



**HAL**  
open science

# Métriques localement conformément kählériennes (Ick) et Ick à potentiel sur des variétés LVM

Bastien Faucard

► **To cite this version:**

Bastien Faucard. Métriques localement conformément kählériennes (Ick) et Ick à potentiel sur des variétés LVM. Mathématiques générales [math.GM]. Université d'Angers, 2022. Français. NNT : 2022ANGE0013 . tel-03907866

**HAL Id: tel-03907866**

**<https://theses.hal.science/tel-03907866>**

Submitted on 20 Dec 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITÉ D'ANGERS

ÉCOLE DOCTORALE N° 601  
*Mathématiques et Sciences et Technologies  
de l'Information et de la Communication*  
Spécialité : *Mathématiques et leurs Interactions*

Par

**Bastien FAUCARD**

**Métriques localement conformément kählériennes et métriques lo-  
calement conformément kählériennes à potentiel sur des variétés  
LVM**

Thèse présentée et soutenue à Angers, le Lundi 4 juillet 2022  
Unité de recherche : LAREMA

## Rapporteurs avant soutenance :

Liviu ORNEA                                      Professeur, Université de Bucarest  
Santiago LÓPEZ DE MEDRANO      Professeur, Université de Mexico

## Composition du Jury :

Président :            Dominique CERVEAU            Professeur, Université de Rennes  
Examineurs :        Suzanna ZIMMERMANN        Maître de conférence, Université d'Angers  
                              Nicolina ISTRATI                Docteur, Université de Mareburg  
Dir. de thèse :        Laurent MEERSSEMAN        Professeur, Université d'Angers



*À Louise et Pauline*



# REMERCIEMENTS

---

Je dois une grande partie de mon travail à mon directeur de Thèse Monsieur Laurent Meersseman, Professeur et directeur du LAREMA (Université d'Angers). Je retiens sa gentillesse, sa disponibilité et sa patience. Sans lui, ce travail n'aurait probablement pas vu le jour.

J'adresse mes remerciements sincères à Monsieur Liviu Ornea, Professeur à l'Université de Bucarest et Monsieur Santiago López de Medrano, Professeur à l'Université de Mexico pour avoir accepté de faire un rapport concernant ce manuscrit.

Mes remerciements vont aussi aux autres membres du jury : Suzanna Zimmermann, Maître de Conférences à l'Université d'Angers, Nicolina Istrati, Docteur à l'Université de Mareburg. La liaison entre les métriques lck et la présence d'un tore dans le groupe des automorphismes découverte par N.Istrati fut un déclencheur dans les résultats nouveaux du chapitre 5. Qu'elle trouve ici toute ma reconnaissance.

Je voudrais exprimer ensuite toute ma gratitude aux membres de mon comité de suivi individuel : Etienne Mann, Professeur au LAREMA et Dominique Cerveau, Professeur à l'Université de Rennes (également membre et président du jury de soutenance). Ils ont su comprendre la particularité de ma situation de salarié et tout ce que cela implique dans le suivi d'un tel projet. Qu'ils trouvent ici toute ma gratitude.

Je tiens à remercier l'ensemble des membres du Laboratoire de Recherche en Mathématiques d'Angers : LAREMA bien que le temps m'ait manqué pour faire connaissance avec chacun d'eux.

Je suis très reconnaissant à l'égard de tous mes collègues de travail et toutes les personnes avec qui j'ai pu échanger à l'Institut Universitaire de Technologie d'Angers. Merci à tous pour votre écoute et votre soutien.

Ce document est écrit en LaTeX selon le modèle disponible sur GitLab :

<https://gitlab.inria.fr/ed-mathstic/latex-template>.

Je remercie les contributeurs de ce projet : Louiza Yala, Josquin Debaz, Pierre-Louis Roman, Lucas Bourneuf, Corentin Guezenoc, Clément Elbaz, Florian Arrestier, Alexandre Honorat.

---

Je remercie avec la plus grande considération mes amis pour leur soutien. C'est l'occasion pour moi de leur rendre honneur en les citant (non exhaustivement) ici : Jean-Philippe (mon ancien colocataire), sa femme Audrey, Etienne le Gaulois, Amandine et Guillaume, Lucie (toujours ensemble pendant les études) et son conjoint Cyril, Charlotte, Alexis, Sylvain, Alice, Chloé (Panda), Chloé (Brocéliande), Jean-Eudes et Amina.

Évidemment, je remercie chaleureusement ma mère Geneviève, mon père Michel, mon frère Nicolas, sa femme Sophie ainsi que Nicolas de La Fontaine, son père et la famille Heiligenstein. Je remercie mes beaux-parents Anne et François et mon beau-frère Guillaume pour leur gentillesse. Merci à tous d'avoir cru en moi et de m'avoir accordé votre confiance et votre soutien.

Je terminerais, non sans émotion, par les deux personnes qui ont le plus d'importance à mes yeux et dans mon coeur : mon épouse Pauline et ma fille Louise.

Pauline je me souviens de cette phrase présente dans les remerciements de ta thèse à mon égard : "J'espère pouvoir te rendre ce que tu m'as apporté lorsque ce sera ton tour...". Aujourd'hui c'est mon tour et saches que tu as honoré ce souhait au centuple. Merci d'être toujours présente à mes côtés et de m'accorder ton amour au quotidien.

Louise, tu es trop jeune pour lire ceci mais le temps viendra. Je veux que tu saches que mon amour pour toi est et sera toujours inconditionnel. J'espère que tu seras fière de ton papa.

# SOMMAIRE

---

<b>Notations</b>	<b>11</b>
<b>Introduction</b>	<b>15</b>
<b>1 Géométrie kählérienne VS non kählérienne</b>	<b>21</b>
1.1 Définitions . . . . .	22
1.2 Propriétés . . . . .	24
1.2.1 Parallélisme de la structure complexe . . . . .	24
1.2.2 Théorème de décomposition de Hodge . . . . .	26
1.3 Exemples . . . . .	28
1.3.1 Variétés kählériennes . . . . .	28
1.3.2 Variétés non kählériennes . . . . .	31
<b>2 Géométrie localement conformément kählérienne</b>	<b>35</b>
2.1 Définitions . . . . .	36
2.2 Propriétés . . . . .	39
2.2.1 Parallélisme de la structure complexe . . . . .	39
2.2.2 Cohomologie adaptée . . . . .	45
2.2.3 Variétés de Vaisman . . . . .	46
2.2.4 Variétés lck à potentiel . . . . .	46
2.2.5 Conjecture de Vaisman . . . . .	48
2.3 Exemples . . . . .	49
2.3.1 Variétés de Hopf . . . . .	49
2.3.2 Surfaces de Inoue . . . . .	49
2.3.3 Exemples non compacts . . . . .	49
<b>3 Variétés de Hopf et structures lck</b>	<b>51</b>
3.1 Généralités . . . . .	52
3.2 Variétés de Hopf définies par une homothétie . . . . .	54
3.3 Surfaces de Hopf . . . . .	55

3.3.1	Surfaces de Hopf linéaires diagonales . . . . .	55
3.3.2	Surfaces de Hopf non linéaires . . . . .	57
3.4	Variété de Hopf linéaire en dimension quelconque . . . . .	58
3.4.1	Cône algébrique . . . . .	58
3.4.2	$CR$ -géométrie . . . . .	58
3.4.3	Coquille pseudoconvexe sur un cône algébrique . . . . .	59
3.4.4	Variétés de Hopf linéaires . . . . .	61
3.5	Produit de deux variétés de Hopf . . . . .	62
3.5.1	Classification des variétés lck à potentiel et de Vaisman dans le cas compact . . . . .	62
3.6	Variétés de Hopf non linéaires en dimension quelconque . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Variétés LVM</b> . . . . .	<b>65</b>
4.1	Construction . . . . .	66
4.2	Propriétés . . . . .	68
4.2.1	(1) : Les conditions d'admissibilité sont ouvertes . . . . .	68
4.2.2	(2) : Si $\Lambda'$ est une déformation homotope de $\Lambda$ , alors $N'$ et $N$ sont difféomorphes . . . . .	69
4.2.3	(3) : Biholomorphisme entre $N_\Lambda$ et $N_{\Lambda+B}$ . . . . .	70
4.2.4	(4) : Les variétés LVM sont non kählériennes . . . . .	70
4.3	Classification difféomorphe . . . . .	73
4.3.1	$m = 1$ . . . . .	73
4.3.2	$m = 2$ . . . . .	73
4.4	Variétés LVMB . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Non existence de structure lck sur les LVM</b> . . . . .	<b>77</b>
5.1	Action du tore et structure lck . . . . .	78
5.2	Condition $(K)$ de rationalité et $\mathbb{T}^m \subset \text{Aut}(N, J)$ . . . . .	80
5.3	Caractérisation des variétés de Hopf dans les LVM . . . . .	83
5.4	Sous la condition $(K)$ , les LVM ne sont pas lck . . . . .	87
<b>6</b>	<b>Revêtements lck à potentiel non compacts d'une certaine classe de LVM</b> . . . . .	<b>91</b>
6.1	Normalisation biholomorphe . . . . .	92
6.2	De $\mathbb{C}^m$ à $\mathbb{Z}^m$ . . . . .	96
6.3	Modèles difféomorphes . . . . .	102

6.4	Existence de revêtements lck à potentiel non compacts de certaines variétés	
	LVM . . . . .	106
6.5	Structure $p$ -lck et $p$ -lck à potentiel . . . . .	119
<b>Annexe 1 : programmes python utilisés</b>		<b>121</b>
<b>Bibliography</b>		<b>127</b>



# NOTATIONS

---

## Structure

Ce document est écrit en LaTeX. Il se compose de six chapitres. Dans le  $i$ -ième chapitre, les sections sont numérotées  $i.1, i.2, \dots$  et les sous-sections de la section  $i.j$  sont numérotées  $i.j.1, i.j.2, \dots$  et ceci de même pour les sous-sous-sections etc. La numérotation des définitions, théorèmes, propositions, remarques, corollaires, lemmes et exemples ne dépendent que de la numérotation des sections et se suivent sur le même compteur. Par exemple, dans le chapitre 6, dans la section 6.4 se suivent le théorème 6.4.1, la remarque 6.4.2, la remarque 6.4.3, le corollaire 6.4.4 etc...

Il n'y a qu'une annexe, l'annexe 1 concernant l'aspect programmation dans la recherche d'exemples de configurations admissibles satisfaisant les conditions du théorème 6.4.1.

## Notations

L'ensemble des entiers naturels sera noté  $\mathbb{N}$ . L'anneau des entiers relatifs sera noté  $\mathbb{Z}$ . Les corps des rationnels, des réels et des complexes seront notés respectivement  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . L'ensemble des parties d'un ensemble  $E$  sera noté  $\mathcal{P}(E)$ . On notera  $\operatorname{Re}(z)$  et  $\operatorname{Im}(z)$  les parties réelles et imaginaire d'un nombre complexe  $z$  ou d'un vecteur de nombres complexes. Soit  $k$  un corps, l'espace projectif de dimension  $n$  sur  $k$  sera écrit  $k\mathbb{P}^n$ , ses éléments seront notés  $[x]$  en coordonnées homogènes pour tout  $x \in k^{n+1}$ . Si  $S \subseteq k^{n+1}$ , alors  $\mathbb{P}(S)$  correspondra au sous-ensemble de  $k\mathbb{P}^n : \{[x], x \in S\}$ . Si  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, on notera  $E_{\mathbb{C}} = E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel complexifié de  $E$ .

L'espace tangent d'une variété  $M$  en un point  $x \in M$  sera noté  $T_x M$ . Le fibré tangent sera simplement noté  $TM$ , l'ensembles des champs de vecteurs correspondant à l'ensemble des sections globales de ce fibré sera alors noté  $\Gamma(TM)$ . On notera, pour deux champs de vecteurs  $(X, Y) \in \Gamma(TM)^2$ ,  $[X, Y] \in \Gamma(TM)$  le crochet de Lie,  $\mathcal{L}_X Y$  la dérivée de Lie de  $Y$  en  $X$ . Les crochets pourront aussi signifier les coordonnées homogènes du projectif (voir ci-dessus) ou encore la classe d'un élément par une action. Par exemple  $[z]_a$  signifiera la classe de  $z$  pour l'action  $a$ . Le groupe des automorphismes de  $M$  sera noté  $\operatorname{Aut}(M)$ , le sous-groupe des automorphismes de  $M$  stables par une structure complexe  $J$  sera noté  $\operatorname{Aut}(M, J)$ .

Soit  $\alpha$  une  $p$ -forme différentielle. Soit  $X \in \Gamma(TM)$ , le produit intérieur de  $\alpha$  selon  $X$  sera la  $(p-1)$ -forme  $i_X \alpha$ . Par exemple, pour la 2-forme  $\Omega$ ,  $i_X \Omega(Y) = \Omega(Y, X)$ . Le produit extérieur de deux formes sera noté " $\wedge$ ". La différentielle extérieure sera notée  $d$  et la différentielle extérieure complexe sera notée  $d^c$ . L'opérateur  $\frac{\partial}{\partial z_i}$  sera noté plus simplement  $\partial_i$ , de même pour  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}$  qui sera noté  $\bar{\partial}_i$ . On définit également  $\partial = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial z_i}$  et  $\bar{\partial} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}$  de sorte que  $2i\partial\bar{\partial} = dd^c$ .

Le symbole  $*$  signifie que l'ensemble qui le précède est privé de 0 ou que l'on prend le pullback de l'application qui le précède. Il pourra aussi signifier le dual algébrique d'une espace vectoriel. Cela sera précisé le cas échéant (chapitre 4 dans la définition des variétés LVMB).

Le symbole  $|\cdot|$  pourra signifier plusieurs choses : le cardinal d'un ensemble, la valeur absolue d'un nombre réel, le module d'un nombre complexe ou la norme euclidienne d'un élément  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$  ou enfin, pour  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2}$ .

Les fonction logarithmes et exponentielles seront écrites de la manière suivante :  $\ln$  et  $\exp$  ou simplement  $e^{\cdot}$  dénotent respectivement le logarithme et l'exponentielle réels. Le logarithme complexe (après avoir fixé une détermination) sera noté  $\log$ . L'exponentielle complexe sera notée comme l'exponentielle réelle.

Pour tout  $d \in \mathbb{N}^*$ , la sphère  $\mathbb{S}^{2d-1} \subseteq \mathbb{C}^d$  de dimension impaire est définie par

$$\mathbb{S}^{2d-1} = \{z \in \mathbb{C}^d, |z|^2 = 1\}$$

et la sphère  $\mathbb{S}^{2d} \subseteq \mathbb{R}^{2d+1}$  de dimension paire est définie par

$$\mathbb{S}^{2d} = \{x \in \mathbb{R}^{2d+1}, |x|^2 = 1\}.$$

Les ensembles de matrices seront notés comme suit : l'ensemble des matrices à  $m$  lignes et  $n$  colonnes à coefficients dans un corps  $k$  sera noté  $M_{m \times n}(k)$  ou  $(k^m)^n$ . Le rang d'une matrice  $A \in (k^m)^n$  sur  $k$  sera noté  $\text{rang}_k(A)$ . Lorsque  $m = n$ , on notera simplement  $M_m(k)$ , le groupe des matrices inversibles sera dans ce cas noté  $\text{GL}_m(k)$ . Pour une matrice  $A \in M_m(k)$ . On écrira  $\det A$  pour le déterminant de  $A$ ,  $A_{rp} \in M_{m-1}(k)$  dénotera la matrice extraite de  $A$  en supprimant la colonne  $r$  et la ligne  $p$ . La matrice des cofacteurs de  $A$  sera notée  $\text{Com}(A)$  et la matrice transposée de  $A$  sera écrite  ${}^t A$ . Une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sera écrite  $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . La notation  $A^{\mathbb{Z}}$  ou  $A^{\mathbb{R}}$  correspond à l'ensemble de toutes les puissances entières ou réelles de la matrice  $A$ . Enfin,  $U_n$  désignera le groupe des transformations linéaires unitaires de  $\mathbb{C}^n$ .

La notation  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  largement utilisée dans cette thèse signifie la somme des produits coordonnée par coordonnée et non le produit scalaire hermitien :

$$\langle T, U \rangle = \sum_{i=1}^n T_i U_i$$

L'enveloppe convexe réelle d'une configuration  $\Lambda \in (\mathbb{C}^m)^n$  sera notée  $\mathcal{H}(\Lambda)$ .

# INTRODUCTION

---

Une variété kählérienne  $M$  est une variété complexe de structure complexe  $J$  et de métrique riemannienne  $g$  stable par  $J$  dont la 2-forme fondamentale  $\Omega$  définie, pour tous champs  $(X, Y) \in \Gamma(TM)^2$ , par :

$$\Omega(X, Y) = g(X, JY)$$

est fermée. Ces variétés sont largement étudiées dans la littérature. Elles présentent des propriétés d'intérêt : comme par exemple au niveau cohomologique avec le théorème de décomposition de Hodge. Les variétés projectives, les tores complexes sont des exemples de variétés kählériennes. Les variétés de Hopf, introduites par Heinz Hopf en 1930 [Hop30], constituent l'exemple historique classique de variété non kählérienne. Une variété de Hopf est un quotient de  $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  par une action d'un groupe cyclique (isomorphe à  $\mathbb{Z}$ ) engendrée par une contraction holomorphe (voir définition 1.3.4). La première action de  $\mathbb{Z}$  introduite par Hopf dans [Hop30] est :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{C}^n \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \\ (k, z) &\mapsto \frac{1}{2^k} z \end{aligned}$$

Le quotient obtenu n'est pas une variété kählérienne (le premier nombre de Betti est 1). C'est une obstruction cohomologique c.f. [Mor07]. Néanmoins, ce quotient jouit d'une structure que l'on qualifie de lck : localement conformément kählérienne. Le vocabulaire est explicite : il possède une métrique riemannienne  $g$  qui est localement conforme à une métrique kählérienne. Une variété lck perd certaines propriétés par rapport à une variété kählérienne. En effet, le théorème de décomposition de Hodge n'est plus vérifié, la structure lck n'est pas stable par déformation. Un produit de lck n'est en général pas lck. Cependant, si on complète cette structure par des conditions que certaines variétés de Hopf vérifient, par exemple le fait que la métrique dérive d'un potentiel ou que la 1-forme de Lee soit parallèle, on obtient respectivement ce que l'on nomme une structure lck à potentiel ou une variété de Vaisman. On retrouve alors des propriétés plus tranchées. Les

variétés lck à potentiel sont stables par déformation, le produit de deux variétés de Vaisman compactes ne peut admettre de structure lck. Nous présenterons ces résultats dans le chapitre 2.

La construction des variétés de Hopf fut généralisée par Santiago López de Medrano et Alberto Verjovsky [MV97] en 1997 : les auteurs définissent des variétés compactes complexes comme quotient d'un ouvert  $S$  de  $\mathbb{C}^n$  par une action de  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$  :

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}) \times S &\rightarrow S \\ (\alpha, t, z) &\mapsto (\alpha e^{t\lambda_1}, \dots, \alpha e^{t\lambda_n}) \end{aligned}$$

où  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$  vérifie deux conditions géométriques :

1. La condition de Siegel :  $0 \in \mathcal{H}(\Lambda)$  ;
2. La condition d'hyperbolicité faible :  $0$  n'est sur aucun segment  $[\lambda_i, \lambda_j]$ ,  $i \neq j$ .

Précisons également que l'ouvert  $S$  est défini par l'ensemble des éléments  $z$  de  $\mathbb{C}^n$  tels que, pour toutes les coordonnées  $i_1, \dots, i_p$  non nulles de  $z$ ,  $0$  est dans l'enveloppe convexe de  $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_p}$ . Une coordonnée  $i$  est dite indispensable si l'ouvert  $S$  est inclus dans l'ensemble des  $z \in \mathbb{C}^n$  de  $i$ -ième coordonnée non nulle. Les variétés de Hopf linéaires sont une sous-classe de ces variétés compactes complexes obtenues avec deux coordonnées indispensables. Ainsi il existe des variétés lck à potentiel et de Vaisman dans les variétés de Santiago López de Medrano et Alberto Verjovsky. Il en existe aussi qui ne sont pas lck, comme les variétés de Calabi-Eckmann.

Les variétés que nous dénommerons par LVM sont une généralisation naturelle des variétés de Santiago López de Medrano et Alberto Verjovsky. Elles sont obtenues par un quotient d'un ouvert de  $\mathbb{C}^n$  par une action de  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$  avec  $m \geq 1$ . Ces objets sont définis dans [Mee98]. L'action de  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$  est la suivante :

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m) \times S &\rightarrow S \\ (\alpha, T, z) &\mapsto (\alpha e^{\langle T, \Lambda_1 \rangle}, \dots, \alpha e^{\langle T, \Lambda_n \rangle}) \end{aligned}$$

où  $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_n) \in (\mathbb{C}^m)^n$  et  $S$  est l'ensemble des éléments  $z$  de  $\mathbb{C}^n$  tels que, pour toutes les coordonnées  $i_1, \dots, i_p$  non nulles de  $z$ ,  $0$  est dans l'enveloppe convexe de  $\Lambda_{i_1}, \dots, \Lambda_{i_p}$ .

Par ce procédé, on généralise les variétés de Santiago López de Medrano et Alberto Verjovsky qui correspondent au cas  $m = 1$ . Dans [Mee98], il est montré que les variétés LVM sont non kählériennes dès lors que  $n > 2m + 1$ . Dans cette thèse, nous cherchons à caractériser les LVM qui sont lck, lck à potentiel ou non lck.

Les résultats obtenus dans ce travail de doctorat sont les suivants : (chapitres 5 et 6) :

- Théorème 5.4.1, chapitre 5 : Soit  $N$  une variété LVM. Supposons que  $N$  ne soit pas biholomorphe à une variété de Hopf linéaire diagonale. Supposons que  $m = 1$  ou que  $m \geq 2$  et  $N$  vérifie la condition  $(K)$ . Alors  $N$  n'admet pas de métrique lck (la condition  $(K)$  est une condition dense de rationalité sur  $\Lambda$ ).
- Théorème 5.4.2, chapitre 5 : Soit  $N$  une LVM. La variété  $N$  admet une métrique lck à potentiel si et seulement si  $N$  est biholomorphe à une variété de Hopf linéaire diagonale. (Le théorème 5.3.1 qui constitue la caractérisation des Hopf linéaires parmi les LVM permet d'ajouter que celles-ci ne peuvent être obtenues que lorsque  $m = 1$ ,  $k = 2$  et  $n > 3$ ).
- Théorème 6.4.1, chapitre 6 : Soit  $N$  une LVM à  $m + 1$  points indispensables. Supposons qu'il existe  $j \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $\Lambda$  vérifie la condition  $H_j$  (celle-ci sera précisée au chapitre 6 et dépend de la normalisation biholomorphe de la configuration admissible de la section 6.1).  
Alors, l'action de  $\mathbb{Z}$  engendrée par  $\alpha_j$  est une action par contractions holomorphes et  $N$ , la variété LVM associée à cette configuration, admet un  $\mathbb{Z}^{m-1}$ -revêtement  $R = C / \langle \alpha_j \rangle$  lck à potentiel non compact. L'ouvert  $C \subseteq \mathbb{C}^{n-m-1}$  sera précisé au chapitre 6.

Nous étudierons des exemples de configurations  $\Lambda$  vérifiant les conditions du théorème 6.4.1 pour en arriver à la conjecture suivante :

### Conjecture

Sous les conditions du théorème 6.4.1, il n'existe aucun  $\mathbb{Z}^p$ -revêtement lck strict à potentiel lorsque  $p < m - 1$ .

Voici la structure des chapitres.

Chapitre 1 Nous présenterons dans ce chapitre la notion de structure métrique kählérienne et ses principales propriétés en nous attardant sur le parallélisme de la structure complexe qui est une propriété partagée par les variétés lck. Nous donnerons quelques

exemples de variétés kählériennes et de variétés non kählériennes.

Chapitre 2 Dans ce chapitre, nous présenterons la notion de structure lck et ses principales propriétés : le parallélisme de la structure complexe analogue aux variétés kählériennes sera exposé en détail car il permet de motiver l'utilisation et l'étude des structures lck. Nous donnerons tous les résultats sur les variétés lck qui nous seront utiles pour la suite dans les sections consacrées à la cohomologie adaptée aux variétés lck et aux variétés de Vaisman et à potentiel.

Chapitre 3 Dans ce chapitre, nous définirons et exposerons les principaux résultats sur l'existence de métriques lck et lck à potentiel sur les variétés de Hopf. L'exemple des variétés de Hopf joue un rôle central car toute variété lck à potentiel peut être plongée dans une variété de Hopf linéaire (en dimension complexe supérieure ou égale à 3).

Chapitre 4 Les variétés LVM seront définies dans ce chapitre. Nous donnerons les propriétés des LVM qui nous seront utiles.

Nous présenterons brièvement les variétés LVMB comme généralisation des variétés LVM car elles pourraient constituer un prolongement logique de ce travail de thèse. En effet, les résultats démontrés aux deux derniers chapitres semblent pouvoir se généraliser aux variétés LVMB.

Chapitre 5 Nous démontrerons les théorèmes 5.4.1 et 5.4.2. La preuve fait appel à un résultat d'Istrati [Ist19] qui met en avant la liaison entre l'existence d'un tore dans le groupe d'automorphismes de la variété et l'existence ou non de structure lck. Nous redonnerons les grandes lignes de ce résultat crucial. Ensuite, nous montrerons que sous une certaine condition de rationalité : la condition  $(K)$ , il existe bel et bien un tore complexe dans le groupe d'automorphismes d'une LVM. Enfin, il nous sera nécessaire de caractériser précisément les variétés de Hopf linéaires diagonales parmi les variétés LVM : nous verrons que, pour qu'une LVM soit une variété de Hopf linéaire diagonale, il faut et il suffit que  $m = 1, k = 2$  et  $n > 3$  (théorème 5.3.1).

Chapitre 6 Nous démontrerons le théorème 6.4.1 annoncé précédemment. La preuve fait appel à l'article [OV16]. Pour être en mesure d'exploiter cet article, nous donnerons en section 6.1 et en section 6.3 des modèles biholomorphes et difféomorphes très précis des variétés LVM à  $m + 1$  points indispensables. Nous reformulerons ensuite ce résultat en introduisant un nouveau vocabulaire :  $p$ -structure lck et  $p$ -structure lck

à potentiel traduisant l'existence d'un  $\mathbb{Z}^p$ -revêtement lck ou lck à potentiel. Nous donnerons également des exemples de variétés LVM vérifiant les hypothèses de ce théorème 6.4.1.

Pour finir, nous formulerons une conjecture : une variété LVM vérifiant les hypothèses du théorème 6.4.1 est exactement  $(m - 1)$ -lck à potentiel. Autrement dit, nous conjecturerons qu'il n'existe pas de  $\mathbb{Z}^p$ -revêtement lck à potentiel pour  $p < m - 1$ .



# GÉOMÉTRIE KÄHLÉRIENNE VS NON KÄHLÉRIENNE

---

Parmi les variétés complexes, les variétés kählériennes (dont la 2-forme de Kähler est fermée), sont très étudiées dans la littérature. Pour cause, la richesse de leurs propriétés, que ce soit au niveau topologique avec le théorème de décomposition de Hodge ou au niveau métrique avec le parallélisme de la structure complexe, qui en font une classe de variétés complexes d'intérêt. Les exemples classiques sont les variétés projectives, les tores complexes ainsi que les surfaces K3. Néanmoins, de nombreuses variétés complexes ne sont pas kählériennes, notamment les variétés de Hopf (voir chapitre 3) et les variétés LVM (voir chapitre 4).

## 1.1 Définitions

Entendons nous sur la définition d'une variété complexe. Les deux définitions suivantes sont équivalentes. L'équivalence étant assurée par le théorème de Newlander-Nirenberg [NN57].

**Définition 1.1.1** [*Variété complexe*] Une variété complexe de dimension complexe  $n$  est définie soit comme :

(1) Un espace topologique séparé  $M$  muni d'un atlas  $(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in A}$  tel que :

- i. Les  $U_\alpha$  recouvrent  $M$ .
- ii. Les cartes  $\phi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n$  sont des homéomorphismes.
- iii. Les changements de cartes :

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}: \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

sont des biholomorphismes.

Soit comme

(2) Une variété différentielle  $M$  de dimension réelle  $2n$  dont le fibré tangent  $TM$  est muni d'un endomorphisme :

$$J: \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

vérifiant  $J^2 = -\text{Id}$  et intégrable : pour tout  $(X, Y) \in \Gamma(TM)^2$  :

$$N^J(X, Y): = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY] = 0.$$

Deux présentations d'une telle variété sont alors possibles : la version (1) complexe et la version (2) réelle avec une condition d'intégrabilité sur  $J$ . La version (2) est cruciale car elle introduit la structure  $J$  appelée structure complexe. Si la condition  $N^J = 0$  n'est pas vérifiée, on dira que  $J$  est une structure presque complexe.

Nous rappelons dans ce chapitre les principales propriétés des variétés kählériennes en suivant le l'ouvrage d'Andrei Moroianu [Mor07]. Soit  $(M, g)$  une variété complexe munie d'une métrique riemannienne  $g$ . Soit  $\Omega$  la 2-forme définie par :  $\Omega(X, Y) = g(X, JY)$  pour tout  $(X, Y) \in \Gamma(TM)^2$ .

**Définition 1.1.2 (Variété kählérienne)** La variété  $M$  est dite kählérienne si,  $\forall (X, Y) \in \Gamma(TM)^2$  :

(1) La structure complexe  $J$  est compatible avec la métrique riemannienne  $g$  :  $g(X, Y) = g(JX, JY)$ .

(2)  $\Omega$  est fermée :  $d\Omega = 0$ .

Pour une structure complexe  $J$  sur une variété riemannienne de métrique  $g$ , on peut toujours modifier  $g$  de sorte à obtenir la compatibilité entre la métrique et  $J$ . En effet, si  $g(X, Y)$  est différent de  $g(JX, JY)$ , on pose  $g'(X, Y) = g(X, Y) + g(JX, JY)$ . Ceci définit une métrique riemannienne compatible avec la structure complexe  $J$ . La condition (2) est la condition principale de cette définition qui a pour conséquence les propriétés topologiques et différentielles qui vont suivre.

On peut montrer c.f. [Mor07] que, si  $M$  est de dimension complexe  $n$ , en coordonnées locales,  $(z_1, \dots, z_n)$ , on a :

$$\Omega = \frac{i}{2} \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\bar{\beta}} dz_{\alpha} \wedge d\bar{z}_{\beta} \quad (1.1)$$

avec  $g_{\alpha\bar{\beta}} = g\left(\frac{\partial}{\partial z_{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{\beta}}\right)$ . La propriété de fermeture vérifiée par la 2-forme de Kähler  $\Omega$ , au niveau local, se traduit par l'existence d'une fonction  $u$  réelle telle que  $\Omega = 2i\partial\bar{\partial}u$ . Autrement dit, en coordonnées locales :  $g_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{\partial^2 u}{\partial z_{\alpha} \partial \bar{z}_{\beta}}$ . La fonction  $u$  s'appelle un potentiel kählerien local. Toute l'information de la métrique  $g$  est donc contenue localement dans une seule fonction  $u$ . D'autre part, la métrique  $g$  induit une métrique hermitienne :

$$h = g + i\Omega$$

Pour poursuivre, nous donnons certaines des propriétés des variétés kähleriennes. La première est le parallélisme de la structure complexe : un résultat analogue se produit dans la géométrie localement conformément kählerienne (c.f. chapitre 2), la seconde est le théorème de décomposition de Hodge. Ce résultat est une contrainte topologique très forte sur une variété kählerienne compacte. En ce sens topologique, les variétés kähleriennes et les variétés localement conformément kähleriennes sont très différentes.

## 1.2 Propriétés

### 1.2.1 Parallélisme de la structure complexe

Notons  $\nabla$  la connexion de Levi-Civita. Montrons le théorème suivant (c.f. [Mor07]). Nous verrons dans le chapitre 2 un résultat adapté de celui-ci pour la géométrie localement conformément kählérienne.

**Théorème 1.2.1** *Si  $M$  est une variété dite presque complexe (version (2) de la définition 1.1.1 sans la condition  $N^J = 0$ ), alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $M$  est kählérienne.
- (2)  $\nabla J = 0$ .

La structure  $J$ , dans le cas d'une variété kählérienne est donc parallèle pour  $\nabla$ . Ce résultat permet de caractériser une variété kählérienne en plus de donner un indicateur riemannien.

