



HAL
open science

Instabilités hydrodynamiques dans l'effondrement du cœur d'une étoile en rotation avant son explosion en supernova

Anne-Cécile Buellet

► **To cite this version:**

Anne-Cécile Buellet. Instabilités hydrodynamiques dans l'effondrement du cœur d'une étoile en rotation avant son explosion en supernova. Phénomènes cosmiques de haute énergie [astro-ph.HE]. Université Paris-Saclay, 2023. Français. NNT : 2023UPASP034 . tel-04131593

HAL Id: tel-04131593

<https://theses.hal.science/tel-04131593v1>

Submitted on 16 Jun 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Instabilités hydrodynamiques dans
l'effondrement du cœur d'une étoile en
rotation avant son explosion en supernova
*Hydrodynamical instabilities in the collapsing core of a
rotating star before its supernova explosion*

Thèse de doctorat de l'université Paris-Saclay

École doctorale n° 127, Astronomie et Astrophysique d'Île-de-France
(AAIF)

Spécialité de doctorat : Astronomie et Astrophysique
Graduate School : Physique, Référent : Faculté des sciences d'Orsay

Thèse préparée dans l'unité de recherche Astrophysique, Instrumentation et Modélisation de
Paris-Saclay (Université Paris-Saclay, Université Paris Cité, CNRS, CEA), sous la direction de Thierry
FOGLIZZO, Directeur de Recherche, et la co-direction de Jérôme GUILLET, Ingénieur-Recherche.

Thèse soutenue à Paris-Saclay, le 31 mars 2023, par

Anne-Cécile BUELLET

Composition du jury

Marie-Anne BIZOUARD Directrice de recherche, CNRS, Université Côte d'Azur (Artemis)	Présidente
Geoffroy LESUR Directeur de recherche, CNRS, Université Grenoble Alpes (IPAG)	Rapporteur & Examineur
Michel RIEUTORD Professeur des Universités, Université de Toulouse (IRAP)	Rapporteur & Examineur
Sonia EL HEDRI Chargée de recherche, CNRS, Université Paris Cité (APC)	Examinatrice
Florent ROBINET Chargé de recherche, CNRS, Université Paris- Saclay (IJCLab)	Examineur

Titre : Instabilités hydrodynamiques dans l'effondrement du cœur d'une étoile en rotation avant son explosion en supernova

Mots clés : Supernova, hydrodynamique, instabilité, rotation

Résumé : À la fin de leur vie, les étoiles massives explosent et produisent un phénomène appelé supernova. Tout commence lorsque les réactions de fusion au cœur de l'étoile s'épuisent. Le cœur de l'étoile s'effondre jusqu'à devenir si dense que les forces nucléaires contrebalancent la gravité, créant un rebond. Le cœur interne donne alors naissance à un astre compact, une protoétoile à neutrons (PNS) d'un rayon de ~ 50 km à sa formation. L'onde de choc générée par ce rebond se propage alors vers les couches extérieures, continuant à s'effondrer. Cependant, l'énergie de ce choc n'est pas immédiatement suffisante pour qu'il atteigne directement la surface de l'étoile. Il devient stationnaire à un rayon de ~ 200 km. L'explosion de l'étoile en supernova dépend de la capacité de ce choc à être relancé pour atteindre la surface de l'étoile. L'interaction entre la matière et les neutrinos joue un rôle essentiel dans cette dynamique. Les neutrinos émis par la PNS peuvent être absorbés par la matière dense se trouvant sous le choc. Le chauffage qui en résulte induit un gonflement du choc.

Le développement d'instabilités hydrodynamiques affecte l'efficacité d'absorption des neutrinos sous l'onde de choc stationnaire. Parmi les instabilités, la convection est favorisée par l'établissement d'un gradient négatif d'entropie. Les mouvements convectifs prolongent l'exposition de la matière au flux de neutrinos.

D'autre part, l'instabilité du choc d'accrétion stationnaire (SASI) est due à un cycle entre des ondes acoustiques et l'advection des perturbations d'entropie et de vorticité générée par la déformation du choc. Par sa géométrie spirale, elle permet une augmentation locale de la densité et augmente aussi la probabilité d'interaction des neutrinos avec la matière.

Dans cette thèse, nous présentons une analyse linéaire (analytique et numérique) de ces deux in-

stabilités, permettant d'établir les domaines de paramètres pour lesquels chacune des instabilités domine la dynamique du flot. Nous étudions ensuite l'impact de la rotation sur ces domaines. Cet effet de la rotation sur les instabilités est encore peu étudié et est une question ouverte dans la communauté.

En absence de rotation, l'intensité du chauffage de la matière par les neutrinos, évaluée à travers un paramètre χ de comparaison du temps de flottaison et du temps d'advection, permet la distinction entre le domaine de SASI et le domaine convectif. Nous démontrons les lacunes de ce critère et proposons une autre méthode, plus générale, afin de déterminer le seuil de croissance de la convection. Contrairement aux résultats trouvés par [Foglizzo et al. \(2006\)](#), nous montrons que la transition d'un domaine SASI à un domaine convectif ne se fait pas pour une valeur seuil de $\chi \sim 3$ mais sur un domaine de chauffage tel que $\chi \in [3, 4]$.

Nous présentons ensuite une analyse de l'influence de la rotation sur la croissance linéaire de ces instabilités. Pour des rotations lentes, le critère d'instabilité fondé sur le paramètre χ diminue. Si la rotation excède 10% de la rotation Képlérienne à la surface de la PNS, alors des modes mixtes SASI/convection/rotation apparaissent à grande échelle. Pour les rotations fortes ($> 30\%$ de la rotation Képlérienne à la surface de la PNS), l'influence du paramètre χ sur le taux de croissance et sur la fréquence du mode le plus instable devient négligeable. Cette faible dépendance indique que la convection ne joue alors plus de rôle dans l'instabilité dominante qui est d'origine rotationnelle. Dans ce régime, l'interprétation des fréquences mesurées en ondes gravitationnelles peut être facilitée car la fréquence du mode dominant est directement liée au taux de rotation du cœur de l'  toile.

Title : Hydrodynamical instabilities in the collapsing core of a rotating star before its supernova explosion

Keywords : Supernova, hydrodynamics, instability, rotation

Abstract : At the end of their lives, massive stars explode and produce a phenomenon called a supernova. It begins when the fusion reactions in the core of the star run out of fuel. The core of the star collapses until it becomes so dense that the nuclear forces counteract the gravity, creating a rebound. The inner core then gives rise to a compact star, a protoneutron star (PNS) with a radius of ~ 50 km at its formation. The shock wave generated by this bounce then propagates towards the collapsing outer layers. However, the energy of this shock is not enough for it to reach the star's surface directly. It becomes stationary at a radius of ~ 200 km. The explosion of the star into a supernova depends on the ability of this shock to be revived and reach the star's surface. The interaction between matter and neutrinos plays an essential role in these dynamics. Neutrinos emitted by the cooling PNS can be absorbed by the dense matter beneath the shock. The resulting heating induces a swelling of the shock.

The development of hydrodynamic instabilities affects the absorption efficiency of neutrinos under the stationary shock wave. Among these instabilities, convection is favoured by the establishment of a negative entropy gradient. Convective motions prolong the exposure of matter to the neutrino flux.

On the other hand, the stationary accretion shock instability (SASI) is due to a cycle between acoustic waves and the advection of entropy and vorticity perturbations, generated by the shock deformation. By its spiral geometry, it allows a local increase of the density which increases the probability of interaction of neutrinos with matter.

In this thesis, we present a linear analysis (ana-

lytical and numerical) of these two instabilities, allowing us to establish the parameter domains for which each instability dominates the flow dynamics. We also investigate the impact of rotation on these domains. The effect of rotation on these instabilities is still poorly known and is an open question in the supernova community.

In the absence of rotation, the intensity of neutrino heating, evaluated through a χ parameter comparing the flotation time and the advection time, allows the distinction between the SASI domain and the convective domain. We demonstrate the shortcomings of this criterion and suggest another, more general, criterion to determine the convective growth threshold. Contrary to the results found by [Foglizzo et al. \(2006\)](#), we show that the transition from SASI to convection does not occur for a threshold value of $\chi \sim 3$ but on a heating domain such that $\chi \in [3, 4]$.

We then present an analysis of the influence of rotation on the linear growth of these instabilities. For slow rotations, the instability criterion based on the χ parameter decreases. If the rotation exceeds 10% of the Keplerian rotation at the PNS surface, then mixed SASI/convection/rotation modes appear at large scales. For strong rotations ($> 30\%$ of the Keplerian rotation at the PNS surface), the influence of the χ parameter on both the growth rate and the frequency of the most unstable mode becomes negligible. This weak dependency indicates that convection no longer plays a role in the dominant instability, which is of rotational origin. In this regime, the interpretation of the measured gravitational wave frequencies can be facilitated because the frequency of the dominant mode is directly related to the rotation rate of the star's core.

Remerciements

Je tiens à remercier le Département d'Astrophysique du CEA de m'avoir accueillie pendant ces trois ans qui n'ont pas été faciles, en commençant par un confinement de plusieurs mois. Merci à Thierry et Jérôme de m'avoir accordé leur confiance et de m'avoir prise en thèse il y a 4 ans. J'ai appris beaucoup à vos côtés, notamment sur l'importance des expériences et la puissance des analogies.

Ensuite, je souhaite remercier mon équipe. Les permanents, toujours enclins à discuter sciences mais surtout les non-permanents. Merci à Raphaël, mon cher co-bureau pendant une année écourtée, pour ton écoute et pour ta bienveillance. Merci pour les discussions alors que tu étais toi-même en train de rédiger un article, puis ta thèse. Merci à Alexis, parti trop tôt en post-doc en Allemagne, dont les conseils et la présence pendant mes deux premières années ont été essentielles. Tu as été extrêmement bienveillant et présent depuis mon stage de M2 jusqu'à ta soutenance de thèse. Merci aussi à Florian et Jérémy, ayant répondu présent dans les moments difficiles. Le couloir était bien triste (et calme!) sans vous 3. Merci à Noé, toujours prêt à rendre service, dont les compétences informatiques m'ont évité beaucoup d'heures de calculs non-optimisés. Merci à Adnan, lui aussi toujours prêt à rendre service et ayant pris le relais pour l'aide informatique (et pour ouvrir les sachets de ketchup). Merci aussi pour avoir essayé de ramener un peu d'unité et de cohésion dans notre équipe et entre les doctorants dans une période post-COVID où les relations sociales s'étaient dégradées. Enfin, merci à Ugo, tout d'abord pour avoir accepté de gérer la session zoom pendant ma soutenance mais aussi pour ta bonne humeur rafraîchissante (et tes conseils sur la position des appuis en escalade).

Merci mon chaton pour m'avoir supportée pendant la période de rédaction. Merci d'avoir essayé, de ta façon maladroite, de me soutenir et m'encourager.

Un grand merci à mes amis Nicolas et Anaïs toujours présents depuis tant d'années. Merci aussi à Yanis d'avoir accepté ma lenteur en course à pied et ma coordination chaotique avec des manettes de jeu.

Je souhaite enfin remercier toute ma famille, présente depuis le début à mes côtés et croyant en moi. Vous m'avez toujours soutenue et encouragée dans mes projets d'étude. En particulier, je remercie ma famille proche, mes parents, mon frère et ma sœur, d'avoir été avec moi dans les bons et les mauvais moments.

Table des matières

Introduction générale	1
I Les supernovæ à effondrement de cœur	13
I.1 Contexte	14
I.1.1 Naissance et vie d'une étoile	14
I.1.2 Mort d'une étoile et naissance d'un objet compact	18
I.1.3 Scénario actuel de formation des supernovæ gravitationnelles par effondrement du cœur de fer	23
I.1.4 Influence de la rotation stellaire	27
I.1.5 Observations contemporaines	29
I.2 Les détecteurs multimessagers	33
I.2.1 Les détecteurs de neutrinos	33
I.2.2 Les détecteurs d'ondes gravitationnelles	36
I.3 L'hydrodynamique au cœur de l'effondrement	38
I.3.1 La convection	39
I.3.2 L'instabilité de choc d'accrétion stationnaire (SASI)	45
I.3.3 SASI et convection	47
I.3.4 Asymétrie leptonique	49
I.3.5 L'instabilité low-T/ W	50
I.3.6 Instabilités et simulations numériques	51
I.4 Questions et enjeux de cette thèse	52
I.4.1 Les instabilités et leurs signaux	52
I.4.2 La rotation stellaire	53
II Méthodes perturbatives	55
II.1 La physique commune	56
II.1.1 L'état stationnaire	56
II.1.2 Le flot perturbé	58
II.2 Méthodes	59
II.2.1 Géométrie plane	59
II.2.2 Géométrie sphérique	64
III Instabilités hydrodynamiques sans rotation	71
III.1 Géométrie plane et critère de convection	72
III.1.1 Critère $\chi_{\text{crit}} \sim 3$	72
III.1.2 Approche analytique	76
III.1.3 Approche numérique	79
III.1.4 Marche de gravité et instabilité artificielle	82

III.2	Géométrie sphérique	86
III.2.1	Impact du chauffage	86
III.2.2	Test de χ_{crit}	88
III.2.3	Évolution de l'échelle dominante	91
III.3	Conclusion sur le critère de stabilité	91
IV	Impact de la rotation...	95
IV.1	... sur le mode fondamental	96
IV.1.1	Résumé de l'article	96
IV.1.2	Introduction	98
IV.1.3	Methods	101
IV.1.4	Results	106
IV.1.5	Expected consequences on the gravitational wave signature	121
IV.1.6	Conclusion and discussion	123
IV.1.7	Discussion du taux de dissociation	127
IV.2	... sur les harmoniques et modes rétrogrades	127
IV.2.1	Fondamental et harmoniques	127
IV.2.2	Modes prograde et rétrograde	128
IV.3	Étude énergétique du taux de croissance	129
IV.4	Conclusion	132
	Conclusions et perspectives	133
	Annexes	143
A	Rayleigh Taylor compressible isotherme sur incompressible, sans advection	143
A.1	Notations	143
A.2	Dans le plan supérieur ($z > 0$)	144
A.2.1	Densité	144
A.2.2	Équation de continuité	144
A.2.3	Équation d'Euler	144
A.2.4	Mise en équations	144
A.3	Conséquences pour χ	147
B	Rayleigh Taylor compressible, sans advection, avec marche de gravité et gradient d'entropie	149
B.1	Équations stationnaires	150
B.2	Équations perturbées	150
B.3	Structure des perturbations	151
B.3.1	Dans la zone $g \neq 0$	151
B.3.2	Dans la zone $g = 0$	152
B.4	Méthode WKB	153
B.5	Raccord des structures aux interfaces	154
B.5.1	Conditions limites en $\pm H_g$	154
B.6	Impact sur le seuil de stabilité	158

B.7	Vérification numérique	159
C	Étude énergétique de l'instabilité 1D	161
C.1	Expression de la pression	161
C.2	Étude de la stabilité	162
C.2.1	Énergie potentielle	162
C.2.2	Taux de croissance	165
C.3	Pour un potentiel en $1/x$	166
	Bibliographie	167

Table des figures

1	Observation multi-longueurs d'onde de la nébuleuse du Crabe. En bleu clair les observations en rayons X avec le pulsar central, en vert et bleu foncé les observations visibles et en rouge les infrarouges. Crédit : NASA, ESA, CXC, JPL-Caltech, J. Hester et A. Loll (Arizona State Univ.), R. Gehrz (Univ. Minn.), et STScI	2
2	Classification des supernovæ selon leurs signatures spectrales. En rose, les types de supernovæ correspondant à un effondrement gravitationnel.	4
3	Évolution des périodes pour les objets compacts. En points les pulsars et en triangles les magnétars. Les lignes diagonales représentent les iso-ans et les iso-champs magnétiques. Crédit : Ng and Kaspi (2011)	5
4	Galaxie d'Andromède observée en lumière visible (gauche) et en rayons X (droite). Crédit : Optique : MPE/R. Gendler, rayons X : ESA/XMM-Newton/EPIC/W. Pietsch, MPE.	6
I.1	Observation par le James Webb Space Telescope (JWST) de la nébuleuse de la Carène, pouponnière d'étoiles. Crédit : NASA, ESA, CSA, and STScI	14
I.2	Structure d'une étoile de $15 M_{\odot}$ à la fin de sa vie, avant l'effondrement de son cœur. Les tailles relatives des couches ne sont pas à l'échelle.	16
I.3	Diagramme de Hertzsprung-Russel représentant les luminosités des étoiles en fonction de leur température. Au centre, la séquence principale et les branches des géantes qui en partent. En bas à gauche, les naines blanches et en haut à droite les géantes rouges. Les étoiles les plus bleues sont les plus chaudes. Crédit : ESO	17
I.4	Nébuleuse planétaire de l'œil de chat et son étoile en fin de vie. En bleu le signal X et en orange et violet le signal optique. Crédit : X : NASA/CXC/SAO ; Optique : NASA/STScI	19
I.5	Observation par Chandra du reste de la supernova de Tycho (type Ia), situé à ~ 2.8 kpc de la Terre. Crédit : X : NASA/CXC/SAO ; Optique : DSS	20
I.6	Masses des objets compacts impliqués dans des fusions et du reste de leur fusion. La majorité des trous noirs impliqués dans une fusion se trouvent sous la barre des $\sim 50 M_{\odot}$	22
I.7	Courbes de lumière de divers types de supernovæ. Les supernovæ superlumineuses ont un pic de luminosité ~ 100 fois plus élevé que les autres. Crédit : Gal-Yam (2012)	23
I.8	Distribution des périodes de rotation des pulsars à leur création. Crédit : Popov and Turolla (2012)	29
I.9	Observation par le télescope spatial Hubble de SN1987A (gauche) et les neutrinos associés, détectés sur Terre (droite). Crédit : NASA, ESA (gauche) et Suzuki and Koshiba (2009) (droite)	30
I.10	Carte des espèces chimiques du reste de la supernova CasA. En rouge le fer, en vert le rapport silicium/magnésium et en bleu le titane. Crédit : Grefenstette et al. (2014)	31
I.11	Observation par le télescope spatial Chandra du reste de supernova G292.0+1.8 et de son étoile à neutrons se déplaçant à plus de 10^5 m.s ⁻¹ . Crédit : X-ray : NASA/CXC/SAO ; Optique : DSS2	32

I.12	Évolution des sections efficaces des neutrinos en fonction de leur énergie pour les différentes réactions pouvant se produire dans les détecteurs à lumière Tcherenkov. La gamme d'énergie illustrée représente le domaine pertinent pour l'étude des supernovæ. Crédit : Fogli et al. (2005)	34
I.13	Schéma de fonctionnement du détecteur d'ondes gravitationnelles LIGO. Crédit : http://www.skyandtelescope.com/	37
I.14	Domaine de signature des supernovæ (en violet) et détectabilité pour les différents détecteurs terrestres (lignes noires) : Advanced Virgo, advanced LIGO, KAGRA, Einstein Telescope, Cosmic Explorer. Crédit : adapté de Moore et al. (2015)	38
I.15	Profil radial, moyenné en angle, de la fraction électronique Y_e (en haut) et de l'entropie S (en bas) dans la PNS. Ces profils sont présentés pour plusieurs masses de progéniteurs, à deux moments distincts : 200 ms (gauche) et 500 ms (droite) après la création du choc. Crédit : Nagakura et al. (2020)	41
I.16	(gauche) Profil de l'entropie par nucléon, 350 ms après la création du choc pour une étoile de 50 km en 1D et 2D (Mabanta et al., 2019). (droite) Profil de la fraction électronique dans une étoile de $15 M_\odot$, 1D, 307 ms après la création du choc, pour deux traitements du transport des neutrinos (Mezzacappa et al., 1998). Dans ces figures, le rayon du choc se situe à environ 200 km et le rayon de la PNS à environ 50 km.	43
I.17	Illustration du mécanisme donnant naissance à SASI.	45
I.18	Illustration des instabilités présentes sans rotation. On observe la PNS en bleu et la convection interne. Hors de la PNS se trouve la zone de refroidissement puis la région de gain où se développe la convection due aux neutrinos. Enfin, le mode $l=1$ de SASI crée une déformation du choc qui oscille de gauche à droite sur ce schéma. Crédit : Müller (2020)	47
I.19	(gauche) Détections attendues en neutrinos en fonction du temps par le détecteur Hyper-Kamiokande pour une étoile de $27 M_\odot$ (Tamborra et al., 2013). (droite) Diagramme temps-fréquence du signal en ondes gravitationnelles prédit pour une étoile de $15 M_\odot$ sans rotation située à 10 kpc (Kuroda et al., 2016). La barre de couleur indique l'intensité de h , la signature caractéristique, en échelle logarithmique. En A le mode g de la PNS et en B la signature de SASI pour l'équation d'état « douce » SFHx ($M_{\text{PNS}}^{\text{max}} = 2.13 M_\odot$, Steiner et al., 2013). Dans les deux figures, l'échelle de temps commence au rebond marquant la formation de la PNS. Ces signatures fortes de SASI correspondent à un mode spiral.	48
I.20	(gauche) Carte du flux du nombre leptonique ($N_{\nu_e} - N_{\bar{\nu}_e}$), normalisé par sa moyenne sur la sphère, 350 ms après la création du choc. (droite) Carte du flux total d'énergie des neutrinos (e, μ, τ et leurs antiparticules), normalisé par sa moyenne sur la sphère, 350 ms après la création du choc. Crédit : Janka et al. (2016)	49
I.21	Contraste de densité dû à l'instabilité low-T/ W (gauche). Le mode $m = 1$ domine dans un premier temps puis le mode $m = 2$ prend le dessus. À droite, la signature en ondes gravitationnelles pour une étoile de $70 M_\odot$ située à 10 kpc. (Shibagaki et al., 2020)	51
II.1	Profils des grandeurs pour $H_S = H_g/2$, $x_S = x_g = 1/2$, $K_H = 1$, $K_g = 3$ et $\mathcal{M}_{\text{up}} = 0.3$	61
II.2	Évolution du taux de croissance et de χ marginal en fonction du nombre d'onde horizontal k_x , pour les paramètres $\mathcal{M}_1 = 0.3$, $\gamma = 4/3$, $K_g = 3$, $H_S = 0.1H_g$ et $H_g = 1$. Le taux de croissance est normalisé par la fréquence de Brunt-Väisälä ω_{BV}	63

