# L'art combinatoire en tant qu'art d'inventer chez Leibniz, sur la période 1672-1680

Arilès Remaki

▶ **To cite this version:**

Arilès Remaki. L'art combinatoire en tant qu'art d'inventer chez Leibniz, sur la période 1672-1680. Philosophie. Université Paris Cité, 2021. Français. NNT : 2021UNIP7194 . tel-03948833

**HAL Id: tel-03948833**
**https://theses.hal.science/tel-03948833**

Submitted on 20 Jan 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Paris

Ecole Doctorale 623 | Savoirs, Sciences, Education
Laboratoire SPHERE | Sciences–Philosophie–Histoire (UMR 7219)

# L'art combinatoire en tant qu'art d'inventer

## chez Leibniz, sur la période 1672-1680

par Arilès Remaki

Thèse de doctorat d'Histoire et de Philosophie des Sciences

Dirigée par David Rabouin

**Présentée et soutenue publiquement le 8 décembre 2021**

Devant un jury composé de :

- ⋆ Andrea Bréard
  PU, Université Paris-Saclay, Présidente du jury
- ⋆ Eberhard Knobloch
  Professor, Technische Universität Berlin, Rapporteur
- ⋆ Catherine Goldstein
  DR, CNRS-Sorbonne Université, Rapporteuse
- ⋆ Vincenzo De Risi
  CR-HDR, CNRS-Université de Paris, Examinateur
- ⋆ Maria Rosa Massa Esteve
  Professor, Universitat Politècnica de Catalunya, Examinatrice
- ⋆ David Rabouin
  DR, CNRS-Université de Paris, Directeur

## Abstract

This thesis focuses on the combinatorial art of the German philosopher Gottfried Wilhelm Leibniz, and more particularly on the place it occupied in his early life within the mathematical corpus.
The main works that have given a central place in their arguments to the combinatorial art of the German philosopher, or that have taken it completely as an object of study, have so far been directed towards one of the two disjointed aspects that have thus constituted the natural framework of analysis of this field within Leibnizian studies : On the one hand, the philosophical aspect linked to the project of universal characteristic and, on the other hand, the mathematical aspect centred on more or less complex enumeration techniques, suitable to be applied to various disciplines such as the theory of equations, questions of primality or binary calculus.
This thesis proposes to approach the question of combinatorics from another angle, at the interface of these two approaches, through the study of methods of discovery, heuristics and what Leibniz called *ars inveniendi*, i.e. the art of inventing.
By underlining the important role of combinatorics in the birth of differential calculus, the text *Historia et Origo Calculi Differentialis*, which he wrote at the end of his life around 1714, introduced a new corpus into the study of Leibnizian combinatorics, namely the early Parisian work (1672-1673) on the harmonic triangle. This constitutes the entry point of our investigation.
These documents led us to put the notion of numerical table and tabular practice at the centre of our work. The thesis argues that the combinatorial issues of arrangement, combination and permutation are crucial within these categories and provide an extremely effective analytical framework to account for the young Leibniz's early methods of discovery. The young philosopher's tabular practice is also evident in his work on the interpolation of the arithmetical triangle (1676-1679), which provides an opportunity to show how this exercise also draws on the writings of his contemporaries, notably John Wallis and Pietro Mengoli. Finally, within this work, the practice of tables enjoins the young Leibniz to reflect seriously on the notion of exponent. This justifies devoting the last part of our investigation to the exploration of this question, based on a corpus that is still unpublished and very little studied.
Finally, this thesis argues that the table holds a significant place, not only at the level of the young philosopher's work, by indicating a new aspect on the origin of combinatorics, but also at the historiographical level, by underlining the richness of such an object in a material approach of the texts and a historical approach attached to the actors' practices.



**Key words** : Leibniz, Combinatorics, Table, Exponent, Interpolation, Harmonic triangle, Scheme of differences, Logarithm, History of Mathematics, Early Modern Period, Material approaches, Mengoli, Wallis, Pronics, Methods of discovery, *Ars inveniendi.*

## Résumé

Cette thèse porte sur la combinatoire chez le philosophe allemand Gottfried Wilhelm Leibniz et plus particulièrement sur la place qu'elle occupe durant sa jeunesse au sein du corpus mathématique.
Les principaux travaux qui ont accordé une place centrale dans leurs argumentaires à l'art combinatoire chez le philosophe allemand, ou bien qui l'ont pris tout à fait pour objet d'étude, se sont jusqu'alors dirigés vers l'un des deux aspects disjoints qui ont de ce fait constitué le cadre naturel d'analyse de ce champ au sein des études leibniziennes : d'une part l'aspect philosophique lié au projet de caractéristique universelle et d'autre part l'aspect mathématique centré sur des techniques de dénombrements plus ou moins complexes, propres à être appliquées à diverses disciplines comme la théorie des équations, les questions de primalité ou encore le calcul binaire.
Cette thèse se propose d'aborder la question de la combinatoire sous un autre angle, à l'interface de ces deux approches, à travers l'étude des méthodes de découvertes, de l'heuristique et de ce que Leibniz nomme l'*ars inveniendi*, c'est-à-dire l'art d'inventer.
En soulignant le rôle important de la combinatoire dans la naissance du calcul différentiel, le texte *Historia et Origo Calculi Differentialis*, qu'il écrit à la fin de sa vie vers 1714, a permis d'introduire un corpus nouveau dans l'étude de la combinatoire leibnizienne, à savoir les premiers travaux parisiens (1672-1673) sur le triangle harmonique. Ceci constitue le point d'entrée de notre enquête.
Ces documents nous ont conduit à mettre au centre de notre travail la notion de table numérique et de pratique tabulaire. La thèse défend que les questions combinatoires de disposition, de combinaison et de permutation sont déterminantes au sein de ces catégories et fournissent un cadre analytique extrêmement efficace pour rendre compte des premières méthodes de découvertes chez le jeune Leibniz. La pratique tabulaire du jeune philosophe se manifeste également dans ses travaux sur l'interpolation du triangle arithmétique (1676-1679), qui sont l'occasion de montrer comment cet exercice se nourrit également d'écrits de ses contemporains, notamment John Wallis et Pietro Mengoli. Enfin, au sein de ces travaux, la pratique des tables enjoint le jeune Leibniz à réfléchir sérieusement la notion d'exposant. Ceci justifie qu'on consacre le dernier temps de notre enquête à l'exploration de cette question, en se fondant sur un corpus encore inédit et très peu étudié.
Finalement, ce travail de thèse soutient que la table tient une place significative, non seulement au niveau de l'œuvre du jeune philosophe, en indiquant un aspect nouveau sur l'origine de la combinatoire, mais également au niveau historiographique, en soulignant la richesse d'un tel objet dans une approche matérielle des textes et une démarche historique attachée aux pratiques des acteurs.



**Mots-clés** : Leibniz, Combinatoire, Table, Exposant, Interpolation, Triangle harmonique, Schéma de différences, Logarithme, Histoire des Mathématiques, Epoque Moderne, Approches matérielles, Mengoli, Wallis, Proniques, Méthodes de découvertes, *Ars inveniendi.*

## Remerciements

Je souhaite remercier en premier lieu mon directeur de thèse, David Rabouin, qui a sans conteste été le principal accompagnateur de ce travail. Grandement disponible, il a toujours su prodiguer de précieux encouragements tout en apportant un regard exigeant et des retours sans compromis, collaborant ainsi à mener ma recherche vers un aboutissement pleinement satisfaisant. De plus, la présente thèse doit beaucoup à l'ouverture et la souplesse d'esprit dont il a fait preuve en s'adaptant intégralement à la tournure historique qu'a progressivement pris mon travail, alors que nous avions tout d'abord convenu d'une position bien plus philosophique. Mais je tiens, en particulier, à la remercier pour ses qualités humaines et sa grande compréhension face aux longs silences électroniques que je lui ai parfois imposés lors des périodes de doutes qu'entraine nécessairement une telle entreprise.
Je remercie Justin E. Smith, qui a accepté de dirigé ma thèse, en attendant que David Rabouin obtienne l'habilitation à diriger des recherches. Bien que membre de la communauté leibnizienne, son objet s'éloigne assez radicalement du mien, et pourtant il a fait preuve d'un vif intérêt pour mon travail.
Je remercie infiniment Eberhard Knobloch de l'accueil formidable qu'il m'a réservé à l'académie des sciences de Berlin et du Brandebourg, durant une mission de deux mois. Les discussions et les collaborations que nous avons eues lui et moi ont été absolument cruciales dans mon apprentissage du déchiffrage des manuscrits de Leibniz.
Je remercie Andrea Costa et Vincenzo de Risi d'avoir accepté d'être membres de mon comité de suivi et d'avoir suivi mon travail durant toutes ces années.
Je remercie Catherine Goldstein et Eberhard Knobloch de l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être les rapporteurs de ma thèse, et Andrea Bréard, Vincenzo de Risi et Maria Rosa Massa Esteve de celui qu'ils m'ont fait en acceptant d'être membres du jury.
Je remercie les doctorants (ou ex-doctorants) du laboratoire Sphère qui ont été d'un soutien sans faille, en particulier Babette Chabout-Combaz, Helmy Chekir, Gautier Depambour, Benoît Duchmann, Justin Gabriel, Sarah Hijmans, Morgan Houg, Marie Lacomme, Edgar Lejeune, Nicolas Michel, Azmiya Padavia, Adeline Reynaud, Miriam Rogasch, Flora Vachon et Liqiong Yang, mais aussi les doctorants (ou ex-doctorants) leibniziens extérieurs au laboratoire, en particulier Caroline Angleraux, Vincent Leroux, Louis Pijaudier-Cabot et Camilo Silva. Les discussions et collaborations menées au sein de ce réseau de jeunes chercheurs ont été extraordinairement enrichissantes. Mais surtout, partager mon expérience de thésard avec ceux qui la vivent au même moment et dans des conditions similaires fut essentiel.
Je remercie le laboratoire Sphere et tous ses membres pour l'accueil admirable qui m'a été accordé en tant que doctorant et jeune chercheur. Je remercie en particulier Sabine Rommevaux pour sa confiance, les fonctions de représentation qu'elle m'a permis d'assumer au sein de l'unité et son écoute. Je remercie également Karine Chemla pour son aide et son soutien sans faille et l'intérêt pour les questions de matérialité textuelle qu'elle a su susciter en moi.
Je remercie les membres du groupe *Mathesis* et en particulier les organisateurs David Rabouin et Valérie Debuiche pour le soutien et l'apport inestimable qu'un tel séminaire de recherche a pu apporter à un travail portant sur Leibniz. Je remercie également le *Leibniz-Archiv* pour l'accueil qui nous a été réservé au groupe *Mathesis* et à moi-même lors d'une mission dans leurs locaux à Hanovre, au début de mon travail de thèse, mais je les remercie également d'avoir accepté de m'accueillir pour la phase finale de rédaction et regrette que les conditions sanitaires aient malheureusement empêché ce séjour.
Pour finir, je remercie tous mes proches qui ont vécu un peu de cette épreuve à travers mon travail absorbé, mes doutes répétés, mais aussi ma joie de transmettre et de partager. Je remercie mes parents, mon frère et ma sœur d'avoir toujours su écouter. Je remercie Laura et Gauthier, avec qui j'ai découvert l'histoire et la philosophie des sciences. Je remercie Laurent pour ses encouragements, ainsi que les Chutes Libres et les Improfesseurs pour cette soupape essentielle à la vie qu'est l'improvisation ! Merci à Flore, Mathilde, Coralie et Suzie pour avoir toujours eu une oreille disponible. Enfin, je remercie Mathilde d'avoir été à mes côtés ces deux dernières années et d'avoir su décupler mon énergie quant à cette tâche ardue. Merci à elle.

# Table des matières

Notations et abréviations . . . . . 1

**INTRODUCTION GENERALE** **6**

**Question** **7**
Problématique . . . . . 9
Plan . . . . . 12
Etat de l'art . . . . . 15

**Méthode** **21**
Démarche de l'enquête . . . . . 22
Les sources de Leibniz . . . . . 25
Tables, formes et combinatoire . . . . . 28

**PROLOGUE** **32**

**Introduction** **33**

**Evolution de l'*Ars Combinatoria*** **35**
Les premiers développements avant Paris . . . . . 36
L'apport du séjour parisien . . . . . 40
Après Paris, la vision architectonique . . . . . 48

**La *Dissertation de Arte Combinatoria*** **57**
Caractéristique et écriture universelle . . . . . 62
Un traité de tabulation . . . . . 68

***Historia et Origo Calculi Differientialis*** **123**
Calcul de différences . . . . . 126
Triangle de nombres . . . . . 138

**Transition** **147**

**I Tables et Différences finies** **149**

**1 Inverses des triangulaires** **153**
Introduction . . . . . 153
1.1 La solution de Mengoli . . . . . 154
1.1.1 Une démonstration par un passage à la limite . . . . . 154
1.1.2 Les preuves par paquets . . . . . 155
1.1.3 Les résultats généraux . . . . . 157
1.2 Huygens et les probabilités . . . . . 159
1.2.1 Le problème des partis . . . . . 159
1.2.2 Le problème et sa solution . . . . . 159

1.2.3 La somme des inverses des triangulaires . . . 162
1.3 La quadrature de l'hyperbole de Brouncker . . . 164
1.3.1 La présentation de l'article par la Royal Society . . . 164
1.3.2 L'article lui-même . . . 165
1.3.3 Organisation par paquet . . . 167
Conclusion . . . 170

**2 Le Défi de Huygens 171**
Introduction . . . 171
2.1 Les premiers travaux de Leibniz . . . 172
2.1.1 Première piste : la décomposition des fractions . . . 172
2.1.2 Deuxième pistes : le mélange termes-différences . . . 175
2.1.3 Remarques et hypothèses codicologiques . . . 179
2.1.4 Le souci de la généralité . . . 181
2.2 Une première tentative de formalisation . . . 186
2.2.1 Une découverte probablement perdue . . . 186
2.2.2 Le modèle des inverses des nombres figurés . . . 190
Conclusion . . . 196

**3 Premières méthodes tabulaires 197**
Introduction . . . 197
3.1 Présentation tabulaire du résultat . . . 199
3.1.1 Emergence de la vision "à double entrée" des tables . . . 200
3.1.2 Des relations entre suites aux relations dans la table . . . 208
3.2 Le problème de Mengoli . . . 213
3.2.1 Le contexte . . . 213
3.2.2 Tentative de résolution par les tables . . . 215
3.3 La Conséquence 4 de Pascal . . . 222
3.3.1 La démonstration de Pascal . . . 222
3.3.2 Interprétation en terme de table arithmétique générale . . . 224
Conclusion . . . 228

**4 Le Triangle Harmonique 229**
Introduction . . . 229
4.1 L'*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum* . . . 231
4.1.1 Contenu du Traité . . . 231
4.1.2 Extension du résultat . . . 235
4.2 La preuve finale . . . 245
4.2.1 Une preuve par induction . . . 245
4.2.2 La preuve algébrique . . . 247
4.2.3 La nécessité d'une preuve formelle . . . 250
4.3 Emergence du Triangle proprement dit . . . 253
4.3.1 Construction du triangle . . . 253
4.3.2 Symétrie du triangle harmonique . . . 258
Conclusion . . . 266

**5 Les Triangles des différences 269**
Introduction . . . 269
5.1 Théorie des triangles de différences . . . 270
5.1.1 Le *De Artibus resolvendi progressionem* . . . 270
5.1.2 Génératrices . . . 278
5.2 Méthode générale d'induction . . . 285
5.2.1 Analyses de Progressions . . . 285
5.2.2 La mesure des triangles . . . 293
5.3 Somme Arithmético-Géometrique . . . 305

5.3.1 Détermination inductive des séries . . . 305
5.3.2 Réplication et Table : lien avec les triangles de différences . . . 307
Conclusion . . . 312

**Transition** **313**

**II Les problèmes de Quadratures** **315**

**6 L'interpolation de Wallis** **319**
Introduction . . . 319
6.1 Arithmétique et Quadrature : une approche combinatoire . . . 320
6.1.1 Rapports entre arithmétique et géométrie . . . 320
6.1.2 Les règles émergeant des tables . . . 323
6.2 Construction des tables : le rôle de l'induction . . . 326
6.2.1 Formules sur les sinus généralisées . . . 326
6.2.2 La triangle arithmétique . . . 329
6.2.3 Détour par la combinatoire . . . 333
6.3 Les intégrales de Wallis . . . 338
6.3.1 Complétion des progressions . . . 338
6.3.2 Progressions d'un genre nouveau . . . 339
6.3.3 Complétion de la table . . . 342
6.4 La formule de Brouncker . . . 346
6.4.1 La solution à un manque chez Wallis . . . 346
6.4.2 Construction de la formule . . . 347
Conclusion . . . 351

**7 L'interpolation de Mengoli** **353**
Introduction . . . 353
7.1 La nature des triangles de nombres dans les *Geometriæ speciosæ elementa* . . . 354
7.1.1 Origine euclidienne du problème . . . 354
7.1.2 Génération itérative des termes dans une table . . . 356
7.1.3 Fusion de deux tables hétérogènes : la table des noms . . . 359
7.2 Triangle Harmonique et tables des quadratrices . . . 361
7.2.1 Sommes discrètes . . . 361
7.2.2 Démonstration : deux voies . . . 363
7.3 Quadrature et Interpolation . . . 368
7.3.1 Tables de figures . . . 368
7.3.2 Quadrature du Cercle dans le *Circolo* . . . 371
7.4 Rôle et place du Triangle Harmonique . . . 375
7.4.1 Propriétés du Triangle Harmonique . . . 375
7.4.2 Comparaison entre les figures de Mengoli et de Wallis . . . 377
Conclusion . . . 381

**8 Reception de Wallis et Mengoli** **382**
Introduction . . . 382
8.1 Lecture du Circolo . . . 383
8.1.1 Un intérêt purement privé . . . 383
8.1.2 L'*Arithmetica infinitorum et interpolationum* . . . 384
8.1.3 Notes sur le *Circolo* . . . 392
8.2 Réception parisienne de Wallis . . . 396
8.2.1 L'approximation par le produit infini . . . 396
8.2.2 Critique de l'induction chez Wallis . . . 398
Conclusion . . . 405

**9 Interpolation et Formules** **406**
Introduction . . . 406
9.1 Les travaux de 1679, entre exposants et tables . . . 407
9.1.1 La solution de Newton . . . 407
9.1.2 Approche formelle de l'Art d'Inventer . . . 411
9.2 Le *De calculo interpolationum* : au croisement des tables et des formules . . . 416
9.2.1 Interpolations de niveaux supérieurs . . . 416
9.2.2 Réduction finie mais transcendante . . . 420
9.2.3 Ecritures et abréviations . . . 422
9.3 Table et Formule universelle . . . 426
9.3.1 Formules générales . . . 426
9.3.2 Construction de la formule générale . . . 428
9.3.3 Réforme de la règle . . . 432
9.3.4 L'enjeu central de la table . . . 435
Conclusion . . . 440

**Transition** **442**

**III Les Exposants** **444**

**10 Premiers exposants : Itérations et Courbes** **448**
Introduction . . . 448
10.1 Itération et Décompte . . . 449
10.1.1 Nombre d'entité . . . 449
10.1.2 Répétitions d'opérations . . . 450
10.1.3 Suite géométrique et inverses des nombres figurés . . . 452
10.2 Les travaux sur les Paraboloïdes de l'été 1673 . . . 455
10.2.1 Une propriété notable des tangentes . . . 455
10.2.2 L'influence de Wallis . . . 458
Conclusion . . . 465

**11 Puissances et Différences** **466**
Introduction . . . 466
11.1 La puissance pronique chez Leibniz . . . 467
11.1.1 Exposants dans les Triangles de Différence . . . 468
11.1.2 Formule différentielle et intégrale . . . 472
11.2 Interpolations et courbes proniques . . . 478
11.2.1 Interpolation d'une progression . . . 478
11.2.2 Courbes sous-jacentes . . . 483
11.3 La Formule de Leibniz . . . 498
11.3.1 La notion de Fonction . . . 498
11.3.2 Un lien mystérieux . . . 500
11.4 Analogies . . . 501
11.4.1 Analogie formelle . . . 501
11.4.2 Analogies fonctionnelles . . . 502
11.4.3 Différences de degré non-entier . . . 506
Conclusion . . . 508

**12 Exposants d'un genre nouveau** **510**
Introduction . . . 510
12.1 Exposants non-entiers . . . 512
12.1.1 Exposants fractionnaires . . . 512
12.1.2 Exposant imaginaire . . . 517
12.1.3 Exposant infiniment petit . . . 520

12.2 Exposant littéral . . . 523
12.2.1 Formule générale du binôme . . . 523
12.2.2 Des séries impossibles . . . 525
12.3 Exposants fonctionnels . . . 531
12.3.1 Relation de fonction . . . 531
12.3.2 Racines proniques . . . 532
12.3.3 Exposant du Cercle . . . 535
12.4 Le *Specimen Characteristicæ novæ* : un nouveau type de caractère . . . 537
12.4.1 Remarques matérielles . . . 537
12.4.2 L'exposant comme Relation . . . 540
12.4.3 Nature métaphyisque de l'exposant . . . 543
Conclusion . . . 546

**13 Les logarithmes et les exponentielles** **548**
Introduction . . . 548
13.1 La théorie des rapports, chez Oresme . . . 549
13.1.1 Les rapports de rapports chez les médiévaux . . . 549
13.1.2 Le problème de la multiplication des rapports . . . 551
13.1.3 Logarithme et proportion géométrique . . . 552
13.2 Courbe Logarithmique et Développement en Série . . . 554
13.2.1 Genèse de l'exponentielle . . . 554
13.2.2 La Série Exponentielle, comme inverse du logarithme . . . 560
13.2.3 Démonstration Géométrique de la Formule . . . 561
13.3 Les Equations Exponentielles . . . 567
13.3.1 Une résolution inconnue mais possible . . . 567
13.3.2 Résolution par le Logarithme . . . 572
13.3.3 Applications à l'analyse des séries et des quadratures . . . 576
13.3.4 Différentielle de l'Exposant . . . 580
Conclusion . . . 586

**CONCLUSION GENERALE** **589**

**ANNEXES** **595**

**Théorie des différences finies** **596**

**Extrapolation sur la méthode de Brouncker** **608**

# Notations et abréviations

### Sources primaires

Notre travail s'appuie principalement sur les textes de Leibniz issus de deux sources :

⋆ Les textes édités par l'*Akademie Verlag*, qui sont référencés de cette manière :

$$\text{A}\ \underbrace{\text{X}}_{\substack{\text{numéro de la série}\\ \text{en chiffre romain}}}\ ,\ \underbrace{\text{Y}}_{\substack{\text{numéro du volume}\\ \text{en chiffre arabe}}}\ ,\text{N.}\ \underbrace{\text{Z}}_{\substack{\text{numéro du texte}\\ \text{dans le volume}}}\ ,\underbrace{\textit{titre}\text{ ou déstinataire}}_{\text{texte ou correspondance}},\ \underbrace{\text{date}}_{\substack{\text{estimation}\\ \text{des éditeurs}}}\ ,\text{p.}\ \underbrace{\text{P}}_{\text{page}}.$$

Les différentes séries de l'édition de l'*Akademie* sont thématiques :

→ Série I : Correspondance générale, politique et historique

→ Série II : Correspondance philosophique

→ Série III : Correspondance mathématique, de sciences naturelles et de technique

→ Série IV : Ecrits politiques

→ Série V : Ecrits historiques et de linguistique

→ Série VI : Ecrits philosophiques

→ Série VII : Ecrits mathématiques

→ Série VIII : Ecrits de sciences naturelles, de médecine et de technique

⋆ Les textes édités par Eberhard Knobloch dans *Die Mathematischen Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik, Textband, im Anschluß an den gleichnamigen Abhandlungsband zum ersten Mal nach den Originalhandschrift herausgegeben*[1] en 1676 sont référencés quant à eux de la manière suivante :

$$\text{LKK,N.}\ \underbrace{\text{Z}}_{\substack{\text{numéro du texte}\\ \text{dans le volume}}}\ ,\underbrace{\textit{titre}\text{ ou déstinataire}}_{\text{texte ou correspondance}},\ \underbrace{\text{date}}_{\substack{\text{estimation}\\ \text{des éditeurs}}}\ ,\text{p.}\ \underbrace{\text{P}}_{\text{page}}.$$

⋆ Les textes inédits, disponibles sous forme leur forme manuscrite orignale à la bibliothèque de Hanovre, la *Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek* et consultés numériquement sur le site de la bibliothèque : http ://digitale-sammlungen.gwlb.de Tous ceux que nous avons consultés sont issus des archives mathématiques, référencés par la côte LH 35. Ainsi, ces textes sont référencés de la manière suivante :

$$\text{LH 35,}\ \underbrace{\text{X, Y,}}_{\substack{\text{référence}\\ \text{de la côte}}}\ \textit{Bl.}\ \underbrace{\text{Z}}_{\text{numéro du folio}}\ ,\textit{titre},\ \underbrace{\text{date}}_{\text{si indiquée}}$$

Les guillemets français « » désignent les mentions qui sont des citations explicites, tandis que les guillemets anglais " " désignent des mentions ou expressions qui ne sont pas des citations.

1. [49] G. W. Leibniz, *Die Mathematischen Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik, Textband, im Anschluß an den gleichnamigen Abhandlungsband zum ersten Mal nach den Originalhandschrift herausgegeben*, *éd.* E. Knobloch, dans les *Studia Leibnitiana Supplementa*, Tome 16, Franz Steiner Verlag, Wiesbaden, 1976

**Coefficients binomiaux**

Les coefficients binomiaux sont omniprésents dans notre analyse. Nous utilisons plusieurs notations les concernant qui sont toutes anachroniques [2]

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 &
\end{array}
$$

Lorsque les nombres sont considérés dans le développement du binôme ou comme désignant le nombre de parties d'un cardinal fixé dans un ensemble fixé, nous choisissons l'écriture conventionnelle :

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & & & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} & & \\
 & \binom{7}{0} & & \binom{7}{1} & & \binom{7}{2} & & \binom{7}{3} & & \binom{7}{4} & & \binom{7}{5} & & \binom{7}{6} & & \binom{7}{7}
\end{array}
$$

Quand ils désignent des nombres figurés ou des ordres numériques, alors nous utilisons la notation anglo-saxonne des coefficients multi-ensembles :

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & \left(\!\binom{1}{0}\!\right) & & & & & & & & \\
 & & & & & \left(\!\binom{1}{1}\!\right) & & \left(\!\binom{2}{0}\!\right) & & & & & & & \\
 & & & & \left(\!\binom{1}{2}\!\right) & & \left(\!\binom{2}{1}\!\right) & & \left(\!\binom{3}{0}\!\right) & & & & & & \\
 & & & \left(\!\binom{1}{3}\!\right) & & \left(\!\binom{2}{2}\!\right) & & \left(\!\binom{3}{1}\!\right) & & \left(\!\binom{4}{0}\!\right) & & & & & \\
 & & \left(\!\binom{1}{4}\!\right) & & \left(\!\binom{2}{3}\!\right) & & \left(\!\binom{3}{2}\!\right) & & \left(\!\binom{4}{1}\!\right) & & \left(\!\binom{5}{0}\!\right) & & & & \\
 & \left(\!\binom{1}{5}\!\right) & & \left(\!\binom{2}{4}\!\right) & & \left(\!\binom{3}{3}\!\right) & & \left(\!\binom{4}{2}\!\right) & & \left(\!\binom{5}{1}\!\right) & & \left(\!\binom{6}{0}\!\right) & & & \\
\left(\!\binom{1}{6}\!\right) & & \left(\!\binom{2}{5}\!\right) & & \left(\!\binom{3}{4}\!\right) & & \left(\!\binom{4}{3}\!\right) & & \left(\!\binom{5}{2}\!\right) & & \left(\!\binom{6}{1}\!\right) & & \left(\!\binom{7}{0}\!\right) & & \\
 & \left(\!\binom{1}{7}\!\right) & & \left(\!\binom{2}{6}\!\right) & & \left(\!\binom{3}{5}\!\right) & & \left(\!\binom{4}{4}\!\right) & & \left(\!\binom{5}{3}\!\right) & & \left(\!\binom{6}{2}\!\right) & & \left(\!\binom{7}{1}\!\right) & & \left(\!\binom{8}{0}\!\right)
\end{array}
$$

2. Concernant la définition de ces notations, *Cf* en Annexe le développement sur la théorie des différences finies.

Ces notations respectent les relations suivantes :

$$\left(\!\!\binom{p}{n}\!\!\right) = \binom{n+p-1}{p-1} \qquad \binom{n}{k} = \left(\!\!\binom{k+1}{n-k}\!\!\right)$$

$$\left(\!\!\binom{p}{n}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n+1}{p-1}\!\!\right) \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

**Reproduction des diagrammes**

Nous avons souhaité reproduire au maximum les diagrammes originaux, tels qu'on les trouve sur les manuscrits de Leibniz. Afin de faciliter leur lecture, nous avons supprimé numériquement les paratextes qui les chevauchent parfois et les diverses détériorations du papier, comme les taches d'encre ou les textes du verso qui apparaissent par transparence. A quelques occasions, nous avons souhaité reproduire des diagrammes ou des formules qui ont été raturées. Dans ce cas, nous avons supprimé numériquement les ratures et nous l'avons clairement indiqué. Pour finir, nous avons joint la plupart du temps les figures manuscrites d'une reproduction numérique, traduite en français, dans laquelle nous avons ajouté nos propres éléments explicatifs. De façon générale, nous avons ajouté les éléments manquants en gris et indiqué en vert ou en bleu les éléments qui sont significatifs pour notre argumentation.

# INTRODUCTION GENERALE

# Question

> Dans l'homme que l'imagination domine, les idées se lient par les circonstances et par le sentiment : il ne voit souvent des idées abstraites que dans leur rapport avec les idées sensibles. Il donne aux abstractions une existence indépendante de l'esprit qui les a faites ; il réalise ses fantômes, son enthousiasme augmente au spectacle de ses créations, c'est-à-dire de ses nouvelles combinaisons, seules créations de l'homme ; emporté par la foule de ses pensées, livré à la facilité de les combiner, forcé de produire, il trouve mille preuves spécieuses, et ne peut s'assurer d'une seule ; il construit des édifices hardis que la raison n'oserait habiter, et qui lui plaisent par leurs proportions et non par leur solidité ; il admire ses systèmes comme il admirerait le plan d'un poème ; et il les adopte comme beaux, en croyant les aimer comme vrais.
>
> Denis Diderot, *Dictionnaire Encyclopédique* - Génie

Le thème de la combinatoire traverse toute la pensée du philosophe Gottfried Wilhelm Leibniz, s'imbriquant à chaque âge dans de nombreux domaines. C'est d'ailleurs par cet aspect transdisciplinaire que la combinatoire fait son entrée dans son œuvre, lorsqu'il rédige sa thèse de philosophie en 1666 à l'université de Leipzig, la *Dissertatio de Arte Combinatoria*[3].
Le domaine de connaissance que l'on attribue aujourd'hui à la combinatoire est particulièrement restreint en comparaison, réduit à la seule étude strictement mathématique des opérations énumératives et de dénombrement. Mais la combinatoire revêt, à l'époque de Leibniz, une dimension mystique qui la porte au rang de champ de connaissance à part entière : l'*Ars Combinatoria*, issu de plusieurs traditions religieuses et philosophiques comme celles des cabalistes et des lullistes[4]. Comme la théologie, cette discipline constitue aujourd'hui un rameau mort de l'arbre des connaissances et il n'est donc pas simple d'en tracer *a posteriori* les contours épistémologiques ou spatio-temporels, tant les ouvrages qui s'y rapportent sont protéiformes. Elle semble néanmoins s'être développée autour de deux idées majeures :

- ⋆ L'exhaustivité, mise en avant par Raymond Lulle[5] : la combinatoire permet de trouver tous les composés possibles et de parcourir ainsi l'intégralité du réel, qui est nécessairement une fraction du possible.
- ⋆ L'émergence, point crucial chez les cabalistes[6] : le composé n'est pas seulement la somme de ses composants, des propriétés supplémentaires émergent de son unité.

3. A VI, 1, N.8, *Dissertation de Arte Combinatoria*, 1666

4. *Cf* [108] J. Umberto Eco, *The Ars Magna by Ramon Llull*, dans *Contribution to Science*, Vol.12, N.1, 2016 - p.47-50 ; [19] K. S. De León-Jones, *Giordano Bruno and the Kabbalah : Prophets, Magicians, and Rabbis*, University of Nebraska Press, Lincoln, 2004. Voi aussi sur ce sujet la première partie de la thèse de Ernest Coumet, [15] E. Coumet, *Œuvres d'Ernest Coumet (Tome 2)*, *éd.* C. Goldstein, Presse Universitaire de Franche-Comté, 2019

5. [56] R. Lulle, *Arte Breve*, *éds.* A. Musco et M. Romano, Milan, 2002 - p.84 : « Subjectum huius Artis est respondere de omnibus quæstionibus » (« *L'objet de cet art est de répondre à toutes les questions* »)

6. Pensons notamment à la numérologie qui décompose les mots en nombres afin de faire émerger de nouvelle propriétés et révéler ce qui était caché dans la composition

C'est bien dans cette tradition de l'*Ars Combinatoria* que Leibniz rédige son opuscule de jeunesse afin d'obtenir une position universitaire qui lui sera refusée en raison de son jeune âge. Mais ce faisant, le jeune homme s'approprie considérablement ces thématiques et les développera de façon si profonde tout au long de sa vie que nous pouvons considérer l'*Ars Combinatoria* chez Leibniz comme une troisième voie historique de la combinatoire, propre à faire l'objet d'un discours autonome vis-à-vis de la tradition sus-mentionnée.
Le statut de la combinatoire chez Leibniz demeure une question très délicate qui constitue à elle seule un axe de recherche encore très riche et peu documenté. En effet, le corpus impliqué dans cette thématique est aussi gigantesque que le spectre couvert par les différentes acceptions du terme est large. On peut, cela dit, distinguer trois acceptions :

- ⋆ Une acception méthodologique : souvent qualifiée d'*Ars Combinatoria*, la combinatoire est identifiée à la synthèse et constitue avec l'analyse l'une des deux branches de l'*Ars inveniendi*, c'est-à-dire du domaine de l'heuristique et des méthodes de découverte.
- ⋆ Une acception épistémologique : la combinatoire est alors définie comme la science des formes et des formules, du semblable et du dissemblable et elle est étroitement liée à l'idée d'une "caractéristique universelle".
- ⋆ Une acception mathématique : qualifiée parfois de « science des combinaisons » (« *Scientia Combinationum* » ou « *Doctrina Combinationum* »), la combinatoire correspond ici à son sens moderne, à savoir la science du dénombrement.

Ce panorama des différentes significations que la combinatoire peut revêtir chez Leibniz est artefactuel. A aucun moment, Leibniz ne décrit simultanément ces trois modes et ces derniers ne se succèdent pas dans le temps pour décrire l'évolution de la combinatoire chez le philosophe. Les choses sont bien moins régulières, à l'image de sa pensée vivante et dynamique.

Ce travail de thèse s'intéresse tout particulièrement à l'acception méthodologique de la combinatoire chez Leibniz et à son rôle effectif au sein de la pratique mathématique durant la première période de sa vie : 1672-1680.

# Problématique

### Parcours philosophique de la combinatoire

Dans le cadre d'une étude qui porte sur la combinatoire chez Leibniz, une démarche historiographique assez naturelle, en histoire de la pensée, pourrait être qualifiée de nominaliste et diachronique : elle consisterait à suivre naïvement, au fil de son œuvre, l'utilisation des termes *ars combinatoria* ou *combinatoria* afin de dresser un portrait de l'évolution sémantique de ces catégories. Une telle entreprise, dont nous donnons un échantillon grossier au sein de notre prologue, nous enjoint à voir la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8) comme un point de départ évident.
Dès lors, les sources montrent que la combinatoire hérite dans un premier temps de l'acception épistémologique incarnée par le projet d'écriture universelle et de machine spirituelle [7]. Dès le début des années 1670, nait l'ambition d'une caractéristique universelle qu'il poursuivra jusqu'à la fin de ses jours. Néanmoins, la place que tient la combinatoire au sein de ce programme n'a de cesse d'évoluer, à mesure des progrès et des réformes que subissent le sens et les contours de ces notions. Ainsi, si la caractéristique est d'abord pensée principalement dans un cadre logique et linguistique, la période parisienne, 1672-1676, durant laquelle Leibniz se passionne pour les sciences mathématiques, le pousse à prioriser les questions de calcul et de raisonnement. Le rôle du calcul, lié à l'art de créer et d'utiliser des caractères, c'est-à-dire l'*ars characteristica*, se nourrit des travaux du jeune homme en algèbre, discipline dont il ignorait presque tout avant son arrivée à la capitale française. L'algèbre est considérée comme le modèle à suivre pour accomplir la quête universaliste de la caractéristique :

> *Et par conséquent, il nous sera aisé de retrouver la nature intime de leurs corps à partir d'un nombre raisonnable d'expériences. De fait, si l'expérience de la nature est simple, ses conséquences doivent être simples également, et si l'expérience qui résulte de ces conséquences est également simple alors les conséquences qui suivent seront encore simples, et l'on remonte ainsi par un nombre suffisant d'expériences. On trouve une telle remontée déductive en Algèbre et l'on pourrait la trouver également dans tous les autres domaines qui mettent en jeu quelque genre de calcul mathématique, si les hommes maitrisaient par quelques moyens le véritable art de raisonner.*
> *C'est dans les choses difficiles mais pas complètement obscures, comme la physique que l'on espère voir le véritable art de raisonner, espoir vain tant qu'on n'aura pas l'art caractéristique, c'est-à-dire la langue rationnelle qui rassemble de façon extraordinairement concise les opérations de l'esprit et qui seule peut prévaloir en physique, comme l'algèbre en mathématique.* [8]

Ses travaux sur la résolution des équations le mènent à considérer des formules symétriques, c'est-à-dire au sein desquelles toutes les variables jouent le même rôle. Elles sont à la base de la notion de forme combinatoire, concept bien plus général, qui transcende les limites des seules mathématiques et qui provoque l'une des principales mutations de l'acception épistémologique de la combinatoire : celle-ci devient la science de la similitude, des formes et des formules.
Le rôle méthodologique de la combinatoire, à savoir comme raisonnement synthétique, se développe également durant la période parisienne, bien qu'au départ, les deux sens s'hybrident et se confondent de telle sorte que les textes témoignent jusqu'au milieu des année 1670 d'une grande confusion entre analyse, synthèse, combinatoire et algèbre. Les acceptions se stabilisent à la fin de son séjour en France, alors que la caractéristique, toujours qualifiée de combinatoire, devient science des formes et des formules et que la synthèse, également qualifiée de combinatoire est désignée comme une branche de l'*ars inveniendi* avec l'analyse. Cela dit, si les deux sens sont bien distingués dès 1675, il faut encore attendre quelques années pour que Leibniz s'exprime explicitement sur cette distinction.

---

7. Leibniz donne parfois d'autres qualificatifs à cette machine, par exemple combinatoire ou panépistémonique

8. A VI, 3, N.56, *Methodus Physica. Characteristica. Emenanda. Societas sive Ordo*, mai 1676 - p.456 : « Ex his sequitur facile nobis fore, ex non admodum multis experimentis intimam eorum corporum derivare naturam. Nam si simplex est hæc natura experimenta ex ea facile sequi debent ; et, si experimenta ex ea facile sequuntur, debet vicissim etiam ipsa facile sequi per regressum ex sufficienti experimentorum numero. Talis regressus fit in Algebra, et in omnibus aliis fieri posset quodam calculi mathematici genere, si modo homines veram ratiocinandi artem tenerent. Vera ratiocinandi ars in rebus difficilibus et nonnihil abstrusis, quales sunt physicæ frustra speratur, quamdiu non habetur ars characteristica sive lingua rationalis, quæ mirifice in compendium contrahit operationes mentis, et sola praestare potest in Physicis, quod Algebra in Mathematicis. »

Ce tableau donne à l'algèbre un rôle moteur dans le développement de la combinatoire, surtout dans son acception épistémologique. La notion de forme, empruntée à l'algèbre, est instituée comme le pilier principal de ce projet philosophique. Mais, ce faisant, nous taisons la seconde colonne vertébrale de l'art combinatoire chez Leibniz : la table.

### Origine combinatoire de l'analyse des transcendants [9]

L'algèbre est certes un modèle mais il devient également très vite, aux yeux de Leibniz, un domaine circonscrit dont il faut outrepasser les frontières car il fait office d'œillères pour les géomètres qui y voient l'aboutissement de la science mathématique, voir de la science en général :

> *Il y a sujet de s'estonner qu'une reflexion si aisée n'est pas tombée il y a longtemps dans l'esprit des hommes. Mais il en faut attribuer la cause au defaut de l'art des Combinaisons dont l'Analyse des Mathematiciens ou l'Algebre n'est qu'une partie assez mediocre.* [10]

La combinatoire constitue cet horizon d'émancipation, comme nous l'avons vu. Mais, au sein même des mathématiques, les limites de l'algèbre sont franchies notamment par une nouvelle analyse que Leibniz nomme l'analyse des transcendants. En effet, elle regroupe toutes les techniques développées par Leibniz qui permettent de résoudre des problèmes, comme la quadrature du cercle ou de l'hyperbole ou encore la résolution d'équations différentielles ou exponentielles qui se trouvent hors des compétences de l'algèbre cartésienne. Le calcul différentiel fait partie intégrante de cette nouvelle doctrine mathématique. Au sein des textes programmatiques des années 1680, cette nouvelle doctrine est souvent désignée comme l'un des échantillons de caractéristiques développés par le philosophe aux côtés de l'*analysis situs* et parfois de la caractéristique numérique. Mais dans les textes purement mathématiques, l'analyse des transcendants est bien souvent la seule candidate à la succession de l'algèbre pour le progrès des sciences mathématiques. La question se pose alors : quel rôle la combinatoire a-t-elle joué dans la conception de ces nouveaux objets transcendants et la résolution de ces problèmes ? Cette théorie ne s'est pas développée autour d'une notion théorique comme la forme mais en s'appuyant sur un outil pratique : la table.
La pratique tabulaire joue un rôle majeur dans le développement des méthodes de tangentes, de l'arithmétique des infinis et mène naturellement Leibniz à travailler en profondeur la notion d'exposant qui constitue la base de la notion de transcendance, et pour laquelle Leibniz mobilisera également la notion de forme. Le parcours intellectuel lié à l'analyse des transcendants doit donc être intégré à l'histoire de la pensée combinatoire. Mais pourtant il suit une ligne remarquablement séparée de la progression philosophique que nous avons présentée en guise d'introduction. En effet, comme Leibniz le révèle lui-même dans un texte autobiographique, l'*Historia et Origo Calculi Differentialis*, ce parcours ne suit pas les prolongements de l'écriture universelle, au sein de la *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mais trouve sa source au sein de ses premiers travaux mathématiques, lorsqu'il arrive à Paris, à savoir le développement de la théorie des différences finies et la découverte du triangle harmonique. La table et la pratique tabulaire constituent la charpente et le mortier de ces travaux de jeunesse.
Mais cette pratique n'est pas encore considérée comme combinatoire par le jeune Leibniz. Ainsi, la relative rareté des références explicites à l'art combinatoire a eu pour conséquence d'écarter logiquement ces travaux en adoptant la démarche nominaliste et diachronique [11] Pourtant, il s'agit bel et bien de combinatoire, si on l'entend dans son sens méthodologique. En effet, la table constitue à cette époque l'outil principal de la méthode synthétique en mathématique, ainsi que le meilleur moyen de raisonner par induction.
Ce rôle combinatoire de table dans l'invention mathématique, et particulièrement au sein des techniques de quadrature et de sommation infinie, n'est pas propre à Leibniz. On le trouve également chez de nombreux

9. Sur la question de la trascendance chez Leibniz, *Cf* [96] M. Serfati, *Leibniz and the Invention of Mathematical Transcendence*, Stuttgart, 2018, ainsi que [41] E. Knobloch, *Beyond Cartesian limits : Leibniz's passage from algebraic to "transcendental" mathematics*, dans *Historia Mathematica*, Vol.33, N.1, 2006 - p.113-131.

10. A III, 31 N.45, Lettre de Leibniz à La Roque, mi-mars 1675 - p.184

11. Dès 1675, Leibniz comprend très rapidement le rôle de la table en combinatoire, et les « Inventaires » (« *Inventaria* ») constituent les outils fondamentaux de l'*ars inveniendi* de la même façon que les caractères dans l'*ars characterstica*. Nous décrirons cette position philosophique dans le prologue, lorsque nous serons amené à traité des discours programmatiques de Leibniz sur la combinatoire.

auteurs qui lui sont contemporains, particulièrement deux qui l'ont profondément influencé : John Wallis et Pietro Mengoli. Ces derniers ne qualifient pas non plus de combinatoire leurs pratiques tabulaires, bien qu'elles s'accordent avec l'acception méthodologique de la combinatoire chez Leibniz. Cette large présence des techniques tabulaires permet de dépeindre un certain paysage intellectuel au sein duquel le jeune philosophe a développé ses techniques. Bien que les travaux de Mengoli, de Wallis, mais aussi de Huygens ou de Hudde se présentent à lui sous des angles très divers, il y repère le dénominateur commun qui fait écho à sa propre pratique : le rôle central des tables.

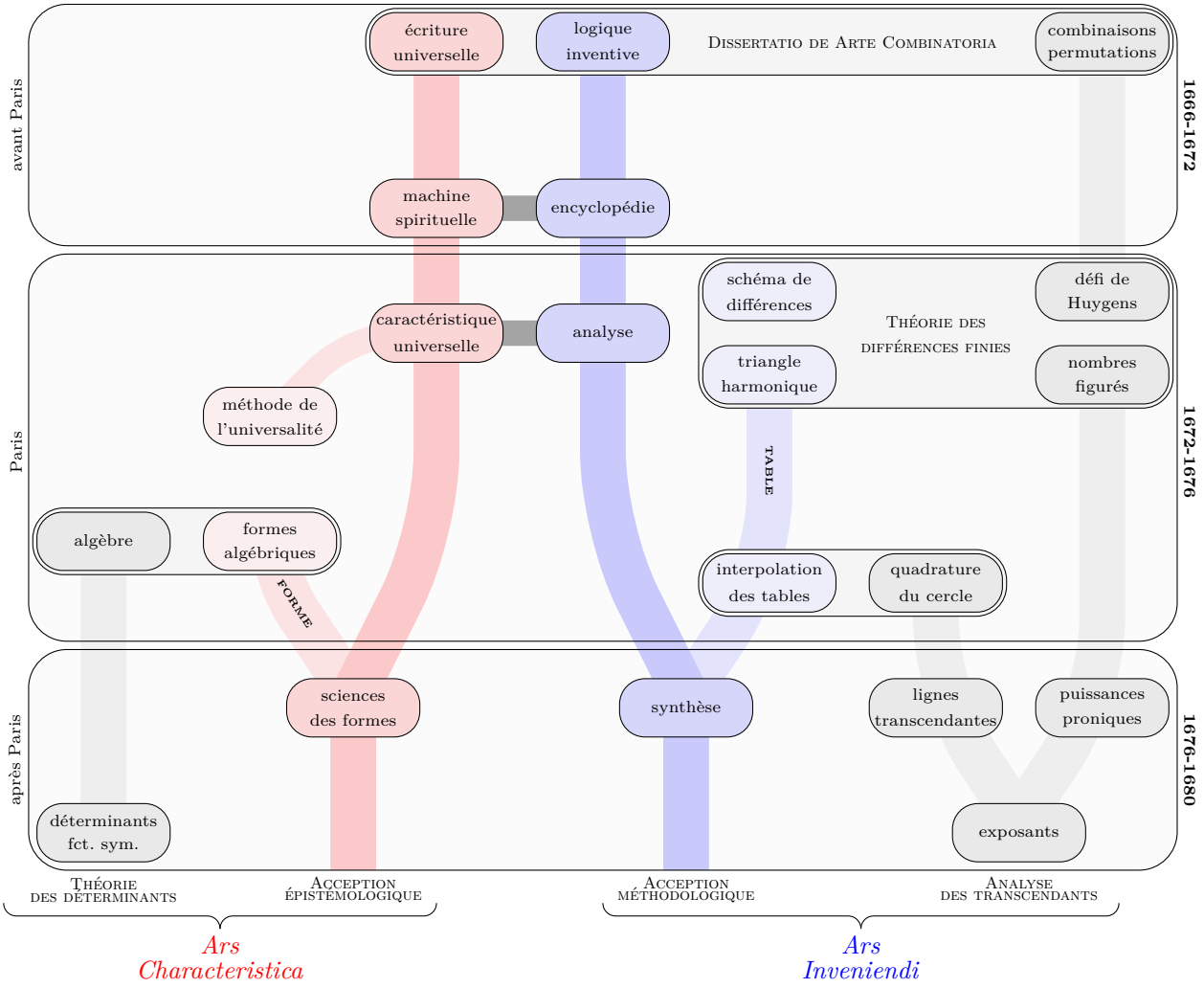
**Rôle des nombres combinatoires**

Les nombres combinatoires sont les nombres que l'on trouve au sein du triangle arithmétique de Pascal et que l'on nomme aujourd'hui coefficients binomiaux.
Ils désignent en principe des cardinaux, à savoir le nombre de parties différentes d'un certain nombre fixé d'éléments que l'on peut extraire d'un ensemble donné. Comme Pascal, Leibniz aperçoit très tôt la richesse considérable que détiennent ces coefficients à travers la grande diversité des situations auxquelles ils peuvent être appliqués. C'est par ailleurs sur cette base que la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8) est construite, tout comme les divers traités qui suivent le *Traité du Triangle Arithémétique*[12] de Pascal, ces derniers s'attachant à ne lister que les usages mathématiques de ces coefficients, alors que l'opuscule de jeunesse de Leibniz en décrit plutôt les usages extra-mathématiques.
Au départ, Leibniz les considère donc seulement dans leur sens combinatoire strict, à savoir comme résultat d'un certain dénombrement. Mais très vite, il les considère également comme des nombres figurés : triangulaires, pyramidaux, triangulo-triangulaires etc. notamment parce que Huygens lui pose un problème sur ce sujet, à son arrivée à Paris en 1672. Il s'agit de déterminer la somme des inverses des nombres triangulaires. La résolution de ce problème l'amène à réfléchir sur la nature de ces nombres et le rôle qu'ils jouent au sein de la théorie des différences finies. Leibniz va réaliser progressivement que les nombres combinatoires constituent en fait l'équivalent discret des courbes polynomiales d'équations simples $y = x^n$. Il s'agit d'une base pour le calcul des différences comme nous le montrons dans la première partie de nos annexes, consacrée à la formalisation moderne de la théorie des différences finies.
Mais de plus, les nombres combinatoires interviennent dans la quadrature du cercle. En effet, l'inverse de l'aire du cercle peut être interprété comme le résultat de l'interpolation du triangle arithmétique, comme le font Wallis et Mengoli. Les nombres combinatoires sont donc des objets particulièrement adaptés à la pratique tabulaire, que ce soit au travers des schémas de différences construits pour la théorie des différences finies ou bien l'interpolation des tables pour les techniques de quadrature. Mais dans un cas comme dans l'autre, ces nombres appellent le philosophe à une profonde réflexion sur la notion d'exposant. Dans le cadre de la théorie des différences finies, Leibniz développe le concept de puissance pronique, équivalent discret de l'exposant classique. Le nombre combinatoire est érigé en puissance parce que Leibniz parvient à montrer qu'il obéit aux mêmes formules différentielles. Dans ce cadre des quadratures, l'interpolation de la table pose la question des rangs fractionnaires voir irrationnels. La table est envisagée comme une voie particulièrement prometteuse pour parvenir à exprimer les grandeurs transcendantes par des moyens finis.

12. *Cf* [80] B. Pascal, *Traité du Triangle Arithmétique et traités connexes* dans *Œuvres de Blaise Pascal*, Hachette, Paris, Vol.3 (1923), Ch.64

# Plan

Nous résumons dans ce schéma l'évolution de l'art combinatoire chez Leibniz durant sa période de jeunesse 1666-1680, et la façon dont il s'est enrichi de certains travaux mathématiques. Cette figure chronologique représente les deux principaux piliers de l'art combinatoire : la forme et la table :




Coté gauche du schéma, nous trouvons la face épistémologique de la combinatoire, étroitement liée à l'*ars characterstica*, et nourrie par les travaux algébriques de Leibniz sur les déterminants et les fonctions symétriques, qui sont déjà richement documentés dans l'œuvre d'Eberhard Knobloch [13]. Toutefois, la naissance de la notion de forme combinatoire elle-même et la façon dont Leibniz l'a prélevée de ses premiers travaux sur la résolution des équations nécessitent d'autres études et investigations. Notre travail de thèse se concentre sur la partie droite du schéma, qui représente la face méthodologique de la combinatoire, qu'on associe à l'*ars inveniendi*. La notion de table apparait plus tôt que la notion de forme, dès les premières années parisiennes. Elle s'appuie sur deux situations mathématiques impliquant la pratique tabulaire : la théorie des différences finies et la quadrature du cercle. Grâce à ces deux axes, Leibniz développe un nouveau champ de recherche, celui des exposants qui sont, pour lui, les meilleurs candidats pour définir et maitriser les notions inaccessibles à l'algèbre et propres à l'analyse des transcendants. Ainsi, l'étude du développement de cette nouvelle analyse donne un nouvel éclairage sur l'origine de l'acception méthodologique de la combinatoire.

13. [39] E. Knobloch, *Die mathematischen Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik, auf grund fast ausschliesslich handschriftlicher aufzeichnungen dargelegt und kommentiert* dans les *Studia Leibnitiana Supplementa*, Tome 11, Franz Steiner Verlag, Wiesbaden, 1973 ; et [50] G. W. Leibniz, *Der Beginn der Determinantentheorie, Leibnizens nachgelassene Studien zum Determinantenkalkül, Textband, im Zusammenhang mit dem gleichnamigen Abhandlungsband fast ausschließlich zum ersten Mal nach den Originalschriften*, *éd.* E. Knobloch, dans *Arbor Scientiarum*, Série B, Tome 2, Gerstenberg Verlag, Hildesheim, 1980

Notre travail se répartit donc autour de trois dossiers principaux :

1. la théorie des différences finies et le triangle harmonique
2. l'interpolation des tables et la quadrature du cercle
3. le développement de la notion d'exposant et des logarithmes

Les deux premières parties traitent essentiellement de la question principale : le rôle des tables dans l'apprentissage des mathématiques par le jeune Leibniz et l'influence qu'elles ont eu sur sa conception de l'art combinatoire comme outil de l'art d'inventer. La troisième partie s'intéresse à un axe de recherche qui procède des travaux présentés dans les deux parties précedentes. Mais nous verrons que la pratique tabulaire y est en concurrence notable avec l'application de la notion de forme.

La première partie revient sur la découverte par Leibniz du triangle harmonique et le développement, en parallèle, de la théorie des différences finies. Afin de mieux cerner ce que la démarche de Leibniz a d'original, nous commençons par évoquer les solutions au problème posé par Huygens, à l'origine des réflexions de Leibniz, chez trois auteurs contemporains : Mengoli, Huygens lui-même et Brouncker. Bien que tous aient, d'une manière ou d'une autre, raisonné de façon combinatoire, la pratique tabulaire du jeune Leibniz se distingue nettement par la richesse des conséquences qu'il en tire. De fait, la technique des triangles de différences, à la base de la théorie des différences finies, devient un outil général et universel d'analyse de progression que le philosophe n'aura de cesse d'employer toute sa vie durant.

Dans la seconde partie nous portons notre attention sur la pratique de l'interpolation. Afin de déterminer la quadrature du cercle, Wallis et Mengoli ont eu recours à la même méthode d'interpolation, dans des contextes *a priori* indépendants. Afin de mieux comprendre les conséquences de ces pratiques tabulaires sur les raisonnements de Leibniz, nous commençons par faire un état des lieux de ces deux solutions au problème de la quadrature du cercle, proposées par Wallis en 1655 et par Mengoli sur deux ouvrages, l'un de 1659 et l'autre de 1672. Les exemples de Wallis et Mengoli illustrent le rôle central que détient la pratique tabulaire vis-à-vis du raisonnement inductif en mathématique. Cela constitue l'un des aspects que Leibniz retiendra de la lecture de ces auteurs. La réception par Leibniz de ces deux méthodes est relativement peu documentée. C'est pourquoi nous pousserons notre analyse hors de notre période, en adjoignant à notre corpus quelques inédits des années 1680 voire 1690. La réception de Leibniz montre qu'il voit dans la pratique tabulaire de l'interpolation un formidable outil pour chercher une expression abrégée des quantités transcendantes. Ce projet, qu'il poursuit au moins jusque dans les années 1690, montre que les deux colonnes de l'art combinatoire, à savoir la forme et la table, ne sont pas considérées de façons disjointes et opposées, mais se complètent l'une l'autre dans le processus de découverte.

Dans la troisième partie, nous développons la thématique des exposants, qui constitue également un champ d'étude peu documenté. Dès les premières années parisiennes, les travaux de Wallis sur l'interpolation poussent Leibniz à réfléchir sur la notion d'exposant et notamment sur la transmutation que lui font subir les opérations de dérivation et d'intégration : $d(x^n) = nx^{n-1}dx$ et $(n+1)\int x^n dx = x^{n+1}$. Ces opérateurs différentiels transforment le coefficient exponentiel de la puissance en un coefficient multiplicatif. Le jeune philosophe observe ce phénomène à travers les méthodes de tangentes et de quadratures, bien avant que l'algorithme différentiel ne puisse le formaliser. En guise de transition avec la partie précédente, nous montrons donc la manière dont ces recherches engagent le jeune Leibniz à questionner la notion d'exposant, non seulement dans sa définition, mais dans sa substance ontologique elle-même et nous l'illustrons par un tour d'horizon des différentes méthodes de tangentes et de quadratures que Leibniz a lues à son arrivée à Paris, en insistant sur cet aspect : comment la solution mathématique parvient à transférer l'exposant vers une grandeur géométrique ? A l'inverse, nous nous intéressons ensuite à la notion de puissance pronique que développe Leibniz durant la période 1677-1680 et au travers de laquelle il tente de suivre le chemin inverse, à savoir traiter comme exponentielles des quantités qui ne le sont pas a priori. Leibniz est ainsi amené à voir dans l'exposant un outil puissant de la caractéristique, en ce qu'il peut désigner diverses sortes de quantités, voire même des choses qui ne sont pas quantitatives. De ces diverses réflexions nait un programme de recherche leibnizien relativement peu étudié, à savoir : le calcul exponentiel, dont la combinatoire constitue assurément l'une des sources principales d'inspiration

mais que Leibniz fonde également sur la courbe logarithmique à partir de laquelle il dérive des méthodes purement géométriques.

En amont de cet argumentaire, nous débutons par un prologue assez conséquent, dont l'objectif est de fournir au lecteur les éléments substantiels de notre étude qui se situent à la lisière de notre objet. Premièrement, nous nous proposons de mener la démarche nominaliste et diachronique qui conduit à parcourir la partie gauche de notre schéma, afin de montrer d'une part les liens étroits qu'entretiennent les diverses acceptions de la combinatoire chez Leibniz et d'autre part comment le philosophe parvient à les distinguer. Le second moment de ce prologue consiste à revenir sur le *terminus a quo* et le *terminus ad quem* de cette histoire, à savoir respectivement la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8) et l'*Historia et Origo Calculi Differentialis*. Concernant l'opuscule de jeunesse, nous commençons par établir les différences substantielles qui séparent d'un côté les projets d'écriture universelle et de logique inventive du jeune étudiant, et d'un autre le programme ambitieux et fluctuant de caractéristique universelle que le philosophe développera plus tard. Puis nous introduisons le thème central de notre thèse en donnant l'analyse exhaustive de toutes les tables de son traité, afin de pouvoir qualifier correctement la pratique tabulaire du jeune Leibniz avant son arrivée à Paris. Nous enchaînons sur l'*Historia et Origo Calculi Differentialis*, car c'est dans ce traité que se trouve le point d'entrée de notre enquête. L'étude comparative des deux versions connues de ce texte démontre le rôle central que Leibniz confère à la combinatoire à la fin de sa vie, dans la pratique tabulaire de sa jeunesse et la découverte des schémas des différences.

Le rôle de la combinatoire et des nombres combinatoires dans l'histoire de l'analyse des transcendants nous pousse à revoir le discours sur l'évolution de l'art combinatoire chez Leibniz ainsi que la signification de la combinatoire en tant qu'art d'inventer tels qu'ils peuvent émerger d'une démarche consistant à seulement suivre l'usage de ces catégories. Il s'agit donc d'intégrer aux analyses des projets et des discours programmatiques un aspect plus pratique et heuristique qui ouvre la focale sur une question plus large, à savoir celle du rôle qu'ont joué les tables dans la pratique de l'analyse au XVII$^{\text{ème}}$ siècle et la manière dont le jeune Leibniz a pu y reconnaitre l'empreinte d'une méthode générale, étroitement liée aux combinaisons et propre à développer l'art d'inventer.

## Etat de l'art

Au sein de l'œuvre immense de Leibniz (1646-1716), l'*Ars Combinatoria* constitue un domaine extrêmement vaste et riche. Pourtant, très peu de commentateurs en ont fait l'objet central de leurs études, si bien que sur ce sujet, il reste encore aujourd'hui beaucoup à voir et à dire. Cela dit, comme l'*Ars Combinatoria* représente assurément un objet majeur d'étude et de réflexion chez Leibniz tout au long de sa vie, on constate que cet aspect de la pensée du philosophe, quoique très rarement développé, est fréquemment mentionné par les commentateurs, que ce soit dans le domaine de la philosophie, de la logique ou des mathématiques, ou même de façon plus sporadique dans celui du droit, de la linguistique ou de la biologie.
Le commentaire a naturellement eu tendance à voir la naissance de l'*Ars Combinatoria* dans l'œuvre de jeunesse qui y était consacrée : la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8), rédigée par Leibniz en 1666, à la fin de ses études universitaires à Leipzig. La grande diversité des sujets abordés dans ce petit traité s'accorde parfaitement avec l'apparente étendue du champ de la combinatoire. Bien plus tard, en 1690, à l'occasion d'une réédition de cette œuvre sans son accord, Leibniz publie un article dans lequel il reconnait lui-même que malgré sa grande naïveté, la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8) contient les germes de l'*Ars Inveniendi*, c'est-à-dire la méthode pour inventer et découvrir. Mais il mentionne en premier lieu l'alphabet des pensées humaines et son projet de caractéristique universelle. Dès lors, on se laisse à envisager la silhouette de ce qu'a pu être la combinatoire pour Leibniz : un outil mathématique et une posture philosophique mise au service d'un unique grand projet, à savoir la caractéristique universelle. Ainsi les succès de la première accompagnent et se confondent avec les progrès de la seconde.

### Louis Couturat : l'interprétation logiciste

Telle est l'image de la combinatoire leibnizienne que nous a laissée Louis Couturat au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle, au travers de son ouvrage *La Logique de Leibniz*[14]. Il parait en 1901, soit un an après l'ouvrage de Bertrand Russell intitulé *A critical exposition of the philosophy of Leibniz*[15], qui voit déjà dans l'œuvre du philosophe allemand l'occasion d'une réflexion profonde sur la rénovation de la logique de son temps. Russell assume une démarche purement philosophique, qui doit s'émanciper, selon lui, des contraintes de la chronologie et de la contingence du temps :

> *Mais il subsiste toujours une attitude purement philosophique à l'égard des philosophes qui précèdent - une attitude par laquelle, sans tenir compte des dates et des influences, nous cherchons simplement à discerner quels sont les grands types de philosophies possibles, et nous nous orientons dans la recherche par l'étude des systèmes que défendent les grands philosophes du passé.* [16]

Couturat adopte cette même posture, mais l'assume beaucoup moins. Ce logicien français, versé dans la philologie, place quant à lui du côté de l'histoire les principales normes de rigueur méthodologique. En appuyant son travail sur l'étude d'un corpus entièrement inédit, Couturat attribue une forte valeur épistémologique à la preuve documentaire, sans pour autant la mettre au centre de ses préoccupations :

> *Toutefois, ces documents, si considérables qu'ils soient par leur nombre, leur étendue et leur intérêt, ne nous ont nullement obligé de modifier notre plan ni même de corriger nos conjectures chronologiques ; ils n'ont fait que combler des lacunes et confirmer notre interprétation. Ils ont surtout apporté un supplément de preuves à la conclusion essentielle de notre travail, à savoir que la métaphysique de Leibniz repose uniquement sur les principes de sa Logique et en procède tout entière.* [17]

Cette position méthodologique ambigüe a eu des conséquences considérables sur la réception de l'œuvre de Couturat, provoquant l'avénement d'un courant logiciste extrêmement important au sein du commentaire

14. [16] L. Couturat, *La Logique de Leibniz, d'après des documents inédits*, Alcan, Paris, 1901
15. [87] B. Russel, *A critical Exposition of the Philosophy of Leibniz*, Cambridge, 1900
16. [87] B. Russel, *A critical Exposition of the Philosophy of Leibniz*, *éd.* J. G. Slater, Routledge, Londres, 1992 - p.xix-xx, Préface de l'édition de 1900 : « But there remains always a purely philosophical attitude towards previous philosophers - an attitude in which, without regard to dates or influences, we seek simply to discorver what are the great types of possible philosophies, and guide ourselves in the search by investigating the systems advocated by the great philosophers of the past. »
17. [16] L. Couturat, *La Logique de Leibniz, d'après des documents inédits*, Alcan, Paris, 1901 - p.x, Préface.

du XX$^{ème}$ siècle. La transcription de ces nombreux manuscrits inédits [18] traitant de la logique leibnizienne, que Couturat publie en 1903, a été la source matérielle principale de nombreux travaux qui ont suivi. Ces nouveaux documents confirment de fait le portrait d'un projet leibnizien centré sur la logique, au sein duquel la combinatoire constitue un important rouage architectonique de la méthode de la « science générale » propre à construire la caractéristique universelle.

> *Mais, quand nous avons voulu remonter aux principes philosophiques de ces théories, nous avons aperçu, d'une part, qu'elles procédaient de la conception originale que Leibniz se faisait de la Mathématique universelle, et de son invention juvénile de la Combinatoire ; d'autre part, qu'elles se rattachaient étroitement à ses essais de Langue universelle, ains qu'à son grand projet d'Encyclopédie démonstrative qui l'occupa toute sa vie ; enfin, qu'il déduisait toutes ses thèses philosophiques des principes de sa « Science générale », c'est-à-dire de sa Métholodologie.* [19]

Bien que Couturat en fasse ici la distinction, l'*Ars Combinatoria*, la *Scientia Generalis*, la *Characteristica Universalis* et la *Speciosa Universalis* finissent par se confondre sous la plume du logicien français, et encore d'avantage chez ses lecteurs. De fait, de nombreux écrits de Leibniz, de différentes époques, peuvent venir corroborer ces traits d'égalité tirés entre telle ou telle catégorie, alimentant la confusion des termes. En plaçant la logique au centre du système, Couturat finit par tout y réduire, chaque catégorie n'étant dès lors que l'une des facettes d'un seul et même objet philosophique. La combinatoire n'y fait bien-sûr pas exception :

> *Enfin la Logique, et plus précisément l'Art d'inventer, dépend entièrement de la Combinatoire qui enseigne à trouver par ordre toutes les combinaisons possibles des concepts simples (ou de leurs signes) et à déterminer sûrement leurs relations d'inclusion ou d'exclusion, c'est-à-dire à découvrir toutes les vérités relatives à tel ou tel concept. De là est née l'idée d'une Spécieuse générale ou d'une Caractéristique universelle, c'est-à-dire d'une Algèbre logique qui remplacerait les concepts par des combinaisons de signes, et le raisonnement par une sorte de calcul, qui fournirait une méthode universelle et infaillible pour démontrer les propositions ou en découvrir de nouvelles, et qui serait à la fois un Art de juger et un Art d'inventer.* [20]

La combinatoire constitue donc pour Couturat le berceau du projet de caractéristique universelle, bâtie sur un système logique incarnant le cœur vital de l'œuvre philosophique et mathématique de Leibniz. Cette combinatoire est développée au sein de la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8), puis finit par prendre les contours d'un projet plus large, celui de la caractéristique. Le traité de 1666 sur les combinaisons tient donc une place centrale dans le travail interprétatif du logicien français, qui lui consacre par ailleurs plusieurs chapitres de son livre.

### Michel Serres : la diversité qui fait système

En 1968, dans *Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques* [21], Michel Serres constate l'avantage qu'il y a à considérer l'œuvre de Leibniz selon un point de vue particulier : logique, physique, métaphysique, historique, mathématique etc. :

> *Il nous paraît que, le plus souvent, les commentateurs de Leibniz ne se trompent pas : à chacun sa vérité, son point de vue, sa région privilégiée d'analyse. Il nous paraît enfin qu'un commentaire direct du système qui n'accueillerait pas tous les commentaires régionaux, qui ne concilierait pas les points de vue les plus divergents ne serait pas d'esprit leibnizien : le système ici est défini par cette possibilité d'accueil plurivoque des discours prononcés sur lui. On peut ici varier sur les exemples, et les multiplier autant qu'on le veut. Privilégier le sujet logique revient à reconstituer le système selon le fil « logiciste » ou panlogique ; et cela est possible, Couturat l'a montré, mais non Russell ; privilégier le sujet connaissant, quoique ce choix soit très maladroit, M. Belaval l'a montré, fait de l'auteur un rationaliste précritique et cela n'est pas faux à la rigueur ; partir de la notion de force, comme M. Guéroult, conduit à découvrir un métaphysicien dynamiste cohérent, ce qui est exact de nouveau ; l'examen de la monade redonne l'interprétation traditionnelle du pluralisme ; l'analyse des thèmes religieux et théologiques amène Baruzi à présenter un universalisme religieux et quasi mystique, ce*

18. [47] G. W. Leibniz, *Opuscules et fragments inédits de Leibniz : extraits des manuscrits de la Bibliothèque royale de Hanovre, éd.* L. Couturat, Alcan, Paris, 1903
19. [16] L. Couturat, *La Logique de Leibniz, d'après des documents inédits*, Alcan, Paris, 1901 - p.xii, Préface.
20. [16] L. Couturat, *La Logique de Leibniz, d'après des documents inédits*, Alcan, Paris, 1901 - p.50, Chapitre II.
21. [97] M. Serres, *Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques*, Presses Universitaires de France, Paris, 1968

*qui est acceptable ; l'étude de la jurisprudence introduit Grua à sa grande reconstitution théologique et juridique ; celle de l'histoire amène Olgiati à tout déduire à partir d'une certaine philosophie ou vision historique ; de la même manière, on sait l'utilisation que Brunschvicg et Cassirer ont fait des mathématiques, et ainsi de suite.* [22]

Dans cette liste, Serres néglige cependant l'importance du corpus. Ainsi, étant accompagnés d'importants recueils de textes inédits, les ouvrages de Couturat ou de Grua [23] tiennent une place particulière au sein de ce paysage exégétique. Dans cet ouvrage, Serres souhaite donc parvenir à un discours général et cohérent qui fasse système de tous ces sous-systèmes régionaux et disciplinaires. Selon lui, la combinatoire constitue le pilier de cet édifice hardi qu'il projette. Leibniz ayant laissé quelques indices sur le projet qu'il a eu, dans les années 1680, d'écrire un traité mature sur l'art combinatoire, Serres envisage l'entreprise audacieuse d'en reconstituer le contenu, en se fondant sur la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8), les inédits de Couturat, au sein desquels le logicien avait déjà repéré un ensemble plus ou moins autonome esquissant le projet d'un nouveau *de Arte Combinatoria*, et daté de 1680, et enfin *la Monadologie*, datant de la fin de la vie de Leibniz :

*Peut-on concevoir comment se serait présenté, à supposer qu'il eût été achevé, le De Arte de l'âge mûr ? Il nous aurait dispensé de notre thèse, car c'est lui que nous projetons : il aurait sans doute énoncé more mathematico la syntaxe élémentaire du système. Faute de ce géométral, force nous est d'être content de la monnaie des perspectives. A la manière des paléontologues, il y aurait intérêt, par elles, à le restituer. Trois monuments, entre autres, concourraient à cette entreprise : les Opuscules de 1680, au centre, le traité de jeunesse, qui les annonce, et, par exemple, la Monadologie, qui expose schématiquement la doctrine terminale.* [24]

Serres se place donc dans l'héritage direct de Couturat. Mais bien que son œuvre soit d'une importance considérable et que ses arguments soient légitimes, si l'on considère l'état du corpus et du commentaire dont il hérite, l'objectif de Serres, ancré dans son propre agenda philosophique, estompe les attributs de licence historique donnés à son projet de reconstruction. Pourtant Michel Serres porte certains scrupules aux rigueurs de l'histoire en remplaçant l'achèvement logiciste de Couturat par un agenda métaphysique plus proche, selon lui, des vues leibniziennes. Il rompt avec l'idée que la combinatoire sert principalement le dessein de la caractéristique. Cette rupture n'est pas liée à la réception d'un nouveau corpus, comme nous l'avons vu, mais à l'interprétation nouvelle des matériaux déjà disponibles. Michel Serres apporte notamment un regard totalement neuf sur la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8) :

*Il envisage d'appliquer la combinatoire aux mathématiques, arithmétique et géométrie, à la logique, théorie du syllogisme et divisions polytomiques, à l'idée ancienne, mais rajeunie, d'une langue universelle, aux sciences du décryptement et du décodage (qui serviront plus tard de modèles à la spécieuse), au projet embryonnaire d'une machine à calculer, à la musique, à l'alchimie des éléments, au droit, jurisprudence et théologie, à la politique (théorie des formes de gouvernement), à la stratégie et finalement à la prosodie latine. Tout lecteur instruit des œuvres ultérieures reconnaît là des chemins où le combinateur exercera longtemps sa constance, de la théorie de la numération à la caractéristique, du calcul logique à l'algèbre, des sciences politiques à la philologie. Suivons quelques-unes de ces directions, en ayant soin de délaisser les plus rebattues par le commentaire.* [25]

La combinatoire est placée au cœur d'un grand système architectonique dont la caractéristique n'est qu'une des faces. Bien que Serres n'efface pas complètement ce trait d'égalité mis en place par Couturat entre combinatoire et caractéristique, il en renverse néanmoins le sens d'identification. Ce n'est plus la caractéristique qui apparait d'un certain point de vue comme combinatoire, mais la combinatoire qui s'exprime dans une certaine région du système comme une caractéristique. En donnant ainsi la primeur à la combinatoire, Serres en décèle un aspect fondamental qui avait été largement minimisé par le commentaire antérieur : la table.

22. [97] M. Serres, *Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques*, Presses Universitaires de France, Paris, 1968 - p.26-27

23. Comme Couturat, Gaston Grua a édité un important recueil de textes inédits en 1948, pour sa part sur la thématique de la jurisprudence [48] G. W. Leibniz, *Textes inédits : d'après les manuscrits de la Bibliothèque provinciale de Hanovre, éd.* G. Grua, Presses Universitaires de France, Paris, 1948.

24. [97] M. Serres, *Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques*, Presses Universitaires de France, Paris, 1968 - p.410

25. [97] M. Serres, *Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques*, Presses Universitaires de France, Paris, 1968 - p.424

*Issue de l'art combinatoire, la méthode tabulaire envahit la mathématique. Lorsqu'un tableau fait correspondre, par tous chemins assignables, un quelconque de ses éléments et la multiplicité qu'il ordonne et déploie, il est harmonique.* [26]

L'aspect tabulaire de la combinatoire est assurément fondamental pour comprendre son évolution au sein de la pensée de Leibniz. Mais, cet aspect est enchâssé dans la démarche systémique et anhistorique de Michel Serres, qui met en regard et sans contexte des extraits séparés de plusieurs décennies. Ainsi, s'il met en évidence de façon remarquable la position centrale des tables dans la pensée combinatoire leibnizienne, il ne dit presque rien sur le rôle qu'elles ont pu tenir dans l'évolution diachronique de cette pensée. Ceci s'explique bien-sûr par sa méthode qui plie différents concepts et différentes idées de périodes parfois incompatibles dans un même et unique grand système reconstruit, et enferme ainsi l'œuvre de Leibniz dans une perspective verticale où la moindre inflexion que l'historien souhaiterait expliquer devient une incohérence que le philosophe doit résoudre. Cependant, le silence de Serres sur l'implication des tables dans la naissance de la combinatoire leibnizienne peut être également éclairé par une contrainte bien plus forte, à savoir la taille extrêmement réduite du corpus mathématique édité à son époque. Là où Couturat avait fait un choix clair au sein de l'intégralité des manuscrits auxquels il avait eu accès à la bibliothèque de Hanovre, Serres n'avait quant à lui à sa disposition que les éditions de Gerhardt. Lorsqu'il publie son ouvrage en 1969, les manuscrits mathématiques qui traitent de la combinatoire se trouvaient alors dans les mains d'un jeune historien des mathématiques qui y consacrait son travail de thèse : Eberhard Knobloch.

### Eberhard Knobloch : le tournant historiographique

Knobloch publie en 1973 *Die mathematischen Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik* [27]. Comme Couturat, Knobloch publie trois ans plus tard un recueil d'inédits [28] qui ont servi de base à son analyse. Au travers de ces nouveaux matériaux, l'historien allemand décortique les travaux purement mathématiques de Leibniz, concernant la combinatoire. Son apport à nos connaissances sur l'œuvre mathématique de Leibniz est majeur. Il met en effet au jour de nombreux travaux et sujets d'analyse jusqu'ici insoupçonnés des spécialistes, notamment autour de la théorie des fonctions symétriques. En 1980, il poursuit son investigation en publiant un deuxième recueil [29] de textes inconnus jusqu'alors et consacrés à la théorie des déterminants. Knobloch est l'un des premiers commentateurs des œuvres combinatoires de Leibniz à adopter une vraie démarche d'historien. Ce faisant, son choix de corpus n'est pas orienté par un discours systématique sur l'œuvre ou la pensée de Leibniz, mais plutôt par une typologie de sa propre époque, visant à classer et ordonner les sources du passé selon des catégories qui sont propres à la science contemporaine, et donc pour son cas, la combinatoire moderne :

*Si l'on souhaite s'acquitter d'une présentation, au moins rudimentaire, des documents en question, on peut distinguer cinq groupes de problèmes, si l'on exclut d'emblée les études exclusivement algébriques ou de théorie des nombres :*
*1. - La combinatoire au sens étroit (les opérations combinatoires de base)*
*2. - Les fonctions symétriques (en lien avec la théorie des équations)*
*3. - Les partitions (sous-domaine de la théorie additive des nombres)*
*4. - Le calcul des déterminants (élimination dans les système d'équations linéaires et dans les équations de plus haut degré)*
*5. - Le calcul des probabilités et les domaines connexes (la théorie de jeux, le calcul des rentes et des intérêts)* [30]

26. [97] M. Serres, *Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques*, Presses Universitaires de France, Paris, 1968 - p.424

27. [39] E. Knobloch, *Die mathematischen Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik, auf grund fast ausschliesslich handschriftlicher aufzeichnungen dargelegt und kommentiert* dans les *Studia Leibnitiana Supplementa*, Tome 11, Franz Steiner Verlag, Wiesbaden, 1973

28. [49] G. W. Leibniz, *Die Mathematischen Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik, Textband, im Anschluß an den gleichnamigen Abhandlungsband zum ersten Mal nach den Originalhandschrift herausgegeben*, *éd.* E. Knobloch, dans les *Studia Leibnitiana Supplementa*, Tome 16, Franz Steiner Verlag, Wiesbaden, 1976

29. [50] G. W. Leibniz, *Der Beginn der Determinantentheorie, Leibnizens nachgelassene Studien zum Determinanten-kalkül, Textband, im Zusammenhang mit dem gleichnamigen Abhandlungsband fast ausschließlich zum ersten Mal nach den Originalschriften*, *éd.* E. Knobloch, dans *Arbor Scientiarum*, Série B, Tome 2, Gerstenberg Verlag, Hildesheim, 1980

30. [39] E. Knobloch, *Die mathematischen Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik, auf grund fast ausschliesslich*

Mais les manuscrits qu'analyse Knobloch forment en réalité un ensemble presque disjoint des sources philosophiques et programmatiques interprétées par Serres et Couturat. Dans ce cadre, les deux discours ont trouvé le moyen de coexister sans réelle dissonance. En effet, Knobloch ne fait qu'évoquer cet aspect bien plus général et transcendant qu'a pu avoir une certaine combinatoire pour Leibniz, or c'est bien cette dernière dont Serres et Couturat se souciaient. L'approche internaliste de Knobloch accroit d'avantage sa séparation avec les argumentaires philosophiques. Il décrit les démonstrations et les avancées techniques de Leibniz dans un langage contemporain, traduit ses notations et reconstitue les réseaux d'influences. Ses interlocuteurs sont alors d'autres mathématiciens, contemporains, antérieurs ou bien postérieurs. Knobloch souhaite ainsi d'une part placer les travaux de Leibniz au sein d'une échelle de temps plus globale et d'autre part rendre ces travaux accessibles au lecteur actuel. La découverte devient elle-même l'objet central du discours, repoussant au second plan la question épistémologique du rôle de cette même découverte dans l'œuvre de l'auteur.

*handschriftlicher aufzeichnungen dargelegt und kommentiert* dans les *Studia Leibnitiana Supplementa*, Tome 11, Franz Steiner Verlag, Wiesbaden, 1973 - p.XIV, Introduction : « Will man eine wenigstens grobe thematische Einleitung der in Frage kommenden Aufzeichnungen vornehmen, so lassen sich fünf Problemkreise unterscheiden, falls man die ausschließlich algebraischen und zahlentheoretischen Studien von vornherein ausklammert : 1. Kombinatorik im engeren Sinn (die kombinatorischen Grundoperationen), 2. Symmetrische Funktionen (im Zusammenhang mit der Gleichungstheorie), 3. Partitionen (Teilgebiet der additiven Zahltheorie), 4. Determinantenkalkül (Elimination bei linearen Gleichungssystemen und Gleichungen höheren Grades), 5. Wahrscheinlichkeitsrechnung und verwandte Gebiete (Spieltheorie, Renten- und Zinsrechnung). »

# Méthode

A travers la notion de table, la combinatoire renvoie à l'*ars inveniendi*, qui constitue une problématique majeure de philosophie des mathématiques. C'est cet aspect qui a sans doute le plus infléchi notre approche méthodologique, plaçant dès lors les méthodes de découverte au cœur de nos préoccupations. La table a été pour Leibniz un outil performant pour la découverte de nouveaux théorèmes, et il convient de bien saisir comment ce mode de représentation s'est développé au sein des premiers travaux de Leibniz et comment son émergence s'articule avec la pratique concrète des mathématiques du jeune homme. Bien que nos catégories et notre approche méthodologique aient été façonnées par une démarche plutôt retrospective, prenant pied dans l'*Historia et Origo calculi differentialis*, l'essentiel de notre travail s'inscrit de fait, dans une procédure chronologique et diachronique. Il s'agit presque d'appliquer la combinatoire à la méthode historiographique elle-même, en considérant chaque source comme la combinaison des matériaux précédents. Ainsi le corpus pourrait s'inscrire et se structurer au sein d'une grande table combinatoire, dont les différentes dispositions révèleraient les mouvements de pensée du philosophe.

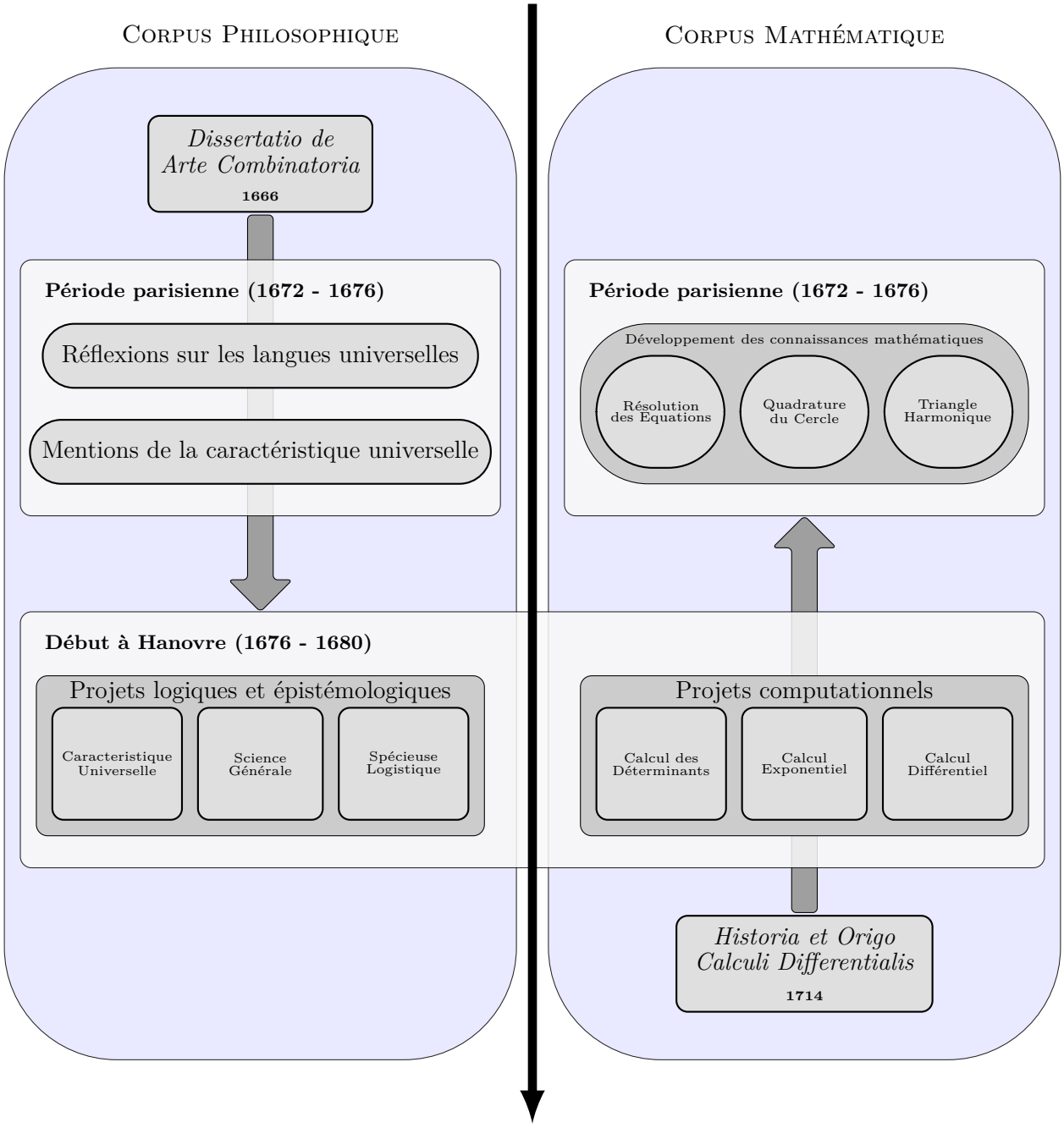
## Démarche de l'enquête

Les apports de Serres et de Knobloch sont donc décisifs, mais ils ne permettent pas de déconstruire complètement ce lien qu'avait bâti Louis Couturat entre combinatoire et caractéristique, et qui va se prolonger au sein du commentaire jusqu'à la fin du XXème siècle. Bien qu'irréprochable sur le plan historiographique, Knobloch n'accorde que peu de place dans son analyse à la genèse des travaux mathématiques de Leibniz, donnant à son exposé l'impression d'une description plutôt fixiste. L'ouvrage de Serres, quant à lui, dévoile la dynamique organique qui bouillonne au sein de la conception leibnizienne de la combinatoire, mais il passe outre l'aspect chronologique. L'analyse de Knobloch fait la part belle à la succession chronologique des faits, mais laisse au second plan l'organisation dynamique des idées. Nous nous proposons de compléter ces approches par un double renversement méthodologique.

### Double renversement

Le discours de Couturat correspond à une certaine conception leibnizienne de l'*Ars Combinatoria*. Celui que Leibniz exprime dans les inédits que Couturat a publiés et qu'on date des premières années à Hanovre du jeune philosophe, c'est-à-dire entre 1677 et 1685. Durant ces années, Leibniz échafaude de nombreux projets philosophiques de grande envergure, plus ou moins liés à son projet de caractéristique universelle. C'est dans des textes de cette période que l'on trouvera le plus volontiers les fameuses identifications, de la plume de Leibniz lui-même, entre art combinatoire et caractéristique universelle. Durant cette période, Leibniz décrit l'art combinatoire comme la science des formes et des formules, du semblable et du dissemblable. La combinatoire a donc de fait un lien très étroit avec la notion de forme qui est constitutive de certaines versions de la caractéristique. Pour Couturat, cette conception de la combinatoire hérite en droite ligne de la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8), dans laquelle la caractéristique universelle joue pour lui un rôle essentiel. Le rôle fondateur donné à cet opuscule de jeunesse tient une place centrale dans l'image grandiose et universelle que Couturat a bâtie pour l'*Ars Combinatoria*. Pour établir un portrait de la combinatoire chez Leibniz qui soit plus fidèle aux textes, et ainsi rompre avec l'héritage de Couturat concernant cette question, une première étape a consisté à rendre à ce texte extrêmement riche et touffu toute sa complexité afin de restaurer la juste place qu'y tiennent les projets de langue universelle [31].
En examinant le corpus mathématique, et plus particulièrement les premiers travaux parisiens, il apparait clairement que l'acception logiciste de la combinatoire échoue à rendre compte des premières influences de l'*Ars Combinatoria* dans la pratique mathématique du jeune Leibniz. La notion de table, mise en avant par Michel Serres, est en revanche extrêmement performante au sein des réflexions de cette époque, et ce particulièrement au travers de la notion fondamentale de triangle de différences, que Leibniz développe durant l'année 1672, dès son arrivée à Paris. Cet outil d'analyse joue un rôle central dans l'émergence du calcul différentiel et Leibniz l'explique lui-même à la fin de sa vie, dans le célèbre traité *Historia et Origo Calculi Differentialis* [32], probablement rédigé aux alentours de 1714. Son caractère autobiographique confère à ce texte une valeurs extrêmement intéressante pour l'historiographie du corpus leibnizien. En plus de fournir une description rétrospective de sa découverte, l'auteur insiste sur sa conviction que l'art d'inventer tient une place cruciale dans cette démarche historique. Dès lors, par un premier renversement, nous pouvons aborder les textes mathématiques de jeunesse par le biais d'une grille de lecture nouvelle. Au lieu de se demander quels furent les fruits de la pensée combinatoire développée au sein de la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8), on peut plutôt chercher les racines du discours rétrospectif exposé dans l'*Historia et Origo Calculi Differentialis*. Alors que la première approche a poussé Couturat à concentrer son attention sur les grands projets logiques des premières années à Hanovre, cette seconde démarche nous conduit naturellement vers l'étude du corpus mathématique parisien et plus particulièrement des trois principaux accomplissements de Leibniz durant cette période : le triangle harmonique, la quadrature du cercle et la résolution des équations.

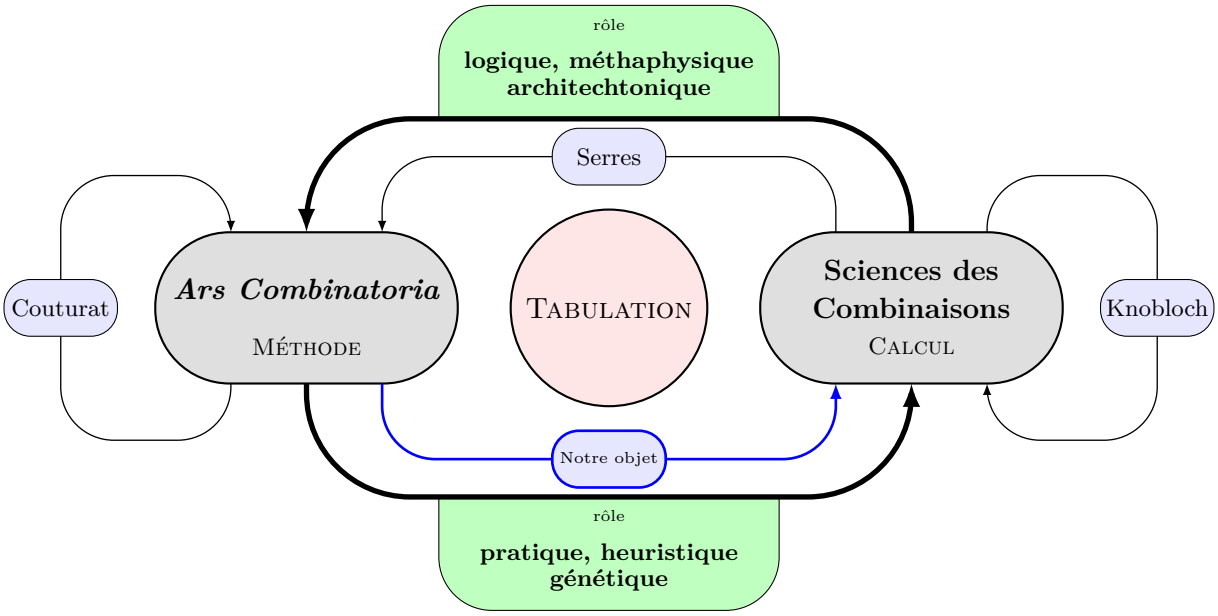
31. Ce travail a été réalisé au sein d'un mémoire de recherche, précédant le doctorat. Nous en donnerons les éléments utiles dans l'introduction du présent travail.
32. [46] G.W. Leibniz, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, ed. Gerhardt, Hahn, 1846




En dépit de son caractère artificiel et lacunaire, cette figure méthodologique illustre le rôle décisif de la catégorie disciplinaire dans le choix historiographique. En effet, la combinatoire désigne à la fois une discipline mathématique et une méthode philosophique. Couturat a traité principalement de l'*Ars Combinatoria* pour lui-même, dans une approche théorique et philosophique tandis que Knobloch a circonscrit son objet à la science mathématique des combinaisons, également prise pour elle-même. Au travers de la notion de table, Serres a construit un pont entre la science combinatoire quantitative et l'*Ars Combinatoria* méthodologique. Mais ce pont n'est présenté que dans une seule direction, à savoir l'utilisation des techniques de calcul mathématique au service d'une construction logique, métaphysique et architechtonique. En réalité, Couturat s'occupe de la relation réciproque dans l'appendice III de *La Logique de Leibniz*, intitulé « Sur quelques inventions mathématiques de Leibniz qui se rapportent à la combinatoire et à la caractéristique » [33]. Couturat y traite effectivement des applications concrètes de la méthode combinatoire au sein des mathématiques. Mais le rôle prépondérant qu'il attribue à la caractéristique oriente ses intérêts vers les travaux plus tardifs, qui gravitent autour du calcul formel, à savoir les déterminants, les nombres fictifs, le système binaire, les questions de primalité et enfin les fonctions symétriques, bien

33. [16] L. Couturat, *La Logique de Leibniz, d'après des documents inédits*, Alcan, Paris, 1901 - p.473-500.

que cette dénomination soit bien plus tardive, et employée par Knobloch comme nous l'avons vu. Il délaisse ainsi la période parisienne et la formation du savoir mathématique du jeune Leibniz. Le deuxième renversement consiste donc à étudier comme Couturat la manière réciproque dont l'*Ars Combinatoria* s'applique comme méthode dans la construction mathématique. Mais contrairement à ce dernier, nous allons porter notre intérêt principalement sur la période parisienne et les première années à Hanovre. Ce changement de corpus s'accompagne d'une nouvelle approche méthodologique, que l'on peut qualifier de génétique, centrée sur la pratique et l'heuristique. Nous constaterons également, comme Michel Serres, que la tabulation tient une place centrale dans cet édifice, car la table constitue à la fois un objet mathématique, un outil de calcul et une méthode de classification.




Le travail de déconstruction qu'il reste à faire va donc consister à compléter ces trois précieux apports. Et ceci pourra être accompli grâce à l'étude d'un aspect de la combinatoire leibnizienne qui n'a pas encore bénéficié des soins qu'il mérite pourtant : les méthodes de découverte. La compréhension de l'évolution dynamique et diachronique de cette pensée combinatoire requiert de consacrer la plus grande attention à la manière dont cet art combinatoire est né et a évolué au cours de la vie de Leibniz. Cet art combinatoire, pris au sens général et philosophique, apparaît non seulement dans les discours de Leibniz qui s'y rapporte, comme le commentaire l'a déjà bien relevé, mais également au travers de ses méthodes concrètes de travail et notamment sa pratique des mathématiques. Cette manifestation se réalise notamment dans l'émergence des tables et la pratique tabulaire au sein des écrits mathématiques. Le premier objet de notre recherche consiste donc à pousser l'investigation au cœur des divers brouillons et ébauches mathématiques de Leibniz afin que se révèle une nouvelle conception épistémologique de l'*Ars Combinatoria* en tant qu'art d'inventer.

## Les sources de Leibniz

Lorsque l'on regarde la littérature actuelle à propos de l'œuvre de Leibniz, et au regard des travaux passés, on constate qu'aujourd'hui, l'une des principales préoccupations du commentaire leibnizien est d'historiciser sa pensée, c'est-à-dire la considérer dans son évolution, portée par un temps long [34]. L'accroissement progressif du corpus transcrit et disponible dans l'édition critique ainsi que la numérisation d'une grande partie des manuscrits justifient cette volonté d'insister sur l'articulation entre, d'une part l'analyse conceptuelle des idées véhiculées par les textes et d'autre part les éléments biographiques et contextuels ainsi l'ordre et la succession relative des sources. Il ne s'agit donc plus, comme on le trouve dans la littérature du XX$^{\text{ème}}$ siècle, d'avoir l'objectif asymptotique de retrouver ou rebâtir une grande théorie cohérente et unifiée au travers des textes laissés par Leibniz. Ces approches, comme celle de Michel Serres dans sa thèse [35], ne sont pas problématiques en elles-mêmes, particulièrement dans le cas bien fréquent où les auteurs inscrivent leurs travaux dans le cadre d'une démarche de philosophe plus que d'historien. Faire émerger l'ordre d'un corpus issu d'un esprit aussi riche et productif que celui de Leibniz est assurément une entreprise pertinente qui a montré sa fécondité au travers des ouvrages enthousiastes de ces lecteurs philosophes. Pourtant, la remise en cause qu'induisent les nouvelles pratiques des études leibniziennes ne peuvent pas simplement se réduire à un processus mécanique où l'élargissement du corpus disponible aurait poussé l'histoire à prendre le pas sur la philosophie. La prise en compte d'éléments contextuels propres à la démarche des historiens, comme la datation, la nature du texte ou son environnement matériel alimentent d'autant la réflexion des philosophes en intégrant dans leurs analyses les hésitations, errements et les ambiguïtés de la pensée leibnizienne.

### Etat du corpus

Leibniz a beaucoup écrit. Vraiment beaucoup. Il semble avoir eu toute sa vie ce désir et ce besoin d'écrire absolument tout ce qui lui passe par la tête, allant d'ambitieux traités rédigés en trois ou quatre versions sur plusieurs centaines de pages à de minuscules observations griffonnées sur des billets ou des bouts de papier qui se comptent par milliers. Ainsi, on estime son œuvre entre 150 000 et 200 000 pages manuscrites, presque intégralement conservées à Hanovre. Cette masse gigantesque d'écrits constitue assurément la première spécificité du corpus leibnizien. Concernant cet aspect des sources, la principale conséquence est d'ordre historiographique. Le projet vertigineux d'entreprendre l'édition complète de cet océan de lettres et de manuscrits n'a émergé qu'à la première moitié du XX$^{\text{ème}}$ siècle, et ce n'est qu'au cours de la seconde que l'*Akademie Verlag* a pu acquérir des moyens à la mesure de son ambition. Avant le lancement de ce projet surhumain, les éditeurs ont du, nécessairement, faire des sélections et des choix fondés sur leur propre intérêt ainsi que sur la vision très parcellaire du corpus dont ils avaient eux-mêmes héritée. Du fait de cette histoire éditoriale, la réception de l'œuvre de Leibniz a été, et est encore, un processus complexe et dynamique impliquant travestissements puis rétablissements, reconstructions puis réhabilitations. La figure elle-même du philosophe a dû muer et s'accommoder aux traits changeants imposés par les courants tumultueux de son abondant commentaire.
A cette pratique quotidienne et continue de l'écriture s'ajoute un autre aspect significatif quant à la nature des sources, à savoir que la quasi intégralité des sources nous est parvenue. La tradition éditoriale en cours au XVII$^{\text{ième}}$ siècle consistait à détruire tous les manuscrits une fois l'édition achevée. L'œuvre de Leibniz a pu échapper à cette destruction en partie grâce au fait qu'il n'a que très peu publié, en tout cas, très peu par rapport à la taille de ses travaux.

*J'ai écrit d'innombrables choses sur d'innombrables sujets, mais j'ai peu publié et sur peu de choses* [36]

Mais la conservation des manuscrits ne tient pas seulement au fait qu'il a pu, en ne publiant pas ses écrits, contourner la coutume des éditeurs. Les sources témoignent du souci profond qu'avait Leibniz lui-même de conserver ses documents, afin de pouvoir les réutiliser plus tard. Il n'a pas toujours pu montrer la rigueur d'organisation qu'il escomptait comme en témoigne certaines lettres :

34. *Cf* [32] A. Heinekamp, *L'état Actuel de la Recherche Leibnizienne*, dans *Les Etudes Philosophiques*, Vol.2, 1989 - p.139-160

35. [97] M. Serres, *Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques*, Presses Universitaires de France, Paris, 1968

36. A III, 7 N.88, Lettre à Jacques Bernoulli de début avril 1697 - p.364 : « scripsi innumera, et de innumeris, sed edidi pauca et de paucis »

> *Je me souviens d'avoir médité d'avantage autres fois sur cette matière, mais je l'ay mis sur des papiers, qui ne sont pas rangés* [37]

Pourtant, on sait qu'il avait une grande armoire dans sa maison de Hanovre où il a vécu de l'âge de trente ans jusqu'à sa mort et dans laquelle il rangeait ses documents. Cet aspect de son travail est peu documenté car les manuscrits ne nous sont parvenus qu'après avoir subi un classement plus ou moins arbitraire de la part des premières personnes qui se sont chargées de les conserver. Ainsi, on ne dispose que de peu, voire pas de sources concernant sa méthode de classement et d'archivage. Néanmoins, on peut dire que le premier archiviste, historien et interprète des écrits de Leibniz est sans doute Leibniz lui-même. La deuxième spécificité du corpus est donc qu'il a vraisemblablement en grande partie servi lui-même de source à son propre auteur. Il faut tout de même remarquer la chose suivante : si Leibniz conserve scrupuleusement ses documents pour y revenir plus tard, il lui arrive fréquemment de ne pas le faire et de reprendre depuis le départ une recherche qu'il avait déjà menée assez loin auparavant :

> *Quand j'ay fait quelque chose, je l'oublie presque entierement au bout de quelques mois, et plustost que de le chercher dans un chaos de brouillons que je n'ay pas le loisir de digerer, et de marquer par rubriques ; je suis obligé de faire le travail tout de nouveau. On est heureux dans une grande ville, où l'on trouve des amis de toute façon, dont les assistances et concours à un même dessein soulagent merveilleusement. J'ay souvent souhaitté un jeune homme profond dans l'analyse, qui en m'assistant auroit trouvé encor de quoy se signaler luy même, ce qui luy auroit depuis servi de recommandation ; mais on n'en trouve point de cette sorte dans ce pays cy, ny dans le voisinage.* [38]

Enfin, la troisième et dernière spécificité de ce corpus qui achève de rendre unique l'œuvre de cet auteur, se trouve dans la place qu'y tient la correspondance. Une des raisons pouvant expliquer le nombre très faible des publications de Leibniz se trouve dans l'immense correspondance qu'il a entretenu sa vie durant avec plus d'un millier d'interlocuteurs, ce qui lui a permis de diffuser nombre de ses idées autrement que par l'intermédiaire d'un livre. La correspondance de Leibniz nous donne ainsi l'accès aux relations d'innombrables acteurs scientifiques, religieux et politiques du monde entier, et elle constitue donc un patrimoine extrêmement précieux, témoin monumental de la société occidentale de cette période ainsi que des relations qu'entretenait le monde chrétien avec le reste de la planète.

La plupart des œuvres mathématiques de la période parisienne ont fait l'objet d'une édition critique et se trouvent au sein des huit premiers volumes [39] de la septième série de l'*Akademie*. A partir de 1676 et du retour à Hanovre, aucun texte mathématique ne bénéficie d'une telle édition. Il existe néanmoins de nombreuses éditions de textes mathématiques plus tardifs que les parisiens, parfois munies de traduction, mais sur les sujets que nous traitons, à savoir essentiellement les exposants et l'interpolation des tables, tous les manuscrits qui sont postérieurs à Paris sont inédits.

### Etude des brouillons

L'œuvre mathématique de Leibniz est majoritairement constituée de brouillons. Mais, à quelques exceptions près, ces brouillons ne sont pas les ébauches d'un projet de livre ou de traité, et ne s'inscrivent donc pas dans une démarche de publication. Concernant les lettres, le sujet est d'avantage complexe, puisqu'on sait que Leibniz joint parfois des brouillons à ses lettres :

> *J'ay voulu hazarder mon brouillon même, tel que je l'ay gardé car je ne vous en avois envoyé que la copie. S'il y a quelque chose de mal écrit, peutestre que Zabani qui connoist mon écriture et mes notes le pourra debrouiller, si la chose en vaut la peine.* [40]

Ainsi, on ne peut jamais affirmer qu'un document est uniquement conçu pour l'usage personnel de Leibniz et de personne d'autre. Cela étant dit, la nature de ce corpus nous amène à une remarque générale, qui est largement valable pour une part significative des études du corpus mathématique leibnizien : le contenu n'ayant pas pour objectif d'être publié, il est difficile d'établir entre l'auteur et ses textes

37. A I, 18 N.174, Supplément à la lettre à Jean-Gabriel Sparwenfeld du 11 janvier 1700 - p.284
38. A III, 5, N.138, Lettre au Marquis Guillaume de l'Hospital de mi-mars 1693 - p.506.
39. A la date où nous publions notre travail, le huitième volume n'est pas encore publié mais les premières épreuves sont disponibles en préprint.
40. A I, 18, N.163 - Lettre de Leibniz à Jean-Gabriel Sparwenfeld du 4 janvier 1700 - p.261.

un même lien de responsabilité que celui qui l'attache à des œuvres publiées et discutées par d'autres. En effet, l'auteur écrit de façon plus libre sur un brouillon, dans un contexte d'intimité intellectuelle. Mais alors deux interprétations opposées se présentent à nous. Ou bien cet acte libre témoigne par sa spontanéité, d'un contact plus rapproché avec sa pensée intime. Ou bien, au contraire, n'étant pas lié à la rigueur qu'impose un texte publié et assumé, l'auteur s'autorise à prendre des positions qu'il n'oserait pas tenir publiquement, étant lui-même en son fort intérieur convaincu de leurs fragilités. Ainsi, de façon contradictoire, ce qui est écrit au brouillon peut être à la fois considéré comme plus fidèle et comme moins fidèle.

Certes, l'objectif de l'historien des sciences n'est pas et ne peut pas être de rétablir les convictions intimes des acteurs qu'il étudie. Il s'agit naturellement d'adopter plutôt une posture positiviste vis-à-vis des sources, voir phénoménologique pour les plus extrêmes, en considérant seulement les témoins que nous avons à disposition et en assumant qu'ils ne témoignent que subjectivement et de façon parcellaire d'une réalité historique à jamais intangible. Malgré cela, les écrits confidentiels de Leibniz doivent être considérés avec d'avantage de prudence, lorsqu'il s'agit d'en inférer des conséquences sur l'évolution de sa pensée.

## Tables, formes et combinatoire

Faire l'étude de l'art combinatoire au travers d'une pratique matérielle comme les tables pose, en terme de méthode pour l'historien, de nombreux défis à relever. La combinatoire, bien qu'elle soit inévitablement le fruit d'une conception subjective qui nous est propre dans certains de ses aspects, n'est pourtant pas seulement le produit de notre seule culture scientifique et philosophique, et elle ne peut pas l'être, au risque de projeter sans le moindre filtre nos propres enjeux théoriques et méthodologiques dans un corpus et un contexte totalement anachroniques, et de nous retrouver dès lors prisonniers d'une grille de lecture inadéquate.

### En quoi une table ou une forme est combinatoire ?

La table et la forme sont en réalité les deux faces d'une même pièce, d'un même modèle qui permet de mettre en rapport changement d'états et changement de dispositions. Lorsqu'on explicite ce modèle, ou qu'on le déplie pour reprendre une expression de Gilles Deleuze, on obtient la table, où toutes les parties sont exhibées sur un même espace qui contient en lui l'univers des permutations et des possibles. On peut explorer d'un seul regard toutes les relations des parties entre elles. Ainsi, les permutations sont des opérations extérieures qui laissent le tout et ses constituants fixes et inaliénables. Lorsqu'au contraire, on plie le modèle et qu'on le contracte, on obtient la forme. Elle ne représente que la permutation des objets mais plus les objets eux-mêmes. La permutation est interne à la forme, comme cachée sous sa composition syntaxique. C'est dans l'identité des formes, et particulièrement l'identité remarquable, que s'exprime la persistance du tout au travers des opérations de permutation, et ainsi l'action de la permutation se trouve révélée. Ainsi, la table et la forme permettent de représenter pour l'un et de révéler pour l'autre la transmutation issue des opérations de permutation. Les combinaisons s'expriment également au travers de ces deux outils. En effet, les tables et les formes peuvent se combiner entre elles respectivement sans perdre leur puissance de représentation ou de révélation.

### Lire une table

La table est un espace où les termes sont placés à des lieux qui indiquent toutes les relations qu'ils entretiennent entre eux. Ces relations ne figurent pas nécessairement sur la table. Ainsi, on note la chose suivante, qui doit être considérée comme l'axiome principal d'une démarche d'analyse sur des tables : celles-ci renferment quantité de raisonnements implicites. Voici un exemple très simple qui l'illustre remarquablement bien :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 |

A première vue, cette table présente deux lignes de nombres en progression. La première est la progression des entiers naturels et la seconde est la progression géométrique double. Ainsi, on construit la première ligne en ajoutant 1 à chaque rang, et la seconde en multipliant par 2. Mais, nous pouvons également considérer la table comme sept paires de nombres en colonne. Le nombre de bas est obtenu en multipliant le facteur 2 autant que le nombre de haut possède d'unités. La construction de la table et la définition des termes est radicalement différente suivant le point de vue que l'on adopte.

Les très nombreuses tables que nous trouvons au sein du corpus leibnizien et dont nous allons faire, pour une partie d'entre elles, l'analyse dans ce travail de thèse, ne sont pas systématiquement accompagnées d'un paratexte qui décrit leurs structures. Et nous montrerons que parfois même la table et le paratexte sont incompatibles. Ces figures constituent donc une part irréductiblement ambigüe du corpus. Mais cette ambiguïté elle-même ne peut pas être contournée. Ainsi, dans notre exemple nous ne pouvons pas décrire la table de façon neutre, sans l'interpréter. Il nous faut nécessairement intégrer des informations extérieures pour rendre compte de son contenu. En cela, les tables sont la quintessence de la combinatoire leibnizienne.

**Objectifs de l'enquête**

Afin de mettre en évidence une nouvelle conception de l'*Ars Combinatoria* en tant qu'art d'inventer chez Leibniz, il nous faut donc adopter une démarche généticienne et faire l'étude des travaux mathématiques de jeunesse du philosophe, de sorte que d'une part, nous puissions confronter ces sources au discours rétrospectif qu'il tient à la fin de sa vie, dans l'*Historia et Origo Calculi Differentialis*, sur les rapports entre art combinatoire et méthode de découverte, et que d'autre part nous apportions un éclairage positif sur l'application en pratique de sa méthode combinatoire dans l'élaboration et l'exercice des mathématiques. L'enquête nous conduit à centrer l'analyse sur la notion de table et la pratique tabulaire, ce qui non seulement nous engage à revisiter certains travaux des contemporains de Leibniz sur les premières avancées du calcul différentiel, mais nous résout également à mener l'investigation sur la formation de la notion d'exposant et du calcul exponentiel.

# PROLOGUE

# Introduction

L'étude de l'art combinatoire et de la combinatoire chez Leibniz que nous nous proposons de faire se concentre donc sur sa pratique concrète en mathématiques, durant sa relative jeunesse. Cette démarche entretient l'ambition double de décrire d'une part la façon dont la technique et l'heuristique répondent chez le philosophe allemand à ses discours théoriques sur l'*ars combinatoria* en tant que branche de l'*ars inveniendi* et d'autre part de mettre en œuvre une méthodologie adéquate vis-à-vis de l'étude des tables et des figures tabulaires en générale, en rendant manifeste la singularité qu'ont ces objets pour l'historien des mathématiques, de part les nombreux raisonnements implicites qu'ils renferment ainsi que les diverses représentations conceptuelles qu'ils subsument.
Cette entreprise conduit à nous écarter d'un processus chronologique ordinaire qui tracerait les contours de la combinatoire leibnizienne à partir des différents discours tenus par le philosophe depuis la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8) jusqu'aux derniers raffinements des divers projets de caractéristique universelle. La principale voie d'entrée, concernant la pratique combinatoire du jeune Leibniz dans ses travaux mathématiques, ne se trouve pas au sein de ses premiers textes estudiantins qui en seraient la préfiguration mais dans l'un de ses derniers, l'*Historia et Origo Calculi Differnentialis*, qui en constitue l'aboutissement. Le regard, certes subjectif et rétrospectif, d'un Leibniz âgé de près de 70 ans brosse un portrait de notre objet substantiellement différent de celui qui émerge naturellement d'une démarche chronologique et diachronique. Cela nous enjoint à porter notre attention sur un corpus qui nous aurait autrement échappé et qui s'avère détenir effectivement les clefs de la pratique combinatoire comme méthode heuristique chez le jeune Leibniz.

Cette partie préliminaire s'emploie donc à établir le cadre de cette ouverture sur la pratique combinatoire chez Leibniz dans la première période de sa vie.
La première pièce de ce chassis consiste, comme nous l'avons évoqué, dans le parcours chronologique des diverses acceptions de la combinatoire au sein de son œuvre philosophique et forme les montants latéraux de ce cadre liminaire.
En filant cette métaphore, nous réalisons ensuite l'allège de cette voie d'entrée, qui fait lui office de sous-bassement, à travers l'étude de deux axes au sein de la *Dissertatio de Arte Combinatoria*. Le premier centré sur la tentative d'écriture universelle a pour objectif de mettre l'accent sur la distance considérable qui sépare la position du jeune philosophe de celles, plus tardives, qu'on lui connait habituellement et auxquelles le commentaire classique a eu tendance à l'identifier. Le deuxième axe, plus méthodologique, se propose de faire l'étude exhaustive de toutes les tables présentes dans cet opuscule de jeunesse de sorte que d'une part on ait dressé un portrait précis de sa pratique dans la période qui précède notre corpus, et que d'autre part, on donne au lecteur une nette idée de notre position vis-à-vis de l'exégèse des diagrammes tabulaires en montrant que les tables révèlent souvent des contenus qui ne sont pas en accord avec le texte qui les accompagne.
Nous achevons ce cadre par l'apposition d'un linteau qui surplombe l'entrée, et qui s'incarne dans l'*Historia et Origo Calculi Differentialis*, l'un des derniers textes de Leibniz, écrit plus de quarante années après son arrivée à Paris en 1672. En réalité, deux versions de ce texte nous sont parvenues et permettent, par leurs variations, de mettre le doigt sur le rôle capital qu'ont joué les tables et la pratique tabulaire dans les premiers germes du calcul différentiel.

# Evolution de l'*Ars Combinatoria*

Pour mieux comprendre la voie par laquelle nous avons choisi d'aborder la combinatoire leibnizienne dans le champ des mathématiques, il nous faut dépeindre l'évolution de sa pensée combinatoire dans son œuvre philosophique, certes schématiquement, mais en donnant toutefois quelques détails. Un tel parcours amène naturellement à centrer l'analyse sur l'évolution du lien entre la combinatoire et le grand projet de caractéristique sur lequel Leibniz a médité tout au long de sa vie. Mais, de même que ce projet a connu maints remaniements et transformations, le rôle de la combinatoire et sa place dans sa pensée philosophique est également fluctuante et protéiforme. Malgré tout, deux acceptions se distinguent progressivement durant la période parisienne pour être finalement théorisées explicitement à la fin des années 1670 : l'acception méthodologique comme équivalent de la synthèse et l'acception épistémologique comme science des formes et des formules. La relation entre ces deux niveaux devient relativement stable à compter de cette époque, mise à part la place qu'y tiennent les mathématiques, finissant par englober la science des formes et des formules dans les années 1690, alors que la priorité de la qualité sur la quantité est peu à peu remise en cause à la faveur des travaux sur la *Dynamica*. Cette évolution tardive commence seulement à être bien documentée et nous porte largement hors de notre corpus. C'est pourquoi nous nous contentons de l'évoquer.

Dans ce processus chronologique, l'apparition de l'acception méthodologique n'est guère motivée par la présence de certains travaux ou de certaines pratiques du jeune philosophe, et n'intervient qu'en ce qu'elle se distingue graduellement de l'acception épistémologique et participe à en préciser les contours. Dès lors, seule la notion de forme est réellement présentée comme fondatrice d'une nouvelle pensée sur la combinatoire, puisque la notion de table a en réalité agit silencieusement dans sa pratique et dans ses méthodes de découverte. Néanmoins, ce parcours philosophique nous donne également l'occasion de noter que la table constitue aussi une notion importante que Leibniz engage dans ses textes philosophiques sur la combinatoire. La vision que nous soutenons, au sein de laquelle la table et la forme constituent les deux piliers de la réflexion combinatoire leibnizienne est soutenue par Leibniz lui-même, mais seulement à partir de la fin des années 1670.

## Les premiers développements avant Paris

### Dans le prolongement de la *Dissertatio de Arte Combinatoria*

Au sein de la *Dissertatio de Arte Combinatoria*, en 1666, les trois significations sont confondues, donnant à l'ouvrage un aspect très irrégulier. On y trouve notamment quelques remarques sur le caractère heuristique de la combinatoire :

> *De même, presque toute la partie inventive de la logique sera fondée sur les complexions, que ce soit à propos des termes simples d'une part, ou bien des complexes d'autre part.* [41]

Concernant l'aspect épistémologique, l'idée d'une caractéristique universelle trouve ses premiers germes dans les tentatives d'écriture universelle de la *Dissertatio de Arte Combinatoria*. Nous verrons, cependant que les deux projets diffèrent significativement, non seulement dans leurs aboutissements mais également dans le fond lui-même des ambitions qu'ils portent. Néanmoins, il s'agit bel et bien d'un travail sur la combinaison des caractères, ce qui s'accorde avec l'acception épistémologique de « sciences des formes et des formules ». Finalement, la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8) contient de nombreux résultats fondamentaux en matière de dénombrement, non seulement le calcul basique des combinaisons et des permutations, mais aussi quelques résultats plus ambitieux – et d'ailleurs parfois faux – sur les arrangements et les permutations sous certaines conditions.
Entre son départ de Leipzig en 1666 et son arrivée en France en 1672, les réflexions sur l'écriture universelle se sont développées au sein d'écrits purement philosophiques. L'idée d'une caractéristique universelle poursuit son chemin au sein d'un paysage intellectuel semblable à celui qui est convoqué à l'occasion des développements sur la logique, au sein de la *Dissertatio de Arte Combinatoria*. Leibniz continue de discuter les idées de Hobbes, et lit avec attention l'*Ars Magna sciendi, sive Combinatoria* édité par Kircher en 1669 dont il attendait déjà la publication avec impatience dans la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8) :

> *Mais je pense pour cette raison que c'est pour cela que l'immortel Kircher aurait montré sous le titre de Com2natoire son grand art du savoir, promis depuis longtemps, ou nouvelle porte des sciences grâce à laquelle on pourrait argumenter sur tous les sujets par une infinité de raisons et obtenir la connaissance abrégée de toutes ces choses (Pierre Grégoire de Toulouse à décrit sa syntaxe de l'art admirable presque de la même façon).* [42]

La lecture des ouvrages de Alsted nourrit en outre l'intérêt du jeune philosophe pour la pratique encyclopédique, comme le notent les éditeurs de l'*Akademie* :

> *Avec le problème de méthodologie du dernier groupe se dessine déjà à cette époque le grand projet de « Caractéristique Universelle »(N.58), à la réalisation duquel Leibniz a consacré des années de sa vie en tentatives réitérées, entassant des montagnes de tables de définitions et de brouillons, sans jamais parvenir à un succès satisfaisant. Parmi les numéros précédents, il faut souligner la préface et les notes sur Nizolius (N.54), qui énoncent la solution de Leibniz au nominalisme de l'époque et à l'« Ultranominalisme » de Hobbes, dominant largement l'un et l'autre les universités d'alors. Le travail sur Alsted indique déjà l'intérêt très poussé qu'il aura pour une encyclopédie.* [43]

Ainsi, lorsqu'il annonce, avec un peu d'exagération, au duc Jean-Frédéric de Hanovre, dans une lettre célèbre de 1671, qu'il dispose d'une méthode combinatoire pour développer un « alphabet » propre à tout inventer, sa pensée combinatoire se trouve encore très éloignée des considérations mathématiques.

41. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.177 « Ut ita tota propemodum Logicæ pars inventiva illic circa terminos simplices, hic circa complexos fundetur in Complexionibus ».

42. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.194 « Atque hinc esse judico, quod immortalis Kircherus suam illam diu promissam artem magnam sciendi, seu novam portam scientiarum, qua de omnibus rebus infinitis rationibus disputari, cunctorumque summaria cognitio haberi possit (quo eodem fere modo suam Syntaxin artis mirabilis inscripsit Petr. Gregor. Tholosanus), Com2natoriæ titulo ostentaverit. ».

43. A VI, 2 - préface de E. Hochstetter, Juillet 1965 - p.XXIV « Mit dem Methodenproblem in der letzten Gruppe taucht der große Plan der "*Characteristica universalis*" schon in dieser Zeit (N. 58) auf, auf dessen Ausführung Leibniz in immer erneuten Anläufen Jahre seines Lebens verbraucht, Berge von Definitionentafeln und Entwürfen gehäuft hat, ohne jeden ihn befriedigenden Erfolg zu erreichen. Unter den voraufgehenden Nummern sind die Vorrede und die Anmerkungen zu Nizolius (N.54) hervorzuheben, die Leibniz' Lösung von dem die damaligen Universitäten weithin beherrschenden Nominalismus der Zeit und Hobbes' "*Ultranominalismus*" aussprechen. Das später sehr breite Interesse an einer Encyclopädie deutet schon die Arbeit über Alstedt an. ».

Elle s'accorde bien d'avantage avec l'acception épistémologique d'une combinatoire qui se situe encore au carrefour des anciennes traditions mystiques reprises par Kircher et des projets de langues universelles menés notamment par Wilkins :

> *En philosophie, j'ai trouvé un moyen pour parvenir à faire, dans toutes les sciences, par l'art combinatoire – que Lulle et le Père Kircher ont certes cultivé, mais dont ils n'ont pas, il s'en faut de beaucoup, vu le fond intime – ce que Descartes et d'autres ont fait par l'algèbre et l'analyse dans l'arithmétique et la géométrie. Par ce moyen, j'ai ramené toutes les notions composées du monde entier à quelques notions simples qui en sont l'alphabet. Grâce à la combinaison de cet alphabet, on peut tracer un chemin qui permet, avec le temps et selon une méthode ordonnée, de retrouver toutes les choses avec leurs théorèmes ainsi que ce qui peut être inventé à partir d'elles. Je considère cette invention, à condition qu'elle soit mise en œuvre, si Dieu le veut, comme la mère de toutes les inventions, et donc comme la plus importante, même si pour le moment elle n'apparaît pas comme telle.* [44]

### L'*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum*, un moment pivot

Durant son séjour à Paris, entre 1672 et 1676, Leibniz découvre et maîtrise rapidement les mathématiques que pratiquent les experts de son temps. Ainsi, durant les premières années, combinatoire et mathématiques suivent deux routes distinctes, la première étant le prolongement naturel des réflexions philosophiques de sa jeunesse, tandis que la seconde jaillit presqu'à partir de rien, Leibniz procédant à une refondation quasi intégrale de sa culture mathématique durant les quatre années passées dans la capitale française. C'est au travers de l'algèbre que le grand projet combinatoire de Leibniz semble faire son entrée dans les mathématiques. En effet, c'est naturellement dans cette discipline mathématique où le formalisme et l'usage des symboles est central, que Leibniz trouve matière pour ses réflexions sur l'écriture et la caractérisitique universelle. D'ailleurs, l'une des premières mentions explicites de cette dernière se trouve dans l'*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum*, une lettre que Leibniz avait pour projet d'envoyer au directeur du *Journal des Sçavans* Jean Gallois, à la toute fin de l'année 1672 :

> *Puisque donc, pour trouver les symboles appropriés et ainsi les machines spirituelles, notre esprit est considérablement soulagé. En outre, ceux-là, que nous avons déjà, excepté dans les sciences mathématiques, ne sont ni simples, ni complets, ni ordonnés (quoique je les étudie beaucoup). D'où il apparait qu'au sein de toute la réflexion humaine, nul ne peut avoir plus de mérite que celui qui médite sur la langue, ou ce qui suffit, sur l'écriture philosophique. Elle sera seulement dédiée à des investigations rigoureuses, comme ce que j'en ai exposé il y a six ans dans une dissertation sur l'art combinatoire, certes enfantine mais assurément conforme à l'usage académique et dont je n'ai néanmoins pas tout rejeté, encore aujourd'hui. Là, j'ai rappelé toutes les propositions des sciences pures, c'est-à-dire indépendantes des sens (même si la véracité de celles-ci peut être également, pour ainsi dire, observée et confirmée par les sens). De telles sciences sont également celles de l'action en général, du raisonnement, du mouvement, de l'utile et du juste. Elles ne font rien d'autre qu'énoncer une définition ou une partie de celle-ci (ou bien, à partir du tout et de la partie, la définition d'une partie, ou de la partie d'une partie) au sujet d'une chose définie ou d'une autre définition d'une même chose définie. On peut exprimer la même idée par diverses définitions, et à partir de là nait l'art fécond de fonder des théorèmes. Je me souviens que Pascal l'admet quelque part, où il recommande de faire diverses énonciations des mêmes théorèmes et où il dit que c'est à cela que doit consister tout le travail des géomètres. Et en effet, ceci ouvre une voie vers des choses nouvelles et inexplorées. La même que Cujas a remarqué dans ses paratitles, en proposant utilement plusieurs définitions pour les mêmes noms. En effet, les définitions, dans cette caractéristique universelle sont la même chose que les équations en algèbre.* [45]

---

44. A II, 1, N.84, Lettre au duc Jean-Frédéric de Hanovre, octobre 1671 - p.261 « In Philosophia habe ich ein mittel funden, das jenige was Cartesius und andere per Algebram et Analysin in Arithmetica et Geometria gethan, in allen scientien zuwege zu bringen per Artem Combinatoriam, welche Lullius und P. Kircher zwar excolirt, bey weiten aber in solche deren intima nicht gesehen. Dadurch alle Notiones compositæ der ganzen Welt, in wenig simplices als deren Alphabet reduciret, und aus solches alphabets combination wiederumb alle dinge, samt ihren theorematibus, und was nur von ihnen zu inventiren müglich ordinata methodo mit der zeit zu finden ein weg gebahnet wird. Welche invention, dafern sie wils Gott zu Werck gerichtet, als mater aller inventionen von mir vor das importanteste gehalten wird, ob sie gleich das ansehen noch zur zeit nicht haben mag ». *Nota Bene* : La traduction est celle de C. Rosier. *Cf* [53] G.W. Leibniz, *Trois lettres à Jean Frédéric de Hanovre sur le problème de la liberté* dans *Philosophie*, *trad.* C. Rosier, Volume 75, N.4, 2002 - p. 16-17.

45. A II, 1, N.109, Lettre à Jean Gallois, fin 1672 - p.354 « Cum ergo symbolis apte inventis velut machinis spiritualibus, tantopere mens nostra sublevetur, ea autem quæ hactenus præterquam in scientiis mathematicis puris habemus (quanquam et in his multa desiderem), neque simplicia, neque plena, neque ordinata sint, hinc apparet de tota ratiocinatione humana

Ce paragraphe montre que Leibniz se trouve alors dans une position charnière, quant à sa conception de la combinatoire et de la langue universelle. D'une part, il montre que ce projet est bien, dans une certaine mesure, l'héritier de l'embryon d'écriture universelle proposé au sein de la *Dissertatio de Arte Combinatoria*. La référence aux « machines spirituelles » (« *machinis spiritualibus* ») trahit par ailleurs l'influence encore prégnante de Lulle sur le jeune philosophe. En effet, un peu plus d'un an plus tôt, Leibniz mentionne une machine de ce type, qui serait l'équivalent pour le calcul logique de la machine arithmétique qu'il conçoit alors pour le calcul numérique :

> *Et donc de la même manière que nous avons trouvé, par la grâce de Dieu la panarithmétique, nous préparons, pour la machine panépistémonique, ces tables de l'art combinatoire qui peuvent devenir mobiles et variables si on les applique sur des roues, comme nous l'avons dit ailleurs.* [46]

La structure de la machine décrite ici, constituée de petites roues mobiles et variables, est typique des mécanismes que Leibniz associait déjà à Raymond Lulle dans la *Dissertatio de Arte Combinatoria*. Ainsi, les références acquises durant ses études à Leipzig restent encore très vivaces dans son projet de combinatoire, lorsqu'il rédige l'*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum*, à la fin de 1672.
D'autre part, pourtant, le passage du texte cité ci-dessus constitue l'une des premières mentions explicites de la « caractéristique universelle » (« *Characteristica [...] Universali* ») et évoque pour la première fois le rôle central qu'y joue l'algèbre. Dans une première version de ce passage, Leibniz développe l'idée que la caractéristique universelle, tout comme l'algèbre, n'est pas un outil pour découvrir empiriquement de nouveaux faits, mais permet en revanche de multiplier les points de vue sur ces derniers, en tirant des traits d'égalité ou d'inclusion entre diverses définitions différentes mais équivalentes d'une même chose :

> *Il faut mettre à part les propositions identiques, c'est-à-dire l'affirmation de la même chose au sujet de la chose elle-même et par les mêmes mots. Mais quand on dit la même chose, au sujet de la chose elle-même, par des mots équipolents, comme une définition à propos de la chose définie, ou bien diverses définitions d'une même chose définie à propos les unes des autres, ou bien encore la partie d'une définition à propos de la chose définie, ou d'une autre définition de cette même chose définie, il apparait alors clairement que la vérité de cette proposition dépend du jugement humaine. En effet, une définition dépend d'un jugement humaine. Mais en réalité, tous les axiomes qui ne dépendent pas des sens et même tous les théorèmes des sciences qui ne dépendent pas des sens ou de l'expérience, sont des propositions de ce genre, ce qu'Aristote a également remarqué, lui qui a posé ce principe unique de démonstration : la définition. Et, en vérité, tous les axiomes que Euclide a énoncés en introduction des Eléments comme principes, sont démontrables à partir des définitions. Qu'apprenons-nous donc, dira-t-on, lorsque nous examinons les théorèmes de telles sciences ? Je réponds : rien, si ce n'est à réfléchir rapidement et disctinctement à l'usage, c'est-à-dire à ordonner au moyen de certains symboles bien choisis, des choses que l'on connaissait déjà auparavant et des idées acquises par les sens, que ces symboles soient ou bien des noms ou bien des caractères. De même dans les nombres, qui ne voit qu'on n'apprenne rien dans toute l'arithmétique, si ce n'est les noms des numéraux et leurs diverses réitérations qui adviennent de façon harmonieuse, si elles recommencent au départ.* [47]

---

neminem mereri posse melius, quam qui excogitet sive Linguam, sive quod sufficit, Scripturam Philosophicam ; severis tantum inquisitionibus inservituram, ut a me expositum est sex abhinc annis Dissertatione de Arte Combinatoria, puerili ea quidem, Academico scilicet more, cujus tamen ne nunc quidem omnia asperner. Ibi monui omnes propositiones scientiarum purarum, seu a sensu independentium (etsi earum veritas sensu quoque velut examinari confirmarique possit) quales sunt scientiæ quoque de actione in universum, de Ratiocinatione, de motu, de utili, de justo, nihil aliud faciunt quam pronuntiare aut definitionem partemve ejus (aut partis, partisve partis definitionem ex toto vel parte) de definito aut de definitione alia ejusdem definiti. Eandem ideam exprimi posse variis definitionibus ; atque inde fœcundam nasci condendorum theorematum artem. Quod et alicubi fatentem memini Pascalium, ubi eorundem theorematum variatam enunciationem commendat, et in ea consistere debere ait omne studium Geometrarum. Sic enim ad nova et intacta viam aperiri. Idem et Cujacius notavit in Paratitlis, ejusdem nominis multas definitiones utiliter proponi. Idem enim sunt definitiones in Characteristica illa Universali, quod æquationes in Algebra. ».

46. A VI, 2, N.12$_5$, *Elementa Juris Naturalis*, mi-1671 - p.476 « Quemadmodum ergo nos hoc Panarithmicon DEI munere invenimus, ita pro Machina Panepistemonica has Artis combinatoriæ Tabulas paramus, quæ quomodo mobiles variabilesque si rotulis applicentur fieri possint, alibi diximus. ».

47. A II, 1, N.109, Lettre à Jean Gallois, fin 1672 - p.350-351 « Excipiendæ etiam sunt propositiones identicæ seu ejusdem affirmatio de seipso, verbis iisdem. At cum idem dicitur de seipso verbis æquipollentibus ut definitio de [definito], aut definitiones diversæ ejusdem definiti de se invicem, aut pars definitionis unius de definito, vel alia ejusdem definiti definitione, manifestum est propositionis veritatem esse ab arbitrio humano. Definitio enim ab arbitrio humano est. At vero omnia axiomata quæ a sensu non pendent, imo omnia scientiarum a sensu et experimentis independentium theoremata sunt propositiones ejusmodi, quod et Aristoteles animadvertit, qui unicum posuit demonstrandi principium : definitionem. Et vero Axiomata omnia quæ Euclides velut principia præmisit Elementis ex definitionibus demonstrabilia sunt. Quid discimus

L'algèbre est décrite comme le modèle à suivre pour la caractéristique universelle. Il ne fait que suggérer ce statut de canon à suivre, au sein des versions finales, grâce à l'analogie qu'il fait entre les définitions de la caractéristique et les équations de l'algèbre. Dans le premier jet de ce paragraphe, il précise d'ailleurs que l'algèbre est un échantillon de la caractéristique :

> *Lorsque l'on obtient les théorèmes et qu'à partir d'eux se manifeste avec le plus grand éclat l'utilité des caractères, il apparait de là que l'on peut retenir de nombreuses choses avec des symboles bien adaptés, ce qu'on ne pourrait pas faire ailleurs, comme lorsque la somme d'une certaine progression entière débute avec aisance. Et celles-ci se manifestent remarquablement bien en algèbre, où tout le monde voit bien que l'on peut tout exécuter en transposant les symboles de diverses manières, ce qui est d'une immense fécondité. Ce n'est pas qu'on apprenne quelque chose de nouveau, mais on met la chose à nu dans l'esprit. C'est pourquoi, si nous avions la langue philosophique, ou au moins l'écriture dont j'ai parlé dans le De Arte Combinatoria qui utilisait de fait, en guise d'alphabet, les éléments de la pensée, nous écririons les choses par leurs définitions. Ce qui en algèbre était équation serait partout théorème et l'on pourrait proposer et résoudre une infinité de problèmes et démontrer les théorèmes sans le moindre effort. Il serait permis à quiconque d'utiliser cette écriture sans intelligence des choses. Et Il sera dans le pouvoir de chacun de raisonner sans erreur comme en arithmétique. L'algèbre tant numérique que spécieuse n'est rien d'autre qu'une partie, ou un échantillon de cette Ecriture Universelle ou Caractères Philosophiques. Et je m'étonne que de grands hommes ne l'ai pas suffisamment remarqué.* [48]

Le parallèle que Leibniz établit entre l'algèbre et la caractéristique constitue assurément un point central de la question de l'art combinatoire. Néanmoins, la culture du jeune Leibniz à la fin de l'année 1672 en matière d'algèbre est encore extrêmement pauvre. L'essentiel de ses travaux sur ce sujet se trouve entre les années 1674 et 1675, au cours desquelles il s'attelle sérieusement aux problèmes de résolutions des équations. L'analogie qu'il établit ici entre les variables algébriques et l'alphabet des pensées humaines témoigne d'une vision encore juvénile de la caractéristique universelle. Ainsi, bien qu'à travers l'algèbre comme modèle, les mathématiques s'installent de plus en plus solidement au cœur de la pensée combinatoire du jeune Leibniz, cette dernière demeure l'héritière directe de l'écriture universelle de la *Dissertatio de Arte Combinatoria*.

---

ergo inquies, cum theoremata talium scientiarum pervestigamus ? Nihil inquam nisi celeriter et distincte cogitare ad usum seu aptis quibusdam symbolis ad ordinandas jam olim cognitas et a sensibus acceptas ideas uti, sive ea symbola sint nomina, sive characteres. Ut in numeris, quis non videt nihil novi disci in tota arithmetica, nisi nomina numeralia et eorum varius recursus, qui si rursus incipiunt harmonice fiunt ». - *Nota Bene* : quelques parties de mots, dans le manuscrit, sont très peu lisibles voir même effacés. Les éditeurs de l'*Akademie* ont comblé ces manques, indiquant dans leur éditions les caractères concernés.

48. A II, 1, N.109, Lettre à Jean Gallois, fin 1672 - p.350-351 « Hinc patet uti theoremata eliciuntur et utilitas characterum inde maxime elucet, cum paratis symbolis multum supprimi potest quod alias non posset, ut cum integræ cujusdam progressionis summa facile initur. Et hæc maxime apparent ex Algebra, ubi nemo non videt, omnia symbolis varie transpositis agi, ingenti fructu, non quod nova discantur, sed quod res nude exhibentur menti. Quare si vel linguam, vel saltem scripturam haberemus philosophicam, de qua a me dictum est in Arte Combinatoria, quæ scilicet pro Alphabeto uteretur Elementis cogitandi, res scriberentur definitionibus suis. Et quod in Algebra æquationes, theoremata ubique essent, et infinita problemata proponi solvique et theoremata nullo negotio demonstrari possent, nec ea scriptura uti cuiquam nisi rerum intelligenti fas esset et in potestate foret uniuscujusque ut in Arithmetica sine errore ratiocinari. Atque hujus scripturæ Universalis sive Characterismi philosophici Algebra tam numerosa quam speciosa non nisi pars seu specimen est. Quod a maximis viris non satis animadversum miror. » - *Nota Bene* : quelques parties de mots, dans le manuscrit, sont très peu lisibles voir même effacés. Les éditeurs de l'*Akademie* ont comblé ces manques, indiquant dans leur éditions les caractères concernés. On el

# L'apport du séjour parisien

## Les formes combinatoires

La position de Leibniz vis-à-vis de l'algèbre est extrêmement fluctuante au cours de son séjour parisien, à mesure qu'il pratique et maitrise cette discipline. En octobre 1675, Leibniz rédige un manuscrit intitulé *Formæ Combinatoriæ* (LKK, N.11), dans lequel il développe la notion de forme combinatoire. Ce concept provient directement de ses travaux sur la résolution des équations algébriques, et plus particulièrement de la méthode dite de « division de la racine ». Cette méthode consiste à considérer dans un premier temps que la racine $x$ d'une équation est la somme de plusieurs parties, par exemple trois :

$$x = a + b + c$$

Puis, dans un second temps, développer une certaine puissance de $x$ afin de trouver une équation générale. Par exemple, au degré 4, on a

$$\begin{aligned} x^4 = \quad & + \quad 1 \quad \times \quad (a^4 + b^4 + c^4) \\ & + \quad 4 \quad \times \quad (a^3b + a^3c + b^3c + b^3a + c^3a + c^3b) \\ & + \quad 6 \quad \times \quad (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) \\ & + \quad 12 \quad \times \quad (a^2bc + ab^2c + abc^2) \end{aligned}$$

Chacune des quatres sous-parties de ce développement forme les expressions de ce que l'on nomme aujourd'hui des fonctions symétriques, c'est-à-dire qu'elles sont invariables lorsque l'on permute les caractères associés aux différentes parties de la racine. Leibniz réduit ces expressions à leur premier élément. Ainsi, l'expression ci-dessus devient [49] :

$$\overset{3^4}{\uparrow}\left(\underbrace{a}_{=a+b+c}\right)^4 = \overset{\binom{4}{4}}{\uparrow}1 \times \overset{\binom{3}{1}}{\uparrow}\underbrace{a^4}_{=a^4+b^4+c^4} + \overset{\binom{4}{3\ 1}}{\uparrow}4 \times \overset{\binom{2}{1}\times\binom{3}{2}}{\uparrow}\underbrace{a^3b}_{\substack{=a^3b+a^3c+b^3c \\ +b^3a+c^3a+c^3b}} + \overset{\binom{4}{2\ 2}}{\uparrow}6 \times \overset{\binom{3}{2}}{\uparrow}\underbrace{a^2b^2}_{=a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2} + \overset{\binom{4}{2\ 1\ 1}}{\uparrow}12 \times \overset{\binom{3}{1}\times\binom{3}{3}}{\uparrow}\underbrace{a^2bc}_{a^2bc+ab^2c+abc^2}$$

$$\begin{aligned} & \overbrace{\binom{4}{4} \times \binom{3}{1}}^{\text{type } aaaa} + \overbrace{\binom{4}{3\ 1} \times \left(\binom{2}{1} \times \binom{3}{2}\right)}^{\text{type } aaab} + \overbrace{\binom{4}{2\ 2} \times \binom{3}{2}}^{\text{type } aabb} + \overbrace{\binom{4}{2\ 1\ 1} \times \left(\binom{3}{1} \times \binom{3}{3}\right)}^{\text{type } aabc} \\ = \quad & 1 \times 3 + 4 \times (2 \times 3) + 6 \times 3 + 12 \times (3 \times 1) \\ = \quad & 3 + 24 + 18 + 36 = 81 = 3^4 \end{aligned}$$

Mais les caractères de l'algèbre doivent en principe désigner des quantités connues ou inconnues. La composition des caractères représente alors un produit et la juxtaposition des composés représente la somme des produits. Pourtant, bien que la notion de forme combinatoire ait à l'origine ce sens très précis, elle désigne dans ce texte des objets totalement généraux et absolument non spécifiés :

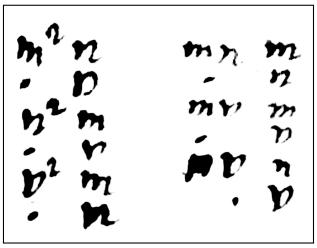
> *Dans chaque combinaison, il y a des caractères. Les formes existent à partir de ces caractères. Les formes sont soit parfaites soit imparfaites. On réduit les imparfaites aux parfaites soit par l'addition, soit par la soustraction afin de les décomposer en plusieurs. Les caractères sont soit capitaux soit casuels. Dans la combinatoire générale, les caractères n'ont pas d'autres distinctions que celles qui sont nécessaires pour en saisir la diversité. Et il n'y a pas besoin d'examiner la spécificité de cette diversité.* [50]

49. Cette notation a subit de nombreuses évolutions. Voir l'œuvre de E. Knobloch sur ce sujet, en particulier la partie concernant les fonctions symétrique de [39] E. Knobloch, *Die mathematischen Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik, auf grund fast ausschliesslich handschriftlicher aufzeichnungen dargelegt und kommentiert* dans les *Studia Leibnitiana Supplementa*, Tome 11, Franz Steiner Verlag, Wiesbaden, 1973

50. LKK, N.11, *Formæ Combinatoriæ*, 20 octobre 1675 - p.48 : « In omni combinatione sunt characteres. Ex characteribus existunt formæ. Formæ sunt perfectæ aut imperfectæ. Imperfectæ reducuntur ad perfectas, addendo aut adimendo et in plures resolvendo. Characteres sunt capitales aut incidentes. Characteres in Combinatoria generali non aliud habent discrimen quam ut intelligantur diversa, nec opus est, ut diversitatis speciem excutiamus. »

Ainsi la composition des caractères représente également une relation non spécifiée que les objets ont entre eux. Cette relation semble être d'ordre méréologique, car la composition des caractères est commutative. Ainsi le composé *ab* comprend *a* et *b* comme deux parties, deux éléments constitutifs. Leibniz précise par exemple que les deux formes suivantes sont équivalentes :

| | |
|---|---|
| $m^2\ n$ | $m\ n\ m$ |
| $\bullet\ v$ | $\bullet\ n$ |
| $n^2\ m$ | $m\ v\ m$ |
| $\bullet\ v$ | $\bullet\ n$ |
| $v^2\ m$ | $n\ v\ n$ |
| $\bullet\ n$ | $\bullet\ v$ |



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 12, 1 Bl.16

Ici, il écrit les formes par leurs expressions développées. Cela donne donc deux formes équivalentes ou bien deux développements possibles d'une même forme. A cela, il ajoute :

> *D'ailleurs, le fait que je dise que ces deux formes coïncident est un théorème démontrable et qu'on peut généraliser à une infinité d'autres formes. Pourtant quiconque voit bien qu'il s'agit d'une proposition identique, étant donné que la chose est décomposée jusqu'à ces caractères les plus simples. Ainsi, il apparaît à présent que ces théorèmes ne donnent rien d'autre que le moyen de rassembler les pensées par les caractères afin que le raisonnement soit rendu plus aisé.* [51]

On retrouve donc l'idée déjà présente dans l'*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum* que la combinatoire, tout comme l'algèbre, constitue un moyen de rassembler et d'ordonner les connaissances, afin d'avoir sur elles une maitrise plus profonde mais aussi plus efficace. L'art combinatoire est donc toujours un art des caractères, bien plus général que l'algèbre :

> *Ces formes constituent déjà l'éminence de l'art Combinatoire et de ce calcul général dans l'univers.* [52]

En effet, si l'algèbre reste un modèle de référence, Leibniz la considère de plus en plus comme une partie très limitée de ce projet dont elle doit pourtant être l'inspiration. L'algèbre est un modèle méthodologique, mais l'algèbre n'est pas elle-même une méthode. C'est une science dont les techniques permettent d'appréhender un domaine limité du savoir. L'apport de l'algèbre se trouve dans l'usage des caractères et des symboles. Ainsi, dans une lettre à Oldenburg, le secrétaire de la *Royal Society*, écrite quelques mois après le *Formæ Combinatoriæ* (LKK, N.11), Leibniz dit explicitement que la combinatoire et la caractéristique sont une seule et même chose qui, en outre, est très éloignée du sens commun qu'ont ces termes :

> *Cette algèbre, que nous faisons avec tant de mérite n'est qu'une partie d'un art plus général. Cela dit, c'est elle qui nous guide, puisqu'en effet, l'on ne peut pas se tromper, et si l'on veut, on saisit la vérité presque comme peinte et exprimée sur le papier à l'aide d'une machine. En vérité, je reconnais que quoi que ce soit du même genre que ce que l'algèbre fait voir n'est rien sinon le bénéfice d'une science supérieure que j'ai désormais l'habitude d'appeler combinatoire ou caractéristique, et cela diffère de beaucoup de ce qui pourrait venir aussitôt à l'esprit de quelqu'un lorsqu'il entend ces mots.* [53]

Le projet de caractéristique universelle a donc été profondément remanié depuis son arrivée à la capitale française pour intégrer en son cœur une notion issue de l'algèbre : la forme et la formule. Ainsi, un mois

51. LKK, N.11, *Formæ Combinatoriæ*, 20 octobre 1675 - p.48 : « Ubi ut obiter dicam has duas formas coincidere est theou demonstrabile et quod alias in infinitum formas extenditur, et tamen quivis videt esse identicam propositionem re resoluta usque ad characteres simplicissimos. Ut hinc appareat theoremata nihil aliud dare quam modum contrahendi cogitationes per characteres ut facilior reddatur ratiociatio ». - *Nota Bene* Il y a une erreur de transcription dans l'œuvre de E. Knobloch. A la place de « theou », il faut mettre « theorema ». Nous avons intégré cette correction dans la traduction.

52. LKK, N.11, *Formæ Combinatoriæ*, 20 octobre 1675 - p.49 : « Hæ jam formæ continent apicem Combinatoriæ artis, et ipsius Calculi generalis in universum. »

53. A II, 1, N.121, Lettre à Henry Oldenburg du 28 décembre 1675 - p.393 : « Hæc Algebra quam tanti facimus merito, generalis illius artificii non nisi pars est. Id tamen præstat, ut errare ne possimus quidem, si velimus, et ut veritas quasi picta velut machinæ ope in charta expressa deprehendatur. Ego vero agnosco quicquid in hoc genere præbet Algebra non nisi superioris scientiæ beneficium esse, quam nunc Combinatoriam, nunc Characteristicam appellare soleo ; longe diversam ab illis quæ auditis his vocibus statim alicui in mentem venire possent. »

plus tard, en janvier 1676, on trouve la première description de l'art combinatoire comme science du semblable et du dissemblable, et comme science des formules :

> *L'algebre est comme le jeu des echecs : il y faut mettre en usage mille adresses, aussi bien que dans l'art de dechiffrer. Il y a une science à la quelle l'algebre est aussi bien subalterne, que l'optique l'est à la geometrie. C'est la characteristique en general, qui traite de eodem et diverso ou des formules c'est à dire de la combinaison des symboles (je ne parle pas des nombres des combinaisons) sans rapport à la grandeur.* [54]

La notion de forme algébrique semble donc avoir joué un rôle majeur dans la mathématisation du projet de la caractéristique. Il faut donc lire avec prudence les passages sus-cités de l'*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum*, lorsqu'on y trouve l'algèbre désignée comme modèle de la caractéristique universelle. Leibniz n'a alors pas une connaissance suffisante de ses outils pour qu'on puisse y voir d'avantage qu'une formule programmatique.
Notons que l'algèbre ne fut pas pour Leibniz la première des portes d'entrée mathématiques à l'*ars characteristica*. Dès l'année 1674, Leibniz développe ce qu'il appelle « la méthode de l'universalité » qui lui permet de trouver une expression commune à toutes les coniques, par l'introduction de nouveaux symboles pour les signes, à savoir les « signes ambigus » (« *signa ambigua* ») [55] :

> *Il est vray que Messieurs des Argues et Pascal ont cru de pouvoir reduire les Sections Coniques en harmonie : mais outre que leur methode est bornée, et ne depend, que des proprietez particulieres des Coniques elle est aussi extremement embarassante, par ce qu'il faut tousjours demeurer dans le solide, et bander l'esprit par une forte imagination du cone. Je croy même qu'on auroit bien de la peine a resoudre universellement par ce moyen des problemes difficiles, à moins qu'on ne les trouve comme par hazard, a priori, par le moyen d'un theoreme demonstré ailleurs. Au lieu qu'il n'y a rien qui puisse echapper à nostre methode, qui a cela de commun avec les autres parties de l'analyse, qu'elle épargne l'esprit et l'imagination dont il faut sur tout ménager l'usage.* [56]

Cette première réflexion sur l'art de construire des symboles pour unifier harmonieusement des équations et des théorèmes provient clairement de son projet de caractéristique et s'y rapporte.

> *C'est le but principal de cette grande Science que j'ay accoustumé d'appeller Caracteristique, dont ce que nous appellons l'Algebre n'est qu'une branche fort petite. Car c'est la Caracteristique qui donne les paroles aux langues, les lettres aux paroles, les chiffres à l'Arithmetique, les notes à la Musique : c'est elle qui nous apprend le secret de fixer le raisonnement, et de l'obliger à laisser comme des traces visibles sur le papier en petit volume, pour estre examiné à loisir : c'est enfin elle, qui nous fait raisonner à peu de frais, en mettant des caracteres à la place des choses, pour desembarasser l' imagination.*
> *Mais quoyque il semble que les caracteres soient arbitraires, il y a pourtant bien de regles à observer pour rendre les dits caracteres propres à l'usage ; comme par exemple je montreray plus bas qu'il ne faut point de caractere particulier pour marquer la difference entre deux grandeurs, et qu'il nuit au lieu de servir, quoyque Mons. Schoten et d'autres l'ayent employé.* [57]

Ainsi, l'épisode de la méthode de l'universalité relève d'un mouvement inverse de celui que nous avons décrit pour les formes combinatoires. En effet, Leibniz puise ici au sein du projet de caractéristique les idées fondatrices à la constitution de nouveaux caractères spécifiques, destinés à des applications géométriques particulières. Son programme sert donc de moteur à sa pratique. Pour les formes combinatoires, il s'agit bien du contraire : le jeune philosophe a extrait cette notion fondamentale et universelle à partir de travaux spécifiques et particuliers, sur la résolution des équations.

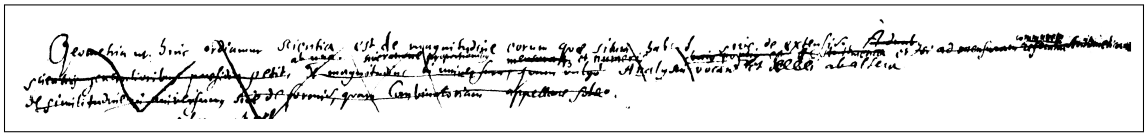
Finalement, la conception épistémologique de la combinatoire tire bien son origine de la tentative d'écriture universelle proposée dans la *Dissertatio de Arte Combinatoria*. Elle progresse de façon positive vers une science des caractères ou un *ars characteristica*, s'enrichissant de diverses références philosophiques et encyclopédiques, et reconnaissant dans l'algèbre un modèle à suivre. En 1674, elle alimente les travaux mathématiques du jeune philosophe, dans le cadre de la méthode de l'universalité. En 1675, en

54. A VII, 2, N.67$_3$, *Remarques sur les Elemens de Mathematiques de M.Prestet*, Janvier 1676 - p.806.
55. Sur ce sujet, *Cf* [29] S. Gentil, *Une caractéristique pour les unifier toutes et dans l'harmonie les lier. Utilisation des équations dans les textes De la méthode de l'Universalité*, dans *Mathématique et Philosophie leibniziennes à la lumière des manuscirts inédits*, *éds.* D. Rabouin et V. Debuiche, *Pilosophia Scientiae*, Vol.25, Cahier 2, Juin 2021
56. A VII, 7, N.11, *De la Méthode de l'Universalité II*, Juin 1674 - p.116.
57. A VII, 7, N.11, *De la Méthode de l'Universalité II*, Juin 1674 - p.116.

retour, ce sont des travaux purement mathématiques qui nourrissent le projet, et qui font de la caractéristique et de la combinatoire une même catégorie dotée d'une signification propre à sa pensée : sciences des formes et des formules. Cette conception va rester relativement stable durant toute la période 1676-1680, dite « des grands projets », durant laquelle Leibniz développe avec le plus d'ambition la caractéristique universelle, en cultivant de nombreuses et diverses voies de recherche. Ainsi, dans une lettre écrite en 1678 à son ami Tschirnhaus, Leibniz affirme à nouveau sa conception bien particulière de la combinatoire et de la caractéristique, qui ne doit pas être prise pour ce que leurs sens communs suggèrent :

> *En effet si tu tiens la combinatoire pour la science dont le but est de trouver les nombres de variations, je t'avoue de bon gré qu'elle est subordonnée à la science des Nombres et par conséquent à l'Algèbre, parce que la science des Nombres est subordonnée à l'Algèbre. En tout cas, en effet, tu ne trouveras pas ces nombres sans ajouter, multiplier, etc. Mais l'art de multiplier provient de la science générale de la quantité, que certains appellent Algèbre, et vraiment pour moi la combinatoire s'en trouve à l'évidence très loin : c'est la science des formes, c'est-à-dire du semblable et du dissemblable, de même que l'algèbre est la science de la grandeur, c'est-à-dire de l'égal et de l'inégal.* [58]

Cette science des formes et des formules succède à l'algèbre de deux manières : d'une part elle en procède méthodologiquement, d'autre part elle s'en détache épistémologiquement. L'algèbre est la science des quantités, tandis que la combinatoire est la science des qualités. Ainsi, en 1676, dans un texte intitulé *Dissertatio exoterica de usu Geometria* (A VII, 6, N.49), on trouve dans un passage entièrement raturé la distinction entre ces deux disciplines. Derrière les ratures du passage global, le texte comporte en lui-même de nombreuses corrections, que nous reproduisons ici :



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 1, 20 Bl.1-2

> *La géométrie qui est comme nous l'avons dit en préambule, la science des grandeurs pourvues d'un lieu, ou encore de l'extension. On vise avant tout deux sciences bien plus générales :*
>
> [1] *celle de la grandeur en général, qu'on appelle souvent l'Analyse et si*
>
> [2] *l'une qui traite de la grandeur ou*
>
> [2.1] *du rapport*
>
> [2.2] *de la mesure, des proportions et des nombres en général, qu'on appelle souvent l'Analyse*
>
> [2.2.1] *dont une partie est l'Arithmétique*
>
> [2.2.2] *et si l'on considère la mesure commune, c'est l'Arithmétique*
>
> *et l'autre qui traite de la similitude en générale, ou encore des formes et que j'ai l'habitude d'appeler Combinatoire.* [59]

Il faut noter deux choses. D'une part les corrections concernent seulement la définition de l'algèbre comme science des grandeurs. Et d'autre part Leibniz la nomme « Analyse » (« *Analysis* »), plutôt qu'algèbre. L'intégration de la géométrie, qui traite certes des quantités mais pas nécessairement au moyen des

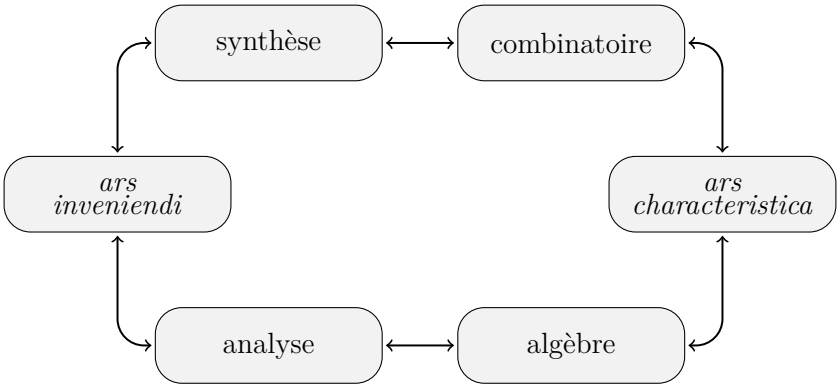
58. A II, 1 B, N.177, Lettre de Leibniz à Tschirnhaus, fin Mai 1678 - p.622 : « Nam si combinatoriam habes pro scientia inveniendi numeros variationum fatebor Tibi lubens, eam scientiæ Numerorum esse subordinatam et per consequens Algebræ, quia et scientia Numerorum Algebræ subordinata est, utique enim non invenies numeros illos nisi addendo multiplicando etc. Multiplicandi autem ars ex scientia generali de quantitate, quam non nulli Algebram vocant, descendit, verum mihi aliud longe est ars Combinatoria scilicet : scientia de formis seu de simili et dissimili, quemadmodum algebra est scientia de magnitudine seu de æquali et inæquali ».

59. A VII, 6, N.49$_1$, *Dissertatio exoterica de usu Geometriæ, et statu præsenti, ac novissimis ejus incrementis*, août-septembre 1676 - p.486 : « Geometria ut hinc ordiamur scientia est de magnitudine eorum qvæ situm habent, sive de extensis. A duabus scientiis generalioribus præsidia petit, | [1] de magnitudine in universum, qvam vulgo Analysin vocant, et de si [2] ab una de magnitudine sive [2.1] ratione [2.2] proportionibus mensuraqve et numeris in universum, qvam vulgo Analysin vocant, [2.2.1] cuius portio est arithmetica [2.2.2] et si ad mensuram communem referatur Arithmeticam | et ab altera de similitudine in universum, sive de formis, qvam Combinatoriam appellare soleo. » - *Nota Bene* : Nous avons adapté ici les notations des éditeurs de l'*Akademie* concernant les variantes textuelles, afin de bien mettre en évidence la composante chronologique de la retranscription. Ainsi, la version conservée à chaque étage de correction est toujours la dernière. Ainsi, ici, il faut lire [2] puis [2.2] puis [2.2.2].

caractères a pu motiver ce changement de vocabulaire. En revanche, la définition de la combinatoire comme science des formes et de la similitude ne souffre pas la moindre hésitation. Après avoir servi de modèle, le statut de l'algèbre devient donc problématique pour le jeune Leibniz.

**Analyse et Synthèse**

L'aspect méthodologique de la combinatoire comme composante essentielle de l'*ars inveniendi* se développe parallèlement aux réflexions épistémologiques sur la caractéristique que nous venons de développer. La distinction entre ces deux acceptions de la combinatoire n'est pas clairement établie avant la fin du séjour parisien. L'une des raisons de cette confusion est d'ordre sémantique. En effet, la combinatoire correspond en principe à la synthèse, c'est-à-dire au raisonnement qui consiste à rassembler les éléments simples pour engendrer des entités complexes, là où l'analyse consiste à décomposer ces entités en leurs éléments constitutifs. Mais l'analyse possède un autre sens, introduit notamment par Viète : ce terme est parfois employé comme synonyme de l'algèbre. L'analyse désigne alors la composante formelle et symbolique de cette discipline, c'est-à-dire l'*ars characteristica*. Dès lors, l'analyse désigne l'aspect combinatoire de l'algèbre, puisqu'on a vu que c'est à cela que correspond cette caractéristique pour Leibniz. Nous pouvons alors faire la confusion suivante :




On obtient alors un trait d'égalité contradictoire entre l'analyse et la synthèse. Leibniz entretient quelques temps cette confusion durant les premières années du séjour parisien, notamment dans le *Analysis ad alias res quam quantitates applicata* (A VI, 3, N.44) :

> *Il reste clairement les autres analyses, ou combinaisons, qui concernent les ordres des choses, les qualités, les actions et une infinité d'autres choses que l'on doit exprimer distinctement par d'autres moyens (mais aussi possiblement d'autres signes issus de simples lettres) que ceux des quantités, et dont je vois un exemple de la chose dans le fruit de mes propres recherches que j'ai utilisé pour exprimer les signes ambigus. En effet, ce n'était pas alors la quantité qu'on exprimait mais quelque relation ou un ordre pour la valeur des signes analytiques. Mais l'analyse universelle dépend du caractère universel, même si parfois dans les longs calculs, il est possible d'appliquer des caractères généraux ou des lettres alphabétiques à la place de caractères particuliers, comme en géométrie, mais par une chose déjà préparée à travers les particulières. Et ainsi, a posteriori, on peut facilement réduire les générales aux particulières.* [60]

Dans ce texte, Leibniz identifie l'analyse et la combinatoire, au titre de leur lien avec la caractéristique, mais dans le cadre de l'*ars inveniendi* :

> *Grâce à l'analyse dans la mécanique pure, c'est-à-dire celle qui ne dépend pas des expériences, elles peuvent intervenir de la même manière que dans l'arithmétique et la géométrie au sein de celles-ci, à savoir, dans la statique, l'hydrostatique, la pneumatique, la pyrobolique, l'élastique, l'oscillatoire,*

60. A VI, 3, N.44, *Analysis ad alias res quam quantitates applicata*, été-automne 1674 - p.413 : « Restant aliæ plane Analyses sive Combinationes, circa Ordines rerum, circa qualitates, actiones, aliaque infinita, quæ aliis plane modis (licet etiam per literas simpliciave alia signa) exprimi debent quam quantitates, et cuius rei specimen video, in Uteris meis, quibus usus sum ad signa ambigua exprimenda ; ibi enim non quantitas, sed relatio quædam sive ordo, ad signorum analyticorum instar exprimitur. Sed universalis analysis dependet a charactere universali, etsi interim in longis calculis pro characteribus peculiaribus liceat adhibere generales seu literas alphabeticas, ut in Geometria, sed re jam per particulares præparata. Et ita ut postea facile ad particulares possint reduci generales. ».

*l'optique, la musique, la nautique, l'astronomie et la géographie générale et une infinité d'autres dont les formes et les idées peuvent être appliquée à la matière pure par les caractères analytiques, non pas par l'instruction, la transmission ou même la démonstration mais par l'invention.* [61]

On trouve donc ici une forme de confusion semblable à celle que nous avons représentée sur le diagramme ci-dessus. Cette vision enthousiaste se confronte bien à la difficulté que nous avons déjà pointé, propre à tout discours sur le progrès révolutionnaire d'une science :

*D'où, une fois la réduction établie, il apparait combien l'usage de l'art analytique ou combinatoire sera précieux parce que les formules et les équations qui ne représentent jusqu'ici rien d'autre que des nombres, des lignes et autres choses stériles et sèches, s'appliqueront alors au lieu, au mouvement, au temps, aux hommes et aux affects. Quand on résout un problème analytique et qu'on trouve les racines ou les diviseurs d'une certaine équation, alors on découvre les arcanes de la nature et on donne des machines utiles à la vie. Et quand on trouve des constructions élégantes, alors on applique le trésor de la mécanique utile à la vie. Donc le progrès toujours plus avancé de la combinatoire participe pendant ce temps de celui du genre humain.* [62]

Il faut d'une part présenter sa position comme le prolongement de celles qui précèdent et justifier ainsi qu'on traite toujours du même objet. Mais d'autre part, montrer que sa position tranche radicalement avec les précédentes et justifier ainsi l'apport substantiel qu'elle apporte. La nouvelle théorie doit se distinguer sans se marginaliser. Cette tension explique en grande partie le caractère très ambivalent du discours tenu par Leibniz sur l'algèbre, l'analyse, la combinatoire et l'*ars inveniendi* durant tout le séjour parisien. Néanmoins, l'identification de la combinatoire à l'analyse dans le cadre de l'*ars inveniendi* ne perdure guère longtemps.

Durant cette période, Leibniz développe l'idée d'une bipartition de l'*ars inveniendi*. Dans le texte intitulé *Analysis ipsorum Elementorum* (A VI, 3, N.43), daté de l'été ou l'automne 1674, il distingue deux types de démonstrations en géométrie :

*Remarque : il deux types de démonstrations des théorèmes ou de solutions des problèmes, les unes sont à notre portée, les autres sont contingentes. Pour les premières, il faut chercher avec application, pour les secondes il faut trouver avec fortune. Cependant, grâce à un art d'inventer parfaitement abouti, toutes celles qui sont contingentes deviendraient délibérées. Et celles qui sont délibérées sont doubles : les unes ne supposent que des quantités données, et les autres, bien plus simples, sont à leur tour de deux genres. En effet, ou bien on les élucide par le calcul analytique, sans la moindre figure, comme lorsque l'on démontre que le carré du tout contient les carrés des deux parties ainsi que le double du rectangle sous ces parties, ou bien on les élucide par la congruence et la transposition des figures, comme le fait que le triangle est la moitié du parallélogramme de même hauteur, même si l'on peut démontrer la même chose à partir du seul calcul, grâce à l'arithmétique des infinis, comme je l'ai montré ailleurs. En effet, il y a deux calculs : l'un est seulement algébrique et l'autre utilise l'arithmétique des infinis.* [63]

Les démonstrations qui sont à notre portée donnent directement la direction à prendre, au prix d'un effort d'attention. Celles qui sont contingentes, en revanche ne laissent aucun indice sur la marche à suivre et

61. A VI, 3, N.44, *Analysis ad alias res quam quantitates applicata*, été-automne 1674 - p.413 : « Ope Analyseos in pura mechanica, id est quæ non pendet ab experimentis, eadem fieri possunt, quæ in Arithmetica et Geometria, scilicet in Statica, Hydrostatica, Pneumatica, Pyrobolica, Elastica, Oscillatoria ; Optica, Musica ; Nautica, Astronomia, Geographia generali ; aliisque in infinitis quorum ideæ atque formæ a materia purgatæ analyticis characteribus exhiberi possunt, non ita docendi tradendique ac demonstrandi, sed inveniendi causa. ».

62. A VI, 3, N.44, *Analysis ad alias res quam quantitates applicata*, été-automne 1674 - p.413-414 : « Unde patet re eo reducta quantus sit futurus usus artis analyticæ sive combinatoriæ, cum formulæ æquationesque quæ nunc non nisi numeros, et lineas aliaque sterilia et sicca repræsentant, spatia et motus, et tempora, et vires, et effectus exhibebunt. Quando problema analyticum solvere, et æquationis cuiusdam radices invenire, vel divisores, erit arcana naturæ detegere, et machinas vitæ utiles dare ; et quando constructiones elegantes invenire, erit compendia medianica vitæ utilia exhibere. Combinatoriam ergo interim magis magisque perfici interest generis humani ».

63. A VI, 3, N.43, *Analysis ipsorum Elementorum*, été-automne 1674 - p.411-412 : « Nota, duæ sunt Demonstrationes Theorematum aut solutiones problematum, aliæ sunt in potestate, aliæ sunt casuales. In illis opus est diligentia inquirendi, in his fortuna inveniendi. Arte tamen inveniendi perfecte stabilita omnes casuales fient arbitrariæ. Arbitrariæ sunt duplices, aliæ non supponunt nisi quantitates datas, et hæ sunt facillimæ, et rursus duorum generum, vel enim expediuntur calculo analytico, sine ullis figuris, ut cum demonstratur quadratum totius continere quadrata duarum partium cum rectangulo sub partibus duplicato, vel expediuntur congruentia seu transpositione figurarum, ut Triangulum esse dimidium parallelogrammi ejusdem altitudinis, etsi idem ex solo calculo demonstrari possit, ope Arithmeticae infinitorum, ut alibi ostendi. Est enim duplex calculus, alius tantum Algebraicus, alius adhibita arithmetica infinitorum. ».

le chemin emprunté semble tiré au hasard parmi une infinité d'autres voies possibles. Les premières relèvent plutôt du raisonnement analytique tandis que les secondes tiennent d'avantage du raisonnement synthétique :

> *Et cette démonstration délibérée semble s'approcher encore plus de la contingente, c'est-à-dire de celle qui est imparfaitement délibérée, au sujet de laquelle il faut encore dire qu'il n'est pas suffisant d'employer les quantités et les lignes données, mais on en produit de nouvelles qui n'utilisent cependant que les points donnés. Et de cette manière, on démontre ce que j'ai dit au sujet de la comparaison entre le parallélogramme et le triangle. Et de façon similaire, en ce qui concerne le fait que le carré de l'hypoténuse est égal aux carrés des jambes. Parfois elles nécessitent le tracé de nouvelles lignes, comme lorsque nous voulons démontrer que les trois angles d'un triangles sont égaux à deux droits. D'ordinaire, lorsqu'on trace de nouvelles lignes, celles-ci sont ou bien entre des points donnés et des points donnés, ou bien des distances de points par rapport aux lignes, c'est-à-dire des perpendiculaires ou finalement des parallèles. Toutes celles qui sont contingentes deviendraient délibérées si l'on s'imaginait mentalement l'infinité des parallèles, des perpendiculaires, des cercles etc. comme déjà tracée.* [64]

L'*ars inveniendi* permet ici de mettre à notre portée les démonstrations contingentes, en réalisant tous ces chemins possibles par des opérations mentales ou scripturales. Ainsi, il consiste donc à augmenter le plus possible le nombre des données, au moyen de la synthèse, de sorte que l'analyse puisse tenir à notre portée la solution du problème. L'*ars inveniendi* correspond donc ici à la synthèse, ce qui témoigne du fait que ces catégories sont encore bien instables en 1674. Néanmoins, le rôle que joue l'*ars inveniendi* dans cette bipartition des démonstrations préfigure l'idée qui s'imposera durant l'année qui suit, à savoir que l'*ars inveniendi* est composé de deux choses : l'analyse et la synthèse. Dans ce contexte méthodologique, la synthèse est identifiée à la combinatoire :

> *J'ai trouvé deux aspects de l'art d'inventer : le combinatoire et l'analytique. La combinatoire constitue l'art de trouver les questions ; l'analyse est l'art de trouver les solutions des questions.* [65]

Cette définition de la synthèse et de l'analyse comme ayant pour objet deux catégories absolument distinctes, à savoir les questions pour l'une et les réponses pour l'autre n'est pas satisfaisante. En effet, la synthèse permet aussi de répondre à certaines questions :

> *Souvent, pourtant, il arrive que l'on trouve pour certaines questions des solutions qui sont plus combinatoires qu'analytiques, comme lorsque l'on cherche à réaliser quelque chose pour un objet naturel ou bien social, alors en effet les moyens pour chercher se trouvent hors de l'objet. En somme, pourtant, trouver les questions est d'avantage combinatoire et les résoudre d'avantage analytique. En outre, il y a deux genres de questions. En effet, ou bien on cherche un moyen futur ou passé de découvrir ou de réaliser quelque chose, ou bien on cherche la véracité et l'examen des choses qui ont été découvertes ou réalisées par d'autres. Et entre ces deux genres, il y a autant de différences qu'entre l'art de bien écrire ou bien parler et l'art de bien juger ce qui est écrit. De plus, l'examen des choses qui ont été découvertes est purement analytique alors que cet art de découvrir et de réaliser des choses est d'avantage combinatoire.* [66]

Cette deuxième façon de distinguer la synthèse de l'analyse entre en contradiction avec la première phrase de la citation précédente. En effet, ici seule la synthèse relève de l'*ars inveniendi* tandis que l'analyse, qui concerne ce qui est déjà écrit ou déjà prononcé, relève de l'*ars judicandi*, c'est-à-dire l'art de juger.

64. A VI, 3, N.43, *Analysis ipsorum Elementorum*, été-automne 1674 - p.412 : « Et hæc jam arbitraria videtur potius accedere ad casualem, vel arbitrariam imperfectiorem, de qua jam dicam, ubi non sufficit quantitates lineasque datas adhibere, sed ducuntur novæ non tamen adhibitis nisi punctis datis, et hoc modo demonstratur id quod dixi de Parallelogrammi et Trianguli comparatione. Et de quadrato hypotenusæ æquali quadratis crurum simul. Interdum opus habent ductis lineis novis, ut cum demonstrare volumus Trianguli tres angulos esse 2 rectis æquales. Plerumque cum lineæ novæ ducuntur, eæ sunt aut ex punctis datis ad puncta data, aut distantiæ punctorum a lineis, seu perpendiculares, aut denique parallelæ. Omnes casuales fiant arbitrariæ si infinitas parallelas, perpendiculares etc. circulos, jam ductos mente fingas. ».

65. A VI, 3, N.49, *De Arte Inveniendi*, 1675 - p.428 : « Duas partes invenio Artis inveniendi, Combinatoriam et Analyticam ; Combinatoria consistit in arte inveniendi quæstiones ; Analytica in arte inveniendi quæstionum solutiones. ».

66. A VI, 3, N.49, *De Arte Inveniendi*, 1675 - p.428-429 : « Sæpe tamen fit ut quæstionum quarundam solutiones, plus habeant Combinatoriæ quam analyticæ, ut cum modus quæritur efficiendi aliquid in re naturali aut civili, tunc enim media quærenda sunt extra rem. In summa tamen quæstiones invenire combinatoriæ potius, solvere Analyticæ est. Duo autem sunt genera quæstionum, aut enim quæritur modus aliquid indagandi aut efficiendi futurus sive præteritus, aut quæritur Veritas et examen eorum quæ sunt ab aliis indagata aut effecta. Et inter hæc duo tantum est discriminis quantum inter artem bene scribendi vel loquendi, et inter artem bene de scriptis judicandi. Examen autem eorum quæ indagata sunt, pure analyticum est ; sed ars ipsa indagandi aut efficiendi magis combinatoria. »

Cette contradiction engage une réflexion quant à la signification du terme *ars inveniendi* qui souffre de l'ambiguïté sémantique du latin « *invenio* » qui peut signifier à la fois inventer, découvrir et trouver. En jugeant de la véracité d'une chose découverte ou réalisée par d'autres, on trouve certes une nouvelle proposition, à savoir que cette chose est vraie ou que cette chose est fausse, mais on n'invente pas de nouvelles choses. Cette découverte est produite seulement par un jugement. En revanche, en produisant soi-même la chose à découvrir, on l'invente. Ainsi, la découverte est le produit d'une invention. Il semble donc qu'il y a deux usages possibles du terme *ars inveniendi*. L'un plus large, où il s'agit de trouver des choses que l'on ne savait pas auparavant, mais dont on pouvait avoir conscience. Un deuxième, plus étroit, où il s'agit seulement de trouver des choses dont on avait nulle conscience auparavant. Ici, Leibniz utilise *ars inveniendi* dans son sens large. Mais il lui arrive de l'employer dans un sens plus étroit, notamment quand il le distingue de l'*ars judicandi*. Dans le *Analysis ipsorum Elementorum* (A VI, 3, N.43), où nous avons montré que l'*ars inveniendi* est assimilé au seul raisonnement synthétique, le jeune philosophe entend donc ce terme dans son sens étroit. Il poursuit par une troisième distinction :

> *Cependant, on peut encore distinguer ces deux choses avec plus de soin. Assurément, pour le dire avec précision, l'analytique est la recherche lorsque nous partageons la chose elle-même avec exactitude en autant de parties que nous pouvons, en observant minutieusement le lieu, le lien, la forme des parties et des parties dans les parties. La synthèse ou la combinatoire intervient lorsque l'on ajoute à la chose qu'on souhaite expliquer une autre chose extérieure. Ainsi, la dissection des animaux est analytique alors qu'étouffer les animaux dans une machine pneumatique et les disséquer ensuite, c'est combinatoire. Examiner les liquides en écoulement, c'est de l'analyse ; ajouter d'autres liquides ou d'autres poudres pour déclencher une fermentation, c'est combinatoire. On pourra dire que c'est aussi le cas pour la flamme dans la distillation, et le couteau dans la dissection qui sont aussi des éléments appliqués de l'extérieur. C'est vrai : je l'accorde et qui a le premier enseigné l'art de trancher au moyen d'un couteau ou d'évaporer les liquides par le feu, a sans nul doute suivi la voie de la combinatoire. Mais maintenant, l'usage de ces instruments étant familier à tous, il faut bien comprendre qu'on a toujours connecté et mis dans un même sac le feu et le liquide ou encore le couteau et le cadavre, comme l'idée de l'un présente toujours l'idée de l'autre et cela parce que nous expérimentons si souvent ces deux choses conjointement à notre époque, tout cela étant le fruit de décisions humaines. Ainsi, les temps se succédant, quelques opérations qui étaient combinatoires sont devenues analytiques, répandant parmi tous la pratique de la combinatoire, qui tôt ou tard finit par venir à l'esprit de n'importe qui.* [67]

La combinatoire consiste donc à ajouter des choses à l'objet que l'on considère afin qu'il puisse révéler ce que l'on souhaitait savoir à l'origine. Tandis que l'analyse se contente simplement des données, qu'il s'agit d'observer avec minutie. On retrouve bien la distinction que Leibniz avait faite dans le *Analysis ipsorum Elementorum* (A VI, 3, N.43), entre les démonstrations qui sont à notre portée et délibérées et celles qui sont contingentes et inaccessibles à partir des seules données. On trouve également l'idée que la combinatoire ou la synthèse préexiste naturellement, et peut-être même nécessairement, à l'analyse. Cette réflexion fournit une réponse partielle au problème que nous venons de soulever quant à l'ambiguïté du terme *ars inveniendi*. En affirmant qu'à l'origine, toutes les découvertes sont combinatoires, on retrouve le sens étroit de l'*ars inveniendi* identifié à la seule synthèse. L'analyse est alors une forme de synthèse au sein de laquelle les éléments qu'on ajoute sont déjà à notre disposition, intégrés dans notre esprit par l'habitude. Avec cette interprétation, certes extrême, le sens étroit équivaut au sens large.

On voit donc que, parallèlement à son projet de caractéristique, Leibniz développe une acception méthodologique de la combinatoire, bien distincte de la science des formes et des similitudes. En revanche, les textes des premières années parisiennes ne témoignent pas de cette distinction et semblent entretenir l'amalgame entre combinatoire analytique et combinatoire synthétique.

67. A VI, 3, N.49, *De Arte Inveniendi*, 1675 - p.429 : « Hæc tamen rursus distingui possunt curatius. Nimirum accurate loquendi Analytica est inquisitio cum rem ipsam quanta possumus exactitudine in partes secamus ; observatis morose situ, nexu, forma partium, et partium in partibus. Synthetica sive combinatoria est, cum alia extra rem ad rem explicandam assumimus : ita anatome animalium analytica ; ut animalia in Machina pneumatica suffocare, et postea disecare : combinatorium. Distillatione examinare liquores analyticum ; injectis aliis liquoribus aut pulveribus fermentationem excitantibus, combinatorium. Dices, etiam ignem in distillando, cultrum in dissecando extrinsecus adhibita. Ita est : fateor, et qui primus artem docuit secandi cultro, aut igne liquores in vaporem evehendi, haud dubie combinatoriæ opus peregit ; sed nunc vulgato horum instrumentorum usu, perinde habendum est, ac si ignis liquori, culter cadaveri perpetuo annectus appictusve esset, cum idea unius ideam alterius semper offerat ex quo eas duas res ex humano arbitrio tam sæpe conjunctas nostris temporibus experimur. Unde tractu temporis quædam operationes quæ erant antea combinatoriæ, fient analyticæ ; pervulgate apud omnes eo combinandi more, et tardissimo cuivis occurente »

## Après Paris, la vision architectonique

### Concomitance des différentes significations

Ce bref tour d'horizon des différentes acceptions leibniziennes de la combinatoire jusqu'au départ de Paris en 1676 a donc permis de mettre en évidence deux parcours, l'un méthodologique, l'autre épistémologique, qui sont d'abord relativement confondus, puis qui se distinguent progressivement. Cependant, cette analyse demeure une interprétation *a posteriori* de sa pensée. En effet, Leibniz ne distingue pas, à notre connaissance, les acceptions méthodologiques et épistémologiques avant la fin des années 1670. Nous avons vu qu'en 1678, dans sa lettre à Tschirnhaus, Leibniz établit clairement la distinction entre l'acception épistémologique de la combinatoire, comme science des formes et de formules et l'acception mathématique comme science des dénombrements. On en trouve par ailleurs une autre expression, dans la même lettre :

> *Ainsi, je pense que l'algèbre est subordonnée à la combinatoire parce que je ne tiens pas la combinatoire pour l'art de chercher les nombres possibles de variations mais pour l'art des formes, c'est-à-dire la science générale du semblable et du dissemblable.* [68]

Cette distinction qui se trouvait déjà en filigrane dans les textes parisiens, est donc la première que Leibniz explicite après son retour de Paris.
En multipliant les entreprises de classements architectoniques, et en établissant diverses hiérarchies entre les différents domaines du savoir, Leibniz distingue presque systématiquement, dans ces listes, l'acception épistémologique et l'acception méthodologique. Dès lors, l'acteur s'empare des catégories de l'observateur. En 1679, dans le *De Arte Characteristica Inventoriaque Analytica Combinatoriave in Mathesi Universali* (A VI, 4, N.78), Leibniz s'exprime clairement sur la confusion qui est faite entre les aspects méthodologiques et les aspects épistémologiques de l'analyse et de la combinatoire :

> *Mais afin que nul ne pense que ces choses sont en-dessous de la dignité de l'Analyse reçue, il faut savoir que beaucoup de choses que l'on croit se produire par analyse, seulement du simple fait qu'elles passent par des symboles, se produisent à la vérité plus par la Combinaison, et sont plus Synthétiques qu'Analytiques ; l'usage des symboles, en effet, ne fait pas l'analyse. Par exemple, si quelque problème où les inconnues sont $x$ et $y$, $a$ et $b$ étant les données, est ramené aux deux équations $x^2 + y^2 = a^2$ et $x - y = b$, nous pouvons construire le problème par intersection du cercle de rayon $a$, et d'une ligne droite, certes indéfinie, mais cependant déterminée par la donnée de $b$. Et ceci ne nous apparaît pas de la seule considération du problème, ce qui serait de la pure analyse, mais aussi (ce qui est synthétique, ou combinatoire) d'une connaissance assumée de l'extérieur à partir de théorèmes démontrés par d'autres, c'est-à-savoir du catalogue ou de la Table des lieux plans.* [69]

En pointant précisément cette ambiguïté de l'analyse qui désigne à la fois une méthode et une science symbolique, Leibniz trouve également l'occasion de faire la distinction entre la synthèse, dont il dit que c'est elle qui correspond à ce que l'on appelle alors la composition mathématique, et le raisonnement géométrique par lignes :

> *Ainsi, je pense que l'on peut comprendre à partir de ces choses ce que sont en fin de compte la Composition et la Résolution Mathematique, que je vois correctement connues par peu de gens. Car les lignes ne font pas la synthèse, et, comme je l'ai dit, les symboles ne font pas l'analyse ; je peux en effet démontrer en symboles quelque chose en cachant l'origine de l'invention, ce qui est toujours synthétique, et je peux également procéder de façon analytique en utilisant les lignes à la manière*

68. A III, 2, N.171, Lettre de Leibniz à Tschirnhaus, fin Mai 1678 - p.425 : « Nam ego Combinatoriæ subordinatam puto Algebram quia combinatoriam non habeo pro arte inquirendi numeros possibiles variationum ; sed pro arte formarum seu pro scientia generali de Simili et Dissimili. »

69. A VI, 4, N.78$_4$, *De Arte Characteristica Inventoriaque Analytica Combinatoriave in Mathesi Universali*, mai 1679 - avril 1680 - p.327-328 : « Ne quis autem putet, hæc esse infra Analyseos receptæ dignitatem, sciendum est, multa quæ creduntur fieri per analysin, ideo tantum quia per symbola transiguntur, ea revera fieri nonnisi per Combinationem, et Synthetica potius quam Analytica esse ; usus enim symbolorum analysin non facit. Exempli causa, si problema aliquod in quo incognitæ sunt $x$ et $y$, at $a$ et $b$ sunt datæ, redactum sit ad duas æquationes $x^2+y^2$ æqu. $a^2$, et $x-y$ æqu. $b$, possumus construere problema per intersectionem circuli cujus radius $a$, et lineæ rectæ indefinitæ quidem attamen determinatæ per datam $b$. Idque nobis non quidem apparet ex sola consideratione problematis, quod esset meræ analyseos, sed et (quod syntheticum, sive combinatorium est) ex cognitione extrinsecus assumta theorematum ab aliis demonstratorum, sive ex locorum planorum catalogo aut Tabula ». - *Nota Bene* La traduction est issue de [55] G.W. Leibniz, *Mathesis universalis, écrits sur la mathématique universelle, ed.* D. Rabouin, Vrin, Paris, 2018 - p.87

*des géomètres anciens. Mais, même si l'origine de la solution trouvée est apparente, celle-ci peut cependant être synthétique ou combinatoire, c'est-à-dire de celles que je n'aurais pas rencontrées sans connaissances assumées de l'extérieur ; et ce n'est donc pas la marque de la véritable analyse que de montrer l'origine de la découverte.* [70]

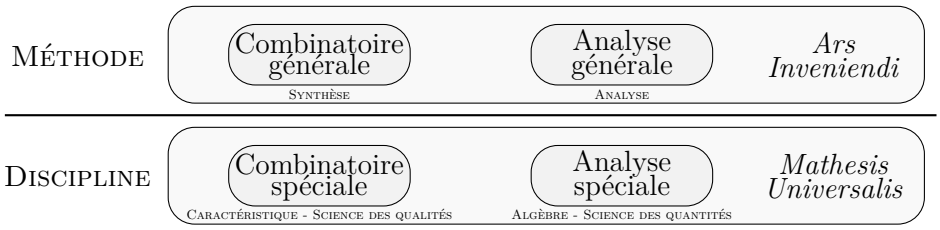
Une troisième différence est soulignée, entre l'*ars inveniendi*, qui permet de résoudre des problèmes et trouver de nouvelles connaissances, et l'origine de l'invention qui permet de comprendre la solution d'un problème ou la présence d'une nouvelle connaissance. Notons que si la révélation de l'origine de l'invention n'est pas suffisante pour caractériser l'analyse, elle cependant nécessaire. En effet, Leibniz affirme ici que sa dissimulation est toujours synthétique.

Bien que Leibniz adopte une position plus réflexive, à partir de la fin des années 1670, et médite sur le rôle architectonique des diverses acceptions de la combinatoire, le détail de cette structure reste très instable. Ainsi, dans la même année, sur un billet intitulé *De Arte Inveniendi Combinatoria* (A VI, 4, N.79), on trouve encore une nouvelle acception de l'art combinatoire :

*L'art combinatoire est une chose, la science des combinaisons en est une autre, elle pourtant que l'on appliquera utilement de sorte que d'abord apparaisse en premier la nature universelle des combinaisons, puis qu'ensuite elle enseigne le moyen de distinguer rapidement les combinaisons utiles des inutiles.*
*La logique : à propos du compatible et de l'incompatible, c'est-à-dire du joint et du disjoint.*
*La science des combinaisons : à propos du même et du différent.*
*L'analogie : à propos du semblable et du dissemblable.*
*La logistique : à propos de l'égal et de l'inégal, c'est-à-dire du calcul.*
*Ces sciences s'alimentent mutuellement. La Combinatoire opère sur la manière dont les êtres sont configurés ou coordonnés, sans égard pour la conformation du lieu. C'est presque une géométrie métaphysique.* [71]

Ici, Leibniz appelle la combinatoire épistémologique « science des combinaisons » (« *scientia combinationum* »), alors qu'il réserve d'ordinaire cette expression à l'acception mathématique. Quoiqu'il en soit, la science *de eodem et diverso* est bien distincte d'une autre combinatoire, appelée ici « art combinatoire » (« *ars combinatoria* »), qui n'est pas la combinatoire méthodologique identifiée à la synthèse, mais une science des formes encore plus générale que la première, qui a pour objet la conformation interne des êtres.

Cela dit, au sein des textes de cette période, la combinatoire est prise la plupart du temps dans son sens méthodologique, comme synonyme de la synthèse et branche de l'art d'inventer. Leibniz évoque son sens spécifique, celui de la science des formes et des formules, ou de science de la similitude, lorsqu'il s'agit de l'opposer à l'algèbre. On retrouve alors la distinction, déjà présente dans les textes de la fin du séjour parisien, entre la combinatoire comme science de la qualité et l'algèbre comme science de la quantité, c'est-à-dire de l'égal et de l'inégal. Ainsi, Leibniz peut établir deux niveaux pour l'analyse et la synthèse, l'un méthodologique et général, l'autre épistémologique et spécial :




70. A VI, 4, N.78$_4$, *De Arte Characteristica Inventoriaque Analytica Combinatoriave in Mathesi Universali*, mai 1679 - avril 1680 - p.328 : « Ex his itaque intelligi posse arbitror, quid sint denique Compositio ac Resolutio Mathematica, quas video paucis recte cognitas. Nam nec lineæ synthesin faciunt, neque ut dixi symbola analysin ; possum enim symbolis demonstrare aliquid tecta inventionis origine quod semper syntheticum est, et possum lineis veterum Geometrarum more adhibitis, analyticum agere. Sed etsi appareat inventæ solutionis origo, potest ea tamen esse synthetica seu combinatoria, id est in quam non incidissem sine notitiis forinsecus assumtis ; ideo neque illa vera est nota analyseos, ut originem inventionis exhibeat. ». - *Nota Bene* La traduction est issue de [55] G.W. Leibniz, *Mathesis universalis, écrits sur la mathématique universelle, ed.* D. Rabouin, Vrin, Paris, 2018 - p.88

71. A VI, 4, N.79, *De Arte Inveniendi Combinatoria*, mai-juin 1679 - p.332 : « Aliud est ars Combinatoria aliud Scientia combinationum, quæ tamen utiliter præmittetur, ut primum appareat natura combinationum in universum postea modus doceatur utiles combinatoriones ab inutilibus promte distinguendi. Logica de compatibili et incompatibili sive de connexo et inconnexo. Scientia combinationum ; de eodem et diverso. Analogica ; de simili et dissimili. Logistica ; de æquali et inæquali, sive de Calculo. Hæ scientiæ se mutuo adjuvant. Combinatoria agit quodammodo de Entium configuratione, seu coordinatione, nullo respectu habito loci, est quasi Geometria Metaphysica. »

On trouve ce type de classifications dans le courant des années 1680. Par exemple dans le *Elementa nova Matheseos Universalis* (A VI, 4, N.124) qu'on situe à l'été 1683, on trouve l'identification entre analyse et algèbre d'une part et synthèse et combinatoire d'autre part :

> *On y traitera et de la Synthèse et de l'Analyse, c'est-à-dire autant de Combinatoire que d'Algèbre.* [72]

Au lieu de le lire comme un trait d'égalité, on peut comprendre cette citation à l'aune de notre diagramme : Leibniz donne ainsi les catégories méthodologiques, puis les disciplines correspondantes. Puis dans le célèbre *Plus Ultra* (A VI, 4, N.158), Leibniz décrit le plan d'un ouvrage qui respecte parfaitement notre diagramme :

> *10) De l'art d'inventer.*
> *11) De la synthèse ou art combinatoire.*
> *12) De l'analyse.*
> *Des caractères.*
> *13) De la combinatoire spéciale, ou science des formes et des qualités en général, ou du semblable et du dissemblable.*
> *14) De l'analyse spéciale, ou science des quantités en général, ou du grand et du petit.*
> *15) De la mathématique générale composée des deux précédentes.*
> *16) De l'arithmétique .*
> *17) De l'algèbre.*
> *18) De la géométrie.* [73]

Cela étant, cette conception ne permet pas de mettre en évidence un aspect central que nous avons déjà bien mentionné : la subordination de l'algèbre à la combinatoire comme science des formes et des formules. La relation que cette dernière entretient avec les mathématiques constitue l'aspect principal sur lequel Leibniz semble hésiter sans cesse et ne jamais vraiment trouver de réponse stable dans le temps. Dans le *De Arte Characteristica Inventoriaque Analytica Combinatoriave in Mathesi Universali* (A VI, 4, N.78$_4$), cette subordination est exprimée au plus haut niveau architectonique, entre l'*ars inveniendi* et l'*ars characteristica* :

> *Maintenant que nous avons compris les modes de découverte, par Analyse ou par Combinaison, la chose demande que nous exposions les Instruments de découverte, que nous avons trouvés être les Caractères, et aussi les Inventaires. Mais puisqu'il est établi que les Inventaires eux-mêmes sont des systèmes de formules confectionnées à partir de caractères mis en ordre de façon appropriée, il s'ensuit que tout l'Ars Inveniendi dépend en fait de l'Ars Characteristica.* [74]

Dans un texte datant du milieu des années 1680, le *De Ortu, Progressu et Natura Algebræ, nonnullisque aliorum et propriis circa eam Inventis* (GM 7, XVIII) en revanche, la subordination se trouve à un niveau bien inférieur, au sein même de la *Mathesis* :

> *Mais à la vérité, il semble que tombe sous la Mathesis tout ce qui tombe sous l'imagination en tant que distinctement conçu. Par conséquent, on y traite non seulement de la quantité, mais aussi de la disposition des choses. Il y a ainsi deux parties, si je ne me trompe, dans la Mathesis generalis : L'Art combinatoire qui traite universellement de la variété des choses et des formes, c'est-à-dire des qualités de façon universelle, en tant qu'elles sont soumises à un raisonnement distinct, et du semblable et du dissemblable, et la Logistique ou Algèbre qui traite de la quantité de façon universelle. Assurément l'art du décryptage, l'art des jeux de latruncules, et choses semblables, que l'on juge se rattacher à la*

72. A VI, 4, N.124, *Elementa nova Matheseos Universalis*, été 1683 - p.513 : « Tradetur et Synthesis et Analysis, sive tam Combinatoria, quam Algebra. ». - *Nota Bene* La traduction est issue de [55] G.W. Leibniz, *Mathesis universalis, écrits sur la mathématique universelle, ed.* D. Rabouin, Vrin, Paris, 2018 - p.88

73. A VI, 4, N.158, *Guilielmi Pacidii Plus Ultra*, avril-mai 1686 - p.676 : « 10) De Arte inveniendi. | 11) De Synthesi seu Arte combinatoria. | 12) De Analysi. | De Characterismis. | 13) De Combinatoria Speciali, seu scientia formarum sive qualitatum in genere sive de simili et dissimili. | 14) De Analysi speciali seu scientia quantitatum in genere seu de magno et parvo. | 15) De Mathesi generali ex duabus praecedentibus composita. | 16) De Arithmetica. | 17) De Algebra. | 18) De Geometria. ». - *Nota Bene* La traduction est issue de [55] G.W. Leibniz, *Mathesis universalis, écrits sur la mathématique universelle, ed.* D. Rabouin, Vrin, Paris, 2018 - p.222

74. A VI, 4, N.78$_4$, *De Arte Characteristica Inventoriaque Analytica Combinatoriave in Mathesi Universali*, mai 1679 - avril 1680 - p.329 : « Intellectis jam inveniendi modis, per Analysin scilicet vel Combinationem, res postulat ut Instrumenta inveniendi exponamus, quæ Characteres esse comperimus, atque Inventaria, sed quoniam Inventaria ipsa systemata quædam formularum ex characteribus confectarum apte ordinata esse constat ; sequitur totam Inveniendi artem ab Arte Characteristica vera pendere. ». - *Nota Bene* La traduction est issue de [55] G.W. Leibniz, *Mathesis universalis, écrits sur la mathématique universelle, ed.* D. Rabouin, Vrin, Paris, 2018 - p.89

*Mathesis, ont plus besoin de Combinatoire que d'Algèbre. L'Algèbre elle-même, en tant qu'elle exprime les quantités par des formules déterminées qui indiquent les diverses relations entre les quantités, est subordonnée à l'art combinatoire, et peut progresser grâce à lui, ce que je montrerai en son lieu.* [75]

Pour finir, dans un texte édité par Louis Couturat qui l'estime postérieur à 1693, Leibniz place à nouveau la science des formes et de formules à l'extérieur de la *Mathesis*. Mais la combinatoire n'est alors qu'une partie de cette science, et se trouve dès lors située au même niveau que l'algèbre :

*La philosophie théorique rationelle relative à la nécessité logique (qui contient les vérités qui sont ou bien issues du seul principe de contradiction, ou bien également issues du principe de raison suffisante) contient la science des formes, c'est-à-dire qui traite de la qualité, et la science des grandeurs qui traite de la quantité.*
*La science des formes contient la logique et la combinatoire.*
*La science des grandeurs est la Mathesis et traite du discret et du continu.*
*En ce qui concerne le discret ou le nombre, il s'agit de la Logistique qui est double : l'arithmétique pour le nombre connu et la spécieuse pour l'inconnu.*
*En ce qui concerne le continu, on suit deux voies, celle du principe de position où le tout vaut les parties, qui donne la science du fini, et celle du principe de transition, c'est-à-dire la loi du continu, qui donne la science de l'infini.* [76]

Il semble que la bipartition entre sciences des quantités et sciences des qualités se transforme de façon substantielle à partir des années 1690, sous l'influence de la *Dynamica*[77].

### Les tables au sein de l'*Ars Combinatoria*

Comme nous l'avons évoqué en introduction de ce chapitre, Leibniz lui-même considère la notion de table comme fondamentale, au sein de la combinatoire. Cela étant, les diverses conceptions leibniziennes de cette catégorie nous invitent à introduire quelques nuances. En effet une table peut être conçue comme un outil de calcul, ou bien comme un catalogue. Dans le premier cas, la table sert la face computationnelle des projets leibniziens, tandis que dans le second, elle prend part à la tâche encyclopédique. La pratique tabulaire dont nous traitons principalement dans ce travail de thèse, c'est-à-dire celle que Leibniz opère à travers ses travaux sur les schémas de différences, le triangle harmonique ou encore l'interpolation des tables relève assurément d'une conception opératoire des tables. Cette vision émerge donc en premier, au sein des mathématiques, et marque encore profondément le jeune Leibniz dès 1675, alors que la combinatoire s'affirme progressivement comme science des formes et des formules :

*Nous avons les tables des nombres, mais personne n'a donné les tables des lettres, c'est-à-dire des combinaisons. Il faut donc trouver une méthode pour construire des tables de ce genre de sorte que leurs applications s'avèrent des plus larges.* [78]

Bien-sûr, les tables qui sont évoquées ici ont pour objectif d'être utilisées comme des catalogues de formules. Mais, Leibniz ne souhaite pas ici obtenir simplement la liste des formules ou des théorèmes, mais

75. GM 7, XVIII, *De Ortu, Progressu et Natura Algebræ, nonnullisque aliorum et propriis circa eam Inventis* - p.205-206 : « Verum Mathesi subesse quicquid imaginationi subest, quatenus distincte concipitur, et proinde non tantum de quantitate, sed et de dispositione rerum in ea tractari. Itaque duæ ni fallor sunt partes Matheseos generalis, *Ars combinatoria* de rerum varietate ac formis sive qualitatibus in universum quatenus distinctæ ratiocinationi subjiciantur, deque simili ac dissimili, et Logistica sive Algebra de quantitate in universum. Sane ars diciphrandi, ars ludendi latrunculis, similiaque quæ ad Mathesin pertinere judicantur, magis Combinatoria quam Algebra indigent, et ipsa Algebra quatenus quantitates certis formulis exprimit, quæ relationes quantitatum varias significant, arti combinatoriæ subordinatur et per eam promoveri potest, ut suo loco ostendam. ». - *Nota Bene* La traduction est issue de [55] G.W. Leibniz, *Mathesis universalis, écrits sur la mathématique universelle*, *ed.* D. Rabouin, Vrin, Paris, 2018 - p.230-231, les auteurs proposent que le texte date de 1685-1686

76. [47] G.W. Leibniz, *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*, *ed.* Louis Couturat, Paris, 1903 - p.525, Manuscrit LH 4 8 Bl.56-57 : « Philosophia theoretica rationalis necessitatis logicæ [continet veritates vel ortas ex solo principio contradictionis, vers ortas etiam ex principio reddendæ rationis] continet doctrinam Foramarum seu de Qualitate, et doctriname Magnitudinum seu de Quantitate. Doctrina Formarum continet Logicam et Combinatoriam. Doctrina Magnitudinum est Mathesis, estque de Discreto et de Continuo. De Discreto, seu Numero agit Logistica, estque duplex : de numero certo Arithmetica, de incerto Speciosa. De Continuo dupliciter agitur ex principio positionis, quod totum æquivaleat partibus : et est Scientia Finiti ; et ex principio Transitionis, seu Lege continuitatis, et prodit Scientia infiniti. »

77. Sur ce sujet, *Cf* la préface de D. Rabouin dans [55] G.W. Leibniz, *Mathesis universalis, écrits sur la mathématique universelle*, *ed.* D. Rabouin, Vrin, Paris, 2018

78. LKD, N.33, *De condendis tabulis analyticis*, Janvier 1675 - p.146 : « Tabulas habemus Numerorum, Tabulas literarum, sive Combinationum dedit nemo. Quærenda ergo ratio est condendi Tabulas ejusmodi, ut earum usus quam latissime pateat. »

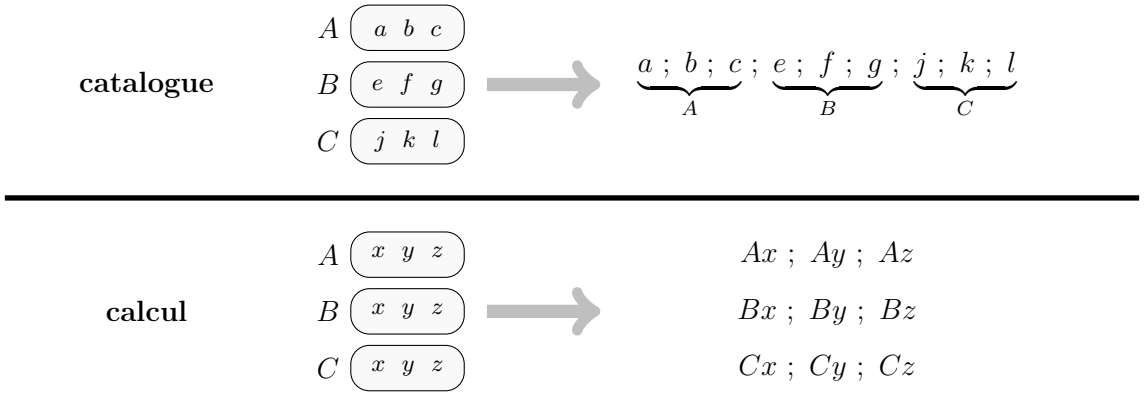
plutôt la méthode pour les construire de manière systématique. Si l'on considère, en guise d'illustration, le triangle arithmétique de Pascal, on peut certes y voir un catalogue de coefficients que l'on peut rechercher pour obtenir par exemple le développement d'un binôme, mais il s'agit surtout d'un instrument de calcul qui permet de générer facilement de nouveaux termes à partir des précédents.
Pourtant, la plupart des mentions faites par Leibniz, à la fin des années 1670, de la table comme l'une des notions incontournables de la combinatoire, désignent d'avantage des catalogues que des instruments de calcul. Dans un texte consacré à l'*ars inveniendi*, et justement intitulé *De Arte Inveniendi in Genere* (A VI, 4, N.29), le philosophe allemand semble adopter cette posture, et ce même dans les sciences mathématiques :

> *La méthode de recherche est double : ou bien synthétique, c'est-à-dire combinatoire, ou bien analytique. De celles-ci, l'analytique est la plus difficile et la synthétique est la plus longue. Parfois, l'analytique ne peut pas faire découvrir le résultat à partir de la nature des choses, alors que la synthétique, toujours. Un exemple où l'analytique ne peut pas faire découvrir le résultat se trouve dans l'art de déchiffrer, et dans les autres cas où il faut construire des tables et les parcourir, comme lorsque nous voulons savoir si un nombre donné est premier, et que nous examinons dans l'ordre les diviseurs potentiels.* [79]

Les diviseurs sont simplement listés dans l'ordre où ils apparaissent naturellement. L'intérêt du catalogue réside donc dans son exhaustivité. Le parcours du catalogue conduit inéluctablement vers la solution qui figure nécessairement parmi tous les possibles. La question de la construction du catalogue est tout de même abordée dans ce texte à travers cette réflexion sur l'art d'énumérer :

> *Il y a deux moyens pour énumérer : ou bien que nous commencions par un seul genre et que les autres nous procurent suffisamment de différences, ou bien que nous les examinions tous de manière égale, les genres comme les différences, et qu'à partir de ceux-ci, nous les disposions tous, dans l'ordre des combinaisons, intercalés ou aux extrémités, de façon égale.* [80]

Dans le contexte métaphysique du manuscrit, les différences sont en réalité les déterminations qui doivent s'ajouter nécessairement aux espèces par rapport aux genres. Ici Leibniz distingue donc les méthodes d'énumération en fonction de la nature des données qu'il s'agit de traiter. Dans le premier cas, les déterminations des espèces sont propres à chaque genre, si bien qu'on peut traiter simplement les genres les uns après les autres, dans une liste linéaire : c'est la méthode du catalogue. Dans le deuxième cas, une même détermination peut être attribuée à plusieurs genres différents. Il faut donc établir des combinaisons entre les différentes déterminations et les différents genres :




Ainsi, on voit que la combinatoire ne se manifeste clairement qu'au sein de la pratique computationnelle des tables, puisque cette dernière nécessite des opérations de combinaison. Par ailleurs, ces dernières

79. A VI, 4, N.29, *De Arte Inveniendi in Genere*, entre été et automne 1678 - p.80-81 : « Methodus quærendi duplex est vel Synthetica seu Combinatoria vel Analytica. Ex quibus Analytica est difficilior, Synthetica longior. Analytica interdum per naturam rerum exitum reperire non potest, synthetica semper ; Exemplum ubi Analytica sola exitum reperire non postest, in arte deciphrandi, aliisque casibus ubi condendæ sunt Tabulæ et percurrendæ, cum scire volumus an datus numerus sit primus ; et examinamus divisores possibiles ordine. »

80. A VI, 4, N.29, *De Arte Inveniendi in Genere*, entre été et automne 1678 - p.80 : « Duplex modus enumerandi, vel ut ab uno genere incipiamus, cætera nobis suppeditent differentias, vel ut omnia æque ut genera vel differentias consideremus, et ex iis combinatione faciamus ordine intermedia pariter et ultima omnia. »

exigent de traiter les genres et les déterminations comme des objets identiques, à savoir des caractères. Ainsi, la combinatoire tabulaire implique une forme de pratique de l'*ars characteristica* en sous-déterminant les objets que l'on doit combiner entre eux. Ces opérations peuvent être alors réduites à des formules symboliques condensées qui renferment en elles la table. Ainsi, dans notre exemple, on écrira $Ax$, où $A$ ne désigne pas un genre en particulier mais tous les genres possibles et de même pour la détermination $x$. Cette correspondance entre table et forme est décrite dans ce texte par la notion de « sythèse analytique » (« *syntheseos analyticæ* ») :

> *Passons à une certaine découverte étonnante : la synthèse analytique, lorsque toutes ces choses qui, normalement, auraient du être parcourues l'une après l'autre, peuvent être réunies dans une formule générale qui, quoiqu'elle semble être spécifique, tient réellement du général, c'est-à-dire qu'on réduit un genre quelconque à la forme d'une espèce. C'est ce qui advient, grâce à l'espèce complète, c'est-à-dire maximalement composée, alors que toutes les autres sont des élisions de celle-ci.* [81]

Ainsi la forme ou la formule peut se substituer à la table, remplaçant un vaste diagramme par une courte chaîne de caractère. En considérant la forme comme l'outil premier de l'*ars enumerandi*, l'acception de la table en tant qu'instrument devient accessoire, tandis que demeure seulement l'acception encyclopédique du terme. Leibniz procède alors à une liste de sujets, tentative de classification épistémologique typique de cette période. Il introduit à cette un nouveau vocabulaire, à savoir les « inventaires » (« *inventariis* »), terme qui était auparavant réservé à la jurisprudence :

> ⋆ *Des tables, ou des inventaires, comme support à l'art combinatoire.*
> ⋆ *Des divisions et des subdivisions, nécéssaires pour trouver les tables ou pour énumérer toutes les espèces.*
> ⋆ *Des nombreuses tables à construire afin que la même chose puisse apparaître sous plusieurs modes différents.*
> ⋆ *Les expositions sont ou bien les colonnes, ou bien les figures, ou bien les tables.*
> ⋆ *Des colonnes, c'est-à-dire des séries exposées simplement.*
> ⋆ *Des inventaires, c'est-à-dire des diverses coordonnées de mêmes choses, ou encore des index.*
> ⋆ *Des divers modes de divisions et de subdivisions de sorte qu'on ait les genres subordonnés par divers modes.*
> ⋆ *Des tables des ramistes, et d'autres savants comme Zwinger. Il faut examiner les vestiges des tables.*
> ⋆ *De la détection achevée de toutes les espèces et aussi des leurs subordonnées, ce qui ne peut pas se faire au moyen de dichotomies à moins qu'elles soient établies selon plusieurs modes, mais seulement pas la combinaison a priori.*
>
> [82]

Etablir une table conçue comme un catalogue n'épargne pas de réfléchir au classement et à la disposition des termes, afin de les regrouper par genre, et par sous-genre. Mais contrairement à la table instrumentale, la disposition reste accidentelle car chaque terme est pleinement déterminé, de façon indépendante de l'inventaire. En effet, dans une table instrumentale comme le triangle arithmétique de Pascal, par exemple, 120 peut aussi bien désigner $\binom{16}{2}$, c'est-à-dire le nombre triangulaire de côté 15, ou bien $\binom{10}{3}$, c'est-à-dire le nombre pyramidal de côté 8. Dès lors, comme sa place dans la table fait partie intégrante de sa définition, la disposition n'y est pas accidentelle mais substantielle. Ce n'est pas le cas dans les inventaires que Leibniz évoque ici. Au sens méthodologique du philosophe, la constitution d'un tel catalogue relève d'avantage de

81. A VI, 4, N.29, *De Arte Inveniendi in Genere*, entre été et automne 1678 - p.81 : « De miro quodam invento syntheseos analyticæ, quando ea omnia quæ qlioqui singula essent percurrenda possumus conjungere in formulam generalem, quæ cum videatur esse species, revera est genus, seu genus aliquod redigere ad formam speciei. Quod fit ope speciei plenissimæ seu maxime compositæ, cum cæteræ omnes sunt hujus Ellipses. »

82. A VI, 4, N.29, *De Arte Inveniendi in Genere*, entre été et automne 1678 - p.81-82 : « De Tabulis, seu inventariis, artis Combinatoriæ subsidio. De divisionibus et subdivisionibus, necessariis ad inveniendas Tabulas seu omnium specierum enumerationem. De pluribus condendis Tabulis ut eadem mutlis diversis modis appareat. Exhibitiones sunt vel columnæ, vel figuræ, vel Tabulæ. De inventariis seu variis earundem rerum coordinationibus seu indicibus. De diversis modis dividendi et subdividendi ut abeantur diversis modis genera subalterna. De Pamistarum Tabulis, et aliorum doctorum, ut Zwingeri. Investiganda Tabularum antiquitas. De perfecta inventione omnium specierum etiam subalternearum, quod fieri non potest per dichotomias nisi pluribus modis institutas, sed tantum per combinationem a priori. »

l'analyse et non de la combinatoire ou de la synthèse. En effet, si l'inventaire est un outil du raisonnement combinatoire, puisqu'on va y trouver des éléments extérieurs à nos données, sa construction, qui consiste à faire la liste des termes rangés selon leurs propriétés, est purement analytique. Et de fait, il s'agit bien d'une entreprise encyclopédique :

> ⋆ *Des figures, et paraillement des modules, ainsi celui qui veut édifier des fortifications doit utilement élaborer le module incommode qui représente toutes les élévations de lieu, et de même, par cette méthode, il pourra facilement le rapporter à divers modes en perspective. C'est ici qu'il faut fonder l'altas universel, c'est-à-dire l'œuvre constituée des figures pareilles au théâtre de la nature et de l'art, c'est-à-dire des modules pour les conservatoires de ces choses elles-mêmes, mortes ou vives. Pour les mortes, les dépouilles détachées, et pour les vivantes, que la chose puisse agir et croître suivant sa nature.*
>
> ⋆ *Des répertoires, c'est-à-dire des index qui ou bien exposent des propositions, ou bien au moins des questions, ou encore les chapitres qui traitent des termes ou enfin seulement les termes eux-mêmes. De ceux-ci qui ont fait connaître les bibliothèques, c'est-à-dire les catalogues de livre et ceci dit, du conseil non négligeable de les collecter.*

[83]

Bien que ces éléments ne soient que peu combinatoires, en eux-mêmes, ils demeurent nécessaires à sa pratique. Une fois le catalogue construit, voir seulement en cours de construction, nous pouvons raisonner par combinaison en déterminant la façon dont on a le parcours et les liens qu'un tel chemin peut établir entre les différents termes. Ainsi, Leibniz clos sa liste par la règle d'or de l'art combinatoire :

> ⋆ *De la règle de l'art combinatoire, selon laquelle nous devons commencer par les plus simples et les plus généraux. Il nous faut toujours procéder par la voie facile et jamais nous ne devons progresser par saut et même nous ne devons jamais chercher réellement quelque chose, mais plutôt accepter d'être guidés par la nature de la chose. Ou bien, si nous cherchons quelque chose, nous devons savoir qu'elle se trouve au seuil des portes.*
>
> ⋆ *De la progression des séries, à quelque moment que l'on ait trouvé une progression a posteriori à l'aide d'une table, on a certes accompli quelque chose d'utile et de remarquable, mais cependant nous n'avons pas procédé de façon exhaustive. Nous pourrions en effet trouver a priori la même loi de la progression, lorsque nous pouvons la démontrer, et ce indépendamment de la table.*

[84]

Dans la recherche par combinaison, Leibniz recommande donc de ne pas suivre un objectif précis, car celui-ci occulterait de nombreux résultats pertinents auxquels on n'aurait simplement pas pensé et qui seraient trop éloignés du chemin sur lequel il nous pousse. La règle n'est cependant pas de parcourir l'intégralité des possibles de façon anarchique. Il faut suivre la nature des choses. Cela signifie que la forme du parcours dépend de la nature des données. Il n'y a pas de méthode générale pour combiner et raisonner de façon synthétique.
Le dernier paragraphe, dans lequel Leibniz retrouve le sens instrumental des tables, conclut sur un point important : la table instrumentale est un outil heuristique formidable, mais en générant localement les termes, elle ne révèle la loi générale des progressions qu'*a posteriori*. Ainsi, pour l'*ars inveniendi* pris dans son sens large, cette heuristique *a posteriori* doit être complétée par une démonstration formelle *a priori*.

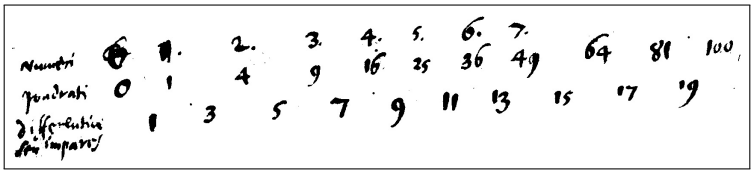
83. A VI, 4, N.29, *De Arte Inveniendi in Genere*, entre été et automne 1678 - p.81-82 : « De figuris, item Modulis, ita is qui volet exstruere fortificationem utiliter conficiet Modulum omnes loci elevationes et incommoda repræsentantem, idem hoc modo facile poterit variis modis eum redigere in perspectivam. Huc de condendo Atlante Universali seu opere figuris constante, item de Theatro Naturæ et Artis, seu de Modulis rerum ipsarum conservatoriis, vivis mortuisve. Mortuis ubi exuviæ avulsa, vivis, ubi res agere et crescere possunt, secundum suam naturam. De Repertoriis seu Indicibus qui vel exhibent propositiones, vel slatem quæstiones, aut capita tractationis terminorum, vel solum Terminos ipsos. De his qui Bibliothecas edidere, seu catalogos librorum ac de non inutili consilio eos colligendi. »

84. A VI, 4, N.29, *De Arte Inveniendi in Genere*, entre été et automne 1678 - p.81-82 : « De regula artis combinatoriæ, ut incipiamus a simplicioribus et generalioribus. Ut procedamus semper per facilia nec unquam progrediamur per saltum, ima ut revera nunquam quæramus aliquid, sed potius patiamur nos a rei natura duci. Vel si quærimus aliquid, ut sciamus id esse præ foribus. De progressione Serierum, quandocunque progressionem invenimus ope Tabulæ a posteriori, utile quidem aliquid et præclarum egimus, non tamen processimus perfecte, poteramus enim eandem progressionis legem reperire a priori, quando specierum simul, ita enim omnes connexuimus. »

Ainsi, si la combinatoire permet de trouver de nouvelles vérités, elle n'épargne pas, dans un deuxième temps, de les démontrer.

Ainsi, la conception de la table comme catalogue a beau être majoritaire à partir de cette période dans les textes programmatiques, elle ne supplante pourtant pas complètement l'autre point de vue, à savoir comme instrument de calcul. Ainsi, dans le *Concilium de Encyclopædia nova conscribenda methodo inventoria* (A VI, 4, N.81), écrit un an plus tard en 1679, Leibniz explique clairement comment une table peut et doit servir d'outil pour mieux calculer :

> *Le sommet de la sagesse consiste à comprendre l'organisation des principales connaissances humaines et même maintenant des connaissances de la vie, propice à la découverte. Il en va de cette sorte dans les progressions de nombres. Ayant établi une certaine table jusqu'à un certain point, il apparait très souvent le moyen de la poursuivre facilement sans le moindre effort (si par exemple, on considère les nombres carrés, c'est-à-dire qui sont issus de la multiplication des nombres par eux-mêmes, et qu'on y cherche quelque règle. Qu'on place ces nombres dans une table et il apparaitra bien le moyen de poursuivre facilement cette table par de simples additions et sans la moindre multiplication.* [85]



Manuscrits de Leibniz - LH 4, 5, 7 Bl.1

| Nombres | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Carrés | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 |
| Différences ou impairs | | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |

> *Ainsi si l'on ajoute le nombre impair 15 à son carré correspondant, c'est-à-dire 49, on obtient le nombre carré suivant 64 par une seule addition, sans qu'il soit nécessaire de multiplier le nombre 8 par lui-même. Et il en va de même pour les nombres supérieurs, où la multiplication devient de plus en plus difficile et par conséquent, on dispose ici, avec l'addition, d'un usage d'une grande richesse). De la même manière, après qu'on a trouvé les ordonnées dans n'importe quel genre de choses, comme par exemple une table rectangulaire, on verra apparaître le moyen de poursuivre les choses trouvées, c'est-à-dire d'en trouver un grand nombre de nouvelles et ce plus facilement que si quelqu'un essayait de trouver les mêmes choses, de façon individuelle, comme détachées de leur propre série.* [86]

Leibniz montre ici un autre aspect de la complémentarité entre table et formule. En effet, si la table occupe plus d'espace que la formule elle garde en mémoire d'avantage d'information et rend ainsi le calcul plus simple.

85. A VI, 4, N.81, *Concilium de Encyclopædia nova conscribenda methodo inventoria*, 25 juin 1679 - p.340 : « Summa Consilii est Notitiarum humanarum potissimarum dudum cognitarum vitæ utilium ordinatio ad inveniendum apta. Nam quemadmodum in numerorum progressionis, tabula quadam condita aliquousque, apparere solet modus eam sine ullo labore continuandi (ut si numeros quadratos, seu qui fiunt numerorum multiplicatione in seipsos, aliquis ordine quaerat, et in tabula exhibeat, apparebit mox modus Tabulam continuandi facillimus, per solam additionem sine multiplicatione ulla. »

86. A VI, 4, N.81, *Concilium de Encyclopædia nova conscribenda methodo inventoria*, 25 juin 1679 - p.340 : « Nam si numerum imparem 15 ordine respondentem quadrato ut 49 addas, habebis numerum quadratum sequentem 64 sola additione, nec opus est numerum 8 in se multiplicare, idemque est in numeris altioribus ; ubi difficilior multiplicatio est, ac porinde magnum habet usum compendium hoc per additionem.) Eodem modo Inventis in quolibet genere rerum velut in Tabula recte ordinatis patebit modus inventa continuandi, id est inveniendi nova longe facilior, quam si quis eadem singulatim et a serie sua velut avulsa invenire tentaret. »

# Conclusion

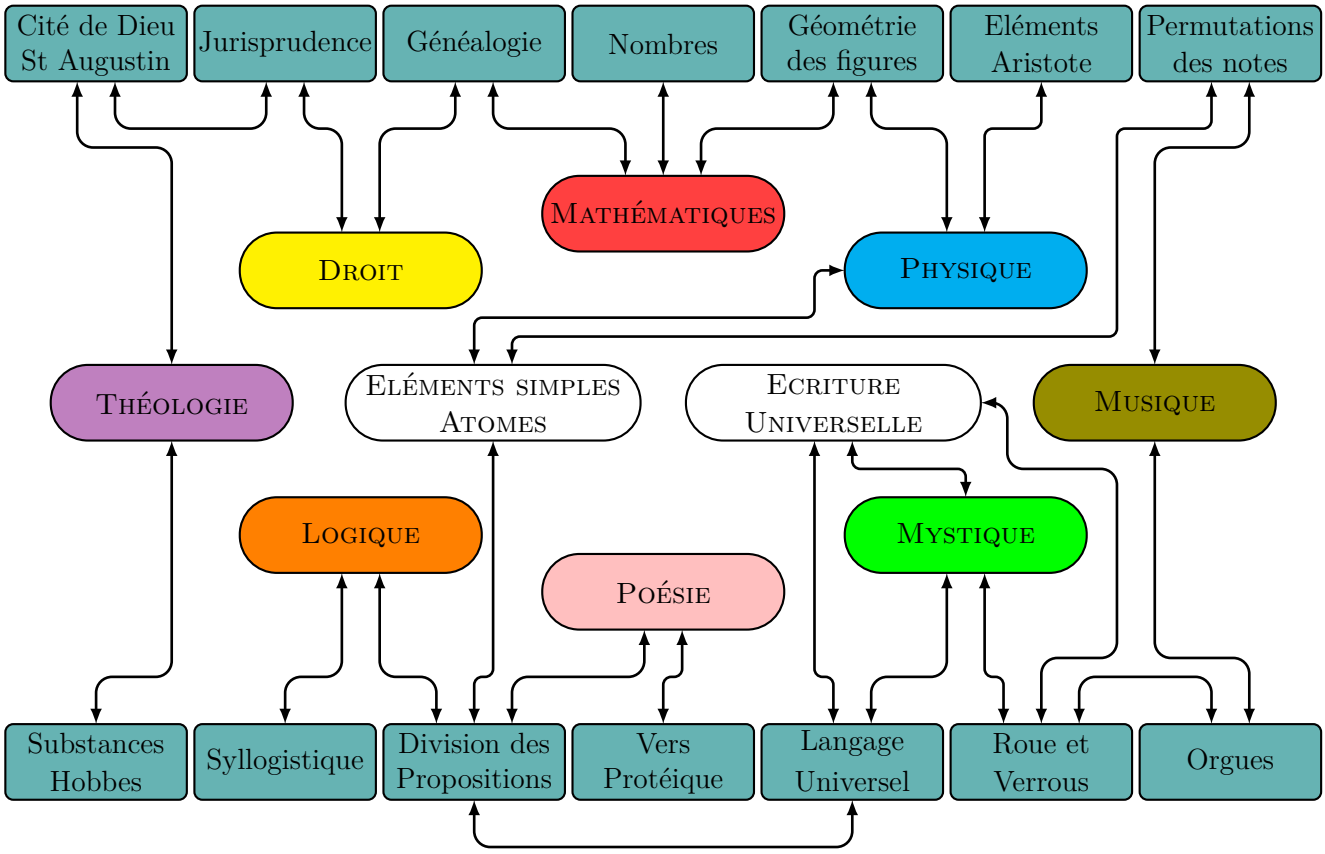
La combinatoire chez Leibniz comporte de nombreuses facettes et chacune de ces facettes est elle-même protéiforme. Si nul ne saurait contester que la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8) constitue le berceau d'un projet gigantesque qu'il a poursuivi durant près de quarante ans jusqu'à sa mort et au sein duquel la combinatoire a toujours occupé une place significative, il est aujourd'hui manifeste qu'une quête d'unité ou de système dans cet immense labyrinthe conceptuel serait vaine.
Comme pour de nombreux aspects de la philosophie leibnizienne, le séjour parisien a joué un rôle décisif dans sa conception théorique de la combinatoire, que ce soit dans son acception épistémologique comme science des formes et des similitudes, héritière du projet de caractéristique et nourrie par ses travaux en algèbre, ou bien dans son acception méthodologique comme équivalent de la synthèse.
Cette dernière, qui se distingue progressivement de la combinatoire comme science des formes au cours de l'année 1675, nous permet, *a posteriori*, de qualifier de combinatoire la pratique tabulaire du jeune Leibniz, quand bien même il ne s'y résout lui-même pas avant la fin des années 1670.

# La *Dissertation de Arte Combinatoria*

Leibniz nait en 1646 dans une famille universitaire aisée de Leipzig, au sein de l'électorat de Saxe qui doit alors se reconstruire au sortir de la guerre de Trente Ans et de sa défaite face à la Suède. Il entre dès l'âge de sept ans dans la prestigieuse école Saint-Nicolas, où l'on dispense un enseignement scolastique entièrement en latin, et un an plus tard, on lui ouvre les portes de la bibliothèque de son père, professeur de philosophie morale à l'université de Leipzig et mort deux ans plus tôt. Ainsi, le jeune saxon grandit dans un environnement intellectuel riche et éclectique propre à nourrir son intense curiosité.
La *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8) est un témoin remarquable de la diversité des intérêts que manifestait le jeune Leibniz à cette époque mais aussi des grandes ambitions qu'il nourrissait déjà pour le pouvoir de la raison. Comme nous l'avons dit dans notre introduction, une grande partie du commentaire a vu dans cet ouvrage la préfiguration de divers aspects de sa philosophie. En plus des écueils auxquels cette démarche a pu conduire, nous soutenons qu'elle n'est pas suffisante et doit être complétée par une approche moins rétrospective, qui consiste a considérer ce traité leibnizien comme le point d'aboutissement des réflexions qu'il a muries durant ses études et non le point de départ de celles qu'il développera dans sa vie professionnelle. Ceci permet de prendre la mesure des points de divergence qui séparent les propos du jeune Leibniz de ceux qu'il tient plus tard à divers période de sa vie. Pour notre objet, il est intéressant d'adopter ce point de vue au sujet de la tentative d'écriture universelle et de son lien avec le projet de caractéristique universelle.

### Un désordre fécond

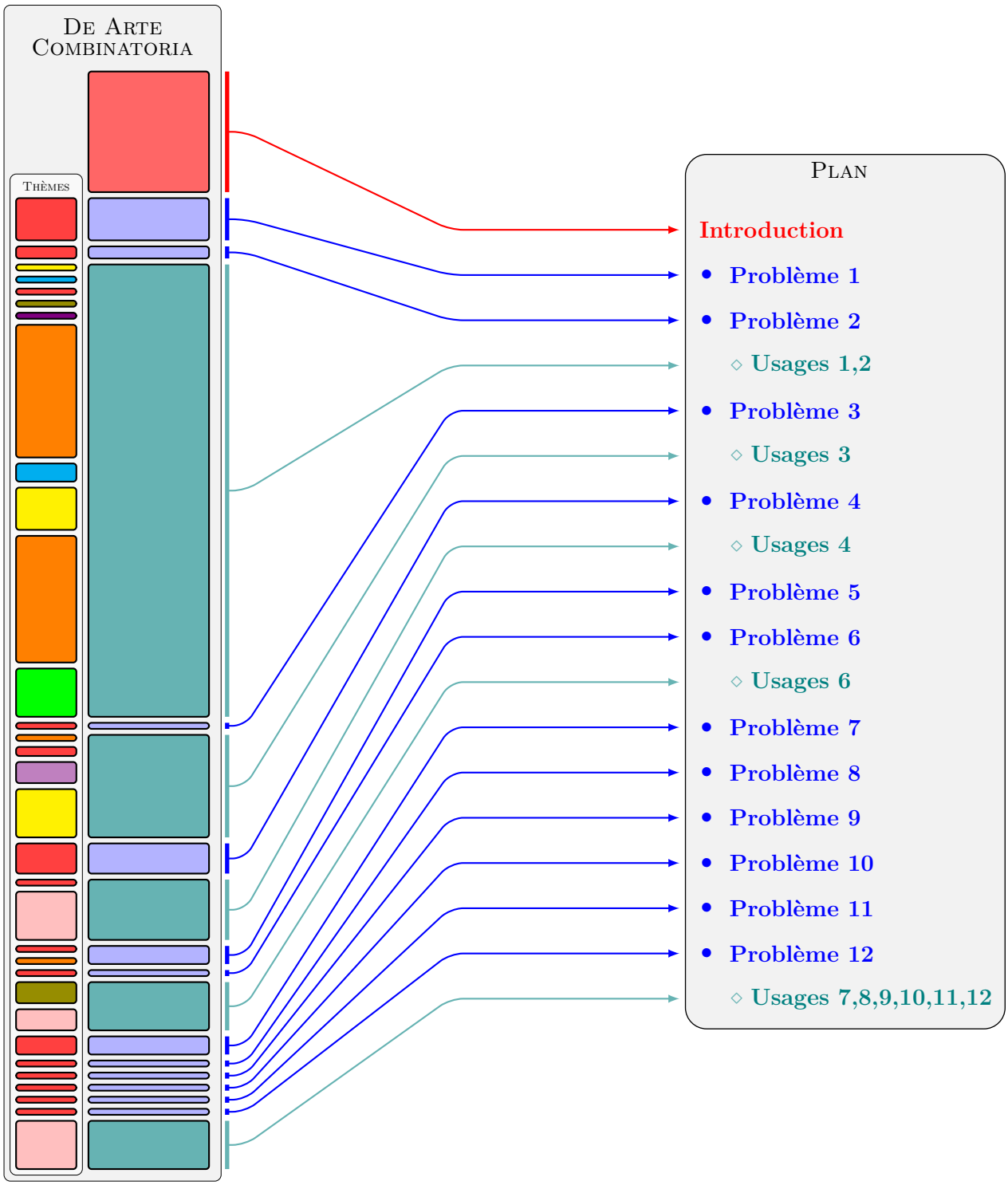
Parmi les six publications académiques du jeune Leibniz, qui constituent l'essentiel des sources disponibles provenant de son parcours universitaire à Leipzig, la *Dissertatio de Arte Combinatoria*, publiée en 1666, tient une place très particulière. En témoigne le nombre de ses rééditions, bien supérieur à ceux des autres écrits scolaires du jeune étudiant en droit et en philosophie. Il s'agit pourtant d'un ouvrage très étrange qui soulève de nombreuses difficultés. Sa structure bancale et disproportionnée comme son contenu, assez chaotique, rendent très difficile la tâche de classification de cette œuvre. La variété des sujets traités, des problèmes abordés et des ouvrages référencés porte non seulement la marque d'un esprit ouvert et avide de connaissances nouvelles, mais également la signature de la pensée syncrétique et irénique qui caractérise la réputation de ce grand philosophe.




Ce diagramme présente la variété de disciplines et des objets traités. Nous avons indiqué les deux thématiques principales qui ont retenu l'attention du commentaire : la question des éléments simples et des atomes d'une part, et celle de l'écriture universelle d'autre part.
Après une introduction assez hétéroclite, composée à la fois de définitions mathématiques et de principes métaphysiques, le corps du traité se constitue de douze problèmes mathématiques. A chaque problème, sont associés des usages, c'est-à-dire des applications dans divers domaines de la connaissance, ainsi qu'éventuellement des théorèmes, c'est-à-dire des compléments à la solution mathématique donnée. Les trois premiers problèmes concernent les combinaisons tandis que les neuf suivants portent sur les permutations. En appendice, Leibniz ajoute des corollaires qui portent successivement sur la logique, la métaphysique, la physique et la pratique[87]. La *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8) traite donc un nombre considérable de sujets divers et variés. Mais la place qu'il consacre à chacun de ces points est répartie de façon non seulement très inégale, mais aussi très curieuse, comme le montre le second schéma ci-dessous.

87. En réalité, ces appendices ne figurent pas dans la *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mais dans une version raccourcie que Leibniz publie en même temps, la *Disputatio Arithmetica de Complexionibus*. Cette édition ne contient que l'introduction et les deux premiers problèmes sans leurs usages.

En effet, Leibniz consacre seulement trois problèmes sur douze à l'étude des combinaisons contre neuf à celle des permutations. Pourtant, de façon quantitative, les trois premiers problèmes représentent deux tiers de l'ouvrage, les neuf suivants se partageant le tiers restant avec l'introduction. Il semble donc qu'il y ait plus à dire sur les permutations elles-mêmes, mais que les combinaisons aient des applications plus larges. Pourtant, s'il l'on s'attache au traitement purement mathématique des problèmes, c'est-à-dire qu'on omet leurs usages, il apparaît que les problèmes ayant le plus long développement sont les premier, quatrième et septième problèmes, chacun consacré à l'introduction d'un notion centrale, à savoir respectivement les combinaisons, les permutations et une notion spécifique à ce traité, les "chefs" de permutations (*capites variationum*).




Un autre point intéressant est la place absolument disproportionnée que donne Leibniz à trois usages, à savoir le sixième usage des deux premiers problèmes sur la syllogistique, le dixième usage des mêmes

problèmes sur la division des propositions et l'usage unique des six derniers problèmes sur la métrique des vers protéiques plurisyllabiques. Il accorde une dizaine de pages à chacun des deux premiers et six au troisième, si bien qu'à eux trois, ces usages représentent près de la moitié du mémoire. Il convient toutefois de noter que Leibniz semble s'excuser d'avoir trop développé l'usage sur les vers protéiques qui est pourtant bien plus court que les deux usages logiques pour lesquelles il ne s'excuse pas :

> *S'il s'en trouve pour critiquer notre prolixité, je crains qu'ayant pénétré la pratique des choses, la fortune ne s'inverse et qu'ils se plaignent de ma brièveté.* [88]

La place des usages est parfois étrange, puisque certains nécessitent des résultats d'autres problèmes, qui n'ont parfois pas encore été énoncés. Ainsi, le calcul du nombre de permutations, du quatrième problème est utilisé dans l'usage sur la syllogistique des deux premiers problèmes, et l'usage concernant les roues de Lulle des mêmes problèmes emploie le résultat des combinaisons de classes du troisième problème. S'il avait été préoccupé par un souci d'ordre et d'harmonie dans son écriture, il eût été très simple pour Leibniz de déplacer ces usages vers d'autres problèmes et de rétablir ainsi l'équilibre du plan. En plaçant tous ces usages derrière les deux premiers problèmes, il semble indiquer qu'il attache bien plus d'importance à ces deux problèmes qu'aux autres. Peut-être les juge-t-il plus fondamentaux, ou bien encore y a-t-il plus d'aisance technique. En effet, les seules vraies justifications des résultats sont données à l'occasion du premier problème. Un dernier argument en faveur du fait que les deux premiers problèmes aient joué un rôle particulier pour Leibniz se trouve dans la *Disputatio Arithmetica de Complexionibus*, version abrégée qu'il présente à l'université de Leipzig pour obtenir un poste au département de philosophie. De fait, il ne retient des douze premiers problèmes et de leurs usages que les deux premiers et aucun usage. Connaissant les difficultés que rencontre le jeune étudiant face aux problèmes mathématiques trop techniques, et étant donné que les autres problèmes ne sont pas démontrés et que le sixième est même grossièrement faux, nous pouvons soumettre l'hypothèse qu'il n'a soumis à Leipzig que la partie sur laquelle il était le plus confiant, à savoir les deux premiers problèmes.

### Trois objectifs principaux

Ainsi, l'ouvrage de Leibniz présente trois objectifs distincts, quant à la méthode combinatoire :

- ⋆ Objectif mathématique : Développer en son sein un nouveau calcul mathématique sur les combinaisons et les permutations
- ⋆ Objectif encyclopédique : Prouver son extraordinaire richesse par la grande diversité des domaines d'applications.
- ⋆ Objectif logique : Manifester sa puissance philosophique par les deux longs développements sur la logique.

Le titre intégral, en première page du traité, résume parfaitement ces trois points :

> *Dissertation sur l'art combinatoire, dans laquelle, à partir des fondements de l'Arithmétique, on élève par de nouveaux préceptes la science des complications et des transpositions, on montre l'usage des deux à travers l'encyclopédie universelle des savoirs et l'on sème également de nouveaux germes pour l'art de méditer ou encore de la logique de l'invention.* [89]

Nous avons déjà évoqué le point encyclopédique et il ne sera pas nécessaire de le développer d'avantage. En effet, pour mettre en valeur correctement la richesse et la variété des applications, il est préférable de ne pas faire l'économie d'une présentation exhaustive de chaque usage, de chaque domaine que Leibniz présente ou évoque. Or, ce n'est pas notre propos. Nous nous contenterons de développer seulement les points logiques et mathématiques. Pour l'objectif logique, nous montrerons l'avantage qu'il y a à confronter les discours théoriques et programmatiques du jeune Leibniz avec sa pratique concrète. Quant

88. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.228 « Si quis tames prolixitatem nostram damnat, is vereor ne, cum praxin ventum erit, idem versa fortuna de brevitate conqueratur ». *Nota Bene* : La longueur du discours qu'il évoque ici, dans la dernière phrase de la *Dissertatio de Arte Combinatoria*, peut également faire référence à la totalité de l'ouvrage, et non pas au seul usage sur les vers protéiques.

89. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.165 « Dissertatio de Arte Combinatoria, in qua ex Arithmeticæ fundamentis Complicationum ac Transpositionum Doctrina novis præceptis exstruitur, et usus ambarum per universum scientiarum orbem ostenditur ; nova etiam Artis Meditandi, seu Logicæ Inventionis semina sparguntur. ».

à l'objectif mathématique, il nous donnera l'occasion de rappeler que la pratique tabulaire joue un rôle central dans l'art combinatoire dès 1666.

**Point de vocabulaire**

Pour parler d'une combinaison en général, c'est-à-dire d'une collection d'éléments issus d'un même ensemble, il emploie le terme de "complexion" (*complexio*). Le "nombre" (*numerus*) désigne le nombre d'éléments total et l'"exposant" (*exponens*) le nombre d'éléments choisis dans la collection. Ainsi une complexion d'exposant trois du nombre sept revient à choisir trois éléments parmi sept. Leibniz utilise un vocabulaire assez ancien et peu usité pour parler des complexions à un exposant fixé. Une complexion d'un exposant $S$ fixé est appelé "con$S$naison" (*con$S$natio*). Ainsi, une combinaison est une complexion d'exposant deux, une con2naison. Une conternaison est d'exposant trois, et une conquaternaison d'exposant quatre. Lorsqu'il parle d'une complexion, Leibniz entend aussi le dénombrement des complexions possibles, avec certains critères. Ainsi, lorsqu'il s'agit de trouver la complexion, le nombre et l'exposant étant donné, il s'agit en réalité de trouver le nombre de complexions possibles associées à ce nombre et cet exposant. Il s'agit donc, en langage moderne, des coefficients binomiaux. Pour parler de toutes les complexions possibles d'un nombre, avec tous les exposants, il parle de "complexions à simplement parler" (*complexiones simpliciter*). Une "complexion de classe" (*complexio classium*) est une collection d'objets pour laquelle chaque objet a été pris dans un ensemble particulier, associé à cet objet. Cet ensemble, Leibniz l'appelle "classe" (*classis*), et là encore, la complexion de classes désigne à la fois la collection mais aussi le nombre de complexions de classes possibles, les différentes classes d'objets étant données. Leibniz définit ce que l'on désigne aujourd'hui par le cardinal d'un produit cartésien d'ensembles finis. Evidemment, ce vocabulaire est totalement anachronique, et ce problème se trouve être, pour Leibniz, similaire à celui des complexions. Nous développerons ce dernier point. Concernant les permutations, c'est-à-dire les collections ordonnées d'objets issus d'un même ensemble, Leibniz les appelle "variations d'ordre" (*variatio ordinis*). Une variation d'ordre est par définition ordonnée dans l'absolu. La "variation" (*variatio*) peut être associée aussi bien à l'ordre dans le cas de la permutation qu'aux objets dans le cas des combinaisons. C'est donc un terme générique qui désigne les deux espèces combinatoires. Néanmoins, lorsque Leibniz parle de variation sans plus de précision, il parle le plus souvent de variation d'ordre, c'est-à-dire de permutation. Les "variations de voisinage" (*variatio vinicitatis*) sont des variations qui ne comportent qu'un ordre interne, c'est-à-dire qu'on ne considère la position d'un objet que par rapport à celle des autres et non dans l'absolu. Leibniz définit également un concept de combinatoire qu'il n'est pas aisé de traduire puisqu'il n'est plus utilisé de nos jours, celui de "chef de variation" (*caput variationis*). Il s'agit d'une partie de la collection, qu'il appelle le "chef" *caput* qui varie de façon fermée par rapport au reste de la collection, c'est-à-dire que nul objet ne peut ni en sortir, ni y rentrer. Leibniz définit les "variations communes" (*variatio communis*) comme étant celles qui peuvent partager la même tête. Finalement, Leibniz définit qu'une chose est "homogène" (*homogenea*) si l'on peut « la placer en un lieu donné en préservant le chef »[90]. S'il n'y pas d'éléments homogènes, la chose est dite "monadique" (*monidicus*). Ici, monadique est un terme courant de la métaphysique qui renvoie à ce qui relève de de l'unité et de l'inaltérable. Enfin, Leibniz emploie les termes "utile" (*utilis*) et "inutile" (*inutilis*) pour désigner les complexions et variations qui sont ou non possibles dans certains domaines particuliers. Par exemple, la combinaison des qualités chaudes et froides est possible formellement, puisqu'il s'agit de deux termes différents, mais cette combinaison n'est pas possible dans les faits, puisque ces qualités sont opposées. Cette combinaison est donc inutile.

90. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.173 : « Res homogenea est quæ est æquè dato loco ponibilis salvo capite ».

## Caractéristique et écriture universelle

### Les notions simples

Le développement qui concerne la division des propositions constitue le dixième usage des deux premiers problèmes et représente quantitativement le développement le plus important de l'ouvrage. Dans le sixième usage sur les syllogismes, Leibniz a respecté un des points fondamentaux de la logique aristotélicienne, à savoir qu'il s'agit d'une logique des propositions. Ainsi les règles formelles concernent l'articulation des propositions selon leur nature, mais le contenu interne de ces dernières n'est pas pris en compte. La proposition "tous les hommes sont mortels" est seulement considérée comme une proposition universelle affirmative, mais la subtilité du lien de la copule qui relie les attributs "l'humanité" et "la mortalité" est ignorée. Ici, Leibniz quitte le corpus logique d'Aristote, le sixième usage sur la syllogistique s'inscrivant principalement dans la continuité des *Premiers Analytiques*, pour pénétrer dans sa métaphysique. Ainsi, dans ce développement, le jeune philosophe se propose de remettre en question l'aspect propositionnel de la logique, et de pénétrer à l'intérieur des propositions qui composent le syllogisme. Ainsi, :

> *Une proposition est composée d'un sujet et d'un prédicat, donc toute proposition est une combinaison. Ainsi donc, par la Logique inventive des propositions, l'on doit résoudre ce problème :*
>
> 1. *Etant donné le sujet, trouver les prédicats.*
> 2. *Etant donné le prédicat, trouver les sujets.*
>
> *Dans les deux cas, l'on cherche tant les affirmatives que les négatives.* [91]

L'interprétation, qu'il attribue à Lulle et qui consiste à ne voir dans la proposition syllogistique que la combinaison de deux éléments, à savoir le sujet et le prédicat, s'explique par la nature de la copule qui relie les deux termes et permet au prédicat de "prédiquer" le sujet. Pour dépasser ces considérations, il lui faut revoir radicalement le rôle et la nature de cette liaison qui n'est plus, pour lui, qu'une relation méréologique entre deux parties d'un même tout. A ce moment-ci du traité, Leibniz choisit de parler d'art complicatoire pour parler de la méthode des complexions, et renonce même au terme de combinatoire qu'il maintient pourtant dans le reste de l'œuvre :

> *C'est pourquoi, nous tracerons les premiers linéanments de l'art complicatoire (en effet, nous préférons le dire ainsi car toute complexion n'est pas une combinaison) puisqu'il semble que c'est à nous qu'il échoit de les établir.* [92]

Pour intégrer la qualité des termes dans son système, c'est-à-dire le fait d'être affirmatif ou négatif, Leibniz emprunte à Hobbes l'idée d'introduire les signes + et − dans la notation logique.

> *Thomas Hobbes, l'un de ceux qui ont pénétré le plus profondément les principes en toutes choses, a posé fort justement que tout le travail de notre pensée consiste en un calcul, mais par celui-ci on recueille soit une somme en ajoutant, soit une différence en retranchant, Elem. de Corp. p.1. c.1. art.2. De la même manière que les algébristes et les analystes ont deux signes fondamentaux : + et − ; de même il y a comme deux copules : "est" et "n'est pas", ici la pensée compose, là elle divise.* [93]

La première étape de la doctrine de la division se trouve donc dans l'analyse des concepts déjà formés qu'il s'agit de réduire le plus possible :

> *Pour établir finalement à partir de quoi tout est constitué, il faut procurer une analyse afin de constituer les catégories de cet art et comme sa matière. Cette analyse est la suivante :*

91. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.192 « Propositio componitur ex subjecto et prædicato, omnes igitur propositiones sunt com2nationes. Logicæ igitur inventivæ propositionum est hoc problema solvere : 1. dato subjecto prædicata, 2. dato predicato subjecta invenire, utraque tum affirmative, tum negative. ».

92. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.194 « Quare age tandem artis Complicatoriæ (sic enim malumus, neque enim omnis complexus com2natio est) uti nobis constituenda videatur, lineamenta prima ducemus. ».

93. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.194 « Profundissimus principiorum in omnibus rebus scrutator Th. Hobbes merito posuit omne opus mentis nostræ esse computationem, sed hac vel summam addendo vel subtrahendo differentiam colligi. Elem. de Corp. p.1. c.1. art.2. Quemadmodum igitur duo sunt Algebraistarum et Analyticorum primaria signa + et − ; ita duæ quasi copula est et non-est : illic componit mens, hic dividit. ».

1. *Etant donné un terme quelconque, il nous faut le réduire à des parties formelles, c'est-à-dire sa définition est posée, mais ces parties à leur tour [doivent être réduites] à de nouvelles parties, c'est-à-dire la définition [est posée] de la définition des termes, et ce jusqu'aux parties simples, autrement dit les termes indéfinissables. En effet il ne faut pas chercher de définition de tout ; et l'on ne comprend pas ces termes ultimes par une définition ultérieure, mais plutôt par analogie.*

94

La lecture logiciste et rétrospective du traité donne à la question des notions simples un poids considérable. On est très vite amené à se poser deux questions :

- ⋆ Peut-on parvenir aux notions simples par un nombre fini d'étapes de réduction ?
- ⋆ Y a-t-il un nombre fini de notions simples ?

Leibniz répond aux deux questions par l'affirmative, ce qui constitue la principale raison de voir dans ce texte une ébauche de proto-caractéristique universelle. En effet, en partant de ces deux postulats, il est en principe possible de construire la langue rationnelle souhaitée en considérant cette liste finie de notions simples comme un alphabet et les propositions comme des mots, c'est-à-dire des composés de lettres. C'est bien cela que Leibniz semble projeter :

> *En vérité, ayant établi les tables, ou les catégories de notre art complicatoire, les termes plus grands en émergeront. En effet, les termes premiers, dont tous les autres sont constitués par complexion, seront désignés par des marques et ces marques seront pour ainsi dire un alphabet.* [95]

Mais s'arrêter à cette vision naïve du jeune philosophe, comme l'a fait Couturat, ne permet pas de rendre compte du contexte dans lequel il l'écrit. Il ne faut pas s'affranchir de confronter cette lecture programmatique au système concret que décrit le jeune philosophe, ainsi qu'aux références qu'il fait. Tout d'abord, il n'est pas clair que Leibniz adopte une posture purement rationaliste quant à l'existence des notions simples. En effet, la consigne dit seulement de réduire les termes autant que possible jusqu'à ce qu'ils ne soient plus compris par la définition mais par l'analogie. Cette limite peut aussi bien être absolue et théorique que relative et pragmatique. Un peu plus tôt dans le traité, il évoque les possibles limites de l'esprit humain, ce qui n'empêche pas que les choses soient, au moins dans l'entendement divin, distinguables jusqu'à l'irréductibilité :

> *Pour sûr, en ce qui concerne l'abstraction, notre esprit est si productif qu'il est capable de trouver, qu'importe le nombre de choses qu'on se donne, leurs genres, c'est-à-dire le concept commun à chacun, et rien qui soit extérieur à ces mêmes choses. Et quand bien même l'on ne trouverait point, Dieu saurait et les anges trouveraient, ainsi le fondement abstrait de tous leurs modes préexiste.* [96]

Revenons à la description de la division des termes. Une passage est cité directement en grec : « il ne faut pas chercher de définition de tout » (« οὐ δεῖ παντὸς ὅρον ζητεῖν »). Cela fait référence à un passage de la Métaphysique d'Aristote qui traite du recours à l'analogie auquel Aristote engage le lecteur pour définir les existences en actes par rapport à celles qui sont en puissance :

> *Nous disons par exemple qu'Hermès est en puissance dans le bois* [97] *et la moitié de la ligne dans la ligne entière, parce qu'ils pourraient en être tirés, et même celui qui n'est pas en train d'étudier, nous le disons savant s'il a la puissance d'étudier ; l'autre manière est l'existence en acte. Dans les cas particuliers, ce que nous voulons dire est clair par l'induction et il ne faut pas chercher de définition de tout, mais il faut aussi saisir l'analogie : par exemple ce qui bâtit est à ce qui est capable de bâtir*

94. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.194-195 « Porro ut constet ex quibus omnia conficiantur, ad constituenda hujus artis prædicamenta, et velut materiam, analysis adhibenda est. Analysis est : 1. Datus quicunque Terminus resolvatur in partes formales, seu ponatur ejus definitio ; partes autem hæ iterum in partes, seu terminorum definitionis definitio, usque ad partes simplices, seu terminos indefinibiles. Nam οὐ δεῖ παντὸς ὅρον ζητεῖν ; et ultimi illi termini non jam amplius definitione, sed analogia intelliguntur. ».

95. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.202 : « Verùm constitutis Tabulis vel prædicamentis artis nostræ complicatoriæ majora emergent. Nam Termini primi, ex quorum complexu omnes alii constituuntur, signentur notis, hæ notæ erunt quasi Alphabetum. ».

96. A VI, 1, N.8, *Dissertation de Arte Combinatoria*, 1666 - p.192 : « Nam profecto tam est in abstrahendo fœcundus animus noster, ut datis quotcunque rebus Genus earum, id est conceptum singulis communem, et extra ipses nulli, invenire possit. Imo etsi non inveniat, sciet Deus, invenient angeli, igitur præxistet omnium ejusmodi abstractionum fundamentum. »

97. Ici, Aristote parle d'une statue d'Hermès en bois qui se trouve en puissance dans le tronc de bois, dans lequel il est taillé.

*comme ce qui est éveillé à ce qui dort, ce qui voit à ce qui a les yeux fermés, mais possède la vue, ce qui est séparé de la matière à la matière et ce qui est achevé à ce qui est inachevé.* [98]

Dans ce passage, Aristote indique qu'il n'est pas nécessaire que la référence soit systématiquement fondée sur une définition, mais qu'on peut également la constituer dans certains cas sur la base d'une analogie (ἀναλογία), qui signifie en grec "similitude des rapports" ou "similitude des raisons". Ici, il s'agit donc de l'existence en acte et en puissance. Aristote fait la remarque qu'il n'y a pas besoin de connaître les définitions universelles et générales de ces catégories pour caractériser les sujets particuliers. Il suffit de les caractériser les uns par rapports aux autres. De la même manière qu'on pourrait soutenir qu'il n'y a pas besoin de définir l'humanité pour savoir qu'un individu est humain, il suffit de considérer qu'il est semblable et analogue aux autres humains. Le raisonnement est circulaire, puisqu'il faut bien qu'on puisse caractériser un premier cas particulier pour pouvoir y rapporter les autres par analogie. Sinon, on ne caractérise que des classes de similitudes. On peut seulement dire que celui qui ferme les yeux tout en ayant la vue ou celui qui peut étudier mais ne le fait pas sont dans la même classe que celui qui sommeille ; et que ceux qui voient et étudient activement sont dans la classe de celui que est éveillé. Mais on ne peut rien dire sur ces classes, sinon qu'on les nomme par convention "classe des existants en puissance" et "classe des existants en acte". Il est donc possible que ce passage d'Aristote soit pragmatique. En pratique, on n'a pas besoin d'autre chose que ces analogies pour comprendre la notion, mais cela présuppose en théorie des notions communes indéfinies et partagées par tous. Rien ne s'oppose à ce qu'il en soit de même pour les notions simples du jeune Leibniz.
Aristote distingue donc deux façons d'appréhender un objet :

- ⋆ la définition qui reconnait directement la forme de l'être par ses attributs, ses contours
- ⋆ l'analogie qui reconnait la forme de l'être par sa similitude avec d'autres

C'est bien cette distinction qu'établit le jeune Leibniz entre les notions simples, qui sont comprises par analogie et les composés de notions simples qui sont compris par définition. Cela étant dit, Aristote n'associe pas cette distinction à un principe de division. Les notions d'existence en acte ou d'existence en puissance ne sont pas des notions simples au sens de Leibniz. Elles ne composent pas les autres notions. Le passage qui suit, en revanche, traite de la division et de l'infini :

*Mais l'infini, le vide et tous les autres êtres tels sont dits en puissance et en acte, en un autre sens que beaucoup d'êtres, par exemple celui qui voit, qui marche ou qui est vu. En effet, ces assertions peuvent être vraies parfois, même simplement (car ce qu'on voit, c'est soit parce qu'on le voit, soit parce qu'il a la puissance d'être vu) ; mais l'infini n'existe pas en puissance en un sens tel qu'il sera séparable en acte, sinon par la connaissance. En effet, le fait que la division ne cesse pas rend compte de l'être en puissance de cet acte, mais non de son existence séparée.* [99]

Cette citation affirme l'impossibilité bien connue chez Aristote de considérer un infini actuel autrement que par une expérience de pensée. On applique plus volontiers cette idée à la division de la matière, pour décrire la position aristotélicienne vis-à-vis de la question atomiste. Mais cette thèse peut parfaitement s'appliquer à la division des propositions et à l'analyse logique des notions. Une règle de métal peut être divisée en deux parties et l'on dira que ces parties la composent. Mais cette division est potentielle et n'est pas nécessairement réduite à la composition de ces deux parties. Elle possède une existence actuelle qui se suffit à elle-même. On choisit arbitrairement un étalon qui la divise en éléments simples, dont la combinaison permet de produire un grand nombre de règles en métal différentes. De la même façon, les notions simples sont des éléments arbitraires qui peuvent encore être d'avantage analysés, et le fait qu'un terme soit composé par un ensemble particulier de notions simples est un fait postérieur à l'analyse

98. [2] Aristote, *Métaphysique*, titre original : Τά μετά τά φυσικά, trad. Duminil M-P., Jaulin A., Flammarion, Paris, 2008 - p.304 [1048a, 30 - 1048b, 0] « Λέγομεν δὲ δυνάμει οἷον ἐν τῷ ξύλῳ Ἑρμῆν καὶ ἐν τῇ ὅλῃ τὴν ἡμίσειαν, ὅτι ἀφαιρεθείη ἄν, καὶ ἐπιστήμονα καὶ τὸν μὴ θεωροῦντα, ἂν δυνατὸς ᾖ θεωρῆσαι. Τὸ δὲ ἐνεργείᾳ. Δῆλον δ᾽ ἐπὶ τῶν καθ᾽ ἕκαστα τῇ ἐπαγογῇ ὃ βουλὸμεθα λὲγειν, καὶ οὐ δεῖ παντὸς ὅρον ζητεῖν ἀλλὰ καὶ τὸ ἀνάλογον συνορᾶν, ὅτι ὡς τὸ οἰκοδομοῦν πρὸς τὸ οἰκοδομικόν, καὶ τὸ ἐγρηγορὸς πρὸς τὸ καθεῦδον, καὶ τὸ ὁρῶν πρὸς τὸ μῦον μὲν ὄψιν δὲ ἔχον, καὶ τὸ ἀποκεκριμένον ἐκ τῆς ὕλης πρὸς τὴν ὕλην, καὶ τὸ ἀπειργασμένον πρὸς τὸ ἀνέργαστον. ».

99. [2] Aristote, *Métaphysique*, titre original : Τά μετά τά φυσικά, trad. Duminil M-P., Jaulin A., Flammarion, Paris, 2008 - p.304 [1048b, 10 - 1048b, 15] « Ἄλλος δὲ καὶ τὸ ἄπειρον καὶ τὸ κενόν, καὶ ὅσα τοιαῦτα, λέγεται δυνάμει καὶ ἐνεργείᾳ πολλοῖς τῶν ὄντων, οἷον τῷ ὁρῶντι καὶ βασίζοντι καὶ ὁρωμένῳ. Ταῦτα μὲν γὰρ ἐνδέχεται καὶ ἁπλῶς ἀληθεύεσθαί ποτε (τὸ μὲν γὰρ ὁρώμενον ὅτι ὁρᾶται, τὸ δὲ ὅτι ὁρᾶσθαι δυνατόν). Τὸ δ᾽ ἄπειρον οὐχ οὕτω δυνάμει ἔστιν ὡς ἐνεργείᾳ ἐσόμενον χωριστόν, ἀλλὰ γνώσει. Τὸ γὰρ μὴ ὑπολείπειν τὴν διαὶρεσιν ἀποδίδωσι τὸ εἶναι δυνάμει ταύτην τὴν ἐνέργειαν, τὸ δὲ χωριζεσθαι οὔ. ».

qui n'existait qu'en puissance avant celle-ci. Ce passage d'Aristote auquel Leibniz fait implicitement référence semble donc soutenir que la division des termes est un processus potentiel et non actuel. Le jeune philosophe n'est pas suffisamment précis dans sa formulation pour qu'une telle interprétation puisse lui être rigoureusement attribuée, néanmoins, cette ambivalence illustre le péril qui se trouve dans l'attitude rétrospective du commentaire.

### Le sens de l'inclusion

L'acte de composition lui-même ne semble pas être parfaitement clair dans l'esprit de Leibniz. En effet, Leibniz semble osciller entre une description extensive et une description intensive de la relation méréologique engagée par la copule. Selon la description intensive, le prédicat est une partie du sujet, et ce dernier est un tout constitué de tous ses prédicats. Ainsi, dans l'exemple "Les humains sont des animaux", le prédicat de l'animalité est inclus dans le sujet humanité. En revanche, selon la description extensive, c'est le sujet qui forme une partie du prédicat, ce dernier étant un tout constitué de tous les sujets auxquels il est prédiqué. Dès lors, c'est l'humanité qui est incluse dans l'animalité, puisque les humains constituent une partie de l'ensemble des animaux. La description intensive s'appuie sur les idées tandis que la description extensive s'appuie sur les individus. Dans la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8), Leibniz opte pour le discours intensif, suivant l'approche aristotélicienne.

> *S'ils ne sont pas de la même classe, alors le prédicat sera d'une classe de moindre exposant, et le sujet dans une classe d'exposant plus élevé.* [100]

Ici, la classe regroupe tous les termes qui sont composés d'un nombre donné $p$ de notions simples. Ce nombre $p$ est l'exposant de la classe. Ainsi, si l'exposant du prédicat est nécessairement moindre que celui du sujet, cela signifie que le prédicat possède moins de notions simples que le sujet, et par conséquent qu'il est inclus dans le sujet. Pourtant, lorsque Leibniz définit explicitement la relation méréologique, il donne une description extensive, à savoir que le sujet est inclus dans le prédicat :

> *Soient donnés un certain terme comme sujet A et un certain autre comme prédicat B. On cherche le moyen. Le moyen sera celui qui sera prédicat du sujet et sujet du prédicat, c'est-à-dire un certain terme qui contient A et qui soit contenu dans B. On dit de plus qu'un terme contient un terme, si tous ses termes premiers sont dans celui-là.* [101]

Il ne s'agit de pas de renverser le sens que l'on donne aux inclusions. Ces deux citations aboutissent à une contradiction logique, puisque dans la première le sujet est composé de d'avantage de notions simples que le prédicat tandis que dans la seconde, c'est le contraire. La seconde citation est sans doute une erreur de la part de Leibniz ou de son éditeur [102]. Cette erreur est cependant révélatrice de l'hésitation du jeune philosophe quant à l'interprétation de cette logique inventive. Doit-elle se cantonner à un statut purement linguistique et grammatical, au service de l'analyse du discours scientifique ? Ou bien doit-elle endosser un rôle descriptif plus performatif, et constituer la pierre de touche avec la nature réelle des choses ? Le discours intensif convient parfaitement au premier rôle tandis que le discours extensif s'accorde plutôt avec le second. En souhaitant garantir un champ d'application le plus vaste possible à la méthode combinatoire, Leibniz en viens à exécuter un numéro d'équilibriste délicat entre deux discours contradictoires. Pour cette raison, sa position vis-à-vis de l'atomisme matériel n'est pas clairement arrêtée.

### Dictionnaire et écriture universelle

Pour désigner un terme d'une proposition, Leibniz propose une notation originale : la fraction. On rappelle que Leibniz propose dans le dixième usage de faire la liste exhaustive des notions simples,

100. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.198 : « Sin non sunt in eadem classe, erit prædicatum in classe minoris exponentis, subjectum in classe majoris. ».

101. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.198 : « Esto datus quicunque terminus tanquam subjectum $A$, et alius quicunque tanquam prædicatum $B$, quæratur Medium. Medium erit prædicatum subjecti et subjectum prædicati, id est terminus quicunque continens $A$, et contentus a $B$. Continere autem terminus terminum dicitur, si omnes ejus termini primi sunt in illo. ».

102. Lorsque Leibniz publie un article correctif dans les *Acta Eruditorum*, pour la publication de 1690 qui s'était faite sans son accord, il apporte un certain nombre de corrections à la forme et au contenu. Néanmoins, il ne corrige pas ce passage, *Cf* A VI, 2, *Examens et Explications sur le volume VI,1*, N.8, p.549.

notions irréductibles qui composent tous les termes de toutes les propositions. Cette décomposition doit être unique :

> *Cette si grande variété dans les genres subalternes fait que dans la construction des divisions préalables ou des tables, les auteurs ont entrepris divers chemins parce qu'il faut trouver les conditions suffisantes dans les espèces plus petites d'une certaine division donnée, et tous néanmoins parvinrent aux mêmes petites espèces. Quiconque consultera les scolastiques, recherchant le nombre de catégories, des vertus cardinales, des vertus énumérées par Aristote, des affections, etc. le verra.* [103]

Leibniz considère donc que cette décomposition est unique, et le terme est dit de classe $p$ s'il contient exactement $p$ notions simples. Ainsi la notation que propose Leibniz place la classe du terme au dénominateur et son rang dans cette même classe est placé au numérateur. Cette notation peut paraître très étrange au lecteur moderne pour qui les fractions sont des écritures numériques de nombres rationnels, mais Leibniz vit au dix-septième siècle, et sa culture algébrique majoritairement fondée sur l'œuvre de Cardan date du seizième siècle. A cette époque, la notation fractionnaire est une dénomination des rapports. Le dénominateur dénomme la nature du rapport, il est qualitatif, tandis que le numérateur indique sa quantité, il est quantitatif. Ce choix de notation s'explique donc par ces deux raisons qui pourtant s'opposent. D'une part, la notation fractionnaire ne désigne pas à l'origine un nombre mais dénomme un rapport en en donnant la nature, le dénominateur, et le nombre, le numérateur. Ainsi Leibniz est-il plus naturellement porté vers cette notation pour nommer des termes que nous le serions. D'autre part, cette notation désigne tout de même des fractions dont Leibniz sait que ce sont des nombres, comme il le dit dans l'usage sur les types de nombres. Le fait qu'il se porte volontairement vers cette notation s'inscrirait donc dans son penchant néoplatonicien et dans sa volonté plus générale de mathématiser la connaissance. Cette dernière raison doit cependant être considérée avec prudence. Les fractions que propose Leibniz pour désigner les termes ne sont absolument pas sujettes au calcul. La somme ou le produit de deux fractions ne s'interprète absolument pas dans la division des propositions. De fait, le seul calcul que l'on puisse faire a paradoxalement lieu au dénominateur. En effet, en composant deux termes d'exposants respectifs $a$ et $b$, le terme obtenu a pour exposant la somme de deux $a + b$. Ainsi :

$$\frac{x}{a}.\frac{y}{b} = \frac{z}{a+b}$$

En revanche, les nombres $x$, $y$ et $z$ qui sont les rangs des termes dans leurs classes sont totalement arbitraires. De plus, les fractions codent les noms dans les définitions, mais les mots de liaison restent et ne sont absolument pas encodés par le formalisme. Prenons l'exemple du cercle :

> *Le cercle est* $\frac{1}{12}$. 8. *par* 18. 21. *ayant des* 16. $\frac{2}{3}$. *à* 19. *d'un certain* 1. *(qu'on appelle* 2. *centre du cercle) à* 18.6. [104]

Si l'on remplace, cela donne : "Le cercle est plan ($\frac{1}{12}$.) inclus (8.) par tous (18.) région (21.) ayant des distances (16.) égales ($\frac{2}{3}$.) à donné (19.) d'un certain point (1.) à tous (18.) terme (6.)", ce qui en reformulant peut donner : "un cercle est une surface plane circonscrite par tous les lieux qui ont une distance égale entre un certain point donné et toutes les extrémités". La simple juxtaposition des vingt-trois notions simples donne : (((2.3.10.)((2.3.10.)2.))(11.(14.9.))16.16.)8.18.21.16.(11.(14.9.))19.1.18.6. Sans les mots de liaison, on ne parvient pas à donner de sens à cette liste de symbole. Ajoutons à cela que Leibniz affirme que les termes sont la simple juxtaposition des notions simples, c'est-à-dire que ni l'ordre des termes, ni même le parenthésage ne doivent être pris en compte. Ainsi on pourrait dire que le cercle est défini par : 1.2.2.2.3.3.6.8.9.9.10.10.11.11.14.14.16.16.16.18.18.19.21. Il est évident qu'un telle liste de concepts donnés dans le désordre ne suffirait pas à définir un cercle. Ajoutons que ce travail semble avoir été fait rapidement par l'auteur, puisqu'il y a des erreurs concernant les classes. En effet, il classe le cercle et le triangle rectangle dans la vingt-deuxième classe tandis que le cercle contient vingt-trois notions simples et le triangle rectangle vingt-et-une.

103. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.192 : « Hæc tanta varietas generum subalternorum facit, ut in prædivisionibus, seu tabellis construendis, invenienda etiam datæ alicujus in species infimas divisionis, sufficientiâ, diversas vias ineant autores, et omnes nihilominus ad easdem infimas species perveniant. Deprehendet hoc, qui consulet Scholasticos numerum prædicamentorum, virtutum cardinalium, virtutum ab Aristotele enumeratarum, affectuum, etc. investigantes. ».

104. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.201 : « Circulus est $\frac{1}{12}$. 8. ab 18. 21. habens τὴν 16. $\frac{2}{3}$. τοῦ 19. alicuius 1. (quod dicitur 2. Centrum Circuli) ab 18. 6. ».

L'ébauche de caractéristique présentée par le jeune philosophe relève donc bien plus d'un dictionnaire rationnel et d'un chiffrement que d'une langue adamique révélatrice de la nature. La construction de langues universelles est dans l'air du temps, au moment où Leibniz écrit. Le jeune auteur reprend à ce sujet la liste de Caspar Schott contenant les noms de Jean Joachim Becher et Athanase Kircher. La première entreprise que cite Leibniz est due à un auteur anonyme espagnol, dont la démarche est très proche de la sienne, à ceci près qu'il n'y avait pas de hiérarchie entre les différentes classes de termes, et donc pas de notions simples. Chaque terme est désigné par le numéro de sa classe et son rang dans cette même classe. La tentative de Becher parait bien plus simpliste. Il numérote les mots du dictionnaire latin dans l'ordre alphabétique, puis crée un lexique pour chaque langue dans lequel chaque nombre est suivi de la traduction du mot latin correspondant. Ainsi, un texte écrit en nombres peut être traduit dans toutes les langues. Ici, Becher ne propose qu'une méthode de traduction automatique et non un moyen de faire correspondre le mot au concept. La dernière tentative, de Kircher, ressemble à celle de Becher, en ce que son projet est tourné vers la traduction automatique. Cependant, Leibniz ne parle pas ici de "langue universelle" mais seulement d'« écriture universelle » (« *scriptura universalis* »). Ce qu'il propose correspond à l'acception qu'on a de la langue universelle, mais le fait qu'il emploie un autre terme, auquel il adjoint des travaux comme ceux de Becher qui ne relève pas des mêmes préoccupations, nous montre qu'il ne possède pas lui-même encore l'idée précise de ce que nous entendons aujourd'hui lorsque nous parlons des projets de langues universelles du dix-septième siècle. Cette acception moderne de la langue universelle découle de la tradition mystique de la Kabbale. Le parallèle entre le projet de Leibniz et la tradition cabalistique est un thème récurrent des commentateurs [105]. Il semble, malgré ce que certains en disent, que l'origine du projet de caractéristique universelle de Leibniz, s'il se trouve dans la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8), ne se situe pas seulement dans la tradition mystique de la Kabbale, ni même celle de Lulle. Elle est aussi le résultat de l'influence de ces "écritures universelles", qui se classent plus dans une tradition de jeux combinatoires, comme par exemple la tradition qui concerne les vers protéiques, que dans la lignée mystique de personnes qui souhaitent faire correspondre la chose et le mot.

La logique tient donc une place de choix dans la *Dissertatio de Arte Combinatoria*. Elle se dispute le rôle principal avec la combinatoire. Les deux termes figurent dans le titre du livre, bien que la logique apparaisse en réalité dans le sous-titre. Ainsi, il est très difficile d'assumer la thèse selon laquelle ce traité serait un pur ouvrage de logique. Pourrait-on résumer le texte à l'usage sur la division des propositions et la formation de l'écriture universelle, comme beaucoup l'on fait ? Cela n'est pas raisonnable, mais cela ne peut pas être entièrement rejeté. Ces deux applications de l'*Ars Combinatoria* constituent manifestement des thématiques très enthousiasmantes pour le jeune philosophe, qui leur consacre plus d'un quart de l'opuscule à elles seules. S'agissant de l'écriture universelle, Leibniz n'avait pourtant pas encore l'idée d'un véritable calcul logique. Sa représentation numérique des notions simples est seulement lexicographique. Sans l'idée du calcul, l'ébauche de langue universelle est donc radicalement différente du projet de caractéristique auquel on l'a trop souvent reliée.

105. *Cf* [25] S. Edel, *Métaphysique des idées et mystique des lettres : Leibniz, Böhme et la Kabbale prophétique*, dans la *Revue de l'histoire des religions*, Vol. 213, N.4, 1996

## Un traité de tabulation

Le rôle central des tables dans la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8), déjà observé par Michel Serres, s'appuie sur leurs structures et leurs capacités de classement :

> *Je crois avoir démontré que le De Arte Combinatoria est un traité de la tabulation en général. Il résout les problèmes de classement, pour lesquels il adopte une disposition à deux entrées, sur le modèle de la table de Pythagore ou des schémas de la géométrie.* [106]

Au sein de traité, Leibniz illustre son propos par de très nombreux graphiques et diagrammes. Tous sont des tableaux ou peuvent être considérés comme tel. Comme le décrit Michel Serres, la forme tabulaire aspire prioritairement à seconder d'une part la démarche analytique consistant à réduire les complexes en éléments simples et d'autre part la posture synthétique visant à observer les relations qui permettent l'assemblage de ces composants en un tout individuel :

> *Mais ce n'est pas le seul résultat de l'entreprise ; car l'obligation de tabuler pour classer sous-engendre la nécessité de recourir aux éléments primitifs : la méthode synthétique des complexions suppose la méthode analytique des simplicités. La multiplicité des simples produit par multiplication, application ou complexion, la totalité des compliqués : nous sommes confrontés, dès ici, à la grande problématique de l'un et du multiple, qui demeure l'axe conceptuel du leibnizianisme.* [107]

Dès lors, on peut distinguer deux classes d'objets dont on puisse faire la tabulation : les simples que l'on liste et les complexes que l'on conjugue. On retrouve la distinction que nous avions introduite plus haut entre tables comme instruments de calcul et table comme catalogues. Pour Michel Serres, ces deux modes d'application des tables, constituent deux types de tables distinctes :

> *Cela dit, la table première des simples suppose une philosophie de la possibilité, de la priorité du possible sur l'existant. Il y a donc bien deux types de tables : celle des éléments et celle de leurs combinaisons, celle des simples possibles et la table opératoire de leurs conjugaisons. Par exemple, il y a des lexiques et des dictionnaires de correspondance, des séries de définitions et des démonstrations des éléments de la vérité éternelle et des vérités composées, des possibles distribués sejunctim dans l'entendement divin et des mondes composés en série de séries, c'est-à-dire en tableau. Il y a des ensembles de primitifs et des ensembles de dérivatifs : la combinatoire est la technique d'engendrement du dérivatif en général, en attendant la théorie des séries et le calcul infinitésimal.* [108]

En effet, comme nous l'avons montré, il est possible de remettre en cause le statut ontologique de cette distinction entre éléments simples et éléments complexes. D'une part, la réduction peut être envisagée comme prolongeable à l'infinie, en puissance. Les simples sont alors des unités conventionnelles, dont la simplicité n'est pas nécessairement substancielle. D'autre part, la posture extensive et la posture intensive constituent deux conceptions opposées de la substance individuelle qui renversent les relations méréologiques. Les composants deviennent alors composés et réciproquement. Dans ce cadre, nous pouvons envisager une tierce position qui embrasse la superposition de ces deux approches antagoniques et qui efface ainsi la hiérarchie des rapports d'inclusions. Il faut alors penser les éléments primitifs comme le choix relatif d'une certaine focale parmi des termes reliés entre eux par un réseau de relations non orientées et de dépendances symétriques. La table constitue un excellent outil pour représenter cette ambivalence et cet espace relativiste :

> *Comme, d'autre part, nulle table n'est centrée, au contraire de l'espace des coordonnées cartésiennes, tout élément est, tour à tour, pôle et marge, centre et pourtour, invariant et variable, point de vue et chose vue, sujet et objet. Cet espace multipolaire et relativiste est l'espace même du système leibnizien.* [109]

La vision de Michel Serres outrepasse nettement la pratique naissante de Leibniz dans cet opuscule de jeunesse, et même en partie celle qu'il développera durant les deux décennies qui vont suivre. Néanmoins,

106. [97] M. Serres, *Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques*, Presses Universitaires de France, Paris, 1968 - p.435-436
107. [97] M. Serres, *Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques*, Presses Universitaires de France, Paris, 1968 - p.436
108. [97] M. Serres, *Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques*, Presses Universitaires de France, Paris, 1968 - p.436
109. [97] M. Serres, *Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques*, Presses Universitaires de France, Paris, 1968 - p.436

se trouvent ici tous les éléments de réflexions propres à apprécier la grande richesse de la pratique tabulaire présente au sein de la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8), témoignage du penchant qu'avait déjà le philosophe allemand pour ce procédé combinatoire, que nous allons développer principalement au sein des deux premières parties de notre travail.
Afin de bien saisir la fécondité de cette pratique tabulaire, nous nous proposons de passer en revue les différentes tables présentes au sein de ce traité sur les combinaisons. A travers leur grande diversité, nous insisterons sur deux points importants :

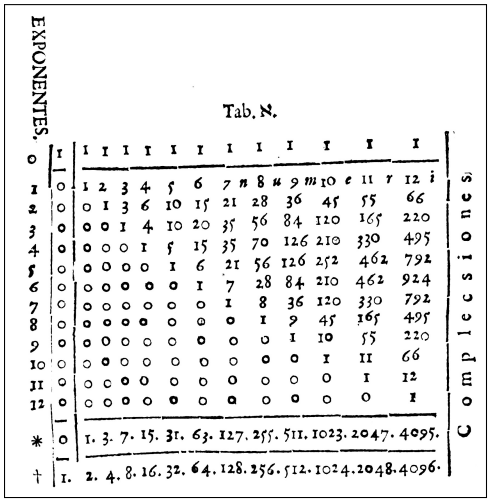
- ⋆ Le premier point est historiographie. La pratique tabulaire de Leibniz s'écarte de la description faite par Michel Serres vis-à-vis d'un point bien particulier : la disposition à double entrée. Le jeune philosophe ne considère pas les tables comme des tableaux, mais plutôt comme des listes de listes. Ce point est significatif et nous sera utile plus tard dans notre travail.
- ⋆ Le deuxième point est méthodologique. Il faut distinguer le discours du jeune Leibniz de sa pratique concrète. Les tables peuvent révéler un contenu épistémologique différent voir incompatible avec le discours auquel elles sont pourtant rattachées. Mais cette ambivalence n'est pas le signe de manque de cohérence ou d'une confusion chez l'auteur. Elle permet au contraire d'assumer le caractère multimodale de l'activité scientifique, en séparant la réflexion des actes d'un auteur. Le discours soutient cette première, tandis que la table représente ces derniers.

### Table asymétrique

La première table de l'ouvrage, notée ℵ, se trouve dans le premier problème. Elle liste les coefficients combinatoires, que l'on retrouve dans le célèbre triangle de Pascal [110], mais dans une autre disposition :

Table ℵ

| Exposants | | | | | | | | | | | | | Complexions |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | n 6 | o 7 | m 8 | b 9 | r 10 | e 11 | s 12 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 | 66 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 84 | 110 | 165 | 220 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 126 | 210 | 330 | 495 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 21 | 56 | 126 | 252 | 462 | 792 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 28 | 84 | 210 | 462 | 924 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 36 | 120 | 330 | 792 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 9 | 45 | 165 | 495 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 10 | 55 | 220 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 11 | 66 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 12 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| * | 0 | 1 | 3 | 7 | 15 | 31 | 63 | 127 | 255 | 511 | 1023 | 2047 | 4095 |
| † | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 | 2048 | 4096 |




*Dissertatio de Arte Combinatoria* (1666) - p.7

La table prend la forme du tableau à double entrée qu'évoque Michel Serres. Chaque coefficient du tableau correspond au nombre de possibilités qu'il y a de choisir $k$ objets dans un ensemble de $n$ objets. Les paramètres $k$, qui sont appelés « exposants » (« *exponentes* ») désignent chaque ligne du tableau. Ainsi, les paramètres $n$, qui sont les « nombres » (« *numeri* »), devraient en principe désigner les colonnes. Cependant, ce n'est pas exactement cela que l'on observe. Les nombres $n$ constituent la deuxième ligne

110. Le triangle de Pascal est publié de façon posthume en 1665, c'est-à-dire un an avant la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8), dans le *Traité du Triangle Arithmétique*, avec d'autres traités, *Cf* [80] B. Pascal, *Traité du Triangle Arithmétique et traités connexes* dans *Œuvres de Blaise Pascal*, Hachette, Paris, Vol.3 (1923), Ch.64, p.446. Leibniz, qui a commencé la rédaction de sa dissertation dès 1665, n'a pas eu accès à cet ouvrage avant son arrivée à Paris, en 1672.

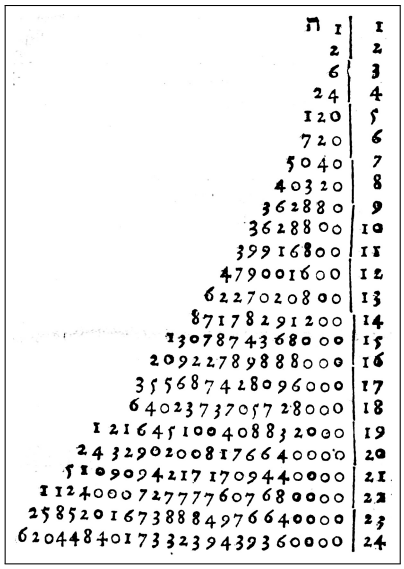
du tableau. Ce sont donc des éléments de la table et non des indices posés en en-tête à l'extérieur de celle-ci. Leibniz aurait pu faire de même pour les exposants en considérant qu'il s'agit de la deuxième diagonale. En donnant une place aux exposants, comme indices, mais pas aux nombres, la table présente une asymétrie qui permet de tempérer les propos de Michel Serres. Cette table est constituée d'une série de colonnes, mises en regard les unes à la suite des autres. Les exposants désignent le rang du coefficient dans sa colonne. Ainsi, une liste de listes n'est pas nécessairement équivalente à un tableau à double entrées.

### Outil de calcul

Certes, la table א n'est pas construite comme un tableau à double entrée, mais comme une liste de colonnes. Néanmoins, la présence des nombres sur la deuxième ligne sert d'indices à ces colonnes. Dès lors chaque coefficient de la table est caractérisé par son repère cartésien dans la table, à savoir le nombre qui désigne la colonne et l'exposant qui désigne le rang dans cette colonne. Cette table est synoptique, c'est-à-dire que non seulement elle contient, jusqu'à un certain rang, tous les termes possibles, mais de plus elle associe à chacun d'eux un index numérique qui permet de trouver rapidement un terme à partir de la donnée de ses paramètres. Cet aspect donne à la table un rôle de lexique. Elle donne accès, sans calcul, à des termes qui ont des usages et des applications en de nombreuses occasions.
Deux tables jouent ce rôle dans le traité, puisque deux classes de coefficients interviennent dans tous les problèmes : les coefficients combinatoires qui dénombrent les combinaisons et les coefficients factoriels qui dénombrent les permutations. Ces derniers sont listés dans la table ה :

Table ה

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 4 | 2 | 2 |
| 18 | 6 | 3 |
| 96 | 24 | 4 |
| 600 | 120 | 5 |
| 4320 | 720 | 6 |
| 35280 | 5040 | 7 |
| 322560 | 40320 | 8 |
| 3265920 | 362880 | 9 |
| 36288000 | 3628800 | 10 |
| 439084800 | 39916800 | 11 |
| 5748019200 | 479001600 | 12 |
| 80951270400 | 6227020800 | 13 |
| 1220496076800 | 87178291200 | 14 |
| 19615115520000 | 1307674368000 | 15 |
| 334764638208000 | 20922789888000 | 16 |
| 6046686277632000 | 355687428096000 | 17 |
| 115242726703104000 | 6402373705728000 | 18 |
| 2311256907767810000 | 121645100408832000 | 19 |
| 48650840163532800000 | 2432902008176640000 | 20 |
| 1072909785605900000000 | 51090942171709440000 | 21 |
| 24728016011107400000000 | 1124000727777607680000 | 22 |
| 594596384994354000000000 | 25852016738884976640000 | 23 |
| | 620448401733239439360000 | 24 |



*Dissertatio de Arte Combinatoria* (1666) - p.57

La description que donne Leibniz de cette table ne correspond pas. En effet, il semble qu'il avait prévu à l'origine une troisième colonne sur la gauche, ajoutée en vert sur notre reproduction, qui contenait les différences successives des factorielles :

> *Sur le coté droit, on a les exposants, c'est-à-dire les nombres des choses, qui ici coïncident. Au milieu, ce sont leurs variations. A gauche est placée la différence des deux variations voisines entre lesquelles elle est située.* [111]

111. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.174 : « Latus dextrum habet exponentes, seu numeros rerum, qui hic coincidunt ; in medio sunt ipsæ Variationes. Ad sinistrum posita est differentia variationum duarum proximarum, inter quas est posita. ».

Etant donné que les manuscrits préparatoires de cette publication ont tous été perdus, on ne peut pas savoir si ce manque est une volonté de Leibniz, ou une erreur de l'imprimeur. Le fait que Leibniz ne se prononce jamais sur ce sujet, malgré la réédition de 1690 [112], tend à soutenir l'hypothèse que cette colonne a été retirée à dessein. Dès lors la table dispose d'une seule suite, située dans la première colonne, la deuxième étant constituée des paramètres $n$, qui sont ici les exposants. L'aspect synoptique de cette table est semblable à celui de la précédente. Ces tables sont donc à première vue des lexiques de termes numériques ayant pour principal objet de fournir les coefficients directement sans faire de calcul. L'idée de mettre une colonne des différences s'explique également dans ce cadre, car ces différences interviennent dans la solution du sixième problème qui consiste à déterminer le nombre de permutations avec répétitions [113].
Pourtant, Leibniz présente ces deux tables sous un jour différent. Elle ne sont pas seulement des tables lexicales, comme pourraient l'être des tables de sinus ou de logarithmes, mais constituent elles-mêmes des outils de calcul. Elles répondent chacune à la solution récursive du problème auquel elles sont associées, à savoir déterminer le nombre des combinaisons ou le nombre des permutations. En effet, le mode de calcul de ces coefficients est itératif. Pour les combinaisons, Leibniz énonce la formule de récurrence de Pascal :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

> *On ajoute les complexions pour le nombre antécédent de l'exposant antécédent et de celui qui est donné, on obtiendra les complexions cherchées.* [114]

Pour les permutations, c'est la formule de récurrence classique des factorielles :

$$n! = n \times (n-1)!$$

> *La raison de la solution sera manifeste si nous démontrions que la variation de l'exposant donné est le produit de la multiplication de cet exposant par la variation de l'exposant antécédent ; ce qui est le fondement de la table* ה. [115]

Les termes de la table sont obtenus directement par la composition de leurs termes voisins :

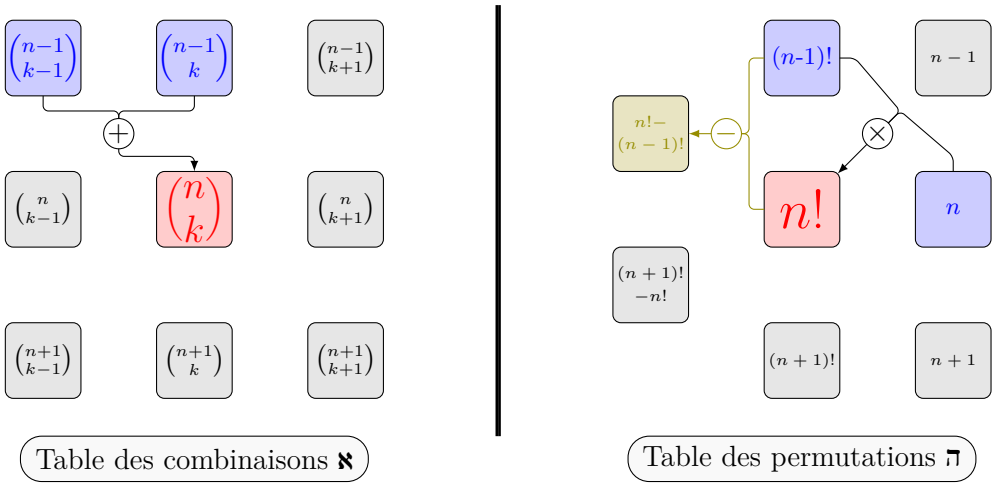



Table des combinaisons א — Table des permutations ה

Ainsi la table n'est pas seulement un outil de classement mais également un outil de calcul. La position d'un terme exprime dans le même temps sa composition et la manière dont on peut le déterminer. Cette

112. Dans la réédition de 1690, que Leibniz a commenté dans les *Acta Eruditorum*, il ne fait pas de remarque quant à cette table qui est pourtant publiée de façon identique à l'édition de 1666, accompagnée de la description de la colonne de gauche inexistante, *Cf* A VI, 2, *Examens et Explications sur le volume VI,1*, N.8, p.549.
113. La solution que donne Leibniz a ce problème est par ailleurs fausse, comme nous allons le voir.
114. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.174 : « addantur complexiones exponentis antecedentis et dati de numero antecedenti, productum erunt complexiones quæsitæ ».
115. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.212 : « Ratio solutionis erit manifesta, si demonstraverimus Exponentis dati variationem, esse factum ex ductu ipsius in variationem exponentis antecedentis, quod est fundamentum Tabulæ ה ».

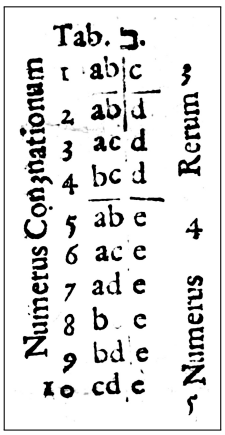
opération se trouve dans la table elle-même et n'est pas effectuée en dehors de celle-ci, comme pour une table qui listerait les différentes valeurs d'une certaine fonction. On retrouve donc l'idée de Michel Serres qui distingue les tables des primitifs de celles des dérivatifs. Mais cette distinction est fonctionnelle et non spécifique. C'est-à-dire qu'il ne s'agit pas de deux types de tables distinctes mais d'une seule table ayant deux fonctions distinctes.

**Tables démonstratives**

Dans la *Dissertatio de Arte Combinatoria*, Leibniz fait également usage des tables pour démontrer ses théorèmes. Ces tables sont elles aussi doubles, c'est-à-dire qu'elles ont à la fois pour fonction de démontrer une formule mais aussi de représenter une opération. Pour démontrer la formule de Pascal, par exemple, Leibniz s'appuie sur la table ב :

Table ב

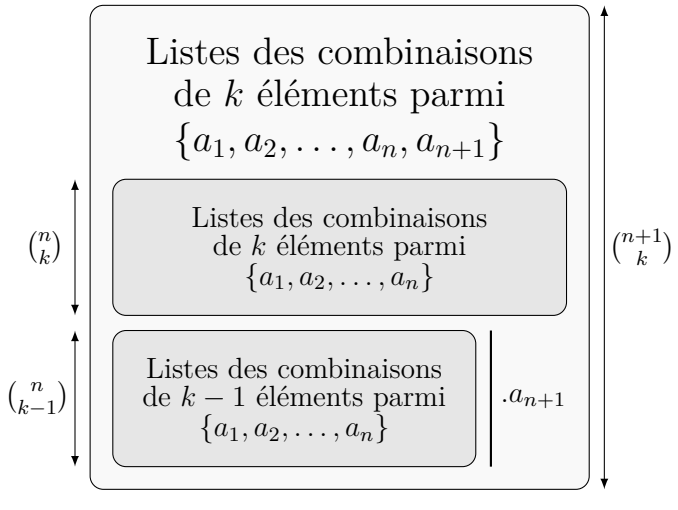
| Nombre de con3naisons | | | Nombre de choses |
|---|---|---|---|
| 1 | *ab* | *c* | 3 |
| 2 | *ab* | *d* | |
| 3 | *ac* | *d* | |
| 4 | *bc* | *d* | 4 |
| 5 | *ab* | *e* | |
| 6 | *ac* | *e* | |
| 7 | *ad* | *e* | |
| 8 | *bc* | *e* | |
| 9 | *bd* | *e* | |
| 10 | *cd* | *e* | 5 |




*Dissertatio de Arte Combinatoria* (1666) - p.8

Cette table liste toutes les combinaisons de trois éléments parmi les lettres $a$, $b$, $c$, $d$ et $e$. La démonstration s'appuie sur deux règles de présentations.
Tout d'abord l'ordre dans lequel les combinaisons sont listés. On met d'abord celles qui ne font pas intervenir $e$, qui sont donc des combinaisons parmi $a$, $b$, $c$ et $d$ puis celles dans lesquelles $e$ intervient, qui sont constituées de l'élément $e$ et d'une combinaison de deux éléments parmi $a$, $b$, $c$ et $d$. La deuxième règle permet d'exposer cette composition des triplets en les représentant systématiquement dans l'ordre alphabétique. Ainsi, Leibniz peut séparer dans l'expression des trois éléments la combinaison de deux éléments parmi $a$, $b$, $c$ et $d$ de l'élément $e$ qui doit intervenir à la fin.

Procédure Générale




$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Ces deux règles s'appliquent de façon récursive sur la première sous-liste des combinaisons qui ne font pas intervenir $e$. Cette dernière est alors elle-même séparée en deux sous-listes. La première dans laquelle $d$ n'intervient pas et la seconde dans laquelle il intervient. Cette seconde sous-liste contient alors des triplets qui sont formée d'une part d'une combinaison de deux éléments parmi $a$, $b$ et $c$ et d'autre part de l'élément $d$ final. Et ainsi de suite.
Leibniz énonce ces deux règles au travers de la signification des lignes horizontales et des lignes verticales de sa figure :

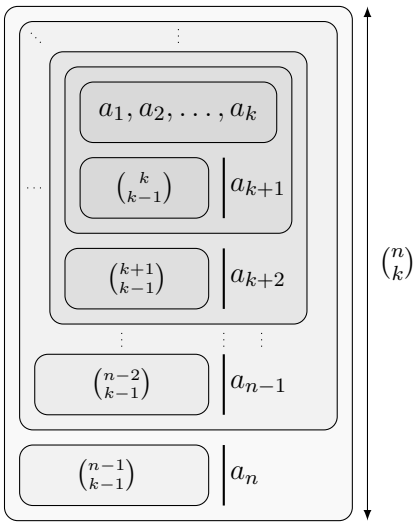
> *Afin d'être plus clair, nous adjoignons la table* ב*, dans laquelle nous distinguons par des lignes horizontales les con3naisons de* 3*,* 4 *et de* 5 *choses. Mais de sorte que les premières con3naisons soient également celles des suivantes, et que par conséquent la table entière soit celle des con3naisons du nombre* 5*. Et de sorte qu'il soit manifeste que les con3naisons du nombre suivant sont issues des com2naisons de l'antécédent auxquelles on ajoute à chacune un nouveau venu, nous avons séparé par une ligne verticale le nouveau venu des combinaisons.* [116]

Leibniz a donc recours à une démonstration par dénombrement. En associant les coefficients combinatoires à des cardinaux de listes, Leibniz montre que la relation arithmétique qui relie ces coefficients traduit une relation méréologique entre des ensembles :

$$\mathrm{card}(A \sqcup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B)$$

La table permet d'exprimer ces relations dans l'espace par la disposition des termes. Les lignes horizontales représentent les groupement par classes. Elles incarnent la séparation dans l'espace. Les lignes verticales définissent ce qu'ont en commun les différents termes d'un même groupe. Elles incarnent les opérations de classement successive dans le temps.

Récursivité




$$\binom{n}{k} = \binom{k}{k} + \binom{k}{k-1} + \cdots + \binom{n-1}{k-1}$$

Ici encore, la table est une liste plutôt qu'un tableau à double entrée. Au lieu d'être des colonnes verticales comme dans la table א de combinaisons, les termes de la listes sont ici des triplets horizontaux. Mais on retrouve le même principe qui consiste à placer les termes les uns à la suites des autres, en regard, pour que leurs sous-éléments se correspondent. Ainsi, peut-on extraire des triplets les paires qui s'accordent avec la formule. On peut donc lire directement sur la table ב la formule qu'il s'agit de démontrer et son

116. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.175 : « Majoris lucis causa apposuimus Tabulam ב ubi lineis transversis distinximus Con3nationem de 3, et de 4, et de 5. Sic tamen ut con3nationes priores sint sequenti communes, et per consequens tota tabula sit con3nationum numeri 5 utque manifestum esset, quæ con3nationes numeri sequentis ex com2nationibus antecedentis addito singulis novo hospite orirentur, linea deorsum tendente combinationes a novo hospite distinximus. ».

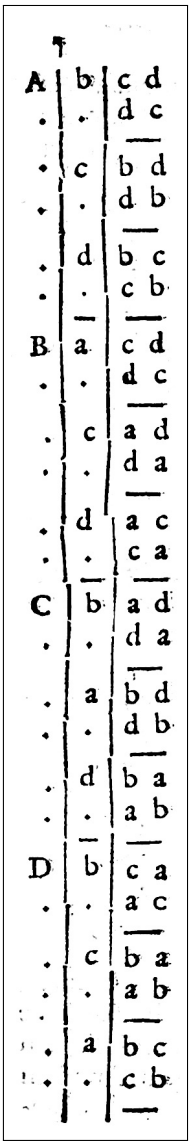
*explication*, pris au sens de Deleuze [117], c'est-à-dire le dépliage des relations qu'elle contient :

$$\overbrace{\underbrace{6}_{=\binom{4}{2}}+\overbrace{\underbrace{3}_{=\binom{3}{2}}+\underbrace{1}_{=\binom{3}{3}}}^{=4=\binom{4}{3}}}^{=10=\binom{5}{3}}$$

On trouve un usage apodictique semblable dans la table ו, qui liste les différentes permutations de quatre éléments $a$, $b$, $c$ et $d$.

Table ו

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| • | • | $d$ | $c$ |
| • | $c$ | $b$ | $d$ |
| • | • | $d$ | $b$ |
| • | $d$ | $b$ | $c$ |
| • | • | $c$ | $b$ |
| $b$ | $a$ | $c$ | $d$ |
| • | • | $d$ | $c$ |
| • | $c$ | $a$ | $d$ |
| • | • | $d$ | $a$ |
| • | $d$ | $a$ | $c$ |
| • | • | $c$ | $a$ |
| $c$ | $b$ | $a$ | $d$ |
| • | • | $d$ | $a$ |
| • | $a$ | $b$ | $d$ |
| • | • | $d$ | $b$ |
| • | $d$ | $b$ | $a$ |
| • | • | $a$ | $b$ |
| $d$ | $b$ | $c$ | $a$ |
| • | • | $a$ | $c$ |
| • | $c$ | $b$ | $a$ |
| • | • | $a$ | $b$ |
| • | $a$ | $b$ | $c$ |
| • | • | $c$ | $b$ |

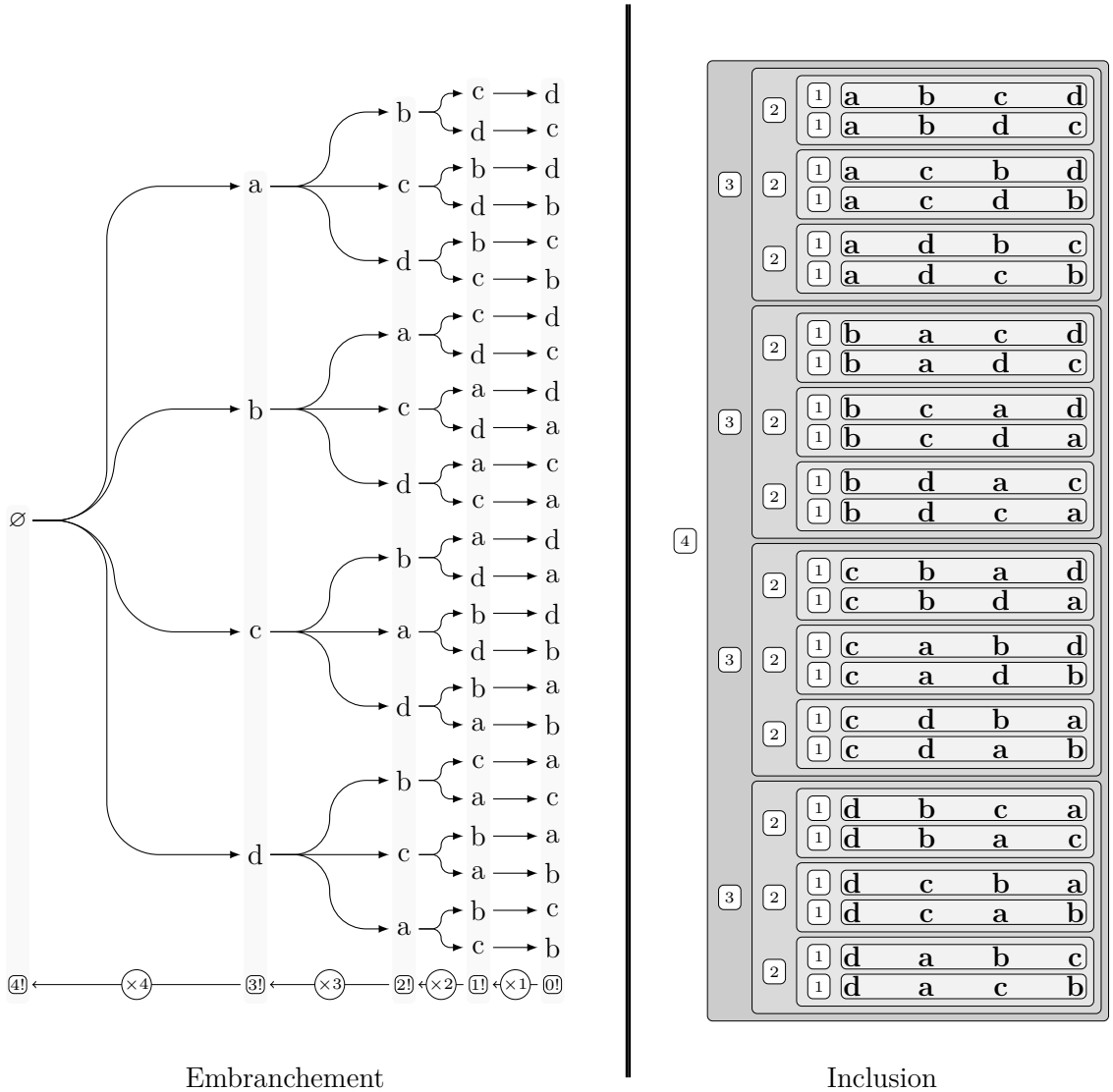


*Dissertatio de Arte Combinatoria* (1666) - p.58

Ici aussi, la disposition permet de mettre en évidence la structure récursive de la formule donnée par la table ה. Leibniz classe les termes en paquets, selon leur premier élément. Puis à l'intérieur de ces paquets, il renouvelle la procédure de classement selon le second, puis le troisième et ainsi de suite. L'ordre dans lequel les termes sont listés, et leur disposition qui met en regard leurs sous-éléments, permet à nouveau de représenter une structure combinatoire fondée sur des relations d'inclusions. Le raisonnement s'apparente au procédé classique par embranchement, pour déterminer le nombre de permutation. Ainsi, pour le premier élément, on a quatre choix, pour le deuxième trois choix, pour le troisième deux et un seul choix pour le dernier. Mais ce raisonnement arborescent est exprimé dans une table sous la forme

117. *Cf* [21] G. Deleuze, *Le Pli, Leibniz et le baroque*, Editions de Minuit, Paris, 1988

d'une répartition méréologique, plutôt qu'au moyen d'un graphe où les termes interagissent au travers des relations de connexité. Nous représentons ci-dessous ces deux diagrammes qui expriment le même raisonnement :




Embranchement

Inclusion

On peut alors lire directement la formule sur la table, en terme de cardinaux d'ensembles. Si je partage un ensemble $A$ en $p$ sous-ensembes $B_1$, $B_2$, ..., $B_p$ de même cardinal, alors :

$$\text{card}(A) = p \times \text{card}(B_1)$$

Il y a une différence notable entre la table que propose Leibniz et celle que nous reproduisons ci-dessus à droite. En effet, Leibniz ne répète pas les éléments fixés dans les sous-ensembles et les remplace par des points. Ces points matérialisent la présence d'un élément, ce qui est effectivement conforme à une pratique tabulaire fondée sur la méréologie. De fait, la figure par embranchement montre que ces points n'auraient pas été pas nécessaires au sein d'un graphe. Néanmoins, ne représenter qu'une seule fois les éléments répétés permet d'exprimer la structure arborescente du raisonnement par choix successifs. Ainsi la figure de Leibniz est un composé des deux figures ci-dessus, représentant d'une part la formule de récurrence par les relations d'inclusions successives et d'autre part la manière de déterminer ces relations grâce au procédé de choix par embranchement.

> *A cette fin, voici un autre diagramme ١. Dans celui-ci nous exprimons visuellement les* 24 *variations d'ordre des* 4 *choses A, B, C et D. Les points signifient la chose d'une ligne précédente, placée directement au-dessus. Nous avons suivi ce mode de disposition afin que le premier élément varie au minimum jusqu'à ce qu'on ait peu à peu tous les autres.* [118]

118. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.212 : « In hunc finem esto aliud Schema ١. In eo

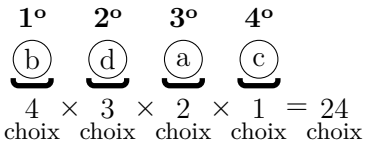
La description que donne dans un premier temps Leibniz de cette table, s'accorde avec notre analyse spatiotemporelle. En effet ces deux aspects s'incarnent par les lignes horizontales d'une part qui permettent de séparer et de regrouper dans l'espace uniforme des permutations, et les lignes verticales d'autre part qui délimitent les moments de chaque choix pour chaque rang, dans un espace directionnel et anisotrope. Lorsqu'il dit exprimer « visuellement » (« *oculariter* ») toutes les variations, on retrouve bien l'idée de représentation par inclusion. Quant à celle de choix par embranchement, elle se trouve dans la suite de la citation, lorsque Leibniz compare sa table à une disjonction des cas :

> *Au reste, c'est comme si nous avions distingué par des bornes, les variations de l'exposant précédent de celles que le suivant surajoute.* [119]

Ces bornes sont les lignes verticales, qui séparent les étapes du raisonnement. Cependant, lorsqu'il s'agit de déduire de la figure la règle de récurrence des factorielles, le discours de Leibniz devient confus et ne correspond plus à l'interprétation que nous donnons de cette table.
Avant de développer ce point, nous devons distinguer deux méthodes pour générer toutes les permutations.

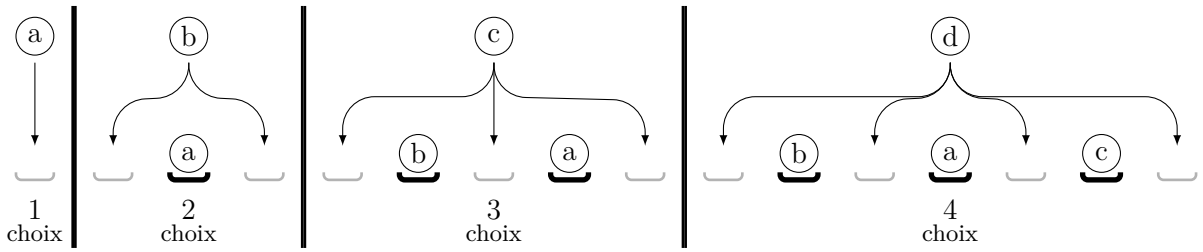
⋆ La première consiste à fixer les rangs, et choisir quels éléments l'on place à chaque rang. D'abord, on choisit pour la première place, puis pour la seconde, puis pour les troisième, et ainsi de suite. On obtient un produit décroissant de possibilités :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$



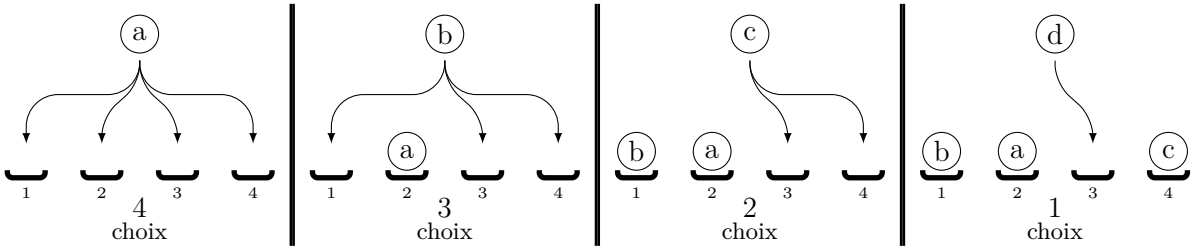

⋆ La seconde méthode consiste à fixer l'ordre des éléments que l'on considère puis choisir successivement quels rangs on leur attribuera relativement les uns par rapport aux autres. Ainsi le première élément est fixe, puis pour le second, on a deux places ; pour le troisième, on a trois places et ainsi de suite. On obtient un produit croissant de possibilités :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (n-2) \times (n-1) \times n$$




⋆ Il existe en réalité une troisième méthode, qui est un mélange des deux précédentes. Il s'agit de fixer l'ordre dans lequel on considère les éléments puis de leur attribuer successivement leur rang non relatif. Ainsi pour le premier élément, on a quatre places, puis pour le second trois places et ainsi de suite. On retrouve comme pour la première méthode un produit décroissant de possibilités :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$



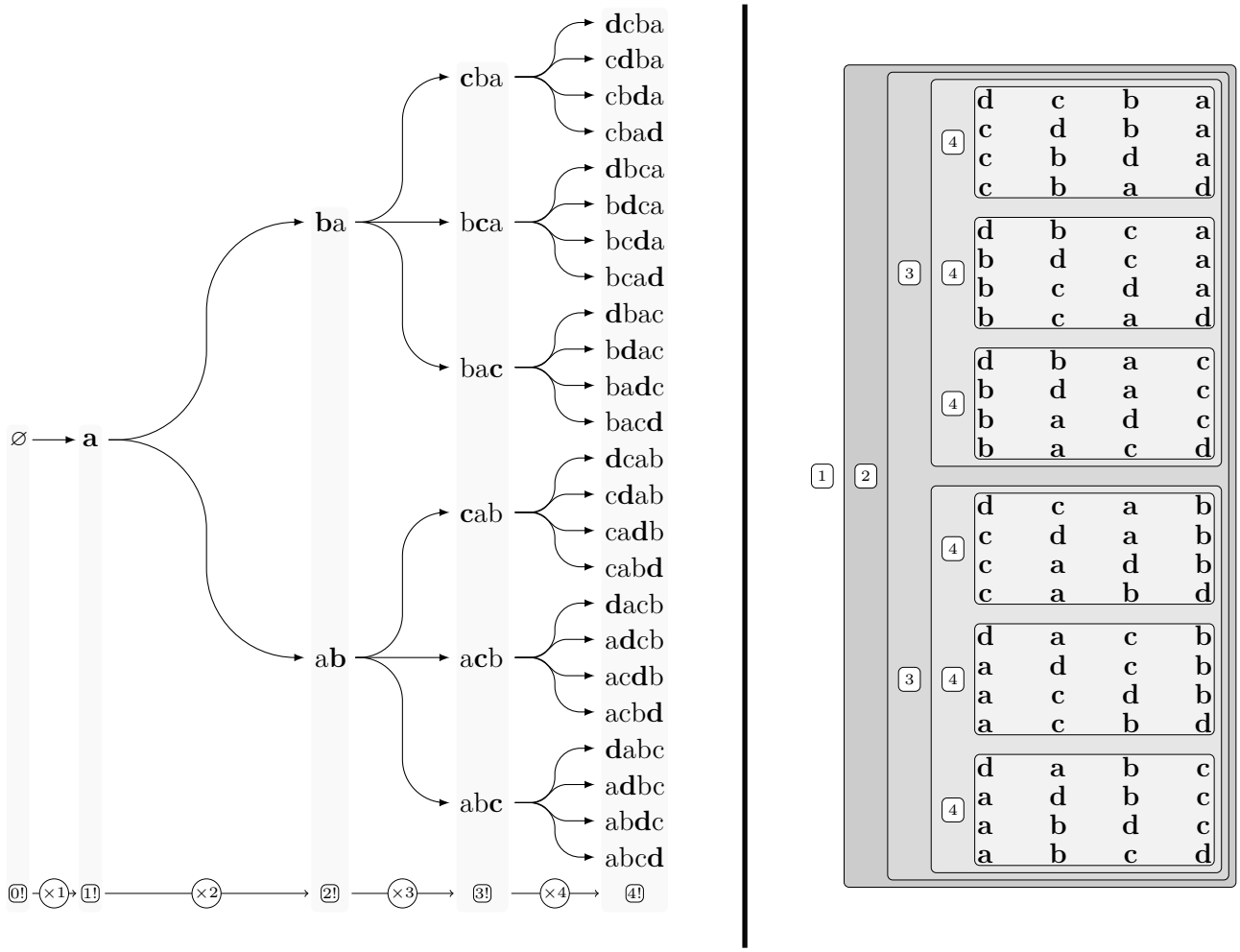

4. rerum *ABCD*. 24. variationes ordinis, oculariter expressimus. Puncta significant rem præcedentis lineæ directe supra positam. Methodum disponendi secuti sumus, ut primum quam minimum variaretur, donec paulatim omnia. ».

119. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.212 : « Cæterum quasi limitibus distinximus Variationes exponentis antecedentis ab iis quas superaddit sequens. ».

Nous disons qu'il y a seulement deux méthodes, car la troisième est en fait l'analogue de la première. Au lieu d'attribuer un élément à chaque rang, on attribue un rang à chaque élément. Dans le contexte combinatoire du problème, les éléments et les rangs sont de même nature et la relation d'association qu'on affecte à un couple élément-rang est symétrique. Autrement dit, on peut considérer que l'élément est le lieu du rang et que le rang est l'objet de l'élément.
Comme nous l'avons montré, la table de Leibniz correspond à la première méthode. Cependant, la description qu'il donne du processus de démonstration de la formule s'accorde plutôt avec la seconde :

> *Pour résumer, donc, étant donné un nombre quelconque de choses qui varient, par exemple trois qui varient de six manières, une chose en plus des précédentes pourra être placée parmi les variations déjà utilisées du nombre précédent, ou bien à la première place, ou bien à la seconde, ou bien à la troisième, ou bien à la quatrième c'est-à-dire la dernière place. C'est-à-dire qu'on pourra ajouter aux précédentes autant de variations qu'elles ont d'unités. Et à chaque fois qu'on ajoute aux précédentes, on place toutes les variations précédentes.* [120]

Si Leibniz avait voulu représenter la deuxième méthode dans la table ו, il aurait opté pour une autre disposition. De fait, au lieu de regrouper les termes entre eux par la place fixe qu'occupe un certain élément, la seconde méthode demande de regrouper les termes par position relative des éléments entre eux. Par exemple, regrouper tous les termes où $a$ est avant $b$ d'un côté et tous ceux où $b$ est avant $a$ de l'autre. Ce processus renverse effectivement les facteurs des factorielles, comme le montrent les figures ci-dessous :



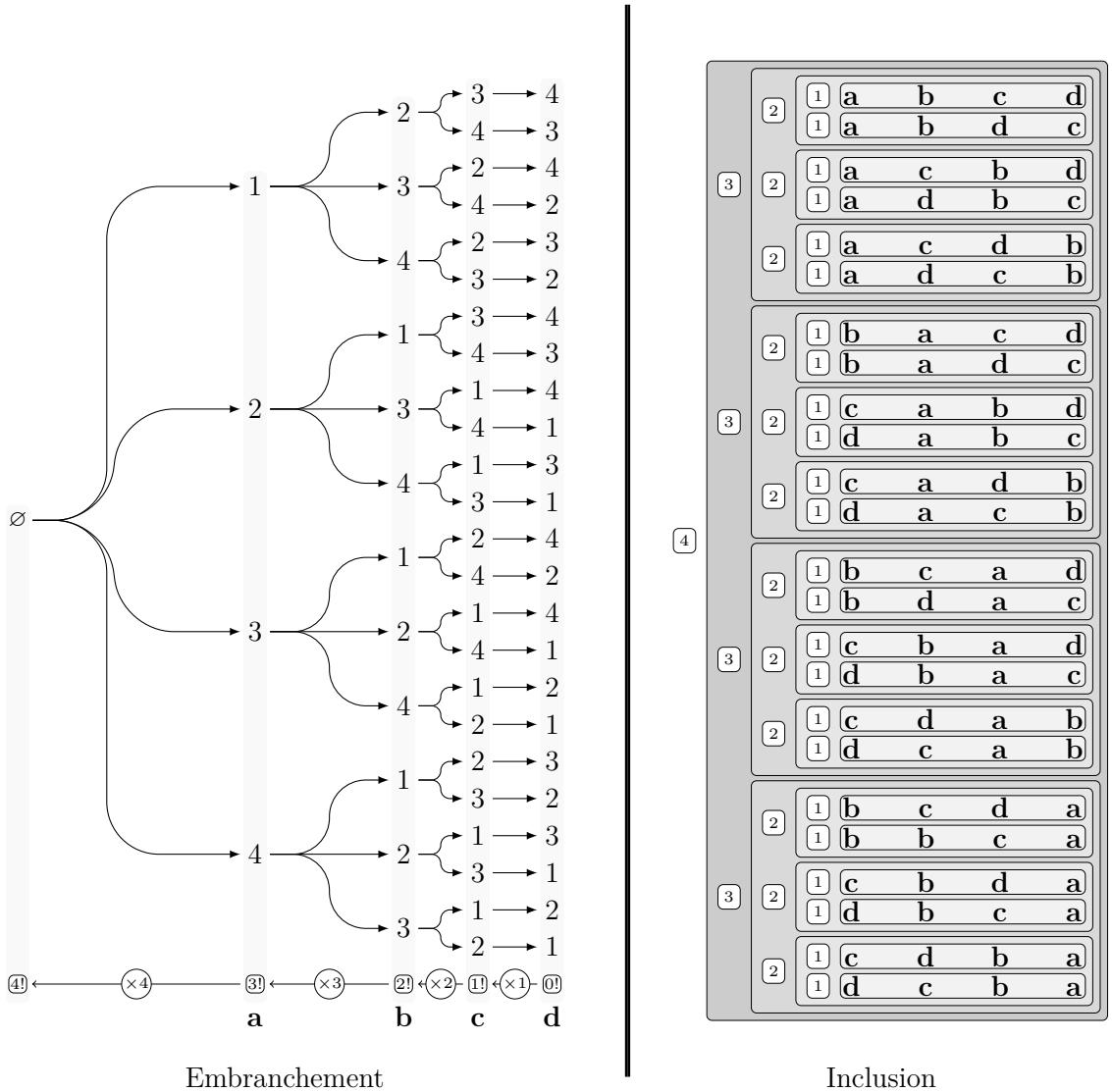

Embranchement Inclusion

120. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.212 : « Breviter igitur : Quotiescunque varientur, res datæ, v. g. tres 6 mahl ; addita una præterea poni poterit servatis variationibus prioris numeri jam initio, jam 2do, jam 3tio, jam ultimo seu 4to loco ; seu toties poterit prioribus varie adjungi, quot habet unitates : Et quotiescunque prioribus adjungetur, priores variationes omnes ponet. ».