Pour prouver ce théorème, admettons provisoirement le lemme suivant :

**Lemme 1.2.2** *Si  $M$  est une variété presque complexe, alors  $N^J = 0$  si et seulement si*

$$\forall (X, Y) \in \Gamma(TM)^2, (\nabla_{JX}J)Y = J(\nabla_XJ)Y. \quad (1.2)$$

**Preuve :** Montrons le théorème 1.2.1. Supposons que  $J$  est parallèle pour  $\nabla$ . Alors :

$$\begin{aligned} N^J(X, Y) &= [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY] \\ &= \nabla_X Y - \nabla_Y X + J(\nabla_{JX} Y - (\nabla_Y J)X) + J((\nabla_X J)Y - \nabla_{JY} X) \\ &\quad - (\nabla_{JX} J)Y + (\nabla_{JY} J)X \\ &= \nabla_X Y - \nabla_Y X + J(\nabla_{JX} Y - \nabla_{JY} X) \\ &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - \nabla_X Y + \nabla_Y X \\ &= 0 \end{aligned}$$

car  $\nabla_{JX} Y = J\nabla_X Y$ . La variété  $M$  est alors complexe. De plus, comme  $\Omega = g(\cdot, J\cdot)$ ,  $\nabla J = 0$  par hypothèse et  $\nabla g = 0$  par définition de  $\nabla$ , on a également  $\nabla \Omega = 0$  et

en particulier, par la relation :

$$d\Omega(X, Y, Z) = X \cdot \Omega(Z, Y) + Y \cdot \Omega(X, Z) + Z \cdot \Omega(Y, X) + \Omega([X, Y], Z) - \Omega([Z, X], Y) + \Omega([Y, Z], X)$$

et le fait que  $\nabla$  soit sans torsion, on obtient  $d\Omega = 0$ .

Réciproquement, supposons que  $M$  est une variété kählérienne.

Soit  $(X, Y, Z) \in \Gamma(TM)^3$ , notons  $B(X, Y, Z) = g((\nabla_X J)Y, Z)$ . Il suffit de montrer que  $B(X, Y, JZ)$  est nul. En effet, comme  $g$  est non dégénérée on aura  $\nabla_X J = 0$  pour tout  $X$ . Premièrement :

$$B(X, Y, JZ) = B(X, JY, Z).$$

En effet,

$$B(X, Y, JZ) = g((\nabla_X J)Y, JZ)$$

$$B(X, JY, Z) = g((\nabla_X J)JY, Z) = g(-J(\nabla_X J)Y, Z) = g((\nabla_X J)Y, JZ)$$

car  $J(\nabla_X J) = -(\nabla_X J)J$  et  $g$  est stable par  $J$ . De plus, d'après le lemme 1.2.2,

$$B(X, Y, JZ) + B(JX, Y, Z) = 0$$

En combinant ces deux relations, on obtient  $B(X, JY, Z) + B(JX, Y, Z) = 0$ . En utilisant deux fois  $d\Omega = 0$ , une fois sur  $X, Y, JZ$  et une fois sur  $X, JY, Z$ , cela donne

$$B(X, Y, JZ) + B(Y, JZ, X) + B(JX, X, Y) = 0$$

$$B(X, JY, Z) + B(JY, Z, X) + B(Z, X, JY) = 0.$$

En additionnant ces deux nouvelles relations et en utilisant ce qui précède, on obtient  $2B(X, Y, JZ) = 0$ , ce qui signifie que  $J$  est parallèle.  $\square$

**Preuve :** Montrons maintenant le lemme 1.2.2. Supposons que l'équation (1.2) est

vraie et montrons que  $N^J = 0$ . Pour tout  $(X, Y) \in \Gamma(TM)^2$  :

$$\begin{aligned}
 N^J(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X + J(\nabla_{JX} Y - (\nabla_Y J)X) + J((\nabla_X J)Y - \nabla_{JY} X) \\
 &\quad - (\nabla_{JX} J)Y + (\nabla_{JY} J)X \\
 &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - \nabla_X Y - J(\nabla_Y J)X + J(\nabla_X J)Y + \nabla_Y X \\
 &\quad - (\nabla_{JX} J)Y + (\nabla_{JY} J)X \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que  $N^J = 0$ , notons, pour tout  $(X, Y, Z) \in \Gamma(TM)^3$ ,  $A(X, Y, Z) = g(J(\nabla_X J)Y - (\nabla_{JX} J)Y, Z)$ . Le fait que  $N^J = 0$  se traduit alors par  $A(X, Y, Z) = -A(X, Z, Y)$ . On obtient l'équation (1.2) par permutation circulaire :

$$A(X, Y, Z) = -A(Y, Z, X) = A(Z, X, Y) = -A(X, Y, Z)$$

□

### 1.2.2 Théorème de décomposition de Hodge

Dans cette partie, nous rappelons la principale particularité topologique des variétés kählériennes compactes : le théorème de décomposition de Hodge (pour une démonstration complète, voir [Mor07]). Ce théorème lie la cohomologie de de Rham et la cohomologie de Dolbeault.

**Théorème 1.2.3 (Décomposition de Hodge)** *Soit  $M$  une variété kählérienne compacte. Il existe alors un isomorphisme :*

$$H^k(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(M)$$

*entre le  $k$ -ième groupe de cohomologie de de Rham et la somme directe des groupes de cohomologie de Dolbeault. De plus, le groupe  $H^{p,q}(M)$  est isomorphe au groupe  $\overline{H^{q,p}(M)}$ .*

Le corollaire suivant donne en conséquence directe du théorème de décomposition de Hodge un critère nécessaire pour être une variété kählérienne. Ce critère sera en général utilisé pour démontrer le fait qu'une variété n'est pas kählérienne. La

dimension complexe  $b_k(M) = \dim_{\mathbb{C}}(H^k(M, \mathbb{C}))$  du  $k$ -ième groupe de cohomologie de de Rham s'appelle le  $k$ -ième nombre de Betti.

**Corollaire 1.2.4** *Les nombres de Betti d'indices impairs  $b_{2a+1}(M)$  d'une variété kählérienne compacte sont pairs.*

Pour montrer qu'une variété compacte  $M$  n'est pas kählérienne, il suffit de montrer que  $b_1(M)$  est impair. Donnons maintenant quelques exemples de variétés kählériennes et de variétés non kählériennes.

**Remarque 1.2.5** *Je remercie Liviu Ornea pour cette remarque lors de la soutenance de ce travail de thèse.*

*Lorsque qu'une variété complexe  $M$  est non compacte, le théorème de décomposition de Hodge n'est plus vérifié. Il n'y a plus de critère cohomologique au fait d'être kählérien lorsque  $M$  n'est pas compacte.*

## 1.3 Exemples

### 1.3.1 Variétés kählériennes

Le premier exemple naturel est l'espace  $\mathbb{C}^n$  muni de la 2-forme de Kähler en coordonnées locales :

$$\Omega = \frac{i}{2} \sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\bar{z}_i$$

Comme  $d^2 = 0$ , on a bien  $d\Omega = 0$ . On exhibe également un potentiel kählérien local avec le module de  $z$  au carré.

Nous exposons trois autres exemples kählériens moins naturels (mais compacts) : les tores complexes  $\mathbb{T}$ , les variétés projectives  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  et les surfaces K3.

#### 1.3.1.1 Tores complexes

Le tore complexe de dimension  $n$  :  $\mathbb{T}^n$  se présente de plusieurs manières difféomorphes. En dimension complexe 1, le diagramme suivant parle de lui-même :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{(x,y) \mapsto (x+\mathbb{Z}, y+\mathbb{Z})} & (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2 & \xrightarrow{(x+\mathbb{Z}, y+\mathbb{Z}) \mapsto (x+\mathbb{Z}+i(y+\mathbb{Z}))} & \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2 \\
 \downarrow (x,y) \mapsto (e^{2i\pi x}, e^{2i\pi y}) & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow \\
 (\mathbb{S}^1)^2 & & & & 
 \end{array}$$

Ce diagramme est identique en dimension complexe  $n$ .

Ainsi  $\mathbb{T}^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{2n} = \mathbb{C}^n/\mathbb{Z}^{2n} = (\mathbb{S}^1)^{2n}$ . Ceci nous informe sur la topologie de  $\mathbb{T}^n$  :

en effet, les nombres de Betti vérifient  $b_k(\mathbb{T}^n) = \binom{2n}{k}$  et la condition nécessaire de parité des nombres de Betti d'indices impaires du corollaire 1.2.4 est remplie (le coefficient binomiale  $\binom{n}{k}$  est toujours divisible par  $\frac{n}{\text{pgcd}(n,k)}$  donc si  $k = 2q + 1$ ,  $k$

et  $2n$  sont premiers entre eux et  $\binom{2n}{2q+1}$  est divisible par 2 :  $b_{2q+1}(\mathbb{T}^n)$  est pair).

Au niveau holomorphe, le tore complexe de dimension  $n$  est  $\mathbb{T}^n = \mathbb{C}^n/\mathbb{Z}^{2n}$ . La

2-forme standard fermée de Kähler  $\Omega = \frac{i}{2} \sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\bar{z}_i$  de  $\mathbb{C}^n$  vue précédemment passe au quotient car l'action de  $\mathbb{Z}^{2n}$  se fait par translation. Ainsi le tore  $\mathbb{T}^n$  est une variété kählérienne compacte. Cet exemple est encore assez simple. C'est un peu plus délicat pour les variétés projectives : il faut faire appel à la métrique de Fubini Study.

### 1.3.1.2 Variétés projectives

Considérons l'espace projectif  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  muni de l'atlas  $(U_i, \phi_i)_{i=0, \dots, n}$  suivant :

$$\begin{aligned} U_i &= \{[z_0, \dots, z_n], z_i \neq 0\} \\ \phi_i: U_i &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ [z_0, \dots, z_n] &\mapsto \left( \frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right) \end{aligned}$$

Nous allons donner quelques arguments présentant la métrique de Fubini Study sur  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  introduite initialement en 1904 par Guido Fubini [Fub04]. Cette métrique est liée à une 2-forme de Kähler fermée, ce qui fait de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  une variété kählérienne. Nous reprenons [Mor07] pour montrer ce fait.

Notons  $\pi$  la projection canonique de  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  dans  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  et, pour tout  $0 \leq \alpha \leq n$ , la fonction  $f_\alpha = \phi_\alpha \circ \pi$  holomorphe de  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  dans  $\mathbb{C}^n$ . On considère encore deux fonctions :

$$\begin{aligned} u: \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto \ln(1 + |w|^2) \\ v: \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ z &\mapsto \ln(|z|^2) \end{aligned}$$

Pour tout  $z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ , on a  $u \circ f_\alpha(z) = v(z) - \ln(|z_\alpha|^2)$ . De cette relation, et du fait que  $\partial\bar{\partial} \ln(|z_\alpha|^2) = 0$ , nous déduisons que  $f_\alpha^*(\partial\bar{\partial}u) = \partial\bar{\partial}v$ . Posons maintenant, sur  $U_\alpha$  :

$$\Omega_{|U_\alpha} = i\phi_\alpha^*(\partial\bar{\partial}u)$$

La 2-forme locale  $\Omega$  vérifie la relation :

$$\pi^*\Omega = i\partial\bar{\partial}v$$

En effet,  $\pi^*\Omega = if_\alpha^*(\partial\bar{\partial}u) = i\partial\bar{\partial}v$ . Ceci permet de déduire immédiatement que  $d\Omega = 0$ . On pose, pour tout  $(X, Y) \in \Gamma(T\mathbb{C}\mathbb{P}^n)^2$ ,

$$g(X, Y) = \Omega(X, JY)$$

Il reste à vérifier que cette métrique appelée métrique de Fubini Study est définie positive. Travaillons dans une carte locale  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$ . Notons, pour tout  $(X, Y) \in \Gamma(T\mathbb{C}^n)$ ,  $\hat{g}(X, Y) = i\partial\bar{\partial}u(X, JY)$ . Alors,  $g = \phi_\alpha^*\hat{g}$ . Il suffit de montrer que  $\hat{g}$  est définie positive. Soit  $U_n$  le groupe des transformations linéaires (donc holomorphes) unitaires de  $\mathbb{C}^n$ . Tout élément de  $U_n$  préserve  $u$  et par conséquent, préserve aussi  $\hat{g}$ . Or, l'action de ce groupe est transitive sur  $\mathbb{S}^{2n-1}$ , il suffit alors de montrer que  $\hat{g}$  est définie positive en un point  $p = (r, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$  pour un certain réel  $r$  strictement positif. Calculons :

$$\begin{aligned} \partial\bar{\partial}\ln(1 + |z|^2) &= \partial\left(\frac{1}{1 + |z|^2} \sum_{i=1}^n z_i dz_i\right) \\ &= \frac{1}{1 + |z|^2} \sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\bar{z}_i - \frac{1}{(1 + |z|^2)^2} \left(\sum_{i=1}^n \bar{z}_i dz_i\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^n z_j d\bar{z}_j\right) \end{aligned}$$

Au point  $p$ , cette expression se simplifie en :

$$\frac{1}{(1 + r^2)^2} \left( dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + (1 + r^2) \sum_{i=2}^n dz_i \wedge d\bar{z}_i \right)$$

qui est clairement définie positive. On en déduit immédiatement le lemme suivant :

**Lemme 1.3.1** *Toute variété complexe admettant un plongement holomorphe dans  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  est une variété kählérienne.*

La 2-forme de Kähler du plongement étant donnée par la restriction de la 2-forme  $\Omega$  précédente. Difféomorphiquement, ceci implique que toute variété plongée holomorphiquement dans l'espace projectif a tous ses nombres de Betti strictement positifs. Nous savons en fait bien plus de ces variétés : c'est le théorème de Chow :

**Théorème 1.3.2 (Chow)** *Toute variété complexe admettant un plongement holomorphe dans  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  est algébrique.*

Ainsi, toutes les variétés non algébriques et toutes les variétés non kählériennes n'admettent aucun plongement holomorphe dans  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ . Les variétés LVM (c.f. chapitre 4) sont non algébriques et non kählériennes et se plongent difféomorphiquement dans l'espace projectif. Et nous savons donc, d'après ce qui précède, qu'elles n'admettent aucun plongement holomorphe dans  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ .

La difficulté, sur ces exemples, à montrer qu'ils sont kählériens, va crescendo. En effet, nous présentons encore un exemple de variétés kählériennes : les surfaces K3 pour lesquelles nous ne donnerons pas de démonstration.

### 1.3.1.3 Surfaces K3

**Définition 1.3.3** *Une surface K3 est une surface compacte complexe, simplement connexe, dont le fibré canonique est trivial.*

Toute une épopée s'est déroulée de 1958 à 1983 autour des surfaces K3. Au départ, André Weil donna le nom de surface K3 en l'honneur de Kummer, Kähler et Kodaira. En effet, les surfaces de Kummer sont des cas particuliers de surfaces K3, les surfaces K3 sont de Kähler et font partie de la classification des surface de Kodaira. L'introduction historique d'Arnaud Beauville [Bea82] donne le ton sur l'ampleur de ce résultat. C'est Y-T Siu qui montra le premier que toute surface K3 est kählérienne [Siu83]. La preuve a ensuite été reprise et améliorée par exemple dans [Bar+15] en 2015. Il n'est pas question (et beaucoup trop long) de reprendre la preuve de ce résultat ici.

## 1.3.2 Variétés non kählériennes

Les exemples de variétés kählériennes existent avec plus ou moins d'aisance à déterminer la métrique kählérienne. Nous présentons ici des exemples de variétés complexes non kählériennes. Premièrement, les variétés de Hopf présentées (chapitre 3) qui sont un exemple de variété non kählérienne largement étudié dans la littérature. Et deuxièmement, les variétés LVM qui en sont une généralisation et dont la présentation (chapitre 4).

### 1.3.2.1 Variétés de Hopf

Cet exemple est standard dès lors que l'on parle de variété non kählérienne. Les propriétés de ces variétés sont connues. Cet exemple est souvent un point de départ pour tester quelles sont les limites et les différences entre les variétés kählériennes et les variétés non kählériennes.

Dans le chapitre 3, nous montrerons que les variétés de Hopf sont toutes localement conformément kählériennes. Commençons par les définir :

**Définition 1.3.4** *Une variété de Hopf de dimension complexe  $n$  est un quotient de  $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  par une action d'un groupe cyclique (isomorphe à  $\mathbb{Z}$ ) engendrée par une contraction holomorphe (voir définition précise de contraction holomorphe 3.1.1 au chapitre 3). Lorsque l'action de  $\mathbb{Z}$  est du type  $A^{\mathbb{Z}}$  où  $A$  est une matrice de taille  $n$  dont les valeurs propres sont de modules strictement inférieurs à 1, on dira que la variété de Hopf est linéaire.*

Pour cette section, nous nous contentons d'expliquer pourquoi une variété de Hopf n'est pas kählérienne. Et c'est immédiat. En effet, la suite de difféomorphismes naturels suivante :

$$\mathbb{C}^n \setminus \{0\} / \mathbb{Z} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{2n-1} / \mathbb{Z} \simeq \mathbb{R} / \mathbb{Z} \times \mathbb{S}^{2n-1} \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{2n-1}$$

implique que le premier nombre de Betti est  $b_1 = 1$ . Ce qui montre qu'une variété de Hopf n'est pas kählérienne d'après le corollaire 1.2.4. Ces variétés disposent d'une structure moins riche qu'une métrique kählérienne mais qui mérite de s'y attarder. Nous verrons dans le chapitre 3, qui leur est consacré, que toutes ces variétés sont localement conformément kählériennes. Celles-ci jouissent des propriétés de cette classe de variétés. Nous en mettrons en lumière quelques unes au chapitre 2 pour motiver leurs intérêts.

### 1.3.2.2 Variétés LVM et LVMB

Autre exemple central de cette thèse, les variétés LVM qui seront exposées dans le chapitre 4. Une variété LVM est la généralisation d'une variété de Hopf. En effet, les variétés de Hopf sont des quotients de  $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  par une action de  $\mathbb{Z}$ , les variétés LVM sont des quotients de  $\mathbb{C}^n \setminus F$  par une action de  $\mathbb{C}^m$  (historiquement

une action de  $\mathbb{C}$  dans [MV97] puis une action de  $\mathbb{C}^m$  dans [Mee98]) où  $F$  est un ensemble analytique. Les variétés LVM qui seront étudiées au chapitre 4 sont belle et bien celles de [Mee98]. Nous donnerons la stratégie de la preuve du fait que ces variétés sont non kählériennes dans ce chapitre 4. Les nombres de Betti ne sont pas un outil suffisant dans ce cas. Les variétés LVM au sens de l'action de  $\mathbb{C}^m$  ont elles-mêmes été généralisées dans [Bos01] pour former une classe plus grande : les variétés LVMB qui sont également non kählériennes (voir [Bos01]). Nous parlerons des variétés LVMB au chapitre 4 pour en donner l'idée générale de construction. On a les inclusions suivantes :

$$\text{Hopf linéaires diagonales} \subseteq \text{LVM} \subseteq \text{LVMB}$$

### 1.3.2.3 Variétés lck

Les variétés non kählériennes ont-elles des points communs ? Peut-on mesurer à quel point elles sont éloignées des variétés kählériennes au niveau métrique ou au niveau cohomologique ? Il existe une classe de variétés pour lesquelles nous pouvons répondre en partie à ces questions : les variétés localement conformément kählériennes (lck). Le chapitre 2 en donne la définition et quelques propriétés d'intérêts qui mettent en jeu des analogies avec les métriques des variétés kählériennes. Ce sont simplement des variétés qui, localement, admettent une métrique conforme à une métrique kählérienne. La différentielle de la 2-forme de Kähler globale (non fermée) vérifie tout de même une certaine égalité ( $d\Omega = \omega \wedge \Omega$ ) où  $\omega$  est une 1-forme globale fermée appelée la forme de Lee. La structure complexe est parallèle pour une certaine connexion différente de celle de Levi-Civita etc...

Une variété kählérienne est évidemment lck, mais il existe des variétés lck qui ne sont pas kählériennes. Nous les qualifierons de variétés lck strictes. Les variétés de Hopf sont le premier exemple de variétés lck strictes. Le but de cette thèse est d'étudier la structure métrique non kählérienne des variétés LVM. Les variétés de Hopf sont également un exemple de variétés lck qui sont aussi LVM. De plus, nous savons que les lck strictes ne correspondent pas à toutes les LVM puisque, par exemple les variétés de Calabi-Eckmann [CE53], qui peuvent être obtenues comme une sous-classe des LVM, ne sont pas lck car non kählériennes et simplement connexes (voir corollaire 2.1.3 du chapitre 2).



# GÉOMÉTRIE LOCALEMENT CONFORMÉMENT KÄHLÉRIENNE

---

Les métriques lck : localement conformément kählériennes furent étudiées initialement dans les années 1970 par I.Vaisman sur plusieurs articles [Vai76], [Vai80b], [Vai80a], [Vai82], [Vai85]... Les propriétés de cette classe de variétés sont résumées par Liviu Ornéa et Sorin Dragomir dans [DO12]. Dans ce chapitre, nous donnons les propriétés qui se rapprochent de la classe des variétés kählériennes, par exemple le parallélisme de la structure complexe mais aussi des propriétés qui sont très éloignées de cette même classe : notamment au niveau cohomologique avec la deuxième conjecture de Vaisman et l'étude qui s'en est suivie d'une cohomologie plus adaptée que celle de  $d$ . Nous parlerons également des différences entre variétés lck au sens large, variétés lck à potentiel et variétés de Vaisman.

Dans tout ce chapitre,  $M = (M, J, g)$  désigne une variété compacte, complexe, de dimension complexe  $n$ , de structure complexe  $J$  et de métrique riemannienne  $g$  invariante par  $J$ . On note également  $\Omega$  la 2-forme fondamentale définie par :

$$\Omega(X, Y) = g(X, JY)$$

pour tout  $(X, Y) \in \Gamma(TM)^2$ .

## 2.1 Définitions

**Définition 2.1.1 (Variété lck)** *La variété  $M$  est dite localement conformément kählérienne (lck) lorsqu'il existe un couple  $(U_i, f_i)_{i \in I}$  où  $(U_i)_{i \in I}$  est un recouvrement ouvert de  $M$  et  $(f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R})_{i \in I}$  est une famille d'applications  $C^\infty$  tels que chaque variété  $U_i$  munie de la métrique  $g_i = \exp(-f_i)g|_{U_i}$  soit kählérienne. De plus, une variété lck non globalement conforme à une variété kählérienne sera qualifiée de variété lck stricte.*

Nous pouvons également caractériser une variété lck à l'aide d'une équation simple :

**Proposition 2.1.2 (Caractérisation équivalente)** *La variété  $M$  est lck si et seulement s'il existe une 1-forme fermée  $\omega$  telle que :*

$$d\Omega = \omega \wedge \Omega \quad (2.1)$$

*La 1-forme  $\omega$  ainsi obtenue s'appelle la forme de Lee.*

**Preuve :** Supposons que  $M$  est lck. On a  $0 = d\Omega_i = d(\exp(-f_i)\Omega|_{U_i})$ . Sur l'ouvert  $U_i$ , ce calcul donne :

$$0 = -df_i \exp(-f_i) \wedge \Omega + \exp(-f_i) \wedge d\Omega \Leftrightarrow df_i \wedge \Omega = d\Omega$$

Ceci étant vrai pour tout  $i \in I$ , sur  $U_i \cap U_j$ , on a  $(df_i - df_j) \wedge \Omega = 0$  et comme  $\Omega$  est non identiquement nulle sur  $U_i \cap U_j$ , il suit que  $df_i = df_j$  sur l'intersection  $U_i \cap U_j$ . Les  $df_i$  se recollent donc en une 1-forme fermée  $\omega$  telle que  $\omega|_{U_i} = df_i$ .

Réciproquement, supposons qu'il existe une 1-forme fermée  $\omega$  avec  $d\Omega = \omega \wedge \Omega$ . Comme  $M$  est une variété, elle est localement simplement connexe donc il existe un recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$  de  $M$  avec, pour tout  $i \in I$ ,  $U_i$  simplement connexe. La 1-forme fermée  $\omega|_{U_i}$  est exacte d'après le lemme de Poincaré : il existe  $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  telle que  $df_i = \omega|_{U_i}$ . Par conséquent, sur  $U_i$  :

$$d\Omega = df_i \wedge \Omega.$$

Et lorsque l'on multiplie cette égalité par  $\exp(-f_i)$ , on obtient :

$$\exp(-f_i) \wedge d\Omega = \exp(-f_i)df_i \wedge \Omega \Leftrightarrow 0 = d(\exp(-f_i) \wedge \Omega) = d\Omega_i$$

Ce qui signifie que  $M$  est lck.  $\square$

Le corollaire suivant est immédiat :

**Corollaire 2.1.3** (1) *Une variété lck dont la forme de Lee est nulle ou exacte est kählérienne.*

(2) *Si  $M$  est lck et simplement connexe, alors,  $\omega$  est exacte et donc  $M$  est kählérienne.*

Notons  $\tilde{M}$  le revêtement universel de la variété  $M$ . Ce résultat est à l'origine de [Vai82].

**Proposition 2.1.4** *La variété  $M$  est lck si et seulement si  $\tilde{M}$  est une variété kählérienne avec  $M = \tilde{M}/G$  où les éléments du groupe fondamental  $G$  de  $M$  agissent conformément pour la métrique kählérienne  $\tilde{g}$  de  $\tilde{M}$ .*

**Preuve** : Supposons que  $\tilde{M}$  est une variété kählérienne avec  $M = \tilde{M}/G$  où  $G$  est le groupe fondamental de  $M$  dont les éléments agissent conformément pour la métrique kählérienne  $\tilde{g}$  de  $\tilde{M}$ . Notons  $p: \tilde{M} \rightarrow M = \tilde{M}/G$  ce revêtement universel. Soit  $x \in M$  et  $U_x$  un ouvert de  $M$  contenant  $x$  trivialisant :  $p^{-1}(U_x) = \cup_{i \in I} \tilde{U}_i$  avec  $\tilde{U}_i$  des ouverts disjoints de  $\tilde{M}$ . Notons  $p_i: \tilde{U}_i \rightarrow U_x$  l'homéomorphisme induit entre  $\tilde{U}_i$  et  $U_x$  pour tout  $i \in I$ . Soit  $\tilde{y}_i \in \tilde{U}_i$ . Soit  $c_i$  un lacet pointé en  $p(\tilde{y}_i)$  de  $M$  (représentant d'un élément de  $G$ ). Alors  $c_i$  agit sur  $\tilde{y}_i$  via l'unique relèvement  $\tilde{c}_i$  de  $c_i$  d'origine  $\tilde{c}_i(0) = \tilde{y}_i : c_i \star \tilde{y}_i = \tilde{c}_i(1)$ . Notons  $\tilde{\Omega}$  la 2-forme de Kähler pour la métrique  $\tilde{g}$ . Alors  $c_i^* \tilde{\Omega} = e^{\tilde{f}_i} \tilde{\Omega}$  sur  $\tilde{U}_i$  où  $\tilde{f}_i: \tilde{U}_i \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^\infty$ . Ainsi, la propriété  $d\tilde{\Omega} = 0$  implique  $d(c_i^* \tilde{\Omega}) = e^{\tilde{f}_i} d\tilde{f}_i \wedge \tilde{\Omega}$ . Notons, sans le " $\sim$ " toutes les structures projetées sur  $M$ . Alors  $\tilde{f}_i$  se projète en  $f_x: U_x \rightarrow \mathbb{R}$  et  $d\Omega = df_x \wedge \Omega$  sur  $U_x$ . Ceci étant vrai sur tout ouvert trivialisant, les  $df_x$  se recollent en la forme de Lee globale  $\omega$  et la relation  $d\Omega = \omega \wedge \Omega$  est vraie globalement. Ainsi,  $M$  est lck. Réciproquement, supposons que  $M$  est lck pour une certaine métrique  $g$  qui se relève sur  $\tilde{M}$  en  $\tilde{g}$ . Notons encore  $\omega$  la forme de Lee sur  $M$  qui se relève en  $\tilde{\omega}$  sur  $\tilde{M}$ . Alors, comme  $\tilde{M}$  est simplement connexe,  $\tilde{\omega}$  est exacte. Il en résulte que  $\tilde{g}$  est conforme à une métrique kählérienne globale : disons  $\tilde{g}' = e^f \tilde{g}$ . Alors, si  $c$  est un élément de  $G$ , comme  $\tilde{g}$  est un relèvement de  $g$ ,  $c^* \tilde{g} = \tilde{g}$ . Mais pour la métrique kählérienne  $\tilde{g}'$ , on a :

$$c^* \tilde{g}' = c^*(e^f \tilde{g}) = (e^{f \circ c}) c^* \tilde{g} = (e^{f \circ c}) \tilde{g} = (e^{f \circ c}) e^{-f} \tilde{g}'$$

Par conséquent, les éléments de  $G$  agissent conformément pour la métrique kählérienne  $\tilde{g}'$ .  $\square$

## 2.2 Propriétés

### 2.2.1 Parallélisme de la structure complexe

Nous allons montrer dans cette section un résultat similaire au théorème 1.2.1 sur le parallélisme de  $J$ . Il y a néanmoins une certaine différence : le théorème 1.2.1 du chapitre 1 dit que si  $(M, J)$  est une variété presque complexe (sans la condition  $N^J = 0$ ), alors  $\nabla J = 0$  si et seulement si  $M$  est kählérienne. Ce qui montre en particulier que  $\nabla J = 0$  implique que  $N^J = 0$ . Dans le cas lck, nous montrerons que, partant d'une variété complexe (avec  $N^J = 0$ ),  $M$  est lck si et seulement si  $J$  est parallèle mais pour la connexion  $D$  correspondant au recollement des connexions de Levi-Civita  $\nabla^i$  locales sur  $M$ .

Dans le cas où  $M$  est une variété lck, on définit  $\alpha^\# \in \Gamma(TM)$ , pour toute 1-forme  $\alpha$ , comme suit : pour tout  $X \in \Gamma(TM)$ ,  $g(X, \alpha^\#) = \alpha(X)$ . En particulier,  $B = \omega^\#$  est le champ de vecteurs de Lee et  $A = JB$  le champ de vecteurs de Reeb. Les deux relations suivantes sont alors immédiates :

$$i_B \Omega = -\omega \circ J; \quad i_A \Omega = -\omega \quad (2.2)$$

lorsque  $i_A$  et  $i_B$  désignent le produit intérieur par exemple  $i_B \Omega(X) = \Omega(X, B)$  pour tout  $X \in \Gamma(TM)$ .

Montrons dans un premier temps la proposition suivante sur la connexion de Levi-Civita globale de  $M$  qui est notée  $\nabla$ .

**Proposition 2.2.1** *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne, soit  $\hat{g} = e^f g$  une métrique conforme à  $g$  avec  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ . Alors, pour tout  $(X, Y) \in \Gamma(TM)^2$  :*

$$\widehat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2}(X(f)Y + Y(f)X - g(X, Y)(df)^\#). \quad (2.3)$$

où  $\widehat{\nabla}$  est la connexion de Levi-Civita de la métrique  $\hat{g}$ .

