quad \hat{\lambda}_R = \lambda_R \left(\frac{T}{\hat{T}} \right)^3 \left(\frac{d\hat{T}}{dT} \right)^{-1} \quad (4.122)$$

À présent, si on applique cette loi de transformation au modèle théorique (4.71), on obtient :

$$\frac{\partial \hat{E}}{\partial \hat{t}} = \frac{4a_{RC}}{3} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[\hat{\lambda}_R \hat{T}^3 \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} \right] \quad \rightarrow \quad \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{4a_{RC}}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_R T^3 \left(\frac{d\hat{T}}{dT} \right)^{-1} \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} \right] \quad (4.123)$$

Le changement de variables $\hat{T} = \phi(T, a)$ ne dépendant que de la variable de température T et d'un paramètre a , on peut écrire :

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial x} = \frac{d\hat{T}}{dT} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4.124)$$

Cette relation conduit à la validation de l'invariance de la classe associée à l'équation différentielle (4.71), puisqu'on retrouve exactement la même structure d'équation et les mêmes dépendances des fonctions arbitraires après transformation. La loi de transformation ϕ peut donc en effet être considérée comme complètement arbitraire. L'ensemble des générateurs et symétries d'équivalence sont regroupés dans le Tableau 4.3.

On peut également composer les transformations $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{H}_3, \mathcal{H}_4, \mathcal{H}_5$ et \mathcal{S}_6 afin d'obtenir la transformation d'équivalence la plus générale associée à la classe (4.99-4.103) :

Générateurs	Symétries
$G_1 = \frac{\partial}{\partial x}$	$\hat{x} = x + \gamma_1 \quad \hat{t} = t \quad \hat{T} = T \quad \hat{E}(\hat{T}) = E(T) \quad \hat{\lambda}_R = \lambda_R$
$G_2 = \frac{\partial}{\partial t}$	$\hat{x} = x \quad \hat{t} = t + \gamma_2 \quad \hat{T} = T \quad \hat{E}(\hat{T}) = E(T) \quad \hat{\lambda}_R = \lambda_R$
$G_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t}$	$\hat{x} = \gamma_3 x \quad \hat{t} = \gamma_3^2 t \quad \hat{T} = T \quad \hat{E}(\hat{T}) = E(T) \quad \hat{\lambda}_R = \lambda_R$
$G_4 = x \frac{\partial}{\partial x} - 2E \frac{\partial}{\partial E}$	$\hat{x} = \gamma_4 x \quad \hat{t} = t \quad \hat{T} = T \quad \hat{E}(\hat{T}) = \gamma_4^{-2} E(T) \quad \hat{\lambda}_R = \lambda_R$
$G_5 = x \frac{\partial}{\partial x} + 2\lambda_R \frac{\partial}{\partial \lambda_R}$	$\hat{x} = \gamma_5 x \quad \hat{t} = t \quad \hat{T} = T \quad \hat{E}(\hat{T}) = E(T) \quad \hat{\lambda}_R = \gamma_5^2 \lambda_R$
$G_6 = \eta(T) \frac{\partial}{\partial T} + \lambda_R \left(\frac{d\eta}{dT} + 3\frac{\eta}{T} \right) \frac{\partial}{\partial \lambda_R}$	$\hat{x} = x \quad \hat{t} = t \quad \hat{T} = \phi(T, a) \quad \hat{E}(\hat{T}) = E(T) \quad \hat{\lambda}_R = \lambda_R \left(\frac{T}{\hat{T}} \right)^3 \left(\frac{d\hat{T}}{dT} \right)^{-1}$

TABLEAU 4.3 – Générateurs et symétries d'équivalence de la classe (4.99-4.100).

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x} = \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 (x + \gamma_1) \\ \hat{t} = \gamma_3^2 (t + \gamma_2) \\ \hat{T} = \phi(T, \gamma_6) \\ \hat{E}(\hat{T}) = \gamma_4^{-2} E(T) \\ \hat{\lambda}_R(\hat{T}) = \gamma_5^2 \lambda_R \left(\frac{T}{\hat{T}} \right)^3 \frac{dT}{d\hat{T}} \end{array} \right. \quad (4.125)$$

Au final, on obtient un groupe de transformations à six paramètres γ_i quelle que soit la forme des fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$. Parmi ces paramètres, γ_6 illustre le fait que la transformation sur le champ de température est complètement arbitraire. Dans le cas général, on dispose donc de trois paramètres libres supplémentaires par rapport aux symétries classiques regroupées dans le Tableau 4.1.

Dans nos applications, le paramètre de redimensionnement spatial, ici $\gamma_3 \gamma_4 \gamma_5$, est un paramètre qui sera fixé par les dimensions expérimentales, de même que celui sur la variable temporelle, ici γ_3^2 . Ainsi, on peut redéfinir les différents paramètres de transformations en choisissant $a_x = \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5$ et $a_t = \gamma_3^2$. On obtient alors la forme suivante pour les transformations (4.125) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x} = a_x (x + \gamma_1) \\ \hat{t} = a_t (t + \gamma_2) \\ \hat{T} = \phi(T, \gamma_6) \\ \hat{E}(\hat{T}) = \frac{a_t \gamma_5^2}{a_x^2} E(T) \\ \hat{\lambda}_R(\hat{T}) = \gamma_5^2 \lambda_R \left(\frac{T}{\hat{T}} \right)^3 \frac{dT}{d\hat{T}} \end{array} \right. \quad (4.126)$$

Ces transformations d'équivalence constituent une généralisation de l'approche classique de la similitude et leur portée, ainsi que la façon de les appliquer, feront l'objet d'une étude détaillée au chapitre 5.

4.3.3 Retrouver les lois d'échelle en invariance globale

Pour illustrer l'utilisation de ce nouveau groupe de symétries, prenons $\phi(T, \gamma_6) = \gamma_6 T$, avec γ_6 le paramètre de la transformation. Dans ce cas, la symétrie \mathcal{S}_6 donne :

$$\hat{T} = \gamma_6 T, \quad \hat{\lambda}_R(\hat{T}) = \gamma_5^2 \gamma_6^{-4} \lambda_R(T) \quad (4.127)$$

qui n'est autre qu'une symétrie d'homothétie de paramètre γ_6 pour le champ de température et de paramètre $\gamma_5^2 \gamma_6^{-4}$ pour la fonction arbitraire λ_R . Si on reprend l'exemple de lois de puissance pour les fonctions arbitraires du système initial $E(T) = e_0 T^\beta$, $\lambda_R = \lambda_0 T^\alpha$, le groupe d'équivalence (4.125) donne les transformations sur les variables dépendantes T , E et λ_R sous la forme :

$$\hat{T} = \gamma_6 T, \quad \hat{E}(\hat{T}) = \gamma_4^{-2} e_0 T^\beta = \gamma_4^{-2} \gamma_6^{-\beta} e_0 \hat{T}^\beta, \quad \hat{\lambda}_R(\hat{T}) = \gamma_5^2 \gamma_6^{-4} \lambda_0 T^\alpha = \gamma_5^2 \gamma_6^{-4-\alpha} \lambda_0 \hat{T}^\alpha \quad (4.128)$$

La relation homothétique entre les champs de température du système initial T et transformé \hat{T} fixe donc

la forme des fonctions arbitraires transformées, pour lesquelles on obtient :

$$\hat{E}(\hat{T}) = \hat{e}_0 \hat{T}^\beta, \quad \text{avec} \quad \hat{e}_0 = \frac{e_0}{\gamma_4^2 \gamma_6^\beta}, \quad \text{et} \quad \hat{\lambda}_R(\hat{T}) = \hat{\lambda}_0 \hat{T}^\alpha, \quad \text{avec} \quad \hat{\lambda}_0 = \frac{\gamma_5^2 \lambda_0}{\gamma_6^{4+\alpha}} \quad (4.129)$$

On conserve donc les exposants des fonctions arbitraires α et β , et plus globalement leur structure, de la même façon que pour les lois d'échelle développées au chapitre 3. Par ailleurs, en restant dans ce cas de figure, on peut noter qu'en omettant les symétries de translation ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$), on peut écrire les symétries (4.125) de la façon suivante :

$$\hat{x} = a_x x, \quad \hat{t} = a_t t, \quad \hat{T} = a_T T, \quad \hat{e}_0 = a_e e_0, \quad \hat{\lambda}_0 = a_\lambda \lambda_0 \quad (4.130)$$

où ont été volontairement reprises les notations du chapitre 3. On montre que les paramètres de transformation a_i (où i correspond au nom de la variable transformée) sont liés aux paramètres γ_j de la façon suivante :

$$\gamma_3 = a_t^{1/2}, \quad \gamma_4 = a_e^{1/2} a_T^{\beta/2}, \quad \gamma_5 = a_\lambda^{1/2} a_T^{(4+\alpha)/2}, \quad \gamma_6 = a_T \quad (4.131)$$

On a donc introduit cinq paramètres a_i associés aux cinq variables de l'espace étendu (4.75) étudié. Cependant, on ne dispose que de quatre paramètres libres $\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$ et γ_6 associés aux transformations (4.125). Cela implique l'existence d'une contrainte sur les paramètres a_i . On peut ainsi réécrire les symétries d'équivalence (4.125) sous la forme de lois d'échelles à quatre paramètres libres que l'on désigne arbitrairement comme étant a_x, a_t, a_T et a_λ . En utilisant la relation $a_x = \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5$, on obtient alors :

$$\frac{\hat{x}}{x} = a_x, \quad \frac{\hat{t}}{t} = a_t, \quad \frac{\hat{T}}{T} = a_T, \quad \frac{\hat{\lambda}_0}{\lambda_0} = a_\lambda \quad \Rightarrow \quad \frac{\hat{e}_0}{e_0} = \frac{a_t a_\lambda}{a_x^2 a_T^{\beta - (4+\alpha)}} \quad (4.132)$$

qui ne sont autres que les lois d'échelle pour les ondes radiatives caractérisées par $R \gg 1$ et $\hat{R} \gg 1$, en invariance globale. Le même raisonnement peut être mené dans le cas de régimes extrêmement radiatifs ($R \leq 1, \hat{R} \leq 1$), où les fonctions arbitraires des deux systèmes s'écrivent à présent :

$$E(T) = e_0 T^\beta + a_R T^4, \quad \lambda_R(T) = \lambda_0 T^\alpha, \quad \hat{E}(\hat{T}) = \hat{e}_0 \hat{T}^\beta + a_R \hat{T}^4, \quad \hat{\lambda}_R(\hat{T}) = \hat{\lambda}_0 \hat{T}^\alpha \quad (4.133)$$

Si l'on reprend les notations définies dans l'équation (4.130), on a à présent des contraintes différentes sur les paramètres a_i , décrites par les relations :

$$\gamma_3 = a_t^{1/2}, \quad \gamma_4 = a_T^4 = a_e a_T^\beta, \quad \gamma_5 = a_\lambda^{1/2} a_T^{(4+\alpha)/2}, \quad \gamma_6 = a_T \quad (4.134)$$

La seule contrainte supplémentaire est donc imposée au paramètre γ_4 qui est le coefficient de proportionnalité entre les répartitions de densités d'énergie $\hat{E}(\hat{T})$ et $E(T)$. On obtient ainsi des lois d'échelle à trois paramètres libres que l'on désigne comme étant a_x, a_t et a_T . On a alors :

$$\frac{\hat{x}}{x} = a_x, \quad \frac{\hat{t}}{t} = a_t, \quad \frac{\hat{T}}{T} = a_T \quad \Rightarrow \quad \frac{\hat{e}_0}{e_0} = a_T^{4-\beta}, \quad \frac{\hat{\lambda}_0}{\lambda_0} = \frac{a_x^2}{a_t a_T^\alpha} \quad (4.135)$$

qui ne sont autres que les lois d'échelle pour les ondes radiatives caractérisées par $R \leq 1$ et $\hat{R} \leq 1$, en invariance globale (3.11). En ce sens, les symétries d'équivalence (4.125) constituent une généralisation des concepts d'invariance globale, et des lois d'échelle en découlant.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode permettant de répondre aux attentes posées au chapitre 3. Rappelons que l'on cherchait à obtenir des transformations permettant de briser les contraintes strictes imposées par la similitude sur les ondes radiatives supersoniques. En s'appuyant sur les concepts de symétries de Lie dans leur forme classique et dans le cadre de l'analyse d'équivalence, nous avons réussi à obtenir un ensemble de transformations généralisant les lois d'échelle de l'invariance globale. De plus, ces outils ont permis de mieux appréhender la structure du modèle théorique étudié, mais également de caractériser l'invariance de celui-ci. Nous disposons donc à présent d'un ensemble de transformations conservant la structure du modèle théorique tout en modifiant les différentes variables y apparaissant. En particulier, il est maintenant possible de modifier les dépendances des fonctions arbitraires E et λ_R des deux systèmes, liant ainsi des systèmes aux échelles, régimes et propriétés physiques éloignés.

Les symétries d'équivalence s'imposent donc comme la solution à la problématique posée en début de chapitre. Cependant, elles ne constituent pour autant pas une extension systématique des concepts de similitude pour tout phénomène physique. De plus, l'étude de l'invariance d'une classe d'équations a permis de prendre en compte la modification des éléments arbitraires y apparaissant, mais pas du modèle théorique associé. En particulier, la forme de l'équation différentielle (4.26) est conservée par les nouvelles transformations obtenues. Il est alors légitime de se poser la question de l'existence de concepts plus généraux permettant de prendre en compte la modification de ces structures différentielles. Ces nouvelles approches, basées sur des transformations d'analogie, trouveraient leur source dans les théories dites de *mapping* [Bluman *et al.*, 2010], sur lesquelles nous reviendrons dans les perspectives de ces travaux. Dans la suite, nous appliquerons les symétries d'équivalence développés au sein de ce chapitre au modèle physique étudié, afin de proposer une nouvelle classe d'expériences d'astrophysique de laboratoire basées sur le concept de ressemblance.

CHAPITRE 5

L'équivalence : applications physiques et premier modèle de dimensionnement

Sommaire

5.1	Introduction	114
5.2	La physique des transformations d'équivalence	114
5.2.1	Analyse des transformations	115
5.2.2	De nouveaux invariants	116
5.3	Exemples d'application	117
5.3.1	Détails sur l'utilisation des transformations	117
5.3.2	Équivalence en régime peu radiatif	119
5.3.3	Équivalence en régime extrêmement radiatif	122
5.4	Les limites du groupe d'équivalence	127
5.4.1	Les mécanismes produisant des écarts à l'équivalence	127
5.4.2	Les écarts aux matériaux théoriques	128
5.4.3	Limite de l'hypothèse supersonique : une réponse hydrodynamique du système	138
5.5	Conclusion	140

5.1 Introduction

Nous disposons à présent d'un ensemble de transformations permettant de lier explicitement des systèmes aux propriétés microscopiques fondamentalement différentes et évoluant dans différents régimes radiatifs. Ces symétries d'équivalence permettent théoriquement d'augmenter le nombre de degrés de liberté initialement permis par les transformations de similitude. Elles s'inscrivent dans la catégorie des transformations de ressemblance, concept introduit au chapitre 3. L'application de ce nouveau type de transformations requiert une attention particulière sur la façon dont les fonctions arbitraires sont modifiées, ce qui constitue leur intérêt principal. En effet, les possibilités mathématiques offertes par l'équivalence sont limitées par la physique complexe de l'interaction entre un rayonnement X intense et un matériau de laboratoire dont les propriétés fondamentales sont contenues dans les fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$.

Dans ce chapitre, l'objectif est d'interpréter la physique contenue dans les transformations présentées au chapitre 4. Plus précisément, nous cherchons à caractériser les possibilités d'application de ces transformations ainsi que leur effet sur la physique des systèmes étudiés. Dans ce sens, une analyse des quantités conservées par cette approche permettra d'en obtenir une première vision globale. Quelques exemples théoriques et numériques parcourant les différentes possibilités offertes par l'équivalence seront présentés. Pour finir, un premier modèle de système de laboratoire dont le milieu de propagation est un matériau réel sera présenté.

5.2 La physique des transformations d'équivalence

Les symétries d'équivalence obtenues au chapitre précédent prennent la forme générale donnée par l'équation (4.126). Dans la suite de ce chapitre, nous simplifierons l'écriture des transformations en fixant les coefficients des translations spatiale et temporelle à $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. On obtient alors des symétries d'équivalence prenant la forme suivante :

$$\begin{cases} \hat{x} = a_x x \\ \hat{t} = a_t t \\ \hat{T} = \phi(T, \gamma_6) \\ \hat{E}(\hat{T}) = \frac{a_t \gamma_5^2}{a_x^2} E(T) \\ \hat{\lambda}_R(\hat{T}) = \gamma_5^2 \lambda_R\left(\frac{T}{\hat{T}}\right)^3 \frac{dT}{d\hat{T}} \end{cases} \quad (5.1)$$

où ϕ , rappelons-le, représente la transformation de paramètre γ_6 , supposée libre, sur le champ de température. Nous utiliserons désormais ces relations (5.1) dans toute la suite du manuscrit, lorsqu'on se réfère aux symétries d'équivalence du modèle théorique d'ondes radiatives :

$$\frac{\partial E(T)}{\partial t} = \frac{4a_{RC}}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_R(T) T^3 \frac{\partial T}{\partial x} \right] \quad (5.2)$$

où l'on rappelle que la fonction $E(T)$ prend la forme générale $E(T) = e_0 T^\beta + a_R T^4$. De manière générale, l'objectif de ce chapitre est de développer des modèles de laboratoire équivalents au système

astrophysique décrit et étudié au chapitre 2. En faisant cela, nous lierons non plus seulement les échelles astrophysique et du laboratoire, mais également des comportements de matériaux et régimes physiques différents. Les simulations que nous présenterons sont menées à l'aide du code RAMSES-RT pour l'échelle astrophysique et du code FCI2 pour l'échelle du laboratoire. L'approche générale proposée par l'équivalence est résumée sur la Figure 32.

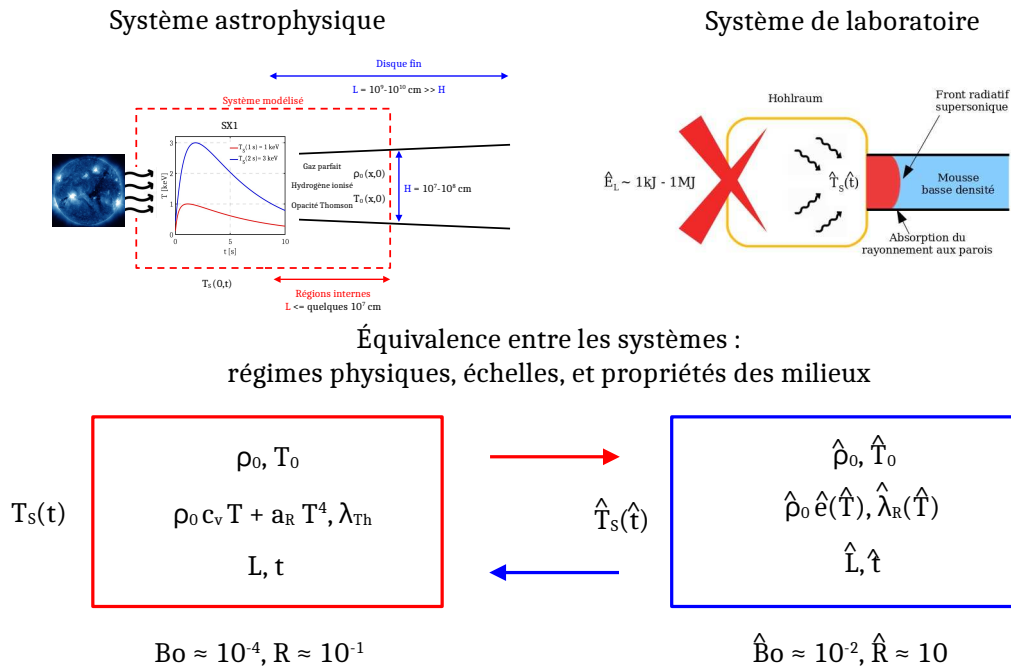


FIGURE 32 – Schéma d'application de l'équivalence pour les exemples du chapitre.

L'objectif est donc de lier les systèmes astrophysiques étudiés dans le chapitre 2, évoluant dans des régimes extrêmement radiatifs ($Bo \ll 1, R \leq 1$) à des systèmes réalisables à l'échelle du laboratoire pour lesquels les régimes sont faiblement radiatifs ($\hat{Bo} \ll 1, \hat{R} \gg 1$). Les transformations d'équivalence permettent de plus de modifier les propriétés internes des milieux, ce qui nous permet de lier des environnements dont les lois d'état $\rho_0 c_v T, \hat{\rho}_0 \hat{e}$ et les lois d'opacités $\lambda_{Th}, \hat{\lambda}_R$ sont profondément différentes. Notons que les échelles spatio-temporelles des deux systèmes sont très éloignées et seront donc également transformées, de la même manière que pour les lois d'échelle du chapitre 3, par l'action d'homothéties.

5.2.1 Analyse des transformations

Les transformations (5.1) font intervenir quatre paramètres libres choisis comme étant $a_x, a_t, \gamma_5,$ et γ_6 . Ces symétries agissent sur un espace étendu de cinq variables : la variable spatiale x , la variable temporelle t , le champ de température $T(x, t)$, la loi de répartition de densité d'énergie $E(T)$ et le libre parcours moyen $\lambda_R(T)$. Dans la formulation (5.1), c'est donc le paramètre de transformation $a_t \gamma_5^2 / a_x$

sur la fonction $E(T)$ qui est contraint. Nous avons vu dans le chapitre 4 qu'il était possible de modifier cela en fixant par exemple le coefficient a_x en fonction d'autres paramètres libres. Autrement dit, chaque paramètre de transformation peut être redéfini pour devenir un paramètre libre, ce qui conduit à fixer les autres paramètres. De manière générale, il existe un ensemble de formulations où les paramètres libres peuvent être associés à n'importe quel ensemble de cinq variables de l'espace étendu. Le choix des variables disposant de paramètres libres est donc purement arbitraire.

Si l'on s'intéresse un peu plus en détails à l'action de ces transformations sur les différentes variables du modèle, on s'aperçoit tout d'abord que les variables spatiale et temporelle ne subissent qu'une homothétie. Ce genre de comportements, typique des lois d'échelles, ne présente aucune particularité supplémentaire par rapport à celles-ci. On notera que dans le cas où $a_x = a_t = 1$, la position du front radiatif est conservée à chaque instant, et, par conséquent, la vitesse de l'onde l'est également. Sur le champ de température, l'action des transformations (5.1) est très différente. En effet, la fonction ϕ étant arbitraire, il existe a priori une infinité de lois de transformation pour la variable T .

Les fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$ représentent, dans le cas du modèle d'ondes radiatives, des entités physiques très particulières. En ce sens, leur signification physique influe sur leurs valeurs (données tabulées ou modélisations analytiques). La façon dont se transforment ces fonctions n'est donc pas totalement libre. En effet, ces considérations vont introduire des contraintes supplémentaires dans l'application des symétries (5.1), comme nous le verrons dans la suite.

L'application des symétries (5.1) conduit à une homothétie de paramètre $a_t \gamma_5^2 / a_x^2$ sur la variable $E(T)$, introduisant une relation de proportionnalité entre les fonctions $\hat{E}(\hat{T})$ et $E(T)$, malgré leurs structures possiblement différentes. En particulier, notons qu'il est possible de lier des systèmes dans lesquels l'énergie radiative peut être, d'un côté, prépondérante ($R < 1$), et de l'autre, négligeable ($\hat{R} > 1$). De la même façon, rendre possible une modification de la fonction $\lambda_R(T)$, et donc de la loi d'opacité d'un système, permet de changer la façon dont le rayonnement se propage dans un milieu. L'action des symétries (5.1) conduit à une homothétie associée à une transformation plus générale directement liée à celle sur le champ de température. La liberté apparente de la transformation sur la variable T amène donc la possibilité de modifier de façon arbitraire la fonction $\lambda_R(T)$. Pour illustrer cela, notons qu'un libre parcours moyen constant à l'échelle astrophysique peut ainsi devenir une fonction dépendante de la température à l'échelle du laboratoire, résolvant ainsi une des plus grandes contraintes des transformations de similitude.

Nous voyons que les symétries d'équivalence des ondes radiatives permettent théoriquement l'existence d'une grande variété de systèmes équivalents. Cependant, il existe, en plus de la nature physique des fonctions arbitraires E et λ_R , un facteur contraignant ces transformations. C'est la façon dont sont modifiées les conditions initiales T_0, \hat{T}_0 et aux limites $T_S(t), \hat{T}_S(\hat{t})$ entre les deux systèmes qui va imposer des contraintes supplémentaires sur les transformations d'équivalence.

5.2.2 De nouveaux invariants

On rappelle que les symétries d'équivalence (5.1) peuvent, dans un cas très particulier, se rapporter aux lois d'échelle obtenues au chapitre 3 à l'aide du concept d'invariance globale. En ce sens, elles

généralisent cette approche, en permettant de modifier de manière plus large les variables T , $E(T)$ et $\lambda_R(T)$. Cette généralisation se matérialise à travers les nombres sans dimension et invariants associés aux symétries d'équivalence. Pour illustrer cela, reprenons les symétries (5.1) où on utilise la relation suivante :

$$\frac{d\hat{T}}{dT} = \frac{a_t \gamma_5^2 E_T}{a_x^2 \hat{E}_{\hat{T}}} \quad (5.3)$$

On peut alors obtenir, en introduisant cette équation dans la transformation sur le libre parcours moyen présente dans les symétries (5.1), la relation suivante :

$$I = \frac{\hat{\lambda}_R(\hat{T}) \hat{T}^3}{\hat{E}_{\hat{T}}} \frac{\hat{t}}{\hat{x}^2} = \frac{\lambda_R T^3}{E_T} \frac{t}{x^2} \quad (5.4)$$

Le paramètre I est donc l'invariant associé aux symétries d'équivalence des ondes radiatives. En outre, lors du développement des lois d'échelle (3.8) associées au modèle d'ondes radiatives supersoniques (5.2), on a pu constater que l'application de ces transformations conduisait à la conservation de deux nombres sans dimension :

$$I_1 = \frac{\rho_0 e(T)}{\mathbb{F}_{rad}(T)} \frac{x}{t} \quad \text{et} \quad I_2 = R = \frac{\rho_0 e(T)}{\mathbb{E}_{rad}(T)} \quad (5.5)$$

L'application des symétries d'équivalence (5.1) permet ainsi de réunir ces deux quantités sous la forme d'un nouveau paramètre adimensionné, noté Π et défini par :

$$\Pi = I_1 \left(1 + \frac{1}{R} \right) \quad (5.6)$$

Cette grandeur Π doit être conservée afin de pouvoir appliquer les symétries d'équivalence (5.1). Ce nombre sans dimension est donc plus général que les nombres sans dimension conservés par la similitude, puisque l'on doit conserver une combinaison de I_1 et R et non leur valeur.

5.3 Exemples d'application

5.3.1 Détails sur l'utilisation des transformations

En observant les transformations (5.1), on constate que la possibilité de fixer les fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$ est conditionnée par la forme de transformation sur le champ de température T . Si l'on souhaite fixer une des fonctions $E(T)$ ou $\lambda_R(T)$ pour les systèmes de départ et d'arrivée, c'est le champ de température qui sera lui même fixé, ainsi que l'autre fonction laissée libre. Ces trois variables T , $E(T)$, et $\lambda_R(T)$ voient donc leurs lois de transformation être couplées entre elles. Afin de mieux appréhender cette particularité, examinons les différents cas auxquels nous pouvons être confrontés.

Une première situation est celle que l'on a rencontrée dans la dernière section du chapitre 4. Dans ce cas, on a fixé les fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$ du système initial, et, sans faire d'hypothèse sur la forme de ces fonctions pour le système transformé, on a réclamé une forme de transformation pour le champ

de température. Nous avons appliqué ceci au cas d'une transformation homothétique, ce qui a conduit à des fonctions $\hat{E}(\hat{T})$ et $\hat{\lambda}_R(\hat{T})$ aux structures similaires de celle du système de départ. Cependant, cette application reste valable quelque soit le choix de transformation $\phi(T, \gamma_6)$, conduisant théoriquement à une infinité de possibilités pour les fonctions $\hat{E}(\hat{T})$ et $\hat{\lambda}_R(\hat{T})$. Ce premier exemple correspond donc au cas où on fixe arbitrairement la forme de la transformation du champ de température. Dans ce cas particulier, on peut résumer l'action des symétries d'équivalence sous la forme suivante :

$$[E(T), \lambda_R(T), \phi(T, \gamma_6)] \text{ choisies } \Rightarrow [\hat{E}(\hat{T}), \hat{\lambda}_R(\hat{T})] \text{ fixées par l'équivalence} \quad (5.7)$$

Dans cette approche, les fonctions $\hat{E}(\hat{T})$ et $\hat{\lambda}_R(\hat{T})$ sont fixées, contraignant ainsi la nature du milieu équivalent. Pour contourner les contraintes pesant sur ces fonctions, il est possible de les fixer au préalable, déplaçant ainsi la contrainte sur la forme de la transformation du champ de température ϕ .

Une seconde situation apparaît où nous prenons, en plus du système initial, une répartition de densité d'énergie $\hat{E}(\hat{T})$ connue. En laboratoire, on sait que la densité d'énergie radiative sera en effet négligeable, et donc que la fonction $\hat{E}(\hat{T})$ ne peut pas prendre n'importe quelle forme, ce qui va donc imposer des contraintes. Dans ce cas, la transformation sur le champ de température est obligatoirement fixée par la relation homothétique entre les répartitions de densité d'énergie $E(T)$ et $\hat{E}(\hat{T})$ provenant des symétries d'équivalence (5.1). Par conséquent, la fonction $\hat{\lambda}_R(\hat{T})$ est contrainte par le reste des relations (5.1). Dans ce cas particulier, on peut résumer l'action des symétries d'équivalence sous la forme suivante :

$$[E(T), \lambda_R(T), \hat{E}(\hat{T})] \text{ choisies } \Rightarrow [\phi(T, \gamma_6), \hat{\lambda}_R(\hat{T})] \text{ fixées par l'équivalence} \quad (5.8)$$

Nous avons contourné une limitation de l'approche précédente. En effet, on peut à présent considérer que c'est la physique des milieux considérés qui fixe la forme mathématique des symétries d'équivalence. Notons qu'il n'est cependant pas possible de fixer complètement le système équivalent déterminé par la connaissance des fonctions $\hat{E}(\hat{T})$ et $\hat{\lambda}_R(\hat{T})$.

La dernière situation que nous voyons apparaître est donc celle où l'on connaît, en plus du système initial, l'évolution du libre parcours moyen $\hat{\lambda}_R(\hat{T})$ du système équivalent. En laboratoire, ces fonctions sont croissantes avec la température, imposant ainsi des contraintes physiques sur les transformations (5.1). Dans ce cas, la transformation sur le champ de température est obtenue indirectement à l'aide de l'intégration de la relation entre les libres parcours moyens $\lambda_R(T)$ et $\hat{\lambda}_R(\hat{T})$ provenant des symétries d'équivalence (5.1). Par conséquent, la fonction $\hat{E}(\hat{T})$ est contrainte par la relation homothétique entre les répartitions de densité d'énergie. Dans ce cas particulier, on peut résumer l'action des symétries d'équivalence sous la forme suivante :

$$[E(T), \lambda_R(T), \hat{\lambda}_R(\hat{T})] \text{ choisies } \Rightarrow [\phi(T, \gamma_6), \hat{E}(\hat{T})] \text{ fixées par l'équivalence} \quad (5.9)$$

Dans n'importe laquelle de ces approches, une homothétie en espace et en temps est de plus possible.

Les applications recherchées concernent la mise en correspondance de systèmes complètement définis en termes de $E(T)$ et $\lambda_R(T)$ entre les échelles astrophysique et du laboratoire. Ainsi, dans la suite, on ne considère que les situations représentées par les relations (5.8) et (5.9), où la physique des milieux, et donc la forme des fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$, guide la forme des transformations d'équivalence. De manière générale, on cherche ainsi à construire un lien explicite entre un système initial décrit par les fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$ et un système transformé, décrit par les fonctions $\hat{E}(\hat{T})$ et $\hat{\lambda}_R(\hat{T})$, comme présenté sur la Figure 32.

5.3.2 Équivalence en régime peu radiatif

Afin d'illustrer les concepts d'équivalence, considérons tout d'abord le cas de deux systèmes dans lesquels la densité d'énergie radiative $a_R T^4$ est négligeable devant la densité d'énergie interne ρe ($R \gg 1$). Nous faisons l'hypothèse que ces densités d'énergie interne peuvent s'écrire sous la forme d'une loi de puissance de la température :

$$E(T) = e_0 T^\beta, \quad \hat{E}(\hat{T}) = \hat{e}_0 \hat{T}^{\hat{\beta}} \quad (5.10)$$

où e_0, β, \hat{e}_0 et $\hat{\beta}$ sont des paramètres constants. De la même façon, on suppose que les lois de libre parcours moyen des deux systèmes peuvent s'écrire sous la forme d'une loi de puissance de la température :

$$\lambda_R(T) = \lambda_0 T^\alpha, \quad \hat{\lambda}_R(\hat{T}) = \hat{\lambda}_0 \hat{T}^{\hat{\alpha}} \quad (5.11)$$

où $\lambda_0, \alpha, \hat{\lambda}_0$ et $\hat{\alpha}$ sont des paramètres constants. L'application des symétries d'équivalence (5.1), sous les hypothèses (5.10-5.11), permet d'obtenir une loi de transformation de la température sous deux formes distinctes selon le choix que l'on effectue.

Si on considère la relation de proportionnalité entre les densités d'énergie interne des deux systèmes en se plaçant dans la situation (5.8), on obtient :

$$\hat{T} = \left[\frac{a_t \gamma_5^2 e_0}{a_x^2 \hat{e}_0} \right]^{\frac{1}{\hat{\beta}}} T^{\frac{1}{\gamma_6}}, \quad \text{avec} \quad \gamma_6 = \frac{\hat{\beta}}{\beta} \quad (5.12)$$

Cette relation fait partie d'une solution particulière des transformations d'équivalence (5.1). Cependant, nous nous focaliserons plus particulièrement sur la situation (5.9), où la loi de transformation sur les libres parcours moyens permet d'obtenir :

$$\hat{T} = \left[\gamma_5^2 \gamma_6 \left(\frac{\lambda_0}{\hat{\lambda}_0} \right) \right]^{\frac{1}{4+\hat{\alpha}}} T^{\frac{1}{\gamma_6}}, \quad \text{avec} \quad \gamma_6 = \frac{4+\hat{\alpha}}{4+\alpha} \quad (5.13)$$

Dans ces deux cas, la loi de transformation $\phi(T, \gamma_6)$ est fixée par la physique des milieux, que ce soit $\hat{E}(\hat{T})$ ou $\hat{\lambda}_R(\hat{T})$. En faisant le choix arbitraire de fixer $\hat{\lambda}_R(\hat{T})$, on montre que les transformations d'équivalence peuvent s'écrire sous la forme de lois d'échelle généralisées à cinq paramètres libres :

$$\frac{\hat{x}}{x} = a_x, \quad \frac{\hat{t}}{t} = a_t, \quad \frac{\hat{\lambda}_0}{\lambda_0} = a_\lambda, \quad \frac{4 + \hat{\alpha}}{4 + \alpha} = \gamma_6, \quad \sqrt{\frac{\hat{T}_R^{4+\hat{\alpha}}}{T_R^{4+\alpha}} \frac{1}{\gamma_6 a_\lambda}} = \gamma_5 \quad (5.14)$$

Comme nous pouvons le constater, le choix d'une loi $\hat{\lambda}_R(\hat{T})$ fixe a_λ et γ_6 , tandis que a_x et a_t sont fixés par les dimensions spatiales et temporelles du système transformé. Le paramètre γ_5 peut lui s'écrire, en considérant la relation (5.11), en fonction des paramètres γ_6 et a_λ , ainsi que des températures maximales T_R et \hat{T}_R des systèmes étudiés. Notons que ce choix est purement arbitraire, et peut être effectué pour différentes valeurs de températures. En pratique, ce choix permet de limiter la température maximale requise par l'équivalence, aux températures communément atteintes à l'échelle du laboratoire. On obtient alors les lois d'échelles généralisées :

$$\frac{\hat{e}_0}{e_0} = \gamma_5^{2(\frac{1}{\epsilon}-1)} \frac{a_t a_\lambda^{\frac{1}{\epsilon}}}{a_x^2}, \quad \frac{\hat{\beta}}{\beta} = \gamma_6, \quad \hat{T} = \left[\frac{\gamma_5^2 \gamma_6}{a_\lambda} \right]^{\frac{1}{4+\hat{\alpha}}} T^{\frac{1}{\gamma_6}}, \quad \epsilon = \frac{\beta}{4 + \alpha} = \frac{\hat{\beta}}{4 + \hat{\alpha}} \quad (5.15)$$

où la variable $\epsilon = \beta/(4 + \alpha)$ correspond au paramètre défini par [Hammer et Rosen \[2003\]](#) caractérisant la raideur du front radiatif. On parle ici de loi d'échelle généralisée dans le sens où la loi de transformation consiste seulement en partie à un redimensionnement des différents paramètres du système. En effet, pour le champ de température, les transformations prennent une forme plus générale qu'une simple homothétie, donnée par la relation (5.13). Il est donc possible d'appliquer ces transformations à des systèmes respectant les hypothèses (5.10-5.11).

Considérons un milieu initial pris à l'échelle du laboratoire¹ se comportant comme un gaz parfait ($\rho e(T) = \rho_0 c_v T$) en limite Thomson ($\lambda_R(T) = \lambda_0$). On choisit une densité $\rho_0 = 0.1 \text{ g.cm}^{-3}$, et on décide de fixer un libre parcours moyen à $\lambda_0 = 10^{-2} \text{ cm}$. On s'attend à observer la propagation d'une onde radiative sur une échelle spatiale $L = 0.2 \text{ cm}$ et temporelle $t = 10^{-8} \text{ s}$. En terme de conditions aux limites, on considère un sursaut de type Norris donné par la relation (2.3) et redimensionné aux conditions de laboratoire. Celui-ci est décrit ici par les paramètres suivants :

$$T_p = 1 \text{ keV}, \quad \tau_1 = 10^{-7} \text{ s}, \quad \tau_2 = 1.5 \times 10^{-7} \text{ s}, \quad t_0 = -0.09 \times 10^{-7} \text{ s} \quad (5.16)$$

Sur l'intervalle temporel considéré, la température maximale est $T_R = 400 \text{ eV}$ à 10 ns . Le nombre de Mihalas dans cette situation est estimé à $R \simeq 50$. Enfin, le milieu est initialement pris à une température de $T_0 = 1 \text{ eV}$.