La reformulation qu'il propose ensuite peut s'accorder avec la première méthode ou la troisième, ajoutant à la confusion de son commentaire :

> *Autrement dit : une chose quelconque occupera une certaine place, une seule à chaque fois, tandis que les restantes auront entre elles toutes les variations précédentes, voir le problème 7. Il apparait donc clairement que les variations précédentes doivent être multipliées avec l'exposant suivant.* [121]

S'il avait opté pour la troisième méthode, le processus de classement par inclusion aurait été le même, puisqu'on a vu que cette troisième méthode est analogue à la première. Néanmoins, la disposition des permutations serait encore différente :




Comme les rangs et les éléments ont été intervertis, les suites de rangs, dans cette troisième méthode, correspondent aux suites d'éléments dans la première méthode et donc à la table de Leibniz. La correspondance entre rang et élément ne permet cependant pas de remettre en question l'interprétation de la table ɿ. Celle-ci correspond sans ambiguïté à la première méthode, puisque nous avons montré que d'autres méthodes auraient donné d'autres tables. Cela étant, cette troisième disposition, correspondant à la troisième méthode, montre qu'une même structure méréologique peut convenir à deux raisonnements différents si ces derniers partagent la même structure d'embranchement.

Formalisons cet isomorphisme entre rangs et éléments. Ainsi, si on se fixe un ordre canonique pour les éléments, par exemple $a_1.a_2.\ldots.a_n$, ainsi qu'un ordre canonique pour les rangs, naturellement $1.2.\ldots.n$,

121. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.212 : « Vel sic : quælibet res aliquem locum tenebit semel, cum interim reliquæ habent variationem antecedentem inter se, conf. problem. 7. Patet igitur variationes priores in exponentem sequentem ducendas esse. ».

il est possible d'associer de façon bijective chaque permutation d'éléments à une permutation de rang :

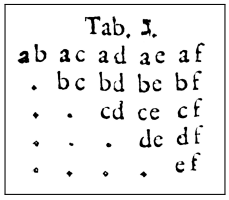
$$\Phi : a_{\sigma(1)}.a_{\sigma(2)} \dots a_{\sigma(n)} \longmapsto \sigma^{-1}(1).\sigma^{-1}(2) \dots \sigma^{-1}(n)$$

$$\mathcal{P}\left(\{a_1, a_2, \dots, a_n\}\right) \ \rightarrow \qquad\qquad \mathfrak{S}_n$$

Cette application permet d'envisager une quatrième méthode qui serait l'analogue de la deuxième, où l'on échangerait rang et éléments. De fait, on peut utiliser la deuxième méthode pour générer une permutation de rang, puis par la réciproque de l'application $\Phi$, obtenir une permutation d'éléments. Néanmoins, cette option n'est pas satisfaisante puisque la relation d'association attribuée au couple rang-élément n'est pas symétrique dans le cadre combinatoire de la seconde méthode, du moins elle ne l'est qu'à l'issue de la procédure. En effet, le rang final n'est attribué à un élément qu'une fois tout le processus de construction achevé. Mais au cours de celui-ci, les rangs sont relatifs et provisoires.
Dans l'introduction, Leibniz note qu'en matière de métaphysique, la complexion et le lieu sont de même nature, car ils relèvent tous deux de la méréologie :

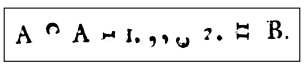
> *Ainsi émergent deux genres de variations : celles de complexion et celles de lieu. Et la complexion comme le lieu relèvent de la métaphysique, à savoir de la doctrine du tout et des parties, si on les observe en eux-même.* [122]

Le jeune philosophe avait donc déjà l'intuition de cette équivalence. Mais on ne peut pas en conclure qu'il avait parfaitement conscience de l'analogie entre la première et la troisième méthode et encore moins que ceci pourrait expliquer l'ambiguïté de sa démonstration. La description confuse qu'il donne de cette table doit être, avant tout, attribuée à son manque d'expérience. Néanmoins cela illustre remarquablement bien la difficulté qu'il y a à extraire un raisonnement d'une pratique tabulaire. Même s'il n'est pas parvenu à l'exprimer clairement par des mots et des phrases, Leibniz a nécessairement adopté la première méthode de calcul pour construire sa table. Pourtant, lorsqu'il souhaite mettre des mots sur sa pratique démonstrative, il décrit un autre processus combinatoire. C'est comme s'il ne lit pas a table de la même manière qu'il l'a construite.
La table ב, enfin, présente également des éléments de discordance avec le texte. Cette table sert de preuve à la formule donnée par Leibniz pour déterminer le nombre de combinaisons de deux éléments parmi un ensemble de $n$ éléments :


Tab. ב.
ab ac ad ae af
. bc bd be bf
. . cd ce cf
. . . de df
. . . . ef

*Dissertatio de Arte Combinatoria* (1666) - p.9

Pour ce cas particulier, Leibniz préciser qu'il n'est pas nécessaire d'avoir recours au processus de récurrence, mais que l'on peut directement exprimer ce nombre par une formule littérale :



*Dissertatio de Arte Combinatoria* (1666) - p.8

$$A \cap A - 1., , \cup 2. = B \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{A \times (A-1)}{2} = B$$

Pour démontrer cette formule, dans le cas d'un ensemble composé de six éléments $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ et $f$, Leibniz s'appuie sur un processus de dénombrement similaire à celui qu'il a utilisé pour la table ב et la formule de récurrence des combinaisons. Il regroupe d'abord tous les termes où intervient l'élément $a$, puis parmi

122. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.171 : « Ita oriuntur duo Variationum genera : Complexionis et Situs. Et tum Complexio tum Situs ad Metaphysicam pertinet, nempe ad doctrinam de Toto et partibus, si in se spectentur. ».

ceux qui restent, tous ceux ou intervient l'élément $b$ et ainsi de suite. Il trouve ainsi un premier ensemble de cinq combinaisons, puis un second de quatre, un troisième de trois, un quatrième de deux et un dernier ne contenant qu'une seule combinaison.

> *Donc les combinaisons sont* $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$. *Ainsi, il apparait que le nombre des com2naisons est composé des termes d'une progression arithmétique dont la différence est 1, dénombrés depuis* 1 *jusqu'au nombre voisin du nombre de choses, inclusivement ; c'est-à-dire qu'il est composé de tous les nombres plus petits que le nombre de choses, ajoutés ensembles.* [123]

Le nombre cherché est donc le résultat d'une somme arithmétique. Pour déterminer cette somme, Leibniz s'appuie sur un argument d'autorité. Selon lui, c'est une formule bien connue en arithmétique, qui ne requiert donc pas d'avantage de démonstration :

> *Mais parce qu'on somme de tels nombres par cette manière concise, comme l'enseignent communément les arithméticiens, à savoir que si l'on multiplie le nombre le plus élevé par celui juste au dessus, la moitié du produit sera la somme cherchée. Et, en vérité, celui juste au dessus n'est rien d'autre que le nombre de choses. Ainsi, c'est tout comme si l'on disait : qu'on multiplie le nombre de choses par celui juste au dessous, la moitié du produit sera ce qui est demandé.* [124]

Quel est le statut de la table ג ? Si l'on suit le texte, elle sert uniquement à faire la liste des combinaisons de deux éléments :

> *La raison de cette solution : voici la table* ג *dans laquelle on énumère les com2naisons possibles de 6 choses :* $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ *et* $f$. [125]

Comme nous l'avons montré, lorsque Leibniz énumère des termes, il en fait la liste en colonne, en choisissant judicieusement la disposition pour représenter le groupement combinatoire qu'il effectue. Ainsi, ici, il aura pu établir les combinaison par une table similaire à la table ב qu'il avait utilisée pour illustrer la formule de récurrence de la table א des combinaisons :

| Nombre de com2naisons | | Nombre de choses | |
|---|---|---|---|
| 1 | $a$ | $b$ | 2 |
| 2 | $a$ | $c$ | |
| 3 | $b$ | $c$ | 3 |
| 4 | $a$ | $d$ | |
| 5 | $b$ | $d$ | |
| 6 | $c$ | $d$ | 4 |
| 7 | $a$ | $e$ | |
| 8 | $b$ | $e$ | |
| 9 | $c$ | $e$ | |
| 10 | $d$ | $e$ | 5 |
| 11 | $a$ | $f$ | |
| 12 | $b$ | $f$ | |
| 13 | $c$ | $f$ | |
| 14 | $d$ | $f$ | |
| 15 | $e$ | $f$ | 6 |

De fait, cette table aurait bien montré la proposition que Leibniz souhaite démontrer, à savoir que le nombre de combinaisons de deux éléments est le résultat d'une somme arithmétique :

$$\binom{n}{2} = \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{1} + \cdots + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1$$

123. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.176 : « Sunt igitur com2nationes 5, 4, 3, 2, 1 + *f.* 15. Ita patet numerum com2nationum componi ex terminis progressionis arithmeticæ, cujus differentia : 1, numeratis ab 1 ad numerum numero rerum proximum, inclusive ; sive ex omnibus numeris Numero rerum minoribus simul additis. ».

124. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.176 : « Sed quia uti vulgo docent Arithmetici, tales numeri hoc compendio adduntur, ut maximus numerus ducatur in proxime majorem, facti dimidius sit quæsitus ; et vero proxime major h. l. est ipse Numerus rerum, igitur perinde est ac si dicas : Numerum rerum ducendum in proxime minorem, facti dimidium fore quæsitum. ».

125. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.175-176 : « Ratio Solutionis : esto Tab. ג in qua enumerantur VI rerum : *abcdef* com2nationes possibiles. ».

Mais ce n'est pas cette table que choisit Leibniz pour illustrer son résultat, mais une figure triangulaire. Le triangle est lui-même complété en carré par des points. En plaçant les termes sur une telle figure géométrique, Leibniz ne montre pas seulement que le nombre cherché est composé d'une somme arithmétique, mais aussi que ce nombre cherché est un nombre triangulaire. La figure sert donc également à la démonstration de la formule non démontrée des arithméticiens, à savoir :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Mais si la figure montre clairement que le nombre cherché est un nombre triangulaire, elle ne montre pas vraiment que ce nombre triangulaire est la moitié du produit de deux consécutifs, puisqu'elle inscrit ce triangle dans un carré et non dans un rectangle. En réalité, les points dans la figure semblent représenter les combinaisons déjà comptées :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **a** | *ab* | *ac* | *ad* | *ae* | *af* |
| **b** | ba | *bc* | *bd* | *be* | *bf* |
| **c** | ca | cb | *cd* | *ce* | *cf* |
| **d** | da | db | dc | *de* | *df* |
| **e** | ea | eb | ec | ed | *ef* |

Sauf qu'il manque toutes les combinaisons déjà comptées avec $f$. En effet, chaque combinaison doit apparaitre deux fois dans la figure, car elle peut être obtenue de deux manières suivant l'ordre dans lequel on associe les éléments. Il aurait donc fallu ajouter une sixième ligne composée uniquement de points, ce qui aurait permis dans le même temps de représenter géométriquement le fait que le nombre triangulaire est la moitié d'un produit de consécutifs :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **a** | *ab* | *ac* | *ad* | *ae* | *af* |
| **b** | ba | *bc* | *bd* | *be* | *bf* |
| **c** | ca | cb | *cd* | *ce* | *cf* |
| **d** | da | db | dc | *de* | *df* |
| **e** | ea | eb | ec | ed | *ef* |
| **f** | fa | fb | fc | fd | fe |

Ainsi, Leibniz utilise ici la table comme figure géométrique, et non combinatoire. Cela s'explique par le fait qu'elle sert à illustrer une identité algébrique et non un raisonnement récursif. Néanmoins, il ne se contente pas de seulement disposer les éléments en triangle. Il les mets en regard les uns par rapport aux autres de sorte qu'il y a des correspondances dans les lignes et dans les colonnes. De fait, si ce critère n'avait pas existé, il est probable que la représentation suivante eut été plus naturelle, l'écriture allant de gauche à droite :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *ab* | *ac* | *ad* | *ae* | *af* |
| *bc* | *bd* | *be* | *bf* | |
| *cd* | *ce* | *cf* | | |
| *de* | *df* | | | |
| *ef* | | | | |

Si nous acceptons cette idée, il faut alors renoncer à voir les points comme des combinaisons déjà comptées, car ces combinaisons rompraient l'unité des colonnes. Il aurait fallu construire un tableau à double entrées complet, qui liste les $n^2$ compositions possibles. En retirant les éléments composés avec eux-mêmes, qui ne sont pas des combinaisons de deux éléments, on obtient deux nombres triangulaires égaux. Cette figure qui respecterait la construction tabulaire de Leibniz serait également l'illustration géométrique d'une autre formule, naturellement équivalente à la première, à savoir qu'un nombre triangulaire plutôt que la moitié du produit de deux consécutifs, peut-être obtenu par la moitié de la différence entre un carré et sa racine :

$$T_{n-1} = \frac{n^2 - n}{2}$$

| | a | b | c | d | e | f |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **a** | $*$ | $ab$ | $ac$ | $ad$ | $ae$ | $af$ |
| **b** | ba | $*$ | $bc$ | $bd$ | $be$ | $bf$ |
| **c** | ca | cb | $*$ | $cd$ | $ce$ | $cf$ |
| **d** | da | db | dc | $*$ | $de$ | $df$ |
| **e** | ea | eb | ec | ed | $*$ | $ef$ |
| **f** | fa | fb | fc | fd | fe | $*$ |

**Choix et éliminations**

Leibniz introduit dans la pratique combinatoire la notion de variations utiles et inutiles. Comme le note Michel Serres, la combinatoire pure et positive qui permet seulement de générer toutes les possibilités éventuelles doit être complétée par une deuxième étape de sélection, qui sépare les composés pertinents de ceux qui ne le sont pas.

> *De sorte que la combinatoire ne serait rien si, pouvant tout former, elle ne s'associait pas des règles de bonne formation ; elle ne serait qu'une organisation d'ensemble rigoureuse pour le hasard associé à la raison. C'est pourquoi le De Arte pullule de filtres, de cribles, de règles permettant d'éliminer l'insensé, l'incompatible, l'impossible, le non-raisonnable ; c'est pourquoi aussi la distinction y est faite des variations utiles et inutiles. Or, le départ de ces variations n'est pas du ressort de la combinatoire : il faut, pour les filtrer, « considérer la discipline dont dépendent les choses qu'on doit faire varier, ou le tout composé de celles-ci. Leurs règles propres éliminent les inutiles et conservent les utiles. Il faut considérer, là, les choses qui ne peuvent être conjuguées avec d'autres, il faut voir dans quel lieu cette alliance est impossible, il faut voir quelles sont celles qui ne peuvent être placées en tel lieu, par exemple, le premier, le second, etc. Et tout d'abord en premier et dernier lieu. Il faut examiner les choses qui sont électivement causes d'anomalies (par exemple, dans les hexamètres protéiques, les syllabes brèves) », etc. De la nature donc des éléments et de l'ensemble qu'ils constituent dépend le criblage.* [126]

Pour Leibniz, les règles de sélection ne peuvent pas être simplement combinatoire mais s'intègrent dans la discipline particulière à laquelle appartient les termes qu'on étudie. De fait, les règles qui distinguent un hexamètre correctement scandé d'un vers irrégulier sont propre à la poésie latine, et ne peuvent pas être déduites de la structure combinatoire des vers eux-même.
Mais alors, cette deuxième étape de sélection devrait échapper à toute pratique combinatoire, et confronter successivement chaque terme généré à des règles particulières. Ce n'est bien entendu pas le cas. Si les règles ne sont pas directement déductibles d'une pure combinatoire arithmétiques, elles peuvent néanmoins s'exprimer en terme des combinaisons et de permutations, comme c'est le cas pour la métrique. Il s'agit alors de déterminer l'ensemble des cas irréguliers, en appliquant une classification combinatoire à tous les cas génériques qui peuvent enfreindre les règles données. L'élimination s'effectue donc par une génération négative des cas inutiles. Ainsi, les deux temps, celui de création puis celui de sélection, sont bien nécessaires. Il faut d'abord tout envisager, pour envisager ensuite tout ce qui ne va pas.
Ainsi, Leibniz dénombre toutes les variations inutiles pour le vers composé de neuf mots :

*Dant tria jam Dresdæ, ceu sol dat, lumina lucem.*

Ces neuf mots se répartissent en quatre groupes :

- ⋆ 5 mots d'une seule syllabe longue, notée « $-$ » : *Dant jam ceu sol dat*
- ⋆ 2 mots de deux syllabes longues, notée « $--$ » : *Dresdæ lucem*
- ⋆ 1 mot de deux syllabes courtes, notée « $\cup\cup$ » : *tria*
- ⋆ 1 mot d'un syllabe longue puis deux courtes, notée « $-\cup\cup$ » : *lumina*

126. [97] M. Serres, *Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques*, Presses Universitaires de France, Paris, 1968 - p.431 ; Michel Serres cite le dixième problème du traité : A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.222 : « Cæterum ut *Capita utilia vel inutilia reperiantur*, adhibenda disciplina est ad quam res variandæ, aut totum ex iis compositum pertinet. Regulæ ejus inutilia quidem elident, utilia vero relinquent. Ibi videndum quæ cum quibus et quo loco conjungi non possint, item quæ simpliciter quo loco poni non possint v. g. primo, tertio, etc. Inprimis autem primo et ultimo. Deinde videndum quæ res potissimum causa sit anomaliæ (v. g. in versibus hexametris Proteis syllabæ breves). ».

Summa Omnium variationum utilium & inutilium 362880 25

Catalogus Variationum inutilium:

1. ○ ○. v. g. *tria* dant jam Dresdæ ceu sol dat lumina lucem. 40320

2. ▭ ▭. ○ ○. *dresdæ tria* dant jam ceu sol &c. 10080

3. ▭. ▭. ○ ○. *dant jam tria* 1440

4. ▭ ▭. ▭. ▭. ○ ○. *dresdæ dant jam tria.* 28800

5. ▭ ▭. ▭ ▭. ○ ○. *dresdæ lucem tria.* 1440

6. ▭. ▭. ▭. ▭. ○ ○. *dant jam ceu sol tria.* 2880

7. ▭ ▭. ▭ ▭. ▭. ▭. ○ ○. *dresdæ lucem ceu sol tria.* 28800

8. ▭ ▭. ▭. ▭. ▭. ▭. ○ ○. *dresdæ dant jã ceu sol tria.* 7200

9. ▭ ▭. ▭ ▭. ▭. ▭. ▭. ▭. ○ ○. *dresdæ lucem dant jam ceu sol tria* 7200

10. in fine ○ ○. v. g. *tria.* 40320. 26

Summa Variationum ob vocem *Tria* inutilium, quæ exactè constituit dimidium summæ Variationum possibilium. 181440

11. ab initio: ▭. ▭ ○ ○. *dant lumina.* 18000

12. ▭. ▭ ▭. ▭ ○ ○. *dant dresdæ lumina.* 9600

13. ▭. ▭. ▭. ▭ ○ ○. *dant jam ceu lumina.* 4320

14. ▭. ▭. ▭. ▭. ▭. ▭ ○ ○. *dant jam ceu sol dat lumina* 240

15. ▭. ▭ ▭. ▭ ▭. ▭ ○ ○. *dant dresdæ lucem lumina.* 2160

16. ▭. ▭. ▭. ▭ ▭. ▭ ○ ○. *dant jam ceu lucem lumina* 5760

17. ▭. ▭. ▭. ▭. ▭. ▭ ▭. ▭ ○ ○. *dant ceu jam sol dat lucem lumina.* 0

18. ▭. ▭. ▭. ▭ ▭. ▭ ▭. ▭ ○ ○. *dant ceu jam dresdæ lucem lumina.* 1200

19. ▭. ▭. ▭. ▭. ▭. ▭ ▭. ▭ ▭. ▭ ○ ○. *dant ceu jam sol dat lucem dresdæ lumina* 0

20. fine ▭ ○ ○. v. g. *luminæ.* 11620

27 Summa Variationum ob solam vocem: *lumina* inutilium 52900

21. ubi cunq; : ▭ ○ ○. ○ ○. *lumina tria.* 40320

22. ▭ ○ ○. ▭ ▭. ○ ○. *lumina dresdæ tria.* 14440

23. ▭ ○ ○. ▭. ▭. ○ ○. *lumina ceu jam tria.* 4800

24. ▭ ○ ○. ▭. ▭. ▭. ▭. ○ ○. *lumina ceu jã sol dat tria.* 1440

25. ▭ ○ ○. ▭ ▭. ▭ ▭. ○ ○. *lumina dresdæ lucem tria.* 480

26. ▭ ○ ○. ▭. ▭. ▭ ▭. ○ ○. *lumina ceu jam dresdæ tria.* 4800

27. ▭ ○ ○. ▭. ▭. ▭ ▭. ▭ ▭. ○ ○. *lumina ceu jam* * *lumina ceu jam* *Dresdæ lucem tria.* 4080

28. ▭ ○ ○. ▭. ▭. ▭. ▭. ▭ ▭. ○ ○. * *dat sol lucem tria.* 532

29. ▭ ○ ○. ▭. ▭. ▭. ▭. ▭ ▭ ○ ○. *lumina ceu jam dat sol lucem dresdæ tria.* 2978

28 Summa Var. inut. ob complicationē *Lumina* & *Tria*, illo præposito. 59870

30. ▭. ○ ○. ▭. ▭ ○ ○. *dant tria jam lumina.* 2400

31. ▭. ○ ○. ▭. ▭ ▭. ▭ ○ ○. *dant tria jã dresdæ lumina.* 3840

32. ▭. ○ ○. ▭. ▭. ▭. ▭ ○ ○. *ceu sol.* 1440

33. ▭. ○ ○. ▭. ▭. ▭. ▭ ▭. ▭ ○ ○. *dant tria jam ceu sol lucem lumina* 5760

34. ▭. ○ ○. ▭. ▭. ▭. ▭ ▭. ▭ ▭. ▭ ○ ○. *dant tria jam ceu sol lucem dresdæ lumina* 9360

Summa Var. inut. ob complic. *Tria* & *Lumina* illo præposito 22800

59870

52900

181440

Summa summarum Var. inut. 317010

subtrahatur de summa Universali 362880

Remanet: 45870 29

*Dissertatio de Arte Combinatoria* (1666) - p.75-77

| | Choix du chef | | | | | | | | Perm. du chef | Perm. de la queue | Produit de Leibniz | Produit corrigé | Produit sans répét. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\cup\,\cup$ | | $-\,\cup\,\cup$ | | $-\,-$ | | $-$ | | | | | | |
| | $k$ | $\binom{1}{k}$ | $k$ | $\binom{1}{k}$ | $k$ | $\binom{2}{k}$ | $k$ | $\binom{5}{k}$ | | | | | |
| **25** | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | 9! | 362880 | 362880 | 362880 |
| 1 | *0* | 1 | *0* | 1 | *0* | 1 | *0* | 1 | 0! | 8! | 40320 | 40320 | 40320 |
| 2 | *0* | 1 | *0* | 1 | *1* | 2 | *0* | 1 | 1! | 7! | 10080 | 10080 | 10080 |
| 3 | *0* | 1 | *0* | 1 | *0* | 1 | *2* | 10 | 2! | 6! | 14400 | 14400 | 14400 |
| 4 | *0* | 1 | *0* | 1 | *1* | 2 | *2* | 10 | $(1+2)!$ | 5! | 28800 | 28800 | 28800 |
| 5 | *0* | 1 | *0* | 1 | *2* | 1 | *0* | 1 | 2! | 6! | 1440 | 1440 | 1440 |
| 6 | *0* | 1 | *0* | 1 | *0* | 1 | *4* | 5 | 4! | 4! | 2880 | 2880 | 2880 |
| 7 | *0* | 1 | *0* | 1 | *2* | 1 | *2* | 10 | $(2+2)!$ | 4! | 28800 | 5760 | 5760 |
| 8 | *0* | 1 | *0* | 1 | *1* | 2 | *4* | 5 | $(1+4)!$ | 3! | 7200 | 7200 | 7200 |
| 9 | *0* | 1 | *0* | 1 | *2* | 1 | *4* | 5 | $(2+4)!$ | 2! | 7200 | 7200 | 7200 |
| 10 | *0* | 1 | *1* | 1 | *2* | 1 | *5* | 1 | $(1+2+5)!$ | 0! | 40320 | 40320 | 40320 |
| **26** | | | | | | | | | | Somme | 181440 | 158400 | 158400 |
| 11 | *0* | 1 | *0* | 1 | *0* | 1 | *1* | 5 | 1! | 7! | 18000 | 25200 | 21600 |
| 12 | *0* | 1 | *0* | 1 | 1 | 2 | *1* | 5 | $(1+1)!$ | 6! | 9600 | 14400 | 12000 |
| 13 | *0* | 1 | *0* | 1 | *0* | 1 | *3* | 10 | 3! | 5! | 4320 | 7200 | 5760 |
| 14 | *0* | 1 | *0* | 1 | *0* | 1 | *5* | 1 | 5! | 3! | 240 | 720 | 480 |
| 15 | *0* | 1 | *0* | 1 | *2* | 1 | *1* | 5 | $(2+1)!$ | 5! | 2160 | 3600 | 2880 |
| 16 | *0* | 1 | *0* | 1 | *1* | 2 | *3* | 10 | $(1+3)!$ | 4! | 5760 | 11520 | 7680 |
| 17 | *0* | 1 | *0* | 1 | *1* | 2 | *5* | 1 | $(1+5)!$ | 2! | 0 | 480 | 1440 |
| 18 | *0* | 1 | *0* | 1 | *2* | 1 | *3* | 10 | $(2+3)!$ | 3! | 1200 | 7200 | 4800 |
| 19 | *0* | 1 | *0* | 1 | *2* | 1 | *5* | 1 | $(2+5)!$ | 1! | 0 | 5040 | 0 |
| 20 | *1* | 1 | *0* | 1 | *2* | 1 | *5* | 1 | $(1+2+5)!$ | 0! | 11620 | 40320 | 20160 |
| **27** | | | | | | | | | | Somme | 52900 | 115680 | 76800 |
| 21 | *0* | 1 | *0* | 1 | *0* | 1 | *0* | 1 | $0! \times \binom{8}{1}$ | 7! | 40320 | 40320 | 20160 |
| 22 | *0* | 1 | *0* | 1 | *1* | 2 | *0* | 1 | $1! \times \binom{7}{1}$ | 6! | 14440 | 10080 | 5040 |
| 23 | *0* | 1 | *0* | 1 | *0* | 1 | *2* | 10 | $2! \times \binom{6}{1}$ | 5! | 4320 | 14400 | 7200 |
| 24 | *0* | 1 | *0* | 1 | *0* | 1 | *4* | 5 | $4! \times \binom{4}{1}$ | 3! | 1440 | 2880 | 1440 |
| 25 | *0* | 1 | *0* | 1 | *2* | 1 | *0* | 1 | $2! \times \binom{6}{1}$ | 5! | 480 | 1440 | 720 |
| 26 | *0* | 1 | *0* | 1 | *1* | 2 | *2* | 10 | $(1+2)! \times \binom{5}{1}$ | 4! | 4800 | 14400 | 7200 |
| 27 | *0* | 1 | *0* | 1 | *2* | 1 | *2* | 10 | $(2+2)! \times \binom{4}{1}$ | 3! | 4080 | 5760 | 2880 |
| 28 | *0* | 1 | *0* | 1 | *1* | 2 | *4* | 5 | $(1+4)! \times \binom{3}{1}$ | 2! | 532 | 7200 | 3600 |
| 29 | *0* | 1 | *0* | 1 | *2* | 1 | *4* | 5 | $(2+4)! \times \binom{2}{1}$ | 1! | 2978 | 7200 | 3600 |
| **28** | | | | | | | | | | Somme | 59870 | 103680 | 51840 |
| 30 | *0* | 1 | *0* | 1 | *0* | 1 | *2* | 10 | 2! | 5! | 2400 | 2400 | 2400 |
| 31 | *0* | 1 | *0* | 1 | *1* | 2 | *2* | 10 | $2! \times \binom{2}{1}$ | 4! | 3840 | 1920 | 1920 |
| 32 | *0* | 1 | *0* | 1 | *0* | 1 | *4* | 5 | 4! | 3! | 1440 | 360 | 360 |
| 33 | *0* | 1 | *0* | 1 | *1* | 2 | *4* | 5 | $4! \times \binom{4}{1}$ | 2! | 5760 | 1920 | 1920 |
| 34 | *0* | 1 | *0* | 1 | *2* | 1 | *4* | 5 | $4! \times 2! \times \binom{5}{2}$ | 1! | 9360 | 2400 | 2400 |
| **29** | | | | | | | | | | Somme | 22800 | 9000 | 9000 |
| | | | | | | | | | | **Total** | **317010** | $*$ | **293040** |
| | | | | | | | | | | **Reste** | **45870** | $*$ | **66840** |

Leibniz rédige ce dénombrement dans le corps du texte, et il maintient la notation par paragraphe. Cependant, on ne peut que constater que son discours pendre l'aspect d'une table, où les éléments sont listés et mis en regard les uns par rapport aux autres.
Au paragraphe **25**, Leibniz détermine toutes les permutations possibles à savoir :

$$362880 = 9!$$

Les quatre paragraphes suivants consistent à dénombrer des listes de permutations inutiles :

- ⋆ **26** : Somme des variations inutiles à cause du mot *Tria*.
- ⋆ **27** : Somme des variations inutiles à cause du mot *Lumina*.
- ⋆ **28** : Somme des variations inutiles à cause la combinaison des mot *Lumina* et *Tria*, le premier placé avant le second.
- ⋆ **29** : Somme des variations inutiles à cause la combinaison des mot *Tria* et *Lumina*, le premier placé avant le second.

Dans les deux premiers paragraphes, Leibniz divise le vers en deux parties séparée par un mot fixe : la première étant le chef et la seconde étant la queue. Il donne la structure du chef par une représentation scripturale des différents groupes de mots, la queue étant soumise à la loi des permutations générales. Ainsi, le calcul consiste à d'abord choisir les éléments du chef, en fonction de la classe donnée. Puis trouver le nombre de permutation en général du chef et le nombre de permutation en général de la queue. Enfin faire le produit des nombres de combinaisons et des nombres de permutations obtenus. Leibniz expose cette règle de calcul général dans son septième problème :

$$\binom{a_1}{k_1} \times \binom{a_2}{k_2} \times \cdots \times \binom{a_p}{k_p} \times (k_1 + k_2 + \cdots + k_p)! \times ((a_1 - k_1) + (a_2 - k_2) + \cdots + (a_p - k_p))!$$

Dans le paragraphe **28**, Leibniz considère simplement le chef entre deux mots fixés, mais fait varier la place de ce chef au sein du vers. On obtient dès lors la formule suivante :

$$N \times \binom{(a_1 - k_1) + (a_2 - k_2) + \cdots + (a_p - k_p) + \overbrace{1}^{\text{le chef}}}{1} \quad \text{où } N \text{ est le nombre de la formule précédente}$$

Dans le paragraphe **29**, le chef est lui-même divisé en deux : un premier chef, puis un second entre deux mots fixés. Il s'agit donc d'appliquer la première formule de façon récursive à chaque chef.
Les résultats du paragraphe **26** sont tous corrects excepté un. En revanche, tous les autres paragraphes contiennent des résultats erronés. De fait, la présentation de Leibniz laisse supposer que chaque paragraphe énumère de façon exhaustive un ensemble de vers. Mais comme la somme des variations inutiles est composée de la somme totale des résultats des quatre paragraphes, il faudrait que ces quatre ensembles soient disjoints, ce qu'ils ne sont pas. En effet, un même vers peut correspondre à plusieurs paragraphes. Leibniz est conscient de ce fait, puisqu'il compte 0 pour certains ensembles, qui ne sont pourtant pas vide, puisqu'il donne lui-même un représentant. C'est donc que Leibniz considère que ces éléments ont tous déjà été comptabilisés dans un paragraphe précédent. Il pratique donc de l'élimination dans l'élimination, sélectionne les variations inutiles des variations inutiles. Il a probablement rédigé le détail de ses calcul sur une page de brouillon que nous avons aujourd'hui perdue. Ces calculs ne semble pas suivre de règles apparentes. Néanmoins, cela permet d'expliquer la raison pour laquelle les calculs de Leibniz cessent d'être corrects à partir du paragraphe **27**. L'étape d'élimination surnuméraire qu'il fallait dès lors effectuer n'était visiblement pas maîtrisée par le jeune philosophe. Pour finir, il semble que Leibniz ne maîtrisait pas la formule pour le dernier paragraphe où le chef est à son tour partagé en chef et queue. En effet, exceptés le premier dans lequel on peut considérer qu'il n'y a qu'un seul chef, ces quatre autres résultats sont faux alors que cet ensemble est parfaitement disjoint des trois précédents, c'est-à-dire qu'il n'y pas d'étape d'élimination supplémentaire à faire.

Leibniz donne une autre liste tabulaire similaire dans le sixième problème qui considère le cas des permutations avec répétitions. La question avait déjà été traitée auparavant, notamment par Marin Mersenne [127]. D'ailleurs, Leibniz tire le principale usage de ce problème, qui consiste à dénombrer des mélodies, d'un chapitre de Harsdörffer consacré à cette question et dans lequel l'auteur fait lui-même référence directement à Mersenne [128]. De fait, dans l'ouvrage de Mersenne que Harsdörffer a consulté, on ne trouve que

127. Sur ce sujet, *Cf* la thèse d'Ernest Coumet, consacrée principalement à l'œuvre combinatoire de Mersenne, ainsi que celle de Frenicle : [15] E. Coumet, *Œuvres d'Ernest Coumet (Tome 2)*, *éd.* C. Goldstein, Presse Universitaire de Franche-Comté, 2019

128. [31] G.P. Harsdörffer, *Delitiæ mathematicæ et physicæ, Zweiter Theil der Erquickstunden*, Nuremberg, 1651 - quatrième section, prob. 7, p.143 : « A ce sujet, voir Mersenne, aux Vérités des sciences [*sic*], chapitre 10 du troisième livre. » (« Beſihe hier von *Mersene,* aux Verites des sciences*, l.3.c.10* »)

des permutations sans répétitions, et c'est donc également le cas dans les *Erquickstunden*. Mais Leibniz a l'intuition de relier cette question des permutations des mélodies au problème des permutations avec répétition, comme le fait aussi Mersenne dans des ouvrages auxquels le jeune philosophe n'avait pourtant pas eu accès. Knobloch note cette coïncidence remarquable :

> *Il est d'ailleurs intéressant de voir comment Leibniz y rattache consciemment les permutations avec répétition et tente de résoudre le même problème que Mersenne avait traité avec succès dans les Harmonica : trouver une bonne classification pour les variations avec répétition.* [129]

La solution apportée par Leibniz au problème des permutations est grossièrement fausse, comme le note Coumet dans un colloque sur les permutations organisé à Paris en 1972 :

> *Qu'on nous pardonne donc si, au lieu de mettre, comme on pourrait s'y attendre, au centre de notre exposé, l'œuvre du XVII^e siècle à laquelle on aura immédiatement pensé, le De arte combinatoria de Leibniz, nous commençons par y pêcher une erreur : Leibniz donne une règle erronée pour le calcul du dénombrement des permutations avec répétitions. Leibniz, en 1661, n'était pas encore mathématicien ; l'erreur est tout de même surprenante, car la règle exacte avait été publiée dans différents ouvrages antérieurs.* [130]

Leibniz propose la règle suivante : si l'on dispose de $n$ éléments parmi lesquels on trouve $k$ qui ne sont pas répétés et $p$ qui sont répétés au moins une fois, alors le nombre de permutations possibles sera :

$$(k + p) \times (n - 1)!$$

> *On dénombre les choses simples et pour celles répétés à l'identique, une seulement. On multiplie par la variation du nombre plus petit d'une unité que le nombre donné des variations. Le produit sera ce qui est demandé.* [131]

Cette formule fonctionne si aucun élément n'est répété, car alors $k = n$ et $p = 0$ et on obtient bien $n \times (n - 1)! = n!$ permutations. Ainsi la formule n'est pas contradictoire avec les autres solutions du traité. Néanmoins elle est mise en défaut sur de très petits exemples. Si l'on considère l'exemple minimal suivant :

$$a\ a\ b \qquad a\ b\ a \qquad b\ a\ a$$

Il est très clair que le nombre de permutations possibles est 3, pourtant la formule de Leibniz donne :

$$(1 + 1) \times (3 - 1)! = 2 \times 2 = 4$$

Knobloch fait la remarque du fait que Leibniz est déjà confronté à ce problème dans l'usage concernant la syllogistique. En effet, lorsque deux propositions d'un syllogisme sont identiques, il y a trois permutations possibles correspondant chacune à la position de la proposition unique parmi les deux autres [132].
La justification que donne Leibniz est extrêmement succincte mais permet néanmoins d'émettre quelques hypothèses sur son raisonnement :

> *La raison de ceci est claire si l'on considère le diagramme ١. En effet, on retire toutes les variations au sein desquelles la chose donnée est remplacée par elle-même.* [133]

129. [39] E. Knobloch, *Die mathematischen Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik, auf grund fast ausschliesslich handschriftlicher aufzeichnungen dargelegt und kommentiert* dans les *Studia Leibnitiana Supplementa*, Tome 11, Franz Steiner Verlag, Wiesbaden, 1973 - p.45 : « Es ist daher interessant zu sehen, wie Leibniz bewußt die PmW hinzunimmt und dasselbe Problem zu lösen versucht, das Mersenne in den *Harmonica* erfolgreich behandelt hatte : alle Variationen mit Wiederholung eines bestimmten Klassentyps zu ermitteln. »

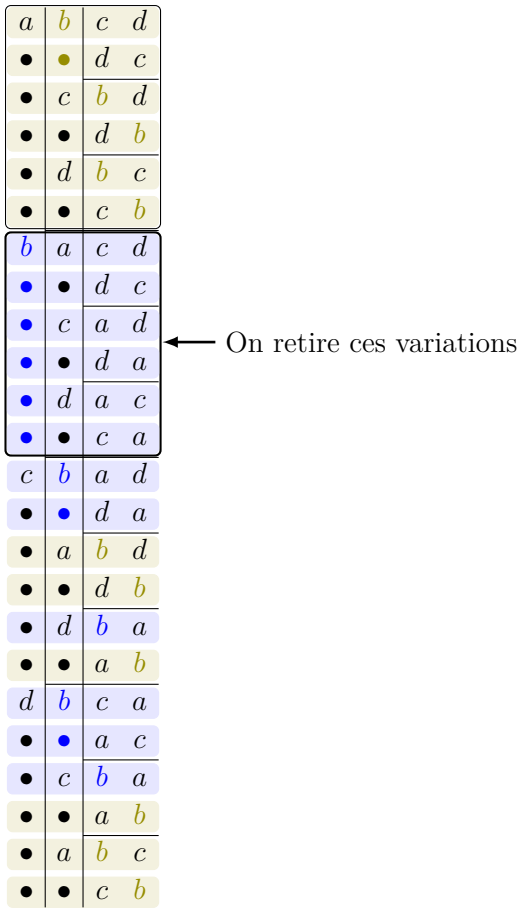
130. [14] E. Coumet, *Des permutations au XVI^e et au XVII^e siècles*, actes du Colloque sur les permutations, Paris, Université René Descartes, 10-13 juillet 1972, dans *Œuvres d'Ernest Coumet (Tome 1)*, *éds.* T. Martin et S. Roux, Presse Universitaire de Franche-Comté, 2016 - p.277

131. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.217 : « Numerentur res simplices et ex iisdem repetitis semper una tantum ; et ducantur in variationem numeri numero variationum dato unitate minoris ; productum erit quæsitum. ».

132. [39] E. Knobloch, *Die mathematischen Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik, auf grund fast ausschliesslich handschriftlicher aufzeichnungen dargelegt und kommentiert* dans les *Studia Leibnitiana Supplementa*, Tome 11, Franz Steiner Verlag, Wiesbaden, 1973 - p.29

133. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.217 : « Ratio manifesta est, si quis intueatur Schema ١, corruent enim omnes variationes quibus data res pro se ipsa ponitur. »

Effectivement, dans la table ו, si l'on replace $b$ par $a$, toutes les variations qui commencent par $b$ ont déjà été comptabilisées et doivent donc être retirées :




De fait, si l'on regroupe d'une part toutes les variations où $a$ est avant $b$ (en vert) et d'autre part les autres où $b$ est avant $a$ (en bleu), alors ces deux ensembles deviennent identique lorsqu'on replace $b$ par $a$. On doit donc retirer l'un des deux ensembles, par exemple l'ensemble bleu. On constate effectivement que le bloc des variations qui commencent par $b$ doit être retiré. Mais on oublie alors les six variations où $b$ est avant $a$, mais qui ne commencent pas par $b$. Il est possible que Leibniz se soit arrêté au simple constat que le premier bloc disparaissait. Or ces blocs sont constitués de $(n-1)!$ variations. Il reste donc autant de blocs qu'il y a des caractères distincts, c'est-à-dire $k+p$. Ainsi, on trouve bien la formule donnée par Leibniz : $(k+p)\times(n-1)!$.
Ce raisonnement très rapide permet de noter un point important : Leibniz détermine les permutations avec répétitions par élimination des variations inutiles et non par un procédé de dénombrement positif comme sa formule pourrait le laisser croire. Il s'agit d'enlever autant de blocs dans le schéma ci-dessus qu'il y a de lettre répétées, c'est-à-dire inutiles.
Tout comme dans l'usage sur la poésie, on compte d'abord tous les cas possibles, puis tous les cas inutiles. Le nombre cherché est la différence des deux. Cela se confirme dans la manière dont Leibniz présente le résultat de son dénombrement des mélodies de six notes, choisies parmi les six hauteurs : *do*, *ré*, *mi*, *fa*, *sol* et *la*. Il détaille le calcul pour le cas où parmi les six notes, il y en aurait quatre non répétée et une répétée une fois. On a donc $k=4$, $p=1$ et $n=6$. Ainsi l'algorithme donné par Leibniz donne $(4+1)\times(6-1)!=5\times120=600$. Pourtant ce n'est pas ce que Leibniz écrit dans son calcul :

> *La variation de l'ordre est* $720-120=600$. *De plus, il n'y a pas que do, mais n'importe quelle note peut être répétée deux fois. Ainsi :* $6\times600=3600$. *Et des cinq notes restantes, quatre autres peuvent être toujours disposées après do do selon 5 manière, à savoir : ré.mi.fa.sol ; ré.mi.fa.la ; ré.mi.sol.la ; ré.fa.sol.la ; mi.fa.sol.la, c'esr-à-dire 5 choses ayant 5 con4naisons :* $5\times3600=18000$. [134]

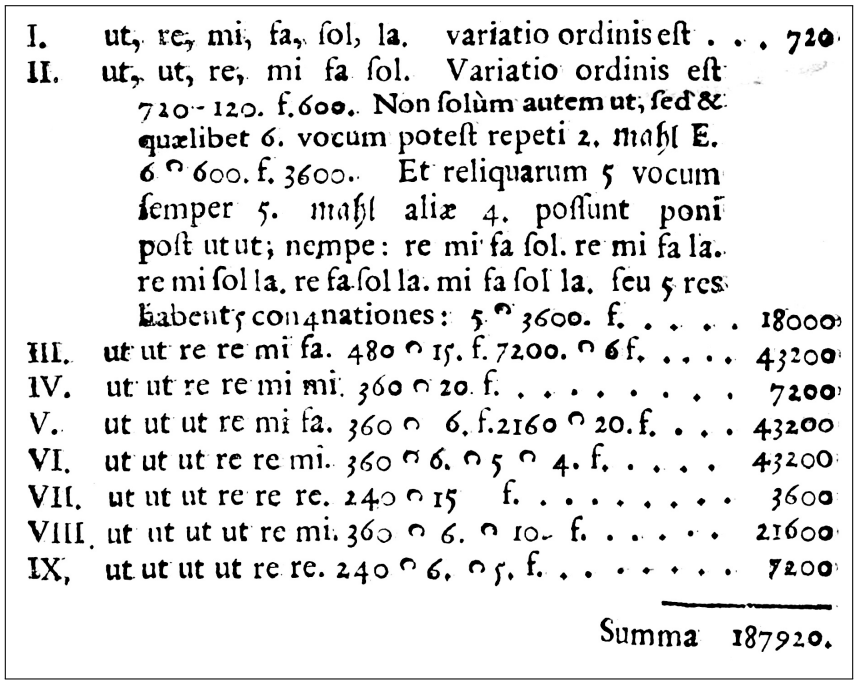
134. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.218 : « Variatio ordinis est $720-120$ *f.* 600. Non solum autem *ut*, sed & quælibet 6. vocum potest repeti 2. mahl E. $6\cap600$ *f.* 3600. Et reliquarum 5 vocum semper 5. mahl aliæ 4. possunt poni post *ut ut* ; nempe *re mi fa sol . re mi fa la . re mi sol la . re fa sol la . mi fa sol la.* seu 5 res habent 5 con4nationes : $5\cap3600$ *f.* 18000. »

Ce calcul montre bien que Leibniz considère les permutations avec répétitions comme les permutations utiles restantes, parmi toutes les permutations possibles. Mais la situation est légèrement différente de l'usage sur les poèmes. En effet, le dénombrement de tous les poèmes est une opération purement combinatoire, mais les règle de la métrique latine interviennent dans la sélection des vers irréguliers. Ici, le problème est purement combinatoire aux deux étapes du calcul : pour l'énumération des cas possibles et aussi pour l'élimination des inutiles. Le fait qu'on ait des mélodies plutôt que n'importe quel autre ensemble d'éléments quelconques n'a pas de conséquence ni sur le raisonnement, ni sur le résultat. L'ensemble des permutations avec répétition est déjà un tout maximal, qui n'est pas le sous-ensemble des termes correctes d'un ensemble plus grand. Il n'y a pas d'autre permutation avec répétition que l'ensemble des permutations avec répétition. En appliquant un raisonnement par élimination, analogue au cas de la poésie, Leibniz opère un plongement des permutations avec répétition dans l'ensemble des permutations sans répétition, en considérant les lettres répétées comme différentes. Ainsi, pour appliquer un raisonnement méréologique, Leibniz détruit la possibilité du multiple ou de la copie, en individualisant chaque élément. Le lien d'identité entre les répétitions devient un lien de congruence, qui permet de regrouper les éléments par classes tout en considérant qu'ils sont tous distincts. Dans ce cadre, toutes les permutations pour lesquelles les classes sont dans la même disposition – les éléments ne sont permutés qu'au sein de leur classe – sont associées à une même permutation avec répétition. On en choisit une pour représentante, une verte dans notre exemple, et les autres sont éliminés comme variations inutiles. La posture épistémologique du jeune philosophe tournée vers les notions de tout et de partie lui permet de réduire ce problème de combinatoire difficile, apparement indécomposable puisqu'il s'agit de trouver l'intégralité des possibles, en un problème d'élimination, où l'on connait l'intégralité des possibles et l'on doit déterminer l'intégralité des inutiles.

**Partitions d'entiers**

Le décompte des mélodie est présentée de la même manière que dans l'usage sur la poésie. Cette table des mélodies montre également la manière dont Leibniz associe ici des calculs de permutations avec des calculs de combinaisons. En effet, cette explication montre qu'il a connaissance du lien qui relie permutations et combinaisons dans les arrangements. Qu'ils soient avec ou sans répétitions, un arrangement consiste bien à choisir d'abord les termes qui vont intervenir dans la permutation, puis leurs dispositions. Ainsi :

nombre d'arrangements = nombre de combinaisons × nombre de permutations


I. ut, re, mi, fa, ſol, la. variatio ordinis eſt . . . 720
II. ut, ut, re, mi fa ſol. Variatio ordinis eſt 720 - 120. f. 600. Non ſolùm autem ut, ſed & quælibet 6. vocum poteſt repeti 2. maſſl E. 6 ∩ 600. f. 3600. Et reliquarum 5 vocum ſemper 5. maſſl aliæ 4. poſſunt poni poſt ut ut; nempe: re mi fa ſol. re mi fa la. re mi ſol la. re fa ſol la. mi fa ſol la. ſeu 5 res habent 5 con 4 nationes: 5 ∩ 3600. f. . . . . 18000
III. ut ut re re mi fa. 480 ∩ 15. f. 7200. ∩ 6 f. . . . . 43200
IV. ut ut re re mi mi. 360 ∩ 20. f. . . . . 7200
V. ut ut ut re mi fa. 360 ∩ 6. f. 2160 ∩ 20. f. . . . 43200
VI. ut ut ut re re mi. 360 ∩ 6. ∩ 5 ∩ 4. f. . . . . 43200
VII. ut ut ut re re re. 240 ∩ 15 f. . . . . 3600
VIII. ut ut ut ut re mi. 360 ∩ 6. ∩ 10. f. . . . . 21600
IX. ut ut ut ut re re. 240 ∩ 6. ∩ 5. f. . . . . 7200
Summa 187920.

*Dissertatio de Arte Combinatoria* (1666) - p.66

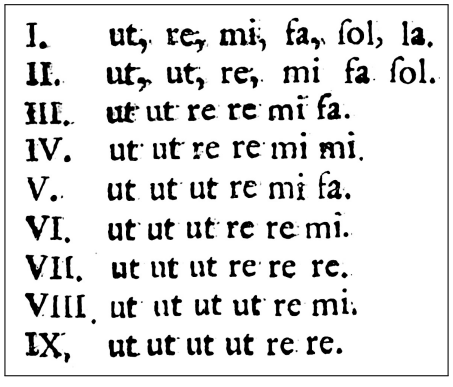
Mais le dénombrement des permutations avec répétitions demande de faire intervenir une troisième opération combinatoire : la partition d'entiers. De fait, dans la formule de l'arrangement, le nombre de répétitions de chaque élément est fixé. Il faut donc trouver une méthode pour dénombrer le nombre de manière de partager ces répétitions entre les différents éléments. C'est ce que Knobloch appelle : « trouver une bonne classification » (« *eines bestimmten Klassentyps zu ermitteln* »). Les partitions d'entiers permettent de formaliser efficacement ce problème. En effet, chaque partition de l'entier $n$ correspond à une unique classe d'arrangements au sein de laquelle le nombre des répétitions pour chaque élément est fixé. Ainsi, pour huit éléments, la partition $8 = 3 + 2 + 2 + 1$ correspond à un élément répété deux fois, deux éléments répétés une fois et un élément non répété.
Leibniz utilise une autre stratégie pour représenter les classes, qui est équivalente aux partitions d'entier. Il choisi un représentant dans lequel les éléments sont choisis dans l'ordre canonique puis rangés dans l'ordre canonique. Ainsi, le représentant de la partition $3 + 2 + 2 + 1$ pour les éléments $a_1$, $a_2$, $a_3$, …, $a_8$ [135] sera : $a_1.a_1.a_1.a_2.a_2.a_3.a_3.a_4$.
Notons, par ailleurs, que cette représentation est formellement équivalente à celle que Leibniz utilisera plus tard pour les formes combinatoires, à la différence significative que cette dernière s'intègre dans un calcul algébrique. Ici, ce ne sont que des représentants de classes qui ne peuvent pas être composés entre eux par une quelconque opériation.
Dans le cas des mélodies, les représentants sont donc des séries de six notes croissantes, en commençant pas *do*. La liste que propose Leibniz trahit une méthode rationnelle dans le dénombrement des différentes classes. Si l'on observe la disposition des termes, les classes sont rangés par ordre croissant du nombre de répétition du premier élément, à savoir la note *do*. Puis pour un même nombre de répétition du premier élément, il classe selon le nombre de répétitions de deuxième élément, à savoir *ré*. Et ainsi de suite. En suivant cette méthode, il aurait du trouver les onze partitions de l'entier 6, mais il s'arrête sans raison à la neuvième, omettant ainsi les deux dernières classes d'arrangements :

*do.do.do.do.do.ré* *do.do.do.do.do.do*

Une même partition peut être représentée par toutes les permutations de ses parties. Il s'agit donc d'un procédé qui relève plus des combinaisons que des permutations, car l'ordre des parties n'intervient pas. Leibniz le note d'ailleurs, lorsqu'il traite explicitement des partitions dans l'usage sur les arbres généalogiques :

> *A cette occasion, il faut expliquer au passage ce que sont les partitions possibles d'un nombre, les* Zerfällungen. *Certes toutes les partitions sont des complexions, mais parmi les complexions seules sont partitions celles qui ensemble sont égales au tout.* [136]

Ces problèmes relèvent donc des combinaisons mais leurs solutions suit la méthode associée aux permutations. On a vu que Leibniz applique à nouveau la stratégie du représentant où les éléments sont classés dans l'ordre croissant, déjà utilisée dans la table ב pour expliquer les combinaisons :


I. ut, re, mi, fa, ſol, la.
II. ut, ut, re, mi fa ſol.
III. ut ut re re mi fa.
IV. ut ut re re mi mi.
V. ut ut ut re mi fa.
VI. ut ut ut re re mi.
VII. ut ut ut re re re.
VIII. ut ut ut ut re mi.
IX. ut ut ut ut re re.

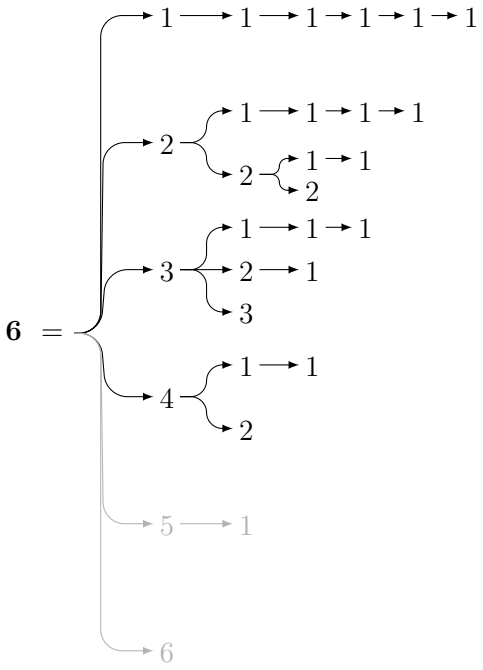
*Dissertatio de Arte Combinatoria* (1666) - p.66

1. $6 = 1+1+1+1+1+1$
2. $6 = 2+1+1+1+1$
3. $6 = 2+2+1+1$
4. $6 = 2+2+2$
5. $6 = 3+1+1+1$
6. $6 = 3+2+1$
7. $6 = 3+3$
8. $6 = 4+1+1$
9. $6 = 4+2$

135. Ce n'est en principe pas nécessaire, mais les auteurs de l'époque choisissent généralement des cas où le nombre d'éléments dans la permutation est le même que le nombre d'éléments à choisir.

136. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.210 : « Hac occasione obiter explicandum est, quæ sint dati numeri discerptiones, Zerfällungen, possibiles. Nam omnes quidem Discerptiones sunt Complexiones, sed Complexionum eæ tantum Discerptiones sunt, quæ simul toti sunt æquales. »

Cette stratégie permet de désigner une combinaison sans tenir compte de l'ordre. Mais on voit que dans la méthode que nous décrivons, ce ne sont pas seulement les éléments qui sont classés de façon monotone, mais aussi les partitions d'entiers, c'est-à-dire le nombre des répétitions des éléments. A première vue, on peut considérer que les partitions sont toujours représentées par une suite d'entiers décroissants. Mais cette propriété est en fait une conséquence nécessaire du véritable critère pour le choix du représentant : la croissance terme à terme que nous avons relevé. Cette disposition révèle donc un processus de construction fondé sur un raisonnement par embranchements :



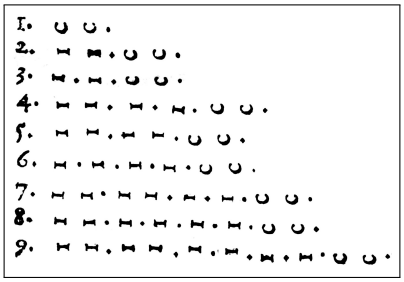

Cela étant, même si la disposition des mélodies suit le raisonnement par embranchement que nous avons décrit, Leibniz ne l'a pas inscrit dans une table mais seulement dans une suite verticale. La structure méréologique de la table qui sert à représenter le raisonnement par embranchement dans le cas des permutations n'est pas présente ici. Une telle table aurait été comme suit :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *do* | *ré* | *mi* | *fa* | *sol* | *la* |
| *do do* | *ré* | *mi* | *fa* | *sol* | |
| *do do* | *ré ré* | *mi* | *fa* | | |
| *do do* | *ré ré* | *mi mi* | | | |
| *do do do* | *ré* | *mi* | *fa* | | |
| *do do do* | *ré ré* | *mi* | | | |
| *do do do* | *ré ré ré* | | | | |
| *do do do do* | *ré* | *mi* | | | |
| *do do do do* | *ré ré* | | | | |

A l'intérieur de chaque ensemble d'ordre $p$, les sous-ensembles sont classés selon l'ordre croissant du nombre de répétition de la $p$-ième note choisie. Leibniz n'adopte pas cet agencement. En effet, la liste de mélodies n'a pas le rôle apodictique que revêt la table ו pour les permutations. Il ne s'agit pas de représenter le raisonnement mais seulement d'en présenter le produit. La seule empreinte de celui-ci se trouve alors dans la disposition des termes.

Comme pour les notes, Leibniz a du trouver une méthode pour énumérer tous types de vers possibles, soumis à une certaine règle. Mais la disposition des différentes classes est moins régulières. Par exemple, pour le paragraphe **26**, c'est-à-dire ceux qui sont incorrects à cause de la position du mot *tria*, il doit examiner la règle suivante : *tria* ne peut pas être la premier temps d'un pied, donc il ne peut avoir une position paire dans l'ordre des temps. Ainsi, il faut trouver toutes les configurations du chef, composé d'un nombre pair de temps, ce qui revient à faire toutes les partitions des nombres pairs. Leibniz considère que le trisyllabique *lumina* ne doit pas être dans le chef, probablement parce qu'il traite ce cas dans un

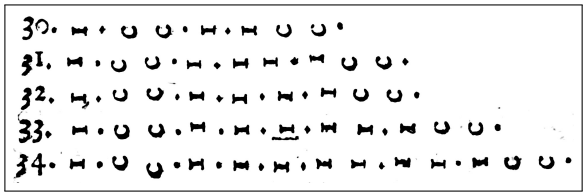
autre paragraphe. Contrairement aux mélodies où l'on peut énumérer toutes les partitions, ici Leibniz doit respecter une règle supplémentaire : n'utiliser, dans sa partition que les éléments à sa disposition, c'est-à-dire cinq monosyllabes 1 et deux disyllabiques 2. Si les conditions sont imposées par la règles particulières de la métrique, on voit bien que la formulation finale peut être traduite intégralement en termes arithmétiques. Il s'agit alors d'un problème de combinatoire pure :



*Dissertatio de Arte Combinatoria* (1666) - p.75

1. $0 = 0$
2. $2 = 2$
3. $2 = 1+1$
4. $4 = 2+1+1$
5. $4 = 2+2$
6. $4 = 1+1+1+1$
7. $6 = 2+2+1+1$
8. $6 = 2+1+1+1+1$
9. $8 = 2+2+1+1+1+1$

Les vers sont classés par ordre décroissant lorsqu'on regard la taille du $p$-ième mot sauf pour les configurations 4 et 5 qui devraient être interverties pour que la disposition corresponde à la méthode de classement. Aucune des quatre listes de vers ne suit une disposition parfaitement régulière, si bien qu'au paragraphe **29**, Leibniz omet une configuration dans sa liste :



*Dissertatio de Arte Combinatoria* (1666) - p.76

Pour rappel le chef se trouve au centre du vers, entre *dant tria* ($- \bullet \cup\cup$) et *lumina* ($- \cup \cup$) :

$- \bullet \cup \cup \bullet$ {chef} $\bullet - \cup\cup$

30. $1 = 1$
31. $3 = 1+2$
32. $3 = 1+1+1$
33. $5 = 1+1+1+2$
* $5 = 1+2+2$
34. $7 = 1+1+1+1+1+2$

Il manque ici la configuration $5 = 1+2+2$ correspondant à :

$- \bullet \cup \cup \bullet - \bullet - - \bullet - - \bullet - \cup\cup$

Cette configuration n'est effectivement pas valide puisque, comme les cinq autres, elle placerait le trisyllabique *lumina* à cheval sur deux pieds, ce qui aurait pour conséquence d'avoir un pied irrégulier qui débute par deux syllabes courtes.

**Les classes**

Nous reproduisons ici les calculs fait par Leibniz pour le dénombrement des mélodies, et nous proposons les résultats corrigés avec la formule correcte des permutations avec variations :

| | | Choix | Perm. Leibniz | Produit Leibniz | Perm. corrigées | Produit corrigées |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I | *do ré mi fa sol la* | $\binom{6}{6}$ | $6!$ | 720 | $6!$ | 720 |
| II | *do do ré mi fa sol* | $\binom{6}{1} \times \binom{5}{4}$ | $6! - 5!$ | 18000 | $\frac{6!}{2!}$ | 10800 |
| III | *do do ré ré mi fa* | $\binom{6}{2} \times \binom{4}{2}$ | $6! - 2 \times 5!$ | 43200 | $\frac{6!}{2!2!}$ | 16200 |
| IV | *do do ré ré mi mi* | $\binom{6}{3}$ | $6! - 3 \times 5!$ | 7200 | $\frac{6!}{2!2!2!}$ | 1800 |
| V | *do do do ré mi fa* | $\binom{6}{1} \times \binom{5}{3}^*$ | $6! - 2 \times 5!^*$ | 28800* | $\frac{6!}{3!}$ | 7200 |
| VI | *do do do ré ré mi* | $\binom{6}{1} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{1}$ | $6! - 3 \times 5!$ | 43200 | $\frac{6!}{3!2!}$ | 7200 |
| VII | *do do do ré ré re* | $\binom{6}{2}$ | $6! - 4 \times 5!$ | 3600 | $\frac{6!}{3!3!}$ | 300 |
| VIII | *do do do do ré mi* | $\binom{6}{1} \times \binom{5}{2}$ | $6! - 3 \times 5!$ | 21600 | $\frac{6!}{4!}$ | 1800 |
| IX | *do do do do ré ré* | $\binom{6}{1} \times \binom{5}{1}$ | $6! - 4 \times 5!$ | 7200 | $\frac{6!}{4!2!}$ | 450 |
| | | | **Somme** | **173520*** | **Somme** | **46470** |

$*$ : Voir la note [137]

Ajoutons les arrangements des classes manquantes :

- ⋆ Pour la classe *do.do.do.do.do.ré* : $\binom{6}{1} \times \binom{6}{1} \times \frac{6!}{5!} = 180$
- ⋆ Pour la calsse *do.do.do.do.do.do* : $\binom{6}{1} \times \frac{6!}{6!} = 6$

On obtient :

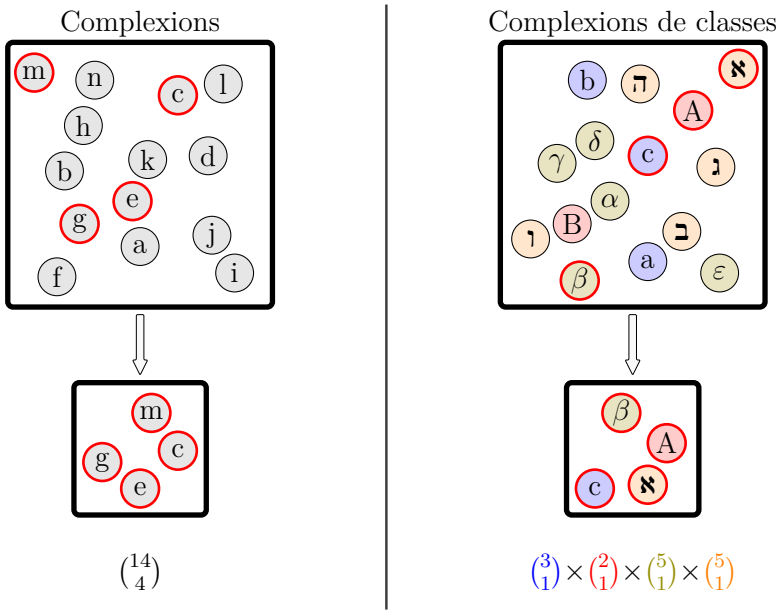
$$46470 + 180 + 6 = 46656 = 6^6$$

On retrouve ainsi le fait que la totalité des arrangements avec répétition est la solution d'un autre problème combinatoire de la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8), à savoir celui des complexions de classes, traité dans le troisième problème. En réalité, si la solution est identique, le problème n'est pas exactement le même.

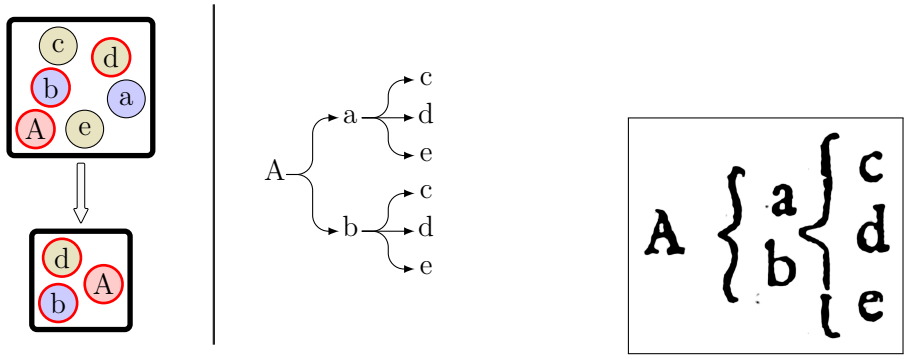
Leibniz définit les complexions de classes comme des combinaisons d'un genre particulier. Pour les combinaisons classiques, on considère un ensemble de $n$ objets parmi lesquels on en choisit $k$. Ces objets jouent

137. Ici Leibniz note par erreur 20 au lieu de 10, pour $\binom{5}{3}$, et il note 360 au lieu de 480 pour $6! - 2 \times 5!$. Ainsi il obtient 43200 au lieu de 28800, et pour la somme finale, il obtient 187920 au lieu de 173520.

donc tous un rôle équivalent dans la résolution du problème. Pour les complexions de classes, Leibniz considère que les $n$ objets sont répartis en classes de natures distinctes. La génération d'une complexion consiste donc à choisir dans chaque classe un seul objet.




Il s'agit bien d'un problème de combinaison et non d'arrangement. L'ordre des classes n'est pas pris en compte. Mais pour pouvoir ignorer la disposition des classes, il est nécessaire que les classes soient parfaitement disjointes, c'est-à-dire que chaque élément soit propre à sa classe. Dès lors, ce sont les classes qui prennent le rôle du lieu ou du rang. Au lieu d'attribuer un lieu ou un rang à un élément, on lui attribue une classe. Comme pour l'ordre des lieux, l'ordre de ces classes n'a pas d'importance, ou bien il est une donnée naturelle. Ainsi le terme est entièrement défini par ses composantes dans chaque classe. Cette interprétation permet de considérer ces combinaisons sans ordre comme des permutations, où l'embranchement des choix ne se fait pas successivement pour chaque rang, mais plutôt pour chaque classe. De la même manière que pour les partitions, qui sont explicitement considérées comme des combinaisons et non comme des permutations, les complexions de classes sont des combinaisons auxquelles Leibniz applique pourtant un raisonnement par embranchement :



*Dissertatio de Arte Combinatoria* (1666) - p.48

Bien que ce diagramme attribue un ordre aux classes, cet ordre n'intervient pas dans la définition des termes, comme c'est le cas également pour les partitions. Ainsi, le terme $A.b.d$ est le même que le terme $d.A.b$. Cette égalité n'implique aucun ambiguïté, puisque la nature des termes caractérise l'ordre des classes. Ainsi, la donnée $A.b.d$ implique que la classe $\{A\}$ est au premier rang, la classe $\{a, b\}$ au second et la classe $\{c, d, e\}$, au troisième.
Un élément ne peut donc pas être dans plusieurs classes. Ainsi, lorsque l'on interprète la résolution du troisième problème comme le cardinal d'un produit cartésien, on omet d'ajouter que les termes de ce produit doivent être nécessairement disjoints. En un certain sens, tous les éléments doivent être coextensifs,

c'est-à-dire appartenir à un même tout général, et c'est pour cela qu'on peut parler de combinaisons et non de permutations.

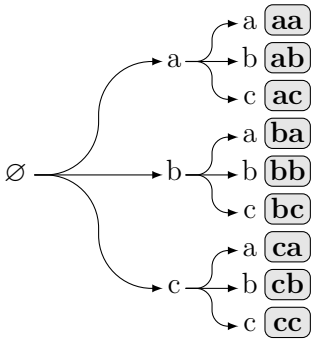
$$\text{card}(\{A\} \times \{a, b\} \times \{c, d, e\}) = \text{card}(\{A\}) \times \text{card}(\{a, b\}) \times \text{card}(\{c, d, e\})$$

$$\text{avec le tout } U = \{A, a, b, c, d, e\}$$

Ceci est parfaitement clair dans la définition que donne Leibniz des classes :

> *Une classe de choses est un tout plus petit, composé de choses qui s'accordent au sein d'une troisième chose déterminée, en tant qu'elles sont ses parties, et dans le même temps, les classes restantes doivent contenir des choses distinctes.* [138]

Ainsi, dans tous les usages que fait Leibniz de ce problème, il considère toujours des classes disjointes. Dès lors, le problème des arrangements avec répétition, canoniquement associé à celui de trouver tous les mots possibles avec un alphabet donné, ne rentre pas dans le cadre du problème.




Bien que sa solution soit la même, à savoir un raisonnement par embranchement, les données du problème sont radicalement différentes, si bien que Leibniz ne parvient pas à le résoudre :

> *(Les variations sont une chose, le nombre de tous les mots composables à partir de lettres données en est une autre. Qu'en est-il en effet pour les mots de 23 lettres ? Du reste, quel que soit le nombre de lettres, il faut trouver toutes les complexions parmi 23 choses, et multiplier chacun par sa variation, en accord avec le Problème 2, paragraphe 59. Le produit sera le nombre de tous les mots qui n'ont aucune lettre répétée. Nous enseignerons comme trouver ceux qui en ont dans le sixième problème.)* [139]

Pour déterminer le nombre d'arrangement avec répétition, Leibniz renvoie donc au sixième problème et à l'usage sur les mélodie, au sein duquel il fait usage d'une formule fausse, que nous avons déjà commenté plus haut.
Pour le nombre d'arrangement sans répétition, la méthode que donne Leibniz semble correspondre à la formule suivante :

$$\binom{23}{1}.1! \times \binom{23}{2}.2! \times \binom{23}{3}.3! \times \cdots \times \binom{23}{22}.22! \times \binom{23}{23}.23!$$

Il fait référence au paragraphe 59 des usages des deux premiers problèmes. Ce paragraphe se trouve dans l'usage 10 sur la division des propositions et concerne les roues de Lulle. Dans ce contexte, Leibniz cherche à calculer des complexions par classes sans prendre l'hypothèse qu'on ne choisit qu'un élément par classe, mais qu'on peut au contraire en choisir une combinaison quelconque. Ainsi, au lieu de la solution du troisième problème :

$$\binom{k_1}{1} \times \binom{k_2}{1} \times \cdots \times \binom{k_p}{1} = k_1 \times k_2 \times \cdots \times k_p$$

138. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.218 : « Classis rerum est Totum minus, constans ex rebus convenientibus in certo tertio, tanquam partibus ; sic tamen ut reliquæ classes contineant res contradistinctas. »

139. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.215 : « (Aliud autem sunt variationes, aliud numerus vocum ex datis literis componibilium. Quæ enim vox 23 literarum est ? Imo quantacunque sit, inveniantur omnes complexiones 23 rerum, in singulas ducantur variationes suæ juxta probl. 2, num. 59 productum erit numerus omnium vocum nullam literam repetitam habentium. At habentes reperire docebit problema 6). »

Leibniz obtient ce nouveau produit.

$$\left(\sum_{i=0}^{k_1}\binom{k_1}{i}\right)\times\left(\sum_{i=0}^{k_2}\binom{k_2}{i}\right)\times\cdots\times\left(\sum_{i=0}^{k_p}\binom{k_p}{i}\right)=\left(2^{k_1}-1\right)\times\left(2^{k_2}-1\right)\times\cdots\times\left(2^{k_p}-1\right)$$

C'est ce résultat qu'il souhaite appliquer au nombre des arrangements sans répétitions.
Or les mots d'un certain nombre de lettres ne constituent pas une classe, car ils ne sont pas des composants élémentaires. On ne cherche pas à dénombrer des phrases mais seulement des mots, composés de lettres. Dès lors, l'opération consister à sommer les cardinaux de chaque sous-ensemble pour obtenir le nombre totale et non à en faire le produit comme dans le cas des complexions de classes :

$$\binom{23}{1}.1!+\binom{23}{2}.2!+\binom{23}{3}.3!+\cdots+\binom{23}{22}.22!+\binom{23}{23}.23!$$

Tout ceci montre que la notion de produit cartésien n'est pas maitrisée par le jeune philosophe. Le principe de division qui gouverne sa conception de la combinatoire lui impose une approche méréologique, c'est-à-dire une démarche fondée sur les relations d'inclusions et de coexistences. Ceci l'amène à confondre la composition et la juxtaposition. Le problème des complexions de classes est la pierre de touche de cette ambiguïté. Le produit cartésien, tel qu'il est impliqué dans le calcul des arrangements avec répétition, implique une multiplicité de mode d'existence pour un unique objet. Chaque copie de la même classe doit littéralement faire exister ses éléments dans un plan parallèle indépendant des autres, sans coexistence ni coextension. Cette existence multimodale des objets n'est simplement pas compatible avec la façon dont le jeune Leibniz pense la combinatoire. En revanche, cette notion est parfaitement compatible avec sa pratique tabulaire, dans le cadre des raisonnements par embranchements. Bien que ceux-ci soient exprimés dans des tables, au moyen des rapports d'inclusions, et non dans des graphes par des rapports de connexions, le processus de dénombrement s'incarne dans la pratique elle-même par une succession de choix, et de bifurcations dans l'univers de possibles. Ainsi, si les différentes classes coexistent systématiquement dans leurs substances, que ce soit physiquement, logiquement ou métaphysiquement, la génération d'un terme composé s'inscrit quant à elle dans un processus diachronique, où chaque classe est considérée dans un temps séparé des autres et qui lui est propre.
L'usage des arbres généalogique est donc problématique, car il semble que la règle qui impose qu'un élément soit propre à sa classe n'y soit pas respectée. En effet, pour déterminer le nombre de personnes distinctes le long d'une branche de l'arbre, Leibniz indique qu'il faut multiplier par deux à chaque étape, car il y a deux sexes pour chaque relation familiale :

> *En outre le sexe est double. Il faut donc dupliquer continuellement le nombre de personnes. Par exemple, il n'y a pas que le père et la mère qui varient en sexe mais à nouveau le père a un père et une mère, et la mère aussi. On en a désormais 4. Le grand-père paternel a aussi père et mère, et la grand-mère paternelle aussi ; et de la même manière pour le grand-père et la grand-mère maternels. Ce qui fait désormais 8, et ainsi de suite. J'en conclus donc cette règle : "on multiplie 2 par lui-même autant que le degré dont on cherche les personnes, ou bien ce qui revient au même, on cherche le nombre de la progression géométrique double dont l'exposant est le nombre du degré. On le multiplie avec le nombre de parentés de degré donné : le produit sera le nombre de personnes pour un degré donné".* [140]

Ainsi, à chaque parenté, il y a deux sexes. Ceci revient donc à déterminer le nombre d'arrangements avec répétitions d'une suite de termes piochés dans un ensemble à deux éléments : le sexe mâle et le sexe femelle. Si l'on considère chaque relation comme une classe, alors les deux sexes appartiennent à toutes les classes et ne sont propres à aucunes.

140. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.210 : « Sexus autem 2plex est. Igitur semper continue numerus personarum est duplicandus, v. g. non solum et pater et mater sexu variant, 2, sed iterum pater habet patrem vel matrem. Et mater quoque. Hinc 4 Avus quoque a patre habet patrem vel matrem, et avia a patre ; et avus a matre aviaque similiter : hinc 8 etc. Igitur regulam colligo : "2 ducatur toties in se, quotus est gradus cujus personæ quæruntur, vel quod idem est, quæratur numerus progressionis geometricaæ duplæ, cujus exponens sit numerus gradus. Is ducatur in numerum cognationum dati gradus : Productum erit numerus personarum dati gradus." »

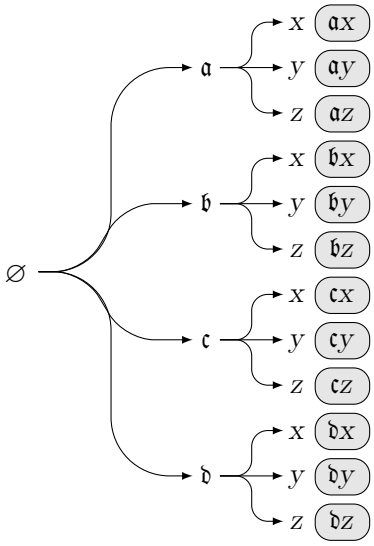
On peut toutefois avancer l'explication suivante : si les sexes sont bien affectés à chaque classes, ils n'en sont pas les éléments. Les éléments des classes sont les individus qui sont ou bien féminins ou bien masculins. Ainsi, il ne s'agit pas de la répétition de la même classe {femme, homme}, mais bien d'une juxtapositions de classes disjointes de personnes différentes : {mère, père}, {grand-mère, grand-père},{fille, fils} etc.
Il en va de même pour le calcul des permutations d'un vers dans les usages du quatrième problème, où l'on trouve le même raisonnement. Il s'agit de deux vers dans lesquels on trouve sept qualificatifs monosyllabiques de Jesus, accolés du pronom *tu*. Leibniz note que pour chaque qualificatif, le pronom peut-être placé sa à gauche ou sa à droite, et dénombre ainsi $2^7$ possibilités. Là encore, on pourrait voir ce dénombrement comme le nombre d'arrangements des termes "gauche" et "droite", ce qui contredirait la définition des classes. Mais sans doute ici, il s'agit aussi de considérer les termes comme associés aux qualificatifs qui permettent de distinguer les différentes classes et d'interpréter ce problème dans le cadre des complexions de classes définies par Leibniz. Ces interprétations s'accordent avec le procédé que nous avons décrit pour le calcul des permutations avec répétitions et qui consiste à voir les répétitions comme des éléments distincts propres à la variations, mais qui appartiennent tous à une classe commune. Néanmoins, même s'il est possible de trouver une interprétation qui sauve chacun de ces cas problématiques, ils peuvent également être assumés comme de légitimes contre-exemples face à notre analyse sur l'impossibilité de dupliquer une même classe. En effet, dans ces deux cas, la classe répétée est composée de deux éléments seulement. Ainsi, l'opération qui consiste à dénombrer les différents cas par dichotomie peut s'inscrire dans un raisonnement par embranchement sans qu'il soit nécessaire que le jeune auteur prenne conscience des conséquences théoriques d'une telle procédure. Comme nous l'avons vu, le produit cartésien est parfaitement compatible avec le raisonnement pas disjonction de cas, qui est le principal raisonnement utilisé par Leibniz dans ce traité. Il est donc possible que Leibniz ait simplement déterminé la structure du raisonnement propre à résoudre ces problèmes élémentaires sans qu'il ait besoin de trouver un modèle qui formalise et matérialise leurs solutions.

**Tableau et listes**

Nous avons montré que le principe de raisonnement par embranchement semble fondamental dans la pratique tabulaire de Leibniz, au sein de la *Dissertatio de Arte Combinatoria*. Jusqu'ici, nous avons présenté deux figures qui l'expriment : le graphe arborescent et la table divisée en nombreuses sous-parties. Mais il existe une troisième manière de représenter certains raisonnement par embranchements : les tableaux à double entrée. Cela fonctionne si le raisonnement ne comporte que deux étapes de choix indépendantes, c'est-à-dire que le deuxième choix ne dépend pas du premier. Dit dans les termes de Leibniz, il faut qu'il y ait deux classes seulement et que ces classes soient réversibles :

> *De plus, Multiplier une division par une division revient à subdiviser les membres de l'une des divisions par les membres de l'autre, ce qui peut parfois se faire dans les deux sens, et parfois pas. Parfois tous les membres d'une division peuvent être divisés par tous les membres d'une autre, parfois seulement certains peuvent l'être, et parfois seulement par certains.* [141]

Nous envisageons donc le premier cas, où tous les éléments de la première classe peuvent être associés à tous ceux de la seconde :




| | x | y | z |
|---|---|---|---|
| a | ax | ay | az |
| b | bx | by | bz |
| c | cx | cy | cz |
| d | dx | dy | dz |

Le caractère réversible de la situation se matérialise clairement au travers de la symétrie du tableau à double entrée, tandis que le graphe impose un ordre dans les classes. L'harmonie de la table mena Michel Serres à lui donner une place centrale de son analyse de la pratique tabulaire leibnizienne. Pour cela, il se fonde sur une analogie géométrique que donne Leibniz pour expliquer la solution au troisième problème, c'est-à-dire au calcul des complexions de classes :

> *Le Problème III, en effet, propose de multiplier une division par une autre (division au sens de polytomie). D'où le rapprochement saisissant de la représentation distributive du produit en tableau carré, de la même représentation appliquée aux dichotomies, et de l'espace géométrique : « L'origine en est dans la géométrie ; là, en effet, si une ligne qui en touche une autre à son extrémité se meut du début à la fin de cette dernière, comme si elle frottait sur elle, tout l'espace recouvert par le mouvement de la ligne constituera une figure quadrangulaire », rectangle, carré, losange ou parallélogramme. « L'espace quadrangulaire est égal au résultat de la multiplication d'une ligne ». Cette théorie de la multiplication recouvre les techniques combinatoires de tabulation.* [142]

141. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.204-205 : « *Divisionem* autem *in divisionem ducere* est unius divisionis membra alterius membris subdividere, quod interdum procedit viceversa, interdum non. Interdum omnia membra unius divisionis omnibus alterius subdividi possunt ; interdum quædam tantum, aut quibusdam tantum. »

142. [97] M. Serres, *Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques*, Presses Universitaires de France, Paris, 1968 - p.419 ; Michel Serres cite le troisième problème du traité : A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.205 : « Origo est ex Geometria, ubi si linea aliam extremitate contingens ab initio ad finem ipsius movetur, sic ut eam radat, spatium omne, quod occupabit linea mota, constituet figuram quadrangularem, si ad angulos rectos alteram contingit ἑτερόμηκες aut quadratum ; sin aliter, rhombum aut rhombœides ; si alteri æqualis, quadratum aut rhombum ; sin aliter, ἑτερόμηκες aut rhombœides. Hinc et spatium ipsum quadrangulare facto ex multiplicatione lineæ per lineam æquale est. ».

En réalité, les propos de Leibniz sont équivoques dans ce paragraphe cité par Serres, car l'explication de la solution combinatoire des complexions de classes n'est pas le produit géométrique d'une ligne par une ligne, mais le produit d'un nombre par un nombre :

> *Voici l'origine de cette formule : multiplier une division par une division, c'est manifestement multiplier le nombre des espèces de l'une par le nombre des espèces de l'autre. Or multiplier [ducere] un nombre par un nombre est démultiplier [multiplicare] ce nombre par rapport à l'autre, c'est-à-dire poser autant de fois le nombre donné que l'autre contient d'unités.* [143]

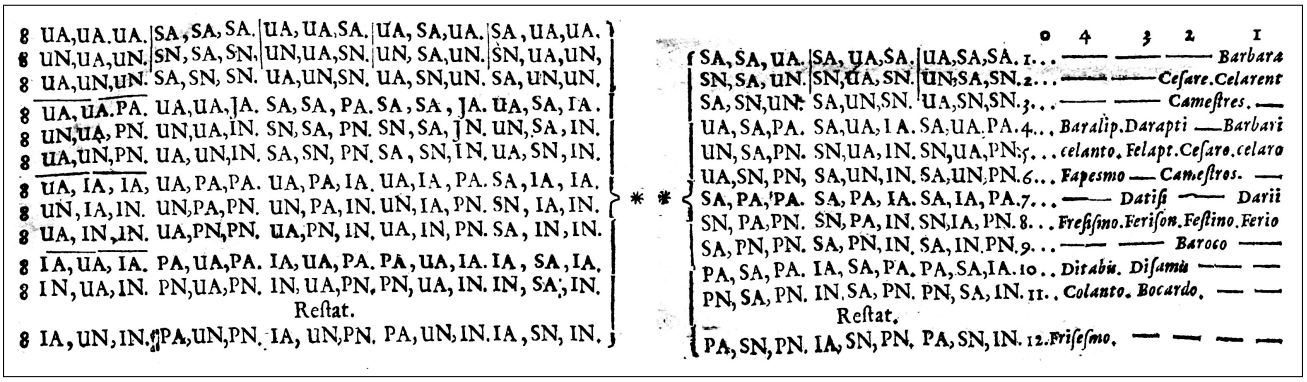
L'explication que cite Serres est l'explication du produit d'un nombre par un nombre. C'est donc l'explication de l'explication, ou l'origine de l'origine. De fait, l'image géométrique sert à faire comprendre une propriété arithmétique et donc pas nécessairement la propriété combinatoire que cette dernière illustre à son tour. Or, dans cette propriété arithmétique, il n'est pas fait mention de la figure quadrangulaire autour de laquelle cristallise le commentaire de Serres. Le produit de deux nombres est seulement décrit comme le fait de démultiplier une même quantité.
Cela étant la lecture de Serres reste pleinement envisageable, et même dans le cas où elle serait une extrapolation des propos du jeune philosophe, cette interprétation ne serait pas une trahison totale envers le texte. Admettons donc que Leibniz considère la figure quadrangulaire, carré ou rectangle, comme une représentation pertinente du produit de divisions et des complexions de classes. Alors il faut d'une part rappeler que cette conception ne correspond pas à la façon dont Leibniz traite des complexions de classes dans le reste de l'ouvrage. Comme nous l'avons vu, le jeune auteur est attaché au fait que les classes sont des sous-ensemble d'un tout plus grand, qui coexistent. Et les tables expriment pour la plupart un raisonnement par embranchement et même celles qui sont utilisées comme tableau à double entrées sont en réalité des listes de listes, dont les axes ne jouent pas des rôles symétriques. Mais après ce rappel nécessaire, on peut aussi noter que la description que fait Leibniz de la figure quadrangulaire n'est pas symétrique non plus. En effet, multiplier une ligne par une ligne, c'est faire mouvoir la première le long de la second. Il y a donc une ligne qui se déplace et une ligne qui reste fixe. Une ligne qui est multipliée et l'autre qui multiplie. La relation, bien que réversible, n'est cependant pas symétrique. Or cette symétrie est essentielle pour Michel Serres. Elle est la source d'une régularité et d'une relativisme harmonieux qui permet d'étendre l'image de la table quadrangulaire à toutes les pratiques combinatoires :

> *La science des classifications par dichotomies ou par arbres, si nombreux jusqu'aux dernières lettres à des Bosses, la doctrine des concepts comme produits, et, à la limite, les intégrations du calcul infinitésimal, les quadratures en particulier. Philosophiquement, cela signifie que le divers est engendré par multiplication du même par les éléments exhaustifs de l'autre, multiplication, c'est-à-dire duplication et replication, termes employés dans la Confessio Philosophi. Que l'on remplace les lignes par des séries, et l'on voit immédiatement qu'une série de séries n'est pas une série, mais une table : d'où l'expression seriebus seu tabulis du grand De Arte de 1680.* [144]

Mettons de côté les difficultés auxquelles se confronte une telle démarche consistant à mettre en regard des textes de périodes et de natures aussi variées, ainsi que le caractère presqu'apocryphe de ce « grand *De Arte* », constitué d'un ensemble éparpillé de textes et de fragments non datés, et auquel Serres donne artificiellement une unité. Comme nous l'avons déjà mentionné, faire la critique de cet auteur sur ces points n'a pas beaucoup d'intérêt étant donnés les différences de cadres méthodologiques. Nous pouvons en revanche remettre en question l'idée que prône Michel Serres, à savoir qu'« une série de série n'est pas une série mais une table ». Il nous parait manifeste que la pratique tabulaire présente au sein de la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8) nous permet de comprendre cette affirmation avec un point de vue nouveau. Certes les listes de listes forment des tables. Mais ces tables restent des listes de listes, et ne deviennent nécessairement des tableaux à double entrée, parfaitement symétriques et réversibles. La lecture de ces tables et leur construction dépend fortement de l'ordre dans lequel les classes sont composées. Comme nous l'avons vu, renverser les classes modifie le graphe d'embranchement et donc la forme du raisonnement sous-jacent.

143. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.205 : « Hinc origo formulæ hujus : divisionem in divisionem ducere, manifesta est, ducendus enim numerus specierum unius in numerum specierum alterius. Numerum autem in numerum ducere est numerum numero multiplicare, et toties ponere datum, quot alter habet unitates. »
144. [97] M. Serres, *Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques*, Presses Universitaires de France, Paris, 1968 - p.419-420.

Cela étant, une table semble avoir été construite selon la logique du tableau à double entrée : la table des syllogismes.



*Dissertatio de Arte Combinatoria* (1666) - p.12

Cette table est composée de deux parties : une liste de triplets à gauche et cinq colonnes numérotées de 0 à 4 à droite. Observons seulement la liste de triplets, qui représentent chacun un syllogisme, c'est-à-dire la donnée de trois propositions, chacune affectée d'une quantité, d'une qualité et d'une échelle :

- ⋆ quantité : entière ou fragmentaire → $E$ ou $F$
- ⋆ échelle : générale ou typique → $G$ ou $T$
- ⋆ qualité : affirmative ou négative → $A$ ou $N$

On considère alors les quatre combinaisons de quantités et d'échelles :

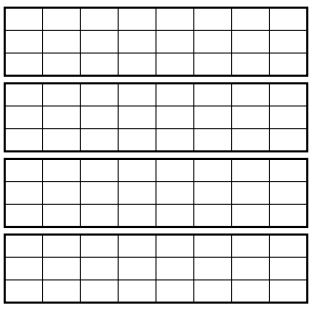
- ⋆ entière générale $E.G = U$ : universelle
- ⋆ entière typique $E.T = S$ : singulière
- ⋆ fragmentaire générale : $F.G = P$ : particulière
- ⋆ fragmentaire typique : $F.T = I$ : indéfinie

| | $E$ | $F$ |
|---|---|---|
| $G$ | $U$ | $P$ |
| $T$ | $S$ | $I$ |

On a donc trois paramètres à faire varier : la qualité, la quantité et l'échelle. Ainsi il faut donner trois axes à la table :

| | | | | | | | | | 0 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| UA.UA.UA<br>UN.UA.UN<br>UA.UN.UN<br>1.1 | SA.SA.SA<br>SN.SA.SN<br>SA.SN.SN<br>1.2 | UA.UA.SA<br>UN.UA.SN<br>UA.UN.SN<br>1.3 | UA.SA.UA<br>UN.SA.UN<br>UA.SN.UN<br>1.4 | SA.UA.UA<br>SN.UA.UN<br>SA.UN.UN<br>1.5 | SA.SA.UA<br>SN.SA.UN<br>SA.SN.UN<br>1.6 | SA.UA.SA<br>SN.UA.SN<br>SA.UN.SN<br>1.7 | SA.UA.SA<br>UN.SA.SN<br>UA.SN.SN<br>1.8 | 1<br>2<br>3 | –<br>–<br>– | –<br>–<br>– | –<br>–<br>– | –<br>*Cesare*<br>*Camestres* | *Barbara*<br>*Celarent*<br>– |
| UA.UA.PA<br>UN.UA.PN<br>UA.UN.PN<br>2.1 | UA.UA.IA<br>UN.UA.IN<br>UA.UN.IN<br>2.2 | SA.SA.PA<br>SN.SA.PN<br>SA.SN.PN<br>2.3 | SA.SA.IA<br>SN.SA.IN<br>SA.SN.IN<br>2.4 | UA.SA.IA<br>UN.SA.IN<br>UA.SN.IN<br>2.5 | UA.SA.PA<br>UN.SA.PN<br>UA.SN.PN<br>2.6 | SA.UA.IA<br>SN.UA.IN<br>SA.UN.IN<br>2.7 | SA.UA.PA<br>SN.UA.PN<br>SA.UN.PN<br>2.8 | 4<br>5<br>6 | –<br>–<br>– | *Baralip*<br>*Celanto*<br>*Fapesmo* | *Darapti*<br>*Felapto*<br>– | –<br>*Cesaro*<br>*Camestros* | *Barbari*<br>*Celaro*<br>– |
| UA.IA.IA<br>UN.IA.IN<br>UA.IN.IN<br>3.1 | UA.PA.PA<br>UN.PA.PN<br>UA.PN.PN<br>3.2 | UA.PA.IA<br>UN.PA.IN<br>UA.PN.IN<br>3.3 | UA.IA.PA<br>UN.IA.PN<br>UA.IN.PN<br>3.4 | SA.IA.IA<br>SN.IA.IN<br>SA.IN.IN<br>3.5 | SA.PA.PA<br>SN.PA.PN<br>SA.PN.PN<br>3.6 | SA.PA.IA<br>SN.PA.IN<br>SA.PN.IN<br>3.7 | SA.IA.PA<br>SN.IA.PN<br>SA.IN.PN<br>3.8 | 7<br>8<br>9 | –<br>–<br>– | –<br>*Fresismo*<br>– | *Datisi*<br>*Ferison*<br>– | –<br>*Festino*<br>*Baroco* | *Darii*<br>*Ferio*<br>– |
| IA.UA.IA<br>IN.UA.IN<br>Reste<br>IA.UN.IN<br>4.1 | PA.UA.PA<br>PN.UA.PN<br>Reste<br>PA.UN.PN<br>4.2 | IA.UA.PA<br>IN.UA.PN<br>Reste<br>IA.UN.PN<br>4.3 | PA.UA.IA<br>PN.UA.IN<br>Reste<br>PA.UN.IN<br>4.4 | IA.SA.IA<br>IN.SA.IN<br>Reste<br>IA.SN.IN<br>4.5 | PA.SA.PA<br>PN.SA.PN<br>Reste<br>PA.SN.PN<br>4.6 | IA.SA.PA<br>IN.SA.PN<br>Reste<br>IA.SN.PN<br>4.7 | PA.SA.IA<br>PN.SA.IN<br>Reste<br>PA.SN.IN<br>4.8 | 10<br>11<br>12 | –<br>–<br>*Frisesmo* | *Ditabis*<br>*Colanto*<br>– | *Disamis*<br>*Colanto*<br>– | –<br>–<br>– | –<br>–<br>– |

Les deux dimensions de la feuille empêche naturellement de faire un véritable tableau à triple entrées dans l'espace. La solution consiste donc à faire une liste de tables quadrangulaires, ou une table quadrangulaire de listes. Ici, on peut considérer quatre tables séparées par des lignes horizontales. Dans chaque table, on fait varier à chaque ligne la qualité et à chaque colonne l'échelle. Enfin entre les tables elles-mêmes, on fait varier la quantité. Sinon, on peut également considérer une table dont on fait varier l'échelle selon les colonnes et la quantité selon les lignes. Et dans chaque cellule on place une liste de trois triplet, où l'on fait varier la qualité. Selon ces deux points de vue, on retrouve bien la figure quadrangulaire décrite par Michel Serres, qui fait correspondre les différents paramètre des syllogisme dans un tableau à triple entrées.



liste de tables : $\mathbf{4}\times(3\times 8)$

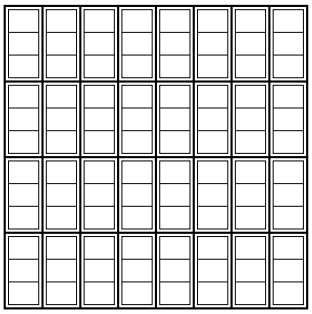


table de listes : $(\mathbf{4}\times\mathbf{8})\times 3$

En réalité, la notion d'échelle est un ajout de notre part. Leibniz définit seulement quatre quantités : universelle, particulière, singulière et indéfinie. Elles ne sont pas présentées comme étant elles-mêmes les combinaisons de deux paramètres. Ainsi, pour déterminer le nombre total de triplets de quantités, à savoir 64, Leibniz propose une méthode qui s'avère être une solution correcte au problème des permutations avec répétions. Mais comme nous l'avons vu, il n'applique pas la solution des complexions de classes, par la formule $64 = 4 \times 4 \times 4$ puisque c'est la même classe qui est répétée, et nous avons vu que Leibniz ne l'autorise pas. Il applique la même méthode que celle qu'il utilise pour dénombrer les mélodies, mais sa formule pour les permutations avec répétition est correcte cette fois-ci. Contrairement aux usages que nous avons déjà développés, Leibniz décrit les décomptes dans le corps du texte, sans aucune disposition typographique ou diagrammatique.
Il dénombre ainsi les trois cas possibles, qui correspondent au partitions de l'entier 3.

- $3 = 3$ : trois fois la même quantité.
- $3 = 2 + 1$ : deux quantités égales et une autre différente.
- $3 = 1 + 1 + 1$ : trois quantités différentes.

Pour chaque cas, Leibniz dénombre correctement le nombre de triplets :

- $UUU$ : $\binom{4}{1} = 4$
- $UUP$ [145] : $\binom{4}{2} \times 2! \times \frac{3!}{2!1!} = 6 \times 2 \times 3 = 36$
- $UPI$ : $\binom{4}{3} \times 3! = 4 \times 6 = 24$

Ainsi, par la même méthode que celles qu'il applique aux mélodies, Leibniz obtient bien les 4+36+24 = 64 triplets possibles.

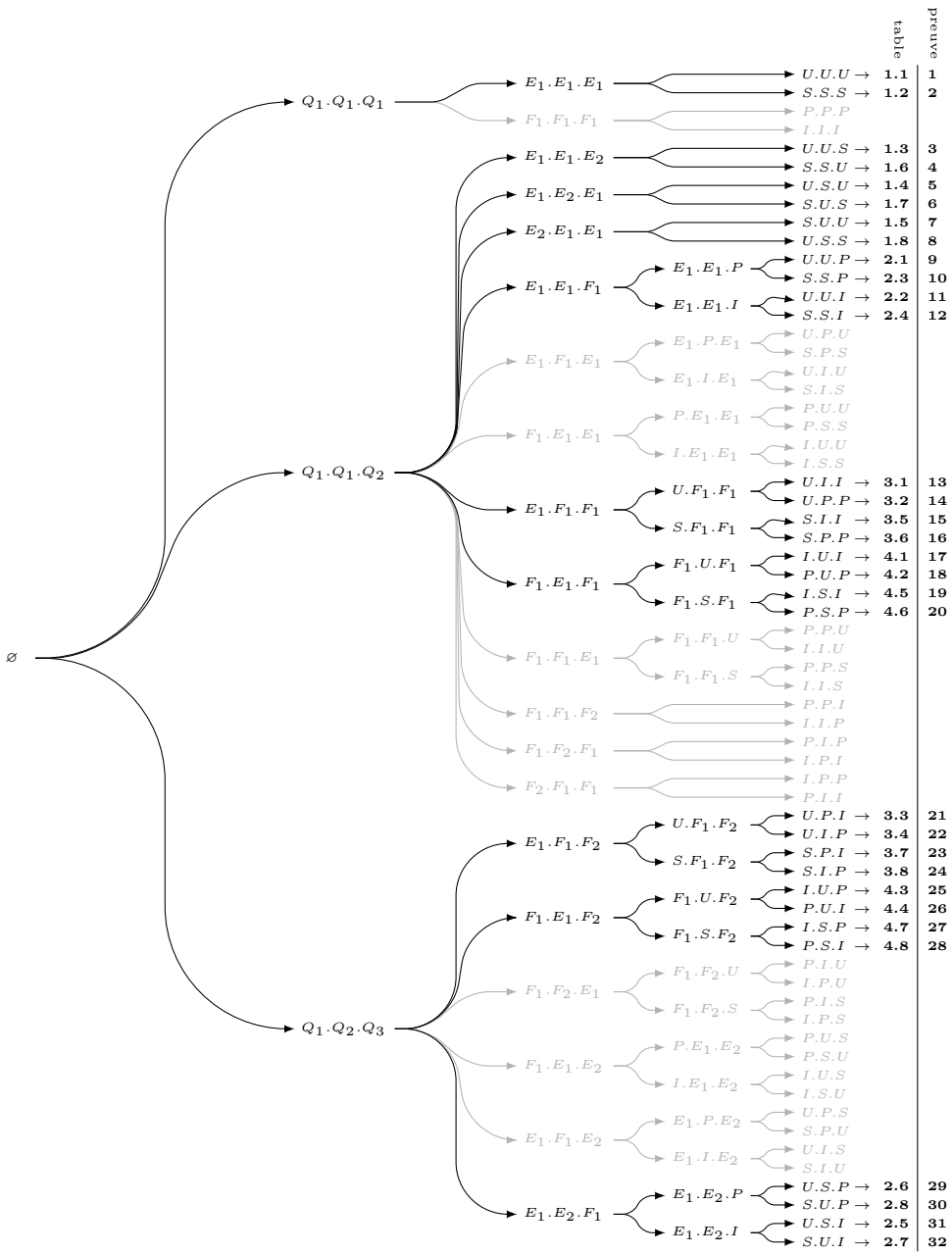
Cependant, lorsqu'il s'agit d'éliminer les modes inutiles en vertus de deux lois de la syllogistique, Leibniz semble introduire sans le dire cette notion d'échelle, en regroupant les quantités $U$ et $S$ d'une part et les quantités $P$ et $I$ d'autre part :

> *Parmi lesquelles* 18 *sont utiles : 2* $U(S)$, $U(S)$, $S(U)$ *; 2* $U(S)$, $S(U)$, $U(S)$ *; 2* $S(U)$, $U(S)$, $U(S)$ *; 4* $U(S)$, $U(S)$ $P$ *ou* $I$. *4* $U$ $I(P)$, $I(P)$ *ou* $S$ *à la place de* $U$. *4* $I(P)$, $U$, $I(P)$ *et* $S$ *à la place de* $U$. [146]

En effet, les règles qu'il invoque s'appliquent à seulement deux quantités : l'universelle et la particulière, qui sont les deux seules quantités que l'on trouve dans la tradition aristotélicienne. Dans notre modèle, cela revient à appliquer les règles aux quantités $E$ et $F$. On peut alors substituer $E$ par $U$ ou $S$, et $F$ par $P$ ou $I$. C'est ce que fait Leibniz en utilisant une écriture spécifique, où l'alternative de substitution est représentée par des parenthèses. S'il y a une deuxième alternative, celle-ci est écrite explicitement avec « ou » (« *vel* ») et « à la place de » (« *loco* »).

145. Nous donnons ici la formule correcte du nombre de permutation de trois éléments dont deux sont identiques, à savoir $\binom{3}{1\ 2} = \frac{3!}{2!1!}$, mais Leibniz décompte simplement qu'il y en a trois dans ce cas particuliers, à savoir *aab*, *aba* et *baa*. Comme nous avions noté et l'avais noté Knobloch, ce résultat entre en contradiction avec la solution du sixième problème

146. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.203 : « Ex quibus utiles 18 : 2 $U(S)$, $U(S)$, $S(U)$. 2 $U(S)$, $S(U)$, $U(S)$. 2 $S(U)$, $U(S)$, $U(S)$. 4 $U(S)$, $U(S)$ $P$ vel $J$. 4 $U$ $J(P)$, $J(P)$ vel loco $U$, $S$. 4 $J$, $P(U)$, $J(P)$ et $S$ loco $U$. »- *Nota Bene* : il y a une coquille dans l'édition de l'Akademie, qui ne se trouve pas dans l'édition originale de 1666 : le dernier triplet est transcrit « $J$, $P(U)$, $J(P)$ et $S$ loco $U$ », alors qu'il est correctement écrit dans l'édition originale : « $J(P)$, $U$, $J[P]$ et $S$ loco $U$ ». Nous avons rétabli la forme correcte dans la traduction. Dans l'édition originale, l'imprimeur passe des parenthèses ( aux crochets [ au niveau de triplet-ci. Ce changement typographique n'est pas significatif. *Cf* G.W. Leibniz, *Dissertation de Arte Combinatoria*, Leipzig, 1666 - p.14.

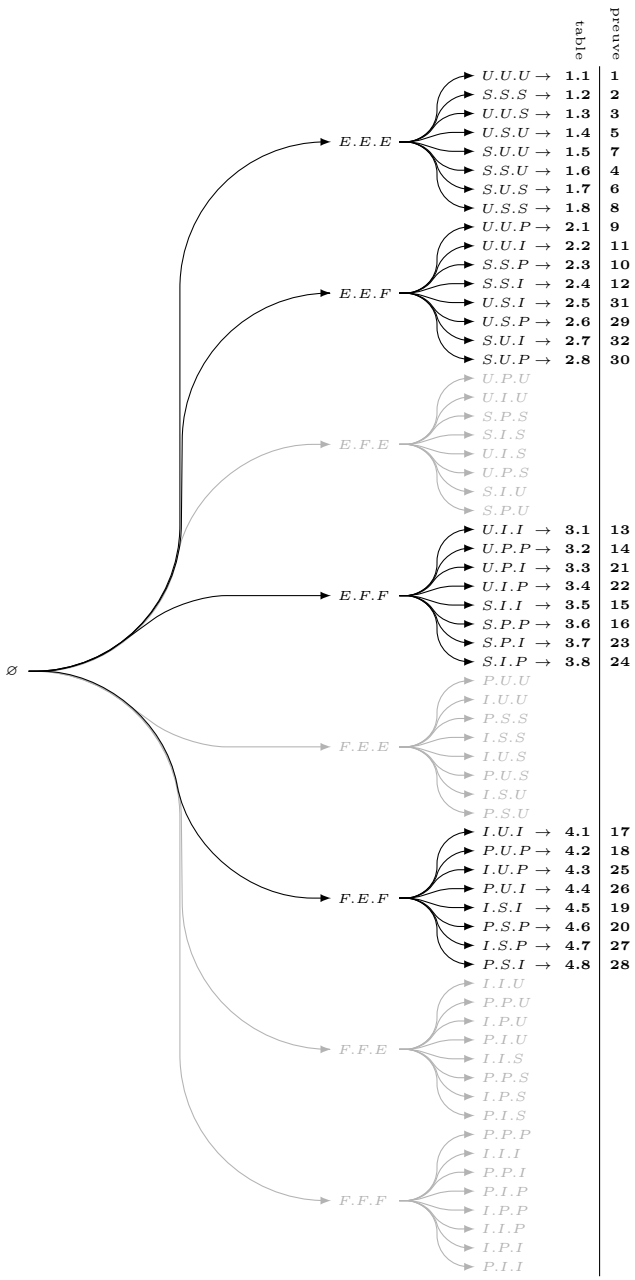



Pour éliminer les modes syllogistiques, Leibniz a donc du rajouter une étape dans sa procédure de classification, comme nous le montre le graphe par embranchement ci-dessus. D'abord considérer les quantités au sens classique, à savoir l'universelles et la particulières, que nous avons notées ici $E$ et $F$, pour qu'il n'y ait pas de confusion. Appliquer les règles à ces triplets-ci, puis faire varier l'échelle pour chaque terme de chaque triplet, tout en respectant le principe de classement d'origine, fondé sur le nombre de quantités distinctes dans le triplets. On obtient la disjonction suivante :

$$32 = 1 \times 2 + (3 \times 2 + 3 \times 2 \times 2) + 3 \times 2 \times 2$$

L'ordre des modes syllogistiques utiles obtenus dans ce graphe respecte parfaitement celui dans lequel Leibniz les énonce dans sa procédure de dénombrement. En revanche, il ne correspond pas du tout à l'ordre indiqué dans la table. Ce dernier correspondrait à un raisonnement par embranchement réversible où l'on considère d'abord les huit permutations des deux quantités classiques, $E$ et $F$, puis pour chacune, les huit possibilités d'échelle. On obtient un produit cartésien qui s'accorde parfaitement avec la forme quadrangulaire de la table des syllogismes :

$$32 = 8 \times 4$$

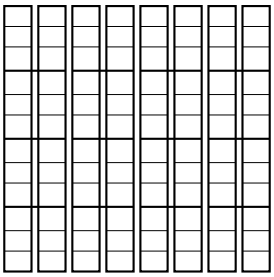



Cet exemple illustre la différence qui sépare la structure combinatoire de la table et celle que décrit Leibniz dans son raisonnement. Il montre aussi que certaines étapes de classifications, comme l'introduction de la notion d'échelle qui permet de grouper deux par deux les quantités, sont implicites et interviennent pourtant significativement dans la structure du raisonnement.
Enfin, la table elle-même qui parait pourtant bien suivre les règles de la tabulation quadrangualaire, comme nous l'avons montré, n'est pas décrite ainsi pas le jeune philosophe :

> *Dans celle-ci, on a décrit tous les modes utiles, dont huit constituent toujours un mode figuré général, et en outre je donne à de tels modes les appélations communes, pour lesquels on considère comme égaux tant U et S que P et I. Le modes alignés décrivent eux-même quatre triplets. Au sein d'une bande ils s'accordent en quantité et différent selon les trois dinstinctions utiles de qualité. De plus, ces triplets eux-même diffèrent entre eux par la quantité, disposés selon l'ordre dans lequel nous avions trouvé ses variations plus haut. Toutes celles que nous avons trouvées plus haut se réduisent à quatre d'entre elles, puisque U et S, aussi bien que P et I se réduisent au même.* [147]

147. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.185 : « In quo descripti sunt omnes modi utiles, ex quibus octo semper constituunt modum figuratum generalem, tales autem voco illos vulgo appellatos, in quibus $U$ et $S$, item $J$ et $P$ habentur pro iisdem : Ipsæ lineæ modorum constant ex quatuor trigis, in qualibet lineæ quantitate conveniunt, differunt pro tribus illis utilibus qualitatis differentiis. Ipsæ autem trigæ inter se differunt quantitate, positæ eo ordine quo supra variationes ejus invenimus, in quarum quatuor reducuntur omnes supra inventæ, quia hic $U$ et $S$, item $J$ et $P$ reducuntur ad eandem. »

Ainsi, la table n'est pas construite dans aucune des deux manières que nous avions indiquée plus haut, à savoir une table quadrangulaire de listes ou une liste de tables quadrangulaires. Leibniz la décrit comme la dernière possibilité que nous n'avions pas encore mentionnée : un liste de tables non quadrangulaire :



liste de tables non quadrangulaires

En effet, il s'agit bien d'une liste de huit tables alignées à la suite des autres. Dans la description que donne Leibniz, il s'agit de classer les trois permutations de qualités utiles : $AAA$, $NAN$ et $ANN$ en fonction des quatre permutations de quantité, au sens classique, donc avec notre notation : $EEE$, $EEF$, $EFF$ et $FEF$. Il précise qu'il les dispose selon l'ordre dans lequel il les avait trouvées lors de son calcul de dénombrement. Or, nous avons montré que l'ordre des triplets qui découle du raisonnement ne correspond pas à celui de la table. En fait, il faut regarder l'ordre des triplets par colonne. On constate alors que leurs rangs d'apparition dans le calcul de dénombrement sont croissants pour les quatre premières colonnes :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.1 *U.U.U* **1** | 1.2 *S.S.S* **2** | 1.3 *U.U.S* **3** | 1.4 *U.S.U* **5** | 1.5 *S.U.U* **7** | 1.6 *S.S.U* **4** | 1.7 *S.U.S* **6** | 1.8 *U.S.S* **8** |
| 2.1 *U.U.P* **9** | 2.2 *U.U.I* **11** | 2.3 *S.S.P* **10** | 2.4 *S.S.I* **12** | 2.5 *U.S.I* **31** | 2.6 *U.S.P* **29** | 2.7 *S.U.I* **32** | 2.8 *S.U.P* **30** |
| 3.1 *U.I.I* **13** | 3.2 *U.P.P* **14** | 3.3 *U.P.I* **21** | 3.4 *U.I.P* **22** | 3.5 *S.I.I* **15** | 3.6 *S.P.P* **16** | 3.7 *S.P.I* **23** | 3.8 *S.I.P* **24** |
| 4.1 *I.U.I* **17** | 4.2 *P.U.P* **18** | 4.3 *I.U.P* **25** | 4.4 *P.U.I* **26** | 4.5 *I.S.I* **19** | 4.6 *P.S.P* **20** | 4.7 *I.S.P* **27** | 4.8 *P.S.I* **28** |

De fait, Leibniz a peut-être seulement considéré la première apparition de chaque variation de quantité. Il suffit alors que les plus petits rangs d'apparition de chaque ligne soient croissants. En effectuant la vérification, on constate que ces rangs sont systématiquement les premiers de chaque ligne :

$$\underset{\mathbf{1}}{U.U.U} \quad \underset{\mathbf{9}}{U.U.P} \quad \underset{\mathbf{13}}{U.I.I} \quad \underset{\mathbf{17}}{I.U.I}$$

Ainsi, la seule structure tabulaire qui soit proprement décrite par le jeune Leibniz concerne chaque colonne de la table des syllogismes. Ces colonnes ne sont pas des tableaux à double entrée, mais présentent bien la structure méréologique du raisonnement par embranchement. Les éléments de la premières classes sont divisés selon ceux de la seconde :

| | **AAA** | **NAN** | **ANN** |
|---|---|---|---|
| **EEE** | *EA.EA.EA* | *EN.EA.EN* | *EA.EN.EN* |
| **EEF** | *EA.EA.FA* | *EN.EA.FN* | *EA.EN.FN* |
| **EFF** | *EA.FA.FA* | *EN.FA.FN* | *EA.FN.FN* |
| **FEF** | *FA.EA.FA* | *FN.EA.FN* | *FA.EN.FN* |

Tableau à double entrée

| | | |
|---|---|---|
| **EEE** | AAA | *EA.EA.EA* |
| | NAN | *EN.EA.EN* |
| | ANN | *EA.EN.EN* |
| **EEF** | AAA | *EA.EA.FA* |
| | NAN | *EN.EA.FN* |
| | ANN | *EA.EN.FN* |
| **EFF** | AAA | *EA.FA.FA* |
| | NAN | *EN.FA.FN* |
| | ANN | *EA.FN.FN* |
| **FEF** | AAA | *FA.EA.FA* |
| | NAN | *FN.EA.FN* |
| | ANN | *FA.EN.FN* |

Table à embranchements

Leibniz décrit donc la table syllogisme comme une liste de huit tables verticales. Mais nous avons suffisamment montré que la façon dont Leibniz exprime la structure de ses tableaux ne s'accordent pas

nécessairement avec la manière dont il les construit en pratique. En effet, comme nous l'avons montré, la table des syllogismes correspond à un raisonnement par embranchement du type $32 = 8 \times 4$. Nous avons justifié de l'ordre dans lequel sont listés les premiers choix, correspondant aux variations des quantités. Il nous reste donc à observer l'ordre dans lequel sont listés les seconds, qui correspondent aux différentes permutations d'échelles. Ici, chaque ligne, c'est-à-dire chaque alternative du premier choix dans le graphe par embranchement, suit sa logique propre :

⋆ Pour la première ligne, comme toutes les quantités sont entière $E$, il s'agit de lister toutes les permutations de trois trois termes avec deux éléments. Leibniz applique donc la méthode des partitions :

→ $E_1.E_1.E_1 : \binom{2}{1} = 2$

→ $E_1.E_1.E_2 : \binom{3}{1\ 2} \times 2! = 3 \times 2 = 6$

Donc $8 = 2 + (3 + 3)$

⋆ Pour la deuxième lignes, les quatre quantités interviennent, néanmoins, la disposition proposée par Leibniz suit également la méthode des partitions. Dans ce cas, cela dit, il faut tenir compte de la disposition car les quantités ne peuvent être substituées qu'avec leurs correspondantes dans l'autre échelle :

→ $E_1.E_1.F_1 : \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} = 2 \times 2 = 4$

→ $E_1.E_2.F_1 : 2! \times \binom{2}{1} = 2 \times 2 = 4$

Donc $8 = (2 + 2) + (2 + 2)$

⋆ Pour la troisième ligne, il abandonne la méthode des partitions et suis plutôt une démarche dichotomique :

→ $U.F_1.F_1 : \binom{2}{1} = 2$

→ $U.F_1.F_2 : 2! = 2$

→ $S.F_1.F_1 : \binom{2}{1} = 2$

→ $S.F_1.F_1 : 2! = 2$

Donc $8 = (2 + 2) + (2 + 2)$

⋆ Pour la quatrième ligne, il applique la même démarche qu'à la troisième :

→ $F_1.U.F_1 : \binom{2}{1} = 2$

→ $F_1.U.F_2 : 2! = 2$

→ $F_1.S.F_1 : \binom{2}{1} = 2$

→ $F_1.S.F_1 : 2! = 2$

Donc $8 = (2 + 2) + (2 + 2)$

Ainsi Leibniz a probablement construit la table ligne après ligne sans porter attention aux colonnes. Nous observons donc, grâce à l'analyse méticuleuse de cette table, qu'il est possible de relever trois raisonnements combinatoires différents pour un même problème. Les deux premiers que nous avons déjà distingués, sont celui qui permet de construire la table et celui qui permet de la décrire. Mais la table elle-même peut être la mise en forme d'un résultat qui aura pu être obtenu au départ par le moyen d'un troisième raisonnement, comme c'est le cas ici.

### Les roues

Raymond Lulle est une référence incontournable au sein du commentaire sur la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8). Leibniz y fait lui-même référence à quelques occasions dans sa correspondance plus tardive. Il le mentionne notamment dans une lettre au Duc de Hanovre de 1679 :

> *Ars magna de Raymond Lulle a encor quelque relation à ce que je propose. Car il se sert de quelques termes generaux, comme Magnitudo, Potentia, Duratio, Virtus, qui se peuvent appliquer à toutes sortes des choses, et cela luy donne moyen par leur combinaison de discourir amplement sur quelque chose que ce soit. Mais c'est l'ombre seulement de la veritable Combinatoire, qui n'a pas laissé de trouver des admirateurs, quoyqu'elle ne fasse qu'effleurer les choses, et est aussi éloignée de la veritable qu'un*

*hableur est au dessous d'un homme en même temps eloquent et solide. Cependant l'Art de Lulle subsiste et fait une espece de secte, et s'enseigne mêmes encor publiquement dans l'isle de Majorque, patrie de cet auteur.* [148]

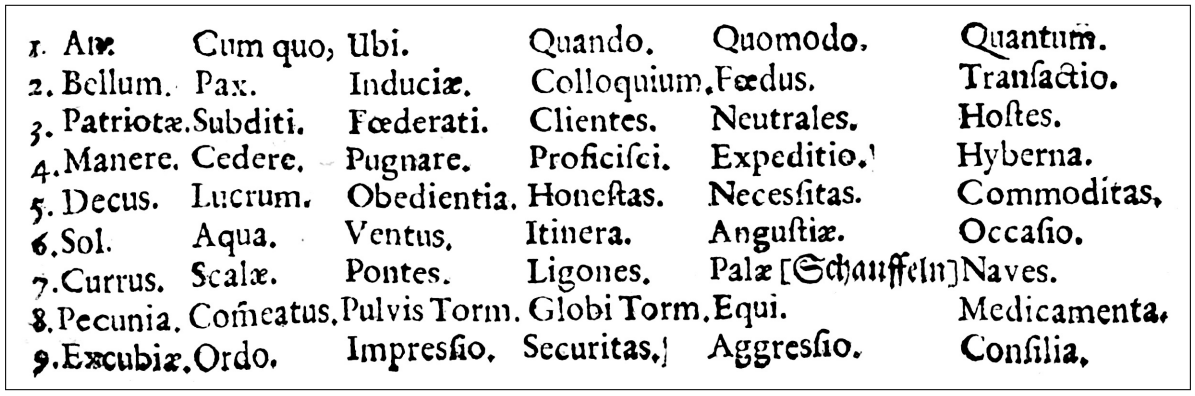
L'*Ars Magna* de Lulle doit notament son succès à la réalisation d'un mécanisme combinateur : les roues. Il s'agit, pour chaque classe, de disposer les différents termes autour de roues de rayon décroissant de sorte qu'on puisse les disposer de façon concentrique et voir tous les termes sur toutes les circonférences. Les roues doivent être mobiles et l'on doit pouvoir faire tourner chacune d'entre elles autour de l'axe de façon indépendante. De cette sorte, on peut aligner chaque terme de chaque classe avec tous les autres et former ainsi toutes les complexions de classes possibles :

*Soient neuf roues de papier, toutes concentriques et s'encerclant les unes les autres, de telle sorte qu'on puisse faire tourner n'importe laquelle tout en laissant les autres immobiles. Ainsi, dès qu'on fera légèrement tourner une roue quelconque, on produira une nouvelle question, une nouvelle complexion.* [149]

Pour illustrer ce principe, Leibniz reprend un exemple très concret qu'il trouve chez Harsdörffer.

*Lui, le bon général doit être attentif à tout en matière de guerre, et cela se compose ainsi : on fait neuf classes. Dans la premières, les questions et les circonstances, dans la seconde les états, dans la troisième les personnes, dans la quatrième les actes, dans la cinquième les objectifs, dans la sixième les instruments sur lesquels on ne peut agir, c'est-à-dire lesquels sont à notre disposition mais qu'on ne peut pas créer, dans la septième les instrument que l'on peut et créer et utiliser, dans la huitième les instruments qui sont consommés par leur usage et dans la neuvième les actes finaux, c'est-à-dire sur le point d'être executés.* [150]

Il joint donc la table qui fait la liste des termes de chaque classe :




*Dissertatio de Arte Combinatoria* (1666) - p.45

| Questions et Circonconstances | 1 | Si | Avec quoi | Où | Quand | Comment | Combien |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Etats | 2 | Guerre | Paix | Trêve | Pourparler | Pacte | Accord |
| Personnes | 3 | Compatriotes | Vassaux | Alliés | Clients | Neutres | Ennemis |
| Actes | 4 | Maintenir | Céder | Combattre | Abandonner | Campagne | Quartiers d'hiver |
| Objectifs | 5 | Gloire | Profit | Obéissance | Honneur | Nécessité | Juste proportion |
| Instruments non produisible | 6 | Soleil | Eau | Vent | Chemin | Détroit | Occasion |
| Instruments produisibles | 7 | Chars | Echelles | Ponts | Houe | Pelles | Navires |
| Instruments provisoirs | 8 | Argent | Convoi | Poudre à canon | Boulets de canon | Chevaux | Médicaments |
| Actes imminents | 9 | Sentinelle | Rang | Attaque | Sécurité | Assaut | Conseils |

Cette table présente les éléments premiers de la composition et non le composés finaux. C'est donc une table des primitifs, au sens de Serres, qui doit jouer le rôle d'un lexique. Ici, il n'y a pas de structure

148. A II, 1, N.205a., Lettre de Leibniz au Duc Jean-Frédéric de Hanovre, d'avril 1679 - p.707

149. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.203 : « Fiant novem rotæ ex papyro, omnes concentricæ, et se invicem circumdantes, ita ut quælibet reliquis immotis rotari possit. Ita promota leviter quacunque rota nova quæstio, nova complexio prodibit. »

150. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.203 : « Is, quæcunque in re bellica attendere bonus imperator debet, ita complexus est : facit classes novem, in I$^{ma}$ quæstiones et circumstantias, in II$^{da}$ status, in III personas, in IV actus, in V fines, in VI instrumenta exemtæ actionis, seu quibus uti in nostra potestate est, facere autem ea, non est. VII instrumenta quæ et facimus et adhibemus. VIII instrumenta quorum usus consumtio est. IX actus finales seu proximos executioni. »

tabulaire significative. Il s'agit simplement de neuf listes de six termes. La disposition semble avoir été faite au hasard. En réalité, lorsqu'on observe le tableau de Harsdörffer que Leibniz a recopié, on constate qu'il y a une structure tabulaire :

| 1. In Fragē und umbſtänden. | 2. In den Endurſachen. | 3. In dē Perſonen. | 4. Verrichtungen. | 5. Urſachen. | 6. Zufällen. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. Ob. | Warmit. | Wo. | Wann. | Wie. | Wieviel. |
| 2. Krieg. | Fried. | Anſtand. | unterredūg | Bündnuß. | Vergleich. |
| 3. Patrioten. | Unterthanen. | Bundsgenoſſen. | Schutzverwandte. | Neutrale. | Feinde. |
| 4. verbleiben | Weichen. | Fechten. | ziehen. | zu Feld ligen | Wintern. |
| 5. Ehre. | Nutz. | Gehorſam. | Wolſtand. | Noht. | Bequemlichkeit. |
| 6. Sonne. | Waſſer. | Wind. | Päſſe. | Wage. | Gelegenheit. |
| 7. Wägen. | Leiter. | Brucken. | Hauen. | Schaufel. | Schiffe. |
| 8. Geld. | Mundkoſt. | Kraut. | Lot. | Pferde. | Artzneyen. |
| 9. Wacht. | Ordnung. | Einfall. | Sicherheit | Angriffe. | Anſchläge. |

G.P. Harsdörffer, Mathematiſchen und Philoſophiſche Erquickſtunden, zweyter Theil - p.412

Ici, la présentation des termes prend la forme d'un tableau à double entrées avec non seulement une indexation des neuf lignes mais aussi une indexation des six colonnes. Ces colonnes ont même des intitulés, dont la signification demeure relativement obscure, si on les considère comme telles :

*1.* *Dans les questions et les circonstances* | *2.* *Dans les causes finales* | *3.* *Dans les personnes* | *4.* *Directions* | *5.* *Causes* | *6.* *Cas.* [151]

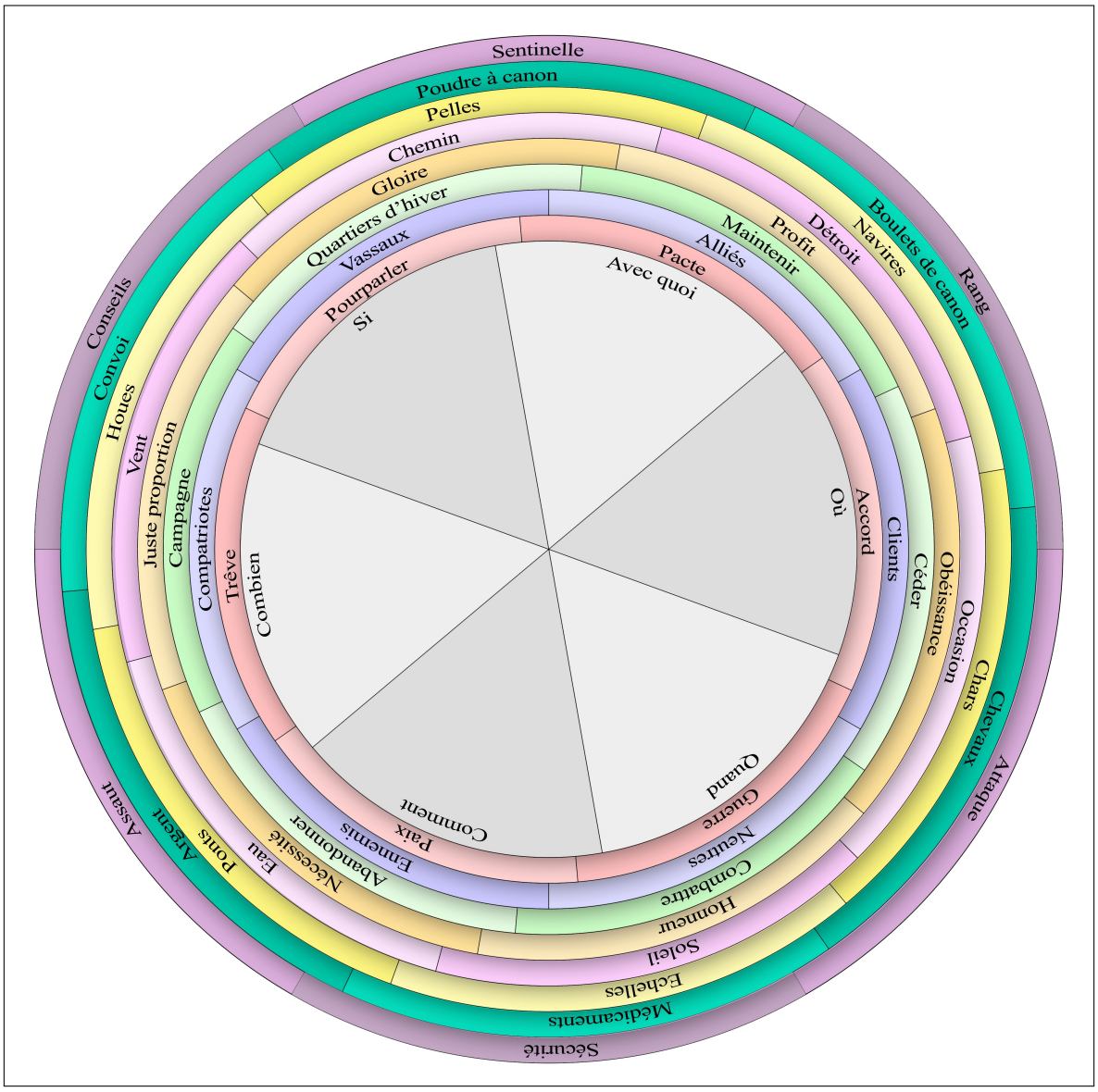
De fait, aucun lien n'apparait entre ces catégories et les différents termes qu'elles regroupent. En fait ces intitulés de colonnes décrivent les six premières lignes. Ainsi les numéros au dessus des colonnes ne sont pas des indexes de celles-ci mais de renvois vers les numéros des lignes qui sont, quant à eux, bien des indexes. La disposition est extrêmement trompeuse, mais elle ne relève donc pas d'un tableau à double entrée et la composition des colonnes est sans doute le produit du hasard de la plume. Difficile, cependant de déterminer à quel point les contraintes d'édition et d'impression ont contribué à ce choix baroque de présentation.

Cet ordre aléatoire n'est donc mis en valeur ni par Harsdörffer qui donne une unité factice aux colonnes, ni par Leibniz qui recopie la table. Pourtant, il est très important pour le lecteur. En effet, la forme tabulaire impose de mettre en regard des éléments qui parfois n'ont pas de raison particulière de l'être. Le désordre des colonnes évite alors au lecteur de repérer malgré lui des régularités contingentes qui produiraient des relations superflues entre les éléments des classes et introduirait une asymétrie non désirée dans le processus de combinaison. Si le jeune Leibniz ne l'a pas mis explicitement en avant, puisqu'il a simplement traduit et recopié les termes dans le même arrangement, il a néanmoins été attentif, en retirant les en-têtes des colonnes, à ce que ces dernières soient le plus neutre possible.

De fait, le mécanisme des roues constitue un bien meilleur dispositif pour représenter les termes sans imposer de correspondances forcées. Les roues concentriques permettent, par l'autonomie de chaque rotation, d'incarner l'indépendance des différentes classes de termes et ce de façon bien meilleure que l'ordre aléatoire appliqué dans la forme tabulaire. Cela dit, le mécanisme ne permet pas d'effacer toute notion de rang et de lieu. Par exemple, il faut bien mettre les termes dans un certain ordre relatif, dans chaque classe, de sorte que certains se retrouvent mitoyens et d'autres à l'opposé. En réalité, si l'on souhaite arranger $n$ termes de façon parfaitement symétrique, de sorte que chacun soit à égale distance de tous les autres, il faudrait nécessairement les disposer sur un $(n-1)$-simplexe régulier, c'est-à-dire une

151. [31] G.P. Harsdörffer, *Delitiæ mathematicæ et physicæ ;* Der Mathematiſchen und Philoſophiſche Erquickſtunden, zweyter Theil, Nuremberg, 1651 - p.412 : « 1. In Fragen und umbſtänden ; 2. In den Endurſachen ; 3. In den Perſonen ; 4. Birrichtungen ; 5. Urſachen ; 6. Zufällen »

figure dans un espace de dimension $n-1$. Evidemment, ceci est difficilement représentable aujourd'hui et même difficilement envisageable au XVII$^{\text{ème}}$ siècle.
Le mécanisme ne produit pas une mais six complexions pour chaque position relative des roues. Ainsi, le nombre d'agencement possible n'est pas $6^9$ comme le conclut Leibniz mais $6^8$. Cela étant, comme chacun de ces agencements produit 6 complexions différentes, on retrouve bien les $6^9 = 6^8 \times 6$ complexions possibles :




Cette remarque n'est pas totalement gratuite, puisque le jeune philosophe apporte une attention particulière à la distinction entre variations des positions dans l'absolu et variations des positions relativement. C'est l'objet principal du cinquième problème dans lequel Leibniz détermine que le nombre de permutations relatives d'un ensemble à $n$ éléments, où l'on considère seulement les positions par rapports aux termes voisins, vaut $(n-1)!$ au lieu de $n!$. Pour le justifier, Leibniz invoque la figure du cercle, qui permet de faire abstraction de la position absolue pour ne représenter que les rapports relatifs internes :

> *La raison de cette solution apparait clairement dans le diagramme ו grâce auquel nous donnions la raison de la solution du problème précédent. Par exemple, pour les variation de voisinage, ces variations : a.b.c.d. ; d.a.b.c. ; c.d.a.b. et b.c.d.a. sont considérées comme une seules, comme si on l'inscrivait dans un cercle. Et ainsi de la même manière pour les autres. On doit donc diviser toutes ces 24 variations par le nombre de choses, qui est ici* 4. *Cela donne la variation de l'ordre du nombre de choses précédent, à savoir* 6. [152]

152. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.217 : « Ratio Solutionis manifesta est ex Schemata ו quo rationem solutionis problematis præcedentis dabamus. V. g. in variationibus vicinitatis, variationes hæ : *Abcd. Bcda. Cdab.*

Pour le mécanisme des roues, la situation est semblable mais légèrement différente. Chaque complexion peut être regroupée avec cinq autres, en substituant simultanément chaque terme par le terme suivant dans l'ordre des classes. Ainsi, on divise également le nombre totale de complexions par le nombre de choses dans chaque classe. Cela étant, dans le cas des permutations cycliques, on fait abstraction de l'ordre absolu des termes, qui correspondrait à l'ordre des classes dans le cas du mécanisme des roues. Ainsi, pour appliquer rigoureusement le raisonnement de Leibniz, il faudrait donc qu'on fasse abstraction de l'ordre des roues dans le mécanisme. Or ce dernier est fixe et n'est donc déjà pas pris en compte.
Leibniz mentionne d'autres mécanismes de roues, notamment le « Quintuple anneau de la poésie en langue allemande » (« Fünffacher Denkring der Teutſchen Sprache ») qui se trouve dans le même ouvrage de Harsdörffer :

G.P. Harsdörffer, Mathematiſchen und Philoſophiſche Erquickſtunden, zweyter Theil - fol. intercalé entre les p.516-517

Ici le mécanisme présente deux différences substantielles avec le mécanisme précédent. D'abord l'ordre dans lequel les roues sont agencées n'est pas arbitraire. Dans ce contexte, le lien avec les problèmes de permutations avec répétitions est plus apparent, car les classes sont effectivement équivalentes à des rangs. Ensuite, il n'y a pas le même nombre de termes pour chaque classe. Dès lors si ces effectifs ne sont pas tous sur une même progression géométrique, les configurations du mécanisme ne produisent pas toujours les mêmes alignements aux mêmes endroits. Par conséquent, le raisonnement sur l'ordre relatif dans le mécanisme que nous avons exposé ci-dessus ne s'applique plus.
Harsdörffer présente les mécanismes de roues de la même manière que Leibniz. Il donne la procédure matérielle pour le construire. Dans le cas des composantes de l'art militaire, c'est la constitution dynamique

*Dabc.* habentur pro una, velut in circulo scripta. Et ita similiter de cæteris, omnes igitur illæ 24 variationes dividendæ sunt per numerum rerum, qui hoc loco est 4, prodibit variatio ordinis de numero rerum antecedenti, nempe 6. »

du mécanisme qui justifie que l'auteur place cette question dans une partie consacrée aux mouvements violents :

> *On fait une coupe ronde dans du papier à cartes, de la taille que l'on souhaite, puis on la partage en six parts égales. Ensuite, on ajoute des coupes, de plus en plus petites, partagées de la même façon. On les agrafe alors les unes au dessus des autres, de sorte qu'on puisse les mouvoir et les faire tourner autour. C'est aussi pourquoi l'on associe cette invention à cette dixième partie.* [153]

La description de la roue sur la poésie suit le même schéma. Cela étant dit, Harsdörffer précise que le mécanisme doit être fixé après avoir effectué les rotations nécessaires. Ce mécanisme n'est donc pas seulement à combinateur, ayant pour fonction d'énumérer, mais il est pensé pour avoir un utilité concrète, une fois qu'on a créé les complexions :

> ***Au relieur du livre.***
> *Ce feuillet doit être découpé, divisé en cinq anneaux, qu'on agrafe les uns sur les autres sur cinq coupes de papier de même taille, de sorte qu'on puisse faire pivoter isolément chaque anneau. Quand ceci est fait, on doit refixer ici cette quintuple feuille.* [154]

Ici, le mécanisme a été réalisé concrètement sur un feuillet annexe à l'ouvrage, dans l'objectif d'être utilisé dans la pratique. Les roues sur l'art militaire constituent donc un exemple théorique. Ni Harsdörffer, ni Leibniz n'ont réalisé ce mécanisme, que ce soit matériellement ou de façon figurée. Ils donnent seulement la procédure de construction.
Bien qu'il s'agisse d'un problème de complexion de classe, Leibniz place cet exemple dans les usages de deux premiers problèmes. Il se justifie par le fait que la complexion se représente par des roues :

> *Il est vrai que le calcul de cette variation correspondra au troisième problème, puisque ici on ne donnera pas de complexion entre les choses d'une même classe, ou pour le dire exactement : il ne s'agit pas de complexion de termes avec des termes mais de complexion de classes avec des classes. Puisque pourtant, comme c'est ici le cas, la complexion peut être aussi représentée par des roues, comme nous le dirons bientôt, cela produira une parenté dont on devra se préoccuper.* [155]

Cette explication est très surprenante, puisque le mécanisme des roues représente de façon idoine le problème des complexions de classes et non celui des combinaisons communes. De fait, Leibniz n'utilise pas l'image de la roue pour décrire les usages qu'il applique au troisième problème sur les complexions de classes. Les roues ne sont évoquées qu'à deux endroits : le passage sur Raymond Lulle dans le dixième usage des deux premiers problèmes et l'exemple que nous venons de traiter dans le douzième usage. Le onzième usage traite des écritures universelles, auxquelles la roue des poèmes de Harsdörffer peut correspondre. C'est probablement pour cette raison que Leibniz a choisi de placer l'exemple des roues à cet endroit. Cela signifie que la roue n'est pas un outil général, comme peut l'être la table, mais un objet particulier que l'on trouve associé à un domaine d'application spécifique.
Il semble donc que, pour le jeune Leibniz, les roues ne constituent pas un outil combinatoire aussi riche et puissant que les tables. Contrairement à ces dernières qui permettent de représenter directement dans l'espace les relations, les roues demandent d'être mises en mouvement et donc l'intervention physique du lecteur. Le mécanisme des roues est d'avantage un instrument pour faire des opérations qu'une structure pour exposer des relations. Les tables ont, comme nous l'avons vu, ce bénéfice de présenter simultanément les deux fonctions.

---

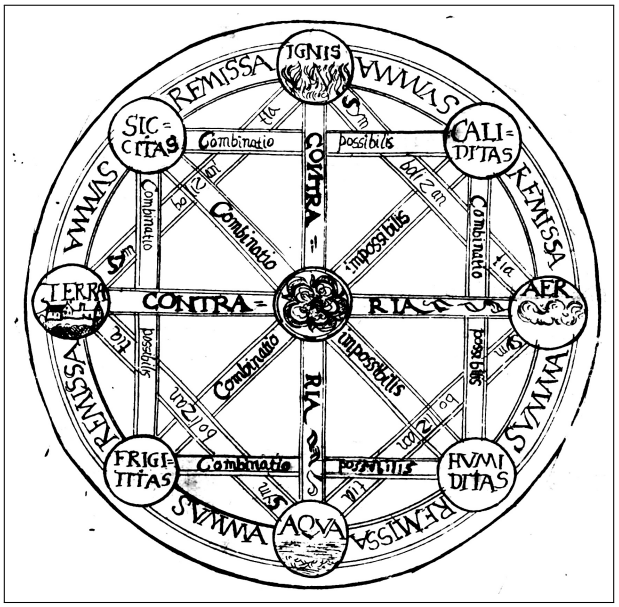
153. [31] G.P. Harsdörffer, *Delitiæ mathematicæ et physicæ ;* Der Mathematiſchen und Philoſophiſche Erquickſtunden, zweyter Theil, Nuremberg, 1651 - p.412 : « Man machet von Kartenpapyr eine runde Scheiben / nach beliebeter Gröſſe / und theilet ſie in 6 gleiche Theile / dann nach un nach kleinere Scheiben / gleichfalſ getheilet / und hefftet ſie alſo aufeinander, dazu man ſie kan herumb drehen und bewegen / daher auch dieſe Erfindund zu dieſem X Theil gezogen wird. »

154. [31] G.P. Harsdörffer, *Delitiæ mathematicæ et physicæ ;* Der Mathematiſchen und Philoſophiſche Erquickſtunden, zweyter Theil, Nuremberg, 1651 - feuillet intercalé entre la page 516 et la page 517 : « An den Buchbinder. Dieſeſ Blatlein muß herauſ geſchnidten / in fünff Ringe zertheilet / und auf fünff gleich-groſſe Scheiben von Papyr / alſo aufeinander gehefftet werden / daß man jeden Ring abſonderlich umbdrehen kan / wann ſolchſ geſchehen / muß man diſeſ fünffache Blat wider hinein pappen. »

155. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.203 : « Verum cum hic inter res ejusdem classis non detur complexio, atque ita accurate loquendo non sit complexio terminorum cum terminis, sed classium cum classibus, pertinebit computatio variationis ad probl. 3. Quoniam tamen complexio etiam, quæ hujus loci est, potest repraesentari rotis, ut mox dicemus, fecit cognatio, ut præoccuparemus. »

**Le diagramme du macrocosme**

Pour finir ce long développement sur l'utilisation des tables au sein de la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8), il nous faut dire quelque chose des deux diagrammes de l'ouvrage qui ne présentent pas de formes tabulaires : le diagramme du macrocosme et l'arbre des parentés. Commençons pas le diagramme.
Le diagramme de macrocosme représente les différents corps élémentaires, à savoir l'eau, l'air, la terre et le feu, ains que les qualités dont ils sont les composés, à savoir le sec, le chaud, l'humide et le froid :




*Dissertatio de Arte Combinatoria* (1666) - Introduction

Leibniz a recopié cette figure sur celle donnée par Clavius dans son *In sphæram Ioannis de Sacro Bosco commentarius*[156]. De fait, la figure de Clavius est elle-même une copie. Ces diagrammes constituent une tradition iconographique dont il est très difficile de retracer l'histoire [157]. Ce diagramme illustre un passage du traité d'Aristote *De la Génération et de la Corruption*, dans lequel ce dernier propose une description combinatoire de la composition des quatre corps élémentaires à partir des quatre qualités :

> *Comme il y a quatre éléments, et que les combinaisons possibles entre quatre termes sont au nombre de six ; comme, cependant, les contraires ne peuvent pas être combinés entre eux, le chaud et le froid, le sec et l'humide ne pouvant pas se confondre en une même chose, il est évident qu'il n'y aura que quatre combinaisons d'éléments, à savoir celles du chaud et du sec, du chaud et de l'humide, du froid et de l'humide, du froid et du sec. Ceci est une conséquence logique de l'existence des corps qui apparaissent simples, le feu, l'air, l'eau et la terre. Le feu est en effet chaud et sec, l'air est chaud et humide, étant une sorte de vapeur ; l'eau est froide et humide, la terre est froide et sèche.* [158]

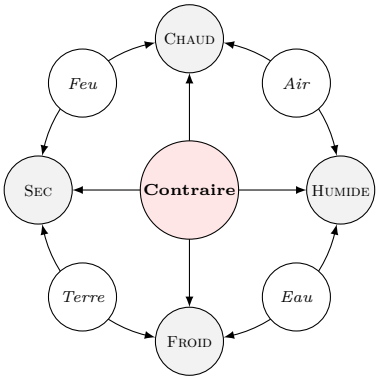
Leibniz tente de formaliser le raisonnement d'Aristote. Ce dernier applique la démarche leibnizienne de l'élimination. Pour expliquer les compositions valides, on dénombre toutes les compositions possibles, puis on élimine celles qui sont invalides. Ici, les compositions de qualités contraires. Leibniz formalise ce raisonnement, en partant du principe qu'il n'y a pas seulement six combinaisons parmi les quatre qualités, mais quinze. En effet, les combinaisons peuvent associer une seule, deux, trois ou bien les quatre qualités.

156. [13] C. Clavius, *In sphæram Ioannis de Sacro Bosco commentarius*, Rome, 1570 - p.45
157. Sur ce sujet, *Cf* [40] E. Knobloch, *Sur la vie et l'œuvre de Christophore Clavius*, dans la *Revue d'Histoire des Sciences*, Tome 41, N.3-4, 1988 - p.331-356 ; la généalogie des diagrammes est traitée p.345-350
158. Aristote, *Traité de la production et de la destruction des choses*, trad. J.B. Saint-Hilaire, Paris, 1866 - Livre II, Chap.3 [330b, 30 - 331a, 5] : « Ἐπεὶ δὲ τέπαρα τὰ στοιξεῖα, τῶν δὲ τεττάρων ἓξ αἱ συζεύξεις, τὰ δ΄ ἐναντία οὐ πέφυκε συνδυάζεσθαι (θερμὸν γὰρ καὶ ψυχρὸν εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ πάλιν ξηρὸν καὶ ὑγρὸν ἀδύνατον), φανερὸν ὅτι τέτταρες ἔσονται αἱ τῶν στοιχείων συζεύξεις, θερμοῦ και ξηροῦ, καὶ θερμοῦ καὶ ὑγροῦ, καὶ πάλιν ψυχροῦ καὶ ὑγροῦ, καὶ ψυχροῦ καὶ ξηροῦ. Καὶ ἠκολούθηκε κατὰ λόγον τοῖς ἁπλοῖς φαινομένοις σώμασι, πυρὶ καὶ ἀέπι καὶ ὕδατι καὶ γῇ τὸ μὲν γὰρ πῦρ θερμὸν καὶ ξηρὸν, ὁ δ΄ ἀὴρ θερμὸν καὶ ὑγρὸν (οἷον ἀτυὶς γὰρ ὁ ἀήρ), τὸ δ΄ ὕδωρ ψυχρὸν καὶ ὑγρὸν, ἡ δὲ γῆ ψυχρὸν καὶ ξηρὸν. »

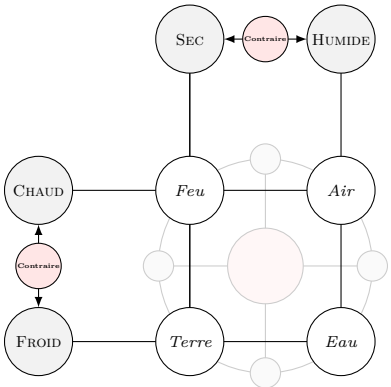
Il faut donc ajouter une règle à celle d'Aristote pour éliminer toutes les combinaisons qui ne font pas intervenir exactement deux qualités :

> *Le nombre des éléments, c'est-à-dire les types de corps simples sujets au mouvement, Aristote, mais également le pythagoricien Ocellos de Lucanie, le déduit, dans le livre II du traité De la Génération et de la Corruption des qualités primaires qui sont supposées être quatre, de sorte qu'on ait pour fondements les règles suivantes :*
>
> 1. *Tout élément est composé de deux qualités, ni plus ni moins, ainsi il est clair que les 1nions, con3naisons et con4naisons sont à exclure, tandis qu'on doit retenir les seules com2naisons qui sont au nombre de 6.*
> 2. *Aucune com2naison ne doit faire intervenir des qualités contraires, ainsi, derechef, deux combinaisons apparaissent inutiles, puisque ces qualités primaires manifestent deux contrariétés.*
>
> *Il reste donc quatre combinaisons, ce qui constitue le nombre des éléments. Nous ajoutons un schéma (voir la page de garde du présent traité) qui montre fort bien l'émergence des éléments à partir des qualités primaires.* [159]

Pour Leibniz, le diagramme explique donc « fort bien » (« *luculenter* ») la composition des éléments et donc le raisonnement combinatoire qui lui est associé.

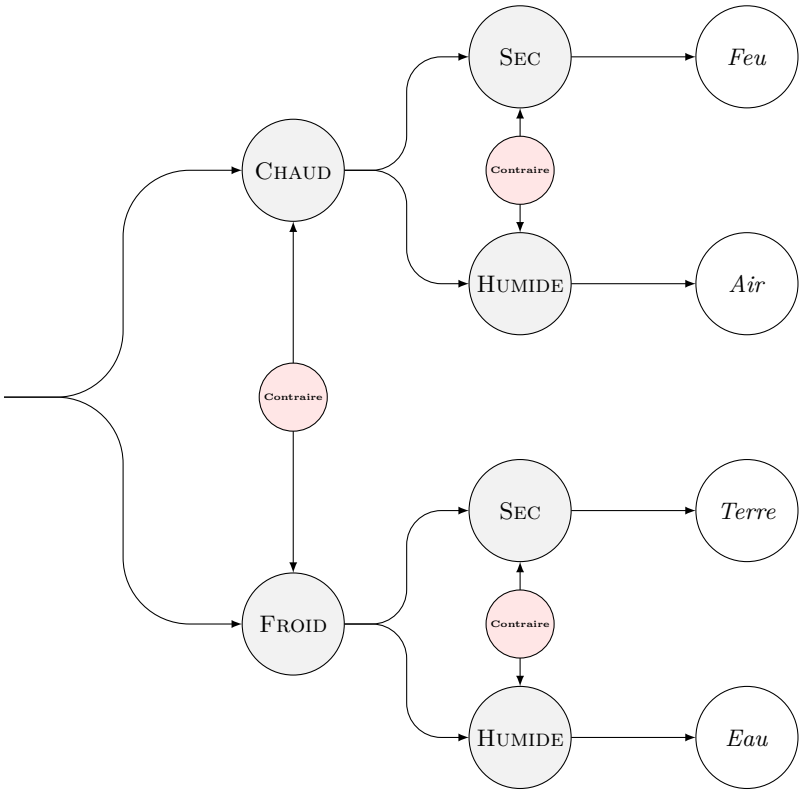



En effet, le diagramme permet non seulement d'exprimer les six combinaisons entre les quatre qualités, mais également de représenter les relations de contrariété. Les qualités connexes forment des compositions valides dans le pourtour du diagramme circulaire. Les qualités opposées, en revanche, voient leurs relations se croiser au centre de la figure en un point unique, qui ne permet donc pas de distinguer les deux combinaisons possibles. Cette juxtaposition permet d'amalgamer ces deux assemblages impossibles en un cas unique qui est par ailleurs exclu des autres, placé dans un mode d'existence différent. Ici, tous les éléments, qu'ils soient composés ou composants, sont placés dans une même suite homogène qui forme les pourtour de la figure. La forme tabulaire, à l'inverse, sépare distinctement les espèces par la disposition et le classement :




159. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.177-178 : « Elementorum numerum, seu corporis simplicis mutabilis species Aristoteles libr. 2. de Gen. cum Ocello Lucano Pythagorico deducit ex numero Qualitatum primarum, quas 4 esse supponit, tanquam Fundamento, his tamen legibus, ut 1. quodlibet componatur ex duabus qualitatibus et neque pluribus neque paucioribus, hinc manifestum est 1niones, con3nationes et con4nationem esse abjiciendas, solas com2nationes retinendas, quae sunt 6 ; 2. ut nunquam in unam com2nationem veniant qualitates contrariae, hinc iterum duae com2nationes fiunt inutiles, quia inter primas has qualitates dantur duae contrarietates, igitur remanent com2nationes 4, qui est numerus Elementorum. Apposuimus Schema (vide paginam titulo tractatus proximam), quo origo Elementorum ex primis Qualitatibus luculenter demonstratur. »

Notre figure montre qu'on peut garder la même disposition pour les composants, à savoir ici les corps élémentaires, mais simplement décaler les composants afin que les axes d'oppositions ne se croisent plus au centre de la figure mais forment les indexes des lignes et des colonnes. Dans cette représentation, les quatre qualités sont séparées en deux classes et ne forment plus un ensemble homogène de quatre éléments. Ce ne sont plus quatre qualités mais deux espèces qualitatives, à savoir la température et l'hygrométrie qui se distinguent chacune selon deux qualités, température chaude et température froide d'une part et hygrométrie sèche et hygrométrie humide d'autre part. La composition des corps élémentaires reviendrait alors à faire un raisonnement par embranchement en choisissant d'abord la température du corps puis son hygrométrie :




On voit qu'un tel raisonnement produit les éléments dans un ordre qui ne respecte pas l'ordre cyclique du diagramme de macrocosme. En effet, on obtient : *Feu*, *Air*, *Terre* et *Eau*, ce qui revient à lire la table de gauche à droite et de bas en haut. En lisant le long du diagramme circulaire, on obtient : *Feu*, *Air*, *Eau* et *Terre*, ce qui revient à lister les combinaisons de sortes que deux composés voisins aient toujours un composant en commun. On constate que c'est de cette manière qu'Aristote fait la liste des combinaisons, et ensuite des corps élémentaires :

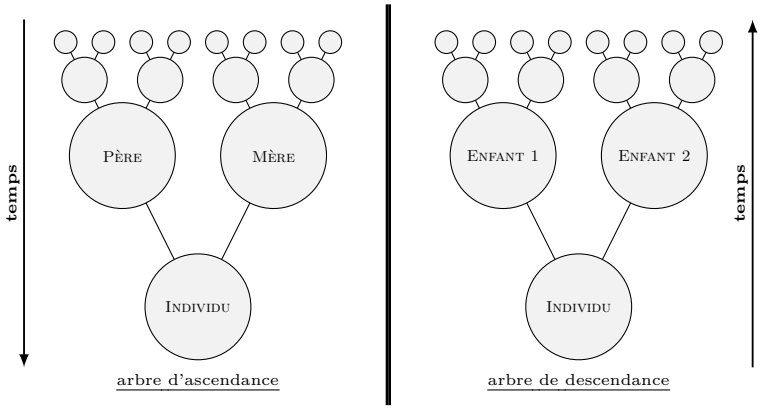
1. chaud/sec - 2. chaud/humide - 3. froid/humide - 4. froid/sec

Nous avons vu, au travers de la notion de complexion de classes notamment, que la coexistence des éléments primitifs est un principe important pour la pratique tabulaire du jeune Leibniz. Le diagramme du macrocosme permet de faire coexister non seulement les composants mais également les composés, dans un même espace commun. Ici encore, la structure de cette figure révèle et incarne certains principes métaphysiques des objets qu'elle représente.

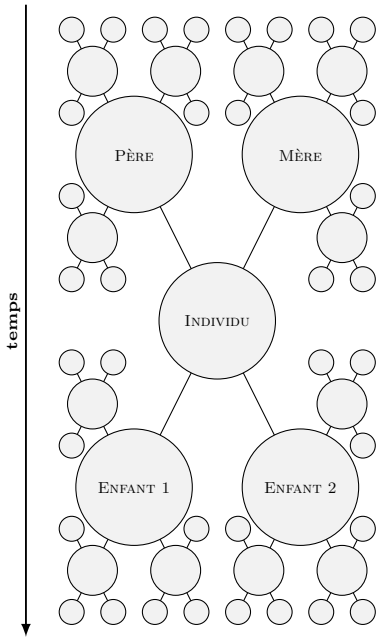
**Le graphe des parentés**

Les arbres de parenté constituent le deuxième usage du troisième problème, sur les complexions de classes. Ces dernières interviennent, comme nous l'avons vu, lorsqu'il s'agit de déterminer le nombre de personnes le long d'une branche de l'arbre, en tenant compte du sexe. Mais ce calcul ne représente qu'une petite partie des réflexions développées sur le sujet de la généalogie. Leibniz se consacre longuement à décrire la forme et la structure du réseau des liens de parenté. L'arbre généalogique constitue un véritable

paradigme pour les graphes arborescents. Par ailleurs, certains arbres montent dans le sens des ancêtres, tandis que d'autres montent dans le sens des descendants. Le processus de filiation est donc un objet particulièrement adapté à ces représentation par embranchement, chaque individu étant issu de plusieurs parents et pouvant donner naissance à plusieurs enfants. Dans un cas comme dans l'autre, le graphe est placé dans un repère temporel orienté :




Mais si l'on souhaite représenter les deux phénomène sur une même figure, il ne suffit pas d'accoler les racines des deux arbres. En effet, si la racine a plusieurs branches vers le bas et plusieurs vers le haut, ce doit être également le cas de tous les autres nœuds du graphe. Ceci a pour conséquence de faire bourgeonner la structure de sorte qu'il soit impossible de la garder lisible tout en maintenant l'axe temporel orienté :




Rappelons qu'il s'agit d'applications à la jurisprudence, et dans le contexte historique où écrit le jeune Leibniz, on ne considère évidemment pas l'éventualité d'avoir des enfants avec des partenaires différents. Ainsi le deuxième enfant du père doit être aussi celui de la mère et réciproquement, ce que notre schéma ne montre pas. Leibniz propose un diagramme pour ce problème, mais il n'est pas certain que ce dernier soit à proprement parler un arbre généalogique, comme nous allons le voir. Ainsi, il n'est pas possible de déterminer précisément ce que le jeune philosophe considère comme un « arbre généalogique » (« *arbor consanguineitatis* ») à partie de cette seule description :

> *En outre, j'appelle courbes de parenté, par exemple sur un chemin dans l'arbre généalogique, les lignes et les angles, tandis qu'on parcourt tantôt vers le haut ou vers le bas, tantôt sur les côtés.* [160]

160. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.207 : « Flexus autem cognationis, voco ipsa velut itinera in arbore consanguineitatis, lineas angulosque, dum modo sursum deorsumve modo in latus itur. »

Cette description s'accord d'avantage avec notre troisième schéma bourgeonnant, car il présente effectivement les trois sens de parcours : l'ascendance vers le haut, la descendance vers le bas et une même génération sur les côtés. De fait, les arbres d'ascendance et de descendance seuls ne peuvent pas faire apparaître les oncles ou les cousins par exemple. Cela nécessite de combiner les deux approches. Leibniz définit donc une parenté comme certaine combinaison de relation d'ascendance et de descendance :

> *Une parenté est la forme d'une ligne ou de plusieurs lignes menées depuis une personne parente à celle donnée au moyen de droites, de coudes et de leurs alternances.* [161]

La parenté est donc le chemin qui relie un nœud de l'arbre généalogique à sa racine, c'est-à-dire l'individu donné. Ce chemin est composé d'une alternance de droites et de changements de direction. Ceci revient bien à combiner des connexions ascendantes avec des connexions descendantes dans l'arbre. Ces connexions peuvent être réduites à deux éléments primitifs : la relation ascendante unitaire, que Leibniz note « le père » (« *Pater* ») et la relation descendante unitaire, qu'il note « le fils » (« *Filius* »).

> *Un terme est une personne ou une parenté qui relève du concept de combinaison, par exemple le frère est le fils du père. Donc du père et le fils sont les termes dont est composé le concept de frère. Les termes sont en outre ou bien primitifs, et à proprement parler, il n'y a de tels que ceux-là : le père et le fils, mais pour la facilité de nos calculs, nous supposerons primitives toutes les personnes d'une ligne droite, soit vers le haut, soit vers le bas ; ou bien ils sont dérivatifs : à proprement parler, ce sont tous ceux qui sont éloignés de plus d'un degré de celui qui est donné ; mais à parler plus largement, ce sont seulement toutes les transversales.* [162]

Notons donc $P$ et $F$ ces deux termes primitifs. Leibniz observe que la composition de ces deux relations n'est pas symétrique :

- ⋆ Le père du fils est nécessairement l'individu lui-même : $P.F = I$
- ⋆ Le fils du père n'est pas nécessairement l'individu lui-même, mais peut-être son frère ou sa sœur. Ainsi $F.P \neq I$

Dans notre schéma en bourgeons, cette asymétrie n'existe pas. De fait le parent de l'enfant n'est pas nécessairement l'individu lui-même. Cette asymétrie provient des choix d'identification que fait Leibniz. En faisant abstraction des sexes, il considère que le père et la mère sont une seule personne, mais pas le frère et l'individu donné. Ainsi, le père a deux enfants, à savoir le frère et l'individu donné, tandis que l'individu donné n'a qu'un seul parent : le père. En composant ces relations primitives entre elles, on constate qu'elles se simplifient jusqu'à ne laisser que deux termes, le premier composé de $F$ et le second composé de $P$. Par exemple :

$$\begin{aligned} & \underbrace{P.F.}_{=I} F.P. \underbrace{P.F.}_{=I} F.F. \underbrace{P.F.}_{=I} P.P. \underbrace{P.F.}_{=I} \underbrace{P.F.}_{=I} F. \underbrace{P.F.}_{=I} P.P. \underbrace{P.F.}_{=I} F. \underbrace{P.F.}_{=I} \\ = \; & F. \underbrace{P.F.}_{=I} F.P. \underbrace{P.F.}_{=I} P. \underbrace{P.F.}_{=I} \\ = \; & F.F.P.P. \end{aligned}$$

Leibniz ne formalise pas la solution de cette sorte, mais il aboutit néanmoins à la même conclusion :

> *De plus toutes les transversales sont composés de deux termes en lignes droites.* [163]

Il donne par ailleurs l'argument $P.F. = I$, comme explication de cette propriété :

> *En effet toutes les personnes transverses sont composées de deux termes, une en droite parenté ascendante et l'autre descendante. De plus, il en est toujours ainsi, puisqu'on joint ensemble l'ascendance, prise au cas oblique et la descendance prise au cas droit ; par exemple le frère c'est-à-dire le fils du*

161. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.207 : « *Cognatio* est forma lineæ vel linearum a cognata persona ad datam ductarum ; ratione rectitudinis et inflexionis, et harum alternationis. »

162. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.207-208 : « *Terminus* est persona vel cognatio, quæ est de conceptu complexæ, v.g. *frater* est Patris filius. Igitur *Patris* et *Filius*, sunt Termini ex quibus conceptus Fratris componitur. Termini autem sunt vel primi, tales accurate loquendo sunt hi solum : Pater et filius, nos tamen commodioris computationis causa, omnes personas lineæ rectæ vel supra vel infra, supponemus pro primis ; vel orti : accurate loquendo omnes qui plus uno gradu remoti sunt a Dato ; laxius tamen, omnes transversales tantum. »

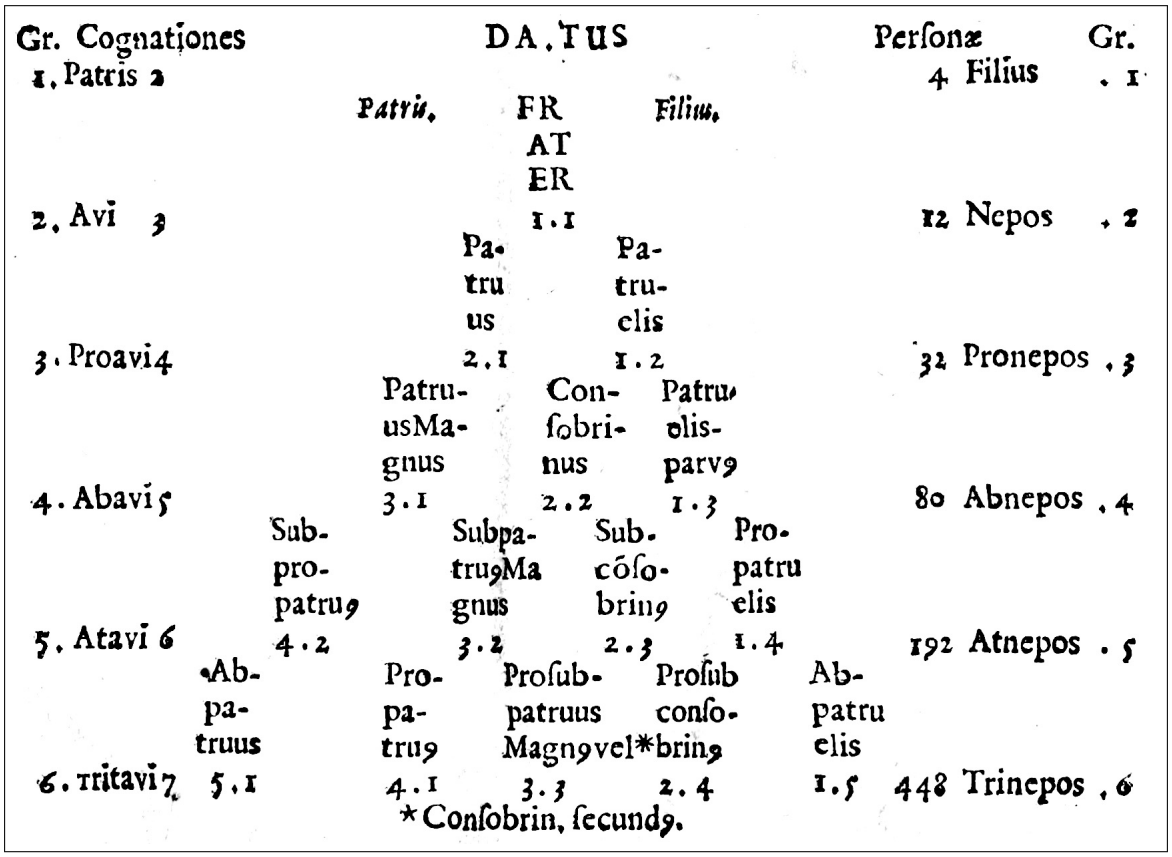
163. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.208 : « Omnes autem transversales componuntur ex duobus terminis lineæ rectæ. »

*père. Par contre, à l'inverse, on retrouvera la personne donnée, ainsi celui qui nomme le père du fils se nomme lui-même. Parce qu'un seul père peut avoir plusieurs fils et non le contraire.* [164]

Ainsi, toutes les parentés sont entièrement déterminées par la donnée de deux relations que Leibniz choisit de qualifier par abus de langage comme primitives, à savoir une ligne droite ascendante, composée de $p$ relations $F$ et une ligne droite descendante, composée de $q$ relations $P$ :

$$\underbrace{F.F\dots F}_{p \text{ fois}}.\underbrace{P.P\dots P.}_{q \text{ fois}}$$

La relation de parenté est donc caractérisée par ces deux nombres : $p$ la taille du chemin $F.F\dots F$ qui monte depuis le parent en question jusqu'à l'aïeul commun, puis $q$ la taille du chemin $P.P\dots P$ qui descend depuis cet aïeul vers l'individu donné. Leibniz propose alors le diagramme suivant :




*Dissertatio de Arte Combinatoria* (1666) - p.53

Ce diagramme prend la forme d'un triangle, comme Leibniz le qualifie lui-même : « triangle » (« *triangulum* »). Les arbres généalogiques simples, dont les graphes formes des arbres depuis l'individu-racine, ont également une apparence triangulaire, mais ils sont cependant très différents, car les chemins y sont univoques. Dans la table triangulaire, plusieurs chemins permettent de relier un même couple de points. Dans la description de ce schéma, Leibniz explique d'abord la signification des objets, c'est-à-dire des points, puis celle des relations, c'est-à-dire des différentes droites :

*Ici, on entend les personnes par des points. Les nombres contenant des points désignent les termes, c'est-à-dire les degrés des lignes droites (les ascendants pour le premier et les descendants pour le second), dont est composé le degré transversal donné. Le long d'une même ligne transversale, on trouve les parentés de même degré. Sur les obliques, du sommet jusqu'au bout à droite, mais aussi à gauche, on trouve des parentés homogènes mais de degrés différents. L'unique ligne verticale qui divise*

164. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.209 : « Componuntur enim omnes personæ transversæ ex 2 terminis, una cognatione recta ascendenti altera descendenti. Semper autem sic, ut ascendens in casu obliquo, descendens in casu recto conjungantur, v. g. frater, id est patris filius. At si contra, redibit persona data, nam qui patrem filii sui nominat se nominat. Quia unus pater plures filios habere potest, non contra. »

*le triangle du sommet vers la base, contient les parentés dont les termes ascendants et descendants sont de même degré. Je les appelle de même poids et on les trouve seulement aux degrés désignés par un nombre pair, excepté pour le cas particulier de un.* [165]

Nous verrons que cette procédure de définition est typique des tables triangulaires chez Leibniz. Après la définition des termes, il faut donner la définition de tous les types de ligne qui seront alors interprétées comme des progressions. La distinction faite entre objets d'une part et relations entre objets d'autre part pose un problème intéressant qui n'est, du reste ici, pas explicité par le jeune Leibniz. En effet, les parentés désignent à la fois les termes du diagramme et le relation entre les termes. Ainsi le frère est à la fois la composée des deux relations $F.P$ mais c'est aussi le terme auquel on aboutit lorsqu'on compose ces deux relations depuis l'origine du graphe, à savoir l'individu donné. Les objets sont donc définis par la relation qui les relie à l'origine, mais cette relation n'est pas attachée à un lieu précis du schéma. Elle n'est définie que localement, par la succession relative de ses composantes. Il s'agit de la même situation qu'un point de l'espace géométrique défini par le vecteur qui le connecte à l'origine d'un repère. L'espace vectoriel et l'espace affine sont isomorphes, c'est-à-dire qu'un même objet peut jouer le rôle de l'un ou le rôle de l'autre. L'espace affine est peuplé par des individus ancrés, tous équivalents : les points. Il n'est pas centré. L'espace vectoriel contient des relations locales qui sont sous-déterminées : les vecteurs. En effet, pour être parfaitement définie, une relation doit être jointe au deux termes dont elle forme le rapport. Les vecteurs sont la donnée de cette relation, sans la donnée des termes qu'elle met en relation. En réalité, il est seulement nécessaire de donner un seul des deux termes. De fait, de la même manière que la relation est entièrement déterminée par la donnée de ses deux termes $a$ et $b$, la donnée de l'un des deux et de ladite relation détermine entièrement le terme restant. Autrement dit, quelque soit le point qu'on considère, il n'entretient jamais la même relation avec deux autres points distincts :

$$\forall x, (\forall y_1 \forall y_2, \quad [R(x, y_1) = R(x, y_2) \Longrightarrow y_1 = y_2])$$

Ainsi, il suffit d'affecter un seul point à l'espace vectoriel pour qu'il devienne un espace affine. De la même manière, il suffit d'affecter un individu à toutes les relations de parenté pour obtenir tous les parents de cet individu. Ce point d'origine étant quelconque, et donc indéterminé, on ne résout la sous-détermination des vecteurs que de manière formelle. On ancre les relations sur un point lui-même mobile. L'espace ainsi obtenu est en réalité toujours un espace vectoriel et relatif, mais sur lequel on a posé le formalisme de l'espace affine, permettant ainsi de considérer les relations comme des objets et les distances comme des lieux.

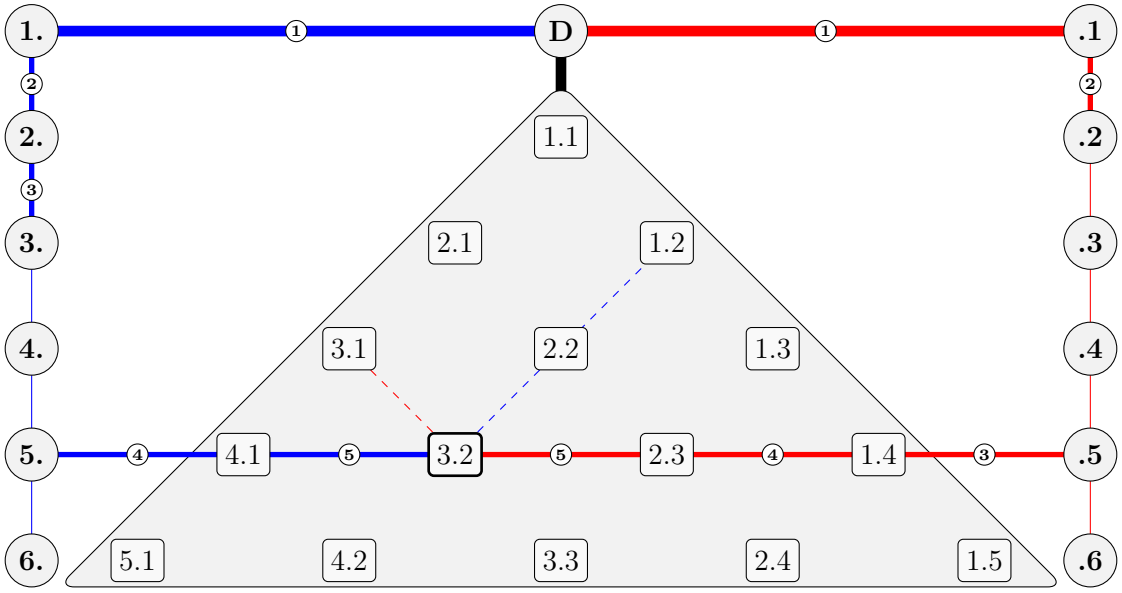
Leibniz ne traite pas cette question. Elle influence néanmoins la manière dont il construit le diagramme. Les termes du triangles sont uniquement ceux que Leibniz appelle « transverses » (« *transversæ* »), c'est-à-dire ceux qui sont composés d'au moins une relation $F$ et une relation $P$. Les termes purs, c'est-à-dire composés seulement de $F$ ou seulement de $P$, que Leibniz nomme improprement primitifs, ne sont pas dans le triangle mais forment deux colonnes verticales de part et d'autre du schéma. Contrairement aux termes composés du triangles, ces termes purs ne sont pas des points objets, mais des vecteurs relations. En effet, les termes sur la colonne de gauche, qui sont uniquement composés de $P$, sont tous au génitif,

165. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.209 : « Personæ eo loco intelligantur, ubi puncta sunt. Numeri puncta includentes, designant terminos, seu gradus lineæ rectæ (antecedens ascendentis, sequens descendentis), ex quibus datus gradus transversalis componitur. In eadem Linea transversa directa sunt ejusdem gradus cognationes : obliquæ a summo, ad imum dextrorsum ordinem generationis ; at sinistrorsum complectuntur cognationes homogeneas gradu differentes. Linea perpendicularis unica a vertice ad basin, triangulum dividens, continet cognationes quarum terminus et ascendens et descendens sunt ejusdem gradus ; tales voco *æquilibres*, et dantur solum in gradibus pari numero signatis, in uno non nisi unus. » - *Nota Bene* : il nous semble que ce passage contient une erreur typographique, présente dans l'édition originale et qui a donc été reprise dans toutes les éditions ultérieures. En effet, en lisant « In eadem Linea transversa [...] : obliquæ a summo, ad imum dextrorsum [...] ; at sinistrorsum [...]. », il y a une opposition entre les lignes obliques vers la gauche d'une part, où les degrés sont différents et les obliques vers la droites et les transversales d'autre part où les degrés sont les mêmes. Or dans la figure, il faut plutôt séparer les obliques gauches et droites d'une part, où les degrés sont différents et les transversales d'autre part, où les degrés sont égaux. C'est pourquoi nous suggérons de remplacer le signe « : »par " ;", ce qui permet de séparer les trois cas. Nous avons intégré cette correction dans la traduction. Cela étant, les obliques vers la gauche contiennent effectivement des parentés homogènes, dans le sens où ce sont des relations de filiation. Au contraire celles vers la droite, ne sont pas homogènes dans ce sens. Bien que le texte original rende mieux compte de ce fait que notre hypothèse typographique, nous maintenons cette correction qui nous paraît plus cohérente avec le reste du texte. En effet, la notion d'homogène n'est pas définie par Leibniz, alors qu'il est assez clair qu'il considère que seule les droites transversales préservent le degré global.

alors que les termes du triangle sont au nominatif. Ceci révèle la différence de nature entre ces deux régimes de classification. Par symétrie, la colonne de droite réalise la même fonction relationnelle. En effet, dans la relation $q.p$, correspondant dans notre écriture à $p$ composantes $F$ puis $q$ composantes $P$, le premier terme en $q$ est complément du nom du second terme en $p$[166]. Ainsi, dans 3.2, 2 correspond au petit-fils et 3 à l'arrière-grand-père. Et dans la relation "petit-fils de l'arrière-grand-père", la relation composée de $P$ "arrière-grand-père" est bien complément du nom de la relation composée de $F$ "petit-fils". Ceci explique pourquoi la colonne de gauche est au génitif et celle de droite au nominatif.
Les termes composés ou dérivatifs sont donc accompagnés de deux échelles vectorielles qui permettent de définir chacune de leurs deux composantes. Pour décrire le diagramme, Leibniz donne l'image d'une balance. Les colonnes verticales représentent les poids mis de chaque côtés et les lieux du triangle représentent les différentes positions de la balance. Ainsi, pour déterminer la position d'une parenté, on applique le principe archimédien des leviers, c'est-à-dire que la distance entre le terme d'un bras et l'origine donnée est d'autant plus petite que le bras est lourd :

> *En effet, si on s'imagine une balance dont le pivot serait la ligne du premier degré et les bras seraient en vérité, pour la droite la ligne verticale menée depuis le sommet des personnes descendantes, et quant à la gauche la ligne verticale menée depuis le sommet des ascendants, connectant à un terme ou ascendant ou descendant une parenté donnée. Ainsi, si les bras sont égaux de part et d'autre, comme* 3.3 *ou* 2.2 *etc., la parenté sera de même poids et devra être placée au milieu du triangle. S'ils sont inégaux, la parenté devra être placée sur un coté, de telle sorte qu'elle soit plus voisine de la ligne droite, ou bien des ascendants ou bien des descendants dont on détermine que le bras est le plus long.*[167]

Une autre façon de le voir est de considérer qu'il doit y avoir le même nombre d'unités de chaque côté, les unité de de distance horizontales étant compensées par les unités de poids verticales et en considérant la ligne de pivot comme une unité de poids :

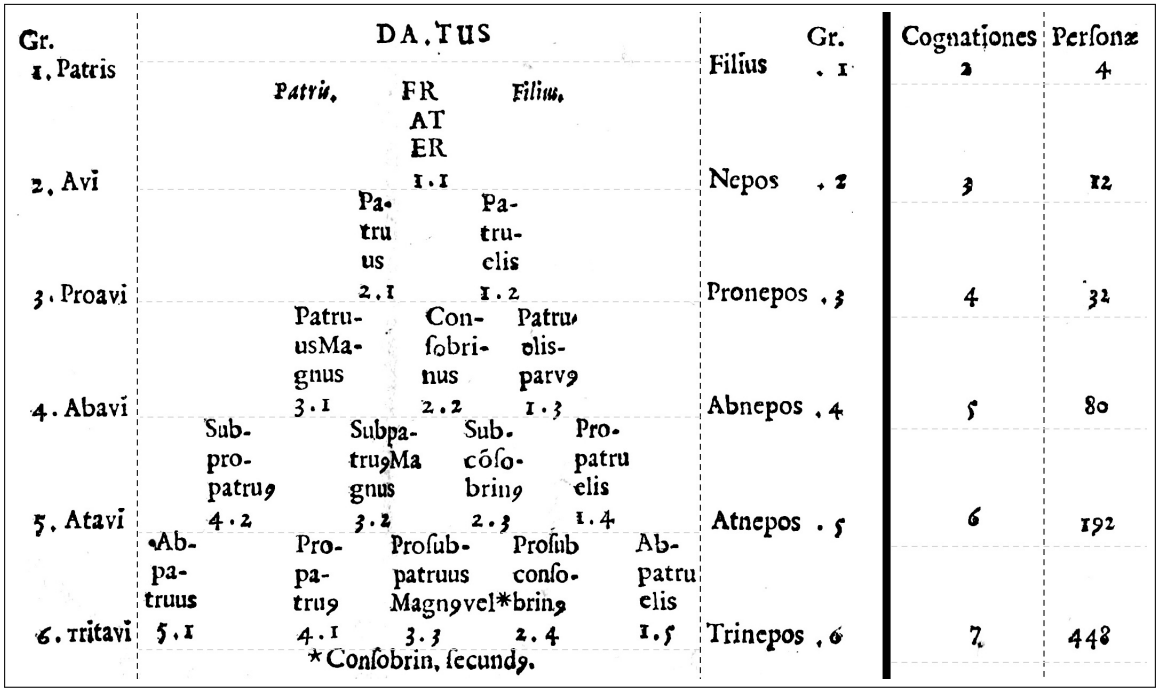



Par ailleurs, Leibniz ajoute sur le diagramme deux colonnes combinatoires, l'une dénombrant le nombre de parenté à chaque degré et l'autre le nombre de personnes, en tenant compte du sexe. Dans l'édition originale, et donc dans toutes les éditions ultérieures, la disposition de ces deux colonnes est trompeuse. On y voir un rapport entre le bras droit de la balance constitué de l'échelle des descendants et le dénombrement des personnes d'une part et un rapport entre les bras gauche des ascendants et le nombre des

166. Pour faire correspondre au français, nous avons inversé l'ordre de composition, par rapport au latin. Ainsi si le frère est le "fils de père" *F.P* en français, il est "*patris filius*" *P.F* en latin. C'est pourquoi le premier coefficient désigne le terme au génitif en latin, alors que dans notre notation français, le complément du nom est à la deuxième place.

167. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.209 : « Nam si libra esse fingatur, cujus Trutina sit linea gradus primi ; brachia vero sint : dextrum quidem, linea perpendicularis a summa persona descendentium ; sinistrum vero, perpendicularis a summa ascendentium ducta ad terminum vel ascendentem vel descendentem datam cognationem componentem ; tum brachiis æqualibus, si utrinque 3, 3 aut 2, 2 etc., cognatio erit æquilibris et ponenda in medio trianguli ; in inæqualibus, cognatio talis ponenda in eo latere, quod lineæ rectæ vel ascendenti vel descendenti, ex qua brachium longius sumtum est, est vicinum. »

parentés d'autre part. En réalité, ces deux colonnes sont sans rapport aucun avec leur latéralisation et l'on peut très bien les séparer de la figure pour plus de lisibilité :




La figure de la pesée montre que Leibniz ne représente pas directement les relations sur le schéma. La relation est décomposée en unité de distance et unité de poids afin d'obtenir un classement rationnel des termes composés. Cette représentation permet donc de comprendre comment ranger les différentes relations de parentés afin d'effectuer les deux opérations de dénombrement, situées à droite dans notre reconstitution. Cependant, Leibniz mentionne explicitement les axes obliques dans la description de la figure. Il y a donc une autre interprétation de ce diagramme qui permet de voir directement le lien entre les termes comme les relations entre les différents parents. Mais cette interprétation n'est pas complètement maîtrisée par le jeune Leibniz.
Commençons par faire le constat suivant :

- ⋆ Si l'on considère un segment unité quelconque, descendant vers la gauche, alors il relie un certain point $q.p$ au point $q.(p+1)$. Alors on a :

$$\underbrace{F.F\dots F}_{(p+1)\text{ fois}}.\underbrace{P.P\dots P}_{q\text{ fois}} = F.\left(\underbrace{F.F\dots F}_{p\text{ fois}}.\underbrace{P.P\dots P}_{q\text{ fois}}\right)$$

  Donc $q.(p+1)$ est le fils de $q.p$. Ce segment représente la relation $F$.

- ⋆ Si l'on considère un segment unité quelconque, descendant vers la droite, alors il relie un certain point $q.p$ au point $(q+1).p$. Alors on a :

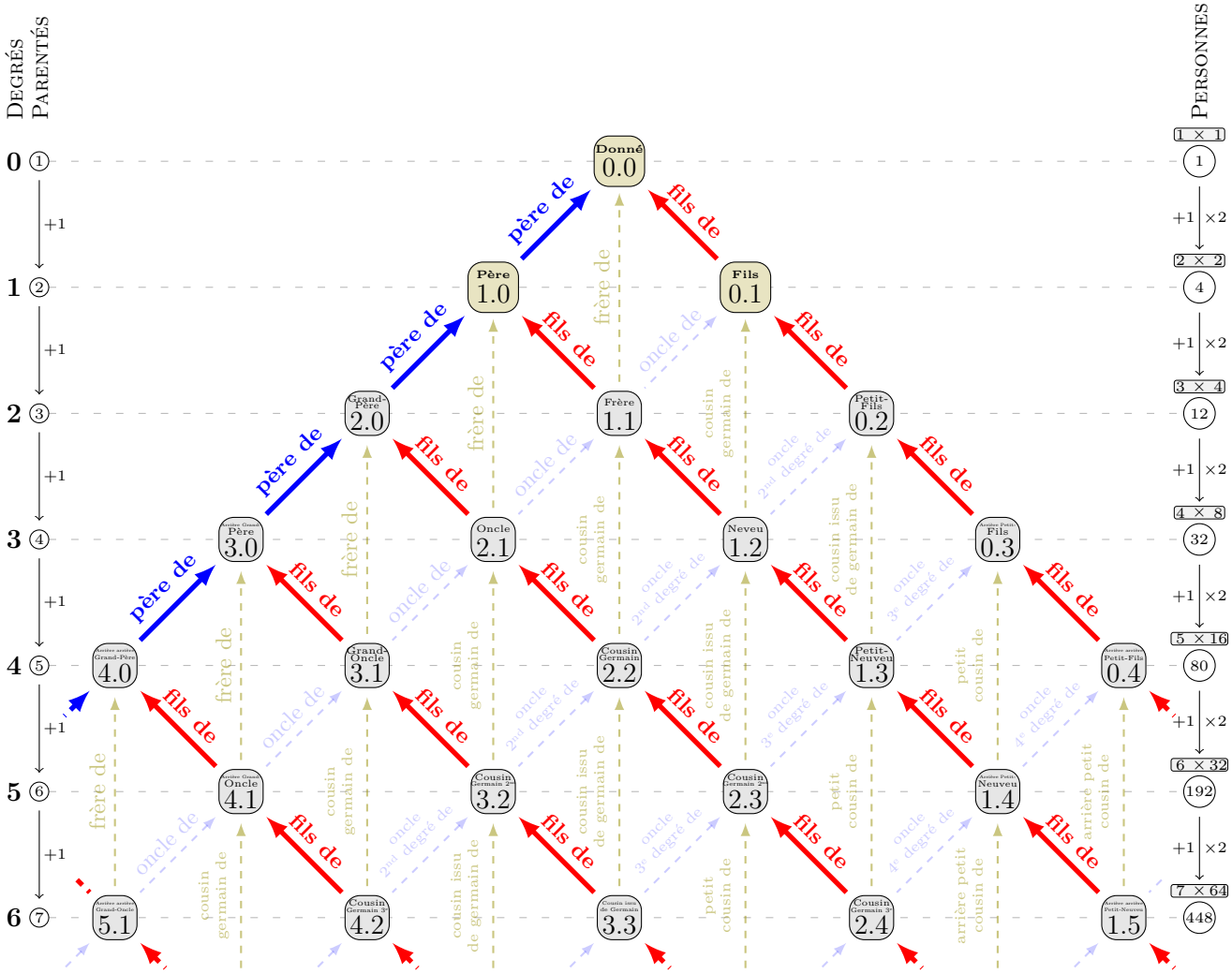
$$\underbrace{F.F\dots F}_{p\text{ fois}}.\underbrace{P.P\dots P}_{(q+1)\text{ fois}} = \left(\underbrace{F.F\dots F}_{p\text{ fois}}.\underbrace{P.P\dots P}_{q\text{ fois}}\right).P$$

  Donc $(q+1).p$ est le $q.p$ du père et non le père du $q.p$. Ce segment ne représente donc pas la relation $P$, à moins que $p=0$, alors :

$$\underbrace{P.P\dots P}_{(q+1)\text{ fois}} = P.\left(\underbrace{P.P\dots P}_{q\text{ fois}}\right)$$

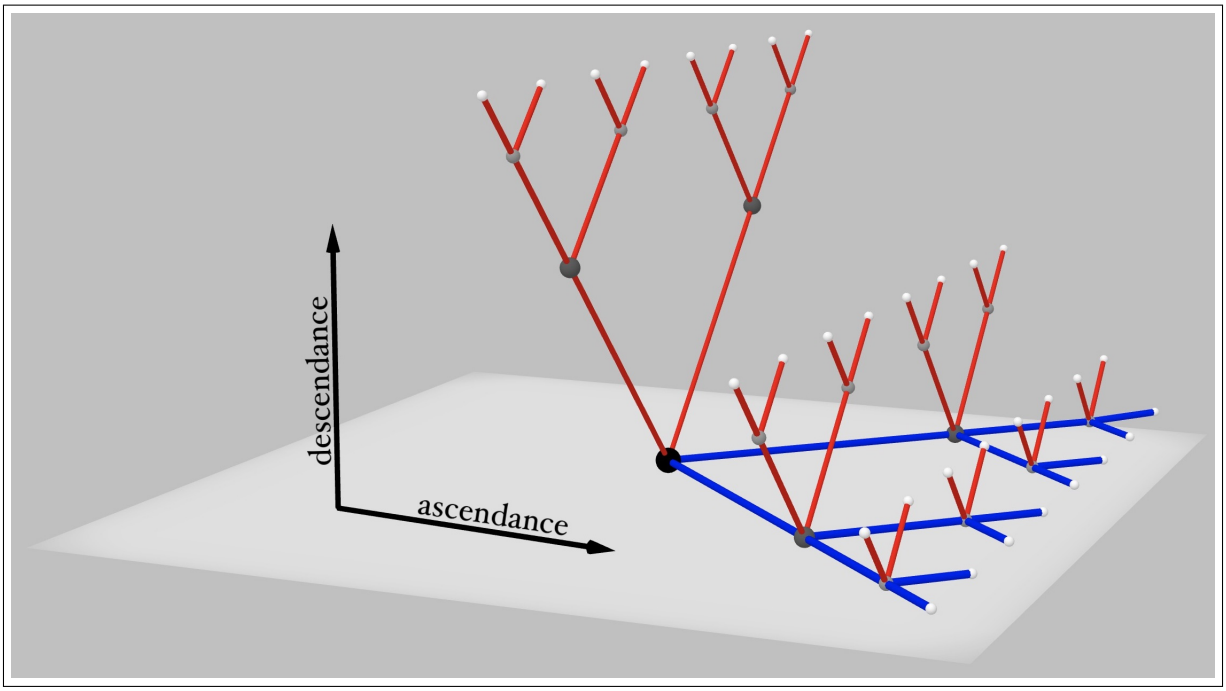
  Ici $(q+1).0$ est bien le père de $q.0$. Le segment représente alors la relation $P$.

En conséquence les lignes obliques vers la gauche ou vers la droites ne sont pas de même nature sur le diagramme. Les lignes qui composent les relations de parentés sont donc seulement les lignes obliques descendant vers la gauche et la ligne oblique unique descendant vers la droite et qui relie les différents termes $q.0$ :




Or les termes $q.0$ et $0.p$ ne sont pas présents sur le diagramme de Leibniz. Comme nous l'avons vu, les termes purs sont sur les bras de la balance et représentent des relations vectorielles et non des parents individuels. Le diagramme ne permet donc probablement pas à Leibniz de représenter correctement la présente interprétation graphique, bien qu'il faut noter, toutefois, qu'un détail s'accorde relativement bien avec cette dernière : les termes primitifs dans les échelles de poids sont situés à la bonne hauteur, c'est-à-dire celle de leur degré. De fait, dans l'image de la balance, les bras sont des échelles graduées autonomes, et n'ont pas besoin d'être mises en regard avec le triangle pour être correctement interprétée. La position des degrés extérieurs outrepasse donc l'image de la balance.
En considérant le diagramme sous cet angle, on voit qu'il n'a pas une structure arborescente semblable aux arbres généalogiques. Elle ne correspond en fait pas même à celle des tables triangulaires, au sein desquelles chaque terme peut être relié à ses deux voisins du dessous ou bien à ses deux voisins du dessus. Finalement, les relations de parentés s'organise ici selon une disposition tabulaire de type liste de listes. En effet, les termes forment une série de progressions généalogiques chacune issue d'un aïeul direct de l'individu donné ou bien de lui-même. Cette suite d'aïeux permet d'ordonner ces différentes progressions. Ainsi le terme $q.p$ est le $p$-ième descendant direct du $q$-ième aïeul, c'est-à-dire le $p$-ième terme de la $q$-ième progression. Notre figure montre que les relations obliques, descendant vers la droite, sont constantes le long d'une même droite. Ainsi, la suite des termes de rang 1, c'est-à-dire les $q.1$ est une progression d'oncles, la suite des termes de rang 2, c'est-à-dire les $q.2$ est une progression d'oncles du deuxième degré,

etc. En considérant les termes au sein d'une suite de progressions, on créé donc plus naturellement de nouvelles progressions en regroupant ensemble les termes de même rang, c'est-à-dire ici la progression oblique, descendant vers la droite. Or, pour Leibniz, c'est le degré qui constitue le premier paramètre qui classe les relations de parenté. Cela revient à regrouper les termes horizontalement, c'est-à-dire tous ceux dont la somme du rang de la progression et du rang dans la progression vaut ledit degré. On verra qu'on peut appliquer un raisonnement similaire au triangle arithmétique, raisonnement qui peut justifier la disposition en colonne de la table ℵ des coefficients combinatoires.
On peut retrouver la structure arborescente des arbres généalogiques dans ce diagramme en considérant le processus de dénombrement des personnes, en tenant compte du sexe. De fait, le long de chaque branche qui relie un terme à la racine, Leibniz place autant de facteur 2 qu'il y a de segments unitaires. Chaque relation supplémentaire double le nombre d'individu. Dans le relation $F$, il y a deux enfants, le fils et la fille. Dans le relation $P$, il y a deux parents, le père et la mère. Ainsi, chaque progression généalogique $F.F \dots F$ devient un arbre binaire. Et ces arbres sont issus de chaque nœud de la progression des $P.P \dots P$, elle-même devenue un arbre binaire :




Contrairement au graphe bourgeonnant, où tous les nœuds sont reliés à quatre branches, ce graphe n'est pas homogène. En effet la prise en compte des sexes ne rompt pas l'asymétrie des relations $P.F = I$ et $F.P \neq I$. L'individu a désormais deux parents, à savoir le père et la mère, mais ces derniers ont chacun trois enfants, à savoir le frère, la sœur et l'individu. Ainsi, ce raisonnement distingue le fils du père du fils de la mère et la fille du père de la fille de la mère.

Revenons, pour finir, sur la notation $q.p$, en commençant par l'interprétation des cas grammaticaux. Le fait que Leibniz ait décliné les termes de la colonne de gauche au génitif a été interprété comme un indice de leur nature relationnelle, par opposition à la nature individuelle des termes dans le triangle. Cette distinction casuelle permet effectivement de mettre en évidence une distinction fonctionnelle au sein de termes du diagramme. Mais l'analyse grammaticale ne s'accorde pas avec notre interprétation. En effet, dans la forme "$a$ est la relation $R$ de $b$", la relation $R$ est un attribut du sujet $a$, donc au cas latin nominatif ; tandis que le terme $b$ est un complément du nom de la relation $R$, donc au cas latin génitif. Ainsi, c'est la relation qui est au nominatif et l'objet qui est au génitif. En conséquence, la colonne verticale de gauche devrait être interprétée comme une liste d'individus objets et non de relations vectorielles de parenté comme nous en faisons l'hypothèse.
Comme nous l'avons montré, le diagramme de Leibniz a pour rôle d'expliciter les composantes des relations. Reprenons l'exemple 3.2. Les colonnes verticales, comme un lexique, donne la signification du terme .2, à savoir "le petit-fils" que l'on note $F_2$ et du terme 3. à savoir "de l'arrière-grand-père" que l'on

note $P_3$. Notons $D$ le donné et $C_g$ le cousin germain du deuxième degré désigné par 3.2. Il existe alors deux interprétations de la proposition suivante :

*"le cousin germain du deuxième degré est le petit-fils de l'arrière-grand-père"*

$$\overbrace{C_g}^{\substack{\text{nominatif}\\ \text{terme } a}} = \overbrace{F_2}^{\substack{\text{nominatif}\\ \text{relation } R}} . \overbrace{P_3}^{\substack{\text{génitif}\\ \text{terme } b}} \qquad \text{ou} \qquad \overbrace{C_g}^{\substack{\text{nominatif}\\ \text{terme } a}} = \overbrace{F_2 \ . \ P_3}^{\substack{\text{nominatif} \quad \text{génitif}\\ \text{relation } R}} . \overbrace{D}^{\substack{\text{génitif}\\ \text{terme } b}}$$

Dans la première expression, la relation est $F_2$ qui relie les termes $C_g$ et $P_3$, tandis que dans la seconde, la relation est $F_2.P_3$ et relie les termes $C_g$ et $D$. Ceci montre que si le terme $F_2$ du bras droit de la balance est nécessairement relationnel, ce n'est pas le cas des termes du bras gauche. De fait, peu importe où il apparait dans le triangle, le terme 3. désigne toujours le même individu, à savoir l'arrière-grand-père du donné. Le bras droit de la balance s'applique à chaque terme du bras gauche, tandis que le bras gauche s'applique toujours un seul et unique terme, à savoir l'origine. La deuxième interprétation peut aussi désigner le terme $C_g$, non comme un objet, mais comme une relation :

$$\overbrace{C_g}^{\substack{\text{nominatif}\\ \text{relation } R}} . \overbrace{D}^{\substack{\text{génitif}\\ \text{terme } b}} = \overbrace{F_2 \ . \ P_3}^{\substack{\text{nominatif} \quad \text{génitif}\\ \text{relation } R}} . \overbrace{D}^{\substack{\text{génitif}\\ \text{terme } b}} \qquad \Rightarrow \qquad \overbrace{C_g}^{\substack{\text{nominatif}\\ \text{relation } R}} = \overbrace{F_2 \ . \ P_3}^{\substack{\text{nominatif} \quad \text{génitif}\\ \text{relation } R}}$$

Dès lors, pour ce dernier, on retrouve l'isomorphisme canonique entre espace vectoriel et espace affine centré. Il y a correspondance biunivoque entre les relations d'ascendance affectées à l'individu donné et les ascendants avec qui l'individu entretient ces relations. Cette bijection interdit donc de trancher entre les deux interprétations.

Quoiqu'il en soit, la notation $q.p$ contient en elle, de façon notable, l'idée de complémentarité entre la table et la forme qui nous avons déjà présentée. En effet, Leibniz précise que les individus du graphe ne sont pas seulement situés aux nœuds de ce dernier, mais sont littéralement incarnés par le point médian qui sépare les deux nombres dans la notation $q \bullet p$. Cette expression constitue donc une forme combinatoire qui représente de façon condensée toutes les relations explicitées dans la table. Cette interprétation anachronique doit être relativisée par le fait que Leibniz n'utilise jamais la notation formelle $q.p$ mais l'instancie systématiquement par des nombres particuliers, relatifs à une relation ou à un terme particulier.

## Conclusion

La *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8) est le produit d'un mélange extrêmement riche et intriqué d'influences. L'art des combinaisons s'y trouve à l'extrémité de nombreuses traditions que nous classons dans deux courants, à savoir le courant mystique et le courant mathématique. Dans le premier se placent bien sûr le lullisme et, dans une moindre mesure, la Kabbale. Dans le second se trouvent les usages classiques de la tradition combinatoire des seizième et dix-septième siècles, comme la musique ou la poésie. Le jeune Leibniz est un des premiers auteurs qui hérite de ces deux courants, et donc l'un des premiers qui ait l'occasion de les synthétiser. Si donc la majorité des commentateurs ont choisi de voir la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8) comme un point de départ, ce qui est pertinent dans une certaine mesure, elle peut aussi être avantageusement considérée comme un point d'arrivée. Leibniz applique sa démarche combinatoire à sa propre culture. De la combinaison de différents systèmes philosophiques, il invente de nouvelles idées, originales mais bâties sur la tradition.
En revanche, la pratique tabulaire présente dans l'ouvrage, et relativement rare dans le reste de ses écrits scolaires, témoigne d'un travail bien plus autonome et autodidacte. A travers la grande richesse des structures tabulaires dont il fait l'usage, Leibniz explore les possibilités prometteuses de ces diagrammes, dans un cadre épistémologique particulier, inféodé au principe méréologique du tout et de la partie. Cette posture entraine le jeune homme à construire des tables qui représentent des relations d'inclusion et de coexistence entre les termes. Cela remet en cause l'interprétation de Michel Serres, qui considère le tableau à double entrée comme la notion centrale de la pratique tabulaire de l'ouvrage. Nous avons montré qu'au contraire, les tables sont construites de façon asymétrique, comme des listes de listes. Pour finir, on trouve également, au sein de ces tables, des expressions formelles dignes de l'*ars characteristica* que le philosophe ambitionnera plus tard, comme les représentants des vers ou des mélodie, ou encore la notation des relations de parentés. Il ne s'agit pas d'y voir l'embryon de tels ou tels façon de faire chez le philosophe, car les sources disponibles ne permettraient pas d'étayer une telle hypothèse, mais plutôt de faire le constat des liens étroits qu'entretiennent nécessairement dans la pratique combinatoire *ars inveniendi* et *ars characteristica*, génération et représentation, tables et formes.

# *Historia et Origo Calculi Differientialis*

Le traité *Historia et Origo Calculi Differentialis* est un texte majeur du corpus mathématique de Leibniz. En matière d'heuristique et de méthodes de découverte, ce document constitue une pièce extrêmement précieuse, puisque l'auteur lui-même s'attèle à la tâche complexe de reconstituer son propre parcours de pensée dans l'élaboration de ce qui est considéré alors comme sa principale contribution mathématique, à savoir le calcul différentiel. Bien qu'il soit aujourd'hui très connu, parmi les commentateurs, il s'agit seulement d'une ébauche qui n'est pas finalisée. Néanmoins, contrairement à de nombreux manuscrits mathématiques qui sont des documents de travail n'ayant visiblement pas pour finalité d'être publiés, ni même diffusés en l'état, ce texte est directement adressé aux futurs lecteurs, et peut être conçu comme un projet de lettre ouverte, ou bien un article de journal. Il est publié pour la première fois par Gerhardt, en 1846 :

> *Dans ce climat pesant, qui rendit son séjour à Hanovre si pénible qu'il pensa passer les jours qui lui restaient à Vienne ou bien à Paris, Leibniz ne pût trouver le loisir nécessaire à la publication prochaine des Commercium epistolicum qu'il avait promis. Il souhaita néanmoins faire valoir ses droits, et écrivit le présent traité, qui est à présent imprimé pour la première fois : Historia et origo calculi differentialis. La mort, qui le frappe le 14 novembre 1716, mit un terme à tous ses plans.* [168]

Cette édition constitue encore aujourd'hui l'ouvrage de référence pour accéder à ce texte qui, étant très tardif, et le travail des éditeurs de l'*Akademie* étant chronologique, n'a pas encore été fait l'objet d'une édition critique respectant les normes scientifiques actuelles. De fait, Leibniz a produit deux brouillons pour ce texte, et Gerhardt n'a édité que celui qui lui paraissait le plus abouti, que nous appelons ici la version $B$ :

> *Pour ce traité, il existe deux brouillons. Pour la dernière version, que l'on peut reconnaître immédiatement du fait de sa plus grande étendue et de sa révision minutieuse, j'ai suivi l'expression, l'orthographe et la ponctuation aussi fidèlement qu'il était possible étant donné l'écriture souvent très peu lisible. Et j'ai joint des parties de la première version dans les notes.* [169]

En réalité, Gerhardt n'a inséré dans ses notes que très peu de chose de la première version, que nous appelons ici la version $A$. L'ouvrage de Gerhardt occulte donc une partie importante du matériau original.

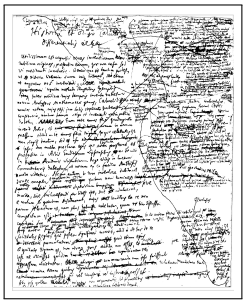
Les premiers travaux mathématiques de Leibniz, fondés sur les techniques de tabulations et de combinatoire et qui datent du début de son séjour à Paris, tiennent une place substantielle au sein de l'*Historia et origo calculi differentialis*. En particulier, le philosophe évoque le développement de la théorie des différences finies et la découverte du triangle harmonique. L'étude comparative entre les deux versions du texte accuse encore plus nettement le rôle central de ces travaux, et la place de la combinatoire dans cette face heuristique de l'œuvre leibnizienne.

168. [46] G.W. Leibniz, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, *ed.* K.I. Gerhardt, Hahn, 1846 - p.X, préface de Gerhardt : « Unter diesen drückenden Verhältnissen, die ihm den Aufenthalt in Hannover so verbitterten, dass er daran dachte, den Rest seiner Tage in Wien oder in Paris zu verleben, konnte Leibniz unmöglich die nöthige Müsse finden, um sein versprochenes *Commercium epistolicum* in nächster Zeit herauszugeben ; er wollte jedoch seine Rechte wahrnehmen, und schrieb die folgende, gegenwärtig zum ersten Male gedruckte Abhandlung : *Historia et origo calculi differentialise*. Der Tod, der ihn am 14. Nov. 1716 ereilte, setzte allen seinen Entwürfen ein Ziel. »

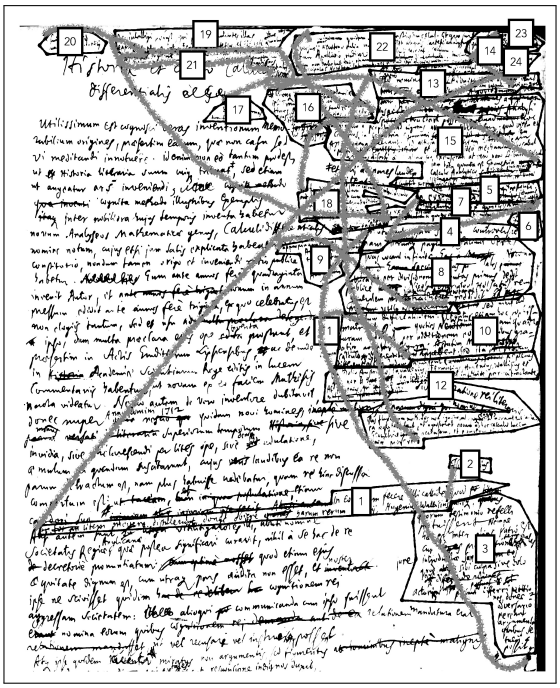
169. [46] G.W. Leibniz, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, *ed.* K.I. Gerhardt, Hahn, 1846 - p.X, préface de Gerhardt : « Von dieser Abhandlung sind zwei Entwürfe vorhanden. Ich bin dem späteren, der sogleich an dem grössern Umfang und der sorgfältigern Überarbeitung zu erkennen ist, so genau als es bei der öften sehr unleserlichen Hanfschrift möglich war, in Ausdruck, Orthographie und Interpunction gefolgt, und habe in den Anmerkungen einiges ans dem ersten Entwürfe mitgetheilt. »

**Comparaison des deux textes**

De nombreux indices matériels vont dans le sens de l'hypothèse de Gerhardt, à savoir que la version $A$ a été rédigée avant la version $B$. Bien que cette dernière soit effectivement plus développée, l'allongement n'est pas homogène. Ainsi, si Leibniz a augmenté certaines parties, il en a réduit d'autres qui se trouvent donc d'avantage détaillées dans la première version. Il se trouve que ce sont justement les passages qui nous intéressent, à savoir ceux qui concernent la théorie des différences finies et le triangle harmonique, que Leibniz a choisi de réduire dans la seconde version.
Le texte débute par une introduction qui place le contexte dans lequel le calcul différentiel s'est développé durant la seconde moitié du XVII$^{\text{ème}}$ siècle. Cette partie est bien plus concise dans la version $A$ que dans la version $B$ où Leibniz décrit également avec force précision le contexte dans lequel est apparue la controverse entre Newton et lui-même. Le réseau presqu'illisible de renvois et d'incise sur la première page de la version $B$ montre un travail considérable de révision.



Manuscrits de Leibniz - LH 35 7 15 Bl.1-2



Ceci semble donc indiquer que les deux versions diffèrent principalement par la posture que Leibniz y adopte. Dans la seconde version, la controverse occupe une place bien plus importante. On y trouve également de nombreux détails factuels sur les déplacements et conversations du jeune Leibniz, à l'époque des faits. La première traite d'avantage de la problématique conceptuelle, à savoir la façon dont le calcul peut être déduit logiquement des notions géométriques et arithmétiques sur lesquelles travaillaient la plupart des mathématiciens de l'époque. Ainsi, cette première version a pour principale finalité l'explication des faits tandis que la seconde relève d'avantage d'une défense qui vise à les rétablir. Pour le dire autrement, dans la version $A$, l'auteur se concentre d'avantage sur l'« origine » (« *origo* ») du calcul différentiel, tandis que la version $B$ donne une place centrale son « histoire » (« *historia* »).

**Algorithme et syntaxe**

L'un des arguments que Leibniz propose dès l'introduction, et ce dans les deux versions, est le suivant : ses détracteurs confondent l'application d'une certaine technique dans un cas particulier et la formalisation d'une méthode générale. A chaque fois, il évoque la même analogie, à savoir que les techniques de résolution de tangentes et de quadratures fondées sur les infinitésimaux, effectués par nombre des contemporains de sa jeunesse et de la précédente génération, sont à son calcul différentiel ce que les méthodes d'Apollonius sur les coniques sont aux théories algébriques de Viète et de Descartes :

Version $A$ :

> *Il faut donc savoir que son inventeur l'a traduite de l'arithmétique, c'est-à-dire des nombres vers la géométrie et les figures. Exactement de la même manière, Viète et Descartes ont traduit les équations depuis l'Algèbre, c'est-à-dire la science des nombres indéfinis vers la géométrie. Et ainsi, on pourrait dire qu'Appolonius, Pappus et d'autres anciens considèrent exactement les mêmes propriétés des courbes des coniques et de nombreuses autres sur lesquelles les modernes appliquent leur calcul. Pourtant ils ne possédaient pas le calcul. Et de la même manière, on pourrait dire que ceux de notre temps : Kepler, Cavallieri, Fermat, Huygens, Wallis, Wrenn, Jacob Gregory, Barrow et le très récent Newton ont considéré la chose sous le nom soit d'indivisibles, soit de quantités ou raisons infiniment petites naissantes ou evanescentes, soit finalement de fluxions, et ils en ont tiré de nombreuses choses dignes de savoir. Cependant, ils ne possédaient pas le moyen par lequel on pourrait la rapporter au calcul.* [170]

Version $B$ :

> *Ils font également preuve de sophisme lorsque dès que cet adversaire cherche une certaine quadrature en additionnant ce qui remplit progressivement la figure, il proclame aussitôt qu'il fait usage du calcul différentiel (par exemple p.15 de la correspondance). Mais dès lors ce calcul différentiel avait déjà été obtenu par Kepler (sur le tonneau autrichien* [171]*), Cavallieri, Fermat, Huygens et Wallis. Et qui ne traite pas de ces indivisibles ou de ces infiniment petits ? Cela dit, Huygens qui n'ignorait assurément pas ces méthodes de fluxions, ou quoi que ce soit dont ceux-ci ont connaissance ou discutent, se montra équitable lorsqu'il reconnut que ce calcul éclairait la géométrie d'une lumière nouvelle et en repoussait désormais les limites de façon merveilleuse. En vérité, il n'est venu à l'esprit de personne avant Leibniz de constituer un certain algorithme pour un nouveau calcul, par lequel on soulage l'imagination d'une constante attention aux figures ; ce que Viète et Descartes avaient fait pour la géométrie commune, c'est-à-dire appolonienne.* [172]

Notons au passage que ces deux extraits illustrent à nouveau la différence de ton entre les deux versions. Ainsi, l'apport de Leibniz ne se trouve pas dans la méthode, mais dans la théorie et la formalisation. Or, sur ce point, les deux versions diffèrent de façon substantielle. La version $B$ contient deux parties : une première qui décrit la découverte du calcul différentielle et une seconde qui porte sur la découverte de la notation du calcul. Leibniz semble donc introduire une distinction, par ailleurs très classique dans l'historiographie de l'algèbre, entre le calcul pris comme un algorithme, c'est-à-dire une suite d'opérations et le calcul pris comme une grammaire formelle, c'est-à-dire une suite de symboles respectant une certaine syntaxe. Cette distinction est moins clairement présente au sein de la première version.

170. LH 35, 7, 15, Bl.9-10, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, 1714 : « Sciendum est ergo eam ab inventore ab Arithmetica seu Numeriis ad Geometriam et Figuras fuisse traductam. Prorsus quemadmodum Vieta et Cartesius æquationes ab Algebra id est a scientia numerorum indefinitorum ad geometriam traduxere : itaque licet Apollonius, Pappus aliique veteres habeant proprietates curvarum conicarum aliarumque multarum easdem prorsus quibus recentiores ad calculum usi sunt, ipsum tamen calculum non habuere. Et eodem modo licet nostris temporibus Keplerus, Cavalerius, Fermatius, Hugenius, Wallisius, Wrennus, Jac. Gregorius, Barrovisu ac novissime Newtonus, sub indivisbilium vel infinite parvorum nascentium aut evanescentium quantitatum rationumve, vel denique sub fluxionum nomine rem consideravissent, multaque scitu digna inde eruissent ; modum tamen non habuere per quem ad calculum revocari posset. »

171. [38] J. Kepler, *Nova stereometria doliorum vinariorum, inprimis Austriaci ; et usus in eo virgæ cubicæ. Accessit stereometriae Archimedeae supplementum*, Linz, 1615

172. [46] G.W. Leibniz, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, *ed.* K.I. Gerhardt, Hahn, 1846 - p.2 : « Utuntur etiam hoc sophismate, ut quoties æmulus ille aliquem quadraturam indagat per additionem eorum quibus gradatim augetur figura, statim clament usum calculo differentiali (verb. gr. p. 15. Comercii). Sed ita calculum differentialem dudum habuissent Keplerus (in Dolio Austriaco), Cavallerius, Fermatius, Hugenius, Wallisius, et qui non illa indivisibilia vel infinite parva tractantes. At Hugenius, qui certe istas fluxionum methodos non ignorabat, quascunque isti norant aut jactant, ea æquitate fuit, ut agnosceret novam ab hoc calculo lucem Geometriæ accensam, et pomœria ejus hinc mire proferri. Et vero nemini ante Leibnitium in mentem venit constituere Algorithmum quendam calculi novi, per quem imaginatio a perpetua ad figuras attentione liberatur ; quod Vieta et Cartesius in Geometria Communi seu Apolloniana fecerant. »

# Calcul de différences

### Les vérités identiques et différences

Dans les deux versions, Leibniz donne aux principes fondateurs du calcul différentiel la même origine, à savoir les « vérités identiques » (« *veritates identicas* »). L'origine du calcul est ainsi rapportée à une découverte purement logique et même syllogistique :

> *Celui-ci, dans la première fleur de son âge, et par un certain génie inné, avait joint à l'étude de l'histoire et de la jursiprudence des réflexions plus profondes. Enfant, il avait pris plaisir aux propriétés des nombres, et encore, sous l'autorité de ses maîtres, il entreprenait de transférer la logique elle-même vers une certitude égale à celle de l'arithmétique. Il avait observé par ailleurs que l'on pouvait déduire la deuxième et la troisième figure de la première sans appliquer de conversions (qui lui semblaient elles-même avoir besoin de démonstration), mais en appliquant seulement le principe de contradiction. Mais ces conversions elles-même peuvent être démontrées à l'aide des deuxièmes et troisièmes figures en appliquant les propositions identiques. Alors seulement, une fois la conversion démontrée, il est possible de démontrer par son aide la quatrième figure et celle-ci est don indirecte par rapport aux première. En outre, il était vivement saisi par cette puissance des vérités identiques, qui de fait passent communément pour vaines et inutiles.* [173]

Leibniz montre alors qu'à partir des vérités identiques, on peut démontrer l'axiome selon lequel le tout est plus grand que sa partie :

- ⋆ **Proposition majeur** : Une chose égale à une partie du tout est plus petite que le tout.
  → *Définition.*
- ⋆ **Proposition mineur** : Une partie du tout est égale à elle-même donc à une partie du tout.
  → *Proposition Identique.*
- ⋆ **Conclusion** : Une partie du tout est plus petite que le tout.
  → *Axiome.*

Dans ce syllogisme de type *Barbara*, on a :

| **Terme majeur** | **Moyen terme** | **Terme mineur** |
|---|---|---|
| chose plus petite que le tout | chose égale à une partie du tout | partie du tout. |

L'idée qu'il puise cette notion des toutes premières réflexions de sa jeunesse est conservée de la version *A* à la version *B*. Mais, dans cette seconde version, Leibniz rattache cette découverte à la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8). En effet, à la fin de sa vie, Leibniz effectue un retour à la syllogistique et multiplie à cette occasion les références à la *Dissertatio de Arte Combinatoria*. Néanmoins, la place centrale conférée aux vérités identiques relève de la reconstruction, puisque ces notions se rapporte à la pensée mature du philosophe, bien plus qu'à ses réflexions de jeunesse :

> *L'auteur de cette nouvelle analyse, dans la première fleur de son âge et par un certain génie inné, avait joint aux études d'histoire et de jurisprudence des méditations plus profondes. Entre autres il avait pris plaisir aux propriétés et aux combinaisons des nombres et il avait édité un petit livre sur l'art combinatoire en 1666, plus tard réimprimé sans l'avoir consulté. Encore enfant, versé dans la logique, il avait constaté que l'analyse ultime des vérités qui dépendent de la raison découle de ces deux choses : les définitions et les vérités identiques qui sont les seules parmi les nécessaires, à être vraiment primitives et indémontrables. Et lorsqu'on lui objectait que le vérité identiques sont inutiles et vaines, il faisait encore observer le contraire par des faits, et entre autre, il montrait déjà à cette époque que ce axiome éminent, à savoir que le tout est plus grand que la partie, se démontre par un*

173. LH 35, 7, 15, Bl.9-10, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, 1714 : « Ille in primo ætatis flore studio historicarum et jurisprudentiæ innato quodam genio meditationes profundiores adjunxerat, et puer numerorum proprietatibus delectabatur, et adhuc sub magistriis Logicam ipsam ad parem arithmeticæ certitudinem transferre conabatur. Observaverat aliquando ex prima figura deduci posse secundam et tertiam, non adhibitis conversionibus (quæ ipsæ demonstratione indigere ei videbantur) sed solo adhibito principio contradictionis. Conversiones autem ipsas demonstrari posse ope figuræ secundæ et tertiæ, adhibitis propositionibus identicis ; ac tum demum demonstrata jam conversione ejus ope etiam demonstrari posse figuram quartam ; eamque adeo esse prioribus indirectiorem. Hanc autem vim veritatum identicarum maxime mirabatur, nam vulgo videntur esse nugatoriæ et inutiles. »

*syllogisme dont la proposition majeur est une définition et la mineur une proposition identique. Par la suite, il prit conscience de ce que toute l'arithmétique et la géométrie naissent des vérités identiques.* [174]

On observe par ailleurs que s'il prend seulement plaisir aux « propriétés des nombres » (« *numerorum proprietatibus* ») dans la version $A$, il prend désormais plaisir aux « propriétés et aux combinaisons des nombres » (« *numerorum proprietatibus combinationibusque* ») dans la version $B$. Cette modification révèle bien une chose : cette découverte purement logique et syllogistique doit avoir, pour Leibniz, un caractère combinatoire.

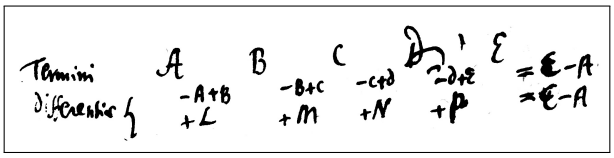
A partir des vérités identiques, Leibniz en déduit la propriété fondamentale de sa théorie des différences finies, à savoir la décomposition des termes en leurs différences. Le passage entre l'identité et la différence n'est développé que dans la version $A$ :

*De plus, à partir de cet axiome selon lequel toute chose est égale à elle-même, c'est-à-dire* $A = A$, *on obtient* $A - A = 0$, *par la définition, c'est-à-dire l'explication du signe* $-$. *Ainsi, si dans l'équation* $A = A$, *d'un côté on retire* $A$ *en acte, de sorte qu'il ne reste rien, c'est-à-dire* $0$. *Si d'autre part, on ne retire pas mais on indique seulement que l'on retire, ce que signifie le signe* $-$, *on aura* $0 = A - A$ *ce qui est équivalent.* [175]

La différence formelle s'obtient par une opération potentielle. En revanche, l'opération actuelle produit seulement le produit de la différence mais pas la représentation formelle de l'opération. L'équation devient alors l'incarnation de l'équivalence entre cette opération actuelle et cette opération potentielle. Leibniz démontre alors à partir de cette nouvelle identité $0 = A - A$ la propriété fondamentale du calcul différentiel :

*En renvanche, à partir de là, on en déduit :* $A - A + B - B + C - C + D - D + E - E = 0$ *et si on pose encore* $- A + B = L$ ; $- B + C = M$ ; $- C + D = N$ ; $- D + E = P$ *alors* $A + L + M + N + P - E = 0$ *c'est-à-dire* $E - A = L + M + N + P$. *Donc* $L$, $M$, $N$ *et* $P$ *sont des différences, d'où la somme des différences successives est égale à la différence des extrêmes, ce qui est le grand théorème fondateur de tout le calcul différentiel. Cependant, ce n'est qu'un corollaire très facile des vérités identiques.* [176]

Donc la décomposition des termes en leurs différences est une conséquence formelle directe de l'identité $0 = A - A$. Elle n'est pas, comme on pourrait éventuellement s'y attendre, déduite de l'axiome de la partie et du tout. Le théorème fondamental du calcul n'est pas que le tout est égal à la somme de ses parties mais que la différence des extrêmes est égale à la somme des différences successives. Ce ne sont pas les termes qui sont directement décomposés mais les différences entre termes extrêmes. Leibniz donne alors le schéma des différences adapté à la situation générale de ce théorème :



Manuscrits de Leibniz - LH 35 7 15 Bl.9-10

174. [46] G.W. Leibniz, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, *ed.* K.I. Gerhardt, Hahn, 1846 - p.4 : « Autor hujus novæ Analyseos in primo ætatis flore studiis historiarum et jurisprudentiæ innato quodam genio meditationes profundiores adjunxerat et inter aliis numerorum proprietatibus combinationibusque delactabatur et de Arte etiam Combinatoria A. d. 1666 libellum ediderat, postea ipso inconsulto recusum ; et puer adhuc logicam versans animadvertat ultimam veritatum a ratione pendentium analysin abire in hæc duo definitiones et veritates identicas solas necessariarum vere primitivas indemonstrabilesque ; et cum objiceretur ipsi, veritates identicas inutiles et nugatorias esse, ipse contrarium etiam experimentis ostendebat ; atque inter alia jam tum monstrabat Axioma illud magnum, Totum esse majus parte, dermonstrari per syllogismum, cujus major propositio esset definitio, minor esset propositio identica. Sed postea animadvertit totam Arithmeticam et Geometriam ex veritatibus identicis nasci. »

175. LH 35, 7, 15, Bl.9-10, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, 1714 : « Ex hac autem axiomate quodlibet sibi ipsi æquale est, seu $A = A$, aufertur $A - A = 0$ per definitionem seu explicationem signi $-$. Nam si in æquatione $A = A$, ab una parte seu actu deleas $A$, ut restet nihil seu 0. Si ab altera parte non deleas, sed tantum deleri indices, quod significat nota $-$ habebis $0 = A - A$ quæ æquivalent. »

176. LH 35, 7, 15, Bl.9-10, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, 1714 : « Sed hinc porro sequitur $A - A + B - B + C - C + D - D + E - E = 0$ quod si jam sit $- A + B = L$ ; $- B + C = M$ ; $- C + D = N$ ; $- D + E = P$ ; $A + L + M + N + P - E = 0$ seu $E - A = L + M + N + P$. Sunt ergo $L$, $M$, $N$, $P$ differentiæ, unde summam differentiarum proximarum æquari differentiæ extremorum ; quod magnum est theorema totius calculi diffentialis fundamentum, et tamen non nisi facillimum veritatum identicarum corollarium. »

$$\begin{array}{lccccccc} \text{Termes :} & A & & B & & C & & D & & E & \\ \text{Différences :} & \left\{ \begin{array}{ccccccc} & -A+B & & -B+C & & -C+D & & -D+E & & = E-A \\ & +L & & +M & & +N & & +P & & = E-A \end{array} \right. & & & & & & \end{array}$$

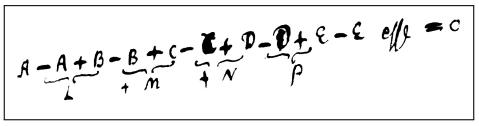
Dans cette figure, les termes $A$, $B$, $C$ etc sont représentés sous la forme d'une progression ou d'une suite. Pourtant dans sa démonstration, Leibniz ne considère pas l'idée de rang ou bien d'ordre. Les termes sont seulement des choses indéfinies. D'ailleurs, la somme des différences $(A-A)+(B-B)+\ldots$ est présentée comme le corollaire direct et trivial de l'identité $0 = A - A$, sans que ne soit pris en compte l'aspect ordinal. L'ordre et le rang apparaissent par nécessité dans le schéma de différence qui est en réalité une table. Comme pour chaque table, les termes qui la composent ont alors un statut différent suivant le point de vue que l'on adopte. Ainsi, les différences peuvent être considérées comme des quantités méréologiques. Comme nous l'avons vu, ces dernières sont les parties d'un tout formé par la différence des extrêmes. Mais elles peuvent également être considérée comme les termes d'une nouvelle progression. Le premier point de vue considère les quantités $-A+B$, $-B+C$ etc., représentation formelle d'une opération de différence qui n'est pas effectuée de façon actuelle mais seulement potentielle. L'expression renvoie alors ces différences aux termes dont elles constituent des relations et ces relations peuvent être composées de sorte à former un tout plus grand : $A-B+B-C = A-C$. Le second point de vue considère les termes $L$, $M$, $N$ et $P$ produits actuels des opérations de différences, et formant les termes d'une nouvelle progression, parallèle à la première.

Dans la version $B$, Leibniz renonce à cette réflexion sur le rapport entre actualité et potentialité dans le formalisme des équations. D'ailleurs, dans la version $A$, cette idée semble déjà lui échapper. En effet, il semble qu'il entame une analyse conceptuelle, mais l'abandonne aussitôt :

> *Retirer et avoir retirer signifient* [177]

Dans la version $B$, le passage entre $A = A$ et $A - A = 0$ n'est pas développé et est explicitement considéré comme une évidence :

> *De là, il observait en poursuivant qu'à partir de ceci : $A = A$, ou $A - A = 0$ – qui est partout identique, comme on peut le voir à la première apparence, s'épargnant d'aller plus loin – il en sort une certaine propriété, très belle, des différences, à savoir :* [178]



Manuscrits de Leibniz - LH 35 7 15 Bl.1-2

$$A \underbrace{-A+B}_{+L} \underbrace{-B+C}_{+M} \underbrace{-C+D}_{+N} \underbrace{-D+E}_{+P} - E = 0$$

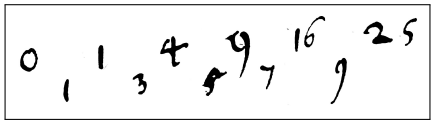
Leibniz ne donne pas le schéma de différence dans cette version. A la place, il utilise un système d'accolade pour représenter la manière dont il regroupe les termes. Cette façon de faire est moins représentative de la réalité de sa pratique durant les premières années de son séjour parisien, qui consiste principalement dans les schémas de différences. Cela étant ces accolades incarnent peut-être d'avantage le caractère combinatoire de la démarche. Nous verrons, par ailleurs, que le regroupement par paquets est une pratique que l'on retrouve chez de nombreux contemporains de Leibniz, notamment Mengoli et Huygens, durant les années 1650 et 1660. Or nous avons vu que dans cette version $B$, Leibniz souhaite rattacher toutes ses premières réflexions aux combinaisons, même cette proposition qui découle pourtant d'une propriété purement logique, à savoir les vérités identiques.

177. LH 35, 7, 15, Bl.9-10, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, 1714 : « tolli et sublatum significari », *Nota Bene* : barré par Leibniz.

178. [46] G.W. Leibniz, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, *ed.* K.I. Gerhardt, Hahn, 1846 - p.4 : « Inde pergens observabat ex hoc $A = A$, vel $A-A = 0$ utique identico, et ut prima fronte videri possit, prorsus spernendo, oriri pulcherrimam quandam differentiarum proprietatem, nam »

**Différences de progressions**

Dans la seconde version, le schéma de différence est présenté comme illustration de la formule général. Leibniz choisit l'exemple de la suite des carrés :



Manuscrits de Leibniz - LH 35 7 15 Bl.1-2

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 |
| | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |

> *Par exemple, si on pose à la place de A, B, C, D, E et F les nombres carrés* 0, 1, 4, 9, 16 *et* 25 *alors à la place des différences on aura les nombres impairs* 1, 3, 5, 7 *et* 9.[179]

Ainsi, dans la version $B$, Leibniz donne comme première illustration les progressions des puissances classiques, à savoir les carrés, les cubes, le bicarrés etc. :

> *Et prenant plaisir à une observation si facile et plaisante, notre jeune homme s'essayait à plusieurs séries numériques, parvenait déjà aux différences secondes, c'est-à-dire les différences de différences et aux différences troisièmes, c'est-à-dire les différences entre les différences de différences, et ainsi de suite. De cette façon, il observait que les différences secondes des nombres naturels, c'est-à-dire pris dans l'ordre depuis* 0, *s'annulent, les troisièmes de leurs carrés s'annulent, les quatrièmes des cubes, les cinquièmes des bicarrés, les sixièmes des sursolides, et ainsi de suite. Et la différence première des naturels est la constante* 1, *la seconde des carrés* $1.2 = 2$, *la troisième des cubes* $1.2.3 = 6$, *la quatrième des bicarrés* $1.2.3.4 = 24$, *la cinquième des sursolides* $1.2.3.4.5 = 120$, *et ainsi de suite. D'autres pouvaient déjà avoir observé cela, mais c'était nouveau pour lui et l'invitait, par son agréable facilité, à poursuivre.*[180]

Puis dans un second temps, il évoque les nombres combinatoires, dont nous verrons qu'il les a appelés pendant un certain temps les puissances proniques, à savoir les triangulaires, les pyramidaux, les triangulo-triangulaires etc. :

> *Mais il réfléchissait avant tout à ces nombres qu'il appelait combinatoires, qu'on représente par la table suivante, où la série horizontale ou verticale précédente contient toujours les différences premières de la première série qui suit, les secondes de la série suivante et les troisièmes de la troisième etc. c'est-à-dire les sommes secondes de la série. Et n'importe quelle série horizontale ou verticale contient les sommes de la première série qui précède, les sommes des sommes, c'est-à-dire les sommes secondes de la seconde série qui précède, les troisième de la troisième.*[181]

Dans la version $A$, à l'inverse, il commence par évoquer les nombres combinatoires en premier lieu :

> *La vérité de choses très belles ayant désormais été révélée par cette source, à savoir bien-sûr que les sommes et les différences sont complémentaires et que les termes donnent les sommes de leurs propres différences, l'auteur, encore jeune, prenait plaisir à l'appliquer à de nombreux et jolis exemples. Ainsi il observait que les différences des nombres naturels sont les unités, que les différences des triangulaires sont ces mêmes naturels, les différences des pyramidaux sont les triangulaires et ainsi de*

179. [46] G.W. Leibniz, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, *ed.* K.I. Gerhardt, Hahn, 1846 - p.4-5 : « Exempli causa loco 1, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, sumantur numeri quadrati 0, 1, 4, 9, 16, 25, loco differentiarum prodibund numeri impares 1, 3, 5, 7, 9. »

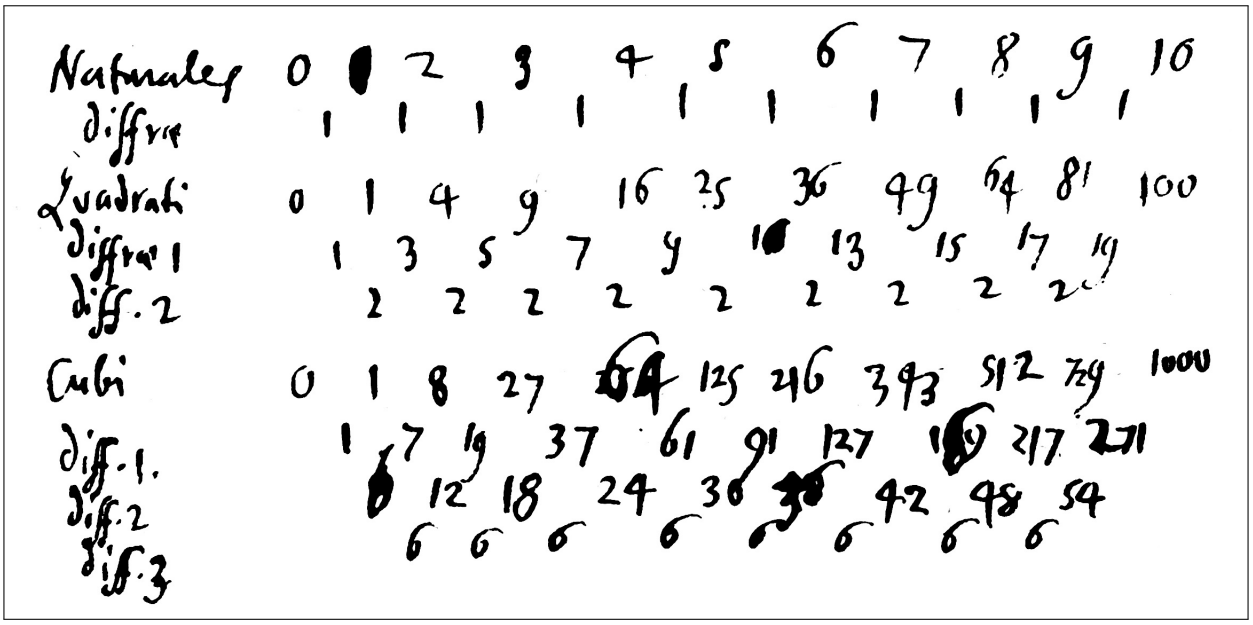
180. [46] G.W. Leibniz, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, *ed.* K.I. Gerhardt, Hahn, 1846 - p.5 : « Atque hac tam facili jucundaque observatione delectatus noster adolescens varias numericas series tentabat, ac progrediebatur etiam ad differentias secundas seu differentias differentiarum, et ad differentias tertias seu differentias inter differentias differentiarum, atque ita porro. Atque ita observabat, evanescere differentias secundas numerorum naturalium seu ordine sumtorum inde a 0, evansescere tertias ab ipsis quadratorum, quartas cuborum, quintas biquadratorum, sextas surdesolidorum ; et ita porro ; et constantem esse diffentiam primam naturalium 1, secundam quadratorum $1.2 = 2$ ; tertiam cuborum $1.2.3 = 6$, quartam biquadratorum $1.2.3.4 = 24$, quintam surdesolidorum $1.2.3.4.5 = 120$, et ita porro : quæ aliis licet dudum observata, ipsi nova erant, et facili jucunditate sua invitantia ad progressus. »

181. [46] G.W. Leibniz, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, *ed.* K.I. Gerhardt, Hahn, 1846 - p.5 : « Sed combinatorios quos vocabat numeros inprimis meditabatur, quorum nota est hæc Tabula, ubi præcedens series horizontalis vel verticalis semper continet differentias primas seriei sequentis primæ, secundas seriei sequentis, et tertias tertiæ etc. seu summas suncundas seriei. Et quævis series horizontalis vel verticalis continet summas seriei præcedentis primæ, summas summarum seu summas secundas seriei præcedentis secundæ, tertias tertiæ. »

*suite. Pareillement, à l'inverse, les sommes des unités sont les naturels, les sommes des naturels sont les triangulaires, les sommes des triangulaires sont les pyramidaux, et ainsi de suite.* [182]

Puis, contrairement à la version $B$, les progressions des puissances classiques, à savoir les carrés, les cubes, les bicarrés etc. sont évoquées dans un second temps :

*Il avait également observé qu'en différentiant continument toutes les puissances numériques des nombres en croissance arithmétique, on arrivait finalement à des différences égales.* [183]




Manuscrits de Leibniz - LH 35 7 15 Bl.9-10

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Naturels : | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Différences : | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Carrés : | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 |
| Différences 1 : | | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
| Différences 2 : | | | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cubes : | 0 | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 | 393 | 512 | 729 | 1000 |
| Différences 1 : | | 1 | 7 | 19 | 37 | 61 | 91 | 127 | 169 | 217 | 271 |
| Différences 2 : | | | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| Différences 3 : | | | | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |

Ces deux exemples de progressions, à savoir les puissances classiques et les nombres combinatoires, sont fondamentaux dans le développement de la théorie de différences finies chez le jeune Leibniz. Les puissances classiques mettent en évidence la puissance analytique de cette théorie. Les schémas de différences

182. LH 35, 7, 15, Bl.9-10, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, 1714 : « Detecto jam hoc fonte pulcherimarum veritatem, quod scilicet summæ et differentiæ reciprocarentur et quod termini dent summas suarum differentiarum ; delectabatur autor adhuc adolescens applicatione ad multa elegantia exempla. Ita observabat differentias numerorum naturalium esse unitates ; differentias triangulorum esse ipsos naturales, differentias pyramidalium esse triangulares et ita porro. Similiter vicissim Summas unitatum esse naturales, summas naturalium esse triangulares, summas triangularium esse triangulo-triangulares, et ita porro. », *Nota Bene* : Leibniz commet ici une erreur en posant les « triangulo-triangulaires » (« *triangulo-triangulares* ») comme somme des « triangulaires » (« *triangularium* »), alors que ce sont les pyramidaux qui réalisent cette somme. Il s'agit clairement d'une erreur d'inattention, et pour cette raison, nous l'avons corrigé dans la traduction.

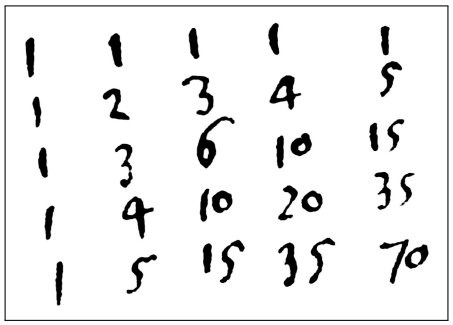
183. LH 35, 7, 15, Bl.9-10, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, 1714 : « Observaverat etiam omnes potentias numerorum arithmetice crescentium numericas continuatis differentiationibus tandem deduci ad differentias æquales inter se. »

permettent de réduire ces progressions complexes à des progressions plus simples et révèlent des coefficients cachés qui sont constitutifs de la loi de progression. Les nombres combinatoires, quant à eux, incarnent la théorie des différences finies par leur construction itérative. Ainsi, les puissances classiques constituent un paradigme d'application de la théorie, tandis que les nombres combinatoires forment un paradigme de représentation. Il est intéressant de voir qu'entre les deux versions, Leibniz échange l'ordre dans lequel il évoque ces deux exemples. Les nombres combinatoires demeurent l'exemple le plus fondamental, car même dans la seconde version où ils sont évoqués en second lieu, Leibniz affirme qu'il y « réfléchissait avant tout » (« *inprimis meditabatur* »). Néanmoins, dans la première version, les nombres combinatoires interviennent en premier car ils sont l'incarnation de la dualité somme-différence, qui est au fondement du calcul différentiel et « une des plus belles vérités » (« *pulcherimarum veritatem* »). Dans le seconde version, Leibniz insiste d'avantage sur la méthode de découverte, ce qui le pousse naturellement à mentionner d'abord la progressions des nombres carrés. En effet, la propriété notable que Leibniz décrit, à savoir que les différences des carrés sont les nombres impairs, est désignée comme une « observation si facile et plaisante » (« *facili jucundaque observatione* »). Ce n'est pas une belle vérité fondatrice mais une observation empirique. C'est en observant l'émergence contingente des propriétés mathématiques que l'idée de la théorie peut se développer. Encore une fois, dans la seconde version, on adopte une démarche historique, tandis que dans la première, elle d'avantage épistémologique. Si la posture est d'avantage historique dans la seconde version, cela n'implique pourtant pas qu'elle soit plus fidèle que la première à la réalité des sources. En effet, comme nous le verrons, il n'y a aucune priorité historique entre les deux exemples de progressions et le jeune Leibniz travaillait régulièrement et simultanément sur les deux catégories. Le choix de l'une par rapport à l'autre doit donc être entendu comme un choix réthorique, propre à appuyer correctement l'objectif du discours.
Par ailleurs, c'est à ce stade seulement que Leibniz mentionne la *Dissertatio de Arte Combinatoria*, dans la version *A*, alors qu'il l'avait citée dès le passage sur la syllogistique dans la version *B* :

> *Et ces nombres, ils les appelait déjà combinatoire, en raison de leur usage pour les combinaisons. Et ainsi jeune, il avait édité une petit livre sur l'art combinatoire en 1666 qui fut plus tard réimprimé sans que l'auteur soit consulté.* [184]

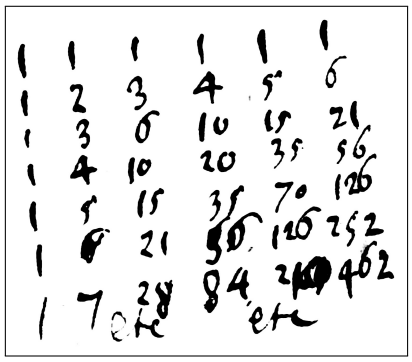
Ainsi, dans la première version, l'opuscule de jeunesse est associé directement à la découverte des nombres combinatoires et du triangle arithmétique, tandis que la seconde version le relie aux réflexions sur les syllogismes. Cette différence entre les deux versions souligne à nouveau l'ambivalence de la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8) dans la formation de la pensée leibnizienne. Le philosophe allemand lui-même semble hésiter entre les deux lectures que nous avons présentées, à savoir une première lecture qui y voit les racines théoriques de sa logique, et une seconde lecture qui y voit l'origine de sa pratique mathématique.
Il donne ensuite la table des nombres combinatoires, non pas sous forme de triangle, mais sous forme de table quadrangulaire.

Version *A*



Manuscrits de Leibniz - LH 35 7 15 Bl.9-10

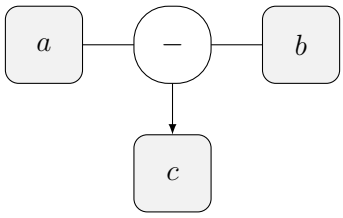
Version *B*



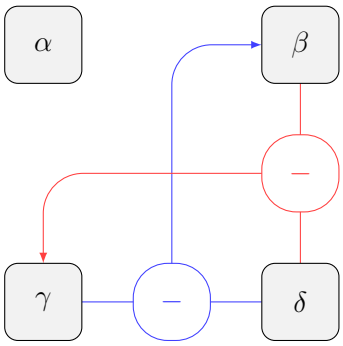
Manuscrits de Leibniz - LH 35 7 15 Bl.1-2

184. LH 35, 7, 15, Bl.9-10, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, 1714 : « quos numeros etiam combinatorios appellabat, ob usum in combinando, itaque et adolescens de Arte combinatoria libellum ediderat A. d. 1666, qui postea inconsulto autore recusus fuit. »

Dans la version $A$, le texte ne fait pas de référence à cette table. On pourrait émettre l'hypothèse que la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8) constitue une référence, car les deux éléments sont contigus. Cela étant, il faut noter que cette disposition quadrangulaire ne correspond pas à celle qu'il avait donnée dans son opuscule de jeunesse, où les colonnes contenaient les progressions finies des différentes combinaisons pour un nombre $n$ fixé, mais plutôt à celle du traité de Pascal. Dans la version $B$, Leibniz précise que la table peut se lire verticalement ou horizontalement : en effet, les progressions des nombres combinatoires se trouvent autant dans les lignes que dans les colonnes. Ceci peut expliquer la préférence de la structure quadrangulaire à la structure triangulaire, laquelle correspond pourtant aux schémas de différences. En effet, seule la structure quadrangulaire permet de représenter l'équivalence entre les lignes et les colonnes, alors que dans la structure triangulaire des schémas de différences, la position des termes définit leurs rôles.




$c = b - a$



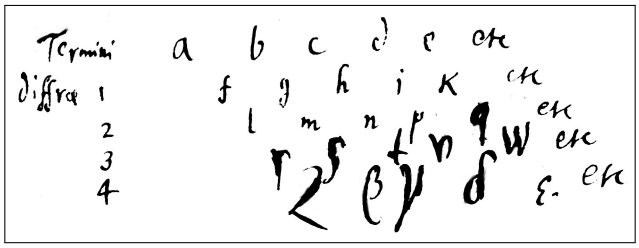

$\gamma = \delta - \beta \iff \beta = \delta - \gamma$

Dans notre exemple, la représentation triangulaire donne un rôle différent à $c$ qui est une différence et $a$ qui est un terme de la progression. Alors que $a = b - c$ est aussi une différence. Cette équivalence est représentée par la forme quadrangulaire où l'on donne le même rôle à $\gamma$ et $\beta$. Comme la remarque sur l'équivalence entre les lignes et les colonnes ne se trouvent que dans la seconde version, il s'agit d'une explication *a posteriori* du choix de Leibniz.

### Théorie des différences finies

Une fois la notion de schéma de différence introduite, Leibniz introduit un schéma général à partir duquel il pourrait exprimer les résultats de théorie des différences finies qu'il souhaite invoquer :

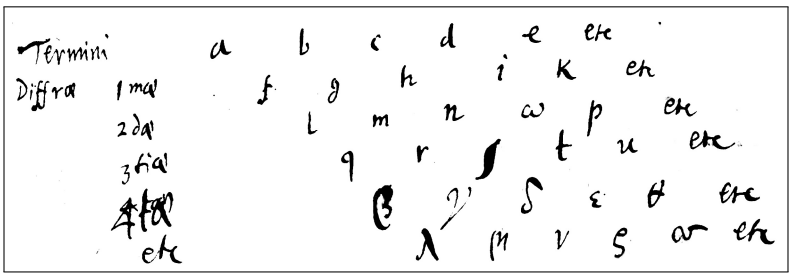
Version $A$ :



Manuscrits de Leibniz - LH 35 7 15 Bl.9-10

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Termes | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $\cdots$ |
| Différences 1 | $f$ | $g$ | $h$ | $i$ | $k$ | $\cdots$ |
| Différences 2 | $l$ | $m$ | $n$ | $p$ | $q$ | $\cdots$ |
| Différences 3 | $r$ | $s$ | $t$ | $v$ | $w$ | $\cdots$ |
| Différences 4 | $z$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\delta$ | $\varepsilon$ | $\cdots$ |

Version $B$ :



Manuscrits de Leibniz - LH 35 7 15 Bl.1-2

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Termes | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $\cdots$ |
| 1$^{\text{ères}}$ Différences | $f$ | $g$ | $h$ | $i$ | $k$ | $\cdots$ |
| 2$^{\text{ndes}}$ Différences | $l$ | $m$ | $n$ | $\omega$ | $p$ | $\cdots$ |
| 3$^{\text{èmes}}$ Différences | $q$ | $r$ | $s$ | $t$ | $u$ | $\cdots$ |
| 4$^{\text{èmes}}$ Différences | $\beta$ | $\gamma$ | $\delta$ | $\varepsilon$ | $\theta$ | $\cdots$ |
| $\cdots$ | $\lambda$ | $\mu$ | $\nu$ | $\rho$ | $\upsilon$ | $\cdots$ |

Dans le deux versions, Leibniz note tous les termes par une lettre de l'alphabet latin puis grec, dans l'ordre alphabétique et l'ordre d'écriture, de gauche à droite et de haut en bas. Le choix de l'alphabet, la casse et même le rang dans l'alphabet ne représente donc pas la position du terme dans la table. Par exemple la lettre $q$ change de ligne entre les deux schémas. Ainsi, la théorie des différences finies n'est pas complètement formalisée. Le diagramme en triangle est nécessaire pour pouvoir associer à chaque variable une définition, qui est donc entièrement déterminée par la position du terme au sein de la table. La notation différentielle permet de formaliser ces progressions, mais Leibniz ne l'utilise qu'*a posteriori*. Leibniz donne alors dans les deux version deux résultats de théorie des différences finies :

Version $A$ :

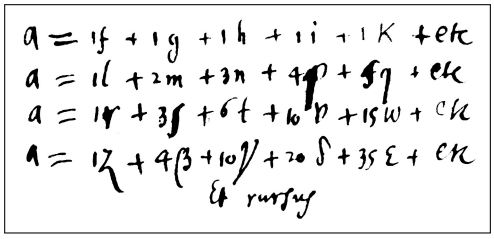
> *Mais cela dit, il en découvrait aussi certaines qui n'étaient pas aussi faciles. Tels sont ces théorèmes généraux pour trouver un terme donné à partir des différences.* [185]

Version $B$ :

> *Mais aussi, afin d'ajouter quelque chose qui n'est peut-être trivial, il découvrait certains théorèmes généraux sur les différences et sur les sommes, tels que les suivants.* [186]

Le premier résultat que Leibniz énonce consiste à exprimer les termes de départ en fonction des différences d'ordre $p$ :

Version $A$ :



Manuscrits de Leibniz - LH 35 7 15 Bl.9-10

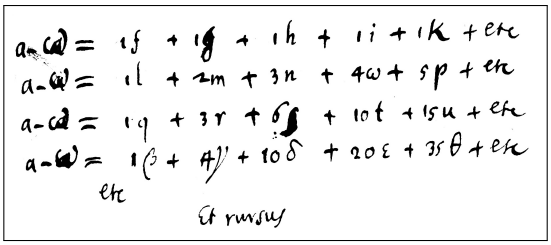
$$
\begin{aligned}
a &= 1f + 1g + 1h + 1i + 1k + \dots \\
a &= 1l + 2m + 3n + 4p + 5q + \dots \\
a &= 1r + 3s + 6t + 10v + 15w + \dots \\
a &= 1z + 4\beta + 10\gamma + 20\delta + 35\varepsilon + \dots
\end{aligned}
$$

et ainsi de suite

185. LH 35, 7, 15, Bl.9-10, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, 1714 : « Quædam tamen etiam non æque facilia eruabat. Qualia sunt generalia theoremata pro inveniendo termino ex diffentiis sumto ».

186. [46] G.W. Leibniz, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, *ed.* K.I. Gerhardt, Hahn, 1846 - p.5 : « Sed etiam ut addamus aliquid nondum fortasse vulgare, generalia quædam de diffentiis et summis theoremata eruebat, qualia sunt sequentia. »

Version $B$ :



Manuscrits de Leibniz - LH 35 7 15 Bl.1-2

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
a-\omega & = & 1f & + & 1g & + & 1h & + & 1i & + & 1k & + & \dots \\
a-\omega & = & 1l & + & 2m & + & 3n & + & 4\omega & + & 5p & + & \dots \\
a-\omega & = & 1q & + & 3r & + & 6s & + & 10t & + & 15u & + & \dots \\
a-\omega & = & 1\beta & + & 4\gamma & + & 10\delta & + & 20\varepsilon & + & 35\theta & + & \dots
\end{array}
$$

et ainsi de suite

Dans la première version, les séries désignent seulement le premier terme, alors que dans la seconde, elles désignent la différence entre le premier terme et le dernier. Ceci semble suggérer que Leibniz avait envisager d'énoncer le résultat pour une différence de rang infinie dans la première version. Ainsi $a_0 = a_0 - a_{n\to\infty}$. Alors que dans la seconde version, Leibniz se limite seulement aux cas finis : $a_0 - a_n$. Si l'on considère cette interprétation des variables, alors, seule la première version est correcte, tandis que dans la seconde version, toutes les égalités sont incorrectes, exceptée celle de la première ligne. En effet, la première version est correcte puisqu'elle correspond à la formule du binôme suivante [187] :

$$1 = \frac{1}{(1-X)^p}(1-X)^p = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\!\binom{p}{n}\!\right) (1-X)^p X^n$$

$$\downarrow$$

$$a_0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\!\binom{p}{n}\!\right) d_n^{(p)}$$

En revanche, la seconde version impliquerait la formule suivante qui n'est correcte que lorsque $p = 1$ :

$$1 - X^n = \sum_{k=0}^{n-p} \left(\!\binom{p}{k}\!\right) (1-X)^p X^k$$

$$\downarrow$$

$$a_0 - a_n = \sum_{k=0}^{n-p} \left(\!\binom{p}{k}\!\right) d_k^{(p)}$$

Leibniz aurait généralisé la propriété de la première ligne aux suivantes. Or certes $a_0 - a_n$ peut s'exprimer à l'aide d'une nombre fini de différences d'ordre 1, mais dès l'ordre 2, il faut une série infinie pour exprimer cette différence :

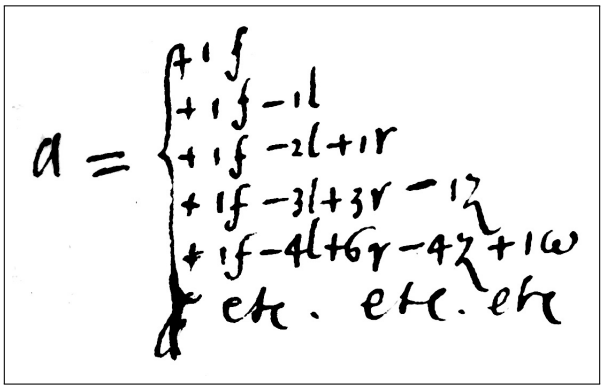
$$1 - X^n = \underbrace{\frac{1-X^n}{(1-X)^p}}_{\text{série finie si } p=1,\text{ infini si } p>1} \times(1-X)^p$$

Mais la première version semble supposer que la suite devient infiniment petite à l'infini, ou autrement dit, qu'elle converge vers 0. C'est sans doute à cette remarque que répond la modification de la seconde version. Ainsi le terme $\omega$ ne désigne sans doute pas un terme fini quelconque mais la quantité qu'il reste à l'infini après avoir fait le calcul. En effet, les résultats formels que nous utilisons dans le corps $\mathbb{Q}(X)$ suppose de l'avoir doté d'une topologie particulière, dans laquelle on a bien : $X^n \to 0$. En mettant de côté ces formalismes anachroniques, on peut tout de même considérer qu'il y a ici deux sortes de variations : celle de la quantité et celle de la position. Selon la quantité, la progression ne converge pas nécessairement vers 0, ce qui justifie la notation de la version $B$. En revanche, selon la position, le rang diverge nécessairement vers l'infini et il réduit donc formellement le terme à néant, ce qui justifie la notation de la version $A$.

187. Concernant l'analogie entre les formules de différences finies et les identités remarquables formelles dans $\mathbb{Z}[\![X]\!]$, *Cf* notre développement en annexe sur la théorie des différences finies.

Le second résultat est une version sommée de la formule d'inversion de Pascal :

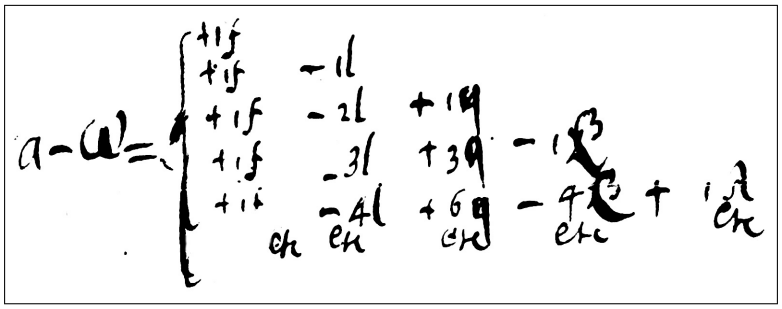
Version $A$ :



Manuscrits de Leibniz - LH 35 7 15 Bl.9-10

$$a = \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} + & 1f & & & & & & & & & \\ + & 1f & - & 1l & & & & & & & \\ + & 1f & - & 2l & + & 1r & & & & & \\ + & 1f & - & 3l & + & 3r & - & 1z & & & \\ + & 1f & - & 4l & + & 6r & - & 4z & + & 1\omega \\ & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \end{array} \right.$$

Version $B$ :



Manuscrits de Leibniz - LH 35 7 15 Bl.1-2

$$a - \omega = \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} + & 1f & & & & & & & & & \\ + & 1f & - & 1l & & & & & & & \\ + & 1f & - & 2l & + & 1q & & & & & \\ + & 1f & - & 3l & + & 3q & - & 1\beta & & & \\ + & 1f & - & 4l & + & 6q & - & 4\beta & + & 1\lambda \\ & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \end{array} \right.$$

La formule que donne ici Leibniz équivaut à l'identité formelle suivante :

$$\begin{aligned} 1 &= (1-X) \times \frac{1}{1-X} = (1-X) \times \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} X^n \right) \\ &= (1-X) \times \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} (1-(1-X))^n \right) = (1-X) \times \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (1-X)^k \right) \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (1-X)^{k+1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= d\circ d^{-1}(a_n) = d\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\right) = d\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} d^{(n)}(da)\right) \\ &= d\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k d_0^{(k)}\right)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k d_0^{(k+1)}\right)\end{aligned}$$

Là encore, Leibniz développe seulement $a$ dans la première version et la différence $a-\omega$ dans la seconde. Notre analyse reste donc globalement la même sur ce sujet. Notons, ceci dit, que cette fois-ci, les deux versions sont correctes, même dans le cas où l'on considère que $\omega$ désigne un terme de rang fini. En effet :

$$\begin{aligned} 1-X^n &= \frac{1-X^n}{1-X}\times(1-X) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} X^k\right)\times(1-X) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1}(1-(1-X))^k\right)\times(1-X) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j(1-X)^j\right)\right)\times(1-X) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j(1-X)^{j+1}\right)\end{aligned}$$

En intervertissant le rôle des indices, c'est-à-dire en sommant par colonne et non plus par ligne, Leibniz parvient à réintroduire les nombres figurés :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j(1-X)^{j+1}\right) &= \sum_{\substack{j,k\in[\![0,n-1]\!]\\ j\le k}}\binom{k}{j}(-1)^j(1-X)^{j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=j}^{n-1}\binom{k}{j}\right)(-1)^j(1-X)^{j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1-j}\binom{k+j}{j}\right)(-1)^j(1-X)^{j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1-j}\left(\!\!\binom{j+1}{k}\!\!\right)\right)(-1)^j(1-X)^{j+1} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n-j}\left(\!\!\binom{j}{k}\!\!\right)\right)(-1)^{j-1}(1-X)^j \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\!\!\binom{j+1}{n-j+1}\!\!\right)(-1)^{j-1}(1-X)^j\end{aligned}$$

Contrairement à la précédente, Leibniz donne l'expression formelle de cette identité. Il note :

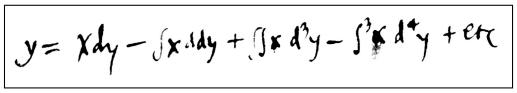
$$\left(\!\!\binom{1}{x}\!\!\right)=1=dx \qquad \left(\!\!\binom{2}{x}\!\!\right)=x=\int dx \qquad \left(\!\!\binom{3}{x}\!\!\right)=\int xdx \qquad \left(\!\!\binom{4}{x}\!\!\right)=\iint xdx \qquad \left(\!\!\binom{5}{x}\!\!\right)=\int^3 xdx$$

$$a=y \qquad f=dy \qquad l=ddy \qquad q \text{ (ou } r) = d^3y \qquad \beta \text{ (ou } z) = d^4y$$

Ainsi, la formule devient :

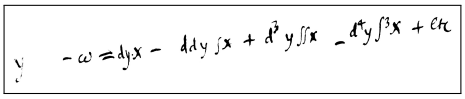
$$y=xdy-\left(\int xdx\right)d^2y+\left(\iint xdx\right)d^3y-\left(\int^3 xdx\right)d^4y+\ldots$$

Version $A$ :



Manuscrits de Leibniz - LH 35 7 15 Bl.9-10

Version $B$ :



Manuscrits de Leibniz - LH 35 7 15 Bl.1-2

En désignant les nombres figurés par $x$ et ses diverses sommes, Leibniz efface le rang de la notation. En effet, si l'on explicite les polynômes des notations de Leibniz, on obtient :

$$dx = 1 \qquad x = x \qquad \int x = \frac{x(x+1)}{2} \qquad \iint x = \frac{x(x+1)(x+2)}{6} \qquad \int^3 x = \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{24}$$

Ainsi cette formule occulte un décalage du rang qui apparait pourtant clairement dans le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
+ & 1f & & & & & & & & & \\
+ & 1f & - & 1l & & & & & & & \\
+ & 1f & - & 2l & + & 1q & & & & & \\
+ & 1f & - & 3l & + & 3q & - & 1\beta & & & \\
+ & 1f & - & 4l & + & 6q & - & 4\beta & + & 1\lambda & \\
 & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \\
\hline
+ & xf & - & \frac{x(x-1)}{2}l & + & \frac{x(x-1)(x-2)}{2}q & - & \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}\beta & + & \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{120}\lambda &
\end{array}$$

Dès lors cette formule n'est valide, sous la forme où Leibniz la note, que dans le cas où l'on la prolonge à l'infini et à condition que les progressions verticales convergent toutes vers 0. Ainsi, les progressions polynomiales, dont les différences s'annulent à partir d'un certain rang, vérifient toutes cette formule. Notons par ailleurs que ce théorème ne peut pas se généraliser au domaine continu [188], puisqu'il se fonde sur l'équivalence terme-différence :

$$d_n^{(1)} = a_n - a_{n+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_{n+1} = a_n - d_n^{(1)}$$

Or cette symétrie est rompue lorsqu'on pénètre dans le domaine du continu. En effet, seules les progressions deviennent continues mais les ordres de différentiation et de sommation restent discrets.

Ces deux résultats montrent que l'on peut exprimer un terme à l'aide des différences, soit en utilisant les propriétés des sommes avec les coefficients multiensembles $\left(\!\binom{p}{n}\!\right)$, qui sont pour Leibniz les nombres figurés, soit en utilisant les propriétés des différences avec les coefficients binomiaux $\binom{p}{n}$, qui sont pour Leibniz les nombres combinatoires. Ainsi, ils mettent un peu plus en évidence l'importance de la dualité somme-différence. Dans aucune des deux versions, le philosophe n'est explicite quant à la période durant laquelle il découvre ces deux formules différentielles. Ce faisant, il peut laisser sous-entendre qu'il les a découvert dès ses premiers travaux parisiens sur les schémas de différences. Or ces formules sont clairement plus tardives, même si des versions rudimentaires de ces résultats apparaissent très tôt, durant son séjour à Paris.

188. En tout cas, ce n'est pas possible dans le cadre classique de l'analyse de fonction. On peut, en revanche, l'interpréter dans le cadre des distributions.

# Triangle de nombre

## Le triangle harmonique

Le triangle harmonique n'est pas présenté à la suite de ces réflexions sur la théorie des différences finies, mais dans un second temps, que ce soit dans la version $A$ ou dans la version $B$. Dans la première version, Leibniz intercale entre les deux un passage sur ses premiers contacts avec la *Royal Society* :

> *Un peu plus tard, c'est avec l'illustre Henry Oldenbourg qu'il commença à entretenir une correspondance littéraire. Et ce dernier désirait qu'il lui écrive aussitôt après sa réception à la Royal Society, afin de lui répondre rapidement à son tour. Et comme, à cette époque, Newton avait étendu le calcul des séries infinies et l'avait fait progressé depuis les divisions de Mercator jusqu'aux extractions de racines, il fit part à Leibniz de cette entreprise. Et celui-ci communiqua en retour sa série pour la valeur de l'arc à partir de la tangente, qu'il avait trouver en réfléchissant sur le exemple de Mercator, et il joignit également la méthode. A vrai dire, tous dans cette Angleterre d'alors avaient tenu pour nouvelles la série aussi bien que la méthode. Mais Newton était beaucoup plus avancé dans ces séries allant à infinies, le reconnut et il ne se défiait pas de la notre pour sa clarté, ni ne pensait apprendre quelque chose d'indigne. Mais rien de ceci ne touche au calcul différentiel. En outre, alors qu'il était plongé avec attention dans ses études, une lumière nouvelle commença bientôt à lui apparaitre. Alors qu'il parlait par hasard de sommes de séries, Huygens lui avait recommandé de faire cette somme en particulier :* $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots$ *où les numérateurs sont des unités et les dénominateurs sont les nombres triangulaires. Alors qu'il abordait la chose, il découvrit que c'était les différences doublées des nombres de la progression harmonique.* [189]

Ainsi, la découverte du triangle n'est pas clairement motivée, d'un point de vue réthorique. Elle intervient sans réel lien avec ce qui précède. En revanche, dans la version $B$, elle introduit la seconde partie du traité, centrée sur l'origine de la notation, et non plus du calcul :

> *A présent, il faut nous faut encore poursuivre en présentant comment notre homme est parvenu progressivement à un nouveau genre de notation, qu'il a appelé calcul différentiel. Déjà en 1672, alors qu'il parlait des propriétés des nombres, Huygens lui avait proposé ce problème : trouver la somme de la série décroissante de fractions, dont les numérateurs sont des unités et les dénominateurs sont à vrai dire les triangulaires. Il disait avoir trouvé cette somme au sein de ses collaborations avec Hudde, sur l'estimation du hasard.* [190]

Dans la première version, Leibniz refait la preuve du problème posé par Huygens. Comme nous le verrons, cette preuve était très importante pour le jeune philosophe lors des ces premiers pas dans les mathématiques. Ce doit être, en effet, l'un des premiers résultats qu'il trouve par lui-même et qu'il croit digne d'impressionner les mathématiciens de son temps. Il est amené à la reproduire plusieurs fois, si bien qu'il finit pas oublier que cette découverte n'est pas le résultat d'une épiphanie mais de multiples travaux étalés sur plusieurs mois :

> *Huygens fut admiratif quant à la manière dont je l'avais résolue. En effet, lui-même avec Hudde, en se préoccupant de problèmes autour du hasard l'avaient résolue par une autre longue méthode. En outre, moi, j'ai aussi montré par la même méthode comme obtenir la somme si les dénominateurs sont des pyramidaux, des triangulo-triangulaires ou bien les autres nombres susnommés combinatoires.* [191]

189. LH 35, 7, 15, Bl.11-12, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, 1714 : « Præterea aliquod cum Viro clarissimo Henrico Oldenburgio literarium commercium colere cœpit, qui a recepto in Societatum Regiam subinde ad se scribi expetebat ut diligenter vices reddebat. Et cum tunc Newtonus Calculum Serierum infinitarum amplificasset et a divisionibus Mercatoris ad Extractiones Radicum protulisset, ejus rei Leibnitium participem fecit. Qui vicissim suam seriem pro valore arcus ex Tangente communicavit, ad Mercatoris exemplum excogitatam, Methodo etiam adjecta. Et vero omnes tunc in ipsa Anglia Seriem pariter & methodum novam crediderunt. Sed Newtonus tunc in seriebus illis infinitis indagandis multo longius prodierat, agnovit neque is noster pro candore suo diffitebatur aut discere turpe putabat. Sed hæc nihil ad calculum differentialem. Cum autem in his studiis versaretur attentius mox ei nova lux oboriri cœpit. Forte de summis serierum loquenti Hugenius hanc summandam in specimen commendaverat : $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$+etc. ubi numeratoris sunt unitates, denominatores sunt numeri Triangulaires. Rem aggressus reperit esse duplas differentias numerorum progressionis Harmonicæ. »

190. [46] G.W. Leibniz, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, *ed.* K.I. Gerhardt, Hahn, 1846 - p.13-14 : « Porro nunc jam exponendum est, quomodo paulatim ad novum Notationis genus pervenerit Noster, quod calculum differentialem appellavit. Jam A. D. 1672 de numerorum proprietatibus colloquenti Hugenius proposuerat hoc problema : invenire summam seriei decrescentis fractionum, cujus numeratores sint unitates, denominatores vero sint numeri triangulaires, cujus summam ajebat se invenisse inter collationes cum Huddenio de aleæ æstimatione. »

191. LH 35, 7, 15, Bl.11-12, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, 1714 : « Quod cum ita assecutus essem miratus est

Dans la version $B$, Leibniz ne donne pas la preuve, mais seulement le résultat :

> *Notre homme trouva que la somme valait* 2, *ce qui s'accordait avec la proposition de Huygens. Dans de même étude, il trouva les sommes des séries de nombres du même genre, dont les dénominateurs sont des nombres combinatoires quelconques. Et il en fit part à Oldenbourg en février 1673, ce que les adversaires ont publié.* [192]

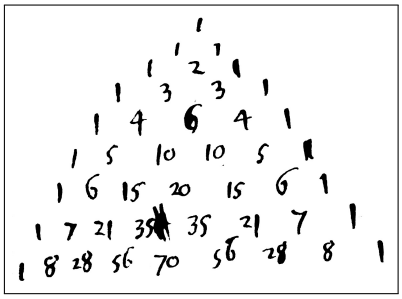
Dans les deux versions, il cite le triangle harmonique directement à la suite des réflexions sur le problème de Huygens, comme s'il s'agissait d'une conséquence logique. Nous verrons pourtant que le passage de l'un à l'autre n'est pas si évident, et donne à Leibniz l'occasion de réflexion profonde sur la nature de tables. Avant d'exposer son triangle, il mentionne d'abord celui de Pascal :
Version $A$ :

> *Et comme Pascal avait donné un tel Triangle Arithmétique, comme il l'appelait lui-même. J'ai moi-même mis au jour, sur son exemple, le Triangle Harmonique, dont la base est la série harmonique* $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}\ldots$ *comme celle du précédent est la série arithmétique :* 1, 2, 3, 4 .... [193]

Version $B$ :

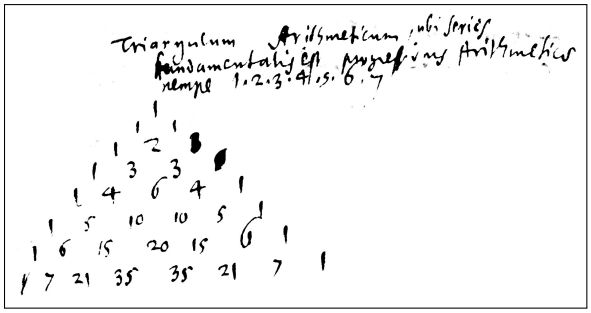
> *Ensuite, comme il avait vu le triangle arithmétique de Pascal, il en construisit un harmonique sur son exemple.* [194]

Version $A$



Manuscrits de Leibniz - LH 35 7 15 Bl.5-6

Version $B$



Manuscrits de Leibniz - LH 35 7 15 Bl.5-6

Triangle Arithmetique
où la série fondamentale est
la progression arithmétique
à savoir 1.2.3.4.5.6.7

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 | | | | |
| | | | 1 | | 1 | | | |
| | | 1 | | 2 | | 1 | | |
| | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | |
| 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 | | | | |
| | | | 1 | | 1 | | | |
| | | 1 | | 2 | | 1 | | |
| | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | |
| 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 5 | | 10 | | 10 | | 5 | | 1 |
| | 1 | | 6 | | 15 | | 20 | | 15 | | 6 | | 1 |
| | | 1 | | 7 | | 21 | | 35 | | 35 | | 21 | | 7 | | 1 |
| | | | 1 | | 8 | | 28 | | 56 | | 70 | | 56 | | 28 | | 8 | | 1 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 5 | | 10 | | 10 | | 5 | | 1 |
| | 1 | | 6 | | 15 | | 20 | | 15 | | 6 | | 1 |
| | | 1 | | 7 | | 21 | | 35 | | 35 | | 21 | | 7 | | 1 |

Hugenius nam ipse cum Huddenio problemata circa aleam agitans alia longe ratione assecutus fuerat. Ego autem monstravi eadem ratione etiam summam haberi, si denominatores essent pyramidales aut triangulo-triangulares, aliive Numeri quos combinatorios supraappellavi. »

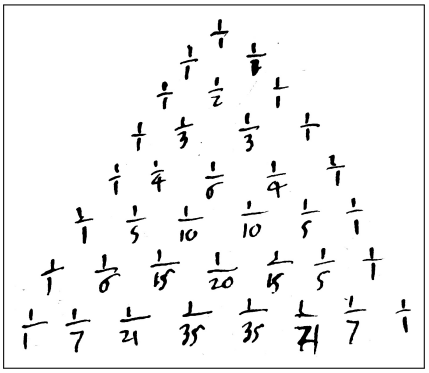
192. [46] G.W. Leibniz, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, *ed.* K.I. Gerhardt, Hahn, 1846 - p.14 : « Noster invenit summam esse 2, quod cum Hugeniana propositione consentiebat. Eadem opera invenit summas serierum hujusmodi numericarum, cum denominatores sunt Numeri combinatorii quicunque idque indicavit Oldenburgio Febr. 1673, quam adversarii edidere. »

193. LH 35, 7, 15, Bl.11-12, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, 1714 : « Et cum Pascalius tale dedisset *Triangulum Arithmeticum*, ut ipse appellabat. Ego ad ipsius exemplum exhibui *Triangulum Harmonicum* cuius basis est series Harmonica $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ etc. ut prioris series Arithmetica 1, 2, 3, 4, etc. »

194. [46] G.W. Leibniz, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, *ed.* K.I. Gerhardt, Hahn, 1846 - p.14 : « Cum postea Pascali Triangulum Arithmeticum vidisset, ejus exemplo Harmonicum concinnavit. »

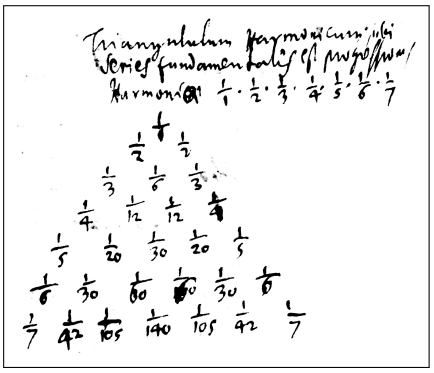
On peut noter que Leibniz reproduit ce triangle dans les deux versions, et de la même manière, alors qu'il avait déjà introduit la table quadrangulaire des nombres combinatoires quelques paragraphes plus tôt, et de façon également identique dans les deux versions. La disposition triangulaire de la table est donc significative. Comme toutes les tables, les triangles de nombres sont plus naturellement rédigés ligne par ligne, et non diagonale après diagonale. Dans le cas du triangle arithmétique, cela signifie qu'on utilise en priorité la règle de Pascal, à savoir qu'un terme vaut la somme des deux nombres placés au-dessus de lui, et non la règle des nombres figurés.
Si les deux triangles arithmétiques sont identiques, ce n'est pas le cas des deux triangles harmoniques. Dans la version $A$, le triangle harmonique est constitué des inverses des termes du triangle arithmétique. Dans la version $B$, il correspond à la définition moderne de ce triangle, à savoir un schéma de différences de la progression harmonique [195]. Dans le premier triangle, il n'y a pas directement de structure de table différentielle. Dans la seconde, en revanche, on doit retirer les diagonales composées d'unités, car elles ne conviennent pas à la structure différentielle :

Version $A$



Manuscrits de Leibniz - LH 35 7 15 Bl.5-6

Version $B$



Manuscrits de Leibniz - LH 35 7 15 Bl.5-6

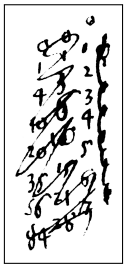
$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \frac{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & & \frac{1}{1} & & \frac{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{1} & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{1} & & & & \\
 & & & \frac{1}{1} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{1} & & & \\
 & & \frac{1}{1} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{1} & & \\
 & \frac{1}{1} & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{10} & & \frac{1}{10} & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{1} & \\
\frac{1}{1} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{15} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{15} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{1} \\
 & \frac{1}{7} & & \frac{1}{21} & & \frac{1}{35} & & \frac{1}{35} & & \frac{1}{21} & & \frac{1}{7} & \\
\frac{1}{1} & & \frac{1}{7} & & \frac{1}{21} & & \frac{1}{35} & & \frac{1}{35} & & \frac{1}{21} & & \frac{1}{7} & & \frac{1}{1}
\end{array}$$

Triangle Harmonique
où la série fondamentale est
la progression harmonique

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{7}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \frac{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & & \\
 & & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & & \\
 & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & & \\
 & \frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6} & \\
\frac{1}{7} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{140} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{7}
\end{array}$$

Dans la version $A$, Leibniz comment pas tracer un nouveau diagramme vertical, semblable à ses tout premiers schémas de différences parisien qui étaient également en colonne. La volonté du philosophe est sans doute ici de représenter sur un même schéma les deux triangles, l'un comme l'inverse de l'autre [196].



Manuscrits de Leibniz - LH 35 7 15 Bl.11-12

195. Lorsque nous parlons du triangle harmonique, c'est toujours cette table que nous désignons. Comme nous le voyons ici, ce terme est ambivalent, dans l'usage que Leibniz en fait.

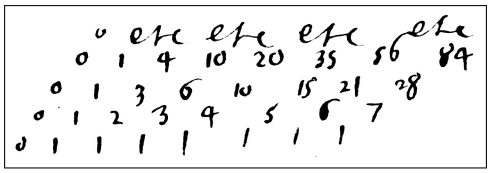
196. Leibniz réalise cette figure dans un de ses manuscrits parisiens, que nous étudierons plus loin.

Dans la version $B$, Leibniz insiste sur le fait que les deux triangles sont des tables différentielles et sommatoires, dont les relations sont inversées :

> *En outre, ce qu'il y a de commun aux deux triangles, c'est que les séries diagonales sont les sommatrices ou les différentielles les unes des autres. Dans le triangle arithmétique, une série donnée est la somme de celle qui lui précède directement et la différentielle de celle qui suit juste après. A l'inverse, dans le triangle harmonique, une série donnée est la somme de celle qui lui succède directement et la différentielle de celle qui se trouve juste avant.* [197]

On trouve également cette réflexion dans la première version, alors que le triangle harmonique n'est pas une table différentielle. Pour le triangle arithmétique, Leibniz trace une schéma de différence inversé. La structure est identique à celle des schéma classique, mais la progression donnée n'est pas en première ligne mais en dernière. Ainsi, les lignes du dessus ne sont pas les différences successives mais les sommes successives. Il s'agit donc d'un schéma de sommes :

> *Dans le triangle arithmétique, n'importe quelle série est la sommatrice de la précédente et la différentielle de la suivante. Par exemple :* [198]

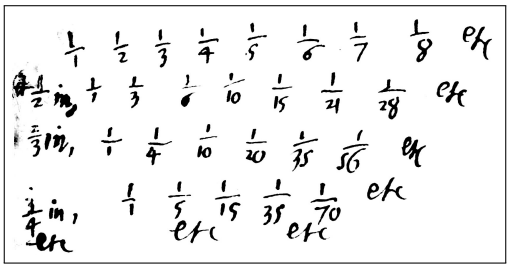


Manuscrits de Leibniz - LH 35 7 15 Bl.11-12

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 0 | ... | ... | ... | ... | |
| | | 0 | 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 84 |
| | 0 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | |

La forme du triangle harmonique que Leibniz a choisie lui impose des explications plus complexes, étant donné qu'il n'y a plus de structure différentielle :

> *Dans le triangle harmonique, à l'inverse, n'importe quelle série (mutlipliée toutefois par une constante donnée) est la sommatrice de la suivante et la différentielle de la précédente, de cette manière :* [199]



Manuscrits de Leibniz - LH 35 7 15 Bl.11-12

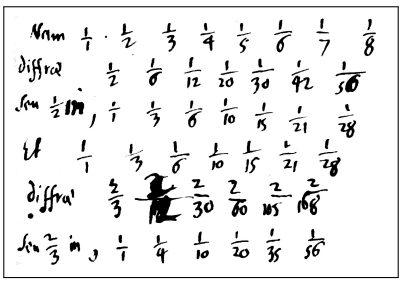
| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{8}$ | ... |
| $\frac{1}{2}$ fois : | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{21}$ | $\frac{1}{28}$ | ... | |
| $\frac{2}{3}$ fois : | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{35}$ | $\frac{1}{56}$ | ... | | |
| $\frac{3}{4}$ fois : | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{35}$ | $\frac{1}{70}$ | ... | | | |
| ... | ... | ... | ... | | | | | | |

Après ce premier schéma de différences, Leibniz enchaine avec un second qui explicite un peu plus encore le mécanisme. En effet, ici le passage d'une ligne à l'autre nécessite deux opérations, à savoir multiplier par une constante et faire une différence. Le second schéma sépare ces deux opérations :

197. [46] G.W. Leibniz, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, *ed.* K.I. Gerhardt, Hahn, 1846 - p.14-15 : « Utrique autem triangulo hoc est commune, quod series obliquæ sunt invicem summatrices vel differentiales. In Triangulo Arithmetico series data est summatrix proxime præcedentis, et est differentialis proxime sequentis ; at in Triangulo Harmonico contra series data est summatoria proxime sequentis et differentialise proxime antecedentis. »

198. LH 35, 7, 15, Bl.11-12, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, 1714 : « In Triangulo Arithmetico series quævis est summatrix præcedentis, et differentialis sequentis, exempli gratia : »

199. LH 35, 7, 15, Bl.11-12, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, 1714 : « In Triangulo harmonico contra quævis series (sed per datam constantem multiplicata) est summatrix sequentis, et differentialis præcedentis, hoc modo »



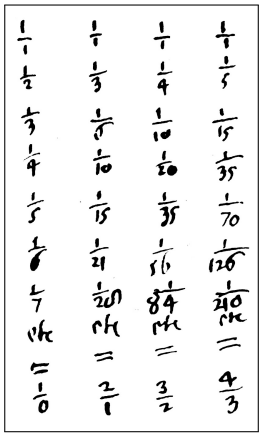
Manuscrits de Leibniz - LH 35 7 15 Bl.11-12

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| En effet : | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{8}$ |
| Différences : | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{42}$ | $\frac{1}{56}$ | |
| c'est-à-dire $\frac{1}{2}$ fois : | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{21}$ | $\frac{1}{28}$ | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Et : | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{21}$ | $\frac{1}{28}$ |
| Différences : | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{12}$ | $\frac{2}{30}$ | $\frac{2}{60}$ | $\frac{2}{105}$ | $\frac{2}{168}$ | |
| c'est-à-dire $\frac{2}{3}$ fois : | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{35}$ | $\frac{1}{56}$ | |

L'explication des deux triangles est faite à l'aide des schémas de différences, c'est-à-dire par une méthode tabulaire. L'exemple du deuxième triangle montre comment Leibniz produit de nouvelles tables en développant des tables déjà construites. De plus, cela illustre une fois de plus la diversité des rôles que les tables peuvent jouer dans la pratique du philosophe. Elles sont à la fois un outil pour exhiber les relations et expliquer les propriétés, mais aussi un outil de calcul pour découvrir de nouveaux résultats. Ainsi, si le choix d'un triangle harmonique sans structure différentielle peut paraître à première vue moins pertinent et moins régulier que le choix du triangle harmonique canonique, les explications que Leibniz a du fournir pour rendre compte de la structure différentielle cachée de ce triangle permette d'éclaire de façon bien plus claire d'autres propriétés du triangle harmonique, comme la somme de ses diagonales. Dans cette première version, Leibniz a donc montré qu'on peut comprendre les progressions des inverses des nombres figurés comme des différences d'autres progressions de nombres figurés, multipliées par un certain coefficient. Dès lors, il est possible de faire la somme de ces progressions, en effectuant les opération inverses, c'est-à-dire en remontant les lignes de la table ci-dessus. Ainsi, il peut introduire la table suivante :

> *Ici, on peut sommer toutes les séries du triangle harmonique, exceptée la première, qu'on suppose le nombre des termes fini ou infini. En effet, la première série, menée jusqu'à l'infini, donne une quantité infinie. Les autres, même à l'infini, sont des quantités finies. En outre, on exposera ainsi les sommes de ces séries, dans la table :* [200]



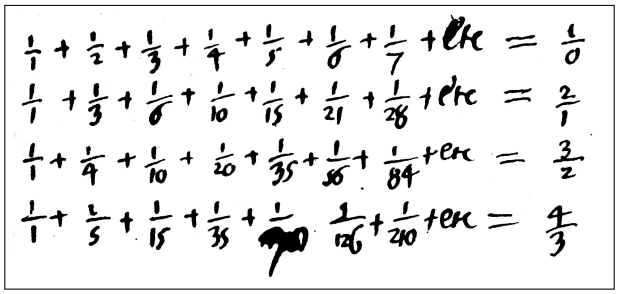
| | | | |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{1}$ |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ |
| $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{15}$ |
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{35}$ |
| $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{35}$ | $\frac{1}{70}$ |
| $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{21}$ | $\frac{1}{56}$ | $\frac{1}{126}$ |
| $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{28}$ | $\frac{1}{84}$ | $\frac{1}{210}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $=$ | $=$ | $=$ | $=$ |
| $\frac{1}{0}$ | $\frac{2}{1}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{4}{3}$ |

Manuscrits de Leibniz - LH 35 7 15 Bl.11-12

200. LH 35, 7, 15, Bl.11-12, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, 1714 : « Hinc omnes series Trianguli Harmonici summari possunt, excepta prima, sive numerum terminorum finitum sive infinitum assumas. Nam series prima in infinitum producta est quantitas infinita, cæteræ licet in infinitum, sunt quantitates finitæ. Summæ autem harum serierum ita exhibebuntur in Tabula : »

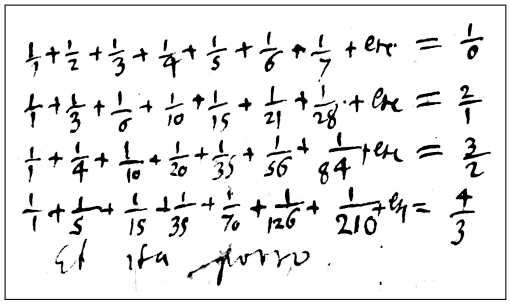
Cette table constitue la manière canonique par laquelle Leibniz exposait ce résultat durant sa jeunesse. On retrouve, par ailleurs, le fait que les progressions sont verticales et non pas horizontales. Cette manière de faire est probablement la plus naturelle pour Leibniz, mais ce n'est pas cette présentation qu'il choisit. En effet, à la suite directe de cette table, Leibniz la réécrit à l'identique mais horizontalement. Dans la seconde version, Leibniz ne donne pas d'explication pour les deux triangles, il pose simplement cette même table horizontale comme corollaire direct du triangle harmonique :

Version *A*



Manuscrits de Leibniz - LH 35 7 15 Bl.11-12

Version *B*



Manuscrits de Leibniz - LH 35 7 15 Bl.5-6

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \ldots = \frac{1}{0}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \ldots = \frac{2}{1}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{35} + \frac{1}{56} + \frac{1}{84} + \ldots = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{70} + \frac{1}{126} + \frac{1}{210} + \ldots = \frac{4}{3}$$

et ainsi de suite

Cette structure horizontale a probablement le rôle de rappeler la structure horizontale des schémas de différences. Une autre différence qui sépare les deux tables est la présence des signes + dans la seconde, alors qu'ils sont absents de la premières. Dans sa jeunesse, la juxtaposition de signes pouvait aussi bien signifier une somme qu'un produit. C'est bien moins le cas, en 1714, lorsque Leibniz rédige ce traité. Notons, pour finir, que même dans la seconde version, Leibniz commence par tracer la table verticalement, avant de se raviser :

Manuscrits de Leibniz - LH 35 7 15 Bl.1-2

**Origine des notations**

Le triangle harmonique est donc introduit dans la version *B* afin de décrire l'origine de la notation du calcul différentiel. Mais ce lien n'est pas réellement explicité. Dans les deux versions, Leibniz développe le fait qu'après avoir trouvé, grâce à la lecture de Descartes, des expressions analytiques pour les termes

de certaines progressions, il a pu déterminer les différences et les sommes grâce à ces expressions. Dans la première version, Leibniz commence par évoquer les expressions analytiques des progressions dès le premier schéma de différence général, juste avant d'énoncer les résultats de théorie des différences finies :

> *A partir de là, tous les nombres $z$ que l'on peut exprimer par une valeur telle que $z = a + by + cyy + dy^3 + ey^4 \ldots$ jusqu'où l'on souhaite, à condition qu'elle soit finie (en supposant que $y$ représente des nombres en progression arithmétique, et $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ etc. sont des nombres entiers rationnels constants positifs ou négatifs), on a coutume de les appeler les nombres en progression arithmétique répliquée, parce qu'au moyen d'une différentiation continu, on finit par tomber sur des nombres en progression arithmétique. Il en va autrement lorsqu'on place la variable $y$ au dénominateur, comme dans une progression harmonique et ses semblables, ou bien dans l'exposant lui-même, comme dans une progression géométrique. En effet, si on a $z = \frac{a}{y}$, avec $y$ des nombres en progression arithmétique, alors $z$ représente des nombres en progression harmonique. Et si on a $z = a^y$ avec $y$ des nombres en progression arithmétique, alors $z$ représente une progression géométrique. Et certes il explorait ces choses, ignorant qu'elles avaient déjà été trouvées par d'autres.* [201]

Après la mention des deux triangles harmonique et arithmétique, Leibniz décrit la manière dont il a pu intégrer le calcul différentiel à ces expressions analytiques :

> *En outre, ceci avait certes déjà été étudié, pour les parties les plus profondes de ces choses (même si, probablement, ce n'était pas assez communément connu), et nous n'affirmons rien si ce n'est qu'on était parvenu au calcul différentiel par ces sortes d'étapes. En effet, son inventeur qui avait appris entre temps l'analyse cartésienne (peu connue de lui en Allemagne), et voyant qu'on pouvait exprimer n'importe quel terme d'une telle série par une seule expression analytique, il s'est penché attentivement sur la manière dont on pourrait trouver la série différentielle d'une série donnée qu'on se propose.* [202]

Il introduit alors la notation différentielle à proprement parler :

> *Il nommait le terme d'une série donnée par une notation générale $y$ et le terme correspondant à la série différentielle, il le nommait $dy$. Il appelait $x$ le terme ordinal, c'est-à-dire en progression arithmétique et à partir duquel on doit exprimer la valeur de $y$. Et la différence de cette progression arithmétique serait la constante $dx$.* [203]

Dans la version $B$, le passage sur les expressions analytiques se trouve après le triangle harmonique, dans la seconde partie du traité. Mais cette fois-ci, curieusement, Leibniz n'insiste pas sur l'intégration du calcul différentiel et n'introduit pas la notation $d$ :

> *De plus, il disposait certes de ceci, alors qu'il n'avait pas encore été versé dans l'analyse cartésienne, mais après s'y être consacré, il considéra qu'on pouvait désigner la plupart du temps un terme d'une série par une certaine notation générale, par laquelle on fait référence à une certaine suite simple.* [204]

Dans les développements qui suivent, Leibniz applique la notation différentielle à des cas simples comme la progression des carrés, des inverses ou une progression géométrique, et ce dans les deux versions. Mais dans la version $B$, Leibniz n'utilise jamais la notation $dx$. Il insiste sur le fait que la variable $x$ doit être

201. LH 35, 7, 15, Bl.9-10, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, 1714 : « Unde omnes numeros $z$, qui exprimi possent tali valore $z = a+by+cyy+dy^3+ey^4$, etc. quousque lubet, modo sit finitus (posito $y$ esse numeros progressionis arithmeticæ, et $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, etc. esse numeros integros rationales constantes affirmativos vel negativos) appellare solebat numeros progressionis Arithmeticæ replicatæ, quia continuata differentiatione tandem ad numeros progressionis Arithmeticæ devenitur ; quod secus est, quando varians $y$, ingreditur in denominatorem, ut in progressione harmonica et cognatis ; vel in ipsum exponentionem, ut in progressione geometrica. Nam si sit $z = \frac{a}{y}$ posito $y$ esse numeros progressionis arithmeticæ, sunt $z$ progressionis harmonicæ ; et si sit $z = a^y$ posito $y$ esse numeros progressionis arithmeticæ sunt $z$ progressionis Geometricæ. Atque hæc quidem ille indagabat, ignorus ab aliis jam esse inventa ».

202. LH 35, 7, 15, Bl.11-12 et Bl.13-14, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, 1714 : « Atque hæc quidem, harum rerum penitioribus jam explorata, (etsi vulgo fortasse non satis cognita, haud affirmemus nisi per hos velut gradus ad calculum differentialem perventum fuisset. Eius enim inventor, qui interea Cartesianam Analysin (in Germania ipsi a parvum cognitam) didicerat, videns quemlibet terminum talis seriei una generali expressione Analytica exprimi posse, consideravit quomodo propositæ datæ seriei inveniri posset series differentialis. » - *Nota Bene* : l'oubli de la parenthèse fermante après « *cognita* » est dans l'original.

203. LH 35, 7, 15, Bl.13-14, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, 1714 : « Terminum seriei datæ una generali nota appellabat $y$, et terminum respondentem seriei differentialis appellabat $dy$. Terminum ordinalem seu progressionis Arithmeticæ, ex quo explicandus est valor ipsius $y$, vocabat $x$ et differentia progressionis huius Arithmetica futura erat constans $dx$. »

204. [46] G.W. Leibniz, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, *ed.* K.I. Gerhardt, Hahn, 1846 - p.15 : « Atque hæc quidem habebat, cum nondum versatus esset in Analysi Cartesiana ; sed cum hanc adjecisset, consideravit seriei terminum posse plerumque generali aliqua notatione designari, per quem ad seriem aliquam simplicem refertur. »

entière dans le cas des progressions géométriques. Dans le seconde version, Leibniz fait une distinction entre le calcul différentielle numérique et le calcul différentiel infinitésimal. Cette distinction n'est pas présente dans la première version. Elle est pourtant nécessaire pour introduire la notion d'incomparables. En effet, dans le calcul numérique, c'est-à-dire la théorie des différences finies, les différences de tous ordres sont toutes comparables, si elles ne sont pas nulles. Ainsi, on a :

$$d(x^2) = (x + dx)^2 - x^2 = (x^2 + 2xdx + dx^2) - x^2 = (2x + dx)dx$$

Alors que dans le cas du calcul infinitésimal, la différentielle $dx^2$ est négligeable :

$$d(x^2) = 2xdx$$

Le développement de la théorie des différences finies et des schéma de différences constitue donc un socle heuristique pour le développement du calcul différentiel. Le calcul numérique ne s'est pas développé comme approximation du calcul différentielle infinitésimal. Au contraire, c'est la calcul infinitésimal qui a pris pour exemple le calcul numérique et adopté des notations analogues. Le rôle de l'analogie dans le passage du discret au continu est donc significatif et ne doit pas être négligé au profit de la seule explication topologique ou géométrique.

## Conclusion

L'*Historia et Origo Calculi Differentialis* ne représente pas le point de vue du jeune Leibniz qui fera l'objet de l'essentiel de nos analyses. Néanmoins, en comprenant les objectifs que poursuit Leibniz en 1714 lorsqu'il travaille sur ce traité, nous pouvons trouver dans ce regard rétrospectif des éléments qui s'avèrent avantageux pour notre enquête.

L'étude comparative permet d'obtenir un certain recul vis-à-vis de sa démarche, en observant qu'elle change significativement entre la première version et la deuxième. Dans la première version, Leibniz a visiblement à cœur d'expliquer de façon pédagogique la façon dont la calcul différentiel s'est formé conceptuellement, grâce à ses travaux. Dans cette version, la pratique tabulaire tient une place plus importante, notamment les schéma de différence, qui ont été pour certains supprimés de la seconde version. La dualité entre somme et différence est décrite dans le cadre d'une pratique tabulaire et les nombres combinatoires sont présentés comme sa première conséquence. En outre, l'épisode du défi de Huygens suivi du triangle harmonique y est bien plus détaillé et fidèle aux sources. La seconde version, en revanche, se concentre sur les faits, les influences, les lectures et les conversations qui ont pu se tenir durant les années 1670 et 1680. La combinatoire n'est pratiquement pas évoquée dans la première version tandis qu'elle est mentionné dans cette seconde, à l'occasion de la syllogistique.

Dans ces conditions, nous pouvons soutenir l'hypothèse que la deuxième version est moins personnelle que la première, étant d'avantage conforme à son objectif de défense vis-à-vis des attaques qu'il subit alors sur la paternité du calcul différentiel.

# Transition

Ce prologue permet donc de mieux saisir les contours et les subtilités de ce sujet. A travers la grande polysémie que la combinatoire peut revêtir, nous voyons que notre travail porte sur une dimension parallèle de cette catégorie. Ce décalage est, du côté de l'observateur, la conséquence d'une démarche historiographique centrée sur l'heuristique et les méthodes de découverte et du côté des acteurs, il vise à compléter le tableau d'une combinatoire protéiforme en adoptant la posture moderne et historiciste du commentaire leibnizien qui écarte tout ambition de reconstruction systématique, et en portant la focale sur une facette implicite de la pratique mathématique : la tabulation.
Grâce à l'étude exhaustive des diagrammes présents dans la *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mais également dans l'*Historia et Origo Calculi Differentialis*, nous avons montré que la table constitue un artefact matériel et intellectuel extrêmement riche qui peut être analysé de plusieurs manières, fournissant, d'un point de vue externaliste, des renseignements sur les pratiques et les conceptions des acteurs, et d'un point de vue internaliste, les enjeux structurels des objets qui y sont instanciés. Ainsi, les structures tabulaires peuvent révéler un décalage entre la théorie sur le contenu qu'elles sont censées représenter et la théorie mise en œuvre dans la façon dont elles sont construites.
Le jeune Leibniz développe dans son ouvrage de jeunesse une conception méréologique de la combinatoire, qui s'incarne dans la structure des tables qu'il choisie pour illustrer ses propos. Ces structures restent asymétriques et doivent être considérées comme des listes de listes et non comme des tableaux à double entrée au sein desquels les deux axes jouent des rôles équivalents.
Dans l'*Historia et Origo Calculi Differentialis*, les tables sont symétriques et la structure différentielle elle-même est intégrée dans un modèle symétrique grâce à la formule d'inversion de Pascal. Les deux versions du texte présentent un ton différent, plus pédagogique pour l'une et plus polémique pour l'autre. Cette interprétation, toujours prudente, quant au ton du texte, s'ajoute à la démonstration explicite faite par Leibniz dans les deux versions du rôle qu'ont joué les tables et la théorie de différences finies dans la découverte du calcul. Dans la démarche qui est la notre, portée sur l'étude du lien entre combinatoire et *ars inveniendi* ceci doit nous enjoindre à porter notre regard sur ces travaux, en commençant par le premier épisode de la carrière mathématique de Leibniz : le défi de Huygens.

# Première partie

# Tables et Différences finies

# Avant-propos

La version *B* de l'*Historia et Origo Calculi Differentialias* présente donc la pratique des tables chez le jeune Leibniz en deux temps séparés. Dans le premier, consacré au calcul proprement dit, Leibniz expose la théorie des différences finies, incarnée par les schémas de différence, et dans le second, qui décrit l'origine de la notation différentiel, il mentionne le triangle harmonique, à la suite du défi proposé par Huygens. En réalité, les sources indiquent qu'il n'est pas possible de séparer ces deux travaux, et qu'ils sont en fait différentes facette d'un même axe de recherche, centré autour des différences finies.
Ces réflexions sont déclenchées, en premier lieu, par le défi de Huygens qui constitue donc l'origine idoine d'une entreprise monographique sur le sujet des différences finies durant le séjour parisien. Mais ce challenge n'aboutit pas seulement à la découverte du triangle harmonique, comme l'*Historia et Origo Calculi Differentialis* le suggère. Le problème très ciblé que lui pose le mathématicien hollandais provoque de multiples pistes de travail qui contribuent à leurs tours au développement des pratiques tabulaires autour des schémas de différences. La découverte du triangle harmonique constitue l'une des conséquences de cette nouvelle manière de faire et reste finalement relativement anecdotique au regard de son influence sur les mathématiques futures de Leibniz.
Néanmoins, aux yeux de Leibniz lui-même, il fait assurément parti des grandes découvertes mathématiques de Leibniz durant son séjour parisien. Certains l'appelle d'ailleurs encore aujourd'hui le « Triangle de Leibniz », faisant ainsi honneur au jeune philosophe. Y voyant sans doute le levier d'une certaine élévation au sein des milieux savants mathématiciens, il avait de fait eu à cœur d'établir sa paternité sur le triangle, ne manquant jamais une occasion de le placer à pied d'égalité avec le déjà très célèbre « Triangle de Pascal » [205].
Nous avons constaté qu'au sein des deux versions de l'*Historia et Origo Calculi Differentialis*, Leibniz donne deux versions distinctes du triangle harmonique. De fait, cette hésitation est fidèle à celle que le jeune philosophe manifeste déjà près de quarante ans plus tôt. On trouve le qualificatif « Triangle Harmonique » (« *Triangulum Harmonicum* ») associé aux deux tables durant la période parisienne. Cette ambiguïté indique remarquablement bien la complexité des trajets en va-et-viens qui relient le triangle harmonique et la théorie des différences finies. Au sens où on l'entend aujourd'hui, c'est-à-dire celui que Leibniz a conservé dans la deuxième version de l'*Historia et Origo Calculi Differentialis*, le triangle harmonique est une table particulière de différences successives : c'est un schéma de différence. En revanche, l'autre signification désigne seulement la table des inverses des nombres combinatoires, sur laquelle Leibniz travaille à la suite du problème posé par Huygens.

Il faut donc, dans un premier temps, reprendre les travaux liés au défi de Huygens afin de rétablir les processus de découverte qui mène à la construction de la table des inverses des nombres combinatoire et à sa résolution. Avant cela, afin de bien saisir les enjeux combinatoires que pose le problème de Huygens, qui relève pourtant a première vue seulement de l'analyse des progressions, nous explorerons les diverses solutions qui y avait été proposée avant que Leibniz ne s'y consacre. Nous ferons à cette occasion le constat remarquable qu'au moment où Huygens confie cette question au jeune philosophes, ces solutions sont toutes extrêmement récentes.
Après avoir traité de la question posée par Huygens et des premières explorations menées par le jeune Leibniz sur ce sujet, nous montrerons comment cela engage de profondes interrogations quant à la structure des tables, et fait écho chez lui avec le problème des triangles de différences. La distinction que

205. *Cf* par exemple A VII, 3, N.$53_2$ - *Triangulum Harmonicum et Triangulum Pascalii*, Février 1676 - p.709, où Leibniz met en regard les triangles arithmétiques et harmoniques, le premier étant attribué à Pascal (*Pascalii*) et l'autre à lui-même (*meum*)

nous avons établie entre les tableaux à double entrée et les listes de listes tient une place centrale dans cette analyse. Cela nous permet de construire un pont solide entre les deux significations du triangle harmonique, fondé sur les sources.
Pour finir, la théorie des différences finies, qui est développée à cette même période, à savoir dès la fin de l'année 1672, ne constitue pas une théorie à proprement parler. En réalité, Leibniz ne la formalise qu'à une occasion, très tôt, dans un texte intitulé le *De Artibus resovendi progressionem*, que les éditeur de l'*Akademie* datent de la deuxième moitié de 1672. Mais à compté de cette date, les schémas de différences envahissent littéralement le corpus mathématique et s'instituent visiblement comme l'une des principales méthode de l'*ars inveniendi* leibnizien. L'héritage de cette pratique se retrouve dans les travaux ultérieurs au séjour parisien, à travers la construction de structures tabulaires plus complexes.

# Chapitre 1

# Inverses des triangulaires

## Introduction

Comme Leibniz le mentionne dans l'*Historia et Origo Calculi Differentialis*, Huygens propose un problème mathématique au jeune philsophe, alors que ce dernier séjourne à Paris depuis peu de temps. Il s'agit de trouver la valeur de la somme des inverses des nombres triangulaires :

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\dots$$

Huygens dit alors à Leibniz qu'au cours de réflexions sur les jeux de hasard, cette série est apparue spontanément et qu'il a pu en trouver la valeur totale, à savoir : 2. Par une méthode que nous détaillerons dans les prochains chapitres, Leibniz trouve non seulement le même résultat que Huygens, mais parvient également à le généraliser à d'autres sommes de fractions, à savoir celles des inverses de nombres pyramidaux, des inverses des nombres triangulo-triangulaires etc. Cette prouesse impressionne Huygens, ce qui encourage le jeune philosophe à en faire part à la communauté savante de son époque, en particulier auprès des académies royales de France et d'Angleterre. Mais à la *Royal Society*, on renvoie Leibniz vers les travaux de Pietro Mengoli, un mathématicien italien, élève de Cavalieri, dont on dit qu'il a déjà démontré ces résultats vingt ans plus tôt.
Ainsi, avant d'attaquer l'étude du corpus leibnizien proprement dit, nous estimons utile de débuter notre examen par l'analyse de trois sources extérieures. Deux que nous avons citées, à savoir la découverte de la somme des inverses des triangulaires par Huygens ainsi que les résultats de Pietro Mengoli, déjà connus des Britanniques ; et une dernière que nous n'avions pas mentionné puisqu'elle rejoint les travaux de Leibniz par un autre chemin, à savoir la quadrature de l'hyperbole de Brouncker. En plus de démontrer la très grande richesse de ce sujet qu'on pourrait trouver limité de prime abord, ces études vont permettre d'une part d'établir plus précisément le contexte savant de l'époque, afin de pouvoir mieux juger de l'originalité des travaux de Leibniz, mais aussi de mettre en évidence une grande diversité de démarches possibles, afin d'en proposer une classification qui puisse entrer en résonance avec l'approche leibnizienne.
En réalité, l'ouvrage de Mengoli ne s'intéresse pas aux sommes des inverses des nombres figurés, mais aux sommes des inverses de produits de termes consécutifs d'une progression arithmétique. Ainsi, le résultat qui correspond à celui des inverses des nombres triangulaires désigne en fait les inverses des produits de deux entiers consécutifs, à savoir :

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}+\dots=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\dots$$

Chaque terme de cette série vaut la moitié de celle proposée par Huygens. Outre le lien mathématique manifeste entre ces deux problèmes, nous avons choisi de les réunir pour des raisons principalement historique : ils sont, de fait, considérés comme corollaires l'un de l'autre par tous les acteurs.
Ainsi, la somme des inverses des nombres triangulaires, ou sa moitié qui est la somme des inverses des produits de deux consécutifs, apparait dans trois contextes complètement différents. Pourtant, ces trois solutions vont être découvertes ou publiées dans un laps de temps très court : entre 1650 et 1668. Ceci semble montrer d'une part la place centrale qu'avaient les problèmes de séries à cette époque, mais cela rappelle aussi, d'autre part, la difficulté à tracer les contour d'une découverte en histoire des mathématiques et en histoire des sciences plus généralement.

## 1.1 La solution de Mengoli

Elève et successeur de Cavalieri, Pietro Mengoli débute sa carrière de mathématicien par la publication d'un ouvrage dont le titre laisse à penser qu'il traite de méthodes de quadratures : « *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ* ». Bien que la quadrature des figures géométriques soit effectivement l'objet explicite de l'ouvrage, on doit constater que son contenu réel tient bien plus de l'arithmétique que de la géométrie, comme l'indique le sous-titre : « *Seu de Additione Fractionum* ».

> *Alors que je méditais régulièrement sur la quadrature de la parabole d'Archimède, qui a pour conséquence l'existence d'une infinité de triangles produits continument dans une proportion quadruple et qui n'excèdent pas certains quantités limitées, il me vint à l'occasion de ce même argument tiré de la géométrie, cette quadrature universelle au sein de laquelle on peut rassembler à l'intérieur de quantités homogènes déterminées des grandeurs qui possédent une proportion quelconque strictement supérieure et continuant jusqu'à l'infini.* [1]

L'ouvrage est constitué de trois livres. L'objectif principal est l'étude de sommes de fractions dont les numérateurs et les dénominateurs sont fonctions d'une certaine suite arithmétique, plus ou moins générale. Dans le premier livre, Mengoli traite du cas où les numérateurs sont égaux à 1 et les dénominateurs sont le produit de deux termes successifs d'une progression arithmétique, ce qu'il nomme des "nombres plans". Puis il traite du cas des "nombres solides", c'est-à-dire des produit de trois termes successifs d'une suite arithmétique, dans le second livre. Dans le dernier livre, il traite du cas général d'un produit quelconque. L'essentiel des démonstrations se fondent sur le fait qu'on peut considérer ces sommes comme des sommes télescopiques.
Ainsi, les dénominateurs des fractions qui sont étudiées ici ne sont pas particulièrement liés aux nombres figurés auxquels Mengoli ne fait qu'une référence, lors de sa préface. Ce lien plus général sera visiblement bien établi par Collins lors de sa correspondance avec Leibniz, par l'intermédiaire d'Oldenburg, comme nous aurons l'occasion de l'établir ultérieurement.

### 1.1.1 Une démonstration par un passage à la limite

Dans le premier livre, Mengoli démontre le résultat suivant :

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \cdots + \frac{1}{(a+nb)(a+(n+1)b)} + \cdots = \frac{1}{ab}.$$

Il le fait en trois étapes, à savoir qu'il traite d'abord du cas $a = 1$ et $b = 1$, puis du cas $a = 1$ et $b$ général. Puis enfin, $a$ et $b$ généraux. Ces trois étapes étant très similaires, nous nous contenterons de reproduire la démonstration qui nous intéresse le plus, à savoir le cas $a = 1$ et $b = 1$.
Pour donner la somme de terme générique $\frac{1}{n(n+1)}$, Mengoli donne tout d'abord la valeur de la somme finie des premiers termes. La principale propriété qui permet le calcul de ce genre de somme se trouve dans ce qu'on pourrait aujourd'hui appeler "la décomposition en éléments simples" de la fraction, qui fait apparaître une somme télescopique. Deux propositions en constituent la base première, la quatrième, ainsi que la sixième proposition à partir desquelles Mengoli montre que :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1.2} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

On peut alors en déduire que $S_n$ vaut $\frac{n}{n+1}$, comme le dit la proposition 13. Il ne reste plus qu'à démontrer que cette fraction tend vers 1.

1. [67] P. Mengoli, *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ*, Bologne, 1650 - Préface : « Meditanti mihi persæpe Archimedis parabolæ Quadraturam, propterquam infinita triangula in continue quadrupla proportione existentia certos limites quantitatis non excedunt ; occurrit universalis illa Quadratura eiusdem argumenti accasione a Geometris demonstrata, qua magnitudines infinita continuam quamlibet proportionem maioris inæqualitatis possidentes in præfinitas homogeneas quantitates colliguntur. »

Il n'y a pas ici de calcul littéral. La preuve de cette égalité est donnée "*more Euclide*", c'est-à-dire à partir de propriété des proportions arithmétiques et harmoniques issues des Livres V, VII, VIII et IX. La référence est en fait clamée haut et fort par l'auteur lorsque Mengoli prévient le lecteur, au cours d'un avertissement à la suite des définitions liminaires du premier livre, qu'il lui sera nécessaire de bien connaitre les livres d'arithmétiques des *Eléments* ainsi que le livre V qui traite des proportions. Cet ajout de livre V nous montre bien, par ailleurs, le souci qu'a Mengoli de s'émanciper des frontières de l'arithmétique : de fait, il nomme "somme" les sommes finies et "quadrature" ou "extension" les sommes infinies.
C'est alors qu'intervient l'influence très nette d'Archimède et de ce qu'on appelle aujourd'hui "le lemme d'Archimède", qui assure qu'étant données deux quantités $\alpha$ et $\beta$ homogènes, on peut toujours multiplier n'importe laquelle des deux par un nombre assez grand de sorte qu'elle surpasse l'autre. ici, on assiste à une série de définitions concernant la convergence des séries, qu'on pourrait qualifier de très modernes, si l'on succombait à cette vision inversée de l'histoire, mais qui restent, quoi qu'il en soit, extrêmement satisfaisante pour le lecteur d'aujourd'hui :

*Définition 10 :*

> *On dit que des grandeurs remplissent une extension donnée lorsqu'il existe une infinité qui ont ensemble une extension plus petite que la donnée et d'autre part, lorsqu'il en existe un nombre fini telles que si l'on ajoute une autre grandeur à leur suite, leur extension dépasse celle qui est donnée.* [2]

Mengoli donne ici la définition de la limite d'une série (qui est bien nommée "définition" cette fois) : une série a pour somme une quantité limite $l$ s'il existe une infinité de somme partielle que lui sont inférieures et si pour toute quantité $\varepsilon$ qu'on se donne, il n'existe qu'un nombre fini de sommes partielles qui soient inférieures à $l$ après qu'on leur a rajouté la quantité $\varepsilon$ à la fin. Autrement dit, pour tout $\varepsilon$, il existe nécessairement une somme partielle qui surpasse $l - \varepsilon$.
Pour démontrer que la série $S_n = \frac{n-1}{n}$ converge vers 1, Mengoli montrer la chose suivante :

*Problème Premier :*

> *Etant donnée une proportion d'inégalité inférieure, trouver une autre proportion qui soit plus grande, et qui soit le rapport d'un nombre à son successeur.* [3]

Autrement dit, pour tout couple de quantités $a < b$, il existe $n$ tel que :

$$\frac{a}{b} < \frac{n}{n+1}.$$

Ainsi, si l'on se donne une quantité $\varepsilon$, alors on peut trouver deux quantités $a < b$ telles que $1 < \frac{a}{b} + \varepsilon$. On sait qu'il existe un entier $n_0$ tel que $\frac{a}{b} < \frac{n_0}{n_0+1}$. Or si $n \geq n_0$ alors $\frac{n}{n+1} \geq \frac{n_0}{n_0+1}$ et donc $\frac{n}{n+1} + \varepsilon > \frac{a}{b} + \varepsilon > 1$. Donc, pour que la somme partielle, à laquelle on a rajouté $\varepsilon$, soit plus petite que $l = 1$, il faut que $n < n_0$, et donc il y en a un nombre fini. Ce qui démontre la proposition.

### 1.1.2 Les preuves par paquets

A la suite de cette démonstration par passage à la limite, Mengoli en évoque deux autres possibles, qui sont en réalité une seule et même preuve, et qui se rapprochent des procédés qu'entreprendra Huygens en 1665, comme nous le verrons. Dans la première, il remarque qu'en groupant les termes de la suite deux par deux à partir du deuxième, on obtient la moitié de la somme cherchée, ce qui nous donne : $S - u_1 = \frac{1}{2}S$ avec $u_1 = \frac{1}{2}$. Donc $S = 1$. Pour la deuxième, on regroupe trois par trois et on obtient le tiers : $S - (u_1 + u_2) = \frac{1}{3}S$ ce qui mène naturellement au même résultat $S = 1$. Elle peut être qualifiée d'algébrique puisqu'il s'agit de résoudre une certaine équation vérifiée par $S$. Cependant, elle n'est pas fondée sur un calcul de caractère, mais sur un procédé combinatoire qui est le regroupement par paquets. Dans la préface, Mengoli donne également la somme des inverses des nombres triangulaires :

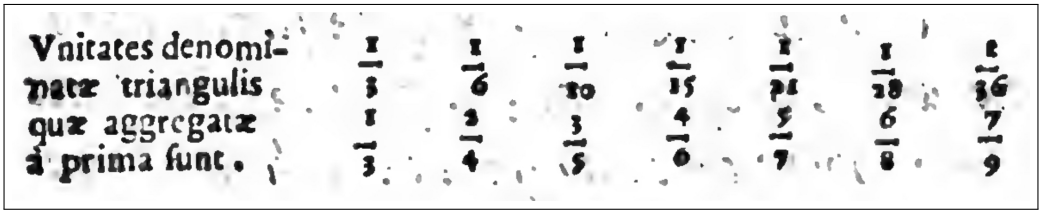
2. [67] P. Mengoli, *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ*, Bologne, 1650 - Def.10, p.19 : « Magnitudines dicuntur implere propositam extensionem, quando existentes infinitæ sunt extensionis minoris proposita ; vel quando existentes finitæ, ita sunt minores proposita, ut una alia magnitudine adiecta in earumdem ordine continuato proxima, fiant extensionis maioris proposita. »

3. P. Mengoli, *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ*, Bologne, 1650 - Prob.1 Prop.14 p.17 : « Data proportione minoris inæqualitatis, alteram invenir maiorem data, quæ sit numeri ad numerum unitate maiorem. »

*Laissons donc de côté ces développements sur les séries qui outrepassent la juridiction de la quantité, car la même contemplation commence à s'établir vis-à-vis des fractions unitaires dont le dénominateur est un nombre triangulaire. Est-ce qu'on peut voir qu'elles interdisent encore toute quadrature ou bien peut-on plutôt clairement montrer à leur sujet la chose suivante : après avoir produit les calculs selon l'usage et dressé la démonstration, j'ai montré que la quadrature d'une telle série est égale à l'unité.* [4]

Il justifie brièvement ce résultat de deux manières. La première est purement inductive, à savoir qu'il établit la formule suivante à partir des sept premiers termes de la suite :

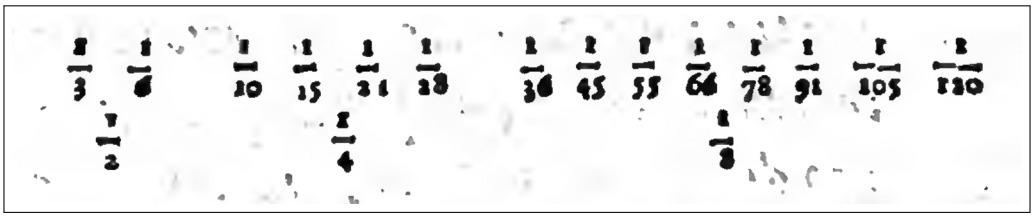
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{\binom{n+2}{2}}=\frac{n}{n+2}$$




P. Mengoli, *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ* - Préface

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Unités divisées par les Triangulaires | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{21}$ | $\frac{1}{28}$ | $\frac{1}{36}$ |
| Qui, une fois sommées, font | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{4}{6}$ | $\frac{5}{7}$ | $\frac{6}{8}$ | $\frac{7}{9}$ |

La seconde correspond exactement à celle que mènera Huygens, bien qu'elle soit bien plus succincte. Cela étant, on retrouve un schéma presque analogue :



P. Mengoli, *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ* - Préface

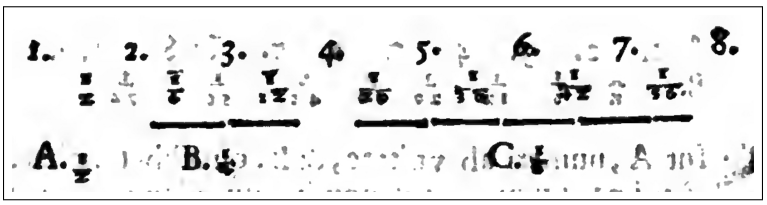
| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{21}$ | $\frac{1}{28}$ | | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{45}$ | $\frac{1}{55}$ | $\frac{1}{66}$ | $\frac{1}{78}$ | $\frac{1}{91}$ | $\frac{1}{105}$ | $\frac{1}{120}$ |
| | $\frac{1}{2}$ | | | $\frac{1}{4}$ | | | | | | | $\frac{1}{8}$ | | | | |

On retrouve d'ailleurs ce schéma lors de la proposition 12 du premier livre, qui consiste précisément à mettre en avant cette structure arborescente :

*Les fractions unitaires dont les dénominateurs sont tous les plans de tous les nombres depuis l'unité, sommées depuis la première et toujours autant que la proportion continue sous-double depuis l'unité, pour tous les nombres suivants, sont en proportion continue double.* [5]

4. [67] P. Mengoli, *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ*, Bologne, 1650 - Préface : « Dimissis igitur hisce dispositionibus quantitatis iurisdictionem superantibus, eamdem contemplationem instituere cœpi de fractionibus, in quibus unitates a numeris triangulis denominantur ; an videlicet ipsæ etiam quadraturam excluderent, an potius paterentur : Factis ergo de more calculis, & instructa demonstratione, inveni dispositionis huiusmodi quadratruam esse unitatem »

5. [67] P. Mengoli, *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ*, Bologne, 1650 - p.15 : « Unitates denominata planis omnium numerorum ab unitate, sumpta a prima totidem semper secundum numeros proportionis continue subduplæ ab unitate sunt in proportione continue dupla »



P. Mengoli, *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ* - p.15

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{42}$ | $\frac{1}{56}$ |
| $A.\frac{1}{2}$ | | $B.\frac{1}{4}$ | | $C.\frac{1}{8}$ | | | |

Notons que ce que Mengoli nomme la "proportion continue sous-double" correspond en fait à la progression géométrique double, c'est-à-dire $1, 2, 4, 8, 16$ etc. Réciproquement, la progression des inverses $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ etc. est nommée "proportion continue double". Mengoli considère donc les relations dans le sens opposé au sens habituel, à savoir que c'est $u_n$ qui est fonction de $u_{n+1}$ et non l'inverse, ce que nous retrouverons également chez Huygens dans le contexte des probabilités.