**Preuve :** D'après le théorème 3.3.1 de [JJ08],  $g(\nabla_X Y, Z)$  s'écrit, pour tout  $(X, Y, Z) \in \Gamma(TM)^3$  :

$$\frac{1}{2}(X(g(Y, Z)) - Z(g(X, Y)) + Y(g(Z, X)) - g(X, [Y, Z]) + g(Z, [X, Y]) + g(Y, [Z, X]))$$

De même,  $\widehat{g}(\widehat{\nabla}_X Y, Z)$ , est égal à :

$$\frac{1}{2}(X(\widehat{g}(Y, Z)) - Z(\widehat{g}(X, Y)) + Y(\widehat{g}(Z, X)) - \widehat{g}(X, [Y, Z]) + \widehat{g}(Z, [X, Y]) + \widehat{g}(Y, [Z, X]))$$

On remplace par  $\widehat{g} = e^f g$ ,  $e^f g(\widehat{\nabla}_X Y, Z)$  est égal à :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(X(e^f g(Y, Z)) - Z(e^f g(X, Y)) + Y(e^f g(Z, X)) \\ & \quad - e^f g(X, [Y, Z]) + e^f g(Z, [X, Y]) + e^f g(Y, [Z, X])) \\ = & \frac{1}{2}(X(f)e^f g(Y, Z) + e^f X(g(Y, Z)) - Z(f)e^f g(X, Y) - e^f Z(g(X, Y)) \\ & \quad + Y(f)e^f g(Z, X) + e^f Y(g(Z, X)) - e^f g(X, [Y, Z]) + e^f g(Z, [X, Y]) + e^f g(Y, [Z, X])) \end{aligned}$$

Or, par définition de  $\nabla$  :  $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ , donc, après simplification des  $e^f$ , on obtient :

$$\begin{aligned} g(\widehat{\nabla}_X Y, Z) = & \frac{1}{2}(X(f)g(Y, Z) + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) - Z(f)g(X, Y) - g(\nabla_Z X, Y) \\ & - g(X, \nabla_Z Y) + Y(f)g(Z, X) + g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) \\ & - g(X, [Y, Z]) + g(Z, [X, Y]) + g(Y, [Z, X])) \end{aligned}$$

Faisons le même travail pour  $g(\nabla_X Y, Z)$ , on peut écrire que  $g(\nabla_X Y, Z)$  est égal à :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(X(g(Y, Z)) - Z(g(X, Y)) + Y(g(Z, X)) - g(X, [Y, Z]) + g(Z, [X, Y]) + g(Y, [Z, X])) \\ = & \frac{1}{2}(g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) + g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) \\ & - g(X, [Y, Z]) + g(Z, [X, Y]) + g(Y, [Z, X])) \end{aligned}$$

Il reste, pour conclure, à soustraire  $g(\widehat{\nabla}_X Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) = g(\widehat{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, Z)$  :

$$\begin{aligned} g(\widehat{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, Z) &= \frac{1}{2}(X(f)g(Y, Z) + Y(f)g(Z, X) - Z(f)g(X, Y)) \\ &= \frac{1}{2}(X(f)g(Y, Z) + Y(f)g(Z, X) - g((df)^\#, Z)g(X, Y)) \\ &= g\left(\frac{1}{2}(X(f)Y + Y(f)X - g(X, Y)(df)^\#), Z\right) \end{aligned}$$

Comme  $g$  est non dégénérée, on a bien la relation 2.3.  $\square$

Soit  $M$  une variété lck, on note  $\nabla^i$  les connexions de Levi-Civita des variétés

kählériennes  $U_i$  du recouvrement ouvert relativement aux métriques  $g_i$  (voir la définition 2.1.1).

**Théorème 2.2.2** *Les  $\nabla^i$  se recollent en une connexion globale  $D$  sans torsion sur  $M$ , donnée, pour tout  $(X, Y) \in \Gamma(TM)^2$ , par :*

$$D_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2}(\omega(X)Y + \omega(Y)X - g(X, Y)\omega^\#) \quad (2.4)$$

De plus, on a  $Dg = \omega \otimes g$ .

C'est pour cette connexion  $D$  que la structure complexe  $J$  est parallèle dans le cas des variétés lck. C'est ce qui sera montré dans le théorème 2.2.3.

**Preuve :** Soit  $(X, Y) \in \Gamma(TU_i)^2$ , d'après la proposition 2.2.1, sur  $U_i$ , on a :

$$\begin{aligned} \nabla_X^i Y &= \nabla_X Y + \frac{1}{2}(X(-f_i)Y + Y(-f_i)X - g(X, Y)(d(-f_i))^\#) \\ &= \nabla_X Y - \frac{1}{2}(X(f_i)Y + Y(f_i)X - g(X, Y)(df_i)^\#) \\ &= \nabla_X Y - \frac{1}{2}(\omega(X)Y + \omega(Y)X - g(X, Y)\omega^\#) \end{aligned}$$

car, sur  $U_i$ ,  $\omega(X) = (df_i)X = X(f_i)$ . Sur  $U_i \cap U_j$ , on a  $\nabla_X^i Y = \nabla_X^j Y$  d'après ce calcul. Ainsi, les  $\nabla^i$  se recollent et la formule (2.4) est bien vérifiée. De plus,  $D$  est sans torsion. En effet,

$$\begin{aligned} D_X Y - D_Y X &= \nabla_X Y - \frac{1}{2}(\omega(X)Y + \omega(Y)X \\ &\quad - g(X, Y)\omega^\#) - \nabla_Y X + \frac{1}{2}(\omega(Y)X + \omega(X)Y - g(Y, X)\omega^\#) \\ &= [X, Y] + \frac{1}{2}(g(X, Y)\omega^\# - g(Y, X)\omega^\#) = [X, Y] \end{aligned}$$

Il reste à montrer que  $Dg = \omega \otimes g$ . Pour tout  $(X, Y, Z) \in \Gamma(TM)^3$ ,  $(D_X g)(Y, Z)$

est égal à :

$$\begin{aligned}
 & X(g(Y, Z)) - g(D_X Y, Z) - g(Y, D_X Z) \\
 = & X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) + \frac{1}{2}g(\omega(X)Y + \omega(Y)X - g(X, Y)\omega^\#, Z) \\
 & + \frac{1}{2}g(Y, \omega(X)Z + \omega(Z)X - g(X, Z)\omega^\#) \\
 = & X(g(Y, Z)) - X(g(Y, Z)) + \frac{1}{2}(\omega(X)g(Y, Z) + \omega(Y)g(X, Z) - g(X, Y)g(\omega^\#, Z)) \\
 & + \frac{1}{2}(\omega(X)g(Y, Z) + \omega(Z)g(Y, X) - g(X, Z)g(Y, \omega^\#)) \\
 = & \omega(X)g(Y, Z) = (\omega \otimes g)(X, Y, Z)
 \end{aligned}$$

□

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant.

**Théorème 2.2.3** *La variété  $M$  est lck si et seulement s'il existe une 1-forme fermée  $\omega$  telles que  $J$  soit parallèle relativement à la connexion  $D$ . De plus, dans ce cas, la 1-forme fermée  $\omega$  est la forme de Lee.*

Comme nous l'avons mentionné en début de section, on suppose dans ce théorème que  $N^J = 0$ . Cette condition d'intégrabilité n'est pas supposée dans le cas kählérien (voir théorème 1.2.1).

**Preuve :** Supposons que  $M$  est lck, alors  $d\Omega = \omega \wedge \Omega$  avec  $\omega$  la 1-forme fermée de Lee. Soit  $\tilde{\omega}$  un relèvement de  $\omega$  au revêtement universel  $\tilde{M}$ . Comme  $\tilde{M}$  est simplement connexe,  $\tilde{\omega}$  est exacte et donc il existe  $\tilde{f} \in C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$ . On pose  $\tilde{\Omega}' = e^{-\tilde{f}}\tilde{\Omega}$ . Alors  $\tilde{M}$  est une variété kählérienne pour  $\tilde{\Omega}'$ . Notons  $\tilde{g}$  un relèvement de  $g$  et  $\tilde{g}' = e^{-\tilde{f}}\tilde{g}$ . Soit enfin  $\tilde{J}$  un relèvement de  $J$ . On a bien  $\tilde{\Omega}'(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{g}'(\tilde{X}, \tilde{J}\tilde{Y})$  pour tout  $(\tilde{X}, \tilde{Y}) \in \Gamma(T\tilde{M})^2$ . Soit  $\tilde{\nabla}$  et  $\tilde{\nabla}'$  les connexions de Levi-Civita respectivement de  $\tilde{g}$  et  $\tilde{g}'$ . La proposition 2.2.1 permet d'expliciter la liaison entre ces deux

connexions : soit  $(\tilde{X}, \tilde{Y}) \in \Gamma(TM)^2$ , on a

$$\begin{aligned}
 \tilde{\nabla}'_{\tilde{X}}\tilde{Y} &= \tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} + \frac{1}{2}(\tilde{X}(-\tilde{f})\tilde{Y} + \tilde{Y}(-\tilde{f})\tilde{X} - \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Y})(d(-\tilde{f}))^\#) \\
 &= \tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} + \frac{1}{2}(-\tilde{X})(\tilde{f})\tilde{Y} - \tilde{Y}(\tilde{f}\tilde{X} + \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{\omega}^\#) \\
 &= \tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} - \frac{1}{2}(d\tilde{f}(\tilde{X})\tilde{Y} + d\tilde{f}(\tilde{Y})\tilde{X} - \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{\omega}^\#) \\
 &= \tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} - \frac{1}{2}(\tilde{\omega}(\tilde{X})\tilde{Y} + \tilde{\omega}(\tilde{Y})\tilde{X} - \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{\omega}^\#)
 \end{aligned}$$

Par unicité, il vient  $\tilde{\nabla}' = \tilde{D}$ . Autrement dit,  $\tilde{\nabla}'$  est un relèvement de  $D$ . D'après le théorème 1.2.1, on a  $\tilde{\nabla}'\tilde{J} = 0$ . Et cette égalité se projette en  $DJ = 0$ .

Réciproquement, supposons qu'il existe  $\omega$  une 1-forme fermée telle que  $DJ = 0$  avec  $D$  définie par l'équation (2.4). Notons  $\tilde{\omega}$  un relèvement de  $\omega$ . Alors, il existe  $\tilde{f} \in C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$  telle que  $\tilde{\omega} = d\tilde{f}$ . En relevant l'hypothèse  $DJ = 0$ , on obtient :  $0 = \tilde{D}\tilde{J} = \tilde{\nabla}'\tilde{J}$ . Ainsi, toujours d'après le théorème 1.2.1,  $\tilde{M}$  est une variété kählérienne pour  $\tilde{g}' = e^{-\tilde{f}}\tilde{g}$ . De plus,

$$\begin{aligned}
 0 = d\tilde{\Omega}' &\Leftrightarrow -(d\tilde{f}e^{-\tilde{f}}) \wedge \tilde{\Omega} + e^{-\tilde{f}}d\tilde{\Omega} \\
 &\Leftrightarrow d\tilde{\Omega} = d\tilde{f} \wedge \tilde{\Omega} \\
 &\Leftrightarrow d\tilde{\Omega} = \tilde{\omega} \wedge \tilde{\Omega}
 \end{aligned}$$

Cette relation descend naturellement sur  $M$  en  $d\Omega = \omega \wedge \Omega$  :  $M$  est bien lck et  $\omega$  correspond par identification à la forme de Lee.  $\square$

**Remarque 2.2.4** *Supposons que  $DJ = 0$ , on a aussi  $Dg = \omega \otimes g$  et  $D\Omega = \omega \otimes \Omega$  d'après le théorème 2.2.2. En effet, pour tout  $(X, Y, Z) \in \Gamma(TM)^3$ ,*

$$\begin{aligned}
 (D_X\Omega)(Y, Z) &= X(\Omega(Y, Z)) - \Omega(D_XY, Z) - \Omega(Y, D_XZ) \\
 &= X(g(Y, JZ)) - g(D_XY, JZ) - g(Y, JD_XZ) \\
 &= X(g(Y, JZ)) - g(D_XY, JZ) - g(Y, D_X(JZ) - (D_XJ)Z)
 \end{aligned}$$

Or  $(D_XJ)Z = 0$ , on obtient bien exactement  $(D_Xg)(Y, JZ)$  et :

$$(D_X\Omega)(Y, Z) = (D_Xg)(Y, JZ) = (\omega \otimes g)(X, Y, JZ) = (\omega \otimes \Omega)(X, Y, Z)$$

Ainsi,  $D\Omega = \omega \otimes \Omega$ .

Nous terminons cette section avec deux corollaires qui sont des conséquences directes de ce théorème 2.2.3.

**Corollaire 2.2.5** *La variété  $M$  est lck si et seulement si, pour tout  $(X, Y) \in \Gamma(TM)^2$ ,*

$$\nabla_X(JY) = J(\nabla_X Y) + \frac{1}{2}(\theta(Y)X - \omega(Y)JX + g(X, Y)J\omega^\# - \Omega(X, Y)\omega^\#) \quad (2.5)$$

Ici,  $\theta = \omega \circ J$ .

**Preuve :** D'après le théorème précédent 2.2.3,  $M$  est lck si et seulement si, pour tout  $(X, Y) \in \Gamma(TM)^2$ ,  $(D_X J)Y = 0$ . Par conséquent :

$$\begin{aligned} 0 &= (D_X J)Y = D_X(JY) - J(D_X Y) \\ &= \nabla_X(JY) - \frac{1}{2}(\omega(X)JY + \omega(JY)X - g(X, JY)\omega^\#) - J(\nabla_X Y) \\ &\quad - \frac{1}{2}(\omega(X)Y + \omega(Y)X - g(X, Y)\omega^\#) \\ &= \nabla_X(JY) - J(\nabla_X Y) - \frac{1}{2}(\omega(X)JY + \omega(JY)X - g(X, JY)\omega^\# \\ &\quad - \omega(X)JY - \omega(Y)JX + g(X, Y)J\omega^\#) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\nabla_X(JY) = J(\nabla_X Y) + \frac{1}{2}(\theta(Y)X - \omega(Y)JX + g(X, Y)J\omega^\# - \Omega(X, Y)\omega^\#)$$

□

**Corollaire 2.2.6** *Si  $M$  est lck, alors  $\nabla_{\omega^\#} J = \nabla_{-J\omega^\#} J = 0$ .*

**Preuve :** Supposons que  $M$  est lck. Soit  $X \in \Gamma(TM)$ .

Calculons  $(\nabla_{\omega^\#} J)X = \nabla_{\omega^\#}(JX) - J(\nabla_{-J\omega^\#} X)$ . D'après le corollaire 2.2.5,

$$\begin{aligned}
 (\nabla_{\omega^\#} J)X &= \nabla_{\omega^\#}(JX) - J(\nabla_{-J\omega^\#} X) \\
 &= J(\nabla_{\omega^\#} X) + \frac{1}{2}(\theta(X)\omega^\# - \omega(X)J\omega^\# + g(\omega^\#, X)J\omega^\# - \Omega(\omega^\#, X)\omega^\#) \\
 &\quad - J(\nabla_{\omega^\#} X) \\
 &= \frac{1}{2}(\theta(X)\omega^\# - \omega(X)J\omega^\# + \omega(X)J\omega^\# - g(\omega^\#, JX)\omega^\#) \\
 &= \frac{1}{2}(\theta(X)\omega^\# - \omega(JX)\omega^\#) = \frac{1}{2}(\theta(X)\omega^\# - \theta(X)\omega^\#) = 0
 \end{aligned}$$

Le même calcul montre que  $\nabla_{-J\omega^\#} J = 0$ .  $\square$

Cette section montre les ressemblances métriques entre les variétés kählériennes et les variétés lck. Au niveau cohomologique, une structure lck est beaucoup plus pauvre qu'une structure kählérienne. C'est pourquoi nous allons définir une cohomologie plus adaptée aux variétés lck. Nous exposerons ensuite certains résultats sur les variétés de Vaisman et les variétés lck à potentiel. Pour clore ce chapitre, nous étudierons quelques exemples.

## 2.2.2 Cohomologie adaptée

Pour cette section, voir [Vai80b] initialement, puis [DO12]. Soit  $M$  une variété lck stricte de 2-forme de Kähler  $\Omega$ . Rappelons que :

$$d\Omega = \omega \wedge \Omega \tag{2.6}$$

où  $\omega$  est la 1-forme de Lee ( $d\omega = 0$ ). Pour une variété kählérienne, on a  $d\Omega = 0$ . Ici, si on pose :

$$d_\omega = d + \cdot \wedge \omega = d - \omega \wedge \cdot \quad \text{et} \quad d_\omega^c = d^c - J\omega \wedge \cdot$$

L'opérateur  $d_\omega$  vérifie  $d_\omega^2 = 0$  et  $d_\omega \Omega = 0$ . On pose  $H_\omega^p(M)$  le  $p$ -ième groupe de cohomologie pour  $d_\omega$  ( $p = 0, 1, \dots$ ). Si la dimension complexe de  $M$  est  $n$ , on a le théorème suivant (voir [GL84] et [Leó+03] pour le cas où  $\nabla\omega = 0$ ) :

Citons également une proposition de [Vai85] (proposition 2.1) qui va être utilisée par la suite.

**Proposition 2.2.7** *Si  $M$  est connexe, alors, pour toute 1-forme  $\alpha$  fermée non exacte  $d_\alpha$  est injective.*

### 2.2.3 Variétés de Vaisman

**Définition 2.2.8 (Variété de Vaisman)** *Une variété lck de forme de Lee  $\omega$  est dite de Vaisman lorsque  $\nabla\omega = 0$ .*

Au niveau de la cohomologie adaptée, on a :

**Théorème 2.2.9** *Si  $M$  est connexe, alors  $H_\omega^n(M) = 0$ . Si, de plus, la forme de Lee est parallèle pour  $\nabla$ , alors  $H_\omega^p(M) = 0$  pour tout  $p$ .*

Et en se référant à [Mad+97] et [Gau84], nous pouvons également citer une propriété d'unicité de cette métrique de Vaisman.

**Théorème 2.2.10** *Si  $M$  est une variété de Vaisman pour une métrique  $g$ , alors  $g$  est unique dans la classe de conformité à un facteur multiplicatif constant prêt.*

Ce résultat est utilisé dans la preuve du théorème 5.1.1, lui-même nécessaire à la démonstration du théorème 5.4.1 un des résultats principaux de cette thèse. Citons [OV10b] pour le résultat suivant :

**Théorème 2.2.11** *La classe des variétés de Vaisman n'est pas stable par petites déformations.*

L'exemple classique de variété de Vaisman est la variété de Hopf linéaire dont la matrice qui engendre l'action de  $\mathbb{Z}$  est diagonalisable.

### 2.2.4 Variétés lck à potentiel

**Définition 2.2.12 (Variété lck à potentiel)** *Une variété lck  $M = \tilde{M}/G$  est une variété dont le revêtement universel  $\tilde{M}$  est kählérien et telle que les éléments de  $G$  agissent conformément pour la métrique kählérienne (proposition 2.1.4). Toute variété kählérienne admet un potentiel kählérien local (voir chapitre 1) mais pas forcément global. Supposons qu'il existe  $\tilde{\psi} : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  tel que  $\tilde{\Omega} = 2i\partial\bar{\partial}\tilde{\psi} = dd^c\tilde{\psi}$  où  $\tilde{\Omega}$  est la 2-forme de Kähler de  $\tilde{M}$ . Ce potentiel ainsi défini est global. De plus, si,*

pour tout  $c \in G$ , il existe une constante positive  $\text{cte}_c \in \mathbb{R}_{>0}$  telle que  $c^*\tilde{\psi} = \text{cte}_c\tilde{\psi}$ , on dira que  $M$  est une variété lck à potentiel. De manière équivalente, on dit que  $M$  est lck à potentiel s'il existe  $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  tel que  $\Omega = d_\omega d_\omega^c \psi$ . Et  $\tilde{\psi}$  est un relèvement de  $\psi$ .

On peut, dans ce cas, montrer (voir [OV10a]) les deux résultats majeurs suivants :

**Théorème 2.2.13** *La classe des variétés compactes lck à potentiel est stable par petites déformations.*

**Théorème 2.2.14** *En dimension complexe supérieure ou égale à 3, toute variété compacte, lck à potentiel  $M$  peut être plongée dans une variété de Hopf linéaire. De plus,  $M$  est de Vaisman si et seulement si la matrice de l'action de  $\mathbb{Z}$  de la variété de Hopf linéaire du plongement est diagonale.*

Citons maintenant un résultat de N.Istrati [Ist19] qui est également un argument nécessaire à la preuve du théorème 5.1.1 du chapitre 5.

**Proposition 2.2.15** *Soit  $(M, g, \Omega, \omega)$  une variété lck admettant un potentiel global constant  $a \in \mathbb{R}^*$  tel que*

$$\Omega = -adJ\omega + a\omega \wedge J\omega = d_\omega d_\omega^c a$$

*Si le champ de vecteurs de Lee  $B = \omega^\#$  vérifie  $\mathcal{L}_B J = 0$ . Alors  $(M, g, \Omega, \omega)$  est de Vaisman.*

**Preuve :** On peut supposer que  $a = 1$ . On a  $\mathcal{L}_A J = 0$  et  $\mathcal{L}_A \omega = 0$  car  $A = JB$ . Et alors, en utilisant la formule de Cartan et les définitions du champ de vecteurs de Lee et du champ de vecteurs de Reeb (2.2) :

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}_A J\omega = di_A J\omega + i_A dJ\omega \\ &= -d(\omega(JA)) + i_A(\omega \wedge J\omega - \Omega) \\ &= d(g(B, B)) + i_A \omega \wedge J\omega - \omega \wedge i_A J\omega - i_A \Omega \\ &= d(g(B, B)) + i_A \omega \wedge i_B \Omega - \omega \wedge i_A i_B \Omega + \omega \\ &= d(g(B, B)) - g(B, B)\omega + \omega \\ &= d_\omega(g(B, B) - 1) \end{aligned}$$

La proposition 2.2.7 implique que  $g(B, B) = 1$ . En utilisant de nouveau la formule de Cartan, il vient :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_B\Omega &= di_B\Omega + i_B(\omega \wedge \Omega) \\ &= dJ\omega + i_B\omega \wedge \Omega - \omega \wedge i_B\Omega \\ &= dJ\omega - \omega \wedge J\omega + g(B, B)\Omega \\ &= -\Omega + \Omega = 0\end{aligned}$$

Ainsi, comme  $B$  préserve  $J$  et  $\Omega$ ,  $0 = d\omega = 2\nabla\omega$ . Ce qui prouve que  $M$  est de Vaisman.  $\square$

### 2.2.5 Conjecture de Vaisman

Le théorème de décomposition de Hodge 1.2.3 et le corollaire 1.2.4 sur les nombres de Betti d'une variété kählérienne compacte sont des critères cohomologiques ayant conduit à formuler deux conjectures topologiques sur les variétés lck. Elles furent énoncées par Vaisman pour tenter de se raccrocher à ces résultats kählériens sur les variétés lck :

#### Conjecture 1

Toute variété lck compacte satisfaisant le théorème de décomposition de Hodge 1.2.3 admet une métrique kählérienne.

**Remarque 2.2.16** *Le théorème 6.1 de [OV21] démontre que les variétés lck à potentiel compactes (voir définition 2.2.12) ne vérifient pas le théorème de décomposition de Hodge. La conjecture 2 est une conséquence de la conjecture 1, c'est une affirmation plus forte.*

#### Conjecture 2

Le premier nombre de Betti d'une variété lck compacte non kählérienne est impair.

**Remarque 2.2.17** *La conjecture 2 est démontrée pour les variétés de Vaisman. (voir chapitre 5 de [DO12] et historiquement [Kas80] et [Vai82]). Cette conjecture est aussi vraie pour toutes les surfaces complexes compactes (voir [Vai80a]). Cependant elle est fautive dans le cas des variétés de Oeljeklaus-Toma [OT05].*

## 2.3 Exemples

Terminons ce chapitre par quelques exemples de variétés localement conformément kählériennes.

### 2.3.1 Variétés de Hopf

Les variétés de Hopf sont l'exemple le plus largement étudié de variété lck. Le cas des surfaces est entièrement traité par Belgun [Bel00]. Toute surface de Hopf (linéaire ou non) est une variété lck. En dimension quelconque, les variétés de Hopf linéaires sont toutes lck à potentiel [OV16]. Pour celles qui ne sont pas linéaires, il a été récemment montré dans [OV22] qu'elles sont aussi lck à potentiel. Nous savons par ailleurs qu'elles sont toutes non kählériennes par l'identification avec  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{2n-1}$  donnée dans le chapitre 1. Ces variétés seront particulièrement étudiées dans le chapitre 3.

### 2.3.2 Surfaces de Inoue

Citons une fois de plus Belgun [Bel00] pour ce résultat. Une certaine classe de surface de Inoue lck n'admet pas de potentiel, puisqu'elles peuvent être déformées en une surface de Inoue particulière non lck  $S_{n,p,q,r,u}^+$  avec  $u \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  alors que les variétés lck à potentiel sont stables par déformations.

### 2.3.3 Exemples non compacts

Les exemples de variétés lck non compactes existent : un survol de la littérature pour ces exemples est donné dans le chapitre 3 section 3.6 de [DO12]. Dans le chapitre 6, nous montrerons qu'il existe un revêtement lck à potentiel non compact d'une variété LVM. Certains de ces exemples peuvent peut-être correspondre à ces revêtements. L'étude de cette correspondance n'a pas été faite dans cette thèse.



# VARIÉTÉS DE HOPF ET STRUCTURES LCK

---

Nous allons, dans ce chapitre, exposer les raisonnements qui ont permis de montrer que toute variété de Hopf (linéaire ou non) est lck à potentiel et certaines (les linéaires diagonales) sont aussi de Vaisman. Les variétés de Hopf jouent un rôle important dans notre sujet puisqu'elles sont lck à potentiel, non kählériennes et que les variétés LVM en sont une généralisation. Elles sont également essentielles dans la géométrie lck à potentiel au sens large puisqu'elles contiennent tous les plongements compacts de variétés lck à potentiel en dimension supérieure ou égale à 3 (théorème de plongement 2.2.14 des variétés lck à potentiel).

### 3.1 Généralités

Rappelons la définition d'une contraction holomorphe :

**Définition 3.1.1** *Une contraction holomorphe d'une variété complexe  $M$  de centre  $x \in M$  est une application  $\gamma: M \rightarrow M$  satisfaisant :*

- (a)  $\gamma(x) = x$  ;
- (b) pour tout compact  $K \subseteq M$  et tout voisinage ouvert  $U$  de  $x$ , il existe un rang entier positif  $q_0 > 0$  tel que, pour tout  $q > q_0$  :  $\gamma^q(K) \subseteq U$ .

Nous pouvons maintenant définir précisément une variété de Hopf de dimension complexe  $n \geq 2$ . Reprenons la définition 1.3.4 donnée dans le chapitre 1.

**Définition 3.1.2** *Une variété de Hopf de dimension  $n \geq 2$  est un quotient de  $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  par une action d'un groupe cyclique (isomorphe à  $\mathbb{Z}$ ) engendrée par une contraction holomorphe. Si l'action de  $\mathbb{Z}$  est engendrée par une matrice dont les valeurs propres sont de modules strictement plus petits que 1, on dira que la variété de Hopf est linéaire, et si, de plus, la matrice est diagonalisable, on dira que la variété de Hopf est diagonale. Dans tous les autres cas, on dira que la variété de Hopf est non linéaire.*

La littérature sur ces variétés est très riche. Tout d'abord, ce sont des variétés compactes, complexes et non kählériennes d'après l'argument du difféomorphisme :

$$\mathbb{C}^n \setminus \{0\} / \mathbb{Z} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{2n-1} / \mathbb{Z} \simeq \mathbb{R} / \mathbb{Z} \times \mathbb{S}^{2n-1} \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{2n-1}$$

du chapitre 1 qui démontre que le premier nombre de Betti est de 1.

Nous nous concentrerons sur ceux qui ont mis en évidence des structures lck ([GO98] et [Bel00] pour les surfaces et [DO12], puis [OV16] pour les variétés de Hopf linéaires de dimension  $n$ ). Le cas des surfaces est entièrement connu, les surfaces de Hopf sont toutes lck à potentiel. Le cas de la dimension supérieure ou égale à 3 est plus complexe : les variétés de Hopf linéaires sont toutes lck à potentiel et les variétés de Hopf diagonales sont en plus de Vaisman. De plus, nous savons depuis peu que les variétés de Hopf non linéaires sont aussi lck à potentiel, même en dimension supérieure à 3, ceci est démontré dans [OV22].

Historiquement, Hopf [Hop30] en 1930, considéra l'action de  $\mathbb{Z}$  suivante :

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} \times \mathbb{C}^n \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \\ (k, z) &\mapsto \frac{1}{2^k} z\end{aligned}$$

C'est un cas particulier où la variété de Hopf induite est linéaire diagonale avec pour matrice  $A = \frac{1}{2}I_n$  définie par une homothétie. Un peu plus généralement, une variété de Hopf dont l'action est engendrée par une homothétie  $A = \lambda I_n$  avec  $|\lambda| < 1$  est le premier cas que nous exposons [DO12].

## 3.2 Variétés de Hopf définies par une homothétie

Dans le cas d'une homothétie  $A = \lambda I_n$  avec  $|\lambda| < 1$ , on peut en expliciter directement une famille de métriques lck à potentiel (voir [DO12]), :

$$g_t = 4 \frac{|z|^{2t} \sum_{j=1}^n dz_j \otimes d\bar{z}_j + t|z|^{2(t-1)} \left( \sum_{j=1}^n \bar{z}_j dz_j \right) \otimes \left( \sum_{k=1}^n z_k d\bar{z}_k \right)}{|z|^{2(t+1)}} \quad (3.1)$$

avec  $t \in [-1, +\infty[$ . On peut également, pour tout  $t \in [-1, +\infty[$  exhiber la forme de Lee :

$$\omega_t = -(1+t) \frac{\sum_{j=1}^n z_j d\bar{z}_j + \bar{z}_j dz_j}{|z|^2} \quad (3.2)$$

Le cas  $t = 0$  donne une métrique lck de Vaisman, ce qui n'est pas le cas pour  $t \neq 0$ .

**Remarque 3.2.1** Si  $A = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  avec  $|\lambda_1| = \dots = |\lambda_n| < 1$ , la métrique précédente  $g_t$  est aussi lck à potentiel. Puis elle est de Vaisman lorsque  $t = 0$ .

### 3.3 Surfaces de Hopf

On distingue deux types de surfaces de Hopf, pour que l'action du groupe cyclique isomorphe à  $\mathbb{Z}$  soit une contraction holomorphe, elle doit être engendrée par :

$$\begin{aligned} \eta: \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \\ (x, y) &\mapsto (\alpha x + \lambda y^m, \beta y) \end{aligned}$$

avec  $\alpha, \beta, \lambda$  trois nombres complexes ( $\alpha, \beta \neq 0$ ) et  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $0 < |\alpha| < |\beta| < 1$  satisfaisant l'équation suivante :

$$\lambda(\alpha - \beta^m) = 0 \tag{3.3}$$

Les deux cas à distinguer sont les suivants :

- (1) Si  $\lambda = 0$ , la surface de Hopf est linéaire diagonale.
- (2) Si  $\lambda \neq 0$ , et dans ce cas  $\alpha = \beta^m$ , on dit que la surface de Hopf est non linéaire.

**Remarque 3.3.1** *Le cas où  $\lambda \neq 0$  n'autorise pas la valeur  $m = 1$ . En effet, si  $m = 1$ ,  $\alpha = \beta$ , ce qui est contradictoire avec  $0 < |\alpha| < |\beta| < 1$ . Les variétés de Hopf diagonales engendrées par une homothétie sont traitées dans la section précédente et sont exclues ici.*

#### 3.3.1 Surfaces de Hopf linéaires diagonales

L'action d'une surface de Hopf linéaire est engendrée par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

On peut supposer que  $|\alpha| < |\beta| < 1$ . Le cas où  $|\alpha| = |\beta|$  est traité dans la section précédente. L'article [GO98] montre qu'il est possible d'exprimer une métrique lck de Vaisman. Voici l'idée générale de cet article : Notons  $H = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / A^{\mathbb{Z}}$ . On définit l'application  $\psi$  sur  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  à valeurs réelles par la relation suivante :

$$|z_1|^2 |\alpha|^{2\psi(z)} + |z_2|^2 |\beta|^{2\psi(z)} = 1 \tag{3.4}$$

L'existence et l'unicité de  $\psi(z)$ , pour tout  $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ , sont dues à la décroissance de l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ t &\mapsto |z_1|^2 |\alpha|^t + |z_2|^2 |\beta|^t \end{aligned}$$

et au théorème des valeurs intermédiaires. Notons  $\Psi = e^\psi$ . On a les relations :

$$\psi(Az) = \psi(z) + 1 \quad (3.5)$$

$$\Psi(Az) = |\alpha| |\beta| \Psi(z) \quad (3.6)$$

$$|z_1|^2 \Psi^{-\frac{2k_1}{k_1+k_2}} + |z_2|^2 \Psi^{-\frac{2k_2}{k_1+k_2}} = 1 \quad (3.7)$$

avec  $k_1 = \ln |\alpha|$  et  $k_2 = \ln |\beta|$ .