II.3	Différence de modes propres en fonction du chauffage pour les deux expressions de μ^2 (Eq.II.38).	66
III.1	Schéma du modèle plan-parallèle utilisé par Foglizzo et al. (2006). Les cellules convectives sont supposées circulaires et la longueur d'onde (λ) est approximativement égale à quatre rayons des cellules.	72
III.2	Évolution de la stabilité du système lorsque la taille de la région de chauffage diminue.	74
III.3	Effet de la distinction d'échelles sur la stabilité marginale. En rouge, le minimum de la courbe en dessous duquel le système est stable pour toutes les longueurs d'onde.	75
III.4	Modèle simplifié hydrostatique permettant de déterminer le taux de croissance hydrostatique de l'instabilité.	77
III.5	Allures des vitesses décrites dans la table III.1 en fonction du domaine de longueur d'onde considéré.	80
III.6	Dépendance de χ_{crit} , sans choc, en fonction de H_S/H_ρ pour $H_\rho = 1/3$ fixé (gauche) et $H_S = H_g/10$ fixé (droite). Les courbes en tirets noirs représentent les ajustements des courbes par des puissances.	81
III.7	Évolution de l'échelle la plus instable suivant les différentes échelles de chauffage et de stratification de la densité considérées. À gauche, pour la courbe bleue, H_S est fixé à $H_g/10$ et H_ρ est fixé à $H_g/3$ pour la courbe magenta. À droite, l'évolution de $H_\rho k_x$ pour laquelle on s'attendait à avoir une droite horizontale.	81
III.8	Évolution du taux de croissance en fonction du nombre d'onde $H_g k_x$ pour $H_S = H_g$, avec (gauche) et sans advection (droite). On illustre en magenta la limite de validité de la méthode WKB, avec $K_H = H_S \nabla S$ et $K_g = gH_g/c^2$.	82
III.9	Présentation du système en eau peu profonde analogique. Les lignes continues illustrent l'état d'équilibre stationnaire tandis que les lignes pointillées illustrent l'état perturbé.	83
III.10	Description du système dans le cas d'un sol hyperbolique.	86
III.11	Évolution du taux de croissance et de la fréquence de plusieurs modes en fonction du chauffage. Deux régimes apparaissent, liées aux deux instabilités SASI, pour les faibles chauffages, et convective au-delà.	87
III.12	Évolution de la valeur de χ à la stabilité marginale pour différents taux de dissociation ε . La croix rouge au minimum de chaque courbe indique l'emplacement du χ_{crit} pour chaque taux de dissociation.	88
III.13	Évolution du taux de chauffage à la stabilité marginale de la convection en fonction des divers paramètres (ε en bleu, r_{sh0} en magenta, \mathcal{M}_1 en cyan, γ en rouge) en conservant le rayon du choc sans chauffage $r_{sh0} = 5 r_{PNS}$ et le nombre de Mach de la matière incidente $\mathcal{M}_1 = 5$ (sauf précisé autrement). En tirets bleus, l'évolution de χ_{crit} lorsque la microphysique est conservée constante et que le taux de dissociation varie.	89
III.14	Profil du carré de la fréquence de Brunt-Väisälä ω_{BV} en fonction du rayon pour différentes valeurs de χ .	90
III.15	Évolution de la taille des cellules convectives en fonction du rayon du choc lorsque les paramètres (ε , r_{sh0} , γ , \mathcal{M}_1) sont variés. En tirets sont représentées les valeurs attendues via l'Eq. (III.33). Le point noir désigne le point de départ commun tel que $\varepsilon = 0$, $r_{sh0} = 5 r_{PNS}$, $\gamma = 4/3$, $\mathcal{M}_1 = 5$.	92

IV.1	Evolution of the shock (blue) and gain (red) radii as a function of the convection parameter, χ . Unless stated otherwise, the values of the parameters are $r_{\text{sh}0} = 5r_{\text{PNS}}$, $\varepsilon = 0$, and $j = 0$. The case $(j, \varepsilon) = (0, 0)$ and $r_{\text{sh}0} = 3.2r_{\text{PNS}}$ (dashed lines) is chosen so that the shock radius without heating coincides with the case with $(j, \varepsilon) = (0, 0.3)$ and $r_{\text{sh}0} = 5r_{\text{PNS}}$. As expected, the shock radius increases with χ and the introduction of rotation increases the shock radius when the cooling normalisation, A_c , is conserved. Note that for the moderate value of angular momentum $j = 0.1$, the stationary flow is almost unaffected by rotation.	104
IV.2	Evolution of the growth rate (upper panel) and frequency (lower panel) of the fundamental modes as a function of the convection parameter, χ . Two instability domains can be identified : SASI ($\omega_r \neq 0$) for modest neutrino heating and the convective instability ($\omega_r = 0$) for stronger heating.	106
IV.3	Influence of the dissociation of nuclei across the shock on the azimuthal number of the most unstable fundamental mode, m_{num} (triangles), at $\chi = 4$ for three different values of the rotation rate. The numerical values of the most unstable modes (triangle) are compared to the analytical predictions of Eq. (IV.29) (dashed lines) as a function of the dissociation rate. We allow for quarter-integer values of m_{num} for an easier comparison with Eq. (IV.29).	108
IV.4	Evolution of the growth rate, ω_i , in units of $v_{\text{sh}}/r_{\text{sh}}$ (top), and the corotation radius in units of r_{PNS} (bottom) as a function of the rotation rate, measured as in Yamasaki and Foglizzo (2008) with f_p , the pulsar frequency at 10 km. The azimuthal numbers $m = 1$ (blue) and $m = 2$ (red) are displayed for $\chi = 0$ (solid line) and $\chi = 2$ (dash dotted line). To allow for a comparison with Fig. 1 of Yamasaki and Foglizzo (2008) , we considered the same parameter $r_{\text{sh}} = 5r_{\text{PNS}}$ with a strong adiabatic shock.	109
IV.5	Influence of rotation on the growth rate of SASI with dissociation (solid lines) and without dissociation (dashed lines). The bottom panel presents the rotation rate normalised with a proxy for the advection timescale from the shock to the PNS calculated for $(\chi, j) = (0, 0)$. Other parameters are $\chi = 0$ and $r_{\text{sh}}(j = 0) = 3.2r_{\text{PNS}}$	110
IV.6	Evolution as a function of χ of the growth rate, ω_i (top), and the frequency, ω_r (bottom), of the fundamental mode with an azimuthal number $m = 4$ for different values of the rotation rate.	111
IV.7	Evolution of the corotation radius, r_{corot} , as a function of the rotation rate for $\varepsilon = 0$ (top) and $\varepsilon = 0.3$ (bottom). The corotation radius of the most unstable mode is represented with a blue line (numbers above the line specify the corresponding azimuthal number, m). For comparison, grey lines show the PNS radius, r_{PNS} , the gain radius, r_{gain} , the radius of the Brunt-Väisälä frequency maximum, r_{BV} , and the shock radius, r_{sh} . With both values of the dissociation, the corotation radius of the most unstable mode is close to r_{BV} for slow rotation and moves away for higher rotation rates ($j > 30\%$).	112
IV.8	Growth rate evolution depending on the rotation rate for several modes at $\chi = 6.5$ with $\varepsilon = 0$ (top panel) and $\varepsilon = 0.3$ (bottom panel). For $j = 0$, $r_{\text{sh}}(\varepsilon = 0) = 7.8r_{\text{PNS}}$ and $r_{\text{sh}}(\varepsilon = 0.3) = 4.1r_{\text{PNS}}$. For this convection parameter, non-axisymmetric convective modes are quenched by rotation. In the absence of rotation, all modes are above the transition from SASI to convection, except for the mode $m = 1$ in the bottom panel.	113

IV.9	Impact of rotation on the convection parameter at marginal stability, χ_{marg} . We consider several azimuthal numbers with $m > 3$, for which SASI is stable in the absence of rotation. The $m = 1$ and $m = 2$ are not shown because they are unstable to SASI, which prevents us from measuring χ_{marg} . The curves are cut when the mode is unstable for all convection parameters, in which case χ_{marg} does not exist anymore.	114
IV.10	Spatial structure of the eigenmode entropy perturbation in the equatorial plane, for $\varepsilon = 0.3$ and $\chi \sim 6$. Each row corresponds to a value of $m = (1, 2, 4, 5)$ (from top to bottom) and each column to a rotation rate with $j = (0, 0.1, 0.4)$ (from left to right). In magenta and cyan, we represent the gain and corotation radii, respectively. The diagonal sequence of framed plots corresponds to the most unstable modes. Coordinates x and y are expressed in r_{PNS} units. The deformation induced by rotation is stronger for smaller-scale modes.	115
IV.11	From left to right, maps of the growth rate, ω_i , frequency, ω_r , azimuthal number, m , and corotation radius of the most unstable fundamental mode with three dissociation rates : $\varepsilon = 0$ (top row), 0.3 (middle row), and 0.5 (bottom row). Above the dashed magenta line, the growth rate of equatorial perturbations decreases with rotation. In the two left columns, the white lines show where the corotation radius equals r_{PNS} and r_{gain} . In the two right columns, the black lines highlight the variation in the dominant azimuthal number, m . The numbers in the third and fourth columns highlight the azimuthal number of the most unstable mode.	116
IV.12	Evolution of the critical rotation rate, j_{crit} , depending on the dissociation using two methods. This critical rotation corresponds to the apparition of the mixed modes. The higher the dissociation, the later the transition. For the blue points, we used the discontinuity end of the dominant m at $\chi \sim 4$. For the magenta points, we used the advection timescale, τ_{adv} , from the shock to the gain radius for $m = 4$ and $\chi \sim 4$	117
IV.13	Growth rate (top) and frequency (bottom) evolution of several modes depending on the rotation rate, j , for $\chi = 4.5$, $\varepsilon = 0$, and $r_{\text{sh}}(j = 0) = 6.8r_{\text{PNS}}$	118
IV.14	Same as Fig. IV.13 but for $\varepsilon = 0.3$ and $r_{\text{sh}}(j = 0) = 3.9r_{\text{PNS}}$	119
IV.15	Evolution of the growth rate depending on the azimuthal number, m , for several rotation rates and $\chi = 4.5$	120
IV.16	Frequency of the $m = 2$ fundamental mode as a function of the specific angular momentum, j , for several values of χ . The grey-shaded region illustrates the frequency range corresponding to a corotation radius located between the gain radius, r_{gain} , and the radius, r_{BV} , that maximises the Brunt-Väisälä frequency. The frequency is expressed in units of the approximate inverse advection timescale, $v_{\text{sh}}/r_{\text{sh}}$	121
IV.17	Maps, for varying heating and rotation rates, of the growth rate, the frequency, and the corotation radius of the most unstable fundamental mode between modes $m = 1$ and $m = 2$. In the second panel, we plot $2\omega_r$ when $m = 1$ is dominant to account for the doubled frequency expected in the GW signal. In the third panel, the black line separates the regions dominated by the fundamental mode $m = 1$ or $m = 2$	122

IV.18	Comparaison des taux de croissance (gauche) et fréquence (droite) des modes fondamentaux (tirets) et harmoniques les plus instables du mode m (croix). Les sauts de fréquence indiquent les changements d'harmonique le plus instable. Ces résultats sont obtenus pour $\varepsilon = 0$, $\chi = 4.5$ sans rotation et $\chi = 6.5$ à $j = 0.5$	128
IV.19	Évolution des taux de croissance et fréquences avec rotation ($j = 0.001, 0.02, 0.06$) pour les modes progrades (traits pleins) et rétrogrades (tirets).	129
IV.20	Gauche : Évolution des taux d'injection d'énergie lorsque l'intensité du chauffage varie dans un cas sans rotation, avec $\varepsilon = 0.3$ et $m = 4$. Les taux d'injection d'énergie sont normalisés par l'énergie cinétique des perturbations afin d'obtenir la contribution de ces termes au taux de croissance. Droite : Comparaison du taux de croissance (symboles bleus) avec la prédiction obtenue par l'analyse énergétique (ligne magenta). Les unités utilisées en ordonnées sont $c_{sh}/[2(r_{sh} - r_{PNS})]$ à gauche et $c_{sh}/(r_{sh} - r_{PNS})$ à droite.	130
IV.21	Comme la Fig. IV.20, avec $j = 0.1$	130
IV.22	Répartition des sources d'énergie sans rotation, avec $m = 4$ et $\varepsilon = 0.3$. L'unité utilisée en ordonnées est $c_{sh}/[2(r_{sh} - r_{PNS})]$	131
IV.23	Termes sources de l'énergie en fonction de la rotation pour $\chi = 1$ (gauche) et $\chi = 6.5$ (droite). Les différentes lignes représentent la flottaison (bleu), l'énergie de rotation (orange), la somme des autres termes (noir) ainsi que le taux de croissance (magenta).	131
B.1	Profil de l'évolution de ω_i en fonction de k_x sans advection. Ce résultat est obtenu pour $K_H \ll 1$ et $K_g \ll 1$ afin de correspondre à nos hypothèses de faible gravité et faible saut d'entropie. ($\omega_{BV} = N$)	160
C.1	Illustration du dispositif étudié pour l'analogie en eau peu profonde.	162
C.2	Illustration du dispositif avec un potentiel en $1/x$	166

Grandeurs physiques et notations

Constantes et unités

- constante universelle de gravitation : $G \simeq 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
- vitesse de la lumière dans le vide : $c \simeq 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
- parsec : $1 \text{ pc} \simeq 3.1 \times 10^{16} \text{ m}$
- électronvolt : $1 \text{ eV} \simeq 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$
- erg : $1 \text{ erg} \simeq 1 \times 10^{-7} \text{ J}$
- rayon galactique : $R_{MW} \simeq 15 \text{ kpc}$
- masse du Soleil : $M_{\odot} \simeq 2 \times 10^{30} \text{ kg}$
- rayon du Soleil : $R_{\odot} \simeq 7 \times 10^8 \text{ m}$
- champ magnétique du soleil calme : $B_{\odot} \simeq 50 \text{ Gauss (G)}$
- rayon d'une protoétoile à neutrons : $R_{\text{PNS}} \simeq 50 \text{ km}$
- masse d'une protoétoile à neutrons : $M_{\text{PNS}} \simeq 1.4 M_{\odot}$

Notations

- fréquence de Brunt-Väisälä (BV) : N ou ω_{BV}
- protoétoile à neutrons : PNS (protoneutron star)
- supernova superlumineuse : SLSN (superluminous supernova)
- paramètre de chauffage : χ
- longueur d'onde : λ
- nombre d'onde : $k = 2\pi/\lambda$

Introduction générale

Observations historiques

Les supernovæ sont des phénomènes très énergétiques d'explosion d'étoiles, causant une augmentation brève et intense de leur luminosité. Cette augmentation soudaine de la luminosité peut donner l'impression de l'apparition d'une nouvelle étoile : « nova » (nouvelle, en latin). Depuis le II^e siècle, des rapports asiatiques racontent l'observation d'apparition d'étoiles « invitées » dans la voûte céleste. Ces nouvelles étoiles, très brillantes, apparaissaient soudainement dans le ciel puis perdaient progressivement en luminosité jusqu'à ne plus être visibles. Grâce à ces récits, il est possible de localiser certaines supernovæ et de trouver, dans le ciel d'aujourd'hui, les traces de ces événements passés. La première supernova décrite de façon claire date de l'an 185 et est aujourd'hui appelée SN185. Il est mentionné dans les récits une étoile apparaissant dans la constellation actuelle du Centaure et disparaissant au bout de quelques mois. Grâce à ce récit, le reste de l'étoile explosée a pu être identifié et il est aujourd'hui encore observable par les télescopes Chandra et XMM-Newton. Depuis 185, d'autres supernovæ ont sûrement été observées (comme SN393), mais leurs descriptions ne sont pas assez précises/exactes pour que leurs restes soient identifiés de façon certaine. La seconde supernova identifiée clairement est celle de l'an 1006. Il s'agit de la supernova la plus brillante dont une trace nous soit parvenue. Des descriptions de cette supernova ont été effectuées par des observateurs en Afrique, en Asie et en Europe. Grâce à ces nombreux récits, son reste a été identifié et se trouve à ~ 2 kiloparsecs (kpc) de la Terre. Cette supernova a pu être observée à l'œil nu en plein jour, atteignant une magnitude apparente de ~ -7 , soit l'équivalent d'un quartier de lune.

Trois autres supernovæ ont pu être observées à l'œil nu et ont ainsi permis une description du phénomène par plusieurs scientifiques. La première de ces supernovæ est apparue en 1054. La lumière de l'explosion aurait été visible en plein jour pendant plusieurs jours et pendant plusieurs mois dans le ciel nocturne. Ce reste de supernova a ensuite été observé par Charles Messier (1730-1817) en 1758. Il s'agit d'ailleurs du premier objet inscrit par l'astronome dans le catalogue des nébuleuses et des amas d'étoiles M1 (M : Messier, 1 : premier objet du catalogue). À l'époque, les instruments ne permettaient pas une résolution suffisante pour déterminer la forme des objets observés et des objets de types très différents ont été regroupés sous le nom de nébuleuse. La nébuleuse M1, appelée nébuleuse du Crabe à cause de sa forme, a par la suite été observée par des instruments plus performants, permettant une meilleure résolution de la nébuleuse.

En 1572 et 1604, deux supernovæ sont apparues et ont été observées par les astronomes européens Tycho Brahe et Johannes Kepler, respectivement. Les deux phénomènes ont été observables pendant plusieurs mois avant de disparaître. Chaque astronome a décrit sa supernova dans un ouvrage : Tycho Brahe dans *De Stella Nova* (1573), Johannes Kepler dans *Stella Nova in Pede Serpentarii* (1606).

Il y a environ 300 ans, une autre supernova a explosé dans notre galaxie. Cette dernière

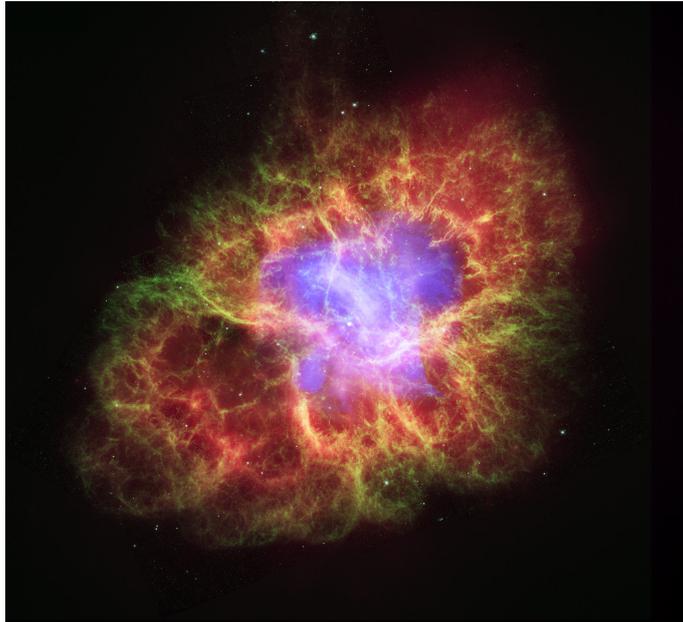


Figure 1 – Observation multi-longueurs d’onde de la nébuleuse du Crabe. En bleu clair les observations en rayons X avec le pulsar central, en vert et bleu foncé les observations visibles et en rouge les infrarouges. Crédit : NASA, ESA, CXC, JPL-Caltech, J. Hester et A. Loll (Arizona State Univ.), R. Gehrz (Univ. Minn.), et STScI

n’a pas fait parler d’elle et l’incertitude sur l’année de son explosion est grande. Cependant, le reste de supernova est lui bien connu et documenté, il s’agit de Cassiopée A (CasA).

Classifications des supernovæ d’après les observations

Novæ et supernovæ

Deux phénomènes distincts peuvent mener à une apparition brutale d’étoile dans le ciel. En 1934, les courbes de lumière de ces événements conduisent [Baade and Zwicky \(1934b\)](#) à proposer qu’il existe deux mécanismes bien distincts avec des luminosités et des causes différentes. Ils les classent donc en deux catégories : les novæ communes, dont le maximum de luminosité vaut $\sim 10^4$ fois la luminosité solaire (\mathcal{L}_\odot), et les supernovæ, dont le maximum de luminosité avoisine celle de leur galaxie hôte ($\sim 10^7 \mathcal{L}_\odot$). Ces intensités de luminosité dépendent cependant du type de la supernova. Les supernovæ se produisent pour des étoiles dont les masses vont de 1 masse solaire (M_\odot) à $100 M_\odot$ et correspondent à l’explosion d’une étoile. Les auteurs proposent que ces événements sont le résultat de la transformation d’une étoile standard en une *étoile à neutrons* ([Baade and Zwicky, 1934a](#)). Les observations de la nébuleuse du Crabe ont d’ailleurs mené, en 1968, à la découverte d’une étoile à neutrons au cœur de la structure ([Staelin and Reifenstein, 1968](#); [Comella et al., 1969](#)), confirmant la relation de causalité entre certaines supernovæ et les étoiles à neutrons, avancée par [Baade and Zwicky \(1934a\)](#) et [Colgate and White \(1966\)](#). Lorsqu’elle est en rotation et magnétisée, l’étoile à neutrons est notamment

détectée grâce à des signaux radio brefs et extrêmement réguliers, qui lui ont valu le nom de pulsar. La première découverte d'un pulsar est attribuée à Jocelyn Bell¹ en 1967 par la détection de ces signaux en ondes radio. Ces derniers procurent une information directe sur la période de rotation des étoiles à neutrons.

Classification spectrale

En 1941, Minkowski propose une division de la catégorie supernova en deux sous-catégories basées sur les éléments chimiques (hydrogène, hélium et silicium) présents dans les spectres d'absorption des éjectas des événements. Parmi ces trois éléments chimiques, seul le silicium n'est pas présent dès le début de la vie de l'étoile, les deux autres sont synthétisés lors de la nucléosynthèse primordiale puis de la vie de l'étoile pour l'hélium. Si l'hydrogène est absent du spectre, cela signifie que l'étoile a éjecté son enveloppe d'hydrogène et la supernova est de type I. Dans le cas contraire, la supernova est de type II.

Cependant, cette distinction I versus II n'est pas suffisante pour séparer les mécanismes d'explosion et une variété de spectres est observée dans chacune des catégories. Pour remédier à cette dégénérescence, des sous-catégories sont nécessaires (Fig. 2).

Pour les sous-catégories du type I, deux autres éléments chimiques sont alors pris en compte : l'hélium et le silicium. Bien que l'hélium soit présent dans l'étoile dès sa formation, sa quantité augmente au cours de la vie de l'étoile. En effet, l'hélium et le silicium sont issus de la fusion nucléaire au cœur de l'étoile : en début de vie pour l'hélium (couche sous l'hydrogène) et en fin de vie pour le silicium (couche interne). Commençons avec le silicium, dont la fusion va donner le fer. Si du silicium est présent lors de l'explosion de l'étoile, alors il s'agit d'une supernova de type Ia. Si le silicium est absent, il faut étudier la présence d'hélium. Si ce dernier est observé dans le reste de la supernova, alors il s'agit d'une supernova de type Ib. Dans le cas contraire, il s'agit d'une supernova de type Ic. Une sous-catégorie des supernovæ de type Ic correspond aux *hypernovæ*, aussi appelées Ic-BL pour *broad lined type Ic supernovæ*. Pour ces explosions, l'énergie cinétique de l'explosion est dix fois plus importante que celle des supernovæ classiques, soit environ 10^{52} erg. Dans ce cas, la rotation stellaire joue probablement un rôle non négligeable dans le devenir de l'étoile. Ces explosions peuvent mener à la formation d'une étoile à neutrons fortement magnétique (*magnétar*) en rotation rapide (Shankar et al., 2021) ou d'un *trou noir*² (Aguilera-Dena et al., 2020), associée à l'émission d'un sursaut gamma (appelé GRB pour *Gamma Ray Burst*) (Iwamoto et al., 1998). Un magnétar est une étoile à neutrons dont le champ magnétique vaut $10^{14} - 10^{15}$ Gauss (G), soit plus de cent fois celui d'une étoile à neutrons classique ($10^{11} - 10^{13}$ G).