On choisit de considérer un système d'arrivée où l'on conserve exactement les positions et vitesses du front à tout temps, impliquant ainsi $a_x = a_t = 1$. On choisit également de fixer les paramètres suivants :

$$\hat{\rho}_0 = 10^{-1} \text{ g.cm}^{-3}, \quad \hat{\lambda}_0 \simeq 2.82 \times 10^{-28} \text{ cm.K}^{-\hat{\alpha}}, \quad \hat{\alpha} = 4, \quad \hat{T}_R = 250 \text{ eV} \quad (5.17)$$

Notons que le paramètre $\hat{\alpha}$ a été choisi de manière à présenter un cas particulièrement éloigné de la limite Thomson ($\alpha = 0$) du système initial. De cette manière, nous pouvons illustrer les transformations

1. Notons ainsi que, dans cet exemple, les variables notées sans chapeau concernent également un milieu pris à l'échelle du laboratoire, et qui n'a valeur que d'exemple ici. Les transformations d'équivalence peuvent en effet se faire entre deux échelles spatiales et temporelles identiques.

d'équivalence pour des écarts conséquents en termes de propriétés de matériaux. L'application des transformations (5.14-5.15) permet d'obtenir les contraintes d'équivalence à respecter dans ce cas, qui s'écrivent :

$$\hat{e}_0 \approx 3.72 \times 10^3 \text{ erg.cm}^{-3} \cdot \text{K}^{-\hat{\beta}}, \quad \hat{\beta} = 2, \quad \hat{R} \approx 5.8 \times 10^4 \gg 1, \quad \hat{T}_0 \approx 7 \text{ eV} \quad (5.18)$$

On obtient bien un système équivalent dans un régime similaire $\hat{R} \gg 1$, où les exposants $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ des fonctions déterminant la nature du milieu transformé ont pu être fortement modifiés. On représente sur la Figure 33 les fonctions $\hat{\rho}_0 \hat{e}(\hat{T})$ et $\hat{\lambda}_R(\hat{T})$ du système transformé, où l'on a également rappelé les différents paramètres des deux systèmes équivalents dans le tableau de droite.

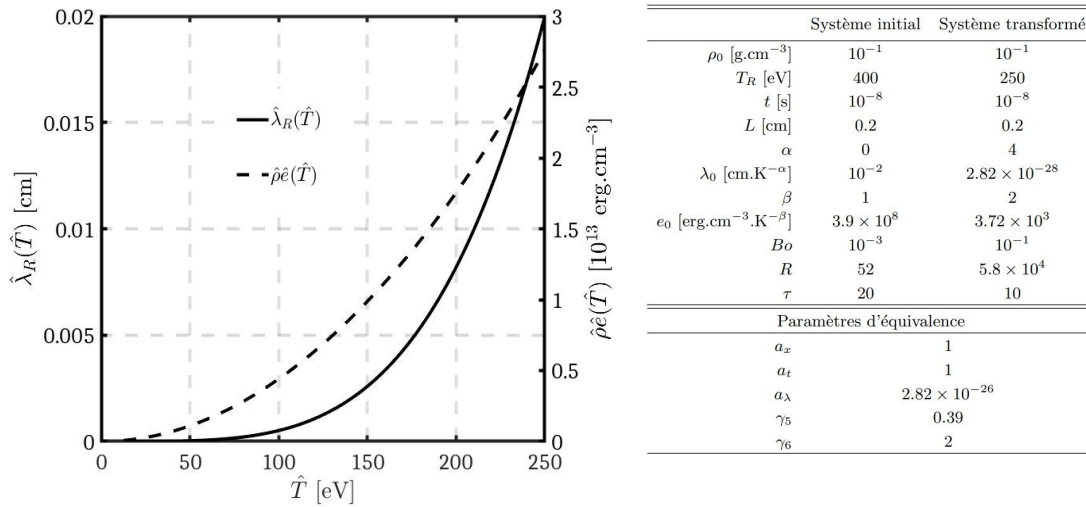


FIGURE 33 – À gauche, fonctions $\hat{\rho}_0 \hat{e}(\hat{T})$ (en pointillés, fixée par l'équivalence) et $\hat{\lambda}_R(\hat{T})$ (en traits pleins, choisie arbitrairement) du système transformé. À droite, tableau des paramètres d'application de l'équivalence.

Cette densité d'énergie interne et ce libre parcours moyen ont permis de construire un matériau théorique équivalent au système initial. Dans ce matériau, les ondes supersoniques radiatives se propagent à la même vitesse ($a_x = a_t = 1$) que dans le système initial. Après application des transformations (5.14-5.15), les profils de température se superposent, comme illustré sur la Figure 34.

L'équivalence est parfaitement vérifiée sur les 10 ns de simulations. Les échelles spatiales et temporelles sont bien conservées pour les deux systèmes, malgré des propriétés microscopiques très différentes. Les nombres de Boltzmann des deux systèmes ne sont pas identiques, mais inférieurs à l'unité, tandis que le nombre de Mihalas du système transformé est cent fois supérieur à celui du système initial. On rappelle que les systèmes sont tous deux en régimes faiblement radiatifs ($R, \hat{R} \gg 1$). Enfin, on peut voir que les différences dans les températures sources $T_S(t)$ et $\hat{T}_S(t)$ sont bien effacées lors de l'application de l'équivalence. On constate que les concepts d'équivalence permettent de lier deux systèmes de laboratoire dont les propriétés de matériaux diffèrent fortement ($\alpha = 0 \neq \hat{\alpha} = 4$ et $\beta = 1 \neq \hat{\beta} = 2$). De plus, les

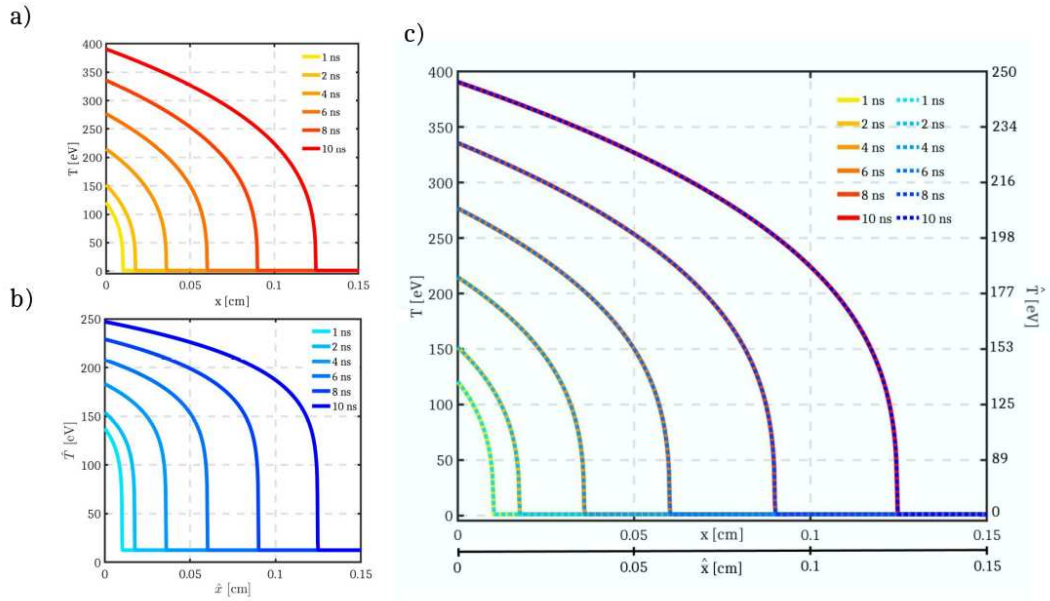


FIGURE 34 – Les figures *a* et *b*) présentent respectivement les simulations RAMSES-RT du système initial et FCI2 du système équivalent. La superposition des profils spatiaux de température du système de base et du système équivalent transformé après application des symétries d'équivalence (5.1) est présentée en Figure *c*).

régimes physiques des deux systèmes étudiés ($Bo, \hat{Bo} \ll 1$ et $R, \hat{R} \gg 1$) permettent d'envisager une validation expérimentale de cette nouvelle approche de similitude généralisée.

5.3.3 Équivalence en régime extrêmement radiatif

5.3.3.1 Imposer les répartitions d'énergie

Une particularité des transformations d'équivalence est de pouvoir modifier les répartitions d'énergie entre le rayonnement et la matière, et pas seulement les formes de densités d'énergie interne comme on l'a vu dans l'exemple précédent. Cela permet de passer d'un régime extrêmement radiatif typique de notre cas astrophysique ($R \leq 1$) à un régime faiblement radiatif ($\hat{R} \gg 1$) obtenu lors d'expériences réalisées en laboratoire. Dans ce cas, les répartitions de densité d'énergie des systèmes initial et transformé prennent les formes suivantes :

$$E(T) = \rho_0 e(T) + a_R T^4, \quad \hat{E}(\hat{T}) = \hat{\rho}_0 \hat{e}(\hat{T}) \quad (5.19)$$

Si on considère notre système astrophysique de base, on connaît la fonction d'énergie interne $e(T) = c_v T$

ainsi que le libre parcours moyen $\lambda_R(T) = \lambda_0$. On décide de se placer dans le cas d'un milieu à la densité $\rho_0 = 10^{-4} \text{ g.cm}^{-3}$ et température initiale $T_0 = 1 \text{ eV}$. La condition aux limites est définie comme étant un sursaut de Norris dont les paramètres sont donnés par la relation (2.33). La température maximale atteinte sur l'intervalle temporel étudié de 0.05 s est de $T_R = 250 \text{ eV}$.

À présent, on cherche à créer un matériau théorique permettant d'obtenir une onde radiative équivalente en laboratoire, pour un régime radiatif défini par un nombre de Mihalas accessible à cette échelle : $\hat{R} \gg 1$. On suppose dans un premier temps que la loi de densité d'énergie interne $\hat{\rho}_0 \hat{e}(\hat{T})$ de ce matériau est connue. On se place alors dans le cadre de l'application (5.8) de l'équivalence. En supposant que cette fonction $\hat{E}(\hat{T})$ puisse se mettre sous la forme d'une loi de puissance (5.10) sur les intervalles de température considérés, on obtient la loi de transformation sur le champ de température suivante :

$$\hat{T} = \left(\frac{a_t \gamma_5^2}{a_x^2} \frac{1}{\hat{e}_0} \right)^{\frac{1}{\hat{\beta}}} [\rho_0 c_v T + a_R T^4]^{\frac{1}{\hat{\beta}}} \quad (5.20)$$

Cette relation étant fixée, cela permet d'obtenir la contrainte sur le libre parcours moyen du système équivalent, que l'on écrit sous la forme :

$$\hat{\lambda}_R(T) = \gamma_5^2 \lambda_0 \hat{\beta} T^3 \frac{\left(\frac{a_t \gamma_5^2}{a_x^2} \frac{1}{\hat{e}_0} [\rho_0 c_v T + a_R T^4] \right)^{1 - \frac{4}{\hat{\beta}}}}{\left(\frac{a_t \gamma_5^2}{a_x^2} \frac{1}{\hat{e}_0} [\rho_0 c_v + 4a_R T^3] \right)} \quad (5.21)$$

On constate qu'il existe une forme explicite pour $\hat{\lambda}_R(T)$, ce qui n'est pas le cas pour $\hat{\lambda}_R(\hat{T})$. En effet, la relation entre les champs de température (5.20) n'est plus aussi directe qu'auparavant, dans le sens où on considère l'énergie radiative dans le système initial. La détermination analytique de la fonction $\hat{\lambda}_R(\hat{T})$ nécessiterait de pouvoir inverser la relation (5.20) pour toute valeur de $\hat{\beta}$.

Premièrement, on considère que l'on travaille à une échelle typique de laboratoire, discutée au chapitre 3, et décrite par $\hat{L} = 0.2 \text{ cm}$ et $\hat{t} = 10 \text{ ns}$. Ces choix fixent les paramètres $a_x = 2 \times 10^{-8}$ et $a_t = 2 \times 10^{-7}$. Ensuite, on choisit de considérer des caractéristiques de matériaux typiques de laboratoire :

$$\hat{\rho}_0 = 0.04 \text{ g.cm}^{-3}, \quad \hat{e}_0 = 1.2 \times 10^4 \text{ erg.cm}^{-3} \cdot \text{K}^{-\hat{\beta}}, \quad \hat{\beta} = 1.4, \quad \hat{T}_R = 250 \text{ eV} \quad (5.22)$$

On note que ces paramètres appartiennent à l'intervalle de données approchées par Cohen *et al.* [2020]. Ce choix particulier permet d'obtenir, à l'échelle du laboratoire, un régime physique décrit par un nombre de Mihalas $\hat{R} \approx 25 \gg 1$. L'application des symétries d'équivalence (5.1) permet de développer les contraintes à respecter sur les différents paramètres restants, à savoir $\hat{\lambda}_R(\hat{T})$ et \hat{T}_0 . Afin d'écrire une relation explicite pour $\hat{\lambda}_R(\hat{T})$, nécessaire pour les simulations, on peut approximer la fonction définie par (5.21) sur l'intervalle de température considéré ($0 \rightarrow 250 \text{ eV}$) par l'équation suivante :

$$\hat{\lambda}_R(\hat{T}) \approx \frac{2.493 \times 10^{-5} \hat{T}^5 - 0.03626 \hat{T}^4 + 29.11 \hat{T}^3 + 2620 \times 10^3 \hat{T}^2 - 5115 \hat{T} + 3953}{\hat{T}^5 - 32.39 \hat{T}^4 + 3916 \hat{T}^3 - 1.337 \times 10^5 \hat{T}^2 + 3.273 \times 10^6 \hat{T} - 3.773 \times 10^4} \quad (5.23)$$

Cette formule permet d'être extrêmement précis sur l'application de l'équivalence (coefficient de corrélation $r^2 \simeq 0.999$). On représente sur la Figure 35 les fonctions $\hat{E}(\hat{T})$ et $\hat{\lambda}_R(\hat{T})$ du système transformé, avec l'approximation décrite par la relation (5.23).

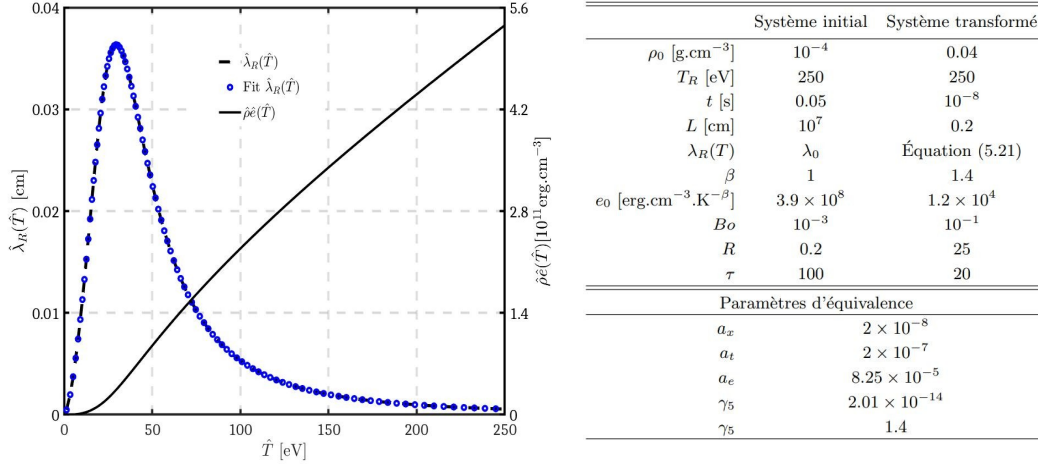


FIGURE 35 – À gauche, fonctions $\hat{E}(\hat{T})$ (en traits pleins, choisie arbitrairement) et $\hat{\lambda}_R(\hat{T})$ (en pointillés, fixée par l'équivalence) du système transformé. À droite, tableau des paramètres d'application de l'équivalence.

On constate que la variation de densité d'énergie interne est bien croissante avec la température, ce qui n'est pas le cas du libre-parcours moyen $\hat{\lambda}_R(\hat{T})$ sur tout l'intervalle de températures, allant de 1 eV à 50 eV. En effet, nous pouvons voir que cette fonction est décroissante pour des températures au-delà de 40 eV, ce qui est un comportement contraire aux propriétés des matériaux typiques de laboratoire. Cette forme de libre parcours moyen est imposée par l'équivalence pour contrebalancer le changement de régime physique entre l'échelle astrophysique et l'échelle du laboratoire. Notons cependant que la forme analytique (5.23) correspond parfaitement à la fonction attendue, obtenue numériquement à l'aide du code EQUIV_OK².

Bien que la forme de libre parcours moyen du système de laboratoire ne soit pas représentative de la physique à cette échelle, observons si les transformations d'équivalence permettent bel et bien de lier les deux systèmes étudiés malgré leurs différences d'échelles, régimes, et propriétés microscopiques. Après application des transformations (5.14-5.15), la simulation du système astrophysique correspond exactement à celle du système équivalent en laboratoire, comme illustré sur la Figure 36.

On obtient des profils de température extrêmement différents de ceux qu'on avait l'habitude de voir en terme de concavité du front d'onde. Cela semble être dû à la forme si particulière du libre parcours moyen $\hat{\lambda}_R(\hat{T})$, qui est décroissant sur la majeure partie de l'intervalle de température considéré. Pourtant, après application des transformations (5.14-5.15), la simulation du système astrophysique correspond

2. Le code EQUIV_OK est un outil développé lors de ces travaux de thèse (en langage Python) et qui permet d'appliquer les transformations d'équivalence à des systèmes dont les équations d'état et lois d'opacité ne sont pas forcément connues théoriquement. Cela permet de pouvoir appliquer l'équivalence de manière systématique entre deux systèmes.

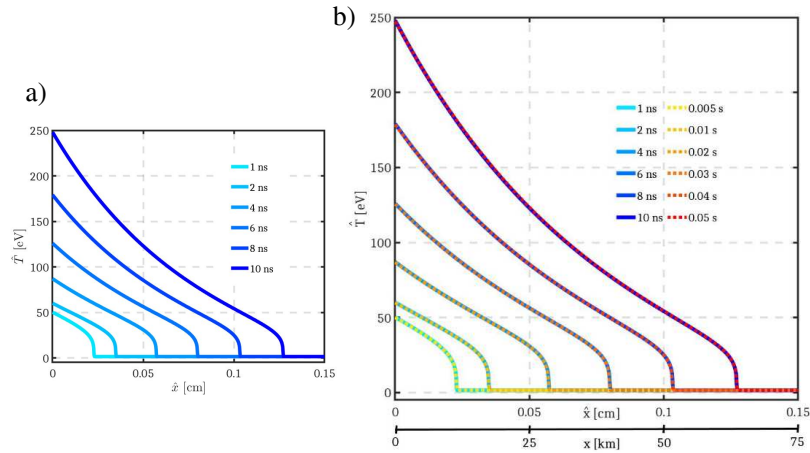


FIGURE 36 – La Figure *a*) présente la simulation FCI2 du système équivalent (les simulations RAMSES-RT du système initial ont déjà été présentées sur la Figure 24. La superposition des profils spatiaux de température du système de base et du système équivalent transformé après application des symétries d'équivalence (5.1) est présentée en Figure *b*). Les températures du système initial ne sont pas indiquées sur l'axe de droite pour illustrer le fait que la relation (5.20) ne donne explicitement que \hat{T} en fonction de T .

exactement à celle du système équivalent de laboratoire. De la même façon que pour l'exemple précédent, les transformations d'équivalence permettent la superposition parfaite des profils spatiaux de température à tout instant. Malgré leurs régimes physiques non-similaires ($R \leq 1 \ll \hat{R}$), des comportements microscopiques fondamentalement différents ($\lambda_R, \hat{\lambda}_R$), et des échelles spatio-temporelles très éloignées ($a_x = 2 \times 10^{-8}$, $a_t = 2 \times 10^{-7}$), nous avons réussi à lier explicitement ces deux systèmes.

5.3.3.2 Imposer les libre-parcours moyens

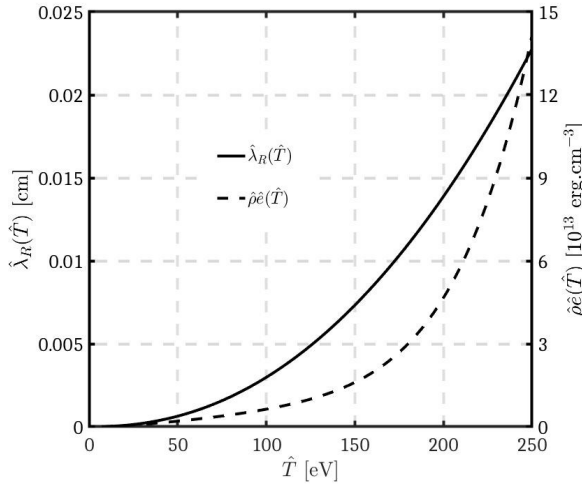
On se place à présent dans le cas modélisé par la relation (5.9), où l'on fixe le libre parcours moyen $\hat{\lambda}_R(\hat{T})$ du système à l'échelle du laboratoire. On fait l'hypothèse que, pour les matériaux de laboratoire considérés, cette fonction peut se mettre sous la forme d'une loi de puissance de la température comme pour l'équation (5.11). En se plaçant dans l'intervalle d'approximation de matériaux typiques de laboratoire, comme dans le cas précédent, on peut choisir les paramètres suivants :

$$\hat{\rho}_0 = 0.04 \text{ g.cm}^{-3}, \quad \hat{\lambda}_0 = 1.02 \times 10^{-16} \text{ cm.K}^{-\hat{\alpha}}, \quad \hat{\alpha} = 2.22, \quad \hat{T}_R = 250 \text{ eV} \quad (5.24)$$

On peut alors utiliser la loi de transformation sur le champ de température donnée par la relation (5.13). Pour s'assurer de l'obtention d'un régime peu radiatif $\hat{R} \gg 1$ pour ce système de laboratoire, nous avons fixé les différents paramètres libres de telle sorte que la contribution de la densité d'énergie radiative soit négligeable. La fonction $\hat{E}(\hat{T})$ du système équivalent s'écrit alors sous la forme :

$$\hat{E}(\hat{T}) = \hat{\rho}_0 \hat{e}(\hat{T}) = \frac{a_t \gamma_5^2}{a_x^2} [\rho_0 c_v T + a_R T^4] \quad (5.25)$$

On représente sur la Figure 37 les fonctions $\hat{\rho}_0 \hat{e}(\hat{T})$ et $\hat{\lambda}_R(\hat{T})$ du système transformé.



	Système initial	Système transformé
ρ_0 [g.cm ⁻³]	10 ⁻⁴	0.04
T_R [eV]	250	250
t [s]	0.05	10 ⁻⁸
L [cm]	10 ⁷	0.2
α	0	2.22
λ_0 [cm.K ^{-alpha}]	3.33 × 10 ⁵	1.025 × 10 ⁻¹⁶
$E(T)$	$\rho_0 c_v T + a_R T^4$	$\hat{\rho}_0 \hat{e}(\hat{T})$
Bo	10 ⁻³	10 ⁻¹
R	0.2	180
τ	100	10
Paramètres d'équivalence		
a_x	2 × 10 ⁻⁸	
a_t	2 × 10 ⁻⁷	
a_λ	3 × 10 ⁻²²	
γ_5	2.58 × 10 ⁻⁴	
γ_6	1.56	

FIGURE 37 – À gauche, fonctions $\hat{\rho}_0 \hat{e}(\hat{T})$ (en pointillés, fixée par l'équivalence) et $\hat{\lambda}_R(\hat{T})$ (en trait plein, choisie arbitrairement). À droite, tableau des paramètres d'application de l'équivalence.

On constate que l'on obtient des fonctions $\hat{E}(\hat{T})$ et $\hat{\lambda}_R(\hat{T})$ aux allures beaucoup plus proches de ce qu'on peut observer en laboratoire, c'est-à-dire croissantes avec la température. L'avantage de cette approche (5.9) apparaît comme étant la conservation de la cohérence physique des fonctions décrivant le matériau de laboratoire équivalent. Pour s'assurer de la pertinence des paramètres choisis, nous appliquons les transformations d'équivalence au système ainsi défini, afin de comparer les profils de température à ceux de la simulation à l'échelle astrophysique. On obtient les résultats présentés sur la Figure 38.

Le choix des paramètres du système de laboratoire se retranscrit sur l'allure générale des profils spatiaux de température de la simulation FCI2, qui correspondent également à des profils typiques obtenus pour des matériaux de laboratoire ³. De la même façon que pour les deux exemples précédents, les transformations d'équivalence permettent la superposition parfaite des profils spatiaux de température, à tout instant. L'équivalence est donc parfaitement respectée durant toute la durée des simulations, comme attendu. Nous avons effectué le même type d'approches que dans l'exemple précédent, en modifiant seulement le choix de la fonction fixée entre $\hat{E}(\hat{T})$ et $\hat{\lambda}_R(\hat{T})$. Pourtant, la cohérence physique de ces fonctions est mieux respectée dans le cas présent. En effet, le fait de conserver des fonctions $\hat{E}(\hat{T})$ et $\hat{\lambda}_R(\hat{T})$ croissantes avec la température démontre que cette façon de procéder correspond mieux à ce que l'on cherche à obtenir : un système de laboratoire équivalent le plus proche possible de matériaux réels. Cette conclusion reste cependant à prendre avec précautions. En effet, rien ne dit que la forme d'équation d'état obtenue correspond à un matériau réel. Ainsi, chaque approche dispose de ses avantages

3. Pour cette observation, on se réfère aux profils obtenus dans le chapitre 3.

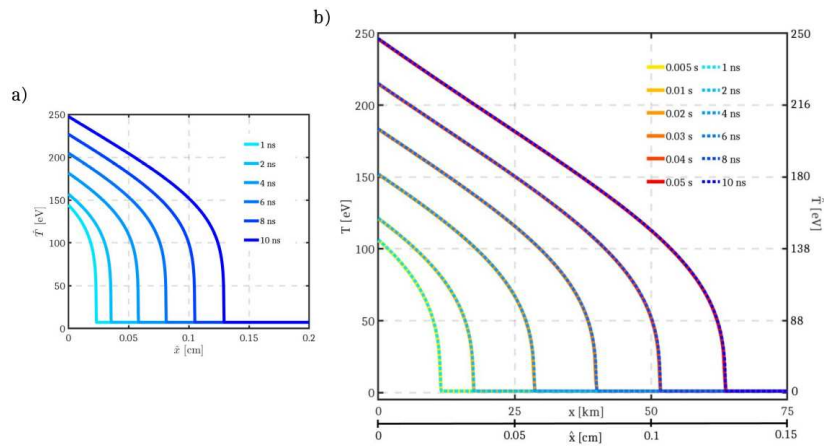


FIGURE 38 – La Figure *a*) présente la simulation FCI2 du système équivalent (les simulations RAMSES-RT du système initial ont déjà été présentées sur la Figure 24. La superposition des profils spatiaux de température du système de base et du système équivalent transformé après application des symétries d'équivalence (5.1) est présentée en Figure *b*).

et inconvénients, que l'on prendra en compte dans la suite de l'étude dans le but de construire un modèle de dimensionnement d'expériences.

À travers ces trois exemples, nous avons pu montrer que les symétries d'équivalence (5.1) fonctionnaient de manière parfaite dans leur domaine d'application. Nous avons ainsi pu illustrer le fait que cette approche aille au-delà des concepts de similitude. Cependant, ces exemples ont également soulevé certaines questions sur les limites d'application de ces transformations. Dans la suite, on propose d'aborder ces problématiques menant à de potentiels écarts à l'équivalence.

5.4 Les limites du groupe d'équivalence

5.4.1 Les mécanismes produisant des écarts à l'équivalence

Il existe plusieurs effets susceptibles de créer des écarts à la théorie d'équivalence par rapport aux situations idéalisées étudiées dans la section précédente. Parmi eux, on peut s'intéresser au non-respect des conditions d'application du modèle théorique (5.2), que ce soit par l'hypothèse supersonique (apparition d'une séparation hydrodynamique) ou de la limite de diffusion. Après avoir détaillé les régimes physiques de propagation d'ondes radiatives supersoniques pour le système astrophysique au chapitre 2, il est donc nécessaire d'effectuer le même genre de raisonnement pour chaque système de laboratoire considéré.

Une des plus importantes limitations est la mise en situation physique des contraintes imposées sur les matériaux transformés. En effet, on rappelle qu'en choisissant la répartition de densité d'énergie $\hat{E}(\hat{T})$ ou la loi d'évolution du libre parcours moyen $\hat{\lambda}_R(\hat{T})$ du système transformé, l'équivalence fixe automatiquement l'autre fonction déterminant la nature du milieu. Ainsi, bien qu'on puisse considérer

connaître exactement l'évolution d'un libre parcours moyen pour un matériau, il n'existe aucune garantie que l'équivalence impose une forme de densité d'énergie interne compatible avec ce même matériau.

En plus de ne pas pouvoir choisir arbitrairement tous les paramètres des transformations, on se rend très vite compte qu'il est difficile de maîtriser la physique des matériaux réels au point que requiert l'équivalence. En effet, certains comportements obtenus dans les exemples précédents ne peuvent être reproduits par des matériaux connus de laboratoire. La décroissance du libre parcours moyen sur un intervalle de température conséquent, représentée sur la Figure 35, en est la parfaite illustration. Remarquons que cette approche pourrait cependant être rendue possible par l'utilisation de méta-matériaux [Leonhardt, 2006], un nouveau type de matériaux créés en laboratoire et pour lesquels nous aurions une complète maîtrise de la physique microscopique. Dans l'état actuel des choses, il est nécessaire de chercher à minimiser les écarts entre les matériaux théoriques et réels afin d'obtenir un système équivalent au système astrophysique étudié au chapitre 2.

Afin de quantifier les écarts à l'équivalence, on introduit deux paramètres, notés π_1 et π_2 :

$$\pi_1(\hat{t}) = \frac{1}{\hat{L}} \int_0^{\hat{L}} \frac{|\hat{T}(\hat{x}, \hat{t}) - \hat{T}_{reel}(\hat{x}, \hat{t})|}{\hat{T}(\hat{x}, \hat{t})} d\hat{x}, \quad \pi_2(\hat{t}) = \frac{|\hat{x}_f(\hat{t}) - \hat{x}_{f_{reel}}(\hat{t})|}{\hat{x}_f(\hat{t})} \quad (5.26)$$

où $\hat{T}_{reel}(\hat{x}, \hat{t})$ et $\hat{x}_{f_{reel}}(\hat{t})$ correspondent aux températures et positions de front radiatif du système de laboratoire simulé à l'aide des équations d'état et lois d'opacité tabulées de matériaux. Ces paramètres permettent de quantifier, respectivement, l'écart aux profils spatiaux de température et à la position du front radiatif du système équivalent. En pratique, on calcule donc l'écart entre les données de la simulation équivalente $\hat{T}(\hat{x}, \hat{t})$, $\hat{x}_f(\hat{t})$, et les données du système réel à l'échelle du laboratoire. Il est également possible de s'intéresser à l'écart à l'équivalence en moyenne, sur un intervalle de temps choisi $\hat{t} = [0, \hat{t}_{fin}]$, en utilisant les paramètres $\bar{\pi}_1$ et $\bar{\pi}_2$, donnés par :

$$\bar{\pi}_1 = \frac{1}{\hat{t}_{fin}} \int_0^{\hat{t}_{fin}} \pi_1(\hat{t}) d\hat{t}, \quad \bar{\pi}_2 = \frac{1}{\hat{t}_{fin}} \int_0^{\hat{t}_{fin}} \pi_2(\hat{t}) d\hat{t} \quad (5.27)$$

C'est donc à ces paramètres que l'on se référera lorsque l'on parlera d'écarts en moyenne.

5.4.2 Les écarts aux matériaux théoriques

5.4.2.1 Une méthode générale pour déterminer un système optimal

On cherche à obtenir un système à l'échelle du laboratoire le plus proche possible d'un matériau réel connu, et qui soit équivalent à notre système astrophysique de base, rappelé dans les tableaux des Figures 35 et 37. Dans cette optique, le système initial est complètement défini en terme de ses fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$, mais aussi en terme de conditions aux limites $T_S(t)$ et initiale ρ_0, T_0 . Supposons à présent que la loi de libre parcours moyen $\hat{\lambda}_R(\hat{T})$ puisse se mettre sous la forme d'une loi de puissance (5.11). En se plaçant dans le cas décrit par la relation (5.9), on peut alors réécrire les symétries d'équivalence (5.1) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \hat{x} = a_x x \\ \hat{t} = a_t t \\ \hat{T} = \left[\gamma_5^2 \gamma_6 \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right) \right]^{\frac{1}{4+\hat{\alpha}}} T^{\frac{1}{\gamma_6}} \\ \gamma_6 = \frac{4+\hat{\alpha}}{4} \\ \hat{\rho}_0 \hat{e}(\hat{T}) = \frac{a_t \gamma_5^2}{a_x^2} (\rho_0 c_v T + a_R T^4) \\ \gamma_5 = \sqrt{\frac{\hat{T}_R^{4+\hat{\alpha}} \lambda_0}{\gamma_6 T_R^{4+\alpha} \lambda_0}} \end{cases} \quad (5.28)$$

où les paramètres restant à être fixés sont donc : a_x , a_t , $\hat{\rho}_0$ et \hat{T}_R . Autrement dit, il est encore possible de choisir les dimensions spatiale et temporelle, la densité initiale, et la température source maximale du système de laboratoire, ce qui revient à définir une forme particulière de sursaut ainsi qu'une vitesse de front équivalentes.

Dans la suite, on s'intéresse à différents matériaux de laboratoire, et en particulier les mousses de SiO_2 [Back *et al.*, 2000a; Moore *et al.*, 2015], CHOGe [Cohen *et al.*, 2004] (initialement utilisé dans les ablateurs), CHOBr [Courtois *et al.*, 2021], CHCu [Jiang *et al.*, 2005] et Ta_2O_5 [Back *et al.*, 2000a]. Pour chaque matériau, nous considérons des densités $\hat{\rho}_0$ cohérentes avec les expériences qui leur sont associées, ce qui va conduire à différentes vitesses de front pour le système de laboratoire réel. L'intérêt des transformations d'équivalence (5.28), comme nous venons de le voir, réside également dans la possibilité de modifier les dimensions du système équivalent en jouant sur les paramètres a_x et a_t . Or, ces dimensions ne peuvent être choisies aléatoirement, et doivent respecter les contraintes introduites au chapitre 3. En effet, dans l'optique de construire un dimensionnement réalisable permettant la mise en place de diagnostics spatiaux et temporels, on cherche à obtenir des systèmes de taille $\hat{L} \in [0.1, 0.3]$ cm et d'échelle temporelle caractéristique $\hat{t} \in [2, 10]$ ns. Ainsi, l'objectif est de trouver la densité $\hat{\rho}_0$ permettant d'obtenir les coefficients a_x et a_t adéquats afin de réaliser ce dimensionnement.

À la différence du paramètre a_x , le choix du paramètre a_t n'est pas complètement décorrélié des autres paramètres du système. En particulier, le choix d'une nouvelle échelle temporelle modifie directement la forme du sursaut $\hat{T}_S(\hat{t})$ constituant la condition aux limites en laboratoire. Pour cette raison, on décide de fixer une valeur $a_t = 2 \times 10^{-7}$ afin de représenter les 5×10^{-3} premières secondes de propagation de l'onde radiative au sein du disque d'accrétion entourant une étoile à neutron sur 10 ns pour le système équivalent de laboratoire. Nous verrons dans la suite ce qu'un choix différent implique sur les écarts de la situation réelle à l'équivalence. Afin de complètement fixer la condition aux limites $\hat{T}_S(\hat{t})$, on choisit de prendre $\hat{T}_S = 250$ eV, une température consistante avec les possibilités offertes par les installations laser actuelles les plus énergétiques (NIF, LMJ) [Moore *et al.*, 2015] sur les échelles temporelles considérées. D'autres choix de température peuvent être effectués, menant à une modification des paramètres d'application de l'équivalence. Pour chaque système de laboratoire, l'objectif est tout d'abord d'obtenir des ondes radiatives supersoniques, qui pourront ensuite être utilisées dans le cadre de l'équivalence pour modéliser le système astrophysique. Ainsi, des températures élevées sont nécessaires à l'échelle du laboratoire afin de conserver l'hypothèse supersonique sur des temps assez longs pour être diagnostiqués. Nous verrons dans la fin de ces travaux comment le mécanisme de séparation hydrodynamique peut impacter les choix

Matériaux	$\hat{\rho}_0$ [g.cm ⁻³]	$\hat{\lambda}_R(\hat{T})$ [cm]	a_x	\hat{L} [cm]	$\bar{\pi}_1$	$\bar{\pi}_2$
Ta ₂ O ₅	0.08	$7.24 \times 10^{-17} \hat{T}^{2.2}$	2.54×10^{-8}	0.19	0.1	0.07
SiO ₂	0.2	$5.731 \times 10^{-28} \hat{T}^4$	2.02×10^{-8}	0.15	0.18	0.15
CHCu	0.1	$8.092 \times 10^{-17} \hat{T}^{2.3}$	3.3×10^{-8}	0.25	0.12	0.12
CHObR	0.2	$5.647 \times 10^{-24} \hat{T}^{3.4}$	1.57×10^{-8}	0.12	0.24	0.18
CHOGe	0.2	$1.032 \times 10^{-21} \hat{T}^3$	1.60×10^{-8}	0.12	0.23	0.15

TABLEAU 5.1 – Caractéristiques et paramètres optimaux de dimensionnement pour les différents matériaux considérés. Le calcul de la longueur \hat{L} du système de laboratoire a été effectué en prenant une longueur de système astrophysique de 75 km environ, qui correspond à la distance parcourue par l'onde radiative sur l'échelle de temps considérée.

de température source.

Le système de laboratoire est donc maintenant déterminé, à la seule exception de la dimension spatiale, fixée par le paramètre a_x . C'est ce paramètre que l'on cherche à optimiser, afin d'obtenir ce que l'on qualifie de meilleur matériau. On le définit comme le matériau le plus adéquat en terme de différents critères : l'écart le plus faible à l'équivalence sur l'intervalle temporel d'intérêt, la vérification de la limite diffusion et la faisabilité de l'expérience associée en terme de dimensions spatio-temporelles. La question qui se pose est de savoir ce que l'on entend par l'écart le plus faible à l'équivalence. En pratique, dans un premier temps, nous avons choisi une méthode directe, où nous avons privilégié la minimisation de l'écart moyen représenté par le couple $(\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2)$. En appliquant cette façon de procéder aux cinq différents matériaux considérés, on obtient cinq ensembles de paramètres optimaux, à savoir les densités initiales et extensions spatiales des systèmes de laboratoire. Ces résultats sont présentés dans le Tableau 5.1, avec les caractéristiques de chaque matériau en terme de loi de libre parcours moyen. On obtient donc un ensemble de cinq systèmes complètement caractérisés, dont les écarts à l'équivalence sont discutés dans la suite.