**Proposition 3.3.2** *La 2-forme  $\Omega = \frac{1}{4} \partial \bar{\partial} \Psi$  est la forme de Kähler d'une métrique hermitienne sur  $H$ . De plus,  $d\Omega = \omega \wedge \Omega$  avec  $\omega = \frac{1}{2} \Psi^{-1} d\Psi$ . Ainsi,  $H$  est lck à potentiel.*

**Preuve :** Le raisonnement est le suivant : on applique l'opérateur  $d$  à l'égalité (3.6). Ceci permet d'isoler  $d\Psi$  :

$$d\Psi = \frac{1}{\Delta} \left( \Psi^{\frac{k_2-k_1}{k_1+k_2}} (\bar{z}_1 dz_1 + z_1 d\bar{z}_1) + \Psi^{\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}} (\bar{z}_2 dz_2 + z_2 d\bar{z}_2) \right) \quad (3.8)$$

Avec  $\Delta = |z_1|^2 \frac{2k_1}{k_1+k_2} \Psi^{-\frac{2k_1}{k_1+k_2}} + |z_2|^2 \frac{2k_2}{k_1+k_2} \Psi^{-\frac{2k_2}{k_1+k_2}}$ . L'expression explicite de  $d\Psi$  permet d'identifier les dérivées partielles et d'en déduire les dérivées partielles secondes et vérifier que la matrice

$$g = \begin{pmatrix} \partial_1 \bar{\partial}_1 \Psi & \partial_1 \bar{\partial}_2 \Psi \\ \partial_2 \bar{\partial}_1 \Psi & \partial_2 \bar{\partial}_2 \Psi \end{pmatrix}$$

est positive (déterminant et trace sont positifs). Le fait que  $\Omega$  soit stable par passage au quotient découle de la relation (3.6). Ensuite, le calcul direct donne la relation  $d\Omega = \omega \wedge \Omega$ .  $\square$

Ce raisonnement présente un intérêt puisqu'il expose un raisonnement typiquement associé à la dimension 2 pour démontrer que la métrique est définie positive.

En dimension supérieure, les calculs directs ne sont pas envisageables. L'argument d'existence et d'unicité du potentiel sera en revanche réutilisé en dimension supérieure au chapitre 6.

### 3.3.2 Surfaces de Hopf non linéaires

Supposons que  $\lambda \neq 0$  et  $\alpha = \beta^m$ . Nous sommes dans le cas d'une surface de Hopf non linéaire  $H$ . Dans son article [Bel00], Belgun montre en utilisant un argument de déformation que ces surfaces sont aussi lck. Donnons quelques idées de la preuve. L'action de  $\mathbb{Z}$  engendrée par  $\eta$  induit naturellement une  $\mathbb{R}$ -action. Notons toujours  $\eta$  le générateur de cette  $\mathbb{R}$ -action : pour tout  $(x, y) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  et tout réel  $t$  :

$$\eta^t(x, y) = (\beta^{mt}x + t\lambda\beta^{m(t-1)}y^m, \beta^t y)$$

Où une détermination de  $\log \beta$  est fixée. Il existe alors un  $\epsilon > 0$  tel que la sphère centrée en  $0 \in \mathbb{C}^2$  et de rayon  $\epsilon$  :  $\mathbb{S}_\epsilon$  soit transverse et intersecte chaque orbite de cette  $\mathbb{R}$ -action une et une unique fois (ce qui signifie que  $\mathbb{S}_\epsilon$  est une coquille pseudoconvexe). On pose  $\mathbb{S}_t = \eta^{t/\epsilon}(\mathbb{S}_\epsilon)$  et  $f: \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(\mathbb{S}_t) = t$ . Belgun montre alors qu'il existe une constante réelle  $x$  telle que  $\Omega = (e^{xf})^{-1}d(d(e^{xf}) \circ J)$  soit la forme de Kähler d'une métrique définie positive sur  $\mathbb{S}_\epsilon$  et donc globalement ensuite. La forme  $\Omega$  étant conformément invariante, elle passe au quotient et donne une métrique lck.

Une preuve alternative est donnée dans [GO98] : c'est aussi un argument de déformation en faisant varier  $\beta$  et  $m$ .

Dans son article, Belgun n'expose pas de potentiel. Ce n'est que grâce à [OV22] que l'on peut conclure que les surface de Hopf non linéaires et plus généralement, toutes les variétés de Hopf sont lck à potentiel.

## 3.4 Variété de Hopf linéaire en dimension quelconque

L'article [OV16] donne une démonstration du fait que toute variété de Hopf linéaire admet une métrique lck à potentiel. Nous en donnons le raisonnement général qui va ensuite être utilisé pour montrer l'existence de revêtements lck à potentiel pour certaines variétés LVM (chapitre 6).

Donnons d'abord quelques définitions nécessaires.

### 3.4.1 Cône algébrique

**Définition 3.4.1 (Cône algébrique)** *Un cône algébrique fermé est une variété affine  $C$  munie d'une action de  $\mathbb{C}^*$  notée  $\tau$  admettant un unique point fixe  $x_0$  appelé l'origine tel que  $C$  soit lisse en dehors de  $x_0$  et que  $\tau$  agisse sur  $T_{x_0}C$  diagonalement et avec des valeurs propres de modules strictement inférieurs à 1. Un cône algébrique ouvert est un cône algébrique fermé auquel on enlève l'origine :  $C \setminus \{x_0\}$*

L'exemple de cône algébrique ouvert qui va nous servir pour les variétés de Hopf est  $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  muni de l'action par homothéties de  $\mathbb{C}^*$ .

**Définition 3.4.2 (Action par contractions holomorphes)** *Soit  $C$  un cône algébrique fermé et  $\rho: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \text{Aut}(C)$  une action de  $\mathbb{R}_{>0}$  sur  $C$ . On dit que  $\rho$  est une action par contractions holomorphes lorsque, pour tout  $t \in \mathbb{R}_{>0}$ , tout compact  $K \subset C$  et tout voisinage ouvert  $U$  de l'origine de  $C$ , il existe un entier  $p$  tel que  $\rho(t)^p(K) \subset U$ .*

**Remarque 3.4.3** *L'action de  $\mathbb{Z}$  engendrée par une matrice dont les valeurs propres sont toutes de modules inférieurs à 1 génère naturellement une  $\mathbb{R}$ -action par contractions holomorphes.*

### 3.4.2 CR-géométrie

**Définition 3.4.4** *Une structure de Cauchy-Riemann ou CR-structure sur une variété  $M$  est un sous-fibré  $H \subset T_{\mathbb{C}}M$  tel que  $[H, H] \subset H$  et  $H \cap \bar{H} = \{0\}$ . Une*

fonction  $f: M \rightarrow \mathbb{C}$  est CR-holomorphe si, pour tout  $X \in \overline{H}$ ,  $d_X f = 0$ . Sur une CR-variété  $(M, H)$ , le fibré  $H \oplus \overline{H}$  est préservé par la conjugaison complexe et donc est obtenu comme la complexification d'un sous-fibré réel  $H_{\mathbb{R}} : H \oplus \overline{H} = (H_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$ . Et alors,  $I_H = -i\text{Id}_{\overline{H}}$  définit une structure presque complexe sur  $H_{\mathbb{R}}$  dont l'extension au complexifié  $(H_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$  admet pour sous-espace propre associé à la valeur propre  $i$  le fibré  $H$ .

Si  $\dim(TM/H_{\mathbb{R}}) = 1$ , et si

$$\begin{aligned} L: H_{\mathbb{R}} \times H_{\mathbb{R}} &\rightarrow TM/H_{\mathbb{R}} \\ (A, B) &\mapsto [A, B] \bmod H_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

est non dégénérée, la variété  $(M, H)$  est qualifiée de CR-variété de contact et  $H_{\mathbb{R}}$  est la structure de contact. Dans ce contexte,  $L$  s'appelle la forme de Levi. Comme  $L$  s'annule sur  $H$  et sur  $\overline{H}$ ,  $L$  est de type  $(1, 1)$  relativement à la structure presque complexe  $I_H$ .

**Définition 3.4.5** Une CR-variété de contact  $(M, H_{\mathbb{R}}, I_H)$  est dite pseudoconvexe si sa forme de Levi est positive. Si la forme de Levi est de plus définie positive, alors  $(M, H_{\mathbb{R}}, I_H)$  est dite strictement pseudoconvexe.

**Définition 3.4.6** Soit  $\mathcal{S}$  une CR-variété de contact. Un champ de vecteur  $X \in \Gamma(T\mathcal{S})$  est dit transverse s'il est transverse relativement à la CR-structure  $H_{\mathbb{R}} \subset T\mathcal{S}$ .

### 3.4.3 Coquille pseudoconvexe sur un cône algébrique

**Définition 3.4.7** Soit  $C$  un cône algébrique. Soit  $\rho$  une action de  $\mathbb{R}_{>0}$  par contractions holomorphes. Une coquille pseudoconvexe sur  $C$  est une sous-variété de  $C$  strictement pseudoconvexe intersectant chaque orbite de  $\rho$  une et une unique fois transversalement.

Le théorème principal de [OV16] est le suivant :

**Théorème 3.4.8** Soit  $M = C/\langle \rho(q) \rangle$  avec  $C$  un cône algébrique muni d'une action  $\rho$  de  $\mathbb{R}_{>0}$  par contractions holomorphes et  $q > 1$ .

Soit  $\mathcal{S}$  une coquille pseudoconvexe de  $C$ . Alors  $M$  est une variété lck à potentiel. Réciproquement, toute variété lck à potentiel s'écrit de la sorte.

**Preuve :** Chaque orbite de  $\rho$  intersecte  $\mathcal{S}$  une unique fois, donc pour tout  $s \in \mathcal{S}$ , il existe un unique  $t \in \mathbb{R}_{>0}$  tel que  $\rho(t)(c) = s$ . Notons  $e^{-t} = \Psi(c)$ . Ceci prouve l'existence et l'unicité d'une fonction  $\Psi: C \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  avec  $\rho(-\ln \Psi(c))(c) = s$ . Il reste à montrer que  $dd^c\Psi > 0$ , ceci n'est pas automatique pour  $dd^c\Psi$  mais pour une certaine puissance de  $\Psi$ . On peut se ramener à montrer uniquement que  $dd^c\Psi^{2a} > 0$  sur  $\mathcal{S}$ . En effet, par construction,  $dd^c\Psi > 0$  sur  $B$  où  $B$  est le sous-fibré de  $C$  obtenu en translatant  $T\mathcal{S} \cap I(T\mathcal{S})$  par tous les  $e^{tr}$  avec  $r$  le générateur infinitésimal de  $\rho$ . Ceci car, sur  $B$ ,  $dd^c\Psi$  est la forme de Levi et donc définie positive. On a, sur  $\mathcal{S}$  :

$$dd^c\Psi^{2a} = \Psi^{2a-2}(2a\Psi dd^c\Psi + 2a(2a-1)d\Psi \wedge d^c\Psi)$$

Comme la coquille  $\mathcal{S}$  est compacte, le résultat découle du lemme suivant :

**Lemme 3.4.9** *Soient  $h_1, h_2$  deux formes pseudo-hermitiennes sur un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  et soit  $W \subset V$  un sous- $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de codimension 1. Supposons que  $h_1|_W$  et  $h_2|_{V/W}$  sont strictement positives et  $h_2|_W = 0$ . Alors il existe  $u_0 \in \mathbb{R}$ , dépendant continûment de  $h_1$  et  $h_2$ , tel que  $h_u = h_1 + uh_2$  soit définie positive pour tout  $u > u_0$ .*

**Preuve :** Pour simplifier mais sans perdre de généralité, faisons la démonstration dans le cas réel. Soit  $y \in V$  tel que  $h(y, y) = 1$ . Alors, tout  $x \in V$  peut s'écrire  $x = ay + z$  pour un certain  $z \in W$ . Ainsi :

$$h_u(x, x) = ua^2 + a^2h_1(y, y) + h_1(z, z) + 2ah_1(z, y)$$

que l'on voit comme un polynôme en  $a$ . Celui-ci est strictement positif pour tout  $a$ , si et seulement si :

$$h_1(z, y)^2 - (u + h_1(y, y))h_1(z, z) < 0$$

Il suffit alors de choisir  $y' \in W$  tel que  $h_1(z, y') = h_1(z, y)$  pour tout  $z \in W$  et poser  $u_0 = h_1(y', y') - h_1(y, y)$ . Pour  $u > u_0$ , l'inégalité précédente devient :

$$h_1(z, y')^2 - h_1(y', y')h_1(z, z) < 0$$

Cette inégalité est vérifiée par l'inégalité de Cauchy-Schwarz puisque  $h_1$  est définie positive sur  $W$ .  $\square$

Le théorème en découle en prenant  $V = TM$ ,  $W = B$ ,  $h_1 = \Psi dd^c \Psi$  et  $h_2 = d\Psi \wedge d^c \Psi$ . Pour la réciproque, se référer directement à [OV16].  $\square$

### 3.4.4 Variétés de Hopf linéaires

Soit  $M = \mathbb{C}^n \setminus \{0\} / \langle A \rangle$  une variété de Hopf linéaire, alors  $C = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  est un cône algébrique ouvert,  $\rho(t) = e^{t \log A}$  où l'on fixe une détermination du logarithme complexe, est une action par contractions holomorphes puisque les valeurs propres de  $A$  sont de modules inférieurs strictement à 1. La sphère  $\mathcal{S} = \mathbb{S}^{2n-1}$  est une coquille pseudoconvexe. En effet, le même argument que pour les surfaces sur l'existence et l'unicité du potentiel revient à dire que l'intersection entre l'orbite d'un point de  $C$  et la sphère  $\mathbb{S}^{2n-1}$  est unique.

Le théorème 3.4.8 s'applique et démontre que  $M$  est lck à potentiel.

## 3.5 Produit de deux variétés de Hopf

Citons un résultat majeur sur le produit de deux variétés de Hopf, compactes et de Vaisman :

**Théorème 3.5.1** [DO12] *Le produit de deux variétés de Hopf compactes de Vaisman n'admet pas de métrique localement conformément kählérienne.*

**Preuve :** C'est le théorème 5.3 de [DO12]. Initialement, c'est un résultat de Tsukada [Tsu99].  $\square$

### 3.5.1 Classification des variétés lck à potentiel et de Vaisman dans le cas compact

Nous l'avons brièvement évoqué au chapitre 2, il s'agit d'un théorème de [OV10b], et plus précisément le théorème 1.12 :

**Théorème 3.5.2 (Classification)** *Soit  $M$  une variété lck compacte de dimension complexe  $n$  supérieure ou égale à 3. Alors  $M$  est lck à potentiel si et seulement si elle admet un plongement holomorphe dans une variété de Hopf linéaire  $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}/A$ . De plus,  $M$  est de Vaisman si et seulement si  $A$  est une matrice diagonalisable.*

**Remarque 3.5.3** *Dans ce théorème, la dimension complexe est mise en jeu. Ce théorème ne peut pas être utilisé dans le cas des surfaces complexes. De plus, on ne peut l'utiliser qu'avec des variétés compactes. En ce sens, le chapitre 6 présente l'intérêt de donner des exemples de variétés lck à potentiel non compactes comme revêtements de variétés LVM qui ne sont donc par forcément plongés holomorphiquement dans des variétés de Hopf linéaires.*

## 3.6 Variétés de Hopf non linéaires en dimension quelconque

L'idée générale de l'article [OV22] est de montrer que toute variété de Hopf se plonge holomorphiquement dans une variété de Hopf linéaire. Ensuite, on utilise le fait qu'une variété de Hopf linéaire est lck à potentiel et que les sous-variétés complexes des variétés lck à potentiel sont aussi lck à potentiel [OV10a].

Pour obtenir ce plongement les auteurs montrent un résultat plus fort :

soit  $V$  une variété de Stein munie d'une action par contractions holomorphes centrée en  $x \in V$  propre et libre. Alors la variété quotient de  $V \setminus \{x\}$  par l'action est compacte et se plonge holomorphiquement dans une variété de Hopf linéaire.

En admettant ce résultat, on prend  $V = \mathbb{C}^n$  et  $x = 0$ . Une variété de Hopf  $H$  est un quotient de  $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  par un groupe cyclique engendré par une contraction holomorphe. En appliquant le résultat ci-dessus,  $H$  se plonge holomorphiquement dans une variété de Hopf linéaire. De plus  $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  est lisse donc ce plongement donne à  $H$  une structure de sous-variété complexe d'une variété de Hopf linéaire. Ainsi,  $H$  est lck à potentiel.



# VARIÉTÉS LVM

---

Ce chapitre donne le principe de construction et quelques propriétés des variétés LVM qui seront utilisées dans les chapitres 5 et 6 regroupant les principaux résultats de ce travail de thèse. Ces objets sont tirés de la thèse de Laurent Meersseman [Mee98]. L'acronyme LVM correspond aux initiales de Santiago López de Medrano et Alberto Verjovsky pour avoir initié la construction de ces variétés en 1997 [MV97] dans le cas  $m = 1$ . Laurent Meersseman généralise cette construction à toute dimension complexe  $m \geq 1$  dans sa thèse [Mee98] et donne un procédé géométrique de construction de ces variétés compactes, complexes non kählériennes pour  $n > 2m + 1$ .

## 4.1 Construction

Soit  $n \geq 2m+1$ ,  $m \geq 1$ . Soit  $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_n) \in (\mathbb{C}^m)^n$  avec, pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\Lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_i^1 \\ \vdots \\ \lambda_i^m \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m.$$

**Définition 4.1.1 (Configuration admissible)** *On dit que  $\Lambda$  est une configuration admissible si :*

- (a)  $\text{rang}_{\mathbb{R}}(\Lambda) = 2m$  (rang maximal).
- (b)  $0 \in \mathcal{H}(\Lambda)$  (condition de Siegel).
- (c) Pour tout  $2m$ -uplet d'entiers  $(i_1, \dots, i_{2m})$  vérifiant  $1 \leq i_1 < \dots < i_{2m} \leq n$ ,  $0 \notin \mathcal{H}(\Lambda_{i_j})_{j=1, \dots, 2m}$  (Hyperbolicité faible).

Notons :

$$S = \{z \in \mathbb{C}^n, 0 \in \mathcal{H}(\Lambda_i)_{i \in I_z}\}$$

où  $I_z = \{i \in \{1, \dots, n\}, z_i \neq 0\}$ .

**Définition 4.1.2 (Point indispensable et éliminable)** *On dira que la coordonnée ou le point  $i$  ou  $z_i$  est indispensable si  $S \subseteq \{z \in \mathbb{C}^n, z_i \neq 0\}$ . Dans le cas contraire, on dira que la coordonnée ou le point  $i$  ou  $z_i$  est éliminable. Si  $\Lambda$  est une configuration admissible, on notera  $k$  le nombre de points indispensables.*

On dispose d'une action de  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$  sur  $\mathbb{C}^n$  :

$$\begin{aligned} a: (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m) \times \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ ((\alpha, T), z) &\mapsto (\alpha z_1 e^{\langle \Lambda_1, T \rangle}, \dots, \alpha z_n e^{\langle \Lambda_n, T \rangle}) \end{aligned}$$

**Proposition 4.1.3** *L'ensemble  $S \subset \mathbb{C}^n$  est stable par l'action  $a$ .*

**Preuve :** Soit  $z \in S$ , soit  $(\alpha, T) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$ . On a  $0 \in \mathcal{H}(\Lambda_i)_{i \in I_z}$ , soit  $w = a(\alpha, T, z)$ . Pour montrer que  $0 \in \mathcal{H}(\Lambda_i)_{i \in I_w}$ , il suffit de constater que :

$$I_w = \{i \in \{1, \dots, n\}, \alpha z_i e^{\langle \Lambda_i, T \rangle} \neq 0\} = \{i \in \{1, \dots, n\}, z_i \neq 0\} = I_z$$

□

On est alors en mesure de définir les variétés LVM :

**Définition 4.1.4 (Variété LVM)** *Soit  $n \geq 2m + 1, m \geq 1$ . Soit  $\Lambda \in (\mathbb{C}^m)^n$  une configuration admissible. Le quotient  $N = S/a$  est appelé variété LVM.*

Remarquons que dans le cas où  $n = 2m + 1$ , on obtient  $M = \mathbb{T}^m$  [Mee98]. Pour toute la suite de ce travail, on suppose que  $n > 2m + 1$ .

## 4.2 Propriétés

Nous montrons ici en reprenant les arguments de [Mee98] les résultats fondamentaux pour la suite.

- (1) Les conditions d'admissibilité sont ouvertes : il existe des petites déformations d'une configuration admissible qui sont toujours des configurations admissibles.
- (2) Une déformation par homotopies  $\Lambda'$  de configurations admissibles d'une configuration admissible  $\Lambda$  donne deux variétés LVM difféomorphes donc deux variétés complexes compactes à priori différentes au sens complexe.
- (3) Une transformation affine  $A\Lambda + B$  d'une configuration admissible  $\Lambda$  donne deux variétés biholomorphes lorsque  $\Lambda$  et  $A\Lambda + B$  sont homotopes.
- (4) Les variétés LVM sont non kählériennes.

### 4.2.1 (1) : Les conditions d'admissibilité sont ouvertes

Reprenons les conditions d'admissibilité d'une configuration  $\Lambda$  dans l'ordre : Le rang réel de  $\Lambda$  est maximal égal à  $2m$ . Autrement dit, les  $2m$  lignes de la matrice :

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re} \Lambda \\ \operatorname{Im} \Lambda \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendantes sur  $\mathbb{R}$ . L'indépendance linéaire est une condition ouverte. Venons en à la condition de Siegel :  $0 \in \mathcal{H}(\Lambda)$ . Cette condition correspond à l'existence de  $a = (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$  tel que :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \operatorname{Re} \Lambda \\ \operatorname{Im} \Lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = e_1$$

où  $e_1$  désigne le premier vecteur de la base canonique. La condition d'existence du  $n$ -uplet  $a$  est stable par petites déformations de  $\Lambda$ . La condition d'hyperbolicité faible se traduit par la non-existence de solution à un certain nombre de systèmes linéaires. C'est une condition ouverte.

### 4.2.2 (2) : Si $\Lambda'$ est une déformation homotope de $\Lambda$ , alors $N'$ et $N$ sont difféomorphes

Soit  $\Lambda$  une configuration admissible. On a déjà vu dans la sous-section précédente que l'admissibilité est stable par petites déformations. Mais si  $\Lambda'$  est une déformation de  $\Lambda$ , qu'en est-il des variétés  $N$  et  $N'$  associées? Elles sont seulement difféomorphes lorsque la déformation est homotope.

**Remarque 4.2.1** *Par déformation homotope de configurations admissibles, nous entendons l'existence d'une application continue :*

$$H: [0, 1] \rightarrow (\mathbb{C}^m)^n$$

telle que, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $H(t)$  soit une configuration admissible.

La variété  $N$  est obtenue difféomorphiquement comme de quotient de :

$$M_1 = \left\{ w \in \mathbb{C}^n, \sum_{i=1}^n |w_i|^2 \Lambda_i = 0, \sum_{i=1}^n |w_i|^2 = 1 \right\}$$

par l'action multiplicative naturelle de  $\mathbb{S}^1$ . On a alors difféomorphiquement  $M_1 = N \times \mathbb{S}^1$  et  $N = M_1/\mathbb{S}^1$  lorsqu'il y a au moins un point indispensable. Notons  $M'_1$  la même variété pour la déformation homotope  $N'$  de  $N$ . Montrons la proposition suivante :

**Proposition 4.2.2** *Soient  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  deux configurations admissibles, avec  $\Lambda'$  obtenue par déformation homotope de  $\Lambda$ . Alors les variétés  $M_1$  et  $M'_1$  sont difféomorphes ainsi que les variétés  $N$  et  $N'$ .*

**Preuve :** L'ensemble de toutes les déformations successives entre  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  est un ensemble de configurations admissibles. Plus précisément, il existe une homotopie  $H: [0, 1] \rightarrow (\mathbb{C}^m)^n$  reliant  $\Lambda$  et  $\Lambda'$ . Autrement dit,  $H(0) = \Lambda$ ,  $H(1) = \Lambda'$  et pour tout  $t \in ]0, 1[$ ,  $H(t)$  est une configuration admissible qui donne lieu à une LVM que l'on note  $N(t)$ , on note également  $M_1(t)$  la variété associée. L'union  $\bigcup_{t \in [0, 1]} M_1(t)$  fibre sur  $[0, 1]$ . Cette fibration est une submersion en tout point donc est localement triviale par le lemme d'Ehresmann. ([MK06]). Donc  $M_1$  et  $M'_1$  sont difféomorphes. Pour  $N$  et  $N'$ , la démonstration est identique en prenant les plongements réels dans l'espace projectif.  $\square$

### 4.2.3 (3) : Biholomorphisme entre $N_\Lambda$ et $N_{A\Lambda+B}$

Nous allons montrer plus précisément la proposition suivante :

**Proposition 4.2.3** *Soit  $\Lambda$  une configuration admissible. Soit  $\Lambda' = A\Lambda + B$  avec  $A \in \text{GL}_m(\mathbb{C})$  et  $B \in \mathbb{C}^m$  tels que  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  soient homotopes. Alors la configuration  $\Lambda'$  est admissible et les variétés LVM associées respectives  $N_\Lambda$  et  $N_{\Lambda'}$  sont biholomorphes.*

**Preuve** : Tout d'abord, on a  $S = S'$  puisque, d'après le lemme 1 de [Mee98],

$$0 \in \mathcal{H}(\Lambda_{i_1}, \dots, \Lambda_{i_p}) \Leftrightarrow 0 \in \mathcal{H}(\Lambda'_{i_1}, \dots, \Lambda'_{i_p})$$

Soit  $z \in S$  et  $w \in S$  dans l'orbite de  $z$  sous l'action  $a$ . Autrement dit,

$$w = (\alpha z_1 e^{\langle \Lambda_1, T \rangle}, \dots, \alpha z_n e^{\langle \Lambda_n, T \rangle})$$

pour un certain  $\alpha \in \mathbb{C}^*$  et  $T \in \mathbb{C}^m$ . Posons  $T' = ({}^t A)^{-1} T$  et  $\alpha' = e^{-{}^t B \cdot T'}$ . On a de même :

$$w = (\alpha' z_1 e^{\langle \Lambda_1, T' \rangle}, \dots, \alpha' z_n e^{\langle \Lambda_n, T' \rangle})$$

Ainsi  $N_\Lambda$  et  $N_{\Lambda'}$  sont biholomorphes.  $\square$

Au chapitre 6, nous montrerons une variante de ce résultat qui nous permettra d'obtenir une normalisation pour les configurations admissibles à  $k = m + 1$  points indispensables.

### 4.2.4 (4) : Les variétés LVM sont non kählériennes

Nous donnons ici la stratégie de la preuve en suivant [Mee98] que les variétés LVM sont non symplectiques dès lors que  $n > 2m + 1$  (donc à fortiori non kählériennes). Soit  $k$  le nombre de points indispensables de la configuration  $\Lambda$ . On doit distinguer  $k > 0$  et  $k = 0$ .

- (a) Supposons  $k > 0$ . On peut alors montrer que  $N$  est difféomorphe à  $M_0 \times (\mathbb{S}^1)^{k-1}$  avec  $M_0$  une variété 2-connexe et l'identification difféomorphe  $M_1 = M_0 \times (\mathbb{S}^1)^k$  (ce sont les lemmes 6 et 8 de la deuxième partie de [Mee98]). D'après le théorème

de Hurewicz, le deuxième groupe de cohomologie  $H^2(M_0, \mathbb{R})$  est trivial. On utilise ensuite la formule de Künneth :

$$H^2(N, \mathbb{R}) = H^2((\mathbb{S}^1)^{k-1}) \otimes H^0(M_0) = H^2((\mathbb{S}^1)^{k-1}, \mathbb{R})$$

Soit  $\alpha$  est une forme symplectique sur  $N$ , alors  $\alpha^{n-m-1}$  est une forme volume sur  $N$ . Or, d'après l'identification précédente, ce n'est possible que si  $2n - 2m - 2 \leq k - 1$ . Comme  $k \leq 2m + 1$  (lemme 4 de la deuxième partie de [Mee98]) et  $n > 2m + 1$ , cette égalité se traduit en :

$$2m < 2n - 2m - 2 \leq k - 1 \leq 2m$$

Ceci induit une contradiction :  $N$  ne peut être symplectique.

- (b) Supposons que  $k = 0$ . Ici le lemme 5 de la deuxième partie de [Mee98] implique que  $S$  et  $M_1$  sont 2-connexes. Notons  $e$  la classe d'Euler du fibré  $M_1 \rightarrow N$ . La suite exacte d'homologie de Gysin pour ce fibré au rang 1 s'écrit :

$$H^1(M_1, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(N, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\wedge e} H^2(N, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(M_1, \mathbb{Z})$$

Mais alors, par le théorème de Hurewicz,  $H^1(M_1, \mathbb{Z}) = H^2(M_1, \mathbb{Z}) = 0$  et  $H^2(N, \mathbb{Z}) = H^0(N, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}e$  est engendré par  $e$ . Notons  $d$  la codimension minimale de  $E$  dans  $S = \mathbb{C}^n \setminus E$ . Le lemme 7 de la deuxième partie de [Mee98] implique que  $e^d = (j^* e_0)^d = j^*(e_0^d) = 0$  où  $e_0$  est la classe d'Euler du fibré  $\mathbb{S}^{2d-1} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{d-1}$  et  $j: N \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{d-1}$  définie dans le lemme 5 de la deuxième partie de [Mee98]. Voir le diagramme de fibrés ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \longrightarrow & \mathbb{S}^{2d-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ N & \xrightarrow{j} & \mathbb{C}\mathbb{P}^{d-1} \end{array}$$

Par functorialité de la classe d'Euler (justifiée par l'égalité ci-dessus) et par hyperbolicité faible, l'ensemble  $E$  contient au moins tous les plans définis par l'annulation de  $n - 2m$  coordonnées. On a alors  $d \leq n - 2m \leq n - m - 1$  donc  $e$  n'engendre pas de forme volume sur  $N$  et  $N$  n'est pas symplectique.

**Remarque 4.2.4** *Dans le chapitre 6, nous nous concentrons seulement sur des variétés LVM où l'on dispose de suffisamment de points indispensables ( $k = m+1$ ). Néanmoins, la preuve dans le cas où  $k = 0$  sera tout de même réutilisée pour la caractérisation des variétés de Hopf linéaires diagonales parmi les LVM (théorème 5.3.1 du chapitre 5).*

### 4.3 Classification difféomorphe

La classification des variétés LVM à difféomorphisme près est donnée dans [Mee98] pour des petites valeurs de  $m$  et  $n$ . Soit  $k$  le nombre de points indispensables. Difféomorphiquement, lorsque  $k > 0$ ,  $M_1 = N \times \mathbb{S}^1$ . Et  $N = M_1/\mathbb{S}^1$ . On choisit plutôt de classifier  $M_1$ .

#### 4.3.1 $m = 1$

Pour  $m = 1$ , cette classification difféomorphe est due à Santiago López de Medrano [Lóp88], et est reformulé dans le cas LVM dans [MV97].

**Théorème 4.3.1 ( $m = 1$ )** Soit  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  une configuration admissible.

Alors :

- (a) Cette configuration est équivalente à  $((\lambda'_1, n_1), \dots, (\lambda'_{2l+1}, n_{2l+1}))$  où  $n_i$  désigne la multiplicité de  $\lambda'_i$  et  $n = n_1 + \dots + n_{2l+1}$ .
- (b) Soit  $d_i = n_i + \dots + n_{i+l-1}$  pour  $i$  allant de 1 à  $2l + 1$  (les indices étant pris modulo  $2l + 1$ ). Alors :
  - i. Si  $l = 0$ ,  $M_1 = \emptyset$ .
  - ii. Si  $l = 1$ , on a  $M_1 = \mathbb{S}^{2n_1-1} \times \mathbb{S}^{2n_2-1} \times \mathbb{S}^{2n_3-1}$ .
  - iii. Si  $l > 1$ , on a  $M_1$  difféomorphe à la somme connexe des variétés  $\mathbb{S}^{2d_i-1} \times \mathbb{S}^{2n-2d_i-2}$  pour  $i$  allant de 1 à  $2l + 1$ .

Dans, [MV97], à partir de cette classification, pour  $l = 1$ , il est montré que l'on peut obtenir soit les tores complexes de dimension 1, soit les variétés de Hopf soit les produits de sphères  $\mathbb{S}^{2p-1} \times \mathbb{S}^{2q-1}$  avec  $p, q > 1$  munis d'une structure complexe de Calabi-Eckmann.

#### 4.3.2 $m = 2$

Comme  $n > 2m + 1$  et  $k < 2m + 1$ , on commence la classification de  $M_1$  à  $n = 6$ . Notons  $\#$  les somme connexes.

##### 4.3.2.1 $n = 6$

On a dans ce cas automatiquement  $k = 4$  et  $S = (\mathbb{C}^*)^4 \times \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ . Et alors  $M_1 \approx (\mathbb{S}^1)^4 \times \mathbb{S}^3$  et  $N \approx (\mathbb{S}^1)^3 \times \mathbb{S}^3$ .