Pour les supernovæ de type II, une sous-classification est effectuée suivant la largeur et l'intensité des raies liées à l'hydrogène. Si des raies fines sont présentes, en plus des raies larges venant de l'éjecta en expansion rapide, la supernova est de type II_n (« narrow »). Si les raies d'hydrogène sont faibles face aux raies d'hélium, alors la supernova est de type II_b.

1. La découverte du premier pulsar par Jocelyn Bell a valu l'attribution du prix Nobel de physique 1974 à son directeur de thèse *uniquement*.

2. Les trous noirs sont des objets tellement compacts que toutes les particules s'en approchant d'un peu trop près se font absorber, d'où l'appellation *trou*. La lumière n'échappe pas à cette règle et cela lui a valu sa dénomination de *noir*.

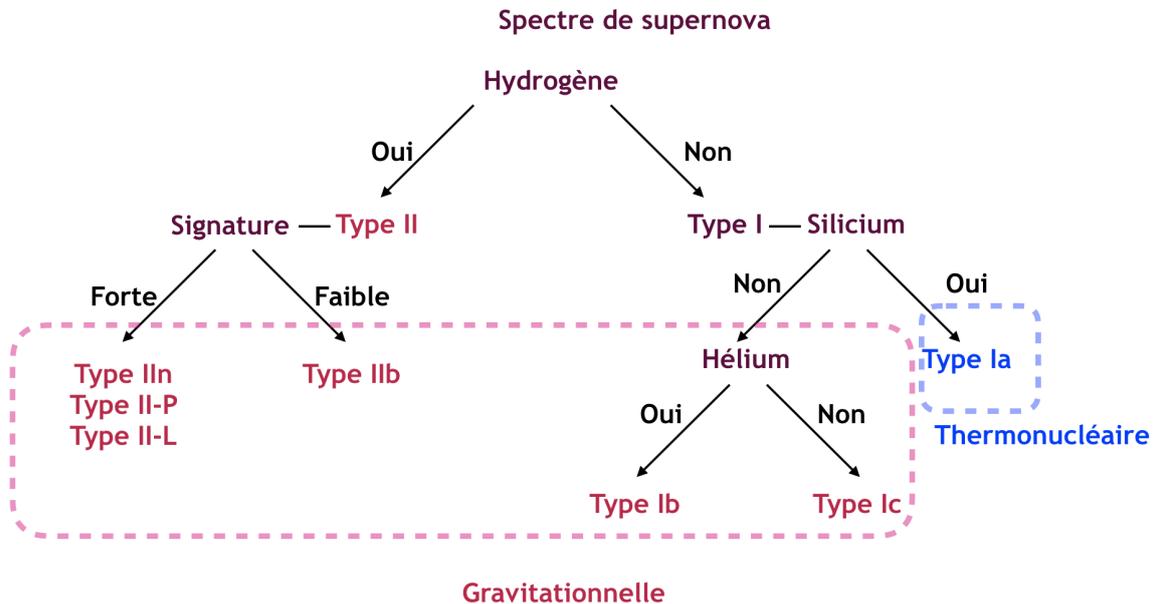


Figure 2 – Classification des supernovæ selon leurs signatures spectrales. En rose, les types de supernovæ correspondant à un effondrement gravitationnel.

Courbes de lumière

Les courbes de lumière sont un autre outil de diagnostic du type de supernova observé. Certaines supernovæ de type II présentent un plateau dans leur courbe de luminosité. C'est-à-dire qu'il existe une période pendant laquelle leur luminosité ne décroît pas ou très peu. Elles sont nommées II-P (plateau). Les autres, qui possèdent une décroissance linéaire de leur courbe de lumière, sont nommées II-L (linéaire). Dans la classification en Fig. 2, ces types se distinguent du type IIa (raies fines) par la largeur des raies d'hydrogène qui ne sont pas fines pour les II-P et II-L. Enfin, il existe une catégorie de supernovæ pour laquelle la luminosité est cent fois plus élevée que les luminosités moyennes observées, ce sont des supernovæ super-lumineuses appelées SLSN. Certaines sont de type IIa et la luminosité très élevée peut alors souvent être interprétée comme venant de l'interaction entre l'éjecta de la supernova et la matière circumstellaire. D'autres SLSN sont de type Ic. Pour ces dernières, la source d'énergie supplémentaire de ces explosions semble provenir d'un champ magnétique fort qui peut se développer dans l'étoile à neutrons. Cette dernière est alors appelée magnétar. La Figure 3 présente où se trouvent ces objets par rapport aux pulsars dans un diagramme $P - \dot{P}$, où P est la période de rotation de l'objet compact et \dot{P} sa dérivée temporelle.

En plus de spectres différents, les observations de supernovæ suggèrent une différence d'origine entre les supernovæ de type Ia et les autres. Tout d'abord, cela s'observe par les caractéristiques des galaxies hôtes de ces supernovæ. En effet, ces dernières sont observées dans toutes les galaxies, quels que soient leur âge et leur taux de formation d'étoile. Au contraire, les types II et Ib/c sont uniquement observés dans les jeunes galaxies, pour lesquelles la formation

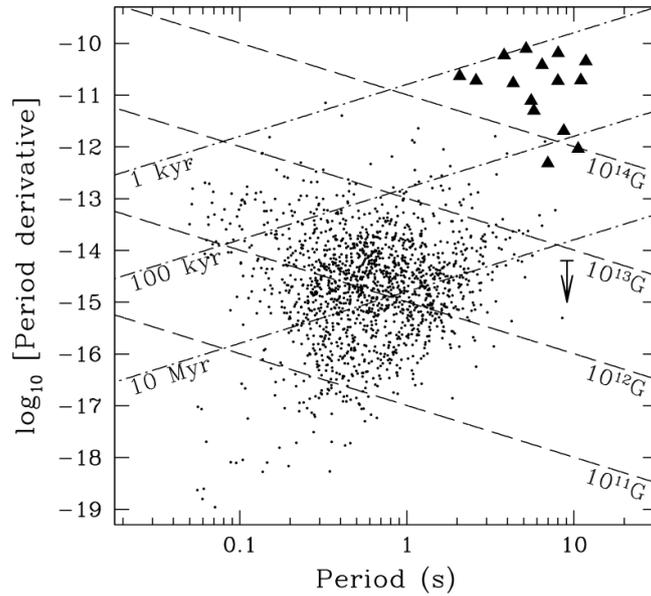


Figure 3 – Évolution des périodes pour les objets compacts. En points les pulsars et en triangles les magnétars. Les lignes diagonales représentent les iso-ans et les iso-champs magnétiques. Crédit : [Ng and Kaspi \(2011\)](#).

d'étoiles est encore active. Nous avons donc deux types de galaxies : les jeunes, dans lesquelles tous les types de supernovæ peuvent se produire, et les plus vieilles, où l'on n'observe plus que des supernovæ de type Ia. Une forte différence entre ces deux types de galaxies provient du type d'étoiles présentes. Pour les jeunes galaxies, toutes les masses d'étoiles sont présentes dans la galaxie. Lorsque la galaxie vieillit, les étoiles les plus massives sont les premières à atteindre la fin de leur vie. Ainsi, plus une galaxie est vieille, moins ses étoiles sont massives. Les supernovæ de type Ia seraient donc associées à des étoiles de plus faible masse que les étoiles associées aux supernovæ de types II et Ib/c. L'association de ces supernovæ à des étoiles massives peut aussi être déduite, de façon indirecte, à partir des travaux de [Baade and Zwicky \(1934a\)](#) et de l'observation multi-longueurs d'onde de la galaxie d'Andromède (M31). En effet, d'après le scénario de [Baade and Zwicky \(1934a\)](#), les supernovæ donnent naissance à des objets compacts (visibles en rayons X). Dans la galaxie d'Andromède, le centre galactique est pauvre en étoiles massives (cœur rougi dans l'image de gauche de Fig. 4) et riche en objets compacts (image de droite de Fig. 4). Il est donc possible qu'un même processus ait mené à la disparition des étoiles massives et l'apparition des objets compacts.



Figure 4 – Galaxie d'Andromède observée en lumière visible (gauche) et en rayons X (droite).
Crédit : Optique : MPE/R. Gendler, rayons X : ESA/XMM-Newton/EPIC/W. Pietsch, MPE.

Les supernovæ et les objets compacts dans l'ère de l'astronomie multi-messagère

Importance astrophysique des supernovæ

Les explosions de supernovæ sont au cœur de divers processus permettant d'expliquer l'univers observable. Tout d'abord, les supernovæ sont à prendre en compte afin d'expliquer les taux de formation stellaire dans les galaxies. Ces dernières forment moins d'étoiles que ce qui pourrait être estimé en ne considérant que la gravité opposée aux supports thermique et radiatif du gaz. Il faut prendre en compte la turbulence du milieu interstellaire. En particulier, une explosion de supernova injecte de la turbulence dans le milieu interstellaire et régule ainsi la formation d'étoiles.

L'étude du processus d'explosion permet aussi de comprendre la composition de l'univers, l'évolution des éléments et l'origine de tous les métaux (éléments plus lourds que l'hélium) dont est composé notre quotidien. En effet, tous ces éléments étaient absents de la composition chimique primordiale. À la fin de la nucléosynthèse primordiale, survenue quelques minutes après le Big Bang, l'univers n'était composé que d'hydrogène ($\sim 75\%$), d'hélium ($\sim 25\%$) et de traces de lithium ($< 1\%$). Lorsque les premières étoiles se sont formées, elles ont commencé à créer les éléments plus lourds que l'hélium. C'est la nucléosynthèse stellaire. Cependant, ces éléments n'existent que dans leur cœur et ne sont pas disponibles pour former planètes, astéroïdes et comètes. Il est donc nécessaire qu'un mécanisme physique permette la dispersion du cœur de l'étoile, donnant accès aux éléments nouvellement synthétisés. Ces nouveaux éléments sont alors disponibles pour la formation de nouveaux objets. Cependant, à l'instar de la nucléosynthèse primordiale, la fusion stellaire est limitée et ne produit pas d'élément plus lourd que le fer. Pour certaines étoiles, les processus s (capture lente de neutrons) peuvent permettre de synthétiser certains des éléments au-delà du fer, mais pas tous. Pour d'autres étoiles, le mécanisme de désintégration du cœur, évoqué plus haut, va être favorable à une nucléosynthèse explosive. Encore une fois, ce processus ne permet pas d'expliquer toutes les abondances de métaux observées. Les différents types de supernova fournissent différents éléments et l'étude de chacun de ces types est donc nécessaire pour l'étude de la composition de l'univers.

Les supernovæ de type Ia peuvent avoir un intérêt cosmologique. En effet, leur courbe de luminosité est typique et bien connue. Ainsi, elles peuvent servir à mesurer les distances cosmologiques, jusqu'à ~ 10 Gpc, et sont appelées *chandelles standards*. Elles ont permis d'estimer la constante d'Hubble H , caractérisant l'expansion de l'univers.

L'onde de choc créée par l'explosion de l'étoile peut aussi mener à la création/accélération de rayons cosmiques lors de son interaction avec le milieu interstellaire (Giuffrida et al., 2022).

Les supernovæ produisant des objets compacts tels que les étoiles à neutrons, les magnétars et les trous noirs, leur étude est intrinsèquement liée à l'étude de ces objets. Elle peut permettre de mettre des contraintes sur leur masse lors de leur création mais aussi d'expliquer l'origine de leur champ magnétique, de leur mouvement propre et de leur taux de rotation. Ce dernier effet est décrit dans la partie suivante. Lors de l'explosion en supernova, les asymétries de la matière peuvent fournir une vitesse à l'objet compact. Lorsque l'étoile explosant en supernova possède un compagnon, ce « *kick* » peut avoir une influence sur le système binaire. Son axe

de rotation ou la distance entre les deux étoiles peut varier suite à l'explosion. Pour les kicks plus forts, la vitesse cédée à l'objet compact peut détruire le système binaire.

Enjeux de la rotation

L'étude de la rotation lors d'une supernova est particulièrement intéressante car cela bénéficie à deux communautés : évolution stellaire et objets compacts. Une fois les étoiles formées, il est nécessaire de connaître leurs caractéristiques afin de déterminer leur évolution. Une caractéristique à l'étude est le taux de rotation des étoiles. Leur rotation de surface peut être déterminée à l'aide de télescopes comme *Kepler*. Cependant, le processus de transport du moment cinétique à l'intérieur de l'étoile est peu contraint, ce qui induit que la rotation du cœur des étoiles est peu connue. C'est pourquoi son étude est importante afin de pouvoir être introduite de manière réaliste dans les simulations d'étoiles et ainsi pouvoir fournir des progéniteurs pertinents en conditions initiales de simulations d'explosions de supernovæ. En particulier, la rotation est un phénomène important à comprendre pour expliquer les SNeI, certains magnétars et les hypernovæ. Les recherches récentes dans le domaine de l'astérosismologie permettent de commencer à poser des contraintes sur la rotation centrale des étoiles. Un autre moyen de poser ces contraintes est de déterminer comment la rotation se manifeste lors d'une explosion de supernova et comment son intensité va influencer sur les différents mécanismes en jeu lors de l'explosion, afin de détecter cette influence dans les signaux reçus. D'autre part, l'observation de la rotation des étoiles à neutrons alliée à l'étude des explosions de supernovæ permet de mettre des contraintes sur la rotation au cœur des étoiles massives pré-supernovæ. Cependant, cette méthode n'est possible que pour certaines étoiles à neutrons jeunes, pour lesquelles il est possible de remonter au taux de rotation lors de la formation.

Il est donc important de déterminer, de façon théorique, comment la rotation se manifeste dans les signaux multi-messagers d'une explosion de supernova. Cela permettrait de remonter à la rotation initiale du cœur de l'étoile et ainsi compléter les études astérosismologiques des cœurs des étoiles. Cette approche permettrait aussi de mettre des contraintes sur les rotations initiales des pulsars et des magnétars créés lors de l'explosion.

La révolution de l'astronomie multi-messagère

Plusieurs observations laissent espérer une observation multi-messagère des supernovæ. La première et la plus importante concernant les supernovæ s'est produite il y a plus de 30 ans.

En 1987, une supernova a été observée dans le grand nuage de Magellan, situé à 50 kpc de nous. Il s'agit d'une galaxie satellite de la nôtre, visible depuis l'hémisphère sud. Cette supernova est historique car il s'agit de la première (et la seule à l'heure actuelle) pour laquelle une détection de neutrinos est associée à la détection électromagnétique. Dans le paradigme initial de la fin de vie des étoiles massives (initialement proposé par [Baade and Zwicky, 1934a](#)), ces dernières subissent un effondrement de leur cœur, menant à la formation d'une étoile à neutrons. Ce scénario d'effondrement gravitationnel est d'ailleurs validé par les énergies de neutrinos détectés en 1987. Ces derniers valident aussi l'existence d'un objet central d'un rayon d'une dizaine de kilomètres pour une masse proche de celle du soleil, un objet compact. Se pose alors le besoin de comprendre comment le phénomène s'inverse. Comment passe-t-on d'une contraction du cœur, et une chute de la matière qui l'entoure, à une étoile à neutrons

dont l'enveloppe a explosé ? Quel est le rôle des neutrinos dans cette explosion ? Deux approches complémentaires permettront sûrement de répondre à ces questions : les études théoriques de la fin de vie des étoiles confrontées aux prochaines observations multi-messagères.

La seconde observation, qui concerne la compréhension de la synthèse des éléments lourds, s'est produite en 2017. Pendant longtemps, les seuls événements de création d'éléments lourds ayant été observés sans ambiguïté étaient des supernovæ de type I ou II. Cependant, il existe un phénomène encore théorique avant 2017, prédisant que les éléments les plus lourds tels que l'or sont synthétisés grâce à la coalescence d'étoiles à neutrons. En effet, la rencontre d'étoiles à neutrons va permettre l'enrichissement rapide des noyaux en neutrons : le processus r . Cet enrichissement rapide va créer de nouveaux éléments, certains éléments instables vont se désintégrer et créer, eux aussi, de nouveaux éléments. Le 17 août 2017, les interféromètres de la collaboration LIGO-Virgo ont détecté un signal qui va confirmer le scénario de création des éléments les plus lourds. En effet, un signal associé à la coalescence d'étoiles à neutrons a été détecté en *ondes gravitationnelles*³, en rayon γ puis en visible-infrarouge. Quelques jours plus tard, un signal a aussi été détecté en rayons X et dans le domaine radio. C'est la première détection sûre, et complète, d'une coalescence d'étoiles à neutrons et l'explication tant attendue de la création des éléments les plus lourds. L'étude des supernovæ est d'ailleurs importante pour comprendre les processus de formation des objets compacts, seuls ou en systèmes multiples, afin de comprendre comment ces coalescences d'objets compacts peuvent se produire : capture gravitationnelle d'un autre objet compact ou binarité préexistante.

Les nombreuses observations d'ondes gravitationnelles émises lors de coalescences d'objets compacts ainsi que la détection de SN1987 en neutrinos laissent espérer une détection complète de la prochaine supernova galactique. Ce type d'observation, allié à une étude théorique du phénomène, représente un moyen d'expliquer la vitesse, la rotation, le champ magnétique des objets compacts ainsi que la rotation des cœurs stellaires.

Une détection complète multi-messagère est, cependant, plus compliquée pour les supernovæ que pour les coalescences d'objets compacts. En effet, bien que les explosions d'étoiles massives soient des événements fréquents dans l'univers, très peu se trouvent dans la bulle de détection des détecteurs de neutrinos et d'ondes gravitationnelles, ce qui rend leur détection plus rare. Pour avoir un suivi total de la supernova via tous les messagers possibles, il faudrait une supernova galactique, située à moins de 2-3 kpc seulement (rayon de notre galaxie ~ 15 kpc). Les améliorations des détecteurs d'ondes gravitationnelles laissent espérer une détection jusqu'à 10 kpc (Kuroda et al., 2016). De plus, afin que le signal soit complet (ondes gravitationnelles/électromagnétiques et neutrinos), il faut qu'il y ait le moins possible d'absorption ou d'altération des signaux entre l'étoile et les télescopes/détecteurs. En particulier, il est préférable que le centre de notre galaxie ne se trouve pas sur la ligne de visée. À toutes ces contraintes observationnelles, s'ajoute le fait que notre galaxie est vieillissante, elle produit donc de moins en moins d'étoiles massives et son taux de supernova est donc d'une à trois explosions par siècle (à comparer à ~ 10 pour une galaxie il y a huit milliards d'années, Graur et al., 2015). Cependant, ce taux est statistique et ne garantit pas une supernova par siècle, ni que

3. Les ondes gravitationnelles sont des distorsions de l'espace-temps se propageant à la vitesse de la lumière. Elles sont créées par l'accélération d'une distribution non sphérique de matière. En particulier, pour la coalescence d'objets compacts, le signal en ondes gravitationnelles est d'autant plus fort que l'asymétrie de masse de la source est grande.

cette supernova sera observable depuis la Terre. En effet, la dernière explosion observée dans la Voie Lactée s'est produite il y a plus d'un siècle, ce phénomène est donc rare. Ainsi, il est important d'étudier la théorie de ces phénomènes dès maintenant, afin d'être prêts à récolter tous les signaux nécessaires à leur compréhension lors de la prochaine supernova galactique. Les études sur les supernovæ permettent de prédire dans quel domaine de fréquences le phénomène peut être observé via les ondes gravitationnelles et quelles énergies et courbes de lumière sont attendues pour les détections de neutrinos. Bien que SN1987A ait conduit à la détection d'un petit nombre de neutrinos (vingt-quatre), les améliorations des détecteurs de neutrinos et d'ondes gravitationnelles laissent espérer que la prochaine supernova galactique pourra être observée en signal multi-messager : les photons, les neutrinos (plusieurs dizaines de milliers, [Tamborra et al., 2013](#)) et les ondes gravitationnelles. Les études théoriques des supernovæ sont aussi indispensables afin d'interpréter ces observations et pouvoir remonter aux propriétés de l'étoile progénitrice (notamment sa rotation), à la physique de l'explosion, et aux propriétés de l'étoile à neutrons nouvellement formée ([Torres-Forné et al., 2019a](#)). Ces observations, alliées à la théorie, sont aussi un outil précieux afin d'étudier le comportement de la matière et des neutrinos dans les conditions extrêmes présentes à la surface d'une étoile à neutrons. Parmi les enjeux théoriques actuels se trouve la capacité à obtenir, en simulations tridimensionnelles (3D), des explosions d'étoiles à des énergies correspondant aux énergies attendues. D'une part, les simulations 3D ont montré qu'il était plus difficile de provoquer une explosion en 3D qu'en 2D ([Couch and O'Connor, 2014](#); [Takiwaki et al., 2014](#)). Pour ces codes, il est important d'identifier l'effet de la résolution numérique sur ces explosions. D'autre part, les énergies cinétiques des explosions obtenues numériquement sont souvent inférieures aux énergies observées de 10^{51} erg ([Murphy et al., 2019](#)). L'obtention d'explosions suffisamment énergétiques dans les simulations a été un enjeu pendant plusieurs décennies. Cependant, les simulations utilisent souvent une étoile à symétrie sphérique comme condition initiale. L'utilisation d'un progéniteur initialement 3D et de simulations numériques suffisamment longues semble réduire l'écart entre les observations et les résultats de simulations ([Müller et al., 2017](#); [Bollig et al., 2021](#)).