### 1.1.3 Les résultats généraux

Le premier livre s'attache donc a montrer la formule suivante :

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \frac{1}{(a+2b)(a+3b)} + \cdots + \frac{1}{(a+nb)(a+(n+1)b)} + \cdots = \frac{1}{ab}$$

Le deuxième livre étudie donc les sommes du type :

$$\frac{1}{a(a+b)(a+2b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)(a+3b)} + \cdots + \frac{1}{(a+nb)(a+(n+1)b)(a+(n+2)b)} + \ldots$$

Et finalement, le troisième livre porte sur le cas général :

$$\frac{1}{a(a+b)\ldots(a+(k-1)b)} + \cdots + \frac{1}{(a+nb)(a+(n+1)b)\ldots(a+(n+k-1)b)} + \ldots$$

On remarque alors, comme le fera Collins, que la somme des inverses des nombres combinatoires est un corollaire immédiat de ce résultat, de la même manière que la somme des inverses des triangulaires valait nécessairement le double de la somme des $\frac{1}{n(n+1)}$. En effet, ici $a = b = 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{k+n}{k}} &= \frac{k!}{1.2\ldots k} + \frac{k!}{2.3\ldots(k+1)} + \frac{k!}{3.4\ldots(k+2)} + \ldots \\
&= k!\left(\frac{1}{1.2\ldots k} + \frac{1}{2.3\ldots(k+1)} + \frac{1}{3.4\ldots(k+2)} + \ldots\right) \\
&= k! \times \frac{1}{(k-1).1} \times \frac{1}{1.2\ldots(k-1)} \\
&= \frac{k}{k-1}.
\end{aligned}$$

Peut-on alors dire que Mengoli avait résolu le problème de la sommation des inverses des nombres combinatoires dès 1650 ? On ne peut clairement pas affirmer le contraire. Cependant, il faut tout de même souligner que ce problème n'est tout simplement pas mentionné au sein des *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ*, mise-à-part la somme des inverses des triangulaires qui est évoquée dans la préface. De plus,

concernant cette étape de calcul que nous opérons ci-dessus, bien qu'il s'agisse d'une réécriture élémentaire d'une équation ne faisant intervenir qu'une factorisation et une simplification de fractions, elle n'est pas neutre dans le contexte de rédaction que nous avons déjà décrit. Bien-sûr, nous n'entendons pas par là qu'un tel calcul eût été éventuellement hors de portée de l'auteur. Nous mettons seulement en lumière la chose suivante à propos de ces deux résultats :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{k+n}{k}} = \frac{k}{k-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+nb)\dots(a+(n+k-1)b)} = \frac{1}{(k-1)b} \times \frac{1}{a\dots(a+(k-2)b)}$$

Le fait que le premier soit clairement un corollaire, voir un cas particulier, du second nous apparait grâce à leurs formules littérales, c'est-à-dire grâce au contexte algébrique. Il n'est pas clair qu'un tel lien ait pu être aussi évident pour Mengoli, ce qui peut expliquer l'absence d'un tel corollaire à l'intérieur de son traité. En effet, là où le lien était très évident, pour le cas $k = 2$, Mengoli a bien évoqué la somme des inverses des triangulaires.

## 1.2 Huygens et les probabilités

Huygens a énoncé son défi au cours d'une conversation qui portait sur les séries arithmétiques infinies. C'est pourtant dans un tout autre contexte que ce problème s'est posé à lui, celui des probabilité. ? En fait, la série semble même être apparue par hasard dans ce problème traitant justement des questions de hasard.

### 1.2.1 Le problème des partis

Le « Problème des partis » est un épisode célèbre de l'histoire des mathématiques que de nombreux récits aiment à considérer comme le berceau de la théorie des probabilités [6], ou encore comme la préhistoire de sa préhistoire [7]. On peut critiquer, à juste titre [8], cette volonté qu'ont eu et qu'ont encore nombre de commentateurs de trouver à tout prix l'instant $t$ qui marque la naissance d'un savoir, d'une théorie ou d'un concept. Il n'est cependant pas question de nier le fait qu'il se produit quelque chose de réellement important entre l'année 1654 qui marque le début de la correspondance entre Pascal et Fermat au sujet des partis et l'année 1657, date de publication par Huygens de son petit traité *De ratiociniis in ludo aleæ*. Le problème des partis regroupe en réalité toute une classe de problèmes que l'on rencontre chez les auteurs européens dès le XV$^{\text{ième}}$ siècle [9]. Il s'agit de considérer un jeu entre deux ou plusieurs participants au cours duquel chacun joue à son tour, tous ayant misé une certaine somme au départ. Le premier joueur ayant atteint un certain nombre de manches gagnantes, fixé par les règles, remporte la partie et la totalité de la mise. Le problème des partis traite du cas où l'on forcerait la partie à s'interrompre avant qu'aucun des joueurs n'ait gagné le nombre de manche requise. Il s'agit alors de trouver, par une méthode rationnelle, le moyen de distribuer la mise à chaque parti (d'où le nom du problème) en fonction des chances que chaque participant aurait eue de l'emporter si la partie avait pu se poursuivre, et sachant l'avancement du jeu lorsque l'on a choisi de le stopper.
Le jeu est posé de telle sorte qu'il ne puisse pas se poursuivre au delà d'un certain nombre fixé de manches, nombre qui ne dépend que de la condition de victoire et du nombre de participants. Ainsi, il y a un nombre fini de parties possibles et ce nombre sera d'autant plus petit que sera grand le nombre de manches ayant eu lieu avant l'interruption. Malgré la diversité des approches que l'on retrouve chez les différents acteurs qui s'y sont essayés, le principe reste toujours le même, à savoir que la part de la mise rendue à tel joueur est proportionnelle au nombre de cas possibles où ce dernier aurait été vainqueur. C'est bien ce principe de dénombrement fondamental qui place progressivement la pensée du hasard et de l'incertain sur le vaste terrain des mathématiques et des mathématiciens. Dans une forumule célèbre, Pascal a pu consolider ce lien dès 1654 :

> *Ainsi, joingnant la rigueur des démonstrations de la science à l'incertitude du hasard, et conciliant ces choses en apparence contraires, elle peut, tirant son nom des deux, s'arroger à bon droit ce titre stupéfiant :* La Géométrie du hasard [10]

### 1.2.2 Le problème et sa solution

Le problème qui nous intéresse ici est l'un des nouveaux problèmes auxquelles s'attèle Huygens durant l'année 1665. Il apparait dans un manuscrit daté du 15 juillet et l'énoncé est le suivant :

> *A et B jettent à tour de rôle croix ou pile, à condition que celui qui jette pile mettra chaque fois un ducat à l'enjeu, mais celui qui jette croix recevra chaque fois un ducat si quelque chose a été mis. Et*

6. [37] *Cf* l'appareil critique du tome XIV des *Oeuvres complètes de Christiaan Hugens*, 1920 par Diderik J. Korteweg : « On sait qu'en 1654 le Chevalier de Méré, joueur renommé et un peu mathématicien, proposa à Pascal quelques problèmes concernant les jeux de hasard, qu'il en resultait un échange de lettre entre Pascal et Fermat et que ce fut là l'origine du calcul des probabilités. »

7. [72] Meusnier - *L'émergence d'une mathématique du probable au XVIIe siècle*, 1996

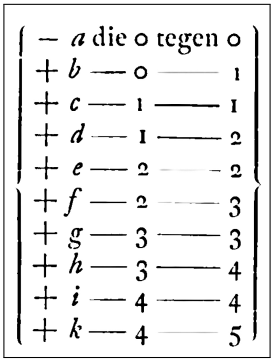
8. Concernant l'histoire des probabilités antérieure au problème des partis, *cf* Hacking I., *The Emergence of Probability*, Londres & New York, Cambridge University Press, 1975 ou encore Coumet E., *Le problème des partis avant Pascal*, Archive internationale d'histoire des sciences, 1965 pp. 245-272

9. Meusnier - *Le problème des partis bouge... de plus en plus*, J.E.H.P.S., vol.3, 2007

10. [80] B. Pascal, *Celeberrimæ Matheseos Academiæ Parisiensi*, 1654, dans *Œuvres de Blaise Pascal*, Hachette, Paris, Vol.3 (1923), Ch.54., p.307-308 : « et sic matheseos demonstrationes cum aleæ incertitudine jungendo, et quæ contraria videntur conciliando, ab utraque nominationem suam accipiens, stupendum hunc tituulum jure sibi arrogat : *aleæ Geometria* »

*A jettera le premier quand il n'y a encore rien à l'enjeu, et le jeu ne finira pas avant que quelque chose ait été mis, et l'on jouera jusqu'à ce que tout ait été enlevé. On demande quel est le désavantage de A.* [11]

On peut définir chaque moment de la partie par la mise qu'ont effectuée les deux joueurs jusque là. Huygens introduit ces différents états possible de la partie dans la table suivante :




*Oeuvres complètes de Christian Huygens*, Tome XIV, p.133

La première colonne représente l'avantage du joueur qui doit jeter à cet instant. La colonne centrale désigne sa mise et la dernière colonne (après "*tegen*" qui signifie "contre") la mise de l'autre joueur. On remarque qu'il n'a listé que les états où le joueur qui doit jeter a moins misé que l'autre, car il suffit de renverser les avantages pour obtenir les cas symétriques.
Au début de la partie, le jeu se trouve dans l'état où personne n'a rien misé. C'est le joueur A qui commence et jette croix ou pile. S'il jette pile, il met un ducat et la partie passe à l'état de la deuxième ligne. Etant donné que c'est 1 contre 0 et non 0 contre 1, il perd l'avantage de cette ligne, à savoir $b$. Si, en revanche, il jette croix, rien ne se passe et l'on reste à la première ligne. Le joueur prend alors l'avantage de son adversaire, à savoir $a$ :

*Par suite, celui qui ne jette pas a l'avantage $+a$, car ce que l'un gagne, l'autre le perd.* [12]

*$-a \propto 1$ chance à $+a$ et 1 chance à $-b$.* [13]

Ainsi, on peut en conclure l'égalité suivante : $-a = \frac{1}{2}(+a) + \frac{1}{2}(-b)$.
Supposons maintenant que le jeu soit dans l'état de la deuxième ligne. Si le joueur jette pile, alors il mise un ducat et le jeu passe à l'état de la troisième ligne. Comme dans le raisonnement précédent, il perd l'avantage de cette troisième ligne, à savoir $c$. Si, par contre, il jette croix, alors il récupère le ducat de la mise et la partie s'arrête. Son avantage prend alors la valeur du ducat, que Huygens note $\Delta$. Ainsi :

*$b \propto 1$ à $\Delta$ et 1 à $-c$.* [14]

Et donc : $b = \frac{1}{2}(+\Delta) + \frac{1}{2}(-c)$.
A partir de la troisième ligne, le raisonnement est le même, car la première ligne n'intervient plus. Huygens donne l'explication suivante :

*Ensuite c est égal à une chance d'avoir $\Delta - b$ et 1 d'avoir $-d$, pour la raison que celui qui jette croix quand il y a 1 contre 1 dans l'enjeu peut être estimé avoir gagné le ducat que l'autre a mis et laissé son propre ducat à l'enjeu : ce qui est 1 contre 0, l'autre devant jeter, et cela vaut $-b$ à celui qui ne*

11. [37] *Oeuvres complètes de Christiaan Hugens*, Tome XIV, ed. Diderik J. Korteweg, 1920, p.132 « A en B werpen met beurten kruys of munt, op conditie dat die munt werpt een ducaet daer voor ieder reijse sal in setten, maer die kruijs werpt fal ieder reijse daer voor een ducaet trecken als er iets in geset is. En A sal eerst werpen als noch niets is in geset en het spel niet uijt fijn eer er iets in geset is, en men sal soo lang spelen tot alles weder uijtgetrocken is. De vrage is hoe veel A hierdoor verlieft. »

12. [37] *Oeuvres complètes de Christiaan Hugens*, Tome XIV, ed. Diderik J. Korteweg, 1920 - p.133 : « Ergo die niet en werpt heeft dan $+a$ dan dat d'een verliest wint den anderen »

13. [37] *Oeuvres complètes de Christiaan Hugens*, Tome XIV, ed. Diderik J. Korteweg, 1920 - p.133 : « $-a \propto 1$ kans tot $+a$ en 1 kans tot $-b$ »

14. [37] *Oeuvres complètes de Christiaan Hugens*, Tome XIV, ed. Diderik J. Korteweg, 1920 - p.133 : « $b \propto 1$ tot $\Delta$ en 1 tot $-c$ »

*doit pas jeter ; de sorte qu'il a donc* 1 *chance d'avoir* $\Delta - b$, *et* 1 *d'avoir* $-d$, *c'est-à-dire : de mettre* 2 *contre* 1 *et de laisser jeter l'autre.* [15]

Ainsi, il peut en déduire cette égalité : $c = \frac{1}{2}(\Delta - b) + \frac{1}{2}(-d)$.
Huygens généralise alors cette formule : $d = \frac{1}{2}(\Delta - c) + \frac{1}{2}(-e)$ puis $e = \frac{1}{2}(\Delta - d) + \frac{1}{2}(-f)$ et ainsi de suite. A partir des égalités des trois premières lignes, il obtient :

$$\begin{aligned} -a &= \frac{1}{2}(+a) + \frac{1}{2}(-b) \\ &= \frac{1}{2}(+a) + \frac{1}{2}\left(-\left(\frac{1}{2}(+\Delta) + \frac{1}{2}(-c)\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}(+a) + \frac{1}{2}\left(-\left(\frac{1}{2}(+\Delta) + \frac{1}{2}\left(-\left(\frac{1}{2}(\Delta - b) + \frac{1}{2}(-d)\right)\right)\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}(+a) + \frac{1}{8}(-\Delta) + \frac{1}{8}(-b) + \frac{1}{8}(-d) \end{aligned}$$

A partir de cette équation, Huygens va chercher à exprimer $d$ en fonction de $b$, $\Delta$ et $e$. Puis à nouveau, exprimer $e$ en fonction de $b$, $\Delta$ et $f$ et ainsi de suite. Le raisonnement de Huygens est un raisonnement clairement inductif. Il entame une procédure deux ou trois fois, pour constater la nature des régularités qui régissent les données initiales qu'il obtient. Il généralise sans vraiment de scrupule, ce qui n'a rien de surprenant ni de réellement notable.
Aujourd'hui, on dit qu'on résout "des suites à récurrence linéaire double", c'est-à-dire du type : $u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n + \gamma$. Une telle résolution consiste à exprimer chaque terme de la suite en fonction des deux premiers, à savoir $u_0$ et $u_1$. C'est faire une réduction avec les $n$ décroissants : on exprime l'étape $n$ en fonction des étapes précédentes, puis ces étapes sont exprimées à leurs tours en fonction des étapes encore précédentes et ainsi de suite. Cette méthode de résolution, qui consiste à réduire toute une série à ses valeurs initiales, s'accommode très bien de contextes déterministes au sein desquels il s'agit d'établir l'état présent d'un système, en fonction de ses conditions initiales. Mais cette marche exclusivement à rebours ne convient pas à l'approche de Huygens et sa conception des problèmes de hasard. A travers les problèmes de « Géométrie du hasard », pour reprendre la formule consacrée par Pascal, on cherche à prendre un décision dans l'instant présent, qui tienne compte de façon parfaitement juste à la fois du passé, mais également de l'avenir. C'est pourquoi la relation de récurrence de Huygens se trouve sous la forme : $u_{n+1} = \alpha u_n + \beta u_{n+2} + \gamma$. Ainsi, il ne s'agit plus d'exprimer l'étape $n$ en fonction des précédentes, et donc des deux termes initiaux. Ici, le terme de la suite dépend non seulement de son point de départ mais aussi, et surtout, de son point d'arrivée, c'est-à-dire du comportement asymptotique de la suite. Dans l'absolu, il n'est pas possible de déterminer le premier terme d'une suite récurrente, car il en constitue un des paramètres. Mais en retournant le temps, pour ainsi dire, c'est l'évolution asymptotique de la suite qui devient le paramètre, dont le premier terme va être fonction. C'est pourquoi Huygens termine par supposer que la suite des avantages est bornée.

*La dernière quantité, ici* $\frac{1}{32}k$, *devient infiniment petite, puisque* $k$ *ne devient pas infiniment grand, parce que si l'un n'a mis qu'un seul ducat de plus que l'autre, il est assez évident que dans ce jeu il ne perd pas plus que* 1 *ou* 2 *ducats, mais le diviseurs (étant ici* 32*) devient infiniment grand, augmentant à chaque fois de* 4. *Par conséquent, la dernière quantité (ici* $\frac{1}{32}k$*) doit être comptée pour* 0, *si l'on suppose qu'on a continué le calcul jusqu'à l'infini.* [16]

Cette hypothèse permet de fixer le paramètre asymptotique et ainsi d'aboutir à la solution.

15. [37] *Oeuvres complètes de Christiaan Hugens*, Tome XIV, ed. Diderik J. Korteweg, 1920 - p.134 : « Voorts is $c \propto$ een kans om te hebben $\Delta - b$ en 1 tot $-d$, waer van de reden is dese, dat die kruijs werpt als er 1 tegen 1 staet, kan bedacht werden te trekken de $\Delta$ ofte ducaet die den anderen heeft ingeset, en sijne eijghene te laten flaen, te weten 1 tegen 0 ; en den anderen moet werpet, 't welck hem die niet en werpt $-b$ weerdt is. Soo heeft hij dan 1 kans tot $\Delta - b$, en 1 tot $-d$ dat is om 2 tegen 1 in te setten en den anderen te laten werpen. »

16. [37] *Oeuvres complètes de Christiaan Hugens*, Tome XIV, ed. Diderik J. Korteweg, 1920, p.140 « De laetste quantiteijt, als hier $\frac{1}{32}k$, wordt infinitè kleijn, dewijl k niet oneijndigh groot en werdt, om dat als den eenen maer een meer als den anderen ingeset heest, soo siet men wel dat hij in dit spel niet boven 1 of2en verliest, maer den divisor, (fijnde hier 32) werd oneindigh groot waffend mit 4. Soo dat dan de laetst quantiteijt, (hier $\frac{1}{32}k$) voor 0 moet gerekent werden, als men verstaet in infinitum voort gagaen te sijn »

### 1.2.3 La somme des inverses des triangulaires

L'un des coefficients de la suite récurrente qui émerge se trouve être par hasard la somme des inverses des triangulaire. Huygens se propose de faire le calcul de cette série à part, conscient qu'un nouveau problème complètement indépendant a émergé de ses propres calculs. Il abandonne donc le contexte probabiliste et se place dans un cadre entièrement algébrique. Il introduit les nombres triangulaires comme issus de la procédure algébrique suivante : on ajoute le nombre à son carré, puis on divise par deux. On a donc pour le nombre $x$ son triangulaire qui est $\frac{xx+x}{2}$. Pour trouver la somme de sa série, Huygens énonce un théorème que l'on trouve déjà chez Mengoli :

> *si de ces fractions on en additionne deux successives, dont la première est telle que le dénominateur est le triangle d'un nombre pair, alors la somme sera égale à la moitié d'une fraction de la même suite, dont le dénominateur est le triangle de la moitié du nombre duquel le triangle constitue le dénominateur de la première des deux fractions qu'on a additionnées.* [17]

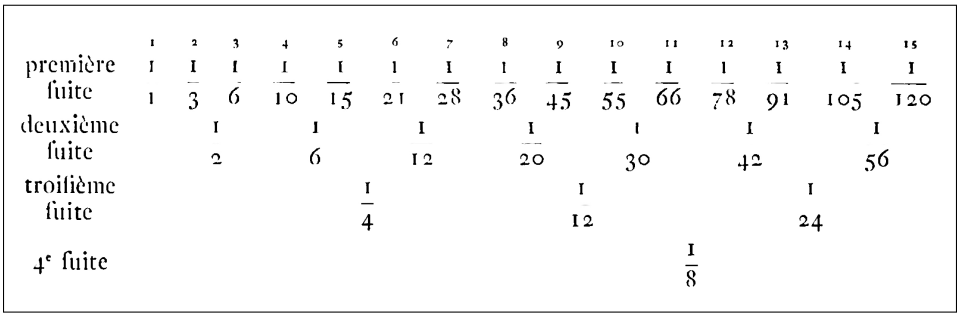
Si l'on note $T_p = \frac{p(p+1)}{2}$ le $p$-ième nombre triangulaire, alors Huygens affirme ici la chose suivante :

$$\frac{1}{T_{2p}} + \frac{1}{T_{2p+1}} = \frac{1}{2}\frac{1}{T_p}$$

Contrairement à la démarche précédente, entièrement inductive, Huygens ne va pas se contenter de montrer cet énoncé par des exemples convainquant ; bien qu'il donne tout de même un exemple pour permettre au lecteur (qui est sans doute lui-même) de bien comprendre sa formulation lourde et alambiquée. Il profite de la formule algébrique qu'il a donné en préambule pour démontrer ses dires par l'analyse littérale.

Huygens fait usage de l'algèbre littérale là où Mengoli proposait une démonstration purement euclidienne. La différence des deux approches s'explique d'abord et avant tout par le contexte de ces deux démonstrations. L'ouvrage de Mengoli revêt une forme très classique, extrêmement proche du canon euclidien, d'où les formules et les calculs littéraux sont proscrits. Chez Huygens, il s'agit en revanche d'un manuscrit de travail, on pourrait presque dire un brouillon préparatoire. Les écritures algébriques, plus concise et plus nettes à l'esprit, s'y accommodent parfaitement, puisqu'il n'est pas nécessaire de gloser sur la viabilité de telle ou telle utilisation. Pour le dire autrement, dans la démarche de constitution d'un traité que l'on souhaite diffuser largement, l'on choisit préférablement l'arithmétique d'Euclide alors que l'algèbre s'adapte parfaitement ici à un contexte plus heuristique.

Dès lors, il ne lui reste plus qu'à procéder à une sommation par paquet, qu'il illustre par la table suivante :




*Oeuvres complètes de Christian Huygens*, Tome XIV, p.148

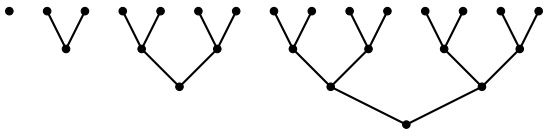
On obtient alors la somme des inverses de la suite géométrique double, c'est-à-dire :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

La valeur de cette somme, extrêmement classique, à savoir 2, est donnée sans explication :

17. [37] *Oeuvres complètes de Christiaan Hugens*, Tome XIV, ed. Diderik J. Korteweg, 1920, p.146 « indien men eenighe 2 achtereenvolgende deser gebroocken te samen addeert, nemende tot voorste soo een wiens noemer is den triangel van een even getal ; soo sal de somme gelijck sijn aen de helft van het gebroocken deser rije wiens noemer den triangel is van de helft de fijde welckers triangel was den noemer van het voorst der 2 geaddeerde gebroockens. »

Penchons-nous pour finir sur la démonstration de la somme de la série, sur laquelle nous aurons l'occasion de revenir plus tard. Ce qui paraît le plus frappant, dans le cadre de notre analyse, c'est le contraste manifeste entre la position ouvertement algébriste de la démonstration (dont on a déjà dit qu'elle tranchait avec la démarche inductive du travail précédent) et le cœur de l'argument qui repose en grande partie sur la table et les différentes relations qu'elle permet de mettre en évidence. Il y a manifestement ici un défaut de l'algèbre qui empêche Huygens de mener sa preuve littérale jusqu'au bout. Il ne peut probablement "écrire algébriquement" le fait que la structure arborescente de sa table recouvre chaque membre de la première suite et qu'il n'y a pas de chevauchement.



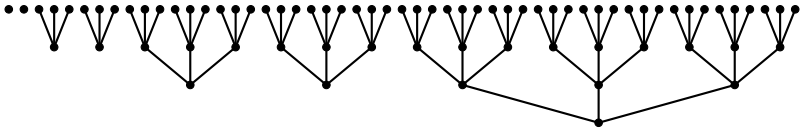
En réalité, comme l'indique Korteweg [18], on sait bien que la somme des inverses des nombres triangulaires est une somme télescopique, comme nous l'avons vu chez Mengoli :

$$\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$$

La méthode de Huygens, quoiqu'ingénieuse et très convaincante, repose donc sur des principes artificiels. Et l'on peut généraliser et sommant par trois, quatre ou $k$, comme les compléments de preuves que nous avions trouvé chez Mengoli :

$$\frac{1}{T_{3p}} + \frac{1}{T_{3p+1}} + \frac{1}{T_{3p+2}} \quad = \quad \frac{1}{3}\frac{1}{T_p}$$

Cette fois-ci, au lieu de sommer tous les premiers termes de chaque suite, on doit sommer à chaque fois les 2 premiers.



Ainsi, cette somme peut se réduire à la somme de n'importe quelle série géométrique classique, ayant pour raison une unité fractionnaire. On peut même changer la façon de regrouper à chaque ligne, les combinaisons de preuves étant finalement infinies.

18. [37] *Oeuvres complètes de Christiaan Hugens*, Tome XIV, ed. Diderik J. Korteweg, 1920, p.144 - note 1) de Korteweg : « Nous n'avons pas voulu le supprimer puisqu'il fait connaître la manière dont cette somme a été obtenue par Huygens ; mais on sait qu'on l'obitent bien plus facilement en remarquant que $\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$ »

## 1.3 La quadrature de l'hyperbole de Brouncker

Ce ne sont pas les inverses des triangulaires qui apparaissent spontanément dans cette étude de William Brouncker, mais la suite de leurs moitiés, c'est-à-dire les inverses des produits de deux entiers consécutifs [19], comme ce que nous avons déjà pu trouver chez Mengoli.
En plus de donner un troisième lieu d'apparition de cette série dans un laps de temps extrêmement court au regard de l'Histoire, l'ajout de la quadrature de l'hyperbole de Brouncker aux travaux de Mengoli et de Huygens présente deux intérêts majeurs. Le premier concerne l'aspect historique. En effet, en ce début de seconde moitié de siècle, tous ces acteurs sont en contact plus ou moins direct. Brouncker est par exemple le premier président de la Royal Society, au sein de laquelle les travaux de Mengoli vont avoir un grand retentissement. Mais le second intérêt de cet ajout réside dans la richesse combinatoire que revêt ce problème si on lui applique les idées déduites des approches des combinaisons que nous avons pu tirer des travaux de Huygens et de Mengoli : en particulier la somme par paquet.

### 1.3.1 La présentation de l'article par la Royal Society

L'article de Brouncker est extrêmement court et parait dans les *Philosophical Transactions of the Royal Society* le 13 Mai 1668. Le texte est reproduit dans l'édition de 2003 de la correspondance de Wallis, en tant qu'échange entre Brouncker et le secrétaire de la Royal Society, Henry Oldenburg. Sa présence au sein de l'œuvre de Wallis est justifiée par l'introduction de l'article, rédigée par une tierce personne :

> *Ce qu'avait laissé entendre le rigoureux Dr. John Wallis, il y a quelques années, dans la dédicace de sa réponse à M. Meibomius au sujet des proportions* [20]*, c'est ce que le monde apprendra un jour de la part du noble Lord Brouncker : la quadrature de l'Hyperbole ; le lecteur ingénieux trouvera sans peine sa réalisation dans les opérations jointes ci-dessous, que cet Excellent Auteur a eu plaisir de nous communiqué, comme il suit dans ses propres mots* [21]

Ici, on fait référence à un écrit de Wallis qui date de 1657, à savoir : *Adversus Marsi Meibomii : De Proportionibus Dialogum Tractatus Elencticus*. Wallis y critique le traité *De Proportionibus* de Marcus Meibom, paru deux ans plus tôt en 1655. Au début de cet ouvrage pamphlétaire, Wallis rédige une longue dédicace à l'intention de Brouncker, dans laquelle il évoque son travail sur la quadrature de l'hyperbole :

> *Votre Seigneurie est respectable de par toute l'humanité dont vous faites preuve, et cela par votre bonne volonté à ne pas estimer mes écrits plus que ce qu'ils ne méritent, mais plutôt à les scruter avec grande curiosité, et aussi de promouvoir nos découvertes au delà de ce que je ferais moi-même. Cela s'est montré lorsque par exemple, il y avait suffisamment de quantité irrationnelle que je devais déterminer pour expliquer plus facilement ma Quadrature, et c'était toujours celles que j'avais déjà effectuées, les autres plus plus précise et subtiles ont été trouvées jusqu'ici par Votre Seigneurie. Ce que vous avez à l'esprit, j'ai pu l'exposer approximativement dans la proposition 191 de mon Arithmétique des Infinis* [22]*. Mais vous ne vous êtes pas contenté de cela : à partir de nos principes, que j'ai appliqué au problème de la quadrature du cercle, vous en avez aussi déduit la quadrature de l'Hyperbole, pour laquelle vous avez montré qu'on peut la déterminer par une méthode similaire : c'est ce que vous pourrez enseigner un jour, comme je l'espère, aux lettrés du monde entier.* [23]

19. Nicomaque de Gérase appelle ces nombres les nombres Hétéromèque ([76] Nicomaque de Gérase, *Introduction Arithmétique, trad.* J. Bertier, Vrin, Paris, 1978). Leibniz les nomme parfois les nombres proniques, en généralisant cette appellation à tous les produits des $p$ nombres consécutifs. Il fait remonter ce nom aux « anciens arithmeticiens »(*Cf* G.W. Leibniz, *De summis serierum fractionalium*, LH 35 7 12, Bl.1)

20. En latin dans l'original

21. [113] C. Scriba, P. Beeley, *The Correspondence of John Wallis (1616-1703)*, Oxford 2003 - *Volume II (1660 - September 1668)*, N.197, p.454, W. Brouncker to H. Oldenburf (London) : « What the Acute Dr. John Wallis had intimated, some years since, in the Dedication of his Answer to M. Meibomius de proportionibus, vid. That the World one day would learn from the Noble Lord Brounker, the Quadrature of the Hyperbole ; the Ingenious Reader may see performed in the subjoyned operation, which its Excellent Author was pleased to communicate, as followeth in his own words. »

22. [110]J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656

23. [111] J. Wallis, *Adversus Marsi Meibomii : De Proportionibus Dialogum Tractatus Elencticus*, Oxford, 1657 - Dédicace à W. Brouncker, p.3 : « Dignata est D. V. pro ea qua polles humanitate atque in me benevolentia, scripta mea non modo supra quam ipsa mereantur æstimare sed & rimari curiosius, atque etiam ultra quam ipse fecerim inventa nostra promovere. Hinc factum est ut quantitatis satis quidem irrationalis, quam ad Tetragonismum meum commode explicandum designandam habui, præter eam quam ipse exhibueram designationem, aliam adhuc invenit D. V. accuratam equidem & subtilissimam ;

Wallis fait ici référence à la proposition 191 de son *Arithmetica Infinitorum*. On trouve de fait, dans cette proposition, une référence à Brouncker :

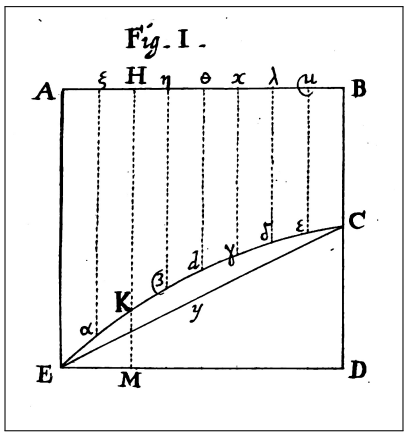
> *Après notre description de cette quantité, désignée par □, il nous plait d'en suggérer une autre que j'ai reçue de la part de l'homme le plus honorable, qui est aussi un géomètre extrêmement talentueux : le Seigneur Vicomte et Baron William Brouncker. [...]*
> *Ainsi j'ai montré jusque-là ce que ce noble gentilhomme avait à l'esprit, et ce aussi brièvement et clairement que possible.* [24]

La quantité dont parle ici Wallis est la fraction continue donnée par la suites des carrés parfaits, dont il s'agit d'obtenir ici une approximation.

Ce rapide tour d'horizon nous montre que Brouncker entretient une relation très étroite avec Wallis. L'*Arithmetica Infintorum* est un ouvrage qui l'a profondément marqué et dont il a même, comme nous venons de le voir, influencé la rédaction. La dédicace nous indique que Brouncker disposait déjà d'une quadrature de l'hyperbole en 1657. Comme Wallis nous dit qu'il a trouvé cette quadrature en puisant ces méthodes au sein de l'*Arithmetica Infintorum*, il semble qu'on puisse daté ce résultat entre la parution de ce traité en 1656 et celle de la dédicace en 1657. Cela étant, de par la grande proximité des deux hommes, il est porbable que Wallis ait fait part à Brouncker de ses méthode bien avant la parution.

### 1.3.2 L'article lui-même

Revenons donc à présent sur l'article de 1668 en lui-même. Comme nous l'annonce la présentation, Brouncker ne nous donne ici que les résultats ainsi que quelques calculs. Il n'y a presqu'aucune démonstration hormis quelques unes dont nous allons discuter. Brouncker donne trois schémas. Le premier schéma est un schéma de quadrature classique, par segment verticaux [25] :




W. Brouncker - *Phil. Trans. R. Soc.*, Vol.3, Issue 34, planche

Il commence par donner la construction de la figure, à savoir le carré $ABDE$ et la branche d'hyperbole $EC$, puis annonce directement le prérequis indispensable pour le lecture : l'*Arithmetica Infintorum*.

> *On suppose que le lecteur sait que $EA, \alpha\xi, KH, \beta\eta, d\theta, \gamma\kappa, \delta\lambda, \varepsilon\mu, CB$ sont en série Harmonique, c'est-à-dire en proportion arithmétique ou primaire réciproque (sinon, il pourra se satisfaire en se référant aux propositions 87, 88, 90, 91, 92, 93, 94, 95 de l'Arithmétiques des Infinis de Wallis.)* [26]

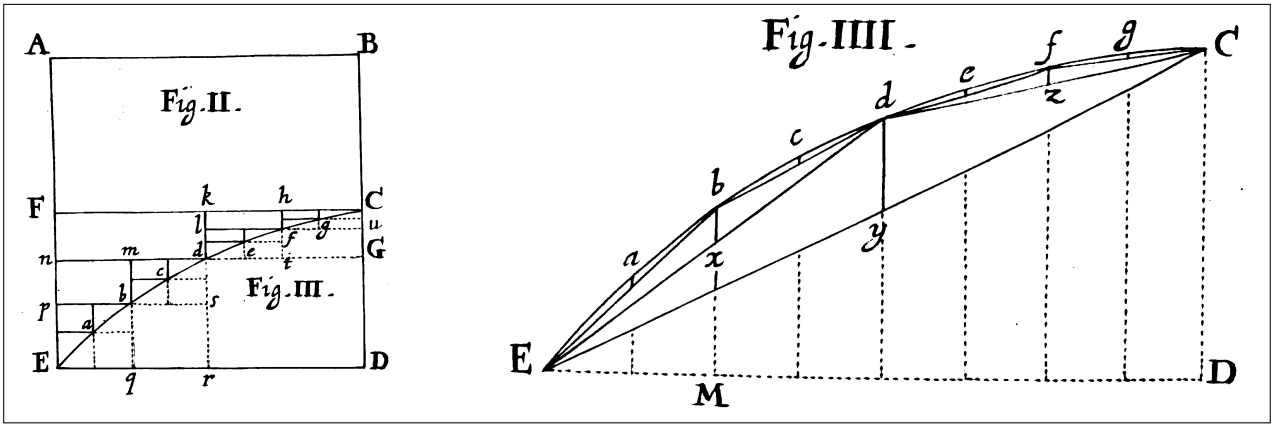
quam ad mentem tuam, quam potui proxime, ad prop. 191. Arithmet. Infinit. exposui. Nequi hoc contentus, ex principiis nostris, quæ ad Circuli quadraturam designandam adhibueram, tale etiam quadraturam Hyperbolæ deduxisti, quam non absimili methodo designari posse docuisti : quod ex te tandem, uit spero, aliquando discet Orbis literatus. »

24. [110]J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 191, p.181 et 193 : « Post hanc autem nostram, ipsius quantitatis □ designationem ; libet etiam aliam subjungere, quam a Nobilissimo Viro, atq. acutissimo simul Geometra, Dom. Guiliel. Vicecon. & Barone Brouncker accepi. [...] Atque hactenus, Nobilissimi Viri mentem quantam potui brevitate simulatque perspicuitate exposui. »

25. Un mathématicien moderne dirait que c'est une approche riemannienne du calcul d'aire, mais Archimède avait la même démarche lorsqu'il proposait la quadrature de la parabole.

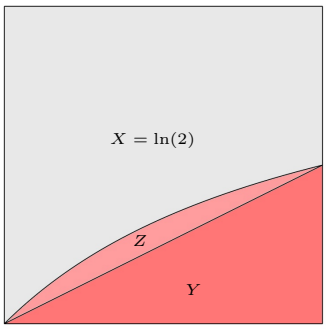
26. [113] C. Scriba, P. Beeley, *The Correspondence of John Wallis (1616-1703)*, Oxford 2003 - *Volume II (1660 - September 1668)*, N.197, p.454, W. Brouncker to H. Oldenburf (London) : « Supposing the Reader knows, that $EA, \alpha\xi, KH, \beta\eta, d\theta, \gamma\kappa, \delta\lambda, \varepsilon\mu, CB$ are in an Harmonic series or a reciproca primanorum seu arithmetice proportionalium (otherwise he is referr'd for satisfaction to the 87, 88, 90, 91, 92, 93, 94, 95 prop. Arithm. Infinitor. Wallisii) »

Les deux schémas suivants sont bien plus intéressants, en particulier celui de gauche que nous détaillons par la suite :




W. Brouncker - *Phil. Trans. R. Soc.*, Vol.3, Issue 34, planche

On note sur le carré unité ces trois régions $X$, $Y$ et $Z$ ($Y$ contient $Z$).



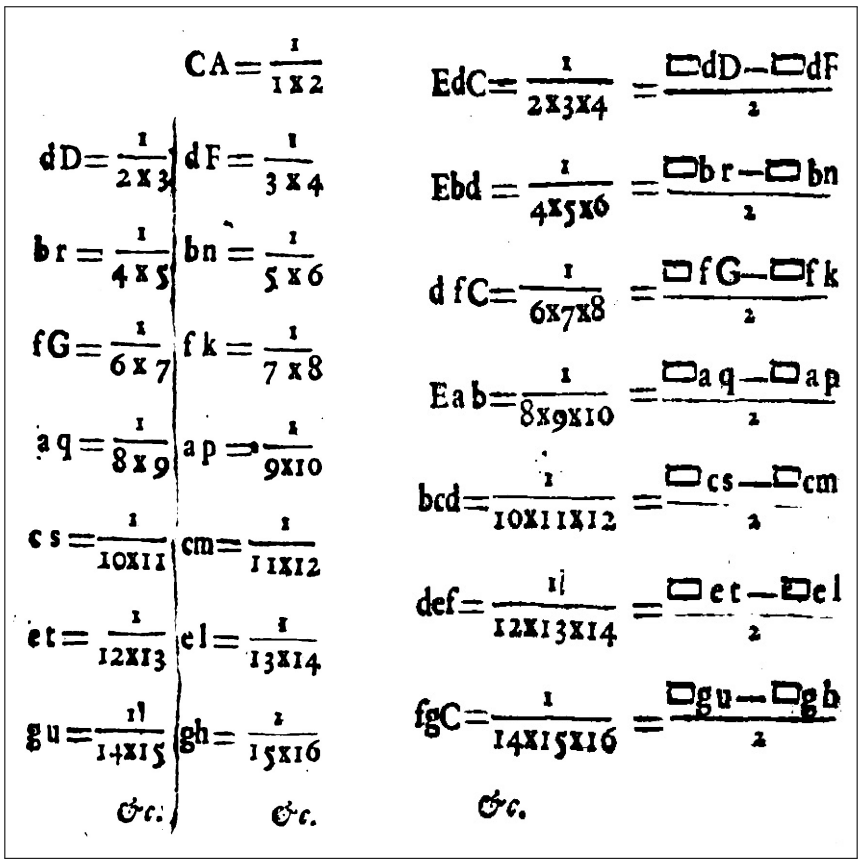

Les zones $X$ et $Y$ correspondent à la figure de gauche et $Z$ correspond à celle de droite.On voit que $X + Y = 1$ et $Y - Z = \frac{1}{4}$. Brouncker note les aires par les points de leurs périmètres comme cela se fait à l'époque :

- $\star$ $X = ABCdE$
- $\star$ $Y = EdCDE$
- $\star$ $Z = EdCyE$

Broucker donne d'abord le résultat final, à savoir la quadrature de l'hyperpbole. Il donne trois formules pour chacune des zones $X$, $Y$ et $Z$ :

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{5\times 6} + \frac{1}{6\times 8} + \frac{1}{9\times 10} + \dots \\ Y &= \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{4\times 5} + \frac{1}{6\times 7} + \frac{1}{8\times 9} + \frac{1}{10\times 11} + \dots \\ Z &= \frac{1}{2\times 3\times 4} + \frac{1}{4\times 5\times 6} + \frac{1}{6\times 7\times 8} + \frac{1}{8\times 9\times 10} + \dots \end{aligned}$$

Puis Broucker donne le détail, en associant à chaque coefficient de ces sommes, les régions des figures ci-dessus qui leur sont associées, c'est-à-dire dont l'aire à la même valeur que ce terme. Ici, les rectangles sont désignés par deux extrêmité d'une de leurs diagonales, et les triangles sont classiquement désignés par leurs trois sommets.



W. Brouncker - *Phil. Trans. R. Soc.*, Vol.3, Issue 34, p.646

Dans la première table, Broucker reconnait la série $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)_n$, dont il donne quelques propriétés :

> *[Je dis] que la première série est consituée des rangs pairs, c'est-à-dire du 2nd, 4ème, 6ème, 8ème, 10ème etc. et la seconde est constituée des rangs impairs, c'est-à-dire du 1er, 3ème, 5ème, 7ème, 9ème etc. de la série suivante :* $\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \frac{1}{4\times5} + \frac{1}{5\times6} + \frac{1}{6\times7}$ *etc. jusqu'à l'infini*[27] $= 1$. *Au sujet de cette série, soit a le nombre de terme pris à loisir, alors* $\frac{1}{a^2+a}$ *est le dernier terme,* $\frac{a}{a+1}$ *est la somme de tous ces termes pris depuis le début, et* $\frac{1}{a+1}$ *la somme de tout le reste jusqu'à la fin.*[28]

Brouncker donne la valeur des sommes partielles de la série. Cette valeur ne s'explique pas géométriquement, et d'ailleurs, il donne une solution algébrique. Brouncker a sans nul doute retenu Mengoli, dont l'œuvre est discutée au sein de la Royal Society à cette époque. Ainsi Broucker est parfaitement conscient de fait que les termes de ces deux première suites sont des différences de termes de la série harmonique. Au sujet de la seconde table, elle nous donne elle-même la construction des termes. On a :

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

En effet, la table nous indique que chaque triangle est égale à la moitié de la différence de deux rectangles. On peut retrouver cette proposition géométriquement.

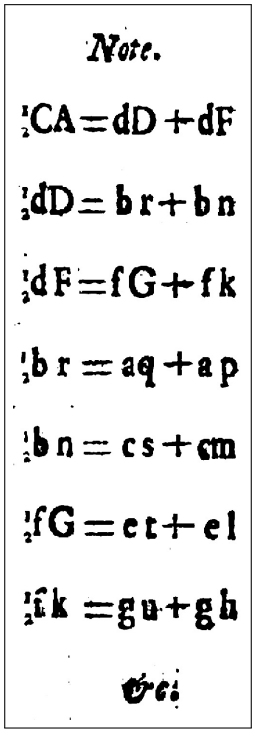
### 1.3.3 Organisation par paquet

Si l'on revient à la figure initiale de Brouncker, on peut noter une propriété remarquable, directement issue de la façon dont on découpe le carré successivement, c'est-à-dire par deux à chaque fois. En effet, si on

27. En latin dans l'original

28. [113] C. Scriba, P. Beeley, *The Correspondence of John Wallis (1616-1703)*, Oxford 2003 - *Volume II (1660 - September 1668)*, N.197, p.456, W. Brouncker to H. Oldenburf (London) : « That the first series are the even termes, *viz.* the 2d, 4th, 6th, 8th, 10th &c. and the second, the odd, *viz.* 1st, 3d, 5th, 7th, 9th &c. of the following series, *viz.* $\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \frac{1}{4\times5} + \frac{1}{5\times6} + \frac{1}{6\times7}$ &c. in infinitum = 1. Whereof $a$ being put for the number of terms taken at pleasure, $\frac{1}{a^2+a}$ is the last, $\frac{a}{a+1}$ is the sum of all those terms from the beginning, and $\frac{1}{a+1}$ the sum of the rest to the end. »

met sur la même colonne tous les termes ayant la même largeur, par translation horizontale, on tombe sur une représentation géométrique de la méthode de Huygens, qu'on retrouvait déjà chez Mengoli, à savoir la somme par paquet. Brouncker évoque cette propriété dans son article en notant qu'en regroupant par deux par deux les termes, on obtient toujours la moitié d'un terme précédent :


Note.

$\frac{1}{2}CA = dD + dF$

$\frac{1}{2}dD = br + bn$

$\frac{1}{2}dF = fG + fk$

$\frac{1}{2}br = aq + ap$

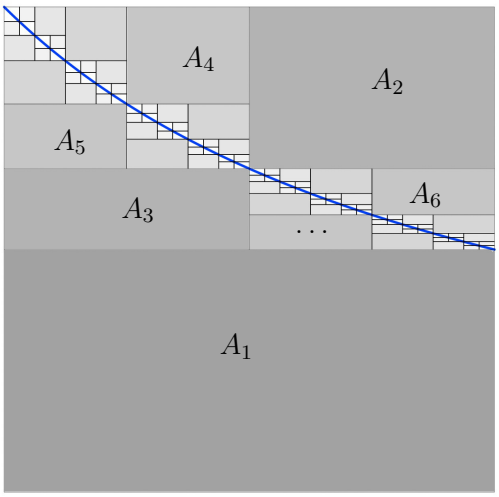
$\frac{1}{2}bn = cs + cm$

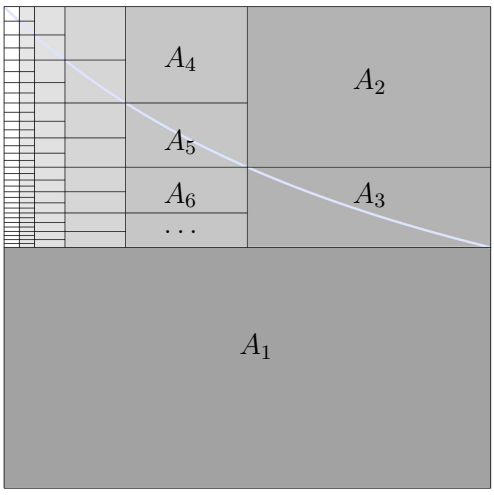
$\frac{1}{2}fG = et + el$

$\frac{1}{2}fk = gu + gh$

&c.

W. Brouncker - *Phil. Trans. R. Soc.*, Vol.3, Issue 34, p.646




Brouncker affirme à la fin de son traité qu'il peut généraliser sa méthode de quadratures à n'importe quel rectangle dans laquelle il place une branche de parabole, à la seule condition que les côtés du rectangle soient enn proportion rationnelle (et que le côté inférieur du rectangle soit toujours un segment de l'asymptote) :

> *Par n'importe laquelle de ces trois séries, il n'est pas difficile de calculer, aussi proche que l'on souhaite, tel ou tel espace hyperbolique, quelque soit le rapport rationnel de AE sur BC. Par exemple, lorsque AE est à BC comme* 5 *et à* 4 *(ce à quoi sont consacrés les calculs qui succèdent à ceux-ci qui sont pour le cas où la proportion est de 2 à 1, et dans les deux cas, à partir de la troisième série.* [29]

29. [113] C. Scriba, P. Beeley, *The Correspondence of John Wallis (1616-1703)*, Oxford 2003 - *Volume II (1660 - September 1668)*, N.197, p.457, W. Brouncker to H. Oldenburf (London) : « By any one of which three Series, it is not hard to calculate, as

Ici Brouncker généralise son résultat sans pourtant généraliser sa méthode. En effet, s'il parle de considérer des rectangles où les rapport de proportion entre $AE$ et $BC$ sont différents de 2. Il fait son calcul pour le cas du rapport $\frac{5}{4}$ sur la même figure de départ, avec la même construction et donc les mêmes trois séries. C'est donc en calculer des sous-quadrature que Brouncker parvient à généraliser sa formule.

Il y a donc deux façon de présenter ce problème, l'une combinatoire, l'autre analytique. Pour la première, on part de la série des inverses des produits de deux consécutifs, que l'on représente comme des rectangles :

$$\frac{1}{(2^n+k)(2^n+k+1)} = \frac{1}{2^n} \times \frac{2^n}{(2^n+k)(2^n+k+1)} \qquad \text{pour } k \in [\![0, 2^n-1]\!]$$

On les obtient en partageant le carré unité à la manière de la figure de droite, ci-dessus. Puis, on trouve le moyen de disposer ses rectangles de sorte à construire une branche d'hyperbole. D'autres arrangements pourraient éventuellement engendrer d'autres courbes et donner d'autres quadrature : c'est bien une approche combinatoire. Pour la seconde, on part de la branche de l'hyperbole dont on souhaite estimer la quadrature et l'on procède à un partage de la surface, en partageant les abscisses par deux à chaque étape et les ordonnées de sortes qu'elles respectent la hauteur de la courbe. On obtient alors, de façon à première vue contingente, la série des inverses des produits de deux consécutifs pour laquelle l'algèbre fournit une méthode de résolution. Nous proposons en annexe de mener plus loin ces deux approches, afin d'obtenir d'autres quadratures de l'hyperbole.
Brouncker ne donne aucun renseignement sur ses méthodes de découverte et pratiquement pas de démonstration de ses résultats. On ne peut donc pas savoir laquelle des deux démarches il a adoptée. Le titre de l'article semble tout de même indiquer qu'il s'agit de la seconde, que nous avons qualifié d'analytique. Pourtant, dans cette démarche, afin d'obtenir la somme des inverses des produits de deux consécutifs, il faut encore indexés chacune des parties obtenues dans un certain ordre, qui n'a *a priori* rien d'évident. Le choix de cette numérotation relève de la combinatoire.

near as you please, these and the like Hyperbolic spaces, whatever be the Rational Proportion of $AE$ to $BC$. As for Example, when $AE$ is to $BC$, as 5 to 4 (whereof the Calculation follows after that where the Proportion is, as 2 to 1. and both by the third Series) »

## Conclusion

Ce troisième quart de siècle voit l'essor extraordinaire du domaine des séries infinies et du calcul de leurs sommes, et ce notamment au profit du grand dynamisme engendré par les problématiques de quadratures, qui motivent notamment les travaux de Mengoli ou de Brouncker que nous avons évoqués et au cœur desquelles l'*Arithmetica Infinitorum*[30] de John Wallis joue un rôle central. Mais l'exemple de Huygens a montré comment ces questions de convergence et de sommation de séries peuvent apparaître spontanément au sein de secteurs radicalement différents comme la théorie des probabilités et des jeux de hasard.
Les premiers travaux de Leibniz sur cette question sont, *a priori*, largement indépendants des études de Huygens, de Mengoli ou de Brouncker, dans le sens où ils n'y a probablement pas eu accès avant de trouver sa propre solution. Néanmoins, ces trois cas ne nous paraissent pas superflus quant à l'investigation que nous proposons. Certes, ils permettent une mise en contexte suffisante pour pouvoir aborder dans de bonnes conditions les brouillons préparatoires de Leibniz, en illustrant le vif intérêt que suscitaient les problèmes de séries à l'époque. Mais aussi, et surtout, ils mettent en lumière des enjeux mathématiques fortement liés au statut apodictique de la combinatoire, enjeux que nous retrouverons dans les écrits de Leibniz. Que ce soit dans le contexte purement euclidien de Mengoli, algébrique de Huygens ou géométrique de Brouncker, nous avons pu montrer que tous font usage de raisonnements combinatoires, en particulier le regroupement par paquet qui s'accorde remarquablement bien au problème. Cette méthode synthétique s'intègre dans une démarche qui place au centre de la réflexion la disposition des termes, alors que cette disposition n'est pas à première vue une donnée du problème. En effet, l'ordre dans lequel les termes sont sommés n'a pas d'incidence sur la valeur de la somme finale. Cette propriété est une caractéristique des séries absolument convergente dans notre formalisme moderne mais c'est une conséquence directe et incontestée de l'axiome du tout et de la partie chez les auteurs de cette époque[31].
La disposition et l'arrangement des termes constitue donc un aspect crucial de la recherche sur les progressions. Sur ce point, les idées de Leibniz réunies à la pratique de tables, feront florès.

30. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656.
31. En réalité, les termes des séries considérées sont tous positifs, donc ces séries sont nécessairement absolument convergentes, dès que leurs sommes partielles convergent.

# Chapitre 2

# Le Défi de Huygens

## Introduction

Les seules travaux de Leibniz qui nous sont parvenus et dont on pense qu'ils ont immédiatement suivi sa conversation avec Huygens et son défi sur la somme des inverses des triangulaires sont deux brouillons, tous deux exclusivement consacrés au calcul de cette somme (et non à sa généralisation pour les pyramidaux etc.) :

⋆ *De Summa Numerorum Triangularium Reciprocorum* (A VII, 3, N.1)

⋆ *Differentiæ Numerorum Harmonicum et Reciprocorum Triangularium* (A VII, 3, N.2)

Ces deux textes font partie des premières sources mathématiques du corpus leibnizien. En effet, concernant ses lectures mathématiques antérieures au séjour parisien, auxquelles il fait mention à plusieurs reprises [1], nous ne disposons d'aucuns des éventuels travaux ou prises de notes que le jeune philosophe aurait pu effectuer. En arrivant à Paris au printemps 1672, Leibniz consacre ses premiers mois sur place à ses charges diplomatiques ainsi qu'à l'apprentissage du français. Ce n'est qu'à la fin de l'été qu'il trouve enfin le temps de prendre contact avec Huygens [2], lequel avait déjà eu quelques échos de ses travaux en physique par l'intermédiaire de la *Royal Society*[3]. Il s'agit donc de la première attestation de schéma de différences au sein du corpus. Cela dit, comme ces schémas ne sont ni introduits, ni expliqués par un discours paratextuel, il semble qu'ils n'aient pas été découverts à cette occasion.
D'après les éditeurs de l'*Akademie*, Leibniz trouve la solution du problème grâce au second manuscrit :

> *La proximité avec le N.1, où le problème n'est pas encore résolu, laisse supposer que Leibniz est parvenu à la découverte en vertu de réflexions liées au N.2.* [4]

Tandis que le premier ne lui permet pas d'aboutir :

> *Leibniz ne parvient pas encore à la solution* [5]

L'éventuelle solution qui se trouve dans le second manuscrit s'appuie sur des hypothèses extrêmement fragiles, qui exigent une telle prudence. Cela constitue également une remarquable illustration de la difficulté spécifique que posent les tables, en terme d'interprétation.

1. Notamment Cavalieri ou Léotaud, *Cf* [34] Hofmann J. E., *Leibniz in Paris 1672 - 1676 : His Growth to Mathematical Maturity*, Cambridge University Press, 1974 - Chapitre 1, p.5-8.

2. *Cf* [34] Hofmann J. E., *Leibniz in Paris 1672 - 1676 : His Growth to Mathematical Maturity*, Cambridge University Press, 1974 - Chapitre 2, p.12.

3. *Cf* [36] C. Huygens, *Œuvres Complètes de Christian Huygens*, Tome septième, Correspondance 1670 - 1675, Martinus Nijhoff, 1897 - p.47, Lettre N.1820 de H. Oldenburg à C. Huygens, datant du 18 novembre 1870

4. A VII, 3, N.1, *De Summa Numerorum Triangularium Reciprocorum*, septembre 1672 - note de l'éditeur : « Die Nähe zu N.1, wo das Problem noch ungelöst war, läßt vermuten, daß Leibniz aufgrund von Überlegung im Anschluß an N.2 zu der Entdeckung gelangt ist ».

5. A VII, 3, N.1, *De Summa Numerorum Triangularium Reciprocorum*, septembre 1672 - note de l'éditeur : « Leibniz gelang hier noch nicht zur Lösung ».

## 2.1 Les premiers travaux de Leibniz

Dans la première étude, *De Summa Numerorum Triangularium Reciprocorum* (A VII, 3, N.1), Leibniz montre dès sa première remarque qu'il souhaite attaquer le problème par sa méthode encore toute naissante des différences :

> *Les différences des termes, dont je pourrai ainsi aisément obtenir la somme.* [6]

A travers ces deux études, Leibniz développe deux pistes qui s'avèrent en réalité toutes deux infructueuses.

### 2.1.1 Première piste : la décomposition des fractions

La première piste est la plus générale et la plus analytique. Le fait que Leibniz cherche plus ou moins explicitement à trouver l'équation vérifiée par la somme de la série pourrait pousser à conclure qu'il s'agit d'une approche algébrique mais nous allons montrer que la démarche reste ici plutôt proche d'une conception méréologique du problème.

#### Exprimer une suite comme une suite de différence

Leibniz commence par constater quelques propriétés [7] des sommes et des différences comme :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T_{n-1}} - \frac{1}{T_n} &= \frac{n}{T_{n-1}T_n} \\
\frac{1}{T_n} &= \frac{T_{n-1}}{T_{n-1}T_n} \\
\frac{1}{T_{n-1}} + \frac{1}{T_n} &= \frac{n^2}{T_{n-1}T_n} \\
\frac{1}{T_n} - \left(\frac{1}{T_{n-1}} - \frac{1}{T_n}\right) &= \frac{T_{n-1} - n}{T_{n-1}T_n} \\
\left(\frac{1}{T_{n-1}} + \frac{1}{T_n}\right) - \left(\frac{1}{T_{n-1}} - \frac{1}{T_n}\right) &= \frac{n(n-1)}{T_{n-1}T_n}
\end{aligned}$$

Leibniz pressent que la clé se trouve dans la décomposition des fractions. Etant donnée une fraction du type $\frac{1}{ab}$, il veut pouvoir la réécrire sous la forme :

$$\frac{1}{ab} = \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{b}.$$

Ainsi, il obtient l'équation suivante : $\alpha b - \beta a = 1$ qu'il faut résoudre. Leibniz prend l'exemple de $a = T_4 = 10$ et $b = T_5 = 15$ et observe que l'équation possède un degré de liberté. En effet, il y a deux inconnues $\alpha$ et $\beta$ et une seule équation. Si l'on choisissait de la résoudre en solution entière, alors on aurait une seule solution si $a$ et $b$ sont premiers entre eux, et aucune s'ils possèdent un facteur commun non trivial. Mais Leibniz ne se place pas dans ce cadre arithmétique dont il n'a alors que très peu de connaissances. Le problème général qu'il souhaite alors résoudre devient extrêmement difficile :

> *Là, la difficulté devient extrême, et peut-être même supérieure à ce que l'on est capable de surmonter grâce aux méthodes que l'on connaît aujourd'hui* [8]

6. A VII, 3, N.1, *De Summa Numerorum Triangularium Reciprocorum*, Septembre 1672 - p.3-4 : « Differentiæ termini, quarum proinde summam habere mihi in proclivi est. »

7. Ces relations ne sont pas explicitées algébriquement par Leibniz, il donne les premiers termes ainsi qu'une description en latin de la relation générale.

8. A VII, 3, N.1, *De Summa Numerorum Triangularium Reciprocorum*, Septembre 1672 - p.5 : « Ibi vero maxima est difficultas, et fortasse maior, quam ut cognitis hactenus artibus superari possit »

En effet, étant donnée une série du type $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\ldots$, il faut trouver la bonne factorisation des numérateurs : $a_n = b_n b_{n+1}$ de sorte que le facteur le plus grand $b_{n+1}$ soit le facteur le plus petit du terme suivant : $a_{n+1} = b_{n+1}b_{n+2}$, et ainsi de suite. Une fois cette décomposition accomplie, il s'agit de résoudre pour chaque $n$ l'équation $\alpha_n b_{n+1} - \beta_n b_n = 1$ et choisir une solution de sorte que $\beta_n = \alpha_{n+1}$. Alors seulement, on obtient :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\ldots \\ &= \left(\frac{\alpha_1}{b_1}-\frac{\beta_1}{b_2}\right)+\left(\frac{\alpha_2}{b_2}-\frac{\beta_2}{b_3}\right)+\cdots+\left(\frac{\alpha_n}{b_n}-\frac{\beta_n}{b_{n+1}}\right)+\ldots \\ &= \frac{\alpha_1}{b_1}-\frac{\alpha_2}{b_2}+\frac{\alpha_2}{b_2}-\frac{\alpha_3}{b_3}+\cdots=\frac{\alpha_1}{b_1} \end{aligned}$$

**Une méthode fondée sur un raisonnement circulaire**

Pour Leibniz, la difficulté semble être le nombre bien trop grand de paramètre à ajuster. Il craint de retrouver face à une sorte de système composé d'un nombre infini d'équations avec une infinité d'inconnues. En réalité, il n'en est rien. Un fois que l'on connaît le numérateur et le dénominateur d'une certaine fraction $\frac{\alpha_n}{b_n}$, alors la fraction suivante est entièrement déterminée :

⋆ pour $b_{n+1}$, on a l'équation $a_n = b_n b_{n+1}$ donc :

$$b_{n+1} = \frac{a_n}{b_n}.$$

⋆ pour $\alpha_{n+1}$, on sait que $\alpha_{n+1} = \beta_n$ et $\alpha_n b_{n+1} - \beta_n b_n = 1$, donc :

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n a_n - b_n}{b_n^2}.$$

On trouve alors naturellement la relation de récurrence suivante :

$$\frac{\alpha_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{\alpha_n}{b_n} - \frac{1}{a_n}.$$

Ainsi, le problème revient à déterminer la première fraction $\frac{\alpha_1}{b_1}$. Or cette première fraction est en fait la limite que l'on cherche à déterminer. Ainsi, cette première méthode de décomposition que propose Leibniz ne peut pas fonctionner, car elle nécessite qu'on connaisse *a priori* le résultat. Posons $l = \frac{\alpha_1}{b_1}$ cette première fraction et $\alpha_1 = 1$ pour fixer numérateur et dénominateur. On montre alors les formules suivantes :

$$\begin{aligned} b_{2n} &= \frac{a_1 a_3 \ldots a_{2n-1} l}{a_2 a_4 \ldots a_{2n-2}} \\ b_{2n+1} &= \frac{a_2 a_4 \ldots a_{2n}}{a_1 a_3 \ldots a_{2n-1} l} \end{aligned} \qquad \left| \qquad \begin{aligned} \alpha_{2n} &= \frac{\sigma_{2n-1}^{(2n-1)} l^2 - \sigma_{2n-2}^{(2n-1)} l}{(a_2 a_4 \ldots a_{2n-2})^2} \\ \alpha_{2n+1} &= \frac{\sigma_{2n}^{(2n)} l^2 - \sigma_{2n-1}^{(2n)} l}{(a_1 a_3 \ldots a_{2n-1} l)^2} \end{aligned} \right.$$

Avec $\sigma_k^{(n)}$ la fonction symétrique élémentaire de degré $k$ pour les variables $a_1$, $a_2 \ldots a_n$.

$$\sigma_k^{(n)} = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}.$$

On retrouve alors bien, par le calcul :

$$\frac{\alpha_n}{b_n} = l - \left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}\right).$$

On voit bien ici que les termes des différences ont une limite nulle si et seulement si la première fraction $l$ est la valeur de la somme de la série. On retrouve un corollaire de proposition au sein de cette citation :

*Si n'importe où dans la progression, la différence (ou quelque chose qui a un rapport défini avec la différence comme son double ou son triple) est toujours supérieur au terme suivant, alors on peut obtenir la somme des termes par ma méthode.* [9]

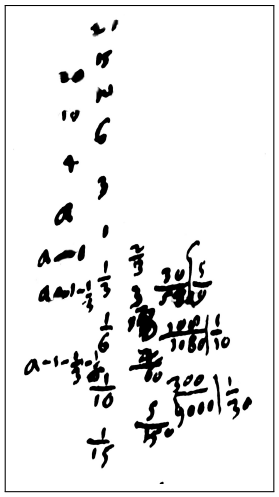
Donc la condition est qu'il existe une certaine constante $k > 0$ telle que l'on ait pour tout $n$ :

$$\frac{\alpha_{n+1}}{b_{n+1}} = l - \left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \leq k\left(\frac{\alpha_n}{b_n} - \frac{\alpha_{n+1}}{b_{n+1}}\right) = k\frac{1}{a_n}.$$

Dans le cas d'égalité, la suite $(a_n)_n$ serait une progression géométrique de raison $\frac{k}{1+k}$. La condition donnée par Leibniz consiste ainsi à contrôler le comportement de la suite par une borne supérieure géométrique :

$$\frac{\alpha_n}{b_n} \leq \left(\frac{1}{1+k}\right)^{n-1} l.$$

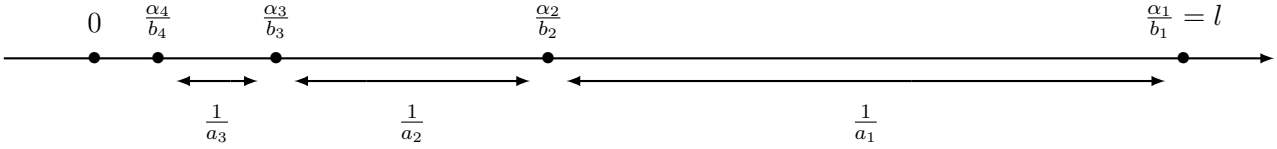
La limite des termes est donc nulle, ce qui implique que $l$ est bien la somme de la série. Il ne s'agit donc pas de trouver une équation simple en procédant à des sommations par paquets comme nous l'avons trouvé chez Mengoli ou Huygens, mais plutôt de développer la suite infinie de relations qui lient les termes entre eux pour finalement obtenir une équation de proche en proche que relie la limite de progression avec son premier terme. Mais Leibniz opère ici un retournement des relations du même type que celui qui se trouvait dans les travaux de Huygens. Au lieu de calculer les sommes partielles comme Mengoli, en partant de 0 pour obtenir asymptotiquement la limite $l$ de la série, Leibniz part au contraire de cette somme infinie formée à partir des termes de la séries et il tente de la décomposer en agissant directement sur la décomposition des termes. Leibniz montre d'ailleurs explicitement ce raisonnement dans un passage de ses calculs :



Manuscrit de Leibniz - LH 35 3 B 10 Bl.5 [10]

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 21 | | |
| | 15 | | |
| 20 | 10 | | |
| 10 | 6 | | |
| 4 | 3 | | |
| $a$ | 1 | | |
| $a-1$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{27}{54} \mid \frac{1}{2}$ |
| $a-1-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{3}{18}$ | $\frac{30}{54} \mid \frac{5}{9}$ |
| $a-1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{4}{60}$ | $\frac{108}{1080} \mid \frac{1}{10}$ |
| | $\frac{1}{15}$ | $\frac{5}{150}$ | $\frac{300}{9000} \mid \frac{1}{30}$ |

Il devient alors possible de voir dans la condition "sous-géométrique" que nous avons développée ci-dessus quelque argument en faveur d'une conception méréologique du problème. Si les différences successives que l'on retire les unes après les autres sont toutes supérieures à un certain rapport fixé de la partie restante, alors on finit nécessairement par épuiser le tout [11], comme le montre la figure ci-dessous :




9. A VII, 3, N.1, *De Summa Numerorum Triangularium Reciprocorum*, Septembre 1672 - p.7 : « In omni progressione ubicunque differentia, (aut aliquid definitæ ad differentiam rationis, ut duplum eius aut triplum) semper termino sequenti maior est, summa terminorum methodo mea haberi potest »

10. Dans la troisième colone, il y a une erreur de calcul. Leibniz écrit $\frac{30}{54} \mid \frac{5}{9}$ au lieu de $\frac{27}{54} \mid \frac{1}{2}$.

11. Cette conception des problèmes de séries comme étant l'épuisement progressif du tout en lui retirant progressivement des parties s'approchent grandement des travaux de Nicole Oresme, qui datent du XIV$^{\text{ième}}$ siècle, *Cf* [66] Mazet E., *La théorie des séries de Nicole Oresme dans sa perspective aristotélicienne*, Revues d'histoire des mathématiques, 2003

Appliquons pour finir l'algorithme à la somme des inverses des triangulaires, en supposant donc connu la première fraction égale à 2 (donc $\alpha_1 = 1$ et $b_1 = \frac{1}{2}$). Voici les premiers termes que l'on obtient :

$$b_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad b_2 = 2 \quad ; \quad b_3 = \frac{3}{2} \quad ; \quad b_4 = 4 \quad ; \quad b_5 = \frac{5}{2} \quad ; \quad b_6 = 6\dots$$

$$\alpha_1 = 1 \quad ; \quad \alpha_2 = 2 \quad ; \quad \alpha_3 = 1 \quad ; \quad \alpha_4 = 2 \quad ; \quad \alpha_5 = 1 \quad ; \quad \alpha_6 = 2\dots$$

Ainsi :

$$\frac{\alpha_{2n}}{b_{2n}} = \frac{2}{2n} \qquad \frac{\alpha_{2n+1}}{b_{2n+1}} = \frac{1}{n+\frac{1}{2}} = \frac{2}{2n+1}.$$

On retrouve donc ici, par une approche méthodique, la formule :

$$\frac{1}{T_n} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}.$$

Ici, la connaissance de la limite nous permet de reconstituer la relation de télescopage. Et réciproquement, la connaissance de cette relation permet d'obtenir directement la limite. Par cette démarche Leibniz a bien saisi le lien étroit qu'il existe entre l'existence de la relation et celle de la limite. Il faut nécessairement connaître l'un des deux pour obtenir l'autre [12]. Bien qu'il ne se soit visiblement pas rendu compte des raisons qui minaient sa méthode et que nous avons amplement décrite, Leibniz a bien vu qu'il lui manquait quelque chose et que l'énorme équation vérifiée par la limite $l$ n'était pas résoluble en l'état :

> *S'il était possible de trouver par analyse la solution de ce problème général à savoir trouver les sommes des différences d'une progression donnée dans ce problème général, alors, quand bien même une telle équation serait d'un degré très élevé, la solution ne serait pourtant pas moins accessible que celle des deux moyennes proportionnelles.* [13]

Leibniz évoque donc déjà ici sa recherche d'une analyse capable de résoudre des problèmes au delà des limites imposées par les outils et les connaissances de ses contemporains. Nous pouvons noter le parallèle [14] avec ses futurs travaux sur les courbes transcendantes et son discours sur les frontières de l'algèbre établies par Descartes.

### 2.1.2 Deuxième pistes : le mélange termes-différences

#### La méthode

Cette seconde approche n'est menée ici que sur des exemples que nous discuterons ensuite. Commençons par décrire en consiste la méthode en générale. Dans un premier temps, on écrit de façon séparée la suite de termes et la suite des différences :

$$\begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & \dots \\ & \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \dots \end{array}$$

avec $\alpha = a - b$ ; $\beta = b - c$ etc.
Puis, dans un second temps, on créé une deuxième série qui contient la série donnée ainsi que ces différences en alternant une fois sur deux entre termes et différences :

$$a \quad \alpha \quad b \quad \beta \quad c \quad \gamma \quad d \quad \delta \quad e \quad \varepsilon \quad f \quad \dots$$

On obtient alors une deuxième suite de différences (avec $q = a - \alpha$ ; $r = \alpha - b$ ; $s = b - \beta$ etc.) :

12. Cette relation fonctionnelle inversible entre la limite et la relation de différence n'est pas autre chose qu'une conséquence directe de lien fondamental "somme-différence", principe premier de la théorie des différences finies développées par Leibniz et version discrète du théorème fondamentale de l'analyse.

13. A VII, 3, N.1, *De Summa Numerorum Triangularium Reciprocorum*, Septembre 1672 - p.7 : « Si qua per analysin reperiri posset generalis huius problematis datæ differentiarum progressionis [summas] reperire, solutio, quanquam æquatio talis multorum graduum futura esset, posset tamen non minus inveniri solutio, quam duarum mediarum proportionalium »

14. Il n'y a vraisemblablement pas de référence à Descartes ici, dont Leibniz n'avait alors qu'une connaissance très pauvre.

$$\begin{array}{cccccccccccc} a & \alpha & b & \beta & c & \gamma & d & \delta & e & \varepsilon & f & \dots \\ q & r & s & t & u & v & w & x & y & z & \dots & \end{array}$$

On constate alors que cette deuxième série de différence contient la série $b, c, d, e \dots$. En effet :

$$q = b \quad r = a - 2b \quad s = c \quad t = b - 2c \quad u = d \quad v = c - 2d \quad w = e \quad \dots$$

Grâce à cette construction, Leibniz a donc trouvé une progression telle qu'elle contient la série donnée et telle que sa série de différence la contient aussi.
Appelons $S_0$ la série donnée et $D_0$ la suite de ses différences, puis $S_m$ la suite constituée du mélange termes-différences et $D_m$ ses différences. Pour finir appelons $D_1$ et $D_2$ les deux progressions qui composent $D_m$, à savoir :

$$\begin{aligned} D_1 &= r\ ;\ t\ ;\ v\ ;\ x\ \cdots = a - 2b\ ;\ b - 2c\ ;\ c - 2d\ ;\ d - 2e \dots \\ D_2 &= q\ ;\ s\ ;\ u\ ;\ w\ \cdots = b\ ;\ c\ ;\ d\ ;\ e\ \dots \end{aligned}$$

Leibniz choisit l'exemple de la série $S_0 = \left(\frac{1}{3^n}\right)$ et obtient les séries $S_m$ et $D_m$ suivante :

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & & \frac{2}{3} & & \frac{1}{3} & & \frac{2}{9} & & \frac{1}{9} & & \frac{2}{27} & \cdots \\ & \frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{9} & & \frac{1}{9} & & \frac{1}{27} & & \cdots \end{array}$$

Ici, on a un cas très particulier puisque $D_1 = D_2$. Leibniz en déduit que $2 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots\right) = 1$. Leibniz calcule alors deux sommes :

$$\begin{aligned} S_m - a &= \alpha + b + \beta + c + \gamma + d + \cdots = 1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots\right) \\ D_2 &= q + s + u + w + \cdots = D_m - D_1 = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots\right) \end{aligned}$$

La différence entre ces deux sommes est $2 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots\right) = 1$. Ce qui permet à Leibniz de conclure :

> *Ainsi peut-on trouver la quantité des différences dépendantes, qui ajoutées au premier terme donnent la somme.* [15]

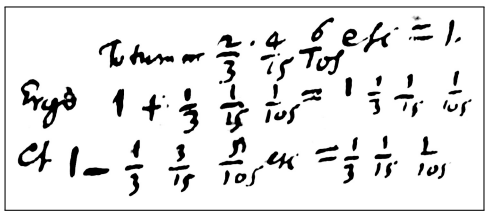
Leibniz s'attaque alors à un second exemple. Celui-ci se trouve sur le premier manuscrit *De Summa Numerorum Triangularium Reciprocorum* (A VII, 3, N.1), mais nous allons montrer que ce passage est potentiellement un ajout ultérieur qui a été rédigé à la suite du *Differentiæ Numerorum Harmonicum et Reciprocorum Triangularium* (A VII, 3, N.2). La progression à laquelle s'intéresse Leibniz dans ce second exemple est la suite $S_0$ suivante :

$$u_n = \frac{1}{1.3.5.7 \dots (2n-1)}$$

On a donc la relation suivante : $u_n = (2n+1)u_{n+1}$. Voici les suites $S_m$ et $D_m$ qu'il obtient :

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & & \frac{2}{3} & & \frac{1}{3} & & \frac{4}{15} & & \frac{1}{15} & & \frac{6}{105} & \frac{1}{105} & \cdots \\ & \frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{15} & & \frac{3}{15} & & \frac{1}{105} & & \frac{5}{105} & \cdots \end{array}$$

A partir de ces deux séries, Leibniz obtient les résultats suivants :



Manuscrit de Leibniz - LH 35 3 B 10 Bl.5

Le tout : $\frac{2}{3} + \frac{4}{15} + \frac{6}{105} + \cdots = 1$
Donc $1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{105} + \dots\right) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{105} + \dots$
Et $1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{15} + \frac{5}{105} + \dots\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{105} + \dots$

15. A VII, 3, N.2, *Differentiæ Numerorum Harmonicum et Reciprocorum Triangularium*, septembre-octobre 1672 - p.15 : « Hinc inveniri potest quantitas differentiarum servientium quae additæ primis dant summam. »

Comme on peut le voir ci-dessus, il en déduit que $1 = \frac{2}{3} + \frac{4}{15} + \frac{6}{105} + \dots$. Leibniz calcule ensuite de nouveau les sommes $S_m$ et $D_1$ :

$$\begin{aligned} S_m - a &= \alpha + b + \beta + c + \gamma + d + \dots = 1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{105} \dots\right) \\ D_2 &= q + s + u + w + \dots = D_m - D_1 = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{15} + \frac{5}{105} + \dots\right) \end{aligned}$$

On obtient une transformation pour $D_2$ :

$$1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{15} + \frac{5}{105} + \dots\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{105} + \dots$$

Mais pas pour $S_m$ :

$$1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{105} + \dots\right) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{105} + \dots$$

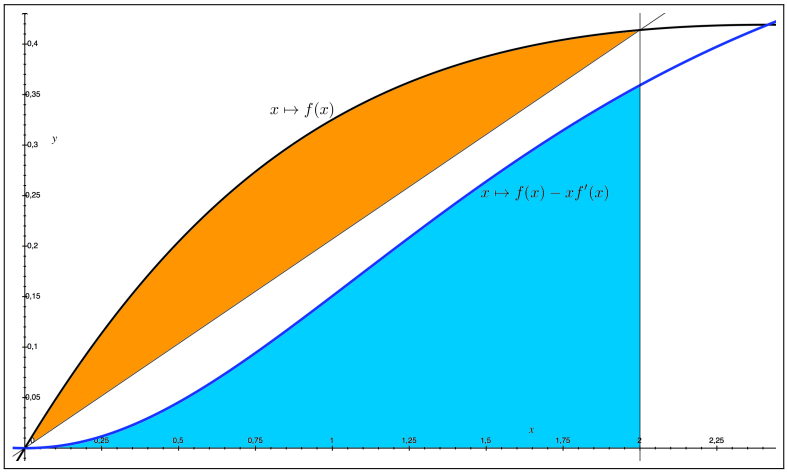
La solution qu'il a trouvé dans le cas de la suite géométrique n'est donc pas générale, puisqu'ici, il ne parvient pas simplifier cette somme.
Leibniz conclut ainsi :

> *Il ne suffit pas de trouver une série continue qui contienne les différences de la série donnée, à moins que ces deux ne s'évanouissent simultanément. D'ailleurs, si je suppose que le premier des nombres reste infailliblement plus grand que la somme totale, alors je pourrai toujours soustraire à l'infini sans que je ne l'épuise jamais.* [16]

### Une germe de la transmutation

Dans cette construction, on a vu que la série $S_0$ se trouve à la fois à l'intérieur de $S_m$ et de ses différences $D_m$. Ainsi, on a la relation suivante : $S_m = S_0 + D_0 = (a + D_2) + a = 2a + (D_m - D_1)$. Si l'on trouve un moyen d'exprimer $D_1$ en fonction de $D_m$, alors on aura une relation qui permet de calculer la somme d'une série à partir de la somme de ses différences. Permettons-nous alors, malgré son caractère rétrospectif, de nous arrêter sur l'analogie de ces calculs avec la méthode de transmutation que Leibniz ne va guère tarder de découvrir. La méthode de transmutation consiste à calculer l'aire sous une certaine courbe grâce à l'intégrale d'une autre courbe qui est construite à partir des tangentes. Cette construction s'appelle la transmutation de la courbe et nous aurons l'occasion d'y revenir plus tard. En terme moderne, cela se traduit pas la formule suivante :

$$\int_0^A (f(x) - xf'(x))dx = 2\left(\int_0^A f(x) - \frac{A.f(A)}{2}\right)$$




L'air bleue est égale au double de l'aire orange.

16. A VII, 3, N.1, *De Summa Numerorum Triangularium Reciprocorum*, Septembre 1672 - p.9 : « Non sufficit ut seriem continue inveniamus, cuius differentias contineat series data, nisi eæ duæ simul evanescant. Alioquin si assumum numerum primum infallibiliter maiorem tota summa, potero semper subtrahere in infinitum, nec tamen consumam. »

Comme pour la transmutation, Leibniz souhaite ici exprimer une série, analogue de l'aire orange, en fonction d'une autre série que est contenue dans la série de différence, analogue de l'aire bleue. En réalité, il n'y a pas de réelle correspondance entre les deux procédés, car la méthode de transmutation est fondée sur une formule générale qui permet de conclure pour toutes les courbes [17], alors que cette méthode de mélange termes-différences ne peut conclure que dans des cas très particuliers que nous allons décrire. Néanmoins, il reste clair que les problèmes posés sont similaires et l'approche peut être décrite pour l'une comme pour l'autre comme la volonté de trouver l'expression de la somme en fonction des différences.
On a vu que Leibniz s'attache au calcul de $S_m - a$ et de $D_2$. Par définition des séries de différences, on sait que la somme des termes de $D_0$ vaut le premier terme de $S_0$ à savoir $a$ et que la somme des termes de $D_m$ vaut le premier terme de $S_m$, à savoir $a$ aussi. Et il trouve de fait que :

$$\begin{aligned} S_m - a &= D_0 + (S_0 - a) = a + (b + c + d + e + \dots) \quad (= S_0) \\ D_2 &= D_m - D_1 = a - ((a - 2b) + (b - 2c) + (c - 2d) + \dots) \quad (= S_0 - a) \end{aligned}$$

On sait que $D_1 + D_2 = D_m$. Si jamais on peut trouver une autre relation entre $D_1$ et $D_2$ alors il devient possible de déterminer la somme de ces deux séries. Par exemple, lorsque $S_0$ est une progression géométrique de raison $r$. On montre qu'alors $D_1 = (1 - 2r)S_0$ et ainsi, on trouve l'équation :

$$a = D_m = D_1 + D_2 = (1 - 2r)S_0 + (S_0 - a) \quad \Rightarrow \quad 2a = (2 + 2r)S_0$$

En résolvant cette équation, on obtient $S_0 = \frac{a}{1-r}$. En prenant pour raison $r = \frac{1}{p}$, voici $S_m$ et $D_m$ :

$$\begin{array}{ccccccccc} a & & \frac{a(p-1)}{p} & & \frac{a}{p} & & \frac{a(p-1)}{p^2} & & \frac{a}{p^2} \quad \frac{a(p-1)}{p} \quad \dots \\ \\ & \frac{a}{p} & & \frac{a(p-2)}{p} & & \frac{a}{p^2} & & \frac{a(p-2)}{p^2} & \quad \frac{a}{p^3} \quad \dots \end{array}$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned} S_m - a &= a + \left( \underbrace{\frac{a}{p} + \frac{a}{p^2} + \frac{a}{p^3} + \dots}_{= S_0 - a = D_2} \right) \\ D_2 &= \underbrace{a}_{=D_m} - \left( \underbrace{\frac{a(p-2)}{p} + \frac{a(p-2)}{p^2} + \frac{a(p-2)}{p^3} + \dots}_{=D_1} \right) \\ &= a - (p-2) \times \left( \underbrace{\frac{a}{p} + \frac{a}{p^2} + \frac{a}{p^3} + \dots}_{=D_2} \right) \end{aligned}$$

Donc, en remarquant que $D_1 = (p - 2)D_2$, on obtient

$$D_2 = a + (p-2)D_2 \quad \Rightarrow \quad D_2 = \frac{a}{p-1} \quad \Rightarrow \quad S_0 = a + D_2 = \frac{p}{p-1}.a$$

Le fait que la suite est géométrique est donc capital dans la résolution du problème.
Difficile de se prononcer sur la raison qui a mené Leibniz à s'emparer de cette progression géométrique, alors qu'il était à l'études des différences successives des inverses des triangulaires. Une possible explication réside dans la condition "sous-géométrique" [18] du *De Summa Numerorum Triangularium Reciprocorum* (A

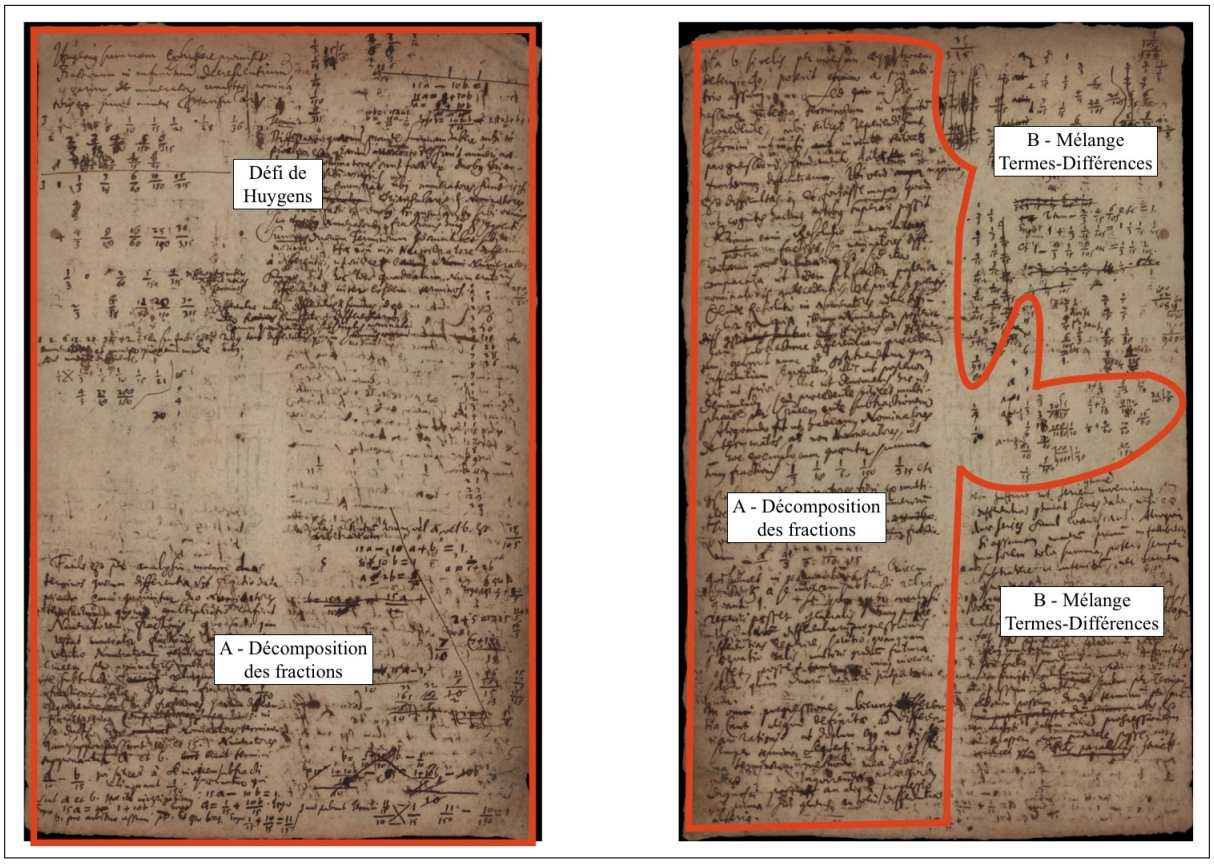
17. Seulement les courbes dérivables puisqu'il faut calculer les tangentes
18. *Cf* la note 9, p.174.

VII, 3, N.1) que l'on retrouve presque mot-à-mot dans le *Differentiæ Numerorum Harmonicum et Reciprocorum Triangularium* (A VII, 3, N.2) [19] sur la même page que l'application à la progression géométrique. Il s'agissait sans doute de choisir un exemple dont on puisse contrôle la condition "sous-géométrique" et le plus simple est encore de choisir directement une progression géométrique. Le tiers est la première fraction unitaire qui assure qu'on ait chaque différence strictement supérieure au terme suivant de la progression.

### 2.1.3 Remarques et hypothèses codicologiques

#### Indices codicologiques

Leibniz développe donc deux pistes au sein de ces études. La première, assez analytique, concerne les opérations sur les fractions tandis que la seconde qui consiste en une démarche plus heuristique, vise à trouver des relations globales entre les la suite et la suite de ses différences. Nous avons montré que la première méthode trahit une approche de problème que l'on peut qualifier de méréologique là où la seconde se range plutôt du côté de l'algèbre. On ne retrouve pas les titres de ces documents sur les manuscrits, ni au sein du catalogue critique [20], ils proviennent donc vraisemblablement de l'édition de l'Akademie.
Le *De Summa Numerorum Triangularium Reciprocorum* (A VII, 3, N.1) est un brouillon sans titre qui est a probablement été rédigé en deux temps distincts :

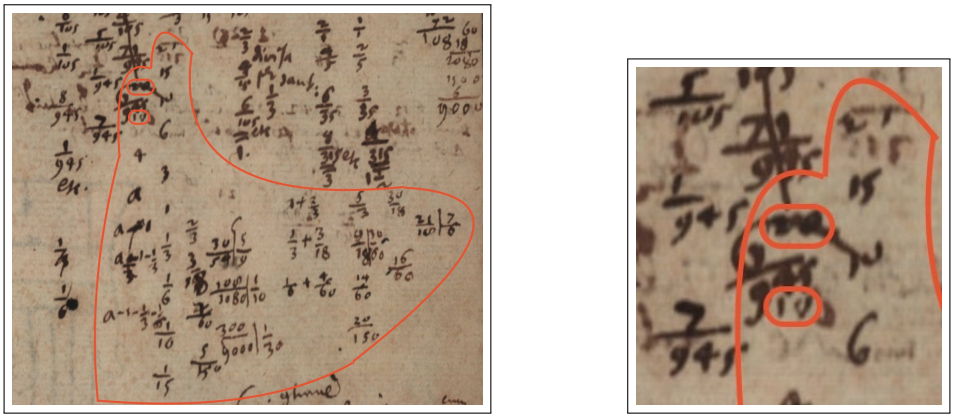



Manuscrit de Leibniz - LH 35 3 B 10 Bl.5

En effet, il est composé de deux parties : la majorité de la pièce (entouré en rouge) est consacrée à la première méthode, à savoir la décomposition des fractions, tandis qu'un fragment développe vers la fin la deuxième approche.

19. *Cf* la note 9, p. 174. Dans A VII, 3, N.2, *Differentiæ Numerorum Harmonicum et Reciprocorum Triangularium*, septembre-octobre 1672 - p.12, le texte présente quelques variantes : « In omni progressione, quoties differentia (aut aliquid definitæ ad differentiam rationis ut duplum, triplum etc.) semper termino sequenti maior est, summa terminorum methodo mea haberi potest ».

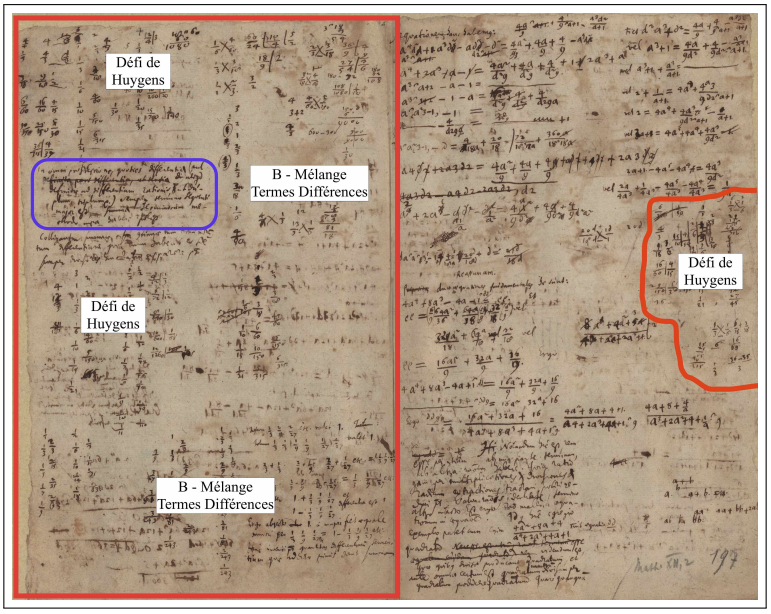
20. [51] *Catalogue Critique des Manuscrits de Leibniz*, G. Olms Verlag *ed.*, New-York, 1986



Manuscrit de Leibniz - LH 35 3 B 10 Bl.5

L'écriture de cette incise, entourée ici en rouge, sur la seconde page peut potentiellement être antérieure à ce qui a été écrit au dessus et en dessous ; et ce pour plusieurs raisons. Tout d'abord, il y a le chevauchement de deux nombres entourés en rouge. On voit que ces nombres pyramidaux 10 et 20 se chevauchent avec la suite des différences utilisée pour la deuxième approche. Si la rédaction s'était faite de haut en bas, de tels chevauchement ne se produiraient alors probablement pas. De plus, il est possible que Leibniz n'ait pas débuté sa rédaction par le haut de la seconde colonne car la suite des triangulaire sur laquelle il travaillait est une suite double : il y a les triangulaires vers le haut et les inverses des triangulaires vers le bas. Pour cette raison, il a d'abord écrit au centre, de sorte qu'il reste de la place pour développer les triangulaire vers le haut. Sous ces deux hypothèses, la seconde approche par le mélange termes-différences constituerait donc un ajout postérieur. Dans tous les cas, les rédactions de ces deux parties restent indubitablement très proches.

Le *Differentiæ Numerorum Harmonicum et Reciprocorum Triangularium* (A VII, 3, N.2) est quant à lui un ajout fait sur un autre brouillon algébrique qui traite du problème des six carrés. Ce fragment traite presqu'exclusivement de la seconde méthode, à savoir le mélange terme-différence. Le fait qu'un morceau du calcul soit enchâssé dans l'autre texte algébrique indique très vraisemblablement qu'il s'agit d'un ajout postérieur. Cela étant, les très fortes similitudes [21] que l'on trouve avec les deux parties du *De Summa Numerorum Triangularium Reciprocorum* (A VII, 3, N.1) avalisent le fait que tous ces écrits ont été réalisés dans une même période assez courte [22].




Manuscrit de Leibniz - LH 35 12 2 Bl.197

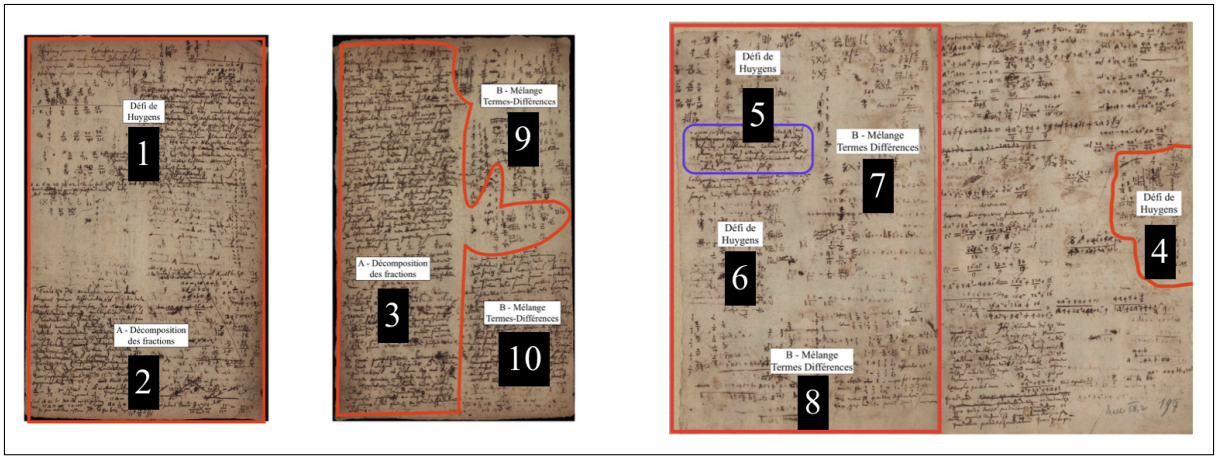
21. Le passage entouré en bleu est presque identique mot-à-mot au passage cité dans la note 9.

22. Le problème des six carrés fait donc partie des tous premiers travaux mathématiques de Leibniz à Paris, au même titre que le défi de Huygens.

**Reconstitution du processus de rédaction**

Nous proposons donc la reconstitution suivante : après que Huygens a proposé à Leibniz le défi de trouver la somme des inverses des triangulaires, Leibniz a produit la première étude qu'est le *De Summa Numerorum Triangularium Reciprocorum* (A VII, 3, N.1).

- ⋆ Etape 1 à 3 : Il commence par travailler sur les termes de la série eux-même puis tente de développer une approche générale qui consiste trouver le moyen d'exprimer les termes de la série comme des différences successives.
- ⋆ Etape 4 : Plus tard, il reprend sa réflexion sur le défi de Huygens dans un petit espace laissé disponible sur la première page d'une étude qui concerne le problème des six carré.
- ⋆ Etape 5 : Il poursuit son étude sur la quatrième page du même folio, laissée vierge et ressort à cette occasion le premier manuscrit *De Summa Numerorum Triangularium Reciprocorum* (A VII, 3, N.1) duquel il recopie le passage entouré en bleu.
- ⋆ Etape 6 Il écrit pour la première fois la suite de différences de la suite harmonique mais il ne voit sans doute pas qu'il s'agit des moitiés des inverses des nombres triangulaires.
- ⋆ Etape 7 et 8 : Il trouve alors par tâtonnement la seconde méthode du mélange terme-différence.
- ⋆ Etape 9 et 10 : Puis par manque de place, il termine son exploration sur le *De Summa Numerorum Triangularium Reciprocorum* (A VII, 3, N.1).



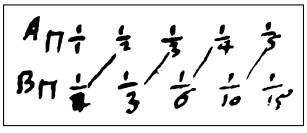

Manuscrits de Leibniz - LH 35 3 B 10 Bl.5 et LH 35 12 2 Bl.197

Bien-sûr, cet exercice de reconstruction doit être considéré avec une prudence extrême. En effet, tous ces indices matériels sont loin d'être suffisants pour pouvoir invalider l'infinité des autres processus d'écriture possibles, qui mènent tous à l'état des documents que nous pouvons actuellement observer. Néanmoins, il met en lumière la grande sous-détermination des schémas de différence et des diagrammes en général, comme nous allons le montrer à présent.

### 2.1.4 Le souci de la généralité

**La découverte proprement dite**

Dans le texte intitulé dans l'*Akademie Scheda Exigua* (A VII, 3, N.$53_3$), et daté du début de l'année 1676, Leibniz rapporte pour la première fois l'histoire de cette découverte dans un paragraphe intitulé « Origine de la découverte du triangle harmonique » (« *Origo inventionis trianguli harmonici* ») :

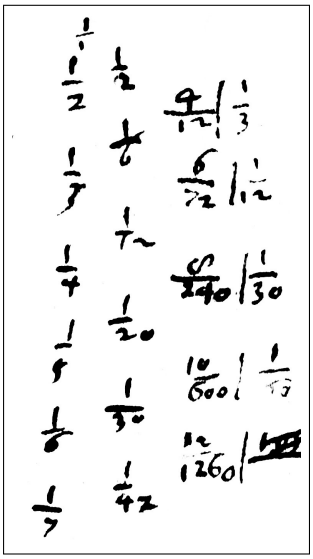


Manuscrits de Leibniz - LH 35 8 27 Bl.1

$$A = \frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}$$
$$B = \frac{1}{1}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{15}$$

*L'année 1673, Huygens m'avait proposé de trouver la somme des fractions triangulaires qui avait découverte par une solution certes particulière mais vraiment mémorable. Alors que j'étais, par conséquent, absorbé dans ces méditations, j'ai remarqué ceci par hasard [...]*
*Si l'on ajoute les moitiés de termes de B aux termes pris dans A selon lignes par lesquelles on voit qu'ils sont joints, on retrouve les termes de A qui sont écrits au dessus des termes de B. La première chose qui m'avait frappé fut quand je vis que le premier terme de B à savoir 1, pris de moitié et ajouté au terme de A joint par la ligne, à savoir $\frac{1}{2}$, donne 1, c'est-à-dire le premier terme de A. De même, je remarquai que le produit des dénominateurs de deux voisins de A donnent toujours le double des dénominateurs de B.* [23]

Les éditeurs de l'*Akademie* proposent donc un parallèle avec un passage du manuscrit *Differentiæ Numerorum Harmonicum et Reciprocorum Triangularium* (A VII, 3, N.2) :



Manuscrits de Leibniz - LH 35 12 2 Bl.197

$$
\begin{array}{ccc|c}
\frac{1}{1} & & & \\
 & \frac{1}{2} & & \\
\frac{1}{2} & & \frac{4}{12} & \frac{1}{3} \\
 & \frac{1}{6} & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{6}{72} & \frac{1}{12} \\
 & \frac{1}{12} & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{8}{240} & \frac{1}{30} \\
 & \frac{1}{20} & & \\
\frac{1}{5} & & \frac{10}{600} & \frac{1}{60} \\
 & \frac{1}{30} & & \\
\frac{1}{6} & & \frac{12}{1260} & \frac{1}{105} \\
 & \frac{1}{42} & & \\
\frac{1}{7} & & &
\end{array}
$$

Selon les éditeurs :

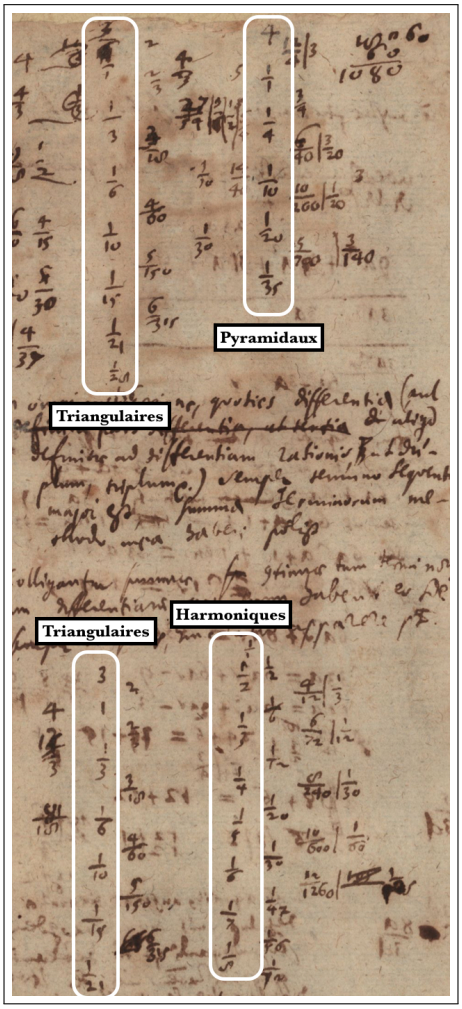
*A la page 13, Leibniz construit un schéma de différence pour la suite des inverses des nombres harmoniques avec la suite des moitiés de inverses des nombres triangulaires comme première suite de différences et celle des tiers des inverses des nombres pyramidaux comme seconde. Dans le N.53$_3$, p.712 l.17 - p.713 l.1, Leibniz rapporte que sa découverte de la somme des inverses de nombres triangulaires était fondée sur un tel schéma de différence* [24]

Ainsi, tout en restant prudent, les éditeurs sous-entendent que ce schéma du *Differentiæ Numerorum Harmonicum et Reciprocorum Triangularium* (A VII, 3, N.2) peut être vu comme le *moment* de la découverte. Le titre donné au texte confirme cette position. Pourtant, nous avons indiqué qu'une grande partie du texte est consacrée à la méthode des mélanges termes-différences. Les schémas de différences consacrés au défi de Huygens concernent presque tous des différences d'inverses de nombres triangulaires ou de nombres pyramidaux. Ainsi, Leibniz est visiblement dans cette optique, que nous avons déjà décrite lors de l'étude de la seconde approche, à savoir de trouver comment exprimer la somme en fonction de

23. A VII, 3, N.53$_3$, *Scheda Exigua*, décembre 1675 - février 1676 – p.712-713 : « Anno 1673 Hugenius mihi proposuerat summam fractionum triangularium inveniendam quam particulari sed valde memorabili solutione deprehenderat. Cum ergo in ea essem meditatione forte notavi [...] si dimidii termini $B$ addantur terminis ex $A$, per lineas quas vides iunctis, reddi terminos ex $A$, terminis ex $B$ superscriptos. Quod in mentem primum venerat, quod viderem primum terminum nempe 1 ipsius $B$, dimidiatum, additum iuncto per lineam ex $A$, nempe $\frac{1}{2}$ facere 1, seu primum ex $A$. Item quod nominatores proximi ex $A$ in se ducti, faciunt semper numeratorum ex $B$ duplos »*Nota Bene* : Il y a une coquille de la part de Leibniz, que nous avons corrigée dans la traduction. A la place de « faciunt semper nominatorum ex $B$ duplos », Leibniz écrit « faciunt semper numeratorum ex $B$ duplos », i désignant ainsi les numérateurs au lieu des dénominateurs.

24. A VII, 3, N.2, *Differentiæ Numerorum Harmonicum et Reciprocorum Triangularium*, septembre-octobre 1672 - p.10, note des éditeurs quant à la datation du manuscrit : « Auf S.13 berechnet Leibniz ein Differenzenschema zur Folge der harmonischen Zahlen mit der Folge der halbierte reziproken Dreieckszahlen als erster und der Folge der gedrittelten reziproken Pyramidalzahlen als zweiter Differenzenfolge. In N.53$_3$ S.712 Z.17 - S.713 Z.1 berichtet Leibniz über seine Entdeckung der Summierung der reziproken Dreieckzahlen anhand eines solchen Differenzenschema. »

la différence. Ce qu'il décrit dans le texte sur l'« origine de la découverte du triangle harmonique », que nous avons cité plus haut, correspond plutôt à la première piste, c'est-à-dire remarquer que la moitié des inverses des triangulaires sont des différences de fractions harmoniques consécutives. Ce n'est visiblement pas l'approche de Leibniz à ce moment. Ajoutons que le schéma repéré par les éditeurs contient la seule occurence de la suite harmonique. Leibniz propose plusieurs sommes de séries dans ce texte mais pas celle demandées par Huygens. De fait ces méthodes qu'il choisit d'appliquer ici ne fonctionnent pas pour les triangulaires, comme nous l'avons vu.




Manuscrits de Leibniz - LH 35 12 2 Bl.197

On peut aussi noter qu'on trouve également la seule occurence d'un schéma de différences sur les inverses des pyramidaux, juste au dessus du schéma sur la suite harmonique. Ceci indique peut-être une troisième piste de Leibniz qui n'est absolument pas développée dans ces deux manuscrits, à savoir de généraliser le problème de Huygens qui concerne les nombres triangulaires aux autres familles de nombres figurés, dans un premier temps, les naturels et les pyramidaux.
Pour terminer, remarquons le fait que dans le premier manuscrit *De Summa Numerorum Triangularium Reciprocorum* (A VII, 3, N.1), Leibniz constate que la différence entre la somme et la différence des termes donne une série dont les numérateurs sont $2, 6, 12, 20, 30$ etc. :

$$\left(\frac{1}{T_{n-1}} + \frac{1}{T_n}\right) - \left(\frac{1}{T_{n-1}} - \frac{1}{T_n}\right) = \frac{n(n-1)}{T_{n-1}T_n}$$

Comme l'indique notre expression algébrique, Leibniz ne décrit pas ces numérateurs comme les doubles des nombres triangulaires mais plutôt commme les produits de deux entiers consécutifs : $2 = 1 \times 2$ ; $6 = 2 \times 3$ ; $12 = 3 \times 4$ etc.
Ainsi, il nous semble que nous disposons d'éléments significatifs pour pouvoir dire que Leibniz n'a pas nécessairement vu dans ce manuscrit ce qu'il dit avoir vu dans le passage du *Scheda Exigua* (A VII, 3,

N.53$_3$). Il est possible qu'il n'ait pas reconnu les doubles des nombres triangulaires $1, 3, 6, 10$ et $15$ dans la suite des dénominateurs $2, 6, 12, 20$ et $30$.
En disant cela, nous ne disons pas qu'il ignorait le fait que les nombres triangulaires forment la moitié des produits de deux entiers consécutifs, car on trouve déjà cette formule algébrique au sein de la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8) [25] :
Mais il est possible qu'il n'ait pas cette propriété en tête lors de la rédaction. Ajoutons, par ailleurs, que la formule est donnée sous la forme d'une expression algébrique, au sein de la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8), alors qu'il s'agit ici de progressions développées. Dès lors, les deux procédés doivent être distingués. Ce n'est pas la même chose de voir que les triangulaires sont la moitié des produits de deux consécutifs à partir de l'expression algébrique, ou bien à partir de la progression développée. Dans l'expression algébrique, cette propriété est déjà explicitée *a priori* en son propre sein :

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2} = \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{\text{la moitié}} \quad \underbrace{\times}_{\text{du}} \quad \underbrace{n(n+1)}_{\text{produit de deux consécutifs}}$$

Dans la progression développée, en revanche, il s'agit de constater *a posteriori* la coïncidence de deux progressions :

$$\begin{array}{rcccccc} 2 \times T_n : & 2 \times 1 = 2 & 2 \times 3 = 6 & 2 \times 6 = 12 & 2 \times 10 = 20 & 2 \times 15 = 30 & 2 \times 21 = 42 & \dots \\ n(n+1) : & 1 \times 2 = 2 & 2 \times 3 = 6 & 3 \times 4 = 12 & 4 \times 5 = 20 & 5 \times 6 = 30 & 6 \times 7 = 42 & \dots \end{array}$$

Cette remarque doit questionner la pratique historiographique, qui est la nôtre, consistant à donner systématiquement l'expression formelle des progressions considérées par les acteurs, afin d'aider à la compréhension de notre analyse. Cette opération de traduction n'est pas un acte neutre, car elle pose comme *a priori* des lois et des relations entre les termes qui n'apparaissent aux acteurs qu'*a posteriori*, lorsqu'ils considèrent les progressions développées.

### La barrière de la généralité

Ces deux études constituent donc très probablement les premiers travaux de Leibniz sur le problème de Huygens. Néanmoins, nous avons montré qu'elles ne se concentrent pas tant sur le cas particulier des inverses des nombres triangulaires, mais qu'elles sont plutôt l'occasion de trouver des pistes pour résoudre des problèmes plus généraux. La somme de la série en elle-même ne constitue l'intérêt principal de Leibniz qui entend plutôt développer un nouvel art de l'analyse, ou du moins faire progresser celui de ses contemporains :

> *L'art dans l'analyse consiste naturellement à pouvoir donner le produit d'une progression donnée par une de sa propre classe qui contienne elle-même bien sûr les différences parallèles.* [26]

La première piste qui présente une forme très algébrique, avec des équations et des inconnues littérales, nous montre en fait sur cette question une conception plutôt géométrique et euclidienne, avec l'idée d'un tout que l'on épuise progressivement. Nous pouvons alors interpréter la crainte que Leibniz manifeste face à l'apparente difficulté du problème [27] comme la manifestation d'une certaine ambition déjà en germe chez le jeune philosophe de parvenir à dépasser les barrières de la géométrie au moyen de méthodes formellement calquées sur celles de l'algèbre.
La deuxième piste montre les premiers essais de Leibniz sur des processus proches de sa future méthode de transmutation. Les différences sont les composants des termes de la série et ces termes eux-mêmes sont les composants de la somme que l'on cherche. Ainsi, en opérant ce mélange termes-différences que nous avons décrit, Leibniz mêle les composés aux composants, pour obtenir des relations globales entre série et différences [28]. Leibniz montre ici un aspect fondamental de sa pensée combinatoire, puisqu'il cherche à évaluer le tout par la décomposition de ses parties et leur recombinaison :

25. *Cf* le paragraphe consacré dans le prologue, p.79.
26. A VII, 3, N.1, *De Summa Numerorum Triangularium Reciprocorum*, Septembre 1672 - p.9 : « Ars est in analysi datam scilicet progressionem ad classem suam producere posse ; cuius scilicet ipsa differentias parallelas continet. »
27. Voir la note 8 p.172.
28. On pourrait même parler, sans beaucoup de prudence, d'ébauches d'équations différentielles

> *Notons que je peux composer les séries à partir de données, en multipliant ou divisant celles-ci, ou autrement en additionnant ou soustrayant des séries connues à celles-ci. De même en multipliant une série avec une autre série, on aboutit à la progression infinie d'un nombre infini de terme qui reste néanmoins d'une somme donnée. Je peux diviser une série par un terme, mais je ne peux pas diviser un terme par la série.* [29]

On trouve finalement au sein de ces deux méthodes les prémisses de nombreux aspects des futurs travaux de Leibniz. Cette ambition, qui transparait dans ses commentaires, le pousse à trouver des procédés algorithmiques capables de déterminer la solution de façon sûre et presque mécanique. La découverte du fait que les inverses des triangulaires sont les différences de deux termes voisins de la série harmonique a pu se faire "par hasard" [30], comme il le dit dans le *Scheda Exigua*. Cependant, ces deux manuscrits nous montrent que sa démarche était tout sauf hasardeuse. Ce n'est pas la solution que Leibniz cherche par tâtonnement mais plutôt la méthode pour y parvenir. Ce souci de généralité a alors pu tenir le résultat hors de sa portée, bien qu'il ait eue sous les yeux, d'une certaine manière.

29. A VII, 3, N.1, *De Summa Numerorum Triangularium Reciprocorum*, Septembre 1672 - p.9 : « Nota possum series componere ex datis ipsas multiplicando dividendo alias series cognitas ipsis addendo vel subtrahendo, item multiplicando seriem in seriem, quo facto prodeunt numeri infinities infiniti, nihilominus summæ datæ. Possum dividere seriem per terminum, sed non possum terminum dividere par seriem. »

30. Dans le texte latin : "*forte*", voir la note 23

## 2.2 Une première tentative de formalisation

### 2.2.1 Une découverte probablement perdue

L'hypothèse selon laquelle Leibniz n'aurait pas encore résolu le problème de Huygens lors de la rédaction des deux études dont nous avons donné précédemment l'analyse, à savoir le *De Summa Numerorum Triangulorum Reciprocorum* (A VII, 3, N.1) et le *Differentiæ Numerorum Harmonicum et Reciprocorum Triangularium* (A VII, 3, N.2), est une hypothèse vraisemblable, qui doit être considérée avec la même prudence que celle, sous-entendue par les éditeurs de l'*Akademie* qui lui est opposée. Pour le dire plus clairement, il ressort de ce que nous avons montré que Leibniz a pu ignorer autant la preuve que le résultat lui-même, et ce même pour la somme des inverses des nombres triangulaires que Huygens avait visiblement choisi de garder pour lui. Cependant, dans tous les autres documents dont on dispose sur ce sujet, Leibniz connait et énonce le résultat final, à savoir la valeur de toutes les sommes d'inverses de nombres combinatoires. Si nous acceptons notre hypothèse, alors le moment lui-même de la découverte a nécessairement été perdu.
Dans le cas contraire, le seul candidat possible à ce lieu d'invention serait logiquement le premier texte qui contient le résultat, c'est-à-dire le *De Differentiis Progressionum Decrescentium* (A VII, 3, N.5) :

> *La somme des triangulaire est* 1*, des pyrmidaux est* $\frac{1}{2}$*, des triangulo-triangulaires est* $\frac{1}{3}$*, des triangulo-pyramidaux est* $\frac{1}{4}$ *etc. Mais la somme des naturels est* 0*, (qui précède* 1*), ou encore l'infini, c'est-à-dire qu'on ne peut pas les sommer, etc. C'est une chose que l'infini soit quelque chose que l'on compare à* 0*, c'en est une autre qu'il soit exprimé par une infinité de termes.* [31]

Comme le résultat sur les sommes est présent, il est clair qu'il a été rédigé après le *De Summa Numerorum Triangulorum Reciprocorum* (A VII, 3, N.1) et le *Differentiæ Numerorum Harmonicum et Reciprocorum Triangularium* (A VII, 3, N.2). Les éditeurs datent ce texte à la fin de l'année 1672, et ce pour des raisons qui concernent les résultats sur les triangles de différences que nous développerons plus tard. Leibniz l'aurait donc potentiellement rédigé avant l'*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum* (A II, 1, N.109) [32], ce qui fait de ce texte le plus proche du moment de la découverte qui soit en notre possession.
Comme souvent, le texte du *De Differentiis Progressionum Decrescentium* (A VII, 3, N.5) est transcrit à partir d'un feuillet volant sans titre. Il contient deux pièces manuscrites. La première partie est rédigée sur le recto du feuillet et traite des sommes d'inverses des triangulaires et des pyramidaux. La seconde partie, rédigée au verso, traite dans un premier temps des triangles de différence, puis donne ensuite une tentative de formalisation de la méthode de décomposition des fractions, c'est-à-dire la première piste qu'il décrit dans le *De Summa Numerorum Triangulorum Reciprocorum* (A VII, 3, N.1).

#### Description du manuscrit

La première partie, rédigée sur le recto, est la plus brouillonne, bien qu'elle soit introduite par un problème clairement posé, à savoir :

> *Problème capital : trouver lorsque c'est possible une progression qui décroît infiniment et telle que la progression donnée, infiniment décroissante, contienne les différences.* [33]

Ce problème qui est donc ici posé de manière totalement générale, Leibniz en donne de suite la solution :

> *Pour trouver la progression cherchée, il suffit de trouve un seul terme de celle-ci, par exemple le premier.* [34]

31. A VII, 3, N.5, *De Summa Numerorum Triangularium Reciprocorum*, Déc. 1672 - p.51 : « Triangularium summa est 1, pyramidalium $\frac{1}{2}$, triangulo-triangularium $\frac{1}{3}$, triangulo-pyramidalium $\frac{1}{4}$, etc. At naturalium summa est 0, (quod præcedit 1) seu infinitum, id est non possunt summari, etc. Aliud est infinitum esse aliquid quod comparatur 0, aliud esse infinitis terminis expressum. »

32. Pour la discussion sur les datations dans l'*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum* voire p.238

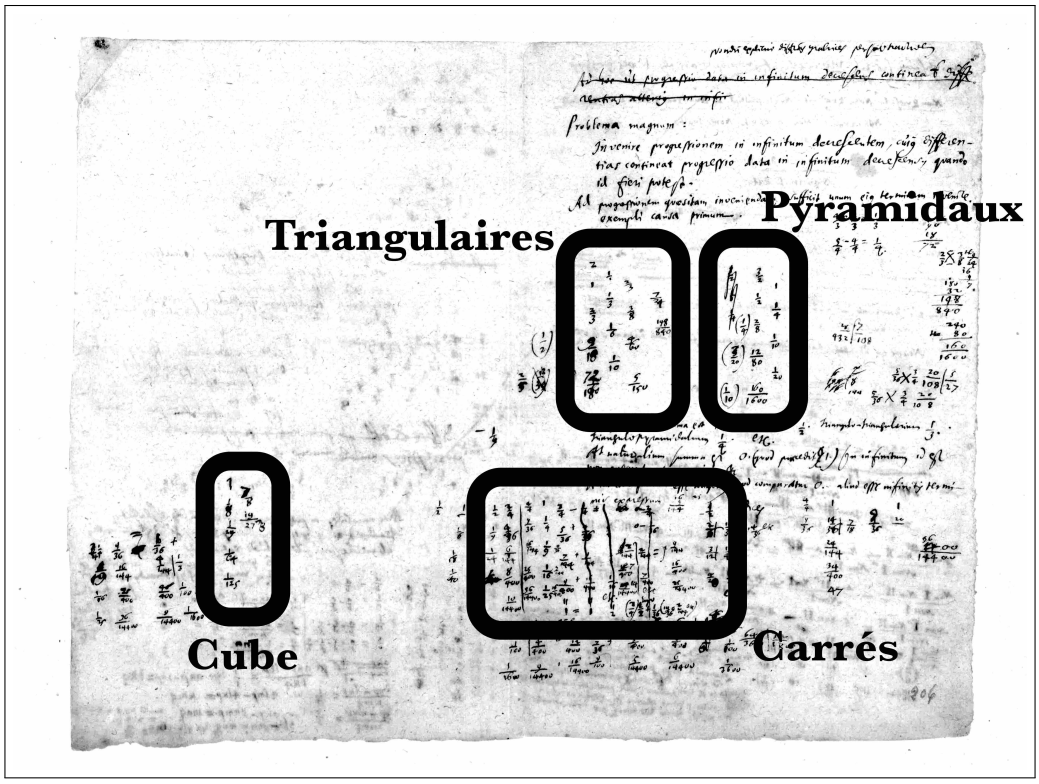
33. A VII, 3, N.5, *De Summa Numerorum Triangularium Reciprocorum*, Déc. 1672 - p.50 : « Problema magnum : Invenire progressionem in infinitum decrescentem, cuius differentias contineat progressio data in infinitum decrescens, quando id fieri potest »

34. A VII, 3, N.5, *De Summa Numerorum Triangularium Reciprocorum*, Déc. 1672 - p.50 : « Ad progressionem quæsitam inveniendam, sufficit unum eius terminum invenire, exempli causa primum. »

Ainsi, une progression quelconque ne peut pas se réduire à la progression de ses différences successives. Il faut en plus de cela connaître au moins un terme de la progression donnée pour pouvoir la reconstituer. Pour le dire autrement, la fonction différence n'est pas injective. Cette règle semblait manquer au jeune philosophe lorsqu'il avait fait ses premières études sur le problème de Huygens dans les deux manuscrits dont nous avons déjà fait l'étude, bien que la première piste qu'il y avait emprunté touchait déjà à cette problématique.
Il nous faut donc nous arrêter un instant sur une objection éventuelle. Supposons que Huygens ait fait part au jeune Leibniz du résultat de ce problème, à savoir que la somme de inverses cherchée vaut 2. Alors la découverte de cette propriété mène directement à la proposition fondamentale de la preuve par différences, à savoir que les inverses des triangulaires sont les différences des termes d'une progression harmonique :

$$\begin{array}{ccccccccccc} 2 & & \overset{2-\frac{1}{1}}{\bullet}_{\frac{2}{2}} & & \overset{2-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right)}{\bullet}_{\frac{2}{3}} & & \overset{2-\left(\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{6}\right)}{\bullet}_{\frac{2}{4}} & & \overset{2-\left(\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{10}\right)}{\bullet}_{\frac{2}{5}} & & \overset{2-\left(\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{15}\right)}{\bullet}_{\frac{2}{6}} \\ & \frac{1}{1} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{10} & & \frac{1}{15} & \end{array}$$

Cette hypothèse, comme une infinité d'autres, n'est pas inenvisageable, mais nous semble peu raisonnable. En effet, étant donné les processus d'investigation très variés auxquels Leibniz a recours dans les deux premiers manuscrits que nous avons étudiés, il paraît peu vraisemblable qu'il n'ait jamais fait l'usage, ni la mention du résultat 2 s'il le connaissait. Au final, une telle hypothèse ferait de la découverte de Leibniz un processus purement analytique, dans lequel il se contente de décomposé la somme qu'on lui aurait donnée en ses parties afin de déterminer les valeurs des sommes partielles. Cela ne s'accorde ni avec les sources, ni avec le discours de Leibniz sur ces sources, au sein desquels l'*ars inveniendi* et la synthèse ont une place centrale.
Néanmoins, ceci semble nous révéler qu'un certain cheminement s'est déjà produit, au sujet des progressions, et du lien qu'elles entretiennent avec leurs différences.

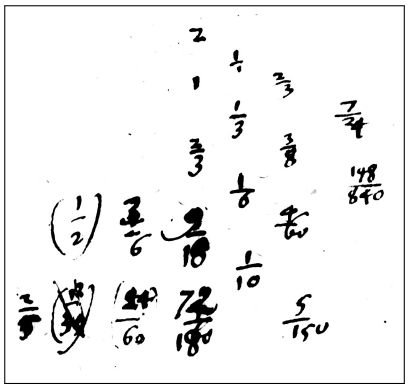



Manuscrits de Leibniz - LH 35 2 1 Bl.205 - Partie 1

Leibniz donne deux schémas de différences d'inverses de nombres combinatoires, à savoir les inverses des triangulaires et ceux des pyramidaux. Ces derniers ne fournissent aucun indice sur la manière dont précisément Leibniz a pu découvrir ce premier terme dont il dit qu'il est suffisant à la solution du problème. En effet, il faut que Leibniz ait trouvé un moyen d'obtenir le coefficient 2, pour les triangulaires ou le coefficient $\frac{3}{2}$ pour les pyramidaux. Ceci indique que la processus de découverte est antérieur à ce manuscrit. Par ailleurs, la forme que Leibniz donne aux fractions nous renseigne sur le processus de calcul. En effet, comme il l'indique dans le *De Summa Numerorum Triangulorum Reciprocorum* (A VII, 3, N.1), Leibniz calcul presque toujours les sommes ou différences de fractions au moyen de la formule littérale :

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ac \pm bd}{bd}$$

Ainsi, lorsqu'on observe que les dénominateurs sont systématiquement égaux au produit des dénominateurs de deux termes adjacents, cela indique que ce terme est le produit de leur somme ou de leur différence.



Manuscrits de Leibniz - LH 35 2 1 Bl.205

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 2 & & & & \\
 & & & & & \frac{1}{1} & & & \\
 & & & & 1 & & \frac{2}{3} & & \\
 & & & & & \frac{1}{3} & & \frac{7}{24} & \frac{27}{54} \\
 & & & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{18} & & \\
 & & & & & \frac{1}{6} & & \frac{148}{840} & \frac{108}{1080} \\
 & & \left(\frac{1}{2}\right) & \frac{3}{6} & \frac{9}{18} & & \frac{4}{60} & & \\
 & & & & & \frac{1}{10} & & \frac{300}{9000} & \\
\frac{2}{5} & & \left(\frac{12}{30}\right) & \left(\frac{24}{60}\right) & \frac{72}{180} & & \frac{5}{150} & & \\
 & & & & & \frac{1}{15} & & &
\end{array}$$

Ainsi, ce schéma de différence montre que la première colonne n'est pas construite comme une progression harmonique, dont les termes sont :

$$\frac{2}{n} \rightarrow \frac{2}{1} ; \frac{2}{2} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{4} ; \frac{2}{5} ; \frac{2}{6} \ldots$$

Mais comme les sommes partielles des inverses des triangulaires, construites en les ôtant successivement de la somme totale 2 :

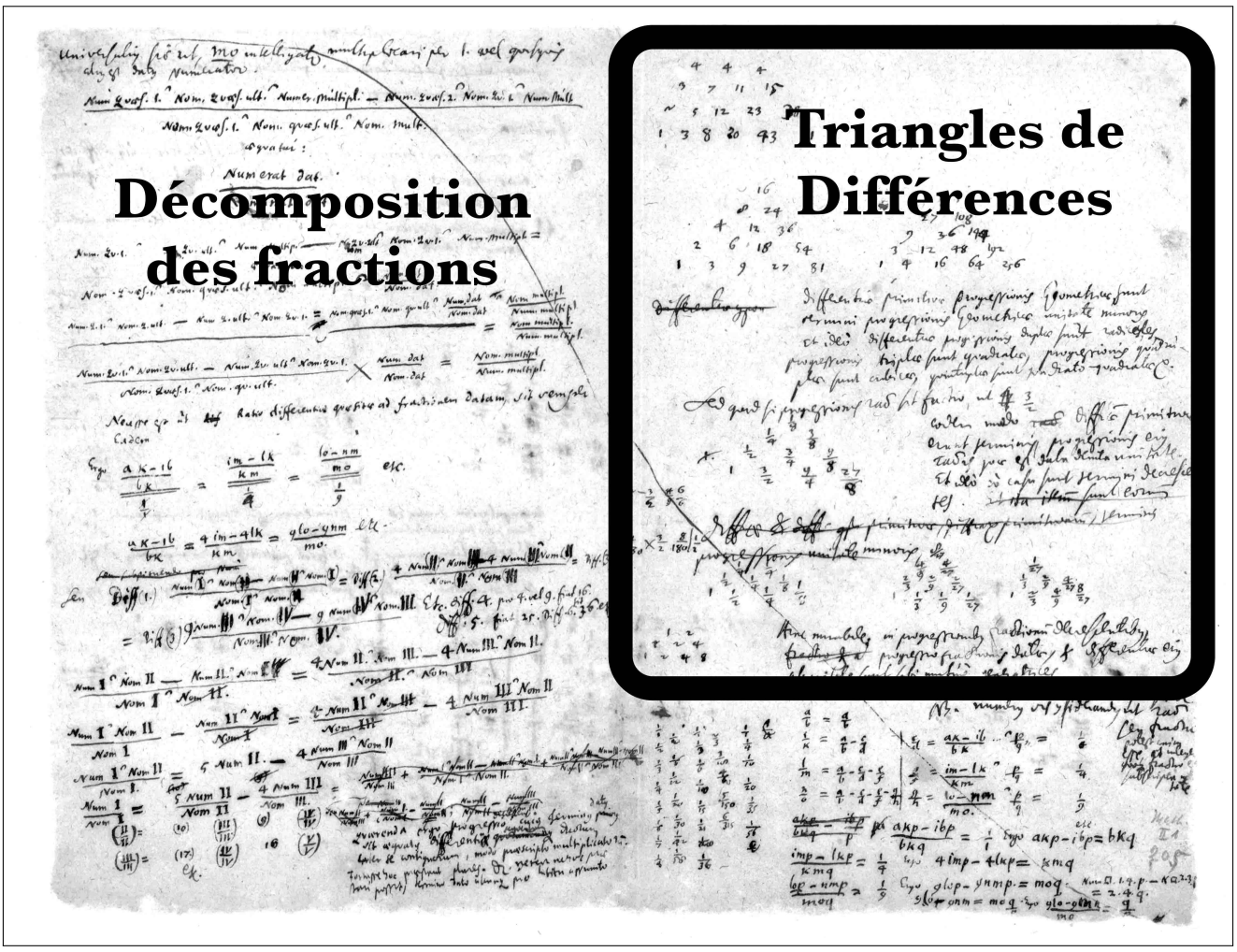
$$1 = 2 - \frac{1}{1} ; \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3} ; \frac{9}{18} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} ; \frac{72}{180} = \frac{9}{180} - \frac{1}{10} ; \ldots$$

Le bas de la page est consacrée à l'étude de la somme des inverses des carrés, ou encore ce qu'on appelle parfois « le problème de Mengoli ». Décrire précisément son approche dans le cas des inverses des carrés pour voir si l'est possible de l'appliquer convenablement aux inverses des triangulaires peut constituer en principe une méthode intéressante pour pouvoir générer des hypothèses sur la manière dont Leibniz a pu traiter le problème. Ici, l'approche de Leibniz semble se focaliser sur la réécriture des fractions, probablement dans l'objectif d'y voir émerger certaines régularités desquelles l'on pourrait induire la loi des progressions. Malheureusement, il serait vain d'entretenir cet espoir d'imaginer une quelconque reconstitution de sa pensée à partir de l'application de son résultat aux inverses des carrés. En effet, il ne semble pas que le jeune philosophe applique ici une quelconque méthode générale mais qu'il s'adonne plutôt à quelques tâtonnements opératoires dans le but de transformer et de simplifier la progression. Ce traitement, relativement proche de la méthode de décomposition des fractions que nous avons décrit plus haut, peut nous surprendre car il montre, à l'inverse des deux précédentes citations [35], une approche encore assez naïve de la part de Leibniz, et pourrait contredire le fait que sa réflexion sur ce sujet ait progressé substantiellement depuis le *De Summa Numerorum Triangulorum Reciprocorum* (A VII, 3, N.1).

35. Voir les notes 33 p.186 et 34 p. 186.

Ainsi, bien qu'on trouve dans cette première partie le résultat généralisé au problème de Huygens, que Leibniz fera valoir à tant de reprises, les calculs par tâtons sur la série des inverses des carrés montre que cette méthode globale d'analyse et de résolution des progressions qu'il appelle explicitement de ses vœux n'est pas encore conçue ni comme acquise, ni comme inaccessible.

La deuxième partie, au verso du manuscrit, est elle-même constituée de deux étapes. D'abord, Leibniz établit quelques triangles de différences dont il induit quelques propriétés intéressantes que nous analyserons plus tard. Puis, dans un second temps, il reprend la méthode de décomposition des fractions qu'il tente de formaliser sur la série des inverses des carrés.




Manuscrits de Leibniz - LH 35 2 1 Bl.205 - Partie 2

Contrairement aux tentatives presqu'à l'aveugle du recto, il s'agit bien ici d'appliquer une méthode formelle pour laquelle nous pourrions voir si elle permet de solutionner le problème des inverses des triangulaires.
Leibniz commence classiquement par représenter les numérateurs et les dénominateurs par des caractères latins :

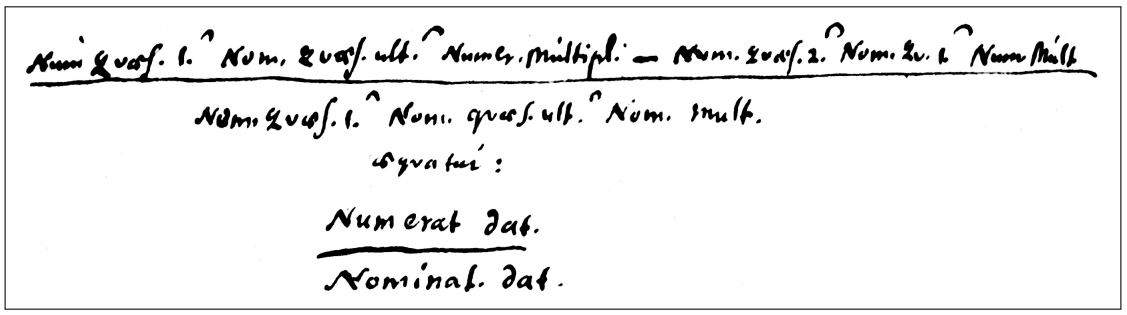
- ⋆ pour la progression donnée, c'est-à-dire les inverses des carrés : $\frac{c}{d}$ ; $\frac{e}{f}$ ; $\frac{g}{h}$
- ⋆ pour la progression cherchée : $\frac{a}{b}$ ; $\frac{i}{k}$ ; $\frac{l}{m}$ ; $\frac{n}{o}$

La progression donnée est constituée des différences des termes de la progression cherchée, multiplié par un terme donné et constant, que Leibniz note $\frac{p}{q}$. Ceci donne donc une relation générale entre les termes, par exemple pour les premiers $\frac{c}{d} = \frac{p}{q}\left(\frac{a}{b} - \frac{i}{k}\right)$, ce qui donne :

$$\frac{akp - ibp}{bkq} = \frac{c}{d}$$

Pour cette relation, Leibniz donne alors l'écriture générale suivante :

$$\frac{\text{num.quæs.1.} \cap \text{nom.quæs.ult.} \cap \text{numer.multipl.} - \text{num.quæs.2.} \cap \text{nom.quæs.1.} \cap \text{num.mult.}}{\text{nom.quæs.1.} \cap \text{nom.quæs.ult} \cap \text{nom.mult.}} \text{ æquatur : } \frac{\text{num.dat.}}{\text{nom.dat.}}$$



Manuscrits de Leibniz - LH 35 2 1 Bl.205

$$\frac{\underbrace{\left[\begin{smallmatrix}\text{numérateur}\\ \text{cherché 1}\end{smallmatrix}\right]}_{a} \times \underbrace{\left[\begin{smallmatrix}\text{dénominateur}\\ \text{cherché 2}\end{smallmatrix}\right]}_{k} \times \underbrace{\left[\begin{smallmatrix}\text{numérateur}\\ \text{multiplicateur}\end{smallmatrix}\right]}_{p} - \underbrace{\left[\begin{smallmatrix}\text{numérateur}\\ \text{cherché 2}\end{smallmatrix}\right]}_{i} \times \underbrace{\left[\begin{smallmatrix}\text{dénominateur}\\ \text{cherché 1}\end{smallmatrix}\right]}_{b} \times \underbrace{\left[\begin{smallmatrix}\text{numérateur}\\ \text{multiplicateur}\end{smallmatrix}\right]}_{p}}{\underbrace{\left[\begin{smallmatrix}\text{dénominateur}\\ \text{cherché 1}\end{smallmatrix}\right]}_{b} \times \underbrace{\left[\begin{smallmatrix}\text{dénominateur}\\ \text{cherché 2}\end{smallmatrix}\right]}_{k} \times \underbrace{\left[\begin{smallmatrix}\text{dénominateur}\\ \text{multiplicateur}\end{smallmatrix}\right]}_{q}} = \frac{\underbrace{[\text{numérateur donné}]}_{c}}{\underbrace{[\text{dénominateur donné}]}_{d}}$$

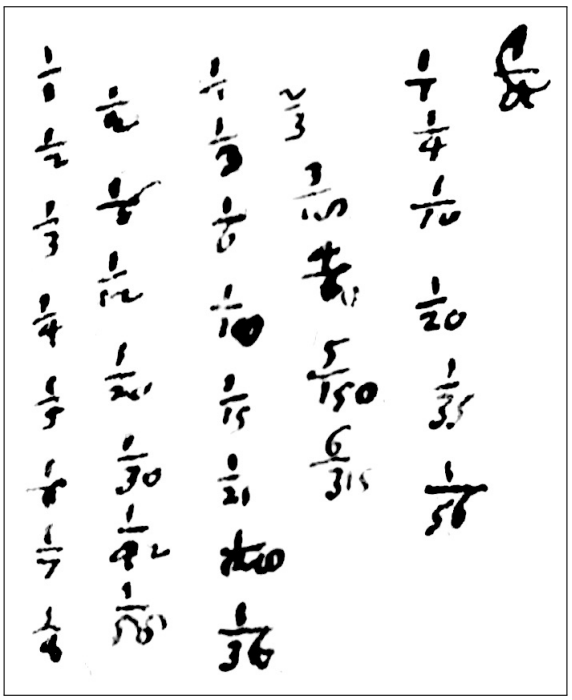
A première vue, Leibniz reste ici dans l'idée initiale de la méthode de décomposition des fractions que nous avons déjà décrite, à savoir trouver un moyen de déterminer les numérateurs et les dénominateurs des termes d'une progression cherchée en fonction des numérateurs et des dénominateurs des termes de la progression donnée, de sorte que la différence des termes cherchés soit égale aux termes donnés. Cependant, il intervient ici un terme supplémentaire qui n'apparaissait pas dans sa première recherche au sein du *De Summa Numerorum Triangulorum Reciprocorum* (A VII, 3, N.1). Ici, Leibniz ne demande pas à ce que la progression cherchée soit égale à la progression des différences des termes de la donnée, mais seulement qu'elle lui soit proportionnelle. Ce facteur de proportion, qu'il désigne par « *num.mult* » pour le numérateur et « *nom.mult* » pour le dénominateur, constitue un apport précieux quant à notre investigation, puisqu'il nous montre bien ce à quoi nous attendions au départ, à savoir que Leibniz essaie ici d'appliquer à la progression des inverses des carrés et même aux progressions générales la méthode qu'il a employée avec succès pour le cas des inverses des nombres combinatoires. C'est ce que nous montrons maintenant.

### 2.2.2 Le modèle des inverses des nombres figurés

#### Une toute première table

Le schéma de différence suivant, concernant explicitement le problème de Huygens qui nous intéresse, apparaît entre les deux étapes de cette deuxième partie. Leibniz l'a sans nul doute écrit ici en tant que table préparatoire à la seconde étape où il tente de formaliser la méthode de décomposition des fractions, méthode qu'il a justement élaborée, comme nous l'avons vu, lors d'une réflexion sur le problème de Huygens. Ce schéma constitue probablement le passage le plus intéressant de cette seconde partie de manuscrit tout en restant dans le même temps la plus problématique vis-à-vis de l'interprétation. En effet, on trouve dans ce schéma, et de façon bien plus claire que dans le *Differentiæ Numerorum Harmonicum et Reciprocorum Triangularium* (A VII, 3, N.2) [36], une potentielle méthode de découverte du résultat. Cela étant, ce schéma se trouve isolé entre deux travaux distincts et rien n'y réfère à première vue, de façon directe, sur le reste du manuscrit.

36. Voir le manuscrit p.183



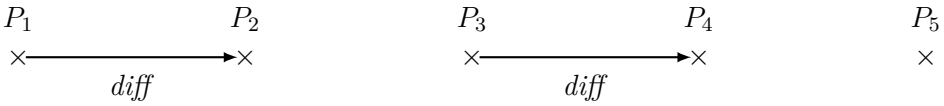
Manuscrits de Leibniz - LH 35 2 1 Bl.205 - Partie 2

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{1}$ | | $\frac{1}{1}$ | | $\frac{1}{1}$ |
| | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{4}$ |
| $\frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{3}$ | | $\frac{1}{4}$ |
| | $\frac{1}{6}$ | | $\frac{3}{18}$ | $\frac{6}{40}$ |
| $\frac{1}{3}$ | | $\frac{1}{6}$ | | $\frac{1}{10}$ |
| | $\frac{1}{12}$ | | $\frac{4}{60}$ | $\frac{10}{200}$ |
| $\frac{1}{4}$ | | $\frac{1}{10}$ | | $\frac{1}{20}$ |
| | $\frac{1}{20}$ | | $\frac{5}{150}$ | $\frac{15}{700}$ |
| $\frac{1}{5}$ | | $\frac{1}{15}$ | | $\frac{1}{35}$ |
| | $\frac{1}{30}$ | | $\frac{6}{315}$ | $\frac{21}{1960}$ |
| $\frac{1}{6}$ | | $\frac{1}{21}$ | | $\frac{1}{56}$ |
| | $\frac{1}{42}$ | | $\frac{7}{588}$ | $\frac{28}{4704}$ |
| $\frac{1}{7}$ | | $\frac{1}{28}$ | | $\frac{1}{84}$ |
| | $\frac{1}{56}$ | | $\frac{8}{1008}$ | $\frac{36}{10080}$ |
| $\frac{1}{8}$ | | $\frac{1}{36}$ | | $\frac{1}{120}$ |

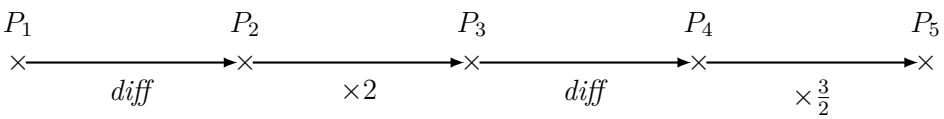
Ainsi, cette absence totale de contexte nous défend par principe de projeter sur ces simples colonnes de chiffres plus que ce qu'elles ne nous disent de façon incontestable, à savoir la chose suivante :
On dispose de cinq colonnes qui représente les progressions suivantes :

- ⋆ première colonne $P_1$ : inverses des naturels
- ⋆ deuxième colonne $P_2$ : différences des termes de la colonne précédente
- ⋆ troisième colonne $P_3$ : inverses des triangulaires
- ⋆ quatrième colonne $P_4$ : différences des termes de la colonne précédente
- ⋆ cinquième colonne $P_5$ : inverses des pyramidaux

On a les relations suivantes :



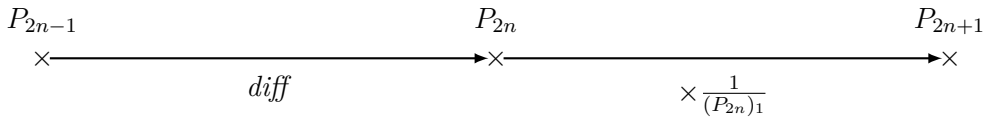

Leibniz n'écrit pas explicitement qu'il s'agit de schéma de différence, mais c'est une pratique courante et même théorisée chez le jeune philosophe comme nous le développerons plus tard. Les progressions $P_2$ et $P_4$ sont définie par cette relation de différence sans la moindre ambigüité. Il n'y a donc naturellement aucun doute quant à la présence de ces relations. Par contre, concernant les relations manquantes, à savoir celles qui relient $P_2$ à $P_3$ ou encore $P_4$ à $P_5$, il y a légitimement lieu de se poser la question de savoir si Leibniz les avaient à l'esprit ou non lors de la rédaction du manuscrit. En effet on voit très bien sur le schéma que la progression $P_3$ est le double de la progression $P_2$. Moins évident, il apparait aussi que $P_5$ est proportionnelle à $P_4$ avec un facteur $\frac{3}{2}$ :




Ainsi, la progression $P_3$ n'est plus définie comme la suite des inverses des triangulaires, mais comme celle des doubles des termes de $P_2$, et il en va de même pour la suite $P_5$. Or ces facteurs de proportionnalité ne sont pas issus du hasard des coïncidences mathématiques. Le facteur 2 est l'inverse du premier terme de $P_2$ et le facteur $\frac{3}{2}$ est l'inverse du premier terme de $P_4$. On peut alors induire l'algorithme suivant : on

part de $P_1$ la progression harmonique et on génère algorithmiquement les progressions $P_2$, $P_3$, …, $P_n$, … par la procédure suivante :

- ⋆ on constuit $P_{2n}$ comme la suite des différences des termes consécutifs de $P_{2n-1}$
- ⋆ on construit $P_{2n+1}$ comme la suite proportionnelle à $P_{2n}$ avec pour facteur de proportionnalité l'inverse de son premier terme $(P_{2n})_1$




Montrons formellement qu'en menant à bien cette procédure, on obtient bien le résultat généralisé du problème de Huygens. On s'aperçoit bien que les termes de la progression $P_{2n+1}$ sont les inverses des $(n+1)$-ièmes ordres numériques. Il est donc alors très simple de les interpréter comme des différences, puisque la progression $P_{2n+1}$ est proportionnelle à $P_{2n}$ dont les termes sont les différences de ceux de $P_{2n-1}$ qui constituée des inverses des $n$-ièmes ordres numériques. Ainsi, on a la formule suivante :

$$(P_{2n+1})_k = \frac{(P_{2n})_k}{(P_{2n})_1} = \frac{(P_{2n-1})_k - (P_{2n-1})_{k+1}}{(P_{2n-1})_1 - (P_{2n-1})_2}$$

Ou encore, en replaçant par les symboles des coefficients multi-ensembles :

$$\frac{1}{\left(\!\binom{k}{n+1}\!\right)} = \frac{\frac{1}{\left(\!\binom{k}{n}\!\right)} - \frac{1}{\left(\!\binom{k+1}{n}\!\right)}}{\frac{1}{\left(\!\binom{1}{n}\!\right)} - \frac{1}{\left(\!\binom{2}{n}\!\right)}}$$

Or :

$$\frac{1}{\frac{1}{\left(\!\binom{1}{n}\!\right)} - \frac{1}{\left(\!\binom{2}{n}\!\right)}} = \frac{1}{\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n}$$

Donc la progression des inverses des $(n+1)$-ièmes ordres numériques est proportionnelle à celle des différences des $n$-ièmes ordres, et le facteur de proportionnalité est $\frac{n+1}{n}$.

$$\frac{1}{\left(\!\binom{k}{n+1}\!\right)} = \frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{\left(\!\binom{k}{n}\!\right)} - \frac{1}{\left(\!\binom{k+1}{n}\!\right)}\right)$$

Reste alors à appliquer la règle que Leibniz a énoncé dans la première partie du manuscrit, selon laquelle le premier terme de la série cherchée donne la somme de la série donnée, ici le premier terme est :

$$\frac{n+1}{n} \times \frac{1}{\left(\!\binom{1}{n}\!\right)} = \frac{n+1}{n}$$

Et on retrouve ainsi le résultat :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(\!\binom{k}{n+1}\!\right)} = \frac{n+1}{n}$$

La question qu'il reste à trancher réside donc dans la pertinence à projeter un tel raisonnement au cœur de ce simple schéma de différence. Une telle reconstruction nous paraît raisonnable et féconde puisqu'elle permet d'expliquer la présence de ce facteur multiplicatif $\frac{p}{q}$ que Leibniz introduit dans la deuxième partie lors de sa tentative de formalisation de la méthode de décomposition des fractions. Le fait de ne plus chercher à décomposer les termes de la suite comme les différences des termes d'une autre suite mais plutôt comme les termes d'une suite proportionnelle à cette suite de différences cherchée provient très vraisemblablement de l'exemple des inverses des nombres combinatoires. On trouve bien ces deux étapes de la procédure que nous avons décrites, à savoir différencier, puis multiplier par un terme constant, au sein de la relation de récurrence qu'il a formalisé :

$$\frac{\text{num.quæs.1.} \cap \text{nom.quæs.ult.} \cap \text{numer.multipl.} - \text{num.quæs.2.} \cap \text{nom.quæs.1.} \cap \text{num.mult.}}{\text{nom.quæs.1.} \cap \text{nom.quæs.ult} \cap \text{nom.mult.}} \text{ æquatur : } \frac{\text{num.dat.}}{\text{nom.dat.}}$$

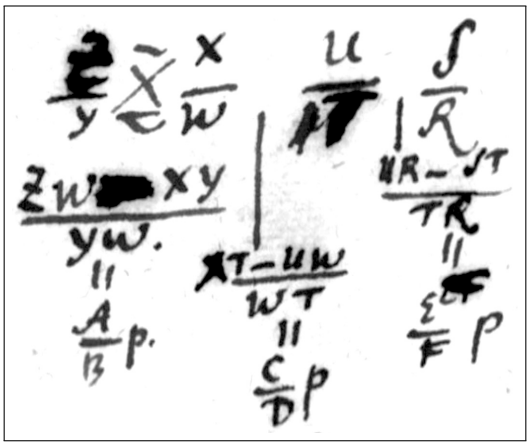
Relation de récurrence que nous pourrions réécrire :

$$a_n = k(b_n - b_{n+1}).$$

Remarquons néanmoins que Leibniz ne donne ici aucune indication sur la manière de trouver le facteur multiplicatif. Son numérateur et son dénominateur rentrent dans l'équation comme des termes dont le statut reste ambigu puisqu'ils ne sont ni donnés (« *dat.* ») ni cherchés (« *quæs.* »). Cela étant, une fois admis le fait qu'il ait conscientisé les rapports de proportionnalité entre les inverses des ordres numériques et les différence des ordres numériques précédents, la nature des coefficients de proportionnalité vient du même mouvement. En effet, comme les premiers termes de tous les ordres numériques sont égaux à l'unité, il faut nécessairement que les facteurs de proportionnalité soient les inverses des premiers termes des progressions de différence. On peut cependant supposer que cet état de fait n'ait pas paru généralisable aux autres progressions, au contraire du fait que les différences soient proportionnelles à d'autres progressions susceptibles d'être déterminées.
Ajoutons un dernière argument en faveur de cette reconstruction, qui reste par nature, de l'ordre de l'interprétation. Leibniz lui-même donne explicitement cet argument dans un manuscrit légèrement plus tardif, le *De Summis Serierum Fractionum* (A VII, 3, N.12) :

> *Etant donné une certaine série de fractions, trouver une autre série pourlaquelle la série donnée a un certain rapport constante aux différences, si c'est possible, ou alors montrer que c'est impossible.*
> *Comme pour la série* $1\frac{1}{3}\frac{1}{6}\frac{1}{10}\frac{1}{15}$ *etc. qui est le double de* $\frac{1}{2}\frac{1}{6}\frac{1}{12}\frac{1}{20}\frac{1}{30}$ *etc., série des différences de* $1\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{5}$ *etc.*
> $\frac{A}{B}\frac{C}{D}\frac{E}{F}$ *etc.* $=$ *; La série cherchée :* $\frac{Z}{Y}\frac{X}{W}\frac{U}{T}\frac{S}{R}$ *et soit un rapport quelconque de division ou de multiplication comme : p.*[37]

Dans ce manuscrit, il est clair que le cas des inverses de nombres figurés constituent le principal modèle qui justifie cette hypothèse de proportionnalité pour d'autres progressions. Leibniz donne ensuite les formules suivantes :



Manuscrits de Leibniz - LH 35 3 B 10 Bl.2

$$\underbrace{\frac{Z}{Y} \overline{\times} \frac{X}{W}}_{\frac{ZW-XY}{YW} = \frac{A}{B}\cdot p} \quad \underbrace{\overline{\times} \frac{U}{T}}_{\frac{XT-UW}{WT} = \frac{C}{D}\cdot p} \quad \underbrace{\overline{\times} \frac{S}{R}}_{\frac{UR-ST}{TR} = \frac{E}{F}\cdot p}$$

37. A VII, 3, N.12, *De Summis Serierum Fractionum*, mars-mai 1673 - p.149 : « Data aliqua serie fractionum, invenire aliam seriem ad cuius differentias series data aliquam habeat rationem constantem, si id possibile est, aut ostendere impossibilitatem. Ut series $1\frac{1}{3}\frac{1}{6}\frac{1}{10}\frac{1}{15}$ etc. est duplum $\frac{1}{2}\frac{1}{6}\frac{1}{12}\frac{1}{20}\frac{1}{30}$ etc. differentiarum seriei $1\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{5}$ etc. $\frac{A}{B}\frac{C}{D}\frac{E}{F}$ etc. $=$ quæsitum : $\frac{Z}{Y}\frac{X}{W}\frac{U}{T}\frac{S}{R}$ et ratio dividens aut multiplicans quæcunque ea sit : *p.* »

Puis il ajoute :

> *Mais il faut pouvoir continuer cela jusqu'à l'infini pour le savoir avec certitude ou pouvoir le démontrer. Si quelqu'un avait mené l'analyse jusqu'au point permettant de trouver ces choses, alors je le considère comme le plus remarquable.* [38]

Cette citation date du mois de Mars 1673 au plus tôt, et donc plusieurs mois se sont écoulés depuis la rédaction du *De Differentiis Progressionum Decrescentium* (A VII, 3, N.5). Comme nous l'avons dit, on y retrouve clairement le fait que l'idée du coefficient multiplicatif est fondée sur l'exemple des suites des inverses des nombres figurés comme les triangulaires. Mais on retrouve également l'utilisation du formalisme algébrique pour généraliser le problème. Tout ceci montre enfin que, malgré l'échec de cette présente tentative, dont nous allons discuter désormais, Leibniz garde à l'esprit cette méthode qu'il considère encore quelques mois plus tard comme un grand problème ouvert, extrêmement difficile mais susceptible de résolution.

**Limites de la méthode**

La formalisation que Leibniz effectue dans cette étape de la seconde partie du manuscrit est significative en elle-même, quant aux processus de compréhension qui se manifestent clairement au sein de ce document. En effet, il peut paraître assez vain au lecteur moderne de penser à rajouter ainsi un facteur multiplicatif constant pour pouvoir déterminer une progression qu'on ne connait pas. On voit bien que, dans le cas où $(a_n)_n$ est la progression donnée et que $(b_n)_n$ la progression cherchée, il n'y aurait pas de réelles conséquences à distinguer ces deux équations, dans une méthode générale :

$$a_n = k(b_n - b_{n+1}),$$

$$a_n = b_n - b_{n+1}.$$

En effet, si l'on dispose d'une méthode pour résoudre la première en tout généralité, alors cette même méthode nous permet immédiatement de résoudre la seconde et réciproquement, il suffit de multiplier ou de diviser les solutions par $k$.
Or il se trouve qu'à la toute fin de ce manuscrit, Leibniz finit par avouer l'échec relatif de sa démarche, dont il doute visiblement de son caractère efficient lorsqu'il s'agit de l'appliquer à des progressions quelconques, ou plutôt ici, des progressions mal choisie :

> *Il faut donc chercher une progression décroissante dont la différence entre deux termes contigus qui se suivent est égale au terme donné, les facteurs multiplicatifs étant préfixés. Il se peut qu'il s'en présente plusieurs. ϑ. Et je crains qu'il puisse ne pas s'en présenter du tout, le terme donné étant posé de manière totalement arbitraire.* [39]

Leibniz avait déjà vu la difficulté que présentait la méthode de la décomposition des fractions [40] dans le *De Summa Numerorum Triangulorum Reciprocorum* (A VII, 3, N.1), mais il estimait alors qu'il s'agissait là d'un problème de technicité qu'un tour de force mathématique restait en mesure de relever pourvu que la prouesse soit suffisamment forte. Ici, Leibniz craint que dans certains cas, il n'y ait tout simplement pas de solution. Apparait donc ici l'idée que sa méthode soit vouée à l'échec dans certains cas particuliers, voir même, suivant la manière dont on l'interprète, que certaines progressions échappent totalement à notre pouvoir de résolution. C'est ce qui explique que quelques mois plus tard, dans le *De Summis Serierum Fractionum* (A VII, 3, N.12), il a reformulé le problème en indiquant qu'il cherche une méthode générale qui trouve la solution lorsqu'elle possible et prouve son impossibilité dans le cas contraire.
Il est possible que la formalisation de la méthode ait montré au jeune philosophe l'impasse que présentait son ajout des facteurs multiplicatifs qui s'étaient pourtant avérés cruciaux dans le cas des inverses des

38. A VII, 3, N.12, *De Summis Serierum Fractionum*, mars-mai 1673 - p.150 : « Sed certo sciendum est, seu demonstrandum posse hoc in infinitum continuari. Si quis huc usque analysin produxerit, ut ista invenire queat, eum plurimum præstitisse arbitror »

39. A VII, 3, N.5, *De Summa Numerorum Triangularium Reciprocorum*, Déc. 1672 - p.60 : « Quærenda ergo progressio decrescens cuius terminus datus sit æqualis differentiæ sequentium duorum inter se contiguorum, modo præscripto multiplicatorum. Fortasse hoc præstant plures. ϑ. Vereor ne hoc præstari possit, termino dato utcunque pro lubitu assumto »

40. Voir la note 8

nombres combinatoires. En effet, lorsqu'on écrit concrètement les progressions des inverses des triangulaires, des carrés ou encore des pyramidaux, on tombe sur des suites numériques familières au mathématicien amateur de combinatoire ou d'algèbre qui peut les reconnaître du premier regard. Ceci nous donne une illustration supplémentaire de l'importance qu'il a à distinguer les formes développées des progressions et leurs expressions algébriques. Comme nous l'avons déjà évoqué, la suite littérale $a_1, a_2, a_3$ apparait directement lorsqu'on écrit. $2a_1, 2a_2, 2a_3$ tandis qu'il faut plus d'attention pour détecter ce lien de proportionnalité entre les suite $1, 3, 6, 10$ et $2, 6, 12, 20$. Dès lors, le travail qui consiste à identifier ces liens *a posteriori* au sein des progressions développées relève de la méthode synthétique, c'est-à-dire combinatoire dans son acception méthodologique. Il s'agit de trouver, parmi toutes les opérations possibles, celle qui permet de manifester la coïncidence des deux suites, ce qui relève du raisonnement combinatoire. A l'inverse, l'analyse de l'expression algébrique fournit directement la nature de la relation entre les suites et donc l'opération à effectuer pour transformer l'une en l'autre. Il s'agit donc d'un raisonnement analytique.
Cet exemple montre donc la fécondité de la méthode combinatoire du jeune Leibniz, puisqu'elle lui permet de construire des hypothèses de travail, comme celle du coefficient multiplicatif, qui ne se manifesteraient pas dans une pratique purement formelle et analytique.

## Conclusion

Bien qu'elles furent infructueuses, les deux premières méthodes proposées par Leibniz sont riches en enseignement, quant à sa pratique tabulaire. S'il semble, *a priori*, que le jeune philosophe avait probablement déjà fait l'usage de schéma de différences auparavant, la présence de ces deux méthodes montrent de façon nette que cette pratique n'est pas stabilisée et qu'elle est encore en train d'éclore. En façonnant cette technique heuristique, Leibniz met en place des stratégies qui préfigurent certains de ses futurs travaux. La technique du mélange repose notamment sur cette idée très conte-intuitive d'étudier les différences d'une progression pour en obtenir les sommes. En effet, les relations qu'entretiennent les termes avec leur sommes cherchées sont similaires à celles qui relient les différences avec ces mêmes termes. En comprenants ces dernières, on peut reconstituer les premières par analogie. Cette idée montre comment l'analyse et la synthèse doivent fonctionner de concert et qu'il y a toujours un rapport analogique entre la manière dont on construit les composés à partir des composants et celle dont on délimite les composants en divisant les composés.
La méthode de décompositions des fractions le guide vers des techniques formelles et algébriques, liées à la résolution d'équation. En effet, Leibniz cherche à exprimer la série donnée comme la série des différence d'une série inconnue qu'il cherche. La méthode est donc analytique, puisqu'elle consiste à établir les équations qui relient les donnés et les inconnus, afin de déterminer ces derniers en fonction des premiers. Mais l'idée de transformer une progression en différence de progression nait des schéma des différences et de la pratique tabulaire du jeune philosophe. Cette pratique tabulaire se trouve encore dans le girond de la méréologie. Dès lors, la solution que propose Leibniz se distingue de façon radicale de celles de Mengoli, Huygens ou Brouncker que nous avons présentées au chapitre précédent. Les sommes partielles qui composent la somme totale ne sont pas les sommes finies des premiers termes de la progression mais les sommes infinies constituées de tous les termes sauf un nombre fini de premiers termes :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{T_k} = \frac{2}{1} - \frac{2}{n+1} \qquad \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{T_k} = \frac{2}{n}$$

L'approche additive de Mengoli, Huygens et Brouncker permet d'inférer le résultat à partir des premières sommes, puisque toutes ces sommes sont finies donc calculables au moyen des opérations fondamentales. L'approche soustractive, et dirons-nous même différentielle, de Leibniz demande, en revanche, d'établir directement une relation de dépendance globale entre la progression des inverses des triangulaires et une progression harmonique. Nous ignorons à quel moment précis, Leibniz a pu établir cette relation. Les sources dont nous disposons ne fournissent qu'un *terminus a quo* dans le *Differentiæ Numerorum Harmonicum et Reciprocorum Triangularium* (A VII, 3, N.2) et un *terminus ad quem* dans le *De Summa Numerorum Triangularium Reciprocorum* (A VII, 3, N.5). Mais c'est probablement par la pratique du schéma de différence et l'étude synthétique des progressions qui y sont développées que Leibniz a pu établir une relation de proportionnalité globale entre ces deux séries. La même méthode l'a amené à constater ces mêmes rapports de proportionnalité pour les inverses des autres nombres figurés comme les pyramidaux, les triangulo-triangulaires etc.
Ces manuscrits montrent à la fois la richesse qu'apporte la pratique tabulaire et l'approche combinatoire des progressions vis-à-vis de l'*ars inveniendi* et le vif intérêt que porte déjà le jeune Leibniz vers le formalisme et l'utilisation de caractères généraux, propres à l'*ars characteristica*. L'hypothèse du coefficient multiplicatif et les deux tentatives de formalisations que nous avons décrites illustrent donc remarquablement la manière dont collaborent ces deux dispositions au sein de travaux de recherche du jeune Leibniz.

# Chapitre 3

# Premières méthodes tabulaires

## Introduction

Dans un article de 1931 de Hofmann et Wieleitner consacré au développement de la théorie des différences finies chez Leibniz, Dietrich Mahnke intègre un complément dans lequel il indique que l'échec des premières pistes proposées par Leibniz pour répondre au problème de Huygens a contraint le jeune philosophe à chercher la solution au hasard :

> *L'analyse de la découverte et des preuves sur ses propres procédures peut-être également menée au moyen de manuscrits antérieurs. Gerhardt en a déjà signalé certains qui sont décrit par Leibniz lui-même comme les tout premiers avec cette remarque (probablement ajoutée plus tard) : « C'est ici que j'ai saisi en premier cette découverte ». Déjà très tôt il avait énoncé le principe de sa découverte : "chercher une autre suite dont les différences sont égales (ou proportionnelles) aux termes de la suite cherchée". Seulement cette voie l'a conduit plus tard vers des équations diophantiennes qu'il ne pouvait pas résoudre, c'est pourquoi il est tombé par hasard sur la découverte des sommes des suites, après avoir tatonné.* [1]

C'est en effet le hasard d'une rencontre et d'une conversation qui ont mis Leibniz sur la piste de la somme des inverses des triangulaires. Peut-être même que le hasard et le tâtonnement ont largement contribué à la découverte de la valeur de cette somme. Mais cette question a sans nul doute été la pointe d'un long fil d'études sur lequel se sont tressés de nombreux autres faisceaux de problèmes, formant la trame sur laquelle une nouvelle voie de l'*Ars Combinatoria* s'est peu à peu dessinée. Cette voie, c'est celle des relations opératoires qui structures les tables dans l'espace du plan et qui composent les séries entre elles. Le problème des inverses des nombres figurés s'est révélé être le meilleur des problèmes pour guider Leibniz sur la voie des structures tabulaires. En effet, la table de ces nombres déguise sous sa mystérieuse architecture une version altérée du triangle harmonique que Leibniz ne parvient pas à distinguer malgré les efforts de plusieurs mois de travail. Mais les traces de la structure opératoire du triangle laissent transparaitre dans la table et dans ses termes un grand nombre de propriétés si remarquables qu'elles ont donné au jeune philosophe l'espoir suffisant pour persévérer dans son étude et découvrir la richesse que la structure tabulaire pouvait offrir pour l'analyse des séries. Un excellent défi suffisamment épineux pour que chaque réponse laisse naitre de nouvelle question et suffisamment régulier pour qu'on ait l'espoir d'y appliquer des méthodes universelles.

Après avoir résolu la question de Huygens avec un succès considérable, puisqu'il détermine non seulement la valeur de la somme que le mathématicien hollandais lui avait confiée, mais aussi la valeur d'une infinité

1. [35] J. E. Hofmann, H. Wieleitner et D. Mahnke, *Die Differenzenrechnung bei Leibniz*, Sitzungsberichte der Preussischen *Akademie* der Wissenschaften, 1931, p. 562-590 - Commentaire de D. Mahnke, p.593 : « Der Bericht über die Entdeckung und den Beweis seines eigenen Verfahrens läßt sich auch noch aus früheren Handschriften belegen, ja Gerhardt hat sogar auf einige hingewiesen, die von Leibniz selbst durch die (allerdigns wohl erst später hinzugefügte) Bemerkung : « *Hic primum cepi invenire* » als die allerersten gekennzeichnet sind. Schon in den frühesten gibt er ganz klar das Prinzip seiner Lösung an : "eine andere Reihe zu suchen, deren Differenzen gleich den Gliedern der gesuchten Reihe (oder ihnen proportional) sind". Nur kommt er dabei zunächst auf Diophantische Gleichungen, die er nicht lösen kann, und ist daher auf die zufällige Entdeckung der Summenreihe durch Probieren angewiesen. »- Les manuscrits mentionnés par Gerhardt auxquels Mahnke fait ici référence sont en fait le *De Summa Numerorum Triangularium Reciprocorum* (A VII, 3 A , N.1), le *Tabulæ Serierum Fractionum* (A VII, 3, N.11), le *De Summis Serierum Fractionum* (A VII, 3, N.12), le *De Summa Quadratorum in Fractionibus* (A VII, 3, N.15) et le *Theorema Arithmeticæ Infinitorum* (A VII, 3, N.35).

d'autres sommes qui la généralise, Leibniz est probablement convaincu d'avoir réalisé une découverte non négligeable. Il envisage donc d'en faire part aux académies royales de France et d'Angleterre, au sein desquelles il entretient l'ambition d'obtenir une place depuis plusieurs années déjà. Ainsi, il mentionne ce résultat, sans en donner de démonstration, au sein de l'*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum* (A II, 1, N.109), datant de fin 1672 et qui est un projet de courrier pour l'abbé Jean Gallois qui dirige alors le *Journal des Sçavans* et d'une lettre adressée directement à la *Royal Society*, datant du 13 février 1673 (A III, 1, N.4).

Dans le même temps, il poursuit ses recherches dans la même direction, ce qui l'amène d'une part développer les méthodes qui gravitent autour des schémas de différences et d'autre part à s'intéresser à un autre problème, connexe à celui posé par Huygens : la somme des inverses des carrés et plus généralement la somme des inverses des puissances classiques.

Ce problème, auquel nous avons vu qu'il réfléchit dès le *De Summa Numerorum Triangularium Reciprocorum* (A VII, 3, N.5), amène Leibniz à travailler sur les sommes globales de tous les termes de toutes les progressions d'une même famille. Faire la somme de plusieurs progressions à la fois va lui permettre de franchir une étape supplémentaire dans sa pratique des tables : passer d'une conception "liste de listes", comme nous l'avons amplement illustré au sein de l'*Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8), à une nouvelle vision "tableau à double entrée".

## 3.1 Présentation tabulaire du résultat

Comme nous l'avons vu, les tables sont présentes dans l'œuvre de Leibniz dès 1666, dans la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8) qui dispose de nombreuses tables qui n'ont pas toutes la même structures ni le même usage. Nous avons établi, dans le prologue, que la pratique du jeune Leibniz, au sein de cet opuscule de jeunesse correspond à une conception "liste de listes", c'est-à-dire que les deux axes de la table ne jouent jamais un rôle parfaitement symétrique. Durant le premier semestre de l'année 1676, cette conception évolue progressivement vers celle que nous appelons "tableau à double entrée".

**Tables "à double entrée" et "liste de listes"**

Reprenons donc de façon claire la distinction que nous avons déjà amplement évoquée au sein du prologue, entre les deux interprétations que l'on peut faire d'une d'une table, et permettons-nous cette représentation anachronique basée sur les jeux d'indices de la théorie des ensembles :

- ⋆ La table "liste de listes" est une simple succession de listes ou de suites mises en regard, que ce soit des colonnes mises en lignes les une à coté des autres ou bien des lignes mises en colonnes les une sous les autres. On représente ainsi la table par une suite de suites :

$$\left(u^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}, \text{ avec } u^{(p)} = \left(u_n^{(p)}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

- ⋆ La table "à double entrée" est une succession bidimensionnelle de coefficients, indéxés par leur rangs bidimensionnels. On représente ainsi la table par une matrice :

$$(u_{p,n})_{p,n\in\mathbb{N}}.$$

Ainsi si les indices $(p, n)$ jouent un rôle symétrique dans le cas de la table "à double entrée", ce n'est plus le cas dans la table "liste de listes", où le coefficient $u_n^{(p)}$ est d'abord un élément de la suite $u^{(p)}$ avant d'être un élément de la table au complet. Ainsi, dans le cas de l'approche "liste de listes", on est beaucoup moins enclin à considérer, pour un rang fixé $n$, la suite de coefficients ayant ce rang dans toutes les suites, c'est-à-dire la suite :

$$v^{(n)} = \left(u_n^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}.$$

Et lorsqu'on considère une telle suite, on ne la considèrera pas comme étant de même nature que les différentes suites $u^{(p)}$. En effet, la suite $v^{(n)}$ est construite à partir des suites $u^{(p)}$, mais l'inverse n'est pas possible sous ce point de vue. On ne peut pas considérer que les suites $v^{(n)}$, pour chaque $n$, sont des données du problèmes et qu'on construit les suites $u^{(p)}$ à partir d'elles. Pour le dire autrement, le formalisme que nous avons adopté nous oblige à donner à ces suites transversales un nouveau caractère, à savoir $v$.
Ces deux objets, à savoir la suite de suites et la suite doublement indéxée, sont presque systématiquement identifiés dans la pratique des mathématiciens d'aujourd'hui puisqu'ils sont de fait isomorphes dans la théorie des ensembles [2].
Néanmoins cette distinction nous semble pertinente dans la mesure où ce sont moins les résultats à proprement parler qui nous préoccupent que les origines des inventions et la nature des approches. Or, comme nous allons le voir, il semble que dans son étude du problème des sommes d'inverses des nombres triangulaires et des nombres combinatoires en général, Leibniz modifie son point de vue et passe d'une approche "liste de listes" vers une approche "à double entrée". Nous allons donc montrer quels indices révèlent ce changement puis comment ce dernier s'articule avec le processus de découverte ou d'invention du triangle harmonique.

2. En théorie des ensembles, c'est l'isomorphisme canonique : $\left(A^B\right)^C \simeq A^{B\times C}$. Cette transformation qui associe une fonction de fonctions d'arité un à une fonction d'arité deux, correspond à un processus informatique qu'on appelle la décurryfication (la curryfication étant le procédé inverse). Si, en mathématique, on préfère l'approche "à double entrée" et qu'on a tendance à décurrifier les écriture en général, il s'avère que c'est très fréquemment l'inverse, c'est-à-dire l'approche "liste de listes", qui devient préférable dans un programme informatique.

### 3.1.1 Emergence de la vision "à double entrée" des tables

#### La vision "liste de listes" des tables avant le printemps 1673

Les schémas de différences apparaissent dès les tous premiers travaux parisiens de Leibniz, comme nous avons déjà pu le constater au sein des trois manuscrits dont nous avons déjà fait l'étude [3]. Ceux que nous avons pu rencontrer au sein de ces études sont en fait constitués de la juxtaposition de deux suites, à savoir une suite principale et une suite constituée des différences de la suites principale. L'opération peut être réalisée plusieurs fois, la liste des différences devant liste principale et générant à son tour une nouvelle liste de différences, et ainsi de suite :

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_1 & & & & & & \\
 & b_1 & & & & & \\
a_2 & & c_1 & & & & \\
 & b_2 & & d_1 & & & \\
a_3 & & c_2 & & e_1 & & \\
 & b_3 & & d_2 & & & \\
a_4 & & c_3 & & \vdots & & \\
 & b_4 & & \vdots & & & \\
a_5 & & \vdots & & & & \\
 & \vdots & & & & & \\
\vdots & & & & & &
\end{array}
$$

Ainsi cette manière de tabuler s'inscrit clairement dans l'approche "liste de listes". Même le schéma du *De Differentiis Progressionum Decrescentium* (A VII, 3, N.5) [4] est une liste de listes comme nous l'avons démontré. Cela dit, ce n'est pas une table "liste de listes" comme les autres. Nous avons vu qu'effectivement, au sein de l'*Historia et Origo Calculi Differentialis*, la structure triangulaire ou quandrangulaire de la table a une importance pour Leibniz [5], notamment dans la représentation de la symétrie du schéma de différences. De fait, cet aspect tient bien une place notable dans l'évolution de la pratique tabulaire au début du séjour parisien.

#### L'objectif des inverses des puissances

L'analyse des premiers travaux de Leibniz sur les suites montre l'étude de trois grands types de progressions :

⋆ Les inverses des nombres figurés.

$$u_n = \frac{1}{\left(\!\binom{n}{p}\!\right)}.$$

⋆ Les suites géométriques.

$$u_n = a^n.$$

⋆ Les inverses des puissances.

$$u_n = \frac{1}{n^p}.$$

3. A VII, 3, N.1, *De Summa Numerorum Triangularium Reciprocorum*, sept. 1672 ; A VII, 3, N.2, *Differentiæ Numerorum Harmonicum et Reciprocorum Triangularium*, sept.-oct. 1672 ; A VII, 3, N.5, *De Differentiis Progressionum Decrescentium*, déc. 1672.

4. *Cf* le schéma de différences à la page 191

5. *Cf* p.132

L'*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum* (A II, 1, N.109), que l'on date vers fin de l'année 1672[6] nous assure que Leibniz disposait déjà, avant l'année 1673, des tables des sommes des inverses des nombres figurés et des progressions géométriques. Le *De Differentiis Progressionum Decrescentium* (A VII, 3, N. 5), qui date aussi de la fin de l'année 1672, nous a montré qu'il s'intéressait aussi, dès cette époque, aux inverses des puissances et qu'il tentait d'y appliquer les méthodes qu'il avait découvertes sur les inverses des nombres figurés[7]. Nous avons pu voir que cette tentative s'est soldée par un échec, et pour cause, on sait aujourd'hui que ce calcul des inverses des puissances constitue un problème d'une toute autre difficulté[8].
Pourtant, Leibniz ne déclare pas forfait et réitère l'étude de ce type de progressions au sein de deux travaux que les éditeurs datent du printemps 1673, c'est-à-dire peu après le retour de son séjour à Londres, au début de l'année 1673 :

- ⋆ Le *Tabulæ Serierum Fractionum*[9]
- ⋆ Le *De Summis Serierum Fractionum*[10]

En s'attaquant au problème insoluble des inverses des puissances, Leibniz se retrouve rapidement à devoir s'appuyer sur les outils qu'il maitrise déjà, et ces outils sont fondés sur les progressions géométriques et les progressions des inverses des nombres figurés. Notamment, Leibniz constate que les progressions transversales des puissances sont des progressions géométriques :

- ⋆ si l'on considère l'indice $n$, c'est-à-dire la racine du dénominateur, on a une suite d'inverses de puissances $p$ :
$$u_n = \frac{1}{n^p}$$
- ⋆ si l'on considère l'indice $p$, c'est-à-dire l'exposant du dénominateur, on a une suite géométrique de raison $\frac{1}{n}$ :
$$v_p = \frac{1}{n^p} = \left(\frac{1}{n}\right)^p$$

Ainsi Leibniz intègre dans ses réflexions et dans ses raisonnements l'aspect bidimensionnelle de la table et les relations entre les termes que cela implique. Pour étudier une certaine famille de progressions, il s'agit donc de recombiner, de réarranger les termes donnés afin de se ramener à des familles de progressions dont on connait bien les propriétés.

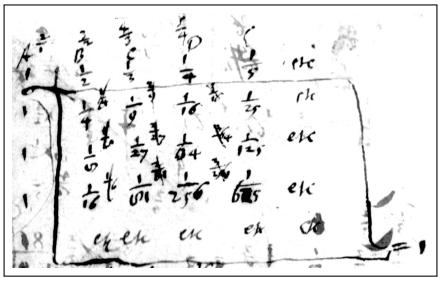
### Inverses des puissances et Progressions géométriques

Dans une lettre à destination d'Oldenburg du 24 Mai 1673, Leibniz écrit :

> *En vérité, je dois avouer que je n'ai pas encore trouvé la somme de cette série qui se produit jusqu'à l'infini :* $\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}$ *etc. mais je n'ai pas encore eu jusqu'ici suffisamment de loisir pour une recherche consciencieuse. Au cours d'autres recherches, j'ai récemment trouvé un autre théorème suffisamment digne pour qu'on s'en enquiert, si je ne m'abuse : si l'on considère, comme tu le vois, une infinité de séries infinies de toutes les fractions au carré, au cube, au carré-carré ; la somme de toutes prises ensembles sera égale à l'unité. C'est-à-dire que si tu ôtes à cette quantité donnée d'abord son quart puis son neuvième et puis après son seizième : de même avec son huitième puis son* $27^{\text{ième}}$, $64^{\text{ième}}$ *; et encore son seizième,* $81^{\text{ième}}$, $256^{\text{ième}}$ *etc. et ainsi de suite jusq'à l'infini, alors cela épuisera exactement cette quantité donnée.*[11]

6. *Cf* p.238.
7. *Cf* le schéma de différence et notre discussion sur le facteur multiplicatif p.191
8. *Cf* Le bref résumé que nous proposons sur le problème de Mengoli, p.213.
9. A VII, 3, N.11, *Tabulæ Serierum Fractionum*, Mars 1673 / Début 1673 - p.139-148
10. A VII, 3, N.12, *De Summis Serierum Fractionum*, Mars 1673 / Début 1673 - p.149-153
11. A III, 1, N.20, Lettre de Leibniz à Oldenburg du 24 Mai 1673 - p.93 : « At vero hujus seriei in infinitium productæ : $\frac{1}{1}\frac{1}{4}\frac{1}{9}\frac{1}{16}$ etc. summam nondum, fateor, reperi ; sed et necdum inquirendi satis diligenter otium habui. Theorema aliquod reperi nuper alia quærendo satis memorabile, ni fallor : si sint series, quas vides, infinities infinitæ fractionum omnium quadratarum, cubicarum, quadrato-quadraticarum, simul summa omnium æquabitur unitati. Seu si a quantitate data auferas primum quartam partem, deinde nonam, postea decimam sextam : item octavam, $27^{\text{mam}}$, $64^{\text{tam}}$ ; rursus decimam sextam, $81^{\text{am}}$, $256^{\text{tam}}$ etc., et ita porro in infinitum, quantitas data præcise exhaurietur. »

La table qui donne le résultat de ce théorème, que Leibniz reproduit dans sa lettre, se trouve déjà dans le manuscrit *Tabulæ Serierum Fractionum* (A VII, 3, N.11) [12] :



Manuscrits de Leibniz - LH 35 3 B 10 Bl.4

| $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | etc. | |
| 1 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{25}$ | etc. | |
| 1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{1}{64}$ | $\frac{1}{125}$ | etc. | $= 1$ |
| 1 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{81}$ | $\frac{1}{256}$ | $\frac{1}{625}$ | etc. | |
| 1 | etc. | etc. | etc. | etc. | etc. | |

Avant cette table, on trouve un schéma de différence de la suite des inverses des carrés. Ceci confirme bien que cette étude a lieu dans le cadre d'une recherche sur la somme des inverses des puissances, contrairement à ce que Leibniz laisse entendre dans la lettre, en parlant d'« autres recherches » (« *alia quærendo* »). Leibniz connait la somme d'une suite géométrique ayant pour raison l'inverse d'un entier naturel :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \cdots + \frac{1}{p^n} + \cdots = \frac{1}{p-1}.$$

Ainsi, il dispose des sommes suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{2} & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{8} & + \ \ldots & = \ \frac{1}{1} \\ \frac{1}{3} & + & \frac{1}{9} & + & \frac{1}{27} & + \ \ldots & = \ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & + & \frac{1}{16} & + & \frac{1}{64} & + \ \ldots & = \ \frac{1}{3} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Ces détails de calculs ne sont pas présents dans le manuscrit, on a seulement le raisonnement suivant :

> *La somme de tous ceux-là est :* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ *etc.*
> *Donc toute cette infinité de [suites] infinies privée de* $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ *etc.* $= 1$. [13]

Grâce à ce raisonnement et la connaissance des sommes des progressions géométrique, on peut comprendre comment Leibniz a obtenu ce résultat. Nous l'illustrons par le schéma ci-dessous, où il s'agit d'identifier les deux zones gris clair ainsi que les deux zones gris foncé.

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \ldots \\ + & + & + & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{9} & \frac{1}{16} & \ldots \\ + & + & + & \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{27} & \frac{1}{64} & \ldots \\ + & + & + & \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{81} & \frac{1}{256} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ = & = & = & \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \ldots \end{array}$$

12. Les éditeurs de l'*Akademie* justifie justement la datation de ce manuscrit, à savoir Début 1673 / Mars 1673, par le fait que Leibniz affirme dans sa lettre du Mai qu'il s'agit d'un résultat « récent » (« *nuper* »).

13. A VII, 3, N.11, *Tabulæ Serierum Fractionum*, mars 1673 / début 1673 - p.141 : « Summa horum omnium est : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ etc. Ergo omnia ista infinities infinita demto $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ etc. $= 1$. »

Leibniz poursuit son raisonnement :

> *On a encore que* $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}$ *etc. = au même infini d'infinis. Donc cette série* $= 1$.
> *Mais cette série est en fait la moitié des inverses des nombres triangulaires, que j'ai trouvés ailleurs* $= 2$.[14]

Il fait donc sans doute la remarque suivante :

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots\right) &- \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots\right)\\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\dots\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\dots=1\end{aligned}$$

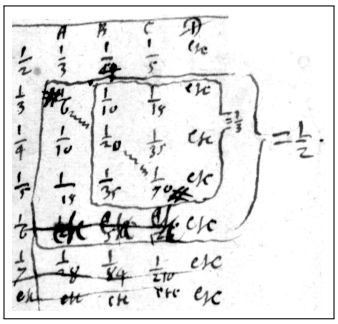
Mais, si ce schéma permet de mieux comprendre ce que Leibniz avait en tête, il ne correspond pas à la table qu'il a produite, qui est la suivante :

| $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | etc. |
| 1 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{25}$ | etc. |
| 1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{1}{64}$ | $\frac{1}{125}$ | etc. |
| 1 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{81}$ | $\frac{1}{256}$ | $\frac{1}{625}$ | etc. |
| etc. | etc. | etc. | etc. | etc. | etc. $= 1$ |

La différence entre la table de Leibniz et la nôtre se trouve dans la première colonne $A$ qui ne joue aucun rôle dans le raisonnement que nous avons décrit. En identifiant la zone gris clair du bas avec celle du haut, on doit également transporter le coefficient $\frac{1}{1}$ à la gauche du schéma. On peut alors artificiellement poursuivre la progression sous ce dernier, en considérant qu'il s'agit du premier terme de la progression géométrique constante, et ainsi nous obtenons la table de Leibniz avec la colonne $A$. Le détourage nous indique bien que la somme de tous les coefficients à l'intérieur du cadre est égale au premier terme de la progression $A$, c'est-à-dire 1. Ce raisonnement est confirmé par une autre table qui se trouve dans le *De Summis Serierum Fractionum* (A VII, 3, N.12).

**Sommes sur la table des inverses des figurés**

Dans le *De Summis Serierum Fractionum* (A VII, 3, N.12), on trouve la table des inverses des nombres figurés suivante :



Manuscrits de Leibniz - LH 35 3 B 10 Bl.2

14. A VII, 3, N.11, *Tabulæ Serierum Fractionum*, mars 1673 / début 1673 - p.141 : « Iam $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}$ etc. = eidem infinities infinito. Ergo ista series = 1. Sed ista series est dimidiata reciprocorum numerorum triangularium quos alibi inveni = 2. » - Les éditeurs de l'*Akademie* ont corrigé ici une erreur de Leibniz, qui écrit en réalité : « cette série est le double des nombres triangulaires que j'ai trouvé ailleurs = $\frac{1}{2}$ » (« *ista series est duplicata numerorum triangularium quos alibi inveni* = $\frac{1}{2}$ »).

Leibniz applique ici un raisonnement qui semble similaire à la table précédente, à savoir qu'il considère que la somme des coefficients compris dans le cadre est égale au coefficient situé en haut à gauche, à l'extérieur :

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | etc. | |
| $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{15}$ | etc. | |
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{35}$ | etc. | |
| etc. | etc. | etc. | etc. | etc. | $= \frac{1}{2}$ |

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | etc. | |
| $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{15}$ | etc. | |
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{35}$ | etc. | |
| etc. | etc. | etc. | etc. | etc. | $= \frac{1}{3}$ |

Ces résultats sont faux [15] et Leibniz aurait pu s'en rendre compte très facilement. En effet, il connait très bien la valeur de la somme des inverses des triangulaires :

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \cdots = 2.$$

Ainsi, on peut facilement déduire la somme des coefficients dans la première ligne du premier cadre :

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \cdots = 2 - \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

Or $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$, ce qui est donc absurde.
Si on applique le raisonnement de Leibniz, on peut trouver le bon résultat :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | $\cdots$ |
| + | + | + | |
| $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{15}$ | $\cdots$ |
| + | + | + | |
| $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{35}$ | $\cdots$ |
| + | + | + | |
| $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{35}$ | $\frac{1}{70}$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | |
| = | = | = | |
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\cdots$ |

$= \frac{3}{2}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{6}$ | $\cdots$ |
| + | + | + | |
| $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{21}$ | $\cdots$ |
| + | + | + | |
| $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{35}$ | $\frac{1}{56}$ | $\cdots$ |
| + | + | + | |
| $\frac{1}{35}$ | $\frac{1}{70}$ | $\frac{1}{126}$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | |
| = | = | = | |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\cdots$ |

$= \frac{5}{6}$

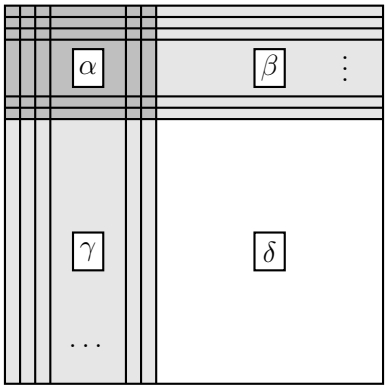
15. La somme dans le premier cadre vaut, comme nous allons le voir, $\frac{3}{2}$ et celle dans le second vaut $\frac{5}{6}$

Ainsi, la somme des coefficients à l'intérieur du cadre n'est pas égale au terme extérieur en haut à gauche, mais aux deux termes extérieurs, en haut à gauche :

| | | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | etc. | |
| 1 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{15}$ | etc. | |
| 1 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{35}$ | etc. | |
| etc. | etc. | etc. | etc. | etc. | etc. | $= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ |

| | | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | etc. | | |
| $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{15}$ | etc. | | |
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{35}$ | etc. | | |
| etc. | etc. | etc. | etc. | etc. | etc. | $= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ |

Il faut donc ajouter, non pas une, mais deux progressions sur la gauche de la table. On se trouve néanmoins face à une difficulté dans le premier cas, car il faudra pouvoir interpréter la progression constante en terme de nombres figurés. Cela n'aurait, de fait, pas poser de réel problème pour Leibniz qui inclut cette progression constante dans bon nombre de tableaux des inverses des nombres figurés [16].
Le fait qu'on connaisse la valeur de la somme de chaque ligne et de chaque colonne (puisque la table est symétrique) fait qu'on peut calculer la somme de n'importe quel sous-quadrant infini à partir d'une somme finie, comme l'illustre le schéma ci-dessous :




- ⋆ On connait la valeur de $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ qui est $\frac{3}{2}$ comme on vient de le voir.
- ⋆ Comme on connait la somme de chaque ligne et de chaque colonne, on connait la valeur de $\alpha + \beta$ et de $\alpha + \gamma$.
- ⋆ Comme $\alpha$ est une partie finie, on peut l'obtenir par une somme finie.

Ainsi, on obtient :

$$\delta = (\alpha + \beta + \gamma + \delta) + \alpha - (\alpha + \beta) - (\alpha + \gamma).$$

En revanche, la table des progressions géométriques n'est pas symétrique et on ne connait pas les sommes des lignes (qui sont les inverses des puissances). On ne peut donc pas y appliquer ce raisonnement. Ainsi, dans ce cas, la méthode de Leibniz ne vaut que pour le calcul de la somme totale et ne permet pas d'accéder aux valeurs des sommes des sous-parties.
A travers ces tables, c'est encore l'approche "liste de listes" qui prévaut formellement, car Leibniz n'attribue de noms ($A$, $B$, $C$, etc.) qu'aux seules colonnes. Néanmoins, les coefficients de la première ligne joue un rôle important dans le procédé du calcul. On doit les ôter car leur somme est infinie, et Leibniz sait que la somme des coefficients de la première ligne est infinie car il y reconnait la progression harmonique. Cette première ligne n'est pas un simple ensemble constitué des premiers termes de chaque progression, c'est la progression harmonique dont certaine propriété comme la divergence vont intervenir au sein du raisonnement.

16. Cette progression constante joue notamment un rôle clé au sein du raisonnement sur l'infini qu'établit Leibniz dans l'*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum* (A II, 1, N.109). En effet, si la somme des inverses des nombres figurés de dimension $p$ vaut $\frac{p}{p-1}$, alors la somme de la suite constante, de dimension nulle, vaut $\frac{0}{0}$ (Leibniz semble considérer que le dénominateur ne peut pas être strictement négatif). Ainsi, Leibniz établit une sorte d'identité entre le néant : 0, et le tout infini : $1+1+1+\ldots$

**Analogie entre les progressions géométriques et les inverses des nombres figurés**

Cette erreur que nous venons de relever dans le *De Summis Serierum Fractionum* (A VII, 3, N.12) provient donc d'un parallèle que Leibniz souhaite établir entre les progressions géométriques et les progressions des inverses des nombres figurés. Cette volonté s'appuie sur constat de l'égalité des deux sommes suivantes :

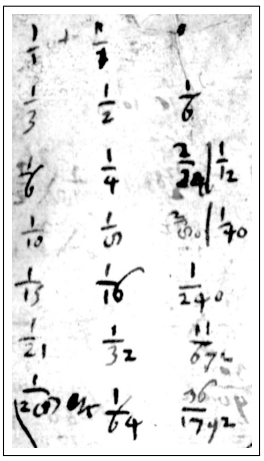
⋆ La somme de la $p$-ième progression géométrique réciproque :

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\cdots+\frac{1}{p^n}+\cdots=\frac{p}{p-1}.$$

⋆ La somme de la $p$-ième progression des inverses des nombres figurés :

$$\frac{1}{\left(\!\binom{1}{p}\!\right)}+\frac{1}{\left(\!\binom{2}{p}\!\right)}+\frac{1}{\left(\!\binom{3}{p}\!\right)}+\frac{1}{\left(\!\binom{4}{p}\!\right)}+\cdots+\frac{1}{\left(\!\binom{n}{p}\!\right)}+\cdots=\frac{p}{p-1}.$$

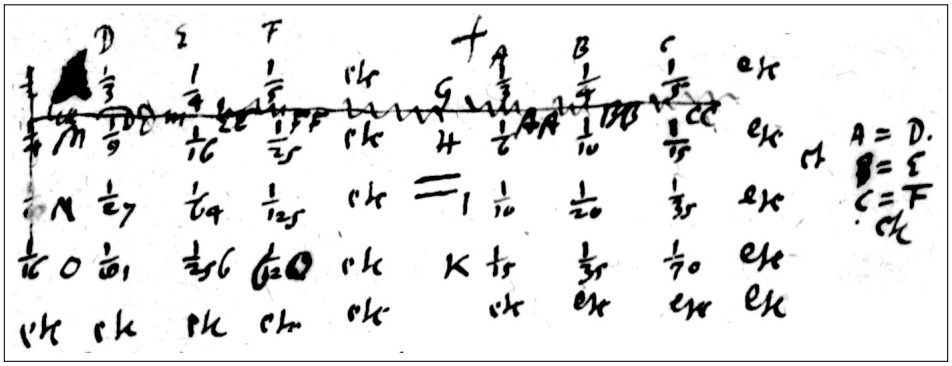
On trouve par exemple dans le *Tabulæ Serierum Fractionum* (A VII, 3, N.11), un schéma de différence qui compare la suite des inverses des triangulaires avec celle la suite géométrique double réciproque [17] :



Manuscrits de Leibniz - LH 35 3 B 10 Bl.4

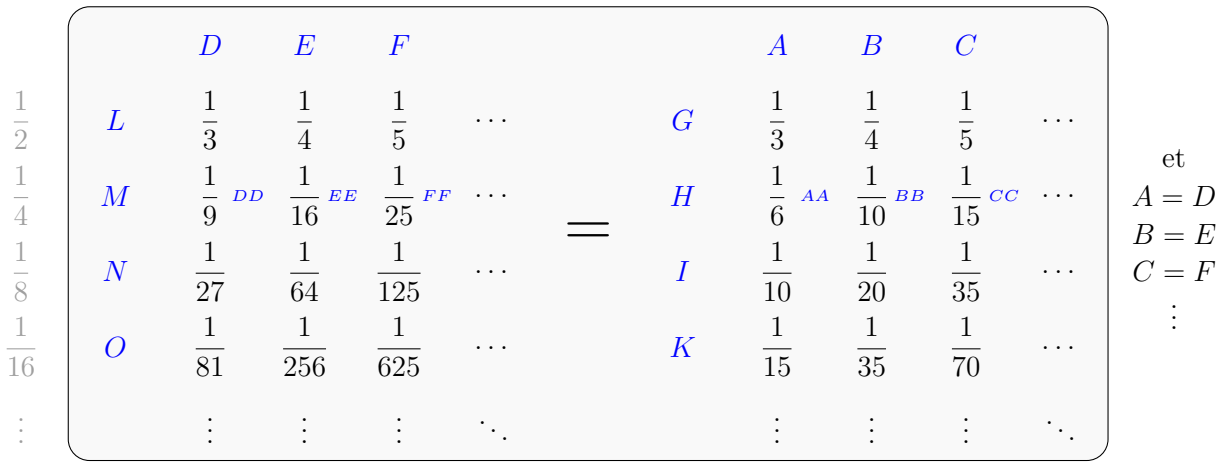
| $A$ | $B$ | $\lvert A-B\rvert$ |
|---|---|---|
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $0$ |
| $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ |
| $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{24}\vert\frac{1}{12}$ |
| $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{2}{80}\vert\frac{1}{40}$ |
| $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{240}$ |
| $\frac{1}{21}$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{11}{672}$ |
| $\frac{1}{28}$ | $\frac{1}{64}$ | $\frac{36}{1782}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

De fait, les sommes de ces deux progressions sont identiques, et valent 2. Leibniz souhaite donc analyser la différence qu'il y a entre les deux partitions de cette même quantité. Dès lors, il construit un schéma de différence d'un nouveau genre, où les différences ne sont pas celles qui séparent deux termes successifs d'une même suite mais deux termes de deux suites au même rang. Leibniz le représente en donnant une forme quadrangulaire à sa table plutôt que triangulaire.
Cette coïncidence entre les deux familles de suites est explicitement notée par Leibniz dans le *De Summis Serierum Fractionum* (A VII, 3, N.12) comme nous pouvons le constater dans cette analogie qu'il tente d'établir entre les deux tables que nous venons d'étudier :



Manuscrits de Leibniz - LH 35 3 B 10 Bl.2

17. *Cf* A VII, 3, N.11, *Tabulæ Serierum Fractionum*, mars 1673 / début 1673 - p.139



| | | $D$ | $E$ | $F$ | | | $A$ | $B$ | $C$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | $L$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | $\cdots$ | $G$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | $\cdots$ |
| $\frac{1}{4}$ | $M$ | $\frac{1}{9}$ $DD$ | $\frac{1}{16}$ $EE$ | $\frac{1}{25}$ $FF$ | $\cdots$ | $H$ | $\frac{1}{6}$ $AA$ | $\frac{1}{10}$ $BB$ | $\frac{1}{15}$ $CC$ | $\cdots$ |
| $\frac{1}{8}$ | $N$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{1}{64}$ | $\frac{1}{125}$ | $\cdots$ | $I$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{35}$ | $\cdots$ |
| $\frac{1}{16}$ | $O$ | $\frac{1}{81}$ | $\frac{1}{256}$ | $\frac{1}{625}$ | $\cdots$ | $K$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{35}$ | $\frac{1}{70}$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |

et
$A = D$
$B = E$
$C = F$
$\vdots$

Les tables sont composées des coefficients suivants :

- ⋆ Les suites $D$, $E$ et $F$ sont les suites géométrique de raisons respectives $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{5}$.
- ⋆ Les suites $A$, $B$ et $C$ sont respectivement les suites des inverses des nombres triangulaires, des nombres pyramidaux et des triangulo-triangulaires.

Leibniz introduit également les progressions horizontales :

- ⋆ Les suites $M$, $N$ et $O$ sont respectivement les suites d'inverses des carrés, des cubes et des carré-carré (en partant de 3). La première ligne est la suite $L$, c'est-à-dire la suite harmonique en partant de $\frac{1}{3}$.
- ⋆ Les suites $H$, $I$ et $K$ sont respectivement les suites des inverses des nombres triangulaires, des nombres pyramidaux et des triangulo-triangulaires (en partant du terme suivant). La première ligne est la suite $G$, c'est-à-dire la suite harmonique en partant de $\frac{1}{3}$.

Leibniz part du constat faux que $A = D$, $B = E$ et $C = F$ etc.[18] Il donne alors le raisonnement suivant :

> *De même $G = L$, donc tout le reste $M + N + O$ etc. = tout $H + I + K$ etc.*
> *$H + \frac{1}{3} = A = D$. et $I + \frac{1}{4} = B = E$. et $K + \frac{1}{5} = C = F$.*
> *Il apparait aussi que : $AA = DD = H : \frac{1}{6}$. et $BB = EE = I : \frac{1}{12}$. et $CC = FF = K : \frac{1}{20}$.*
> *Qu'on enlève d'un côté $H$ et $DD$ de l'autre, les restes seront égaux de part et d'autre. Ainsi donc :*
> *$AA - \frac{1}{6} + BB - \frac{1}{12} + CC - \frac{1}{15} = EE + FF$.*
> *Je suppose que $DD = \frac{1}{6}$.*[19]

Pour mieux comprendre ce que représentent les doubles termes $AA$, $BB$, $CC$ etc., il faut ajouter une étape du raisonnement que Leibniz a raturée et qui se trouve juste avant l'introduction de ces quantités :

> *On comprend qu'on peut enlever de chaque côté, ici $G$ et là $L$.*[20]

Donc $AA$ est la progression $A$ privée de son premier élément qui est un élément dans $G$, de même pour $BB$, $CC$ etc. Même en ayant saisi cela, ces calculs restent obscurs, car on a $AA = DD = H$, $BB = EE = I$ et $CC = FF = K$ mais comme comprendre ce que Leibniz veut dire lorsqu'il écrit :

$$AA = DD = H : \frac{1}{6} \quad ; \quad BB = EE = I : \frac{1}{12} \quad ; \quad CC = FF = K : \frac{1}{20}$$

18. En effet la somme des inverses des triangulaires $A = 1$ alors que celle de la progression géométrique $D = \frac{1}{2}$. Cette erreur peut être mise en parallèle avec l'erreur du *Tabulæ Serierum Fractionum* (A VII, 3, N.11), corrigée par les éditeurs, où Leibniz dit que la somme des inverses des triangulaire fait $\frac{1}{2}$, *Cf* la note 14.

19. A VII, 3, N.12, *De Summis Serierum Fractionum*, mars-mai 1673 - p.151 : « Item $G = M$. Ergo totum $M + N + O$ etc. = toti $H + I + K$ etc. $H + \frac{1}{3} = A = D$. et $I + \frac{1}{4} = B = E$. et $K + \frac{1}{5} = C = F$. Patet etiam : $AA = DD = H : \frac{1}{6}$. et $BB = EE = I : \frac{1}{12}$. et $CC = FF = K : \frac{1}{20}$. Abiaciantur hinc $H$, illinc DD. residua erunt æqualia utrobique. Ergo $AA - \frac{1}{6} + BB - \frac{1}{12} + CC - \frac{1}{5} = EE + FF$. Pono $DD = \frac{1}{6}$. » - Dans l'expression « $AA - \frac{1}{6} + BB - \frac{1}{12} + CC - \frac{1}{5}$ » *Nota Bene* : Nous avons remplacé dans la traduction le $\frac{1}{5}$ qui semble être une coquille de Leibniz, par $\frac{1}{15}$ qui correspond au schéma qu'il donne. De plus, dans l'expression initiale de la citation, « Item $G = M$ », nous avons également remplacé $G = M$ par $G = L$, plus fidèle au schéma et au raisonnement. Ces éléments sont gardés tel quel dans l'édition de l'*Akademie*.

20. A VII, 3, N.12, *De Summis Serierum Fractionum*, mars-mai 1673 - p.151 : « Utrobique abjecta intelligantur huic $G$. illinc $L$ »

La raison de ces coefficients $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{20}$ nous est sans nul doute inaccessible désormais, mais nous produirons néanmoins quelques suggestions plus tard.
Cela étant, prenons garde de ne pas donner à ces ébauches de calcul plus que ce qu'elles nous présentent effectivement. Ici, Leibniz écrit et raisonne en même temps, au fil de l'eau et pour lui-même, laissant naturellement échapper du bout de sa plume nombre de contradictions. Il s'aperçoit d'ailleurs immédiatement de l'échec de sa tentative en écrivant juste après :

> *Il faut voir alors si l'on peut supposer que* $M = H = \frac{1}{6}$. *Mais cela n'est pas possible. En effet si tu soustrais* $\frac{1}{9}$ *de* $\frac{1}{6}$, *il reste* $\frac{1}{18}$ *duquel tu ne peux pas soustraire* $\frac{1}{16}$. [21]

Il ne s'agit donc pas, ici, de comprendre quel théorème Leibniz tentait de prouver et pour quelles raisons il a échoué. Ce qu'il faut souligner c'est l'analogie de structure que tente d'établir Leibniz entre les deux tables, alors qu'il est parti d'une analogie quantitative. Il remarque d'abord que les deux familles de progressions sont égales "liste à liste", c'est-à-dire que la $p$-ième somme géométrique est égale à la $p$-ième somme des inverses des nombres figurés. Or, en produisant les deux tables séparément, comme nous l'avons vu, il montre que les mêmes raisonnement peuvent s'y appliquer et ces raisonnement font intervenir les progressions transverses, c'est-à-dire les lignes. Leibniz finit par donner un nom ($M$, $N$, $O$, $H$, $I$, $K$) aux lignes horizontales qui sont donc considérées comme des progressions à part entière. Ainsi, ces deux tables sont réellement des tables "à double entrée" car les coefficients qui s'y trouvent n'appartiennent pas prioritairement à la progression horizontale ou à la progression verticale dans lesquelles ils se trouvent. On voit donc naitre ici, à partir des propriétés quantitatives des familles de suites une structure tabulaire, avec des relations bidimensionnelles.
Dans le cas de la table des progressions géométriques, ce sont les suites des inverses des puissances qui apparaissent horizontalement, et c'est d'ailleurs ce pourquoi il s'intéresse à cette table en premier dans le *Tabulæ Serierum Fractionum* (A VII, 3, N.11). Alors que dans le cas de la table des inverses des nombres figurés, ce sont encore les inverses des nombres figurés qui apparaissent horizontalement. La première table a donc des colonnes connues et des lignes inconnues tandis que dans la seconde, les lignes comme les colonnes sont connues. Par cette analogie qu'il tente en vain d'établir, Leibniz entretient donc l'espoir de percer le mystère de la loi des inverses des puissances, qui lui résiste. Mais en réalité, c'est la symétrie de la table des inverses des nombres figurés qui émerge devant ses yeux et qui le mène progressivement vers la découverte du triangle harmonique.

### 3.1.2 Des relations entre suites aux relations dans la table

Le *Tabulæ Serierum Fractionum* (A VII, 3, N.11) est un manuscrit préparatoire consacré à l'étude des progressions. Exceptées deux tables [22] que nous considérons comme des cas à part, il est principalement constitué de calculs et de schémas de différences mis en vrac sans qu'on puisse affirmer avec assurance que tel ou tel fragment s'inscrit dans tel ou tel raisonnement. Les progressions qui interviennent ne sont pas des progressions prises au hasard :

- ⋆ La suite des inverses des triangulaires, que Leibniz maîtrise très bien.
- ⋆ La suite géométrique triple réciproque, que Leibniz connait très bien également.
- ⋆ Une sous-suite de la suite géométrique double réciproque [23], dont il se propose l'étude dans le *De Progressionibus et de Arithmetica Infinitorum* (A VII, 3, N.6) [24], et sur laquelle nous reviendrons.

Faisons pour l'instant abstraction de la troisième progression pour nous concentrer sur les deux autres. Comme nous l'avons dit, Leibniz dispose de beaucoup de connaissances sur ces deux suites qui sont des représentantes canoniques des deux familles de progressions sur lesquelles il a déjà obtenu des succès, c'est-à-dire les progressions géométriques et les inverses des nombres figurés. Le jeune mathématicien veut toujours pousser plus loin l'analyse de ces progressions qui sont pour lui comme des paradigmes,

21. A VII, 3, N.12, *De Summis Serierum Fractionum*, mars-mai 1673 - p.151 : « Videamus an $M$ possit supponi $= H = \frac{1}{6}$. Imo hoc impossibile. Nam si $\frac{1}{9}$ subtrahas $\frac{1}{6}$ restat $\frac{1}{18}$ a quo non potes subtrahere $\frac{1}{16}$. »

22. Nous avons déjà traité la première (*Cf* la tables des progressions géométriques p.202) et nous traiterons de la seconde dans la prochaine sous-section consacrée au problème de Mengoli (*Cf* la tentative de résolution par tables p.215).

23. Il s'agit des produits de $n$ premiers termes successifs : $u_n = \frac{1}{2}.\frac{1}{4}\ldots\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+\cdots+n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

24. A VII, 3, N.6, *De Progressionibus et de Arithmetica Infinitorum*, Automne / Décembre 1672

au sens d'exemples typiques. Ces objets d'études réguliers, sans anomalies ou particularismes, sont particulièrement propice à la révélation des règles et des structures qui se cachent au cœur des lois des progressions.

### La double suite géométrique

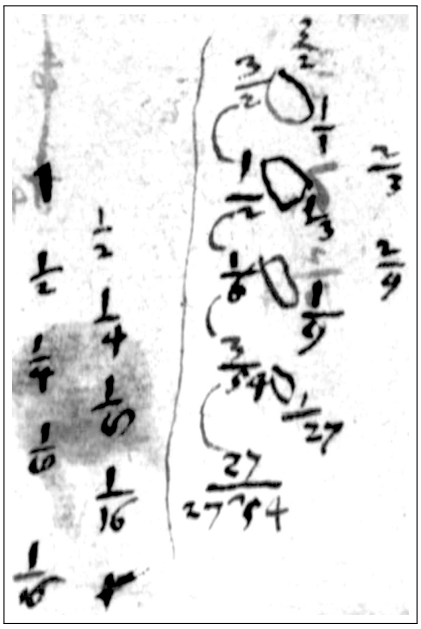
Commençons par rappeler le fait mathématique suivant :

- ⋆ Soit $u_n$ est une suite géométrique de raison $r$ : $u_n = u_0 r^n$.
- ⋆ On pose $u_n^{(1)} = u_{n+1} - u_n$ la suite des premières différences.
- ⋆ On généralise par récurrence en posant $u_n^{(p)} = u_{n+1}^{(p-1)} - u_n^{(p-1)}$ la suite des $p$-ièmes différences.
- ⋆ Pour $n$ fixé, on pose $v^{(n)}$ la suite des $n$-ièmes termes de chaque suite $u^{(p)}$, donc $v_p^{(n)} = u_n^{(p)}$

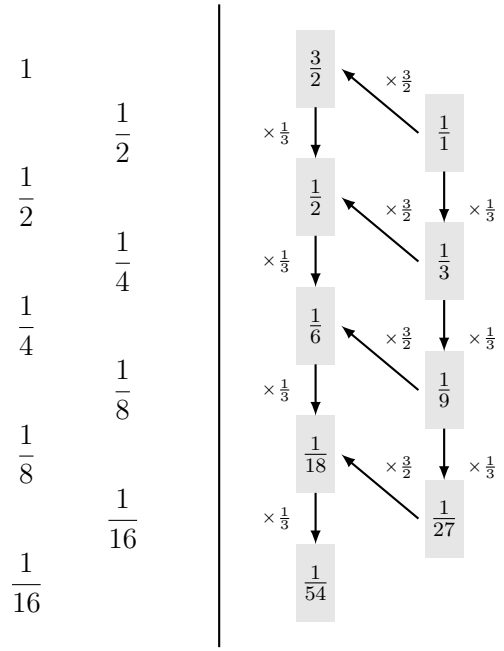
Alors, on obtient l'égalité suivante : $u_n^{(p)} = v_p^{(n)} = u_0 r^n (r-1)^p$.

- ⋆ Chaque suite de différences $u^{(p)}$ est une suite géométrique de raison $r$ et de premier terme $u_0^{(p)} = u_0(r-1)^p$.
- ⋆ Chaque suite à rang fixé $v^{(n)}$ est une suite géométrique de raison $r-1$ et de premier terme $v_0^{(n)} = u_n = u_0 r^n$.

On a donc une double suite géométrique. Cette propriété des progressions géométrique s'explique par le fait qu'il existe un rapport constant entre la progression et la progression de ses différences. Leibniz met ce phénomène en exergue au sein du *Tabulæ Serierum Fractionum* (A VII, 3, N.11), à travers le schéma suivant :



Manuscrits de Leibniz - LH 35 3 B 10 Bl.2

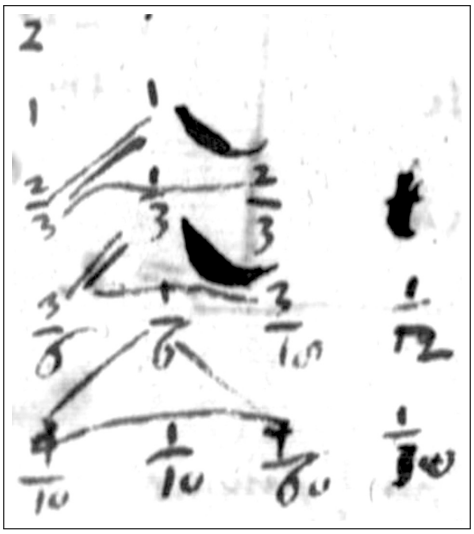



La présence de ces boucles et de ces arcs qui relient les coefficients entre eux indique bien que les préoccupations du jeune Leibniz se concentrent alors sur les structures des progressions, au travers de leur représentation tabulaire. Ce schéma montre, d'une part, qu'il existe un rapport constant entre une progression géométrique et sa somme et, d'autre part, que sa somme est encore une progression géométrique de même raison. Les liens, qui incarnent les relations entre les termes, représentent donc des lois géométriques, de rapport de proportions. Or, dans le schéma de différences classique, les liens qui relient les termes entre eux au sein d'une même progression ne sont pas de même nature que ceux qui relient les termes à leurs différences. Les premiers incarnent la loi de la progression, règle interne qui caractérise la succession de termes au sein de la suite, tandis que les seconds sont des règles extérieurs, relatives à la structure tabulaire du schéma de différences. Leibniz révèle dans ce schéma que cette asymétrie ne tient

pas réellement dans le cas des progressions géométriques. Les liens verticaux et les liens diagonaux sont de même nature, ce sont des lois géométriques.

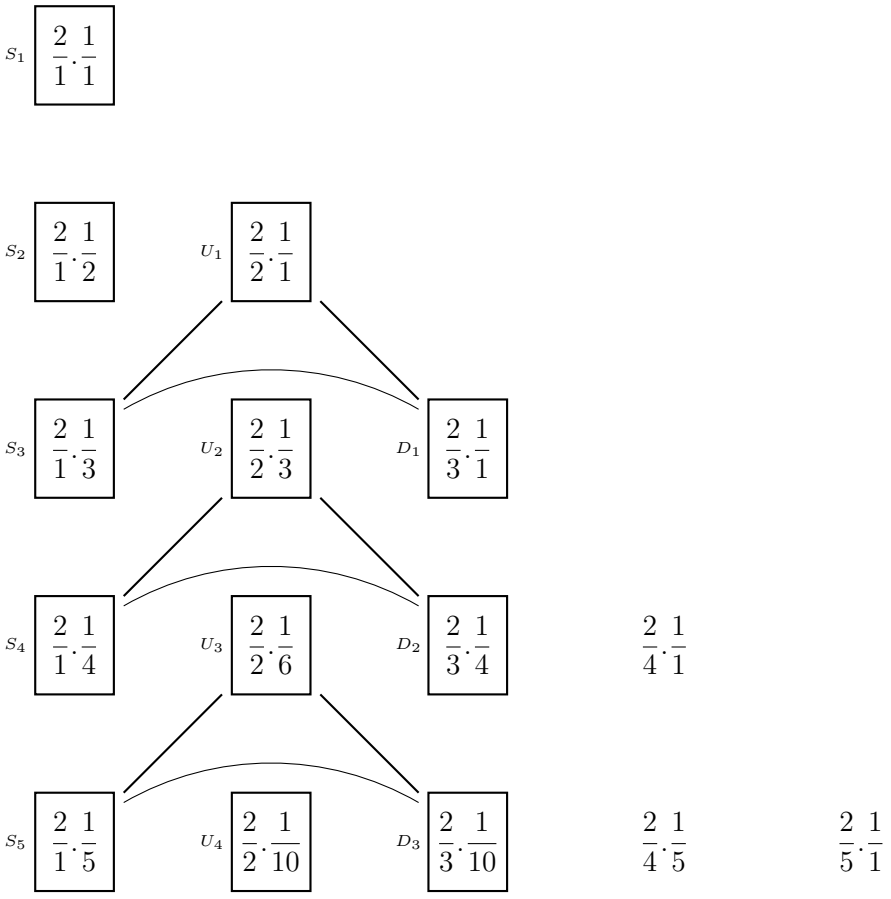
**Le rôle de la forme du schéma**

Sur le même manuscrit, on trouve également nombre de schémas de différence concernant les inverses des nombres triangulaires et notamment celui-ci :



Manuscrits de Leibniz - LH 35 3 B 10 Bl.4

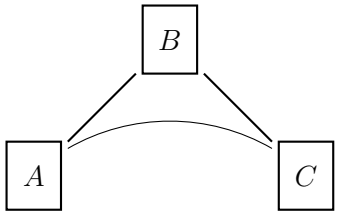
Pour mieux saisir le fonctionnement de ce diagramme, nous le reproduisons en réduisant les termes sous la forme d'un produit de deux fractions. La première constitue le coefficient multiplicatif qui permet de révéler la seconde, à savoir un inverse de nombre figuré :



Sur ce schéma de différence de la suite des inverses des triangulaires, Leibniz constate une relation entre la suite des sommes, la suite des différences et la suite elle-même :

> *Ici, la somme est le rapport de la différence au terme :*
> $\frac{3}{18}$ *divisé par* $\frac{1}{3} = \frac{3}{6}|\frac{1}{2}$ [25]

Ainsi, la structure du schéma représente une relation de proportion entre trois termes :




$$A = \frac{C}{B}$$

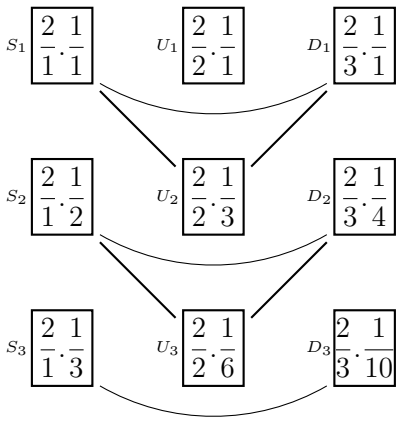
On s'aperçoit que la forme du schéma de différence que choisit Leibniz nous induit en erreur. En effet, l'arc horizontal peut faire croire que le terme de la progression des sommes et celui de la progression des différences sont du même rang, alors qu'en réalité la structure triangulaire de la table induit un décalage des indices. Montrons donc la propriété par le calcul :

$$\begin{aligned}
\frac{D_n}{U_n} &= \frac{\frac{1}{T_n} - \frac{1}{T_{n+1}}}{\frac{1}{T_n}} \\
&= 1 - \frac{T_n}{T_{n+1}} = \frac{2}{n+2} \\
&= (\frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+3}) + \frac{2}{n+3} \\
&= (\frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+3}) + (\frac{2}{n+3} - \frac{2}{n+4}) + \cdots + (\frac{2}{n+k} - \frac{2}{n+k+1}) + \frac{2}{n+k+1} \\
&= \frac{1}{T_{n+2}} + \frac{1}{T_{n+3}} + \frac{1}{T_{n+4}} + \dots \\
&= S_{n+2}
\end{aligned}$$

On retrouve donc ici le décalage d'indice du terme de la somme qui est masqué par la forme qu'a choisi Leibniz pour le schéma. Par exemple, on peut également montrer la relation suivante :

$$\frac{D_n}{U_{n+1}} = S_n$$

Ainsi, en modifiant la forme du schéma de différence, on obtient une structure similaire :




25. A VII, 3, N.11, *Tabulæ Serierum Fractionum*, mars 1673 / début 1673 - p.147 : « Summa hic est ratio differentiæ ad terminum $\frac{3}{18}$ per $\times\frac{1}{3} = \frac{3}{6}|\frac{1}{2}$ »

Insistons sur l'importance des lignes que Leibniz trace au cœur du schéma de différences pour représenter explicitement sa structure. Néanmoins, de nombreux paramètres semblent encore implicites, alors qu'ils jouent un véritable rôle dans l'interprétation des tables. La forme de la table en est un exemple frappant [26] ?

**Tables de progressions et Schémas de différences**

A travers toutes les tables que nous avons décrites, il nous faut distinguer celles qui sont des schémas de différences de celles qui n'en sont pas. La théorie des différences finie naît à la suite des premiers travaux de Leibniz sur les progressions et notamment sur la suites des inverses des triangulaires, comme nous l'avons déjà montré. D'un point de vue formel, Leibniz maintient une approche "liste de listes" des triangles de différences malgré ses nombreuses découvertes qui sont fondées sur les relations bidimensionnelles des coefficients. Ainsi, l'approche "à double entrée" dans le cadre de la théorie des différences finies et donc des triangles de différences doit être distinguée de celle que nous avons mise en évidence dans les tables des progressions géométriques et des progressions des inverses de nombres figurés, qui ne sont pas des triangles de différences mais des tables regroupant une famille de progressions du même type. Mettons donc en regard trois tables dont Leibniz a déjà fait l'étude au printemps 1673 :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{8}{27}$ | $\cdots$ |
| $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{4}{27}$ | $\frac{8}{81}$ | $\cdots$ |
| $\frac{1}{9}$ | $\frac{2}{27}$ | $\frac{4}{81}$ | $\frac{8}{243}$ | $\cdots$ |
| $\frac{1}{27}$ | $\frac{2}{81}$ | $\frac{4}{243}$ | $\frac{8}{729}$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | |

Table $\alpha$
Différences de la suite géométrique triple réciproque
$a_{i,j} = \left(\frac{1}{3}\right)^i \times \left(\frac{2}{3}\right)^j$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $\cdots$ |
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\cdots$ |
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{10}$ | $\cdots$ |
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{20}$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | |

Table $\beta$
Inverses des nombres figurés
$a_{i,j} = \frac{1}{\binom{i+j}{i}}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $\cdots$ |
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\cdots$ |
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{16}$ | $\cdots$ |
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{1}{64}$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | |

Table $\gamma$
Familles des suites géométriques
$a_{i,j} = \left(\frac{1}{j+1}\right)^i$

La table $\beta$ n'est pas un triangle de différence, mais une table de famille de progression, à savoir la famille des inverses des nombres figurés.

- ⋆ Elle partage avec la table $\alpha$ la propriété de symétrie, c'est-à-dire que les progressions horizontales et les progressions verticales sont du même type. Ce n'est plus le cas pour la table $\gamma$, où les progressions verticales sont des suites géométriques alors que les progressions horizontales sont les inverses des puissances.
- ⋆ Elle partage avec la table $\gamma$ les propriétés quantitatives que nous avons déjà décrites, à savoir que la somme de tous les coefficients d'une partie infinie de la table est égale à la somme des coefficients d'une autre partie, finie et disjointe. C'est cette propriété qui pousse Leibniz à tenter (vainement) d'établir une analogie entre les deux dans le *De Summis Serierum Fractionum* (A VII, 3, N.12) [27].

Ainsi, les liens que partage la table $\beta$ avec les tables de différences sont d'ordre qualitatif. C'est la symétrie de la nature des suites qui est partagée par ces deux tables. En revanche, ce que partagent les tables $\beta$ et $\gamma$, qui ne sont pas des tables de différences, est de l'ordre du quantitatif, à savoir une égalité entre les sommes des coefficients sur des parties disjointes de la tables.

26. L'importance de la forme des tables en tant qu'outils combinatoires a notamment été développée par Henri Delannoy au XIX$^{\text{ème}}$ siècle à travers sa "théorie des échiquiers". Sur le sujet, lire utilement [4] E. Barbin, C. Goldstein, M. Moyon, S. R. Schwer, S. Vinatier, *Les travaux combinatoires en France, 1870-1914 et leur actualité : un hommage à Henri Delannoy*, Limoge, 2017

27. *Cf* la table p.206

## 3.2 Le problème de Mengoli

### 3.2.1 Le contexte

Ce qu'on nomme parfois "le problème de Mengoli" consiste à déterminer la convergence et la valeur de la somme des inverses des carrés. On attribue à Euler la paternité du résultat, à savoir la célèbre égalité :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots \\ &= \frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

On trouve plus souvent ce problème sous le nom de "problème de Bâle" [28].

#### Une préhistoire du problème

L'histoire de ce problème est souvent décrite dans la littérature comme un épisode de la vie d'Euler, débutant sur des premiers échanges supposés avec Daniel Bernoulli, à la fin des années 1720, pour aboutir à la publication de trois articles [29]. Le premier est publié en 1731 [30] et donne une première approximation de la valeur cherchée. Le second, de 1736 [31], est le plus commenté et fait assurément partie des productions précoces d'Euler qui ont participé à la formation de sa très grande notoriété. Il y trouve la valeur exacte mais son raisonnement est fondée sur un principe qu'un mathématicien moderne qualifierait sans nul doute de faux, à savoir que deux fonctions ayant une infinité de racines en commun sont égales. Finalement, c'est dans un troisième article, paru en 1743 en français [32], qu'Euler fournit une démonstration considérée aujourd'hui comme acceptable. Selon les diverses monographies, l'émergence du problème a lieu à Bâle au début des années 1690, avec les premiers travaux des frères Bernoulli, ainsi que le montre cette citation de O. Spiess, tirée de son article *Die Summe der reziproken Quadratzahlen* de 1945 :

> *L'histoire des mathématiques connait déjà le problème florentin ainsi que les problèmes de Saint-Petersbourg et de Königsberg - mais c'est avec bien plus de justesse qu'on pourrait parler du problème de Bâle, lorsqu'on fait référence à la tâche qui consiste à déterminer la somme des inverses des carrés entiers.* [33]

Ainsi les références à ce problème qui précèdent les années 1690, telles que ces tentatives de Leibniz que nous étudions, relèvent bien plus d'une préhistoire [34] que de réels résultats ayant mené Euler sur la bonne voie.

---

28. En référence à la ville où vécut la famille Bernoulli et où Euler lui-même est né

29. Pour l'aspect historique, *Cf* [11] R. Calinger, *Leonhard Euler : The First St. Petersburg Years (1727–1741)*, Historia Mathematica, 1996, Vol.23, N.2 - p.121-166 ou aussi [3] R. Ayoub, *Euler and the Zeta Function* dans *The American Mathematical Monthly*, Décembre 1974, Vol.81, N.10, p.1074-1086 (Ayoub fait une coquille p.1072 en datant une lettre de Leibniz à Jean Bernoulli de 1673 au lieu de 1696, et évoque une contribution de Wallis au problème de Bâle, p.1071, à savoir l'approximation du résultat à trois décimales au sein de [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656, que nous ne retrouvons pas). Pour l'aspect mathématique, *Cf* [89] C.E. Sandifer, *How Euler Did It*, MAA, 2007 - voir *Estimating the Basel Problem* (Décembre 2003), ch.35, p.205 et *Basel Problem with Integrals* (Mars 2004), ch.36, p.209

30. [27] L. Euler, *De summatione innumerabilium progressionum*, 1731, dans *Opera Omnia*, 89 vols., I.14 - p.25-42

31. [27] L. Euler, *Inventio summæ cuiusque seriei ex dato termino generali*, 1736, dans *Opera Omnia*, 89 vols., I.14 - p.108-124

32. [27] L. Euler, *Démonstration de la somme de cette suite 1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 etc.*, 1743, dans *Opera Omnia*, 89 vols., I.14 - p.177-187

33. [101] Spiess O., *Die Summe der reziproken Quadratzahlen*, dans *Festschrift zum 60. Geburtstag von Andrea Speiser*, *ed.* Füssli O., Zürich, 1945 - p.66 : « Die Geschichte der Mathematik kennt eine Florentiner Aufgabe, ein Petersburger und ein Königsberger Problem - mit weit besserem Recht könnte man von einem Basler Problem reden, wenn man darunter die Aufgabe versteht, die Summe die reziproken ganzen Quadratzahlen zu bestimmen »

34. Concernant cette préhistoire, voir notamment [101] Spiess O., *Die Summe der reziproken Quadratzahlen*, dans *Festschrift zum 60. Geburtstag von Andrea Speiser*, *ed.* Füssli O., Zürich, 1945 - p.66-87 ou encore [33] Hofmann J. E., *Um Euler erste Reihenstudien*, dans *Sammelband zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers*, *ed.* Schröder K., Akademie-Verlag, Berlin, 1959 - *Cf* la note 63 de cet article consacrée à l'historique du problème de Bâle

**Découverte indépendante chez Leibniz**

Comme le rapporte Hofmann :

> *La détermination de $\sum \frac{1}{k^2}$ a occupé Leibniz toute sa vie, mais la solution ne lui est jamais parvenue.* [35]

La première mention de ce problème au sein de la correspondance de Leibniz se trouve dans la lettre que lui envoie Oldenburg le 6 avril 1673 peu après que le retour du jeune philosophe de son premier séjour à Londres :

> *Mais lorsque ce même Mengoli s'applique à déterminer la progression musicale en fraction, ou ce qui est la même chose, la réciproque de la progression arithmétique, ainsi que leur carré ou leur cubes, lui-même avoue qu'il n' a pas pu trouver la somme de ces séries, et il demande le soutien d'un esprit plus riche, pour le mener à bien.* [36]

Ici, Oldenburg traduit une lettre en langue anglaise que lui a envoyée Collins à l'intention de Leibniz [37], au sujet de la méthode des triangles de différence que Leibniz a découverte et dont il avait fait part à la Royal Society dans une lettre du mois de février. Collins, qui parle donc ici à travers la plume d'Oldenburg en tant qu'expert, affirme que Mengoli a déjà résolu le problème de Huygens en 1658 [38], mais qu'il s'est retrouvé face à un mur infranchissable lorsqu'il a remplacé les inverses des nombres figurés par les inverses de puissances. Or, comme nous l'avons déjà vu, Mengoli a bien donné au sein de ce traité une preuve du caractère divergent de la série harmonique. Quant à l'expression « malgré toute la richesse et l'ingéniosité qu'il a pu mettre en œuvre. » qu'Oldenburg reprend de Collins, il s'agit en fait d'une citation directement issues de la préface de la *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ* [39] :

> *A partir de l'examen de cette suite de fractions que j'ai expliqué d'une heureuse manière, j'ai poursuivi l'étude vers une autre suite dans laquelle les numérateurs sont la simple unité et les dénominateurs les carrés des entiers. Mais certes cette investigation contrebalance le prix de cet effort, et n'est cependant pas encore achevée pour sa résolution, et elle demande le soutien d'un esprit plus riche, de sorte qu'il valait mieux reporter le calcul précis de la somme de cette série que j'avais moi-même proposée.* [40]

Plus aucune mention de cette série ne sera faite par Mengoli au sein du traité. Contrairement à ce que peuvent sous-entendre certains articles non spécialisés [41], ce n'est pas à travers cette correspondance avec

35. [34] Hofmann J. E., *Leibniz in Paris 1672 - 1676 : His Growth to Mathematical Maturity*, Cambridge University Press, 1974 - p.34 : « The determination of $\sum \frac{1}{k^2}$ occupied Leibniz all his life, but the solution never came within his grasp. »

36. A III, 1, N.13, p.60, Oldenburg à Leibniz - 6 avril 1673 : « At quando idem Mengolus pergit ad progressionem musicam in fractionibus vel, quod idem est, ad reciproca progressionis arithmethicæ cum quadratis et cubis eorum, [...] fatetur ille, non potuisse se harum serierum summam invenire, ditiorisque ingenii adminiculum in eo postulat »

37. En tant que secrétaire de la Royal Society, Oldenburg faisait fréquemment appel à Collins pour l'aider dans sa correspondance mathématiques, car il ne possédait pas les compétences nécessaires pour pouvoir répondre convenablement à ses correspondants sur certains sujets techniques. *Cf* A III, 1, N.13, p.58, Oldenburg à Leibniz - 6 avril 1673 : « Concernant la conversation au sujet de Mouton que j'avais eue avec notre savant Collins, également membre de la Royal Society, voici son avis » (« Moutonum colloquio impertiisse Doctissimo nostro Collinio, similiter e Societate Regia, qui in hac est sententia »)

38. Collins date à tord la *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ* de 1658 alors que Mengoli l'a publié en 1650.

39. Bien qu'elle ne fasse que l'évoquer, la littérature sur le problème de Bâle attribue tout de même systématiquement sa première énonciation à Mengoli. Curieusement, cet énoncé est souvent daté de 1644, au lieu de 1650, date de parution de la *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ*. L'origine de cette erreur semble se trouver dans l'œuvre de W. Dunham qui semble donner des dates étranges aux travaux de Mengoli. Dans [23] W. Dunham, *Journey through genius : the great theorems of mathematics*, Penguin Book, 1991 - p.204, il date la démonstration de la divergence de la série harmonique de 1647. Et dans [24] W. Dunham, *Euler, The Master of Us All*, Dolciani Mathematical Exposition Nr.22, MAA, 1999 - p.xxii, il date la première évocation de la somme des inverses des carrés de 1644, date qui est reprise dans de nombreux articles (la référence de Dunham est l'article [11] R. Calinger, *Leonhard Euler : The First St. Petersburg Years (1727–1741)*, Historia Mathematica, 1996, Vol.23, N.2 - p.121-166, qui donne la bonne date, c'est-à-dire 1650)

40. [67] P. Mengoli, *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ*, Bologne, 1650 - Préface : « Ab huius fractionum dispositionis contemplatione fæliciter expeditus, ad aliam progrediebar dispositionem, in qua singulæ unitates numeris quadratis denominantur. Hæc speculatio fructus quidem laboris rependit, nondum tamen effecta est solvendo, sed ingenii ditioris postulat adminiculum, ut præcisam dispositionis quam mihimet [*pas d'espace dans l'original*] ipsi proposui, summam valeat reportare. »

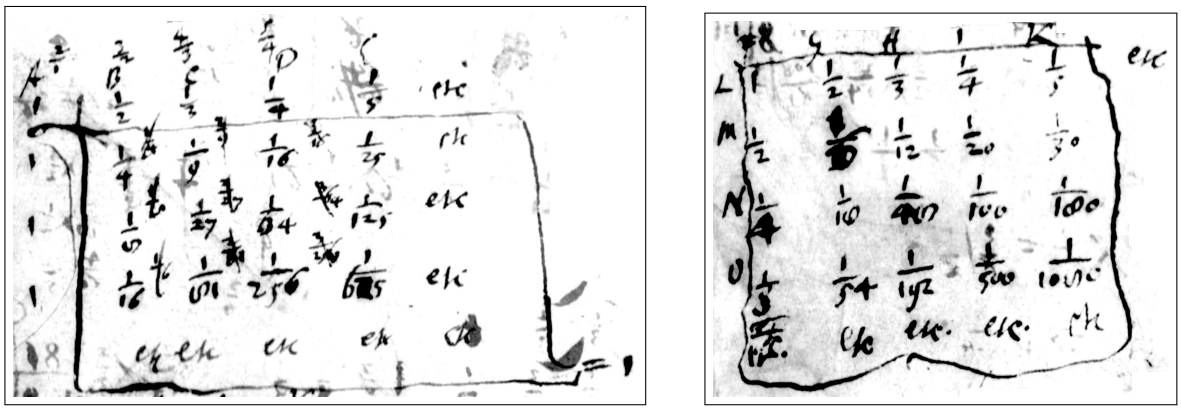
41. Au sein d'une littérature non spécialiste, notamment l'article de Wikipédia consacré au problème de Bâle, ainsi que certains exposés ou articles de l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public) - *Cf* un article anonyme intitulé *Euler et le problème de Bâle.* ou encore une présentation de B. Martin intitulée *Le problème de Bâle* - il est parfois mentionné que Mengoli aurait démontré la convergence de la série des inverses des carrés, au moyen d'un argument de comparaisons terme à terme ($\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$). Il nous semble que cette erreur provient d'une mauvaise lecture de [11] R. Calinger, *Leonhard Euler : The First St. Petersburg Years (1727–1741)*, Historia Mathematica, 1996, Vol.23, N.2 - p.133, où le raisonnement est attribué à Jacques Bernoulli, en 1689, dans le paragraphe qui suit la mention de Mengoli.

Oldenburg que Leibniz prend connaissance du problème dit "de Mengoli" ou "de Bâle". On constate en effet que cette correspondance est trop tardive pour précéder le *De Differentiis Progressionum Decrescentium* (A VII, 3, N.5) que les éditeurs de l'*Akademie* datent de la fin de l'automne 1672. Comme on le sait, Leibniz a eu durant son court séjour britannique de la fin du mois de février 1673, une importante conversation avec Pell, notamment au sujet des découvertes que le jeune philosophe pensait pouvoir fournir sur la théorie des séries et des progressions [42]. Cet échange avec Pell lui a fait prendre conscience du grand retard en mathématiques qu'il lui faudrait rattraper pour pouvoir convaincre ses futurs homologues géomètres. Il lui faut relativiser l'ampleur de ses propres travaux sur le progressions tels que ceux que nous sommes en train d'explorer. Ici, dans cette lettre de Oldenburg à Leibniz que nous venons de citer et qui date du mois d'avril 1673, c'est-à-dire un mois après que Leibniz a été à Londres, les découvertes sont à nouveau minimisées. Oldenburg pense visiblement que Leibinz ne connait pas l'œuvre de Mengoli lorsqu'il écrit ces mots. Ainsi, au sein du *De Differentiis Progressionum Decrescentium* (A VII, 3, N.5), le problème dit "de Mengoli" est redécouvert par Leibniz de façon indépendante.

### 3.2.2 Tentative de résolution par les tables

#### Une première table dans le *Tabulæ Serierum Fractionum*

Dans le *Tabulæ Serierum Fractionum* (A VII, 3, N.1), la table qui croise progressions géométriques et inverses de puissance, que nous avons déjà analysée [43], est suivie d'une autre table, construite à partir de cette première :



Manuscrits de Leibniz - LH 35 3 B 10 Bl.4

On remarque avant toute chose que c'est dans cette table et non dans la comparaison analogique du *De Summis Serierum Fractionum* (A VII, 3, N.12), qu'intervient pour la première fois l'indexation "à double entrée" des progressions.
Leibniz nous fournit l'explication quant à la construction de cette seconde table, mais ne justifie aucunement des raisons qui le poussent à faire de telles opérations :

> *Ce sont les sommes de la table précédente. A partir des séries A.B.C.D.E., on forme les séries F.G.H.I.K. en multipliant leurs termes par les sommes de la série, toujours prise dans ceux qui précèdent, comme par exemple toute la série C multipliée par $\frac{3}{2}$ donne la série G. La série M s'obtient à partir de la série L en ôtant les fractions harmoniques de proche en proche. N s'obtient à partir de M en y ôtant les carrés. O s'obtient à partir de N en ôtant les cubes. De même, la série M est égale à*

De fait, pour prouver qu'une série converge, Mengoli n'utilise pas de tels arguments de comparaisons au sein de la *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ*. D'ailleurs, pour démontrer la convergence de la série $\sum \frac{1}{n(n+a)}$, Mengoli réitère la démonstration de passage à la limite, alors qu'il aurait pu s'assurer de la convergence au moyen d'une comparaison terme à terme.

42. *Cf* [34] Hofmann J. E., *Leibniz in Paris 1672 - 1676 : His Growth to Mathematical Maturity*, Cambridge University Press, 1974 - Chapitre 3 « The First Visit to London », comme le rapporte Hofmann, Pell signale à Leibniz le *Observationes diametrorum solis et lunæ apparentium* [74] de Gabriel Mouton, paru en 1670. Leibniz a trouvé un exemplaire au sein de la Royal Society et a pu constater que les triangles de différences qu'il croyait avoir découvert y figuraient bel et bien.

43. *Cf* p.202

*la moitié des inverses des triangulaires. Et la série N* [44] *coïncide avec les différences des carrés auxquels on a ôté l'unité à leurs numérateurs et doubler les dénominateurs.* [45]

Leibniz commence par donner la nature de cette nouvelle table, à savoir qu'il s'agit des sommes de la table précédente.

| | $\frac{2}{1}$ $A$ | $\frac{3}{2}$ $B$ | $\frac{4}{3}$ $C$ | $\frac{5}{4}$ $D$ | $E$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $W$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | etc. | |
| $X$ | 1 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{25}$ | etc. | |
| $Y$ | 1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{1}{64}$ | $\frac{1}{125}$ | etc. | |
| $Z$ | 1 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{81}$ | $\frac{1}{256}$ | $\frac{1}{625}$ | etc. | |
| | etc. | etc. | etc. | etc. | etc. | etc. | $= 1$ |
| | $\infty$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | | | |

| | $F$ | $G$ | $H$ | $I$ | $K$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $L$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | etc. |
| $M$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{30}$ | etc. |
| $N$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{48}$ | $\frac{1}{100}$ | $\frac{1}{180}$ | etc. |
| $O$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{54}$ | $\frac{1}{192}$ | $\frac{1}{500}$ | $\frac{1}{1080}$ | etc. |
| | etc. | etc. | etc. | etc. | etc. | etc. |
| | $B \times 2$ | $C \times \frac{3}{2}$ | $D \times \frac{4}{3}$ | $E \times \frac{5}{4}$ | etc. | |

De fait on constate que chaque coefficient de cette nouvelle table est égal à la somme de tous les coefficients de la précédente qui soient situés en dessous sur la même colonne, en ayant ôté de la première table la première colonne constituée de la suite géométrique constante, qui diverge. Ainsi, à la $i$-ième ligne et la $j$-ième colonne, le terme vaut :

$$\left(\frac{1}{j+1}\right)^i + \left(\frac{1}{j+1}\right)^{i+1} + \left(\frac{1}{j+1}\right)^{i+2} + \cdots = \sum_{k=i}^{+\infty} \left(\frac{1}{j+1}\right)^k$$

Une fois donnée la nature de la table, sans plus de description, Leibniz donne des méthodes de construction algorithmique. La première se consacre aux colonnes et consiste à multiplier chaque progression de la première table par un coefficient constant qui s'avère être la somme de cette même progression, en plus de l'unité. Leibniz s'attache ensuite à donner la méthode pour construire les progressions horizontales par des opérations similaires aux triangles de différences. Cette propriété découle directement de la nature de la table, à savoir qu'elle est la table des sommes de la précédente. Puis, enfin, il donne une méthode pour construire ces mêmes progressions horizontales, indépendamment des autres.
Ainsi, la deuxième lignes qui n'est au départ que l'ensemble indistinct des deuxièmes termes de chaque suite, devient une progression à part entière lorsque Leibniz l'indexe par la lettre $M$. Une fois cette suite considérée, Leibniz la décrit comme la suite des différence de la suite située juste au-dessus. La progression $M$ s'inscrit alors au sein de la table qui donne un premier accès aux règles internes qui la régissent. Enfin, Leibniz donne la règle autonome de la progression $M$ qui s'avère être la moitié des inverses des triangulaires. Ainsi, il révèle la loi profonde de la progression.
Les coefficients écrits au-dessus des suites de la première table ($A$, $B$, $C$ ...) sont censés être la valeur de la somme de la progression. En effet, Leibniz nous dit bien, par exemple, que la progression $G$ est égale à la progression $C$ multipliée par $\frac{3}{2}$ qui est « la somme de la série, toujours dans ces antécédents » (« summas seriei semper in illis præcedentis »). Or $\frac{3}{2}$ est au dessus de $B$. Bien-sûr ce ne sont pas les

44. Nous ne parvenons pas à interpréter cette description comme quelque chose qui corresponde effectivement à la série $N$ dont le terme générique est $\frac{1}{(n-1)n^2}$ mais il est possible que Leibniz ait fait une erreur de raisonnement

45. A VII, 3, N.11, *Tabulæ Serierum Fractionum*, mars 1673 / début 1673 - p.141 : « Hæ sunt summæ tabulæ præcedentis. Ex seriebus $A.B.C.D.E.$ fient series : $F.G.H.I.K.$ multiplicando illarum terminos per summas seriei semper in illis præcedentis, ut tota $C$ per $\frac{3}{2}$ dat $G$. Series $M$ fit ex $L$ demtis a se invicem fractionibus harmonicis. $N$ ex $M$ demtis quadraticis. $O$ ex $N$ demtis cubicis. Eadem series $M$ est triangularium reciprocorum dimidiatorum. Et series $N$ coincidi differentiis quadratorum abjecta unitate ex eorum numeratoribus, duplicatisque nominatoribus » - Les éditeurs de l'*Akademie* ont corrigé une erreur sur le manuscrit : au lieu de dire que la série $M$ est la moitiée des inverses des triangulaires, Leibniz écrit qu'il s'agit des « doubles des pyramidaux » (« pyramidalium duplicatorum »).

bonnes valeurs (nous les avons indiquées en encadré en dessous des progressions) et cela se voit très vite sur la progression $A$ qui est infinie et dont la somme ne peut pas valoir 2.
Par construction, le terme générique de cette table, donc le $i$-ème terme de la $j$-ème progression, est :

$$\left(\frac{1}{j+1}\right)^i \times \frac{j+1}{j} = \frac{1}{j(j+1)^{i-1}}.$$

On retrouve bien la valeur des séries-reste des suites géométriques :

$$\sum_{k=i}^{+\infty} \left(\frac{1}{j+1}\right)^k = \frac{1}{j(j+1)^{i-1}}.$$

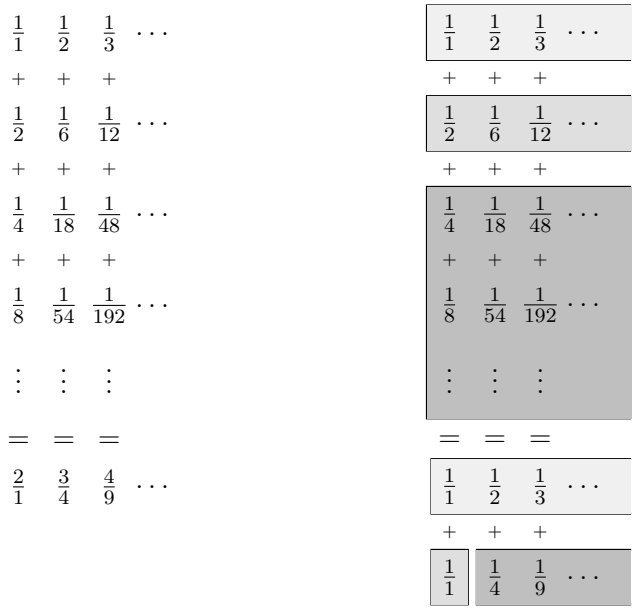
Contrairement à ce qu'a fait Leibniz, permettons-nous d'indexer les lignes de la première table (ici, ce sont les lettres $W$, $X$, $Y$ ... encadrées sur le schéma), et retirons la colonne $A$ qui n'a pas son équivalent dans la seconde table. La propriété de la table des sommes impliquent alors les relations suivantes sur les lignes, que Leibniz décrit très bien :

$$\begin{aligned} M &= L - W \\ N &= M - X = L - W - X \\ O &= N - Y = L - W - X - Y \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ainsi, la deuxième table est en fait une table fondée sur les différences des lignes de la première. Leibniz tente peut-être par cette opération de transmuter une table de famille de progression en une table de différence, sur laquelle il pourrait appliquer tous les résultats qu'il a déjà obtenus en théorie des différences finies.
La véritable raison d'être de cette seconde table semble se révèler au sein du *De Summis Serierum Fractionum* (A VII, 3, N.12), où Leibniz traite du problème central, dans lequel cette table intervient. Ce problème est celui de la somme des inverses des carrés : le problème de Mengoli.

### Le traitement du problème dans le *De Summis Serierum Fractionum* (A VII, 3, N.12)

Comme on connait la somme d'une suite géométrique, on peut calculer la somme de chaque colonne de la table :



En effet, la somme de la $j$-ième colonne est égale à :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{j(j+1)^{i-1}} = \frac{1}{j}.\frac{j+1}{j} = \frac{j+1}{j^2}$$

Et on peut remarquer que :

$$\frac{j+1}{j^2} = \frac{1}{j} + \frac{1}{j^2}.$$

Ceci permet, par le même raisonnement que celui mené sur la première table, de montrer que la somme de coefficients de la table, après avoir ôter la suite harmonique ainsi que les moitiés des inverses des triangulaires, est égale à la somme des inverses des carrés que nous notons $S_q$ :

$$S_q = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Ainsi on observe la propriété remarquable suivante, à savoir que les deux zones gris clair valent 1 et les deux zones gris foncé valent $S_q$ :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | etc. |
| 1 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{25}$ | etc. |
| 1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{1}{64}$ | $\frac{1}{125}$ | etc. |
| 1 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{81}$ | $\frac{1}{256}$ | $\frac{1}{625}$ | etc. |
| etc. | etc. | etc. | etc. | etc. | etc. |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | etc. |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{30}$ | etc. |
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{48}$ | $\frac{1}{100}$ | $\frac{1}{180}$ | etc. |
| $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{54}$ | $\frac{1}{192}$ | $\frac{1}{500}$ | $\frac{1}{1080}$ | etc. |
| etc. | etc. | etc. | etc. | etc. | etc. |

Mais Leibniz va plus loin, en rappelant que la troisième ligne de la table s'obtient en ôtant les inverses des carrés à la seconde. Ainsi, la différence vaut aussi $S_q$ :

$$\frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{(j+1)^2} + \frac{1}{j(j+1)^2}.$$

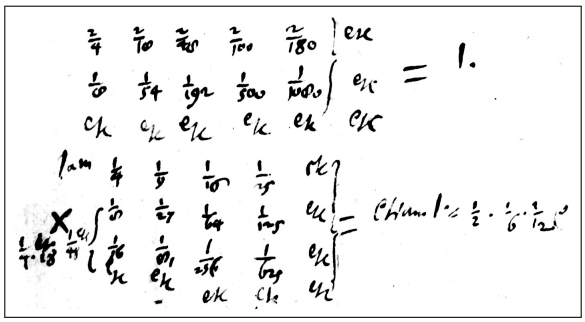
Ainsi, Leibniz remplace la deuxième ligne par deux autres, à savoir la suites des inverses de carrés et une copie de la troisième ligne :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{16}$ $\cdots$ |
| | | | | + | + | + |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}$ | $\cdots$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{48}$ $\cdots$ |
| + | + | + | | + | + | + |
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{48}$ | $\cdots$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{48}$ $\cdots$ |
| + | + | + | | + | + | + |
| $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{54}$ | $\frac{1}{192}$ | $\cdots$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{54}$ | $\frac{1}{192}$ $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| = | = | = | | = | = | = |
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{9}$ | $\cdots$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{9}$ $\cdots$ |

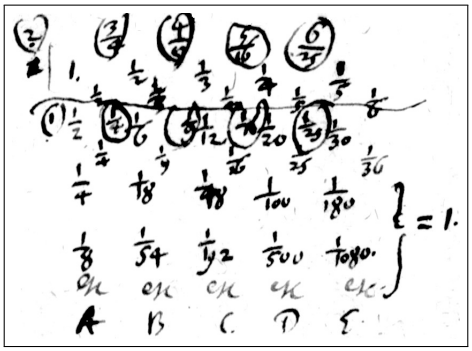
Notons $S'_q$ la somme de cette troisième ligne :

$$S'_q = \frac{1}{4} + \frac{1}{18} + \frac{1}{48} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$$

On observe alors dans la zone gris clair ci-dessus, dont la somme vaut 1, qu'elle contient la somme $S'_q$ et un reste dont on a montré dans le précédent paragraphe qu'il était égal à la somme $S_q$. Ainsi Leibniz obtient que la somme $S_q + S'_q$ vaut 1. C'est ce que montre ces fragments issus du *De Summis Serierum Fractionum* (A VII, 3, N.12) :



Manuscrits de Leibniz - LH 35 3 B 10 Bl.2



Manuscrits de Leibniz - LH 35 3 B 10 Bl.2 [46]

Ce qu'on peut résumer dans le schéma suivant :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | etc. | |
| 1 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{25}$ | etc. | $\leftarrow S_q$ |
| 1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{1}{64}$ | $\frac{1}{125}$ | etc. | |
| 1 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{81}$ | $\frac{1}{256}$ | $\frac{1}{625}$ | etc. | $\leftarrow S'_q$ |
| etc. | etc. | etc. | etc. | etc. | etc. | $\leftarrow 1$ |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | etc. | |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{30}$ | etc. | $\leftarrow 1$ |
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{48}$ | $\frac{1}{100}$ | $\frac{1}{180}$ | etc. | $\leftarrow S'_q$ |
| $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{54}$ | $\frac{1}{192}$ | $\frac{1}{500}$ | $\frac{1}{1080}$ | etc. | $\leftarrow S_q$ |
| etc. | etc. | etc. | etc. | etc. | etc. | |

Le raisonnement de Leibniz s'arrête-là et se solde donc par un échec, si l'on considère que le calcul de la somme des inverses des carrés était le seul objectif. Pourtant, rappelons nous les paroles de Leibniz dans la lettre à Oldenburg du 24 Mai 1673 :

> *En vérité, je dois avouer que je n'ai pas encore déterminé la somme de cette série qui se produit jusqu'à l'infini :* $\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}$ *etc. mais je n'ai pas encore eu jusqu'ici suffisamment de loisir pour une recherche consciencieuse. Au cours d'autres recherches, j'ai récemment découvert un autre théorème suffisamment digne d'être exposé si je ne me trompe pas.* [47]

46. Le signe « = 1 » est soumis à la condition suivante : « si on double la première série transverse, à savoir $\frac{2}{4}.\ \frac{2}{18}.$ etc. Si on ôte tout la première série verticale, à savoir $\frac{2}{8}.\ \frac{1}{8}.$ etc., alors le tout est égal à $\frac{1}{4}$ » (« *si duplices primam seriem transversam* $\frac{2}{4}.\frac{2}{18}.$ *etc. Si primam seriem descendentem* $\frac{2}{8}.\frac{1}{8}.$ *etc. omittas omnia æquabuntur :* $\frac{1}{4}$ »).

47. A III, 1, N.20, Lettre de Leibniz à Oldenburg du 24 Mai 1673 - p.93 : « At vero hujus seriei in infinitium productæ : $\frac{1}{1}\frac{1}{4}\frac{1}{9}\frac{1}{16}$ etc. summam nondum, fateor, reperi ; sed et necdum inquirendi satis diligenter otium habui. Theorema aliquod reperi nuper ali quærendo satis memorabile, ni fallor »

On voit qu'il déforme ici la vérité puisqu'il a découvert cet autre théorème dont il parle et qui n'est autre que la somme bidimensionnelle des termes d'une table, au cours de recherches justement consacrées au calcul de la somme des inverses des carrés, calcul auquel il a déjà consacré un nombre conséquent de travaux, contrairement à ce qu'il écrit au secrétaire de la *Royal Society*. On peut donc supposer que ces recherches que nous venons de détailler, bien qu'elles n'aient pas abouti au résultat escompté, restent très prometteuses dans l'esprit de Leibniz, et ont permis de le convaincre de la faisabilité du calcul. Avec un peu plus de temps et de travail, il pense peut-être tenir la bonne voie vers la découverte de cette somme. Cette voie, c'est l'approche tabulaire "à double entrée", qui se fonde sur les modèles des progressions géométriques et des progressions des inverses des nombres figurés.

**Poursuite du raisonnement**

La raisonnement de Leibniz s'arrête à cette étape, bien qu'il puisse être poursuivi plus avant. Menons cette étude jusqu'au bout afin d'avoir une vision plus claire et générale sur la méthode de Leibniz.
Commençons par réindexer les suites horizontales des deux tables. On supprime la première ligne et la première colonne de la première table et la première ligne de la seconde, puisqu'elles n'interviennent pas dans les résultats. Ainsi, dans les tables obtenues, on note $L_1$, $L_2$, ... , $L_n$, ... les lignes de la premières tables et $L'_1$, $L'_2$, ... , $L'_n$, ... celles de la seconde. Enfin, on pose $S_n$ et $S'_n$ les sommes respectives de toutes les lignes à partir de la $n$-ième :

$$\begin{aligned} S_n &= L_n + L_{n+1} + L_{n+2} + \dots \\ S'_n &= L'_n + L'_{n+1} + L_{n+2} + \dots \end{aligned}$$

On a donc :

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_1$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{25}$ | etc. | | $L'_1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{30}$ | etc. |
| $L_2$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{1}{64}$ | $\frac{1}{125}$ | etc. | | $L'_2$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{48}$ | $\frac{1}{100}$ | $\frac{1}{180}$ | etc. |
| $L_3$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{81}$ | $\frac{1}{256}$ | $\frac{1}{625}$ | etc. | | $L'_3$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{54}$ | $\frac{1}{192}$ | $\frac{1}{500}$ | $\frac{1}{1080}$ | etc. |
| etc. | etc. | etc. | etc. | etc. | etc. | | | etc. | etc. | etc. | etc. | etc. | etc. |

Au sein du *De Summis Serierum Fractionum* (A VII, 3, N.12), Leibniz a montré les égalités suivante :

$$\begin{aligned} S_1 &= L'_1 \\ L_1 &= S'_2 \\ S_2 &= L'_2 \end{aligned}$$

On souhaiterait donc savoir si l'on peut poursuivre ce schéma avec :

$$\begin{aligned} S_n &= L'_n \\ L_n &= S'_{n+1} \end{aligned}$$

Pour ce faire, listons les relations générales dont nous disposons sur ces quantités :

$$\begin{aligned} S_n &= S_{n+1} + L_n \\ S'_n &= S'_{n+1} + L'_n \\ L'_{n+1} &= L'_n - L_n \end{aligned}$$

Cette dernière relation est la propriété de différence que Leibniz remarque sur la seconde table dans le *Tabulæ Serierum Fractionum* (A VII, 3, N.11) et qui découle directement de la nature de la seconde table, à savoir que c'est une table des sommes de la première.

Par cette propriété, on peut alors facilement démontrer par récurrence que pour tout $n$ :

$$S_n = L'_n$$

Mais cette dernière relation n'est en fait rien d'autre que la formalisation du fait que la seconde table est la table des sommes de la première, c'est donc une relation qui découle directement de la nature de la table. En revanche, la seconde relation : $L_n = S'_{n+1}$ ne peut pas être générale car sinon, on aurait :

$$\begin{aligned} L_n - L_{n+1} &= S'_{n+1} - S'_{n+2} \\ &= L'_{n+1} \end{aligned}$$

Or ce n'est pas le cas. Cette relation $L_1 = S'_2$ qu'obtient Leibniz n'est donc valable que pour le premier rang et ne se poursuit pas pour les suivants. C'est une pure coïncidence, dont nous montrons ici les origines :

$$\begin{aligned} S'_n &= L'_n + L'_{n+1} + L'_{n+2} + \dots \\ &= S_n + S_{n+1} + S_{n+2} + \dots \\ &= L_n + 2L_{n+1} + 3L_{n+2} + \dots \end{aligned}$$

Ainsi, le terme courant de cette somme vaut :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k.\left(\frac{1}{j+1}\right)^{n+k} = \frac{\left(\frac{1}{j+1}\right)^{n+1}}{\left(1-\frac{1}{j+1}\right)^2} = \frac{1}{j^2(j+1)^{n-1}}.$$

Alors, si $n = 1$, on obtient $S'_1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = 1 + L_1$. Or $1 = S_1 = L'_1$, donc $L_1 = S'_1 - 1 = S'_1 - L'_1 = S'_2$. On voit bien que de tels calculs ne fonctionnent plus si $n > 1$.
Ainsi, les raisons qui poussent ici Leibniz à arrêter son analyse sont plus profondes que le simple manque de temps ou d'ingéniosité. La méthode analytique qu'il entreprend ici, en construisant une table des sommes des lignes n'est pas réversible, et on ne peut pas considérer cette table des sommes comme étant également une table des différences. La relation fortuite et contingente sur la somme des inverses des carrés que nous venons de montrer a pu induire chez le jeune mathématicien un espoir de découverte qui n'était en réalité pas possible par cette voie.
Cette analyse nous montre également les dangers que présente une telle méthode heuristique. L'approche combinatoire du jeune Leibniz consiste à déterminer des relations entre les termes, entre les progressions ou entre les tables en explorant les différentes manières de les exprimer et de les transformer afin de faire émerger des coïncidences. Une telle démarche s'effectue *a posteriori*, et mène inéluctablement le jeune philosophe à faire l'amalgame entre les causes et les corrélations. Par là, nous entendons la distinction entre ce qui, d'une part, se manifeste par l'effet d'une loi générale, et auquel on peut appliquer un raisonnement inductif, et ce qui, d'autre part, n'a lieu qu'en conséquence d'une loi spécifique, et qui ne souffre pas de généralisation.
Comme nous venons de la montrer à travers cet exemple, la pratique combinatoire du jeune Leibniz ouvre les portes à ce genre de confusion.

## 3.3 La Conséquence 4 de Pascal

Le schéma de différence peut être interprété de façon méréologique, en considérant qu'un terme est constitué de toutes les différences successives avec les termes suivants [48]. Nous avons montré que la pratique tabulaire de Leibniz connaît un tournant, dès lors qu'il pose la question des sommes bidimensionnelles, pour lesquelles il s'agit de décomposer le terme en parties qui sont non plus les termes d'une autre progression mais les termes de plusieurs autres progressions. Cette approche méréologique du problème fait apparaitre les relations bidimensionnelles que les termes d'une table entretiennent entre eux et pousse le jeune philosophe à chercher des transformation qui réduisent des tables de familles de progressions en tables de différences. Le problème de la décomposition bidimensionnelle des termes d'une table joue donc un rôle central dans l'émergence de cette pratique.
Concluons donc ce développement sur l'approche tabulaire par une proposition méconnue du *Traité du Triangle Arithmétique* [49] de Blaise Pascal qui annonce justement une propriété de décomposition bidimensionnelle. L'analyse de cette propriété permet de fournir un éclairage utile sur les intuitions du jeune Leibniz. Il s'agit de la conséquence quatrième :

> *En tout Triangle Arithmétique, chaque cellule diminuée de l'unité est égale à la somme de toutes celles qui sont comprises entre son rang parallèle et son rang perpendiculaire exclusivement.* [50]

Cette proposition s'exprime donc ainsi :

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = 1 + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\!\!\binom{j}{i}\!\!\right).$$

Pascal prend l'exemple suivant :

$$15 = 1 + (1+4) + (1+3) + (1+2) + (1+1)$$

Cela revient à dire, sur le schéma ci-dessous, que le coefficient dans la zone gris foncé est égal à la somme des coefficients dans la zone gris clair à laquelle on rajoute 1 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | | |
| 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | | | |
| 1 | 5 | 15 | 35 | | | | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | | | | | |

### 3.3.1 La démonstration de Pascal

Pascal démontre cette proposition par récurrence immédiate, en utilisant la propriété des ordres numériques, à savoir qu'un coefficient du Triangle est égale à la somme des coefficients de la colonne juste à sa gauche, jusqu'à son rang (ou ceux de la liste juste au dessus, jusqu'à son rang) :

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \sum_{i=0}^{k}\left(\!\!\binom{n-1}{i}\!\!\right).$$

Cette propriété se démontre elle-même par récurrence à partir de la formule du Triangle de Pascal, mais s'interprète facilement en terme de nombre figurés. En effet, les nombres triangulaires sont des sommes

48. Une telle interprétation existe chez le jeune Leibniz, comme nous l'avons vu, mais impose à la progression d'être décroissante et de converger vers 0.

49. [80] B. Pascal, *Traité du Triangle Arithmétique et traités connexes* dans *Œuvres de Blaise Pascal*, Hachette, Paris, Vol.3 (1923), Ch.64.

50. [80] B. Pascal, *Traité du Triangle Arithmétique et traités connexes* dans *Œuvres de Blaise Pascal*, Hachette, Paris, Vol.3 (1923), Ch.64, p.450-451

de naturels consécutifs, les pyramidaux sont des sommes de triangulaires et ainsi de suite. Pascal donne donc sa démonstration pour un cas particulier, à savoir 15. Mais il remplace les coefficients par des lettres pour donner à son raisonnement un air de généralité [51]. Nous nous permettons de réécrire la preuve dans notre langage moderne afin d'en saisir la généralité :

$$\begin{aligned}
\left(\!\binom{n}{k}\!\right) &= \sum_{i=0}^{k}\left(\!\binom{n-1}{i}\!\right)\\
&= \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right)+\sum_{i=0}^{k-1}\left(\!\binom{n-1}{i}\!\right)\\
&= \sum_{i=0}^{k}\left(\!\binom{n-2}{i}\!\right)+\sum_{i=0}^{k-1}\left(\!\binom{n-1}{i}\!\right)\\
&= \left(\!\binom{n-2}{k}\!\right)+\sum_{i=0}^{k-1}\left(\!\binom{n-2}{i}\!\right)+\sum_{i=0}^{k-1}\left(\!\binom{n-1}{i}\!\right)\\
&\vdots\\
&= \left(\!\binom{1}{k}\!\right)+\sum_{i=0}^{k-1}\left(\!\binom{1}{i}\!\right)+\sum_{i=0}^{k-1}\left(\!\binom{2}{i}\!\right)+\cdots+\sum_{i=0}^{k-1}\left(\!\binom{n-1}{i}\!\right)\\
&= 1+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\!\binom{j}{i}\!\right).
\end{aligned}$$

Sur le schéma, cela donne ceci :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | | |
| 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | | | |
| 1 | 5 | 15 | 35 | | | | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | | | | | |

Pascal laisse sous-entendre que le coefficient 1 qu'on ajoute à la somme de la zone grise est le générateur du Triangle, c'est-à-dire le coefficient tout en haut à gauche. Mais la démonstration de Pascal nous montre qu'il s'agit en fait du coefficient ayant pour coordonnée $(k, 0)$, c'est-à-dire ici $\left(\!\binom{1}{k}\!\right)$. Pascal les identifie puisque dans sa construction du Triangle, tous les coefficients en première ligne ou en première colonne sont toujours égaux au générateur. Nous pouvons donc produire le schéma suivant, plus proche de la proposition de Pascal :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | | |
| 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | | | |
| 1 | 5 | 15 | 35 | | | | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | | | | | |

Ici, le coefficient dans la zone gris foncé est égal à la somme des coefficients dans la zone gris clair.

51. Cette utilisation des symboles littéraux est intéressante dans le contexte algébrique de l'époque, mais nous n'en traiterons pas ici

### 3.3.2 Interprétation en terme de table arithmétique générale

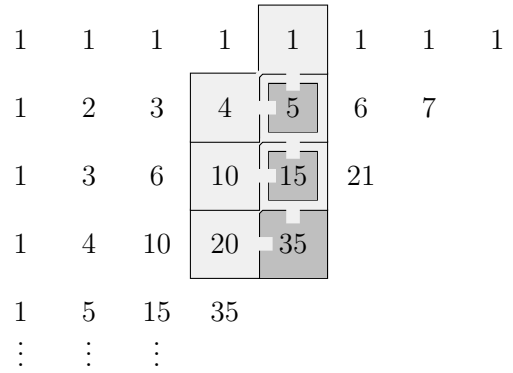
Mais si nous revenons sur la propriété des ordres numériques, dont nous avons dit qu'elle était la conséquence d'une récurrence de la formule du Triangle, on s'aperçoit que dans cette preuve aussi, Pascal a procédé à l'identification des termes de la première ligne. En effet :

$$\begin{aligned}
\left(\!\binom{n}{k}\!\right) &= \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right) + \left(\!\binom{n}{k-1}\!\right) \\
&= \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right) + \left(\left(\!\binom{n-1}{k-1}\!\right) + \left(\!\binom{n}{k-2}\!\right)\right) \\
&\vdots \\
&= \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right) + \left(\!\binom{n-1}{k-1}\!\right) + \cdots + \left(\!\binom{n-1}{1}\!\right) + \left(\!\binom{n}{0}\!\right)
\end{aligned}$$

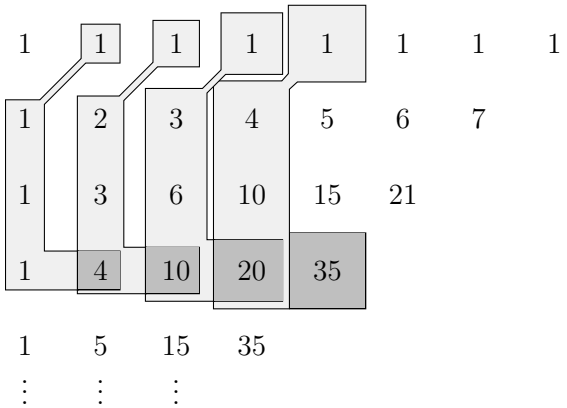
Il faut donc remarquer que $\left(\!\binom{n}{0}\!\right) = \left(\!\binom{n-1}{0}\!\right) = 1$ pour avoir la propriété des ordres numériques correcte :

$$\begin{aligned}
\left(\!\binom{n}{k}\!\right) &= \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right) + \left(\!\binom{n-1}{k-1}\!\right) + \cdots + \left(\!\binom{n-1}{0}\!\right) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \left(\!\binom{n-1}{i}\!\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, contrairement à la propriété des ordres numériques, un coefficient de la table n'est pas égal à la somme de tous les coefficients sur la colonne à sa gauche, en partant de son rang. Il s'agit en fait de tous ces coefficients excepté le premier que l'on replace par celui immédiatement sur sa droite, c'est-à-dire dans la même colonne que le coefficient considéré. Comme tous les coefficients de la première ligne sont égaux entre eux, on s'autorise à ne pas faire ce remplacement et à sommer tous les coefficients sur la colonne.
Ceci s'illustre sur le schéma suivant :




Nous pouvons donc remanier la preuve de Pascal en introduisant cette nuance :



Montrons le formellement :

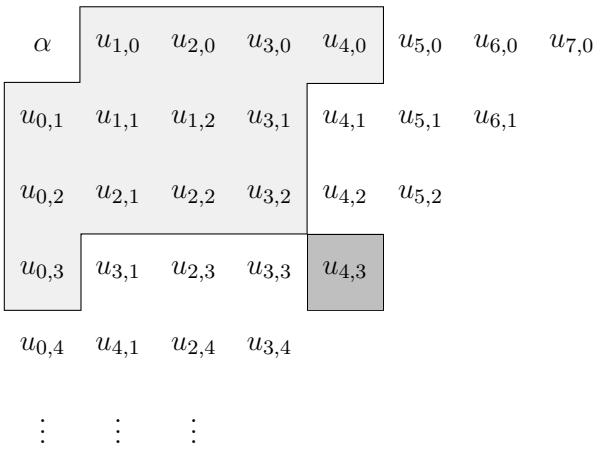
$$\begin{aligned}
\left(\!\binom{n}{k}\!\right) &= \left(\!\binom{n}{0}\!\right) + \sum_{i=1}^{k} \left(\!\binom{n-1}{i}\!\right) \\
&= \left(\!\binom{n}{0}\!\right) + \left(\left(\!\binom{n-1}{k}\!\right) + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\!\binom{n-1}{i}\!\right)\right) \\
&= \left(\!\binom{n}{0}\!\right) + \left(\!\binom{n-1}{0}\!\right) + \sum_{i=1}^{k} \left(\!\binom{n-2}{i}\!\right) + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\!\binom{n-1}{i}\!\right) \\
&= \left(\!\binom{n}{0}\!\right) + \sum_{i=1}^{k} \left(\!\binom{n-2}{i}\!\right) + \sum_{i=0}^{k-1} \left(\!\binom{n-1}{i}\!\right) \\
&= \left(\!\binom{n}{0}\!\right) + \left(\!\binom{n-2}{k}\!\right) + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\!\binom{n-2}{i}\!\right) + \sum_{i=0}^{k-1} \left(\!\binom{n-1}{i}\!\right) \\
&\vdots \\
&= \left(\!\binom{n}{0}\!\right) + \left(\!\binom{1}{k}\!\right) + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\!\binom{1}{i}\!\right) + \sum_{i=0}^{k-1} \left(\!\binom{2}{i}\!\right) + \cdots + \sum_{i=0}^{k-1} \left(\!\binom{n-1}{i}\!\right) \\
&= \left(\!\binom{n}{0}\!\right) + \sum_{i=0}^{k-1} \left(\!\binom{1}{i}\!\right) + \sum_{j=2}^{n-1} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\!\binom{j}{i}\!\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, en suivant précisément le déroulement de toutes les relations issues de la formule du Triangle, on obtient le schéma suivant, où le coefficient dans la zone gris foncé et égal à la somme des coefficients dans la zone gris clair.

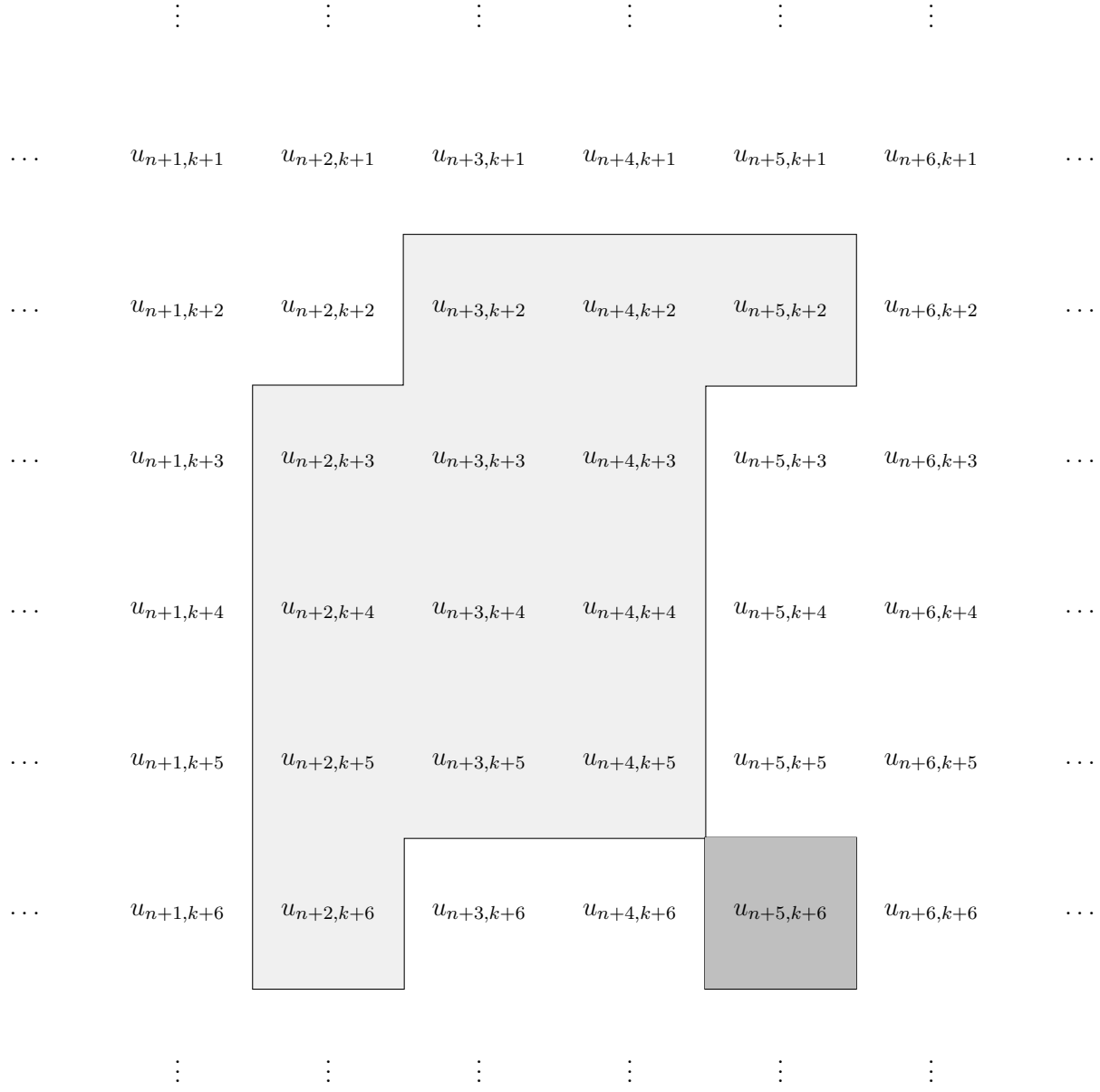
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | | |
| 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | | | |
| 1 | 5 | 15 | 35 | | | | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | | | | | |

On remarque alors que le générateur n'est pas pris en compte dans ce calcul. En effet, contrairement à ce qu'écrit Pascal dans son traité, le coefficient en haut à gauche n'est absolument pas générateur des coefficients du triangle, et pourrait être choisi arbitrairement sans que rien ne soit changé aux autres termes.
C'est bien cette relation-ci qui prévaut dans un triangle complètement général, à savoir un Triangle où les suites sur la première ligne et la première colonne sont des suites quelconques et où tous les coefficients vérifient la relation du Triangle :

$$u_{n,k} = u_{n-1,k} + u_{n,k-1}$$

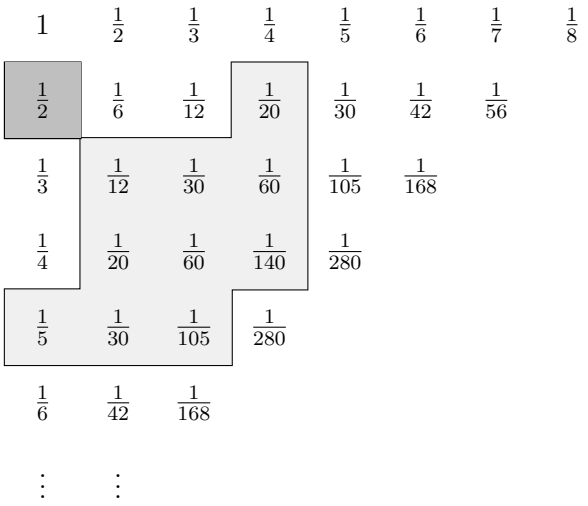



On constate bien qu'aucun des termes $u_{n,k}$ ne dépend du terme $\alpha$ en position $(0,0)$. Ceci explique pourquoi ce terme est nécessairement exclu de la zone gris clair.
En fait, comme la propriété que nous avons montré est entièrement générale et ne dépend pas d'autres choses que de la formule du Triangle, elle est donc valable sur n'importe quelle zone du Triangle où la formule est vérifiée. Ainsi, il n'est pas du tout nécessaire de mener la zone gris clair jusqu'à la première ligne ou la première colonne, mais cette zone peut s'arrête à n'importe quel endroit du triangle :

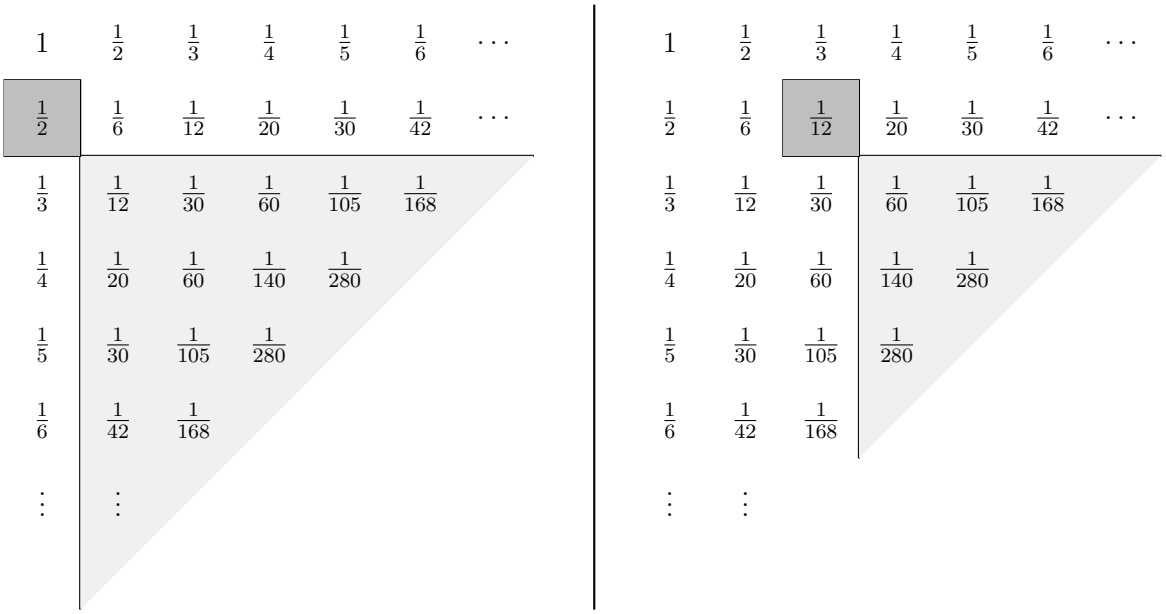


**Conséquence sur le triangle harmonique**

Le Triangle Harmonique est un Triangle arithémétique inversé. La formule du triangle y est vérifiée mais elle se trouve renversée lorsqu'on représente graphiquement le Triangle Harmonique :



Ici, la zone gris clair peut-être prolongée à l'infini, si bien qu'on obtient la propriété suivante : au sein du triangle harmonique, n'importe quel coefficient est égale à la somme de tous les coefficients compris dans le quadrant strictement inférieur droit :



En réalité, cette propriété fonctionne sur n'importe quel triangle qui se prolonge à l'infini, ce qui est le cas pour tous les triangles de différences. C'est ce que Leibniz touche du doigt lorsqu'il tente de décrire la manière dont se propagent les termes primitifs au sein des triangles de différence dans le *De Artibus Resolvendi Progressionem Irreductam* (A VII, 3, N.4) [52].

52. *Cf* la citation p.**??**

## Conclusion

Nous aurions pu nous attendre à ce que, après avoir développé les tables de différences successives, c'est-à-dire la théorie de différences finies, Leibniz ait ensuite découvert le Triangle Harmonique, comme application ou cas particulier de sa précédente invention. Il décrit d'ailleurs la découverte du triangle harmonique comme une application du triangle arithmétique dans l'*Historia et Origo Calculi Differentialis*[53] Mais l'inverse peut également s'envisager, à savoir que la découverte des propriétés du Triangle Harmonique ait conduit le jeune Leibniz sur la piste de la théorie des différences successives. Mais, comme souvent dans l'histoire d'une découverte, la quête d'une explication linéaire reste aussi vaine qu'attrayante. Nous avons montré que Leibniz consacre de nombreux travaux à la table des inverses des nombres figurés, et la combine avec d'autres tables sans jamais apercevoir le triangle harmonique comme table de différences. Pourtant, ceci n'empêche nullement le jeune philosophe de développer de nombreuses techniques liées aux tables, ni même à développer progressivement une théorie des différences finies, comme nous le verrons dans le dernier chapitre de cette partie.
Néanmoins, on ne peut pas ignorer le parallèle qui existe entre la propriété des sommes bidimensionnelle au sein du triangle harmonique et les essais sur les sommes bidimensionnelles que nous avons décrites et que Leibniz mène au sein du *Tabulæ Serierum Fractionum* (A VII, 3, N.11) et du *De Summis Serierum Fractionum* (A VII, 3, N.12). De fait, la première est une conséquence directe de la formule de Pascal et donc du fait que le triangle harmonique est une table de différence, tandis que les seconds s'appliquent sur la table des inverses des nombres figurés qui n'est pas une table de différences, comme nous l'avons souligné. Peut-on dire alors que ces travaux présagent de la découverte de la structure du triangle harmonique du fait de cette propriété de sommation bidimensionnelle qu'ils partagent ? Cela nous paraîtrait largement exagéré. Il faut d'abord souligner la faible connaissance du traité de Pascal qu'avait Leibniz à l'orée de l'année 1673. De plus, nous avons pu montrer que les distinctions entre tables des différences et tables de familles de progressions ne sont pas si claires chez le jeune philosophe, et l'analyse précise des manuscrits ne peut pas nous permettre d'affirmer qu'il avait dès lors pris conscience du lien crucial qui relie les triangles de différences et sa tables des inverses des nombres figurés. Cela étant, ces travaux ont fait émerger nombre de concepts et d'outils fort utiles et nécessaires pour qu'il puisse s'engager dans cette voie.

53. En effet, Leibniz dit avoir développé le triangle harmonique sur l'exemple du triangle arithmétique de Pascal. *Cf* p.139.

# Chapitre 4

# Le Triangle Harmonique

## Introduction

L'histoire de cet invention est rapportée à plusieurs reprises par Leibniz [1]. Elle débute systématiquement par la mention d'un problème que Huygens aurait proposé à Leibniz, lors de leurs premiers échanges : trouver la valeur de la somme infinie des inverses des nombres triangulaires :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{T_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\!\binom{n}{2}\!\right)} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots$$

Nous avons vu que cette question guide Leibniz vers un problème plus général, à savoir le calcul de la somme infinie des inverses des nombres pyramidaux, triangulo-triangulaires, pyramido-triangulaires, pyramido-pyramidaux etc., c'est-à-dire des fractions unitaires dont les numérateurs sont tous les coefficients d'un certain ordre numérique :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\!\binom{n}{p}\!\right)} &= \frac{p!}{1.2\dots p} + \frac{p!}{2.3\dots(p+1)} + \frac{p!}{3.4\dots(p+2)} + \frac{p!}{4.5\dots(p+3)} + \dots \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{p+1} + \frac{2}{(p+1)(p+2)} + \frac{2.3}{(p+1)(p+2)(p+3)} + \dots \end{aligned}$$

Entre fin 1672 et début 1673, Leibniz fait part de sa formule générale, à savoir que cette somme vaut $\frac{p}{p-1}$, à Paris et à Londres. Les Anglais lui font dès lors savoir que ces résultats leur étaient déjà bien connus, notamment à travers les travaux du mathématicien italien Pietro Mengoli, qui l'avait déjà démontré dans les années 1650. Leibniz n'est visiblement pas convaincu par le fait qu'il s'agisse du même résultat, et continuera à proclamer sa paternité sur le triangle harmonique durant de longues années, comme en témoigne cet extrait d'une lettre à Weigel de 1679 :

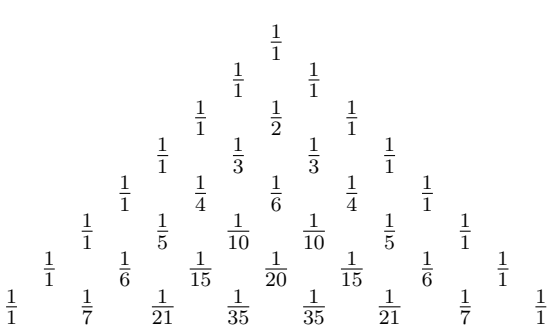
> *Sans nul doute, j'ai remarqué le premier et même démontré le théorème suivant qui semble n'être venu à l'esprit de personne au sein des choses arithmétiques découvertes jusqu'ici par nos amis.* [2]

Cette question de la paternité leibnizienne du triangle harmonique ne montre, à première vue, de l'intérêt que pour une approche historique externaliste, qui y verrait l'occasion de mieux comprendre les enjeux institutionnels qui se présentaient à une jeune homme, âgé de moins de trente ans, dépourvu de formation mathématique poussée et souhaitant intégrer les cercles académiques parisiens ou londoniens. Mais cette question présente également un intérêt pour une approche internaliste, qui ne se borne pas à une quête de panthéonisation. En effet, concernant le triangle harmonique, la question de sa paternité soulève à nouveau la question de sa définition. Comme nous l'avons dit, nous avons considéré jusqu'ici que le triangle harmonique est la table de différences constitués des inverses des nombres combinatoires

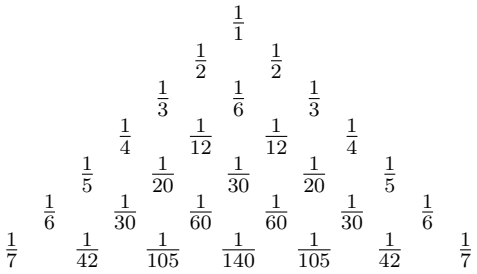
1. *Cf* comme on l'a vu [46] G.W. Leibniz, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, *ed.* K.I. Gerhardt, Hahn, 1846 ; ou A II, 1, N.109, Leibniz à Gallois, *Accessio ad Arithmeticam Infinitorum*, fin 1672 ; mais aussi A VII, 3, N.$53_3$, *Scheda Exigua*, 1675, ou encore A III, 6 A, N.84, Lettre au Marquis de L'Hospital, 1694

2. A III, 2, N.345, Lettre à Weigel, 1679 : « Notavi nimirum primus atque etiam demonstravi theorema sequens quod nulli inter arithmetica hactenus inventa cedere visum est amicis »

multipliés par un certain coefficient. La table simplement constituée des inverses des nombres figurées, nous l'avons nommée trivialement : table des inverses des nombres figurés. Ainsi, de notre point de vue d'observateur, nous avons clairement distingué ces deux tables :



tables des inverses
des nombres figurés



triangle harmonique

Or, en portant précisément l'attention sur cet aspect, on remarque que Leibniz a un usage très ambigu du terme « triangle harmonique » (« *triangulum harmonicum* »), désignant tantôt l'une tantôt l'autre table et ce jusque dans l'*Historia et Origo Calculi Differentialis*, comme nous l'avons vu. S'il serait plus clair et intelligible de faire une distinction nette entre la découverte du triangle harmonique et la résolution du problème de Huygens, les deux résultats sont régulièrement présentés ensembles et confondus par le philosophe.

Afin de tracer du mieux possible les contours de cet objet ambivalent, il nous faut donc à présent quitter les brouillons et fragments, où la pensée du jeune philosophe entre en gestation et façonne ses outils heuristiques, pour considérer les façons dont Leibniz a exposé son résultat dans des présentations abouties et achevées, à des fins de publications plus ou moins immédiates.

## 4.1 L'*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum*

La première présentation de la solution au problème de Huygens apparait très tôt, dans la lettre rédigée à l'intention de l'abbé Gallois, vers la fin de l'année 1672. Cette lettre, que nous avons déjà mentionnée à de nombreuses reprises, est en fait un court traité que Leibniz intitule :

> *Introduction à l'arithmétique des infinis, où l'on montre également que le nombre maximum c'est-à-dire le nombre infini de tous les nombres, est impossible, ou bien encore, qu'il est nul ; et on prouve même à l'aide d'exemple que ce que nous prenions pour des axiomes sont en fait des choses démontrables.* [3]

L'*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum* traite de philosophie des mathématiques et en particulier du concept de l'infini ainsi que de son lien avec l'axiome selon lequel le tout est toujours plus grand que sa partie.

### 4.1.1 Contenu du Traité

#### Corpus manuscrit

On dispose de quatre sources manuscrites sur ce traité [4]. Ceci témoigne du temps que Leibniz a consacré à ce projet et donc l'importance qu'il lui accordait.

- ⋆ La version finale (notée $D$ par les éditeurs) adressée explicitement à Gallois.
- ⋆ Une version globale (notée $C$ par les éditeurs) qui contient encore quelques ratures et modifications marginales mais qui reste extrêmement proche de la version finale $D$.
- ⋆ Une première version de travail (notée $A$ par les éditeurs) qui contient les résultats mathématiques ainsi que la réflexion sur l'infini et le zéro.
- ⋆ Une deuxième version de travail (notée $B$ par les éditeurs) qui contient la tentative de formalisation de preuve de l'axiome du tout et de la partie.

Seul un court paragraphe sur la nature des axiomes [5] est commun aux pièces $A$ et $B$. Le traité résulte donc de l'assemblage de ces deux travaux. Un développement sur la conception des idées et de la pensée chez Hobbes à la toute fin de la pièce $A$ [6] ainsi qu'un autre développement sur les idées et la caractéristique universelle dans la seconde page de la pièce $B$ [7] ne réapparaissent pas au sein des versions $C$ et $D$. On trouve également dans les versions préparatoires quelques calculs et schémas de différences hors de propos mais qui correspondent à des progressions que Leibniz étudie durant cette période [8]. Pour le reste, nous disposons donc de trois versions de chaque élément.

Dans le première partie du traité, Leibniz présente certains résultats mathématiques liés aux sommes infinies. Il donne d'abord la somme des progressions géométriques décroissantes qui est selon lui un résultat bien connu, puis il enchaine avec sa propre découverte, à savoir les sommes de inverses des nombres figurés. Il expose dans un premier temps l'algorithme qui permet d'obtenir la valeur des sommes à partir des rangs des progressions. Il construit ensuite une table qui présente les résultats qu'il a obtenus, à savoir le développement de chaque progression des inverses des nombres figurés, les rangs des progressions, que

3. A II, 1, N.109, Lettre à Jean Gallois, fin 1672 - p.342 : « Accessio ad Arithmeticam Infinitorum, ubi et ostenditur numerum maximum seu numerum infinitum omnium numerorum impossibilem esse sive nullum ; item quæ pro axiomatis habentur, demonstrabilia esse evincitur exemplis. »

4. Ce texte a connu trois éditions critiques dans les volumes de l'*Akademie*. La première dans la première édition de A II, 1 (1926) au N.109 ne concerne que l'une des quatre sources. La seconde dans A III, 1, N.2 date de 1976 et transcrit intégralement les quatre documents. Enfin, la troisième se trouve dans le seconde édition de A II, 1, également au N.109 et constitue l'édition de ce texte la plus aboutie dont on dispose. Dans l'appareil critique, cette troisième édition réunit les versions notées $A$ et $B$ dans la deuxième, et pose de nombreux passages comme variantes de sortes que la distinctions entre les quatre versions est moins aisée. Pour cette raison, nous gardons la notation de l'appareil critique de la deuxième édition A III, 1, N.2. Nous citons à partir de A II, 1, N.109, sauf lorsque nous comparons différentes verions, auxquels cas nous citons dans A III, 1, N.2.

5. A III, 1, N.2, Lettre à Galois, fin 1672 - p.12, l.5-20 ainsi que p.13, l.1-3 (seulement la deuxième colonne)

6. A III, 1, N.2, Lettre à Galois, fin 1672 - p.13, l.1-7 (seulement la première colonne) et de p.13, l.8 à p.15, l.4.

7. A III, 1, N.2, Lettre à Galois, fin 1672 - de p.16, l.4 à p.18, l.23.

8. Notamment la suite $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{64}$; $\frac{1}{1024}$ etc. dont on retrouve la première trace dans le *De Progressionibus et Arithemtica Infinitorum* (A VII, 3, N.6, p.82) de Automne-Décembre 1672.

Leibniz nomme « exposants » (« *exponens* ») et la valeurs de chaque somme. On note alors la présence d'une nouvelle progression, ayant un exposant nul, et constituée des fractions *a priori* indéterminées $\frac{0}{0}$ :

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | etc. | EXPOSANTS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{0}{0}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | etc. | |
| $\frac{0}{0}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | etc. | |
| $\frac{0}{0}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{15}$ | etc. | |
| $\frac{0}{0}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{35}$ | etc. | |
| etc. | etc. | etc. | etc. | etc. | etc. | etc. | |
| $\frac{0}{0}$ | $\frac{0}{0}$ | $\frac{1}{0}$ | $\frac{2}{1}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{4}{3}$ | etc. | SOMMES |

Leibniz donne ensuite une interprétation philosophique de cette première colonne qui l'amène à une réflexion sur l'infini et le zéro. Puis il conclut par une tentative de formalisation de preuve de l'axiome du tout et de la partie.

### Vocabulaire et définitions

Au moment d'introduire son résultat sur les sommes des inverses des nombres figurés, Leibniz s'attarde sur la définition des termes. L'anecdote du défi de Huygens constitue l'entrée en matière, ce qui deviendra par la suite traditionnel dès lors qu'il évoque ce résultat au sein d'une lettre. Cela le conduit à débuter par le problème initial des inverses des triangulaires pour pouvoir le généraliser aux inverses des pyramidaux, des triangulo-triangulaires, des triangulo-pyramidaux et des pyramido-pyramidaux. Il commence ainsi par décrire ces nombres comme les inverses des nombres figurés des premières dimensions :

> *Au sein de ces mêmes travaux, j'ai en réalité découvert pour ma part la méthode universelle pour sommer les séries des fractions ou des rapports non seulement de la progressions des triangulaires, dont les différences des termes sont les nombres naturels, mais aussi des pyramidaux, dont les différences des termes sont les nombres triangulaires, des triangulo-triangulaires dont les différences sont les pyramidaux, des triangulo-pyramidaux, dont les différences sont les triangulo-triangulaires, des pyramido-pyramidaux dont les différences sont les triangulo-pyramidaux, et ainsi de suite jusqu'à l'infini.* [9]

Ainsi, Leibniz commence par énoncer la règle des ordres numériques, à savoir qu'un terme d'un ordre donné est la somme des termes de l'ordre précédent, ou encore, comme il le dit ici, que la différence entre deux termes successifs d'un ordre donné est un terme de l'ordre précédent. Leibniz évoque les autres appellations que ces nombres peuvent avoir dans la littérature :

> *Ce sont les nombres qui appartiennent aux séries que certains appellent les ordres numériques, d'autres les combinatoires, et d'autres les nombres en progression symétrique. Pascal a exposé de façon raisonnablement complète leurs nombreux usages dans son Triangle arithmétique, c'est-à-dire le traité qu'il écrivit pour des travaux consacrés à ces-mêmes nombres. Pour ma part, j'ai coutume d'appeler ces nombres en progression arithmétique répliquée.* [10]

9. A II, 1, N.109, Lettre à Jean Gallois, fin 1672 - p.345 : « Ego vero eadem opera inveneram methodum universalem summandi series fractionum sive rationum nun huius tantum progressionis trangularium, cum differentiæ terminorum sunt numeri naturales, sed et pyramidalium, cum differentiæ terminorum sunt numeri trangulares, et trangulo-triangularium, cum differentiæ sunt pyramidales, et triangulo-pyramidalium, cum differentiæ sunt triangulo-triangulares, et pyramido-pyramidalium, cum differentiæ sunt triangulo-pyramidales, et ita in infinitum. »

10. A II, 1, N.109, Lettre à Jean Gallois, fin 1672 - p.345 : « Et hi sunt numeri, quorum series alii vocant ordines numericos, alii combinatorios, alii numeros progressionis symmetricæ. Pascalius eorum usus sane multos exposuit in Triangulo arithmetico seu tractatu, quem de illis dedita opera scripsit. Ego numeros appellare soleo progressionis arithmeticæ replicatæ. »

On voit que "combinatoire" et "en progression symétrique" sont des qualificatifs qui se réfèrent tous les deux à ce qu'on appelle aujourd'hui les coefficients binomiaux. C'est une famille infinie de listes finies et symétriques. Le nombre de partie à $k$ éléments d'un ensemble à $n$ éléments est égal au $k$-ième coefficient dans la puissance $n$-ième du binôme, c'est-à-dire :

$$\binom{n}{k}$$

Alors que "ordres numériques" et "nombres figurés" font références à ce que nous appelons, en nous fondant sur l'usage anglo-saxon, les "nombres multiensembles" (*multiset numbers*), c'est-à-dire le nombre de paquets de $k$ éléments, chaque élément pouvant se répéter, dans un ensemble à $n$ éléments [11]. C'est une famille infinie de suites infiniment croissantes. Le nombre figuré de dimension $n$ et de coté $k$ est égal au $(k-1)$-ième terme du $(n+1)$-ième ordre numérique, c'est-à-dire :

$$\left(\!\binom{n+1}{k-1}\!\right) = \binom{n+k-1}{n} = \left(\!\binom{k}{n}\!\right)$$

Ici Leibniz choisit l'appellation « en progression arithmétique répliquée » (« *progressionis arithmeticæ replicatæ* »). Contrairement à ses dires, ce n'est pas un vocabulaire stable au sein de ses écrits antérieurs. En effet, le vocabulaire que l'on va retrouver jusqu'alors [12], c'est plutôt celui que Leibniz a mis en place au sein de la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8) [13], c'est-à-dire les con$S$naisons pour parler du nombre de combinaisons de $S$ éléments parmi un certain nombre plus grand que $S$. Ce vocabulaire correspond donc aux combinaisons et aux coefficients binomiaux. Au contraire, la dénomination que Leibniz choisit dans l'*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum* (A II, 1, N.109), à savoir "nombre en progressions arithmétiques répliquées", désigne bien les ordres numériques :

> *Ici, ce que j'appelle exposant, c'est le nombre associé à la série, c'est-à-dire le nombre ordinal de réplication, qui exprime pour sûr combien de fois cette réplication s'est effectuée. Ainsi l'exposant de la série* $\frac{1}{1}; \frac{1}{1}; \frac{1}{1}$ *etc. est* 1 *et pour la série* $1; 2; 3; 4$ *etc., l'exposant est* 2*. En effet, dans la première d'une part, l'unité génératrice est la seule répétée, dans la seconde ces réplications ou répétitions se répètent elles-même. Dans la troisième* $1; 3; 6; 10$ *etc. se répètent les réplications des réplications.* [14]

On voit que ce que Leibniz décrit ici n'est rien d'autre que la construction des ordres numériques. Ces "réplications" sont en fait les sommes successives qu'on applique lorsqu'on les construit. Leibniz nous dit-même que l'exposant est « le nombre ordinal de réplication » (« *numerum ordinalem replicationis* »), ce qui achève de consolider cette approche des coefficients à la manière des ordres numériques.
Cette approche de nombres figurés n'est pas classique chez Leibniz, comme nous avons pu le voir, et se démarque de la vision plus combinatoire qu'il avait développée auparavant. Ainsi, le mot exposant prend ici un nouveau sens. Au sein de la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8), on a une suite infinie indéxée par le nombre $n$ de suites finies indexées par l'exposant $k$ alors qu'ici, c'est une suite infinie indexée par l'exposant $k$ de suites infinies indexées par le rang des termes qui n'est pas explicitement désigné. La définition de l'exposant elle-même n'est pas vraiment consistante. Ici, l'exposant des nombres triangulaires est 3 puisqu'il s'agit de la troisième suite. En revanche, dans ses anciennes notations, l'exposant des

11. Les historiens des mathématiques du XVII$^{\text{ème}}$ siècle qui y sont confrontés, appellent cet objet les "nombres de combinaisons avec répétitions. *Cf* la thèse d'Ernest Coumet : [15] E. Coumet, *Œuvres d'Ernest Coumet (Tome 2)*, *éd.* C. Goldstein, Presse Universitaire de Franche-Comté, 2019 - p.49, il note $K(n,p)$ le nombre de « combinaison avec répétition de $p$ objets choisis parmi $n$ ». *Cf* [39] E. Knobloch, *Die Mathematischen Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik : auf Grund fast ausschliesslich handschriftlicher Aufzeichnungen dargelegt und kommentiert*, Steiner, Wiesbaden, 1973 - p.2, il note « KmW » (*Kombinationen mit Wiederholung*) les combinaisons avec répétition.

12. *Cf* A VII, 3, N.3, *De Numeris Combinatoriis*, début/Automne 1672 - le titre est donné par les éditeurs.

13. *Cf* A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, fin mars 1666 - p.172, la définition 11 : « Etant donné l'exposant, on écrit la complexion comme ceci : si l'exposant est 2, alors Com2naison (combinaison), si 3 alors Com3naison (conternaison), si 4 alors Con4naison etc. » (« *Dato Exponente Complexiones ita scribemus : si exponens est 2, Com2nationem (combinationem) ; si 3, Con3nationem (conternationem) ; si 4, Con4nationem, etc.* »)

14. A II, 1, N.109, Lettre à Jean Gallois, fin 1672 - p.346 : « Exponentem hoc loco voco numerum seriei seu numerum ordinalem replicationis, qui scilicet exprimit, quota sit replicatio. Ita seriei $\frac{1}{1}; \frac{1}{1}; \frac{1}{1}$ etc. exponens est 1, seriei $1; 2; 3; 4$ etc. exponens 2. Cum enim in prima tantum semel repetita sit unitas generatrix, in secunda ipsæ replicationes seu repetitiones replicantur, in tertia $1; 3; 6; 10$ etc. repetuntur replicationes replicationum. »

triangulaires est 2 puisqu'il s'agit de faire des combinaisons de deux éléments. Cela étant, ce qui importe ici réside moins dans ce petit décalage du au caractère ordinal du dénombrement (c'est la troisième suite, mais on a fait deux répétitions), que dans ce changement de place qu'occupe l'exposant dans la conception des suites :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-k+k+1-1}{n-k} = \left(\!\!\binom{k+1}{n-k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{k+1}{n'}\!\!\right) \quad \text{avec } n' = n-k$$

Leibniz a interverti le rôle de variables. Une première explication peut se trouver dans la référence qu'il fait au *Traité du Triangle Arithmétique*[15] de Pascal. En effet, Pascal décrit un triangle symétrique, où le coefficient situé en ligne $i$ et colonne $j$ est :

$$\binom{i+j-2}{j-1} = \left(\!\!\binom{i}{j-1}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{j}{i-1}\!\!\right)$$

Pascal a donc indexé ses coefficients à la manière des ordres numériques, ce qui a pu influencer Leibniz, satisfait par l'aspect symétrique de cette manière de faire.

### Une preuve trop longue

Leibniz ne donne pas la preuve de sa découverte quant aux sommes des inverses des nombres figurés. Il donne simplement le résultat ainsi que la table, comme nous le verrons dans la section suivante. Il promet pourtant de donner la preuve plus tard.

⋆ Dans la version $A$ :

> *Cela étant, la méthode pour trouver ce résultat ainsi que sa démonstration et celle pour rassembler dans une somme de nombreuses autres fractions ou rapports continument décroissants jusqu'à l'infini, je leur rendrai justice lorsqu'il me sera donné le loisir de les mettre en ordre.* [16]

⋆ Dans les versions $C$ et $D$ :

> *Cela étant, la méthode pour trouver ce résultat ainsi que sa démonstration, bien qu'elle soit tout à fait prolixe et qu'elle requiert de nombreux lemmes, je lui rendrai justice en la publiant un jour avec de nombreuses autres choses du même genre lorsqu'il me sera donné le loisir de les mettre en ordre.* [17]

On trouve des preuves du résultat, présentées comme telles, dans des manuscrits postérieurs de 1674 et 1676 (nous allons les traiter à la section suivante). On pourrait penser, comme ce fut sans doute le cas pour quelques commentateurs, que la preuve que Leibniz donne au sein de ces pièces plus tardive correspond à cette démonstration qu'il promet ici de publier plus tard. Cela paraitrait pourtant très étrange, puisque ces preuves qu'il donne plus tard ne nécessitent pas le moindre lemme et sont plutôt succinctes. C'est d'ailleurs ce que remarque D. Mahnke dans un commentaire qu'il donne sur un article de 1931 rédigé entre autre par J. Hofmann, son élève :

> *La preuve qui est donnée en 1676 ne provient vraisemblablement pas de l'année 1672. A la fin de cette dernière année, lorsqu'il écrit l'"Accessio ad Arithmeticam infinitorum", Leibniz ne mentionne que le résultat du problème qu'il consigne dans un tableau qui correspond presqu'à la table donnée dans le "Origo inventionis", et il promet de publier plus tard cette preuve laborieuse qui demanderait de nombreux lemmes, lorsqu'il aurait plus de loisir à ces discussions. On peut voir très clairement à quel point il n'est alors que très peu rodé à l'élaboration de preuves rigoureuses dans ce domaine lorsqu'on*

15. [80] B. Pascal, *Traité du Triangle Arithmétique et traités connexes* dans *Œuvres de Blaise Pascal*, Hachette, Paris, Vol.3 (1923), Ch.64, p.433

16. A III, 1, N.2, Lettre à Jean Gallois, fin 1672 - p.10 : « Methodum autem ista inveniendi ac demonstrandi, cum multis aliis fractionibus sive rationibus continue in infinitum decrescentibus in unam summam collectis iuris faciam, ubi majus digerendi otium suppetierit. »

17. A III, 1, N.2, Lettre à Jean Gallois, fin 1672 - p.10 : « Methodum autem ista inveniendi ac demonstrandi, cum admodum prolixa sit et multis lemmatis indigeat, aliquando cum multis ejusdem generis, ubi maius digerendi otium suppetierit, publici iuris faciam. »

*considère ses affirmation sur le « nombre infini de tous les nombres », qu'il souhaite identifier avec le 0 et non avec le 1 comme Galilée.* [18]

Le jugement de Mahnke est un peu sévère et nous tenterons de le nuancer lorsque nous traiterons de cette problématiques du nombre infini de tous les nombres. Cependant, nous approuvons sa position quant au fait que la preuve que nous promet Leibniz dans l'*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum* (A II, 1, N.109) n'a jamais été réellement retrouvée, de façon claire et directe. C'est d'ailleurs l'un des enjeux qui justifie l'étude que nous menons dans ce chapitre. Une preuve laborieuse et longue n'est pas impossible, nous avons pu le constater au travers de la *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ* de Mengoli, où ce résultat est démontré au moyen d'un long raisonnement et de nombreux lemmes, le mathématicien italien y consacrant un ouvrage entier. Mais l'étude des manuscrits nous a bien montré que Leibniz n'a pas du tout travaillé dans la même voie que celle qu'avait choisie Mengoli, ni même d'ailleurs celles de Huygens ou de Brouncker, qui n'étaient valable que pour la somme des inverses des triangulaires. Il est donc raisonnable de supposer, comme Mahnke le sous-entend clairement, que Leibniz ne dispose alors pas de preuve rigoureuse, mais que ces travaux lui ont clairement fait voir que cette preuve serait, lorsqu'il l'aura trouvée, longue et laborieuse.
La légère différence entre la citation de la version de travail $A$ et celle des versions abouties $C$ et $D$ peut nous donner des clés supplémentaires quant à l'interprétation de cette preuve promise. Dans la version $A$, la promesse de preuve ne concerne pas seulement les sommes des inverses des nombres figurés mais également toutes une famille de sommes sur lesquelles Leibniz a travaillé. Dans les versions $C$ et $D$, Leibniz ajoute simplement qu'il accompagnera sa démonstration de « nombreuses autres choses du même genre » (« *cum multis ejusdem generis* »), mais on ne comprend pas qu'il s'agit en fait de donner une méthode beaucoup plus générale. De fait, ce pourrait être une méthode universelle telle que la décomposition des fractions qu'on trouve dans le *De Summa Numerorum Triangulorum Reciprocorum* (A VII, 3, N.1) et le *Differentiæ Numerorum Harmonicum et Reciprocorum Triangularium* (A VII, 3, N.2) et qu'il a tenté de formalisé dans le *De Differentiis Progressionum Decrescentium* (A VII, 3, N.5), ainsi que le *De Summis Serierum Fractionum* (A VII, 3, N.12), qui est postérieur à l'*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum* (A II, 1, N.109). Cette méthode universelle de résolution parait très difficile à Leibniz, mais pas impossible. Ce peut-être sur cette base qu'il a surévalué la taille de la présentation de sa méthode de découverte ainsi que sa démonstration. Pour consolider notre argumentaire, notons que ce passage sur la promesse d'une future démonstration est rayé dans la version de travail $A$, où Leibniz fait peut-être référence à une démonstration qu'il ne possède pas, alors qu'il est maintenu au sein des versions abouties $C$ et $D$, dans lesquelles Leibniz s'est restreint à la démonstration de sommes particulières.

### 4.1.2 Extension du résultat

Le point central du traité semble être l'extension que Leibniz fait du résultat pour en déduire la somme de série constante des unités, ainsi que l'interprétation qu'il en donne. Une telle extension reste totalement absente de ces écrits mathématiques sur le sujet [19], ce qui peut interroger sur la valeur que Leibniz lui donne. Cette analogie, située à mi-chemin entre l'induction fructueuse et le prolongement hors de propos, est surement la raison qui pousse Leibniz à écrire ce traité et peut-être même celle qui le dissuadera de le publier finalement [20].

18. [35] J. E. Hofmann, H. Wieleitner et D. Mahnke, *Die Differenzenrechnung bei Leibniz*, Sitzungsberichte der Preussischen *Akademie* der Wissenschaften, 1931, p. 562-590 - Commentaire de D. Mahnke, p.593-594 : « Der im Februar 1676 gegebene Beweis stammt wohl kaum schon aus der Jahre 1672. In der gegen Ende dieser Jahres geschiebenen "*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum*" trägt Leibniz nur das Ergebnis in Gestalt einer Tabelle vor, die mit der in der "*Origo inventionis*" gegebenen fast überstimmt, und verspricht dann den Beweis, der sehr langwierig sei und vieler Hilfsätze bedürfe, später zu veroffentlichen, wenn er mehr Muße zu Auseinandersetzung haben werde. Wie wenig er damals zu strengen Beweisen auf diesem Gebiete befähigt war, sieht man deutlich aus den naiven Ausführungen über den « *numerus infinitus omnium numerorum* », den er nicht wie Galilei mit der 1, sonderne mit der 0 vergleichen wissen will. »

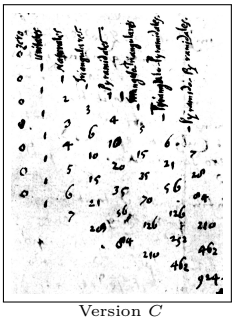
19. Exception faite d'une table à la fin du *Scheda exigua* (A VII, 3, N.$53_3$, Décembre 1675 / Février 1676 - p.712) où les deux colonnes supplémentaires des unités et des zéros sont ajoutées gratuitement à la fin de la démonstration, sans qu'il n'en soit jamais fait mention auparavant.

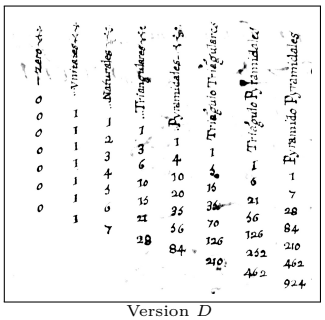
20. Leibniz souhaite publier ce texte au *Journal des Sçavans*, mais ce dernier subit une longue pause dans sa publication entre Décembre 1672 et Janvier 1674.

**Tables dans l'*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum***

Dans les versions $A$, $C$ et $D$, Leibniz donne une table pour ces "nombres en progression arithmétique répliquée".

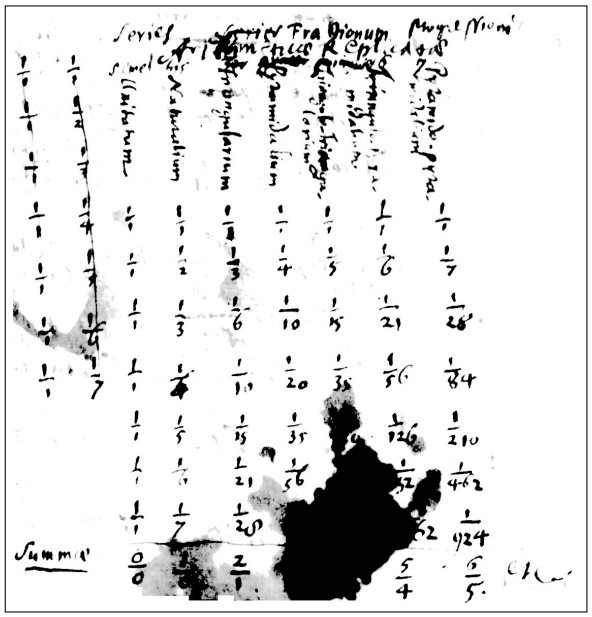
Version $A$

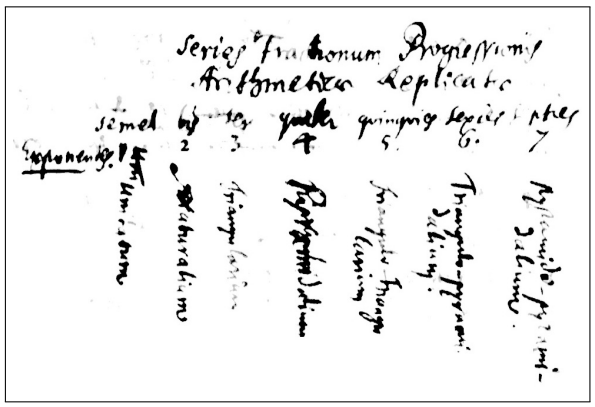

Version $C$


Version $D$

Le renversement du rôle de l'exposant a pour conséquence un renversement de la table par rapport à celle du *De Arte* (A VI, 1, N.8) [21] :
On constate d'abord que Leibniz a systématiquement donné une forme triangulaire à ces tables, en décalant vers le bas progressivement chaque colonne. On voit que le triangle est équilatéral dans la première version de travail, ce qui trahit probablement la méthode concrète qu'emploie Leibniz pour le construire, c'est-à-dire au moyen de la formule de Pascal, chaque terme étant égal à la somme des deux qui sont en haut et à gauche de lui. Ainsi, bien que Leibniz aborde les coefficients binomiaux sous l'angle des ordres numériques, leur construction reste celle des nombres combinatoires. Là encore, on peut constater à quel point la structure de la table peut être riche en indices sur la manière dont son auteur conçoit et organise les termes d'un point de vue mathématique. On peut également remarquer qu'il y a une colonne supplémentaire dans le schéma de la version $A$ qui correspond à la dimension supérieure au pyramido-pyramidaux (qui seraient donc les triangulo-triangulo-pyramidaux) et que cette colonne disparait dans les versions abouties, peut-être faute de nom à lui donner.
Leibniz donne ensuite la table des inverses des nombres figurés, dont on avons déjà reproduit le contenu plus haut.

⋆ Dans la version $A$, c'est-à-dire la version de travail, Leibniz réécrit les intitulés des colonnes sur la gauche, après coup, afin d'y rajouter les exposants correspondants.