**4.3.2.2**  $n = 7$ 

Reprenons directement la classification selon  $k$  conjecturée dans [Mee98], les cas  $k = 0, 1, 2$  ont été démontrés en 2013 dans [GL13] :

- (a)  $k = 4 : M_1 \approx \mathbb{S}^5 \times (\mathbb{S}^1)^4$ ;
- (b)  $k = 3 : M_1 \approx (\mathbb{S}^3)^2 \times (\mathbb{S}^1)^3$ ;
- (c)  $k = 2 : M_1 \approx \left( \#_{i=1}^5 \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^4 \right) \times (\mathbb{S}^1)^2$ ;
- (d)  $k = 1 : M_1 \approx \left( \#_{i=1}^8 \mathbb{S}^4 \times \mathbb{S}^4 \#_{i=1}^9 \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^5 \right) \times \mathbb{S}^1$ ;
- (e)  $k = 0 : M_1 \approx \#_{i=1}^{14} \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^6 \#_{i=1}^{35} \mathbb{S}^4 \times \mathbb{S}^5$ .

**4.3.2.3**  $n = 8$ 

La classification est toujours selon le nombre de points indispensables  $k$ .

- (a)  $k = 4 : M_1 \approx \mathbb{S}^7 \times (\mathbb{S}^1)^4$ ;
- (b)  $k = 3 : M_1 \approx \mathbb{S}^5 \times \mathbb{S}^3 \times (\mathbb{S}^1)^3$ ;
- (c)  $k = 2 : M_1 \approx (\mathbb{S}^3)^3 \times (\mathbb{S}^1)^2$  ou  $\left( \#_{i=1}^2 \mathbb{S}^4 \times \mathbb{S}^5 \#_{i=1}^3 \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^6 \right) \times (\mathbb{S}^1)^2$ ;

## 4.4 Variétés LVMB

La généralisation des variétés LVM proposée par Bosio [Bos01] est la suivante : soit  $n > 2m$  et  $\mathcal{L} = (l_1, \dots, l_n) \in (\mathbb{C}^m)^*$  une famille de  $n$  formes  $\mathbb{C}$ -linéaires de  $\mathbb{C}^m$  telle que toute sous-famille  $\mathcal{L}'$  de  $\mathcal{L}$  de cardinal  $2m + 1$  soit une base affine réelle du dual de  $\mathbb{C}^m$ . Soit  $\epsilon_{m,n}$  une famille non vide de sous-ensembles de  $\{1, \dots, n\}$  avec, pour tout  $P \in \epsilon_{m,n}$ ,  $|P| = 2m + 1$ . Soit  $\mathcal{L}_P$  la sous-famille de  $\mathcal{L}$  correspondante. On donne deux conditions sur  $(\mathcal{L}, \epsilon_{m,n})$  : la condition *PEUR* (Principe d'Existence et d'Unicité du Remplaçant) et la condition d'imbrication.

- (a) Si, pour tout  $P \in \epsilon_{m,n}$  et tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , il existe  $j \in P$  tel que  $(P \setminus \{j\}) \cup \{i\} \in \epsilon_{m,n}$ , on dit que  $(\mathcal{L}, \epsilon_{m,n})$  vérifie le *PEUR*.
- (b) Si, pour tout  $(P, Q) \in \epsilon_{m,n}^2$ , les intérieurs des enveloppes convexes de  $\mathcal{L}_P$  et  $\mathcal{L}_Q$  possèdent une intersection non vide, on dit que  $(\mathcal{L}, \epsilon_{m,n})$  vérifie la condition d'imbrication.

Considérons l'ouvert :

$$U = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \exists P_z \in \epsilon_{m,n}, \forall i \in P_z, z_i \neq 0\}$$

C'est une généralisation de l'ouvert  $S$  des variétés LVM. L'action :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m \times U &\rightarrow U \\ (\alpha, T, [z]) &\mapsto (\alpha z_1 e^{l_1(T)}, \dots, z_n e^{l_n(T)}) \end{aligned}$$

de  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$  induit une structure de variété compacte complexe sur  $U/\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$  sous certaines conditions.

**Lemme 4.4.1** [Bos01] *L'action précédente est propre si et seulement si  $(\mathcal{L}, \epsilon_{m,n})$  satisfait la condition d'imbrication. Si c'est le cas, alors  $U/\mathbb{C}^m$  est compact si et seulement si  $(\mathcal{L}, \epsilon_{m,n})$  vérifie le *PEUR*.*

Si  $(\mathcal{L}, \epsilon_{m,n})$  vérifie le *PEUR* et la condition d'imbrication, la variété  $M = U/\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$  est une variété compacte complexe de dimension complexe  $n - m$  qu'on appelle variété LVMB. C'est une généralisation d'une variété LVM au sens de la proposition suivante :

**Proposition 4.4.2** [Bos01] *Si  $(\mathcal{L}, \epsilon_{m,n})$  vérifie le PEUR et la condition d'imbrication, alors  $M$  est une LVM si et seulement s'il existe une composante connexe bornée  $O$  telle que :*

$$\epsilon_{m,n} = \{P \in \mathcal{P}(\{1, \dots, n\}), |P| = 2m + 1, O \in \mathcal{H}(\mathcal{L}_P)\}$$

Bosio a montré que ces variétés sont également non kählériennes. La preuve est presque identique à celle des LVM.

**Remarque 4.4.3** *Dans le chapitre 5, on démontre que, si  $m \geq 2$  et  $N$  une variété LVM satisfaisant une condition de rationalité  $(K)$ , alors  $N$  n'admet pas de métrique lck. Ceci est lié à l'action d'un tore  $\mathbb{T}^m$  sur  $N$ . Ce résultat doit pouvoir se généraliser aux variétés LVMB. Ce travail n'a pas encore été mené à ce stade mais constitue une perspective de prolongement raisonnable de cette thèse.*

# NON EXISTENCE DE STRUCTURE LCK SUR LES LVM

---

Dans ce chapitre, nous exposons deux résultats majeurs de ce travail de thèse. Premièrement le théorème 5.4.1 : on énonce que sous une condition  $(K)$  de rationalité, les variétés LVM qui ne sont pas des Hopf linéaires diagonales ne sont pas lck. Et deuxièmement, comme conséquence, une variété LVM qui est lck à potentiel est biholomorphe à une variété de Hopf linéaire diagonale. De plus, le théorème ?? caractérise les variétés de Hopf diagonales parmi les LVM : en effet, celles-ci ne peuvent être obtenues que lorsque  $m = 1, k = 2$  et  $n > 3$ . Par le théorème de structure des variétés lck à potentiel 3.5.2 on en déduit qu'une variété LVM qui n'est pas une Hopf linéaire diagonale ( $m \geq 2$  ou  $m = 1$  et  $k = 1$  ou  $k = 2$ ) ne se plonge pas biholomorphiquement dans une variété de Hopf linéaire.

Ces résultats sont des conséquences du théorème 5.1.1 dû à N.Istrati [Ist19] : la structure lck est directement liée à l'existence d'un tore dans  $\text{Aut}(N, J)$  et du fait que sous une condition  $(K)$  de rationalité, un tore complexe s'injecte dans  $\text{Aut}(N, J)$  pour  $N$  une variété LVM.

## 5.1 Action du tore et structure lck

**Théorème 5.1.1** [Ist19] *Soit  $M$  une variété compacte complexe de structure complexe  $J$ . Supposons qu'il existe un tore réel dans le groupe des automorphismes de  $(M, J)$  tel que si  $\mathfrak{t}$  est l'algèbre de Lie de ce tore,  $\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{t} \cap J\mathfrak{t} > 2$ . Alors il n'existe pas de structure lck sur  $M$ .*

**Remarque 5.1.2** *Dans ce qui suit, pour simplifier les notations, on identifiera  $X \in \mathfrak{t}$  et  $\xi \in \Gamma(TM)$  défini pour tout  $x \in M$  par  $\xi(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\exp(tX)x) \in T_xM$ .*

Nous redonnons les grandes lignes de la preuve de ce résultat capital en suivant [Ist19].

**Preuve :** Supposons par l'absurde que  $M = (M, J, \Omega, \omega)$  est lck pour une structure lck stable par l'action du tore (on peut toujours supposer ceci quitte à moyenner la métrique sur ce tore). Comme  $\omega$  est fermée, la formule de Cartan donne, pour tout  $X \in \mathfrak{t}$ ,  $\mathcal{L}_X\omega = di_X\omega = 0$ . Soit donc  $C \in \mathfrak{t} \setminus \{0\}$  et  $D = JC \in \mathfrak{t}$ . Alors,  $\omega(C)$  et  $\omega(D)$  sont des constantes. Supposons que  $\omega(C) = \omega(D) = 0$ , comme  $C \in \mathfrak{t}$  est stable par  $J : [JC, C] = J[C, C] = 0$  alors  $i_{[C,D]}\Omega = 0$ . Un calcul direct permet d'en déduire que

$$0 = d_{\omega}(-g(C, C))$$

Et alors, d'après la proposition 2.2.7 du chapitre 2 cela implique que  $C = 0$  : absurde donc  $\omega(C)$  et  $\omega(D)$  ne sont pas tous deux nuls.

Posons  $X = \omega(C)D - \omega(D)C \in \mathfrak{t}$ . On a  $X \neq 0$ . En effet, supposons que  $X = 0$ , comme  $\omega(C)$  et  $\omega(D)$  ne sont pas tous les deux nuls, on peut supposer que  $\omega(C) \neq 0$ . Dans ce cas, comme  $X = 0$ , on a  $JC = \frac{\omega(D)}{\omega(C)}C$ . Et comme  $J^2 = -I$ , on devrait avoir  $\frac{\omega(D)^2}{\omega(C)^2}I = -I$  : contradiction.

On a aussi  $JX \in \mathfrak{t}$  puisque le tore est stable par  $J$ . Comme  $X \in \mathfrak{t} \setminus \{0\}$  et  $JX \in \mathfrak{t}$ , d'après ce qui précède,  $\omega(X)$  et  $\omega(JX)$  sont constants et non tous deux nuls. Or  $\omega(X) = 0$  donc  $\omega(JX) \neq 0$ .

Nous venons de montrer qu'il existe  $X \in \mathfrak{t} \setminus \{0\}$  tel que  $\omega(X) = 0$  et  $\omega(JX) \neq 0$ . Donc il existe  $C \in \mathfrak{t} \setminus \{0\}$  avec  $\omega(C) = c \neq 0$  et  $\omega(D) = \omega(JC) = 0$ . Si on pose  $C' = \frac{1}{c}C$ , on a  $\omega(C') = 1$ . Ainsi, on peut supposer que  $C \in \mathfrak{t} \setminus \{0\}$  et  $D = JC$  sont tels que  $\omega(C) = 1$  et  $\omega(D) = 0$ .

Soit  $f = g(C, C) = \Omega(D, C)$  :  $f$  est une fonction toujours strictement positive car  $C \in \mathfrak{t} \setminus \{0\}$ . Soit  $\Omega' = \frac{1}{f}\Omega$ . On a :

$$\begin{aligned} d\Omega' &= -\frac{df}{f^2} \wedge \Omega + \frac{1}{f}d\Omega \\ &= -\frac{df}{f} \wedge \Omega' + \omega \wedge \Omega' \\ &= \left(\omega - \frac{df}{f}\right) \wedge \Omega' \end{aligned}$$

Et  $d(\omega - \frac{df}{f}) = 0$  donc  $\omega' = \omega - \frac{df}{f}$  est la forme de Lee de  $\Omega'$ .

Nous vérifions ensuite que  $\omega'$  est parallèle par un calcul direct.

Notons que  $i_D\Omega' = i_{JC}\Omega' = J\xi$  (car le tore est stable par  $J : \Omega(JC, X) = J\Omega(C, X)$  pour tout champ  $X \in \Gamma(TM)$ ). De plus,  $\mathcal{L}_D\xi = 0$ . En effet, puisque  $\xi(D) = 1$ , on peut écrire :

$$\mathcal{L}_D\xi = i_D d\xi + di_D\left(\frac{1}{f}i_C\Omega\right) = d\xi(D) + d\left(\frac{1}{f}i_D i_C\Omega\right) = 0 + d\frac{1}{f} \cdot f = 0$$

Il suit que  $\xi = J\omega'$ . Ceci permet de vérifier que  $-C$  est le champ de vecteurs de Lee de  $\Omega'$  :  $-C = \omega'^{\#}$ , puis, en utilisant la proposition 2.2.15 du chapitre 2, de montrer que  $(M, \Omega', \omega', g')$  est de Vaisman. Par conséquent, comme une métrique de Vaisman est unique à un facteur conforme prêt (théorème 2.2.10),  $\mathfrak{t} \cap J\mathfrak{t} = \mathbb{R}\{C, JC\}$  est de dimension 2 sur  $\mathbb{R}$ . Ce qui est absurde. Donc  $M$  n'est pas lck.

□

## 5.2 Condition (K) de rationalité et $\mathbb{T}^m \subset \text{Aut}(N, J)$

Nous définissons ici une condition de rationalité de la configuration admissible  $\Lambda$ .

**Définition 5.2.1** *On dit que la configuration admissible  $\Lambda$  vérifie la condition (K) si le système :*

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n s_i \Lambda_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n s_i = 0 \end{cases}$$

admet une base rationnelle de solutions .

**Remarque 5.2.2** *Comme  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , cette condition (K) est dense dans l'espace des configurations admissibles de  $(\mathbb{C}^m)^n = \mathbb{R}^{2mn}$  mais de mesure nulle.*

**Théorème 5.2.3** *Soit  $N$  une variété LVM issue d'une configuration admissible vérifiant la condition (K) avec  $m \geq 1$  et  $n > 2m + 1$ . Alors il existe un tore complexe  $\mathbb{T}^m$  dans  $\text{Aut}(N, J)$ .*

**Preuve :** Considérons sur  $S$  l'action suivante :

$$\begin{aligned} \eta: \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m \times S &\rightarrow S \\ ((\alpha, T, U), z) &\mapsto \left( \alpha e^{\langle \Lambda_i, T \rangle + \langle \text{Re}(\Lambda_i), U \rangle} z_i \right)_{i=1, \dots, n} \end{aligned}$$

Soit  $\Gamma$  le groupe d'inéfectivité de l'action :

$$\Gamma = \{(\alpha, T, U) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{2m}, \forall z \in S, \eta(\alpha, T, U, z) = z\}$$

Rappelons que  $N = S/a$  où  $a$  est l'action donnée au chapitre 4. Et le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m \times S & \xrightarrow{\eta} & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ ((\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m)/\Gamma)/\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m \times N = S/a & \longrightarrow & N = S/a \end{array}$$

En effet, montrons que l'action  $\eta$  passe aux deux quotients successifs par  $\Gamma$  et  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$ . Tout d'abord, le groupe  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$  agit sur  $(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m)/\Gamma$  comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m \times (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m)/\Gamma &\rightarrow (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m)/\Gamma \\ ((b, B), [\alpha, T, U]_\Gamma) &\mapsto [b\alpha, B + T, U]_\Gamma \end{aligned}$$

Et alors, si  $z \in S$ ,  $(b, B) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$ ,  $(\alpha, T, U) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{2m}$  et  $(\alpha', T', U') \in \Gamma$ , on a :

$$\begin{aligned} &[\eta(b\alpha\alpha', B + T + T', U + U', z)]_a \\ &= [(be^{\langle B, \Lambda_i \rangle} \alpha e^{\langle T, \Lambda_i \rangle + \langle \text{Re}(\Lambda_i), U \rangle} \alpha' e^{\langle T', \Lambda_i \rangle + \langle \text{Re}(\Lambda_i), U' \rangle} z_i)_{i=1, \dots, n}]_a \\ &= [(be^{\langle B, \Lambda_i \rangle} \alpha e^{\langle T, \Lambda_i \rangle + \langle \text{Re}(\Lambda_i), U \rangle} z_i)]_a \\ &= [(\alpha e^{\langle T, \Lambda_i \rangle + \langle \text{Re}(\Lambda_i), U \rangle} z_i)]_a \\ &= [\eta(\alpha, T, U, z)]_a \end{aligned}$$

Or on dispose d'un biholomorphisme :

$$((\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m)/\Gamma)/\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m \approx \mathbb{C}^m/\Gamma$$

Et donc d'une action de  $\mathbb{C}^m/\Gamma$  sur  $N$ . De plus, soit  $(\alpha, T, U) \in \Gamma$ , soit  $z \in (\mathbb{C}^*)^n$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  $\alpha e^{\langle T, \Lambda_i \rangle + \langle \text{Re}(\Lambda_i), U \rangle} = 1$ . Si on divise chaque équation par celle avec  $i = 1$ , et si on passe au logarithme, on obtient, pour tout  $j = 2, \dots, n$  :

$$\langle \Lambda_j - \Lambda_1, T \rangle + \langle \text{Re}(\Lambda_j) - \text{Re}(\Lambda_1), U \rangle = 2i\pi k_j$$

pour un certain  $(k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ . Ce que l'on peut réécrire, en posant  $P = T + U$  et  $Q = iT$  :

$$\langle \text{Re}(\Lambda_j) - \text{Re}(\Lambda_1), P \rangle + \langle \text{Im}(\Lambda_j) - \text{Im}(\Lambda_1), Q \rangle = 2i\pi k_j$$

En identifiant la partie réelle et la partie imaginaire, cette équation se dédouble

en :

$$\langle \operatorname{Re}(\Lambda_j) - \operatorname{Re}(\Lambda_1), \operatorname{Re}(P) \rangle + \langle \operatorname{Im}(\Lambda_j) - \operatorname{Im}(\Lambda_1), \operatorname{Re}(Q) \rangle = 0 \quad (\text{EqR}_j)$$

$$\langle \operatorname{Re}(\Lambda_j) - \operatorname{Re}(\Lambda_1), \operatorname{Im}(P) \rangle + \langle \operatorname{Im}(\Lambda_j) - \operatorname{Im}(\Lambda_1), \operatorname{Im}(Q) \rangle = 2\pi k_j \quad (\text{EqI}_j)$$

Le système  $(\text{EqR}_2), \dots, (\text{EqR}_n)$  est de rang maximal par hyperbolicité faible et a pour unique solution  $\operatorname{Re}(P) = \operatorname{Re}(Q) = 0$ . Et il reste la deuxième partie  $(\text{EqI}_2), \dots, (\text{EqI}_n)$ . Comme  $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$  est de rang réel  $2m$ , les  $2m$  premières équations  $(\text{EqI}_2), \dots, (\text{EqI}_{2m+1})$  déterminent  $\operatorname{Im}(P)$  et  $\operatorname{Im}(Q)$  pour tout  $(k_2, \dots, k_{2m+1})$ . Et ils sont non nuls dès lors que  $(k_2, \dots, k_{2m+1})$  sont non tous nuls. Il reste alors à vérifier dans la dernière partie du système que :

$$S_j : = \langle \operatorname{Re}(\Lambda_j) - \operatorname{Re}(\Lambda_1), \operatorname{Im}(P) \rangle + \langle \operatorname{Im}(\Lambda_j) - \operatorname{Im}(\Lambda_1), \operatorname{Im}(Q) \rangle = 2\pi k_j$$

pour  $j = 2m + 2, \dots, n$ . Or, pour ces  $j$ , la condition  $(K)$  implique que  $(\Lambda_j - \Lambda_1)$  est une combinaison linéaire rationnelle de  $(\Lambda_2 - \Lambda_1, \dots, \Lambda_{2m+1} - \Lambda_1)$ . On peut supposer, quitte à multiplier par un entier les équations, qu'il s'agit d'une combinaison linéaire entière :

$$\Lambda_j - \Lambda_1 = \sum_{i=2}^{2m+1} a_i^j (\Lambda_i - \Lambda_1)$$

avec  $a_i^j \in \mathbb{Z}$ . Et il vient :

$$\begin{aligned} S_j &= \sum_{i=2}^{2m+1} a_i^j (\langle \operatorname{Re}(\Lambda_i - \Lambda_1), \operatorname{Im}(P) \rangle + \langle \operatorname{Im}(\Lambda_i - \Lambda_1), \operatorname{Im}(Q) \rangle) \\ &= \sum_{i=2}^{2m+1} a_i^j 2\pi k_i = 2\pi k_j \end{aligned}$$

pour  $k_j = \sum_{i=2}^{2m+1} a_i^j k_i \in \mathbb{Z}$ . Pour conclure, pour tout  $(k_2, \dots, k_{2m+1}) \in \mathbb{Z}^{2m}$ , il existe une solution au système  $((\text{EqR}_2), \dots, (\text{EqR}_n), (\text{EqI}_2), \dots, (\text{EqI}_n))$ . Ainsi, les stabilisateurs des points  $z \in (\mathbb{C}^*)^n$  s'identifient à  $\mathbb{Z}^{2m}$ . On vérifie alors que les éléments de ce stabilisateur fixent tous les points de  $S$ . Ce qui signifie que le groupe  $\Gamma$  s'identifie à  $\mathbb{Z}^{2m}$ . On dispose donc d'une action de  $\mathbb{C}^m / \Gamma \approx \mathbb{C}^m / \mathbb{Z}^{2m} = \mathbb{T}^m$ . Cette action est totalement effective. Autrement dit, elle induit une injection de  $\mathbb{T}^m$  dans  $\operatorname{Aut}(N, J)$ .  $\square$

## 5.3 Caractérisation des variétés de Hopf dans les LVM

Les variétés de Hopf ne peuvent être obtenues parmi les LVM que dans le cas  $m = 1$  et  $k = 2$ , précisément, on a :

**Théorème 5.3.1 (Caractérisation des Hopf)** *Soit  $N$  une LVM dont la configuration admissible est de type  $(n, m, k)$  avec  $n > 2m + 1$  et  $m \geq 1$ ,  $k$  dénotant le nombre de points indispensables. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i)  $N$  est une variété de Hopf linéaire diagonale.
- (ii)  $N$  est difféomorphe à  $\mathbb{S}^{2(n-m-1)-1} \times \mathbb{S}^1$ .
- (iii)  $m = 1$  et  $k = 2$ .
- (iv)  $N$  a même homologie que  $\mathbb{S}^{2(n-m-1)-1} \times \mathbb{S}^1$ .

De plus, si  $m \geq 2$ , alors  $N$  n'est pas biholomorphe (ni même difféomorphe) à une variété de Hopf.

**Preuve :** Notons pour simplifier  $p = n - m - 1$ .

L'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii) est triviale.

Montrons que (ii)  $\Rightarrow$  (iii). Supposons que  $N$  est difféomorphe à  $\mathbb{S}^{2(n-m-1)-1} \times \mathbb{S}^1$ . On a directement  $k = 2$  car  $\pi_1(N) = \mathbb{Z}^{\min(0, k-1)}$ . Montrons par l'absurde que  $m = 1$ . Supposons  $m \geq 2$ . Alors  $M_1$  est difféomorphe à  $N \times \mathbb{S}^1$  donc à  $\mathbb{S}^{2p-1} \times (\mathbb{S}^1)^2$ . De plus, comme  $k = 2$  et  $m \geq 2$ , d'après le théorème de réduction (théorème 10 de la cinquième partie de [Mee98]), on peut trouver une configuration admissible  $\Lambda'$  de taille  $m' = m - 1$  et à  $k' = 0$  point indispensable, telle que  $M_1$  soit difféomorphe à  $M'_1 \times (\mathbb{S}^1)^2$ . En utilisant la formule de Künneth sur les deux décompositions précédentes, on en déduit que  $M'_1$  a l'homologie de  $\mathbb{S}^{2p-1}$ . Autrement dit,  $H^h(M'_1) = \mathbb{Z}$  si  $h = 2p - 1$  ou  $h = 0$  et  $H^h(M'_1) = 0$  sinon. Notons  $N'$  la variété LVM à 0 point indispensable associée à  $M'_1$ . La suite de Gysin à l'ordre 1, où l'on note  $e$  la classe d'Euler du fibré  $M'_1 \rightarrow N'$ ,

$$H^1(M'_1) \longrightarrow H^0(N') \xrightarrow{\wedge e} H^2(N') \longrightarrow H^2(M'_1)$$

est exacte car  $2p - 1 \geq 5$  puisque  $m \geq 2$ . Et alors, difféomorphiquement  $H^0(N') =$

$H^2(N') = \mathbb{Z}$ . Cette suite de Gysin à l'ordre suivant s'écrit :

$$H^3(M'_1) \longrightarrow H^2(N') \xrightarrow{\wedge e} H^4(N') \longrightarrow H^4(M'_1)$$

Et c'est encore une suite exacte puisque  $2p - 1 \geq 5$ .

Donc  $H^0(N') = H^2(N') = H^4(N') = \mathbb{Z}$ . On peut continuer ce raisonnement jusqu'à ce que  $H^h(M'_1)$  ne soit plus égal à 0, c'est-à-dire jusqu'à  $2p - 1$ . Ceci prouve que  $N'$  a même homologie que l'espace projectif de dimension complexe  $p - 1$  mais aussi la même algèbre de cohomologie :  $\mathbb{Z}e/\langle e^{p-1} - 1 \rangle$  avec  $e$  de degré 2. C'est donc une variété symplectique. Contradiction :  $N'$  n'est pas symplectique. Donc  $m = 1$ .

Montrons que (iii)  $\Rightarrow$  (i). Ce raisonnement sera ensuite généralisé dans le chapitre 6 pour  $m > 1$ .

On suppose que  $m = 1, k = 2$  et  $n > 2m + 1 = 3$ . La configuration admissible  $\Lambda$  de la variété  $N$  est dans  $\mathbb{C}^n$  :

$$\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

On peut supposer que ce sont les deux premières coordonnées qui sont indispensables. On a alors  $S = (\mathbb{C}^*)^2 \times \mathbb{C}^{n-2} \setminus \{0\}$ . Rappelons les actions qui permettent de définir  $N$  :

$$\begin{aligned} a: \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times S &\rightarrow S \\ (\alpha, t, z) &\mapsto (\alpha z_j e^{t\lambda_j}, j = 1, \dots, n) \\ b: \mathbb{C} \times \mathbb{P}(S) &\rightarrow \mathbb{P}(S) \\ (t, [z]) &\mapsto [z_j e^{t\lambda_j}, j = 1, \dots, n] \end{aligned}$$

avec, pour  $z \in S$ ,  $[z] = \{\beta z, \beta \in \mathbb{C}\}$ . Comme la première coordonnée est indispensable,  $z_1 \neq 0$  et on peut définir le difféomorphisme :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{P}(S) &\rightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n-2} \setminus \{0\} \\ [z] &\mapsto \left( \frac{z_2}{z_1}, \dots, \frac{z_n}{z_1} \right) = (w_2, \dots, w_n) = w. \end{aligned}$$

Ainsi, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times S & \xrightarrow{a} & S \\
 \text{proj}_{\mathbb{C}} \times s \downarrow & & \downarrow s \\
 \mathbb{C} \times \mathbb{P}(S) & \xrightarrow{b} & \mathbb{P}(S) \\
 \text{Id}_{\mathbb{C}} \times f \downarrow & & \downarrow f \\
 \mathbb{C} \times (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n-2} \setminus \{0\}) & \xrightarrow{c} & \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n-2} \setminus \{0\}
 \end{array}$$

où  $s$  est la surjection canonique et :

$$\begin{aligned}
 c: \mathbb{C} \times (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n-2} \setminus \{0\}) &\rightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n-2} \setminus \{0\} \\
 (t, w) &\mapsto (w_j e^{t(\lambda_j - \lambda_1)}, j = 2, \dots, n)
 \end{aligned}$$

Ceci permet de caractériser biholomorphiquement  $N$  comme suit :

$$N = S/a = \mathbb{P}(S)/b = (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n-2} \setminus \{0\})/c$$

Si  $t \in \mathbb{C}$  est tel que  $w_2 e^{t(\lambda_j - \lambda_1)} = 1$ , alors, en fixant une détermination du logarithme complexe, il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que :

$$t = g(w_2) + \gamma(k)$$

avec  $g(w_2) = \frac{-\log w_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$  et  $\gamma(k) = \frac{2i\pi k}{\lambda_1 - \lambda_2}$ .

Soit  $\Gamma(k) = (e^{(\lambda_j - \lambda_1)\gamma(k)})_{3 \leq j \leq n}$  et  $G(w_2) = (e^{(\lambda_j - \lambda_1)g(w_2)})_{3 \leq j \leq n}$ . Considérons l'action de  $\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{C}^{n-2} \setminus \{0\}$  suivante :

$$\begin{aligned}
 d: \mathbb{Z} \times \mathbb{C}^{n-2} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{C}^{n-2} \setminus \{0\} \\
 (k, w) &\mapsto \text{Diag}(\Gamma(k)_3, \dots, \Gamma(k)_n) \cdot \begin{pmatrix} w_3 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
 h: N = (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n-2} \setminus \{0\})/c &\rightarrow \mathbb{C}^{n-2} \setminus \{0\}/d \\
 [w]_c &\mapsto [w_3 G(w_2)_3, \dots, w_n G(w_2)_n]_d
 \end{aligned}$$

est un biholomorphisme. Il reste à vérifier que  $\rightarrow \mathbb{C}^{n-2} \setminus \{0\} / d$  est bien une variété de Hopf linéaire diagonale. Sans restriction de généralité, on peut supposer que  $|\Gamma(k)_j| < 1$  pour tout  $j = 3, \dots, n$ . En effet, il suffit de "normaliser" (procédé qui sera exposé en détail en dimension supérieure au chapitre 6), on peut prendre  $\lambda_1 = -i, \lambda_2 = -1$  et  $\operatorname{Re}(\lambda_j) > 0, \operatorname{Im}(\lambda_j) > 0$  pour tout  $j = 3, \dots, n$ . Dans ce cas, le calcul direct de  $|\Gamma(k)_j|$  montre que  $|\Gamma(k)_j| < 1$ . L'action de  $d$  est bien cyclique, engendrée par une contraction holomorphe et de générateur une matrice diagonale dont les valeurs propres sont de modules strictement plus petits que 1. Ceci prouve que  $\mathbb{C}^{n-2} \setminus \{0\} / d$  est une variété de Hopf linéaire diagonale.

On a montré que  $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$ .

On a trivialement  $(ii) \Rightarrow (iv)$ . Il reste à montrer que  $(iv) \Rightarrow (iii)$ . Or cette preuve est exactement la même que celle de  $(ii) \Rightarrow (iii)$  puisque nous n'avons utilisé que l'homologie dans celle-ci.  $\square$

## 5.4 Sous la condition (K), les LVM ne sont pas lck

Les deux résultats principaux de ce chapitre sont les suivants :

**Théorème 5.4.1** *Supposons que  $N$  n'est pas biholomorphe à une variété de Hopf linéaire diagonale. Supposons que  $m = 1$  ou que  $m \geq 2$  et  $N$  vérifie la condition (K). Alors  $N$  n'admet pas de métrique lck.*

**Théorème 5.4.2** *La variété  $N$  admet une métrique lck à potentiel si et seulement si  $N$  est biholomorphe à une variété de Hopf linéaire diagonale.*

**Remarque 5.4.3** *D'après la caractérisation des variétés de Hopf linéaires diagonales parmi les variétés LVM, les seules variétés LVM qui sont lck à potentiel sont les variétés LVM avec  $m = 1$ ,  $k = 2$  points indispensables,  $n > 3$ .*

**Exemple 5.4.4** *La configuration admissible :*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1+i & 1+i & 1-i & 1-i \\ -i & 0 & -1 & 1+i & 1+i & 1+i & 1+i \end{pmatrix}$$

*vérifie la condition (K). En effet, l'ensemble des solutions au système*

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^7 s_i \Lambda_i = 0 \\ \sum_{i=1}^7 s_i = 0 \end{cases}$$

*est un espace de dimension 2 dont on peut donner une base  $u_1 = -e_6 + e_7$  et  $u_2 = -e_4 + e_5$ . Ainsi, le théorème 5.4.1 s'applique et il n'existe aucune métrique lck sur la variété LVM associée. Cet exemple correspond à un produit de deux surfaces de Hopf diagonales et sera rediscuté dans le chapitre suivant.*

**Preuve :** [du théorème 5.4.2] Supposons que le théorème 5.4.1 soit vrai. Supposons que  $N$  admette une structure lck à potentiel. Si  $m = 1$ , d'après le théorème 5.4.1,  $N$  est une variété de Hopf linéaire diagonale. Si  $m \geq 2$ , d'après le théorème 2.2.13, cette métrique lck à potentiel est stable par petites déformations. Or par densité de l'ensemble des configurations admissibles vérifiant (K), il existe une petite déformation homotope  $N'$  de configuration admissible  $\Lambda'$  de  $N$  vérifiant (K)

et conservant la métrique lck à potentiel. D'après le théorème 5.4.1,  $N'$  ne peut admettre une structure lck que si elle est biholomorphe à une variété de Hopf linéaire diagonale (en particulier, la structure lck est finalement lck à potentiel). Mais alors, d'après la caractérisation des variétés de Hopf linéaires diagonales parmi les LVM (théorème 5.3.1), les paramètres de  $\Lambda'$  sont  $m' = 1$ ,  $k' = 2$  et  $n' > 3$ . Par conséquent, on a  $n > 3$ ,  $m = 1$  et  $k = 2$  aussi pour  $N$ . Pour résumer,  $m = 1$  et  $N$  est lck à potentiel, donc par le théorème 5.4.1 ou le théorème 5.3.1,  $N$  est biholomorphe à une variété de Hopf linéaire diagonale.  $\square$

**Remarque 5.4.5** *Il reste peu d'espoir de trouver des exemples, parmi les LVM, de variétés lck autres que les variétés de Hopf linéaires. La seule possibilité est de trouver une variété lck qui ne soit pas lck à potentiel et ne vérifiant pas la condition (K). Ceci laisse peu de place puisque la condition (K) est dense. Cependant, il est à priori possible qu'il existe une variété LVM qui soit lck puisqu'une métrique lck n'est en général pas stable par déformations (excepté les métriques lck à potentiel). Dans le chapitre 6, l'accent sera mis sur l'existence de revêtements lck à potentiel et non compacts des variétés LVM. Ceci donnera en quelque sorte une mesure de l'obstruction à admettre une métrique lck.*

Montrons maintenant le théorème 5.4.1.