5.4.2.2 Résultats pour les différents matériaux

Chaque matériau présente des caractéristiques différentes puisqu'ils ont un libre parcours moyen $\hat{\lambda}_R(\hat{T})$ spécifique, ce qui conduit à des lois de sursaut différentes pour chaque système. La comparaison de ces conditions aux limites est présentée sur la Figure 39, où les lois de transformation de la température sont spécifiées.

Chaque loi de température $\hat{T}_S(\hat{t})$ fait correspondre les valeurs $T_R = 250$ eV et $\hat{T}_R = 250$ eV, et provient d'une transformation en loi de puissance d'un même sursaut à l'échelle astrophysique. Quel que soit le matériau étudié, la température source s'écrit $\hat{T}_S(\hat{t}) = A \times T_S(t)^{4/(4+\hat{\alpha})}$, avec $T_S(t)$ la loi de sursaut du

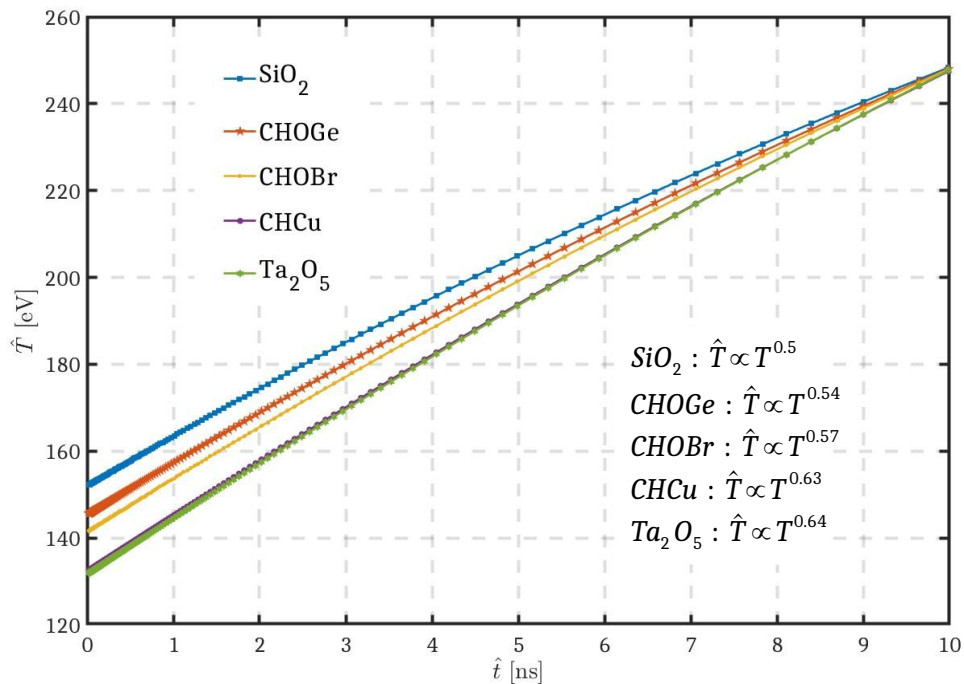


FIGURE 39 – Différentes lois de sursaut $\hat{T}_S(\hat{t})$ pour les matériaux considérés pour le dimensionnement d'expérience de laboratoire. Les différentes lois de transformation de la température sont indiquées en bas à droite pour chaque courbe.

système astrophysique représentée sur la Figure 21. Étant donné que ces lois de température ont une faible dépendance en les valeurs de $\hat{\alpha}$ et que celles-ci ne changent pas d'ordre de grandeur (voir Tableau 5.1), on obtient alors des lois assez proches temporellement, avec des écarts moyens de quelques pourcents. À partir de ces conditions aux limites, et en considérant les différents paramètres détaillés dans le Tableau 5.1, les systèmes de laboratoire sont complètement définis. Nous avons donc effectué des simulations 1D à l'aide du code FCI2 pour chaque matériau mentionné, et appliqué l'équivalence à chaque fois.

Nous détaillons l'analyse menée pour le matériau Ta_2O_5 , qui servira à illustrer ce qui a été effectué pour les autres matériaux. L'application des transformations d'équivalence (5.1) contraint la loi de densité d'énergie interne $\hat{\rho}\hat{e}(\hat{T})$ de chaque matériau de manière plus ou moins forte. Quelle que soit la loi de transformation sur la température, la densité d'énergie interne du système équivalent doit être proportionnelle à celle du système astrophysique. La problématique à laquelle nous sommes confrontés se trouve être la différence entre la densité d'énergie interne réelle du matériau et cette loi imposée par l'équivalence. La différence entre ces deux fonctions pour une mousse de Ta_2O_5 est illustrée sur la Figure 40.

On constate que l'écart en densité d'énergie interne n'est pas constant sur tout l'intervalle de température. En particulier, il est ici maximal à la température $\hat{T}_R = 250$ eV, tandis que la première partie de

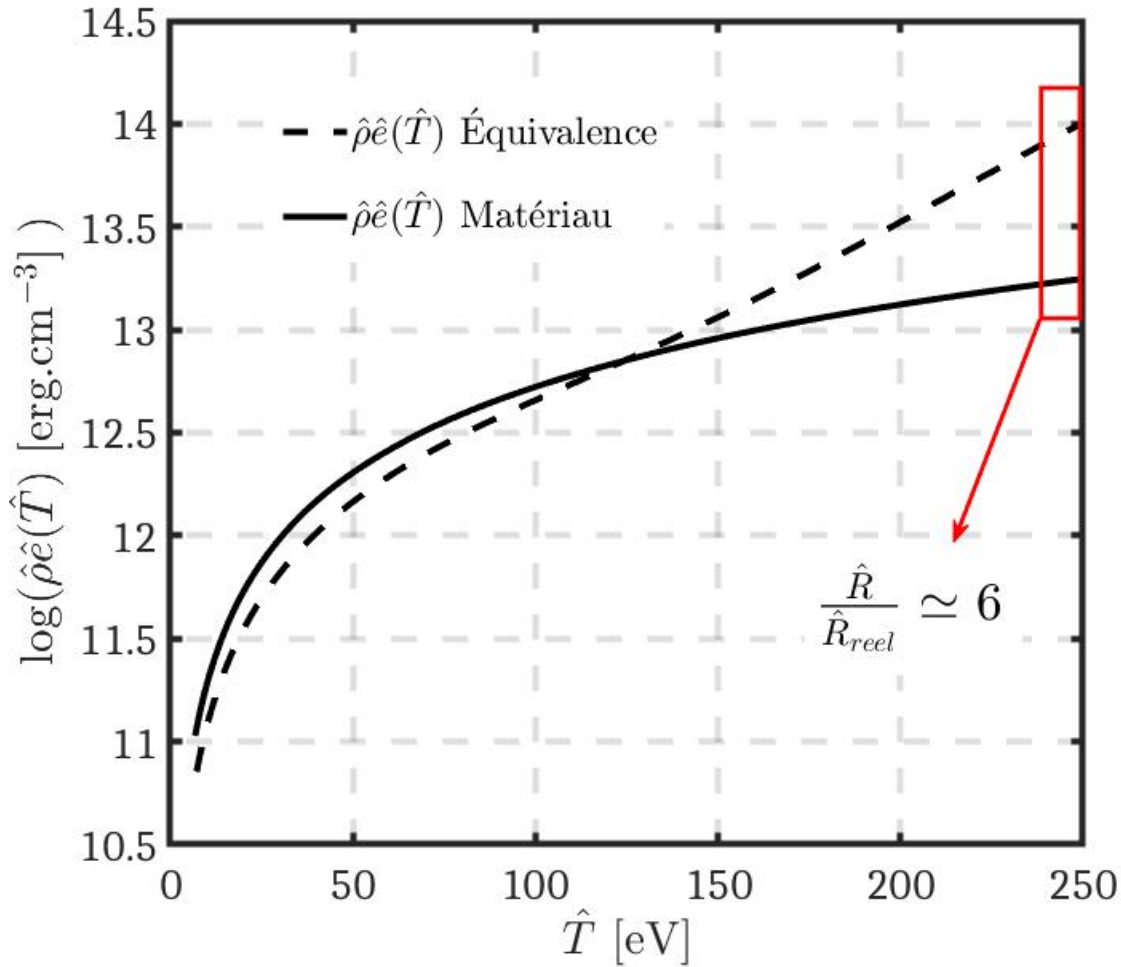


FIGURE 40 – Comparaison du logarithme des fonctions de densité d'énergie interne réelle du Ta₂O₅ pour une densité $\hat{\rho}_0 = 0.08 \text{ g.cm}^{-3}$ (en traits pleins) et celle imposée par l'équivalence (en pointillés). Le cadre rouge insiste sur la différence de ces fonctions modélisée en terme de Nombres de Mihalas du matériau \hat{R}_{reel} et du système équivalent théorique \hat{R} .

ces fonctions semble correspondre de manière correcte (écarts inférieurs à 5% jusqu'à $\hat{T}_S = 150$ eV). On peut choisir de modéliser la différence en terme de nombres de Mihalas équivalent et réel, dont le rapport vaut ici environ 6.

L'application des transformations (5.1) permet de transposer ce système de laboratoire à l'échelle astrophysique. On obtient les résultats présentés sur la Figure 41.

Les profils spatiaux de température présentent une convexité marquée typique des régimes peu radiatifs obtenus en laboratoire, pour un nombre de Mihalas $\hat{R}_{reel} \simeq 30 \gg 1$. En comparant les simulations FCI2 transformées (en pointillés bleus) avec les simulations RAMSES-RT (en traits pleins du jaune au rouge), on constate des écarts immédiats à l'équivalence, que ce soit au niveau du front radiatif ou au niveau des profils de température. Cela est dû à la méthode employée pour optimiser le paramètre a_x . En effet, comme expliqué précédemment, nous avons tout d'abord choisi de minimiser le couple $(\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2)$, représentant

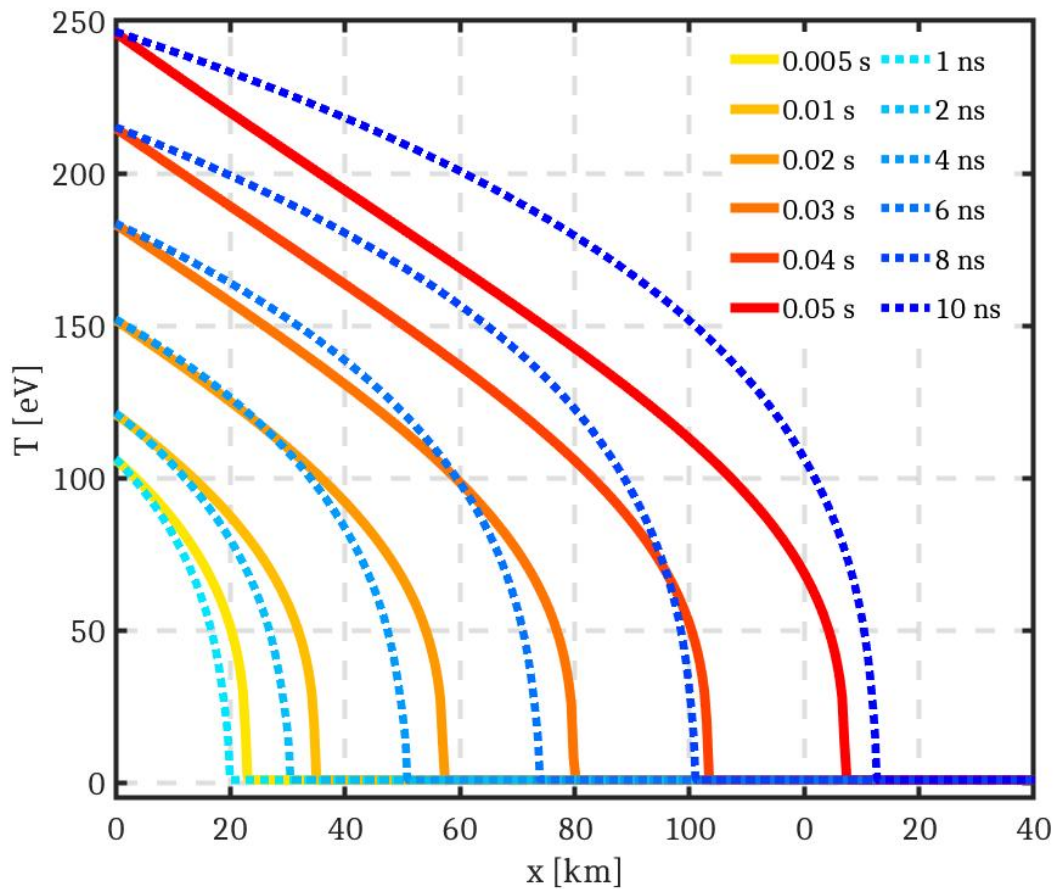


FIGURE 41 – Profils spatiaux de température du système astrophysique (en traits pleins rouges) superposés avec ceux du système de laboratoire pour le matériau Ta_2O_5 (en pointillés bleus).

l'erreur moyenne sur les profils de température et sur le front radiatif. En choisissant de placer ces deux erreurs sur le même niveau d'importance, il s'avère que cela tend à rendre l'écart à l'équivalence élevé ($\geq 5\%$) sur un intervalle temporel conséquent.

Ainsi, comme on peut le voir sur la Figure 41, l'écart en température augmente considérablement lorsqu'on se rapproche des températures maximales T_R et \hat{T}_R . Cela semble s'expliquer par deux facteurs que sont l'accumulation de l'erreur au cours du temps ⁴, et l'évolution de l'onde radiative astrophysique vers un régime de plus en plus radiatif ($R(T_R) \simeq 0.2$). Ainsi, en cherchant à minimiser l'erreur sur les deux grandeurs que sont le profil de température et le front radiatif, nous réduisons majoritairement, dans ce cas, l'écart aux temps longs, autour de 10 ns pour le système de laboratoire.

Il est possible d'augmenter la précision à l'équivalence dans les premiers instants de la propagation de l'onde radiative, qui nous intéressent particulièrement. En effet, sachant que l'erreur augmente de façon inexorable au fil de la propagation des ondes radiatives, nous pouvons chercher à la minimiser sur les premiers instants de la propagation de l'onde radiative, en modifiant le paramètre a_x en conséquence.

4. En explorant la fonction de densité d'énergie interne sur un intervalle de température de plus en plus grand, nous avons vu sur la Figure 39 que l'écart à l'équivalence augmenterait.

Concrètement, nous cherchons à minimiser la variable $\bar{\pi}_2(\hat{t}_{fin})$ dans le cas où le paramètre \hat{t}_{fin} est inférieur à la durée totale de la simulation. Dans le cas du Ta_2O_5 , cette méthode permet d'améliorer globalement l'adéquation entre les profils sur un intervalle d'environ 5 – 6 ns, comme nous pouvons le voir sur la Figure 42.

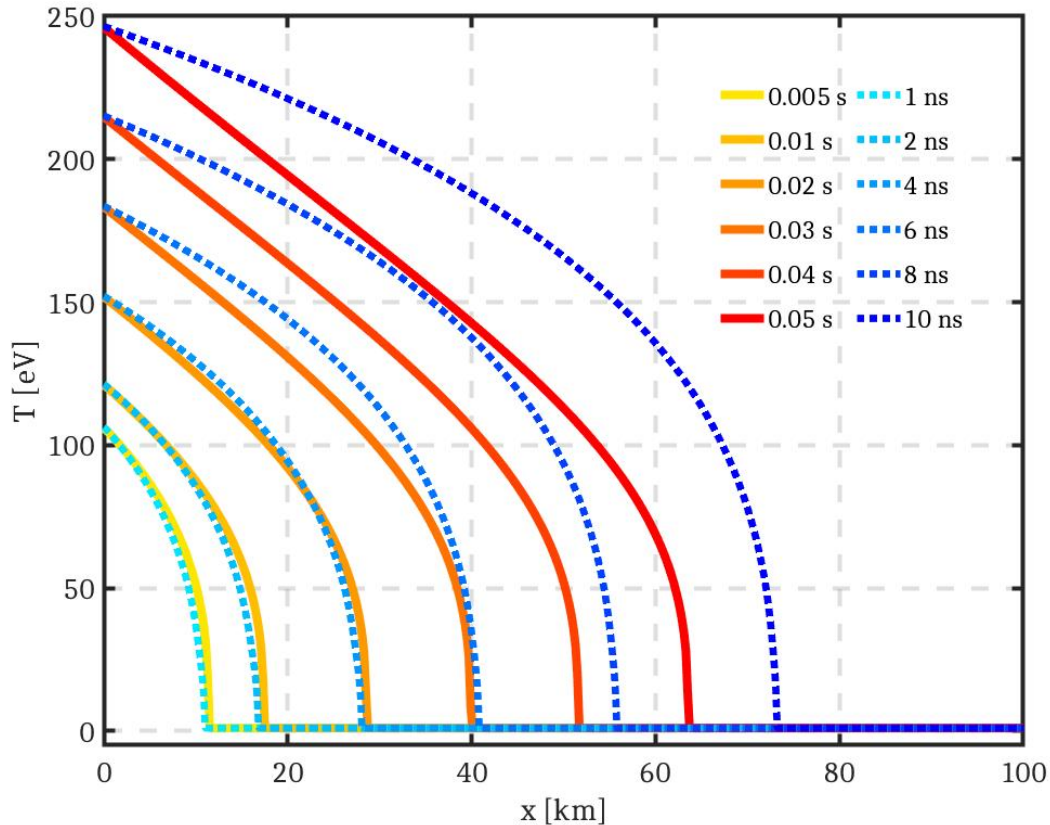


FIGURE 42 – Profils spatiaux de température du système astrophysique (en traits pleins rouges) superposés avec ceux du système de laboratoire pour le matériau Ta_2O_5 (en pointillés bleus).

On constate que l'écart au front radiatif sur environ 6 ns est inférieur à 5%. L'écart aux profils de température, quant à lui, augmente rapidement après 5 ns, comme attendu, mais reste correct pour des temps plus courts. La valeur de a_x utilisée pour cette superposition est de 2.24×10^{-8} , légèrement inférieure à sa précédente valeur donnée dans le Tableau 5.1.

On peut effectuer la même approche pour les différents matériaux introduits dans le tableau 5.1. Notons que les différentes valeurs de a_x pour cette seconde approche appliquée à tous les matériaux sont toutes réunies dans la Tableau 5.2 à la fin de cette section. Nous présentons à présent les résultats obtenus pour un second matériau, le $CHOB_r$, sur la Figure 43.

Dans ce cas, les écarts aux équations d'état sont plus importants en moyenne. Cela va provoquer des écarts à l'équivalence d'autant plus importants. Pour respecter l'échelle spatiale que l'on souhaite imposer au système de laboratoire, le paramètre a_x prend la valeur 1.15×10^{-8} inférieure à sa valeur précédemment fixée de 1.57×10^{-8} . Cette dernière contrainte impose le paramètre de redimensionnement

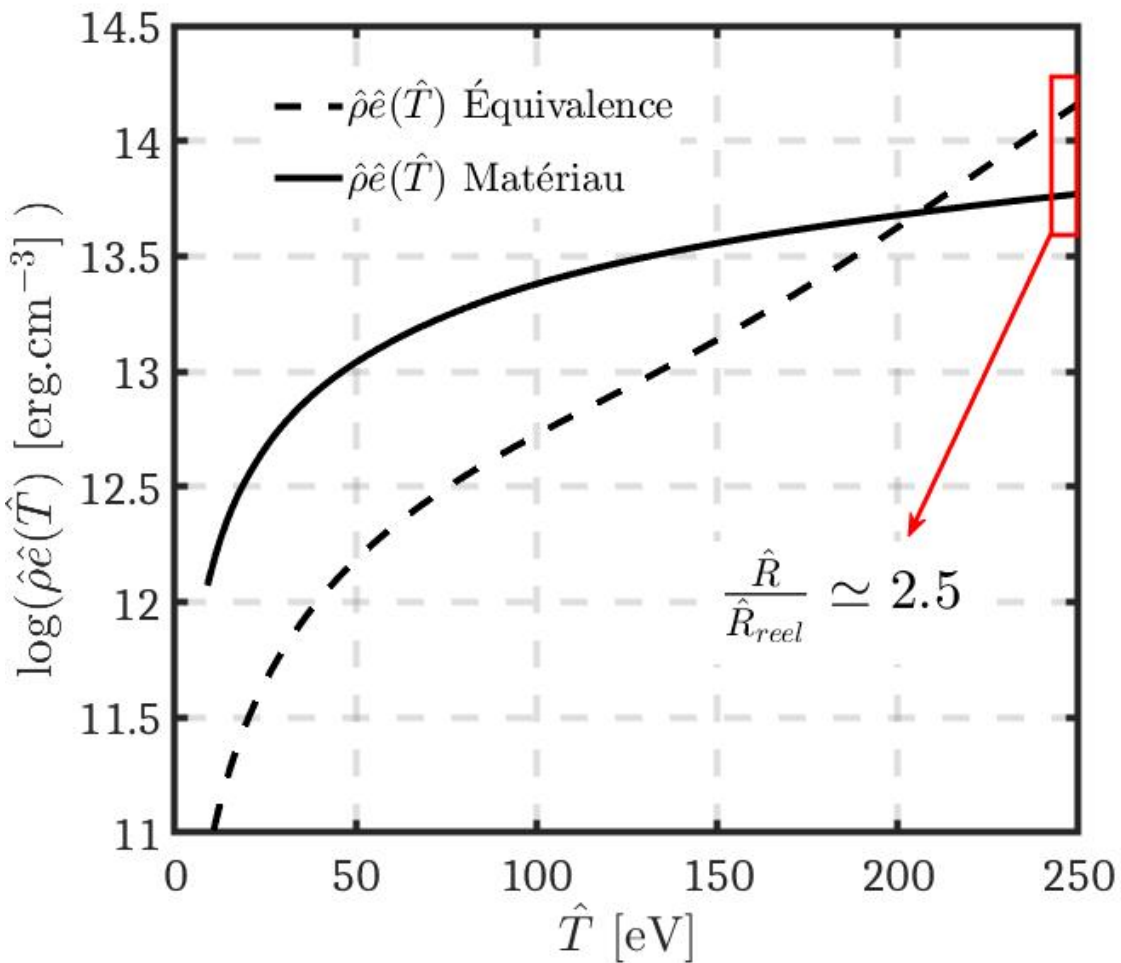


FIGURE 43 – Comparaison du logarithme des fonctions de densité d'énergie interne réelle du CHOBBr pour une densité $\hat{\rho}_0 = 0.2 \text{ g.cm}^{-3}$ (en traits pleins) et celle imposée par l'équivalence (en pointillés). Le cadre rouge insiste sur la différence de ces fonctions modélisée en terme de Nombres de Mihalas du matériau \hat{R}_{reel} et du système équivalent théorique \hat{R} .

de la densité d'énergie de laboratoire. Dans le cas du CHOBBr, notre dimensionnement est donc moins bien adapté que pour le Ta_2O_5 , comme le montrent les applications de l'équivalence sur la Figure 44.

L'écart à l'équivalence augmente très rapidement, produisant des divergences théoriques supérieures à 10% sur quelques nanosecondes. En comparant directement les résultats présentés sur la Figure 42 et sur la Figure 44, nous pouvons constater que l'équivalence est, de manière générale, mieux respectée pour une mousse de Ta_2O_5 . Cette conclusion peut s'étendre à tous les matériaux considérés, comme nous allons le voir dans la suite, en comparant de manière quantitative les différentes situations explorées.

5.4.2.3 Choix du meilleur matériau

Au final, on dispose d'un ensemble de simulations pour lesquelles on peut tracer les écarts à l'équivalence $\pi_1(\hat{t})$ et $\pi_2(\hat{t})$ donnés par (5.26), au cours du temps. Cela peut être effectué pour les deux approches

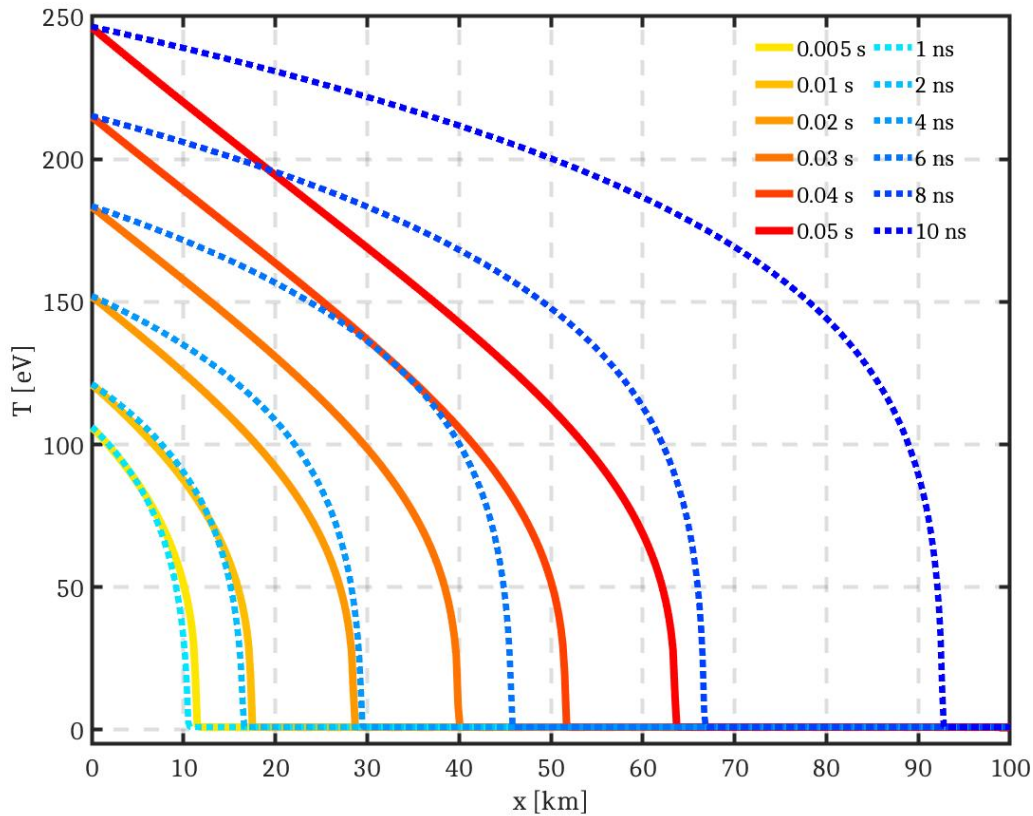


FIGURE 44 – Profils spatiaux de température du système astrophysique (en traits pleins rouges) superposés avec ceux du système de laboratoire pour le matériau CHOBr (en pointillés bleus), pour une valeur du paramètre a_x de 1.15×10^{-8} .

utilisées dans le cadre de l'optimisation du paramètre a_x . En particulier, on a obtenu un ensemble de nouvelles valeurs pour ce paramètre, dans le cas où l'on minimise l'écart au front radiatif sur les premiers instants de propagation, et qui sont regroupées dans le Tableau 5.2. Il est ainsi possible de représenter l'évolution temporelle de la fonction $\pi_1(t)$, caractérisant l'écart aux profils de température, pour les deux approches introduites précédemment. On obtient les résultats présentés sur la Figure 45 a) pour les données du Tableau 5.1 et sur la Figure 45 b) pour les données du Tableau 5.2.

On constate qu'une certaine hiérarchie se crée au sein des différents matériaux, en terme d'amplitude d'écart à l'équivalence. Les possibilités sont nombreuses pour expliquer ce comportement, mais on retiendra que cela est principalement dû au numéro atomique du matériau, ainsi qu'à la précision de la loi de puissance utilisée pour modéliser la fonction $\hat{\lambda}_R(\hat{T})$. La dynamique globale du paramètre $\pi_1(t)$, dans la première approche, consiste à minimiser l'écart le plus longtemps possible. On constate donc un plateau de stabilité de l'écart jusqu'à environ 8 ns. Dans le cas de la seconde approche, on obtient des écarts à l'équivalence initialement plus faibles, mais qui deviennent rapidement supérieurs à 10%, même pour les meilleurs matériaux, au bout d'environ 3 ns. Pour le Ta_2O_5 , les écarts restent tout de même limités ($\leq 10\%$) sur 5 ns.

Matériaux	$\hat{\rho}_0$ [g.cm ⁻³]	a_x	\hat{L} [cm]	$\bar{\pi}_2(5 \text{ ns})$
Ta ₂ O ₅	0.08	2.24×10^{-8}	0.17	0.02
SiO ₂	0.2	1.6×10^{-8}	0.12	0.04
CHCu	0.1	2.64×10^{-8}	0.2	0.05
CHOBBr	0.2	1.15×10^{-8}	0.09	0.03
CHOGe	0.2	1.20×10^{-8}	0.09	0.04

TABLEAU 5.2 – Caractéristiques et paramètres optimaux de dimensionnement pour les différents matériaux considérés, dans le cas d'une minimisation de l'écart au front dans les premiers instants de propagation des ondes radiatives.

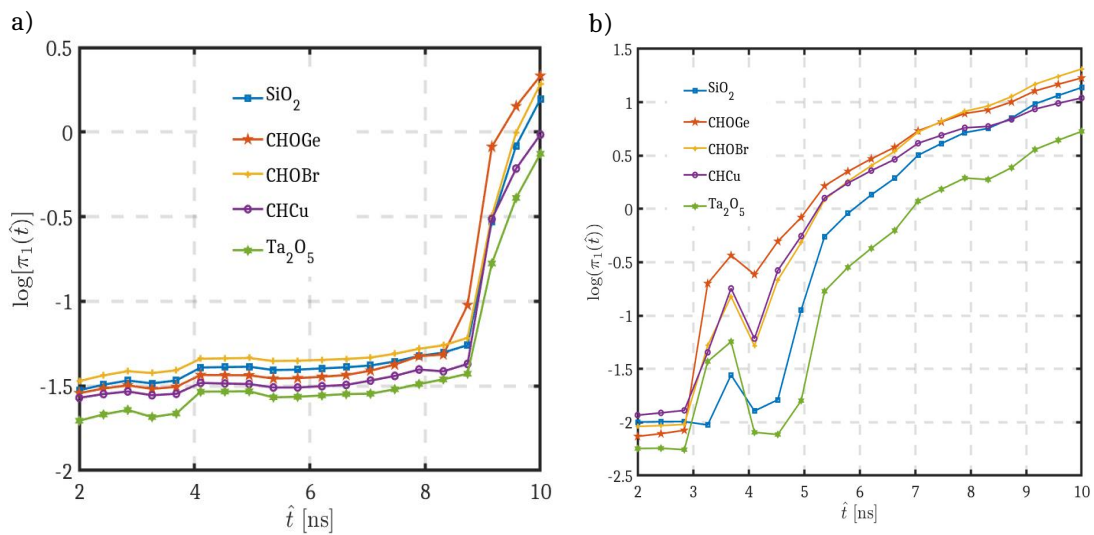


FIGURE 45 – Les figures a) et b) présentent l'évolution temporelle de la fonction $\log[\pi_1(\hat{t})]$ pour les différents matériaux étudiés, dans le cas des deux approches d'optimisation du paramètre a_x . La figure a) correspond à la minimisation du couple $(\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2)$, tandis que la figure b) correspond à la minimisation de l'écart au front $(\bar{\pi}_2)$ durant les premiers instants de la propagation de l'onde radiative, pour $\hat{t}_{fin} = 5$ ns.

De la même façon, il est possible d'observer l'évolution de l'écart au front radiatif, modélisé par la fonction $\pi_2(t)$. On obtient les résultats présentés sur la Figure 46 a) pour les données du Tableau 5.1 et sur la Figure 46 b) pour les données du Tableau 5.2.

Comme précédemment, une hiérarchie des matériaux s'installe, avec toujours le Ta₂O₅ en première position. Dans la première approche, l'écart au front est conséquent pour les temps initiaux, lorsque l'écart aux profils se fait peu ressentir. Cependant, la dynamique est inverse par rapport au cas précédent,

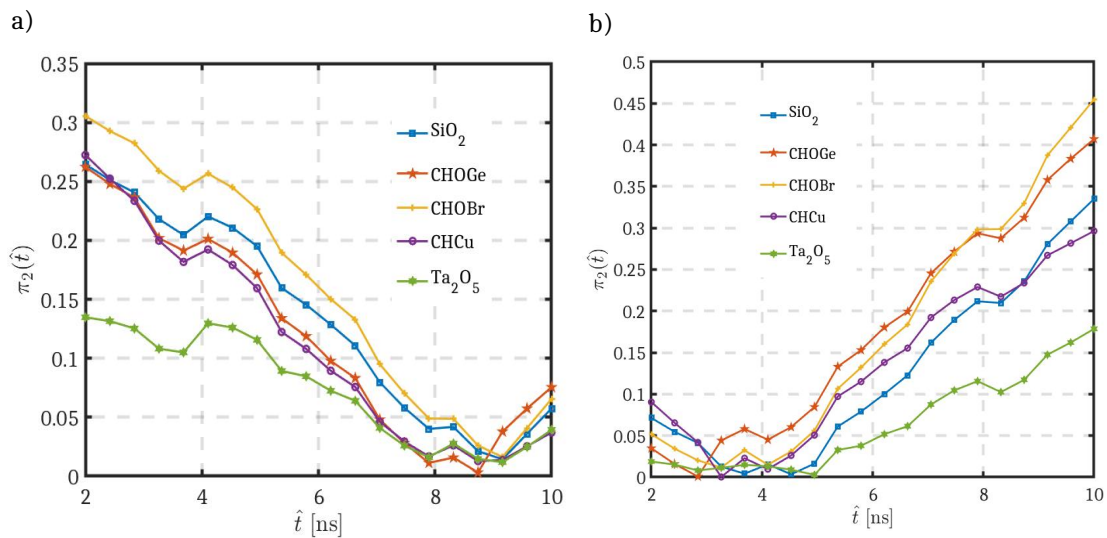


FIGURE 46 – Les figures a) et b) présentent l'évolution temporelle de la fonction $\pi_2(\hat{t})$ pour les différents matériaux étudiés, dans le cas des deux approches d'optimisation du paramètre a_x . La figure a) correspond à la minimisation du couple $(\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2)$, tandis que la figure b) correspond à la minimisation de l'écart au front $(\bar{\pi}_2)$ durant les premiers instants de la propagation de l'onde radiative, pour $\hat{t}_{fin} = 5$ ns.

puisque ici l'écart diminue, comme attendu, pour les temps longs. Cette dynamique est inversée dans la seconde approche, où les écarts augmentent fortement autour de 5 à 6 nanosecondes, dépassant les 10% pour tous les matériaux.

Dans le but d'obtenir le meilleur matériau possible en terme de minimisation des écarts à l'équivalence, cette méthode présente l'avantage d'établir une première hiérarchie entre les différents matériaux. Parmi eux s'est clairement distingué le Ta₂O₅, qui constitue, pour le moment, la meilleure alternative en terme de matériau réel. Notons que nous sommes tout de même limités en terme de choix de matériaux, ce qui fait que des écarts importants apparaissent par rapport au système équivalent idéalisé. La seule façon de progresser dans l'obtention des systèmes de plus en plus proches de l'équivalence serait de disposer de matériaux dont la microphysique peut être totalement maîtrisée. Pour le moment, nos connaissances actuelles permettent d'appliquer l'équivalence sur des échelles temporelles réduites.

5.4.3 Limite de l'hypothèse supersonique : une réponse hydrodynamique du système

Une limite inhérente aux transformations d'équivalence est le domaine d'application de celles-ci. En effet, les symétries d'équivalence (5.1) sont propres au modèle théorique de diffusion donné par la relation (5.2). Ainsi, n'importe quel écart à ce modèle conduit inévitablement à l'existence d'écarts dans les applications des transformations. Dans cette optique, nous pouvons effectuer des simulations non-statiques afin d'observer une éventuelle réponse hydrodynamique du système rendant le modèle théorique (5.2) inapplicable. En particulier, une séparation hydrodynamique peut modifier de manière drastique les profils de température obtenus en laboratoire. C'est ce que l'on observe pour trois matériaux présentant les densités les plus importantes : CHGe, CHBr et SiO₂. Les résultats de simulations d'hydrodynamique

radiative réalisées à l'aide du code FCI2 sont présentés, après transformation, sur la Figure 47 dans le cas du CHOB_r.

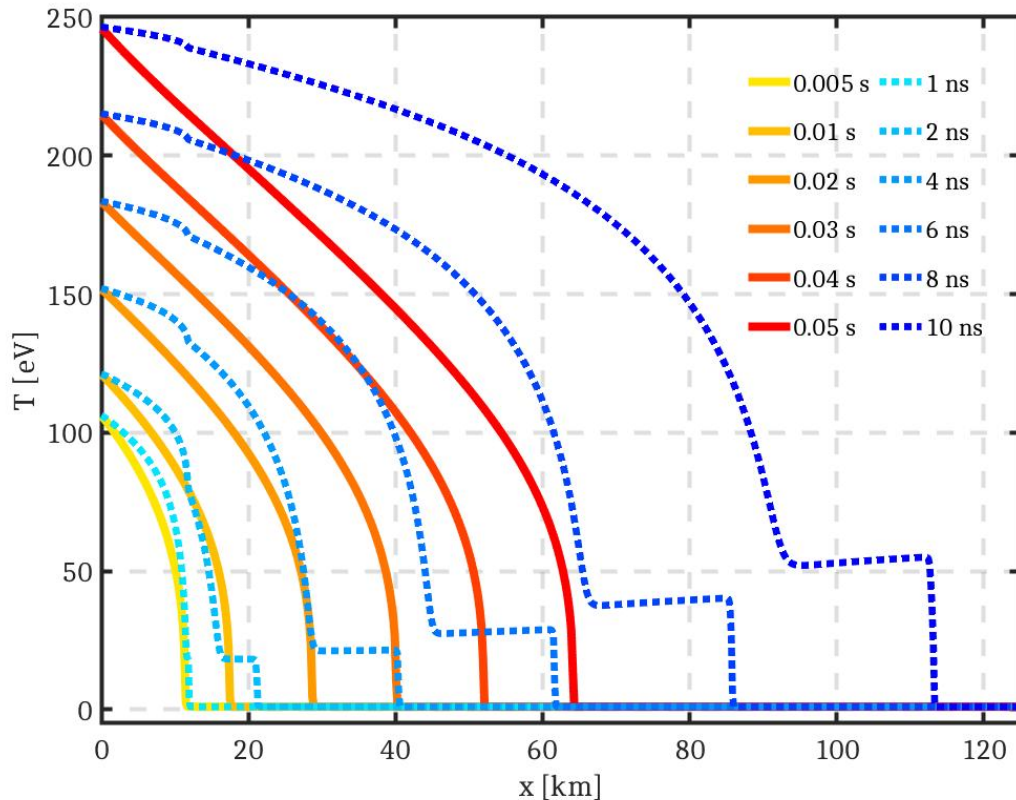


FIGURE 47 – Superposition des profils spatiaux de température du système de base et du système équivalent transformé après application des symétries d'équivalence (5.1) pour une mousse de CHOB_r.