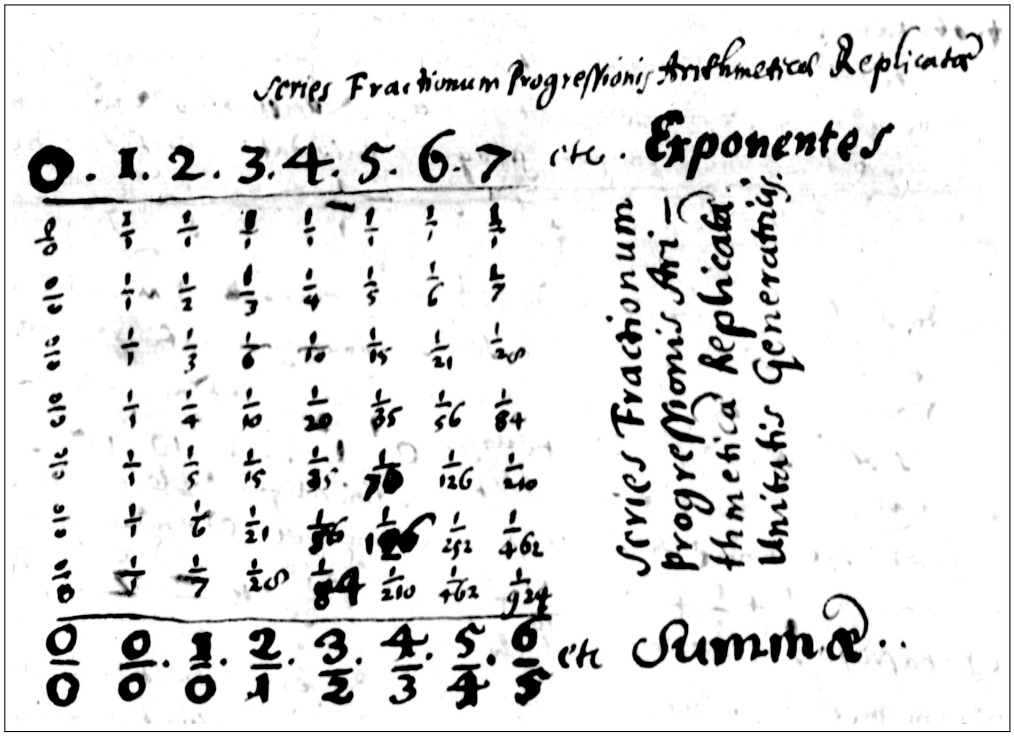


Version $A$

21. *Cf* la table p.69

| | une fois | deux fois | trois fois | quatre fois | cinq fois | six fois | sept fois | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| EXPOSANTS | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| | Unités | Naturels | Triangulaires | Pyramidaux | Triangulo-triangulaires | Triangulo-pyramidaux | Pyramido-pyramidaux | |
| | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | |
| | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{7}$ | |
| | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{21}$ | $\frac{1}{28}$ | |
| | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{35}$ | $\frac{1}{56}$ | $\frac{1}{84}$ | |
| | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{35}$ | $\frac{1}{70}$ | $\frac{1}{126}$ | $\frac{1}{210}$ | |
| | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{21}$ | $\frac{1}{56}$ | $\frac{1}{126}$ | $\frac{1}{252}$ | $\frac{1}{462}$ | |
| | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{28}$ | $\frac{1}{84}$ | $\frac{1}{210}$ | $\frac{1}{462}$ | $\frac{1}{924}$ | |
| SOMMES | $\frac{0}{0}$ | $\frac{1}{0}$ | $\frac{2}{1}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{5}{4}$ | $\frac{6}{5}$ | etc. |

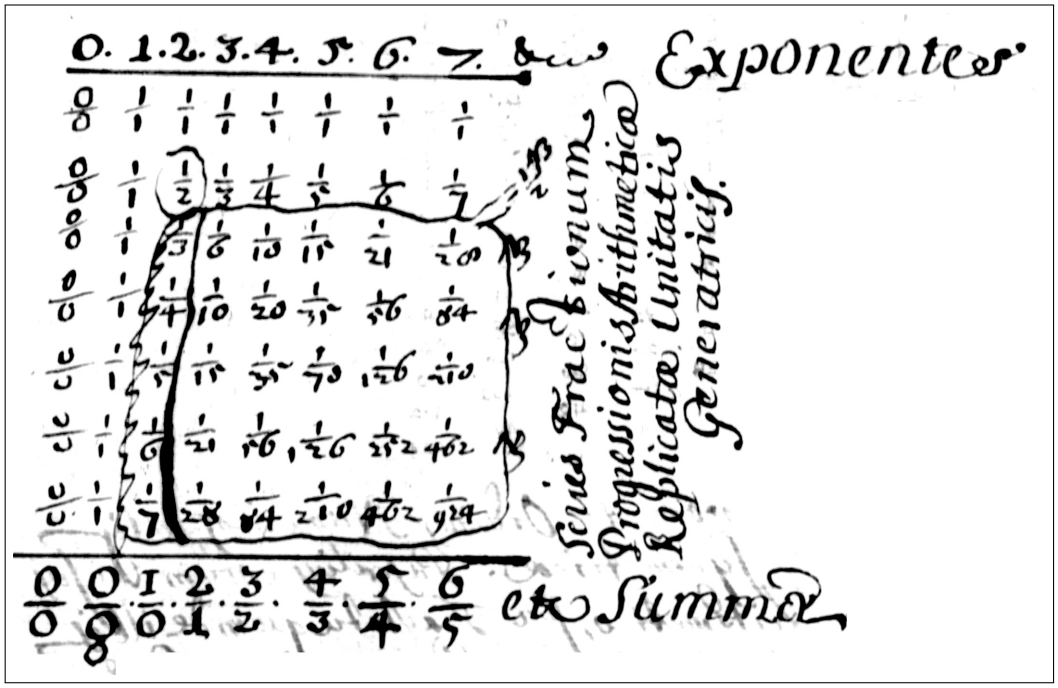
⋆ Dans la version $C$, c'est-à-dire la première version aboutie, Leibniz rajoute la colonne des zéros et abandonne l'intitulé des colonnes.




Version $C$ [22]

22. Il est écrit à la verticale « Séries des fractions en progression arithmétique répliquée, engendrée par l'unité » (« *Series Fractionum Progressionis Arithmeticæ Replicatæ Unitatis Generatricis* »).

⋆ Dans la version $D$, c'est-à-dire la version finale, Leibniz rajoute un encadré du même genre que ceux qu'on trouve dans le *Tabulæ Serierum Fractionum* (A VII, 3, N.11) et du *De Summis Serierum Fractionum* (A VII, 3, N.12).




Version $D$ [23]

En renonçant aux intitulés des colonnes, Leibniz montre qu'il souhaite mettre en valeur la relation qu'il a découverte entre la somme et l'exposant. C'est cette même raison qui le conduit vraisemblablement à rajouter la colonne des zéros, puisqu'il veut pouvoir exprimer cette relation pour tous les exposants, y compris lorsque l'exposant vaut 0.
L'encadré de la version $D$ pourrait poser de grave problème d'anachronismes dans notre analyse, car Leibniz n'est pas censé avoir une telle approche des tables à la fin de l'année 1672. En réalité, il s'agit d'un ajout postérieur comme le précisent les éditeurs de l'*Akademie*. Cette version finale en contient de fait deux : cet encadré, ainsi qu'un titre ajouté au verso du manuscrit. Ce titre est le suivant :

> *Sommes des inverses des nombres figurés ou encore triangle harmonique. Que le nombre de tous les nombres est impossible et démonstration de certains axiomes.* [24]

De façon explicite, Leibniz désigne la table des inverses des nombres figurés comme le triangle harmonique. La première mention du terme « triangle harmonique » (« *triangulum harmonicum* ») se trouve dans le *De Triangulo Harmonico* (A VII, 3, N.30), et est daté de la fin 1673 au plus tôt, soit au moins un an après la rédaction de l'*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum* (A II, 1, N.109), et cette première mention présumée désigne le triangle harmonique dans son sens moderne, à savoir le triangle de différences. Le *De Summis Serierum Fractionum* (A VII, 3, N.12) dans lequel figure le même encadré avec la même erreur de sommation que nous avons déjà analysée, a été rédigé avant le 25 Mai 1673. Ainsi, nous sommes portés à croire que l'ajout du titre est postérieur à la fin de l'année 1673 et que celui de l'encadré précède l'été 1673, bien qu'aucun indice réellement solide ne nous permette d'avoir une véritable conviction sur ce sujet. Néanmoins, un mention très précoce du triangle harmonique, même pour désigner la table des inverses des nombres figurés, nous parait peu vraisemblable, étant donné l'absence totale de cette mention dans tous les autres documents de l'hivers 1672 et du printemps 1673, que ce soient des brouillons ou des documents écrits pour publication. Quant à l'encadrement, la similitude avec la table du *De Summis Serierum Fractionum* (A VII, 3, N.12) est frappante. De plus, l'erreur suggère que Leibniz n'a pas encore trouvé le moyen de transforme cette table en triangle de différences.

23. On retrouve le même texte vertical que dans la version $C$, *Cf* la note précédente.
24. A III, 1, N.2, Lettre à Jean Gallois, fin 1672 - p.2 : « Summæ numerorum figuratis reciprocorum seu trianguli harmonici. Quod numerum omnium numerorum impossibilis, item demonstratio quorundam axiomatum. »

Cette hypothèse nous parait raisonnable, bien qu'elle suppose que Leibniz soit revenu à plusieurs reprise sur ce manuscrit, et ce jusqu'en 1674. Cela pourrait suggérer qu'il n'a pas renoncé rapidement à la publication de ce traité, ou en tout cas à la publication de ce résultat.

### La somme des unités

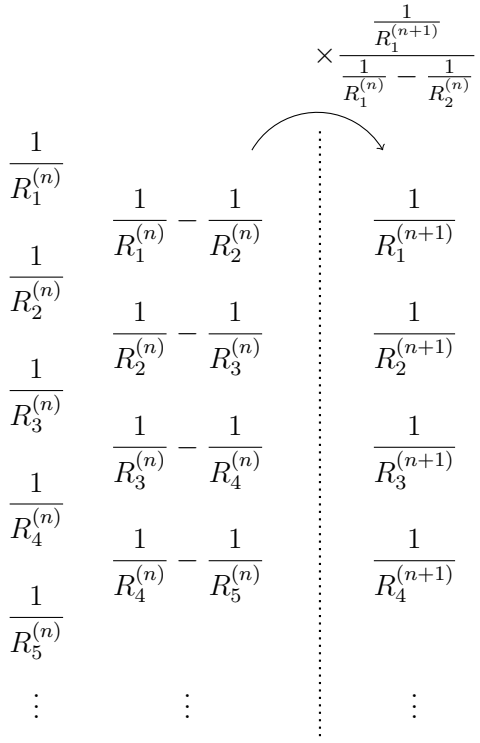
Avant de donner la table des inverses des nombres figurés avec les sommes qu'il a découvertes, Leibniz énonce le principe algorithmique qui donne le résultat :

> *La somme de la série des fractions dont le numérateur est le générateur et les dénominateurs sont les termes d'une certaine progression arithmétique répliquée, ou bien ce qui revient au même, la somme des rapports dans lesquels l'antécédent est l'unité, et le conséquent est le terme d'une certaine progression arithmétique répliquée ayant l'unité pour générateur ; je dis que cette somme vaut la fraction ou le rapport, dont le numérateur ou l'antécédent est l'exposant de la série juste avant, ou l'avant-dernière (en considérant bien-sûr que la série donnée est la dernière), et le dénominateur, ou le conséquent, est en vérité l'exposant de la série qui précèdent juste la précédente, ou l'avant-avant-dernière.* [25]

Ainsi, si l'exposant de la série est $n$, sa somme vaut :

$$\frac{n-1}{n-2}.$$

En effet, on rappelle que Leibniz a constaté que la série des différences de la série des inverses d'exposant $n$ est proportionnelle à la série des inverses d'exposant $n+1$.




Notons $R_k^{(n)}$ le $k$-ième terme de série d'exposant $n$. On a alors :

$$R_k^{(n)} = \left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right)$$

25. A II, 1, N.109, Lettre à Jean Gallois, fin 1672 - p.346 : « Summa seriei fractionum quarum numerator est generator, nominatores sunt termini cujudam progressionis arithmeticæ replicatæ seu quod idem est summa rationum, in quibus unitas est antecedens, consequens est terminus progressionis cujusdam arithmeticæ replicatæ unitatem habentis generatricem ; hæc summa inquam est fractio seu ratio, cujus numerator seu antecedens est exponens seriei proxime præcedentis seu penultimæ (data scilicet supposita ultima), nominator vero seu consequens est exponens seriei proxime præcedentis præcedentem seu antepenultimæ. »

Il existe donc une constante $C_n$ telle que pour tout rang $k$ :

$$C_n \times \left( \frac{1}{R_k^{(n)}} - \frac{1}{R_{k+1}^{(n)}} \right) = \frac{1}{R_k^{(n+1)}}$$

On peut donc déterminer cette constante $C_n$ grace au premier terme :

$$C_n = \frac{\frac{1}{R_1^{(n+1)}}}{\frac{1}{R_1^{(n)}} - \frac{1}{R_2^{(n)}}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{1} - \frac{1}{n}} = \frac{n}{n-1}$$

Or la somme de la série des différences est égale au premier terme de la série. Ainsi, la somme de la série des différences multipliées par un constante, est égale au premier terme multiplié par cette même constante. Ainsi, on obtient que la somme de la série des inverses d'exposant $n+1$ vaut :

$$\frac{1}{R_1^{(n)}} \times C_n = \frac{1}{1} \times \frac{n}{n-1} = \frac{n}{n-1}$$

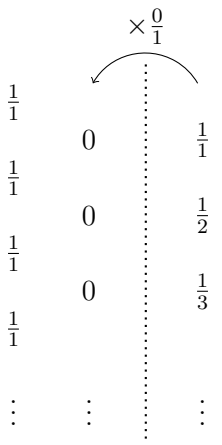
Ce qui donne le résultat énoncé par Leibniz.

On a vu dans les sources manuscrites que Leibniz constate la relation entre la série des inverses d'exposant $n$ et la série des inverses d'exposant $n+1$ à partir de la série harmonique, c'est-à-dire la série des inverses d'exposant $n = 2$. Ainsi le résultat n'est valide qu'à partir de l'exposant suivant, c'est-à-dire l'exposant 3 des inverses des triangulaires qui constitue effectivement le point de départ de son raisonnement. La sommes des séries des inverses pour les exposants 0, 1 et 2 constitue donc une pure extension heuristique du résultat.
Pour connaître la somme de la série d'exposant $n+1$ il nous a fallu établir un raisonnement sur la série d'exposant $n$. Ainsi, la validité du résultat débute un rang après le premier exposant. D'après la description ordinale de l'exposant que fait Leibniz, le premier exposant doit être 1. Ainsi le résultat est valable à partir de la série d'exposant 2. Etudions donc le cas de cette série qui est la série harmonique. En reprenant nos précédentes notations, on a donc $n = 1$ et donc la somme de la série des inverses d'exposant $2 = n + 1$ vaut :

$$\frac{1}{R_1^{(1)}} \times C_1 = \frac{1}{1} \times \frac{1}{0} = \frac{1}{0}$$

On peut être tenté, comme Leibniz, de considéré que la constante $C_1$ est donc infinie, ce qui donne une démonstration de la divergence de la série harmonique. Mais cette constante $C_1$ n'est pas définie, seule son inverse l'est :

$$\frac{1}{C_1} = \frac{\frac{1}{R_1^{(1)}} - \frac{1}{R_2^{(1)}}}{\frac{1}{R_1^{(2)}}} = \frac{\frac{1}{1} - \frac{1}{1}}{\frac{1}{1}} = \frac{0}{1}.$$



On a donc un rapport de proportion entre la série harmonique et la série nulle qui n'est pas réversible et on ne peut pas déduire la somme de la première en fonction de la somme de la seconde.
Mais ce n'est pas l'extension du résultat à l'exposant 2 qui intéresse ici Leibniz mais bien celle jusqu'à l'exposant 1, c'est-à-dire la somme infinies des unités, qu'on peut considérer comme le plus grand des nombres, puisqu'il contient tous les autres. Si l'on considère algébriquement le résultat, alors la somme de cette série devrait valoir :

$$\frac{1-1}{1-2} = \frac{0}{-1}.$$

Mais Leibniz semble considérer que les exposants ne peuvent pas être négatifs. Ainsi l'exposant qui précède l'exposant 0 est encore l'exposant 0, ce qui donne le même résultat pour la somme des unités, c'est-à-dire la série des inverses d'exposant 1 et la somme des zéros, c'est-à-dire la série des inverses d'exposant 0, à savoir :

$$\frac{0}{0}.$$

Tout ceci semble constituer une preuve du fait que le nombre infini est nul.

> *En outre, afin que je ne paraisse pas m'écarte ici du sujet, cela se confirme dans la somme, concernant cet ensemble de séries progressant à l'infini. En effet, dans le cas des sommes de progressions de fractions géométriques, il est clair que la somme de série suivante est égale à la première fraction de la série précédente, et* $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}$ *etc.* $= \frac{1}{2}$*, de même* $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ *etc.* $= \frac{1}{1}$*, et donc* $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}$ *etc.* $= 0$*. Or* $1 + 1 + 1$ *etc. constitue bien le nombre infini de tous les nombres. On constate la même chose dans la table précédente des fractions en progression arithmétique répliquée, où il apparait que* $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ *etc.* $= \frac{1}{0}$ *et* $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}$ *etc.* $= \frac{0}{0} = 0$*.* [26]

De fait, l'argument principal repose sur les séries géométrique, où il y a une démarche démonstrative, en rappelant la règle selon laquelle la somme d'une série géométrique d'un certain exposant vaut le premier terme de la série précédente. Comme nous venons de la voir, c'est un argument extrêmement similaire qui sous-tend la généralisation des sommes dans les cas des nombres figurés. Pourtant, Leibniz n'en fait pas mention et se réfère simplement à la table. C'est donc la table et sa structure qui soutient ici l'argumentaire. La table met en évidence la relation qui relie les sommes et les exposants et c'est cette relation qui justifie qu'on identifie la somme des unités, c'est-à-dire le nombre maximal infini de tous les nombres avec zéro.
Pour Leibniz, ces fractions sont impossibles puisqu'elles vérifient par l'algèbre des relations qui contredisent certains axiomes notamment l'axiome selon lequel le tout est nécessairement plus grand que la partie. Ainsi, comme ces axiomes s'appliquent sur tout et partout, ces objets sont donc nécessairement rien et nulle part :

> *Mais il est impossible que cet axiome fasse défaut, ce qui revient à dire qu'il ne fait défaut jamais ou encore qu'il ne fait pas défaut, si ce n'est pour nulle chose ou pour rien. Ainsi donc ce nombre infini est impossible et donc il n'est pas un ni un tout mais rien.* [27]

Ainsi, l'identité entre l'infini et le rien se fait ici sur des base métaphysique. En effet, si l'infini contredit un axiome qui est partout vérifié, alors cet infini fait partie de l'ensemble des objets qui contredisent cet axiome, à savoir l'ensemble vide, ou le néant.
Pour contre-argumenter, on peut constater la chose suivante :

$$\frac{0}{0} + \frac{1}{1} = \frac{0 \times 1 + 1 \times 0}{0 \times 1} = \frac{0}{0}.$$

$$\frac{1}{0} + \frac{1}{1} = \frac{1 \times 1 + 1 \times 0}{0 \times 1} = \frac{1}{0}.$$

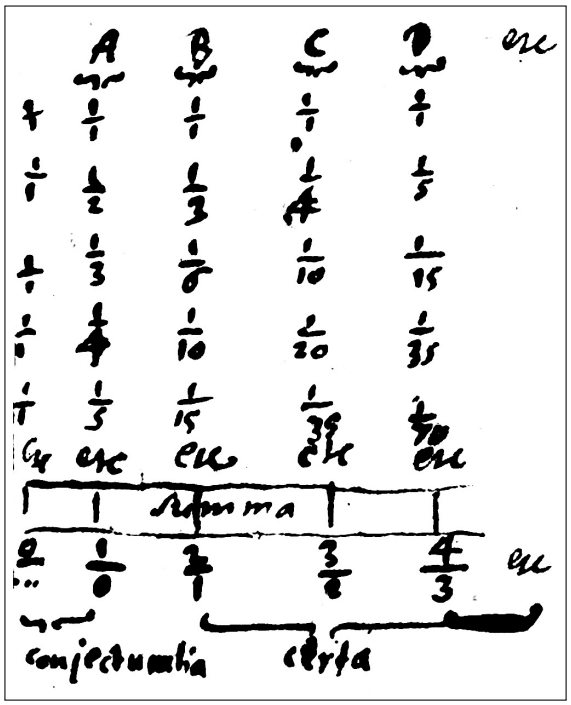
26. A II, 1, N.109, Lettre à Jean Gallois, fin 1672 - p.349-350 : « Idem ne præter rem huc digressus videar, hac serierum in infinitum progredientium collectione in summam comprobatur ; nam in fractionibus geometricæ progressionis summandi certum est summam sequentis seriei esse primam fractionem seriei antecedentis, et $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}$ etc. $= \frac{1}{2}$, item $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ etc. $= \frac{1}{1}$, ergo $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}$ etc. $= 0$. Iam $1 + 1 + 1$ etc. constituit numerum omnium numerorum infinitum. Idem evenit in tabula proxime præcendente fractionum progressionis arithmeticæ replicatæ, ubi patet $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ etc. $= \frac{1}{0}$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}$ etc. $= \frac{0}{0} = 0$. »

27. A II, 1, N.109, Lettre à Jean Gallois, fin 1672 - p.349 : « At axioma illud fallere impossibile est seu, quod idem est, axioma istud nunquam, id est non nisi in nullo seu nihilo fallit. Ergo numerus iste infinitus est impossibilis, non unum, non totum, sed nihil. »

Donc ces fractions se comportent ici comme l'infini, à savoir qu'elles restent inchangées après qu'on leur ait ajouté une unité. Ce n'est pas le cas de 0, en effet $0 + 1 = 1$.
La différence entre ces deux fractions n'est par ailleurs pas développée par Leibniz.

**Autres occurrences de la table**

Cette disposition en colonne se trouve dans plusieurs autres manuscrits leibniziens, en particulier issus de la période parisienne. La première occurence qui suit l'*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum* (A II, 1, N.109) se trouve dans la *Scheda Exigua* (A VII, 3, N.53$_3$) [28], que les éditeurs datent entre fin 1675 et début 1676. On trouve également ce schéma dans le *Quadratura Circuli Arithmeticæ Pars 2* (A VII, 6, N.28) [29], travail préparatoire du traité sur la quadrature arithmétique du cercle. Naturellement, le schéma est donc reproduit dans la version la plus aboutie dont on dispose de ce traité, à savoir le *De Quadratura Arithmetica Circuli Ellipseos et Hyperbolæ* (A VII, 6, N.51) [30]. Ce deux dernières occurrences sont datées de l'été 1676.
Dans la *Scheda Exigua* (A VII, 3, N.53$_3$), on ne retrouve pas la colonne d'exposant 0. De plus, la somme de la première colonne, c'est-à-dire la somme infinie des unités ne vaut plus $\frac{0}{0}$ comme dans l'*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum* (A II, 1, N.109), mais une valeur indéterminée que Leibniz note $\frac{0}{\dots}$. Enfin, les sommes des deux premières colonnes, pour lesquelles le raisonnement fondé sur le schéma de différences est inopérant, sont qualifiées de « conjectures » (« *conjecturalia* »), tandis que les autres, pour lequel le raisonnement s'applique, sont considérées comme « certaines » (« *certa* »).




Manuscrits de Leibniz - LH 35, 8, 27, Bl.1

| | $\underbrace{\quad A \quad}$ | $\underbrace{\quad B \quad}$ | $\underbrace{\quad C \quad}$ | $\underbrace{\quad D \quad}$ | etc. |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | |
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | |
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{15}$ | |
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{35}$ | |
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{35}$ | $\frac{1}{70}$ | |
| etc. | etc. | etc. | etc. | etc. | |
| | | | | | Somme |
| $\frac{0}{\dots}$ | $\frac{1}{0}$ | $\frac{2}{1}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{4}{3}$ | etc. |
| | conjectures | | certains | | |

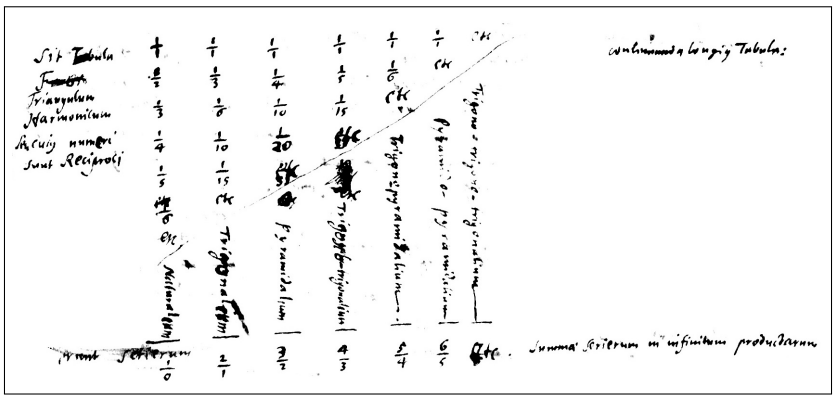
Un an plus tard, dans le *De additione ordinatarum ad quadraturas* (A VII, 5, N.54$_1$), Leibniz pose la question de l'induction au sein des méthodes de quadratures. Il conclut en espérant pouvoir formaliser un jour cette induction de façon géométrique de sorte qu'elle puisse servir pleinement l'ars inveniendi. Il ajoute alors :

> *Et de même, cela servira non seulement aux interpolations mais également à poursuivre les progressions et trouver leurs termes de façon certaine. Et il faut voir si par un tel art on pourrait aussi démontrer cela : que la série infinie* $\frac{1}{1}.\ \frac{1}{2}.\ \frac{1}{3}.\ \dots$ *est plus grande que n'importe quelle quantité, puisque*

28. A VII, 3, N.53$_3$, *Scheda Exigua*, décembre 1675 - février 1676 – p.714.
29. A VII, 6, N.28, *Quadratura Circuli Arithmeticæ Pars 2*, juin-juillet 1676, p.339.
30. A VII, 6, N.51, *De Quadratura Arithmetica Circuli Ellipseos et Hyperbolæ*, juin-septembre 1676 - p.607, Proposition XL.

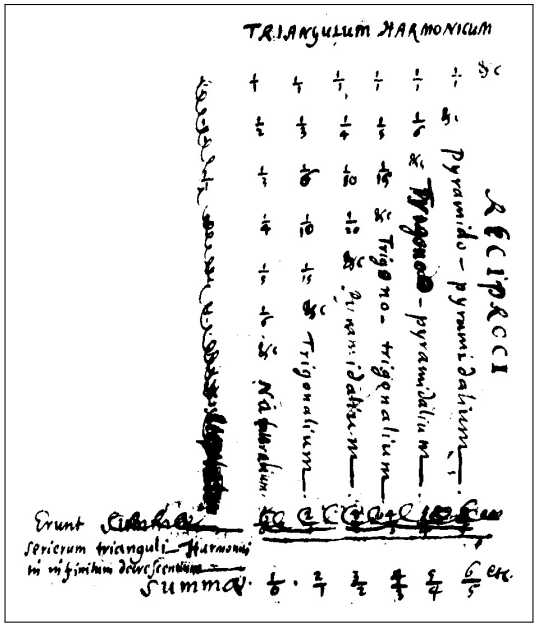
*naturellement pour poursuivre la progression* $\frac{2}{1}.\ \frac{3}{2}.\ \frac{4}{3}.\ \frac{5}{4}\ \ldots$, *la raison voudrait que le premier terme de la série soit* $\frac{1}{0}$.[31]

Dans le traité sur la quadrature arithmétique du cercle, la colonne des unités est abandonnée à son tour, de sorte que la première colonne est désormais la progression harmonique. Ceci montre que la distinction faite, dans la *Scheda Exigua* (A VII, 3, N.$53_3$), entre les éléments induits par conjecture et ceux déduits d'un raisonnement certain n'est pas nécessairement la plus pertinente pour Leibniz. De fait, il semble qu'au sein des éléments conjecturés, la somme des unités soit plus problématique que celle de la progression harmonique. Le fait qu'il abandonne successivement la colonne constituée des fractions $\frac{0}{0}$ puis celle des $\frac{1}{1}$ ajouté au fait qu'il les désigne explicitement comme des conjectures indique clairement que Leibniz a conscience que ces résultats ne sont pas suffisamment solides, et justifiés par aucune démonstration rigoureuse. Ainsi, le maintien de telle ou telle somme de série conjecturée dans la table indique le degré de conviction irrationnelle avec laquelle le jeune philosophe croit dans la véracité d'un résultat, tout en étant conscient qu'il n'est pas rigoureusement démontré.



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 2, 1, Bl.100

Par ailleurs, il faut noter que la colonne des unités ne figure pas dans le *Quadratura Circuli Arithmeticæ Pars 2* (A VII, 6, N.28), qui est le travail préparatoire, alors qu'elle est présente, mais barrée, dans le *De Quadratura Arithmetica Circuli Ellipseos et Hyperbolæ* (A VII, 6, N.51), censé être plus abouti :




Manuscrits de Leibniz - LH 35, 2, 1, Bl.25

31. A VII, 5, N.$54_1$, *De additione ordinatarum ad quadraturas*, 21 décembre 1675 - p.402 : « Idem serviet non tantum ad interpolationes sed et ad continuationes progressionum, certosque earum terminos inveniendos. Et videndum an tali arte demonstrari etiam illud possit : quod series infinita $\frac{1}{1}.\ \frac{1}{2}.\ \frac{1}{3}.$ etc. sit major qualibet quantitate, quoniam scilicet ob continuam progressionem, $\frac{2}{1}.\ \frac{3}{2}.\ \frac{4}{3}.\ \frac{5}{4}$ etc. rationis est, initium seriei esse $\frac{1}{0}$. »

Dans ces trois exemples, Leibniz construit la table des inverses des nombres figurés. Pourtant, à chaque fois, elle est désignée comme étant le triangle harmonique.

⋆ *Scheda Exigua* (A VII, 3, N.53$_3$) :

> *Sommes des séries de l'inverse du triangle arithmétique, à savoir le triangle harmonique.* [32]

⋆ *Quadratura Circuli Arithmeticæ Pars 2* (A VII, 6, N.28) :

> *Soit le triangle harmonique, c'est-à-dire ce dont les nombres sont les inverses.* [33]

⋆ *De Quadratura Arithmetica Circuli Ellipseos et Hyperbolæ* (A VII, 6, N.51) :

> *Soit le triangle harmonique, c'est-à-dire ce dont les nombres sont les inverses des nombres du triangle arithmétique publié par Pascal.* [34]

Leibniz a alors déjà découvert la structure différentielle du triangle harmonique, dans son sens moderne. Il convient alors de s'interroger sur la raison qui motive Leibniz à parler de "triangle", alors que cette table, qui n'est pas un table de différence, ne respecte aucune structure liée à cette forme géométrique. D'ailleurs, on observe que, dans les deux tables que nous avons tirées du traité sur la quadrature arithmétique du cercle, Leibniz impose une forme triangulaire à la table, de façon artificielle.

Environ trois ans plus tard, alors que Leibniz est déjà à Hanovre, il écrit une lettre à son ancien professeur de Mathématiques [35] Erhard Weigel [36] dont le contenu est assez proche de celui de l'*Accessio ad Arithmetica Infinitorum* (A II, 1, N.109), ou du traité sur la quadrature arithmétique du cercle. On trouve la présentation du résultat sur les sommes des inverses des nombres figurés, ainsi que deux tables, l'une pour les nombres figurés et l'autre pour les inverses avec en dessous de chaque progression la somme qui lui est associée.
A cette occasion, Leibniz revient sur cette problématique des séries divergentes, et accorde cette fois-ci une brève réflexion sur la distinction qu'on peut faire entre ces deux fractions :

> *En revanche, concerant la somme de cette série infinie* $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ *etc., elle est* $\frac{1}{0}$ *qui est une quantité infinie, à savoir plus grande que n'importe quel nombre assignable. Et de la même manière, je peux cependant démontrer qu'elle est bien inférieure, parmi les infinis que la somme de cette série :* $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{1}$ *etc. Et on voit ainsi qu'entre cet infini ordinaire qui est constitué de la collection de toutes les unités, et le fini, à savoir une unité, il est donné quelqu'intermédiaire comme* $\frac{1}{0}$ *qui est la somme de toutes les fractions numériques possibles ayant l'unité pour numérateur, prises toutes ensembles.* [37]

En réalité, le nombre de tous les nombres n'est pas identifié à la fraction $\frac{0}{0}$ mais simplement désigné comme l'infini ordinaire, et ce même dans la table. Quand à la série des inverses d'exposant 0, on ne la trouve tout simplement plus.

32. A VII, 3, N.53$_3$, *Scheda Exigua*, décembre 1675 - février 1676 – p.713 : « Summæ serierum trianguli arithmetici reciproci seu trianguli harmonici »

33. A VII, 6, N.28, *Quadratura Circuli Arithmeticæ Pars 2*, juin-juillet 1676, p.339 : « Sit Triangulum Harmonicum seu cujus numeri sunt Reciproci »

34. A VII, 6, N.51, *De Quadratura Arithmetica Circuli Ellipseos et Hyperbolæ*, juin-septembre 1676 - p.606, Proposition XL : « Sit Triangulum Harmonicum, sive cujus numeri sint reciproci numerorum trianguli Arithmetici a Pascalio editi »

35. Weigel a enseigné les mathématiques, ou plutôt de la philosophie des mathématiques, alors que le jeune Leibniz, étudiant de l'Université de Leipzig, effectuait un séjour d'étude de quelques mois, durant l'été 1663, à Iéna où Weigel était enseignant. C'est notamment les relations entre mathématiques et jurisprudence, thème cher à Weigel, qui ont conduit le jeune philosophe vers son enseignement.

36. A III, 2, N.345, Lettre de Leibniz à Weigel, Septembre 1679

37. A III, 2, N.345, Lettre de Leibniz à Weigel, Septembre 1679 - p.838-839 : « At summa serieie hujus infinitæ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ etc. est $\frac{1}{0}$ quæ quantitas est infinita, major scilicet quovis numero assignabili, quemadmodum etiam demonstrare possum interim multo in infinities minor est quam summa seriei hujus $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{1}$ etc. Vides itaque inter illud infinitum ordinarium, quod in omnium unitatum collectione consistit, et inter finitum, nempe unitatem dari aliquid intermedium nempe $\frac{1}{0}$ quod est summa fractionum omnium possibilium numericarum, unitatem pro numeratore habentium, simul sumtarum. »

## 4.2 La preuve finale

Nous avons vu, dans la *Scheda Exigua* (A VII, 3, N.53$_3$) que Leibniz distingue les résultats induits sans réelle preuve de ceux qui sont solidement prouvé. Seulement, toutes les méthodes que nous avons étudiées jusqu'ici, au sein de ses brouillons, possèdent une part très importante de raisonnements inductifs et heuristiques. Nous n'avons pas trouvé de réelle preuve rigoureuse, telle qu'elle est promise dans l'*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum* (A II, 1, N.109) et qui justifierait de qualifier de « certaines » (« *certa* ») les sommes des inverses des nombres figurés de dimension supérieure à deux. La *Scheda Exigua* (A VII, 3, N.53$_3$) fournit une preuve, que l'on trouve déjà dans des documents qui datent de l'été 1674 :

- ⋆ A VII, 3, N.35, *Theorema Arithmeticæ Infinitorum*, Août/Septembre 1674
- ⋆ A VII, 3, N.36, *Summa Fractionum a Figuratis, per Æquatione*, Septembre 1674
- ⋆ A VII, 3, N.53$_3$, *Scheda Exigua*, Déc. 1675 - Févr. 1676

On trouve également une preuve du même type, qui est en fait de la main de Leibniz, dans la réponse de Weigel [38] à sa lettre de Septembre 1679 dans laquelle il évoquait les résultat de l'*Accessio ad Arithmetica Infinitorum* (A II, 1, N.109). On la trouve aussi dans la première version de l'*Historia et Origo Calculi Differentialis*, comme nous l'avons déjà évoqué.

Commençons par quelques remarques sur la datation. Le *Theorema Arithmeticæ Infinitorum* (A VII, 3, N.35) est en fait une version de travail du *Summa Fractionum a Figuratis, per Æquatione* (A VII, 3, N.36). Ces deux manuscrits ont donc été rédigés dans la même période. Pour être plus précis, il semble que le *Theorema Arithmeticæ Infinitorum* (A VII, 3, N.35) ait été rédigé en deux temps distincts, le premier en latin et le second en français. La second partie francophone se termine sur une liste avortée de définitions, liste qui constitue l'introduction du *Summa Fractionum a Figuratis, per Æquatione* (A VII, 3, N.36), intégralement rédigé en français. On peut supposer que cette dernière pièce, qui est datée de la main de Leibniz du mois de Septembre 1674, est contemporaine de la seconde partie française du précédent manuscrit. La première partie latine se retrouve dans la seconde pièce, traduite en français presque mot pour mot. Mais cela ne nous dit rien sinon que cette première partie est antérieure au *Summa Fractionum a Figuratis, per Æquatione* (A VII, 3, N.36), ce que nous savions déjà. L'argument qui pousse les éditeurs à dater cette première partie à la même période que la seconde se trouve dans le signe d'égalité utilisé par Leibniz, à savoir ⊓ qui est un signe qu'il n'emploie pas avant Juin 1674 [39]. Ainsi ces preuves ont été écrites au minimum un an après les derniers travaux que nous avons analysés au sein des *Tabulæ Serierum Fractionum* (A VII, 3, N.11) et *De Summis Serierum Fractionum* (A VII, 3, N.12), et plus d'un an et demi après la promesse d'une publication de la méthode au sein de l'*Accessio ad Arithmetica Infinitorum* (A II, 1, N.109).

La *Scheda Exigua* (A VII, 3, N.53$_3$) fait partie d'une série de manuscrits rédigés à la toute fin de l'année 1675 et consacrés au Triangle Harmonique. Comme l'avait relevé D. Mahnke [40], la table qui s'y trouve est extrêmement semblable à celle que Leibniz avait tracée dans l'*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum* (A II, 1, N.109)„ au différences près que nous avons déjà analysées. Ceci peut faire penser qu'il avait ce traité sous les yeux lorsqu'il a rédigé cette preuve [41].

Ces trois preuves dressent un portrait global relativement uniforme, divisé selon deux approches : une approche inductive complétée par une preuve algébrique.

### 4.2.1 Une preuve par induction

La démarche inductive que présente Leibniz constitue en fait la formalisation de la méthode de découverte que nous avons déjà décrite et qui nous semble être celle qu'a suivie Leibniz bien qu'il n'en ait pas laissé de traces explicites.

38. A III, 2, N.355, Lettre de Weigel à Leibniz, 28 Octobre 1679 - p.879-883

39. Avant Juin 1674, il emploie notre signe "=" ou encore l'abréviation "*æqu.*", *Cf* à ce sujet l'introduction des signes mathématiques dans le *De Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8) p.173, Définition 20 : « Nous désignons l'addition par le signe +, la soustraction par −, la multiplication par ∩, la division par ∪, la somme ou "font" par f. et l'égalité par =. » (« *Signo + designamus additionem, − subtractionem, ∩ multiplicationem, ∪ divisionem, f. facit seu summam, = æqualitatem.* »)

40. *Cf* la citation de Mahnke p.235

41. Le contexte de rédaction de la *Scheda Exigua* (A VII, 3, N.53$_3$), fortement lié au Triangle Harmonique, peut être un indice pour dater l'ajout postérieur du titre à la version finale *D* de l'*Accessio ad Arithmetica Infinitorum* (A III, 1, N.2). Pour la discussion sur ces ajouts postérieurs, *Cf* p.238

**Le cas des Triangulaires**

Au sein du *Theorema Arithmeticæ Infinitorum* (A VII, 3, N.35), ce procédé de démonstration ne concerne que les inverses des nombres triangulaires. C'est également le cas pour le *Summa Fractionum a Figuratis, per Æquatione* (A VII, 3, N.36), mais ce dernier conclut par l'énoncé de la généralisation. Dans la *Scheda Exigua* (A VII, 3, N.$53_3$), on ne développe encore que le cas des triangulaire mais Leibniz donne la dernière étape de démonstration pour les pyramidaux et les triangulo-triangulaire. Enfin, dans la lettre de Weigel (A III, 2, N.355), on ne trouve encore que le détail de la preuve pour les triangulaires. On commence par introduire trois séries :

- ⋆ La série $A$ qui est la progression harmonique.
- ⋆ La série $B$ qui est la progression des inverses des triangulaires.
- ⋆ La série $C$ qui est la moitié de la série $B$.

On constate qu'en ôtant terme à terme la série $C$ de la série $A$, on obtient la progression harmonique, décalée d'un rang. Ainsi, $A-C = D$ avec $D$ la somme de la série harmonique décalée d'un rang, c'est-à-dire la somme de la série harmonique privée de son premier terme. Ainsi :

$$A - C = D = A - 1.$$

On en déduit que $C = 1$ et donc $B = 2C = 2$.

C'est ce raisonnement que l'on retrouve dans le *Theorema Arithmeticæ Infinitorum* (A VII, 3, N.35) et qui sera reproduit dans tous les autres manuscrits :

> *Si de la même série ☽, on enlève 1, alors il restera cette même série ♀. Donc 1 et la série ☿ sont égales entre elles. Parce qu'en ôtant la même chose de la série ☽, il reste la même chose. Donc le double de la série ☿ c'est-à-dire la série ☉ sera égale au binaire.*[42]

$$\begin{array}{ccccc}
A & - & C & = & D \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\frac{1}{1} & - & \frac{1}{2} & = & \frac{1}{2} \\
+ & & + & & + \\
\frac{1}{2} & - & \frac{1}{6} & = & \frac{1}{3} \\
+ & & + & & + \\
\frac{1}{3} & - & \frac{1}{12} & = & \frac{1}{4} \\
+ & & + & & + \\
\frac{1}{4} & - & \frac{1}{20} & = & \frac{1}{5} \\
+ & & + & & + \\
\vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

42. A VII, 3, N.35, *Theorema Arithmeticæ Infinitorum*, août-septembre 1674, p.362 : « Ab eadem serie ☽ auferatur 1. residua erit eadem series ♀. Ergo 1 et series ☿ sunt inter se æquales. Quia ab eadem serie ☽ ablatæ, relinquunt idem. Ergo dupla series ☿ sive series ☉ erit æqualis binario. » - Ici, la série $A$ est noté ☽, la série $B$ est notée ☉, la série $C$ est notée ☿ et la série $D$ est notée ♀.

Leibniz mentionne dans ce manuscrit, ainsi que dans le *Summa Fractionum a Figuratis, per Æquatione* (A VII, 3, N.36) l'étape de simplification des fractions que nous avons sautée dans notre reconstitution moderne. En fait, Leibniz introduit deux séries distinctes :

⋆ La série $D$ :

$$\frac{1}{2}\ \frac{4}{12}\ \frac{9}{36}\ \frac{16}{80}\ \frac{25}{150}\ \cdots$$

⋆ La série $E$ :

$$\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}\ \cdots$$

La série en $D$ s'obtient en faisant la différence des séries $A$ et $C$ et la série $E$ est la simplification de la série $D$.
Ceci marque une fois de plus à quel point cette opération qui nous parait aujourd'hui neutre et sans intérêt ne l'était pas du tout à l'époque, dans un contexte où la preuve par l'exemple reste encore largement répandue. On a pu montrer par l'étude des manuscrit de travail combien cette problématique de simplification des fractions a pu être importante et même cruciale au sein de travaux de Leibniz, constituant en elle-même un objet d'étude, par exemple avec la méthode de décomposition des fractions, et représentant une réelle barrière à la découverte. Mais au delà des analyses que nous avons déjà faite sur cet aspect fondamental du rôle des tables dans l'*ars inveniendi*, ce que cette distinction entre la série $D$ et la série $E$ nous montre, c'est que ces opérations combinatoires ne sont pas incompatibles avec la formalisation. De fait, en nommant les séries par des lettres, Leibniz se sert de l'*ars characteristica* pour mener à bien sa démonstration. Mais ces lettres restent des boîtes noires qui n'expriment pas leur contenu par des symboles. Ainsi la formalisation ou l'usage de caractère n'implique pas nécessairement d'avoir une approche analytique.

#### La généralisation de la procédure

La généralisation de cette procédure aux autres séries est seulement évoquée dans le *Summa Fractionum a Figuratis, per Æquatione* (A VII, 3, N.36) :

> *Apres ce que je viens de dire, il est aisé de trouver la demonstration de mon theoreme general*[43]

Dans la *Scheda Exigua* (A VII, 3, N.53$_3$), on trouve la généralisation de l'équation finale, à savoir que si on note $S_n$ la somme de la série des inverses de nombres figurés de dimensions $n$, alors on a

$$S_n - 1 + \frac{n}{n+1} S_{n+1} = S_n$$

En effet, 1 est le premier terme de la série $S_n$ et il est égal à la somme des différences de la série. Comme nous l'avons déjà vu plusieurs fois, cette série de différences est proportionnelle à la série d'exposant supérieure, ainsi la somme de ces différences est égale à la somme $S_{n+1}$ que l'on a multipliée par cette constante de proportionnalité qui vaut $\frac{n}{n+1}$. Donc on retrouve bien la relation ci-dessus. Leibniz ne la donne que pour les cas $n = 1,\ 2$ et 3. Les constantes de proportionalités sont choisies de sorte qu'elles fonctionnent pour le premier terme. On trouve donc, dans la *Scheda Exigua* (A VII, 3, N.53$_3$), la démonstration la plus proche de la méthode de découverte que Leibniz a sans doute utilisée, à savoir repérer, grâce aux schémas de différences, les coefficients multiplicatifs qui relient chaque progression des inverses de nombres figurés.

### 4.2.2 La preuve algébrique

La preuve algébrique que donne Leibniz du résultat ne concerne que le cas des inverses des triangulaires. On la trouve seulement dans le *Summa Fractionum a Figuratis, per Æquatione* (A VII, 3, N.36) ainsi que le *Theorema Arithmeticæ Infinitorum* (A VII, 3, N.35) qui en est la version de travail. On ne la retrouve plus dans la *Scheda Exigua* (A VII, 3, N.53$_3$), bien que le texte soit plus tardif.

43. A VII, 3, N.36, *Summa Fractionum a Figuratis, per Æquatione*, septembre 1674, p.369

**Une preuve littérale**

La preuve donnée pour le cas des inverses des triangulaires est très élémentaire. Il faut montrer qu'en ôtant la série $C$ à la série $A$, on obtient la série $A$ décalée d'un rang. Il suffit donc d'exprimer le $n$-ième terme de ces trois séries :

- ⋆ Pour la série $A$ : $\frac{1}{n}$
- ⋆ Pour la série $C$ : $\frac{1}{n(n+1)}$
- ⋆ Pour la série $A$ décalée d'un rang : $\frac{1}{n+1}$

On trouve de fait le calcul suivant :

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2+y} = \frac{y^2+y-y}{y^3+y^2} = \frac{1}{y+1}$$

Dans la version finale du *Summa Fractionum a Figuratis, per Æquatione* (A VII, 3, N.36), Leibniz note $a$ l'unité, ce qui donne le calcul suivant :

$$\frac{a}{y} - \frac{a^2}{y^2+ya} = \frac{y^2a+ya^2-ya^2}{y^3+y^2a} = \frac{a}{y+a}$$

Dans le premier calcul, $y$ a la même valeur que le rang $n$ du terme dans la suite, c'est un nombre sans dimension qui représente la place du terme au sein de la série :

> *Je procède comme suit : on exprime un terme de la série, par exemple $\frac{1}{3}$ de la manière suivante : $\frac{1}{y}$, en supposant que $y$ désigne un nombre quelconque.* [44]

Mais en introduisant l'unité $a$, Leibniz donne au terme $y$ une dimension, qui est homogène à celle de $a$. Ainsi, $y$ ne correspond plus au rang $n$, mais au $n$-ième multiple de l'unité $a$, donc $y = na$ :

> *le nombre du costé estant nommé $y$.* [45]

**Preuve pour les plus grandes dimensions**

Rappelons ce que dit Leibniz à la fin du *Summa Fractionum a Figuratis, per Æquatione* (A VII, 3, N.36) :

> *Apres ce que je viens de dire, il est aisé de trouver la demonstration de mon theoreme general* [46]

Ceci indique que la preuve particulière que donne Leibniz pour le cas des triangulaires contient les éléments suffisants pour accéder aussitôt aux autres dimensions et au cas général. Tentons donc de généraliser cette preuve élémentaire au cas des pyramidaux puis au cas général, en respectant la rédaction de Leibniz, afin de voir en quelle mesure cette généralisation lui était accéssible.
Pour les pyramidaux, gardons $B$ pour la suite des inverses des triangulaires et notons $F$ la suite des inverses des pyramidaux. Leibniz veut montrer qu'en ôtant deux tiers de $F$ à $B$, on obtient la suite $B$ décalée d'un rang :

$$B - \frac{2}{3}F = B - 1$$

Considérons alors les expressions suivantes :

- ⋆ Pour l'inverse d'un triangulaire : $\frac{2a^2}{y^2+ya}$
- ⋆ Pour l'inverse du pyramidal correspondant : $\frac{6a^3}{y^3+3y^2a+2ya^2}$
- ⋆ Pour l'inverse du triangulaire suivant : $\frac{2a^2}{(y+a)^2+(y+a)a}$

44. A VII, 3, N.35, *Theorema Arithmeticæ Infinitorum*, août-septembre 1674, p.362 : « Quod ita facio : terminus seriei, v.g. $\frac{1}{3}$, ita exprimatur : $\frac{1}{y}$, supponendo $y$ significare numerum quemlibet »
45. A VII, 3, N.36, *Summa Fractionum a Figuratis, per Æquatione*, septembre 1674, p.366
46. A VII, 3, N.36, *Summa Fractionum a Figuratis, per Æquatione*, septembre 1674, p.369

On mène ensuite les calculs :

$$\begin{aligned}
\frac{2a^2}{y^2+ya} - \frac{2}{3}\frac{6a^3}{y^3+3y^2a+2ya^2} &= \frac{6y^3a^2+18y^2a^3+12ya^4-12y^2a^3-12ya^4}{3(y^2+ya)(y^3+3y^2a+2ya^2)} \\
&= \frac{6y^3a^2+6y^2a^3}{3(y^2+ya)(y^3+3y^2a+2ya^2)} \\
&= \frac{2a^2}{y^2+3ya+2a^2} \\
&= \frac{2a^2}{(y^2+2ya+a^2)+(ya+a^2)} \\
&= \frac{2a^2}{(y+a)^2+(y+a)a}
\end{aligned}$$

Le calcul est légèrement plus touffu que celui des triangulaires, mais rien ne change radicalement.
Pour le cas général, on peut considérer les expressions qui suivent :

⋆ Pour l'inverse d'un nombre figuré du dimension $p$ :

$$\frac{p!a^p}{y(y+a)\dots(y+(p-1)a)}$$

⋆ Pour l'inverse du nombre figuré correspondant avec une dimension supplémentaire :

$$\frac{(p+1)!a^{p+1}}{y(y+a)\dots(y+pa)}$$

⋆ Pour l'inverse du triangulaire suivant :

$$\frac{p!a^p}{(y+a)(y+2a)\dots(y+pa)}$$

On mène ensuite les calculs :

$$\begin{aligned}
\frac{p!a^p}{y(y+a)\dots(y+(p-1)a)} - \frac{p}{p+1}\frac{(p+1)!a^{p+1}}{y(y+a)\dots(y+pa)} &= \frac{p!a^p}{y(y+a)\dots(y+(p-1)a)}\left(1-\frac{pa}{y+pa}\right) \\
&= \frac{p!a^p}{y(y+a)\dots(y+(p-1)a)}\frac{y}{y+pa} \\
&= \frac{p!a^p}{(y+a)(y+2a)\dots(y+pa)}
\end{aligned}$$

Cette approche revient finalement à la méthode qu'a utilisé Mengoli dans sa *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ*[47], en montrant que ces sommes de fractions de produits continus sont en réalité des sommes de différences télescopiques.
Pour que Leibniz puisse obtenir ces preuves, il est nécessaire qu'il ait connaissance de la formule :

$$\left(\!\binom{n}{p}\!\right) = \frac{n(n+1)\dots(n+p-1)}{1.2.\dots p}$$

Comme déjà évoqué, on sait qu'il disposait de cette formule pour le cas $p=2$ dès 1666, dans le *De Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8). C'est en Janvier 1675 dans le *De intercalatione numerorum combinatorium* (KK.76 Nr.6)[48], que Leibniz démontre cette formule générale à partir des écrits de Pascal. Avant cela, on

47. [67] P. Mengoli, *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ*, Bologne, 1650, *Cf* p.157
48. KK.76, N.6, *De intercalatione numerorum combinatorium, de formulis omnium dimensionum ex artis combinatoriæ-principiis*, Janvier 1675 - p.16-36

ne trouve presqu'aucune trace de cette formule pour les cas où $p > 2$ [49]. On peut donc raisonnablement supposer que Leibniz ne la connaissait pas et qu'il n'aurait pas pu faire montre de la même rigueur pour les autres cas, à cette période.
On peut également faire une autre remarque : si cette formule implique les relations que Leibniz trouve par induction, l'inverse est également vrai. Ainsi, pour le cas des pyramidaux par exemple :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\binom{n+2}{3}} &= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\binom{n+1}{2}} - \frac{1}{\binom{n+2}{2}}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{n(n+1)} - \frac{2}{(n+1)(n+2)}\right)\\ &= \frac{3}{n+1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\\ &= \frac{6}{n(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

Et ainsi, par récurrence, on peut obtenir tous les autres cas.

### 4.2.3 La nécessité d'une preuve formelle

#### Un besoin de rigueur

Dans le *Theorema Arithmeticæ Infinitorum* (A VII, 3, N.35), Leibniz clos sa démonstration par induction sur les triangulaire par la phrase : « C'est ce que nous étions décidé de démontrer » (« *Quod demonstrandum sumseramus* »). Puis, à la ligne, il admet qu'une telle preuve ne pourrait pas satisfaire quelqu'un de plus rigoureux car il faut démontrer que ce qui se produit pour les premiers termes se produit pour tous jusqu'à l'infini :

> *Il subsiste une chose dont la démonstration manquerait peut-être encore à quelqu'un de plus rigoureux, à savoir montrer que cela se produit à l'infini.* [50]

Puis, il raye cette phrase pour la remplacer simplement par :

> *Mais il faut maintenant montrer que cela se produit à l'infini.* [51]

On voit donc ici, dans ce document de travail, que la question de la légitimité de la preuve soutient en filigrane les méthodes de rédaction du jeune mathématicien. La preuve inductive est convaincante et elle l'a convaincu pendant longtemps. On peut comprendre dans la première phrase raturée, que la preuve algébrique que Leibniz va donner n'est qu'une sorte d'ergotage presque superflu, dont la seule utilité serait de pouvoir satisfaire les esprits trop pointilleux. C'est peut-être ce genre d'interprétation qui a poussé Leibniz à rayer cette formulation. Dans la phrase de remplacement, la preuve formelle n'est plus un ornement relatif à l'exigence variable de certains mathématiciens, mais une nécessité logique absolue : « il faut » (« *debet* »).
Après avoir donné la preuve en latin dans le *Theorema Arithmeticæ Infinitorum* (A VII, 3, N.35), Leibniz passe en français. On peut raisonnablement penser qu'il s'agit d'un autre moment de rédaction qui correspond à celui du *Summa Fractionum a Figuratis, per Æquatione* (A VII, 3, N.36). La preuve est donc répétée en français dans le manuscrit de travail, mais Leibniz lui donne cette fois-ci la structure traditionnelle d'une preuve. Il formule donc dans la langue naturelle l'énoncé qui correspond à l'égalité algébrique qu'il va démontrer :

> *La moitié d'une fraction triangulaire (c'est à dire dont le numerateur est l'unité, et le nominateur un nombre triangulaire) estant ostée de la fraction naturelle qui luy repond (c'est à dire ayant pour numerateur l'unité, et pour le nominateur le costé du triangle rectangle isoscele, dont le nombre*

49. Dans le *De Progressionibus Cubicis* (A VII, 3, N.37), on trouve une formule étrange des pyramidaux : $\frac{x^3+2wx^2+xw^2+x^2l+wxl}{6}$ ce qu'on peut factoriser par $\frac{x(x+w)(x+w+l)}{6}$, ce qui ressemble fortement à la formule des nombres pyramidaux. Les éditeurs datent ce manuscrit de la même période que les preuves des *Theorema Arithmeticæ Infinitorum* (A VII, 3, N.35) et *Summa Fractionum a Figuratis, per Æquatione* (A VII, 3, N.36), c'est-à-dire environ Septembre 1674. Ce texte ne remet donc pas réellement en question le fait que Leibniz ignore la formule avant Janvier 1675.

50. A VII, 3, N.35, *Theorema Arithmeticæ Infinitorum*, août-septembre 1674, p.362 : « Unum superest cuius forte demonstrationem exactior aliquis desideret, quod scilicet in infinitum futurum sit. »

51. A VII, 3, N.35, *Theorema Arithmeticæ Infinitorum*, août-septembre 1674, p.362 : « Sed hoc in infinitum eventurum debet demonstrari. »

*triangulaire exprime l'aire) il reste la fraction naturelle qui repond au triangle prochainement plus grand.* [52]

On peut noter que Leibniz ne dit pas que le résultat est "la fraction naturelle suivante", mais « la fraction naturelle qui repond au triangle prochainement plus grand ». Ainsi, l'énoncé souligne le fait que la suite considérée est celle des inverses des triangulaires, et non la progression harmonique. C'est par rapport à cette première suite qu'on situe les termes des autres progressions :

*Or* $\frac{1}{y+1}$ *est la fraction du nombre naturelle qui repond au triangle prochainement plus grand, puisque son denominateur qui est le nombre naturel, n'est augmenté que de l'unité; estant par consequent le costé du triangle prochainement plus grand.* [53]

C'est cette démonstration qui est reprise presqu'au mot près dans le *Summa Fractionum a Figuratis, per Æquatione* (A VII, 3, N.36). Mais cette fois-ci, la démonstration, présentée comme un lemme, est placée avant la preuve par induction. Leibniz y suit une méthode de rédaction synthétique qui donne la preuve en avance de questions qui n'émergeront que plus tard. Ceci confirme le caractère nécessaire de cette preuve algébrique au sein du système argumentatif.

### La preuve de la *Scheda Exigua*

Dans la *Scheda Exigua* (A VII, 3, N.$53_3$), Leibniz décrit la découverte de ces sommes en deux temps. D'abord, il donne la méthode de découverte :

*L'année 1673* [54] *Huygens m'avait proposé de trouver la somme des fractions triangulaires qu'il avait découverte par une solution, certes particulière mais vraiment mémorable. Alors que j'étais, par conséquent, absorbé dans ces méditations, j'ai remarqué ceci par hasard [...]*
*Si l'on ajoute les moitiés de termes de B aux termes pris dans A selon les lignes par lesquelles on voit qu'ils sont joints, on retrouve les termes de A écrit au dessus des termes de B. La première chose qui m'avait frappé fut quand je vis que le premier terme de B à savoir 1, pris de moitié et ajouté au terme de A joint par la ligne, à savoir* $\frac{1}{2}$*, donne 1, c'est-à-dire le premier terme de A. De même, je remarquai que le produit des dénominateurs de deux voisins de A donnent toujours le double du dénominateur de B [...]. En ce qui concerne les autres séries, j'ai facilement pu deviné qu'il fallait sommer* $\frac{2}{3}C$, $\frac{3}{4}D$, *etc. puisqu'en ajoutant* $\frac{2}{3}$ *du premier terme de C ou* $\frac{3}{4}$ *du premier terme de D, c'est-à-dire toujours l'unité, au second terme de la série précédente, on obtient toujours l'unité.* [55]

Puis vient la démonstration synthétique :

*Déjà, par théorème* $A-1+\frac{1}{2}B=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$ *etc.*
*Donc* $A-1+\frac{1}{2}B=A$*. Donc* $B=\frac{2}{1}$*. Et c'est pourquoi on a la somme de toute la série B.*
*De la même manière,* $B-1+\frac{2}{3}C=B$*. Donc* $C=\frac{3}{2}$*.*
$C-1+\frac{3}{4}D=C$*. Donc* $D=\frac{4}{3}$*. Et ainsi de suite jusqu'à l'infini.* [56]

Ce qui frappe tout de suite, c'est l'absence de la preuve algébrique dans la démonstration, même concernant les triangulaires [57]. Cela dit, on peut voir dans la formule « déjà, par théorème » (« *iam, per theorema* »), une allusion à cette preuve littérale, de sorte que la première égalité soit une égalité assurée, démontrée par l'algèbre, tandis que les suivantes restent le fruits d'inductions : « de la même manière » (« *eodem modo* »).

52. A VII, 3, N.35, *Theorema Arithmeticæ Infinitorum*, août-septembre 1674, p.362-363
53. A VII, 3, N.35, *Theorema Arithmeticæ Infinitorum*, août-septembre 1674, p.363
54. Comme nous l'avons vu, ce dialogue a probablement eu lieu à la fin de l'été de l'année 1672, et au plus tard à l'automne.
55. A VII, 3, N.$53_3$, *Scheda Exigua*, décembre 1675 - février 1676, p.712-713 : « Anno 1673 Hugenius mihi proposuerat summam fractionum triangularium inveniendam quam particulari sed valde memorabili solutione deprehenderat. Cum ergo in ea essem meditatione forte notavi [...] si dimidii termini $B$ addantur terminis ex $A$, per lineas quas vides iunctis, reddi terminos ex $A$, terminis ex $B$ superscriptos. Quod in mentem primum venerat, quod viderem primum terminum nempe 1 ipsius $B$, dimidiatum, additum iuncto per lineam ex $A$, nempe $\frac{1}{2}$ facere 1, seu primum ex $A$. Item quod nominatores proximi ex $A$ in se ducti, faciunt semper numeratorum ex $B$ duplos [...]. Quod autem in cæteris seriebus sumenda sint $\frac{2}{3}C$, $\frac{3}{4}D$, etc. ita facile divinavi, quia $\frac{2}{3}$ primi termini ex $C$ et $\frac{2}{3}$ primi termini ex $D$, id est semper unitatis, addita secundo termino seriei præcedentis, faciunt semper unitatem. »
56. A VII, 3, N.$53_3$, *Scheda Exigua*, décembre 1675 - février 1676, p.714 : « Iam per theorema $A-1+\frac{1}{2}B\sqcap 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$ etc. Ergo $A-1+\frac{1}{2}B\sqcap A$. Ergo $B\sqcap\frac{2}{1}$. Adeoque habetur totius seriei $B$ summa. Eodem modo $B-1+\frac{2}{3}C\sqcap B$. Ergo $C\sqcap\frac{3}{2}$. $C-1+\frac{3}{4}D\sqcap C$. Ergo $D\sqcap\frac{4}{3}$. Et ita porro in infinitum. »
57. Leibniz écrit à la toute fin de l'année 1675, il connait donc les formules des coefficients binomiaux en fractions de produits continus

Au final, il n'y a pas de véritable différence de fond entre la description de la méthode de découverte et celle de la démonstration. La différence se trouve avant tout dans la forme, par les verbes et expression qu'il emploie : pour la méthode de découverte « j'ai remarqué » (« *notavi* »), « j'ai deviné » (« *divinavi* »), « la première chose qui m'avait frappé » (« *quod in mentem primum venerat* ») et pour la démonstration « par théorème » (« *par theorema* ») ou encore « et c'est pourquoi » (« *adeoque* »). Contrairement à la rédaction synthétique de la démonstration dans le *Summa Fractionum a Figuratis, per Æquatione* (A VII, 3, N.36), Leibniz redonne ici la part belle à l'induction, et à l'*ars inveniendi*. De fait, la méthode de découverte décrite ici par Leibniz ne correspond par exactement à celle qu'il a probablement suivi d'après les sources qu'il nous a laissées. Comme nous l'avons vu, le travaux de Leibniz de la fin de l'année 1672 et du début de 1673 insistent particulièrement sur le fait qu'une série d'inverse de nombre figurés est proportionnelle à la série des différences de la série des inverses précédentes. On s'attend donc à un schéma qui décrive la relation $v_n = u_n - u_{n+1}$ alors que ce que Leibniz décrit ici représente plutôt $u_n = u_{n+1} + v_n$ [58]. Cette dernière expression s'accorde néanmoins parfaitement avec les formules qu'il donne dans sa démonstration : $A - 1 + \frac{1}{2}B = A$. En établissant une origine de sa découverte qui soit plus cohérente avec la démonstration qu'il va donner, Leibniz nous montre encore à quelle point l'approche analytique tient une place importante dans sa démarche.

58. Etant donné le caractère interprétatif de nombreux indices qui nous ont guidé sur la piste de la découverte de ces sommes, nous devons garder le conditionnel et admettons qu'il reste possible quoique moins probable, que cette reconstitution que fait ici Leibniz de sa propre pensée soit exactement la bonne.

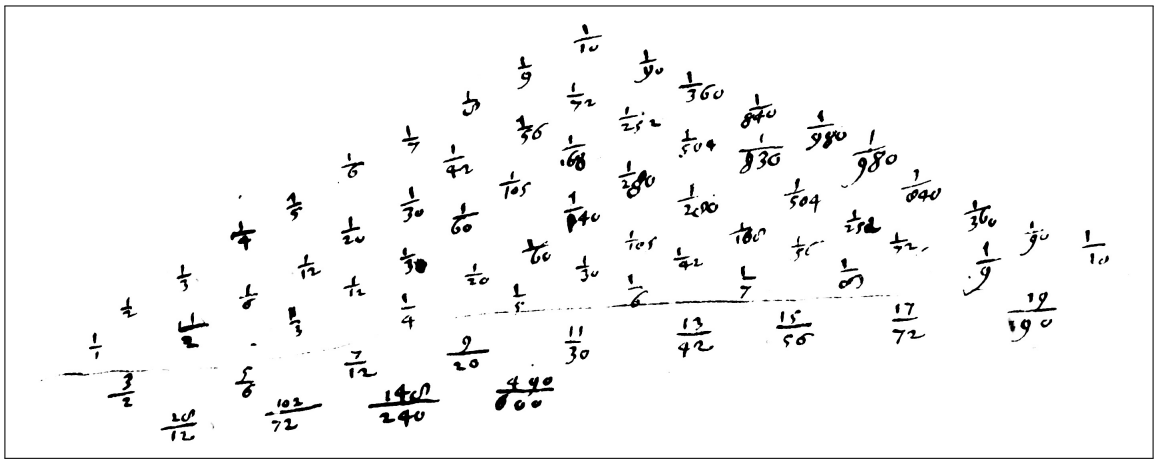
## 4.3 Emergence du Triangle proprement dit

A la fin du séjour parisien, le triangle harmonique désigne donc la table des inverses des nombres figurés. Mais Leibniz découvre le triangle, dans son sens moderne, bien plus tôt.

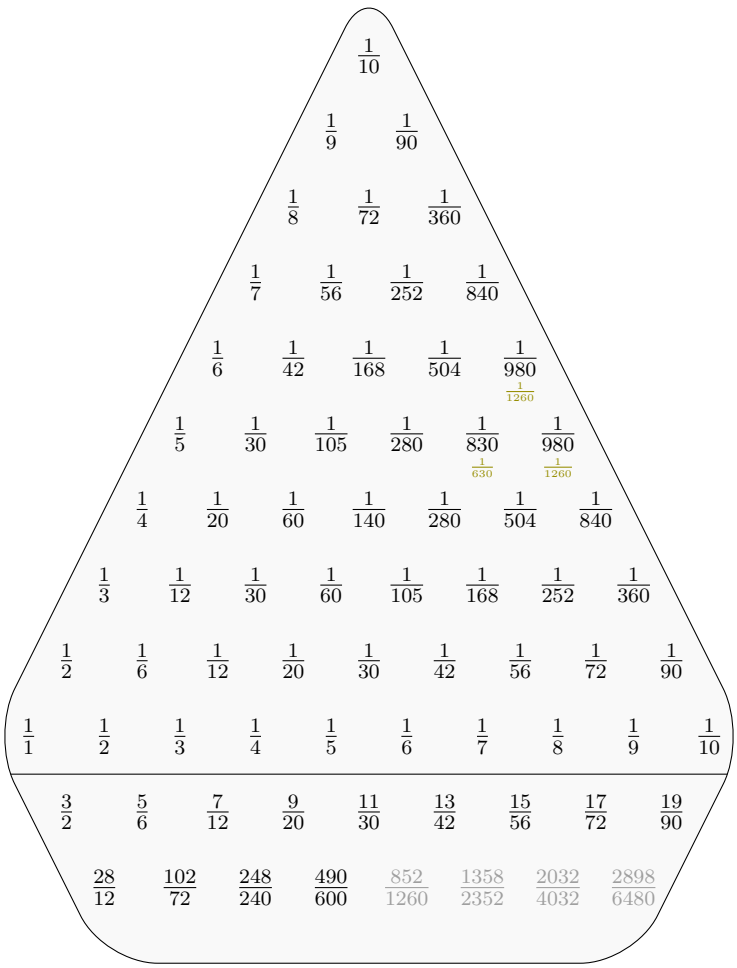
### 4.3.1 Construction du triangle

#### Première occurence

La première occurence du triangle harmonique se trouve le *De Triangulo Harmonico* (A VII, 3, N.30), daté entre la fin de l'année 1673 et le début de l'année 1674 :



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 12, 1, Bl.245-246



Sur ce document, on ne trouve quasiment que des tables numériques et des calculs. Sur le verso du manuscrit, où le triangle se trouve, Leibniz n'a laissé que deux inscriptions :

*Sur le triangle harmonique. Une propriété admirable de la progression harmonique.* [59]

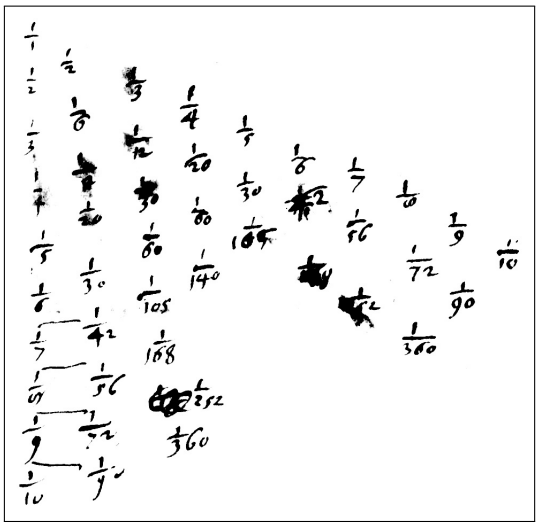
Cette propriété n'est pas spécifiée, mais la forme de la table nous l'indique clairement : c'est un triangle de différence symétrique. En faisant le triangle de différence de la série harmonique, on obtient à nouveau, le long de la première diagonale, une progression harmonique identique.
On ne retrouve aucune mention ou occurrence de ce triangle avant la fin de l'année 1675, à savoir pendant deux années. Cette apparition du triangle harmonique, dans son sens moderne, dès la fin 1673 s'avère donc très isolée. Ce n'est pourtant pas invraisemblablement, étant donné qu'à cette même époque, Leibniz travaille intensément sur les triangles de différence et ainsi que sur la progression harmonique elle-même [60].
Mais la datation d'un tel document est extrêmement périlleuse, car Leibniz peut revenir plus tard et y intégrer des annotations qui seront, pour l'historien, impossibles à séparer du matériau original. Ainsi, il est tout à fait possible que, bien que Leibniz ait construit cette table à la fin de l'année 1673, la mention « sur le triangle harmonique » (« *De triangulo harmonico* ») soit contemporaine aux travaux de fin 1675, soit deux ans plus tard. Cette hypothèse attire notre attention pour la raison que nous allons expliquer désormais.

### Le dossier de 1675

A la fin de l'année 1675, et peut-être au début de l'année 1676, Leibniz revient sur le sujet du triangle harmonique, au sein de trois documents, que les éditeurs de l'*Akademie* ont regroupé dans le *De Triangulo Harmonico* (A VII, 3, N.53) :

- ⋆ *De Progressio Harmonica* (A VII, 3, N.$53_1$)
- ⋆ *Triangulum Harmonicum et Triangulum Pascalii* (A VII, 3, N.$53_2$)
- ⋆ *Scheda Exigua* (A VII, 3, N.$53_3$)

Dans le *De Progressio Harmonica* (A VII, 3, N.$53_1$), Leibniz construit un triangle harmonique au sens moderne :



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 12, 1, Bl.250

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{10}$ |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{42}$ | $\frac{1}{56}$ | $\frac{1}{72}$ | $\frac{1}{90}$ | |
| $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{60}$ | $\frac{1}{105}$ | $\frac{1}{168}$ | $\frac{1}{252}$ | $\frac{1}{360}$ | | |
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{60}$ | $\frac{1}{140}$ | $\frac{1}{280}$ | $\frac{1}{504}$ | $\frac{1}{840}$ | | | |
| $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{105}$ | $\frac{1}{280}$ | $\frac{1}{630}$ | $\frac{1}{1260}$ | | | | |
| $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{42}$ | $\frac{1}{168}$ | $\frac{1}{504}$ | $\frac{1}{1260}$ | | | | | |
| $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{56}$ | $\frac{1}{252}$ | $\frac{1}{840}$ | | | | | | |
| $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{72}$ | $\frac{1}{360}$ | | | | | | | |
| $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{90}$ | | | | | | | | |
| $\frac{1}{10}$ | | | | | | | | | |

Les schéma de différence est construit verticalement, comme dans ses premiers travaux de 1672, et non horizontalement comme dans le précédent triangle dans le *De Triangulo Harmonico* (A VII, 3, N.30). Les espaces vides indiquent que Leibniz n'a poursuivit le calcul que pour l'intégralité des deux premières

59. A VII, 3, N.30, *De Triangulo Harmonico*, fin 1673 - début 1674 – p.336 : « De triangulo harmonico. Proprietas admirabilis numerorum progressionis harmonicae. »

60. *Cf* A VII, 3, N.27, N.28 et N.29, *Summa Progressionis Harmonicæ I, II et III*, fin 1673 - début 1674

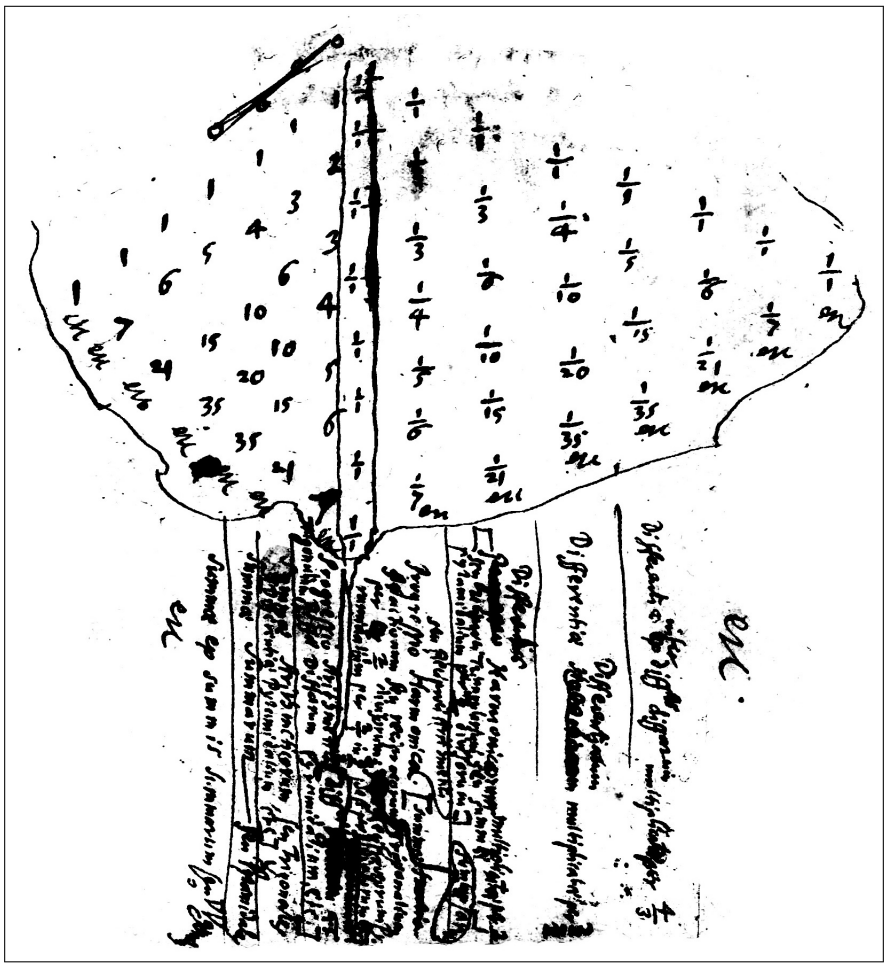
colonnes de différences et la moitié de la troisième. Le reste du schéma a été complété par symétrie. La symétrie constitue donc encore une propriété remarquable de ce schéma de différences. Pourtant, ici, Leibniz ne mentionne pas le triangle harmonique et parle seulement de la progression harmonique. Il explicite néanmoins pour la première fois le lien que cette table entretient avec le triangle arithmétique :

> *Si l'on divise une série de différences quelconque par son premier terme, on obtient les inverses des nombres combinatoires.* [61]

A partir de ce schéma de différences, on peut retrouver la table des inverses des nombres figurés en divisant chaque colonne par son premier terme. Ce sont précisément les coefficients multiplicatifs qui avaient mené Leibniz vers la résolution du problème de Huygens. On trouve donc ici le lien explicite qui relie les deux tables. Pour le dire autrement, la table des inverses des nombres figurés est une table de différences, pondérée par des coefficients multiplicatifs.
Dès lors, dans le *Triangulum Harmonicum et Triangulum Pascalii* (A VII, 3, N.53$_2$), Leibniz introduit le triangle harmonique comme étant le sien, et par opposition au triangle arithmétique que l'on attribue à Pascal :

> *Le triangle harmonique qui correspond au triangle arithmétique de Pascal et grâce auquel on montre comment l'on peut ajouter dans une somme les inverses ou fractions des nombres figurés. Et cela manifeste la manière dont nous devinons souvent les composés à partir des éléments simples.* [62]

Ainsi, Leibniz ne représente pas le triangle harmonique, dans son sens moderne, mais comme table des inverses des nombres figurés, qu'il oppose directement à la tablre de Pascal :

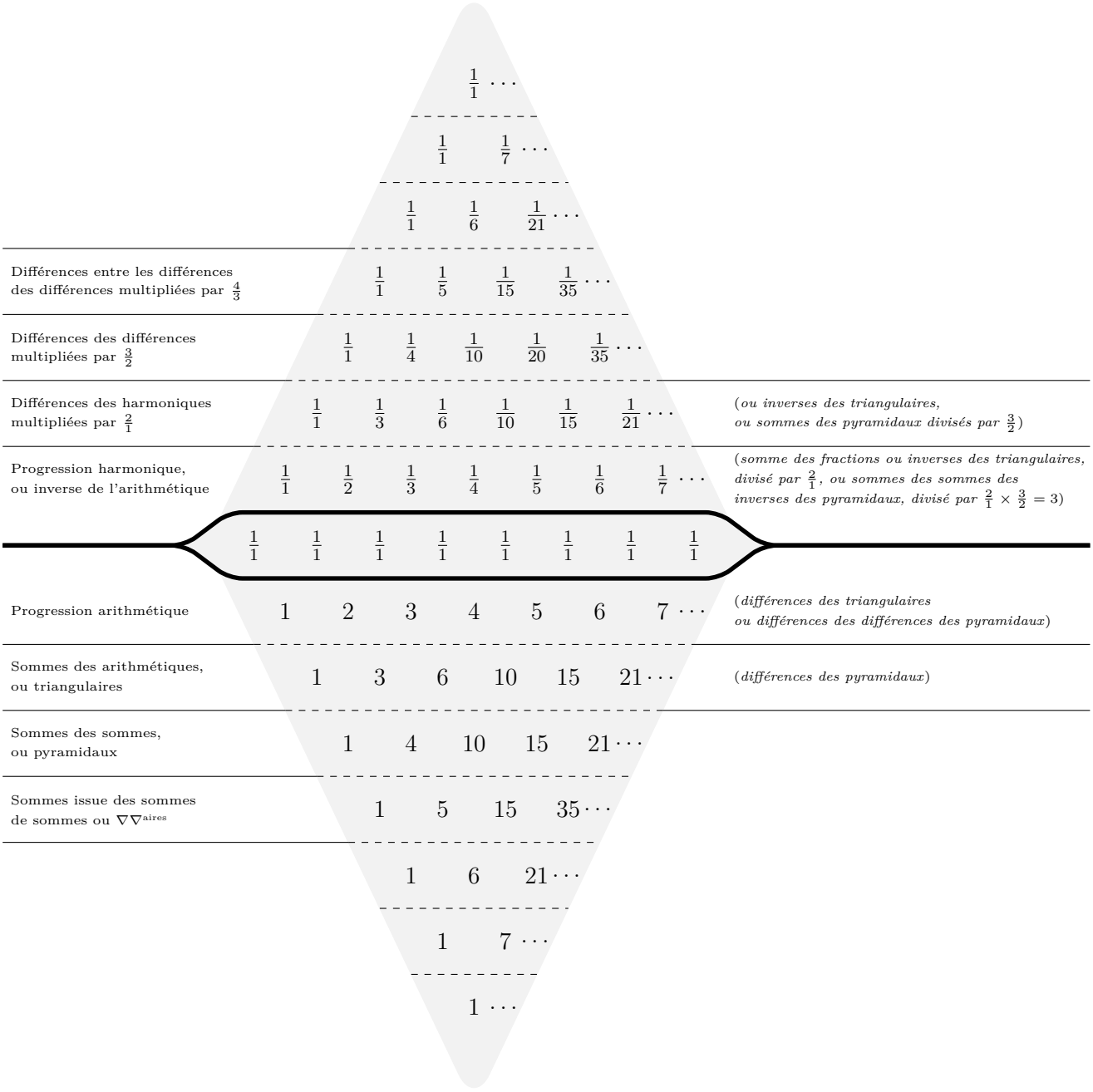


Manuscrits de Leibniz - LH 35, 8, 27, Bl.2

61. A VII, 3, N.53$_1$, *De Progressio Harmonica*, décembre 1675 - p.707 : « Si quælibet series differentiarum descendens per primum terminum suum dividatur, fient reciproci numerorum combinatoriorum. »

62. A VII, 3, N.53$_2$, *Triangulum Harmonicum et Triangulum Pascalii*, février 1673 - p.708 : « Triangulum harmonicum respondens triangulo arithmetico Pascalii, quo ostenditur quomodo numerorum figuratorum reciproci seu fracti, possint addi in summam. Patet et quomodo sæpe ex simplicibus divinemus composita. »

Nous reproduisons la table [63] horizontalement, pour plus de lisibilité, mais Leibniz l'a construite de façon verticale, à la manière de ses premiers schéma de différences :




L'analogie entre les deux tables est donc double. D'une part les coefficients de l'une sont les inverses des coefficients de l'autre. Mais surtout, les progressions sont produites par l'opération de réplication : réplication des sommes pour les triangle de Pascal et réplication des différences pour le triangle harmonique :

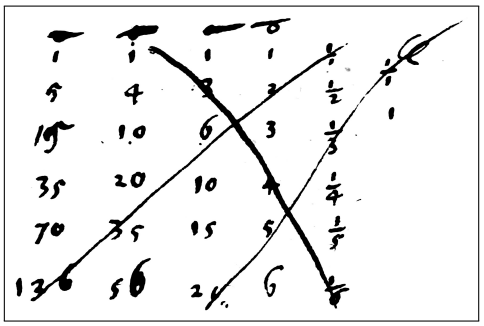
> *Le très ingénieux Pascal a écrit un traité sur le triangle arithmétique, à savoir des sommes, des sommes de sommes et des sommes composées de sommes de sommes etc. des nombres de la progression*

63. Les intitulés des colonnes sont de droite à gauche (et donc de haut en bas sur notre schéma) : « Differentiæ inter differentias differentiarum multiplicatæ par $\frac{4}{3}$ | Differentiæ differentiarum multiplicatæ per $\frac{3}{2}$ | Differentiæ harmonicorum multiplicatæ par $\frac{2}{1}$ (seu reciproci triangularium, seu summæ pyramidalium per $\frac{2}{3}$ divisorum) | Progressio harmonica seu reciproci arithmetici (summæ fractionum seu reciprocorum trigonalium per $\frac{2}{1}$ divisorum ; summæ summarum reciprocorum pyramidalium per $\frac{2}{1}$ in $\frac{3}{2}$ id est 3 divisorum etc.) | Progressio arithmetica (differentiæ trigonalium et differentiæ differentiaraum pyramidalium, etc.) | Summæ arithmeticorum, seu trigonales (differentiæ pyramidalium etc.) | Summæ summarum, seu pyramidales | Summæ ex summis summarum, seu $\nabla\nabla^{\text{gonales}}$ », *Cf* A VII, 3, N.53$_2$, *Triangulum Harmonicum et Triangulum Pascalii*, février 1673 - p.711.

*arithmétique. Quant à moi, j'ai abouti par une méthode singulière au triangle harmonique, c'est-à-dire les différences, les différences des différences et les différences entre les différences des différences etc. des nombres de la progression harmonique.* [64]

Des deux analogies, c'est donc celle qui concerne les sommes et les différences qui semble la plus importante pour Leibniz [65]. Pourtant, le choix de la table des inverses des nombres figurés plutôt que le triangle harmonique au sens moderne se fonde sur la première analogie, à savoir que les termes d'une table sont les inverses de l'autre.

En observant la première forme que Leibniz donne à la table, avant de la barrer, on constate que le triangle arithmétique est présenté sous sa forme quadrangulaire. La progression harmonique est directement accolée à la progression arithmétique, sans la suite centrale des unités. Puis le premier terme de la dernier colonne suggère une structure triangulaire pour la table des inverses des nombres figurés. En effet, la fraction $\frac{1}{1}$ de la dernière colonne indique clairement qu'il ne s'agit pas d'un schéma de différences. Nous avons complété le schéma dans notre reproduction :



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 8,27, Bl.2

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | | | | |
| 5 | 4 | 3 | 2 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{1}$ | | | |
| 15 | 10 | 6 | 3 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{1}$ | | |
| 35 | 20 | 10 | 4 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | |
| 70 | 35 | 15 | 5 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{6}$ | | |
| 126 | 56 | 21 | 6 | $\frac{1}{6}$ | | | | | |

Cette disposition marque de façon moins nette la symétrie qui relie les deux tables, ce qui justifie probablement que Leibniz l'abandonne. Elle met également en valeur la présence de la colonne centrale composée d'unité, dans la disposition finale. De fait, la progression des unités fait partie intégrante de la table des inverses des nombres figurés alors qu'elle est absente du triangle harmonique au sens moderne, puisqu'il s'agit des différences successives de la progression harmonique. Elle fait également partie intégrante du triangle arithmétique de Pascal. Ainsi, la progression des unités peut faire office de pivot entre les deux tables, à la condition que Leibniz choisisse la table des inverses des nombres figurés.

### Démonstration à partir du triangle de différences

En tant que triangle de différences, le triangle harmonique, au sens moderne, vérifie que chaque terme est égal à la somme infinie des différences successives des termes suivants :

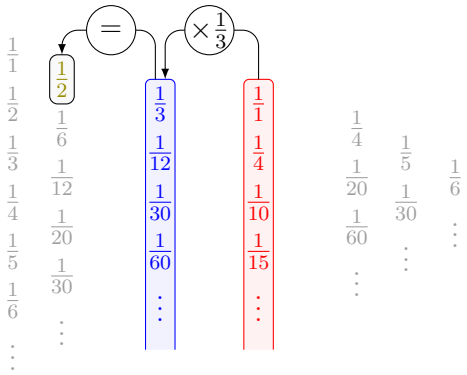
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{1}$ | | | | | |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | | | | |
| $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | | | |
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{4}$ | | |
| $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{5}$ | |
| $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{60}$ | $\frac{1}{60}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{6}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

64. A VII, 3, N.53$_2$, *Triangulum Harmonicum et Triangulum Pascalii*, février 1673 - p.708 : « Ingeniosissimus Pascalius tractatum scripsit de triangulo arithmetico : de summis, et summis summarum, et summis ex summis summarum, etc. numerorum progressionis arithmeticæ. Ego singulari quadam ratione incidi in triangulum harmonicum ; de differentiis et differentiis differentiarum, et differentiis ex differentiis differentiarum, etc. numerorum progressionis harmonicæ. »

65. C'est également cette propriété qu'il met en avant dans l'*Historia et Origo Calculi Differentialis.*

Donc la somme de chaque colonne est égale au premier terme de la colonne qui précède. Ainsi, la somme de la progression des $p$-ièmes différences vaut le premier terme de la progression des $(p-1)$-ièmes différences, à savoir $\frac{1}{p}$. Or, Leibniz sait que si l'on divise la colonne des $p$-ièmes différences par son premier terme, c'est-à-dire $\frac{1}{p+1}$, on obtient la progression des inverses des nombres figurés de dimension $p+1$. Donc la somme de cette dernière progression est égale à la somme des $p$-ièmes différences divisée par $\frac{1}{p+1}$, ce qui donne :

$$\frac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{p+1}} = \frac{p+1}{p}$$




Cette structure de triangle de différences permet donc de déterminer directement la valeur des sommes des inverses des nombres figurés, et fournit une démonstration générale de ce résultat [66]. Ainsi ce raisonnement accorderait la priorité au triangle harmonique, dans son sens moderne, alors que le philosophe semble à la fin de l'époque parisienne, mettre l'accent sur la table des inverses des nombres figurés. De fait, la démonstration qui se trouve dans la *Scheda Exigua* (A VII, 3, N.53$_3$) ne correspond pas à ce raisonnement, ni aucun que Leibniz n'ai jamais présenté, comme nous l'avons montré dans la précédente section. Tous les éléments nécessaires sont pourtant à sa disposition. En réalité, les deux étapes de cette démonstration, à savoir la réduction d'un terme en somme de différences ou la multiplication d'une colonne par un coefficient multiplicatif, correspondent chacune à un raisonnement que Leibniz a déjà tenu et que nous avons analysé. Ceci explique pourquoi tous les éléments nécessaires à cette preuve sont déjà disponibles. Mais peut-être que ceci explique également pourquoi Leibniz n'a pas recours à une telle preuve, puisqu'elle ne lui paraitrait probablement n'être qu'une reformulation de sa propre démarche. Paradoxalement, cette preuve que Leibniz ne donne donc jamais, est celle qui se fonde le plus clairement sur la pratique des tables.

### 4.3.2 Symétrie du triangle harmonique

Leibniz découvre la propriété de symétrie du triangle harmonique par sa pratique synthétique et combinatoire des tables. C'est donc une propriété qui est seulement induite. En réalité, Leibniz travaille de façon indirecte sur cette question à travers son étude du traité publié par Mengoli en 1672, le *Circolo*Nous développons la réception de cette œuvre par Leibniz dans les chapitre 8 et 9, au sein de seconde partie de notre travail..

#### Progression harmonique et nombres combinatoires

Nous développerons d'avantage tous ces points dans la partie suivante, aussi nous ne présentons ici que ce qui est nécessaire à la démonstration de résultat suivant : le $k$-ième terme de la $p$-ième différence de la progression harmonique est égal à l'inverse du nombre figuré de dimension $p+1$ et de côté $k$ divisé par $p+1$ :

$$\mathfrak{T}_{p,k-1} = d^{(p)}\left(\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}\right)_k = \frac{1}{p+1}\cdot\frac{1}{\left(\!\binom{k}{p+1}\!\right)} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{le coefficient } \mathfrak{T}_{p,k} \text{ désigne le terme de rang } k\\ \text{dans colonne de rang } p \text{ du triangle}\end{array}\right)$$

66. Cette démonstration resterait inductive, dans la mesure où la symétrie du triangle harmonique est une propriété seulement induite par Leibniz à partir des premiers termes.

La quadrature des courbes paraboloïdes, c'est-à-dire des lignes qui respectent des lois de puissance, est connue depuis Wallis, comme nous le développerons également dans la seconde partie. Ainsi, on a :

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

Nous pouvons donc voir la progression harmonique comme une suite de quadrature des courbes paraboloïdes. Considérons alors le triangle de différences de la progression 1, $x$, $x^2$, $x^3$ ... :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | | | | | |
| | $1-x$ | | | | |
| $x$ | | $(1-x)^2$ | | | |
| | $x(1-x)$ | | $(1-x)^3$ | | |
| $x^2$ | | $x^2(1-x)^2$ | | $(1-x)^4$ | |
| | $x^2(1-x)$ | | $x(1-x)^3$ | | $(1-x)^5$ |
| $x^3$ | | $x^3(1-x)^2$ | | $x(1-x)^4$ | |
| | $x^3(1-x)$ | | $x^2(1-x)^3$ | | $\vdots$ |
| $x^4$ | | $x^4(1-x)^2$ | | $\vdots$ | |
| | $x^4(1-x)$ | | $\vdots$ | | |
| $x^5$ | | $\vdots$ | | | |
| | $\vdots$ | | | | |
| $\vdots$ | | | | | |

Comme l'opérateur d'intégration est linéaire, on peut intégrer tous les termes de la table. On obtient ainsi le triangle de différences suivant :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\int_0^1 1dx$ | | | | | |
| | $\int_0^1 1-xdx$ | | | | |
| $\int_0^1 xdx$ | | $\int_0^1(1-x)^2dx$ | | | |
| | $\int_0^1 x(1-x)dx$ | | $\int_0^1(1-x)^3dx$ | | |
| $\int_0^1 x^2dx$ | | $\int_0^1 x^2(1-x)^2dx$ | | $\int_0^1(1-x)^4dx$ | |
| | $\int_0^1 x^2(1-x)dx$ | | $\int_0^1 x(1-x)^3dx$ | | $\int_0^1(1-x)^5dx$ |
| $\int_0^1 x^3dx$ | | $\int_0^1 x^3(1-x)^2dx$ | | $\int_0^1 x(1-x)^4dx$ | |
| | $\int_0^1 x^3(1-x)dx$ | | $\int_0^1 x^2(1-x)^3dx$ | | $\vdots$ |
| $\int_0^1 x^4dx$ | | $\int_0^1 x^4(1-x)^2dx$ | | $\vdots$ | |
| | $\int_0^1 x^4(1-x)dx$ | | $\vdots$ | | |
| $\int_0^1 x^5dx$ | | $\vdots$ | | | |
| | $\vdots$ | | | | |
| $\vdots$ | | | | | |

La première colonne est donc en réalité une réécriture de la progression harmonique naturelle. Ainsi, tous les termes de cette tables sont ceux du triangle harmonique, au sens moderne. On a donc le résultat suivant :

$$\mathfrak{T}_{p,k-1} = d^{(p)}\left(\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}\right)_k = \int_0^1 x^{k-1}(1-x)^p dx$$

Ces quelques remarques liminaires permettent de mieux comprendre les opérations que Leibniz effectue dans le *Arithmetica Infinitorum et Interpolationum* (A VII, 3, N.57$_2$), écrit en 1676 à la fin de son séjour parisien. Il développe le polynôme $x^n(1-x)^m$ [67], à l'aide de la formule du binôme :

$$x^n(1-x)^m = x^n\left(\binom{m}{0} - \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 - \binom{m}{3}x^3 + \cdots + (-1)^m\binom{m}{m}x^m\right)$$

Il peut alors appliquer la formule d'intégration susmentionnée et obtient une composition entre des suites harmoniques et les séries des nombres combinatoires :

$$\int x^n(1-x)^m = \binom{m}{0}\frac{x^{n+1}}{n+1} - \binom{m}{1}\frac{x^{n+2}}{n+2} + \binom{m}{2}\frac{x^{n+3}}{n+3} - \binom{m}{3}\frac{x^{n+4}}{n+4} + \cdots + (-1)^m\binom{m}{m}\frac{x^{n+m+1}}{n+m+1}$$

A partir de cette relation, il obtient une formule nouvelle qu'il peut interpréter dans le cadre déjà connu des quadratures complètes. Cela revient donc à remplacer $x$ par 1 :

$$\mathfrak{T}_{m,n+2} = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx = \frac{\binom{m}{0}}{n+1} - \frac{\binom{m}{1}}{n+2} + \frac{\binom{m}{2}}{n+3} - \frac{\binom{m}{3}}{n+4} + \cdots + (-1)^m\frac{\binom{m}{m}}{n+m+1}$$

Bien-sûr, Leibniz ne raisonne pas sur des valeurs générales, mais sur des cas particuliers comme $n = m = 3$ :

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{5} + \frac{3}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{140}$$

Pour décortiquer cette relation, Leibniz réunit le membre de gauche en une seule fraction, de sorte qu'il se transforme en la fraction de droite. Il constate alors empiriquement que le numérateur ne dépend plus du choix de la suite harmonique :

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{5} + \tfrac{3}{6} - \tfrac{1}{7} &= \tfrac{1}{140} \\
\tfrac{5.6.7}{4.5.6.7} - \tfrac{3\times4.6.7}{4.5.6.7} + \tfrac{3\times4.5.7}{4.5.6.7} - \tfrac{4.5.6}{4.5.6.7} &= \tfrac{1}{4.5.7} = \tfrac{6}{4.5.6.7} \\
1\times\tfrac{4.5.6.7}{4} - 3\times\tfrac{4.5.6.7}{5} + 3\times\tfrac{4.5.6.7}{6} - 1\times\tfrac{4.5.6.7}{7} &= 6 \\
&= 1.2.3
\end{aligned}$$

Leibniz considère un autre exemple :

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{5} + \tfrac{1}{6} &= \tfrac{1}{60} \\
\tfrac{5.6}{4.5.6} - \tfrac{2\times4.6}{4.5.6} + \tfrac{4.5}{4.5.6} &= \tfrac{1}{3.4.5} = \tfrac{2}{4.5.6} \\
1\times\tfrac{4.5.6}{4} - 2\times\tfrac{4.5.6}{5} + 1\times\tfrac{4.5.6}{6} &= 2 = 1.2
\end{aligned}$$

Dans le cas général, son raisonnement revient à celui-ci :

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{m}{0}}{n+1} - \frac{\binom{m}{1}}{n+2} + \frac{\binom{m}{2}}{n+3} - \frac{\binom{m}{3}}{n+4} + \cdots + (-1)^m\frac{\binom{m}{m}}{n+m+1} &= \mathfrak{T}_{m,n} \\
\frac{\binom{m}{0}\frac{\alpha_n}{n+1} - \binom{m}{1}\frac{\alpha_n}{n+2} + \binom{m}{2}\frac{\alpha_n}{n+3} - \binom{m}{3}\frac{\alpha_n}{n+4} + \cdots + (-1)^m\binom{m}{m}\frac{\alpha_n}{n+m+1}}{\alpha_n} &= \frac{m!}{\alpha_n} \\
\binom{m}{0}\frac{\alpha_n}{n+1} - \binom{m}{1}\frac{\alpha_n}{n+2} + \binom{m}{2}\frac{\alpha_n}{n+3} - \binom{m}{3}\frac{\alpha_n}{n+4} + \cdots + (-1)^m\binom{m}{m}\frac{\alpha_n}{n+m+1} &= m!
\end{aligned}$$

67. Dans le manuscrit, Leibniz reprend les notations de Mengoli, à savoir $a$ pour la variable $x$, initiale de *abscissa* et $r$ pour la variable $1-x$, initiale de *residua*. Nous reprendrons plus rigoureusement ces notations dans la partie suivante.

En posant $\alpha_n = (n+1)(n+2)\dots(n+m+1)$. On constate effectivement que le membre de gauche ne dépend plus de $n$. Cependant, dans le cas général, nous avons utilisé la formule suivante :

$$\mathfrak{T}_{m,n} = \frac{1}{m+1}\frac{1}{\left(\!\binom{n+1}{m+1}\!\right)} = \frac{m!}{\alpha_n}$$

Les calculs de Leibniz, dans les cas particuliers, ne permettent pas de mettre en évidence l'application d'une telle formule générale. Il s'agit donc d'un processus inductif. Leibniz induit en effet une règle totalement générale, à savoir qu'elle s'applique à n'importe quelle suite harmonique :

> *De là, on en déduit aussi une équation admirable. A savoir que si l'on multiplie une série complète de nombres combinatoires alternativement positive et négative avec autant d'harmoniques quelconques, le produit sera toujours le même.* [68]

Considérons donc une suite harmonique quelconque de $m+1$ termes successifs :

$$a_0\ ;\ a_1\ ;\ a_2\ ;\ a_3\ ;\dots\ ;a_m$$

Si l'on suit la formulation de Leibniz, alors on devrait avoir la somme suivante indépendante du choix de la suite $a$ :

$$\binom{m}{0}a_0 - \binom{m}{1}a_1 + \binom{m}{2}a_2 - \binom{m}{3}a_3 + \dots + (-1)^m\binom{m}{m}a_m = \gamma_m \ \text{ pour toute suite harmonique } a$$

En réalité cette somme dépend, en toute généralité, du choix de la suite harmonique. En effet, si la suite $a$ est harmonique, alors la suite des inverses des termes de $a$ est arithmétique. Ainsi il existe une raison $r$ telle que :

$$\frac{1}{a_k} = \frac{1}{a_0} + k.r$$

Ramenons cette suite à une raison arithmétique unitaire. On obtient :

$$a_k = \frac{\frac{1}{r}}{\frac{1}{a_0 r} + k} = \frac{\rho}{\beta + k}$$

Avec $\beta = \frac{1}{a_0 r}$ et $\rho = \frac{1}{r}$ la raison harmonique de $a$. Alors :

$$\begin{aligned} & \binom{m}{0}a_0 - \binom{m}{1}a_1 + \binom{m}{2}a_2 - \binom{m}{3}a_3 + \dots + (-1)^m\binom{m}{m}a_m \\ = \ & \binom{m}{0}\frac{\rho}{\beta} - \binom{m}{1}\frac{\rho}{\beta+1} + \binom{m}{2}\frac{\rho}{\beta+2} - \binom{m}{3}\frac{\rho}{\beta+3} + \dots + (-1)^m\binom{m}{m}\frac{\rho}{\beta+m} \end{aligned}$$

En développant le binome dans l'expression $x^n(1-x)^m$, il n'est pas nécessaire que l'exposant $n$ soit en un entier. On peut très bien considérer l'expression $\rho x^{\beta-1}(1-x)^m$ et lui appliquer le même raisonnement. On obtient alors le développement ci-dessus. On peut alors induire la formule suivante :

$$\binom{m}{0}a_0 - \binom{m}{1}a_1 + \binom{m}{2}a_2 - \binom{m}{3}a_3 + \dots + (-1)^m\binom{m}{m}a_m = \frac{\rho}{\alpha}\times m! = \frac{m!}{\mu(a)}$$

En posant $\alpha = \beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+m) = \frac{\rho^{m+1}}{a_0.a_1\dots a_m}$, et $\mu(a) = \frac{\alpha}{\rho}$. Ce dernier facteur dépend de la suite $a$ contrairement à ce que Leibniz semble exprimer :

$$\begin{aligned} \mu(a) &= \frac{\alpha}{\rho} \\ &= \frac{\rho^{m+1}}{a_0.a_1\dots a_m}\times\frac{1}{\rho} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_0}}\right)^m}{a_0.a_1\dots a_m} \end{aligned}$$

68. A VII, 3, N.57$_2$, *Arithmetica Infinitorum et Interpolationum*, fin avril 1676, p.739 : « Unde mirabilis etiam ducetur æquatio. Nempe : Si in seriem plenam numerorum combinatoriorum alternatim affirmatam et negatam, ducantur totidem harmonici quicunque, semper proveniet idem. »

D'ailleurs, c'est bien ce que Leibniz obtient lorsqu'il considère des suites harmoniques naturelles comme $\frac{1}{4}$ ; $\frac{1}{5}$ ; $\frac{1}{6}$ ; $\frac{1}{7}$, avec $\mu(a) = 4.5.6.7$.
Ainsi, le résultat général qu'il formule n'est en fait valide que pour une classe particulière de suites harmoniques, à savoir celles qui sont de la forme :

$$b_k = a_k \times \mu(a)$$

Avec $a$ une suite harmonique quelconque, et en notant :

$$\mu(a) = \frac{\left(\frac{1}{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_0}}\right)^m}{a_0.a_1 \dots a_m} = \frac{\rho(a)^m}{a_0.a_1 \dots a_m} \qquad \text{avec } \rho(a) \text{ la raison harmonique de } a.$$

Dans ce cas, en reprenant les notations $\beta = \rho(a) \times \frac{1}{a_0}$, on constate que la suite $b$ est constituée des produits partiels d'une suite arithmétique de raison unité :

$$\begin{aligned} b_k &= a_k \times \mu(a) \\ &= \frac{\rho(a)}{\beta + k} \times \frac{\rho(a)^m}{a_0.a_1 \dots a_m} \\ &= \frac{1}{\beta + k} \times \left(\frac{\rho(a)}{a_0}.\frac{\rho(a)}{a_1} \dots \frac{\rho(a)}{a_m}\right) \\ &= \frac{1}{\beta + k} \times \beta(\beta+1)\dots(\beta+m) \\ &= \beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)(\beta+k+1)\dots(\beta+m) \end{aligned}$$

Réciproquement, choisissons $\beta$ quelconque, et considérons une suite harmonique $b_0$ ; $b_1$ ; $b_2$ ; … ; $b_m$ définie comme ci-dessus.

La raison harmonique de $b$ est égale au produits de tous les termes :

$$\begin{aligned} \rho(b) &= \frac{1}{\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_0}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\beta(\beta+2)(\beta+3)\dots(\beta+m)} - \frac{1}{(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+m)}} \\ &= \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+m)}{\beta+1-\beta} \\ &= \beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+m) \end{aligned}$$

Le coefficient $\mu(b)$ vaut 1 :

$$\begin{aligned} \mu(b) &= \frac{\rho(b)^m}{b_0.b_1 \dots b_m} \\ &= \frac{1}{\rho(b)} \times \left(\frac{\rho(b)}{b_0}.\frac{\rho(b)}{b_1} \dots \frac{\rho(b)}{b_m}\right) \\ &= \frac{1}{\rho(b)} \times (\beta.(\beta+1)\dots(\beta+m)) \\ &= \frac{\rho(b)}{\rho(b)} = 1 \end{aligned}$$

Cela signifie que cette transformation $T$ qui génère la suite $b$ à partir de la suite $a$ est idempotente, ou encore que $T \circ T = T$. Dès lors, on a bien l'équation qui correspond à la proposition de Leibniz, pour une suite harmonique $b = T(a)$ :

$$\binom{m}{0}b_0 - \binom{m}{1}b_1 + \binom{m}{2}b_2 - \binom{m}{3}b_3 + \dots + (-1)^m\binom{m}{m}b_m = \frac{m!}{\mu(b)} = m!$$

Ici, le membre de droite et les coefficients binomiaux ne dépendent que du nombre $m$ de termes et pas du choix de la suite $b$.
Leibniz différencie alors deux équations pour deux suites quelconques $b$ et $b'$, afin d'annuler le terme constant :

> *Et même plus, si l'on multiplie une série complète de nombres combinatoires alternativement positifs et négatifs avec autant de différences de nombres harmoniques à qui l'on ôte continument dans l'ordre, le résultat sera nul.* [69]

69. A VII, 3, N.57$_2$, *Arithmetica Infinitorum et Interpolationum*, fin avril 1676, p.740 : « Et porro si series plena numerorum combinatoriorum, alternatim affirmatorum et negatorum in totidem differentias numerorum harmonicum continuorum ordine sibi detractorum ducatur, factum æquabitur nihilo. »

Ainsi, Leibniz obtient :

$$\begin{aligned} & \binom{m}{0}(b_0 - b'_0) - \binom{m}{1}(b_1 - b'_1) + \binom{m}{2}(b_2 - b'_2) - \binom{m}{3}(b_3 - b'_3) + \cdots + (-1)^m \binom{m}{m}(b_m - b'_m) \\ = \; & m! - m! \\ = \; & 0 \end{aligned}$$

Notons qu'en formulant sa généralisation, Leibniz caractérise les progressions harmoniques auxquelles ces équations sont susceptibles d'être appliquées. De simplement désignées par les « harmoniques » (« *harmonici* »), il les décrit désormais comme « des nombres harmoniques à qui l'on ôte continument dans l'ordre » (« *numeri harmonici continui ordine sibi detracti* »). Leibniz désigne bien ici les produits partiels $b_k = \beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)(\beta+k+1)\dots(\beta+m)$ que nous avons construit. Nous avons montré que les séries constituées de ces produits forment la classe générale des progressions solutions du problème, mais Leibniz n'aborde pas ces questions de généralité. Dans les cas qu'il considère, $\beta$ est systématiquement un entier naturel, si bien que la suite $b$ est naturellement dérivée de la suite harmonique $a$ :

$$a : \frac{1}{\beta} \; ; \; \frac{1}{\beta+1} \; ; \; \frac{1}{\beta+2} \; ; \; \dots \; ; \; \frac{1}{\beta+m}$$

Dans notre raisonnement, nous avons transformé le coefficient du triangle harmonique en une fraction où le numérateur ne dépend que du nombre de termes $m$ et le dénominateur est un produit continu des termes d'une suite arithmétique de raison 1.

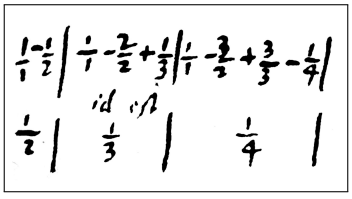
$$\mathfrak{T}_{m,n} = \frac{1}{(m+1)\left(\!\!\binom{n+1}{m+1}\!\!\right)} = \frac{m!}{n(n+1)(n+2)\dots(n+m+1)}$$

La propriété induite par Leibniz dans le *Arithmetica Infinitorum et Interpolationum* (A VII, 3, N.57$_2$) montre bien que les inverses des nombres combinatoires, divisés par un certain coefficient, vérifient les relations différentielles d'un triangle de différences. En effet, la théorie des différences finies indique que la différences $p$-ième s'exprime au moyen d'une expression semblable au développement du binôme :

$$d^{(p)}\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)_k = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} (-1)^j u_{k+j}$$

Mais cette relation est déduite des formules de quadrature et donc du développement d'un vrai binôme. Comme nous le verrons, Leibniz n'utilise aucune des propriétés du triangle harmonique dans cette étude sur les quadratures. Ainsi, bien qu'il retrouve, par ses calculs et ses intuitions, des propriétés de ce dernier, on ne peut pas considérer qu'il a apporté un regard nouveau quant à l'explication de la symétrie du triangle de différences de la série harmonique. Ce nouveau regard exige d'établir des liens entre ces différentes équations, liens que nous établissons en tant qu'observateurs.
Par ailleurs, cette relation entre nombres combinatoires et progressions harmoniques est brievement développée dans un fragment non daté, le *Summa ex numeris Combinatoriis per Arithmeticos divisis* (LH 35, 7, 11 Bl.11) :

$\frac{1}{1} - \frac{4}{2} + \frac{6}{3} - \frac{4}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$.[70]



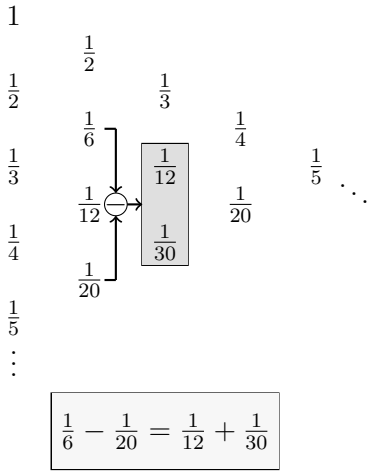
Manuscrits de Leibniz - LH 35, 7, 11, Bl.11

Là encore, Leibniz ne fait pas de référence aux liens qu'ont ces équations avec les triangles de différences.

70. LH 35 7 11 Bl. 11, *Summa ex numeris Combinatoriis per Arithmeticos divisis*, non daté : « $\frac{1}{1} - \frac{4}{2} + \frac{6}{3} - \frac{4}{4} + \frac{1}{5}$ æqu. $\frac{1}{5}$. »

**La somme finie d'une progression harmonique**

Nous avons vu que le triangle harmonique doit débuter par la progression harmonique, là où la table des inverses des nombres figurés commence par la colonne des unités. En effet, le coefficient multiplicatif devenant infini, on ne peut pas considérer la progression harmonique comme les différences de la progression constante, à quelque facteur près que ce soit. Ainsi, la question suivante se pose : de quelle série, la progression harmonique est-elle la différence ? Autrement dit, il s'agit de déterminer la valeur des sommes finies des premiers termes de la progression harmonique. Leibniz traite ce sujet dans le *De summis serierum fractionalium* (LH 35, 7, 12, Bl.1-2), que nous aurons l'occasion d'étudier dans le détail lorsque nous traiterons des puissances proniques. Ces travaux, datant probablement de la fin des années 1670, ont une place pertinente dans la présente analyse, puisque Leibniz y aborde le triangle harmonique, qu'il désigne comme tel, dans son sens moderne. Comme on l'a vu, la structure de triangle de différences que revêt le triangle harmonique permet de calculer la somme de n'importe quelle suite de termes consécutifs de n'importe quelle colonne, à partir de la différence de deux termes extrêmes dans la colonne précédente :




Mais ce raisonnement ne fonctionne pas pour faire la somme des termes de la progression harmonique. Dans ce texte, Leibniz note pour la première fois de façon explicite le problème qu'il y a à généraliser la méthode de sommation sur la première colonne. On obtient bien la divergence de la série harmonique, mais on obtient également un nombre infini pour les sommes finies, ce qui est contradictoire :

> *Et cela fonctionne partout sauf pour le 1^er^ degré, où* $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{0}$*, c'est-à-dire l'infini. Alors on obtiendrait que* $\int \nu$ *du 1^er^ degré* $= \frac{1}{0} - 1$*, où en faisant s'évanouir y, on ne peut pas dériver une série finie subsistant pour un certain y déterminé. Mais seulement, il apparait également de là que la série infinie est égale à un nombre infini.*[71]

Ici, $\nu$ désigne le terme courant d'une colonne du triangle harmonique, $y$ est la borne supérieure de sommation et $x$ le rang de la colonne dans le triangle. Ainsi, la formule de sommation représentée ci-dessus des $n$ premiers termes de la $p$-ième colonne s'exprime par la formule suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(p-1)\left(\!\left(\begin{smallmatrix}1\\p-1\end{smallmatrix}\right)\!\right)} - \frac{1}{(p-1)\left(\!\left(\begin{smallmatrix}n+1\\p-1\end{smallmatrix}\right)\!\right)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p.\left(\!\left(\begin{smallmatrix}k\\p\end{smallmatrix}\right)\!\right)} \\
\frac{1}{p-1} - \frac{(p-2)!}{(n+1)(n+2)\dots(n+p-1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(p-1)!}{k(k+1)\dots(k+p-1)} \\
\underset{\downarrow}{\frac{1}{p-1}}_{x} - \underset{\downarrow}{n.}_{y} \underbrace{\frac{(p-2)!}{n(n+1)(n+2)\dots(n+p-1)}}_{\nu} &= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{(p-1)!}{k(k+1)\dots(k+p-1)}}_{\nu}
\end{aligned}$$

71. LH 35 7 12 Bl. 1-2, *De summis serierum fractionalium*, non daté : « Quod ubique procedit præterquam in primo gradu, ubi $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{0}$ seu infinitum. Et fieret $\int \nu$ gradus $1^{\text{mi}} = \frac{1}{0} - 1$ ubi evanescente $y$ non potest hinc duci aliquid ad seriem finitam in certo aliquo $y$ subsistentem, sed tantum seriem infinitam hinc apparet etiam infinito numero æqualem esse. »

Dans le formalisme de Leibniz, cela devient donc [72] :

$$\frac{1}{x-1} - y\nu = \int \nu$$

Mais au premier rang, $\nu = \frac{1}{y}$ désigne la progression harmonique. Ainsi, la formule de Leibniz donne :

$$\frac{1}{1-1} - y\frac{1}{y} = \frac{1}{0} - 1$$

Ceci implique donc que la somme finie des premiers termes de la progression harmonique est infinie et qu'elle ne dépend pas du nombre de terme, ce qui est absurde. Ce raisonnement souligne que pour étable la somme finie d'un certain nombre de terme dans le schéma de différence, il faut en réalité effectuer la différence de deux séries infinies :

$$\sum_{k=a}^{b} \frac{1}{p.\left(\!\binom{k}{p}\!\right)} = \underbrace{\frac{1}{(p-1)\left(\!\binom{a}{p-1}\!\right)}}_{=\left(\sum_{k=a}^{+\infty} \frac{1}{p.\left(\!\binom{k}{p}\!\right)}\right)} - \underbrace{\frac{1}{(p-1)\left(\!\binom{b+1}{p-1}\!\right)}}_{=\left(\sum_{k=b+1}^{+\infty} \frac{1}{p.\left(\!\binom{k}{p}\!\right)}\right)}$$

Comme ces deux séries sont divergentes dans le cas de la progression harmonique, on aboutit à une contradiction.

72. On remarque que notre traduction en formalisme moderne ne fonctionne pas parfaitement, puisque $\nu$ a pour numérateur $(p-2)!$ dans le membre de gauche et $(p-1)!$ dans le membre de droite. Il s'agit effectivement d'une erreur de Leibniz, qui aurait donc du écrire : $\int \nu = \frac{1-y\nu}{x-1}$.

## Conclusion

Dans *Leibniz in Paris*[73], Hofmann se fonde principalement sur l'*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum* (A II, 1, N.109) et sur la *Scheda Exigua* (A VII, 3, N.$53_3$) pour établir la manière dont Leibniz a résolu et généralisé le problème posé par Huygens. Il établit ainsi une démarche rationnelle, qui se fonde sur l'analogie avec les séries géométriques et qui aboutit progressivement au résultat. Outre les problèmes chronologiques que pose une telle démarche, car la *Scheda Exigua* (A VII, 3, N.$53_3$) est bien trop tardive, notre étude a pu montré qu'il totalement vain d'espérer décrire la résolution de ce problème et l'émergence du triangle harmonique par une démonstration rationnelle et intemporelle. En effet, le triangle harmonique chez le jeune Leibniz constitue un objet historique ambivalent dont les contours ne peuvent pas être simplement décrits par une définition mathématique objective. On ne peut saisir sa complexité qu'en suivant les multiples chemins tortueux qui ont mené le jeune philosophe à le découvrir sous plusieurs aspects et à l'appliquer pour différents objectifs. Autrement dit, mettre en avant la pratique plutôt que l'apodictique. Dès lors, une démarche diachronique montre que la réponse au problème posé par Huygens ne fut pas une solution complète et aboutie, mais un axe de recherche impliquant d'autres progressions, et qui, à travers la pratique des tables, centre la focale tantôt sur les objets mathématiques, tantôt sur leurs dispositions, tantôt sur la méthode utilisée. Un tel portrait doit assumer en son sein toutes les pistes que le jeune philosophe a cru bon d'emprunter, quand bien même elles se sont avérées infructueuses ou bien peu prometteuses.

Finalement, l'histoire de cette découverte trace aussi celle de l'entrée d'un jeune philosophe spécialiste de jurisprudence dans la pratique professionnelle des mathématiques. Il s'agit du premier résultat remarquable que Leibniz obtient à peine plus de six mois après son arrivée à Paris, une grande partie de ce temps ayant par ailleurs été consacrée à l'apprentissage du français. Ce genre de performances lui paraissent nécessaires pour obtenir le crédit des spécialistes et des institutions scientifiques comme l'Académie Royale de Paris ou la *Royal Society* de Londres. Leibniz place donc naturellement une valeur toute particulière dans cette découverte. Ainsi, il sera particulièrement attentif quant à la manière de présenter aussi bien le résultat que la démarche qu'il a suivi pour l'obtenir. Naturellement, des questionnements sur la rigueur et la nature des démonstrations vont émerger des soucis de présentation. La nécessité des preuves algébriques formelles entre en conflit avec la limpidité des démarches inductives. Au centre de ce face-à-face, la manière d'exprimer les relations qui lient les termes entre eux, les donnés aux cherchés, les sommes aux différences.

Enfin, nous avons montré, notamment dans la *Scheda Exigua* (A VII, 3, N.$53_3$), que Leibniz adapte l'histoire de sa propre invention pour qu'elle s'accorde avec la façon dont il l'expose, et dont il en expose la preuve. Dans notre analyse de l'*Historia et Origo Calculi Differentialis*, nous avons montré que Leibniz adopte une posture similaire dans la première version de ce traité. Là aussi, l'histoire de l'invention sert un agenda principalement épistémologique. En donnant aux événements historiques le rôle d'arguments logiques, quitte à les sélectionner ou à les déformer, l'histoire devient alors un processus rationnel qui engendre le concept à l'image d'une démonstration. Nous avions proposé, pour l'*Historia et Origo Calculi Differentialis*, d'associer cette attitude à la recherche de l'« origine » (« *origo* ») de l'invention, tandis que l'« histoire » (« *historia* ») désigne une position historiographique tournée vers le plaidoyer et l'enquête judiciaire, pour laquelle l'argumentaire repose sur des matériaux sourcés. Ceci est conforté par le titre « Origine de l'invention du triangle harmonique » (« *Origo inventionis trianguli harmonici* »)[74] que Leibniz donne au paragraphe de la *Scheda Exigua* (A VII, 3, N.$53_3$) qui y est consacré. L'« origine » (« *origo* ») consiste donc à exposer les méthodes de découverte, non dans une démarche historique mais à des fins pédagogiques, propres à nourrir l'*ars inveniendi*, comme Leibniz l'écrit d'ailleurs dans l'*Historia et Origo Calculi Differentialis* :

> *Mais il était digne du plus grand intérêt de faire connaître cette voie, mais aussi la méthode par laquelle l'inventeur est parvenu à ce nouveau genre de calcul. En effet, celle-ci est jusqu'aujourd'hui méconnue du public et peut-être aussi de ceux-là même qui voudront prendre part à cette invention. Il va donc l'exposer lui-même et transmettre les progrès de ses propres études analytiques, en partie de mémoire, et en partie à l'aide d'écrits existants et quelques vieux manuscrits qui subsistent. C'est par*

73. [34] Hofmann J. E., *Leibniz in Paris 1672-1676 : His Growth to Mathematical Maturity*, Cambridge University Press, 1974 - p.15-20

74. A VII, 3, N.$53_3$, *Scheda Exigua*, décembre 1675 - février 1676, p.712.

*cette méthode qu'il avait décidé d'illustrer, dans un petit traité idoine, l'histoire de la partie la plus profonde de la Mathesis ainsi que l'art d'inventer lui-même.* [75]

Leibniz semble accorder la priorité à la table des inverses des nombres figurés plutôt qu'au triangle harmonique dans son sens moderne. Ainsi, contrairement à ce que l'on pourrait conclure de façon trop hâtive de la lecture de certains textes, le triangle harmonique n'a pas servi d'exemple canonique au jeune philosophe pour y bâtir la base de sa théorie des différences finies et de son approche tabulaire de la combinatoire. Ce rôle a été tenu par la table des inverses des nombres figurés. Bien que n'étant pas une table de différences, elle a été l'occasion pour Leibniz de comprendre d'avantage certains de leurs mécanismes :

*A partir de quoi l'on peut saisir clairement comment, grâce aux simples, on devine souvent les composés.* [76]

75. [46] G.W. Leibniz, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, *ed.* K.I. Gerhardt, Hahn, 1846 - p.3-4 : « Sed majus operæ pretium erat ipsam viam ac rationem qua ad novum hoc calculi genus inventor pervenit innotescere ; ea enim hactenus publice ignoratur etiam illis ipsis fortasse, qui in partem inventi venire vellent, quam exponere ipse, et progressus studiorum suorum Analyticorum partim ex memoria, partim ex scriptis extantibus et veterum schedarum qualibuscunque reliquiis tradere, eaque ratione Historiam profundioris Matheseos artemque ipsam inveniendi justo libello illustrare decreverat. »

76. A VII, 3, N.$53_3$, *Scheda Exigua*, décembre 1675 - février 1676, p.713 : « Unde patet quomodo simplicium auxilio sæpe composita divinemus. » - *Nota Bene* : Notons que cette phrase, issue de la *Scheda Exigua* (A VII, 3, N.$53_3$), est la copie presque parfaite d'un passage dans le *Triangulum Harmonicum et Triangulum Pascalii* (A VII, 3, N.$53_2$), que nous avons déjà cité, *Cf* la note 62.

# Chapitre 5

# Les Triangles des différences

## Introduction

Le schéma de différences constitue l'objet central de notre analyse, et les quatre chapitres précédents ont amplement illustré son omniprésence dans les travaux du jeune Leibniz sur l'étude des progressions, mais surtout à quel point il s'est avéré un outil puissant et fécond pour l'art d'inventer. Ainsi, de façon paradoxale, ce chapitre consacré aux schémas de différences n'a pas pour ambition de montrer l'importance que ces diagrammes revêtent au sein du corpus mathématique leibnizien, mais plutôt de mettre en lumière les conséquences plus directes que Leibniz en a tiré, quant à l'analyse des progressions, ainsi que les rapports que ces schémas entretiennent avec la théorie des différences finies [1]. Leibniz ne développe pas la théorie des différences finies telle qu'il la décrit dans l'*Historia et Origo Calculi Differentialis*, mais à un stade bien plus rudimentaire que nous désignerons comme la théorie des triangles de différences. Il ne formalise ces tables que dans un seul texte, le *De Artibus resolvendi progressionem* (A VII, 3, N.4) qui s'avère extrêmement précoce, si l'on se fie à la datation proposée par les éditeurs de l'*Akademie*, à savoir entre l'été et l'hivers 1672. La théorie des triangles de différences précède donc sa pratique, en tout cas sa pratique à grande échelle.
La structure tabulaire du triangle de différence correspond à une pratique "liste de listes". Néanmoins, les propriétés que Leibniz décrit en son sein démontrent l'importance du caractère bidimensionnel de ces diagrammes.
Une des découvertes majeures de la théorie de triangles de différences marque le jeune Leibniz au point qu'il va en faire part à la *Royal Society* et y consacrer quelques travaux : les génératrices. Ces coefficients constituent pour Leibniz un outil formidable de l'analyse de progression. Elle montre également le rôle déterminant qu'on les nombres combinatoires dans la théorie des différences finies et permettent de mieux comprendre la future construction du concept de puissances proniques.
Il faut ajouter qu'à travers l'immense corpus mathématique leibnizien, on trouve quelques exemples de raffinements des triangles de différences, ce qui montre que Leibniz n'a jamais cessé de nouvelles tentatives pour façonner des outils plus fructueux à partir de ceux dont il dispose. Ces triangles généralisés se développent durant la fin des années 1670, alors que Leibniz met en forme sa conception méthodologique de l'art combinatoire, comme la branche synthétique de l'*ars inveniendi*.
Pour finir, nous montrons, à travers le cas du *De summis serierum Arithmo-Geometricarum infinitarum* (LH 35 7 11 Bl.9), que les triangles de différences projettent leurs structures dans d'autres problèmes, au sein desquels Leibniz applique également une pratique des tables.

1. *Cf* Annexes.

## 5.1 Théorie des triangles de différences

### 5.1.1 Le *De Artibus resolvendi progressionem*

Le *De Artibus resolvendi progressionem* (A VII, 3, N.4) est constitué de quatre pièces, regroupées par les éditeurs de l'*Akademie*. Etant donné son caractère très précoce, développons brièvement les arguments des éditeurs quant à son *terminus ad quem*. Ils avancent principalement deux arguments :

- ⋆ on trouve sur toutes les pièces un filigrane qui est beaucoup utilisé durant la deuxième moitié de 1672, en particulier sur des pièces qui traitent de physique.
- ⋆ Leibniz y exprime son intention d'aller regarde le calcul des proportions chez Grégoire de Saint-Vincent, ce qui est chose faite lorsqu'il rédige l'*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum* (A II, 1, N.109) [2].

Les arguments de datations fondés sur le filigrane sont assez fragiles pour déterminer le *terminus ad quem*. D'ailleurs, un des manuscrits de physique (A VIII, 1, N.64), évoqués par les éditeurs [3], qui a le même filigrane, a désormais été édité et daté du printemps ou de l'été 1673. La référence à Grégoire de Saint-Vincent est, en revanche, bien plus solide. Néanmoins, il faut tout de même indiquer que de nombreuses références présentes dans l'*Accessio ad Arithméticam Infinitorum* (A II, 1, N.109) se sont absolument pas maitrisée par le jeune Leibniz, notamment Pascal ou Wallis. Ainsi, il reste tout à fait envisageable que le jeune Leibniz ait souhaité retourner consulter l'ouvrage de Grégoire de Saint-Vincent, plus en détail.
En conclusion, la date proposée par l'*Akademie* est très raisonnable, mais il est toutefois possible que Leibniz ait rédigé un peu plus tard le *De Artibus resolvendi progressionem* (A VII, 3, N.4), par exemple en janvier ou en février 1673. A cette période, la pratique tabulaire du jeune philosophe est plus avancée que ce qu'elle était à la fin de l'été 1672. Il n'est donc pas possible d'assigner à ce texte ni le rôle de source à l'origine des pratiques naissantes, ni celui d'outil théorique pour clarifier une pratique existante.
Les quatre pièces du *De Artibus resolvendi progressionem* (A VII, 3, N.4) traitent des sujets suivants :

- ⋆ La première partie est introductive et évoque les applications d'une telle théorie pour le calcul de quadratures. Leibniz note que cette idée se trouve déjà chez Pascal. En réalité, c'est une idée très commune, que l'on trouve par exemple aussi chez Mengoli ou chez Wallis.
- ⋆ La seconde partie introduit la notion de « triangle de progressions » (« *triangulum progressionum* »), qui correspond à ce que nous désignons par triangle de différences. Il s'agit de la description la plus complète de ce schéma de différences dont nous disposons.
- ⋆ La troisième partie s'intéresse aux opérations sur les progressions, notamment les puissances et les extractions de racines.
- ⋆ La quatrième partie s'intéresse à la manière de déterminer le rang d'un terme dans la table ou dans une progression.

#### Nomenclature du triangle

La structure des « triangle de progressions » (« *triangulum progressionum* ») se trouve dans la deuxième partie du texte. Il consiste à donner, pour une certaine progression, les termes, les différences de tous degrés et les sommes de tous degrés :

> *Pour une progression quelconque, sont donnés les « termes », sont données les « différences », sont données les « différences des différences », c'est-à-dire les « différences seconde, troisième etc ». Et sont données les « sommes ».* [4]

La structure de base d'un tel triangle est la suivante :

2. A II, 1, N.109, *Accessio ad Arithmeticam Infinitorum*, fin 1672 - *Cf* p.349 ; p.350 ; p.351.
3. A VIII, 1, N.64, *Notes concernant l'instrument pour niveller un thérmomètre à boule et des expériences optiques de Mariotte*, printemps-été 1673 - p.579-580 ; les éditeurs cite la référence dans le catalogue critique : *Cc2 282*
4. A VII, 3, N.4$_2$ - p.36 : « In qualibet progressione dantur "termini", dantur "differentiæ", dantur "differentiæ differentiarum", seu "differentiæ 2$^{\text{dæ}}$, tertiæ etc. Dantur summæ. »

*Aussi, le "triangle de progressions" est la collection issue des termes ainsi que de toutes les différences de tous les degrés ; les termes étant disposés rangés en ligne droite et les différences entre deux termes. Les termes forment la "base du triangle", les différences d'un même degré forment les "parallèles à la base". Les lignes parallèles à la base décroissent continument d'une unité. Le triangle de progression est équilatère. On peut aussi aussi appeler "bases" les parallèles à la base, en effet ce sont les termes d'une autre progression. De fait, toutes différences de progressions sont des "progressions homologues" comme les côtés sont dits homologues dans un triangle.* [5]

Ici, le « triangle de progressions » (« *triangulum progressionum* ») est défini pour une suite finie, par exemple $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ qui constitue la base du triangle. Les suites situées au dessus sont les différences successives des termes au dessous, et sont donc chacune plus courte d'une unité que la précédente. On note qu'on ne trouve pas sommes de la progression sur le triangle. Leibniz note toutefois que ces progressions de différences peuvent être considérées comme des progressions à part entière et constituer ainsi la base d'un nouveau triangle de progressions qui est un sous-triangle semblable (« homologue » dans le texte) au premier. Dès lors les lignes situées au dessous sont les sommes des lignes situées au dessus. Dans cette description, on a encore une approche "liste de listes" où seules les suites horizontales accèdent au statut de progression.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & e_1 & & & & \\
 & & & d_1 & & d_2 & & & \\
 & & c_1 & & c_2 & & c_3 & & \\
 & b_1 & & b_2 & & b_3 & & b_4 & \\
a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5
\end{array}
$$

Notons que, contrairement à la majorité des schémas de différences que nous avons croisés jusqu'ici, le triangle de différences présente une disposition horizontale et non verticale. C'est cette disposition qui deviendra majoritaire au sein des brouillons leibniziens. En réalité, la plupart des triangles de différences que l'on trouve au sein des manuscrits plus tardifs sont dirigés vers le bas, tandis qu'ici, ils sont explicitement dirigés vers le haut.
Néanmoins Leibniz traite des suites obliques ou transverses :

*Tous les termes d'un certain ordre donné (par exemple le troisième) de toutes les progressions parallèles, sont composés de tous les termes de l'ordre précédent, (dans l'exemple, le deuxième), c'est-à-dire, tous les termes du second sont composé de tous ceux du premier, et tous ceux du troisième de tous ceux du second etc. du même triangle.* [6]

De fait, Leibniz ne parle jamais de la progression de termes d'un ordre donné, il dit toujours « tous les termes d'un ordre donné » (« *omnes termini ordinis dati* »), sans leur accordé jamais le statut de progression. Pourtant, Leibniz décrit parfaitement le fonctionnement "à double entrée" de cette table. Les diagonales sont désignés par leurs représentations géométriques :

*Etant donné qu'on pose plusieurs progressions homologues dans un même triangle équilatéral, les différences des deux premiers termes, de la première, seconde et troisième progression, tombent sur le "coté antérieur", et des deux seconds termes de la première, seconde, troisième progression, tombent sur le "second côté antérieur homologue", les deux troisièmes sur le troisième etc. De même, à l'opposé, le "côté postérieur et ses homologues second troisième etc." constituent les séries des différences entre les deux derniers termes, ou les pénultièmes ou les antépénultièmes etc. des diverses progressions.* [7]

5. A VII, 3, N.4$_2$ - p.36-37 : « Porro "triangulum progressionum" est aggregatum ex terminis omnibusque differentiis omnium graduum, terminis in linea recta, differentiis inter duos terminos collocatis. Termini sunt "basis trianguli", differentiæ ejusdem gradus sunt "basi parallelæ". Lineæ basi parallelæ continuo descrescunt unitate. Triangulum progressionum est æquilaterum. Basi parallelæ possunt etiam dici "bases" ; sunt enim termini alterius progressionis. Omnes enim differentiæ progressionum sunt "progressiones homologæ", ut latera in triangulo homologa appellamus. »

6. A VII, 3, N.4$_2$ - p.38 : « Termini omnes ordinis dati (ut tertii) omnium progressionum parallelarum, componuntur ex omnibus terminis ordinis præcedentis, (exempli causa ex secundis) seu omnes termini secundi componuntur ex omnibus primis, et omnes tertii ex omnibus secundi etc. eiusdem trianguli »

7. A VII, 3, N.4$_2$ - p.37 : « Pluribus progressionibus homologis in eodem triangulo æquilatero positis, differentiæ duorum primorum, primæ secundæ tertiæ progressionis, cadunt in "latus prius", duorum secundorum terminorum primæ $2^{\text{dæ}}$ tertiæ progressionis, cadunt in latus "prius homologum secundum", duorum tertiorum in tertium etc. Similiter contra "latus posterius homologumque ei secundum tertiumque" constituunt series differentiarum duorum ultimorum terminorum, aut penultimorum, aut antepenultimorum, etc. ex diversis progressionibus. »

Leibniz insiste sur la forme géométrique de la table, à savoir qu'il s'agit d'un triangle. Pourtant, ce choix de structure s'explique peut-être par une propriété arithmétique de la table. Etant donné un nombre fini de termes, le nombre des différences successives des termes de la progression est inférieur d'une unité audit nombre de termes. Ainsi, le nombre total de terme dans la table est une somme d'entiers successifs décroissants jusqu'à un, c'est-à-dire un nombre triangulaire :

> *La somme des termes d'un triangle de progressions est la somme de la progression arithmétique depuis 1 jusqu'au nombre de termes de la base du triangle. De fait, dans le même triangle équilatéral, n'importe quel côté ou n'importe quelle "base parallèle" est toujours plus petite d'une unité que la précédente.* [8]

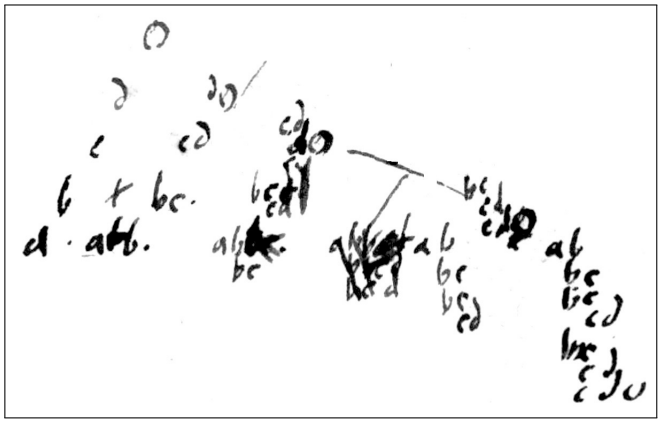
Mais, comme pour les nombres figurés, la forme géométrique fait partie intégrante de la structure. Grâce aux analogies, Leibniz introduit dans la structure purement combinatoire, les notions géométriques d'angles, de parallélisme et d'homologie qui guident la façon dont les termes sont regroupés et la nature de chaque sous-ensembles qui sont ainsi formés.

### Différences et lois de progressions

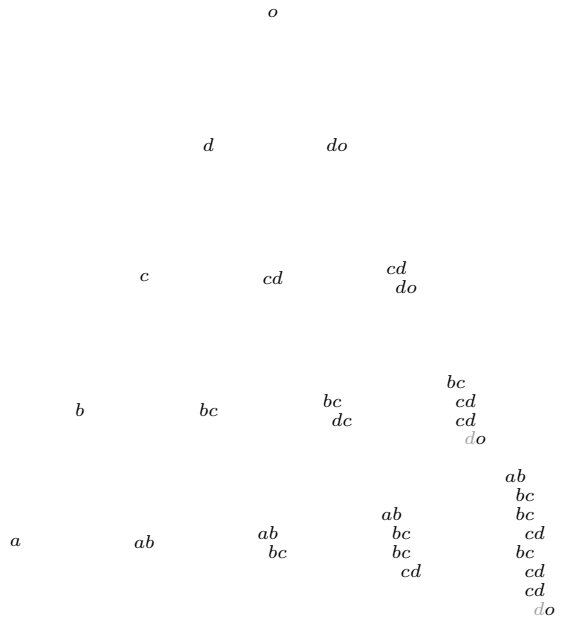
Le triangle de progression, ou triangle de différences qui est introduit par Leibniz dans ce texte est nécessairement littéral, c'est-à-dire que ces termes sont des caractères généraux et non des nombres particuliers :

> *Pour démontrer cela, on doit donner un triangle empli non de nombres mais de lettres qui contiennent les premiers nombres.* [9]

Cet usage de l'*ars characteristica* nous permet d'établir une distinction majeur entre la table triangulaire dont Leibniz construit ici la théorie et celles qui sont appliquées en situation, dans l'objectif d'analyser des progressions. Contrairement à ces dernières qui sont des outils purement heuristique, cette table a un rôle apodictique, et sert donc autant l'*ars judicandi* et que l'*ars inveniendi*.
Leibniz ne donne qu'un seul triangle de progression littéral dans le texte. Mais ce qui frappe immédiatement, c'est que les lettres ne désignent pas les termes de la progression, mais les premiers termes de chaque progression, comme il l'annonce dans la précédente citation :



Manuscrits de Leibniz - LH 35 12 1 Bl.151 [10]

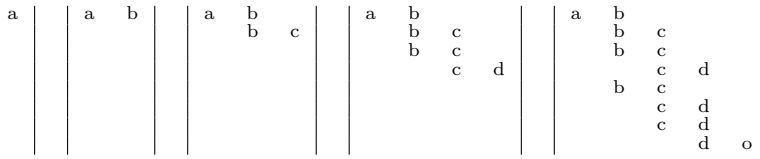



8. A VII, 3, N.4$_2$ - p.37 : « Summa terminorum unius trianguli progressionum est summa progressionis arithmeticæ ab 1. usque ad numerum terminorum baseos trianguli. Nam in eodem triangulo æquilatero quodvis latus aut quævis "basis parallela" est semper minor præcedenti unitate. »

9. A VII, 3, N.4$_2$ - p.33 : « Ad haec demonstranda fieri debet triangulum idque non numeris, sed literis priores numeros continentibus plenum. »

10. Coquille de Leibniz, il écrit *cdo* au lieu de *cd do* et donc il manque un *d* dans le manuscrit, les éditeurs de l'*Akademie* corrigent cette erreur dans leur édition

La progression principale, dont le triangle établit la liste des différences, est à la base du traingle. Il s'agit donc de la progression suivante :



Les termes de la progressions sont donc exprimés par leurs composantes. Cette approche méréologique se manifeste également dans la suppression du signe de l'addition « + ». Leibniz l'a noté deux fois, puis a cessé de l'utiliser. Or, dans un contexte algébrique, la composition *ab* désigne la multiplication et non l'addition. Ici, *a* et *b* constituent les parties du tout *ab*, le tout étant la somme de ses parties.
Pour Leibniz, une progression est caractérisée par une « loi » (« *fundamentum* ») :

> *Maintenant, au sujet de la loi de la progression. La loi de la progression équivaux à la connexion des quantités, c'est-à-dire le moyen de trouver une quantité d'autres quantités étant données, et si d'aventure on poursuit continument cette loi, on appelle progression la série entière des quantités. Je ne trouve pas de mot suffisamment propre à exprimer ce passage [d'un terme à l'autre]. Peut-être sera-t-il intéressant d'y appliquer ce nom-même de « progression », et qu'on définisse la progression comme le moyen de trouver des quantités, d'autres étant données. De fait, la raison n'est rien d'autre que la progression géométrique.* [11]

La loi de la progression est définie comme la règle, la méthode qui permet de trouver ou de générer le terme suivant à partir du précédent. A première vue, cette définition est large. La classe des lois englobe tout processus rationnel et déterminé pour lequel une prédiction certaine est possible. Cette idée de mécanisme rationnel, établissant un lien fonctionnel direct entre la donnée et le produit, qui va guider la réflexion philosophique de Leibniz sur la notion de régularité, qui sous-tend son futur principe de raison suffisante. En 1686, dans son célèbre *Discours de Métaphysique* (A VI, 4, N.306), Leibniz écrit d'ailleurs :

> *Non seulement rien n'arrive dans le monde, qui soit absolument irregulier, mais on ne sçauroit mêmes rien feindre de tel. Car supposons par exemple que quelcun fasse quantité de points sur le papier à tout hazard, comme font ceux qui exercent l'art ridicule de la Geomance. Je dis qu'il est possible de trouver une ligne geometrique dont la notion soit constante et uniforme suivant une certaine regle ; en sorte que cette ligne passe par tous ces points, et dans le même ordre que la main les avoit marqués. Et si quelcun traçoit tout d'une suite une ligne qui seroit tantost droite, tantost cercle, tantost d'une autre nature, il est possible de trouver une notion ou regle ou equation commune à tous les points de cette ligne, en vertu de la quelle ces mêmes changemens doivent arriver. Et il n'y a par exemple point de visage dont le contour ne fasse partie d'une ligne Geometrique et ne puisse estre tracé tout d'un trait par un certain mouvement reglé. Mais quand une regle est fort composée, ce qui luy est conforme, passe pour irregulier.* [12]

Leibniz exprime donc ici le fait que n'importe quel phénomène peut être réduit à des processus simples et rationnel, que l'on peut représenter par une règle ou une équation. Mais l'expression des caractères occupe un domaine bien plus vaste que ce à quoi le terme "équation" pourrait nous faire pense. En effet, en 1686, l'*ars characteristica* est encore identifié avec la combinatoire comme science des formes et des formules, propre à exprimer la qualité dont dépend la logistique, qui traite de la quantité seulement. Les règles simples qui composent les apparentes irrégularités ne sont pas simples car irréductibles, mais simple car rationnelles et évidentes. Mais dans le *De Artibus resolvendi progressionem* (A VII, 3, N.4), la conception de la notion de loi que Leibniz développe est différente, car elle est réductible aux opérations quantitatives :

> *La « progression », ou le moyen de produire des quantités à partir d'autres est, soit par addition, soit par soustraction, soit à la fois par addition et soustraction. Et soit il y a plus d'addition que de soustraction, et dans ce cas, la progression est « croissante », soit il y a plus de soustraction que*

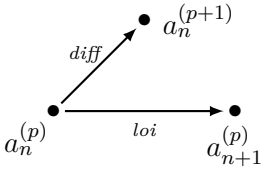
11. A VII, 3, N.$4_2$ - p.35-36 : « Nunc de fundamento progressionis. Fundamentum progressionis idem est quod connexio quantitatum, id est modus inveniendi quantitatem data quantitate, quod fundamentum si aliquoties continuetur, tota quantitatum series dicitur progressio. Vocem satis propriam ad hunc transitum exprimendum non reperio. Fortasse intererit ipsum nomen "progressionis" adhibere ; et progressionem definire modum quo quantitas invenitur data alia quantitate. Nam ratio non nisi progressio geometrica est. »

12. A VI, 4, N.306, *Discours de Métaphysique*, début 1686 - p.1537-1538

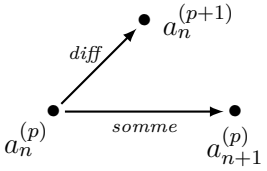
*d'addition et alors elle est « décroissante », soit aucun des deux n'a un excès déterminé [sur l'autre], dans ce cas la progression est « fluctuante ». De plus, l'addition ou la soustraction se fait par un nombre ou bien déterminé par soi, ou bien déterminé par une autre progression, et celle-ci à son tour ou bien par soi soit par encore une autre progression, et ce jusqu'à l'infini. Ainsi, nous avons une « progression de premier, deuxième, troisième etc. degré ».* [13]

La loi de la progression est réduite à ses variations. Notons $a^{(p)}$ la suite des $p$-ièmes différences de la base $a^{(0)}$. On a alors deux types relations qui traversent la table :

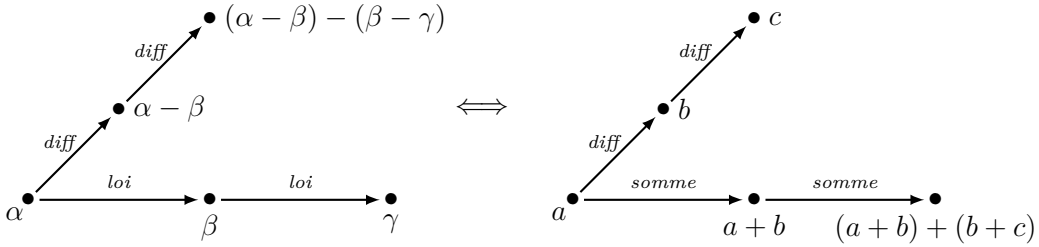
- ⋆ La loi des progressions : qui permet de passer de $a_n^{(p)}$ à $a_{n+1}^{(p)}$.
- ⋆ La différence : qui permet de passer de $a_n^{(p)}$ à $a_n^{(p+1)} = a_{n+1}^{(p)} - a_n^{(p)}$



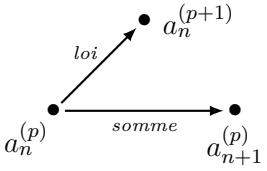

La réduction opérée par Leibniz cherche à rendre uniforme ces deux relations. En effet, en réduisant la loi à ses variation, elle devient elle aussi une différence. Le schéma nous montre qu'on peut de fait considérer ces deux relations comme étant de même nature, l'une étant une somme et l'autre une différence, car $a_{n+1}^{(p)} = a_n^{(p)} + a_n^{(p+1)}$ :




Ceci justifie que Leibniz n'emploie pas les caractères pour désigner les termes de la progression, mais plutôt les premiers termes des différences. De cette façon, il réduit la loi à des combinaisons de différences :




En réalité, les rôles sont même inversés. La suites des différences successives suit une loi de progression implicite, dissimulée dans la suite des caractères et la progression principale suit une loi combinatoire de composition rationnelle des différences variations :




13. A VII, 3, N.4$_2$ - p.35-36 : « "Progressio" seu modus educendi quantitatem ex quantitate est, vel addendo vel subtrahendo, vel addendo simul et subtrahendo, et vel addendo plus quam subtrahendo, quo casu progressio est "ascensus", vel subtrahendo plus quam addendo, quo casu progressio est "descensus", vel neutrius excessu determinato, quo casu progressio est "fluctuatio". Porro additio aut subtractio est numeri aut determinati per se, aut determinati per aliam progressionem, et huius rursus aut per se aut per aliam progressionem in infinitum. Hinc habemus "progressionem, primi secundi tertii etc. gradus". »

Contrairement à la majorité des schémas de différences que nous avons rencontrés jusqu'ici, on observe que la différence est opérée de droite à gauche et non de gauche à droite, c'est-à-dire qu'on retire le terme donné au suivant au lieu de faire l'inverse. La raison de ce changement ne se trouve pas dans la disposition horizontale, plutôt que verticale, mais dans la monotonie de la progression. En effet, le progression que nous avons condiérées jusqu'ici étaient majoritairement des séries de fractions décroissantes. Ici, il semble que Leibniz considère une progression croissante, puisque la quantité de caractères double à chaque rang et donc augmente progressivement. Si l'on souhaite que la différence soit positive, ce qui est le cas par défaut ici, il est donc nécessaire d'ôter le terme le plus petit au terme le plus grand. Ainsi la monotonie de la progression contraint le sens des différences. Pour décomposer la loi de la progression, il faut que le terme suivant soit composé du terme précédent et de leurs différences :

> *Dès lors le fondement de toutes les démonstrations concernant des additions et des soustractions dans les progressions est uniquement celui-ci : "Le terme suivant" est composé à partir "du terme précédent et de la différence interposée entre termes immédiatement voisins". Et de la même manière, à partir du terme qui suit immédiatement et auquel on retire la différence immédiate interposée, il reste le terme courant.* [14]

Leibniz fait usage d'un vocabulaire méréologique, et conçoit la composition comme la combinaison des parties qui forment un tout plus grand.
Pourtant Leibniz indique clairement dans ce texte que les triangles de différences s'appliquent à toutes les progressions, celles qui sont croissantes comme celles qui sont décroissantes et même celles qui ne sont pas monotones. Pour résoudre ce problème, Leibniz propose de considérer que les progressions sont toujours croissantes, dans le sens où le nombre des incréments augment nécessairement. En revanche, on peut considérer des incréments négatifs, pour les portions décroissantes :

> *On note que ces propositions peuvent se vérifier aussi dans ces séries régulières, dans lesquels les termes croissent à un certain moment, c'est-à-dire qui ne sont pas des progressions à proprement parler. Par une certaine analogie, il faut feindre qu'on ajoute au suivant le terme antécédent décroissant afin de poursuivre le calcul, et lui-même doit être tenu pour la différence c'est-à-dire le terme de la progression avec un degré supérieur, de la même série de différences qui la composent. De là, il ne s'en suit pas d'autre confusion de calcul, que celle-ci qui consiste à appliquer à un terme de cette sorte qu'on cherche des règles qu'on appliquerait à ses différences qu'on cherche. Il se pourrait de même qu'on passe par des nombres "plus petits que rien" ; et une soustraction imaginaire d'un plus grand à un plus petit ne doit absolument pas plus nous troubler que la division imaginaire d'un plus petit par un plus grand.* [15]

L'opération de soustraction est donc modélisée par une addition fictive ou imaginaire, d'une quantité négative [16]

14. A VII, 3, Nr.$4_2$, *Pars Secunda* dans *De Artibus Resolvendi Progressionem Irreductam*, juillet-décembre 1672 - p.37 : « Fundamentum iam omnium demonstrationum circa additiones subtractionesque in progressionibus hoc unum est : Ex "termino antecedente et differentia interposita immediatis" componitur "terminus sequens". Et similiter ex termino sequente immediato ademta differentia interposita immediata, relinquitur terminus procedens. »

15. A VII, 3, Nr.$4_2$, *Pars Secunda* dans *De Artibus Resolvendi Progressionem Irreductam*, juillet-décembre 1672 - p.40 : « Nota hæ propositiones verificari possunt etiam in illis seriebus regularibus, in quibus aliquando crescunt termini, seu quæ propriæ progressiones non sunt, analogia quadam, fingendus enim est additus sequenti terminus antecedens decrescens ad calculum continuandum, et ipsemet pro differentia seu termino progressionis uno gradu altioris, eiusdem seriei differentiarum componentium habendus est. Nec alia inde confusio sequetur calculi, quam ut termino eiusmodi quærendo adhibeantur eæ regulæ, quæ eius differentiæ quærendæ adhiberentur. Posset idem transigi per numeros "nihilo minores" ; et omnino non magis turbare nos debet imaginaria subtractio maioris a minore, quam imaginaria divisio minoris per maius. »

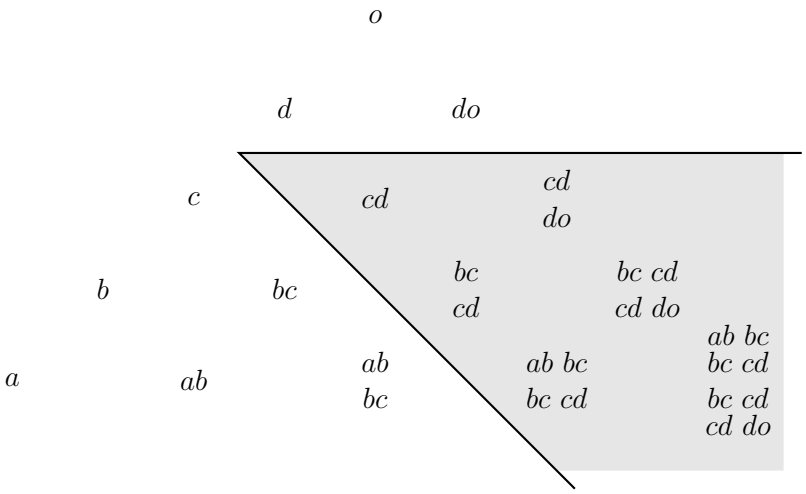
16. On trouve une réflexion similaire dans l'*Arithmetica Integra* de Stifel. Comme Leibniz, ce dernier justifie l'existence de nombres négatifs, qu'il nomme « nombres absurdes » (« *numerus absurdus* ») par une analogie avec celle des fractions, qui sont moindre que l'unité pourtant indivisible. [105] M. Stifel, *Arithmetica Integra*, Nuremberg, 1654 - p.249 : « Ainsi la Cosse a l'habitude d'utiliser pour immense bénéfice aussi bien ces choses qui sont que ces choses qu'on feint d'être. De cette manière, en effet, on place au dessus de l'unité les nombres entiers ; et en dessous de l'unité, on feint les portions de l'unité. Et ainsi au dessus de un, on place les entiers et en dessous de un, on place les portions, c'est-à-dire les fractions : de la même façon, l'unité est placé au dessus de 0 avec les nombres et en dessous de 0, on feint une unité avec des nombres. Et ce qui semble se représenter merveilleusement dans la progression des nombres naturels, est dès lors préservé pour la progression [toute entière]. » (« *Sic Cossa solet, pro immensa copia sua, iis uti quæ sunt, & iis quæ finguntur esse. Nam sicut supra unitatem ponuntur numeri integri, & infra unitatem finguntur minutiæ unitatis, & sicut supra unum ponuntur integra, & infra unum ponuntur minuta seu fracta : sic supra 0 ponitur unitas cum numeris, & infra 0 finguntur unitas cum numeris. Id quod pulchre repræsentari videtur in progressione numerorum naturali, dum seruit progressioni.* »).

**Propagation dans le triangle**

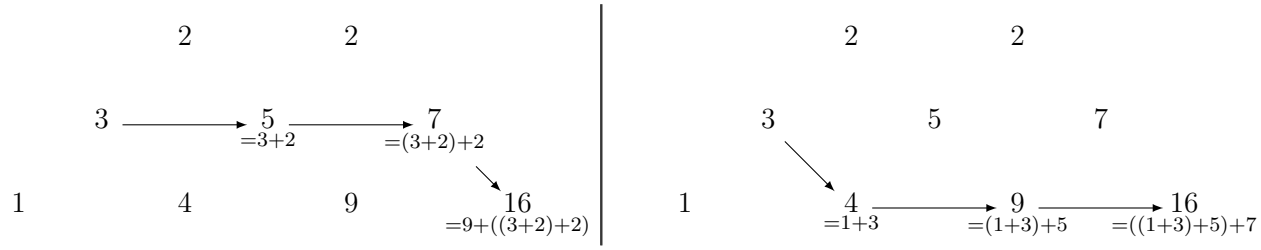
Comme un terme est composé du précédent et de la différence avec le précédent, Leibniz constate grâce au triangle de différences que loi de la progression projette un terme donné dans tous les termes suivants, dans tous les termes dont il est une différence d'un certain degré et dans tous les termes suivant ces termes :

> *Un terme quelconque rayonne dans tous les termes du triangle de la progression exceptés ceux qui lui sont supérieurs dans la progression ainsi que ceux qui sont antérieurs à la série des différences traversant les termes où il est contenu – c'est-à-dire, dans les termes compris entre ces deux lignes. Ou encore ce qui revient au même : un terme quelconque rayonne par le triangle rectangle inversé, c'est-à-dire ayant une base verticale, base, prolongeable à l'infini, qui est la progression elle-même, et l'hypoténuse, prolongeable à l'infini, est cette série des différences traversantes.* [17]

Le terme se reflète dans un espace triangulaire, symétrique du triangle de différences lui-même :




Dans la représentation littérale de la table, les termes qui se propagent sont les termes primitifs, à savoir les premiers de chaque progression de différences. Ils sont transportés par tous les autres termes, auxquelles cette même propriété de propagation s'applique. Ainsi n'importe quel terme de la table se propage de la même manière que les termes primitifs, c'est-à-dire dans le sens de la progression (ici vers la droite) et le sens opposées aux différences successives (ici vers le bas). En se propageant au travers du triangle de différences, le termes se réduisent progressivement et se morcellent dans tous les autres, si bien qu'on voit qu'il est possible de reconstituer le terme donné à partir de tous les dérivatifs à travers lesquels il s'est propagé. La composition d'un terme peut suivre une multitude de chemins. Considérons, par exemple, le triangle de différences de la progression des carrés. Alors pour relier une différence à un carré, on peut, ou bien propager la différence sa propre la progression jusqu'à la différence du carré, qui s'y propage à son tour ; ou bien propage la différence dans son propre carré, qui lui-même se propage vers le carré donné dans la progression des carrés. Ainsi, par exemple :




17. A VII, 3, N.4$_2$ - p.41 : « Quilibet terminus radiat in omnes terminos trianguli progressionis demtis iis, qui sunt progressione eius superiores, et serie differentiarum in terminos transeuntium, cui ipse inest anteriores seu in terminos inter has duas lineas comprenhensos. Vel quod idem est : quilibet terminus radiat per triangulum rectangulum inversum, seu basin habens erectam cuius basis in infinitum producibilis est ipsa progressio, et hypotenusa in infinitum producibilis est ipsa series differentiarum transeuntium. »

⋆ La première différence de 16 est le deuxième terme après 3 dans la suite des nombres impairs.

$$16 \leftarrow [diff] \circ [loi] \circ [loi] \circ 3$$

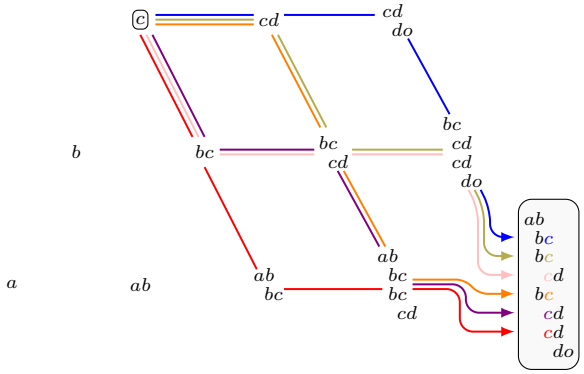
⋆ 16 est le deuxième terme dans la suite des nombres carrés après le carré dont 3 est la première différence.

$$16 \leftarrow [loi] \circ [loi] \circ [diff] \circ 3$$

Ainsi Leibniz écrit :

> *Un terme quelconque se trouve, par un rayonnement réfléchie, dans chaque terme de chaque ligne qui contient ces mêmes termes, eux-même comprenant ledit terme quelconque. En effet, ce qui est la partie de la partie est aussi la partie du tout. On l'illustre ici en conduisant les branches de plusieurs lignes, ou bien colorées ou bien distinguées par d'autres moyens. On peut donc énoncer la chose suivante ; un terme donné se trouve dans tous les termes de toute la progression ainsi que dans les termes qui traversent toute la série des différences et au sein desquels se trouve un autre nombre qui contient lui-même le terme donné. De là, on déduit qu'il appartient aussi à ces termes mêmes vers lesquels parvient le rayon renvoyé par la réflexion.* [18]

Il existe donc plusieurs chemin pour relier un terme à l'un de ses composants. Leibniz propose de l'illustrer en représentant les diverses possibilités par des branches, distinguée par des couleurs, probablement comme suit :




On constate que chaque chemin produit une copie du terme qui se propage depuis le départ. Ainsi, le nombre de copie contenu dans la terme à l'arrivée donne le nombre de chemins possibles. Ces nombres sont des nombres combinatoires. Ainsi, on a :

$$a_n^{(0)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_0^{(k)}$$

Cette identité est valable pour n'importe quelle progression dans le triangle. Ainsi, pour aller du $q$-ième terme de la $p$-ième différence au $(q+n+k)$-ième terme de la $(p-n)$-ième différence, il y a donc $\binom{n+k}{k} = \left(\!\!\binom{n+1}{k}\!\!\right)$ chemins possibles.
Leibniz constate seulement que le chemins sont multiplies, et dans la première partie introductive, il sous-entend même qu'ils sont infinis :

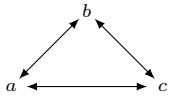
> *C'est, à vrai dire, ce que nous allons dire maintenant, à savoir qu'on rassemble en une chose les carrés et les cubes de tout genre de progressions et par conséquent tout genre de figures, mais de plus, on peut retrouver d'une infinité de façon et leurs termes et leurs différences de tout genre, et chacune d'entre elles.* [19]

18. A VII, 3, Nr.$4_2$, *Pars Secunda* dans *De Artibus Resolvendi Progressionem Irreductam*, juillet-décembre 1672 - p.40 : « Quilibet terminus est radiatione reflexa, in omnibus terminis omnium linearum, quibus ii termini insunt, quibus ipse inest. Est enim pars partis, pars etiam totius. Nota hic ducantur rami plurium linearum, sive colore sive aliis modis distinctarum. Idem sic enuntiari potest, terminus datus inest in omnibus terminis, omnis progressionis ; et omnis seriei differentiarum in terminos transeuntium, quibus alius numerus inest, cui inest ipse. Hinc sequitur etiam illis inesse ad quos ipse radius reflexionis reflexus pervenit. »

19. A VII, 3, Nr.$4_1$, *Pars Prima* dans *De Artibus Resolvendi Progressionem Irreductam*, juillet-décembre 1672 - p.31 : « Quid vero nunc dicemus, ubi quadrata et cubos omnis generis progressionum ac proinde omnis generis figurarum in unum colligere, sed et eorum terminos, et differentias cuiuscunque generis, et singulas infinitis modis reperire. »

**Espace relativiste**

Cette approche méréologique de la table entre en conflit avec la proposition que fait Leibniz d'accepter les quantités négaives. De fait, en retirant un plus grand à un plus petit, on retire le tout à sa partie. Cette opération n'est pas analytique, dans le sens qu'elle ne rend pas compte de la composition du tout en ses parties. De la sorte, le tout et ses parties n'entretiennent plus de rapport hiérarchique. Le tout est le produit d'une composition entre ses parties mais la partie est également le produit d'une composition entre le tout et son complémentaire. Dans ce cadre, les relations entre les termes sont symétriques et ne peuvent plus être réellement considérée comme des relations d'inclusions. Dès lors, les composants sont également composés des composés mêmes qu'ils composent :




$$c = b - a \qquad b = a + c \qquad a = b - c$$

On retrouve l'espace non centré évoqué par Michel Serres [20], où la relation considérée comme un lien de dépendance non hiérarchisé prend le dessus sur la composition. Mais il n'est pas raisonnable de projeté une telle interprétation sur la pratique tabulaire du jeune Leibniz. Ce texte montre au contraire le rôle central de la composition et la méréologie dans sa conception des lois de progressions et des régularités. Les quantités négatives sont des fictions, et doivent être comprises positivement dans le modèle. Elles sont des termes supplémentaires.
Une autre solution pour considérer ces quantités comme réellement négatives consiste à renverser le sens de lecture de la table, afin d'avoir une progression croissante. Il s'agit donc d'inverser la disposition des termes de la progression. En effet, la conception méréologique de la table implique pour Leibniz que l'on peut ignorer dans une certaine mesure la disposition des termes. Bien-sûr l'ordre des termes est une donnée essentielle du triangle de différences. D'ailleurs, c'est bien sur ce sujet du lieu et du rang que porte la quatrième partie du texte. Cependant, une fois qu'on a exprimé un terme en fonction des autres, alors il ne dépend pas de la disposition qu'ont ces termes au sein de l'expression. Dans un texte contemporain, le *De progressionibus et de Arithmetica Infinitorum* (A VII, 3, N.6), Leibniz annonce ce qui sera la propriété fondamentale de la théorie des différences finies dans l'*Historia et Origo Calculi Differentialis* à savoir qu'une différence entre deux termes vaut la somme de toutes les différences successives, peu importe l'ordre de ces différences :

> *Ce qui suit à partir de là, c'est que peu importe la manière dont on pose les termes continument décroissant, la quantité de leurs différences sera toujours la même. Et ce, que la série soit finie ou infinie.* [21]

Ainsi, qu'on lise la table dans un sens ou dans l'autre, la quantité des différences est inchangée.

### 5.1.2 Génératrices

**Réduction des progressions polynomiales**

Le *De Artibus resolvendi progressionem* (A VII, 3, N.4) montre donc que tous les termes de la progression sont composés des premiers nombres de chaque progression de différences. Ce résultat est une conséquence direct de la structure tabulaire du triangle, et Leibniz ne le met pas particulièrement en avant dans le texte. Cependant, Leibniz estime que ce résultat est important puisqu'il le communique dans un courrier destiné à la *Royal Society* du 13 février 1673 (A III, 1, N.4). Dans cette lettre, les premiers nombres des progressions de différences successives sont nommés les « génératrices » (« *generatrices* ») :

> *Ainsi, si la série qui croît continûment ou décroît continûment, est a, b, c, d alors les génératrices de différences seront :* $a, a \pm b, a \pm b \pm b \pm c, a \pm b \pm b \pm c \pm b \pm c \pm c \pm d.$ [22]

20. *Cf* Notre prologue, le note 109, p.68.
21. A VII, 3, N.6, *De progressionibus et de Arithmetica Infinitorum*, automne-décembre 1672 - p.68 : « Hinc sequitur quomodocunque interponantur termini continue decrescentes, eandem semper esse quantitatem differentiarum. Idque tam in serie finita quam in infinita. »
22. A III, 1, N.4, Lettre de Leibniz à la Royal Society du 3 (13) février 1673 - p.23 : « Ut si series continue crescens vel decrescens sit $a$, $b$, $c$, $d$, differentiæ generatrices erunt : $a, a \pm b, a \pm b \pm b \pm c, a \pm b \pm b \pm c \pm b \pm c \pm c \pm d.$ ».

Contrairement au *De Artibus resolvendi progressionem* (A VII, 3, N.4), ici, ce sont les génératrices qui sont exprimées en fonction des termes de la progressions.

$$a_0^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k a_k^{(0)}$$

Nous donnons l'expression formelle, mais Leibniz garde la forme développée de la succession des différences. Les nombres combinatoires n'apparaissent donc pas.
En outre, on note l'utilisation des signes ambigus : « ± » [23], qui n'ont pas l'usage qu'on leur connait habituellement :

$$a \pm b \quad \text{signifie} \ : \ \pm(a-b), \text{ c'est-à-dire la distance absolue } |a-b|$$

En effet, les génératrices sont nécessairement des différences. Ainsi la première différence $a \pm b$ vaut soit $a-b$ soit $b-a$ suivant la monotonie de la progression, comme la formulation de la lettre le suggère. L'intérêt des génératrices est le suivant : il se peut qu'elles soient seulement un nombre fini à être non nulles, alors que la progression contient un nombre infinie de termes. Ainsi, tous les termes de la progression sont composés d'une nombre fini de génératrices. Leibniz donne l'exemple des cubes :

> *Ou, en nombre, si c'est la série des nombres cubiques qui se succède en croissant depuis l'unité, alors les génératrices de différences seront les nombres 0, 1, 6, 6. Je les appelle en outre génératrices, parce qu'à partir de leurs multiplications, on produit de façon certaine les termes de la série, dont l'usage apparaît d'autant plus grand que les génératrices de différence sont finies alors que les termes de la série sont infinis, comme dans l'exemple proposé des nombres cubiques.* [24]

Mais Leibniz ne se contente pas d'indiquer le fait que les génératrices engendrent tous les termes de la série, il décrit également la manière dont on peut décomposer un terme donné en ses génératrices :

> *Je voyais en effet que les termes et les différences suivantes s'engendraient à partir des différences précédentes, et donc par conséquent des premières, que j'ai appelées pour cette raison les génératrices, comme ici 0, 1, 6, 6, et tous les suivants. Ceci étant conclu, il restait à trouver par quel genre d'addition, de multiplication ou de leurs complications, les termes suivants seraient produits à partir des différences génératrices. Après tests et résolution, j'ai compris ceci : le premier terme* 0 *est composé de la première différence génératrice* 0 *qu'on additionne une seule fois c'est-à-dire qu'on la multiplie par un ; le deuxième terme* 1 *est composé de la première génératrice* 0 *une seule fois (1) et de la seconde* 1 *une seule fois (1) ; le troisième terme* 8 *est composé de la première génératrice* 0 *une seule fois (1), de la deuxième* 1 *deux fois (2) et de la troisième* 6 *une seule fois (1), ainsi* $0 \times (1) + 1 \times (2) + 6 \times (1) = 8$ *; le quatrième terme 27 est composé de la première génératrice 0 une seule fois (1), de la deuxième 1 trois fois (3), de la troisème 6 trois fois (3) et de la quatrième 6 une seule fois (1), ainsi* $0 \times (1) + 1 \times (3) + 6 \times (3) + 6 \times (1) = 27$ *; etc. Et pour moi, cette analyse s'est avérée universelle.* [25]

Ici, Leibniz donne donc la formule inverse de celle que nous avons mentionné plus haut, à savoir l'expression des termes en fonction des génératrices :

$$a_n^{(0)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_0^{(k)}$$

23. D'après l'édition critique de cette lettre, Leibniz a également utilisé le signe $\sim$, *Cf* A III, 1, N.4, Lettre de Leibniz à la Royal Society du 3 (13) février 1673 - p.23

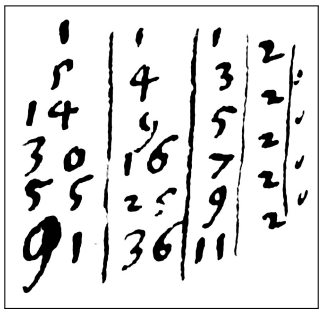
24. A III, 1, N.4, Lettre de Leibniz à la Royal Society du 3 (13) février 1673 - p.23 : « Aut in numeris, si series sit numerorum cubicorum deinceps ab unitate crescentium, diffrentiæ generatrices erunt 0, 1, 6, 6. Voco autem generatrices, quia ex iis certo modo multiplicatis producuntur termini seriei, cujus usus tum maxime apparet, cum differentiæ generatrices sunt finitæ, termini autem seriei infiniti, ut in proposito exemplo numerorum cubicorum. »

25. A III, 1, N.4, Lettre de Leibniz à la Royal Society du 3 (13) février 1673 - p.26 : « Videbam enim ex differentiis præcedentibus generari terminos differentiasque sequentes, ac proinde ex primis, quas ideo voco generatrices, ut hoc loco 0, 1, 6, 6, sequentes omnes. Hoc concluso restabat invenire, quo additionis multiplicationisve aut horum complicationis genere termini sequentes ex differentiis generatricibus producerentur. Atque ita resolvendo experiundoque deprehendi : Primum terminum 0 componi ex prima differentia generatrice 0, sumta semel seu vice una ; secundum 1 ex prima 0 semel (1), secunda 1, semel (1) ; tertium 8 ex prima 0 semel (1), secunda 1 bis (2), tertia 6 semel (1) ; nam $0 \cap (1) + 1 \cap (2) + 6 \cap (1) = 8$ ; quartum 27 ex prima 0 semel (1), secunda 1 ter (3), tertia 6 ter (3), quarta 6 semel (1) ; nam $0 \cap (1) + 1 \cap (3) + 6 \cap (3) + 6 \cap (1) = 27$, etc. Idque analysis mihi universale esse comprobavit. »

Nous avions vu que cette formule n'apparaissait pas dans le *De Artibus resolvendi progressionem* (A VII, 3, N.4). Dans cette lettre, il mentionne explicitement le rôle des nombres combinatoire dans la procédure, bien qu'elle soit seulement décrite pour un cas particulier et non par des caractères généraux.
Leibniz assume le caractère inductif de son résultat, qu'il dit avoir obtenu après avoir testé et tâtonné. La découvertes des génératrices est d'autant plus précieuse qu'eile n'est pas guidé par la structure apparente des progressions. Ces coefficients sont cachés dans la loi, invisibles à celui qui s'arrête à la procédure de construction classique des termes. Ainsi, le schéma de différences est nécessaire pour découvrir la suite arithmétique de raison 2 qui se dissimulent dans la progression des carrés, et cette découverte se fait par l'induction.

### Génératrices vue comme progressions

Les génératrices permettent d'exprimer les termes de la progression. Mais comme Leibniz le dit lui-même dans le *De Artibus resolvendi progressionem* (A VII, 3, N.4), n'importe quelle base du triangle peut être considérée comme la progression principale, et donc peut être exprimée par ces génératrices. Dès lors, les sommes de la progression sont elles aussi exprimables par les génératrices, de la même manière. Leibniz l'illustre dans le *De Progressionis Harmonicæ Differentiis* (A VII, 3, N.14) datant du printemps 1673. Il souhaite exprimer les sommes des carrés :



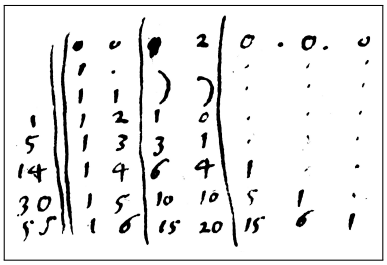
Manuscrits de Leibniz - LH 35 12 1 Bl.138-139

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | |
| | | 1 | | |
| 1 | 1 | | 2 | |
| | | 3 | | 0 |
| 5 | 4 | | 2 | |
| | | 5 | | 0 |
| 14 | 9 | | 2 | |
| | | 7 | | 0 |
| 30 | 16 | | 2 | |
| | | 9 | | 0 |
| 55 | 25 | | 2 | |
| | | 11 | | |
| 91 | 36 | | | |

Cette table est un triangle de différences de la progression des carrés, et Leibniz appose à sa gauche la progression des sommes [26]. Pour l'obtenir, il suffit de prolonger la suite des génératrices vers le bas, avec un 0, puisque la première somme consiste à n'avoir fait la somme d'aucun terme de la progression.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | | |
| 1 | | 3 | | 5 | | 7 | | 9 | | 11 | |
| 0 | 1 | | 4 | | 9 | | 16 | | 25 | | 36 |
| **0** | **0** | **1** | | **5** | | **14** | | **30** | | **55** | | **91** |

Dès lors, on peut retrouve les sommes, à l'aide seulement des génératrices et des nombres combinatoires, comme le montre ce schéma :



Manuscrits de Leibniz - LH 35 12 1 Bl.138-139

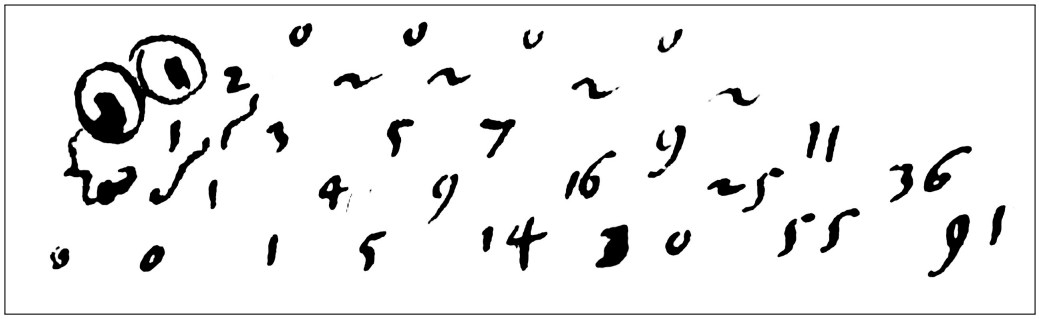
| | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ... |
| **0** | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ... |
| **1** | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | ... |
| **5** | 1 | 3 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | ... |
| **14** | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | 0 | 0 | ... |
| **30** | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | 0 | ... |
| **55** | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | ... |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋱ |

26. Tout comme la table abandonnée pour représenter le triangle harmonique et le triangle de Pascal, on note ici que Leibniz réserve la structure triangulaire aux schémas de différences, et laisse la structure quadrangulaire classique pour la somme. *Cf* p.257

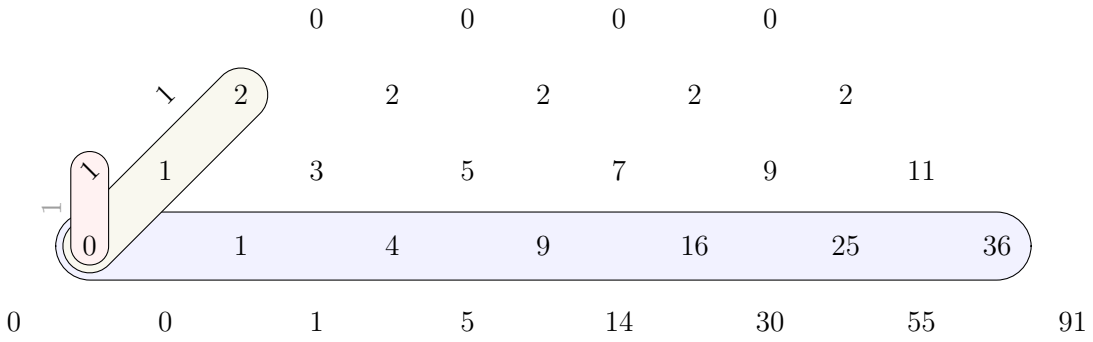
Les termes de la colonne de gauche sont égaux à la somme de nombres combinatoires présents sur la même lignes, chacun multiplié par la génératrice de sa colonne.
Ce tableau correspond donc à la formule de composition combinatoire suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k^{(0)} = \binom{n}{0} \times \mathbf{0} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} a_0^{(k)}$$

Le mode de raisonnement auquel Leibniz a recours est purement tabulaire. En effet, on détermine la somme d'une progression à partir des génératrice par un algorithme similaire à celui que l'on appliquait à la progression elle-même pour la seule raison que la progression des sommes occupe une place analogue dans la table. Ce type d'inférences constitue non seulement un formidable outil pour l'art d'inventer, mais peut être également considéré comme un mode de démonstration à part entière. De fait, bien que la démarche soit purement inductive, Leibniz l'applique sans aucun scrupule. Nous avons vu qu'il y voit un moyen pour faire l'analyse des lois des progressions. Les premiers termes de la progression jouent le rôle de paradigme général, sur lequel des opérations particulières ont valeur de vérité universelle.
Ainsi, Leibniz peut également appliquer le même outil, et donc le même raisonnement, à toutes les progressions qui apparaissent dans la table, y compris celle que constituent la série de génératrices. Ainsi ces génératrices ont elles-même des génératrices, et ainsi de suite :



Manuscrits de Leibniz - LH 35 12 1 Bl.138-139




La encore, on déplace la suite que l'on souhaite analyser dans le lieu qu'elle doit occuper au sein du triangle de différence, à savoir sa base. Ainsi, on greffe au triangle un autre triangle pivoté de 45 degrés, de sorte que les droites horizontales deviennent parallèles au diagonales. Ici Leibniz applique deux fois ce procédé et aboutit à la simple unité.

> *C'est remarquable, puisqu'on réduit ici les différences de deuxième degré ayant pour ascendants* 0, 1 *au simple* 1. [27]

Dès lors, Leibniz a réduit la loi des carrés à une séries de combinaisons. De fait, en appliquant successivement la formule qui exprime les termes en fonction des génératrices, on obtient, pour le cas présent :

$$n^2 = \underbrace{0}_{=\underbrace{0}_{=0\times\binom{0}{0}}\times\binom{0}{0}} \times \binom{n}{0} + \underbrace{1}_{=\underbrace{0}_{=0\times\binom{0}{0}}\times\binom{1}{0}+\underbrace{1}_{=0\times\binom{1}{0}+1\times\binom{1}{1}}\times\binom{1}{1}} \times \binom{n}{1} + \underbrace{2}_{=\underbrace{0}_{=0\times\binom{0}{0}}\times\binom{2}{0}+\underbrace{1}_{=0\times\binom{1}{0}+1\times\binom{1}{1}}\times\binom{2}{1}} \times \binom{n}{2}$$

27. A VII, 3, N.14, *De Progressionis Harmonicæ Differentiis*, mars-mai 1673 - p.167 : « Nota cum hoc loco reducantur differentiæ 2^di gradus ad ascendentes 0.1. ad simplex 1. »

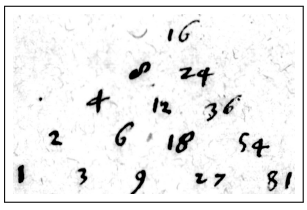
En réalité, les génératrices des génératrices $0, 1$, sont aussi $0, 1$ et non seulement 1, comme Leibniz le prétend dans le texte. Ainsi, appliquant la formule on obtient une somme de sept produits de nombres combinatoires, coefficientés par 0 ou 1. Mais si on retire les termes nuls, pour ne garder que la seule génératrice 1, on obtient bien une expression de la loi carré exprimée uniquement en fonction des nombres combinatoires :

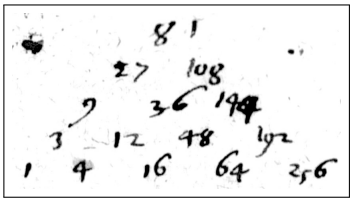
$$\begin{aligned} n^2 &= 0.\binom{0}{0}\binom{0}{0}\binom{n}{0} + 0.\binom{0}{0}\binom{1}{0}\binom{n}{1} + 0.\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{n}{1} + 1.\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{n}{1} + 0.\binom{0}{0}\binom{2}{0}\binom{n}{2} + 0.\binom{1}{0}\binom{2}{1}\binom{n}{2} + 1.\binom{1}{1}\binom{2}{1}\binom{n}{2} \\ &= \binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{n}{1} + \binom{1}{1}\binom{2}{1}\binom{n}{2} \end{aligned}$$

Pour Leibniz, ce résultat est remarquable, mais il aboutit à une méthode plus compliquée que la simple méthode qui consiste à exprimer les termes directement en fonction de leurs génératrices, sans cherche à décomposer ces dernières :

> *C'est remarquable, puisqu'on réduit ici les différences de deuxième degré ayant pour ascendants* $0, 1$ *au simple* 1*. D'où, à partir de la multiplication de ce* 1*, par les carrés, au hasard des nombres figurés, on trouvera la somme des carrés. Mais, par cette méthode, certes nous apprenons peut-être un nouveau théorème, mais nous n'y gagnerons rien. Et même peut-être que la chose est plus simple. En effet, on compose* $0, 1, 2$ *à partir de* $0, 1$ *et on compose* $0, 0, 1, 5, 14$ *à partir de celui-ci* $0, 1, 2$*. Donc à la place de* 1*, on suppose* $\underbrace{0+1}$ *et à la place de* 2*, on suppose* $\underbrace{0+2}$*. De sorte qu'ainsi on ait* $1, 5, 14$ *etc.* [28]

Les génératrices sont donc considérées, dans ce texte, comme les termes d'une progression à part entière, à laquelle la technique du triangle de différences peut s'appliquer à nouveau. Dès lors, dans cet enchâssement de tables, une génératrice est à la fois le composant des termes de la progression mais également les composés de ses propres génératrices. On retrouve l'imbrication des échelles que Leibniz décrit dans le *De Artibus resolvendi progressionem* (A VII, 3, N.4) [29], à propos de la composition successives des termes en leurs différences, mais cette idée est poussée ici encore plus loin. En décomposant les éléments simples eux-mêmes en éléments encore plus simple, la démarche de Leibniz aboutit à l'élément les plus simple qui soit : la progression constituée d'un seul élément qui est l'unité. Supposons que ce soit un fait général, ce qui n'est pas le cas, alors on aurait ainsi montré que toute loi de progression est purement combinatoire, c'est-à-dire qu'elle n'est pas caractérisée par la nature des ses constituants mais uniquement par la disposition d'une composition de copies d'un éléments simple unique et unitaire. Dans ces conditions, il extrêmement intéressant d'observer la réaction du jeune Leibniz face à une telle réduction. Il la qualifie certes de remarquable et nouvelle, mais y voit une méthode plus pénible, qui ne fait rien gagner, en terme d'efficacité et de simplicité. Ainsi, la réduction des lois de progressions à ses constituants les plus simples ne constitue pas uniquement une démarche épistémologique et métaphysique, mais soutient également une recherche pratique et pragmatique, au sein de laquelle considérer quelque chose à travers ses composants peut s'avérer paradoxalement plus pénible et plus complexe que de considérer la chose elle-même directement. Ainsi, Leibniz préfère exprimer les sommes de carrés par leurs génératrices, plutôt qu'au moyen des génératrices de ces génératrices.
En réalité, cette réduction successive des génératrices en leurs génératrices n'aboutit pas nécessairement à la progression simple, possédant pour seul terme l'unité. Un contre-exemple frappant est donné par Leibniz lui-même dans le *De Differentiis Progressionum Decrescentium* (A VII, 3, N. 5), lorsqu'il applique les triangles de différences aux progressions géométriques. Dans ce texte, Leibniz nomme les génératrices, les « différences primitives » (« *differentiæ primitivæ* ») :




28. A VII, 3, N.14, *De Progressionis Harmonicæ Differentiis*, mars-mai 1673 - p.167 : « Nota cum hoc loco reducantur differentiæ $2^{\text{di}}$ gradus ad ascendentes 0.1. ad simplex 1. Hinc ex multiplicatione ipsius 1. per $\square^{\text{ta}}$ forte numerorum figuratorum, invenietur summa quadratorum. Sed hac methodo novum quidem theorema fortasse discemus, sed nihil lucrabimur. Imo fortasse res facilior. Nam $\underbrace{0.1.2}$ componuntur ex 0. 1. et ex his : 0. 1. 2. componuntur 0. 0. 1. 5. 14. Ergo pro 1. suppone $\underbrace{0+1.}$ pro 2. suppone $\underbrace{0+2.}$. Ergo ut habeamus 1. 5. 14. etc. »

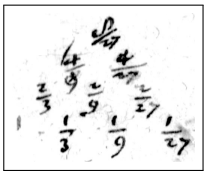
29. *Cf* la note 18 p.277.

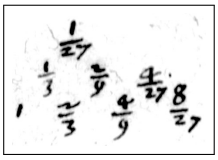
Manuscrits de Leibniz - LH 35 2 1 Bl.205

Leibniz observe que les progressions formées des différences primitives sont encore des progressions géométriques, mais de raison d'une unité moindre que celle qui est développée à la base du triangle :

> *Les différences primitives d'une progression géométrique sont les termes d'une progression géométrique [ayant une raison] diminuée d'une unité. Et c'est pourquoi les différences de la progression double sont les racines, celles de la progression triple sont les carrés, celles de la progression quadruples sont les cubes, celles de la quintuple sont les carré-carrés etc.* [30]

Dès lors, si on applique cette règle à une progression géométrique de raison plus petite que l'unité, on obtient une relation symétrique entre termes et différences primitives :





Manuscrits de Leibniz - LH 35 2 1 Bl.205

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \frac{8}{27} & & & & \\ & & & \frac{4}{9} & & \frac{4}{27} & & & \\ & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{9} & & \frac{2}{27} & & \\ 1 & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{9} & & \frac{1}{27} & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} & & & & \frac{1}{27} & & & & \\ & & & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} & & \frac{2}{27} & & \\ & & \frac{1}{3} & & \frac{2}{9} & & \frac{4}{27} & & \\ 1 & & & \frac{2}{3} & & \frac{4}{9} & & \frac{8}{27} & \end{array}$$

Les termes la progression sont les génératrices des génératrices. Ainsi, en appliquant successivement des triangles de différences aux séries des génératrices, comme ce qui est suggéré dans le *De Progressionis Harmonicæ Differentiis* (A VII, 3, N.14) aboutit à construire indéfiniment les deux mêmes triangles, en alternance :

> *De la même façon, les différences primitives sont les termes d'une progression dont la raison est la donnée diminuée d'une unité. Et c'est pourquoi, dans ce cas, les termes sont décroissants. De là, ce résultat admirable des progressions de fractions décroissantes, à savoir que la progression de fraction donnée et les différences de celle-ci avec l'unité sont génératrices l'une de l'autre.* [31]

Notons que la même remarque peut être faite pour le triangle harmonique qui est symétrique, c'est-à-dire que la suite des génératrices est identique à la progression qui est à la base du triangle, à savoir la progression harmonique.

### Bases du triangle de différences

Les génératrices sont en réalité les composantes de l'expression d'une loi dans une certaine base, à savoir celle des nombres combinatoires. De fait, ces coefficients constituent une base canonique pour les opérations de différences et de sommes :

$$\binom{n}{p} - \binom{n-1}{p} = \binom{n-1}{p-1} \qquad \sum_{k=p}^{n+p} \binom{k}{p} = \sum_{k=0}^{n} \left(\!\!\binom{p+1}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{p+2}{n}\!\!\right) = \binom{n+p+1}{p+1}$$

30. A VII, 3, N.5 - p.55 : « Differentiæ primitivæ progressionis geometricæ sunt termini progressionis geometricæ unitate minoris. Et ideo differentiæ progressionis duplæ sunt radicales, progressionis triplæ : sunt quadratæ, progressionis quadruplæ sunt cubicæ, quintuplæ sunt quadrato-quadratæetc. » - On note le choix atypique de vocabulaire par Leibniz à ce moment. En effet, il donne le nom de suites de puissances, comme les carrés ou les cubes, à des progressions géométriques, qu'il devrait nommées double ou triple.

31. A VII, 3, N.5 - p.56 : « Eodem modo differentiæ primitivæ erunt termini progressionis eius rationis quæ est data demta unitate. Et ideo eo casu sunt termini descrescentes. Hinc mirabile in progressionibus fractionum decrescentibus, progressio fractionis datæ, et differentiæ eius ab unitate sunt sibi mutuo generatrices. »

Ainsi, si on a la décomposition suivante :

$$a_n^{(0)} = \alpha_0 \binom{n}{0} + \alpha_1 \binom{n}{1} + \alpha_2 \binom{n}{2} + \alpha_3 \binom{n}{3} + \cdots + \alpha_p \binom{n}{p}$$

Alors, on a directement les formules pour les différences :

$$\begin{aligned} a_n^{(1)} &= a_{n+1}^{(0)} - a_n^{(0)} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{p} \alpha_k \binom{n+1}{k}\right) - \left(\sum_{k=0}^{p} \alpha_k \binom{n}{k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \left(\tbinom{n+1}{k} - \tbinom{n}{k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \binom{n}{k-1} \end{aligned}$$

Ainsi la différence revient simplement à décaler les coefficients vers la gauche :

$$a_n^{(0)} = \alpha_0 \binom{n}{0} + \alpha_1 \binom{n}{1} + \alpha_2 \binom{n}{2} + \dots$$

$$\Downarrow$$

$$a_n^{(1)} = \alpha_1 \binom{n}{0} + \alpha_2 \binom{n}{1} + \alpha_3 \binom{n}{2} + \dots$$

Dès lors, on peut déterminer très facilement les coefficients en évaluant ces expressions pour $n = 1$ :

$$a_0^{(0)} = \alpha_0 \quad a_0^{(1)} = \alpha_1 \quad a_0^{(2)} = \alpha_2 \quad a_0^{(3)} = \alpha_3 \quad a_0^{(4)} = \alpha_4 \quad a_0^{(5)} = \alpha_5 \quad \dots$$

Ainsi, on retrouve la formule qui exprime les termes en fonctions des génératrices :

$$a_n^{(0)} = f(n) = \underset{\downarrow\, a_0^{(0)}}{\alpha_0} \binom{n}{0} + \underset{\downarrow\, a_0^{(1)}}{\alpha_1} \binom{n}{1} + \underset{\downarrow\, a_0^{(2)}}{\alpha_2} \binom{n}{2} + \underset{\downarrow\, a_0^{(3)}}{\alpha_3} \binom{n}{3} + \cdots + \underset{\downarrow\, a_0^{(n)}}{\alpha_n} \binom{n}{n}$$

De même, faire la somme revient à décaler les coefficients vers la droite comme nous l'avons vu. Ainsi les opérateurs somme et différences sont des opérateurs de décalage d'indice dans cette base. Dès lors, ce sont des translations qui ne sont pas de nature différentes des décalages d'indices qui font passer au terme suivant au sein même de la progression.
Dans cette expression développée, les nombres combinatoires jouent un rôle d'exposant, c'est-à-dire qu'il indiquent la place que doit occuper la génératrice. On peut alors considérer que les $\binom{n}{k}$ sont les analogues discrets de la base des puissances $x^k$, dans le domaine continu.

## 5.2 Méthode générale d'induction

### 5.2.1 Analyses de Progressions

Les textes du début du séjour parisien montre que Leibniz voit dans le triangle de différences un outil extrêmement prometteur, peut-être capable de résoudre n'importe quelle progression. Cet enthousiasme va décliner rapidement au cours de l'année 1673, notamment après que des membres de la *Royal Society* lui annoncent que les résultats auxquels il était parvenu par ces méthodes étaient déjà bien connus. Néanmoins, l'utilisation des triangle de différences comme pratique heuristique reste très vivace tout au long du séjour à Paris. Même de retour en Allemagne, elle ne sera jamais complètement abandonnée. Durant la période 1676-1680, on trouve même quelques exemples de triangles de différences généralisés, dans lesquels Leibniz pousse encore plus loin sa pratique tabulaire.

#### Interpolation de Collins

Dans la lettre de Leibniz du 13 février 1673 (A III, 1, N.4), ce dernier indique déjà la remarque de John Pell, à savoir que son résultat sur la décomposition des termes en leurs génératrices se trouvait déjà dans l'ouvrage *Observationes diametrorum solis et lunæ apparentium*[32] du mathématicien français Gabriel Mouton :

> *Alors que l'illustre Pell écoutait cela, il répondit qu'on y avait déjà fait référence, dans les lettres du seigneur Mouton, ecclésiastique de Lyon à partir de l'observation du très noble François Regnauld de Lyon, connu depuis quelque temps dans les cercles lettrés, et dans le livre de l'acclamé Monsieur Mouton : De diametris apparentibus solis et lunæ. Quant à moi, à partir d'une certaine lettre écrite par Regnauld à Monconys et introduite dans le journal de voyage de Monconys, j'avais appris le nom de Monsieur Mouton et de deux choses qu'il indiquait à savoir les diamètres apparents des astres et le projet sur les mesures des choses à transmettre à la postérité. Mais j'ignorais cependant qu'il avait produit un livre. Par quoi, une fois procuré auprès de Monsieur Oldenburg, secrétaire de la Royal Society, je l'ai parcouru avec précipitation et j'ai trouvé que Pell avait dit vrai. Cependant, j'ai cru que ce travail devait être communiqué par moi, non pas pour laisser dans les esprits le soupçon que j'aurais voulu, en taisant le nom de l'inventeur, chercher l'honneur pour moi au moyen des réflexions des autres. Et j'espère qu'il sera manifeste que je n'expose pas le manque de mes propres méditations, comme si j'étais contraint d'en mendier aux autres. En outre, je revendiquerai ma sincérité par deux arguments : d'abord que je montrerais mes propres brouillons embarrassés, dans lesquels se manifestent non seulement ma découverte mais aussi l'occasion et le moyen de la trouver ; ensuite que j'ajoute certaines choses de grande importance à celles indiquées par Regnauld et Mouton, pour lesquels il ne me paraitrait pas vraisemblable qu'elles fussent conçues la veille au soir et qu'on ne pourrait pas les attendre facilement d'un transcripteur.* [33]

Leibniz est donc parfaitement conscient dès le mois de février 1673 que sa théorie des différences finies n'est pas nouvelle et se trouve déjà dans l'ouvrage de Mouton. Néanmoins, il considère que ce qu'il a trouvé est tout de même digne d'intérêt, notamment parce qu'il croit que Mouton n'a pas reconnu, ou a feint de ne pas reconnaitre, les nombres combinatoires :

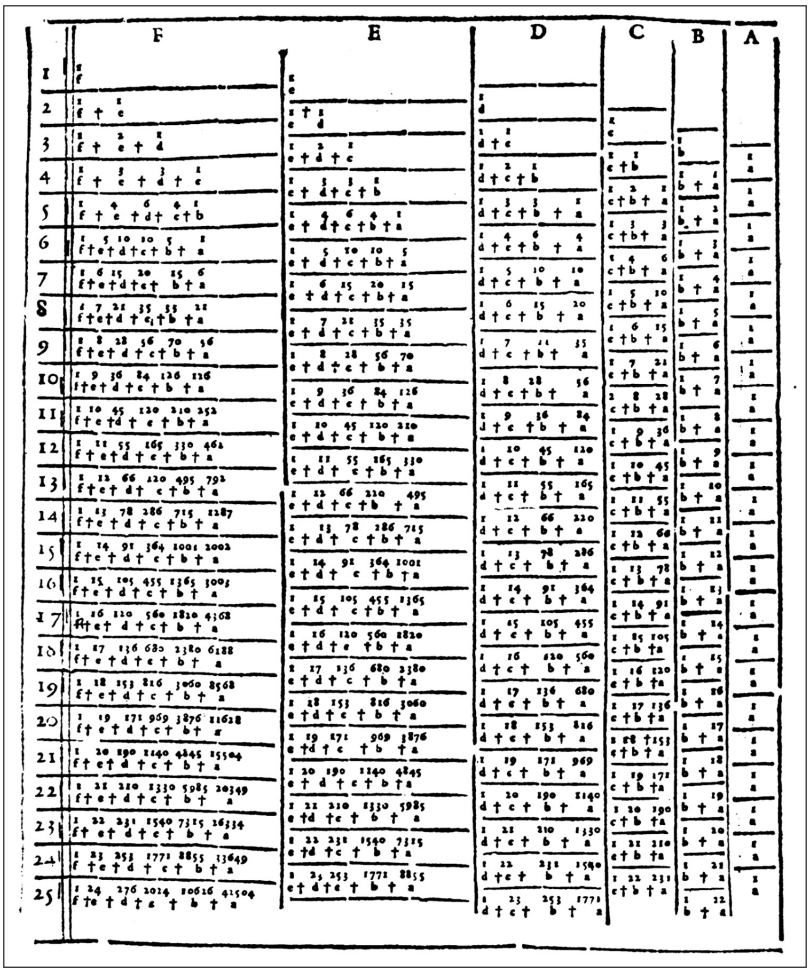
> *D'abord, j'ajoute donc que chez Mouton, il n'apparait pas, et c'est pourtant la clé de la chose, quels sont donc ces nombres que la table expose lorsqu'on la poursuit à l'infini et qui, multipliés par les différences génératrices, ces produits étant joints entre eux, engendrent les termes de la série. De cette*

32. [74] G. Mouton, *Observationes diametrorum solis et lunæ apparentium*, Lyon, 1670

33. A III, 1, N.4, Lettre de Leibniz à la Royal Society du 3 (13) février 1673 - p.24-25 : « Hoc cum audisset Clarissimus Pellius, respondit, id jam fuisse in literas relatum a Domino Mouton Canonico Lugdunensi ex observatione Nobilissimi viri Francisci Regnaldi Lugdunensis, dudum in literario orbe clari, in libro laudati Domini Mouton De diametris apparentibus solis et lunæ. Ego, qui ex epistola quadam a Regnaldo ad Monconisium scripta et Diario itinerum Monconisiano inserta nomen Domini Moutoni et designata ejus duo didiceram, Diametros luminarium apparentes et Consilium de mensuris rerum ad posteros transmittendis, ignorabam tamen, librum prodidisse, quare apud Dominum Oldenburgium Soc. Reg. Secr. sumtum mutuo tumultuarie percurri et inveni, verissima dixisse Pellium. Sed et mihi tamen dandam operam credidi, ne qua in animis relinqueretur suspicio, quasi tacito inventoris nomine alienis meditationibus honorem mihi quærere voluissem. Et spero appariturum esse non adeo egenum me meditationum propriarum, ut cogar alienas emendicare. Duobus autem argumentis ingenuitatem meam vindicabo : primo si ipsas schedas meas confusaneas, in quibus non tantum inventio mea sed et inveniendi modus occasioque apparet, monstrem, deinde, si quædam momenti maximi Regnaldo Moutonioqque indicta addam, quæ ab hesterno vespere confinxisse me non sit verisimile, quæque non possunt facile expectari a transcriptore. »

*façon, je vois que par la table qu'il présent à la page 385, cela n'avait pas été suffisamment exploré par lui. Autrement, il est vraisemblable que la table aurait été disposée de sorte que cette connexion, mais aussi l'harmonie des nombres fussent manifestes, à moins qu'on dise qu'il eût dissimulé son travail.* [34]

L'analyse de Leibniz se fonde sur la structure de la table. En effet, la table de Mouton est la suivante :




G. Mouton, *Observationes diametrorum solis et lunæ apparentium* - p.385

Pour Leibniz, cette table ne présente pas les éléments qui rendraient manifeste sa structure et la nature des nombres combinatoires. Cette remarque montre à quel point la notion de table est fondamentale chez le jeune Leibniz. La table ne sert pas seulement à présenter un résultat, mais constitue le principal témoin de la procédure de découverte. Si la procédure n'apparait pas dans la table, cela signifie ou bien que son auteur ne l'a pas vraiment comprise, ou bien qu'il l'a volontairement dissimulée. Dans les deux cas, la table est incomplète car elle ne rend pas réellement compte de la nature profonde des choses :

*A partir de là, on comprend déjà que la vraie nature de ces nombres et la construction de cette table a été dissimulée soit par Régnauld, soit par Mouton. En effet, un terme donné d'une colonne donnée est toujours composé à partir d'un terme précédent dans la colonne précédente aussi bien que dans la donnée. Mais cela montre aussi qu'il n'y a pas besoin d'un calcul pénible pour poursuivre la table proposée par Mouton, tandisqu'il demande lui-même à ce que ces séries de nombres soient déjà traitées et calculées.* [35]

34. A III, 1, N.4, Lettre de Leibniz à la Royal Society du 3 (13) février 1673 - p.27 : « Primum ergo illud adjicio, quod apud Moutonium non extat et caput tamen rei est, quinam sint illi numeri, quorum tabulam ille exhibet in infinitum continuandam, quorum ductu in differentias generatrices, productis inter se junctis termini serierum generentur. Video enim ex ipso modo, quo tabula ab eo pag. 385 exhibetur, non fuisse id ei satis exploratum ; alioqui enim verisimile est, ita tabulam fuisse dispositurum, ut ea numerorum connexio atque harmonia apparet, nisi quis de industria texisse dicat. »

35. A III, 1, N.4, Lettre de Leibniz à la Royal Society du 3 (13) février 1673 - p.29 : « Hinc jam vera numerorum istorum natura et tabulæ constructio sive a Regnaldo sive a Moutonio dissimulata intelligitur. Semper enim terminus datus columnæ datæ componitur ex termino præcedente columnæ tam præcedentis quam datæ ; atque illud quoque apparet, non opus esse molesto calculo ad tabulam a Moutonio propositam continuandam, ut ipse postulat, cum hæ numerorum series passim jam tradantur calculenturque. »

En réalité, une différence substantielle qui sépare la méthode de Mouton de celle de Leibniz se trouve dans la condition que Mouton impose aux progressions qu'il considère :

> *Etant donné, dans une même série, un certain nombre de nombres qui, en progressant continument selon un même et unique rapport, voient leurs différences ultimes, en nombre quelconque, être égales, trouver autant de nombres intermédiaires qu'on souhaite, qui respectent la même loi de progression.* [36]

Ainsi, la méthode de Mouton ne fonctionne que pour les progressions dont le triangle de différences devient nul à partir d'une certaine hauteur, autrement dit, il faut que le nombre de génératrices non nulles soit fini. Or nous avons vu que cette condition n'est pas vérifiée pour un grand nombre de lois de progressions considérées par Leibniz. En réalité, cette condition équivaut à restreindre l'étude aux progressions polynomiales. Ainsi, la table de Mouton ne présente qu'une partie des nombres combinatoires. En l'occurence, seulement les six premiers pour chaque rang du triangle arithmétique. Le fait de choisir une progression qui voit ses différences d'ordre cinq égales est un cas particulier qui vaut pour un raisonnement général. Mais ce faisant, Mouton obtient effectivement une liste tronquée des coefficients binomiaux, ce qui l'empêche de voir nombre de leurs propriétés.

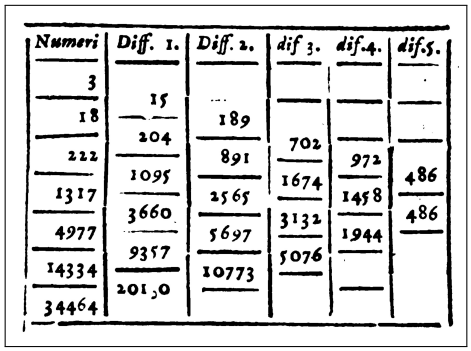
Au mois d'avril 1673, soit peu de temps après que Leibniz soit revenu de son premier voyage à Londres, Oldenburg lui envoie une lettre (A III, 1, N.13) dans laquelle se trouve un commentaire de John Collins [37], à qui le secrétaire de la *Royal Society* fait parfois appel pour certaines questions mathématiques. Ce courrier répond à la lettre de Leibniz du 13 février 1673 (A III, 1, N.4).
Pour Collins, ces techniques relèvent d'une théorie qui a déjà été formalisée, notamment par Gregory qu'il ne cite pas, et lui-même, à savoir la théorie de l'interpolation :

> *Concernant la doctrine des interpolations, dit-il, c'est bien plus général et facile à faire, et ceci au moyen des deux méthodes suivantes, en ajustant une équation au rangs proposé, puis à l'aide des tables des nombres figurés ; et pour exemples, les rangs les plus difficiles dans l'ouvrage de Mouton : si l'on prend le nombre des termes pour racine ou bien t et qu'on élève la résolvante hors de l'équation, on pourra mettre lumière, en relation avec l'un d'entre eux, n'importe que nombre ou nombre intermédiaire dans l'un de ces rangs.* [38]

Collins prend donc pour exemple deux séquences qu'il trouve chez Mouton.

$$3\ ;\ 5\ ;\ 8\ ;\ 18\ ;\ 45\ ;\ 105 \qquad \text{et} \qquad 3\ ;\ 18\ ;\ 222\ ;\ 1317\ ;\ 4977$$

D'ailleurs, la seconde constitue l'exemple que prend Mouton lui-même pour appliquer les triangles de différences :



| Numeri | Diff. 1. | Diff. 2. | dif 3. | dif.4. | dif.5. |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | | | | |
| | 15 | | | | |
| 18 | | 189 | | | |
| | 204 | | 702 | | |
| 222 | | 891 | | 972 | |
| | 1095 | | 1674 | | 486 |
| 1317 | | 2565 | | 1458 | |
| | 3660 | | 3132 | | 486 |
| 4977 | | 5697 | | 1944 | |
| | 9357 | | 5076 | | |
| 14334 | | 10773 | | | |
| | 20130 | | | | |
| 34464 | | | | | |

G. Mouton, *Observationes diametrorum solis et lunæ apparentium* - p.384

36. [74] G. Mouton, *Observationes diametrorum solis et lunæ apparentium*, Lyon, 1670 - p.384, Livre 3, Prob. 4 : « Datsi in eadem serie aliquot numeris, qui una eademque ratione continue progredienties habeant quotlibet differentias harumque ultimas æquales ; intermedios quotlibet numeros, qui eamdem progressionis legem retineant, invenire. »

37. A III, 1, N.13, Lettre de Oldenburg à Leibniz du 20 avril 1673 - Oldenburg envoie deux versions de ce commentaire, écrits de sa propre main, l'un en anglais : A III, 1, N.13 (A N.1) et l'autre en latin A III, 1, N.13 (A N.2).

38. A III, 1, N.13 (A Nr.1), Lettre de Collins à Leibniz, transcrite par Oldenburg, de début avril 1673 - p.50-51 : « As for the doctrine of interpolations, he saith, it is fair more generall and easy to doe, and that by two severall methods, by fitting an æquation to the ranke proposed, than by ayd of tables of figurated numbers ; and, for instances, the hardest rankes in Mouton's booke : in relation to either of which if you take the numer of Termes to be the root or $t$, and out of tue æquation raise the resovend, you shall licht upon anly number or intermediat number in either of these rankes. »

Au lieu de donner l'équation qui correspond à l'algorithme de Leibniz ou de Mouton et qui fait intervenir les nombres combinatoire, qu'il mentionne par ailleurs explicitement, Collins donne directement la formule polynomiale développée :

$$\left(4+\frac{1}{20}\right)t^5-\left(20+\frac{1}{4}\right)t^4+\left(56+\frac{1}{4}\right)t^3-\left(101+\frac{1}{4}\right)t^2+\left(103+\frac{2}{10}\right)t-39$$

au lieu de

$$3\binom{t-1}{0}+15\binom{t-1}{1}+189\binom{t-1}{2}+702\binom{t-1}{3}+972\binom{t-1}{4}+486\binom{t-1}{5}$$

Les éditeurs de l'*Akademie* interprètent cette réécriture comme un moyen de dissimuler sa méthode au jeune philosophe allemand. De fait, pour pouvoir passer de l'une à l'autre, il faut pouvoir exprimer les nombres combinatoires directement en produits factoriels, ce dont Leibniz n'est pas encore capable en 1673. Cela dit, les éditeurs notent que la méthode de Collins n'est pas si différente de celle que Leibniz expose dans sa lettre de février, ce qui relativise l'intérêt d'une telle dissimulation :

> *Le fait que, dans le cas précédent, ceux-ci n'allaient pas beaucoup plus loin que ce que Leibniz avait dit dans le mémoire pour la Royal Society du 13 février 1673, ne semble pas lui être venu à l'esprit en raison de la disparité de la formule exprimée.* [39]

Pourtant, il nous semble que les démarches initiales de Collins, Mouton et Leibniz sont très différentes :

- ⋆ Nous avons vu que la démarche de Leibniz est réductionniste et vise à déterminer les éléments caractéristique de la loi de la progression.
- ⋆ La démarche de Mouton est procédurale, visant à trouver une méthode tabulaire pour compléter une table à partir de ses premiers éléments.
- ⋆ La démarche de Collins, enfin, vise à l'interpolation, c'est-à-dire trouver l'équation qui relie le terme de la suite avec sa place dans la suite, à savoir son rang.

La méthode de Collins introduit donc un élément qui s'avérera capital dans les futurs travaux du jeune Leibniz : le rang $t$ qu'il nomme la racine de l'équation. En effet, Collins exhibe une équation qui relie formelle le rang avec la quantité : $a_n = f(n)$. La pratique tabulaire de Leibniz, mais surtout l'absence d'expression générale pour les nombres combinatoire, ne lui a pas permis d'aller jusqu'à ce degré de formalisme.

### Méthode générale d'analyse

Pour passer de la formule utilisant les nombres combinatoires à celle de Collins, directement exprimée en fonction des puissances, il faut pouvoir exprimer les nombres combinatoires en fonction des puissances. Ce problème demande donc d'avoir la formule factoriel des nombres combinatoire, puis de pouvoir déterminer les coefficients dans le développement du polynome suivant :

$$X(X+1)(X+2)\dots(X+p-1)=X^p+a_{p-1}^{(p)}X^{p-1}+\dots+a_1^{(p)}X.$$

On trouve une tentative infructueuse de solution à ce problème dans un manuscrit rédigé en janvier 1675, à savoir le *De Intercalatione Numerorum Combinatoriorum* (LKK, N.6) [40]. Dans ce texte, Leibniz découvre justement la forme factorielle générale des nombres combinatoires :

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\dots\times\frac{n-k+1}{k}$$

39. A III, 1, N.13 (A Nr.1), Lettre de Collins à Leibniz, transcrite par Oldenburg, de début avril 1673 - p.51, note des éditeurs : « Daß diese im vorliengenden Fall nicht wesentlich über das von Leibniz in der Denkschrift für die RS vom 13. II. 1673, Gesagte hinausgegangen sind, scheint ihm bei der Verschiedenartigkeit der äußeren Form gar nicht zum Bewußtsein gekommen zu sein. »

40. LKK, N.6, *De Intercalatione Numerorum Combinatoriorum. De Formulis Omnium Dimensionum ex Artis Combinatoriæ Principiis*, Janvier 1675

Pour développer cette expression, Leibniz effectue les six premiers produits :

$$\begin{aligned} z &= z \\ z(z-1) &= z^2 - z \\ z(z-1)(z-2) &= z^3 - 3z^2 + 2z \\ z(z-1)(z-2)(z-3) &= z^4 - 6z^3 + 11z^2 - 6z \\ z(z-1)(z-2)(z-3)(z-4) &= z^5 - 10z^4 + 35z^3 - 50z^2 + 24z \\ z(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)(z-5) &= z^6 - 15z^5 + 85z^4 - 225z^3 + 274z^2 - 120z \end{aligned}$$

A partir de ces suites de coefficients, Leibniz adopte une démarche purement inductive, en listant les diverses propriétés et régularité qu'il constate sur ces six premiers exemples :

> *Ici, il faut noter qu'il apparait par induction que les connues au sein des termes augmentent toujours jusqu'à l'avant dernier, qui est le plus grand de tous, et que le dernier, à l'inverse, décroit. Les seconds termes sont les nombres triangulaires 0, 1, 3, 6, 10, 15. Les derniers termes 1, 2, 6, 24, 120 sont les produits continus des nombres successifs depuis l'unité, à savoir*
> 1. ; $\boxed{1,2}$ 2. ; $\boxed{1,2,3}$ 6. ; $\boxed{1,2,3,4}$ 24 ; $\boxed{1,2,3,4,5}$ 120 .[41]

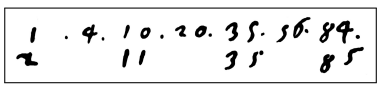
En réalité, la première propriété qui concerne la croissance des termes n'est déjà plus vérifiée à partir du huitième produit :

$$z(z-1)(z-2)\dots(z-6)(z-7) = z^8 - 28z^7 + 322z^6 - 1960z^5 + 6769z^4 - 13132z^3 + 13068z^2 - 5040z$$

On constate que le coefficient maximal ne se trouve pas en avant-dernière position mais à l'antépénultième. Pour les séries suivantes, Leibniz repère des similarités avec les nombres figurés :

> *Mais la determination des restants est plus difficile, par exemple des troisièmes 2, 11, 35, 85, .... On voit cependant qu'ils sont pris d'une certaine manière à partir des pyramidaux.*[42]

En effet, comme l'écrit Leibniz lui-même, on a :




Manuscrits de Leibniz - LH 35, 3 A, 34, Bl.1-2

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| nombres pyramidaux | 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 84 |
| troisièmes coefficients | 2 | | 11 | | 35 | | 85 |

Pour les ordres supérieurs, Leibniz admet qu'il manque de données :

> *Les quatrièmes sont 6, 50, 225, ... et il n'est pas facile de juger ainsi s'ils sont dérivés d'une quelconque manière des triangulo-triangulaires. Et il faut faire appel à de plus longues inductions pour découvrir ces choses.*[43]

Néanmoins, nous pouvons montrer que l'intuition du jeune Leibniz est fausse. En effet, les coefficients successifs ont tous de degré pair. Ainsi, les troisièmes coefficients ne peuvent pas dériver des pyramidaux mais plutôt des triangulo-triangulaire, et les quatrième des pyramido-pyramidaux. En effet, si on note :

$$z(z-1)(z-2)\dots(z-n+1) = z^n - p_n^{(2)} z^{n-1} + p_n^{(3)} z^{n-2} - p_n^{(4)} z^{n-3} + \dots + (-1)^n p_n^{(n)} z$$

41. LKK, N.6, *De Intercalatione Numerorum Combinatoriorum. De Formulis Omnium Dimensionum ex Artis Combinatoriæ Principiis*, Janvier 1675 - p.20-21 : « Ubi notandum inductione apparere, quod semper crescunt cognitæ terminorum, usque ad penultimum, qui est omnium maximus ; at ultimus rursus decrescit. Termini secundi sunt numeri triangulares 0.1.3.6.10.15 Termini ultimi 1.2.6.24.120 sunt producti numerorum continui deinceps ab unitate, nempe 1. $\boxed{1,2}$ 2. $\boxed{1,2,3}$ 6. $\boxed{1,2,3,4}$ 24 $\boxed{1,2,3,4,5}$ 120. »

42. LKK, N.6, *De Intercalatione Numerorum Combinatoriorum. De Formulis Omnium Dimensionum ex Artis Combinatoriæ Principiis*, Janvier 1675 - p.21 : « Sed reliquorum difficilior determinatio, v.g. tertium 2.11.35.85 etc. Patet tamen eos esse quodammodo sumtos ex pyramidalibus. »

43. LKK, N.6, *De Intercalatione Numerorum Combinatoriorum. De Formulis Omnium Dimensionum ex Artis Combinatoriæ Principiis*, Janvier 1675 - p.21 : « Quarti sunt 6.50.225 etc. qui quodammodo ex triangulo-triangularibus deriventur non ita facile judicatur ; et opus est prolixis inductionibus ad ista indaganda. »

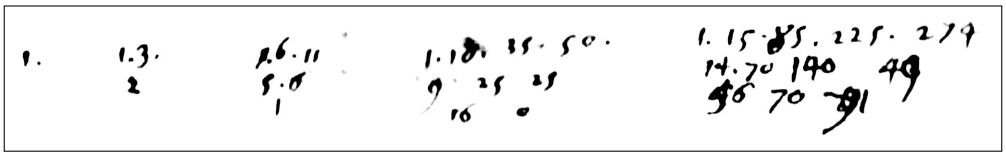
Alors, au moyen d'un raisonnement par récurrence, on peut montrer que les coefficients vérifient la formule de récurrence suivante :

$$p_{n+1}^{(k)} = p_n^{(k)} + np_n^{(k-1)}$$

Et donc :

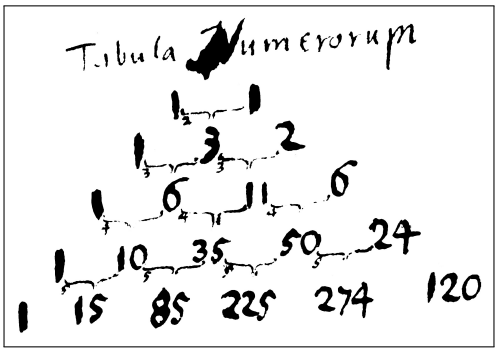
$$p_n^{(k)} = p_0^{(k)} + \sum_{j=0}^{n} jp_j^{(k-1)}$$

Donc si les termes de la $(k-1)$-ième suite sont des polynômes en $n$ de degré $d$, alors les termes de la $k$-ième suite sont de degré $d+2$. Ainsi, les termes de la troisième suite sont de degré 4 et ainsi de suite, ce qui met en défaut l'intuition de Leibniz.
Il termine son exploration inductive en appliquant les triangles de différences à chaque suite de coefficients d'un produit donné, en ôtant le dernier afin que la suite reste croissante :



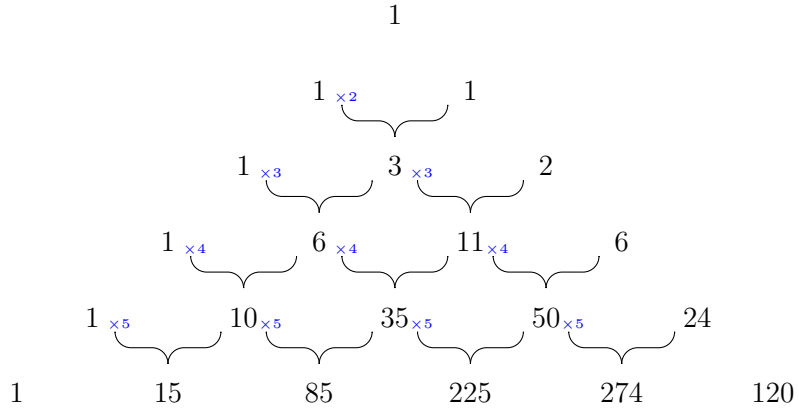
Manuscrits de Leibniz - LH 35, 3 A, 34, Bl.1-2

Nous reviendrons plus tard sur texte, lorsque nous traiterons de la façon dont la notion d'exposant s'est développé au sein de ces thématiques combinatoire. En ce qui concerne ce problème, Leibniz parvient à le résoudre plus tard, dans *De summis serierum fractionalium* (LH 35, 7, 12, Bl.1-2), texte qui date probablement de la fin des années 1670 et sur lequel nous reviendrons également car il introduit la notion de puissances proniques. Il introduit des triangles arithmétiques généralisés qui permettent de générer ces coefficients :




Manuscrits de Leibniz - LH 35, 7,12, Bl.1-2

Les termes de ce triangle obéissent à une loi de Pascal pondérée. En l'occurence, un terme est la somme des deux termes du dessus, dont celui de gauche a été multiplié par le rang de sa ligne. Cette loi est l'incarnation tabulaire de la formule de récurrence que nous avons donnée plus haut.



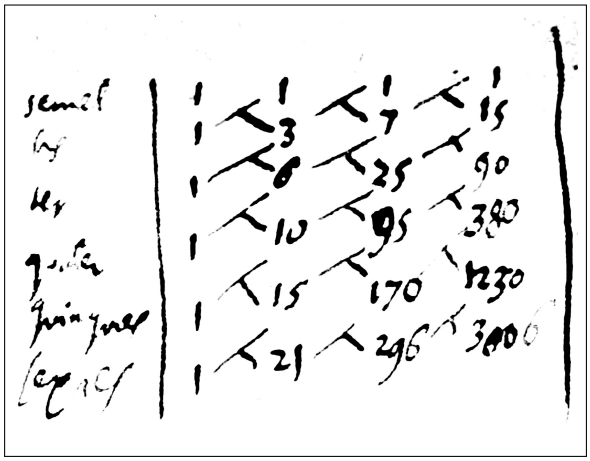
Dans ce texte, Leibniz cherche également à trouver la décomposition réciproque, à savoir exprimer les puissances classiques en fonction des produits continus, que Leibniz qualifie de puissances proniques.
Si on note la puissance pronique de façon similaire à celle de Leibniz :

$$z^{(p)} = z(z-1)\dots(z-p+1)$$

Alors, on trouve les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
z^1 &= z^{(1)} \\
z^2 &= z^{(2)} + z^{(1)} \\
z^3 &= z^{(3)} + 3z^{(2)} + z^{(1)} \\
z^4 &= z^{(4)} + 6z^{(3)} + 7z^{(2)} + z^{(1)} \\
z^5 &= z^{(5)} + 10z^{(4)} + 25z^{(3)} + 14z^{(2)} + z^{(1)} \\
z^6 &= z^{(6)} + 15z^{(5)} + 95z^{(4)} + 90z^{(3)} + 31z^{(2)} + z^{(1)}
\end{aligned}$$

A partir de ces coefficients, Leibniz induit une règle fondée sur un triangle arithmétique semblable, où les pondérations correspondent au rang des diagonales et non au rang des lignes horizontales :



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 7,12, Bl.1-2

| | |
|---|---|
| une fois | 1 1 1 1 |
| deux fois | 1 3 7 15 |
| trois fois | 1 6 25 90 |
| quatre fois | 1 10 95 380 |
| cinq fois | 1 15 170 1230 |
| six fois | 1 21 296 3006 |

Cela s'explique au moyen du raisonnement par récurrence suivant, que Leibniz ne donne pas :
Notons :

$$z^p = z^{(p)} + q_p^{(2)} z^{(p-1)} + q_p^{(3)} z^{(p-2)} + \dots + q_p^{(p)} z^{(1)}$$

Alors on a la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned}
z^{p+1} &= z \times z^p \\
&= z \times \left( z^{(p)} + q_p^{(2)} z^{(p-1)} + q_p^{(3)} z^{(p-2)} + \dots + q_p^{(p)} z^{(1)} \right) \\
&= \quad (z-p+p).z^{(p)} \\
&\quad + (z-(p-1)+(p-1))q_p^{(2)} z^{(p-1)} \\
&\quad + (z-(p-2)+(p-2)q_p^{(3)} z^{(p-2)} \\
&\quad + \dots \\
&\quad + (z-1+1)q_p^{(p)} z^{(1)} \\
&= \quad z^{(p+1)} + pz^{(p)} \\
&\quad + q_p^{(2)} z^{(p)} + (p-1)q_p^{(2)} z^{(p-1)} \\
&\quad + q_p^{(3)} z^{(p-1)} + (p-2)q_p^{(3)} z^{(p-2)} \\
&\quad + \dots \\
&\quad + q_p^{(p+1)} z^{(2)} + q_p^{(p)} z^{(1)}
\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$z^{p+1} = z^{(p+1)} + \underbrace{\left(p + q_p^{(2)}\right)}_{=q_{p+1}^{(2)}} z^{(p)} + \underbrace{\left((p-1)q_p^{(2)} + q_p^{(3)}\right)}_{=q_{p+1}^{(3)}} z^{(p-1)} + \cdots + \underbrace{\left(q_p^{(p)} + q_p^{(p+1)}\right)}_{=q_{p+1}^{(p)}} z^{(2)} + \underbrace{q_p^{(p)}}_{=q_{p+1}^{(p+1)}} z^{(1)}$$

On peut donc en déduire la relation de récurrence suivante qui est incarnée dans la structure du triangle pondéré :

$$q_{p+1}^k = q_p^k + (p-k+2)q_p^{k-1}$$

Par ailleurs, il existe une autre voie pour obtenir ces coefficients, que Leibniz ne mentionne pas et qui se fonde sur la relation suivante :

$$z^{(k)} = z(z-1)\ldots z-k+1 = p! \times \binom{z}{k}$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{aligned} z^p &= z^{(p)} + q_p^{(2)} z^{(p-1)} + q_p^{(3)} z^{(p-2)} + \cdots + q_p^{(p)} z^{(1)} \\ &= p!\tbinom{z}{p} + (p-1)!q_p^{(2)}\tbinom{z}{p-1} + \cdots + 1!q_p^{(p)}\tbinom{z}{1} \end{aligned}$$

Ainsi, si l'on multiplie les coefficients $q_p^{(k)}$ par $k!$, on obtient les génératrices de la progression des puissances $p$-ièmes :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 120 | | | |
| | | 240 | | 360 | | |
| | 150 | | 390 | | 750 | |
| 30 | | 180 | | 570 | | 1320 |
| 1 | 31 | | 211 | | 781 | 2101 |
| 0 ↓ $0^5$ | 1 ↓ $1^5$ | 32 ↓ $2^5$ | 243 ↓ $3^5$ | 1024 ↓ $4^5$ | 3125 ↓ $5^5$ | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 ↓ 0 | 1 ↓ $q_5^{(5)}$ | 15 ↓ $q_5^{(4)}$ | 25 ↓ $q_5^{(3)}$ | 10 ↓ $q_5^{(2)}$ | 1 ↓ 1 |
| × | × | × | × | × | × |
| 0 ↓ 0! | 1 ↓ 1! | 2 ↓ 2! | 6 ↓ 3! | 24 ↓ 4! | 120 ↓ 5! |
| 0 | 1 | 30 | 150 | 240 | 120 |

Grace au premier triangle, Leibniz trouve également le moyen de calculer les sommes finies des termes d'une progression harmonique. En effet, en observant, non plus les premiers termes de chaque ligne mais les derniers, Leibniz regroupe les coefficients en diagonale vers la droite et non vers la gauche. Ainsi, le dernier coefficient des produits continus correspond au produit de tous les entiers, l'avant dernier à la somme de tous les produits où l'on a ôté un facteur, l'antépénultième à la somme de tous les produits où l'on a ôté deux facteurs et ainsi de suite. Ainsi, en divisant ces sommes par le produit de tous les nombres, on obtient un somme de fractions unitaires dont les dénominateurs sont toutes les combinaisons d'un certain nombre fixé d'entiers parmi les $n$ premiers que l'on considère :

> *Mais 1, 3, 11, 50, 274 etc. sont les sommes des nombres harmoniques (à partir des inverses des entiers naturels, multipliés par le facteur des naturels) ; 1, 6, 35, 225 sont les sommes de tous les binions produits à partir des harmoniques ; et 1, 10, 85 etc. sont la sommes de tous les ternions produits à partir des harmoniques etc. En effet, les entiers naturels sont 1, 2, 3 et leurs inverses sont* $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$ *qui multipliés par* 1.2 *donnent* $2+1=3$. *Ainsi donc* $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ ; $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$ ; $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{50}{24}$ ; *et* $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{274}{120}$. *C'est un fait acquis.*[44]

44. LH 35 7 12 Bl. 1-2, *De summis serierum fractionalium*, non daté : « At 1, 3, 11, 50, 274 &c. sunt summæ numerorum harmonicorum (a naturalium reciprocis per factum naturalium multiplicatis), et 1, 6, 35, 225, sunt summæ omnium binionum ab harmonicis ; et 1, 10, 85, &c summae ternionum ab Harmonicis &c. Nempe sint naturales 1, 2, 3, horum reciproci $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$ qui multiplicata per 1.2 dant $2+1=3$. Ergo $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{50}{24}$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{274}{120}$. Nempe posito. »

En effet la somme de tous les produits de $p-1$ facteurs distincts qui sont dans $\{1,\dots,p\}$, s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned} p_{n+1}^{(n)} &= 1.2\dots(n-1)+1.2\dots(n-2)n+\dots+1.3\dots n+2.3\dots n \\ &= \frac{1.2\dots n}{n}+\frac{1.2\dots n}{n-1}+\dots+\frac{1.2\dots n}{2}+\frac{1.2\dots n}{1} \\ &= n!\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

On retrouve donc l'identité proposé par Leibniz :

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}=\frac{p_{n+1}^{(n)}}{n!}$$

On peut généraliser cette formule à ce qu'énoncer Leibniz sur les combinaisons d'ordre supérieur :

$$\sum_{\substack{A\subset[\![1,n]\!]\\ \mathrm{card}A=k}}\frac{1}{\prod_{j\in A}j}=\frac{p_{n+1}^{(n-k+1)}}{n!}$$

Mais Leibniz ne semble pas être satisfait d'une telle formule. Il tente de retrouver ces valeurs par la résolution d'équations :

> *Soit une somme des inverses des entiers* $\frac{A}{B}$ *(comme* $\frac{11}{6}$*), la suivante sera* $\left(\frac{50}{24}\right)=\frac{Ay+B}{yB}\left(\frac{11.4+6}{6.4}\right)$*. Mais pris autrement* $\frac{Ay+B}{yB}-\frac{A}{B}=\frac{1}{y}$*, c'est-à-dire* $\frac{Ay+B}{yB}=\frac{Ay+B}{yB}$*. Puisque l'équation est identique, on ne peut pas trouver ni A ni B pour la raison que cela ne pourrait se faire nulle part par une telle approche.* [45]

La méthode de Leibniz, fondée sur la construction d'un triangle, est évidemment inductive. Il faut avoir trouver le numérateur et le dénominateur d'une somme pour en déduire ceux de la suivante. Cette tentative rédigée hâtivement dans les derniers espaces de la page montre une fois de plus que Leibniz conçoit régulièrement les triangles et les tables comme des outils puissants d'inventions mais pour ce qui est de l'*ars judicandi*, c'est-à-dire déterminer la véracité d'une trouvaille, il semble privilégier la pratique de la spécieuse ou de la caractéristique.

### 5.2.2 La mesure des triangles

Une autre application et généralisation très intéressante des triangles de différences se trouve dans un manuscrit daté du mois de mars 1678, le *De Tabula Condenda pro Areis Triangulorum ex Datis Lateribus* (LH 35, 12, 1 Bl.332-333).On trouve deux manuscrits sans titres qui sont liés à ce texte :

- ⋆ Le manuscrit LH 35, 12, 1 Bl.306, daté par Leibniz de février 1678, soit un mois plus tôt, constitue clairement un travail préparatoire, car il est consacré au même sujet.
- ⋆ Le manuscrit LH 35, 12, 1 Bl.331, daté par le catalogue de 1883, présente des triangles de différences qui sont issus du *De Tabula Condenda pro Areis Triangulorum ex Datis Lateribus* (LH 35, 12, 1 Bl.332-333) et constitue donc manifestement une suite de ces travaux.

Comme l'indique le titre, Leibniz souhaite étudier la formule qui permet d'exprimer l'aire d'un triangle directement en fonction de ces trois côtés. On appelle cette relation la formule de Héron. Notons $a$, $b$ et $c$ les longueurs respectives des trois côtés d'un triangle quelconque, alors son aire sera :

$$A=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\times\frac{a+b-c}{2}\times\frac{c+a-b}{2}\times\frac{b+c-a}{2}}$$

Leibniz propose d'analyser cette formule au moyens des triangles de différences.

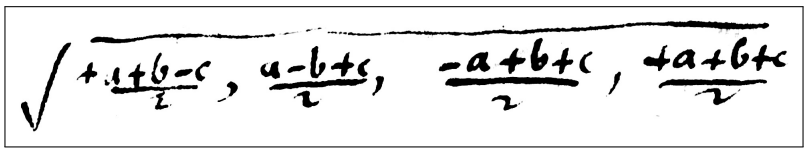
45. LH 35 7 12 Bl. 1-2, *De summis serierum fractionalium*, non daté : « Una Reciprocorum naturalium summa $\frac{A}{B}$ $\left(\text{ut }\frac{11}{6}\right)$ erit sequens $\left(\frac{50}{24}\right)=\frac{Ay+B}{yB}\left(\frac{11.4+6}{6.4}\right)$. At aliunde $\frac{Ay+B}{yB}-\frac{A}{B}=\frac{1}{y}$ seu $\frac{Ay+B}{yB}=\frac{Ay+A}{yB}$. quia æquatio identica est, nec invenimus $A$ vel $B$ quod nec fieri nullibi esset tali modo. » - *NB* : Leibniz a fait une coquille sur l'équation $\frac{Ay+B}{yB}=\frac{Ay+A}{yB}$ où les deux membres devraient être identiques, nous avons corrigé l'erreur dans la traduction.

### Analyse tabulaire d'une formule

Dans le manuscrit de février (LH 35, 12, 1 Bl.306), Leibniz introduit le problème du calcul de l'aire des triangle et sa volonté de le résoudre au moyen des tables :

> *Il sera des plus utile pour la Géodésie de construire facilement des tables grâce auxquelles on obtient facilement, à partir des côtés donnés d'un triangle, l'aire.* [46]

Il rappelle alors la formule de Heron, sans la qualifier ainsi :

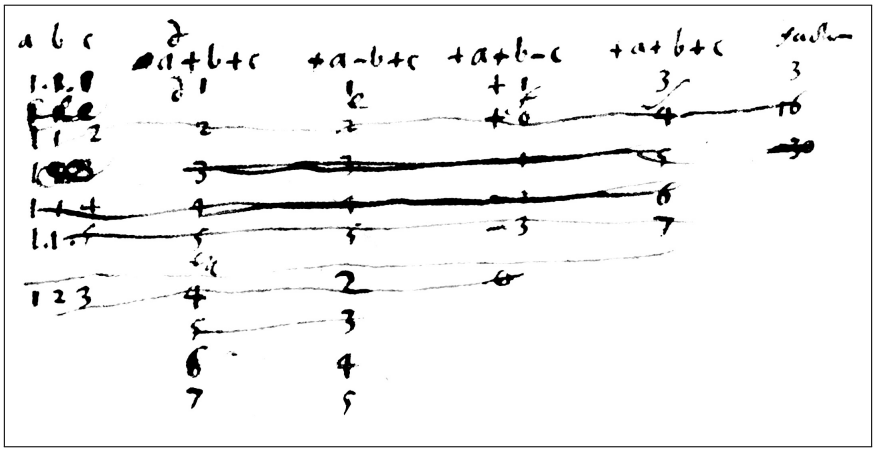


Manuscrits de Leibniz - LH 35, 12,1, Bl.306

Leibniz se débarrasse très vite de la racine, pour avoir une formule rationnelle qu'il puisse étudier grâce aux nombres entiers :

> *Parce qu'en vérité il est un peu plus difficile de trouver les progressions dans les irrationnels.* [47]

Il y a alors trois variables, qui sont les trois côtés du triangle. Il faut donc établir une table pour toutes les valeurs de ce trois variables. Sa première idée est de faire la liste des différentes combinaisons de valeurs pour les trois variables, puis de leur associer les valeurs de chaque facteurs de la formule, pour obtenir en dernière colonne le produit final, qui vaut donc le carré de l'aire du triangle :



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 12,1, Bl.306

Cette première piste s'avère infructueuse, puisqu'elle peut donner des quantités négatives, ce qui est absurde.

> *On remarque à partir de cette table, que seuls sont utiles les nombres pour lesquels deux sont ensembles plus grands que le troisième, c'est-à-dire ceux où l'on n'obtient pas de* $-$ *ou de* $0$. [48]

Il prend alors conscience qu'il faut s'intéresser à ces facteurs précisément, plutôt qu'aux côtés, car ce sont ces facteurs qui vont parcours toutes les combinaisons possibles. Il note donc

$$d = b + c - a \qquad e = a + c - b \qquad f = a + b - c$$

46. LH 35, 12,1, Bl.306, sans titre, février 1678 : « Utilissimum erit pro Geodesia Tabulas facile construere quarum ope facile ex datis Triangula lateribus fiat area. »

47. LH 35, 12,1, Bl.306, sans titre, février 1678 : « Quoniam vero paulo difficilius est progressiones invenire in irrationalibus. »

48. LH 35, 12,1, Bl.306, sans titre, février 1678 : « Nota ex hac Tabula ii numeri tantum sunt utiles in quibus duo simul tertio majores seu ubi non prodit $-$ nec 0. »

Il montre qu'on peut alors exprimer chaque côté comme la moyenne de deux facteurs :

$$a = \frac{e+f}{2} \qquad b = \frac{d+f}{2} \qquad c = \frac{d+e}{2}$$

Pour étudier la relation entre les côtés et l'aire du triangle, Leibniz s'aperçoit qu'il n'est pas simple d'adopter la démarche tabulaire car la liste de tous les entiers possibles ne correspond pas celles de tous les côtés possibles. Il y a des combinaisons inutiles, qu'il faut retirer de la procédure. Mais Leibniz n'adopte pas cette démarchequi est celle que nous avions décrite précisément dans la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8), à savoir établir par des moyens combinatoires la liste exhaustive de tous les possibles puis retirer les combinaisons inutiles en établissant leur liste exhaustive également par des outils combinatoires. Ici, Leibniz change de point de vue et cherche d'autres éléments simples, qui ne sont pas contraint, comme les côtés, par l'inégalité triangulaire, et auxquels il pourra appliquer une procédure combinatoire simple qui fait la liste exhaustive de tous les possibles. C'est donc cette approche qu'il adopte dans le *De Tabula Condenda pro Areis Triangulorum ex Datis Lateribus* (LH 35, 12, 1 Bl.332-333) :

> *Puisqu'en Géodésie, la mesure par les angles est la plus périlleuse alors que celle par les côtés est bien plus sûre, je vais m'appliquer à ce seul problème : à partir des côtés donnés d'un triangle, trouver l'aire. Il m'a semblé à partir de là qu'il valait la peine qu'on calcule une méthode d'invention, au moyen d'une table qui exhibe facilement les aires à partir des côtés. Et certes, il semblait qu'il faille que tous les nombres, par exemple jusqu'à 100, soient con3nisés en ordre. En réalité, comme il intervient de nombreuses con3naisons inutiles, et ce bien-sûr, lorsque le troisième côté est égal ou plus grand que l'ensemble des deux restants, la progression s'interrompait. Dès lors, pour trouver une progression qui ne s'interrompe pas, j'ai choisi ces différences, c'est-à-dire les excès par lesquels deux côtés surpassent le troisième. A savoir :*
>
> $$a + b - c = f \; ; \; a - b + c = e \; ; \; -a + b + c = d$$
>
> *et donc* $a = \frac{e+f}{2}$, $b = \frac{d+f}{2}$ *et* $c = \frac{d+e}{2}$. *Et l'aire du triangle vaut :* $\sqrt{\frac{d}{2}.\frac{e}{2}.\frac{f}{2}.\frac{d+e+f}{2}} = \frac{\sqrt{\begin{matrix} def & \times & d \\ & & e \\ & & f \end{matrix}}}{4}$
> *De plus, pour que les fractions disparaissent, nous ferons en sorte que d, e, f soient pairs (si nous faisions en sorte qu'ils soient tous trois impairs, alors certes a, b et c seraient des entiers mais pas l'aire). Ainsi nous choisissons donc les moitiés de ces pairs à savoir* $\frac{d}{2}$, $\frac{e}{2}$ *et* $\frac{f}{2}$, *c'est-à-dire tous les nombres dans l'ordre car en effet les moitiés de tous les pairs forment tous les nombres, et toutes leurs con3naisons possibles seront utiles (représentées dans la table sous A).* [49]

Mais il faut encore garantir qu'en reconstruisant les côtés du triangle à partir de ces triplets d'entiers, on obtient à nouveau la liste exhaustive de tous les côtés. Leibniz l'affirme dans le suite du texte :

> *De plus les combinaisons de n'importe quelle con3naison donneront les cotés de tous les triangles possibles en nombres entiers ou du moins leurs doubles. En effet, quand les côtés sont par exemple* 3, 4 *et* 6, *alors on aurait du choisir pour d, e et f les impairs* 1, 3 *et* 7, *en effet* $\frac{1+5}{2} = 3$, $\frac{1+7}{2} = 4$ *et* $\frac{5+7}{2} = 6$. *En vérité, puisqu'on ne trouve pas dans la table* 3, 4 *et* 6, *on doit choisir leurs doubles* 6, 8 *et* 12, *que l'on trouvera dans la table, et ayant divisé l'aire trouvée par* 4, *on obtiendra l'aire des demi-côtés.* [50]

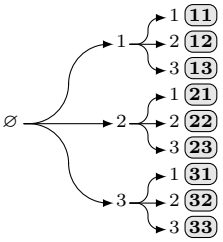
49. LH 35, 12, 1, Bl.332-333, *De Tabula Condenda pro Areis Triangulorum ex Datis Lateribus*, mars 1678 : « Quoniam in Geodæsia periculosissima est mensuratio per angulos tutissima vero per latera hoc unum adhibendo problema : ex datis Trianguli lateribus aream invenire. Hinc operæ pretium mihi visum est modum excogitandi quo Tabula arias ex lateribus facile exhibens calculetur. Et quidem videbatur numeros omnes v. g. usque ad 100 esse ordine con3nandos. Verum quia multæ intercurrunt con3nationes inutiles, ea scilicet, in quibus tertium latus æquile vel maius duobus reliquis simul, hinc interrumpebatur progressio. Ideo ut invenirem progressionem quæ non interrumperetur, sumsi differientias illas sive excessus quibus dua latera excedunt tertium, nempe $a + b - c$ æqu. $f$ ; $a - b + c$ æqu. $e$ ; $-a + b + c$ æqu. $d$ unde fit $a$ æqu. $\frac{e+f}{2}$ et $b$ æqu. $\frac{d+f}{2}$ et $c$ æqu. $\frac{d+e}{2}$. Et area trianguli est $\sqrt{\frac{d}{2}, \frac{e}{2}, \frac{f}{2}, \frac{d+e+f}{2}}$ æqu. $\frac{\sqrt{\begin{matrix} def & \cap & d \\ & & e \\ & & f \end{matrix}}}{4}$. Ut autem fractiones absint faciemus $d.\ e.\ f.$ pares (si faciamus omnes tres impares tunc quidem $a.\ b.\ c.$ sont integri, sed non area). Horum parium ergo dimidios nempe $\frac{d}{2}.\ \frac{e}{2}.\ \frac{f}{2}$ sumsimus, id est omnes numeros ordine nam omnium parium dimidii sunt omnes numeri, et horum con3nationes omnes possibiles erunt utiles (expositi in Tabula sub $A$). »

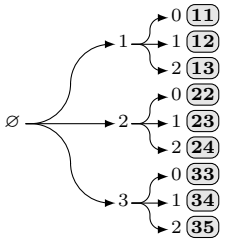
50. LH 35, 12,1, Bl.332-333, *De Tabula Condenda pro Areis Triangulorum ex Datis Lateribus*, mars 1678 : « Cuiuslibet autem con3nationis combinationes dabunt latera Triangulorum omnium in numeris integris possibilium, vel certe eorum dupla. Nam quando latera sunt v.g. 3.4.6 tunc $d.e.f$ sumi deberent impares 1. 3. 7 nam $\frac{1+5}{2}$ æqu. 3 $\frac{1+7}{2}$ æqu. 4 $\frac{5+7}{2}$ æqu. 6. Verum quia in Tabula non reperiuntur 3. 4. 6 sumantur eorum dupla 6. 8. 12 quæ reperietur in Tabula, est area inventa dividatur per 4 et habebitur area dimidiorum laterum. »

Leibniz représente sous une colonne $A$ toutes les combinaisons d'entiers possibles :

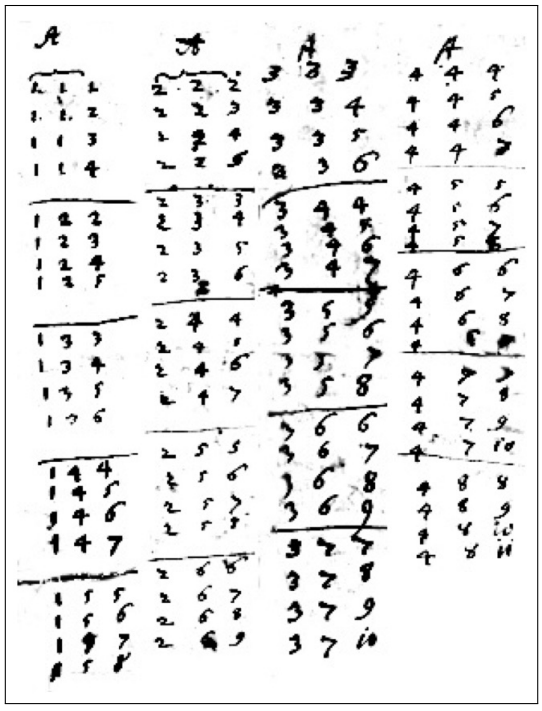
> *Il faut encore choisir dans quel ordre on dispose les nombres sous A. J'appelle les membres l'ensemble de plusieurs triangles ayant en commun les deux plus petits côtés, par exemple* 111, 112 *etc. mais aussi* 122, 123, *etc. Et j'appelle les têtes les ensembles de plusieurs membres dans lesquels les triangles ont en commun les plus petit côté. Ainsi, les membres* 111, *etc. et* 122, *etc. sont sous la tête 1. De la même manière,* 222, *etc.* 233 *etc. sont sous une autre tête, 2. Et ceci doit être la manière de procéder pour trouver le fondement de la table. Et pour découvrir ses diverses progressions magnifiques, voir cette table et ce que nous avons écrit à côté. Maintenant, il faut seulement que je montre comment, ayant trouvé une seule fois la progression, nous pourrons transmettre à d'autres la table à calculer.* [51]

Ce sont des combinaisons et non des permutations. Ainsi le triplet d'entier 1.2.3 peut s'écrire de six façon différentes, autant qu'il y a de permutations de trois éléments. Parmi toutes les permutations des entiers, seulement une est croissante. Ainsi, pour dénombrer seulement les combinaisons, il suffit de considérer les triplets croissants. Dès lors la procédure de dénombrement est la même, en replaçant les éléments par des incréments :




Ainsi, Leibniz donne la table des combinaisons suivantes :



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 12,1, Bl.332-333

| $\overbrace{A}$ | $\overbrace{A}$ | $\overbrace{A}$ | $\overbrace{A}$ |
|---|---|---|---|
| 1 1 1 | 2 2 2 | 3 3 3 | 4 4 4 |
| 1 1 2 | 2 2 3 | 3 3 4 | 4 4 5 |
| 1 1 3 | 2 2 4 | 3 3 5 | 4 4 6 |
| 1 1 4 | 2 2 5 | 3 3 6 | 4 4 7 |
| 1 2 2 | 2 3 3 | 3 4 4 | 4 5 5 |
| 1 2 3 | 2 3 4 | 3 4 5 | 4 5 6 |
| 1 2 4 | 2 3 5 | 3 4 6 | 4 5 7 |
| 1 2 5 | 2 3 6 | 3 4 7 | 4 5 8 |
| 1 3 3 | 2 4 4 | 3 5 5 | 4 6 6 |
| 1 3 4 | 2 4 5 | 3 5 6 | 4 6 7 |
| 1 3 5 | 2 4 6 | 3 5 7 | 4 6 8 |
| 1 3 6 | 2 4 7 | 3 5 8 | 4 6 9 |
| 1 4 4 | 2 5 5 | 3 6 6 | 4 7 7 |
| 1 4 5 | 2 5 6 | 3 6 7 | 4 7 8 |
| 1 4 6 | 2 5 7 | 3 6 8 | 4 7 9 |
| 1 4 7 | 2 5 8 | 3 6 9 | 4 7 10 |
| 1 5 5 | 2 6 6 | 3 7 7 | 4 8 8 |
| 1 5 6 | 2 6 7 | 3 7 8 | 4 8 9 |
| 1 5 7 | 2 6 8 | 3 7 9 | 4 8 10 |
| 1 5 8 | 2 6 9 | 3 7 10 | 4 8 11 |

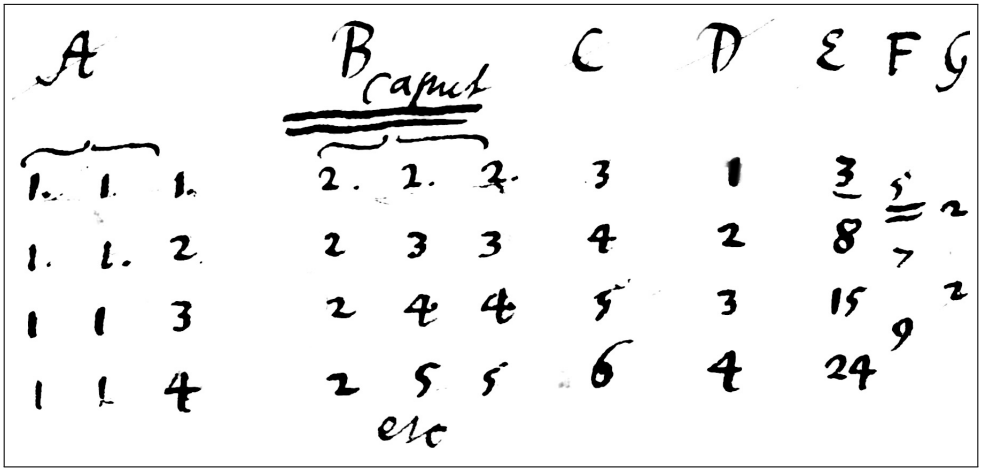
On note que, comme dans les tables de la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8), Leibniz adopte ici une disposition par embranchement, listant d'abord les incréments du terme de droite, puis

51. LH 35, 12,1, Bl.332-333, *De Tabula Condenda pro Areis Triangulorum ex Datis Lateribus*, mars 1678 : « Sumendo jam ordine omnes numeros positos sub *A*. Voco membra, aggregatum plurium Triangulorum duo latera minora communia habentium v.g. 111, 112 etc. item 122, 123 etc. At capita voco aggregata plurium membrorum in quibus triangula latus minimum commune habent, ut membra 111 etc. et 122 etc. sunt sub uno capite 1. Eodem modo 222 etc. 233 etc. sunt sub alio capite 2. Quis sit operandi modus ad fundamentum Tabulæ inveniendum, ejusque varias progressiones pulcherrimas detegendas vide ipsam tabulam et quæ illi ascripsimus. Nunc ostendam tantum quomodo inventa semel progressione, alteris Tabulam calculandam tradere possimus. »

ceux du terme central et enfin le terme de gauche. Le dénombrement produit donc une liste linéaire. La structure arborescente, ou par embranchement, est également incarnée dans le vocabulaire. Le premier choix constitue les têtes et le second donne les membres. On retrouve l'idée arborescente qu'une racine unique, ou une tête donne lieu à plusieurs branches, ou membres.

**La construction de la table**

Pour construire la table, Leibniz adjoint à la colonne $A$ six autres colonnes qu'il définit ainsi :




Manuscrits de Leibniz - LH 35, 12,1, Bl.332-333

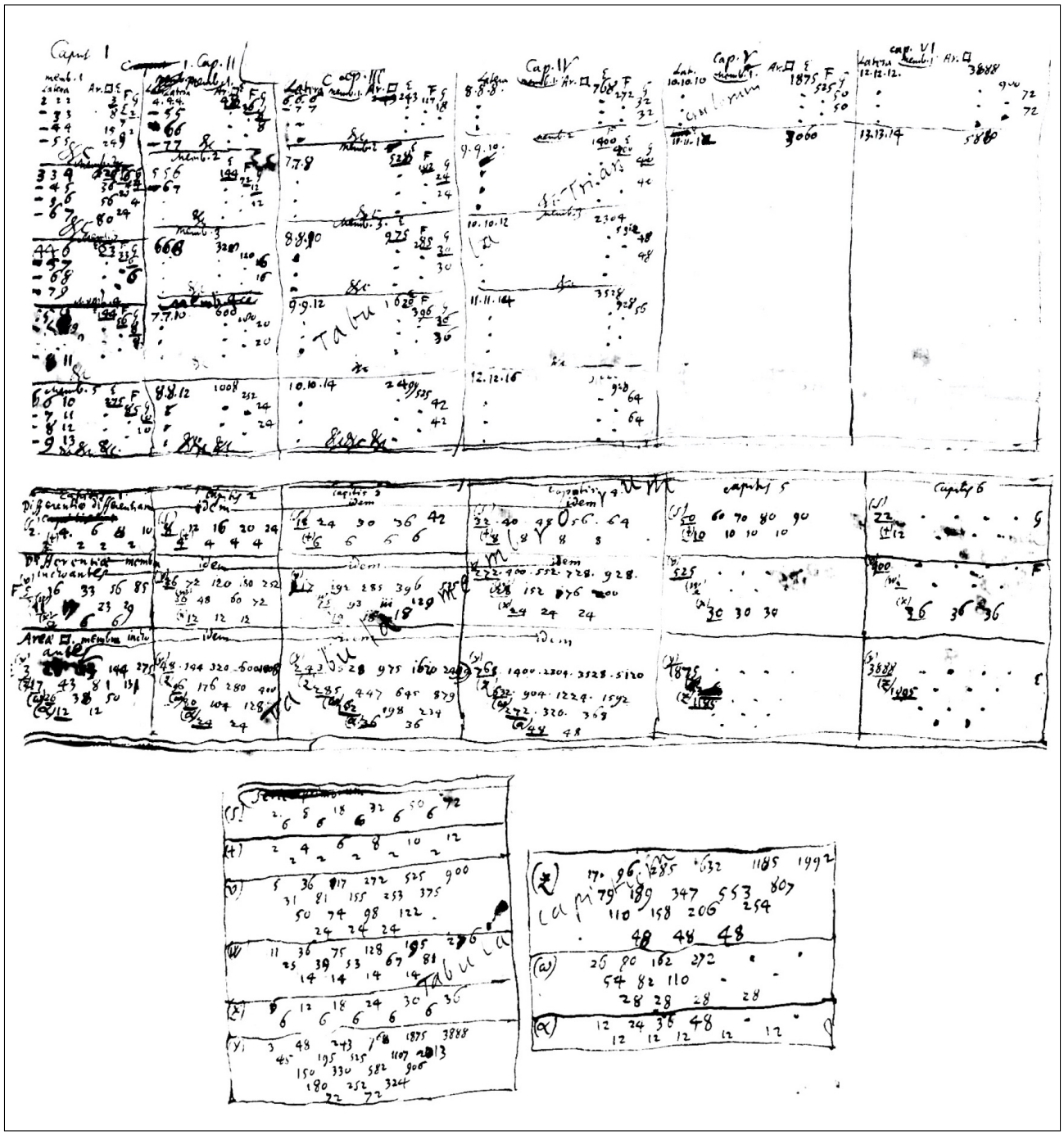
| $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{d}{2}$ $\frac{e}{2}$ $\frac{f}{2}$ | $\frac{d+e}{2}$ $\frac{d+f}{2}$ $\frac{e+f}{2}$ | $\frac{d+e+f}{2}$ | $\frac{d}{2}\cdot\frac{e}{2}\cdot\frac{f}{2}$ | $\frac{d+e+f}{2}\cdot\frac{d}{2}\cdot\frac{e}{2}\cdot\frac{f}{2}$ | $\underbrace{\Delta E}_{=de(d+e+2f+1)}$ | $\underbrace{\Delta^2 E}_{=2de}$ |

- *A : les nombres combinés dans l'ordre, c'est-à-dire les excès de deux quelconques des côtés du triangle contenus dans B au dessus du troisième.*
- *B : Les côtés possibles de tous les triangles en nombres, au moyen de certains excès tels que* 111, 122, 234 *ou* 456. *En effet, on dupliquera seulement ceux-ci et on considérera cependant ainsi leurs doubles comme* 222, 244 *ou* 468 *de sorte qu'ensuite on divise par* 16 *le carré obtenu E de l'aire du triangle, comme* 3, 15 *ou* 135. *Le quotient sera le carré de l'aire du triangle cherché.*
- *C : La somme des nombres qui sont sous A, c'est-à-dire la demi-somme de ceux contenus dans B, ou la demi-somme des côtés du triangles.*
- *D : Le produit de trois nombres A continument multipliés entre eux.*
- *E : Le produit de C par D, c'est-à-dire le carré de l'aire du triangle dont les côtes sont B, c'est-à-dire que si on extrait la racine carré du nombre E, on obtiendra l'aire du triangle.*
- *F : Les différences des carrés des aires, c'est-à-dire des nombres E.*
- *G : Les différences des différences, qui seront toujours les mêmes puisque les deux premiers nombres restent identiques.*

[52]

52. LH 35, 12,1, Bl.332-333, *De Tabula Condenda pro Areis Triangulorum ex Datis Lateribus*, mars 1678 : « $A$ : numeri ordine combinati item excessus duorum quorumlibet trianguli laterum in B comprehensorum supra tertium. ; $B$ : latera omnium Triangulorum in numeris possibilia excessis illis quibusdam, ut 1.1.1 vel 1.2.2 vel 2.3.4 vel 4.5.6. Hæc enim duplicentur tantum, et sumantur eorum dupla ut 2.2.2 vel 2.4.4 vel 4.6.8 ita tamen ut areæ trianguli quadratum $E$ ut 3 vel 15 vel 135 postea inventum dividatur per 16 quotiens erit quadratus areæ trianguli quæsiti. ; $C$ : summa ipsorum numerorum sub $A$ vel dimidia summa comprehensorum sub B seu dimidia summa laterum trianguli. ; $D$ : productum ex tribus numeris $A$ in se continue ductis. ; $E$ : productum ex $C$ in $D$ seu quadratum areæ trianguli cuius latera $B$, id est si ex numero $E$ extrahatur radix quadrata habebitur area trianguli. ; $F$ : differentiae quadratorum arearum seu numerorum $E$. ; $G$ : differentiae differentiarum, quae semper eadem numeris duobus primis manentibus iisdem »

Dès lors, dans cette première table, qu'il nomme la « table des triangles » (« *Tabula Triangulorum* »), Leibniz applique un triangle de différences à chaque membre. Donc, au sein de ces triangles de différences, les deux premiers termes sont constants et seul varie le terme de droite. Ainsi, Leibniz propose d'établir des triangle de différences entre les membres eux-même, afin que ce soit le terme central qui varie. Il nomme la table qui liste ces nouveaux triangles la « table des membres » (« *Tabula Membrorum* »). En réalité, dans cette table, Leibniz applique un triangle de différence aux progressions constituées de chaque génératrices des triangles de la première table. Comme les premiers triangles possèdent tous trois génératrices, Leibniz obtient trois séries de triangles dans la table des membres. Pour faire varier le premier terme, c'est-à-dire le terme de gauche, Leibniz crée la « table des têtes » (« *Tabula Capitum* ») dans laquelle il applique des triangles de différences aux génératrices de la tables des membres. Les triangles de différences des premières génératrices de triangles de la première table disposent eux-même de quatre génératrices, ceux des secondes en possède trois et ceux des troisièmes en possèdent deux. Ainsi, Leibniz obtient $4+3+2=9$ triangles de différences fondamentaux, dans la tables des têtes :



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 12,1, Bl.332-333

## Table des triangles

| | Tête I | | | Tête II | | | Tête III | | | Tête IV | | | Tête V | | | Tête VI | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| m 1 | 1 1 1 | 3 | 5 | 2 2 2 | 48 | 36 | 3 3 3 | 243 | 117 | 4 4 4 | 768 | 272 | 5 5 5 | 1875 | 525 | 6 6 6 | 3888 | 900 |
| | 1 1 2 | 8 | 7 2 | 2 2 3 | 84 | 44 8 | 3 3 4 | 360 | 135 18 | 4 4 5 | 1040 | 304 32 | 5 5 6 | 2400 | 575 50 | 6 6 7 | 4788 | 972 72 |
| | 1 1 3 | 15 | 9 2 | 2 2 4 | 128 | 52 8 | 3 3 5 | 495 | 153 18 | 4 4 6 | 1344 | 336 32 | 5 5 7 | 2975 | 625 50 | 6 6 8 | 5760 | 1044 72 |
| | 1 1 4 | 24 | | 2 2 5 | 180 | | 3 3 6 | 648 | | 4 4 7 | 1680 | | 5 5 8 | 3600 | | 6 6 9 | 6804 | |
| m 2 | 1 2 2 | 20 | 16 | 2 3 3 | 144 | 72 | 3 4 4 | 528 | 192 | 4 5 5 | 1400 | 400 | 5 6 6 | 3060 | 720 | 6 7 7 | 5880 | 1176 |
| | 1 2 3 | 36 | 20 4 | 2 3 4 | 216 | 84 12 | 3 4 5 | 720 | 216 24 | 4 5 6 | 1800 | 440 40 | 5 6 7 | 3780 | 780 60 | 6 7 8 | 7056 | 1260 84 |
| | 1 2 4 | 56 | 24 4 | 2 3 5 | 300 | 96 12 | 3 4 6 | 936 | 240 24 | 4 5 7 | 2240 | 480 40 | 5 6 8 | 4560 | 840 60 | 6 7 9 | 8316 | 1344 84 |
| | 1 2 5 | 80 | | 2 3 6 | 396 | | 3 4 7 | 1176 | | 4 5 8 | 2720 | | 5 6 9 | 5400 | | 6 7 10 | 9660 | |
| m 3 | 1 3 3 | 63 | 33 | 2 4 4 | 320 | 120 | 3 5 5 | 975 | 285 | 4 6 6 | 2304 | 552 | 5 7 7 | 4655 | 945 | 6 8 8 | 8448 | 1488 |
| | 1 3 4 | 96 | 39 6 | 2 4 5 | 440 | 136 16 | 3 5 6 | 1260 | 315 30 | 4 6 7 | 2856 | 600 48 | 5 7 8 | 5600 | 1015 70 | 6 8 9 | 9936 | 1584 96 |
| | 1 3 5 | 135 | 45 6 | 2 4 6 | 576 | 152 16 | 3 5 7 | 1575 | 345 30 | 4 6 8 | 3456 | 648 48 | 5 7 9 | 6615 | 1085 70 | 6 8 10 | 11520 | 1680 96 |
| | 1 3 6 | 180 | | 2 4 7 | 728 | | 3 5 8 | 1920 | | 4 6 9 | 4104 | | 5 7 10 | 7700 | | 6 8 11 | 13200 | |
| m 4 | 1 4 4 | 144 | 56 | 2 5 5 | 600 | 180 | 3 6 6 | 1620 | 396 | 4 7 7 | 3528 | 728 | 5 8 8 | 6720 | 1200 | 6 9 9 | 11664 | 1836 |
| | 1 4 5 | 200 | 64 8 | 2 5 6 | 780 | 200 20 | 3 6 7 | 2016 | 432 36 | 4 7 8 | 4256 | 784 56 | 5 8 9 | 7920 | 1280 80 | 6 9 10 | 13200 | 1944 108 |
| | 1 4 6 | 264 | 72 8 | 2 5 7 | 980 | 220 20 | 3 6 8 | 2448 | 468 36 | 4 7 9 | 5040 | 840 56 | 5 8 10 | 9200 | 1360 80 | 6 9 11 | 15444 | 2052 108 |
| | 1 4 7 | 336 | | 2 5 8 | 1200 | | 3 6 9 | 2916 | | 4 7 10 | 5880 | | 5 8 11 | 10560 | | 6 9 12 | 17496 | |
| m 5 | 1 5 5 | 275 | 85 | 2 6 6 | 1008 | 252 | 3 7 7 | 2499 | 525 | 4 8 8 | 5120 | 928 | 5 9 9 | 9315 | 1485 | 6 10 10 | 15600 | 2220 |
| | 1 5 6 | 360 | 95 10 | 2 6 7 | 1260 | 276 24 | 3 7 8 | 3024 | 567 42 | 4 8 9 | 6048 | 992 64 | 5 9 10 | 10800 | 1575 90 | 6 10 11 | 17820 | 2340 120 |
| | 1 5 7 | 455 | 105 10 | 2 6 8 | 1536 | 300 24 | 3 7 9 | 3591 | 609 42 | 4 8 10 | 7040 | 1056 64 | 5 9 11 | 12375 | 1665 90 | 6 10 12 | 20160 | 2460 120 |
| | 1 5 8 | 560 | | 2 6 9 | 1836 | | 3 7 10 | 4200 | | 4 8 11 | 8096 | | 5 9 12 | 14040 | | 6 10 13 | 22620 | |

## Table des membres

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| d 0 | 3 | | | 48 | | | 243 | | | 768 | | | 1875 | | | 3888 | | |
| | 20 | 17 | | 144 | 96 | | 528 | 285 | | 1400 | 632 | | 3060 | 1185 | | 5880 | 1992 | |
| | 63 | 43 | 26 | 320 | 176 | 80 | 975 | 447 | 162 | 2304 | 904 | 272 | 4655 | 1595 | 410 | 8448 | 2568 | 576 |
| | 144 | 81 | 38 12 | 600 | 280 | 104 24 | 1620 | 645 | 198 36 | 3528 | 1224 | 320 48 | 6720 | 2065 | 470 60 | 11664 | 3216 | 648 72 |
| | 275 | 131 | 50 12 | 1008 | 408 | 128 24 | 2499 | 879 | 234 36 | 5120 | 1592 | 368 48 | 9315 | 2595 | 530 60 | 15600 | 3936 | 720 72 |
| d 1 | 5 | | | 36 | | | 117 | | | 272 | | | 525 | | | 900 | | |
| | 16 | 11 | | 72 | 36 | | 192 | 75 | | 400 | 128 | | 720 | 195 | | 1176 | 276 | |
| | 33 | 17 | 6 | 120 | 48 | 12 | 285 | 93 | 18 | 552 | 152 | 24 | 945 | 225 | 30 | 1488 | 312 | 36 |
| | 56 | 23 | 6 | 180 | 60 | 12 | 396 | 111 | 18 | 728 | 176 | 24 | 1200 | 265 | 30 | 1836 | 348 | 36 |
| | 85 | 29 | 6 | 252 | 72 | 12 | 525 | 129 | 18 | 928 | 200 | 24 | 1485 | 285 | 30 | 2220 | 384 | 36 |
| d 2 | 2 | | | 8 | | | 18 | | | 32 | | | 50 | | | 72 | | |
| | 4 | 2 | | 12 | 4 | | 24 | 6 | | 40 | 8 | | 60 | 10 | | 84 | 12 | |
| | 6 | 2 | | 16 | 4 | | 30 | 6 | | 48 | 8 | | 70 | 10 | | 96 | 12 | |
| | 8 | 2 | | 20 | 4 | | 36 | 6 | | 56 | 8 | | 80 | 10 | | 108 | 12 | |
| | 10 | 2 | | 24 | 4 | | 42 | 6 | | 64 | 8 | | 90 | 10 | | 120 | 12 | |

## Table des têtes

| | |
|---|---|
| $\partial_x \circ \partial_x \circ \partial_x \circ \partial_x$ | 3 48 243 768 1875 3888<br>45 195 525 1107 2013<br>150 330 582 906<br>180 252 324<br>72 72 |
| $\partial_y \circ \partial_x \circ \partial_x \circ \partial_x$ | 17 96 285 632 1185 1992<br>79 189 347 553 807<br>110 158 206 254<br>48 48 48 |
| $\partial_y \circ \partial_y \circ \partial_x \circ \partial_x$ | 26 80 162 272 410 576<br>54 82 110 138 166<br>28 28 28 28 |
| $\partial_y \circ \partial_y \circ \partial_y \circ \partial_x$ | 12 24 36 48 60 72<br>12 12 12 12 12 |
| $\partial_z \circ \partial_x \circ \partial_x \circ \partial_x$ | 5 36 117 272 525 900<br>31 81 155 253 375<br>50 74 98 122<br>24 24 24 |
| $\partial_z \circ \partial_y \circ \partial_x \circ \partial_x$ | 11 36 75 128 195 276<br>25 39 53 67 81<br>14 14 14 14 |
| $\partial_z \circ \partial_y \circ \partial_y \circ \partial_x$ | 6 12 18 24 30 36<br>6 6 6 6 6 |
| $\partial_z \circ \partial_z \circ \partial_x \circ \partial_x$ | 2 8 18 32 50 72<br>6 10 14 18 22<br>4 4 4 4 |
| $\partial_z \circ \partial_z \circ \partial_y \circ \partial_x$ | 2 4 6 8 10 12<br>2 2 2 2 2 |

Ainsi, à partir des génératrices des neufs triangles dans la tables des têtes, Leibniz peut reconstituer les génératrices de l'infinité des triangles de la tables des membres puis à partir de génératrices de ces derniers, il génère la double infinité des triangles de la table des triangles :

> *A partir de ceux-ci, on obtient déjà le moyen de combiner à l'infini la table des triangles grâce à la table des membres, et le moyen de combiner à l'infini la table des membres grace à la table des têtes. Le tout simplement par l'addition.* [53]

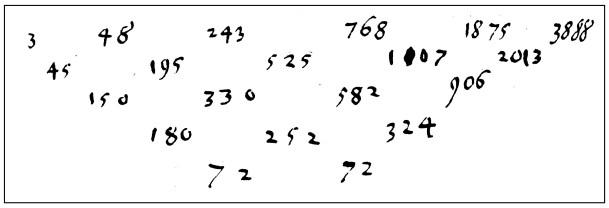
Ainsi, Leibniz a réussi à obtenir les génératrices d'une formule à plusieurs variables. Pour cela il compose les opérations de tabulation de sorte à éliminer les variables l'une après l'autre.

53. LH 35, 12,1, Bl.332-333, *De Tabula Condenda pro Areis Triangulorum ex Datis Lateribus*, mars 1678 : « Ex his jam habetur modus Tabulam Trangulorum combinandi in infinitum ope Tabulæ membrorum et modus Tabulam membrorum combinandi in infinitum ope Tabulae capitum. Omnia simplici additione. »

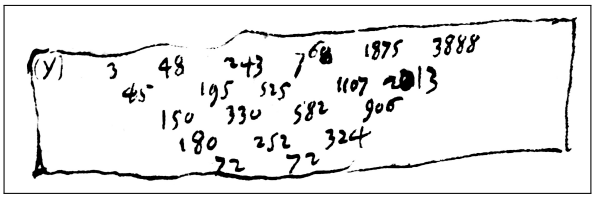
Ce résultat semble très prometteur aux yeux de Leibniz qui y voit l'exemple à suivre pour de nombreuses autres relations géométriques :

> *D'autre part, on extrait la racine carré à partir des termes, ou nombres, trouvés pour n'importe quel triangle à l'aide de la progression, et on obtiendra l'aire du triangle. Ainsi cela se produit sans calcul de sorte qu'on pourrait adjoindre à cette table une table dont les valeurs sont étendues jusqu'à 1 000 000 environ voir plus. Dès lors, en effet, on extraira facilement et de façon suffisamment précise, la racine à partir de n'importe quel nombre utile, en ajoutant un certain nombre de* 0 *ou zéros. En outre, on peut également fonder la table des carrés par la simple addition des nombres impairs.* [54]

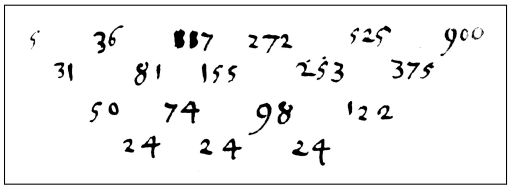
Cette période est visiblement marquée par un regain d'intérêt pour la pratique des tables et des triangles de différences. En effet, le discours que Leibniz tient ici n'est pas très différent de celui, pourtant encore naïf qu'il tenait dans ses premiers travaux parisiens. Il s'agit bien de réduire la loi de la progression à de simples additions. Il s'exprime clairement sur le sujet dans le deuxième manuscrit sans titre (LH 35, 12, 1 Bl.331), que le catalogue date de 1683 [55]. Dans ce document, Leibniz recopie deux des triangles de différences présents dans les tables des têtes :



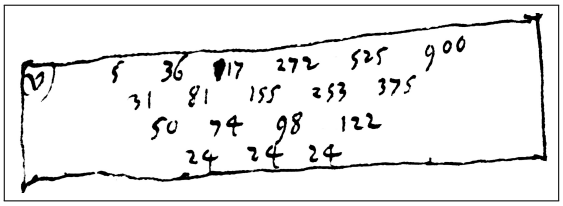
Manuscrits de Leibniz - LH 35, 12,1, Bl.331



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 12,1, Bl.332-33



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 12,1, Bl.331



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 12,1, Bl.332-333

Au verso, il tient un discours très similaire à celui que nous avons cité, sur la réduction des lois de progressions en simples additions :

> *Ce qu'il faut ajouter à cette table : la table des carrés. Il est facile de trouver à partir des aires cette table des carrés, mais aussi de la même manière, la table des puissances, par l'addition des différences. Ainsi, en effet, nous obtenons un moyen commode puisque par l'addition aux précédents nous produisons les suivants et ainsi nous nous ménageons. Et effet, par ce moyen, nous ne sommes pas contraints de calculer chaque terme en entier par lui-même, mais nous nous servons du travail précédent.* [56]

La pratique tabulaire tient donc encore une place significative dans la méthode combinatoire de Leibniz durant la période 1676-1680.
En outre, Leibniz termine le *De Tabula Condenda pro Areis Triangulorum ex Datis Lateribus* (LH 35, 12, 1 Bl.332-333) par une remarque pratique. Si un des côtés est très petit par rapport aux deux autres, alors

54. LH 35, 12,1, Bl.332-333, *De Tabula Condenda pro Areis Triangulorum ex Datis Lateribus*, mars 1678 : « Porro ex terminis seu numeris pro quolibet triangulo ope progressionis inventis extrahatur radix quadratica, et habebitur area Trianguli. Quod ut sine calculo fiat ideo huic Tabulæ adjicienda est Tabula quod valorum extensa circiter usque ad 1 000 000 vel ultra : ita enim facile et satis exacte ex numero quovis utili extrahetur radix adjiciendo aliquot 0 vel zero. Tabula autem quadratorum etiam simplici numerorum imparium additione condi potest. »

55. Nous ignorons les raisons qui motive cette date. Mais si le filigrane n'indique pas 1683 comme *terminus a quo*, nous ne pensons pas qu'il est justifié de l'établir si tard. Le document est manifestement lié au *De Tabula Condenda pro Areis Triangulorum ex Datis Lateribus* (LH 35, 12, 1 Bl.332-333), qui constitue donc un premier *terminus a quo* en mars 1678. Il n'y a pas d'indices, hormis le filigrane, qui pourraient justifier qu'on éloigne significativement ces deux pièces.

56. LH 35, 12,1, Bl.331, sans titre, 1883 : « Tabulæ huic addenda est : Tabula quadratorum. Facile est Tabulam hanc quadratorum pariter ac Tabulam potentiarum ab areis invenire per additiones differentiarum ita enim hoc commodum habemus, quod additione ad præcedentia producimus sequentia et ita lucramur neque enim hoc modo quemlibet terminum per se integrum calculare cogamur sed præcedenti labore utimur. »

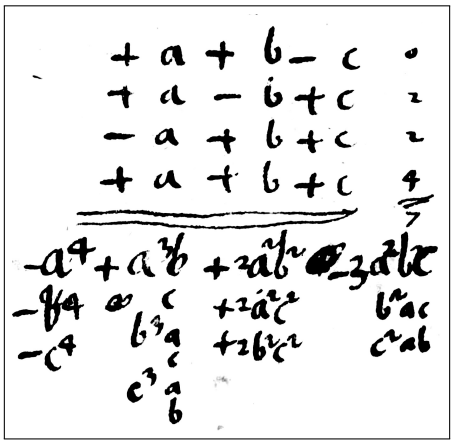
on peut considérer que le triangle est quasiment rectangle. Dès lors l'aire peut se calculer directement par la moitié du produit du petit par l'un des deux grands :

> *Enfin, il faut noter que dans n'importe quel membre de la table des triangles, il n'est pas nécessaire de continuer là où l'on parvient à des nombres vraiment distincts. Par exemple, si l'on cherche l'aire du triangle dont les côtes sont tels :* 2.31.32. *En effet, en pratique, un tel triangle, ou bien on ne présente pas, ou bien n'est pris. De fait, sa perpendiculaire ne diffère guère du côté et l'on peut considérer sans crainte l'aire comme sa moitié multipliée par la base.* [57]

Cette remarque pratique souligne le fait que Leibniz entreprend de tels calculs pour un objectif concret, la Géodésie, qui permet de mesure les surfaces à partir d'une triangulation. Dès lors, le philosophe prend un posture pragmatique où les valeurs visées dans sa recherche sont d'avante la simplicité que la véracité, l'efficacité que la rationalité.

### Interprétation différentielle de la table

Dans le manuscrit de février (LH 35, 12, 1 Bl.306), Leibniz développe la formule de Heron pour obtenir une expression polynomiale à trois variables. Il ne parvient pas à la bonne formule :



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 12,1, Bl.306

$$(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a) = 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) - (a^4+b^4+c^4)$$

Finalement après le changement de variables, la formule devient simplement :

$$def(d+e+f) = d^2ef + de^2f + def^2$$

Notons que les formules sont nécessairement symétriques, puisque l'on donne le même rôle à chaque côté du triangle. On a vu que la table $A$ liste les triplets d'entiers en faisant la permutation des incréments et non des entiers eux-mêmes. Ainsi, nous pouvons réécrire les variables :

$$\frac{d}{2} = x \quad ; \quad \frac{e}{2} = x+y \quad ; \quad \frac{f}{2} = x+y+z$$

Dès lors, la formule devient :

$$\begin{aligned} & x(x+y)(x+y+z)\,(x+(x+y)+(x+y+z)) \\ = \;& x(x+y)(x+y+z)\,(3x+2y+z)) \\ = \;& 3x^4+8x^3y+4x^3z+7x^2y^2+7x^2yz+x^2z^2+2xy^3+3xy^2z+xyz^2 \end{aligned}$$

57. LH 35, 12,1, Bl.332-333, *De Tabula Condenda pro Areis Triangulorum ex Datis Lateribus*, mars 1678 : « Denique notandum est in quolibet membro Tabulæ Triangulorum non opus esse continuatione, ubi primum pervenitur ad numeros valde inæquales verbi gratia si Trianguli area quæraturque cuius latera 2.31.32 tale enim triangulum in praxi aut non offeritur, aut non consideratur nam perpendicularis eius a latere parum differt est area ex dimidio eius in basin ductu tuto assumi potest. »

Cette formule n'est pas symétrique, puisque cette fois-ci, on a distingué le rôle des variables en fixant l'ordre de celles-ci.
Chaque étape de différentiation dans la table correspond donc à différentier cette expression selon une variable :

- ⋆ Lorsqu'on différentie dans la table des triangles, on différentie selon $z$. Or l'expression est de degré 2, pour la variable $z$, ce qui implique qu'on ait deux ordres de différentiations.
- ⋆ Lorsqu'on différentie dans la table des membres, on différentie selon $y$. Or l'expression est de degré 3 en $y$, d'où les trois ordre de différences dans les premières tables. Mais si on différentie selon $z$, le degré en $y$ devient 2, d'où les deux ordres de différences dans la seconde série de triangles :

  $$\frac{\partial}{\partial z} \to 4x^3 + 7x^2y + 2x^2z + 3xy^2 + 2xyz$$

  Puis si l'on différentie deux fois selon $z$, le degré en $y$ devient 1 :

  $$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \to 2x^2 + 2xy$$

- ⋆ Lorsqu'on différentie dans la table des têtes, on différentie selon $x$. Or l'expression est de degré 4 d'où les quatre ordres de différences dans le premier triangle. Mais le degré en $x$ varie suivant les différentes différentiations :
  - $\frac{\partial}{\partial y} \to 8x^3 + 14x^2y + 7x^2z + 6xy^2 + 6xyz + xz^2$ : degré 3 en $x$.
  - $\frac{\partial^2}{\partial y^2} \to 14x^2 + 12xy + 6xz$ : degré 2 en $x$.
  - $\frac{\partial^3}{\partial y^3} \to 12x$ : degré 1 en $x$.
  - $\frac{\partial}{\partial z} \to 4x^3 + 7x^2y + 2x^2z + 3xy^2 + 2xyz$ : degré 3 en $x$.
  - $\frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \to 7x^2 + 6xy + 2xz$ : degré 2 en $x$.
  - $\frac{\partial^3}{\partial z \partial y^2} \to 6x$ : degré 1 en $x$.
  - $\frac{\partial^2}{\partial z^2} \to 2x^2 + 2xy$ : degré 2 en $x$.
  - $\frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial y} \to 2x$ : degré 1 en $x$.

  D'où les différents ordres de différentiations des triangles de la table des têtes.

Plus généralement, les neuf monômes de cette expressions sont tous de degré 4 et correspondent aux neufs combinaisons de différentielles que Leibniz applique pour obtenir les neuf triangles de différences de la table des têtes :

$$\text{A} : \partial_x \circ \partial_x \circ \partial_x \circ \partial_x$$

$$\text{B} : \partial_y \circ \partial_x \circ \partial_x \circ \partial_x$$

$$\text{C} : \partial_y \circ \partial_y \circ \partial_x \circ \partial_x$$

$$\text{D} : \partial_y \circ \partial_y \circ \partial_y \circ \partial_x$$

$$\text{E} : \partial_z \circ \partial_x \circ \partial_x \circ \partial_x$$

$$\text{F} : \partial_z \circ \partial_y \circ \partial_x \circ \partial_x$$

$$\text{G} : \partial_z \circ \partial_y \circ \partial_y \circ \partial_x$$

$$\text{H} : \partial_z \circ \partial_z \circ \partial_x \circ \partial_x$$

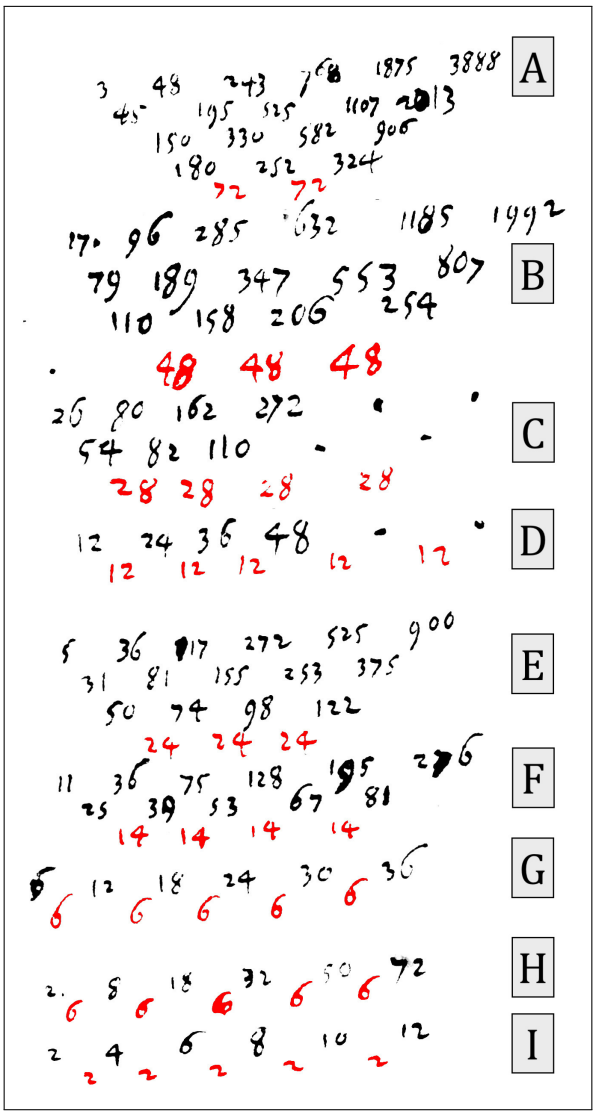
$$\text{I} : \partial_z \circ \partial_z \circ \partial_y \circ \partial_x$$

De plus, si l'on différencie un monôme de sorte que tous les variables disparaissent, on obtient le produit des factorielles des exposants :

$$\frac{\partial^{n_1+\cdots+n_p}}{\partial x_1^{n_1}\dots\partial x_p^{n_p}}\left(x_1^{n_1}\dots x_p^{n_p}\right) = n_1!\times\cdots\times n_p!$$

Ainsi, pour la formule qui nous occupe, on obtient bien la valeur chaque progression constante des triangles de la table de tête :

$$\underbrace{3\ x^4}_{\frac{\partial^4}{\partial x^4}=24,\ 3.24=72} + \underbrace{8\ x^3y}_{\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y}=6,\ 8.6=48} + \underbrace{7\ x^2y^2}_{\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}=4,\ 7.4=28} + \underbrace{2\ xy^3}_{\frac{\partial^4}{\partial x\partial y^3}=6,\ 2.6=12} + \underbrace{4\ x^3z}_{\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial z}=6,\ 4.6=24} + \underbrace{7\ x^2yz}_{\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y\partial z}=2,\ 7.2=14} + \underbrace{3\ xy^2z}_{\frac{\partial^4}{\partial x\partial y^2\partial z}=2,\ 3.2=6} + \underbrace{x^2z^2}_{\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial z^2}=4,\ 1.4=4} + \underbrace{xyz^2}_{\frac{\partial^4}{\partial x\partial y\partial z^2}=2,\ 1.2=2}$$




Manuscrits de Leibniz - LH 35, 12,1, Bl.332-333 [58]

On pourrait voir dans cette démarche une sorte de construction matricielle d'un triangle de différences à quatre dimensions, où les variables sont différentiées selon chaque dimension supplémentaire à celle de la progression. Mais il n'en est rien, une telle démarche aurait une approche "à double entrée" et permettrait de multiplier les chemins au travers du triangle en différentiant par exemple d'abord selon le terme de gauche puis selon celui de droite ou bien inversement d'abord par celui de droite puis par celui de gauche. La procédure de Leibniz fixe l'ordre de différentiation des variables. On différentie d'abord par le terme

58. Leibniz commet une coquille dans la table $H$, en effet, il y a deux ordres de différences et non un seul. La progression constante est alors égale à 4 et non à 6

de droite, puis par le terme central et pour finir par le terme de gauche. Cet ordre s'incarne dans les génératrices des triangles de la table de tête. Exceptées les progressions constantes qui expriment des différentielles et qui ne dépendent donc pas de l'ordre de différentiation, les autres génératrices auraient été différentes si Leibniz avait choisi un autre chemin à travers la table.
Mais en fixant l'ordre des variables, Leibniz crée une asymétrie dans la formule elle-même. Toutes les génératrices expriment cette asymétrie, puisqu'on a vu qu'elles sont issues de l'expression asymétrique de la formule de Héron, et donc toutes expriment la méthode de dénombrement choisie par Leibniz.

## 5.3 Somme Arithmético-Géometrique

Pour finir ce chapitre consacré aux triangles de différences, nous portons notre attention sur un texte de la même période que celui que nous venons d'étudier, à savoir janvier 1678. Dans ce texte, intitulé *De summis serierum Arithmo-Geometricarum infinitarum idque revocando summarum inventiones ad æquationes ordinarias, quod in aliis innumeris procedit* (LH 35 7 11 Bl.9), Leibniz travaille sur une méthode de réduction des puissances. Nous allons voir que les triangles de différences jouent en réalité un rôle clé dans ce problème.

### 5.3.1 Détermination inductive des séries

Ce texte s'adonne à l'étude des sommes arithmético-géométriques, c'est-à-dire les sommes de la forme

$$0^p t + 1^p t^2 + 2^p t^3 + 3^p t^4 + \dots$$

Leibniz commence le manuscrit par un diagramme indiquant que la question provient probablement d'un problème de quadrature. Pourtant, ce n'est pas du tout le cadre que va choisir le jeune philosophe pour traiter la question. Ses tentatives plutôt algébriques le mène rapidement sur le chemin de la combinatoire.

#### Ajout d'une variable

Le problème initial que pose Leibniz dans le *De summis serierum Arithmo-Geometricarum infinitarum* (LH 35 7 11 Bl.9) consiste à trouver la somme de cette série, qu'il nomme $A$ :

$$A = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (n-1)t^n = t^2 + 2t^3 + 3t^4 \dots$$

Nous donnons la formes contractée de l'expression mais Leibniz n'utilise que les formules développées. Pour déterminer $A$, Leibniz part d'une série qu'il connait, et dont il nomme la somme $S$, à savoir :

$$S = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} t^n = t + t^2 + t^3 + \dots = \frac{t}{1-t}$$

Il remarque alors que $S$ est la différence entre $A$ et la somme d'une série semblable, dont on a décalé les coefficients. Il note $B$ cette nouvelle série intermédiaire :

$$B = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} nt^n = t + 2t^2 + 3t^3 + \dots$$

Grace à cela, Leibniz obtient deux équations :

$$A = B.t \qquad \text{et} \qquad S = B - A$$

A partir de là, il suffit d'éliminer $B$ pour obtenir la relation entre $A$ inconnue et $S$ qui est connue, et Leibniz obtient :

$$A = \frac{t}{1-t}S = S^2$$

Leibniz ne stoppe pas en si bon chemin et tente de généraliser à d'autres séries du même genre :

> *On cherche encore plus loin la somme de la série :* $0.t + 1.t^2 + 4.t^3 + 9.t^4 + 16.t^5$ *etc.*[59]

Ainsi, on pose :

$$\begin{aligned} C &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (n-1)^2 t^n = t^2 + 4t^3 + 9t^4 \dots \\ D &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^2 t^n = t + 4t^2 + 9t^3 + \dots \end{aligned}$$

59. LH 35, 7, 11 Bl.9, *De summis serierum Arithmo-Geometricarum infinitarum idque revocando summarum inventiones ad æquationes ordinarias, quod in aliis innumeris procedit*, Janvier 1678 : « Quæritur jam porro summa seriei : $0t + 1t^2 + 4t^3 + 9t^4 + 16t^5$ &c. »

La première équation reste analogue à celle du cas précédent, à savoir qu'on a bien un décalage dans les coefficients et donc $C = D.t$. En revanche, pour la deuxième équation, les choses sont légèrement différentes. En effet, la différence $D - C$ n'est pas une somme connue :

$$D - C = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (2n-1)t^n = t + 3t^2 + 5t^3 + 7t^4 + \dots$$

Cela étant, ces coefficients sont composés de ceux de $A$ et $S$. En effet, on constate que si l'on ajoute $S$ à cette différence, on obtient $2B = 2(A + S)$. Donc la deuxième équation revient à $D - C = 2A + S$. Et ainsi, en éliminant $D$, on peut exprimer $C$ en fonction de $A$ et $S$, puis comme $A = S^2$, on obtient une exression polynomiale qui ne dépend plus que de $S$, à savoir $C = S^2 + 2S^3$.
Finalement, les sommes cherchées ne sont pas $B$ ou $D$ mais $A$ et $C$. Leibniz remarque la nécessité de passer par ces intermédiaires pour pouvoir déterminer la somme. Mais :

> *Ce qui est sans doute un mode de raisonnement des plus admirables. En outre, la technique consiste en ceci de supposer des termes moyens et de nouvelles inconnues, comme ici $B$, de sorte qu'une seule nouvelle inconnue $B$ nous apporte deux équations, à savoir $B = At$ et $B = S + A$. Ainsi sortirons-nous gagnant par cette hypothèse et nous trouverons d'une même façon l'une ou l'autre des deux inconnues $B$ et $A$. Comme on a fait ici car $A$ étant trouvé, on obtient aussitôt $B$. De plus, il n'est nul besoin de trouver le terme médian $B$ avant le terme cherché $A$. Il nous suffit à partir de là d'ajouter de nouvelles équations.* [60]

Ce n'est donc pas le simple fait qu'on ait besoin de variables intermédiaires pour résoudre un problème qui semble ici marquer le jeune philosophe. Ce qu'il y a de remarquable, c'est qu'on n'ait pas besoin de les déterminer. En passant par $B$, on a obtenu deux équations, grâce auxquelles on a pu éliminer la variable $B$ et ainsi obtenir la relation entre $A$ et $S$. Ces ajouts ne font pourtant pas office d'outils purement formels. En effet, $B$ n'est pas une variable indéterminée. C'est une série dont on connait le développement, mais pas la somme. Cette détermination partielle de la série est suffisante pour obtenir la clé du problème.
La réflexion philosophique sous-jacente concerne ici la forme du raisonnement déductif. Ici, la pure analyse n'est pas suffisante. Il faut joindre un élément extérieur au problème pour que la déduction puisse s'enclencher. S'il était nécessaire d'obtenir la résolution complète de cet élément rajouté, il constituerait alors une partie du problème et son étude représenterait une étape de l'analyse. Mais le fait qu'on n'ait pas besoin de déterminer entièrement cet ajout confirme bien que cet objet est extérieur au problème, et que ce raisonnement contient une part de synthèse, ou dit autrement, de combinatoire.

### Généralisation et Erreur d'inattention

Pour le degré 3, cela se complique :

$$\begin{aligned} E &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (n-1)^3 t^n = t^2 + 8t^3 + 27t^4 \dots \\ F &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^3 t^n = t + 8t^2 + 27t^3 + \dots \end{aligned}$$

En effet, les coefficients de la différence $F - E$ ne sont pas aussi simples à lire que la suite des nombres impairs :

$$F - E = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (3n^2 - 3n + 1)t^n = t + 7t^2 + 19t^3 + 37t^4 + \dots$$

Contrairement à nous, Leibniz n'a pas employé de notation abrégée des sommes à ce stade du manuscrit, il se contentait d'une analyse empirique des progressions et ce n'est plus suffisant pour le troisième degré. Leibniz pose $y$ pour les coefficient de $A$ et $x$ pour les coefficients de $B$. Donc $y$ représente la suite des

60. LH 35, 7, 11 Bl.9, *De summis serierum Arithmo-Geometricarum infinitarum idque revocando summarum inventiones ad æquationes ordinarias, quod in aliis innumeris procedit*, Janvier 1678 : « Qui sane ratiocinandi modus est pulcherrimus. Artificium autem medios terminos ac novas incognitas, ut hoc loco $B$ assumendi in eo consistit ut una incognita nova $B$ nobis afferat secum æquationes duas ; ut $B$ æqu. $\frac{A}{t}$ et $B \sqcap S + A$ ita enim lucrabimur hac assumtione, et utramque incognitarum $B$ pariter et $A$ inveniemus. Uti hoc loco factum est nam et $A$ inventa statim habetur $B$. Non est autem opus $B$ mediam prius inveniri quam $A$ quæsitam, sufficit ab illa nobis suppeditari æquationes novas. »

entiers naturels à partir de 0 et $x = y + 1$. Ainsi, pour la différence $F - E$, il s'agit de décomposer $x^3 - y^3$ en puissance de $y$, afin d'obtenir la décomposition selon $S$, $A$ et $C$.

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 &= (x^2 + xy + y^2)(x - y) \\ &= x^2 + xy + y^2 \quad \text{car } x - y = 1 \\ &= (y+1)^2 + (y+1)y + y^2 \\ &= 3y^2 + 3y + 1 \end{aligned}$$

Et ainsi, on obtient $F - E = 3C + 3A + S$. En éliminant $F$ grâce à l'équation $F = E.t$, puis en exprimant $C$ et $A$ en fonction de $S$, on obtient : $E = S^2 + 6S^3 + 6S^4$. A cause d'une malheureuse faute d'inattention, Leibniz obtient, $E = S^2 + 5S^3 + 4S^4$ [61]. L'erreur se répercute dans son calcul au degré 4, où il trouve $H - G = 4E + 5C + 4A + S$ au lieu de $H - G = 4E + 6C + 4A + S$. Avec la bonne formule, il aurait obtenu $H = 24S^5 + 36S^4 + 14S^3 + S^2$. Nous discuterons plus tard des conséquences intéressantes que peuvent avoir ce genre d'étourderie.

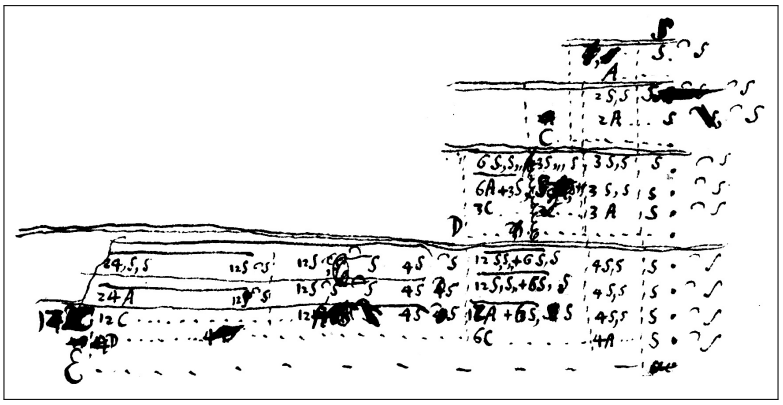
### 5.3.2 Réplication et Table : lien avec les triangles de différences

#### La table de décomposition

Grace au développement de la formule $x^p - y^p$, Leibniz finit par comprendre qu'on pourra toujours exprimer une somme d'un certain degré en fonction des degrés inférieurs et qu'ainsi, à force de réduction, on finira par trouver une expression fonction de $S$ et de ses puissances :

> *Et donc ici, la méthode pour trouver ces expressions abrégées revient à ce qui suit. D'abord, on a ce qu'il faut trouver dans ces $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$ et les semblables. A partir de cela, ayant effectuer la transition, on a l'expression abrégée que l'on cherche, c'est-à-dire la progression dans ⊙ ou ☽. C'est-à-dire qu'on a une expression plus simple de $H - G$, $F - E$, $D - C$ ou $B - A$ en retenant $B$, $D$, $F$ et $H$ etc. De là, on obtient la progression que l'on cherche en éliminant ces $B$, $D$, $F$ et $H$ etc., la chose sera alors réduite à seulement $S$, $A$, $C$, $E$ et $G$. Mais alors au final, il apparaitra qu'en éliminant également les termes en progression $A$, $C$, $E$ et $G$, la chose se réduit aux seules puissances de ce $S$. Ainsi, de fait, il apparaitra par degré comment une seule progression dérive d'autres. Autrement dit, puisque ce n'est pas possible directement, on parvient aux progressions et aux expressions abrégés par saut.* [62]

La réduction se fait donc par étape successive, couche après et couche. Elle n'offre pas d'expression directe qui nous permettent d'atteindre en une seule opération l'expression recherchée, qui ne dépend que de la valeur $S$ et de ses puissances. Leibniz représente les différentes étapes de calculs dans une table :



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 7, 11 Bl.9

61. Dans ses premiers essais, Leibniz ne réduit pas $x$ à $y$ lorsque ce premier est dans le monôme $x^3$. Ainsi, il obtient $F - E = D + 2C + A$. Il remplace alors $D$ par $C + 2A + S$, mais il oublie un $C$ dans la factorisation.

62. LH 35, 7, 11 Bl.9, *De summis serierum Arithmo-Geometricarum infinitarum idque revocando summarum inventiones ad æquationes ordinarias, quod in aliis innumeris procedit*, Janvier 1678 : « Et methodus inveniendi compendia in talibus huc redit, primum invenienda in ipsis $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$, et similibus inde transitu facto quærendum compendium seu progressio in ipsis ⊙ vel ☽. Id est $H - G$ vel $F - E$ vel $D - C$ vel $B - A$ simpliciter expressus retentis $B$. $D$. $F$. $H$ &c. inde quærenda progressio eliminatis his $B$. $D$. $F$. $H$ &c. re ad solus $S$. $A$. $C$. $E$. $G$. reducta. atque ita denique apparebit etiam progressis eliminatis $A$. $C$. $E$. $G$. seu re ad solas ipsius $S$. potentias reducta ita enim per gradus apparebit quomodo progressio una ex alia derivetur. Cum alioqui non statim liceat ad progressiones et compendia perveniat per saltum. »

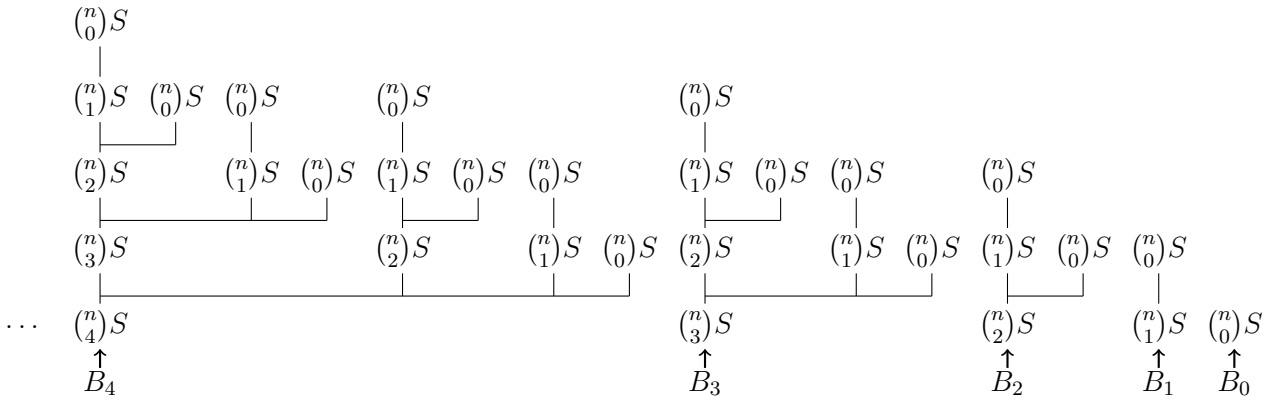
Leibniz résume les différents calculs qu'il vient de faire pour chaque degré, du premier au quatrième, et dans ce résumé, il corrige les erreurs qu'il avait commise dans sa première tentative. L'intervention des coefficients binomiaux appuie son analyse selon laquelle les formules s'obtiennent par itération, puisque c'est aussi comme cela que ces coefficients s'obtiennent à première vue, grâce à la formule du triangle [63]. Il n'est donc guère surprenant de voir naitre chez Leibniz l'idée d'utiliser une table pour générer les calculs nécessaires.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | $S$ |
| | | | | | | | $S, \cap S$ | $S, \cap S$ |
| | | | | | | $A$ | $\cdots$ | |
| | | | | | | $2S, S$ | $S, \cap S$ | $S, \cap S$ |
| | | | | | | $2A$ | $S, \cap S$ | $S, \cap S$ |
| | | | | | $C$ | $\cdots$ | $\cdots$ | |
| | | | | $6S, S$ | $3S, S$ | $3S, S$ | $S, \cap S$ | $S, \cap S$ |
| | | | | $6A$ | $3S, S$ | $3S, S$ | $S, \cap S$ | $S, \cap S$ |
| | | | | $3C$ | | $3A$ | $S, \cap S$ | $S, \cap S$ |
| | | | $D$ | $\cdots$ | | $\cdots$ | $\cdots$ | |
| $24S, S$ | $12S, \cap S$ | $12S, \cap S$ | $4S, \cap S$ | $12S, S$ | $6S, S$ | $4S, S$ | $S, \cap S$ | $S, \cap S$ |
| $24A$ | $12S, \cap S$ | $12S, \cap S$ | $4S, \cap S$ | $12S, S$ | $6S, S$ | $4S, S$ | $S, \cap S$ | $S, \cap S$ |
| $12C$ | | $12A$ | $4S, \cap S$ | $12A$ | $6S, S$ | $4S, S$ | $S, \cap S$ | $S, \cap S$ |
| $4D$ | | | | $6C$ | | $4A$ | $S, \cap S$ | $S, \cap S$ |
| $E$ $\cdots$ | | | | $\cdots$ | | $\cdots$ | $\cdots$ | |

Pour chaque bande, séparée par des traits doubles, le nombre de colonnes est le double de la précédente. En effet, la $(n+1)$-ième bande est la juxtaposition des $n$ premières, coefficientées par les $n$ premiers nombres combinatoires de rang $n$. Ainsi, si l'on note $B_k$ la $k$-ième bande, on obtient la juxtaposition suivante :

$$B_{n+1} = \left[ \binom{n}{n-1} B_n \quad \binom{n}{n-2} B_{n-1} \quad \binom{n}{n-3} B_{n-2} \quad \dots \quad \binom{n}{0} B_1 \right] \times S$$

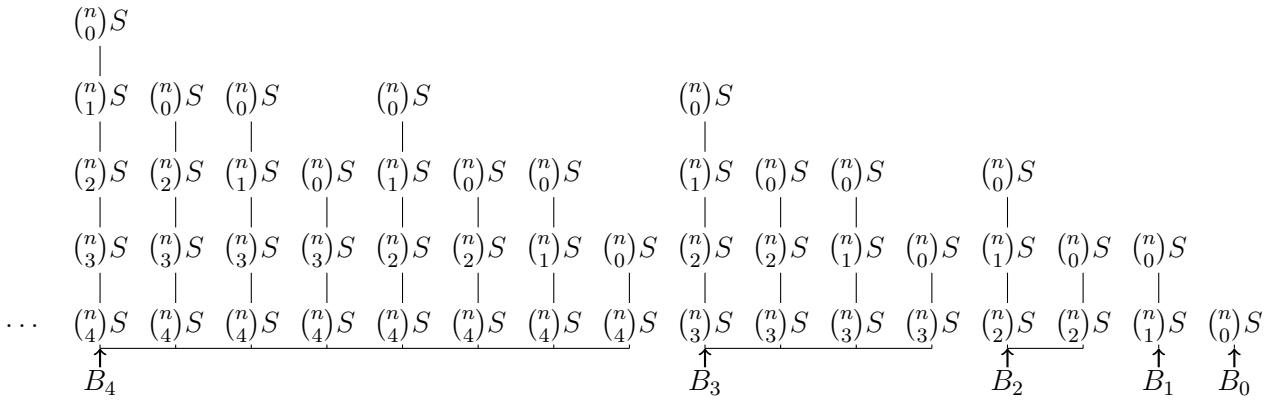
Dans ce procédé constructif, on retrouve le principe de réplication que Leibniz a mis en évidence pour les nombres figurés. En développant chaque bande à son tour, on obtient une figure de réplication, c'est-à-dire que sa première partie contient la réplique de toutes les autres, et ce de façon récursive. Leibniz a construit des figures similaires pour les nombres figurés [64].




63. Cela étant, Leibniz dispose de formules abrégées pour les coefficients binomiaux, ce qui pourrait indiquer que le calcul par étape des formules ici n'est pas une fatalité, mais Leibniz ne va pas dans ce sens.

64. *Cf* Dans la troisième partie, p.451.

La formule de la bande $B_{n+1}$ est donc construite en ajoutant chaque produit issu de la multiplication des termes qui relient une racine à une feuille d'un des arbres, puis en multipliant le résultat final par $S$. Au final, si l'on développe, cela revient à cette figure :




La somme des produits de chaque colonne, le tout multiplié par $S$, donne le résultat.
Leibniz note à côté de la table :

> *Note : chaque ligne en effet est équivalente, mais la plus haute renferme le développement complet. On découvre les séries de la meilleure des façons par cette succession graduelle de développements.* [65]

Ainsi, dans chaque bande, la ligne la plus élevée constitue le développement le plus complet. Prenons la dernière bande $E$ par exemple. Le développement que donne Leibniz est le suivant :

$$\begin{aligned} E &= \overline{\overline{\overline{24S, S\ \ 12S}, \cap S\ \ 12S, \cap S\ \ 4S}, \cap S\ \ \overline{\overline{12S, S\ \ 6S}, S\ \ 4S, S\ \ S}, \cap S} \\ &= \Big(\Big(\Big(24S^2 + 12S\Big)S + 12S^2 + 4S\Big)S + \Big(12S^2 + 6S\Big)S + 4S^2 + S\Big)S \end{aligned}$$

Pourtant, une telle expression reste une expression factorisée et son développement complet serait au sens actuel le suivant :

$$E = 24S^5 + 36S^4 + 14S^3 + S^2.$$

Leibniz considère le premier développement comme plus complet (« *perfectam* ») puisqu'il contient dans son expression la suite des opérations qu'il a fallu faire au travers de la table pour obtenir cette expression. Le second développement donne les parties mais pas la structure. On pourrait faire l'analogie avec le nombre triangulaire $6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$. Ce développement exhibe toutes les parties de 6 mais ne rend pas compte de leur structure. Pour ce faire, il faudrait plutôt écrire $6 = (1) + (1 + 1) + (1 + 1 + 1)$. De fait, la formule qui sort de la table conserve en elle sa forme. Cette forme rend compte du fonctionnement de la table et donne ainsi un accès directe à la méthode de calcul.
Nous avons vu dans le prologue que la disposition des termes dans une table peut exprimer une structure hiérarchique, tout en étant construite de façon purement méréologique, c'est-à-dire exposant seulement des rapports d'inclusion. La formule, en revanche, efface ces multiples relations hiérarchiques en réunissant sous un même facteurs tous les termes semblables, quelque soit la place qu'ils occupaient dans la table. Pour maintenir cette structure, Leibniz a recours à un système de parenthèses qui garde en mémoire toutes les opérations et l'ordre des combinaisons qui ont été nécessaires pour produire le terme auquel elles s'appliquent. Ainsi, cette table révèle à l'intérieur de ses propres termes le travail pénible qu'épargne la pratique tabulaire, et dont Leibniz dit, comme nous l'avons vu dans notre analyse du *De Tabula Condenda pro Areis Triangulorum ex Datis Lateribus* (LH 35, 12, 1 Bl.332-333), qu'il se cache au sein des termes précédents [66]. Il s'agit donc d'une belle illustration du lien étroit mais subtil qui relie la table et la forme.

65. LH 35, 7, 11 Bl.9, *De summis serierum Arithmo-Geometricarum infinitarum idque revocando summarum inventiones ad æquationes ordinarias, quod in aliis innumeris procedit*, Janvier 1678 : « Nota : nam quæque linea æquivalet sed summa continet explicationem perfectam, hac explicationum gradatione series optime inveniuntur. »

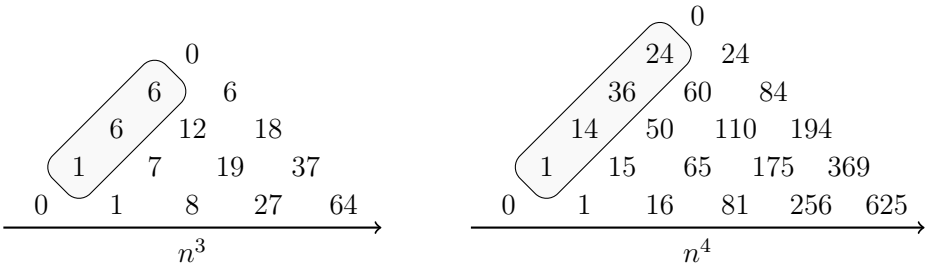
66. *Cf* la note 56 à la p.300.

**Lien avec les différences finies**

Si l'on développe toutes les formules, on obtient :

$$\begin{aligned} A &= S.S \\ \\ C &= (2S.S + S)\, S \\ &= 2S^3 + S^2 \\ \\ D &= ((6S.S + 3S)\, S + 3S.S + S)\, S \\ &= 6S^4 + 3S^3 + 3S^3 + S^2 \\ &= 6S^4 + 6S^3 + S^2 \\ \\ E &= (((24S.S + 12S)\, S + 12S.S + 4S)\, S + (12S, S + 6S)\, S + 4S, S + S)\, S \\ &= 24S^5 + 12S^4 + 12S^4 + 4S^3 + 12S^4 + 6S^3 + 4S^3 + S^2 \\ &= 24S^5 + 36S^4 + 14S^3 + S^2 \end{aligned}$$

Comme nous l'avons expliqué, Leibniz ne cherche pas le développement abrégé en puissance de $S$. Il ne l'a calculé que pour les trois premiers degré, mais une erreur d'inattention a empêché le jeune philosophe d'obtenir les coefficients $1, 6, 6$. Il est possible qu'il eût reconnu cette suite comme celle des génératrices de différences des cubes, dans les triangles de différences. En effet, rappelons que c'est cette suite qu'il choisit comme exemple dans sa lettre à la Royal Society du 13 Février 1673 [67]. Pour le degré 4, Leibniz ne fait pas le développement dans sa première tentative, mais là encore, il aurait été trompé par la répercussion de l'erreur du degré 3, et n'aurait pas pu reconnaitre la suite $24, 36, 14, 1$ qui constitue les génératrices de différences du degré 4 dans les triangles de différences. Pour rappel :




La raison de cette coïncidence apparait lorsqu'on reconsidère le problème que pose ici Leibniz. En effet, on sait qu'une puissance de $S$ fait intervenir les ordres numériques, ou les nombres figurés. Plus particulièrement, ici, ce sont les coefficients binomiaux qui émergent, du fait qu'on ne compte pas le premier terme $t^0 = 1$ dans la somme $S$. On rappelle queici une manière pour faire apparaitre ces coefficients combinatoires :

$$\begin{aligned} S^p &= \left( \sum_{n \in \mathbb{N}^*} t^n \right)^p \\ &= t^p \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} t^n \right)^p \\ &= t^p \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \!\binom{n}{p}\! \right) t^n \end{aligned}$$

Or, les génératrices de différences obtenues par les triangles de différences représentent précisément cette décomposition selon les coefficients binomiaux, comme Leibniz l'a montré dans ses premiers écrits pari-

67. *Cf* la note 24 p.279.

siens sur ces triangles [68]. Ainsi, si les triangles de différences nous apprennent la relation suivante :

$$n^p = a_0\binom{n}{0} + a_1\binom{n}{1} + a_2\binom{n}{2} + \cdots + a_p\binom{n}{p}.$$

Alors, on obtient la somme cherchée par Leibniz :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}} n^p t^{n+1} &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(a_0\binom{n}{0} + a_1\binom{n}{1} + a_2\binom{n}{2} + \cdots + a_p\binom{n}{p}\right) t^{n+1} \\
&= a_0 \sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{n}{0} t^{n+1} + a_1 \sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{n}{1} t^{n+1} + a_2 \sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{n}{2} t^{n+1} + \cdots + a_p \sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{n}{p} t^{n+1} \\
&= a_0 \sum_{n\geq 0} \binom{n}{0} t^{n+1} + a_1 \sum_{n\geq 1} \binom{n}{1} t^{n+1} + a_2 \sum_{n\geq 2} \binom{n}{2} t^{n+1} + \cdots + a_p \sum_{n\geq p} \binom{n}{p} t^{n+1} \\
&= a_0 \sum_{n\geq 0} \binom{n}{0} t^{n+1} + a_1 \sum_{n\geq 0} \binom{n+1}{1} t^{n+2} + a_2 \sum_{n\geq 0} \binom{n+2}{2} t^{n+3} + \cdots + a_p \sum_{n\geq 0} \binom{n+p}{p} t^{n+p+1} \\
&= a_0 t \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\!\binom{n}{1}\!\right) t^n + a_1 t^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\!\binom{n}{2}\!\right) t^n + a_2 t^3 \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\!\binom{n}{3}\!\right) t^n + \cdots + a_p t^{p+1} \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\!\binom{n}{p+1}\!\right) t^n \\
&= a_0 S^1 + a_1 S^2 + a_2 S^3 + \cdots + a_p S^{p+1}
\end{aligned}$$

Donc, par la linéarité des séries, on comprend bien que décomposer $\sum n^p t^{n+1}$ selon les puissances de $S$, revient à décomposer la puissance $n^p$ selon les nombres combinatoires, par la méthode des différences finies. Comme nous le verrons, cette décomposition revient à exprimer les puissances classique dans la base des puissances proniques.

Leibniz n'évoque pas le rapport qu'entretient ce problème avec la théorie des différences finies. Néanmoins, sa démarche est naturellement fondée sur l'analyse des différences. De fait, en introduisant au départ la série $B$, Leibniz met en place une relation entre $A$ et sa différentielle $B - A$. C'est cela qui justifie qu'on n'ait pas à calculer la somme $B$. Elle n'est qu'un artifice pour faire apparaitre la série de différence. Le raisonnement revient alors au calcul d'une somme à partir de celui d'une différence. Ce type de démarche constitue le cœur de la théorie des différences finies. Mais Leibniz ne saisit ici malheureusement pas ce lien qui lui aurait fournit une méthode universelle de décomposition tout comme l'est la méthode des triangles de différence.

De fait, sa conclusion reste plutôt pessimiste, vis-à-vis de possibles généralisations :

> *Note : il est clair que par la même méthode, on peut aussi trouver les sommes des séries* $y^2.t^{y^2}$*, par exemple* $0.1^0 + 1.t^1 + 4.t^4 + 9.t^9$ *etc. ou* $0.t^1 + 1.t^4 + 4.t^9 + 9.t^16$*. Je vois qu'au contraire que c'est de la plus haute difficulté que nous parvenions même à les obtenir. On aura donc besoin de cette autre technique par laquelle on passe des moments, c'est-à-dire les sommes, les sommes de sommes etc. aux puissances, c'est-à-dire les carrés, les cubes etc.* [69]

D'ailleurs, il écrit cette note sur la marge du recto, qu'il souligne comme pour un titre de manuscrit :

> *Trouver les séries grâce aux différences est seulement un cas spécifique de cette méthode.* [70]

Ce titre confirme le peu d'espoir qu'il place dans une possible application universelle de sa méthode.

---

68. *Cf* p.284.

69. LH 35, 7, 11 Bl.9, *De summis serierum Arithmo-Geometricarum infinitarum idque revocando summarum inventiones ad quationes ordinarias, quod in aliis innumeris procedit*, Janvier 1678 : « Nota : patet eadem methodo etiam inveniri posse summas serierum $y^2, t^{y^2}$ v.g $01^0 + 1t^1 + 4t^4 + 9t^9$ &c. vel $0t^1 + 1t^4 + 4t^9 + 9t^{16}$. Imo video id difficilius, quæ ne quidem habemus ? Opus ergo erit altera illa arte per quam a momentis seu summis et summis summarum &c. transitur ad potentias seu quadratæ cubos, &c. »

70. LH 35, 7, 11 Bl.9, *De summis serierum Arithmo-Geometricarum infinitarum idque revocando summarum inventiones ad quationes ordinarias, quod in aliis innumeris procedit*, Janvier 1678 : « Inventio serierum per differentias tantum est casus specialis huius methodi »

## Conclusion

Le triangle de différences constitue donc assurément le noyau central de la pratique tabulaire du jeune Leibniz. Il canalise en son sein un nombre considérable de problématique philosophique liée aux conceptions de catégories très importantes comme la régularité, la simplicité, la perspective, l'harmonie, l'explication ou encore l'induction.
La première réflexion du jeune Leibniz occasionnée par ces diagrammes semble avoir porté sur l'analyse des lois des progressions. En décomposant les termes en leurs génératrices, Leibniz transforme la loi de progression en un procédé de composition. Dès lors, Leibniz soutient l'idée qu'il n'y a pas de différences de nature entre ces deux modes opératoires et qu'une règle rationnelle est toujours le produit d'une certaine suite de combinaisons.
La démarche de jeune philosophe parait donc, à première vue, réductionniste et fondée sur le principe du tout et de la partie, qui joue, comme on le sait, un rôle considérable dans la pensée Leibniz de cette époque. Dans ce cadre, les génératrices sont considérées comme les éléments simples auxquelles le triangle de différences permet d'accéder, faisant alors office d'outil d'analyse.
Mais cette interprétation méréologique ne vaut en réalité que pour les progressions polynomiales. En effet, Leibniz est très conscient du fait que les génératrices des progressions géométriques par exemples sont aussi en progression géométrique et il va découvrir, comme nous l'avons vu, que la progression harmonique est constituée de ses propres génératrices. Ainsi les termes peuvent composer les génératrices autant qu'elles les composent. Pourtant, Leibniz n'exprime jamais explicitement cette contradiction, et son discours durant le début du séjour parisien est principalement réductionniste.
Mais la décomposition du triangle de différences permet avant tout de mettre en lumière la façon dont les nombres combinatoires s'articule avec la structure différentielle. Ces nombres respectent des lois qui sont en parfaite harmonie avec les règles de sommes et celles de différences. Ainsi, ils forment une base universelle canonique du calcul différentiel discret, analogues des puissances classiques dans le calcul continu. Bien que Leibniz ne travaille cette question de façon explicite que bien plus tard, comme nous le verrons lorsque nous traiterons le sujet des puissances proniques, il est convaincu dès le départ que ces nombres constituent l'essentiel de sa méthode. C'est d'ailleurs sur cette base qu'il se persuade que les travaux de Mouton n'allaient pas aussi loin que les siens.
En dépliant les relations, le triangle de différences a pu constituer, au départ, un mode de preuve à part entière. L'épisode du triangle harmonique l'illustre à merveille. Les raisonnements tabulaires que Leibniz produit ont beau être fondés par principe sur l'induction, ils semblent fournir au philosophe des inférences parfaitement convaincantes, et donc suffisantes.
Mais finalement, le triangle de différence devient rapidement pour Leibniz un outil principalement heuristique, entièrement dédié à l'*ars inveniendi* et non à l'*ars judicandi*. Cette approche semble se réactiver à la fin des années 1670 et lui permet de résoudre un problème qui pourtant lui résistait, à savoir le développement formel des produits d'entiers successifs. Grâce à la structure tabulaire et à la règle locale des triangles de différences, Leibniz parvient à induire de nouveaux triangles arithmétiques généralisés, où la règle de Pascal est pondérés par les rangs des lignes ou des diagonales. Cette nouvelle table induite des premiers termes permet de trouver les autres sans avoir à faire de lourd calcul. Leibniz pousse cette logique à l'extrême dans le *De Tabula Condenda pro Areis Triangulorum ex Datis Lateribus* (LH 35, 12, 1 Bl.332-333), où il réduit, par la méthode des triangles de différences, une relation à trois variables à de simples additions.