**Preuve :** [du théorème 5.4.1] Soit  $N$  une variété LVM qui n'est pas biholomorphe à une variété de Hopf linéaire diagonale.

Supposons dans un premier temps que  $m = 1$ . Les possibilités pour  $k$  sont 0 ou 1. Mais dans ces deux cas, la variété  $N$  est simplement connexe donc non lck (corollaire 2.1.3). Supposons maintenant que  $m \geq 2$  et que  $\Lambda$  vérifie la condition de rationalité (K). D'après le théorème 5.2.3, le tore complexe  $\mathbb{T}^m$  de dimension  $m$  s'injecte dans le groupe d'automorphismes de  $N$  stables par  $J : \mathbb{T}^m \subset \text{Aut}(N, J)$ . Le théorème est alors une conséquence du théorème 5.1.1 [Ist19]. Ce tore  $\mathbb{T}^m$  est de dimension réelle  $2m \geq 4$  puisque  $m \geq 2$ . De plus, il est stable par  $J$ . Donc,  $N$  ne peut être lck.  $\square$

**Remarque 5.4.6** *L'article [OPV14] permet aussi de démontrer le théorème 5.4.1 dans certains cas. En effet, dans le cas  $m \geq 2$ , si l'on suppose que  $N$  vérifie la condition de rationalité (K), alors, il existe un tore complexe de dimension complexe  $m$  dans  $\text{Aut}(N, J)$ . Nous disposons d'une submersion holomorphe  $p: N \rightarrow N/\mathbb{T}^m$  de*

fibres kählériennes. En supposant que le quotient  $N/\mathbb{T}^m$  soit une variété (en général, c'est une orbifold), le théorème de [OPV14] dit, dans ce cas, que si  $N$  est lck alors  $N$  est kählérienne ou biholomorphe à un quotient fini d'une petite déformation d'une variété de Vaisman. Or  $N$  ne vérifie aucune de ces deux assertions donc ne peut être lck.



# REVÊTEMENTS LCK À POTENTIEL NON COMPACTS D'UNE CERTAINE CLASSE DE LVM

---

Ce chapitre et le précédent regroupent les résultats majeurs de cette thèse. Au chapitre 5, nous avons montré que si une LVM vérifiait la condition de rationalité ( $K$ ), elle ne pouvait être lck, or cette condition est dense, cela n'interdit pas qu'il existe des variétés LVM lck (qui ne sont pas des variétés de Hopf linéaires diagonales) mais s'il en existe, alors elles sont nécessairement non lck à potentiel. Il est naturel de se poser la question suivante en tirant les enseignements du chapitre 5 :

Existe-t-il des revêtements lck à potentiel des variétés LVM ?

C'est à cette question que nous apporterons des éléments de réponse. Nous allons tout d'abord décrire les variétés LVM qui disposent de  $k = m + 1$  points indispensables holomorphiquement et difféomorphiquement. Ce type de configuration a la particularité de permettre de passer biholomorphiquement d'une action continue de  $\mathbb{C}^m$  à une action discrète de  $\mathbb{Z}^m$ . Et difféomorphiquement, nous montrons que ce type de variété se présente comme  $X \times (\mathbb{S}^1)^m$  avec  $X$  une sous-variété différentiable que l'on définira. Ensuite, nous démontrerons le théorème 6.4.1 : en ajoutant certaines hypothèses sur ce type de configuration admissible, nous montrerons qu'il existe un revêtement lck à potentiel non compact de cette LVM. Nous proposerons alors de nouvelles définitions : structures  $p$ -lck et  $p$ -lck à potentiel caractérisant l'existence d'un  $\mathbb{Z}^p$ -revêtement lck ou d'un  $\mathbb{Z}^p$ -revêtement lck à potentiel sur des variétés non lck.

## 6.1 Normalisation biholomorphe

Commençons par exposer un procédé de normalisation d'une configuration admissible à  $k = m + 1$  points indispensables pour  $m > 1$ . C'est le lemme suivant.

**Lemme 6.1.1** *Soit  $m > 1$ ,  $n > 2m + 1$ , soit  $\Lambda$  une configuration admissible de  $(\mathbb{C}^m)^n$ . Avec  $k = m + 1$  points indispensables dont on peut supposer, quitte à faire une permutation sur  $\Lambda$ , que ce sont les  $k$  premiers  $\Lambda_i$  et qu'il forment une matrice de rang complexe  $m$  (c'est toujours possible quitte à déformer par un  $\epsilon$ , voir l'exemple 6.4.8 où l'on applique cette technique). Alors il existe  $A \in \text{GL}_m(\mathbb{C})$  et  $B \in \mathbb{C}^m$  tels que :*

$$A\Lambda + B = (-ie_m, -e_1, \dots, -e_m, A\Lambda_{m+2} + B, \dots, A\Lambda_n + B)$$

De plus,  $N$  est biholomorphe à  $S_\Lambda/a_{A\Lambda+B}$ . Où

$$\begin{aligned} a_{A\Lambda+B} : (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m) \times S_\Lambda &\rightarrow S_\Lambda \\ (\alpha, T, z) &\mapsto (\alpha z_j e^{\langle A\Lambda_j + B, T \rangle}, j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

**Remarque 6.1.2** *En effet, la variété  $N_\Lambda$  n'est pas forcément biholomorphe à  $N_{A\Lambda+B}$  puisque la configuration  $A\Lambda + B$  peut ne pas être admissible : il est possible que  $0 \notin \mathcal{H}(A\Lambda + B)$  à cause du facteur de translation  $B$ . Il est aussi possible que cette configuration soit admissible mais avec  $S_\Lambda \neq S_{A\Lambda+B}$ .*

**Preuve :** On doit montrer qu'il existe  $A \in \text{GL}_m(\mathbb{C})$  et  $B \in \mathbb{C}^m$  tels que :

$$\begin{cases} A\Lambda_1 + B & = -ie_m \\ A\Lambda_2 + B & = -e_1 \\ \vdots & \\ A\Lambda_{m+1} + B & = -e_m \end{cases} = \begin{cases} (S_1) \\ (S_2) \\ \vdots \\ (S_{m+1}) \end{cases}$$

C'est équivalent, en gardant  $(S_1)$  et en soustrayant tous les autres systèmes  $(S_j)$

par  $(S_1)$  à rechercher  $A$  et  $B$  tels que :

$$\begin{cases} A\Lambda_1 + B & = -ie_m \\ A(\Lambda_2 - \Lambda_1) & = ie_m - e_1 \\ \vdots & \\ A(\Lambda_{m+1} - \Lambda_1) & = ie_m - e_m \end{cases}$$

Puis, en isolant  $B$  dans  $(S_1)$  et en multipliant par  $A^{-1}$  par la gauche dans  $(S_a)$ ,  $a = 2, \dots, m+1$ , c'est encore équivalent à rechercher  $A^{-1}$  et  $B$  tels que :

$$\begin{cases} B & = -ie_m - A\Lambda_1 \\ \Lambda_2 - \Lambda_1 & = A^{-1}(ie_m - e_1) \\ \vdots & \\ \Lambda_{m+1} - \Lambda_1 & = A^{-1}(ie_m - e_m) \end{cases}$$

On note

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mm} \end{pmatrix}$$

Les systèmes  $(S_a)$ ,  $a = 2, \dots, m+1$  sont équivalents aux systèmes :

$$\Lambda_a - \Lambda_1 = (-\alpha_{j(a-1)} + i\alpha_{jm})_{1 \leq j \leq m}$$

que l'on note encore  $(S_a)$  pour  $a = 2, \dots, m+1$ . Prenons le système  $(S_{m+1})$  : il permet d'obtenir directement la valeur de  $\alpha_{jm}$  pour  $j = 1, \dots, m$ , à savoir :

$$\alpha_{jm} = \frac{\lambda_{m+1}^j - \lambda_1^j}{i-1} = -\frac{1+i}{2}(\lambda_{m+1}^j - \lambda_1^j)$$

Ensuite, pour  $j = 1, \dots, m$ , et tout  $b = 2, \dots, m$ ,  $(S_b)$  nous donne  $\alpha_{j(b-1)}$  en

fonction de  $\alpha_{jm}$  précédemment trouvé. Pour conclure :

$$\alpha_{jp} = \begin{cases} \frac{1+j}{2}\lambda_1^j + \frac{1-j}{2}\lambda_{m+1}^j - \lambda_{p+1}^j & p \neq m \\ -\frac{1+i}{2}(\lambda_{m+1}^j - \lambda_1^j) & p = m \end{cases}$$

La matrice  $A^{-1}$  est entièrement déterminée. Le vecteur  $B$  également dans  $(S_1)$  dès lors que  $A^{-1}$  est inversible. C'est ce qu'il reste à démontrer. L'écriture en colonnes  $(C_1, \dots, C_m)$  de  $A^{-1}$  est la suivante :

$$\left( \frac{1+i}{2}\Lambda_1 + \frac{1-i}{2}\Lambda_{m+1} - \Lambda_2, \dots, \frac{1+i}{2}\Lambda_1 + \frac{1-i}{2}\Lambda_{m+1} - \Lambda_m, -\frac{1+i}{2}(\Lambda_{m+1} - \Lambda_1) \right)$$

Soit  $(a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{C}^m$  un  $m$ -uplets de complexes vérifiant :

$$\sum_{p=1}^m a_p C_p = 0$$

Nous devons montrer que  $a_p = 0$  pour tout  $p = 1, \dots, m$ . La relation de liaison des colonnes s'écrit précisément :

$$\sum_{p=1}^{m-1} \left( \frac{1+i}{2} a_p \Lambda_1 + \frac{1-i}{2} a_p \Lambda_{m+1} - a_p \Lambda_{p+1} \right) - \frac{1+i}{2} a_m (\Lambda_{m+1} - \Lambda_1)$$

Si on pose :

$b_1 = \frac{1+i}{2} \sum_{p=1}^m a_p$ ,  $b_2 = -a_1, \dots, b_m = -a_{m-1}$  et  $b_{m+1} = \frac{1-i}{2} (\sum_{p=1}^{m-1} a_p) - \frac{1+i}{2} a_m$ , on obtient :

$$\sum_{p=1}^{m+1} b_p \Lambda_p = 0$$

Or on a supposé que les  $m+1$  premiers points sont indispensables et que le rang complexe de ces points indispensables est  $m$ . Par conséquent, il est obligatoire que  $b_p = 0$  pour  $p = 1, \dots, m+1$ . Ce qui implique que  $a_p = 0$  pour tout  $p = 1, \dots, m-1$  et  $b_1 = b_{m+1} = 0$  entraîne  $a_m = 0$ . Ce qui montre que les colonnes de  $A^{-1}$  sont  $\mathbb{C}$ -linéairement indépendantes et donc que  $A^{-1} \in \text{GL}_m(\mathbb{C})$ .

La configuration  $A\Lambda$  est admissible puisque  $0 \in \mathcal{H}(\Lambda) \Leftrightarrow 0 \in \mathcal{H}(A\Lambda)$  par linéa-

rité. En particulier,  $\Lambda$  et  $A\Lambda$  sont homotopes, donc  $N_\Lambda$  et  $N_{A\Lambda}$  sont biholomorphes d'après la proposition 4.2.3.

L'ajout d'un facteur  $B$  peut transformer la configuration admissible  $A\Lambda$  en une configuration  $A\Lambda + B$  non admissible ou admissible mais avec  $S_\Lambda \neq S_{A\Lambda+B}$ . Toutefois, pour tout  $z \in S_\Lambda$  et tout  $T \in \mathbb{C}^m$ ,

$$[z_j e^{\langle A\Lambda_j+B, T \rangle}] = [z_j e^{\langle B, T \rangle} e^{\langle A\Lambda_j, T \rangle}] = [z_j e^{\langle A\Lambda_j, T \rangle}]$$

Donc  $N$  est biholomorphe à  $S_\Lambda/a_{A\Lambda+B}$ .  $\square$

## 6.2 De $\mathbb{C}^m$ à $\mathbb{Z}^m$

Soit  $n > 2m + 1$ ,  $m > 1$  et  $k = m + 1$  le nombre de points indispensables d'une configuration admissible  $\Lambda$ . On peut supposer quitte à perturber, d'après le lemme 6.1.1, que :

$$\Lambda = (-ie_m, -e_1, \dots, -e_m, \Lambda_{m+2}, \dots, \Lambda_n)$$

On dira alors que la configuration admissible  $\Lambda$  ou la variété LVM associée  $N$  est normalisée.

**Théorème 6.2.1** *La variété  $N$  est biholomorphe à  $C/\mathbb{Z}^m$ . Avec  $C = \mathbb{C}^{n-m-1} \setminus F$  où  $F$  est un ensemble analytique. L'action de  $\mathbb{Z}^m$  est engendrée par  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  avec, pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$  :*

$$\alpha_j = \text{Diag}(\Gamma_{j(m+2)}, \dots, \Gamma_{jn}) \in M_{n-m-1}(\mathbb{C})$$

et

$$\Gamma_{jr} = \begin{cases} e^{2i\pi\lambda_r^j} & j \neq m \\ e^{\pi(i-1)(\lambda_r^m+i) - \pi(1+i) \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^{m+l} \lambda_r^l} & j = m \end{cases} \quad (6.1)$$

**Preuve :** On a  $S \subset \{z \in \mathbb{C}^n, z_1 \cdots z_{m+1} \neq 0\} = (\mathbb{C}^*)^{m+1} \times U$  avec  $U \subset \mathbb{C}^{n-m-1}$  un ouvert. Ainsi,  $S = (\mathbb{C}^*)^{m+1} \times C$  avec  $C = \mathbb{C}^{n-m-1} \setminus F$  où  $F$  est un ensemble analytique. On dispose de l'action  $a$  décrite précédemment (chapitre 4) :

$$\begin{aligned} a: (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m) \times S &\rightarrow S \\ (\alpha, T, z) &\mapsto (\alpha z_j e^{\langle T, \Lambda_j \rangle}, j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

On peut aussi considérer l'action :

$$\begin{aligned} b: \mathbb{C}^m \times \mathbb{P}(S) &\rightarrow \mathbb{P}(S) \\ (T, [z]) &\mapsto [z_j e^{\langle \Lambda_j, T \rangle}, j = 1, \dots, n] \end{aligned}$$

où  $[z] = \{\lambda z, \lambda \in \mathbb{C}\}$  est la classe de  $z$  dans l'espace projectif  $\mathbb{P}(S)$ . On pose alors :

$$\begin{aligned} c: \mathbb{C}^m \times (\mathbb{C}^*)^m \times C &\rightarrow (\mathbb{C}^*)^m \times C \\ (T, w) &\mapsto (w_j e^{\langle \Lambda_j - \Lambda_1, T \rangle}, j = 2, \dots, n) \end{aligned}$$

Entre ces trois actions, le diagramme commutatif suivant explique les liens :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m \times S & \xrightarrow{a} & S \\
\text{proj}_{\mathbb{C}^m} \times s \downarrow & & \downarrow s \\
\mathbb{C}^m \times \mathbb{P}(S) & \xrightarrow{b} & \mathbb{P}(S) \\
\text{Id} \times f \downarrow & & \downarrow f \\
\mathbb{C}^m \times (\mathbb{C}^*)^m \times C & \xrightarrow{c} & (\mathbb{C}^*)^m \times C
\end{array}$$

Avec  $s: S \rightarrow \mathbb{P}(S)$  la surjection canonique,  $\text{proj}_{\mathbb{C}^m}: \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$  la projection sur  $\mathbb{C}^m$  et enfin :

$$\begin{aligned}
f: \mathbb{P}(S) &\rightarrow (\mathbb{C}^*)^m \times C \\
[z] &\mapsto \left( \frac{z_2}{z_1}, \dots, \frac{z_n}{z_1} \right)
\end{aligned}$$

bien définie puisque, pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $f([\lambda z]) = f([z])$ . C'est un biholomorphisme d'inverse  $f^{-1}(w_2, \dots, w_n) = [1, w_2, \dots, w_n] \in \mathbb{P}(S)$ . Comme le diagramme précédent commute, on a, biholomorphiquement :

$$N = S/a = \mathbb{P}(S)/b = \left( (\mathbb{C}^*)^m \times C \right) / c \quad (6.2)$$

On peut alors simplifier ces actions en considérant la normalisation de  $\Lambda$ .

Notons  $T = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{C}^m$ . On a :

$$a: \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m \times S \rightarrow S$$

$$(\alpha, T, z) \mapsto \alpha(z_1 e^{-it_m}, z_2 e^{-t_1}, \dots, z_{m+1} e^{-t_m}, z_j e^{\langle \Lambda_j, T \rangle}, j = m+2, \dots, n)$$

$$b: \mathbb{C}^m \times \mathbb{P}(S) \rightarrow \mathbb{P}(S)$$

$$(T, [z]) \mapsto [z_1 e^{-it_m}, z_2 e^{-t_1}, \dots, z_{m+1} e^{-t_m}, z_j e^{\langle \Lambda_j, T \rangle}, j = m+2, \dots, n]$$

$$c: \mathbb{C}^m \times (\mathbb{C}^*)^m \times C \rightarrow (\mathbb{C}^*)^m \times C$$

$$(T, w) \mapsto (w_2 e^{-t_1 + it_m}, \dots, w_{m+1} e^{-t_m + it_m}, w_j e^{\langle \Lambda_j + it_m, T \rangle}, j = m+2, \dots, n)$$

Pour obtenir un autre biholomorphisme entre  $\left( (\mathbb{C}^*)^m \times C \right) / c$  et  $C/d$  avec  $d$  l'action de  $\mathbb{Z}^m$  annoncée, on considère l'intersection de l'orbite sous  $c$  d'un point  $w \in (\mathbb{C}^*)^m \times C$  avec le sous-espace des points dont les  $m$  premières coordonnées

sont égales à 1. Autrement dit, on résout :

$$w_{j+1}e^{-t_j+it_m} = 1, j = 1, \dots, m$$

En fixant une détermination du logarithme complexe, on obtient, pour  $j \in \{1, \dots, m\}$ ,  $it_m - t_j = -\log w_{j+1} - 2ik_{j+1}\pi$ . Ceci se traduit par un système linéaire de  $m$  inconnues  $(t_1, \dots, t_m)$  et  $m$  équations. En effet, notons  $k = (k_2, \dots, k_{m+1}) \in \mathbb{Z}^m$  et, pour  $j = 2, \dots, m+1$ ,  $B_{k_j} = -\log w_j - 2ik_j\pi$ . Enfin, la matrice  $A \in M_m(\mathbb{C})$  du

système  $AT = B_k$  où  $B_k = \begin{pmatrix} B_{k_2} \\ \vdots \\ B_{k_{m+1}} \end{pmatrix}$  est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & i \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & -1 & i \\ 0 & \cdots & 0 & -1+i \end{pmatrix}$$

Cette matrice est inversible :  $\det A = (-1)^{m-1}(i-1) \neq 0$ . Le système est de Cramer et donc :

$$T = A^{-1}B_k$$

Et le calcul de  $A^{-1}$  est générique :  $A^{-1} = \frac{1}{(-1)^{m-1}(i-1)} {}^t\text{Com}(A)$  où

$$\text{Com}(A) = ((-1)^{r+p} \det(A_{rp}))_{1 \leq r, p \leq m}$$

$${}^t\text{Com}(A) = ((-1)^{i+j} \det(A_{pr}))_{1 \leq r, p \leq m}$$

Avec  $A_{rp}$  la matrice de taille  $m-1$  obtenue en supprimant la colonne  $r$  et la ligne  $p$ . Le lemme ci-dessous est alors immédiat.

**Lemme 6.2.2** *On a :*

$$\det A_{pr} = \begin{cases} (-1)^{m-1} & r = p = m \\ (-1)^{m-2}(i-1) & r = p \neq m \\ (-1)^{m-2}i & p = m, r \neq m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La solution  $T_k$  du système s'écrit, en utilisant ce lemme :

$$\begin{aligned} T_k &= \frac{1}{(-1)^{m-1}(i-1)} \text{Com}(A) \cdot B_k = \frac{1}{(-1)^{m-1}(i-1)} \left( \sum_{p=1}^m (-1)^{r+p} (\det A_{pr}) B_{k_{p+1}} \right)_{1 \leq r \leq m} \\ &= \frac{1}{(-1)^{m-1}(i-1)} \left( \sum_{p=1}^m (-1)^{r+p} (\det A_{pr}) (-\log w_{p+1} - 2ik_{p+1}\pi) \right)_{1 \leq r \leq m} \end{aligned}$$

Avant de simplifier, dans cette égalité, on sépare la partie qui dépend de  $k$  et celle qui dépend de  $w$ . Pour obtenir  $T_k = g(w) + \gamma(k)$  avec :

$$\begin{aligned} g(w) &= g(w_2, \dots, w_{m+1}) = \frac{1}{(-1)^{m-1}(i-1)} \left( \sum_{p=1}^m (-1)^{r+p} (\det A_{pr}) (-\log w_{p+1}) \right)_{1 \leq r \leq m} \\ \gamma(k) &= \gamma(k_2, \dots, k_{m+1}) = \frac{1}{(-1)^{m-1}(i-1)} \left( \sum_{p=1}^m (-1)^{r+p} (\det A_{pr}) (-2ik_{p+1}\pi) \right)_{1 \leq r \leq m} \end{aligned}$$

Pour simplifier, on a :

$$\begin{aligned} g(w) &= \frac{(-1)^m(1+i)}{2} \begin{pmatrix} \sum_{p=1}^m (-1)^{1+p} (\det A_{p1}) (-\log w_{p+1}) \\ \vdots \\ \sum_{p=1}^m (-1)^{m-1+p} (\det A_{p(m-1)}) (-\log w_{p+1}) \\ \sum_{p=1}^m (-1)^{m+p} (\det A_{pm}) (-\log w_{p+1}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{(-1)^m(1+i)}{2} \begin{pmatrix} \left( (-1)^m(1-i)(\log w_{r+1}) + (-1)^r i (-\log w_{m+1}) \right)_{r=1, \dots, m-1} \\ (-1)^m (\log w_{m+1}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le facteur  $\gamma(k)$  se simplifie de la même manière :

$$\begin{aligned}\gamma(k) &= \frac{(-1)^m(1+i)}{2} \left( \begin{array}{c} \left( (-1)^m(i-1)(-2ik_{r+1}\pi) + (-1)^{r+1}i(-2ik_{m+1}\pi) \right)_{r=1,\dots,m-1} \\ (-1)^{m-1}(-2ik_{m+1}\pi) \end{array} \right) \\ &= i\pi(-1)^m(1+i) \left( \begin{array}{c} \left( (-1)^m(i-1)(-k_{r+1}) + (-1)^{r+1}i(-k_{m+1}) \right)_{r=1,\dots,m-1} \\ (-1)^{m-1}(-k_{m+1}) \end{array} \right) \\ &= \pi(-1)^m(i-1) \left( \begin{array}{c} \left( (-1)^m(1-i)k_{r+1} + (-1)^r i k_{m+1} \right)_{r=1,\dots,m-1} \\ (-1)^m k_{m+1} \end{array} \right)\end{aligned}$$

Notons

$$G(w) = \left( e^{\langle \Lambda_r - \Lambda_1, g(w) \rangle} \right)_{m+2 \leq r \leq n}$$

et

$$\Gamma(k) = \left( e^{\langle \Lambda_r - \Lambda_1, \gamma(k) \rangle} \right)_{m+2 \leq r \leq n}$$

On définit alors l'action  $d$  :

$$\begin{aligned}d: \mathbb{Z}^m \times C &\rightarrow C \\ (k, w) = (k_2, \dots, k_{m+1}, w_{m+2}, \dots, w_n) &\mapsto \begin{pmatrix} \Gamma(k)_{m+2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Gamma(k)_{m+3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \Gamma(k)_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{m+2} \\ w_{m+3} \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On peut, à ce stade, simplifier l'action  $d$ . En effet, le groupe agissant, isomorphe à  $\mathbb{Z}^m$ , est engendré par  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  où :

$$\alpha_p = \text{Diag} \left( \Gamma(e_p)_r \right)_{m+2 \leq r \leq n}$$

Le calcul de  $\Gamma(e_p)_r$  se fait comme suit :

$$\Gamma(e_p)_r = e^{\langle \Lambda_r - \Lambda_1, \gamma(e_p) \rangle}$$

Et :

$$\gamma(e_p) = \begin{cases} 2i\pi e_p & p \neq m \\ \pi(i-1)e_m - \pi(1+i) \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^{m+l} e_l & p = m \end{cases}$$

En notant  $\Gamma_{pr} = \Gamma(e_p)_r$  pour simplifier, il suit que  $\Gamma_{pr}$  s'écrit bien comme dans l'équation 6.1.

L'application  $h$  suivante est un biholomorphisme entre  $N = ((\mathbb{C}^*)^m \times C)/c$  et  $C/d$ .

$$\begin{aligned} h: (\mathbb{C}^*)^m \times C/c &\rightarrow C/d \\ [w]_c &\mapsto [w_{m+2}G(w)_{m+2}, \dots, w_n G(w)_n]_d \end{aligned}$$

dont l'inverse est donné par :

$$\begin{aligned} h^{-1}: C/d &\rightarrow (\mathbb{C}^*)^m \times C/c \\ [w'_{m+2}, \dots, w'_n]_d &\mapsto [1, \dots, 1, w'_{m+2}, \dots, w'_n]_c \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve.  $\square$

### 6.3 Modèles difféomorphes

Nous devons exposer certains difféomorphismes pour la suite de ce chapitre. En effet, l'objectif de cette section est de démontrer qu'il existe un difféomorphisme  $\phi: C \rightarrow X \times \mathbb{R}^m$ , où  $X$  va être défini par la suite, qui est un isomorphisme de revêtements universels donc stable par l'action  $d$  à gauche et par translation à droite. Nous en déduisons que  $X$  ne peut être une coquille pseudoconvexe.

Gardons les notations précédentes sur la variété  $N$  à  $m + 1$  points indispensables, de configuration  $\Lambda$  normalisée. Pour résumer, nous montrons le théorème suivant :

**Théorème 6.3.1** *On a le diagramme commutatif suivant dont toutes les flèches horizontales sont des difféomorphismes et les flèches verticales des  $\mathbb{Z}^m$ -revêtements.*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \phi & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 C & \longleftarrow & \tilde{N} & \longrightarrow & X \times \mathbb{R}^m \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 C/d & \longleftarrow & N & \longrightarrow & X \times (\mathbb{S}^1)^m
 \end{array}$$

Avec  $X = \{w \in \mathbb{C}^{n-1}, \sum_{i=m+2}^n |w_i|^2 \operatorname{Re}(\Lambda_i) = e_m\}$  et  $\tilde{N}$  un revêtement universel exponentiel de  $N$ . De plus, le difféomorphisme  $\phi = (\chi, \phi_1, \dots, \phi_m)$  vérifie, pour tout  $w \in C$  :

$$\begin{cases} \chi(\alpha_j w) & = \chi(w) \\ \phi_i(\alpha_j w) & = \phi_i(w) + \delta_{ij} \end{cases} \quad (6.3)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker.

**Preuve :** Difféomorphiquement, la variété LVM s'écrit, dans  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  :

$$N = \{[z] = [z_1, \dots, z_n] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n, \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \Lambda_i = 0\}$$

La première coordonnée est un point indispensable donc, en divisant par  $z_1$ , on identifie toujours difféomorphiquement  $N$  à

$$N = \{w = (w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^{n-1}, \sum_{i=2}^n |w_i|^2 \Lambda_i = -\Lambda_1 = ie_m\}$$

et comme  $\Lambda_i = -e_{i-1}$  pour  $2 \leq i \leq m+1$ , il suit :

$$N = \{w \in \mathbb{C}^{n-1}, \sum_{i=m+2}^n |w_i|^2 \Lambda_i = \sum_{j=2}^m |w_j|^2 e_{j-1} + (i + |w_{m+1}|^2) e_m\}$$

On peut alors exploiter le difféomorphisme  $f$  suivant :

$$\begin{aligned} f: N &\rightarrow X \times (\mathbb{S}^1)^m \\ w = (w_2, \dots, w_m) &\mapsto \left( w_{m+2}, \dots, w_n, \frac{w_2}{|w_2|}, \dots, \frac{w_{m+1}}{|w_{m+1}|} \right) \end{aligned}$$

L'inverse de  $f$  est donné par :

$$\begin{aligned} f^{-1}: X \times (\mathbb{S}^1)^m &\rightarrow N \\ (x_{m+2}, \dots, x_n, e^{it_2}, \dots, e^{it_{m+1}}) &\mapsto (a_2 e^{it_2}, \dots, a_{m+1} e^{it_{m+1}}, x_{m+2}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

où les  $a_i$  sont définis par la relation :

$$\sum_{i=m+2}^n \operatorname{Re}(\Lambda_i) |w_i|^2 = \sum_{i=2}^{m+1} a_i^2 e_{i-1} \quad (6.4)$$

Soit

$$\tilde{N} = \{w \in \mathbb{C}^{n-1}, \sum_{i=m+2}^n \Lambda_i |w_i|^2 = \sum_{j=2}^m |e^{w_j}|^2 e_{j-1} + (i + |e^{w_{m+1}}|^2) e_m\}$$

C'est un revêtement universel de  $N$  de noyau  $\mathbb{Z}^m = \pi_1(N)$  :

$$\begin{aligned} \tilde{N} &\rightarrow N \\ w &\mapsto (e^{w_2}, \dots, e^{w_{m+1}}, w_{m+2}, \dots, w_n) \end{aligned}$$

Le difféomorphisme  $f$  précédent se relève en un difféomorphisme  $\tilde{f}$  :

$$\begin{aligned} \tilde{f}: \tilde{N} &\rightarrow X \times \mathbb{R}^m \\ w &\mapsto (w_{m+2}, \dots, w_n, \operatorname{Im}(w_2), \dots, \operatorname{Im}(w_{m+1})) \end{aligned}$$

d'inverse

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{-1}: X \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \tilde{N} \\ (x_{m+2}, \dots, x_n, t_2, \dots, t_{m+1}) &\mapsto (a_2 + it_2, \dots, a_{m+1} + it_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

où les  $a_i$  sont donnés par la relation :

$$\sum_{i=m+2}^n \operatorname{Re}(\Lambda_i) |w_i|^2 = \sum_{i=2}^{m+1} e^{2a_i} e_{i-1} \quad (6.5)$$

Or, biholomorphiquement  $N = C/d$ , c'est donc aussi vrai difféomorphiquement. Le diagramme suivant résume la situation sur les revêtements universels  $C, X \times \mathbb{R}^m, \tilde{N}$  :

$$\begin{array}{ccccc} C & \xleftarrow{\tilde{h}} & \tilde{N} & \xrightarrow{\tilde{f}} & X \times \mathbb{R}^m \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C/d & \xleftarrow{h} & N & \xrightarrow{f} & X \times (\mathbb{S}^1)^m \end{array}$$

où  $h$  est le biholomorphisme de la section 6.2. On dispose alors, par la propriété universelle, d'un isomorphisme de revêtements (le difféomorphisme  $\phi$  annoncé).

$$\begin{array}{ccccc} & & \phi & & \\ & & \curvearrowright & & \\ C & \xleftarrow{\tilde{h}} & \tilde{N} & \xrightarrow{\tilde{f}} & X \times \mathbb{R}^m \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C/d & \xleftarrow{h} & N & \xrightarrow{f} & X \times (\mathbb{S}^1)^m \end{array}$$

Celui-ci s'écrit :

$$\begin{aligned} \phi: C &\rightarrow X \times \mathbb{R}^m \\ w &\mapsto (\chi(w), \phi_1(w), \dots, \phi_m(w)) \end{aligned}$$

et vérifie  $\phi(\alpha^k w) = \phi(w) + k$  pour tout  $k = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m$  où  $\alpha^k w = \prod_{j=1}^m \alpha_j^{k_j} w$ .