On constate qu'une séparation hydrodynamique apparaît dès les premiers instants de la propagation de l'onde radiative, et modifie profondément les profils de température qui lui sont associés. Une estimation du temps de séparation hydrodynamique peut être réalisée à l'aide des approximations analytiques pour les lois d'état et lois d'opacité des différents matériaux. Dans le cas du CHOB_r, la montée en température au niveau de la source de rayonnement ne permet pas de donner au front radiatif une vitesse suffisante pour dépasser la vitesse du son, ce qui donne un temps de séparation de l'ordre de $t_{sep} \approx 1$ ns. Le nombre de Mach radiatif varie entre $Ma \approx 1$ et $Ma \approx 0.4$ selon la température de la source. Les écarts à l'équivalence augmentent alors d'autant plus que les vitesses de front ne correspondent plus du tout à ce que l'on s'attendait à obtenir en régime supersonique.

Pour ce qui est du Ta₂O₅, les simulations réalisées à l'aide du code FCI2 sont présentées sur la Figure 48, également superposées après transformation aux simulations RAMSES-RT du système astrophysique. Pour ce système de laboratoire, on ne décèle aucun signe d'une éventuelle séparation hydrodynamique dans les premiers instants de propagation de l'onde radiative, et ce jusqu'à 10 ns. Une estimation théorique de ce temps de séparation hydrodynamique donne en effet $t_{sep} \approx 12$ ns. L'accumulation de perturbations acoustiques se produit tout de même, mais la vitesse du front radiatif reste suffisante par rapport à la

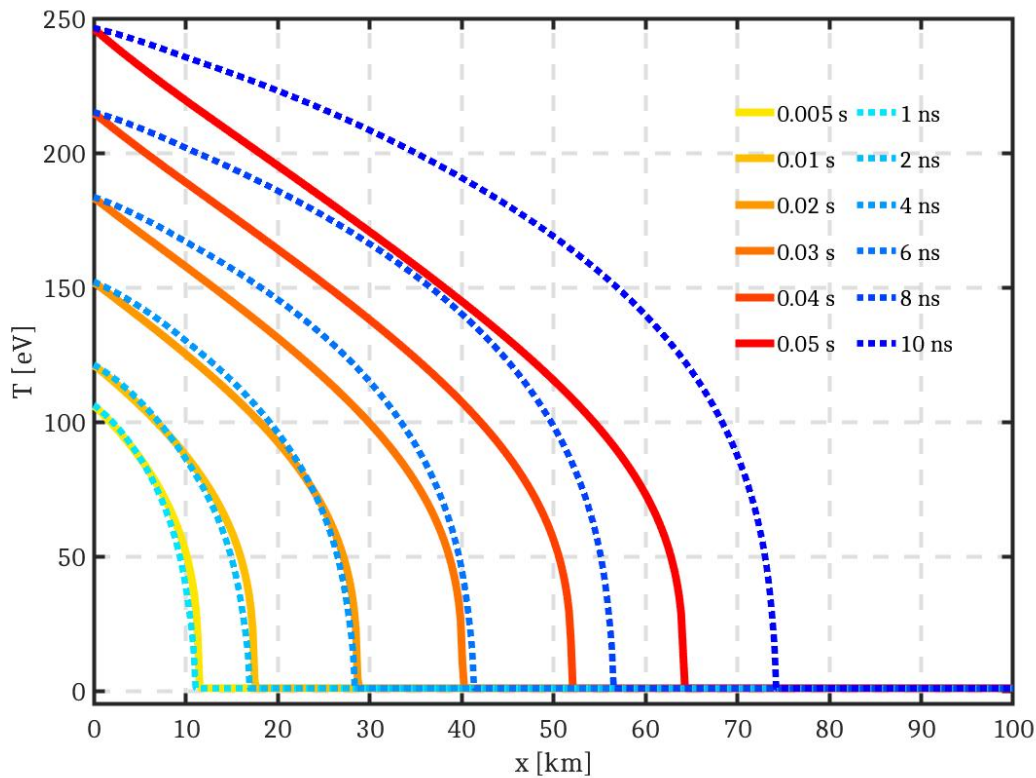


FIGURE 48 – Superposition des profils spatiaux de température du système de base et du système équivalent transformé après application des symétries d'équivalence (5.1) pour une mousse de Ta_2O_5 .

vitesse du son ($Ma \approx 3$). Notons qu'un choix de température plus faible aurait pu conduire à l'apparition d'une séparation hydrodynamique dans ce cas pour des temps plus courts. À l'inverse, un choix de température plus élevé aurait pu mener à la perte de l'hypothèse optiquement épaisse. Ainsi, la prise en compte d'effets hydrodynamiques a permis de confirmer le choix de notre dimensionnement avec une mousse de Ta_2O_5 en tant que meilleur matériau pour le modèle 1D étudié.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons parcouru les différentes possibilités offertes par la nouvelle approche de l'équivalence appliquée aux ondes radiatives. Dans le cadre d'application des symétries d'équivalence (5.1), les résultats obtenus numériquement sont parfaitement en accord avec la théorie. En considérant plus en détails la physique contenue dans les matériaux utilisés en laboratoire, nous avons pu construire des systèmes équivalents à notre situation astrophysique d'étude. Cependant, les écarts introduits par la nature des matériaux ou la physique non-comprise dans le modèle a conduit à proposer une méthode d'optimisation permettant de les limiter. Ainsi, un modèle de *meilleur matériau* a été obtenu dans la dernière partie de ces travaux, permettant d'entamer la dernière partie de ce projet : un premier dimensionnement d'expérience ressemblante de laboratoire.

CHAPITRE 6

Dimensionnement d'une expérience équivalente

Sommaire

6.1	Introduction	142
6.2	Mise en place de l'expérience laser	142
6.2.1	Présentation de la configuration expérimentale	142
6.2.2	Une source de rayonnement à maîtriser : La cavité de conversion	144
6.2.3	L'expérience laser : Résultats attendus	144
6.2.4	Les diagnostics plasmas	145
6.3	Simulations de la configuration expérimentale	147
6.3.1	Résultats de simulation	147
6.3.2	Comparaison modèle 1D - dimensionnement 2D	147
6.3.3	Résultats de diagnostics	150
6.3.4	Résumé des résultats du dimensionnement	155
6.4	Études paramétriques sur les incertitudes expérimentales	157
6.4.1	Quantifier les incertitudes expérimentales	157
6.4.2	Simulations et résultats	160
6.4.3	Du laboratoire à l'échelle astrophysique	164
6.5	Conclusion	167

6.1 Introduction

Les transformations d'équivalence ont permis de relier des écoulements fortement radiatifs que l'on rencontre dans les environnements de haute énergie à l'échelle astrophysique ($R \leq 1$) à des écoulements que l'on peut reproduire à l'échelle du laboratoire à l'aide des lasers de puissance dans des régimes faiblement radiatifs ($\hat{R} > 1$). Cependant, des écarts à l'équivalence pourraient provenir de la mauvaise détermination des caractéristiques du matériau (équation d'état, loi d'opacité), ou encore d'effets non pris en compte dans la modélisation. Ainsi, afin de boucler complètement la méthode présentée dans ce manuscrit, nous proposons à présent d'effectuer un dimensionnement d'expérience laser visant à produire des ondes radiatives supersoniques équivalentes à celles se propageant dans les disques d'accrétion autour des étoiles à neutrons.

Dans ce chapitre, nous présenterons tout d'abord un schéma de cible adapté au laser de puissance de la classe Mégajoule qui produit des ondes radiatives supersoniques ainsi que les diagnostics permettant de suivre l'évolution de ces structures. Ensuite, nous décrirons l'évolution attendue de la propagation d'une onde radiative dans les conditions expérimentales choisies visant à respecter au maximum les contraintes d'équivalence données dans le chapitre 5. Nous verrons qu'il est ainsi possible d'obtenir un régime supersonique sur une échelle de temps diagnosticable à l'échelle du laboratoire, ainsi que de suivre toute la dynamique des ondes radiatives. Enfin, nous détaillerons l'application de l'analyse d'équivalence à ces simulations d'expérience afin d'illustrer l'intérêt que de telles méthodes présentent pour l'assimilation d'incertitudes.

6.2 Mise en place de l'expérience laser

Dans cette section, nous détaillons une configuration expérimentale qui permet d'obtenir, sur un intervalle de temps suffisant, une évolution d'onde radiative correspondant aux résultats 1 D présentés dans le chapitre précédent. En effet, nous obtiendrons une expérience de laboratoire équivalente au système astrophysique étudié. Au fil de cette section, nous allons donc définir les valeurs choisies pour les différents paramètres caractéristiques de l'expérience que constituent les choix de matériaux, de dimensions du tube et de l'énergie laser utilisée. De plus, nous détaillerons quels diagnostics présents sur le LMJ [Miquel et Prene, 2018] permettent d'étudier la propagation d'ondes radiatives.

6.2.1 Présentation de la configuration expérimentale

La configuration expérimentale correspond à celle précédemment introduite au chapitre 3 et présentée sur la Figure 49. Elle est constituée d'une cavité en or utilisée afin de convertir l'énergie laser en rayonnement X, irradiant uniformément une mousse métallique de basse densité. Trois outils de diagnostics, que nous présenterons dans la suite, sont disposés de part et d'autre du tube (DMX, SSXI) ainsi que transversalement (GXI-1). L'énergie laser requise est de l'ordre de $E_L \sim 600$ kJ.

Le choix des matériaux se fait en accord avec les résultats présentés dans le chapitre 5. En particulier, la situation la plus favorable à l'équivalence s'est avérée être celle d'une mousse de Ta_2O_5 à la densité $\rho_0 = 0.08 \text{ g.cm}^{-3}$. Afin de démontrer l'adaptabilité des théories d'équivalence, nous avons choisi d'étudier

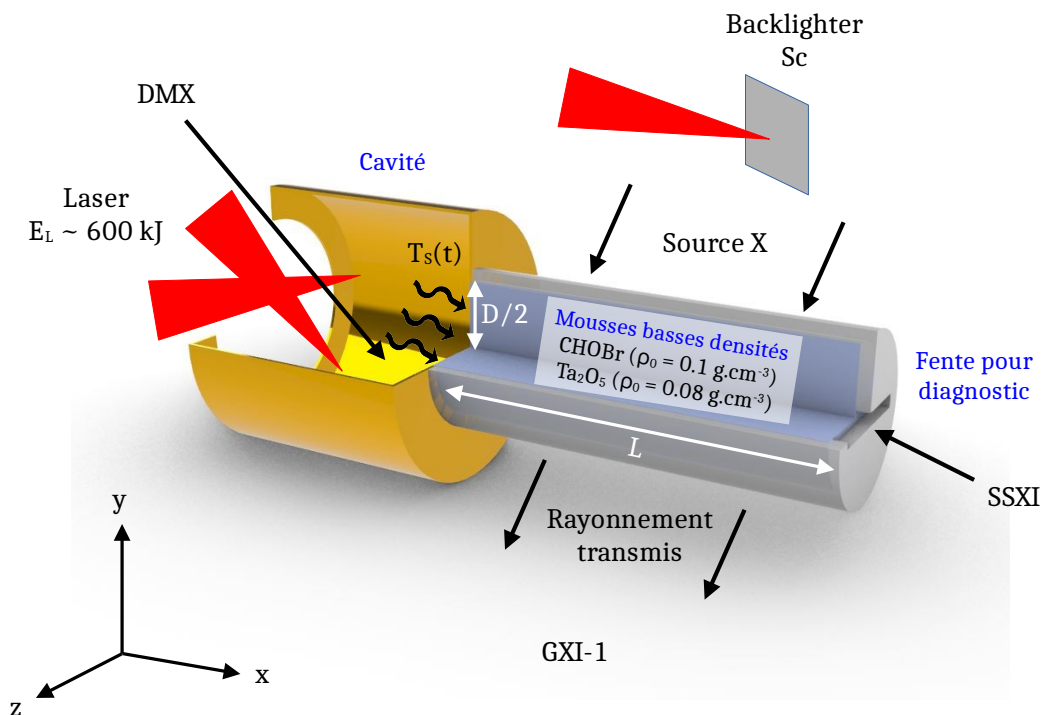


FIGURE 49 – Schéma du dispositif expérimental utilisé pour étudier la propagation d'ondes radiatives au sein de mousses de Ta_2O_5 et CHOBr (dopé à 30% en brome).

également le cas d'une mousse de CHOBr dopée à 30% en brome, prise à la densité caractéristique $\rho_0 = 0.1 \text{ g.cm}^{-3}$. Ce matériau présentera donc des caractéristiques différentes de la première mousse métallique en terme d'équation d'état et de loi d'opacité. Dans les deux cas, la propagation d'une onde radiative supersonique peut cependant être observée sur une échelle de temps diagnosticable, que l'on considère égale à une dizaine de nanosecondes.

Le diamètre et la longueur du tube constituent deux grandeurs jouant des rôles particulièrement importants dans la dynamique de propagation de l'onde radiative de laboratoire. Tout d'abord, le diamètre du tube, noté D , qui détermine la façon dont les effets multi-dimensionnels vont jouer un rôle. Le rayonnement se propageant au sein du tube est en partie absorbé au niveau des parois du tube en $y = D/2$, conduisant à un effet d'albedo dépendant fortement de la composition de celui-ci ¹. Cet effet tend à courber le front radiatif [Hurricane et Hammer, 2006] en le ralentissant à ses extrémités tout d'abord, puis se propageant progressivement au sein de la cible. En augmentant le diamètre du tube, nous permettons donc de retarder l'arrivée des effets d'absorption du rayonnement au centre du tube.

Du fait de l'absorption du rayonnement par les parois du tube, ce dernier est également ablaté, ce qui conduit à la propagation d'une onde de pression au sein de la mousse basse densité se dirigeant vers son

1. Plus le matériau est de numéro atomique Z et densité élevés et moins cet effet se fera ressentir, de par la plus grande difficulté pour le rayonnement à pénétrer le milieu.

centre. Le tube cylindrique voit alors sa partie la plus proche de la source de rayonnement se refermer, empêchant le rayonnement de contribuer à la propagation de l'onde radiative en aval, comme nous le verrons dans la suite. Ainsi, le choix du diamètre du tube est primordial dans l'optique d'obtenir des résultats correspondants au cas unidimensionnel, et nous verrons dans la suite que la valeur $D = 0.4$ cm permet de s'en assurer.

En ce qui concerne la longueur du tube L , celle-ci doit, comme nous avons pu le voir dans le chapitre précédent, être suffisamment importante pour observer l'onde radiative sur l'échelle de temps souhaitée. Dans notre cas décrit au chapitre 5, une longueur de mousse $L \simeq 0.2$ cm est suffisante. La position du front radiatif au centre de la mousse en fonction du temps est possible à obtenir en considérant différentes longueurs de tube. On peut alors mesurer le temps de sortie du rayonnement à l'extrémité de la mousse pour ces différentes longueurs de tube, comme dans les expériences de [Back et al.](#) [2000b].

6.2.2 Une source de rayonnement à maîtriser : La cavité de conversion

La configuration laser est primordiale pour obtenir la température d'attaque de la mousse $T_S(t)$ recherchée. Dans nos expériences, on cherche à obtenir une montée en température sous la forme d'une rampe d'une durée d'au moins une dizaine de nanosecondes. Cette augmentation de température s'arrête aux environs de 250 eV. Une énergie laser d'environ 600 kJ est alors nécessaire, justifiant la nécessité de recourir à des installations laser de puissance telles que le NIF et le LMJ. Notons que, parallèlement à l'énergie laser utilisée pour la source de l'expérience, certains quads (4 faisceaux) seront utilisés pour les diagnostics. Afin d'obtenir une montée en température correspondant à celle imposée par l'équivalence obtenue au chapitre précédent, il est nécessaire d'augmenter progressivement la puissance laser délivrée. L'évolution de la puissance laser déposée sur les parois de la cavité, ainsi que celle de la température du rayonnement dans celle-ci, peut être obtenue à l'aide d'un spectromètre X : le DMX, que nous présenterons en détails dans la suite. À partir de simulations FCI2, il est donc possible de simuler ces grandeurs vues par le DMX, que l'on présente sur la Figure 50. On constate bien une augmentation de la température atteinte dans la cavité, sous forme de rampe sur une échelle de temps de l'ordre de 10 ns. Les températures atteintes dans la cavité sont légèrement supérieures, d'environ 4%, à la température d'attaque de la mousse. Ensuite cette température chute lorsque la source d'énergie n'est plus maintenue. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, l'application de l'équivalence ne se ferait de toute façon pas au-delà de 10 ns dans nos applications.

6.2.3 L'expérience laser : Résultats attendus

Les configurations présentées sur la Figure 49 permettront d'obtenir des données expérimentales caractérisant la propagation d'une onde radiative dans les mousses choisies. En particulier, on cherche à obtenir deux grandeurs d'intérêt de manière quantitative : la position 1D du front radiatif au centre de la cible en fonction du temps, ainsi que les profils 1D de température au sein de la mousse qu'ils soient temporels ou spatiaux. La première grandeur représente la position du front radiatif telle qu'elle devrait être sans aucun effet multi-dimensionnel, limitant ainsi les effets d'albedo des parois du tube. De la même façon, la seconde grandeur correspond aux profils de température dans la configuration la moins

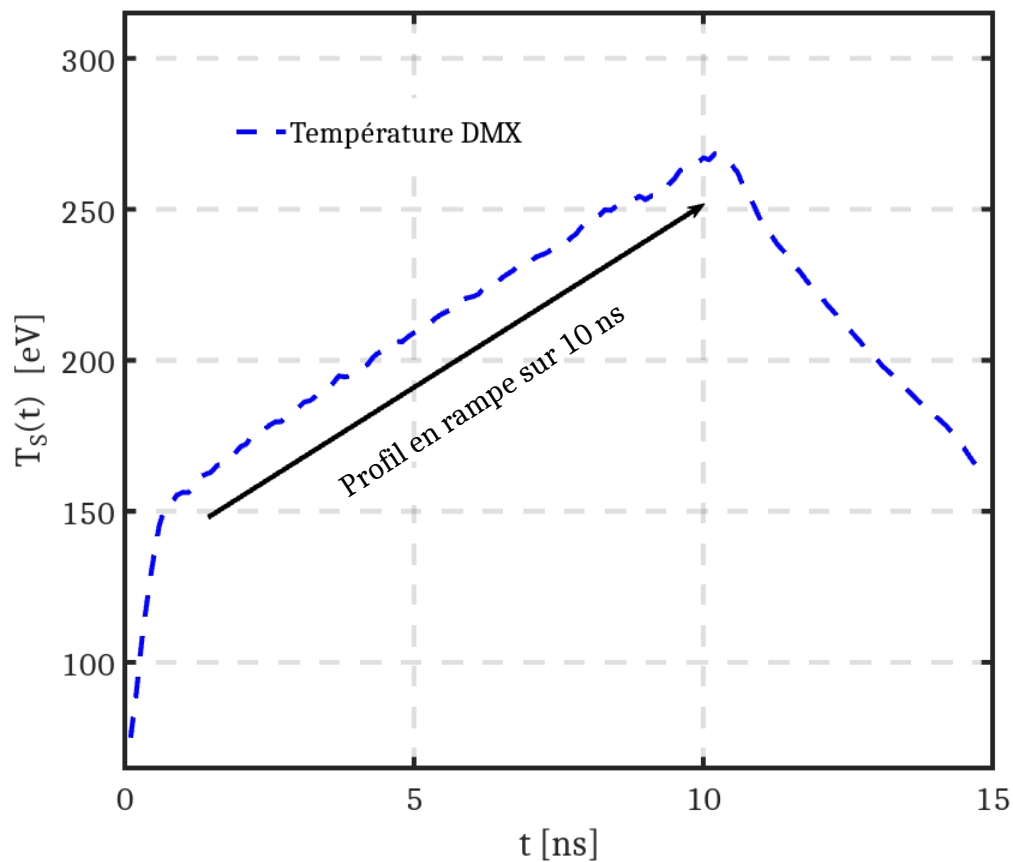


FIGURE 50 – Température vue par le DMX dans la cavité de conversion

affectée par les effets multi-dimensionnels. Dans un second temps, il sera important de caractériser si la propagation de l'onde radiative respecte les différentes hypothèses fondamentales du modèle diffusif supersonique (équation (3.2)) étudié dans ce manuscrit. En particulier, les profils de densité au sein de la mousse renseigneront sur la position du front de perturbations acoustiques en fonction de celle du front radiatif. Ceci permettra de vérifier la validité de l'hypothèse supersonique. Notons que les effets de bord au niveau des parois du tube pourraient également être suivis à l'aide des diagnostics d'imagerie que nous présenterons dans la suite.

6.2.4 Les diagnostics plasmas

Les spectromètres X

Dans l'ordre, le premier paramètre à diagnostiquer est la température atteinte au sein de la cavité, au plus proche de la mousse. Comme nous venons de l'introduire, cela est réalisé à l'aide d'un diagnostic nommé DMX, qui est un spectromètre X. Il permet d'analyser le rayonnement X dans une gamme allant

de 100 eV à 100 keV. Par reconstruction du flux spectral, on peut en déduire une température de cavité équivalente. Comme nous pouvons le voir sur le dispositif expérimental schématisé sur la Figure 49, ce diagnostic se situe en amont de l'expérience, afin de pouvoir atteindre l'intérieur de la cavité. Sur l'installation du LMJ, un autre spectromètre nommé mini-DMX peut être utilisé, en aval de l'expérience cette fois-ci. Ce dispositif permettrait donc de diagnostiquer l'arrivée du front radiatif en sortie de tube. Le mini-DMX n'a pas de résolution spatiale et intègre le flux sur toute la surface du tube en sortie, ne permettant donc pas de caractériser l'éventuel ralentissement du front dû en particulier à l'effet d'albedo aux parois.

L'imagerie X

Pour caractériser les propriétés spatiales du front, il est nécessaire d'exploiter les diagnostics d'imagerie X. Ces diagnostics reposent sur l'analyse de l'émission du plasma dans une certaine bande énergétique. Afin de caractériser l'onde radiative, cette bande d'énergie est centrée dans les X mous caractérisés par quelques centaines d'eV pour le SSXI. Il est possible d'utiliser le SSXI en sortie de tube à l'aide d'une fente, comme indiqué sur la Figure 49. Dans ce cas, l'imageur est utilisé en mode *streak*, où on aura le flux rayonné par le plasma dans la direction de propagation de l'onde en fonction du temps. On obtient alors une carte spatiale (en fonction du rayon du tube) et temporelle du rayonnement en sortie d'expérience. Cela permet de caractériser la position du front radiatif, mais également les effets de ralentissement de celui-ci au niveau des parois du tube. C'est dans cette configuration que nous utiliserons le diagnostic dans la suite de ces travaux.

La radiographie X

Un dernier diagnostic peut être placé le long du tube, nommé le GXI-1. Il est possible de produire une source X intense qui traverse la cible transversalement et qui permet de réaliser une radiographie de l'édifice expérimental. Dans ce cas, on ne parle plus d'un diagnostic d'émission propre, puisque le principe de la radiographie est de créer une source X (d'énergies appartenant aux X durs) qui traverse la mousse et que l'on récupère de l'autre côté du tube pour diagnostiquer le milieu de propagation. Dans notre cas, on utilise le diagnostic GXI-1, et la source X est produite à l'aide d'un *backlighter* (ici, du Scandium) sur lequel une partie des faisceaux lasers est appliquée. Le principe est le même que pour la création de rayonnement X dans la cavité. Les photons issus de cette source X vont interagir avec la mousse étudiée, permettant ainsi de caractériser les zones de fortes densités dans le plasma, sous la forme de zones de contraste de rayonnement moins élevées. Remarquons que si le tube n'est pas transparent aux photons provenant de cette source X, il est nécessaire de créer une fente dans le tube. Dans le cas du Scandium, l'énergie de la source X est d'environ 4.3 keV, pour laquelle un tube en PMMA (principalement CHON) est transparent. Cela permet de ne pas avoir à effectuer une fente latérale dans les tubes expérimentaux qui pourraient impliquer d'éventuels effets 3D. Nous verrons dans la suite de ces travaux l'influence de la composition et des dimensions de ce tube sur les résultats expérimentaux.

6.3 Simulations de la configuration expérimentale

Dans cette section, nous présentons les résultats de simulation du schéma d'expérience présenté en Figure 49 dans le cas des mousses de Ta_2O_5 à la densité $\rho_0 = 0.08 \text{ g.cm}^{-3}$ et CHOB_r à deux densités : $\rho_0 = 0.1 \text{ g.cm}^{-3}$ et $\rho_0 = 0.2 \text{ g.cm}^{-3}$. Le code FCI2 a été utilisé en géométrie bi-dimensionnelle axi-symétrique pour un cylindre rempli de ces matériaux.

6.3.1 Résultats de simulation

Tout d'abord, observons les résultats de simulations 2D au sein du tube. Sur la Figure 51 sont représentées des cartes de température et densité adimensionnées à deux temps différents : 5 ns et 10 ns. On constate la propagation d'un front radiatif courbé par l'absorption de rayonnement au niveau des parois. Cette courbure s'intensifie au cours du temps et impacte de plus en plus les zones proches du centre de la mousse. Au bout de 5 ns, on constate tout de même que dans plus des deux tiers du tube l'onde radiative se propage de manière non altérée par ces effets de bords. À 10 ns, ce résultat n'est plus valable qu'au niveau d'un tiers du tube. De manière générale, on constate tout de même que la position du front radiatif au niveau du tube est très différente de celle au centre de la mousse.

Le nombre de Mach radiatif est quant à lui d'environ $\text{Ma} \approx 2$, ce qui caractérise un régime supersonique. Cependant, force est de constater que les perturbations acoustiques peuvent se propager à des vitesses proches de celle du front radiatif. En observant les profils spatiaux de densité à 5 ns et 10 ns sur la Figure 52 b), on s'aperçoit que le maximum de densité, que l'on peut caractériser comme l'endroit où s'accumulent les perturbations acoustiques, se situe bien en amont du front radiatif, mais présentent des rapports de densité environ 2 fois inférieurs à ceux nécessaires pour la création d'un choc. La propagation de perturbations en densité au niveau des parois du tube est également visible, en particulier à 10 ns, où un choc commence à se propager au sein de la mousse, ce qui va forcément altérer l'expérience en régime supersonique. On voit que ces perturbations, autour de 10 ns, n'impactent pour le moment que la moitié de la mousse, et donc loin de son centre. Cela est dû au choix de diamètre $D = 0.4 \text{ cm}$ qui a permis de pouvoir négliger ces effets perturbateurs sur la propagation de l'onde radiative au centre de la mousse.

6.3.2 Comparaison modèle 1D - dimensionnement 2D

La première étape à effectuer est la comparaison des données de simulations de la configuration présentée en Figure 49 avec les résultats du modèle 1D obtenu dans le précédent chapitre lors de l'analyse d'équivalence pour le cas du Ta_2O_5 à la densité $\rho_0 = 0.08 \text{ g.cm}^{-3}$.

Comparaison des profils de température

Commençons par la comparaison des profils de température au centre du tube. En effet, comme nous l'avons précédemment expliqué, c'est au centre du tube que les effets bi-dimensionnels se font le moins ressentir. Les simulations numériques FCI2 permettent d'obtenir ces profils de température dans la mousse, représentés en Figure 52 a). La superposition des profils de température (1D versus 2D), est, comme on peut le constater, bien respectée sur l'échelle temporelle typique de propagation de

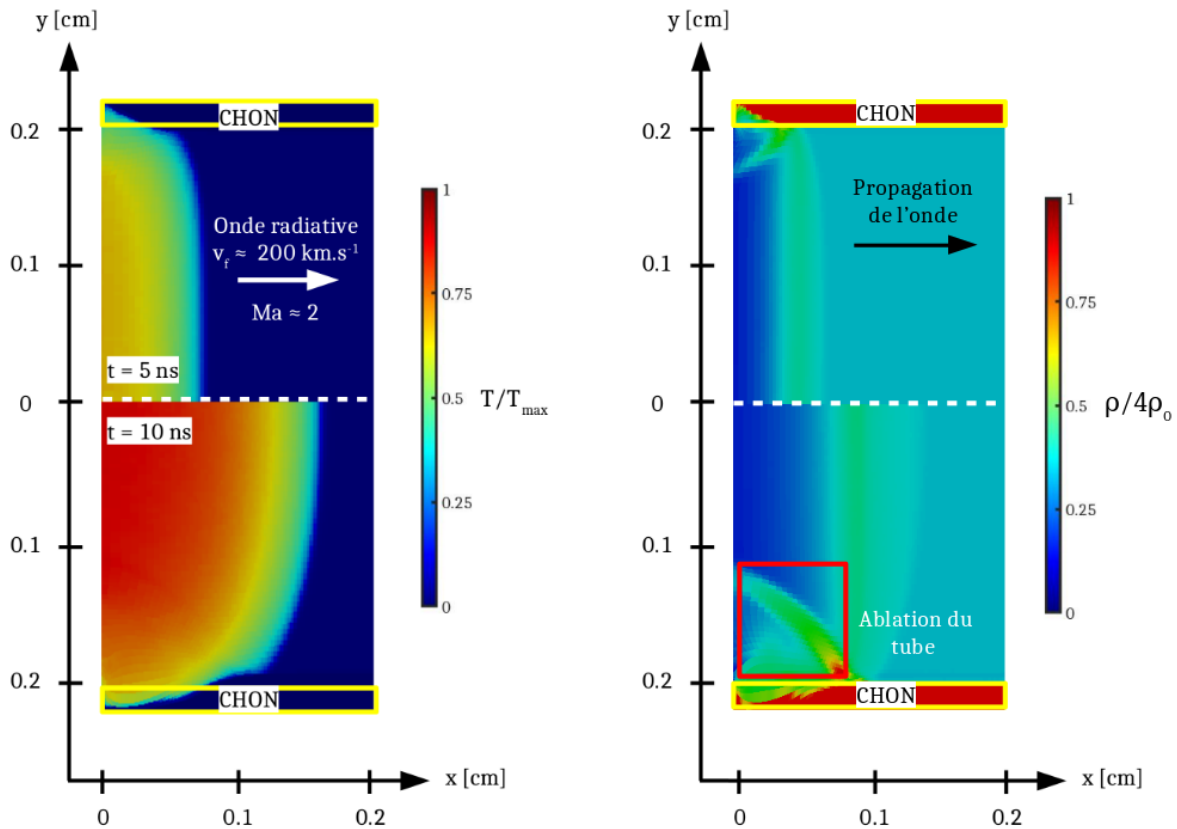


FIGURE 51 – À gauche, carte d'intensité du rayonnement (température adimensionnée) au sein de la mousse de Ta_2O_5 pour $t = 5$ ns et $t = 10$ ns dans le cas d'un tube en CHON. Le rayonnement impacte le matériau à l'entrée du tube ($x = 0$), ce qui provoque la propagation d'une onde radiative d'un côté et une détente de la cavité de l'autre côté qui n'est pas représentée ici. Les effets d'absorption de rayonnement aux parois sont visibles sur les simulations où le tube est représenté en jaune. À droite, carte de densité adimensionnée au sein de la mousse de Ta_2O_5 pour $t = 5$ ns et $t = 10$ ns. La densité est adimensionnée par 4 fois la densité initiale de la mousse, caractéristique de l'apparition d'un choc fort. On peut donc constater l'ablation du tube et l'accumulation de perturbations acoustiques suivant la propagation de l'onde radiative sans créer de choc de séparation hydrodynamique.

l'onde radiative supersonique. Le front semble commencer à ralentir à partir de 10 ns, mais l'effet reste négligeable en produisant des écarts d'à peine 1%. Les nombres de Boltzmann et les nombres de Mihalas obtenus lors de cette expérience concordent avec les données du cas 1D, comme attendu. Ces nombres sans dimension sont respectivement de l'ordre de $\text{Bo} \approx 10^{-2}$ et $\text{R} \approx 25$. Numériquement, la configuration expérimentale choisie permet donc de reproduire les résultats attendus de manière très précise.

Comparaison des profils de densité

Une seconde étape est la comparaison des profils de densité, également au centre du tube. Notons que, contrairement aux simulations effectuées dans les précédents chapitres, nos simulations expérimentales présentent une condition de flux de matière libre à l'entrée du tube ($x = 0$). Dans les modèles 1D développés précédemment, un mur y était placé, ce qui provoque quelques différences sur la détente

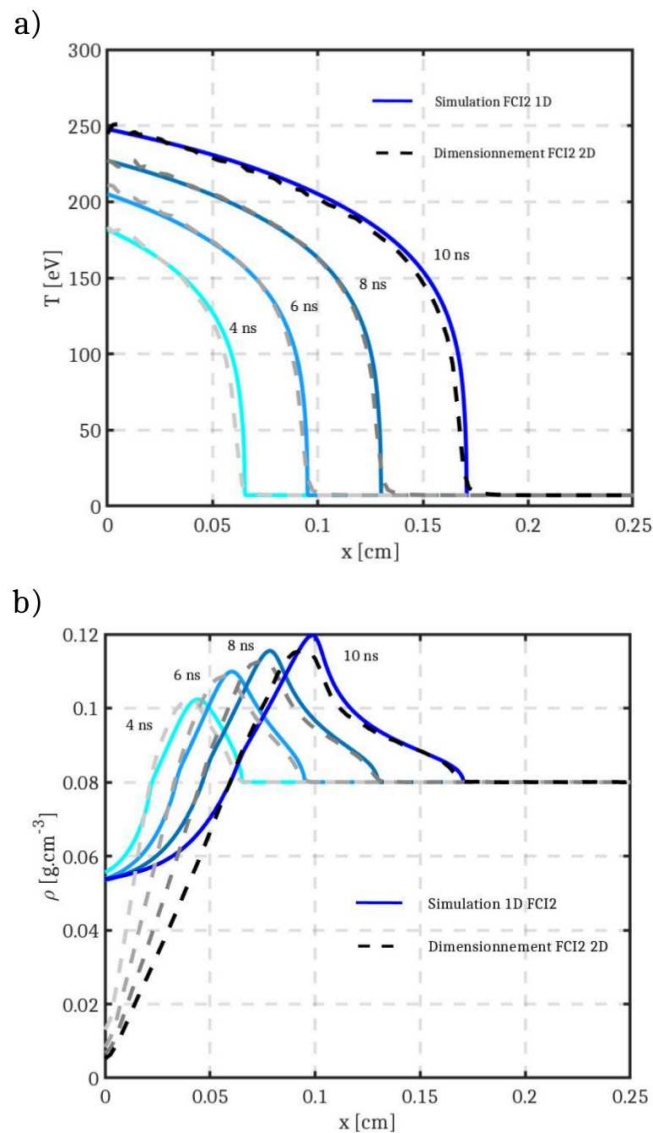


FIGURE 52 – En Figure *a*), comparaison des profils spatiaux de température des simulations 1D en traits pleins bleus avec les profils spatiaux de température au centre du tube en traits pointillés du gris au noir pour quatre temps. La superposition est très bonne sur une échelle temporelle d'environ 10 ns, que ce soit au niveau de la source de rayonnement (cavité) ou du front radiatif. En Figure *b*), comparaison des profils spatiaux de densité des simulations 1D en traits pleins bleus avec les profils spatiaux de densité au centre du tube en traits pointillés du gris au noir pour quatre temps. La superposition est très bonne sur une échelle temporelle d'environ 10 ns, au niveau du front radiatif et de l'accumulation des perturbations acoustiques. Cependant, les conditions aux limites proches de la cavité conduisent à des écarts significatifs en densité proche de $x = 0$.

provoquée par l'ablation de la matière proche de cette condition aux limites. On observe en effet une détente plus importante lors de nos simulations expérimentales qui ne devraient pas pour autant modifier le profil de densité de la mousse étudiée. Ces résultats sont présentés en Figure 52 b).

Comme attendu, la détente du milieu chauffé implique une baisse de densité en $x = 0$ plus importante que dans les simulations 1D où celle-ci était légèrement sous-évaluée. Comme on peut le constater, cela n'entache que très peu l'accumulation de perturbations acoustiques proches du front radiatif qui se produit bien de façon beaucoup plus lente que la propagation de l'onde supersonique. En effet, le nombre de Mach radiatif caractéristique de ces expériences est proche de $Ma \approx 2$. Le temps de séparation hydrodynamiques est lui d'environ 15 ns, lorsque la température de la source diminue de façon drastique et ne permet plus au front radiatif d'avoir une vitesse suffisante. Ici, sur 10 ns, on ne constate pas de séparation hydrodynamique qu'aurait pu induire un éventuel ralentissement du front radiatif dû aux effets multi-dimensionnels. Encore une fois, le dimensionnement expérimental choisi permet de reproduire les résultats attendus de manière convaincante, avec des écarts de position de front de densité inférieurs à 2%.

La position 1D du front radiatif

À l'aide des résultats de simulation, observons l'évolution du front radiatif au sein de nos mousses à différents rayons notés y . Les données sont obtenues sans utiliser de diagnostic laser, mais en observant seulement les profils de température (voir Figure 52) au sein du matériau. Ces résultats sont présentés sur la Figure 53.

Comme nous pouvons le constater, dans un premier temps, l'onde radiative se propage à une vitesse quasiment égale dans toute la mousse, même au niveau des parois. Cependant, après une courte durée (environ 2 – 3 ns), la vitesse du front radiatif au niveau des parois du tube ($y = 0.2$ cm) commence à diminuer, jusqu'à accumuler un retard important à 5 ns. Au niveau du quart du rayon du tube ($y = 0.1$ cm), la vitesse du front reste globalement la même (écarts $\leq 3\%$) qu'au centre du tube ($y = 0$ cm) sur l'échelle caractéristique de propagation de l'onde radiative d'environ 10 ns. C'est à partir de ce temps que l'absorption du rayonnement aux parois commence à freiner l'onde à des rayons d'environ 0.1 cm, provoquant l'apparition d'un écart de plus en plus grand entre les positions de front radiatif présentées en Figure 53. Le dimensionnement expérimental choisi permet donc la propagation d'ondes radiatives supersoniques faiblement impactées par les effets parasites liés aux parois du tube sur des échelles temporelles de l'ordre de 10 ns.

6.3.3 Résultats de diagnostics

Bien que les profils de température et de densité au sein de la mousse permettent d'être confiants sur la validité des paramètres expérimentaux choisis, nous devons vérifier que les différents diagnostics laser présentés permettent de caractériser correctement ces résultats expérimentaux.