La dernière partie de ce chapitre a permis de questionner la relation qu'entretiennent les tables et les formules. A première vue, la table développe tandis que la forme enveloppe. Mais en réalité, cette relation peut être considérée sous l'angle opposé. En effet, en gardant en mémoire les différents calcul des termes précédents, le terme de la table enveloppe en lui-même la structure et les opérations qui ont permis de le construire. La formule, au contraire, expose la procédure de construction à travers sa structure syntaxique arborescente.

# Transition

Les premiers travaux parisiens que nous avons développés dans cette première partie réservent donc un place considérable à la table et à la pratique tabulaire.
Le problème posé par Huygens et le développement du triangle harmonique ont certes démontré, par la richesse des approches et la diversité des constructions, que le jeune philosophe s'est largement appuyé sur la tabulation pour faire des découvertes et pour les présenter. Mais cette étude monographique a surtout permis de mettre en lumière les difficultés qu'il y a à bâtir un discours sur l'émergence d'une pratique au sein de l'histoire des idées. L'ambivalence du triangle harmonique en est une parfaite illustration. Une vision internaliste naïve tendrait à distinguer seulement deux approches qui mènent à un résultat mathématique, à savoir la découverte inductive *a priori* et la démonstration déductive synthétique *a postiori*. En amont, l'acteur de l'histoire chemine vers le résultat en suivant la démarche inductive, assemblant progressivement les pièces du raisonnement, tandis que l'historien, qui observe en aval, reconstitue à rebours le raisonnement déductif. Les deux démarches convergent ainsi l'une vers l'autre, suivant le temps dans des directions opposées. Cette position doit bien-sûr être critiquée pour son présentisme et le fait qu'elle ignore les problématiques contextuelles liées aux institutions, à l'enseignement et aux fossés paradigmatiques qui séparent les acteurs des observateurs. Mais, il nous semble que notre analyse souligne dans cette vision un écueil d'une nature différente, à savoir cette évidence présupposée qu'il y a seulement deux chemins possibles, le raisonnement inductif et le raisonnement déductif, l'analytique et le synthétique. L'approche inductive voudrait que Leibniz ait découvert le triangle harmonique à l'occasion de ses travaux sur le problème de Huygens, puis qu'en observant les propriétés de ce triangle, il ait eu l'idée des schéma de différences qui ouvrent la voie sur la théorie des différences finies. A l'inverse, l'approche déductive explique grâce à la théorie des différences finies et au moyen des schéma de différences comment le triangle harmonique permet de résoudre le problème de Huygens. Nous avons montré qu'aucune de ces explications ne correspond au témoignage des sources. Au fur et à mesure que ses réflexions sur le problème de Huygens s'étoffent et murissent, le jeune Leibniz est traversé simultanément pas des soucis de rigueurs et des désirs de découvertes. Les constructions qu'il met en place pour arriver à ses fins, ou bien pour que de nouvelles fins émergent, relèvent à la fois d'une démarche apodictique et d'une entreprise d'induction dédiée à l'*ars inveniendi*. Ainsi les triangles de différences et le triangle harmonique se nourrissent mutuellement dans leurs développement et ils n'aboutissent pas à un résultat complet et univoque. Il y a plusieurs conception des triangles de différences et plusieurs conception du triangle harmonique. Certaines plus heuristiques enrichissent l'*ars inveniendi* tandis que d'autres s'intègre dans une réflexions sur la présentation des résultats. La table est un objet qui accueille merveilleusement bien en son sein ces aspects complémentaires et en apparence contradictoires.
Nous avions vu, dans le prologue, que la pratique tabulaire du jeune Leibniz permet d'aller au delà de la distinction établie par Michel Serres entre les tables des primitifs et celles de dérivatifs [71], et qu'une même table pouvait présenter en son sein les deux fonctions, à savoir faire la liste des éléments simples et exposer la procédure pour engendre tous leurs composés. Cette idée s'incarne parfaitement dans le triangle de différences et l'usage qu'en propose le jeune Leibniz. En effet, la démarche réductionniste que nous avons présentée permet d'établir la liste des primitifs, à savoir les génératrices. Même si nous avons suffisamment évoqué les limites qu'il y a à les considérer comme des éléments simples, c'est ainsi que Leibniz les considère dans de nombreux textes. Ensuite, Leibniz montre que l'on peut construire à l'infini tous les termes de la progression en les engendrant à travers la table par simple combinaison d'addition. Dès lors, le triangle de différences permet de calculer les dérivatifs. Par l'analyse des premiers

71. *Cf* la citation de Serres à la note 108 p.68 et notre remarque à la p.72.

termes de la suite, on détermine les coefficients à partir desquels, en les combinant, on génère tous les autres termes de la progression. Notons que ni l'analyse des premiers termes, ni la combinaisons des génératrices ne sont des opérations qui sont en elles-mêmes inductives. Du point de vue de la pratique tabulaire, ces opérations sont de même nature, et consiste à composer deux termes de la table pour obtenir le suivant, que ce soit par addition ou par soustraction. Pourtant la première est décrite comme une analyse, tandis que la seconde constitue une synthèse. Cette distinction sémantique s'appuie certes sur l'idée métaphysique que la soustraction tire la partie du tout, tandis que l'addition forme le tout à partir des parties, mais pas seulement. L'induction, dans ce raisonnement, intervient lorsque l'on prolonge implicitement les progressions des génératrices. Que ce soit dans les progressions polynomiales, où on les prolonge par une infinité de 0, ou dans les progressions géométriques ou harmoniques, le prolongement des génératrices est une donnée évidente qui ne requiert ni calcul, ni explication. Dès lors, la loi des génératrices est considérée comme plus simple et plus évidente que celle de la progression à la base, ce qui justifie qu'on parle d'analyse pour construire les génératrices à partir des premiers termes de la progression et de combinaisons ou de synthèses pour exprimer toute la progression en fonction des génératrices.

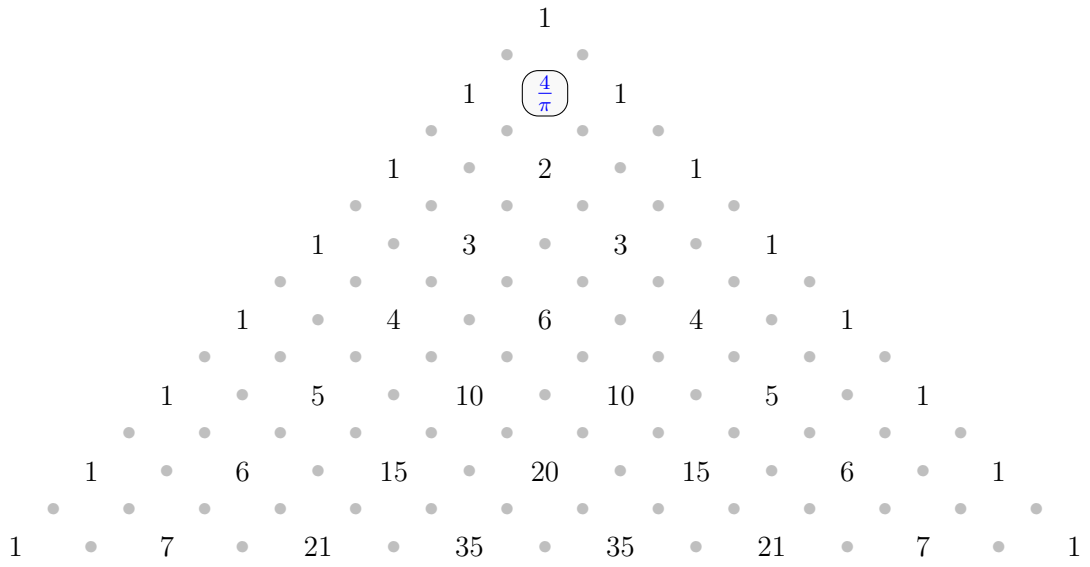
En outre, la pratique des tables exige une réflexion profonde sur la notion de disposition. La tabulation consiste à associer des lieux à chaque terme d'un ensemble donné, en fonction de la nature de ces termes et du lieux qu'ils occupaient éventuellement déjà dans l'ensemble. La pratique tabulaire se donne alors pour rôle d'étudier les relations qu'ont les termes avec les lieux afin d'en extraire une règle, une loi universelle qui caractérise les termes de l'ensemble. Nous avons vu à quel point le jeune Leibniz est attentif à ces questions de disposition. Sa critique envers l'ouvrage de Mouton montre même qu'il peut voir dans une table le reflet de la manière dont son auteur conçoit ses termes, comme nous le faisons, par ailleurs, nous-même vis-à-vis de Leibniz dans notre propre travail.

Finalement, cette première analyse a pointé l'intérêt considérable que porte Leibniz aux nombres combinatoires et au rôle qu'ils jouent dans la pratique des tables. Comme nous l'avons montré, ces nombres opèrent avec harmonie au sein des triangles de différences, mais aussi du triangle harmonique, de part les règles différentielles et sommatoires auxquelles il sont soumis. Or, dans l'*Historia et Origo Calculi Differentialis*, Leibniz rappelle que le triangle arithmétique et le triangle harmonique, considérés l'un comme une table de sommes et l'autre comme une table de différences, sont des structures fondatrices du calcul différentiel et intégral. De fait, nous allons voir, dans la seconde partie, qu'il est possible de considérer les nombres combinatoires sous l'angle des quadratures et des méthodes de tangentes. Les triangles ne sont plus de simples tables numériques, mais représentent des classes d'objets géométriques comme des courbes. Ainsi la pratique tabulaire devient également un outil pour la réflexion sur la nature des courbes, et notamment sur la notion de transcendance.

# Deuxième partie

# Les problèmes de Quadratures

# Avant-propos




Quand Collins interprète les travaux du jeune Leibniz sur les génératrices comme un échantillon de la théorie de l'interpolation, il se méprend quant aux objectifs et aux conceptions du jeune homme. Nous avons montré que la théorie leibnizienne des triangle de différences a pour objet l'analyse des lois de progressions et leurs réductions à des processus de combinaisons. L'application immédiate de cette réduction est le calcul des termes successifs de la progression, mais, bien qu'il s'agisse effectivement de déterminer un terme de la progression hors du domaine qu'on s'est donné au départ, il ne s'agit pas à proprement parler d'interpolation, puisque ce domaine préexistait en puissance dans la conception *a priori* infinie qu'a le jeune Leibniz des progressions numériques. A la rigueur, nous pouvons parler de méthode d'"extrapolation", pour reprendre l'origine étymologique de l'interpolation. Ce que propose Collins, est d'une toute autre nature. Il ne s'agit pas de décomposer un calcul complexe en simples combinaisons d'addition, mais de déterminer une équation qui relier directement le terme avec son rang : $a_n = f(n)$. Cette équation correspond pourtant précisément à la procédure de combinaison que donne Leibniz pour exprimer les termes d'une progression en fonction des génératrices. D'ailleurs Collins dit lui-aussi avoir recours à la table des nombres figurés. Mais l'objectif n'étant pas le même, les conséquences philosophiques sont également différentes.

En déterminant les génératrices, on obtient des nombres qqui détermine une loi universelle. Cette abstraction relève presque d'une position structuraliste, en cela que la loi qui est induite à partir de la table acquiert immédiatement un niveau hiérarchique supérieur aux objets auxquels elle s'applique et desquels elle est pourtant abstraite. La loi détermine les termes et non l'inverse. Dès lors, pour aller à l'extrême, l'existence de la loi précède celle des objets sur lesquels elle s'applique. Il n'est ainsi pas nécessaire que les nombres carrés existent pour faire exister la notion de loi carré. L'idée n'est pas d'attribuer cette position à John Collins, sur la base trop faible de sa courte présentation dans la lettre d'avril 1673 (A III, 1, N.13), mais plutôt de considérer cette dernière comme l'occasion d'introduire ce point de vue qui permet d'éclairer la façon dont certains acteurs que nous allons analyser dans cette seconde partie envisagent le procédé d'interpolation, en particulier John Wallis. En effet, Collins montre que les termes peuvent être obtenus directement en instanciant son équation par le rang de ceux-ci. Or, l'équation formelle décrit directement, par elle-même, une procédure ou une règle, et n'a pas besoin d'être instanciée pour cela.

Dès lors, la notion de lieu, de rang et de disposition a été annihilée dans l'extraction de la loi. Ceci a pour conséquence que le domaine auquel cette loi s'applique n'est plus défini et peut donc être étendu. Cette extension constitue l'acte d'interpolation. L'équation de Collins n'est pas nécessairement instanciée par une entier, mais peut être évaluer pour d'autres valeurs. Dans une table, ces nouvelles valeurs représenteraient alors des positions intermédiaires, de nouveaux lieux intercalés entre les termes, au sein de l'espace tabulaire.
Leibniz n'est donc pas intéressé par les problématiques liées à l'interpolation dans ses premiers travaux de 1673. Néanmoins, il découvre très vite l'intérêt que cette procédure peut apporter, en particulier lorsqu'il reçoit les travaux de Wallis et de Mengoli sur la quadrature du cercle. Ces deux mathématiciens ont déterminé le rapport entre l'aire du cercle et le carré de son rayon par la même procédure, issue de raisonnements pourtant radicalement différents. Cette procédure consiste à effectuer une interpolation sur le triangle arithmétique, en divisant les rangs par deux. La quadrature du cercle se trouve alors au sein du deuxième terme de la troisième ligne, comme le montre la figure ci-dessus.
Afin de mieux comprendre la réception leibnizienne de ces deux raisonnements, il nous faut donc commencer par faire l'analyse des ouvrages de Wallis et de Mengoli. Pour chacun de ces deux auteurs, les tables constituent un outil incontournable. Mais cependant l'approche qu'ils ont du problème impliquent une pratique très différente.
Le travail de Wallis est fondé sur l'induction. Les tables permettent de mettre en évidence des régularités et d'extraire des lois universelles. Pour Mengoli, en revanche, les tables sont d'abord des outils de calculs et en particulier le triangle arithmétique qu'il articule avec les autres tables qu'il construit au fur et à mesure de son raisonnement. Wallis développe par ailleurs une véritable réflexion sur les caractères propres à exprimer ces opérations d'interpolation au sein des progressions, là où Mengoli aborde le sujet sous un angle plus pratique. En effet, il consacre l'essentiel de son ouvrage le *Circolo*[72] à élaborer une méthode efficace pour déterminer les décimales de $\pi$, au moyen des logarithmes. Mais nous ne traiterons pas de cette partie, sur laquelle Leibniz a pourtant laissé un compte-rendu très détaillé (A VII, 6, N.$13_2$).
La démarche de Mengoli est donc plus pratique et plus algorithmique que celle de Wallis. Ce dernier met en avant des questions presque métaphysique sur la nature des progressions et des lois qui lient les quantités entre elles et sur les symboles qu'ont choisis les mathématiciens pour représenter ces relations et ces opérations. De ce point de vue, il n'est pas surprenant de constater que Leibniz fait d'avantge référence et de très loin aux travaux de Wallis sur l'interpolation qu'aux travaux de Mengoli. Si l'on se restreint à sa seule correspondance, on pourrait même croire que Leibniz n'a jamais pris connaissance des travaux du mathématicien italien. Pourtant, sur ce sujet, l'image dont témoignent les manuscrits de Leibniz n'est pas la même que celle dont il fait part directement. Il a en effet consacré de nombreux manuscrits aux travaux de Mengoli sur la quadrature du cercle. On en trouve deux groupes, les premiers de 1676 et les seconds de 1679, ce qui montre que Leibniz est revenu sur ces réflexions bien après sa première réception de l'œuvre.
A la fin des années 1670, Leibniz est convaincu que nombre de ses trouvailles mathématiques, comme le calcul différentiel ou le développement des exposants, permet de traiter une nouvelle classe de courbe hors de portée du système cartésien, à savoir les courbes transcendantes. Le problème se pose alors de trouver un moyen commode pour exprimer les quantités géométriques liées à ces lignes qui échappent même aux caractères introduits pour les irrationnels. Le calcul des séries infinies que propose Newton, fondé sur sa célèbre formule du binôme, constitue alors le principal candidat, mais Leibniz voit justement dans les tables de Mengoli une solution prometteuse pour accomplir ce que la formule de Newton ne parvient pas à faire, à savoir trouver une expression finie, plutôt qu'un développement infini.
Finalement, la pensée leibnizienne s'accorde d'avantage avec l'ouvrage de Wallis que celui de Mengoli, mais sa pratique tabulaire est plus proche de celui-ci que de celui-là. Ainsi Wallis pose les bonnes questions, mais c'est bien Mengoli qui fournit les outils propres à y répondre.

72. [70] P. Mengoli, *Circolo*, Bologne 1672

# Chapitre 6

# L'interpolation de Wallis

## Introduction

John Wallis publie en 1656 un traité majeur qu'il intitule « L'Arithmétiques des Infinis » (« *Arithmetica Infinitorum* »). Ce texte très célèbre obtint un rapide succès dans tous les milieux savants européens puis, lu, étudié et commenté par de nombreux auteurs des siècles qui suivirent, il connut une longue et considérable postérité. Comme nombre des ouvrages de mathématiques qui ont marqué cette période, c'est un texte qui traite de quadratures. Le livre se découpe en deux parties [1] :

> *La première partie est consacrée à la recherche d'un algorithme propre à fournir la quadrature d'une certaine classe de courbes géométriques simples, constituée par généralisation des conditions qui caractérisent une parabole ou une hyperbole ; la deuxième partie vise une extension de cet algortihme propre à fournir la quadrature du cercle. Les termes "algorithme de quadrature" et "quadrature du cercle" ne doivent pas être entendus ici selon leur signification moderne.* [2]

Cette structure souligne déjà l'originalité de l'approche de Wallis. L'aire du cercle est déduite des déterminations des surfaces d'une classe entière de courbes rationnelles, les courbes polynomiales. Il ne s'agit pas de réduire le cercle à la somme de ses parties mais plutôt de trouver un moyen de la placer dans la une classe de courbe dont on a clairement identifié les propriétés. On accède donc à la figure du cercle grâce aux relations qu'il entretient avec d'autres figures connues. Pour représenter ces relations, Wallis utilise les tables.
Notre analyse se concentre sur la manière dont Wallis utilise la tabulation pour extraire des lois universelles à partir d'échantillons particuliers de progressions. L'interpolation, ou l'extrapolation, s'effectue au moyen d'un raisonnement analogique. Pour déterminer un terme à un rang qui est le produit d'une certaine composition des rangs de plusieurs termes connus, il faut appliquer cette même composition aux termes, transmutée par la loi induite. Nous choisissons de qualifier cette approche de combinatoire.

1. *Cf* [78] M. Panza, *A l'origine de la notion de nombre transcendant : John Wallis et la quadrature du cercle* dans *Newton and the origins of analysis 1664-1666*, Paris, 2004 - p.333-367
2. [78] M. Panza, *A l'origine de la notion de nombre transcendant : John Wallis et la quadrature du cercle* dans *Newton and the origins of analysis 1664-1666*, Paris, 2004 - p.333

## 6.1 Arithmétique et Quadrature : une approche combinatoire

L'ouvrage de Wallis ne constitue pas la seule tentative d'aborder le problème millénaire de la quadrature du cercle à cette époque. Après la tentative de Grégoire de Saint-Vincent, extrêmement influente quoique vaine [3], de nombreuses expressions sont découvertes au cours du troisième quart du XVII$^{\text{ème}}$ siècle [4]. Lorsque Leibniz développe sa fameuse quadrature arithmétique durant son séjour parisien, de nombreuses autres approches ont déjà agité la communauté mathématique de l'époque. En plus des apports de Wallis et Mengoli qui obtiennent des produits infinis, il faut également mentionner la formule de Brouncker [5] sous forme d'une fraction continue :

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \ddots}}}}$$

Notons pour finir que l'on trouve déjà chez Viètes l'expression de $\pi$ sous la forme d'un produit infini irrationnel [6] :

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}}}} \times \dots$$

Dans son produit infini, le $n$-ième terme représente le rapport entre les aires d'un polygone à $2^n$ côtés et un polygone à $2^{n+1}$ côtés. La méthode de Viète est donc largement inspirée des techniques archimédiennes de mesure du cercle, qui consistent à considérer le cercle comme le dernier des polygones réguliers, avec un nombre infini de côtés [7]

L'angle très particulier que Wallis a choisi pour s'emparer des problèmes de quadrature est déjà révélé par le titre de son ouvrage :

> *Désormais, la géométrie était passée au second plan, et son travail devenait presque entièrement arithmétique.* [8]

### 6.1.1 Rapports entre arithmétique et géométrie

De fait, décrire fidèlement la nature de l'opération dont Wallis souhaite donner la recette n'est pas chose aisée car le mathématicien britannique fonde sa méthode sur un parallèle subtile entre arithmétique et géométrie. Son approche qui mêle inductions, heuristique et intuitions géométriques rend complexes, pour le lecteur moderne, l'interprétation des processus de calcul qu'il met en place sur les objets de son traités qui sont, *in fine*, des courbes et des surfaces. Cet aspect de l'œuvre, que les commentateurs et Wallis lui-même ont désigné par le mot « arithmétique » car relevant de relations entre les nombres, nous allons montré qu'il s'agit bien de combinatoire, au sens où nous l'avons décrite dans les premiers travaux de Leibniz. En effet, les travaux de Wallis y traitent au final moins de relations entre nombres que de relations entre progressions numériques.

3. [20] G. de Saint-Vincent, *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni decem libris comprehensum*, Anvers, 1647

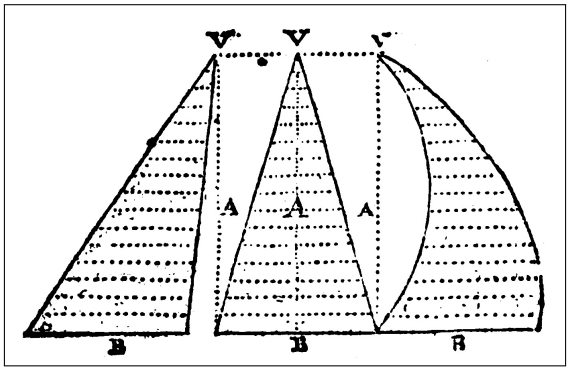
4. Sur ce sujet, *Cf* [17] D. Crippa, *The Impossibility of Squaring the Circle in the 17th Century : A Debate Among Gregory, Huygens and Leibniz*, Birkhäuser Springer, Suisse, 2019 ou encore [73] J. E. Montucla, *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle*, Paris, 1831

5. Elle nous est parvenue grâce à Wallis qui la rapporte dans [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656, Proposition 191, p.182.

6. *Cf* [109] F. Viète, *Vietæ Opera Mathematica*, *éd.* F. Van Schooten, Lyon, 1646 - p.400

7. Cette idée qui consiste à considérer le cercle comme la limite incluse entre une suite infinie de polygones circonscrits et de polygones inscrits dont on double à chaque étape le nombre de côté est également présente chez Gregory, *Cf* [30] J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolæ quadratura*, Padoue, 1668. Il note notamment que si les deux côtes des deux premiers polygones sont $a$ et $b$, alors ceux des deux suivants seront $\sqrt{ab}$ et $\frac{2ab}{a+\sqrt{ab}}$. Leibniz consacre à cette relation une longue série de travaux vers la fin des années 1670, dont l'analyse compléterait utilement notre travail, car la notion d'exposant y est centrale.

8. [114] J. Stedall, *Introduction : The Arithmetic of Infinitesimals* dans J. Wallis, *The Arithmetic of Infinitesimals*, *tr.* J. Stedall, Springer, New York, 2004 - Introduction de J. Stedall p.xviii : « By now geometry was receding into the background, and his work became almost entirely arithmetical. »




J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum* - p.3

A première vue, en découpant l'aire en une infinité d'éléments parallèles, il semble que Wallis suive une voie analytique quant aux problèmes de quadratures, au sens où il s'agit de découper l'aire en éléments plus petits suivant le principe que le tout est la somme de ses parties. Cette manière de résoudre les problèmes de quadratures, inspirée des travaux d'Archimède sur la parabole, représente un aspect majeur de la méthode des indivisibles introduite par Cavalieri. L'approche de Grégoire de Saint-Vincent repose par ailleurs largement sur ce principe, appliqué aux solides [9]. Wallis est parfaitement conscient de l'héritage d'Archimède :

> *Et certes, de cette manière, il possible de rendre égales une infinité de figures curvilignes à des rectilignes. Archimède (et d'autres après lui) l'avait aussi établi pour la seule parabole (avec une grande admiration). Nous l'avons désormais montré pour les paraboloïdes d'une puissance quelconque.* [10]

Mais, cette approche analytique doit en principe mettre le géomètre qui l'emploie face à un choix : ou bien, à l'image d'Archimède, considérer l'infiniment petit comme un infini potentiel, ce qui requiert alors une réduction à l'absurde [11], ou bien alors, admettre cet infini comme actuel ce qui pose alors le problème majeur de la théorie de Cavalieri : quel statut donner à ces indivisibles qui tous ne mesurent rien, mais qui pourtant comptent chacun différemment dans le calcul de l'aire ou du volume. Sur cette question classique et largement commentée, il semble que Wallis ne se prononce pas :

> *Quand Wallis a traité des indivisibles dans ces travaux précoces, il a presque toujours laissé l'espace aux deux interprétations − ou bien les indivisibles conçus comme des éléments hétérogènes ou bien comme des parties homogènes infinitésimales. Les calculs et les arguments mathématiques ne permettent généralement pas au lecteur de déterminer laquelle de ces interprétations a été utilisée.* [12]

En laissant cette question des indivisibles en suspens, que ce soit volontairement ou par négligence, Wallis s'affranchit des problèmes géométriques considérables que posent les indivisibles. De fait, dans son *Arithmetica Infinitorum*, Wallis ne calcul pas directement sur des courbes ou des figures, mais d'abord sur des progressions.

9. *Cf* [75] C. Naux, *L'Opus geometricum de Grégoire de Saint-Vincent* dans *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, Tome 15, N.2, 1962

10. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 45, p.36 : « Et hoc quidem pacto livebit infinitis figuris curvilineis æquales rectilineas constituere. Quodque in sola Parabola (summa cum admiratione) præstitit Archimedes (& post illum alii) id nos in Paraboloide cujuscunque potestatis jam præstitimus. »

11. *Cf* [1] Archimède, *De la quadrature de la parabole*, *trad.* F. Peyrard, Paris, 1807 - Archimède explique son heuristique dans *La Méthode*, où il dit avoir trouver le résultat par la méthode dite des pesées, très proche de l'approche de Cavalieri, *Cf* [5], M. Bathier-Fauvet, *La Méthode des Pesées chez Archimède* dans *Mnémosyne*, N.14, IREM de Paris, Paris, 1998 - p.273-294.

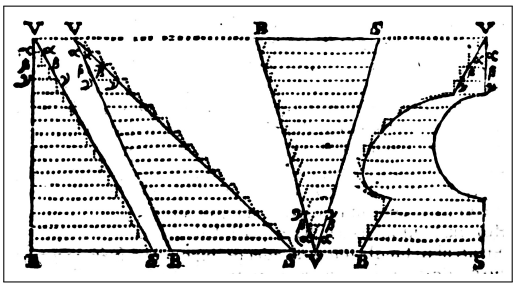
12. [58] A. Malet et M. Panza, *Wallis on Indivisibles*, dans *Seventeenth-Century Indivisibles Revised*, *éd.* V. Jullien, Bikhäuser-Springer, p.307-346, 2015 - p.31 : « When Wallis handled indivisibles in those early works, he almost always made room for both interpretations − indivisibles conceived either as heterogeneous elements or as infinitesimal homogeneous parts. The mathematical computations and arguments usually do not allow the reader to discriminate which interpretation was being used. »

**L'indice d'une progression**

La première partie de l'ouvrage s'attache donc à déterminer le rapport qu'il y a entre la somme des termes d'une progression et le nombre de termes multiplié par le plus grand des termes. L'objectif de Wallis, cependant, retrouve son lieu au sein de la géométrie, puisqu'il s'agit bien d'établir une quadrature. En termes modernes, on exprimerait l'objectif de Wallis par un calcul d'intégrale :

$$\int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}$$

Il s'agit donc de déterminer la quadrature d'un paraboloïde quelconque. Mais, comme nous l'avons dit, Wallis n'emprunte pas la voie problématique des indivisibles de Cavalieri. En fait, il s'agit pour lui, en quelques sortes, d'associer à une famille d'indivisibles une progression numérique qui détermine parfaitement la progression de ces indivisibles. Mais cette association n'est pas bijective. D'abord, les mêmes indivisibles peuvent composer plusieurs figures différentes, ce qui est au fondement de la méthode de Cavalieri pour montrer que de deux figures ont même aire :



J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum* - p.154

Mais Wallis va plus loin. Deux familles distinctes d'indivisibles peuvent être associée à la même progression numérique. Par exemple, si pour une famille de disques, les rayons sont en progression arithmétique, alors les aires de ces disques seront en progression quadratique. Ainsi le cône formé par ces disque et la parabole formée par des lignes en progression quadratique, sont deux figures représentées par une seule et même progression, la progression quadratique. Dès lors, le résultat général de quadrature est exprimé de cette manière :

> *Si l'on considère une série infinie de quantités, initiée par un certain point ou encore de* 0*, et continument croissante selon une raison quelconque, c'est-à-dire une puissance simple ou bien composée de simples, alors le rapport entre toutes ces quantités et la série ayant autant de termes et tous égaux au terme maximal de la première, ce rapport sera égal à celui entre l'unité et l'indice de la puissance, augmenté d'une unité.* [13]

L'égalité que Wallis établit dans cette proposition 64, ne peut pas vraiment se représenter par une équation moderne, à moins de représenter par le symbole $\infty$, auquel Wallis a parfois recours, la limite actuelle de la progression arithmétique naturelle. En effet, le terme maximal dont parle Wallis n'est autre que le terme ultime de cette série infinie :

$$\frac{1^a + 2^a + 3^a + 4^a + \cdots + \infty^a}{\infty^a + \infty^a + \infty^a + \infty^a + \cdots + \infty^a} = \frac{1}{1+a}$$

Les quantités impliquées dans le calcul ne sont pas nécessairement les expressions de rapports géométriques au sein des figures, mais peuvent être simplement considérés comme de purs objets arithmétiques. C'est d'ailleurs à partir de cette proposition 64 qu'on assiste à un brusque changement de vocabulaire : le degré $a$ est appelé désormais nommé « indice de la puissance » (« *index potestatis* »), puis simplement « indice » (« *index* ») là où Wallis parlait jusqu'ici de « puissances » (« *potestates* »). Ainsi, l'indice devient

13. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 64, p.52 : « Si intelligatur series infinita quantitatum, a puncto seu 0 inchoatarum, & continue crescentium pro ratione cujuscunq ; potestatis, sive simplicis sive ex simplicibus compositæ ; erit totius ratio, ad seriem totidem maximæ æqualium, ea quæ est Unitatis ad Indicem istius potestatis unitate auctum. »

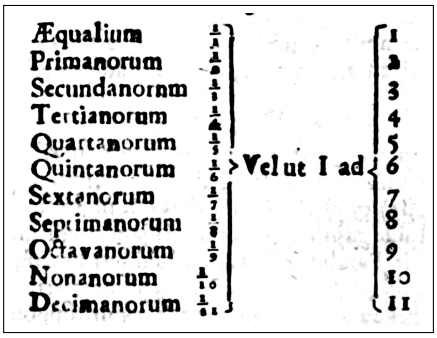
l'expression algébrique formalisée représentant une puissance plus concrète et quantitative. Ce choix de vocabulaire n'est pas anodin. Il révèle chez Wallis une approche formelle qui, en se détachant de son objet d'étude, permet d'établir des lois générales. Wallis rompt avec l'approche algébrique cartésienne. La progression représente une loi d'évolution générale et l'indice permet de caractériser cette loi.

### 6.1.2 Les règles émergeant des tables

Wallis reporte ses résultats dans des tables et dans des listes, sur lesquelles il applique des manipulations, que nous qualifions donc de combinatoires. Cette technique est absolument centrale dans l'*Arithmetica Infinitorum*.

#### Série de séries

Pour les indices entiers, c'est-à-dire les progressions liées aux lois de puissance $x^n$, Wallis résume les différents résultats dans des tables. Ainsi il relie entre elles les différentes progressions :




J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum* - p.35

| | | | |
|---|---|---|---|
| Des Egaux | $\frac{1}{1}$ | | 1 |
| Des Premiers Rangs | $\frac{1}{2}$ | | 2 |
| Des Seconds Rangs | $\frac{1}{3}$ | | 3 |
| Des Troisièmes Rangs | $\frac{1}{4}$ | | 4 |
| Des Quatrièmes Rangs | $\frac{1}{5}$ | | 5 |
| Des Cinqièmes Rangs | $\frac{1}{6}$ | ou bien 1 sur | 6 |
| Des Sixièmes Rangs | $\frac{1}{7}$ | | 7 |
| Des Septièmes Rangs | $\frac{1}{8}$ | | 8 |
| Des Huitièmes Rangs | $\frac{1}{9}$ | | 9 |
| Des Neuvièmes Rangs | $\frac{1}{10}$ | | 10 |
| Des Dixièmes Rangs | $\frac{1}{11}$ | | 11 |

Cette table répertorie toutes les sommes de progressions pour les indices entiers (encore nommés « puissances » à ce stade). On note à nouveau le vocabulaire employé pour désigner les séries : « premiers rangs » (« *primani* »), « seconds rangs » (« *secundani* »), « troisièmes rangs » (« *tertiani* »), etc. A l'origine, il s'agit d'un usage militaire pour désigner les rangs des soldats. Les progressions sont donc ici elles-mêmes en progression.
Au travers des rapports associés, on constate que cette série de séries suit une progression harmonique. Le schéma exprimer très clairement le rapport entre cette dernière la progression arithmétique :

$$(\tfrac{1}{n}) = \frac{1}{(n)}$$

Ainsi, il devient possible de déterminer le rapport associé à une série quelconque, à partir des rapports associés à d'autres séries :

> *De même (par la proposition 44), étant donner un rapport associé à une série d'une quelconque puissance (vis-à-vis de la série des égaux), on retrouve le rapport associé à une autre série d'une autre puissance quelconque (toujours vis-à-vis de la série des égaux), en déterminant de fait le terme correspondant d'une progression arithmétique.* [14]

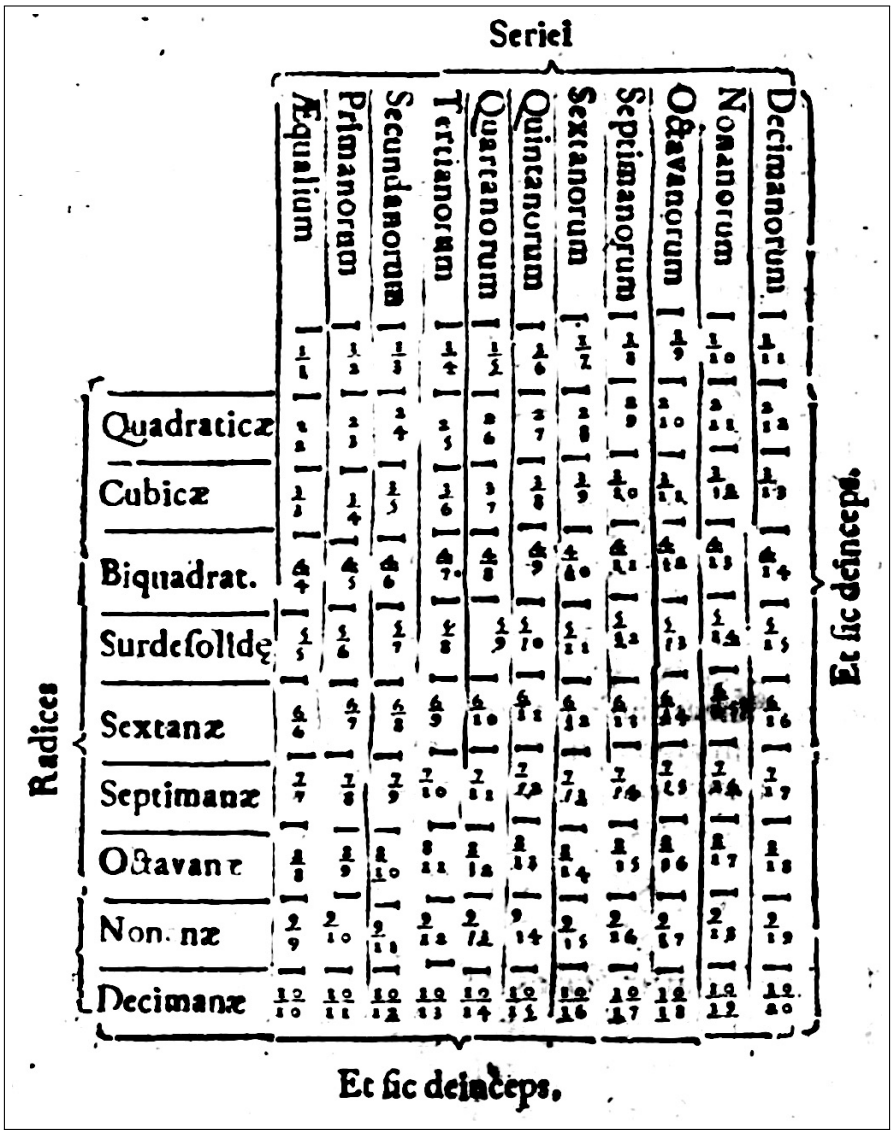
La table devient alors un outil de calcul, mais pas seulement. En exhibant des relations entre les différents rapports, chacun calculés séparément, la table fait émerger une régularité globale d'un ordre supérieur. La loi de la table n'est pas une astuce de calcul pour gagner du temps, elle prévaut sur les règles et les calculs qui ont permis de remplir les premiers termes. Mais surtout, cette loi ne s'applique pas de façon algébrique en générant le terme à partir de son rang, mais de façon tabulaire, en considérant les éléments de la progression comme issus de la composition des autres termes. Dans notre équation, $n$ désigne une progression arithmétique auxiliaire propre à déterminer les relations entre plusieurs termes

14. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 46, p.38 : « Item (per prop. 44) Data ratione quam habet series una, cujuslibet potestatis, (ad seriem æqualium) reperitur ratio quam habet alia series alterius cujusvis potestatis, (ad seriem item æqualium) inveniendo nempe homologum terminum progressionis Arithmeticæ. »

de la progressions harmonique. Il ne s'agit pas du rang du terme dans la progression. Même si au final cela revient effectivement au même, dans la première conception, on détermine une formule $a_n = f(n)$ alors que dans la seconde on établit une relation diagrammatique au moyen d'une table. Là se trouve l'aspect combinatoire de l'*Arithmetica Infinitorum*.

**Combinaisons d'indices**

Il donne également la table générale des quadratures des paraboloïdes :




J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum* - p.48

En effet, une fois que la règle de la première table est établie, Wallis la prolonge à d'autres progressions, qui se refusaient aux premiers calculs :

> *Une fois compris ces choses, ceci ouvre la voie sur l'étude des rapports (avec la série des quantités égales à la plus grande) que peuvent avoir, dirait-on, le même genre de séries, de racines carrées, cubiques, bicarrées, des nombres ou de quantités en proportions arithmétiques, qui commencent par un point, ou bien* 0 *(par exemple* $\sqrt{0}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ *etc.* $\sqrt[3]{0}$, $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$ *etc.* $\sqrt[4]{0}$, $\sqrt[4]{1}$, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[4]{3}$, *etc). C'est ce que j'appelle les séries des sous-seconds rangs, des sous-troisièmes rangs, des sous-quatrièmes rangs etc.* [15]

15. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 53, p.42-43 : « His intellectis ; patet aditus ad investigationem rationum quas (ad seriem maximæ æqualium) habere dicantur ejusmodi series Radicum Quadraticarum, Cubicarum, Biquadraticarum, &c. numerorum sive quantitatum arithmetice-proportionalium, a puncto vel 0 inchoatarum (puta $\sqrt{0}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, &c. $\sqrt{c0}$, $\sqrt{c1}$, $\sqrt{c2}$, $\sqrt{c3}$, &c. $\sqrt{qq0}$, $\sqrt{qq1}$, $\sqrt{qq2}$, $\sqrt{qq3}$, &c.). Quas appello series Subsecundanorum, Subtertianorum, Subquartanorum, &c. »

Comme la racine carré est le moyen terme géométrique entre la constante et la racine, le rapport cherché est déterminé par la moyenne arithmétique entre le rapport de la constante et celui de la série des racines (ou des premiers rangs) :

> *Par exemple, si l'on se donne de la même manière une infinité de carrés qui sont arithmétiquement proportionnels, ou encore qui suivent la série des premiers rangs à qui l'on a associé dans la table le rapport de* 1 *à* 2*. Alors, le rapport correspondant à leurs côtés (c'est-à-dire à la série des sous-seconds rangs) est de* 1 *à* $1 + \frac{1}{2}$ *(ou encore* 2 *à* 3*) puisque* 1, $1 + \frac{1}{2}$, 2 *sont arithmétiquement proportionnels.* [16]

C'est en combinant les résultats obtenus sur les puissances entières que Wallis résout les cas des puissances fractionnaires. Se joue ici le rapport étroit qui lie l'interpolation à la méthode combinatoire. En combinant deux termes consécutifs, selon la règle émergeant de la table, on peut ajouter un nouveau terme, interposé entre les deux précédents. D'une combinaison naissent de nouveaux résultats, et ce au moyen d'un raisonnement synthétique. Cette combinatoire tabulaire sera au cœur de la solution proposée par Wallis pour la quadrature du cercle, objet de la seconde partie de l'ouvrage.
Dans la proposition 64 que nous avons déjà citée, Wallis évoque même les exposants irrationnels :

> *Si l'indice est supposé irrationnel, comme par exemple* $\sqrt{3}$*, alors le rapport sera comme celui de* 1 *à* $1 + \sqrt{3}$. [17]

Cette mention est régulièrement citée comme l'une des premières occurrences d'un exposant irrationnel associé à la puissance d'une quantité, où ce qu'on appelait également alors sa dignité. Cette généralisation est intéressante, puisqu'elle relativise l'idée que nous portons, à savoir que la loi n'est pas appliquée aux termes par simple substitution de la variable par le rang, mais plutôt par la composition tabulaire des termes de la progression. Or, ici, il semble bien que Wallis propose une procédure de substitution algébrique. Ces procédures de substitutions seront à nouveau employées dans la seconde partie qui concerne l'interpolation. Néanmoins, cet exposant irrationnel semble servir à illustrer la généralité de la proposition 64 sans porter à réelles conséquences„ puisque de tels exposants ne sont évoqués nulle part ailleurs.

16. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 53, p.43 : « Exsempli gratia. Si exponantur ejusmodi infinita quadrati Arithmetice proportionalia, sive juxta seriem Primanorum quibus in Tabella assignatur ratio 1 ad 2 : Eorum Lateribus (hoc est, seriei subsecundanorum) conveniet ratio 1 ad $1\frac{1}{2}$ (sive 2 ad 3) quia 1, $1\frac{1}{2}$, 2, sunt Arithmetice proportionalia »

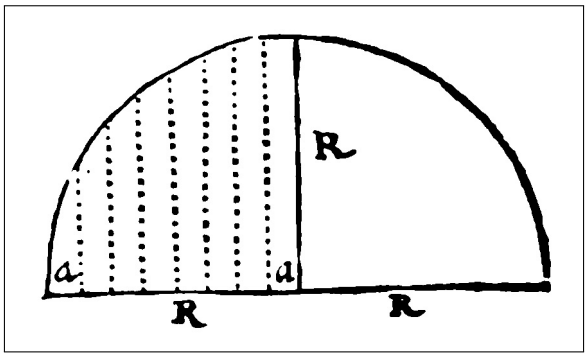
17. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 64, p.53 : « Sin Index supponatur irrationalis, puta $\sqrt{3}$ ; erit ratio, ut 1 ad $1 + \sqrt{3}$ »

## 6.2 Construction des tables : le rôle de l'induction

### 6.2.1 Formules sur les sinus généralisées

#### L'aire du demi-cercle et sa généralisation

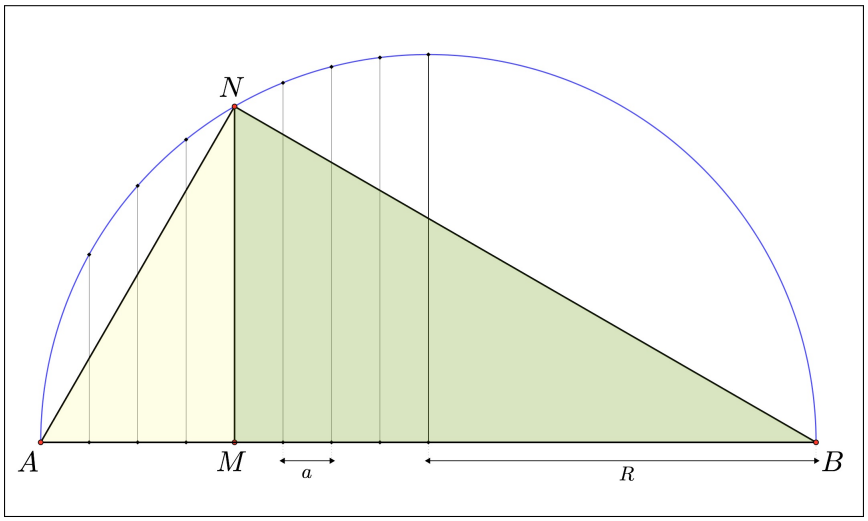
Dans cette deuxième partie, le point de départ de Wallis reste purement géométrique, fondé sur un découpage archimèdien :




J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum* - p.92

Il s'agit donc de faire la somme de chaque segment vertical, c'est-à-dire les sinus des arcs :

> *En effet, soit R le rayon du cercle (dont la partie infiniment petite est* $\frac{R}{\infty} = a$*), et les perpendiculaires qui y sont posées, c'est-à-dire les sinus droits, au nombre de l'infini et remplissant le quart du cercle. Ces perpendiculaires seront les moyennes proportionnelles entre les segments du diamètre (comme il est bien connu).* [18]




Comme les triangles $ANM$, $MNB$ sont semblables, on a :

$$\frac{AM}{MN} = \frac{MN}{MB}$$

Ainsi, la hauteur cherchée du segment $MN$ est :

$$MN = \sqrt{AM.MB}$$

Or $AM = R - k.a$ et $MB = R + k.a$ avec $k$ le nombre de subdivisions $a$ comprises entre le point courant $M$ et le centre du cercle. Ainsi Wallis obtient la progression suivante :

$$\sqrt{R^2 - (0.a)^2}\ ;\ \sqrt{R^2 - (1.a)^2}\ ;\ \sqrt{R^2 - (2.a)^2}\ ;\ \sqrt{R^2 - (3.a)^2}\ ;\ \sqrt{R^2 - (4.a)^2}\ ;\ \sqrt{R^2 - (5.a)^2}\ ;\ \ldots$$

18. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 121, p.92 : « Nam si circuli Radius ponatur $R$, (cujus Pars infinite parva $\frac{R}{\infty} = a$) eique insistant Perpendiculaires sive sinus recti numero infinit quandrantem circuli complentes ; erunt illæ perpendiculares mediæ proportionales inter Diametri Segmenta, (ut notum est) »

La présence de racine dans l'expression empêche Wallis de se rapporter aux précédents résultats par simple développement polynomial. Pour résoudre ce problème, il lui faut adopter une démarche analogue à celle qu'il a employée dans la première partie : d'abord trouver les solutions des expressions rationnelles, afin de déterminer une loi générale grâce aux tables, puis ensuite, par l'interpolation, déterminer la solution des expressions irrationnelles par la combinaison des solutions rationnelles.
Comme Wallis cherche la somme de la progression suivante :

$$\sqrt{R^2 - (k.a)^2} = (R^2 - (k.a)^2)^{\frac{1}{2}}$$

Ainsi, il cherche d'abord les sommes des progressions du type suivant, pour les premières valeurs entières de $p$ et de $q$.

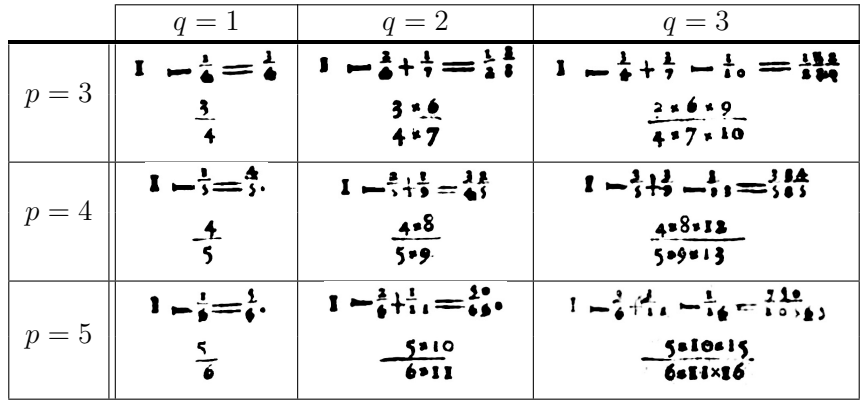
$$(R^p - (k.a)^p)^q$$

En termes modernes, Wallis cherche donc ici les intégrales suivantes, pour $p$ et $q$ entiers :

$$\int_0^1 (1 - x^p)^q dx$$

Pour ces expressions, la solution est simple : il suffit de développer le binôme pour se ramener à des puissances simples, dont les sommes sont connues grâce à la première partie de l'œuvre. Ici, Wallis n'explicite pas sa méthode. Il semble que la règle soit trouvé de façon empirique, sur les premières valeurs de $p$ et de $q$ :

| | $q = 1$ | $q = 2$ | $q = 3$ |
|---|---|---|---|
| $p = 3$ | $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$<br>$\frac{3}{4}$ | $1 - \frac{2}{4} + \frac{1}{7} = \frac{18}{28}$<br>$\frac{3 \times 6}{4 \times 7}$ | $1 - \frac{3}{4} + \frac{3}{7} - \frac{1}{10} = \frac{108}{280}$<br>$\frac{3 \times 6 \times 9}{4 \times 7 \times 10}$ |
| $p = 4$ | $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$<br>$\frac{4}{5}$ | $1 - \frac{2}{5} + \frac{1}{9} = \frac{32}{45}$<br>$\frac{4 \times 8}{5 \times 9}$ | $1 - \frac{3}{5} + \frac{3}{9} - \frac{1}{13} = \frac{384}{585}$<br>$\frac{4 \times 8 \times 12}{5 \times 9 \times 13}$ |
| $p = 5$ | $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$<br>$\frac{5}{6}$ | $1 - \frac{2}{6} + \frac{1}{11} = \frac{50}{66}$<br>$\frac{5 \times 10}{6 \times 11}$ | $1 - \frac{3}{6} + \frac{3}{11} - \frac{1}{16} = \frac{750}{1056}$<br>$\frac{5 \times 10 \times 15}{6 \times 11 \times 16}$ |



Il opère donc d'abord le développement classique du binôme pour obtenir une somme de fractions :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-x^p)^q dx &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} (-1)^k x^{kp}\right) dx \\ &= \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} (-1)^k \left(\int_0^1 x^{kp} dx\right) \\ &= \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} (-1)^k \frac{1}{kp+1}\end{aligned}$$

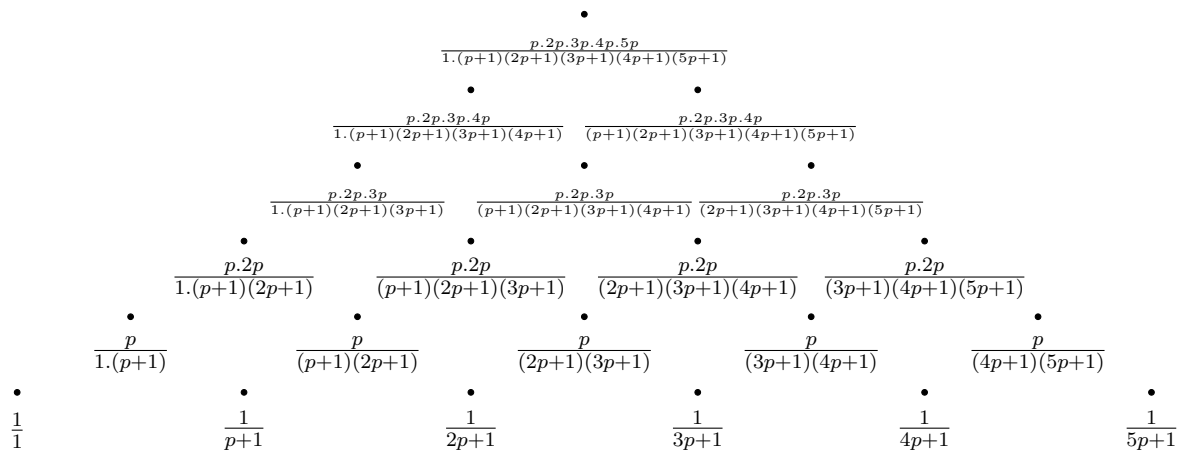
Puis, en regroupant les fractions au même dénominateur, Wallis obtient par induction le résultat suivant :

$$\int_0^1 (1-x^p)^q dx = \frac{p \times 2p \times \cdots \times qp}{(p+1) \times (2p+1) \times \cdots \times (qp+1)}$$

Résultat qu'il établit également dans une table.

**Preuve combinatoire du résultat**

Notons par ailleurs que ce résultat se démontre également par la voie de la combinatoire tabulaire, et plus précisément par la méthode des triangles de différences qu'établira Leibniz une vingtaine d'années plus tard. De fait, la puissance $q$-ième du binôme $(1-x^p)$ correspond à la formule de différence d'ordre $q$ des puissances $p$-ièmes. Par linéarité de l'intégrale, cette relation se maintient entre les quadratures. Or les quadratures des puissances $p$-ièmes forment une progression harmonique. Ainsi, la quadrature cherchée est la différences $q$-ième de cette progression harmonique. Pour le mettre en lumière, nous reproduisons le schéma de différence pour $q = 5$ :




Ainsi le résultat peut s'obtenir par récurrence. Supposons que pour un certain $q$ donné, on a la formule suivante pour $n$ et $p$ quelconques :

$$\sum_{k=n}^{q+n} \binom{q}{k-n} (-1)^{k-n} \frac{1}{kp+1} = \frac{p \times 2p \times \cdots \times qp}{(np+1).((n+1)p+1) \times \cdots \times ((q+n)p+1)}$$

Cette formule est trivialement vraie lorsque $q = 0$. Reste alors à montrer l'hérédité qui va se traduire naturellement par une différence de deux termes au rang $q$ pour obtenir le rang $q+1$ :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{q+1+n} \binom{q+1}{k-n} (-1)^{k-n} \frac{1}{kp+1} &= \sum_{k=n}^{q+1+n} \binom{q}{k-n} (-1)^{k-n} \frac{1}{kp+1} + \sum_{k=n}^{q+1+n} \binom{q}{k-n-1} (-1)^{k-n} \frac{1}{kp+1} \\ &= \sum_{k=n}^{q+n} \binom{q}{k-n} (-1)^{k-n} \frac{1}{kp+1} - \sum_{k=n+1}^{q+n+1} \binom{q}{k-(n+1)} (-1)^{k-(n+1)} \frac{1}{kp+1}\end{aligned}$$

Ainsi par hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned}
&= \frac{p.2p\dots qp}{(np+1).((n+1)p+1)\dots((q+n)p+1)} - \frac{p.2p\dots qp}{((n+1)p+1).((n+2)p+1)\dots((q+n+1)p+1)} \\
&= \frac{p.2p\dots qp}{((n+1)p+1).((n+2)p+1)\dots((q+n)p+1)} \times \left(\frac{1}{np+1} - \frac{1}{(q+n+1)p+1}\right) \\
&= \frac{p.2p\dots qp}{((n+1)p+1).((n+2)p+1)\dots((q+n)p+1)} \times \frac{(q+1)p}{(np+1)((q+n+1)p+1)} \\
&= \frac{p.2p\dots(q+1)p}{(np+1).((n+1)p+1)\dots((q+1+n)p+1)}
\end{aligned}$$

La formule de Wallis correspond alors au cas où $n = 0$. Rappelons pour finir cette paranthèse qu'en 1650, soit environ la même époque, Mengoli avait démontré un résultat similaire dans ses *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ*. En fait, il s'agissait du résultat inverse, à savoir que le rang $q-1$ constitue la somme des termes de rang $q$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(np+a)\dots((n+q)p+a)} = \frac{1}{qp} \times \frac{1}{a.(p+a).(2p+a)\dots((q-1)p+a)}$$

### 6.2.2 La triangle arithmétique

#### L'apparition inattendue nombres figurés

Il pourrait sembler que Wallis soit parvenu, à ce stade, à l'étape de l'interpolation. En effet, il a obtenu la table de formules qu'il souhaitait pour tous les $p$ et les $q$ entiers. Etant donné qu'il cherche la solution pour $p = 2$ et $q = \frac{1}{2}$, il lui faut donc désormais trouver le terme moyen entre $q = 0$ et $q = 1$.
Mais la difficulté se trouve ici dans la loi qui émerge de la table. Comme nous l'avons vu, la table obtenue par Wallis suit la règle suivante :

$$T_{p,q} = \frac{p.2p\dots qp}{(p+1).(2p+1)\dots(qp+1)} = \underbrace{\frac{p}{p+1}.\frac{2p}{2p+1}\dots\frac{qp}{qp+1}}_{q \text{ facteurs}}.$$

Comment faire sens d'une moyenne dans ce cas précis ?[19] Si ce n'est pas possible pour $q$ qui doit ici désigner un nombre entier, c'est en revanche très facile de généraliser la formule pour $p$ :

> *Et cela vaut encore si la série qu'on ôte est la série des racines. Par exemple, si l'on ôte à la série des égaux la série des sous-seconds rangs, dont l'indice est $\frac{1}{2}$. En effet, si on pose $a = \frac{1}{2}$, alors on aura : $\frac{a+1}{a} = 3$. Et $\frac{a+1}{a} \times \frac{2a+1}{2a} = 3 \times 2 = 6$. Et $\frac{a+1}{a} \times \frac{2a+1}{2a} \times \frac{3a+1}{3a} = 3 \times 2 \times \left(1 + \frac{2}{3}\right) = 10$ etc. Et même ainsi, pour les différences de ce type, les restes, les carrés, les cubes etc. sont vis-à-vis de la série des termes égaux au terme maximal comme* 1 *par rapport à* 3, 6, 10 *etc.*[20]

Ici, Wallis ne prend pas le temps de caractériser la loi que suit $p$ et se contente d'appliquer un raisonnement purement formel : il suffit de remplacer $p$ par la fraction de notre choix. Wallis emprunte certainement ce raccourci en vertu du cheminement qu'il a déjà décrit dans la première partie. Cela étant, en opérant ce changement, on voit spontanément apparaitre les nombres combinatoires, ce que Wallis ne manque pas de noter :

> *Et ici, nous sommes parvenus à l'apparition inattendue des nombres figurés (comme on a l'habitude de les nommer).*[21]

19. Nous verrons plus tard que Leibniz tentera de donner quelques réponses surprenantes à cette question, en étudiant le concept de progression pronique

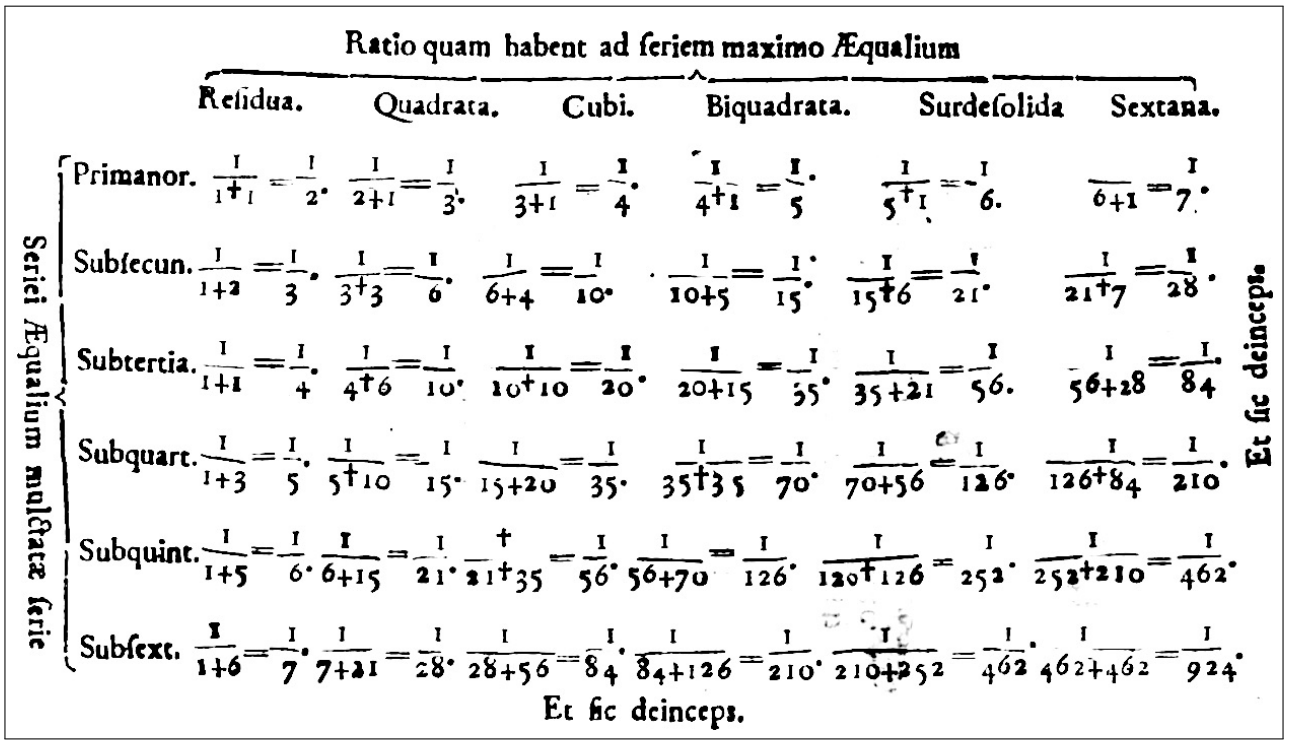
20. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 126, p.98 : « Atque, hoc idem valebit si ablata series sit series Radicum. Verbi gratia. Si a serie Æ qualium auferatur series subsecundanorum cujus index $\frac{1}{2}$. Nam si ponatur $a = \frac{1}{2}$. Erit $\frac{a+1}{a} = 3$. Et $\frac{a+1}{a} \times \frac{2a+1}{2a} = 3 \times 2 = 6$. Et $\frac{a+1}{a} \times \frac{2a+1}{2a} \times \frac{3a+1}{3a} = 3 \times 2 \times 1\frac{2}{3} = 10$ &c. Sunt autem, in ejusmodi ablationibus, Residua, Quadrata, Cubi, &c. ad seriem maximo æqualium ; ut 1 ad 3. 6. 10. &c »

21. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 131, p.104 : « Atque hic obiter incidimus in numerorum figuratorum (ut dici solent) speculationem insperatam. »

Cette « apparition inattendue » (« *speculatio insperata* ») des nombres combinatoires est donc décrite par Wallis comme un fait contingent, une heureuse coïncidence. De fait, si on remplace $p$ par $\frac{1}{p}$ dans l'expression donnée par la table, on voit apparaître de façon surprenante les nombres combinatoires :

$$\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q dx = \frac{\frac{1}{p}\times\frac{2}{p}\times\cdots\times\frac{q}{p}}{\left(\frac{1}{p}+1\right)\times\left(\frac{2}{p}+1\right)\times\cdots\times\left(\frac{q}{p}+1\right)} = \frac{1.2\ldots q}{(p+1)(p+2)\ldots(p+q)} = \frac{1}{\binom{p+q}{q}} = \frac{1}{\left(\!\binom{p+1}{q}\!\right)}$$

Là encore, il semble que sa démarche soit empirique, déduite des première valeurs pour $p$ et $q$. Un autre aspect qui trahit son raisonnement inductif se trouve dans la forme que Wallis donne aux nombres combinatoires :




J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum* - p.103

Il les décompose systématiquement en sommes de nombres combinatoires ayant un degré de moins, associant ainsi la propriété des ordres numériques aux nombres figurés :

> *En effet, tous les nombres qu'on forme à partir de ce type d'addition (aussi bien dans cette table que dans les suivantes) sont figurés : par exemple les nombres latéraux, triangulaires, pyramidaux etc. Comme cela est évident pour n'importe qui, il suffit de l'avoir signalé.* [22]

Le changement de variables formel que nous avons effectué donne directement les nombres combinatoires sous la forme d'un produit de fractions, alors que Wallis consacre de nombreux et longs développements pour y parvenir. Pourtant, le remplacement formel ne constitue pas un obstacle pour Wallis, comme nous l'avons déjà montré. Nous reviendrons plus tard sur cet aspect.

### Bordures de la table

En inversant les rapports, Wallis retrouve la table du triangle de Pascal. Cependant, que dire des cas $p = 0$ et $q = 0$ ? Le cas $q = 0$ n'est pas problématique : il s'agit du cas des égaux. Il correspond donc à la

22. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 131, p.104 : « Sunt enim numeri omnes (tam hujus quam sequentis Tabellæ) hujusmodi additione facti, figurati ; puta Laterales, Triangulares, Pyramidales, &c. Quod cum sit cuivis obvium, monuisse sufficiat. »

ligne colonne constante égale à 1. En revanche, si $p = 0$, on obtiendrait une "racine 0-ième", c'est-à-dire une puissance infinie :

$$\sqrt[0]{x} = x^{\frac{1}{0}} = x^{\infty}$$

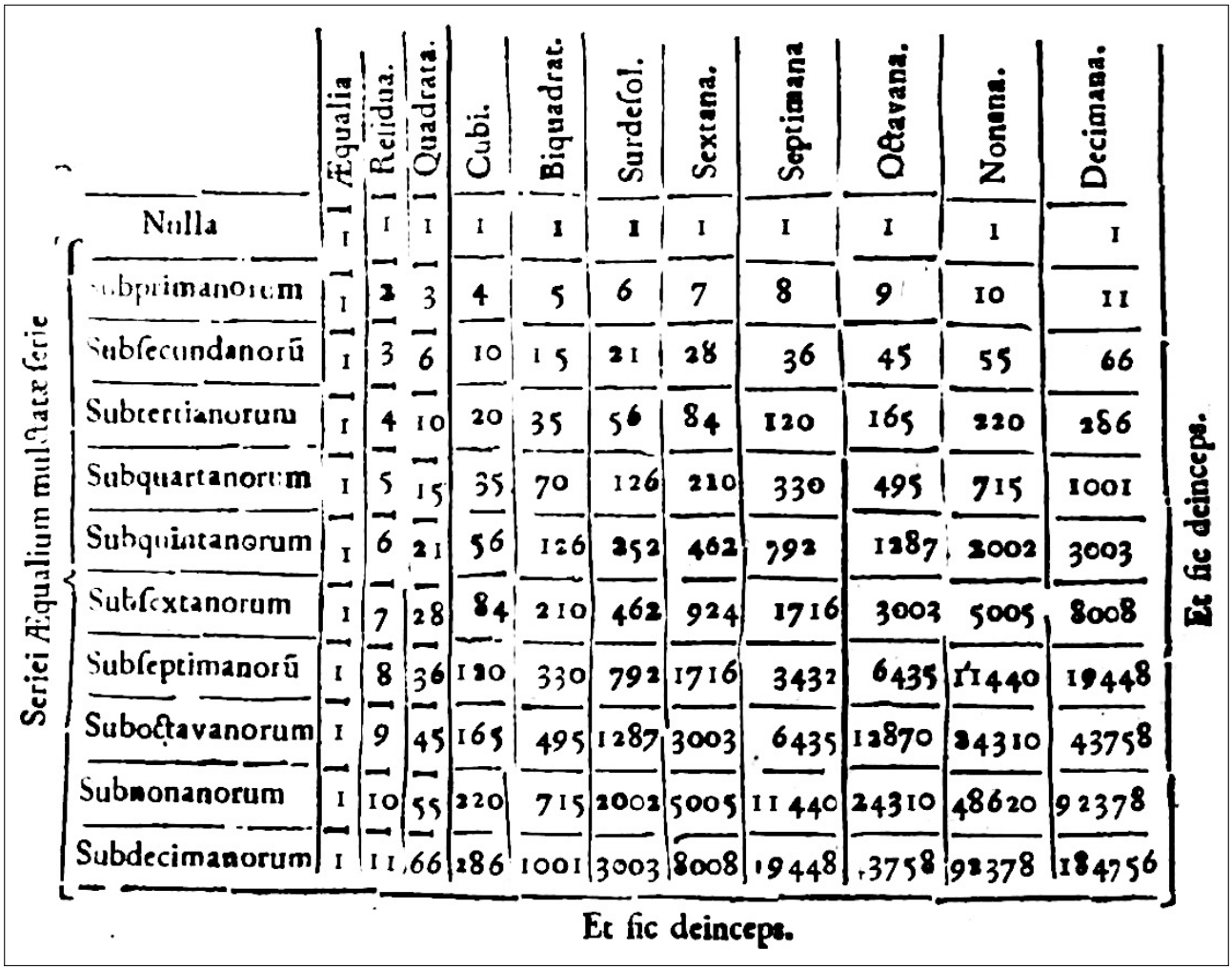
Comme $x < 1$, on peut considérer que $x^{\infty} = 0$ :

$$\sqrt[0]{x} = \lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)}} = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$$

Et donc, pour tout indice $q$, on obtient bien :

$$\int_0^1 (1 - x^{\frac{1}{0}})^q dx = 1$$

Wallis ne donne aucun détail, et rajoute sans justification la colonne $q = 0$ qu'il désigne par « Les Egaux » (« *Æqualia* ») et la ligne $p = 0$ désignée par « Les Nuls » (« *Nulla* ») :



| Seriei Æqualium multiplicatæ ſerie | Æqualia | Reſidua. | Quadrata. | Cubi. | Biquadrat. | Surdeſol. | Sextana. | Septimana | Octavana. | Nonana. | Decimana. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nulla | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| Subprimanorum | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | |
| Subſecundanorũ | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 | 66 | |
| Subtertianorum | 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 84 | 120 | 165 | 220 | 286 | |
| Subquartanorum | 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 126 | 210 | 330 | 495 | 715 | 1001 | |
| Subquintanorum | 1 | 6 | 21 | 56 | 126 | 252 | 462 | 792 | 1287 | 2002 | 3003 | |
| Subſextanorum | 1 | 7 | 28 | 84 | 210 | 462 | 924 | 1716 | 3003 | 5005 | 8008 | |
| Subſeptimanorũ | 1 | 8 | 36 | 120 | 330 | 792 | 1716 | 3432 | 6435 | 11440 | 19448 | |
| Suboctavanorum | 1 | 9 | 45 | 165 | 495 | 1287 | 3003 | 6435 | 12870 | 24310 | 43758 | |
| Subnonanorum | 1 | 10 | 55 | 220 | 715 | 2002 | 5005 | 11440 | 24310 | 48620 | 92378 | |
| Subdecimanorum | 1 | 11 | 66 | 286 | 1001 | 3003 | 8008 | 19448 | 43758 | 92378 | 184756 | |

Et ſic deinceps.

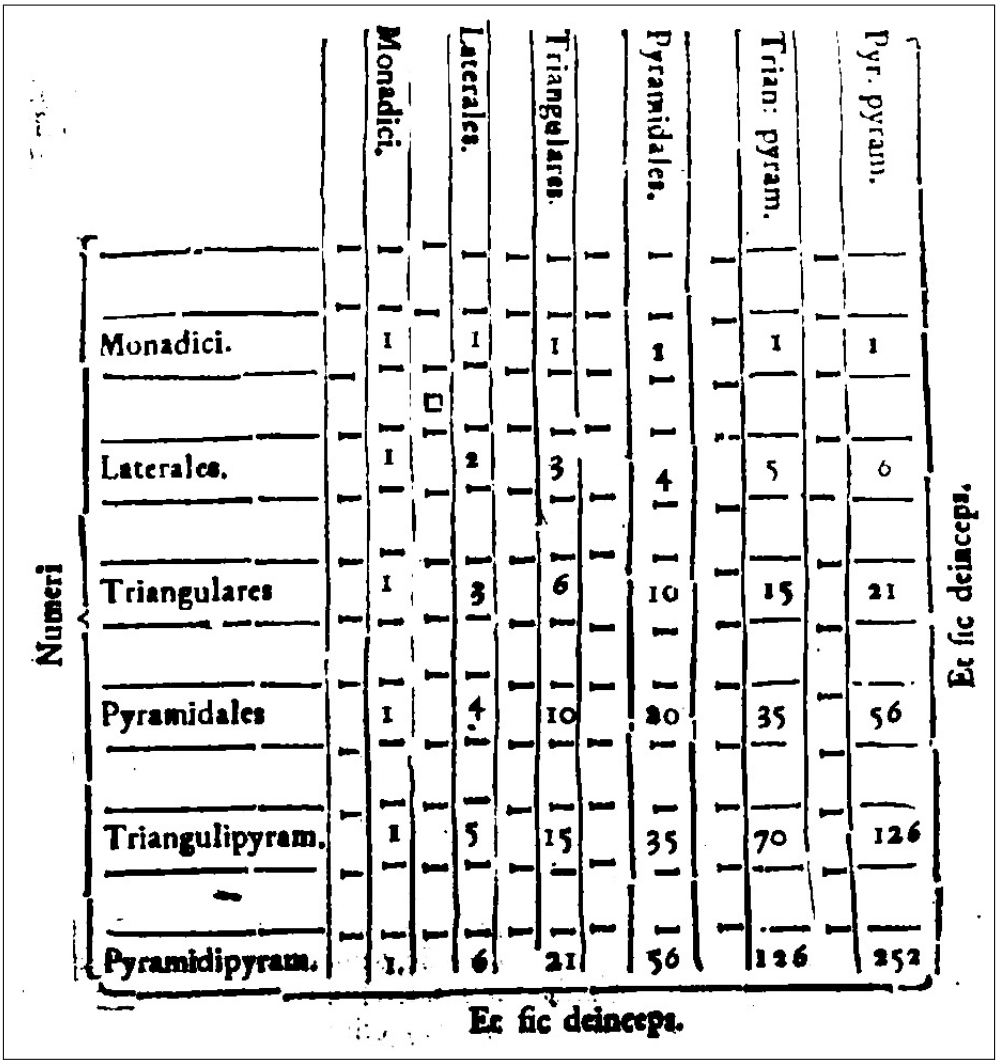
Et ſic deinceps.

J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum* - p.105

Notons également la série des racines $x$ est appelée « des Premiers Rangs » (« *Primanorum* ») dans la première table, puis « des Sous-premiers Rangs » (« *Subprimanorum* ») dans la seconde. En effet, la racine première et la puissance première sont confondues : $x^1 = \sqrt[1]{x} = x$.
S'il donne si peu de détails sur l'interprétation des lignes et des colonnes de cette nouvelle table, c'est probablement que son objectif est d'en trouver une nouvelle interprétation. En ajoutant les bonnes séries $p = 0$ et $q = 0$, Wallis reconstitue la table complète des nombres figurés qu'il va désormais pouvoir interpréter comme telle.

**Mise en place des espaces à interpoler**

C'est dans cette table que va s'opérer la principale interpolation de l'œuvre. Wallis cherche donc la quantité donnée par la table, lorsque $p = q = \frac{1}{2}$. Il note donc □ cette valeur :




J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum* - p.137

Ainsi, Wallis met en évidence un nouvel indice : le côté du nombre figuré. Cet indice latéral se trouve par conséquent dans la suite des nombres figurés latéraux, c'est-à-dire la deuxième ligne du triangle, ou encore ici, en prenant en compte les lignes interposées, la quatrième ligne. Il y a donc un décalage d'indices de 1 entre les degrés des progressions et les indices latéraux :

| | Degré $q$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 | $\frac{5}{2}$ | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | Coté $l$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 | $\frac{5}{2}$ | 3 | $\frac{7}{2}$ | 4 |
| $-\frac{1}{2}$ | | | | | | | | | |
| 0 | Monadique | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 |
| $\frac{1}{2}$ | | | | □ | | | | | |
| 1 | Latéraux | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 |
| $\frac{3}{2}$ | | | | | | | | | |
| 2 | Trianglulaires | | 1 | | 3 | | 6 | | 10 |
| $\frac{5}{2}$ | | | | | | | | | |
| 3 | Pyramidaux | | 1 | | 4 | | 10 | | 20 |

Ainsi, l'interpolation peut se faire pour chaque ligne. Il faut pour cela trouver la table qui expose la règle qui relie le nombre figuré à son côté. Pour les lignes des monadiques et des latéraux, Wallis remplit aisément les trous, car la règle est évidente :

> *Il y a deux séries, exposées dans cette table, à savoir les monadiques et les latéraux, que l'on peut aisément interpoler (avec autant de places qu'on souhaite à interposer), et ce en interposant bien-sûr pour la première autant d'unités qu'il est nécessaire, et pour la seconde tout autant de moyennes arithmétiques.* [23]

Mais comment compléter les trous pour les autres progressions des figurés :

> *En revanche, les séries restantes ne s'interpolent pas aussi facilement, à moins qu'on ait déterminé d'abord les caractéristiques propres à chaque série, ce que nous étudierons au travers des propositions qui suivent.* [24]

Il s'agit donc pour Wallis de découvrir la loi qui régit chaque progression figurée, qui se trouve être ici le produit de fraction. Le nombre figuré de dimension $d$ et de côté $l$ vaut :

$$\left(\!\!\binom{l}{d}\!\!\right) = \binom{l+d-1}{d} = \frac{l}{1} \times \frac{l+1}{2} \times \ldots\ldots \frac{l+d-1}{d}$$

Comme nous l'avons vu, cette formule est une conséquence directe de celle que Wallis a trouvée empiriquement pour les premières intégrales rationnelles :

$$\int_0^1 (1-x^p)^q dx = \frac{p}{p+1}.\frac{2p}{2p+1}\cdots\frac{qp}{qp+1}$$

Il suffit de remplacer $p$ par $\frac{1}{p}$. Wallis n'explique pas pourquoi il se refuse ce raccourci. Il semble néanmoins que le caractère contingent et même fortuit de l'apparition des nombres figurés y joue un grand rôle. Une fois qu'on a mis en évidence que ces nombres interviennent, il convient de démontrer leurs propriétés à partir d'eux et non des précédents calculs. La première étape fait ainsi office de méthode de découverte, là où cette seconde analyse des nombres figurés tient lieu de synthèse.

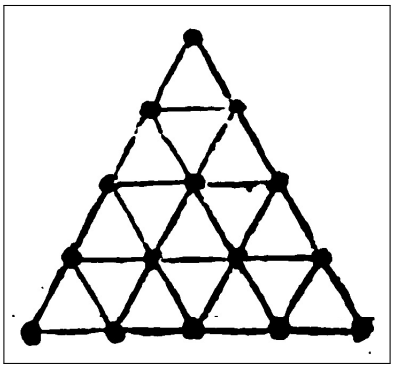
### 6.2.3 Détour par la combinatoire

#### Dénombrement des triangulaires

Le cas des nombres triangulaires éclaire bien l'attachement de Wallis à repartir depuis zéro à ce stade. En effet, l'expression analytique des nombres triangulaires est un fait bien connu :

$$T_l = \frac{l(l+1)}{2}$$

Pourtant Wallis se propose de démontrer cette propriété en partant d'une proposition euclidienne qui détermine le nombre de petits triangles compris dans un grand triangle :

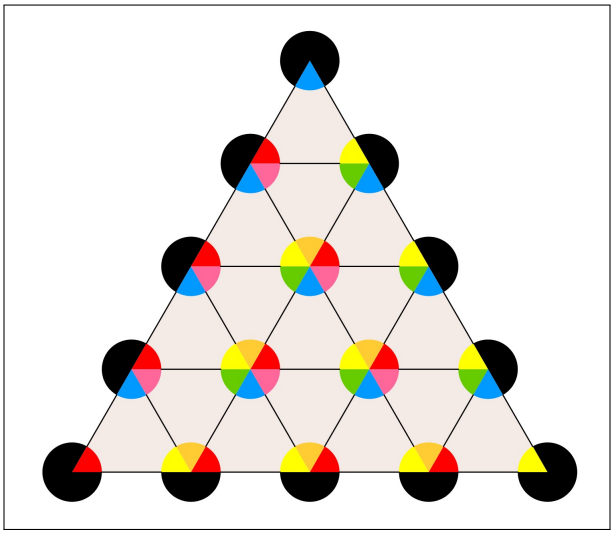


J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum* - p.138

23. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 170, p.138 : « Series duæ, in exposita Tabella, nempe Monadicorum, & Lateralium, facile interpolari possunt (locis interponendis quotlibet) interpositis scilicet illic quot opus est, unitatibus, hic, totidem mediis Arithmeticis. »

24. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 170, p.138 : « Reliquæ autem series non ita facile interpolantur, nisi invento prius cujusque seriei proprio charactere, quod sequentibus porpositionibus investigabimus »

A partir de là, Wallis va pouvoir déterminer le nombre de sommets que contient ce grand triangle en comptabilisant les angles des petits triangles, afin de ne pas compter plusieurs fois le même sommet :



Il compte ainsi $(l-1)^2$ triangles qui ont chacuns trois angles, donc il y a $3l^2-6l+3$ angles. Il classe ensuite ces angles en trois catégories

- ⋆ ceux qui sont sur les sommets du grand triangle : il y en a trois.
- ⋆ ceux qui sont sur l'intérieur des côtes du grand triangle. Il y a $l-2$ sommets sur chaque côté, dont $3(l-2)$ en tout. Ainsi cela donne $9(l-2)$
- ⋆ ceux qui restent et qui sont à l'intérieur du grand triangle : il y en a donc $(3l^2-6l+3)-(3+9(l-2)) = 3l^2-15l+18$

Les premiers sont seuls dans chaque sommet, les seconds sur les côtés sont trois par sommets et enfin les derniers, à l'intérieur, sont six par sommets. Ainsi le nombre de sommet est :

$$\frac{3}{1}+\frac{9l-18}{3}+\frac{3l^2-15l+18}{6}=\frac{l^2+l}{2}$$

> *Finalement, si l'on ajoute ensemble les points ainsi trouvés, à savoir* $3P$ *et* $\frac{9l-18}{3}P$ *et* $\frac{3l^2-15l+18}{6}P$*, alors leur somme sera* $\frac{l^2+l}{2}$ *points, c'est-à-dire le nombre de tous les points. C'est cela le nombre triangulaire dont le côté est* $l$*.*[25]

Ici, l'approche combinatoire de Wallis est incontestable, mais il s'agit de combinatoire au sens classique du terme et cela ne correspond pas à ce que l'acception méthodologique et diagrammatique fondée sur les tables.

### Généralisation pour les autres nombres figurés

A partir de là, Wallis détermine les autres expressions de nombres figurés grâce à la propriété des ordres numériques et les formules des sommes de puissances qu'il avait déterminé dans la première partie :

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{l}\frac{s(s+1)}{2} &= \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{l}s^2+\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{l}s\\ &= \frac{1}{2}.\frac{l(l+1)(2l+1)}{6}+\frac{1}{2}.\frac{l(l+1)}{2}\\ &= \frac{1}{2}.\frac{l(l+1)}{2}\left(\frac{2l+1}{3}+1\right)\\ &= \frac{l^3+3l^2+2l}{2.3}\end{aligned}$$

25. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 171, p.139 : « Denique, si simul addantur puncta sic inventa, nempe $3P$ & $\frac{9l-18}{3}P$ & $\frac{3l^2-15l+18}{6}P$, erit horum aggregatum $\frac{l^2+l}{2}$ Puncta ; numerus punctorum omnium : Hoc est numerus triangularis cujus latus $l$. »

Les premières formules des sommes de puissances sont donc nécessaires à Wallis pour déterminer les formules des premiers nombres figurés, à savoir les pyramidaux et les triangulo-triangulaires. Contrairement à Pascal, dont le *Traité du Triangle Arithmétique* n'avait pas encore été publié, Wallis ne disposait pas d'expression générale pour la somme des puissances. Ainsi, il en va nécessairement de même en ce qui concerne l'expression des nombres figurés. En effet, pour poursuivre le calcul des expressions de tous les nombres figurés, il faut poursuivre le calcul des expressions des sommes des puissances. Pour poursuivre cette tâche, la méthode donnée par Wallis dans la première partie n'est plus suffisante ici :

> *A vrai dire, si quelqu'un souhaite la poursuivre plus loin, il pourra y parvenir par une autre méthode qui lui conviendrait au mieux, ou bien encore (à moins que lui parviennent de meilleures assistances) au moyen de cette table elle-même, que nous avons déjà en main, après quoi, suivant une voie que nous enseignerons bientôt, nous montrerons dans les séries qui suivent comment étudier les relations entre les nombres figurés et un quelconque de leurs côtés.* [26]

Ce n'est donc pas le calcul des sommes de puissances qu'il convient de parfaire. Wallis propose de s'emparer directement de la table déjà constituée des premiers nombres figurés afin d'y reconnaitre la règle générale :

> *En effet, pour le présent objectif, il n'est pas non plus nécessaire de le poursuivre plus loin, puisqu'à partir des caractéristiques connues des quelques suites de cette table (c'est-à-dire des rapports qu'ont ces nombres figurés avec leurs côtés respctifs), se manifeste la méthode pour rechercher également les caractéristiques des suivantes.* [27]

Il s'agit donc reconnaître dans les quatre premières expressions la règle qui sera générale pour toutes les autres.

$$\frac{l}{1} = \frac{l}{1} \qquad \frac{l^2+l}{2} = \frac{l}{1} \times \frac{l+1}{2} \qquad \frac{l^3+3l^2+2l}{6} = \frac{l}{1} \times \frac{l+1}{2} \times \frac{l+2}{3}$$

Cette règle « se manifeste » (« *elucescit* ») au sein des premières séries. La loi qui régit la table est donc caractérisée dans une sous-partie de la structure. Ce raisonnement inductif est en fait de la même nature que celui de l'interpolation. Il s'agit de ce que nous avons appelé l'extrapolation, puisqu'il s'agit bien poser des termes de la suite à l'extérieur d'une série finie. Mais comme nous l'avons vu, ce n'est pas du tout le premier raisonnement inductif que Wallis se propose de faire. Pourquoi tente-t-il ici de décrire avec force détails son cheminement, alors qu'un simple « et ainsi de suite »(« *et sic deinceps* ») semblait suffire dans les précédentes propositions ? En réalité, ce n'est pas tout à fait exact de dire que Wallis prolonge ici une suite de termes par une règle déterminée empiriquement sur les premiers. Les termes des suites, à savoir les nombres figurés, sont déjà connus et leurs constructions est intrinsèquement récursive. Il faut connaître les nombres triangulaires pour calculer les pyramidaux, et le pyramidaux pour connaître les triangulo-triangulaires, etc. Ce que déterminer Wallis ici, c'est une nouvelle règle de construction des nombres figurés qui n'est pas récursive. La donnée du côté $l$ et de la dimension $d$ suffit pour déterminer directement le nombre figuré correspondant. Ainsi, ce que prolonge Wallis n'est pas une suite de terme, mais une suite d'égalités qui identifie deux constructions de natures complètement différentes.

### Un pont combinatoire

Pour finir, nous n'avons pas réellement expliqué la raison d'être de la preuve par dénombrement au sujet des nombres triangulaires. Wallis annonce pourtant la formule de la somme des termes d'une série arithmétique finie dès les premières pages de son ouvrage, dans la Proposition 2 :

> *En effet, si le premier terme est* 0*, le deuxième* 1 *(de fait, il faudra appliquer un changement s'il en est autrement) et le dernier* $l$*, alors la somme sera* $\frac{l+1}{2}l$*.* [28]

26. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 182, p.146 : « Eam vero siquis ulterius continuandam velit, licebit ipsi vel alia quæ sibi maxime placeat methodo id præstare, vel etiam (nisi meliora ipsi occurant auxilia) ope hujus ipsius quam jam præ manibus habemus Tabellæ, postquam via mox docenda ostenderimus, rationes numerorum figuratorum ad suum cujuslibet latus in sequentibus seriebus investigare. »

27. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 182, p.147 : « Nec quidem necesse sit ad præsens institutum illud ulterius prosequi, cum ex cognitis paucarum istius Tabellæ serierum characteribus (sive rationibus quas numeri isti figurati habent ad sua respective latera) sequentium etiam characteres investigandi methodus elucescat. »

28. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 2, p.2 : « Nempe, si primus terminus sit 0, secundus 1, (nam si secus moderatio adhibenda erit) & ultimus $l$ erit summa $\frac{l+1}{2}l$. »

La propriété des ordres numériques qui constitue le fondement de la construction des nombres figurés pour Wallis implique bien que les nombres triangulaires sont des sommes de nombres latéraux et ils correspondent aux sommes finies des termes de la suite arithmétique naturelle. Pourtant Wallis éprouve le besoin de redémontrer la formule par une méthode fastidieuse de dénombrement. Pourquoi, à nouveau, un tel détour ?
Il nous faut avant cela mettre en avant une incohérence dans la démarche de Wallis :

$$\begin{aligned}\frac{0+1}{1+1} &= \frac{1}{2}\\ \frac{0+1+2}{2+2+2} &= \frac{3}{6}=\frac{1}{2}\\ \frac{0+1+2+3}{3+3+3+3} &= \frac{6}{12}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{0+1+2+\cdots+l}{\underbrace{l+l+\cdots+l}_{l+1 \text{ fois}}} &= \frac{1}{2}\\ 0+1+2+\cdots+l &= (l+1)l\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{0+1}{1+1} &= \frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\\ \frac{0+1+4}{4+4+4} &= \frac{5}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\\ \frac{0+1+4+9}{9+9+9+9} &= \frac{14}{36}=\frac{1}{3}+\frac{1}{18}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{0+1+4+\cdots+l^2}{\underbrace{l^2+l^2+\cdots+l^2}_{l+1 \text{ fois}}} &= \frac{1}{3}+\frac{1}{6l}\\ 0+1+4+\cdots+l^2 &= (l+1)l^2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6l}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{0+1}{1+1} &= \frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\\ \frac{0+1+8}{8+8+8} &= \frac{9}{24}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\\ \frac{0+1+8+27}{27+27+27+27} &= \frac{36}{108}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{0+1+8+\cdots+l^3}{\underbrace{l^3+l^3+\cdots+l^3}_{l+1 \text{ fois}}} &= \frac{1}{4}+\frac{1}{4l}\\ 0+1+8+\cdots+l^3 &= (l+1)l^3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4l}\right)\end{aligned}$$

Comme le montrent les calculs ci-dessus, directement repris des Propositions 1 et 2, 19 et 20, et 39 et 40, les premières formules pour les sommes de puissances sont trouvées empiriquement, et ce pour les côtés, les carrés et les cubes. A partir de ces trois formules, Wallis devrait pouvoir tirer la loi générale des sommes de puissances, de la même manière qu'elle se « manifeste » à partir des trois formules des triangulaires, pyramidaux et triangulo-triangulaires. D'autant plus que, pour ces deux dernières séries, leurs expressions sont directement déduites de ces trois calculs de sommes de puissance. Par exemple, l'expression suivante conviendrait :

$$0+1+2^a+\cdots+l^a=(l+1)l^a\left(\frac{1}{1+a}+\frac{a-1}{2l(a+1)}\right)$$

En effet, pour les cas $a = 1$, 2 ou 3, on retrouve les expressions données empiriquement par Wallis. Pourquoi cette loi-ci ne se manifesterait-elle pas, alors celles des nombres figurés y parviennent ? Wallis dispose de la table des nombres figurés, construite par une autre voie. Il peut donc vérifier si la loi qui émerge des premières séries se conforme aux termes suivants. En revanche, pour les sommes des puissances, Wallis constate que la formule perdent toute régularité à partir du quatrième degré :

> *Il faut également noter que les rapports cherchés par induction, dans ces séries dont la progression est en raison quadruple (ou supérieur) de la progression arithmétique, sont plus compliqués que les précédents.* [29]

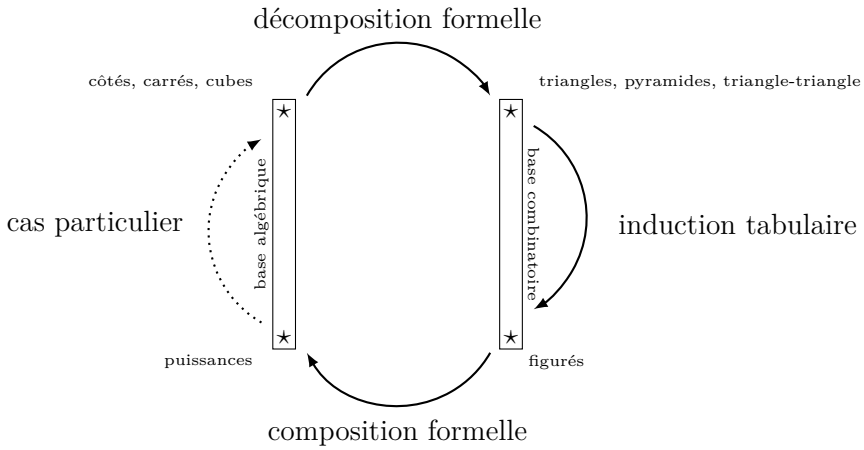
Ainsi, malgré ce rôle majeur que tient l'induction et la combinatoire tabulaire dans le principe d'interpolation, Wallis semble garder une certaine prudence. On peut alors faire l'hypothèse que ces généralisations

29. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 43, p.34 : « Notandum etiam, rationes inductione quærendas, in seriebus illis quarum processus est in Arithmetice proportionalium ratione quadruplicata (& sequentibus) magis implicatas esse quam præcedentium. »

empiriques sont conditionnées par certaines vérifications. La loi régulière et générale de la table doit se soumettre à l'épreuve des calculs empiriques. Il semble donc qu'il y ait des facteurs extérieurs qui conditionnent la capacité qu'ont ces lois à se manifester au travers des premiers termes. Ce peut être la diligence dont l'auteur peut faire preuve à s'assurer par l'expérience des premiers termes qu'ils respectent bien les règles induites. Mais ces conditions peuvent également découler de la culture de l'auteur. Dans notre cas, le développement des nombres figurés en produits de fractions est un fait plutôt connu, contrairement aux sommes des puissances. Il y a donc un aspect téléologique qui peut ainsi intervenir dans la manifestation de telle ou telle loi, au sein d'une table.
Si l'on peut déterminer les nombres figurés à partir des sommes de puissances, le calcul inverse est également possible. C'est ce qu'évoque Wallis dans la proposition 182, à la fin de l'ouvrage. A partir de la règle universelle des nombres figurés, il est désormais possible de déterminer par un calcul rigoureux les expressions de chaque somme de puissances. Ce procédé reste récursif, en revanche, c'est-à-dire qu'il faut avoir déterminé la somme des puissances de chaque degré inférieur pour calcul le degré suivant :

> *Nous avons dit naguère qu'à partir des rapports ou caractéristiques poursuivies dans la présente table, on peut déduire également la suite des rapports qu'on indiquait dans la Proposition 43.* [30]

Ces rapports indiqués dans la Proposition 43 sont justement ceux qui correspondent aux sommes finies des puissances générales. Ainsi, pour résumer, Wallis trouve par tâtonnement les trois premières formules pour les sommes de puissances, à partir desquelles il démontre les formules des trois premières séries de nombres figurés. Au sein de ces trois formules se manifeste la règle générale pour tous les nombres figurés, grâce auxquelles il est alors possible de poursuivre le calcul des autres sommes de puissances, de façon récursive. Pour calculer toutes les sommes de puissances, Wallis opère donc un détour par les progressions des nombres figurés. Cette étape intermédiaire se révèle particulièrement adaptée à la combinatoire tabulaire :




Les sommes de puissances forment une base canonique pour l'écriture formelle alors que les nombres figurés constituent la base canoniques des triangles arithmétiques. On peut ainsi mieux comprendre le rôle particulier des nombres figurés dans la construction de Wallis : ils constituent un pont combinatoire pour l'étude des progressions. Ceci peut éclairer la preuve de dénombrement des nombres triangulaires, qui donne ainsi un socle purement combinatoire à leur construction.

30. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 182, p.148 : « Diximus modo, ex rationibus sive characteribus præsentis Tabellæ continuatis, deduci posse continuationem etiam rationum illarum quas indicat prop. 43. »

## 6.3 Les intégrales de Wallis

### 6.3.1 Complétion des progressions

#### Interpolations des nombres figurés

A présent, Wallis dispose donc des expressions algébriques de tous les nombres figurés. Il peut donc poursuivre l'interpolation de la table, en considérant que $l$ peut être une quantité quelconque, donc fractionnaire :

| | Degré $q$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 | $\frac{5}{2}$ | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | Coté $l$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 | $\frac{5}{2}$ | 3 | $\frac{7}{2}$ | 4 |
| $-\frac{1}{2}$ | | | | | | | | | |
| 0 | Monadique | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\frac{1}{2}$ | | | | □ | | | | | |
| 1 | Latéraux | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 | $\frac{5}{2}$ | 3 | $\frac{7}{2}$ | 4 |
| $\frac{3}{2}$ | | | | | | | | | |
| 2 | Trianglulaires | $\frac{3}{8}$ | 1 | $\frac{15}{8}$ | 3 | $\frac{35}{8}$ | 6 | $\frac{63}{8}$ | 10 |
| $\frac{5}{2}$ | | | | | | | | | |
| 3 | Pyramidaux | $\frac{15}{48}$ | 1 | $\frac{105}{48}$ | 4 | $\frac{315}{48}$ | 10 | $\frac{693}{48}$ | 20 |

Il suffit de remplacer $l$ par la fraction désirée :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| si $l = \frac{1}{2}$ | alors | $\frac{l(l+1)}{2} = \frac{3}{8}$ | et | $\frac{l(l+1)(l+2)}{6} = \frac{15}{48}$ |
| si $l = \frac{3}{2}$ | alors | $\frac{l(l+1)}{2} = \frac{15}{8}$ | et | $\frac{l(l+1)(l+2)}{6} = \frac{105}{48}$ |
| si $l = \frac{5}{2}$ | alors | $\frac{l(l+1)}{2} = \frac{35}{8}$ | et | $\frac{l(l+1)(l+2)}{6} = \frac{315}{48}$ |

Notons par ailleurs qu'il s'agit bien ici d'une approche algébrique de l'interpolation et non tabulaire. Wallis a déterminé des expressions formelles qui explicite le lien direct entre le terme et son rang, en l'occurence ici, son côté.
Prenons un peu de distance pour nous poser la question suivante : qu'a donc gagné Wallis avec la table des nombres figurés ? De fait, la première table qu'il avait obtenue posait problème pour l'indice $q$, car il caractérisait un nombre de facteurs et était donc nécessairement entier. A présent qu'il a pu déterminer la loi qui régit les nombres figurés de dimensions $p$, le même problème se pose à nouveau :

$$\underbrace{\frac{l}{1} \times \frac{l+1}{2} \times \frac{l+2}{3} \times \cdots \times \frac{l+p-1}{p}}_{p \text{ facteurs}}$$

La contrainte s'est donc inversée. Elle concerne désormais $p$ et non plus $q$ que Wallis a réussi à remplacer par l'indice latéral $l$. On pourrait donc croire que Wallis a troqué un obstacle pour un autre équivalent. Mais ce qui change, dans la table du triangle arithmétique, c'est qu'elle est symétrique, et que $p$ et $q$ ont donc des rôles interchangeables.

#### L'apport crucial de la symétrie

Wallis note très vite les rôles symétriques des deux variables dans la tables des nombres figurés :

> *Il apparait clairement aussi (et ce dans chaque table) que les series des nombres ainsi trouvés sont pleinement identiques horizontales comme verticales.* [31]

31. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 131, p.104 : « Patet etiam, (in utraque Tabella) series numerorum sic inventorum transversas easdem plane esse atque erectas. »

On a donc :

$$\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q dx = \int_0^1 (1-x^{\frac{1}{q}})^p dx$$

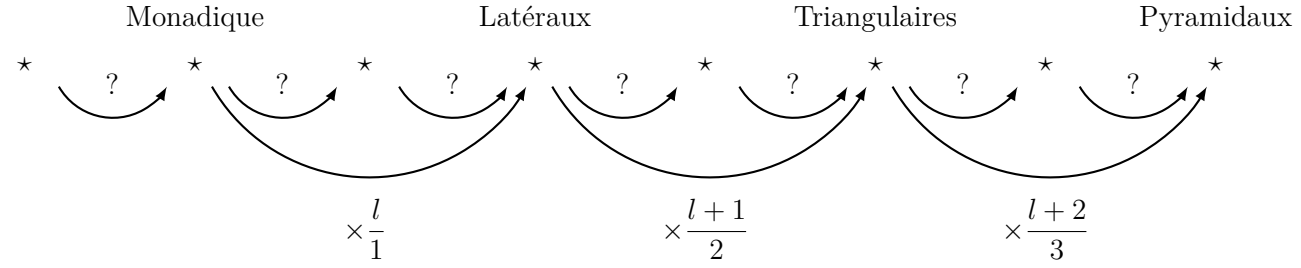
Cette propriété de symétrie que nous investissons dans les indices $p$ et $q$ est en réalité propre à la table des nombres figurés elle-même. C'est donc une propriété diagrammatique qui constitue la clé de l'interpolation à laquelle Wallis va pouvoir désormais se consacrer à plein, afin de remplir son ultime objectif : déterminer la valeur de $\square$. Par symétrie, nous pouvons donc compléter la table verticalement et ainsi donner des premières valeurs aux séries intermédiaires, qui étaient restées vides jusqu'ici :

| | | Degré $q$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 | $\frac{5}{2}$ | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $l$ | $p$ | Coté $l$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 | $\frac{5}{2}$ | 3 | $\frac{7}{2}$ | 4 |
| $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | | | 1 | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{3}{8}$ | | $\frac{15}{48}$ |
| 1 | 0 | Monadique | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | | | 1 | $\square$ | $\frac{3}{2}$ | | $\frac{15}{8}$ | | $\frac{105}{48}$ |
| 2 | 1 | Latéraux | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 | $\frac{5}{2}$ | 3 | $\frac{7}{2}$ | 4 |
| $\frac{5}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | | | 1 | | $\frac{5}{2}$ | | $\frac{35}{8}$ | | $\frac{315}{48}$ |
| 3 | 2 | Trianglulaires | $\frac{3}{8}$ | 1 | $\frac{15}{8}$ | 3 | $\frac{35}{8}$ | 6 | $\frac{63}{8}$ | 10 |
| $\frac{7}{2}$ | $\frac{5}{2}$ | | | 1 | | $\frac{7}{2}$ | | $\frac{63}{8}$ | | $\frac{693}{48}$ |
| 4 | 3 | Pyramidaux | $\frac{15}{48}$ | 1 | $\frac{105}{48}$ | 4 | $\frac{315}{48}$ | 10 | $\frac{693}{48}$ | 20 |

### 6.3.2 Progressions d'un genre nouveau

#### La valeur exacte du rapport cherché

La question qui se pose donc désormais est la suivante : comment trouver les moyens termes dans cette suite de relations, afin de déterminer les expressions des progressions intermédiaires. Le principe de l'interpolation soutenu jusqu'ici par Wallis indiquerait de chercher les relations entre chaque progression successive :




Il s'agit donc de diviser les rapports en deux :

> *Si, du fait de l'introduction d'un nombre dans chaque espace (à la manière où une seule série émerge des enchâssements des positions paires et impaires), n'importe quels rapports, grâce auxquels l'on multiplie continument le premier terme, qu'il soit pair ou impair, doivent être divisés en deux (ainsi par exemple, le rapport de* 1 à 2 *est composé des rapports* 1 à $1+\frac{1}{2}$ *et* $1+\frac{1}{2}$ à 2*).*[32]

Il faudrait donc trouver une progression régulière de relations telle que la composée d'une relation de rang pair avec la relation suivante donne les rapports déterminés par Wallis entre les nombres figurés. Mais Wallis ne suit pas cette voie, car elle lui semble impossible :

> *Et certes, je porte à croire (et de cela, je me doutais dès le départ) que ce rapport que nous cherchons est tel qu'on ne peut pas l'exprimer par des nombres et ce conformément à aucun mode de notation accepté jusqu'ici, pas même par les cotés sourds.*[33]

32. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 190, p.170-171 : « Si propter intercalationem unius in singulis spaciis numeri (ut ex locis tam paribus quam imparibus intermistis una fiat series) quælibet rationum, in quas continue multiplicatur terminus tam parium quam imparium primus, in binas dirimenda est, (nam, verbi gratia, ratio 1 ad 2 composita est ex ratione 1 ad $1\frac{1}{2}$ ad $1\frac{1}{2}$ ad 2) »

33. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 190, p.174 : « Et quidem proclivis sum ut credam (quod et ab initio suspicatus sum) rationem illam quam quærimus talem esse quæ non poterit numeris exprimi juxta ullum adhuc receptum notationis modum, ne quidem per latera surda. »

Wallis considère donc qu'il faut nécessairement introduire une nouvelle notation pour définir le rapport du cercle au carré, et ce de la même manière que les algébristes du passé avaient introduit des notations qui caractérisent les grandeurs irrationnelles sourdes, comme les racines carrés.
De cette recherche d'une règle intermédiaire découle une profonde réflexion sur l'usage des symboles en mathématiques et leur rôle dans la composition et la résolution :

> *Et suivant la coutume des arithméticiens, pour d'autres travaux, il faudra le faire ici aussi : à savoir, lorsque l'on rencontre une impossibilité, que l'on doit certes supposer advenir mais qui néanmoins ne peut pas se produire de façon actuelle, ils imaginent un certain moyen d'exprimer ce qui peut être bien que cela ne puisse pas être dans les faits. Et cela se produit de fait en pratique dans toutes les opérations arithmétiques analytiques.* [34]

Par « analytique » (« *resolutoria* »), Wallis désigne ici les opérations telles que la soustraction, la division ou l'extraction de racines. Les opérandes qui y interviennent sont en effet une partie $a$ et un tout $b$, et le résultat désigne le terme inconnu qu'il manque à $a$ pour devenir $b$. Il ne s'agit donc pas de combinaisons et de compositions, mais plutôt d'analyses et de résolutions, puisqu'on décortique l'entité $b$ pour y trouver le complémentaire de $a$. Ainsi, les nombres négatifs, les fractions irréductibles non entières et les racines irrationnelles sont des nombres impossibles, dont les mathématiciens ont cependant pu trouver le moyen de les exprimer.

### Une nouvelle notation pour une nouvelle relation

Pour Wallis, le symbole $\surd$ est donc un artefact conventionnel, créé par les mathématiciens, afin de désigner des quantités impossibles au sein de progressions géométriques. Ainsi, pour diviser le rapport entre $a$ et $b$ en $n$ parties égales, on note $\sqrt[n]{ab^{n-1}}$.
En réalité, le problème analytique de la détermination du complémentaire de $a$ dans $b$, et celui de la recherche d'un moyen terme dans une progression sont des questions différentes qui ne sont pas clairement distinguées au sein du discours de Wallis. S'il motive d'abord ces écritures en les considérant comme les inverses des compositions que sont l'addition, la multiplication et l'exponentiation, il passe dès lors à un autre point de vue, qui ne concerne que la racine, à savoir l'interpolation des progressions géométriques. Dans ce nouveau point de vue, il faut certes créer des notations pour désigner des objets impossibles, mais l'approche n'est pourtant plus du tout la même. En effet, il ne s'agit plus d'inverser des opérations de compositions dans des cas impossibles mais de partager des relations itératives au sein des progressions. Ainsi, la racine n'est plus l'inverse de l'exposant, mais une partie de la multiplication. De même, dans les progressions arithmétiques dont Wallis ne parle pas, la partition des rapports additionnels se fait par la division et non par la soustraction. Dans ce cadre, le moyen terme n'est pas obtenu par l'opération inverse de celle qui régit la progression, mais par une opération supérieure, qui régit le lien entre les termes et leurs rangs. Le raisonnement n'est donc pas purement analytique, puisqu'il s'agit de faire émerger, grâce à la combinatoire, cette relation d'ordre supérieure qui donne le rapport direct entre le terme et son rang dans la progression. Ainsi, l'on reconnait dans l'addition d'un même terme $a + a + a$ la loi multiplicative $3.a$ et dans la multiplication $a \times a \times a$ la règle exponentielle $a^3$. Pour donner cette même interprétation à la soustraction, il faudrait considérer une progression pour laquelle l'addition constitue la loi supérieure. On peut le faire grâce aux logarithmes :

$$a \diamond b = \ln\left(e^a + e^b\right)$$

Ainsi, si l'on considère la composition de cette opération un nombre $n$ de fois :

$$\underbrace{a \diamond \cdots \diamond a}_{n \text{ fois}} = \overset{\langle n \rangle}{a} = \ln\left(\underbrace{e^a + \cdots + e^a}_{n \text{ fois}}\right) = a + \ln(n)$$

34. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 190, p.174 : « Et propterea quod in aliis Arithmetices negotiis fieri solet, illud & hic faciendum erit : nempe, ubi ad ἀδύνατον aliquid pervenitur, quod quidem fieri supponendum est, nec tamen actu fieri potest ; excogitant modum aliquem exprimendi id quod fieri supponitur utut factum non sit. Atque, hoc quidem in Arithmeticis operationibus omnibus resolutoriis usu venit. »

Donc l'opération qui relie le terme et son indice relève bien de l'addition. Pour trouver le moyen terme entre $a$ et $b$ dans cette progression, il faut donc trouver $x$ tel qu'il existe un rapport $t$ de sorte que $x = a \diamond t$ et $b = x \diamond t$. Donc :

$$\begin{aligned} b &= a \diamond \overset{\langle 2 \rangle}{t} \\ &= \ln\left(e^a + 2e^t\right) \\ t &= \ln\left(\frac{e^b - e^a}{2}\right) \\ x &= a \diamond t \\ &= \ln\left(\frac{e^a + e^b}{2}\right) \\ &= a \diamond b - \ln(2) \end{aligned}$$

Le moyen terme est donc issu de la composition des deux extrêmes, auxquels on opère la loi supérieure inverse du nombre 2. C'est bien cette situation combinatoire que décrit Wallis dans son développement, et non celle de la seule résolution analytique qu'il présentait d'abord :

> *De la même manière, donc, que* $\sqrt{3 \times 6}$ *signifie le moyen terme entre* 3 *et* 6 *dans la progression géométrique égale à* 3, 6, 12 *etc. (par la multiplication continue* $3 \times 2 \times 2$ *etc.) ainsi* $\tilde{m}\left(1|\frac{3}{2}\right)$ *signifiera le moyen terme entre* 1 *et* $\frac{3}{2}$ *dans la progression géométrique décroissante* 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{15}{8}$ *etc. (par la multiplication continue* $1 \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{4}$ *etc.) et on aura* $\square = \tilde{m}\left(1|\frac{3}{2}\right)$. [35]

La meilleure notation du nombre $\square$ revient donc à désigner sa position au sein d'une progression. Le signe opératoire $\tilde{m}$ caractérise la progression, à savoir celle des nombres figurés ayant pour côté $l = \frac{3}{2}$, de la même manière que le signe $\surd$ désigne la progression géométrique. Le lien avec le nombre 2, qui signifie qu'on cherche le terme médian, est lui aussi incarné par le symbole $\tilde{m}$ tout comme il l'est dans le symbole de la racine carré. Cette opération s'applique alors à la combinaison des termes extrêmes, sous la forme $\left(1|\frac{3}{2}\right)$. En procédant ainsi par analogie avec la notation des racines, Wallis établit ainsi la notation exacte qui caractérise le nombre qu'il cherche.

> *Et c'est pourquoi le cercle est au carré du diamètre comme* 1 *par rapport à* $\tilde{m}\left(1|\frac{3}{2}\right)$. *Ce qui constitue la véritable quadrature du cercle en nombres, dans la mesure où la nature elle-même de ces nombres souffre d'être révélée.* [36]

Cette façon de faire peut paraitre tautologique, puisqu'il s'agit bien de dire que la valeur exacte du terme médian est celle du terme qui se trouve être au milieu des deux extrêmes. Mais cette tautologie existe déjà au sein des autres écritures. En effet, lorsqu'on dit que $\sqrt{2}$ est solution de l'équation $x^2 = 2$, c'est bien une tautologie que de dire de la quantité dont le carré vaut 2 que son carré vaut 2. Wallis note d'ailleurs bien ce parallèle, lié à l'usage :

> *A plus forte raison, je ne vois en rien pourquoi on ne peut pas dire que le rapport du cercle au carré circonscrit (ou encore de l'ellipse au parallolgramme circonscrit), c'est-à-dire* 1 *par rapport à* $\square = \tilde{m}\left(1|\frac{3}{2}\right)$ *ou* $\square = 1\tilde{m}\frac{3}{2}$ *(ce qui est le moyen terme entre* 1 *et* $\frac{3}{2}$ *dans la progression* 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{15}{8}$, *etc.) n'est pas révélé dans les règles de l'art, de la même manière que le rapport d'un côté avec la diagonale dans un carré, c'est-à-dire* 1 *par rapport à* $1\surd 2$ *ou encore* $\sqrt{1 \times 2}$ *(ce qui est comme* 1 *par rapport au moyen terme entre* 1 *et* 2 *dans la progression* 1, 2, 4 *etc.). Si ce n'est que cette notation* $\sqrt{2}$ *ou* $\sqrt{1 \times 2}$ *a été acceptée depuis longtemps (bien qu'elle fut nouvelle à un certain moment) tandis que la nôtre n'est ici introduite que pour la première fois, et cela du fait du genre nouveau de la progression, découverte ici pour la première fois (à ce que j'en sais).* [37]

35. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 190, p.175 : « Si igitur ut $\surd 3 \times 6$ significat *terminum medium inter* 3 *&* 6 *in progressione Geometrica æquabili* 3, 6, 12, *&c.* (continue multiplicando $3 \times 2 \times 2$ &c.) ita $\tilde{m}: 1|\frac{3}{2}$ significet *terminum medium inter* 1 *&* $\frac{3}{2}$ *in progressione Geometrica decrescente* 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{15}{8}$ *&c* (continue multiplicando $1 \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{4}$ &c.) erit $\square = \tilde{m}: 1|\frac{3}{2}$. »

36. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 190, p.175 : « Et propterea *circulus est ad quadratum diametri, ut* 1 *ad* $\tilde{m}: 1|\frac{3}{2}$. Quæ quidem erit vera circuli quadratura in numeris, quatenus ipsa numerorum natura patitur explicata. »

37. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 190, p.175 : « Adeo ut nihil videam cur non ratio circuli ad quadratum circumscriptum (vel etiam Ellipseos ad circumscriptum parallelogrammum) nempe ut 1 ad $\square = \tilde{m}: 1|\frac{3}{2}$

Mais là encore, Wallis mélange ces deux problèmes, à savoir résoudre une équation par l'analyse et construire un moyen terme à partir de deux extrêmes. En effet, en mettant en avant cette deuxième approche pour mener plus loin son analogie, Wallis se voit contraint de donner un nouveau sens à la notation $\surd$. En effet, la notation $\surd$ désignait alors déjà ce qu'elle désigne aujourd'hui, à savoir le nombre dont le carré vaut la quantité à laquelle elle s'applique. Or Wallis sous-entend ici que ce signe peut être défini comme désignant la moyenne géométrique de deux termes. On le voit particulièrement bien par la notation $1\surd 2$ qu'il emploie. Il joue alors sur l'ambigüité qu'il y a entre une notation du genre des opérations : $a\surd b$ ou $\surd(a,b)$, qui désignerait le moyen terme par définition et une notation issue d'une composition de fonctions et d'opérations : $\surd a \times b$ qui le désigne par théorème. La moyenne arithémtique est aussi de cette forme : $\frac{1}{2}|a+b$, et ce par théorème. Dans notre exemple de loi $\diamond$, le moyen terme était encore de cette même forme : $-\ln(2)|a \diamond b$, et ce toujours par théorème. Ainsi les notations abrégées de ces opérations analytiques sont d'abord apparus pour des problèmes d'algèbre liés aux résolutions des équations. Puis, grâce au calcul, ils ont permis de résoudre des problèmes d'interpolation, en donnant une expression algébrique aux termes médians de certains progressions.
On voit donc ici la limite du raisonnement par analogie de Wallis. Sa notation $\tilde{m}$ est directement introduite pour résoudre un problème d'interpolation. Elle ne s'appuie donc pas sur un premier lieu d'émergence purement analytique, lié à l'inversion d'une certaine loi de composition. Ce que ceci met en exergue, c'est l'incapacité qu'a Wallis à déterminer la nature profonde de cette loi de composition, à savoir celle de la progression des nombres figurés de côté $\frac{3}{2}$. En effet, il ne parvient pas à donner une forme convenable à la loi supérieure qui relie le terme et son rang. Dès lors, dans sa notation $\tilde{m}(a|b)$ le rapport entre $a$ et $b$ est incarné par l'opérateur $\tilde{m}$ et non par le signe | qui les séparent. Par ce nouveau signe, Wallis capture donc légèrement moins que ce qu'il sous-entend, car la progression à laquelle il est confronté n'est pas aussi régulière que les progressions géométriques ou arithmétiques. C'est une progression mixte, composée des deux opérations :

> *J'en vins à croire que cette raison que je cherchais était d'un genre qui n'était ni celui des véritables nombres ni même celui des racines qu'on désigne comme sourdes. J'ai de fait découvert un certain nombre de progressions numériques pour lesquelles, entre certains termes donnés, il en fallait interposer un autre pour que je sois en mesure d'exprimer la raison cherchée. De plus, ces progressions sont telles qu'elles ne peuvent selon moi correspondre ni aux arithmétiques (où les incréments sont continuellement égaux) ni aux géométriques (où les multipliants du nombre sont continuellement égaux), mais elles sont de telle sorte que les multiplicateurs continus ont des proportions arithmétiques, et c'est pourquoi elles sont dès lors bien plus composées que les géométriques.* [38]

Dans sa dédicace, Wallis reconnait donc que la progression des nombres figurés est plus complexes que les progressions classiques des géomètres. Cependant, cette différence est seulement de degré et non de nature. Ainsi, l'usage des notations abrégés pour parler de ces rapports irrationnels constitue une convention de même nature pour les racines carrés et pour la quadrature du cercle. L'approche combinatoire de Wallis masque donc le caractère transcendant du problème de la quadrature du cercle.

### 6.3.3 Complétion de la table

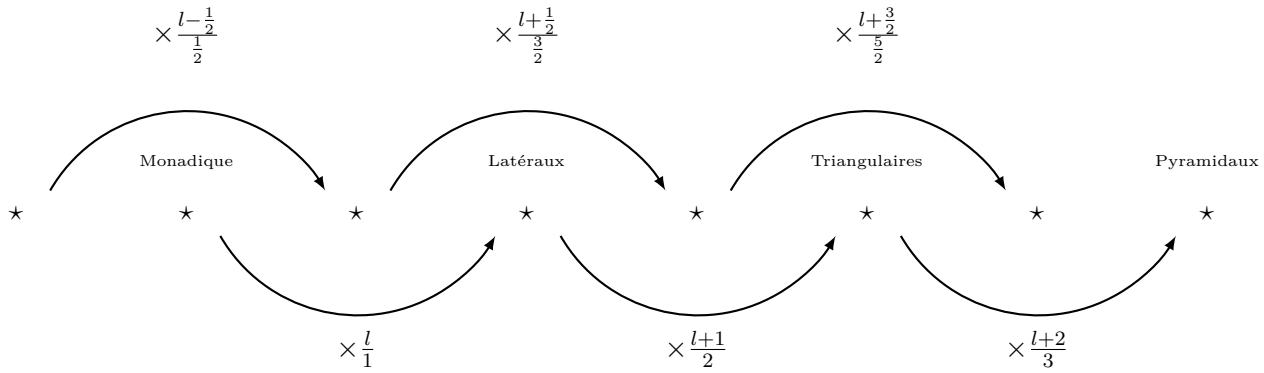
#### Interpolation des relations

Le problème auquel est confronté Wallis ici est celui que résoudra Euler au siècle suivant, à savoir l'interpolation des coefficients combinatoires au moyen de la fonction $B$ (ou ce qui revient au même, l'interpolation de la factorielle au moyen de la fonction $\Gamma$). La factoriel est le résultat du produit des

vel $\square = 1\tilde{m}\frac{3}{2}$ (hoc est, ut 1 ad terminum medium inter 1 et $\frac{3}{2}$ in progressione 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{15}{8}$ &c.) æque τεχνικῶς explicari dicenda sit, atque ratio lateris ad diagonium in quadrato, nempe ut 1 ad $1\surd 2$ vel as $\surd 1 \times 2$ (hoc est, ut 1 ad terminum medium inter 1 et 2 in progressione 1, 2, 4 &c.) nisi quod hæc notatio $\surd 2$ vel $\surd 1 \times 2$ jamdiu fuerit recepta (sed quæ aliquando fuit nova) nostra vero jam primitus introducta, propter novum progressionis genus jam primum (quod sciam) detectum. »

38. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Dédicace (6ème page) : « eo deventum erat ut crederem rationem illam quæ quærebatur ejusmodi esse quæ nec veris numeris, nec quidem radicibus surdis esset explicabilis. Numerorum enim progressiones aliquot inveni inter quarum datos terminos alius erat interponendus, ut rationem quæsitam valeam exprimere. Eas autem progressiones tales esse ut nec Arithmeticæ dici possint (ubi augmenta continua sunt æqualia,) nec Geometricæ (ubi numeri continue multiplicantes sunt æquales,) sed tales quæ continuos multiplicatores habeant arithmetice proportionales, adeoq ; magis adhunc sint compositæquam Geometricæ. »

entiers consécutifs. L'essence du problème réside dans cette notion de succession. En effet, le concept de successeur des entiers naturels n'est pas transposable aux quantités réelles. Il faut donc mettre cette idée de successeur de côté pour ne retenir que l'opération arithmétique qui consiste à ajouter une unité. Cela peut, en revanche, s'appliquer aux nombres comme aux grandeurs. C'est ainsi que Wallis entreprend la division des rapports. Ce n'est donc pas la relation entre deux progressions qu'il s'agit de partager, mais plutôt le rapport lui-même, tout en préservant la règle selon laquelle les relations lient deux progressions dont les dimensions diffèrent d'une unité. Cette suite de rapports présente des fractions dont les dénominateurs et les numérateurs sont en progression arithmétique. C'est donc cela qu'il faut interpoler et non les relations elles-mêmes :




En termes modernes, on peut reconnaître la propriété fondamentale de la généralisation des nombres combinatoires, à savoir la fonction Beta d'Euler :

$$\binom{l+(d+1)-1}{d+1} = \frac{l+d}{d+1}\binom{l+d-1}{d}$$

Ainsi, en notant $A$ la première progression de degré $-\frac{1}{2}$, on peut finir de compléter la table :

| | | Degré $q$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 | $\frac{5}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $l$ | $p$ | Coté $l$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 | $\frac{5}{2}$ | 3 | $\frac{7}{2}$ |
| $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $A$ | $\alpha$ | 1 | $\beta$ | $\frac{1}{2}$ | $\gamma$ | $\frac{3}{8}$ | $\delta$ |
| 1 | 0 | Monadique | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $A\times\frac{2l-1}{1}$ | $\frac{0}{1}.\alpha$ | $1=\frac{1}{1}.1$ | $\square=\frac{2}{1}.\beta$ | $\frac{3}{2}=\frac{3}{1}.\frac{1}{2}$ | $\frac{4}{1}.\gamma$ | $\frac{15}{8}=\frac{5}{1}.\frac{3}{8}$ | $\frac{6}{1}.\delta$ |
| 2 | 1 | Latéraux | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 | $\frac{5}{2}$ | 3 | $\frac{7}{2}$ |
| $\frac{5}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $A\times\frac{2l-1}{1}.\frac{2l+1}{3}$ | $\frac{2}{3}.\frac{0}{1}\alpha$ | $1=\frac{3}{3}.\frac{1}{1}.1$ | $\frac{4}{3}\square=\frac{4}{3}.\frac{2}{1}\beta$ | $\frac{5}{2}=\frac{5}{3}.\frac{3}{1}\frac{1}{2}$ | $\frac{6}{3}.\frac{4}{1}\gamma$ | $\frac{35}{8}=\frac{7}{3}.\frac{5}{1}\frac{3}{8}$ | $\frac{8}{3}.\frac{6}{1}\delta$ |
| 3 | 2 | Trianglulaires | $\frac{3}{8}$ | 1 | $\frac{15}{8}$ | 3 | $\frac{35}{8}$ | 6 | $\frac{63}{8}$ |
| $\frac{7}{2}$ | $\frac{5}{2}$ | $A\times\frac{2l-1}{1}.\frac{2l+1}{3}.\frac{2l+3}{5}$ | $\frac{4}{5}.\frac{2}{3}.\frac{0}{1}\alpha$ | $1=\frac{5}{5}.\frac{3}{3}.\frac{1}{1}1$ | $\frac{6}{5}.\frac{4}{3}\square=\frac{6}{5}.\frac{4}{3}.\frac{2}{1}\beta$ | $\frac{7}{2}=\frac{7}{5}.\frac{5}{3}.\frac{3}{1}\frac{1}{2}$ | $\frac{8}{5}.\frac{6}{3}.\frac{4}{1}\gamma$ | $\frac{63}{8}=\frac{9}{5}.\frac{7}{3}.\frac{5}{1}\frac{3}{8}$ | $\frac{10}{5}.\frac{8}{3}.\frac{6}{1}\delta$ |
| 4 | 3 | Pyramidaux | $\frac{15}{48}$ | 1 | $\frac{105}{48}$ | 4 | $\frac{315}{48}$ | 10 | $\frac{693}{48}$ |

Pour déterminer les valeurs de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ etc., on fait encore usage de la symétrie de la table. Commençons par déterminer $\alpha$ et $\beta$. Si $\beta > 0$, alors $\alpha$ est nécessairement infini. En effet, par symétrie :

$$\beta = 0.\alpha$$

Or, par la troisième ligne, on sait que $\beta = \frac{1}{2}\square > 0$. Donc $\alpha = \infty$.

$$\gamma = \frac{2}{3}\beta = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}\square \qquad\qquad \delta = \frac{4}{5}\gamma = \frac{4}{5}.\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\square$$

Et de cette façon, on peut déterminer tous les termes de la progression $A$. Le terme de rang $2n+1$ sera :

$$\frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{3.5.7\ldots(2n-1)}.\frac{1}{2}\square$$

On donne la table complète ci-dessous :

| $l$ \ $q$ | | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 | $\frac{5}{2}$ | 3 | $\frac{7}{2}$ | 4 | $\frac{9}{2}$ | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $l$ | $p$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 | $\frac{5}{2}$ | 3 | $\frac{7}{2}$ | 4 |
| $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\infty$ | 1 | $\frac{1}{2}\square$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}\square$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{4}{15}\square$ | $\frac{15}{48}$ | $\frac{8}{35}\square$ | $\frac{105}{384}$ |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\square$ | 1 | $\square$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{4}{3}\square$ | $\frac{15}{8}$ | $\frac{8}{5}\square$ | $\frac{105}{48}$ | $\frac{64}{35}\square$ | $\frac{945}{384}$ |
| 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 | $\frac{5}{2}$ | 3 | $\frac{7}{2}$ | 4 | $\frac{9}{2}$ | 5 |
| $\frac{5}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{3}\square$ | 1 | $\frac{4}{3}\square$ | $\frac{5}{2}$ | $\frac{8}{3}\square$ | $\frac{35}{8}$ | $\frac{64}{15}\square$ | $\frac{315}{48}$ | $\frac{128}{28}\square$ | $\frac{3465}{384}$ |
| 3 | 2 | $\frac{3}{8}$ | 1 | $\frac{15}{8}$ | 3 | $\frac{35}{8}$ | 6 | $\frac{63}{8}$ | 10 | $\frac{99}{8}$ | 15 |
| $\frac{7}{2}$ | $\frac{5}{2}$ | $\frac{4}{15}\square$ | 1 | $\frac{8}{5}\square$ | $\frac{7}{2}$ | $\frac{64}{15}\square$ | $\frac{63}{8}$ | $\frac{128}{15}\square$ | $\frac{693}{48}$ | $\frac{512}{35}\square$ | $\frac{9009}{384}$ |
| 4 | 3 | $\frac{15}{48}$ | 1 | $\frac{105}{48}$ | 4 | $\frac{315}{48}$ | 10 | $\frac{693}{48}$ | 20 | $\frac{1287}{48}$ | 35 |
| $\frac{9}{2}$ | $\frac{7}{2}$ | $\frac{8}{35}\square$ | 1 | $\frac{64}{35}\square$ | $\frac{9}{2}$ | $\frac{128}{28}\square$ | $\frac{99}{8}$ | $\frac{512}{35}\square$ | $\frac{1287}{48}$ | $\frac{1024}{35}\square$ | $\frac{19305}{384}$ |
| 5 | 4 | $\frac{105}{384}$ | 1 | $\frac{945}{384}$ | 5 | $\frac{3465}{384}$ | 15 | $\frac{9009}{384}$ | 35 | $\frac{19305}{384}$ | 70 |

Ainsi Wallis parvient à remplir toute la table, la seule inconnue restante étant $\square$ :

> *Par exemple, si le nombre désigné par ce symbole* $\square$ *est connu, alors tous les autres restants sont aussi connus.* [39]

Dans le point de vue de Wallis, le triangle arithmétique ne présente pas une règle de construction qui relie entre eux les termes successifs mais plutôt une règle de construction qui relie entre eux les termes dont les indices diffèrent d'une unité. Dès lors, les relations de compositions entre les terme de la tables ne permettent pas de relier tous les termes entre eux, de proche en proche. La règle d'addition du triangle ne relie ici que les termes qui sont dans les cases d'une même couleur. Cette idée que l'interpolation du

39. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 189, p.169 : « Verbi gratia, si numerus hac nota $\square$ designatus supponatus cognitus, reliqui omnes etiam cognoscentur »

triangle arithmétique brise les relations d'adjacence au sein de la table constituera un réel obstacle pour Leibniz, lorsqu'il sera amené à travailler sur la question. En effet, à mesure que l'on crée de nouvelles interpolations, on crée en réalité de nouveaux triangles arithmétiques, imbriqués les uns dans les autres mais à première vue indépendants du premier. Chaque triangle dépend d'une graine indéterminée. Ici, c'est la valeur □, que Wallis souhaite tant parvenir à résoudre.

### La valeur de □ - Tables et Continuité

En réalité les tables imbriquées ne sont pas indépendantes. La table ne donne effectivement pas de relations rationnelles entre deux termes successifs. En revanche, deux termes successifs doivent respecter une certaine relation d'ordre. En effet, les progressions sont par essence monotones. Le fait d'augmenter ou de réduire est un constituant essentiel de la loi qui relie deux termes successifs entre eux et régit finalement toute la suite. Dans ce cadre, la série $A$ est nécessaire décroissante. Ainsi, si l'on considère le terme de rang $2n+1$, il est nécessairement compris entre les deux termes mitoyens, à savoir des rangs $2n$ et $2n+2$. On obtient alors l'inégalité suivante :

$$\underbrace{\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\ldots\left(n-\frac{3}{2}\right)}{1.2.3\ldots(n-1)}}_{\text{rang } 2n} > \underbrace{\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}+\left(n-\frac{3}{2}\right)\right)}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\ldots\left(n-\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2}\square}_{\text{rang } 2n+1} > \underbrace{\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\ldots\left(n-\frac{1}{2}\right)}{1.2.3\ldots n}}_{\text{rang } 2n+2}$$

En réécrivant numérateurs et dénominateurs de chaque fraction, on obtient :

$$\frac{1.3.3.5.5\ldots(2n-3)(2n-3)(2n-1)}{2.4.4.6.6\ldots(2n-2)(2n-2)} > \square > \frac{1.3.3.5.5\ldots(2n-1)(2n-1)}{2.4.4.6.6\ldots(2n-2)(2n-2)2n}$$

La différence entre les deux encadrants vaut :

$$1-\frac{2n-1}{2n}=\frac{1}{2n}$$

Ainsi, Wallis obtient une valeur approchée de □ avec un contrôle sur l'approximation [40]. La valeur exacte est donc le produit limite :

$$\square=\frac{3.3.5.5.7.7\ldots}{2.4.4.6.6.8\ldots}$$

Or, □ est égal à l'inverse de la quadrature du quart de cercle que Wallis souhaite calculer.

> *Nous disons que cette fraction :* $\frac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times\ldots}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times\ldots}$ *poursuivie jusqu'à l'infini est précisément ce même nombre* □ *tant cherché, par rapport auquel* 1 *est ainsi de même que le cercle par rapport au carré du diamètre.* [41]

Au bout de 191 propositions, Wallis parvient donc à l'objectif principal de son ouvrage : la quadrature du cercle.

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\square}=\frac{2.4.4.6.6.8\ldots}{3.3.5.5.7.7\ldots}$$

40. En réalité, Wallis utilise la croissance de la troisième progression, de degré $\frac{1}{2}$ et non la décroissance de $A$ comme nous venons de le faire. De plus, il suppose que ce sont les rapports successifs et non les termes qui suivent une loi monotone, ce qui permet d'obtenir un contrôle quadratique, en $\frac{1}{n^2}$, là où notre approche naïve donne un simple contrôle linéaire en $\frac{1}{n}$.

41. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 191, p.180 : « Dicimus, fractionem illam $\frac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times\&c.}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times\&c.}$ in infinitum continuatam, esse ipsissimum quæsitum numerum □ præcise ; ad quem ita se habet 1, ut circula ad Quadratum diametri. »

## 6.4 La formule de Brouncker

### 6.4.1 La solution à un manque chez Wallis

#### Une solution partielle

Cette formule qu'obtient finalement Wallis peut sembler être un aboutissement, mais elle occulte en réalité l'insatisfaction manifeste de l'auteur quant à la solution du problème millénaire :

> *Bien qu'il en soit ainsi, je dois moi-même tout de même reconnaitre qu'il m'est impossible jusqu'ici de compléter la table avec des caractères de cette sorte, que ce soit pour les séries impaires comme pour les séries paires et non plus pour les emplacement impaires des séries impaires (bien que j'aie déjà montré les rapports entre les uns et les autres), cela conformément à quelque méthode de notation que ce soit (qui soit encore d'usage, de ce que j'en sais). Et bien que dans ce qui précède j'aie trouvé un certain nombre de résultats inattendus, et ce par les nombreuses friches et les chemins jusqu'alors ignorés de tous à ma connaissance perçant une trouée au travers des broussailles, j'ose tout de même espérer (pour les raisons que j'ai déjà dites) que sur ce sujet également, tout finira par aboutir à ce que l'on souhaite. Si, par hasard, quelqu'un d'autre, imprimant ses pas dans nos traces depuis là, serait enfin parvenu à ce qu'il ne m'a pas été donné d'atteindre (je ne voudrais pas, de fait, comme pour notre modeste méthode, désigner aux astucieux des limites pour toutes les autres) et aurait trouvé un moyen plus commode pour exprimer la même quantité, pour ma part, je ne le prendrais pas avec la moindre peine qui soit. Dans le même temps, j'estime qu'il ne sera pas déplaisant aux mathématiciens que fut apportée par moi quelque nouvelle lumière qui n'est pas (si j'en juge par moi-même) entièrement dérisoire quant au problème suffisamment obscur de la quadrature du cercle, et cela, je l'ai développé par les nombres, au plus loin que le permet la nature même des nombres.* [42]

Le développement en produit infini peut constituer une consolation mais ne permet pas d'achever le processus de compréhension du rapport entre le carré et le cercle. Wallis souhaite ici que ce problème soit résolu d'une certaine manière, qu'il n'est pas vraiment capable de définir. Il semble convaincu que la réduction numérique de ce rapport est structurellement limitée. Dès lors, la résolution qu'il appelle ici de ses vœux ne peut découler que d'une approche tout à fait nouvelle.

#### La proposition de Brouncker

Pour Stedall [43] pourtant, ce pas est déjà franchi par Brouncker dès 1652, lorsque Wallis fait part de ce problème à ses pairs. Considérons la troisième suite de la table :

$$\frac{1}{2}\square \ ; \ 1 \ ; \ \square \ ; \ \frac{3}{2} \ ; \ \frac{4}{3}\square \ ; \ \frac{15}{8} \text{ etc.}$$

Pour Wallis, il ne s'agit pas d'une progression à part entière. Les propriétés de termes de la suite ont été mis en évidence à partir de la symétrie du tableau. Ainsi, on dispose en fait de l'entrelacs de deux progressions, à savoir :

$$X = \quad \frac{1}{2}\square \qquad \square \qquad \frac{4}{3}\square \qquad \text{etc.}$$

$$Y = \qquad 1 \qquad \frac{3}{2} \qquad \frac{15}{8} \quad \text{etc.}$$

42. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 190, p.177 : « Ut ut sit : Ego quidem necesse habeo ut fatear, me nec ejusmodi pro seriebus imparibus quales pro paribus in Tabella, characteres ; nec serierum imparium locos impares, adhuc supplere posse, juxta aliquem (quem adhuc receptum scio) notationis modum ; (quanquam eorum ad invicem rationes jam ostenderim.) Et quanquam in superioribus, per avia non raro, et tramites nulli quod sciam antea calcatas perrumpens, insperatos exitus aliquoties invenerim ; vix tamen (ob causas jam expositas) ausim sperare, & hic item ex voto omnia successura. Si forsan alius aliquis nostra dehinc premens vestigia eo tandem perveniat quo mihi non datum est pervenire, (nollem enim pro nostri modulo aliorum item omnium ingeniis terminos indicere) & modos magis accommodos eidem quantitati exprimendæ invenerit, ego neutiquam gravatim feram. Mathematicis interim haud ingratum fore autumo me novam aliquam nec (si quid ego judico) prorsus contemnendam, obscuro satis de circuli quadratura problemati, lucem præbuisse ; eamque : eatenus numeris explicasse quatenus ipsa numerorum natura ferat. »

43. [102] J. A. Stedall, *Catching Proteus : The Collaborations of Wallis and Brouncker. I. Squaring the Circle* dans *Notes and Records of the Royal Society of London* , Vol. 54, No. 3, 2000 - pp. 293-316

Pour déterminer la valeur de $\square$, il est nécessaire de comprendre la loi globale qui régit la progression, ce que Wallis n'est pas parvenu à faire. Brouncker fait part à Wallis d'une solution totalement nouvelle et très surprenante dans le contexte. Wallis souhaite qu'il la publie, mais face au refus de ce dernier, il décide de la mentionner à la toute fin de l'*Arithmetica Infinitorum* dans le prolongement de la Proposition 191 :

> *Malheureusement, Wallis déplore le fait que Brouncker ne soit pas laissé convaincre d'écrire lui-même ce texte, ni d'expliquer comment il a découvert ses fractions, et Wallis en fut d'ailleurs incapable lui-même.* [44]

En effet, la présentation de la formule de Brouncker que donne Wallis est entièrement synthétique et ne donne que peu de moyen de saisir la méthode de découverte du Lord anglais.

### 6.4.2 Construction de la formule

#### Reconstitution

Donnons néanmoins quelques détails sur cette formule, et la reconstitution de la méthode de découverte qu'en donne Stedall. La formule de Brouncker est la suivante :

$$\underbrace{\frac{3.3.5.5.7.7\ldots}{2.4.4.6.6.8\ldots}}_{\text{formule de Wallis}} = \underbrace{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\ldots}}}}}_{\text{formule de Brouncker}}$$

Stedall montre qu'en réalité ces deux formules sont de natures totalement différentes. Si la première est un développement infini, la seconde constitue une seule quantité, qui doit être considérée comme un tout. Cette distinction est à l'origine d'une confusion entre le deux formules qui durera jusqu'au XIX$^{\text{ème}}$ siècle :

> *De fait, au début du Idem aliter (et à nouveau plus tard dans A treatise of algebra), Wallis induit sérieusement en erreur ses lecteurs ainsi que la postérité en citant simplement les premières des fractions de Brouncker comme une alternative à sa propre formule :* $\frac{3}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots$ *Cela a conduit Euler et de nombreux autres mathématiciens postérieurs à la recherche de méthodes pour déduire la fraction de Brouncker de celle de Wallis, une tâche impossible à ce stade puisque la fraction de Brounker ne peut être reliée à celle de Wallis qu'en prenant toute la suite infinie dont elle est la première.* [45]

Pour rétablir la méthode de Brouncker, Stedall s'appuie sur l'indication que donne Wallis dans la Proposition 191 :

> *Puisque ce noble seigneur constata que si l'on fait le produit entre eux de deux nombres impairs successifs, on obtient un rectangle qui est d'une unité de moins par rapport au carré du nombre pair intermédiaire (par exemple* $1\times3=3=4-1=2^2-1$ *;* $3\times5=15=16-1=4^2-1$ *etc.). Et de la même manière, deux nombres pairs successifs produisent un rectangle qui est d'une unité de moins que le carré du nombre impair intermédiaire (par exemple* $0\times1=0=1-1=1^2-1$ *;* $2\times4=8=9-1=3^2-1$ *;* $4\times6=24=25-1=5^2-1$ *etc.). Il cherchait donc par quel rapport l'on doit faire croître les facteurs pour qu'ils produisent un rectangle non pas d'une unité moindre que ce carré mais égal à ce carré.* [46]

---

44. [114] J. Stedall, *Introduction : The Arithmetic of Infinitesimals* dans J. Wallis, *The Arithmetic of Infinitesimals*, *tr.* J. Stedall, Springer, New York, 2004 - Introduction de J. Stedall p.xix : « Unfortunately, Wallis complained, Brouncker could not be persuaded to write this piece himself, nor to explain how he had discovered his fractions, and Wallis was unable to do so either. »

45. [114] J. Stedall, *Introduction : The Arithmetic of Infinitesimals* dans J. Wallis, *The Arithmetic of Infinitesimals*, *tr.* J. Stedall, Springer, New York, 2004 - Introduction de J. Stedall p.xix : « In fact at the beginnig of the *Idem aliter* (and again later in *A treatise of algebra*) Wallis seriously misled his readers and posterity by quoting just the first of Brouncker's fractions, as an alternative to his own $\frac{3}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots$ This led Euler and several other later mathematicians to look for ways of deriving Brouncker's fraction from Wallis's, an impossible task as it stands because Brouncker's fraction can only be related to Wallis's by taking the entire infinite sequence of which it is the first. »

46. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 191, p.182 : « Animadvertit siquidem Nobilissimus Vir, numeros duos impares continue proximos, si invicem ducantur, rectangulum facere, quod quadrato intermedii numeri paris sit unitate minus (puta $1\times3=3=4-1=Q2-1$. $3\times5=15=16-1=Q4-1$ &c.). Et similiter duos pares proxime positos rectangulum facere quod unitate minus sit quam quadratum intermedii numeri imparis (puta $0\times1=0=1-1=Q1-1$. $2\times4=8=9-1=Q3-1$. $4\times6=24=25-1=Q5-1$. &c.). Quærebat igitur qua ratione augendi erant factores, ut prodirent rectangula, non quadratis illis unitate minutis, sed ipsis quadratis æqualia. »

Ainsi, d'après Wallis, Brouncker cherche deux quantités $\alpha$ et $\beta$ telles que

$$(x+\alpha)(x+2+\beta) = (x+1)^2$$

Selon Stedall, cette seule condition n'est pas suffisante. Il faut que $\alpha$ et $\beta$ respectent une certaine règle de continuité, de sorte que les deux facteurs $x+\alpha$ et $x+2+\beta$ puissent encore être considérés comme deux termes consécutifs d'une même progression. Il s'agit donc de trouver une quantité qui dépende du facteur $x$ suivant une certaine loi régulière. On note cette quantité $\varepsilon(x)$. Le problème revient alors à résoudre cette équation fonctionnelle :

$$(x+\varepsilon(x))(x+2+\varepsilon(x+2)) = (x+1)^2$$

Cette méthode de résolution n'est pas donnée dans l'*Arithmetica Infinitorum*, et Stedall la reconstitue à partir des remarques de Wallis sur l'encadrement progressif de la limite.

- ⋆ On commence par $\varepsilon_1(x) = \frac{1}{2x}$ car $x + \frac{1}{2x}$ est une bonne approximation de $\sqrt{x^2+1}$. Mais le produit est trop grand :
$$\left(x + \frac{1}{2x}\right)\left(x+2+\frac{1}{2x+4}\right) > (x+1)^2$$
- ⋆ Pour corriger cet excès, on diminue le premier facteur en ajoutant une quantité au dénominateur de la fraction :
$$\left(x + \frac{1}{2x+\alpha}\right)\left(x+2+\frac{1}{2x+4}\right) = (x+1)^2$$
- ⋆ On résout et on obtient $\alpha = \frac{9}{x+4}$. On devrait donc poser :
$$\varepsilon_2'(x) = \frac{1}{2x + \frac{9}{x+4}}$$
Alors comme $\varepsilon_2'(x) < \varepsilon_1(x)$, on trouverait un produit trop petit :
$$(x+\varepsilon_2'(x))(x+2+\varepsilon_2'(x+2)) < (x+\varepsilon_2'(x))(x+2+\varepsilon_1(x+2)) = (x+1)^2$$
Il s'agirait alors d'appliquer à nouveau la même méthode pour corriger ce manque.
- ⋆ Ce n'est pourtant pas le chemin que choisit Stedall. Elle remplace la quantité $\alpha$ déterminée par l'équation, par une autre quantité : $\alpha' = \frac{9}{2x}$. L'argument de Stedall engage encore la régularité de la loi qui régit $\varepsilon(x)$. Comme il y a $2x$ dans le premier dénominateur, on le prolonge également dans le second. Ainsi, on pose en réalité :
$$\varepsilon_2(x) = \frac{1}{2x + \frac{9}{2x}}$$
Cette opération présente pourtant l'inconvénient qu'elle rend inopérante le raisonnement que nous venions de faire sur la relation d'ordre. En effet, si $x \geq 4$, on a :
$$(x+\varepsilon_2'(x))(x+2+\varepsilon_2'(x+2)) \leq (x+\varepsilon_2(x))(x+2+\varepsilon_2(x+2))$$
Ainsi, on ne peut pas affirmer, sans calcul, que ce deuxième produit est lui-aussi inférieur au carré $(x+1)^2$. Stedall n'évoque pas cette remarque. De fait, ce nouveau produit est bien inférieur au carré souhaité, bien qu'un calcul soit nécessaire pour le prouver.
- ⋆ Pour corriger ce nouveau manque, on applique encore la même méthode : on augmente la quantité $\varepsilon_2$ en ajoutant au dernier dénominateur une quantité $\beta$ de sorte que :
$$\left(x + \frac{1}{2x + \frac{9}{2x+\beta}}\right)\left(x+2+\frac{1}{2x+4+\frac{9}{2x+4}}\right) = (x+1)^2$$
- ⋆ On résout et on obtient $\beta = \frac{25}{x+6}$. Là encore, on remplace par $\beta' = \frac{25}{2x}$ sans changer l'inégalité du produit obtenu, ce qui nous permet de poser :
$$\varepsilon_3(x) = \frac{1}{2x + \frac{9}{2x+\frac{25}{2x}}}$$

⋆ On poursuit ainsi, en corrigeant successivement les manques et les excès, tout en appliquant la modification qui permet à la loi d'être régulière, c'est à dire d'avoir toujours la valeur $2x$ à chaque dénominateur. On constate rapidement que la suite des numérateurs est constituées des carrés successifs des nombres impairs. Ainsi, on finit par induire facilement la limite de ces corrections :

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2x + \frac{9}{2x+\frac{25}{2x+\frac{49}{2x+\dots}}}}$$

Stedall montre dans sa reconstitution l'importance capitale de la régularité, au point, comme nous l'avons vu, que cela peut entrainer des faiblesses au sein des raisonnements. Cette hypothèse de régularité, qui aurait pu permettre à Brouncker de faire des corrections *ad hoc* aux éléments correctifs déterminés par des équations, trouve sa justification dans le problème que pose Wallis : trouver une règle de progression pour les lignes impaires de son tableau.

**La progression de type factoriel**

Posons :

$$\begin{aligned} b(x) &= \frac{2x + \varepsilon(2x)}{2} \\ &= x + \frac{1}{2}\varepsilon(2x) \end{aligned}$$

On décrit une loi de progression qui vérifie :

$$b(x)b(x+1) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

Cette loi trouve son utilité au sein de la formule de Wallis :

> *Je suggérerais que les fractions de Brouncker soient dérivées non pas comme une alternative à celles de Wallis, mais en réponse au problème que Wallis pose mais échoue à résoudre dans la Proposition 190, et c'est bien seulement dans ce contexte que s'établit la relation entre les fractions de Brouncker et celles de Wallis.* [47]

$$\begin{aligned} \square &= \frac{3.3.5.5.7.7\dots}{2.4.4.6.6.8\dots} \\ &= 2.\frac{1.1.3.3.5.5.7.7\dots}{2.2.4.4.6.6.8\dots} \\ &= 2.\frac{b\left(\frac{1}{2}\right).b\left(\frac{3}{2}\right).b\left(\frac{5}{2}\right).b\left(\frac{7}{2}\right).b\left(\frac{9}{2}\right).b\left(\frac{11}{2}\right).b\left(\frac{13}{2}\right).b\left(\frac{15}{2}\right)\dots}{b\left(\frac{3}{2}\right).b\left(\frac{5}{2}\right).b\left(\frac{7}{2}\right).b\left(\frac{9}{2}\right).b\left(\frac{11}{2}\right).b\left(\frac{13}{2}\right).b\left(\frac{15}{2}\right).b\left(\frac{17}{2}\right)\dots} \\ &= 2b\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \varepsilon(1) \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2+\frac{25}{2+\frac{49}{2+\dots}}}} \end{aligned}$$

On peut désormais comprendre la confusion soulignée par Stedall entre les deux formules. Les termes du produit de Wallis ne sont pas réductibles à ceux de la fraction de Brouncker. Cette dernière doit être au contraire considérée comme un terme global, située dans une progression particulière qui suit cette nouvelle loi, que nous dirons de type factoriel. Cette solution permet bien de décomposer les termes des lignes impairs du tableau comme des progressions suivant une loi unique et régulière. Ainsi, pour la troisième ligne, c'est-à-dire la progression de degré $\frac{1}{2}$ située entre les monadiques et les latéraux, on obtient :

47. [114] J. Stedall, *Introduction : The Arithmetic of Infinitesimals* dans J. Wallis, *The Arithmetic of Infinitesimals*, *tr.* J. Stedall, Springer, New York, 2004 - Introduction de J. Stedall p.xix : « I would suggest that Brouncker's fractions were derived not as alternatives to Wallis's, but in response to the problem that Wallis set but failed to solve in Proposition 190, and that only in that context does the relationship between Brouncker's fractions and Wallis's fall into place »

| **Côté $l$** | **Ligne 3** | **Décomposition** |
|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\square$ | $b\left(\frac{1}{2}\right)$ |
| 1 | 1 | $b\left(\frac{1}{2}\right).\frac{b\left(\frac{3}{2}\right)}{1}$ |
| $\frac{3}{2}$ | $\square$ | $b\left(\frac{1}{2}\right).\frac{b\left(\frac{3}{2}\right)}{1}.\frac{b\left(\frac{5}{2}\right)}{2}$ |
| 2 | $\frac{3}{2}$ | $b\left(\frac{1}{2}\right).\frac{b\left(\frac{3}{2}\right)}{1}.\frac{b\left(\frac{5}{2}\right)}{2}.\frac{b\left(\frac{7}{2}\right)}{3}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

Pour les autres lignes, on obtient des lois similaires. En effet, on a vu que pour passer d'une ligne à l'autre, il faut multiplier chaque terme par le facteur facteur suivant :

$$\begin{aligned}\frac{l+\frac{2p-1}{2}}{\frac{2p+1}{2}} &= \frac{2l+2p-1}{2p+1} \\ &= \frac{1}{2p+1}.\frac{(2l+2p-1)^2}{2l+2p-1} \\ &= \frac{1}{2p+1}.\frac{b\left(2l+2p-\frac{3}{2}\right).b\left(2l+2p-\frac{1}{2}\right)}{2l+2p-1}\end{aligned}$$

Ainsi, pour la cinquième ligne, de degré $\frac{3}{2}$ et située entre les latéraux et les triangulaires, on obtient :

| **Côté $l$** | **Ligne 5** | **Décomposition** |
|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}\square$ | $b\left(\frac{1}{2}\right).\frac{b\left(\frac{3}{2}\right)}{3}.\frac{b\left(\frac{5}{2}\right)}{2}$ |
| 1 | 1 | $b\left(\frac{1}{2}\right).\frac{b\left(\frac{3}{2}\right)}{3}.\frac{b\left(\frac{5}{2}\right)}{1}.\frac{b\left(\frac{7}{2}\right)}{3}$ |
| $\frac{3}{2}$ | $\frac{4}{3}\square$ | $b\left(\frac{1}{2}\right).\frac{b\left(\frac{3}{2}\right)}{3}.\frac{b\left(\frac{5}{2}\right)}{1}.\frac{b\left(\frac{7}{2}\right)}{2}.\frac{b\left(\frac{9}{2}\right)}{4}$ |
| 2 | $\frac{5}{2}$ | $b\left(\frac{1}{2}\right).\frac{b\left(\frac{3}{2}\right)}{3}.\frac{b\left(\frac{5}{2}\right)}{1}.\frac{b\left(\frac{7}{2}\right)}{2}.\frac{b\left(\frac{9}{2}\right)}{3}.\frac{b\left(\frac{11}{2}\right)}{5}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

La solution de Brouncker permet donc d'exprimer tous les termes du triangle par une formule finie et uniforme. C'est cet objectif que Leibniz aura en tête bien plus tard, sans pourtant voir dans cette formule une solution à son problème.

## Conclusion

Wallis ne mentionne pas une fois le terme combinatoire dans son ouvrage. Son approche est résolument tournée vers l'arithmétique, et farouchement opposée à l'algèbre, dont il juge visiblement trop étroit le domaine d'effectivité :

> *Wallis semble donc vouloir affirmer que la géométrie ne peut pas être renfermée à l'intérieur des frontières fixées par le pouvoir expressif de l'Algèbre de Descartes, si au sein de celle-ci on veut pouvoir aborder et résoudre le problème de la quadrature de toutes les courbes qu'on s'accorde à admettre comme recevable. Ce constat semble ainsi justifier a posteriori le refus que Wallis a opposé, dès le début de son traité, à tout usage possible de cet Algèbre, en choisissant une forme de collaboration entre arithmétique et géométrie bien différente de celle assurée par celle-ci.* [48]

Cependant, nous avons montré que la méthode de Wallis ne consiste pas seulement à réduire les problèmes géométrique à des relations et des procédures purement numérique. La notion centrale est celle de progression. L'objectif du géomètre est de rendre sans cesse plus intelligibles les mécanismes cachés au sein des règles qui relient entre eux les termes d'une progression, car au mieux l'on saisit ces règles, au mieux l'on pourra les appliquer à des termes nouveau, dans des processus d'induction et d'interpolation. Cette analyse des progressions se fonde sur une pratique tabulaire conforme à ce que nous avons déjà analysé chez les jeune Leibniz. Wallis considère les termes de la table comme les composés ou les dérivés des termes voisins. Cela justifie que nous qualifions de combinatoire cette approche arithmétique du calcul de quadrature.

Wallis distingue l'induction qui permet de prolonger une progression à partir de ses premiers termes et l'interpolation qui cherche à trouver de nouveaux termes intercalés entre ceux qui sont déjà existants :

> *Deux autres concepts mathématiques fondamentaux traversent l'ensemble de l'Arithmetica infinitorum. De la première page jusqu'à la fin, Wallis s'appuie sur l'induction, et tout au long de la seconde moitié du livre, sur l'interpolation. Par induction, Wallis entend qu'un modèle établi pour quelques cas peut raisonnablement être supposé se poursuivre indéfiniment.* [49]

En réalité, nous avons montré que l'induction est elle-même composée de deux opérations. La première est analytique et consiste à trouver la loi, la deuxième est synthétique est consiste à l'appliquer aux termes qui suivent. Cette seconde opération, que nous avons qualifié d'extrapolation, est n'est pas substantiellement différente de l'interpolation. L'induction à proprement parler réside principalement dans la première opération, dans laquelle il s'agit d'extraire la loi à partir des premiers termes. Là encore, Wallis montre que la pratique tabulaire constitue un outil très efficace. Bien qu'il ne formalise pas, comme le fera Leibniz, de méthodes qui réduisent de façon systématique une certaine progression à des éléments constitutifs, comme les génératrices, la table permet néanmoins de mettre en évidence les rapports locaux qu'ont les termes les uns avec les autres. Nous avons vu cependant que l'interpolation est abordée de deux manières, une par la formule comme pour les expression des nombres figurés ou l'évocation des exposants irrationnels et l'autre par la table, que nous avons amplement évoquée.

Wallis propose des réflexions très profondes sur la nature des lois qui régissent les progressions et la manière dont les géomètres parviennent à les formaliser. Malgré sa pratique tabulaire manifeste, la conception que Wallis fait des tables est toujours du type "liste de listes". En effet, un table accueille en son sein des progressions dont il s'agit de trouver la loi sous-jacente. Ainsi, même les lignes intermédiaires, entre les nombres figurés, pour lesquelles Wallis ne peut pas trouver d'expression générale simple au moyen des symboles usuels, sont décrites comme des progressions. D'ailleurs, ce que Wallis divise, dans son interpolation, ce ne sont pas les progressions elles-mêmes mais la progression des rapports qui relie une progression à une autre de dimension d'une unité supérieure. La table est pourtant essentielle dans son raisonnement sur un point central : la symétrie. La symétrie de la table permet à Wallis d'avoir une pratique du type "tableau à doubles entrées" malgré le fait que sa conception théorique soit du type "liste de listes". Cet exemple illustre à nouveau la distinction qu'il est nécessaire d'établir entre le discours qui se trouve dans la table et celui qui ce trouve autour.

48. [79] M.Panza, *Newton et les origines de l'analyse : 1664-1666*, A. Blanchard, Paris, 2005 - p.80.

49. [114] J. Stedall, *Introduction : The Arithmetic of Infinitesimals* dans J. Wallis, *The Arithmetic of Infinitesimals*, *tr.* J. Stedall, Springer, New York, 2004 - Introduction de J. Stedall p.xxiv : « Two other fundamental mathematical concepts run through the whole of the Arithmetica infinitorum. From the first page to the end, Wallis relied on induction, and throughout the second half of the book, on interpolation. By induction, Wallis meant that a pattern established for a few cases could reasonably be assumed to continue indefinitely. »

# Chapitre 7

# L'interpolation de Mengoli

## Introduction

En 1672, dans un ouvrage publié en italien, intitulé *Circolo*[1], Pietro Mengoli résout la quadrature du cercle de façon très similaire à ce que l'on peut trouver chez Wallis, dans l'*Arithmetica Infinitorum*. Néanmoins, si les deux procédés se ressemblent, ils s'appuient sur des démarches radicalement différentes. Chez Wallis, les nombres figurés apparaissent au milieu de l'*Arithmetica Infinitorum* de façon inattendue et c'est la structure symétrique de la table qui permet alors de résoudre les problèmes d'interpolation. Wallis n'emploie jamais le terme de "triangle" pour parler de la table des nombres combinatoires, car cette table est fondamentalement une "liste de listes", c'est-à-dire la succession des séquences des nombres figurés pour chaque degré. Le triangle arithmétique est donc employé sous l'angle des progressions. Chez Mengoli, l'apparition du triangle arithmétique est également présentée comme une contingence. Mais ce n'est pas la même structure combinatoire qui l'intéresse. Mengoli fonde sa méthode sur des travaux qu'il avait entrepris dans les années 1650 et publiés en 1659 dans ses *Geometriæ speciosæ elementa*[2]. Dans cet ouvrage, Mengoli développe de nombreuses vues originales et fécondes sur des tables analogues au triangle arithmétique. Parmi ces tables, disposées en structure triangulaires, Mengoli construit une table de quadrature qui s'avère être identique au triangle harmonique que Leibniz a découvert plus de douze ans plus tard. La méthode de Mengoli, bien qu'employant la même interpolation que Wallis, se distingue donc par le rôle que joue la table au sein de la méthode combinatoire. Il ne s'agit pas de ranger les progressions dans une seule table, mais plutôt de composer et de comparer des tables analogues entre elles. Les régularités ne sont pas extraites par induction mais plutôt par analogie.
Si le triangle harmonique apparait bel et bien au sein des *Geometriæ speciosæ elementa*, ainsi que dans le *Circolo*, sa structure de triangle de différences est en revanche absente. Pour Maria Rosa Massa-Esteve, le triangle harmonique est seulement utilisé comme outil dans le cadre du calcul de la quadrature :

> *Cependant, Mengoli n'avait pas pour objectif de définir cette troisième table (le triangle harmonique) comme une table singulière, ou de montrer ses propriétés, mais plutôt de calculer la quadrature du cercle en utilisant le triangle harmonique interpolé.*[3]

On pourrait alors s'attendre à ce que Mengoli utilise le triangle harmonique comme instrument tabulaire de calcul. Or nous allons voir que ce n'est pas le cas, ou plutôt que le calcul tabulaire n'est pas envisageable pour d'autres tables que le triangle arithmétique.

1. [70] P. Mengoli, *Circolo*, Bologne 1672
2. [69] P. Mengoli, *Geometriæ speciosæ elementa*, Bologne, 1659
3. [64] M.R. Massa-Esteve, *The Harmonic triangle in Mengoli's and Leibniz's works* dans les *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, Vol. 16, 2018 - p.243 : « However, Mengoli's aim was not to define this third triangular table (harmonic triangle) as a singular table, or to show its properties, but rather to calculate the quadrature of the circle using the interpolated harmonic triangle. »

## 7.1 La nature des triangles de nombres dans les *Geometriæ speciosæ elementa*

Les *Geometriæ speciosæ elementa* sont composés de six tomes, appelés « Elément » (« *Elementum* »). Les tables apparaissent principalement dans trois d'entre eux :

> *Tout au long de l'ouvrage, les tables triangulaires servent d'outils propices aux calculs. Dans l'Elementum primum, les termes des tables triangulaires sont des nombres et ils sont utilisés pour obtenir le developpement de n'importe quelle puissance binomiale. Dans l'Elementum Secundum, les termes sont des sommes employée afin d'obtenir la somme des puissances p-ième des $t-1$ premiers entiers. Enfin, dans l'Elementum sextum, les termes sont des figures geometriques ou des formes, et ils sont utilisés pour obtenir les quadrature de ces figures.* [4]

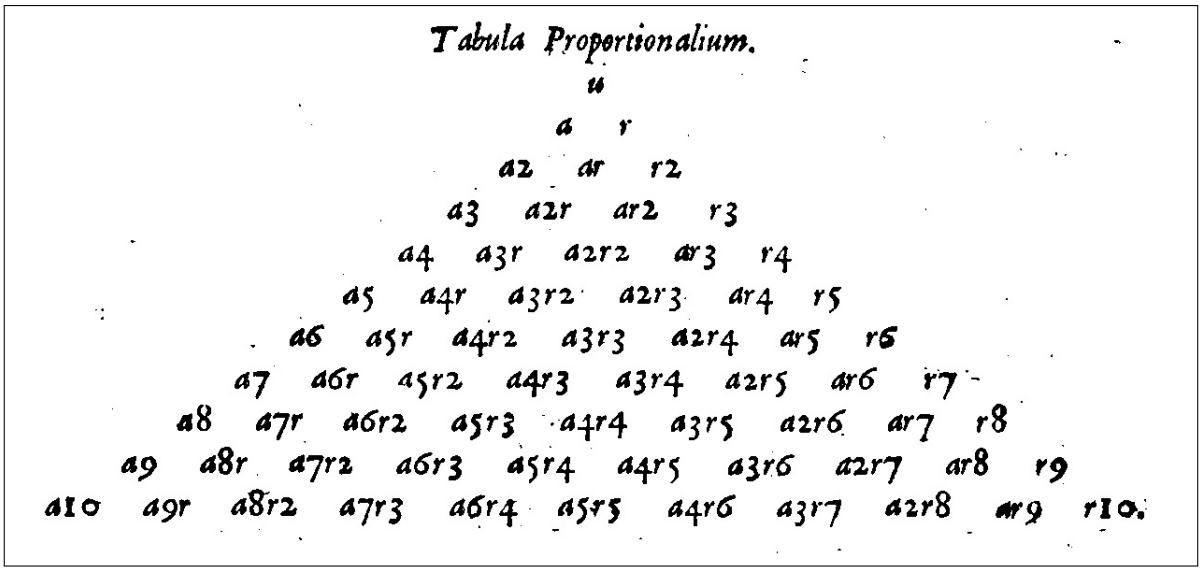
Néanmoins, Mengoli rédige en introduction un résumé de son ouvrage intitulé « Au lecteur des Eléments » (« *Lectori Elementario* »). Dans ce résumé, Mengoli donne quelques développements supplémentaires quant aux raisons qui l'amènent à introduire les différentes tables triangulaires. Malheureusement, les tables de l'*Elementum sextum* sont absentes du résumé.

### 7.1.1 Origine euclidienne du problème

Comme nous l'avions mentionné au sujet des *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ*, les *Eléments* d'Euclide ont largement influencé l'œuvre de Mengoli. Le titre de son ouvrage : *Geometriæ speciosæ elementa*, ou « éléments d'une géométrie spécieuse » incarne bien la tension entre modernes et anciens qui se joue au sein de l'œuvre :

> *Mengoli, qui connaît le travail d'Archimède et de Cavalieri, introduit ainsi un élément nouveau dans sa géométrie, à savoir l'algèbre de Viète. Par cet usage de l'algèbre, Mengoli peut être considéré comme un moderne. Mais de fait, les Geometræ speciosæ elementa utilisent comme source d'inspiration les Eléments d'Euclide et en appliquent le style.* [5]

Dès lors, la première table triangulaire que Mengoli construit n'est pas le triangle arithmétique mais ce qu'il nomme la « Tables des proportionels » (« *Tabula proportionalium* »), qui est une formalisation directe du Problème 2 du Livre 8 des *Eléments* d'Euclide.




Mengoli, *Geometriæ speciosæ elementa*, Bologne, 1659 - *Lectori Elementario* p.14

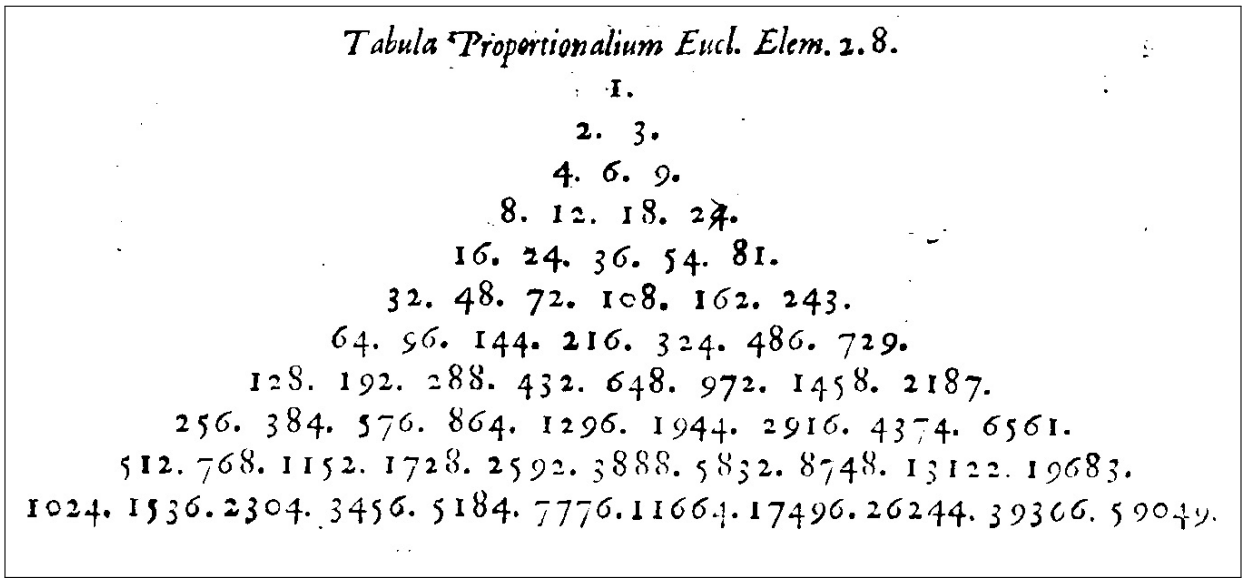
4. [62] M.R. Massa-Esteve, *Algebra and geometry in pietro Mengoli (1625 - 1686)* dans *Historia Mathematica*, Vol. 33, 2006 - p.88 : « Throughout the book triangular table served as useful algebraic tools for calculations. In the *Elementum primum*, the terms of the triangular tables are numbers and they are used to obtain the development of any binomial power. In the *Elementum secundum*, the terms are summations used to obtain the sum of the $p$th powers of the first $t-1$ integers. Finally, in the *Elementum sextum*, the terms are geometric figures or forms and they are used to obtain the quadratures of these figures. »

5. [61] M.R. Massa-Esteve, *La théorie euclidienne des proportions dans les Geometræ speciosæ elementa (1659) de Pietro Mengoli* dans la *Revue d'histoire des sciences*, tome 56, N.2, 2003 - p.460

La référence est par ailleurs explicite :

> *Et ainsi, de la même manière qu'Euclide dans 2. 8. a constitué la table numérique triangulaire des proportionnels, à partir de l'unité et des nombres minimaux donnés ayant entre eux un rapport donné : ainsi par la même méthode, il a paru bon de former une table littérale triangulaire des caractères proportionnels, à partir d'une unité donnée et de deux nombres indéterminés déterminables qu'on se propose et qui ont entre eux un rapport indéterminé. En outre, pour le caractère de l'unité, nous avons posé la lettre u au sommet de la table triangulaire, et pour les nombres indéterminés déterminables, les deux lettres a et r.* [6]

Mengoli donne ensuite la table issue des *Elements* d'Euclide, qui consiste à évaluer la table littérale pour $a = 2$ et $b = 3$ :


Tabula Proportionalium Eucl. Elem. 2. 8.

1.

2. 3.

4. 6. 9.

8. 12. 18. 24.

16. 24. 36. 54. 81.

32. 48. 72. 108. 162. 243.

64. 96. 144. 216. 324. 486. 729.

128. 192. 288. 432. 648. 972. 1458. 2187.

256. 384. 576. 864. 1296. 1944. 2916. 4374. 6561.

512. 768. 1152. 1728. 2592. 3888. 5832. 8748. 13122. 19683.

1024. 1536. 2304. 3456. 5184. 7776. 11664. 17496. 26244. 39366. 59049.

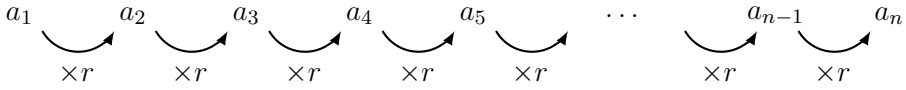
Mengoli, *Geometriæ speciosæ elementa*, Bologne, 1659 - *Lectori Elementario* p.15

**Traitement des progressions chez Euclide**

La Proposition 2 du Livre 8 consiste dans le problème suivant :

> *Trouver tant de nombres qu'on voudra qui soient les plus petits nombres proportionnels à une raison donnée.* [7]

Il s'agit d'un problème d'arithmétique. Une suite proportionnelle est une séquence finie de nombres $a_1$, $a_2$, …, $a_n$ telle que chaque terme ait le même rapport rationnel $r$ avec son successeur :




On peut alors considérer toutes les suites proportionnelles possibles de $n$ termes construites sur le rapport $r$. Euclide s'intéresse alors aux suites proportionnelles minimales, c'est-à-dire celles qui ont les nombres les plus petits. Dans la proposition précédente, la première du Livre VIII, Euclide montre qu'une condition suffisante est que les termes extrêmes de la suite soient premiers entre eux. En réalité, c'est aussi une condition nécessaire, puisque si les deux termes extrêmes ont un facteur commun, ce facteur est

6. [69] P. Mengoli, *Geometriæ speciosæ elementa*, Bologne, 1659 - *Lectori Elementario* p.13 : « Itaque sicut Euclides in 2.8. numerosam triangularem tabulam instituit proportionalium ab unitate, datisque minimis a numeris, datam inter se rationem habentibus : ita eadem methodo, placuit litteratam triangularem tabulam disponere proportionalium characterum, à data unitate, propositisque duabus indeterminatis determinabilibus numeris, indeterminatam inter se rationem habentibus. Pro charactere autem unitatis, litteram $u$ collocavimus, in vertice triangularis tabulæ, & pro indeterminatis determinabilibus numeris, duas litteras $a$, & $r$. »

7. [26] F. Peyrard, *Les Œuvres d'Euclide : Les éléments, livres VIII-X*, Paris, 1816 - p.3, Livre VIII, Proposition 2

nécessairement partagé par tous les termes de la suite. Et donc l'on peut diviser tous ces termes pour obtenir une suite avec des termes plus petits. Si $a_1$ et $a_n$ sont premiers entre eux et $a_n = a_1 \times r^{n-1}$, alors :

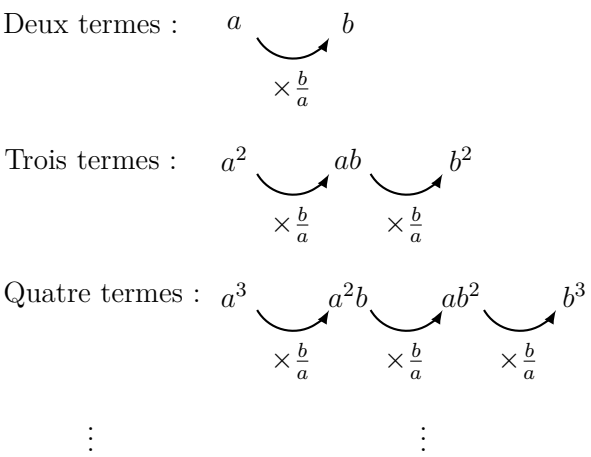
$$\frac{a_n}{a_1} = r^{n-1} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} = \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}$$

Donc $a_1 = a^{n-1}$ et $a_n = b^{n-1}$. Les termes extrêmes d'une telle suite sont nécessairement des puissances. Ainsi, si le rapport $r$ correspond à la fraction irréductible $\frac{b}{a}$ alors l'unique suite proportionnelle minimale de rapport $r$ et de longueur $n$ sera la suite :

$$a^{n-1} \;;\; a^{n-2}b \;;\; a^{n-3}b^2 \;;\; \ldots \;;\; a^2b^{n-3} \;;\; ab^{n-2} \;;\; b^{n-1}$$

Euclide ne montre pas que la condition est nécessaire, ainsi il ne se soucie pas de cette unicité. De fait, la Proposition 2 demande que pour un rapport $r$ donné, on puisse trouver des suites proportionnelles minimales de chaque longueur, peu importe s'il y en a une ou plusieurs.

- ⋆ Euclide considère $a$ et $b$ premiers entre eux et ayant entre eux le rapport $r$.
- ⋆ S'il considère $a^2$ et $b^2$, ils restent premiers entre eux, et leur rapport est $r^2$. Il suffit alors d'ajouter la moyenne proportionnelle $ab$ pour obtenir une suite proportionnelle de rapport $r$ ayant trois termes.
- ⋆ De même pour $a^3$ et $b^3$, on peut insérer les troisièmes moyennes proportionnelles $a^2b$ et $ab^2$ pour obtenir une suite proportionnelle de rapport $r$ avec quatre termes.
- ⋆ Et ainsi pour toutes les longueurs. Comme les termes extrêmes sont premiers entre eux, la suite obtenue est minimale.



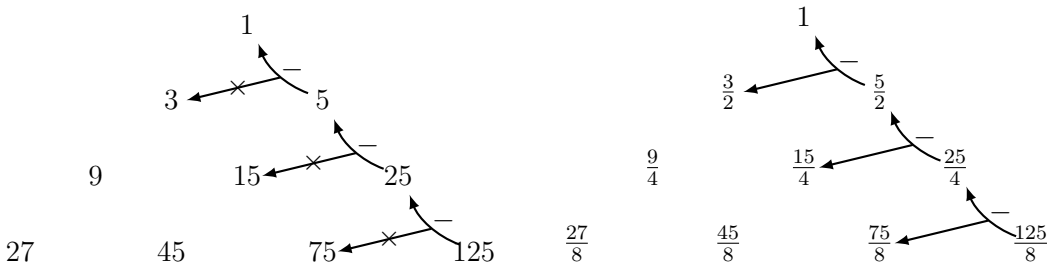

Euclide emploie un raisonnement typiquement combinatoire. A partir des éléments simples $a$ et $b$, il génère tous les termes qui sont solutions de son problème. L'aspect combinatoire de la méthode est renforcé par la démarche synthétique du problème : pour le résoudre, il suffit de donner explicitement des solutions. Ces solutions n'étant pas nécessairement uniques, puisqu'on ne considère ici que la condition suffisante et pas la nécessaire, Euclide ne cherche pas à les déterminer par l'analyse en divisant le rapport des deux termes extrêmes de la suite. Les solutions sont produites par une construction récursive et synthétique, typique de la méthode combinatoire.

### 7.1.2 Génération itérative des termes dans une table

#### Un triangle de différence

Bien que Mengoli relie à très juste titre sa table des proportionnels au problème arithmétique d'Euclide, il faut néanmoins rappeler que ce dernier n'évoque jamais aucune table. Cette interprétation tabulaire de la construction euclidienne est un ajout de Mengoli, peut-être influencée par les représentations diagrammatiques des exemplaires des *Eléments* auxquels il a eu accès, mais plus certainement orientée par son approche tabulaire des progressions, qu'il avait déjà développée dans ses *Novæ Quadraturæ*

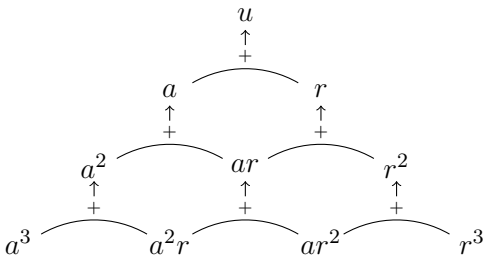
*Arithmeticæ*. Malgré cela, la table des proportionnels n'est pas considéré comme un triangle de différence, comme il le sera plus tard par Leibniz.
De fait, la table numérique que Mengoli attribue à Euclide est un triangle de différences, comme ceux que nous avons étudiés dans la première partie de notre travail.
Mais ce rapprochement se fonde sur une coïncidence, qui veut qu'Euclide ait choisit comme exemple de générateurs 2 et 3 qui différent d'une unité. Ainsi, en choisissant d'autres générateurs $a$ et $r$ qui ne vérifient pas $r = a + 1$, la relation de différence disparaît de la table des proportionnels. Pour la rétablir, il faut diviser les générateurs par leur différence :




Pourtant, il existe une autre possibilité pour faire de la table des proportionnels un triangle de différences. Au lieu de considérer que la différence entre les deux variables est d'une unité, nous pouvons supposer $a$ et $r$ comme les deux parties complémentaires de cette unité $u$. Alors on aurait bien :

$$a^n r^{m+1} + a^{n+1} r^n = a^n r^n \underbrace{(a + r)}_{=u} = a^n r^n$$

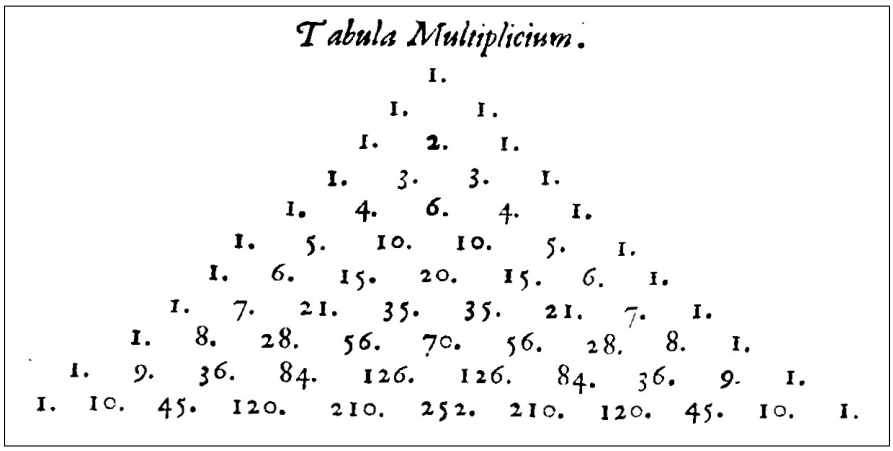
Donc, la table des proportionnels pourrait être construite de façon itérative, par différences successives depuis l'un de ses côtés, ou bien par addition depuis l'une de ses bases :




Or Mengoli n'ignore pas que ce type de les relations itératives existe au sein de certaines tables.

**Les cornes du triangle**

En effet, le triangle arithmétique qu'il nomme la « Table des mutliples » (« *Tabula Multiplicium* ») est construit de façon itérative :

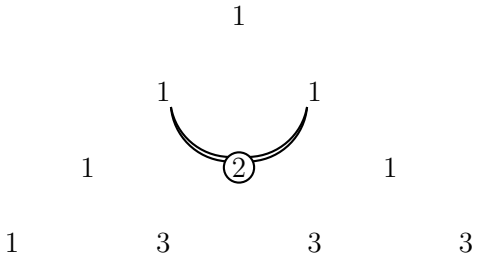



Mengoli, *Geometriæ speciosæ elementa*, Bologne, 1659 - *Lectori Elementario* p.15

Mengoli introduit cette table sans réelle motivation, selon le style de synthèse euclidien :

> *En plus de la table des proportionnels susdite, il faut qu'on dispose d'une autre table triangulaire, que les analystes appellent la tables des multiples : dans laquelle on ordonne des unités au sommet et sur les cotés ; dans la surface par contre les nombres tels que chaque nombre de la base inférieure est la somme des deux nombres adjacents de la base supérieure, comme des cornes sur son front : ainsi qu'il apparaîtra à la lecture de cette table que nous développons depuis le sommet jusqu'à la dixième base.* [8]

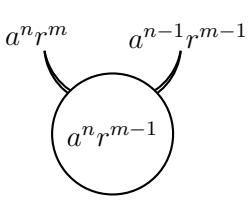
Le triangle arithmétique n'a donc pas de rapport *a priori* avec la table des proportionnels. La construction que présente Mengoli suit la formule de Pascal. Les coefficients sont déterminés de façon récursive, en ajoutant deux à deux les termes de la ligne supérieure. Mengoli illustre cette procédure par des « cornes au front » (« *cornua fronti* »), ce qui se peut représenter comme dans ce diagramme :



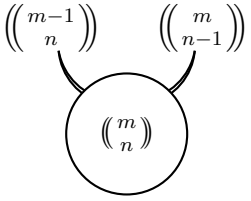

Mengoli emploie régulièrement cette image pour décrire la relation itérative au sein du triangle arithmétique, y compris dans le *Circolo* de 1672. Il semble qu'elle soit en fait indissociable de la table des multiples, comme le suggère la proposition 19 du *Elementum Secundum* :

> *Etant donné que les tables des proportionnels et des multiples sont congruentes, chaque proportionnels a ses nombres dénominateurs en proportions réciproques des multiples qui sont dans ses cornes.* [9]

Les nombres dénominateurs sont les exposants des variables $a$ et $r$. Mengoli montre ici qu'ils ont le rapport inverse de celui les multiples qui se trouvent à l'emplacement des cornes :




Tables des proportionnels




Tables des multiples

Donc $\frac{n}{m-1} = \frac{\left(\!\binom{m}{n-1}\!\right)}{\left(\!\binom{m-1}{n}\!\right)}$

Dès lors, on comprend que Mengoli continue à considérer la table des proportionnels selon une grille de lecture euclidienne. Ce qui empêche la relation itérative que nous avions mis en évidence lorsque l'on considère $a + r = u$.

Les deux côtés d'un triangle qui se tient sur sa base et pointe son sommet vers le haut sont parfois nommés « jambes » (« *crura* »). C'est un vocabulaire que Mengoli emploie dans un ouvrage qu'il rédige en 1655, intitulé *Via regia ad Mathematicas*, c'est-à-dire la « Voie royale vers les mathématiques ». Il l'utilise en particulier pour décrire la construction de la table des multiples, sans en donner le diagramme :

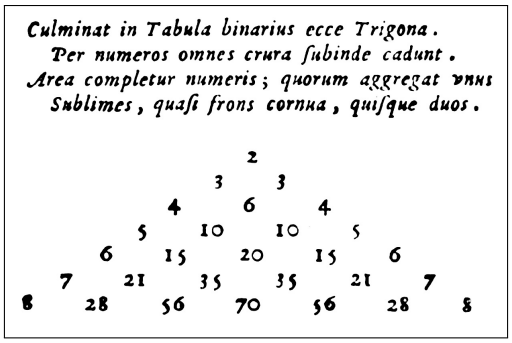
> *Voilà que le nombre binaire tient place de sommet dans la table triangulaire. Puis dessous, les jambes tombent par tous les nombres. On complète la surface par les nombres dont l'un est la somme de chaque paire au-dessus, comme un front et des cornes.* [10]

8. [69] P. Mengoli, *Geometriæ speciosæ elementa*, Bologne, 1659 - *Lectori Elementario* p.16 : « Præter tabulam proportionalium prædictam, oportet aliam tabulam triangularem habere in promptu, quam Analystæ vocant, multiplicium tabulam : in qua unitates in vertice ordinantur, & in lateribus ; in area vero numeri, quorum unusquisque inferioris basis numerus, duorum, sibi, quasi cornua fronti, adiacentium superioris basis numerorum est aggregatum ; ut ex ipsius tabulæ patebit lectura ; quam exponimus extensam, a vertice usque ad decimam basim. »

9. [69] P. Mengoli, *Geometriæ speciosæ elementa*, Bologne, 1659 - *Lectori Elementario* p.71 : « Proportionalium, & multiplicium tabulis congruentibus, quæque proportionalis, habet numeros denominatores, reciproce proportionales, ut in suis cornibus multiplices. »

10. [68] P. Mengoli, *Via regia ad mathematicas per arithmeticam, algebram speciosam, & planimetriam*, Bologne, 1655 - p.11 : « Culminat in Tabula binarius ecce Trigona. Per numeros omnes crura subinde cadunt. Area completur numeris ; quorum aggregat unus sublimes, quasi frons cornua, quisque duos. »

Mengoli nous fournit finalement le diagramme dans le *Circolo*, où il reprend cette construction :




Mengoli, *Circolo*, Bologne, 1672 - p.3

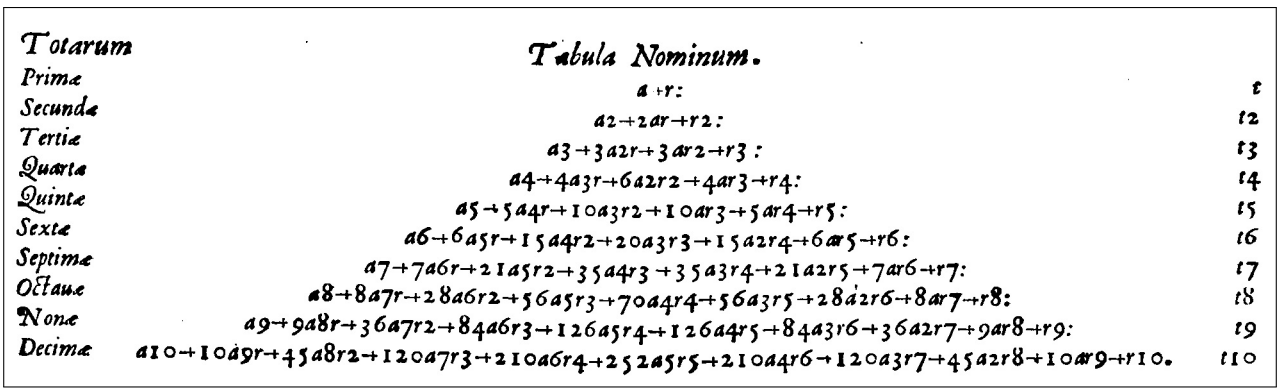
Dès lors en 1659, Mengoli dispose de tout le nécessaire pour faire état de la structure combinatoire de sa table des proportionnels. Dans le traité *De Circolo*, il mentionne finalement la propriété du triangle harmonique au moyen de l'image des jambes, comme nous le verrons plus tard. Mais cette révélation, faite *a posteriori*, ne s'engage jamais au sein des raisonnements du géomètre italien. Seul le triangle arithmétique, construit par un processus algorithmique, dispose d'une réelle structure combinatoire propre à servir au cœur des démonstrations.

**Conséquence de la nature des variables sur la nature de la table**

En réalité, la table de proportionnels de Mengoli ne peut pas être considérée comme un triangle de différence à part entière. En effet, $a$ et $r$ sont introduits comme des variables qui généralisent la solution arithmétique d'Euclide et donc ce sont *a priori* des entiers naturels. D'ailleurs, lorsque Mengoli établit de nombreuses tables pour évaluer ses calculs littéraux, il choisit systématiquement $a$ et $r$ comme des entiers. Dès lors, il n'est pas possible d'avoir $a + r = u$, c'est-à-dire la condition nécessaire pour que la table soit un triangle de différence.
Cependant $a$ et $r$ ne sont tout de même pas considérés comme deux variables équivalentes, bien qu'il les ait introduites comme telles. Pour Mengoli, $a$ et $r$ sont bien les parties complémentaires d'un tout $t$, ce qui justifie par ailleurs le choix des lettres : $a$ initiale de « abscisse » (« *abscissa* ») et $r$ initiale de « reste » (« *residua* »). Mais ce tout $t$ ne peut pas être l'unité $u$, puisque l'unité est indivisible par définition. Nous voyons ici que les contraintes du cadre euclidien que Mengoli s'impose à lui-même ont des conséquences majeures sur sa méthode.

### 7.1.3 Fusion de deux tables hétérogènes : la table des noms

Après avoir introduit la tables des proportionnels et la tables des multiples, Mengoli se propose de fusionner les deux triangles au travers d'une nouvelle table : les « Tables des Noms » (« *Tabula Nominum* ») :




Mengoli, *Geometriæ speciosæ elementa*, Bologne, 1659 - *Lectori Elementario* p.18-19

**Construction de la table**

La présence des signes "+" entre les termes d'une même ligne est possiblement un ajout de l'éditeur car Mengoli présente cette table comme une construction *ad hoc* issue des produits terme à terme des deux tables précédentes. Ce n'est qu'après qu'il justifie l'adjonction des signes entre les termes pour former des binômes :

> *On appelle de plus un binôme un nombre dont on ne nomme pas une unique quantité totale, mais plutôt les quantités de ses deux parties qui composent entièrement le tout. Ainsi dira-t-on que le nombre cinq est un binôme lorsqu'on le dénommera à partir de ses parties reliant le nombre deux mais aussi le nombre trois, comme s'il avait deux noms. En outre, il a paru bon que le caractère du nombre binômial soit composé des caractères des deux parties, une petite croix, qui est le signe de l'addition, venant s'insérer entre elles.* [11]

Ainsi, le binôme est considéré ici comme un "bi-nom", c'est-à-dire que le tout est nommé à partir de la liste de ses parties. La table des noms permet de lire au travers de son nom, la composition d'une certaine puissance de la quantité $t$ :

> *Il apparaît qu'on parcourt des yeux les caractères autant qu'on lit les mots par lesquels on peut les exposer.* [12]

Cette nouvelle table se lit ligne par ligne. Chaque ligne incarne une certaine quantité et les termes de cette lignes formes ses différentes parties. Le fait que ces parties correspondent précisément aux produits des termes des deux tables précédentes n'est pas justifié et apparait donc comme un heureux hasard, à l'image de l'apparition inattendue des nombres figurés dans l'*Arithmetica Infinitorum* de Wallis. D'ailleurs, Mengoli en convainc le lecteur par un raisonnement inductif :

> *Et ces théorèmes pourront être aisément démontrés par l'induction, la valeur de chaque lettre étant déterminée.* [13]

Ainsi, les trois tables introduites par Mengoli, c'est-à-dire celles de l'*Elementum primum*, suivent trois structures distinctes et indépendantes :

- ⋆ La table des proportionnels est constituée de progressions géométriques de plus en plus longues.
- ⋆ La table des multiples est constituée de coefficients constuits en suivant un schéma combinatoire local, donné par la formule de Pascal.
- ⋆ La table des noms est constituée des différentes sous-parties des puissance d'un binôme, réparties par espèce.

11. [69] P. Mengoli, *Geometriæ speciosæ elementa*, Bologne, 1659 - *Lectori Elementario* p.18 : « Dicitur autem binomius numerus, cuius non una tota quantitas nominatur, sed eius duarum partium quantitates totum integre compenentium. Ut numerus quinarius tunc binomius diectur, cum a binario, atque ternario copulatis eius partibus denominabitur, quasi duo habens nomina. Characterem autem binomii numeri placuit ex characteribus duarum partium componi, crucicula interveniente, quæ signum est additionis. »

12. [69] P. Mengoli, *Geometriæ speciosæ elementa*, Bologne, 1659 - *Lectori Elementario* p.20 : « Præstat characteres oculis percurrere, quam voces legere, quibus ipsa possent exponi. »

13. [69] P. Mengoli, *Geometriæ speciosæ elementa*, Bologne, 1659 - *Lectori Elementario* p.20 : « Quæ theoremata facile demonstrabuntur per inductionem, determinato cuiusque litteræ valore. »

## 7.2 Triangle Harmonique et tables des quadratrices

Malgré la grande rigueur dont Mengoli souhaite faire preuve dans ses raisonnements, il assume néanmoins un rôle considérable donné à l'induction. Certes, les démonstrations sont faites pour des cas particuliers et donc la généralisation de ces preuves relève du raisonnement inductif. Mais c'est un fait très commun à cette époque qui relève plus des difficultés à formaliser que de la structure du raisonnement lui-même. De fait, les transpositions formelles auxquelles nous procédons pour donner la preuve dans le cas général traduisent littéralement les opérations de l'auteur dans le cas particulier. C'est une pratique historiographique classique qui ne trahit pas la force déductive des calculs, mais au contraire tente de la rétablir pour le regard du lecteur actuel.
En revanche, l'induction à laquelle nous faisons ici référence est bien celle que nous avons trouvée chez Wallis. Il s'agit pour Mengoli d'extraire des relations et des régularités à partir de listes de calculs, conséquentes mais naturellement finies.

### 7.2.1 Sommes discrètes

#### Définition des sommes

L'abscisse $a$ est variable à plus d'un titre. En effet, elle varie dans un premier temps de façon corrélée avec le reste $r$. Si le tout $t$ est évalué à une certaine valeur, qui est un nombre entier, alors l'abscisse $a$ peut prendre toutes les valeurs entières entre 1 et $t-1$. En effet, ni $a$ ni $r$ ne peuvent être nulles pour que $t$ reste un binôme. Mais $t$ est lui-même une quantité indéterminée. Ainsi, l'abscisse $a$ dispose d'un champ de variation pour chaque valeur donnée de $t$, à laquelle elle est subordonnée. Mengoli construit donc une table qui liste toutes les valeurs possibles de tous les proportionnels présents sur la table, c'est-à-dire les dix premières lignes, pour chaque champs de variation de l'abscisse $a$ dans les cas où le tout $t$ est inférieur à 10.

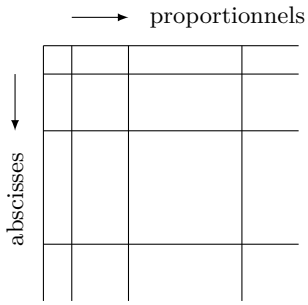
- ⋆ Sur les onze lignes de rang inférieur à 10, le nombre de proportionnels est : $1+2+3+\cdots+11=66$
- ⋆ Le tout $t$ peut prendre les valeurs entre 2 et 10 et pour chaque valeur, l'abscisse $a$ peut prendre $t-1$ valeurs. Il y en a donc $1+2+3+\cdots+9=45$ valeurs de $(a,t)$ possibles.

Mengoli construit donc une table de 45 lignes et de 66 colonnes. Les 45 lignes sont regroupée en 9 bandes pour chaque valeurs de $t$. C'est alors qu'il introduit les « espèces » (« *species* ») qui sont les sommes de toutes les valeurs possibles d'un proportionnel, pour le tout $t$ fixé. Une espèce est donc la somme d'une case de la table, c'est-à-dire la somme des différentes valeurs d'un proportionnel dans une même bande :

> *Dans la table précédente, nous avons développé les quantités en progression ; dans la suivante nous rassemblons les ensembles pour chaque nombre à partir de tous les proportionnels pour la même appellation (qui avaient été compris auparavant au titre de chaque abscisse du nombre, prise une à une). Il va de soi pour l'ensemble issu de toutes les abscisses que nous les désignions par le caractère O.a.* [14]

Cette table, comme la précédente, n'est pas une table triangulaire mais un tableau à double entrée qui liste les valeurs numériques de chaque espèce en fonction de la valeur du tout $t$. L'abscisse $a$ est devenue une variable muette. Dès lors le problème que se pose Mengoli consiste à déterminer la relation entre les espèces et les différentes valeurs du tout $t$.

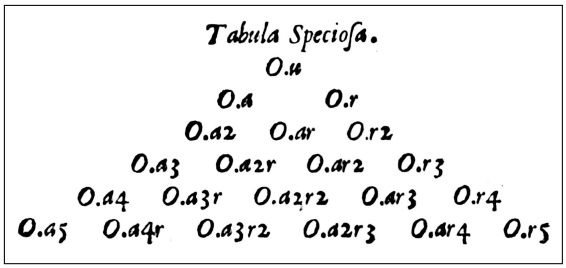
14. [69] P. Mengoli, *Geometriæ speciosæ elementa*, Bologne, 1659 - *Lectori Elementario* p.53 : « In præcedenti tabula progressiuas quantitates expandimus : in sequenti colligimus, cuiusque numeri massas ex omnibus eiusdem appellationis proportionalibus, pro unaquaque numeri abscissione supra singillatim acceptis : videlicet massam ex ominbus abscissis, quam significamus charactere *O.a.* »




**Tables des sommes discrètes**

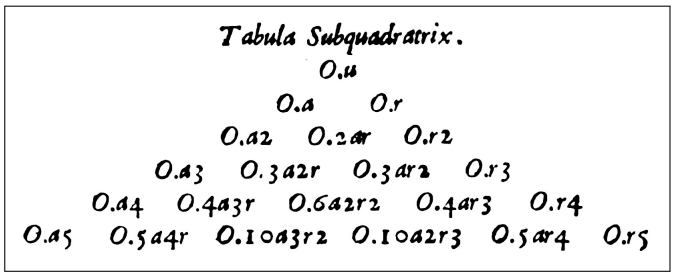
Dans l'*Elementum Secundum*, Mengoli introduit trois tables triangulaires. Ces tables sont introduites sans donner de motivation. Certes, les deux premières sont présentées comme les versions sommées des tables précédentes, à savoir celles des proportionnels et des noms. Mais la troisième, celle des quadratrices, semble à première vue une pure construction arbitraire.

⋆ La « Table Spécieuse » (« *Tabula Speciosa* ») est constituée des sommes des proportionnels :




Mengoli, *Geometriæ speciosæ elementa*, Bologne, 1659 - p.25

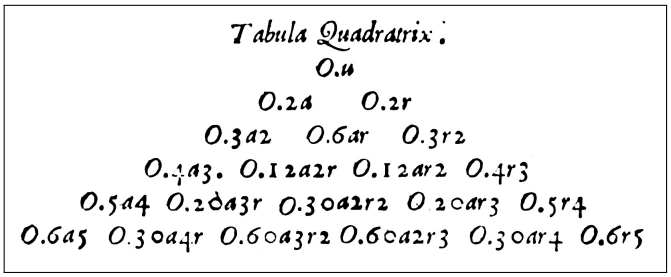
⋆ La « Tables des Sous-quadratrices » (« *Tabula Subquadratrix* ») est constituée des sommes des nominés, c'est-à-dire les produits des proportionnels et des multiples :




Mengoli, *Geometriæ speciosæ elementa*, Bologne, 1659 - p.25

⋆ La « Tables des Quadratrices » (« *Tabula Quadratrix* ») est constituée des sous-quadratrices multipliées par le rang de leur base augmenté d'une unité (sachant que pour Mengoli, le premier rang correspond à la seconde ligne de la table) :

> *Si l'on avait multiplié une certaine quantité sous-quadratrice par le nombre plus grand d'une unité que l'est l'ordre de sa base : on appellera Quadratrice la quantité produite.* [15]




Mengoli, *Geometriæ speciosæ elementa*, Bologne, 1659 - p.25

15. [69] P. Mengoli, *Geometriæ speciosæ elementa*, Bologne, 1659 - p.23 : « Si quælibet subquadratrix quantitas, multiplicata fuerit per numerum unitate maiorem ; quam sit ordo suæ basis : producta quantitas, dicetur, Quadratrix. »

La première proposition de l'*Elementum Secundum* donne néanmoins une propriété cruciale de la table spécieuse. Elle est symétrique :

> *Dans la table spécieuse, et ce pour un nombre quelconque et n'importe quelle base, la première espèce est égale à la dernière, et de même pour la seconde et l'avant-dernière, la troisième et l'antépénultième, et ainsi de suite.* [16]

Cette propriété s'applique naturellement aux deux autres tables qui sont issues des multiplications terme à terme de la table spécieuse par des tables symétriques.
L'objectif de Mengoli est de déterminer les relations entre les espèces et les quantités totales $t$, c'est-à-dire déterminer le polynôme $P_{n,m}$ tel que :

$$\sum_{a=1}^{t-1} a^m (\underbrace{t-a}_{=r})^n = P_{m,n}(t)$$

Mengoli remplit une partie de cet objectif lors de la Proposition 22 qui déterminer le monôme dominant du polynôme $P_{n,m}$ :

$$\sum_{a=1}^{t-1} a^m r^n = \frac{1}{(m+n+1)\left(\!\binom{m+1}{n}\!\right)} t^{m+n+1} + \dots$$

### 7.2.2 Démonstration : deux voies

Pour atteindre ce résultat, Mengoli emprunte deux voies simultanées au sein desquelles les tables jouent un rôle distinct :

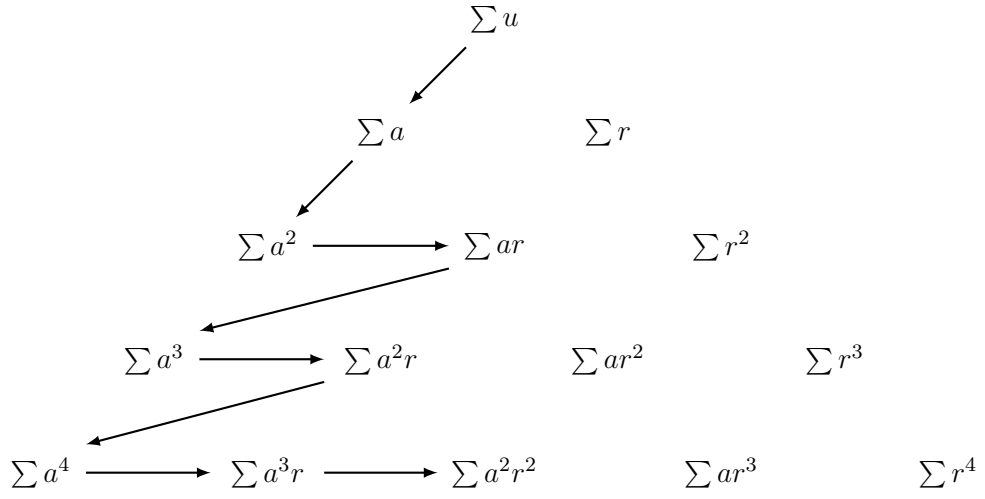
- ⋆ une méthode empirique et récursive
- ⋆ une méthode générale et formelle

#### Méthode empirique et récursive

L'une des méthodes de démonstration consiste à faire le calcul directement pour toutes les espèces des onze premières lignes du triangle. Par symétrie de la table, Mengoli réduit les 66 espèces à seulement $1+1+2+2+3+3+4+4+5+5+6 = 36$ équations. La procédure est récursive, dans le sens où les calculs pour certains termes sont nécessaires pour faire les calculs d'autres termes. Ainsi la table spécieuse donne un ordre de marche pour faire la liste des équations :

> *Pour la démonstration, il faut procéder depuis les espèces ayant les premières bases dans la table vers les suivantes ; et au sein des bases particulières, depuis les espèces extérieures vers les intérieures.* [17]

Cela revient à suivre l'ordre suivant :




16. [69] P. Mengoli, *Geometriæ speciosæ elementa*, Bologne, 1659 - p.26 : « In tabula speciosa, cuiusque numeri, & in qualibet basi, species prima, & ultima, sunt æquales ; item secunda, & penultima ; tertia, & tritultima ; & sic deinceps »

17. [69] P. Mengoli, *Geometriæ speciosæ elementa*, Bologne, 1659 - p.37 : « Oportet in demonstrando, procedere, a prioribus basibus tabulæ speciosæ, ad posteriores ; & in singulis basibus, ab exterioribus speciebus, ad interiores. »

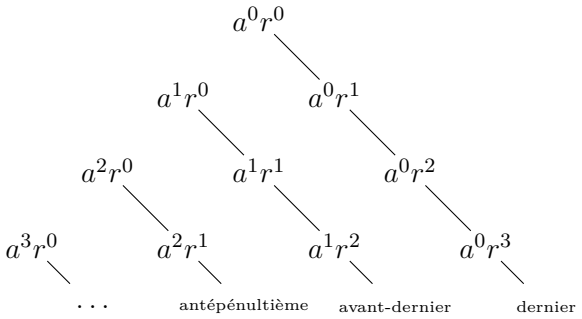
De fait, l'ordre indiqué respecte bien le caractère récursif des différentes espèces, c'est-à-dire qu'une espèce va dépendre uniquement de celles qui ont déjà été calculées en suivant cette procédure. Cet ordonnancement correspond à une structure combinatoire de la table qui reste implicite. Les relations entre une espèce et celles dont elle dépend ne sont pas explicitées. Mengoli procède par tâtonnement, espèce après espèce dans l'espoir de faire émerger des lois générales à partir des premières expressions.

**Méthode générale et formelle**

Dans cette seconde méthode [18], Mengoli détermine par quels coefficients il faut multiplier chaque espèce, pour que le coefficient dominant de chaque polynôme $P_{n,m}$ soit égal à 1. Pour cela, Mengoli détermine les incréments de chaque espèce, à savoir la quantité dont l'espèce augmente lorsqu'on ajoute une unité au tout $t$.
Dès lors l'incrément de $O.am.rn$ vaut :

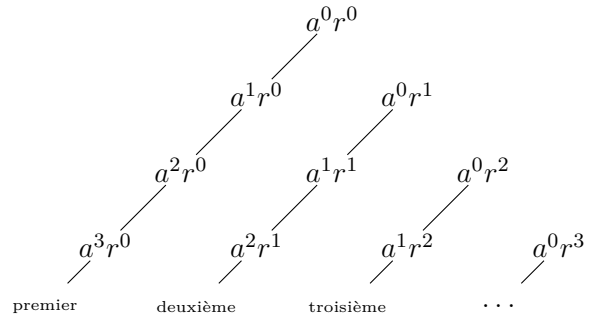
$$\begin{aligned}
\sum_{a=1}^{t} a^m r^n - \sum_{a=1}^{t-1} a^m r^n &= \sum_{a=1}^{t} a^m (t+1-a)^n - \sum_{a=1}^{t-1} a^m (t-a)^n \\
&= \sum_{a=1}^{t} a^m (t-a+1)^n - \sum_{a=1}^{t-1} a^m (t-a)^n \\
&= t^m + \sum_{a=1}^{t-1} a^m \left((t-a+1)^n - (t-a)^n\right) \\
&= t^m + \sum_{a=1}^{t-1} a^m \left((r+1)^n - r^n\right) \\
&= t^m + \sum_{a=1}^{t-1} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^m r^k \right) \\
&= t^m + \sum_{k=0}^{n-1} \left( \sum_{a=1}^{t-1} \binom{n}{k} a^m r^k \right) \\
&= \sum_{a=1}^{t-1} n a^m r^{n-1} + \sum_{a=1}^{t-1} \frac{n(n-1)}{2} a^m r^{n-2} + \cdots + \sum_{a=1}^{t-1} n a^m r + \sum_{a=1}^{t-1} a^m + t^m
\end{aligned}$$

Dans ce calcul, nous avons mis $a^m$ en facteur. Mengoli dit qu'il développe selon les derniers côtés, c'est-à-dire les diagonales qui fixent la puissance de l'abscisse :




Mais par symétrie de la table, on peut également mettre $r^n$ en facteur. On développe alors selon les premiers côtés, c'est-à-dire les diagonales qui fixent la puissance du reste :

18. *Cf* [62] M.R. Massa-Esteve, *Algebra and geometry in pietro Mengoli (1625 - 1686)* dans *Historia Mathematica*, Vol. 33, 2006 - p.91




Ainsi l'incrément de $O.am.rn$ vaut également :

$$\sum_{a=1}^{t-1} mr^n a^{m-1} + \sum_{a=1}^{t-1} \frac{m(m-1)}{2} r^n a^{m-2} + \cdots + \sum_{a=1}^{t-1} mr^n a + \sum_{a=1}^{t-1} r^n + t^n$$

Dans la Proposition 20, Mengoli montre que deux espèces voisines sur une même base sont égales en première approximation, c'est-à-dire qu'elles ont le même monôme dominant, si l'on multiplie la première par l'exposant de l'abscisse de la seconde et la seconde par l'exposant du reste de la première. Ainsi si l'on considère des espèces successives sur une certaine base de la table spécieuse : $O.am.rn$ et $O.a(m-1).r(n+1)$. Alors, on obtient :

$$(n+1)\ O.am.rn \sim m\ O.a(m-1).r(n+1)$$

Pour en faire la démonstration, Mengoli montre que ces deux espèces sont les espèces dominantes de l'espèce qui se trouve au dessous d'elles, à savoir $O.am.r(n+1)$. Il développe les incréments de cette espèce selon les premiers côtés puis selon les derniers côtés :

⋆ l'incrément de $O.am.r(n+1).$ vaut, selon les premiers côtés :

$$\begin{aligned} & \sum_{a=1}^{t-1} mr^{n+1} a^{m-1} + \sum_{a=1}^{t-1} \frac{m(m-1)}{2} r^{n+1} a^{m-2} + \cdots + \sum_{a=1}^{t-1} mr^{n+1} a + \sum_{a=1}^{t-1} r^{n+1} + t^{n+1} \\ = \quad & m\ O.a(m-1).r(n+1) + \ldots \end{aligned}$$

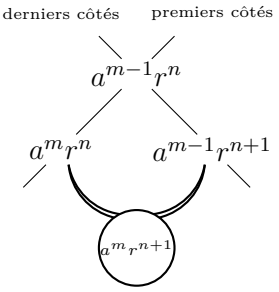
⋆ l'incrément de $O.am.r(n+1).$ vaut, selon les derniers côtés :

$$\begin{aligned} & \sum_{a=1}^{t-1} (n+1)a^m r^n + \sum_{a=1}^{t-1} \frac{(n+1)n}{2} a^m r^{n-1} + \cdots + \sum_{a=1}^{t-1} (n+1)a^m r + \sum_{a=1}^{t-1} a^m + t^m \\ = \quad & (n+1)\ O.am.rn + \ldots \end{aligned}$$

Donc on obtient bien l'égalité souhaitée :

$$(n+1)\ O.am.rn + \cdots = m\ 0.a(m-1).r(n+1) + \ldots$$

Une remarque doit cependant être faite. En développant ainsi l'espèce du dessous selon les premiers côtés et selon les derniers côtés, Mengoli fait correspondre son raisonnement à la structure du triangle arithmétique, c'est-à-dire l'image des cornes. Pourtant, un autre raisonnement aurait été possible, à savoir développer l'incrément de la première espèce selon les derniers côtés et celui de la seconde selon les derniers côtés. En faisant cela, la structure du raisonnement serait en accrod avec celle du triangle harmonique, c'est-à-dire l'image des jambes :



Ce second raisonnement présente de plus l'avantage d'être plus intuitif car moins synthétique. De fait, pour déterminer les coefficients multiplicatifs nécessaires à l'égalisation, en première approximation, des deux espèces voisines, cette seconde approche, qui consiste à les développer toutes les deux pour les rapporter à une même espèce dominante de degré inférieur, est purement analytique. En revanche, l'option choisie par Mengoli demande de connaitre l'espèce de degré supérieure pour laquelle ces deux espèces constituent des espèces dominantes. Il s'agit donc de résoudre une équation. La méthode de découverte n'est pas explicitée par Mengoli, mais elle apparait clairement sur notre schéma. Mengoli a vraisemblablement pu désigner l'espèce de dessous comme la meilleure candidate dont il faut développer l'incrément, grâce à l'analogie qu'il fait [19] avec la structure en corne du triangle arithmétique.
Or, comme nous l'avions évoqué plus haut, Mengoli montre que ces rangs $n+1$ et $m$ sont en proportion inverse des nombres combinatoires correspondants dans la table des multiples :

$$\frac{m}{n+1} = \frac{\left(\!\!\binom{m}{n+1}\!\!\right)}{\left(\!\!\binom{m+1}{n}\!\!\right)}$$

Donc, pour égaliser les monômes, il faut multiplier par les termes correspondants de la table des multiples, à savoir :

$$\left(\!\!\binom{m+1}{n}\!\!\right)\ O.am.rn + \dots = \left(\!\!\binom{m}{n+1}\!\!\right)\ 0.a(m-1).r(n+1) + \dots$$

C'est ainsi que Mengoli établit la propriété principale de la tables des sous-quadratrices :

> *Dans la table des sous-quadratrices, dans une même base, les sous-quadratrices voisines sont égales, en ayant ajouté à chacune des ensembles issus de bases d'ordre inférieur.* [20]

On est donc parvenu à égaler les termes d'une même base, en multipliant les espèces par les nombres combinatoires de la table des multiples. Il reste donc à égaliser les termes des bases entre elles. Pour cela, Mengoli se concentre sur les espèces simples, à savoir $O.an$ et $O.rn$. Il lui faut à nouveau déterminer les incréments de ces deux espèces :

- ⋆ l'incrément des $O.an$ est, selon les premiers côtés :

$$t^n$$

- ⋆ l'incrément des $O.rn$ est, toujours selon les premiers côtés :

$$\sum_{a=1}^{t-1} nr^{n-1} + \sum_{a=1}^{t-1} \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2} + \dots + \sum_{a=1}^{t-1} nr + \sum_{a=1}^{t-1} u + u$$

Or, par symétrie de la table, ces deux incréments sont égaux puisque les espèces $O.an$ et $O.rn$ sont égales. Ainsi :

$$t^n = \sum_{a=1}^{t-1} nr^{n-1} + \sum_{a=1}^{t-1} \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2} + \dots + \sum_{a=1}^{t-1} nr + \sum_{a=1}^{t-1} u + u$$

Or, là encore par symétrie, ces différentes espèces issues des ensembles des puissances des restes sont égales aux ensembles des puissances des abscisses. Ainsi :

$$\sum_{a=1}^{t-1} (n+1)a^n = t^{n+1} + \dots$$

Pour égaliser les monômes des différentes espèces $O.an$, il suffit donc de la multiplier par le rang de leur base augmenté d'une unité. Dès lors, la table des quadratrices trouve sa raison d'être. Mengoli énonce sa propriété principale dans la proposition 22 :

19. Cette analogie n'est pas décrite dans la Proposition 20, mais elle l'est explicitement dans la Proposition 19, que nous avons déjà citée plus haut.

20. [69] P. Mengoli, *Geometriæ speciosæ elementa*, Bologne, 1659 - p.73 : « In tabula subquadraticum, in eadem basi, subquadratrices vicinæ sunt æquales, additis tamen utrimque massis, in inferioris ordinis basibus »

*N'importe quelle quadratrice est égale à la totalité d'ordre un de plus, et à laquelle on ôte et on ajoute en quelque sorte les totalités prise en compte, qui ne sont pas d'un ordre supériereur à sa base.* [21]

Autrement dit :

$$(m+n+1)\left(\!\!\binom{m+1}{n}\!\!\right)\sum_{a=1}^{t-1} a^m r^n = t^{m+n+1} + \dots$$

Avant de dévolopper la démonstration que nous venons de présenter comme la seconde méthode, Mengoli précise que cette propriété est évidente par induction des calculs présentés comme la première méthode :

*Cela se voit inductivement par l'hypothèse 5.* [22]

21. [69] P. Mengoli, *Geometriæ speciosæ elementa*, Bologne, 1659 - p.74 : « Quælibet quadratrix, est æqualis totæ unitate plus ordinatæ, demptis, additisque aliqualites acceptis totis, non plus ordinatis, quam sit eius basis. »

22. [69] P. Mengoli, *Geometriæ speciosæ elementa*, Bologne, 1659 - p.74 : « Patet inductione per 5.h. »

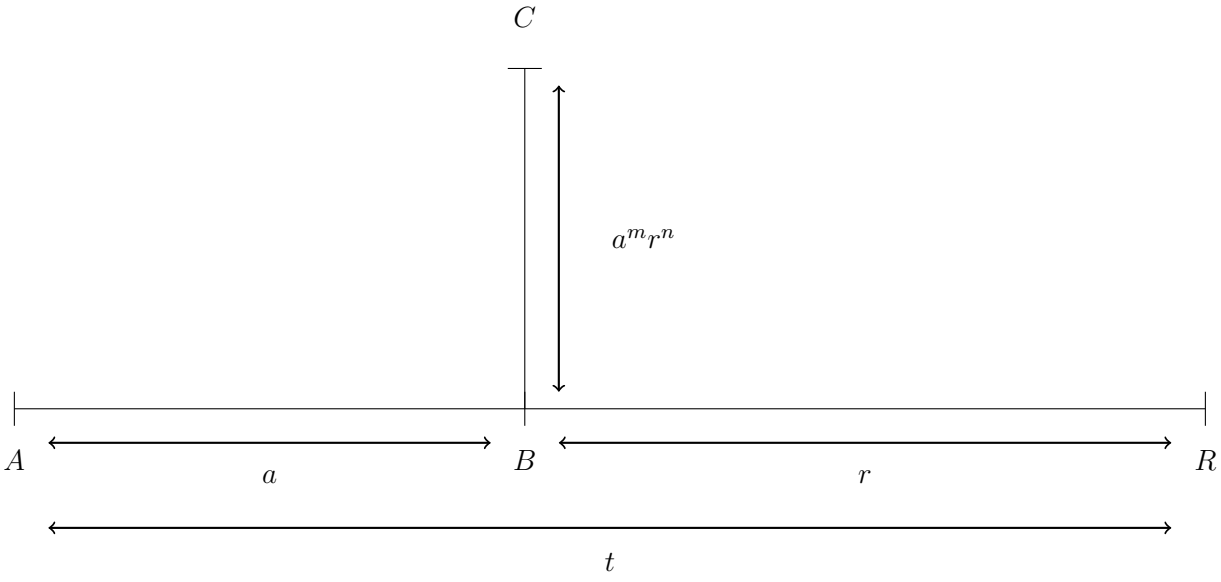
## 7.3 Quadrature et Interpolation

Comme au sein des *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ*, Mengoli se soucie du passage entre le domaine des nombres et celui des figures géométriques. Par sa démarche rigoureuse et euclidienne, il pose des socles solides à la méthode des indivisibles, à laquelle il porte beaucoup de crédit, étant l'élève de Cavalieri. La transition entre nombres et grandeurs s'effectue à travers la théorie des quasi-proportions que Mengoli développe dans l'*Elementum tertium*[23].

> *Mengoli croyait que les bases de la méthode de Cavalieri n'étaient pas suffisamment saines. Il souhaite apporter des fondations solides afin d'appliquer cette méthode à la quadrature des figures connues et de nouvelles, en particulier le cercle.*[24]

### 7.3.1 Tables de figures

Mengoli se propose dans l'*Elementum sextum* de transposer les objets discets qu'il a développés dans l'*Elementum secundum* en objets continus. Ainsi, l'abscisse et le reste sont définis comme les parties complémentaires d'un segment total $t$. Enfin, depuis le point qui sépare l'abscisse du reste, on dresse un segment perpendiculaire au tout $t$, qu'on nomme « ordonnée » (« *ordinata* »).




Mengoli considère la figure décrite par les ordonnées qui ont le même rapport avec les abscisses continues qu'un certain proportionnel discret avec les abscisses discrètes, à savoir $a^m r^n$. Cette figure, il la note $FO.am.rn$, ce qui signifie "forme de tous les ordonnées d'un certain proportionnel" :

$$FO.am.rn = \int_0^t a^m (t-a)^n da$$

Il décrit cette construction dans la définition 20 du sixième livre :

> *Et de façon générale, si, au dessus de la base, on considère la figure décrite dans le carré par rien d'autre que les ordonnées et dans laquelle, chaque ordonnée qui soit est supposée l'un de la table des proportionnels, alors on l'appelle la forme de tous tels proportionnels, et on le désigne par le caractère approprié.*[25]

23. Sur ce sujet, *Cf* [61] M.R. Massa-Esteve, *La théorie euclidienne des proportions dans les Geometræ speciosæ elementa (1659) de Pietro Mengoli* dans la *Revue d'histoire des sciences*, tome 56, N.2, 2003 - p.457-474

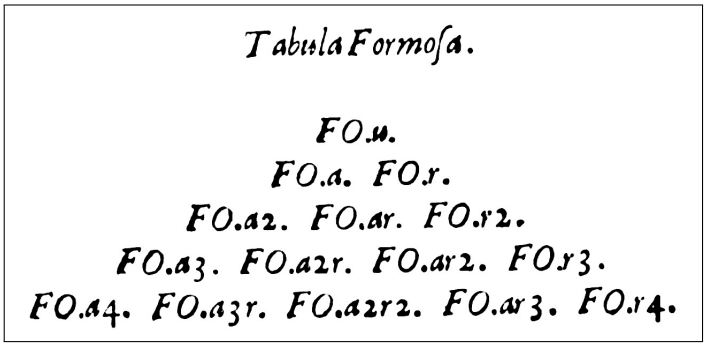
24. [62] M.R. Massa-Esteve, *Algebra and geometry in pietro Mengoli (1625 - 1686)* dans *Historia Mathematica*, Vol. 33, 2006 - p.94 : « Mengoli believed that the basis of Cavalieri's method was not sufficiently sound. He wanted to provide a solid foundation for the application of this method the square the given figures, new figures, and, especially, the circle. »

25. [69] P. Mengoli, *Geometriæ speciosæ elementa*, Bologne, 1659 - p.369 : « Et generaliter, si super basi concipiatur figura, extensa non nisi per ordinatas in quadrato : & in qua, unaquælibet ordinata, est assumpta quædam in tabula proportionalium, dicetur, Forma omnes tales proportionales aptoque significabitur charactere. »

**Introduction des tables**

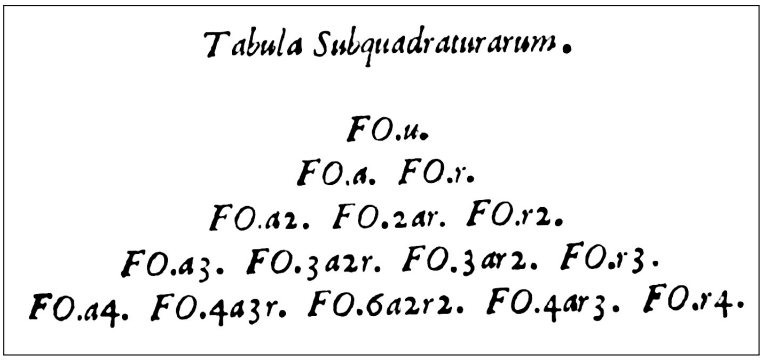
Il peut alors introduire trois tables analogues aux tables des sommes discrètes :

⋆ La « Table des Formes » (« *Tabula Formosa* ») est l'analogue de la table spécieuse :



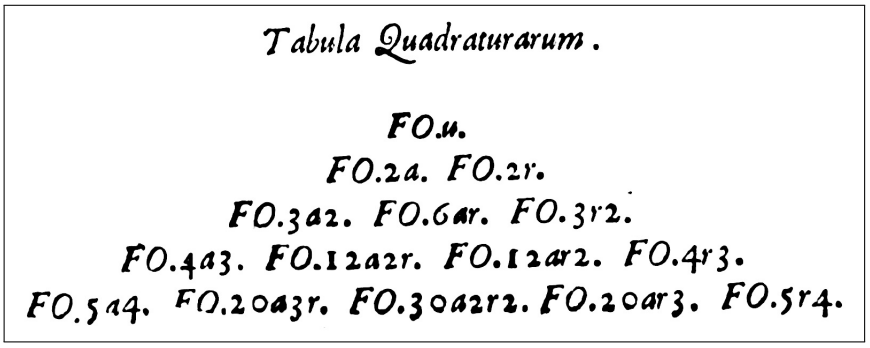

Mengoli, *Geometriæ speciosæ elementa*, Bologne, 1659 - p.366

⋆ La « Tables des Sous-quadratures » (« *Tabula Subquadraturarum* ») est l'analogue de la table des sous-quadratrices :




Mengoli, *Geometriæ speciosæ elementa*, Bologne, 1659 - p.366

⋆ La « Tables des Quadrature » (« *Tabula Quadraturarum* ») est l'analogue de la table des quadratrices :




Mengoli, *Geometriæ speciosæ elementa*, Bologne, 1659 - p.366

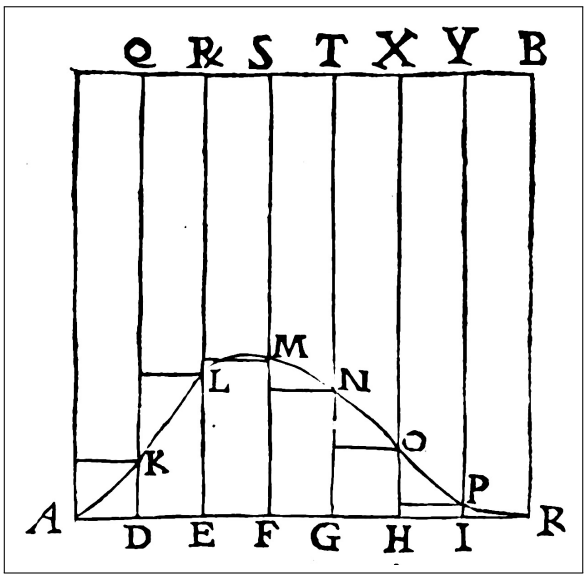
**Méthode de quadrature**

Après les définitions, Mengoli considère que le tout $t$ est égal à l'unité $u$ sans jamais l'annoncer explicitement. La variable $t$ n'apparait alors que dans un seul contexte, à savoir le nombre total de subdivision dans le processus d'approximation de l'aire de la figure. L'unité $u$ est partagée en $t$ sous-segments de longueur $e$.

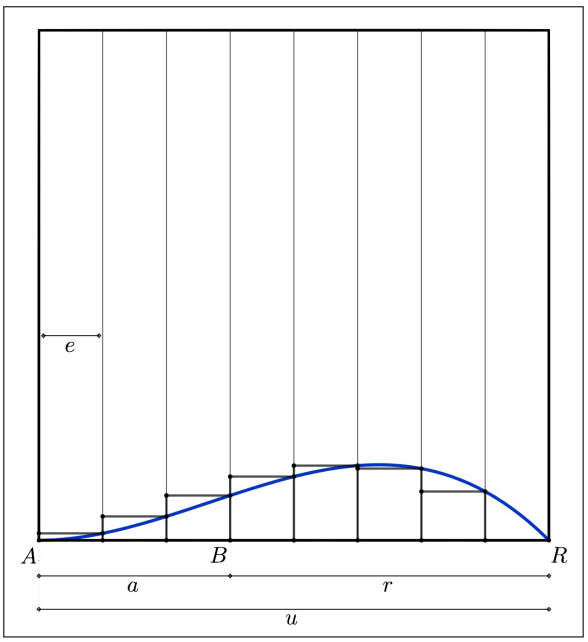
$$u = t \times e$$

Dès lors l'abscisse peut être considérée à la fois comme une grandeur continue $a_c$, c'est-à-dire une portion de l'unité $u$, mais aussi comme un nombre discret $a_d$, à savoir le nombre de sous-segments $e$.

$$a_c = a_d e \qquad \text{donc} \quad \frac{a_c}{u} = \frac{a_d}{t}$$




Mengoli, *Geometriæ speciosæ elementa*, Bologne, 1659 - p.25




Pour les ordonnées, on peut faire le calcul :

$$\begin{aligned} a_c^m(u-a_c)^n &= \left(a_d\frac{u}{t}\right)^m\left(u-a_d\frac{u}{t}\right)^n \\ &= a_d^m(t-a_d)^n\left(\frac{u}{t}\right)^{n+m} \end{aligned}$$

Ainsi, par la théorie des quasi-proportion, Mengoli peut faire le lien entre le continu et le discret

$$\begin{aligned} FO.am.rn &\sim \sum_{a_d=1}^{t-1} a_c^m(u-a_c)^n.e \\ &= \sum_{a_d=1}^{t-1} a_d^m(t-a_d)^n\left(\frac{u}{t}\right)^{n+m+1} \\ &= O.am.rn\left(\frac{u}{t}\right)^{n+m+1} \end{aligned}$$

En utilisant le resultat sur quadratrice, montré dans l'*Elementum secundum*, Mengoli montre que toutes les quadratures de la table des quadratures sont équivalentes au carré unité, c'est-à-dire qu'elle valent 1.

$$\begin{aligned} (m+n+1)\left(\!\!\binom{m+1}{n}\!\!\right)FO.am.rn &= \lim_{t\to\infty}\frac{(m+n+1)\left(\!\!\binom{m+1}{n}\!\!\right)O.am.rn}{t^{n+m+1}} \\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{t^{n+m+1}+\dots}{t^{n+m+1}} \\ &= u \end{aligned}$$

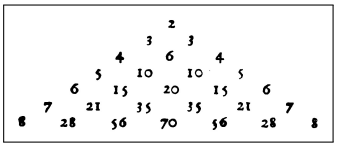
Transformer la figure pour en faire un carré, c'est bien cela faire la quadrature d'une figure pour Mengoli. Il ne va pas plus loin au sein des *Geometriæ speciosæ elementa*. Il a fourni un socle solide au principe des indivisibles et donné la quadrature d'une nouvelle famille de figures listées dans la table des formes. Ces tables de figures n'ont donc pas de fonction opératoire. Elles listent et ordonnent la famille des figures traitées et les mettent en correspondance avec les termes des tables de sommes discrètes. Ces dernières, en revanche, jouent un certain rôle au sein du calcul, même si ce n'est pas à la façon du triangle arithmétique, où la structure de la table elle-même sert d'outil combinatoire pour générer les termes.

### 7.3.2 Quadrature du Cercle dans le *Circolo*

#### Construction du triangle harmonique

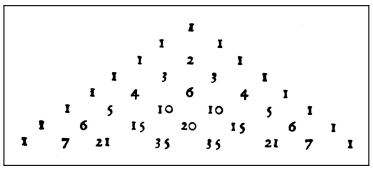
Le triangle harmonique n'apparait donc pas dans les *Geometriæ speciosæ elementa*, mais dans le *Circolo*. Dans cet ouvrage, Mengoli va user à plein des propriétés combinatoires du triangle arithmétique. Pour ce faire, il commence par construire le lien qui connecte la table des multiples et la table des formes introduite dans l'*Elementum sextum* :

⋆ Il part du triangle arithmétique, c'est-à-dire la table des multiples. Mais il donne le diagramme construit à partir de la description faite dans la *Via regia ad Mathematicas*[26] de 1655, c'est-à-dire qu'il part du nombre 2 au sommet et la suite des entiers sur les côtés du triangle :



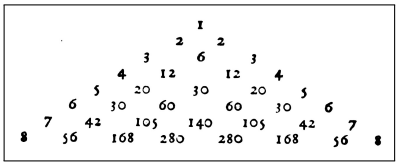

Mengoli, *Circolo*, Bologne, 1672 - p.3

⋆ Il ajoute les deux progressions diagonales formées d'unités pour retrouver la table introduite dans les *Geometriæ speciosæ elementa*, c'est-à-dire les triangle arithmétique complet :



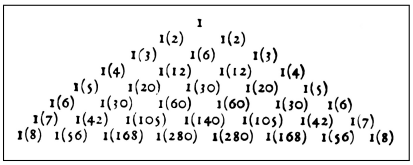

Mengoli, *Circolo*, Bologne, 1672 - p.3

⋆ Il multiplie chaque base par son rang, augmenté d'une unité. Il obtient la table des coefficients des quadratrices ou des quadratures :



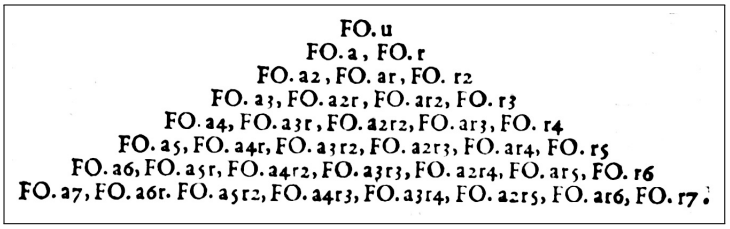

Mengoli, *Circolo*, Bologne, 1672 - p.4

⋆ Il remplace chaque terme par son inverse :




Mengoli, *Circolo*, Bologne, 1672 - p.4

⋆ Pour finir, Mengoli observe qu'il obtient ainsi la table qui liste les rapports entre le carré unité les formes qui sont dans la table des formes. Il donne alors la table des formes :



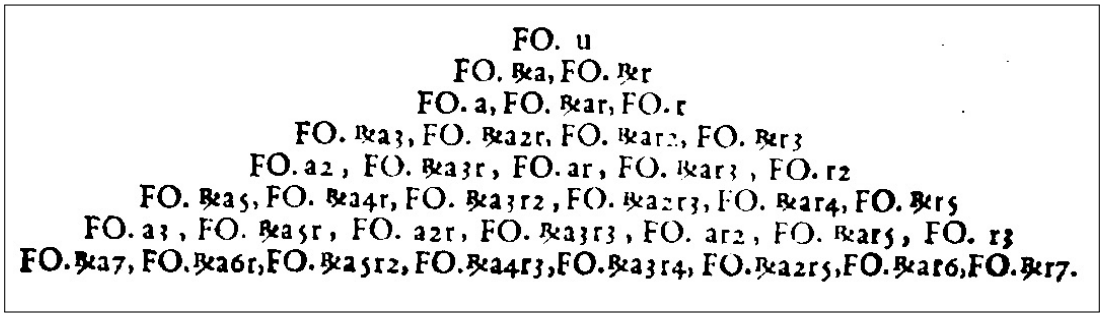

Mengoli, *Circolo*, Bologne, 1672 - p.4

26. [68] P. Mengoli, *Via regia ad mathematicas per arithmeticam, algebram speciosam, & planimetriam*, Bologne, 1655

On voit que le triangle harmonique constitue l'avant dernière étape de cette succession de tables qui relient la table des multiples, régie par une loi combinatoire d'engendrement, et la table de formes qui listent une famille de figures géométriques. Dès lors, le triangle harmonique n'est pas considérée comme une table particulière. C'est plutôt une étape intermédiaire.
Pour déterminer la figure du cercle, Mengoli observe que la relation entre l'ordonnée et l'abscisse est semblable à celles des figures de la table des formes, à savoir :

$$y = a^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}}$$

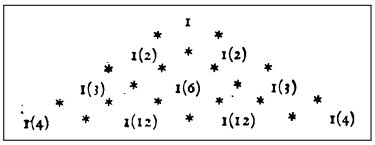
Il s'agit donc d'interpoler la table des formes :


FO. u
FO. ℞a, FO. ℞r
FO. a, FO. ℞ar, FO. r
FO. ℞a3, FO. ℞a2r, FO. ℞ar2, FO. ℞r3
FO. a2, FO. ℞a3r, FO. ar, FO. ℞ar3, FO. r2
FO. ℞a5, FO. ℞a4r, FO. ℞a3r2, FO. ℞a2r3, FO. ℞ar4, FO. ℞r5
FO. a3, FO. ℞a5r, FO. a2r, FO. ℞a3r3, FO. ar2, FO. ℞ar5, FO. r3
FO. ℞a7, FO. ℞a6r, FO. ℞a5r2, FO. ℞a4r3, FO. ℞a3r4, FO. ℞a2r5, FO. ℞ar6, FO. ℞r7.

Mengoli, *Circolo*, Bologne, 1672 - p.7

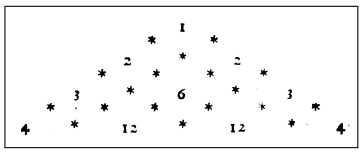
La forme du cercle est donc représentée par l'expression $FO.℞ar$. Pour parvenir à déterminer des termes en fonction de leur voisinage proche, Mengoli va devoir faire le chemin inverse, pour retrouver la table des multiples :

⋆ D'abord le triangle harmonique :



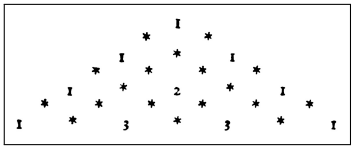

Mengoli, *Circolo*, Bologne, 1672 - p.8

⋆ Puis on inverse les termes :




Mengoli, *Circolo*, Bologne, 1672 - p.9

⋆ Puis on divise chaque base par son rang augmenté d'une unité :



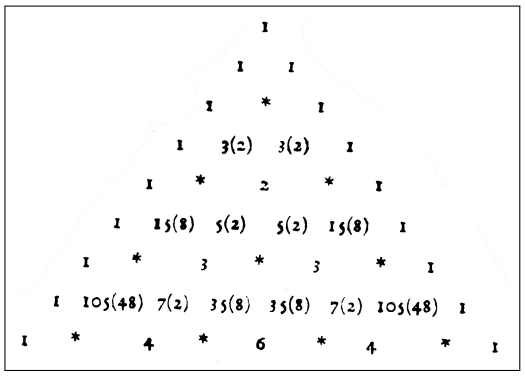

Mengoli, *Circolo*, Bologne, 1672 - p.9

Mengoli utilise donc ici les tables comme instruments de transformation. Grâce à elles, il met en place un pont entre la géométrie et la combinatoire. Mais Mengoli ne tient pas compte du fait que cette succession de transformation transporte les relations entre les termes de tables en tables. Il ne considère pas la table des formes comme un triangle de différences dans le *Circolo*, pas plus que dans les *Geometriæ speciosæ elementa*. Ainsi, le triangle harmonique, constitué des rapports numériques entre les figures et leurs quadratures, sert de pierre de touche entre la géométrie et l'arithmétique, mais n'est nullement compris comme une structure combinatoire.

**Interpolation et Propriétés du triangle**

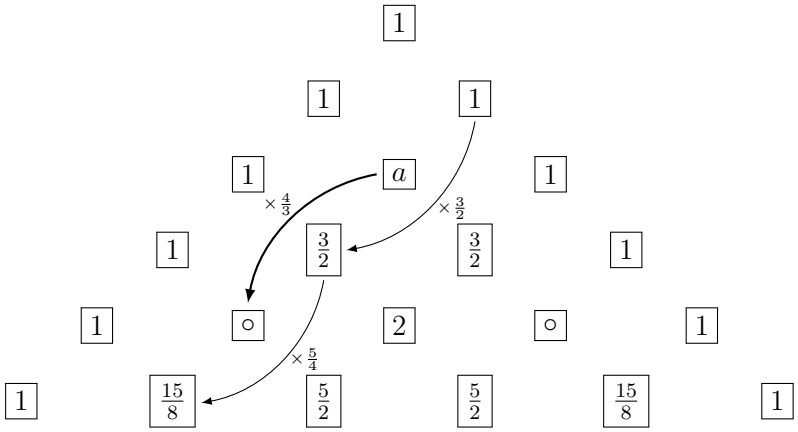
Une fois arrivé au problème de l'interpolation, Mengoli emploie une méthode très similaire à celle de Wallis. La méthode est similaire, mais le traitement est bien plus pragmatique et inductif. Ne cherchant pas à démontrer l'écriture formelle des progressions, Mengoli complète les termes manquant par des arguments purement combinatoire et inductif. Il suit néanmoins les même étapes que Wallis :

⋆ Il commence par compléter les premiers côtés et les derniers côtés de rang entier, en invoquant la structure des nombres figurés :




Mengoli, *Circolo*, Bologne, 1672 - p.11

⋆ Il complète les termes manquant des côtés de rangs fractionnaires en prolongeant les rapports entre deux termes :




Il observe les rapports suivants

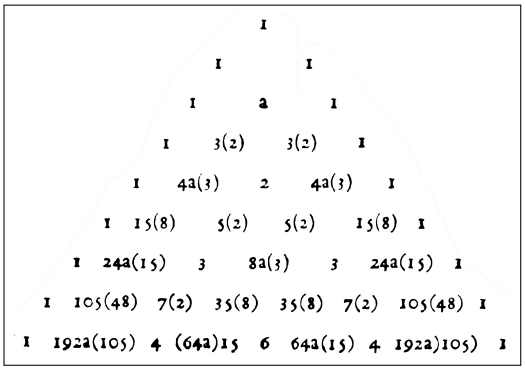
— Pour les côtés de rang $\frac{1}{2}$, on a : $\times\frac{3}{2}$ ; $\times\frac{5}{4}$ ; $\times\frac{7}{6}$ ; . . . , ce qui se complète par : $\times\frac{4}{3}$ ; $\times\frac{6}{5}$ ; $\times\frac{8}{7}$ ; . . .

— Pour les côtés de rang $\frac{1}{2}$, on a : $\times\frac{5}{2}$ ; $\times\frac{7}{4}$ ; $\times\frac{9}{6}$ ; . . . , ce qui se complète par : $\times\frac{6}{3}$ ; $\times\frac{8}{5}$ ; $\times\frac{10}{7}$ ; . . .

— Pour les côtés de rang $\frac{1}{2}$, on a : $\times\frac{7}{2}$ ; $\times\frac{9}{4}$ ; $\times\frac{11}{6}$ ; . . . , ce qui se complète par : $\times\frac{8}{3}$ ; $\times\frac{10}{5}$ ; $\times\frac{12}{7}$ ; . . .

— etc.

Il obtient donc :

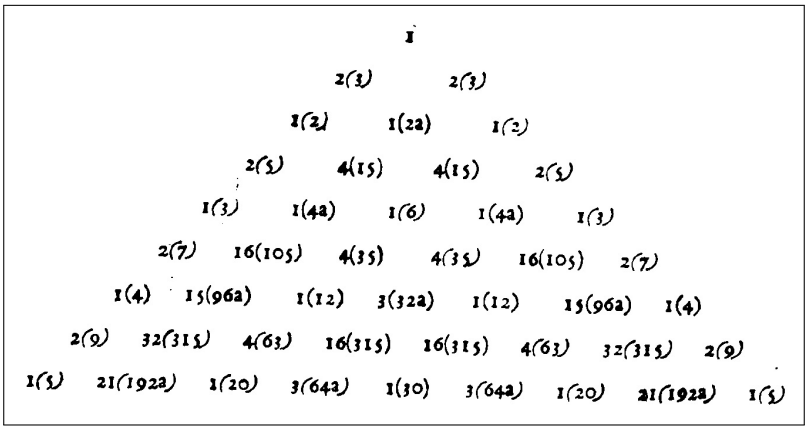


Mengoli, *Circolo*, Bologne, 1672 - p.13

⋆ Il évalue la valeur de $a$ par la même méthode que Wallis, fondée sur un argument de monotonie des progressions. Il obtient :

$$\frac{1.3.3.5.5\ldots(2n-1)(2n-1)}{2.4.4.6.6\ldots(2n-2)(2n-2)2n} < a < \frac{3.3.5.5\ldots(2n-3)(2n-3)(2n-1)}{2.4.4.6.6\ldots(2n-2)(2n-2)}$$

Pour obtenir le rapport entre le carré unité et la forme $FO.\mathfrak{R}ar$, c'est-à-dire le demi-cercle de diamètre unité, Mengoli doit transformer à nouveau la table des multiples interpolées, pour obtenir celle des rapports géométriques de quadratures, à savoir le triangle harmonique :




Mengoli, *Circolo*, Bologne, 1672 - p.19

Et ainsi, Mengoli parvient à déterminer la quadrature du cercle :

$$\frac{1}{2a} = \frac{\pi}{8}$$

## 7.4 Rôle et place du Triangle Harmonique

### 7.4.1 Propriétés du Triangle Harmonique

Pour finir, il nous faut revenir sur les propriétés du triangle harmonique. Nous avons montré qu'elles ne jouent aucun rôle au sein des raisonnements de Mengoli, que ce soit dans les *Geometriæ speciosæ elementa* ou dans le *Circolo*. Il se ramène de façon systématique aux propriétés combinatoires du triangle arithmétique. Néanmoins, ces propriétés ne sont pas passées inaperçues [27], en particulier deux propriétés fondamentales du

#### Les sommes des inverses des nombres figurés

Mengoli l'évoque dans la préface de l'*Elementum sextum* des *Geomtriæ speciosæ elementa*. Il affirme que la somme des quadratures d'un même côté diagonal est égale à la quadrature de la première figure du côté précédent :

> *Et de façon générale, j'ai trouvé la figure dans laquelle les ordonnées sont toutes les puissances des abscisses, et à sa suites toutes les figures, pour lesquelles les ordonnées sont les produits des abscisses à cette même puissance et des restes à toutes les puissances possibles, forment ensemble la figure dans laquelle les ordonnées est chaque puissance des abscisses, juste inférieure.* [28]

Ainsi Mengoli exprime ici l'égalité suivante :

$$\text{Pour tout } n, \text{ on a } \int_0^1 x^n dx + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 x^n (1-x)^m dx = \int_0^1 x^{n-1} dx.$$

Ce résultat se trouve sous la forme d'un énoncé dans la préface. Il n'est ni formalisé par un calcul, ni par un diagramme, ni même par une proposition rigoureusement démontrée dans le corps du traité. Mengoli le justifie en faisant référence aux conclusions de ses *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ*. Il y fait d'abord référence pour le cas où $n = 1$ et $n = 2$ qui correspondent aux deux premiers livres des *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ*, puis, pour le cas général, Mengoli renvoie au résultat correspondant dans le troisième livre. Le cas $n = 0$ correspond à la somme de la série harmonique, que Mengoli a traité dans la préface :

> *Et je me suis d'abord intéressé à toutes les figures dans lesquelles les ordonnées à la base sont toutes les puissances des abscisses, les premières, les secondes, les troisièmes et ainsi de suite à l'infini. Je découvrais, à partir des démonstrations dans l'ouvrage cité de Cavalieri, qu'elles sont dans la série harmonique naturelle, depuis l'unité et j'ai démontré que la somme de celles-ci croît jusqu'à l'infini, dans la préface de mon petit ouvrage intitulé Novæ Quadraturæ Arithmeticæ, seu de Additione Fractorum.* [29]

Mengoli convoque ici Cavalieri pour relier les valeurs des quadratures aux figures rationnelles de la table des formes. Ainsi, dans une démarche heuristique, la méthode de calcul développée par Mengoli, qui passe par les sommes discrètes et les quasi-proportions, n'est pas nécessaire pour mettre ce lien en évidence. Comme les nombres figurés chez Wallis, les progressions fractionnaires dans les *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ* semblent alors apparaitre de façon contingente, sans rapport avec la structure initiale de la table des figures rationnelles. Rappelons pourtant que les raisonnements menés dans les *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ* consiste à décomposer les fractions d'une certaine progression comme différences de fractions de la progression de rang inférieur. Mais cette propriété, caractéristique des triangles de différences, n'est pas réinvestie dans le cadre géométrique des figures rationnelles.

27. [65] M.R. Massa-Esteve et A. Delshams, *Euler's beta integral in Pietro Mengoli's works* dans les *Archive for History of Exact Sciences* Vol. 63, 2009 - *Cf* la troisième partie de l'article, intitulée *Mengoli's properties and theorems for quadratures* - p.348-353

28. [69] P. Mengoli, *Geometriæ speciosæ elementa*, Bologne, 1659 - p.363-364 : « Et generaliter inueni, figuram, in qua ordinatæ sunt omnes potestates abscissarum, & deinceps omnes figuras, in quibus ordinatæ sunt productæ sub ijsdem potestatibus abscissarum, & sub residuarum potestatibus omnifariam, simul aggregatas æquales esse figura, in qua ordinatæ, sunt omnes potestates abscissarum ordinis proxime inferioris. »- *Cf* [65] M.R. Massa-Esteve et A. Delshams, *Euler's beta integral in Pietro Mengoli's works* dans les *Archive for History of Exact Sciences* Vol. 63, 2009 - p.350

29. [69] P. Mengoli, *Geometriæ speciosæ elementa*, Bologne, 1659 - p.363 : « Et quæsiui primum de omnibus figuris, in quibus ordinatæ ad basim, sunt omnes potestates abscissarum, primæ, secundæ, tertiæ, & deinceps in infinitum : quas ex demonstratis a Cauallerio loco citato, deprehendebam esse in serie harmonica naturali ab unitate earumque summam demonstraui excrescere in infinitum, in præfatione ad meum libellum, cui titulus, *Nouæ Quadraturæ Arithmeticæ, seu de Additione Fractorum* »

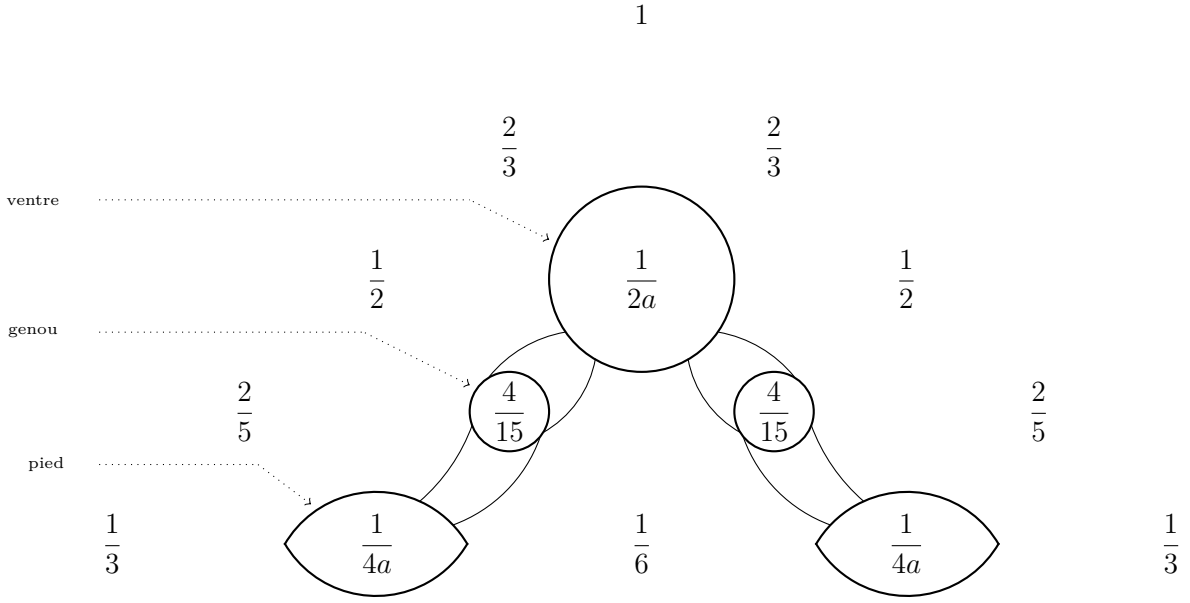
Comme chez Leibniz, Mengoli découvre visiblement la propriété des sommes diagonales par une démarche empirique, tirant profit d'une coïncidence, pour relier les conclusions de travaux relativemnt indépendants [30].

### La structure combinatoire du triangle harmonique

Nous avons clairement montré que Mengoli ne faisait aucun usage de la structure combinatoire du triangle harmonique, à savoir qu'un terme est égal à la somme des deux termes qui se trouvent en dessous. Néanmoins, il finit par évoquer cette propriété, après avoir terminé l'interpolation du triangle arithmétique dans le *Circolo* :

> *Et il faut noter une belle propriété de la table p.19, à savoir que chacun de ses termes est comme un ventre d'où pendent latéralement deux jambes, avec deux termes, dont l'un est le genoux et l'autre le pied. Et le ventre est la somme de ses deux pieds.* [31]

Les cornes vers le haut sont remplacées par les jambes vers le bas. Mengoli fait même usage de la structure des jambes en deux segments pour représenter le fait que l'on doit sauter un terme dans la table interpolée pour obtenir celui dont le rang a augmenté d'une untié :




Ces deux propriétés sont seulement évoquées par Mengoli, et ne jouent aucun rôle dans le cadre de son raisonnement. L'usage de métaphores anatomiques pour décrire les structures combinatoires des tables dépeint une vision organiciste du travail combinatoire de Mengoli. La table est comme un organisme, dont les termes forment les articulations et les relations le squelette. Pourtant, ce n'est pas cette conception qu'il donne à voir. Les tables sont utilisées comme des instruments de classement. Les différentes lignes, à savoir les bases, les premiers côtés et les derniers côtés, permettent de regrouper les termes selon diverses propriétés en un seul diagramme. La structure combinatoire locale n'est convoquée qu'au sein du triangle arithmétique, pour lequel elle est structurelle, puisque c'est ainsi qu'il est construit. Pour le triangle harmonique, cette structure est seulement découverte *a posteriori* comme une propriété notable de la table, mais sans grandes conséquences pratiques ou théoriques.

30. Mengoli précise qu'il a découvert les valeurs de certaines des quadratures en 1647, soit trois ans avant les *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ*. Il est donc vraisemblable que les séries numériques qu'il a choisi d'étudier dans ce traité soient fortement inspirées par ses travaux sur les quadratures de Cavalieri. Cependant, le lien entre les séries numériques et les quadratures des figures rationnelles n'est pas établi avant les *Geometriæ speciosæ elementa*

31. [70] P. Mengoli, *Circolo*, Bologne, 1672 - p.17 : « Ed è notabile vna bella proprietà della Tauola pag. 19. che ciascun termine è come vn ventre, onde pendono lateralmente due gambe, con due termini l'una, ginocchio, e piede ; ed è il ventre la somma de' due suoi piedi. »- *Cf* [65] M.R. Massa-Esteve et A. Delshams, *Euler's beta integral in Pietro Mengoli's works* dans les *Archive for History of Exact Sciences* Vol. 63, 2009 - p.350

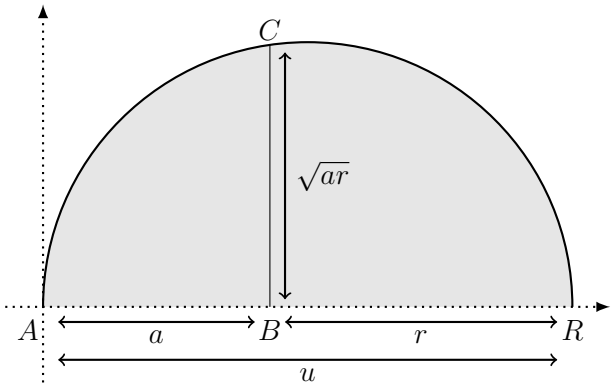
### 7.4.2 Comparaison entre les figures de Mengoli et de Wallis

#### Lien entre les figures

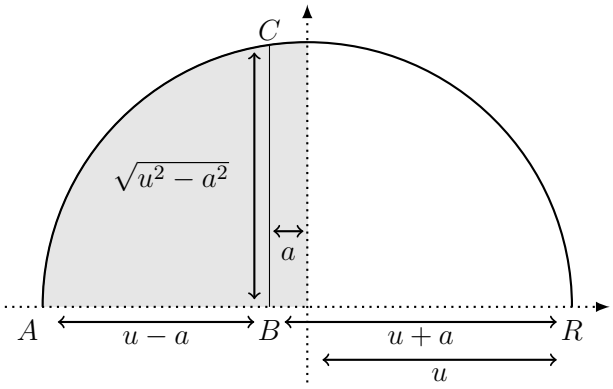
Pour Massa-Esteve, la principale différence entre les approches de Wallis et de Mengoli se trouve dans l'interprétation des tables, et leur lien avec les quadratures :

> *Il faut noter que Wallis, dans son Arithmetica Infinitorum (1655) est parti du triangle combinatoire, dans la proposition 132, et l'a interpolé pour arriver, dans la proposition 169, à une table semblable à la table de Mengoli. La différence est que Wallis n'a pas directement identifié tous les éléments de cette table à des valeurs de quadrature pour les figures correspondantes. Il n'a parlé que de rapport qu'on pourrait établir entre certaine valeur de la table, et à partir ces rapports, affirmer que l'on pourrait trouver l'aire du cercle par l'interpolation. La figure géométrique dont Wallis souhaite trouver la quadrature entre* 0 *et* 1, $y = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, *est aussi différente de la figure géométrique de Mengoli. On ne sait pas si Mengoli connaissait l'œuvre de Wallis mais les différences entre la notation et la procédure sont substantielles. Ainsi, bien qu'il semple peu probable que Mengoli fût familier des travaux de Wallis, le fait que tous deux travaillent sur cette quadrature dans une direction similaire est surprenant.* [32]

Wallis fait plus, comme nous l'avons vu, que d'« affirmer que l'on pourrait trouver l'aire du cercle par interpolation » (« *stated that the area of the circle could be found by interpolating* »). Et d'un point de vue pratique, la démarche de Wallis est finalement équivalente à celle de Mengoli. Ils produisent tous deux la même approximation du même rapport par la même interpolation.
Une différence notable que note Massa-Esteve se trouve dans la figure du cercle que les deux mathématiciens choisissent d'étudier :




Quadrature de Mengoli




Quadrature de Wallis

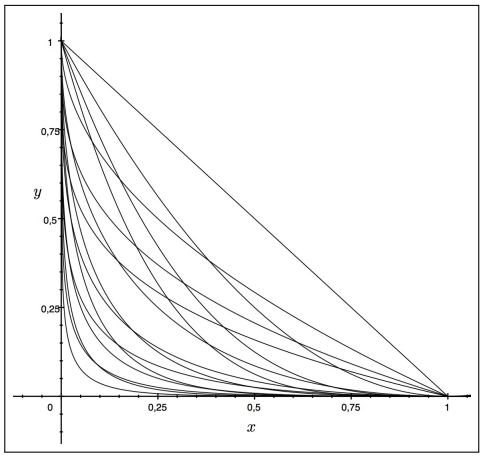
Le système de coordonnée chez Mengoli n'est pas le même que celui de Wallis. Ce dernier, en utilisant la formule $(u+a)(u-a) = u^2 - a^2$, isole les variables, ce qui lui permet d'exploiter les quadratures des paraboloïdes qu'il avait calculées dans la première partie de l'*Arithmetica Infinitorum*. Mengoli, quant à lui, ne souhaite absolument pas isoler les variables $a$ et $r$ mais exploite au contraire la composition multiplicative $ar$ qui se dégage de la figure, afin de l'inscrire au sein des tables de progressions qu'il a construite dans les *Geometriæ speciosæ elementa*.
Les figures rationnelles de Wallis n'ont a première vue aucun rapport avec celles de Mengoli. Pourtant, elles forment des tables de quadratures étonnamment similaires. Notons que les rôles symétriques des exposants $p$ et $q$ sont manifestes chez Mengoli, aussi bien géométriquement que formellement. En revanche, chez

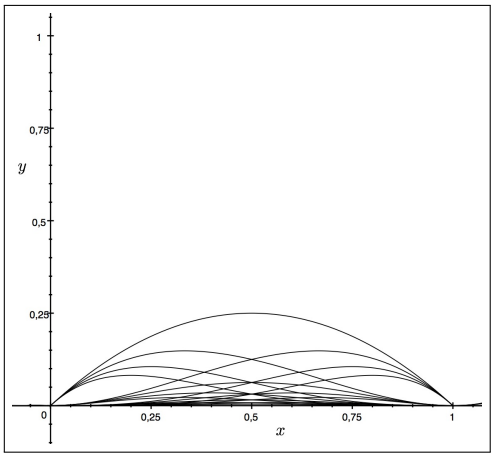
32. [65] M.R. Massa-Esteve et A. Delshams, *Euler's beta integral in Pietro Mengoli's works* dans les *Archive for History of Exact Sciences* Vol. 63, 2009 - p.347 : « It is worth pointing out that Wallis, in his *Arithmetica Infinitorum* (1655), started from the combinatorial triangle in the proposition 132, interpolating it to arrive at a table similar to Mengoli table in the Proposition 169. The difference is that Wallis did not identify all the elements of the table directly with quadrature values for the corresponding figures. He spoke only of rations that could be established between some values of the table, and form these ratios stated that the area of the circle could by found by interpolating. The geometric figure whose quadrature Wallis wished to find between 0 and 1, $y = (1-x^2)^{1/2}$, is also different from Mengoli's geometric figure. We do not know whether Mengoli knew Wallis' work but the differences between the notation and the procedure are substantial. Sol athough it seems unlikely that Mengoli was familiar with Wallis' work, the fact that both worked in a similar way this quadrature is surprising. »

Wallis, cette propriété est masquée tant par l'allure des courbes que par celle de l'équation. Pour le faire apparaître dans l'équation, il faudrait écrire :

$$y = \left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right)^q \Longleftrightarrow y^{\frac{1}{q}} + x^{\frac{1}{p}} = 1$$

Ce que Wallis ne fait jamais. Il s'appuie uniquement sur la propriété de symétrie de la table des nombres figurés.




$y = \left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right)^q$ $\qquad$ $y = x^p(1-x)^q$

$p = 1; 2; 3$ et $q = 1; 2; 3$

Pour passer de la famille de Wallis à celle de Mengoli, la procédure nécessite des outils de calcul différentiel et de calcul intégral dont ni l'un ni l'autre ne disposaient.
Posons d'abord le changement de variable $x = (1-a)^p$, alors

$$\begin{aligned} a &= 1 - x^{\frac{1}{p}} \\ dx &= -p(1-a)^{p-1} \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right)^q dx &= -p \int_1^0 a^q (1-a)^{p-1} da \\ &= p \int_0^1 a^q (1-a)^{p-1} da \end{aligned}$$

Or, par une intégration par partie, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^q (1-x)^p dx &= \int_0^1 x^q (1-x)^{p-1} dx - \int_0^1 x^{q+1} (1-x)^{p-1} dx \\ &= \int_0^1 x^q (1-x)^{p-1} dx - \left( \underbrace{\left[ -x^{q+1} \frac{1}{p} (1-x)^p \right]_0^1}_{=0} + \frac{q+1}{p} \int_0^1 x^q (1-x)^p dx \right) \\ \left(1 + \frac{q+1}{p}\right) \int_0^1 x^q (1-x)^p dx &= \int_0^1 x^q (1-x)^{p-1} dx \end{aligned}$$

Donc finalement :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(\!\left(\begin{smallmatrix} q+1 \\ p \end{smallmatrix}\right)\!\right)} = \int_0^1 \left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right)^q dx &= p \int_0^1 x^q (1-x)^{p-1} dx \\ &= (p+q+1) \int_0^1 x^q (1-x)^p dx = \frac{1}{\left(\!\left(\begin{smallmatrix} q+1 \\ p \end{smallmatrix}\right)\!\right)} \end{aligned}$$

**Complément : lien entre les deux familles chez Leibniz**

Il faut noter qu'on retrouve ces transformations dans un manuscrit assez tardif de Leibniz, daté du mars 1686, intitulé « Pour la démonstration et l'amélioration des quadratures de Wallis » (« *Pro Wallisianis quadraturis demonstrandis et amplificandis* »). Dans ce texte, Leibniz s'intéresse aux intégrales qui on la forme de celles de Mengoli. Au recto, il s'intéresse à des procédures de calcul intégrales qui correspondent aux intégrations par partie :

> *Soit* $z = a \pm x$ *on cherche* $d\,(x^e z^\omega) = e.x^{e-1}.z^\omega \pm \omega.x^e.z^{\omega-1}$ *en omettant* $dz = \pm dx$.
> *Et ainsi de ces deux sommes* $\int x^{e-1}z^\omega dx$ *et* $\int x^e z^{\omega-1}dx$, *on obtient l'une quand l'autre est donnée.* [33]

Il en conclut donc :

> *On obtient l'un à partir de l'autre, de proche en proche :*
> $x^e z^\omega$, $x^{e+1}z^{\omega-1}$, $x^{e+2}z^{\omega-2}$, $x^{e+3}z^{\omega-3}$,$x^{e+4}z^{\omega-4}$, ...
> *On en déduit que si l'on se donne* $\int x^{\pm_1 e}z^{\pm_2\omega}$, *on obtient* $\int x^{\pm_1 e+f}z^{\pm_2\omega-f}$. [34]

Leibniz constate bien le parallèle évident entre sa méthode différentielle et celle qui consiste à suivre la progression des proportionnelles, comme chez Mengoli, par le produits continus des facteurs $\frac{a}{r} = \frac{x}{1-x}$ :

> *Je vois cependant que, d'une certaine manière, ceci dépend encore de mon ancienne méthode, et que cela revient à la même chose que de multiplier d'une part par* $x$ *et d'autre part par* $1 - x$. [35]

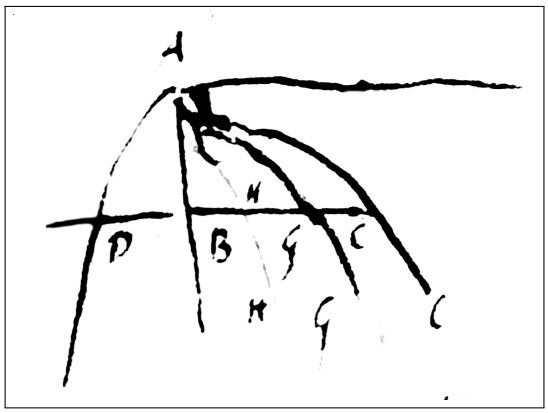
Mais il n'envisage pas les conséquence de cette similitude, telle que la relation que nous avons démontré, où nous avons fait usage des deux raisonnements, à savoir la mulitplication par $(1-x)$ et l'intégration par partie.

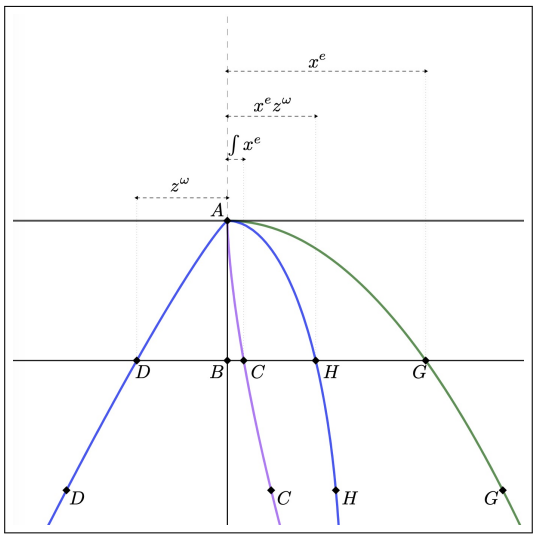
$$(p+q+1)\int_0^1 x^q(1-x)^p dx = p\int_0^1 x^q(1-x)^{p-1}dx$$

Pour Leibniz, sa méthode d'intégration par partie est un raffinement qui permet de rendre plus simples, dit-il, et peut-être même plus rigoureuses les démonstrations de Wallis :

> *Toutes ces choses semblent rendre la démonstration des progressions de Wallis plus simple.* [36]

Quant au verso, Leibniz s'adonne à une autre transformation qui s'interprète aujourd'hui comme un changement de variable. Cela lui permet de relier les formes à la Wallis avec celle qu'il retient lui, que l'on trouve plutôt chez Mengoli. Pour cela, il pose une nouvelle variable $\nu$ qui désigner l'ordonnée de la quadrature de la paraboloïde $x^e$ :




Manuscrits de Leibniz - LH 35, 13, 1 Bl.174

33. LH 35, 13, 1 Bl.174 - *Pro Wallisianis quadraturis demonstrandis et amplificandis, Scheda I*, Mars 1686 : « Sit $z = a \dagger x$ et quæritur $d\overline{x^e z^\omega}$. fiet : $e.\overline{x^{e-1}}.z^\omega \dagger \omega.x^e.\overline{z^{\omega-1}}$ omisso $dz = \dagger dx$. Itaque harum duarum summarum $\int \overline{x^{e-1}}z^\omega dx$ et $\int x^e\overline{z^{\omega-1}}dx$ una ex alia data, datur. »

34. LH 35, 13, 1 Bl.174 - *Pro Wallisianis quadraturis demonstrandis et amplificandis, Scheda I*, Mars 1686 : « Dantur ex se invicem : $x^e z^\omega$ et $x^{e+1}z^{\omega-1}$ et $x^{e+2}z^{\omega-2}$ et $x^{e+3}z^{\omega-3}$ et $x^{e+4}z^{\omega-4}$, &c. Unde sequitur dato $\int \overline{x^{\dagger e}z^{(\dagger)\omega}}$ dari $\int \overline{x^{\dagger e+f}z^{(\dagger)\omega-f}}$. »

35. LH 35, 13, 1 Bl.174 - *Pro Wallisianis quadraturis demonstrandis et amplificandis, Scheda I*, Mars 1686 : « Video tamen hoc ipsum jam ex methodo mea pristina quodammodo pendere, et eodem redire ac si multiplices tam per x quam per $1-x$. »

36. LH 35, 13, 1 Bl.174 - *Pro Wallisianis quadraturis demonstrandis et amplificandis, Scheda I*, Mars 1686 : « Hæc omnia videntur demonstrationem progressionis Wallisianæ reddere faciliorem. »

Il décrit sa figure comme suit :

> *On pose une courbe CC qui est la quadrature de celle-ci GG, c'est-à-dire que les différences des ordonnées BC sont proportionnelles aux ordonnées BG.* [37]

Ainsi en opérant ce changment de variable, on obtient une relation entre les ordonnées $x$ et $\nu$ mais aussi une relation entre leurs différentielles $dx$ et $d\nu$ :

$$\nu = \int x^e dx = \frac{1}{e+1} x^{e+1} \qquad \text{par conséquent :} \quad \begin{cases} x = ((e+1)\nu)^{\frac{1}{e+1}} \\ d\nu = x^e dx \end{cases}$$

Et donc, on peut passer de l'écriture de Mengoli à celle de Wallis :

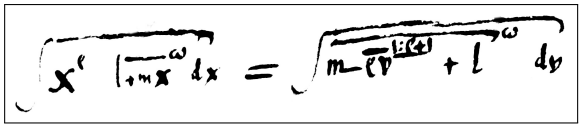
$$\int x^e (1-x)^\omega dx = \int \left(1 - ((e+1)\nu)^{\frac{1}{e+1}}\right)^\omega d\nu$$

En réalité, dans le *Pro Wallisianis quadraturis demonstrandis et amplificandis* (LH 35, 13, 1 Bl.174), Leibniz commet une petite erreur dans la formule d'intégration de l'expression du paraboloïde $GG$. Ainsi il écrit :

$$\nu = \frac{1}{e} x^{e+1}$$

En outre, il ne pose pas $z = 1 - x$, ni même $z = a \pm x$ comme il le fait au recto, mais emploie l'expression linéaire générale $z = l + mx$. Dans ces conditions, la formule qu'il obtient est la suivante

$$\int x^e (l+mx)^\omega dx = \int \left(m(e\nu)^{\frac{1}{e+1}} + l\right)^\omega d\nu$$



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 13, 1 Bl.174

Même si cette formule n'est pas tout à fait correcte et que la procédure complète pour montrer l'équivalence entre les deux quadratures de Mengoli et de Wallis n'est pas réellement comprise, Leibniz obtient bien une relation entre les deux écritures, ce qu'il interprète comme une réduction des cas composés de Mengoli, qu'il ne cite pas dans ce texte, aux cas simples de Wallis :

> *Et a partir de là, on obtient la lumineuse méthode pour réduire toutes les autres valeurs binômiales à des puissances de binômes simples.* [38]

Pour terminer, il faut rappeler que ce texte ne fait nullement référence aux travaux de Mengoli, mais uniquement à ceux Wallis. Leibniz connait pourtant les deux approches et leurs auteurs, mais comme nous le montrerons plus tard, la réception de l'œuvre de Mengoli tient une place très en retrait au sein du corpus. Leibniz aura de plus en plus tendance à omettre toute référence à Mengoli, pour ne se référer qu'à Wallis. Mais cet aspect sur les personnes ne représente pas la réception du contenu, comme en témoigne ce texte qui souligne que l'apport de Mengoli est encore bien vivant, même dans les textes plus tardifs.

37. LH 35, 13, 1 Bl.174 - *Pro Wallisianis quadraturis demonstrandis et amplificandis, Scheda I*, Mars 1686 : « Assumatur curva *CC* quadratura ipsius *GG* sicut differentiæ ordinatarum *BC* sint proportionales ordinatis *BG*. »

38. LH 35, 13, 1 Bl.174 - *Pro Wallisianis quadraturis demonstrandis et amplificandis, Scheda I*, Mars 1686 : « Unde habetur et Methodus præclara omnes alios valores binomios reducendi ad potestates simplicium binomiorum. »

## Conclusion

La démonstration de Mengoli, contrairement à celle de Wallis, est éparpillées sur deux ouvrages, et même d'avantages si l'on considère que les *Geometriæ speciosæ elementa* sont constitués de six livres. Ainsi les différentes constructions et résultats intermédiaires sont d'avantage autonome là où dans l'*Arithmetica Infinitorum*, l'on peut presque dire que toutes les propositions qui sont énoncées aspirent à divers degrés à prendre part dans la résolution de la quadrature du cercle. Ici, le *Circolo* est un ouvrage séparé, écrit bien plus tard, et au sein duquel la partie qui nous intéresse, à savoir l'interpolation, n'occupe qu'une place assez mineure.

Wallis n'identifie pas de la même manière les coefficients de ses tables avec les quadratures. Nous avons montré que ces coefficients correspondent en réalité à des lois de progression abstraites et arithmétiques. Une même loi peut régir le calcul des quadrature de courbes, des cubatures de surface ou des rectifications de lignes. Là où ce lien entre la loi arithmétique et la quadrature est considéré comme allant de soi, chez Wallis, il se mobilise par la transformation et la mise en correspondance de différentes tables triangulaires chez Mengoli. Le concept de quasi-proportion qu'il développe dans le livre 3 des *Geometriæ speciosæ elementa*[39] permet à ce dernier bâtir un pont solide et rigoureux entre les progressions numériques discrètes et les quadratures de figures continues. Pour Wallis, ce lien n'est pas questionné, et il applique le principe des indivisibles sans réelle justification. C'est peut-être, effectivement, ce travail sur des lois abstraites et détachées de la géométrie, qui a rendu la nature des indivisibles moins problématique pour Wallis.

Cependant, de son côté, Mengoli ne rend pas problématique la nature de ces nouveaux nombres créés par l'interpolation, comme le fait Wallis. En effet, pour Mengoli, le triangle arithmétique, qu'il nomme la table triangulaire des multiples, n'est pas construite comme une table de progressions. C'est un pur instrument combinatoire qui permet de générer les coefficients des binômes par une règle d'engendrement très simple. Ainsi, la question de l'interpolation des progressions ne se pose pas avec la même acuité. On ne trouve d'ailleurs pas chez Mengoli de constat d'échec comme on l'a décrit chez Wallis.

Ainsi, si Wallis appuie sa démarche inductive sur la forme des progressions, Mengoli se fonde quant à lui sur la structure des tables.

L'analyse de ces deux ouvrages a également mis en lumière l'absence étonnante du triangle harmonique, tel que l'on pourrait s'attendre à le trouver, c'est-à-dire en tant que triangle de différences. De fait, Mengoli montre bien que les quadratures se trouvent sur une table de différences, homologue au triangle harmonique. Ainsi, en partant de l'hypothèse que le triangle harmonique dispose d'une structure aussi riche que celle du triangle arithmétique, puisque dans les deux cas, chaque terme est le composé de deux de ses voisins, alors le détour par le triangle arithmétique parait superflu. Pourquoi ne pas faire l'interpolation directement au sein du triangle harmonique. La chose s'explique très bien chez Wallis, puisqu'il choisit une famille de courbes dont les quadratures sont directement les inverses des nombres combinatoires et ne sont pas pondérés par les rangs horizontaux pour forme le triangle harmonique. Ainsi, la première table qu'il construit, celle des inverses des nombres figurés, ne présente pas la structure combinatoire du triangle harmonique. En revanche, chez Mengoli, le triangle harmonique, avec les bonne pondération, est déjà construit implicitement dans le livre 6 des *Geometriæ speciosæ elementa*. Il est donc très étonnant de voir qu'il fait le détour par les triangle arithmétique dans le *Circolo*. Nous avons pu montrer qu'en réalité, Mengoli reserve la structure combinatoire et opératoire au seul triangle arithmétique. Même les propriétés des différentes tables de quadratures, qui sont pourtant des conséquences directe de la structure de table de différences, sont démontrés par des moyens détournés, qui permettent de se ramener à la structure du triangle arithmétique.

39. Sur ce sujet, *Cf* [60] M.R. Massa-Esteve, *Mengoli on "Quasi-Proportion"* dans *Historia Mathematica*, N.24, 1997 - p.257-280

# Chapitre 8

# Reception de Wallis et Mengoli

## Introduction

Leibniz découvre les travaux de Wallis et de Mengoli durant son séjour parisien. Le jeune philosophe a déjà développé sa propre méthode pour parvenir à déterminer l'aire du cercle, à savoir sa célèbre quadrature arithmétique du cercle fondée sur la méthode de transmutation. Bien plus tard, il se prononcera d'ailleurs à de nombreuses reprises pour faire valoir qu'à son sens, sa formule est plus commode que le produit auquel aboutissent les deux auteurs dont nous venons de faire l'analyse des ouvrage.
Ce n'est donc pas dans l'optique de résoudre ce problème millénaire que le jeune philosophe aborde ces techniques d'interpolation. En réalité, les questions qui traversent les différents travaux parisiens sur ce sujet sont très proches de celles que soulève déjà Wallis dans l'*Arithmetica Infinitorum*. Leibniz étudie en effet de près la façon dans ces tables permettent de traiter les questions de quadratures.
La réception de Mengoli est assez simple à documenter, puisque Leibniz y consacre un petit dossier au printemps de l'année 1676. En plus de notes et de réflexions personnelles sur l'interpolation des trangles, il nous a également laissé un compte rendu détaillé de la seconde partie du *Circolo* qui porte sur le calcul des décimale du $\pi$. Ceci témoigne du fait que lorsqu'il a écrit ses notes personnelles, Leibniz avait probablement le texte de Mengoli a disposition ou du moins l'avait-il encore en tête.
La réception de Wallis est beaucoup plus confuse et éparse. Il semble que le jeune philosophe n'a pas lu l'*Arithmetica Infinitorum* en une seule fois mais qu'il y est revenu régulièrement tout au long du séjour parisien et même de sa vie entière, puisqu'il rouvre le dossier des interpolations de Wallis dans un grand nombre de manuscrits bien plus tardifs et encore inédits.
Ces premières réflexions sur l'interpolation sont l'occasion pour Leibniz d'enrichir encore d'avantage sa pratique tabulaire. En effet, l'interpolation de Wallis et de Mengoli montre que la relation locale de composition des termes n'est pas divisée lors de la procédure. En effet, un terme qui est la somme de deux termes voisins dans le triangle initiale reste la somme de ces deux termes dans le triangle interpolé, quand bien même ces termes ne sont plus ses voisins, et il n'y a pas de relation de composition entre le terme et ses nouveaux termes voisins que l'interpolation a adjoint à la table. Dès lors, les relations de compositions sont plus compliquée dans un triangle interpolé.Ces nouvelles propriétés combinatoires illustrent l'intérêt que Leibniz porte encore à cette pratique à la fin du séjour parisien.
C'est également durant cette période que Leibniz va établir un premier lien entre les techniques d'interpolations de Wallis et le traitement des courbes transcendantes, bien qu'il ne travaillera sérieusement ces questions qu'après son retour en Allemagne, comme nous le verrons au chapitre suivant. Cela étant, l'approche de Wallis est déjà considérée comme une candidate prometteuse pour franchir les frontières de l'algèbre cartésienne, bien que le jeune Leibniz lui reproche son recours à l'induction. Cette dernière question le poursuivra toute sa vie, et l'échange épistolaire qu'il entretiendra finalement à la fin du siècle avec Wallis lui-même ne parviendra pas à la résoudre.

## 8.1 Lecture du Circolo

### 8.1.1 Un intérêt purement privé

Leibniz ne mentionne quasiment jamais l'œuvre de Mengoli, que ce soit dans sa correspondance ou dans ses diverses publications. Pourtant, il y consacre de nombreux travaux personnels, qui ne se limitent pas à une simple prise de notes. Les travaux de Mengoli ont donc eu une forte influence sur le jeune Leibniz, probablement plus grande que ce dont ce dont le jeune philosophe avait conscience.

#### L'absence de Mengoli dans la correspondance

Comme nous l'avons vu au sein du premier chapitre de notre travail, Leibniz découvre les travaux géométriques de Mengoli par l'intermédiaire de Collins [1], à l'occasion de sa correspondance avec Oldenburg, à son retour de Londres au printemps 1673. Pour rappel, Collins signale à Oldenburg que le calcul des sommes des inverses des nombres figurés, duquel Leibniz pense avoir la paternité, se trouve déjà au sein des *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ* de Mengoli. Cependant, il désignes les séries à sommer par la liste finie des premiers termes, sans points de suspension ou signe "*etc*". Leibniz, avouant ne pas disposer de l'ouvrage en question, comprend que les travaux de Mengoli ne concernent que le calcul des sommes finies et non la détermination de la série complète et infinie à laquelle il est parvenue. Puis une seconde lettre de Collins, toujours par l'intermédiaire d'Oldenburg, met fin au malentendu, en indiquant clairement que ce sont bel et bien les séries infinies que Mengoli est parvenu à calculer dans son ouvrage consacré aux quadratures arithmétiques [2]. Ayant visiblement perdu à ses yeux les atours d'une découverte originale, propre à l'introduire dans cercles mathématiques anglais, ce sujet disparait subitement de la correspondance entre Leibniz et la *Royal Society*, ainsi que toute référence aux travaux géométriques de Mengoli [3]. Ce dernier reparait, au sein de la correspondance, dans une lettre de Collins de l'été 1676 [4], soit trois année plus tard. Cette lettre, comme les premières, est rédigée en anglais à destination d'Oldenburg, pour le compte de Leibniz. Cependant, au lieu d'en faire une traduction latine, comme pour les précédentes, Oldenburg place directement le courrier en l'état dans un paquet de lettres qu'il envoie deux mois plus tard au jeune Leibniz [5], qui se charge lui même de prendre en note, en latin, les éléments clés de la lettre de Collins [6], ainsi que des autres par ailleurs. En ce qui concerne Mengoli, Collins revient sur la preuve de la divergence de la série harmonique par sommation par paquet, qui se situe comme nous l'avons vu dans les *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ*, ainsi qu'une estimation des sommes partielles de la série harmonique au moyen du logarithme, ce qui se trouve dans les *Geometriæ Speciosæ Elementa*. Leibniz reprend sommairement les résultats concernant les sommes finies, mais plus en détail la preuve de divergence par sommation par paquet, à la suite de laquelle il inscrit comme remarque personnelle « ingénieux » (« *ingeniose* »). Après cela, Mengoli ne sera plus jamais cité, à notre connaissance, par Leibniz dans sa correspondance, mathématiques ou philosophique.
Le très faible poids de la figure de Mengoli dans la correspondance leibnizienne indique qu'à première vue, il s'agit d'un auteur pour lequel le jeune philosophe n'a pas manifesté de réel intérêt. En 1673 Leibniz n'a pas lu les *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ*, et il semble clair que les échanges avec Collins ne lui ont pas donné l'envie de le faire. La mention « ingénieux » (« *ingeniose* »), trois ans plus tard, au sein de ses notes, confirme qu'il n'a toujours pas lu cet ouvrage, car il semble surpris par la méthode de sommation par paquet, qui est pourtant utilisé plusieurs fois dans le livre. Il n'a sans doute pas lu non plus les *Geometriæ Speciosæ Elementa*. Il faut néanmoins noter qu'entre la réception de la lettre de Collins, en août, et les notes prises à son sujet à la fin du mois d'octobre, Leibniz est parti pour une seconde fois à Londres et a obtenu un long entretien avec Collins, qu'il n'avait pas eu l'occasion de rencontrer lors de

1. Particulièrement dans A III, 1, N.13 A, 1, Lettre de Collins à Oldenburg d'Avril 1673 - p.52
2. La correspondance entre le résultat de Leibniz et celui de Mengoli n'est pas si claire en réalité, comme nous l'avons montré au sein des premiers chapitres de notre travail
3. Leibniz fait également quelques rares mentions de Mengoli durant cette période, à propos d'une controverse sur un problème arithmétique posé par Ozannam. Sur ce sujet, *Cf* la thèse de Morgan Houg.
4. A III, 1, N.88 A, 1, Lettre de Collins à Oldenburg de Mai/Juin 1676 - p.436-437
5. A III, 1, N.88, Envoie depuis Londres d'Oldenburg à Leibniz du 5 Août 1676 - p.430-558
6. A III, 1, N.88 A, 2, Notes de Leibniz entre le 18 et le 29 Octobre 1676 - p.486-487

son premier séjour, au début de l'année 1673 [7]. On ne sait pas ce qui s'est dit au sujet des ouvrages de Mengoli lors de cette conversation.
Malgré cette apparente indifférence, Leibniz a tout de même travaillé dans le détail un livre de Mengoli : le *Circolo*. Il y a consacre quelques notes et brouillons assez fournis dans le courant du mois d'avril 1676, soit presque six mois avant son second départ pour Londres. Ainsi, lorsqu'il rédige ses notes sur la lettre de Collins, Leibniz n'a certes pas lu les *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ* ni même les *Geometriæ Speciosæ Elementa*, qu'il n'a peut-être jamais eus sous la main, en revanche il connait très bien le *Circolo*. Pourtant, comme nous l'avons montré, ce dernier ne peut pas être bien compris sans avoir lu les livres I, II et VI des *Geometriæ Speciosæ Elementa*, qui justifient la construction des triangles. Il peut donc paraître surprenant que Leibniz ne manifeste pas de curiosité apparente à l'égard de cet ouvrage préliminaire, que ce soit dans ces notes sur la lettre de Collins ou bien, comme nous allons le voir, dans les brouillons consacrés au *Circolo*. En réalité, Leibniz n'est pas un lecteur ordinaire du *Circolo*. Il connait très bien le triangle harmonique, pour l'avoir lui-même découvert deux à trois ans plus tôt. Or sa propre méthode de découverte s'est fondée sur la détermination des sommes des inverses des nombres figurés, dont il sait que Mengoli les a lui aussi déterminées au sein des *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ*. L'apparition du triangle harmonique n'est donc pas surprenante pour Leibniz, et il dispose des outils heuristiques pour en deviner l'origine. Du moins, c'est potentiellement ce qu'il a pu croire, passant de fait à côté des constructions très singulières des *Geometriæ Speciosæ Elementa*, qui empruntent, comme nous l'avons vu, une voie radicalement différente de celle de Leibniz pour la construction du triangle harmonique.

**Sources parisiennes**

Les travaux de Leibniz sur le *Circolo* de Mengoli se trouvent au sein de deux manuscrits :

- ⋆ *Arithmetica infinitorum et interpolationum*, fin avril 1676 (A VII, 3, N.57$_2$), consacré principalement à l'interprétation des tables comme outil de quadrature.
- ⋆ *Aus und zu Mengolis circolo*, fin avril 1676 (A VII, 6, N.13), contenant deux parties :
  - → La première (A VII, 6, N.13$_1$), sans titre [8], s'intéresse à la construction des tables et particulièrement aux processus d'interpolation que Mengoli met en œuvre.
  - → La seconde, *Pars 2 Excerptorum ex Circulo Mengoli, et ad eum annotatorum* (A VII, 6, N.13$_2$), se consacre plus particulièrement aux processus d'approximation de la quadrature du cercle.

Le second document (A VII, 6, N.13) est un commentaire explicite de l'ouvrage de Mengoli, contrairement au premier (A VII, 3, N.57$_2$) où aucune mention n'est faite à l'auteur. Le titre *Arithmetica infinitorum et interpolationum* est de Leibniz lui-même, ce qui pourrait même suggérer qu'il s'agit en réalité d'un travail sur Wallis et non sur Mengoli. Cependant, la construction des tables que donne Leibniz dans ce premier texte est conforme à celle décrite au sein du *Circolo* et n'a que peu de rapport avec la démarche wallisienne. Une note de Leibniz intitulée *Progressionis harmonicæ summa* (A VII, 3, N.57$_1$) permet de confirmer cette hypothèse :

> *Pour celles-ci, voir ce que j'avais trouvé en premier lieu et ajouté à la fin d'un brouillon sur un folio intitulé Arithmetique des infinis appliquée aux figures des interpolations et somme des harmoniques ajoutée à la fin. Avril 1676.*
> *J'ai rangé ce brouillon parmi les extraits issus du cercle du Mengoli.* [9]

### 8.1.2 L'*Arithmetica infinitorum et interpolationum*

Dans l'*Arithmetica infinitorum et interpolationum* (A VII, 3, N.57$_2$), Leibniz reprend le principe de calcul par transformations successives des tables, qui ressort particulièrement au sein du *Circolo*. Il dé-

7. *Cf* [34] Hofmann J. E., *Leibniz in Paris 1672-1676 : His Growth to Mathematical Maturity*, Cambridge University Press, 1974 - p.277-293

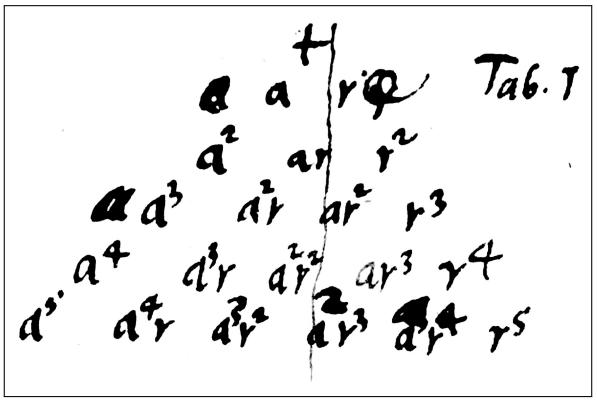
8. Leibniz ajoute la mention « Ceci se rapporte à des morceaux extraits de Du Cercle de Mengoli » (« *Hæc refer ad excerpta ex Mengolo de Circulo* »)

9. A VII, 3, N.57$_1$, *Progressionis Harmonicæ summa*, fin 1676 - fin mars 1679, p.735 : « Hanc, vide inventam a me primum et ascriptam sub finem schediasmatis in fol. cui titulus : *Arithmetica infinitorum et interpolationum figuris applicata et summa harmonicorum sub finem adiecta*, Aprilis. 1676. Hoc schediasma collocavi apud *Excerpta ex Mengoli Circulo*. »

rive ainsi dix tables successives, chaque transformation étant à première vue le produit d'une opération tabulaire entièrement déterminée par la structure des triangles de nombres.

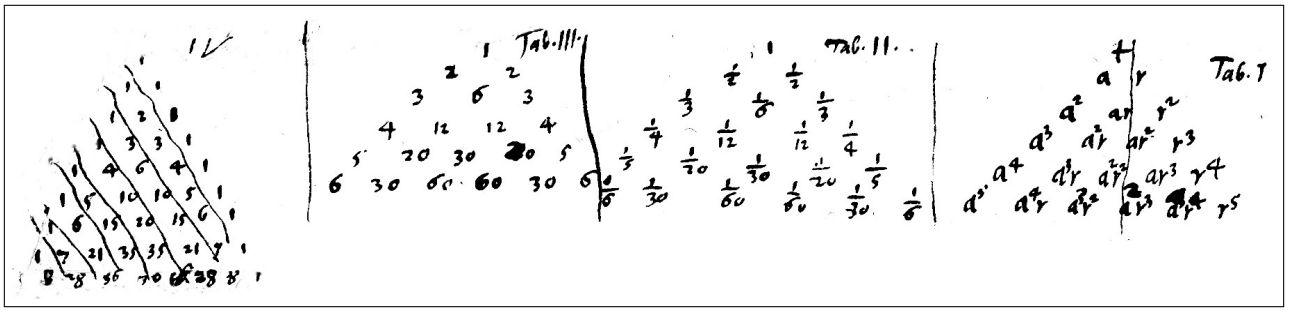
**Ordre des tables**

Mais contrairement à Mengoli, dont on a vu qu'il prenait le triangle arithmétique comme point de départ pour dériver les triangles suivants, Leibniz choisit de partir de la table des figures, à savoir :



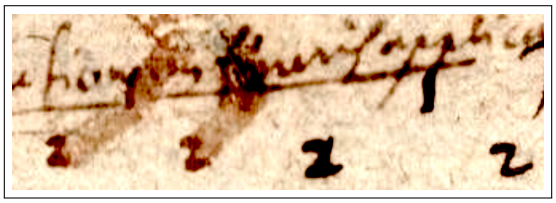

Manuscrits de Leibniz - LH 35, 12, 1 Bl.9-10

En réalité, Leibniz a vraisemblablement bel et bien suivi la même démarche que Mengoli, en partant du triangle arithmétique, comme le suggère l'ordre d'écriture des tables :




Manuscrits de Leibniz - LH 35, 12, 1 Bl.9-10

Cette hypothèse est sujette à caution, car Leibniz rédige parfois de droite à gauche, contre le sens conventionnel de l'écriture. Néanmoins des indices graphologiques tendent à soutenir cette hypothèse, notamment des biffures qui témoignent de premières tables débutées visiblement trop à gauche et qui ont été reportées vers la droite.



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 12, 1 Bl.9-10

On peut également remarquer une très légère contraction de la branche gauche de la table 2, ce qui ne s'explique naturellement que dans le cas où la table 3 représente un obstacle préexistant à l'écriture de cette table. Enfin, le nombre de ligne décroit, de gauche à droite, passant de neuf lignes pour le triangle arithmétique, à six pour les deux tables du centre, puis enfin à seulement cinq lignes pour la table de

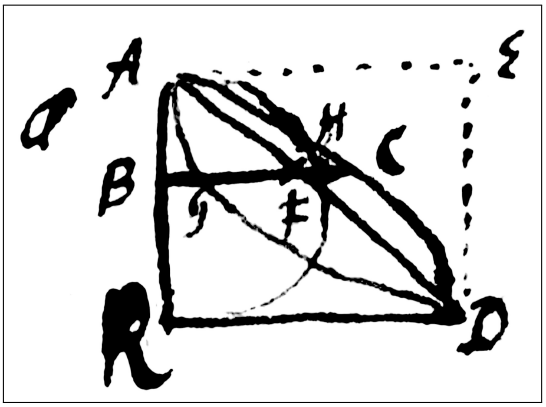
figures. Tous ces indices soutiennent l'hypothèse d'une rédaction de gauche à droite, mais ne suffisent pas à infirmer l'hypothèse contraire.
Dès lors, si l'on accepte que ces tables ont été rédigées de gauche à droite selon le sens conventionnel, Leibniz aurait donc effectué les mêmes opérations que Mengoli, à savoir :

- ⋆ Partir du triangle arithémtique.
- ⋆ Multiplier chaque ligne par son rang.
- ⋆ Inverser les coefficients, pour obtenir le triangle harmonique.
- ⋆ Interpréter ces coefficients comme les quadratures d'une certaine classe de courbe.

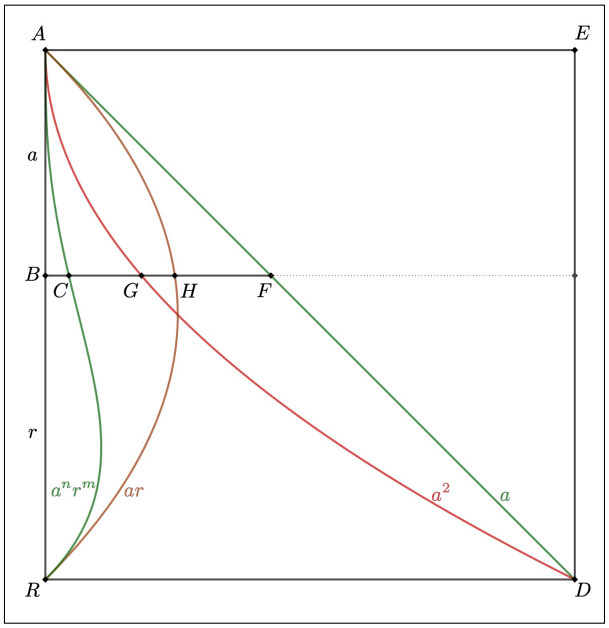
Ainsi, en renversant l'ordre de lecture, Leibniz met en scène l'apparition spectaculaire et contingente des nombres combinatoires. Ils émergent, comme par coïncidence, d'un calcul de quadrature purement formel. En effet, la table des figures que Leibniz désigne finalement comme la première table, ne fait aucune référence explicite aux aires ou aux quadratures, contrairement aux tables de formes (« *Tabula Formosa* ») de Mengoli où la notation *FO.* (« *Forma Omnes* ») indiquait clairement qu'il s'agissait d'aires. Ici Leibniz ne donne que la formule algébrique des fonctions.

### Formule géométrique et formule arithmétique

La question des quadrature est développée géométriquement, sans qu'il soit question de tables. Ainsi Leibniz présente la construction suivante :




Manuscrits de Leibniz - LH 35, 12, 1 Bl.9-10




Pour Leibniz, toutes ces figures, représentées par l'expression $a^n r^m$ sont des équations rationnelles de courbes. Ce sont des composés de courbes paraboloïdes de la forme $a^n$ dont on sait parfaitement calculer la quadrature au moyen de la formule :

$$\int a^n = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

De façon surprenante, Leibniz n'établit donc aucun lien structurant entre les courbes et leur place au sein de la table. Il s'agit simplement d'une table qui range les figures suivant leurs degrés, et l'on peut déterminer la quadrature de ces figures par des méthodes purement analytiques, totalement étrangères à la structure de la table :

> *Et ainsi, on peut représenter tous les termes rangés dans la table 1 par les figures dont ils expriment les ordonnées. En outre, dès lors que sont données les quadratures des toutes ces figures dont les ordonnées sont représentées dans la table 1 (en effet, elles sont toutes du genre des paraboloïdes et par conséquent entièrement rationnelles), on exprime de cette façon dans la table 2 les aires des figures complètes, c'est-à-dire la somme de toutes les ordonnées depuis A jusqu'à R. Ainsi, tous les a, c'est-à-dire l'aire*

*ARD est $\frac{1}{2}$ du carré ARDE. Tous les $a^2$, c'est-à-dire l'aire ARDGA est $\frac{1}{3}$ de ce même carré, et ainsi pour les autres.* [10]

Dès lors, la table 2 n'est pas considérée par Leibniz comme le triangle harmonique, mais comme la table des quadratures complètes de chaque figure, c'est-à-dire l'aire totale entre les abscisses $A$ et $R$ dans la figure qu'il a donnée. Si cette table coïncide effectivement avec le triangle harmonique, cela ne s'explique pas nécessairement par une analogie de structure entre les deux tables. En effet, si la table des quadratures complètes correspond au triangle harmonique, que l'on peut relier aisément aux triangle arithmétique, il se pourrait que cela ne soit pas le cas pour les quadratures partielles :

*Puisqu'en vérité, par cette méthode, on ne détermine que les aires des figures complètes de cette sorte, il faut voir si l'on ne pourrait pas mesurer de la même manière n'importe quelle portion.* [11]

En posant cette question, Leibniz trahit son sentiment. A première vue, l'apparition du triangle harmonique est d'abord une conséquence fortuite de la quadrature complète, et non de la nature des courbes et des relations qu'elles entretiennent au sein de la table des figures. Autrement dit, Leibniz ignore dans ce texte l'analogie entre la table 1 et la table 2 :

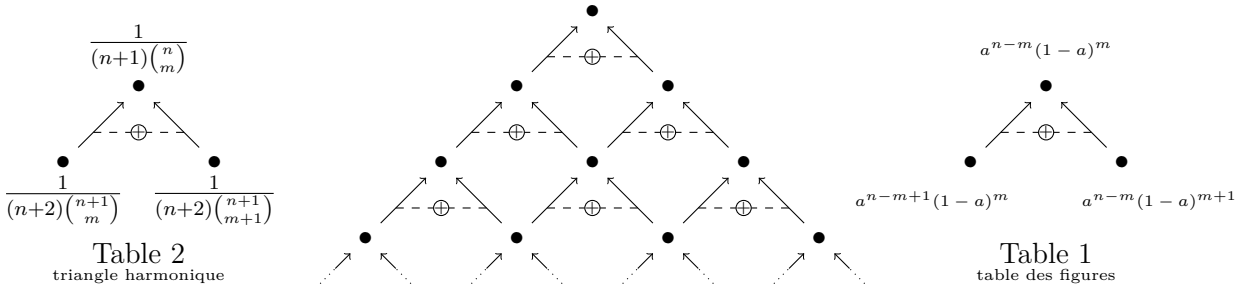
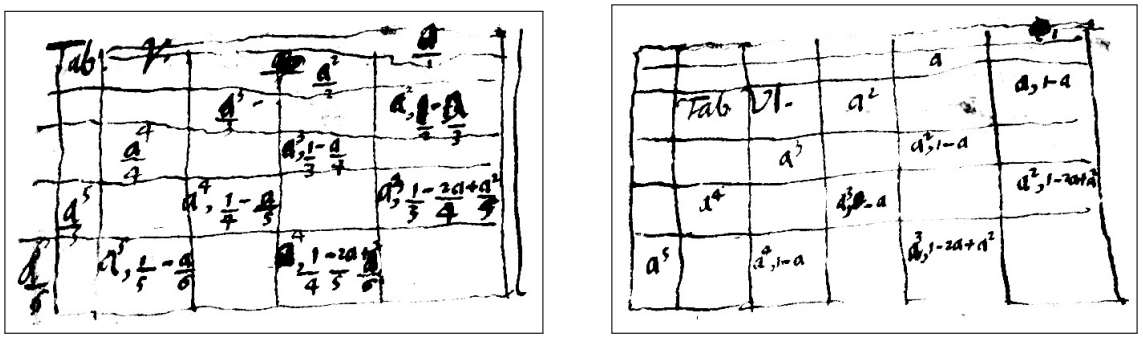



Table 2
triangle harmonique

Table 1
table des figures

Si cette relation est parfaitement connue pour le triangle harmonique, Leibniz ne semble pas la voir dans ce texte pour les expressions de figures. Nous avons montré que Mengoli ignore aussi ce parallèle, mais Mengoli néglige cette structure combinatoire dans toutes les tables qu'il présente, y compris le triangle harmonique. Certes, il l'évoque au milieu du *Circolo*, mais comme « une belle propriété » (« una bella proprieta ») sans application. Chez Leibniz, la structure combinatoire du triangle harmonique est fondamentale. Il l'a mise en avant à de nombreuses reprises. Ceci rend d'autant plus étonnante la manière avec laquelle il présente le raisonnement sur ces triangles de nombres.
Leibniz construit donc la table 5 afin d'étudier les quadratures partielles. Puis il ajoute la table 6, qui est une réécriture de la table 1, en ayant développé les différents binômes afin d'exhiber sa relation avec la table 5 des quadratures partielles.




Manuscrits de Leibniz - LH 35, 12, 1 Bl.9-10

10. A VII, 3, N.57$_2$, *Arithmetica Infinitorum et Interpolationum*, fin avril 1676, p.737-738 : « Ita omnes termini tabulæ I. ordine per figuras poterunt exhiberi, quarum ordinatas exprimant. Porro quoniam harum figurarum omnium quarum ordinatæ tab. I. exhibentur, datæ sunt quadraturæ (sunt enim omnes ex genere parabolœidum, quippe rationales integræ) ideo areas figurarum completarum seu summas omnium ordinatarum ab A. ad R. expressimus tab. II. Nempe omnes $a$. seu area $ARD$. est $\frac{1}{2}$ quadrati $ARDE$. Omnes $a^2$ seu area $ARDGA$, est $\frac{1}{3}$ eiusdem ; et ita de cæteris. »

11. A VII, 3, N.57$_2$, *Arithmetica Infinitorum et Interpolationum*, fin avril 1676, p.738 : « Quoniam vero hoc modo reperiuntur tantum areæ figurarum eiusmodi completarum ; videndum est an non eodem modo et portiones quælibet mensurari possint. »

Il n'en transcrit que la moitié gauche. Les rôles de $a$ et $r$ étant interchangeables, la moitié gauche et la moitié droite de la table présente les mêmes propriétés :

> *De fait, à partir de la table 1, je fais la table 6, après l'avoir réduite à la partie à gauche de la ligne perpendiculaire (on omet la droite qui ne serait qu'une répétition de la gauche, puisque ce qu'on peut dire de r, on peut en dire de même sur a et inversement).* [12]

La ligne perpendiculaire fait référence à l'axe vertical qui traverse la table 1 et qui sépare la moitié droite de la moitié gauche. Les termes au milieu de chaque rang sont leurs propres symétriques et doivent donc être conservés dans la partie gauche.
Dès lors, Leibniz convient que ces deux tables sont générales et représentent aussi bien les quadratures complètes que les incomplètes :

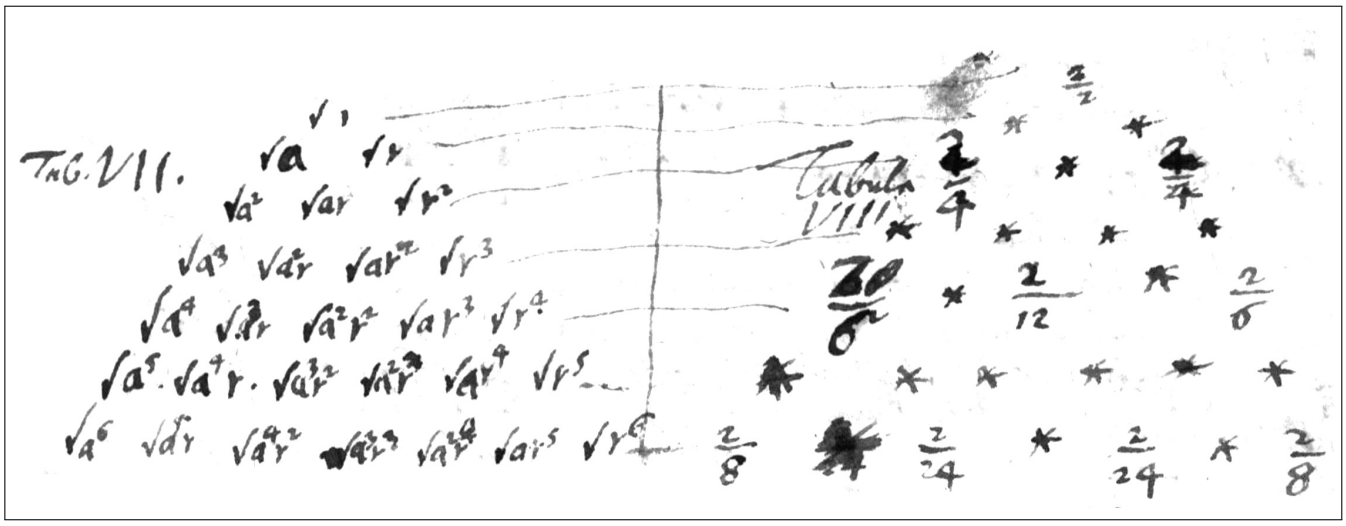
> *Et donc nous établirons maintenant cette table des sommes des ordonnées de la table I, c'est-à-dire des aires à la fois pour les figures incomplètes et complètes.* [13]

Ceci confirme l'absence totale de rôle donné au triangle harmonique, en tant que table de quadrature. De fait, les coefficients de ce triangle et leurs relations tabulaires sont absolument invisibles au sein de la table 5, qui est la table générale des quadratures complètes et incomplètes. Leibniz ne va guère plus loin dans sa recherche sur ces tables. Il passe ensuite à la présentation de l'interpolation :

> *De plus, nous n'avons exposé jusqu'ici les aires, dans les tables 2 et 5, de seulement les figures contenues dans les tables 1 et 6 qui sont rationnelles. Puisqu'à vrai dire, de nombreuses irrationnelles, voisines de ces dernières, ont été relevées, nous les réunissons également avec celles-ci dans une seule table.* [14]

### Interpolation des tables

La question de l'interpolation est seulement présentée à gros traits au sein de l'*Arithmetica Infinitorum et Interpolationum* (A VII, 3, N.57$_2$), et détaillée dans la première partie des notes sur le *Circolo* (A VII, 6, N.13$_1$). Les deux travaux présentent cependant une différence majeure : l'*Arithmetica Infinitorum et Interpolationum* (A VII, 3, N.57$_2$) ne fait aucune mention de la figure du cercle.
Dans l'*Arithmetica Infinitorum et Interpolationum* (A VII, 3, N.57$_2$), Leibniz introduit les tables 7 et 8 qui sont les interpolations repectives des tables 1 et 2 :



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 12, 1 Bl.9-10

12. A VII, 3, N.57$_2$, *Arithmetica Infinitorum et Interpolationum*, fin avril 1676, p.741 : « Nempe ex tabulæ I. parte sinistra per lineam perpendicularem resecta, (omissa dextra, quæ tantum repetitio foret sinistræ, quia quod de $r$ idem dici potest de $a$ et contra) facio tabulam VI. »

13. A VII, 3, N.57$_2$, *Arithmetica Infinitorum et Interpolationum*, fin avril 1676, p.740 : « Tabulam ergo summarum ordinatarum tabulæ I. seu arearum pro figuris incompletis pariter et completis condemus hanc. »

14. A VII, 3, N.57$_2$, *Arithmetica Infinitorum et Interpolationum*, fin avril 1676, p.741 : « Porro hactenus earum tantum figurarum tab.I et VI areas tab.II et V exhibuimus quæ sunt rationales. Quonima vero et irrationales plurimæ ipsis affines sunt notæ, eas quoque in unam cum his tabulam redigamus. »

Notons les lignes horizontales qui représentent les liens de correspondance termes à termes entre les deux tables. Les termes de la table de droites sont les quadratures des courbes dont les expressions figurent dans la table de gauche. Leibniz présente la même méthode d'interpolation que celle de Mengoli ou Wallis. Cela dit, sa démarche très heuristique le rapproche bien plus du premier que du second.

> *En vérité, pour compléter plus facilement les emplacements vides, il vaudra mieux, à l'image de la table 2 qui tire sa source dans la table 4, réduire de même la table 8 à sa source, à savoir une table 9, qui corresponde à la table 4 de la même manière que la table 8 correspond à cette table 2.* [15]

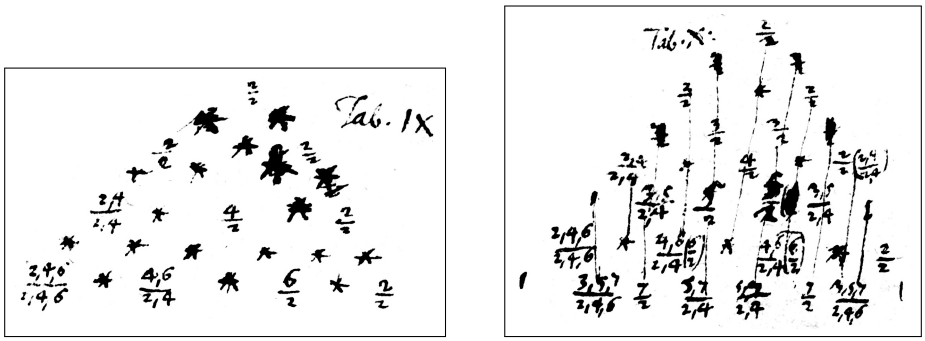
Pour effectuer l'interpolation, Leibniz se ramène donc également au triangle arithmétique, la table 4. Sa justification est intéressante :

> *Et ce, afin que cela soit plus simple, il faut examiner l'origine de ces termes contenus dans la table 4.* [16]

Ainsi, le passage par le triangle arithmétique n'est pas une nécessité mais une commodité. Nous avons montré que chez Mengoli, la principale raison de cette commodité se trouve dans la structure même du triangle arithmétique qui est construit selon la règle combinatoire récursive de Pascal. Pour Leibniz, ceci n'a rien d'évident. De fait, la propriété des nombres combinatoires qu'il met en valeur n'est pas celle-ci, mais leur structure factorielle qui permet de les interpréter en terme de progression. Ces progressions sont clairement représentées sur la table 4 par les lignes transversales qui séparent les différentes suites des ordres numériques :

Manuscrits de Leibniz - LH 35, 12, 1 Bl.9-10

Ce sont toujours les pas de Mengoli que Leibniz suit en introduisant les deux tables suivantes. La table 9 que nous avons déjà mentionnée et la table 10, copie de la table 9 où certains emplacements vides ont été complétés par l'interpolation de ces progressions. Cette dernière se fait comme chez Wallis et Mengoli, en replaçant les facteurs entiers des écritures factorielles des nombres combinatoires par des rompus :

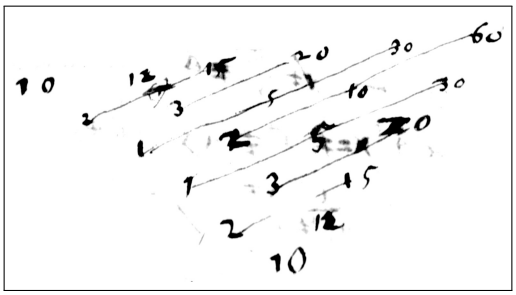


Manuscrits de Leibniz - LH 35, 12, 1 Bl.9-10

15. A VII, 3, N.57$_2$, *Arithmetica Infinitorum et Interpolationum*, fin avril 1676, p.742 : « Loca vero vacua ut suppleantur facilius operæ pretium erit, quemadmodum tabula II. habet fontem tabulam IV. ut ita tabulam VIII. reduci ad fontem, nempe tabulam IX, quæ respondeat tabulæ IV. ut tabula VIII. ipsi tabulæ II. »

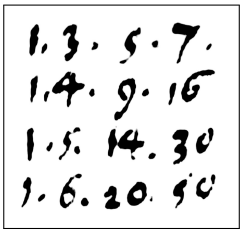
16. A VII, 3, N.57$_2$, *Arithmetica Infinitorum et Interpolationum*, fin avril 1676, p.742 : « Quod ut fiat facilius, consideranda est ipsorum terminorum tabulæ IV. origo. »

Les lignes verticales qui relient les termes qui sont sur une même colonne ne correspondent à rien dans le texte. A première vue, elles semblent former de nouvelles progressions. Les réductions de certaines fractions entre parenthèses vont dans ce sens. Par ailleurs, Leibniz a tracé un schéma très similaire dans le *Progressionis Harmonicæ Differentiæ* (A VII, 3, N.22) [17], rédigé deux ans plus tôt, durant l'automne 1673 :

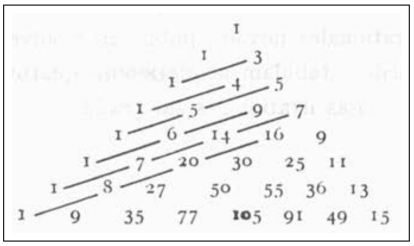


Manuscrits de Leibniz - LH 35, 5, 6 Bl.12-13

Dans ce texte non plus, Leibniz ne donne aucune interprétation quant à ces lignes. Le triangle de nombre est un triangle harmonique, tandis que la table 10 forme un triangle arithmétique. Ces deux tables partagent donc deux points communs notables : elles ont une structure combinatoire et elles sont symétriques. C'est potentiellement ce dernier aspect qui a donné à Leibniz plusieurs fois l'idée de considérer les progressions parallèles à l'axe de symétrie.
Pour finir, Leibniz a rencontré une situation similaire seulement deux mois avant ces travaux sur Mengoli, en février 1676 [18], dans le cadre de ses réflexions sur la résolution des équations. En factorisant des polynômes, il voit apparaitre un triangle arithmétique asymétrique. L'ordre d'apparition des termes suit les lignes transversales que Leibniz a tracé dans les deux précédents exemples. Les éditeurs de l'*Akademie* reproduisent d'ailleurs dans l'appareil critique un triangle orné de ces mêmes relations, qui suivent l'ordre d'apparition des termes :



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 3B, 9 Bl.1-2



A III, 1 N.91, Lettre 2 *De Bisectione Laterum* - p.642

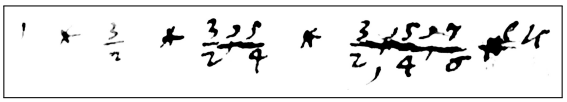
Mais Leibniz lui-même ne trace pas ces lignes, dans ce cas précis. Ainsi, le parallèle que nous établissons avec les deux tracés énigmatiques qui précèdent ne sert qu'à montrer la pertinence de la construction de telles lignes. Il ne permet cependant pas d'expliquer la raison qui a poussé Leibniz à les tracer, au delà de notre hypothèse portant sur la symétrie, hypothèse qui ne s'applique par ailleurs pas dans ce troisième cas.

**Interpolation des progressions**

Revenons donc à la méthode d'interpolation présentée par Leibniz dans l'*Arithmetica Infinitorum et Interpolationum* (A VII, 3, N.$57_2$). Lorsqu'il s'agit de combler les trous restant de la table 10, Leibniz ne donne pas de rôle particulier à la figure du cercle $\sqrt{ar}$, comme le font Wallis et Mengoli. L'inconnue se

17. A VII, 3, N.22, *Progressionis Harmonicæ Differentiæ*, automne 1673 - p.261
18. *Cf* A III, 1, N.96, Lettres pour Oldenburg et Collins du 29 octobre 1676, Lettre N.2 intitulée *De Bisectione Laterum* - p.642. Leibniz a envoyé ce document en octobre 1676, mais l'en-tête du manuscrit indique qu'il a été rédigé en juillet 1675. L'ajout qui nous intéresse sur le triangle arithmétique est quant à lui précédé de la mention du mois de février 1676.