Enjeux de cette thèse

Le but de cette thèse est de participer à cet effort théorique de préparation et d'analyse en vue d'une détection multi-messagère de supernova gravitationnelle. Dans ce projet, nous nous concentrons sur la dynamique de la phase d'effondrement du cœur de l'étoile massive précédant l'explosion, afin de répondre aux questions évoquées plus haut, concernant le mécanisme de transition d'une implosion vers une explosion. En effet, l'étude du comportement de la matière, et de son interaction avec les neutrinos, pourra permettre d'interpréter les futures observations de supernovæ gravitationnelles en identifiant les signaux des différentes instabilités prédits par les études théoriques. L'identification des instabilités se développant dans le cœur de l'étoile permet d'avoir une chronologie des phénomènes dominants. En particulier, cela permet d'identifier la physique dominante au cœur de l'étoile en fonction de l'instabilité dominante (Chap. III). Les signatures les plus directes de ces instabilités étant disponibles dans les émissions de neutrinos et d'ondes gravitationnelles, leur étude à l'heure de l'astronomie multimessagère est particuliè-

rement pertinente. De plus, nous souhaitons analyser l'effet de différents phénomènes physiques sur l'évolution dynamique de l'étoile en effondrement, tel que l'effet de la rotation stellaire. Bien que plusieurs simulations incluent ce dernier paramètre, une analyse systématique de l'effet de la rotation sur les instabilités présentes dans le cas d'une supernova est manquante. Ce dernier point nous est permis par l'utilisation d'une analyse linéaire (limité aux petites perturbations des grandeurs physiques) permettant une meilleure compréhension physique du phénomène et une grande exploration des taux de rotation. Ces études linéaires se sont montrées pertinentes pour l'étude en ondes gravitationnelle (Torres-Forné et al., 2019b). L'étude de la rotation, alliée à l'observation d'étoiles à neutrons jeunes, pourrait permettre de contraindre le taux de rotation du cœur de l'étoile progénitrice. Ces résultats, combinés aux résultats fournis par l'astérosismologie, sont précieux pour établir les modèles d'évolution stellaire utilisés comme progéniteurs dans les simulations numériques.

Le premier chapitre de cette thèse décrit un état des lieux des connaissances actuelles concernant les mécanismes d'explosion stellaire et plus particulièrement le mécanisme des supernovæ gravitationnelles. Une deuxième partie est consacrée aux différents détecteurs de neutrinos et d'ondes gravitationnelles laissant espérer une détection lors de la prochaine explosion galactique. Enfin, la dernière partie de ce chapitre se concentre sur les différents processus hydrodynamiques en jeu lors de l'explosion d'une étoile massive. Dans le second chapitre, nous abordons les différents ingrédients physiques qui influencent la dynamique de l'effondrement. En particulier, la prise en compte de l'interaction des neutrinos avec la matière, la perte d'énergie par dissociation de la matière ainsi que la rotation stellaire. Ensuite, nous décrivons les méthodes analytiques et numériques utilisées pour l'analyse perturbative de la dynamique de l'effondrement. Les troisième et quatrième chapitres se concentrent sur les résultats obtenus. Ils présentent une analyse sans et avec rotation de la matière au-dessus de l'étoile à neutrons, sujette au développement d'instabilités. En particulier, le premier de ces deux chapitres étudie un critère sans rotation de développement de l'instabilité convective dans une zone traversée par la matière accrétée. Le second traite de l'influence de la rotation en géométrie sphérique lorsque différents taux de chauffage et de dissociation sont considérés. Par cette approche, nous couvrons un large domaine de paramètres, ce qui nous a permis d'identifier les différents régimes de développement des instabilités. Cette étude constitue un outil d'analyse des simulations complexes et non-linéaires effectuées en trois dimensions. Elle représente une possibilité de prédire les fréquences propres des instabilités, afin de pouvoir lier une signature en ondes gravitationnelles et/ou neutrinos à une instabilité. Par exemple, la signature en ondes gravitationnelles d'une de ces instabilités est prévue autour de 100 Hz (Kuroda et al., 2016; Mezzacappa et al., 2020), correspondant au domaine optimal de détection des observatoires d'ondes gravitationnelles actuels.

Chapitre I

Les supernovæ à effondrement de cœur

Sommaire

I.1	Contexte	14
I.1.1	Naissance et vie d'une étoile	14
I.1.2	Mort d'une étoile et naissance d'un objet compact	18
I.1.2.a	Destin des étoiles de masse faible à intermédiaire ($\lesssim 8 M_{\odot}$)	18
I.1.2.b	Les supernovæ gravitationnelles	20
I.1.3	Scénario actuel de formation des supernovæ gravitationnelles par effondrement du cœur de fer	23
I.1.4	Influence de la rotation stellaire	27
I.1.5	Observations contemporaines	29
I.2	Les détecteurs multimessagers	33
I.2.1	Les détecteurs de neutrinos	33
I.2.2	Les détecteurs d'ondes gravitationnelles	36
I.3	L'hydrodynamique au cœur de l'effondrement	38
I.3.1	La convection	39
I.3.1.a	La convection au sein de la protoétoile à neutrons	40
I.3.1.b	La convection prompte	42
I.3.1.c	La convection due aux neutrinos	42
I.3.1.d	Convection et rotation	44
I.3.2	L'instabilité de choc d'accrétion stationnaire (SASI)	45
I.3.2.a	Le mécanisme de SASI	45
I.3.2.b	SASI et rotation	46
I.3.2.c	La fontaine SWASI	46
I.3.3	SASI et convection	47
I.3.3.a	Différences entre les deux instabilités	47
I.3.3.b	Signaux multimessagers de l'instabilité convective et SASI	47
I.3.4	Asymétrie leptonique	49
I.3.5	L'instabilité low-T/ W 	50
I.3.6	Instabilités et simulations numériques	51
I.4	Questions et enjeux de cette thèse	52
I.4.1	Les instabilités et leurs signaux	52
I.4.2	La rotation stellaire	53

I.1 Contexte

I.1.1 Naissance et vie d'une étoile

Tout commence par un nuage de gaz, peu dense et froid (10 - 150 K). Ce nuage, essentiellement composé d'hydrogène moléculaire, possède une taille typique de plusieurs parsecs (pc) pour une densité de particules de 10^3 cm^{-3} (Fig. I.1). Cela correspond à une densité de particules $\sim 10^9$ fois moins élevée que la densité en particules atteinte dans la chambre à vide de la NASA au *Space Power Facility, Ohio*. Ce nuage est principalement composé d'hydrogène et d'hélium. Concentrons-nous maintenant sur une zone un peu plus dense que la moyenne de ce nuage. Sous l'effet de perturbations externes, cette région dense va s'effondrer sur elle-même. Petit à petit, elle va devenir de plus en plus dense, jusqu'à être opaque à son propre rayonnement. Les photons ne peuvent plus que s'échapper en surface et le refroidissement devient donc moins efficace, la température dans le cœur pré-stellaire augmente. Sa température et sa densité vont continuer à augmenter, plus ou moins rapidement selon les phases d'effondrement. Lorsque la température au cœur de l'étoile atteint $\sim 10^7 \text{ K}$, les noyaux d'hydrogène vont commencer à fusionner pour créer des noyaux d'hélium. C'est la fusion de cet hydrogène au cœur de l'étoile qui libère de l'énergie et permet aux forces de pression de contrebalancer la gravité. Un équilibre est atteint entre l'énergie potentielle et l'énergie thermique libérée par les réactions nucléaires, l'effondrement gravitationnel s'arrête. C'est le début de la séquence principale. C'est la région du diagramme de Hertzsprung-Russel (HR, Fig. I.3) commune à toutes les étoiles et dans laquelle l'étoile va passer la majorité de sa vie.



Figure I.1 – Observation par le James Webb Space Telescope (JWST) de la nébuleuse de la Carène, pouponnière d'étoiles. Crédit : NASA, ESA, CSA, and STScI

La luminosité de cette jeune étoile ainsi que sa durée de vie dépendent de sa masse. En effet, toutes les étoiles n'ont pas la même masse et il est plus aisé de former des étoiles moins massives. Lors de l'effondrement du nuage moléculaire, la fragmentation du nuage sous l'effet de la gravité (Beuther et al., 2019) permet la création de plusieurs étoiles de moindre masse, là où seulement quelques étoiles massives auraient pu naître. La rotation, le champ magnétique et la turbulence dans le nuage peuvent limiter cette fragmentation (Li et al., 2017a,b). De plus, plus le nuage est riche en atomes lourds, plus le refroidissement est favorisé, ce qui augmente la probabilité de fragmentation (Hocuk and Spaans, 2010). Au fur et à mesure de l'enrichissement d'une galaxie en éléments lourds, la formation d'étoiles très massives au sein de cette galaxie diminue. En 1955, Salpeter établit une loi empirique de distribution des masses pour les étoiles plus massives que le soleil. Il obtient :

$$\xi(M) \propto M^{-2.35} \quad (1.1)$$

avec $\xi(M)$ le nombre d'étoiles de masse M . Cette loi indique qu'un faible nombre d'étoiles massives ($M \gtrsim 8 M_{\odot}$, avec M_{\odot} la masse du soleil) est effectivement cohérent avec un grand nombre d'étoiles de masses proches de la masse solaire, résultat suggéré par l'étude de la fragmentation des nuages moléculaires.

Lorsqu'elle naît, une étoile est majoritairement composée d'hydrogène. La fusion de quatre atomes d'hydrogène donne un atome d'hélium dont la masse est inférieure à la masse totale des quatre atomes d'hydrogène initiaux. Ce défaut de masse Δm correspond à l'énergie ΔE libérée par la réaction de fusion via la relation :

$$\Delta E = \Delta m c^2, \quad (1.2)$$

où c est la célérité de la lumière dans le vide. La fusion de l'hydrogène permet de libérer de l'énergie, il s'agit d'une réaction exothermique. La fusion au cœur de l'étoile constitue donc une source d'énergie permettant aux forces de pression de compenser la gravité de l'étoile. Sans cette source d'énergie, l'étoile s'effondrerait sous l'effet de sa propre masse.

Pendant plusieurs milliards d'années, l'étoile va consommer son réservoir d'hydrogène, de façon plus ou moins rapide suivant sa masse. En effet, bien que les étoiles massives possèdent un réservoir d'hydrogène plus grand, les conditions de pression et de température dans leur cœur leur imposent de consommer cet hydrogène bien plus rapidement. Ainsi, les étoiles massives consomment leur hydrogène en quelques dizaines de millions d'années, soit 1000 fois plus rapidement qu'une étoile de type solaire. Lorsqu'une étoile consomme l'hydrogène central, on dit qu'elle se trouve sur la séquence principale.

Lorsque l'hydrogène au cœur de l'étoile est épuisé, l'étoile quitte la séquence principale pour suivre la branche des sous-géantes puis des géantes ou supergéantes suivant sa masse. Le réservoir central d'hydrogène s'épuisant, les réactions de fusion sont moins importantes et l'énergie libérée par ces dernières n'est plus suffisante pour que les forces de pression contrebalancent la gravité au cœur de l'étoile. Ce dernier va donc se contracter, ce qui va augmenter sa température et pression jusqu'à atteindre la température de $\sim 10^8$ K nécessaire pour commencer la fusion de l'hélium en carbone et oxygène. Lorsque ces nouvelles réactions de fusion commencent, une nouvelle source d'énergie est disponible pour que les forces de pression contrebalancent la

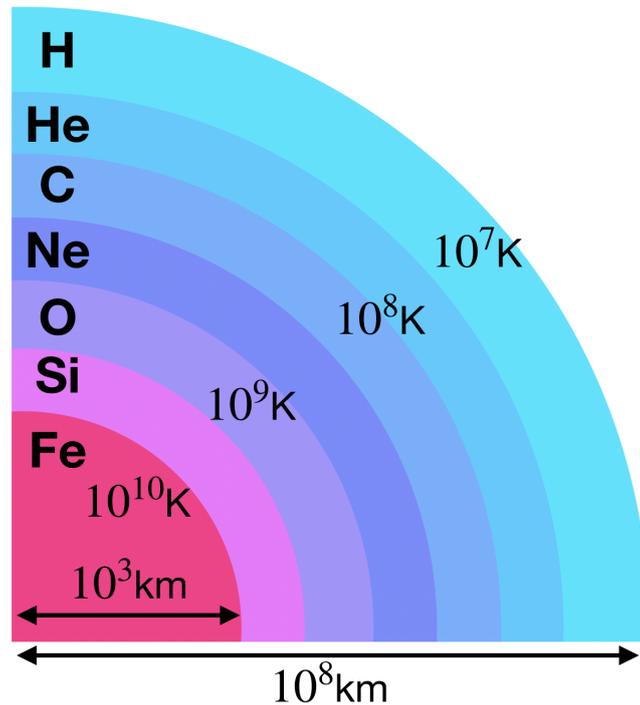


Figure 1.2 – Structure d'une étoile de $15 M_{\odot}$ à la fin de sa vie, avant l'effondrement de son cœur. Les tailles relatives des couches ne sont pas à l'échelle.

gravité et le cœur cesse de se contracter. Cette fusion de l'hélium va durer quelques centaines de milliers d'années, soit dix fois moins longtemps que n'avait duré la fusion de l'hydrogène.

Contrairement au cœur de l'étoile, l'enveloppe de l'étoile gonfle lorsque l'hydrogène s'épuise. C'est une réaction à l'augmentation de la température au cœur de l'étoile qui se contracte. L'enveloppe s'étant dilatée, son opacité diminue, menant à une augmentation de la luminosité de l'étoile tandis que les couches externes, qui se trouvent plus loin du cœur, se refroidissent. La conséquence de ce refroidissement est le rougissement de la surface de l'étoile, suivant la loi de rayonnement du corps noir. La température de surface diminue et la luminosité augmente donc l'étoile quitte la séquence principale et se déplace vers le coin supérieur droit du diagramme HR (Fig. 1.3). Deux exemples d'étoiles géantes sont Bételgeuse et Rigel, situées toutes deux dans la constellation d'Orion et observables en hiver dans l'hémisphère nord. L'étoile est donc maintenant composée d'une première enveloppe d'hydrogène, renfermant un cœur d'hélium dont la partie centrale est en train de se transformer en carbone et oxygène. Cela produit une structure en couches d'oignon (Fig. 1.2) des différents éléments dans l'étoile.

Le destin de l'étoile au-delà de la fusion de l'hélium dépend de sa masse. Plus l'étoile est massive, plus la température en son cœur augmente lors du processus de contraction et plus la fusion crée des éléments lourds.

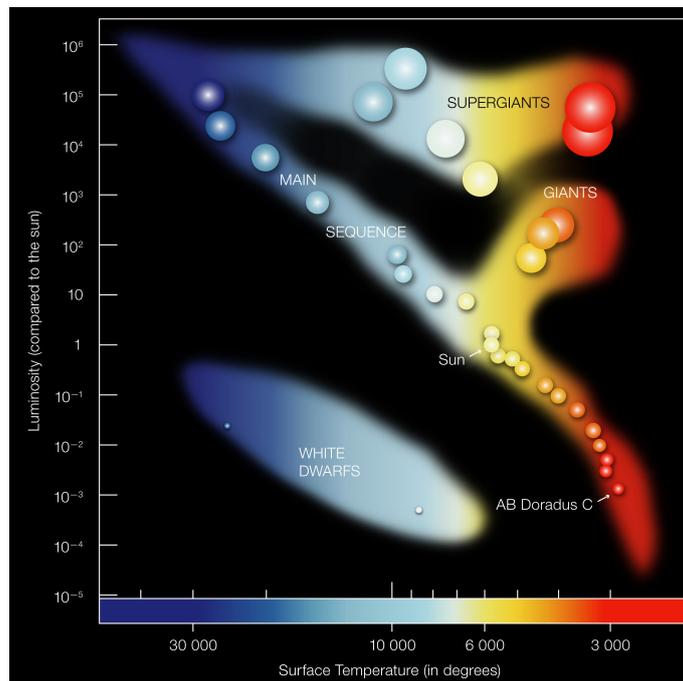


Figure 1.3 – Diagramme de Hertzsprung-Russel représentant les luminosités des étoiles en fonction de leur température. Au centre, la séquence principale et les branches des géantes qui en partent. En bas à gauche, les naines blanches et en haut à droite les géantes rouges. Les étoiles les plus bleues sont les plus chaudes. Crédit : ESO

I.1.2 Mort d'une étoile et naissance d'un objet compact

Les supernovæ correspondent à la fin de vie explosive de certaines étoiles. Ces dernières deviennent alors brusquement extrêmement lumineuses. Leur luminosité est alors comparable à celle de leur galaxie hôte toute entière. Cependant, toutes les supernovæ ne sont pas dues aux mêmes processus physiques et leur luminosité peut varier selon le processus en jeu. Nous allons évoquer ici les différents processus responsables de l'explosion d'une étoile. La classification exposée ici est différente de celle historique, basée sur les observations des spectres et courbes de lumière des explosions. Ici, nous présentons une classification basée sur des processus physiques qui dépendent de la masse initiale de l'étoile considérée.

À la fin de leur vie, les étoiles donnent naissance à des objets compacts. Cette appellation est basée sur la compacité Ξ de leur structure radiale, définie comme

$$\Xi = \frac{GM}{Rc^2}, \quad (1.3)$$

avec G la constante universelle de gravitation, M la masse et R le rayon de l'objet. Si cette compacité excède $\sim 10^{-4}$, alors l'objet est dit compact. C'est le cas des naines blanches, étoiles à neutrons et trous noirs que nous allons considérer dans cette section.

I.1.2.a Destin des étoiles de masse faible à intermédiaire ($\lesssim 8 M_{\odot}$)

Dans cette partie, nous allons considérer des étoiles de masses faible et intermédiaire. Sur la séquence principale, ces étoiles ont des températures de surface inférieures à $2 \cdot 10^4$ K et se trouvent donc dans la partie droite du diagramme HR (Fig. 1.3). Elles représentent plus de 98% des étoiles.

Les nébuleuses planétaires et leurs naines blanches

Pour les étoiles isolées de moins de $8 M_{\odot}$, la fin de vie est paisible. Si l'étoile est de type solaire (proche du soleil dans le diagramme HR), les réactions de fusion cessent après la création du carbone et de l'oxygène, car la masse est trop faible et le cœur, en se contractant, ne parvient pas à atteindre la température seuil d'ignition de la fusion du carbone. En effet, la contraction est stoppée par la pression de dégénérescence des électrons avant que la température de $\sim 10^9$ K soit atteinte. Les couches externes de l'enveloppe se trouvant loin du cœur se verront alors expulsées pour former une nébuleuse planétaire, comme on peut voir sur la Fig. 1.4. À la fin de la vie de l'étoile, il ne restera donc plus que son noyau contracté et inerte, appelé naine blanche, mis à nu par l'éjection des couches supérieures de l'étoile. Les naines blanches sont les corps les moins compacts ($\Xi \sim 10^{-3}$) de la famille des objets compacts. En moyenne, les naines blanches ont une masse proche de $0.6 M_{\odot}$, pour un rayon comparable au rayon terrestre, soit 10^4 km. Leur dénomination de naine blanche vient de leur petite taille et leur température élevée ($\sim 10^5$ K). Si cette naine blanche est solitaire, elle va poursuivre sa vie en se refroidissant petit à petit par rayonnement, sur des échelles de temps de l'ordre de l'âge de l'univers. Ces étoiles se trouvent dans la zone de faible luminosité/forte température du diagramme HR (Fig. 1.3).

Pour toutes les étoiles de masse faible à intermédiaire ($M \lesssim 8 M_{\odot}$), la mort de l'étoile conduit à la création d'une naine blanche et d'une nébuleuse planétaire. Cependant, suivant la masse de l'étoile progénitrice, la composition de la naine blanche peut varier. Les étoiles de plus faible masse ($M \in [0.1, 0.8] M_{\odot}$) produiront des naines blanches d'hélium. Les étoiles de



Figure 1.4 – Nébuleuse planétaire de l'œil de chat et son étoile en fin de vie. En bleu le signal X et en orange et violet le signal optique. Crédit : X : NASA/CXC/SAO ; Optique : NASA/STScI

masse similaire à celle du soleil vont produire une naine blanche de carbone/oxygène. Plus la masse est élevée, plus les réactions de fusion vont synthétiser des éléments lourds et des naines blanches de néon (Ne)/magnésium (Mg) seront formées. La durée de vie de ces étoiles est cependant supérieure à l'âge de l'univers, nous ne pouvons donc pas encore observer leur mort et la naine blanche qui en résulte.

Novæ et supernovæ thermonucléaires

Si la naine blanche possède une étoile compagnon suffisamment proche, un transfert de matière peut avoir lieu entre l'étoile compagnon et la naine blanche. L'accrétion de matière à la surface de la naine blanche peut déclencher de brèves réactions thermonucléaires, augmentant sa luminosité et rendant l'étoile visible temporairement dans le ciel. Depuis la Terre, on a l'impression qu'une nouvelle étoile est apparue et ce phénomène est donc appelé *nova*. Cela peut se produire plusieurs fois au cours de la vie de la naine blanche, ce qui peut être à l'origine du phénomène désigné sous le nom de « *nova récurrente* ».

En revanche, si l'accrétion de matière issue de l'étoile compagnon se poursuit, alors la masse de la naine blanche augmente jusqu'à atteindre la masse critique de Chandrasekhar $1.45 M_{\odot}$. Cette masse correspond à la masse limite que la pression de dégénérescence des électrons relativistes peut supporter et s'exprime comme

$$M_{\text{Ch}} = 1.45 M_{\odot} \left(\frac{Y_e}{0.5} \right)^2, \quad (1.4)$$

avec Y_e la fraction électronique proche de 0.5 pour une naine blanche. Au-delà de cette masse

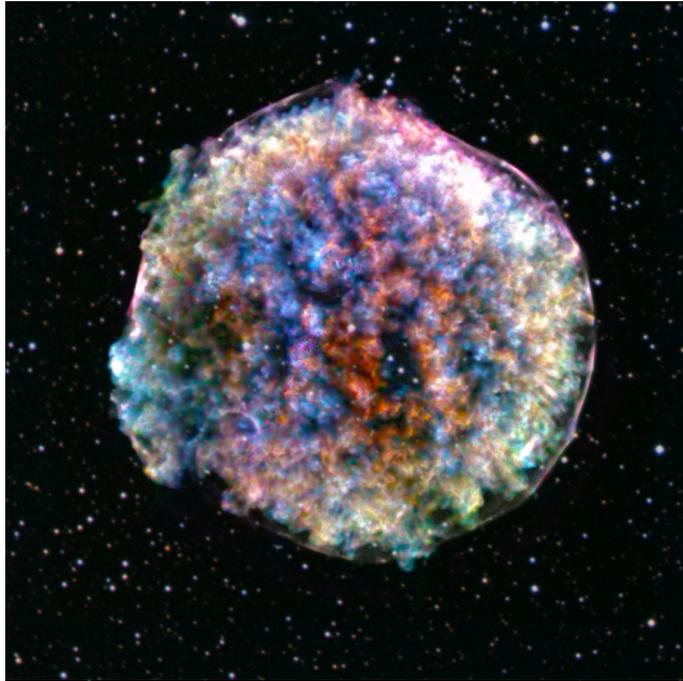


Figure I.5 – Observation par Chandra du reste de la supernova de Tycho (type Ia), situé à ~ 2.8 kpc de la Terre. Crédit : X : NASA/CXC/SAO ; Optique : DSS

critique, l'étoile n'est plus stable, les réactions thermonucléaires s'emballent et la naine blanche explose totalement pour créer une supernova de type Ia, aussi appelée supernova thermonucléaire (Fig. I.5). Cette explosion ne laisse rien d'autre derrière elle que les restes dispersés de la naine blanche.