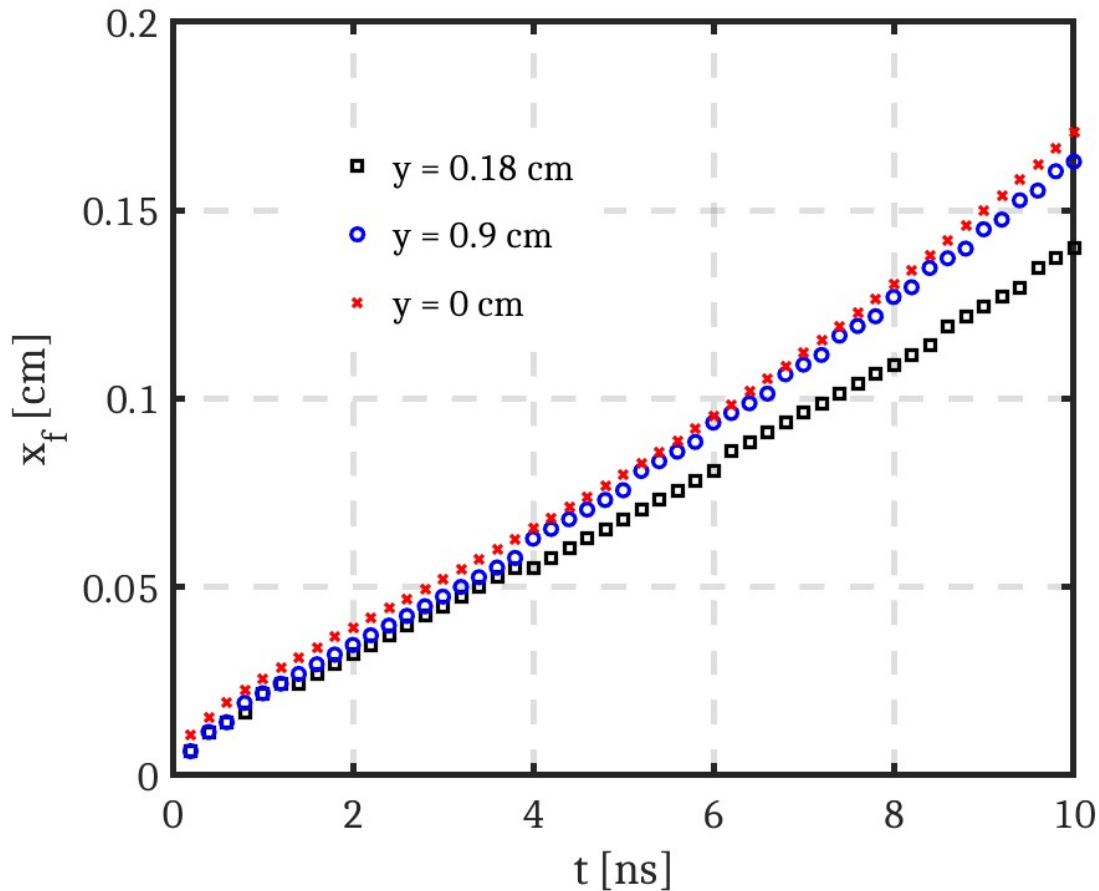


FIGURE 53 – Comparaison de l'évolution du front radiatif au sein de la mousse pour différentes hauteurs, $y = 0$ au centre du tube, 0.09 au quart du tube, 0.2 à la paroi cm, respectivement en croix rouges, ronds bleus et carrés noirs, sur une échelle temporelle de 10 ns.

Diagnostiquer le rayonnement au sein de l'expérience

L'objectif principal est d'obtenir la position du front radiatif au centre du tube pour les mousses étudiées de Ta_2O_5 et CHOBBr . Dans le cas qui nous intéresse, il est donc possible d'utiliser l'imageur X-mous SSXI pour capter le rayonnement en sortie de tube sur tout son diamètre. En fonction de la longueur du tube, on obtiendra une information différente, et une valeur de la position du front radiatif, au moment de l'arrivée du rayonnement sur le capteur. Les résultats de simulation de ce diagnostic sont présentés en Figure 54 a) pour un tube de longueur $L = 0.1$ cm et en Figure 54 b) pour un tube de longueur $L = 0.2$ cm.

En parcourant la figure de gauche à droite, plusieurs phénomènes sont observés au cours de la simulation de ce diagnostic. Tout d'abord, on constate que l'arrivée du front radiatif coïncide avec une augmentation significative de l'intensité du rayonnement autour de 10 ns, au centre de la cible. Ce front arrive avec un léger décalage de plus en plus marqué lorsque l'on s'approche des parois. Ceci caractérise la façon dont le rayonnement γ est absorbé, ralentissant au fur et à mesure la propagation de l'onde radiative. En continuant de parcourir la figure, pour $t \sim 15$ ns, le rayonnement commence

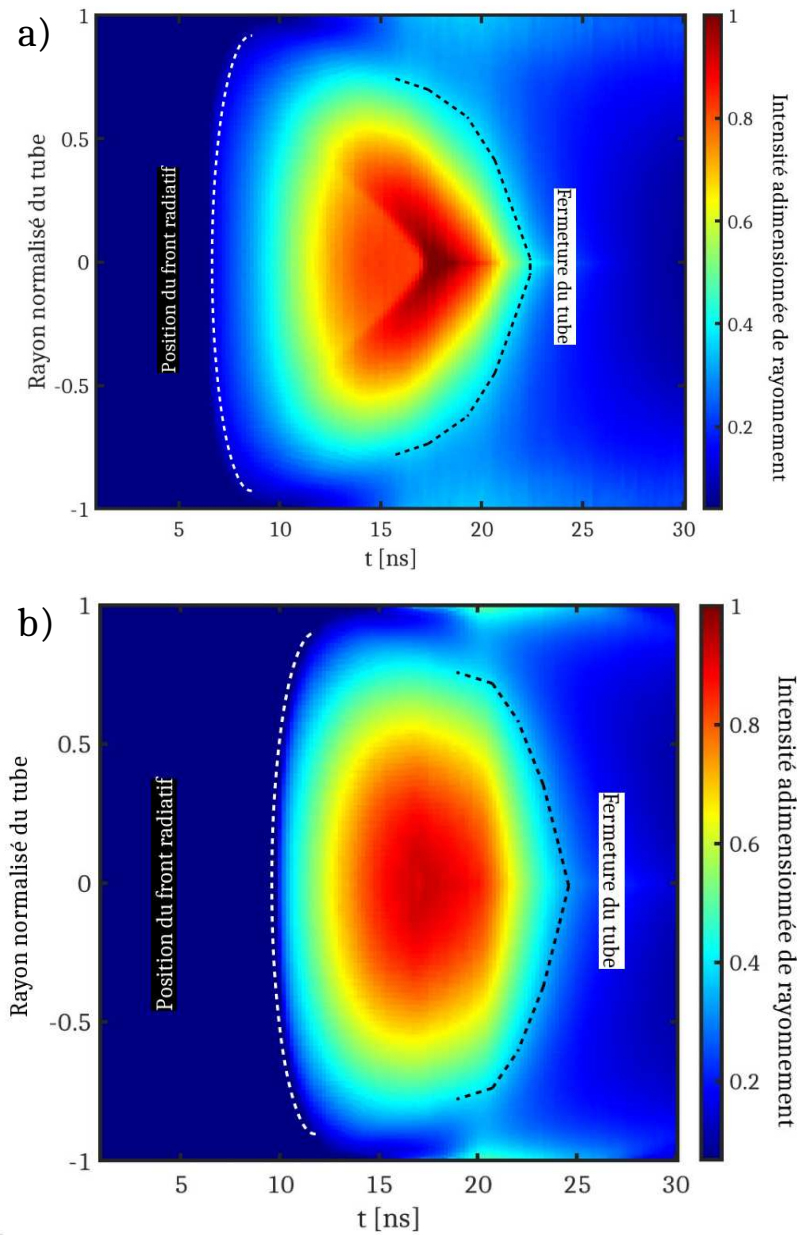


FIGURE 54 – Sur les Figures *a*) et *b*) sont respectivement représentées des simulations du diagnostic d'imagerie X pour des tubes de longueur $L = 1$ mm et $L = 2$ mm sur toute la hauteur du tube jusqu'à ses parois. Nous avons représenté l'évolution temporelle de l'intensité du rayonnement (axe des abscisses) traversant une fente parcourant tout le diamètre du tube (axe des ordonnées). Nous y avons indiqué l'arrivée du front radiatif en pointillés blancs ainsi que le moment de fermeture du tube par ablation des parois en pointillés noirs.

à faiblir, et chute drastiquement à des niveaux proches de ceux observés au niveau du front radiatif. Ce comportement commence au niveau des parois du tube et se propage en quelques nanosecondes au

niveau de son centre. Cela correspond au moment où l'ablation des parois du tube provoque sa fermeture quasi-totale au rayonnement incident provenant de la cavité. Ce phénomène agit déjà sur la propagation du front, et on peut considérer qu'au niveau de son arrivée au quart du tube, la dynamique de l'onde radiative peut être modifiée. En effectuant des simulations d'expérience répondant au dimensionnement présenté en Figure 49, mais pour des diamètres de tube plus faibles, le phénomène d'ablation des parois affecte beaucoup plus rapidement la propagation de l'onde. En particulier, pour des diamètres de tube d'environ 0.3 cm, on arrive à des durées inférieures à 10 ns, et pour des diamètres $D \simeq 0.2$ cm, des durées inférieures à 7.5 ns, indiquant que le diamètre choisi initialement permet de limiter l'influence des effets de bord sur la dynamique de l'onde radiative pour des temps supérieurs à sa durée caractéristique de propagation d'environ une dizaine de nanosecondes.

La radiographie X de la mousse

Il est également intéressant de pouvoir suivre expérimentalement les perturbations de densité (et donc de pression) se propageant dans le milieu chauffé. En effet, comme nous l'avons déjà introduit, l'ablation des parois du tube ou les perturbations acoustiques provenant du chauffage intense de la mousse basse densité peuvent grandement modifier la propagation de l'onde radiative supersonique. Considérons alors un système composé d'une mousse de CHOB_r (dopée à 30% en brome) de densité $\rho_0 = 0.2 \text{ g.cm}^{-3}$. Cette configuration produit une accumulation importante d'ondes de perturbations acoustiques sur une échelle de temps de l'ordre de la dizaine de nanosecondes. Dans cette situation, un diagnostic de radiographie X peut être mis en place pour suivre l'évolution de la densité dans cette mousse. Ce diagnostic de radiographie utilise l'imageur GXI-1 couplé à un *backlighter* composé de scandium. L'imageur X est utilisé dans la configuration présentée en Figure 49, de sorte à parcourir le tube longitudinalement. Les résultats de simulation du diagnostic sont présentés sur la Figure 55.

Les radiographies X permettent de constater les deux phénomènes énoncés précédemment. En effet, au niveau des parois du tube tout d'abord, on constate qu'une ablation du matériau se produit, provoquant des perturbations dans les profils proches de cette zone. Pour des temps supérieurs à 10 ns, cette ablation provoquera une densification de la mousse en amont du front radiatif menant à la formation de chocs obliques (comme observé par Doss *et al.* [2015]). Au centre du tube à présent, pour la mousse de CHOB_r (Figure 55 a)), on constate également l'apparition d'un front dense synonyme d'accumulation de perturbations acoustiques. Une transition s'effectue rapidement entre 5 et 10 ns, conduisant à une intense densification de ce front. Dans notre cas, l'accélération du front radiatif lié à la montée en température de la cavité n'est pas suffisante et un choc de séparation hydrodynamique apparaît, pour un écart au flux mesuré à la densité nominale d'environ 90%. De manière générale, ces résultats permettent d'affirmer qu'il nous est possible d'accéder aux profils de densité au sein des mousses étudiées. Dans le cas du Ta₂O₅, aucune séparation hydrodynamique n'est observée ($Ma \simeq 2$) pour des temps inférieurs à 10 ns, l'accumulation des perturbations acoustiques étant plus lente que pour le CHOB_r, pour lequel $Ma \simeq 1$. Sur la radiographie présentée en Figure 55 b), on observe donc aucune zone de contraste particulièrement bas témoignant d'un choc. L'écart au flux mesuré à la densité nominale est au maximum de 40% à 10 ns, très loin des 80% observés lors du choc de séparation hydrodynamique pour la mousse de CHOB_r. On

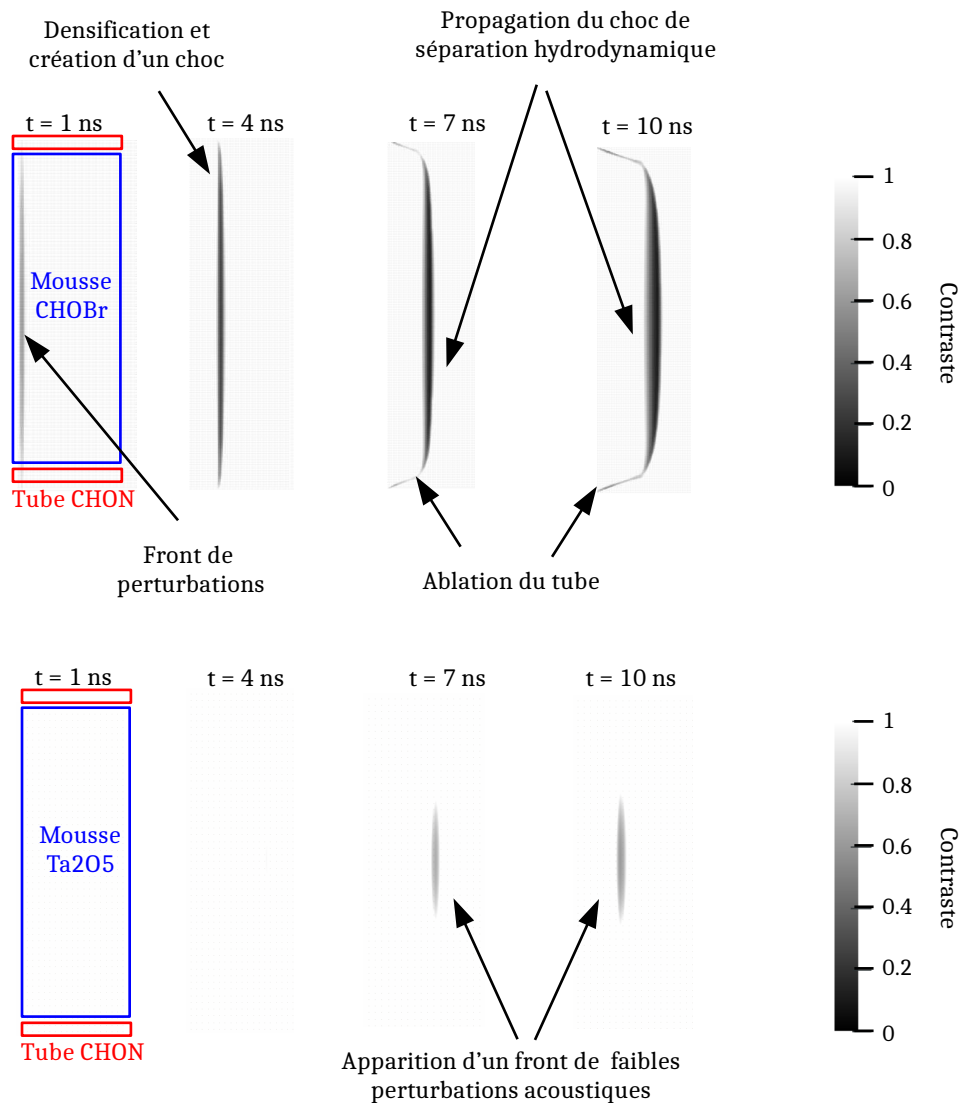


FIGURE 55 – Sur la figure du haut est présentée des radiographies X d'une mousse de CHOBr et sur celle du bas des radiographies X d'une mousse de Ta₂O₅, pour cinq temps croissants de gauche à droite, réalisées à l'aide d'un *backlighter* en Sc. Nous avons calculé le contraste qui est le rapport entre le flux obtenu lors de la propagation de l'onde radiative et le flux mesuré à la densité nominale ρ_0 du matériau. Les zones les plus sombres représentent donc les différences les plus importantes entre la mousse non perturbée et celle où des perturbations en densité existent.

considère alors que ce rapport n'est pas suffisant pour détecter une perturbation importante de la densité de la mousse. On retrouve le résultat donné par les profils de densité simulés au centre du tube (voir Figure 52 b)).

6.3.4 Résumé des résultats du dimensionnement

L'objectif de ce travail était de démontrer la possibilité d'effectuer des expériences de laboratoire représentatives des configurations 1D supersoniques étudiées dans le chapitre 5. Les différents choix effectués pour les paramètres de dimensionnement (résumés en Figure 49) nous ont déjà permis de valider numériquement cette approche pour les ondes radiatives se propageant au centre de la mousse choisie. De plus, nous venons d'observer que l'échelle temporelle sur laquelle les résultats des simulations 1D et des simulations expérimentales 2D concordent est d'environ une dizaine de nanosecondes. Cette durée englobe le domaine de validité de la théorie de l'équivalence appliquée aux systèmes astrophysiques présentés dans ce manuscrit. De manière générale, nous avons donc obtenu un exemple de dimensionnement permettant d'étudier la propagation d'ondes radiatives en régime supersonique dans des conditions d'applicabilité de l'analyse d'équivalence.

Dans un second temps, nous avons montré comment les diagnostics présents sur les installations de puissance (ici sur le LMJ) permettaient de suivre la propagation de l'onde radiative créée et de quantifier les écarts aux hypothèses fondamentales du modèle. En particulier, les diagnostics de radiographie X peuvent suivre l'évolution des phénomènes hydrodynamiques se produisant au sein de la mousse (accumulation des perturbations acoustiques) et au niveau des parois du tube (absorption du rayonnement et ablation). Ainsi, nous avons pu déterminer que le diamètre de tube choisi ($D = 0.4$ cm) permet de limiter ces phénomènes sur des durées caractéristiques d'une dizaine de nanosecondes. Enfin, la position du front radiatif au centre de la cible, obtenue à l'aide des diagnostics d'imagerie X, donne une comparaison avec les modèles de propagation 1D étudiés dans le chapitre précédent. Les résultats de dimensionnement sont résumés sur la Figure 56 pour une mousse de CHOB_r à la densité $\rho_0 = 0.1$ g.cm⁻³, pour laquelle aucune séparation hydrodynamique n'est observée sur l'échelle temporelle étudiée.

En parcourant la figure de gauche à droite et de haut en bas, nous pouvons suivre l'évolution temporelle du front radiatif simulé, donné par la frontière entre les zones de rayonnement intense et la zone à température constante la plus basse. Ce front se comporte, pendant les 5 premières nanosecondes, comme le front 1D. De plus, la position du front radiatif au centre de la mousse, obtenue en diagnostiquant les différentes longueurs de tube modélisées par les points expérimentaux, suit également de manière très proche (écart $\leq 2\%$) cette évolution, jusqu'à des temps $t \simeq 7.5$ ns. À ces temps, les fronts de densité et de température à la paroi sont beaucoup moins avancés que l'onde radiative supersonique. Le ralentissement du front commence en effet à se faire sentir, puisqu'aux alentours de 10 ns, on observe un écart d'environ 10% entre le modèle 1D et l'évolution du front radiatif donnée par la simulation et les diagnostics d'imagerie. On retrouve le fait qu'aucune séparation hydrodynamique n'a lieu sur l'échelle temporelle étudiée puisque le front de densité ne dépasse pas le front radiatif.

Les résultats de dimensionnement pour une mousse de Ta₂O₅ à la densité $\rho_0 = 0.08$ g.cm⁻³ sont résumés sur la Figure 57. Ces résultats sont globalement très similaires au cas précédent pour une mousse de CHOB_r. Dans le cadre d'un dimensionnement d'expériences, nous nous attendions à ce résultat dans le sens où le choix d'un matériau n'influence pas aussi fortement la précision des résultats pour la phase supersonique que dans le cas de l'analyse d'équivalence. Nous constatons tout de même un meilleur accord à l'équivalence sur la position du front radiatif pour la mousse de Ta₂O₅, et ce sur une durée

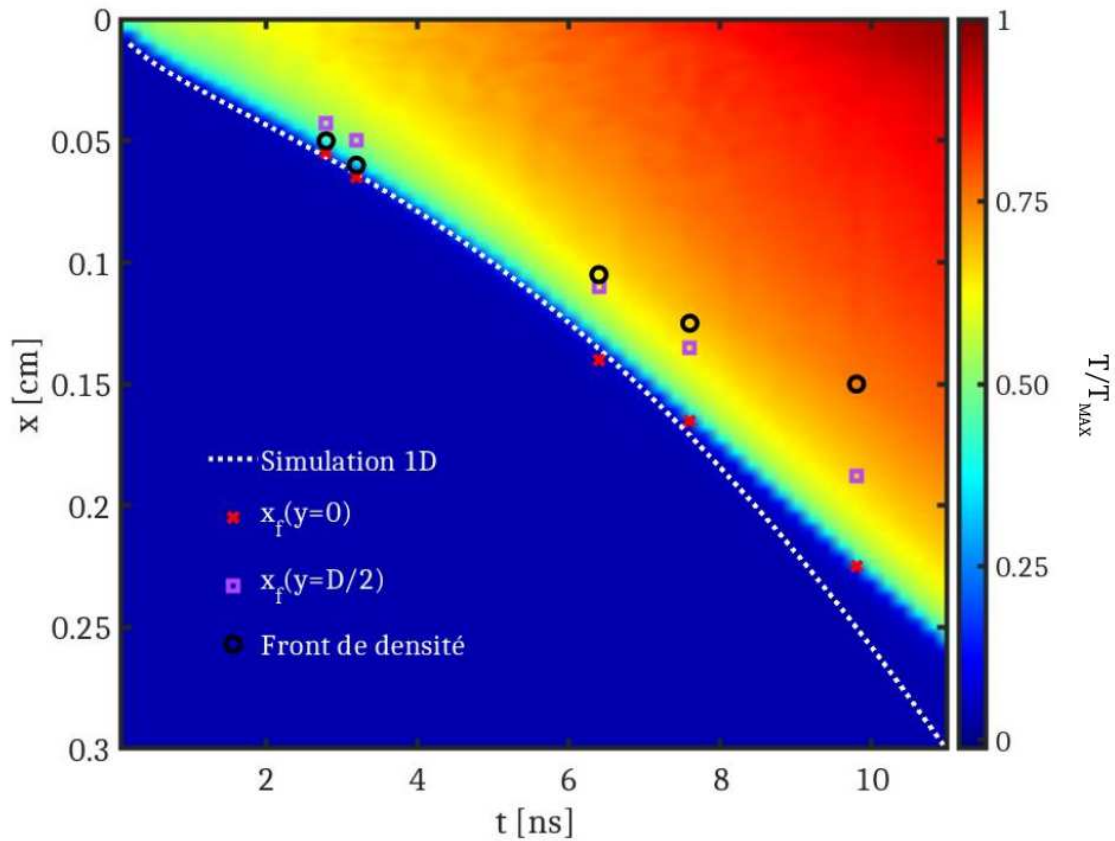


FIGURE 56 – Carte de température adimensionnée en fonction du temps (en abscisse) et de l'espace (en ordonnée) pour la mousse de CHOBr à $\rho_0 = 0.1 \text{ g.cm}^{-3}$. Le front radiatif peut être suivi comme la limite entre les températures plus élevées que le milieu initial en bas à gauche. En pointillés blancs est représentée l'évolution du front radiatif 1D du chapitre précédent. Les croix rouges représentent les positions de front obtenues avec une simulation d'imager X-mous en sortie de tube pour diverses longueurs de ce dernier. Les carrés violets représentent les données de front radiatif obtenues à l'aide de simulations 2D le long des parois du tube. Enfin, les cercles noirs donnent la position du maximum de densité au centre de la mousse, obtenu par radiographie.

étendue de 10 ns. L'écart entre le cas 1D, l'évolution numérique du front radiatif expérimental 2D, et les valeurs obtenues par diagnostic d'imagerie est en effet quasiment nul sur cette échelle temporelle. On constate que, dans ce cas aussi, la position du front de densité est bien inférieure à celle du front radiatif sur la durée de l'expérience. En pratique, nous venons donc de démontrer numériquement l'intérêt expérimental de l'approche proposée dans ce manuscrit, dans le cadre du dimensionnement choisi.

Une expérience menée dans les conditions présentées permettra donc d'obtenir des données expérimentales d'un système équivalent aux ondes radiatives supersoniques étudiées à l'échelle astrophysique du chapitre 2. Ces données pourront permettre de valider les modèles théoriques et simulations numériques étudiés jusqu'à présent, et ce dans les régimes souhaités grâce à l'équivalence.

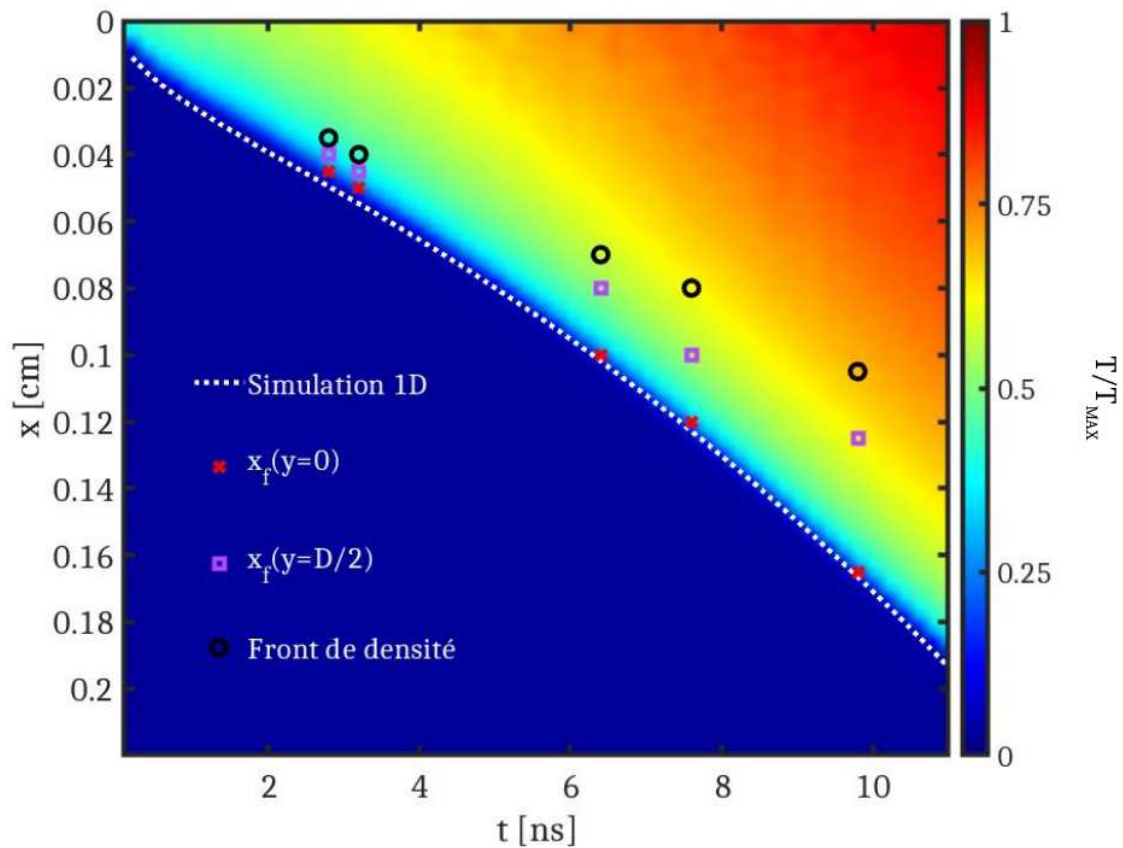


FIGURE 57 – Carte de température adimensionnée en fonction du temps et de l’espace pour la mousse de Ta_2O_5 à $\rho_0 = 0.08\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$. Le front radiatif peut être suivi comme la limite entre les températures plus élevées que le milieu initial en bas à gauche. En pointillés blancs est représenté l’évolution du front radiatif 1D du chapitre précédent. Les croix rouges représentent les positions de front obtenues avec une simulation d’imageur X-mous en sortie de tube pour diverses longueurs de ce dernier. Les carrés violets représentent les données de front radiatif obtenues à l’aide du même diagnostic le long des parois du tube. Enfin, les cercles noirs donnent la position du maximum de densité au centre de la mousse, obtenu par radiographie.

6.4 Études paramétriques sur les incertitudes expérimentales

6.4.1 Quantifier les incertitudes expérimentales

Dans toute la section précédente, les résultats de simulation expérimentale ont été exposés dans le cas où tous les paramètres choisis pour le dimensionnement de l’expérience étaient parfaitement connus. Cependant, les incertitudes pesant sur les propriétés des mousses synthétisées [Fryer *et al.*, 2016], ainsi que celle pesant sur la température atteinte dans la cavité peuvent modifier les résultats présentés dans la première partie de ce chapitre. Tous les paramètres choisis dans le cadre du dimensionnement expérimental ne sont pas sujets aux mêmes incertitudes et ne provoquent pas les mêmes écarts au modèle. En particulier, nous avons démontré dans la section précédente que de faibles modifications des dimensions du tube n’entacheraient pas les résultats expérimentaux, étant donné la marge prise dans notre étude. Par exemple, il faudrait des écarts d’environ 25% sur le diamètre D du tube pour que l’ablation des

parois de celui-ci entachent l'expérience sur des échelles temporelles $t < 10$ ns. Il existe tout de même certains paramètres dont l'incertitude pourrait fortement entacher les expériences de propagation d'ondes radiatives en régime supersonique. Les paramètres en question sont présents dans le modèle décrivant l'onde, à savoir : la densité de la mousse ρ_0 , ses caractéristiques d'équation d'état $\rho_0 e$ et d'opacité κ_R , ainsi que la condition aux limites $T_S(t)$ provenant de la cavité éclairée par l'énergie laser E_L .

Les incertitudes portant sur les matériaux utilisés vont influencer la dynamique des ondes radiatives étudiées. Inversement, la caractérisation des lois de comportement régissant les milieux de propagation, telles que l'équation d'état et la loi d'opacité, peut être testée à l'aide de telles expériences [Guymet *et al.*, 2015]. De manière générale, les incertitudes liées aux différents modèles utilisés pour quantifier ces grandeurs peuvent conduire à des écarts d'autant plus élevés sur les profils de température attendus pour l'onde radiative ainsi que sur la position du front radiatif. Dans le chapitre précédent, nous avons montré comment les symétries d'équivalence pouvaient permettre de compenser les écarts observés dans un redimensionnement adéquat des différents paramètres de transformation. Dans notre cas, la liberté laissée au redimensionnement sur la variable d'espace x permettait de minimiser l'écart entre différentes équations d'état pour une application entre astrophysique et laboratoire. Lors de la mise en place d'expériences, les paramètres de l'équivalence peuvent ainsi toujours être adaptés à la situation afin d'absorber l'écart aux propriétés des matériaux. Il est cependant impossible de séparer les considérations entre équation d'état et loi d'opacité, car les transformations sur ces deux entités sont liées. Dans l'hypothèse où l'une de ces grandeurs serait parfaitement connue, les écarts à l'autre de ces paramètres peuvent tout de même être déterminés. Dans le cadre de notre approche, nous avons fait l'hypothèse que la loi d'opacité des mousses utilisées était assez bien connue pour servir de modèle pour caractériser la forme des transformations d'équivalence (voir chapitre 5). Il est donc primordial de s'assurer que des incertitudes sur λ_R entachent aussi peu que possible les résultats expérimentaux.

Dans cette section, nous allons donc nous intéresser à l'effet des incertitudes de trois paramètres en particulier sur la propagation de l'onde radiative et l'obtention de l'évolution du front radiatif dans le cas du meilleur matériau. Ces trois paramètres sont : la densité ρ_0 de la mousse utilisée, l'énergie laser déposée E_L et le libre parcours moyen λ_R . Ces trois paramètres sont autorisés à varier de 10% en amplitude, jusqu'à des valeurs que l'on dénotera donc par des indices du type $\rho_{-10\%}$ pour une baisse de densité et $\rho_{+10\%}$ pour une augmentation de densité.

Focus sur la notion d'incertitude

Les notions d'incertitudes et d'erreurs sont, au premier abord, très générales. Présentons d'abord ce que l'on entend vraiment par ces termes, en les définissant de manière analytique. Lorsque l'on cherche à caractériser les écarts expérimentaux associés à une incertitude donnée sur un paramètre (par exemple $[\rho_{-10\%}, \rho_0, \rho_{+10\%}]$), nous décidons d'utiliser la notion d'écart relatif. Ces écarts relatifs (ou erreurs relatives), notés E_{rel_T} et E_{rel_x} sont associés respectivement aux profils spatiaux de température et aux positions de front radiatif. Ils sont définis par les relations suivantes :

$$E_{rel_x}(t) = \frac{|x_f(t)_{\rho+10\%} - x_f(t)_{\rho-10\%}|}{x_f(t)_{\rho_0}}, \quad E_{rel_T}(t) = \int_0^{x_f(t)} \frac{|T(x,t)_{\rho+10\%} - T(x,t)_{\rho-10\%}|}{T(x,t)_{\rho_0}} dx \quad (6.1)$$

Cette équation écrite pour le paramètre de densité se généralise à tout autre paramètre de manière immédiate. Les avantages de cette méthode résident dans le caractère local des écarts calculés. Ces paramètres caractérisent en effet l'erreur maximale que l'on peut effectuer à un temps donné pour se situer dans l'intervalle de confiance $[\rho_{-10\%}, \rho_{+10\%}]$. On obtient donc environ une valeur deux fois plus élevée que ce que nous donnerait un calcul d'erreur absolue par rapport à la situation voulue. Enfin, lorsqu'il sera question d'incertitude sur les profils de température ou sur la position du front radiatif à un temps fixé t_{fixe} , nous ferons référence aux grandeurs définies respectivement par les relations suivantes :

$$I_T(t_{fixe}) = \int_0^{t_{fixe}} E_{rel_T}(t) dt, \quad I_x(t_{fixe}) = \int_0^{t_{fixe}} E_{rel_x}(t) dt \quad (6.2)$$

Nous illustrons plus en détails les concepts introduits dans les relations (6.1) et (6.2) sur la Figure 58.

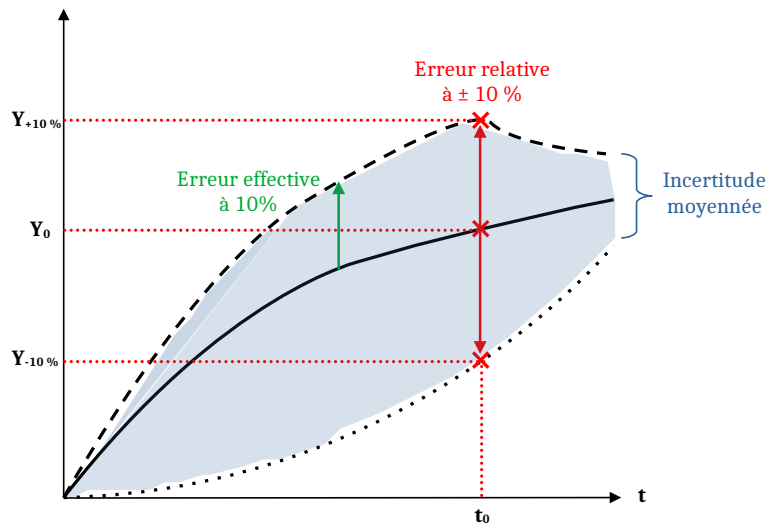


FIGURE 58 – Illustration des notions d'erreur relative et d'incertitude telles qu'introduites dans le manuscrit pour une variable fictive Y_0 (traits pleins) soumise à une incertitude variant entre +10% (tirets) et -10% (pointillés). Dans ce cas, l'erreur relative à l'instant t_0 est indiquée en rouge par l'écart entre les valeurs $Y_{+10\%}$ et $Y_{-10\%}$, moyennée par la valeur souhaitée théoriquement Y_0 . En vert, l'erreur effective calculée à un instant quelconque entre la solution théorique et celle obtenue dans le cas d'une incertitude à 10%. Enfin, l'aire représentée en bleu représente l'incertitude globale à moyenner sur l'intervalle de temps choisi pour obtenir la valeur d'incertitude moyennée.

Sur la Figure 58, nous suivons l'évolution de la variable fictive Y_0 en fonction du temps. En parcourant la figure de gauche à droite, nous illustrons les notions d'erreur relative et d'incertitude moyennée introduites précédemment. On constate que l'erreur relative (double flèche rouge) n'est autre que l'écart

maximal entre les variables $Y_{+10\%}$ et $Y_{-10\%}$, calculé à chaque instant. Elle permet de caractériser l'incertitude dans laquelle un expérimentateur se trouve, et non pas simplement l'écart entre le modèle parfait et une valeur expérimentale qui s'avèrerait différente (en vert par exemple). Ainsi, cette incertitude, qui n'est autre que l'aire moyennée de cette courbe, peut s'interpréter comme la précision maximale que l'on obtient pour se situer dans l'intervalle de confiance $\pm 10\%$. Cette quantification des erreurs nous paraît donc être la meilleure manière de caractériser les incertitudes liées aux expériences présentées.

6.4.2 Simulations et résultats

Étude paramétrique

Nous avons choisi de faire varier la densité de la mousse de $\pm 10\%$ et d'observer l'effet que cela a sur la propagation de l'onde radiative au centre du tube. Soulignons que ces incertitudes sur la densité de la mousse sont particulièrement élevées par rapport à celles communément observées dans les expériences récemment menées². De la même manière, nous faisons également varier l'énergie laser déposée sur les parois de la cavité de conversion d'environ $\pm 10\%$, menant à des écarts de température $T_S(t)$ avoisinant les $\pm 3\%$ selon la loi de conversion de l'énergie laser en rayonnement X. En considérant les incertitudes expérimentales usuellement observées en laboratoire lors d'expériences récentes [Moore *et al.*, 2015], nous pouvons estimer se situer dans un ordre de grandeur pertinent. Enfin, nous faisons également varier le libre parcours moyen (ou de manière équivalente la loi d'opacité) du milieu de propagation de l'onde radiative supersonique d'environ $\pm 10\%$.

Nous avons donc mené six simulations supplémentaires suivant toujours la configuration présentée sur la Figure 49, dans le cas de densités $\rho_{-10\%}$ et $\rho_{+10\%}$, d'énergies laser $E_{L-10\%}$ et $E_{L+10\%}$ et de libres parcours moyens $\lambda_{R-10\%}$ et $\lambda_{R+10\%}$. Les résultats sont présentés respectivement sur les Figures 59 a) à c) pour les profils spatiaux de température et d) à f) pour les profils spatiaux de densité.

Sur les Figures 59 a) et d), on peut voir que l'écart initial sur les densités du milieu conduisent à l'accumulation d'une erreur sur la position du front radiatif, et plus globalement sur les profils de température et densité. Les écarts relatifs observés varient de 20% à $t = 5$ ns jusqu'à être complètement dé-corrélés autour de 10 ns. Ces barres d'erreur importantes proviennent du fait que l'on ait considéré des incertitudes particulièrement élevées sur la densité initiale des milieux de propagation. Par ailleurs, nous pouvons constater que la physique attendue de l'onde radiative est bien respectée. En effet, pour des densités de plus en plus importantes, le front radiatif ralentit, ayant plus de mal à se propager dans des milieux denses. Cela conduit à une accumulation de perturbations acoustiques plus rapide au niveau de ce front, et donc à une densification plus importante, visible sur la Figure 59 d). Un phénomène intéressant à noter sur cette figure est la position constante du maximum de densité pour les trois expériences, indiquant une faible dépendance à la densité initiale du milieu. Le front de perturbations, de même que le front radiatif, est quant à lui plus lent pour les densités les plus importantes.