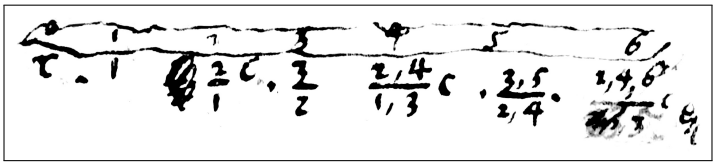
trouve ici à l'origine de chaque progression. Leibniz l'illustre en procédant d'abord à l'interpolation de la première progression incomplète, à savoir la deuxième diagonale de la table 10 :



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 12, 1 Bl.9-10

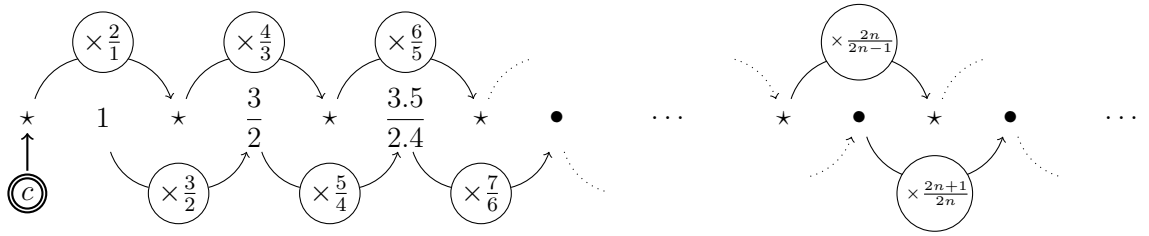
Pour la compléter, Leibniz introduit un terme imaginaire, de rang 0, qui, par conséquent, sort du triangle de nombre :

> *Et donc compléter tous les rapports des nombres voisins entre eux, de la même manière que le premier était vis-à-vis du troisème comme 2 à 3, ainsi il faudra nécessairement qu'un certain avant-premier imaginaire ou nullième (car nullième est un ordinal), que nous appellerons c, soit vis-à-vis du second comme 1 à 2 et que le second par rapport au quatrièmes soit comme 3 sur 4. Toute la série interpolée s'établira ainsi :* [19]



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 12, 1 Bl.9-10

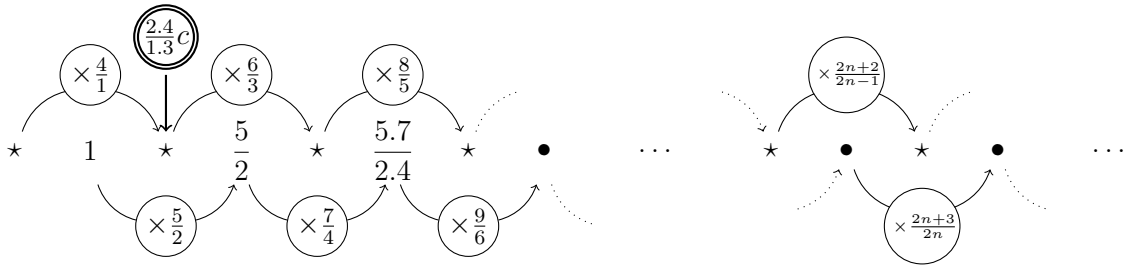
Leibniz suit donc le procédé de Mengoli, similaire à celui de Wallis, à savoir interpoler les relations plutôt que les termes eux-mêmes :




Leibniz complète les autres progressions par l'argument de symétrie que nous avions mentionné chez Wallis et Mengoli :

> *De plus le quatrième terme de cette série interpolée doit également être le premier de la suivante qu'on a à interpoler, c'est-à-dire de la seconde transversale descendante, parce que sa position est équivalente à sa réciproque, comme le montre l'examen de la table 10.* [20]

Ainsi Leibniz obtient que le terme de rang 4 de la première progression interpolée, à savoir $\frac{2.4}{1.3}c$, est égale au terme de rang 2 de la seconde progression incomplète, c'est-à-dire la quatrième diagonale de la table 10. Il peut alors compléter cette seconde progression par le même principe d'interpolation des rapports :




19. A VII, 3, N.57$_2$, *Arithmetica Infinitorum et Interpolationum*, fin avril 1676, p.744 : « Ut ergo omnes compleantur, numerorum sibi vicinorum rationes, quemadmodum fuit primus ad tertium ut 2 ad 3. ita facere necesse erit, ante-primum quendam imaginarium seu nullesimum ( : nam nullesimus est ordinalis :), quem vocabimus $c$, ad secundum ut 1 ad 2 et secundum ad quartum, ut 3 ad 4. Tota ergo series interpolata ita stabit »

20. A VII, 3, N.57$_2$, *Arithmetica Infinitorum et Interpolationum*, fin avril 1676, p.744 : « Iam quartus terminus huius seriei interpolatæ, debet etiam esse primus sequentis interpolandæ seu secundæ transverse descendentis, quia ei ob reciprocam situiationum æquipollet, ut ex tabulæ X inspectione patet. »

Mais au lieu de garder $c$ comme unique inconnue, Leibniz introduit à nouveau le terme de rang 0 de cette nouvelle progression :

> *En posant $d$ à la place de $\frac{2}{3}c$, on obtient : $d$* $1$ $\frac{4}{1}d$ $\frac{5}{2}$ $\frac{4.6}{1.3}d$ $\frac{5.7}{2.3}d$ $\frac{4.6.8}{1.3.5}d \ldots$ [21]

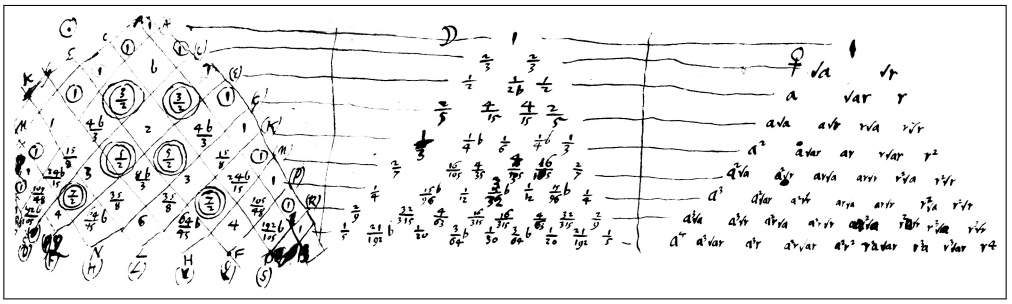
Puis, pour la troisième porgression, il introduit le nullième terme $e$ et ainsi de suite. Il n'ignore pas que ces différentes inconnues sont toutes reliées entre elles et qu'il suffit de déterminer $c$ pour les déterminer toutes. Mais le fait qu'il introduise pour chaque progression une nouvelle inconnue qui constitue le germe de la progression indique clairement que son intérêt ne se dirige pas vers le calcul de quadrature, mais l'étude de ces progressions. Par cet aspect, l'attitude de Leibniz se rapproche d'avantage de celle de Wallis.

### 8.1.3 Notes sur le *Circolo*

Les notes sur le *Circolo* (A VII, 6, N.13) sont bien moins exploratoires que l'*Arithmetica Infinitorum et Interpolationum* (A VII, 3, N.57$_2$).

#### Règles de construction

Dans la première partie des notes (A VII, 6, N.13$_1$), Leibniz trace directement les trois tables interpolées : le triangle arithmétique ⊙, le triangle harmonique ☽ et la table des figures ♀ :



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 2, 1 Bl.67

On retrouve les mêmes lignes horizontales pour marquer la correspondance termes à termes que celles qui lient les tables 7 et 8 dans l'*Arithmetica Infinitorum et Interpolationum* (A VII, 3, N.57$_2$). Le quadrillage de la première table est en réalité la superposition de deux séries de séparations pour marquer les progressions diagonales vers la gauche et vers la droite, indiquant le rôle central de la symétrie dans la construction de cette table. Dans un premier temps, Leibniz décrit la construction de la table ⊙, le triangle arithmétique interpolé. Il décrit à nouveau le procédé d'interpolation en deux temps.

- ⋆ D'abord l'interpolation des nombres figurés, en remplaçant dans l'écriture formelle les côtés entiers par des côtés fractionnaires :

  > *Selon la même méthode, au dessus de PQ, on a complété les pyramidaux. En effet, si l'on pose $y$ les arithmétiques et $d$ leur différence, de la même manière que la formation générale des triangulaires est $\frac{y(y+d)}{1.2}$, la formation générale des pyramidaux est $\frac{y(y+d)(y+2d)}{1.2.3}$.* [22]

- ⋆ Puis l'interpolation des progressions restantes par l'interpolation des rapports entre deux termes séparés par un terme :

  > *Où l'on constate que le premier terme est au troisième comme* 2 *à* 3*, le troisième au 5*ème *comme* 4 *à* 5*, et le cinquième au 7*ème *comme* 6 *à* 7*. Et donc qu'il est approprié que le second soit au quatrième comme* 3 *à* 4 *et le quatrième au sixième comme* 5 *à* 6*.* [23]

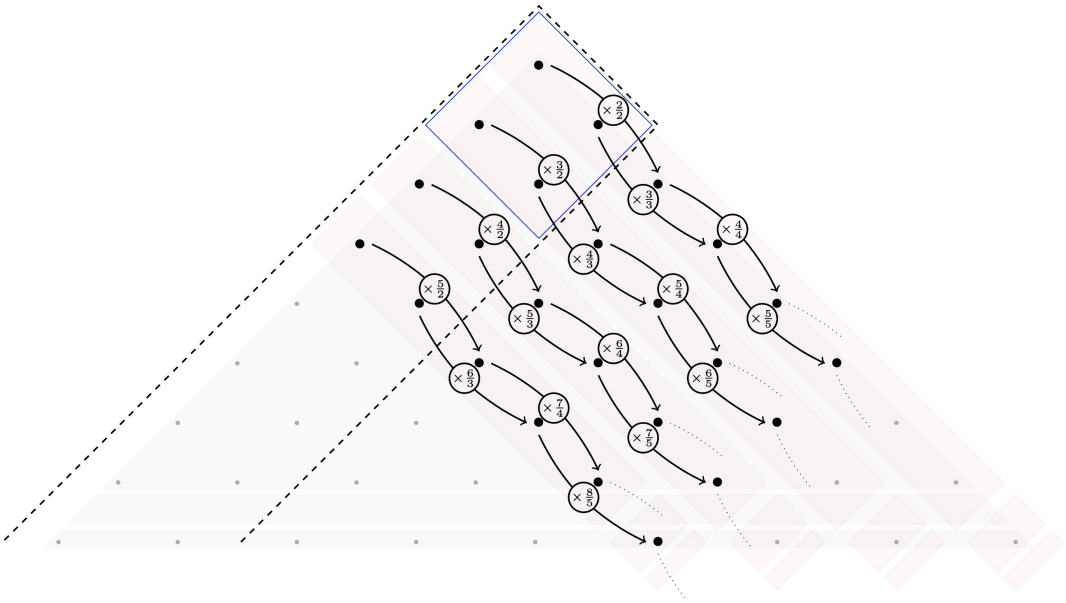
21. A VII, 3, N.57$_2$, *Arithmetica Infinitorum et Interpolationum*, fin avril 1676, p.745 : « pro $\frac{2}{3}c$ ponendo $d$. fiet $d$. 1. $\frac{4}{1}d$. $\frac{5}{2}$. $\frac{4,6}{1,3}d$. $\frac{5,7}{2,3}d$. $\frac{4,6,8}{1,3,5}d$. etc. »

22. A VII, 6, N.13$_1$, *Constructio Tabularum*, fin avril 1676, p.116 : « Eodem modo super $PQ$ habentur Pyramidales completi, ut enim generalis Triangularium generatio positis Arithmeticis $y$ et eorum differentia $d$. est $\frac{y,y+d}{1,2}$, ita generalis pyramidalium generatio est : $\frac{y,y+d,y+2d}{1,2,3}$. »

23. A VII, 6, N.13$_1$, *Constructio Tabularum*, fin avril 1676, p.117 : « Ubi patet terminum primum ad tertium esse ut 2 ad 3, tertium ad 5$^{\text{tum}}$ ut 4 ad 5, quintum ad 7$^{\text{mum}}$ ut 6 ad 7. Ergo conveniens esse secundum ad quartum ut 3 ad 4. quartum ad sextum ut 5 ad 6. »

Après cette explication quant à l'origine de cette construction, Leibniz résume de façon synthétique, sans démonstration ni explication, les divers procédés de construction des tables. Cette fois-ci, il suit la démarche de Mengoli, en commençant par le triangle arithmétique. Il énonce deux règles de construction :

- ⋆ La première règle énonce les rapports qu'ont en entre eux les termes de chaque progression transversale. On donne ainsi la loi qui régit chaque progression que contient la table. On constate qu'alors, pour chaque progression, il suffit de déterminer les deux premiers termes pour déterminer le reste de la suite.
- ⋆ La deuxième règle indique que la table est symétrique. Ainsi, la progression formée par tous les premiers termes de chaque progression est identique à la première progression, et celle constituée de tous les seconds termes est identique à la seconde progression. Dès lors, si l'on a déterminé les deux premiers termes des deux premières progressions, on obtient les deux premiers termes pour toutes les progressions et donc on peut déterminer tous les termes de la table.



Ainsi, Leibniz montre qu'il suffit de connaître les quatre premiers termes au sommet du triangle pour déterminer tous les autres au moyen des lois des progressions transversales.

> *Ainsi donc, à l'aide de ces deux règles, si l'on se donne quatre termes,* 1, 1 *le premier et le second terme de la première série transversale descendante, et* 1, *b ceux de la deuxième série transversale descendante, alors on donnera toute la table.* [24]

### Construction synthétique

Cette construction synthétique tranche avec la méthode d'invention présentée juste avant, fidèle aux démarches de Mengoli et Wallis. En effet, dans cette présentation, l'interpolation n'est plus visible. Tous les termes de la table ont le même statut et sont définis simultanément, et non plus en trois temps, comme le propose la méthode d'invention. Néanmoins cette façon de présenter les choses pose plusieurs questions.

La première concerne le choix des quatre premiers termes 1, 1 et 1, $b$. Par symétrie, on sait que le deuxième terme de la première série est égal au premier de la second, donc si $\alpha$, $\beta$ sont les deux premiers termes de la première série, alors $\beta$, $\gamma$ seront les deux premiers termes de la seconde. Leibniz ne précise donc pas pour quelle raison les deux premières indéterminées sont connues : $\alpha = \beta = 1$ et pas la troisième $\gamma = b$. En réalité, Leibniz précise que toutes les progressions sont des progressions « descendantes » (« *descendentes* »), c'est-à-dire décroissantes. A partir de là, il est nécessaire que $\alpha = \beta$, puisque le

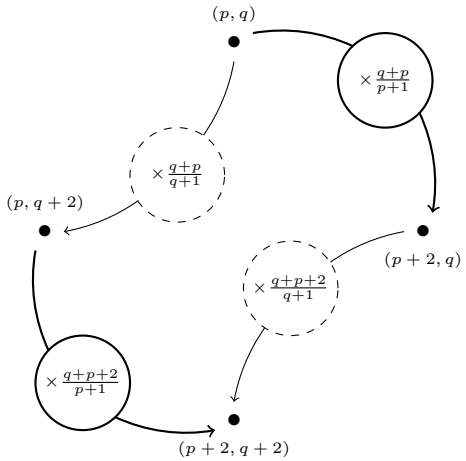
24. A VII, 6, N.13$_1$, *Constructio Tabularum*, fin avril 1676, p.118 : « Ergo ope duarum harum regularum, ex datis quatuor terminis, 1. 1. primo et secundo seriei transversæ descendentis primæ, et 1. *b.* seriei transversæ descendentis secundæ tota dabitur Tabula. »

premier terme $\alpha$ est égal au troisième par la loi de la progression et $\beta$ est compris entre les deux par l'hypothèse de monotonie. Enfin, comme toutes les relations sont valables à un coefficient multiplicatif générique près, il n'est pas surprenant que Leibniz choisisse $\alpha = 1$ sans perdre en généralité. Toutefois, cette hypothèse de monotonie n'est pas nécessaire à la détermination univoque de la table, en fonction des quatre termes du sommet.

La seconde question concerne l'énoncé de la seconde règle, à savoir la symétrie de la table. Rien n'assure *a priori* qu'une telle condition soit compatible avec les lois des progressions établies dans la première règle. En effet, par cette règle de symétrie, tous les rapports sont supperposés avec leurs rapports symétriques. Dès lors, il est possible de relier deux termes du triangle en suivant plusieurs chemins différents, aboutissant ainsi à des compositions différentes de suites de rapports. Leibniz ne vérifie pas que ces compositions sont équivalentes. Considérons le $p$-ième terme de la $q$-ième série. On peut alors obtenir le $(p+2)$-ième terme de la $(q+2)$-ième série par deux chemins :

- ⋆ *Premier chemin* : les lois données dans la première règle nous permettent d'obtenir le $p+2$-ième terme de cette $q$-ième série. Mais ce dernier, par la seconde règle, est égal au $q$-ième terme de la $(p+2)$-ième série, et donc par la première règle, on peut obtenir que $(q+2)$-ième terme de la $(p+2)$-ième série, qui est égal par le deuxième règle, au terme symétrique, à savoir le $(p+2)$-ième terme de la $(q+2)$-ième série.
- ⋆ *Deuxième chemin* : par la seconde règle, le $p$-ième terme de la $q$-ième série est égal au $q$-ième terme de la $p$-ième série. Ainsi, par la première règle on peut obtenir le $(q+2)$-ième terme de la $p$-ième série, qui est égal à son terme symétrique le $p$-ième terme de la $(q+2)$-ième série. Par la premier règle, on obtient alors le terme suivant dans la $(q+2)$-ième série, c'est-à-dire le $(p+2)$-ième terme.

Ainsi par le premier chemin, on a utiliser le $(p+2)$-ième terme de la $q$-ième série comme moyen terme, alors que dans le second, c'est le $p$-ième terme de la $(q+2)$-ième série qui a servi de moyen terme. Or ces deux termes ne sont pas symétriques l'un de l'autre. Il n'y a donc pas de raison que ces deux chemins soient *a priori* identiques. Il faut le vérifier par la composition des rapports :




De fait on a bien :

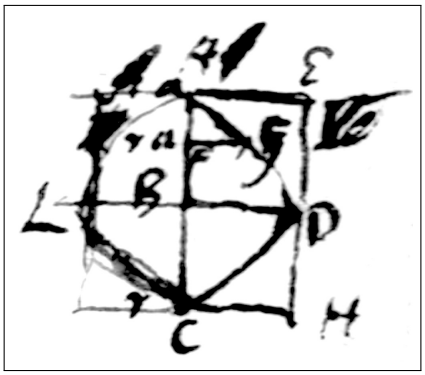
$$\underbrace{\frac{q+p}{p+1} \times \frac{q+p+2}{q+1}}_{\textit{Premier chemin}} = \underbrace{\frac{q+p}{q+1} \times \frac{q+p+2}{p+1}}_{\textit{Deuxième chemin}}$$

Ces règles qui sont présentées comme des règles de constructions sont donc en réalité des règles de détermination. Elle ne permettent pas de construire la table, mais seulement de déterminer les conditions de son unicité. De fait, en ne vérifiant pas que les deux règles sont compatibles, Leibniz montre qu'il ne construit pas le triangle *ex nihilo*, mais qu'il se fonde sur des certitudes implicites directement issues des propriétés du triangle arithmétique, en particulier, ses propriétés de symétrie et de monotonie.

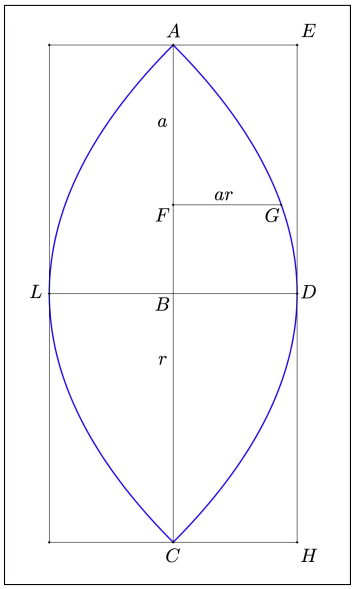
### Rôle central du cercle

La construction de la table ⅁, c'est-à-dire le triangle harmonique interpolé, est présentée comme la dérivation classique et mécanique du triangle arithmétique : on multiplie les rangs horizontaux par leurs

exposants, puis on inverse les termes. La table ♀ des figures, en revanche, est construite de façon indépendante, à l'aide de la construction géométrique présentée dans l'*Arithmetica Infinitorum et Interpolationum* (A VII, 3, N.57$_2$). A cette différence près que la figure est dupliquée en miroir afin d'obtenir des courbes fermées, et dans de la courbe $\sqrt{ar}$, le cercle complet. Leibniz omet par ailleurs de multiplier les aires par deux.



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 2, 1 Bl.67




Ainsi la place du cercle est centrale, contrairement à l'*Arithmetica Infinitorum et Interpolationum* (A VII, 3, N.57$_2$) :

> *Il ne reste par ailleurs qu'à trouver le nombre b, qui une fois connu donnerait la quadrature du cercle. En effet, si l'on pose que le carré du diamètre est 1, alors le cercle sera* $\frac{1}{2b}$. *De plus, on trouvera le nombre b par approximation d'une infinité de manières, grâce à la table* ⊙.[25]

Le rôle fondamental donné à la valeur $b$ qui représente la quadrature du cercle donne un autre statut aux différents triangles de nombres. Dans l'*Arithmetica Infinitorum et Interpolationum* (A VII, 3, N.57$_2$), Leibniz considère successivement les tables comme des outils combinatoires propres à exhiber des propriétés arithmétiques et des listes de listes propres à exhiber des règles de progressions. Ici, la place centrale donnée au cercle donne aux tables le rôle d'outils exclusivement consacrés à la détermination d'une quadrature, celle du cercle. Ainsi, l'approche n'est plus celle d'une "liste de listes", mais d'un "tableau à double entrée", au travers de laquelle il existe une infinité de chemins et de relations qui permettent de déterminer l'objet inconnu en son sommet : la valeur $b$.
A cette occasion, nous pouvons remarquer que Leibniz n'utilise pas la lettre $a$, comme chez Mengoli, pour désigner cette inconnue, mais la lettre $b$. Cela permet sans doute d'éviter une confusion avec la variable $a$ qui désigne aussi l'abscisse chez Mengoli. Mais dans l'*Arithmetica Infinitorum et Interpolationum* (A VII, 3, N.57$_2$), Leibniz utilise la lettre $c$ pour désigner le terme nullième de la première série. L'examen du manuscrit, et l'appareil critique, nous apprend que le jeune philosophe avait tout d'abord employé la lettre $b$ avant de biffer ce choix, pour finalement noter $c$ le terme de rang 0. Par cet étrange changement de notation, Leibniz montre qu'il est parfaitement conscient de cette distinction entre les deux approches tabulaires. L'inconnue $c$ se décline en $d$, $e$ et ainsi de suite pour tous les nullièmes termes de chaque progression. Mais l'inconnue $b$ est unique et se propage dans toute la table, selon un infinité de chemins arborescents.

25. A VII, 6, N.13$_1$, *Constructio Tabularum*, fin avril 1676, p.119 : « Cæterum superest inveniendus numerus $b$. qui inventus daret quadraturam Circuli. Nam posito Quadrato Diametri, 1. circulus erit $\frac{1}{2b}$. Numerus autem $b$, invenietur appropinquando, infinitis modis, ope Tabulae ⊙. »- *Nota Bene* : Comme Leibniz oublie de multiplier les coefficients par deux, avec sa nouvelle figure, il commet ici une erreur en évaluant l'aire du cercle de diamètre 1 à $\frac{1}{2b}$ alors qu'elle vaut en réalité $\frac{1}{b}$. Les éditeurs de l'*Akademie* ont corrigé Leibniz en indiquant « [semi]circulus ». Nous n'avons pas jugé opportun de reproduire cette correction.

## 8.2 Réception parisienne de Wallis

La réception de l'ouvrage de Wallis a laissé une trace bien plus importante au sein du corpus leibnizien. Ceci s'explique naturellement par la différence d'impact qu'ont eu le *Circolo* et l'*Arithmetica Infintorum* dans les milieux mathématiciens de l'époque. L'*Arithmetica Infintorum* a profondément marqué la plupart des auteurs de cette époque. L'ouvrage a donc été bien plus diffusé et plus discuté, augmentant de fait son aura dans un processus rétroactif. Cela étant, la différence de renommée ne peut pas expliquer à elle seule le décalage entre ces deux réceptions.

### 8.2.1 L'approximation par le produit infini

#### Le produit chez Mengoli

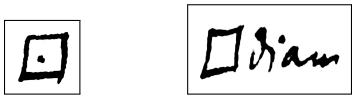
La seconde partie des notes, *Pars 2 Excerptorum ex Circulo Mengoli, et ad eum annotatorum* (A VII, 6, N.13$_2$) s'attache à la seconde partie de l'ouvrage de Mengoli, à savoir l'approximation de la valeur cherchée, c'est-à-dire la quadrature du cercle. Le produit infini de Wallis auquel aboutit la méthode de quadratures est en réalité une très mauvaise approximation, car elle converge extrêmement lentement [26]. Mengoli développe ainsi dans la seconde partie de son ouvrage une méthode de calcul logarithmique qui permet d'augmenter l'efficacité de son approximation. C'est à cette méthode que Leibniz s'intéresse dans cette seconde partie. Leibniz reste extrêmement proche du texte, suivant les indications de Mengoli pas à pas, et citant l'ouvrage en italien à plusieurs reprises.

> *Et après avoir fait ce calcul, il trouve la même quadrature, dans les dix premières chiffres, que Ludolph van Ceulen.* [27]

Cette question de la convergence du produit de Wallis n'est par ailleurs pas totalement claire dans l'esprit du jeune Leibniz, puisqu'il en discute dans un autre fragment, que les éditeurs datent de la toute fin du séjour parisien [28], le *De serie Wallisiana* (A VII, 3, N.69).

#### Contradictions dans le produit infini

Ce manuscrit nous donne l'occasion d'une remarque concernant le choix des symboles chez Leibniz. Dans ce fragment, il reprend les notations de Wallis et non celle de Mengoli, à qui il ne fait par ailleur aucune référence. Ainsi la valeur de l'inconnue est notée par un carré ⊡ au lieu du $a$ de Mengoli remplacé par un $b$ dans les notes sur le *Circolo* (A VII, 6, N.13). Cependant, dans l'édition de 1656 de l'*Arithmetica Infinitorum*, l'inconnue est simplement notée par un carré □ et non un carré pointé ⊡ comme le note ici Leibniz. En effet, pour ce dernier la notation □ désigne un carré géométrique. Par ailleurs, dans ce même manuscrit, c'est-à-dire le *De serie Wallisiana* (A VII, 3, N.69), pour désigner le carré circonscrit au cercle, il utilise cette écriture géométrique et note □*diam*, c'est-à-dire le carré du diamètre. Il rajoute donc un point au centre du carré ⊡ pour éviter la confusion entre les deux écritures.



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 12, 1 Bl.7

26. Nous avons vu que la convergence est linéaire, c'est-à-dire en $\frac{1}{n}$ pour $n$ facteurs. Dans ces conditions, le nombre de décimale augmente de façon logarithmique. A titre d'illustration, il faut une quarantaine de facteurs pour obtenir la première décimale, un millier pour en obtenir deux, trois mille pour trois et vingt mille pour quatre. Wallis améliore la formule pour obtenir une convergence quadratique, en $\frac{1}{n^2}$,, mais cela ne change pas le caractère logarithmique de la détermination des décimales.

27. A VII, 6, N.13$_2$, *Pars 2 Excerptorum ex Circulo Mengoli, et ad eum annotatorum*, fin avril 1676, p.131 : « Quo facto calculando invenit quadraturam in decem primis figuris eandem quam Ludolphus a Colonia ».

28. Les éditeurs considèrent cette datation comme très hypothétique. L'argument de la datation repose exclusivement sur la notation æq. pour l'égalité, notation qui apparait à la toute fin de la période parisienne, lorsqu'auparavant c'est le symbole ⊓ qui quasiment systématiquement employé. La datation de ce fragment repose donc sur des arguments fragiles.

Ce changement de notation est sans doute anecdotique mais il souligne la façon dont Leibniz conçoit le formalisme, à savoir qu'un même symbole peut à la fois désigner un objet et une relation fonctionnelle [29]. Dans ce texte Leibniz pointe le caractère problématique d'une expression telle que :

$$\boxdot = \frac{1.3.3.5.5.7.7\ldots}{2.4.4.6.6.8\ldots}$$

> *Mais à partir de là, je conclus que l'on peut obtenir l'expression de Wallis, certes, par l'approximation dont apparait le caractère continuable à l'infini, mais non pour une expression exacte où l'on considère d'un coup et universellement la série infinie. En effet, en l'exprimant par la continuation supposée à l'infini, il en résulte l'absurde.* [30]

En effet, il observe qu'il y a tous les carrés des nombres impairs au numérateur et tous ceux des nombres pairs au dénominateurs. Or un nombre pair est divisible par deux, et l'ensemble des moitiés des nombres paires forment l'ensemble total des entiers, comprenant les impairs. Ainsi, chaque carré impair du numérateur est un facteur du carré de son double au dénominateur, si bien que tous les termes du numérateur peuvent être simplifiés avec des termes du dénominateur. Mais il reste alors au dénominateurs, en plus des facteurs 4 issus de la simplification, tous les carrés des doubles des nombres pairs. Ce produit infini est donc infiniment grand, si bien que la fraction devient infiniment petite :

$$\begin{aligned}
\boxdot &= \frac{1.3.3.5.5.7.7\ldots}{2.4.4.6.6.8\ldots} \\
&= \frac{1.3^2.5^2.7^2\ldots}{2.4^2.6^2.8^2.10^2.12^2.14^2\ldots} \\
&= \frac{1.3^2.5^2.7^2\ldots}{2.4^2.(2.3)^2.8^2.(2.5)^2.12^2.(2.7)^2\ldots} \\
&= \frac{1}{2.4^2.4.8^2.4.12^2.4\ldots} \\
&= 0
\end{aligned}$$

L'approximation permet de poursuivre les fractions finies indéfiniment, mais la limite ne peut pas être exprimée par un rapport actuel de deux produits infinis.

> *Et par conséquent la série de Wallis est, à proprement parler, finie indéfinie, c'est-à-dire qu'elle doit être conçue comme finissant à certain endroit, et il est permis de ne pas exprimer où.* [31]

### Infini et indéfini

Cette distinction sera à nouveau évoquée par Leibniz bien plus tardivement lorsqu'il entreprendra une correspondance avec Wallis lui-même à la fin des année 1690. Ce dernier remet en question la priorité de Mercator quant à l'estimation de grandeurs irrationnelles par des séries infinies :

> *Où il est dit que Nicolas Mercator est le premier qui a donné une certaine quadrature par une série infinie, voyez donc si telle n'est pas la mienne, Arithmetique des infinis, proposition 191 :* $\square = \frac{3.3.5.5.7.7.9.9\ldots}{2.4.4.6.6.8.8.10\ldots}$ *et celle de Brouncker :* $\square = 1\frac{1}{2\frac{9}{2\frac{25}{2\frac{49}{2\frac{81}{2\ \text{etc.}}}}}}$
>
> *Mais toutes mes series de tables (dans l'Arithmetique des infinis) sont des séries infinies, et plusieurs d'entre elles sont au nombre de celles qu'on nomme chez vous (par une nouvelle dénomination) des séries transcendentes.* [32]

29. Cette distinction entre objet et relation fait écho à notre analyse des réflexions du jeune Leibniz sur la généalogie, dans la *Dissertatio de Arte Combinaotori* (A VI, 1, N.8), *Cf* p.116.

30. A VII, 3, N.69, *De Serie Wallisiana*, fin de l'été 1676 - p.824 : « Sed hinc colligo expressionem Wallisianam posse quidem haberi pro appropinquatione, cuius apparet continuabilitas in infinitum, sed non pro exacta expressione per infinitam seriem consideratam semel in universum, nam exprimendo per supposita continuationem in infinitum, oritur absurdum »

31. A VII, 3, N.69, *De Serie Wallisiana*, fin de l'été 1676 - p.825 : « Et proinde series Wallisiana est proprie appellanda finita indefinita, seu quæ alicubi finienda concipi debet, licet non exprimatur ubi. »

32. A III, 7, N.90, Lettre de Wallis à Leibniz du 6 avril 1697 - p.373 : « Ubi dicitur ; Nicolaum Mercatorem primum esse qui quadraturam aliquam dedit per Seriem Infinitam : Vide annon mea talis sit, *Arith. Infin.* pr. 191, $\square = \frac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times9\times9\times\ \text{etc}}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times10\ \text{etc.}}$ vel Brounkeri $\square = 1\frac{1}{2\frac{9}{2\frac{25}{2\frac{49}{2\frac{81}{2\ \text{etc.}}}}}}$. Sed et omnes meæ Tabellarum series (in *Arithmetica Infinitorum*) sunt series Infinitæ ; et earum plurimæ quales quæ vobis dicuntur (novo nomine) series Transcendentales »

Dans sa réponse, Leibniz pose à nouveau cette différence entre expression infinie exacte et expression de séries d'approximations convergentes :

> *Du reste selon le vocabulaire le plus généralement accepté, les approximations continues, les séries convergentes et les séries infinies peuvent être prises pour la même chose. Quant à moi cependant, j'ai pris l'habitude de les distinguer de différentes manières, à des fins d'enseignement. Toute approximation continue ne révèle pas continument la valeur exacte d'une inconnue, comprenant d'un seul coup toutes les approximations. Et une valeur exacte telle que ton* $\square = \frac{3.3.5.5.7.7.9.9...}{2.4.4.6.6.8.8...}$ *ou bien celle de Brouncker* $\square = 1\frac{1}{2\frac{9}{2\frac{25}{2\frac{49}{2...}}}}$*, dont je ne vois pas assez l'origine ; doit pourtant selon moi être distinguée d'une valeur exacte donnée par des séries infinies proprement dites qui sont composées d'une simple collection de termes, telles que Nicolas Mercator en donna le premier, si je ne me trompe, et que Newton élargit, et que moi-même aussi j'ai quelque peu cultivé.* [33]

Notons que cette distinction qu'établit Leibniz n'a pas de rapport avec la distinction actuelle entre série absolument convergente et série semi-convergente. En effet, le produit de Wallis est semi-convergent, dans le sens où son logarithme forme une série semi-convergente, tout comme la série alternée de Leibniz. En revanche, la notion de convergence absolue ou de semi-convergence n'a pas de sens pour un développement infini en fractions continues. En effet, on ne peut pas permuter les facteurs ou les termes comme dans une somme ou dans un produit. Ainsi la formule de Brouncker converge simplement. Ce critère moderne distingue donc la formule de Brouncker de celles de Leibniz et de Wallis, tandis que celui de Leibniz distingue la sienne de celle de Wallis et de Brouncker.
La dernière partie du fragment examine les développements en fractions continues des premiers termes de la série de Wallis, tentant visiblement de mettre en évidence le lien avec la formule de Brouncker, ce qui est impossible par cette voie, comme nous l'avons montré grâce à l'analyse de J. Stedall. Leibniz travaillera à nouveau cette question dans un manuscrit sans titre (LH 35, 12, 1 Bl.5), qui doit être postérieur à 1685, puisqu'il y fait référence au *Treatise of Algebra* [34] de Wallis publié cette année-là. Dans ce texte, Leibniz semble avoir trouvé le moyen de réduire les fractions continues de Brouncker au produit infini de Wallis :

> *Cette expression de Broucker est déduite de celle de Wallis dans son Arithmétique des Infinis et ici on en montre un moyen.* [35]

En réalité, la formule trouvée par Leibniz ne donne pas de lien très clair entre les deux expressions, et aucun moyen de réduire l'une à l'autre. De fait, Leibniz ne considère plus la question pourtant cruciale de savoir si l'expression de Brouncker est une formule exacte ou bien si elle relève d'avange de la caractéristique « finie indéfinie » (« *finita indefinita* ») très clairement exposée dans le *De serie Wallisiana* (A VII, 3, N.69).

### 8.2.2 Critique de l'induction chez Wallis

#### Une question de rigueur

Leibniz mentionne l'*Arithmetica Infinitorum* dès la fin de l'année 1672, au début de la lettre à Gallois (A II, 1, N.109), à laquelle il donne d'ailleurs le titre d'« Introduction à l'Arithmétique des Infinis » (« *Accessio ad Arithmeticam Infinitorum* ») :

> *Déjà autrefois, Archimède a utilisé l'arithmétique des infinis ainsi que la géométrie des indivisibles, en faisant usage des inscrits mais aussi des circonscrits dans De la mesure du cercle, dans De la sphère et du cylindre et dans La quadrature de la parabole : mais c'est Cavalieri qui a ressuscité pour notre siècle*

33. A III, 7, N.103, Lettre de Leibniz à Wallis du 28 mai 1697 - p.427-428 : « Tametsi vocabulis generalius acceptis pro iisdem haberi possint continuæ approximationes, et series convergentes, et seires infinitæ ; ego tamen docendi causa multi modis hæc distinguere soleo. Non omnis continua appropinquatio continuo exhibet incognitæ valorem exactum, omnes appropinquationes simul comprehendentem. Et valor ille exactus qualis tuus $\square = \frac{3.3.5.5.7.7.9.9 \text{ etc}}{2.4.4.6.6.8.8 \text{ etc.}}$ vel Brounkerianus $\square = 1\frac{1}{2\frac{9}{2\frac{25}{2\frac{49}{2 \text{ etc.}}}}}$ cujus non satis perspexi originem ; a me tamen distinguitur a valore exacto per series infinitas proprie dictas, quæ per meram terminorum collectionem conflantur, quales ni fallor primus dedit Nicolaus Mercatori, ampliavit Newtonus, atque ego quoque excolui nonnihil. »

34. [112] J. Wallis, *A Treatise of Algebra*, Londres, Oxford, 1685

35. LH 35, 12,1 Bl.5, Billet sans titre, après 1685 : « Hæc Brounckeri expressio deducta est ex Wallisianam in Arithmetica infinitorum, et modus ibi ostenditur. »

*cette géométrie des indivisibles, Galilée l'ayant accouchée et vérifiée ; Wallis avec son Arithmétique des infinis, Jac. Gregory avec des inscrits et des circonscrits. Et à vrai dire, sans cette lumière nouvelle rayonnant des indivisibles et des infinis, mais aussi de cet art d'analyse qu'on mène plus loin, il n'y aurait plus d'espoir pour de vifs progrès en Géométrie.* [36]

Néanmoins, il est clair que Leibniz n'a pas lu l'ouvrage dans le détail, voir lu tout court, comme c'est d'ailleurs également le cas pour nombre d'œuvres qui sont citées dans cette lettre et dont le jeune philosophe ne maîtrise manifestement pas encore le contenu. C'est également trois années qui vont s'écouler sans que Leibniz ne fasse la moindre référence à l'*Arithmetica Infinitorum* dans sa correspondance. A la fin de l'année 1675, dans une lettre à La Roque où Leibniz expose en français le principe de sa quadrature arithmétique, on trouve le commentaire suivant :

*Ce theoreme est un des plus considerables et des plus universels de la Geometrie. Et j'en ay tiré quelques consequences qui meritent d'estre touchées en passant. Premierement par ce theoreme on peut demonstrer geometriquement et tout à la fois et sans induction de nombres (que Mons. Wallis a donné dans son excellent ouvrage de l'Arithmetique des infinis) toutes les quadratures parfaites que nous avons jusqu'icy.* [37]

Le principal problème de l'induction chez Wallis concerne la quadrature de figures simples, que Leibniz nomme des courbes paraboloïdes et qui forment une classe d'objets pas toujours consistante. C'est donc la première partie de l'*Arithmetica Infinitorum* qui est visée. Nous développerons la réception de cette partie dans une prochaine section. Néanmoins la critique de l'induction déborde du cadre des seuls calculs de quadratures rationnelles et touche naturellement au principe de l'interpolation du triangle arithmétique, qui permet de déterminer la quadrature du cercle. Leibniz est d'autant moins satisfait par cette approche qu'il reconnait très tôt en Wallis le porte-étendard d'une position formaliste, ou proto-structuraliste à laquelle il adhère. Ainsi, dans le *De Analyseos Historia* (A VII, 8, N.10), rédigé au début de l'année 1675, Leibniz évoque la controverse qui opposa Wallis et Hobbes sur le statut du calcul. On sait pourtant combien la pensée de Hobbes a été prégnante pour le jeune Leibniz sur ce sujet [38]. Mais il prend ici clairement position en faveur de Wallis :

*Thomas Hobbes qui fut traité de façon indigne par Descartes dans ses réponses aux objections métaphysiques, a trouvé l'occasion, en publiant le livre du Corps, de juger ainsi à propos du calcul, de façon plutôt modérée : même si parmi les choses développées avec longueur, le discours par symbole est aisé, lorsque, cependant, il advient sans les idées des choses, il ignore s'il doit être estimé qu'il est pleinement utile. Puis après, durement accueilli par Wallis, mathématicien d'Oxford, combattant avec outrage les traités des écoles issues de Hobbes, il déversa sa colère sur sa méthode, en publiant le livre de la correction de la Mathematique d'aujourd'hui, où il ne se contente pas d'annoncer qu'elle est inutile, mais il lui a aussi semblé possible de montrer qu'elle est erronée. Quant à mon sentiment sur ce sujet, il est assez semblable à Wallis, de sorte qu'à partir du calcul symbolique, nous pouvons être sûrs de la vérité et que seule reste la question de l'utilité.* [39]

Leibniz annonce donc ici explicitement son rejet du conventionnalisme de Hobbes, pour qui, dans le cadre nominaliste de sa pensée, les vérités logiquement déduites de définitions nominales arbitraires sont elles aussi arbitraires, cette position s'appliquant également aux résultats des calculs mathématiques. Leibniz voit donc chez Wallis la critique de cette idée et l'affirmation d'une certaine autonomie du raisonnement

36. A II, 1, N.109, Lettre à Jean Gallois, *Accessio ad Arithmeticam Infinitorum*, fin 1672 - p.343 : « Archimedes jam olim usus est Arithmetica Infinitorum atque Indivisibilium Geometria, inscriptisque atque circumscriptis in *Dimensione Circuli*, in de Sphæra et Cylindro, in *Quadratura Parabolæ* : et Geometriam quidem Indivisibilium resuscitavit nostro seculo Cavalerius obstetricante atque probante Galilæo ; Wallisius *Arithmeticam Infinitorum*, Jac. Gregorius inscripta ac circumscripta ; et vero nisi nova ex indivisibilibus et infinitis Lux affulgeat et ars analyseos provehatur, nulla spes est provehendæ magnopere Geometriæ. »

37. A III, 1, N.72, Lettre à La Roque, fin 1675 - p.347-348

38. Sur les rapports entre Leibniz et Hobbes, *Cf* [59] E. Marter, P. Rateau *Leibniz lecteur critique de Hobbes*, Presses de l'Université de Montréal, 2017

39. A VII, 8, N.10, *De Analyseos Historia*, août 1674 - janvier 1675 - p.47 : « Thomas Hobbes a Cartesio in *responsionibus ad objectiones Metaφysicas* indigne habitus ; edito libro *de Corpore*, occasionem nactus de calculo ita censuit ; modeste satis ; etsi inter res longe dissitas facilis sit per symbola discursus, cum tamen fiat sine ipsarum rerum ideis, an valde utilis existimandus sit, se nescire. Postea vero a Wallisio Oxoniensi Mathematico scholarum ab Hobbio contumeliose tractatarum porpugnatore durius acceptus, in ipsam ejus Methodum bilem effudit, edito libro de *Emendatione Mathematicæ hodiernæ*, ubi non contentus inutilem pronuntiare, etiam erroneam ostendere, posse sibi visus est. Ei vero ita a Wallisio satis mea sententia factum ut de Calculi symbolici veritate possimus esse securi ; solaque de utilitate disceptatio supersit. »

logique et du calcul mathématique, à laquelle il semble souscrire. Notons néanmoins que Leibniz ne prend pas position quant à la priorité métaphysique du calcul symbolique sur les autres formes de raisonnement. Pour lui, cette question n'a pas lieu d'être. Puisque toutes ces modalités d'expressions donnent un égal accès à la vérité, c'est sur le plan pratique de l'utilité qu'il est pertinent de comparer leurs valeurs.
Pourtant la critique de l'induction au sein de l'*Arithmetica Infinitorum* ne se situe pas sur le plan pratique de l'utilité ou de la simplicité mais remet bien en question le statut effectif de la preuve en tant que démonstration. Dès lors, on peut relire la réception de Wallis par le jeune philosophe à l'aune de ce paysage philosophique qu'il semble avoir à l'esprit à l'époque. L'insatisfaction procurée par la démarche inductive du mathématicien britannique est d'autant plus forte que Leibniz le considère comme un fervent partisan du calcul symbolique.

### La correspondance tardive avec Wallis

Dans la correspondance entre les deux hommes, à la fin des année 1690, Wallis revient sur ces critiques qui lui ont été adressées, et semble-t-il, par d'autres que Leibniz. Comme il le dit dans une de ses premières lettres, du 1er décembre 1696 (A III, 7, N.55), les critiques ne concernent pas seulement l'*Arithmetica Infinitorum* mais également son *Treatise of Algebra* :

> *Et on fait des remarques, au sujet de mon procédé par induction (ce qui est vrai dans une certaine mesure) duquel on traite abondamment dans les chapitres 78 et 79 de l'Algèbre. Mais il fallait se rappeler que j'enseignais moins une méthode de démonstration qu'une méthode d'investigation (et certes nouvelle et la moins méprisable, ce que de fait aucun opposant n'a pu nier), à laquelle la méthode des inductions convient supérieurement.* [40]

Ainsi Wallis semble d'abord se justifier en déplaçant à nouveau le cadre du débat. Il ne s'agit pas d'évaluer le caractère apodictique de la démarche inductive, mais plutôt son aspect heuristique. Il défend son approche comme le meilleur candidat pour l'art d'inventer et non l'art de juger. De ce point de vue, la position de Wallis est en parfait accord avec celle de Leibniz.
Mais en principe, ces deux pratiques posent des questions différentes. La démonstration et l'investigation ne s'opposent pas mais se complètent. Dans la suite de sa lettre pourtant, Wallis tente de mettre ces deux approches face-à-face :

> *Que si d'autres veulent confirmer plus loin (par les démonstrations apagogiques) là où moi je les avais recherchées de la manière ordinaire, je leur permet. Quant à moi, j'estime me l'être confirmé autant qu'il le faut.* [41]

Cette remarque montre bien que Wallis place une certaine valeur apodictique dans l'induction mathématique. Bien-sûr, il nous faut tenir compte du ton polémique favorisé par le cadre épistolaire de ce texte. Il traite néanmoins ici la démonstration apagogique (c'est-à-dire le raisonnement par l'absurde) comme un raffinement excessif, et inutile. Dès lors, ou bien Wallis méprise l'approche démonstrative, insinuant qu'il est inutile de s'occuper du chemin qui mène à la vérité du moment qu'il permet d'y parvenir, ou bien, ce qui n'est pas si différent, il considère comme démonstratif la démarche inductive, du fait qu'elle est performante. Dans tous les cas, Wallis considère qu'il y a dans cette méthode quelque chose d'utile et précieux pour les Mathématiques, qu'il faut conserver et non rejetter :

> *Et je ne doute nullement que lorsque les rivaux auront renoncé au préjudice, ils finiront par reconnaître qu'il s'agissait d'une remarquable avancée pour les Mathématiques. (Et je vois que cela est fait par la plupart). Ils reconnaitront tout du moins que sur cette méthode (certes nouvelle et assez féconde) et sur son utilité, j'en ai assez abondamment montré pour une première fois dans un court traité, et elle peut, grâce aux autres, progresser jour après jour.* [42]

40. A III, 7, N.55, Lettre de Wallis à Leibniz du 1er décembre 1696 - p.210 : « Quod notat de meo per Inductionem processu (quod quadantenus verum est,) de hoc abunde dictum est *Algebræ* Cap. 78 et 79. Sed et recordandum erat, me non tam methodum Demonstrandi tum docere, quam methodum Investigandi, (et quidem novam et minime contemnendam, quod ne quidem adversarii negare poterunt ;) à cui methodus Inductionum apprime convenit. »

41. A III, 7, N.55, Lettre de Wallis à Leibniz du 1er décembre 1696 - p.210 : « Quod si, ubi hæc ego rite investigaverim, velint alii (demonstrationibus Apagogicis) porro confirmare ; per me licet. Ego quantum satis est me confirmasse existimo. »

42. A III, 7, N.55, Lettre de Wallis à Leibniz du 1er décembre 1696 - p.210 : « Et nullus dubito, quin, cum præjudicium deposuerint æmuli, tandem agnituri sint, insignem hanc fuisse Matheseos promotionem. (Quod et a plurimis factum video.) Fatebuntur saltem, abunde satis, pro prima vice in tractatu non longo ostendisse me de hac methodo (nova quidem et satis fœcunda) ejusque utilitate ; quæ possit ab aliis indies promoveri. »

Ainsi les progrès pourront compléter son œuvre, mais pas la remettre en cause. Comme nous l'avons vu dans nos analyse de l'*Arithmetica Infintorum* et des *Geometriæ Speciosæ Elementa*, il faut distinguer deux niveaux aux sein des procédés inductifs qui sont mis en œuvre. En effet, le manque d'outils symboliques ou simplement la tradition pousse la plupart des auteurs de cette époque à instancier leurs démonstrations par des exemples numériques concrets. Mais de fait, l'algorithme mis en place est universel. C'est ce que constate l'historien des mathématiques lorsqu'il entreprend d'extraire la preuve générale de ces procédures particulières. Cette traduction vers la norme symbolique actuelle se réduit à une simple pratique de substitution des grandeurs ou nombres particuliers par des caractères formels généraux. Ainsi, en considérant d'une part ce raisonnement qui consiste à généraliser depuis ces algorithmes instanciés vers des algorithmes universels et d'autre part le raisonnement qui devine la nature des objets manquant en repérant les régularités sur une donnée parcellaire, on obtient deux types d'inductions très différentes. La première relève effectivement de la démonstration et de l'art de juger tandis que la seconde est heuristique et relève de l'art d'inventer. Il semble que Wallis fasse la confusion dans cette lettre entre ces deux mouvements inductifs. En effet, dans l'argument qui suit, c'est bien la première forme que Wallis défend :

> *De plus, on se plaint que je n'ai pas apporté la démonstration pour une seule série. Qu'on regarde ce qui est fait (pour ne rien dire des monadiques et des latéraux) dans le chapitre 78 de l'Algèbre à propos des quadratiques et des cubiques (par la méthode d'Archimède) comme modèles de ce qu'il y a à faire dans les séries suivantes, jusqu'où quiconque voudra. Et c'est ce qu'a fait plusieurs fois l'excellent Boulliau.* [43]

Ceci peut donc expliquer la position plutôt contradictoire de Wallis sur le caractère explicatif du raisonnement par induction. Leibniz ne s'en accommode d'ailleurs pas et reviendra sur la question de l'induction dans plusieurs lettres futures. Ainsi dans une lettre du 12 octobre 1697 (A III, 7, N.146), il fait état du caractère inachevé et pourtant extrêmement prometteur de ces méthodes :

> *Et c'est pourquoi j'aurais voulu que l'on mène ta propre méthode plus avant, puisque par elle, on parvient à ces choses auxquelles on n'a pas toujours également accès par le calcul. Ainsi je ne m'attarderais pas ici sur le fait que, en quelques sortes, les interpolations, pour les parties, aboutissent à des séries infinies. Et c'est pourquoi j'aurais voulu que quelqu'un parmi les jeunes, guidé et encouragé par toi, poursuive les découvertes de ta méthode interpolatoire exposée dans l'Arithmétique des Infinis, ou tout du moins pour les totalités.* [44]

L'induction dont parle ici Leibniz relève du second type de celles que nous évoquions : il s'agit du raisonnement qui permet de deviner la nature d'objets manquants par l'application de lois qu'on a décelée sur une portion des choses. Il est intéressant de noter ici que Leibniz considère la méthode d'interpolation comme suppléante au calcul lui-même. Ainsi, sa critique de l'induction n'est plus la même que celle qu'il tient dans les années 1670. Pour lui, l'enjeu n'est pas de trouver comment obtenir les résultats de l'induction par un méthode rigoureuse, mais plutôt de déterminer avec exactitude la part de rigueur démonstrative qui se trouve dans le raisonnement inductif. En cela, il s'approche de la position de Wallis. Il le répète, par ailleurs, de façon encore plus nette dans une lettre du 30 mars 1699 (A III, 8, N.28) :

> *J'ai toujours fait grand cas de ta méthode d'interpolation et je le fais encore. Et, comme je l'ai dit, je souhaiterais que les jeunes poursuivent cette méthode par laquelle, de façon inductive et pourtant indubitable (et cela, je l'admire d'autant plus je ne le désapprouve point), tu réduis autant de quadratures au cercle et à l'hyperbole [même si certes (puisqu'il en manque un), c'est seulement dans les figures totales, par cette technique].* [45]

43. A III, 7, N.55, Lettre de Wallis à Leibniz du 1er décembre 1696 - p.210 : « Quod autem queritur, me Demonstrationem ne pro una quidem serie attulisse ; id factum videat (ut de Monadicis et Lateralibus nihil dicam) *Agebræ* cap. 78, de Quadraticis, et Cubicis (Archimedea Methodo,) ut Paradigmata id ipsum faciendi in seriebus sequentibus, quousque quis voluerit. Quod et Clarissimus Bullialdus in pluribus fecit. »

44. A III, 7, N.146, Lettre de Leibniz à Wallis du 12 octobre 1697 - p.584 : « Itaque valde vellem illam propriam tuam methodum produci longius, cum obtineantur per eam, ad quæ per calculum non æque semper aditus. Nam quod certo modo interpolationes in partibus desinunt in series infinitas, hic non moror. Itaque vellem ut aliquis juniorum, tua ductu hortatuque, inventa tuæ methodi interpolatoriæ in *Arithmetica infinitorum* expositæ, vel in totis saltem, prosequeretur. »

45. A III, 8, N.28, Lettre de Leibniz à Wallis du 30 mars 1699 - p.93 : « Magni semper feci faciamque Tuam methodum interpolandi, et ut dixi vellem oriri juvenes, qui prosequerentur hanc rationem qua inductive et tamen indubitate (quod adeo non improbo ut mirer magis) tot Quadraturas ad circulum et hyperbolam [etsi (quod unum deest) non nisi in totalibus hac quidem arte figuris ;] reducis. »

La méthode d'interpolation de Wallis est donc à la fois « inductive et pourtant indubitable » (« *inductive et tamen indubitate* »). La chose est donc très claire. Il s'agit bel et bien de se demander pourquoi ce raisonnement est valide et non plus de l'améliorer afin qu'il le devienne. Ce n'est pas la position que le jeune philosophe tenait lorsqu'il était à Paris. Par exemple, dans le *De additione ordinatarum ad quadraturas* (A VII, 5, N.54$_1$), Leibniz s'exprime clairement sur ce qu'il projette vis-à-vis des méthodes inductives de Wallis :

> *Il serait très important de démontrer géométriquement les interpolations de Wallis par une seule règle générale. Et il faudrait voir s'il est possible de le faire en poursuivant les interpolations de façon indubitable, en montrant que les interpolations douteuses ne peuvent pas advenir autrement. Et cela étant posé, nous aurons démontré géométriquement un nouveau principe d'invention réellement des plus féconds. Et ainsi, utilisant une méthode tout à fait nouvelle pour les progressions, nous pourrons utiliser l'induction pour la découverte.* [46]

Il s'agit donc de trouver une raison géométrique dans la preuve par induction. De fait, dès que ceci sera fait, la preuve ne sera plus inductive, mais bel et bien rigoureuse géométriquement. Néanmoins, Leibniz insiste sur le fait qu'elle permettra d'« utiliser l'induction pour la découverte » (« *inductione ad inveniendum* »). L'usage de l'induction pour la découverte est bien évidemment déjà possible et même utile pour Leibniz, comme nous l'avons suffisamment montré. Mais c'est une induction douteuse, qui est toujours susceptible de mener à l'erreur. Ici, Leibniz appelle de ces vœux une base géométrique indubitable qui permette à l'induction d'être tout aussi indubitable. Le raisonnement inductif sera alors plus court et plus utile que la longue démonstration géométrique, mais pourra toujours être remplacé par elle, si besoin en était. L'induction envisagée par Leibniz ici joue donc un rôle similaire à celui du calcul symbolique, à savoir un moyen plus court et plus efficace d'accéder à la vérité.
Nous montrerons dans la section consacrée aux méthodes de quadratures des courbes simples que Leibniz avait à sa disposition, dès 1673, plusieurs approches distinctes qui lui permettait d'obtenir plus rigoureusement la formule $\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1}$. Mais l'interpolation du triangle arithmétique semble cependant résister à toute tentative de justification purement déductive ou géométrique. Leibniz ne parvient jamais à percer le mystère de ce processus d'interpolation particulièrement troublant. Ainsi, si la réception de la première partie de l'*Arithmetica Infinitorum* se joue principalement durant la période parisienne, celle de la seconde partie se poursuit sur toute sa carrière de mathématicien, et il semble même léguer cette question aux futures générations, dans sa correspondance avec Wallis.

### Interpolation du triangle arithmétique

La première mention de l'interpolation du triangle arithmétique ne se trouve pas au sein des travaux de 1676 sur le *Circolo*, mais dans le *De Intercalatione Numerorum Combinatoriorum* (LKK, N.6), écrit en janvier 1675. Pourtant Leibniz ne fait aucun référence à l'ouvrage de Wallis dans ce texte. Quant au rôle que joue ce dernier dans la formalisation des nombres combinatoires, nous y reviendrons dans une prochaine section consacrée aux exposants. Rappelons que Leibniz y découvre la formule factorielle des nombres combinatoires :

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 3.2.1}$$

Cette formule lui permet donc d'exprimer directement un coefficient du triangle arithmétique en fonction de sa place dans la table, sans avoir besoin d'un calcul récursif. Cette première partie de texte est clairement inspirée par le *Traité du Triangle Arihtmétique* de Pascal, auquel Leibniz fait explicitement référence. En revanche, la partie finale du manuscrit fait, quant à elle, écho à l'interpolation du triangle arithmétique par Wallis ou Mengoli :

> *Pour sûr la Table des nombres combinatoires peut être construite non seulement même si le générateur n'est pas l'unité mais également même s'il est un nombre irrationnel. Imaginons déjà, par ailleurs, que*

46. A VII, 5, N.54$_1$, *De additione ordinatarum ad quadraturas*, 21 décembre 1675 - p.402 : « Magni momenti foret demonstrare Geometrice interpolationes Wallisianas per unam regulam Generalem. Videndum an id fieri possit continuis interpolationibus indubitabilibus ; ostendendo interpolationes dubitabiles non aliter cadere posse. Et hoc posito novum habebimus inveniendi principium Geometrice demonstratum ; sane fœcundissimum. Et ita nova plane ratione progressionibus, et inductione uti poterimus ad inveniendum. »

*dans une certaine table de nombres combinatoires, on cherche les moyens termes, ou bien les bimoyens ou encore les trimoyens etc.* [47]

Manuscrits de Leibniz - LH 35, 3A, 34 Bl.3

A côté de ce texte, sur le manuscrit, on trouve un ébauche de triangle ayant pour générateur $\frac{1}{2}$ ainsi qu'un schéma plutôt cryptique qui représente des lignes circulaires qui partent d'un noyau central et qui gravitent autour de lui. Les séries combinatoires du triangle arithmétique sont des suites finies symétriques qui croissent puis décroissent. C'est peut-être ce que Leibniz a représenté au dessus du noyau. Les lignes en dessous qui décroissent puis croissent peuvent quant à elle représenter les séries du triangle harmonique qui sont en miroir avec lui. Le noyau central serait alors la représentation de lignes combinatoires intermédiaires, qui permettent un passage continu entre les deux régimes. Il faut bien-sûr considérer cette interprétation avec beaucoup de prudence, car Leibniz ne donne aucune référence explicite à ce schéma. De plus, le texte ne fait aucune mention au triangle harmonique ou à ses coefficients [48].
Ce schéma semble en tout cas illustrer l'objectif qu'à Leibniz d'obtenir des courbes en interpolant successivement et à l'infini les progressions :

> *Cela devient clairement manifeste lorsque le générateur n'est plus l'unité mais $\frac{1}{2}$ et qu'on le subdivise ainsi de suite à l'infini.* [49]

Leibniz s'aperçois rapidement des contradictions auxquelles mène son idée assez naïve de considérer un générateur de plus en plus petit pour raffiner d'autant plus le pas du triangle. Cette naïveté semble indiquer que Leibniz a sans doute lu de façon très superficielle la seconde partie de l'*Arithmetica Infinitorum*. Néanmoins, dans la description qu'il donne de ces figures combinatoires continues, l'influence de Wallis demeure sensible :

> *Or, j'appelle combinatoire la figure dont la courbe traverse aux extrémités de toutes les droites des nombres combinatoires, selon les ordres numériques des représentants quand on applique indéfiniment une continuelle interpolation. Si l'on comprend l'interpolation comme résolue jusqu'à l'infini, et qu'on rend les figures combinatoires géométriques (en effet, elles ne sont jusqu'ici qu'arithmétiques), elles dégénèrent : les triangulaires en parabole, les pyramidaux en paraboloïde cubique simple, et les autres en paraboloïdes simples de degrés supérieurs.* [50]

47. LKK, N.6, *De Intercalatione Numerorum Combinatoriorum. De Formulis Omnium Dimensionum ex Artis Combinatoriæ Principiis*, Janvier 1675 - p.30 : « Nimirum Tabula numerorum combinatoriorum condi potest non tantum etsi generator non sit unitas, sed etiam etsi numerus irrationalis. Finge jam aliud in Tabula quada numerorum combinatoriorum quæri medios aut bimedios aut trimedios etc. »

48. En janvier 1675, date de ce manuscrit, Leibniz a déjà découvert le triangle harmonique, *Cf* A VII, 3, N.30, *De Triangulo Harmonico*, Fin 1673 / Début 1674. Mais la première mention connue du parallèle entre le triangle harmonique et le triangle arithmétique de Pascal se trouve dans un manuscrit qu'il a rédigé un an plus tard, en février 1676, *Cf* A VII, 3, N.$53_2$, *Triangulum Harmonicum et Triangulum Pascalii* dans *De Triangulo Harmonico*, Février 1676.

49. LKK, N.6, *De Intercalatione Numerorum Combinatoriorum. De Formulis Omnium Dimensionum ex Artis Combinatoriæ Principiis*, Janvier 1675 - p.30 : « Nimirum manifestum est, si generator non sit unitas sed $\frac{1}{2}$ et ita porro subdividendo in infinitum »

50. LKK, N.6, *De Intercalatione Numerorum Combinatoriorum. De Formulis Omnium Dimensionum ex Artis Combinatoriæ Principiis*, Janvier 1675 - p.31 : « Figuram autem combinatoriam voco, cujus curva transit perextremitates omnium rectarum numeros combinatorios, secundum ordines numericos repræsentum absolvi intelligatur, et Figuræ combinatoriæ reddantur Geometricæ(hactenus enim non nisi Arithmeticæ sunt, degenerabunt in : Triangulares in parabolam ; pyramidales in paraboloeidem cubicam simplicem ; et ceteræ in paraboloeides simplices altiores. »

Cette transmutation d'objets *a priori* purement arithmétiques en courbes géométriques montre bien l'impact que Wallis a pu avoir sur le jeune philosophe dès 1675. Leibniz construit donc le pont entre la combinatoire discrète générée par le binôme et la géométrie continue des paraboles et autres paraboloïdes desquels il avait pressenti deux ans plus tôt qu'ils pouvaient être la voie vers les exposants généraux. Un certain projet semble se dessiner au travers de cet extrait : celui de voir dans cette tables des lignes combinatoires, généralisation continue du triangle arithmétique, le fondement universelle de l'analyse et de l'arithmétique. Un objet général qui sous-tend les mécanismes du discret comme du continu, de l'algébrique comme du transcendant.

## Conclusion

Jamais au sein de ces notes sur le *Circolo*, Leibniz ne fait finalement référence à son triangle harmonique. Néanmoins, il n'adopte pas la même posture pour ce qui concerne les tables d'une part et l'approximation d'autre part. Pour l'approximation, par la méthode logarithmique de Mengoli, Leibniz ne s'approprie pas vraiment ces nouveaux outils. Ce sont des notes de lectures, cursives et plutôt fidèles au texte d'origine. En revanche, comme nous l'avons vu, pour la construction des triangles de nombres, Leibniz ne fait quasiment plus la moindre référence au texte de Mengoli. Ce sont dès lors des notes de travail, au travers desquelles Leibniz poursuit son propre agenda réflexif. L'absence de référence au triangle harmonique est lourde de signification. Comme nous l'avons vu, Leibniz n'a pas encore vraiment tranché, en 1676, sur la question de savoir si le triangle harmonique désigne ce qu'il désigne aujourd'hui, à savoir le triangle de différence de la série harmonique, ou bien s'il désigne la table que Leibniz a découverte en premier, à savoir la table des inverses des nombres figurés. Cette hésitation est principalement due au fait que Leibniz considère sa découverte concernant les sommes des inverses des nombres figurés comme bien plus significatives que celle du triangle harmonique. La lecture de l'ouvrage de Mengoli aurait pu renverser la donne, en faisant réaliser au jeune Leibniz la richesse interprétative de cette table. Mais il n'en fut rien. Ce que prouve la réception de Mengoli, c'est que le triangle harmonique n'a pas marqué le jeune Leibniz. Ainsi l'importance qu'il lui donnera plus tard dans ses récits autobiographiques est largement emprunte de biais retrospectifs.

L'absence du trangle harmonique ne signifie pas que la conception de la table n'est pas fondée sur le relations de dépendance locale et les compositions de ces relations. Nous avons que Leibniz reprend tantôt les notations de Wallis, tantôt celles de Mengoli, mais en ce qui concerne les tables, Leibniz reprend uniquement celles de Mengoli. Il s'adonne à la méthode de transformation successives de tables. Pourtant, même dans les notes sur le *Circolo*, Leibniz montre une conception de la notion de progression d'avantage conforme à celle de Wallis.

Il est donc manifeste que les deux auteurs ont eu une grande influence sur les réflexions du jeune philosophe en matière d'interpolation. Mais Leibniz est d'autant moins satisfait par la méthode inductive de Wallis qu'il est admiratif de sa puissance. A l'occasion de la première partie de notre travail, nous avons pu soulever la question de la valeur démonstrative des raisonnements tabulaires chez Leibniz. Etant donné qu'il n'évoque jamais cette question de front, mais toujours par des voies plus ou moins implicites, nous avons pu montrer qu'il n'est pas possible de déterminer avec certitude si ces raisonnements étaient ou non suffisants pour le jeune philosophe. Concernant l'induction de Wallis, en revanche, Leibniz se prononce explicitement. Cette méthode relève certes de l'heuristique et enrichit l'*ars inveniendi*, mais ne permet pas de déterminer le résultat avec certitude. Cependant, Leibniz n'y voit pas le signe que cette méthode n'est pas la bonne mais plutôt qu'il lui manque un fondement géométrique.

Nous avons montré à quel point les approches de Wallis et de Mengoli sont différentes. Wallis inscrit son travail dans une arithmétique inductive qui suit la lignée des travaux de Pascal et de Fermat sur les sommes de puissances [51] tandis que Mengoli compose avec les influences géométriques d'Euclide et algébriques de Viète [52]. A première vue, rien de ceci ne fait corps, ni ne concerne la combinatoire. Mais durant les années parisiennes, le jeune Leibniz y reconnait un dénominateur commun, conforme à sa propre pratique : l'utilisation des tables pour l'*ars inveniendi*. L'étonnante efficacité de leurs pratiques tabulaires marque profondément le jeune Leibniz et pose donc de façon explicite la question du rôle de la table au sein des mathématiques : en plus d'être un outils puissant de l'heuristique, constitue-t-elle aussi une forme rigoureuse de démonstration propre à la synthèse, c'est-à-dire à la combinatoire ?

51. [79] M.Panza, *Newton et les origines de l'analyse : 1664-1666*, A. Blanchard, Paris, 2005 - p.49-52

52. *Cf* les travaux de M. R. Masse Esteve avec [61] M.R. Massa Esteve, *la théorie euclidienne des proportions dans les Geometriæ speciosæ elementa (1659) de Pietro Mengoli*, Revue d'histoire des sciences, 56(2), 2003 - p.457-474 ainsi que [63] M.R. Massa Esteve, *The role of Indivisibles in Mengoli's Quadratures*, dans Seventeenth-Century Indivisibles Revisited, *éd.* V. Jullien, Cham, 2005 - p.285-306

# Chapitre 9

# Interpolation et Formules

## Introduction

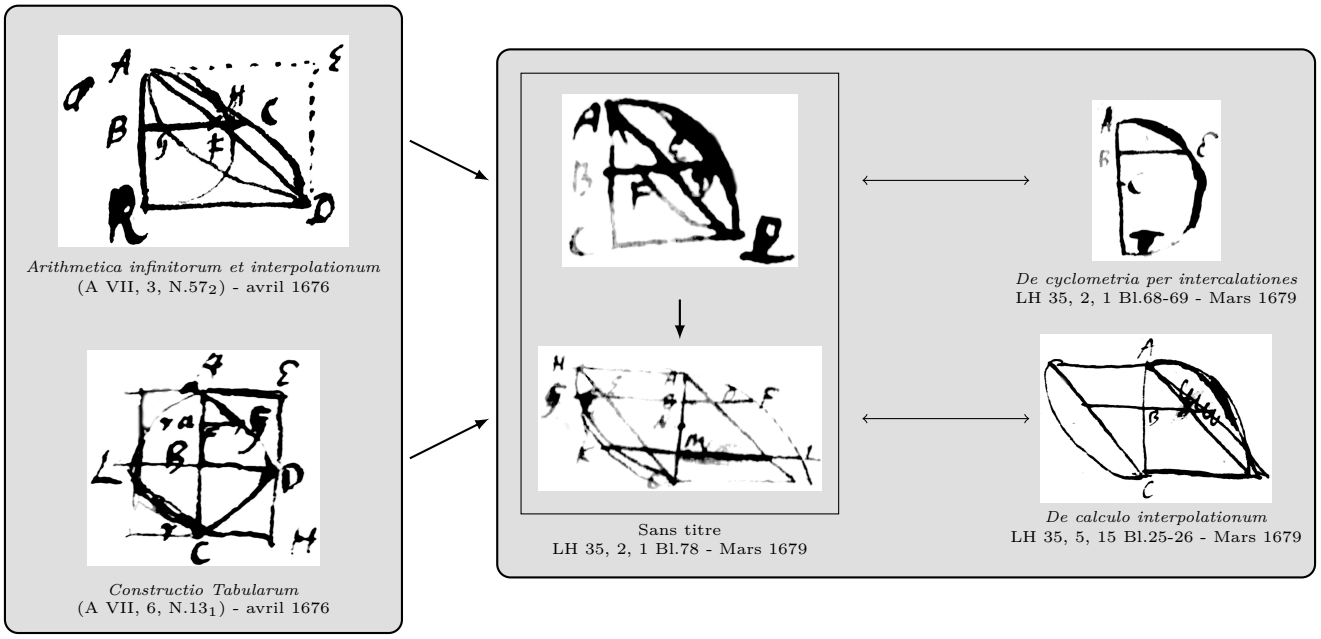
L'interpolation de Wallis et de Mengoli montre que la figure du cercle peut être mesurée grâce à un outil purement combinatoire, à savoir le triangle arithmétique. Ainsi, à la fin des années 1670, ces travaux sur l'interpolation du triangle s'intègrent au cœur des réflexions de Leibniz sur l'analyse de transcendants. Deux intuitions guident la pensée du philosophe.
D'abord, comme nous l'avons déjà évoqué, il voit dans la table interpolée une voie intéressante pour parvenir à construire des expressions finies qui représentent les courbes ou les quantités transcendantes. La table permet d'effectuer des opérations sur les courbes sans avoir à tracer aucun diagramme géométrique. Ainsi la table accomplit ce pourquoi on loue habituellement les formules et les équations, à savoir résoudre les problèmes sans l'aide de l'imagination. Or la formule de Newton constitue alors la principale méthode pour exprimer les courbes et les quantités transcendantes, mais au moyen d'une série infinie. Leibniz sait que les tables ont la capacité de réduire des progressions infinies à des combinaisons finies, à l'image de la décomposition par un triangle de différences des termes d'une suite infinie polynomiale en ses génératrices finies.
Ensuite, Leibniz montre qu'à partir d'un changement de signe, la figure du cercle se transforme en celle de l'hyperbole. Or la table de Mengoli et de Wallis montre que toutes les quantités irrationnelles qui émergent de l'interpolation sont des dérivés de la figure du cercle. Ainsi, le cercle et l'hyperbole peuvent être considérées comme deux courbes primitives qui engendrent toute une classe de courbes transcendantes. L'interpolation est donc une méthode de réduction qui permet de mettre en évidence ces courbes primitives.
Les travaux de Leibniz sur ce sujet datent de l"année 1679, période durant laquelle Leibniz se consacre très sérieusement au développement d'une caractéristique universelle. La combinatoire épistémologique est alors considérée comme la sciences des formes et des formules. Cette position philosophique est très prégnantes au sein de ses travaux et montre la façon dont Leibniz articule sa pratique tabulaire avec le projet tourné vers l'*ars characteristica* de façonner de nouvelles formes expressions.
Nous terminons ce chapitre par l'étude d'un manuscrit inédit qui sort de la période à laquelle notre travail s'est circonsrit, à savoir 1672-1680, puisqu'il date vraisemblablement des années 1690, même si d'autres datations sont envisageables. Ce document qui montre un retour au processus d'interpolation de Wallis, est cependant utile à notre étude, puisqu'il présente quelques éléments conclusifs aux questions soulevées en 1679.

## 9.1 Les travaux de 1679, entre exposants et tables

Leibniz réouvre le dossier de l'interpolation du triangle arithmétique à plusieurs reprises dans les années qui ont suivi Paris. La première se situe en mars 1679, lorsque Leibniz reprend ses notes sur *Circolo* de 1676. Ses travaux s'étalent sur trois manuscrits :

- ⋆ LH 35, 2, 1 Bl.78 - Sans titre, 30 Mars 1679
- ⋆ LH 35, 2, 1 Bl.68-69 - *De cyclometria per intercalationes, postea per polygona, ubi expressio per logarithmos. Et modus demonstrandi impossibilitatem Analyticam tentatus per series converg. Scheda I*, Mars 1679
- ⋆ LH 35, 5, 15 Bl.25-26 - *De calculo interpolationum ; et mirabilia de generali expressione formularum sine sublatione involutionum et complicationum*, 30 Mars 1679

Dans le premier manuscrit (LH 35, 2, 1 Bl.78), on trouve deux approches. La première, sur le recto, traite de questions tabulaires, et du rôle de la formule de Newton. Ces réflexions sont poursuivies dans le *De cyclometria per intercalationes* (LH 35, 2, 1 Bl.68-69). Au verso, Leibniz s'intéresse à des questions plus formelle, qui seront quant à elles poursuivie dans le *De calculo interpolationum* (LH 35, 5, 15 Bl.25-26) Ainsi, la première approche se fonde sur les notes de travail du *Arithmetica infinitorum et interpolationum* (A VII, 3, N.$57_2$), où Leibniz pose les questions liées aux progressions. La seconde approche, en revanche, plutôt liées aux questions d'approximation et de symbolisme, constitue plutôt un prolongement des notes de lecture *Pars 2 Excerptorum ex Circulo Mengoli, et ad eum annotatorum* (A VII, 6, N.$13_2$). Il est donc clair que Leibniz avait sous les yeux l'ensemble de ses notes parisiennes lorsqu'il a rédigé ces manuscrits. Cette classification des approches d'accorde avec une certaine généalogie au sein des diagrammes que Leibniz établit à chaque fois, pour représenter les courbes issues des équations $a^p r^q$ :




Avirl 1676 Mars 1679

Cette mise en correspondance doit être considérée avec une prudence extrême. En effet, il n'existe pas d'outil propre à constituer une généalogie solide entre des diagrammes manuscrits, sur la seule base de leurs dispositions internes.

### 9.1.1 La solution de Newton

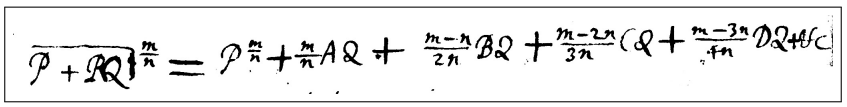
Durant l'année 1676, Leibniz reçoit les deux célèbres lettres *Epistola Prior* (A III, 1, N.88) et *Epistola Posterior* (A III, 2, N.38) [1]. Dans la première, Newton expose à Leibniz sa formule du binôme :

1. La première lettre qu'on nomme « *Epistola Prior* » se trouve dans A III, 1, N.88, Lettre de Newton à Oldenburg pour Leibniz et Tschirnhaus du 13 Juin 1676 (Nr.5 du groupe de lettres envoyées par Oldenburg le 5 Août 1676). La seconde

*Tels sont les fondements de cette réduction, mais l'extraction de nombreuses racines peut être abrégée au moyen de ce théorème :*

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \dots$$

*où $P+PQ$ désigne une quantité dont on cherche la racine ou encore si l'on veut sa dimension, ou la racine de la dimension.* [2]



Manuscrits de Newton - MS Add.3977 Bl.25

Les conséquences de cette formule et sa réception seront principalement traités dans une prochaine section. Néanmoins, il semble que Leibniz ait pu voir dans cette formule la solution rigoureuse à apporter aux interpolations de Wallis. C'est ce que Leibniz indique dans une lettre envoyée à Oldenburg le 21 juin 1677 (A III, 2, N.54) :

> *J'ai reçu tes lettres que j'attendais depuis longtemps, avec celles de Newton jointes et vraiment magnifiques. Je les ai lues plus d'une fois avec le soin et même la réflexion qu'elles exigent et dont elles sont dignes au plus haut point. A présent je vais faire quelques remarques qui me tombent sous les yeux, en parcourant rapidement mes notes. Je suis remarquablement satisfait par ce qu'il a décrit et par quel chemin il est arrivé à ses quelques théorèmes réellement élégants desquels on tient les interpolations de Wallis, c'est-à-dire, et c'est pourquoi ils plaisent, que c'est par cette méthode qu'on obtient la démonstration de ces interpolations, puisque la chose reposait auparavant, pour autant que je sache, seulement sur l'induction, quoiqu'une partie de celle-ci soit démontrée par les tangentes.* [3]

Nous avons pourtant vu que Leibniz ne parviendra jamais à résoudre complètement la question de l'induction des interpolations de Wallis, à laquelle pourtant la méthode de Newton a selon lui déjà répondu. Cette affirmation n'est de fait pas si claire dans l'esprit de Leibniz. Il teste dès lors cette hypothèse au recto du manuscrit LH 35, 2, 1 Bl.78.

### Faiblesses de la formule de Newton

Par la méthode de Newton, on peut traiter des expressions similaires à celles qui apparaissent dans la table des figures :

⋆ Dans la table des figures, l'expression $\sqrt{a^p r^q}$ correspond à l'équation :

$$x^{\frac{p}{2}}(1-x)^{\frac{q}{2}}$$

⋆ Chez Newton, l'expression $(P+PQ)^{\frac{n}{m}}$ correspond à l'équation :

$$x^{\frac{m}{n}}(1+y)^{\frac{m}{n}}$$

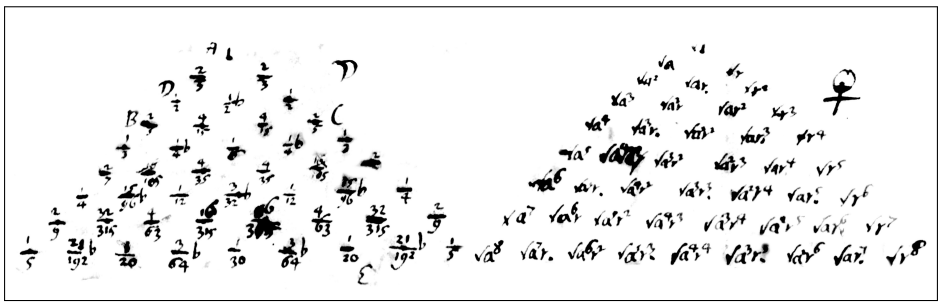
Au rector du manuscrit LH 35, 2, 1 Bl.78, Leibniz reproduit deux tables, qu'il a copiées sur ses notes *Constructio Tabularum* (A VII, 6, N.13$_1$). La table ♀ représente les équations des diverses courbes $\sqrt{a^p r^q}$, c'est-à-dire la table des figures. Et la table ☽ indique leurs quadratures, c'est-à-dire le triangle harmonique interpolé :

---

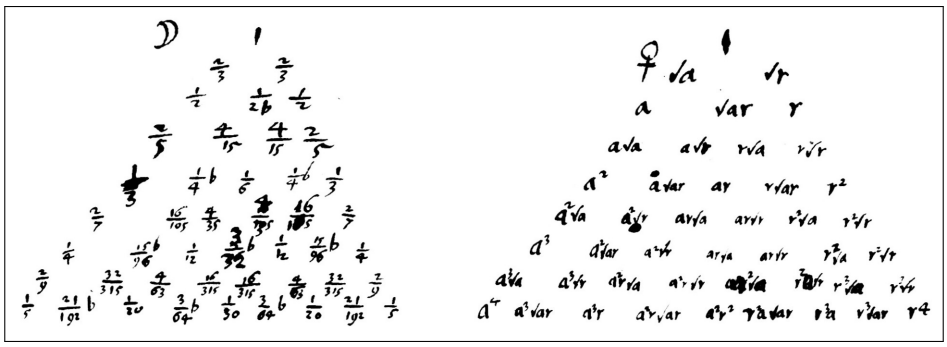
lettre qu'on nomme « *Epistola Posterior* » se trouve dans A III, 2, N.38, Lettre de Newton à Oldenburg pour Leibniz du 24 Octobre 1676.

2. A III, 1, N.88, Lettre de Newton à Oldenburg pour Leibniz et Tschirnhaus du 13 Juin 1676 (Nr.5 du groupe de lettres envoyées par Oldenburg le 5 Août 1676) - p.535 : « Hæc sunt fundamenta harum reductionum ; sed extractiones radicum multum abbreviantur per hoc theorema : $\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + etc.$ ubi $P+PQ$ significat quantitatem, cujus radix vel etiam dimensio quævis vel radix dimensionis investganda est. »

3. A III, 2, N.54, Lettre de Leibniz à Oldenburg du 21 Juin 1677 - p.167-168 : « Accepi literas tuas diu expectatas cum inclusis Neutonianis, sane pulcherrimis, quas plus semel legam cum cura ac meditatione quibus certe non minus dignæ sunt quam indigent ; Nunc pauca quæ festinante oculo obeunti incidere e vestigio annotabo ; Egregie placet quod descripsit qua via in nonnulla sua elegantia sane theoremata inciderit et quæ de Wallisianis interpolationibus habet, vel ideo placent, qua hoc ratione obtinetur harum interpolationum demonstratio, cum res antea quod sciam sola inductione niteretur, tametsi pars eorum per tangentes sit demonstrata. »



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 2, 1 Bl.78 [4]
Mars 1679



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 2, 1 Bl.67
*Constructio Tabularum* (A VII, 6, N.13$_1$), Avril 1676

La première remarque de Leibniz est donc la suivante : la formule de Newton ne permet pas d'obtenir toutes les courbes possibles :

> *L'emploi de Newton, par cette progression, donne seulement, extraits de la table ♀ :* $\sqrt{1}$, $\sqrt{ar}$, $\sqrt{a^2r^2}$, $\sqrt{a^3r^3}$, .... [5]

Pour Leibniz, les formules de Newton ne donnent accès qu'aux courbes de la forme $\sqrt{a^p r^p}$, en effet, si l'on pose $Q = -P$ et $m = 2$ alors

$$(P + PQ)^{\frac{n}{m}} = P^{\frac{n}{2}}(1-P)^{\frac{n}{2}} = \sqrt{P^n(1-P)^n}$$

Cette méthode permet de développer l'expression rationnelle ou irrationnelle des courbes en série finie ou infinie de termes rationnels, ce qui permet d'appliquer des méthodes classiques de quadrature pour ces composantes simples. Mais Leibniz constate que la méthode formelle de Newton ignore certains aspects cruciaux fournis par la table. Notamment le fait que toutes les quadratures sont ou bien rationnelles, ou bien dépendent directement de celle du cercle :

> *Et de celles-ci, il a fait des interpolations et des démonstrations par et pour la quadrature, au moyen des séries infinies. Et il faut traiter dans celles-ci les séries déjà choisies et les autres. Ces tables montrent en revanche où les quadratures dépendent de la quadrature du cercle, ce que ne montrent pas les séries.* [6]

Ainsi, Leibniz constate que l'interpolation de la table présente de nombreux avantages que la méthode de Newton ne parvient pas à garantir. Grace aux relations entre les termes qu'elle représente, la table

4. D'une part, les tables des deux manuscrits sont quasiment identiques, sont désignées par les mêmes symboles et ont le même nombre de lignes. Mais de plus, Leibniz fait une correction dans le LH 35, 2, 1 Bl.78, sur la table ☽, pour le terme $\frac{16}{105}$. Ce terme est barré et est renvoyé vers l'indication suivante : « je pense que l'on doit mettre $\frac{8}{105}$ » (« *puto lengendum* $\frac{8}{105}$ »). Or c'est bien le premier terme qui est correct et non la correction. La raison de cette correction mal venue reste donc inconnue mais elle indique néanmoins que Leibniz a recopié la table sans faire le moindre calcul

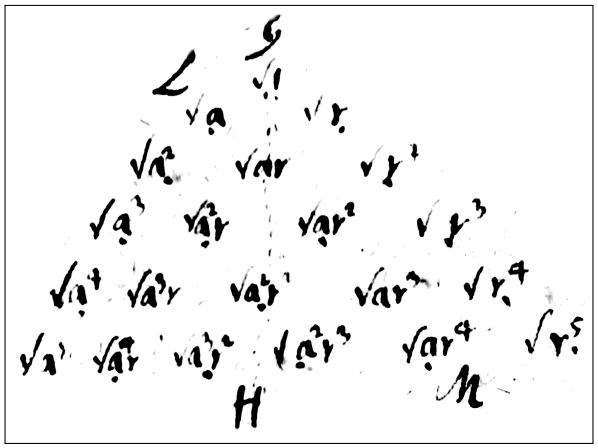
5. LH 35, 2, 1, Bl.78 - Manuscrit sans titre, 30 mars 1679 : « Neutonus usus solum progressione hac, ex tabula ♀ sumta : $\sqrt{1}$. $\sqrt{ar}$. $\sqrt{a^2r^2}$. $\sqrt{a^3r^3}$, etc. »

6. LH 35, 2, 1, Bl.78 - Manuscrit sans titre, 30 mars 1679 : « Earumque interpolavit et demonstravit per quadraturam in ea per series infinitas. Excerpendæ jam et aliæ series idemque in ipsis est tentandum. Ostendunt autem hæ Tabulæ quoniam quadraturæ ex quadratura circuli pendeant quod non ostendunt series. »

permet bien de réduire les courbes composées à d'autres plus simples, tout comme la formule de Newton. En revanche, la table opère cette réduction dans un cadre nécessairement fini. Donc la courbe ne pourra pas être réduite à un nombre infini de composants simples. Or ceci constitue un avantage auquel Leibniz ne souhaite pas renoncer. Leibniz le dira explicitement dans le *De cyclometria per intercalationes* (LH 35, 2, 1 Bl.68-69).

**Avantages de la formule de Newton**

Le *De cyclometria per intercalationes* (LH 35, 2, 1 Bl.68-69) est divisé en deux parties indépendantes, bien que traitant toutes les deux de la quadrature du cercle. C'est la première partie qui est directement reliée au manuscrit LH 35, 2, 1, Bl.78. Ici, Leibniz ne fournit pas de tables de quadratures, mais seulement celle des figures :



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 2, 1 Bl.68-69

Pour les courbes qui ont une équation simple, du type $b.x^a$, le passage à la quadrature ne change pas la nature de cette expression. En effet :

$$\int (b.x^a)dx = \frac{b}{a+1}.x^{a+1}$$

D'une expression simple, on obtient à nouveau une expression simple. Leibniz souhaite trouver une méthode ou une écriture qui permette d'observer ce même phénomène pour la classe des courbes $a^p r^q$ :

> *Voyons donc pour ces figures dont on peut faire ici la quadrature, si l'on peut démontrer la possibilité d'en faire la quadrature par une certaine méthode générale et si nous pourrions imaginer quelque chose, au moins par des termes transcendants, que l'on puisse appliquer au cercle.* [7]

La recherche sur les exposants, que nous développerons dans la quatrième partie de notre travail, constitue assurément pour Leibniz la voie privilégiée vers cet objectif. Mais avant cela, Leibniz évoque la solution de Newton :

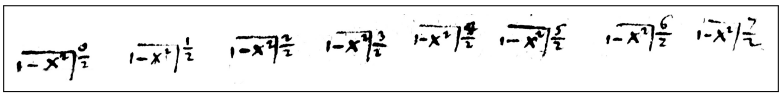
> *En réalité, on pourra en établir une autre : la progression de ceux qui descendent perpendiculairement suivant GH. De fait, tout les termes de cette colonne ou série proviennent de ar, c'est-à-dire de* $1-x^2$. [8]

Bien qu'il ne cite pas explicitement Newton, la référence est claire, pour deux raisons principales. D'abord, il considère à nouveau la série des termes $\sqrt{a^p r^p}$. Ensuite, il réécrit les expressions sous la forme exacte donnée par Newton, qui ne correspond à aucune des écritures traditionnelles des binômes chez Leibniz :

7. LH 35, 2, 1, Bl.68-69 - *De cyclometria per intercalationes, postea per polygona, ubi expressio per logarithmos. Et modus demonstrandi impossibilitatem Analyticam tentatus per series converg. Scheda I*, Mars 1679 : « Videamus ergo an earum quæ hic quadrari possunt figurarum quadrabilitas demonstrari possit generali quadam ratione et an possimus aliquod comminisci saltem per terminos transcendentes quod Circulo applicare liceat. »

8. LH 35, 2, 1, Bl.68-69 - *De cyclometria per intercalationes, postea per polygona, ubi expressio per logarithmos. Et modus demonstrandi impossibilitatem Analyticam tentatus per series converg. Scheda I*, Mars 1679 : « Verum licebit et aliam instituere progressio descendendi perpendiculariter secundum $GH$. Nam omnes Termini illius columna seu seriei oriuntur ex $ar$ seu ex $1-x^2$. »

*Si on choisit* 1 *pour rayon et* $x$ *pour le sinus du complément :*[9]



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 2, 1 Bl.68-69

Puis Leibniz insiste à nouveau sur cette distinction fondamentale entre la méthode des séries et celle des tables, à savoir la possibilité ou non d'obtenir un nombre infini de composantes :

> *D'où apparait une méthode d'intercalation, au moins par une série infinie. Puisque les nombres dans les numérateurs sont* 1, 1 | 1, 2, 1 | 1, 3, 3, 1 | 1, 4, 6, 4, 1 | ... *et pour ces nombres, les restants peuvent être obtenus à partir de la donnée de leurs deux premiers. Par exemple, à partir de* 1, 4 *on peut obtenir les restants* 6, 4, 1 *en trouvant la relation. Et de même, il apparait facilement qu'on pourrait obtenir par une quelconque méthode les termes restants si les premiers étaient* 1 *et* $\frac{1}{2}$*. Mais pour ceux-là, il reste pourtant une difficulté, à savoir que par cette méthode, on arrive à des séries infinies de termes communs. Alors que moi, je préférerais avoir une série finie de transcendants.*[10]

Ainsi Leibniz note un aspect important de la méthode des séries : on peut obtenir tous les termes, même en nombre infini à partir de la donnée des deux premiers. Cet aspect tient une place importante dans l'art d'inventer et doit donc être préservé. En revanche, il donne clairement sa préférence. Entre une réduction à une infinité de composantes rationnelles et un nombre fini de composantes transcendantes, il choisit la dernière option.

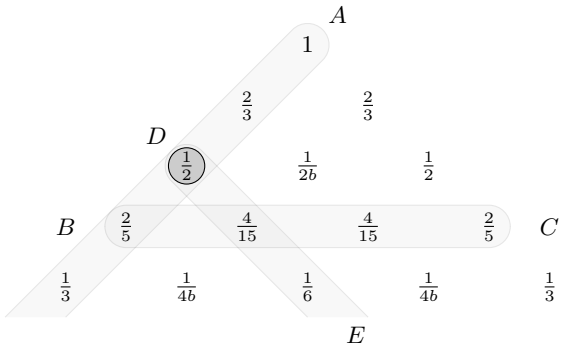
### 9.1.2 Approche formelle de l'Art d'Inventer

#### Règles et sous-règles

Dans le manuscrit LH 35, 2, 1, Bl.78, Leibniz constate qu'il est parfois nécessaire de modifier l'écriture d'un terme suivant la série au sein de laquelle on le considére. En effet, un même terme appartient à plusieurs séries, verticale, horizontale, diagonale à gauche ou diagonale à droite.

> *Dans la table* ℘, *on peut ajuster les séries des fractions de l'unité aux termes de sorte qu'ils s'apparient là où ils semblaient discordants.*[11]

Dans chacune de ces séries, il occupe un rang différent et suit une loi différente :




9. LH 35, 2, 1, Bl.68-69 - *De cyclometria per intercalationes, postea per polygona, ubi expressio per logarithmos. Et modus demonstrandi impossibilitatem Analyticam tentatus per series converg. Scheda I*, Mars 1679 : « Si pro 1 sumas radium, pro $x$ sinum complementi : »

10. LH 35, 2, 1, Bl.68-69 - *De cyclometria per intercalationes, postea per polygona, ubi expressio per logarithmos. Et modus demonstrandi impossibilitatem Analyticam tentatus per series converg. Scheda I*, Mars 1679 : « Unde patet modus intercalandi saltem per seriem infinitam. Quia numeri in numeratoribus sint 1. 1. | 1. 2. 1. | 1. 3. 3. 1. | 1. 4. 6. 4. 1. | etc. qui haberi possunt numeri reliqui ex datis horum duobus primis verbi gratia ex 1. 4. habentur reliqui 6. 4. 1. qua relatione inventa facile etiam apparet quomodo inveniri possunt reliqui termini si primi sint 1. et $\frac{1}{2}$ in eo tantum superest difficultas quod hoc modo itur ad seriem terminorum communium infinitam. Cum ego malim habere seriem transcendentium finitam. »

11. LH 35, 2, 1, Bl.78 - Manuscrit sans titre, 30 mars 1679 : « In tabula ℘ accommodari possunt series unitatis fractionum terminis ut cohæreant ubi dissonæ videntur. »

*Ainsi pour AB, on peut écrire* $\frac{2}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{5}$, ... *; pour BC, on peut écrire* $\frac{6}{15}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{6}{15}$ *et pour DE on peut écrire :* $\frac{4}{8}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{4}{24}$, $\frac{4}{35}$, $\frac{4}{48}$, $\frac{4}{63}$, $\frac{4}{80}$. *Ici, il apparait que le terme D peut et doit être exprimé de plusieurs manière, afin qu'il s'accorde avec les diverses séries. Ainsi pour la série AB, on l'exprime par* $\frac{2}{4}$ *et pour la série DE par* $\frac{4}{8}$. [12]

L'illustration que donne Leibniz se restreint aux cas des écritures fractionnaires, pour lesquelles les transformations consistent à multiplier ou diviser identiquement numérateur et dénominateur. Cependant, l'idée semble à première vue générale, et non restreinte aux seules équivalences de fraction. ce que Leibniz pose ici, en réalité, c'est la question du rapport entre la quantité et son écriture symbolique. La quantité ou le nombre n'est pas associée par principe à une certaine écriture privilégiée. On a le choix parmi une infinité d'expressions équivalentes. Mais lorsqu'on inscrit le terme dans une série, la loi de celle-ci favorise une certaine écriture particulière. Le choix ne l'écriture n'est pas arbitraire ou conventionnel, mais subordonné à la règle générale de la progression.

Cependant, il n'est pas évident qu'on puisse généraliser de la sorte la question ici. Leibniz illustre cette propriété sur la table des quadratures, c'est-à-dire le triangle arithmétique interpolé, selon trois directions : diagonale gauche avec $AB$, diagonale droite avec $DE$ et horizontale avec $BC$. On peut alors noter que Leibniz ne choisit pas trois progressions concourantes. Ainsi le terme $D$ n'appartient qu'à deux d'entre elles, et ne présente que deux écritures différentes, au lieu de trois. En fait, on constate qu'il n'est pas possible de considérer trois progressions concourantes dont tous les termes sont des fractions rationnelles. Nécessairement, au moins l'une d'entre elles contiendra des termes qui dépendent de $b$. Or dans les exemples que donne Leibniz, donner l'écriture qui correspond à la loi de la progression revient à trouver un numérateur commun ou un dénominateur commun à tous les termes. Ainsi ces choix d'écritures ne permettent de révéler que les lois de certaines progressions rationnelles [13]. Mais lorsqu'on introduit le terme transcendant $b$, il n'est plus possible d'unifier ainsi les écriture de manière à révéler la règle globale de la progression. Du moins, ce n'est pas possible dans le cadre des transformations de fractions habituelles. Ainsi Leibniz souligne qu'il y a un lien étroit entre l'expression des quadratures et la compréhension des règles de la table. Une écriture unifiée sur toute la table permettrait alors de révéler la règle globale de la table et justifierait ainsi la méthode d'interpolation :

*Si l'on donne une certaine expression commune à tous les termes dans* ☽, *opérant les quadratures partout dans la table* ☽. *A partir des termes correspondants dans la table* ♀ *(dont on fait les quadratures partout), on dérivera une règle constante sur les exposants et on obtiendrait la valeur de celui-ci : b. Et puisqu'il est transcendant, il faut chercher cette expression commune dans les termes transcendants.* [14]

Ainsi, Leibniz cherche une méthode pour écrire les transcendants qui permettent d'exhiber la loi commune et continue de la table ☽, c'est-à-dire le triangle harmonique interpolé. Or Leibniz s'intéresse déjà depuis Paris à une forme d'écriture qui unifie les rationnels et les irrationnels : l'écriture exponentielle. C'est donc naturellement du côté des exposants que Leibniz va consacrer l'essentiel de ses recherches. Comme la table ♀ représenterait alors les différentes relations entre ces exposants, Leibniz imagine que l'exposant représentant la quantité $b$ sera le composé de toutes ces quantités irrationnelles combinés entre elles selon la structure de la table :

*On peut déterminer de manière générale les termes de la table* ☽ *à partir des termes de la table* ♀ *en appliquant les séries infinies. Mais on souhaite que, à la place de la série, la chose se réduise à une puissance ou une racine dont l'exposant n'est pas un nombre rationnel. En outre, il faut examiner si par quelque moyen l'on pourrait trouver la quadratrice de celles-ci :* $\sqrt{ar^2}$, $\sqrt{ar^4}$ *grâce au calcul différentiel et aussi si l'on pourrait trouver la quadratrice de celle-ci* $\sqrt{ar}$. *Il est possible que les exposants de cette quadratrice deviennent irrationnels là où l'on doit faire en sorte que, d'aventure, ces*

12. LH 35, 2, 1, Bl.78 - Manuscrit sans titre, 30 mars 1679 : « Ita pro $AB$ scribi potest : $\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{5}$ etc. et pro $BC$ scribi potest : $\frac{6}{15}\cdot\frac{4}{15}\cdot\frac{4}{15}\cdot\frac{6}{15}$ et pro $DE$ scribi potest : $\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{15}\cdot\frac{4}{24}\cdot\frac{4}{35}\cdot\frac{4}{48}\cdot\frac{4}{63}\cdot\frac{4}{80}$. Hinc patet terminum $D$ posse et debere exprimi diversis modis, ut diversis seriebus congruat ita pro serie $AB$ exprimitur per $\frac{2}{4}$ et pro serie $DE$ per $\frac{4}{8}$. »

13. Notons que cette idée d'une écriture qui révèle la loi de la progression ne fonctionne pas vraiment pour les suites finie. En effet, pour toute suite finie arbitraire de fractions rationnelles, on peut toujours trouver ou bien un numérateur commun ou bien un dénominateur commun à toutes les fractions.

14. LH 35, 2, 1, Bl.78 - Manuscrit sans titre, 30 mars 1679 : « Si daretur expressio quædam communis omnium terminorum in ☽ quadrans undique pro tota Tabula ☽. Ex respondentibus terminorum Tabulæ ♀ (qui undique quadrant) exponentibus constanti regula derivata, haberetur et valor ipsius $b$. Qui cum sit transcendens, opus est et expressionem illam communem in terminis transcendentibus quæri. »

*irrationnelles s'affectent mutuellement entre elles l'une multipliant ou divisant l'autre dans l'exposant de la quadrature, à savoir de celle-ci* $\sqrt{ar}$.[15]

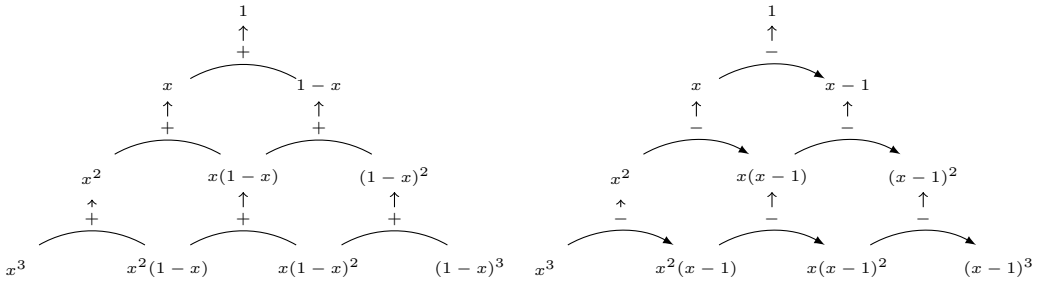
Cet exemple illustre remarquablement bien comment les considérations formelles et symboliques chez Leibniz reposent sur l'exploration combinatoire et tabulaire des relations entre les objets. En outre, cette dernière citation montre que Leibniz souhaite voir de quelle façon il pourra se servir du calcul différentiel pour mener à bien sa recherche.

**Forme commune au cercle et à l'hyperbole**

Au verso du manuscrit LH 35, 2, 1 Bl.78, Leibniz expose le problème sous l'angle du calcul différentiel, mais ne s'intéresse qu'aux expressions symétriques, dont il a dit qu'elles peuvent être résolues par la formule de Newton. Ici, il considère donc les expression $\sqrt[z]{ar}$ ou encore $(ar)^{\nu}$.

*da* = *dr* ; $d(ar) = adr + rda$. *On donne* $\int \sqrt[z]{ar}d(ar) = \frac{(ar)^{\frac{1}{z}+1}}{\frac{1}{z}+1}$ *c'est-à-dire :* $\frac{\sqrt[\frac{z}{z+1}]{ar}}{\frac{z+1}{z}} = \int r\sqrt[z]{ar}da + \int a\sqrt[z]{ar}dr$[16]

Dans cette petite suite de calcul, Leibniz cherche à intégrer la relation entre les deux variables liées $a$ et $r$ au sein des expressions différentielles. Il annonce alors deux cas possibles : ou bien $r = 1 - a$, ou bien $r = a - 1$. Jusqu'ici, nous avons toujours considéré le seul cas où $r = 1 - a$. Mais en réalité, toutes les relations qui relient entre elles les courbes d'équations $x^p(1-x)^q$ restent valable modulo quelques changement de signes pour celles d'équations $x^p(x-1)^q$. Ainsi, pour la table des figures, chaque terme est la différence des deux termes au-dessous au lieu d'en être la somme :




Dès lors, le principe de l'interpolation fonctionne encore. Au centre de la table, à la place de l'équation du cercle $\sqrt{x(1-x)}$, on obtient alors celle de l'hyperbole $\sqrt{x(x-1)}$. En effet, par un changement de repère, on retrouve l'équation canonique de l'hyperbole :

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x(x-1)} \\ y^2 &= x(1+x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} &= \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - y^2 \\ \frac{1}{4} &= \left(x-\frac{1}{2}+y\right)\left(x-\frac{1}{2}-y\right) \end{aligned}$$

15. LH 35, 2, 1, Bl.78 - Manuscrit sans titre, 30 mars 1679 : « Possunt generaliter determini termini Tabulæ ☽ a terminis Tabulæ ♀, adhibendo series infinitas : sed desideratur ut loco seriei infinitæ res reducatur ad potentiam vel radicam cuius exponens non sit numerus rationalis. Inter cætera tentandum an quomodo ipsarum $\sqrt{ar^2}$, $\sqrt{ar^4}$ quadratrix inveniri potest calculo differentiali, etiam ipsius $\sqrt{ar}$ quadratrix inveniri possit. Licet exponentes ipsius quadraticis fiant irrationales ubi id tuum agendum ut hæ irrationales se mutuo destinant forte una alteram multiplicante vel dividente in exponente quadraturæ seu ipsius $\sqrt{ar}$. »

16. LH 35, 2, 1, Bl.78 - Manuscrit sans titre, 30 mars 1679 : « $d\overline{a}$ æqu $d\overline{r}$ $d\overline{ar}$ æqu. $d\overline{a}r + d\overline{r}a$. Datur $\int \overline{\sqrt[z]{ar}d\overline{ar}}$ æqu. $\frac{\boxed{\frac{1}{z}+1}\overline{ar}}{\frac{1}{z}+1}$ vel : $\frac{\boxed{\frac{z}{1+z}}\sqrt{ar}}{\frac{z}{1+z}}$ æqu. $\int r\overline{\sqrt[z]{ar}d\overline{a}} + \int a\overline{\sqrt[z]{ar}d\overline{r}}$. »- *Nota Bene*, le dénominateur $\frac{1}{z}+1$ est réécrit par Leibniz sous la forme $\frac{z}{z+1}$ au lieu de $\frac{z+1}{z}$. Nous avons corrigé cela dans la traduction.

Donc :

$$x - \frac{1}{2} + y = \frac{1}{4\left(x - \frac{1}{2} - y\right)}$$

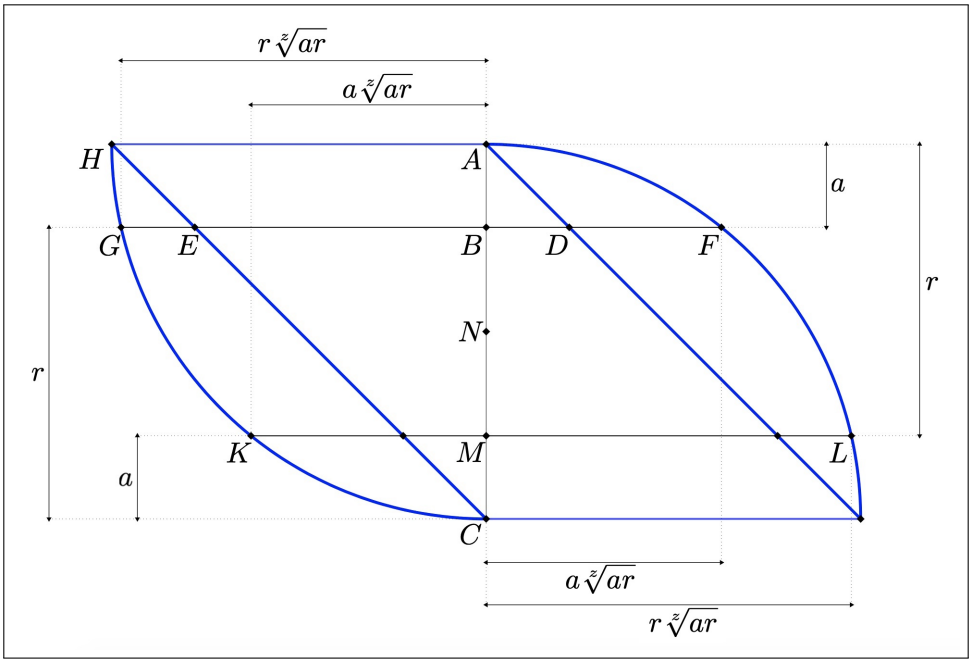
Ainsi, la table des figures peut être transposée par changement de signes, et l'on obtient des quadratures qui dépendent non plus de l'aire du cercle, mais de celle de l'hyperbole. Ainsi Leibniz donne ce résultat :

> *Mais celles-ci :* $\begin{cases} \int r(ar)^{\nu} da \\ \int a(ar)^{\nu} da \end{cases}$, *en posant* $da = -dr$, *sont données à partir de la quadrature du cercle et en posant* $da = +dr$ *sont donnée à partir de la quadrature de l'hyperbole, à condition que* $\nu$ *sont un nombre fractionnaire. De fait, s'il s'agit d'un nombre entier, on obtient la quadrature de façon traditionnelle, sachant que* $a$ *et* $r$ *sont des quantités rationnelles.* [17]

Leibniz n'est pas le premier à faire ce constat. En effet, Wallis montre dans l'*Arithmetica Infinitorum* que le cercle et l'hyperbole présente des difficultés similaires :

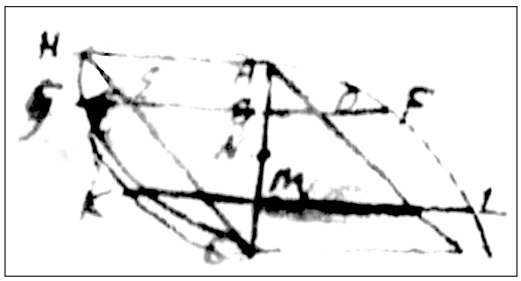
> *Ainsi nous rencontrons ici aussi la même difficulté pour la quadrature de l'hyperbole que ce que nous avons ci-dessus maintes fois rappelé au sujet de la quadrature du cercle ou de l'ellipse (et d'un certains nombres d'autres courbes), à savoir qu'il faut à présent chercher le rapport qu'aurait une série infinie de racines de binômes généraux, de la même manière ici que pour les apotômes.* [18]

Mais dans le cas de l'hyperbole, le calcul effectif des quadratures ne permet pas de voir apparaître, par contingence, les coefficients du triangle arithmétique. Pour cette raison, Wallis n'applique sa méthode d'interpolation qu'au cercle, et non aux figures qui découlent de l'hyperbole. C'est ce pas que Leibniz franchit en 1679. Desormais, il s'intéresse à la table des figures, pour les relations que les expressions des courbes ont directement entre elles, et non seulement pour les relations qu'ont leurs quadratures au sein du triangle harmonique. Dès lors, même si en changeant les signes, on perd la régularité sur la table des quadratures, elle demeure dans la table formelle des figures. Cette ambition de trouver une structure formelle commune qui s'accorde aussi bien avec les figures qui dépendent du cercle et celles qui dépendent de l'hyperbole évoque la méthode de l'Universalité, que Leibniz développe à Paris pour unifier les équations des coniques. Cependant, Leibniz n'y fait pas référence.
Leibniz tente alors de représenter les deux quadratures $\int r\sqrt[z]{ar}da$ et $\int a\sqrt[z]{ar}da$ sur une seule et même figure :




17. LH 35, 2, 1, Bl.78 - Manuscrit sans titre, 30 mars 1679 : « Sed hanc $\int \overline{r\boxed{\nu}\overline{ar}d\overline{a}}$ ; $\int \overline{a\boxed{\nu}\overline{ar}d\overline{a}}$, posito $d\overline{a}$ æqu $-d\overline{r}$, dari ex quadratura Circuli et posito $d\overline{a}$ æqu $+d\overline{r}$ dari ex quadratura Hyperbolæ. Si $\nu$ est numerus fractus. Nam si sit numerus integer datur quadratura communi more modo $a$ et $r$ sint quantitates rationales. »

18. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 165, p.128-129 : « Adeoque & hic incidimus in eandem difficultatem in quadratura Hyperbolæ, quam supra aliquoties meminimus de quadratura Circuli vel Ellipseos,(aliarumque aliquot curvarum) nempe ut inquiratur jam ratio quam habet infinita series Radicum universalium Binomiorum, sicut illic Apotomarum. »




Manuscrits de Leibniz - LH 35, 2, 1 Bl.78

La définition des exposants est confuse. Il semble qu'au début du manuscrit, $z$ est un entier, si bien que Leibniz étudie des courbes qui ne figurent pas dans la table de Wallis, et il raffine l'interpolation jusqu'au rang $z$, au lieu de 2 simplement. Mais dans la partie suivante, il semble que l'exposant $\nu$ est un multiple de $\frac{1}{2}$, et que Leibniz se fonde sur la relation $\nu = \frac{z}{2}$ avec $z$ entier. En effet, lorsqu'il affirme que l'intégrale est rationnelle, lorsque $\nu$ est un entier, il ajoute en note :

> *Nota Bene : z doit être un nombre pair.* [19]

En posant que $\nu$ est entier si et seulement si $z$ est pair, Leibniz suggère donc que $\nu = \frac{z}{2}$. Ainsi dans ce dernier passage, il n'est pas clair de savoir si $\sqrt[z]{ar}$ vaut bien la racine $z$-ième de $ar$ ou bien si par inattention, Leibniz désigne en réalité la puissance $z$-ième de $\sqrt{ar}$. Ajoutons que Leibniz trace les droites qui passent par $D$ et $E$ [20], or ces droites correspondent à l'expresion $a \times (ar)^0$. Il est plus probable que Leibniz envisage le cas de la puissance nulle $z = 0$, plutôt que celui de la racine de rang infini $z = \infty$.
La figure permet de constater des propriétés de symétrie sur les aires, ce qui permet, selon Leibniz, de trouver la ligne sommatrice, c'est-à-dire la courbe correspondant aux quadrature :

> *On donne l'aire $AHGFA$ et de plus on donne l'aire $FGKLF$, en posant donc $FG = KL$ et dès lors $ML = BG$ et $BF = KM$. On aura alors l'aire $FBMLF$ qui est la moitié de celle-ci $FGKLF$, puisque le point $N$ (milieu entre $A$ et $C$) est à égale distance de $B$ et de $M$.* [21]

La description géométrique de cette méthode est bien trop succincte pour qu'on puisse la juger sur le plan de effectivité. En effet, la question n'est pas là pour Leibniz. Cette méthode géométrique se fonde sur l'étude empirique de la figure. Or, ce que Leibniz souhaite, c'est trouver une méthode détachée de la géométrie :

> *Il faut seulement voir si, par quelque moyen, on aurait pu dériver l'aire $FBMLF$ par le calcul et sans examiner la figure ni à l'aide de l'imagination.* [22]

Ce but que Leibniz se donne, à savoir déterminer les aires sans l'aide de l'imagination, s'apprécie d'autant mieux lorsqu'on intègre dans l'analyse les considérations sur la position critique qu'il tenait deux à trois ans plus tôt, vis-à-vis de l'induction chez Wallis. L'enjeu n'est donc déjà plus de trouver une preuve géométrique au raisonnement inductif, comme ce qu'il avait affirmé en décembre 1675, dans le *De additione ordinatarum ad quadraturas* (A VII, 5, N.54$_1$). Il s'agit de trouver une démonstration purement formelle, afin d'exprimer par des jeux d'écriture l'opération qui permet de déduire les courbes sommatrices des courbes originales.
En 1679, Leibniz souhaite donc développer ses méthodes de découverte et son *ars inveniendi* en s'éloignant de la géométrie.

19. LH 35, 2, 1, Bl.78 - Manuscrit sans titre, 30 mars 1679 : « NB $z$ debet esse numerus par. »
20. Leibniz ne fait par ailleurs aucun usage de ces points.
21. LH 35, 2, 1, Bl.78 - Manuscrit sans titre, 30 mars 1679 : « Datur area $AHGFA$ imo et datur area $FGKLF$. ergo ponendo $FG$ æqu. $KL$. adeoque $ML$ æqu $BG$. et $BF$ æqu $KM$. dabitur et area $FBMLF$ quæ ipsius $FGKLF$ est dimidia cum puncta $B$. $M$ ab $N$ (inter $A$ et $C$ medio) æqualiter distant. »
22. LH 35, 2, 1, Bl.78 - Manuscrit sans titre, 30 mars 1679 : « Tantum videndum quomodo hoc artificium de area $FBMLF$ ex calculo potuerit derivari sine inspectione figuræ et auxilio imaginationis. »

## 9.2 Le *De calculo interpolationum* : au croisement des tables et des formules

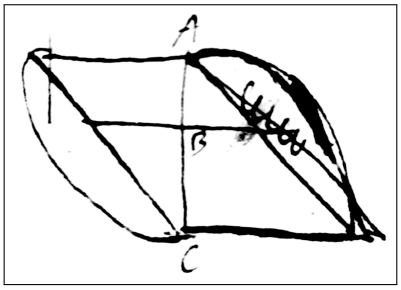
Le *De calculo interpolationum ; et mirabilia de generali expressione formularum sine sublatione involutionum et complicationum* (LH 35, 5, 15 Bl.25-26) constitue le seul texte à notre connaissance qui attribue la méthode d'interpolation du triangle à la fois à Wallis et Mengoli. Il est daté du 30 Mars 1679, tout comme le *De cyclometria per intercalationes* (LH 35, 2, 1 Bl.68-69).

### 9.2.1 Interpolations de niveaux supérieurs

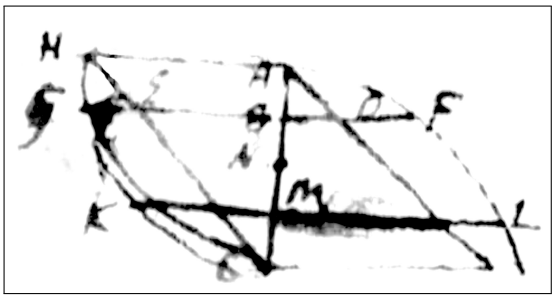
La mise en place du problème est extrêmement similaire à celle du *De cyclometria per intercalationes* (LH 35, 2, 1 Bl.68-69), c'est-à-dire que Leibniz envisage d'abord les courbes de la tables de figures, à savoir $\sqrt{a^p r^q}$ :

> *AC constante ou donnée. AB = a l'abscisse. BC = r le reste.*
> *Nous cherchons les aires de ces figures :*
> - $\int \sqrt{a}da \quad ; \quad \int r\sqrt{a}da \quad ; \quad \int r^2\sqrt{a}da$ *et plus généralement* $\int r^z\sqrt{a}da$ -
> *En outre, celles-ci sont quarrables. Etant donné que de plus les figures suivantes :*
> - $\int \sqrt{ar}da \quad ; \quad \int r\sqrt{ar}da \quad ; \quad \int r^2\sqrt{ar}da$ -
> *ne sont pas quarrables autrement qu'à partir de la quadrature du cercle. Nous étudierons la raison de cette chose.* [23]

Ainsi la présentation du cadre annonce la première approche que nous avons déjà étudiée. Celle qui questionne la solution de Newton dans le cadre des courbes $\sqrt{a^p r^q}$ dépendantes de la figure du cercle, c'est-à-dire $a + r = 1$. Pourtant, ce n'est pas cette approche que va traiter Leibniz ici. D'ailleurs, la figure que Leibniz se donne constitue un indice de cela car elle est copiée, quant à elle, sur celle du verso du manuscrit LH 35, 2, 1, Bl.78, c'est-à-dire le développement de la seconde approche, plus formelle :




Manuscrits de Leibniz - LH 35, 5, 15 Bl.25-26




Manuscrits de Leibniz - LH 35, 2, 1, Bl.78

Mais Leibniz s'éloigne très vite de ce cadre restreint. Par ailleurs, on note qu'il s'agit d'un des rares manuscrit sur le sujet où Leibniz n'a pas construit de table.

#### Intercaler plus de deux termes

Leibniz souhaite explorer les cas où l'on interpole au-delà du niveau 2, comme chez Mengoli et Wallis :

> *Et d'après cela, les deux peuvent être exprimés plus généralement par une série entière, comme ceci : $\int a^\nu r^z da$. Ainsi, de plus, en exprimant encore toujours de nombreuses autres séries, on embrasse non seulement la table entière de Wallis ou de Mengoli mais aussi les tables qu'on peut obtenir à partir de $\sqrt[3]{ada}$ ou $\sqrt[3]{arda}$ etc.* [24]

23. LH 35, 5, 15 Bl.25-26, *De calculo interpolationum ; et mirabilia de generali expressione formularum sine sublatione involutionum et complicationum*, 20 Mars 1679 : « *AC* constans seu data. *AB* æqu. *a* abscissa. *BC* æqu. *r* residua. Quærantur areæ harum figurarum : $\int \sqrt{a}da$ ; $\int r\sqrt[2]{a}da$ ; $\int r^2\sqrt[2]{a}da$ et in genere $\int r^z\sqrt{a}da$. Sunt autem hæ quadrabiles. Quoniam autem sequentes figuræ : $\int \sqrt[2]{ar}da$ ; $\int r\sqrt[2]{ar}da$ ; $\int r^2\sqrt[2]{ar}da$ non sunt quadrabiles nisi ex quadratura circuli, eius rei rationem investigabimus. »

24. LH 35, 5, 15 Bl.25-26, *De calculo interpolationum ; et mirabilia de generali expressione formularum sine sublatione involutionum et complicationum*, 20 Mars 1679 : « Et quoniam ambæ generaliter exprimi possint integra serie hoc modo : $\int a^\nu r^z da$. Ita autem expressis multas adhuc alias series complectatur ac non tantum Tabulam integram Wallisii vel Mengoli sed et Tabulas quæ fieri possint pro $\sqrt[3]{ada}$ vel $\sqrt[3]{arda}$ etc. »

La généralisation de la méthode d'interpolation à des rangs plus élevée que la racine carré n'est probablement pas un élément nouveau. En effet, on le retrouve déjà évoqué par Leibniz, en 1676, dans l'*Arithmetica infinitorum et interpolationum* (A VII, 3, N.$57_2$) :

> *On note qu'à la place de ar, on pourrait choisir* $\frac{a}{r}$ *et de même à la place de* $r = 1 - a$ *on peut choisir* $r = a - 1$ *et de même à la place de* $\surd$*, on peut choisir* $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, ... *et finalement les réciproques de tous les précédents.* [25]

Wallis également évoquait déjà cette possibilité dans l'*Arithmetica Infinitorum*. Dans un premier temps, il en parle seulement pour les cas particuliers de chaque progression de nombres figurés. En effet, une progression peut être interpolée au degré que l'on souhaite. Il l'évoque d'abord pour les séries des monadiques et des latéraux :

> *Il y a deux séries dans la présente table, à savoir celles des monadiques et des latéraux, qu'on peut facilement interpoler (pour autant d'emplacements qu'on souhaite interpoler), en interpolant bien-sûr pour la première autant d'unités qu'il est nécessaire et pour la seconde autant de moyennes arithmétiques.* [26]

Puis, il l'illustre par un exemple pour la progression des triangulaires :

> *De la même manière, si l'on doit interpoler deux emplacements dans un seul intervalle, on obtiendra les nombres :* $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{9}$, 1, $\frac{14}{9}$, $\frac{20}{9}$, 3, $\frac{35}{9}$, $\frac{44}{9}$, 6, $\frac{65}{9}$, $\frac{77}{9}$, 10 .... *C'est-à-dire* $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{9}{9}$, $\frac{14}{9}$, $\frac{20}{9}$, $\frac{27}{9}$ ... *dont les différences sont également en proportion arithmétique.* [27]

Mais jusqu'ici, il ne s'agit que de pousser plus loin l'interpolation d'une seule progression, et non celle de la table dans sa globalité. De fait, lorsque Wallis suggère de créer la notation $\tilde{m}(a|b)$ pour désigner les moyens termes de la progression 1, $\frac{3}{2} = 1 \times \frac{3}{2}$, $\frac{15}{8} = 1 \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{4}$, $\frac{105}{48} = 1 \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \frac{7}{6}$ ..., il évoque d'autres notations pour pousser l'interpolation encore plus loin :

> *Cependant, je n'ignore pas que pour perfectionner ces notations et les rendre plus exactes, il faut adjoindre ces signes* $\tilde{m}^2$, $\tilde{m}^3$, $\tilde{m}^4$ .... *dans la mesure où l'on indiquera ou bien une seule moyenne, ou bien la première de deux, de trois etc. de même que ce dont on a pris l'habitude pour* $\surd$*, à savoir* $\sqrt[2]{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$ ..., *dans la mesure où l'on désigne la racine carré, cubique ou bicarré etc. c'est-à-dire ou bien une seule moyenne proportionnelle, ou bien la première de deux, de trois etc. De même, il faudra adjoindre d'autres ponctuations qui indiqueront si les multiplications continues (dans la présente série à interpoler) croissent ou bien une fois, ou bien d'un nombre binaire, ternaire etc.* [28]

Ainsi Wallis n'envisage qu'une interpolation linéaire. Il ne considère pas que la quantité $\square$ naît de l'interpolation bidimensionnelle de la table, mais de l'interpolation unidimensionnelle d'une seule progression, horizontale, verticale ou même diagonale. Dans ces conditions, le signe $\tilde{m}^3$ consiste certes à interpoler deux termes au lieu d'un dans la progression, mais il s'applique toujours au même type de progression. Or rien n'assure qu'en poursuivant l'interpolation bidimensionnelle, les progressions horizontales soient toutes de la même nature. Wallis s'intéresse à la table des quadratures, tandis que Leibniz étudie la table des figures. Cet héritage de Mengoli lui permet de travailler sur les expressions générales des courbes et d'appliquer l'interpolation directement aux exposants de ces équations, là où l'interpolation du triangle arithmétique impose la tâche complexe de faire émerger des lois régulières. De son coté, Mengoli n'évoque pas cette éventualité au sein du *Circolo*. Le ton heurisitique résolument assumé de ce dernier ouvrage et le fait qu'il soit intégralement consacré à la détermination de la mesure du cercle explique sans doute cette absence.

---

25. A VII, 3, N.$57_2$,*Arithmetica infinitorum et interpolationum*, fin avril 1676 - p.736 : « Nota pro $ar$. posset sumi $\frac{a}{r}$ item pro $r \sqcap 1 - a$. sumi potest $a - 1$. item pro $\surd$. sumi potest $\sqrt[3]{}.\sqrt[4]{}$. etc denique præcedentium omnium reciprocæ. »

26. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 170, p.138 : « Series duæ, in exposita Tabella, nempe Monadicorum, & Lateralium, facile interpolari possunt (locis interponendis quotlibet) interpositis scil. illic quot opus est, unitatibus, hic totidem medis Arithmeticis. »

27. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 175, p.141 : « Pari modo, si interponendi sint in singulis intervallis duo locis ; prodirent numeri $\frac{2}{9}.\frac{5}{9}.1.\frac{14}{9}.\frac{20}{9}.3.\frac{35}{9}.\frac{44}{9}.6.\frac{65}{9}.\frac{77}{9}.10$. &c. Vel $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{9}{9}$, $\frac{14}{9}$, $\frac{20}{9}$, $\frac{27}{9}$ &c. quorum item differentiæ sunt Arithmetice proportionales. »

28. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656 - Proposition 190, p.177 : « Non ignoro interim ad hanc ipsam notationem accuratius perficiendam, apponendas esse notæ $\tilde{m}$ distinctiones suas, puta $\tilde{m}^2$, $\tilde{m}^3$, $\tilde{m}^4$, &c, prout indicaverit vel medium unicum, vel primum duorum, trium, &c ; sicut & notæ $\surd$ fieri solet, puta $\surd^2$, $\surd^3$, $\surd^4$, &c. prout designat radicem quadraticam, vel cubicam, biquadraticam, &c. hoc est, vel unicum, vel primum duorum, trium, &c. mediorum proportionalium : Item alias apponendas esse distinctiones quæ indicent, an continui multiplicationes (in exposita serie interpolanda) vel uniata, vel numero binario, ternario &c. crescant. »

**Interpolation bidimensionnelle**

Ainsi, en considérant l'ensemble de ces intégrales, Leibniz s'approche au plus près de ce que nous déffinissons aujourd'hui comme la fonction Beta d'Euler :

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

Donc, si l'on considère que les quadratures sont complètes, c'est-à-dire pour $a$ allant de 0 jusqu'à 1, on obtient bien :

$$\int_0^1 a^\nu r^z da = \int_0^1 a^\nu (1-a)^z da = B(\nu+1, z+1)$$

Ici, ce qui intéresse particulièrement Leibniz, ce sont les puissances fractionnaires qui vont au-delà de la racine carré, comme la racine cubique, bicarré etc. Ainsi, il considère l'exposant $\frac{1}{z}$ au lieu de $z$, en posant cette fois-ci que $\nu$ et $z$ sont des entiers :

> *A présent, il faut étudier en premier s'il n'est pas également donné la quadrature de ces figures :*
> *-* $\int \sqrt[z]{a}da\,;\, \int r\sqrt[z]{a}da\,;\, \int r^2\sqrt[z]{a}da$*, ou plus généralement* $\int r^\nu a^{\frac{1}{z}}da$ *-*
> *étant posé que* $\nu$ *et* $z$ *sont des entiers.*[29]

Les courbes de Mengoli et de Wallis sont de ce type, mais seulement pour la racine carré et pas au-delà. Leibniz explicite cette généralisation en indiquant clairement les sous-cas qui sont traités par ces auteurs :

> *Il semble que cela découle des interpolations de Wallis et de Mengoli et même que nous procédions ici d'une façon plus générale : un terme quelconque de la table de Mengoli peut s'exprimer de cette manière, l'ordonnée de la figure étant* $\sqrt[z]{a^z r^\nu}$*. Puisque si aussi bien* $z$ *que* $\nu$ *sont des nombres impairs, alors la somme de cette figure dépend de la quadrature du cercle ou de l'hyperbole. Du cercle si* $r+a$ *est égal à la donnée. De l'hyperbole si* $r-a$ *est égal à la donnée. Pour tous les autres cas, la figure est absolument quarrable, c'est-à-dire si* $z$ *et* $\nu$ *sont tous les deux pairs, ou bien si seulement l'un des deux l'est.*[30]

Ce résultat se trouvait déjà au verso du manuscrit LH 35, 2, 1 Bl.78. La technique tabulaire de Mengoli et de Wallis permet de mettre en évidence deux courbes fondamentales : le cercle et l'hyperbole. Chacune correspond au choix d'un signe $\varepsilon$ dans la définition des variables : $1 = r + \varepsilon a$. Pour Leibniz, il y a donc une correspondance entre le niveau de l'interpolation, à savoir diviser chaque intervalle en deux et le degré global de ces deux courbes dans les expressions $\sqrt{a(1-a)}$ et $\sqrt{a(a-1)}$, à savoir $\frac{1}{2}$. Ainsi, en interpolant au niveau supérieur, c'est-à-dire en divisant chaque intervalle en trois, on obtiendrait des figures qui dépendent de deux courbes fondamentales de degré $\frac{1}{3}$, à savoir $\sqrt[3]{a(1-a)}$ et $\sqrt[3]{a(a-1)}$ :

> *Avec exactement les mêmes interpolations que celles qu'emploient Wallis et Mengoli, je pose qu'on peut fonder une table à partir de* $\sqrt[3]{}$*. La seule différence étant alors qu'à la place du cercle et de l'hyperbole, il faut supposer deux autres figures d'un degré plus élevé. Nous pourrons l'énoncer plus généralement : c'est* $(a^z r^\nu)^\omega$*.*[31]

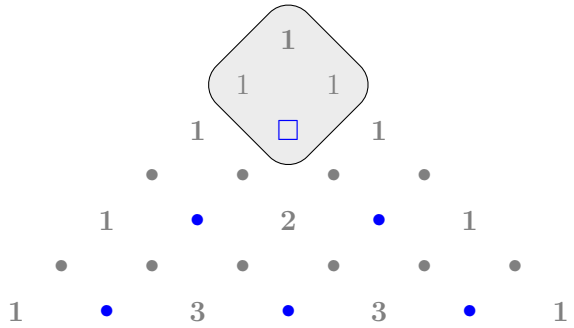
Une contradiction apparait dans le discours de Leibniz. D'une part, il parle bien de généraliser la table de Mengoli et de Wallis à des degrés supérieurs, et donnant plusieurs fois l'exemple explicite de $\sqrt[3]{}$. Dès lors, dans la table des figures, il faut placer deux termes entre 1 et $a$, à savoir $\sqrt[3]{a}$ et $\sqrt[3]{a^2}$. Il semble donc indiquer qu'il faut diviser les intervalles par un nombre croissant de nouveaux emplacements. Mais

29. LH 35, 5, 15 Bl.25-26, *De calculo interpolationum ; et mirabilia de generali expressione formularum sine sublatione involutionum et complicationum*, 20 Mars 1679 : « Hinc inquirendum primum, an non et detur quadratura harum figurarum : $\int \sqrt[z]{a}da\,;\, \int r\sqrt[z]{a}da\,;\, \int r^2\sqrt[z]{a}da$, vel generaliter $\int r^\nu a^{\frac{1}{z}}da$ posito $\nu$ et $z$ esse integros. »

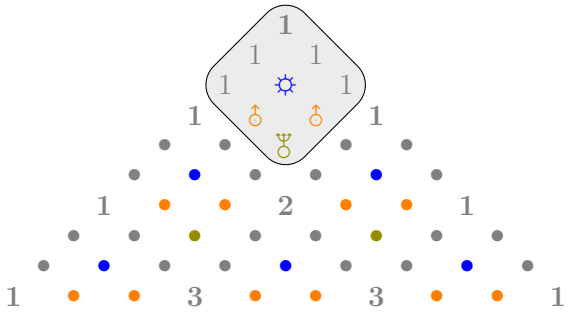
30. LH 35, 5, 15 Bl.25-26, *De calculo interpolationum ; et mirabilia de generali expressione formularum sine sublatione involutionum et complicationum*, 20 Mars 1679 : « Videtur hoc sequi ex Wallisii et Mengoli interpolationibus imo generalius procedamus ad hoc : Terminus quilibet Tabulæ Mengoli sic exprimi potest $\sqrt[z]{a^z r^\nu}$ ordinata figuræ. Quod si tam $z$ quam $\nu$ sint numeri impares figuræ huius summa pendet a quadratura circuli vel hyperbolæ. Circuli si $r+a+r$ est æqualis datæ. Hyperbolæ si $r-a$ est æqualis datæ. Aliis omnibus casibus figura est absolute quadrabilis, id est sive $z$ et $\nu$ simul, sive alteruter tantum sit numerus par. » - *Nota Bene* : Pour le cas du cercle, Leibniz écrit que la condition est que $r+a+r$ soit égal à la donnée, au lieu de $a+r$. Nous avons corrigé cela dans la traduction.

31. LH 35, 5, 15 Bl.25-26, *De calculo interpolationum ; et mirabilia de generali expressione formularum sine sublatione involutionum et complicationum*, 20 Mars 1679 : « Pono cum iisdem plane interpolationibus quibus usi sunt Wallisius & Mengolus condi possit tabula pro $\sqrt[3]{}$. Hoc solo discrimine quod tunc pro circulo et hyperbolæ assumendæ duæ aliæ figuræ altioris gradus, hinc pronuntiare poterimus generaliter : est $\boxed{\omega}\ \overline{a^z r^\nu}$. »

il faudrait alors pousser l'analogie plus loin. En effet, Leibniz a très bien montré dans le *Constructio Tabularum* (A VII, 6, N.13$_1$) que la structure de la table des quadratures, combinée avec sa symétrie, implique que l'ensemble des coefficients sont entièrement déterminés par les quatre termes au sommet de la table. Ainsi, dans le cas d'une interpolation au niveau trois, il faudra les neuf termes du sommet, et les $n^2$ termes du sommet pour une interpolation au niveau $n$ :




Interpolation de niveau deux




Interpolation de niveau trois

La couleur du terme indique la figure fondamentale dont il dépend. Les points gris sont les quantités rationnelles.
Comme nous le montrent ces diagrammes, le cas $\sqrt[3]{}$ ne demande pas d'introduire une seule figure par signe, comme chez Mengoli ou Wallis, mais trois nouvelles figures dont les quadratures constituent des quantités transcendantes indépendantes :

- ⋆ la quantité ☼ par l'équation
$$\frac{1}{\frac{5}{3}☼} = \int_0^1 \sqrt[3]{ar}da$$
- ⋆ la quantité ♃ par l'équation :
$$\frac{1}{2♃} = \int_0^1 \sqrt[3]{a^2r}da = \int_0^1 \sqrt[3]{ar^2}da$$
- ⋆ la quantité ♆ par l'équation :
$$\frac{1}{\frac{7}{3}♆} = \int_0^1 \sqrt[3]{a^2r^2}$$

Par la structure de la table, c'est-à-dire la méthode d'interpolation des progressions de Mengoli et Wallis, il est possible d'exprimer toutes les quadratures à partir de ces trois quantités. Mais rien ne permet de les relier entre elles. De fait, il n'y a pas de raison de penser que le rapport de la quantité ☼ à la quantité ♃ par exemple soit d'une nature différente du rapport de ☼ à l'unité rationnelle 1. Les deux relations sont *a priori* transcendantes. Ainsi ce n'est pas deux nouvelles figures de plus haut degré qu'il faudrait introduire, mais bien six dans ce cas et donc $n(n-1) = 2.\frac{n(n-1)}{2}$ figures pour une interpolation de niveau $n$. Dès lors, il semble que Leibniz n'a pas considéré l'interpolation sous cet angle. La description qu'il donne des exposants $z$, $\nu$ et $\omega$ confirme cette hypothèse :

> *Une figure dont on peut toujours faire la quadrature des ordonnées à condition que $z$ et $\nu$ soient toujours rationnels et que $\omega$ ne soit pas un entier rationnel. Et que l'un ou l'autre de ces deux nombres $z$ et $\nu$ soit un nombre pair.* [32]

En indiquant que la dépendance de la quadrature à une figure fondamentale dépend de la parité des exposants, Leibniz se place dans le cas de Wallis et de Mengoli, à savoir une interpolation de niveau deux. En effet, dans la table de Wallis, la quantité □ n'apparait que lorsque les deux exposants sont impairs dans l'expression $\sqrt{a^p r^q}$, ainsi la quadrature rationnelle si l'un des deux exposants $p$ ou $q$ est pair.

32. LH 35, 5, 15 Bl.25-26, *De calculo interpolationum ; et mirabilia de generali expressione formularum sine sublatione involutionum et complicationum*, 20 Mars 1679 : « Figuram cuius ordinata semper quadrari posse modo $z$ et $\nu$ sint semper rationales et modo cum $\omega$ non est integer rationalis, alteruter horum numerorum $z$ et $\nu$. sit numerus par. »

### 9.2.2 Réduction finie mais transcendante

#### Différence de régime entre l'approche par les tables et l'approche par les séries

Nous touchons ici précisément le point qui semble troubler Leibniz, expliquant sa position confuse et contradictoire. Les tables de Mengoli et de Wallis montrent donc que les quadratures des courbes $\sqrt{a^p r^q}$ sont transcendantes seulement si les deux exposants sont impairs, dans le cas contraire, les quadratures sont rationnelles et exprimables par une expression finie. Or la formule de Newton montre que le développement du binôme est fini et rationnel lorsque l'exposant est un entier et devient infini et irrationnel lorsque l'exposant est un rompu ou un irrationnel. Leibniz cherche donc à comprendre pour quelle raison on observe des comportements si différents pour des problèmes si semblables. Un point d'explication qui lui semble important se trouve dans le fait que la méthode d'interpolation de Wallis et de Mangoli fonctionne pour les intégrales complètes, entre $x = 0$ et $x = 1$, alors que celle de Newton donne accès aux quadrature quelconque et donc aux expressions des quadratrices, c'est-à-dire ce que nous appelons aujourd'hui les primitives d'une fonction. Si la structure de la table et les relations entre les courbes sont toujours valables pour la table des figures et donc pour les quadratrices, les raisonnements qui concernent la nature des quantités, en revanche, à savoir rationnelles ou transcendantes, ne fonctionnent qu'au sein de la table des quadratures complètes.
Pour résoudre le problème des quadratures complètes, Leibniz propose la solution suivante :

> *De plus, il sera également utile d'exprimer sa quadratrice de façon générale à partir du plan $ar$. Qu'on regarde d'abord lorsqu'on pose que $\omega$ est un entier : $r = t \pm \nu$. Donc $r^{z\omega}$ = etc. Par la suite, pour faire la quadrature de cette manière, il faut rechercher l'expression de la figure quadratrice qui progresse par les seuls $a$ et $r$, ce qui peut se faire. De fait, on a toujours $t$, c'est-à-dire le tout $= a \pm r$. Donc en substituant $a + r$ à la place de $t$, après qu'on a trouvé la quadrature, nous obtiendrons l'expression de la figure quadratirce par $a \pm r$.* [33]

Il semble que Leibniz fasse ici la confusion entre la variable de la primitive et la variable muette d'intégration. En effet selon lui, la quadrature complète est une expression qui dépend du segment total sur lequel on a calculé l'aire, à savoir l'unité 1 dans la table de Mengoli ou de Wallis. Mais remplaçons plus généralement, comme le font parfois Wallis et Mengoli cette unité par une grandeur donnée $t$. Dès lors, on n'obtient les quadratures en fonction de $t$ :

$$\int_0^t a^p r^q da = Q(t)$$

Or Leibniz souhaite déterminer, non pas la quadrature $Q(t)$ qui est une quantité déterminée, mais la quadratrice qui est une courbe qui décrit les quadratures partielles, donc la primitive :

$$F(a, r) = \int_0^a a^p r^q da$$

En effet, ayant obtenu la quantité $Q(t)$, c'est-à-dire l'expression de la quadrature en fonction de $t$, il suffirait selon lui de remplacer $t$ par sa décomposition variable $a + r$ pour obtenir l'expression de la quadratrice. Il obtient ainsi $F(a, r) = Q(a + r)$.
Notre formalisme moderne montre directement qu'il y a une confusion entre $a$ la valeur limite et $a$ la variable qu'on somme. Cette distinction n'est pas inconnue de Leibniz. En effet, au sein de la *Dissertatio de Arithmetico Circuli Tetragonismo* (A VII, 6, N.1), dans un ajout daté de juillet 1676, Leibniz note déjà bien ce problème, et propose une solution que nous utilisons encore aujourd'hui, à savoir distinguer les deux notations en notant la variable en minuscule et la déterminée en majuscule :

> *Je vois donc ici qu'il faut éviter de se tromper. En effet, $b$ est tantôt constant, tantôt variable. Ainsi donc $b$ en minuscule désignera la variable et $B$ en majuscule va désigner la constante ultime.* [34]

33. LH 35, 5, 15 Bl.25-26, *De calculo interpolationum ; et mirabilia de generali expressione formularum sine sublatione involutionum et complicationum*, 20 Mars 1679 : « Utile autem erit eius quadratricem etiam exprimi generaliter per planus a.r. Videamus primum ponendo $\omega$ esse integrum : $r$ æqu. $t \pm \nu$. Ergo $r^{z\omega}$ æqu. &c. Quadrando hoc modo postmodo quærenda expressio prodeuntis figuræ quadratricis per solas $a$ et $r$ quod fieri potest. Semper nam $t$ seu tota æqu. $a \pm r$ ergo in locum $t$ substituendo $a + r$ post quadraturam inventam habebimus expressionem figuræ quadratricis per $a \pm r$. »

34. A VII, 6, N.1, *Dissertatio de Arithmetico Circuli Tetragonismo*, Automne 1673 et Juillet 1676 - p.35-36 : « Video hic cavendum ab errore nunc enim $b$ constans, nunc variablilis. Ergo $b$. simplici litera significet variabilem, et $B$, capitali significet ultimam constantem. »

Ainsi, il semble que l'expression $Q$ en fonction de $t$ ne représente pas seulement la quantité fixé de la quadrature complète mais aussi la courbe des quadratures partielles : $F(a) = Q(a)$. Ainsi, quitte à rendre la longueur totale $t$ variable, on peut considérer que la quadrature complète donne accès à la quadrature partielle. Cette remarque fait écho aux propos de Leibniz que nous avons mentionnés au verso du manuscrit LH 35, 2, 1, Bl.78, lorsqu'il dit que la figure qu'il a tracé lui permet de déterminer la courbe sommatrice :

> *Mais puisque N n'est pas un point déterminé, étant donné qu'on peut considérer une autre longueur pour AC, il semble qu'on puisse poursuivre ainsi pour les autres. De même, cela suffit par cette méthode pour trouver la série sommatrice pour n'importe quelle partie de ce genre, et l'on obtiendra donc la ligne de la série sommatrice. Et donc pour la totalité.* [35]

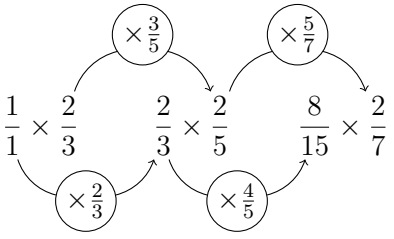
L'idée est exprimée de manière confuse, mais il semble bel et bien que Leibniz remarque qu'on peut faire varier la longueur totale, ici $AC$, dans l'optique d'obtenir la courbe d'un primitive. Or ce n'est pas ce que Leibniz propose dans *De calculo interpolationum* (LH 35, 5, 15 Bl.25-26), qui a pourtant probablement été rédigé le même jour. Leibniz dispose donc manifestement de tous les outils de mise en garde face à ce genre d'erreur.

### Obtenir autant par les tables que par les séries

Mais la méthode que Leibniz propose présente l'avantage d'établir un pont avec la formule de Newton :

> *De la même façon, lorsque ω est une quantité rompue, en remplaçant t par sa valeur, la série infinie qui exprime la quadrature pourra être ramenée à une quantité finie qu'on peut exprimer par a.r.* [36]

Ainsi, dans le cas de certains exposants fractionnaires, l'interpolation de la table permet d'obtenir une expression finie, là où la formule de Newton donne une expression infinie. Ainsi, il obtiendrait ce qu'il cherche, à savoir une expression à la fois finie et rationnelle. C'est cet objectif qui a pu aveugler le jeune philosophe. Mais, si l'on concrétise rigoureusement son idée, on s'aperçoit que les termes demeurent irrationnels. Car si les quadratures complètes sont rationnelles, les expressions des courbes sont toujours irrationnelles. Considérons par exemple le terme $\frac{16}{105}$ dans le triangle harmonique qui correspond à la courbe $\sqrt{a}r^2$ dans la table des figures. Au sein du triangle harmonique, les relations de proche en proche nous permettent d'expliquer pourquoi ce terme est rationnel :




$$\frac{16}{105} = \left(\frac{4}{5}.\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{5}{7}.\frac{3}{5}\right) \times \frac{1}{1}.\frac{2}{3}$$

Or, si l'on souhaite représenter cette relation sur les expressions des courbes, il nous faut procéder aux intégrations par partie qui nous ont permis de faire le lien entre les courbes de Wallis et celle de Mengoli :

$$\int \sqrt{a}r^2 da = \left(\frac{4}{7}.\frac{2}{5}\right) \int \sqrt{a} da + \left(\frac{4}{7}.\frac{2}{5}.\frac{1}{1}\right) \sqrt{a}r + \left(\frac{4}{7}.\frac{1}{2}\right) \sqrt{a}r^2$$

On retrouve bien, lorsque $a = 1$ et $r = 0$ :

$$\int_0^1 \sqrt{a}r^2 da = \left(\frac{4}{7}.\frac{2}{5}\right) \int_0^1 \sqrt{a} da + 0 = \left(\frac{4}{7}.\frac{2}{5}\right) \times \frac{2}{3} = \frac{16}{105}$$

35. LH 35, 2, 1, Bl.78 - Manuscrit sans titre, 30 mars 1679 : « Sed quoniam punctum $N$ non est determinatum quandoquidem alia longitudo pro $AC$. assumi potest : videntur hinc et cætera duci posse. Item sufficit hoc modo inveniri seriem sumatricem pro qualibet eiusmodi parte, dabitur ergo linea seriei summatricis. Ergo et, pro toto. »

36. LH 35, 5, 15 Bl.25-26, *De calculo interpolationum ; et mirabilia de generali expressione formularum sine sublatione involutionum et complicationum*, 20 Mars 1679 : « Eodem modo et cum $\omega$ est quantitas fracta substituendo pro $t$ eius valorem, poterit series infinita quadraturam exprimens revocari ad quantitatem finitam per *a.r.* expressam licet. »

On constate d'abord que les relations factorielles issues des techniques d'interpolations de Wallis et de Mengoli ne fonctionnent que pour les quadratures complètes. Les quadratures partielles contiennent des termes supplémentaires qui s'annulent lorsqu'on instancie en $a = 1$. On pourrait choisir $t$ au lieu de 1 pour la valeur totale, mais alors obtiendrait :

$$\int_0^t \sqrt{a} r^2 da = \frac{16}{105}\sqrt{t} t^3$$

Ainsi, peu importe qu'on considère la quadrature complète ou les quadratures partielles, ce développement est certes fini, mais il conserve des termes irrationnels. Cela étant, comme le prétend Leibniz, on parvient bien à remplacer la série infinie de Newton par un développement fini qui dépend de $a$ et de $r$.
Reste alors la question des quantités transcendantes de la table de Wallis ou Mengoli. Leibniz cherche donc un moyen de les exprimer en fonction de la totalité $t$. Autrement dit, il s'agit de trouver une expression $Q$ telle que $\frac{1}{2\square} = Q(1)$. On retrouve donc ici l'ambition de pouvoir décrire rationnellement la relation transcendante qui relie la quantité $\square$ à l'unité 1 :

> *Il faut étudier le cas irrationnel puisqu'il peut constituer un modèle pour la méthode générale. De sorte qu'ainsi, on vienne également à bout de ceux dont les nombres $z$ et $\nu$ sont tous deux impairs, c'est-à-dire ceux dont on ne dispose pas des quadratures absolues. Et ainsi, il faut chercher un moyen d'exprimer de façon générale toutes ces quadratures.* [37]

La méthode d'interpolation fournit donc à Leibniz l'occasion de mener une investigation plus approfondie sur la question de la transcendance, c'est-à-dire des relations mathématique qui défie toute tentative de rationalisation.

### 9.2.3 Ecritures et abréviations

Assurément, le *De calculo interpolationum* (LH 35, 5, 15 Bl.25-26) fait partie de ces manuscrit de travail que Leibniz écrit dans le vif et où sa pensée se développe de façon active à mesure que le texte avance. Trouver une expression pour les quantités transcendantes, afin de pouvoir obtenir la forme des quadratrices, n'est donc absolument pas une question résolue, mais un immense chantier dont les contours sont encore à préciser et dont le succès n'est pas assuré :

> *Si d'aventure cela pouvait nous décevoir, alors dans les tables de Wallis et de Mengoli, pour ces cas-là, on ne peut pas faire les quadratures des parties quelconques de la figure mais seulement les figures complètes. Etudions cela.* [38]

#### Elaboration d'un formalisme

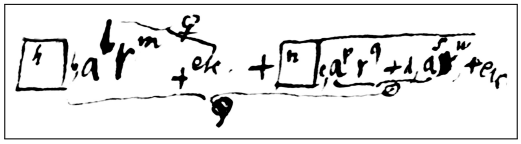
Comme nous l'avons vu, Leibniz constate que la méthode d'interpolation permet de réduire les séries infinies de Newton à des développement finis. C'est cette propriété que Leibniz souhaite prolonger aux quantités transcendantes comme $\square$. La suite du manuscrit consistera donc à élaborer une forme d'écriture qui permet de réduire une expression infinie à une expression finie.
Leibniz souhaite manifestement élaborer une méthode pour écrire la formule la plus générale possible. La plus générale se trouve ici être la plus longue, car cette formule doit représenter une succession de compositions. En effet, si les irrationnels sont réprentés par des séries, alors il possible que les transcendants soient des séries de séries, ou des séries de séries de séries, et ainsi de suit à l'infini. Notons toutefois que la traduction et l'interprétation de cette formule ne s'effectue pas de façon univoque, étant donnée sa faible lisibilité graphique. Néanmoins, il nous semble que l'idée est bien celle-ci : construire une série qui soit la plus générale possible.

37. LH 35, 5, 15 Bl.25-26, *De calculo interpolationum ; et mirabilia de generali expressione formularum sine sublatione involutionum et complicationum*, 20 Mars 1679 : « Irrationalem quod qua ratione generaliter præstari possit, inquirendum est ut succedat etiam cuius numeri $z$ et $\nu$ sunt ambo impares id est cuius quadraturæ non habentur absolutæ. »

38. LH 35, 5, 15 Bl.25-26, *De calculo interpolationum ; et mirabilia de generali expressione formularum sine sublatione involutionum et complicationum*, 20 Mars 1679 : « Et ita quærendus est modus expressionis generalis pro quadraturis istis omnibus. An fortasse decipi possunt, et in Tabulis Wallisii et Mengoli non partes quælibet figuræ, sed tantum totæ figuræ his casibus quadrari possunt. Hoc inquirendum. »

*Ayant posé que la chose fonctionne pour les figures complètes, on prend une figure quelconque :*

$$\underbrace{\overbrace{(b.a^l r^m)^h + \ldots}^{\mathrm{♀}} + \overbrace{(c.a^p r^q + d.a^s r^w)^n}^{\odot} + \ldots}_{\mathrm{☽}}$$ [39]

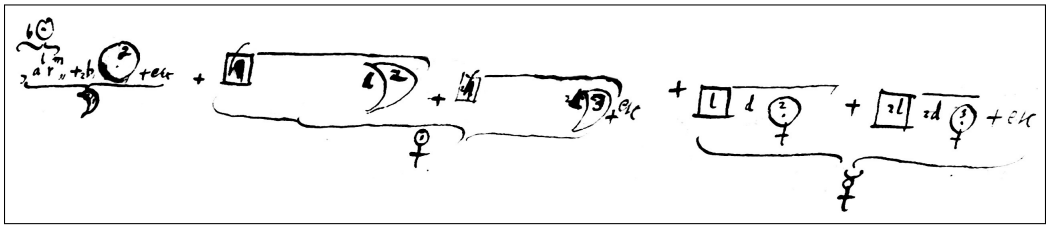


Manuscrits de Leibniz - LH 35, 5, 15 Bl.25-26

Cette idée de composition successive se retrouve dans l'écriture que Leibniz donne ensuite :

*Ce dont on peut de manière générale exprimer l'ordonnée de cette façon :* [40]

$$\underbrace{b.\overbrace{a^l r^m}^{\odot_{[1]}} + [2]b.\odot_{[2]} + \ldots}_{\mathrm{☽}_{[1]}} + \underbrace{\left(c.\,\mathrm{☽}_{[2]}\right)^h + \left([2]c.\,\mathrm{☽}_{[3]}\right)^{[2]h} + \ldots}_{\mathrm{♀}_{[1]}} + \underbrace{\left(d.\mathrm{♀}_{[2]}\right)^l + \left([2]d.\mathrm{♀}_{[3]}\right)^{[2]l} + \ldots}_{\mathrm{☿}}$$



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 5, 15 Bl.25-26

On voit donc que le symbole de rang $n+1$ est constitué d'une série polynomiale infinie appliquée au symbole de rang $n$. Ainsi ☽ est constitué d'une infinité de puissances de ⊙, ♀ d'une infinité de puissances de ☽ et ☿ d'une infinité de puissances de ♀. Les coefficients des symboles et des puissances sont précédés d'une nombre écrit en minuscule qui ne représentent pas des quantités, mais désignent en réalité le rang dans la série, à la manière des nombres fictifs que Leibniz développe à cette époque pour résoudre les systèmes d'équations linéaires. On peut alors écrire les premiers termes de la série sous cette forme :

$$\underbrace{\odot_{[1]} + [2]b.\odot_{[2]} + \ldots}_{\mathrm{☽}_{[1]}} + \underbrace{\left(c.\,\mathrm{☽}_{[2]}\right)^h + \left([2]c.\,\mathrm{☽}_{[3]}\right)^{[2]h} + \ldots}_{\mathrm{♀}_{[1]}} + \ldots$$

On obtient une série de termes ☽ dont le premier est à la puissance $h=1$ et l'indice vaut 1 également :

$$\mathrm{☽}_{[1]} + \left(c.\,\mathrm{☽}_{[2]}\right)^h + \left([2]c.\,\mathrm{☽}_{[3]}\right)^{[2]h} + \ldots$$

C'est ce que Leibniz indique dans une première remarque sur son formalisme :

*Nota Bene : les répétitions de celui-ci* ☽ *sont contenues dans* ♀*, alors en effet, on a* $..h = 1$. [41]

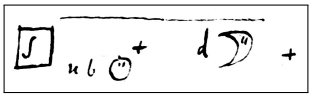
39. LH 35, 5, 15 Bl.25-26, *De calculo interpolationum ; et mirabilia de generali expressione formularum sine sublatione involutionum et complicationum*, 20 Mars 1679 : « Posito rem pro totis figuris procedere, sumamus figuram quamlibet : $\underbrace{\boxed{h}\, b, \overbrace{a^l r^m}^{\mathrm{♀}} + \text{ etc.} + \boxed{n}\, c, \overbrace{a^p r^q + d, a^s r^w}^{\odot}}_{\mathrm{☽}} + \text{etc.}$ »

40. LH 35, 5, 15 Bl.25-26, *De calculo interpolationum ; et mirabilia de generali expressione formularum sine sublatione involutionum et complicationum*, 20 Mars 1679 : « cuius ordinata generaliter exprimi potest hoc modo [...]. »

41. LH 35, 5, 15 Bl.25-26, *De calculo interpolationum ; et mirabilia de generali expressione formularum sine sublatione involutionum et complicationum*, 20 Mars 1679 : « NB repetitiones ipsius ☽ continentur in ♀ tunc enim sit $..h$ æqu. 1. »

Puis il fournit une première explication en l'illustrant par un exemple d'expression partielle :

$$\left([u]b \odot_{[..]} + d \supset_{[..]}\right)^{\int} +$$



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 5, 15 Bl.25-26

Pour le symbole $\odot$, il indique :

> *Qu'on le supprime, car il est contenu ensuite dans le suivant* ⊃. *D'où, une merveilleuse abréviation.* [42]

Et pour le symbole ⊃, il complète par :

> *Même cela, on le supprime car il est aussi contenu ensuite dans l'exemple de celui-ci* ♀ *comme on constate à partir d'une seule et unique partie, et on a* $..h = 1$. [43]

### Une écriture à la fois factorisée et développée

Leibniz est donc très enthousiaste quant à la capacité de son nouveau formalisme à abréger l'écriture de façon efficace. D'ailleurs, il l'indique dans le titre du manuscrit « Du calcul des interpolations et d'une expression générale remarquable des formules sans supprimer les factorisations et les développements » (« *De calculo interpolationum ; et mirabilia de generali expressione formularum sine sublatione involutionum et complicationum* »). Le principe de substitution des séries par des symboles permet donc à Leibniz d'avoir une écriture que est à la fois développée, puisqu'elle représente le contenu des premiers termes, et factorisée, puisque les termes suivants sont substitués par des symboles, si bien que le dernier symbole contient en lui tous les autres symboles et donc l'expression complète :

> *Et ainsi de suite, où l'on note qu'on peut comprendre uniquement par le dernier [symbole]* ☿ *la totalité d'une certaine formule, pour peu qu'elle soit entière, c'est-à-dire dont le dénominateur est l'unité.* [44]

Jusqu'ici, Leibniz a donc considéré des termes unitaires, c'est-à-dire dont le dénominateur est 1. Il fait alors un parallèle entre son écriture et l'abréviation des produits continus :

> *Le terme omis auquel nous sommes confrontés lorsque l'on multiplie diverses [formules] entre elles de proche en proche, il est cependant permis de l'oublier puisqu'en effet, il est permis de toujours mener la multiplication par cette opération. Et si on les divise, on peut toutes les réduire à un diviseur commun et ainsi nous pouvons exhiber n'importe quelle formule de n'importe quelle équation qu'elle soit rationnelle ou irrationnelle.* [45]

Cette abréviation se trouve dans la suite du *De cyclometria per intercalationes* (LH 35, 2, 1 Bl.68-69), rédigé également en mars 1679 et nous y reviendrons dans une prochaine section. Néanmoins, mentionnons que Leibniz y introduit une notation pour le produit factoriel :

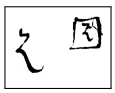
$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times z = z^z$$

42. LH 35, 5, 15 Bl.25-26, *De calculo interpolationum ; et mirabilia de generali expressione formularum sine sublatione involutionum et complicationum*, 20 Mars 1679 : « deleatur mox continetur in sequenti ⊃. Mirifica hinc compendia »

43. LH 35, 5, 15 Bl.25-26, *De calculo interpolationum ; et mirabilia de generali expressione formularum sine sublatione involutionum et complicationum*, 20 Mars 1679 : « imo et hoc deleatur mox etiam continetur in exemplis ipsius ♀ cum ex unica solum constat parte, et est $..h$ æqu. 1. »

44. LH 35, 5, 15 Bl.25-26, *De calculo interpolationum ; et mirabilia de generali expressione formularum sine sublatione involutionum et complicationum*, 20 Mars 1679 : « Et ita porro ubi nota posse per solum ultimum ☿ intelligi totam aliquam formulam quamcunque integram, seu cuius denominator unitas. »

45. LH 35, 5, 15 Bl.25-26, *De calculo interpolationum ; et mirabilia de generali expressione formularum sine sublatione involutionum et complicationum*, 20 Mars 1679 : « Hoc uno omisso quod oblati sumus quando diversæ ducuntur in se invicem, sed hoc oblivisci impune licet, semper enim licet multiplicationem perficere opere ipso, et si dividantur reducere omnia ad communem divisorem itaque hac expressione possumus exhibere formulam quamlibet cuiuslibet æquationis utcunque rationalis vel irrationalis. »



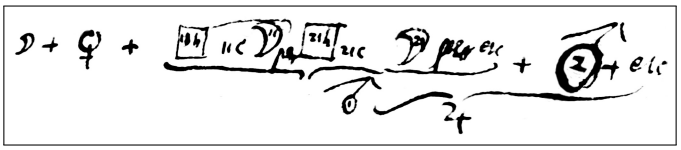
Manuscrits de Leibniz - LH 35, 2, 1 Bl.68-69

*Par l'exposant z il ne faut pas comprendre une puissance pure, mais une puissance variable, c'est-à-dire issues du produit des continus.* [46]

Pour Leibniz, ce sont les mêmes processus de contraction des caractères qui sont à l'œuvre dans cette notation de produit continu et dans son écriture de série. Il faut comprendre que la multiplication n'est pas déjà faite, mais reste encore à faire. De la même manière, le contenu du symbole ☿ ne représente pas seulement les termes qui s'y trouvent mais aussi les premiers termes de la série dont ils sont des répliques :

*Ainsi, de façon similaire, on obtient ici une formule certes plus prolixe si l'on pose que les multiplications et les divisions ne sont pas produites par cette opération mais doivent être produites ; mais plus utile lorsque par la suite on en vient aux particuliers. Ainsi écrirons-nous :* [47]

$$\overbrace{\mathfrak{D} + ♀ + \underbrace{\left([1.1]c\ \mathfrak{D}_{[1.1]}\right)^{[1.1]h}\ \text{par}\ \left([2.1]c\ \mathfrak{D}_{[2.1]}\right)^{[2.1]h}\ \text{par}\ \ldots + ♂_{[2]} + \ldots}_{♄}}^{♂_{[1]}}$$



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 5, 15 Bl.25-26

Cette deuxième expression montre que la composition ne doit pas être systématiquement comprise comme une somme mais également comme un produit. D'où les opérateurs de multiplication « par » (« *per* »).

*On fractionnera de la même manière et ♀ et ♄ ou une autre forme quelconque.* [48]

Pour Leibniz cette écriture permet donc de représenter à la fois les expressions rationnelles et irrationnelles. Elle est universelle. Développée, elle n'est absolument pas finie, comme il le souhaitait. Mais elle peut se contracter en un seul symbole au sein duquel se trouve, par définition, l'intégralité de l'algorithme qui permet de reconstruire la série à partir de ses éléments les plus simples :

*De la même manière, cette formule générale est plus prolixe que la formule générale où l'on enlève les irrationalités, même elle est ensuite plus utile, dans l'application aux particuliers, que l'expression où l'on enlève les rationels.* [49]

Autrement dit, développée et universelle, la formule est plus longue que la formule de Newton, mais factorisée pour les cas concrets, elle devient plus utile que celle de Wallis et de Mengoli.
Finalement, ce formalisme représente parfaitement l'approche combinatoire de Leibniz face à un problème. Il s'agit pour lui de mettre en place des outils qui permettent de décrire l'imbrication des relations entre les objets. Et ces relations sont la plupart du temps incarnée par l'inclusion ou la compréhension. C'est-à-dire que la structure émerge directement de la composition et de la façon dont les composés se composent à nouveau et deviennent des composants.

46. LH 35, 2, 1, Bl.68-69 - *De cyclometria per intercalationes, postea per polygona, ubi expressio per logarithmos. Et modus demonstrandi impossibilitatem Analyticam tentatus per series converg. Scheda I*, Mars 1679 : « Intelligendo per $z$ exponentem non potentiæ puræ sed affectæ seu ex productis continuorum. »

47. LH 35, 5, 15 Bl.25-26, *De calculo interpolationum ; et mirabilia de generali expressione formularum sine sublatione involutionum et complicationum*, 20 Mars 1679 : « Ita similiter hic prolixior quidem fiet formula si multiplicationes et divisiones non ponamus opere ipso factas sed faciendas ; at postea in specialibus utilior itaque scribemus [...]. »

48. LH 35, 5, 15 Bl.25-26, *De calculo interpolationum ; et mirabilia de generali expressione formularum sine sublatione involutionum et complicationum*, 20 Mars 1679 : « eodem modo fractabitur et ♀ et ♄ et qualibet alia forma. »

49. LH 35, 5, 15 Bl.25-26, *De calculo interpolationum ; et mirabilia de generali expressione formularum sine sublatione involutionum et complicationum*, 20 Mars 1679 : « Quemadmodum autem hæc formula generalis est prolixior quam formula generalis sublatis irrationalitatibus sed in applicatione ad particularia postea utilior quam expressio quæ sit sublatis rationalibus. »

## 9.3 Table et Formule universelle

Ainsi, nous avons montré à quel point Leibniz a reçu l'interpolation de la table de Wallis ou de Mengoli comme un l'objet idoine pour mêler les techniques tabulaires qu'il avait développées dans les premières années parisiennes, aux outils symboliques et formels qu'il souhaite ardemment construire à partir du milieu du séjour parisien. Pour finir sur ce sujet, il nous faut donner quelques développements au sujet de ce manuscrit, probablement bien plus tardif :

⋆ LH 35, 13, 3 Bl.258 - *Tabula Numerorum Arithmeticæ Replicationis seu Figuratorum interpolata*, non daté

Ce manuscrit n'est pas daté, et ne contient pas de références explicites qui assurerait au moins un *terminus a quo* indubitable. Cela étant, le contenu semble indiquer qu'il est postérieur aux travaux de mars 1679. Leibniz a indiqué dans le coin supérieur gauche de la feuille « *Scheda 2, Arithm. inf.* ». Ceci peut faire référence au *Demonstratio et amplificatio Arithmeticae infinitorum Wallisianae Scheda 2* (LH 35, 13, 1 Bl.175), qui est la seconde pièce d'un groupe de deux manuscrits rédigés en 1686 et consacrés précisément aux quadratures de Wallis :

⋆ LH 35, 13, 1 Bl.174 - *Pro Wallisianis quadraturis demonstrandis et amplificandis*, mars 1686

⋆ LH 35, 13, 1 Bl.175 - *Demonstratio et amplificatio Arithmeticae infinitorum Wallisianae Scheda 2*, mars 1686

Ces deux manuscrits sont étroitement reliés par leurs titres et par leurs dates. Dans le *Pro Wallisianis quadraturis demonstrandis et amplificandis* (LH 35, 13, 1 Bl.174), on trouve la note « *Scheda 1* », ce qui signifie qu'il doit être compris comme ce qui précède le *Demonstratio et amplificatio Arithmeticae infinitorum Wallisianae Scheda 2* (LH 35, 13, 1 Bl.175). On peut se demander pourquoi Leibniz a écrit une deuxième fois « *Scheda 2* » dans le *Tabula Numerorum Arithmeticæ Replicationis seu Figuratorum interpolata* (LH 35, 13, 3 Bl.258), au lieu de "*Scheda 3*". Il est donc également envisageable que cette référence « *Scheda 2* » ne désigne pas le *Demonstratio et amplificatio Arithmeticae infinitorum Wallisianae Scheda 2* (LH 35, 13, 1 Bl.175), mais évoque au contraire un autre manuscrit sur l'*Arithmetica Infinitorum* de Wallis, perdu ou non trouvé, qui serait la "*Scheda 1*" du *Tabula Numerorum Arithmeticæ Replicationis seu Figuratorum interpolata* (LH 35, 13, 3 Bl.258). Dès lors, nous ne disposons pas à ce stade d'éléments suffisants pour dater correctement ce manuscrit.

### 9.3.1 Formules générales

#### Une formule semblable à celle de Wallis

Dans le *Tabula Numerorum Arithmeticæ Replicationis seu Figuratorum interpolata* (LH 35, 13, 3 Bl.258), Leibniz présente tout d'abord une formule explicite des quadratures de Wallis :

> $\int \left(1 - x^{\frac{2}{p}}\right)^{n=\frac{m}{2}} dx$ *d'où l'on considère que dans* $\int \left(x^{\frac{w}{p}} - x^{\frac{w}{p}+\frac{h}{p}}\right)^{n}$, *on a* $w = 0$, $h = 2$, $n = \frac{m}{2}$. *Et à partir de la règle générale que j'avais trouvée, selon laquelle cette somme vaut, dans le cas de la totalité depuis* $x = 0$ *jusqu'à* $x = 1$ *:*
> - $\frac{p.nh.(n-1)h.(n-2)h...(n-(n-1))h}{(p+nw+nh)(p+nw+(n-1)h)(p+nw+(n-2)h)(p+nw+(n-3)h)...(p+nw+(n-n)h)}$ -
> *soit :*
> - $\frac{p.m(m-2)(m-4)(m-6)...2}{(p+m)(p+m-2)(p+m-4)(p+m-6)(p+m-8)...(p+0)}$ - [50]

50. LH 35, 13, 3 Bl.258 - *Tabula Numerorum Arithmeticæ Replicationis seu Figuratorum interpolata*, non daté : « $\int, dx \left(1 - x^{\overset{2:p}{\cdot\cdot}}\right)^{\overset{n=m:2}{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}}$ unde in $\int, dx \left(x^{\overset{w:p}{\cdot\cdot}} - x^{\overset{(w:p)+(h:p)}{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}}\right)^{\overset{n}{\cdot}}$, sit $w = 0$, $h = 2$, $n = m : 2$.
Et ex canone generali a me invento, quo summa hæc in casu totali ab $x = 0$ ad $x = 1$ est $\frac{p,nh,(n-1)h,(n-2)h, \text{ etc usque ad } (n-(n-1))h}{p+nw+nh,p+nw+(n-1)h,p+nw+(n-2)h,p+nw+(n-3)h, \text{ etc. usque ad } (n-n)h}$ sit $\frac{p,m,m-2,m-4,m-6, \text{ etc usque ad } 2}{p+m,p+m-2,p+m-4,p+m-6,p+m-8 \text{ etc. usque ad } p+0}$ »- *Nota Bene* : Pour le dernier facteur du dénominateur de la fraction $\frac{p,nh,(n-1)h,(n-2)h, \text{ etc usque ad } (n-(n-1))h}{p+nw+nh,p+nw+(n-1)h,p+nw+(n-2)h,p+nw+(n-3)h, \text{ etc. usque ad } (n-n)h}$, Leibniz a écrit "$(n-n)h$" au lieu de "$(p+nw+(n-n)h)$". Nous avons corrigé cela dans la traduction.

De fait, comme nous l'avons vu, Wallis traite des intégrales de la forme :

$$\int_0^1 \left(1 - x^{\frac{1}{q}}\right)^n dx = \frac{1}{\binom{q+n}{n}}$$

Mais, après interpolation, $q$ et $n$ ne sont plus des entiers mais des multiples de $\frac{1}{2}$. Ainsi, on peut écrire $q = \frac{p}{2}$ et $n = \frac{m}{2}$ avec $p$ et $m$ des entiers. Ainsi on obtient précisément la formule que donne Leibniz :

$$\int_0^1 \left(1 - x^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{m}{2}} dx$$

Nous avions montré que Wallis tire sa formule de l'expression suivante, qu'il a déterminé empiriquement à partir de première valeurs de $q$ et de $n$ :

$$\int_0^1 (1 - x^q)^n \, dx = \frac{q \times 2q \times \cdots \times nq}{1 \times (q+1) \times (2q+1) \times \cdots \times (nq+1)}$$

Ici, Leibniz part, quant à lui, de la formule générale suivante, qu'il affirme avoir découvert dans le passé, « la règle générale que j'ai trouvée » (« *canone generali a me invento* »), ce qui pourrait plaider en faveur de l'existence d'une "*Scheda 1*" perdue, ou non trouvée :

$$\int_0^1 \left(x^{\frac{w}{p}} - x^{\frac{w}{p}+\frac{h}{p}}\right)^n dx = \frac{p.nh.(n-1)h.(n-2)h \ldots (n-(n-1))h}{(p+nw+nh)(p+nw+(n-1)h) \ldots (p+nw+(n-n)h)}$$

Il n'y a pas d'indication sur la démonstration de cette formule.

**Explication par les Triangles de différences**

Néanmoins, en divisant le numérateur et le dénominateur par $p^{n+1}$, on constate que la formule de Wallis constitue bien un cas particulier de celle-ci, avec $w = 0$ et $\frac{h}{p} = q$ :

$$\int_0^1 \left(x^{\frac{w}{p}} - x^{\frac{w}{p}+\frac{h}{p}}\right)^n dx = \frac{\frac{h}{p} \times 2\frac{h}{p} \times \cdots \times n\frac{h}{p}}{\left(n\frac{w}{p}+1\right) \times \left(n\frac{w}{p}+\frac{h}{p}+1\right) \times \left(n\frac{w}{p}+2\frac{h}{p}+1\right) \times \cdots \times \left(n\frac{w}{p}+n\frac{h}{p}+1\right)}$$

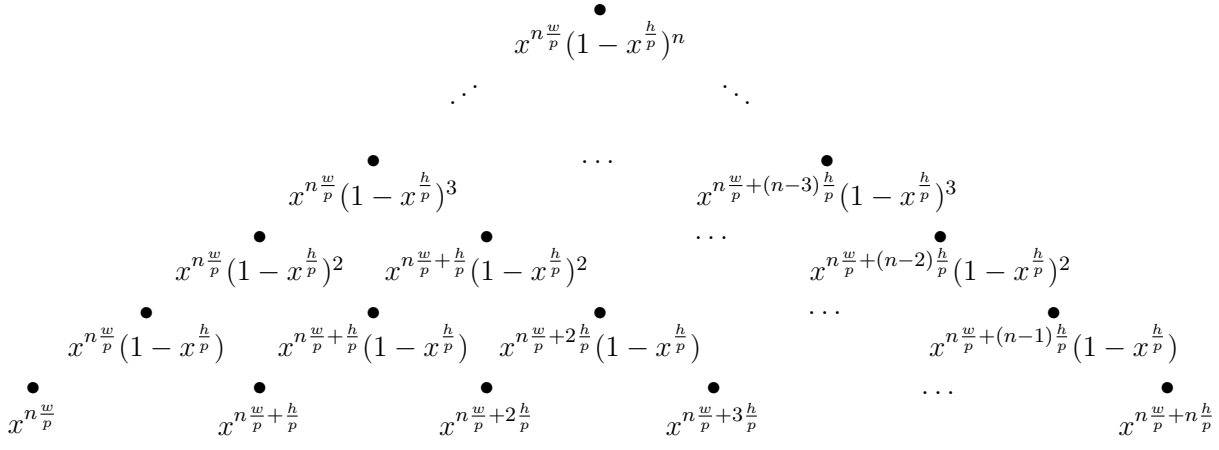
Or, nous avions montré qu'on peut expliquer cette formule par la méthode des triangles de différences. En effet, si l'on pose :

$$f(x) = \left(x^{\frac{w}{p}} - x^{\frac{w}{p}+\frac{h}{p}}\right)^n = x^{n\frac{w}{p}} \left(1 - x^{\frac{h}{p}}\right)^n$$

Alors, on peut considérer que la quantité $f(x)$ est la $n$-ième différence de la suite géométrique finie de $n+1$ termes :

$$x^{n\frac{w}{p}} \; ; \; x^{n\frac{w}{p}+\frac{h}{p}} \; ; \; x^{n\frac{w}{p}+2\frac{h}{p}} \; ; \; \ldots \; ; x^{n\frac{w}{p}+n\frac{h}{p}}$$

Comme on l'illustre par ce diagramme :



Ceci reste donc vrai pour les quadratures. Dès lors, si l'on considère la quadrature énoncée par Leibniz :

$$\int_0^1 \left(x^{\frac{w}{p}} - x^{\frac{w}{p}+\frac{h}{p}}\right)^n dx$$

On en déduit qu'elle est aussi la $n$-ième différence de la suite finie de $n+1$ termes suivants :

$$\int_0^1 x^{n\frac{w}{p}} dx \ ; \ \int_0^1 x^{n\frac{w}{p}+\frac{h}{p}} dx \ ; \ \int_0^1 x^{n\frac{w}{p}+2\frac{h}{p}} dx \ ; \ \dots \ ; \int_0^1 x^{n\frac{w}{p}+n\frac{h}{p}} dx$$

Or ces quadratures sont connues, car ce sont des puissances simples :

$$\int_0^1 x^{n\frac{w}{p}+k.\frac{h}{p}} dx = \frac{1}{n\frac{w}{p}+k.\frac{h}{p}+1}$$

Dès lors, en calculant la $n$-ième différence de la suite :

$$\frac{1}{n\frac{w}{p}+1} \ ; \ \frac{1}{n\frac{w}{p}+\frac{h}{p}+1} \ ; \ \frac{1}{n\frac{w}{p}+2\frac{h}{p}+1} \ ; \ \dots \ ; \frac{1}{n\frac{w}{p}+n\frac{h}{p}+1}$$

On retrouve bien la formule donnée par Leibniz :

$$\frac{\frac{h}{p} \times 2\frac{h}{p} \times \cdots \times n\frac{h}{p}}{\left(n\frac{w}{p}+1\right) \times \left(n\frac{w}{p}+\frac{h}{p}+1\right) \times \left(n\frac{w}{p}+2\frac{h}{p}+1\right) \times \cdots \times \left(n\frac{w}{p}+n\frac{h}{p}+1\right)}$$

Cette démonstration est certes une reconstruction anachronique *a posteriori*. Mais elle permet d'éclairer la façon dont Leibniz considère cette formule.

### 9.3.2 Construction de la formule générale

Pour cela, il nous faut recourir à un autre manuscrit, lui aussi non daté, le LH 35, 14, 2, Bl.65-70. Le catalogue suppose qu'il est postérieur à 1693. Cette hypothèse se fonde sur de nombreuses références aux œuvres de Wallis parus dans une édition latine en 1693. Dès lors, deux options raisonnable se présentent. Ou bien ce manuscrit est antérieur au *Tabula Numerorum Arithmeticæ Replicationis seu Figuratorum interpolata* (LH 35, 13, 3 Bl.258), ce qui est cohérent avec le contenu de ce dernier qui y est plus avancé. Dans ce cas, le manuscrit LH 35, 14, 2, Bl.65-70 pourrait être l'éventuel "*Scheda 1*" qui nous pensions perdu ou non trouvé. Cependant, cette mention ne s'y trouve pas et ce manuscrit traite de nombreux sujets et non de la seule interpolation. Ainsi, le manuscrit pourrait très bien être antérieur tout en n'étant pas le "*Scheda 1*", qui serait alors bel et bien perdu ou non trouvé. Ou bien, ce manuscrit est postérieur au *Tabula Numerorum Arithmeticæ Replicationis seu Figuratorum interpolata* (LH 35, 13, 3 Bl.258). Cela n'est pas conforme au contenu, mais absolument pas contradcitoire, puisque Leibniz a très bien pu, comme il le dit lui-même, oublier ses progrès passés et reprendre une question à zéro, plutôt que de chercher ses anciens brouillons qui lui sont parfois difficile d'accès. Dans ce cas, la première hypothèse serait possible, à savoir que la référence « *Scheda 2* »dans le *Tabula Numerorum Arithmeticæ Replicationis seu Figuratorum interpolata* (LH 35, 13, 3 Bl.258) désigne en fait le *Demonstratio et amplificatio Arithmeticae infinitorum Wallisianae Scheda 2* (LH 35, 13, 1 Bl.175), ce qui plaiderait en faveur d'une datation commune, à savoir 1686. Pour résumer, les éléments que nous allons tirer du manuscrit LH 35, 14, 2, Bl.65-70 et qui éclairent remarquablement le contenu du *Tabula Numerorum Arithmeticæ Replicationis seu Figuratorum interpolata* (LH 35, 13, 3 Bl.258) sont postérieurs à 1693. Ou bien nous considérons qu'ils sont antérieurs au manuscrit qui nous intéresse, et alors nous pouvons établir un lien génétique entre les deux pièces, mais cela signifie que le *Tabula Numerorum Arithmeticæ Replicationis seu Figuratorum interpolata* (LH 35, 13, 3 Bl.258) est très tardif. Ou bien nous pouvons estimer qu'il est relié aux manuscrits de 1686, ce qui le rend moins tardif, mais rompt le lien d'antériorité avec les éléments que nous allons exposer à présent. Peu importe le choix que l'on prenne, il reste très fragile. En effet, nous ne disposons clairement pas de suffisamment d'indices pour obtenir une datation fiable.

**Lien avec les différences**

Il semble que Leibniz construit sa formule générale pour les quadratures de Wallis dans ce manuscrit, à savoir le LH 35, 14, 2, Bl.65-70. Une fois de plus, il s'appuie pour cela sur cette formule, issues du triangle harmonique :

$$\binom{n}{0}.\frac{1}{1}-\binom{n}{1}.\frac{1}{2}+\binom{n}{2}.\frac{1}{3}-\binom{n}{3}.\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}.\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

Leibniz n'évoque pas ici le triangle et ne parvient pas à démontrer cette formule :

*Ce sont de beaux théorèmes mais difficiles à démontrer.* [51]

Or, comme nous l'avons vu, Leibniz possède les outils conceptuels pour expliquer cette formule qui n'est rien d'autre que la conséquence de la symétrie du triangle harmonique. En effet, la formule détermine la $n$-ième différence de la suite finie des $n+1$ premiers termes de la progression harmonique. Or le triangle harmonique, qui est un triangle de différences, montre que ces différences successives forment à nouveau la progression harmonique. En s'aidant des formules de Wallis, Leibniz donne quant à lui cette explication :

$$\begin{aligned}\binom{n}{0}.\frac{1}{1}-\binom{n}{1}.\frac{1}{2}+\binom{n}{2}.\frac{1}{3}-\binom{n}{3}.\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}.\frac{1}{n+1} &= \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}\cdots\frac{n}{n+1}\\ &= \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Cette formule, il la généralise à une progression harmonique de raison quelconque :

$\frac{1}{1}-\frac{e}{(1+n).1}+\frac{e(e-1)}{(1+2n).1.2}-\frac{e)(e-1)(e-2)}{(1+3n).1.2.3}\cdots=\frac{n^e.1.2.3...e}{(1+1n)(1+2n)(1+3n)...(1+en)}=\int_0^1(1-x^n)^e dx$ [52]

Cette généralisation est donc purement inductive, à l'image de ce que fait Wallis, mais contrairement à ce dernier, Leibniz propose ici un formalisme pour les formules générales et ne se contente pas de représenter la règle par les premiers cas. Il considère alors, comme Wallis, le cas où l'on considère l'exposant $n$ comme fractionnaire :

*Donc si* $n=\frac{1}{m}$ *avec* $m$ *entier, alors* $=\frac{1.2.3...e}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+e)}$ [53]

Ainsi, Leibniz obtient la formule des inverses des coefficients binomiaux par un raisonnement purement formel, là où Wallis s'étonnait de leur apparition, en testant les premiers cas.

*Ici* $\int_0^1\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)^e dx=\frac{1.2.3...e}{3.4.5...(2+e)}$.
*Si* $e=1\,;\,2\,;\,3\,\ldots$, *on a* $\frac{2}{2.3}\,;\,\frac{2}{2.3}\,;\,\frac{2}{2.3}\,\ldots$ *qui sont les inverses des triangulaires.* [54]

Leibniz revient alors aux exposants entiers, et donne la généralisation suivante :

*Donc, de manière générale* $\int_0^1(x^r-x^n)^e dx=\frac{1}{re+1}-\frac{e}{(r(e-1)+1.n+1).1}+\frac{e(e-1)}{(r(e-2)+2n+1).1.2}-\frac{e(e-1)(e-2)}{(r(e-3)+3n+1).1.2.3}\cdots=\frac{(1.2.3...e)(n-r)^e}{(re+1)(re+1+1.(n-r))(re+1+2(n-r)...(re+1+e(n-r))}$ [55]

---

51. LH 35, 14, 2, Bl.65-70 - Sans titre, non daté - Bl.68-69 : « quæ sunt pulchra theoremata sed demonstrata difficilia »
52. LH 35, 14, 2, Bl.65-70 - Sans titre, non daté - Bl.68-69 : « $\frac{1}{1}-\frac{e}{1+n;1}+\frac{e.e-1}{1+2n;1.2}-\frac{e.e-1.e-2}{1+3n;1.2.3}$ etc. $=\frac{n^e,1.2.3 \text{ usque ad } e}{1+1n,1+2n,1+3n \text{ usque ad } 1+en}=\int_{\text{usque ad } x=1}\overline{\overline{1-x^n}^e dx}$ »
53. LH 35, 14, 2, Bl.65-70 - Sans titre, non daté - Bl.68-69 : « Ergo si $n=1$ : $m$ posito $m$ integro $=\frac{1.2.3 \text{ usque ad } e}{m+1,m+2,m+3 \text{usque ad} m+e}$ »
54. LH 35, 14, 2, Bl.65-70 - Sans titre, non daté - Bl.68-69 : « Hinc $\int_{\text{usque ad } x=1}\overline{\overline{1-x^{1.2}}^e dx}=\frac{1.2.3 \text{ usque ad } e}{3,4,5 \text{ usque ad } 2+e}$. Si $e=1\,;\,2\,;\,3$, etc. fit $\frac{2}{2.3}\,;\,\frac{2}{2.3}\,;\,\frac{2}{2.3}$ etc. qui sunt reciproci triangularum. »
55. LH 35, 14, 2, Bl.65-70 - Sans titre, non daté - Bl.68-69 : « Ergo generaliter $\int_{\text{usque ad } x=1}\overline{\overline{x^r-x^n}^e dx}=\frac{1.x^{re+1}}{re+1}-\frac{e.x^{\overline{r(e-1)+1n+1}}}{\overline{re-1}+1n+1;1}+\frac{e.e-1.x^{\overline{r(e-2)+2n+1}}}{\overline{re-2}+2n+1;1.2}-\frac{e.e-2.e-3.x^{\overline{r.(e-3)+3n+1}}}{\overline{re-3}+3n+1;1.2.3}$ etc $=\frac{1.2.3 \text{ usque ad } e, \text{ in } \overline{\overline{n-r}^e} \text{ cum } x=1}{re+1,re+1+1\overline{n-r},re+1+2\overline{n-r} \text{ usque ad } re+1+e\overline{n-r}}$. »- *Nota Bene* : Leibniz écrit le développement du milieu pour $x$ quelconque alors que les termes extrêmes sont exprimés explicitement pour $x=1$. Nous avons donc remplacé $x$ par 1 dans la traduction. De plus, au numérateur du quatrième terme de la série, Leibniz écrit "$e.e-2.e-3$" au lieu de "$e.e-1.e-2$". Nous avons corrigé cela dans la traduction.

Mais, ici, il est seulement nécessaire que $e$ soit un entier, puisqu'il y a exactement $e+1$ termes dans la séries. En revanche, $r$ et $n$ peuvent être des exposants quelconques :

> *Mais ici, on exprime en une seule chose ce que contiennent toutes les premières tables de Wallis, en ayant accompli des interpolations. Et peu importe pour les deux $n$ et $r$ qu'ils soient entiers, fractionnaires ou irrationnels, à condition que $e$ soit un entier. Et on doit encore poursuivre vers la somme de la série par produits continus avec $e = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire pour les interpolations où l'on doit finalement chercher de façon générale.* [56]

Leibniz ne considère donc pas directement l'argument des différences finies pour justifier sa formule, et elle reste encore largement inductive. Néanmoins, on constate que Leibniz la voit bien comme la contraction de la série finie issue de la formule de Newton. Les facteurs du dénominateur sont bien issus des quadratures des puissances simples.

### Produits finis et produits infinis

Ainsi, si la fraction abrégée est finie lorsque le développement de Newton est fini, elle devrait en toute logique être infinie lorsque l'exposant $e$ n'est pas entier et que le développement de Newton se poursuit à l'infini. Pour rappel le developpement de Newton correspond à la formule suivante :

$$(1+Q)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n}x + \frac{m(m-n)}{(1.2)n^2}x^2 + \frac{m(m-n)(m-2n)}{(1.2.3)n^3}x^3 + \dots$$

Lorsque $\frac{m}{n}$ n'est pas un entier, les numérateurs ne s'annulent jamais et la série se poursuit à l'infini. Leibniz note très tôt cette propriété, dès qu'il prend connaissance de l'*Epistola Prior* (A III, 1, N.88) :

> *Le numérateur divisé par $m$ serait la formule qui sert pour l'équation dont les racines sont en progression arithmétique, ayant posé $m$ comme inconnue et $n$, $1n$, $2n$ etc. comme les vraies racines. A partir de là, on établira aisément la table pour cette série qu'on doit poursuivre jusqu'à l'infini.* [57]

En interprétant les numérateurs des coefficients comme des équations algébriques factorisées, c'est-à-dire des expressions dont on connait explicitement les racines, Leibniz montre que cette formule exprime en elle-même les conditions d'annulation de ses propres coefficients. Ainsi, on peut lire dans la formule les conditions nécessaires et suffisantes pour que la série soit finie ou infinie :

> *Si $m = n$ et si tant $m$ que $n$ est entier, la série n'ira pas jusqu'à l'infini mais un certain terme sera $= 0$, et pour cette raison, tous les suivants également.* [58]

Ainsi la formule de Newton est une expression purement formelle qui exprime à la fois une série finie, si l'exposant est un entier, et une série infinie si l'exposant n'est pas entier. Dans le manuscrit LH 35, 14, 2, Bl.68-69, Leibniz souhaite trouver pour la fraction abrégée une formule qui ait également cette propriété, à savoir qui change de cardinalité en fonction de la nature de l'exposant $e$ :

> *Tentative pour trouver une série qui exprime les produits des continus* $1.2.3.4\dots e$*, si $e$ est un nombre entier, mais qui se transforme en une infinité de termes si $e$ est un rompu ou un sourd.* [59]

Comme Leibniz observe cette propriété dans la série issue des développement de Newton, il cherche à construire sa formule à partir de celle-ci.
Ainsi il tente de transformer pas-à-pas les premiers termes de la série de Newton en produit continu. Cette transformation est réalisée par des équations entre plusieurs formes distinctes. Leibniz tente de

56. LH 35, 14, 2, Bl.65-70 - Sans titre, non daté - Bl.68-69 : « Atque in hoc uno oratur priora omnesque Tabulæ Wallisianæ executis interpolationibus continentur. Nec refet utrum $r$ et $n$ integri, fracti, an irrationales. Modo $e$ sit rationalsi integer. Pergendum jam ad summam seriei per continue ductos, cum $e = 1 : 2$ seu pro interpolationibus ubi tandem quærendum generale. »

57. A III, 1, N.88, Lettre de Newton à Oldenburg pour Leibniz et Tschirnhaus du 13 Juin 1676 (Nr.6 du groupe de lettres envoyées par Oldenburg à la fin Août 1676) - p.555 : « Numerator per $m$ divisus foret formula serviens pro æquatione, cujus radices progressionis arithmeticæ, posita $m$ pro incognita et $n$, $1n$, $2n$ etc. pro radicibus veris. Hinc facile condetur tabula pro continuanda hac serie in infinitum. »

58. A III, 1, N.88, Lettre de Newton à Oldenburg pour Leibniz et Tschirnhaus du 13 Juin 1676 (Nr.6 du groupe de lettres envoyées par Oldenburg à la fin Août 1676) - p.555-556 : « Si $m \sqcap n$ et tam $m$ quam $n$ integer, series non ibit in infinitum, sed aliquis terminus fiet $\sqcap 0$, adeoque omnes quoque sequentes. »

59. LH 35, 14, 2, Bl.65-70 - Sans titre, non daté - Bl.68-69 : « Tentamentum ut inveniatur series quæ exprimat factum continuorum 1.2.3.4.5 etc. usque ad $e$, si $e$ si numerus integer ; sed abeat in terminos infinitos si $e$ si fractus vel surdus. »

comprendre par quelles opérations la forme développée peut être modifiées pour devenir le forme factorisée :

$\frac{be}{1} + \frac{c.e.(e-1)}{fe+h} = e(e-1)$ [60]

*A nouveau* $\frac{be}{1} + \frac{c.e(e-1)}{fe+h} + \frac{(c)e(e-1)}{(f)(e-1)+1} = e(e-1) + \frac{(c)e(e-1)}{(f)(e-1)+1} = e(e-1)(e-2)$ [61]

Il souhaite adopter une démarche récursive. Il est donc nécessaire que la deuxième équation ait une forme similaire à la première :

> *Mais ainsi je vois qu'on n'observe pas suffisamment d'uniformité dans la progression. De fait, on devrait avoir* $(b)e(e-1)$ *comme au départ* $be$. [62]

Mais il tombe sur une autre difficulté, à savoir que le degré de l'équation, la variable étant $e$, n'est pas le même de part et d'autre de l'équation. Ainsi, en résolvant l'équation, on obtient :

$$b.e + c.\frac{1}{fe+h}e(e-1) = (b)e(e-1)$$

$$\Updownarrow$$

$$(b)fe^3 + (bf + c + (b)h - (b)f)e^2 + (c - bh - (b)h)e = 0$$

Donc $(b) = 0$ ou $f = 0$, ce qui ne convient pas aux objectifs de Leibniz. Une erreur de calcul lui fait manquer ce problème, mais il finit pas en tenir compte :

> *Et je vois même vers quoi mène cette erreur* $bfee$, *que l'on n'a élevé nulle part.* [63]

Finalement Leibniz parvient à ce système d'équation :

- $b_1.e + c_1.\frac{1}{f_1e+h_1}e(e-1)(e-2) = b_2.e(e-1)$
- $b_2.e(e-1) + c_2.\frac{1}{f_2e+h_2}e(e-1)(e-2)(e-3) = b_2.e(e-1)(e-2)$
- $b_3.e(e-1)(e-2) + c_3.\frac{1}{f_3e+h_3}e(e-1)(e-2)(e-3)(e-4) = b_3.e(e-1)(e-2)(e-3)$

  $\vdots$
- $b_n.e(e-1)\dots(e+(n-1)) + c_n.\frac{1}{f_ne+h_n}e(e-1)\dots(e-(n+1)) = b_{n+1}.e(e-1)\dots(e-n)$

Il résout la première équation :

$$b_1.e + c_1.\frac{1}{f_1e+h_1}e(e-1)(e-2) = b_2.e(e-1)$$

Il obtient $h_1 = -f_1$, $b_2 = b_1$ et $c_1 = f_1b_1$ :

> *C'est-à-dire* $h = -f$ *et* $(b) = b$ *et* $c = fb$ *et on obtient en fin de compte* $\not be + \frac{\not be(e-1)(e-2)}{e-1} = \not be(e-1)$, *ce qui est vrai.* [64]

Il vérifie pour la deuxième équation et déduit très vite l'identité suivante :

$$e(e-1)\dots(e+(n-1)) + \frac{e(e-1)\dots(e-(n+1))}{e-n} = e(e-1)\dots(e-n)$$

Leibniz ne le note pas, mais cette relation est une relation récursive qui fait un grand écho au formalisme qu'il avait construit en 1679 dans le *De calculo interpolationum* (LH 35, 5, 15 Bl.25-26). En effet, dans

60. LH 35, 14, 2, Bl.65-70 - Sans titre, non daté - Bl.68-69 : « $\frac{be}{1} + \frac{c.e.e-1}{fe+h} = e.e-1$ »

61. LH 35, 14, 2, Bl.65-70 - Sans titre, non daté - Bl.68-69 : « Rursus $\frac{be}{1} + \frac{c.e.e-1}{fe+h} + \frac{(c)e.e-1}{(f)(e-1)+1} = e.e-1 + \frac{(c)e.e-1}{(f)(e-1)+1} = e.e-1.e-2$ »

62. LH 35, 14, 2, Bl.65-70 - Sans titre, non daté - Bl.68-69 : « Sed ita video non satis observari unifomitatem progressum nam deberet esse $(b)e.e-1$, ut initio $be$. »

63. LH 35, 14, 2, Bl.65-70 - Sans titre, non daté - Bl.68-69 : « imo jam video in quo erratum prodit $bfee$, quod nusquam tollitur »

64. LH 35, 14, 2, Bl.65-70 - Sans titre, non daté - Bl.68-69 : « Seu $h = -f$ et $(b) = b$ et $c = fb$ et sit denique $\not be + \frac{\not b.e.e-1.e-2}{e-1} = \not be.e-1$ quod verum est. »

une relation récusrive du type $a_{n+1} = a_n + b_n$ le premier terme du membre de droite est le membre de gauche de l'équation de rang précédent. Ainsi, on obtient que

$$a_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3} + \dots$$

Le raisonnement récursif de Leibniz est parfaitement adapté à la métamorphose d'une expression en série. Ainsi :

> *Donc finalement, de façon générale :*
> - $\frac{e}{1} + \frac{e(e-1)(e-2)}{e-1} + \frac{e(e-1)(e-2)(e-3)}{e-2} + \frac{e(e-1)(e-2)(e-3)(e-4)}{e-3} = e(e-1)(e-2)(e-3)$ -[65]

On a donc :

$$\underbrace{\underbrace{e + \frac{e(e-1)(e-2)}{e-1}}_{=e(e-1)} + \frac{e(e-1)(e-2)(e-3)}{e-2}}_{=e(e-1)(e-2)} + \frac{e(e-1)(e-2)(e-3)(e-4)}{e-3} = e(e-1)(e-2)(e-3)$$

Ainsi, Leibniz a obtenu un lien entre produit et série. Ce lien est récursif, ce qui s'explique par le fait que ces produits sont obtenus à partir de différences successives. Mais le produit qu'il obtient diverge lorsqu'il est infini. Il est donc nécessaire, lorsque le produit devient infini, qu'il soit compensé en le divisant par une autre produit infini, qui annule tous les facteurs à partir d'un certain rang :

> *Laquelle série est telle que lorsque e est un entier, elle se transforme en produit fini des continus. Mais si en revanche e n'est pas entier, alors cette série peut se poursuivre jusqu'à l'infini. On demande alors si elle serait l'égal d'une quantité finie, ce que je ne pense pas, néanmoins cela ne semble pas nécessaire lorsque, de deux séries de ce genre, l'une divise l'autre.*[66]

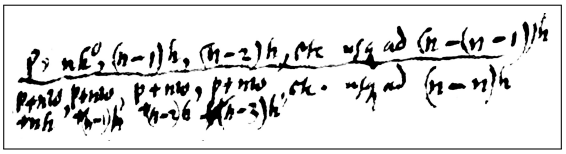
### 9.3.3 Réforme de la règle

#### Retour à la formule générale

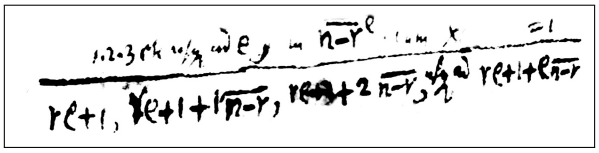
Dès lors, dans le *Tabula Numerorum Arithmeticæ Replicationis seu Figuratorum interpolata* (LH 35, 13, 3 Bl.258), Leibniz considère la possibilité de généraliser sa formule générale aux exposants non entiers, en supposant simplement que le produit se poursuit jusqu'à l'infini :

$$\int_0^1 (x^r - x^n)^e dx = \frac{e(n-r).(e-1)(n-r).(e-2)(n-r)\dots}{(re+1e(n-r)).(re+1+(e-1)(n-r)).(re+1+(e-2)(n-r))\dots}$$

Cela correspond, en quelque sorte à mettre l'infinité des termes de la série de Newton sous un même dénominateur. La nécessité de poursuivre le produit à l'infini implique d'écrire les facteurs dans l'ordre décroissant et non dans l'ordre croissant comme l'a fait Leibniz dans le manuscrit LH 35, 14, 2, Bl.68-69. Ceci explique pourquoi Leibniz a renversé l'ordre des facteurs dans la formule générale :



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 13, 3 Bl.258



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 14, 2, Bl.68-69

Rappelons la formule donnée par Leibniz :

$$\int_0^1 (1 - x^{\frac{2}{p}})^{n=\frac{m}{2}} dx = \frac{p.m(m-2)(m-4)(m-6)\dots 2}{(p+m)(p+m-2)(p+m-4)(p+m-6)(p+m-8)\dots(p+0)}$$

65. LH 35, 14, 2, Bl.65-70 - Sans titre, non daté - Bl.68-69 : « Ergo tandem generaliter $\frac{e}{1} + \frac{e.e-1.e-2}{e-1} + \frac{e.e-1.e-2.e-3}{e-2} + \frac{e.e-1.e-2.e-3.e-4}{e-3} = e.e-1.e-2.e-3$ »

66. LH 35, 14, 2, Bl.65-70 - Sans titre, non daté - Bl.68-69 : « Quæ est series quæ tunc cum $e$ est integer abit in productum continuorum finitorum ; sin $e$ non sit integer, tunc series ipsa in infinitim continuari possit, sed quæritur an tunc quantitati finitæ æquetur, quod non puto, sed non videtur necesse ubi duarum serierum huiusmodi una alteram dividit. »

Dans cette écriture, le produit continu du numérateur aboutit à 2. Or les facteurs sont en progression arithmétique de raison 2, ils ont donc tous la même parité. Ainsi, cette écriture présuppose que $m$ est pair et donc que $n$ est un entier :

> *Ainsi, on épuise aussi bien le numérateur que le dénominateur si $m$ est pair, c'est-à-dire, si $n$ est un entier.* [67]

Ainsi, si $n$ n'est pas un entier, nous avons le produit continu suivant :

$$\frac{p.m(m-2)(m-4)(m-6)\dots}{(p+m)(p+m-2)(p+m-4)(p+m-6)(p+m-8)\dots}$$

A première vue, cette écriture ne peut pas se comprendre en dehors de son lien avec le développement du binôme de Newton. Par ailleurs, Leibniz n'écrit jamais un tel produit infini pour le cas général. Ces formules que nous avons exposées plus haut sont rédigées pour le cas où $n$ est un entier, avec exactement $n+1$ facteurs au dénominateur. En revanche, Leibniz tente d'écrire le produit infini pour des cas particuliers, afin de tester s'il existe des cas où les facteurs du numérateur et du dénominateur se simplifieraient à l'infini. En réalité, il sait très bien qu'il existe de tels cas, ce sont les cas où $p$ est pair. En effet, la table de Wallis indique que les quadratures sont rationnelles dans ces cas, malgré le fait que $n$ n'est pas un entier. Pour rappel, les quadratures sont transcendantes dans les seuls cas où $p$ et $m$ sont tous les deux impairs.

### Deux méthodes incompatibles

Leibniz écrit le produit infini pour le cas où $p=6$ et $m=1$ :

> *Posons déjà que p est pair, c'est-à-dire divisible par h, donc ici 2 alors une infinité de facteurs dans le numérateur se compensent avec une infinité de facteurs dans le dénominateur. Est-ce qu'ils se compenseront ainsi de sorte que l'infini s'évanouisse ? Voyons par exemple si $p=6$ et $m=1$, alors on a :*
> - $\frac{6.1.-1.-3.-5.-7.-9.-11.-1.,-15\dots}{7.5.3.1.-1.-3.-5.-7.-9.-11.-13.-15\dots}$ -
> *Est-ce qu'on a donc $=\frac{6}{7.5.3}=\frac{2}{5.7}$ mais la table donne $\frac{1}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\over 1.2.3}=\frac{8.1.2.3}{3.5.7}=\frac{16}{5.7}$.* [68]

Leibniz repère donc une incohérence entre sa formule par produit infini et ce que donne la méthode d'interpolation de Wallis. Il constate que la différence entre les deux résultats est un facteur 8, c'est-à-dire $2^3$, ou encore autant de facteurs $h=2$ qu'il y a de facteurs impairs dans le dénominateur :

> *Il semble que 8.2 (c'est-à-dire 16) provient du nombre de h, c'est-à-dire de 2, non neutralisés dans le numérateur, autant qu'on compte de nombres dans ce même dénominateur, ce qui peut être montré en rétablissant h, c'est-à-dire 2 :*
> - $\frac{6.\frac{1}{2}2.(\frac{1}{2}-1)2.(\frac{1}{2}-2)2.(\frac{1}{2}-3)2.(\frac{1}{2}-4)2.(\frac{1}{2}-5)2\dots}{(3+\frac{1}{2})2.(2+\frac{1}{2})2.(1+\frac{1}{2})2.(\frac{1}{2})2.(-1+\frac{1}{2})2.(-2+\frac{1}{2})2.(-3+\frac{1}{2})2\dots}$ - [69]

Mais cette réécriture du produit infini n'explique en réalité pas du tout l'origine du facteur 8, puisque la réécriture ne change rien au résultat obtenu. Leibniz tente un autre exemple, et tombe sur une différence d'une factorielle, ce qui est encore moins explicable :

> *Une autre exemple : soit $p=8$ et $n=\frac{3}{2}$, alors à partir de la règle, on produira :*
> - $\frac{8.\frac{3}{2}2.(\frac{3}{2}-1)2.(\frac{3}{2}-2)2.(\frac{3}{2}-3)2.(\frac{3}{2}-4)2.(\frac{3}{2}-5)2\dots}{(4+\frac{3}{2})2.(3+\frac{3}{2})2.(2+\frac{3}{2})2.(1+\frac{3}{2})2.(\frac{3}{2})2.(-1+\frac{3}{2})2.(-2+\frac{3}{2})2\dots}=\frac{8}{11.9.7.5}$ -

67. LH 35, 13, 3 Bl.258 - *Tabula Numerorum Arithmeticæ Replicationis seu Figuratorum interpolata*, non daté : « Ita tam numerator quam denominator exhaurietur si $m$ sit par, seu si $n$ sit integer. »

68. LH 35, 13, 3 Bl.258 - *Tabula Numerorum Arithmeticæ Replicationis seu Figuratorum interpolata*, non daté : « Ponamus jam $p$ esse parem, seu divisibilem per $h$, hoc loco 2, factores infiniti in numeratore coincidunt factoribus infinitis in denominatore, an ergo se compensabunt ita ut evanescat infinitas ? Exemplum videamus sit $p=6$ et $m=1$, et fiet $\frac{6,1,-1,-3,-5,-7,-9,-11,-13,-15,\text{ etc}}{7,5,3,1,-1,-3,-5,-7,-9,-11,-13,-15,\text{ etc}}$ An ergo $=\frac{6}{7.5.3}=\frac{2}{5.7}$ sed Tabula dat $\frac{1}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\over 1.2.3}=\frac{8.1.2.3}{3.5.7}=\frac{16}{5.7}$ »

69. LH 35, 13, 3 Bl.258 - *Tabula Numerorum Arithmeticæ Replicationis seu Figuratorum interpolata*, non daté : « Videntur autem 8.2 (seu 16) oriri ex totidem $h$ seu 2 non destructus in numeratore, quot numeri sumantur in ipso denominatore, id ostendi potest restituto $h$, seu $2,\frac{6,\frac{1}{2}.2,(\frac{1}{2}-1)2,(\frac{1}{2}-2)2,(\frac{1}{2}-3)2,(\frac{1}{2}-4)2,(\frac{1}{2}-5)2,\text{ etc}}{(3+\frac{1}{2})2,(2+\frac{1}{2})2,(1+\frac{1}{2})2,(\frac{1}{2})2,(-1+\frac{1}{2})2,(-2+\frac{1}{2})2,(-3+\frac{1}{2})2,\text{ etc}}$ »

*mais on devrait avoir* $\frac{(1.2.3.4).8}{11.9.7.5}$*, et ainsi il semble qu'on doit corriger la règle.* [70]

En réalité, la table de Wallis donne $\frac{384}{3465} = \frac{(1.2.3.4).16}{11.9.7.5}$. Mais cela n'a pas d'incidence sur le raisonnement. Ainsi Leibniz constate qu'il y a une incohérence entre la généralisation qu'il a obtenue à partir du développement de Newton et les valeurs obtenues par la méthode de Mengoli. En effet, si on considère que $p = 2s$ est un nombre pair et $m = 2r + 1$ est un nombre impair, alors la formule du produit continu donne :

$$\frac{2s.(2r+1)(2r-1)(2r-3)\dots}{(2s+2r+1)(2s+2r-1)(2s+2r-3)\dots} = \frac{2s}{(2r+1+2s)(2r+12(s-1))\dots(2r+3)}$$

Alors qu'on obtient par la méthode de Wallis :

$$\frac{2s}{2r+2s+1}.\frac{2s-2}{2r+2s-1}.\frac{2s-4}{2r+2s-3}\dots\frac{2}{2r+3} = \frac{(2s)(2s-2)(2s-4)\dots 2}{(2r+1+2s)(2r+12(s-1))\dots(2r+3)}$$

Ainsi le facteur de différence vaut $(2s-2)(2s-4)\dots 2 = 2^{s-1}.(s-1)(s-2)\dots 1$, ce qui correspond bien aux valeurs qu'a trouvées Leibniz dans ses exemples.
Face à deux méthodes incompatibles, Leibniz considère que la valeur juste est celle de la table et non celle de sa formule par produit continu. Pourtant, nous avons montré le rôle important qu'a joué l'induction dans l'élaboration des deux méthodes. Ce n'est donc pas sur un critère apodictique que Leibniz choisit de privilégier l'interpolation de Wallis au binôme de Newton. La raison principale nous paraît être la monotonie des progressions qui n'est plus respectée avec les nouvelles valeurs proposées par le produit infini.
Dès lors, Leibniz considère la table de Wallis comme un modèle à suivre pour élaborer une nouvelle règle qui soit universelle. C'est-à-partir d'elle qu'il faut établir la formule générale, et non à partir de la formule du binôme qui se généralise mal :

> *Construisons la règle à partir de cette table et voyons ensuite s'il est possible de l'unifier aux premières. Soit* $\frac{p}{2} = q$*, on obtient :*
> - $\int \left(1 - x^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{m}{2}} = \frac{q.(q-1)(q-2)\dots 1}{\frac{m.2}{2}.\frac{m+2.2}{2}.\frac{m+3.2}{2}\dots\frac{m+(q-1).2}{2}} = \frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-(q-1))}{\frac{m+(q-1).2}{2}.\frac{m+(q-2).2}{2}\dots\frac{m+(q-q).2}{2}}$ -
> *Ainsi, on parvient à la chose si* $m$ *et* $q$ *sont des entiers. En revanche si* $q$ *est fractionnaire* $= \frac{p}{2}$*, on y parvient toutefois, à condition que* $m$ *soit pair. C'est pour cette raison que l'on introduit l'impair lorsqu'on évalue si finalement un infinité de facteurs se neutralisent bel et bien mutuellement.* [71]

A partir de la formule générale que donne la table, Leibniz observe que le problème peut être résolu si $p$ est impair et $m$ pair. Par contre les formules demeurent incompatibles lorsqu'à l'inverse $p$ est pair et $m$ impair, comme Leibniz l'a montré dans ses exemples.

### Un problème de symétrie

En réalité, la formule du produit infini rompt le rôle symétrique que jouent les exposants $p$ et $m$. Cette symétrie est évidente dans les expressions des courbes de Mengoli $a^p r^q$ mais ne l'est plus du tout avec le formalisme de Wallis $(1 - x^{\frac{1}{p}})^q$. Or la formule générale que Leibniz a trouvée est symétrique. Leibniz

70. LH 35, 13, 3 Bl.258 - *Tabula Numerorum Arithmeticæ Replicationis seu Figuratorum interpolata*, non daté : « Aliud exemplum : sit $p = 8$ et $n = 3 : 2$ et ex canone prodibit $\frac{8,\frac{3}{2}.2,\left(\frac{3}{2}-1\right)2,\left(\frac{3}{2}-2\right)2,\left(\frac{3}{2}-3\right)2,\left(\frac{3}{2}-4\right)2,\left(\frac{3}{2}-5\right)2,\text{ etc}}{\left(4+\frac{3}{2}\right)2,\left(3+\frac{3}{2}\right)2,\left(2+\frac{3}{2}\right)2,\left(1+\frac{3}{2}\right)2,\frac{3}{2}.2,\left(-1+\frac{3}{2}\right)2,\left(-2+\frac{3}{2}\right)2,\text{ etc}} = \frac{8}{11.9.7.5}$ sed deberet esse $\frac{1.2.3.4;8}{11.9.7.5}$. itaque canon videtur esse reformandus. »

71. LH 35, 13, 3 Bl.258 - *Tabula Numerorum Arithmeticæ Replicationis seu Figuratorum interpolata*, non daté : « Formemus canonem ex hac Tabula et videamus deinde an prioribus conciliari possit. Sit $p : 2 = q$ fiat $\int, dx \left(1 - x^{\overset{1:q}{\cdot\cdot}}\right)^{\overset{m:2}{\cdot\cdot\cdot}} = \frac{q,q-1,q-2,\text{ etc. usque ad } 1}{\frac{m+2}{2},\frac{m+2.2}{2},\frac{m+3.2}{2},\text{ usque ad } \frac{m+(q-1).2}{2}} = \frac{q,q-1,q-2,\text{ etc. usque ad } q-(q-1)}{\frac{m+(q-1).2}{2},\frac{m+(q-2).2}{2},\text{ etc. usque ad } \frac{m+(q-q).2}{2}}$ Ita res succedit si $m$ et $q$ sunt integri. Sed si $q$ sit fractus $= p : 2$, tamen res succedit modo $m$ sit par ; ex ipsa ratione impar allata, ut arbitror dum scilicet infiniti factores se mutuo destruunt. »- *Nota Bene* : Dans le premier facteur du dénominateur de $\frac{q,q-1,q-2,\text{ etc. usque ad } 1}{\frac{m+2}{2},\frac{m+2.2}{2},\frac{m+3.2}{2},\text{ usque ad } \frac{m+(q-1).2}{2}}$, Leibniz a écrit "$\frac{m+2}{2}$" au lieu de "$\frac{m.2}{2}$". Nous avons corrigé cela dans la traduction.

le montre très bien dans le manuscrit LH 35, 14, 2, Bl.68-69. Pour rappel, après avoir trouvé la formule pour la quantité suivante :

$$\int_0^1 (1-x^n)^e dx$$

Il inverse l'exposant, comme Wallis, pour obtenir la formule des coefficients binomiaux :

> *Donc si* $n = \frac{1}{m}$ *avec* $m$ *entier, alors* $= \frac{1.2.3...e}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+e)}$ [72]

Mais il s'aperçoit que pour les faibles valeurs de $m$, les facteurs se simplifient et il obtient en réalité $m$ facteurs au lieu de $e$ :

> *Si* $n = \frac{1}{3}$, *c'est-à-dire* $m = 3$, *on a* $\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{3}})^e dx = \frac{1.2.3...e}{4.5.6...(e+3)} = \frac{1.2.3}{(e+3)(e+2)(e+1)}$ [73]

Ainsi, il en déduit qu'il peut échanger les rôles de $m$ et de $e$ dans la formule :

> *Donc de manière générale, si* $n = \frac{1}{m}$ *et que* $m$ *est un entier alors on a* $\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{m}})^e dx = \frac{1.2.3...m}{(e+1)(e+2)(e+3)...(e+m)}$ [74]

Notons que Leibniz ne fait pas de remarque sur cette réécriture. Néanmoins il montre donc ici explicitement l'égalité :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(\!\binom{m+1}{e}\!\right)} &= \frac{1.2.3\ldots e}{(m+1)(m+2)\ldots(m+e)} \\ &= \frac{1.2.3\ldots m}{(e+1)(e+2)\ldots(m+e)} \\ &= \frac{1}{\left(\!\binom{e+1}{m}\!\right)} \end{aligned}$$

Or nous avons montré le rôle crucial que joue cette symétrie dans la méthode d'interpolation de Wallis. Ainsi, en poursuivant le produit à l'infini dans le cas où l'un des exposants est impair mais pas l'autre, Leibniz casse cette symétrie dans la formule.

### 9.3.4 L'enjeu central de la table

Revenons à présent au *Tabula Numerorum Arithmeticæ Replicationis seu Figuratorum interpolata* (LH 35, 13, 3 Bl.258). L'objectif de Leibniz reste ic la généralisation, et la quête d'une formule universelle et régulière qui unifie tous ces cas hétérogènes :

> *C'est ce qu'il faut faire, et ensuite poursuivre avec* $\int \left(1-x^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{m}{3}}$ *et* $\int \left(x^1-x^{\frac{1}{q}}\right)^n$ *jusqu'à ce qu'on parvienne à* $\int \left(x^w-x^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{m}{r}}$. *Et il faut comparer cela avec les premières règles, et regarder pour* $(x^w - x^p)^n$ *au sein desquels on obtient aussi des interpolations.* [75]

L'interpolation sert donc ici de modèle.

---

72. LH 35, 14, 2, Bl.65-70 - Sans titre, non daté - Bl.68-69 : « Ergo si $n = 1$ : $m$ posito $m$ integro $= \frac{1.2.3 \text{ usque ad } e}{m+1,m+2,m+3 \text{usque ad} m+e}$ »

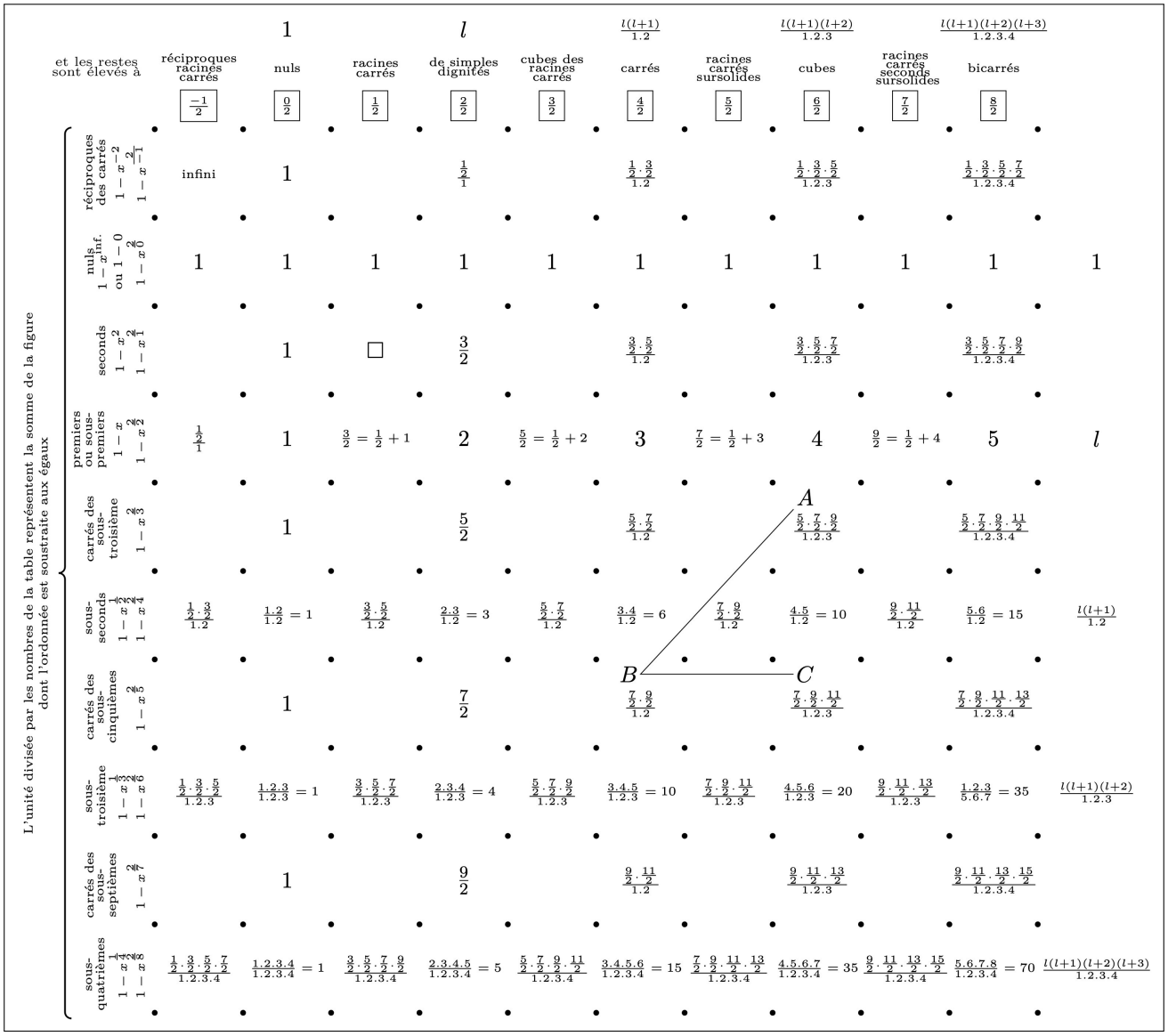
73. LH 35, 14, 2, Bl.65-70 - Sans titre, non daté - Bl.68-69 : « Si $n = \frac{1}{3}$ seu $m = 3$, fit $\int \overline{\overline{1-x^{\frac{1:3}{}}}^e} dx = \frac{1.2.3 \text{ usque ad } e}{4,5,6,7,8 \text{ usque ad} 3+e} = \frac{1.2.3}{e+3,e+2,e+1}$ »

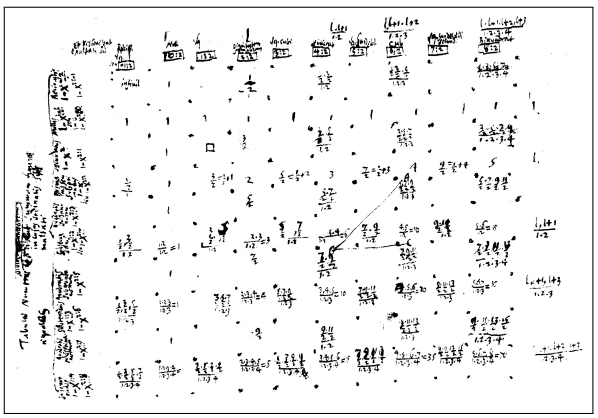
74. LH 35, 14, 2, Bl.65-70 - Sans titre, non daté - Bl.68-69 : « Ergo generaliter si $n = \frac{1}{m}$ et $m$ integer, fiet $\int \overline{\overline{1-x^{\frac{1:m}{}}}^e} dx = \frac{1.2.3 \text{ usque ad } m}{e+1,e+2,e+3, \text{ usque ad } e+m}$ »

75. LH 35, 13, 3 Bl.258 - *Tabula Numerorum Arithmeticæ Replicationis seu Figuratorum interpolata*, non daté : « Quod efficiendum, et deinde pergendum ad $\left(1-x^{\overset{1:q}{\cdot\cdot}}\right)^{\overset{m:3}{\cdot\cdot\cdot}}$, et ad $\left(x^1-x^{\overset{1:q}{\cdot\cdot}}\right)^n$ donec perveniatur ad $\left(x^w-x^{\overset{1:q}{\cdot\cdot}}\right)^{\overset{m:r}{\cdot\cdot\cdot}}$. Hoc comparetur cum prioribus canonibus, speciatur cum $(x^w - x^p)^n$ in quo etiam fiant interpolationes. »

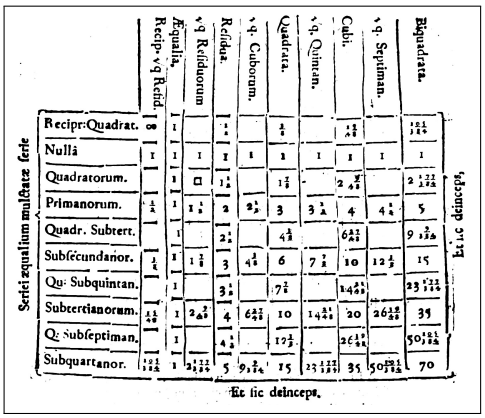
## Le modèle de la table

La table de Wallis, par sa symétrie, constitue la meilleure piste vers cette formule universelle. La moitié du manuscrit, qui n'est rédigé qu'au recto de la feuille, est occupée de fait par une imposante table, interpolée à la manière de Wallis :



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 13, 3 Bl.258 [76]




J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum* - p.165

76. LH 35, 13, 3 Bl.258, *Tabula Numerorum Arithmeticæ Replicationis seu Figuratorum interpolata*, non daté - Intitulés

Jusqu'à présent, les tables que construit Leibniz dans le cadred de l'interpolation étaient issues de l'ouvrage de Mengoli. Cette copie de Wallis constitue la seule occurence, à notre connaissance, d'une table interpolée ayant la structure quadrangulaire de l'*Arithmetica Infinitorum*. On constate plusieurs chose sur cette table. D'abord, bien qu'extrêmement proche de celle de Wallis, Leibniz n'en a pas fait une copie parfaite. Il a notamment ajouté les équations des binômes pour chaque ligne et les exposants de ces binômes pour chaque colonne. Ainsi, on note que Leibniz considère la ligne des constantes comme des progressions de degré infini :

$$1 = 1 - 0 = 1 - x^{\frac{2}{0}} = 1 - x^{\infty}$$

De plus, là où Wallis a inscrit les résultats sous forme de rompus, c'est-à-dire la somme d'un entier et d'un portion de l'unité, Leibniz les notes sous leurs formes de produits de fractions, de sorte que la structure des progressions apparait plus nettement. Ceci explique par ailleurs le fait que Leibniz ait rédigé la table de façon exhaustive, ce qu'il fait très rarement dans le cas des grandes structures tabulaires, au sein desquelles il a l'habitude de réduire le nombre de termes explicités afin de réduire les calculs au minimum. Ici, Leibniz ne construit pas une table pour faire des calculs, il recopie un modèle, dont il cherche à mettre en évidence les règles.
Pour finir, Leibniz souligne que la table vérifie la relation locale : $A + B = C$, c'est-à-dire la formule de Pascal :

> *Toujours deux membres dans A et dans B, se dirigeant de façon perpendiculaire et transverse vers le même lieu C, par un saut simple. Les sommés composent le membre du lieu C, ainsi A,* $\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}}{1.2.3} + B$, $\frac{\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}}{1.2}$ *donne C c'est-à-dire* $\frac{\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{11}{2}}{1.2.3}$ [77]

Cette relation qui d'ordinaire permet de construire le triangle arithmétique, est constatée ici *a posteriori*, comme une propriété émergente remarquable, à l'image de Mengoli dans le *Circolo*.

### Duplication de la table

Leibniz a le sentiment qu'il touche à son objectif, à savoir trouver une règle qui réunisse les transcendants et les rationnels :

> *C'en est de peu que nous n'obtenions enfin une règle vraiment universelle qui unit l'annulation de l'infini pour ce dont on peut déterminer la quadrature de façon absolue, et l'infini lorsque c'est nécessaire. Et qu'elle montre enfin ensemble les connexions transcendantes qu'ont entre eux ce dont on peut faire la quadrature.* [78]

Une telle formule serait donc une formidable avancée pour l'analyse des quantités transcendantes. Pour Leibniz, c'est dans la structure tabulaire que se cache la clé de la régularité des formules :

> *Dans chaque table, on obtient que diverses sommations se répondent entre elles de façon certaines dans leurs positions, c'est-à-dire que la table est presque dupliquée.* [79]

Ce n'est pas facile d'interpréter ce que Leibniz entend ici par la "duplication" de la table. Deux pistes nous paraissent intéressantes.

---

des colonnes : « Recip. $\sqrt{q}$ seu $\boxed{-1:2}$ ; Null $\boxed{0:2}$ ; $\sqrt{q}$ $\boxed{1:2}$ ; Dignitatum simplicium $\boxed{2:2}$ ; $\sqrt{q}$.cubi $\boxed{3:2}$ ; Quadrat $\boxed{4:2}$ ; $\sqrt{q}$.Surdesol. $\boxed{5:2}$ ; cub $\boxed{6:2}$ ; $\sqrt{q}$.Surdesolidi secundi $\boxed{7:2}$ ; Biqudrat $\boxed{8:2}$ ». Intitulés des lignes : « Subqartanis $1 - x^{1:4}$ $1 - x^{2:8}$ ; quadratis subseptimanorum $1 - x^{2:7}$ ; Subtertianis $1 - x^{\overset{1:3}{\cdot\cdot}}$ $1 - x^{2:6}$ ; quadratis subquintanorum $1 - x^{2:5}$ ; Subsecundanis $1 - x^{1:2}$ seu $1 - x^{\overset{2:4}{\cdot\cdot}}$ ; quadratis sub3tianorum $1 - x^{\overset{2:3}{\cdot\cdot}}$ ; primlius seu subprimalius $1 - x$ seu $1 - x^{2:2}$ ; secundan1s $1 - x^2$ $1 - x^{2:1}$ ; nullis $1 - x^{\overset{\text{inf.}}{\cdot\cdot}}$ seu $1 - 0$ $1 - x^{2:0}$ ; Recip. qtis $1 - x^{\overset{-2}{\cdot\cdot}}$ $1 - x^{2:-1}$ ». Titre de la table (écrit à la verticale) : « Tabulæ Numeri dividentes unitatem exhibent summam figuræ in cujus ordinatis sint æquales multati ». Note dans le coin supérieur gauche de la table : « et residui sunt exaltati ad »

77. LH 35, 13, 3 Bl.258 - *Tabula Numerorum Arithmeticæ Replicationis seu Figuratorum interpolata*, non daté : « Semper duo membra in $A$ et in $B$ perpendiculariter et transverse collineantes in eundem locum $C$ per simplicem saltum : summati componant membrum loci $C$ sic $A$, $\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}}{1.2.3} + B$, $\frac{\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}}{1.2}$ facit $C$ seu $\frac{\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{11}{2}}{1.2.3}$ »

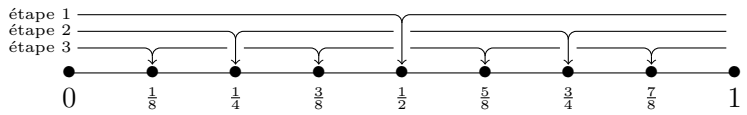
78. LH 35, 13, 3 Bl.258 - *Tabula Numerorum Arithmeticæ Replicationis seu Figuratorum interpolata*, non daté : « Pauci tandem canonem vere universalem obtineamus qui destructionem infinitatis contineat in absolute quadrabilibus infinitam ubi necesse est. Et simul tandem trascendentes quadrabilium ostendat connexiones inter se. »

79. LH 35, 13, 3 Bl.258 - *Tabula Numerorum Arithmeticæ Replicationis seu Figuratorum interpolata*, non daté : « In omni Tabula fiat ut diversæ summationes certis in sedibus respondeant inter se, seu ut Tabula sit quasi duplicata. »

⋆ La première consiste à voir que la table n'établit de relation que par saut d'intervalle unité. Autrement dit, deux quadratures sont reliés si la différences de leurs exposants est un nombre entier. Ainsi, il y a la table des exposants entiers, c'est-à-dire le triangle arithmétique généré par son sommet 1, et la table des exposants fractionnaires, multiples de $\frac{1}{2}$, qui est générée par son sommet $\square$. Dans ce sens, la table est dupliquée. Mais ici, nous n'avons considéré que les termes dont les exposants sont, ou bien tous les deux entiers, ou bien tous les deux fractionnaires. Or il existe des termes où l'un des deux exposants est entier et l'autre fractionnaire. Ce sont les fameux cas qui posent problème à Leibniz ici, puisqu'il constate, comme nous l'avons vu, une asymétrie : si $p$ est impair et $m$ pair, alors la règle de Newton fonctionne, en revanche, si $p$ est pair et $m$ impair, elle ne fonctionne plus. En réalité, cette considération sur la duplication de la table revient à dire ce que Leibniz a noté dans le *Constructio Tabularum* (A VII, 6, N.13$_1$) en 1676, à savoir que la table est générée par les quatre éléments au sommet. Avec la symétrie de la table, on ramène le nombre de générateurs à trois. Puis la connaissance de la première progression qui est constante, ramène ce nombre à deux générateurs. Plus généralement, comme nous l'avons vu, si l'interpolation est au niveau $n$, il y $\left(1+\frac{n(n-1)}{2}\right)$ générateurs. Notons par ailleurs que pour Leibniz, il semble qu'il y ait deux méthodes pour augmenter le niveau de l'interpolation :

> *On aurait ensuite avancé un pied vers les décompositions des figures, de fait, la dernière n'est pas* 1, *mais* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ..., *ou encore* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ *et* $\frac{3}{4}$ *puis* $\frac{1}{8}$,$\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ *et* $\frac{7}{8}$.[80]

Ainsi, on peut soit augmenter le nombre de division des intervalles, avec sous-intervalles de taille $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ..., on bien procéder par dichotomie en divisant à chaque fois les intervalles par 2 :




⋆ Pour la deuxième interprétation, il s'agit de voir la table sous deux aspects. Il y a l'aspect géométrique d'une part, puisqu'elle donne les inverses des quadratures d'une classe de courbes. Et d'autre par, il y a l'aspect arithmétique ou combinatoire, puisqu'elle donne aussi la valeur des nombres figurés. On constate cette ambivalence dans la nomenclature de la table, puisque les termes ont deux paires d'indices :

→ La paire géométrique $(q, n)$ qui détermine les exposants de la courbe géométrique.

→ La paire arithmétique $(l, n)$, où $n$ détermine la dimension du nombre figuré et $l$ la longueur du côté. Contrairement à la paire géométrique, cette paire-là est symétrique, c'est-à-dire qu'on ne précise pas si le côté $l$ est l'indice des lignes où des colonnes, puiqu'on le retrouve à la fois dans la ligne $q = 1$ (ou $p = 2$) et dans la colonne $n = 1$ (ou $m = 2$).

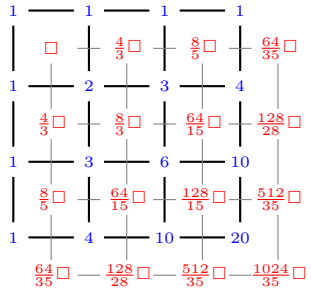
Cette double nomenclature est directement hérité de l'ouvrage de Wallis au sein duquel nous avons montré qu'elle joue un rôle important dans la construction de la table. Elle est reprise ici dans la table de Leibniz, avec les formules en fonction de $l$ indiqués pour les lignes et pour les colonnes. Or les règles qui s'appliquent à ses deux tables sont de nature distincte. Le triangle arithmétique est formé par une règle additive tandis que la règle qui permet de construire la table de Wallis est une règle multiplicative. Trouver une règle qui unifie les cas transcendants et les cas rationnels doit aussi permettre de comprendre comment ces deux types de relations s'imbriquent au sein de la table :

> *Est-ce que, maintenant, l'on peut imaginer aussi des règles, qui aient au moins l'air utiles ? Finalement, il faut voir si l'on ne déduit pas ces règles à partir de nos séries infinies et donc qu'on représente une ordonnée irrationnelle par une série rationnelle. Et il en va de même pour la sommation. Mais de plus, on applique celle-ci pour des cas particuliers. Et il faut voir comment l'on déduit de la règle les propriétés que la table représente par induction, comme ici que* $A+B=C$[81]

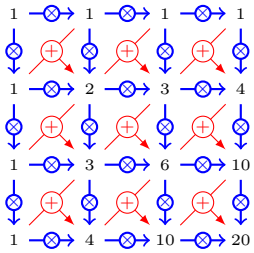
80. LH 35, 13, 3 Bl.258 - *Tabula Numerorum Arithmeticæ Replicationis seu Figuratorum interpolata*, non daté : « Pes dein promoverimus ad Disectiones figurarum, nam scilicet ultima est non 1 sed $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc, aut $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{8}$ et $\frac{3}{8}$ et $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{8}$. »

81. LH 35, 13, 3 Bl.258 - *Tabula Numerorum Arithmeticæ Replicationis seu Figuratorum interpolata*, non daté : « Utrum

Autrement dit, avec la première interprétation, on considère que la table est dupliquée selon les positions, alors qu'avec la seconde, elle est dupliquée selon les relations.




Duplication selon les termes




Duplication selon les positions

Etant donné que Leibniz souligne à la fois l'importance des relations et des positions, nous n'avons pas suffisamment d'indices pour trancher entre ces deux interprétations.

nunc quoque canones si oris utilitatis excogitari possint. Tandem videndum an non ei ipsi canones derivantur ex nostris seriebus infinitis dum ordinata irrationalis per seriem rationalem exhibetur ; et summatio iri idem, hæc autem applicatur a casus speciales videndum est quomodo proprietates quas Tabula inductione exhibet ex canone deriventur, ut hoc loco quod $A + B = C$. »

## Conclusion

La construction des formules est donc étroitement liée à la pratique tabulaire. Premièrement, Leibniz constate que le fait qu'un même terme de la table appartiennent à plusieurs progressions concourantes, a pour conséquence qu'on lui associe différentes écritures suivant la progression dans laquelle on souhaite le considérer. Ainsi, en réunissant en son sein toute une combinatoire de progressions dans les diverses directions, une même table peut être écrite de très nombreuses manières, suivant qu'on la consière lignes par lignes, colonnes par colonnes ou bien diagonales par diagonales. En cherchant à trouver une écriture uniforme qui convienne à un même terme peu importe dans quelle progression on le considère, Leibniz pose explicitement une de nos problématique méthodologique, à savoir la différence entre l'approche "liste de listes" et "tableau à double entrée". Il souhaite trouver une méthode pour que la table soit directement un ensemble de termes et non pas un ensemble d'ensembles de termes.
Ceci dit, nous avons analysé de nombreux éléments qui montrent au contraire, que Leibniz avait encore une approche "listes de liste" concernant l'interpolation, notamment lorsqu'il s'interroge sur des tables qui seraient interpolées à un ordre supérieur à deux.
En outre, ces travaux nous ont monotré que Leibniz a considéré la méthode tabulaire comme une piste extrêmement sérieuse pour faire progresser l'analyse des transcendants, et ce jusqu'à très tardivement. Lorsque les résultats issus de l'analyse entrent en contradiction avec ceux de la méthode des tables, ce sont ces derniers qui priment. Leibniz montre ici que la table reste pour lui un objet d'étude extrêmement intéressant et encore largement mystérieux. Nous avons pu montré que c'est le caractère intrinsèquement équivoque de la table et la capacité que revêt la structure tabulaire à embrasser plusieurs points de vue qui poussent Leibniz à croire qu'il pourra y trouver la règle universelle et régulière qu'il recherche. Néanmoins, Leibniz reste tout de même en quête d'une règle formelle, d'un *canon* symbolique qui constitue la finalité de sa recherche. Ainsi, la forme tabulaire est un moyen heuristique pour trouver et construire cette formule mais elle ne constitue pas un mode satisfaisant de représentation finale des résultats.
Pour finir, la tentative d'écriture récursive que Leibniz propose dans le *De calculo interpolationum* (LH 35, 5, 15 Bl.25-26) représente quant à elle la façon dont Leibniz tente de formaliser sa pratique tabulaire au sein d'une expression symbolique. Elle incarne cette complémentarité entre formes et tables, en étant à la fois développée et factorisée. Cette procédure peut être interprétée comme une tentative de représenter la combinatoire méthodologique, à savoir la pratique tabulaire, dans la combinatoire épistémologique, à savoir la science des formes et de formules.

# Transition

Wallis et Mengoli ont probablement eu l'idée d'effectuer l'interpolation du triangle arithmétique indépendamment l'un de l'autre. L'ouvrage de Wallis eut un retentissement considérable au sein de la communauté mathématique et savante de l'époque et fut cité comme référence durant plusieurs siècles tandis que l'œuvre de Mengoli est resté dans un relatif anonymat :

> *Quelques années après la publication de l'Arithmetica Infinitorum, Pietro Mengoli, sans doute sans connaître les résultats de Wallis, proposa une méthode de quadratures qui, tout en se fondant sur des résultats arithmétiques analogues à ceux utilisés par Fermat et Pascal, suivait un parcours fort différent de celui indiqué par ces derniers et emprunté ensuite par Wallis. Son ouvrage resta pourtant largement méconnu et n'eut aucune influence.* [82]

Cette deuxième partie a pourtant montré que l'influence de Mengoli sur Leibniz, bien que circonscrite à des travaux personnels dont il n'a fait aucune publicité, ne saurait être négligeable.
Pour Leibniz, l'interpolation du triangle arithmétique ne permet pas seulement d'estimer la valeur du rapport entre l'aire d'un disque et le carré de son rayon au moyen d'une produit infini de fractions rationnelles. Il y voit plutôt l'échantillon d'une méthode générale susceptible de franchir les frontières imposées par l'algèbre cartésienne, à l'image de son calcul différentiel. Mais surtout, l'intérêt du jeune Leibniz pour la pratique des tables lui donne une position idéale pour assimiler ces deux travaux, pourtant très différents, et y voir une méthode commune, que nous qualifions de combinatoire.
Nous avons montré que le triangle à interpoler, dans lequel se trouve l'aire du cercle, est un triangle de différence chez Mengoli. Cependant ni Mengoli, ni Leibniz ne le considère comme tel. Tous passent par le triangle arithmétique pour effectuer l'interpolation. De plus, parmi les relations qui lient entre eux les différents termes dans la table, nous avons montré qu'il y en a qui sont multiplicatives et d'autres qui sont additives. L'interpolation, que ce soit chez Wallis ou chez Mengoli, agit seulement sur les liens multiplicatifs, ce qui engendre des produits de fractions rationnels dans le cas du triangle arithmétique, mais dans la table de courbe, cela engendre des courbes irrationnels. De fait, les liens multiplicatifs s'accordent avec une propriété fondamentale de cette table : les rangs de termes correspondent à des exposants. Ainsi en divisant linéairement les rangs, l'interpolation divise géométriquement les exposants. En effet, la nature des courbes est caractérisée par celle de leurs exposants. Leibniz a compris très tôt que la formule de Newton n'est finie que si les exposants sont des entiers, car alors les coefficients deviennent nuls à partir d'un certain rang. Il constate le même mécanisme pour l'expression contractée qu'il construit dans le dernier manuscrit tardif que nous avons analysé [83]. Non seulement ce procédé d'interpolation ouvre une porte sur les exposants fractionnaires, mais Leibniz a également l'intuition qu'il donne accès à domaine bien plus vaste de l'analyse des transcendants. En se fondant sur l'idée que la quadrature de l'hyperbole engendre la ligne logarithmique, qui est une ligne de tous les degrés, Leibniz suppose que la quadratrice du cercle possède des propriétés analogue, puisque leurs équations sont semblables : $y = \sqrt{x(1-x)}$ pour le cercle et $y = \sqrt{x(x-1)}$ pour l'hyperbole. De plus, elles occupent toutes les deux la place centrale de courbe primitive au sein du triangle, c'est-à-dire que tous les termes qui ne sont pas rationnels sont des dérivés de ces courbes. Ces classes de courbes correspondent aux quadratures de Mengoli et non de Wallis qui choisit de fonder son raisonnement sur les progressions de puissances classiques, à savoir les fonctions $x^n$. Ainsi le triangle de Mengoli met en avant une nouvelle classe de courbes, dont les équations sont $x^n(1-x)^m$ qui pourraient être également considérer comme la classe de lois fondamentales à partir desquelles les autres sont composées. Dès lors, il serait pertinent de réfléchir à une nouvelle définition de

82. [79] M.Panza, *Newton et les origines de l'analyse : 1664-1666*, A. Blanchard, Paris, 2005 - p.51.
83. LH 35, 13, 3 Bl.258 - *Tabula Numerorum Arithmeticæ Replicationis seu Figuratorum interpolata*, non daté.

l'exposant, qui soit conforme à la structure tabulaire bidimensionnelle de cette nouvelle classe, à la place des exposants classiques et linéaires, qui s'accordent avec la classe des lois de puissances conventionnelles. Ainsi, à partir du triangle arithmétique et de la table des courbes que Leibniz a trouvée chez Mengoli, on peut comprendre qu'une réflexions sur les exposants et la nature de ces derniers s'avère très utile. L'exposant décrit alors la disposition d'une classe d'objets primitifs, dont le choix est plus ou moins arbitraire. La composition de ces primitifs se traduit alors dans un calcul des exposants.

# Troisième partie

# Les Exposants

# Avant-propos

La table constitue l'objet central des deux premières parties de notre travail. Ces deux processus d'analyse ont montré, par des chemins différents, que la pratique tabulaire du jeune Leibniz l'a mené à réfléchir à la notion d'exposant, à laquelle nous consacrons cette troisième et dernière partie. Le choix de mot « exposant » que nous faisons n'est pas neutre et traduit d'une part notre point de vue vis-à-vis des textes du passé, à savoir qu'on cherche principalement à expliquer comment Leibniz a conceptualisé cette notation surélevée, introduite par Descartes. D'autre part, il marque les choix de vocabulaire du jeune Leibniz durant le séjour parisien.

En effet, ce dernier a employé l'exposant pour diverses désignations. Les premières utilisations concernaient aussi bien les progressions géométriques que celles des nombres combinatoires. Dans ce domaine discret, l'exposant peut malgré tout incarner deux approches du numérique, une approche cardinale ou bien une approche ordinale. La présence des deux acceptions au sein des textes de jeunesse de Leibniz semble indiquer qu'il a très vite considéré l'exposant comme une notion problématique, soumise à un travail d'analyse et de redéfinition. Par la suite, s'inspirant de l'*Arithmetica Infinitorum*[84] de John Wallis, Leibniz propose de surprenantes extensions du concept d'exposant, et ce au travers d'une longue entreprise qui semble l'occuper durant ces années.

Peu de commentateurs ont considéré jusqu'ici l'exposant comme objet central d'une analyse historiographique et philosophique des textes leibniziens. Michel Serfati qui y consacre un chapitre ou un long développement dans plusieurs de ses livres[85]. Il montre comment la notion d'exponentielle que développe Leibniz dans ses écrits mathématiques rompt de façon radicale avec les conceptions antérieures. En plaçant l'exposant dans l'inconnue, Leibniz fait naître des équations d'un genre tout à fait nouveau, étrangères aux anciennes classifications grecques ou cartésiennes dépendantes du degré maximal en jeu. Leibniz doit développer de toutes nouvelles techniques pour réduire ou résoudre ces questions qui quittent la juridiction de l'algèbre pour gagner le domaine de la transcendance. Pour Serfati, l'enjeu se trouve donc dans la manière dont Leibniz a pu s'octroyer le droit de placer une inconnue dans l'exposant. Selon lui, c'est en voyant Newton placer des fractions et des racines en lieu et place d'exposants cartésiens que cette idée novatrice d'exposants variables et inconnus a pu germer dans l'esprit de Leibniz. Pourtant certains documents que nous présentons ici vont à l'encontre du rôle donné à Newton dans cette reconstitution. Mais au delà de ces questions de priorités, les nouveaux matériaux que nous présentons ici montre que l'intuition de Leibniz ne se portait pas exclusivement sur le formalisme mais puisait, notamment chez Wallis, des reflexions géométriques sur la nature des courbes.

Le développement de la notion d'exposant, chez le jeune Leibniz, puise ainsi ses racines dans ces deux conceptions : un exposant combinatoire qui dénombre l'itération d'une opération ou bien un rang dans une progression, et un exposant géométrique qui, tout en caractérisant une courbe, s'incarne dans une grandeur extensive construite à partir de celle-ci.

Dans la fin des années 1670, Leibniz tente de réunir ces deux conceptions à travers la notion de pronique, qui désigne les produits de nombres consécutifs ou leurs inverses. En considérant qu'ils forment une nouvelle classe de puissances, Leibniz tente de géométriser la notion de nombre combinatoire. Il tente même

84. [110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656

85. Notamment : [95] M. Serfati, *La Révolution Symbolique, la constitution de l'écriture symbolique mathématique*, édition Petra, Paris, 2005 - *Cf* le chapitre *« Formes » sans significations, Analogies et « prolongements »*, p.323-379. [96] M. Serfati, *Leibniz and the Invention of Mathematical Transcendence*, Stuttgart, 2018 - *Cf* le chapitre *The power of symbolism : exponentials with letters*, p.19-29. [94] M. Serfati, *De la Méthode, Recherches en histoire et philosophie des mathématiques*, Presse Université de Franche-Comté, 2002 - *Cf* le chapitre *Analogies et « prolongements », Ecriture symbolique et création d'objets mathématiques, de Leibniz à L. Schwartz*, p.271-318.

ainsi de construire la ligne géométrique dont dépendent les proniques. Cet axe de recherche concrétise explicitement l'idée que nous avons développée consistant à voir les nombres combinatoires comme la base du calcul différentiel discret. Leibniz construit alors un pont entre la notion de différence et celle de puissance. Comme nous l'avons dit, les nombres combinatoires sont des exposants en tant qu'ordres successifs de différentiation. L'exposant pronique désigne donc à la fois une différence et une puissance. Cette analogie fait écho à celle que Leibniz découvre au milieu des année 1690 et qui mène à la célèbre formule de Leibniz sur la différentiation d'un produit. Ainsi, Leibniz cherche à établir un pont entre l'arithmétique et la géométrie, entre le discret et le continu, et ce pont, c'est la combinatoire.
Au sein des travaux de recherche centrés sur les exposants et sur ce qui devient dès la fin du séjour parisien l'analyse des transcendant, nous pouvons distinguer alors trois types d'approches :

- ⋆ Les travaux sur les exposants non-entiers, au sein desquels on trouve l'évocation d'exposants infinitésimaux et même d'exposants imaginaires.
- ⋆ Les travaux sur les exposants littéraux, qui consiste à donner à l'exposant le statut de variable algébrique.
- ⋆ Les travaux sur les exposants fonctionnels, qui constitue un axe important de recherche, qui sera abandonné par la suite, dans lequel Leibniz tente d'exprimer n'importe quelle loi grâce à l'exposant.

Mais dans son approche des exposants, Leibniz considère un autre outil, absolument central et purement géométrique : le logarithme. Ainsi, le calcul exponentiel que développe le philosophe à la fin des années 1670 est le produit d'une démarche combinatoire à la fois tabulaire et formelle et d'une démarche géométrique fondée sur les logarithmes.

# Chapitre 10

# Premiers exposants : Itérations et Courbes

## Introduction

Au troisième quart du XVII$^{\text{ème}}$ siècle, la notion d'exposant ne constitue pas encore un code universel et commun à toute la communauté mathématique, comme il le sera plus tard. Dans son sens le plus général, l'exposant désigne le rang dans une progression, et non le nombre de fois que l'on multiplie un même terme par lui-même. Les deux sens coïncident au sein des progressions géométriques [1]. Dans ce contexte où la définition est encore très fluctuante, Leibniz trouve un espace pour construire sa propre conception.
Ce premier chapitre consiste à montrer comment sont nées les conceptions d'exposant combinatoire d'une part et d'exposant géométrique d'autre part.
Nous avons montré, dans les triangles de différences, que les nombres combinatoires constituent en réalité une nouvelle base canonique du calcul différentiel discret. En effet, en réduisant la progression à ses génératrices, Leibniz obtient que les coefficients sont les nombres combinatoires $\binom{n}{k}$. Le nombre $n$, constant, désigne le rang du terme que l'on décompose et le nombre $k$ désigne l'ordre de différences correspondant à la $k$-ième génératrice. A travers cet ordre de différences, on trouve l'idée de réplication, qui est étroitement liée pour Leibniz, au début du séjour parisien, à la notion d'exposant.
D'autre part, La technique de tabulation introduite par Wallis a permis de déterminer les quadratures des paraboloïdes de tous les degrés possibles, qu'ils soient entiers ou fractionnaires. Wallis montre que la valeur de la quadrature est directement composée du degré de la progression, qu'il nomme alors « indice de la progression » (« *index progressionis* »). Dès lors l'exposant ne désigne plus un rang ou le nombre d'itérations de la même progression, mais une quantité géométrique, à savoir l'aire sous la courbe. La table montre alors que cette quantité géométrique respecte une certaine loi, et dès lors la pratique de l'interpolation introduit naturellement la notion d'exposant fractionnaire, voir même d'exposant irrationnel. Leibniz réalise qu'à travers la quadrature ou bien la tangente, l'exposant change de nature. D'opérateur de dénombrement, il devient une quantité extensive. De combinatoire, il devient géométrique.

1. On trouve déjà cette notion au XVI$^{\text{ème}}$ siècle chez Stifel, *Cf* la note 16 p.275.

## 10.1 Itération et Décompte

La figuration des nombres entraine une opération qui est fondamentale, à savoir la progression. Pour une même figure, on peut faire la liste de tous ses nombres figurés et pour un même côté, s'établit celle de toutes ses figures. Le rang du terme au sein de cette liste engendrée par la réitération d'une même action désigne alors le nombre de ces opérations dont ce terme est le produit. Dans certains textes, dont la *Dissertatio de Arte Combinatoria*, Leibniz envisage l'exposant sous cet angle.

### 10.1.1 Nombre d'entité

#### L'exposant combinatoire dans la *Dissertatio de Arte Combinatoria*

La première apparition du terme « exposant » (« *exponens* ») chez Leibniz, dans un emploi mathématique, se trouve dans la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8). La plupart du temps, il désigne le nombre de choses choisies $k$, dans $\binom{n}{k}$ le nombre de combinaisons de $k$ choses choisies parmi $n$ données. Il en donne ainsi la description dans le paragraphe consacré aux définitions :

> *Pour déterminer une certaine complexion, le plus grand tout doit être divisé en parties égales, considérées comme minimales (c'est-à-dire des parts qu'on suppose ne plus pouvoir être divisé davantage). On fait un composé de ces parties, c'est à partir de leur variation que la complexion, ou plus petit tout, peut varier. Du fait que ce plus petit tout peut être plus ou moins grand selon qu'on y met plus ou moins de parts, on appelle ce nombre de parts, ou d'unités, collectées dans un même temps, l'exposant, d'après l'exemple de la progression géométrique.* [2]

Ici, le terme « exposant » (« *exponens* ») est donc emprunté au vocabulaire consacré aux suites géométriques. En vérité, c'est bien dans ce sens que Leibniz emploi ce terme dans la *Dissertatio de Arte Combinatoria*. L'exposant désigne le nombre qui caractérise le rang dans la progression. Il s'agit donc d'un usage ordinal, c'est-à-dire que la notion désigne un lieu et non une quantité, qui caractériserait un usage cardinal du terme. Or, la citation fait bien référence à un « nombre d'unités » (« *numerum unitatum* »). Ceci montre que l'exposant désigne également une quantité et pas seulement le rang d'un terme.

#### Une interprétation combinatoire de la multiplication

On trouve de fait dans un autre passage de la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8), l'utilisation du terme « exposant » (« *exponens* ») pour désigner un terme d'une suite géométrique :

> *Ainsi, nous obtiendrons donc : qu'on mutliplie* 6. *par lui-même neuf fois :* $6\times6\times6\times6\times6\times6\times6\times6\times6$ *ou encore qu'on cherche la progression géométrique sextuple dont l'exposant est* 9*, c'est-à-dire le cubicube de* $6 = 10077696$. [3]

Dans cet extrait, Leibniz traite d'un passage des *Delitiæ physico-mathematicæ* de Daniel Schwenter, réédités et complétés par Georg Philip Harsdörffer en 1651 [4]. Comme nous l'avons déjà vu dans le Prologue [5], il y reprend la méthode de Raymond Lulle qui consiste à inscrire sur des roues mobiles concentriques des listes de catégories qui permettent, en combinant toutes les roues d'obtenir toutes les questions possibles pour traiter un sujet de façon exhaustive. Comme il y a neuf roues et six catégories par roue, Leibniz donne donc ici le calcul qui permet de trouver le nombre de combinaisons. Ici, il ne s'agit pas de choisir un certain nombre de choses parmi un ensemble donné plus grand mais de déterminer les « complexions de

2. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, 1666 - p.172 : « Ut autem certa Complexio determinetur, majus Totum dividendum est in partes æquales suppositas ut minimas (id est quæ nunc quidem non ulterius dividantur), ex quibus componitur et quarum variatione variatur Complexio seu Totum minus ; quia igitur Totum ipsum minus, majus minusve est, prout plures partes una vice ingrediuntur ; numerum simul ac semel conjungendarum partium, seu unitatum, dicemus Exponentem, exemplo progressionis geometriæ ».

3. A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.203 : « Sic igitur inveniemus : multiplicetur 6. in se novies : $6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6 \cap 6$ seu quæratur progressio geometrica sextupla, cujus exponens 9, aut : Cubicubus de 6 *f.* 10077696. »

4. [31] D. Schwenter & G.P. Harsdörffer, *Deliciæ physico-mathematicæ oder Mathematische und philosophische Erquickstunden*, Nuremberg, 1651

5. Sur ce sujet, *Cf* le Prologue, à la note 149 p.105.

classes »(« *complexiones classium* »). Or nous avons montré, dans le Prologue, que la notion de complexion de classes est fondée sur une conception méréologique des objets, qui doivent donc former des parties coextensives d'un même tout. Ainsi, Leibniz confronte dans cet extrait deux visions complémentaires.

- ⋆ D'une part, la complexion de classe dans laquelle les neuf roues sont considérées comme distinctes, et de ce fait, les neuf facteurs, qui font référence à chacune d'entre elles, sont des caractères identiques qui désignes des ensembles disjoints.
- ⋆ D'autre part, la progression géométrique qui consiste à appliquer la même opération, ici le sextuple, de façon itérative. Dès lors, les facteurs font tous référence au même objet qui est la raison géométrique.

L'usage de l'exposant, dans la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8) est ordinal. Mais l'exposant s'applique à de nombreuses structure combinatoire pour lesquels il coïncide avec des quantités ou des itérations.

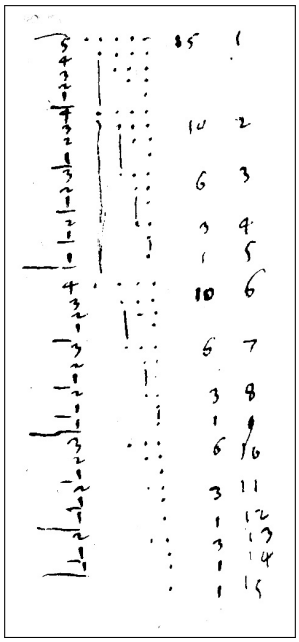
### 10.1.2 Répétitions d'opérations

#### Nombre de répétitions

Lorsque Leibniz rédige, à la fin de l'année 1672, l'*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum* (A II, 1, N.109), nous avons vu qu'il donne une nouvelle définition de l'exposant [6]. L'exposant dénombre alors la multiplicité des répétitions, ou de ce que Leibniz appelle les « réplications » (« *replicationes* »). Dans le *De Numeris Combinatoriis* (A VII, 3, N.3), un texte parisien antérieur à l'*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum* (A II, 1, N.109), Leibniz semble découvrir la façon dont les nombres combinatoires se répliquent les uns les autres pour s'engendrer :

> *Toute combinaison est une somme de la progression arithmétique qui croit par unités :* $5+4+3+2+1$ *est la combinaison de 6. La conternaison est la somme des sommes de la progression, c'est-à-dire la somme seconde :* $5+4+3+2+1|4+3+2+1|3+2+1|2+1|1$ *est la conternaison de 7. Une conquaternaison est une somme de sommes secondes, c'est-à-dire de conternaisons.* [7]

Leibniz représente la situation par divers croquis, notamment le schéma en points ci-dessous :

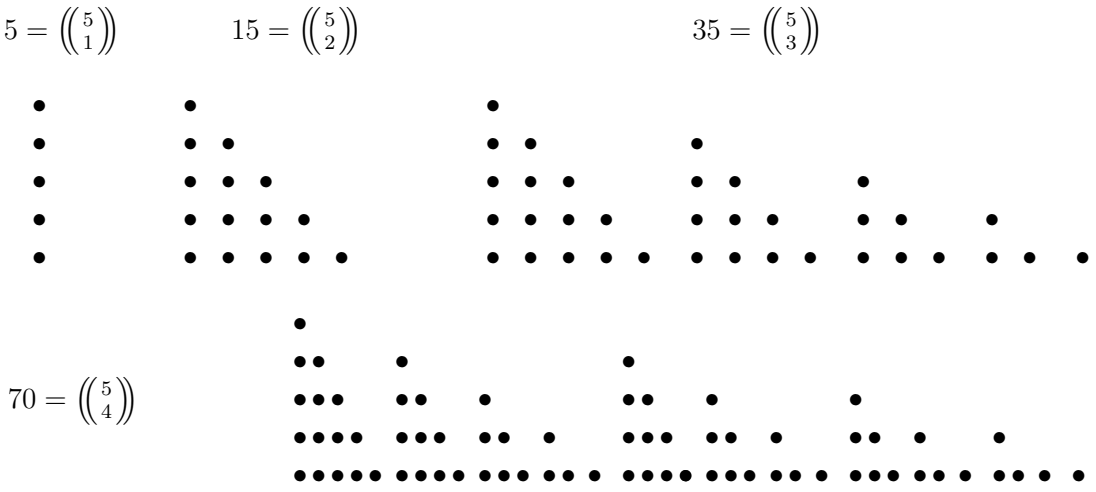


Manuscrits de Leibniz - LH 35, 12, 1, Bl.45.

6. *Cf* la note 14 p.233.

7. A VII, 3, N.3, *De Numeris Combinatoriis*, entre le printemps et l'automne 1672 - p.22 : « Omnis combinatio est summa progressionis arithmeticæ per unitates crescentis, 5. 4. 3. 2. 1. est com2natio de 6. Con3natio est summa summarum progressionis seu summa secundana, 5. 4. 3. 2. 1. | 4. 3. 2. 1. | 3. 2. 1. | 2. 1. | 1. est con3natio de 7. Con4natio est summa summarum $2^{\text{danarum}}$ seu con3nationum. »

La réplication ou la répétition d'une certaine opération se retrouve clairement dans ce schéma. Le nombre figuré est le produit d'un certain nombre d'occurrence d'un même schéma de reproduction :




Ce mouvement répété est à l'origine fondé sur l'addition. La répétition des graphiques produit la somme de leurs points. C'est pourquoi ce premier vocabulaire employé par Leibniz s'articule grâce aux sommes : "somme", "somme seconde" etc.

### Itérations algorithmiques

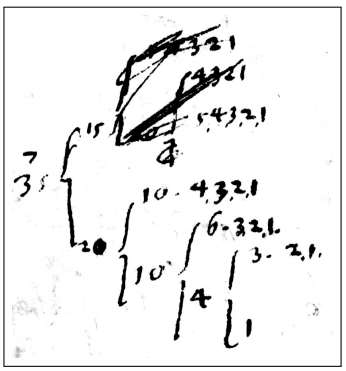
Nous avons vu que dans la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8), Leibniz reconnaît deux sortes de coefficients dans le triangle arithmétique, ceux des nombres triangulaires qui sont obtenus directement par une formule [8] et les autres qui doivent être obtenus de façon récursives [9] :

> *Il y a deux types de solutions, l'un concernant toutes les complexions, l'autre seulement les combinaisons : le premier est plus général, cela étant le second requiert moins de données, à savoir seulement le nombre et l'exposant ; alors que le premier présuppose également connues toutes les complexions précédentes.* [10]

Leibniz donne la loi du triangle arithmétique, à savoir :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

C'est à partir de cette loi qu'il retrouve, dans le *De Numeris Combinatoriis* (A VII, 3, N.3), le principe de réplication au travers du schéma suivant :



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 12, 1, Bl.45.

$$35 \left\{ \begin{array}{l} 15|5.4.3.2.1 \\ 20 \left\{ \begin{array}{l} 10|4.3.2.1 \\ 10 \left\{ \begin{array}{l} 6|3.2.1 \\ 4 \left\{ \begin{array}{l} 3|2.1 \\ 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

8. *Cf* à la p.79.
9. *Cf* la note 114 p.71.
10. A VI, 1, N.8, *Dissertation de Arte Combinatoria*, 1666 - p.174 : « Solutionis duo sunt modi, unus de omnibus Complexionibus, alter de Com2nationibus solum : ille quidem est generalior, hic vero pauciora requirit data, nempe numerum solum et exponentem ; cum ille etiam præsupponat inventas complexiones antecedentes. ».

A partir de ce schéma, on comprend comment Leibniz a pu relier la formule de récurrence du triangle arithmétique (qu'on appelle aujourd'hui "la formule de Pascal") avec la formule des ordres numériques, c'est-à-dire une formule intégrale de la construction des nombres figurés :

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\!\binom{j}{k-1}\!\right)$$

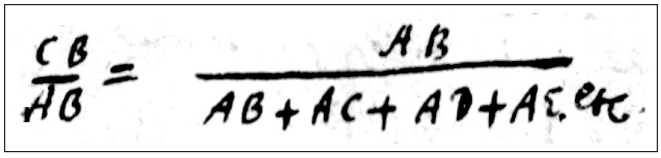
Ainsi, l'exposant ne représente pas ici la place d'un terme dans une progression, mais l'ordre de complication d'un coefficient construit par des itérations d'auto-similarité. C'est l'étape dans l'algorithme nécessaire à la construction de ce terme, c'est-à-dire le nombre d'itérations qu'il faut répéter pour atteindre l'unité à partir d'une complexion de schéma semblables.

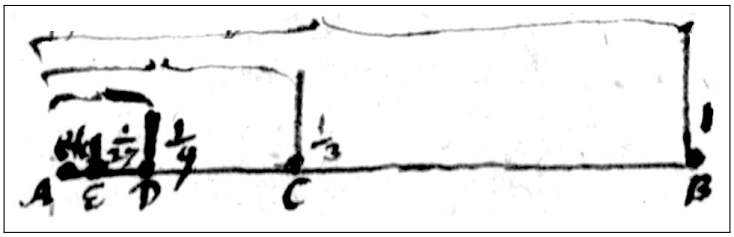
### 10.1.3 Suite géométrique et inverses des nombres figurés

#### La somme des suites géométriques

Dans un passage l'*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum* (A II, 1, N.109) auquel Leibniz a renoncé [11], Leibniz commence par donner la valeur des sommes des progressions géométriques, avant d'annoncer ses propres résultats sur les sommes des inverses des nombres figurés. Il en donne d'abord un énoncé géométrique qu'il attribue aux « anciens » (« *veteres* ») :

> *Les anciens nous ont fourni cette règle pour obtenir la somme des fractions, ou des rapports en progression géométrique qui décroissent à l'infini. On se donne une quantité, par exemple la présente ligne AB, et cette ligne, on l'a coupe et la coupe de nouveau, ainsi continument, de sorte qu'on ait, de façon continue, le rapport entre la sous-section, ici AD et la section, ici AC qui soit égal au rapport de la section AC au tout, ici AB, c'est-à-dire de sorte que les rapports suivants soient égaux :* $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}$ *etc. Alors, le rapport de CB (le reste du tout AB, duquel on a ôté la section AC) au tout AB sera égal au rapport du tout AB à la conjonction totale formée du tout, et en outre une fois la section, et puis la section de la section etc, tous pris ensembles* [12]




Manuscrits de Leibniz - LH 35, 3 A, 32, Bl.5.

On a donc la proportion suivante :

$$\frac{l - \alpha l}{l} = \frac{l}{l + \alpha l + \alpha^2 l + \alpha^3 l + \text{etc.}}$$

11. Ce passage se trouve dans la version *A* et *C*, mais pas dans la *D*. Pour rappel, les versions *A* et *B* sont deux textes préparatoires de l'*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum* (A III, 1, N.2) aux contenus presque totalement disjoint, la version *C* est la version semi-finale et la version *D* est la version finale de la lettre.

12. A II, 1, N.109, Lettre à Jean Gallois, fin 1672 - p.343 : « Veteres dedere nobis regulam ineundi summam fractionum sive rationum geometrica progressione in infinitum decrescentium. Quantitate enim data exposita linea $AB$ eaque linea ita continue secta et subsecta, ut ea sit continue ratio subsectionis ut $AD$ ad sectionem ut $AC$, quæ est sectionis $AC$ ad totum ut $AB$ seu ut æquales sint rationes $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}$ etc. tunc quæ est ratio $CB$ (residui ex toto $AB$ detracta sectione $AC$) ad totum $AB$, ea erit ratio totius $AB$ ad totum compositum ex toto et adhuc semel sectione et adhuc sectionis sectione etc. simul sumtis »

Leibniz donne ensuite une forme arithmétique à cette formule, dont il sous-entend, cette fois-ci, avoir la primeur [13] :

> *J'ai vu chez certains savants quelques tentatives de démonstration de cette règle, mais elles n'étaient pas générales. Pour ma part, non seulement j'en ai la preuve à partir de principes universels, mais outre cela, j'en tire une jolie conséquence, à savoir qu'étant données des fractions décroissantes dont le numérateur est l'unité et les dénominateurs sont en fait les termes d'une certaine progression géométrique, alors la somme de toutes les fractions de cette progression donnée sera la première fraction de la progression géométrique précédente.* [14]

On a donc :

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\frac{1}{p^4}+\cdots+\frac{1}{p^n}+\cdots=\frac{1}{p-1}.$$

Cette formule est une conséquence directe de la règle précédente, et Leibniz la présente comme telle.

### Analogie entre les suites des inverses des figurés et celles des puissances géométriques

Leibniz relie presque sans le dire la formule précédente à sa propre formule sur les inverses des nombres triangulaires :

> *Mais ceci n'est rien ; nous accèdons de cette manière à ce pour quoi on n'avait pas encore trouvé de règle.* [15]

Certes, si l'on met en regard les deux formules, le parallèle est saisissant :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{p^n}=\frac{p}{p-1}\qquad\qquad\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{\left(\!\binom{n}{p}\!\right)}=\frac{p}{p-1}$$

Cette analogie influence de façon profonde les premiers travaux de Leibniz sur les séries, bien qu'il ne la note jamais explicitement, potentiellement du fait qu'il ne dispose pas des symboles formels qui nous permettent de mettre en évidence la similitude des formules. Cependant, tous les travaux sur les sommes bidimensionnelles que nous avons exposé dans notre première partie sont fondés sur ce parallèle.
En réalité, ces formules explicites nous permettent d'interroger les détails de cette analogie qui ont naturellement échappé au jeune Leibniz, mais qui ont leur intérêt dans la présente discussion. Dans le cas des progressions géométriques, l'exposant est l'indice $n$ qui est variable et sur lequel on fait la somme. L'exposant représente la position dans la liste et commence à 0, position d'origine. Pour la formule des inverses des nombres figurés, l'exposant est, au contraire, le paramètre fixé $p$. Il désigne cette fois-ci une propriété des termes de la suite, à savoir le nombre de réplications dont ils sont issus depuis l'unité. Pour Leibniz, la première progression formée uniquement de termes égaux à l'unité est déjà le produit d'une réplication. En effet, les unités se répètent une fois, au travers de leur succession et donc leur exposant est 1 là où nous notons $p=0$ dans notre formalisme. Ainsi, pour être plus fidèle à sa définition de l'exposant, il convient de noter que le résultat pour l'exposant $p$ vaut plutôt $\frac{p-1}{p-2}$.
Finalement les emplois de l'exposant pour les nombres combinatoires dans la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8) et dans l'*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum* (A II, 1, N.109) sont très différents, bien qu'ils désignent tous deux le $k$ dans $\binom{n}{k}$. Nous venons de voir, tout d'abord, qu'il y a un décalage entre ces deux usages. Par exemple l'exposant des nombres triangulaires, qui sont des combinaisons ("*con2natio*"), vaut naturellement 2 dans le *De Arte* mais il vaut 3 dans l'*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum*. Mais ce petit décalage dissimule une profonde différence de conception. Dans le *De Arte*, l'exposant est pris comme analogue de l'exposant des progressions géométriques. Il désigne la place qu'occupe un terme dans une progression. Ces progressions sont les suites finies des coefficients binomiaux et dépendent

13. En réalité, cette formule et sa démonstration se trouve déjà chez Grégoire de Saint-Vincent que Leibniz a probablement lu, *Cf* la note de l'éditeur du texte dans A III, 1, N.2, Lettre à Jean Gallois, fin 1672 - p.4-5

14. A II, 1, N.109, Lettre à Jean Gallois, fin 1672 - p.344 : « Hujus regulæ demonstrationem tentatam vidi a doctis quibusdam viris, sed non absolutam ; ego eam non demonstro tantum ex principio universali, sed et consequentiam ex ea duco elegantem scilicet : Sumtis fractionibus continue decrescentibus, quarum numerator sit unitas, nominatores vero termini progressionis cujusdam geometricæ ; summa fractionum omnium progressionis datæ erit fractio prima progressionis geometricæ præcedentis. »

15. A II, 1, N.109, Lettre à Jean Gallois, fin 1672 - p.344 : « Sed hoc parum est ; accedamus ad ea, de quibus ne regula quidem hactenus fuit. »

d'un paramètre fixé qu'il appelle le nombre, c'est-à-dire le $n$ dans $\binom{n}{k}$. A l'inverse, c'est ce nombre $n$, dans $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ cette fois-ci, qui désigne la place du terme dans la progression au sein de l'*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum*. L'exposant $k$ (ou en réalité $k+1$) désigne le paramètre global de la progression. Le rôle des paramètres $n$ et $k$ est donc inversé [16]. En donnant un rôle de paramètre fixé à l'exposant, Leibniz fait rentrer cette notion combinatoire dans une expression algébrique. Ce transfert ouvre la voix à la généralisation des exposants et au calcul qu'on va pouvoir y appliquer.

16. Nous avons déjà fait cette remarque, *Cf* à la p.234.

## 10.2 Les travaux sur les Paraboloïdes de l'été 1673

On trouve un important groupe de textes datant de l'été 1673 [17] consacrés à la quadrature des paraboloïdes et des hyperboloïdes, c'est-à-dire des courbes respectants des équations cartésiennes :

- ⋆ Pour les paraboloïdes : $y^n = a^{n-k}x^k$.
- ⋆ Pour les hyperboloïdes : $a^n = y^{n-k}x^k$

Dans une démarche visiblement inspirée par Wallis, Leibniz dresse plusieurs tables permettant le calcul de ces différentes quadratures. Leibniz pose alors une question surprenante :

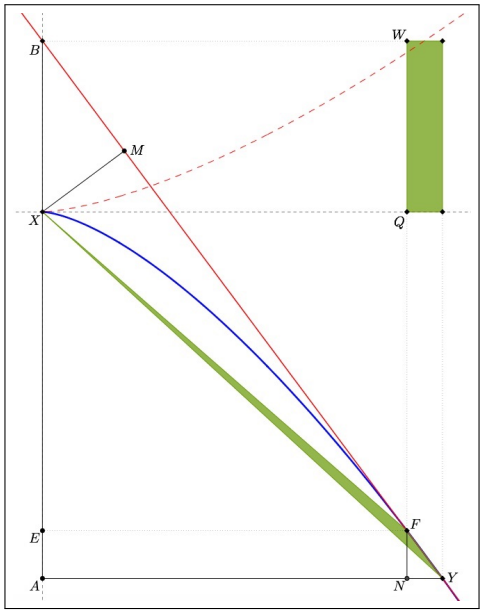
> *Il subsiste d'innombrables figures dont on peut obtenir la quadrature par cette même méthode et qui ne figurent pas dans la table précédente, comme celles pour qui les exposants sont ou bien comme des rompus, ou bien comme entiers ajoutés à des rompus. Par exemple :* $ax^{\frac{1}{2}} = y$. *Mais cela est réduit à cette équation* $\frac{ax}{2} = x^2$. *Mais ce qu'il faudrait chercher plus loin à leur sujet, c'est s'il est possible qu'on ait des exposants qui soient des nombres sourds.* [18]

Cette question témoigne d'une démarche originale, par rapport à celle de Wallis. Pour la quadrature du cercle chez Wallis, ou chez Mengoli, il s'agit de trouver comment combler les espaces vides d'une table *a posteriori*. De fait, ces derniers partent tous les deux du constat que l'équation cartésienne du cercle fait intervenir des racines carrés, ce qui les pousse à chercher des quadratures pour des courbes ayant des degrés intermédiaires, en l'occurence des moitiés de degré. Ici, la quadrature du cercle n'est pas évoquée. Il ne s'agit pas de trouver une place dans la table pour des courbes qui ont des degrés atypiques, mais plutôt de considérer en premier lieu les places manquantes, pour se demander si elles correspondent à des degrés qu'on n'avait pas considérés jusque là.

### 10.2.1 Une propriété notable des tangentes

#### Méthode de transmutation pour les paraboloïdes

Commençons par décrire la méthode de quadratures qu'emploie Leibniz dans ces textes [19]. Ce que nous décrivons ici découle de la démonstration que Leibniz effectue au sein du *Pars Prima - De Parabolœidum Quadratura* dans le *De Parabolœidum et Hyperbolœidum Quadratura III* (A VII, 4 B, N.39$_1$).




17. A VII, 4 B, N.37,38,39

18. A VII, 4 B, N.38, *De Parabolœidum et Hyperbolœidum Quadratura II*, Eté 1673 - p.611 : « Innumeræ supersunt figuræ ; eadem methodo quadrabiles, quæ in tabula præcedente non continuentur, uti, in quibus exponentes sunt ut numeri fracti, aut ut integri ad fractos, v. g. $ax^{\frac{1}{2}} = y$, sed id reducitur ad hanc æquationem : $\frac{ax}{2} = x^2$. Sed in hæc ulterius inquirendum, et an exponentes surdi esse possint. »

19. Dans la suite de cette section, nous allons nous référer à plusieurs diagrammes très similaires, de différents auteurs. Pour simplifier la compréhension du lecteur, nous avons unifié les notations sur toutes les figures. Les citations latines originales sont reproduites avec les notations originales mais nous avons adapté les traductions.

Dans la figure suivante, Leibniz montre que l'aire du triangle $XFY$ vaut la moitié de celle du rectangle $WQ$. Le cœur de la démonstration repose sur le triangle caractéristique $FYN$ et le fait qu'il est semblable au triangle $BXM$. Ainsi, on a :

$$\frac{FY}{NY} = \frac{BX}{MX}$$

Or $XM$ est la hauteur du triangle $XFY$ et $BX = WQ$. Ainsi, si l'on note $a_1$ l'aire du triangle $XFY$ et $a_2$ celle du rectangle $WQ$, on obtient :

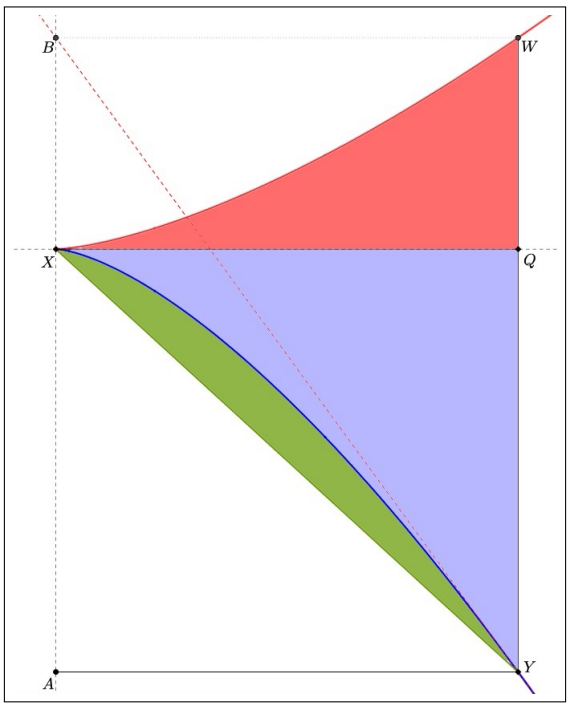
$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{FY.MX}{2} \\ &= \frac{NY.BX}{2} \\ &= \frac{NY.WQ}{2} \\ &= \frac{a_2}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, en appliquant le même raisonnement pour tous les points $F$ d'abscisse $E$, sur la courbe comprise entre $X$ et $Y$, Leibniz obtient que l'aire du bas dans la figure ci-contre est égale à la moitié de l'aire du haut. Il note $z^2$ l'aire du milieu, qui est la quadrature à déterminer et $b^2$ l'aire du rectangle $AQYA$.
Leibniz affirme qu'il existe un rapport constant entre les abscisses de la courbe et les projetés de la tangente sur l'axe. Autrement dit, le rapport entre $XA$ et $XB$ est constant quel que soit le point $Y$ de la courbe. Cette propriété n'est pas démontrée par Leibniz, mais elle est selon lui vérifiée par les courbes paraboloïdes et hyperboloïdes. Il note $\beta$ ce rapport. Il en déduit que ce rapport est également celui de l'aire rouge sur l'aire bleue $z^2$ [20].
Ainsi, il obtient la relation suivante :

$$\frac{b^2}{2} = \underbrace{z^2}_{\text{aire centrale}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{z^2}{\beta}}_{\text{aire du bas}}$$

Donc, la quadrature cherchée vaut :

$$z^2 = \frac{b^2}{2 + \frac{1}{\beta}}$$



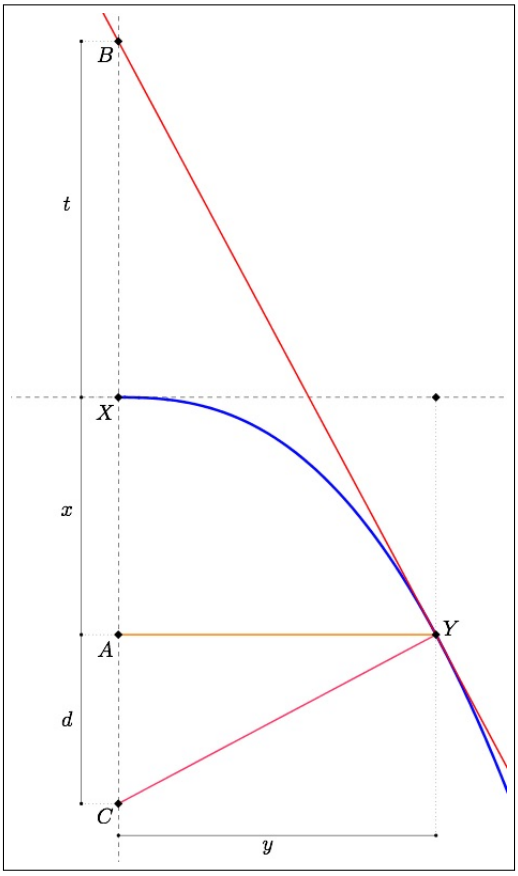

20. Sans le dire, Leibniz applique ici le raisonnement des indivisibles de Cavalieri, dont on sait qu'il a lu les grands principes peu avant de partir pour Mayence en 1669. Ce raisonnement est très présent dans l'œuvre de Wallis.

Leibniz peut ainsi dresser une table des différentes quadratures de paraboloïdes selon la valeur du paramètre $\beta$. Il couple la méthode différentielle naissante qu'il a puisée chez Pascal avec des principes d'indivisibles plus classiques qu'il a pu voir chez Wallis. Il est clair que le jeune mathématicien ignore à ce moment les formules de dérivation et d'intégration des courbes paraboloïdes, à savoir :

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad \text{et} \quad d(x^n) = n x^{n-1} dx$$

**La propriété des paraboloïdes et des hyperboloïdes**

Tout au long du groupe de textes consacrés à la question de la quadrature des paraboïdes, Leibniz affirme que ces courbes respectent une propriété remarquable vis-à-vis de leur tangente.




Cette propriété, déjà évoquée ci-dessus, affirme que le rapport entre la grandeur qui sépare le sommet de la courbe de l'abscisse d'un point et la grandeur qui le sépare du point de rencontre entre l'axe et la tangente à la courbe en ce même point, est constant :

> *Si $y$ est l'ordonnée et $x$ l'abscisse, et qu'on a un rapport toujours constant entre $AB$ et l'abscisse, comme pour les hyperboloïdes et les paraboloïdes, on pose que $\beta$ est ce rapport.* [21]

On obtient la relation suivante :

$$\beta = \frac{x+t}{x}$$

Notons que dans la démonstration précédente, le rapport $\beta$ était défini différemment : $\beta = \frac{t}{x}$ au lieu de $\beta = \frac{x+t}{x}$. Comme la différence entre ces deux rapports est toujours d'une unité, s'il est constant, l'autre l'est aussi. Leibniz définit $\beta$ tantôt comme l'un et tantôt comme l'autre.
Ce rapport $\beta$ est un paramètre caractéristique de la courbe. Les courbes paraboloïdes peuvent être étiquetées par une quantité géométrique, à savoir un rapport entre deux grandeurs. Si cette grandeur

21. A VII, 4 B, N.37, *De Parabolœidum et Hyperbolœidum Quadratura I*, Eté 1673 - p.598 : « Si $y$ sit applicata, et $x$ sit abscissa, habeatque $AB$ constantem semper rationem ad abscissam, ut in hyperboloeidibus et paraboloeidibus, ea ratio ponatur esse $\beta$. »

est quelconque, la méthode de quadratures que nous avons présentée plus haut reste applicable en toute généralité. Mais que dire de la forme algébrique de ces courbes ? Pour Leibniz, la question est difficile :

> *Mais quoi qu'il en soit, si BX sur BA est différent du rapport entre un entier rationnel et un autre entier rationnel, comme par exemple* $\frac{1}{2}$ *sur* 1, *comme* $\frac{3}{4}$ *sur* $\frac{2}{3}$ *ou encore comme Rq*2. *sur* 1, *ce qui peut assurément advenir, ce qui est manifeste ici c'est que la figure n'en est pas moins quadrable, bien qu'on ne puisse pas exprimer la forme du paraboloïde.* [22]

En réalité, Leibniz connait la réponse à cette question, puisqu'il sait comment exprimer le rapport $\beta$ en fonction des exposants présents dans la forme algébrique. De fait, Leibniz annonce que si la courbe a la forme $y^n = a^{n-k}x^k$, alors le rapport $\beta$ vaut :

$$\beta = \frac{n}{k}$$

> *Et puisque* $\beta$ *est le rapport des exposants de la puissance de* $x$ *et* $y$. [23]

Ceci empêche de croire que Leibniz aurait simplement défini les courbes paraboloïdes ou hyperboloïdes comme celles qui vérifient la propriété du rapport $\beta$ constant. En effet, il semble bien qu'il définisse ces courbes par leurs formes algébriques, comme nous l'avons présenté en commençant cette étude. Une question naturelle se pose alors : comment Leibniz déduit-il la propriété du rapport $\beta$ constant, à partir des formes algébriques ? Comme nous l'avons dit, Leibniz ne fournit aucune démonstration, ce qui nous mène vers la tâche périlleuse qu'est la reconstitution.

### 10.2.2 L'influence de Wallis

Nous avons déjà développé longuement cet aspect. Dans sa correspondance avec Wallis, à la fin des années 1690, Leibniz rappelle la place importante que tient l'*Arihtmetica Infinitorum* pour lui.

> *Avant tout, je fais grand cas de ta méthode d'interpolation et je pense que l'on peut encore en tirer quelque chose dans les profondeurs. Et je souhaite à plus forte raison qu'on la pousse plus loin, à d'autres binômes ou trinômes etc. et ensuite aussi aux parties de ces figures.* [24]

Mais Leibniz insiste très tôt et à de nombreuses reprises sur le caractère inductif et par conséquent insuffisant de la démarche de Wallis. Pourtant les processus tabulaires auxquels s'adonne le jeune philosophe dans ses travaux de 1673 trahissent la forte influence qu'exerçait probablement déjà les écrits du mathématicien britannique.

#### Barrière géométrique de l'irrationnalité

Ainsi, dans le *De Parabolœidum et Hyperbolœidum Quadratura III* (A VII, 4 B, N.39$_1$), Leibniz entreprend lui aussi de dresser des tables à partir des résultats obtenus par sa méthode de quadrature. Pour rappel, si le paraboloïde possède un rapport $\beta$, la quadrature est donnée par la formule :

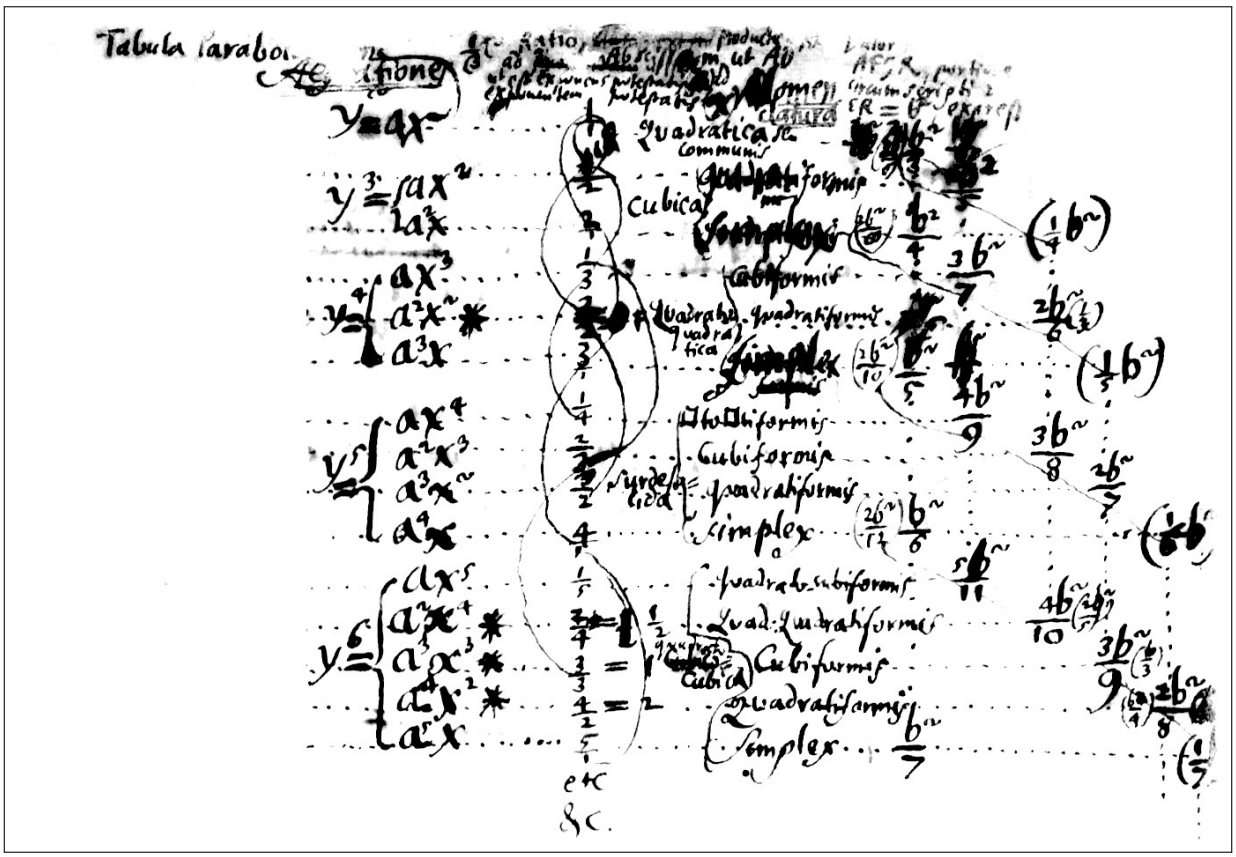
$$z^2 = \frac{b^2}{2 + \frac{1}{\beta}}$$

Avec $\beta = \frac{t}{x} = \frac{n-k}{k}$. Comme l'indique ici Leibniz, le rapport $\beta$ n'est pas le rapport des exposants de $x$ et de $y$ mais des exposants de $x$ et $a$ dans l'équation $y^n = a^{n-k}x^k$.

22. A VII, 4 B, N.38, *De Parabolœidum et Hyperbolœidum Quadratura II*, Eté 1673 - p.611 : « Sed quicquid eius sit, illud certe manifestum est, si $CX$ sit ad $CB$ aliter quam integer rationalis ad integrum rationalem, v. g. ut $\frac{1}{2}$ ad 1. vel ut $\frac{3}{4}$ ad $\frac{2}{3}$. vel ut *Rq*2. ad 1. quod certe fieri posse manifestum est, patet non ideo minus quadrari figuram, etsi paraboloeidum forma enuntiari non possit. »

23. A VII, 4 B, N.37, *De Parabolœidum et Hyperbolœidum Quadratura I*, Eté 1673 - p.599 : « Et quia $\beta$ est ratio exponentium potestatis $x$ et $y$. »

24. A III, 7, N.103, Lettre de Leibniz à Wallis du 28 mai 1697 - p.427 : « Tuam methodum interpolatoriam imprimis magni facio, et puta aliquid habere adhuc in recessu. Vellemque adeo produci ipsam longius ad alia binomia, trinomiave etc. tum etiam ad partes ipsas figurarum. »




Manuscrits de Leibniz - LH 35, 2, 1 Bl.95v

Table des Paraboloïdes

Equations

$y^2 = ax$

$y^3 = \begin{cases} ax^2 \\ a^2x \end{cases}$

$y^4 = \begin{cases} ax^3 \\ a^2x^2 \\ a^3x \end{cases}$

$y^5 = \begin{cases} ax^4 \\ a^2x^3 \\ a^3x^2 \\ a^4x \end{cases}$

$y^6 = \begin{cases} ax^5 \\ a^2x^4 \\ a^3x^3 \\ a^4x^2 \\ a^5x \end{cases}$

$\frac{1}{\beta}$ : rapport de la produite $XB$ à l'abscisse $XA$
comme l'est l'exposant de la puissance ($a$) à l'exposant de la puissance ($x$)

Nomenclature

Valeur de la parabole trilinéaire $AFGQ$
portion aliquote du rectangle circonscrit $AQ$ en exprimant $AQ = b^2$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{1}$ | quadratique c'est-à-dire commun | | $\frac{2b^2}{6}$ |
| $\frac{1}{2}$ | cubique | quadratiforme | $\frac{2b^2}{5}$ |
| $\frac{2}{1}$ | | simpliciale | $\frac{2b^2}{8}$ $\frac{b^2}{4}$ |
| $\frac{1}{3}$ | | cubiforme | $\frac{3b^2}{7}$ |
| $\frac{2}{2}$ | quadrato quadratique | quadratiforme | $\frac{2b^2}{6}$ |
| $\frac{3}{1}$ | | simpliciale | $\frac{2b^2}{10}$ $\frac{b^2}{5}$ |
| $\frac{1}{4}$ | | quadratoquadratiforme | $\frac{4b^2}{9}$ |
| $\frac{2}{3}$ | sursolide | cubiforme | $\frac{3b^2}{8}$ |
| $\frac{3}{2}$ | | quadratiforme | $\frac{2b^2}{7}$ |
| $\frac{4}{1}$ | | simpliciale | $\frac{2b^2}{12}$ $\frac{b^2}{6}$ |
| $\frac{1}{5}$ | | quadratocubiforme | $\frac{5b^2}{11}$ |
| $\frac{2}{4}$ | quadrato cubique | quadratoquadratiforme | $\frac{4b^2}{10}$ |
| $\frac{3}{3}$ | | cubiforme | $\frac{3b^2}{9}$ |
| $\frac{4}{2}$ | | quadratiforme | $\frac{2b^2}{8}$ |
| $\frac{5}{1}$ | | simpliciale | $\frac{2b^2}{14}$ $\frac{b^2}{7}$ |

etc.

*Cf* A VII, 4, N.39$_1$, *Pars Prima - De Parabolœidum Quadratura*, été 1673 - p.628-629

Cette table est constituée de quatre colonnes.

- ⋆ Dans la première colonne, on trouve les formes algébriques des paraboloïdes, classées selon une méthode combinatoire, c'est-à-dire la bipartition de l'exposant $n$ de $y$.
- ⋆ La deuxième colonne indique les rapport $\frac{1}{\beta}$ associés à chaque formule. Les lignes qui relient les rapports entre eux forment quatre suites :

  $\rightarrow \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}$ etc.
  $\rightarrow \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}$ etc.
  $\rightarrow \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}$ etc.
  $\rightarrow \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ etc.

  Ces suites rappellent la définition des indices simples et composés chez Wallis.
- ⋆ La troisième colonne donne une nomenclature des différents paraboloïdes, fondée sur la composition des puissances. Là encore, la démarche s'inspire visiblement de Wallis [25].
- ⋆ La quatrième colonne donne les quadratures en fonction de $b^2$. Au lieu de toutes les placer sur une même colonne, Leibniz étale les quadratures sur l'axe horizontal pour mettre en évidence des progressions. Cette opération est caractéristique de sa méthode combinatoire. L'objectif de la table n'est pas seulement de lister, mais de mettre en évidence des relations de progression qui permettent de compléter la table sans le moindre calcul extérieur, à partir d'un petit nombre de valeurs initiales. Cette démarche n'est pas simplement plus pratique ou plus efficace. Par le biais des relations au sein de la table, Leibniz a à cœur de saisir les relations qu'entretiennent les objets eux-mêmes.

Ici Leibniz ne cherche pas à combler les trous dans la table, comme le fait Wallis. En effet, ce n'est pas un tableau à double entrée qui donnerait la relation entre l'exposant de $x$ et l'exopsant de $a$. Il s'agit d'une suite unidimensionnelle qui liste toutes les équations possibles par un procédé combinatoire arborescent [26], au travers duquel il ne ferait pas de sens d'entreprendre une quelconque interpolation. Leibniz éprouve ainsi des difficultés vis-à-vis de la possibilité même d'écrire formellement des puissances irrationnelles :

> *A cette étape, il nous apparait déjà qu'il y a une infinité d'autres figures dont on peut obtenir la quadrature par la même méthode que dans notre problème, bien qu'elles ne soient pas contenues dans la table des paraboloïdes peu importe comment on la poursuive. De sorte que la produite $XB$ serait vis-à-vis de l'abscisse $XA$ comme un nombre entier par rapport à un sourd, ou un sourd par rapport à un entier, ou encore un sourd par rapport à sourd. En effet, si l'on pose que $XB$ est à $XA$, comme par exemple 1 à $\sqrt{6}-1$, la figure des paraboloïdes étant tirée des principes de la règle apportée, donnera cette équation : $y^{\sqrt{6}} = ax^{\sqrt{6}-1}$, où $x$ et $y$ sont élevés à certaines dimensions imaginaires, telles que les puissances intermédiaires que l'on peut imaginer entre le carré et le cube, entre le cube et le carré-carré et autres. Quant à rapporter que ces formules s'expriment en vérité par une méthode commune, je n'en serais pas si assuré à ce stade.* [27]

25. Leibniz nomme l'expression $y^6 = ax^5$ une courbe « quadratocubique quadratocubiforme » (« *quadratocubica quadratocubiformis* »). On voit qu'il emploie le même qualificatif « quadratocubique » (« *quadratocubicus* ») pour désigner à la fois la sixième puissance de $y$, puisque $6 = 2 \times 3$ et la cinquième puissance de $x$, puisque $5 = 2 + 3$. Ceci indique vraisemblablement une confusion entre l'usage additif et l'usage multiplicatif de la dénomination. Leibniz emploie également le qualificatif « sursolide » (« *sursolidus* ») pour désigner la cinquième puissance de $y$, ce qui semble confirmer l'usage multiplicatif de la dénomination. Pourtant, dans la table des hyperboloïdes que Leibniz construit par la suite (A VII, 4, N.39$_2$, *Pars Secunda. De Hyperbolœidum Quadratura*, été 1673 - p.646), il utilise clairement la dénomination additive. En effet, il indique pour le degré 5 : « sursolide, c'est-à-dire quadratocubique » (« *sursolida seu quadratocubica* »), donc $5 = 2 + 3$. Et il remplace pour le degré 6 le qualificatif « quadratocubique » (« *quadratocubica* ») par « cubicocubique » (« *cubicocubica* »), donc $6 = 3 + 3$.

26. La référence aux arbres combinatoires n'est pas faite ici au hasard. En effet, Leibniz traite le problème qui consiste à donner toutes les bipartitions $\{a, b\}$ d'un nombre $n = a + b$ dans la *Dissertatio de Arte Combinatoria*, dans le cadre de sa réflexion sur les arbres généalogiques (A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, mars 1666 - p.209)

27. A VII, 4 B, N.39$_1$, *Pars Prima - De Parabolœidum Quadratura* dans le *De Parabolœidum et Hyperbolœidum Quadratura III*, Eté 1673 - p.627 : « Hinc iam illud apparet infinitas esse alias figuras, quæ eadem problematis nostri methodo quadrari possint, quanquam tabula parabolœidum utcunque continuata non contineantur, ut si producta $AK$, sit ad abscissam $AD$, ut numerus integer ad surdum, vel ut surdum ad integrum, vel surdus ad surdum. Nam si ponatur $AK$ ad $AD$, exempli gratia, ut 1 ad $Rq6. - 1.$ figura paraboloeidum more ex regulæ allatæ præceptis tractata daret hanc æquationem : $y^{Rq6} = ax^{Rq6-1}$, ubi $y$ et $x$ ad dimensiones quasdam imaginarias, quales inter quadratum et cubum, cubum et quadrato-quadratum, aliasque potestates mediæ fingi possunt, ascendunt. Quas vero formulas ad communem enuntiandi rationem revocare, non adeo expeditum opinor futurum est. »

Pour pouvoir donner du sens à l'expression $a^{\sqrt{2}}$ à partir d'un rapport $\beta$ irrationnel, il faut pouvoir considérer la forme comme primordiale. Il est nécessaire de postuler *a priori* qu'un paraboloïde se caractérise avant tout par sa forme $y^{\eta}$ pour en déduire que si cet exposant $\eta$ se trouve projeté dans un rapport $\beta$ irrationnel, alors cet exposant $\eta$ est irrationnel. Cette primauté donnée à la forme n'est pas encore réellement assurée au début du séjour parisien. L'écriture cartésienne sur-élevée implique l'existence d'un certain degré spatial, qui devient imaginaire, lorsqu'on parle d'exposant non-entier. Mais si l'on s'arrête à ce constat, il semble que le même problème se pose pour les exposants fractionnaires et pour les exposants irrationnels. La précédente citation est la copie d'un passage raturé dans le même manuscrit. Ce passage permet de mieux comprendre en quoi les exposants irrationnels constituent en réalité un cas particulier pour Leibniz.

> *Et il n'est de fait pas possible d'expliciter des puissances dont les exposants seraient des nombres sourds, par exemple* $y^{\sqrt{6}} = ax^{\sqrt{6}-1}$*, et ce à moins qu'on trouve par hasard une méthode pour lever l'irrationalité et ce qui arriverait en multipliant par lui-même* $ax^{\sqrt{6}-1}$ *autant de fois qu'il y a d'unité dans* $\sqrt{6}$*, c'est qu'on obtienne* $y^6$*. Mais l'autre membre de l'équation restera dès lors entravé, puisque donnant* $y^6 = a^{\sqrt{6}}x^{6-\sqrt{6}}$*.* [28]

C'est bien l'irrationalité de l'exposant que Leibniz pointe. Cette irrationalité s'implémente dans la forme, puisqu'il ne trouve pas d'opération rationnelle pour éliminer la racine dans l'exposant. Pour l'illustrer d'avantage, mentionnons l'argument qu'utilise Wallis lui-même pour traiter des exposants fractionnaires, lors de sa correspondance avec Leibniz, qui est très tardive :

> *Où l'on note de plus que l'induction ne s'applique pas de la même manière aux séries pour les ordonnées irrationnelles, à cela on peut remédier facilement. Par exemple, lorsque j'ai montré que le complément de la parabole (qui est la série des seconds rangs) est* $\frac{1}{3}$ *du parallélogramme circonscrit, là il suit aussitôt que la parabole elle-même (qui est la série des sous-seconds rangs) est* $\frac{2}{3}$ *du même parallélogramme, (Proposition 23 de l'Arithmétique des Infinis). Et il en va de même des autres.* [29]

Le mathématicien britannique montre ici que la nature des indices n'est pas propre à la courbe mais dépend de la manière dont on souhaite en faire la quadrature. Ainsi, la même courbe peut correspondre à la fois à un exposant entier et à son inverse qui est fractionnaire. Evidemment cet argument ne fonctionne plus pour les exposants irrationnels, car peu importe le changement de repère, il opérera une transformation rationnelle sur l'exposant, qui restera donc irrationnel. La nature des exposants et celle des courbes ne sont dès lors pas autant décorrélées que ce que Wallis semble suggérer dans sa lettre de 1696. Il apparaît donc que Leibniz l'avait déjà pressenti dès 1673, en posant la question du rapport entre les propriétés géométriques de la courbe et ses propriétés algébriques.

### La solution de la transmutation

Dans une lettre, écrite à la même période que celle envoyée à Laroque en décembre 1675, et sur le même sujet, mais dont on ignore le destinataire [30], on trouve ce commentaire :

> *Ce théorème a de grandes suites, et il suffit luy seul pour prouver par une seule demonstration Geometrique toutes les Quadratures de l'Arithmetique des infinis, que le celebre Mons. Wallis n'a trouvé que par induction ; outre quantité d'autres, que j'ay trouvées par là.* [31]

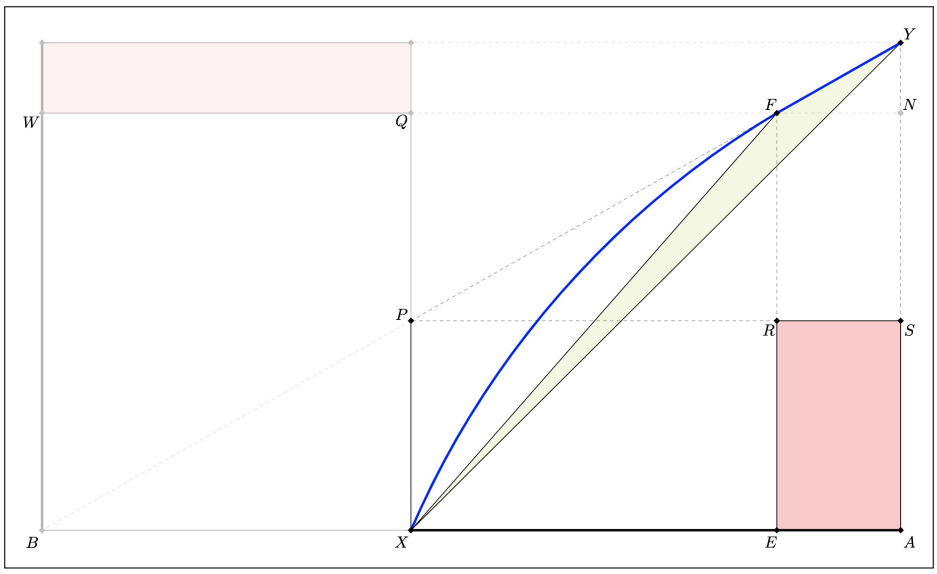
Leibniz indique donc que sa méthode permet de remédier au problème de l'induction chez Wallis. Mais de quelle méthode s'agit-il exactement ? Le théorème dont Leibniz parle ici constitue l'énoncé géométrique fondamental qui fonde sa méthode de quadratures du cercle par transmutation. Il affirme que, dans la figure suivante, l'aire du triangle $XFY$ est égale à la moitié de celle du rectangle $ERSA$.

28. A VII, 4 B, N.39$_1$, *Pars Prima - De Parabolœidum Quadratura* dans le *De Parabolœidum et Hyperbolœidum Quadratura III*, Eté 1673 - p.625 : « Neque potestates enuntiari possunt, quarum exponentes sint numeri surdi, v.g. $y^{Rq6} = ax^{Rq6-1}$, nisi quis forte methodum inveniat, tollendi irrationalitatem, quod fieret ducendo ipsum $ax^{Rq6-1}$ toties in se, quot in $Rq$ 6 sunt unitates, fieret $y^6$, sed altera æquationis pars non ideo statim ab æquatione liberata foret cum fiat $y^6 = a^{Rq6}x^{6-Rq6}$. »

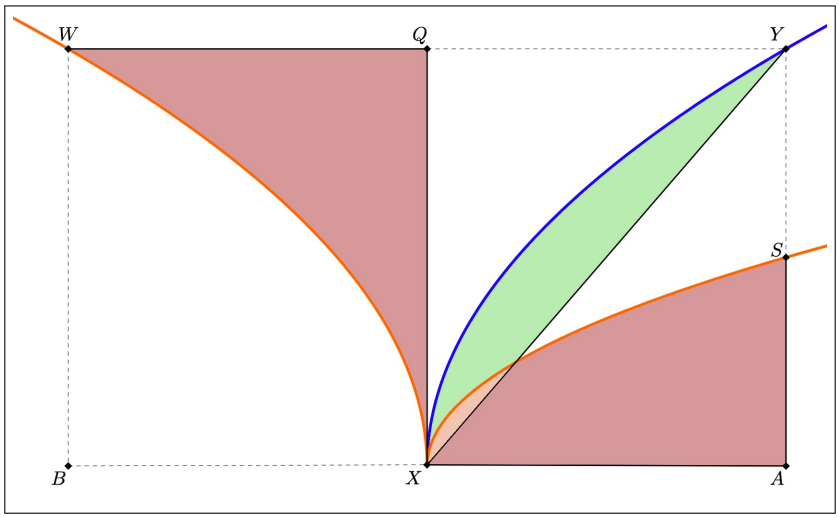
29. A III, 7, N.55, Lettre de Wallis à Leibniz du 1$^{er}$ décembre 1696 - p.210 : « Ubi autem notat, Inductionem non pariter applicabilem seriebus pro Ordinatis Irrationalibus : huic facile subvenitur. Verbi gratia, Cum ostenderim Complementum Parabolæ (quæ est series Secundanorum) esse $\frac{1}{3}$ Parallelogrammi circumscripti ; hinc statim sequit, Parabolam ipsam (quæ est series subsecundanorum) esse $\frac{2}{3}$ ejusdem Parallelogrammi, (prop. 23 *Ar. Infin.*). Et de reliquis simiter. »

30. Les éditeurs de l'*Akademie* suppose qu'elle est déstinée à Gallois

31. A III, 1, N.73, Lettre supposée à Gallois, fin 1675 - p.359




Le raisonnement est le même que celui que nous avons décrit plus haut, où l'on montrait que l'aire du triangle $XFY$ est la moitié de celle de $WQ$ pour la quadrature des paraboloïdes. Certes, comme le repère n'est pas le même, la courbe obtenue à la sortie est différente :




Néanmoins, on obtient dans les deux cas, et par le même raisonnement géométrique fondé l'homologie de deux triangles, à savoir $YFN$ et $PBX$, une deuxième courbe, directement liée aux tangentes de la première, et dont la surface vaut le double de celle que l'on cherche. Ces deux méthodes de transmutations sont donc rigoureusement équivalentes et s'interprètent par la même formule littérale :

$$\int_0^x f(t)dt - \frac{xf(x)}{2} = \frac{1}{2}\int_0^x (f(t) - tf'(t))dt$$

Ainsi, on peut penser raisonnablement que les réflexions de 1673 et la méthode de quadrature que nous avons décrite dans le *Pars Prima - De Parabolœidum Quadratura* (A VII, 4, N.39$_1$) constituent pour Leibniz une part substantielle du travail accompli pour répondre rigoureusement à la question des quadratures de paraboloïdes et ainsi perfectionner la solution de Wallis.

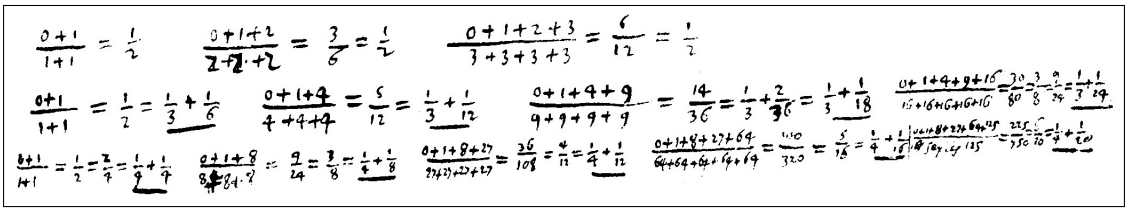
### Méthodes de calcul

Nous avons vu qu'en 1673, Leibniz note la difficulté spécifique des exposants irrationnels. Puis, plus de deux ans plus tard, Leibniz semble voir dans sa méthode de quadrature une solution au problème que Wallis n'avais pas résolu de façon suffisamment rigoureuse. En 1676, dans un texte intitulé *Dissertatio exoterica de usu geometriæ, et statu præsenti, ac novissimis ejus incrementis* (A VII, 6, N.49$_1$), Leibniz indique d'une part que la question n'est pourtant pas encore réglée. Et il indique d'autre part, que les

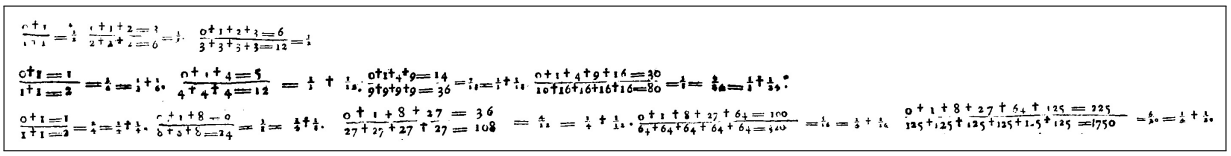
points qui restent à éclaircir concernent les exposants fractionnaires, et non seulement ceux qui sont irrationnels :

> *Ici, à vrai dire, la mention de Wallis me rappelle son Arithmétique des infinis dont j'ai toujours jugé les inventions merveilleuses. Certes Roberval me rapporta que Fermat fut le premier en ce qui concerne les paraboles élevée à une infinité de dimensions, et je le crus facilement pour celles dont les ordonnées sont rationnelles par rapport aux abscisses. En effet, pour leurs dimensions, on n'a besoin de rien d'autre que la façon dont commencent les sommes des nombres carrés, cubes et autres puissances, ce que Fermat pouvait faire. En revanche, pour ce qui est des infinies irrationnelles, telle que serait celle dont l'équation est $ax^2 = y^3$, ainsi que de nombreuses autres figures qu'on ne peut pas traiter facilement d'une autre manière, Wallis a découvert qu'elles sont mesurables, certes par une conjecture et même une induction, mais assurément très belle et même ingénieuse. J'ai compris, en outre, que le savant homme Ismaël Boulliau se consacre à faire en sorte que l'arithmétique des infinis progresse enfin, et soit démontrée et même enrichie. Mais si, dans toutes ces interpolations conjecturées, il se distinguait par une démonstration générale, cela produirait une chose pleinement admirable*[32]

Les apports de l'*Arithmetica Infinitorum* résident donc clairement dans la généralisation des quadratures aux équations irrationnelles, c'est-à-dire aux exposants fractionnaires. Pourtant, nous avons vu que Leibniz a trouvé une méthode dès 1673 qui traite explicitement du cas $y^3 = ax^2$, puisque cette équation figure dans sa table sous la dénomination « cubique quadratiforme » (« *cubica quadratiformis* »).
Néanmoins, la marque de l'ouvrage persiste dans la correspondance et les travaux mathématiques du philosophe sur ces sujets. On trouve par exemple une reproduction des approximations inductives de Wallis dans le manuscrit de travail que nous avons déjà évoqué dans le chapitre précédent, pour expliquer les formules de quadratures en fractions de produits successifs, à savoir le manuscrit LH 35, 14, 2, Bl.65-70. Nous avons vu que ce manuscrit est postérieur à 1693 :



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 14, 2 Bl.68-69



J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*

Ici encore, Leibniz souligne que la procédure est heuristique et inductive. En effet, il note que l'induction permet à Wallis de trouver une formule générale pour les trois premiers degrés :

- ⋆ $\frac{0+1+2+\cdots+n}{n+n+n+\cdots+n} = \frac{1}{2}$
- ⋆ $\frac{0^2+1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2+n^2+n^2+\cdots+n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$
- ⋆ $\frac{0^3+1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^3+n^3+n^3+\cdots+n^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4n}$

32. A VII, 6, N.49$_1$, *Dissertatio exoterica de usu geometriæ, et statu præsenti, ac novissimis ejus incrementis*, août-septembre 1676 - p.507 : « Hic vero Wallisii mentio me admonet *Arithmeticæ Infinitorum*, cujus pulcherrimum semper inventum judicavi. Equidem Robervallius mihi retulit, Fermatium parabolas altiores in infinitum dimensum esse primum, et facile crediderim de illis quarum ordinatæ sunt rationales ad abscissas ; nihil enim aliud ad harum dimensionem requiritur, quam ut summæ numerorum quadratorum, cuborum aliarumqque potestatum ineantur, quod poterat utique Fermatius. Sed irrationals infinitas, qualis ista esset cujus æquatio est $ax^2 \sqcap y^3$, multasque alias figuras, non aliter facile tractabiles, Wallisius conjectura quidem atque inductione, sed ea certe pulchra atque ingeniosa, mensurabiles deprehendit. Intelligo autem Doctissimum Virum Ismaëlem Bullialdum in eo esse, ut Arithmetica infinitorum demonstrata ac locupletata aliquando prodeat. Quodsi in omnibus illis interpolationibus conjecturalibus, generali demonstratione præstiterit, rem sane pulcherrimam fecerit. »

Mais cette induction ne fonctionne plus à partir du degré 4, où la formule devient plus complexe :

> *Il poursuit la chose jusqu'ici, mais pour les biquadratiques, il découvre qu'elle est plus compliquée.* [33]

Néanmoins, même si l'induction échoue désormais à déterminer une loi régulière pour la valeur exacte de ces sommes finies, elle permet néanmoins de révéler celle de leurs limites. La raison pour laquelle le raisonnement inductif fonctionne malgré tout reste obscure aux yeux de Leibniz :

> *Cela donne pourtant alors une règle, et des moyens d'inventer par la continuation, bien que sinueuse. Quant à nous d'ailleurs, nous obtenons ici les universels, à l'occasion d'un exemple de progression au niveau de ses premiers termes, qui ne correspondent pas correctement.* [34]

Ceci montre que l'induction de Wallis garde un aspect mystérieux pour Leibniz non seulement en ce qui concerne la question de l'interpolation du triangle arithmétique, comme nous l'avons vu, mais également pour ce qui touche aux quadratures des paraboloïdes, question qui parait pourtant bien plus claire et rigoureusement tranchée.

Nous avons vu que la méthode de transmutation que Leibniz présente en 1673 est fondée sur un principe non démontré, à savoir qu'il existe un rapport $\beta$ constant entre le projeté de la tangente et l'abscisse. Est-ce cette lacune dans sa propre méthode qui pousse Leibniz à considérer finalement que la question n'est pas résolue ?

Les sources montrent assez nettement que Leibniz n'a pas retrouvé cette propriété par lui-même, mais l'a tire de ses nombreuses lectures sur le sujet. On trouve notamment au printemps 1673 des notes sur la méthode des tangentes de Descartes [35], de Hudde [36], de Ricci [37] ou encore de Sluse [38].

33. LH 35, 14, 2, Bl.65-70 - Manuscrit sans titre, après 1693, Bl.68-69 : « Hactenus rem prosequitur, sed in biquadraticis difficiliorem reperit. »

34. LH 35, 14, 2, Bl.65-70 - Manuscrit sans titre, après 1693, Bl.68-69 : « Regulam tamen dat ibi, & modi inveniendi pro continuatione, etsi perplexa. Nos aliunde hic universalia habemus interim hic exemplum progressionis in non bene respondentis suis initiis. »

35. *Cf* A VII, 4, N.35, *De Tangentium Methodo*, été 1673

36. *Cf* A VII, 4, N.35, *De Tangentium Methodo*, été 1673 - p.485 où Leibniz fait explicitement référence à [22] J. Hudde, *De reductione æquationum* dans *Geometria à Renato Des Cartes*, Amsterdam, 1659 - p.433.