Plus précisément, on a :

$$(\chi(\alpha^k w), \phi_1(\alpha^k w), \dots, \phi_m(\alpha^k w)) = (\chi(w), \phi_1(w) + k_1, \dots, \phi_m(w) + k_m)$$

Et donc

$$\begin{cases} \chi(\alpha_j w) & = \chi(w) \\ \phi_i(\alpha_j w) & = \phi_i(w) + \delta_{ij} \end{cases}$$

□

## 6.4 Existence de revêtements lck à potentiel non compacts de certaines variétés LVM

Conservons les notations précédentes pour le théorème et le corollaire qui suivent :  $m > 1$ ,  $n > 2m + 1$  et  $k = m + 1$  est le nombre de points indispensables. On peut supposer quitte à perturber, d'après le lemme 6.1.1, que :

$$\Lambda = (-ie_m, -e_1, \dots, -e_m, \Lambda_{m+2}, \dots, \Lambda_n)$$

Notons  $N$  la variété LVM normalisée associée. Soit  $j \in \{1, \dots, m\}$ , considérons l'hypothèse

$$H_j : (\forall r = m + 2, \dots, n), |\Gamma_{jr}| < 1$$

Nous sommes en mesure d'énoncer et démontrer le théorème suivant :

**Théorème 6.4.1** *Supposons qu'il existe  $j \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $\Lambda$  vérifie la condition  $H_j$ .*

*Alors, l'action de  $\mathbb{Z}$  engendrée par  $\alpha_j$  est une action par contractions holomorphes et la variété LVM notée  $N$  associée à cette configuration admet un  $\mathbb{Z}^{m-1}$ -revêtement  $R = C/\langle \alpha_j \rangle$  lck à potentiel non compact. De plus, si  $D_\Lambda$  est définie comme dans la remarque ci-dessous, alors ce résultat est valable sur tout  $D_\Lambda$ .*

**Remarque 6.4.2** *Notons  $D_\Lambda$  l'ouvert contenant toutes les variétés LVM obtenues par déformations homotopes normalisées de  $\Lambda$  (excepté les transformations affines), c'est à dire avec  $m+1$  points indispensables et donc les  $m+1$  premières composantes sont  $-ie_m, -e_1, \dots, -e_m$ , vérifiant  $H_j$ . Pour une déformation  $\Lambda'$  de  $\Lambda$  de cette forme, on notera  $N'$  la variété LVM associée. Nous avons vu dans le chapitre 4 que toute déformation homotope d'une LVM donne une variété difféomorphe à la première mais à priori non biholomorphe.*

**Preuve :** Vérifions les hypothèses du théorème 3.4.8 sur la variété  $R = C/\langle \alpha_j \rangle$  associée à la configuration  $\Lambda$ . La matrice  $\alpha_j$  (donnée dans le théorème 6.2.1) :

$$\alpha_j = \text{Diag}(\Gamma_{j(m+2)}, \dots, \Gamma_{jn}) \in M_{n-m-1}(\mathbb{C})$$

avec

$$\Gamma_{jr} = \begin{cases} e^{2i\pi\lambda_r^j} & j \neq m \\ e^{\pi(i-1)(\lambda_r^m+i) - \pi(1+i) \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^{m+l} \lambda_r^l} & j = m \end{cases}$$

a toutes ses valeurs propres de modules inférieurs strictement à 1 (hypothèse  $H_j$ ). Si on étend cette action de  $\mathbb{Z}$  à  $\mathbb{R}$ , c'est une action par contractions holomorphes.

Soit  $p = n - m - 1$ . La sphère  $\mathbb{S}^{2p-1}$  est une coquille pseudoconvexe pour l'action de  $\alpha_j$  sur  $\mathbb{C}^p$ . En effet, vérifions que pour tout  $w \in \mathbb{C}^p$ , il existe un unique  $t = t(w) \in \mathbb{R}$  tel que  $\alpha_j^t \cdot w \in \mathbb{S}^{2p-1}$ . Cette condition se traduit comme suit :

$$\sum_{i=m+2}^n |\Gamma_{ji}|^{2t} |w_i|^2 = 1$$

Nous appliquons le même type de raisonnement que dans [GO98] pour les surfaces de Hopf. Soit  $f(t) = \sum_{i=m+2}^n |\Gamma_{ji}|^{2t} |w_i|^2$ . La dérivée de  $f$  est strictement négative grâce à la condition  $H_j$ , donc  $f$  est strictement décroissante, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $f(t) = 1$ . Donc  $\mathbb{S}^{2p-1}$  est une coquille pseudoconvexe pour  $\alpha_j$  dans  $\mathbb{C}^p$ .

Par application de théorème 3.4.8, il existe  $\Psi$  tel que  $dd^c \Psi^{2a} > 0$  sur  $\mathbb{S}^{2p-1}$  pour  $a$  suffisamment grand. Par restriction,  $dd^c \Psi^{2a} > 0$  sur  $\mathcal{S} = \mathbb{S}^{2p-1} \cap C$ . On en conclut que la variété  $C/\langle \alpha_j \rangle$  est lck à potentiel. Notons  $\Omega$  la 2-forme de Kähler sur  $C$  :  $\Omega = 2i\partial\bar{\partial}\Psi^{2a}$ . Or

$$N = (C/\langle \alpha_j \rangle) / \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_m \rangle$$

Donc  $N = R/\langle \alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_m \rangle$ . est bien un  $\mathbb{Z}^{m-1}$ -quotient d'une variété lck à potentiel.

Vérifions que  $R$  est non compacte. Considérons le diagramme de difféomorphismes

suivant :

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{S} \times \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ C/\langle \alpha_j \rangle & \xrightarrow{\bar{\eta}} & \mathcal{S} \times \mathbb{S}^1 \end{array}$$

où  $\eta(c) = (\alpha_j^{\psi(c)} \cdot c, \psi(c))$  est bien définie par le logarithme  $\psi$  du potentiel  $\Psi^{2a}$  car  $\mathcal{S}$  est la restriction d'une coquille pseudoconvexe. Ainsi,  $R = C/\langle \alpha_j \rangle$  est diféomorphe à  $\mathcal{S} \times \mathbb{S}^1$ . La non compacité résulte du fait que  $\mathcal{S} = \mathbb{S}^{2(n-m-1)-1} \setminus F$  où  $C = \mathbb{C}^{n-m-1} \setminus F$  et  $F$  est fermée donc  $\mathcal{S}$  est ouvert dans  $\mathbb{S}^{2p-1}$ , par conséquent  $\mathcal{S} \times \mathbb{S}^1$  est non compact donc  $R$  est non compact.

Pour la stabilité par déformations, faisons juste un commentaire sur les conditions : nous avons vérifié au chapitre 4 que la condition d'admissibilité était ouverte : stable par déformations homotopes, la condition  $H_j$  est ouverte. En conséquence, ce théorème s'applique sur tout l'ouvert  $D_\Lambda$ .  $\square$

**Remarque 6.4.3** *Chronologiquement, dans l'avancement de ce travail de thèse, nous avons dans l'idée d'exposer de nouveaux exemples de variétés lck à potentiel parmi les LVM en définissant une coquille pseudoconvexe autre que celle du théorème 6.4.1 dans l'espoir d'une stabilité sous le reste de l'action de  $\mathbb{Z}^m$ . Cependant, les résultats du chapitre 5 sont venus bousculer ce raisonnement puisque les lck à potentiel ne peuvent être que les Hopf linéaires diagonales. Ce que nous pensions être un fait majeur se reformule en un corollaire qui affirme qu'une certaine structure  $\mathcal{S}$  ne peut être une coquille pseudoconvexe.*

Rappelons rapidement la définition et la commutativité avec les actions en jeu du difféomorphisme  $\phi$  de la section 6.3 :

$$\begin{aligned} \phi: C &\rightarrow X \times \mathbb{R}^m \\ w &\mapsto (\chi(w), \phi_1(w), \dots, \phi_m(w)) \end{aligned}$$

avec  $\phi(\alpha^k w) = \phi(w) + k$  pour tout  $k = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m$  où on a noté

$\alpha^k w = \prod_{j=1}^m \alpha_j^{k_j} w$ . De plus :

$$(\chi(\alpha^k w), \phi_1(\alpha^k w), \dots, \phi_m(\alpha^k w)) = (\chi(w), \phi_1(w) + k_1, \dots, \phi_m(w) + k_m)$$

Et donc :

$$\begin{cases} \chi(\alpha_j w) &= \chi(w) \\ \phi_i(\alpha_j w) &= \phi_i(w) + \delta_{ij} \end{cases} \quad (6.6)$$

Rappelons qu'il est supposé que  $m > 1$  et  $n > 2m + 1$  et  $N$  est une variété LVM normalisée comme dans le théorème 6.4.1.

**Corollaire 6.4.4** *Supposons qu'il existe  $j \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $N$  vérifie la condition  $H_j$ . Alors  $\mathcal{S} = \{w \in C, \phi_j(w) = 0\}$  n'est pas une coquille pseudoconvexe de  $C$  pour l'action par contractions holomorphes de  $\alpha_j$ .*

**Preuve :** Supposons que  $\mathcal{S}$  soit une coquille pseudoconvexe. Alors, d'après le théorème 3.4.8 la variété  $C/\langle \alpha_j \rangle$  est lck à potentiel.

Montrons en premier lieu que le potentiel lck correspond nécessairement à  $\phi_j$ .

Comme  $\mathcal{S}$  est une coquille pseudoconvexe, pour tout  $w \in C$ , il existe un unique  $\rho(w) \in \mathbb{R}$  tel que  $\rho(w) \in \mathcal{S} \cap \alpha_j^{\mathbb{R}} \cdot w$ . Autrement dit, il existe  $t(w) \in \mathbb{R}$  unique tel que  $\rho(w) = \alpha_j^{t(w)} \cdot w \in \mathcal{S}$ , ce qui se traduit par  $\phi_j(\alpha_j^{t(w)} \cdot w) = 0$ . Or, d'après la section 6.3,  $\phi_j(\alpha_j w) = \phi_j(w) + 1$ , et donc  $\phi_j(\alpha_j^{t(w)} \cdot w) = \phi_j(w) + t(w)$ . Pour que cette quantité soit nulle, nécessairement,  $t(w) = -\phi_j(w)$ .

Montrons que  $N$  est lck à potentiel. Pour ce faire, assurons nous que la 2-forme de Kähler obtenue sur  $C$  qui est lck à potentiel sur  $C/\langle \alpha_j \rangle$  l'est aussi en quotientant par le reste de l'action globale de  $\mathbb{Z}^m$ , c'est-à-dire par les  $m - 1$  autres générateurs de l'action :  $\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_m$ .

L'application suivante est un difféomorphisme :

$$\begin{aligned} C &\rightarrow \mathcal{S} \times \mathbb{R} \\ w &\mapsto (\alpha_j^{-\phi_j(w)} \cdot w, \phi_j(w)). \end{aligned}$$

Ainsi, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\hspace{10em}} & \mathcal{S} \times \mathbb{R} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C/\langle \alpha_j \rangle & \xrightarrow{\hspace{10em}} & \mathcal{S} \times \mathbb{S}^1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 N = (C/\langle \alpha_j \rangle)/\langle \alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_m \rangle & \longrightarrow & \left( \mathcal{S}/\langle \alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_m \rangle \right) \times \mathbb{S}^1
 \end{array}$$

Le potentiel  $\Psi$  correspond à une certaine puissance (notée  $2a$  dans [OV16]) de  $e^{\phi_j}$ . Ainsi, le fait que  $\Psi(\alpha_j w) = e^{2a}\Psi(w)$  et  $\Psi(\alpha_p w) = \Psi(w)$  pour tout  $p \neq j$  implique que  $\alpha_p^* \Omega = \Omega$  et  $\alpha_j^* \Omega = e^{2a}\Omega$ . La 2-forme de Kahler est bien définie sur  $N$  et correspond toujours à une métrique lck à potentiel. Donc  $N$  est une variété lck à potentiel.

D'après le théorème 5.4.2 du chapitre 5, cela implique que  $N$  est biholomorphe à une variété de Hopf linéaire diagonale. Mais alors la caractérisation des variétés de Hopf linéaires diagonales parmi les LVM (théorème 5.3.1 du chapitre 5) implique que  $m = 1$ . Contradiction :  $\mathcal{S}$  n'est pas une coquille pseudoconvexe.  $\square$

**Exemple 6.4.5** Voyons ce corollaire sur un exemple en petite dimension. On considère la configuration admissible normalisée suivante avec  $n = 7$ ,  $m = 2$  et  $k = 3$  :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1+i & 1+i & 1-i & 1-i \\ -i & 0 & -1 & 1+i & 1+i & 1+i & 1+i \end{pmatrix}$$

On a alors,

$$\alpha_1 = \text{Diag}(e^{-2\pi}, e^{-2\pi}, e^{2\pi}, e^{2\pi}); \quad \alpha_2 = \text{Diag}(-e^{-3\pi}, -e^{-3\pi}, -e^{-5\pi}, -e^{-5\pi})$$

La condition  $H_2$  est vérifiée et  $C = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})^2$ . On dispose du difféomorphisme suivant (voir la section 6.3) :

$$\begin{aligned} C &\rightarrow X \times \mathbb{R}^2 \\ w &\mapsto (\chi(w), \phi_1(w), \phi_2(w)) \end{aligned}$$

avec  $X = (\mathbb{S}^3(1/2))^2$  où  $\mathbb{S}^3(1/2)$  est la sphère incluse dans  $\mathbb{C}^2$  de rayon  $1/2$ . Soit  $\mathcal{S} = \{w \in C, \phi_2(w) = 0\}$ , si  $\mathcal{S}$  était une coquille pseudoconvexe, alors  $\mathcal{S}$  serait difféomorphe à  $X \times \mathbb{R}$  et  $\phi_2$  serait telle que  $\alpha_2^{-\phi_2(w)} \cdot w \in X$ . Traduisons cette condition, si  $w = (w_4, \dots, w_7) \in C$ , alors :

$$\begin{cases} e^{-6\pi\phi_2(w)}(|w_4|^2 + |w_5|^2) &= 1/2 \\ e^{-10\pi\phi_2(w)}(|w_6|^2 + |w_7|^2) &= 1/2 \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} e^{-6\pi\phi_2(w)} &= \frac{1}{2|w_4|^2 + 2|w_5|^2} \\ e^{-10\pi\phi_2(w)} &= \frac{1}{2|w_6|^2 + 2|w_7|^2} \end{cases}$$

Et alors, on a :

$$\phi_2(w) = \frac{\ln(2|w_4|^2 + 2|w_5|^2)}{6\pi} = \frac{\ln(2|w_6|^2 + 2|w_7|^2)}{10\pi}.$$

Ceci est absurde car  $w \in C$  est quelconque et ne vérifie pas nécessairement cette égalité. Donc  $\mathcal{S}$  n'est pas une coquille pseudoconvexe.

Dans ce cas particulier, on peut donner un argument direct pour démontrer que  $N$  n'est pas lck (sans utiliser le théorème 5.4.1 comme nous l'avons fait dans l'exemple 5.4.4). Montrons que  $N$  est biholomorphe à un produit de deux surfaces de Hopf diagonales. On considère la projection :

$$\begin{aligned} p: (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})^2/d &\rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / \langle A \rangle \times \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / \langle B \rangle \\ [z_1, z_2, z_3, z_4]_d &\mapsto ([z_1, z_2]_A, [z_3, z_4]_B) \end{aligned}$$

Pour que cette application soit bien définie, pour tout  $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ , il doit exister

un couple d'entiers  $(k, p) \in \mathbb{Z}^2$  tel que :

$$\begin{aligned} e^{-2\pi k_1} e^{-3\pi k_2 + ik_2\pi} I_2 &= A^k \\ e^{2\pi k_1} e^{-5\pi k_2 + ik_2\pi} I_2 &= B^p \end{aligned}$$

Premièrement, les matrices  $A$  et  $B$  sont automatiquement des homothéties. Et alors  $A = e^{-a} e^{i\theta} I_2$  et  $B = e^{-b} e^{i\psi}$  avec  $(a, b) \in (\mathbb{R}_{>0})^2$  puisque le module est nécessairement strictement inférieur à 1 pour une Hopf linéaire et  $(\theta, \psi) \in [0, 2\pi[$ . On peut choisir  $a = \pi$  et  $\theta = \pi$ , on obtient alors, pour  $k = 2k_1 + 3k_2$  :

$$e^{-2\pi k_1} e^{-3\pi k_2 + ik_2\pi} = (e^{-\pi} e^{i\pi})^k$$

Pour  $b = \pi$  et  $\psi = \pi$ , avec  $p = 5k_2 - 2k_1$ , on a :

$$e^{2\pi k_1} e^{-5\pi k_2 + ik_2\pi} = (e^{-\pi} e^{i\pi})^p$$

Il suit donc que  $N$  est biholomorphe à un produit de deux surfaces de Hopf diagonales identiques.

Nous savons (c.f. chapitre 2 théorème 3.5.1) qu'un produit de deux variétés de Hopf diagonale ne peut être lck (car les variétés de Hopf diagonales sont compactes et de Vaisman).

**Exemple 6.4.6** Pour la même configuration que l'exemple précédent, on peut appliquer le théorème 6.4.1 car  $H_2$  est vérifiée :  $R = C / \langle \alpha_2 \rangle$  est un revêtement lck à potentiel de  $N$ . De plus, cet exemple de variété LVM n'est pas lck (théorème 5.4.1). Ce qui montre que pour cet exemple, le revêtement  $R$  est optimal. Cette variété  $R$  lck à potentiel s'écrit :

$$R = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})^2 / \langle \text{Diag}(-e^{-3\pi}, -e^{-3\pi}, -e^{-5\pi}, -e^{-5\pi}) \rangle$$

Et la coquille pseudoconvexe  $\mathcal{S} = \mathbb{S}^7 \cap C$  correspond à  $\mathbb{S}^7 \setminus (\{0, 0\} \times \mathbb{S}^3 \cup \mathbb{S}^3 \times \{0, 0\})$ . Donc difféomorphiquement,  $R = (\mathbb{S}^7 \setminus (\{0, 0\} \times \mathbb{S}^3 \cup \mathbb{S}^3 \times \{0, 0\})) \times \mathbb{S}^1$ . Le potentiel  $\psi$  est donné, pour tout  $w \in C$ , par :

$$e^{-6\pi\psi(w)} (|w_4|^2 + |w_5|^2) + e^{-10\pi\psi(w)} (|w_6|^2 + |w_7|^2) = 1$$

**Remarque 6.4.7** Dans le théorème 6.4.1, on suppose  $m > 1$ ,  $n > 2m + 1$  et  $k = m + 1$ . Ajoutons au théorème de réduction 10 de la cinquième partie de [Mee98] la condition  $k = m + 1$ . Considérons la réciproque de ce théorème, notons  $k = 2q + r'$  et  $m = 1 + q$ . Il y a deux cas, soit  $r' = 0$ , soit  $r' = 1$  :

- (a) Si  $r' = 0$ , pour avoir  $k = m + 1$ , il faut  $k = 2q$  tel que  $2q = m + 1 = 2 + q$ . Donc  $q = 2$ . Ainsi, partant d'une configuration admissible de type  $(n', 1, 0)$  associée à  $M'_1$ , il existe une configuration admissible associée à  $M_1$  avec  $M_1 = M'_1 \times (\mathbb{S}^1)^{2q}$  et  $k = m + 1$ . Et cette configuration est de type  $(n = n' + 4, m = 3, k = 4)$ .
- (b) Si  $r' = 1$ , pour avoir  $k = m + 1$ , il faut  $k = 2q + 1$  tel que  $2q + 1 = m + 1 = 2 + q$ . Donc  $q = 1$ . Ainsi, partant d'une configuration admissible de type  $(n', 1, 1)$  associée à  $M'_1$ , il existe une configuration admissible associée à  $M_1$  avec  $M_1 = M'_1 \times (\mathbb{S}^1)^{2q}$  et  $k = m + 1$ . Et cette configuration est de type  $(n = n' + 2, m = 2, k = 3)$ .

Pour obtenir des exemples d'applications au théorème 6.4.1, il suffit de considérer les configurations réduites à  $m = 1$  et 0 ou 1 point indispensable et de construire à partir d'elles, des configurations à  $k = m + 1$  points indispensables. On dispose pour cela d'un procédé totalement constructif : dans la réciproque de ce théorème de réduction, on se contente de considérer la configuration :

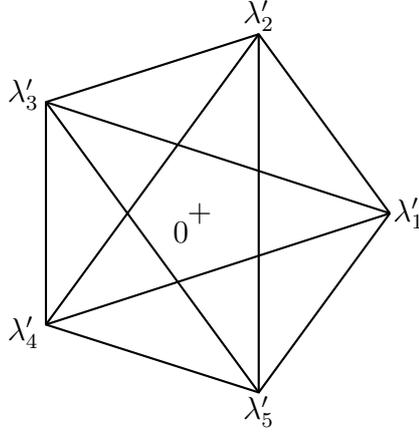
$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda' & 0 & 0 \\ 1 & -1 - i & -i \end{pmatrix}$$

Si  $M'_1$  est associé à  $\Lambda'$  et  $M_1$  est associé à  $\Lambda$ , alors  $M_1 = M'_1 \times (\mathbb{S}^1)^2$ . Et les deux coordonnées indispensables qui sont ajoutées à  $\Lambda'$  sont les deux dernières coordonnées. En itérant ce procédé, ceci donne la réciproque. Le détail de la preuve est fourni dans [Mee98]. Nous disposons déjà d'un exemple qui se réduit à  $r' = 1$  : le 6.4.6.

Voyons un exemple où  $r' = 0$ .

**Exemple 6.4.8** On considère la configuration admissible  $\Lambda'$  de type  $n = 5, m = 1, k = 0$  définie par le pentagone régulier centré en 0 (figure 6.1) :

$$\Lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_5) = (1, e^{2i\pi/5}, e^{4i\pi/5}, e^{-4i\pi/5}, e^{-2i\pi/5})$$


 FIGURE 6.1 – Pentagone régulier centré en 0 dans le plan complexe  $\mathbb{C}$ .

associée à  $M'_1$  et à la variété LVM qu'on note  $N'$ . Alors, la configuration :

$$\Lambda'' = \begin{pmatrix} \Lambda' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1-i & i & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1-i & i \end{pmatrix}$$

associée à  $M''_1$  est de type  $(n = 9, m = 3, k = 4)$  avec  $M''_1$  diffeomorphe à  $M'_1 \times (\mathbb{S}^1)^4$ . Pour pouvoir normaliser comme dans le théorème 6.4.1, il faut trouver  $A \in \text{GL}_3(\mathbb{C})$  et  $B \in \mathbb{C}^3$  tels que :

$$A\Lambda''_6 + B = -e_3; \quad A\Lambda''_7 + B = -e_2; \quad A\Lambda''_8 + B = -e_1; \quad A\Lambda''_9 + B = -ie_3$$

Mais la matrice  $(\Lambda''_6, \Lambda''_7, \Lambda''_8, \Lambda''_9)$  est de rang complexe 2. Donc pour redresser en une matrice de rang complexe 3 :  $(-ie_1, -e_1, -e_2, -e_3)$ , il faut perturber  $\Lambda''$ , ceci est possible par le fait qu'une configuration soit admissible est une condition ouverte et le caractère indispensable d'une coordonnée aussi. Posons donc :

$$\Lambda^\epsilon = \begin{pmatrix} \Lambda' & 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 1 & -1-i & i & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1-i & i \end{pmatrix}$$

Avec  $\epsilon$  un complexe de module suffisamment petit. On a alors, en résolvant le

système,

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\epsilon} & 0 & 0 \\ -\frac{i}{\epsilon} & \frac{-1+2i}{5} & \frac{-2-i}{5} \\ -\frac{1}{\epsilon} & \frac{1-2i}{5} & \frac{-3+i}{5} \end{pmatrix}; \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2i-1}{5} \\ \frac{1-2i}{5} \end{pmatrix}$$

tels que :

$$A\Lambda_6^\epsilon + B = -e_3; \quad A\Lambda_7^\epsilon + B = -e_2; \quad A\Lambda_8^\epsilon + B = -e_1; \quad A\Lambda_9^\epsilon + B = -ie_3$$

On note alors :

$$\Lambda = (-ie_3, -e_1, -e_2, -e_3, A\Lambda_1^\epsilon + B, A\Lambda_2^\epsilon + B, A\Lambda_3^\epsilon + B, A\Lambda_4^\epsilon + B, A\Lambda_5^\epsilon + B)$$

associée à  $M_1$ , on a toujours, difféomorphiquement  $M_1 = M'_1 \times (\mathbb{S}^1)^4$ . De plus, on peut prendre  $\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2 \in \mathbb{C}$  de module suffisamment petit pour vérifier également la condition  $H_3$ . En effet, le calcul direct de  $|\Gamma_{3r}|$  pour  $r \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$  donne :

$$\begin{aligned} |\Gamma_{35}| &= \exp\left(\pi\left(\frac{3\epsilon_1 - \epsilon_2}{|\epsilon|^2} - \frac{8}{5}\right)\right) \\ |\Gamma_{36}| &= \exp\left(\pi\left(\frac{(\epsilon_1 + 3\epsilon_2) \sin 3\pi/5 + (\epsilon_2 - 3\epsilon_1) \cos 3\pi/5}{|\epsilon|^2} - \frac{8}{5}\right)\right) \\ |\Gamma_{37}| &= \exp\left(\pi\left(\frac{(\epsilon_1 + 3\epsilon_2) \sin \pi/5 + (\epsilon_2 - 3\epsilon_1) \cos \pi/5}{|\epsilon|^2} - \frac{8}{5}\right)\right) \\ |\Gamma_{38}| &= \exp\left(\pi\left(\frac{-(\epsilon_1 + 3\epsilon_2) \sin \pi/5 + (\epsilon_2 - 3\epsilon_1) \cos \pi/5}{|\epsilon|^2} - \frac{8}{5}\right)\right) \\ |\Gamma_{39}| &= \exp\left(\pi\left(\frac{-(\epsilon_1 + 3\epsilon_2) \sin 3\pi/5 + (\epsilon_2 - 3\epsilon_1) \cos 3\pi/5}{|\epsilon|^2} - \frac{8}{5}\right)\right) \end{aligned}$$

La condition  $H_3$  est  $|\Gamma_{3r}| < 1$  pour tout  $r \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ . Ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned}
 |\Gamma_{35}| < 1 &\Leftrightarrow 3\epsilon_1 - \epsilon_2 < \frac{8}{5}|\epsilon|^2 \\
 |\Gamma_{36}| < 1 &\Leftrightarrow (\sin 3\pi/5 - 3 \cos 3\pi/5)\epsilon_1 + (3 \sin 3\pi/5 + \cos 3\pi/5)\epsilon_2 < \frac{8}{5}|\epsilon|^2 \\
 |\Gamma_{37}| < 1 &\Leftrightarrow (\sin \pi/5 - 3 \cos \pi/5)\epsilon_1 + (3 \sin \pi/5 + \cos \pi/5)\epsilon_2 < \frac{8}{5}|\epsilon|^2 \\
 |\Gamma_{38}| < 1 &\Leftrightarrow (-\sin \pi/5 - 3 \cos \pi/5)\epsilon_1 + (-3 \sin \pi/5 + \cos \pi/5)\epsilon_2 < \frac{8}{5}|\epsilon|^2 \\
 |\Gamma_{39}| < 1 &\Leftrightarrow (-\sin 3\pi/5 - 3 \cos 3\pi/5)\epsilon_1 + (-3 \sin 3\pi/5 + \cos 3\pi/5)\epsilon_2 < \frac{8}{5}|\epsilon|^2
 \end{aligned}$$

Ces inéquations peuvent être vues comme des inéquations polynomiales de degré 2 en  $\epsilon_1$  de coefficient dominant  $\frac{8}{5} > 0$ . Pour que ces inéquations admettent des solutions, il suffit qu'elles aient toutes un discriminant strictement positif (et que  $\epsilon_1$  se situe à l'extérieur des racines réelles). Pour chacune d'entre elles, ce discriminant s'exprime en fonction de  $\epsilon_2$ . Par exemple, dans la première inéquation, le fait que le discriminant soit positif se traduit par :

$$\begin{aligned}
 9 - 4 \times \frac{8}{5} \times \left( \frac{8}{5}\epsilon_2^2 + \epsilon_2 \right) &> 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{256}{25}\epsilon_2^2 + \frac{32}{5}\epsilon_2 - 9 &< 0
 \end{aligned}$$

Comme celle-ci, chacune de ces nouvelles inéquations polynomiales de degré 2 en  $\epsilon_2$ , admet un discriminant strictement positif, donc, pour que ces inéquations soient vérifiées,  $\epsilon_2$  doit se situer entre les deux racines réelles. Pour celle ci-dessus, on obtient :

$$\frac{5}{16}(-1 - \sqrt{10}) < \epsilon_2 < \frac{5}{16}(-1 + \sqrt{10})$$

Ce qui donne en valeurs approchées  $-1,3 < \epsilon_2 < 0,68$ . En prenant la plus restrictive de toutes les inégalités obtenues lorsque l'on résout toutes les inéquations, il reste encore une plage possible pour  $\epsilon_2$  environ autour de  $-0,19$  et  $0$ . Pour résumer, en prenant  $\epsilon_2$  entre  $-0,19$  et  $0$  et  $\epsilon_1$  en dehors des racines réelles des équations polynomiales en  $\epsilon_1$  précédentes, en prenant également  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  suffisamment génériques pour que la configuration reste admissible et suffisamment petits pour que les points indispensables soient aussi conservés, on obtient bien une configuration

normalisée vérifiant  $H_3$  et de type difféomorphe  $M'_1 \times (\mathbb{S}^1)^4$  pour laquelle il existe un  $\mathbb{Z}^2$ -revêtement lck à potentiel non compact  $R$  (théorème 6.4.1).

Précisons pour finir  $M'_1$ . Nous pouvons appliquer le théorème de classification difféomorphe de [MV97] que nous avons déjà cité au chapitre 4. Ici,  $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = 1$ ,  $l = 2 > 1$  donc  $M'_1$  est difféomorphe à la somme connexe :

$$(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^4)^{\#5}$$

Ainsi,  $M_1$  est difféomorphe à  $(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^4)^{\#5} \times (\mathbb{S}^1)^4$ . Pour résumer :

$$\begin{array}{c} R = C / \langle \alpha_3 \rangle \approx \mathcal{S} \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^9 \cap C \times \mathbb{S}^1 \\ \downarrow \mathbb{Z}^2 \\ N = C / \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle \approx (\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^4)^{\#5} \times (\mathbb{S}^1)^3 \end{array}$$

Nous pouvons également ajouter que  $C$  correspond à l'ouvert  $S'$  de la variété LVM initiale  $N'$  avec  $m = 1$  où par exemple tous les  $z \in \mathbb{C}^5$  avec deux coordonnées consécutives nulles ne sont pas dans  $S' = C$  (voir le pentagone définissant  $\Lambda'$ ). Sur cet exemple, deux questions demeurent :

- (a) La variété  $N$  est-elle lck ? En effet, nous savons d'après le théorème 5.4.2 que  $N$  n'est pas lck à potentiel car  $m = 3$  et par conséquent  $N$  n'est pas biholomorphe à une variété de Hopf diagonale. Cependant, il est possible que  $N$  soit lck. Nous nous permettons alors la constatation suivante : il est fort probable que la condition (K) ne soit pas vérifiée car la présence de radicaux (valeurs de  $\cos \pi/5$  et  $\sin \pi/5$ ) compromet sérieusement la possibilité d'une base rationnelle au système

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n s_i \Lambda_i & = 0 \\ \sum_{i=1}^n s_i & = 0 \end{cases}$$

Et même si nous pouvions démontrer que la condition (K) n'était pas vérifiée, cela ne démontrerait en rien l'existence ou non d'une métrique lck...