Pour les Figures 59 b) et e), on peut voir que l'écart initial sur les énergies laser conduisent également à l'accumulation d'une erreur sur la position du front radiatif, et plus globalement sur les profils de

2. Dans le cas des expériences de Courtois *et al.* [2021], les incertitudes sur la densité du matériau utilisé sont d'environ 5%.

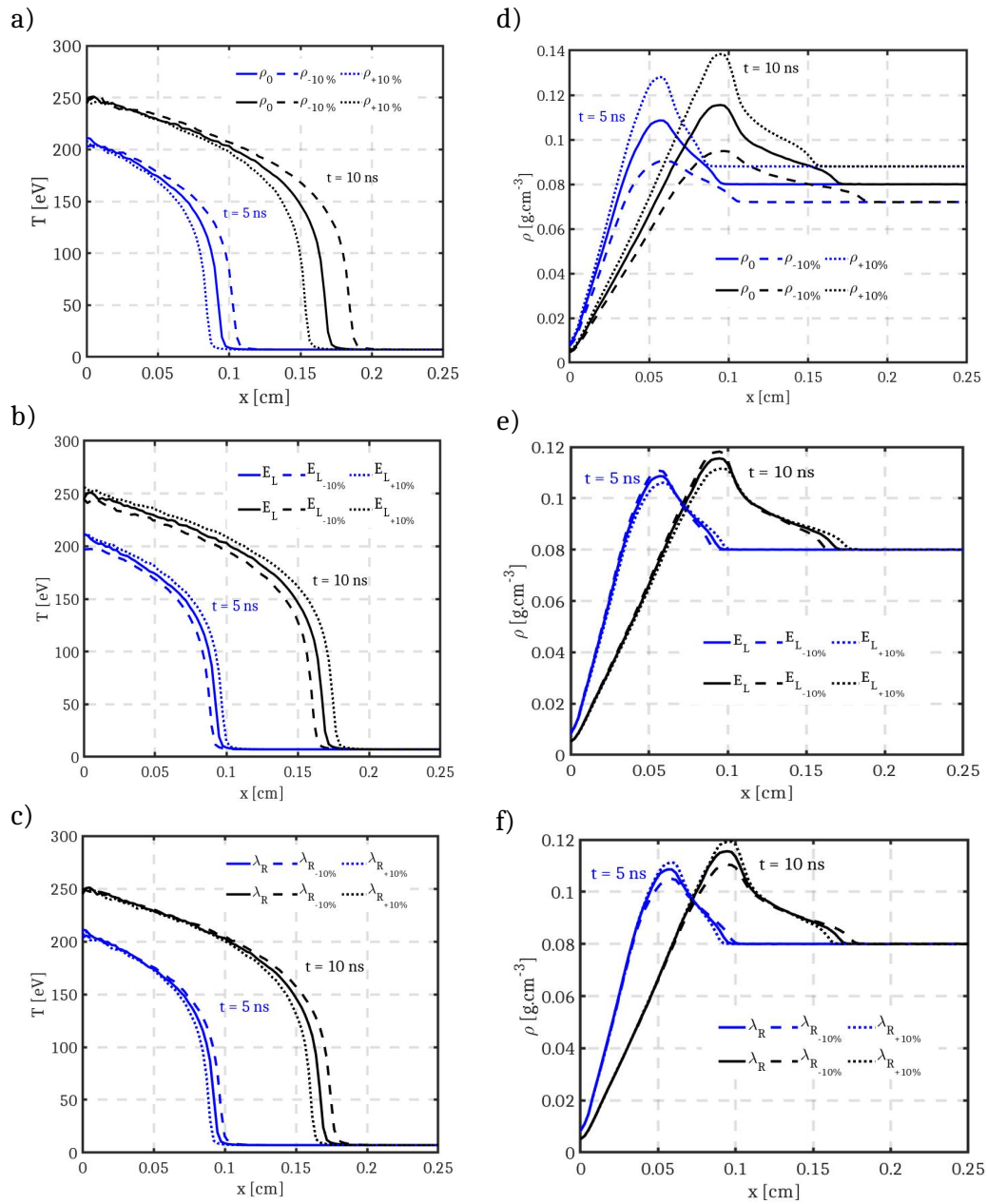


FIGURE 59 – Les figures a) et d) présentent respectivement des profils de température et densité d’une onde radiative pour trois valeurs de densités ρ_0 (en traits pleins), $\rho_{-10\%}$ (en tirets) et $\rho_{+10\%}$ (en pointillés), à deux temps $t = 5$ ns (en bleu) et $t = 10$ ns (en noir). Les figures b) et e) présentent respectivement des profils de température et densité d’une onde radiative pour trois valeurs de énergies laser E_L (en traits pleins), $E_{L-10\%}$ (en tirets) et $E_{L+10\%}$ (en pointillés), à deux temps $t = 5$ ns (en bleu) et $t = 10$ ns (en noir). Les figures c) et f) présentent respectivement des profils de température et densité d’une onde radiative pour trois valeurs de libres parcours moyens λ_R (en traits pleins), $\lambda_{R-10\%}$ (en tirets) et $\lambda_{R+10\%}$ (en pointillés), à deux temps $t = 5$ ns (en bleu) et $t = 10$ ns (en noir).

température et densité. Les écarts relatifs observés varient de 10% à $t = 5$ ns jusqu'à atteindre 30% autour de 10 ns. Ces barres d'erreur sont relativement inférieures à celles observées pour la densité, provenant du fait que l'énergie laser influence indirectement la propagation du front par la température de cavité. Par ailleurs, nous pouvons constater qu'encore une fois la physique attendue de l'onde radiative est bien respectée. En effet, pour des énergies laser de plus en plus importantes, le front radiatif accélère, ayant un réservoir d'énergie plus important pour l'aider à se propager au sein de la mousse. Cela conduit à une accumulation de perturbations acoustiques légèrement plus faible au niveau de ce front, et donc à une densification moins importante, visible sur la Figure 59 e). De manière générale, l'écart provoqué par la variation de E_L est relativement plus faible que pour le cas précédent sur les profils spatiaux de température.

Enfin, pour les Figures 59 c) et f), on peut voir que l'écart initial sur les lois d'opacité conduisent encore une fois à l'accumulation d'une erreur sur la position du front radiatif, et plus globalement sur les profils de température et densité. Les écarts relatifs observés varient de 10% à $t = 5$ ns jusqu'à atteindre 25% autour de 10 ns. Ces barres d'erreur sont relativement semblables à celles observées pour l'énergie laser. La physique attendue de l'onde radiative est bien respectée. En effet, pour des libres parcours moyens de plus en plus importants, le front radiatif ralentit, les photons subissant un plus grand nombre de processus de diffusion au sein du plasma. Cela conduit à une accumulation de perturbations acoustiques légèrement plus forte au niveau de ce front, et donc à une densification plus importante, visible sur la Figure 59 f).

Incertitude totale

Dans cette étude, nous avons implicitement effectué l'hypothèse que chaque incertitude était totalement indépendante l'une de l'autre. Afin de vérifier cette hypothèse, nous pouvons effectuer deux simulations supplémentaires prises dans les cas les plus écartés du système équivalent idéalisé. Dans la première situation, on considère des densités plus faibles, des libres parcours moyens plus élevés, et des énergies laser plus élevées. Dans ce cas, la vitesse de l'onde radiative est accélérée par ces trois choix, et on se place donc dans le cas d'une incertitude totale notée à +10%. Dans le cas contraire, on se place dans le cas d'une incertitude totale notée à -10%. On représente donc ces résultats de simulations par les termes $Tot_{-10\%}$ et $Tot_{+10\%}$. Dans ce cas, on choisit de représenter les écarts au système équivalent idéalisé par l'évolution du front radiatif dans chaque simulation. Les résultats sont présentés sur la Figure 60.

On constate que l'incertitude totale liée aux situations les plus éloignées en terme de vitesse du front radiatif correspond à la somme des incertitudes calculées indépendamment sur les différents paramètres étudiés. Ainsi, ces paramètres sont bien indépendants pour le calcul d'incertitudes. Il est particulièrement intéressant de noter que ces cas les plus éloignés du système prévu initialement à l'échelle du laboratoire suivent globalement la même physique. Cela traduit le fait que l'on se trouve loin des seuils limitant le modèle d'ondes radiatives supersoniques. En particulier, les temps de séparation hydrodynamiques des systèmes $Tot_{-10\%}$ et $Tot_{+10\%}$ diffèrent du cas prévu mais ne deviennent pas inférieurs à la durée de l'expérience. Lorsque la vitesse du front radiatif augmente (cas $Tot_{+10\%}$), \hat{t}_{sep} augmente également. Cependant, dans le cas $Tot_{-10\%}$, la vitesse du front diminue, et on obtient des nombres de Mach radiatifs

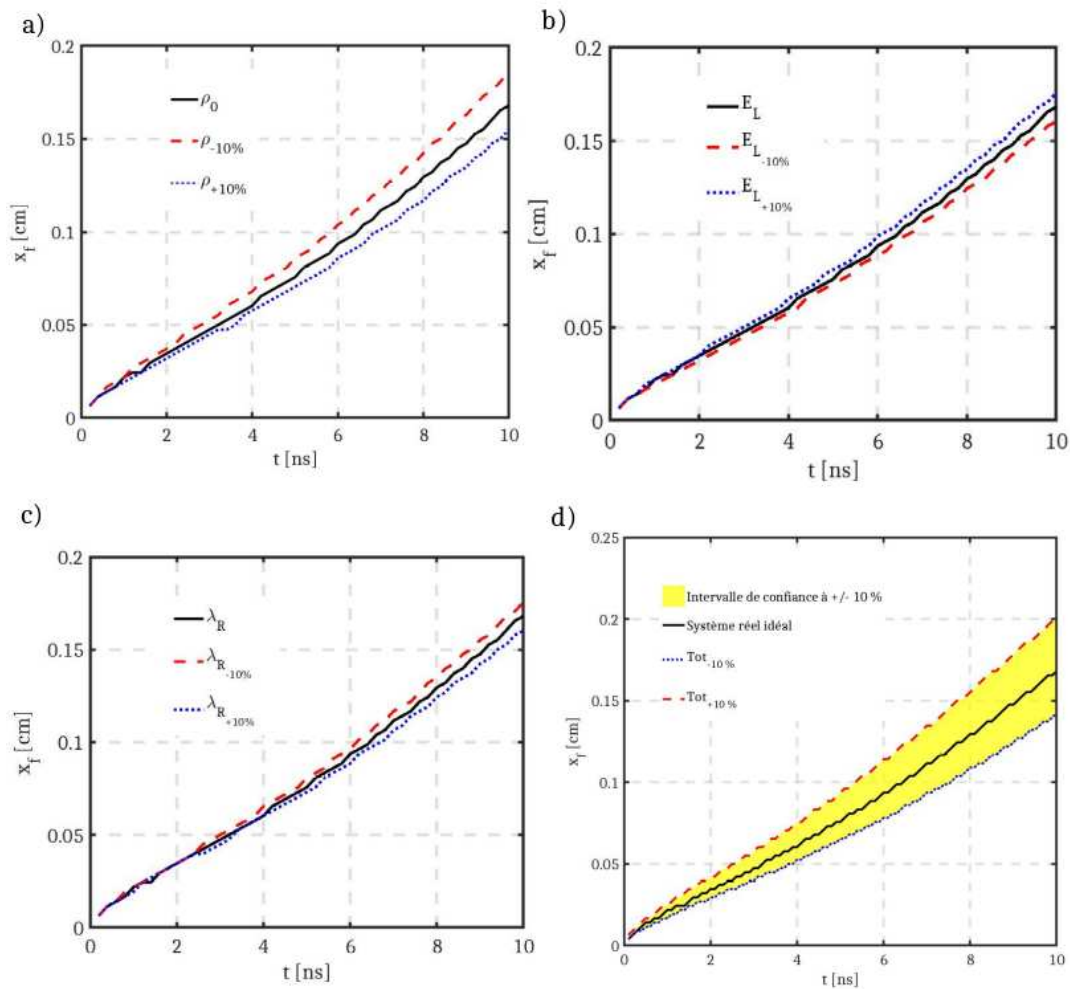


FIGURE 60 – Les Figures *a)*, *b)* et *c)* représentent l'évolution des positions de fronts radiatifs pour les simulations avec, respectivement, une incertitude sur la densité de la mousse, l'énergie du laser et le libre parcours moyen de la mousse. La Figure *d)* représente le cas d'incertitude totale à $\pm 10\%$, où l'aire remplie correspond à l'intervalle de confiance des expériences proposées. Cet intervalle correspond à la somme des intervalles calculés pour les différentes incertitudes prises séparément.

de plus en plus proches de l'unité ($Ma_{-10\%} \approx 1.7$) autour de 10 ns. Cependant, aucune séparation hydrodynamique n'est observée avant environ 12 ns, ce qui prouve que le dimensionnement effectué nous permet de rester loin du seuil de cessation de l'hypothèse supersonique.

Également, la situation $Tot_{+10\%}$ fait diminuer l'épaisseur optique du milieu à des valeurs proches de l'unité ($\hat{\tau} \approx 5$ dans les pires cas). L'hypothèse de diffusion ($\tau > 1$) est ainsi toujours vérifiée dans le milieu étudié, car le choix du matériau Ta_2O_5 à une densité $\rho_0 = 0.08 \text{ g.cm}^{-3}$ a permis de se situer loin du seuil de l'obtention de milieux semi-transparents ($\tau \approx 1$). C'est la nature diffuse (Z élevé) de ce matériau qui permet un tel résultat, que l'on ne pourrait pas forcément obtenir dans le cas de mousses de plastique par exemple. Notons enfin que les régimes physiques ($\hat{Bo} \ll 1$, $\hat{R} \gg 1$) sont conservés dans l'intervalle de confiance. Nous discuterons de l'influence de la modification des nombres de Boltzmann et de Mihalas à l'échelle du laboratoire dans la dernière section de ce manuscrit.

6.4.3 Du laboratoire à l'échelle astrophysique

Retour à l'échelle astrophysique

À ce point de l'étude, nous venons de démontrer la faisabilité d'expériences de propagation d'ondes radiatives équivalentes au système astrophysique SXI-disque d'accrétion à l'échelle du laboratoire, en particulier avec une mousse de Ta_2O_5 . Rappelons que l'objectif de produire de telles ondes expérimentalement est de pouvoir remonter au système astrophysique pour l'étudier de manière directe et ainsi pourvoir au manque de données comparatives pour ces environnements. On applique à présent les transformations d'équivalence (5.1) aux simulations expérimentales 2D présentées dans ce chapitre. On présente sur la Figure 61 le cas de référence à l'échelle astrophysique (traits pleins rouges) étudié au chapitre 2 (Figure 24) et simulé à l'aide du code RAMSES-RT. On ajoute à cela la simulation 1D FCI2 du système équivalent (non idéal, en pointillés bleus) composé de Ta_2O_5 et étudié au chapitre 5 (Figure 48). Enfin, nous représentons donc également les résultats de dimensionnement 2D (tirets noirs) développés dans ce chapitre pour ce même système (Figure 52 *b*). Ces simulations, effectuées à l'échelle du laboratoire, sont projetées à l'échelle astrophysique à l'aide des transformations d'équivalence (5.1).

On constate que l'équivalence est bien respectée sur les premiers instants de propagation de l'onde radiative, pour des temps inférieurs à 5 ns. La position du front est elle également retrouvée. Cependant, comme démontré au chapitre 5, les écarts à la situation équivalente idéale (qui se superposerait avec la courbe rouge, comme démontré au chapitre 5), principalement en terme d'équation d'état, induisent une déviation entre les solutions aux deux échelles. Pour le laboratoire, l'échelle temporelle de validité de l'approche (c'est-à-dire avec un seuil d'erreur acceptable) est donc d'environ 5 ns. Pour l'échelle astrophysique, cela peut correspondre à diverses durées, selon le choix fait lors de l'application des transformations d'équivalence. Dans notre cas, nous modélisons ici, comme expliqué au chapitre 5, les 0.025 premières secondes du système astrophysique.

Propagation des incertitudes

Théoriquement, il serait possible de complètement annuler l'écart observé entre les échelles astrophysique et du laboratoire en considérant un matériau équivalent parfait qui, rappelons-le, ne correspond pour l'instant pas à un matériau connu en laboratoire, comme nous l'avons montré au chapitre 5. Des déviations à l'équivalence existent ici entre les fonctions $E(T)$ et $\hat{E}(\hat{T})$, qu'il faut également coupler avec les incertitudes étudiées dans la section précédente. En effet, expérimentalement, certaines incertitudes persistent sur les paramètres caractérisant la propagation des ondes radiatives à l'échelle du laboratoire. Bien que l'on ait été capable de caractériser leur effet à cette échelle, qu'en est-il de la propagation de ces incertitudes à l'échelle astrophysique ?

Les simulations effectuées sur les incertitudes expérimentales nous ont permis de quantifier l'intervalle de confiance dans lequel nous sommes sûrs de trouver la solution à l'échelle du laboratoire. Nous avons caractérisé les situations les plus éloignées du système réel où des écarts de 10% existent sur la densité initiale de la mousse de Ta_2O_5 , sur l'énergie fournie par le laser, ainsi que sur la loi de libre parcours moyen de cette mousse. Ces nouveaux paramètres vont induire des changements sur l'invariant I donné par la relation (5.4) et propre aux transformations d'équivalence. En particulier, une augmentation de la

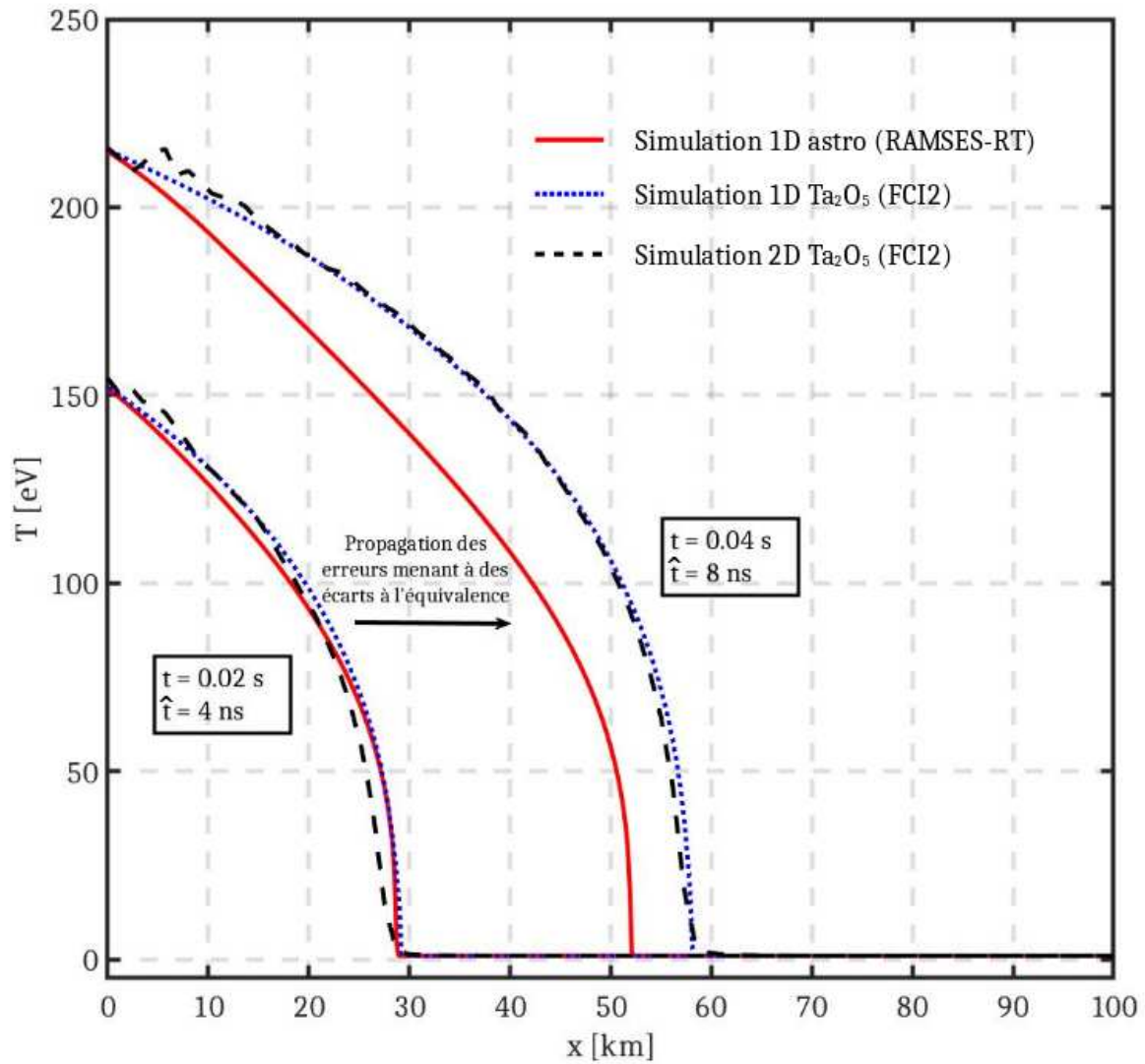


FIGURE 61 – Comparaison des profils spatiaux de température provenant des simulations RAMSES-RT à l'échelle astrophysique (en traits pleins rouges), des simulations FCI2 1D (en pointillés bleus) et 2D (en tirets noirs) à l'échelle du laboratoire. Les simulations à cette échelle sont présentées après application des transformations d'équivalence afin de superposer les solutions temporellement et spatialement à l'échelle astrophysique.

densité va conduire à des nombres de Mihalas plus élevés que ceux attendus, avec un rapport de l'ordre d'une dizaine de %. Pour les faibles nombres de Mihalas ($R \leq 1$) obtenus à l'échelle astrophysique, cela ne provoque pas de changement de régime, puisqu'un nombre de Mihalas de 0.1 prendrait alors des valeurs proches de 0.11. Cependant, l'application de l'équivalence s'en trouve modifiée puisque l'écart entre R et \hat{R} peut augmenter ou diminuer selon la situation. Un redimensionnement de l'échelle expérimentale (\hat{L} , \hat{t}) peut permettre d'absorber ces écarts tant que les régimes physiques ne sont pas modifiés, et donc que la physique des systèmes reste équivalente entre les deux échelles. Dans cette optique, on constate que le nombre de Boltzmann en version statique I_1 sera lui aussi modifié, d'une façon qui dépendra de la loi d'opacité du matériau. Cependant, $\hat{B}_0 \ll 1$ est une conséquence de la propagation d'ondes radiatives

supersoniques, et les incertitudes étudiées ne modifient pas cette hypothèse. Ainsi, en appliquant les transformations d'équivalence (5.1) à la situation $Tot_{+10\%}$, on obtient les résultats présentés sur la Figure 62, qui correspond globalement à la Figure 61, où l'on a remplacé la courbe noire par celles des systèmes présentant des incertitudes de $\pm 10\%$.

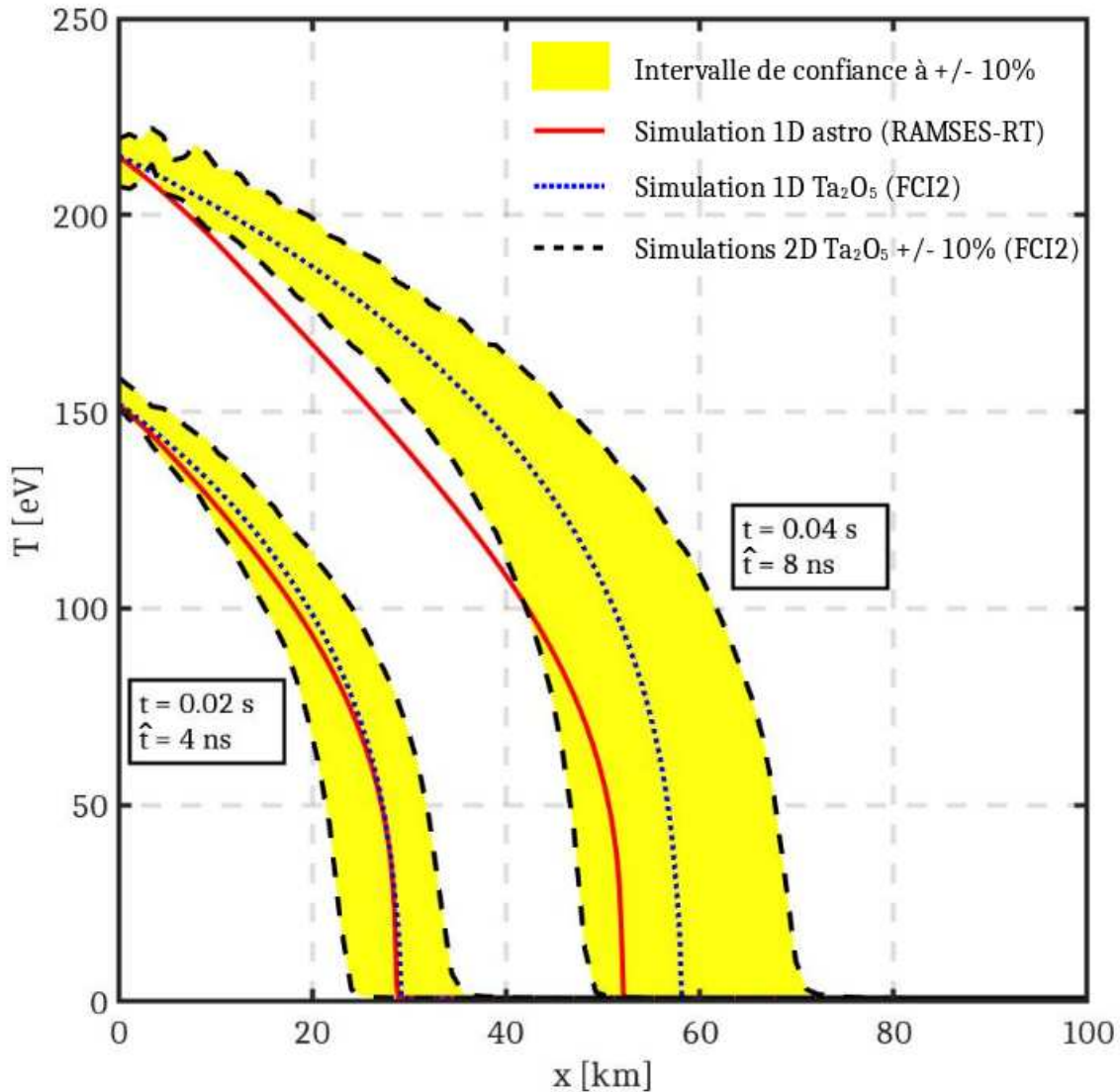


FIGURE 62 – Comparaison des profils spatiaux de température provenant des simulations RAMSES-RT à l'échelle astrophysique (en traits pleins rouges), des simulations FCI2 1D (en pointillés bleus) et 2D (en tirets noirs) à l'échelle du laboratoire. L'aire en jaune représente l'intervalle de confiance pour les situations $Tot_{\pm 10\%}$. Les simulations à cette échelle sont présentées après application des transformations d'équivalence afin de superposer les solutions temporellement et spatialement.

De la même façon que précédemment, l'intervalle de confiance augmente avec le temps, les écarts de vitesse entre les fronts radiatifs augmentant. Il est intéressant de remarquer que, sur la durée de l'expérience d'environ 10 ns, la position du front radiatif reste comprise dans cette plage de valeurs, en jaune sur la Figure 62. On dispose donc d'un intervalle de confiance dans lequel le front radiatif astrophysique doit se

trouver s'il est bien équivalent au système expérimental. Remarquons que cet intervalle peut être modifié en pratique lors de la mise en place d'expériences. En effet, des mesures complémentaires des mousses de laboratoire peuvent redéfinir le système initial (tout de même compris dans l'intervalle de confiance). Par exemple, après expérience, imaginons que la densité de Ta_2O_5 passe en réalité à 0.75 g.cm^{-3} moyennant quelques incertitudes résiduelles. Alors, une nouvelle application des transformations d'équivalence (5.1) pourra permettre d'absorber cela afin d'éviter des écarts supplémentaires.

Enfin, notons que, comme expliqué précédemment, toutes ces considérations sont permises par le fait que, sur l'intervalle de confiance défini, la physique est encore conservée entre l'échelle astrophysique et celle du laboratoire. Cela signifie bien que l'on se situe loin des seuils limitant le modèle d'ondes radiatives supersoniques. Concrètement, il est possible d'étudier la même physique aux échelles astrophysique et du laboratoire. De plus, nous avons montré ici que l'approche proposée dans ce manuscrit permet bien d'étudier, sur un intervalle temporel défini, les ondes radiatives supersoniques se propageant dans les disques d'accrétion d'étoiles à neutrons soumises à des SXI.

6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un dimensionnement expérimental permettant d'étudier, en laboratoire, la propagation d'ondes radiatives en régime supersonique sur des échelles temporelles de l'ordre de la dizaine de nanosecondes. Dans un premier temps, des simulations numériques ont conduit à valider la possibilité d'une telle approche sur ces durées caractéristiques pour les mousses étudiées de Ta_2O_5 et CHOBBr . Dans un second temps, la simulation de diagnostics laser a permis de comparer les résultats expérimentaux effectivement accessibles et attendus aux résultats de simulation. Dans le cadre d'un dimensionnement parfaitement reproduit, nous avons donc pu démontrer l'intérêt de telles expériences dans le cadre d'application des théories d'équivalence présentées dans ce manuscrit. Enfin, l'étude paramétrique menée sur les incertitudes expérimentales a permis de mettre en perspective les possibilités offertes par ces nouvelles méthodes de transformation ainsi que de vérifier la précision des prédictions réalisées sur les modèles étudiés.

Les techniques d'équivalence permettent en particulier de prendre en compte les écarts aux caractéristiques des matériaux au sein même des transformations. Cette possibilité permet un début de réponse au paradigme posé par notre connaissance relative des équations d'état et lois d'opacité des matériaux couramment utilisés dans les expériences d'hydrodynamique radiative. Notons que les simulations du système expérimental étudié dans ce chapitre ont tout de même mis en lumière les possibilités offertes par l'installation du LMJ dans le cas où ces paramètres seraient connus assez précisément. Ce travail permet en outre de conclure le travail initié au début de ce manuscrit où l'on introduisait les systèmes astrophysiques étudiés, les transformations d'équivalence développées dans ces travaux ayant fait le lien entre ces échelles inatteignables et celle du laboratoire. Le chemin inverse est à présent possible, puisque les données expérimentales produites par le type de dimensionnement présenté ont permis de modéliser, à l'échelle du laboratoire, les ondes radiatives supersoniques pouvant naître lors de l'interaction entre un SXI à la surface d'une étoile à neutrons et son disque d'accrétion. Nous pouvons conclure que ces expériences peuvent permettre d'étudier en détails ces processus de propagation d'ondes radiatives à l'échelle

astrophysique et constituent ainsi les prémices d'une nouvelle classe d'expériences pour l'astrophysique de laboratoire.

Conclusion et Perspectives

Dans ces travaux, nous avons étudié la propagation d'ondes radiatives supersoniques lors de l'interaction entre un sursaut X et un disque d'accrétion. Nous avons décidé de valider ces résultats développés à l'échelle astrophysique par le biais d'expériences à l'échelle du laboratoire. Les différences fondamentales entre les régimes et la physique microscopique de ces deux échelles semblaient alors limiter considérablement l'intérêt d'une telle approche. Afin de dépasser cela, nous avons réuni des modélisations théoriques, numériques et expérimentales dans une nouvelle approche pour l'astrophysique de laboratoire. La possibilité de rechercher systématiquement des transformations de similitude généralisée a été théorisée à l'aide des symétries d'équivalence. Les concepts présentés dans ce manuscrit ont ainsi permis de proposer une première validation des outils de simulation d'ondes radiatives supersoniques dans ces régimes astrophysiques et d'améliorer notre compréhension de la physique des hautes énergies présente dans ces systèmes. De plus, nous avons ici posé les bases d'une nouvelle approche pour l'astrophysique de laboratoire se reposant sur des analogies et ressemblances théorisées entre les deux échelles si éloignées de l'astrophysique et du laboratoire.

Dans le chapitre 1, nous avons donné un aperçu de la richesse naissant de l'interaction entre le rayonnement et la matière, que ce soit à l'échelle de l'astrophysique et du laboratoire. Parmi les phénomènes présentés, nous avons pu identifier que les ondes radiatives pouvaient se propager dans des systèmes optiquement épais soumis à un intense rayonnement dans le domaine X. Les facteurs limitant l'observation de ces phénomènes ont conduit à s'intéresser à leur modélisation expérimentale dans le cadre de l'astrophysique de laboratoire. Nous avons ainsi introduit certains aspects de la physique des hautes densités d'énergie présente au sein de l'interaction laser-matière. Ces concepts ont permis d'introduire la problématique principale de cette discipline à laquelle nous avons donc apporté un premier élément de réponse.

Les premiers travaux présentés dans ce manuscrit portent ainsi sur la physique des ondes radiatives apparaissant lors de l'interaction entre un sursaut X et un disque d'accrétion. Dans le chapitre 2, nous avons présenté une modélisation de tels systèmes permettant d'étudier la physique contenue dans l'interaction entre l'écoulement d'accrétion et les photons du sursaut X. Nous avons ainsi pu montrer que cette interaction pouvait mener à la propagation d'ondes radiatives sur des échelles temporelles généralement plus courtes que celle du sursaut X. Suite à cela, motivés par les problématiques observationnelles de ces systèmes, nous avons tourné notre regard vers un outil de simulations numériques : le code RAMSES-RT. Après avoir détaillé et validé les modifications faites au code, nous avons effectué des simulations

parcourant différents régimes d'ondes radiatives. Cette étude a permis de montrer que RAMSES-RT était capable de simuler la phénoménologie attendue des ondes radiatives dans des régimes de rayonnement extrême. Ces simulations ne permettaient cependant pas de tirer des conclusions définitives sur la physique des systèmes étudiés, dès lors qu'aucune comparaison directe avec des données observationnelles n'est actuellement possible. Dans l'optique de résoudre ce problème, nous avons choisi de modéliser cette physique à l'échelle du laboratoire.

Dans le chapitre 3, nous avons ainsi développé la physique des ondes radiatives produites à l'échelle du laboratoire à l'aide des installations laser de puissance. Pour cela, nous avons tout d'abord procédé à un état de l'art des expériences menées à l'échelle du laboratoire, permettant ainsi de dresser un profil type de configuration expérimentale accessible technologiquement. Nous avons ainsi pu décrire une carte des régimes physiques pouvant être atteints en laboratoire. Afin de comprendre comment ces expériences pouvaient permettre de modéliser les systèmes étudiés à l'échelle astrophysique, nous avons introduit les notions d'identité, similitude, ressemblance et analogie. Nous avons, dans ce chapitre, insisté sur la similitude et le concept de lois d'échelle, piliers de l'astrophysique de laboratoire actuelle. En particulier, nous avons développé et appliqué les lois d'échelle des ondes radiatives supersoniques dans le cas de l'interaction entre un sursaut X et un disque d'accrétion à l'échelle astrophysique et des expériences laser à l'échelle du laboratoire. En plus de vérifier ces transformations de changement d'échelle, nous avons ainsi mis en lumière les limites de la similitude dans les régimes extrêmement radiatifs étudiés. Ces considérations ont permis de poser les bases de la réflexion menant à une généralisation des lois d'échelle.

Dans le chapitre 4, nous avons tout d'abord introduit les outils nécessaires à l'étude des symétries de Lie des équations différentielles. Ces objets mathématiques ont permis de revenir à la base du concept d'invariance et de déterminer un ensemble de transformations applicables aux ondes radiatives supersoniques. Cependant, pour dépasser l'approche de la similitude et offrir des degrés de liberté supplémentaire lors de la transformation des systèmes étudiés, une étape supplémentaire était nécessaire. Nous avons ainsi présenté la théorie des symétries dites d'équivalence qui permettent d'obtenir un nouveau type de transformations relevant maintenant de la ressemblance. L'approche présentée dans ce chapitre se voulait être générale, et a ici été appliquée au cas des ondes radiatives supersoniques. Nous avons ainsi pu démontrer, dans ce cas, que les transformations d'équivalence généralisent les lois d'échelle développées au chapitre 3. De manière générale, les lois d'échelle apparaissent alors comme la limite naturelle des symétries d'équivalence.

Dans le chapitre 5, nous avons analysé les transformations d'équivalence développées au chapitre 4 afin de caractériser les possibilités et les limitations d'une telle approche. Nous avons ainsi pu observer comment ces lois d'échelle généralisées transformaient les régimes physiques d'ondes radiatives supersoniques ainsi que les propriétés (équation d'état, loi d'opacité) des milieux dans lesquels ces phénomènes se propagent. Des exemples d'applications ont été développés afin d'illustrer les possibilités d'utilisation de ces transformations, permettant de mettre en lumière la principale problématique de l'étude : à quel point les systèmes pouvant être réalisables en laboratoire pouvaient-ils être équivalents au système astrophysique étudié au chapitre 2. Afin d'y répondre, nous avons cherché à appliquer la théorie d'équivalence à des situations typiques obtenues en laboratoire afin de déterminer si certains matériaux

pouvaient répondre aux critères demandés. Nous avons alors montré que sous des conditions atteintes dans les installations laser les plus énergétiques (NIF, LMJ), il était possible de reproduire une partie du système astrophysique. Une fois ce modèle 1D validé à l'aide du code FCI2, l'objectif a été d'effectuer le dimensionnement expérimental réel correspondant.

Enfin, un dimensionnement complet d'expérience laser équivalente a été présenté au chapitre 6, permettant de lier les plasmas de laboratoire aux phénomènes astrophysiques étudiés. La configuration présentée a été imaginée en s'inspirant des différentes expériences menées au cours des décennies de recherche sur la propagation d'ondes radiatives supersoniques. Les conditions choisies pour la mise en place d'un tel dispositif avaient été obtenues lors de l'analyse du chapitre 5. Les résultats de simulations ont montré que ces ondes radiatives équivalentes pouvaient être obtenues dans des conditions expérimentales sur une installation laser de type LMJ. Nous avons également montré que les différents diagnostics présents sur cette installation pourraient permettre de suivre l'évolution du front radiatif se propageant dans des mousses basses densités. La position expérimentale du front radiatif coïncide alors avec les simulations unidimensionnelles équivalentes effectuées au chapitre 5. Nous avons également souligné la possibilité de vérifier la validité de l'hypothèse de propagation supersonique à l'aide d'un diagnostic de radiographie X pouvant suivre d'éventuelles perturbations hydrodynamiques donnant naissance à des chocs de séparation hydrodynamique dans la mousse. Enfin, une étude d'incertitudes a été effectuée afin de quantifier les écarts potentiellement observés lors de futures campagnes expérimentales. À l'aide de la théorie d'équivalence, ces incertitudes peuvent être très fortement atténuées en permettant un redimensionnement des variables a posteriori. Cette nouvelle approche pour l'astrophysique de laboratoire s'affirme alors comme l'instigatrice de nouvelles possibilités menant à une meilleure caractérisation des propriétés des matériaux de laboratoire pour des expériences d'hydrodynamique radiative qui constitue une véritable problématique à cette échelle.