37. *Cf* A VII, 4, N.3, *Zu Mercator, Logarithmotechnia, und zu Ricci, Exercitatio Geometrica*, printemps 1673 - p.48-54, où Leibniz fait référence à [83] M-A. Ricci, *Exercitatio Geometrica de Maximis et Minimis*, Londres, 1668

38. *Cf* A VII, 4, N.8, *Theoremata notabilia ex Fabrio, Slusio et Gregorio Scoto*, printemps 1673 - p.91, où Leibniz fait référence à [100] R. F. Sluse, *Mesolabum*, 2ème édition, Liège, 1668 - *Cf* les *Miscellanea*, Chap.4 « de maximis & minimis », p.114-117

## Conclusion

Ainsi, les exposants désignent à l'origine aussi bien les puissances classiques que des notions purement combinatoires liées aux nombres figurés. Nous avons montré que le dénominateur commun à ces différentes acceptions se trouve dans le processus de réplication. Dès lors, la conception combinatoire de l'exposant du jeune Leibniz est plutôt ordinale, puisqu'il s'agit d'énumérer une opération qui se répète.
Concernant les courbes, Leibniz s'adonne, dès les premières années de la période parisienne, à la lecture de *La Géométrie* de Descartes. Il connaissait ce texte depuis sa jeunesse estudiantine à Leipzig et le cite déjà au sein de sa *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8) en 1666, mais c'est à Paris qu'il entreprend de travailler réellement les outils développés par le géomètre français. En 1673, il découvre le triangle caractéristique au travers de la lecture des travaux de Pascal sur la cycloïde, ainsi que les travaux de Ricci et de Sluse sur le théorème *de maximis et minimis*. C'est probablement durant cette même période que Leibniz entame les travaux de Wallis sur la quadrature des courbes rationnelles, issus de la première partie de l'*Arithmetica Infinitorum*. Nous avons vu que la seconde partie de l'œuvre consacrée à la quadrature du cercle semble avoir posé de plus grande difficultés de compréhension, si bien que les questions concernant les courbes rationnelles sont discutées plus tôt et plus en profondeur que celles qui touchent à l'interpolation des tables. Ainsi, nous avons montré que la question du rôle des exposants émerge assez tardivement dans le cadre des travaux sur les interpolations. En revanche, en ce qui concerne les réflexions sur les courbes rationnelles et les paraboloïdes, le questionnement sur le rôle et la nature des exposants leur parait consubstantiel.
Nous voyons que la question de la quadrature des courbes rationnelles doit être considérée sous deux angles : celui de la rigueur et de la méthode d'une part et celui de la nature des exposants d'autre part. Nous allons voir que ces problématiques sont en réalité inséparables.

# Chapitre 11

# Puissances et Différences

## Introduction

Nous avons montré que la pratique tabulaire du jeune Leibniz et notamment les triangles de différences ont mis en évidence une nouvelle base de décomposition constituée des nombres combinatoires. Ceci établit un lien très fort entre la notion de puissance, représentée par l'exposant et la notion de différence. Nous avons également mis ce lien en évidence en constatant que les relations au sein du triangle arithmétique ou du triangle harmonique sont de deux espèces : les unes sont additives et les autres multiplicatives. Ainsi, la succession de composition par addition ou soustraction se traduit également par une succession de multiplication et donc une puissance.
Cette réflexion est merveilleusement incarnée par le nouveau concept que Leibniz introduit durant la période 1676-1680 : les proniques. Ce ne sont plus des nombres particuliers, comme les nombres combinatoires, mais des expressions analytiques générales fondées sur le produit de termes successifs :

$$a(a+r)(a+2r)\dot{(}a+p.r)$$

Leibniz introduit donc une nouvelle classe de lois, qui sont étroitement liées, comme nous l'avons vu, avec le triangle harmonique et les triangles de différences en général.
Cette notion puise également ses origines dans les réflexions de Wallis sur l'interpolation des progressions. En effet, la principale difficulté rencontrée par le mathématicien britannique réside dans cette intrication insoluble de progressions géométriques et progressions arithmétiques que présentent ces familles de termes factoriels au sein de laquelle on trouve les nombres combinatoires. Leibniz introduit la notion de puissance pronique, qu'il décrit comme l'analogue discret des puissances classiques. Il montre qu'on ne peut pas établir de hiérarchie entre ces deux familles de courbes, puisqu'on peut décomposer l'une en l'autre et réciproquement. La question fondamentale que soulève la recherche sur les proniques réside dans les rapports entre monde du discret et monde du continu. En effet, il semble que la loi des proniques contienne une part discret absolument irréductible.
Finalement, l'analogie entre puissance et différence atteint son paroxysme au milieu des années 1690, lorsque Leibniz établit sa célèbre formule de différentiation du produit.

## 11.1 La puissance pronique chez Leibniz

Un nombre pronique désigne classiquement le produit de deux nombres successifs. On les trouve également définis comme la somme d'un carré et de sa racine, ce qui est équivalent, puisque $n(n+1) = n^2+n$. Ces nombres, qui sont les doubles des nombres triangulaires, sont également désignés par "nombres oblongs" ou encore "nombres hétéroméciques". La notion de pronique, en tant que nombre figuré, est une notion qu'on retrouve chez les auteurs néopythagoriciens comme Nicomaque de Gérase [1] ou Théon de Smyrne [2], au II$^{\text{ème}}$ siècle de notre ère. Ils définissent en effet comme "hétéromèque" tous les nombres qui sont le produit de deux nombres successifs. Mais cette terminologie est déjà introduite chez Platon, dans la bouche de Théétète [3], au sein du dialogue éponyme. Parmi les ouvrages en latin qui reprennent ces catégories arithmétiques, le *De institutione arithmetica* de Boèce [4] constitue probablement l'un des plus anciens dont on dispose. En effet, il s'agit d'une adaptation de l'*Introduction Arithmétique* de Nicomaque. Mais dans le monde latin du Moyen-Âge tardif, on trouve plutôt le terme "pronique" (*pronicus*) employé pour désigner la quantité $n(n+1)$ ou $n^2+n$, là où le terme "hétéromèque" (*heteromeces*) a plutôt tendance à désigner la figure géométrique du rectangle, suivant ainsi l'acception euclidienne. Concernant l'étymologie du terme "pronique", elle demeure encore inconnue [5]

### Occurence du terme chez Leibniz

Leibniz puise le vocabulaire "pronique" dans deux sources principales. La première se trouve chez Cardan [6]. La seconde se trouve chez Schwenter, dans les *Deliciæ Physico-Mathematicæ*, dont Leibniz s'est considérablement inspiré lorsqu'il a rédigé sa *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8) [7]. Toutes

1. [76] Nicomaque de Gérase, *Introduction Arithmétique*, *trad.* J. Bertier, Vrin, Paris, 1978

2. [107] Théon de Smyrne, *Exposition des mathématiques utiles pour la lecture de Platon*, *trad.* J. Dupuis, Hachette, Paris, 1892

3. Platon, *Théétète*, 147e ; 148a ; 148b, *Cf* [81] Platon, *The Theaetetus of Plato*, *trad.* B. Hall Kennedy, Cambridge, 1881

4. *Cf* [8] Boèce, *De institutione Arithmetica* dans *Boetii, de institutione arithmetica, libri duo, de institutione musica, libri quinque*, *éd.* G. Friedlein, Leipzig, 1867 - [II, 26], p.115

5. La première hypothèse qui consiste à voir ce terme comme la déformation du terme grec "promèque", dont on a vu qu'il désigne chez Platon la figure géométrique du rectangle, nous semble peu sérieuse, puisque d'une part, on ne trouve aucune expression intermédiaire qui témoignerait de cette évolution linguistique, et que, d'autre part, chez les néopythagoriciens, l'expression $n(n+1)$ n'est pas désignée par le terme "promèque" mais "hétéromèque". C'est pourtant la seule explication étymologique que l'on trouve sur *Cf* Weisstein, Eric W. "Pronic Number." From MathWorld–A Wolfram Web Resource. Une autre source, étayant la même thèse, cite la seconde édition du *Webster's New International Dictionary*, 1934. Cette hypothèse est également formulée par C. Adam et P. Tannery dans leur édition des œuvres de Descartes. Une seconde hypothèse, plus sérieuse, relie le terme "*pronicus*" à l'adjectif latin "*pronus*" qui signifie "penché". Le terme aurait pu transiter par le verbe "*pronicare*" en latin populaire, qui signifierait "se pencher" mais qui n'est quant à lui pas attesté. Cette étymologie s'accorde pourtant bien avec l'usage algébrique et algorithmique du terme que l'on retrouve durant la Renaissance italienne. En effet, le rapport algébrique qui existe de façon classique entre la racine $x$ et sa dénomination $x^2$, $x^3$ ou $x^n$ est dès lors déformée, et l'on pourrait même dire "penchée", dans le cas de la relation pronique qui relie $x$ à $x^2+x$, $x^3+x$ etc.

6. On trouve la première mention dans : A VI, 1, N.8, *Dissertatio de Arte Combinatoria*, 1666 - p.178 : « En arithmétique, on distingue généralement les nombres en nombre au sens strict comme 3, rompu comme $\frac{2}{3}$, sourd comme *Rad.*3, c'est un nombre qui multiplié par lui-même donne 3, tel qu'il n'est pas dans la nature des choses, mais qui peut se comprendre par analogie, et enfin les dénominées, que d'autres appellent les figurés, comme les carrés, les cubes ou les proniques. De ces nombres, Jérôme Cardan produit onze espèces mêlées au chapitre 2 dans sa *Practica Arithmeticæ.* » (« *Numerus communiter ab Arithmeticis distinguitur in Numerum stricte dictum ut 3, Fractum ut* $\frac{2}{3}$*, Surdum ut Rad.*3*, id est numerum qui in se ductus efficit 3, qualis in rerum natura non est, sed analogia intelligitur, et Denominatum, quem alii vocant figuratum, v.g. quadratum, cubicum, pronicum. Ex horum commixtione efficit Hier. Cardanus Pract. Arith. c.2. species mixtas 11.* ») - Leibniz fait référence à l'ouvrage [12] J. Cardan, *Practica Arithmeticæ Generalis*, Milan, 1539 - Chapitre 51, p.185-186, où l'on trouve la définition des puissances proniques.

7. Schwenter fait référence à Stifel et à Boèce, dans [31] D. Schwenter, *Deliciæ Physico-Mathematicæ,* Oder Mathemat : und Philoſophiſche Erquickſtunden, Nuremberg, 1651 - p.38 : « *Michael Stifel* enseigne ce que sont les nombres proniques, d'après *Boèce*. Cherche tout de suite au début dans la Cosse de Christoff Rudolff, et là tu trouveras qu'il a écrit ainsi : et ici je dois exposer un bref échantillon de la nature et l'art des nombres proniques. » (« Waſ Pronic Zahlen ſind lehret *Michaël Stifelius* auf dem *Boëtio,* ſuche in Chriſtoff Rudolffi Coß bald in dem Anfang da wirſt du finden daß er alſo ſchreibt : und hie muß ich ein luftigeſ Stucklein anzeigne auf Natur und Art der Pronic Zahlen. »). Mentionnons une dernière source possible, peu probable quant à elle, à savoir l'œuvre de Kircher. Ce dernier publie en 1665 un ouvrage intitulé *Arithmologia*, au sein duquel il consacre une partie entière aux nombres proniques « Des mystères de certains nombres, que l'on appelle proniques, et de leurs propriétés » (« *De arcanis Numerorum quorundam, quos Pronicos vocant, proprietatibus* »). Cependant, la signification du terme est bien différente de l'usage classique que nous avons décrit jusque là. Dans cet ouvrage où Kircher mêle savoir mathématique et numérologie, les

ces sources proviennent du même contexte, à savoir la scolarité du jeune Leibniz à l'Université de Leipzig, au milieu des années 1660. On ne trouvera plus aucune mention du terme « pronique » (« pronicus ») jusqu'à la fin des années 1670. La notion est alors développée au sein de trois manuscrits inédits de Leibniz :

⋆ LH 35, 7, 12, Bl.1-2 - *De summis serierum fractionalium*, non daté [9]

→ Leibniz y construit le concept de puissance pronique, que nous allons développer à présent.

⋆ LH 35, 5, 15, Bl.17 - *Exponentes radicum Pronicarum, et alia id genus*, Mai 1679

→ Leibniz tente de construire un caractère exponentiel pour la puissance pronique. Nous examinerons ce texte dans un second temps.

⋆ LH 35, 13, 3, Bl.134-135 - *Linea pronicæ progressionis*, Juin 1682

→ Leibniz rattache le pronique aux questions de quadratures et d'interpolation que nous avons déjà traitée. Nous terminerons le chapitre par ce texte.

### 11.1.1 Exposants dans les Triangles de Différence

La réflexion de Leibniz sur la puissance pronique n'est pas issue de questions relevant de la résolution des équations mais plutôt de différents constats qu'il fait durant la période parisienne, alors qu'il développe le triangle harmonique et la théorie des différences finies. C'est donc la combinatoire plutôt que l'algèbre qui le mènent vers la question des puissances proniques.

#### Rappel sur les sommes d'inverses de figurés

En s'intéressant aux inverses des nombres figurés, Leibniz a remarqué de façon relativement empirique que les séries de ces inverses entretiennent des relations analogues à celle du triangle arithmétique, comme nous l'avons déjà suffisamment montré. Dès ses premières études sur le sujet [10], Leibniz s'est concentré sur l'aspect fractionnaire de ces progressions et notamment sur la possibilité de les décomposer. Rappelons que ces propriétés de décompositions sont établies dans leur plus haute généralité par Mengoli dans sa *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ* [11] :

⋆ soit $a_0$, $a_1$, $a_2 \ldots$ une suite arithmétique de raison $r$. On a alors $a_n = a_0 + nr$.

⋆ soit $p$ un entier naturel et $b_0^{(p)}$, $b_1^{(p)}$, $b_2^{(p)} \ldots$ la suite des produits de $p$ termes consécutifs de la suite $(a)$. On a $b_n^{(p)} = a_n \times a_{n+1} \times \cdots \times a_{n+p-1}$.

⋆ alors on a la propriété suivante :

$$\frac{1}{b_n^{(p)}} - \frac{1}{b_{n+1}^{(p)}} = \frac{pr}{b_n^{(p+1)}}$$

Ce qui permet d'appliquer cette règle aux nombres figurés s'explique par la formule suivante :

$$\left(\!\binom{n}{p}\!\right) = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{1.2.3\ldots(p-1)p}$$

nombres proniques sont des nombres aux propriétés mystiques. Aucuns documents à notre connaissance ne permet cependant de penser que Leibniz ait jamais lu l'*Arithmologia* de Kircher. A l'époque de Leipzig, le jeune étudiant allemand s'intéresse particulièrement à ses travaux de combinatoire, citant notamment le *Polygraphia nova et universalis ex combinatoria arte directa*, paru en 1663 ainsi que la future publication de l'*Ars magna sciendi sive combinatoria* [8]. Cela dit, on peut attester du fait que Leibniz a lu l'*Œdipus Ægyptacus*, que Kircher publie entre 1652 et 1655. Or un court passage de ce livre préfigurait déjà le contenu de l'*Arithmologia*. Il s'agit du chapitre 8, classe V du Tome II qui s'intitule : « Sur les nombres proniques » (« *De Numeris Pronicis* »). Il est donc possible que Leibniz ait eu connaissance de cet emploi ésotérique du terme pronique.

9. Il semble, dans ce manuscrit, que Leibniz introduit la notion de pronique, puisqu'il évoque l'origine du mot, contrairement aux deux autres. Les notations différentielles et intégrales indique qu'il est postérieur à 1675, ce qui est confirmé par le catalogue qui indique que le manuscrit est postérieur à 1676. Dès lors, on peut estimer que la date de ce manuscrit est comprise entre 1676 et 1679.

10. *Cf* A VII, 3, N.1, *De Summa Numerorum Triangularium Reciprocorum*, Sept. 1672 et A VII, 3, N.2, *Differentiæ Numerorum Harmonicum et Reciprocorum Triangularium*, Sept./Oct. 1672

11. [67] P. Mengoli, *Novæ Quadraturæ Arithmeticæ*, Bologne, 1650

Pour rappel, si $a_0 = 0$ et $r = 1$ alors

$$\left(\!\!\binom{n}{p}\!\!\right) = \frac{b_n^{(p)}}{p!}$$

Et par suite :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\left(\!\!\binom{n}{p}\!\!\right)} - \frac{1}{\left(\!\!\binom{n+1}{p}\!\!\right)} &= \frac{p!}{b_n^{(p)}} - \frac{p!}{b_{n+1}^{(p)}} \\
&= \frac{p!.p}{b_n^{(p+1)}} \\
&= \frac{p}{p+1}\frac{(p+1)!}{b_n^{(p+1)}} \\
&= \frac{p}{p+1}\frac{1}{\left(\!\!\binom{n}{p+1}\!\!\right)}
\end{aligned}$$

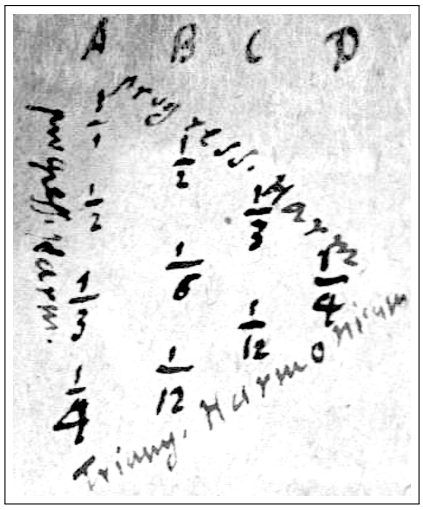
De nombreux auteurs, comme nous l'avons vu, ont déjà établi le lien qui relie les nombres proniques au sens moderne avec les nombres triangulaires, à savoir que les premiers sont les doubles de ces derniers. Leibniz lui-même l'établit très tôt. Ce lien se généralise à tous les nombres figurés de toutes les dimensions, et c'est ainsi que vont se généraliser les nombres proniques pour Leibniz. En réalité, Leibniz ne parlera pas de nombres proniques mais de puissances proniques. Cette nuance est intéressante, puisqu'elle souligne le caractère fonctionnel de la notion qu'il va construire. Les proniques ne sont pas pour Leibniz des variables, mais des opérateurs exponentiels.

**Passage du triangle aux formules**

Le *De summis serierum fractionalium* (LH 35, 7, 12, Bl.1-2), est probablement rédigé avant les deux autres textes que nous avons cités, étant donné que Leibniz y batit progressivement la notion de puissance pronique.
En premier lieu, Leibniz établit le lien qui relie les produits continus de nombres consécutifs et les nombres figurés. Notons une petite erreur que Leibniz semble commettre, sans incidence mais néanmoins révélatrice de sa démarche. En considérant que $y$ désigne un entier naturel variable, il pose :

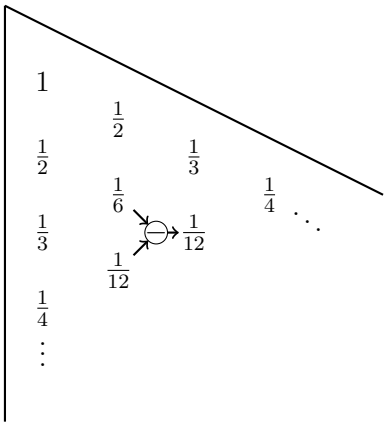
- ⋆ $A = \frac{1}{y}$
- ⋆ $B = \frac{1}{y(y+1)}$
- ⋆ $C = \frac{1}{y(y+1)(y+2)}$
- ⋆ $D = \frac{1}{y(y+1)(y+2)(y+3)}$

Or Leibniz dessine dans l'angle de la feuille un petit triangle harmonique avec les colonnes $A$, $B$, $C$ et $D$.




Manuscrits de Leibniz - LH 35, 7, 12, Bl.1

On comprend ainsi que ce que Leibniz souhaite désigner par $A$, $B$, $C$, $D$, etc., ce sont les colonnes du triangle harmonique. La forme trianglulaire caractéristique indique bien qu'il s'agit de mettre en avant la règle du triangle, à savoir chacun de ses coefficients est égal à la différence des deux coefficients qui sont à sa gauche.




Cependant, si l'égalité est vraie pour les colonne $A$ et $B$, ce n'est plus le cas pour les colonnes $C$, $D$ et toutes les suivantes. De fait, le $n$-ième terme de la $p$-ième colonne du triangle harmonique vaut :

$$\frac{1.2.3\ldots(p-2)(p-1)}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)} = \frac{1}{p}\frac{1}{\left(\!\binom{n}{p}\!\right)}$$

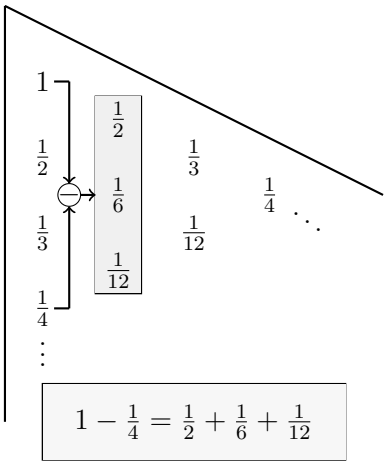
En effet, au moyen du calcul ci-dessus, on retrouve bien la règle du triangle :

$$\frac{1}{p}\frac{1}{\left(\!\binom{n}{p}\!\right)} - \frac{1}{p}\frac{1}{\left(\!\binom{n+1}{p}\!\right)} = \frac{1}{p+1}\frac{1}{\left(\!\binom{n}{p+1}\!\right)}$$

L'erreur de Leibniz s'explique sans doute par une induction trop hâtive menée à partir des deux premières colonnes.

Après avoir établi le lien qui relie les colonnes $A$, $B$, $C$, $D$ etc. avec les nombres figurés, Leibniz donne donc la somme de ces colonnes, sur un nombre fini de termes et un nombre infini de termes. Comme il croit qu'il s'agit des coefficients du triangle, il utilise à plein ses propriétés, à savoir que la somme des coefficients d'une colonne est égale au premier terme de la colonne qui est à sa gauche et que la somme des premiers termes d'une colonne est égale à la différence entre ce premier terme en haut à gauche et le dernier terme en bas à gauche de la colonne à sa gauche :

> *Et de façon générale, on a* $\int \nu$ *au* $x^{\text{ième}}$ *degré* $= \frac{1}{x-1} - \nu y$*, étant donné que le premier* $y$ *est* 1 *et qu'en fait le dernier conserve l'appellation* $y$*.* [12]




12. LH 35 7 12 Bl. 1-2, *De summis serierum fractionalium*, non daté : « Et generaliter $\int \nu$ gradus $x^{\text{mi}} = \frac{1}{x-1} - \nu y$ posito $y$ primum esse 1 ultimum vero retinere appellationem $y$. »

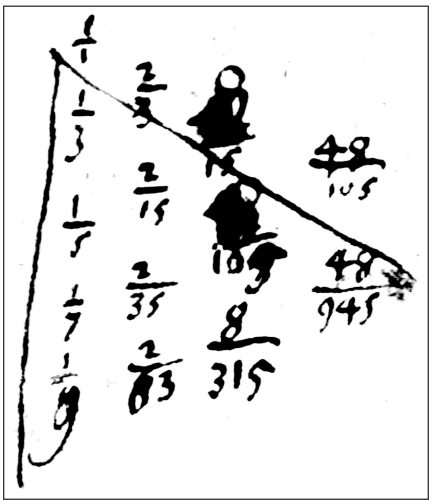
Pour le $x^{\text{ième}}$ degré, c'est-à-dire la $x^{\text{ième}}$ colonne, la somme des premiers termes, notés $\nu$ par Leibniz, est égale à la différence entre $\frac{1}{x-1}$ qui est le premier terme en haut à gauche sur la $(x-1)^{\text{ième}}$ colonne et $\nu y$ qui est le terme en bas à gauche sur cette même colonne :

$$\nu = \frac{1}{y(y+1)(y+2)\dots(y+x-1)} \quad \rightarrow \quad \nu y = \frac{1}{(y+1)(y+2)\dots(y+x-1)}$$

Leibniz tente ici d'appliquer une connaissance combinatoire, à savoir les relations des coefficients au sein du tableau, à des formules analytiques, et non d'utiliser ces formules analytiques pour démontrer une induction combinatoire.

**Généralisation et Correction**

Pour généraliser ces relations, Leibniz se propose de choisir d'autres suites arithmétiques $(a)_n$, comme par exemple la suite des impairs. Il dessine alors un autre triangle de différences adapté :



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 7, 12, Bl.1

Les dénominateurs sont bien les produits continus des termes de la suite arithmétique. Dans la première colonne, ce sont les termes eux-mêmes, dans la seconde, on trouve les produits de deux consécutifs, dans troisième les produits de trois et ainsi de suite. Pour les numérateurs, Leibniz a visiblement corrigé son triangle à partir de la troisième colonne. En travaillant l'image numérique du manuscrit, on retrouve les premiers coefficients que Leibniz avait écrit sous les biffures, avant de mettre 8. Il avait inscrit deux 4.
Leibniz avait donc à l'esprit que les numérateurs de chaque colonne suivait une progression géométrique dont la raison était précisément celle de $(a)_n$, la suite arithmétique donnée. Donc pour les nombres impairs, la raison est 2, et l'on devrait obtenir la suite géométrique double. Leibniz le confirme dans le texte :

> *En outre, les numérateurs sont les puissances de 2, qui est la différence de ces y.*[13]

Donc, dans un premier temps, Leibniz a dessiné un triangle correct, à savoir le triangle harmonique qu'il connait très bien, et a associé à ses coefficients de fausses formules analytiques. Puis dans un second temps, Leibniz est parti des formules analytiques, à savoir une progression géométrique pour les numérateurs et des produits de termes consécutifs pour les dénominateurs, puis il a construit un triangle de différences incorrect. Mais, en construisant ce triangle, il a probablement dû vérifier que les termes respectaient bien la règle du triangle, d'où les corrections.

On voit dès lors les liens que Leibniz tissent entre les triangles de différences et les inverses des produits finis des suites arithmétiques. Les erreurs qu'il commet sont particulièrement instructives puisqu'elles

13. LH 35 7 12 Bl. 1-2, *De summis serierum fractionalium*, non daté : « Numeratores autem esse potentias ipsius 2 differentiae ipsorum $y$. »

montrent la volonté qu'a Leibniz de forcer ces liens, induits du triangle harmonique, pour développer un nouveau concept. Par cette démarche, Leibniz va pouvoir créer un pont entre la puissance algébrique et la puissance arithmétique liée au rang, décrite dans l'*Accessio ad Arithmeticam Infinitorum* (A II, 1, N.109).

### 11.1.2 Formule différentielle et intégrale

#### Définition des puissances proniques

Leibniz poursuit sa généralisation dans un paragraphe du manuscrit qu'il a entièrement rayé. Il pose $d$ la raison de la suite arithmétique :

> *On appellera d la différence de ces y et le nombre q désignera le degré de la série, de sorte que y soit du premier degré, donc* $q = 1$ *et* $y(y + d)$ *soit du deuxième degré et donc* $q = 2$ *etc.* [14]

Puis Leibniz introduit la notation suivante :

$$y^{1:q} = \frac{1}{y(y+d)(y+2d)...(y+(q-1)d)}$$

> $y^{1:q}$ *signifie la puissance pronique inverse de cet y dont l'exposant est q.* [15]

A partir des relations qui relient les degrés successifs entre eux, Leibniz démontre formellement la relation du triangle dans le cas de ces puissances proniques. Il note d'abord que :

$$\begin{aligned} y^{1:q} \times y &= \frac{1}{(y+d)(y+2d)...(y+(q-1)d)} \\ &= (y+d)^{1:(q-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^{1:q} \times (y+(q-1)d) &= \frac{1}{y(y+d)(y+2d)...(y+(q-2)d)} \\ &= y^{1:(q-1)} \end{aligned}$$

Ainsi, il peut en déduire que :

$$\begin{aligned} y^{1:(q-1)} - (y+d)^{1:(q-1)} &= -y^{1:q} \times (y+(q-1)d) - y^{1:q} \times y \\ &= y^{1:q} \times (y+(q-1)d-y) \\ &= (q-1)d \times y^{1:q} \end{aligned}$$

> *Donc les* $y^{1:q}$ *multipliés par la constante* $(q-1)d$ *donnent les différences de la série juste en dessous,* $y^{1:q-1}$. [16]

On retrouve la formule donnée dans l'introduction de cette section :

$$\frac{1}{b_n^{(p)}} - \frac{1}{b_{n+1}^{(p)}} = \frac{pr}{b_n^{(p+1)}} \quad \text{avec } p = q-1 \ ; \ r = d \ ; \ a_n = y$$

A partir de cette relation sur les différences, Leibniz peut obtenir une relation sur les sommes infinies d'une part :

> *Et à parti de là, on peut trouver la somme de la série infinie* [17]

14. LH 35 7 12 Bl. 1-2, *De summis serierum fractionalium*, non daté : « Differentia ipsorum $y$ vocetur $d$ et numerus $q$ notet gradum seriei, ita ut $y$ sit primi gradus seu $q = 1$ et $y(y + d)$ secundus gradus seu $q = 2$ &c. »

15. LH 35 7 12 Bl. 1-2, *De summis serierum fractionalium*, non daté : « $y^{1:q}$ significat potentiam pronicam reciprocam ipsius $y$ cuius exponens est $q$ »

16. LH 35 7 12 Bl. 1-2, *De summis serierum fractionalium*, non daté : « Ergo $y^{1:q}$ multiplicæ per constantem $(q-1)d$ sint differentiæ seriei proxime inferioris $y^{1:q-1}$. »

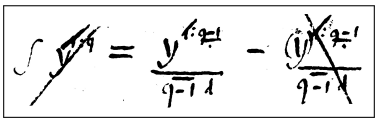
17. LH 35 7 12 Bl. 1-2, *De summis serierum fractionalium*, non daté : « Et proinde ad inveniendam summam seriei infinitis. »

$$\int y^{1:q} = \frac{1}{(q-1)d}$$

Et d'autre part, les sommes finies :

> *Si, en revanche, on cherche la somme de la série finie, on aura* [18]

$$\int y^{1:q} = \frac{y^{1:(q-1)}}{(q-1)d} - \frac{(y)^{1:(q-1)}}{(q-1)d}$$



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 7, 12, Bl.1

> *De sorte que le $y$ dans le terme de gauche soit le premier et que $(y)$ dans le terme de droite soit le dernier.* [19]

Ainsi, on a une famille ordonnée de progressions, où chacun est reliée à la suivante ou à la précédente par une relation de somme et de différence, ce qui est la caractéristique d'un triangle de différence. Mais dans le même temps, l'écriture formelle de ces relations produit précisément la relation que l'on trouve chez les courbes, à savoir $d(x^n) = nx^{n-1}$.

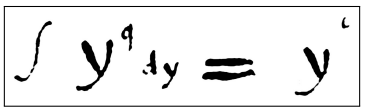
**Des nombres aux courbes, passage au calcul différentiel**

Finalement, ce calcul effectué par Leibniz est totalement formel, et il ne serait pas modifié par le choix d'une différence $dy$ variable plutôt que la différence $d$ fixée :

> *Il advient aussi que ce théorème bien plus général est correct, par une méthode sûre et vraiment remarquable : si les $y$ ne sont pas en progression arithmétique mais quelconque, de fait on aura* $\int y^{1:q}dy = \frac{y^{1:q-1}}{q-1}$ [20]

Puis Leibniz ajoute :

> *Et puisqu'ici : $q$ signifie $-q$, on aura :* [21]



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 7, 12, Bl.1

Cette formule reste inachevée, puis le paragraphe a visiblement été entièrement rayé par Leibniz, comme nous l'avions mentionné. Il a donc visiblement perçu qu'il détenait ici la piste d'une démonstration générale de l'identité différentielle $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Une telle généralisation pose néanmoins quelques problèmes que nous allons exposer. Supposons donc que notre suite $(a)_n$, dont Leibniz désigne les termes par $y$, ne soit pas une progression arithmétique mais une progression quelconque. On peut alors se demander s'il est encore correct d'écrire la chose suivante, sous-entendue par la généralisation de Leibniz :

$$\begin{aligned} a_{n+q-1} - a_n &= \underbrace{(a_{n+1} - a_n)}_{=dy} + \underbrace{(a_{n+2} - a_{n+1})}_{=dy} + \cdots + \underbrace{(a_{n+q-1} - a_{n+q-2})}_{=dy} \\ &= (q-1)dy \end{aligned}$$

18. LH 35 7 12 Bl. 1-2, *De summis serierum fractionalium*, non daté : « Si vero seriei finitæ summa quæratur, fiet : »

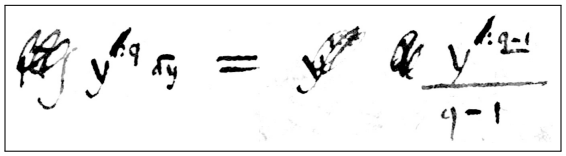
19. LH 35 7 12 Bl. 1-2, *De summis serierum fractionalium*, non daté : « Ita ut $y$ prioris termini sit primum $(y)$ vero in posterior termino sit ultimum »

20. LH 35 7 12 Bl. 1-2, *De summis serierum fractionalium*, non daté : « Hoc vero theorema generalissimum planeque mirabile certo modo correctum locum etiam habet, si y non sint progressionis Arithmeticis sed cuiuscunque, nam fiet $\int y^{1:q}dy = \frac{y^{1:q-1}}{q-1}$. »

21. LH 35 7 12 Bl. 1-2, *De summis serierum fractionalium*, non daté : « Et quia : $q$ hic significat $-q$ fiet »

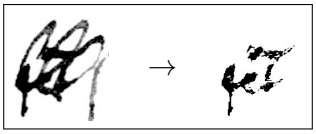
De fait, comme les différences successives entre deux termes sont désormais variables, comment justifier cette écriture factorisée $(q-1)dy$ ? On pourrait simplement y voir une forme abrégée de la somme des différents $dy$ qui sont tous distincts malgré qu'on use de la même notation, mais ce n'est pas le cas, puisque Leibniz les sépare dans sa formule :

$$\int y^{:q} d\overline{y} = \frac{y^{:\overline{q-1}}}{q-1}$$



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 7, 12, Bl.1

On voit d'ailleurs qu'il a commencé par écrire le facteur $(q-1)$ dans le membre de gauche avant de le rayer, comme le montre l'image suivante, où l'on a ôté la biffure numériquement :



Mais Leibniz n'envisage pas ce problème.

**Problème du passage à l'inverse**

Il reprend la rédaction depuis le départ, au verso du manuscrit, sans passer par le triangle de différence cette fois-ci. Pour la puissance pronique de degré $q$, il pose une nouvelle notation :

$$\begin{aligned} y^{(p)} &= y(y+dy)(y+2dy)\dots(y+(p-1)dy) \\ y^{(-p)} &= \frac{1}{y(y+dy)(y+2dy)\dots(y+(p-1)dy)} \end{aligned}$$

Il faut distinguer les puissances positives des négatives pour la définition mais Leibniz souhaite démontrer la formule $\int y^p dy = \frac{y^{p+1}}{p+1}$ pour tout $p$, indépendamment de son signe. Il pose donc un $p$ générique :

> *Pour les inverses, $p = -1$ ou $-2$ ou $-3$*
> *Pour les directes, $p = 1$ ou $2$ ou $3$*[22]

Le réflexe pour Leibniz, lorsqu'il s'agit de trouver une formule pour unifier les différents cas en fonction des signes, est d'invoquer la méthode de l'universalité. Ici, cela revient à seulement convoquer les signes $\pm$ et $\mp$. Pourtant, au sein des exposants proniques, l'ambiguïté semble tout entière saisie par leur dénomination générale $p$. En effet, donnons les deux égalités suivantes :

$$\begin{aligned} (y+4dy)y^{(3)} &= y^{(4)} \\ (y+2dy)y^{(-3)} &= y^{(-2)} \end{aligned}$$

En valeur absolue, il s'agit d'incrémenter de 1 (de 3 à 4) pour les exposants positifs alors qu'il faut un décrément de 1 (de 3 à 2) pour les négatifs. Le fait qu'il s'agisse dans les deux cas, du même incrément de 1 n'est pas clairement visible. La formule analytique révèle donc une uniformité qui est dissimulée par l'implémentation concrète des exemples. On passe dans tous les cas de $p$ à $p+1$. Néanmoins, la formule générale ne se passe pas des signes ambigus

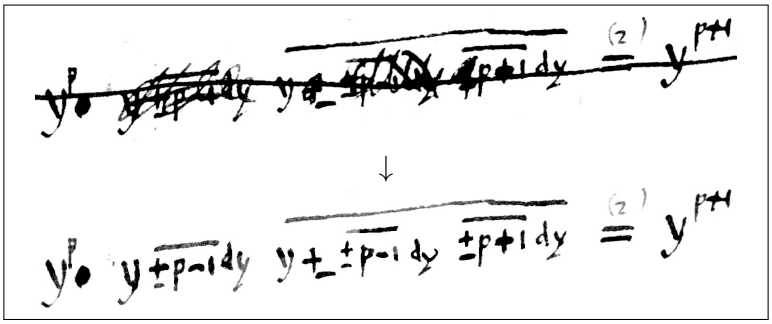
$$(y \pm (p+1)dy)y^{(p)} = y^{(p+1)}$$

Avec $\pm$ qui vaut le signe de $p$ de sorte que $\pm p$ soit toujours positif :

22. LH 35 7 12 Bl. 1-2, *De summis serierum fractionalium*, non daté : « in reciprocis $p = -1$ vel$-2$ vel $-3$ ; in directis $p = 1$ vel 2 vel 3 »

*où ± signifie + pour les directs et − pour les inverses.* [23]

Mais, Leibniz raye cette équation. On voit pourtant bien sous les ratures l'usage des signes ±.



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 7, 12, Bl.1

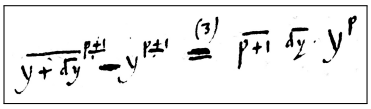
De fait, les deux cas n'aboutissent pas à la même formule de différence. Mais Leibniz ne voit pas la distinction se faire sur les signes, d'où l'abandon des signes ambigus. En fait, selon le signe de $p$, les relations sont différentes, puisque les définitions sont différentes :

*Pour les directs, on doit procéder d'une autre manière, en quelque sorte.* [24]

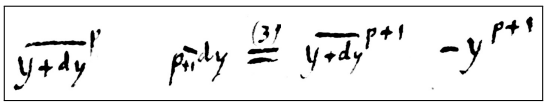
| Si $p$ est négatif | | | Si $p$ est positif | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y \times y^{(p)}$ | $=$ | $(y+dy)^{(p+1)}$ | $(y+(p+1)dy) \times (y+dy)^{(p)}$ | $=$ | $(y+dy)^{(p+1)}$ |
| $(y-(p+1)dy) \times y^{(p)}$ | $=$ | $y^{(p+1)}$ | $y \times (y+dy)^{(p)}$ | $=$ | $y^{(p+1)}$ |

Ainsi, en faisant la différence des deux équations, on obtient :

$y^{(p)} \times (p+1)dy = (y+dy)^{(p+1)} - y^{(p+1)}$



$(y+dy)^{(p)} \times (p+1)dy = (y+dy)^{(p+1)} - y^{(p+1)}$



Ces formules restent extrêmement proches. En réalité, on peut les réunir avec l'usage des signes ambigus, ce que Leibniz n'a pas su voir :

$$y^{(\pm p)} \times (p \pm 1)dy = (y \pm dy)^{(\pm p+1)} - y^{(\pm p+1)} \quad \text{avec } p \text{ entier naturel}$$

Néanmoins, il a pu les réunir pour la relation sommée. Pour cela, il note dans la marge la chose suivante :

*Cela, c'est pour les directes : si l'on doit mener la somme d'une certaine série construite à partir des termes $y^p$, alors on obtient :*

- $$\int y^p dy = \frac{y^{p+1}}{p+1} - \frac{(y)^{p+1}}{p+1}$$ -

*c'est-à-dire la différence des termes correspondants, qui sont juste avant et juste après dans la série sommatrice. Ainsi $y$ donne le plus grand et $(y)$ le plus petit qui disparait lorsqu'on commence au début, c'est-à-dire lorsque $(y) = 0$.*

*Pour les inverses : si l'on doit mener la somme d'une certaine série construite à partir des termes $y^p$, c'est-à-dire de $\frac{1}{y^q}$, alors on obtient :*

- $$\int \frac{dy}{y^q} = \frac{1}{(q-1)y^{q-1}} - \frac{1}{(q-1)(y)^{q-1}}$$ -

*c'est-à-dire, au contraire, la différence des termes correspondants, qui sont juste avant et juste après dans la série sommatrice, où $y$ est le plus grand et $(y)$ le plus petit qui disparait lorsqu'on cherche la somme de la série infinie, c'est-à-dire lorsque $(y)$ = l'infini.* [25]

23. LH 35 7 12 Bl. 1-2, *De summis serierum fractionalium*, non daté : « ubi ± significat + in directis ; − in reciprocis »
24. LH 35 7 12 Bl. 1-2, *De summis serierum fractionalium*, non daté : « In directis alia arte nonnihis procedendum est »
25. LH 35 7 12 Bl. 1-2, *De summis serierum fractionalium*, non daté : « Hoc est in directis si seriei cuiusdam ex terminis $y^p$ conflatæ ineunda sit summa, fiet $\int y^p dy = \frac{y^{p+1}}{p+1} - \frac{(y)^{p+1}}{p+1}$ seu differentia termini proxime primi et ultimi respondentis in serie summatrice. Ita $y$ facit majorum $(y)$ minorum qui minus evanescit cum ab initis incipitur seu cum $(y) = 0$. In reciprocis, si seriei cuiusdam ex $y^p$ seu ex $\frac{1}{y^q}$ terminis conflatæ ineunda sit summa, fiet : $\int \frac{dy}{y^q} = \frac{1}{(q-1)y^{q-1}} - \frac{1}{(q-1)(y)^{q-1}}$. Seu rursus diffenrantia termini primi et ultimi respondentis in serie summatrice ubi $y$ facit maximum et $(y)$ minimum qui evanescit si seriei infinitæ summa quæratur, seu cum $(y)$ = infinito »

Ce qu'écrit Leibniz, dans le cas des inverses, est contradictoire. En effet, si $(y)$ est le plus petit, il ne peut pas être infini. Si $(y)$ est infini, alors c'est $\frac{1}{(y)}$ et non $(y)$ qui sera le plus petit. Donc si $(y)$ est le plus grand, comme le souhaite Leibniz, alors la somme sera l'opposé de ce qu'il a écrit, à savoir :

$$\int \frac{dy}{y^{(q)}} = \frac{1}{(q-1)(y)^{(q-1)}} - \frac{1}{(q-1)y^{(q-1)}}$$

Ainsi, lorsqu'on fait tendre $(y)$ vers l'infini, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_y^{+\infty} \frac{dt}{t^{(q)}} &= -\frac{1}{(q-1)y^{(q-1)}} \\ &= -\frac{1}{(-p-1)y^{(-p-1)}} \\ &= \frac{y^{(p+1)}}{p+1}\end{aligned}$$

Et l'on retrouve bien la même formule que celle des puissances directes :

$$\int_0^y t^{(p)} dt = \frac{y^{(p+1)}}{p+1}$$

Sans tenir compte de la contradiction de sa note de marge, Leibniz conclut :

> *On a de façon générale :* $\int y^p dy = \frac{y^{p+1}}{p+1}$ *en nombres.* [26]

Cette formule semble bien être l'objectif de Leibniz.

### Parallèle entre courbes et nombres

L'objet de ce travail est de montrer que les nombres et les puissances proniques ont un comportement analogue aux lignes et aux puissances communes. Et ce comportement est celui du calcul différentiel :

> *Cela étant, pour la somme de telles séries il faut que nous appliquions la méthode générale de mon calcul différentiel et qu'on le transfère en toute généralité depuis les lignes vers les nombres, ainsi que le permet cette démarche : soit dy la différence de ces y. Et p signifie l'exposant du degré que l'on trouve bon d'appeler, à la manière de certains anciens arithméticiens, la puissance pronique.* [27]

Les signes des exposants proniques sont calqués, de la même manière, sur ceux des puissances classiques :

> *Soit p l'exposant d'une puissance pronique ; et ce p élève le nombre du degré de façon positive pour les directs et privative pour les inverses. Et cela reste vrai dans les lignes pour les puissances communes.* [28]

Au sein des deux autres pièces de manuscrit que nous analyserons dans les prochaines section, Leibniz s'adonne à un problème plus général sur les proniques, à savoir l'inversion des puissances et la recherche de racines. Ce pas en avant, ainsi que le fait qu'il n'introduise jamais la notion de pronique, indique que le *De summis serierum fractionalium* (LH 35 7 12 Bl. 1-2) a vraisemblablement été rédigé avant ces deux fragments, c'est-à-dire avant le mois de Mai 1679.
A travers cette notion de puissance pronique s'engagent à nouveau les conditions de possibilité de création et de généralisation chez Leibniz. La puissance pronique est un composé de la puissance commune. La

26. LH 35 7 12 Bl. 1-2, *De summis serierum fractionalium*, non daté : « Generaliter ergo $\int y^p dy = \frac{y^{p+1}}{p+1}$ in numeris »

27. LH 35 7 12 Bl. 1-2, *De summis serierum fractionalium*, non daté : « Ut autem pro summis talium serierum generalem Methodum demus meique calculi differnetialis a lineis ad numeros transferamus generaliter, sic licebit procedere : sit $dy$ differentia ipsorum $y$. Et $p$ significet exponentem gradus potentia quam placet imitiatione veterum quorundam Arithmeticorum vocare pronicam »

28. LH 35 7 12 Bl. 1-2, *De summis serierum fractionalium*, non daté : « posito $p$ esse exponentem potentiæ pronicæ ; ipso $p$ existente numero gradus in directis positivo, in reciprocis privativo. Quod ipsum in linei verum est pro potentiis communibus »

réduction des unes aux autres est calculable et réversible [29]. Ce problème constitue d'ailleurs l'objet du reste du manuscrit *De summis serierum fractionalium* (LH 35 7 12 Bl. 1-2) [30], et Leibniz obtient, comme nous l'avons vu, une méthode pour trouver les deux décompositions réciproques. La question sous-jacente de la priorité des puissances communes sur les puissances proniques se pose. Sur quels critères se baser pour choisir les unes plutôt que les autres.

Au travers de ce manuscrit dont nous venons d'établir l'analyse, Leibniz montre bien l'usage concret qu'il fait de la combinatoire, vue comme science des formes et des formules, *de eodem et diverso*. En effet, ce qui caractérise la puissance ici, c'est avant tout son articulation avec les formules de calcul différentiel et intégral. Ainsi, comme le dit Leibniz, les puissances proniques pour les nombres sont analogues aux puissances classiques pour les courbes, c'est-à-dire qu'elles obéissent aux mêmes formules différentielles et intégrales.

Leibniz rencontre des difficultés avec la question du signe. La dissymétrie engendrée par la définition que n'est pas la même pour les exposants positifs et négatifs n'est pas le propre des puissances proniques et on la trouve déjà pour les puissances classiques. Cependant, la relation logarithmique des exposants, à savoir $x^a x^b = x^{a+b}$ permet dans ce dernier cas d'effacer la frontière de dissymétrie. En effet, quitte à factoriser par une certaine puissance, on peut déplacer la ligne de démarcation entre les puissances positives et les puissances négatives. Pour les puissances proniques, cette relation logarithmique n'a plus cours, et l'on ne peut donc pas faire si facilement abstraction de la bipartition des exposants selon leurs signes. Ce sont les formules de calcul différentiel qui ont cette capacité de passer outre la frontière des signes. Ainsi, la formule de l'analyse différentielle prend la priorité sur la propriété logarithmique des exposants.

29. Sur ce sujet, on trouve chez M. Stifel un algorithme qui permet d'exprimer la racine d'un nombre pronique, c'est-à-dire étant donné $a = n^2 + n$ retrouver $n$ : [86] M. Stifel, *Die Coss Christoffs Rudolffs*, Prusse, 1553 - Première Partie, Bl.15 : « Mais supposons que j'ai un nombre pronique et que je dois en trouver la racine pronique. Je fais selon cette règle. Je multiplie le nombre pronique par 4 et j'y ajoute une unité, puis j'en extrais la racine carré de laquelle j'ote une unité. Ainsi la demie part de ce qu'il reste constitue ma racine pronique que je cherche. » (« **So ich aber hab ein pronic zal und ſol ir pronic würtzel drauf finden. Thu ichſ durch diſe Regel. Die : pronic zal multiplicir ich mit 4 dar zu addir ich ein unitet und extrahir darauf die quadrat würtzel da von ſubtrahir ich ein unitet ſo iſt denn der halbe teyl deſ bleybenden mein pronic würtzel die ich ſuchet.** ») - Cet algorithme réduit l'extraction de racine pronique à l'extraction de racine classique. On peut montrer que cette réduction est réversible, et qu'on peut réduire la racine classique à la racine pronique.

30. *Cf* l'analyse des triangles arithmétiques pondérés p.290.

## 11.2 Interpolations et courbes proniques

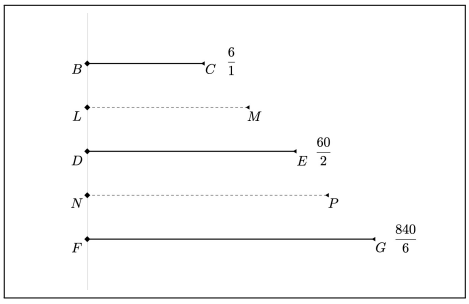
Les idées qui lient pronique et interpolation trouvent leur origine chez Leibniz dans sa lecture de l'*Arithmetica Infinitorum*. Nous avons déjà amplement commenté cette réception. Mais nous avions laissé de côté, à dessein, ce qui concerne l'interpolation proprement dite des produits continus.

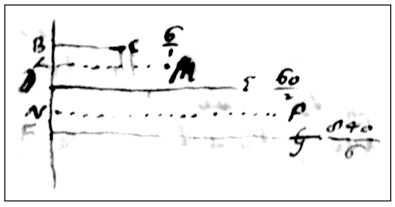
### 11.2.1 Interpolation d'une progression

#### Approche par le calcul différentiel

On trouve un fragment sur ce sujet, le *Wallisii problema interpolandi pro qvadratura Circuli* (LH 35, 2, 1 Bl.76). Il est relativement précoce, puisque le catalogue estime qu'il date de 1674, cela dit, le notations différentielles qui s'y trouvent indiquent qu'il doit être plus tardif, probablement à la fin du séjour parisien :

> *On cherche l'interpolation de cette dernière série, c'est-à-dire les nombres médians, ou encore, étant données les ordonnées BC, DE, FG, dont les intervalles sont égaux et qui représentent les nombres* $\frac{6}{1}$ ; $\frac{60}{2}$ ; $\frac{840}{6}$ …, *trouver ce qu'il faut mettre aux places intermédiaires, LM, NP, …*.[31]



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 2, 1 Bl.76

La question que pose Leibniz est donc bien celle de Wallis, à savoir comment trouver les termes manquants dans la séquence suivante, où dénominateurs et numérateurs sont constitués des produits continus des termes de progressions arithmétiques :

$$\underbrace{\frac{6}{1}}_{u_0} \;;\; \underbrace{\star}_{u_1} \;;\; \underbrace{\frac{6}{1}\times\frac{10}{2}=\frac{60}{2}}_{u_2} \;;\; \underbrace{\star}_{u_3} \;;\; \underbrace{\frac{6}{1}\times\frac{10}{2}\times\frac{14}{3}=\frac{840}{6}}_{u_4}$$

Leibniz adopte ici une approche algébrique et formelle. On constate la relation suivante :

$$u_{2n+2} = \frac{6+4n}{n+1} \times u_{2n}$$

Comme la progression est construite sur les produits continus, Leibniz souhaite trouver une progression $\alpha_n$ telle que :

$$u_{n+1} = \alpha_n \times u_n$$

On a donc la relation suivante :

$$\alpha_{2n+1} \times \alpha_{2n} = \frac{6+4n}{n+1}$$

> *On doit donc trouver une série dont le produit d'un terme par le prochain qui suit donnerait* $\frac{6+4y}{y+1} = \nu$.[32]

31. LH 35, 2, 1 Bl.76 - *Wallisii problema interpolandi pro qvadratura Circuli*, 1674 : « Quæritur huius ultimæ seriei interpolatio, seu numeri medii, seu datis ordinatis $BC$, $DE$, $FG$ quarum intervalla æqualia, et quæ exhibent numeros $\frac{6}{1}$. $\frac{60}{2}$. $\frac{840}{6}$ etc. invenire medio loco ponendas $LM$, $NP$, etc. »

32. LH 35, 2, 1 Bl.76 - *Wallisii problema interpolandi pro qvadratura Circuli*, 1674 : « Debet ergo reperiri series cuius unus terminus ductus in proxime sequentem faciat $\frac{6+4y}{y+1}$ æqu $\nu$. »

Pour déterminer cette progression $\alpha_n$, Leibniz engage la notation différentielle, afin de réduire les inconnus à $\omega = \alpha_n$ et $d\omega = \alpha n + 1 - \alpha_n$. Ainsi :

$$\alpha n + 1 \times \alpha_n = (\omega + d\omega) \times \omega = \omega^2 + \omega d\omega$$

> *Que ce terme soit $\omega$, on doit avoir : $\omega\omega + \omega d\omega = \frac{6+4y}{y+1}$.* [33]

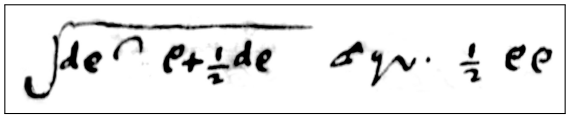
Pour se faire, Leibniz se ramène à une question plus simple, celle du simple produit continu de la suite naturelle.

$$\beta_{2n+1} \times \beta_{2n} = (e + de) \times e = n + 1$$

> *Tout d'abord, résolvons $y + 1$ en deux facteurs $e$ et $e + de$ de telle manière qu'on ait $ee + ede = y + 1$ ou encore $eedy + ede = ydy + dy$ qui est une différentielle numérique, lesquelles sont toujours plus difficiles à résoudre que les différentielles géométriques.* [34]

Ce problème constitue donc l'un des premiers qui donne à Leibniz l'occasion d'appliquer formellement son calcul différentiel pour le cas discret. Les formules classiques du calcul différentielles doivent être adaptées. Ainsi, on trouve une formule suivante :

$$\int de \times \left(e + \frac{1}{2}de\right) = \frac{1}{2}e^2$$

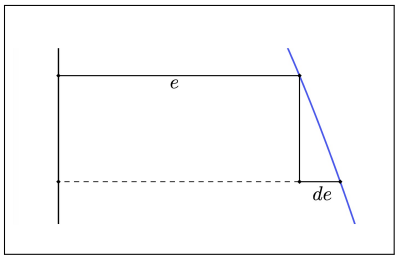


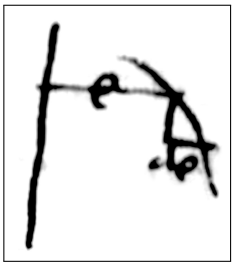
Manuscrits de Leibniz - LH 35, 2, 1 Bl.76

Ce qui correspond sans doute à l'une des formules suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(k - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}n^2 \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^{n}\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left((n+1)^2 - 1\right)$$

La figure qu'il trace dans la marge du fragment témoigne également de cette approche analytique :



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 2, 1 Bl.76

Les formules du calcul différentiel sont donc plus appropriées aux courbes et aux problèmes infinitésimaux qu'aux progressions discrètes et aux différences finies.

### La moyenne pronique

En 1682, Leibniz rédige un texte intitulé *Linea pronicæ progressionis* (LH 35, 13, 3, Bl.134-135). Avant de traiter des lignes proniques, Leibniz considère les moyennes proniques. Il pose le problème suivant. Etant donnés deux nombres $a$ et $b$, et une certaine relation de progression, comme la relation arithmétique,

33. LH 35, 2, 1 Bl.76 - *Wallisii problema interpolandi pro qvadratura Circuli*, 1674 : « is terminus sit $\omega$ debet esse $\omega\omega + \omega d\omega$ æqu $\frac{6+4y}{y+1}$. »

34. LH 35, 2, 1 Bl.76 - *Wallisii problema interpolandi pro qvadratura Circuli*, 1674 : « primus $y + 1$ resolvamus in duos factores $e$ et $e + de$ ita ut sit $ee + ede$ æqu $y + 1$ vel $eedy + ede$ æqu. $ydy + dy$ quæ est differentialis Numerica, quales adhuc difficilius solvuntur quam Geometricæ differentiatiales. »

géométrique, harmonique, logarithmique ou autre, trouver une méthode pour déterminer une certaine suite de grandeurs $u_1$, $u_2$, ..., $u_{p-1}$ de sorte que la relation donnée caractérise la progression suivante :

$$a = u_0 \ ; \ u_1 \ ; \ u_2 \ ; \ \ldots \ ; \ u_{p-1} \ ; \ u_p = b$$

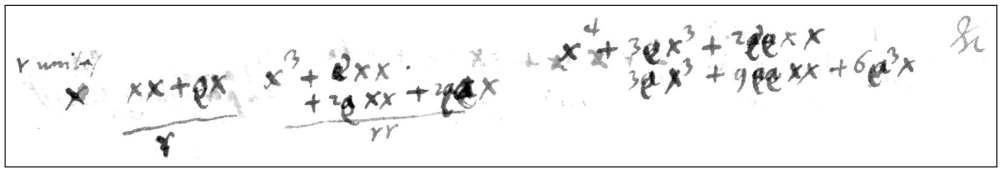
Lorsque $p = 2$, il s'agit de trouver simplement $u_1$ qui est la moyenne proportionnelle de la relation :

> *Entre deux nombres, nous pouvons trouver la moyenne géométriquement proportionnelle.* [35]

Leibniz pose donc le problème pour une relation qui n'est pas courante : la relation pronique. Comme le rappelle Leibniz, le pronique constitue pour lui le produit continu des termes d'une suite arithmétique :

> *Choisissons une autre progression, par exemple une pronique, qui est engendrée si l'on multiplie les nombres d'une progression arithmétique continument entre eux : aussi soit $x$, $x + e$, $x + 2e$, $x + 3e$ etc.* [36]

Alors la suite pronique sera :



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 13, 3 Bl.134-135

$$x \quad \frac{xx + ex}{r} \quad \frac{\begin{array}{rcl} x^3 & + & exx \\ & 2exx \ + & 2eex \end{array}}{rr} \quad \begin{array}{rcl} x^4 & + & 3ex^3 \ + \ 2eexx \\ & & 3ex^3 \ + \ 9eexx \ + \ 6e^3x \end{array} \quad \text{etc.}$$

Pour des raisons d'homogénéité, Leibniz introduit l'unité $r$.

Leibniz s'attaque d'abord au problème où $p = 2$. Il s'agit donc de trouver la moyenne proniquement proportionnelle de deux nombres $a$ et $b$.

> *Maintenant résolvons le problème suivant : étant donnés deux nombres, trouver leur moyen pronique-ment proportionnelle.* [37]

C'est-à-dire trouver la moyenne $u$ de sorte qu'il existe un certain $e$ qui vérifie :

$$a = a \ ; \ u = a(a + e) \ ; \ b = a(a + e)(a + 2e)$$

Comme la suite pronique est construite sur une progression arithmétique, Leibniz part de la moyenne arithmétique pour construire la moyenne pronique. Voici sa méthode :

> *Ecrivons les arithmétiques comme ceci :*
> - $x \ \ \frac{x+y}{2} \ \ y$ -
> *On obtient les proniques :*
> - $x \ \ \frac{x^2+yx}{2r} \ \ \frac{xxy+yyx}{2r^2}$ -
> *Soit $x = a$ et $\frac{x^2y+yyx}{2} = br^2$.* [38]

En remplaçant $x$ par $a$, on peut exprimer $y$ en fonction de $a$ et $b$ en résolvant une équation de degré deux :

35. LH 35, 13, 3, Bl.134-135, *Linea pronicæ progressionis*, Juin 1682 : « Inter duos Numeros possumus invenire medium Geometrice proportionalem »

36. LH 35, 13, 3, Bl.134-135, *Linea pronicæ progressionis*, Juin 1682 : « Sumamus aliam progressionem verbi gratia pronicam, quæ oritur si numeri progressionis arithmeticæ in se continue ducantur : nempe $x$ et $x + e$ et $x + 2e$ et $x + 3e$ &c. »

37. LH 35, 13, 3, Bl.134-135, *Linea pronicæ progressionis*, Juin 1682 : « Hinc solvemus problema : datis duobus numerus invenire medium pronice proportionalem. »

38. LH 35, 13, 3, Bl.134-135, *Linea pronicæ progressionis*, Juin 1682 : « Scribamus arithmeticos hoc modo : $x \ \ \frac{x+y}{2} \ \ y$ fient pronici $\frac{x}{r} \ \ \frac{xx+yx}{2r} \ \ \frac{xxy+yyx}{2rr}$. Sit $x$ æqu. $a$ et $\frac{xxy+yyx}{2}$ æqu. $brr$ »

*On obtient :* $a^2y + ay^2 = 2br^2$ *c'est-à-dire* $y = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 2\frac{br^2}{a}} - \frac{1}{2}a$. [39]

Une fois qu'on a pu déterminer $x$ et $y$ en fonction de $a$ et $b$, il suffit de faire les substitutions dans l'expression du terme médian $\frac{x^2+yx}{2}$ qui est la moyenne pronique :

*Et* $\frac{x^2+yx}{2} = \frac{1}{2}\left(a^2 + a\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 2\frac{br^2}{a}} - \frac{1}{2}a^2\right)$. *Donc* $\frac{x^2+yx}{2} = \frac{a^2+\sqrt{a^4+8abr^2}}{4}$ *qui est la moyenne proniquement proportionnelle entre* $a$ *et* $b$ *en supposant que* $r$ *est l'unité.* [40]

Leibniz vérifie avec la suite pronique canonique, à savoir les factorielles, où $a = e = 1$ :

*Soient les nombres suivants :* 1 2 6 24 120 720 *etc. Si donc* $a = r$ *c'est-à-dire* 1 *et* $b = 6$ *alors* - $\frac{a^2+\sqrt{a^4+8abr^2}}{4} = \frac{1+\sqrt{1+48}}{4} = \frac{1+7}{4} = 2$ - *Ainsi* 2 *est la moyenne proniquement proportionnelle entre* 1 *et* 6. [41]

La même méthode peut être employée pour $p = 3$ et ainsi de suite :

*Il est facile de trouver aussi la troisième moyenne proniquement proportionnelle, à savoir la troisième majeure. Ou bien nous cherchons la troisième majeure, ou bien nous cherchons la troisième mineure. Et ainsi nous pouvons en réalité trouver autant de points que nous souhaitons sur la courbe pronique.* [42]

Leibniz traite ensuite cette question de la courbe pronique, et ne donne pas de détails pour les troisièmes proportionnelles ou bien les autres. Il résout finalement ce problème d'interpolation par l'algèbre, plutôt que par le calcul différentiel.
En réalité, le problème de la recherche des moyennes et celui de l'interpolation d'une progression ne sont pas équivalents. Appliquons, pour le voir, cette solution algébrique à la progression pronique que Leibniz étudiait dans le *Wallisii problema interpolandi pro qvadratura Circuli* (LH 35, 2, 1 Bl.76), près de huit ans plus tôt :

$$\underbrace{\frac{6}{1}}_{u_0} \;;\; \underbrace{\star}_{u_1} \;;\; \underbrace{\frac{6}{1}\times\frac{10}{2} = \frac{60}{2}}_{u_2} \;;\; \underbrace{\star}_{u_3} \;;\; \underbrace{\frac{6}{1}\times\frac{10}{2}\times\frac{14}{3} = \frac{840}{6}}_{u_4}$$

Si l'on cherche $u_1$ comme moyenne proniquement proportionnelle entre $u_0$ et $u_2$, on trouve :

$$u_1 = \frac{u_0^2 + \sqrt{u_0^4 + 8u_0u_2}}{4} = 3(3 + \sqrt{19})$$

Le pas de la progression arithmétique est alors :

$$e = \frac{u_1}{u_0} - u_0 = \frac{\sqrt{19} - 9}{2}$$

Alors on a bien $u_1 = u_0(u_0 + e)$ et $u_2 = u_0(u_0 + e)(u_0 + 2e)$. En revanche, si l'on calcul le terme de rang quatre dans cette suite pronique :

$$u_0(u_0 + e)(u_0 + 2e)(u_0 + 3e)(u_0 + 4e) = \underbrace{4410 - 990\sqrt{19}}_{=c} \neq u_4 = \frac{840}{6} = 140$$

Ainsi, $u_1$ qui est la moyenne pronique de la moyenne pronique entre $u_0$ et $u_4$ n'est pourtant pas la quatrième proniquement proportionnelle entre ces deux termes. Formalisons cela en notant $\sqrt[n]{\mathfrak{p}(a|b)}$ le

39. LH 35, 13, 3, Bl.134-135, *Linea pronicæ progressionis*, Juin 1682 : « Fiet : $aay+ayy$ æqu. $2brr$ seu $y$ æqu. $\sqrt{\frac{1}{4}aa + 2\frac{br^2}{a}} - \frac{1}{2}a$. »

40. LH 35, 13, 3, Bl.134-135, *Linea pronicæ progressionis*, Juin 1682 : « Et $\frac{xx+yx}{2}$ æqu. fiet : $\frac{1}{2}, aa + a\sqrt{\frac{1}{4}aa + 2\frac{brr}{a}} - \frac{1}{2}aa$. Ergo $\frac{xx+yx}{2}$ fiet : $\frac{aa+\sqrt{a^4+8abrr}}{4}$ quæ est media pronice proportionalius inter $a$ et $b$ posita $r$ unitate. »

41. LH 35, 13, 3, Bl.134-135, *Linea pronicæ progressionis*, Juin 1682 : « Numeri erunt tales : 1 2 6 24 120 720 &c. Si ergo $a$ sit æqu. $r$ seu 1 et $b$ sit 6 tunc $\frac{aa+\sqrt{a^4+8abrr}}{4}$ erit $\frac{1+\sqrt{1+48}}{4}$ seu $\frac{1+7}{4}$ seu 2. Itaque 2 est media pronice proportionalis inter 1 et 6. »

42. LH 35, 13, 3, Bl.134-135, *Linea pronicæ progressionis*, Juin 1682 : « Facile est etiam tertiam pronice proportionalem invenire tertium majorem sive quæramus tertium majorem sive minorem, itaque quotcunque libet puncta vera curvæ pronicæ invenire possumus. »

$k$-ième terme des $n$-èmes proniquement proportionnelles entre $a$ et $b$, c'est-à-dire qu'il existe $e_n$ tel que, pour tout $k$ :

$$\sqrt[n]{\mathfrak{p}(a|b)} = a(a+e_n)(a+2e_n)\dots(a+ke_n) \qquad \text{avec} \quad \begin{matrix} \sqrt[n]{\mathfrak{p}(a|b)} = a \\ \sqrt[n]{\mathfrak{p}(a|b)} = b \end{matrix}$$

L'exemple ci-dessus montre qu'on a :

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\mathfrak{p}\left(a|\sqrt[m]{\mathfrak{p}(a|b)}\right)} &\neq \sqrt[n.m]{\mathfrak{p}(a|b)} \\ \sqrt[n]{\mathfrak{p}(a|b)} &\neq \sqrt[l.n]{\mathfrak{p}(a|b)} \end{aligned}$$

Si l'on notons $\sqrt[n]{\mathfrak{g}(a|b)}$ le $k$-ième terme de des $n$-ième géométriquement proportionnelles entre $a$ et $b$. Alors la moyenne géométrique de la moyenne est bien la quatrième proportionnelle. De façon générale, on a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\mathfrak{g}\left(a|\sqrt[m]{\mathfrak{p}(a|b)}\right)} &= \sqrt[n.m]{\mathfrak{g}(a|b)} \\ \sqrt[n]{\mathfrak{g}(a|b)} &= \sqrt[l.n]{\mathfrak{g}(a|b)} \end{aligned}$$

Ces propriétés permettent de toujours se rapporter à un seul exposant :

$$\sqrt[n]{\mathfrak{g}(a|b)} = \sqrt[\frac{n}{k}]{\mathfrak{g}(a|b)} = a\sqrt[\frac{n}{k}]{\frac{b}{a}}$$

Cette capacité à réduire la division des relations à un unique paramètre linéaire est essentielle pour pouvoir établir un lien entre ces problèmes et la recherche d'une courbe. Le fait que ces propriétés ne soient pas vérifiées pour le cas des proniques indique qu'il n'est pas possible de reporter sur un même axe les différentes divisions des rapports. En d'autres termes, la relation pronique ne s'accorde pas avec la théorie des proportions d'Euclide, ce qui compromet la détermination de la courbe.. Mais Leibniz ne semble pas conscient de cette importante difficulté.

Il se pose un autre problème, moins sérieux, que Leibniz semble également mettre de côté ; Le caractère exprimable des moyennes proniques. Appliquons sa méthode pour $p = 3$ :

$$x \qquad \frac{2x+y}{3} \qquad \frac{x+2y}{3} \qquad y$$

A partir de cette suite arithmétique, on construit la suite pronique suivante :

$$\underbrace{x}_{a} \qquad \frac{2x^2+yx}{3} \qquad \frac{2x^3+5yx^2+2y^2x}{9} \qquad \underbrace{\frac{2x^3y+5x^2y^2+2xy^3}{9}}_{b}$$

Ainsi, pour déterminer $y$ en fonction de $a$ et $b$, il faut résoudre l'équation suivante :

$$2ay^3 + 5a^2y^2 + 2a^3y = 9b$$

En utilisant la méthode de Cardan, sans se préoccuper des différents cas et des différents signes, on arrive à une solution déjà très lourde :

$$y = \sqrt[3]{\frac{9b}{4a} - \frac{35a^3}{216} + \sqrt{\left(\frac{35a^3}{216} - \frac{9b}{4a}\right)^2 - \frac{2197a^6}{46656}}} + \sqrt[3]{\frac{9b}{4a} - \frac{35a^3}{216} - \sqrt{\left(\frac{35a^3}{216} - \frac{9b}{4a}\right)^2 - \frac{2197a^6}{46656}}} - \frac{5}{6}a$$

Ainsi, si la deuxième moyenne demande de résoudre une équation de degré deux et la troisième requiert la résolution d'une équation cubique, on comprend aisément qu'une moyenne $p$-ième nécessitera de résoudre une équation de degré $p$.

En réalité, c'est déjà le cas pour les moyennes géométriques. Trouver la troisième moyenne géométriquement proportionnelle entre deux nombres $a$ et $b$ revient à résoudre l'équation $r^3 = \frac{b}{a}$. La solution de cette équation n'est pas plus accessible que celle l'équation cubique ci-dessus. La notation radicale $\sqrt[3]{}$ est un symbole arbitraire qui désigne cette solution. On pourrait donc de la même manière, créer de nouveaux symboles pour les racines proniques. Par la théorie de Galois, que Leibniz n'avait bien-sûr pas à disposition, nous savons en revanche qu'à partir du cinquième degré, les racines proniques ne sont pas réductibles aux racines classiques, ni réciproquement.

### 11.2.2 Courbes sous-jacentes

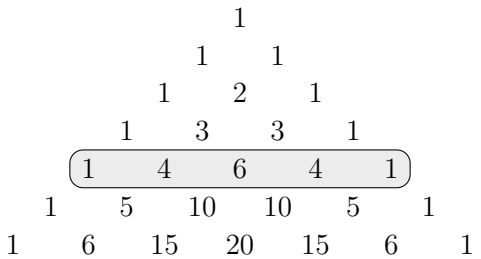
Nous avons montré que Leibniz obtient l'idée de réduire l'interpolation à la recherche d'une courbe à partir de réflexions sur le calcul différentiel. Transporter des questions de différentielles numériques trop complexes vers celles des différentielles géométriques, qui sont bien connues, revient à la recherche d'une courbe continue qui contient toutes les interpolations possibles. Néanmoins, dans tous les travaux que nous présentons ici, Leibniz cherche seulement à exprimer la courbe sous-jacente, mais jamais à déterminer sa cohérence ou son existence. Or nous avons montré que, dans le cas de la relation pronique, il n'est pas possible de construire une courbe qui aurait les propriétés que Leibniz souhaite.

#### Une ligne transcendante

Comme nous l'avons déjà mentionné, Leibniz développe cette idée dans le *De Intercalatione Numerorum Combinatoriorum* (LKK, N.6), en janvier 1675 :

> *Mais imaginons de plus qu'en intercalant continument de cette façon ces moyennes, on décrive des lignes combinatoires par lesquelles on représenterait les progressions des nombres figurés ; et l'on doit voir en revanche si en coupant ces lignes en parts inégales, on peut exprimer réciproquement les puissances qui correspondent aux binômes. Il faut autant extraire du Triangle Arithmétique qu'on doit couper en parts inégales etc. De sorte qu'en outre, on puisse démontrer celles-ci de façon universelle ; en divisant une puissance quelconque en une infinité de petits rapports, et en montrant qu'ils coïncident avec ces lignes combinatoires.* [43]

Ici, Leibniz nomme les courbes limites des « lignes combinatoires » (« *lineas combinatorias* »). Ces lignes sont issues de l'interpolation des rangs horizontaux, dans le triangle arithmétique :




La courbe est construite point par point, par l'interpolation continuelle qui, poussée à l'infini, donne l'ensemble des petits rapports permettant de caractériser la courbe. Se pose alors implicitement la question de la priorité ontologique. Est-ce la progression discrète qui est déterminée par la courbe, dont elle est une simple partie, ou bien est-ce la courbe qui est le produit de l'interpolation de la progression discrète ?

43. LKK, N.6, *De Intercalatione Numerorum Combinatoriorum. De Formulis Omnium Dimensionum ex Artis Combinatoriæ Principiis*, Janvier 1675 - p.30 : « Sed et finge continua ejusmodi mediarum interpositione describi lineas combinatorias quibus repræsentantur numerorum figuratorum progressiones, videndum an secando has lineas in partes inæquales, sed invicem respondentes binomiorum tamen potestates exprimi queant. Tantum sumendum est Triangulum Arithmeticum et in partes inæquales secandum, etc. Ut autem ista universaliter demonstrentur ; dividenda quælibet potestas in infinitas ratiunculas ; et ostendendum ista coincidere cum lineis istis combinatoriis. »

Laquelle des deux préexiste à l'autre ? Leibniz affirme qu'il faut montrer par théorème que cette priorité n'existe pas, et qu'on peut passer de façon parfaitement équivalente de la ligne à la progression et réciproquement. Dans le *De descriptione geometrica curvarum transscendentium* (A VII, 7, N.49$_2$), datant également de janvier 1675, Leibniz mène plus loin ces réflexions :

> *Assurément, si l'on a décrit certaines lignes qui ne sont pas analytiques, on ne pourra pas étudier leurs différences au moyen du calcul ni par conséquent faire la description des règles et des mouvements par compositions et pourtant l'on peut décrire celles des révolutions à l'aide des tangentes données, comme je l'ai mentionné. Concernant la ligne logarithmique, l'équation est celle-ci : $a^{\frac{y}{a}} = x$. D'où, si l'on peut obtenir $y$ de façon absolue au moyen d'une certaine expression, la différence entre ces deux valeurs sera égale aux appliquées de l'hyperbole depuis l'asymptote, ce qui est admirable et mérite qu'on approfondisse toute à fait sa démonstration donnée par Saint-Vincent, et qu'il faut imaginer des choses semblables pour les autres courbes. Et a partir de là, on pourra imaginer la méthode à conduire comme analytique, à l'image des équations par lesquelles on trouve les angles continument croissants par la méthode déterminée des exposants, bien que ce ne soit pas par des équations pures. Du reste, certaines autres sont des expressions d'ordonnées où ce n'est plus la même courbe si les ordonnées deviennent, par une infinité d'intervalle, une interpolation de Wallis c'est-à-dire une courbe qu'on doit se figurer par de perpétuelles interpolations. D'ailleurs il faut noter que celle de Wallis constitue une telle courbe, pas même analytique mais transcendante, puisqu'on ne peut pas exprimer toutes les appliquées par la relation et qu'on ne peut pas se représenter les moyennes des progressions. Voilà déjà là des problèmes très difficiles qui consistent à trouver les moyennes des progressions, c'est-à-dire, étant donné un intervalle, à intercepter les appliquées de cette courbe entre deux ordonnées données.* [44]

La courbe logarithmique n'est pas une courbe rationnelle, puisqu'elle ne peut pas être décrite par une équation de degré fini. Néanmoins, Leibniz décrit la méthode pour résoudre l'équation $a^{\frac{y}{a}} = x$ comme analytique, puisqu'en effet, l'équation différentielle dont elle est issue est rationnelle :

$$dy \times log(a) = \frac{a}{x}$$

Le parallèle que fait Leibniz avec les « équations par lesquelles on trouve les angles continument croissants par la méthode déterminée des exposants, bien que ce ne soit pas par des équations pures » (« *æquationes quibus anguli inveniuntur continue crescentes certo modo exponentium etsi non æquationibus puris* »), désigne probablement la méthode de quadrature des paraboloïdes par transmutation, que nous avons déjà exposée. En effet, dans une parabole, les angles des tangentes sont continument croissants. La méthode de transmutation établit bien un lien entre ces angles, la quadrature de la courbe et les exposants de l'équation. En prenant l'exemple de la courbe logarithmique, Leibniz montre qu'il est parfois possible d'obtenir la courbe par une autre méthode que l'interpolation poursuivie à l'infini. En effet, la courbe logarithmique est obtenue par la quadrature de l'hyperbole, mais elle contient en elle toutes les progressions exponentielles. Cependant, une telle situation n'est pas générale. Leibniz affirme que pour certaines expressions, l'interpolation continue produit une « courbe qui n'est pas la même » (« *non est eadem curva* »). Cette idée est troublante et exprimée de façon confuse. Leibniz entend-il par là que la courbe obtenue par l'interpolation ne suit pas la même loi que celle des expressions de départ ? Néanmoins, il semble clair qu'il y a une opposition entre ces comportements exotiques d'une part, rattachés à Wallis et donc aux produits factoriels (que Leibniz nommera plus tard "proniques"), et d'autre part le comportement analytique de la courbe logarithmique, liée à une équation différentielle rationnelle. Il y a donc, dans les progressions factorielles de Wallis, une composante discrète irréductible. Dès lors, la courbe obtenue par l'interpolation continue de suivre une règle discrète. On peut effectivement représenter cette idée, de

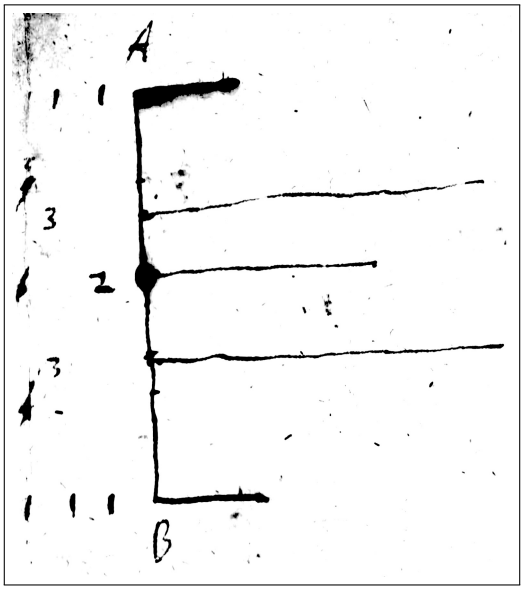
44. A VII, 7, N.49$_2$, *De descriptione geometrica curvarum transscendentium*, janvier 1675 - p.521 : « Nimirum si curvæ quædam sint descriptæ ; quæ non sint analyticæ, differentiæ earum non poterunt calculo investigari, nec proinde et descriptio regularum et motuum compositionibus fieri, et tamen describi possunt ope Tangentium datæ ; revolutarum : Ut obiter dicam. In linea logarithmica æquatio est hæc : $a^{\frac{y}{a}} \sqcap x$. Unde si $y$ haberi posset, absolute quodam expressionis modo, differentia inter hos duos valores, æquabitur applicatæ hyperbolæ circa asymptotos quod est mirabile et meretur in ejus demonstrationem ex S. Vincentio penitus inquiri ; ad similia in aliis curvis comminiscenda. Et ducendam inde methodum fingi poterit ut analytica, ob æquationes quibus anguli inveniuntur continue crescentes certo modo exponentium etsi non æquationibus puris. Cæterum aliæ quædam sunt expressiones ordinatarum, ubi non est eadem curva, si ordinatæ sint intervallo infinite Wallisii interpolatio seu curva interpolationibus perpetuis imaginanda. Cæterum nota eam curvam qualis est illa Wallisiana ne Analyticam quidem transcendentem esse, quia non omnes ejus ordinatæ exprimi relatione possunt, quia non possunt reperiri mediæ progressionales. Ecce jam hic difficillima problemata ejusmodi mediarum progressionalium inveniendarum, seu applicatarum curvæ ejus inter datas duas ordinatas dato intervallo interceptarum. »

façon anachronique, par la fonction $\Gamma$ d'Euler, que l'on obtient en poursuivant à l'infini l'interpolation de la progression factorielle naturelle $n!$. Cette fonction continue de vérifier la loi discrète : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. A première vue, il semble que le *De Intercalatione Numerorum Combinatoriorum* (LKK, N.6) ait été rédigé avant le *De descriptione geometrica curvarum transscendentium* (A VII, 7, N.49$_2$). En effet, dans le premier, Leibniz semble optimiste quant à la faisabilité de poursuivre l'interpolation du triangle arithmétique, tandis que dans le second, il décrit cette courbe limite comme inaccessible et inexprimable. Cependant, Leibniz va en réalité plus loin, dans le *De Intercalatione Numerorum Combinatoriorum* (LKK, N.6), en se fondant sur la formule du binôme. De fait, les coefficients du triangle arithmétique interviennent dans le développement du binôme, pour une puissance entière. Ainsi, Leibniz espère que l'interpolation du triangle permettra d'exprimer les puissances non entières. Il établit donc un lien, par le triangle arithmétique, entre l'interpolation analytique des puissances et l'interpolation des nombres combinatoires. Ceci pourrait fournir une piste pour lier l'interpolation transcendante des progressions de Wallis à l'analyse rationnelle de la courbe logarithmique. Cela étant, rien ne permet d'affirmer que Leibniz ait pu envisager un tel lien, dans ces termes. En effet, ces deux extraits, bien que datant du même mois, sont issus de travaux aux objectifs très différents. Le *De Intercalatione Numerorum Combinatoriorum* (LKK, N.6) s'attache principalement à généraliser et formaliser la formule du binôme, tandis que le *De descriptione geometrica curvarum transscendentium* (A VII, 7, N.49$_2$) traite de la question de la construction des courbes, notamment vis-à-vis de la position de Descartes. Ces extraits ne se répondent donc probablement pas l'un l'autre. Ajoutons que l'interpolation de Wallis se fait selon les progressions des nombres figurés et non des nombres combinatoires :

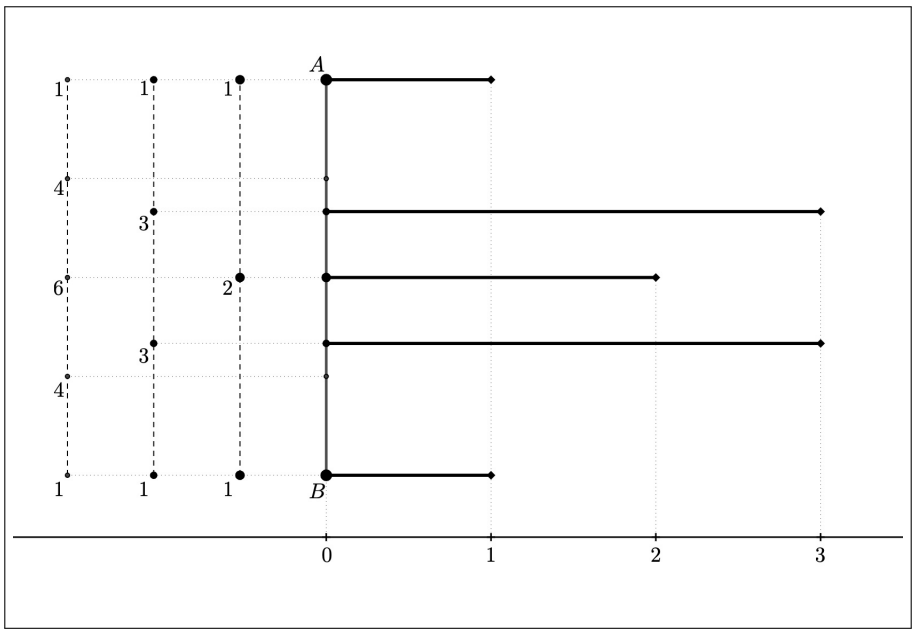
| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 1 | | | | | |
| | | | | 1 | | 1 | | | | |
| | | | 1 | | 2 | | 1 | | | |
| | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | | |
| | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 | |
| 1 | | 5 | | 10 | | 10 | | 5 | | 1 |
| 1 | 6 | | 15 | | 20 | | 15 | | 6 | 1 |

**Lignes combinatoire**

Dans le *De cyclometria per intercalationes* (LH 35, 2, 1, Bl.68-69), qui fait partie, pour rappel, des travaux de 1679 sur les techniques de quadrature de Wallis et de Mengoli, Leibniz fait une nouvelle tentative, quant à la description des lignes combinatoires. Pour ce faire, il envisage de réduire sur un même graphique, toutes les progressions des nombres combinatoires :




Manuscrits de Leibniz - LH 35, 2, 1, Bl.68-69

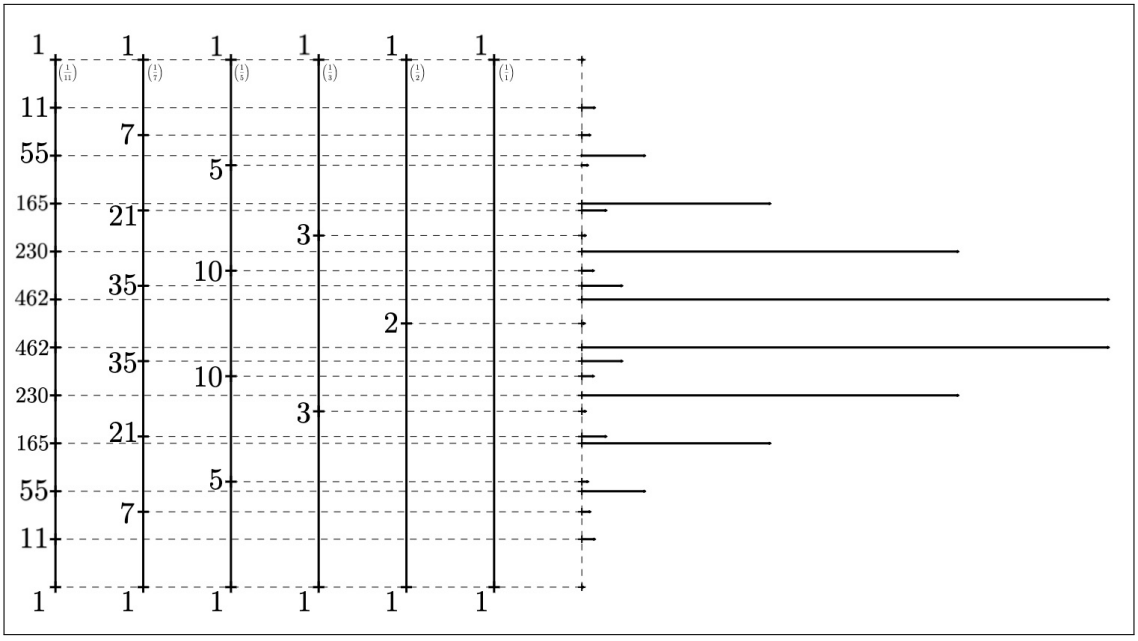



Cela pose le problème suivant : pour une même abscisse, il faut placer des nombres combinatoires différents. Par exemple, les coefficients $\binom{2n}{n}$ qui sont au centre de leurs séries, sont tous placés à l'abscisse $\frac{1}{2}$, alors que leurs valeurs sont différentes :

> *On constate par cette méthode qu'on ne peut pas mener une courbe parce qu'il doit y avoir les mêmes ordonnées. Par exemple, elle est égale en même temps à la quantité* 2 *et à la quantité* 6. [45]

La solution serait de ne considèrer que les progressions dont le rang est un nombre premier. En effet, cela reviendrait, à chaque étape, à partager le segment $AB$ en $p$ parts, de sorte que $p$ ne possède aucun facteur commun avec les découpages précédents. Ainsi il n'y aura aucune superposition entre ce découpage et les précédents :

> *A moins que l'on ne fasse seulement usage des nombres premiers parmi les nombres qui désignent les puissances binaires. En effet, de cette façon, les points ne coïncident jamais dans les divisions de* $AB$. [46]



45. LH 35, 2, 1, Bl.68-69 - *De cyclometria per intercalationes, postea per polygona, ubi expressio per logarithmos. Et modus demonstrandi impossibilitatem Analyticam tentatus per series converg. Scheda I*, Mars 1679 : « Patet hoc modo non posse prodire curvam quia eadem ordinata debere est v. g. simul æquari quantitati 2 et quantitati 6. »

46. LH 35, 2, 1, Bl.68-69 - *De cyclometria per intercalationes, postea per polygona, ubi expressio per logarithmos. Et modus demonstrandi impossibilitatem Analyticam tentatus per series converg. Scheda I*, Mars 1679 : « Nisi utamur tantum numeris primis eorumque numeris potentias binarias designantibus hoc modo enim nunquam coincidunt punctæ divisionum ipsius $AB$. »

En procédant de la sorte, on ne peut pas obtenir une ligne continue. En effet, même si l'ensemble des abscisses finit par remplir le segment $AB$ [47], les ordonnées restent entières, donc discrètes. De plus, la distribution ne semble pas suivre de règle particulière :

> *Mais une nouvelle difficulté apparaît. De fait, entre B et A, on arrangera méthodiquement tous les nombres premiers, mais on n'en arrangera d'avantage entre* 2 *et* 3*, et on ne voit pas de moyen d'intercaler entre* 3 *et* 1*. Et l'on comprend facilement que la chose ne résulte pas d'une quantité continue, de sorte qu'on met finalement un terme à la ligne, puisqu'on ne reconnait point avec ces nombres premiers, une quelconque quantité continue.* [48]

En réalité, pour parvenir à faire émerger une ligne, il faut procéder à une double normalisation.

- ⋆ Il faut d'une part normaliser les ordonnées, en considérant le rapport entre un nombre combinatoire de rang $n$ et le maximum des coefficients de ce rang :

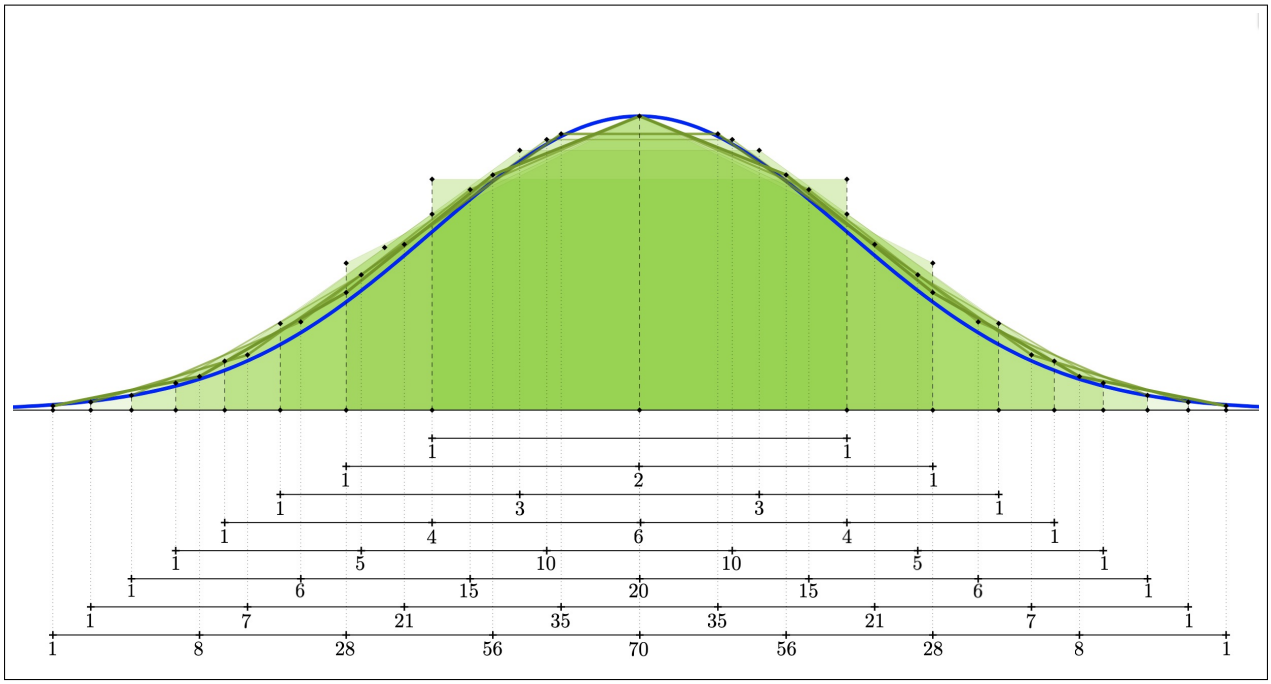
$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{\frac{n}{2}}}$$

- ⋆ Il faut d'autre part normaliser les abscisses, car le $k$-ème nombre combinatoire devient sensiblement équivalent au premier, c'est-à-dire 1, lorsque la taille $n$ de la progression devient infinie. Il faut donc normaliser les ordonnées par l'écart-type :

$$\frac{\binom{n}{\frac{n}{2}+x.\sqrt{\frac{n}{2}}}}{\binom{n}{\frac{n}{2}}}$$

Ainsi, on obtient bien une convergence vers une courbe, à savoir la gaussienne [49] :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\binom{n}{\frac{n}{2}+x\sqrt{\frac{n}{2}}}}{\binom{n}{\frac{n}{2}}}\right) = e^{-x^2}$$




47. En terme moderne, nous dirons qu'il forme une partie dense du segment $AB$

48. LH 35, 2, 1, Bl.68-69 - *De cyclometria per intercalationes, postea per polygona, ubi expressio per logarithmos. Et modus demonstrandi impossibilitatem Analyticam tentatus per series converg. Scheda I*, Mars 1679 : « Sed nova oritur difficultas nam inter $B$ et $A$ omnes ordine collocabuntur numeri primi, sed nullus amplius collocabitur inter 3 et 1 intercalandi. Et facile intelligitur rem non procedere in qunatitate continua et ut tandem in lineam desinatur, quia numeros primos quæ alias quantitas continua non agnoscit. »

49. Cette convergence s'interprète, en terme de loi de probabilité, comme la convergence des lois binomiales vers la loi normale, démontrée par les théorème de De Moivre-Laplace.

Peut-on interpréter cette formule de convergence pour résoudre le problème posé par Leibniz dans le *De Intercalatione Numerorum Combinatoriorum* (LKK, N.6), à savoir utiliser les propriété de cette ligne limite pour généraliser la formule du binôme ? Pour le voir, considérons le cas simple du binôme d'unités, c'est-à-dire les puissances binaires :

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Il nous faut procéder à la double normalisation de cette formule, pour pouvoir mener ensuite l'interpolation à bien. Dans notre formule de convergence, il faut que $\frac{n}{2} + x.\sqrt{\frac{n}{2}}$ soit un entier $k$, donc :

$$x = \left(-\frac{n}{2} + k\right) \times \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{2}}} \qquad \rightarrow \qquad \varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{2}}}$$

Donc le pas d'intégration, c'est-à-dire la différence entre deux abscisses $x$ successives est $\varepsilon_n$. Posons alors l'intervalle suivant, constitué des différentes abscisses $x$ possibles :

$$I_n = \left\{ -\frac{n}{2}\varepsilon_n \ ; \ \left(-\frac{n}{2}+1\right)\varepsilon_n \ ; \ \left(-\frac{n}{2}+2\right)\varepsilon_n \ ; \ \dots \ ; \ \left(-\frac{n}{2}+(n-1)\right)\varepsilon_n \ ; \ \underbrace{\left(-\frac{n}{2}+n\right)}_{=\frac{n}{2}}\varepsilon_n \right\}$$

Alors, on a $k \in \{0, 1, \dots, n\} \Leftrightarrow x \in I_n$. On peut alors faire la normalisation des abscisses par le changement d'indice suivant :

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{x \in I_n} \binom{n}{\frac{n}{2} + x\sqrt{\frac{n}{2}}}$$

Or, par la formule de Stirling, on a l'équivalence suivante :

$$\binom{n}{\frac{n}{2}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{n\pi}} = \frac{2^n \varepsilon_n}{\sqrt{\pi}}$$

On peut normaliser les ordonnées et obtenir alors la formule suivante :

$$\frac{2^n}{\frac{\varepsilon_n}{\sqrt{\pi}}} \cdot \frac{\frac{\varepsilon_n}{\sqrt{\pi}}}{\binom{n}{\frac{n}{2}}} = \sum_{x \in I_n} \frac{\binom{n}{\frac{n}{2}+x\sqrt{\frac{n}{2}}}}{\binom{n}{\frac{n}{2}}} \qquad \rightarrow \qquad \underbrace{\frac{\frac{2^n \varepsilon_n}{\sqrt{\pi}}}{\binom{n}{\frac{n}{2}}}}_{\underset{n\to\infty}{\sim} 1} \cdot \sqrt{\pi} = \sum_{x \in I_n} \frac{\binom{n}{\frac{n}{2}+x\sqrt{\frac{n}{2}}}}{\binom{n}{\frac{n}{2}}} \varepsilon_n$$

Or, lorsque $n \to \infty$, le pas $\varepsilon_n$ tend vers 0 et les bornes de l'intervalle $I$ qui sont $\pm\sqrt{\frac{n}{2}}$ tendent vers l'infini. Ceci nous mène donc à l'intégrale de la gaussienne :

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Ainsi, l'interpolation de la formule du binôme mène à une quadrature transcendante, et non, comme Leibniz le souhaitait, vers une autre formule de binôme.

**Lignes proniques**

Revenons au *Linea pronicæ progressionis* (LH 35, 13, 3, Bl.134-135) rédigé en juin 1682. Après avoir résolu de façon algébrique la recherche des moyennes proniques, Leibniz se tourne vers l'approche différentielle :

> *Lorsque deux ordonnées proniques ont une différence infiniment petite, alors également la différence e de la progression arithmétique sera infiniment petite.* [50]

50. LH 35, 13, 3, Bl.134-135, *Linea pronicæ progressionis*, Juin 1682 : « Cum duæ ordinatæ pronicæ haberit differentiam infinite parvam, etiam *e* differentia arithmeticæ progresionis generantis erit infinite parva. »

Il introduit alors de nouveaux outils :

> *Et ainsi on aura un rapport constant vis-à-vis des différences des ordonnées. Soit donc :*
>
> - $\frac{-rx+x^2+xe}{r} \overset{(1)}{=} dy$ -
>
> *et à nouveau :*
>
> - $\frac{-rx^2-rxe+x^3+3ex^2+2e^2x}{r^2} \overset{(2)}{=} (dy)$ -
>
> *A l'aide de ces deux équations, on tire $x$ et on aura une équation* (3) *dans laquelle ressortiront seulement $r$ et de, de même que $dy$ et $(dy)$.* [51]

Nous voyons que Leibniz considère qu'il y a des « ordonnées proniques » (« *ordinatæ pronicæ* »). Ceci sous-entend que la relation pronique s'accorde avec la théorie des proportions et que l'on peut partager un rapport pronique sans ambiguïté. Nous avons montré que cela n'était pas possible, dans le cas où l'incrément $e$ est une quantité finie non nulle. Ici, Leibniz semble considérer que la quantité $e$ est infiniment petite, c'est-à-dire que $e = dx$. Ayant accepté ceci, il tente donc de décrire la courbe pronique, en posant deux différences successives :

$$\frac{x(x+e)}{r} - x = dy \qquad\qquad \frac{x(x+e)(x+2e)}{r^2} - \frac{x(x+e)}{r} = (dy)$$

Leibniz applique alors un raisonnement algébrique d'élimination. Etant donné deux équations qui sont libres, c'est-à-dire que l'une n'est pas conséquence de l'autre, et au sein desquelles intervient une même inconnue, il existe alors une troisième équation dans laquelle on a éliminé cette inconnue. Ainsi, il peut éliminer $x$, pour obtenir une équation qui relie $r$, $e$, $dy$ et $(dy)$. Comme $e$ est infinitésimal, Leibniz le note indifféremment $e$ ou $de$.
La courbe pronique se caractérise par sa « propriété répliquée » (« *proprietas replicata* »), qui est représentée par le paramètre $e$ :

> *C'est-à-dire qu'on obtiendra la propriété répliquée de cette courbe qui est la différentielle d'une courbe pronique. Ou alors, on a la propriété répliquée de la courbe et par cette courbe décrite, on peut représenter les tangentes de la courbe donnée, ce qui constitue une méthode des plus générales et de grande importance. Et on aura la quadratrice de cette courbe differentielle, à savoir cette pronique, c'est-à-dire la donnée.* [52]

Ainsi, selon Leibniz, cette propriété de la courbe peut être déduite de la différentielle, ou réciproquement, la différentielle peut être obtenue à partir de cette propriété. C'est l'élimination de l'ordonnée $x$ qui lui permet cette affirmation, puisque $e$ est exprimé en fonction de $dy$ et $(dy)$, et réciproquement. La majorité du manuscrit consiste en l'application de ce principe d'élimination des variables.

| | **équations** | **élimination** | **variables** |
|---|---|---|---|
| (1) | $\frac{x(x+e)}{r} - x = dy$ | | $e$ ; $r$ ; $x$ ; $dy$ |
| (2) | $\frac{x(x+e)(x+2e)}{r^2} - \frac{x(x+e)}{r} = (dy)$ | | $e$ ; $r$ ; $x$ ; $dy$ ; $(dy)$ |
| (3) | (1) et (2) | $x$ | $e$ ; $r$ ; $dy$ ; $(dy)$ |
| (4) | $\left(\frac{2x+e}{r} - 1\right) dx = d^2y$ | | $e$ ; $r$ ; $dy$ ; $(dy)$ ; $dx$ ;$d^2y$ |
| (5) | $(dy) = dy + d^2y$ | | $e$ ; $r$ ; $dy$ ; $(dy)$ ; $dx$ ;$d^2y$ |
| (6) | (3), (4) et (5) | $(dy)$ et $d^2y$ | $e$ ; $r$ ; $dx$ ; $dy$ |

> *Et il faut examiner si cette courbe est algébrique, et à l'aide du calcul différentiel, s'il se pourrait que les tangentes des courbes proniques puissent être algébriques et également s'il se pourrait que la quadratrice d'une courbe algébrique soit une courbe pronique.* [53]

51. LH 35, 13, 3, Bl.134-135, *Linea pronicæ progressionis*, Juin 1682 : « Itaque ad differentiam ordinatorum rationem habebit constantem. Sit ergo : $\frac{-rx+xx+xe}{r} \overset{(1)}{\text{æqu.}} dy$ et rursus $\frac{-rxx-rxe+x^3+3exx+2eex}{rr} \overset{(2)}{\text{æqu.}} (dy)$. Harum duarum æquationum ope tollatur $x$ et habebitur æquatio 3 in qua extabunt tantum $r$ et $de$, itemque $dy$ et $(dy)$. »

52. LH 35, 13, 3, Bl.134-135, *Linea pronicæ progressionis*, Juin 1682 : « Seu habebitur proprietas replicata ipsis curvæ quæ sit curvæ pronicæ differentialis. Seu curvæ proprietas replicata habetur qua curva descripta possunt exhiberi curvæ datæ tangentes quæ methodus est generalissima & magni momenti. Et habetur huius curvæ differentialis quadratrix nempe ipsa pronica seu data. »

53. LH 35, 13, 3, Bl.134-135, *Linea pronicæ progressionis*, Juin 1682 : « & examinandi an hæc curva sit Algebrica, ope calculi differentialis, fieri poterit an tangentes curvæ pronicæ possint algebraices. Item fieri poterit cuius curvæ Algebraicæ quadratrix sit pronica curva. »

Ici, Leibniz établit une équation fondée sur la différentielle d'ordre 2. En effet, pour calculer $d^2y$, il utilise deux méthodes :

- ⋆ La première consiste a différentier $dy$, c'est-à-dire appliquer l'algorithme différentiel à l'expression formelle de cette quantité.
- ⋆ La seconde consiste a faire la différence entre $dy$ évaluée pour $x$ et $(dy)$ évaluée pour $x + dx$.

Ainsi, il écrit

> *Cherchons la différence d'une courbe pronique différemment que jusqu'ici, à savoir en cherchant $d^2y$. Comme :*
>
> $$dy \overset{(1)}{=} \frac{-rx+x^2+ex}{r^2},$$
>
> *on obtient :*
>
> $$d^2y \overset{(4)}{=} \frac{-rxdx+2xdx+edx}{r^2},$$ [54]

En appliquant ces deux méthodes, Leibniz obtient une nouvelle équation :

> *Déjà $(dy) \overset{(5)}{=} dy + d^2y$, après avoir substitué leurs valeurs. Nous aurons donc deux valeurs de ce $(dy)$, à savoir par 2. et 5. en éliminant ainsi autant $x$ que $dy$, il resterait l'équation* (6) *dans laquelle on aurait seulement $dy$, $dx$, $e$ et $r$. De plus, $e$ et $r$ sont des constantes et $dx$ est constant également. Et $dy$ n'est pas nécessairement constant. Et donc $dy$ disparait de l'équation qui en résulte parce que si ce n'est pas le cas, il faut poser une relation entre $e$ et $dx$, de sorte que $dy$ puisse disparaitre. Dans cette mesure, il ne se produit pas d'impossibilité, puisque je ne vois pas d'où elle pourrait se produire. Si en réalité, $dy$ disparait spontanément, nécessairement on obtient le rapport qu'il y a entre $e$ et $dx$. On aura alors ce dernier, à moins que $\frac{e}{dx}$ disparaisse en même temps, c'est-à-dire qu'on ait une équation purement identique.* [55]

Ce type de raisonnement par élimination au sein d'équations implicites n'est pas nouveau [56]. Mais Leibniz se confronte ici à une difficulté. Il ne s'agit pas d'équations habituelles établissant un lien de dépendance entre différentes quantités, mais d'équations différentielles. Dès lors, les quantités mis en jeu ne sont pas toutes de même nature : elles sont infinitésimales à divers ordres. Cet état de fait est valable quelque soit l'interprétation ontologique de ces quantités. Si elles étaient des indivisibles actuellement infinitésimaux, ce qu'elles ne sont pas chez Leibniz, les ordres de différentielles impliqueraient des natures ontologiques distinctes et ces différences ne seraient pas prises en compte par la relation extraite de l'équation. Si, comme c'est le cas chez Leibniz, elles sont comparables et seulement potentiellement infinitésimale, alors elles doivent être variables pour devenir aussi petite que l'on souhaite. Ainsi, c'est cette vitesse de variation qui détermine les ordres de différentiation et que la relation de l'équation ignore toujours. C'est pourquoi Leibniz a introduit dans son calcul différentielle une règle supplémentaire, propre aux équations différentielles, qui permet de tenir compte des ordres de différentiations. C'est ce qu'il appelle « les règles différentielles des homogènes » (« *leges homogeneorum differentiales* »), selon lesquelles seules des quantités homogènes peuvent être mises en relation au sein des équations.
Ainsi, si l'on a l'équation $y^2 = x^3$, alors en différentiant, on devrait obtenir l'équation différentielle suivante :

$$2ydy + dy^2 = 3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3$$

En appliquant les règles différentielles des homogènes, on obtient trois équations différentielles homogènes :

$$2ydy = 3x^2dx \qquad dy^2 = 3xdx^2 \qquad 0 = dx^3$$

Le cas de la ligne pronique pose donc une difficulté sérieuse, pour Leibniz. L'équation de la courbe fait intervenir elle-même des différentielles et enfreint dès lors les règles différentielles des homogènes. On l'a

54. LH 35, 13, 3, Bl.134-135, *Linea pronicæ progressionis*, Juin 1682 : « Quæramus differentiam curvæ pronicæ adhuc aliter nempe quærendo $ddy$. Cum sit $dy$ æqu. $\overset{(1)}{\frac{-rx+xx+ex}{rr}}$ fiet $ddy$ æqu. $\overset{(4)}{\frac{-rxdx+2xdx+edx}{rr}}$ ».

55. LH 35, 13, 3, Bl.134-135, *Linea pronicæ progressionis*, Juin 1682 : « Jam $(dy)$ æqu. $\overset{(5)}{dy+ddy}$ substitutis horum valoribus. Ergo habemus duos valores ipsius $(dy)$ nempe 2 et 5 tollendo igitur tam $x$ quam $(dy)$ restaret æquatio (6) in qua solum haberentur $dy$. $dx$. $e$. et $r$. Sunt autem $e$. et $r$. constantes, et $dx$. etiam constans, et $dy$ non est constans necesse est ergo evanescere $dy$ in æquatione proveniente quod, si non sit ponenda est talis relatio inter $e$ et $dx$ ut evanescere possit $dy$. Modo non oriatur impossibilitas quod non video unde possit oriri. Si vero evanescat sponte $dy$. necesse est haberi rationem quæ est inter $e$ et $dx$. Ea ergo habebitur, nisi simul evanescant $\frac{e}{dx}$ seu fiat æquatio pure identica. »

56. On en trouve un autre exemple dans le *Æquationes Transcendentes Exponentales* (LH 35, 5, 13 Bl.1-2), daté de février 1677, et dont nous ferons l'étude dans un prochain chapitre.

vu, lorsque Leibniz a appliqué les deux méthodes pour obtenir $d^2y$. En principe, ces deux méthodes sont rigoureusement équivalentes et aboutissent nécessairement à une équation identique. Mais, dans le cas des proniques, l'expression en $x$ n'est pas du même degré qu'en $x + dx$. Si bien qu'en différentiant $dy$, on n'obtient pas la même chose qu'en calculant la différence entre $(dy)$ et $dy$. Leibniz cherche donc, par la méthode d'élimination, à supprimer les composantes problématiques des expressions proniques afin d'obtenir des équations différentielles qui respectent les règles différentielles des homogènes :

> *Il me vient par ailleurs à l'esprit [de savoir] si l'on ne pourrait pas transiter depuis cette forme plutôt extraordinaire de la progression répliquée vers une plus commune qui nous mènerait vers la propriété absolue des tangentes, c'est-à-dire une équation différentielle commune dans laquelle les règles différentielles des homogènes sont préservées. Puisque, dans l'équation 1, les règles différentielles des homogènes ne sont pas préservées, il faut qu'on écrive pour cette raison* $rdy - xe \overset{(8)}{=} h$ *à partir de l'équation 1 où l'on a fait :* $-rx + x^2 \overset{(1)}{=} rdy - xe$. *Parce que dans h, la règle différentielle des homogènes est pleinement préservée, et grace à l'équation 8, il faut que nous cherchions la valeur de ce x, à savoir l'équation 9. Qu'on substitue cette valeur dans l'équation 2, et alors on éliminerait aussi ces x-là qui sont posés hors de la règle différentielle des homogène, et l'on obtiendra l'équation 10 qui vérifiera la règle différentielle des homogènes.*[57]

Le procédé de Leibniz semble ne pas aboutir, car en éliminant les variables qui posent problème, on est forcé d'en créer d'autres qui sont aussi problématiques :

> *A moins qu'il n'existe en elle les carrés de dy et de que l'on ne souhaite pas détruire. Mais il faut éliminer par le calcul de sorte qu'on imagine obtenir* $e^2$ *ou edx dans l'équation 5, une fois la valeur de* $d^2y$ *substituée dans l'équation 4. De façon similaire, il faut qu'on cherche l'équation différentielle de cette équation 5, elle-même développée par l'équation 4. On obtiendra l'équation 11 dans laquelle on aura à nouveau la valeur*[58] *de ce* $d^2y$, *qu'on élimine par l'équation 4. On obtiendra l'équation 12, dans laquelle on aura à nouveau ee, et à partir de laquelle on élimine x, dans la mesure où il viole les règles différentielles des homogènes, et cela donne l'équation 13 dans laquelle on observe les règles différentielles, ou infinitésimales*[59] *des homogènes, et dans celle-ci, nous aurons à nouveau le carré de dy. Et le carré de e ou de dx, ou plus petit que dx ou dy, violeront les règles des homogènes dans ces deux équations 13 et 10.*[60]

Néanmoins, il pense tout de même aboutir :

> *Mais nous pouvons obtenir plusieurs choses à ce stade. En effet, la valeur de x dans l'équation 3, nous pourrons la substituer dans l'équation 2, ou seulement dans les termes où x perturbe. Et nous obtiendrons une autre équation, à savoir la 14, dans laquelle également, dx comme dy perturbent les règles des homogènes. Donc à l'aide des trois équations 10, 13, 14, nous éliminerons finalement dx et dy qui perturbent et qui par conséquent est une équation purement intégrale, pleinement élégante puisqu'elle ne contient pas y mais seulement x.*[61]

Cela étant, Leibniz concède que ce processus implicite ne constitue pas une réelle résolution :

---

57. LH 35, 13, 3, Bl.134-135, *Linea pronicæ progressionis*, Juin 1682 : « Etiam aliud mentem subit an non ab hac progressionis replicatæ forma satis extraordinaria transiri possit ad communiorem quæ nos ducat ad absolutam Tangentium proprietatem seu æquationem communem differentialem, in qua servantur leges homogeneorum differentiales. Quia in æqu. 1. non servantur leges homogeneorum differentiales, ideo ex æqu. 1. faciendo $-rx+xx \overset{(1)}{\text{æqu.}} rdy-xe$ scribamus $rdy-xe \overset{(8)}{\text{æqu.}} h$ quia in $h$ saltem servatur lex homogeneorum differentialis, et ope æqu. 8 quæramus valorem ipsius $x$, seu æqu. 9. Hunc valorem substituamus in æqu. 2, ibique tollamus etiam ipsas $x$ positas extra legem homogeneorum differentialem, et habebitur æqu. 10. quæ servabis legem homogeneorum differentialem. »

58. Dans le manuscrit, le mot « valeur » (« *valor* ») est barré, mais la phrase ne fait pas sens sans lui

59. Leibniz utilise ici le terme « *infinitesimarium* », qui semble être un mot *ad hoc*, remplaçant le plus traditionnel *infinitesimalia*.

60. LH 35, 13, 3, Bl.134-135, *Linea pronicæ progressionis*, Juin 1682 : « Nisi quod in ea extent quadrata ipsarum $dy$ et $de$ quæ destinere non audendum. Sed tollendæ calculo quod ut fiat cogitetur $ee$ vel $edx$. haberi in æqu. 5. substituto valore ipsius $ddy$ ex æqu. 4. Similiter quæratur æquatio differentialis ipsius æquationis 5 explicatæ per æqu. 4. habebitur æqu. 11 in qua erit iterum valor ipsius $ddy$. qua sublata ope æqu. 4. habebitur æqu. 12 in qua iterum erit $ee$, ex ea tollatur $x$ quatenus violat leges homogeneorum fiet æqu. 13. in qua servabuntur leges homogeneorum differentiales seu infinitesimariæ et in ea iterum habebitur quadrat $dy$. et quadrat $e$ vel $dx$ vel brevius $dx$ et $dy$ violabunt leges homogeneorum in his duabus æquationibus 13 et 10. »

61. LH 35, 13, 3, Bl.134-135, *Linea pronicæ progressionis*, Juin 1682 : « Sed habere possumus adhuc plures. Nam valorem ipsius $x$ in æqu. 3. substituere poteramus in æqu. 2 vel solum in terminis ubi $x$ turbat, & habebimus aliam æquationem nempe 14. in qua etiam et $dx$ et $dy$ turbant leges homogeneorum, ergo ope trium æquationum, 10. 13. 14. tollemus tandem $dx$ et $dy$ turbantes, quæ proinde est æquatio pure Tetragonistica sane præclara quia in eam non ingreditur $y$ sed solum $x$. »

*Et le calcul, et avec lui l'examen, guidera, et pourra y parvenir par diverses méthodes. Je pense également, en ce qui concerne toutes les autres propriétés, que l'on procède de même pour les tangentes qui déterminent la courbe ou représente la génération. Il aurait fallu chercher la réciproque, c'est-à-dire, étant donnée une équation intégrale, il aurait fallu chercher un moyen d'exprimer les vrais points, telle que la logarithmique.* [62]

Cette méthode constitue plutôt le plan de route d'une future démonstration, à laquelle il manque encore quelques outils concrets qui puissent permettre de résoudre effectivement les équations à chaque étape.

*Nota Bene. Nota Bene Cela vaudra la peine que ce calcul s'intègre à cette logarithmique.* [63]

L'intervention finale de la courbe logarithmique montre que Leibniz souhaite établir un parallèle entre cette dernière et la courbe pronique, parallèle qui est probablement d'une nature semblable à celui qu'il avait introduit dans le *De summis serierum fractionalium* (LH 35 7 12 Bl. 1-2) entre les puissances classiques et les puissances communes.
Leibniz revient finalement sur les règles différentielles des homogènes, pour corriger une erreur dans l'équation 4 :

*Il me vient à l'esprit quelque chose qui suggère des scrupules. Lorsque nous cherchons $d^2y$ pour obtenir l'équation 4 à partir de l'équation 1, il est permis de douter, pour le dire ainsi, qu'on puisse poser $d(x^2) = 2xdx$ en omettant $dx^2$, puisque dans l'équation 4 elle-même, on trouve $edx$, c'est-à-dire $dx^2$. De plus, on a*

$$- \qquad -x^2 + \xi^2 = -x^2 + x^2 + 2xdx + dx^2 = d(x^2) \qquad -$$

*Donc pour l'équation 4, il faut écrire*

$$- \qquad d^2y = -rxdx + 2rxddx + dx^2 + edx \qquad -$$

*Et ainsi nous ne pouvons pas nous tromper.* [64]

Il corrige d'ailleurs directement ledit passage :

*Comme $d(x^2) = 2xdx + (dx)^2$, il faut ici ajouter $\frac{dx^2}{r^2}$ à la valeur de $d^2y$. Voir ce qu'il y a écrit là-dessus en dessous, à la fin de la page suivante.* [65]

Ceci montre que Leibniz doit adapter l'algorithme différentiel à la nature de la courbe. Comme celle-ci ne respecte pas les règles différentielles des homogènes, alors l'opérateur différentiel doit être lui-même réformé, puisqu'il était construit sur ces règles. Mais l'argument qui soutient cette réforme est lui-même fondé sur la loi des homogènes : on ne peut pas négliger $dx^2$ si ce terme lui-même intervient dans l'expression de la courbe, sous la forme $edx$.
Pour finir, Leibniz qualifie ce procédé de « méthode des maxima et des minima » (« *Methodus de Maximis et Minimis* ») qu'on applique aux différentielles plutôt qu'aux nombres :

*Il s'agit donc de la très remarquable méthode des maxima et des minima que l'on réalise à la manière commune, au moins pour ces cas-ci, mais qu'on applique aux différentielles comme aux nombres.* [66]

La méthodes des maxima et des minima permet, à l'origine, de déterminer la distance à laquelle une tangente coupe l'axe des abscisses, en fonction du degré de la courbe. C'est notamment cette méthode qui peut justifier l'algorithme du calcul différentiel. Ici, Leibniz insiste donc à nouveau, comme dans le *De summis serierum fractionalium* (LH 35 7 12 Bl. 1-2), sur le parallèle qui existe entre calcul différentiel et calcul numérique. L'analyse différentielle de la ligne pronique suppose qu'on ait trouvé un langage commun pour les deux royaumes, puisque la progression pronique constitue un pont entre discret et continu.

62. LH 35, 13, 3, Bl.134-135, *Linea pronicæ progressionis*, Juin 1682 : « Et calculus secum ducet examen, diversis modis eo perveniri poterit. Puto idem procedere etiam in aliis omnibus proprietatibus ad tangentes quæ curvam determinant seu generationem exhibent. Quærendus esset regressus seu data æquatione Tetragonistica quærendus esset modus exhibendi vera puncta, qualis logarithmicæ. »

63. LH 35, 13, 3, Bl.134-135, *Linea pronicæ progressionis*, Juin 1682 : « NB. NB. Opera pretium erit hunc calculum inire in ipsa Logarithmica. »

64. LH 35, 13, 3, Bl.134-135, *Linea pronicæ progressionis*, Juin 1682 : « Venit aliquid in mentem quod scripulum injicit. Cum quæremus *ddy* ad habendam æqu. 4. ex æqu. 1. dubitare licet an fas sit ponere $d\overline{xx}$ æqu. $2xdx$ omisso $d\overline{x}^2$, cum in ipsa æqu. 4. extet $edx$ seu $d\overline{x}^2$. Est autem $-xx + \xi\xi$ æqu. $\overbrace{-xx + xx} + 2xdx + d\overline{x}^2$ æqu. $d\overline{xx}$. Ergo pro æqu. 4 scribendum $\overline{ddy}$ $\overset{(4)}{\text{æqu.}}$ $- rxdx + 2xdx + d\overline{x}^2 + ed\overline{x}$ ita falli non possumus. »

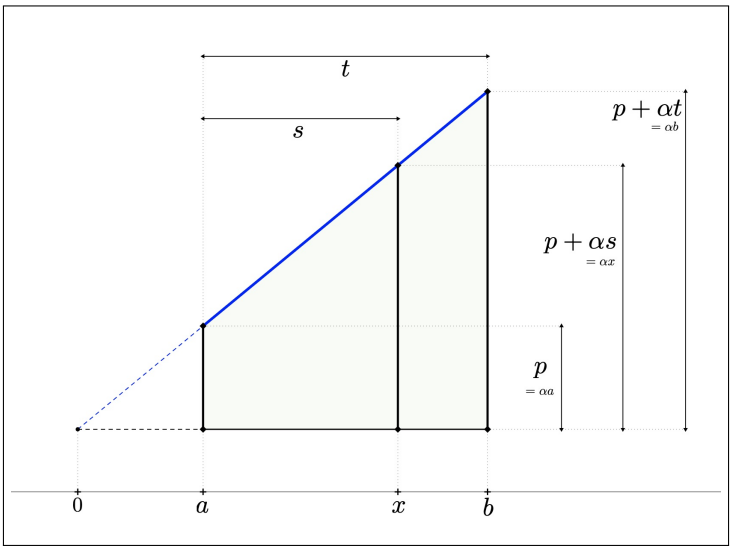
65. LH 35, 13, 3, Bl.134-135, *Linea pronicæ progressionis*, Juin 1682 : « Quia $d\overline{xx}$ æqu. $2xdx + d\overline{x}^2$, hinc ad valorem *ddy* addendum $\frac{dx^2}{rr}$. Vide infra in cuius scriptam sub finem paginæ sequentis. »

66. LH 35, 13, 3, Bl.134-135, *Linea pronicæ progressionis*, Juin 1682 : « Hoc igitur est notabilissimum Methodum de Maximis et Minimis communem in his casibus minime procedere sed differentiales adhibendas ut in Numeris. »

### Intégrale Multiplicative

Comme nous l'avons vu, Leibniz considère que le pas de la progression arithmétique, dont le pronique est le produit des termes, devient infiniment petit dans la ligne pronique. Il s'agit, au final, de faire le produit de chaque ligne d'un triangle :

$$\prod_{s=0}^{t}(p+\alpha s) = \prod_{x=a}^{b} \alpha x$$




Mais un tel produit est évidemment divergent. Comment définir le produit de l'ensemble infini des segments que constituent les ordonnées de la courbe ? Cela ne pose *a priori* pas plus de difficulté que d'en définir la somme, lorsque l'on fait une intégrale ou une quadrature. Cependant, à la place de considérer le segment de l'ordonnée $y$ comme un rectangle de taille infiniment petite $y \times dx$, il faut le considérer comme un rapport infiniment proche de l'identité.
Leibniz avait déjà étudié la question à Paris, en 1673, dans un texte que nous développerons dans une prochaine section. Situé dans la *Plagula ו (3)* (A VII, 4, N.16$_3$) des *Mathematicæ Collectionis Plagulæ ו* (A VII, 4, N.16), le texte s'intitule la *Quadratura figuræ logarithmicæ, vel quod idem est geometrice proportionalium*. Leibniz y considère justement les ordonnées de la courbe logarithmique comme le résultat d'un produit continu de rapports infinitésimaux :

> *Le rapport de deux projetés voisins entre eux est certes infiniment petit, et l'on peut cependant l'appeler « petit rapport » en quelque sorte. Le petit rapport est toujours le même. Et c'est pourquoi le rapport entre le projeté maximal et le projeté minimal est égal au produit entre eux des rapports infiniment petits, c'est-à-dire multipliés autant de fois que le nombre de points par lesquels la hauteur est divisée.* [67]

Mais Leibniz se heurte à cette époque aux difficultés du statut ontologique des indivisibles :

> *Même si les projetés géométriquement proportionnels diffèrent seulement de segments droits infiniment petits, ces segments droits infiniment petits n'en sont pas moins des quantités, mais si leur rapport avec le sensible est infini.* [68]

Près de dix ans plus tard, Leibniz trouve une solution grâce aux propriétés de morphisme de la courbe logarithmique :

67. A VII, 4, N.16$_3$, *Plagula ו (3)*, printemps 1673 - p.298 : « Ratio applicatarum sibi vicinarum est quidem infinite parva, possis appellare ratiunculam, aliqua tamen. Ratiuncula semper est eadem. Et ideo ratio applicatæ maximæ ad minimam, æquatur ratiunculæ minimæ infinities in se ductæ, seu toties in se ductæ, in quot puncta divisa est altitudo »
68. A VII, 4, N.16$_3$, *Plagula ו (3)*, printemps 1673 - p.298 : « Etsi applicatæ geometrice proportionales, non differant, nisi rectis infinite parvis, eæ tamen rectæ infinite parvæ, sunt utique, quantitates, etsi earum ratio ad sensibiles infinita sit. »

*Du reste, à partir d'une telle méthode générale, il faut que nous parvenions à celle spécifique des proniques, où il faut considérer que les logarithmes des ordonnées sont les sommes des logarithmes pour les nombres de la progression arithmétique.* [69]

En effet, si l'on considère le logarithme d'un pronique, on obtient une somme :

$$\log\left(p(p+e)(p+2e)\dots(p+ne)\right) = \log(p) + \log(p+e) + \log(p+2e) + \dots + \log(p+ne)$$

Ainsi, en diminuant le pas $e$ de ce produit et en augmentant le nombre $n+1$ de facteurs, on peut interpréter le membre de droite comme l'approximation d'une intégrale. Pour cela, il faut cela dit multiplier les deux membres de l'équation par le pas $e$ :

$$\log\left(p^e(p+e)^e(p+2e)^e\dots(p+ne)^e\right) = \log(p).e + \log(p+e).e + \log(p+2e).e + \dots + \log(p+ne).e$$

Ainsi, si l'on pose $e = \frac{\alpha t}{n}$, on obtient :

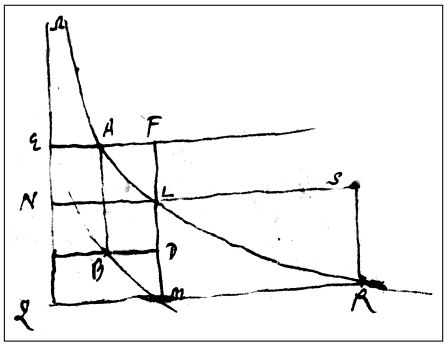
$$\begin{aligned}
\log(p).e + \log(p+e).e + \dots + \log(p+ne).e &= \log(p).\frac{\alpha t}{n} + \log\left(p+\frac{\alpha t}{n}\right).\frac{\alpha t}{n} + \dots + \log\left(p+n.\frac{\alpha t}{n}\right).\frac{\alpha t}{n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \log\left(p+k.\frac{\alpha t}{n}\right).\frac{\alpha t}{n} \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha\int_0^t \log(p+\alpha s)ds
\end{aligned}$$

Ainsi, on peut représenter la ligne pronique par ce produit continu :

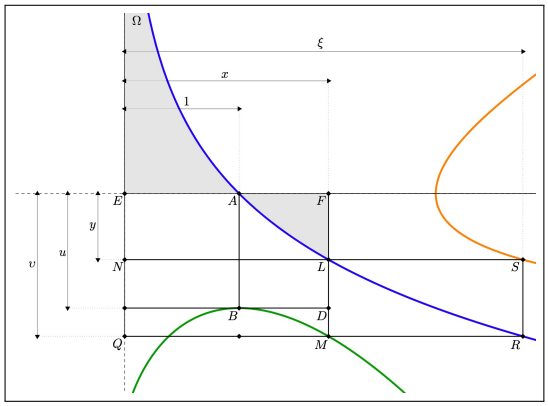
$$\log\left(\prod_{s=0}^{t}(p+\alpha s)^{ds}\right) = \alpha\int_0^t \log(p+\alpha s)ds \qquad \Longrightarrow \qquad \prod_{s=0}^{t}(p+\alpha s)^{ds} = e^{\alpha\int_0^t \log(p+\alpha s)ds}$$

Cela correspond sensiblement au raisonnement de Leibniz :

*Soit la courbe logarithmique $AL$ et soit la courbe $BM$ proportionnelle à son aire que l'on peut obtenir de toute façon puisque l'aire infiniment longue (en réalité d'une grandeur finie) $\Omega EA\Omega$ est à $AFLA$ comme $AB$ à $DM$ (en posant que $AE$ soit 1, dont le logarithme est 0). Mais si par le nombre $EN$, nous cherchons le pronique correspondant, nous aurons le logarithme de ce nombre pronique $FM$, c'est-à-dire $EQ$ dont le nombre correspondant est $QR$. On considère le prolongement de $NL$ jusqu'à $S$, et $NS$ sera le pronique cherché pour l'indice $EN$.* [70]




Manuscrits de Leibniz - LH 35, 13, 3, Bl.134-135




69. LH 35, 13, 3, Bl.134-135, *Linea pronicæ progressionis*, Juin 1682 : « Cæterum a methodo talium generali veniamus ad specialia de pronicis. Ubi considerandum, logarithmos ordinatarum esse summas logarithmorum pro Numeris progressionis Arithmeticæ. »

70. LH 35, 13, 3, Bl.134-135, *Linea pronicæ progressionis*, Juin 1682 : « Sit curva $AL$ logarithmica sit curva $BM$ eius areis proportionalis, quæ utique haberi potest nempe ut sit area infinita longitudine (reapse magnitudine finita) $\Omega EA\Omega$ ad $AFLA$, ut $AB$ ad $DM$ (posito $AE$ esse 1 cuius logarithmus est 0.) quodsi ergo numero $EN$ quæramus pronicum respondentem ; habebimus eius Numeri pronici logarithmum $FM$. seu $EQ$. cuius respondens Numerus $QR$ Sumatur in ipsa $NL$ producta usque in $S$ et erit $NS$ pronicus quæsitus pro indice $EN$. »

On a donc le rapport des aires $\Omega EA\Omega$ et $AFLA$ qui est égal à celui des longueur $AB$ et $DM$ :

$$\begin{aligned}\frac{\Omega EA\Omega}{AFLA} &= \frac{\int_{-\infty}^{0} e^t dt}{EF \times FL - \int_0^y e^t dt} \\ &= \frac{1}{xy - (e^y - 1)} \\ &= \frac{1}{x.\log(x) - x + 1} \\ \frac{AB}{DM} &= \frac{u}{\upsilon - u}\end{aligned}$$

Ceci permet de déterminer la courbe $(BM)$, en vert sur la figure :

$$\frac{u}{\upsilon - u} = \frac{1}{x.\log(x) - x + 1} \quad \Longrightarrow \quad \upsilon = u(2 + x(\log(x) - 1)$$

On retrouve bien la primitive du logarithme :

$$\begin{aligned}\upsilon &= u(2 + x(\log(x) - 1) \\ &= u(1 + (x\log(x) - x) - (1\log(1) - 1)) \\ &= u\left(1 + \int_1^x \log(s) ds\right)\end{aligned}$$

Ainsi, la ligne pronique $(S)$, en orange sur la figure, correspond à la réciproque de cette quantité par la courbe logarithmique, c'est-à-dire son exponentielle :

$$\begin{aligned}\xi = e^{\upsilon} &= e^{u\left(1+\int_1^x \log(s) ds\right)} \\ &= e^{u(2+x(\log(x)-1))} \quad \text{en fonction de } x \\ &= e^{u(2+(y-1)e^y)} \quad \text{en fonction de } y\end{aligned}$$

Finalement, la courbe pronique correspond donc à la fonction suivante :

$$\mathfrak{p}(x) = e^u \times \prod_{s=1}^{x} s^{uds} = e^{u(2+x(\log(x)-1))} = \left(\frac{x^x}{e^{x-2}}\right)^u$$

Leibniz ne formalise nullement ces nouveaux objets. Il se contente de proposer l'idée d'appliquer la quadrature de la courbe logartihmique. Il semble même qu'il fasse abstraction des différentielles $ds$, car ces puissances infinitésimales sont absentes de ses formulations des proniques. Dès lors, le logarithme de cette quantité donne, comme Leibniz le dit, « les sommes des logarithmes pour les nombres de la progression arithmétique » (« *summas logarithmorum pro Numeris progressionis Arithmeticæ* »). Or ces sommes ne peuvent être interprétées comme une quadrature qu'à condition de multiplier tous leurs termes par le pas infinitésimal $ds$ d'intégration. Ceci revient à élever la quantité pronique à cette puissance infinitésimale $ds$. Il commet par ailleurs une autre erreur, dans la suite, lorsqu'il propose d'étendre la notion de pronique, non plus seulement aux seuls produits de termes en progression arithmétique, mais aussi en progression triangulaire, pyramidale etc. :

> *A présent, on peut également trouver la tangente de la courbe pronique par une voie différente des précédentes. Mais c'est cela le plus admirable : à l'aide des logarithmes, on peut élever les racines proniques, c'est-à-dire également des variables d'un plus haut degré et très composées. Mais je ne vois toujours pas ce qui empêche de passer aux proniques de degré 2, c'est-à-dire les proniques triangulaires au lieu des arithmétiques. Puisqu'en effet, on obtiendrait les sommes des sommes des logarithmes.* [71]

71. LH 35, 13, 3, Bl.134-135, *Linea pronicæ progressionis*, Juin 1682 : « Hinc etiam curvæ pronicæ tangens inveniri potest via a prioribus diversa. Sed illud maxime mirabile ope logarithmorum educi posse radices pronicas seu affectas etiam altissimi gradus & valde compositas. Nec video jam quid prohibent transire ad pronicos secundi gradus seu a Arithmeticis ad pronicos triangulares. Cum enim dentur summæ summarum logarithmorum. »

De fait, un nombre triangulaire est la somme d'une progression arithmétique, un nombre pyramidal est la somme d'une progression de triangulaires, et ainsi de suite. Ainsi, s'il faut appliquer le logarithme une fois pour une somme, suffit-il de l'appliquer deux fois pour des sommes de sommes ? La méthode de Leibniz repose sur le fait que les proniques sont des produits de termes successifs et non sur le fait que ces termes sont des sommes d'autres termes successifs :

$$\log\left(\prod\sum\right) = \sum\log\left(\sum\right) \neq \sum\sum\log$$

Si l'on souhaite appliquer la méthode de Leibniz en replaçant la progression arithmétique par une progression triangulaire dans le pronique : $p(p+3e)(p+6e)\ldots$, alors il faut adapter la formule :

$$\log\left(p^0(p+e)^e(p+3e)^{2e}\ldots(p+\tfrac{n(n+1)}{2})^{ne}\right) = \sum_{k=0}^{n}\log(p+\tfrac{k(k+1)}{2}e)ke$$

Ainsi à la limite, on obtient :

$$\prod_{s=0}^{t}\left(p+\alpha\frac{s^2}{2}\right)^{sds} = e^{\alpha\int_0^t\log\left(p+\alpha\frac{s^2}{2}\right)sds}$$

Néanmoins, Leibniz est conscient d'avoir trouvé une méthode assez générale, propre à apporter un éclairage aux questions laissées ouverte par Wallis :

> *Cela sera remarquablement utile pour examiner les interpolations de Wallis, c'est-à-dire pour trouver un moyen de décrire cette courbe par les logarithmes, là où Wallis avait exposé en vain une description pour toutes. Peut-être qu'il y a, à partir de cela, un chemin vers des quadratures spécifiques complètes.* [72]

**Deux types de produits**

Il existe deux méthodes principales pour modéliser l'ordonnée $y$ comme un « petit rapport » (« *ratiuncula* ») tel que l'envisage Leibniz :

- ⋆ La première consiste à ajouter une unité au rectangle infinitésimal $y.dx$. Ainsi, on obtient une quantité infiniment proche de 1 :

$$\prod_{x=a}^{b}(1+f(x)dx) \quad \text{on peut montrer que ce produit vaut } e^{\int_a^b f(x)dx}\ [73]$$

- ⋆ La seconde consiste à élever l'ordonnée $y$ à la puissance infinitésimale $dx$, afin d'obtenir une quantité infiniment proche de 1 :

$$\prod_{x=a}^{b}f(x)^{dx} \quad \text{on peut montrer que ce produit vaut } e^{\int_a^b\log(f(x))dx}$$

L'idée que développe Leibniz en 1682 dans le *Linea pronicæ progressionis* (LH 35, 13, 3, Bl.134-135) correspond au deuxième produit. Cela étant, le premier produit correspond bien à la première approche de Leibniz, en 1673, dans le *Plagula ו (3)* (A VII, 4, N.16$_3$). En effet, comme le dit Leibniz, le rapport entre deux ordonnées extrêmes est égal au produit des rapports infinitésimaux successifs

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \prod_{x=a}^{b}\frac{f(x+dx)}{f(x)}$$

72. LH 35, 13, 3, Bl.134-135, *Linea pronicæ progressionis*, Juin 1682 : « Hoc egregie utilia erunt ad excutiendas interpolationes Wallisianas, seu inveniendum modum describendi curvam illam per logarithmos, cuius Wallisius descriptionem omnibus frustra proposuerat. Unde forte via ad Tetragonismos speciales perfectos. »

73. On les appelle les intégrales-produit de Volterra, *Cf* [99] A. Slavík, *Product integration, its history and applications*, Matfyzpress, Prague, 2007

Or si l'on considère que $f$ est solution d'une équation différentielle, comme c'est le cas pour la logarithmique, on a :

$$f'(x) = g(x)f(x) \quad \text{ou encore} \quad \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} = g(x)f(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{f(x+dx)}{f(x)} = 1 + g(x)dx$$

Ainsi, le rapport entre deux ordonnées extrêmes correspond bien à un produit continu de premier type.

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \prod_{x=a}^{b}(1+g(x)dx)$$

Ces deux produits correspondent donc à deux approches opposées du problème.

- ⋆ La première est analytique et cherche à exprimer le rapport entre deux extrêmes, en déterminer des petits rapports infinitésimaux. Leibniz l'applique à la courbe logarithmique dont il connait déjà la forme finale :
$$e^x = \prod_{s=0}^{x}(1+ds)$$
- ⋆ La deuxième est synthétique et cherche à exprimer le produit inconnu d'une infinité de petits rapports donnés. Leibniz l'applique à la courbe pronique dont il ignore la forme finale :

$$\prod_{s=0}^{x}(1+s)^{ds} = e^{\int_0^x \log(1+s)ds}$$

Nous pouvons alors nous demander si cette expression analytique de la courbe pronique résout le problème de l'extraction de racines. De fait, la courbe générée par ces produits infinis n'est pas une interpolation des produits finis que sont les puissances proniques telles que Leibniz les a défini au départ. Alors qu'un courbe exponentielle $a^x$ interpole effectivement les termes de la progression géométrique $a^n$. Dès lors, cette solution ne permet pas d'effectuer l'interpolation des progressions proniques. Elle permet d'interpoler des progressions qui respectent la loi continue des proniques, par exemple, la progression $\frac{n^n}{e^{n-2}}$ :

$$e.1 \qquad 4 \qquad \frac{27}{e} \qquad \frac{256}{e^2} \qquad \frac{3125}{e^3} \qquad \dots$$

## 11.3 La Formule de Leibniz

La généralisation des puissances par analogie ne se borne pas aux seules puissances proniques. La formule de dérivation d'un produit, à laquelle Leibniz donne aujourd'hui son nom, en est l'un des plus fameux exemple. En effet, l'exposant devient dans ce cas une notation commune aux puissances et aux différences, qui sont traitées par Leibniz comme des fonctions.

### 11.3.1 La notion de Fonction

Revenons à l'*Historia et Origo Calculi Differentialis* pour trouver une description intéressante de ce parallèle que Leibniz met en évidence, entre les différences et les puissances :

> *Par conséquent, en adoptant la terminologie introduite plus tard par l'auteur, et en appelant y n'importe quel terme d'une suite (et dans ce cas même $a = y$), on pourra appeler la différence première $dy$, la différence seconde $ddy$, la différence troisième $d^3y$, la différence quatrième $d^4y$, et en appelant $x$ n'importe quel terme d'une deuxième suite, on pourra appeler la somme de ces termes $\int x$, la somme des sommes (ou somme seconde) $\iint x$, la somme troisième $\int^3 x$, et la somme quatrième $\int^4 x$.* [74]

Bien qu'une telle écriture soit courante, en 1714, chez les adeptes du calcul différentiel leibnizien, l'emploi que fait ici Leibniz de l'exposant pour désigner l'itération des différences ou bien l'itération des sommes n'est pas anodin. De fait, il montre que cet extension de la pratique des exposants à d'importantes conséquences :

> *D'autre part, il observait que les lignes infiniment petites qui se présentent dans les figures ne sont que les différences relatives aux moments des lignes variables. Et, de la même façon que les quantités considérées jusqu'ici par les analystes avaient des fonctions telles que, par exemple, les puissances et les racines, de même, désormais, des quantités considérées comme des variables admettent de nouvelles fonctions, comme par exemple les différences. Tout comme nous avons eu jusqu'ici les fonctions $x$, $xx$, $x^3$, etc..., $y$, $yy$, $y^3$, etc..., de même, nous pouvons employer $dx$, $ddx$, $d^3x$, etc.* [75]

Nous pouvons donc nous arrêter un instant sur l'emploi du terme « fonctions » (« *functiones* »).

#### De la fonction tangente à la fonction ordonnée

Il est communément reconnu que c'est Leibniz qui a introduit l'usage du terme au sein des mathématiques. Cela étant, les commentateurs qui ont traité cette question spécifique [76] soulignent que cet usage n'est pas le même lors de sa première mention en 1673 dans le cadre de ses travaux sur la méthode inverse des tangentes et durant la période tardive, c'est-à-dire postérieur à 1698, ce qui est le cas ici. En effet, les fonctions qu'introduit Leibniz dans ses premiers écrits désignent des objets géométriques qui sont étroitement corrélées avec l'ordonnée de la courbe.
Si l'on considère une certaine courbe donnée, on constate qu'elle se caractérise par une loi géométrique interne qui déterminer les relations de toutes ses parties. Ce que l'on désigne aujourd'hui par le terme "fonction" correspond à la relation entre l'ordonnée et l'abscisse, et l'on dit que l'ordonnée est "fonction" de l'abscisse. Cette relation se formalise sous la forme d'une équation qui se matérialise par une expression analytique. Ainsi l'usage a graduellement confondu la fonction entendue comme loi de détermination et son expression littérale.

---

74. [46] G.W. Leibniz, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, ed. Gerhardt, Hahn, 1846 - p.6 : « Unde loquendo stylo a se postea introducto, et terminum seriei vocando $y$ (quo casu etiam est $a = y$) licebit differentiam primam vocare $dy$, secundam $ddy$, tertiam $d^3y$, quartam $d^4y$ ; et terminum alterius seriei vocando $x$, licebit summam horum vocare $\int x$, et summam summarum seu summam secundam $\iint x$, et summam tertiam $\int^3 x$, et summam quartam $\int^4 x$. »

75. [46] G.W. Leibniz, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, ed. Gerhardt, Hahn, 1846 - p.17 : « Observabat autem lineas infinite parvas in figuris occurrentes nihil alius esse quam differentias momentaneas linearum variantium. Et quemadmodum quantitates hactenus consideratæ simpliciter apud Analystas habuerant suas functiones, nempe potentias et radices, ita jam quantitates ut variantes, habere novas functiones nempe differentias. Et ut habuimus hactenus $x$, $xx$, $x^3$ etc. $y$, $yy$, $y^3$ etc. ita posse adhiberi $dx$, $ddx$, $d^3x$ etc. »

76. *Cf* [88] F. Russo, *Leibniz et la Notion de Fonction* dans *Archive de Philosophie*, Volume 29, N.4, 250ème Anniversaire de la mort de Leibniz, Paris, 1966 - pp. 553-569 ; [57] D. Mahnke, *Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis*, W. de Gruyter, Berlin, 1926 ; [91] C.F Scriba, *The Inverse Method of Tangents : A Dialogue between Leibniz and Newton (1675-1677)* dans les *Archives for History of Exact Sciences*, Volume 2, N. 2, Oxford, 1964 - pp. 113-137 ; [6] Y. Belaval, *Leibniz critique de Descartes*, Gallimard, Paris, 1960 - p.337-368

Au sein des écrits parisiens de Leibniz, la fonction désigne la plus part du temps la tangente. En effet, la tangente permet de transformer l'ordonnée en une autre quantité, selon une relation entièrement assujettie à la loi supérieure de la courbe. C'est ainsi qu'on peut interpréter l'usage du terme latin "*functio*", qu'on emploie alors déjà souvent dans son sens institutionnel, pour désigner une certaine place au sein d'un organisme, qualifiée par les obligations et les devoirs qu'il lui faut accomplir dans un cadre imposé par le système. Le terme latin signifie d'ailleurs l'accomplissement ou l'exécution. Dès lors peut-on dire de la tangente qu'elle est une "fonction" de la courbe, accomplissant sa charge de transformation dans le cadre imposé par la règle sous-jacente de la courbe. Pour aller plus loin, si l'on devait désigner un concept du calcul différentiel moderne qui puisse concorder avec cette acception du terme fonction, ce seraient les champs de vecteurs associés aux équations différentielles. En effet, la fonction désigne fréquemment fréquemment dans ces textes la relation entre la tangente et l'ordonnée.
On comprend aussi pourquoi Leibniz l'utilise plus largement comme un terme générique qui regroupe la tangente, la normale, la sous-tangente et la sous-normale. Ce sont autant de parties et de quantités dérivant de la courbe et qui sont mises en relation selon sa loi générale et continue. Dans un petit article de promotion du calcul différentiel, publié dans le *Journal des Sçavans* en 1694, Leibniz donne une liste non-exhaustive de tous les segments qui peuvent être nommés "fonction" :

> *J'appelle fonctions toutes les portions des lignes droites qu'on fait en menant des droites indéfinies, qui répondent au point fixe,& auy points de la courbe : comme sont $AB$ ou $A\beta$ abscisse, $BC$ ou $\beta C$ ordonnée, $AC$ corde, $CT$ ou $C\theta$ tangente, $CP$ ou $C\pi$ perpendiculaire, $BT$ ou $\beta\theta$ soustangente, $BP$ ou $\beta\pi$ sous-perpendiculaire. $AT$ ou $A\theta$ resecta ou retranchée par la tangente, $AP$ ou $A\pi$ retranchée par la perpendiculaire, $T\theta$ & $P\pi$ sous retranchées, sub-resectæ a tangente vel perpendiculari, $TP$ ou $\theta\pi$ corresectæ. Et une infinité d'autres d'une construction plus composée qu'on se peut figurer.* [77]

Le sens du terme reste donc le même que celui né dans les années parisiennes, mais son acception s'est considérablement élargie. Et il est à noter que l'ordonnée constitue elle-même une fonction. La "fonction" moderne, prise comme relation entre l'ordonnée et l'abscisse, n'est alors qu'un cas particulier de cette notion plus générale. Ainsi peut-on mieux comprendre comment le sens du terme "fonction" ("*functio*") a pu progressivement glisser durant dernière décennie de ce siècle et notamment par sa correspondance avec Jean Bernoulli, vers celui d'expression analytique qui détermine la relation entre l'ordonnée et l'abscisse. La fonction s'émancipe alors quelque peu de son attache géométrique.

### Une fonction liée à l'expression analytique

Dans la citation issue du *Historia et Origo* de 1714, il est intéressant de voir que Leibniz y considère que les différentielles sont de nouvelles fonctions données aux analystes, les fonctions classiques étant les différentes puissances. En considérant les puissances, et plus particulièrement leurs expressions algébriques, comme les fonctions usuelles, Leibniz nous confirme ici qu'il utilise le sens tardif et moderne de "fonction". Les expressions $x$, $x^2$, $x^3$ etc désignent des expressions analytiques distinctes et donc des courbes distinctes. En revanche, $dx$, $d^2x$, $d^3x$ désignent les différentielles de différents degré d'une même variable $x$. Ceci correspond donc à une acception plus proche du sens précoce de "fonction", puisqu'il s'agit de quantités qui dérivent d'un même objet.
Il semble donc étrange de voir Leibniz ainsi aller à rebours et qualifier à nouveau de fonction des objets qui avaient perdu cette désignation. Pour François Russo, cela s'explique par le nouveau statut qu'acquièrent les différentielles lors de la naissance du sens moderne de fonction :

> *Qu'il suffise de noter de noter, du point de vue de l'histoire de la notion de fonction, que ces recherches devaient contribuer à élargir l'étude des fonctions en une étude systématique des processus différentiels généraux permettant d'engendrer une fonction, non plus seulement par des combinaisons de la variable indépendante mais à partir d'une fonction ; ce qui s'opérera, soit par la voie descendante des dérivations successives (Leibines les exprimera par la suite des indices 1, 2, 4, mis en exposant du signe « d » de différentiation), soit par la voie ascendante des quadratures.* [78]

77. [43] G.W. Leibniz, *Considérations sur la différence qu'il y a entre l'Analyse ordinaire, et le nouveau calcul des transcendentes* dans le *Journal des Sçavans*, N.34, 30 Août 1694 - p.405.

78. [88] F. Russo, *Leibniz et la Notion de Fonction* dans *Archive de Philosophie*, Volume 29, N.4, 250ème Anniversaire de la mort de Leibniz, Paris, 1966 - p564-565

En effet, là où courbes, tangentes et quadratures étaient de nature distinctes, Leibniz parvient à les capter sous la même forme analytique, grâce au calcul différentiel. Ainsi naissent les fonctions dérivées et les fonctions primitives qui ne se construisent pas à l'aide de combinaisons de fonctions usuelles mais plutôt par l'analyse d'une fonction donnée dont elles découlent. Pourtant, un autre aspect des différentielles contribue à cette explication, et François Russo semble l'avoir négliger. Ce qui pousse en réalité Leibniz à placer sous une même catégorie les puissances et les différences, ce sont également les nombreuses analogies formelles et fonctionnelles que Leibniz a pu constater entre elles :

> *Bien plus, il inventa des théorèmes généraux pour un ordre de différenciation quelconque, de même que nous avions des théorèmes de degré quelconque et découvrit un rapport remarquable entre les puissances et les différences, publié dans les Miscellanea Berolinensia.* [79]

A partir de là, la caractérisation des différences comme "fonctions" s'explique alors moins par leur nature que par leurs formes qui sont similaires aux puissances, les fonctions communes.

### 11.3.2 Un lien mystérieux

Cette mention des *Miscellanea Berolinensia* dans l'*Historia et Origo* fait référence à un article que Leibniz y a publié en 1710, intitulé « Similitude remarquable des calculs algébrique et infinitésimal, dans la comparaison des puissances et des différences, et de la loi des homogènes transcendantaux » (« *Symbolismus memorabilis calculi Algebraici et Infinitesimalis, in comparatione potentiarum et differentiarum ; et de Lege Homogeneorum Transcendentali* »). C'est dans cet article que Leibniz publie la fameuse formule de dérivation du produit, que l'on appelle encore aujourd'hui la "formule de Leibniz" :

$$(fg)^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p-k)}.$$

En réalité, Leibniz découvre cette formule au milieu des années 1690, et la première mention de cette découverte apparait dans une lettre écrite en 1695 à Jean Bernoulli [80] :

> *Ainsi, il faut noter le remarquable accord entre les nombres des puissances d'un binôme et ceux des différences d'un rectangle. Et j'ignore, je pense, quel mystère se cache derrière cela.* [81]

Cette idée du mystère est reprise par Bernoulli dans sa réponse.

> *Rien n'est plus élégant que c'est correspondances que tu as observé entre les nombres des puissances d'un binôme et les ceux des différences d'un rectangle. Nul doute que quelque mystère s'y cache.* [82]

Lorsque Michel Serfati les cite, dans son article *Mathématiques et pensée symbolique chez Leibniz*, il souligne d'ailleurs la stupéfaction qu'il lit au travers de ces lignes :

> *A les relire, on découvre, en un échange presque comique, un Leibniz et un Bernoulli stupéfaits de leur audace et leur propre découverte.* [83]

Cette correspondance entre les deux formules est donc le révélateur d'un lien profond et mystérieux qui relie l'algèbre au calcul différentiel. Et c'est notamment ce lien qu'il s'agit de décrire plus explicitement dans l'article de 1710 :

> *Et ainsi les quantités et les formules partagent beaucoup de choses. Mais l'analogie qui sous-tend les différences et les puissances est si mystérieuse, qu'il vaudra bien ici la peine de l'exposer.* [84]

79. [46] G.W. Leibniz, *Historia et Origo Calculi Differentialis*, ed. Gerhardt, Hahn, 1846 - p.18 : « Quin etiam theoremata invenit generalia pro gradu differentiæ quocunque, uti habebamus theoremata pro gradu quocunque, et miram reperit analogiam inter potentias et differentias in *Miscellanea Berolinensia* »

80. *Cf* [93] M. Serfati, *Mathématiques et pensée symbolique chez Leibniz*, dans *Revue d'histoire des sciences*, Tome 54, N.2, 2001 - pp. 165-222, voir la section 3 p.212-215 sur la formule de Leibniz

81. A III, 6, N.113, Lettre à Jean Bernoulli du 16 Mai 1695 - p.353 : « Ita notabilis est consensus inter numeros potestatum a binomio, et differentiarum a rectangulo et puto nescio quid arcani subesse. »

82. A III, 6, N.133, Lettre de Jean Bernoulli du 18 Juin 1695 - p.398 : « Nihil elegantius est quam consensus quem observasti inter numeros potestatum a binomio et differentiarum rectangulo ; haud dubie aliquid arcani subest »

83. [93] M. Serfati, *Mathématiques et pensée symbolique chez Leibniz*, dans *Revue d'histoire des sciences*, Tome 54, N.2, 2001 - p.213

84. [44] G.W. Leibniz, *Symbolismus memorabilis calculi Algebraici et Infinitesimalis, in comparatione potentiarum et differentiarum ; et de Lege Homogeneorum Transcendentali* dans *Miscellanea Berolinensia ad incrementum scientiarum*, Berlin, 1710 - p.160-161 : « Itaque multum interest inter *quantitates & formulas*. Sed arcanior quædam subest inter Potentias & Differentias Analogia, quam hoc loco exponere operæ pretium erit. »

## 11.4 Analogies

### 11.4.1 Analogie formelle

Pour mettre en lumière cette relation cachée, Leibniz choisit de réinventer le symbolisme utilisé pour les puissances, afin de le faire correspondre à celui des différences :

> *Nous allons donner rapidement une règle commune tant pour les puissances à partir d'un certaine quantité de multinôme que pour les différences de facteurs à partir d'une certaine quantité de facteurs. Et ainsi, pour mettre l'analogie en lumière, de même que $dx$, $ddx$, $d^3x$ etc. signifie les différences premières, deuxièmes, troisième etc., à la place de $x$, $xx$, $x^3$ etc. on exprime de la même manière $p^1x$, $p^2x$, $p^3x$ etc. c'est-à-dire la puissance première, deuxième, troisième etc. de cet $x$. Et $p^e(x+y)$ signifiera la puissance de ce $x+y$ suivant l'exposant $e$, comme $d^e(xy)$ signifie la différence de ce $xy$ suivant l'exposant $e$.* [85]

Ainsi, le passage d'une formule à l'autre se fait par la simple substitution de $p$ en $d$ et de $x+y$ et $xy$ :

> *Venons-en désormais aux différentitations. Et nous montrons qu'il s'y produit la même chose dans la mesure où l'on pose $xy$ à la place de $x+y$ et $d$ à la place de $p$.* [86]

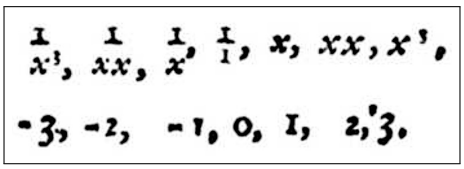
Mais, si l'on regarde la première étape, l'analogie n'est pas évidente :

- $\star$ $d(xy) = dx.y + x.dy$
- $\star$ $p(x+y) = px + py$

Pour la faire bien apparaitre, Leibniz introduit les exposants nuls :

- $\star$ $d^1(xy) = d^1x.d^0y + d^0x.d^1y$
- $\star$ $p^1(x+y) = p^1x.p^0y + p^0x.p^1y$

Pour Leibniz ce n'est pas l'écriture $d^0x = x$ qui mérite une justification. En effet, $d^0$ correspond naturellement à l'identité. En revanche, l'écriture $p^0x = 1$ demande une explication. Cette dernière est classique. Leibniz présente la table des algébristes médiévaux ou renaissants que nous avons décrit dans le détail chez Stifel :




*Symbolismus memorabilis calculi Algebraici et Infinitesimalis*, 1710 - p.162

Serfati note dans son article que ces justifications sont peu convaincantes, et l'explique ainsi :

> *En vérité, Leibniz veut faire en sorte que sa formule finale soit pleinement homogène, c'est-à-dire que tous ses termes obéissent à une certaine loi commune à laquelle le premier et le dernier semblaient seuls échapper ; il a donc décidé d'écrire, pour tout $x$, $d^0x = x$ et $p^0x = 1$, inaugurant ainsi ce qui fut appelé après coup une « convention », la première d'une longue liste dans l'histoire des mathématiques.* [87]

85. [44] G.W. Leibniz, *Symbolismus memorabilis calculi Algebraici et Infinitesimalis, in comparatione potentiarum et differentiarum ; et de Lege Homogeneorum Transcendentali* dans *Miscellanea Berolinensia ad incrementum scientiarum*, Berlin, 1710 - p.160-161 : « Breviter dabimus communem legem, tam potentiæ ex multinomio quocunque, quam differentiæ facti ex factoribus quotcunque. Potentiæ autem pariter ac differentiæ habent suos exponentes, gradum potentiæ vel differentiæ indicantes. Itaque analogiæ clarioris causa, ut $dx$, $ddx$, $d^3x$ significat differentiam primam, secundam, tertiam ; ita $x$, $xx$, $x^3$ exprimemus hoc loco, per $p^1x$, $p^2x$, $p^3x$, id est per potentiam primam, secundam, tertiam ; nempe ipsius $x$. Et $p^e[x+y]$ significabit potentiam ipsius $x+y$ ; secundum exponentem $e$, uti $d^e(xy)$ differentiam ipsius $xy$ significat, itidem secundum exponentem $e$. »

86. [44] G.W. Leibniz, *Symbolismus memorabilis calculi Algebraici et Infinitesimalis, in comparatione potentiarum et differentiarum ; et de Lege Homogeneorum Transcendentali* dans *Miscellanea Berolinensia ad incrementum scientiarum*, Berlin, 1710 - p.162 : « Idemque illic provenire ostendamus tantum pro $x = y$ ponendo $xy$, & pro $p$ ponendo $d$. »

87. [93] M. Serfati, *Mathématiques et pensée symbolique chez Leibniz*, dans *Revue d'histoire des sciences*, Tome 54, N.2, 2001 - p.213

Il est clair que l'homogénéité de la formule est critère déterminant pour consolider l'analogie. Mais qualifier le choix de Leibniz de « convention » mathématique nous semble excessif ici. Pour le montrer, il faut se demander pourquoi $p^0$ n'est pas l'identité. Cette question nous mène au constat suivant : $p$ et $d$ ne sont pas des fonctions du même genre, à savoir qu'elles ne s'appliquent pas aux mêmes objets. La puissance $p$ s'applique à une quantité donné, tandis que la différence $d$ s'applique à une quantité variable. Donc les modes d'application au sein des expressions $dx$ et $px$ sont différents. La différence $d$ ne s'applique pas seulement à la quantité $x$ fixée mais à toutes les quantités qu'elle peut valoir lors d'une variation infinitésimal, tandis que $p$ ne s'applique qu'à la quantité $x$. Ainsi $p.px = px = x \neq p^2x = px.px$. En revanche $d^2 = d \circ d$ est bien une composition de fonctions. Pour le dire autrement, ce n'est pas une convention qui a poussé Leibniz à choisir $p^0x = 1$ plutôt que $p^0x = x$, mais plutôt la nature même de l'opérateur $p$ qui est en réalité l'identité. Si l'exposant exprimait la composition, $p^0$, $p$ et même $p^n$ seraient tous égaux à l'identité, c'est-à-dire que $p^0x = px = p^nx = x$. Ainsi $p^{n+1} = p \times p^n \neq p \circ p^n$. Donc, l'exposant n'a pas la même signification dans le cas des puissances et celui des différences.

#### Le mystère révélé par la structure

Grace à cette notation, Leibniz peut donc éclaircir la nature du mystère qui se cache derrière la ressemblance frappante de les deux formules. L'explication se trouve dans le processus opératoire à chaque étape. L'expression de départ est une somme de produits de deux termes de la forme $d^ix.d^jy$ ou $p^ix.p^jy$, or $d$ est linéaire ainsi que la multiplication par $p$. On obtient alors :

- $d(d^ix.d^jy) = \underbrace{d^{i+1}x.d^jy}_{\text{diff. de } x} + \underbrace{d^ix.d^{j+1}y}_{\text{diff. de } y}$
- $p(x+y) \times p^ix.p^jy = \underbrace{p^{i+1}x.p^jy}_{\text{mult. par } x} + \underbrace{p^ix.p^{j+1}y}_{\text{mult. par } y}$

Pour Leibniz, c'est dans cette bipartition des opérations avec l'opération en $x$ pour le premier terme et en $y$ pour le second, qui constitue la pierre de touche de ces deux calculs. On voit que pour expliquer une analogie formelle entre deux expressions, Leibniz cherche à retrouver l'analogie dans le mode de construction de ces expressions. Ainsi, l'analogie formelle devient une analogie structurelle.

### 11.4.2 Analogies fonctionnelles

#### Correspondance terme à terme

Dans le petit article publié au *Journal des Sçavans* de 1694, l'analogie entre puissances et différences est par ailleurs poussée très loin :

> *Car cette metode, ou ce calculus differentialis, sert non seulement aux differences, mais encore aux sommes qui sont le reciproque des differences ; à peu prés comme le calcul ordinaire ne sert pas seulement aux puissances, mais encore aux racines qui sont le reciproque des puissances. Et l'analogie va plus loin qu'on ne pense. Dans l'analise ordinaire on peut toujours délivrer le calcul a vinculo, & des racines, par le moyen des puissances : mais le Public n'a pas encore la metode de le délivrer des puissances impliquées par le moyen des racines pures. De mesme dans notre Analise des transcendantes, on peut toujours délivrer le calcul a vinculo & des sommes, par le moyen des differences : mais le Public n'a pas encore la metode de le délivrer des differences impliquées par le moyen des sommes pures ou quadratures : & comme il n'est pas toujours possible de tirer les racines effectivement pour parvenir aux grandeurs rationnelles de l'arithmetique commune, il n'est pas toujours possible non plus de donner effectivement les sommes ou quadratures, pour parvenir aux grandeurs ordinaires ou algebriques de l'analise commune.* [88]

Dans cet extrait, Leibniz nous livre trois analogies entre puissances et différences :

→ Première analogie :

⋆ Le calcul *algébrique* est d'abord fondé sur les *puissances*, mais traite par conséquent de leurs réciproques, à savoir les *racines*.

88. [43] G.W. Leibniz, *Considérations sur la différence qu'il y a entre l'Analyse ordinaire, et le nouveau calcul des transcendentes* dans le *Journal des Sçavans*, N.34, 30 Août 1694 - p.405-406.

- ⋆ Le calcul *différentiel* est d'abord fondé sur les *différences*, mais traite par conséquent de leurs réciproques, à savoir les *sommes*.

→ Deuxième analogie :

- ⋆ Etant donnée une expression *algébrique*, on peut toujours la transformer, à l'aide des *puissances*, afin d'en faire disparaître toutes les *racines*. En revanche, à l'aide des *racines*, ce n'est pas toujours possible de faire disparaitre toutes les *puissances*.
- ⋆ Etant donnée une expression *analytique*, on peut toujours la transformer, à l'aide des *différences*, afin d'en faire disparaître toutes les *sommes*. En revanche, à l'aide des *sommes*, ce n'est pas toujours possible de faire disparaitre toutes les *différences*.

→ Troisième analogie :

- ⋆ Il n'est pas toujours possible d'*extraire* des *racines* qui sont *rationnelles* et propres au calcul *arithmétique*.
- ⋆ Il n'est pas toujours possible de *déterminer* des *sommes de séries* qui sont *algébriques* et propres au calcul *algébrique*.

On peut ainsi dresser la table suivante qui met en correspondance les différentes notions :

| **Calcul Différentiel** | **Algèbre** |
|---|---|
| Différence | Puissance |
| Somme ou Quadrature | Racine |
| *Calculus Différentialis* ou Analyse des Transcendants | Calcul Ordinaire ou Analyse Ordinaire |
| Analyse Commune | Arithmétique Commune |
| Grandeur Ordinaire ou Algébrique | Grandeur Rationnelle |
| Donner les sommes | Tirer les racines |

**La deuxième analogie**

Développons dans le détail la deuxième analogie. Leibniz souligne d'abord qu'il existe une asymétrie entre la puissance et la racine, qui sont portant réciproque l'une de l'autre. Il énonce que si l'on dispose d'une expression composée à partir des racines, alors il est toujours possible de la transformer en expression rationnelle à l'aide des seules puissances. Par exemple, si l'on considère :

$$\alpha = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{c}+\sqrt{d}}$$

Alors, en n'utilisant que les puissances, l'on peut transformer cette expression comme suit, pour en faire disparaître toutes les racines :

$$\begin{aligned}
(\sqrt{c}+\sqrt{d})\alpha &= \sqrt{a}+\sqrt{b} \\
(c+d+2\sqrt{cd})\alpha^2 &= a+b+2\sqrt{ab} \\
2(\sqrt{cd}\alpha^2-\sqrt{ab}) &= a+b-(c+d)\alpha^2 \\
4(cd\alpha^4+ab-2\sqrt{abcd}\alpha^2) &= (a+b-(c+d)\alpha^2)^2 \\
2\sqrt{abcd}\alpha^2 &= 4(cd\alpha^4+ab)-(a+b-(c+d)\alpha^2)^2 \\
4abcd\alpha 4 &= (4(cd\alpha^4+ab)-(a+b-(c+d)\alpha^2)^2)^2
\end{aligned}$$

En réalité, une telle procédure intuitive découle du cas particulier que constituent les racines carrés. Dès que l'on passe à d'autres expressions avec d'autres degré, cette démarche cesse de fonctionner, en faisant exploser le nombre de racines avec les développements des différents binômes et multinômes.
Considérons donc le cas général avec $\alpha$ un quelconque nombre algébrique "radical", c'est-à-dire qu'il est construit à partir des opérations usuelles, ainsi que les opérateurs de racine $p$-ième $\sqrt[p]{}$, pour tout entier $p$. On peut alors bel et bien affirmer la chose suivante : il existe un polynôme $P$ dont les coefficients sont des entiers, tel que $P(\alpha)=0$.

De fait, cette affirmation se démontre sans complexité grâce à la théorie algébrique des extensions de corps, formalisée près de deux siècles plus tard. Donnons quelques détails qui s'avéreront utiles pour la compréhension de cette analogie.

Gardons notre nombre algébrique radical $\alpha$ et considérons $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ le corps engendré par $\alpha$. $K$ est un corps de nombre, c'est-à-dire une extension finie sur le corps des rationnels. En fait, $K$ est plus particulièrement une extension radicale de $\mathbb{Q}$. Autrement dit, il existe une suite $\mathbb{Q} = k_0, k_1, \ldots, k_p = K$ de corps de nombres tels que $k_{i+1}$ est une extension dite cyclique de $k_i$, c'est-à-dire qu'il existe un nombre algébrique $a_i \in k_i$ tel que $k_{i+1} = k_i(\sqrt[n_i]{a_i})$. On débute par la relation suivante :

$$X = \alpha$$

Or $\alpha$ est un nombre de $K = k_p = k_{p-1}(\sqrt[n_p]{a_{p-1}})$. Donc on peut écrire :

$$X = m_0^{(p-1)} + m_1^{(p-1)} \sqrt[n_p]{a_{p-1}} + m_2^{(p-1)} \left(\sqrt[n_p]{a_{p-1}}\right)^2 \cdots + m_{n_{p-1}-1}^{(p-1)} \left(\sqrt[n_p]{a_{p-1}}\right)^{n_{p-1}-1}$$

Les coefficients $m_0^{(p-1)}, m_1^{(p-1)}, m_2^{(p-1)} \ldots m_{n_{p-1}-1}^{(p-1)}$ sont considérés comme des expressions algébriques en $X$ à coefficients dans $k_{p-1}$. Supposons donc qu'on soit parvenu à transformer l'expression algébrique initiale donnée par $\alpha$ jusqu'à obtenir cette relation :

$$X = m_0^{(i)} + m_1^{(i)} \sqrt[n_i]{a_i} + m_2^{(i)} \left(\sqrt[n_i]{a_i}\right)^2 \cdots + m_{n_i-1}^{(i)} \left(\sqrt[n_i]{a_i}\right)^{n_i-1}$$

$$\text{avec } m_0^{(i)}, m_1^{(i)}, m_2^{(i)} \ldots m_{n_i-1}^{(i)} \in k_i(X)$$

La suite $1, X^2, X^2, \ldots, X^{n_i}$ est une suite de $n_i + 1$ expressions algébriques de $k_i(X)(\sqrt[n_i]{a_i}) = k_{i+1}(X)$ qui est un $k_i(X)$-espace vectoriel de dimension $n_i$. C'est donc une famille liée dans cet espace. Ainsi, il existe une suite $s_0^{(i)}, s_1^{(i)}, s_2^{(i)} \ldots s_{n_{p-1}}^{(i)} \in k_i(X)$ telle que :

$$s_0^{(i)} + s_1^{(i)} X + s_2^{(i)} X^2 \cdots + s_{n_i}^{(i)} X^{n_i} = 0$$

On a donc transformé l'expression du rang $i$ en une nouvelle expression qui ne fait plus intervenir $\sqrt[n_i]{a_i}$. Comme les coefficients de cette équation sont dans $k_i(X) = k_{i-1}(X)(\sqrt[n_{i-1}]{a_{i-1}})$, on peut également les developper de sorte à obtenir une nouvelle équation :

$$X = m_0^{(i-1)} + m_1^{(i-1)} \sqrt[n_{i-1}]{a_{i-1}} + m_2^{(i-1)} \left(\sqrt[n_{i-1}]{a_{i-1}}\right)^2 \cdots + m_{n_{i-1}-1}^{(i-1)} \left(\sqrt[n_{i-1}]{a_{i-1}}\right)^{n_{i-1}-1}$$

$$\text{avec } m_0^{(i-1)}, m_1^{(i-1)}, m_2^{(i-1)} \ldots m_{n_{i-1}-1}^{(i-1)} \in k_{i-1}(X)$$

Ainsi, en réitérant la procédure, on parvient à l'équation suivante :

$$s_0^{(0)} + s_1^{(0)} X + s_2^{(0)} X^2 \cdots + s_{n_0}^{(0)} X^{n_0} = 0$$

Cette formule s'exprime dans $k_0(X) = \mathbb{Q}(X)$ et $\alpha$ est une racine de cette équation. Ainsi, on a pu déterminer la valeur d'un certain polynôme $P$ à coefficients entiers, tel que $P(\alpha) = 0$. En construisant ce polynôme annulateur, on a fait disparaitre toutes les racines de l'expression qui définissait au départ le nombre algébrique radical $\alpha$, ce que l'on souhaite montrer.

Comme nous l'avons dit, la théorie algébrique que nous convoquons ici est anachronique de plusieurs siècles, mais l'on peut tout de même se demander dans quelle mesure un tel raisonnement était alors accessible à Leibniz. De fait, la détermination des polynômes anulateurs à chaque étape consiste au final à résoudre un simple système d'équations linéaires, défini par les différentes puissances de $X$. Et la résolution d'un système linéaire constitue un problème que Leibniz a étudier en profondeur, et duquel il a tiré nombre de résultats et de nouveaux outils. Pourtant, de ce que nous savons jusqu'ici des travaux de Leibniz sur ce sujet, il ne l'a jamais appliqué à ce type de problème. Il est très vraisemblable que l'affirmation de Leibniz selon laquelle « *on peut toujours délivrer le calcul a vinculo, & des racines, par le moyen des puissances* », se fonde ici sur les développements intuitifs que nous avons présenté dans

le premier exemple de ce paragraphe. Ajoutons que cette méthode intuitive fonctionne pour les racines carré, c'est-à-dire toutes les grandeurs constructibles à la règle et au compas, qui constituent une large part des quantités issues de la géométrie que rencontrent les mathématiciens de cette époque.

Du côté du calcul différentiel, Leibniz affirme que l'on peut faire disparaitre tous les signes sommes d'une quelconque expression grâce à l'opérateur différence. Là encore, on ne peut pas réfuter cette proposition. La question s'avère cependant radicalement différente de la précédente, du fait que les deux opérateur, somme et différence, sont linéaires. On peut donc toujours se ramener à une expression de ce type $t = S_1 + S_2 + \cdots + S_p$ avec :

$$S_k = \left(\int^{n_{k,1}} a_{k,1}\right) \dots \left(\int^{n_{k,m_k}} a_{k,m_k}\right)$$

La méthode pour développer $t$ et en faire disparaître toutes les sommes est laborieuse [89]. Là encore la démonstration serait largement anachronique et assez longue pour ce type de proposition, aussi nous ne rentrerons pas dans ces détails fastidieux. Néanmoins, la démarche beaucoup plus intuitive nous porte à croire, dans ce cas-ci, que Leibniz en avait une idée assez nette.

Mais le point principal que nous souhaitons soulever concerne au final cette analogie que présente Leibniz. La propriété algébrique qu'il décrit se fonde sur une théorie, à savoir la théorie des extensions de corps, qui n'ont pas d'équivalent au sein du calcul différentiel. Par exemple, on ne peut pas appliquer la même méthode aux deux expressions qui suivent pour faire disparaître les racines à la première et les sommes à la seconde :

$$\alpha = \sqrt[3]{a + \sqrt[2]{b}} + \sqrt[5]{c} \qquad t = \int^3 \left(x + \int^2 y\right) + \int^5 z$$

Dans le cas différentiel, la linéarité de la somme simplifie grandement la question. On voit qu'ici, il suffit de différencier $t$ au moins cinq fois pour que les sommes finissent par disparaître. Pour développer $\alpha$, il faut passer par la méthode laborieuse que nous avons exposé plus haut. Inversement, si l'on considère les expressions suivantes :

$$\alpha = a\sqrt[3]{b}\sqrt[2]{c} \qquad t = x\left(\int^3 y\right)\left(\int^2 z\right)$$

Le développement de $\alpha$ est simple, il suffit de lui appliquer la bonne puissance, à savoir ici $\alpha^6$. En revanche, la procédure pour effacer les sommes de l'expression en $t$ est bien plus longue.

Voyons à présent les procédures inverses, à savoir faire disparaitre les puissances à l'aide des racines et les différences à l'aide des sommes, ce que Leibniz dit n'être pas toujours possible. De fait, si l'on part de l'expression $z^3 = x^2 + y$, il n'est pas possible de simplifier l'expression à des simples racines. Cela s'explique par la non-linéarité de la racine. Il n'est pas possible d'expriment $\sqrt{a+b}$ en fonction de $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$. Notons tout de même que la méthode de Horner, permet d'effacer les puissances d'un polynôme à une variable, à l'aide de la factorisation :

$$a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n = a_0 + X(a_1 + X(a_2 \cdots + X(a_{n-1} + a_nX)\dots))$$

L'impossibilité d'effacer les différences à l'aide des sommes s'explique quant à elle d'une toute autre manière, à savoir par la formule d'intégration par partie :

$$\int ab = a\int b - \int \left(\int b\right) da$$

89. Il faut d'abord différentier $t$ suffisamment pour faire disparaitre le signe somme sur une variable de chaque terme $S_k$. En divisant par cette variable, puis en procédant encore à des différentiations, et ce pour chaque terme, on peut se ramener à l'étape suivante où deux variables au moins ne sont pas sous un signe somme dans chaque terme. Ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait fait disparaître tous les signes. Le nombre de terme de l'expression, par cette méthode, explose. Elle n'est donc pas utilisable dans la pratique.

On constate alors qu'on ne peut pas développer l'opérateur de somme sur un produit sans faire apparaitre un nouvel opérateur de différence. Ainsi, on ne peut pas faire disparaitre les signes de différence dans une expression du type $z = dxdy$, à l'aide des seules sommes.

Leibniz présente donc un analogie très forte, mettant de nombreux termes et de nombreuses propriété en correspondance. Cependant, nous avons montré que ces parallèles sont trompeurs dans le détail. Les fonctionnements des deux calculs restent radicalement différents. Concluons cette discussion par une dernière dissymétrie que Leibniz n'a pas mentionné. Si l'on considère la puissance $p$-ième de la racine $q$-ième d'une certaine quantité $x$, cela donne :

$$(\sqrt[q]{x})^p = \sqrt[q]{(x)^p} = x^{\frac{p}{q}}$$

Cette quantité est une puissance pure seulement si $p$ est un multiplie de $q$, et une racine pure seulement si $q$ est un multiple de $p$. Dans les autres cas, il s'agit d'une quantité composée qui n'est ni le produit direct d'une puissance, ni celui d'une racine. En revanche, si l'on considère la $p$-ième différence de la $q$-ième somme d'une quantité variable $x$, alors on obtient :

$$d^p \int^q x = \int^q d^p x = \begin{cases} d^{p-q}x & \text{si } p \geq q \\ \int^{q-p} x & \text{si } p \leq q \end{cases}$$

On obtient donc nécessaire, ou bien une somme pure, ou bien une différence pure, suivant que $p$ soit plus grand ou plus petit que $q$. Ainsi le parallèle que Leibniz met en place dans cet article de 1694 n'est pas un réellement effectif.

| $\ldots$ | $\sqrt[8]{x}$ | $\sqrt[7]{x}$ | $\sqrt[6]{x}$ | $\sqrt[5]{x}$ | $\sqrt[4]{x}$ | $\sqrt[3]{x}$ | $\sqrt[2]{x}$ | $x$ | 1 | $x$ | $x^2$ | $x^3$ | $x^4$ | $x^5$ | $x^6$ | $x^7$ | $x^8$ | $\ldots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ldots$ | $\int^8 x$ | $\int^7 x$ | $\int^6 x$ | $\int^5 x$ | $\int^4 x$ | $\int^3 x$ | $\int^2 x$ | $\int x$ | $x$ | $dx$ | $d^2x$ | $d^3x$ | $d^4x$ | $d^5x$ | $d^6x$ | $d^7x$ | $d^8x$ | $\ldots$ |

On le voit bien d'ailleurs l'ambiguïté de cette analogie lorsqu'on souhaite traiter la première puissance de $x$ qui est aussi sa première racine, et qui peut ainsi aussi bien correspondre à la différentielle $dx$ qu'à la quadrature $\int x$.

En mettant en correspondance les sommes et les racines, Leibniz est tombé dans le piège que nous avons décrit plus haut, concernant la distinction des modes d'applications des puissances et des différences. Leibniz considère ici les opérations réciproque du point de vue de la composition, de sorte que $d \int$ ou $(\sqrt[p]{})^p$ soient l'identité. Mais au sein l'analogie formelle que Leibniz découvrira un an plus tard, en 1695, nous avons vu que la composition des différences doit être remplacée par la multiplication des puissances. Pour cette raison, l'analogie ne sera jamais parfaite suivant qu'on considère comme réciproques des puissances, leurs inverses ou bien leurs racines.

### 11.4.3 Différences de degré non-entier

Leibniz ne fait qu'évoquer ce sujet dans sa lettre à Bernoulli de 1695, mais il nous parait néanmoins important de le noter. La formule de Leibniz se généralise aux trinômes, et aux multinômes en général. Leibniz ne l'a pas vérifié, mais il écrit néanmoins :

> *Mais l'on peut ainsi découvrir un certain accord réel entre les indices des puissances, c'est-à-dire les logarithmes et nos indices de différences, qui sont presque des logarithmes. Et l'on peut étendre cet accord aux polynômes et aux multi-rectangles, c'est-à-dire aux rectangles solides et sursolides.* [90]

Notons dans cette citation que Leibniz décrit les exposants des différences comme « presque des logarithmes » (« *quasi Logarithmos* »). Ainsi, de la même manière que les logarithmes, Leibniz pense pouvoir les généraliser :

90. A III, 6, N.113, Lettre à Jean Bernoulli du 16 Mai 1695 - p.353 : « Atque ita realis quidam consensus inter potentiarum indices seu Logarithmos, et nostros differentialium quasi Logarithmos reperitur, qui etiam ad polynomia et multi-rectangula, seu rectangula solida et supersolida extenditur. »

*D'après cela, il serait d'un grand bénéfice qu'on poursuive la comparaison entre par exemple $(2x+y)^m$ (c'est-à-dire $(x+x+y)^m$) et $d^m xxy$. En fait, là on l'on parvient à faire une extraction, l'on parviendrait également à faire une sommation. Et l'on pourrait même comparer $(x-y)^m$ et $d^m \frac{x}{y}$ c'est-à-dire $d^m xy^{-1}$. Mieux, il faut voir s'il ne pourrait pas concevoir dans ces sommations quelque chose qui puisse correspondre aux racines irrationnelles, et même aux affectées.* [91]

Dans sa réponse, Bernoulli montre que les généralisation de Leibniz ne fonctionnent pas. En effet, il faut que les membres du binôme ou du multinôme, et donc aussi les cotés du rectangle ou du multi-rectangle, soient distincts et indépendants. Ainsi, si l'on a $x = y$, on obtient :

- ⋆ $(x+x)^2 = 4x^2$
- ⋆ $d^2x^2 = 2(dx)^2 + 2xd^2x$

Bernoulli écrit donc :

*On ne l'obtiendra pas ici, à moins de confondre $d^2x$ et $(dx)^2$, c'est-à-dire la différence seconde et le carré de la différence première $dx$.* [92]

Cela étant, Bernoulli explore en quelque sorte la piste de généralisation de Leibniz, en tentant de construire un calcul des différences qui considères les signes de différences comme de vraies quantités :

*Ayant dans le même temps considéré $d$, $d^2$, $d^3$, $d^4$ etc. en tant que quantités algébriques et non comme de simples caractères littéraux.* [93]

Les quantités, quant à elles, ne sont en revanche plus considérée comme telle :

*Il faut noter qu'au sein de cette exploration minutieuse, ces lettres qui désignent d'autres quantités comme $x$ ou $y$ ne doivent pas être considérées comme telles mais seulement en tant que déterminants de $d$, $d^2$, $d^3$ etc.* [94]

Ainsi, il peut construire un nouveau calcul, qui peut donner un sens à des opérations algébriques sur les signes de différences, comme l'extraction de racine :

*De cette façon, le carré de $d^3y$ n'est pas $d^6y^2$ mais $d^6y$ et le cube de ce même $d^3y$ n'est pas $d^9y^3$ mais $d^9y$. Qu'on juge de même pour les multiplication, les divisions et les extractions de racines : $d^2y \times d^3y = d^5y$, $\frac{d^7y}{d^3y} = d^4y$, $\sqrt[3]{d^6y} = d^2y$ ; de même $\frac{d^2y}{d^2y} = d^0y = y$, et pour cette raison $\frac{x}{x} \neq 1$, mais vaut $\frac{d^0x}{d^0x} = d^0x = x$.* [95]

Pourrait-on alors donner un sens à des racine de différence ? La notation $\sqrt{d} = d^{\frac{1}{2}}$ n'apparait pas et ce sujet ne sera d'ailleurs pas conduit plus loin dans leur correspondance.

91. A III, 6, N.113, Lettre à Jean Bernoulli du 16 Mai 1695 - p.353 : « Unde operæ pretium erit prosequi comparationem inter $\boxed{m}\ \overline{2x+y}$ exempl. gr. (seu $\boxed{m}\ \overline{x+x+y}$) et inter $d^m xxy$. Nam ubi succedit extractio, succedet et summatio. Quin et $\boxed{m}\ \overline{x-y}$ et $d^m \frac{x}{y}$ seu $d^m xy^{-1}$ poterunt comparari. Imo videndum an non in summationibus concipere aliquid liceat respondens radicibus irrationalibus, imo affectis. »

92. A III, 6, N.133, Lettre de Jean Bernoulli du 18 Juin 1695 - p.400 : « locum illa non habebit nisi confundatur $ddx$ cum $dxdx$, id est differentia secunda cum quadrato differentiæ primæ $dx$. »

93. A III, 6, N.133, Lettre de Jean Bernoulli du 18 Juin 1695 - p.398 : « Consideratis interim $d$, $d^2$, $d^3$, $d^4$ &c. tanquam quantitatibus algebraicis et non ut literis tantummodo characteristicis. »

94. A III, 6, N.133, Lettre de Jean Bernoulli du 18 Juin 1695 - p.399 : « Nota quod in hoc scrutinio literæ ipsæ quæ alias quantitatem denotant $x$, $y$, non considerandæ sunt ut tales, sed duntaxat quatenus determinant $d$, $d^2$, $d^3$ &c. »

95. A III, 6, N.133, Lettre de Jean Bernoulli du 18 Juin 1695 - p.399 : « Hoc modo quadratum ipsius $d^3y$ non est $d^6yy$ sed $d^6y$, cubus ipsius $d^3y$ non $d^9y^3$ sed $d^9y$ idem puta de multiplicatione, divisione et extractione radicum $d^2y \times d^3y = d^5y$, $\frac{d^7y}{d^3y} = d^4y$, $\sqrt[3]{d^6y} = d^2y$ ; item $\frac{d^2y}{d^2y} = d^0y = y$, et hac ratione $\frac{x}{x}$ non est = 1, sed = $\frac{d^0x}{d^0x} = d^0x = x$. »

## Conclusion

L'introduction des proniques a donc permis à Leibniz de développer le rapport entre la puissance et la différence de façon extrêmement précise. En effet, la notion de puissance pronique se fonde sur des équations différentielles. Ce n'est pas la définition du concept, tournée vers les nombres combinatoire et leur lien avec la réplication, qui justifie qu'on le considère comme une puissance, mais le fait qu'il respecte les mêmes équations différentielles que les puissances classiques :

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx \qquad\qquad \int_0^x t^n dt = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

Nous avons montré que Leibniz ne se contente pas de vérifier que les proniques respectent ces relations pour leur accorder le statut de puissance. Il élabore la définition et la façonne son écriture symbolique de sorte que les relations que vérifient les sommes et les différences soit manifestement analogue à celles qui sont respectées par les puissances classiques dans le calcul différentiel. Cette procédure d'élaboration d'un caractère pour qu'il se conforme de façon manifeste à une expression qui exprime ses propriétés constitue un exemple admirable de la combinatoire leibnizienne, considérée comme sciences des formes et des similitudes. Les deux expressions de calcul différentiel exprime la forme de la puissance. Ainsi les notions mathématiques sont qualifiées de puissances dès qu'elles vérifient ces équations. Ces formes définissent donc une classe de similitude parmi toutes les notions mathématiques.
Cela étant, l'origine arithmétique et combinatoire au sens tabulaire des proniques ne peut pas être simplement évacuées par la mise en évidence de cette équivalence différentielle. Etant donné qu'elles sont un produit de termes d'une progression arithmétique, les proniques présentent en réalité deux paramètres : les nombres de facteurs, analogue d'une raison géométrique et la différence entre deux facteurs successifs, qui la raison arithmétique de la progression d'où ils sont tirés. Ainsi, l'interpolation peut se faire sur l'un ou l'autre des deux paramètres. Nous avons montré, dans la seconde partie de notre travail, que l'interpolation de Wallis et de Mengoli a consisté à n'interpoler que l'exposant géométrique, et maintenir la raison de la progression arithmétique naturelle. C'est-à-dire que les facteurs successifs des termes interpolés sont toujours en progression arithmétique naturelle, à savoir qu'elle a pour raison l'unité. Ceci a pour conséquence que l'extraction de racine pronique n'est pas conforme à la théorie des proportion d'Euclide, comme le sont les rapports géométriques [96]. C'est-à-dire que la moitié de la moitié d'un rapport pronique ne correspond pas au quart de ce rapport, comme nous l'avons constaté dans notre analyse sur les recherche de Leibniz au sujet de l'extraction de racine pronique.
Dans sa tentative de construction d'une courbe pronique, Leibniz utilise le logarithme pour transformer les produits en sommes. Mais il omet de multiplier les termes de cette somme par l'incrément infinitésimal nécessaire à la convergence de la série. En effet, sa construction ne fonctionne que si les facteurs des proniques sont considérés comme des petits rapports infinitésimaux, c'est-à-dire qu'il est nécessaire de les élever à une puissance infinitésimal. Mais alors, on n'obtient une courbe qui ne correspond plus aux proniques initiales et qui ne parvient pas à résoudre le problème de l'interpolation. La courbe pronique que construit Leibniz est seulement dérivée du concept de pronique mais n'en caractérise pas la loi de progression.
Ainsi, les proniques permettent de relier les conception combinatoire et géométrique des exposants, en incarnant l'interface entre les notions discrètes et les notions continues. Leibniz ne relie pas ces deux univers par le moyen de l'approximation, mais par celui de l'analogie.

Revenons au principe de similitude. La notion de puissance est donc définie par une propriété différentielle. Cette attitude que Leibniz manifeste en travaillant sur les puissances proniques préfigure celle qu'il aura plus de dix ans plus tard, lorsqu'il découvrira l'analogie entre les puissances du calcul algébrique et les différences du calcul différentiel. Dès l'époque parisienne, considérer un ordre de différences comme un exposant et comme une puissance est naturel pour Leibniz et l'est d'autant plus après son travail sur les proniques. Néanmoins, nous avons montré que la conception fonctionnelle de Leibniz marque une différence notable avec celle que l'on trouve à la fin des années 1670. En effet, le travail sur la ligne pronique et sur les interpolations nous montre que Leibniz reste encore fortement marqué par la position

96. Sur ce sujet, *Cf* notre développement sur la théorie des rapports de rapports d'Oresme au dernier chapitre.

de Wallis sur les lois de progressions. Ces dernières constituent les principaux concepts qui permettent de transformer un terme en un autre. L'analogie entre puissances et différences s'appuie sur un autre outil de transformation, la fonction. Issue cd travaux géométriques sur les méthodes de tangente, la fonction adopte une position renversée par rapport à la loi de progression. La fonction est subordonnée aux termes auxquels elle s'applique. Elle en est le dérivatifs. La loi de progression, comme nous l'avons montré, est au contraire dans une position hiérarchique supérieur aux termes de la progression qu'elle régit. Notre choix de vocabulaire n'est d'ailleurs pas anodin.

# Chapitre 12

# Exposants d'un genre nouveau

## Introduction

Si l'on considère l'exponentiation comme la répétition d'une même multiplication, alors l'exposant est un entier pour la même raison que le facteur d'une multiplication est un entier. La multiplication de deux grandeurs est une opération interdite pour les Grecs de l'antiquité. En effet, si la multiplication de $a$ par $b$ correspond à la collection d'autant de copies de $b$ qu'il y a d'unités dans $a$, il faut nécessairement que $a$ soit un composé d'unités, et donc un nombre, pour que cette opération ait du sens. Néanmoins, les grecs disposent bel et bien d'un outil pour parler de produit de grandeurs, à savoir le rectangle $ab$. L'usage qu'on en trouve au sein du livre II des *Eléments* ne relève certes pas de l'algèbre contrairement à ce qu'avaient souligné certains auteurs arabes. Mais ce n'est pas non plus un pur instrument de la géométrie, au sens où l'objectif des différentes propositions n'est pas tant d'établir une liste de propriétés des rectangles que de fournir une galerie d'outils utiles à la manipulation des grandeurs. Ainsi la réalité de cette « algèbre grecque » se situe dans un entre-deux difficile à saisir. Dire qu'elle n'existe pas nous pousse à mettre de côté de nombreuses connaissances et sources historiques. Mais dire simplement qu'elle existe « autrement » nous contraint à tordre tellement le concept d'algèbre qu'il finit par perdre son sens. En réalité, nous avions déjà franchi la limite imposée par la rigueur historiographique lorsque nous disions du rectangle qu'il permet aux grecs de parler de produits de grandeurs. En employant ce vocabulaire, nous projetons implicitement l'idée que le rectangle euclidien se trouve sur une longue route historique qui mène inéluctablement vers notre concept moderne de multiplication. Ainsi, l'interdiction devient en réalité une incomplétude. C'est un manque théorique que l'histoire aura pour rôle de combler progressivement. Bien qu'on puisse le décrire et en avoir conscience, il reste néanmoins en nous une part irréductible de cet écueil téléologique, contraint par la nécessité que nous avons d'appliquer des analogies et des cadres conceptuels modernes aux sources que nous souhaitons comprendre, étymologiquement prendre avec nous.
L'exposant désigne un nombre dans la puissance, à savoir le nombre de facteurs identiques qu'elle contient. Le sujet de l'exposant laisse donc une large ouverture aux discours sur les opérations interdites ou manques théoriques. Ces manques peuvent être divers, comme l'absence d'outil conceptuel qui empêche l'avancée, à l'image des obstacles épistémologiques bachelardiens, des barrières idéologiques qui interdisent de concevoir hors d'un certain système de valeurs ou simplement le manque de courage, qui donne alors l'occasion de mettre en avant les grandes figures de l'histoire qui ont su franchir le pas.
Le principal obstacle, pour certains commentateurs comme Michel Serfati, réside dans l'idée d'appliquer un exposant qui n'est pas entier. On trouve des mentions d'exposants fractionnaire chez Stevin, chez Wallis ou encore dans les fameuses lettres de Newton, l'*Epistola Prior* (A III, 1, N.88) [1] et *Epistola Posterior* (A III, 2, N.38) [2], au sein desquelles Serfati a estimé que Leibniz a découvert la notion d'exposants fractionnaires. Nous avons montré que Leibniz évoque des exposants irrationnels dès 1673, soit trois ans plus tôt. Néanmoins, l'idée défendue par Serfati, selon laquelle la nature même de l'exposant constitue une barrière, ne doit pas être totalement rejetée. De fait, Leibniz développe à de nombreuses reprises des réflexions sur la nature des exposants qui le porte à envisager des exposants imaginaires ou même des

1. A III, 1, N.88, Lettre de Newton à Oldenburg pour Leibniz et Tschirnhaus du 13 Juin 1676 (Nr.5 du groupe de lettres envoyées par Oldenburg le 5 Août 1676).
2. A III, 2, N.38, Lettre de Newton à Oldenburg pour Leibniz du 24 Octobre 1676.

exposants infinitésimaux.
Mais vers la fin du séjour parisien, Leibniz développe un conception de l'exposant qui remet en question tout ce discours sur les opérations interdites et sur les extensions de domaine. En effet, l'exposant n'est alors pas considéré comme une opération, mais comme un caractère propre à représenter une certaine loi de progression. Nous qualifions ces nouveaux exposants de fonctionnels, car Leibniz souhaite y voir l'incarnation de toutes les lois, et de toutes les courbes possibles.

## 12.1 Exposants non-entiers

### 12.1.1 Exposants fractionnaires

La littérature est assez unanime sur le fait que c'est à Wallis et Newton que l'on doit la première utilisation des exposants fractionnaires [3]. Nous montrerons que Leibniz développe des notions d'exposants fractionnaires et même d'exposants totalement généraux bien avant de recevoir la fameuse lettre de Newton qu'une majorité d'historien considère comme la première vraie mention des exposants non-entiers. Mais comme souvent, ces questions de priorité et les approximations ou contre-vérités qu'elles engagent, ne sont en fait que la marque d'un profond et lent changement de paradigme vis-à-vis duquel il est nécessaire de prendre la plus grande distance. Plutôt que de chercher où et quand se sont produites les découvertes majeures et autres créations de génie qui fourniraient l'énergie motrice du progrès scientifique, tentons plutôt de reconsidérer les textes antérieurs afin d'y redécouvrir de riches et solides squelettes au cœur des germes à première vue naïfs de ces "inventions". Ainsi, l'exposant fractionnaire est certes peut-être apparu au sein des esprits géniaux de Newton et de Wallis. Nous allons montrer que c'est le cas, en un certain sens, chez Leibniz. Mais cette "apparition" ne signifie pas que ces auteurs sont les découvreurs de cette notion. Ainsi, dans *A History of Mathematical Notations*, Florian Cajori admet :

> *Des notations exponentielles négatives ou fractionnaires ont été suggérées par Oresme, Chuquet, Stevin et d'autres, mais c'est à Wallis et Newton que l'on doit leur symbolisme moderne.* [4]

Nous ne disons pas que Newton, Wallis, Leibniz ou bien d'autres ont simplement adapté la notion de rapport de rapports pour faire naître le formalisme de l'exposant. Nous disons que nous pouvons laisser en suspens cette question de savoir si un certain auteur a réellement découvert ou non l'exposant fractionnaire, puisque notre conception moderne de l'exposant est un formalisme qui se réalise tout aussi bien au travers de la théorie médiévale des rapports de rapports de Nicols Oresme [5] que la théorie naissante des équations exponentielles que développe Leibniz. Ainsi, notre exposant est le produit métissé de plusieurs branches de théories partiellement indépendantes.

#### L'*Arithmétique* de Simon Stevin

Au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, Eugène Prouhet publie un article dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* sur un emploi précoce de l'exposant fractionnaire par Simon Stevin :

> *Les exposants fractionnaires ont commencé à être en usage dans la seconde moitié du XVII$^{\text{ème}}$ siècle, et leur invention est ordinairement attribuée à Wallis. Cependant cette notation avait déjà été proposée, sinon employée, par Simon Stevin, qui, en faisant une découverte supérieure à son époque , et que lui-même regardait comme prématurée, s'est trouvé en avance de près d'un sciècle sur le progrès naturel de la science.* [6]

Dans cet article, Prouhet pose donc déjà le problème historiographique de la paternité :

> *Nous disons progrès naturel, car la considération des exposants de nature quelconque ne pouvait être de quelque utilité qu'après la découverte des séries infinies et au moment où la représentation, due à Descartes, des grandeurs qui varient d'une manière continue, conduisait à introduire la continuité dans les symboles analytiques. Il est arrivé trop souvent qu'en voyant dans un auteur le germe d'une découverte amenée plus tard à sa maturité, on lui en a attribué tout l'honneur. Une heureuse rencontre,*

3. *Cf* [95] M. Serfati, *La Révolution Symbolique, la constitution de l'écriture symbolique mathématique*, édition Petra, Paris, 2005 - p.325-328 ; [10] F. Cajori, *A History of Mathematical Notations*, Volume 1, Chicago, 1928 - p.354-355 [106] O. Terquem, *Note historique sur le binôme de Newton, les exposants négatifs et fractionnaires* dans les *Nouvelles annales de Mathématiques*, Série 1, Tome 6, 1847 - p.85-91 ; [18] P-S. Laplace, *Théorie Analytique des Probabilités*, Seconde Edition, Paris, 1814 - p.3-4

4. F. Cajori, *A History of Mathematical Notations*, Volume 1, Chicago, 1928 - p.354 : « Negative and fractional exponential notations had been suggested by Oresm, Chuquet, Stevin, and others, but the modern symbolism for these is due to Wallis and Newton. »

5. On retrouve la notion d'exposant non-entier au sein du concept de "rapport de rapports" notamment développé par Nicole Oresme et Thomas Bradwardine dès le XIII$^{\text{ème}}$ siècle, *Cf* plus loin, notre discussion sur les logarithmes

6. [82] E. Prouhet, *Sur l'invention des exposants fractionnaires ou incommensurables* dans le *Bulletin de Bibliographie, d'Histoire et de Biographie Mathématiques* des *Nouvelles annales de mathématiques : journal des candidats aux écoles polytechnique et normale*, Paris, Volume 18, 1859 - p.42

*dont le prix est ignoré de celui qui l'a faite, ne doit pas cependant être confondue avec une invention véritable.* [7]

L'article de Prouhet, qui est extrêmement court, a ceci d'intéressant qu'il nous paraît démontrer l'opposé de ce qu'il va pourtant conclure, à savoir que c'est chez Stevin que se trouve la réelle paternité des exposants fractionnaires. Les propos que nous venons de citer semblent pourtant bien insister sur la vanité historique que revêt la quête de paternité, lorsqu'on met de côté le contexte scientifique. De plus son argumentaire est inexistant puisque simplement fondé sur la seule citation des propos de Stevin :

*Pour montrer que Stevin a bien réellement inventé les exposants fractionnaires, et même, ce qui est plus remarquable encore, les exposants incommensurables, nous citerons ses propres paroles.* [8]

Voyons donc de plus près ce que nous dit Simon Stevin, lorsqu'il évoque explicitement les exposants fractionnaires dans un des premiers paragraphe de son *Arihtmétique*, publiée en 1585 :

*Par exemple racine quarrée de* 4① *se dict* $\sqrt{}$4①, *la raison est, qu'il n'y a en use aucunes algebraiques quantitez qui pourroient autrement signifier telles racines. Toutesfois le* $\frac{1}{2}$ *en circle seroit le charactere de racine de* ①, *parce que le mesme (suivant la reigle de multiplication des autres quantitez) multiplié en soy donne produict* ①, *& par consequent* $\frac{3}{2}$ *en un circle seroit le charactere de racine quarrée de* ③, *par ce que telle* $\frac{3}{2}$ *en circle multipliée en soi donne produit* ③, *& ainsi des autres ; de sorte que par tel moien on pourroit de toutes simples quantitez extraitre espece de racines quelconques, comme racine cubique, de* ② *seroit* $\frac{2}{3}$ *en circle, &c.* [9]

Pour Stevin, l'intérêt d'introduire des exposants fractionnaires ne réside pas dans le calcul. Selon lui, il ne s'agit ici que d'une notation de principe. Les racines seraient en droit d'avoir les mêmes notations algébriques que les puissances. Pourtant, ce n'est pas, selon lui, ce qui doit être fait dans la pratique, car les racines ne sont pas adaptées aux principes de l'algèbre :

*Tellement que par ce discours auons seulement voulu manifester ce qui consiste potentiellement en la matiere, à fin que par ainsi rendissions le subiect plus notoire. Il pourroit aussi auenir que ceste souuenance causeroit à vn autre quelque auancement.* [10]

Néanmoins, cette extension de l'écriture permet à Stevin de contredire une idée reçu des algébristes selon laquelle la première puissance constitue l'unité indivisible de la progression des cossiques :

*Or par la consideration de ces choses nous est deuenu manifeste ce qui au parauant nous estoit plus obscur, à sçauoir que la prime quantité, laquelle les algebraiciens vsent pour l'inferieure ne l'est pas, consideré ce qui consiste potentiellement en eux : mais comme il y a vn infini maieur progres des quantitez depuis l'vnité, ou de la prime quantité en ascendant, comme* ① ② ③, *&c. ainsi y a il semblable infini moindre progres de la prime quantité en descendant, qui se pourroit signifier par* $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$ *en circle, & si pourroit on par les mesmes proceder comme par denominateurs entiers.* [11]

Ainsi l'introduction des exposants fractionnaires pour Stevin répond à une problématique très importante dans le contexte de l'algèbre de l'époque, à savoir la nature des nombres, des quantités connues et inconnues. L'objectif n'est pas d'introduire un nouvel outil de calcul, bien que Stevin admette que de telles notations pourraient avoir cet usage dans l'avenir.
Enfin il donne pour titre à ce court paragraphe : « Que les dignités ou dénominateurs des quantitez ne sont pas nécessairement des nombres entiers mais potentiellement des nombres rompuz & nombres radicaux quelconques ». Or, il est notable que seuls les exposants fractionnaires sont évoqués dans le texte, et qu'il n'est fait nulle mention des exposants radicaux quelconques. De fait, la justification algébrique que donne Stevin à la notation fractionnaire des exposants, à savoir en substance résoudre une équation du type $a^i = b^j$, avec $i$ et $j$ entiers naturels, ne pourrait plus s'appliquer pour des exposants irrationnels.

7. [82] E. Prouhet, *Sur l'invention des exposants fractionnaires ou incommensurables* dans le *Bulletin de Bibliographie, d'Histoire et de Biographie Mathématiques* des *Nouvelles annales de mathématiques : journal des candidats aux écoles polytechnique et normale*, Paris, Volume 18, 1859 - p.42
8. [82] E. Prouhet, *Sur l'invention des exposants fractionnaires ou incommensurables* dans le *Bulletin de Bibliographie, d'Histoire et de Biographie Mathématiques* des *Nouvelles annales de mathématiques : journal des candidats aux écoles polytechnique et normale*, Paris, Volume 18, 1859 - p.42
9. [104] S. Stevin, *Arithmetique*, Leyde, 1585 - p.18
10. [104] S. Stevin, *Arithmetique*, Leyde, 1585 - p.19
11. [104] S. Stevin, *Arithmetique*, Leyde, 1585 - p.18-19

**L'*Epistola Prior* et l'*Epistola Posterior* de Newton**

Pour Michel Serfati, le passage des puissances entières aux puissances fractionnaires est essentiel. En effet, il nécessite de considérer un objet, la fraction, dans une position qui ne donne sens qu'à un nombre entier naturel. Le cas de Stevin ne saurait être significatif pour Serfati, car il n'attribue pas de propriété opératoire à cette notation. Selon Serfati, c'est la correspondance avec Newton au milieu de l'année 1676 qui joue un rôle absolument moteur dans l'évolution de la pensée du jeune Leibniz sur la nature, l'écriture et la fonction des exposants. Dans la première lettre de Newton, l'*Epistola Prior* (A III, 1, N.88), Newton introduit des exposants fractionnaires [12]. Selon Serfati, le geste accompli par Newton qui consiste à introduire une fraction à la place de l'exposant cartésien est non seulement révolutionnaire pour l'époque mais va entraîner un véritable tournant chez Leibniz dans sa symbolique et sa pratique de l'analyse :

> *Le point crucial pour nous est en vérité ici tout autre : à l'époque de Leibniz, la forme* $\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}}$ *était sans objet, parce que sans substance. Chacune de ses « formes » internes pouvait certes être interprétée, et d'abord* $P+PQ$*, qui dûment complétée par des parenthèses rondes et « point », conduit à cette « forme » de niveau deux* $(P+(P.Q))$ *bien simplement interprétée si* $P$ *et* $Q$ *sont les signes de nombres quelconques. De même, si* $m$ *et* $n$ *sont les signes d'entiers,* $\frac{m}{n}$ *est une « forme » de niveau un, interprétée comme nombre rationnel (un rompu dans la terminologie newtonnienne). Dûment complétée, la « forme » s'écrit donc* $\overline{(P+(P.Q))}|^{\frac{m}{n}}$*. La question qui demeure alors, seule mais majeure, est l'absence de signification de l'assembleur de niveau le plus élevé, le « blanc exponentiel ». Ainsi la procédure qui pouvait bien être conçue, ne pouvait-elle cependant se dérouler et produire une substance. Rien dans l'expérience préalable de Leibniz à cette époque, ni dans la définition cartésienne des exponentielles - la seule évidemment qu'il eût connût - ne pouvait lui laisser préssentir quelle signification Newton pouvait bien apporter à des « formes » comme* $3^{\frac{1}{2}}$ *ou* $(x+3)^{\frac{1}{2}}$ *ou bien* $5^{\frac{2}{3}}$*, ou bien encore* $(\sqrt{2})^{-\frac{6}{7}}$ [13]

Les notes marginales que Leibniz a laissées concernant cette lettre s'attardent assez longuement sur cette expression algébrique, ce qui est un bon signe de l'importance qu'a pu donner le jeune philosophe à cette écriture que lui proposait Newton. Mais ces notes nous montrent que l'intérêt que Leibniz porte à cette formule est radicalement différent de ce que Serfati présente.
En développant la formule de Newton, Leibniz remarque qu'elle peut être factorisée :

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}P^{\frac{m}{n}}Q + \frac{m-n}{2n}\frac{m}{n}P^{\frac{m}{n}}Q^2 + \frac{m-2n}{3n}\frac{m-n}{2n}\frac{m}{n}P^{\frac{m}{n}}Q^3 + \dots$$

$$\downarrow$$

$$P^{\frac{m}{n}}(1+Q)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}}\left(1 + \frac{m}{n}Q + \frac{m-n}{2n}\frac{m}{n}Q^2 + \frac{m-2n}{3n}\frac{m-n}{2n}\frac{m}{n}Q^3 + \dots\right)$$

Et ainsi Leibniz remarque :

> *En divisant rationnellement la série par* $P^{\frac{m}{n}}$*, on trouve le reste et même que* $P^{\frac{m}{n}}$ *ou bien* $P$ *disparait tout à fait. Il pourrait être plus commode à présent si* $P$ *valait* 1*, et alors* $P^{\frac{m}{n}}$ *vaudrait également* 1. [14]

Cette remarque peut expliquer pourquoi Newton choisit de développer $P+PQ$ qui n'est pas homogène au lieu du binôme simple et homogène $P+Q$. En effet, le développement de $P+Q$ donne lieu à des exposants négatifs :

$$(P+Q)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}P^{\frac{m-n}{n}}Q + \frac{m}{n}\frac{m-n}{n}P^{\frac{m-2n}{n}}Q^2 + \frac{m}{n}\frac{m-n}{n}\frac{m-2n}{n}P^{\frac{m-3n}{n}}Q^3 + \dots$$

Pour pouvoir garder les exposants positifs qui intéressent Newton [15], il a fallu remplacer $Q$ par $PQ$ dans le binôme pour rendre les exposants de la variables $P$ constants dans le développement et les empêcher de décroitre à l'infini, inéluctablement dans les négatifs.

12. *Cf* la note 2 p.408.

13. [95] M. Serfati, *La Révolution Symbolique, la constitution de l'écriture symbolique mathématique*, édition Petra, Paris, 2005 - p.327

14. A III, 1, N.88, Lettre de Newton à Oldenburg pour Leibniz et Tschirnhaus du 13 Juin 1676 (Nr.6 du groupe de lettres envoyées par Oldenburg à la fin Août 1676) - p.555 : « divisa serie per $P^{\frac{m}{n}}$ reliquum rationel ; imo prorsus evanescet $P^{\frac{m}{n}}$ vel ipsa $P$. Hinc semper fieri potest commode, ut $P$ sit 1 ; erit $P^{\frac{m}{n}}$ etiam 1. »

15. La méthode de Newton, comme celle de Leibniz, se fonde notamment sur un habile mélange des apports de Mercator ([71] N. Mercator, *Logarithmotechnia*, Londres, 1668) et Wallis ([110] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656). Mercator donnant la voie du développement en série entière et Wallis à la quadrature des puissances entières.

De fait, la formule de Newton correspond, pour nos mathématiques actuelles, au développement en série entière de la formule $(1+x)^{\alpha}$. Cependant l'exposant n'est pas un simple symbole, c'est une fraction dont les deux membres interviennent dans la formule, c'est-à-dire que la formule est fonction de $m$ et de $n$ et non seulement de $\frac{m}{n}$. En réalité, puisqu'elle correspond bien à notre formule actuelle qui ne dépend que de l'exposant, il s'agit bien d'une fonction de $\frac{m}{n}$. Mais, pour s'en apercevoir, il faudrait pouvoir noter la relation suivante :

$$\frac{m(m-n)(m-2n)\dots(m-(p-1)n)}{1.2\dots p.n^p} = \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)\dots\left(\frac{m}{n}-(p-1)\right)}{p!}$$

Or, il semble que de Newton ou de Leibniz, aucun n'ait réalisé cette propriété sur le moment. On trouve pourtant dans les notes marginales de Leibniz une remarque qui va dans ce sens :

> *La même quantité peut être obtenue ici par une infinité de modes, en changeant coup sur coup $m$ et $n$ de sorte que $\frac{m}{n}$ reste toujours inchangée.* [16]

Ainsi, on retrouve la relation ci-dessus en posant $m' = \frac{m}{n}$ et $n' = 1$. En effet, Leibniz écrit explicitement qu'on peut considérer $m$ et $n$ comme des fractions :

> *Il se peut que $m$ ou $n$ soient également rompus ou irrationnels, ce qui est de grande importance, et même mieux, ce peut être une lettre (réciproquement, on peut trouver $\frac{m}{n}$ à partir de $P+PQ$, le logarithme à partir du nombre et finalement aussi le nombre à partir du logarithme, et ce par une méthode à laquelle je me suis livré par ailleurs).* [17]

La méthode à laquelle Leibniz fait référence peut désigner la tentative combinatoire de 1675 qu'on trouve dans le *De Intercalatione Numerorum Combinatoriorum* (LKK Nr.6) [18] ou bien la tentative plus géométrique de 1673 qu'on trouve dans les textes *De Parabolœidum et Hyperboœidum Quadratura* (A VII, 4 B, N.37-39) [19]. Contrairement aux dire de Serfati, ce n'est pas le fait de mettre une fraction à la place de l'exposant qui constitue ici une forme de nouveauté et une source d'enthousiasme chez Leibniz. En effet, il indique ici que les variables $m$ et $n$ sont déjà considérées comme entièrement libres et peuvent elles-mêmes être interprétées comme fractionnaires ou même irrationnelles. Elles peuvent même être vue comme les variables d'une équation algébrique :

> *Le numérateur divisé par $m$ donne la formule qui sert pour l'équation dont les racines sont en progression arithmétique, à condition de poser $m$ comme incconue et $n$, $1n$, $2n$ etc. comme les vraies racines. A présent, on établit aisément la table pour cette série qu'on doit poursuivre jusqu'à l'infini.* [20]

Leibniz voit ici une nouvelle forme d'exponentiation, à deux variables. C'est la relation entre ces deux variables qui contituent pour lui une véritable avancée. En effet, en interprétant les numérateurs des coefficients comme des équations algébriques factorisées, c'est-à-dire des expressions dont on connait explicitement les racines, Leibniz montre que cette formule donne, avec elle, les conditions d'annulation de ces propres coefficients. Ainsi, on peut lire dans la formule les conditions nécessaires et suffisantes pour que la série soit finie ou bien infinie :

> *Si $m = n$ et si tant $m$ que $n$ est entier, la série n'ira pas jusqu'à l'infini mais un certain terme sera $= 0$, et pour cette raison, tous les suivants également.* [21]

16. A III, 1, N.88, Lettre de Newton à Oldenburg pour Leibniz et Tschirnhaus du 13 Juin 1676 (Nr.6 du groupe de lettres envoyées par Oldenburg à la fin Août 1676) - p.556 : « Eadem quantitas infinitis modis hinc haberi potest, faciendo $m$, $n$ alias atque alias, eadem semper manente $\frac{m}{n}$. »

17. A III, 1, N.88, Lettre de Newton à Oldenburg pour Leibniz et Tschirnhaus du 13 Juin 1676 (Nr.6 du groupe de lettres envoyées par Oldenburg à la fin Août 1676) - p.555-556 : « Potest $m$ vel $n$ etiam esse fractus vel irrationalis, quod magni est momenti, quin et potest esse litera (vicissim $\frac{m}{n}$ potest inveniri ex $P+PQ$, logarithmus ex numero ; denique et numerus ex logarithmo, methodis alibi a me traditis). »

18. *Cf* p.523.

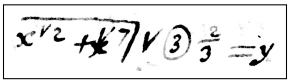
19. Ce sont les travaux de 1673 sur les quadratures et les exposants irrationnels, *Cf* chap.10

20. A III, 1, N.88, Lettre de Newton à Oldenburg pour Leibniz et Tschirnhaus du 13 Juin 1676 (Nr.6 du groupe de lettres envoyées par Oldenburg à la fin Août 1676) - p.555 : « Numerator per $m$ divisus foret formula serviens pro æquatione, cujus radices progressionis arithmeticæ, postia $m$ pro incognita et $n$, $1n$, $2n$ etc. pro radicibus veris. Hinc facile condetur tabula pro continuanda hac serie in infinitum. »

21. A III, 1, N.88, Lettre de Newton à Oldenburg pour Leibniz et Tschirnhaus du 13 Juin 1676 (Nr.6 du groupe de lettres envoyées par Oldenburg à la fin Août 1676) - p.555-556 : « Si $m \sqcap n$ et tam $m$ quam $n$ integer, series non ibit in infinitum, sed aliquis terminus fiet $\sqcap 0$, adeoque omnes quoque sequentes. »

Leibniz ne communique pas sur ces nouvelles approches. Dans la lettre suivante de Newton, l'*Epistola Posterior* (A III, 2, N.38), ce dernier demande clairement au jeune philosophe allemand de communiquer plus clairement sur le sujet :

> *Il me sera fort plaisant qu'on communique la résolution des équations affectées par la méthode de Leibniz et qu'on explique juste après comment s'y prendre lorsque les indices des puissances sont des fractions comme dans cette équation :* $20 + x^{\frac{3}{7}} - x^{\frac{6}{5}}y^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{7}{11}} = 0$, *ou des quantités sourdes comme dans celle-ci*
>
> - $$\left(x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}\right)^{\sqrt[3]{\frac{2}{3}}} = y$$ -
>
> *où* $\sqrt{2}$ *et* $\sqrt{7}$ *ne désignent pas les coefficients de ce* $x$ *mais les indices de ses puissances ou de ses dignités et* $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ *désigne l'indice de la dignité du binôme* $x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}$.
> *Je crois que la chose est claire avec ma méthode, mais je l'avais décrite d'une autre manière. Mais il faut finalement poser là la limite de cette très longue lettre.* [22]



Manuscrits de Newton - MS Add.3977 Bl.52

Serfati interprète cette nouvelle mention des exposants non entier comme le pas décisif pour Leibniz vers l'exposant transcendant. Newton y franchirait une nouvelle barrière en plaçant des expressions irrationnelles au sein des exposants :

> *L'exemple de Newton - sans autre intérêt que pédagogique - est particulièrement suggestif : il contient une superposition de deux tels exposants, l'un à l'intérieur d'une forme élémentaire (le binôme), l'autre dans l'exposant du binôme. Une écriture newtonienne qui n'a certes pas dû manquer de surprendre à nouveau Leibniz. Quant à la signification de sa Forme exponentielle neuve, Newton n'en fournit cette fois aucune. Les dernières lignes sont particulièrement sybilines : la chose, dit-il, découle à l'évidence de sa méthode et il en fera ailleurs la description.* [23]

L'échange épistolaire qu'entretiennent Leibniz et Newton durant cette année 1676 joue un rôle majeur dans la célèbre controverse qui va opposer les deux savants dans la première décennie du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle. Ainsi, la place disproportionnée qu'ont ces textes chez les divers commentateurs des siècles qui vont suivre explique pourquoi il ont généralement surévalué le rôle qu'elles ont pu jouer dans l'histoire de concepts mathématiques comme les exposants [24].

Ainsi, cette formule ne constitue pas pour Leibniz une révolution et nous avons montré dans les précédentes sections qu'il élabore des conceptions et des écritures d'exposants fractionnaires et même irrationnels dès l'année 1673, soit trois ans plus tôt. Néanmoins cette problématique de la substance, soulevée par Serfati, doit être gardée à l'esprit pour mener à bien l'analyse historique de ce que sont les exposants pour Leibniz au travers de ses textes. Enfin, dans son analyse très formelle des expressions algébriques, Serfati distingue nettement l'opérateur d'exponentiation de l'exposant lui-même. Cette distinction peut s'avérer porteuse de dangereux anachronismes en apportant un cadre d'analyse trop rigide face à des concepts et des notions qui sont en pleine germination.

22. A III, 2, N.38, Lettre de Newton à Oldenburg pour Leibniz du 24 Octobre 1676 - p.116 : « Communicatio Resolutionis affectarum æquationum par Methodum Leibnitii pergata erit, juxta et explicatio quomodo se gerat ubi indices postulatum sunt fractiones ut in hac æquatione $20 + x^{\frac{3}{7}} - x^{\frac{6}{5}}y^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{7}{11}} = 0$, aut surdæ quantitates ut in hac $\overline{x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}}|\sqrt{③}\frac{2}{3} = y$, ubi $\sqrt{2}$ et $\sqrt{7}$ non designant coefficientes ipsius $x$, sed indices potestatum seu dignitatum ejus et $\sqrt{③}\frac{2}{3}$ indicem dignitatis binomii $x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}$. Res credo, mea methodo patet, aliter descipsissem. Sed meta tandem prolixæ huic Epistolæ ponenda est. »- *Nota Bene* la version manuscrite Ms. add 3977 Bl.35-54 que nous avons consultée, Newton écrit « où les indices des puissances sont des fractions » (« *ubi indices potestatum sunt fractiones* ») au lieu de la version choisie par les éditeurs de l'*Akademie* « où les indices des reqêtes sont des fractions » (« *ubi indices postulatum sunt fractiones* »)

23. [92] M. Serfati, *La constitution de l'écriture symbolique mathématique*, Thèse de Philosophie, Université Paris Sorbonne, 1997 - p.328, *Nota Bene* : à la fin de la citation, Serfati traduit librement et indirectement Newton, et dit qu'il fera la description de sa méthode "ailleurs". En réalité, Newton écrit "*aliter*", c'est-à-dire "autrement" et non "*alibi*", c'est-à-dire ailleurs.

24. La grande diffusion de ces lettres est sans doute l'une des raisons principales pour laquelle on parle aujourd'hui de "la formule du binôme de Newton" pour désigner le développement du binôme.

### 12.1.2 Exposant imaginaire

Dans un billet non daté [25] et sans titre (LH 35, 5, 14 Bl.14) que nous allons désigner par "*De Exponentibus et Logarithmis Impossibilibus*", Leibniz évoque la possibilité de mettre un nombre imaginaire à la place de l'exposant :

Manuscrits de Leibniz - LH 35, 5, 14 Bl.14

**Verso du billet : Logarithme des impossibles**

Sur le verso du billet [26], Leibniz pose le problème suivant :

> *Soit* $x^{\sqrt[2]{-1}}$, *dont le logarithme est* $\sqrt[2]{-1}\log x$ *qui est impossible, on cherche donc de quelle sorte de quantité il s'agit.* [27]

La question de la nature de $x^{\sqrt[2]{-1}}$ dépend naturellement de la nature de $x$. Mais Leibniz ne le précise pas. On note qu'il pose que son logarithme de cette quantité $\sqrt[2]{-1}\log x$ est impossible, sans que cela ne pose de questions. On peut donc en déduire que la quantité $\log x$ est une quantité réelle, positive ou négative. Ainsi, $x$ devrait être une quantité positive, mais Leibniz ne couche pas de tels raisonnements sur ce petit billet. La question qu'il évoque ensuite est celle des logarithmes des quantités négatives et des quantités impossibles.

> *Le logarithme d'une quantité impossible est impossible ; le double d'une quantité impossible est impossible, on en conclut donc que le logarithme d'une quantité négative est impossible. Puisque donc le double du logarithme est impossible et que c'est un fait que la racine carré d'une quantité négative est assurément impossible.* [28]

Pour reprendre le raisonnement de Leibniz, si $\alpha$ est impossible alors $\log(\alpha)$ est impossible. Si $\beta$ est impossible alors $2\beta$ est impossible. Ainsi le logarithme d'une quantité négatives $\log(-x) = 2\log(\sqrt{-x})$ est le double du logarithme d'une quantité impossible et donc c'est une quantité impossible.
Arrêtons-nous ici pour en tirer les premières conséquences. Ici Leibniz traite du logarithme et non de l'exposant. Comme nous l'avons vu, il existe de nombreux textes, notamment de la période parisienne, où ces deux notions coïncident pour Leibniz. Ce n'est visiblement pas le cas ici, puisque le logarithme de $x^a$ n'est pas $a$ mais $a\log(x)$. En disant cela, il faut souligner que la différence n'est pas seulement

25. Dater un manuscrit si court est une chose très hasardeuse, d'autant que Leibniz s'intéresse au problème des logarithmes des nombres négatifs et impossibles jusqu'à la fin de sa vie (*Cf* par exemple [45] G.W. Leibniz, *Observatio quod rationes sive proportiones non habeant locum circa quantitates nihilo minores : et de vero sensit methodi infinitesimalis* dans les *Acta Eruditorum*, Volume 31, 1712 - p.167-169). Néanmoins, on peut citer trois textes de Leibniz datant de 1679 et qui traitent de sujet très proches ; *Cf* le *Quadraturæ per logarithmos* (LH 35 5 15, Bl.27 - 21 Mars 1679) ; le *Solutio problematum per logarithmicam et de logarithmis totorum ex logarithmis partium* (LH 35 5 15, Bl.28 - 30 Mars 1679) ; le *Tentata impossibilitas quadraturæ* (LH 35 5 15 - Bl.19-20 - Novembre 1679). Dans notre billet non daté, Leibniz utilise "log" pour désigner le logarithme. Dans les deux premiers textes que nous venons de citer, Leibniz note le logarithme par la lettre "$\mathcal{L}$" et l'emploie comme un opérateur relié à la barre de surlignage, de la même manière que pour l'opérateur de différence "$d$" et celui de somme "$\int$". Dans le troisième texte, Leibniz utilise "log" mais le complète d'adjectif qualificatif comme "alg.", "tab." ou encore "hyp.". Enfin, on trouve aussi bien, dans des textes tardifs des années 1690, la notation "$l$" que la notation "log". Le billet est donc probablement postérieur à 1679, mais on ne peut rien dire de plus.

26. C'est dans le processus de numérisation des manuscrits de Leibniz qu'on a désigné cette face "verso" et l'autre "recto". Cette désignation est cependant arbitraire car les deux faces sont relativement indépendantes. On peut néanmoins supposer qu'elles ont été rédigées en même temps, ou de façon très rapprochées puisqu'elles traitent du même sujet et usent des mêmes notations et concepts

27. Manuscrits de Leibniz : LH 35, 4, 14 Bl. 14, Sans titre, non daté : « Quæritur qualisnam quantitas sit $x^{\sqrt[2]{-1}}$ eius logarithmus est $\sqrt[2]{-1}\log x$ qui est impossibilis. »

28. Manuscrits de Leibniz : LH 35, 4, 14 Bl. 14, Sans titre, non daté : « Impossibilis quantitatis logarithmus est impossibilis ; impossibilis quantitatis duplus est impossibilis, unde colligitur impossibilem esse logarithmum quantitatis negativæ. Cum duplus sit logarithmi impossibilis nempe de impossibili radix scilicet quadraticæ quantitatis negativæ. »

quantitative. L'exposant est traité comme une opération tandis que le logarithme joue ici le rôle d'une fonction. Le logarithme d'une quantité est aussi une quantité. Tandis que l'exposant est une quantité qui, opérant sur une autre, la racine, en donne une troisième qui est la dignité. Dans notre conception moderne, opérations et fonctions sont toutes deux des applications, et la relation entre exposant et logarithme est très claire :

$$a = e^{\ln(a)} = b^{\log_b(a)}$$

Mais le fait que n'importe quelle quantité puisse être considérée comme la dignité de n'importe quelle autre quitte à fixer l'exposant ou bien quitte à fixer la racine n'est pas quelque chose de commun au XVII$^{\text{ème}}$ siècle. On ne peut donc pas identifier ici logarithmes et exposants.
Pourtant, lorsque Leibniz introduit la quantité $x^{\sqrt[2]{-1}}$, ce n'est pas pour étudier les exponentielles imaginaires. Il s'agit très clairement dans ce contexte de trouver une quantité dont le logarithme est impossible, c'est-à-dire imaginaire pur. Ainsi, pour trouver une quantité dont le logarithme présente telle ou telle propriété, il suffit de considérer une dignité dont l'exposant revêt cette propriété. Donc logartihme et exposant restent étroitement liés, et ce pour la raison suivante : il obéissent tous deux à la même règle de morphisme :

$$\begin{aligned} x^{a+b} &= x^a.x^b \\ \log(a) + \log(b) &= \log(a.b) \end{aligned}$$

Ce que Leibniz décrit finalement dans ce passage, c'est la transformation qu'effectue le logarithme entre l'action de diviser par deux, qui est simple et universelle et celle de prendre la racine qui est complexe et intègre des conditions de possibilité. Prendre la racine carré, c'est résoudre une équation, c'est répondre à la question de savoir s'il existe une quantité jusqu'alors inconnue dont le carré vaut la quantité donnée. Prendre la moitié, c'est simplement diviser la quantité en deux parties égales, ce qui est rendu possible par le principe constitutif de la notion de quantité. Dès lors, comment considérer cette opération basique et universelle lorsqu'on la fait correspondre à la racine d'un nombre négatif, c'est-à-dire une opération impossible. Si cette dernière peut faire le passage entre des quantités réalisables comme les nombres négatifs et des fictions irréalisables comme les nombres imaginaires, il ne serait pas acceptable que la division puisse en faire de même. La moitié doit être nécessairement consubstantielle du tout, contrairement à la racine. Ainsi il faut donc nécessairement que le logarithme de $-1$ et celui de $\sqrt{-1}$ qui est sa moitié, soient ou bien impossibles tous deux ou bien réels tous deux.
Pour finir, Leibniz donne une étrange conclusion :

> *On en conclut à présent que le logarithme d'une quantité impossible est plus qu'impossible.* [29]

Ainsi, il y aurait différents degrés d'impossibilité, de la même manière qu'il plusieurs degrés d'infinité. Leibniz ne donne pas de détails. Peut-être faut-il faire une opération plus composée pour réduire le logarithme d'un nombre imaginaire aux nombres réels qu'il n'en faut pour le logarithme d'un nombre négatif ? Peut-être est-il simplement doublement impossible puisqu'il est un nombre impossible produit par un nombre impossible ? Pourtant, nous avons vu qu'il démontre que le logarithme d'un nombre négatif est impossible par le fait qu'il s'agit du double du logarithme d'une nombre impossible et que le logarithme comme le double d'un nombre impossible est nécessairement impossible. Ainsi, selon l'une des deux prémisse de sa démonstration, le logarithme d'un nombre impossible doit être impossible mais malgré cela, dans sa conclusion, il annonce qu'il est plus qu'impossible. Ainsi, la moitié d'un nombre impossible serait plus impossible encore.

### Recto du billet : Passage entre réel et impossible

Ainsi, concernant la consubstantialité du tout et de ses parties, la position de Leibniz ne semble pas si univoque [30]. En effet, le verso du manuscrit, consacré au même problème des logarithmes des quantités impossibles, prend une tout autre direction :

29. Manuscrits de Leibniz : LH 35, 4, 14 Bl. 14, Sans titre, non daté : « Hinc colligitur logarithmum impossibilis quantitatis esse plus quam impossibilem. »

30. Nous traitons ce sujet plus en détail dans la section consacrée aux travaux de Leibniz sur les quantités imaginaires (*Cf* p.)

*Si l'on pouvait exprime le* log *des impossibles, imaginaires pour certains, ce serait par ce calcul*[31]

On trouve alors, en substance, le raisonnement suivant :

$$\log(a^2+b^2) = \log\left(a+b\sqrt{-1}\right) + \log\left(a-b\sqrt{-1}\right)$$

Ainsi en dérivant l'expression :

$$\frac{d(a^2+b^2)}{a^2+b^2} = \frac{da+db\sqrt{-1}}{a+b\sqrt{-1}} + \frac{da-db\sqrt{-1}}{a-b\sqrt{-1}}$$

Or $d(a^2) = 2ada$, $d(b^2) = 2bdb$, et $a^2+b^2 = (a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})$. Donc, en multipliant les deux membres par $a^2+b^2$, on obtient :

$$\begin{aligned} 2ada+2bdb &= \left(da+db\sqrt{-1}\right)\left(a-b\sqrt{-1}\right) + \left(da-db\sqrt{-1}\right)\left(a+b\sqrt{-1}\right) \\ &= ada+bdb+(adb-bda)\sqrt{-1}+ada+bdb+(bda-adb)\sqrt{-1} \\ &= 2ada+2bdb+(adb+bda-adb-bda)\sqrt{-1} \\ &= 2ada+2bdb \end{aligned}$$

Et Leibniz obtient donc à l'issue de ses calculs l'expression de départ, à savoir :

$$\log(a^2+b^2) = \int \frac{2ada+2bdb}{a^2+b^2}$$

Leibniz conclut donc :

*Ce qui est concordant.*[32]

Pour aller plus loin, il suggère de rompre la symétrie du problème en affectant à un paramètre le statut de variable et à l'autre celui de constante :

*Et c'est ainsi qu'on donnera la quadrature du cercle par les logarithmes, en effet si on a $a = y$ indéterminée et $b$ constante, alors on obtient :*[33]

$$\log(y^2+b^2) = 2\int \frac{ydy}{y^2+b^2}$$

Mais il s'arrête là et ne développe pas son idée :

*Il faut tester cela avec minutie*[34]

Ainsi, le logarithme réel de la quantité réelle $a^2+b^2$ est composé de la somme de deux quantités impossibles. Donc la juxtaposition de deux impossibles peut produire une quantité réelle. Cette composition n'est pas contradictoire puisque l'aboutissement des calculs en passant par les impossibles concorde avec ceux qui restent dans le monde des quantités réelles. Et ces calculs ne sont pas de simples opérations algébriques, mais des opérateurs de différentiation, propre à la détermination des quadratures, comme Leibniz l'évoque. Ainsi, le calcul de quadrature peut se faire au moyen des logarithmes et cette voie nécessite de passer par les quantités impossibles, sans qu'il n'y ait pourtant de contradiction.

A travers ces deux ébauches, Leibniz touche donc à un problème difficile que partagent les exposants et les logarithmes, à savoir qu'en transformant des opérations en d'autres, ils transmutent radicalement la nature des objets.

31. Manuscrits de Leibniz : LH 35, 4, 14 Bl. 14, Sans titre, non daté : « Si log impossibilium alieni imaginarie exprimi posset calculo foret »

32. Manuscrits de Leibniz : LH 35, 4, 14 Bl. 14, Sans titre, non daté : « Quod consentit. »

33. Manuscrits de Leibniz : LH 35, 4, 14 Bl. 14, Sans titre, non daté : « Itaque dabitur quadratura Circuli per logarithmos, nam si sit $a = y$ inderminata et $b$ sit constans fiet : »

34. Manuscrits de Leibniz : LH 35, 4, 14 Bl. 14, Sans titre, non daté : « Hoc accurate experiendum »

### 12.1.3 Exposant infiniment petit

Dans le *De Tangentibus seu Differentiis Figurarum per æquationes exponentales expressarum. Adde aliis multis. Calculus differentialis et tangentes, et exponentes incogniti* (LH 35, 5, 13 Bl.5), on trouve une étude sur le cercle qui constitue un ajout au texte principal. Ce fragment s'intitule *Circuli ordinati*. Le manuscrit est daté du 3 Juin 1677 (13 Juin dans le calendrier grégorien) mais il n'y a aucune indication sur la datation de cet ajout, plus tardif.

#### Un développement de l'équation du cercle

Leibniz souhaite calculer l'équation du cercle à partir de la formule donnée par son ordonnée : $y = \sqrt{1-x^2}$. Le jeune philosophe constate qu'on peut développer cette expression à l'infini à partir de cette formule :

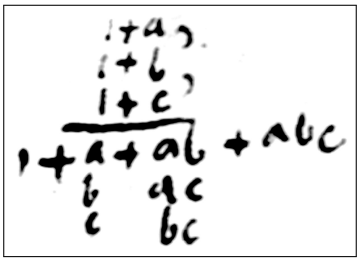
$$1 - x^a = \left(1 + x^{\frac{a}{2}}\right)\left(1 - x^{\frac{a}{2}}\right)$$

Ainsi, en développant suffisamment, l'on obtient :

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1+x} \times \underbrace{\sqrt{1-x}}_{\sqrt{1+\sqrt{x}}\underbrace{\sqrt{1-\sqrt{x}}}_{\dots}}$$

$$1 - x^2 = (1+x)(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[4]{x})(1+\sqrt[8]{x})(1+\sqrt[16]{x})\dots$$

L'expression obtenue est donc constituée d'une infinité de facteur. Leibniz s'intéresse donc ensuite au développement de cette formule, ce qui constitue un problème de combinatoire classique sur lequel il travaille par ailleurs activement durant cette période :




Manuscrits de Leibniz - LH 35, 5, 13 Bl.5

En poursuivant indéfiniment l'opération, le facteur qui comprend un signe négatif est repoussé à l'infini et disparait :

> *Laquelle résolution de multiplicateurs négatifs peut être continuée.* [35]

Leibniz obtient alors la formule suivante :

$$\begin{array}{ccccc} 1+ & x & + & x\sqrt{x} & + & x\sqrt{x}\sqrt[4]{x} & +\cdots = 1-x^2 \\ & \sqrt{x} & & x\sqrt[4]{x} & & \dots & \\ & \sqrt[4]{x} & & \dots & & x\sqrt[4]{x}\sqrt[8]{x} & \\ & \sqrt[8]{x} & & \sqrt{x}\sqrt[4]{x} & & \dots & \\ & \dots & & \sqrt{x}\sqrt[8]{x} & & \sqrt{x}\sqrt[4]{x}\sqrt[8]{x} & \\ & & & \dots & & \dots & \\ & & & \sqrt[4]{x}\sqrt[8]{x} & & & \\ & & & \dots & & & \end{array}$$

35. LH 35, 5, 13 Bl.5, *De Tangentibus seu Differentiis Figurarum per æquationes exponentales expressarum. Adde aliis multis. Calculus differentialis et tangentes, et exponentes incogniti*, 13 Juin 1677 : « quæ resolutio negativorum multiplicantum continua potest »

**Contradiction : des négligeables non négligealbes**

Mais il constate une contradiction. En effet, dans le membre de gauche, on ajoute une valeur positive à l'unité alors que dans le membre de droite, on retranche une valeur positive. Ainsi, l'un est strictement plus grand que 1, tandis que l'autre est strictement plus petit [36] :

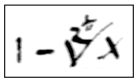
> *Mais c'est absurde, c'est pourquoi une toute nouvelle quantité comme $\sqrt[z]{x}$ ne peut pas être négligeable. Quand bien même $\sqrt[z]{x}$ serait une quantité infiniment petite, il enfle pourtant du fait de l'infinité des multiplications qu'on opère.* [37]

On ne peut donc pas s'abstraire du facteur final. Il ne peut pas être négligé et doit donc apparaitre dans la formule. C'est ainsi que Leibniz réécrit :

$$1 + \begin{array}{c} x \\ \sqrt{x} \\ \sqrt[4]{x} \\ \sqrt[8]{x} \\ \dots \end{array} + \begin{array}{c} x\sqrt{x} \\ x\sqrt[4]{x} \\ \dots \\ \sqrt{x}\sqrt[4]{x} \\ \sqrt{x}\sqrt[8]{x} \\ \dots \\ \sqrt[4]{x}\sqrt[8]{x} \\ \dots \end{array} + \begin{array}{c} x\sqrt{x}\sqrt[4]{x} \\ \dots \\ x\sqrt[4]{x}\sqrt[8]{x} \\ \dots \\ \sqrt{x}\sqrt[4]{x}\sqrt[8]{x} \\ \dots \end{array} + \cdots = \frac{1-x^2}{1-\sqrt[\frac{1}{0}]{x}}$$

> *On note ceci : $\sqrt[\frac{1}{0}]{}$, l'exposant d'un exposant.* [38]

Le jeune philosophe semble lui-même surpris de la notation qu'il vient de découvrir, à savoir une racine dont le degré est $2^{\frac{1}{0}}$.



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 5, 13 Bl.5

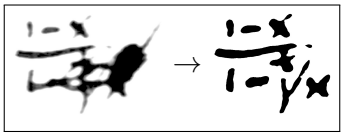
L'explication de Leibniz est intéressante, bien que fondée sur une erreur. En effet, il semble croire que la quantité $\sqrt[z]{x}$ est infiniment petite lorsque $z$ devient infiniment grand. Autrement dit que :

$$\sqrt[2^{\frac{1}{0}}]{x} = 0$$

Or, si l'exposant est infiniment petit, qu'il est donc proche de 0, alors la valeur de $x^z$ sera infiniment proche de 1 et non de 0 :

$$\sqrt[2^{\frac{1}{0}}]{x} = x^{\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{0}}}\right)} = x^{\frac{1}{2^\infty}} = x^{\frac{1}{\infty}} = x^0 = 1$$

En réalité, c'est le facteur $1 - \sqrt[2^{\frac{1}{0}}]{x}$ qui est un infiniment petit. Si dans les sommes, on peut négliger les termes infinitésimaux, on ne peut absolument pas le faire dans les produits.
Par ailleurs, en travaillant l'image numérisée du manuscrit, on s'aperçoit que Leibniz a d'abord écrit comme exposant de la racine $\frac{1}{0}$ avant d'écrire $2^{\frac{1}{0}}$.



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 5, 13 Bl.5

36. Sur le manuscrit, Leibniz entour les 1 de chaque membre pour désigner l'endroit où le problème se pose

37. LH 35, 5, 13 Bl.5, *De Tangentibus seu Differentiis Figurarum per æquationes exponentales expressarum. Adde aliis multis. Calculus differentialis et tangentes, et exponentes incogniti*, 13 Juin 1677 : « sed absurdum ideo novissima quantitas - $\sqrt[z]{x}$ neglegi non potest nam tametsi $\sqrt[z]{x}$ sit quantitas infinite parva tumescit tamen infinitis multiplicationibus faciendis »

38. LH 35, 5, 13 Bl.5, *De Tangentibus seu Differentiis Figurarum per æquationes exponentales expressarum. Adde aliis multis. Calculus differentialis et tangentes, et exponentes incogniti*, 13 Juin 1677 :

$$\text{« } 1 + \begin{array}{c} x \\ \sqrt{x} \\ \sqrt[4]{x} \\ \sqrt[8]{x} \\ \&c. \end{array} + x\sqrt{x} + \&c. \sqcap \frac{1-x^2}{1-\sqrt[\frac{1}{0}]{x}}$$

nota $\sqrt[2^{\frac{1}{0}}]{}$ exponentem exponentis »

Dans notre calcul, il n'y a pas de différence entre les deux, puisqu'ils valent chacun une quantité infiniment grande. Pourtant Leibniz se corrige et note que sa nouvelle notation correspond à l'« exposant d'un exposant » (« *exponentem exponentis* »). De fait, les exposants des racines, $\sqrt[2]{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[8]{}$, $\sqrt[16]{}$ etc., sont eux-mêmes en progression géométrique. A partir de là, les exposants sont eux-même caractérisés par des exposants.

## 12.2 Exposant littéral

### 12.2.1 Formule générale du binôme

#### Une première écriture formelles des coefficients binômiaux

Dans le *De Intercalatione Numerorum Combinatoriorum* (LKK Nr.6), dont nous avons déjà analysé plusieurs extraits, Leibniz se lance dans la recherche de formules ayant des degrés "universels". Il pose donc le problème des exposants littéraux :

> *Ce qu'il faut tenter, pour l'Analyse, c'est de pouvoir instaurer des formules plus longues qui s'appliquent à toutes les dimensions, de sorte qu'à la place de* $by^4 + acy^3 + a^2dy^2 + a^3ey + a^4f$*, on écrive plutôt :* $by^z + acy^{z-1} + a^2dy^{z-2} + a^3ey^{z-3} + a^4fy^{z-4}$ *etc. De fait, si l'on pose* $z = 4$*, c'est-à-dire* $z - 4 = 0$*, on constate qu'on peut ôter le* $y$ *du dernier terme ; et l'on doit également enlever le "etc.". Sinon on pourrait tout du moins poursuivre cette expression du moment que l'exposant de ce* $y$ *reste égal à ce* $0$ *de même que j'ai, cela dit, commencé par le terme le plus haut, ainsi on aurait pu débuté par le plus éloigné, de cette manière :* $a^zf + a^{z-1}ey^{+1} + a^{z-2}dy^2 + a^{z-3}cy^3 + a^{z-4}by^4$ *etc.* [39]

Le problème qui se pose à Leibniz ici, c'est le nombre de terme d'une expression de degré variable. Tant que l'exposant $z$ n'est pas fixé, il y a des termes dont on ne sait pas s'ils apparaissent ou non dans l'expression. Leibniz se ramène donc à un cas plus simple, où ce problème peut-être résolu, à savoir la question du binôme :

> *Si l'on pose une quantité* $y$ *ayant pour exposant* $z$*, et dont on ait à développer la composition, c'est-à-dire* $y = x + b$*, comment développer de façon générale* $y^z$ *? On a déjà découvert depuis quelques temps, grâce à de savants géométres, les nombres qu'ils appellent "figurés",* $1, 2, 1$ *;* $1, 3, 3, 1$ *etc. et ainsi* $(x + b)^4 = 1x^4 + 4x^3b^1 + 6x^2b^2 + 4x^1b^3 + 1b^4$*.* [40]

La question est donc très claire : comment donner une expression littérale aux coefficients du triangle arithmétique. Notons que dans ce problème, l'exposant correspond au $n$ de $\binom{n}{k}$ et non plus au $k$ comme c'était le cas dans la *Dissertatio de Arte Combinatoria*. Leibniz pose alors le problème de la plus explicite des manières :

> *Dès lors si l'exposant de la dimension n'est pas* $4$ *mais un exposant universelle comme par exemple* $z$*, il faut trouver une méthode par laquelle on puisse expliciter les autres nombres transversaux à partir de la donnée* $z$*. De fait comment trouver* $28, 56, 70$ *à partir de la donnée* $8$ *ou bien* $36, 84, 126$ *à partir de la donnée* $9$ *; et de même pour les autres.* [41]

Arrêtons-nous sur cette idée : il s'agit de retrouver l'exposant au cœur des coefficients du binôme. Le développement du binôme permet donc de déplacer l'exposant vers les coefficients de la formule. Comme ces coefficients sont des facteurs homogènes de l'expression algébrique, l'opération que Leibniz met ici en valeur est très loin d'être anodine : il s'agit bien de transformer la nature et la fonction de l'exposant pour lui donner une place homogène aux autres quantités, et ainsi permettre d'« intégrer les exposants dans le calcul » [42].

Pour résoudre le problème, Leibniz part d'une certaine proposition de Pascal pour aboutir à la formule suivante :

$$\frac{\text{Nombre donné}}{\text{par rapport au plus proche voisin sur la même transversale}} = \frac{\gamma}{z + 1 - \gamma}$$

39. LKK, N.6, *De Intercalatione Numerorum Combinatoriorum. De Formulis Omnium Dimensionum ex Artis Combinatoriæ Principiis*, Janvier 1675 - p.16 : « Tentandum est, an Analysis promoveri possit longius adhibitis formulis quuæ sunt simul omnium dimensionum. ut pro $by^4 + acy^3 + a^2dy^2 + a^3ey + a^4f$ scribemus : $by^z + acy^{z-1} + a^2dy^{z-2} + a^3ey^{z-3} + a^4fy^{z-4}$ etc. Quod si ponamus $z \sqcap 4$ seu $z - 4 \sqcap 0$ patet $y$ in ultimo termino omitti posse : et etc. quoque omitti debere. Sin minus continuari poterit, donec fiat exponens ipsius $y$ ipsi $0$ æqualis. quemadmodum autem hic incepi a summo, ita incipi potuisset ab imo, hoc modo : $a^zf + a^{z-1}ey^{+1} + a^{z-2}dy^2 + a^{z-3}cy^3 + a^{z-4}by^4$ etc. »

40. LKK, N.6, *De Intercalatione Numerorum Combinatoriorum. De Formulis Omnium Dimensionum ex Artis Combinatoriæ Principiis*, Janvier 1675 - p.16 : « Ponamus jam quantitatem$y$ exponente $z$ affectam esse explicandam sive esse $y \sqcap x + b$. quo modo generaliter explicabimus : $y^z$ ? jam repertum est dudum a doctissimis Geometris numeros quos vocant Figuratos, 1.2.1 1.3.3. etc. itaque $x + b$,$^4 \sqcap 1x^4 + 4x^3b^1 + 6x^2b^2 + 4x^1b^3 + 1b^4$. »

41. LKK, N.6, *De Intercalatione Numerorum Combinatoriorum. De Formulis Omnium Dimensionum ex Artis Combinatoriæ Principiis*, Janvier 1675 - p.17 : « Jam si dimesionis exponens non sit 4, sed universali explicausa $z$, explicanda ratio est, per quam ex data $z$ exhibeantur cæteri numeri transversales, nempe quomodo ex data 8, inveniantur $28, 56, 70$ et ex data 9 inveniantur $36, 84, 126$ et ita in cæteris. »

42. *Cf* plus loin dans A VII, 5 A, N.37, *Logarithmi in Hyperbola demonstrati*, 24 Octobre 1675 - p.261 : « *calculos in quos exponentes ingrediuntur.* »

*D'où si $E = z$ et qu'on cherche $C$, alors cela donne $\frac{C}{z} = \frac{z+1-\gamma}{\gamma}$ et donc $C = \frac{z^2+z-\gamma z}{\gamma}$, avec $\gamma = 2$, ce qui donne $C = \frac{z^2+z-2z}{2} = \frac{z^2-z}{2}$.*[43]

En fait, le nombre donné est $\binom{z}{\gamma-1}$ et son plus proche voisin dans la transversale[44] est $\binom{z}{\gamma}$. Ainsi, Leibniz part de cette formule de récurrence :

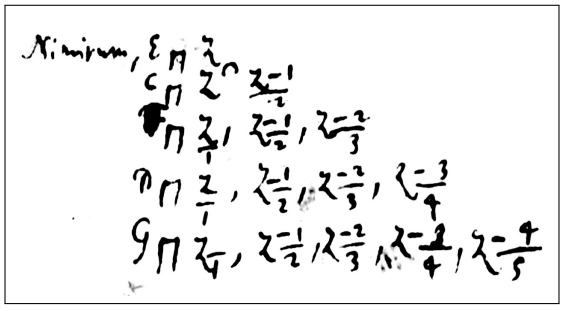
$$\binom{z}{\gamma} = \frac{z+1-\gamma}{\gamma}\binom{z}{\gamma-1}$$

Il ne résout cependant pas la question par la récurrence à laquelle on pourrait s'attendre :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n+1-k}{k}\binom{n}{k-1} \\
&= \frac{n+1-k}{k}\cdot\frac{n-k+2}{k-1}\binom{n}{k-2} \\
&\vdots \\
&= \frac{(n-k+1)(n-k+2)\dots n}{k(k-1)\dots 2.1}\cdot\underbrace{\binom{n}{0}}_{=1}
\end{aligned}$$

A la place de ce raisonnement analytique, Leibniz, préférant la synthèse, fait le chemin inverse :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{2} &= \frac{n+1-2}{2}\binom{n}{1} = \frac{n-1}{2}\cdot n \\
\binom{n}{3} &= \frac{n+1-3}{3}\binom{n}{2} = \frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot n \\
\binom{n}{4} &= \frac{n+1-4}{4}\binom{n}{3} = \frac{n-3}{4}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot n \\
&\vdots
\end{aligned}$$



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 3A, 34 Bl.1

Leibniz démontre donc ici la formule développée des coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\dots 2.1}$$

Cette formule explicite d'un coefficients binomial indéterminé représente une avancée majeure pour Leibniz et n'est pas anodine au sein de l'histoire des mathématiques occidentales de son époque. Certes la

43. LKK, N.6, *De Intercalatione Numerorum Combinatoriorum. De Formulis Omnium Dimensionum ex Artis Combinatoriæ Principiis*, Janvier 1675 - p.18 : « $\frac{\text{Numerus datus}}{\text{ad proxime suquentem in eadem transversali}} \sqcap \frac{\gamma}{z+1-\gamma}$. Unde si $E \sqcap z$ et quæratur $C$, fiet $\frac{C}{z} \sqcap \frac{z+1-\gamma}{\gamma}$ et $C \sqcap \frac{z^2+z-\gamma z}{\gamma}$, ubi $\gamma \sqcap 2$ et fiet $C \sqcap \frac{z^2+z-2z}{2} = \frac{z^2-z}{2}$ »

44. Ce vocabulaire est emprunté à Pascal, il s'agit des bases transversales dans son triangles arithmétiques, et donc des différentes suites de $\binom{n}{k}$ avec $k$ variant entre 0 et $n$ qui est fixé

formule était déjà connue de Cardan au XVI$^{\text{ème}}$ siècle, et assez bien formalisée par Mersenne dans les années 1630. Mais la formule algébrique que Leibniz donne ici est plutôt nouvelle [45]

Leibniz parvient ici à transformer, dans le cas du binôme, l'exponentiation en sommes et en produits. Cette transformation est sans doute un pas décisif vers la généralisation du calcul des exposants qui tiendra un rôle considérable dans le développement du calcul différentiel.

**Généralisation à d'autres exposants**

Dans le *De Intercalation Numerorum Combinatoriorum* (LKK Nr.6), Leibniz va en fait plus loin. Après un court développement sur l'interpolation et le prolongement géométrique du triangle arithmétique, dont nous discuterons plus tard [46], le jeune philosophe propose d'étendre les expressions algébriques précédemment obtenues à des quantités quelconques, fractionnaires et même irrationnelles :

> *Et maintenant, on emploie z avec plus d'avantages ; et donc on peut reprendre les premières notations, de manière à ce qu'à la place de* 1 *on pose* $1\beta$*, d'où l'on obtient par exemple que* $E = \frac{z}{1}$ *;* $C = \frac{z(z-1\beta)}{1.2}$ *;* $D = \frac{z(z-1\beta)(z-2\beta)}{1.2.3}$ *etc. Dès lors si l'on a la puissance :* $y^z$*, on peut résoudre z, avec n'importe quelle valeur pour* $\beta$ *entre celles-ci, ou bien avec des nombres, ou bien avec d'autres quantités rationelles ou bien sourdes ou bien rompues. Comme si z était* 2*, c'est-à-dire* $y^z = y^2$*, et qu'on pose* $y = x + \gamma$*, ce binôme sera multiplié par lui-même à la manière d'un carré, et aussi l'on n'écrit pas* $x^2 + 2\gamma x + \gamma^2$*, mais, par exemple, à la place de* 1*, on choisit* $\frac{1}{2} = \beta$ *d'où le carré de ce binôme sera composé de quatre termes , à savoir on aura :*
> - $y^2 \sqcap \frac{1}{2}x^{\frac{4}{2}} + \frac{4}{2}\gamma^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{6}{2}\gamma^{\frac{2}{2}}x^{\frac{2}{2}} + \frac{4}{2}\gamma^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\gamma^{\frac{4}{2}}$ -
> *d'où l'on peut facilement le saisir, et par la même démarche, on peut également développer par les binômes la puissance dont l'exposant est irrationnel, par exemple* $\sqrt{2}$*, il faut alors diviser cette puissance en un certain nombre de parties inégales.* [47]

Bien-sûr, les formules sont fausses et Leibniz en prend rapidement conscience sur le même manuscrit. Néanmoins, cette tentative montre le désir profond chez le jeune mathématicien de découvrir par la voie du calcul et de l'écriture, de nouveaux outils qui permettent de résoudre ce face à quoi les anciens seraient démunis. Ici, Leibniz ne semble pas être bloqué par l'irrationalité de $\sqrt{2}$, il suffit d'ajouter de la dissymétrie dans le prolongement, en divisant en "parts inégales" ("*inæquales partes*"). La barrière de l'irrationalité était plus problématique pour lui dans ses première tentatives de généraliser l'exposant, tentatives que nous analysons dans la troisième section [48].

### 12.2.2 Des séries impossibles

Un mois après avoir écrit le *De Intercalation Numerorum Combinatoriorum* (LKK Nr.6), Leibniz rédige un complément qu'il intitule *De Exponentibus Fractis et Surdis, De Infiniti et indefiniti differentia* (LH 35, 3A, 34 Bl. 5) [49] :

---

45. Cette formule algébrique est souvent attribuée à Newton dans l'*Epistola Prior* que nous avons mentionnée plus tôt (*Cf* p.514) ; on a longtemps considéré que la première utilisation de cette formule par Leibniz se trouvait dans GM 7, VIII, *De primitivis et divisoribus ex tabula combinatoria*, p.101 *Cf* [10] F. Cajori, *A History of Mathematical Notations*, Volume 1, Chicago, 1928 - p.396 ; encore aujourd'hui, la grande majorité des manuscrits qui traitent de ce sujet restent inédits ; néanmoins le *De Intercalatione* (LKK Nr.6) que nous analysons ici a été transcrit et publié par Knobloch dès 1676.

46. *Cf* p.**??**

47. LKK, N.6, *De Intercalatione Numerorum Combinatoriorum. De Formulis Omnium Dimensionum ex Artis Combinatoriæ Principiis*, Janvier 1675 - p.31-32 : « Itaque $z$ adhibere utilius ; itaque notandum priora resumi posse, modo pro 1, ponamus $1\beta$, unde fiet v.g. $E \sqcap \frac{z}{1}$. $C \sqcap \frac{z,\cap z-1\beta}{1,2}$. $D \sqcap \frac{z,z-1\beta,z-2\beta}{1,2,3}$ etc. Itaque si sit potestas : $y^z$ possumus $z$ resolvere in quotcunque $\beta$ inter se æquales, vel in numeros, vel in alias quantitates rationales vel surdas, vel fractas, ut si $z$ sit 2, seu $y^2 \sqcap y^2$, ponendo $y \sqcap x+\gamma$ binomium hoc quadratice in se multiplicatum erit, etiamsi non scribatur : $x^2+2\gamma x+\gamma^2$, sed v.g. pro 1. sumatur $\frac{1}{2} \sqcap \beta$ unde binomii hujus quadratum erit compositum ex quatuor terminis, nempe fiet : $y^2 \sqcap \frac{1}{2}x^{\frac{4}{2}} + \frac{4}{2}\gamma^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{6}{2}\gamma^{\frac{2}{2}}x^{\frac{2}{2}} + \frac{4}{2}\gamma^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\gamma^{\frac{4}{2}}$ unde facile intelligi potest, eodem modo etiam explicari posse per binomia, potestatem cujus exponens est irrationalis, v.g. $\sqrt{2}$ divideno eam in partes quotcunque inæquales. »

48. *Cf* p.**??**

49. Manuscrits de Leibniz : LH 35, 3A, 34 Bl. 5, *De Exponentibus Fractis et Surdis, De Infiniti et indefiniti differentia*, Février 1675 - traduction française du titre : « à propos des exposants rompus et sourds, et à propos de la différence entre le fini et l'infini ».

*Voir le manuscrit de Janvier 1675 sur les formules de toutes dimensions et qui consiste en deux parties. Il contient le cas où les exposants sont entiers et on exprime les valeurs rationnelles des binômes au moyen des nombres combinatoires. Et puis à l'inverse, s'ils sont rompus ou irrationnels, c'est-à-dire qu'il n'y a aucun rapport rationnel pour interpoler les nombres combinatoires, et en outre cette question analytique ouverte n'a cependant pas d'intérêt sinon pour ce qui concerne les rompus.* [50]

La distinction de cas qui est ici explicite est intéressante. Leibniz distingue d'un coté les exposants entiers qui expriment des valeurs rationnelles et de l'autre les exposants rompus ou sourds qui relèvent de l'irrationalité. Ainsi, les exposants fractionnaires sont plus proche des exposants irrationnels que des exposants entiers naturels ou négatifs. Ce regroupement se retrouve dans plusieurs textes que nous avons déjà cités [51].

### Une ouverture à l'Analyse des transcendants

Leibniz voit dans la question des exposants fractionnaires la pierre de touche qui lui donnera le plein accès aux problèmes de transcendance :

*On va dire maintenant pour quelle raison, si l'on démontrait cette méthode pour les rompus, on pourrait démontrer la même pour les sourds, si cela se fondait sur une déduction par l'absurde, parce que toutes les quantités sourdes peuvent être résolues en rompus rationnels de sorte que les termes soient continument décroissants. De plus, il semble que pour la méthode des rompus, on peut suivre la piste dont j'ai commencé la règle dans le manuscrit sur les formules de toutes dimensions, dans la deuxième partie. De fait, grâce aux écritures arbitraires qui, après avoir réduit l'équation, sont en même temps des lettres arbitraires, il semble qu'on ait une certaine méthode générale pour ce z, grace au reste de l'analyse qu'on pourra obtenir. Après quoi, il faudra encore bien du labeur quant à la réduction des expressions transcendantes, autant que cela sera possible.* [52]

La méthode que propose Leibniz dans ce manuscrit s'appuie sur les développement de fraction en série que Leibniz a découvert chez Mercator [53] :

*A ce moment, à vrai dire, il m'est venu une méthode à l'esprit qui use ici du principe selon lequel tout nombre irrationnel peut être représenté par une série infinie de rationnels et tout nombre rompu par une série infinie d'entiers ; c'est pourquoi il nous faut également examiner les séries infinies de nombres combinatoires, autant que possible.* [54]

Ainsi Leibniz part de l'équation suivante :

$$\frac{1}{1+b} = 1 - b + b^2 - b^3 + b^4 + \dots$$

50. Manuscrits de Leibniz : LH 35, 3A, 34 Bl. 5, *De Exponentibus Fractis et Surdis, De Infiniti et indefiniti differentia*, Février 1675 : « Vide Schediasma Januarii 1675, De formulis omnium dimensionum constans duabus partibus. Constat si exponentes sint integri et rationales numeris combinatoriis valores binomiorum exprimi. At vero si sint fracti aut irrationales nullam vide rationem interpolandi numeros combinatorios, praeter inquæsitionem analyticam, non nisi pro fractis tamen tentabilem. »

51. *Cf* p.515 A III, 1, N.88, Lettre de Newton à Oldenburg pour Leibniz et Tschirnhaus du 13 Juin 1676 (Nr.6 du groupe de lettres envoyées par Oldenburg à la fin Août 1676) - p.556 : « Il se peut que $m$ ou $n$ soient également rompus ou irrationnels » (« *Potest m vel n etiam esse fractus vel irrationalis* ») ; et également p.525 LKK, N.6, *De Intercalatione Numerorum Combinatoriorum. De Formulis Omnium Dimensionum ex Artis Combinatoriæ Principiis*, Janvier 1675 - p.32 : « ou bien avec des nombres, ou bien avec d'autres quantités rationnelles ou sourdes ou rompus » (« *vel in numeros, vel in alias quantitates rationales vel surdas, vel fractas* »)

52. Manuscrits de Leibniz : LH 35, 3A, 34 Bl. 5, *De Exponentibus Fractis et Surdis, De Infiniti et indefiniti differentia*, Février 1675 : « Hinc loquitur si qua methodus demonstretur de fractis eamdem demonstrari posse de surdis si condi ad absurdum deductione, quia omnes surdæ quantitates possunt resolvi in fractos rationales ita ut termini continue decrescant. Methodus autem pro fractis videtur indagari posse ea quam coepi ratione in schediasmate de formulis omnium dimensionis parte 2da nempe per arbitrarios ascriptos, reducta postea æquatione, cum enim sunt literæ arbitrariæ, videtur methodus quædam generalis ipsius $z$ ope cæteras analyticæ poterunt haberi ; et laborandum erit postea de reductione expressionum transscendentium, quando id fieri potest. »

53. citemercatorLogarithmotechnia1668 N. Mercator, *Logarithmotechnia*, Londres, 1668

54. Manuscrits de Leibniz : LH 35, 3A, 34 Bl. 5, *De Exponentibus Fractis et Surdis, De Infiniti et indefiniti differentia*, Février 1675 : « Hoc loco vero venit in mentem rationis, quæ hoc utitur fundamento quid omnis numerus irrationalis repræsentari potest infinita serie rationalium ; omnis numerus fractus infinita serie integrorum ; quare videamus an numerorum quoque combinatorium seriebus infinitis uti liceat. »

Dans ce texte, on ne sait pas réellement ce que désigne ce nombre qu'il s'agit de développer en série entière. A partir de là, la tentative de Leibniz peut donner lieu à deux interprétations radicalement différentes.

⋆ La première, peu originale, serait de voir ici une tentative de plus de retrouver un développement en série entière des binômes ayant des exposants fractionnaires. Autrement dit, Leibniz chercherait ici la formule que Newton lui donnera un an plus tard dans l'*Epistola Prior* (A III, 1, N.88) :

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}P^{\frac{m}{n}}Q + \frac{m-n}{2n}\frac{m}{n}P^{\frac{m}{n}}Q^2 + \frac{m-2n}{3n}\frac{m-n}{2n}\frac{m}{n}P^{\frac{m}{n}}Q^3 + \dots$$

⋆ La deuxième, plus intéressante, serait de comprendre que ce nombre qu'il s'agit de développer en série est l'exposant lui-même. Ainsi, on pourrait en déduire ce type de formules

$$x^{\frac{1}{1+b}} = x^{1-b+b^2-b^3+b^4+\dots} = x^1 x^{-b} x^{b^2} x^{-b^3} x^{b^4} \dots$$

Le corps du texte développe de ce manuscrit porte sur des problème de convergence et ne permet pas déterminer laquelle de ces deux interprétations correspond effectivement aux objectifs de Leibniz. Néanmoins, il nous parait raisonnable de soutenir la seconde pour une raison plus solide et sérieuse que le seul fait, certes attrayant, qu'elle présente beaucoup plus d'intérêt épistémologique. Leibniz attribue cette méthode aux nombres rompus et la citation que nous avons donné montre qu'il souhaite l'appliquer aux nombre sourds. Or nous avons vu que rompus et sourds ne sont rassemblés dans un même ensemble que lorsqu'il s'agit d'exposants. D'autre part, Leibniz propose ici une classification des développements en série, à savoir que les rompus se développent en série d'entiers et les irrationnels en série de rompus. Ainsi, les rompus forment bien le pont qui permet de relier les entiers aux nombres sourds et généraux. Or d'après l'introduction du manuscrit que nous avons aussi cité, il s'agit bien ici d'établir un tel pont pour les exposants et non pour les dignités. Nous supposerons donc dans la suite que c'est cette voie que Leibniz a choisie.

**Des Séries Formelles**

Ainsi, si Leibniz développe en série infinie les exposants fractionnaires, il trouve une manière d'exprimer ces exposants non-entiers sous forme de produits classiques :

$$x^{\frac{1}{1+b}} = x^1 x^{-b} x^{b^2} x^{-b^3} x^{b^4} \dots$$

Le problème qui se pose alors, c'est que ce produit est infini. En effet, pour retrouver un sens classique du produit, il est nécessaire que $b$ soit un entier. Mais si $b$ est un entier, alors le développement en série est divergent [55] :

> *De plus b est un entier, et c'est pourquoi* $b^3 \geq b^2$ *mais on a aussi* $-b+b^2 \leq -b^3+b^4$ *et ainsi on ne peut pas démontrer que ce qui est vrai à propos d'un nombre fini quel qu'il soit reste encore vrai pour une série des infinis. Puisqu'à l'évidence les suivants ne décroissent pas, on comprend pourquoi ce n'est pas le lieu pour employer le raisonnement d'Archimède de déduction par l'absurde. De cela découle le caractère trompeur des infinis et on ne peut pas les admettre, excepté lorsqu'il est possible de démonstrer au moyen d'une déduction par l'absurde ; sans quoi on peut démontrer à partir de cela que la chose qu'on obtient à partir de n'importe quel nombre parmi les finis s'obtient encore pour les infinis.* [56]

55. Comme le rayon de convergence de la série vaut 1, aucun entier naturel ne permet d'avoir une convergence absolue de la série $(1+x)^\alpha$

56. Manuscrits de Leibniz : LH 35, 3A, 34 Bl. 5, *De Exponentibus Fractis et Surdis, De Infiniti et indefiniti differentia*, Février 1675 : « $b$ autem est integer, ideo $b^3 \sqcap b^2$ sed et $-b+b^2 \sqcap -b^3+b^4$ itaque non potest demonstrari quod de finitis quotcunque verum est de infinitorum quoque serie verum esse. Quoniam scilicet posteriora non decrescant ; ideoque nec locum habet ratiocinatio Archimedea, per deductionem ad absurdum ; unde sequitur fallacem esse infinitorum, neque admittendam nisi quando deductione ad absurdum demonstrari potest ; alioqui enim demonstrari potest ex eo quod in finitorum numero quantocunque res succedit item succedere etiam in infinito. »

Finalement, on s'aperçoit ici que Leibniz tombe sur le problème inverse de celui de l'extension des exposants qui est, rappelons le, l'un des objectifs très clair de Leibniz au sein de tous ces travaux que nous présentons. Considérons l'expression suivante :

$$a^z$$

A première vue, il est nécessaire que l'exposant $z$ désigne ici un entier, si l'on part de la définition cartésienne de la puissance comme nombre de multiplications. Il s'agit donc pour Leibniz de donner un sens à cette expression lorsque $z$ n'est plus un entier. Pour cela, Leibniz souhaite trouver une expression analytique de $a^z$ qui permette d'exhiber la manière dont la dignité dépend de son exposant. Il sera facile d'étendre ensuite cette relation si l'on trouve qu'elle est composée d'opérations usuellesz telles que l'addition ou la multiplication, applicables à bien d'autres quantités que les seuls nombres entiers naturels. Ici, c'est donc le moteur de l'écriture symbolique qui alimente l'imagination du jeune philosophe [57].
Dans cette même démarche, Leibniz invoque le développement en série de Mercator. Leibniz rappelle la démarche algorithmique pour ce calcul :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+b} &= \frac{1+b-b}{1+b} = 1 - \frac{b}{1+b} \\
&= 1 - \frac{b+b^2-b^2}{1+b} = 1 - b + \frac{b^2}{1+b} \\
&\vdots \\
&= 1 - b + b^2 - b^3 + \cdots + (-1)^n b^n + (-1)^{n+1}\frac{b^{n+1}}{1+b}.
\end{aligned}$$

Ainsi présenté, le problème nous apparait très clairement. La différence entre la fraction et son développement partiel vaut :

$$(-1)^{n+1}\frac{b^{n+1}}{1+b}$$

Or le comportement asymptotique de ce terme dépend de la valeur de $b$. Si $|b| < 1$ alors le terme deviendra infiniment petit, si $|b| = 1$ alors il restera borné sans devenir aussi petit que l'on souhaite, et enfin si $|b| > 1$ alors le terme devient aussi grand qu'on veux lorsque $n$ croit. Leibniz fait référence aux raisonnements par l'absurde d'Archimède dans ses différents écrits de quadrature, comme la quadrature du cercle ou de la parabole. Dans son raisonnement par exhaustion, Archimède montre la convergence en supposant que chaque terme de la suite des exhaustions et l'aire cherchée diffèrent au moins d'une certaine quantité fixée. Or comme la différence entre les deux peut-être choisie aussi petite que l'on souhaite, on peut la choisir inférieure à la quantité fixée qu'on avait supposée. Ainsi la possibilité de la contradiction dépend de la nature asymptotique des termes. Il est nécessaire que la différence devienne infinitésimale pour que la convergence puisse être assuré par *reductione ad absurdum*. Ainsi la formule de Mercator ne trouve son sens que pour des quantités petites. Autrement dit pour Leibniz, il faut que la suite des puissances soit décroissantes.
Ainsi, pour pouvoir donner un sens à la formule définie sur les entiers $a^z$ lorsque $z$ n'est plus entier, Leibniz doit trouver un sens à la formule de Mercator définie sur les puissances décroissantes (c'est-à-dire $|b| < 1$) lorsque $b$ est un entier :

> *A partir de ce bel exemple, il suit combien sépare l'infini de l'indéfini puisqu'en effet pour ce qui concerne le nombre indéfini des termes, c'est du domaine des choses et non de l'infini. Et pour sûr : le nombre indéfini des termes est fini et n'est donc pas infini. Donc l'indéfini n'est pas infini. Mais si l'on pouvait résoudre une fraction en une infinité d'entiers décroissants, alors il se vérifierait qu'on pourrait assurément appliquer cela à l'interpolation des nombres combinatoires, pour exprimer les nombres des puissances. Concernant la déduction par l'absurde, considérant les différences, il y a aura à coup sûr*

57. Pour certains commentateurs, notamment Michel Serfati (*Cf* [96] M. Serfati, *Leibniz and the Invention of Mathematical Transcendence*, Stuttgart, 2018 - le chapitre *The power of symbolism : exponentials with letters*, p.19-29.), l'écriture symbolique constitue l'instrument principal de l'*ars combinatoria* de Leibniz pour créer de nouveaux concepts. Pour le cas de l'exposant (mais cela reste vrai en général), nous allons montrer dans la prochaine section que le symbolisme n'est pas l'unique domaine d'application de la combinatoire et que Leibniz tire ses idées d'intuitions liées à d'autres secteurs des mathématiques, notamment la géométrie, *Cf* p.**??**

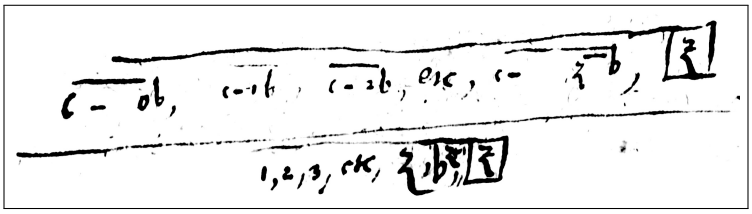
*une erreur si, alors que la série continue avec les termes jusqu'aux plus grandes différences, ces mêmes termes croissent pourtant encore ; si, en revanche, les différences des termes $-b^3 + b^4$ avaient décrû, alors on aurait pu faire la démonstration.* [58]

Lorsque $b$ est un entier, la série devient hérmétique à la déduction par l'absurde. Pourtant Leibniz maintient cette étrange affirmation selon laquelle les nombres rombus peuvent être exprimés avec des séries d'entiers. Il est certains que la suite des sommes partielles d'une série d'entiers est une suite d'entier et ne peut donc par conséquent pas converger au sens classique du terme vers un nombre rompu. Dès lors, lorsque Leibniz parle de « serie d'entiers » (« *series integrorum* »), il se réfère vraisemblablement au développement de Mercator et au fait qu'une expression algébrique fractionnaire ait un développement formel entier. On trouve en fait ici un usage presque moderne de l'adjectif "entier" analogue à notre usage lorsque l'on parle de "série entière". Mais prenons garde aux anachronismes, car il est périlleux de parler ici de série formelle et de convergence formelle, au risque de s'adonner à un mélange des genres peu rigoureux.
Il y a pourtant visiblement ici matière à réfléchir sur la nature des séries et la nature de l'infini pour Leibniz. Le texte indique clairement que la nature des termes place cette série hors du domaine de la démonstration. Pourtant, Leibniz semble persister à voir dans cette écriture l'occasion d'un passage entre les domaines rationnels et irrationnels. Il est possible que Leibniz envisage de telles séries comme des entités impossibles mais non contradictoires, à l'image des nombres imaginaires qu'il étudiera de très près quelques mois plus tard aux côtés de Tschirnhaus [59].

**Un exposant impossible**

Les réflexions de ces deux manuscrits de janvier 1675, le *De Intercalatione Numerorum Combinatoriorum* (LKK, N.6) et du *De Exponentibus Fractis et Surdis, De Infiniti et indefiniti differentia* (LH 35, 3A, 34 Bl. 5), sont reprises en 1679 dans le *De cyclometria per intercalationes* (LH 35, 2, 1, Bl.68-69), lorsque Leibniz traite des méthodes de quadratures de Mengoli et de Wallis. Pour rappel, le problème que pose alors Leibniz est de trouver un moyen d'obtenir une formule analytique aussi pratique que celle du binôme de Newton, mais qui soit toujours finie, là où la formule du binôme devient infinie lorsque les exposants ne sont pas entiers. L'idée de Leibniz consiste à élaborer une écriture redondante, à l'image des polynômes redondants dans le *De Intercalatione Numerorum Combinatoriorum* (LKK, N.6). En effet, il dispose de deux écritures pour les produits factoriels : ou bien l'écriture développée du produit, ou bien la puissance pronique. Il se propose alors d'écrire les deux en même temps :

$$\frac{((c-0b)(c-1b)(c-2b)\dots(c-zb))^z}{(1.2.3\dots z.b^{z+1})^z}$$



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 2, 1 Bl.68-69

Dans cette écriture, Leibniz note à la fois le nombre de terme, dans l'exposant $z$, et le contenu des termes, grâce au produit $(c-0b)(c-1b)(c-2b)\dots(c-zb)$. Dès lors, il se demande s'il est possible de trouver un exposant $z$ non-entier, mais qui permette à cette expression de rester finie :

58. Manuscrits de Leibniz : LH 35, 3A, 34 Bl. 5, *De Exponentibus Fractis et Surdis, De Infiniti et indefiniti differentia*, Février 1675 : « Unde sequitur illustri exemplo quantum intersit infinitum & indefinitum quod enim de indefinito terminorum numero rerum est, non est de infinito. Et certe : indefinitus terminorum numerus est finitus non ergo infinitus. Indefinitus ergo non est infinitum. Sed si fractio resolvi posset in integros infinitos in infinitum decrescentes ; verum foret quod scilicet numerorum Combinatoriorum adhiberi posset interpolatio ; ad numeros potestatum exprimendos ; deductione ad absurdum ; assumta differentia si scilicet error adsit & continuata serie ad terminos usque differentiæ majores quin etiam etsi termini crescant, si tamen differentiæ terminorum $-b^3 + b^4$ etc. decrevissentus idem potuisset demonstrari. »

59. *Cf* A VII, 2, N. 61, *Imaginariæ*, Décembre 1675 ; A VII, 2, N. 62, *Quantitates Imaginariæ*, Décembre 1675

*Si nous cherchons les moyennes à partir de deux termes extrêmes, une autre relation pourra émerger, à savoir l'expression des termes faite selon l'ordre, par lequelle on obtient qu'il y a une infinité d'intermédiaires lorsque c n'est pas un nombre rationel. A partir de là, il nous faut seulement voir si l'on pourrait permettre par un art quelconque, et à l'aide de z transcendant, que les termes soient finis et qu'ils progressent de la même manière dans les deux cas, ce qui permet à c de ne pas être un nombre entier.* [60]

60. LH 35, 2, 1, Bl.68-69 - *De cyclometria per intercalationes, postea per polygona, ubi expressio per logarithmos. Et modus demonstrandi impossibilitatem Analyticam tentatus per series converg. Scheda I*, Mars 1679 : « Si ex duobus terminis extremis quæramus medios alia poterit oriri relatio seu expressio terminorum ordine facta per quam fiet ut intermedii sint infiniti, si $c$ non est numerus rationalis. Unde tantum videndum an aliqua arte effici possit ope $z$ transcendentis, ut finita sint termini et utriusque eodem modo prodeant, licet $c$ non sit numerus integer. »

## 12.3 Exposants fonctionnels

A la fin du séjour parisien et durant la période 1676-1680, Leibniz développe un nouveau concept d'exposant capable de représenter d'autres courbes, d'autres opérations que les seules lois de puissance. Cet exposant fonctionnel est un exposant général qui caractérise n'importe quel courbe. En terme moderne, ce serait comme s'il existait un concept d'exposant tel que pour toute fonction $f$, on ait $f(x) = x^{c_f}$. De fait, on trouvait déjà depuis longtemps des notations qui n'était pas exclusives aux puissances communes, comme par exemple le triangle $\Delta$ pour désigné le triangulaire d'un certain nombre.

### 12.3.1 Relation de fonction

Dès la période parisienne, Leibniz développe cette idée de généraliser l'exposant à de nouvelles relations géométriques ou arithmétiques. Dans un texte de 1676 qu'il intitule *De Exponentibus et Indicibus ad Quadraturas Applicatis*, Leibniz en donne une idée assez claire.

#### Exposants et Indices

Leibniz utilise dans ce texte deux termes dont il va nous falloir distinguer le sens : les « exposants » (« *exponentes* ») et les « indices »(« *indices* »). Bien-sûr ici, les exposants ne sont pas ce qu'on va écrire en haut et les indices ce qu'on va écrire en bas, comme nous l'entendons aujourd'hui. En fait, les sens sont en quelque sorte inversés comme nous allons l'expliquer. Une première remarque, cela étant dit, doit être de souligner le relatif isolement de ce vocabulaire au sein de ce texte. On ne trouvera plus d'autres écrits faisant un état si clair de ces deux acceptions des termes « exposant » (« *exponens* ») et « indice »(« *index* »)[61]. C'est donc un usage qui n'est pas encore réellement consistant, et comme Leibniz ne définit pas précisément ces termes, nous sommes contraints d'accepter une certaine part d'interprétation dans notre analyse :

> *Si l'on peut généraliser cette théorie qui permet à l'addition des indices d'exprimer la somme en acte des séries, alors on pourra brillamment résoudre tous ces problèmes. Mais je ne vois pas comment l'on peut trouver une courbe qui ait des indices comme les exposants logarithmiques. Par exemple, nous voyons assez bien que l'indice de la quantité* $\sqrt[2]{ax}$ *est* $\frac{1}{2}$*. Mais comment pourrions-nous exprimer l'indice de la quantité* $\sqrt{ax + a^2}$ *? En réalité, nous savons, pour ce dernier, l'exprimer à partir de la quadrature supposée du cercle. Si donc l'on pouvait démontrer de façon générale que les indices de ce genre sont des vraies quantités exprimables d'une quelconque manière, ou qu'on puisse décrire par un certain mouvement, et de sorte qu'elles soient proportionnelles aux tétragones, alors nous en serions venu à bout.*[62]

Leibniz parle dans ce texte d'exposant logarithmique, on peut penser qu'il désigne la caractéristique de la puissance classique, c'est-à-dire le $x$ dans $a^x$. Cet exposant n'est pas nécessairement entier, mais il découle de la courble logarithmique. Il semble ici que l'indice soit encore une généralisation de l'exposant, c'est-à-dire une exposant fonctionnel. C'est ce que dit Leibniz dans le paragraphe qui suit :

> *En fait, les indices de ce genre sont même des affects, comme lorsque l'on dit que :*
> $x^2 + bx = y^2$ *va donner* $x = (b.c.y)^e$ [63]

On voit donc ici que Leibniz cherche un exposant qui permettent des résoudre d'autres équations que celles qui définissent les exposants fractionnaires et qui sont du type $x^a = y^b$.

61. Nous avons vu que le terme « indice »(« *index* ») se trouve chez Wallis, ce qui peut constituer une référence pour Leibniz à cette période.

62. A VII, 5 B, N.88, *De Exponentibus et Indicibus ad Quadraturas Applicatis.*, Juin 1676 - p.589 : « Si generalis reddi posset doctrina, quod indicum additio exhibeat summam facti serierum, præclare ista omni possent solvi. Non video quomodo possit repriri curva, quæ det indices, ut Logarithmica exponentes. Exempli causa satis videmus indicem quantitatis $\sqrt[2]{ax}$ esse $\frac{1}{2}$. Sed indicem quantitatis $\sqrt{ax + a^2}$ quomodo exhibebimums ? Eum vero scimus dari ex supposita circuli Quadratura. Quod si ergo generaliter demonstrari posset Indices ejusmodi esse veras quantitates exprimibiles utcunque, aut motu aliquo descriptibiles ; et Tetragonismos ipsis esse proportionales, vicissemus. »

63. A VII, 5 B, N.88, *De Exponentibus et Indicibus ad Quadraturas Applicatis.*, Juin 1676 - p.589 : « Imo indices ejusmodi sunt etiam pro affectis, ut si dicamus : $x^2 + bx \sqcap y^2$ erit $x \sqcap \boxed{e}\ \overline{b.c.y}$ ».

**De l'Interpolation au Logarithme**

Leibniz évoque les parallèles avec les coefficients binomiaux. Ce parallèle est développé dans le *De Intercalatione*, un texte de 1675 dont nous avons déjà fait l'étude :

> *On voit que cela consiste dans la nature même des indices, de sorte que c'est à l'aide de ceux-ci qu'on peut obtenir des développements, comme avec les nombres combinatoires, lorsque pour $x^4$, on pose $x = y + b$, on obtient $x^4 = y^4 + 4y^3b + 6y^2b^2 + 4yb^3 + b^4$.* [64]

L'exposant peut donc être rendu homogène avec la racine par le développement du binôme. Ainsi, l'information de l'exposant se retrouve diffusée au travers des coefficients binomiaux. Il s'agirait donc de chercher comment généraliser cette propriété :

> *On cherche comment faire pour $x^{\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire $\sqrt{x}$, et même pour $x^e$.* [65]

Une recherche des définition des coefficients binomiaux fractionnaires avait déjà été entreprise dans le *De Intercalatione*. Cette tentative n'avait pas été réellement fructueuse. Mais ici, il s'agit de trouver une vraie généralisation qui fonctionne pour tous les exposants :

> *N'y aurait-il pas, à tout hasard, quelque chose dans les propriétés des nombres combinatoires que l'on puisse rendre général ?* [66]

En principe, Leibniz a déjà trouvé cette solution chez Wallis et Mengoli. S'il n'a pas tout compris à la procédure de Wallis puisqu'il ne la maitrise pas dans le *De Intercalatione*, on sait néanmoins qu'il a travaillé le *De Circulo* de Mengoli en Avril 1676, soit deux mois plus tôt, dans le *Arithmetica Infinitorum et Interpolationum* (A VII, 3, N.57$_2$). Ce n'est pourtant pas cette voie que Leibniz va suivre ici. C'est plutôt chez Mercator que Leibniz cherche la solution. En effet, on trouve bien dans les développement de Mercator cette possibilité de transformer les expressions algébriques en séries infinies. Ainsi l'expression algébrique se retrouve entièrement caractérisée par la suite des coefficients de la série, de la même manière que la suite des coefficients binomiaux caractérise l'exposant du binôme. Leibniz donne sa formule étrange du logarithme. Si $c^e = x$ alors :

$$e = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2c} + \frac{x^3}{3c^2} - \frac{x^4}{4c^3} + \dots$$

En réalité, la formule ci-dessus vaut $c(\ln(x) - \ln(c+x))$. Comme nous le verrons, Leibniz va probablement conserver cette erreurs jusqu'aux premiers temps de Hanovre.
Ainsi, la recherche de l'exposant comme fonction se fonde bien plus sur le logarithme que sur l'interpolation du triangle arithmétique. En 1675, dans le *De Intercalatione* (LKK Nr.6), Leibniz décrivait le triangle arithmétique comme le pont potentiel entre l'arithmétique et la géométrie. Ecrit environ dix-huit mois plus tard, ce texte montre que le logartihme a progressivement pris cette place de potentiel lien entre un monde rationnel qui use d'exposants simples ou fractionnaires et un monde transcendant, où les exposants représentent toutes les relations fonctionnelles possibles.

### 12.3.2 Racines proniques

L'exposant pronique peut être considéré comme un exposant fonctionnel. En effet, il représente une relation polynomiale qui n'est pas la puissance, ou la racine. Dans le fragment *Exponentes radicum Pronicarum, et alia id genus* (LH 35, 5, 15, Bl.17), écrit en Mai 1679, Leibniz s'intéresse à la question de la racine pronique. Nous avions déjà vu ce problème évoqué chez les auteurs médiévaux, à savoir trouver une méthode pour retrouver la racine d'un pronique, dans le cas où ce dernier seulement nous est donné.

64. A VII, 5 B, N.88, *De Exponentibus et Indicibus ad Quadraturas Applicatis.*, Juin 1676 - p.589 : « Videndum an indicum natura in eo consistat, ut eorum ope explicatio fieri possit, ut in numeris combinatoriis, ut si sit $\boxed{4}$ $x$ ponendo $x \sqcap y + b$ fiet $\boxed{4}$ $x \sqcap y^4 + 4y^3b + 6y^2b^2 + 4yb^3 + b^4$. »

65. A VII, 5 B, N.88, *De Exponentibus et Indicibus ad Quadraturas Applicatis.*, Juin 1676 - p.589 : « Quæritur, quomodo id fiat sit $\boxed{\frac{1}{2}}$ $x$ id est $\sqrt{x}$ item si sit $\boxed{e}$ $x$. »

66. A VII, 5 B, N.88, *De Exponentibus et Indicibus ad Quadraturas Applicatis.*, Juin 1676 - p.589 : « Est aliqua haud dubie in numeris combinatoriis proprietas, quæ generalis reddi possit. »

Stifel a proposé une méthode algébrique qui s'est largement diffusée et qui revient à résoudre l'équation : $x(x+1) = a$, dont la solution positive est :

$$\frac{\sqrt{1+4a}-1}{2}$$

Mais le problème que soulève Leibniz dans ce texte est très différent :

> *$x^2 + x = b$ donnera $x = b^{\omega}$. On appelle $x$ la racine pronique tirée de $b$.* [67]

L'exposant $\omega$ représente la formule $x^2+x$. C'est exactement l'exposant dont Leibniz questionnait la nature deux ans plus tôt dans le *Specimen Characteristicæ novæ. De Exponentibus derivationum non potestatum et exemplum problemate.* (LH 35, 1, 14 Bl.88). La nature de cet exposant n'est pas explicitée dans la texte. Leibniz ne précise à aucun moment s'il considère que $\omega$ est une quantité classique, c'est-à-dire un réel, ou bien une constante d'un autre genre. Dans le *Quadraturæ per logarithmos* (LH 35 5 15 Bl.27), écrit un mois plus tôt, c'est l'usage du logarithme, en tant qu'application fonctionnelle, qui indiquait la volonté qu'avait Leibniz de déterminer l'exposant en tant que quantité. Le logarithme servait alors à transporter les quantités exponentielles abstraites vers le monde des grandeurs réelles. Ici, Leibniz propose de considérer un nouveau logarithme, adapté aux puissances proniques :

> *Et on peut penser la courbe comme similaire à la logarithmique, avec $x$ en ordonnée et $\omega$ en abscisse. De sorte qu'en faisant le produit de proche en proche $x(x+b)(x+2b)(x+3b)$ etc.on pourra trouver les moyennes proniquement proportionnelle entre ceux-là.* [68]

Comme $\omega$ est en abscisse, il s'agit bien d'une quantité. Néanmoins, cette quantité ne se trouve pas sur le même axe que les exposants classiques. Les exposants proniques nécessitent une courbe d'un nouveau genre pour faire le lien entre l'espace abstrait où ils se trouvent et les mondes des quantités réelles. En effet, si l'on reprend les notations que Leibniz avait introduites dans le *De summis serierum fractionalium* (LH 35, 7, 12, Bl.1-2), la puissance pronique $y^{(q)}$ est incarnée par un entier relatif $q$. Bien qu'étant des quantités, ces entiers entretiennent une relation différente avec la dignité pronique $y^{(q)}$ de celle qu'ils ont avec la dignité classique $y^q$.
La question que se pose donc Leibniz touche à l'interpolation. Comment considérer les moyennes proportionnelles dans ce type de relation.

> *Soient les termes : $x$, $x^2+bx$, $x^3+3bx+2b^2$ etc. Entre $x^2$ et $bx$, on cherche la moyenne proniquement proportionnelle, ainsi de fait nommée comme on le souhaite, disons $y$.* [69]

Nous avons déjà fait l'étude d'un texte qui traite du problème de la racine pronique, à savoir le *Linea pronicæ progressionis* (LH 35, 13, 3, Bl.134-135) que Leibniz écrira trois plus tard, en Juin 1682. Ici, le problème est posé sous un angle différent. Il ne s'agit pas de trouver une méthode analytique pour inverser la relation pronique, mais plutôt de voir comme l'on peut adapter la notation à ce problème :

> *Les produits qu'on devra poser seront différents et de fait indéterminé de cette manière : $x^z$ ; $x^z+\beta$ ; $x^z+2\beta$ etc. Et le produit pronique sera :*
> - $x^{z.\omega} + (1\beta + 2\beta + 3\beta)x^{z(\omega-1)} + (1\beta.2\beta + 1\beta.3\beta + 2\beta.3\beta)x^{z(w-2)} + \dots$ -
> *où $\omega$ exprime le nombre continu des produits.* [70]

L'exposant $\omega$ n'indique pas le nombre de fois le facteur est répété comme pour l'exposant classique, mais le nombre de facteurs successifs que contient le produit. L'exposant $z$, en revanche, est un exposant classique. L'expression $x^{z.\omega}$ est donc une composition d'exposants de nature radicalement différente. Leibniz ne précise pas dans quel ordre ces exposants sont appliqués, alors qu'il ne commutent pas :

$$x^{2.2} = (x^2)^{(2)} = (x^2)^2 + x^2 = x^4 + x^2 \quad \text{ou} \quad \mathrm{x}^{2.2} = (x^{(2)})^2 = (x^2+x)^2 = x^4 + x^2 + 2x^3$$

67. LH 35 5 15 Bl.17, *Exponentes radicum Pronicarum, et alia id genus*, Mai 1679 : « $x^2 + x$ æqu. $b$ erit $x$ æqu. $b^{\omega}$. Appelatur $x$ radix pronica ex $b$. »

68. LH 35 5 15 Bl.17, *Exponentes radicum Pronicarum, et alia id genus*, Mai 1679 : « Et potens curva excogitari similis logarithmicæ cuius ordinata $x$ absissa $\omega$. Ut si ducantur invicem $x$, $x+b$, $x+2b$, $x+3b$ etc. Poterunt et media inter hæc pronice proportionalia inveniri. »

69. LH 35 5 15 Bl.17, *Exponentes radicum Pronicarum, et alia id genus*, Mai 1679 : « Sint termini : $x$, $x^2+bx$, $x^3+3bx+2b^2$ &c. Inter $x^2$ et $bx$ quæritur media proportionalis pronice, sic enim nunc loqui placet ea sit $y$. »

70. LH 35 5 15 Bl.17, *Exponentes radicum Pronicarum, et alia id genus*, Mai 1679 : « Assumendi erunt producentes aliter et quidem indeterminate hoc modo : $x^z$ $x^z+\beta$ $x^z+2\beta$ &c. Et productum pronicum erit : $x^{z,\omega}$ $1\beta$ $2\beta$ $3\beta$ $x^{z,\omega-1}$ $1\beta.2\beta$ $1\beta.3\beta$ $2\beta.3\beta$ $x^{z,w-2} + \dots$ ubi $\omega$ exprimat numerum producentium continuatum. »

Etant donné que Leibniz traite de la suite arithmétique $x^z, x^z+\beta, x^z+2\beta$ etc., nous pouvons considérer qu'il choisit la première option, à savoir :

$$x^{z.\omega} = (x^z)^{(\omega)} = \frac{x^z(x^z+1)\dots(x^z+\omega-1)}{1.2\dots\omega}$$

La démarche de Leibniz, dans ce qui suit, se rapproche de celle qu'il emploiera dans le *Linea pronicæ progressionis* (LH 35, 13, 3, Bl.134-135). Pour déterminer la moyenne pronique, il se donne trois variables successives :

> *Il y a alternativement trois variables proniques consécutives. Le terme le plus élevé du suivant sera de fait $x^{z.(\omega+1)}$ et celui du troisième sera $x^{z.(\omega+2)}$ et ainsi de suite.* [71]

A partir de ces trois termes, Leibniz en construit trois autres $a_1$, $a_2$ et $a_3$ en succession pronique. Ainsi, pour passer de $a_1$ à $a_3$ il faut appliquer deux fois la relation du successeur pronique. Pour trouver la moyenne, il faut égaliser cette relation double avec une relation simple ainsi :

> *Soit par exemple :*
> *$x^{z.\omega}$ ; le second : $x^{z.(\omega+1)} + 1.\beta x^{z.\omega}$ ; le troisième : $x^{z.(\omega+2)} + (1\beta+2\beta)x^{z.(\omega+1)} + (1.2\beta^2)x^{z.\omega}$.*
> *où l'on doit mettre en regard le premier terme $x^{z.\omega}$ avec $x^1$, donc $z = \frac{1}{\omega}$. Mais le troisième terme doit être mis en regard avec $x^2+bx$ ce qui semble difficile puisque ces termes-ci sont au nombre de trois et ceux-là sont deux.* [72]

Le problème principal, ici, ne réside pas dans ce que le nombre de termes des deux membres de l'équation n'est pas le même. A travers l'équation $z.\omega = 1$ qu'il résout par $z = \frac{1}{\omega}$, Leibniz confond la nature des deux espèces d'exposants, en considérant leur composition comme un simple produit. Or, nous avons montré que cette composition n'est pas commutative. Elle ne peut donc pas être modélisée par un produit classique de nombres. Cela étant, il est possible d'interpréter différemment les écrits de Leibniz. La moyenne cherchée est le terme médiant de la suite pronique $a_2 = x^{z.(\omega+1)} + 1.\beta x^{z.\omega}$. Ainsi, l'exposant $z$ peut être conçu comme un exposant pronique, qui représente justement la moyenne pronique. Dans ces conditions, il est parfaitement justifié d'écrire $z = \frac{1}{\omega}$, mais cette inversion devrait être définie [73]. Cependant, Leibniz n'a vraisemblablement pas considéré $z$ comme un exposant pronique. La distinction de nature des exposants n'est donc pas très clair dans son esprit, bien que ces constructions se fondent sur des concepts clairs, et bien définis.
Finalement, Leibniz abandonne l'idée de trouver un rapport rationnel dans l'inversion de la relation pronique. Mais cette inversion reste néanmoins possible :

> *C'est par hasard qu'on pourra obtenir le remède à cette chose, de la manière suivante. Si l'on pose que les produits sont les suivants, on obtient le produit :*
> - $\sqrt{x^z}$ $\sqrt{x^z+\beta}$ $\sqrt{x^z+2\beta}$ -
> - $\sqrt[\nu]{x^z}$ $\sqrt[\nu]{x^{2z}+\beta x^z}$ $\sqrt[\nu]{x^{3z}+3\beta x^{2z}+2\beta^2 x^z}$ -
> *qu'il faut mettre en regard* [74]

Si l'exposant ne trouve pas d'expression rationnelle ou analytique, cela ne signifie pas que l'exposant ne se réalise pas, mais seulement qu'il se réalise dans une grandeur complètement décorrélée des données du problème, c'est-à-dire une grandeur transcendante :

> *Mais la mise en équivalence ne fonctionne pas. Et l'interpolation en nombres finis est impossible si ce n'est par le moyen contingent de nombres transcendants.* [75]

71. LH 35 5 15 Bl.17, *Exponentes radicum Pronicarum, et alia id genus*, Mai 1679 : « Affecti sint invicem tres Pronici consecutivi. Sequentis enim summus terminus erit $x^{z.\omega+1}$ et tertii erit $x^{z.\omega+2}$ atque ita porro. »

72. LH 35 5 15 Bl.17, *Exponentes radicum Pronicarum, et alia id genus*, Mai 1679 : « Sit exempli gratia : $x^{z,\omega}$ ; secundus : $x^{z,\omega+1}1\beta x^{z,\omega}$ ; tertius : $x^{z,\omega+2}\ 1\beta 2\beta x^{z,\omega+1}\ 1,2\beta x^{z,\omega}$. Ubi primus terminus $x^{z,\omega}$ comparari debet cum $x^1$ ergo erit $z$ æqu. $\frac{1}{\omega}$. Sed tertius terminus comparari debet cum $x^2+bx$ quod difficile videtur cum illic sint termini tres hic duo. »

73. C'est cette inversion que Leibniz réalise dans le *Linea pronicæ progressionis* (LH 35, 13, 3, Bl.134-135)

74. LH 35 5 15 Bl.17, *Exponentes radicum Pronicarum, et alia id genus*, Mai 1679 : « Huic rei remedium forte haberi poterit tale, si producentes ponantur esse fierit productio : $\sqrt{x^z}\ \sqrt{x^z+\beta}\ \sqrt{x^z+2\beta}$; $\sqrt[\nu]{x^z}\ \sqrt[\nu]{x^{2z}+\beta x^z}\ \sqrt[\nu]{x^{3z}+3\beta x^{2z}+2\beta^2 x^z}$ conferenda cum »

75. LH 35 5 15 Bl.17, *Exponentes radicum Pronicarum, et alia id genus*, Mai 1679 : « Sed comparatio non procedit ; estque in numeris finitis impossibilis interpolatio nisi forte per transendentes. »

### 12.3.3 Exposant du Cercle

#### Un exposant nécessairement variable

Un texte de la fin Mars 1679, intitulé *Quadraturæ per logarithmos* traite de l'exposant du cercle. Notons que Leibniz a rajouté la mention « erronée » (« *Erronea* ») en marge du manuscrit, ce qui revient à l'avoir raturé en son entier. Néanmoins, la démarche de Leibniz, ainsi que les notations qu'il utilise, restent intéressantes.
Leibniz débute l'étude par cette équation :

$x^z = \int \sqrt{1-x^2}$ *avec* $dx = 1$. [76]

En considérant $dx = 1$, Leibniz indique vraisemblablement que la quantité $x$ varie de façon régulière et uniforme, et en aucun cas qu'il s'agit d'une quantité discrète représentant une suite arithmétique de raison 1. En effet, dans ce dernier cas, la somme ne contiendrait qu'un unique terme non nul, à savoir $\sqrt{1-0^2} = 1$, et la question n'aura pas grand intérêt. Notons cela dit que Leibniz ne fait jamais référence au cercle dans ce manuscrit. Leibniz précise un peu plus loin :

> *Avec $x$ donnée et $z$ cherchée.* [77]

Le problème consiste donc bien à déterminer l'exposant $z$ qui représente l'aire du demi-cercle. Dans un premier temps, on dérive pour éliminer l'intégrale :

$zx^{z-1} = \sqrt{1-x^2}$ *ou* $x^{z-1} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{z}$. [78]

Puis on applique le logarithme pour extraire l'exposant :

$(z-1)L(x) = \frac{L(1-x^2)}{2} - L(z)$. [79]

Leibniz sépare les deux membres de l'équation. Le membre de gauche est linéaire, tandis que celui de droite est logarithmique en $z$. La solution est donc donnée par l'intersection de ces deux courbes :

> *cette équation sera associée à une ligne droite donnée, l'autre à la logarithmique, et ainsi par l'intersection de cette ligne droite donnée et de cette ligne logarithmique donnée, on résout le problème et on obtiendra $z$ et grâce à cela, on aura : $x^z = \int \sqrt{1-x^2}$.* [80]

Mais Leibniz ne se satisfait pas d'une telle solution. Il souhaite obtenir une formule avec un seul logarithme :

> *Mais la méthode pour l'atteindre trouve son remède dans les logarithmes simples. Et par conséquent, les problèmes que l'on résout par l'intersection, selon cette méthode, d'une ligne droite et d'une logarithmique, doivent être résolus de la façon la plus simple par le seul logarithme cherché de la quantité donnée.* [81]

Les tentatives de Leibniz ne sont pas fructueuses, et sa conclusion nous renseigne sur ses attentes :

> *NB : Regardons encore la vraie raison pour laquelle ces calculs ne fonctionnent pas tout à fait, selon cette méthode. Assurément, l'on cherche un $\nu$ qui est du même genre quelque soit $x$. Donc, $x$ ne doit pas intervenir dans la valeur de ce $\nu$. Cela étant, cette méthode ne doit pas être négligée, à défaut.* [82]

---

76. LH 35 5 15 Bl.27, *Quadraturæ per logarithmos*, 31 Mars 1679 : « $\boxed{z}\,x$ æqu. $\int \sqrt[2]{1-x^2}$ posita $dx$ æqu. 1. »
77. LH 35 5 15 Bl.27, *Quadraturæ per logarithmos*, 31 Mars 1679 : « posita $x$ data et $z$ quæsita. »
78. LH 35 5 15 Bl.27, *Quadraturæ per logarithmos*, 31 Mars 1679 : « $z$ $\boxed{z-1}\,x$ æqu. $\sqrt{1-x^2}$ vel $\boxed{z-1}\,x$ æqu. $\frac{\sqrt[2]{1-x^2}}{z}$. »
79. LH 35 5 15 Bl.27, *Quadraturæ per logarithmos*, 31 Mars 1679 : « $z-1, Lx$ æqu. $\frac{L1-x^2}{2} - Lz$ »
80. LH 35 5 15 Bl.27, *Quadraturæ per logarithmos*, 31 Mars 1679 : « illa æquatio erit ad lineam rectam datam, hæc ad logarithmicam, itaque intersectione lineæ rectæ datæ, et lineæ logarithmicæ datæ solvetur problema. Habebiturque ipsa $z$ adeo que et ipsa $\boxed{z}\,x$ æqu. $\int \sqrt[2]{1-x^2}$ »
81. LH 35 5 15 Bl.27, *Quadraturæ per logarithmos*, 31 Mars 1679 : « Sed succurrit ratio ad assequendi per simplices logarithmos. Ac proinde problemata quæ per intersectionem huiusmodi lineæ rectæ ac logarithmicæ solvuntur, solvendi simplissime per solum quantitatis datæ logarithmum quæsitum. »
82. LH 35 5 15 Bl.27, *Quadraturæ per logarithmos*, 31 Mars 1679 : « NB : jam video veram rationem cur ipsi calculi omnino non procedant hoc modo. Nimirum quæritur $\nu$ quæ sit eodem modo pro qualibet $x$. Ergo in ipsius $\nu$ valorem non debet ingredi $x$. Saltem interim hic non contemnenda. »

La piste du logarithme ne doit donc pas être négligée, mais ces calculs ne peuvent pas satisfaire l'objectif de Leibniz, à savoir trouver un exposant dont la forme est stable et ne dépend pas de la variable $x$. Le problème majeur est qu'il cherche à trouver un exposant qui n'est pas fonctionnel, mais quantitatif. Trouver une constante $\nu$ telle que pour tout $x$, $x^\nu = \int \sqrt{1-x^2}$ demande de définir $\nu$ comme les exposants dérivatifs qu'il avait tenté deux ans plus tôt, dans le *Specimen Characteristicæ novæ. De Exponentibus derivationum non potestatum et exemplum problemate.* (LH 35, 1, 14 Bl.88) de Février 1677.

**Constante de Neper**

Le *Quadraturæ per logarithmos* (LH 35 5 15 Bl.27) contient la première mention de la constant de Neper par Leibniz, soit plus de dix ans avant sa fameuse correspondance avec Bernoulli en 1690.

> *En réalité, il subsiste ici une difficulté que nous n'avons pas exprimé à personne : le logarithme d'un nombre qui vaut l'unité. A partir de là, rien n'a été fait à part ce que nous ajoutons.* [83]

Cependant, la constante n'est pas bien comprise par Leibniz ici, comme nous allons le voir.
Dans ses tentatives pour trouver l'exposant du cercle, Leibniz tente de résoudre l'équation suivante :

$$\frac{ax^\nu}{c^{\nu-1}} = \nu \int \sqrt{a^2-x^2}$$

En dérivant, puis en appliquant le logarithme, il arrive à cette équation :

$$(\nu-1)L(x) - (\nu-1)L(c) = \frac{L(a+x)+L(a-x)}{2} - L(a)$$

Pour simplifier l'équation et trouver $\nu$, Leibniz donne à $c$ la valeur de la constante de Neper :

> *On pose $c$ une valeur dont le logarithme est 1 et on pose $a = 1$ dont le logarithme vaut 0, on obtient :* $\nu - 1 = \frac{L(1+x)+L(1-x)}{2L(x)-2}$. [84]

Leibniz est aussitôt marqué par l'introduction de cette constante, et lui donne de suite cette propriété fantaisiste :

> *Ici, notons au passage cette chose mémorable au sujet des logarithmes, si l'on a : $c^\nu = \nu$, alors $c$ est une quantité dont le logarithme est l'unité, c'est-à-dire qu'elle est égale à distance au point où la courbe coupe l'axe.* [85]

Il se rend probablement compte de son erreur puisqu'une partie de la phrase est barrée. Néanmoins, Leibniz pressent dans ce texte le fait que la constante de Neper dispose de propriété intéressantes sur lesquelles personne jusqu'alors ne s'est encore penché.

83. LH 35 5 15 Bl.27, *Quadraturæ per logarithmos*, 31 Mars 1679 : « Verum in eo superest difficultas quod non expressimus cuiquam Numeri logarithmus sit unitas, unde nisi hoc addamus, nihil actum est. »

84. LH 35 5 15 Bl.27, *Quadraturæ per logarithmos*, 31 Mars 1679 : « Ponatur $c$ esse denarius cuius logarithmus est 1 et ponatur $a$ æqu. 1 cuius logarithmus est 0, fiet $\nu - 1$ æqu. $\frac{L\overline{1+x}+L\overline{1-x}}{2Lx-2}$. »

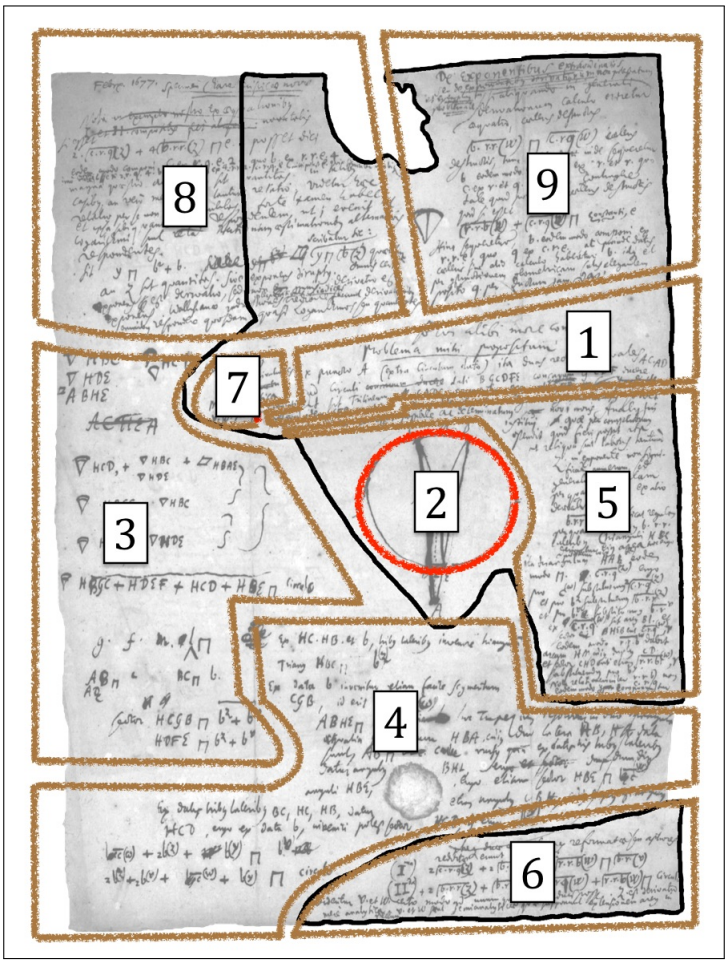
85. LH 35 5 15 Bl.27, *Quadraturæ per logarithmos*, 31 Mars 1679 : « Nota hic obiter illud memorabile circa logarithmos, si sit : $c^\nu$ æqu. $\nu$ esse $c$ quantitatem cuius logarithmus est unitas seu æquatur distantiæ *a puncta ubi curva axem secat. [barré]* »

## 12.4 Le *Specimen Characteristicæ novæ* : un nouveau type de caractère

### 12.4.1 Remarques matérielles

#### Un manuscrit recomposé

Le *Specimen Characteristicæ novæ. De Exponentibus derivationum non potestatum et exemplum problemate.* (LH 35, 1, 14 Bl.88) a une structure composée assez complexe qui mérite qu'on l'expose en détail.




Les numéros indiquent l'ordre chronologique de l'écriture.L a reconstitution exacte du processus opératoire de l'écriture ne peut jamais se départir d'un certain caractère spéculatif, ainsi doit-on considérer cet ordre comme une simple hypothèse de travail. Néanmoins, nous donnons les indices qui nous permettent de l'établir, ainsi que ceux qui permettraient de le remettre en question.

Le manuscrit a subit un découpage, représenté ici par le contour noir. Comme ce découpage respecte la forme des textes 2, 5 et 7, il a, en toute logique, été fait après qu'ils aient été rédigés. Un léger chevauchement du texte 4 nous indique qu'il a été écrit avant le découpage. Enfin le texte 8 est complètement à cheval sur la découpe, et donc il est écrit avant celui-ci. Dans le texte 9, Leibniz donne un nouveau titre au manuscrit :

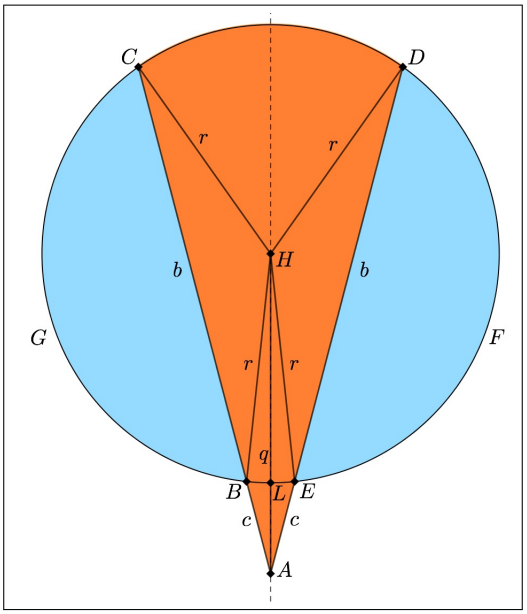
> *A propos des exposants extraordinaires, c'est-à-dire des exposants des dérivations qui ne sont pas des puissances, ainsi qu'un exemple à l'aide d'un problème.* [86]

86. LH 35, 1, 14 Bl.88, *Specimen Characteristicæ novæ. De Exponentibus derivationum non potestatum et exemplum problemate.*, Février 1677 : « De Exponentibus extraordinariis, seu de exponentibus derivationum non potestatum, et exemplum in problemate »

Leibniz a donc pu rédigé le texte 9 après le découpage, donnant ainsi un titre à un fragement de manuscrit qui n'en avait plus. C'est pourquoi, nous classons ce texte en dernier.
Le manuscrit traite d'un problème géométrique précis exposé dans le texte 1 et représenté par la figure 2. Le texte 3 constitue les premières analyses du problèmes qui sont purement géométriques. A la fin du texte 3, il y a la première introduction des exposants fonctionnels qui sont développés dans le texte 4. Le texte 5 et le texte 6 sont reliés par une flèche de la main de Leibniz. Donc le texte 6 a été rédigé après le texte 4. Le texte 7 est un ajout aux textes 1 et 5 et reprend les conclusion du texte 6, c'est pourquoi on classe le texte 7 après le texte 6. Pour finir, l'introduction du texte 8 fait référence aux deux équations du texte 6 qui a donc été rédigé avant. Ainsi, on obtient l'ordre suivant : 1 ; 2 ; 3 ; 4-5 ; 6 ; 7-8 ; 9.
On ne dispose pas du moindre indice pour reconstituer l'ordre de rédaction entre le texte 7 et le texte 8, mais cet ordre importe peu puisque les textes traitent de sujets différents. En revanche, l'ordre de rédaction entre le texte 4 et le texte 5 est plus problématique. En effet, le texte 4 contient les mêmes éléments que les textes 5 et 6, mais il semble moins avancé que le texte 5, quant à la réflexion sur les exposants. Une correction de Leibniz indique que l'introduction de la notation $b^y$ s'est faite pendant la rédaction du texte 4. Cette notation semble déjà établie dans le texte 5. Enfin le léger tassement de l'écriture à la fin du texte 5 semble confirmer que le texte 4 est rédigé avant.
Selon notre hypothèse, Leibniz a donc rédigé dans l'ordre les textes 1 à 8, puis a procédé à un découpage avant d'écrire le texte 9. Ainsi la date du texte 8, à savoir Février 1677, vaut pour tous les textes du manuscrit, excepté éventuellement le texte 9 qui a pu être rédigé plus tard.

Présentons tout de même les points faibles de cette réconstitution. D'abord, il est fort possible que ce manuscrit ne soit pas autonome. En effet, ces notations sont introduites de façon assez brutales et laissent à penser que Leibniz a travaillé cette question sur une autre feuille de papier. Cependant, lorsque c'est le cas, Leibniz a l'habitude de faire des référence explicite à ces autres brouillons, ce qui n'est pas le cas ici.
Enfin, il semble que le texte 4 respecte la place du texte 5, Leibniz allant à la ligne au milieu d'une phrase, au lieu de continuer jusqu'au bord de la page. Cet indice plaide en faveur d'un ordre inversé de rédaction, à savoir le 5 avant le 4. Mais Leibniz laisse régulièrement des marges libres sur la gauche ou la droite, bien que cela reste étrange qu'il le fasse seulement en partie pour le texte 4.
Cette reconstitution est bien sûr très hypothétique, et doit donc être considérée avec prudence, comme toutes celles qui sont fondées uniquement sur des indices paléographiques. Néanmoins, elle nous sert de base de travail raisonnable pour mieux comprendre le texte.

**Exposé du problème**



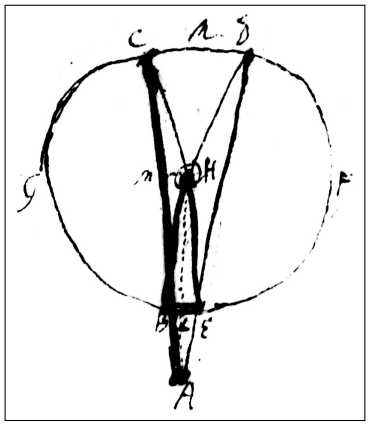
Le problème géométrique que Leibniz étudie est présenté dans le texte 1. Il lui a été posé par un tiers, mais il ne donne pas de plus amples détails :

> *Problème qui m'a été posé.* [87]

On ne trouve rien à ce sujet dans sa correspondance mathématique de l'époque. Il s'agit d'une question qui concerne les sections du cercle :

> *A partir d'un point A (hors du cercle donné) on mène ainsi deux droites égales AC et AD jusqu'à la concavité GCDF du cercle donné BGCDFE, de sorte que la figure trilinéaire CADC soit égale au segment BGC, ou bien, ce qui revient au même, au segment EFD.* [88]

Leibniz en donne le diagramme, c'est-à-dire la figure 2 :



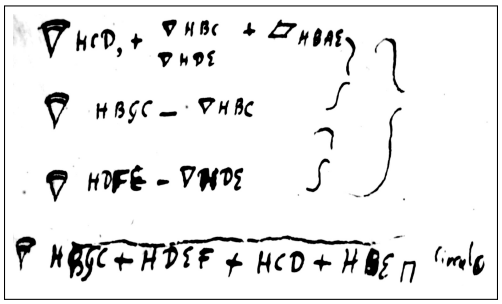
Manuscrits de Leibniz - LH 35, 1, 14 Bl.88

Ainsi exprimée, la question n'est pas très claire. D'après les calculs que Leibniz effectuent dans le texte 3, il semble que la question soit de trouver la position du point $A$ sur l'axe vertical pour que la section $CAD$ soit égale à la portion de cercle $CGB$, ou ce qui revient au même $DFE$. Autrement dit, faire en sorte, sur notre figure, que l'aire orange soit égale à la moitié de l'aire bleue.