I.1.2.b Les supernovæ gravitationnelles

Pour les étoiles de masse supérieure à $8-10 M_{\odot}$, le destin est tout autre et l'explosion de l'étoile est appelée *supernova gravitationnelle* ou *supernova à effondrement de cœur*. Pour les étoiles massives, les réactions de fusion ne s'arrêtent pas lorsque le réservoir d'hélium central s'épuise. Pour la plupart des étoiles massives, la succession de phénomènes de contraction du cœur et d'ignition d'une nouvelle fusion continue jusqu'à ce que le produit de fusion soit le silicium (Si) ou le fer (Fe). Ainsi, la structure en couches d'oignon de l'étoile s'est enrichie. Il y a toujours une couche externe d'hydrogène sur une couche d'hélium et ainsi de suite jusqu'à la partie la plus centrale de l'étoile composée du dernier produit de fusion (Fig. I.2). L'évolution dynamique de cette structure dépend de la masse de l'étoile. Hormis le cas des étoiles extrêmement massives, les explosions observées sont liées à l'arrivée en surface d'une onde de choc créée au cœur de l'étoile. Les masses définissant les seuils de transition d'un processus à un autre sont indicatives et peuvent varier selon la rotation et la composition chimique des étoiles. Les supernovæ gravitationnelles peuvent donner naissance à deux types d'objets compacts. Le premier, formé pour les étoiles les moins massives parmi les étoiles massives, correspond aux étoiles à neutrons. Leur compacité vaut $\Xi \sim 0.2$ et leur autogravité est compensée par

l'interaction forte. Le second type d'objet pouvant être formé par une supernova gravitationnelle est un trou noir. Les trous noirs sont les objets les plus compacts ($\Xi = 0.5$ à 1 selon leur rotation). Toutes les particules s'en approchant d'un peu trop près sont absorbées. Plus le trou noir est massif, plus ce rayon d'absorption, appelé *rayon de Schwarzschild* ou *horizon du trou noir*, augmente. Dans ce cas, il n'y a pas de force permettant de compenser l'autogravité.

Les supernovæ par capture électronique

Les étoiles les plus légères parmi les étoiles massives (8 à $10 M_{\odot}$) produisent les *supernovæ par capture électronique* (Hiramatsu et al., 2021). Pour ces étoiles, les réactions de fusion s'arrêtent à la fusion de l'oxygène. Lorsque ces réactions cessent, le cœur se contracte et la pression de dégénérescence des électrons devient la force permettant de contrebalancer la gravité. Les noyaux de néon et magnésium au cœur de l'étoile vont capter des électrons (Hillebrandt et al., 1984). L'absorption de ces électrons crée une diminution de la pression de dégénérescence des électrons et donc un déséquilibre des forces permettant l'effondrement de l'étoile suivie de son explosion.

Les supernovæ classiques

Pour les étoiles de 10 à $60 M_{\odot}$, les réactions de fusion cessent après la création d'un cœur de fer, diminuant la pression radiative. Le cœur de fer va donc s'effondrer sur lui-même et donner naissance à une protoétoile à neutrons. Les couches extérieures de l'étoile vont être éjectées, laissant seul l'objet compact central, en rotation rapide ($P \sim 1$ s vs. $P \sim 30$ jours pour Rigel). D'autre part, une asymétrie dans l'éjection de la matière peut donner une impulsion à la protoétoile à neutrons, faisant qu'elle ne se trouve pas à l'emplacement exact de la supergéante progénitrice (Fig. 1.11). Les processus de formation de cet objet compact et d'explosion de l'étoile sont détaillés plus tard (Sect. 1.1.3). Ces explosions représentent plus de 99% des supernovæ gravitationnelles. C'est dans le cadre de l'étude de ces événements que s'inscrit cette thèse.

Les supernovæ par production de paires

Les étoiles de masse comprise entre $60-80 M_{\odot}$ et $140 M_{\odot}$ produisent, en théorie, des *supernovæ à instabilité pulsationnelle de paires* (PPISN, pour *pulsational pair-instability supernovæ*). La borne inférieure peut varier selon la métallicité et la rotation considérées. Plus la métallicité augmente, plus l'étoile perd de la masse par son vent stellaire et moins son cœur d'hélium est massif. En effet, afin que l'instabilité se développe, il faut créer un cœur d'hélium de 30 à $65 M_{\odot}$. Dans ces étoiles, les rayons gammas (γ) sont suffisamment énergétiques pour produire des paires électrons/positrons par la réaction $\gamma \rightarrow e^{-} + e^{+}$. Ces créations de paires diminuent la pression radiative, créant un déséquilibre de pressions. Cela mène à un effondrement partiel et à l'ignition brusque de fusion de l'oxygène (ou du silicium) avant d'atteindre un nouvel équilibre. Ces phénomènes peuvent se répéter plusieurs fois jusqu'à la création d'un cœur de fer. Le phénomène d'effondrement gravitationnel qui suit est similaire à celui des étoiles de plus faible masse et conduit à la formation d'un objet compact : une étoile à neutrons ou un trou noir. Les trous noirs les plus massifs pouvant être formés par ce processus possèdent des masses de l'ordre de $\sim 50 M_{\odot}$ (Woo; Rahman et al., 2022).

Les étoiles plus massives que $140 M_{\odot}$ jusqu'à $\sim 300 M_{\odot}$ produisent, en principe, des su-

pernovæ par production de paires (PPSN ou PISN pour *pair-instability supernova*). Pour ces étoiles, la masse du cœur d'hélium dépasse $65 M_{\odot}$. Comme dans le cas précédent, il y a aussi des créations de paires électron/positron, mais la fusion brutale de l'oxygène est suffisamment énergétique pour détruire l'étoile, ne laissant pas d'objet compact derrière elle. Ainsi, il y a un fossé dans la distribution de masses des trous noirs entre 50 et $150 M_{\odot}$, zone d'explosion de ces étoiles (Heger and Woosley, 2002). Cela est cohérent avec les observations de fusions de trous noirs stellaires effectuées par la collaboration d'observatoires d'ondes gravitationnelles LIGO-Virgo-KAGRA (Fig. I.6). Bien que les observations montrent que certains trous noirs impliqués dans les fusions possèdent des masses entre 50 et $150 M_{\odot}$, ces derniers représentent seulement $\sim 10\%$ des observations et peuvent être issus de précédentes fusions de trous noirs moins massifs.

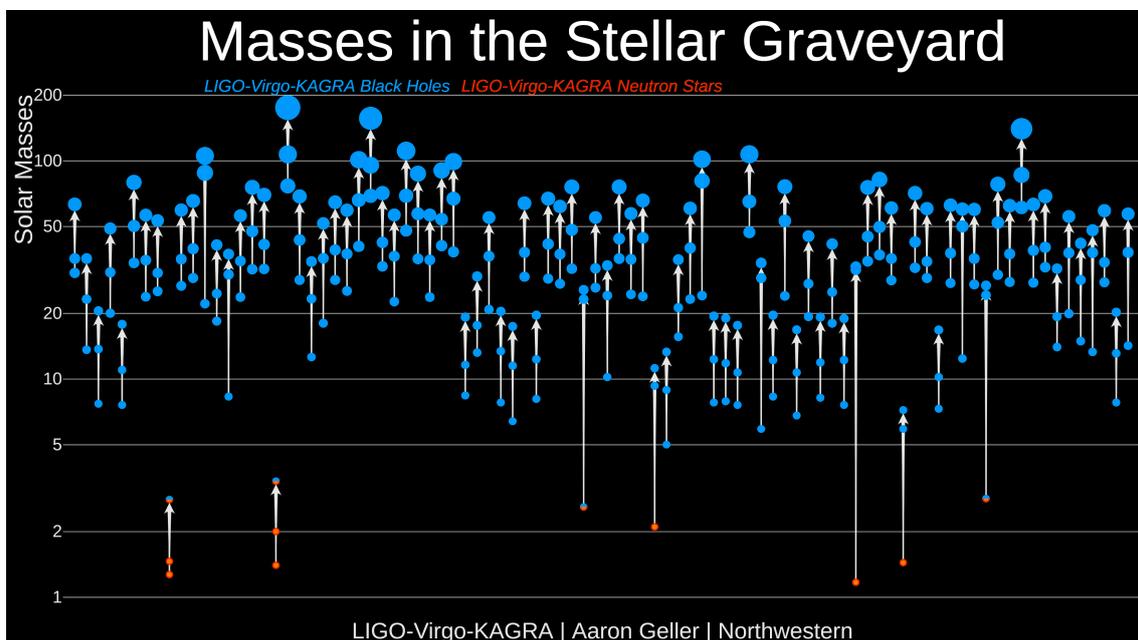


Figure I.6 – Masses des objets compacts impliqués dans des fusions et du reste de leur fusion. La majorité des trous noirs impliqués dans une fusion se trouvent sous la barre des $\sim 50 M_{\odot}$.

Pour les étoiles encore plus massives, un trou noir est formé lors de l'effondrement gravitationnel. Dans ce cas, l'effondrement n'est pas suivi d'une explosion.

Les deux processus d'explosion par production de paires pourraient expliquer certaines des supernovæ superlumineuses (SLSN). Ce type de supernova correspond aux événements les plus lumineux (Fig. I.7). Ces explosions sont aussi très rares et représentent seulement 0.1% des supernovæ observées. Dans le cas d'une SLSN due à une PPISN, la luminosité accrue vient d'un milieu circumstellaire enrichi par l'éjection des couches superficielles de l'étoile. Un exemple de ce type est la SLSN PTF12dam (Tolstov et al., 2017) dont le spectre est cohérent avec le spectre attendu d'une PPISN. Dans le cas d'une PISN, la luminosité accrue vient plutôt de la quantité de nickel radioactif ^{56}Ni produit lors de l'explosion (plusieurs masses solaires, Kozyreva et al., 2014).

Cependant, si on prend en compte le champ magnétique, les SNSL peuvent aussi être expliquées par la présence d'un magnétar comme moteur central de l'explosion, permettant d'extraire efficacement de l'énergie de la rotation (Dessart et al., 2012; Nicholl et al., 2013). Des taux de rotation élevés sont nécessaires pour produire ces SLSN par l'action d'un magnétar au cœur de l'explosion. Seules les rotations les plus rapides peuvent être à l'origine de la création de cet objet.

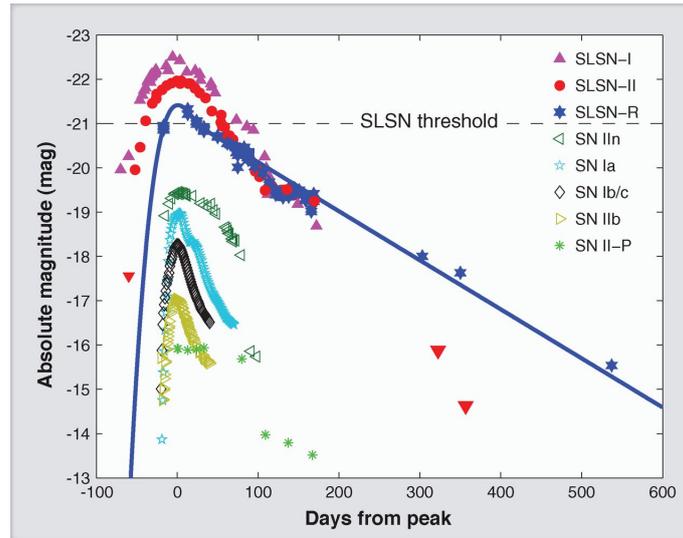


Figure 1.7 – Courbes de lumière de divers types de supernovæ. Les supernovæ superlumineuses ont un pic de luminosité ~ 100 fois plus élevé que les autres. Crédit : Gal-Yam (2012)

La physique menant à l'explosion de l'étoile est ainsi très variée. Cependant, pour qu'une étoile à neutrons se forme, il faut que le phénomène menant à l'explosion se produise sur une échelle de temps suffisamment courte. En effet, si le phénomène est trop lent, l'accrétion de matière sur l'objet central va faire augmenter sa masse et franchir le seuil de formation d'un trou noir. Il se peut qu'une étoile à neutrons transitoire soit formée avant que n'apparaisse le trou noir (Rahman et al., 2022).

1.1.3 Scénario actuel de formation des supernovæ gravitationnelles par effondrement du cœur de fer

Les supernovæ gravitationnelles classiques concernent les étoiles massives entre $10 M_{\odot}$ et $60 M_{\odot}$. Comme évoqué précédemment, le premier indice que les supernovæ gravitationnelles sont liées aux étoiles massives vient des caractéristiques de leur galaxie hôte. Ces explosions ne sont observées que dans les jeunes galaxies, formant encore des étoiles. Les galaxies vieilles, elliptiques ou lenticulaires, ne présentent pas de supernovæ gravitationnelles, uniquement des supernovæ thermonucléaires. Ainsi, le phénomène de supernova gravitationnelle est associé à la mort des étoiles massives qui ont une durée de vie plus courte et donc meurent plus tôt dans l'histoire de leur galaxie hôte, quand cette dernière est encore jeune et active.

La dernière réaction de fusion dans le cœur de l'étoile est la fusion du silicium en fer. À partir du fer, la fusion n'est plus possible car la masse par nucléon croît du fer à l'uranium et

du fer à l'hydrogène. En effet, le fer possède la plus faible masse par nucléon. Pour les réactions de fusion précédant le fer, la fusion libère de l'énergie car la masse des réactifs est supérieure à la masse des produits. Pour les noyaux plus lourds que le fer, c'est la fission qui est plus avantageuse énergétiquement.

En un jour, le réservoir de silicium dans le cœur interne est épuisé. Ce dernier n'est plus composé que de fer et ne libère plus d'énergie. Le cœur de l'étoile commence à se contracter jusqu'à ce que la pression de dégénérescence des électrons contrebalance la gravité. La contraction est alors stoppée pour quelques instants. Le milieu étant dégénéré, les niveaux d'énergie des électrons sont remplis jusqu'au niveau de Fermi¹. Ainsi, par principe d'exclusion de Pauli², la création de nouveaux électrons est coûteuse en énergie car cela nécessite de produire des électrons d'énergie de plus en plus importante, au-delà du niveau de Fermi. La réaction de désintégration β inverse ou capture électronique



est donc favorisée face à la réaction β



Dans ces deux réactions, les termes ν_e et $\bar{\nu}_e$ désignent des neutrinos et antineutrinos électroniques, des particules de très faible masse interagissant peu avec la matière et se déplaçant à une vitesse proche de la vitesse de la lumière. Le milieu s'enrichit donc en neutrons par capture électronique, diminuant la fraction électronique Y_e dans le cœur. Cela mène à la diminution de la masse limite de Chandrasekhar (Eq. 1.4) jusqu'à ce que la pression de dégénérescence des électrons ne soit plus suffisante pour contrebalancer la gravité et que la contraction du cœur reprenne.

Lorsque ce cœur se contracte, il atteint des densités et des températures extrêmes de l'ordre de $10^{14} \text{ g.cm}^{-3}$ et 10^{11} K qui ne permettent plus d'assurer l'intégrité des noyaux. La pression exercée sur ces derniers est trop forte, ils sont donc désintégrés pour donner naissance à un mélange de nucléons. La densité peut donc continuer à augmenter. Lorsque les densités au cœur de l'étoile atteignent la densité nucléaire, l'équation d'état se raidit brusquement. L'indice adiabatique γ de la matière passe de $4/3$ (gaz dégénéré relativiste) à $\gamma \sim 2.5$ (Bethe et al., 1979). L'interaction forte va alors devenir fortement répulsive. Le cœur cesse alors de se contracter et une protoétoile à neutrons (PNS) de rayon $R_{\text{PNS}} \sim 50 \text{ km}$ se forme. Depuis l'apparition du cœur de fer jusqu'à la création d'une protoétoile à neutrons, il ne s'est écoulé que quelques centièmes de seconde. À ce stade, l'explosion associée aux supernovæ n'est pas encore visible.

Pour comprendre d'où vient l'explosion, il faut considérer les transferts d'énergie au cœur de l'étoile. L'énergie potentielle libérée ΔE_p par l'effondrement d'un cœur interne de fer de

1. Le niveau de Fermi correspond au niveau d'énergie maximal occupé par des fermions à 0 K. En pratique, cela reste valable pour les températures inférieures à la température de Fermi T_F des électrons. Cela est vérifié lorsque la pression de dégénérescence des électrons stoppe la contraction ($T_F \sim 7 \times 10^9 \text{ K}$ vs. $T_{\text{cœur}} \sim 3 \times 10^9 \text{ K}$)

2. Principe d'exclusion de Pauli : Dans un gaz de fermions dégénérés, deux fermions ne peuvent pas occuper le même état quantique d'énergie.

masse $M_{\text{Fe}} = 1.4 M_{\odot}$ passant d'un rayon de $R_{\text{Fe}} = 1\,500$ km à $R_{\text{PNS}} = 50$ km est de

$$\Delta E_p \sim GM_{\text{Fe}}^2 \times \left(\frac{1}{R_{\text{PNS}}} - \frac{1}{R_{\text{Fe}}} \right) \sim 10^{53} \text{ erg.} \quad (1.7)$$

Cette énergie va être transmise au cœur externe, lorsque la force nucléaire entre nucléons parvient à contrebalancer la gravité, par la création d'une onde de choc se propageant vers l'extérieur de l'étoile. Cependant, cette énergie gagnée par l'effondrement et le rebond sur le cœur interne n'est pas suffisante pour que le choc atteigne la surface de l'étoile et crée une explosion. En effet, toute l'énergie potentielle n'est pas transformée en énergie cinétique vers l'extérieur de l'étoile. Une grande partie de l'énergie est perdue via l'émission de neutrinos. Une autre part de l'énergie est perdue par la matière lors de son passage à travers le choc. En effet, le choc provoque la photodissociation des noyaux de fer présents dans le cœur via les réactions :



Cela crée une perte de 8.8 MeV par nucléon de fer (soit 1.7×10^{52} erg. M_{\odot}^{-1}) traversant le choc. Cette perte est à comparer à l'énergie potentielle convertie en énergie cinétique lors l'effondrement jusqu'au rayon du choc

$$\frac{\Delta E_k}{M_{\odot}} = 2.5 \times 10^{52} \text{ erg.}M_{\odot}^{-1} \left(\frac{M}{1.4 M_{\odot}} \right) \left(\frac{R_{\text{sh}}}{150 \text{ km}} \right)^{-1}. \quad (1.10)$$

La dissociation consomme donc près de 68% de l'énergie fournie par la contraction du cœur de l'étoile au niveau du choc à 150 km. Cette valeur sera commentée au Chap. IV. La dissociation et la fuite des neutrinos ralentissent la progression du choc qui devient stationnaire à une centaine de kilomètres de la surface de l'étoile à neutrons. Pour pouvoir obtenir les explosions observées, il faut pouvoir relancer ce choc jusqu'à la surface de l'étoile se trouvant à plusieurs millions de kilomètres de la surface de l'étoile à neutrons.

Cette relance du choc est possible si une fraction suffisante de neutrinos est absorbée par la matière au-dessus de la PNS (Colgate and White, 1966; Bethe and Wilson, 1985). Il faut de très grandes densités pour qu'un milieu soit opaque aux neutrinos. C'est le cas de la PNS, dont les neutrinos sont piégés à l'intérieur d'une *neutrinosphère*. Il s'agit d'une sphère dans laquelle le libre parcours moyen des neutrinos est faible (<50 km). Ce terme est analogue à la photosphère des étoiles pour les photons. Le rayon de cette sphère est proche du rayon de la PNS et dépend du type de neutrino considéré. À la surface de cette sphère, les neutrinos s'échappent de la PNS et permettent son refroidissement. Certains de ces neutrinos (~ 4% - 10%, Burrows et al., 2012) sont absorbés par la matière se trouvant entre le choc et la surface de l'étoile à neutrons. Cela va chauffer la matière et créer une zone appelée *région de gain* où le chauffage par absorption des neutrinos est supérieur au refroidissement par émission de ces derniers. Cette région se trouve juste sous le choc et s'étend jusqu'au *rayon de gain*, en dessous duquel le refroidissement domine le chauffage. La première idée de mécanisme d'explosion proposait que le chauffage effectif de la matière dans la région de gain permette d'augmenter le rayon du choc jusqu'à atteindre la surface de l'étoile. En suivant cette logique, Burrows and

Goshy (1993) ont proposé un critère pour l'explosion basé uniquement sur la compétition entre la luminosité des neutrinos (le terme « luminosité des neutrinos » désigne ici et dans la suite de ce manuscrit le flux d'énergie transporté par les neutrinos) et le taux d'accrétion à travers le choc. Ils proposent que pour chaque taux d'accrétion \dot{M} , il existe une luminosité critique $\mathcal{L}_{\nu_e, crit}$ au-delà de laquelle le chauffage par les neutrinos est suffisant pour déclencher une explosion. De façon réciproque, pour chaque valeur de luminosité des neutrinos \mathcal{L}_{ν_e} , ils définissent un taux d'accrétion critique \dot{M}_{crit} au-delà duquel il ne peut y avoir d'explosion :

$$\dot{M}_{crit} \sim 1.1 M_{\odot} \cdot s^{-1} \left(\frac{\mathcal{L}_{\nu_e}}{5 \times 10^{52} \text{erg} \cdot s^{-1}} \right)^{2.3}. \quad (I.11)$$

La luminosité des neutrinos dépend de la température à la surface de la neutrinosphère. En particulier, un rayon de neutrinosphère plus faible permet une émission de neutrinos plus énergétiques. Ainsi, la rotation rendant la PNS oblate, il y a une diminution de l'énergie des neutrinos dans le plan équatorial, pouvant avoir des répercussions sur la forme de l'éjecta final. Bien que la luminosité des neutrinos et le taux d'accrétion jouent un rôle clé afin de raviver le choc (Ertl et al., 2016; Suwa et al., 2016), d'autres ingrédients physiques doivent être pris en compte afin d'obtenir une explosion. En effet, parmi les simulations 1D, pour lesquelles ce critère devrait être vérifié, seules les étoiles les moins massives parviennent à une explosion. Cependant, les simulations 2D, permettant les mouvements non radiaux et ainsi le développement d'instabilités non radiales, obtiennent des explosions plus facilement qu'en 1D. En particulier, le critère de luminosité se trouve diminué en 2D par rapport au cas 1D (Murphy and Burrows, 2008). Le consensus actuel prévoit que les instabilités hydrodynamiques se développant dans la région choquée et dans la PNS vont pouvoir permettre une meilleure absorption des neutrinos et ainsi permettre la relance du choc avant que l'accrétion ne devienne trop forte. Ces instabilités vont ainsi modifier le critère basé sur l'état stationnaire. En prenant en compte l'importance des instabilités, beaucoup d'études ont suivi afin de déterminer l'origine de la reprise de progression du choc à partir de divers critères comme le rapport entre le temps d'advection de la matière à travers la zone choquée τ_{adv} , le temps de chauffage τ_{ht} et le temps de développement de l'instabilité convective τ_{cv} (Janka, 2001; Thompson et al., 2005; Buras et al., 2006a; Murphy and Burrows, 2008; Gogilashvili and Murphy, 2022). Il est proposé que

- l'accrétion domine si $\tau_{adv} < \tau_{cv} < \tau_{ht}$,
- l'explosion se produise si $\tau_{cv} < \tau_{adv} \sim \tau_{ht}$ ou $\tau_{ht} < \tau_{cv} \sim \tau_{adv}$.