Le degré d'avancement technologique offert à l'échelle du laboratoire constitue, quelle que soit l'approche, une limitation parmi les plus contraignantes. Malgré les nouveaux degrés de liberté obtenus par le développement de cette nouvelle approche d'équivalence, ces limitations technologiques réduisent le domaine d'application de celle-ci. Une piste prometteuse qui permettrait d'obtenir une plus grande liberté au niveau technologique est le développement de méta-matériaux, comme introduit au chapitre 5. Une plus grande maîtrise de la microphysique des systèmes étudiés, couplée aux méthodes théoriques sophistiqués présentées dans ce manuscrit, pourraient attester d'un futur empli de promesses pour l'astrophysique de laboratoire, visant à améliorer notre compréhension de l'interaction entre le rayonnement et la matière.

Une perspective intéressante apparaît dans les méthodes dites de *mapping*. Bien que nous n'ayons pu rentrer pleinement dans le détail de cette technique mathématique, certains résultats d'importance ont pu être développés en parallèle des travaux présentés dans ce manuscrit, sur lesquels nous nous appuyons à présent pour illustrer la potentielle importance de telles méthodes dans le futur. Ces techniques de *mapping* consistent globalement à obtenir des transformations liant les symétries de deux systèmes, et donc par extension leurs modèles théoriques entre eux. La théorie permettant de telles possibilités est encore loin d'être totalement maîtrisée, mais peut arriver à des résultats d'intérêt dans certains cas. Un exemple d'application des plus connus est la possibilité de passer de l'équation linéaire de la chaleur à une équation de type Burgers par le biais de la transformation de Hopf-Cole [Bluman *et al.*, 2010]. Lors

de ces travaux de thèse, nous nous sommes attelés à proposer une version simplifiée du théorème de *mapping* permettant de l'appliquer à différents systèmes d'intérêt pour l'astrophysique de laboratoire. En particulier, nous nous sommes intéressés à deux systèmes : une analogie des écoulements en eaux peu profondes [Landau et Lifshitz, 2013] reprise pour l'astrophysique de laboratoire par Foglizzo *et al.* [2012] et la dualité explosion-implosion de O.C. Drury et Mendonca [2000]. Dans ces deux cas, les techniques de *mapping* ont permis de montrer que les analogies développées par les auteurs existaient bel et bien, et constituaient également l'unique possibilité pour lier les systèmes étudiés. Dans le cas des travaux de O.C. Drury et Mendonca [2000], les systèmes de départ et d'arrivée sont modélisés par le même système d'équations. Nous avons ainsi pu montrer que l'analogie développée constituait en réalité une symétrie cachée de ce système d'équations. Nous pensons que ces techniques présentent un intérêt pour développer des analogies entre certains systèmes à la manière de ces auteurs, mais de façon systématique.

De manière générale, les travaux présentés dans ce manuscrit s'inscrivent dans une nouvelle dynamique pour l'astrophysique de laboratoire, visant à créer des liens quantitatifs de plus en plus généraux entre les échelles astrophysique et du laboratoire. Les avancées technologiques couplées aux développements théoriques de plus en plus sophistiqués nous donnent alors la certitude de pouvoir progresser de manière importante vers un agrandissement du catalogue des systèmes reproductibles à l'échelle du laboratoire.

ANNEXE A

Symétries de Lie et symétries d'équivalence pour les ondes radiatives

A.1 Obtention des symétries de Lie des ondes radiatives

On rappelle que l'on cherche à obtenir les symétries de Lie du modèle d'ondes radiatives décrit par l'équation différentielle (4.26) qui s'écrit :

$$\frac{\partial E(T)}{\partial t} = \frac{4a_{RC}}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_R(T) T^3 \frac{\partial T}{\partial x} \right] \quad (\text{A.1})$$

où les fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$ sont invariantes. La méthode présentée au chapitre 4 nous a permis d'obtenir la condition d'invariance (4.38) qui contient onze différentes combinaisons des dérivées de la variable dépendante. Or, l'hypothèse de recherche de symétries de Lie ponctuelles rend impossible la dépendance des fonctions de coordonnées en ces dérivées. Chaque terme en facteur des dérivées de la température présentes dans cette équation doit donc être nul pour vérifier la condition d'invariance de l'équation (A.1). Les termes en facteur de \mathbf{T}_{xxx} et $\mathbf{T}_x \mathbf{T}_{xxx}$ nous donnent immédiatement des contraintes sur la fonction τ :

$$\tau_x = \tau_T = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau(t) \quad (\text{A.2})$$

En utilisant ce résultat pour simplifier d'autres relations, la contrainte issue du terme $\mathbf{T}_x \mathbf{T}_{xx}$ s'écrit :

$$\xi_T = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi(x, t) \quad (\text{A.3})$$

En introduisant ces nouvelles dépendances des fonctions de coordonnées ξ et τ dans les autres équations, on obtient, respectivement pour les termes en facteur de 1, \mathbf{T}_x , \mathbf{T}_x^2 et \mathbf{T}_{xx} :

$$E_T \eta_t = \frac{4a_{RC}}{3} \lambda_R T^3 \eta_{xx} \quad (\text{A.4})$$

$$-E_T \xi_t = \frac{4a_{RC}}{3} \left[2 \left(\lambda_R T^3 \eta_x \right)_T - \lambda_R T^3 \xi_{xx} \right] \quad (\text{A.5})$$

$$\left[\frac{E_{TT}}{E_T} \eta + (2\xi_x + \eta_T - \tau_t) \right] \left(\lambda_R T^3 \right)_T = \left(\eta \lambda_R T^3 \right)_{TT} \quad (\text{A.6})$$

$$\eta \left[\left(\lambda_R T^3 \right)_T - \frac{\lambda_R T^3 E_{TT}}{E_T} \right] = \lambda_R T^3 [2\xi_x - \tau_t] \quad (\text{A.7})$$

En pratique, on dispose donc d'un ensemble de sept équations déterminantes (A.2) à (A.7) pour les fonctions de coordonnées ξ , τ et η . Ces contraintes font intervenir explicitement les fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$ par l'intermédiaire d'un coefficient $D(T)$ donné par :

$$D(T) = \frac{4a_{RC} \lambda_R T^3}{3 E_T} \quad (\text{A.8})$$

Notons que l'on peut alors réécrire les quatre dernières contraintes (A.4-A.7) en introduisant ce coefficient :

$$\eta_t = D(T) \eta_{xx} \quad (\text{A.9})$$

$$-\xi_t = D(T) \left[2\eta_{xT} - \xi_{xx} + \frac{(\lambda_R T^3)_T}{\lambda_R T^3} 2\eta_x \right] \quad (\text{A.10})$$

$$\left(\lambda_R T^3 \right)_T \left[\frac{E_{TT}}{E_T} \eta + (2\xi_x + \eta_T - \tau_t) \right] = \lambda_R T^3 \eta_{TT} + 2\eta_T \left(\lambda_R T^3 \right)_T + \eta \left(\lambda_R T^3 \right)_{TT} \quad (\text{A.11})$$

$$\eta \frac{D_T}{D} = 2\xi_x - \tau_t \quad (\text{A.12})$$

La contrainte (A.11) peut être simplifiée en y insérant la relation (A.12), ce qui nous donne :

$$\left(\lambda_R T^3 \right)_T \left[\frac{E_{TT}}{E_T} \eta + \frac{D_T}{D} \eta \right] = \lambda_R T^3 \eta_{TT} + \eta_T \left(\lambda_R T^3 \right)_T + \eta \left(\lambda_R T^3 \right)_{TT} \quad (\text{A.13})$$

En injectant la définition du coefficient $D(T)$ dans la relation (A.8), on obtient, après quelques manipulations, la contrainte suivante :

$$\eta_T + \eta \frac{\partial}{\partial T} \ln \left(\lambda_R T^3 \right) = \omega(x, t) \quad (\text{A.14})$$

où $\omega(x, t)$ est une fonction quelconque des variables indépendantes x et t . Enfin, en utilisant cette expression dans la condition (A.10), on obtient une contrainte sur la fonction $\omega(x, t)$ de la forme :

$$-\xi_t = D(T) \left[2 \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial x} - \xi_{xx} \right] \quad (\text{A.15})$$

Étant donné que le coefficient $D(T)$ et ses dérivées apparaissent dans ces contraintes, la résolution nécessite de séparer le cas $D(T) = D_0$ constant et $D(T) \neq D_0$ non constant. Notons que le cas $D_0 = 0$ correspond à un flux radiatif nul et ne sera donc pas étudié.

A.1.1 Cas $D(T) \neq D_0$

Lorsque le coefficient $D(T)$ est une fonction quelconque non constante de la température, l'équation (A.12) peut alors s'écrire :

$$\eta(x, t, T) = \frac{D}{D_T} [2\xi_x(x, t) - \tau_t(t)] \quad (\text{A.16})$$

En utilisant cette expression dans la contrainte (A.9), on obtient des conditions sur les dépendances de toutes les fonctions de coordonnées :

$$\eta_t = \eta_{xx} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\xi_{xt} = \tau_{tt}, \quad \text{et} \quad \xi_{xxx} = 0 \quad (\text{A.17})$$

Sachant que les fonctions ξ et ω ne dépendent pas de la variable T , la relation (A.15) permet d'écrire :

$$\xi_t = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{tt} = 0 \quad \text{et} \quad \xi_{xx} = 2\omega_x \Rightarrow \eta_x = \frac{4D}{D_T}\omega_x \quad (\text{A.18})$$

La dernière contrainte à considérer est donc l'équation (A.14). Dans un premier temps, on constate que les fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$ doivent avoir une certaine forme pour vérifier cette contrainte. Dans le cas général où les fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$ sont quelconques, $\eta = 0$ est l'unique solution. Les fonctions de coordonnées ξ et τ sont alors données par :

$$\xi(x, t) = b_1 + b_3x \quad \tau(t) = b_2 + 2b_3t \quad (\text{A.19})$$

Il existe donc, dans ce cas, trois générateurs infinitésimaux G_1 , G_2 et G_3 qui s'écrivent :

$$G_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad G_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad G_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t} \quad (\text{A.20})$$

Des générateurs supplémentaires apparaissent lorsque certaines contraintes sont vérifiées. Pour les identifier, remarquons tout d'abord que la prise en compte de (A.16) dans la relation (A.14) conduit à l'égalité suivante :

$$\eta_T + \eta \frac{\partial}{\partial T} \ln(E_T) = \omega(x, t) - (2\xi_x - \tau_t) \quad (\text{A.21})$$

On peut alors montrer que les contraintes (A.14) et (A.21) contraignent la forme de la fonction de coordonnée $\eta(x, t, T)$ de la façon suivante :

$$\eta(x, t, T) = \Gamma_1(x, t)T + \Gamma_2(x, t) \quad (\text{A.22})$$

La fonction $\eta(x, t, T)$ est donc un polynôme de degré 1 en la température dont les coefficients $\Gamma_1(x, t)$ et $\Gamma_2(x, t)$ sont des fonctions quelconques des variables indépendantes x et t . On peut séparer l'étude en deux cas distincts selon que la fonction $\Gamma_1(x, t)$ est nulle ou non. Lorsque $\Gamma_1(x, t) = 0$, les équations (A.14) et (A.21) conduisent aux contraintes :

$$\lambda_R(T) = \frac{\lambda_0}{T^3} \exp\left(\frac{T}{T_2}\right), \quad E(T) = E_0 \exp\left(\frac{T}{T_1}\right) \quad (\text{A.23})$$

où T_1 et T_2 (avec $T_2 \neq T_1$) sont des constantes homogènes à une température. Les fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$ sont donc des lois exponentielles de la température. Les contraintes (A.23) insérées dans les relations (A.14) et (A.21) nous donnent :

$$\Gamma_2(x, t) = \frac{(2\xi_x - \tau_t)}{\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)} \quad (\text{A.24})$$

et la contrainte (A.18) se traduit par la relation :

$$4T_2 = \frac{1}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}} \Rightarrow T_1 = -\frac{T_2}{3} \quad (\text{A.25})$$

Lorsque la fonction $\Gamma_1(x, t)$ est non nulle, on obtient les contraintes :

$$\lambda_R(T) = \lambda_0 T^\alpha, \quad E(T) = E_0 T^\beta \quad (\text{A.26})$$

où α et β (avec $\beta \neq 4 + \alpha$) sont des constantes sans dimension. Les fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$ sont donc des lois de puissance de la température. Dans ce cas de figure, on note que la fonction $\Gamma_2(x, t)$ est toujours nulle. Les contraintes (A.26) insérées dans les relations (A.14) et (A.21) nous donnent :

$$\Gamma_1(x, t) = \frac{(2\xi_x - \tau_t)}{(4 + \alpha - \beta)} \quad (\text{A.27})$$

Dans ce cas, la contrainte (A.18) se traduit par la relation :

$$\frac{4}{4 + \alpha - \beta} = \frac{1}{4 + \alpha}, \quad \Rightarrow \quad \beta = -3(4 + \alpha) \quad (\text{A.28})$$

Dans chacun des cas énoncés, que ce soit pour des fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)T^3$ en lois exponentielles (A.23) ou en lois de puissance (A.26), les fonctions de coordonnées prennent la forme générale suivante :

$$\xi(x, t) = b_1 + (b_3 + b_4)x + b_5x^2 \quad \tau(t) = b_2 + 2b_3t \quad \eta(T) = \frac{D}{D_T} (2b_4 + 4b_5x) \quad (\text{A.29})$$

où la non-nullité des constantes b_4 et b_5 est conditionnée au respect des contraintes (A.23-A.25) ou (A.26-A.28). On obtient alors, en considérant les hypothèses (A.23) (fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$ en lois exponentielles) et (A.25), deux générateurs infinitésimaux supplémentaires notés G_4 et G_5 et donnés par :

$$G_4 = x \frac{\partial}{\partial x} + 2 \frac{T_1 T_2}{(T_1 - T_2)} \frac{\partial}{\partial T}, \quad G_5 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + x T_2 \frac{\partial}{\partial T} \quad (\text{A.30})$$

De la même façon, en considérant les hypothèses (A.26) (fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$ en lois de puissance) et (A.28), on obtient deux autres générateurs notés également G_4 et G_5 et donnés par :

$$G_4 = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2T}{(4 + \alpha - \beta)} \frac{\partial}{\partial T}, \quad G_5 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{xT}{4 + \alpha} \frac{\partial}{\partial T} \quad (\text{A.31})$$

Les différents générateurs et leurs symétries associées, calculées en suivant la méthode illustrée en section 4.2.3.3, sont présentés dans le Tableau 4.1.

A.1.2 Cas $D(T) = D_0$

Lorsque la fonction $D(T)$ est constante, on dispose du résultat :

$$\lambda_R T^3 = \frac{3D_0}{4a_{RC}} E_T \quad (\text{A.32})$$

qui suit la forme (A.8) du coefficient. On peut alors réécrire les contraintes (A.9), (A.12) et (A.15) sous la forme :

$$\eta_t = D_0 \eta_{xx}, \quad 2\xi_x = \tau_t \Rightarrow \xi_{xx} = 0, \quad \xi_t = -2D_0 \omega_x \quad (\text{A.33})$$

en notant que les fonctions de coordonnées $\xi(x)$ et $\tau(t)$ ne peuvent pas dépendre de la variable dépendante T . On peut ensuite montrer que l'équation (A.14) contraint la forme de la fonction de coordonnée $\eta(x, t, T)$ de la même façon que pour le cas précédent (équation (A.22)). On note que la fonction $\eta(x, t, T)$ est encore un polynôme de degré 1 en la température dont les coefficients $\Gamma_1(x, t)$ et $\Gamma_2(x, t)$ sont des fonctions quelconques des variables indépendantes x et t . Dans le cas où ces deux fonctions sont nulles, la fonction $\eta(x, t, T)$ l'est donc également et la résolution des différentes contraintes est immédiate.

Supposons à présent que l'on ait seulement $\Gamma_1(x, t) = 0$. La relation (A.14) nous donne alors :

$$\frac{\partial}{\partial T} \ln(\lambda_R T^3) = \frac{\omega(x, t)}{\Gamma_2(x, t)} \quad (\text{A.34})$$

qui est donc une fonction indépendante de la température. On peut montrer que cette contrainte (A.34), associée à la relation (A.32), mène au résultat suivant :

$$\lambda_R(T) = \frac{\lambda_0}{T^3} \exp\left(\frac{T}{T_1}\right), \quad E(T) = E_0 \exp\left(\frac{T}{T_1}\right) \quad \text{avec} \quad E_0 = \frac{4a_{RC}}{3D_0} \lambda_0 T_1 \quad (\text{A.35})$$

où T_1 est une constante homogène à une température. Les fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$ sont donc des lois exponentielles de la température. En insérant cette relation dans l'équation (A.34), on obtient alors :

$$\Gamma_2(x, t) = T_1 \omega(x, t) \quad (\text{A.36})$$

Si l'on suppose à présent que $\Gamma_1(x, t) \neq 0$, la contrainte (A.14) s'écrit :

$$\Gamma_1(x, t) \left(1 + T \frac{\partial}{\partial T} \ln(\lambda_R T^3)\right) + \Gamma_2(x, t) \frac{\partial}{\partial T} \ln(\lambda_R T^3) = \omega(x, t) \quad (\text{A.37})$$

Sachant que la fonction $\Gamma_1(x, t)$ est différente de 0, cette équation indique que la fonction $\Gamma_2(x, t)$ est nulle sauf si la contrainte suivante est respectée :

$$\left(\lambda_R T^3\right)_T = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{TT} = 0 \quad (\text{A.38})$$

Cela revient à étudier l'équation linéaire de la chaleur, qui est la forme de l'équation (A.1) dans laquelle on insère les contraintes (A.38). Ce cas particulier a déjà été abordé à de nombreuses reprises dans la littérature (voir par exemple Ibragimov [2006]) et on ne détaille pas ici les calculs menant à ses symétries.

Dans le cas où $\Gamma_2(x, t) = 0$, on obtient alors :

$$\left(1 + T \frac{\partial}{\partial T} \ln(\lambda_R T^3)\right) = \frac{\omega(x, t)}{\Gamma_1(x, t)} \quad (\text{A.39})$$

qui est donc une fonction indépendante de la température. Cette équation (A.39), associée à la relation (A.32), mène au résultat suivant :

$$\lambda_R(T) = \lambda_0 T^\alpha, \quad E(T) = E_0 T^{\alpha+4} \quad \text{avec} \quad E_0 = \frac{4a_R c}{3D_0} \frac{\lambda_0}{(4 + \alpha)} \quad (\text{A.40})$$

où α est une constante sans dimension. Les fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$ sont donc des lois de puissance de la température. En insérant cette relation dans l'équation (A.39), on obtient alors :

$$\Gamma_1(x, t) = \frac{T}{(4 + \alpha)} \omega(x, t) \quad (\text{A.41})$$

La forme générale des fonctions de coordonnées ξ , τ et η s'écrit :

$$\xi(x, t) = b_1 + b_3 x + b_4 x t + b_5 t, \quad \tau(t) = b_2 + 2b_3 t + b_4 t^2, \quad \eta(x, t, T) = \Gamma_1(x, t) T + \Gamma_2(x, t) \quad (\text{A.42})$$

où les paramètres b_i sont des constantes indépendantes. La fonction $\eta(x, t, T)$ revêt différentes formes selon le choix des fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$. Dans le cas où les fonctions $\Gamma_1(x, t)$ et $\Gamma_2(x, t)$ sont toutes les deux nulles, on a simplement $\eta = 0$, ce qui conduit à la nullité des paramètres b_4 et b_5 . Dans ce cas, on a :

$$\xi(x, t) = b_1 + b_3 x, \quad \tau(t) = b_2 + 2b_3 t, \quad \eta(x, t, T) = 0 \quad (\text{A.43})$$

Dans le cas où les fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$ sont des lois exponentielles de la forme (A.35), on obtient les fonctions de coordonnées :

$$\xi(x, t) = b_1 + b_3 x + b_4 x t + b_5 t, \quad \tau(t) = b_2 + 2b_3 t + b_4 t^2 \quad (\text{A.44})$$

$$\eta(x, t) = b_6 - T_1 \left[\left(\frac{t}{2} + \frac{x^2}{4D_0} \right) b_4 + \frac{b_5}{2D_0} x \right] \quad (\text{A.45})$$

Enfin, dans le cas où les fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$ sont des lois de puissance de la forme (A.40), on obtient les fonctions de coordonnées :

$$\xi(x, t) = b_1 + b_3 x + b_4 x t + b_5 t, \quad \tau(t) = b_2 + 2b_3 t + b_4 t^2 \quad (\text{A.46})$$

$$\eta(x, t, T) = T \left(b_6 - \frac{1}{(4 + \alpha)} \left[\left(\frac{t}{2} + \frac{x^2}{4D_0} \right) b_4 + \frac{b_5}{2D_0} x \right] \right) \quad (\text{A.47})$$

Enfin, comme expliqué dans le chapitre 4, on peut obtenir un ensemble de générateurs infinitésimaux associés à ces fonctions de coordonnées, en annulant un à un les paramètres b_i . On obtient toujours trois générateurs, donnés par :

$$G_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad G_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad G_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t} \quad (\text{A.48})$$

Ensuite, dans le cas de fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$ en lois exponentielles de la forme (A.35), on obtient les trois générateurs supplémentaires suivants :

$$G_4 = xt \frac{\partial}{\partial x} + t^2 \frac{\partial}{\partial t} - T_1 \left(\frac{t}{2} + \frac{x^2}{4D_0} \right) \frac{\partial}{\partial T}, \quad G_5 = t \frac{\partial}{\partial x} - \frac{T_1 x}{2D_0} \frac{\partial}{\partial T}, \quad G_6 = \frac{\partial}{\partial T} \quad (\text{A.49})$$

Enfin, dans le cas des fonctions de fonctions $E(T)$ et $\lambda_R(T)$ en lois de puissance de la forme (A.40), on obtient également trois générateurs supplémentaires, donnés par :

$$G_4 = xt \frac{\partial}{\partial x} + t^2 \frac{\partial}{\partial t} - \frac{T}{(4+\alpha)} \left(\frac{t}{2} + \frac{x^2}{4D_0} \right) \frac{\partial}{\partial T}, \quad G_5 = t \frac{\partial}{\partial x} - \frac{T x}{2D_0(4+\alpha)} \frac{\partial}{\partial T}, \quad G_6 = T \frac{\partial}{\partial T} \quad (\text{A.50})$$

Si on compare ces derniers générateurs donnés par (A.50) à ceux de l'équation linéaire de la chaleur [Ibragimov, 2006], on se rend compte qu'on dispose des six mêmes générateurs de base. Cependant, dans le cas particulier où la contrainte (A.38) est vérifiée, on obtient un générateur supplémentaire noté $G_\infty = \Gamma_2(x, t) \partial / \partial T$ où la fonction $\Gamma_2(x, t)$ vérifie l'équation linéaire de la chaleur. Ces résultats, ainsi que les symétries associées aux différents générateurs infinitésimaux, sont résumés dans le Tableau 4.2.

A.2 Condition d'invariance pour les symétries d'équivalence

De la même façon que pour l'analyse classique, on obtient un ensemble de contraintes sur les fonctions de coordonnées $\xi(x, t)$, $\tau(t)$, et $\eta(x, t, T)$, mais aussi sur $\epsilon_1(T, E, \lambda_R)$ et $\epsilon_2(T, E, \lambda_R)$. On obtient, en prenant en compte les différentes dépendances de ces fonctions, l'équation suivante :

$$\begin{aligned} T_x \left(\frac{4a_{RC}}{3} \xi_{xx} - E_T \xi_t \right) + T_x^2 \frac{4a_{RC}}{3} \left(\left[\epsilon_{1E} - \tau_t + \frac{\epsilon_{1T}}{E_T} + \frac{\lambda_{RT}}{E_T} \epsilon_{1\lambda_R} \right] \left(\lambda_{RT} T^3 + 3\lambda_R T^2 \right) - \lambda_{RT} \left(3T^2 \eta + 2T^3 [\eta_T - \xi_x] \right) \right) \\ - T_x^2 \frac{4a_{RC}}{3} \left(3\epsilon_2 T^2 + T^3 \left[\epsilon_{2T} + \lambda_{RT} \left[\epsilon_{2\lambda_R} - \eta_T \right] + E_T \epsilon_{2E} \right] + \lambda_R \left(6T \eta + 6T^2 [\eta_T - \xi_x] + \eta_{TT} T^3 \right) \right) \\ - T_{xx} \frac{4a_{RC}}{3} \lambda_R T^3 \left(\epsilon_{1E} - \tau_t + \frac{\epsilon_{1T}}{E_T} + \frac{\lambda_{RT}}{E_T} \epsilon_{1\lambda_R} - \frac{\epsilon_2}{\lambda_R} - \frac{3}{T} \eta - \eta_T + 2\xi_x \right) + \left(E_T \eta_t - \frac{4a_{RC}}{3} \lambda_R T^3 \eta_{xx} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

L'équation (4.112) est une équation polynomiale en les différentes combinaisons de dérivées des variables dépendantes T , E , et λ_R , que l'on a mises en évidence en couleurs. Étant donné que les fonctions de coordonnées ne peuvent dépendre de ces dérivées, cette équation ne peut être satisfaite qu'à la condition où chaque terme en facteur de celles-ci sont nuls. On obtient ainsi un ensemble de 10 équations déterminantes données par :

$$\xi_t = \xi_{xx} = 0, \quad \epsilon_{1T} = \epsilon_{1\lambda_R} = \epsilon_{2E} = 0, \quad \eta_t = \eta_{xx} = 0 \quad (\text{A.52})$$

$$(\epsilon_{1E} - \tau_t) T^3 - 3T^2 \eta - \eta_T + 2T^3 \xi_x - T^3 \epsilon_{2\lambda_R} = 0 \quad (\text{A.53})$$

$$(\epsilon_{1E} - \tau_t) 3\lambda_R T^2 - 3\epsilon_{2T} T^2 - T^3 \epsilon_{2T} - \lambda_R \left(6T\eta + 6T^2 [\eta_T - \xi_x] + \eta_{TT} T^3 \right) = 0 \quad (\text{A.54})$$

$$(\epsilon_{1E} - \tau_t) - \frac{\epsilon_2}{\lambda_R} - \frac{3}{T} \eta - \eta_T + 2\xi_x = 0 \quad (\text{A.55})$$

Les trois dernières équations permettent d'obtenir trois contraintes définissant les fonctions de coordonnées, que l'on écrit sous la forme :

$$\xi(x), \quad \tau(t), \quad \eta(T), \quad \epsilon_1(E), \quad \epsilon_2(T, \lambda_R) \quad (\text{A.56})$$

$$(2\xi_x - \tau_t) + \epsilon_{1E} - \epsilon_{2\lambda_R} = \eta_T + \frac{3}{T} \eta, \quad \epsilon_{2\lambda_R} = \frac{\epsilon_2}{\lambda_R}, \quad \epsilon_{2T} = -\lambda_R \left[\eta_{TT} + 3 \left(\frac{\eta}{T} \right)_T \right] \quad (\text{A.57})$$

Ces différentes équations nous permettent d'obtenir la forme générale des fonctions de coordonnées, sans aucune contrainte sur la forme des fonctions E et λ_R . La suite de l'étude est présentée dans le chapitre 4.

Bibliographie

- Afshar RAD, T., DESSELBERGER, M., DUNNE, M., EDWARDS, J., FOSTER, J., HOARTY, D., JONES, M., ROSE, S., ROSEN, P., TAYLOR, R. *et al.* (1994). Supersonic propagation of an ionization front in low density foam targets driven by thermal radiation. *Physical Review Letters*, 73(1):74. *6 citations pages 25, 26, 65, 66, 68, et 79*
- ALBERTAZZI, B., MABEY, P., MICHEL, T., RIGON, G., MARQUÈS, J., PIKUZ, S., RYAZANTSEV, S., FALIZE, E., Van BOX SOM, L., MEINECKE, J. *et al.* (2022). Triggering star formation : Experimental compression of a foam ball induced by Taylor–Sedov blast waves. *Matter and Radiation at Extremes*, 7(3):036902. *Cité page 25*
- ASVESTARI, E., RINDLISBACHER, T., POMOELL, J. et KILPUA, E. K. (2022). The Spheromak Tilting and How it Affects Modeling Coronal Mass Ejections. *The Astrophysical Journal*, 926(1):87. *Cité page 20*
- AUBERT, D. et TEYSSIER, R. (2008). A radiative transfer scheme for cosmological reionization based on a local Eddington tensor. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 387(1):295–307. *Cité page 48*
- AXFORD, W. I. (1961). Ionization front in interstellar gas : The structure of ionization fronts. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 253(1029): 301–333. *Cité page 16*
- BACK, C., BAUER, J., HAMMER, J., LASINSKI, B., TURNER, R., RAMBO, P., LANDEN, O., SUTER, L., ROSEN, M. et HSING, W. (2000a). Diffusive, supersonic x-ray transport in radiatively heated foam cylinders. *Physics of Plasmas*, 7(5):2126–2134. *6 citations pages 66, 67, 68, 69, 80, et 129*
- BACK, C., BAUER, J., LANDEN, O., TURNER, R., LASINSKI, B., HAMMER, J., ROSEN, M., SUTER, L. et HSING, W. (2000b). Detailed measurements of a diffusive supersonic wave in a radiatively heated foam. *Physical Review Letters*, 84(2):274. *9 citations pages 25, 26, 66, 67, 68, 69, 77, 80, et 144*
- BALLANTYNE, D. et EVERETT, J. (2005). On the dynamics of suddenly heated accretion disks around neutron stars. *The Astrophysical Journal*, 626(1):364. *3 citations pages 33, 34, et 35*
- BARKER, T. (1980). The ionization structure of the ring nebula. I-Sulfur and argon. *The Astrophysical Journal*, 240:99–104. *Cité page 15*

- BARRERO, A. et SANMARTIN, J. R. (1977). Self-similar motion of laser fusion plasmas. Absorption in an unbounded plasma. *The Physics of Fluids*, 20(7):1155–1163. *Cité page 41*
- BASINSKA, E., LEWIN, W., COMINSKY, L., Van PARADIJS, J. et MARSHALL, F. (1980). The very long type II X-ray bursts from the rapid burster. *The Astrophysical Journal*, 241:787–792. *Cité page 32*
- BASKO, M. et JOHNER, J. (1998). Ignition energy scaling of inertial confinement fusion targets. *Nuclear Fusion*, 38(12):1779. *Cité page 81*
- BAUMANN, D. (2018). Primordial cosmology. In *Theoretical Advanced Study Institute Summer School 2017" Physics at the Fundamental Frontier"*, volume 305, page 009. SISSA Medialab. *Cité page 15*
- BELLAN, P. M. (2000). *Spheromaks : a practical application of magnetohydrodynamic dynamos and plasma self-organization*. World Scientific. *Cité page 19*
- BISKAMP, D. et MÜLLER, W.-C. (2000). Scaling properties of three-dimensional isotropic magnetohydrodynamic turbulence. *Physics of Plasmas*, 7(12):4889–4900. *Cité page 70*
- BLUMAN, G. W., CHEVIAKOV, A. F. et ANCO, S. C. (2010). Construction of Mappings Relating Differential Equations. In *Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations*, pages 121–186. Springer. *3 citations pages 81, 112, et 171*
- BLUMENTHAL, G. R. (1974). The Poynting-Robertson effect and Eddington limit for electrons scattering with hard photons. *The Astrophysical Journal*, 188:121–130. *Cité page 35*
- BOUQUET, S., TEYSSIER, R. et CHIEZE, J. P. (2000). Analytical study and structure of a stationary radiative shock. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 127(2):245. *Cité page 18*
- BOZIER, J., THIELL, G., Le BRETON, J., AZRA, S., DECROISSETTE, M. et SCHIRMANN, D. (1986). Experimental observation of a radiative wave generated in xenon by a laser-driven supercritical shock. *Physical Review Letters*, 57(11):1304. *Cité page 65*
- BUCKINGHAM, E. (1914). On physically similar systems ; illustrations of the use of dimensional equations. *Physical review*, 4(4):345. *Cité page 70*
- BUCKINGHAM, E. (1915). The principle of similitude. *Nature*, 96(2406):396–397. *Cité page 70*
- BUISSON, D., ALTAMIRANO, D., BULT, P., MANCUSO, G. C., GÜVER, T., JAISAWAL, G. K., HARE, J., ALBAYATI, A., ARZOUMANIAN, Z., CASTRO SEGURA, N. *et al.* (2020). Discovery of thermonuclear (Type I) X-ray bursts in the X-ray binary Swift J1858. 6–0814 observed with NICER and NuSTAR. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 499(1):793–803. *Cité page 31*
- BULT, P., ALTAMIRANO, D., ARZOUMANIAN, Z., BILOUS, A. V., CHAKRABARTY, D., GENDREAU, K. C., GÜVER, T., JAISAWAL, G. K., KUULKERS, E., MALACARIA, C. *et al.* (2021). The X-ray bursts of XTE J1739–285 : a NICER sample. *The Astrophysical Journal*, 907(2):79. *Cité page 31*

- BURNS, R., SUGIYAMA, K., HIROTA, T., KIM, K.-T., SOBOLEV, A., STECKLUM, B., MACLEOD, G., YONEKURA, Y., OLECH, M., OROSZ, G. *et al.* (2020). A heatwave of accretion energy traced by masers in the G358-MM1 high-mass protostar. *Nature Astronomy*, 4(5):506–510. *Cité page 18*
- BURROWS, C. J., KRIST, J., HESTER, J. J., SAHAI, R., TRAUGER, J. T., STAPELFELDT, K. R., GALLAGHER III, J. S., BALLESTER, G. E., CASERTANO, S., CLARKE, J. T. *et al.* (1995). Hubble space telescope observations of the SN 1987A triple ring nebula. *Astrophysical Journal*, 452(2):680–684. *Cité page 15*
- BUSSCHAERT, C. (2013). *Etude théorique, numérique et expérimentale de la dynamique des chocs d'accrétion dans les variables cataclysmiques magnétiques*. Thèse de doctorat, Observatoire de Paris. *Cité page 74*
- CARVER, R. L., CUNNINGHAM, A. J., FRANK, A., HARTIGAN, P., COKER, R., WILDE, B., FOSTER, J. et ROSEN, P. (2010). Laboratory astrophysics and non-ideal equations of state : the next challenges for astrophysical MHD simulations. *High Energy Density Physics*, 6(4):381–390. *Cité page 80*
- CASNER, A., CAILLAUD, T., DARBON, S., DUVAL, A., THFOUIN, I., JADAUD, J., LEBRETON, J., REVERDIN, C., ROSSE, B., ROSCH, R. *et al.* (2015). LMJ/PETAL laser facility : Overview and opportunities for laboratory astrophysics. *High Energy Density Physics*, 17:2–11. *Cité page 21*
- CASTOR, J. I. (2004). *Radiation hydrodynamics*. Cambridge University Press. *2 citations pages 13 et 39*
- CHEVALIER, R. et THEYS, J. (1975). Optically thin radiating shock waves and the formation of density inhomogeneities. *The Astrophysical Journal*, 195:53–60. *Cité page 18*
- CIARDI, A., VINCI, T., FUCHS, J., ALBERTAZZI, B., RICONDA, C., PÉPIN, H. et PORTUGALL, O. (2013). Astrophysics of Magnetically Collimated Jets Generated from Laser-Produced Plasmas. *Physical Review Letters*, 110(2):025002. *Cité page 25*
- COGGESHALL, S. V. et AXFORD, R. A. (1986). Lie group invariance properties of radiation hydrodynamics equations and their associated similarity solutions. *The Physics of fluids*, 29(8):2398–2420. *2 citations pages 87 et 88*
- COHEN, A. P. et HEIZLER, S. I. (2018). Modeling of supersonic radiative Marshak waves using simple models and advanced simulations. *Journal of Computational and Theoretical Transport*, 47(4-6):378–399. *Cité page 64*
- COHEN, A. P., MALAMUD, G. et HEIZLER, S. I. (2020). Key to understanding supersonic radiative Marshak waves using simple models and advanced simulations. *Physical Review Research*, 2(2): 023007. *6 citations pages 41, 64, 67, 72, 80, et 123*
- COHEN, D. H., MACFARLANE, J. J., JAANIMAGI, P., LANDEN, O. L., HAYNES, D. A., CONNERS, D. S., PENROSE, K. L. et SHUPE, N. C. (2004). Tracer spectroscopy diagnostics of doped ablaters in inertial confinement fusion experiments on OMEGA. *Physics of Plasmas*, 11(5):2702–2708. *Cité page 129*