(b) La variété  $N$  admet-elle un  $\mathbb{Z}$ -revêtement lck à potentiel ou lck ?

**Remarque 6.4.9** La recherche d'exemples nous a conduit à concevoir les programmes de recherche python de l'annexe 1. Nous avons pu obtenir 9 316 exemples de configurations normalisées satisfaisants les hypothèses du théorème 6.4.1 pour  $n = 7, m = 2, k = 3$  et 56 932 exemples pour  $n = 9, m = 3, k = 4$ .

**Remarque 6.4.10** Nous savons maintenant que certaines variétés LVM admettent des  $\mathbb{Z}^{m-1}$ -revêtement lck à potentiel non compact. Pour l'exemple 6.4.6, le produits de deux surfaces de Hopf diagonales admet un  $\mathbb{Z}$ -revêtement lck à potentiel non compact ainsi que tous les élément de  $D_\Lambda$ .

Ceci conduit à définir les notions de structure  $p$ -lck et  $p$ -lck à potentiel.

## 6.5 Structure $p$ -lck et $p$ -lck à potentiel

**Définition 6.5.1** Soit  $M$  une variété compacte complexe, soit  $q \in \mathbb{N}$ .

(a) Supposons que  $M$  admette un  $\mathbb{Z}^q$ -revêtement connexe, galoisien et lck (non nécessairement à potentiel). Notons :

$$p = \min\{q \in \mathbb{N}, M \text{ admette un } \mathbb{Z}^q\text{-revêtement connexe, galoisien et lck}\}$$

On dira alors que  $M$  est  $p$ -lck ou qu'elle admet une  $p$ -structure lck.

(b) Supposons que  $M$  admette un  $\mathbb{Z}^q$ -revêtement connexe, galoisien et lck à potentiel. Notons :

$$p = \min\{q \in \mathbb{N}, M \text{ admette un } \mathbb{Z}^q\text{-revêtement connexe, galoisien et lck et à potentiel}\}$$

On dira alors que  $M$  est  $p$ -lck à potentiel ou qu'elle admet une  $p$ -structure lck à potentiel.

**Remarque 6.5.2** Naturellement, l'ensemble des variétés qui admettent une  $p$ -structure lck à potentiel admettent une  $r$ -structure lck. Mais  $r$  et  $p$  ne sont pas forcément égaux. En fait, on a automatiquement  $r \leq p$  si ces deux structures existent pour une même variété  $M$ .

Voyons quelques exemples.

**Exemple 6.5.3** (a) Les variétés lck et lck à potentiel sont respectivement des variétés 0-lck et 0-lck à potentiel.

(b) Les variétés de Hopf (linéaires ou non) sont toutes 0-lck à potentiel.

(c) La variété LVM notée  $N$  de configuration admissible  $\Lambda$  de l'exemple 6.4.5, produit de deux surfaces de Hopf diagonales (donc chacune 0-lck à potentiel), est une variété 1-lck à potentiel et 1-lck. De plus, si  $M \in D_\Lambda$  est une déformation de  $N$ , alors,  $M$  est 1-lck à potentiel ( $m = 2$  donc même en déformant,  $M$  reste non lck à potentiel : c'est le théorème 5.4.2) mais on ne peut pas affirmer que  $M$  est 1-lck. En effet, il est possible qu'il existe une métrique lck en déformant. Nous pouvons alors ajouter, puisque  $\Lambda$  vérifie (K) : si  $M \in D_\Lambda$  est une déformation de  $M$  qui, de plus, vérifie la condition (K) (ce type de déformation

existe car cette condition est dense), alors  $M$  est 1-lck. En effet, le théorème 5.4.1 nous assure qu'il n'existe aucune métrique lck sur  $M$  dans ce cas.

Le théorème 6.4.1 se reformule avec ce nouveau vocabulaire :

**Théorème 6.5.4** *Supposons qu'il existe  $j \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $\Lambda$  vérifie la condition  $H_j$  ( $\Lambda$  normalisée avec  $m > 1$  et  $n > 2m + 1$ ). Alors, l'action de  $\mathbb{Z}$  engendrée par  $\alpha_j$  est une action par contractions holomorphes et la variété LVM associée  $N$  à cette configuration admet une  $p$ -structure lck à potentiel non compact avec  $1 \leq p \leq m - 1$ . De plus, soit  $N' \in D_\Lambda$ . On a exactement les mêmes conclusions pour  $N'$  que pour  $N$ . Nous pouvons ajouter que si*

$$D_\Lambda^K = D_\Lambda \cap \{\text{configurations vérifiant la condition } (K)\}$$

*Supposons que  $\Lambda$  vérifie  $(K)$ , alors  $N$  est  $p$ -lck à potentiel avec  $1 \leq p \leq m - 1$  et  $q$ -lck avec  $1 \leq q \leq p$ . Et ce résultat est identique sur tout  $D_\Lambda^K$ .*

L'exemple 6.5.3 et le théorème 6.5.4 nous conduisent à formuler la conjecture suivante :

**Conjecture**

Supposons qu'il existe  $j \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $\Lambda$  vérifie la condition  $H_j$  ( $\Lambda$  normalisée avec  $m > 1$  et  $n > 2m + 1$ ). Alors  $N$  est une variété  $(m - 1)$ -lck à potentiel.

---

## Annexe 1 : programmes python utilisés

Nous avons pu constater que les exemples de configurations admissibles vérifiant le théorème 6.4.1 sont soit de type  $n = 7, m = 2, k = 3$  soit de type  $n = 9, m = 3$  et  $k = 4$ . Ainsi, partant des  $m + 1$  premiers éléments normalisés de la configuration, nous testons, sur les  $n - m - 1$  derniers éléments de la configuration générés aléatoirement (avec  $\operatorname{Re}(\lambda_i^j), \operatorname{Im}(\lambda_i^j) \in \{\pm 1\}$ ) la condition  $H_j$  pour tout  $j = m + 2, \dots, n$ , la condition de Siegel et l'hyperbolicité faible. Nous écrivons ensuite les exemples obtenus sur un fichier texte. On obtient 9 316 configurations pour  $n = 7, m = 2, k = 3$  et 56 932 pour  $n = 9, m = 3, k = 4$ . Ce sont les fonctions `Combpossiblesm2n7()` et `Combpossiblesm3n9()` qui génèrent une liste de configurations admissibles normalisées vérifiant  $H_j$  pour un certain  $j \in \{m + 2, \dots, n\}$ . Ces fonctions sont exécutables avec python3 au minimum et nécessitent les packages `numpy`, `scipy.optimize` et `itertools`.

**Remarque .0.5** *Les 56 932 configurations obtenues pour  $n = 9$  et  $m = 3$  ont été obtenues sans que le programme ne se termine. En effet, pour  $n = 7$  et  $m = 2$ , celui-ci test  $(2^4)^4 = 65\,536$  possibilités, ce qui est assez rapide pour un ordinateur personnel classique (de l'ordre de quelques minutes). Alors que pour  $n = 9$  et  $m = 3$ , le programme se lance pour tester  $(2^6)^5 = 1\,073\,741\,824$ . Ce qui est nettement plus long pour mon ordinateur (de l'ordre de plusieurs semaines...). J'ai donc choisi d'arrêter le programme à un certain stade, il y'a certainement, parmi toute les 1 073 741 824 configurations à tester, plus de 56 932 qui satisfassent le théorème 6.4.1. Il faudrait, si cela présente un intérêt, relancer ce programme sur supercalculateur.*

---

```

import numpy as np
from scipy.optimize import linprog
from itertools import combinations

def in_hull(points,x): #test si un point x est dans l'enveloppe convexe d'une famille de points
    n_points=len(points)
    n_dim=len(x)
    c=np.zeros(n_points)
    A=np.r_[points.T,np.ones((1,n_points))]
    b=np.r_[x,np.ones(1)]
    lp=linprog(c,A_eq=A,b_eq=b)
    return lp.success

def hypfaible(A): #retourne 1 si la condition d'hyperbolicité faible est vérifiée
    m2=len(A[0]) #Ce programme utilise les fonctions sousconf() et in_hull()
    L=sousconf(A)
    p=len(L)
    Z=np.zeros(m2)
    for i in range(p):
        if in_hull(L[i],Z):
            return 0
    return 1

def sousconf(A):#liste toutes les sous-configuration de taille 2m
    n=len(A) #Ce programme utilise la fonction comb(n,m)
    m2=len(A[0])
    m=m2//2
    Ind=comb(n,m)
    p=len(Ind)
    ListeSousConf=np.zeros((p,m2,m2))
    for j in range(p):
        for i in range(m2):
            ListeSousConf[j][i]=A[Ind[j]][i]-1
    return(ListeSousConf)

def comb(n,m): #return la liste des indices des sous-configuration pour l'hyperbolicite faible
    L=range(1,n+1) #tenant compte de la normalisations des m+1 points indispensables.
    P=list(combinations(L,2*m))
    p=len(P)
    A=[]
    for i in range(p):
        indices=[]
        for j in range(m+1):
            if P[i][j]==j+1:
                indices.append(1)
        if len(indices)==m+1:
            A.append(P[i])
    return(A)

def siegel(A): #pour n'importe quelle configuration sous forme d'un np.array
    Z=np.zeros(len(A[0]))
    if in_hull(A,Z):
        return 1
    return 0

```

FIGURE 2 – Programmes testant l’admissibilité d’une configuration  $\Lambda$  normalisée.

---

```

def testHjm2n7(A): #test Hj pour m=2 et n=7
    if A[3][1]>0 and A[4][1]>0 and A[5][1]>0 and A[6][1]>0:
        return 1
    if A[3][0]-A[3][2]-A[3][1]-A[3][3]<1 and A[4][0]-A[4][2]-A[4][1]-A[4][3]<1
    and A[5][0]-A[5][2]-A[5][1]-A[5][3]<1 and A[6][0]-A[6][2]-A[6][1]-A[6][3]<1:
        return 1
    return 0

def testHjm3n9(A): #test Hj pour m=3 et n=9
    if A[4][1]>0 and A[5][1]>0 and A[6][1]>0 and A[7][1]>0 and A[8][1]>0:
        return 1
    if A[4][3]>0 and A[5][3]>0 and A[6][3]>0 and A[7][3]>0 and A[8][1]>0:
        return 1
    if A[4][1]-A[4][3]-A[4][5]+A[4][2]-A[4][0]-A[4][4]<1 and A[5][1]-A[5][3]-A[5][5]+A[5][2]-A[5][0]-A[5][4]<1
    and A[6][1]-A[6][3]-A[6][5]+A[6][2]-A[6][0]-A[6][4]<1 and A[7][1]-A[7][3]-A[7][5]+A[7][2]-A[7][0]-A[7][4]<1
    and A[8][1]-A[8][3]-A[8][5]+A[8][2]-A[8][0]-A[8][4]<1:
        return 1
    return 0

#possibilités pour les parties réelles et imaginaires de Lambda_j
z=[-1,1]
n=len(z)

def Lambda_jm3(): #donne tous les Lambda_j avec m=3 possibles de parties réelles et imaginaires +/- 1
    L=[]
    for a1 in range(n):
        for a2 in range(n):
            for a3 in range(n):
                for a4 in range(n):
                    for a5 in range(n):
                        for a6 in range(n):
                            L.append([z[a1],z[a2],z[a3],z[a4],z[a5],z[a6]])
    return L

def Lambda_jm2(): #donne tous les Lambda_j avec m=2 possibles de parties réelles et imaginaires +/- 1
    L=[]
    for a1 in range(n):
        for a2 in range(n):
            for a3 in range(n):
                for a4 in range(n):
                    L.append([z[a1],z[a2],z[a3],z[a4]])
    return L

```

FIGURE 3 – Programmes testant la condition  $H_j$  d'une configuration  $\Lambda$  normalisée et générant tous les  $\Lambda_j$  possibles vérifiant  $\text{Re}(\lambda_i^j), \text{Im}(\lambda_i^j) \in \{\pm 1\}$ .

---

```

def Confpossiblesm3n9(): #toutes les configurations normalisees vérifiants Hj
    Lambda1m3=np.array([0,0,0,0,-1]) #pour m=3 et n=9 de parties réelles et imaginaires +/- 1
    Lambda2m3=np.array([-1,0,0,0,0])
    Lambda3m3=np.array([0,0,-1,0,0])
    Lambda4m3=np.array([0,0,0,-1,0])
    L=[]
    p=n**6
    Lj=Lambdajm3()
    Cpt=p**5
    for i1 in range(p):
        for i2 in range(p):
            for i3 in range(p):
                for i4 in range(p):
                    for i5 in range(p):
                        Cpt=Cpt-1
                        A=np.array([Lambda1m3,Lambda2m3,Lambda3m3,Lambda4m3,
                                    Lj[i1],Lj[i2],Lj[i3],Lj[i4],Lj[i5]])
                        if testHjm3n9(A)==1:
                            if siegel(A)==1:
                                if hypfaible(A)==1:
                                    L.append(A)
                                print(Cpt)
                    return L

def Confpossiblesm2n7(): #toutes les configurations normalisees vérifiants Hj
    Lambda1m2=np.array([0,0,0,-1])#pour m=2 et n=7 de parties réelles et imaginaires +/- 1
    Lambda2m2=np.array([-1,0,0,0])
    Lambda3m2=np.array([0,0,-1,0])
    L=[]
    p=n**4
    Lj=Lambdajm2()
    Cpt=p**4
    for i1 in range(p):
        for i2 in range(p):
            for i3 in range(p):
                for i4 in range(p):
                    Cpt=Cpt-1
                    A=np.array([Lambda1m2,Lambda2m2,Lambda3m2,Lj[i1],Lj[i2],Lj[i3],Lj[i4]])
                    if testHjm2n7(A)==1:
                        if siegel(A)==1:
                            if hypfaible(A)==1:
                                L.append(A)
                            print(Cpt)
                return L

```

FIGURE 4 – Programmes donnant la liste des configurations admissibles normalisées  $\Lambda$  vérifiants  $H_j$  avec  $\text{Re}(\lambda_i^j), \text{Im}(\lambda_i^j) \in \{\pm 1\}$ .

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 \\
-1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & -1
\end{bmatrix}$$

FIGURE 5 – Exemple d’une configuration admissible à  $n = 7$  et  $m = 2$  satisfaisant les conditions du théorème 6.4.1 parmi les 9 316 configurations obtenues par ce programme. Les parties réelles et imaginaires sont séparées ici. Cette syntaxe correspond à la configuration :

$$\Lambda = \begin{pmatrix}
0 & -1 & 0 & -1+i & -1-i & -1-i & 1+i \\
-i & 0 & -1 & 1+i & -1+i & 1-i & 1-i
\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
-1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1
\end{bmatrix}$$

FIGURE 6 – Exemple d’une configuration admissible à  $n = 9$  et  $m = 3$  satisfaisant les conditions du théorème 6.4.1 parmi les 56 932 configurations obtenues par ce programme. Cette configuration est la suivante :

$$\Lambda = \begin{pmatrix}
0 & -1 & 0 & 0 & -1-i & -1-i & 1-i & 1+i & -1+i \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1+i & -1-i & 1-i & -1+i & -1-i \\
-i & 0 & 0 & -1 & 1-i & -1+i & -1+i & -1+i & 1+i
\end{pmatrix}$$



# BIBLIOGRAPHIE

---

- [Bar+15] Wolf BARTH et al., *Compact complex surfaces*, t. 4, Springer, 2015.
- [Bea82] Arnaud BEAUVILLE, « Surfaces K3 », in : *Séminaire Bourbaki* 609 (1982), p. 1983.
- [Bel00] Florin Alexandru BELGUN, « On the metric structure of non-Kähler complex surfaces », in : *Mathematische Annalen* 317.1 (2000), p. 1-40.
- [Bla94] John S BLAND, « Contact geometry and CR structures on  $S^3$  », in : *Acta Mathematica* 172.1 (1994), p. 1-49.
- [BM+06] Frédéric BOSIO, Laurent MEERSSEMAN et al., « Real quadrics in  $C^n$ , complex manifolds and convex polytopes », in : *Acta Mathematica* 197.1 (2006), p. 53-127.
- [Bos01] Frédéric BOSIO, « Variétés complexes compactes : une généralisation de la construction de Meersseman et López de Medrano-Verjovsky », in : *Annales de l'institut Fourier*, t. 51, 5, 2001, p. 1259-1297.
- [CE53] Eugenio CALABI et Beno ECKMANN, « A class of compact, complex manifolds which are not algebraic », in : *Annals of Mathematics* (1953), p. 494-500.
- [CN13] César CAMACHO et Alcides Lins NETO, *Geometric theory of foliations*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [DO12] Sorin DRAGOMIR et Liuiu ORNEA, *Locally conformal Kähler geometry*, t. 155, Springer Science & Business Media, 2012.
- [Fub04] Guido FUBINI, *Sulle metriche definite da una forma hermitiana : nota*, Office graf. C. Ferrari, 1904.
- [Gau84] Paul GAUDUCHON, « La 1-forme de torsion d'une variété hermitienne compacte », in : *Mathematische Annalen* 267.4 (1984), p. 495-518.

- 
- [GL13] Samuel GITLER et Santiago LÓPEZ DE MEDRANO, « Intersections of quadrics, moment-angle manifolds and connected sums », in : *Geometry & Topology* 17.3 (2013), p. 1497-1534.
- [GL84] Fouzia GUEDIRA et André LICHNEROWICZ, « Géométrie des algèbres de Lie locales de Kirillov », in : *Journal de mathématiques pures et appliquées* 63.4 (1984), p. 407-484.
- [GO98] Paul GAUDUCHON et Liviu ORNEA, « Locally conformally Kähler metrics on Hopf surfaces », in : *Annales de l'institut Fourier*, t. 48, 4, 1998, p. 1107-1127.
- [Hop30] Heinz HOPF, « Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten », in : *Mathematische Annalen* 102.1 (1930), p. 562-623.
- [Ist19] Nicolina ISTRATI, « Existence criteria for special locally conformally Kähler metrics », in : *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-)* 198.2 (2019), p. 335-353.
- [JJ08] Jürgen JOST et Jèurgen JOST, *Riemannian geometry and geometric analysis*, t. 42005, Springer, 2008.
- [Kas80] Toyoko KASHIWADA, « On V-harmonic forms in compact locally conformal Kähler manifolds with the parallel Lee form », in : *Kodai Mathematical Journal* 3.1 (1980), p. 70-82.
- [Kod64] Kunihiko KODAIRA, « On the structure of compact complex analytic surfaces, I », in : *American Journal of Mathematics* 86.4 (1964), p. 751-798.
- [Leó+03] Manuel de LEÓN et al., « On the computation of the Lichnerowicz Jacobi cohomology », in : *Journal of Geometry and Physics* 44.4 (2003), p. 507-522.
- [LN96] Jean Jacques LOEB et Marcel NICOLAU, « Holomorphic flows and complex structures on products of odd dimensional spheres », in : *Mathematische Annalen* 306.1 (1996), p. 781-817.
- [Lóp88] Santiago LÓPEZ DE MEDRANO, « The space of Siegel leaves of a holomorphic vector field », in : *Holomorphic dynamics*, Springer, 1988, p. 233-245.

- 
- [Mad+97] Anders Bisbjerg MADSEN et al., « Compact Einstein-Weyl manifolds with large symmetry group », in : *Duke Mathematical Journal* 88.3 (1997), p. 407-434.
- [Mee98] Laurent MEERSSEMAN, « Un procédé géométrique de construction de variétés compactes complexes, non algébriques, en dimension quelconque », thèse de doct., Université des Sciences et Technologies de Lille, 1998.
- [MK06] James A MORROW et Kunihiko KODAIRA, *Complex manifolds*, t. 355, American Mathematical Soc., 2006.
- [Mor07] Andrei MOROIANU, *Lectures on Kähler geometry*, t. 69, Cambridge University Press, 2007.
- [MV97] Santiago López de MEDRANO et Alberto VERJOVSKY, « A new family of complex, compact, non-symplectic manifolds », in : *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática-Bulletin/Brazilian Mathematical Society* 28.2 (1997), p. 253-269.
- [NN57] August NEULANDER et Louis NIRENBERG, « Complex analytic coordinates in almost complex manifolds », in : *Annals of Mathematics* (1957), p. 391-404.
- [OPV14] Liviu ORNEA, Maurizio PARTON et Victor VULETESCU, « Holomorphic submersions of locally conformally Kähler manifolds », in : *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-)* 193.5 (2014), p. 1345-1351.
- [OT05] Karl OELJEKLAUS et Matei TOMA, « Non-Kähler compact complex manifolds associated to number fields », in : *Annales de l'institut Fourier*, t. 55, 1, 2005, p. 161-171.
- [OV10a] Liviu ORNEA et Misha VERBITSKY, « Locally conformal Kähler manifolds with potential », in : *Mathematische Annalen* 348.1 (2010), p. 25-33.
- [OV10b] Liviu ORNEA et Misha VERBITSKY, « Topology of locally conformally Kähler manifolds with potential », in : *International Mathematics Research Notices* 2010.4 (2010), p. 717-726.

- 
- [OV16] Liviu ORNEA et Misha VERBITSKY, « Locally conformally Kähler metrics obtained from pseudoconvex shells », in : *Proceedings of the American Mathematical Society* 144.1 (2016), p. 325-335.
- [OV19] Liviu ORNEA et Misha VERBITSKY, « Hopf surfaces in locally conformally Kähler manifolds with potential », in : *Geometriae Dedicata* (2019), p. 1-8.
- [OV21] Liviu ORNEA et Misha VERBITSKY, « Lee classes on LCK manifolds with potential », in : *arXiv preprint arXiv :2112.03363* (2021).
- [OV22] Liviu ORNEA et Misha VERBITSKY, « Non-linear Hopf manifolds are locally conformally Kahler », in : *arXiv preprint arXiv :2202.12398* (2022).
- [Siu83] Y-T SIU, « Every K3 surface is Kähler », in : *Inventiones mathematicae* 73.1 (1983), p. 139-150.
- [Tsu99] Kazumi TSUKADA, « The canonical foliation of a compact generalized Hopf manifold », in : *Differential Geometry and its Applications* 11.1 (1999), p. 13-28.
- [Vai76] Izu VAISMAN, « On locally conformal almost Kähler manifolds », in : *Israel Journal of Mathematics* 24.3 (1976), p. 338-351.
- [Vai80a] Izu VAISMAN, « On locally and globally conformal Kähler manifolds », in : *Transactions of the American Mathematical Society* 262.2 (1980), p. 533-542.
- [Vai80b] Izu VAISMAN, « Remarkable operators and commutation formulas on locally conformal Kähler manifolds », in : *Compositio Mathematica* 40.3 (1980), p. 287-299.
- [Vai82] Izu VAISMAN, « Generalized hopf manifolds », in : *Geometriae Dedicata* 13.3 (1982), p. 231-255.
- [Vai85] Izu VAISMAN, « Locally conformal symplectic manifolds », in : *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* 8.3 (1985), p. 521-536.
- [WG80] Raymond O'Neil WELLS et Oscar GARCIA-PRADA, *Differential analysis on complex manifolds*, t. 21980, Springer New York, 1980.

# TABLE DES FIGURES

---

6.1	Pentagone régulier centré en 0 dans le plan complexe $\mathbb{C}$ . . . . .	114
2	Programmes testant l'admissibilité d'une configuration $\Lambda$ normalisée. . . . .	122
3	Programmes testant la condition $H_j$ d'une configuration $\Lambda$ normalisée et générant tous les $\Lambda_j$ possibles vérifiant $\text{Re}(\lambda_i^j), \text{Im}(\lambda_i^j) \in \{\pm 1\}$ . . . . .	123
4	Programmes donnant la liste des configurations admissibles normalisées $\Lambda$ vérifiant $H_j$ avec $\text{Re}(\lambda_i^j), \text{Im}(\lambda_i^j) \in \{\pm 1\}$ . . . . .	124
5	Exemple d'une configuration admissible à $n = 7$ et $m = 2$ satisfaisant les conditions du théorème 6.4.1 parmi les 9 316 configurations obtenues par ce programme. Les parties réelles et imaginaires sont séparées ici. Cette syntaxe correspond à la configuration : $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1+i & -1-i & -1-i & 1+i \\ -i & 0 & -1 & 1+i & -1+i & 1-i & 1-i \end{pmatrix}$ . . . . .	125
6	Exemple d'une configuration admissible à $n = 9$ et $m = 3$ satisfaisant les conditions du théorème 6.4.1 parmi les 56 932 configurations obtenues par ce programme. Cette configuration est la suivante : $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -1-i & -1-i & 1-i & 1+i & -1+i \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1+i & -1-i & 1-i & -1+i & -1-i \\ -i & 0 & 0 & -1 & 1-i & -1+i & -1+i & -1+i & 1+i \end{pmatrix}$ . . . . .	125

# INDEX TERMINOLOGIQUE

---

Cet index terminologique donne la page de la première utilisation du terme en question à partir du chapitre 1.

- Automorphismes, 12
- Champ de vecteurs de Lee, 39
- Champ de vecteurs de Reeb, 39
- Champ transverse, 59
- Champs de vecteurs, 12
- Classe d'Euler, 71
- Cohomologie de de Rham, 26
- Cohomologie de Dolbault, 26
- Condition ( $K$ ), 80
- Condition de Siegel, 66
- Cône algébrique, 58
- Configuration admissible, 66
- Connexion de Levi-Civita, 24
- Contractions holomorphes (action),  
52
- Coquille pseudoconvexe, 59
- $CR$ -structure, 58
- $CR$ -variété de contact, 59
- Crochet de Lie, 12
- Déformation homotope, 69
- Dérivée de Lie, 12
- Différentielle extérieure, 12
- Différentielle extérieure complexe, 12
- Enveloppe convexe, 14
- Espace tangent, 12
- Fibré tangent, 12
- Fonction  $CR$ -holomorphe, 59
- Forme de Lee, 36
- Forme de Levi, 59
- Groupe d'inéfectivité, 80
- Hyperbolicité faible, 66
- Métrique de Fubini Study, 29
- Métrique hermitienne, 23
- Métrique riemannienne, 22
- Nombre de Betti, 27
- Normalisation, 92
- Pentagone régulier, 113
- Point éliminable, 66
- Point indispensable, 66
- Potentiel kählérien local, 28
- Produit extérieur, 12
- Produit intérieur, 12
- Sphère, 13
- Structure complexe, 22
- Structure de Cauchy-Riemann, 58
- Structure de contact, 59

---

Structure  $p$ -lck, 119  
Structure  $p$ -lck à potentiel, 119  
Structure presque complexe, 22  
Surface de Hopf, 55  
Surface K3, 31  
  
Tore complexe, 28  
  
Variété complexe, 22  
Variété de Hopf, 32  
Variété de Hopf diagonale, 52  
Variété de Hopf linéaire, 52  
Variété de Vaisman, 46  
  
Variété kählérienne, 22  
Variété lck, 36  
Variété lck à potentiel, 46  
Variété LVM, 67  
Variété LVMB, 75  
Variété presque complexe, 24  
Variété projective, 29  
Variété pseudoconvexe, 59  
Variété strictement pseudoconvexe,  
59  
  
 $\mathbb{Z}^P$ -revêtement, 91

# INDEX DES SYMBOLES

---

Cet index donne la page de la première utilisation du symbole en question à partir du chapitre 1. Rappelons qu'une partie notations est présente au début de ce document.

$\mathfrak{t}$ , 78	$d_\omega$ , 45	$\omega$ , 36
$\alpha_j$ , 96	$e$ , 71	$\pi_1$ , 103
Aut, 58	$\mathcal{H}$ , 66	$\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ , 28
Aut( $M, J$ ), 77	$\epsilon_{m,n}$ , 75	$\mathbb{P}(S)$ , 85
$b_k(M)$ , 27	$\Gamma_{jr}$ , 96	$\mathbb{Q}$ , 80
$\omega^\#$ , 39	$\Gamma(TM)$ , 22	$\mathbb{R}$ , 28
$H^k(M, \mathbb{C})$ , 26	$H_\omega^p(M)$ , 45	$S$ , 66
$H^{p,q}(M)$ , 26	$H_j$ , 106	$\mathbb{S}^{2d-1}$ , 28
$\mathbb{C}$ , 22	$i_A$ , 39	$J$ , 22
( $K$ ), 80	$I_z$ , 66	$TM$ , 22
$\Lambda$ , 66	$M_1$ , 69	$T_{\mathbb{C}}M$ , 58
$\mathcal{S}$ , 59	$\widetilde{M}$ , 37	$N^J$ , 22
$[\cdot, \cdot]$ , 22	$N$ , 67	$\mathbb{T}$ , 28
$D$ , 41	$\nabla$ , 24	$\mathbb{Z}$ , 28
$\mathcal{L}$ , 47	$\Omega$ , 22	
$\frac{\partial}{\partial z_\alpha}$ , 23		
$D_\Lambda$ , 106		



**Titre :** Métriques localement conformément kählériennes lck et métriques lck à potentiel sur des variétés LVM.

**Mot clés :** Variétés LVM, variétés lck, lck à potentiel, revêtement lck.

**Résumé :** Les variétés de Santiago López de Medrano et Alberto Verjovsky : LVM sont des quotients d'un ouvert de  $\mathbb{C}^n$  par une action de  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$ . L'action est paramétrée par une configuration  $\Lambda \in (\mathbb{C}^m)^n$ . Ces variétés sont non kählériennes. Elle ont été décrites en 1997 par Santiago López de Medrano et Alberto Verjovsky avec  $m = 1$  [MV97] puis généralisées par Laurent Meersseman [Mee98] en 1998 pour tout  $m \geq 1$ . En 1982, Vaisman [Vai82] introduit la notion de métrique localement conformément kählérienne : lck. L'exemple classique de variété lck à potentiel est la variété de Hopf linéaire. Or une variété de Hopf linéaire est un exemple de variété

LVM. Nous montrons que les seules variétés LVM qui sont lck à potentiel sont les variétés de Hopf linéaires diagonales et sous une certaine condition de rationalité de la configuration  $\Lambda$ , la LVM associée n'admet pas de structure lck. Ces résultats nous ont conduit à étudier les  $\mathbb{Z}^p$ -revêtements lck à potentiel des variétés LVM. Nous montrons que sous une condition  $H_j$ , une variété LVM dont la configuration est de type  $n > 2m + 1$ ,  $m > 1$  et  $k = m + 1$  admet un  $\mathbb{Z}^{m-1}$ -revêtement lck à potentiel non compact. Certains exemples nous conduisent à conjecturer qu'il n'existe pas, dans ces mêmes hypothèses, de  $\mathbb{Z}^p$ -revêtements lck à potentiel pour tout  $p < m - 1$ .

**Title:** Locally conformally kahlerian (lck) metrics and lck metrics with potential on LVM manifolds.

**Keywords:** LVM manifolds, lck manifolds, lck manifolds with potential, lck cover.

**Abstract:** Santiago López de Medrano and Alberto Verjovsky's manifolds : LVM are quotient of a  $\mathbb{C}^n$  subset by a  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$  action. This action is determined by a configuration  $\Lambda \in (\mathbb{C}^m)^n$ . These manifolds are not Kahler. They were described in 1997 by Santiago López de Medrano and Alberto Verjovsky [MV97] for  $m = 1$  and generalized by Laurent Meersseman [Mee98] in 1998 for any  $m \geq 1$ . In 1982, Vaisman [Vai82] introduce the locally conformally kahlerian metric : lck. The classical example of an lck manifold with potential is the linear Hopf manifold. However, a linear Hopf manifold can be obtained by the LVM struc-

ture. We show that the only LVM which are lck with potential are exactly the linear Hopf manifolds and under a rational condition for the configuration  $\Lambda$ , the associate LVM manifold do not have any lck metric. So it is natural to study the  $\mathbb{Z}^p$ -covers lck with potential of LVM manifolds. We show that a LVM manifold of type  $n > 2m + 1$ ,  $m > 1$  and  $k = m + 1$  wich verified a condition  $H_j$ , there exist a  $\mathbb{Z}^{m-1}$ -cover lck not compact, with potential. And some examples allows us to conjecture that, under the same hypothesis, there dosen't exist any  $\mathbb{Z}^p$ -cover lck, with potential for any  $p < m - 1$ .