C'est dans le cadre de l'étude de ces instabilités hydrodynamiques, décrites en Sect. 1.3, que s'inscrit cette thèse. Par souci de simplification, les instabilités liées au champ magnétique ne seront pas abordées. En effet, il n'est pas certain que la dynamo, permettant de générer un champ magnétique fort, se développe suffisamment rapidement pour avoir une incidence sur les phénomènes que nous considérons. Cependant, l'influence d'un champ faible sur l'évolution de la supernova en rotation est encore peu explorée en 3D, et pourrait avoir un effet à prendre en compte dans l'évolution de la supernova.

En se propageant dans l'enveloppe de l'étoile, le choc va entraîner une nucléosynthèse explosive permettant de synthétiser des éléments au-delà du fer. Lorsque le choc atteint la surface de l'étoile (« *shock breakout* »), un signal lumineux est émis et l'étoile explose en supernovæ. Contrairement au cas des supernovæ de type Ia, ce sont uniquement les couches externes qui

explosent. Ces dernières laissent derrière elles une étoile à neutrons. Cette étoile à neutrons va alors se refroidir, son diamètre sera d'une douzaine de kilomètres seulement pour quelques 10^{30} kilogrammes ($\sim 1 - 2 M_{\odot}$). Ces deux paramètres font d'une étoile à neutrons un objet compact ($\Xi \sim 0.2$).

C'est seulement à partir de la sortie de l'onde de choc de l'étoile que l'on peut observer un signal électromagnétique associé à la supernova. Cependant, même après l'explosion, le cœur de la supernova n'est pas directement observable car le milieu est opaque à toutes les longueurs d'onde : c'est la phase *photosphérique*. Dans cette phase, le rayonnement de l'éjecta est semblable à l'émission d'un corps noir. Quelques mois plus tard, en se dispersant dans le milieu interstellaire, l'éjecta va se diluer et devenir transparent : c'est la phase *nébulaire*. À partir de ce moment seulement, les télescopes en ondes électromagnétiques peuvent acquérir des données sur le cœur de la supernova. Cependant, des données concernant l'éjecta peuvent être collectées dès la phase photosphérique. Les spectres vont fournir des informations sur la vitesse de l'éjecta ainsi que sa composition. Cette analyse permet de déterminer que les supernovæ sont responsables de l'enrichissement en éléments au-delà de l'hélium du milieu interstellaire. Cependant, les simulations hydrodynamiques de supernovæ classiques ont montré que les processus r étaient limités par l'abondance des protons dans ce type d'explosion (Janka et al., 2008; Roberts et al., 2010; Hudepohl et al., 2010). Ainsi, ces simulations ont permis d'établir qu'un phénomène supplémentaire était nécessaire pour expliquer la nucléosynthèse des éléments les plus lourds tels que l'or. Ce phénomène est la coalescence d'objets compacts, appelé *kilonova* (Goriely et al., 2011; Rosswog, 2019).

I.1.4 Influence de la rotation stellaire

Pour ces mêmes types étoiles, donnant naissance à une étoile à neutrons en absence de rotation, le scénario d'explosion peut être modifié par la prise en compte de la rotation de l'étoile. En effet, les forts taux de rotation pour des étoiles sont particulièrement pertinents pour les étoiles massives, à l'origine des supernovæ, car le catalogue des vitesses angulaires des étoiles (Glebocki and Gnacinski, 2005), montre que les rotations des surfaces les plus élevées ($\sim 100 - 200 \text{ km.s}^{-1}$) sont observées pour les étoiles les plus massives. Pour aller plus loin, des facteurs externes peuvent aussi avoir un impact sur la rotation d'une étoile massive. En effet, les étoiles massives ayant souvent un/des compagnon(s) (Sana et al., 2012), il serait intéressant de comprendre l'influence de la binarité sur les taux de rotation. En effet, un compagnon peut agir sur la rotation initiale de l'objet compact formé (Fuller and Lu, 2022). Cette binarité peut aussi agir, avant l'effondrement, sur la rotation du progéniteur et l'accélérer. de Mink et al. (2013) suggère que c'est le cas pour environ 20% des étoiles massives ayant un compagnon. Ce taux diminue lorsque la métallicité augmente.

Dans la classification des étoiles au chapitre précédent, nous avons évoqué les hypernovæ et certaines supernovæ superlumineuses, dont les caractéristiques proviennent probablement d'une forte rotation. Pour pouvoir étudier comment ces phénomènes se produisent, il faut avoir une connaissance précise de la rotation dans l'étoile. Cependant, bien que toutes les étoiles soient en rotation plus ou moins rapide ($P \sim 30$ ans pour la surface de Bételgeuse), seule leur rotation de surface est observée et la rotation dans leur cœur est encore peu contrainte. L'astérosismologie permet depuis peu des contraintes sur la rotation au cœur des étoiles de

masse intermédiaires (Cantiello et al., 2014; Ouazzani et al., 2019; Pedersen, 2022), mettant en évidence la sous-estimation du transport du moment angulaire par les modèles actuels (Beck et al., 2012; Mosser et al., 2012). La connaissance de ce transport de moment angulaire et son inclusion dans les modèles d'étoiles massives est nécessaire afin d'avoir des progéniteurs réalistes utilisés dans les simulations numériques.

Les premiers progéniteurs utilisés donnaient des taux de rotations rapides du cœur de l'étoile avec des moments cinétiques spécifiques de l'ordre de $10^{16} - 10^{17} \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ³ (Heger et al., 2000; Fryer and Heger, 2000; Fryer and Warren, 2004). Ces fortes rotations sont obtenues en négligeant le transport de moment cinétique dû au champ magnétique. Une révision de ces modèles a ensuite été effectuée afin de prendre en compte l'effet du champ magnétique (Spruit, 2002; Maeder and Meynet, 2004; Heger et al., 2005). Cela permet d'avoir des moments cinétiques plus faibles ($\sim 2.5 \times 10^{14} \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$). Les valeurs restent cependant élevées, menant à des pulsars dont les périodes de rotation P sont telles que $P < 15$ ms, pour des progéniteurs de masse supérieure à $12 M_{\odot}$. Cela semble être en désaccord avec les taux de rotation des pulsars à leur naissance (Popov and Turolla, 2012). Aucune donnée d'observation de la rotation du cœur des étoiles massives n'est disponible. Cependant, les travaux sur les étoiles de type solaire montrent que cette prise en compte du champ magnétique n'est pas suffisante pour expliquer les périodes élevées de rotation des étoiles (Cantiello et al., 2014). Des données supplémentaires concernant le taux de rotation des cœurs des étoiles massives sont nécessaires. L'astérosismologie ou l'étude des supernovæ peuvent être un moyen d'obtenir ces contraintes.

Les supernovæ représentent le lien entre rotation stellaire et rotation des objets compacts. Ainsi, par la connaissance de l'influence de la rotation sur les mécanismes au cœur des supernovæ, il est possible de faire un lien entre la rotation initiale des objets compacts et la rotation au cœur de l'étoile progénitrice. Néanmoins, si l'observation de quelques pulsars jeunes nous permet de remonter à leur taux de rotation lors de leur formation (Fig. 1.8, Popov and Turolla, 2012; Noutsos et al., 2013), cela n'est possible que pour un petit nombre d'objets (<100 actuellement). Ce faible nombre permet d'avoir des données moyennes sur le taux de rotation des cœurs des étoiles et indique que les pulsars occupent préférentiellement les faibles périodes de rotation ($P \sim 10$ -100 ms) à leur naissance. Cependant, cela ne suffit pas à déterminer un seuil de rotation maximale des étoiles à neutrons lors de leur création, ni de contraindre une éventuelle population en rotation rapide. Contrairement au cas des pulsars, cette étude n'est pas possible pour les magnétars dont le champ magnétique extrême crée un freinage trop rapide de leur rotation (Prasanna et al., 2022) alors que leur période de rotation initiale pourrait être inférieure à 2 s (Jawor and Tauris, 2022). Ainsi, bien que les périodes de rotation des magnétars observés soient élevées (en haut à droite dans la Fig. 3, Ng and Kaspi, 2011), cela n'implique pas forcément que leur taux de rotation initial était faible. En particulier, il est proposé que les magnétars formés lors d'une hypernova ou une SLSN soient en rotation rapide à leur création. Cependant, ce n'est pas le seul lieu de création des magnétars. En effet, ces derniers représentent 10% à 40% (Beniamini et al., 2019) des étoiles à neutrons alors que les hypernovæ ne représentent que quelques pourcents des explosions d'étoiles massives. D'autres explosions

3. Il est intéressant de noter que le moment cinétique spécifique Képlérien J d'un cœur de fer de masse $1.4 M_{\odot}$ et de rayon 1500 km est $J \simeq 1.6 \times 10^{17} \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

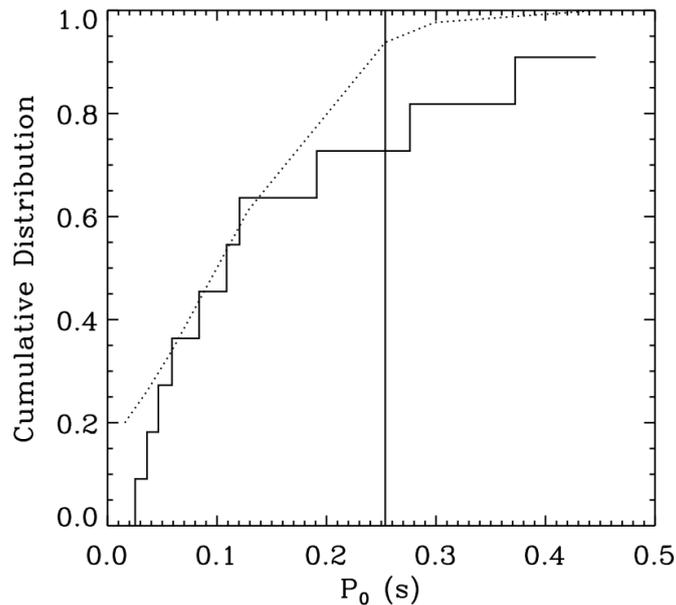


Figure 1.8 – Distribution des périodes de rotation des pulsars à leur création. Crédit : [Popov and Turolla \(2012\)](#)

d'étoiles, avec des rotations plus faibles que celles donnant lieu aux hypernovæ, doivent être prises en compte pour expliquer la population des magnétars.

En résumé, l'étude de la rotation dans une supernova comporte plusieurs enjeux. Elle peut permettre de mettre des contraintes sur les taux de rotation des cœurs stellaires ou des magnétars à leur création. Les rotations rapides pourraient expliquer la formation des magnétars pouvant donner lieu à des SLSN ou des hypernovæ. Il est également possible que des rotations intermédiaires aient une influence non-négligeable sur l'explosion dans une plus grande fraction de supernovæ. Il est donc pertinent d'étudier l'influence de rotations intermédiaires dans les phénomènes menant à une supernova.

1.1.5 Observations contemporaines

L'observation du pulsar dans la nébuleuse du Crabe en 1968 avait déjà confirmé la relation entre supernova gravitationnelle et création d'un objet compact. Cependant, avant 1987, la théorie physique de création de cet objet par contraction gravitationnelle et l'évacuation de l'énergie libérée via les neutrinos n'était pas encore confirmée par des observations ([Bethe and Wilson, 1985](#)).

En 1987, une géante bleue explose en supernova dans une galaxie satellite de la Voie Lactée : le Grand Nuage de Magellan. Bien que cette supernova ne soit pas galactique, elle est suffisamment proche de nous (~ 50 kpc) pour avoir permis des observations très détaillées. En particulier, un signal a été détecté par plusieurs observatoires de neutrinos. Au total, ce sont 24 neutrinos qui ont été détectés par trois observatoires différents. Trois heures après cette détection de neutrinos, un signal électromagnétique associé à une supernova a aussi été détecté. Ces deux détections associées confirment deux attentes du scénario d'effondrement

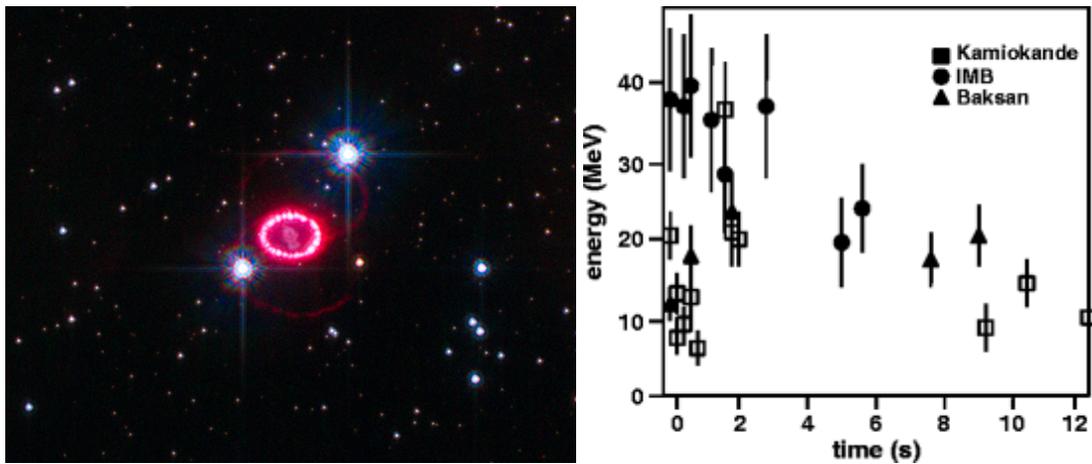


Figure 1.9 – Observation par le télescope spatial Hubble de SN1987A (gauche) et les neutrinos associés, détectés sur Terre (droite). Crédit : NASA, ESA (gauche) et [Suzuki and Koshiba \(2009\)](#) (droite)

gravitationnel des étoiles massives.

Dans un premier temps, le délai entre le signal en neutrinos et le signal en ondes électromagnétiques, pour une supergéante bleue ($R \sim 50 R_{\odot}$) avec un choc se propageant à $3\,000 \text{ km.s}^{-1}$ (vitesse typique de l'éjecta, [Kjær et al., 2010](#)), doit être de $\sim 3 \text{ h}10$. Un décalage de 3h est donc cohérent avec le scénario des neutrinos émis au cœur de la supernova et se propageant à une vitesse proche de la lumière, et d'un signal lumineux émis à la surface de l'étoile lorsque le choc arrive. Le décalage entre les deux signaux provenant du temps de propagation de l'onde de choc entre la surface de la PNS et la surface de l'étoile, cela confirme aussi l'évaluation de la position du choc stationnaire par rapport à la surface de l'étoile.

La deuxième attente confirmée par cette détection est de type énergétique. En effet, les détecteurs de neutrinos sont capables de déterminer l'énergie des neutrinos détectés. Pour le cas de SN1987A, l'énergie des neutrinos détectés valait $\sim 15 \text{ MeV}$ ($2.4 \times 10^{-5} \text{ erg}$). Connaissant la distance Terre-SN1987A ainsi que le taux de détection des appareils, on peut estimer le nombre de neutrinos émis et ainsi déduire l'énergie rayonnée par émission de neutrinos $E_{\nu} \sim 10^{53} \text{ erg}$. Cette valeur est proche des attentes concernant l'énergie gravitationnelle libérée par l'effondrement donnée en Eq. (1.7).

L'observation des éjectas peut aussi renseigner sur les processus physiques ayant conduit à l'explosion. En 1989, [Chevalier and Soker](#) propose une explosion asymétrique pour expliquer l'asymétrie de l'éjecta de SN1987A observée par [Jeffery \(1987\)](#) et [Papaliolios et al. \(1989\)](#). Cette première observation a motivé le développement de simulations multidimensionnelles pour rendre compte de ces asymétries. L'observation du reste de supernova CasA, à seulement $\sim 3.4 \text{ kpc}$, a montré que la répartition chimique des éléments n'était pas homogène, suggérant une explosion asymétrique ([Nagasaki et al., 1998](#)). En effet, des études ont montré, par des comparaisons entre des observations et des simulations, que la distribution asymétrique du titane ^{44}Ti ne pouvait pas être expliquée par une explosion symétrique, ni par une explosion bipolaire due à une forte rotation ([Grefenstette et al., 2014](#); [Wongwathanarat et al., 2017](#); [Jerkstrand](#)

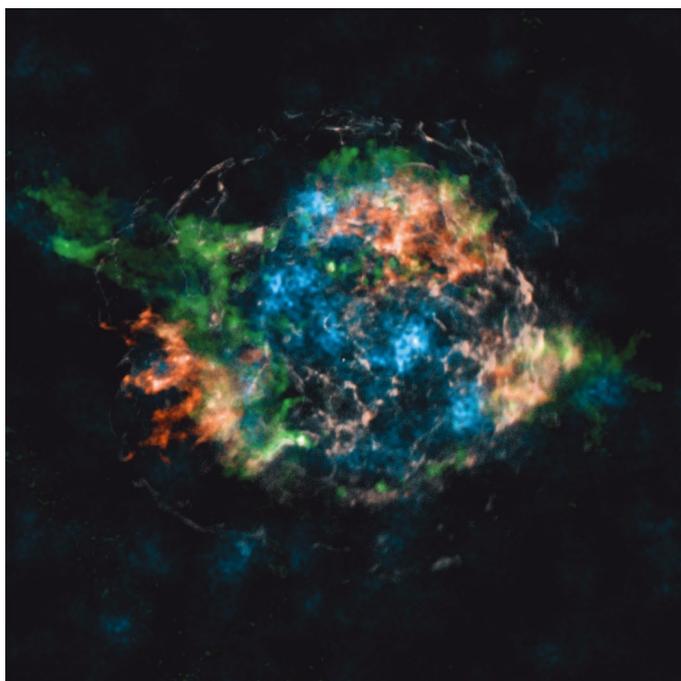


Figure 1.10 – Carte des espèces chimiques du reste de la supernova CasA. En rouge le fer, en vert le rapport silicium/magnésium et en bleu le titane. Crédit : [Grefenstette et al. \(2014\)](#)

[et al., 2020](#)). Cependant, des instabilités de grande échelle telles que la convection ou l'instabilité du choc d'accrétion stationnaire peuvent expliquer ces observations de répartition chimique dans l'éjecta de la supernova ([Nagataki et al., 1998](#); [Orlando et al., 2021](#)). Les simulations doivent être multidimensionnelles pour pouvoir observer ces instabilités brisant l'axisymétrie.

Un autre indicateur d'explosion asymétrique provient de l'étude de la position de l'étoile à neutrons. Plusieurs observations montrent des vitesses de déplacement élevées. Par exemple, la Fig. 1.11 montre une étoile à neutrons à grande vitesse en train de quitter son lieu de création. Le pulsar de la guitare, situé à seulement quelques kiloparsecs de la Terre, en est un autre exemple. Sa vitesse est de l'ordre de $1\,500\text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, ce qui est bien plus rapide que la vitesse de son étoile progénitrice, estimée à $85\text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ grâce à l'étude du groupe d'étoiles Cygnus OB3 ([Tetzlaff et al., 2010](#)) dont est probablement originaire le pulsar ([Tetzlaff et al., 2009](#)). Cette augmentation de la vitesse dans une direction privilégiée peut s'expliquer par une explosion asymétrique. Cette dernière pourrait être une explication aux grandes vitesses ($>100\text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$) de la plupart des étoiles à neutrons. En effet, si une direction est favorisée par l'explosion, l'étoile à neutrons peut être poussée dans la direction opposée à l'éjecta le plus rapide ou attirée dans la direction de l'éjecta le plus lent par effet gravitationnel ([Scheck et al., 2006](#); [Müller et al., 2017](#); [Janka, 2017](#); [Nakamura et al., 2019](#)). On parle alors du *kick* de l'étoile à neutrons. Les observations suggèrent que la direction de ce kick a tendance à être alignée avec l'axe de rotation de l'étoile à neutrons ([Wang et al., 2007](#)). Les modèles de création du kick sont donc mis au défi de rendre compte de cette corrélation.

Ces indices d'une asymétrie lors de l'explosion d'une supernova suggèrent que des ondes

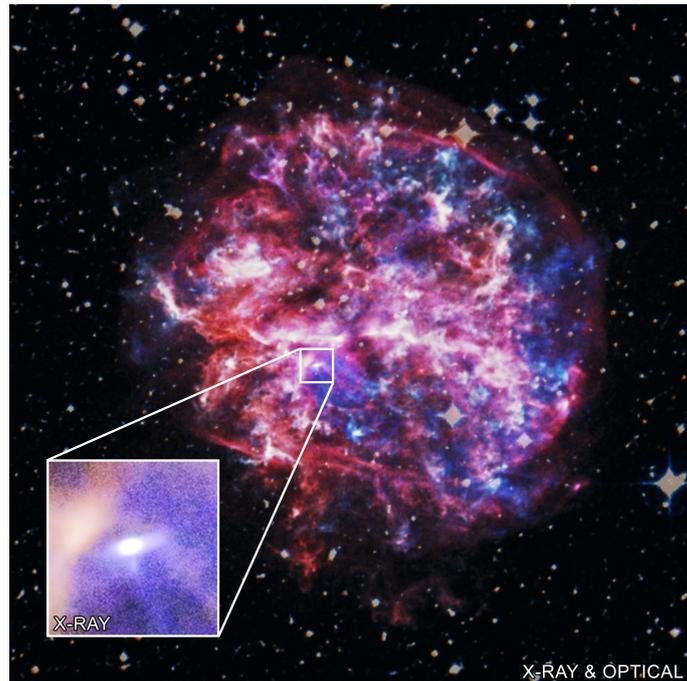


Figure I.11 – Observation par le télescope spatial Chandra du reste de supernova G292.0+1.8 et de son étoile à neutrons se déplaçant à plus de 10^5 m.s^{-1} . Crédit : X-ray : NASA/CXC/SAO ; Optique : DSS2

gravitationnelles sont créées. En effet, ces dernières sont émises lors d'une accélération d'une distribution asymétrique de matière. Pour pouvoir être observé par les détecteurs d'ondes gravitationnelles actuels, il faut que le signal lié à la supernova soit suffisamment fort dans la bande de fréquences $[10, 10^4]$ Hz. Ces fréquences peuvent être dues à la fréquence de rotation de l'objet et aux instabilités hydrodynamiques qui peuvent se développer lors de l'effondrement.

Des signatures des instabilités peuvent aussi être observées dans le signal en neutrinos. Suivant sa quantité et sa densité, la matière se trouvant au-dessus de la PNS peut moduler l'émission des neutrinos. Cette modulation dépend aussi des asymétries présentes au niveau de la surface de la neutrinosphère, d'où sont émis les neutrinos.