- COMMERCON, B., TEYSSIER, R., AUDIT, E., HENNEBELLE, P. et CHABRIER, G. (2011). Radiation hydrodynamics with adaptive mesh refinement and application to prestellar core collapse-I. Methods. *Astronomy & Astrophysics*, 529:A35. *Cité page 48*
- COUNCIL, N. R., COMMITTEE, P. S. *et al.* (2003). *Frontiers in high energy density physics : the X-games of contemporary science*. National Academies Press. *Cité page 21*
- COURTOIS, C., ROBERT, C., BRETHERAU, D., FARIAUT, J., FERRI, M., GEOFFRAY, I., LEGAY, G., PHILIPPE, F., ROSCH, R., SOULLIE, G. et VILLETTE, B. (2021). Supersonic-to-subsonic transition of a radiation wave observed at the LMJ. *Physics of Plasmas*, 28(7):073301. *8 citations pages 26, 65, 66, 67, 68, 78, 129, et 160*
- CROSS, J., GREGORI, G., FOSTER, J., GRAHAM, P., Bonnet BIDAUD, J.-M., BUSSCHAERT, C., CHARPENTIER, N., DANSON, C., DOYLE, H., DRAKE, R. *et al.* (2016). Laboratory analogue of a supersonic accretion column in a binary star system. *Nature communications*, 7(1):1–7. *2 citations pages 25 et 81*
- CUMMING, A. (2003). Models of type I x-ray bursts from 4u 1820–30. *The Astrophysical Journal*, 595(2):1077. *Cité page 32*
- CUMMING, A. (2004). Thermonuclear X-ray bursts : theory vs. observations. *Nuclear Physics B- Proceedings Supplements*, 132:435–445. *Cité page 31*
- DA SILVA, L., MACGOWAN, B., KANIA, D., HAMMEL, B., BACK, C., HSIEH, E., DOYAS, R., IGLESIAS, C., ROGERS, F. et LEE, R. (1992). Absorption measurements demonstrating the importance of $\delta n=0$ transitions in the opacity of iron. *Physical review letters*, 69(3):438. *Cité page 25*
- DAY, C. et TAWARA, Y. (1990). The Rising Phase of X-Ray Bursts from MXB : 1728-34-Constraints on the Spreading of Thermonuclear Flashes Over the Surface of the Neutron Star. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 245:31P. *Cité page 31*
- DEGENAAR, N., BALLANTYNE, D. R., BELLONI, T., CHAKRABORTY, M., CHEN, Y.-P., JI, L., KRETSCHMAR, P., KUULKERS, E., LI, J., MACCARONE, T. J. *et al.* (2018). Accretion disks and coronae in the x-ray flashlight. *Space Science Reviews*, 214(1):1–61. *Cité page 33*
- del VALLE, M., ARAUDO, A. et SUZUKI-VIDAL, F. (2022). Adiabatic–radiative shock systems in yso jets and novae outflows. *Astronomy & Astrophysics*, 660:A104. *Cité page 18*
- DOPITA, M. A., SEITENZAHL, I. R., SUTHERLAND, R. S., NICHOLLS, D. C., VOGT, F. P., GHAVAMIAN, P. et RUITER, A. J. (2019). Calibrating Interstellar Abundances Using Supernova Remnant Radiative Shocks. *The Astronomical Journal*, 157(2):50. *Cité page 18*
- DOSS, F. W., KLINE, J. L., FLIPPO, K. A., PERRY, T. S., DEVOLDER, B. G., TREGILLIS, I., LOOMIS, E. N., MERRITT, E. C., MURPHY, T. J., WELSER-SHERRILL, L. *et al.* (2015). The shock/shear platform for planar radiation-hydrodynamics experiments on the national ignition facility. *Physics of Plasmas*, 22(5):056303. *Cité page 153*

- DRAKE, R., HAZAK, G., KEITER, P., DAVIS, J., PATTERSON, C., FRANK, A., BLACKMAN, E. et BUSQUET, M. (2016). Design of laboratory experiments to study photoionization fronts driven by thermal sources. *The Astrophysical Journal*, 833(2):249. Cité page 26
- DRAKE, R. P. (2005). Radiative shocks in astrophysics and the laboratory. In *High Energy Density Laboratory Astrophysics*, pages 49–59. Springer. Cité page 18
- DRAKE, R. P. (2007). Theory of radiative shocks in optically thick media. *Physics of Plasmas*, 14(4): 043301. 2 citations pages 18 et 56
- DRAKE, R. P. (2010). High-energy-density physics. *Phys. Today*, 63(6):28. Cité page 25
- DRAKE, R. P. (2018). A journey through high-energy-density physics. *Nuclear Fusion*, 59(3):035001. Cité page 25
- DUBOIS, Y., DEVRIENDT, J., SLYZ, A. et TEYSSIER, R. (2012). Self-regulated growth of supermassive black holes by a dual jet–heating active galactic nucleus feedback mechanism : methods, tests and implications for cosmological simulations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 420(3):2662–2683. Cité page 48
- ERDMANN, K. et WILDON, M. J. (2006). *Introduction to Lie algebras*, volume 122. Springer. Cité page 88
- FALIZE, E., BOUQUET, S. et MICHAUT, C. (2009). Scaling laws for radiating fluids : the pillar of laboratory astrophysics. *Astrophysics and Space Science*, 322(1):107–111. 2 citations pages 24 et 71
- FALIZE, É., DIZIÈRE, A. et LOUPIAS, B. (2011a). Invariance concepts and scalability of two-temperature astrophysical radiating fluids. *Astrophysics and Space Science*, 336(1):201–205. 2 citations pages 64 et 81
- FALIZE, E., MICHAUT, C. et BOUQUET, S. (2011b). Similarity properties and scaling laws of radiation hydrodynamic flows in laboratory astrophysics. *The Astrophysical Journal*, 730(2):96. 5 citations pages 38, 70, 72, 81, et 95
- FARCY, M., ROSDAHL, J., DUBOIS, Y., BLAIZOT, J. et Martin ALVAREZ, S. (2022). Radiation-magnetohydrodynamics simulations of cosmic ray feedback in disc galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. Cité page 48
- FAURE, J., FROMANG, S. et LATTER, H. (2014). Thermodynamics of the dead-zone inner edge in protoplanetary disks. *Astronomy & Astrophysics*, 564:A22. Cité page 48
- FEYNMAN, R. P., LEIGHTON, R. B. et SANDS, M. (1965). The feynman lectures on physics ; vol. i. *American Journal of Physics*, 33(9):750–752. Cité page 81
- FISKER, J. L., SCHATZ, H. et THIELEMANN, F.-K. (2008). Explosive hydrogen burning during type I X-ray bursts. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 174(1):261. Cité page 31

- FOGLIZZO, T., MASSET, F., GUILLET, J. et DURAND, G. (2012). Shallow water analogue of the standing accretion shock instability : experimental demonstration and a two-dimensional model. *Physical Review Letters*, 108(5):051103. Cité page 172
- FRAGILE, P. C., BALLANTYNE, D. R. et BLANKENSHIP, A. (2020). Interactions of type I X-ray bursts with thin accretion disks. *Nature Astronomy*, 4(5):541–546. 3 citations pages 19, 31, et 36
- FRAGILE, P. C., BALLANTYNE, D. R., MACCARONE, T. J. et WITRY, J. W. (2018). Simulating the collapse of a thick accretion disk due to a Type I X-ray burst from a neutron star. *The Astrophysical Journal Letters*, 867(2):L28. 2 citations pages 31 et 36
- FRANCO, J., KURTZ, S., GARCÍA SEGURA, G. et HOFNER, P. (2000). The evolution of HII regions. *Astrophysics and Space Science*, 272(1):169–179. Cité page 16
- FRANK, J., KING, A., RAINE, D. *et al.* (2002). *Accretion power in astrophysics*. Cambridge university press. 2 citations pages 33 et 34
- FROMANG, S., HENNEBELLE, P. et TEYSSIER, R. (2006). A high order Godunov scheme with constrained transport and adaptive mesh refinement for astrophysical magnetohydrodynamics. *Astronomy & Astrophysics*, 457(2):371–384. Cité page 48
- FRYER, C., DODD, E., EVEN, W., FONTES, C., GREEFF, C., HUNGERFORD, A., KLINE, J., MUSSACK, K., TREGILLIS, I., WORKMAN, J. *et al.* (2016). Uncertainties in radiation flow experiments. *High energy density physics*, 18:45–54. Cité page 157
- FUJIMOTO, M., HANAWA, T. et MIYAJI, S. (1981). Shell flashes on accreting neutron stars and X-ray bursts. *The Astrophysical Journal*, 247:267–278. Cité page 33
- FUJIOKA, S., TAKABE, H., YAMAMOTO, N., SALZMANN, D., WANG, F., NISHIMURA, H., LI, Y., DONG, Q., WANG, S., ZHANG, Y. *et al.* (2009a). X-ray astronomy in the laboratory with a miniature compact object produced by laser-driven implosion. *Nature Physics*, 5(11):821–825. Cité page 23
- FUJIOKA, S., YAMAMOTO, N., SALZMANN, D., WANG, F., LI, Y., DONG, Q., WANG, S., ZHANG, Y., RHEE, Y., LEE, Y. *et al.* (2009b). Laboratory spectroscopy of silicon plasmas photoionized by mimic astrophysical compact objects. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 51(12):124032. Cité page 23
- GALLOWAY, D. K., GOODWIN, A. J. et KEEK, L. (2017). Thermonuclear burst observations for model comparisons : a reference sample. *Publications of the Astronomical Society of Australia*, 34. Cité page 31
- GALLOWAY, D. K. et KEEK, L. (2021). Thermonuclear X-ray bursts. In *Timing Neutron Stars : Pulsations, Oscillations and Explosions*, pages 209–262. Springer. 2 citations pages 30 et 32
- GALLOWAY, D. K., MUNO, M. P., HARTMAN, J. M., PSALTIS, D. et CHAKRABARTY, D. (2008). Thermonuclear (Type I) X-ray bursts observed by the Rossi X-ray timing explorer. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 179(2):360. Cité page 31

- GARDNER, J. P., MATHER, J. C., CLAMPIN, M., DOYON, R., GREENHOUSE, M. A., HAMMEL, H. B., HUTCHINGS, J. B., JAKOBSEN, P., LILLY, S. J., LONG, K. S. *et al.* (2006). The james webb space telescope. *Space Science Reviews*, 123(4):485–606. *Cité page 9*
- GARNIER, J., MALINIÉ, G., SAILLARD, Y. et Cherfils CLÉROUIN, C. (2006). Self-similar solutions for a nonlinear radiation diffusion equation. *Physics of Plasmas*, 13(9):092703. *3 citations pages 18, 41, et 67*
- GLEDHILL, T. et FORDE, K. (2015). Imaging the transition between pre-planetary and planetary nebulae : integral field spectroscopy of hot post-AGB stars with NIFS. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 447(2):1080–1095. *Cité page 16*
- GOLDSWORTHY, F. (1958). On the propagation and structure of ionization fronts. *In Symposium-International Astronomical Union*, volume 8, pages 1062–1068. Cambridge University Press. *Cité page 16*
- GONDHALEKAR, P., PHILLIPS, A. et WILSON, R. (1980). Observations of the interstellar ultraviolet radiation field from the S2/68 sky-survey telescope. *Astronomy and Astrophysics*, 85:272–280. *Cité page 9*
- GONZALEZ, M., AUDIT, E. et HUYNH, P. (2007). HERACLES : a three-dimensional radiation hydrodynamics code. *Astronomy & Astrophysics*, 464(2):429–435. *Cité page 48*
- GRAY, W. J., KEITER, P., LEFEVRE, H., PATTERSON, C., DAVIS, J., POWELL, K., KURANZ, C. et DRAKE, R. (2019). Atomic modeling of photoionization fronts in nitrogen gas. *Physics of Plasmas*, 26(5):052901. *Cité page 26*
- GRAY, W. J., KEITER, P., LEFEVRE, H., PATTERSON, C., DAVIS, J., van Der HOLST, B., POWELL, K. et DRAKE, R. (2018). Laboratory photoionization fronts in nitrogen gas : A numerical feasibility and parameter study. *The Astrophysical Journal*, 858(1):22. *Cité page 26*
- GRINDLAY, J., GURSKY, H., SCHNOPPER, H., PARSIGNAULT, D., HEISE, J., BRINKMAN, A. et SCHRIJVER, J. (1976). Discovery of intense X-ray bursts from the globular cluster NGC 6624. *The Astrophysical Journal*, 205:L127–L130. *Cité page 30*
- GURZADYAN, V. et MARGARIAN, A. (1996). Inverse Compton testing of fundamental physics and the cosmic background radiation. *Physica Scripta*, 53(5):513. *Cité page 12*
- GÜVER, T., BOZTEPE, T., BALLANTYNE, D. R., BOSTANCI, Z. F., BULT, P., JAISAWAL, G. K., GÖĞÜŞ, E., STROHMAYER, T. E., ALTAMIRANO, D., GUILLOT, S. *et al.* (2022). A NICER look at thermonuclear X-ray bursts from Aql X-1. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 510(2):1577–1596. *Cité page 31*
- GUYMER, T., MOORE, A., MORTON, J., KLINE, J., ALLAN, S., BAZIN, N., BENSTEAD, J., BENTLEY, C., COMLEY, A., COWAN, J. *et al.* (2015). Quantifying equation-of-state and opacity errors using integrated supersonic diffusive radiation flow experiments on the National Ignition Facility. *Physics of Plasmas*, 22(4):043303. *5 citations pages 66, 67, 68, 80, et 158*

- HAEHNELT, M. G., MADAU, P., KUDRITZKI, R. et HAARDT, F. (2001). An ionizing ultraviolet background dominated by massive stars. *The Astrophysical Journal*, 549(2):L151. *Cité page 9*
- HAMMER, J. H. et ROSEN, M. D. (2003). A consistent approach to solving the radiation diffusion equation. *Physics of Plasmas*, 10(5):1829–1845. *5 citations pages 41, 43, 50, 51, et 120*
- HANSEN, C. et Van HORN, H. (1975). Steady-state nuclear fusion in accreting neutron-star envelopes. *The Astrophysical Journal*, 195:735–741. *Cité page 30*
- HAYWARD, E. (1970). *Photonuclear reactions*, volume 118. US National Bureau of Standards. *Cité page 12*
- HENNEBELLE, P., COMMERÇON, B., JOOS, M., KLESSEN, R., KRUMHOLZ, M., TAN, J. et TEYSSIER, R. (2011). Collapse, outflows and fragmentation of massive, turbulent and magnetized prestellar barotropic cores. *Astronomy & Astrophysics*, 528:A72. *Cité page 48*
- HENNEBELLE, P., COMMERÇON, B., LEE, Y.-N. et CHARNOZ, S. (2020). What determines the formation and characteristics of protoplanetary discs? *Astronomy & Astrophysics*, 635:A67. *Cité page 48*
- HURRICANE, O. et HAMMER, J. (2006). Bent marshak waves. *Physics of Plasmas*, 13(11):113303. *3 citations pages 41, 64, et 143*
- HYDON, P. E. et HYDON, P. E. (2000). *Symmetry methods for differential equations : a beginner's guide*. Cambridge University Press. *2 citations pages 85 et 88*
- IBRAGIMOV, N., KARA, A. et MAHOMED, F. (1998). Lie–Bäcklund and Noether symmetries with applications. *Nonlinear Dynamics*, 15(2):115–136. *Cité page 85*
- IBRAGIMOV, N. H. (2006). *Selected works : Lie group analysis, differential equations, Riemannian geometry, Lie-Bäcklund groups, mathematical physics*. ALGA Publications. *4 citations pages 85, 88, 177, et 179*
- IFFRIG, O. et HENNEBELLE, P. (2015). Mutual influence of supernovae and molecular clouds. *Astronomy & Astrophysics*, 576:A95. *Cité page 48*
- ILIEV, I. T., CIARDI, B., ALVAREZ, M. A., MASELLI, A., FERRARA, A., GNEDIN, N. Y., MELLEMA, G., NAKAMOTO, T., NORMAN, M. L., RAZOUMOV, A. O. *et al.* (2006). Cosmological radiative transfer codes comparison project–I. The static density field tests. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 371(3):1057–1086. *Cité page 16*
- ILIEV, I. T., WHALEN, D., MELLEMA, G., AHN, K., BAEK, S., GNEDIN, N. Y., KRAVTSOV, A. V., NORMAN, M., RAICEVIC, M., REYNOLDS, D. R. *et al.* (2009). Cosmological radiative transfer comparison project–II. The radiation-hydrodynamic tests. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 400(3):1283–1316. *Cité page 16*

- Ji YAN, Z., Jia MIN, Y., Shao EN, J., Yong SHENG, L., Guo HONG, Y., Yao NAN, D., Yi XIANG, H. et XIN, H. (2010). Experimental observation of ionization and shock fronts in foam targets driven by thermal radiation. *Chinese Physics B*, 19(2):025201. 3 citations pages 66, 67, et 68
- JIANG, S., XU, Y., DING, Y., LAI, D., ZHENG, Z., HUANG, Y., LI, J., SUN, K., HU, X., ZHANG, W. *et al.* (2005). Experimental investigation of supersonic radiation propagation in low-density plastic and copper-doped foams. *Science in China Series G : Physics and Astronomy*, 48(5):549–558. 4 citations pages 66, 68, 79, et 129
- KAHN, F. (1954). The acceleration of interstellar clouds. *Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands*, 12:187. Cité page 16
- KAKIICHI, K. et GRONKE, M. (2021). Radiation Hydrodynamics of Turbulent H ii Regions in Molecular Clouds : A Physical Origin of LyC Leakage and the Associated Ly α Spectra. *The Astrophysical Journal*, 908(1):30. Cité page 48
- KEEK, L., ARZOUMANIAN, Z., BULT, P., CACKETT, E., CHAKRABARTY, D., CHENEVEZ, J., FABIAN, A., GENDREAU, K., GUILLOT, S., GÜVER, T. *et al.* (2018). NICER observes the effects of an X-ray burst on the accretion environment in Aql X-1. *The Astrophysical Journal Letters*, 855(1):L4. Cité page 31
- KEITER, P., GUNDERSON, M., FOSTER, J., ROSEN, P., COMLEY, A., TAYLOR, M. et PERRY, T. (2008). Radiation transport in inhomogeneous media. *Physics of Plasmas*, 15(5):056901. Cité page 66
- KIKUCHI, M. et AZUMI, M. (2012). Steady-state tokamak research : Core physics. *Reviews of Modern Physics*, 84(4):1807. Cité page 20
- KING, A., PRINGLE, J. et LIVIO, M. (2007). Accretion disc viscosity : how big is alpha ? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 376(4):1740–1746. 2 citations pages 33 et 45
- KING, A. R. et POUNDS, K. A. (2003). Black hole winds. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 345(2):657–659. Cité page 15
- KLEIN, O. et NISHINA, Y. (1929). Über die Streuung von Strahlung durch freie Elektronen nach der neuen relativistischen Quantendynamik von Dirac. *Zeitschrift für Physik*, 52(11):853–868. Cité page 14
- KOENIG, M., VINCI, T., BENUZZI-MOUNAIX, A., OZAKI, N., RAVASIO, A., Rabec le GLOHAEC, M., BOIREAU, L., MICHAUT, C., BOUQUET, S., ATZENI, S. *et al.* (2006). Radiative shocks : An opportunity to study laboratory astrophysics. *Physics of Plasmas*, 13(5):056504. Cité page 18
- KRAJEWSKA, K., VÉLEZ, F. C. et KAMIŃSKI, J. (2015). Generalized klein-nishina formula. *Physical Review A*, 91(6):062106. Cité page 14
- KRAULAND, C., DRAKE, R., KURANZ, C., LOUPIAS, B., PLEWA, T., HUNTINGTON, C., KACZALA, D., KLEIN, S., SWEENEY, R., YOUNG, R. *et al.* (2012). Reverse radiative shock laser experiments relevant to accreting streaming-disk impact in interacting binaries. *The Astrophysical Journal Letters*, 762(1):L2. Cité page 25

- KRAULAND, C., DRAKE, R., KURANZ, C., SWEENEY, R., GROSSKOPF, M., KLEIN, S., GILLESPIE, R., KEITER, P., LOUPIAS, B. et FALIZE, E. (2013). Radiative reverse shock laser experiments relevant to accretion processes in cataclysmic variables. *Physics of Plasmas*, 20(5):056502. *Cité page 25*
- LANDAU, L. D. et LIFSHITZ, E. M. (2013). *Fluid Mechanics : Landau and Lifshitz : Course of Theoretical Physics, Volume 6*, volume 6. Elsevier. *Cité page 172*
- LEFEVRE, H., SPRINGSTEAD, M., KELSO, K., MANCINI, R., LOISEL, G., KEITER, P., DRAKE, R. et KURANZ, C. (2021). The design of a photoionization front experiment using the Z-Machine as a driving source and estimated measurements. *Physics of Plasmas*, 28(9):093304. *Cité page 26*
- LEONHARDT, U. (2006). Optical Conformal Mapping. *Science*, 312(5781):1777–1780. *Cité page 128*
- LEVERMORE, C. D. (1984). Relating Eddington factors to flux limiters. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 31(2):149–160. *Cité page 48*
- LEWIN, W. H., van den HEUVEL, E. P. et van PARADIJS, J. (1997). *X-ray Binaries*, volume 26. Cambridge University Press. *Cité page 30*
- LEWIN, W. H., Van PARADIJS, J. et TAAM, R. E. (1993). X-ray bursts. *Space Science Reviews*, 62(3-4):223–389. *4 citations pages 9, 30, 31, et 33*
- LIE, S. (1880). Theorie der transformationsgruppen I. *Mathematische Annalen*, 16(4):441–528. *2 citations pages 84 et 85*
- LISLE, I. (1992). *Equivalence transformations for classes of differential equations*. Thèse de doctorat, University of British Columbia. *3 citations pages 99, 102, et 103*
- LO, K. H., MILLER, M. C., BHATTACHARYYA, S. et LAMB, F. K. (2013). Determining neutron star masses and radii using energy-resolved waveforms of X-ray burst oscillations. *The Astrophysical Journal*, 776(1):19. *Cité page 31*
- MALKA, E. et HEIZLER, S. I. (2022). Supersonic-subsonic transition region in radiative heat flow via self-similar solutions. *Physics of Fluids*. *Cité page 41*
- MARSHAK, R. (1958). Effect of radiation on shock wave behavior. *The Physics of Fluids*, 1(1):24–29. *4 citations pages 17, 23, 39, et 40*
- MASSEN, J., TSAKIRIS, G., EIDMANN, K., FÖLDES, I., LÖWER, T., SIGEL, R., WITKOWSKI, S., NISHIMURA, H., ENDO, T., SHIRAGA, H. *et al.* (1994). Supersonic radiative heat waves in low-density high-Z material. *Physical Review E*, 50(6):5130. *3 citations pages 65, 66, et 68*
- MCCLARREN, R. G., DRAKE, R. P., MOREL, J. et HOLLOWAY, J. P. (2010). Theory of radiative shocks in the mixed, optically thick-thin case. *Physics of Plasmas*, 17(9):093301. *Cité page 18*

- MICHAUT, C., FALIZE, E., CAVET, C., BOUQUET, S., KOENIG, M., VINCI, T., REIGHARD, A. et DRAKE, R. P. (2009). Classification of and recent research involving radiative shocks. *Astrophysics and Space Science*, 322(1-4):77–84. *Cité page 18*
- MICHEL, T. (2019). *Étude des chocs radiatifs dans le cadre de l'astrophysique de laboratoire*. Thèse de doctorat, Université Paris-Saclay (ComUE). *Cité page 19*
- MICHEL, T., ALBERTAZZI, B., MABEY, P., RIGON, G., LEFEVRE, F., SOM, L. V. B., BARROSO, P., EGASHIRA, S., KUMAR, R., MICHAUT, C. *et al.* (2019). Laboratory observation of radiative shock deceleration and application to SN 1987A. *The Astrophysical Journal*, 888(1):25. *2 citations pages 18 et 25*
- MIHALAS, D. et MIHALAS, B. W. (2013). *Foundations of radiation hydrodynamics*. Courier Corporation. *6 citations pages 13, 17, 18, 37, 39, et 40*
- MIQUEL, J.-L. et PRENE, E. (2018). LMJ PETAL status and program overview. *Nuclear Fusion*, 59(3):032005. *Cité page 142*
- MIZUTA, A., KANE, J. O., POUND, M. W., REMINGTON, B. A., RYUTOV, D. D. et TAKABE, H. (2005). Hydrodynamic instability of ionization fronts in H II regions. *The Astrophysical Journal*, 621(2):803. *Cité page 15*
- MOORE, A. S., GUYMER, T. M., MORTON, J., WILLIAMS, B., KLINE, J. L., BAZIN, N., BENTLEY, C., ALLAN, S., BRENT, K., COMLEY, A. J. *et al.* (2015). Characterization of supersonic radiation diffusion waves. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 159:19–28. *10 citations pages 26, 64, 66, 67, 68, 77, 78, 80, 129, et 160*
- MORA, P. (1982). Theoretical model of absorption of laser light by a plasma. *The Physics of Fluids*, 25(6):1051–1056. *Cité page 23*
- MOSKALENKO, I. V. et STRONG, A. W. (2000). Anisotropic inverse Compton scattering in the galaxy. *The Astrophysical Journal*, 528(1):357. *Cité page 12*
- NOBILI, L., TUROLLA, R. et LAPIDUS, I. (1994). Winds from Neutron Stars and Strong Type I X-Ray Bursts. *arXiv preprint astro-ph/9405065*. *Cité page 35*
- NORRIS, J. P., BONNELL, J. T., KAZANAS, D., SCARGLE, J. D., HAKKILA, J. et GIBLIN, T. W. (2005). Long-lag, wide-pulse gamma-ray bursts. *The Astrophysical Journal*, 627(1):324. *Cité page 31*
- OFFRINGA, A., SINGAL, J., HESTON, S., HORIUCHI, S. et LUCERO, D. (2022). Measurement of the anisotropy power spectrum of the radio synchrotron background. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 509(1):114–121. *Cité page 8*
- OKUDA, T. et SINGH, C. B. (2021). Radiative shocks around super-eddington accreting black holes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 503(1):586–593. *Cité page 18*
- OLVER, P. J. (1986). *Applications of Lie groups to differential equations*, volume 107. Springer Science & Business Media. *3 citations pages 85, 88, et 99*

- OMUKAI, K. et PALLA, F. (2001). On the formation of massive primordial stars. *The Astrophysical Journal*, 561(1):L55. Cité page 15
- OVSIIANNIKOV, L. V. (1982). *Group analysis of differential equations*. Academic press. Cité page 99
- O’C. DRURY, L. et MENDONCA, J. (2000). Explosion implosion duality and the laboratory simulation of astrophysical systems. *Physics of Plasmas*, 7(12):5148–5152. Cité page 172
- PACZYNSKI, B. (1983). Models of X-ray bursters with radius expansion. *The Astrophysical Journal*, 267:315–321. Cité page 14
- PACZYŃSKI, B. (1998). Gamma-ray bursts as hypernovae. In *AIP Conference Proceedings*, volume 428, pages 783–787. American Institute of Physics. Cité page 9
- PETROFF, E., HESSELS, J. et LORIMER, D. (2019). Fast radio bursts. *The Astronomy and Astrophysics Review*, 27(1):1–75. Cité page 8
- PITTS, R., CARPENTIER, S., ESCOURBIAC, F., HIRAI, T., KOMAROV, V., KUKUSHKIN, A., LISGO, S., LOARTE, A., MEROLA, M., MITTEAU, R. *et al.* (2011). Physics basis and design of the ITER plasma-facing components. *Journal of Nuclear Materials*, 415(1):S957–S964. Cité page 20
- POUTANEN, J. (2017). Rosseland and flux mean opacities for Compton scattering. *The Astrophysical Journal*, 835(2):119. Cité page 14
- PRIESTLEY, F. et WHITWORTH, A. (2022). The origin of a universal filament width in molecular clouds. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 509(1):1494–1503. Cité page 9
- PRINGLE, J. et SAVONIJIE, G. (1979). X-ray emission from dwarf novae. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 187(4):777–783. Cité page 9
- PUN, C. S., MICHAEL, E., ZHEKOV, S. A., MCCRAY, R., GARNAVICH, P. M., CHALLIS, P. M., KIRSHNER, R. P., BARON, E., BRANCH, D., CHEVALIER, R. A. *et al.* (2002). Modeling the Hubble Space Telescope ultraviolet and optical spectrum of Spot 1 on the circumstellar ring of SN 1987A. *The Astrophysical Journal*, 572(2):906. Cité page 19
- REES, M. (1968). Polarization and spectrum of the primeval radiation in an anisotropic universe. *The Astrophysical Journal*, 153:L1. Cité page 11
- REMINGTON, B. A., DRAKE, R. P. et RYUTOV, D. D. (2006). Experimental astrophysics with high power lasers and Z pinches. *Reviews of Modern Physics*, 78(3):755. Cité page 19
- REVEY, G., KHIAR, B., FILIPPOV, E., ARGIROFFI, C., BÉARD, J., BONITO, R., CERCHEZ, M., CHEN, S. N., GANGOLF, T., HIGGINSON, D. P., MIGNONE, A., OLMI, B., OUILLE, M., RYAZANTSEV, S. N., SKOBELEV, I. Y., SAFRONOVA, M. I., STARODUBTSEV, M., VINCI, T., WILLI, O., PIKUZ, S., ORLANDO, S., CIARDI, A. et FUCHS, J. (2021). Laboratory disruption of scaled astrophysical outflows by a misaligned magnetic field. *Nature Communications*, 12:762. Cité page 25

- ROSDAHL, J., BLAIZOT, J., AUBERT, D., STRANEX, T. et TEYSSIER, R. (2013). RAMSES-RT : radiation hydrodynamics in the cosmological context. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 436(3):2188–2231. *Cité page 48*
- ROSDAHL, J. et TEYSSIER, R. (2015). A scheme for radiation pressure and photon diffusion with the M1 closure in RAMSES-RT. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 449(4):4380–4403. *Cité page 48*
- ROSS, I., WHITE, M., BOON, J., CRADDOCK, D., DAMERELL, A., DAY, R., GIBSON, A., GOTTFELDT, P., NICHOLAS, D. et REASON, C. (1981). Vulcan-a versatile high-power glass laser for multiuser experiments. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 17(9):1653–1661. *Cité page 66*
- RYUTOV, D., DERZON, M. S. et MATZEN, M. K. (2000a). The physics of fast Z pinches. *Reviews of Modern Physics*, 72(1):167. *Cité page 20*
- RYUTOV, D., DRAKE, R., KANE, J., LIANG, E., REMINGTON, B. et WOOD VASEY, W. (1999). Similarity criteria for the laboratory simulation of supernova hydrodynamics. *The Astrophysical Journal*, 518(2): 821. *4 citations pages 24, 38, 64, et 70*
- RYUTOV, D., DRAKE, R. et REMINGTON, B. (2000b). Criteria for scaled laboratory simulations of astrophysical MHD phenomena. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 127(2):465. *2 citations pages 24 et 70*
- SANMARTIN, J. R. et BARRERO, A. (1978). Self-similar motion of laser half-space plasmas. II. Thermal wave and intermediate regimes. *The Physics of Fluids*, 21(11):1967–1971. *Cité page 41*
- SARAZIN, C. L. (1999). The energy spectrum of primary cosmic-ray electrons in clusters of galaxies and inverse Compton emission. *The Astrophysical Journal*, 520(2):529. *Cité page 12*
- SAVIN, D., BRICKHOUSE, N., COWAN, J., DRAKE, R., FEDERMAN, S., FERLAND, G., FRANK, A., GUDIPATI, M., HAXTON, W., HERBST, E. *et al.* (2012). The impact of recent advances in laboratory astrophysics on our understanding of the cosmos. *Reports on Progress in Physics*, 75(3):036901. *Cité page 23*
- SCARINGI, S., GROOT, P. J., KNIGGE, C., BIRD, A. J., BREEDT, E., BUCKLEY, D. A., CAVECCHI, Y., DEGENAAR, N. D., de MARTINO, D., DONE, C. *et al.* (2022). Localized thermonuclear bursts from accreting magnetic white dwarfs. *Nature*, 604(7906):447–450. *Cité page 9*
- SCHATZ, H., BILDSTEN, L., CUMMING, A. et OUELLETTE, M. (2003). Nuclear physics in normal X-ray bursts and superbursts. *Nuclear Physics A*, 718:247–254. *Cité page 31*
- SCHATZ, H. et REHM, K. (2006). X-ray binaries. *Nuclear physics A*, 777:601–622. *Cité page 30*
- SCHISANO, E., RYGL, K. L. J., MOLINARI, S., BUSQUET, G., ELIA, D., PESTALOZZI, M., POLYCHRONI, D., BILLOT, N., CAREY, S., PALADINI, R. *et al.* (2014). The identification of filaments on far-infrared and submillimeter images : Morphology, physical conditions and relation with star formation of filamentary structure. *The Astrophysical Journal*, 791(1):27. *Cité page 9*

- SCHURTZ, G., NICOLAÏ, P. D. et BUSQUET, M. (2000). A nonlocal electron conduction model for multidimensional radiation hydrodynamics codes. *Physics of Plasmas*, 7(10):4238–4249. *Cité page 74*
- SENTIS, R., PAILLARD, D., BARANGER, C. et SEYTOR, P. (2011). Modelling and numerical simulation of plasma flows with two-fluid mixing. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 30(2):252–258. *Cité page 74*
- SHAKURA, N. I. et SUNYAEV, R. A. (1973). Black holes in binary systems. Observational appearance. *Astronomy and Astrophysics*, 24:337–355. *Cité page 33*
- SHUSSMAN, T. et HEIZLER, S. I. (2015). Full self-similar solutions of the subsonic radiative heat equations. *Physics of Plasmas*, 22(8):082109. *Cité page 41*
- SICKAFOOSE, A., COLWELL, J., HORÁNYI, M. et ROBERTSON, S. (2001). Experimental investigations on photoelectric and triboelectric charging of dust. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 106(A5):8343–8356. *Cité page 11*
- SIGEL, R., TSAKIRIS, G., LAVARENNE, F., MASSEN, J., FEDOSEJEVS, R., Meyer-ter VEHN, J., MURAKAMI, M., EIDMANN, K., WITKOWSKI, S., NISHIMURA, H. *et al.* (1990). Experimental observation of laser-induced radiation heat waves. *Physical Review Letters*, 65(5):587. *Cité page 65*
- SPITZER, L. et HÄRM, R. (1953). Transport phenomena in a completely ionized gas. *Physical Review*, 89(5):977. *Cité page 45*
- STEINACKER, J., PAGANI, L., BACMANN, A. et GUIEU, S. (2010). Direct evidence of dust growth in L183 from mid-infrared light scattering. *Astronomy & Astrophysics*, 511:A9. *Cité page 9*
- STEINHAEUER, J. (2016). Observation of quantum Hawking radiation and its entanglement in an analogue black hole. *Nature Physics*, 12(10):959–965. *Cité page 81*
- STRÖMGREN, B. (1939). The Physical State of Interstellar Hydrogen. *Astrophysical Journal*, 89:526. *Cité page 16*
- SULEIMANOV, V. F., POUTANEN, J., NÄTTILÄ, J., KAJAVA, J. J., REVNIVTSEV, M. G. et WERNER, K. (2017). The direct cooling tail method for X-ray burst analysis to constrain neutron star masses and radii. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 466(1):906–913. *Cité page 31*
- SUZUKI VIDAL, F., CLAYSON, T., STEHLÉ, C., CHAULAGAIN, U., HALLIDAY, J. W., SUN, M., REN, L., KANG, N., LIU, H., ZHU, B. *et al.* (2021). First radiative shock experiments on the SG-II laser. *High Power Laser Science and Engineering*, 9. *2 citations pages 25 et 26*
- TAKABE, H. (2001). Astrophysics with intense and ultra-intense lasers “laser astrophysics”. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 143:202–265. *2 citations pages 4 et 81*
- TAKABE, H. et KURAMITSU, Y. (2021). Recent progress of laboratory astrophysics with intense lasers. *High Power Laser Science and Engineering*, 9. *2 citations pages 23 et 25*

- TAWARA, Y., KII, T., HAYAKAWA, S., KUNIEDA, H., MASAI, K., NAGASE, F., INOUE, H., KOYAMA, K., MAKINO, F., MAKISHIMA, K. *et al.* (1984). A very long X-ray burst with a precursor from XB 1715-321. *The Astrophysical Journal*, 276:L41–L44. *Cité page 31*
- TEYSSIER, R. (2002). Cosmological hydrodynamics with adaptive mesh refinement-A new high resolution code called RAMSES. *Astronomy & Astrophysics*, 385(1):337–364. *Cité page 48*
- TORO, E. F. (1999). *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics : a practical introduction*. Springer. *Cité page 48*
- TORRISI, M. et TRACINA, R. (1998). Equivalence transformations and symmetries for a heat conduction model. *International journal of non-linear mechanics*, 33(3):473–487. *Cité page 100*
- TRANCHANT, V., CHARPENTIER, N., Van BOX SOM, L., CIARDI, A. et FALIZE, E. (2022). New class of laboratory astrophysics experiments : Application to radiative accretion processes around neutron stars. *Astrophysical Journal (accepted)*. *2 citations pages 18 et 52*
- UNRUH, W. G. (1981). Experimental black-hole evaporation? *Physical Review Letters*, 46(21):1351. *Cité page 81*
- Van BOX SOM, L. (2018). *Des naines blanches magnétiques accrétantes aux plasmas laser : simulations, similitudes et expériences*. Thèse de doctorat, Sorbonne université. *3 citations pages 21, 22, et 74*
- Van BOX SOM, L., FALIZE, É., BONNET BIDAUD, J.-M., MOUCHET, M., BUSSCHAERT, C. et CIARDI, A. (2018a). Numerical simulations of high-energy flows in accreting magnetic white dwarfs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 473(3):3158–3168. *Cité page 48*
- Van BOX SOM, L., FALIZE, E., KOENIG, M., SAKAWA, Y., ALBERTAZZI, B., BARROSO, P., BONNET BIDAUD, J.-M., BUSSCHAERT, C., CIARDI, A., HARA, Y. *et al.* (2018b). Laboratory radiative accretion shocks on GEKKO XII laser facility for POLAR project. *High Power Laser Science and Engineering*, 6. *Cité page 25*
- VASCHY, A. (1892). Sur les lois de similitude en physique. In *Annales télégraphiques*, volume 19, pages 25–28. *Cité page 70*
- WALCH, S., WHITWORTH, A., BISBAS, T., WÜNSCH, R. et HUBBER, D. (2012). Dispersal of molecular clouds by ionizing radiation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 427(1):625–636. *Cité page 16*
- WARNER, B. (1995). *Cataclysmic variable stars*, cambridge university press, cambridge. *Cité page 9*
- WHITWORTH, A. (1979). The erosion and dispersal of massive molecular clouds by young stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 186(1):59–67. *Cité page 16*
- WILLI, O., BARRINGER, L., VICKERS, C. et HOARTY, D. (2000). Study of super-and subsonic ionization fronts in low-density, soft x-ray-irradiated foam targets. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 127(2):527. *Cité page 26*

- WOOSLEY, S. E., HEGER, A., CUMMING, A., HOFFMAN, R. D., PRUET, J., RAUSCHER, T., FISHER, J. L., SCHATZ, H., BROWN, B. et WIESCHER, M. (2004). Models for type I X-ray bursts with improved nuclear physics. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 151(1):75. *Cité page 31*
- XU, Y., JIANG, S., LAI, D., PEI, W., DING, Y., CHANG, T., LAN, K., LI, S. et FENG, T. (2006). Two-photon group radiation transfer study in low-density foam cylinder. *Laser and Particle Beams*, 24(4):495–501. *2 citations pages 66 et 68*
- YAMAMOTO, R. et FUKUE, J. (2021). Radiatively-driven black hole winds revisited. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 502(4):5797–5807. *Cité page 15*
- ZEL'DOVICH, Y. B. et RAIZER, Y. P. (2002). *Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena*. Courier Corporation. *Cité page 40*
- ZHAO, G., LI, Z., PAN, Y., FALANGA, M., JI, L., CHEN, Y. et ZHANG, S. (2022). NICER observations of the evidence of Poynting-Robertson drag and disk reflection during type I X-ray bursts from 4U 1636–536. *Astronomy & Astrophysics*, 660:A31. *Cité page 36*