Leibniz donne donc, dans le texte 3, une première décomposition géométrique des aires :

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \triangledown\, HCD + \begin{array}{l}\nabla\, HBC \\ \nabla\, HDE\end{array} + \square\, HBAE \end{array}\right\} \text{la section } CAD \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad CAD \text{ égale à } CGB = DFE \\ \left.\begin{array}{l} \triangledown\, HBGC - \nabla\, HBC \\ \triangledown\, HFEF - \nabla\, HDE \end{array}\right\} \text{les portions } CGB \text{ et } DFE \end{array}\right\} \text{tout la figure } ABGCDFEA$$

$$\overline{HBGC + HDEF + HCD + HBE} = \text{ au cercle}$$



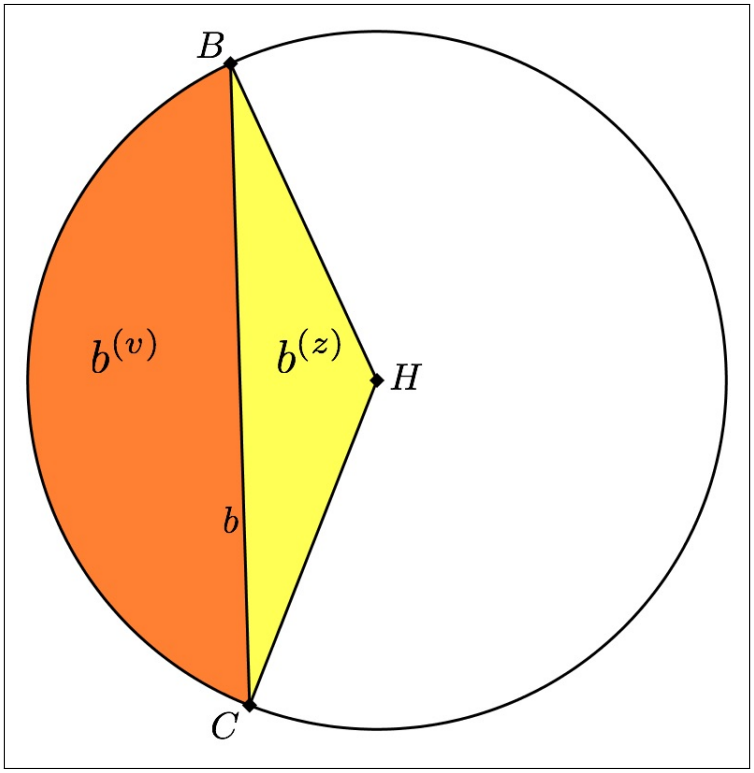
Manuscrits de Leibniz - LH 35, 1, 14 Bl.88

87. LH 35, 1, 14 Bl.88, *Specimen Characteristicæ novæ. De Exponentibus derivationum non potestatum et exemplum problemate.*, Février 1677 : « problema mihi propositum »

88. LH 35, 1,14 Bl.88, *Specimen Characteristicæ novæ. De Exponentibus derivationum non potestatum et exemplum problemate.*, Février 1677 : « Ex puncto $A$ (extra Circulum dato) ita duas rectas æquales $AC.AD$ ad Circuli dati $BGCDFE$ concavum $GCDF$ ducere ut sit Trilineum $CADC$ segmento $BGC$ vel quod idem $EFD$, æqualæ. »

Pour résoudre ce problème, Leibniz considère que les deux inconnues du problème sont les deux parties du segment $AC$, à savoir $AB = c$ et $BC = b$. Toutes les aires dépendent de ces deux variables selon des relations que Leibniz choisit d'exprimer par des exposants :

> *Le secteur* $HCGB = (b^z + b^v)$ [89]




Ici les différents exposants représentent donc des fonctions qui associent au côté $b$, les aires oranges et jaunes, qui sont alors entièrement déterminer, si l'on considère le rayon du cercle comme une donnée fixe extérieure au problème. Leibniz le décrit au début du texte 4 :

> *A partir de* $HC$, $HB$ *et* $b$, *les trois côté, on trouve le triangle.*
> *Triang.* $HBC = b^{(z)}$.
> *A partir de ce* $b$ *donné, on trouve également sans difficulité le segment* $CGB$, *qui vaudra* $b^{(v)}$. [90]

Cette notation est qualifiée de « nouvelle espèce de caractère » (« *Specimen Characteristicæ novæ* ») dans le titre du manuscrit, même si Leibniz avait déjà envisagé de tels exposants moins d'un an plus tôt, à Paris.

### 12.4.2 L'exposant comme Relation

Dans le texte 4, Leibniz développe plus avant cette idée d'écrire les aires à l'aide d'exposants, en multipliant les relations :

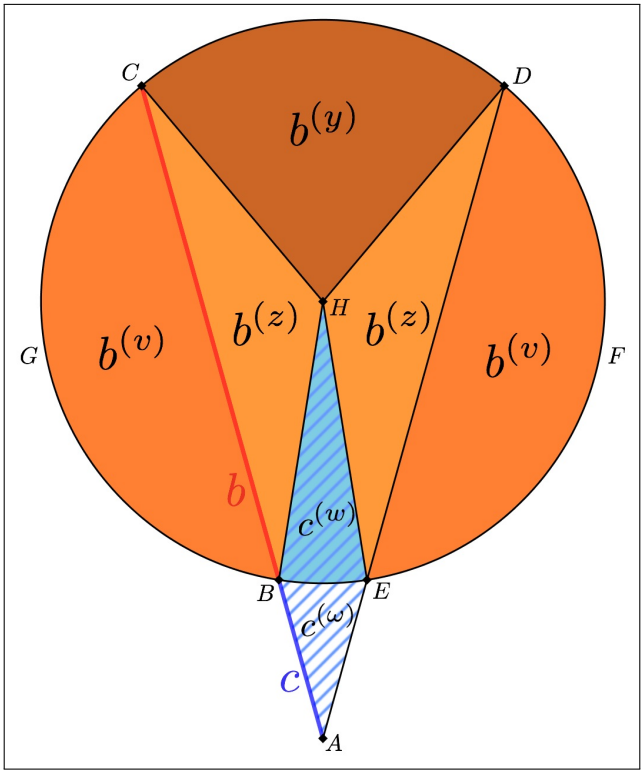
> *$ABHE = c^{(\omega)}$ puisque ce trapèze peut se réduire à deux triangles égaux dont l'un, $HBA$ est tel que deux de ses côtés, $HA$ et $HB$, sont donnés et $AB = c$. De nouveau, à partir de ce trois côtés, on donne l'angle $BHL$ qui est donc la moitié de l'angle $HBE$. Donc on a aussi $HBE = c^{(w)}$. A partir des trois côtés $BC$, $HC$ et $HB$, on donne l'angle $CBH$ dont le double est l'angle $HCD$. Donc on peut trouver le secteur $HCD$ à partir de la donné $b$, c'est donc $b^{(y)}$* [91]

89. LH 35, 1,14 Bl.88, *Specimen Characteristicæ novæ. De Exponentibus derivationum non potestatum et exemplum problemate.*, Février 1677 : « Sector $HCGB \sqcap \overline{b^z + b^v}$ »

90. LH 35, 1,14 Bl.88, *Specimen Characteristicæ novæ. De Exponentibus derivationum non potestatum et exemplum problemate.*, Février 1677 : « Ex $HC.HB$ et $b$, tribus lateribus invenire triangulum. Triang. $HBC \sqcap b^{(z)}$. Ex data $b$ invenitur etiam facile segmentum $CGB$, id erit $b^{(v)}$ »

91. LH 35, 1,14 Bl.88, *Specimen Characteristicæ novæ. De Exponentibus derivationum non potestatum et exemplum problemate.*, Février 1677 : « $ABHE \sqcap c^{(\omega)}$ quia hoc trapezium resovitur in duo Triangulo æqualio quorum unum $HBA$, cuius dua latera $HB$, $HA$ data sunt, $AB \sqcap c$. Rursus ex datis his tribus lateribus datur angulus $BHL$ ergo dimidium anguli $HBE$. Ergo etiam sector $HBE \sqcap c^{(w)}$. Ex datis tribus lateribus $BC$, $HC$, $HB$ datur etiam angulus $CBH$, cuius duplus est angulus $HCD$. Ergo ex data $b$, inveniri potest sector $HCD$, is ergo $b^{(y)}$. »

Ainsi, Leibniz a réduit chaque portion de la figure à une puissance qui dépend d'une des variables principales, à savoir $b$ ou $c$ :




Il peut alors réécrire les relations géométriques qu'il avait établies dans son nouveau système :

$c^{(\omega)} + 2b^{(z)} + b^{(y)} = b^{(v)}$
$2b^{(z)} + 2b^{(v)} + c^{(w)} + b^{(y)}$ = *au cercle.* [92]

Dans la première équation, $c^{(\omega)} + 2b^{(z)} + b^{(y)}$ forment les parties de la section $CAD$. En l'égalisant avec $b^{(v)}$, c'est-à-dire la portion $CGB$, Leibniz introduit la condition du problème qu'il souhaite résoudre. Leibniz décrit donc dans le texte 5 cette nouvelle manière d'utiliser les exposants, en insistant bien sur le fait que l'exposant désigne désormais une relation :

> *Ce problème n'a été résolu par aucun géomètre ordinaire. Quant à moi, afin de voir si cela était possible, j'ai établi pour le déterminer, une Analyse d'un nouveau genre qui s'expose au moyen d'abréviations. Cela pourra se faire d'une telle façon que ce qu'il reste de la tâche réside seulement dans ce que $z$, dans l'exposant, ne signifie pas un nombre, mais une règle générale par laquelle on dérive une certaine chose d'une autre.* [93]

L'exposant représente donc une règle générale. C'est le représentant abrégé d'une relation entièrement déterminée. Cela justifie notre emploie du terme "exposant fonctionnel", car l'exposant représente ici une fonction analytique générale. Leibniz illustre cette idée par l'exemple géométrique qu'il traite :

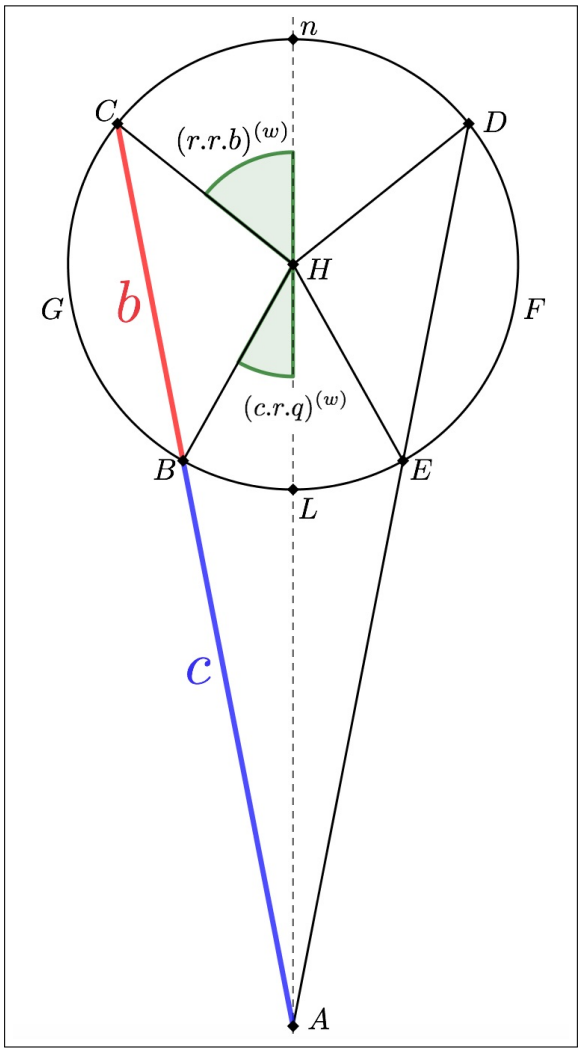
> *Ainsi $(b.r.r)^{(z)}$ désigne la règle par laquelle, à partir des trois côté $b$, $r$ et $r$ du triangle $HBC$, on dérive son aire, et donc on écrit à la place $b^{(z)}$. Ainsi, de la même manière, le triangle $HAB = (c.r.q)^{(z)}$. Donc on remplace $(c.r.q)^{(z)}$ par $c^{(\omega)}$, $(b.r.r)^{(z)}$ par $b^{(z)}$ et $(b.r)^{(v)}$ par $b^{(v)}$. A partir de $(c.r.q)^{(w)}$ on obtient l'arc $BL$ et ainsi on aura le secteur $BHEB = (c.r.q)^{(w)}.r$, et de la même manière, $(r.r.b)^{(w)}$ donne l'arc $Hn$, dont le double est $CD$ et donc on aura aussi le secteur $CHD = (r.r.b)^{(w)}.r$, qu'il faut substituer par $b^{y}$.* [94]

92. LH 35, 1,14 Bl.88, *Specimen Characteristicæ novæ. De Exponentibus derivationum non potestatum et exemplum problemate.*, Février 1677 : « $c(\omega) + 2b(z) + b(y) \sqcap b(v)$ ; $2b(z) = 2b(v) + c(w) + b(y) \sqcap$ circulo. »

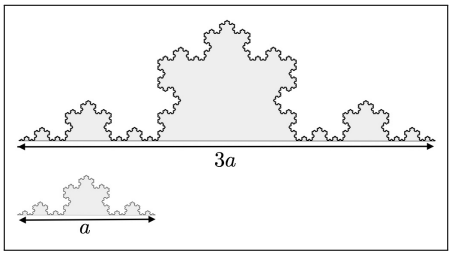
93. LH 35, 1, 14 Bl.88, *Specimen Characteristicæ novæ. De Exponentibus derivationum non potestatum et exemplum problemate.*, Février 1677 : « Hoc problema nemo vulgarium Geometrarum solvet. Ego ut viderem an esset possibile ac determinatum novi moris Analysin institui quæ per compendium ostendit quid fieri possit ita ut reliqua sint laboris tantum $z$ in exponente non significare numerum, sed generaliter regulam per quam aliquod ex alio derivatur. »

94. LH 35, 1, 14 Bl.88, *Specimen Characteristicæ novæ. De Exponentibus derivationum non potestatum et exemplum problemate.*, Février 1677 : « Ita $\overline{b.r.r}^{(z)}$ significat regulam per quam ex tribus $b.r.r$ lateribus trianguli $HBC$ derivatur eius

Leibniz introduit ici un nouvel exposant, à savoir $(w)$, qui ne signifie plus l'aire mais l'angle :




Ainsi l'exposant devient un opérateur de transmutation qui permet de faire le lien entre le côté $b$ et toutes les grandeurs des différentes dimensions qui en dérivent. C'est d'ailleurs ce terme des "dérivation" que Leibniz va choisir d'utiliser.
Nous pouvons faire le rapprochement avec le concept moderne de dimension fractale. Pour déterminer la dimension fractale des objets auto-similaires, on part du principe que si un côté $a$ de dimension 1 est multiplié par $\lambda$, alors la mesure de l'objet dans sa dimension $d$ sera multipliée par $\lambda^d$. Ainsi, par exemple, dans le célèbre flocon de Koch, si l'on mutliplie la longueur d'un côté par 3, on multiplie la mesure de la ligne dans sa dimension par 4, donc $4 = 3^d$.




La nature de l'exposant dérivatif que Leibniz tente de construire ici se rapproche de celle du rapport entre le "côté" de la figure fractale et sa dimension.

---

area hoc ergo ponam loco $b^{(z)}$. Ita triangulum $HAB$ eodem modo $\sqcap$ $\overline{c.r.q}^{(z)}$ ergo pro $c^{(\omega)}$ substituemus $\overline{c.r.q}^{(z)}$ et pro $b^z$ substituemus $\overline{b.r.r}^{(z)}$ et pro $b^v$ substituemus $\overline{b.r}^v$. Ex $\overline{c.r.q}^{(w)}$ sit arcus $BL$ et sector $BHEB$ erit $\overline{c.r.q}^{(w)}, r$ eodem modo. $\overline{r.r.b}^w$ dabit arcum $Hn$ cuius duplus $CD$ et sector $CHD$ erit etiam $\overline{r.r.b}^{(w)}, r$ substituendus pro $b^y$. »

### 12.4.3 Nature métaphyisque de l'exposant

#### Nature de la Dérivation

A partir de ces nouvelles notions d'exposants, Leibniz donne dans le texte 6 une nouvelle version des deux relations qu'il avait déjà écrite en fin du texte 4 :

> *Ainsi les deux équations remaniées et plus conformes sont devenues :*
> *(I*ière*)* $2(c.r.q)^{(z)} + 2(b.r.r)^{(z)} + (r.r.b)^{(w)} = (b.r)^{(v)}$
> *(II*de*)* $+ 2(b.r.r)^{(z)} + (b.r)^{(v)} + (c.r.q)^{(w)} + (r.r.b)^{(w)} =$ *au cercle.* [95]

Leibniz écrit deux équation, mais le + indique qu'en réalité la seconde est la suite de la première. C'est pourquoi on trouve seulement $(b.r)^{(v)}$ dans la seconde équation et non $2(b.r)^{(v)}$, puisque le second $(b.r)^{(v)}$ se trouve dans la première équation. D'ailleur, lorsque Leibniz commence par faire référence à ces deux équations, dans le texte 8, il oublie que la première équation est incluse dans la seconde :

> *On note que, dans notre exemple, on obtient à partir de la composition des équations I et II :*
> $2(c.r.q)^{(z)} + 4(b.r.r)^{(z)} = e.$ [96]

En effet, les coefficient 2 et 4 indiquent que Leibniz a simplement effectuer la somme des équations I + II sans prêter gare à ce détail.
Néanmoins ces équations ne respectent pas totalement la syntaxe établie dans le texte 5. En effet, ici le secteur $BHE = (c.r.q)^{(w)}$ alors que le texte 5 établissait que l'exposant $(w)$ donnait des angles qu'il faut multiplier par le rayon $r$ pour obtenir des secteurs. La même incohérence concerne le secteur $CHD$ qui vaut ici $(r.r.b)^{(w)}$ au lien de $(r.r.b)^{(w)}.r$ comme dans le texte 5. Ici, l'exposant $w$ désigne donc le secteur et l'exposant $v$ l'aire comprise entre l'arc et la corde. On a donc $v = z + w$. Mais Leibniz ne donne jamais cette relation. Il constate néanmoins qu'il y a un lien étroit entre les exposants $w$ et $v$ :

> *Il semble que v et w peuvent être réduit à une certaine chose unique.* [97]

Ces hésitations sur les différentes notations ne sont pas surprenantes dans une telle démarche exploratoire. Cependant, ce qui peut être bien plus intriguant réside dans la distinction de nature que Leibniz établit à la fin du texte 6 entre les exposants $v$, $w$ et l'exposant $z$ :

> *z est purement analytique, v et w sont semi-analytiques puisqu'ils supposent l'extension de l'arc dans le rectiligne.* [98]

Il ajoute alors une note marginale aux textes 1 et 5, qui constitue le texte 7 :

> *Les lettres z, v et w, je les appelle des dérivations. z est purement analytique ; v et w sont semi-analytiques* [99]

Ainsi le caractère analytique de ces exposants semble se mesurer dans leurs relations avec le rectiligne, qui est analytique et le courbe qui ne l'est pas. De fait, les exposants classiques, à savoir le carré, le cube etc. correspondent à des figures rectilignes. L'exposant du nombre triangulaire peut se réduire aux exposants classiques et donc il reste analytique. Si les exposants $v$ et $w$ sont tout de même semi-analytique, c'est parce qu'ils dépendent de segments, à savoir la corde pour l'exposant $v$ et les deux rayons du secteur pour l'exposant $w$.

---

95. LH 35, 1, 14 Bl.88, *Specimen Characteristicæ novæ. De Exponentibus derivationum non potestatum et exemplum problemate.*, Février 1677 : « Itaque duæ æquationes reformatæ seu aptiores redditæ erunt tales : (I^ma) $2\overline{c.r.q}^{(z)} + 2\overline{b.r.r}^{(z)} + \overline{r.r.b}^{(w)} \sqcap \overline{b.r}^{(v)}$ (II^da) $+ 2\overline{b.r.r}^{(z)} + \overline{b.r}^{(v)} + \overline{c.r.q}^{(w)} + \overline{r.r.b}^{(w)} \sqcap$ circulo. »

96. LH 35, 1, 14 Bl.88, *Specimen Characteristicæ novæ. De Exponentibus derivationum non potestatum et exemplum problemate.*, Février 1677 : « Nota in exemplo nostro ex æquationibus I et II compositis fiet : $2\overline{c.r.q}^{(z)} + 4\overline{b.r.r}^{(z)} \sqcap e.$ »

97. LH 35, 1, 14 Bl.88, *Specimen Characteristicæ novæ. De Exponentibus derivationum non potestatum et exemplum problemate.*, Février 1677 : « Videntur $v$ et $w$ certo modo ad unum quiddam reduci posse »

98. LH 35, 1, 14 Bl.88, *Specimen Characteristicæ novæ. De Exponentibus derivationum non potestatum et exemplum problemate.*, Février 1677 : « $z$ est derivatio mere analytica ; $v$ et $w$ sunt semianalyticæ quæsupponunt extensionem arcus in rectum »

99. LH 35, 1, 14 Bl.88, *Specimen Characteristicæ novæ. De Exponentibus derivationum non potestatum et exemplum problemate.*, Février 1677 : « Literas $z.v.w$ voco derivationes. $z$ est mere analytica, $v.w.$ sunt semianalyticæ »

**Quantité et Métaphysique**

Dans le texte 8, Leibniz expose enfin explicitement la question du lien entre ces nouveaux exposants et les exposants classiques

> *La grande question est de savoir si z peut être une quantité dans de tels cas, ou si au contraire il s'agit seulement d'une relation métaphysique. Il semble que cette relation n'est pas une quantité par elle-même mais qu'il y a parfois par hasard une quantité qui lui correspond, de la même manière qu'il advient chez les logarithmes qu'ils correspondes aux valeurs alternées des rapports.* [100]

La question est donc de savoir si cet exposant fonctionnel peut être considéré comme une quantité ou non. Si ce n'est pas une quantité. Leibniz suppose que non. Les exposants classiques ne sont des quantités que par accident, car ils correspondent à une situation où la relation fonctionnelle coïncide avec une quantité extensive. Leibniz reprend ensuite l'exemple qu'il avait déjà évoqué dans le *De Exponentibus et Indicibus ad Quadraturas Applicatis.* (A VII, 5 B, N.88), écrit moins d'un an plus tôt, en Juin 1676. Cet exemple est celui d'un polynôme qui n'est pas un monôme :

> *Soit $y = b^2 + b$. On l'écrira ainsi : $y = b^{(z)}$. On cherche si z est une quantité ou bien un exposant hors-norme.* [101]

L'exemple de Leibniz n'est pas pris au hasard, il s'agit d'un exposant pronique : $b^2 + b$. Nous avons vu que Leibniz va beaucoup travailler sur ce type d'exposant dans les trois années à venir. Mais la question n'est finalement pas traitée ici. Leibniz poursuit en établissant la distinction entre les exposants et les dérivations :

> *Il est certain que tout exposant est une dérivation mais toute dérivation n'est pas un exposant. Les réductions, interpolations et racines de Wallis font vraisemblablement correspondre avec toutes les dérivations certains quasi-logarithmes, c'est-à-dire des quantités.* [102]

Leibniz revient donc ici sur son intuition première, à savoir représenter toutes les dérivations par des exposants. Néanmoins, la référence à Wallis sonne ici comme une note d'espoir. A l'aide des tables et de sa démarche inductive, Wallis à réduit les dérivation à des quantités qui dépendent directement des exposants, et que Leibniz appelle ici « quasi-logarithmes » (« *quasi logarithmos* »). En effet, ces quantités ne coïncident pas avec les exposants mais son néanmoins des caractéristiques des courbes. A partir de la quadrature $\frac{1}{1+a}$, Wallis peut retrouver l'indice $a$ et donc la loi de progression qui lui est associée. Il existe donc un moyen de construire des exposants qui ne sont pas des puissances classiques, mais qui pourtant reste des quantités.

Ceci montre, en outre, que bien qu'il ait tiré ses premières idées sur les exposants fonctionnels des formules de Mercator et des travaux sur le logarithme, Leibniz garde néanmoins en tête les approches tabulaires de Wallis

En 1677, la combinatoire est explicitement considérée par Leibniz comme une science qui traite de la qualité. Ainsi, ce texte montre explicitement que le projet d'exposant fonctionnel s'intègre pleinement au sein des travaux sur la caractéristique. Comme pour les proniques, on retrouve ce même procédé d'élaboration d'une notation en lien avec une formule générale que Leibniz souhaite voir vérifiée. Cette démarche, qui relève de l'*ars inveniendi*, est pourtant caractéristique de la combinatoire prise comme science des formes et des similitudes. Le fait que Leibniz qualifie de « métaphysique » (« *metaφysica* ») la relation exponentielle dans le cas où elle ne correspond pas à une qualité, indique déjà la difficulté qui se présentera à lui dans les prochaines années, au sein des projet architectoniques de classification du savoir. En effet, la science de la qualité est tantôt considérée comme supérieure à celle de la quantité, tantôt comme une branche sœur. Et cette hésitation questionne en particulier la place des mathématiques. Cet

100. LH 35, 1, 14 Bl.88, *Specimen Characteristicæ novæ. De Exponentibus derivationum non potestatum et exemplum problemate.*, Février 1677 : « Magna quæstio an $z$. sit quantitas in talibus casibus an vero metaφysica tantum relatio videtur hæc relatio per se non esse quantitas forte tamen habet et ipsa sibi quantitatem respondentem ut ; evenit ut logarithmi sunt rationum æstimationibus alternativis respondentes. »

101. LH 35, 1, 14 Bl.88, *Specimen Characteristicæ novæ. De Exponentibus derivationum non potestatum et exemplum problemate.*, Février 1677 : « Sit $y \sqcap b^2 + b$ scribatur sic : $y \sqcap b(z)$. Quæritur an $z$ sit quantitas sive exponens diruptus. »

102. LH 35, 1, 14 Bl.88, *Specimen Characteristicæ novæ. De Exponentibus derivationum non potestatum et exemplum problemate.*, Février 1677 : « Omnis certe exponens est derivatio, sed non omnis derivatio est exponens. Wallisianæ reductiones interpolationes radices credibile faciunt derivationibus omnibus respondere quosdam quasi logarithmos seu quantitates. »

extrait suggère que franchir le domaine des quantités revient à franchir dans le même temps celui des mathématiques pour parvenir à celui de la métaphysique.

## Conclusion

On insiste généralement beaucoup sur la tendance particulière qu'avait Leibniz à créer des notations nouvelles dans le cadre de ses travaux mathématiques :

> *En fait, Leibniz ne cesse d'introduire des notation mathématiques, de mettre en évidence des analogies formelles, d'établir des connexions. L'impératif du progrès l'emporte sur l'intérêt pour les questions de statut. Ainsi, indépendamment de la question de savoir si les infiniment petits existent actuellement ou potentiellement, ils peuvent être considérés comme des "notions idéales" ou "fictions" propres à abréger le discours et faciliter la découverte.* [103]

A l'instar d'Hourya Sinaceur, on peut relier cette pratique de création de nouvelles manières d'écrire à son projet de caractéristique universelle, ou bien au développement de l'*ars inveniendi*. Les exposants fonctionnels nous en ont fourni une merveilleuse illustration. Nous voyons ainsi que le réflexions sur les exposants s'accorde avec les projets plus philosophiques de Leibniz. L'exposant fonctionnel dans une période durant laquelle Leibniz place de grands espoirs quant à la faculté de représenter par des caractères des qualités plutôt que des quantités. En témoigne cette célèbre lettre envoyée à Spinoza en novembre 1676 :

> *J'appelle "perfection" toute qualité simple qui est postive et abolue, c'est-à-dire qui exprime quelque chose sans y exprimer nulle limite. En outre, une qualité de ce genre, puisqu'elle est simple, est pour cette raison irréductible ou indéfinissable. Autrement, d'ailleurs, ou bien elle ne serait pas une qualité simple et unique mais une addition de plusieurs, ou bien si elle est simple, elle serait circonscrite par des limites et d'ailleurs on la comprendrait par les négations des choses qui vont au-delà de celles-ci, au contraire de notre hypothèse, où la chose est en effet supposée purement positive. A partir de cela, il n'est pas difficile de montrer que "toutes les perfections sont compatibles entre elles", c'est-à-dire qu'elles peuvent exister dans le même sujet. De fait, soit une proposition de ce genre :*
> - *A et B "sont incompatibles"* -
> *(On doit comprendre par A et B deux formes simples du même genre, c'est-à-dire des perfections, cela reviendrait au même si l'on en supposait plusieurs simultanément)*
> *Il apparait qu'on ne peut pas démontrer cela sans la résolution des termes A ou B, l'un des deux ou bien les deux. Autrement en effet, le raisonnement n'aurait pas pu pénétrer la nature de ceux-ci et il se pourrait que l'incompatibilité se démontre indifféremment à partir de quelques autres choses qu'on veuille ou de celles-ci. Et pourtant, elles sont irréductibles (par hypothèse). Et donc on ne peut pas démontrer cette proposition les faisant intervenir. En outre, il aurait été possible de démontrer à partir des termes si cette proposition est vraie, puisque ça ne l'est pas par l'écriture. En effet toutes les propositions vraies le sont nécessairement soit par ce qu'elles sont démontrables, soit par leurs propres écritures. Donc nécessairement, cette proposition n'est pas vraie, c'est-à-dire qu'il n'est pas nécessaire que A et B ne soient pas dans le même sujet. Donc ils peuvent être dans le même sujet et ce malgré un même raisonnement issus de quelqu'autres qualités supposées du même genre. Et pour cela toutes les perfections sont compatibles.* [104]

Entre les exposants fondés sur le développement de Mercator du logarithme et les exposants métaphysique du *Specimen Characteristicæ novæ* (LH 35, 1, 14 Bl.88), nous avons vu que le traitement des exposants fonctionnels est plus ou moins rapporté à un calcul sur les quantités. Les exposants métaphysique correspondrait en réalité aux perfections qui sont décrites ici. La relation fonctionnelle devient une entité positive parfaite dont l'équation ne décrit pas la décomposition mais plutôt les relations avec d'autres

103. [98] H. B. Sinaceur, *Ars Inveniendi* dans *Les Etudes philosophiques*, N°. 2, *Leibniz (Avril-Juin 1989)*, Presse Universitaire de France, 1989 - pp. 201-214. *Cf* p.210

104. A II, 1, N.131, Lettre à Spinoza, Novembre 1676 - p.427 : « "Perfectionem" voco omnem qualitatem simplicem quae positiva est et absoluta seu quae quicquid exprimit sine ullis limitibus exprimit. Qualitas autem ejusmodi quia simplex est ideo est irresolubilis, sive indefinibilis, alioqui enim vel non una erit simplex qualitas, sed plurium aggregatum vel si una erit limitibus circumscripta erit, adeoque per negationes ulterioris progressus intelligetur contra hypothesin, assumta est enim pure positiva. Ex his non est difficile ostendere, omnes perfectiones esse compatibiles inter se, sive in eodem esse posse subjecto. Nam sit propositio ejusmodi : $A$ et $B$ sunt incompatibiles ( : intelligendo per $A$ et $B$duas ejusmodi formas simplices, sive perfectiones, idemque est si plures assumantur simul :). Patet eam non posse demonstrari sine resolutione terminorum $A$ vel $B$, alterutrius vel utriusque ; alioqui enim natura eorum non ingrederetur ratiocinationem ac posset incompatibilitas aeque de quibusvis aliis rebus ac de ipsis demonstrari. Atqui (ex hypothesi) sunt irresolubiles. Ergo haec propositio de ipsis demonstrari non potest. Posset autem utique de ipsis demonstrari si vera esset quia non est per se nota. Omnes autem propositiones necessario verae sunt aut demonstrabiles aut per se notae. Ergo necessario vera non est haec propositio sive non est necessarium ut $A$ et $B$ in eodem subjecto non sint. Possunt ergo esse in eodem subjecto et cum eadem sit ratiocinatio de quibuslibet aliis ejusmodi qualitatibus assumtis, ideo compatibiles sunt omnes perfectiones. »

perfections. Ainsi le pronique $n^2 + n$ n'est pas composé du carré et d'une racine, mais constitue une relation fonctionnelle irréductible et les relations qu'elle entretient avec le carré et la racine ne sont pas méréologiques.
Pour finir, les figures auxquelles Leibniz tente d'appliquer l'exposant fonctionnel sont principalement les proniques et le cercle. Ces choix ne sont pas anodins. En effet, nous avons vu que ces figures sont elles-mêmes une source d'inspiration pour le jeune Leibniz quant à la question des exposants. Les proniques proviennent de l'exposant des nombres combinatoire, tandis que le cercle constitue la figure fondamentale du triangle de Mengoli, au sein duquel la question des exposants est très importante.

# Chapitre 13

# Les logarithmes et les exponentielles

## Introduction

Dans un texte de 1676 qu'il intitule *De Tangentibus et Speciatim Figurarum Simplicium* (A VII, 5, N.68), Leibniz donne la définition suivante [1] :

> *Ils appellent Puissance le nombre de multiplication d'un autre nombre par lui-même. Ils appellent Dignité la puissance ou la racine d'une certaine quantité. Comme le cube d'un nombre, pour une quantité AB qui est en relation avec une certaine unité, comme un pied ou une autre mesure de ce qu'on exprime, c'est sa dignité, et la racine cubique du même nombre est aussi sa dignité. L'Exposant, ou le Logarithme du Cube est* 3. *Le logarithme ou l'exposant de la racine cubique est* $\frac{1}{3}$. *Ainsi, si l'exposant d'une dignité est* 1 *alors ce nombre sera identique à sa propre dignité. De sorte que si le nombre est* $x$ *et l'exposant* $z$*, alors la dignité sera* $x^z$. [2]

Ici, les notions d'exposants et de logarithmes coïncident. La notion d'exposant est donc naturellement indissociable de celle du logarithme, si bien que les deux notions sont parfois synonymes sous la plume du jeune Leibniz. La distinction entre les deux concepts doit s'étudier au regard du lien formel ou fonctionnel que Leibniz va pouvoir établir entre eux. Pour Leibniz, le logarithme représente la relation qui lie l'exposant à sa dignité. Pour mieux comprendre les enjeux qui sont présents dans ce parallèle qu'on peut faire entre le logarithme et la raison rationnelle, ou irrationnelle, il nous faut revenir brièvement sur la théorie médiévale des rapport de rapport développée par Nicole Oresme.
Leibniz déduit des séries de Mercator, une formule admirable, mais fausse, qu'il va conserver un certain temps. Cette formule constitue un premier lien entre l'exposant et le logarithme, qui les confond.
Pour l'étude du deuxième lien, qui au contraire les distingue, nous reviendrons sur l'usage fonctionnel que fait Leibniz du logarithme. Cet usage permet de fait de distingue l'exposant de $a^b$ qui est $b$ et le logarithme de $a^b$ que $b\ln(a)$.
La formule de mercator permet à Leibniz d'exprimer le logarithme d'une quantité. A l'occasion de ses travaux sur les fonctions triogonométriques, Leibniz va construire la série inverses, capable d'exprimer le terme en fonction de son logarithme. Contrairement au developpement de Mercator, que Leibniz trouve chez cet auteur, la formule de l'exponentielle est découverte par un procédé heuristique qui n'est pas sans évoquer les méthodes tabulaires que le jeune Leibniz appliquait alors à l'analyse des progressions.
Le développement de l'exposant pose également la question du traitement qu'en fait le calcul différentiel. Au cours de la période 1670-1680, on trouve un grand nombre de manuscrit dans lesquels Leibniz s'attelle à la question de la différentielle de l'exposant. Il va peu à peu construire la formule moderne :

$$dx^z = zx^{z-1}dx + \log(x)x^z dz$$

1. Leibniz trouve notamment ce vocabulaire de "dignité" ("*dignitas*") dans un texte de Michelangelo Ricci, *Cf* [83] M. Ricci, *Exercitatio geometrica*, Londres, 1668 - Voir la première définition p.1 du traité : « Une certaine puissance et sa racine, je les appelle dignité » (« *Potestatem quamlibet, ejusque radicem, voco dignitatem* »).

2. A VII, 5, N.68, *De Tangentibus et Speciatim Figurarum Simplicium*, Février/Juin 1676 - p.468 : « Potentiam vocant numerum multiplicationis alterius in se. Dignitatem vocant, alicujus quantitatis potentiam aut radicem. Ut Cubus numeri quantitatem $AB$ in relatione ad quandam unitatem, ut pedem aliamve mensuram exprimentis est ejus dignitas, Radix Cubica ejusdem numeri est etiam ejus dignitas. Exponens seu Logarithmus Cubi est 3. Logarithmus seu exponens radicis Cubicæ est $\frac{1}{3}$. Unde si exponens dignitatis sit 1 tunc ipse numerus sibi ipsi dignitas erit. Ut si numerus sit $x$ exponens $z$, erit dignitas $x^z$. »

## 13.1 La théorie des rapports, chez Oresme

### 13.1.1 Les rapports de rapports chez les médiévaux

Dans son *Tractatus de Proportionibus*[3], Thomas Bradwardine montre à travers son utilisation de certains rapports courants, notamment les rapports doubles et triples, qu'il conçoit leur composition à la manière de nos actuels logarithmes. Ainsi la somme d'une rapport double et d'un rapport triple forme un rapport sextuple et leur produit donne un rapport nonuple. De sorte que la somme est notre produit et le produit notre exponentiation. Ainsi Bradwardine, à certaines occasions du traité, mentionne des rapports fractionnaires entre les rapports, par exemple dans le cas de la surface et du volume de la sphère, le rapport entre le triple et le double qu'il qualifie de sesquialtère (dénomination latine de $\frac{3}{2}$). Il construit donc déjà une forme d'exposant fractionnaire :

> *Il en déduit naturellement que le rapport entre les volumes vaut « trois demis » du rapport entre les diamètres (en termes modernes : soit $C$ le rapport entre les volumes, $D$ le rapport entre leurs surfaces et $E$ le rapport entre les diamètres. On a $D = E^2$ et $C = E^3$ donc $C = D^{\frac{3}{2}}$ :*
> *On montre que le rapport entre deux sphère quelconques a relativement au rapport de leurs surfaces prises dans le même ordre le rapport sesquialtère. Soient deux sphères $A$ et $B$. Soit $C$ le rapport de $A$ à $B$ ; soit $D$ le rapport de la surface de $A$ à la surface de $B$ ; et soit $E$ le rapport du diamètre de $A$ au diamètre de $B$. Alors, d'après la quatrième conclusion de ce chapitre, $D$ est le double de $E$. Donc $D$ contient précisément deux fois $E$. Et d'après la cinquième supposition, $C$ est le triple de $E$. Donc $C$ contient précisément trois fois $E$. Donc $C$ contient $D$ une seule fois et sa moitié. Donc, d'après la définition de rapport sesquialtère, $C$ est sesquialtère de $D$. Et c'est ce nous voulions démontrer.*
> *Thomas Bradwardine ne dit rien de plus.*[4]

Comme l'explique S. Rommevaux dans cet article, c'est Nicole Oresme qui va élaborer quelques années plus tard une théorie solide autour de cette notion de "rapport de rapports"[5] , et ce dans un traité justement intitulé le *De proportionibus proportionum*[6]. Dans ce traité, Oresme applique aux rapports la théorie de proportion numérique de Euclide. Dans cette théorie, l'addition du rapport $r_1$ et du rapport $r_2$ correspond donc à leur composition, c'est-à-dire au rapport $r_1 r_2$ :

> *Diviser un rapport de plus grande inégalité, c'est lui associer une moyenne ou des moyennes entre certains termes. Par exemple, soit une quantité plus grande $B$ et une quantité moindre $C$ et soit $A$ le rapport de $B$ à $C$. Je dis que diviser $A$, c'est lui trouver ou lui associer une moyenne ou des moyennes qui sont entre $B$ et $C$.*[7]

Le rapport $A$ dispose d'une extension. C'est cette extension qui le soumet à le théorie euclidienne de proportions :

> *N'importe quel rapport est ainsi qu'une quantité continue, en cela qu'on peut le diviser à l'infini comme pour une quantité continue. On peut le diviser en deux parties égales, ou en trois ou quatre etc. ou*

3. [9] T. Bradwardine, *Tractatus de Proportionibus*, 1328, *trad.* H. Lamar Crosby (angl.), *Thomas of Bradwardine, His Tractatus de Proportionibus. Its Significance for the Development of Mathematical Physics.*, Madison : University of Wisconsin Press, 1955.

4. [7] S. Rommevaux, *Les règles du mouvement de Blaise de Parme dans les deux versions de ses Questions sur le traité des rapports de Bradwardine* dans *Mathématiques et théorie du mouvement XIVe-XVIe siècles*, *éds.* S. Rommevaux et J. BIard, Presse Universitaire Septentrion, 2008 - p.35, le passage du *Tractatus de Proportionibus* de T. Bradwardine cité ici par S. Rommevaux se trouve à la p.126 de [9] T. Bradwardine, *Tractatus de Proportionibus*, 1328, *trad.* H. Lamar Crosby (angl.), *Thomas of Brawardine, His Tractatus de Proportionibus. Its Significance for the Development of Mathematical Physics.*, Madison : University of Wisconsin Press, 1955.

5. A ce sujet, lire utilement l'œuvre de Sabine Rommevaux : [7] S. Rommevaux, *Les règles du mouvement de Blaise de Parme dans les deux versions de ses Questions sur le traité des rapports de Bradwardine* dans *Mathématiques et théorie du mouvement XIVe-XVIe siècles*, *éds.* S. Rommevaux et J. BIard, Presse Universitaire Septentrion, 2008 ; [85] S. Rommevaux, *Théorie des rapports (XIIIe - XVIe siècles) : réception, assimilation, innovation*, H.D.R, Université de Tour François Rabelais, 2008 ; [84] S. Rommevaux, *Aperçu sur la notion de dénomination d'un rapport numérique au Moyen Âge et à la Renaissance*, Methodos 1, 2001

6. [77] N. Oresme, *De proportionibus proportionum*, entre 1351 et 1360, *éd.* et *trad.* E. Grant (angl.), *De proportionibus proportionum and Ad pauca respicientes*, University of Wisconsin Press, 1966

7. [77] N. Oresme, *De proportionibus proportionum*, entre 1351 et 1360, *éd.* et *trad.* E. Grant (angl.), *De proportionibus proportionum and Ad pauca respicientes*, University of Wisconsin Press, 1966 - Chapitre 1, p.138-139 : « Proportionem maior inequalitatis dividere est inter aliquos terminos medium seu media assignare. Verbi gratia, sit $B$ un quantitas maior et $C$ una alia minor et proportio $B$ ad $C$ sit $A$. Dico quod dividere $A$ est invenire seu assignare medium aut media inter $B$ et $C$. »

*d'une quelconque manière inégale. Et on peut le diviser en parties commensurables ou de la même manière en parties incommensurables entre elles.* [8]

Mais cette extension n'est pas celle que nous avons l'habitude de considérer. L'extension que consière Oresme est, en terme moderne, la logarithme de la fraction :

$$\left(\frac{B}{C}\right)^{(\text{Oresme})} = \log\left(\left(\frac{B}{C}\right)^{(\text{classique})}\right)$$

Ainsi, on retrouve bien les opérations décrit par Oresme :

- $\star\ (A)^{(\text{Oresme})} + (B)^{(\text{Oresme})} = \log\left((A)^{(\text{classique})}\right) + \log\left((B)^{(\text{classique})}\right) = \log\left((AB)^{(\text{classique})}\right)$
- $\star\ -(A)^{(\text{Oresme})} = -\log\left((A)^{(\text{classique})}\right) = \log\left((\frac{1}{A})^{(\text{classique})}\right)$

Le rapport de rapport est donc un rapport classique de ces rapports considérés dans leur extension logarithmique :

$$\frac{(A)^{(\text{Oresme})}}{(B)^{(\text{Oresme})}} = \frac{\log\left((A)^{(\text{classique})}\right)}{\log\left((B)^{(\text{classique})}\right)}$$

Oresme montre que la notion de rapport rationnel n'est plus la même. Prenons l'exemple suivant. Soit $A$ le rapport entre le coté d'un carré et sa digonal et $B$ le rapport de ce même côté avec périmètre du carré. Si le rapport classique entre $A$ et $B$ était rationnel, alors $A$ serait aussi rationnel, puisque $A$ est à $B$ comme l'unité est au rapport $\frac{A}{B}$. Or $A$ est irrationnel, donc le rapport classique de $A$ sur $B$ l'est aussi. Pourtant, si l'on considère la diagonale du carré comme le côté d'un second carré, on obtient une diagonale qui vaut le double du côté initiale. En réitérant deux fois l'opération, c'est-à-dire en appliquant quatre fois au coté le rapport $A$, on obtient bien le périmètre du carré. Ainsi, au sens de Oresme, le rapport $A$ est le quart du rapport $B$, et donc le rapport de $A$ sur $B$ est rationnel.
En d'autres termes :

$$\frac{\frac{a}{\sqrt{2}a}}{\frac{a}{4a}} = 2\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad \frac{\log\left(\frac{a}{\sqrt{2}a}\right)}{\log\left(\frac{a}{4a}\right)} = \frac{\log\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)}{\log\left(2^{-2}\right)} = \frac{-\frac{1}{2}\log(2)}{-2\log(2)} = \frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$$

La base du logarithme est l'unité arbitraire que l'on choisit. La situation s'illustre naturellement dans échelle logarithmique :

Ainsi, c'est le rapport d'égalité 1 qui fait office d'élément neutre. En effet, l'application de ce rapport est une opération nulle :

> *Tous les rapports d'égalité sont égaux, et on ne leur associe pas plus espèces mais seulement une seule. A vrai dire, tout rapport de plus grande inégalité surpasse à l'infini le rapport d'égalité et tout rapport de moindre inégalité est infiniment surpassé par le rapport d'égalité et n'importe quel rapport de plus grande inégalité, comme nous l'allons voir.* [9]

Le proportion entre les rapports de plus grande inégalité et de moindre inégalité est donc doublement infinie. Ces deux classes de rapports se sont pas donc pas vraiment homogènes, dans le sens où la somme, même infinie de rapports d'une classe ne produira jamais un rapport de l'autre classe.

8. [77] N. Oresme, *De proportionibus proportionum*, entre 1351 et 1360, *éd.* et *trad.* E. Grant (angl.), *De proportionibus proportionum and Ad pauca respicientes*, University of Wisconsin Press, 1966 - Chapitre 1, p.138-139 : « quelibet proportio est sicut quantitas continua in hoc, quod in infinitum est divisibilis sicut quantitas continua et in 2 equalia, et in 3, et in 4, et cetera, et per inequalia quomodolibet, et in partes commensurabiles et similiter in partes sibi invicem incommensurabiles. »

9. [77] N. Oresme, *De proportionibus proportionum*, entre 1351 et 1360, *éd.* et *trad.* E. Grant (angl.), *De proportionibus proportionum and Ad pauca respicientes*, University of Wisconsin Press, 1966 - Chapitre 1, p.138-139 : « Omnes proportiones equalitatis sunt equales earum plures species assignentur sed tantum est una. Omnis vero proportio maioris inequalitatis in infinitum excedit proportionem equalitatis et omnis proportio minoris inequalitatis in infinitum exceditur a proportione equalitatis et a qualibet maioris inequalitatis ut postea videbitur »

### 13.1.2 Le problème de la multiplication des rapports

Ainsi, on a pu modéliser les rapports de rapports à l'aide du logarithme. Comment se modéliserait alors la multiplication de deux rapports ? Si l'on suit notre modèle, nous devrions avoir :

$$(A)^{(\text{Oresme})} \times (B)^{(\text{Oresme})} = \log\left((A)^{(\text{classique})}\right) \times \log\left((B)^{(\text{classique})}\right)$$

Ainsi, dans notre modèle, la multiplication reste commutative. Pourtant, si l'on considère le produit de rapport double et du rapport triple, on n'obtient pas le même rapport si l'on choisit le double du triple, qui est le nonuple et le triple du double qui est l'octuple. Ainsi, à première vue, notre modèle logarithmique ne permet pas de rendre compte des produits de rapports.

Mais le produit de rapports n'est pas défini dans le traité d'Oresme. De fait, en construisant son calcul des rapports de rapports de façon entièrement analogue à la théorie des proportions d'Euclide, Oresme y transporte la problématique grecque de la distinction entre les nombres et les grandeurs. Cette distinction s'engage dans l'impossibilité euclidienne à définir un produit de grandeurs au sens algébrique du terme. Le rectangle est alors le seul moyen disponible pour désigner ce produit, mais c'est une grandeur qui n'est pas homogène à celles de ses propres côtés [10]. Ainsi, de la même façon, il faudrait considérer des rectangles logarithmiques dont la dimension serait d'un genre nouveau, non homogène au rapports qui constituent ses côtés.
Comme nous l'avons dit, la base du logarithme n'est pas définie. Le calcul logarithmique d'Oresme s'effectue à une base près, tout comme celui d'Euclide est relatif au choix de l'unité. Une fois l'unité choisie, on peut définir la grandeur 3 qui est la concaténation de trois unités. Notons qu'alors, la grandeur 3 dans le calcul d'Oresme n'est pas le rapport triple, mais le triple du rapport choisi comme unité ou base du logarithme. De la même manière que le rapport identique ne représente pas l'unité mais le zéro. Ainsi, pour construire un produit algébrique $ab$ dans le cadre euclidien, il faudrait considérer $a$ comme le rapport d'une certaine grandeur $\alpha$ avec l'unité $u$ et $b$ comme le rapport d'une autre grandeur $\beta$ avec la même unité $u$ :

$$ab = \frac{\alpha}{u} \times \frac{\beta}{u}$$

Ainsi, si l'on considère comme base du logarithme un rapport unité $U$ puis deux rapports donnés $A$ et $B$, alors le produit des deux rapports sera représenté par le produit des rapports de rapports suivant :

$$\underbrace{\frac{(A)^{(\text{Oresme})}}{(U)^{(\text{Oresme})}}}_{R_A} \times \underbrace{\frac{(B)^{(\text{Oresme})}}{(U)^{(\text{Oresme})}}}_{R_B}$$

On a alors :

$$U^{R_A \times R_B} = A^{R_B} = B^{R_A}$$

On retrouve donc le produit de notre modèle. En effet, si l'on souhaite définir une opération d'exponentiation $\circledast$ qui ait le même rôle vis-à-vis de la multiplication que cette même multiplication vis-à-vis de l'addition, alors deux choix sont possibles. On peut considérer $\circledast$ comme l'exponentiation classique, puisqu'il s'agit d'une composition de multiplication, de la même manière que cette dernière est une composition d'addition. Mais alors $\circledast$ ne suit aucune des lois algébriques qu'elle devrait suivre :

- ⋆ la commutativité : $a \circledast b = b \circledast a$
- ⋆ l'associativité : $(a \circledast b) \circledast c = a \circledast (b \circledast c)$
- ⋆ la distributivité : $a \circledast (b \times c) = (a \circledast b) \times (a \circledast c)$

Pour vérifier ces propriétés, il faut choisir une seconde voix, permis par le morphisme exponentielle.

$$a \times b = \exp(\ln(a) + \ln(b))$$

10. On peut aussi définir un produit homogène à l'aide de l'identité de Thalès, comme chez Descartes, mais ce n'est pas ce qu'on trouve chez Euclide

On définit alors de même la loi $\circledast$ :

$$a \circledast b = \exp(\ln(a) \times \ln(b)) = a^{\ln(b)} = b^{\ln a}$$

On retrouve alors bien la multiplication des rapports adapté au calcul d'Oresme. On voit alors clairement comment les notions d'irrationalité et de rationnalité sont transformées :

$$n \times x = (\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ fois}}) \times x = \underbrace{x+x+\cdots+x}_{n \text{ fois}}$$

$$e^n \circledast x = (\underbrace{e \times e \times \cdots \times e}_{n \text{ fois}}) \circledast x = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} = x^n$$

Ainsi, le produit de $n$ facteur ne revient pas à "exponentier" par $n$ mais par $e^n$.

On distingue ainsi le rapport $A$ d'un part et son rapport de rapports correspondant $R_A$ d'autre part, qui est finalement son logarithme dans la base $U$.

$$U^{R_A} = A$$

Cette distinction nous permet de mettre en évidence la séparation que Leibniz va établir progressivement entre les exposants et les logarithmes :

- ⋆ D'un côté la relation entre un exposant $x$ et sa dignité $z = a^x$.
- ⋆ De l'autre coté la relation entre le logarithme $\ln(x)$ et son inverse $\exp(x)$.

Cette conception logarithmique du rapport va profondément influencer la pensée mathématique occidentale. Rappelons par exemple la notation cossique des algébristes allemands, comme Stifel, qui considère que le carré d'un cube, à savoir *cc* correspond à la neuvième puissance et non à la sixième comme nous l'exprimerions : $(x^3)^2 = x^6$. On retrouve régulièrement jusqu'au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, des expressions qui portent la trace de cette vision des rapports.
Dans sa conception des logarithmes, Leibniz manifeste une tension qui, vue sous l'angle d'Oresme, s'avère significative. Cette tension met en jeu la nature des quantités logarithmique et leur caractère d'extension.

### 13.1.3 Logarithme et proportion géométrique

Dès 1673, dans le *Quadratura figuræ logarithmicæ, vel quod idem est geometrice proportionalium*, situé dans la *Plagula* ו *(3)* (A VII, 4, N.16$_3$) des *Mathematicæ Collectionis Plagulæ* ו (A VII, 4, N.16), Leibniz révèle de nombreuses propriétés fondamentale de la courbe logarithmique. Comme nous l'avons déjà évoqué, ce texte considère les ordonnées de la courbe comme le résultat d'un produit infini de rapports infinitésimaux. On voit déjà bien que l'extension du rapport est considérée sous l'angle de la théorie d'Oresme, à savoir que l'extension du rapport identique est nulle. Leibniz parle de « petit rapport » (« *ratiuncula* »). Il interviennent donc dans la différence entre deux ordonnées voisines de la courbe logarithmique :

$$a^{x+\varepsilon} - a^x = a^x(\underbrace{a^\varepsilon}_{=\frac{a^{x+dx}}{a^x}} - 1)$$

Donc, si le rapport infinitésimal entre deux ordonnées voisines est constant, celui entre une ordonnée et sa différence avec la suivante l'est également :

$$\frac{a^{x+\varepsilon} - a^x}{a^x} = a^\varepsilon - 1$$

Or si, dans deux progressions, les rapports entre chaque paire de termes de mêmes rangs sont tous égaux, alors le rapport entre les sommes de termes est aussi égal à ces rapports :

$$\text{Si pour tout } n,\ \frac{u_n}{v_n} = r \ \text{ alors } \frac{\sum\limits_n u_n}{\sum\limits_n v_n} = r$$

Ainsi, si les rapports entre les ordonnées et les différences sont constants, alors celui entre les sommes des ordonnées, c'est-à-dire la quadrature, et les sommes des différences, c'est-à-dire l'ordonnée maximale, sera égal à ces rapports constant.

$$\frac{a^x}{\int a^x} = a^\varepsilon - 1$$

Ainsi, Leibniz révèle déjà ici de nombreuses propriétés modernes de la courbe exponentielle.

⋆ Elle est solution d'une équation différentielle :

$$\frac{y'}{y} = r$$

⋆ Cette équation différentielle est alors nécessairement vérifiée par la primitive :

$$\frac{y}{\int y} = r$$

⋆ Enfin, ce coefficient $r$ correspond au rapport entre le premier terme et la première différence :

$$r = \frac{y(0)}{y'(0)}$$

Donc ce rapport $r$ entre le premier terme et la première différence caractérise la quadrature de la courbe. Mais comment le caractériser ?

> *Mais déjà le rapport entre le premier terme et la première différence, ici, est celui de la ligne au point. Déjà, si l'on divise la ligne par un point, il reste la ligne, de la même manière que si l'on divise par l'unité, il reste ce qu'on avait. De plus, le point est à la ligne ce que l'unité est à l'infini. Et peu importe par quel point l'on divise, si c'est bien-sûr que par cette unité, qui est naturellement une part égale de la base ; si c'est par une différente, on produit en effet une nouvelle ligne, mais qui ne diffère de celle produite à partir de la division par l'unité présentée que par une part non assignable.* [11]

Dans ce texte très précoce, Leibniz semble traiter des infinitésimaux comme de quantités actuelles. Même si cela n'est pas toujours très clair :

> *Mais pour le démontrer de façon exacte, il est clair que cette ordonnée maximale, dans la mesure où elle amorce la composition de la figure, est un rectangle dont la longueur est l'ordonnée maximale et la largeur l'unité.* [12]

Néanmoins, il n'hésite pas à parler du nombre de points qui constituent une ligne et il envisage un calcul géométrique analogue au calcul numérique. Le point constitue l'unité, c'est-à-dire l'indivisible et la ligne constitue le nombre, c'est-à-dire le composé d'unités. Mais, d'une part la ligne est constituée d'une infinité de point. Et d'autre part, tous les points ne sont pas équivalents. En effet, si l'on considère que la différence entre deux ordonnées voisines est un point, alors l'ordonnée maximale est constituée de la somme de ces différences, donc de la somme de tous ces points. Or, on voit bien que pour une même base, c'est-à-dire un même nombre de point, on peut obtenir des ordonnées différentes suivant la courbe que l'on choisit. En fait, il s'agit de voir qu'une courbe strictement monotone établit toujours une bijection entre la base et l'ordonnée maximale, si bien que ces deux longueurs sont toujours équipotentes, à savoir qu'elles ont le même cardinal, quand bien même elles n'ont pas la même mesure.

11. A VII, 4, N.16$_3$, *Plagula* ו *(3)*, printemps 1673 - p.298-299 : « Iam ratio termini primi ad differentiam primam, hoc loco est quæ lineæ ad punctum. Iam si lineam dividas per punctum, manet linea, quemadmodum si quid divisas per unitatem, manet quod erat. Est autem punctum ad lineam, ut unitas ad infinitum. Nec interest per quod punctum dividas, si scilicet par ipsam unitatem, partem scilicet æqualem basis, an differentiam, prodibit enim alia linea, sed non nisi parte inassignabili differens a producto ex divisione per unitatem expositam. »

12. A VII, 4, N.16$_3$, *Plagula* ו *(3)*, printemps 1673 - p.299 : « Sed accurate demonstranda, manifestum est ipsam maximam applicatarum quatenus figuræ compositionem ingreditur, esse rectangulum cuius longitudo maxima applicatarum, latitudo unitas. »

## 13.2 Courbe Logarithmique et Développement en Série

Leibniz découvre très tôt le développement en série de l'exponentielle, à savoir :

$$\frac{t}{1!} - \frac{t^2}{2!a} + \frac{t^3}{3!a^2} - \frac{t^4}{4!a^3} + \cdots = a\left(1 - e^{-\frac{t}{a}}\right)$$

En utilisant indûment la formule du logarithme pour en extraire l'exposant, Leibniz met en exergue l'ambigüité qui se trouve entre les concepts d'exposants et de logarithmes. Distinguons donc d'une part l'exponentielle et le logarithme qui sont donnés par des développements en série, et d'autre part l'exposant et la dignité qui sont donnés par un caractère simple.
Comme nous l'avons vu, la frontière entre ces deux couples d'objets devient plutôt floue chez Leibniz aux alentours de l'année 1676. Revenons donc sur la façon dont Leibniz a découvert la série exponentielle, durant le séjour parisien.

### 13.2.1 Genèse de l'exponentielle

#### Une formule admirable mais fausse

Dans un texte de Juin 1676, dont nous ferons l'étude dans la prochaine section, et qui s'intitule *De Exponentibus et Indicibus ad Quadraturas Applicatis.* (A VII, 5 B, N.88), Leibniz donne cette formule sans démonstration :

$$\text{Si } c^e = x \text{ alors } e = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2c} + \frac{x^3}{3c^2} - \frac{x^4}{4c^3} + \ldots$$

Ce raisonnement montre que Leibniz considère explicitement le logartihme comme un outil pour extraire l'exposant dans une formule.

Cette formule est issue des séries de Mercator. On commence par donner un développement en série de l'ordonnée de l'hyperbole :

$$\frac{a}{a+t} = \frac{1}{1} - \frac{t}{a} + \frac{t^2}{a^2} - \frac{t^3}{a^3} + \ldots$$

Puis on intègre terme à terme :

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{adt}{a+t} &= \int_0^x \frac{dt}{1} - \int_0^x \frac{tdt}{a} + \int_0^x \frac{t^2dt}{a^2} - \int_0^x \frac{t^3dt}{a^3} + \ldots \\ &= \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^4}{4a^3} + \ldots \\ &= a\ln\left(1 + \frac{x}{a}\right)\end{aligned}$$

Ainsi si on a :

$$e = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2c} + \frac{x^3}{3c^2} - \frac{x^4}{4c^3} + \ldots$$

Alors on a plutôt l'égalité suivante :

$$c^e = \left(1 + \frac{x}{c}\right)^{c\ln(c)} \quad \text{et non} \quad c^e = x$$

De fait, cette intégrale est bien une quadrature d'hyperbole. Le fait que la quadrature de l'hyperbole respecte les règles du logarithme est connue depuis Grégoire de Saint-Vincent [13]. Leibniz l'évoque d'ailleurs lui-même à de nombreuses reprises, dès l'époque parisienne, notamment dans son traité sur la quadrature arithmétique :

13. [20] G. de Saint-Vincent, *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni decem libris comprehensum*, Anvers, 1647

*En effet, grâce aux découvertes de l'éminent Père Gégoire de Saint-Vincent, on peut voir que si les abscisses depuis l'asymptote sont comme les nombres, alors les différentes parties de l'hyperbole seront comme les logarithmes, ce qui n'a pas reçu, de mon sentiment, la considération que cela méritait.* [14]

Il est donc naturel que Leibniz ait déduit de ce développement qu'il correspondait au logarithme.

### Première mention de la propriété d'invariance

Dans un petit billet intitulé *Problemata tangentium inversa* (LH 35, 13, 2b Bl.14) [15], Leibniz pose explicitement le problème de l'exponentielle :

*Trouver une série dans laquelle le terme antécédent est égal à la somme de tous les suivants. C'est le cas de la suite géométrique double.* [16]

Il s'agit donc de trouver une série $y$ qui vérifie, en quelque sorte, l'équation intégrale suivante :

$$\int y = y$$

Une solution serait la suite géométrique double. En réalité, c'est la suite géométrique sous-double, car on a effectivement :

$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+3}} + \cdots = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Mais le problème de Leibniz, posé en terme de série, concerne en réalité les courbes, étant donné le titre donné au billet : « Les problèmes inverses des tangentes » (« *problemata tangentium inversa* »). Il reformule d'ailleurs la question en ces termes :

*Trouver une série dont l'aire est égale à la hauteur d'une constante.* [17]

Le billet, très court, propose néanmoins quelques solutions. La première se propose de reverser la question, en sommant les termes précédents plutôt que les suivants. En partant d'une suite naturelle, les premières sommes sont les nombres triangulaires, et Leibniz écrit :

*Donc c'est vers le triangle.* [18]

Cette remarque reste cryptique, étant le peu de contexte dont on dispose sur ce billet. Néanmoins, au delà de l'interprétation littérale qui consiste à voir que les triangulaires émergent de la somme des naturels, nous pouvons aller plus loin et voir ici une référence au triangle arithmétique. En effet, s'il fallait poursuivre son raisonnement et construire la solution à partir de la suite des naturels, on produirait les sommes successives de cette progression qui constituent les colonnes ou les lignes du triangle arithmétique. D'ailleurs, Leibniz ajoute :

*C'est par cette méthode, je crois, que nous résolvons fréquemment le problème inverse des tangentes.* [19]

Sur le verso du billet, Leibniz tente une autre construction, sans passer par la progression naturelle cette fois-ci. Il considère les inéquations suivantes :

$a \sqcap b + c + d + e.$
$b \sqcap c + d + e$
$c \sqcap d + e$
$d \sqcap e$ [20]

14. A VI, 6, N.51, *De Quadratura Arithmetica Circuli Ellipseos et Hyperbolæ*, Juin-Septembre 1676 - p.556 : « Nam ex egregio P. Gregorii a S. Vincentio invento constat, res mea sententia non satis pro dignitate æstimata ; si abscissæ ex asymptoto sint ut numeri, quod portiones quædam Hyperbolicæ erunt ut Logarithmi. »

15. Le catalogue en ligne donne la date d'Octobre 1675, sans fournir d'arguments. Cette est possible, étant donné que la question que Leibniz pose ici est résolue en 1676 comme nous allons le voir

16. LH 35, 13, 2b Bl.14, *Problemata tangentium inversa*, non daté (date : « Seriem invenire in qua terminus antecedens æquetur summæ omnium sequentium. Est Geometrica dupla. »

17. LH 35, 13, 2b Bl.14, *Problemata tangentium inversa*, non daté (date apocryphe du catalogue : Octobre 1675) : « Seriem invenire, cuius area æquetur altitudini in constantem »

18. LH 35, 13, 2b Bl.14, *Problemata tangentium inversa*, non daté (date apocryphe du catalogue : Octobre 1675) : « Ergo est ad triangulum. »

19. LH 35, 13, 2b Bl.14, *Problemata tangentium inversa*, non daté (date apocryphe du catalogue : Octobre 1675) : « Hac methodo sæpe problema tangentium inversa credo solvemus »

20. LH 35, 13, 2b Bl.14, *Problemata tangentium inversa*, non daté (date apocryphe du catalogue : Octobre 1675)

En effet, si $a$ vaut la somme de tous les termes suivants, alors $a$ est supérieur à la seule addition des quatre termes postérieurs. Et ainsi pour les autres. Il en déduit les égalités suivantes :

$e \sqcap e.$
$d \sqcap \delta + e$
$c \sqcap \kappa + \delta + 2e$
$b \sqcap \beta + \kappa + 2\delta + 4e$
$a \sqcap \alpha + \beta + 2\kappa + 4\delta + 8e$ [21]

Chaque terme $a$, $b$ ,$c$ ou $d$ est égal à la somme de tous les précédents, plus une quantité variable, notée $\alpha$, $\beta$, $\kappa$ ou $\delta$. Cela étant, si un terme est égal à la somme de tous les suivants, alors $\delta = d - e$ vaut la somme de tous les termes postérieurs à $e$. Ainsi $c = d + e + \delta$, $b = c + d + e + \delta$ et $a = b + c + d + e + \delta$. Dès lors, on devrait avoir $\alpha = \beta = \kappa = \delta$. En les choisissant différents, Leibniz traite donc un problème plus général. De fait, si l'on se borne au problème qu'il a énoncé au recto du billet, alors la différence entre deux terme successifs de la solution mène à la relation suivante :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (u_{n+2} + u_{n+3} + u_{n+4} + \dots) - (u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots) \\ &= -u_{n+1} \end{aligned}$$

$$2u_{n+1} = u_n$$

Et l'on retrouve donc la progression géométrique sous-double comme unique solution :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n$$

C'est d'ailleurs ce que comprend Leibniz dans la suite :

*Si l'on ne met pas de* $\geq$ *mais plutôt des* $=$*, alors on supprime* $\delta$*,* $\kappa$*,* $\beta$ *et* $\alpha$*. Alors si*
$a = b + c + d + e$
$b = c + d + e$
$c = d + e$
$d = e$
*On obtient :*
$c = 2e$
$b = 4e$
$a = 8e$ [22]

Il semble donc que la progression géométrique sous-double soit la seule solution à ce problème posé dans sa forme arithmétique. Mais Leibniz va comprendre très vite qu'il existe une autre solution dans le domaine analytique, liée au logarithme.
De fait, dans la marge de ce billet, on trouve une note probablement postérieure, qui est une référence claire à la série exponentielle.

$$a \quad \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1,2} + \frac{x^4}{1,2,3}$$

$$\int a \sqcap x + x^2$$

Manuscrits de Leibniz - LH 35 13 2b Bl.14

Le troisième exposant est difficile à déchiffrer. Si, comme nous le transcrivons, Leibniz a bien écrit un "4" au lieu de "3" pour l'exposant du troisième terme, cela signifie que la série exponentielle est découverte, mais qu'elle n'est pas encore établie pour Leibniz. Cette note marginale devrait donc nécessairement dater du mois de juillet 1676, durant lequel Leibniz a établi la série comme nous allons le montrer.

21. LH 35, 13, 2b Bl.14, *Problemata tangentium inversa*, non daté (date apocryphe du catalogue : Octobre 1675)
22. LH 35, 13, 2b Bl.14, *Problemata tangentium inversa*, non daté (date apocryphe du catalogue : Octobre 1675) : « Si non $\sqcap$ sed $\sqcap$ ponantur, omittemus $\delta$. $\kappa$. $\beta$. $\alpha$. Nam si $a \sqcap b + c + d + e$ ; $b \sqcap c + d + e$ ; $c \sqcap d + e$ ; $d \sqcap e$. Fiet $c \sqcap 2e$ ; ; $b \sqcap 4e$ ; ; $a \sqcap 8e$. »

**Les sommes successives**

La formule du logarithme, que Leibniz trouve chez Mercator dès l'année 1673, est particulièrement présente au sein de ses travaux sur la quadrature arithmétique du cercle, durant les années 1674-1676. En effet, le développement de l'arc-tangente, que Leibniz appelle la "Quadratrice", est fondé sur une méthode analogue à celui du logarithme, à la différence qu'il s'agit de développer en série la fraction suivante, plutôt que celle qui caractérise l'hyperbole :

$$\frac{a^2}{a^2+t^2} = \frac{1}{1} - \frac{t^2}{a^2} + \frac{t^4}{a^4} - \frac{t^6}{a^6} + \dots$$

Le *Dissertatio de Arithmetico Circuli Tetragonismo* (A VII, 6, N.1), de 1673, contient un ajout daté du Juillet 1676 par les éditeurs de l'*Akademie*. C'est dans ce fragment que Leibniz a découvert la série exponentielle. Il part du développement en série de l'arc-tangente, vue ici comme la rectification de l'arc par rapport à la tangente, c'est-à-dire $r\theta$ en fonction $\tan(\theta)$, et non comme la quadratrice qui donne l'aire comprise entre l'arc et la corde :

> *L'équation qui explique la nature de la courbe sera :*
> - $e = \frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7}$ *etc.* -
> *Et la somme de tous ces e, c'est-à-dire l'aire de la figure, sera ceci :*
> - $\int e = \frac{b^2}{1,2} - \frac{b^4}{3,4} + \frac{b^6}{5,6} - \frac{b^8}{7,8}$ *etc.* $= E$ -
> *Et de la même manière, si l'on cherche à nouveau les sommes de ces E, on obtient :*
> - $\int E = \frac{b^3}{1,2,3} - \frac{b^5}{3,4,5} + \frac{b^7}{5,6,7} - \frac{b^9}{7,8,9}$ *etc.* -
> *Et ainsi de suite.* [23]

En intégrant de la sorte, une courbe à l'infini, on obtient des objets qui sont dimension sans cesse plus grande et qui ne sont pas homogène entre eux. Comment, dès lors, interpréter leur somme :

> *Déjà, il vaut voir quelle figure l'on obtiendrait donc si l'on ajoutait ensemble la somme d'une certaine chose, la somme de ses somme et la somme des sommes de ses sommes.* [24]

Pour ce faire, Leibniz prend un exemple plus simple que celui de l'arc-tangente, à savoir un triangle, dont l'ordonnée est en progression naturelle ou arithmétique :

> *Sommons un triangle. A ce triangle, on adjoint sa figure trilinéaire parabolique et à cela sa figure trilinéaire cubique et ainsi de suite. On obtient un solide dont on cherche l'aire. C'est-à-dire bien-sûr la somme :*
> - $\frac{b}{1} + \frac{b^2}{1,2} + \frac{b^3}{1,2,3} + \frac{b^4}{1,2,3,4}$ -
> *Cette somme va donner l'ordonnée plane de ce solide.* [25]

Pour rendre la formule homogène, chaque somme doit être ramenée à un segment de droite. Ainsi, la somme infini produit une figure plane et son intégrale, une figure solide :

> *Donc l'aire de ce solide sera :*
> - $\frac{\int b}{1} + \frac{\int b^2}{1,2} + \frac{\int b^3}{1,2,3} + \frac{\int b^4}{1,2,3,4} = \frac{b^2}{1,2} + \frac{b^3}{1,2,3} + \frac{b^4}{1,2,3,4}$ *etc.* -
> *C'est pourquoi le cylindre* $\frac{b}{1} + \frac{b^2}{1,2} + \frac{b^3}{1,2,3}$ *etc. formé par l'unité et un plan, à savoir le dernier, c'est-à-dire le plus grand, lui-même constitué des droites ajoutées les unes aux autres qui représentent les sommes sommées ; ce cylindre donc va surpasser sa somme, c'est-à-dire l'aire de la somme des sommées ou l'aire de ce solide, d'un cylindre formé du carré de l'unité et de cette première ordonnée rectiligne maximale.* [26]

---

23. A VII, 6, N.1, *Dissertatio de Arithmetico Circuli Tetragonismo*, Automne 1673 et Juillet 1676 - p.33-34 : « Æquatio curvæ naturam explicans erit $e \sqcap \frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7}$ &c. Et summa omnium $e$, sive area figuræ, erit haec $\int \overline{e} \sqcap \frac{b^2}{1,2} - \frac{b^4}{3,4} + \frac{b^6}{5,6} - \frac{b^8}{7,8}$ &c. $\sqcap E$. Eodem modo si rursus quæras summas ipsarum $E$, fiet $\int \overline{E} \sqcap \frac{b^3}{1,2,3} - \frac{b^5}{3,4,5} + \frac{b^7}{5,6,7} - \frac{b^9}{7,8,9}$ &c. Et ita porro. »

24. A VII, 6, N.1, *Dissertatio de Arithmetico Circuli Tetragonismo*, Automne 1673 et Juillet 1676 - p.34 : « Jam videndum si alicujus summa, et summa summarum, et summa summarum summarum in unum addantur, quænam inde fiat figura. »

25. A VII, 6, N.1, *Dissertatio de Arithmetico Circuli Tetragonismo*, Automne 1673 et Juillet 1676 - p.34 : « Sumamus Triangulum. Huic imponatur suum Trilineum parabolicum et huic suum Trilineum cubicum, et ita porro in infinitum, fiet solidum cujus quæritur area. Nempe summa : $\frac{b}{1} \frac{b^2}{1,2} \frac{b^3}{1,2,3} \frac{b^4}{1,2,3,4}$ dabit unum planum ordinatum hujus solidi. »

26. A VII, 6, N.1, *Dissertatio de Arithmetico Circuli Tetragonismo*, Automne 1673 et Juillet 1676 - p.34 : « Ergo Area solidi erit $\frac{\int b}{1} \frac{\int b^2}{1,2} \frac{\int b^3}{1,2,3} \frac{\int b^4}{1,2,3,4} \sqcap \frac{b^2}{1,2} \frac{b^3}{1,2,3} \frac{b^4}{1,2,3,4}$ &c. Quare $\frac{b}{1} \frac{b^2}{1,2} \frac{b^3}{1,2,3}$ &c. cylinder sub unitate unius plani, nemp ultimi, seu maximi ex impositis sibi rectis summa summatas repræsentantibus facti excedet summam seu aream summæ summatorum, seu aream hujus solidi, ipsius primæ maximæ rectæ ordinatæ, cylindro sub quadrato unitatis. »

Ainsi, si on note $p(b)$ la figure plane formée par tous ces segments qui représentent chacun un ordre d'intégration de l'ordonnée $b$ du triangle, alors l'aire du solide cherchée vérifie l'équation suivante :

$$\int p(b)db = p(b) - b$$

Pour que l'équation reste homogène, il faut considérer les cylindres $p(b)u$ et $bu^2$, où $u$ représente l'unité. Ce raisonnement qui a été fait pour $b$ l'ordonnée en progression naturelle du triangle, peut être à nouveau appliquée pour $\frac{b^3}{3}$ ou encore n'importe quel autre terme du développement en série de l'ordonnée de l'arc-tangente $e$. Ainsi, cette équation peut être généralisée à toutes les quantités exprimables en série de puissances :

> *C'est un théorème remarquable et une introduction majeure à l'Arithmétique des infinis. Car en effet, ce que nous avons démontré à propos de e, on peut le dire au sujet de tout ce qui peut être exprimé par des rapports qui n'ont pas d'inconnue dans la fraction. Et de plus, toutes les quantités pourraient être exprimées de cette manière, au moins en les développant jusqu'à l'infini et il suit que ce théorème serait vrai pour toutes les figures. Voyez comme cette méthode pour démontrer quelque chose au sujet des toutes les quantités est nouvelle et merveilleuse. En supposant alors que cela est démontré, toutes les quantités, finies comme infinies pourront être exprimée de façon universelle. Je ne me souviens pas d'avoir encore vu l'usage d'un tel principe d'invention, chez moi ou chez un autre.* [27]

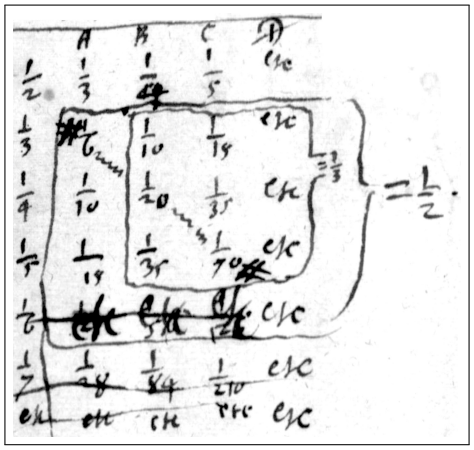
C'est donc bien ici que Leibniz découvre cette série et la propriété qui lui est associée, à savoir :

$$\int f(x)dx = f(x) - x$$

Ici, il serait excessif de parler de découverte de l'exponentielle, mais simplement de découverte de sa série. D'ailleurs cette généralisation est caractéristique du fait que la série n'est pas ici une quantité, même variable, comme nos fonctions réelles actuelles, mais une opération sur les quantités, c'est-à-dire une fonction de fonction.

**Lien avec le Triangle Harmonique**

En réalité, cette démarche qui consiste à raisonner sur la suite composée des sommes à l'infinie d'une variable n'est pas entièrement inédite chez Leibniz. On rappelle qu'on trouvait des raisonnements analogues dans ses travaux des premiers mois de l'année 1673, sur les sommes infinies bidimensionnelles :



Manuscrits de Leibniz - LH 35 3 B 10 Bl.2

27. A VII, 6, N.1, *Dissertatio de Arithmetico Circuli Tetragonismo*, Automne 1673 et Juillet 1676 - p.35 : « Quod est theorema admirabile, et accessio ingens Arithmeticæ infinitorum ; cum enim quod de $e$ demonstravimus dici possit de omnibus quæ per rationes incognitam in fractione non habentes enuntiantur ; possint autem omnes quantitates hoc modo enuntiari, saltem in infinitum progrediendo sequitur hoc theorema de omnibus figuris esse verum. Ecce novam ac mirabilem methodum demonstrandi aliquid de omnibus quantitatibus ; universaliter, ex eo quod suppono demonstratum omnes quantitates per hujusmodi finit vel infinita enuntiari posse. Nondum vel me vel alium tali inventionis principio usum memini. »

Mais Leibniz, qui n'avait pas encore reconnu la structure du triangle harmonique, n'obtient pas de résultats corrects dans cette tentative. Pour illustrer le parallèle avec la construction de la série exponentielle, considérons donc plutôt le triangle harmonique, qu'il découvre, comme la quadrature arithmétique du cercle, durant l'année 1674 :

| $I$ | $II$ | $III$ | $IV$ | $V$ | $VI$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | $\cdots$ |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{30}$ | $\cdots$ |
| $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{60}$ | $\frac{1}{105}$ | $\cdots$ |
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{60}$ | $\frac{1}{140}$ | $\frac{1}{280}$ | $\cdots$ |
| $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{105}$ | $\frac{1}{280}$ | $\frac{1}{630}$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | |

Ici, on rappelle que la somme des coefficients d'une colonne est égale au coefficient initial de la colonne précédente :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{p+1}.\frac{1}{\left(\!\binom{k}{p+1}\!\right)} = \frac{1}{p}.\frac{1}{\left(\!\binom{n}{p}\!\right)}$$

Ainsi, pour montrer que les sommes dans le grand cadre blanc et dans le petit sont égales, on montre que les sommes des deux rectangles gris sont égales. Considérons donc la quantité $f$ suivante :

$$f_n = \frac{1}{2}.\frac{1}{\left(\!\binom{n}{2}\!\right)} + \frac{1}{3}.\frac{1}{\left(\!\binom{n}{3}\!\right)} + \cdots + \frac{1}{p+1}.\frac{1}{\left(\!\binom{n}{p+1}\!\right)} + \ldots$$

Alors, on a de même :

$$\begin{aligned}
\int f &= \sum_{k=n}^{+\infty} f_k \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2}.\frac{1}{\left(\!\binom{k}{2}\!\right)} + \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{3}.\frac{1}{\left(\!\binom{k}{3}\!\right)} + \cdots + \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{p+1}.\frac{1}{\left(\!\binom{k}{p+1}\!\right)} + \ldots \\
&= \frac{1}{1}.\frac{1}{\left(\!\binom{n}{1}\!\right)} + \frac{1}{2}.\frac{1}{\left(\!\binom{n}{2}\!\right)} + \cdots + \frac{1}{p}.\frac{1}{\left(\!\binom{n}{p}\!\right)} + \ldots \\
&= \frac{1}{n} + f_n \\
&= x + f
\end{aligned}$$

On voit donc qu'ici, la même structure de preuve émerge, à savoir qu'en intégrant une quantité, on obtient cette même quantité, à un terme près. On comprend, au travers de ces deux exemples, que l'exponentielle est d'abord apparue à Leibniz comme solution de l'équation intégrale :

$$\int ydx = y + x$$

Plus généralement, si l'on considère un opérateur linéaire $\mathcal{G}$ et une quantité $a$, alors cette méthode permet de résoudre l'équation :

$$\mathcal{G}(u) = u - a$$

En effet, la solution est donnée par ce qu'on nomme la résolvante de l'équation, à savoir :

$$S(a) = a + \mathcal{G}(a) + \mathcal{G} \circ \mathcal{G}(a) + \mathcal{G}^3(a) + \cdots + \mathcal{G}^n(a) + \ldots$$

### 13.2.2 La Série Exponentielle, comme inverse du logarithme

Dans l'extrait que nous avons analysé du *Dissertatio de Arithmetico Circuli Tetragonismo* (A VII, 6, N.1), Leibniz ne réalise pas le lien qui relie la série exponentielle avec celle du logarithme. Comme nous l'avons vu, il ne s'agit pas d'une série à une variable déterminée, mais d'une opération linéaire sur les séries, qui peut ainsi se généraliser à toutes. Voici seul parallèle avec la série de logarithme que donne alors Leibniz :

> *Le cylindre de cette base, selon a l'unité, est composé des ordonnées planaires* $\frac{ba}{1}$ $\frac{b^2}{1,2}$ $\frac{b^3}{1,2,3a}$ $\frac{b^4}{1,2,3,4a^2}$ *(où il faut noter que ces b,* $b^2$*,* $b^3$ *sont à considérer avec b constant, de la même manière qu'avec les ordonnées de la figure logarithmique). Je vois donc ici qu'il faut éviter de se tromper. En effet, b est tantôt constant, tantôt variable. Ainsi donc b en minuscule désignera la variable et B en majuscule va désigner la constante ultime.* [28]

Le problème qui est posé ici est celui du lien entre la variabilité d'une quantité et celle de sa somme. Le logarithme est une fonction variable, mais c'est une intégrale. Ainsi la variabilité de cette somme n'est pas la même que celle des termes qui la composent. C'est pourquoi, on choisit la plupart du temps de changer de variable :

$$F(x) = F(0) + \int_0^x f(t)dt$$

Néanmoins, s'il s'agit de mettre en évidence des relations entre ces diverses fonctions, elles seront plus lisibles si la variable est la même. C'est potentiellement ceci qui va empêcher Leibniz de retrouver le lien avec la série logarithmique, dans ce texte.

#### Méthode analytique et méthode tabulaire

Si ce lien ne lui apparait pas dans le *Dissertatio de Arithmetico Circuli Tetragonismo* (A VII, 6, N.1), il est finalement déjà établi dans le *Quadratura Circuli et Hypebolæ Arithmetica. Logarithmi* (A VII, 6, N.32) [29]. Leibniz commence par décrire la méthode classique pour calculer le logarithme d'un nombre qui consiste à décomposer ce nombre dans la base du logarithme (ici la base dix) pour se ramener à des nombres plus petits dont on trouve le logarithme dans une table :

> *En se donnant peu de logarithmes, par exemple, ceux de tous les nombres jusqu'à 100, on peut multiplier et aussi diviser des nombres plus grands.* [30]

Mais cette méthode tabulaire est largement surpassée par la méthode analytique qui consiste à trouver la valeur du logarithme par un calcul direct :

> *Cela étant, une autre pratique est bien meilleure. Elle consiste à ce que nous cherchions désormais le logarithme d'un nombre à l'aide de la révélation de la grandeur des logarithmes à partir du nombre donné ou bien à l'inverse du nombre à partir du logarithme donné. Ainsi qu'on doit souvent le faire, on multiplie le nombre par lui-même. Puis on extrait la racine à partir de lui et l'on exécute d'autres opérations complexes. De sorte, qu'étant donné le nombre n, on aura :*
>
> - $l \overset{\mathfrak{D}}{=} \frac{n}{1} - \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n^4}{4} + \frac{n^5}{5} - \frac{n^6}{6}$ *etc.* -
>
> *Et à l'inverse, il ne m'échappe pas que si le logarithme est donné, alors nous aurons :*
>
> - $n \overset{\odot}{=} \frac{l}{1} - \frac{l^2}{1,2} + \frac{l^3}{1,2,3} - \frac{l^4}{1,2,3,4}$ *etc.* -
>
> *Et ainsi on les obtiendra facilement tous avec une précision suffisamment grande.* [31]

28. A VII, 6, N.1, *Dissertatio de Arithmetico Circuli Tetragonismo*, Automne 1673 et Juillet 1676 - p.35-36 : « Hujus Baseos cylinder in *a*, unitatem, est compositus ex planis ordinatis $\frac{ba}{1}$ $\frac{b^2}{1,2}$ $\frac{b^3}{1,2,3a}$ $\frac{b^4}{1,2,3,4a^2}$.(Ubi vero notandum est ipsas *b*. $b^2$. $b^3$. habere constantem *b* quanmadmodum ordinatæ Logarithmicæ figuræ). Video hic cavendum ab errore nunc enim *b* constans, nunc variablilis. Ergo *b*. simplici litera significet variabilem, et *B*, capitali significet ultimam constantem. »

29. Les éditeurs datent l'ajout du *Dissertatio de Arithmetico Circuli Tetragonismo* (A VII, 6, N.1) en Juillet 1676 sur la base du lien que nous établissons entre la proto-série exponentielle qu'il contient et la série établie dans le *Quadratura Circuli et Hypebolæ Arithmetica. Logarithmi* (A VII, 6, N.32), qui est explicitement daté de Juillet 1676

30. A VII, 6, N.32, *Quadratura Circuli et Hypebolæ Arithmetica. Logarithmi*, Juillet 1676 - p.369 : « Paucis logarithmis, v. g. omnium numerorum usque ad 100, datis, fieri possent multiplicationes et divisiones etiam numerorum majorum. »

31. A VII, 6, N.32, *Quadratura Circuli et Hypebolæ Arithmetica. Logarithmi*, Juillet 1676 - p.369 : « Sed alia ars melior est, si ope inventæ logarithmorum magnitudinis ex dato numero et contra numeri ex dato logarithmo, tunc quæramus logarithmum numeri. Cum sæpe adhibendus est, ducendus in seipsum, extrahenda ex eo radix aliæque peragendæ operationes difficiles, ut dato numero *n*, erit $l \overset{\mathfrak{D}}{\sqcap} \frac{n}{1} - \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n^4}{4} + \frac{n^5}{5} - \frac{n^6}{6}$ &c. et contra ni fallor ex dato logarithmo erit $n \overset{\odot}{\sqcap} \frac{l}{1} - \frac{l^2}{1,2} + \frac{l^3}{1,2,3} - \frac{l^4}{1,2,3,4}$ &c. ita facile omnia ad magnam satis exactitudinem habebuntur »

Leibniz reconnait donc clairement ici le developpement en série de l'exponentielle comme l'inverse du développement du logarithme. Dans ce passage, Leibniz affirme la priorité d'une méthode analytique sur la réduction aux simples et la méthode combinatoire des tables.

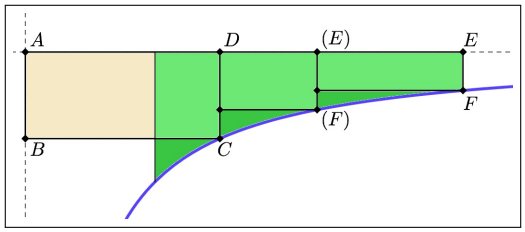
### Correction et Incorrection de la formule

On constate que les formules que Leibniz donne au début du *Quadratura Circuli et Hypebolæ Arithmetica. Logarithmi* (A VII, 6, N.32) sont fausses par plusieurs aspects :

- ⋆ Il répète l'erreur qu'il avait faite un mois plus tôt dans le *De Exponentibus et Indicibus ad Quadraturas Applicatis.* (A VII, 5 B, N.88) avec la confusion entre le développement de $\ln(x)$ et $\ln(1+x)$.
- ⋆ Il maintient l'alternance des signes dans la série de l'exponentielle.

Il réalise la première erreur dans ce même texte, en réalisant que la propriété du logarithme ne fonction que si l'on prend l'unité pour base d'intégration. Ainsi l'abscisse doit être diminuée de 1 :

> *Attention pour ne pas faire d'erreur : on voit que si AE, A(E) et AD sont en progression géométriques, alors les espaces E(F) et (E)C seront égaux et plus généralement si AE forme les nombres alors les espaces DEFC formeront leurs logarithmes. Ainsi donc :*
> - $l$ *de* $\underbrace{1+e}_{n} = \frac{e}{1} - \frac{e^2}{2} + \frac{e^3}{3} - \frac{e^4}{4} + \frac{e^5}{5}$ *&c.* -
>
> *Et de plus* $e = n - 1$.[32]




En revanche, il corrigera la seconde dans le traité sur la quadrature arithmétique du cercle. Dans un manuscrit datant du 8 Octobre 1680, le *De Logarithmicae aequationibus et calculo curvarum transcendenter expressarum differentiali seu comparatione calculorum differentialis, exponentialis, replicati et infiniti - Scheda II* (LH 35, 5, 14 Bl.3-4), Leibniz a corrigé ces deux erreurs :

> *Soit AX ou AD ou bien une quelconque autre distance entre le point A et le point d'un nombre choisi sur l'axe AC, on l'appelle n. Ce nombre CX ou CD sera* $b \pm n$ *et on appellera son logarithme* $l$. *Cela donne :*
> $l = n \mp \frac{n^2}{2b} + \frac{n^3}{3b^2} \mp \frac{n^4}{4b^3}$ *etc.*
> *et à l'inverse* $n = l \pm \frac{l^2}{1,2b} + \frac{l^3}{1,2,3b^2} \pm \frac{l^4}{1,2,3,4b^3}$ *etc.*[33]

Les deux formules sont bien réciproques l'une de l'autre.

## 13.2.3 Démonstration Géométrique de la Formule

Il donne la preuve de cette relation au sein de son traité sur la quadratirure arithmétique du cercle, rédigé entre le mois de Juin et le mois de Septembre 1676. La preuve se trouve dans proposition 47, mais elle s'appuie sur une propriété de la courbe logarithmique qu'il démonstre dans la proposition précédente, c'est-à-dire la proposition 46.

---

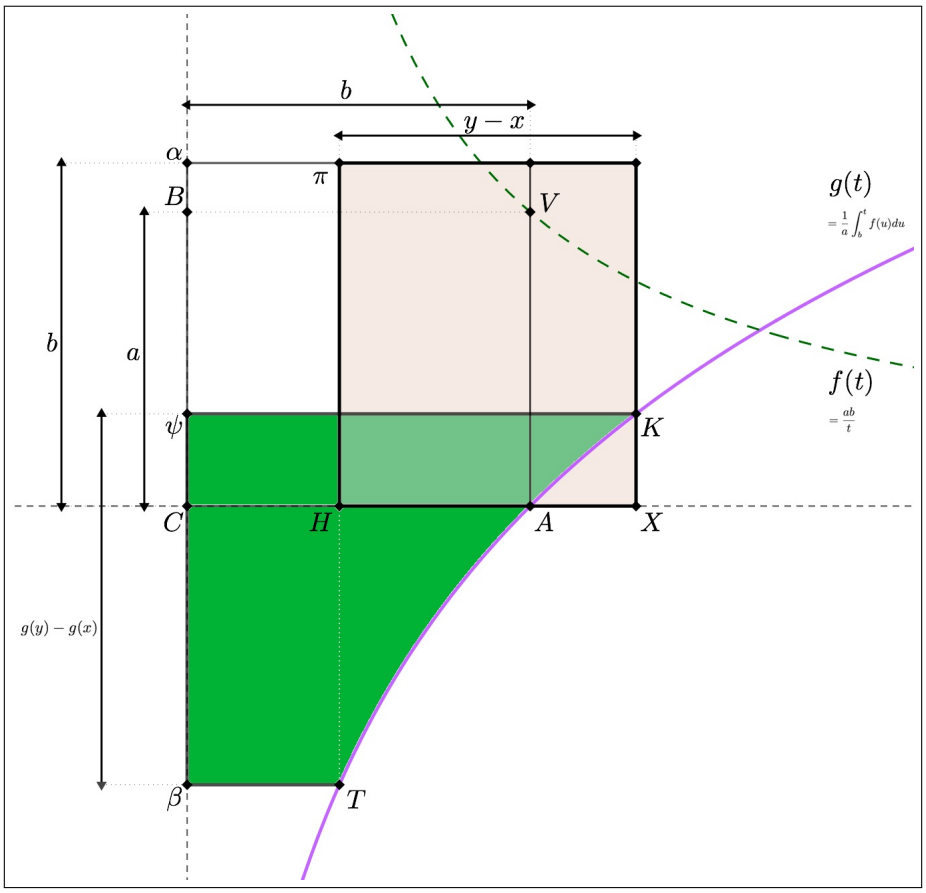
32. A VII, 6, N.32, *Quadratura Circuli et Hypebolæ Arithmetica. Logarithmi*, Juillet 1676 - p.372 : « Cavendum ne erremus : constat si sint $AE$. $A(E)$. $AD$. progressionis Geometricæ fore $E(F)$ et $(E)C$ spatia æqualia et generaliter si sint $AE$ ut numeri fore spatia $DEFC$ ut logarithmos. Ergo sic $l$ ab $\underbrace{1+e}_{n} \sqcap \frac{e}{1} - \frac{e^2}{2} + \frac{e^3}{3} - \frac{e^4}{4} + \frac{e^5}{5}$ &c. Est autem $e \sqcap n - 1$. »

33. LH 35, 5, 14 Bl.3-4, *De Logarithmicae aequationibus et calculo curvarum transcendenter expressarum differentiali seu comparatione calculorum differentialis, exponentialis, replicati et infiniti - Scheda II*, 8 Octobre 1680 : « $AX$ vel $AD$ aut quæcunque alia distantia puncti $A$ a puncto numeri in Axe $CA$ sumti, appellatur $n$. Ipse numerus $CX$ vel $CD$ erit $b \pm n$ et eius logarithmus $XK$ vel $RD$ vocetur $l$. Fiet : $l$ æqu. $n \mp \frac{n^2}{2b} + \frac{n^3}{3b^2} \mp \frac{n^4}{4b^3}$ &c. et contra fiet $n$ æqu. $l \pm \frac{l^2}{1,2b} + \frac{l^3}{1,2,3b^2} \pm \frac{l^4}{1,2,3,4b^3}$ &c. »

### L'invariance par l'intégration de l'Exponentielle

Dans la proposition 46, Leibniz donne une quadrature de la courbe logarithmique selon les ordonnées et non selon les abscisses. Il s'agit donc en fait, en terme moderne, d'une intégration de la fonction exponentielle, plus que de la logarithmique. Cela étant, la courbe est nécessairement définie comme le logarithme, à savoir la primitive de l'hyperbole, puisque l'exponentielle, en tant que fonction analytique, n'est pas encore connue ni établie.

> *Quadrature de la figure logarithmique, infinie dans son entier, mais aussi quadrature de ses parties finies définies par les nombres ou ordonnées qu'on mène depuis la courbe jusqu'à l'asymptote. De plus, cette quadrature est purement géométrique et ne suppose aucunement la construction de la courbe logarithmique mais seulement la prise en compte de l'hyperbole dont elle est issue.* [34]




Leibniz annonce donc la quadrature suivante :

> *Ceci étant posé, le rectangle $\pi HX$ sous le coté $\pi H$, c'est-à-dire $CA$ le nombre primaire dont on a bien-sûr choisi le logarithme égal à 0, ou encore $CA$ l'axe ; et sous le coté $HX$ délimité par la différence des deux nombres $\psi K$ et $\beta T$ ; ce rectangle donc, est égal à l'espace quadrilinéaire, c'est-à-dire la zone $T\beta\psi KAT$ déliminitée d'une part par les deux nombres extrêmes $\psi K$ et $\beta T$, et d'autre part par la portion d'asymptote $\beta\psi$ (qui vaut tantôt la somme tantôt la différence des logarithmes des deux nombres) et la courbe logarithmique $KAT$. Et il apparait qu'on trouve cet espace quand bien même la courbe ne serait pas construite.* [35]

34. A VI, 6, N.51, *De Quadratura Arithmetica Circuli Ellipseos et Hyperbolæ*, Juin-Septembre 1676 - p.634 : « Quadratura figuræ Logarithmicæ totius pariter infinitæ, ac portionum finitarum ; per numeros sive per ordinatas ex curva in asymptoton ductas absectarum. Est autem hæc Quadratura absolute Geometrica, nec Logarithmorum constructionem supponit, sed tantum notitiam Hyperbolæ ex qua orti sunt. »

35. A VI, 6, N.51, *De Quadratura Arithmetica Circuli Ellipseos et Hyperbolæ*, Juin-Septembre 1676 - p.634-635 : « His positis rectangulum $\pi HX$ sub $\pi H$, vel $CA$ numero primario, cujus logarithmus scilicet sumtus est, 0, sive $CA$ axe, et sub $HX$ duorum numerorum $\psi K$, $\beta T$, differentia, comprehensum, æquatur spatio quadrilineo sive zonæ $T\beta\psi KAT$ duobus numeris extremis, $\beta T$, $\psi K$, portione asymptoti, $\beta\psi$ (logarithmorum a duobus numeris, nunc summa, nunc differentia) et curva Logarithmica $KAT$, comprehenso. Quod spatium invenire patet, etiamsi curva non sit constructa. »

Il considère donc que l'hyperbole suit l'équation suivante :

$$f(t) = \frac{ab}{t}$$

La courbe logarithmique $g$ est sa quadrature, normalisée par la base de l'aire qu'on intègre, à savoir $a$ :

$$g(t) = \frac{1}{a}\int_b^t f(u)du = b\ln\left(\frac{t}{b}\right)$$

Leibniz annonce que l'aire du rectangle $\pi HX$ est égale à la quadrature de la courbe logarithmique $T\beta\psi KAT$.

- ⋆ L'aire du rectangle $\pi HX$ vaut alors $b(y-x)$.
- ⋆ L'aire de la figure quadrilinéaire $T\beta\psi KAT$ vaut $\int_{g(x)}^{g(y)} g^{-1}(u)du$ ;

La quadrature de la courbe logarithmique s'écrit alors :

$$b(y-x) = \int_{g(x)}^{g(y)} g^{-1}(u)du$$

Voici donc en substance, la démonstration que donne Leibniz de cette proposition.
L'aire sous l'hyperbole est égale à celle du rectangle ayant pour côtés une ordonnée de la courbe logarithmique et la base de l'intégration $a$ :

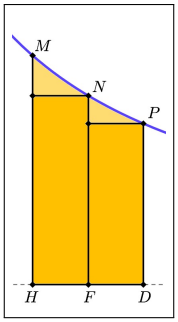
$$\int_b^t f(u)du = ag(t)$$

Leibniz choisit alors deux abscisses infiniment proches : $t - dt$ et $t$

$$\int_{t-dt}^t f(u)du = a(g(t) - g(t-dt))$$

Il applique un premier raisonnement de calcul différentielle en affirmant qu'on peut considérer que cette aire comprise entre deux abscisses infiniment proches peut être considérée comme un rectangle. Autrement dit, la crête qui constitue la différence entre l'aire sous l'hyperbole et l'aire du rectangle est un infiniment petit négligeable par rapport à un autre infiniment petit :

> *On voit de plus que l'on peut considérer, au moyen des infiniment petits, qu'à la place des figures quadrilinéaires $DN$ et $FM$, on a les rectangles $FDP$ et $HFN$.* [36]




Ceci revient, dans notre écriture à cette équation :

$$\int_{t-dt}^t f(u)du = f(t)dt$$

Ainsi, en remplaçant dans la première équation, on obtient :

$$f(t)dt = \frac{ab}{t}dt = a(g(t) - g(t-dt))$$

36. A VI, 6, N.51, *De Quadratura Arithmetica Circuli Ellipseos et Hyperbolæ*, Juin-Septembre 1676 - p.634-635 : « Constat autem pro quadrilineis ejusmodi infinite parvis $DN$, $FM$, assumi posse rectangula, $FDP$, $HFN$. »

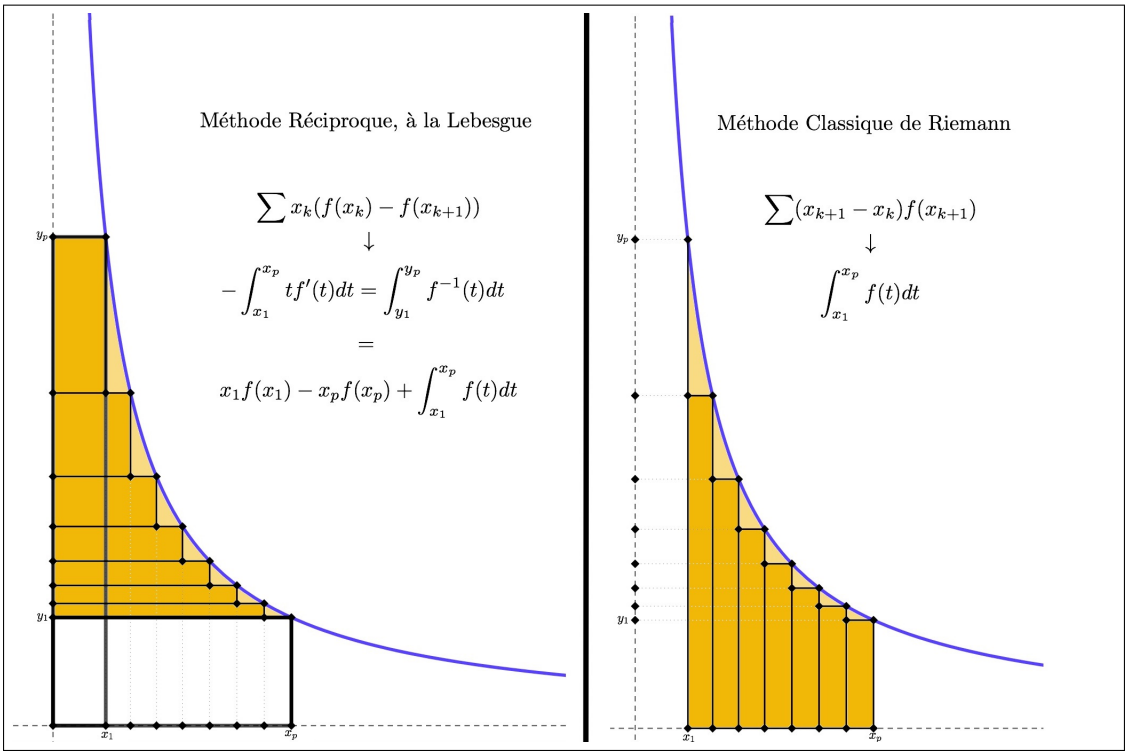
Et donc :

$$bdt = t(g(t) - g(t - dt))$$

En sommant les deux membres, Leibniz obtient l'égalité entre les deux aires :

$$b(y - x) = \int_x^y tg'(t)dt = \int_{g(x)}^{g(y)} g^{-1}(u)du \quad \text{avec } u = g(t)$$

Ici, l'intégrale n'est pas obtenue de façon classique par la somme des ordonnées, selon la méthode de Riemann, mais par l'addition des abscisses, selon la méthode de Lebesgue.




Ainsi, on obtient l'intégrale de la fonction réciproque, donc dans notre cas, la fonction exponentielle :

$$g^{-1}(u) = be^{\frac{u}{b}}$$

La propriété caractéristique de la courbe logarithmique que Leibniz démontre à la proposition 46 est donc en réalité une propriété de l'exponentielle, à savoir que :

$$\int_s^t be^{\frac{u}{b}}du = \int_{g(g^{-1}(s))}^{g(g^{-1}(t))} g^{-1}(u)du = b^2e^{\frac{t}{b}} - b^2e^{\frac{s}{b}}$$

Evidemment, notre écriture est anachronique. Néanmoins, la quadrature implémente la propriété que Leibniz déclare caractéristique de la courbe logarithmique, à savoir que sa quadrature est proportionnelle à son ordonnée :

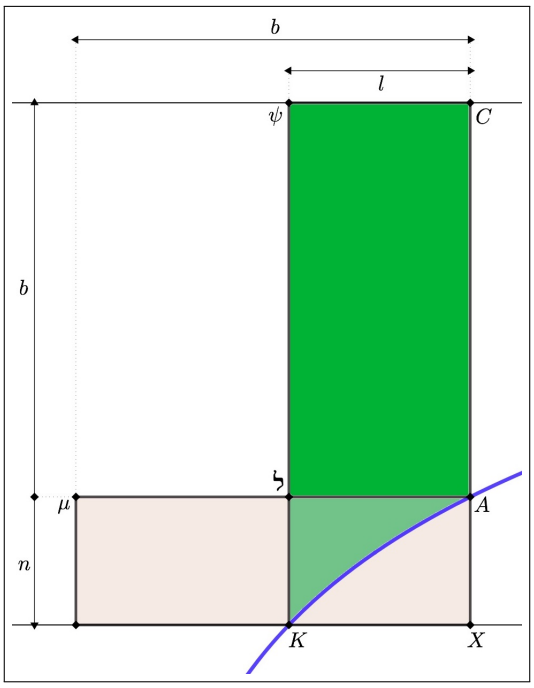
$$\int_s^t g^{-1}(u)du = b(g^{-1}(t) - g^{-1}(s))$$

Leibniz insiste sur le fait que cette propriété découle seulement de l'hypothèse que la courbe logarithmique est la primitive de l'hyperbole, et n'utilise en rien les propriétés de morphisme des logarithmes. De fait, nul n'est besoin d'expliciter la fonction $g$ dans cette démonstration, si ce n'est son lien d'intégration avec la fonction $f$. De même pour $g^{-1}$. Or cette propriété de la quadrature détermine la courbe, point par point. Leibniz a donc trouvé, au travers de cette propriété d'invariance par l'intégration, une caractéristique de la courbe logarithmique qui lui permet de tirer un lien d'identité entre ces deux aspects. Or nous avons vu que Leibniz a déjà bien établi cette propriété d'invariance pour la série exponentielle.

### La preuve du développement en série

Leibniz donne la preuve du fait que le développement de la série exponentielle est l'inverse de celui du logarithme dans la proposition 47 de son traité :

> *Posons que la courbe donnée $KAR$ soit comme suit. L'abscisse, que nous appelons $l$, est $A$ל ou $KX$, l'ordonnée que nous appelons $n$ est ל$K$ ou $AX$, et la droite constante, c'est-à-dire le paramètre $b$ est égal à $CA$*
>
> - *Soit $n$ égal à $\frac{l}{1} + \frac{l^2}{1,2b} + \frac{l^3}{1,2,3b^2} + \frac{l^4}{1,2,3,4b^3}$ etc.* -
>
> *Je dis que la courbe qui satisfait cette équation est la Logarithmique, telle que nous l'avons dit.* [37]




> *Je le démontre ainsi. Puisque $n$ ou ל$K$, à savoir la dernière ordonnée de l'espace $A$ל$KA$, est égale à la série décroissante $\frac{l}{1} + \frac{l^2}{1,2b} + \frac{l^3}{1,2,3b^2} + \frac{l^4}{1,2,3,4b^3}$ etc. alors la somme de toutes les ordonnées comprises entre le sommet $A$ et la base ל$K$, c'est-à-dire l'aire de l'espace $A$ל$KA$ sera par conséquent égale à la série décroissante $\frac{l^2}{1,2} + \frac{l^3}{1,2,3b} + \frac{l^4}{1,2,3,4b^2} + \frac{l^5}{1,2,3,4,5b^3}$ etc. d'une manière analogue à la proposition 29 que l'on démontre à partir de la proposition 25. Et l'espace $A$ל$KA$, divisé par $CA$, c'est-à-dire $b$, sera : $\frac{l^2}{1,2b} + \frac{l^3}{1,2,3b^2} + \frac{l^4}{1,2,3,4b^3} + \frac{l^5}{1,2,3,4,5b^4}$ etc. Donc $\frac{A\text{ל}KA}{b} + \frac{l}{1} = \frac{l}{1} + \frac{l^2}{1,2b} + \frac{l^3}{1,2,3b^2} + \frac{l^4}{1,2,3,4b^3} + \frac{l^5}{1,2,3,4,5b^4}$ etc. mais cette même série est égale à ל$K$ par construction. Donc par la nature de la courbe, on aura $\frac{A\text{ל}KA}{b} + \frac{l}{1} =$ ל$K$ ou encore $A$ל$KA + lb$ égal au produit de ל$K$ par $b$. De plus $lb$ est égal au produit de $l$ par $b$, c'est-à-dire de $A$ל par $CA$, c'est donc le rectangle $CA$ל. Mais aussi ל$K = AX$, et l'on pose $\mu A = CA = b$, alors on aura que le produit de ל$K$ par $b$ sera égal au rectangle $\mu AX$. On obtient donc que l'espace $AC\psi KA$ est composé de l'espace $A$ל$KA$ et du rectangle $CA$ל (ou ce qui revient au même : $lb$), et cet espace est égal au rectangle $\mu AX$. En vérité, le fait que cela advienne pour n'importe quel point $K$ choisi sur la courbe est une propriété de la courbe logarithmique, de la même manière qu'on a démontré dans sa quadrature, lors de l'exposé de la précédente proposition.* [38]

37. A VI, 6, N.51, *De Quadratura Arithmetica Circuli Ellipseos et Hyperbolæ*, Juin-Septembre 1676 - p.639 : « Ponamus datam esse curvam ejusmodi $KAR$, in qua abscissis $A$ל vel $KX$ positis $l$, ordinatis ל$K$ vel $AX$ positis $n$, et recta constante seu parametro $b$ æqu. $CA$, sit $n$ æqu. $\frac{l}{1} + \frac{l^2}{1,2b} + \frac{l^3}{1,2,3b^2} + \frac{l^4}{1,2,3,4b^3}$ &c. ajo curvam quæ huic æquationi satisfaciat esse Logarithmicam qualem diximus. »

38. A VI, 6, N.51, *De Quadratura Arithmetica Circuli Ellipseos et Hyperbolæ*, Juin-Septembre 1676 - p.639-640 : « Hoc ita demonstro ; quoniam $n$ vel ל$K$. ordinata ultima spatii $A$ל$KA$ est æqualis seriei decrescenti $\frac{l}{1} + \frac{l^2}{1,2b} + \frac{l^3}{1,2,3b^2} + \frac{l^4}{1,2,3,4b^3}$ &c. erit summa omnium aliarum ordinatarum inter verticem $A$ et basin ל$K$ comprehensarum, seu area spatii $A$ל$KA$, æqualis seriei decrescenti, $\frac{l^2}{1,2} + \frac{l^3}{1,2,3b} + \frac{l^4}{1,2,3,4b^2} + \frac{l^5}{1,2,3,4,5b^3}$ &c. quemadmodum demonstratur ex prop. 25 ad modum propositionis 29. et $A$ל$KA$ spatium divisum per $CA$ sive b, erit $\frac{l^2}{1,2b} + \frac{l^3}{1,2,3b^2} + \frac{l^4}{1,2,3,4b^3} + \frac{l^5}{1,2,3,4,5b^4}$ &c. Ergo $\frac{A\text{ל}KA}{b} + \frac{l}{1}$ æqual. $\frac{l}{1} + \frac{l^2}{1,2b} + \frac{l^3}{1,2,3b^2} + \frac{l^4}{1,2,3,4b^3}$ &c. at eadem series æqual. ל$K$ ex constructione, ergo ex natura curvæ, erit $\frac{A\text{ל}KA}{b} + l$ æqual. ל$K$ sive $A$ל$KA + lb$ æqual. ל$K$, in $b$. Est autem $lb$ factum ex $l$. in $b$. seu ex $A$ל in $CA$, seu rectang $CA$ל, et ל$K$,

Cette propriété d'invariance par intégration permet donc à Leibniz de relier la série exponentielle à la courbe logarithmique. Cet exemple illustre bien à quel point la méthode d'invention diffère de l'exécution chez Leibniz. La preuve que nous avons reconstituée est parfaitement géométrique. Nulle trace de son origine combinatoire, qui consistait à faire la somme des différents paraboloïdes.

æqual. $AX$ et $\mu A$ ponatur æqual. $CA$, vel $b$ erit $\text{ל}K$ in $b$ æqual. rectang. $\mu AX$. Ergo fiet spatium $AC\psi KA$ compositum ex spatio $A\text{ל}KA$, et rectangulo ($lb$ id est) $CA\text{ל}$, æquale rectangulo $\mu AX$. Id vero quocunque in curva sumto puncto $K$, infra $A$ contingere proprietas est curvæ Logarithmicæ, quemadmodum demonstratum est in Quadratura ejus, propositione præcedenti exhibita. »- *Nota Bene* : les propositions 25 et 29 auxquelles Leibniz fait référence dans la démonstration concerne l'intégration des monômes $\int x^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$.

## 13.3 Les Equations Exponentielles

Pour Leibniz, il semble que l'une des avancées principales de son travail sur les exposants ait consisté à donner à ces objets le statut d'inconnues algébriques. Finalement, le fait de noter l'exposant par une lettre ne constitue pas le point décisif de cette recherche et n'est d'ailleurs pas novateur, comme Leibniz l'écrit en 1692 dans le *Journal des Savans* :

> *Il n'est pas mal aisé à ceux qui sont versez dans l'Algebre ordinaire, de calculer par des exposans en lettres, tout comme en nombres, lors que ces lettres ou ces nombres signifient les grandeurs connuës. Mais lors qu'elles signifient les grandeurs mesmes qu'on demande, ou qui ne sont pas déterminées, personne n'a encore montré la façon d'y calculer. Dans le second mois de la premiere année des Actes de Leipsic, je proposai cet exemple aisé il y a déjà dix ans. Soit l'equation* $x^x + x = 30$*, on demande la valeur du nombre* $x$*. Il est visible que* 3 *y satisfait : car* $3^3 + 3$*, c'est-à-dire* $27 + 3$ *fait* 30*. Mais comme il arrive souvent que la grandeur demandée n'est pas trouvable en nombres rationels, comment faire ?* [39]

Leibniz précise à la fin de son article que ces questions apparaissent concrètement dans certains problèmes, notamment les problèmes liés aux questions économiques [40] :

> *On a rencontré de tels exemples en raisonnant sur l'interêt.* [41]

Dès les première années de Hanovre, Leibniz travaille activement sur la question des exposants inconnus. En 1679, il pose clairement le problème à Huygens dans une lettre, en évoquant un exemple très similaire à celui qu'il donnera en 1692 dans le *Journal des Sçavans* :

> *Il y a encor une espece de calcul, qui m'arreste, mais aussi personne ne s'en est servi. Il seroit pourtant utile à certaines choses. En voicy un exemple ; soit* $x^z + z^x$ *égal à* $b$*, et* $x^x + z^z$ *égal à* $c$*. Or* $b$ *et* $c$ *estant données, on demande* $x$ *et* $z$*. Prenons un exemple plus aisé* $x^x - x$ *est egal à* 24*, on demande la valeur de* $x$ *et l'on trouvera que c'est 3, car* $3^3 - 3$ *est* $27 - 3$*, c'est-à-dire* 24*. Voilà donc une équation qui est nullius certi gradus cogniti, et dont le degré même est demandé. On pourroit bien décrire des lignes, dont l'intersection pourroit donner la solution de ces problemes ; mais je demande une solution que me donne la valeur de l'inconnüe.* [42]

Ainsi, la question ne réside pas seulement dans la détermination de la solution, mais sur la forme que va prendre cette détermination. Une détermination par intersection de courbes donne une construction géométrique de la valeur cherchée tandis qu'une résolution algébrique permet d'obtenir une expression analytique de la solution. Leibniz ajoute dans sa lettre à Huygens :

> *Je vous supplie, Monsieur, d'y songer un peu. Car vous voyés que ce sont des veritables problemes determinés, et il faut bien qu'il y ait une methode dans la nature pour y répondre.* [43]

Selon Leibniz, si donc la solution existe, alors elle doit être nécessairement constructible, dans un sens qui n'est bien-sûr pas celui de l'informatique actuelle.

### 13.3.1 Une résolution inconnue mais possible

#### Des équations hétéroclites

On trouve des travaux sur les équations exponentielles dès l'année 1677. Dans une lettre à Oldenburg, Leibniz évoque ce genre de question en traitant de l'usage général que l'on pourrait avoir de la méthode inverse des tangente :

> *En réalité, je ne sais pas encore si cette méthode inverse des tangentes est bien générale, et il y d'autres genres de problèmes qui ne me sont jusqu'ici hors d'atteinte, parmi lesquels cet exemple que tu peux voir :*

39. [42] G.W. Leibniz, *Nouvelles remarques de M. de Leibnis, touchant l'analise des transcendantes, differentes de celle de la géométrie de Descartes* dans le *Journal des Sçavans*, N.27, 14 Juillet 1692 - p.321.

40. *Cf* [52] G.W. Leibniz, *Hauptschriften zur Versicherungs- und Finanzmathematik*, *éd.* E. Knobloch, *Akademie* Verlag, Berlin, 2000

41. [42] G.W. Leibniz, *Nouvelles remarques de M. de Leibnis, touchant l'analise des transcendantes, differentes de celle de la géométrie de Descartes* dans le *Journal des Sçavans*, N.27, 14 Juillet 1692 - p.321.

42. A III, 2, N.346, Lettre à C. Huygens du 18 Septembre 1679 - p.844 : l'expression latine « *nullius certi gradus cogniti* » signifie « d'absolument aucun degré connu »

43. A III, 2, N.346, Lettre à C. Huygens du 18 Septembre 1679 - p.844

- $x^y + y^x = xy$ *et* $x^x + y^y = x + y$ -

*où il y a deux inconnues, x et y et aussi deux équations pour les trouver. On cherche autant la valeur de l'une comme de l'autre lettre. Résoudre un tel problème, ou bien en nombre ou bien en ligne, est à mon avis extrêmement difficile. Si par contre il s'agit d'approximations, je pense pouvoir y satisfaire. Si Newton peut apporter une certaine lumière sur cet épineux problème qui met en valeur la force de l'esprit, il aura fait prospérer l'Analyse.* [44]

Leibniz envoie cette lettre durant l'été 1677. Pour mieux la comprendre, il nous faut faire l'analyse d'un manuscrit qu'il rédige en Février 1677, soit quatre mois plus tôt. Le *Æquationes Transcendentes Exponentales* (LH 35, 5, 13 Bl.1-2) traite précisément de la résolution de ce type d'équation :

*Rien, dans toute l'analyse, n'est plus difficile que de résoudre ces équations hétéroclites dans lesquelles on ne peut pas extraire les inconnues. Telles sont :*

- $b^z + c^\nu = z\nu$ *et* $b^\nu + c^z = bc$ -

*Si quelqu'un peut trouver la valeur des deux inconnues z et ν à l'aide de ces deux équations, je l'aurai assurément félicité.* [45]

On peut toutefois noter une différence importante avec l'exemple de sa lettre à Oldenburg, à savoir que l'inconnue ne se trouve jamais ici simultanément dans la racine et l'exposant. Ici, les racines, $b$ et $c$, sont connues. Dans ces conditions la seule voie qui permette de capturer ce type d'équations transcendantes passe par les séries infinies :

*L'unique chemin se trouve être par les séries infinies. En effet, on peut trouver z à partir de la valeur donnée de ce $b^z$. Mais cette valeur implique $c^\nu$ de la série infinie (ce que j'ai noté). A partir de là, on ne peut pas l'extraire sinon avec difficulté.* [46]

De fait, la résolution logarithmique de Leibniz par les séries infinies n'est pas rigoureuse à cette époque. Comme on l'a vu, Leibniz dispose d'une formule analytique pour le logarithme. Si $r^p = d$ alors :

$$p = \frac{d}{1} - \frac{d^2}{2r} + \frac{d^3}{3r^2} - \frac{d^4}{4r^3} + \dots$$

Cette formule, qui est fausse, n'est pas donnée dans le texte de 1677, mais Leibniz sous-entend clairement par cette référence aux séries infinies qu'il dispose d'une méthode de ce type pour extraire les exposants. Nous continuerons à utiliser cette formule pour illustrer la suite de ce texte, car c'est surtout la forme de cette équation qui nous intéresse ici. Mais laissons là cette question. La difficulté à laquelle Leibniz se confronte manifestement se trouve dans l'interdépendance des variables. En résolvant l'un des exposants inconnus à l'aide d'une série infinie, on projette l'autre inéluctablement dans une nombre infini de termes :

$$z = \frac{z\nu - c^\nu}{1} - \frac{(z\nu - c^\nu)^2}{2b} + \frac{(z\nu - c^\nu)^3}{3b^2} - \frac{(z\nu - c^\nu)^4}{4b^3} + \dots$$

L'extraction de $z$ a comme prix de rendre impraticable celle de $\nu$.

### Inconnue et Indéterminée

Leibniz ne dispose visiblement pas des outils suffisants pour s'attaquer à ce type d'équation. Pourtant, il ne désespère pas et se propose de retrouver la démonstration par l'analyse suivante :

44. A III, 2, N.54, Lettre à H. Oldenburg du 1er Juillet 1677 - p.179 : « Generalem vero methodum tangentium inversam nondum quod sciam habemus, sunt et alia problematum genera quæ hactenus in potestate non habeo, quorum ecce exempla. Sint duæ æquationes $x^y + y^x \sqcap xy$ et $x^x + y^y \sqcap x + y$ ; duæ sunt incognitæ $x$, $y$, duæque ad eas inveniendas æquationes, quæritur valor tam unius quam alterius literæ. Talia problemata vel in numeris vel in lineis solvere difficillimum arbitror, si tamen de appropinquationibus agatur, puto posse iis satisfieri. Si quam huic difficultati lucem affere potest Neutonus pro ea qua pollet ingenii vi multim Analysin promovebit. »

45. LH 35, 5, 13 Bl.1-2, *Æquationes Transcendentes Exponentales*, Février 1677 : « Nihil in tota Analysi difficilius quam solvere æquationes illas Heteroclitis, in quibus incognitæ tolli non possunt, qualis istæ est : $b^z + c^\nu \sqcap z\nu$ et $b^\nu + c^z \sqcap bc$. Si quis ope harum duarum æquationum invenire valorem duarum incognitarum $z$ et $\nu$ potest, hunc equidem laudavero. »

46. LH 35, 5, 13 Bl.1-2, *Æquationes Transcendentes Exponentales*, Février 1677 : « Via unica est per series infinitis. Nam potest inveniri $z$ ex dato valore ipsius $b^z$. Sed ille valor involvet $c^\nu$ (hunc mihi nota est), infinitæ seriei unde non nisi difficulter tolli poterit. »

*Cela dit, regardons si nous avions la solution. Soit $b^z = z\nu - e$ et $c^\nu = e$. De la même manière, soit $b^\nu = bc - f$ et $c^z = f$. D'abord nous aurons $z$ à partir de $z$, $\nu$ et $e$ et d'un autre coté $z$ à partir de $f$. De même, $\nu$ à partir de $e$ et $\nu$ à partir de $b$ et $f$.*[47]

La méthode consiste donc à introduire les indéterminées $e$ et $f$. Ainsi, $\nu$ peut être extrait de deux façons, dont aucune ne dépend de $z$ :

*Et chacune de ces valeurs sera un infini régulier, c'est-à-dire sans la moindre inconnue dans les exposants. Après qu'on a attribué deux valeurs à ce $\nu$, il nous faudra une équation dans laquelle il reste autant les deux inconnues $e$ et $f$. Et à l'aide de cette équation, on obtiendrai la valeur de $e$ à partir de $f$.*[48]

Grâce à ces deux équations, on obtient $e$ en fonction de $f$ :

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{bc-f}{1} - \frac{(bc-f)^2}{2b} + \frac{(bc-f)^3}{3b^2} - \frac{(bc-f)^4}{4b^3} + \dots \\ &= \frac{e}{1} - \frac{e^2}{2c} + \frac{e^3}{3c^2} - \frac{e^4}{4c^3} + \dots\end{aligned}$$

En réalité, extraire $e$ de cette équation est aussi problématique que l'extraction de $\nu$ dans le premier développement naïf. Mais $e$ et $f$ ne sont pas les inconnues cherchées, ce sont des indéterminées qu'on a ajouté de façon arbitraire. Il est donc possible qu'il ne soit pas nécessaire d'avoir une extraction parfaite. Leibniz poursuit le raisonnement :

*On recommence, puisqu'on obtient $z$ deux fois, à partir de $f$ et à partir de $\nu$ et $e$.*[49]

Pour $z$, la situation est plus complexe puisqu'il dépend de $\nu$ dans l'équation $b^z = z\nu - e$. On constate que dans notre première citation, Leibniz avait établit, à partir de cette équation, que $z$ est obtenu à partir de $z$, $\nu$ et $e$, qui sont les trois variables de $z\nu - e$. L'extraction correspondait donc à celle des exposants, suivant la formule erronée que nous avons donnée. Ici, Leibniz écrit qu'on obtient $z$ à partir de $\nu$ et $e$ seulement. L'extraction est donc bien plus complexe, puisque $z$ apparait à la fois comme exposant et comme facteur dans l'équation. Cela confirme qu'ici, Leibniz invoque des extractions qui sont possibles en théorie mais dont il ne détient pas la moindre recette :

*A l'aide des deux valeurs, on a, à nouveau, la valeur de ce $\nu$ à partir de $f$ et $e$, qu'on avait déjà du égaliser avant. On obtiendra une nouvelle équation dans laquelle il ne reste de même que $e$ et $f$. On obtient donc ainsi de nouveau la valeur de ce $e$ à partir de $f$. Et ainsi finalement on a l'extraction de $e$, en égalisant les deux valeurs. Il subsistera une équation dans laquelle restera la seule $f$. De même que, par une méthode identique, on pourra obtenir une équation singulière pour la seule $e$, ou bien la seule $\nu$ ou encore la seule $z$ dans la mesure où c'est celles-ci ou celle-là que nous voulions au final.*[50]

La démarche de Leibniz n'est donc pas ici de déterminer un algorithme concret et praticable pour résoudre cette équation. Il ne dispose que de techniques élémentaires pour extraire les exposants dans des cas précis, où les variables sont suffisamment décorrélées. Ici, Leibniz propose justement une méthode abstraite et théorique pour agir sur l'interdépendance des variables [51]Cette méthode consiste à introduire de nouvelles variables arbitraires qui génèrent de nouvelles relations et donc de nouvelles équations. Le rapport complexe qu'entretiennent les deux inconnues est ainsi réduit à d'autres rapports, plus simples.

47. LH 35, 5, 13 Bl.1-2, *Æquationes Transcendentes Exponentales*, Février 1677 : « Videamus tamen an habeatur remedium, sit $b^z \sqcap z\nu - e$ et $c^\nu \sqcap e$. Eodemque modo sit $b^\nu \sqcap bc - f$ et $c^z \sqcap f$. Habebimus primum $z$ ex $z.\nu.e$ rursus $z$ ex $f$. Itemque $\nu$ ex $e$ et $\nu$ ex $b.f$. »

48. LH 35, 5, 13 Bl.1-2, *Æquationes Transcendentes Exponentales*, Février 1677 : « Et unusquidque horum valorum infinitus erit ordinarius id est sine ulla incognita in exponente. Conferendo duos valores ipsius $\nu$, debebitur æquatio in qua tantum restabunt incognitæ duæ $e$ et $f$ et ope huius æquationis habebitur valor $e$ ex $f$. »

49. LH 35, 5, 13 Bl.1-2, *Æquationes Transcendentes Exponentales*, Février 1677 : « Rursus quia $z$ habetur bis ex $f$ et ex $\nu.e$. »

50. LH 35, 5, 13 Bl.1-2, *Æquationes Transcendentes Exponentales*, Février 1677 : « Ope duorum valorum habebitur rursus valor ipsius $\nu$ ex $f$ et $e$ quem priori æquando, habebitur nova æquatio in qua tantum restabunt item $f$ et $e$. Habetur ergo rursus valor ipsius $e$ ex $f$ et ita tandem sublata $e$, duos valores æquando supererit æquatio in qua sola restabit $f$. Quemadmodum eodem modo haberi poterit singularis æquatio pro sola $e$, aut sola $\nu$ aut sola $z$, prout hanc vel illam ultimum esse voluimus. »

51. On retrouve cette façon de rédiger une démonstration théorique où les opérations intermédiaires de résolutions ne sont pas faisable en pratique, dans le texte sur les lignes porniques LH 35, 13, 3, Bl.134-135, *Linea pronicæ progressionis*, Juin 1682, *Cf* p.489.

**La résolution en nombre**

Dans la lettre à Oldenburg de Juillet 1677, Leibniz évoquait les problèmes en nombre, juste à la suite de la question des équations exponentielles :

> *L'analyse de Diophante, également, c'est-à-dire la résolution des problèmes en nombres rationnels n'a pas encore trouvé son aboutissement.* [52]

Ce parallèle entre ces questions, très difficiles toutes les deux, se trouve également dans le *Æquationes Transcendentes Exponentales* de Février 1677 :

> *Je pense à une autre voie qui conviendrait autrement à la solution des problèmes en nombres. Assurément, pour trouver la racine d'une équation en nombre, on l'extrait sous forme littérale. Mais ainsi, comme pour les lettres arbitraires, quelque chose doit finalement disparaître, ce qui est nécessaire pour continuer l'extraction. Et ainsi, la racine devient finie à la place d'infini. Si l'on menait ceci à terme avec une grande perfection, on pourrait conduire au but l'Arithmétique de Diophante. Et ainsi l'extraction des racines affectées doit être aussi ramenée à ceci, celle des pures, de sorte que bien entendu pour un certain terme, ce qui doit disparaître disparaisse. Voilà ce que j'ai à dire jusqu'ici au sujet de ces équations hétéroclites où l'inconnue est dans l'exposant.* [53]

Il y a donc, pour Leibniz, une difficulté commune au sein des équations diophantiennes, où l'inconnue est un nombre rationnel et et des équations exponentielles, où l'inconnue est dans l'exposant. Le fait que l'exposant fût à l'origine un entier qui désignait le degré de l'équation ne constitue pas le point commun de ces problèmes. Le parallèle se trouve dans la méthode. Il s'agit de « ramener l'extraction des racines affectées à celle des pures » (« *extractio radicum affectarum etiam eo reducenda est, quo purarum* ») et d'ainsi faire en sorte que « ce qui doit disparaitre dispraisse » (« *evanescentes evanescant* »).
Pour réduire l'équation, il convient d'ajouter des variables indéterminées arbitraires qui permettent de décomposer ce qu'il appelle une "racine affectée" en "racines pures", c'est-à-dire de multiplier les équations intermédiaires afin de pouvoir réduire une relation complexe à des relations plus simples. Cette voie n'est pas seulement valable pour les équations exponentielles mais vaut aussi pour les problèmes de Diophantes qui posent une difficulté analogue. Ce manuscrit est donc très révélateur de l'approche combinatoire de Leibniz vis-à-vis de ce qu'il appelle "l'analyse des transcendantes", et de l'Analyse en général.

**Solution transcendante**

L'exemple de l'équation $x^x - x = 24$ ou $x^x + x = 30$ est un exemple que Leibniz aime souvent utiliser dans sa correspondance ou dans ses articles pour illustrer le problème des équations exponentielles. Il travaille sur cet exemple dans un billet de Novembre 1679.

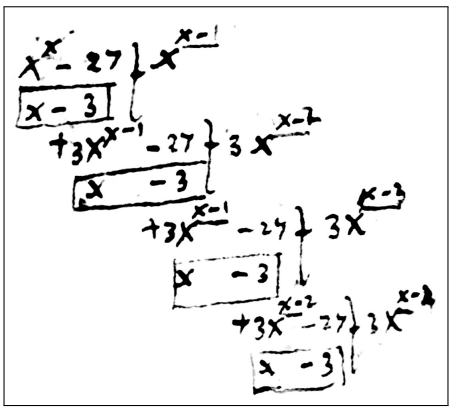
L'avantage de cette équation, c'est qu'en plus de connaitre sa solution, sa forme pourtant simple contient toutes les difficultés des relations d'interdépendance qui font difficulté dans les problèmes exponentiels. Leibniz applique la méthode de réduction. Il transforme l'équation :

$$x^x - 27 = x - 3$$

Comme 3 est une racine de l'expression, c'est donc pour Leibniz qu'on peut la diviser par $x - 3$ :

52. A III, 2, N.54, Lettre à H. Oldenburg du 1er Juillet 1677 - p.179 : « Analysis quoque Diophantea, seu solutio problematum in numeris rationalibus nondum perfectionem nacta. »

53. LH 35, 5, 13 Bl.1-2, *Æquationes Transcendentes Exponentales*, Février 1677 : « Aliam cogito viam, quæ etiam alias solutioni problematum in numeris conveniret, nimirum ut inveniatur radix æquationis in numeris extrahatur literaliter, sed ita ut ob arbitrarias literas, evanescat denique aliquid quod ad continuandam extractionem necessarium est, & ita radix pro infinita fiet finita : si hoc succederet ad magnam perfectionem perduci posset Diophantæa Arithmetica itaque extractio radicum affectarum etiam eo reducenda est, quo purarum, ut scilicet uno aliquo termino evanescentes evanescant & sequentes omnes. Hactenus dixi de illis æquationibus Heteroclitis ubi incognita est in exponente. »



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 5, 15 Bl.18

Leibniz se trompe dans ses divisions euclidiennes, et obtient :

$$\frac{x^x - 27}{x - 3} = x^{x-1} + 3x^{x-2} + 3x^{x-3} + \dots$$

Au lieu de :

$$\frac{x^x - 27}{x - 3} = x^{x-1} + 3x^{x-2} + 9x^{x-3} + 27x^{x-4} + \dots$$

Cette petite faute ne porte pas à conséquence. Pour Leibniz, cette résolution pose un problème de fond :

> *Mais il y a quelque chose dans ce calcul qui n'est pas satisfaisant, à savoir que* 27 *n'intervient pas dans le calcul, et la même chose se produit en divisant qu'il y ait à la fin* 27 *ou bien un autre nombre.* [54]

De fait, comme le degré de $x^x$ vaut $x$ et qu'il s'abaisse de 1 à chaque division, il faut donc $x$ étapes pour atteindre 0, à savoir le degré de 27. Or comme $x$ est inconnu, et potentiellement aussi grand que l'on souhaite l'imaginer, cette étape formelle où 27 interviendra dans le calcul ne se produira jamais. Cette réflexion en pousse une autre

> *Note : si une telle équation, comme $x^x - x = b$, ne trouve pas de solutions rationnelles, alors on ne peut la résoudre au moyen d'aucune équation ordinaire d'un quelconque degré. En effet, s'il s'agissait d'une certaine quantité irrationnelle, comme $\nu$, alors en substituant, on obtient : $x^\nu - x = b$ équation qui ne peut pas être résolue au moyen d'une équation ordinaire lorsque $\nu$, c'est-à-dire l'exposant, est irrationnel. Donc la racine de cette équation $x^x - x = b$ ou d'autres similaires, ne peut pas être irrationnel, quadratique, cubique ou quelque variable pure ou affectée d'un degré quelconque.* [55]

On retrouve ici l'idée que la solution d'une équation exponentielle ne peut être que rationnelle ou transcendante. Leibniz étudie cette question dans un autre manuscrit qui date du même mois et que nous analyserons dans la prochaine sous-section. Il termine alors sa remarque par :

> *Pour le reste, concernant cette méthode qui consiste à diviser l'équation en partie, je pense que l'on peut résoudre les équations par cette démarche lorsque cela se peut faire en nombre ; et ce même si les équations ont plusieurs inconnues.* [56]

Ainsi, cette méthode de division des équations ne fonctionne qu'à certaines conditions qui portent sur les solutions. Le fait que les solutions doivent être rationnelles pour que la résolution par la division puisse s'appliquer appuie le parallèle que Leibniz faisait deux ans plus tôt avec les problèmes diophantiens.

54. LH 35, 5, 15 Bl.18, Billet sans titre, Novembre 1679 : « Sed inest aliguid huic calculo quod non satisfacit, nimirum quod 27 non intrat in calculum et idem prodit devidendo quicquid si in fine sive 27 sive alius numerus »

55. LH 35, 5, 15 Bl.Bl.18, Billet sans titre, Novembre 1679 : « Nota : si æquatio talis, ut $x^x - x \sqcap b$ non est solubilis in rationalibus nullo modo per æquationem ordiariam cuiuscunque gradus solvi potest, quia si sit quantitas irrationalis quæcunque ut $\nu$ substituendo fiet : $x^\nu - x \sqcap b$ quæ æquatio non est solubilis per æquationem ordinariam quando $\nu$ seu exponens est irrationalis. Ergo huius æquationis $x^x - x \sqcap b$ vel similis radix non potest esse irrationalis, quadratica, vel cubica, vel alia pura aut affecta cuiuscunque gradus quæcunque. »

56. LH 35, 5, 15 Bl.Bl.18, Billet sans titre, Novembre 1679 : « Cæterum hoco modo dividendo æquationem in partes. Puto æquationes huius modi resolvi posse quando in numeris id fieri potest, etiamsi essent æquationes plurium incognitarum »

### 13.3.2 Résolution par le Logarithme

La résolution se fait donc en deux étapes. Dans la première, on réduit l'équation aux simples. Dans la seconde, on résout les simples. C'est ce que Leibniz écrit dans un billet daté du 13 Mai 1679 (donc le 23 Mai pour la calendrier grégorien), et intitulé *De incognitis in exponente* (LH 35, 5, 15 Bl.16), soit près de deux ans après sa lettre à Oldenburg de 1677 :

> *Pour rendre ces équations accessibles, on les divisent en plusieurs. On obtient tout autant d'équations propres au logarithme.* [57]

Ainsi, Leibniz repose le problème de la résolution de l'équation simple $a^x = b$.

#### Lien avec l'Hyperbole

La formule erronée de 1676 n'est alors sans nul doute plus d'actualité. Néanmoins, elle était fondée sur le principe que le logarithme est une primitive de l'hyperbole, dont l'un des développement en série est le très classique :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

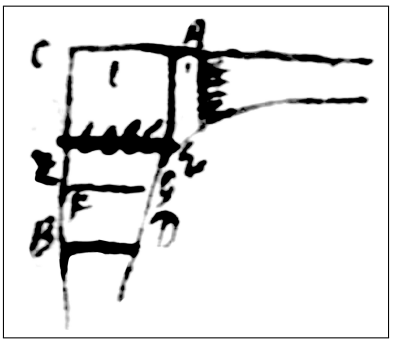
Dans le *De incognitis in exponente* (LH 35, 5, 15 Bl.16), Leibniz renouvelle cette idée, bien ancrée, du lien entre logarithme et hyperbole :

> *$b^z + c^z = y$. Soit $y = \nu + x$ et alors $b^z = \nu$ et $c^z = x$.*
> *Les deux seront au logarithme. Et à l'aide de la différentielle, on les réduit à l'hyperbole.* [58]

Ce lien, c'est donc celui du calcul différentiel. Le calcul différentiel permet de réduire des problèmes transcendants, liés au logartihme, à des questions rationnelles, liées à l'hyperbole.

> *En effet, à l'aide de la quadrature de l'hyperbole et des calculs similaires, nous pouvons ramener le calcul des exposants au calcul différentiel que l'on réduit à des figures communes, ayant admis leurs quadratures.* [59]

Dans un autre texte de la même période, le *Tentata impossibilitas quadraturæ* (LH 35, 5, 15 Bl.19-20) daté de Novembre 1679, Leibniz donne explicitement cette quadrature à laquelle il fait si souvent référence, sans entrer dans les détails :




Manuscrits de Leibniz - LH 35, 5, 15 Bl.19

> *Posons que le fait de trouver le logarithme dépend de la résolution d'une équation dans laquelle l'inconnue est dans l'exposant. La quadrature d'une portion d'hyperbole dépend du logarithme. D'ailleurs la*

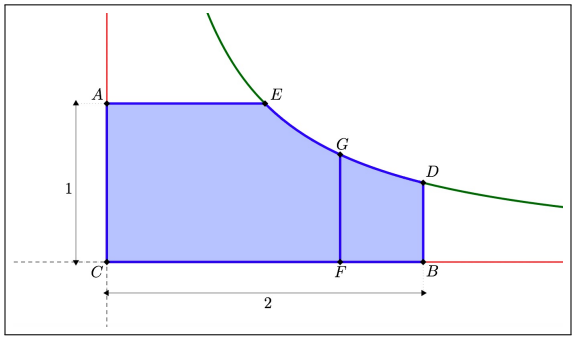
57. LH 35, 5, 15 Bl.16, *De incognitis in exponente*, 23 Mai 1679 : « Ut illæ æquationes reddantur tractabiles dividantur in plures : fient totidem æquationes ad Logarithmicam »

58. LH 35, 5, 15 Bl.16, *De incognitis in exponente*, 23 Mai 1679 : « $b^z + c^z$ æqu. $y$ sit $y$ æqu. $\nu + x$ fiatque $b^z$ æqu. $\nu$ et $c^z$ æqu. $x$. Erunt ambæ ad logarithmicam : et ope differentialis reducentur ad hyperbolam. »

59. LH 35, 5, 15 Bl.16, *De incognitis in exponente*, 23 Mai 1679 : « Nam ope quadraturæ Hyperbolæ et calculorum similium possumus revocare calculus exponentium ad calculum differentialem qui tandem suppositis quadraturis reducitur ad figuras communes. »

*quadrature d'une portion d'hyperbole, comme par exemple du quinquilatère $ACBDE$ dont la hauteur $AC$ vaut 1 et la base $CB$ vaut 2.*[60]

La quadrature de Leibniz comprend le carré unité $ACE$ contrairement à notre façon de faire moderne. Ainsi, l'aire qu'il cherche n'est pas $\ln(2)$ mais $1 + \ln(2)$.




*Dont l'aire vaut, si je me souviens bien : $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ etc. qui est vis-à-vis d'une autre aire quelconque, comme $ACFGE$, dans le même rapport que le logarithme de $CF$ vis-à-vis du logarithme de $CB$.*[61]

Toutes ces formules ne sont donc pas valables pour la figure que Leibniz trace sur le manuscrit, qui comprend l'aire du carré unité $ACE$. En effet :

$$\frac{1 + \ln(x)}{1 + \ln(2)} \neq \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$$

Finalement, toutes ces petites erreurs nous montrent que la démarche de Leibniz reste théorique. Il ne s'agit pas tant pour lui de savoir si la méthode peut ou non fonctionner concrètement, mais plutôt de mettre en lien différents outils sur des questions transversales pour produire des méthodes de découverte. Leibniz cherche moins à trouver qu'à trouver le moyen de trouver.

### Passage du rationnel à l'irrationnel

Au sein du *Tentata impossibilitas quadraturæ* (LH 35, 5, 15 Bl.19-20), Leibniz pose la question de l'irrationalité de l'exposant :

*Soit l'équation $a^x = b$ ou similaire. Je dis que si $x$ n'est pas une quantité rationnelle alors ce ne sera pas une quantité algébrique. En effet, s'il est irrationnel, on substitue sa valeur dans l'exposant. Une équation dans laquelle un seul exposant est irrationnel n'est pas algébrique.*[62]

Qu'est-ce que Leibniz entend ici par "nombre algébrique" ? Notons d'ailleurs que les trois occurrences de cet adjectif sont des corrections ; Leibniz avait écrit auparavant « analytique » (« *analyticam* »). Il semble donc s'agir d'un sens très proche du sens actuel, à savoir un nombre qui est racine d'un polynôme rationnel. De fait, l'analyse que développe Leibniz durant cette période, au travers du calcul des exposants, dépasse les frontières de l'algèbre et des polynômes. D'où l'appellation « transcendantes » (« *transcendentes* ») qui possède également un sens proche de la définition actuelle. Ceci explique le remplacement du terme "analytique", qui peut s'appliquer à ce nouveau calcul transcendant, par le terme "algébrique", qui est circonscrit par les frontières cartésiennes de la théorie de équations. Cette citation semble donc mettre en évidence une distinction faite entre les nombres irrationnels, qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme d'un rapport d'entiers, et les nombres non-algébriques. Certains irrationnels peuvent être réduits au rationnels par le calcul algébrique, à la manière de $\sqrt{2}$ dont le carré est un entier. Et puisque les règles de l'algèbre

60. LH 35, 5, 15 Bl.19-20, *Tentata impossibilitas quadraturæ*, Novembre 1679 : « Pono logarithmi inventio pendet a resolutione æquationis in qua incognita est in exponente. Et quadratura portionis hyperbolæ pendet a logarithmo, et unius præterea portionis Hyperbolæquadratura exempli gratia eius quinquelinei $ACBDE$ cuius altitudo $AC$ sit 1 et basis $CB$ sit 2. »

61. LH 35, 5, 15 Bl.19-20, *Tentata impossibilitas quadraturæ*, Novembre 1679 : « Cuius area si bene memini est : $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ &c. quæ est ad aliam aream quamconque, ut $ACFGE$, ut logarithmus $CF$ ad logartihmum $CB$. »

62. LH 35, 5, 15 Bl.19-20, *Tentata impossibilitas quadraturæ*, Novembre 1679 : « Sit æquatio $a^x \sqcap b$ vel similis. Ajo si $x$ non sit quantitas rationalis nec fore quantitatem algebraicam. Nam si sit irrationalis, substituatur eius valor in exponente. Æquatio autem in qua exponens unus est irrationalis algebraica non est. »

qui permettent cette réduction nécessitent qu'on n'emploie rien d'autre que les puissances ou les racines entières, il faut que l'exposant soit rationnel pour que le nombre soit algébrique. L'exponentiation crée ainsi un pont entre le rationnel et l'irrationnel :

> *Maintenant, s'il apparait que a et b ont une relation telle que quoi qu'on puisse faire, on ne peut pas produire l'autre en multipliant l'un par lui-même selon un exposant rationel (ce qui arrive finalement), on peut conclure sans risque que x n'est pas une quantité algébrique.* [63]

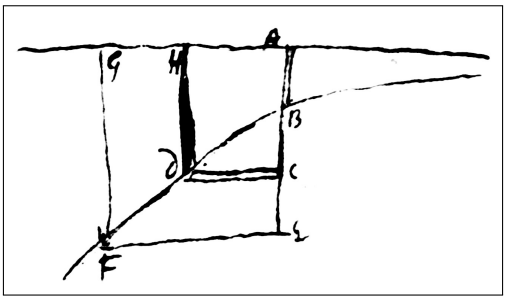
De fait, pour Leibniz, si $x$ n'est pas rationnel, alors il n'est pas algébrique. Ceci signifie d'une part qu'il suppose ici que $a$ et $b$ sont rationnels et d'autre part qu'un nombre rationnel élevé à une puissance irrationnelle, mais algébrique, comme $\sqrt{2}$, ne peut pas produire un nombre rationnel. En terme moderne, ce que Leibniz affirme ici constitue un cas particulier de ce qui est aujourd'hui énoncé par le théorème de Gelfond-Schneider, démontré en 1934. En réalité, il s'agit de sa contraposée, à savoir que si $\alpha$ est un nombre algébrique différent de 0 ou 1 et que $\beta$ est irrationnel, de sorte que $\alpha^\beta$ soit algébrique, alors $\beta$ est transcendant [64].

Comme nous l'avons vu, Leibniz se base sur une quadrature légèrement fausse de l'hyperbole pour fonder son calcul. Il poursuit son étude en distinguant deux formes de logarithme. Le premier est le logarithme hyperbolique, qu'il note log .hyp. en abrégé. Il s'agit du logarithme qu'il vient d'utiliser, construit à partir de la quadrature de l'hyperbole. Il nomme le second le logarithme tabulaire, qu'il note log .tab. pour abrégé. Il s'agit du logarithme que l'on trouve dans les tables, construites selon la méthode de Briggs. Etant donnée une progression $(a_n)_n$, cela consiste lui faire correspondre terme à terme une nouvelle progression $(b_n)_n$ de sorte que la somme de deux termes de la suite $b$ corresponde au produit des deux termes de la suite $a$ auxquels les termes de $b$ étaient associés. En d'autre terme, cela doit suivre la propriété des exposants :

$$x^{a+b} = x^a x^b$$

Le lien entre l'exposant et le logarithme tabulaire est donc à la fois très clairement établi et en même temps totalement arbitraire, puisque ce logarithme n'a pas de base fixée à l'avance. L'objectif de Leibniz ici est donc d'établir rigoureusement le lien entre le logarithme hyperbolique est les exposants, lien qui doit être déterminé puisque le logarithme hyperbolique est entièrement déterminé.

Il construit la figure suivante :




Manuscrits de Leibniz - LH 35, 5, 15 Bl.20

> *Soit $AB = 1$ dont le logarithme vaut 0 et soit $AC = 2$ dont le logarithme est c. On cherche le logarithme de $BE$, c'est donc dire $FE$. Soit $AG = FE = l$ et $AE = n$. Alors $GF$ sera proportionnel à $HD$ dans le rapport multiplicatif qui suit la raison entre le nombre $AG$ et le nombre $AH$. C'est-à-dire qu'on aura :* $\frac{GF}{AB} = \frac{HD}{AB}^{\frac{AG}{AH}}$ [65]

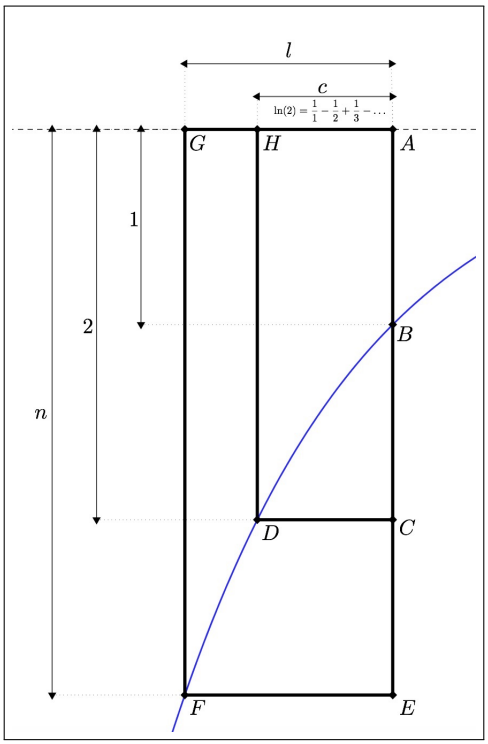
On a donc :

63. LH 35, 5, 15 Bl.19-20, *Tentata impossibilitas quadraturæ*, Novembre 1679 : « Hinc si appareat $a$ et $b$ talem habere relationem ut una quomodocunque secundum exponentem rationalem in se ducta non possit producere alteram (quod statim apparet) tuto concludi potest $x$ non esse quantitatem algebraicam. »

64. [28] A. Gelfond, *Sur le septième problème de Hilbert* dans le *Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS. Classe des sciences mathématiques et naturelles*, 1934, N.4, p.623–634

65. LH 35, 5, 15 Bl.19-20, *Tentata impossibilitas quadraturæ*, Novembre 1679 : « Sit $AB \sqcap 1$ cuius logarithmus est 0. Sit $AC \sqcap 2$ cuius logarithmus $\sqcap c$. Quæritur logarithmus ipsi $BE$, nempe $FE$. Sit $AG \sqcap FE \sqcap l$ et $AE \sqcap n$. Erit $GF$ proportionalis ad $HD$ in ratione multilplicata secunda rationem numeri $AG$ ad numerum $AH$. Seu erit $\frac{GF}{AB} \sqcap \frac{HD}{AB}\boxed{\frac{AG}{AH}}$. »

$$\frac{n}{1} = \frac{2}{1}^{\frac{l}{c}}$$




Ainsi, si $x_1$, $x_2$ sont des abscisses (ici à la verticale) et $y_1$, $y_2$ des ordonnées (ici à l'horizontale), alors on a la relation suivante :

$$x_1^{\frac{1}{y_1}} = x_2^{\frac{1}{y_2}}$$

Donc, il existe une constante $\alpha$ tel que la courbe a pour équation :

$$x^{\frac{1}{y}} = \alpha$$

Or, Leibniz nous dit que les ordonnées $y$ sont les logarithmes hyperboliques des abscisses $x$.

$$\alpha = x^{\frac{1}{\ln(x)}} = e$$

Ainsi, $\alpha$ est la constante de Neper. C'est à Leibniz qu'on doit la première mention de cette constante, dans une lettre à Huygens de 1690[66]. En réalité, nous avons vu qu'on trouve des mentions de cette constante dans le *Quadraturæ per logarithmos* (LH 35, 5, 15 Bl.27), écrit en Mars 1679. Ici, la constante n'est pas introduite en tant que telle, puisque Leibniz ne considère pas de grandeur dont le logarithme vaut 1. Néanmoins, la fonction exponentielle classique n'est pas très loin lorsqu'il donne l'expression suivante :

$$n = 2^{\frac{l}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots}}$$

Manuscrits de Leibniz - LH 35, 5, 15 Bl.20

*avec $n$ un nombre et $l$ le logartihme hyperbolique c'est-à-dire l'aire de l'espace hyperbolique quinquilatère dont la base est $n$.*[67]

66. *Cf* A III, 4, N.283, Lettre à C. Huygens du 13 Octobre 1690 - p.621

67. LH 35, 5, 15 Bl.19-20, *Tentata impossibilitas quadraturæ*, Novembre 1679 : « posito $n$ numero et $l$ logarithmo hyperbolico, seu area quinquelinei spatii hyperbolici cuius basis est $n$

En effet, si l'on constate que $2^{\frac{1}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots}} = e$, on a bien l'équation :

$$n = e^l$$

Cette remarque anachronique nous donne l'occasion de noter qu'ici l'abscisse est $n$ et l'ordonnée $l$. Leibniz considère donc ici la courbe logarithmique et non la courbe exponentielle. Pourtant l'expression algébrique qu'il utilise est exponentielle. Ceci nous indique qu'à cette époque, la courbe reste encore largement indépendante de son expression analytique, qui est liée aux choix des abscisse et des ordonnées. L'exponentielle et le logartihme sont donc représentés par la même courbe mais ici, le système de coordonnée favorise le logarithme tandis que l'expression analytique met en valeur l'exponentielle.
Pour déterminer la nature rationnelle ou irrationnelle du logarithme, Leibniz s'appuie sur les équations et relations exponentielles qu'il construit progressivement, mais il fait également appel à un autre domaine, très éloigné, sur lequel il travaille également dans les premiers temps de Hanovre, à savoir le développement décimal :

> *Déjà, on peut démontrer que* $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ *etc. n'est pas une quantité rationelle. Ce bien-sûr à partir de la nature de la progression décimale. Et de fait, elle ne peut pas conserver de périodes.* [68]

On trouve d'ailleurs une mention du développement décimal dans le billet *De incognitis in exponente* :

> *Mais de plus les quadratures et les séries infinies reviennent au même. Et tous peuvent également être rapportés utilement aux périodes décimales, c'est-à-dire aux règles des caractères continus.* [69]

En 1679, Leibniz est profondément absorbé par son projet de caractéristique numérique, un système logique fondée notamment sur la décomposition des entiers en nombres premiers. Ses travaux sur les développement décimaux ou dyadiques sont étroitement liés à ce projet. Ces courtes citations nous montrent que le jeune philosophe tiraient alors ces ponts jusqu'au calcul différentiel et exponentiel.

#### Absence de réversibilité

Dans le *Tentata impossibilitas quadraturæ* (LH 35, 5, 15 Bl.19-20), Leibniz parvient finalement à inverser la relation de l'exposant ou réciproquement du logarithme. Néanmoins, il existe un petit billet non daté, sobrement intitulé *Exponentes* (LH 35, 5, 14 Bl.11), dans lequel Leibniz montre qu'une telle inversion n'est pas toujours possible :

> *A partir de* $a^{e-f} = b^{e-f}$*, ne suit pas toujours que* $a = b$*. Cela non seulement parce qu'il se peut être que les puissances égales ne diffèrent pas par leurs signes, bien que les racines le fassent, mais aussi parce que si l'on pose* $e = f$ *alors on obtient* $a^0 = b^0$*, or* $a^0 = 1$ *et* $b^0 = 1$*.* [70]

Une autre façon de le dire, serait de noter que 0 ou 1 ne sont les seules solutions de l'équation $a^e = a^f$ que dans le cas où $e \neq f$.

### 13.3.3 Applications à l'analyse des séries et des quadratures

Revenons au *De summis serierum Arithmo-Geometricarum infinitarum* (LH 35, 7, 11 Bl.9) [71]. Pour rappel, Leibniz y développe une méthode pour calcul les séries arithmético-géométriques de ce type :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n^p t^n$$

Cette méthode de calcul lui permet d'aborder également la série logarithmique.

68. LH 35, 5, 15 Bl.19-20, *Tentata impossibilitas quadraturæ*, Novembre 1679 : « Jam $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ &c. demonstrari potest non esse quantitem rationalem ; nempe ex natura progressionis decadicæ neque enim servare potest periodum.

69. LH 35, 5, 15 Bl.16, *De incognitis in exponente*, 23 Mai 1679 : « Quadraturæ autem et series infinitæ eodem recidunt. Et possunt omnia ista utiliter revocari etiam ad periodos decimales seu regulas characterum continuandorum. »

70. LH 35, 5, 14 Bl.11, *Exponentes*, non daté : « Ex $a^{e-f}$ æqu. $b^{e-f}$ non semper sequitur $a$ æqu. $b$ non tantum quia æquales esse possunt potentiæ licet radices non signis differant, sed etiam quia posito $e$ æqu. $f$ fit $a^0$ æqu. $b^0$ est autem $a^0$ æqu. 1 et $b^0$ æqu. 1. »

71. *Cf* la section qui y est consacrée chapitre 5 : 5.3.

**Double décomposition**

Néanmoins, la méthode qu'il développe dans le *De summis serierum Arithmo-Geometricarum infinitarum* (LH 35, 7, 11 Bl.9) lui permet d'attaquer l'étude d'une autre série du même genre, à savoir la série logarithmique. Dans ce même manuscrit, Leibniz fait référence à un billet sur lequel il traite du même sujet, appliqué à l'analyse d'une autre série :

> *Progression où l'on aura trouvé, et cela parce que ce sera facile au moyen du travail continu d'une table. Alors cette trouvaille sur les sommes de séries apparaitra des plus utiles, séries qui sont telles que* $\frac{t^1}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}$ *etc. ainsi que des similaires. Voir le brouillon joint, avec le signe* $\odot$.[72]

Ce brouillon est intitulé *Summa huius figurae cuius momentum ex basi Logarithmica* (LH 35, 7, 11 Bl.13) et il date également de Janvier 1678. La rédaction des deux pièces n'a probablement pas été faite le même jour, puisqu'au recto de ce petit billet, Leibniz expose à nouveau la méthode pour le calcul de $A$. Au verso, Leibniz s'intéresse au calcul de cette série :

$$H = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{3} + \frac{t^3}{4} - \frac{t^4}{5} + \dots$$

Le jeune philosophe va montrer comment l'on peut se ramener au calcul des sommes précédentes. Ici, Leibniz considère la variable $-t$ plutôt que la variable $t$. Notons donc ces sommes comme suit :

$$P^{(k)} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^{n+1} n^k t^n$$

Dans ces conditions, on a :

$$S' = P^{(0)} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^{n+1} t^n = \frac{t}{1+t}$$

L'idée de Leibniz consiste à développer les coefficients de $H$ en série entière puis de réarranger les termes obtenus pour former les sommes $P^{(k)}$. Pour cela, Leibniz va utiliser la formule de $S$ :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

On a donc le développement d'une fraction unitaire en somme de puissances. Il suffit alors d'appliquer cette formule aux fractions qui forment les termes de $H$ :

$$\frac{1}{1+a} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n a^n = a^0 - a^1 + a^2 - a^3 + \dots.$$

Pour trouver les termes de la série $H$, c'est-à-dire les nombres harmoniques, il faut que $a$ prenne les valeurs successives des entiers naturels :

$$a = 1, 2, 3, 4\text{etc.}$$

Ainsi, en mettant en ligne ces différents développements, puis en les multipliant par la bonne puissance de $t$, Leibniz obtient la table suivante :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $1^0t$ | $-1^1t$ | $1^2t$ | $-1^3t$ | $1^4t$ | $\dots$ | $\frac{t}{2}$ |
| $-2^0t^2$ | $2^1t^2$ | $-2^2t^2$ | $2^3t^2$ | $-2^4t^2$ | $\dots$ | $-\frac{t^2}{3}$ |
| $3^0t^3$ | $-3^1t^3$ | $3^2t^3$ | $-3^3t^3$ | $3^4t^3$ | $\dots$ | $\frac{t^3}{4}$ |
| $-4^0t^4$ | $4^1t^4$ | $-4^2t^4$ | $4^3t^4$ | $-4^4t^4$ | $\dots$ | $-\frac{t^4}{5}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ |
| $P^{(0)}$ | $-P^{(1)}$ | $P^{(2)}$ | $-P^{(3)}$ | $P^{(4)}$ | $\dots$ | $H$ |

72. LH 35, 7, 11 Bl.9, *De summis serierum Arithmo-Geometricarum infinitarum idque revocando summarum inventiones ad æquationes ordinarias, quod in aliis innumeris procedit*, Janvier 1678 : « Progressio ubi inventa fuerit quod continuato labore tabulæ facile erit tunc utilissimum apparebit hoc inventum ad summas serierum, quales sunt $\frac{t^1}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}$ &c. ac similes vide schedam adjectam, signo $\odot$. »

On retrouve les sommes $P^{(k)}$ sur les colonnes. Leibniz montre donc la formule suivante :

$$H = \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^{n+k+1}n^k t^n$$

La table à double entrée constitue pour Leibniz un outil fondamental d'analyse de progression. Ce qui est en jeu, c'est l'inversion des signes somme :

$$\begin{aligned} H &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^{n+k+1}n^k t^n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^{n+k+1}n^k t^n\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^{n+1}t^n\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}(-n)^k\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^{n+1}t^n\frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^{n+k+1}n^k t^n \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^{n+k+1}n^k t^n\right) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^{n+1}n^k t^n\right) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k P^{(k)} \end{aligned}$$

Mais cette inversion des sommes présente ici un sérieux problème convergence. En effet, pour pouvoir change le sens de sommation de la table, il faut pouvoir s'assurer que la somme totale de tous les termes, en valeur absolue, est finie. Si l'ensemble des termes forment une quantité infinie, alors la somme limite dépendra de la manière et de l'ordre que l'on va employer pour les sommer. Malheureusement, ici, la somme de chaque ligne est grossièrement divergence. En effet il est nécessaire que $a$ soit un entier et donc on applique une relation d'égalité hors du domaine de convergence de la série. Pour résoudre se problème, Leibniz utilise la formule suivante :

$$\frac{1}{r+a} = \frac{1}{r} - \frac{a}{r^2} + \frac{a^2}{r^3} - \frac{a^3}{r^4} + \dots.$$

En choisissant $a$ plus petit que $r$, on parviendrait à une formule convergente. Leibniz pose $r = 100000$ et $a = -(100000 - k)$. Ici $a$ est négatif, mais on a bien $|a| < |r|$, ainsi la série converge. Mais en posant ces termes, on n'obtient plus les mêmes colonnes. Ainsi, cela ne permet pas de vraiment résoudre le problème.

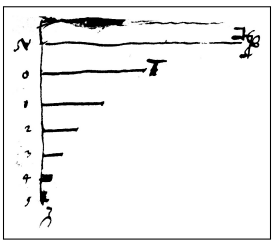
Pour finir, la décomposition de $H$ selon les $P^{(k)}$ n'est pas d'un grand apport, même en théorie. En effet, Leibniz a montré dans le *De summis serierum Arithmo-Geometricarum infinitarum* (LH 35, 7, 11 Bl.9) que le calcul de ces sommes est plutôt laborieux et ne peut pas être obtenu directement. Ainsi, l'expression de $H$ selon les puissances de $S'$ n'est pas du tout la conséquence évidence de cette décomposition, quand cette dernière serait permise par l'interversion des sommes.
Cette tentative infructueuse montre d'abord que les toutes premières techniques développées lors du séjour parisien restent vivaces dans l'esprit de Leibniz, même après qu'il a quitté la capitale française. Mais cet exemple souligne surtout cette approche leibnizienne de la décomposition. Dans un passage du *De summis serierum Arithmo-Geometricarum infinitarum* (LH 35, 7, 11 Bl.9), Leibniz dira même :

> *On ne peut pas traiter des séries sinon par deux modes, à savoir par les additions et les soustractions de variables et par la multiplication et la divisions de constantes, mais aussi par les décompositions en d'autres séries.*[73]

### La quadrature pour éliminer l'exposant

Rappelons que le *De summis serierum Arithmo-Geometricarum infinitarum* (LH 35, 7, 11 Bl.9) débute par le diagramme de quadrature suivant :

73. LH 35, 7, 11 Bl.9, *De summis serierum Arithmo-Geometricarum infinitarum idque revocando summarum inventiones ad quationes ordinarias, quod in aliis innumeris procedit*, Janvier 1678 : « series non nisi duobus modis scilicet additionibus et substractionibus in constantium et multiplicationibus ac divisionibus constantium tractari possunt item divulsionibus in alias series. »

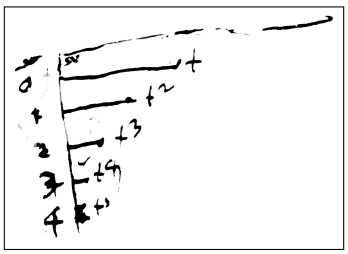


Manuscrits de Leibniz - LH 35, 7, 11 Bl.9

On trouve d'ailleurs le para-texte suivant :

> *On a :*
> - $0t + 1t^2 + 2t^3 + 3t^4 + 4t^5$ *etc.* -.
> *ce dont on cherche également la somme. C'est-à-dire le moment de la figure infinie, ou encore la limite* $0T\beth$ *qu'on souhaite obtenir à partir de* $0T$*, étant donné que* $\aleph\beth = 1$*,* $0T = t$ *et ainsi de suite.*[74]

Donc Leibniz interprète sa méthode comme un calcul de quadrature, ou plutôt comme un calcul de moment, c'est-à-dire une quadrature ramenée, par la méthode d'Archimède, à un système de bâtons pondérés. Dans le *Summa huius figurae cuius momentum ex basi Logarithmica* (LH 35, 7, 11 Bl.13) que nous avons décrit dans le paragraphe précédent, on trouve d'ailleurs le même diagramme, plus explicite :



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 7, 11 Bl.13

Le manuscrit intitulé *Quærerebis in hyperbola æquationem transcendentem exponentalem cuius ope tollatur incognita exponens vel saltem plures ad unam revocentur, non est absoluta* (LH 35, 5, 13 Bl.3-4) n'est pas daté. Il est cependant postérieur à Janvier 1678, puisque Leibniz fait référence au *De summis serierum Arithmo-Geometricarum infinitarum* (LH 35, 7, 11 Bl.9) rédigé ce mois-ci. On trouve ce renvoi, non explicite, dans la marge :

> *La démonstration de Janvier 1678 est autre part.*[75]

Cette référence est intéressante puisqu'elle replace les conclusions du manuscrit dans le contexte de la quadrature. Leibniz y rappelle d'abord les résultats qu'il a démontré, à savoir la somme des séries $S$, $A$ et $C$ :

$$\int e^z = \tfrac{e}{1-e} \qquad \int ze^z = \left(\tfrac{e}{1-e}\right)^2 \qquad \int z^2e^z = \left(\tfrac{e}{1-e}\right)^2 + 2\left(\tfrac{e}{1-e}\right)^3$$ [76]

Dans l'écriture qu'utilise ici Leibniz, la somme se fait sur la variable $z$ qui est en exposant. Leibniz les décrit donc ici comme des quadratures. De fait, Leibniz écrit :

> *Ceux-là, lorsqu'on les développera avec exactitude ; et grâce auxquels j'ai trouvé, au sujet des séries, qu'on pouvait facilement l'appliquer aux figures, dont on peut trouver les quadratures de cette manière. Et si inversement, on cherche encore la somme par un autre moyen, à savoir bien-sûr par les logarithmes,*

74. LH 35, 7, 11 Bl.9, *De summis serierum Arithmo-Geometricarum infinitarum idque revocando summarum inventiones ad quationes ordinarias, quod in aliis innumeris procedit*, Janvier 1678 : « fiet $0t + 1t^2 + 2t^3 + 3t^4 + 4t^5$ &c. quorum etiam quæritur summa. Id est momentum figuræ infinitæ seu asympototon habentis $0T\beth$ ex $0T$, posito $\aleph\beth$ esse 1 et $0T$ esse $t$ et ita porro. »

75. LH 35, 5, 13 Bl.3-4, *Quærerebis in hyperbola æquationem transcendentem exponentalem cuius ope tollatur incognita exponens vel saltem plures ad unam revocentur, non est absoluta*, non daté : « alibi demonstratio januari 1678 »

76. LH 35, 5, 13 Bl.3-4, *Quærerebis in hyperbola æquationem transcendentem exponentalem cuius ope tollatur incognita exponens vel saltem plures ad unam revocentur, non est absoluta*, non daté : « $\int e^z = \frac{e}{1-e}$ $\int ze^z = \overline{\frac{e}{1-e}\boxed{2}}$ $\int z^2e^z = \overline{\frac{e}{1-e}\boxed{2}} + 2\overline{\frac{e}{1-e}\boxed{3}}$ »

*nous aurons de nouvelles équations et peut-être apporterons-nous à cela quelque chose qui contribue à l'élimination de l'inconnue $z$ au sein de l'exposant.* [77]

Cette méthode de calcul des sommes arithmético-géométriques est donc perçu ici par Leibniz comme une méthode alternative à celui des logarithme pour résoudre le problème des exposants variables, c'est-à-dire pour leur élimination.

### 13.3.4 Différentielle de l'Exposant

Dans le *De incognitis in exponente* (LH 35, 5, 15 Bl.16), Leibniz énonce assez clairement le problème des inconnues dans les exposants :

*Et soit celui-ci : $db^z$. En supposant que $b$ est constant et $z$ est inconstant, on peut le trouver à l'aide de la tangente du logartihme. Mais cela semble plus difficile pour déterminer de même lorsqu'il s'agit de $dx^z$ où tant $x$ que $z$ varient. Il faut observer si cela peut être mener à partir des premiers, et il faut observer quelle est la courbe.* [78]

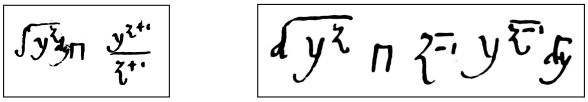
Le problème ici ne se pose pas dans la résolution d'une équation, mais dans la différentiation d'une expression.

#### Différentiation de la racine

La différentiation de $y^z$ avec l'exposant $z$ constant est connue de Leibniz depuis ses premiers travaux parisiens sur la méthode inverse des tangentes. Néanmoins, dans un manuscrit daté du 13 Juin 1677, Leibniz montre qu'il rencontre encore de nombreuses difficulté avec la formalisation analytique de cette relation, à savoir :

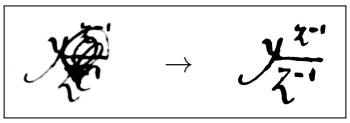
$$d(y^z) = zy^{z-1}dy$$

Dans ce manuscrit, qui s'intitule *De Tangentibus seu Differentiis Figurarum per æquationes exponentales expressarum. Adde aliis multis. Calculus differentialis et tangentes, et exponentes incogniti* (LH 35, 5, 13 Bl.5), Leibniz donne de fait les deux formules de dérivation et de primitivation, sans les démontrer :



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 5, 13 Bl.5

La formule de dérivation est fausse, car Leibniz la déduite directement de la formule d'intégration :



On voit qu'il a d'abord écrit la même formule en remplaçant $z+1$ par $z-1$. Puis il a finalement remplacé le quotient par un produit.
Leibniz commence par donner une fausse généralisation de la différentielle du produit :

$$d(zy) = ydz + zdy \quad \text{donc} \quad d(zy\omega) = zdy + zd\omega + ydz + yd\omega + \omega dz + \omega dy$$

Cette erreur est intéressante puisqu'elle illustre admirablement la démarche heursitique de Leibniz, systématiquement tournée vers la combinatoire. La formule doit être symétrique, puisque les trois variables

77. LH 35, 5, 13 Bl.3-4, *Quærerebis in hyperbola æquationem transcendentem exponentalem cuius ope tollatur incognita exponens vel saltem plures ad unam revocentur, non est absoluta*, non daté : « Hæc ubi accurati explicata erunt ; et quod de seriebus inveni ad figuras ut facile fieri potest applicatum ; quarum quadraturæhoc modo inveniri possunt, & si vicissim etiam altero modo a logarithmis scilicet quæratur summa rursus novas habebimus æquationes et forte huic ducamus aliquid quod prosit ad incognitam $z$ ex exponente eliminandam. »

78. LH 35, 5, 15 Bl.16, *De incognitis in exponente*, 23 Mai 1679 : « Quid sit proprie $db^z$ posito $b$ esse constantem et $z$ esse inconstitantem inveniri potest, ope Tangentis logarithmicæ. Sed difficilius videtur idem determinare cum est $dx^z$ quando tam $x$ quam $z$ variatur. Videndum an id ex priori duci possit, videndum quæ sit curva. »

jouent le même rôle, ce qui justifie de faire ainsi appel à une fonction symétrique élémentaire. Notons par ailleurs que la date du manuscrit, à savoir la première année de Hanovre, constitue la période durant laquelle Leibniz développe les formules générales du multinôme et des décompositions en fonctions symétriques élémentaires.
Dans une marge de ce même manuscrit, Leibniz écrit pourtant la différentielle de $x^3$ qui aurait du être égale à $6xdx$ d'après sa formule de différentiation des triples produits :

> $x^3 = x^2x$ ; $d(x^3) = x^2dx + xd(x^2)$. *Et puisque* $d(x^2) = 2xdx$. *Donc* $d(x^3) = 3x^2dx$.[79]

Ainsi, Leibniz pourrait parfaitement retrouver la formule de $d(y^z)$ par l'itération de la formule du produit, comme il le fait pour $x^3$, mais ce n'est pas son objectif. Il s'agit ici de trouver une formule qui permette d'éliminer, au sein d'une fraction, l'opérateur de différentiation $d$ :

> *Soit l'équation* $\frac{de}{de^z} = h$. *On pourra la débarrasser du signe* $d$.[80]

En effet, on peut observer que l'opérateur $d$ semble presque se simplifier, à l'image d'un facteur constant, dans cette équation :

$$\frac{de}{de^z} = \frac{1}{z}\frac{e}{e^z}$$

Il utilise alors la variable intermédiaire $y$ :

> *Soit* $\frac{y^{z+1}}{z+1} = e$. *Donc* $y = \sqrt[z+1]{(z+1)e}$. *Et donc* $de = \sqrt[\frac{z+1}{z}]{(z+1)e} \times d\sqrt[z+1]{(z+1)e}$.[81]

Leibniz a éliminé la variable $y$. Il obtient ainsi une équation différentielle qui ne dépend plus de la variable intermédiaire. Selon lui, la différentielle du membre de droite peut alors être à nouveau développée par la même méthode :

> $\underbrace{d\sqrt[z+1]{(z+1)e}}$ .[82]
>
> *On peut résoudre à nouveau cette différence par la même méthode*

Leibniz croit qu'ainsi, on obtiendra un développement infini de la différentielle :

> *Et ains en continuant à l'infini, on aurait obtenu* $d\overline{e} =$ *à une infinité de quantités multipliées à suite entre elles.*[83]

En réalité, si on l'on différentie la formule, on revient à une équation équivalente :

$$\begin{aligned} d\sqrt[z+1]{(z+1)e} &= \frac{1}{z+1}\left((z+1)e\right)^{\frac{1}{z+1}-1}(z+1)de \\ &= \frac{de}{\sqrt[\frac{z+1}{z}]{(z+1)e}} \\ de &= \sqrt[\frac{z+1}{z}]{(z+1)e} \times d\sqrt[z+1]{(z+1)e} \end{aligned}$$

Pourtant Leibniz conclut :

---

79. LH 35, 5, 13 Bl.5, *De Tangentibus seu Differentiis Figurarum per æquationes exponentales expressarum. Adde aliis multis. Calculus differentialis et tangentes, et exponentes incogniti*, 13 Juin 1677 : « $x^3 \sqcap x^2x$ ; $d\overline{x^3} \sqcap x^2dx + xd\overline{x^2}$ quia $d\overline{x^2} \sqcap 2xdx$. Ergo $d\overline{x^3} \sqcap 3x^2dx$ »

80. LH 35, 5, 13 Bl.5, *De Tangentibus seu Differentiis Figurarum per æquationes exponentales expressarum. Adde aliis multis. Calculus differentialis et tangentes, et exponentes incogniti*, 13 Juin 1677 : « Sit æquatio $\frac{de}{de^z} \sqcap h$ poterit purgari a signo $d$ »

81. LH 35, 5, 13 Bl.5, *De Tangentibus seu Differentiis Figurarum per æquationes exponentales expressarum. Adde aliis multis. Calculus differentialis et tangentes, et exponentes incogniti*, 13 Juin 1677 : « Sit $\frac{y^{z+1}}{z+1} \sqcap e$. Ergo $y \sqcap \sqrt[z+1]{\overline{z+1}e}$. Ergo $de \sqcap \sqrt[\frac{z+1}{z}]{\overline{z+1}e} \cap d\sqrt[z+1]{\overline{z+1}e}$. »

82. LH 35, 5, 13 Bl.5, *De Tangentibus seu Differentiis Figurarum per æquationes exponentales expressarum. Adde aliis multis. Calculus differentialis et tangentes, et exponentes incogniti*, 13 Juin 1677 : « $\underbrace{d\sqrt[z+1]{\overline{z+1}e}}$ »
Hæc differentia posset rursus eodem modo resolvi

83. LH 35, 5, 13 Bl.5, *De Tangentibus seu Differentiis Figurarum per æquationes exponentales expressarum. Adde aliis multis. Calculus differentialis et tangentes, et exponentes incogniti*, 13 Juin 1677 : « Et ita continuandoin infinitum haberetur $de \sqcap$ infinitis quantitatibus in se invicem ducendis »

*Maintenant, si on a l'équation* $\frac{de}{de^{\frac{1}{z}}} = \ldots$, *on peut la résoudre sur le champ, c'est-à-dire qu'on peut enlever le* $d \ldots$.[84]

Tel quel, les différentielles ne s'annulent pas. Il faut plutôt écrire :

$$\begin{aligned}\frac{de}{de^{\frac{1}{z+1}}} &= \frac{\sqrt[\frac{z+1}{z}]{(z+1)e} \times d\sqrt[z+1]{(z+1)e}}{\frac{1}{\sqrt[z+1]{z+1}} \times d\sqrt[z+1]{(z+1)e}} \\ &= \sqrt[\frac{z+1}{z}]{(z+1)e}.\sqrt[z+1]{z+1} \\ &= (z+1)\sqrt[\frac{z+1}{z}]{e}\end{aligned}$$

Pour éliminer les opérateurs différentiels dans les deux membres de la fraction, Leibniz a donc eu recours à une variable intermédiaire $y$, selon cette formule suivante, proche de celle de l'Hôpital :

$$\frac{du}{dv} = \frac{f'(y)dy}{g'(y)dy} = \frac{f'(y)}{g'(y)} \qquad \text{avec } u = f(y) \text{ et } v = g(y).$$

Mais ce que Leibniz trouve remarquable, c'est que la formule soit valable pour un exposant $z$ quelconque :

*Ayant posé le même e, il admirable qu'on obtienne toujours toute la même formule, quel que soit* $z$.[85]

On pourrait s'attendre à ce que la nature de $z$ intervienne dans la formule, car si $z$ est négatif, positif, entier ou fractionnaire, le rôle de l'exposant devient très différent. Pourtant, la formule ici ne dépend pas de la valeur, et donc de la nature de l'exposant $z$ :

*Et qu'il est remarquable que dans cette équation :*

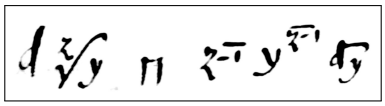
- $$de = ((z+1)e)^{\frac{z}{z+1}} \times d\left(((z+1)e)^{\frac{1}{z+1}}\right)$$ -

*on peut supposer la lettre z quelconque. Et par conséquent, dans une telle équation, il faut comprendre la lettre z comme élevée virtuellement.*[86]

A partir de là, $z$ peut être fractionnaire. La puissance devient ainsi radicale et donc irrationnelle :

*Theorème : trouver la tangente ou la différence ne n'importe quel binôme en quantité irrationnelle.*[87]

Leibniz écrit à nouveau une mauvaise formule :



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 5, 13 Bl.5

Ici, l'erreur est persistante et difficile à expliquer. D'autant qu'il rédige juste avant la preuve correcte pour le cas $z = 2$ :

$d\sqrt{y} = dy^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2} - 1\right) y^{\frac{1}{2}-1}dy = -\frac{1}{2\sqrt{y}}dy$. *Donc* $\frac{d\sqrt{y}}{dy} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{y}}$.[88]

84. LH 35, 5, 13 Bl.5, *De Tangentibus seu Differentiis Figurarum per æquationes exponentales expressarum. Adde aliis multis. Calculus differentialis et tangentes, et exponentes incogniti*, 13 Juin 1677 : « Hinc si sit æquatio : $\frac{de}{de^{\frac{1}{z}}} \sqcap \ldots$ ea statim solvi sive $d \ldots$ tolli potest »

85. LH 35, 5, 13 Bl.5, *De Tangentibus seu Differentiis Figurarum per æquationes exponentales expressarum. Adde aliis multis. Calculus differentialis et tangentes, et exponentes incogniti*, 13 Juin 1677 : « Mirabile posito e eodem quæcunque sit z formula ista tota semper producit idem. »

86. LH 35, 5, 13 Bl.5, *De Tangentibus seu Differentiis Figurarum per æquationes exponentales expressarum. Adde aliis multis. Calculus differentialis et tangentes, et exponentes incogniti*, 13 Juin 1677 : « Et quod mirum est in ista æquatione $de \sqcap \overline{\overline{z+1}e}, \cap d\overline{\overline{z+1}e}$ litera $z$ assumi potest quæcunque. Ac proinde in tali æquatione litera $z$ virtualiter sublata est intelligenda. »

87. LH 35, 5, 13 Bl.5, *De Tangentibus seu Differentiis Figurarum per æquationes exponentales expressarum. Adde aliis multis. Calculus differentialis et tangentes, et exponentes incogniti*, 13 Juin 1677 : « Theorema : invenire tangentem seu differentiam cuiusvis binomii quantitatis irrationalis. »

88. LH 35, 5, 13 Bl.5, *De Tangentibus seu Differentiis Figurarum per æquationes exponentales expressarum. Adde aliis multis. Calculus differentialis et tangentes, et exponentes incogniti*, 13 Juin 1677 : « $d\sqrt{y} \sqcap dy^{\frac{1}{2}} \sqcap \overline{\frac{1}{2} - 1}y^{\frac{1}{2}-1}dy \sqcap -\frac{1}{2\sqrt{y}}dy$. Ergo $\frac{d\sqrt{y}}{dy} \sqcap \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{y}}$. »

En conclusion, ce manuscrit contient trop d'incohérence sur la formule de dérivation et d'intégration des exposants pour croire que cette équation soit solidement établie dans l'esprit du jeune philosophe. Il est clair qu'elles sont connues, mais Leibniz ne les a visiblement pas canonisée, au sens où ces formules n'incarnent pas encore des relations fondamentales du calcul différentiel comme ce sera le cas plus tard. Ce n'est pas la formule générale de dérivation qui intéresse d'ailleurs Leibniz ici, mais seulement les cas irrationnels, comme l'indique cette conclusion :

> *Grace à cette règle : $d\sqrt[z]{y} = (z-1)\,y^{z-1}dy$, il est aisé de trouver sans calcul le rapport de n'importe quelle tangente, à condition qu'on puisse avoir la valeur exacte de l'une des ordonnées.* [89]

Le problème se pose lorsque $y$ est irrationnel par partie, c'est-à-dire qu'il est la somme de plusieurs expressions irrationnelles :

> *Assurément, si en revanche y est irrationnel par partie (en effet s'il est entièrement irrationnel, c'est la même chose que si nous imitions z), on retiendra au moins $y^{z-1}$. Mais, à nouveau, nous cherchons dy en posant $y = l + \sqrt[\nu]{\nu}$ ou bien également à partir de plusieurs composantes irrationnelles comme $y = \sqrt[l]{l} + \sqrt[\nu]{\nu}$. Nous les traiterons chacun par la même méthode, où de fait, on aura d'abord $dy = d\sqrt[l]{l} + d\sqrt[\nu]{\nu}$.* [90]

Ici, c'est donc la linéarité qui donne toute sa force au calcul différentielle et qui permet d'éviter les calculs laborieux :

> *Mais ainsi, nous écrivons d'un seul coup les quantités cherchées sans qu'il soit besoin du moindre calcul supplémentaire, à moins qu'on veuille réellement mutliplier entre eux tous les facteurs que nous exprimons, ce qui est généralement inutile et même nuisible.* [91]

### Différentiation de l'exposant

Examinons à présent le problème inverse, à savoir la différentielle de $y^z$ avec la racine $y$ constante. Leibniz traite ce problème au sein *Calculus differentialis Transcendentis exponentis* (LH 35, 5, 15 Bl.14). Le manuscrit n'est pas daté, cependant on dispose de certains indice pour estimer que Leibniz l'a écrit entre 1679 et 1680 [92].
Le problème que pose Leibniz dans ce texte est celui que nous avions mentionné en citant le *De incognitis in exponente* (LH 35, 5, 15 Bl.16), c'est à dire trouver la différentielle $d(x^z)$ avec $x$ et $z$ variable. Leibniz écrit ainsi :

$$d(x^z) = (x+dx)^{z+dz} - x^z$$

Ce problème n'est pas résolu par le développement du binôme :

$$(x+dx)^{z+dz} = x^{z+dz} + (z+dz)x^{z+dz-1}dx + \dots$$

89. LH 35, 5, 13 Bl.5, *De Tangentibus seu Differentiis Figurarum per æquationes exponentales expressarum. Adde aliis multis. Calculus differentialis et tangentes, et exponentes incogniti*, 13 Juin 1677 : « Ope regulæ huius : $d\sqrt[z]{y} \sqcap \overline{z-1}, y^{\overline{z-1}}, dy$ - cuiuslibet tangentis rationalem sine calculo invenire facile est, modo pure haberi possit valor unius ordinatæ. »

90. LH 35, 5, 13 Bl.5, *De Tangentibus seu Differentiis Figurarum per æquationes exponentales expressarum. Adde aliis multis. Calculus differentialis et tangentes, et exponentes incogniti*, 13 Juin 1677 : « Nimirum si $y$ rursus est irrationalis ex parte (nam si tota sit irrationalis idem est ac si imitemus $z$) retinebimus quidem $y^{\overline{z-1}}$, sed rursus quæremus $dy$ ponendoque $y \sqcap l + \sqrt[\nu]{\nu}$ vel etiam ex pluribus compositorum irrationalibus ut $y \sqcap \sqrt[l]{l} + \sqrt[\nu]{\nu}$ singulas eodem modo tractabimus, quo primam nam erit $dy \sqcap d\sqrt[l]{l} + d\sqrt[\nu]{\nu}$. »

91. LH 35, 5, 13 Bl.5, *De Tangentibus seu Differentiis Figurarum per æquationes exponentales expressarum. Adde aliis multis. Calculus differentialis et tangentes, et exponentes incogniti*, 13 Juin 1677 : « Atque ita statim quantitates quæsitas scribemus nec ullo alio calculo opus erit nisi si velimus reapse in se invicem ducere factores quos expressimus quod tamen plerumque inutile imo damnosum est »

92. Premièrement, la mention de ce problème dans le *De incognitis in exponente* (LH 35, 5, 15 Bl.16) de Mai 1679 nous porte à croire que le manuscrit a été rédigé à une période toute proche. Leibniz utilise le signe d'égalité $\sqcap$ qui est presque systématiquement remplacé à partir des années 1680 par *æqu.* puis par $=$ à partir des années 1685. De plus, la différentiation de $x^z$ avec l'exposant $z$ constant est bien mieux maitrisée qu'au sein du *De Tangentibus seu Differentiis Figurarum per æquationes exponentales expressarum* (LH 35, 5, 13 Bl.5) écrit en Juin 1677. Enfin, Leibniz trouve la différentielle générale de $x^y$ dans le *Tangentes curvarum transcendentium per exponentes indefinitos habentium* (LH 35, 13, 2a Bl.85), qui est rédigé au dos d'une lettre qui date d'Août 1680.

Pour Leibniz, la difficulté se trouve dans la sélection des termes négligeables. En effet, si l'on ne considère pas $x^{dz}$ comme négligeable (ce que Leibniz considérait pourtant dans le *De Tangentibus seu Differentiis Figurarum per æquationes exponentales expressarum* (LH 35, 5, 13 Bl.5) de Juin 1677), alors il reste :

$$(x+dx)^{z+dz} = x^{z+dz} + zx^{z+dz-1}dx$$

Ainsi, $dz$ n'intervient qu'au niveau des exposants. C'est le facteur $x^{dz}$ qui est négligeable au sens de la mulitplication et non le terme $dz$ au sens de l'addition :

> *On marque d'un point $dz$ lorsqu'il est avec $z$ et $dx^2$ lorsqu'il est avec $dx$.* [93]

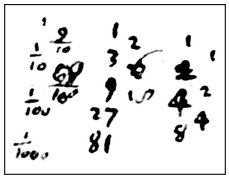
Leibniz obtient :

$$d(x^z) = zx^{z-1}dx$$

C'est la différentiation de la racine avec l'exposant constant. Il n'a donc pas réussi à différentier l'exposant. C'est pourquoi il choisit de fixer la racine :

> *Si à la place, c'est $x$ qui est une quantité constante comme $r$, alors on n'aurait pas obtenu le résultat par cette méthode. Assurément, ce à quoi il faut penser, c'est que la différence des quantités d'une progression géométrique est encore en progression géométrique.* [94]

Cette idée, que les différences des suites géométriques sont encore des suites géométriques, lui vient de la théorie des différences finies qu'il développe à Paris, comme nous l'avons déjà décrit. Leibniz note par ailleurs dans la marge quelques schéma de différences :



Manuscrits de Leibniz - LH 35, 5, 15 Bl.14

Ainsi Leibniz propose le raisonnement suivant :

> *Soit $r^z = y$, alors on aura $\frac{dy}{dz} = \frac{r^z}{r}$. Et donc $dy = dz.r^{z-1}$. Donc $d(r^z) = r^{z-1}dz$.* [95]

Comme la différence d'une suite géométrique est encore la même suite géométrique, il vient que si $y = r^z$ alors $dy = r^z$ également. Chaque incrément de $z$ dans la suite géométrique revient à multiplier par $r$, ainsi $dz$ doit être la raison de la suite, à savoir $r$. A partir de là, on peut calcul $dy$ en fonction de $dz$, comme le fait Leibniz.
Cette preuve nous montre le rôle que joue les suites discrètes dans l'heuristique leibnizienne. Il a plus tendance à projeter leurs propriétés sur celles des lignes, plutôt que de réduire les aspects continus aux questions discrètes.
Leibniz pose alors la question suivante :

> *Ainsi, à la place de $d(x^z)$, faudra-t-il donc écrire : $x^{z-1}dz + zx^{z-1}dx$ ?* [96]

93. LH 35, 5, 15 Bl.14, *Calculus differentialis Transcendentis exponentis*, non daté : « Hinc depuncto $dz$ ubi ipsi $z$ jungitur et $dx^2$ ubi ipsi $dx$ jungitur. »

94. LH 35, 5, 15 Bl.14, *Calculus differentialis Transcendentis exponentis*, non daté : « Si sit loco $x$ quantitas constans ut $r$ non haberetur hoc ratione exitus. Nimirum cogitandum est differentias quantitatum progressionis geometricæ esse etiam progressionis geometricæ. »

95. LH 35, 5, 15 Bl.14, *Calculus differentialis Transcendentis exponentis*, non daté : « Sit $r^z$ æqu. $y$ erit $\frac{dy}{dz} \sqcap \frac{r^z}{r}$. Ergo $dy \sqcap dz.r^{z-1}$. Ergo $\overline{dr^z}$ æqu. $r^{z-1}dz$. »

96. LH 35, 5, 15 Bl.14, *Calculus differentialis Transcendentis exponentis*, non daté : « An ergo pro : $\overline{dx^z}$ scribendum erit : $x^{z-1}dz + z, x^{z-1}dx$. »

La justification qu'on attendrait de cette procédure propre au calcul des fonctions de plusieurs variables serait la suivante :

$$\begin{aligned}(x+dx)^{z+dz}-x^z &= (x+dx)^{z+dz}-(x+dx)^z+(x+dx)^z-x^z\\ &= (x+dx)^{z-1}dz+zx^{z-1}dx\\ &= x^{z-1}dz+\underbrace{(z-1)x^{z-2}dxdz}_{\text{négligeable}}+zx^{z-1}dx\\ &= x^{z-1}dz+zx^{z-1}dx\end{aligned}$$

Mais ce n'est pas ainsi que Leibniz le justifie. L'argument qu'il donne est le suivant :

> *En effet, si $x$ est une quantité constante $r$, c'est-à-dire $dx = 0$, alors $d(r^z) = r^{z-1}dz$. Si, au contraire, c'est $z$ qui est une quantité constante, on a $dz = 0$ et on obtient $d(x^r) = rx^{r-1}dx$. En outre, à partir des deux ensembles, à savoir $dx.dz$, aucun terme ne peut être mélangé.* [97]

La séparation des variables est donc fondé ici sur une sorte d'appel à l'harmonie des formules. La formule permet de distinguer les cas, et de décorréler les variables.

Leibniz trouve la solution rigoureuse du problème au sein d'un billet rédigé au dos d'une lettre daté du 25 Août 1680. Le *Tangentes curvarum transcendentium per exponentes indefinitos habentium* (LH 35, 13, 2a Bl.85) pose le même problème, à savoir la différentielle de $x^y$. C'est grâce au logarithme que Leibniz trouve la solution :

> *$\int \frac{dx}{x} \overset{(1)}{=} \log(x)$ et $\log(x^y) \overset{(2)}{=} y\log(x)$ par la nature des logarithmes. Par (2), on a $\log(x^y) \overset{(3)}{=} \int \frac{d(x^y)}{x^y}$. Et donc, par (2) et (3), on aura : $y\log(x) \overset{(4)}{=} \int \frac{d(x^y)}{x^y}$, c'est-à-dire, par (1) et (4), on aura : $y\int \frac{dx}{x} \overset{(5)}{=} \int \frac{d(x^y)}{x^y}$. Et la différentielle de (5) sera : $dy\int \frac{dx}{x} + y\frac{dx}{x} = \frac{d(x^y)}{x^y}$. Donc $d(x^y) = x^y\left(\int \frac{dx}{x}\right)dy + y.x^{y-1}dx$.* [98]

Il obtient donc bien la formule correcte :

$$d(x^y) = \ln(x)x^y dy + yx^{y-1}dx$$

Ici, la séparation des variables se produit lorsqu'il différentie le produit $y\ln(x)$. Leibniz parvient ainsi à ramener le problème complexe de la séparation des variables dans la différentielle d'une fonction de deux variables à la question simple de la différentielle du produit.

97. LH 35, 5, 15 Bl.14, *Calculus differentialis Transcendentis exponentis*, non daté : « Nam si sit $x$ quantitas constans $r$, seu $dx$ æqu. 0. $d\overline{r^z}$ fit æqu. $r^{z-1}dz$. Sin sit $z$ quantitas constans fit $dz$ æqu. 0 et fit $d\overline{x^r}$ æqu. $rx^{r-1}dx$. Ex ambobus autem simul nempe $dx.\ dz.$ nullus terminus conflari potest »

98. LH 35, 13, 2a Bl.85, *Tangentes curvarum transcendentium per exponentes indefinitos habentium*, postérieur au 25 Août 1680 : « $\int \frac{dx}{x} \overset{(1)}{\text{æqu.}} \log.x$ et $\log.x^y \overset{(2)}{\text{æqu.}} y\log.x$. ex natura logarithmorum. Per 2 est $\log.x^y \overset{(3)}{\text{æqu.}} \int \frac{dx^y}{x^y}$. Ergo per 2 et 3 erit $y\log.x \overset{(4)}{\text{æqu.}} \int \frac{dx^y}{x^y}$ seu per 1 et 4 erit $y\int \frac{dx}{x} \overset{(5)}{\text{æqu.}} \int \frac{dx^y}{x^y}$. Et differentialis ipsis 5 erit : $dy\int \frac{dx}{x} + y\frac{dx}{x}$ æqu. $\frac{dx^y}{x^y}$. Ergo $d\overline{x^y}$ æqu. $dy, x^y\int \frac{dx}{x} + y.x^{y-1}dx$. »

## Conclusion

Ce chapitre final nous montre que la question des logarithmes et des exponentielles a été un thème absolument central des réflexions de Leibniz sur le calcul différentiel et la résolution des équations durant la période 1676-1680. Elle a été naturellement nourrie par toutes les réflexions sur les exposants que nous avons présentées dans les précédents chapitres et à travers cela, la pratique heuristique de Leibniz fondée sur la table et sur la forme. Mais nous avons pu voir qu'à travers le logarithme, la géométrie garde une place très importante dans la résolution des équations exponentielles.

# CONCLUSION GENERALE

Retrouver l'empreinte de la combinatoire leibnizienne au cœur des pratiques qui sont à l'origine des découvertes n'est pas une tâche facile. En effet, le choix du corpus impose de mettre de côté tout jugement quant à l'aboutissement des textes, et de traiter autant des présentations ordonnées et abouties que des ébauches griffonnées, confuses et parfois finalement abandonnées. Toutes sont les témoins d'une approche pratique qui caractérise la manière dont Leibniz envisage la découverte et l'invention et en particulier la mise en place de stratégies propres à les susciter. L'élaboration de nouveaux symboles et de nouvelles formes d'écriture, qui doit notamment sa notoriété à la paternité de Leibniz quant aux notations différentielles, constitue assurément un aspect bien établi de ce processus de découvertes. Il s'appuie sur la notion fondamentale de forme qui est au cœur de la conception épistémologique de la combinatoire par Leibniz. Mais l'étude des premiers travaux sur l'analyse des progressions et la construction du triangle harmonique ont permis de mettre en lumière un second pilier de l'*ars inveniendi* chez Leibniz, lié quant à lui à un aspect plus méthodologique de la combinatoire : la table.

A travers les très nombreuses tables que nous avons été amenés à analyser, il nous a fallu établir une distinction entre deux approches méthodologiques des acteurs : la conception "liste de listes" selon laquelle la table est un composé de progressions, qui elles-mêmes sont composées de leurs termes, et la conception "tableau à double entrée" selon laquelle la table est directement composée de ses termes et les progressions sont des regroupements *a posteriori* des termes de la table qui y sont alignés. Ces deux catégories nous ont permis de qualifier la pratique tabulaire de Leibniz et de pointer les enjeux épistémologiques, mais aussi ontologiques, que le choix de telle ou telle approche implique. Ainsi, nous avons montré que l'approche de Leibniz est exclusivement du type "liste de listes" au sein de la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (A VI, 1, N.8) et que l'approche du type "tableau à double entrée" émerge progressivement au sein des premiers travaux parisiens. Cela dit, la première approche reste dominante sur tout le corpus que nous avons analysé.

Dans ses premiers travaux parisiens, Leibniz développe une notion fondamentale dans sa pratique mathématique : les triangles de différences, qui sont des tables différentielles dont la structure est semblable à celle du triangle arithmétique de Pascal. Leibniz considère ces triangles comme des outils combinatoires propres à l'analyse des progressions numériques. En reliant ainsi tables et progressions, Leibniz s'inscrit parfaitement dans la pratique mathématique de son temps. La structure tabulaire révèle les rapports entre les termes d'une suite, et permet ainsi de décortiquer la loi qui la régit. Les tables permettent au philosophe de représenter les relations entre les termes, de réduire les composés à leurs composants, de construire les complexes à partir des simples et même de renverser les relations méréologiques en considérant les composants comme des composés et les composés comme des composants. Ces opérations implicites que recèlent les tables justifient qu'on parle de combinatoire quant à cette pratique tabulaire, bien que le jeune philosophe n'utilise que très rarement ce qualificatif.
Les tables ont joué un rôle essentiel dans la résolution du problème de Huygens et la construction du triangle harmonique. Ainsi, bien avant la méthode de l'universalité en 1674 ou les premiers travaux sur les fonctions symétriques en 1675, la combinatoire a fait sa première incursion dans le champ mathématique dès 1672 à travers la pratique tabulaire.

La pratique tabulaire a également posé la question de la nature des raisonnements qui sont inférés à partir de ces diagrammes. A première vue, la chose semble très claire : les tables sont des outils de l'*ars inveniendi*, c'est-à-dire qu'elles permettent de trouver des propriétés et des régularités, mais elles ne servent en aucuns cas pour l'*ars judicandi*, c'est-à-dire qu'elles ne sont pas aptes à prouver les résultats qu'elles indiquent de façon indubitables. Pourtant, nous avons montré à deux reprises les limites de cette distinction. La première se trouve la procédure de démonstration des sommes des inverses des nombres figurés. Bien que Leibniz propose à une seule occasion une démonstration algébrique partielle, les résultats sont systématiquement présentés et démontrés au moyen d'une induction tabulaire. Il est ainsi apparu que la position du jeune Leibniz quant à la rigueur de cette preuve ne peut pas être tranchée à partir des sources dont nous disposons. Il est donc possible que la pratique inductive des tables ait constitué dans un premier temps pour le jeune Leibniz un mode apodictique satisfaisant et propre à déterminer un résultat de façon indubitable. La conception des triangles de différences que Leibniz développe à cette

époque soutient cette hypothèse. La deuxième occasion de remettre en cause la nature démonstrative de la pratique tabulaire nous est fournie par la méthode de quadratures par interpolation que Leibniz découvre chez Wallis et chez Mengoli. Les deux auteurs qualifient eux-mêmes leurs démarches d'inductive et c'est dans ces termes que Leibniz la reçoit. Pourtant, le philosophe semble convaincu que cette méthode doit pouvoir permettre de formuler un raisonnement parfaitement rigoureux et indubitable, bien qu'en l'état ce ne soit pas le cas. Particulièrement chez Wallis, pour qui ces questions sont bien plus prégnantes que chez Mengoli, Leibniz ne parvient pas à percer la raison mystérieuse qui fait que sa méthode tombe nécessairement juste sans que ce soit formellement et logiquement nécessaire.
Dès lors, Leibniz rouvre à de nombreuses reprises le dossier du calcul de quadrature par l'interpolation du triangle arithmétique. Il développe une réflexion sur la possibilité de trouver, à partir de ces tables, des expressions finies pour des quantités ou des relations transcendantes, qui nécessite en principe, étant donné qu'elles sont de degré infini, un développement en séries infinies. Jusqu'à très tardivement, les tables sont donc considérées par Leibniz comme un candidat sérieux pour résoudre des problèmes qui sont hors de portée de l'algèbre cartésienne. Cela enrichit l'interprétation des discours de Leibniz qui donnent à la combinatoire ce rôle de dépasser l'algèbre, en y intégrant les travaux liées à la combinatoire tabulaire.

La pratique tabulaire oriente l'attention du jeune Leibniz vers les questions de *situs* et de rang dans la suite. Nait alors tout un corpus de travaux et de réflexions autour de la notion d'exposant. L'étude des exposants semble envahir les textes de Leibniz depuis plusieurs sources de problèmes : les méthodes de tangentes, les techniques de quadrature et bien sûr la théorie des différences finies, trois domaines où les tables constituent des dispositifs extrêmement féconds et efficaces. Ainsi, au sein de ce corpus considérable qui traite des exposants chez Leibniz, la combinatoire joue assurément un rôle décisif. D'une part la notion d'exposant, par son lien avec le dénombrement, est elle-même combinatoire. Mais d'autre part, son lien avec la tabulation permet à Leibniz de faire montre d'une grande diversité de points de vue grâce auxquels il peut aborder par de nombreux chemins la question principale : comment généraliser les exposants ? Cette généralisation passe par plusieurs voies. Certaines sont combinatoires comme les tables de quadrature de Wallis ou les formules algébriques des nombres combinatoires fondées sur des propositions de Pascal. Mais d'autres sont d'avantage géométrique, comme le développement en série du logarithme du à Mercator. Contrairement au calcul différentiel, le calcul des exposants a été l'objet de relativement peu d'attention de la part des commentateurs. De fait, nous avons trouvé sur ce sujet une quantité appréciable d'inédits, datant pour la plupart des premières années de Hanovre. L'examen de l'élaboration du calcul exponentiel pose néanmoins des difficultés spécifiques liées à la notion elle-même d'exposant qui n'est alors pas encore réellement stabilisée. Cela notamment notamment demander d'analyser le statut et l'emploi de la notion de logarithme avec laquelle celle d'exposant interagit fortement. Ainsi, nous avons montré que Leibniz distingue progressivement l'exposant en tant qu'indice et l'exposant en tant que fonction.
L'étude du corpus lié au exposant, mais également celui traitant des tables de Wallis et de Mengoli, nous a permis de mettre en avant la façon dont Leibniz articule les deux piliers de l'*Ars Combinatoria*, à savoir la table et la forme. En cherchant une expression universelle pour les termes d'une table, et non des écritures qui changent en fonction de la progression au sein de laquelle ils sont considérés, en construisant une expression récursive qui est à la fois développée et factorisée ou encore en accordant le statut de puissances à des notions issues de triangles de différences, sur la base de formules différentielles qu'elles respectent, Leibniz a montré que la question du symbolisme et des choix des caractères ne peut jamais être dissocier de la pratique tabulaire elle-même. Ces exemples montrent certes comment la combinatoire méthodologique des tables interagit avec celle des formes et des similitudes. Mais en outre, ils indiquent que ces interactions ont principalement lieu durant la période 1676-1680, dite "des grands projets" et ont en commun, à notre connaissance, d'avoir tous été abandonnés par le philosophe dans la suite. L'enthousiasme que manifeste Leibniz à cette époque vis-à-vis d'une combinatoire supérieure et idéale, capable de mener à bien le projet de la caractéristique universelle et propre à agir hors des mathématiques et notamment en métaphysique, a certainement nourri sa propre pratique mathématique et l'a incliné à des constructions et des tentatives originales au sein desquelles la combinatoire joue pleinement son rôle méthodologique et épistémologique et ne se borne pas aux seules techniques de dénombrement.

Rien qu'au sein des mathématiques, la recherche des origines de la combinatoire leibnizienne est un sujet de recherche considérable et nous avons du mettre de côté certains de ses aspects, notamment ceux concernant sa face épistémologique, liée à l'*ars characteristica*. En effet, la progressive mutation du projet d'écriture universelle, qui est, au départ, d'une nature semblable aux nombreux projets de langues universelles de ses contemporains, en particulier Wilkins, vers celui d'une caractéristique universelle au sein de laquelle l'algèbre occupe une place essentielle, constitue un axe de recherche digne de nos futures investigations. En outre, les travaux de Leibniz sur la théorie des nombres et sur l'arithmétique forment également un domaine au sein duquel la combinatoire joue un rôle très important et méritent que nous nous y intéressions.

En suivant le *filum Ariadnes* proposé par l'*Historia et Origo Calculi Differentialis*, nous avons donc retracé chez Leibniz le chemin d'une pratique extrêmement féconde, édifiée sur la notion de table, à la fois mécanisme général d'analyse et de calcul, mode de présentation ou encore outil de classification. En portant la focale sur cette forme diagrammatique, nous avons pu apporter un éclairage sur la façon dont le discours programmatique de Leibniz sur la combinatoire s'ancre sur des pratiques concrètes, qui caractérise non seulement les stratégies et les approches de ses tout premiers travaux mathématiques mais également la manière dont le philosophe lit et reçoit ceux de ses contemporains chez qui il reconnait une pratique tabulaire commune.

# ANNEXES

# Théorie des différences finies

Leibniz développe son calcul différentiel à partir d'un calcul sur les différences, que nous appelons « théorie des différences finies » [99]. Cette théorie qu'il élabore dans sa jeunesse consiste en quatre résultats principaux. Nous nous proposons d'en donner ici une démonstration moderne qui fournira un éclairage utile aux sources du passé que nous sommes amenés à analyser.

### Coefficients binomiaux, figurés et multiensembles

Avant tout, posons quelques notations :

⋆ On note classiquement les coefficients binomiaux par le symbole $\binom{p}{n}$, qui désigne le nombre de parties à $n$ éléments d'un ensemble à $p$ éléments :

$$\binom{p}{n} = \text{card}\{(n_1, n_2, \ldots, n_p) \in \{0,1\}^p, n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n\}$$

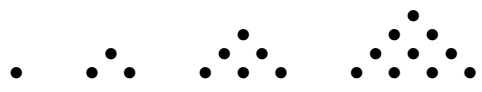
Les coefficients binomiaux interviennent naturellement dans le développement du binôme :

$$\begin{aligned}
(1+X)^p &= \underbrace{(1+X)\times(1+X)\times\cdots\times(1+X)}_{p \text{ fois}} \\
&= \sum_{(n_1,n_2,\ldots,n_p)\in\{0,1\}^p} X^{n_1+n_2+\cdots+n_p} \\
&= \sum_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(n_1,n_2,\ldots,n_p)\in\{(n_1,n_2,\ldots,n_p)\in\{0,1\}^p, n_1+n_2+\cdots+n_p=n\}} X^{n_1+n_2+\cdots+n_p} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left( \sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_p=n \\ (n_1,n_2,\ldots,n_p)\in\{0,1\}^p}} 1 \right) X^n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \text{card}\{(n_1, n_2, \ldots, n_p) \in \{0,1\}^p, n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n\} X^n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{p}{n} X^n = \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} X^n
\end{aligned}$$

⋆ On note les nombres figurés par $F_n^{(p)}$, qui désigne le nombre figuré simplicial de dimension $p$ et de côté $n$ :

$$F_n^{(p)} = \text{card}\{(n_1, n_2, \ldots, n_p) \in \mathbb{N}^p, n_1 + n_2 + \cdots + n_p < n\}$$

Aux premières dimensions, ce sont les nombres naturels, triangulaires, pyramidaux, triangulo-triangulaire etc.



99. Cette appellation n'est pas de Leibniz. Elle est formalisée par J. E. Hofmann et H. Wieleitner, dans un article consacré au commentaire de l'*Historia et Origo Calculi Differentialis*, commenté par D. Mahnke. *Cf* citehofmannDifferenzenrechnungBeiLeibniz1931 J. E. Hofmann, H. Wieleitner et D. Mahnke, *Die Differenzenrechnung bei Leibniz*, Sitzungsberichte der Preussischen *Akademie* der Wissenschaften, 1931, p. 562-590

⋆ On note les coefficients multiensembles par le symbole anglo-saxon $\left(\!\!\binom{p}{n}\!\!\right)$, qui désigne le nombre de partitions ordonnées d'un ensemble à $n$ éléments en $p$ parties :

$$\left(\!\!\binom{p}{n}\!\!\right) = \text{card}\{(n_1, n_2, \ldots, n_p) \in \mathbb{N}^p, n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n\}$$

Les coefficients mutliensembles interviennent naturellement dans le développement en série de l'inverse du binôme :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-X)^p} &= \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} X^n\right)^p \\
&= \underbrace{\left(\sum_{n_1\in\mathbb{N}} X^{n_1}\right) \times \left(\sum_{n_2\in\mathbb{N}} X^{n_2}\right) \times \cdots \times \left(\sum_{n_p\in\mathbb{N}} X^{n_p}\right)}_{p \text{ fois}} \\
&= \sum_{(n_1,n_2,\ldots,n_p)\in\mathbb{N}^p} X^{n_1+n_2+\cdots+n_p} \\
&= \sum_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(n_1,n_2,\ldots,n_p)\in\{(n_1,n_2,\ldots,n_p)\in\mathbb{N}^p, n_1+n_2+\cdots+n_p=n\}} X^{n_1+n_2+\cdots+n_p} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left( \sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_p=n \\ (n_1,n_2,\ldots,n_p)\in\mathbb{N}^p}} 1 \right) X^n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \text{card}\{(n_1, n_2, \ldots, n_p) \in \mathbb{N}^p, n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n\} X^n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\!\!\binom{p}{n}\!\!\right) X^n
\end{aligned}$$

Pour finir, trouver une partition ordonnée de $p$ parties dans un ensemble à $n$ éléments revient à choisir $p-1$ frontières dans un ensemble à $n+p-1$ éléments :

$p$ parties et $n$ éléments

- $\bullet$ : $n$
- $\star$ : $p-1$
- $\bullet + \star$ : $n+p-1$

Donc, on a l'égalité suivante :

$$\left(\!\!\binom{p}{n}\!\!\right) = \binom{n+p-1}{p-1}$$

De plus, le coefficient mutliensemble $\left(\!\!\binom{p}{n}\!\!\right)$ correspond à une face du simplex de dimension $p$ et de côté $n+1$, donc :

$$\left(\!\!\binom{p}{n}\!\!\right) = F_{n+1}^{(p-1)}$$

Ainsi, on obtient :

$$\left(\!\!\binom{p}{n}\!\!\right) = F_{n+1}^{(p-1)} = \binom{n+p-1}{p-1}$$

$$F_n^{(p)} = \left(\!\!\binom{p+1}{n-1}\!\!\right) = \binom{n+p-1}{p}$$

Le passage entre les coefficients multiensembles et les nombres figurés correspond à un simple décalage en diagonale sur la table des nombres combinatoires. A l'avenir, on utilisera donc seulement la notation des nombres mutliensemble, sachant donc que $\left(\!\!\binom{p}{n}\!\!\right)$ désigne aussi le nombre figuré de dimension $p-1$ et de côté $n+1$.

**Principaux résultats**

La théorie des différences finies s'attache à décrire les relations qu'ont entre eux les termes d'une suites, à partir de leurs différences successives. Considérons donc une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ :

$$t_0 \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4 \quad t_5 \quad t_6 \quad t_7 \quad t_8 \quad t_9 \quad t_{10} \quad t_{11} \quad t_{12} \quad t_{13} \quad t_{14} \quad t_{15} \quad \dots$$

On peut alors définir les différences successives :

- $\star$ $d_n^{(1)} = t_n - t_{n+1}$
- $\star$ $d_n^{(2)} = d_n^{(1)} - d_{n+1}^{(1)}$
- $\star$ $d_n^{(3)} = d_n^{(2)} - d_{n+1}^{(2)}$

$\vdots$

- $\star$ $d_n^{(p+1)} = d_n^{(p)} - d_{n+1}^{(p)}$

On obtient le schéma de différence suivant :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
t_0 & & t_1 & & t_2 & & t_3 & & t_4 & & t_5 & & t_6 & & t_7 & & t_8 & & t_9 & & t_{10} & & \cdots \\
& d_0^{(1)} & & d_1^{(1)} & & d_2^{(1)} & & d_3^{(1)} & & d_4^{(1)} & & d_5^{(1)} & & d_6^{(1)} & & d_7^{(1)} & & d_8^{(1)} & & d_9^{(1)} & & \cdots \\
& & d_0^{(2)} & & d_1^{(2)} & & d_2^{(2)} & & d_3^{(2)} & & d_4^{(2)} & & d_5^{(2)} & & d_6^{(2)} & & d_7^{(2)} & & d_8^{(2)} & & \cdots & \\
& & & d_0^{(3)} & & d_1^{(3)} & & d_2^{(3)} & & d_3^{(3)} & & d_4^{(3)} & & d_5^{(3)} & & d_6^{(3)} & & d_7^{(3)} & & \cdots & & \\
& & & & d_0^{(4)} & & d_1^{(4)} & & d_2^{(4)} & & d_3^{(4)} & & d_4^{(4)} & & d_5^{(4)} & & d_6^{(4)} & & \cdots & & & \\
& & & & & d_0^{(5)} & & d_1^{(5)} & & d_2^{(5)} & & d_3^{(5)} & & d_4^{(5)} & & d_5^{(5)} & & \cdots & & & & \\
& & & & & & \ddots & & & & \ddots & & & & & & & & & & & \\
& & & & & & & & d_0^{(p)} & & d_1^{(p)} & & d_2^{(p)} & & \cdots & & & & & & & \\
& & & & & & & & & d_0^{(p+1)} & & d_1^{(p+1)} & & \cdots & & & & & & & \\
& & & & & & & & & & \ddots & & & & & & & & & &
\end{array}$$

A partir de ces définitions, on peut déduire quatre grands résultats :

1. Les différences en fonction des termes :

$$d_n^{(p)} = \binom{p}{0} t_n - \binom{p}{1} t_{n+1} + \binom{p}{2} t_{n+2} - \binom{p}{3} t_{n+3} + \cdots + (-1)^p \binom{p}{p} t_{n+p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k t_{n+k}$$

2. Les termes en fonction des différences :

$$t_n = \left(\!\binom{p}{0}\!\right) d_n^{(p)} + \left(\!\binom{p}{1}\!\right) d_{n+1}^{(p)} + \left(\!\binom{p}{2}\!\right) d_{n+2}^{(p)} + \cdots = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\!\binom{p}{k}\!\right) d_{n+k}^{(p)}$$

3. La dualité entre $\binom{p}{k}$ et $\left(\!\binom{p}{k}\!\right)$ :

$$\left(\!\binom{p}{0}\!\right)\binom{p}{0} - \left(\!\binom{p}{1}\!\right)\binom{p}{1} + \left(\!\binom{p}{2}\!\right)\binom{p}{2} - \left(\!\binom{p}{3}\!\right)\binom{p}{3} + \cdots + (-1)^p \left(\!\binom{p}{p}\!\right)\binom{p}{p} = \sum_{k=0}^{p} \left(\!\binom{p}{k}\!\right)\binom{p}{k} (-1)^k = 0$$

4. L'inversion de Pascal :

$$t_n = \binom{p}{0} d_n^{(0)} - \binom{p}{1} d_n^{(1)} + \binom{p}{2} d_n^{(2)} - \binom{p}{3} d_n^{(3)} + \cdots + (-1)^p \binom{p}{p} d_n^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k d_n^{(k)}$$

**Modélisation**

Pour modéliser ce phénomène, il nous faut introduire l'application de décalage d'indice :

$$\mathcal{T} : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

Dans la notation des suites, on trouve deux expressions équivalentes :

- ⋆ l'expression développée : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- ⋆ l'expression abrégée : $a$

Ainsi la notation du terme $a_n$ fait référence à l'expression abrégée $a$ à laquelle on ajoute l'indice $n$ du terme. Dans ces conditions, on peut écrire :

$$a_{n+1} = \mathcal{T}(a)_n$$

L'application $\mathcal{T}$ est linéaire, dès lors il existe un morphisme canonique entre $(\mathbb{Z}[X], +, \times)$ l'anneau des polynômes et $(\mathbb{Z}[\mathcal{T}], +, \circ)$ l'anneau des combinaisons linéaires des compositions itérées de $\mathcal{T}$.

$$\pi : \sum_{k=0}^{d} \alpha_k X^k \longmapsto \sum_{k=0}^{d} \alpha_k \underbrace{\mathcal{T} \circ \cdots \circ \mathcal{T}}_{k \text{ fois, noté } \mathcal{T}^k}$$

On peut même prolonger ce morphisme aux séries infinies en considérant les corps de rupture de ces anneaux libres, à savoir $\mathbb{Z}(X) = \mathbb{Q}(X)$ et $\mathbb{Z}(\mathcal{T}) = \mathbb{Q}(\mathcal{T})$.

$$\pi : \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n X^n \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \mathcal{T}^n$$

L'itéré $\mathcal{T}^p$ correspond donc à un décalage de $p$ indices :

$$\mathcal{T}^p : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (a_{n+p})_{n\in\mathbb{N}}$$

Donc :

$$a_n = \mathcal{T}^n(a)_0$$

Ainsi, l'application de différences correspond à l'application $\mathcal{D} = \mathcal{T}^0 - \mathcal{T}^1 = Id - \mathcal{T}$ :

$$\mathcal{D} : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (a_n - a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

L'application $\mathcal{D}$ appartient à l'anneau $(\mathbb{Z}[\mathcal{T}], +, \circ)$. Grâce au morphisme $\pi$, on peut donc la considérer comme un polynôme en $\mathcal{T}$ :

$$\mathcal{D} = Id - \mathcal{T} = \pi(1 - X)$$

Ainsi, on peut exprimer une série de termes de la suite $a$ à l'aide d'une série formelle du corps $\mathbb{Q}(X)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n a_n &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \mathcal{T}^n(a)_0 \\
&= \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \mathcal{T}^n\right)(a)_0 \\
&= \left(\pi\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n X^n\right)\right)(a)_0
\end{aligned}$$

Dès lors, une identité remarquable valide au sein des séries formelles se traduit dans les relations entre termes d'une suite :

$$(1 - X)(1 + X) = 1 - X^2 \qquad \longrightarrow \qquad (a_n + a_{n+1}) - (a_{n+1} + a_{n+2}) = a_n - a_{n+2}$$

**Expression des différences en fonction des termes**

Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{aligned} d_n^{(1)} &= t_n - t_{n+1} \\ &= Id(t)_n - \mathcal{T}(t)_n \\ &= (Id - \mathcal{T})(t)_n \\ &= \mathcal{D}(t)_n \end{aligned}$$

Donc, on a l'égalité des suites suivantes : $d^{(1)} = \mathcal{D}(t)$. Ainsi, on peut écrire :

$$d^{(1)} = \mathcal{D}(t) = \pi(1 - X)(t)$$

La différence seconde est la différence de la différence première, ainsi :

$$\begin{aligned} d_n^{(2)} &= d_n^{(1)} - d_{n+1}^{(1)} \\ &= \mathcal{D}\left(d^{(1)}\right)_n \end{aligned}$$

Donc, on a l'égalité des suites suivantes : $d^{(2)} = \mathcal{D}\left(d^{(1)}\right)$. Ainsi, on peut écrire à nouveau :

$$\begin{aligned} d^{(2)} &= \mathcal{D}\left(d^{(1)}\right) \\ &= \mathcal{D}(\mathcal{D}(t)) \\ &= \mathcal{D} \circ \mathcal{D}(t) \\ &= (\pi(1 - X) \circ \pi(1 - X))(t) \\ &= \pi((1 - X) \times (1 - X))(t) \\ &= \pi\left((1 - X)^2\right)(t) \end{aligned}$$

On voit donc que l'itération successives des différences $d^{(p)}$ revient d'abord à la composition itérée de l'application $\mathcal{D}$ sur la suite $t$, puis à la puissance du monôme $(1 - X)$ via le morphisme $\pi$ :

$$d^{(p)} = \mathcal{D}^p(t) = \pi((1 - X)^p)(t)$$

A présent, nous pouvons retrouver la formule, à partir de développement du binôme de Newton dans l'anneau des polynômes $(\mathbb{Z}[X], +, \times)$ :

$$\begin{aligned} d_n^{(p)} &= \pi((1 - X)^p)(t)_n \\ &= \pi\left(\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k X^k\right)(t)_n \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k (\pi(X))^k (t)_n \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k \mathcal{T}^k(t)_n \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k t_{n+k} \end{aligned}$$

**Expressions termes en fonction des différences**

On a donc trouvé comment exprimer une différence d'ordre $p$ en fonction des termes de la suite $t$. On cherche à exprimer un terme de rang $n$ en fonction des différences d'ordre $p$. Pour cela, il faut exprimer l'identité $Id$ en fonction de l'itérée $\mathcal{D}^p$. Il faut donc trouver son inverse :

$$Id = (\mathcal{D}^p)^{-1} \circ \mathcal{D}^p.$$

Or, dans le corps $\mathbb{Q}(\mathcal{T})$, l'inverse de $\mathcal{D}^p$ correspond à l'inverse de $(1-X)^p$ dans le corps $\mathbb{Q}(X)$ :

$$(\mathcal{D}^p)^{-1} = \pi\left(\frac{1}{(1-X)^p}\right).$$

Ainsi, il s'agit de développer l'expression suivante :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{(1-X)^p} \times (1-X)^p \\ &= \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\!\!\binom{p}{k}\!\!\right) X^k\right) \times (1-X)^p \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\!\!\binom{p}{k}\!\!\right) (1-X)^p X^k \end{aligned}$$

Ceci correspond donc à la formule :

$$t_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\!\!\binom{p}{k}\!\!\right) d^{(p)}_{n+k}$$

**Coefficients binomiaux**

Les deux résultats précédents montrent que la dualité entre sommes et différences s'incarne dans la dualité entre les coefficients binomiaux alternés $(-1)^n\binom{p}{n}$ et les coefficients multiensembles $\left(\!\!\binom{p}{n}\!\!\right)$. De fait, si l'on observe les relations fondamentales de ces coefficients, on retrouve bien cette dualité :

$$(-1)^n\binom{p+1}{n} = (-1)^n\binom{p}{n} - (-1)^{n-1}\binom{p}{n-1} \qquad \left(\!\!\binom{p+1}{n}\!\!\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\!\!\binom{p}{k}\!\!\right)$$

*différence* *somme*

Reprenons donc l'égalité précédente :

$$\frac{1}{(1-X)^p} \times (1-X)^p = 1$$

Donc, en donnant les série formelles associées, on obtient directement :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\!\!\binom{p}{n}\!\!\right) X^n\right)\left(\sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n}(-1)^n X^n\right) = 1$$

Or, par le produit de Cauchy :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\!\!\binom{p}{n}\!\!\right) X^n\right)\left(\sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n}(-1)^n X^n\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{m} \left(\!\!\binom{p}{j}\!\!\right)\binom{p}{m-j}(-1)^{m-j}\right) X^m$$

Ainsi, en identifiant terme à terme, on obtient :

$$\sum_{j=0}^{m} \left(\!\!\binom{p}{j}\!\!\right)\binom{p}{m-j}(-1)^{m-j} = \begin{cases} 1 \text{ si } m = 0 \\ 0 \text{ si } m > 0 \end{cases}$$

Afin d'avoir l'intégralité des coefficients binomiaux, il nous suffit de considérer les cas où $m \geq p$. Or dans ce cas, on a :

$$j < m - p \quad \Rightarrow \quad m - j > p \text{ et donc } \binom{p}{m-j} = 0.$$

Donc :

$$\sum_{j=0}^{m} \left(\!\!\binom{p}{j}\!\!\right)\binom{p}{m-j}(-1)^{m-j} = \sum_{j=m-p}^{m} \left(\!\!\binom{p}{j}\!\!\right)\binom{p}{m-j}(-1)^{m-j}$$

On fait le changement d'indice suivant : $k = j - m + p$

$$\sum_{j=m-p}^{m} \left(\!\!\binom{p}{j}\!\!\right) \binom{p}{m-j} (-1)^{m-j} = \sum_{k=0}^{p} \left(\!\!\binom{p}{k+m-p}\!\!\right) \binom{p}{p-k} (-1)^{p-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \left(\!\!\binom{p}{k+m-p}\!\!\right) \binom{p}{k} (-1)^{p-k}$$

Pour nous rapporter aux seuls cas où $m \geq p$, posons donc $m = p + n$ avec $n \in \mathbb{N}$. Et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien :

$$\sum_{k=0}^{p} \left(\!\!\binom{p}{k+n}\!\!\right) \binom{p}{k} (-1)^{k} = \begin{cases} 1 \text{ si } p = n = 0 \\ 0 \text{ si } p > 0 \text{ ou si } n > 0 \end{cases}$$

En particulier, si $n = 0$ et $p > 0$, on retrouve la formule annoncée :

$$\sum_{k=0}^{p} \left(\!\!\binom{p}{k}\!\!\right) \binom{p}{k} (-1)^{k} = 0$$

Illustrons de façon concrète cette formule sur la table des $\binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b}$

| | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **1** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| **2** | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 |
| **3** | 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 84 |
| **4** | 1 | *5* | *15* | *35* | *70* | *126* | *210* |
| **5** | 1 | 6 | 21 | 56 | 126 | 252 | 462 |
| **6** | 1 | 7 | 28 | 84 | 210 | 462 | 924 |

Si l'on prend un segment de taille $p + 1$ de la ligne $p - 1$, par exemple $p = 5$ :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *5* | *15* | *35* | *70* | *126* | *210* |

On considère alors la diagonale de rang $p$, donc ici :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 |

Et on vérifie bien que :

$$1 \times 5 - 5 \times 15 + 10 \times 35 - 10 \times 70 + 5 \times 126 - 1 \times 210 = 0$$

Mais l'on peut aller plus loins. On remarque en effet que si l'on prend la ligne diagonale du dessus, à savoir ici :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 |

Alors on obtient encore une formule constante :

$$1 \times 5 - 4 \times 15 + 6 \times 35 - 4 \times 70 + 1 \times 126 = 1$$

On conjecture alors la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \left(\!\!\binom{p}{k+n}\!\!\right) \binom{p-1}{k} (-1)^{k} = 1$$

La démonstration de cette formule se fait exactement de la même manière avec la formule suivante :

$$\frac{1}{(1-X)^p} \times (1-X)^{p-1} = \frac{1}{1-X}$$

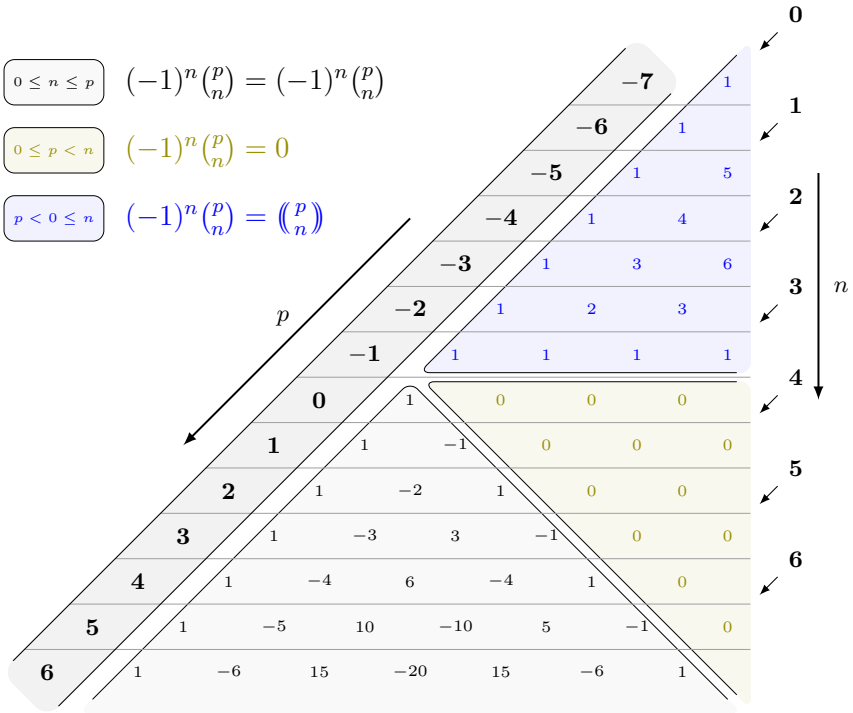
Donc, en donnant les série formelles associées :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\!\binom{p}{n}\!\right)X^n\right)\left(\sum_{n=0}^{p-1}\binom{p-1}{n}(-1)^nX^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}X^n$$

On voit ici, que les coefficients de la série sont tous égaux à 1, d'où la formule. Pour trouver la formule la plus générale possible, on peut considérer les coefficients multiensembles comme des coefficients binomiaux altérnés de rangs négatifs [100] :

$$\left(\!\binom{p}{n}\!\right)=(-1)^n\binom{-p}{n}$$

Cela revient à l'extension suivante du triangle arithmétique alterné :




Ainsi, on peut écrire en toute généralité, pour $p \in \mathbb{Z}$ :

$$(1-X)^p=\sum_{n\in\mathbb{N}}\binom{p}{n}(-1)^nX^n$$

Dès lors, on peut comprendre cette formule comme le cas particulier d'une formule classique de combinatoire, où les coefficient $p$ et $q$ sont des entiers quelconques dans $\mathbb{Z}$ :

$$(1-X)^p\times(1-X)^q=(1-X)^{p+q}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{p}{n}(-1)^nX^n\right)\left(\sum_{n=0}^{p-1}\binom{q}{n}(-1)^nX^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{p+q}{n}(-1)^nX^n$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{n-k}\binom{q}{k}=\binom{p+q}{n}$$

100. Cette façon d'étendre les fonctions d'analyse combinatoires à des domaines qui sont *a priori* exclus, pour lesquelles une interprétation combinatoire constitue l'idée fondatrice de l'étude des « théorèmes de réciprocité ». *Cf* [90] M. Beck et R. Sanyal, *Combinatorial Reciprocity Theorems*, Graduate Studies in Mathematics, Vol.195, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2018.

**Formule d'inversion de Pascal**

On peut considérer que les termes de la progression $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des différences de rang 0. On note alors :

$$t_n = d_n^{(0)}$$

Le triangle de différence est donc la table d'une progression à double indice :

$$u_{(p,n)} = d_n^{(p)}$$

La manière dont nous avons défini les termes masque la symétrie des rôles des deux indices. En effet, $n$ désigne le rang dans la progression et $p$ désigne l'ordre de différentiation. Mais considérons, en réalité, les suites $s^{(n)}$, constituées des termes de tout ordre $p$ et d'un même rang $n$ :

$$s_p^{(n)} = d_n^{(p)}$$

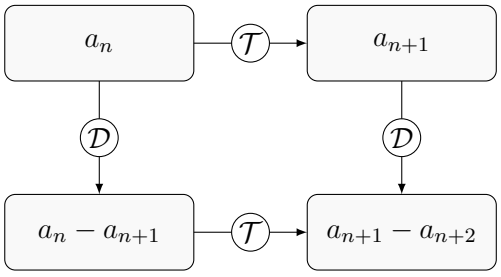
Alors $p$ désigne désormais le rang des progressions, et $n$ l'ordre de différentiation. En effet :

$$\begin{aligned} s_p^{(n)} - s_{p+1}^{(n)} &= d_n^{(p)} - d_n^{(p+1)} \\ &= d_n^{(p)} - (d_n^{(p)} - d_{n+1}^{(p)}) \\ &= d_{n+1}^{(p)} \\ &= s_p^{(n+1)} \end{aligned}$$

Les termes de la progression $s^{(n+1)}$ sont les différences successives des termes de la progression $s^{(n)}$. On comprend ainsi que les deux indices $p$ et $n$ jouent le même rôle dans le terme $u_{(p,n)}$. Pour représenter le $n$-ième terme de la $p$-ième différence $d_n^{(p)}$, il faut différentier $p$ fois et effectuer un décalage de $n$ indices. Il faut donc appliquer la composée $\mathcal{D}^p \circ \mathcal{T}^n$ :

$$d_n^{(p)} = \mathcal{D}^p \circ \mathcal{T}^n(t)_0$$

Or, via l'application $\pi$, cette composée est représentée par le polynôme $(1-X)^p X^n$. On en déduit, tout d'abord, que les deux opérations, de décalage et de différence, sont commutatives :




$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_{n+2} &= \mathcal{T}(a)_n - \mathcal{T}(a)_{n+1} \\ &= \mathcal{D}\left(\mathcal{T}(a)\right)_n \\ &= \mathcal{D} \circ \mathcal{T}(a)_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_{n+2} &= \mathcal{D}(a)_{n+1} \\ &= \mathcal{T}\left(\mathcal{D}(a)\right)_n \\ &= \mathcal{T} \circ \mathcal{D}(a)_n \end{aligned}$$

De plus, en posant $Y = 1 - X$, on voit qu'on inverse le rôle des rôles des exposants $p$ et $n$ :

$$(1-X)^p X^n \qquad \rightarrow \qquad Y^p (1-Y)^n$$

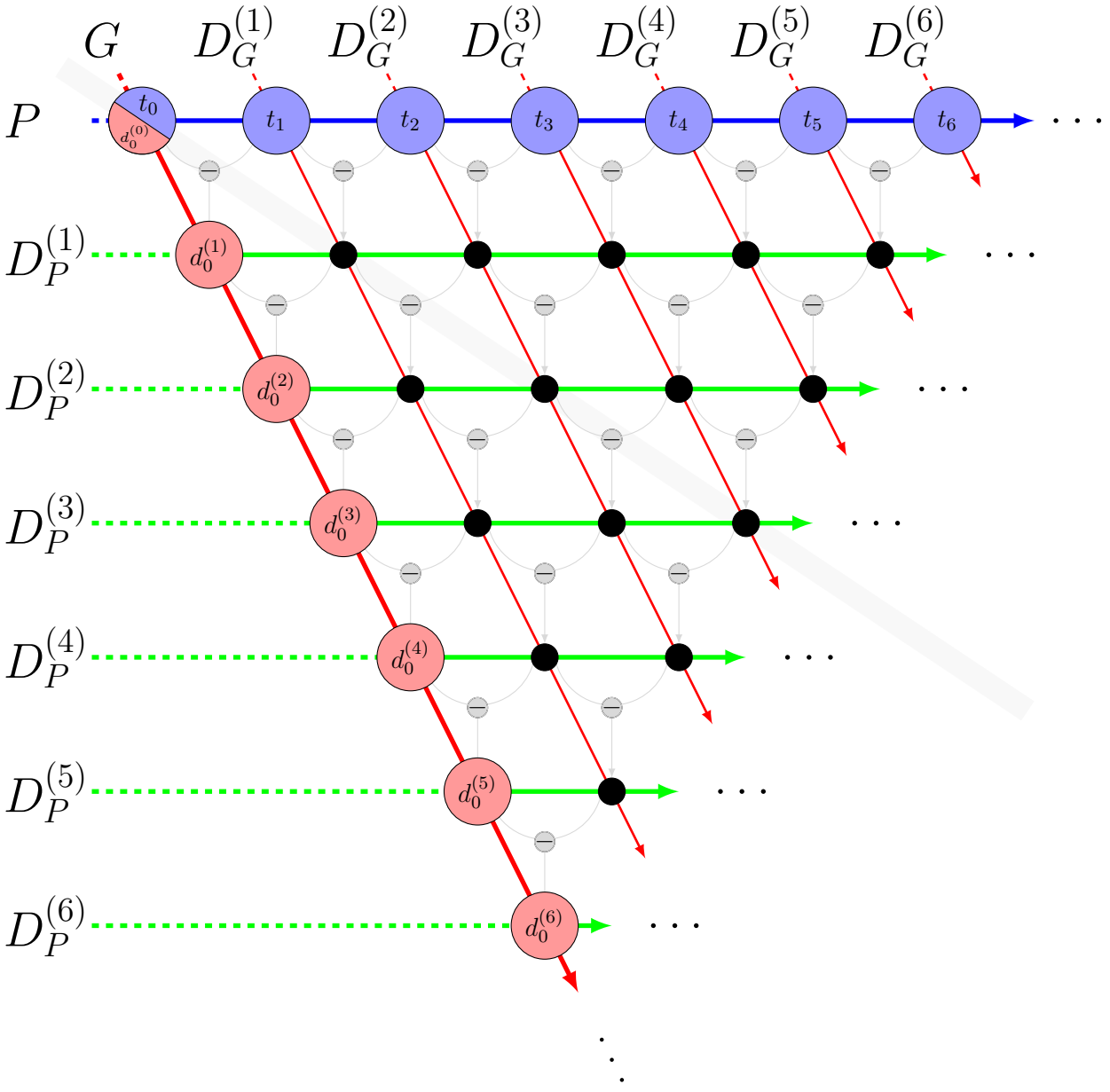
Ainsi, $X = 1 - Y$ joue le même rôle dans $\mathbb{Q}(Y)$ que $Y = 1 - X$ dans $\mathbb{Q}(X)$. De la même manière, l'application différence $\mathcal{D}$ devient le générateur dans $\mathbb{Q}(\mathcal{D})$ et le décalage d'indice $\mathcal{T}$ y devient l'opérateur de différence : $\mathcal{T} = Id - \mathcal{D}$. Dès lors, on voit qu'en transposant les deux indices $p$ et $n$, on obtient encore un triangle de différence, au sein duquel les relations que nous avons démontrées jusqu'ici sont à nouveau valable. On peut donc, en considérant le décalage comme la différence et la différence comme le décalage, obtenir le terme $t_n$ de rang $n$ en fonction des termes d'une suite $s^{(n)}$, c'est-à-dire les différences de tous les ordres $p$ pour un rang fixé $n$ :

$$\begin{aligned} X^n &= (1-(1-X))^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (1-X)^k \end{aligned}$$

A partir de cette identité, on retrouve donc ce qu'on appelle la formule d'inversion de Pascal :

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} (-1)^k d_0^{(k)}$$

Finalement, il apparait qu'au sein de la suite à double indice $(u_{(p,n)})_{p,n\in\mathbb{N}}$, les opérations de différence et de décalage d'indice sont de même nature, et substituables l'une avec l'autre. Il y a donc un axe de symétrie dans le triangle de différence qui transforme les termes en différences et les différences en termes :




Les définitions des deux applications $\mathcal{T}$ et $\mathcal{D}$ impliquent une hétérogénéité artificielle. Pour l'éviter, il suffit de poser le problème autrement. On considère une suite à double indice $(u_{(p,n)})_{p,n\in\mathbb{N}}$ dont on suppose seulement qu'elle vérifie la propriété suivante :

$$u_{(p,n)} = u_{(p+1,n)} + u_{(p,n+1)}$$

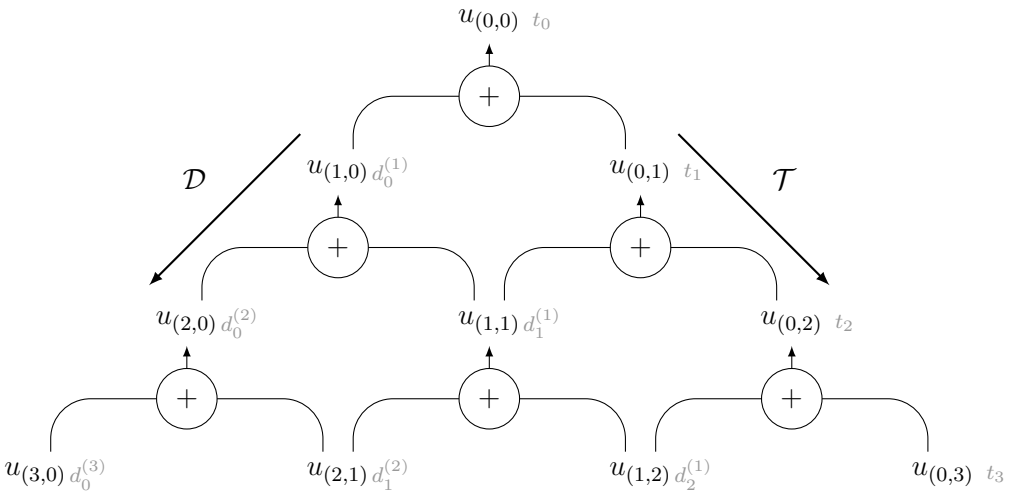
Dans ce cas, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{T}$ ont des définitions semblables. La première décale le premier indice et la seconde décale le second. Mais cette propriété implique la relation suivante entre les deux application :

$$Id = \mathcal{D} + \mathcal{T}$$

Dès lors, on retrouve les relations :

$$\mathcal{D} = Id - \mathcal{T} \qquad\qquad \mathcal{T} = Id - \mathcal{D}$$

L'application $\mathcal{D}$ devient la différence de $\mathcal{T}$ et réciproquement, comme on l'a vu. Finalement, pour exhiber la symétrie du triangle de différence, il faut le représenter à la manière du triangle harmonique :



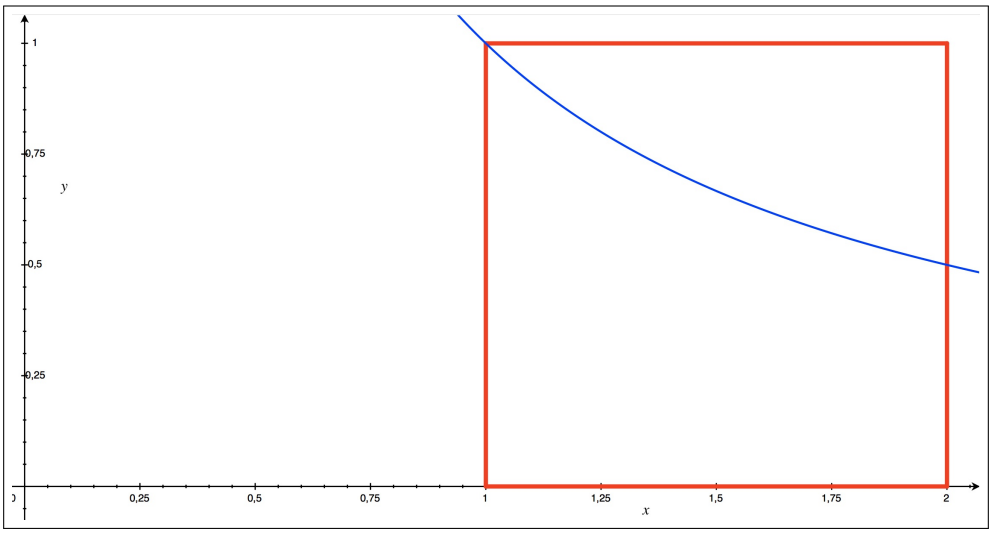
# Extrapolations sur la méthode de Brouncker

## Explications des tables

Nous nous consacrons ici à appliquer plusieurs généralisation de la méthode de Brouncker pour la quadrature de l'hyperbole, afin d'illustrer la richesse des résultats qu'il est possible de tirer de l'approche combinatoire par paquets.

### Première table : des rectangles

Dans la première table de l'article [101], on a la série $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)_n$,
Donnons à présent une preuve rigoureuse du résultat de Broucker [102]. Pour cela, commençons par donner la construction de la figure.




Dans le carré unité, on place une branche d'hyperbole qui relie l'angle gauche supérieur au milieu du côté droit. Ainsi, en plaçant un repère cartésien, on obtient le graphe de la fonction inverse $xy = 1$. Le coté inférieur du carré est donc un segment de l'asymptote de l'hyperbole, compris entre les abscisse 1 et 2. On voit donc ici directement le que la partie $X$ ait une aire qui vaut $\ln(2)$.

La branche de l'hyperbole partage le carré unité en deux parties égale, la partie traversée par la branche au dessus, et celle laissée vide en dessous. L'aire du bas constitue le terme $A_1$ de notre suite. On divise en deux la partie du haut verticalement, et on trace un segment horizontale qui passe par l'intersection de cette frontière verticale avec la branche de l'hyperbole. On a ainsi divisé la partie du

101. *Cf* p.167.

102. A ce sujet, voir utilement [103] J. Stedall, *Mathematics Emerging : a Sourcebook 1540 - 1900*, Oxford, 2008 - p.84-88 ; [17] D. Crippa, *The Impossibility of Squaring the Circle in the 17th Century : a Debate among Gregory, Huygens and Leibniz*, Springer, 2019 - p.106-109 et [115] H. G. Zeuthen, *Geschichte der mathematik im XVI. und XVII. jahrhundert*, Leipzig, 1903 - p.308-313

haut en quatre case. Deux cases diagonales sont traversées par l'hyperbole, la case supérieure restante constitue le terme $A_2$ et la case inférieure le terme $A_3$. On peut appliquer cette construction de façon itérative sur les deux cases diagonales traversées par la branche d'hyperbole. Ainsi, on construit dans celle du haut les termes $A_4$ et $A_5$ puis dans celle du bas les termes $A_6$ et $A_7$. Ainsi, à l'étape $s$ :

- ⋆ Il y a $2^d$ cases diagonales de libres, et ces cases diagonales ont une largeur qui vaut $\frac{1}{2^s}$.
- ⋆ On a indexé les termes de $A_{1+\cdots+2^{s-1}+1}$ jusqu'à $A_{1+\cdots+2^s}$. Le terme $A_{1+\cdots+2^{s-1}+2k-\varepsilon}$ (avec $1 \leq k \leq 2^{s-1}$ et $\varepsilon$ qui vaut 0 ou 1) correspond à la $k$-ième case diagonale de l'étape précédente $s-1$, la case supérieure si $\varepsilon = 1$ et la case inférieure si $\varepsilon = 0$.

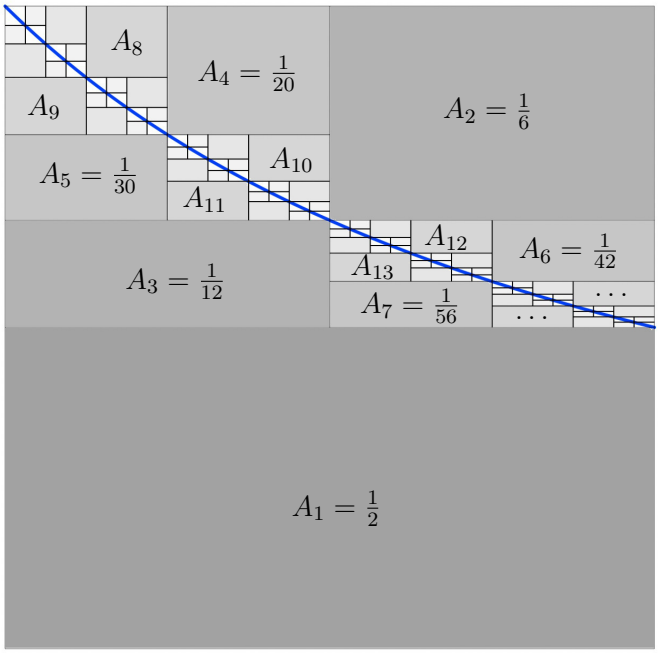
Soit $n$ un entier supérieur à 1. Alors on peut écrire :

$$n = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{s-1} + k$$

Avec $s \geq 1$ et $1 \leq k \leq 2^s$. Donc le terme $A_n$ est un rectangle à côté de la $k$-ième case diagonale à l'étape $s$. Ces dimensions sont donc les suivantes :

- ⋆ Sa largeur est égale à la largeur de la colonne à l'étape $d$, c'est-à-dire $r = \frac{1}{2^s}$.
- ⋆ La hauteur est celle de la case diagonale juste à côté, donc c'est la différence des ordonnées de la courbe entre les abscisses délimitées par les deux côtés latéraux de cette case diagonale, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{1+(k-1)r} - \frac{1}{1+kr}$$




Si $n = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{s-1} + k$ avec $1 \leq k \leq 2^s$, alors on a

$$\begin{aligned} A_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^s \left(\frac{1}{1+\frac{k-1}{2^s}} - \frac{1}{1+\frac{k}{2^s}}\right) \\ &= \frac{1}{2^s+k-1} - \frac{1}{2^s+k} \\ &= \frac{1}{(2^s+k-1)(2^s+k)} \end{aligned}$$

Or $n = (1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{s-1}) + k = 2^s - 1 + k$. Donc on a bien :

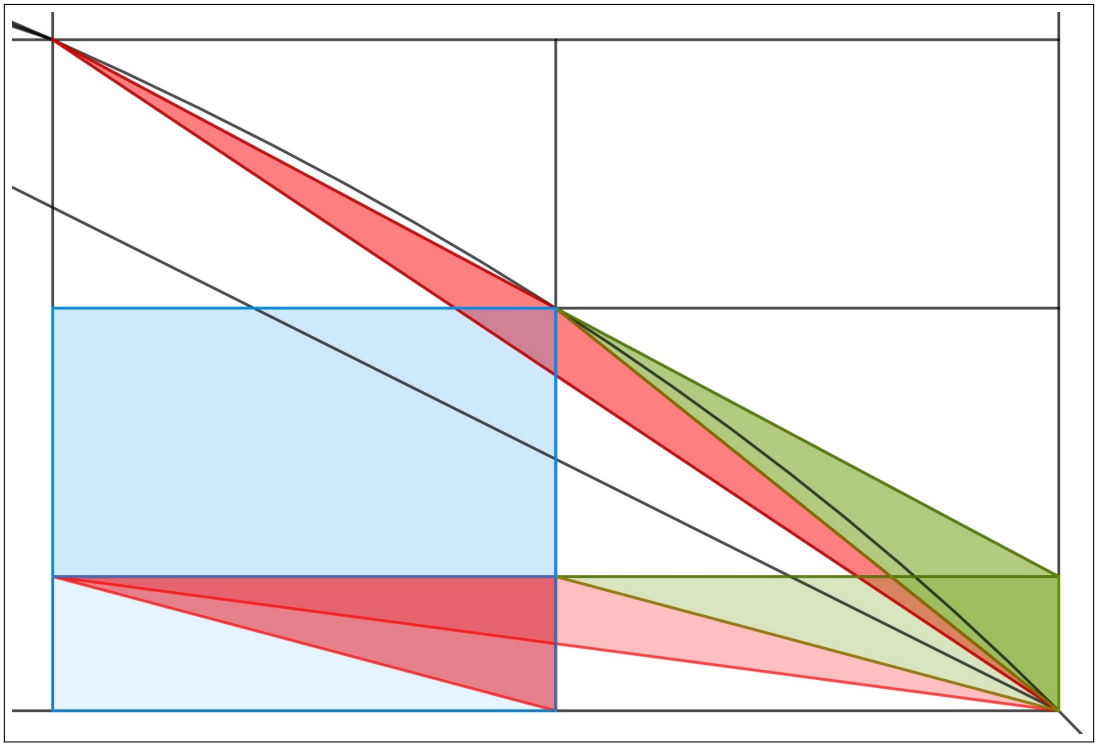
$$A_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

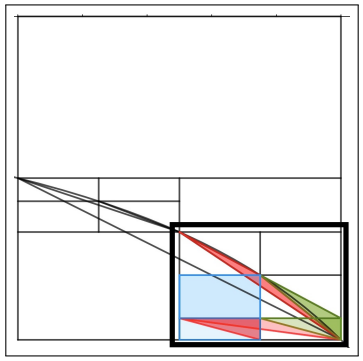
**Seconde Table : des triangles**

Pour la seconde table [103], on a :

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

La table nous indique que chaque triangle est égale à la moitié de la différence de deux rectangles. On peut retrouver cette proposition géométriquement.





On prolonge le coté supérieur gauche du triangle, c'est-à-dire le moins pentu, jusqu'au bord du grand rectangle. Comme les côtés des triangles sont les diagonales des rectangles cherchés, on comprends que le petit rectangle du bas restant est bien la différence entre deux rectangles consécutifs. Or deux triangles qui ont la même base et la même hauteur ont la même aire. Ainsi, les deux triangles verts ont la même aire ainsi que les trangles formés par l'union du rouge et du vert. Donc la différence des deux triangles est égale. Ainsi, le triangle rouge de départ à la même aire que le triangle rouge clair, lequel a la même aire que le triangle rectangle rouge, puisqu'ils partagent la même base et la même hauteur. Or l'aire du triangle rouge vaut la moitié du petite rectangle du bas, qui est la différence entre les deux rectangles du départ.
Cette algorithme du calcul d'aires, compris entre une courbe et une corde correspond en fait à la méthode que Leibniz va développer à Paris pour déterminer sa Quadrature Arithmétique du Cercle [104].

103. *Cf* p.167.
104. [54] G.W. Leibniz, *Quadrature arithmétique du cercle, de l'ellipse et de l'hyperbole et la trigonométrie sans tables*

## Généralisation de la méthode de Brouncker

Brouncker affirme à la fin de son traité qu'il peut généraliser sa méthode de quadratures à n'importe quel rectangle dans laquelle il place une branche de parabole, à la seule condition que les côtés du rectangle soient enn proportion rationnelle (et que le côté inférieur du rectangle soit toujours un segment de l'asymptote) :

> *Par n'importe laquelle de ces trois séries, il n'est pas difficile de calculer, aussi proche que l'on souhaite, tel ou tel espace hyperbolique, quelque soit le rapport rationnel de AE sur BC. Par exemple, lorsque AE est à BC comme* 5 *et à* 4 *(ce à quoi sont consacrés les calculs qui succèdent à ceux-ci qui sont pour le cas où la proportion est de 2 à 1, et dans les deux cas, à partir de la troisième série.* [105]

Ici Brouncker généralise son résultat sans pourtant généraliser sa méthode. En effet, s'il parle de considérer des rectangles où les rapport de proportion entre $AE$ et $BC$ sont différents de 2. Il fait son calcul pour le cas du rapport $\frac{5}{4}$ sur la même figure de départ, avec la même construction et donc les mêmes trois séries. C'est donc en calculer des sous-quadrature que Brouncker parvient à généraliser sa formule.
En effet, on peut obtenir ici, en ne débutant la quadrature qu'à l'étape $d$, la valeur approchée de :

$$\ln\left(\frac{k}{2^d}\right) = \ln(k) - d\ln(2)$$

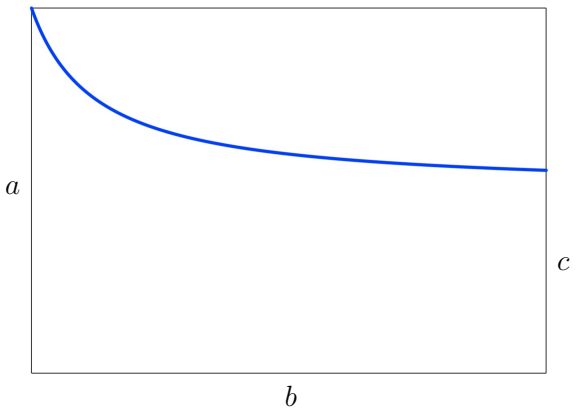
On obtient donc ainsi la valeur du logarithme pour n'importe quel entier naturel.

### Première méthode : les subdivisions

Nous allons montrer comment obtenir d'autres formules, en généralisant la méthode de quadratures elle-même, en particulier le découpage.

#### Augmentation du nombre de subdivisions

On va chercher à établir cette généralisation de la méthode de Brouncker pour faire la quadrature d'une courbe quelconque. On part donc du cas complètement générale suivant :

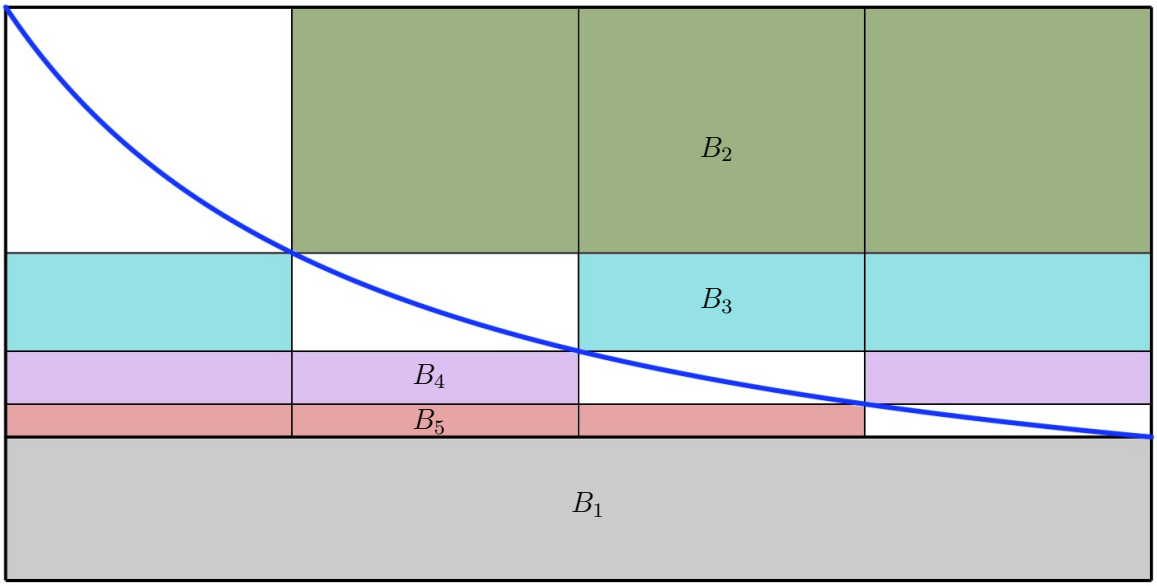



A translation et homothétie près, on peut supposer que $a = 1$ et que son abcisse vaut 1. Nous allons à présent découper le rectangle selon la méthode de Brouncker en rectangle plus petits afin d'obtenir la quadrature. On indexera ces rectangles par la suite $B = B_1, B_2, \ldots$.
Comme l'a fait Broucker, on commence par partager le rectangle en deux parties en traçant un segment horizontal de hauteur $c$, c'est-à-dire qui délimite le cadre de la courbe. L'aire de la partie inférieure vaut donc $B_1 = bc$. C'est la partie supérieure que nous allons subdiviser. Au lieu de simplement la diviser

*trigonométriques qui en est le corollaire*, *eds.* E. Knobloch, M. Parmentier, Vrin, 2004

105. [113] C. Scriba, P. Beeley, *The Correspondence of John Wallis (1616-1703)*, Oxford 2003 - *Volume II (1660 - September 1668)*, N.197, p.457, W. Brouncker to H. Oldenburf (London) : « By any one of which three Series, it is not hard to calculate, as near as you please, these and the like Hyperbolic spaces, whatever be the Rational Proportion of $AE$ to $BC$. As for Example, when $AE$ is to $BC$, as 5 to 4 (whereof the Calculation follows after that where the Proportion is, as 2 to 1. and both by the third Series) »

verticalement en deux parties égales, comme l'a fait Brouncker, nous allons diviser cette bande horizontale en $p$ colonnes égales, de largeur $\frac{b}{p}$.
On trace un trait horizontal à chaque intersection de la courbe avec les frontières verticales de colonnes, ce qui partage la partie supérieure en $p$ lignes. Sur ces $p^2$ cases que nous venons de construire, la courbe traverse les $p$ diagonales, donc une case par ligne :




Ainsi, les cases restantes d'une ligne, qui sont donc au nombre de $p-1$, forment à elles-toutes un terme de la suite $B$, comme le montrer la figure ci-dessus. Or toutes les cases d'une même ligne on la même aire, donc le terme $B_k$ vaut l'aire de la case traversée par la courbe sur sa ligne, multipliée par $p-1$. Ainsi, on indexe les terme verticalement de haut en bas. Comme il y a $p$ lignes, cela nous donne les termes $B_2, \dots, B_{p+1}$.
Pour chacune des $p$ cases diagonales, laissée vide, on réitère la construction, c'est-à-dire qu'on les partage verticalement en $p$ colonnes égales puis horizontalement, selon l'intersection de la courbe avec les colonnes. On indexe alors verticalement de haut en bas. Pour la première case, on a les termes $B_{p+2}, \dots, B_{2p+1}$, pour la seconde on a $B_{2p+2}, \dots, B_{3p+1}$ et ainsi de suite jusqu'à la $p$-ième case diagonale, en bas à droite, qui contient les termes $B_{p^2+2}, \dots, B_{p^2+p+1}$.
Une fois cette deuxième étape terminée, il reste à présent $p^2$ cases diagonales vides sur lesquelles on applique la construction à nouveau et ainsi de suite. Ainsi, à l'étape $d$ :

- ⋆ Il y a $p^d$ cases diagonales de libres, et ces cases diagonales ont une largeur qui vaut $\frac{b}{p^d}$.
- ⋆ On a indexé les termes de $B_{p^{d-1}+\dots+p+2}$ jusqu'à $B_{p^d+\dots+p+1}$. Le terme $B_{p^{d-1}+\dots+p+1+(jp+i)}$ (avec $0 \leq j \leq p^{d-1}-1$ et $1 \leq i \leq p$) correspond à la $i$-ième ligne de la $j$-ième case diagonale de l'étape précédente $d-1$.

Ainsi, on peut générer à partir de la courbe, la suite $B$ dont on est sûr que la somme vaut l'aire du rectangle, c'est-à-dire $b$. Pour obtenir la quadrature de la courbe, il faut de compter que les cases qui sont sous elle. Or on voit que le découpage donne une situation périodique pour le terme $B_n$, à savoir que si $n-2 \equiv k[p]$ avec $0 \leq k \leq p-1$, alors il y a à sa ligne correspondante $k$ cases sous la courbe et $p-1-k$ cases au-dessus. Ainsi, on peut déterminer la quadrature $X$ de la courbe par la formule suivante :

$$X = B_1 + \frac{1}{p-1}(0.B_2 + 1.B_3 + \dots + (p-1).B_{p+1} + 0.B_{p+2} + 1.B_{p+3} + \dots + (p-1).B_{2p+1} + \dots$$

Calculons le terme $B_n$ en fonction de la courbe qu'on modélise par la fonction $h$. On suppose que $n \geq 1$ car on connait déjà $B_1 = bc$. On suppose que $B_n$ correspond à la $k$-ième ligne de l'étape $d$, alors :

$$n = 1 + p + p^2 + \dots + p^{d-1} + k = \frac{p^d - 1}{p-1} + k.$$

On a vu que $B_n$ vaut l'aire de la case diagonale traversée par la courbe, multipliée par $p-1$ :

- ⋆ La largeur de cette case est égale à la largeur de la colonne à l'étape $d$, c'est-à-dire $r = \frac{b}{p^d}$.
- ⋆ La hauteur vaut la différence de la courbe entre les deux abscisses délimitées par la colonne, c'est-à-dire $h(1+(k-1)r) - h(1+kr)$.

Donc :

$$B_n = \frac{b(p-1)}{p^d}\left(h\left(1+(k-1)\frac{b}{p^d}\right) - h\left(1+k\frac{b}{p^d}\right)\right).$$

**Retour aux hyperboles**

Comme, le coté inférieur du rectangle reste l'asymptote de l'hyperbole, on cherche alors une expression algébrique de la forme :

$$h(x) = \frac{\alpha}{x+\beta}.$$

En ajoutant les conditions $h(1) = 1$ et $h(1+b) = c$, on obtient la forule suivante :

$$h(x) = \frac{bc}{bc+(1-c)(x-1)}.$$

Ainsi, nous pouvons obtenir la valeur de $B_n$ en replaçant par la formule :

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{b(p-1)}{p^d}\left(h\left(1+(k-1)\frac{b}{p^d}\right) - h\left(1+k\frac{b}{p^d}\right)\right) \\ &= \frac{b(p-1)}{p^d}\left(\frac{bc}{bc+(1-c)(k-1)\frac{b}{p^d}} - \frac{bc}{bc+(1-c)k\frac{b}{p^d}}\right) \\ &= \frac{bc(p-1)}{p^d c+(1-c)(k-1)} - \frac{bc(p-1)}{p^d c+(1-c)k} \end{aligned}$$

Or, ici on a une formule qui dépend de $k$, $n$ et $d$ qui ne sont pas indépendants. Commençons par éliminer $d$ par la relation suivante :

$$n = 1+p+p^2+\cdots+p^{d-1}+k = \frac{p^d-1}{p-1}+k.$$

En remarquant que $p^d = 1+(p-1)(n-k)$, on remplace dans la formule :

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{bc(p-1)}{(1+(p-1)(n-k))c+(1-c)(k-1)} - \frac{bc(p-1)}{(1+(p-1)(n-k))c+(1-c)k} \\ &= \frac{bc(p-1)}{c-(1-c)+c(p-1)n+((p-1)c-(c-1))k} - \frac{bc(p-1)}{c+c(p-1)n+((p-1)c-(c-1))k} \end{aligned}$$

La formule dépend toujours ici de $n$ et $k$. On voit qu'il faut jouer sur le paramètre $c$ pour pouvoir éliminer $k$ :

$$(p-1)c-(c-1) = 0$$
$$c = \frac{1}{p}.$$

Ainsi, il est nécessaire que $cp = 1$ pour qu'on puisse obtenir une relation directe entre $B_n$ et $n$, à savoir :

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{bc(p-1)}{c-(1-c)+c(p-1)n} - \frac{bc(p-1)}{c+c(p-1)n} \\ &= \frac{b(p-1)}{1+(p-1)(n-1)} - \frac{b(p-1)}{1+(p-1)n} \\ &= \frac{b(p-1)^2}{(1+(p-1)n)(1+(p-1)(n-1))} \end{aligned}$$

**Quadrature**

On a donc la formule suivante pour l'hyperbole :

$$h(x) = \frac{b}{b + (p-1)(x-1)}$$

Ainsi, l'aire sous la courbe vaut :

$$\int_1^{1+b} h(t)dt = \int_1^{1+b} \frac{bdt}{b + (p-1)(t-1)} = \int_b^{bp} \frac{bds}{(p-1)s} = \frac{b}{p-1}\ln(p)$$

Nous pouvons donc simplifier cette aire en posant $b = p-1$, en effet, on retrouve ainsi $h$ égale à la fonction inverse canonique comme dans le cas de Brouncker. On obtient donc la généralisation de la quadrature que Brouncker évoquait, mais seulement entre les abscisses 1 et $p$ avec $p$ entier. Et il nous a fallu alors adapter sa méthode de découpage à la situation, en découpant en $p$ parties à chaque étape au lieu de deux.

On doit appliquer, pour trouver la formule de la quadrature, la remarque liée à notre découpage, à savoir qu'il faut compter le nombre de sous-parties de chaque terme qui sont sous la courbes. On obtient donc ainsi :

$$\begin{aligned}
\ln(p) &= B_1 + \frac{1}{p-1}(0.B_2 + 1.B_3 + \cdots + (p-1).B_{p+1} + 0.B_{p+2} + 1.B_{p+3} + \cdots + (p-1).B_{2p+1} + \ldots \\
) &= \frac{p-1}{p} + \frac{0.(p-1)^2}{(1+(p-1))(1+2(p-1))} + \cdots + \frac{(p-1).(p-1)^2}{(1+p(p-1))(1+(p+1)(p-1))} \\
&+ \frac{0.(p-1)^2}{(1+(p+2)(p-1))(1+(p+3)(p-1))} + \cdots + \frac{(p-1).(p-1)^2}{(1+2p(p-1))(1+(2p+1)(p-1))} \\
&+ \ldots
\end{aligned}$$

Or, si s'avère, comme nous l'avons vu, que les termes de $B$ sont des différences de termes en progression harmonique :

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{(p-1)^3}{(1+(p-1)n)(1+(p-1)(n-1))} \\
&= \frac{(p-1)^2}{1+(p-1)(n-1)} - \frac{(p-1)^2}{1+(p-1)n} \\
&= I_{n-1} - I_n
\end{aligned}$$

Donc :

$$0.B_{kp+2} + 1.B_{kp+3} + \cdots + (p-1).B_{(k+1)p+1}$$

$$\begin{aligned}
&= 0.(I_{kp+1} - I_{kp+2}) + 1.(I_{kp+2} - I_{kp+3}) + \cdots + (p-1).(I_{(k+1)p} - I_{(k+1)p+1}) \\
&= I_{kp+2} + I_{kp+3} + \cdots + I_{(k+1)p} - (p-1)I_{(k+1)p+1} \\
&= (I_{kp+2} - I_{(k+1)p+1}) + (I_{kp+3} - I_{(k+1)p+1}) + \cdots + (I_{(k+1)p} - I_{(k+1)p+1}) + (I_{(k+1)p+1} - I_{(k+1)p+1})
\end{aligned}$$

Illustrons-le pour le cas $p = 4$. La suite $I$ est alors la suivante :

$$I = \frac{9}{4} \;;\; \frac{9}{7} \;;\; \frac{9}{10} \;;\; \frac{9}{13} \;;\; \frac{9}{16} \;;\; \frac{9}{19} \;;\; \cdots$$

Alors, on comprend bien que :

$$0.\left(\frac{9}{4} - \frac{9}{7}\right) + 1.\left(\frac{9}{7} - \frac{9}{10}\right) 2.\left(\frac{9}{10} - \frac{9}{13}\right) + 3.\left(\frac{9}{13} - \frac{9}{16}\right)$$

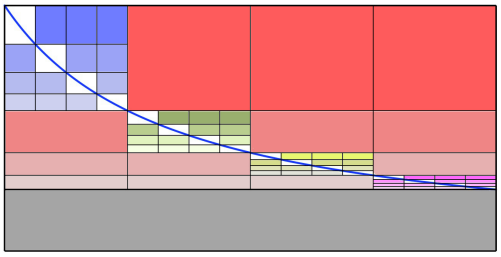
$$= 0.\frac{9}{4} + (1-0).\frac{9}{7} + (2-1).\frac{9}{10} + (3-2).\frac{9}{13} - 3.\frac{9}{16}$$
$$= \left(\frac{9}{7} - \frac{9}{16}\right) + \left(\frac{9}{10} - \frac{9}{16}\right) + \left(\frac{9}{13} - \frac{9}{16}\right) + \left(\frac{9}{16} - \frac{9}{16}\right)$$

Finalement, cette construction nous donne la formule suivante :

$$\ln(p) = \frac{p-1}{p} + (p-1)\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+(p-1)k} - \frac{1}{1+(p-1)p\left\lceil\frac{k}{p}\right\rceil}\right).$$

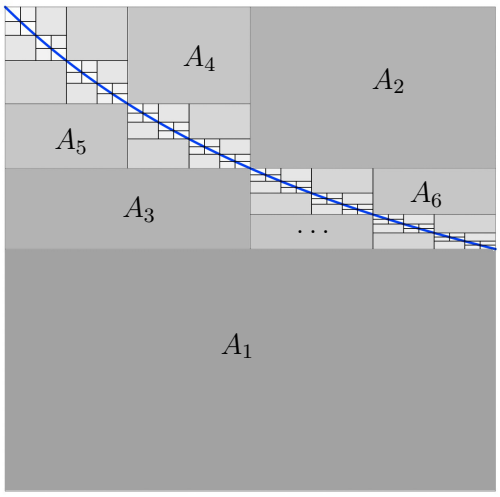
Nous l'illustrons pour les première valeurs de $p$ :

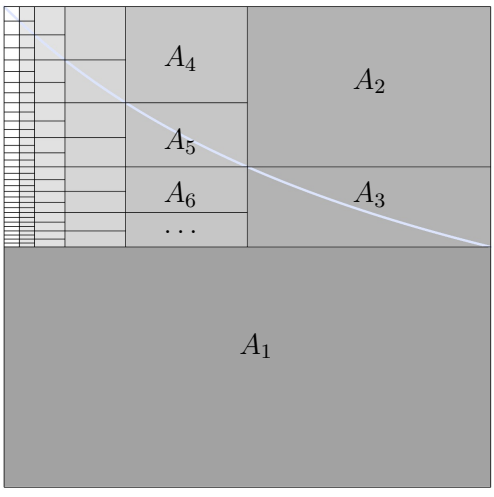
$$\begin{aligned}
\ln(2) &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \dots \\
\ln(3) &= \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{9}\right) + \left(\frac{2}{7} - \frac{2}{9}\right) + \left(\frac{2}{11} - \frac{2}{15}\right) + \left(\frac{2}{13} - \frac{2}{15}\right) + \left(\frac{2}{17} - \frac{2}{21}\right) + \dots \\
\ln(4) &= \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{7} - \frac{3}{16}\right) + \left(\frac{3}{10} - \frac{3}{16}\right) + \left(\frac{3}{13} - \frac{3}{16}\right) \\
&+ \left(\frac{3}{19} - \frac{3}{28}\right) + \left(\frac{3}{22} - \frac{3}{28}\right) + \left(\frac{3}{25} - \frac{3}{28}\right) \dots \\
\ln(5) &= \frac{4}{5} + \left(\frac{4}{9} - \frac{4}{25}\right) + \left(\frac{4}{13} - \frac{4}{25}\right) + \left(\frac{4}{17} - \frac{4}{25}\right) + \left(\frac{4}{21} - \frac{4}{25}\right) \\
&+ \left(\frac{4}{29} - \frac{4}{45}\right) + \left(\frac{4}{33} - \frac{4}{45}\right) + \left(\frac{4}{37} - \frac{4}{45}\right) + \left(\frac{4}{41} - \frac{4}{45}\right) \dots
\end{aligned}$$



## Deuxième méthode : combinatoires des méthodes de quadrature

Si l'on revient à la figure initiale de Brouncker, on peut noter une propriété remarquable, directement issue de la façon dont on découpe le carré successivement, c'est-à-dire par deux à chaque fois. En effet, si on met sur la même colonne tous les termes ayant la même largeur, par translation horizontale, on tombe sur une représentation géométrique de la méthode de Huygens, qu'on retrouvait déjà chez Mengoli, à savoir la somme par paquet :



**Sommes par paquets**

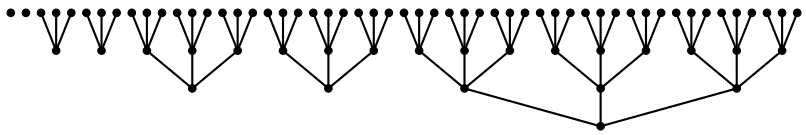
La méthode de Brouncker nous permet donc d'obtenir une autre explication très visuelle de la méthode de sommation par paquet que nous avions trouvé chez Huygens et chez Mengoli. Comment adapter la démarche de Brouncker pour qu'elle corresponde à une autre manière de sommer par paquet ? Tentons donc ici de sommer les termes deux par deux, regrouper les paquets trois par trois, quatre par quatre et plus généralement $p$ par $p$.
Pour ce faire, commençons par reproduire le schéma de sommation par paquet ci-dessus, pour la version généralisée. On rappelle que la sommation par paquets de $p$ termes se fonde sur la règle suivante :

$$A_{pn} + A_{pn+1} + A_{pn+2} + \cdots + A_{pn+p-1} = \frac{1}{p} A_n.$$

Ainsi, en partant $A_p$ et en regroupant les termes de la suite $p$ par $p$, on obtient que la suite des paquets vaut exactement la suite $A$ de départ, divisée par $p$ :

$$\underbrace{A_p + \cdots + A_{2p-1}}_{\frac{1}{p}A_1} + \underbrace{A_{2p} + \cdots + A_{3p-1}}_{\frac{1}{p}A_2} + \cdots + \underbrace{A_{np} + \cdots + A_{(n+1)p-1}}_{\frac{1}{p}A_n}$$

On convient donc que si l'on ôte à la suite $A$ ses $p-1$ premiers termes, on obtient la fraction $p$-ième de la suite $A$, ce qui montre qu'en divisant la somme de $A$ en $p$ parties égales, on peut répartir dans les $p-1$ premières les $p-1$ premiers termes de $A$ et la dernière partie contiendra tous les termes restants.



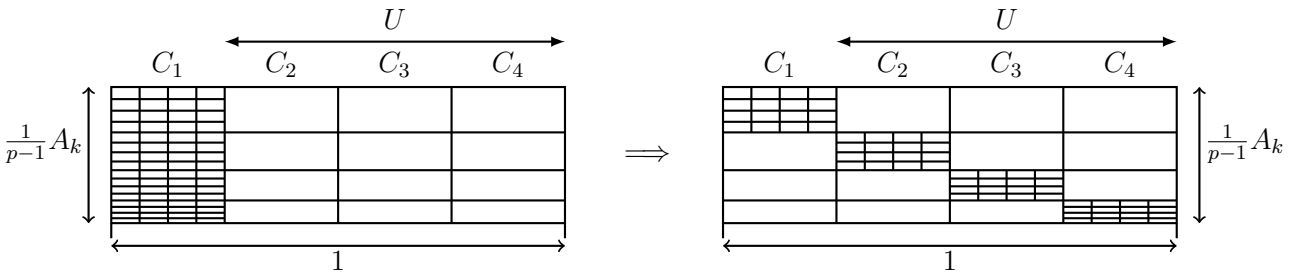
Dans le cas de Brouncker, c'est-à-dire $p = 2$, on a divisé le carré en deux parties horizontales pour la première étape, puis on divise verticalement pour toutes les étapes qui suivent. C'est donc ce que l'on fait dans cette généralisation. On divise le carré horizontalement en deux parties $P_1$ et $P_2$. La partie inférieure $P_1$, dont l'aire vaut $\frac{p-1}{p}$ contiendra les $p-1$ premiers termes de la suite et tous les autres seront exactement contenus dans la partie supérieure $P_2$, dont l'aire vaut donc $\frac{1}{p}$.
Mais on a vu que ces termes restants, en les regroupant par paquets de $p$, donnent exactement les fractions $p$-ièmes des termes de la suite $A$ initiale, c'est-à-dire partant de $A_1$. Ainsi, on peut procéder à un découpage semblable au premier : verticalement, on divise la partie $P_2$ en deux parties $P_3$ et $P_4$. $P_3$ est la partie de droite et a une aire qui vaut $\frac{p-1}{p}$ celle de $P_2$. Elle contient les $p-1$ premiers paquets de $p$ termes. On les répartis verticalement dans la partie $P_3$. Les autres termes, qui sont dans les autres paquets, sont tous contenus exactement dans la partie $P_4$ dont l'aire vaut $\frac{1}{p}$ de l'aire de $P_2$ donc $\frac{1}{p^2}$ du carré unité.
On poursuit de même. Tous les paquets de $p$ restants dans la partie $P_4$ peuvent être à leur tour regroupés en paquet de $p$ paquets de $p$. La suite de paquets de paquets obtenue vaut donc exactement $\frac{1}{p^2}$ la suite $A$ initiale, et l'on peut à nouveau diviser verticalement la partie $P_4$ en deux partie $P_5$ et $P_6$. La partie de droite $P_5$ à une aire qui vaut $\frac{p-1}{p}$ celle de $P_4$ et contient les $p-1$ premiers paquets de $p$ paquets de $p$ tandis que les restants sont exactement contenus dans l'aire de $\frac{1}{p^3}$ de $P_6$, la partie de gauche.
On peut donc diviser la partie $P_2$ de la façon suivante :

- ⋆ Horizontalement, on divise $P_2$ en $p-1$ parties qui sont dans le même rapport vis-à-vis de $P_2$ que les $p-1$ premiers termes de $A$ vis-à-vis de l'unité. Notons $H_1, H_2, \ldots, H_{p-1}$ ces $p-1$ bandes horizontales, $H_1$ étant celle du haut et $H_{p-1}$ celle du bas.
- ⋆ Verticalement, on diviser $P_2$ à l'infini en prenant de façon itérative sa $p$-ième fraction sur la gauche. A chaque itération, on peut ranger verticalement dans la partie de droite les $p-1$ paquets de $p^s$ termes.

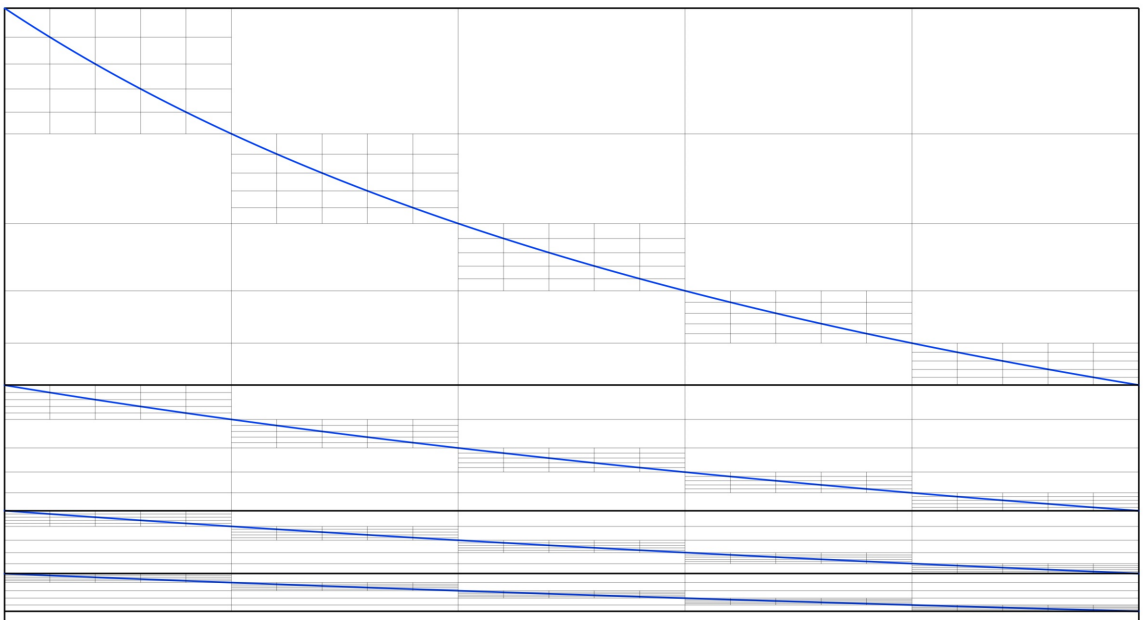
On obtient donc ainsi une représentation géométrique de la sommation par paquet qui est générale à n'importe quelle taille de paquet.

**Lien avec l'hyperbole**

Brouncker a procédé par synthèse, en partant d'une certaine branche de l'hyperbole, il a pu générer les termes de la suites $A$. Ici, nous allons procéder dans l'autre sens. En répartissant les termes de $A$ dans le carré unité de la bonne manière, nous allons montrer comment l'on peut générer des branches d'hyperbole.
Pour retrouver le schéma de sommation par paquet à partir de la fingure de Brouncker, nous avions du translater les différents rectangle pour le répartir selon leurs largeurs sur chaque colonne. Ici, nous partons du schéma de sommation par paquets et l'on souhaiterait rétablir la forme diagonale de la figure de Brouncker.
Considérons la partie $H_k$. Posons $C_1$ la première colonne qui est l'intersection de $H_k$ avec $P_4$, puis notons $U$ la partie restante, c'est-à-dire son intersection avec $P_3$. La partie $U$ contient un paquet de $p$ termes, elle est donc divisée horizontalement en $p$ bandes. Par le principe de sommation par paquet, on peut prolonger cette division sur l'infinité des colonnes qui sont dans $C_1$. Ainsi, on a divisé $H_k$ en $p$ bandes horizontales. On peut de plus diviser $U$ en $p-1$ colonnes, chacune égale à $C_1$, et on peut donc les indexer de gauche à droite par $C_2, ..., C_p$. Ainsi, $H_k$ est divisé en $p$ colonnes et $p$ lignes. On voit que seules les cases de la colonne $C_1$ contiennent des subdivisions infinies et une infinité de termes de $A$. Toutes les autres cases correspondes à la fraction $(p-1)$-ième d'un terme du paquet que contient $U$. Pour retrouver la structure diagonale de la figure de Brouncker, il suffit de procéder à la translation suivante : la première case de la $j$-ième ligne, qui contient les subdivisions et les sous termes se décale sous la colonne $C_j$. Ainsi ces cases subdivisées forment une diagonales au sein de $H_k$. Or chacune de ces cases est subdivisées selon la même structure que celle de $H_k$, c'est à dire un paquet de $p$ termes sur la droite qui représente $\frac{p-1}{p}$ de la case et le reste subdivisés à l'infini sur la partie $p$-ième de gauche. Il suffit donc d'itérer cette construction sur chaque cases diagonales afin que leurs subdivisions deviennent elles aussi diagonales, et ainsi de suite.




On obtient donc ainsi la généralisation de la figure de Brouncker. On remarque qu'ici, $p-1$ diagonales se sont formées et donc, potentiellement $p-1$ branches d'hyperboles qu'il va nous falloir désormais déterminer.



Nous allons déterminer heuristiquement l'équation de ces branches d'hyperboles. En effet, comme elles traversent chaque partie $H_k$ de part en part, on connait en leurs valeurs en $x = 1$ et $x = 2$ :

$$\begin{aligned} h_k^{(p)}(1) &= A_1 + \cdots + A_{p-1} + \frac{1}{p-1}(A_{k+1} + \cdots + A_{p-1}) \\ &= \frac{p-1}{p} + \frac{1}{p-1}\frac{p-k-1}{p(k+1)} \\ &= \frac{1}{p-1}\left(p - 2 + \frac{1}{k+1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_k^{(p)}(2) &= A_1 + \cdots + A_{p-1} + \frac{1}{p-1}(A_{k+2} + \cdots + A_{p-1}) \\ &= \frac{p-1}{p} + \frac{1}{p-1}\frac{p-k-2}{p(k+2)} \\ &= \frac{1}{p-1}\left(p - 2 + \frac{1}{k+2}\right) \end{aligned}$$

En rajoutant un point d'interpolation supplémentaire, on montre que l'expression algébrique de la branche $k$ est nécessairement :

$$h_k^{(p)}(x) = \frac{1}{p-1}\left(p - 2 + \frac{1}{k+x}\right)$$

Pour montrer que c'est bien cette courbe qui est générée par la construction, il nous faut renverser à nouveau notre approche et employer la méthode de quadratures de Brouncker généralisée sur cette courbe, et ainsi vérifier qu'on obtient la même figure.
. On place donc ces $p-1$ branches d'hyperboles dans le carré unité. On les a construit de sorte que la branche $h^{(k)}$ interpole la partie $H_{k+1}$. On a donc diviser notre carré unité comme indiqué précédement, à savoir en $P_1$ et $P_2$, avec $P_1$ la partie inférieure qui contient exactement les $p-1$ premiers termes de $A$ puis $P_2$, la partie supérieure, dont l'aire vaut la fraction $p$-ième du carré unité et qui contient les parties horizontales $H_1, \ldots H_{p-1}$, chacune interpolée par une branche d'hyperbole, dont les hauteurs sont vis-à-vis de $P_2$ dans la même proportion que les hauteurs $p-1$ premiers termes de $A$ vis-à-vis de $P_1$ qui les contient.
On procède donc à partir d'ici à la méthode généralisée de Brouncker, du haut vers les bas, sans tenir compte de la multiplicité des branches d'hyperboles :

- ⋆ On commence par divise $P_2$ verticalement en $p$ parties.
- ⋆ On trace une ligne horizontale à chaque intersection entre les bords verticales de ces parties et une des branches d'hyperboles. Ce faisant, on a divisé chaque partie $H_k$ en $p$ parties horizontalement et verticalement.
- ⋆ On réitère cette procédure dans chaque case diagonale traversée par l'une des branches d'hyperboles.

On obtient ainsi une suite $B$ dont les termes sont indexés selon la procédure de la méthode de Brouncker généralisée :

- ⋆ Les termes qui sont dans $P_1$ sont $B_1, \ldots, B_{p-1}$.
- ⋆ A la première étape, on a divisé $P_2$ en $p(p-1)$ lignes horizontales. La $j$-ième ligne horizontale est constituée de $p$ cases dont une traversée par une branche d'hyperbole. Les $p-1$ cases restantes forment le terme $B_{p-1+j}$. Ainsi, on a formé les termes $B_p, \ldots, B_{p^2-1}$.
- ⋆ A la deuxième étape, on va former de la même manière $p$ termes dans chacune des $p(p-1)$ cases tarversées par une branche de l'hyperbole à l'étape précédente. On construit ainsi les $p^2(p-1)$ termes suivant, c'est-à-dire les termes $B_{p^2}, \ldots, B_{p^3-1}$.
- ⋆ On poursuit ainsi la construction à l'infini qui nous donne donc la construction de la suite $B$.

Par construction, on a bien que $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2$, …, $B_{p-1} = A_{p-1}$. Choisissons donc $n \geq p$ et montrons que $B_n = A_n$. On peut écrire :

$$n = (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + \cdots + (p-1)p^{d-1} + k.p^d + j$$

Avec $d \geq 1$, $0 \leq k \leq p-2$ et $1 \leq j \leq p^d$.
Cela signifie que nous sommes à l'étape de subdivisions $d$ et que nous avons déjà visité les $k$ premières branches de l'hyperboles. Nous sommes donc dans la partie $H_{k+1}$. Si on écrit que $j = pj' + i'$ (avec $0 \leq j' \leq p^{d-1} - 1$ et $1 \leq i' \leq p$), on comprend qu'on se trouve dans la $(j'+1)$-ième case traversée par l'hyperbole à l'étape précédente. Elle a été divisée en $p$ lignes et $p$ colonnes à cette étape $d$. Ainsi $B_n$ vaut la somme des $p-1$ cases de la $i'$-ième ligne, c'est-à-dire toutes sauf celle traversée par la branche de l'hyperbole.
Toutes les cases d'une ligne ont la même dimension. Donc, en calculant la dimension de la case traversée par l'hyperbole puis en la multipliant par $p-1$, on obtiendra la valeur de $B_n$.

- ⋆ Par construction, la largeur des cases est divisée par $p$ à chaque étape, donc ici, elle vaut :

$$\left(\frac{1}{p}\right)^d.$$

- ⋆ La hauteur vaut la différence de la valeur de l'hyperbole entre les deux abscisses de la case, puisque l'hyperbole traverse la case depuis son coin gauche supérieur jusqu'au droit inférieur. Comme on suit l'hyperbole en diagonale, et qu'on avance d'une case à chaque fois, l'abscisse du coin inférieur droit vaut

$$1 + j\left(\frac{1}{p}\right)^d.$$

On peut donc en déduire que :

$$B_n = (p-1)\left(\frac{1}{p}\right)^d \left(h_k^{(p)}\left(1 + \frac{j-1}{p^d}\right) - h_k^{(p)}\left(1 + \frac{j}{p^d}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= (p-1)\left(\frac{1}{p}\right)^d \left(\frac{1}{p-1}\left(p - 2 + \frac{1}{k+1+\frac{j-1}{p^d}}\right) - \frac{1}{p-1}\left(p-2+\frac{1}{k+1+\frac{j}{p^d}}\right)\right)\\
&= \left(\frac{1}{p}\right)^d \left(\frac{1}{k+1+\frac{j-1}{p^d}} - \frac{1}{k+1+\frac{j}{p^d}}\right)\\
&= \frac{1}{p^d(k+1)+j-1} - \frac{1}{p^d(k+1)+j}
\end{aligned}$$

Or $n = (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + \cdots + (p-1)p^{d-1} + k.p^d + j = p^d(k+1) + j - 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{1}{p^d(k+1)+j-1} - \frac{1}{p^d(k+1)+j}\\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\\
&= A_n
\end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que ces branches d'hyperboles génèrent la suite $A$ selon la disposition exacte que nous avons proposée. On en conclut donc que la proposition réciproque vaut également, à savoir que la disposition que nous proposons génère bien la famille des hyperboles, que nous avions déterminer par une simple heuristique.

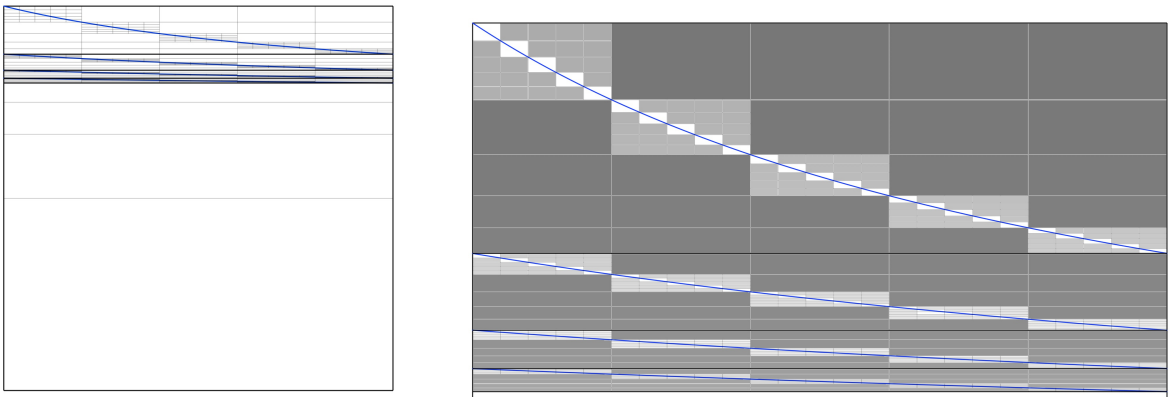


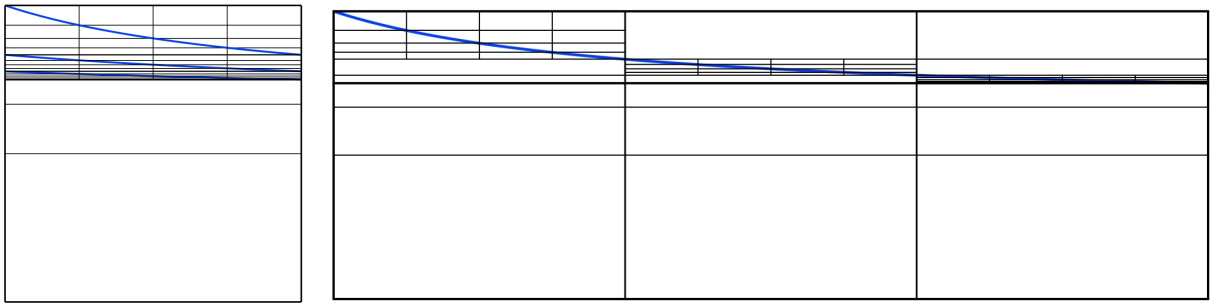
Illustration pour $p = 5$ (à droite : zoom sur la partie subdividée)

**Nouvelle quadrature**

On peut noter que les $p-1$ branches d'hyperbole sont en fait les $p-1$ segments d'une seule et même branche. Ceci découle en effet de la relation suivante :

$$h_k^{(p)}(x) = \frac{1}{p-1}\left(p-2+\frac{1}{k+x}\right) = h_0^{(p)}(x+k)$$

Donc la branche d'hyperbole $h_k^{(p)}$ entre les abscisses 1 et 2 est en fait la branche de l'hyperbole $h_0^{(p)}$ entre les abscisse $k+1$ et $k+2$. On peut alors translater ces branches vers leurs intervalles naturels, et obtenir ainsi par recollement, une figure pour la branche $h_0^{(p)}$ entre 1 et $p$.

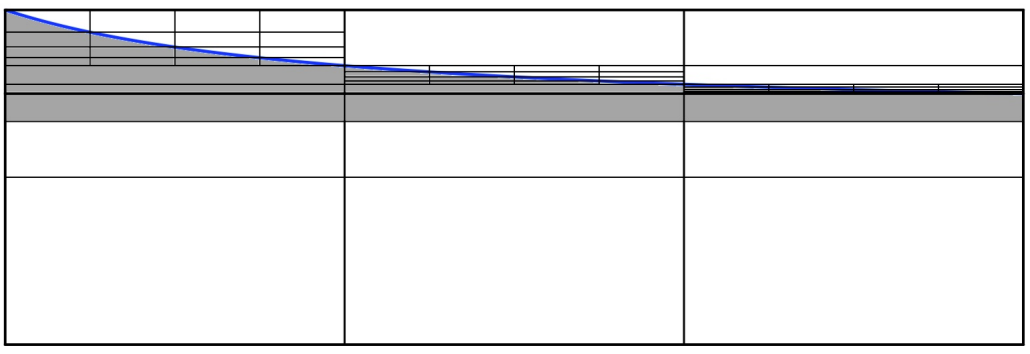


Exemple pour $p = 4$ (A gauche la figure dans le carré unité, à droite le recollement)

Le coté inférieure du rectangle n'est plus l'asymptote de cette branche d'hyperbole, en effet :

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \frac{p-2}{p-1} = 1-\frac{1}{p-1} = 1-\frac{1}{p}-\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\right) = 1-\frac{1}{p}-A_{p-1}$$

Or, on rappelle que la bande horizontale qu'on subdivise (qu'on avait notée $P_2$ lors de la construction) a pour hauteur $\frac{1}{p}$. Ainsi, pour obtenir l'asymptote qui est à hauteur $1-\frac{1}{p}-A_{p-1}$, il suffit d'ôter de la partie inférieur du rectangle la partie qui correspond aux $p-2$ premiers termes



Ainsi, trois familles de termes interviennent, pour obtenir l'aire entre la courbe et son asymptote :

⋆ Sous le cadre de la courbe, on a $p-1$ fois le terme $A_{p-1}$.

⋆ On ajoute les copies des parties $H_k$ qui sont sous la courbe. On rappelle que l'aire de $H_k$ vaut $\frac{1}{p-1}A_k$. On obtient ainsi :

$$\frac{1}{p-1}(0.A_1 + 1.A_2 + 2.A_3 + \dots (p-2).A_{p-1})$$

⋆ Enfin, on ajoute les termes qui étaient dans la figure de départ et qu'on a translatés pour le recollement. On applique la même méthode que pour la généralisation de la méthode de Brouncker, à savoir :

$$\frac{1}{p-1}(0.A_p + 1.A_{p+1} + \dots (p-1).A_{2p-1} + 0.A_{2p} + 1.A_{2p+1} + \dots (p-1).A_{3p-1} + \dots)$$

Donnons la sommes des deux premières familles :

$$\begin{aligned}
& (p-1)A_{p-1} + \frac{1}{p-1}(0.A_1 + 1.A_2 + 2.A_3 + \dots (p-2).A_{p-1}) \\
= \; & \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1}\left(0.\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) + 1.\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \dots (p-2).\left(\frac{1}{p)1}-\frac{1}{p}\right)\right) \\
= \; & \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{p-1}-\frac{p-2}{p}+\frac{p-1}{p}\right) \\
= \; & \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{p-1}-\frac{p-1}{p}\right)
\end{aligned}$$

Comme les terme de la suite $A$ sont les différences des termes de la suite harmonique, on peut à nouveau appliquer ce raisonnement :

$$\begin{aligned}
& 0.A_{kp} + 1.A_{kp+1} + \dots (p-1).A_{(k+1)p-1} \\
= \; & 0.\left(\frac{1}{kp}-\frac{1}{kp+1}\right) + 1.\left(\frac{1}{kp+1}-\frac{1}{kp+2}\right) + \dots + (p-1).\left(\frac{1}{(k+1)p-1}-\frac{1}{(k+1)p}\right) \\
= \; & \frac{1}{kp+1}+\frac{1}{kp+2}+\dots+\frac{1}{(k+1)p-1}-(p-1).\frac{1}{(k+1)p} \\
= \; & \left(\frac{1}{kp}-\frac{1}{(k+1)p}\right)+\dots+\left(\frac{1}{(k+1)p-1}-\frac{1}{(k+1)p}\right)+\left(\frac{1}{(k+1)p}-\frac{1}{(k+1)p}\right).
\end{aligned}$$

Or l'aire de l'hyperbole est la suivante :

$$\int_1^p \left(h(x) - \frac{p-2}{p-1}\right)dx = \frac{1}{p-1}\int_1^p \frac{dx}{x} = \frac{1}{p-1}\ln(p).$$

Ainsi, en mutlipliant tout pas $p-1$ on obtient cette nouvelle formule :

$$\ln(p) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{p\left\lceil\frac{k}{p}\right\rceil}\right).$$

On l'illustre pour les premières valeurs de $p$ :

$$
\begin{aligned}
\ln(2) &= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\dots \\
\ln(3) &= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\dots \\
\ln(4) &= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{16}\right) \\
&+ \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{3}{8}\right)\dots \\
\ln(5) &= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right) \\
&+ \left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)\dots
\end{aligned}
$$

# Bibliographie


[1] Archimède : *De La Quadrature de La Parabole.* François Buisson, Paris, 1807.

[2] Aristote : *Métaphysique.* Flammarion, Paris, 2008.

[3] R. Ayoub : Euler and the Zeta Function. *The American Mathematical Monthly*, 81(10), 1974.

[4] E. Barbin, C. Goldstein, M. Moyon, S. R. Schwer et S. Vinatier : *Les travaux combinatoires en France, 1870-1914 et leur actualité : un hommage à Henri Delannoy.* Savoirs scientifiques & pratiques d'enseignement. Pulim, Limoge, 2017.

[5] M. Bathier-Fauvet : La Méthode des Pesées chez Archimède. *Mnémosyne*, 14:273–294, 1998.

[6] Y. Belaval : *Leibniz critique de Descartes.* Gallimard, 1960.

[7] J. Biard et S. Rommevaux : *Mathématiques et théorie du mouvement XIVe-XVIe siècles.* Presses Univ. Septentrion, février 2008.

[8] Boethius : *De institutione arithmetica.* Teubner, Leipzig, 1867.

[9] T. Bradwardine : *Thomas of Bradwardine, His Tractatus de Proportionibus. Its Significance for the Development of Mathematical Physics.* University of Wisconsin Press, 1955.

[10] F. Cajori : *A History Of Mathematical Notations Vol I.* Chicago, 1928.

[11] R. Calinger : Leonhard Euler : The First St. Petersburg Years (1727–1741). *Historia Mathematica*, 23(2):121–166, mai 1996.

[12] G. Cardano : *Practica Arithmeticae Generalis.* Milan, 1539.

[13] C. Clavius : *In sphaeram Ioannis de Sacro Bosco commentarius.* Rome, 1570.

[14] E. Coumet : *Œuvres d'Ernest Coumet (Tome 1).* Presses Univ. Franche-Comté, Besançon, 2016.

[15] E. Coumet : *Œuvres d'Ernest Coumet (Tome 2).* Presse Universitaire de Franche-Comté, Besançon, 2019.

[16] L. Couturat : *La Logique de Leibniz, d'après Des Documents Inédits.* Paris, 1901.

[17] D. Crippa : *The Impossibility of Squaring the Circle in the 17th Century : A Debate Among Gregory, Huygens and Leibniz.* Springer, Suisse, 2019.

[18] P.-S. de Laplace : *Théorie analytique des probabilités.* Paris, 1814.

[19] K. S. De León-Jones : *Giordano Bruno and the Kabbalah : Prophets, Magicians, and Rabbis.* University of Nebraska Press, Lincoln, 2004.

[20] G. de Saint-Vincent : *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni decem libris comprehensum.* Joa. et Jac. Meursius, Anvers, 1647.

[21] G. Deleuze : *Le Pli, Leibniz et Le Baroque.* Paris, editions de minuit édition, 1988.

[22] R. Descartes : *Geometria, a Renato Des Cartes.* Elzevirii, Amsterdam, 1659.

[23] W. Dunham : *Journey through Genius : The Great Theorems of Mathematics.* Penguin Books, 1991.

[24] W. Dunham : *Euler : The Master of Us All.* Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[25] S. Edel : Métaphysique des idées et mystique des lettres : Leibniz, Böhme et la Kabbale prophétique. *Revue de l'histoire des religions*, 213(4):443–466, 1996.

[26] Euclide : *Les œuvres d'Euclide : Les éléments, livres VIII-X. 1816.* Paris, 1816.

[27] L. Euler : *Opera Omnia*. Birkhaüser, 1911.

[28] A. Gelfond : Sur le septième problème de Hilbert. *Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS. Classe des sciences mathématiques et naturelles*, (4):623–634, 1934.

[29] S. Gentil : Une caractéristique pour les unifier toutes et dans l'harmonie les lier. Utilisation des équations dans les textes De la méthode de l'Universalité. *Mathématique et Philosophie leibniziennes à la lumière des manuscirts inédits*, 25(2):47–70, juin 2021.

[30] J. Gregory : *Vera circuli et hyperbolae quadratura cui accedit geometria pars vniuersalis inseruiens quantitatum curuarum transmutationi & mensurae*. typis heredum Pauli Frambotti bibliop., Padoue, 1668.

[31] G. Harsdörffer : *Delitiæ Mathematicæ et Physicæ, Zweiter Theil Der Erquickstunden*. Nuremberg, 1651.

[32] A. Heinekamp : L'état Actuel de la Recherche Leibnizienne. *Les Etudes Philosophiques*, 2:139–160, 1989.

[33] J. E. Hofmann : Um Euler erste Reihenstudien. *In Sammelband Zu Ehren Des 250. Geburtstages Leonhard Eulers*, pages 140–204. Schröder K., Berlin, akademie verlag édition, 1959.

[34] J. E. Hofmann : *Leibniz in Paris 1672-1676 : His Growth to Mathematical Maturity*. Cambridge University Press, 1974.

[35] J. E. Hofmann, H. Wieleitner et D. Mahnke : Die Differenzenrechnung bei Leibniz. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pages 562–590, 1931.

[36] C. Huygens : *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens, Correspondance 1670 - 1675*, volume 7. M. Nijhoff, La Haye, 1897.

[37] C. Huygens : *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens*, volume 14. M. Nijhoff, La Haye, 1920.

[38] Johann Kepler : *Nova stereometria doliorum vinariorum, inprimis Austriaci ; et usus in eo virgæ cubicæ. Accessit stereometriae Archimedeæ supplementum*. Plancus, Linz, 1615.

[39] E. Knobloch : *Die Mathematischen Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik : auf Grund fast ausschliesslich handschriftlicher Aufzeichnungen dargelegt und kommentiert*. Numéro 11 de Studia Leibnitiana. F. Steiner, Wiesbaden, 1973.

[40] E. Knobloch : Sur la vie et l'œuvre de Christophore Clavius (1538-1612). *Revue d'histoire des sciences*, 41(3):331–356, 1988.

[41] E. Knobloch : Beyond Cartesian limits : Leibniz's passage from algebraic to "transcendental" mathematics. *Historia Mathematica*, 33(1):113–131, février 2006.

[42] G. W. Leibniz : Nouvelles remarques de M. de Leibnis, touchant l'analise des transcendantes, differentes de celle de la géométrie de Descartes. *Journal des Sçavans*, (27):321–322, 1692.

[43] G. W. Leibniz : Considérations sur la différence qu'il y a entre l'Analyse ordinaire, et le nouveau calcul des transcendentes. *Journal des Sçavans*, (34):404–406, 1694.

[44] G. W. Leibniz : Symbolismus memorabilis calculi Algebraici et Infinitesimalis, in comparatione potentiarum et differentiarum ; et de Lege Homogeneorum Transcendentali. *Miscellanea Berolinensia ad incrementum scientiarum*, (1):160–165, 1710.

[45] G. W. Leibniz : Observatio quod rationes sive proportiones non habeant locum circa quantitates nihilo minores : Et de vero sensit methodi infinitesimalis. *Acta Eruditorum*, 31:167–169, 1712.

[46] G. W. Leibniz : *Historia et origo calculi differentialis*. Hahn, 1846.

[47] G. W. Leibniz : *Opuscules et fragments inédits de Leibniz : extraits des manuscrits de la Bibliothèque royale de Hanovre*. Paris, 1903.

[48] G. W. Leibniz : *Textes inédits : d'après les manuscrits de la Bibliothèque provinciale de Hanovre*. Bibliothèque de philosophie contemporaine. Presses universitaires de France, Paris, 1948.

[49] G. W. Leibniz : *Die Mathematischen Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik*. Numéro 16 de Studia liebnitiana. F. Steiner, Wiesbaden, 1976.

[50] G. W. Leibniz : *Der Beginn Der Determinantentheorie, Leibnizens Nachgelassene Studien Zum Determinantenkalkül, Textband, Im Zusammenhang Mit Dem Gleichnamigen Abhandlungsband Fast Ausschließlich Zum Ersten Mal Nach Den Originalschriften*, volume 2 de *Arbor Scientiarum*. Gerstenberg, Hildesheim, 1980.

[51] G. W. Leibniz : *Catalogue critique des manuscrits de Leibniz*. Georg Olms Verlag, 1986.

[52] G. W. Leibniz : *Hauptschriften zur Versicherungs- und Finanzmathematik*. Akademie Verlag, Berlin, 2000.

[53] G. W. Leibniz : Trois lettres à jean-frédéric de hanovre sur le problème de la liberté. *Philosophie*, 75(4):7–29, 2002.

[54] G. W. Leibniz : *Quadrature arithmétique du cercle, de l'ellipse et de l'hyperbole et la trigonométrie sans tables trigonométriques qui en est le corollaire*. Mathesis. J. Vrin, Paris, 2004.

[55] G. W. Leibniz : *Mathesis universalis. Écrits sur la mathématique universelle*. Vrin, 2018.

[56] R. Lulle : *Arte Breve*. Milan, 2002.

[57] D. Mahnke : *Neue Einblicke in Die Entdeckungsgeschichte Der Höheren Analysis*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, Berlin, 1926.

[58] Antoni Malet et Marco Panza : Wallis on Indivisibles. *Seventeenth-Century Indivisibles Revised*, pages 307–346, 2015.

[59] E. Marquer et P. Rateau, éditeurs. *Leibniz Lecteur Critique de Hobbes*. Presses de l'Université de Montréal, 2017.

[60] M. R. Massa Esteve : Mengoli on "Quasi-Proportion". *Historia Mathematica*, (24), 1997.

[61] M. R. Massa Esteve : La théorie euclidienne des proportions dans les Geometriæ speciosæ elementa (1659) de Pietro Mengoli. *Revue d'histoire des sciences*, 56(2):457–474, 2003.

[62] M. R. Massa Esteve : Algebra and geometry in Pietro Mengoli (1625–1686). *Historia Mathematica*, 33(1):82–112, février 2006.

[63] M. R. Massa Esteve : The Role of Indivisibles in Mengoli's Quadratures. *In* Vincent Jullien, éditeur : *Seventeenth-Century Indivisibles Revisited*, Science Networks. Historical Studies, pages 285–306. Springer International Publishing, Cham, 2015.

[64] M. R. Massa Esteve : The Harmonic Triangle in Mengoli's and Leibniz's works. *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, 16:233–258, 2018.

[65] M. R. Massa Esteve et A. Delshams : Euler's beta integral in Pietro Mengoli's works. *Archive for History of Exact Sciences*, 63(3):325–356, mai 2009.

[66] E. Mazet : La théorie des séries de Nicole Oresme dans sa perspective aristotélicienne. 'Questions 1 et 2 sur la Géométrie d'Euclide'. *Revue d'histoire des mathématiques*, page 48, 2003.

[67] P. Mengoli : *Novæ quadraturæ arithmeticæ*. Bologne, 1650.

[68] P Mengoli : *Via regia ad mathematicas per arithmeticam, algebram speciosam, & planimetriam*. Bologne, 1655.

[69] P Mengoli : *Geometriæ speciosæ elementa*. Bologne, 1659.

[70] P. Mengoli : *Circolo*. Bologne, 1672.

[71] N. Mercator : *Logarithmotechnia*. G. Godbid, Londres, 1668.

[72] N. Meusnier : L'émergence d'une mathématique du probable au XVIIe siècle. *Revue d'histoire des mathématiques*, 2(1):119–147, 1996.

[73] J.-E. Montucla : *Histoire Des Recherches Sur La Quadrature Du Cercle*. Bachelier Père et Fils, Paris, 1831.

[74] G. Mouton : *Observationes diametrorum solis et lunæ apparentium*. Lyon, 1670.

[75] C. Naux : L'Opus geometricum de Grégoire de Saint-Vincent. *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 15(2):93–104, 1962.

[76] Nicomaque de Gérase : *Introduction arithmétique*. J. Vrin, Paris, 1978.

[77] N. Oresme : *De Proportionibus Proportionum, and Ad Pauca Respicientes*. University of Wisconsin Press, 1966.

[78] M. Panza : A l'origine de la notion de nombre transcendant : John Wallis et la quadrature du cercle. *Newton et les origines de l'analyse : 1664-1666*, pages 333–367, 2004.

[79] M. Panza : *Newton et Les Origines de l'analyse : 1664-1666*. Paris, librairie scientifique et technique blanchard édition, 2005.

[80] B. Pascal : *Œuvres de Blaise Pascal*, volume 3. Hachette, Paris, 2ème édition, 1923.

[81] Platon : *The Theaetetus of Plato*. Cambridge, 1881.

[82] E. Prouhet : Sur l'invention des exposants fractionnaires ou incommensurables. *Nouvelles annales de mathématiques : journal des candidats aux écoles polytechnique et normale*, Bulletin de Bibliographie, d'Histoire et de Biographie Mathématiques(18):42–46, 1859.

[83] M. Ricci : *Exercitatio Geometrica de Maximis et Minimis*. Godbid & Pitt, Londres, 1668.

[84] S. Rommevaux : Aperçu sur la notion de dénomination d'un rapport numérique au Moyen Âge et à la Renaissance. *Methodos : savoirs et textes*, 1, 2001.

[85] S. Rommevaux : *Théorie des rapports (XIIIe - XVIe siècles) : réception, assimilation, innovation - H.D.R.* Thèse de doctorat, Université de Tour François Rabelais, 2008.

[86] C. Rudolff : *Die Coss Christoffs Rudolffs*. Prusse, 1553.

[87] B. Russell : *A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz*. Routledge, Londres, 1992.

[88] F. Russo : Leibniz et la Notion de Fonction. *Archives de Philosophie*, 29(4):553–569, 1966.

[89] C. E. Sandifer : *How Euler Did It*. The Mathematical Association of America, 2015.

[90] R. Sanyal et M. Beck : Combinatorial Reciprocity Theorems. *American Mathematical Society*, 195, 2018.

[91] C. J. Scriba : The Inverse Method of Tangents : A Dialogue between Leibniz and Newton (1675-1677). *Archive for History of Exact Sciences*, 2(2):113–137, 1964.

[92] M. Serfati : *La constitution de l'écriture symbolique mathématique.* Thèse de doctorat, Université Paris I, décembre 1997.

[93] M. Serfati : Mathématiques et pensée symbolique chez Leibniz. *Revue d'histoire des sciences*, 54(2):165–222, 2001.

[94] M. Serfati : *De la méthode, Recherches en histoire et philososophie des mathématiques*. Presses Univ. Franche-Comté, 2002.

[95] M. Serfati : *La révolution symbolique : la constitution de l'écriture symbolique mathématique*. Pétra, Paris, 2005.

[96] M. Serfati : *Leibniz and the Invention of Mathematical Transcendence*. Franz Steiner Verlag, Stuttgart, 2018.

[97] M. Serres : *Le Système de Leibniz et ses modèles mathématiques*. Thèse de doctorat, Presses universitaires de France, Paris, 1968.

[98] H. B. Sinaceur : "Ars Inveniendi" Aujourd'hui. *Les Études philosophiques*, 1(20):201–214, 1989.

[99] A. Slavík : *Product Integration, Its History and Applications*. Matfyzpress, Prague, 2007.

[100] R. F. Sluse : *Mesolabum*. Guil. Henr. Streel, Liège, 2ème édition édition, 1668.

[101] O. Spiess : Die Summe der reziproken Quadratzahlen. *In Festschrift zum 60. Geburtstag von Andrea Speiser*, pages 66–87, Zürich, 1945. O. Füssli.

[102] J. A. Stedall : Catching Proteus : The Collaborations of Wallis and Brouncker. I. Squaring the Circle. *Notes and Records of the Royal Society of London*, 54(3):293–316, 2000.

[103] J. A. Stedall : *Mathematics Emerging : A Sourcebook 1540 - 1900*. Oxford, 2008.

[104] S. Stevin : *L' arithmetique*. Leyde, 1585.

[105] M. Stifel : *Arithmetica integra*. Nuremberg, 1544.

[106] O. Terquem : Note historique sur le binôme de Newton, les exposants négatifs et fractionnaires. *Nouvelles annales de mathématiques*, 6:85–91, 1847.

[107] Theon de Smyrne : *Exposition des mathématiques utiles pour la lecture de Platon.* Hachette, Paris, 1892.

[108] J. Umberto Eco : The Ars Magna by Ramon Llull. *Contributions to Science*, (12):47–50, 2016.

[109] F. Viète : *Francisci Vietae Opera mathematica.* Lyon, 1646.

[110] J. Wallis : *Arithmetica Infinitorum.* Oxford, Oxford, 1656.

[111] J. Wallis : *Adversus Marsi Meibomii : De Proportionibus Dialogum Tractatus Elencticus.* L. Lichfeld, Oxford, 1657.

[112] J. Wallis : *Treatise of Algebra.* Richard Davis, Londres, 1685.

[113] J Wallis : *The Correspondence of John Wallis (1616-1703) : Volume II (1660 - September 1668).* Oxford, 2003.

[114] J. Wallis : *The Arithmetic of Infinitesimals.* New York, 2004.

[115] H. G. Zeuthen : *Geschichte der mathematik im XVI. und XVII. jahrhundert.* Leipzig, 1903.