Ces deux signaux (ondes gravitationnelles et neutrinos) sont les vecteurs de l'information concernant la physique au cœur de l'étoile, avant même l'explosion. Comme souligné précédemment, le signal électromagnétique ne donne accès au cœur de l'explosion que plusieurs mois après le début de l'effondrement. En effet, pendant ces premiers mois, le milieu est opaque pour les photons et seuls ceux émis proches de la photosphère nous parviennent. Ce n'est pas le cas pour les ondes gravitationnelles et les neutrinos qui, quant à eux, interagissent très peu avec la matière et seul l'intérieur de la PNS est suffisamment dense pour être opaque aux neutrinos. Ainsi, le signal en neutrinos émis par la PNS va être modulé par la matière. Après avoir quitté l'étoile, les neutrinos vont nous parvenir tels qu'ils étaient à la sortie de l'étoile, en ayant conservé l'information concernant la physique à l'œuvre au cœur de l'étoile.

Concernant les ondes gravitationnelles, le principe est le même. Ces ondes n'interagissent pas

avec la matière et ne peuvent pas être modifiées par la matière se trouvant entre l'observateur et le lieu d'émission. Lors de la détection, elles conservent donc les caractéristiques acquises lors de leur émission.

Bien que non altérés par la matière, l'amplitude de ces signaux décroît avec la distance, ce qui rend leur détection difficile pour une supernova extragalactique.

1.2 Les détecteurs multimessagers

Bien que les supernovæ soient des phénomènes courants du ciel nocturne, beaucoup de questions restent en suspens concernant la physique au cœur de l'étoile. En effet, les supernovæ suffisamment proches pour pouvoir être étudiées sont rares et aucune supernova galactique n'a été observée depuis plus de 300 ans. Les explosions de supernovæ représentent pourtant un sujet d'étude crucial pour contraindre la physique stellaire et la physique des objets compacts. Pour détecter les signaux en neutrinos et ondes gravitationnelles, des observatoires terrestres ont été développés. Les détecteurs de neutrinos ont déjà prouvé leur utilité pour l'évolution des connaissances des processus menant à une supernova (Burrows and Lattimer, 1987) grâce à la détection de neutrinos provenant de la supernova 1987A. Leurs sensibilités permettent d'espérer des signaux de 10^4 à 10^6 neutrinos, selon le détecteur, pour une étoile de $27 M_{\odot}$ à 10 kpc (Tamborra et al., 2013). En parallèle, les améliorations de sensibilité des détecteurs d'ondes gravitationnelles laissent espérer la détection de la prochaine supernova galactique. Cela pourrait donner des informations précieuses sur les caractéristiques physiques de la PNS centrale (rayon, densité, masse, équation d'état, Torres-Forné et al., 2019b).

1.2.1 Les détecteurs de neutrinos

Du fait de leur faible interaction avec la matière, les neutrinos sont une source riche d'informations concernant la physique dans le cœur d'une supernova. Cependant, cela les rend aussi très difficiles à détecter car la détection des neutrinos se fait de manière indirecte. Pour pouvoir être détecté, un neutrino doit interagir avec la matière située dans le détecteur ou à proximité de ce dernier. Cependant, bien que de nombreux neutrinos, de diverses sources, arrivent sur Terre chaque jour, seulement une infime partie de ces neutrinos sont détectés en moyenne. Leur probabilité d'interaction avec la matière dépend de leur type (tauique, muonique, électronique ou l'antiparticule correspondante) et de leur énergie. Une plus grande énergie implique une plus grande probabilité d'interaction. En effet, la Fig. 1.12 montre que la section efficace des neutrinos augmente avec leur énergie et dépend de leur nature via les différentes réactions possibles selon le type de neutrino. En 1987, il est estimé que pour les 24 neutrinos détectés, environ 10^{14} sont parvenus jusqu'à la Terre et ont continué leur route sans interagir.

Pour détecter les neutrinos émis par une supernova, de grands réservoirs de matière transparente sont construits. Dû au faible taux d'interaction des neutrinos avec la matière, la plupart de ces particules vont traverser ces réservoirs sans interagir avec la matière, mais quelques neutrinos vont rencontrer une particule sur leur chemin. Les interactions qui ont lieu dépendent du détecteur et déterminent leur sensibilité aux différents types de neutrino. Pour les détecteurs composés d'eau liquide/solide, l'interaction du neutrino avec la particule va libérer un lepton correspondant au type du neutrino (électronique, muonique ou tauique). La vitesse de cette

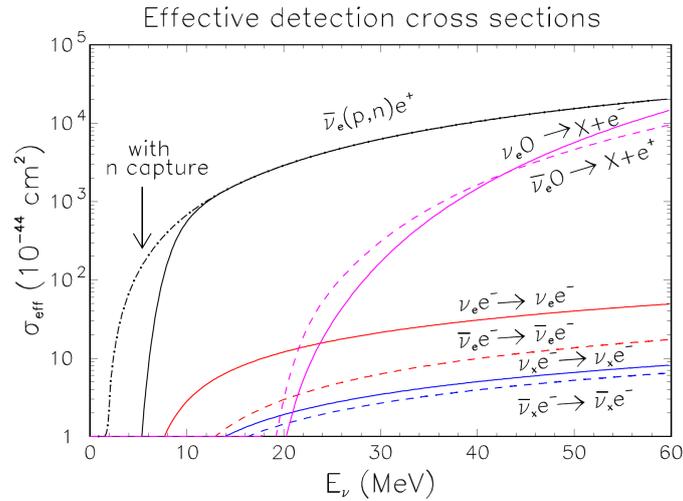


Figure I.12 – Évolution des sections efficaces des neutrinos en fonction de leur énergie pour les différentes réactions pouvant se produire dans les détecteurs à lumière Tcherenkov. La gamme d'énergie illustrée représente le domaine pertinent pour l'étude des supernovæ. Crédit : Fogli et al. (2005)

particule chargée va alors excéder la vitesse de la lumière dans le milieu (sans dépasser la vitesse de la lumière dans le vide). À l'instar d'un bang sonique lors du franchissement du mur du son, un bang lumineux va être émis par le lepton ayant dépassé la vitesse de la lumière dans le milieu. Ce bang lumineux est appelé lumière Tcherenkov. Grâce au caractère transparent des détecteurs, cette lumière va pouvoir être détectée par les capteurs optiques, se trouvant sur les parois ou dans le volume, et ainsi donner des informations sur le sens, la direction et l'énergie du neutrino à l'origine du phénomène. Afin de diminuer le bruit externe et ainsi favoriser la détection de signal, il est important que le réservoir du télescope à neutrinos soit plongé dans le noir (cuve fermée ou forte profondeur dans la mer ou la glace). Dans ce cas, la seule source de lumière possible est le rayonnement Tcherenkov (et la bioluminescence des crevettes pour les détecteurs se trouvant dans la mer).

Plusieurs détecteurs de neutrinos sont actuellement opérationnels, ou en cours de construction, et d'intérêt pour la détection des supernovæ. *IceCube* (Abbasi et al., 2011), au pôle sud, est un télescope constitué de 1 km³ de glace, sensible aux antineutrinos électroniques via leur interaction avec un proton dans une réaction β inverse. *Super-Kamiokande* (Suwa et al., 2019), au Japon, est une cuve remplie de 10⁷ litres d'eau purifiée, mélangée depuis 2020 à du gadolinium. Il est le successeur de *Kamiokande* (Hirata et al., 1987) et sera remplacé par *Hyper-Kamiokande* en 2027 (Kudenko, 2020; Abe et al., 2021). À chaque nouvelle génération de *Kamiokande*, la capacité du réservoir a été augmentée d'un facteur 10 et les détecteurs photosensibles ont été améliorés. Comme *IceCube*, il est surtout sensible aux antineutrinos électroniques, produits par la réaction β inverse. Il s'agit du même type de neutrinos que ceux détectés en 1987. Un second détecteur utilisant l'eau est en cours de construction : *KM3NeT* (Cubic KiloMetre Neutrino Telescope), successeur de *ANTARES* (Astronomy with a Neutrino Telescope and Abyss environ-

mental REsearch). Contrairement aux précédents détecteurs utilisant une cuve remplie d'eau pure, ces deux expériences sont composées de détecteurs photosensibles placés directement dans les profondeurs de la mer Méditerranée, faisant office de cuve. KM3NeT est composé de deux expériences : *ARCA* et *ORCA* (Astroparticle & Oscillations Research with Cosmics in the Abyss). Une partie de *ARCA* est déjà opérationnelle et il est prévu que le projet soit totalement opérationnel en 2027. Il est attendu que ces expériences soient capables de détecter les neutrinos issus d'une supernova galactique (Aiello et al., 2021).

Située en Chine, l'expérience *JUNO* (Jiangmen Underground Neutrino Observatory) sera capable d'observer les neutrinos émis lors d'une explosion de supernova. La mise en activité du détecteur est prévue pour 2023. Il n'est pas rempli d'eau, mais d'un solvant appelé scintillateur liquide. D'autres détecteurs utilisant cette méthode sont actuellement en état de fonctionnement : *SNO+* (Solar Neutrino Oscillations), *NOvA* et *KamLAND*. Dans ces détecteurs, la réaction β inverse produit un positron et un neutron lors de l'interaction du liquide avec un antineutrino électronique. Les détecteurs de ces télescopes détectent les rayons émis lors de l'annihilation du positron et de l'absorption du neutron. L'utilisation de scintillateurs liquides permet une meilleure résolution temporelle et énergétique de l'interaction de l'antineutrino avec une particule de la cuve. Cependant, leur résolution spatiale se trouve fortement diminuée face aux détecteurs utilisant de l'eau.

Plusieurs détecteurs utilisant l'argon (Ar) liquide sont en projet : *DarkSide*, *Argo* et *DUNE* (Deep Underground Neutrino Experiment) (DarkSide-20k Collaboration et al., 2021). *DUNE* est complémentaire aux détecteurs cités précédemment, sensibles aux antineutrinos électroniques, car il sera particulièrement sensible aux neutrinos électroniques. Pour ces types de détecteurs, il n'y a pas de détection de lumière Tcherenkov mais d'un champ électrique créé par le passage du lepton associé au neutrino. Le premier avantage de l'argon liquide est sa densité supérieure à l'eau, permettant une augmentation de la probabilité d'interaction du neutrino avec une particule de la cuve. Cependant, l'avantage principal de l'utilisation d'argon est la détection des neutrinos électroniques via la réaction



créant un noyau de potassium (K) excité et un électron. Le détecteur *HALO* (Helium And Lead Observatory) au Canada est un nouveau type de détecteur sensible aux neutrinos électroniques. Contrairement aux détecteurs mentionnés précédemment, il est composé de plomb et d'hélium.

Parmi tous ces détecteurs, *IceCube*, *Super-Kamiokande*, *KM3NeT*, *KamLand*, *SNO+* et *NOvA* font partie d'une collaboration déclenchant une alerte en cas de détection de neutrinos issus d'une supernova à effondrement de cœur : *SNEWS* (SuperNova Early Warning System). Grâce à cette alerte, des signaux correspondant à cet évènement peuvent être recherchés dans les autres détecteurs et les télescopes peuvent être orientés dans la direction de la supernova afin d'avoir un signal multimessenger de l'évènement aussi complet que possible, en longueur d'onde et en durée.

I.2.2 Les détecteurs d'ondes gravitationnelles

Un autre type de détecteurs pouvant donner l'alerte pour l'observation d'une supernova gravitationnelle est le détecteur d'ondes gravitationnelles. La taille d'un détecteur étant liée à son domaine de sensibilité (Barish and Weiss, 1999), nous ne nous intéressons qu'aux détecteurs pertinents pour les détections de supernovæ, illustrés Fig. I.14, donc sensibles à des fréquences dans l'intervalle $[10, 10^3]$ (Kotake et al., 2006). Les autres détecteurs, bien plus grands, opèrent à des fréquences trop basses pour pouvoir détecter une supernova.

Nous allons dans un premier temps détailler rapidement les ondes gravitationnelles. Ces dernières sont émises lors d'une accélération non symétrique de la matière via l'approximation de l'équation du quadrupôle obtenue par Einstein en 1916. L'amplitude de l'onde gravitationnelle h détectée par une source à une distance D de la Terre peut s'exprimer comme :

$$h = \frac{2G}{Dc^4} \frac{d^2Q}{dt^2}, \quad (I.13)$$

où G est la constante universelle de gravitation, c la vitesse de la lumière et Q est le moment quadrupolaire de la distribution de masse. Pour une distribution ovale, allongée le long de l'axe équatorial, Q est négatif et inversement pour une élongation le long de l'axe polaire. C'est la variation temporelle de cette grandeur qui est à l'origine des ondes gravitationnelles. De façon simplifiée, cela peut s'exprimer comme

$$hD \sim \epsilon \frac{GMv^2}{c^4}, \quad (I.14)$$

où M est la masse de la distribution de matière considérée, v sa vitesse et ϵ le degré de non-sphéricité de la source. Pour une distribution sphérique, $\epsilon = 0$, aucune onde gravitationnelle n'est émise (Abdikamalov et al., 2022).

Les ondes gravitationnelles représentent une déformation de l'espace-temps, entraînant une dilatation ou contraction des durées et distances dans des directions privilégiées. Pour les détecter, une version améliorée de l'interféromètre de Michelson est utilisée.

Un détecteur d'onde gravitationnelle est un interféromètre composé de deux bras orthogonaux de plusieurs kilomètres. Chaque bras est un tunnel dans lequel passe un laser préalablement séparé en deux par un miroir semi-réfléchissant placé à l'intersection des deux bras. Au bout de ce tunnel se trouve un miroir sur lequel le laser est réfléchi et revient vers sa source, commune aux deux bras. Sur le chemin de retour, un miroir partiellement réfléchissant crée une cavité de Fabry-Perot (« Partially reflective mirror » dans la Fig. I.13) qui induit un grand nombre de réflexions du faisceau entre ce miroir et le miroir placé en fin de bras. Lorsque le faisceau d'un bras quitte cette cavité, il interfère alors avec le faisceau de l'autre bras et crée une figure d'interférence. Lorsqu'une onde gravitationnelle traverse le système, une différence de marche est introduite entre les deux bras et la figure d'interférence est modifiée. Cette différence est mesurée par un détecteur se trouvant au bout des deux faisceaux (Fig. I.13). Le grand nombre de réflexions permet d'être sensible à des fréquences plus basses que celles permises avec une réflexion simple.

Les principaux détecteurs d'ondes gravitationnelles actuels, dits de deuxième génération, sont *LIGO* (Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory, NASA), *Virgo* (ESA) et

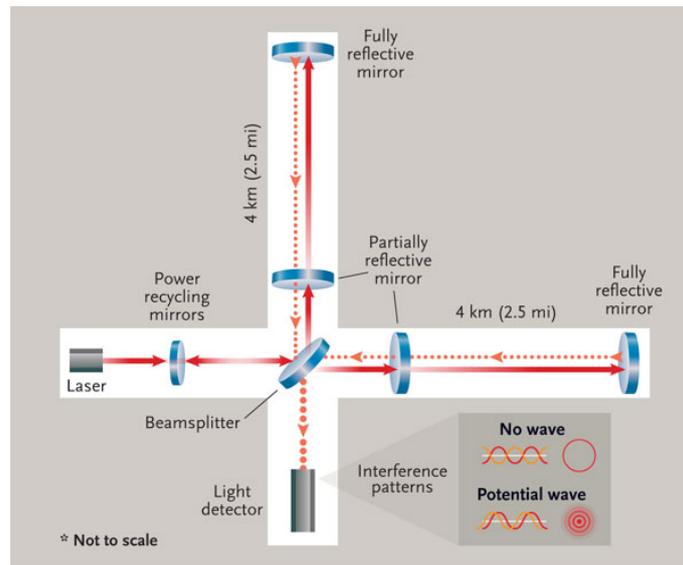


Figure I.13 – Schéma de fonctionnement du détecteur d'ondes gravitationnelles LIGO. Crédit : <http://www.skyandtelescope.com/>

KAGRA (Kamioka Gravitational Wave Detector, JAXA). Jusqu'à maintenant, ces détecteurs n'ont pas permis la détection d'ondes gravitationnelles produites lors d'une supernova, donnant des nouvelles contraintes sur le taux de supernova par unité de temps et d'espace (Abadie et al., 2012; Abbott et al., 2020). Cependant, lors de leurs prochaines phases d'acquisition en 2023 (O4), puis 2026 (O5), ils devraient être capables de détecter une supernova classique ($[10,60] M_{\odot}$) à 10 kpc de la Terre (Szczeptańczyk et al., 2021). Cela est équivalent à seulement deux tiers du rayon de notre galaxie. Les supernovæ les plus énergétiques, et donc plus rares, pourraient être détectées jusqu'à 100 kpc.

Une troisième génération de détecteurs devrait venir compléter cette liste d'observatoires d'ondes gravitationnelles d'intérêt pour l'étude des explosions de supernovæ. Pour ces détecteurs, la taille des bras sera augmentée et les bruits thermiques et sismiques diminués. Le projet européen *Einstein Telescope* (ET, trois bras de 10 km chacun) devrait être dix fois plus sensible que LIGO-Virgo et pouvoir détecter des supernovæ classiques jusqu'à plusieurs centaines de kiloparsecs (Powell and Müller, 2020). Aux Etats-Unis, le projet *Cosmic Explorer* (CE, deux bras de 40 km chacun) devrait détecter les supernovæ galactiques et celles des galaxies satellites telles les nuages de Magellan (Roma et al., 2019). Ces deux détecteurs sont prévus pour la fin des années 2030. Les domaines de détection des supernovæ pour les différents détecteurs sont montrés dans la Fig. I.14. L'axe des ordonnées montre la déformation caractéristique h induite par l'évènement. Comme précisé dans l'Eq. (I.14), cette grandeur dépend de la fréquence du signal, de la distance à laquelle se trouve la source ainsi que du degré de non-sphéricité de la source.

Comme mentionné précédemment, les signaux d'ondes gravitationnelles et de neutrinos nous parviennent inaltérés et donnent une information directe sur les mouvements de matière au cœur de l'étoile. En particulier, les différentes instabilités pouvant se développer lors de ces

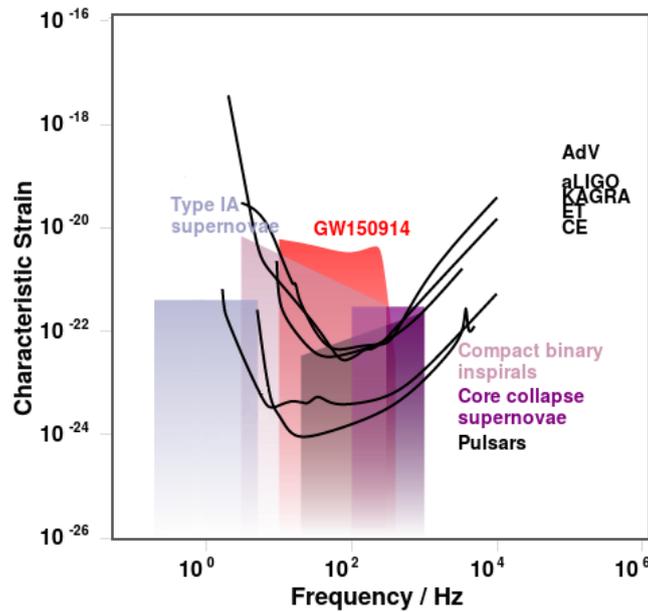


Figure I.14 – Domaine de signature des supernovæ (en violet) et détectabilité pour les différents détecteurs terrestres (lignes noires) : Advanced Virgo, advanced LIGO, KAGRA, Einstein Telescope, Cosmic Explorer. Crédit : adapté de [Moore et al. \(2015\)](#)

phases peuvent posséder des signatures particulières.

I.3 L'hydrodynamique au cœur de l'effondrement

L'étude des instabilités au cœur de l'étoile en effondrement, avant leur détection via les différents messagers, permet de faire des prédictions sur les signaux possibles d'une supernova. Dans un premier temps, cela permet de déterminer si les supernovæ et leurs instabilités peuvent être détectées et, si oui, jusqu'à quelle distance. Ensuite, ces études permettent de définir dans quel domaine de fréquence les instabilités peuvent être détectées et ainsi savoir quels instruments sont les plus susceptibles d'effectuer ces détections. Grâce à cela, des déductions rapides pourront être faites lors de la prochaine détection de supernova galactique concernant les mécanismes à l'œuvre dans la supernova.

La compréhension de ces mécanismes est essentielle pour comprendre l'explosion finale de l'étoile ainsi que les caractéristiques de l'étoile à neutron formée. Le développement des instabilités facilite l'explosion et, par le développement de ces dernières, une explosion peut se développer avec une luminosité des neutrinos inférieure à celle prédite sans instabilité ([Murphy and Burrows, 2008](#); [Müller and Janka, 2015](#)). Ces instabilités sont aussi évoquées pour expliquer la rotation ainsi que le kick des étoiles à neutrons. Elles peuvent donc agir sur plusieurs mécanismes : faciliter l'explosion, augmenter le taux de rotation du cœur et donner une impulsion à l'étoile à neutrons.

Un ingrédient important à prendre en compte pour l'étude de ces instabilités est la rotation

stellaire (Sect I.1.4). En effet, les étoiles tournent et leur effondrement amplifie cette rotation par conservation du moment cinétique, pouvant produire un effet dynamique non négligeable. Afin de savoir si le mécanisme d'explosion en présence de rotation est similaire à celui sans rotation, il est nécessaire d'étudier l'effet de la rotation sur les instabilités semblant dominer l'explosion sans rotation. De plus, si le mécanisme d'explosion est modifié, il est important de savoir pour quel taux de rotation critique s'effectue cette transition de mécanisme responsable de l'explosion. Cette étude d'instabilités, avec et sans rotation, est donc primordiale afin de comprendre les mécanismes d'explosion d'étoiles massives, l'évolution des étoiles à neutrons encore jeunes, de leur création à leur état actuel, ainsi que la distribution de leur taux de rotation.

Nous considérons d'abord les instabilités pouvant se développer sans rotation, ainsi que l'effet potentiel de la rotation sur leur développement. Ces instabilités non liées à la rotation sont la convection (dans les diverses parties du cœur de l'étoile), une instabilité liée au choc d'accrétion stationnaire appelée SASI et, enfin, l'instabilité liée à une asymétrie de densité leptonique (électrons et neutrinos). La dernière instabilité présentée est liée à la rotation : $low-T/|W|$. Pour chacune de ces instabilités, nous présentons le comportement sans et avec rotation ainsi que les détections attendues en signaux multimessagers.

I.3.1 La convection

Dans un fluide, la convection peut être instable sous l'effet d'un gradient d'une ou plusieurs quantités conservées, dont nous verrons deux exemples pertinents dans le contexte des supernovæ. Par exemple, un gradient d'une grandeur physique telle que la température peut être à l'origine d'un mouvement convectif. C'est ce qu'il se passe dans une casserole d'huile placée sur une source de chaleur. Dans ce cas, l'huile chaude du fond va remonter sous l'effet de la poussée d'Archimède, pousser le fluide froid, et plus lourd, qui va aller vers le fond de la casserole. Cela donne naissance à des cellules convectives particulièrement bien visibles dans le cas de l'huile. Plus précisément, c'est le gradient d'entropie qui doit être considéré lorsque la densité n'est pas uniforme. Cette première cause a donné naissance au critère de Schwarzschild (Schwarzschild, 1906) :

$$C_S = \left. \frac{\partial \rho}{\partial S} \right|_{P, Y_1} \frac{dS}{dr}, \quad (I.15)$$

avec ρ la densité, S l'entropie, P la pression, Y_1 la fraction leptonique⁴ du fluide et r le rayon. Pour ce critère, un gradient d'entropie S négatif peut donner naissance à la convection (si $\partial \rho / \partial S|_{P, Y_1} > 0$).

Un autre moteur de la convection peut être une différence de composition. Le critère de Ledoux (Ledoux, 1947) C_L est une généralisation du critère de Schwarzschild réunissant ces deux effets. Il peut s'exprimer comme $C_L > 0$ où C_L est défini par (Buras et al., 2006b) :

$$C_L = \left. \frac{\partial \rho}{\partial S} \right|_{P, Y_1} \frac{dS}{dr} + \left. \frac{\partial \rho}{\partial Y_1} \right|_{P, S} \frac{dY_1}{dr}. \quad (I.16)$$

4. La fraction leptonique correspond à la somme des nombres leptoniques (1 ou -1) de chaque particule divisée par le nombre de nucléons. Le nombre leptonique des électrons et des neutrinos vaut 1. Il vaut -1 pour leurs antiparticules.

Si $C_L > 0$, la configuration est instable et la convection va se développer. En particulier, un gradient d'entropie négatif ($\frac{dS}{dr} < 0$) peut entraîner une instabilité. De même, un gradient négatif de fraction leptonique Y_1 peut entraîner une instabilité selon l'équation d'état de la matière (Roberts et al., 2012). Dans ce cas, la forte proportion d'électrons et neutrinos aux petits rayons donne naissance aux mouvements convectifs.

Le critère de stabilité de Ledoux définit le signe du carré de la fréquence de Brunt-Väisälä :

$$N^2 \equiv -\frac{1}{\rho} \frac{d\Phi}{dr} \left[\left. \frac{\partial \rho}{\partial S} \right|_{P, Y_1} \frac{dS}{dr} + \left. \frac{\partial \rho}{\partial Y_1} \right|_{P, S} \frac{dY_1}{dr} \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{d\Phi}{dr} C_L \quad (1.17)$$

avec Φ le potentiel gravitationnel. Dans un milieu stablement stratifié ($N^2 > 0$), il s'agit de la fréquence d'oscillation d'une particule déplacée verticalement. L'équation (1.17) montre que la fréquence de Brunt-Väisälä peut aussi être utilisé comme critère convectif. On établit que si N est imaginaire, i.e. si $N^2 < 0$, alors le milieu est instable à la convection. Dans ce cas, N mesure le taux de croissance de l'instabilité. Par la suite, nous choisirons cette fréquence comme référence.

Dans le cas des supernovæ, l'idée d'un mélange produit par la convection avant l'explosion de l'étoile a été introduite dans un premier temps à l'intérieur de la PNS pour résoudre le problème de non-explosion des simulations 1D (Epstein, 1979; Colgate, 1978; Bruenn et al., 1979). Plus tard, elle a aussi été suggérée hors de la PNS, ce qui permet de plus d'expliquer les observations de distribution du fer dans le reste de la supernova SN1987A. Un mélange du nickel (se désintégrant en cobalt puis en fer) pendant l'explosion de l'étoile permet d'obtenir les caractéristiques de la distribution du fer observée pour cette supernova.

Finalement, la convection se développe dans trois cas que nous décrivons successivement : dans la PNS due à un gradient de fraction leptonique, dans la région choquée, juste avant que le choc ne devienne stationnaire due à un gradient d'entropie laissé par la décélération du choc ou sous l'influence des neutrinos créant un gradient d'entropie.

1.3.1.a La convection au sein de la protoétoile à neutrons

Dans la PNS la convection est due à la composition du milieu. En 1979, il est montré qu'un gradient négatif de fraction leptonique s'établit à l'intérieur de la PNS (Epstein, 1979). Dans cette situation, un gradient d'entropie positif cohabite avec un gradient de fraction électronique ou leptonique négatif. Le caractère stable ou instable est déterminé par le signe issu de la combinaison des deux termes (entropie stable et fraction leptonique instable). Cette situation est illustrée dans la Fig. 1.15, où l'on peut voir apparaître le gradient de fraction électronique, négatif entre 10 km et 25 km. On peut aussi voir sur cette figure que la convection donne naissance à un gradient d'entropie nul dans cette région.

L'impact de la convection dans la PNS représente un enjeu important de la dynamique des supernovæ et de la formation des étoiles à neutrons. En effet, la convection peut augmenter de façon significative la luminosité des neutrinos et donc être potentiellement importante dans l'évolution vers une explosion (Burrows, 1987; Burrows and Lattimer, 1988; Burrows and Fryxell, 1993). Cependant, des simulations numériques axisymétriques 2D puis 3D montrent que cette amplification de la luminosité est au maximum de 30% (Dessart et al., 2006; Nagakura et al.,

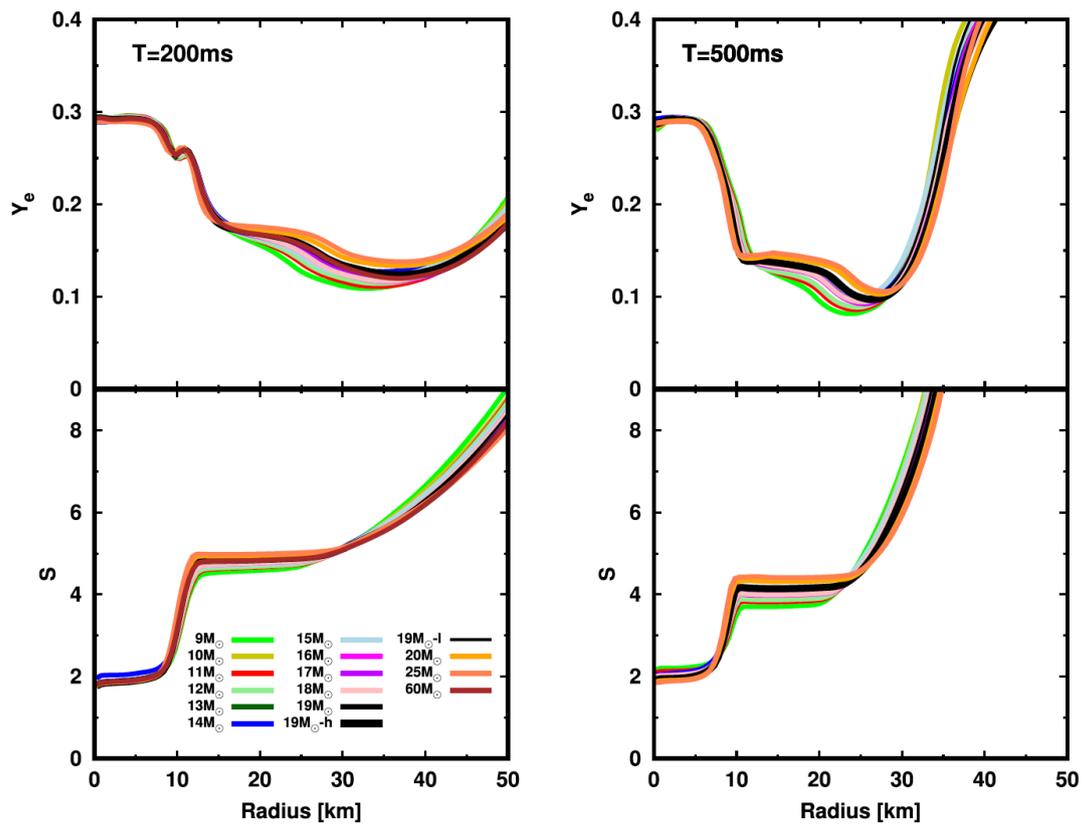


Figure I.15 – Profil radial, moyenné en angle, de la fraction électronique Y_e (en haut) et de l'entropie S (en bas) dans la PNS. Ces profils sont présentés pour plusieurs masses de progéniteurs, à deux moments distincts : 200 ms (gauche) et 500 ms (droite) après la création du choc. Crédit : [Nagakura et al. \(2020\)](#)

2020) et donc insuffisante pour être l'ingrédient principalement responsable de l'explosion. Cette zone convective pourrait néanmoins être une zone privilégiée pour le développement d'une dynamo convective et l'augmentation du champ magnétique pouvant expliquer les champs extrêmes des magnétars (Raynaud et al., 2020; Nagakura et al., 2020; Masada et al., 2022).

Pour cette instabilité, la rotation semble être défavorable et diminuer le taux de croissance (Miralles et al., 2004; Andresen et al., 2019).

1.3.1.b La convection prompte

Lorsque le choc ralentit, avant de devenir stationnaire, un gradient d'entropie négatif est créé dans la région traversée par le choc (Bethe et al., 1987; Burrows and Lattimer, 1988; Bethe, 1990). Ce gradient donne naissance à une convection appelée *convection prompte*. En effet, en l'absence de source de chauffage pour maintenir le gradient d'entropie négatif, ce dernier devient plat, donc stable, en ~ 15 ms par l'effet de la convection qui se développe (Burrows and Fryxell, 1993) et son effet sur la luminosité des neutrinos est faible. Cette convection n'a donc qu'un effet mineur sur la dynamique de l'étoile (Bruenn and Mezzacappa, 1994).

1.3.1.c La convection due aux neutrinos

Contrairement à la convection prompte, la convection qui se développe de façon entretenue pendant la phase de choc stationnaire a un effet majeur sur la relance du choc. La source de cette convection est l'émission de neutrinos par la PNS, permettant l'entretien de l'instabilité. Une fraction des neutrinos s'échappant de la PNS ($\sim 4\% - 10\%$, Burrows et al., 2012) sont absorbés par la matière via les réactions :



Dans ces conditions, la région de gain mentionnée précédemment apparaît. Dans cette région de gain, l'absorption des neutrinos produit un gradient d'entropie négatif favorable au développement d'une instabilité convective (Fig. I.16, gauche). Si cette dernière se développe, elle va augmenter l'efficacité du chauffage de la matière par les neutrinos et permettre de relancer le choc. Dans la région de gain, juste sous le choc, le gradient d'entropie est très négatif tandis que le gradient de fraction électronique est nul ou faible. Sous ces conditions, le terme de gauche dans l'Eq. (I.16) domine et la convection instable peut se développer.

Cependant, le critère de Ledoux établi précédemment suppose un équilibre hydrostatique. La matière dans la région de gain étant en train d'être accrétée par la PNS, l'advection doit être prise en compte dans l'établissement d'un critère de développement de la convection. En effet, la matière ne fait que passer à travers la zone de gain. Pour que cette instabilité convective puisse se développer, les perturbations doivent passer suffisamment de temps dans la zone de chauffage (instable), afin de pouvoir s'amplifier avant d'être advectées dans la zone de refroidissement (stable). Ainsi, plus la région de gain est grande, plus la convection due aux neutrinos est susceptible de se développer. En s'appuyant sur une analyse linéaire, Foglizzo et al. (2006) a proposé un nouveau critère de stabilité applicable dans cette situation, utilisant

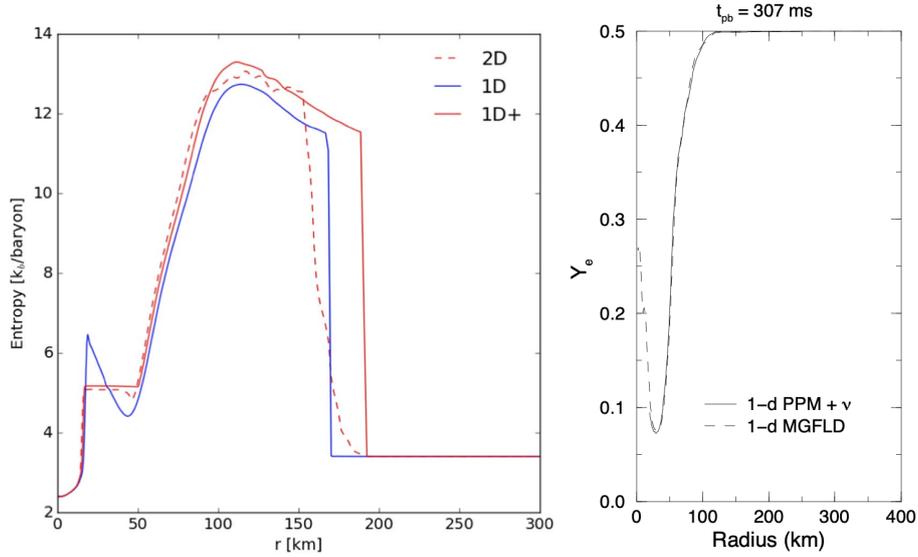


Figure I.16 – (gauche) Profil de l'entropie par nucléon, 350 ms après la création du choc pour une étoile de 50 km en 1D et 2D (Mabanta et al., 2019). (droite) Profil de la fraction électronique dans une étoile de $15 M_{\odot}$, 1D, 307 ms après la création du choc, pour deux traitements du transport des neutrinos (Mezzacappa et al., 1998). Dans ces figures, le rayon du choc se situe à environ 200 km et le rayon de la PNS à environ 50 km.

le paramètre χ défini par :

$$\chi = \int_{r_g}^{r_{sh}} \frac{\text{Im}(N)}{|v_r|} dr \quad (I.20)$$

avec v_r la vitesse radiale du fluide accréte, r_g le rayon de gain et r_{sh} le rayon du choc. Selon ce critère, l'instabilité convective peut se développer si $\chi \gtrsim 3$. On peut ainsi remarquer qu'un plus grand rayon de choc permet une valeur de χ plus grande et donc favorise le développement de la convection instable. Ce critère semble avoir été vérifié dans des calculs perturbatifs (Fernández et al., 2014; Kazeroni et al., 2018) et des simulations 2D et 3D (Scheck et al., 2008; Burrows et al., 2012; Cardall and Budiardja, 2015; Glas et al., 2019b). Ces études montrent que la convection se développe sur des échelles angulaires relativement petites, telles que $l \sim 3 - 6$ selon le taux de dissociation considéré.

Cependant, plusieurs éléments suggèrent que des questions ouvertes persistent autour de ce critère de stabilité. En effet, le critère établi en 2006 est basé sur une étude restreinte à la région de gain, ignorant la zone de refroidissement située en dessous et ne considérant pas les autres instabilités. L'analyse linéaire de Fernández et al. (2014) ne souffre pas de ces limitations mais le critère d'instabilité convective n'y a pas été testé de manière approfondie. Bien que Fernández et al. (2014) affirme confirmer le critère de Fogliizzo et al. (2006), une analyse de leur Fig. 1 laisse penser que la prise en compte de la région de refroidissement pourrait mener à des apparitions de la convection pour des χ un peu plus élevés que 3. Par ailleurs, dans les simulations où seuls les modes les plus instables peuvent être observés, il est très difficile de déterminer le chauffage seuil permettant le développement de l'instabilité convective. De

plus, ces simulations étant chronophages, l'espace des chauffages n'est pas quadrillé de façon précise, ne permettant pas de déterminer si $\chi < 3$ peut mener au développement linéaire de la convection. Enfin, ces résultats numériques peuvent être brouillés par l'apparition non-linéaire de mouvements convectifs déclenchés dans un régime linéairement stable à la convection. Si l'amplitude des perturbations devient trop importante pour que l'analyse linéaire soit applicable, il est alors possible d'observer le développement d'une instabilité convective pour des valeurs de χ inférieures à 3. Dans ce cas, un critère est appliqué sur l'amplitude des perturbations (Scheck et al., 2008; Kazeroni et al., 2018).

L'utilisation d'un critère précis pour le développement de l'instabilité convective permet d'utiliser des codes 1D (plus rapides) incluant des effets 2D (la convection). L'avantage de l'utilisation de critères est qu'ils regroupent plusieurs paramètres. Pour les supernovæ, leur utilisation permet de passer de plusieurs îlots de stabilité dans l'espace complet des paramètres, lorsque ces derniers sont pris en compte séparément, à une condition unique de seuil d'instabilité en utilisant un paramètre plus global, regroupant plusieurs des paramètres initiaux. Le critère de Foglizzo et al. (2006) nécessite donc d'être amélioré afin d'être plus prédictif et de pouvoir être utilisé dans les simulations 1D. L'étude de ce critère est le sujet de la première partie de cette thèse (Chap. III).

I.3.1.d Convection et rotation

Un autre aspect de la convection, d'intérêt en astrophysique et notamment pour l'étude des supernovæ, est son comportement en présence de rotation. L'étude de ce comportement est pertinente pour l'étude du champ magnétique terrestre ou le développement des ouragans. Plusieurs études ont été menées afin de déterminer l'effet de la rotation sur le développement de la convection dans le cas où un gradient de température est aligné sur l'axe de rotation (Chandrasekhar, 1961; Rossby, 1969; Wedi et al., 2021). Dans ces expériences, un fluide est placé dans un cylindre et est chauffé au contact de l'extrémité basse et refroidit au contact de la face supérieure. Le cylindre est ensuite mis en rotation au taux de rotation Ω . Il est alors observé que le nombre de Rayleigh⁵ critique Ra_c , au-delà duquel la convection se développe, augmente de façon proportionnelle à $\Omega^{4/3}$. Pour que la convection continue avec rotation, l'écart de température entre les deux faces doit donc augmenter lorsque la rotation augmente. Grâce à cela, le nombre de Rayleigh du fluide augmente en même temps que le nombre de Rayleigh critique et le critère de convection est toujours vérifié. Ce résultat indique donc que, dans cette configuration, la rotation est défavorable au développement de la convection. Dans le cas astrophysique, cette étude peut être assimilée à l'étude de l'effet de la rotation sur la convection polaire.

Pour les supernovæ, plusieurs aspects entrent en compétition pour pouvoir prédire l'impact de la rotation sur la convection. D'une part, la rotation tend à créer un plus grand rayon de choc, favorisant la convection. D'autre part, la rotation tend à augmenter le rayon de la PNS, diminuant l'énergie des neutrinos, ce qui est défavorable au développement de la convection. Pour l'étude de la convection dans la région de gain, il faudrait cependant ajouter une vitesse

5. Le nombre de Rayleigh Ra caractérise la vigueur de la convection par le rapport $Ra \equiv \alpha g \Delta T H^3 / (\nu \kappa)$, avec α le coefficient de dilatation du fluide, g l'accélération de pesanteur, ΔT l'écart de température, H la taille caractéristique du système, ν la viscosité cinématique et κ la diffusivité thermique.

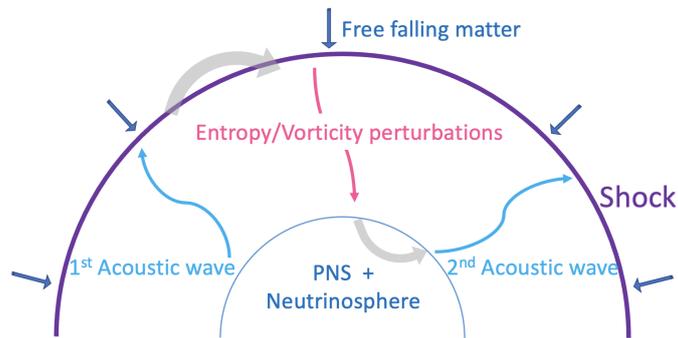


Figure I.17 – Illustration du mécanisme donnant naissance à SASI.

d'advection verticale dans ces études. L'effet de la rotation différentielle hors des pôles sur la convection, d'intérêt pour les études astrophysiques d'objets sphériques en rotation, reste très peu étudié. Pour les supernovæ, cela est pertinent pour l'étude de la convection à l'intérieur de la PNS et dans la région de gain. En particulier, l'effet de la rotation à l'équateur est l'objet du Chap. IV. Les études menées sur ce sujet sont contradictoires et nécessitent un approfondissement (Fryer and Heger, 2000; Fryer and Warren, 2004; Nakamura et al., 2014; Summa et al., 2018).

I.3.2 L'instabilité de choc d'accrétion stationnaire (SASI)

I.3.2.a Le mécanisme de SASI

Une autre instabilité peut se développer en absence de rotation, l'instabilité du choc d'accrétion stationnaire (SASI, Blondin et al., 2003). Contrairement à l'instabilité convective, cette instabilité est dominée par les grandes échelles angulaires de degré $l = 1, 2$. Elle a été observée dans des simulations idéalisées (Fernández et al., 2014; Kazeroni et al., 2016; Blondin et al., 2017), et de nombreuses simulations 2D et 3D (Kotake et al., 2007; Scheck et al., 2008; Marek and Janka, 2009; Suwa et al., 2010; Hanke et al., 2013; Couch and O'Connor, 2014; Glas et al., 2019b; Mezzacappa et al., 2020). Les mouvements instables du mode axisymétrique $l = 1, m = 0$ correspondent à un déplacement unidirectionnel («*slushing*») de la région post-choc. Les modes non axisymétriques $m = 1, 2$ sont généralement appelés modes spiraux. Ces modes spiraux entraînent un transport de moment cinétique vers l'étoile qui est alors entraînée dans le sens inverse des modes SASI de la région post-choc (Blondin and Mezzacappa, 2007b; Guilet and Fernández, 2014; Kazeroni et al., 2016). Pour un progéniteur sans rotation initiale, cela peut mettre en rotation la PNS. Dans le cas d'un progéniteur avec une rotation initiale, cette rotation induite par la présence de SASI peut diminuer le spin de l'étoile à neutrons, voire même l'inverser (Blondin and Mezzacappa, 2007b; Kazeroni et al., 2017). Les modes spiraux de SASI sont donc un ingrédient important pour comprendre le spin des pulsars.

SASI est le résultat d'une interaction entre le choc et la surface de la PNS par un cycle advectif-acoustique (Foglizzo et al., 2007; Guilet and Foglizzo, 2012). Des perturbations d'entropie et de vorticité sont cr ees par la d eformation du choc et sont advect ees vers la surface de la PNS. Lorsque ces perturbations atteignent la surface de la PNS, elles donnent naissance à des

ondes acoustiques qui peuvent remonter le flot subsonique jusqu'au choc, le perturber et donner naissance à de nouvelles perturbations de vorticité ou d'entropie de plus grande amplitude. L'amplification du phénomène à chaque cycle (Fig. 1.17) produit l'instabilité SASI.

Le mécanisme de l'instabilité montre que la fréquence de SASI, ainsi que son taux de croissance, sont inversement proportionnels au temps d'accrétion, et donc au rayon du choc. Ainsi, contrairement au cas convectif, un choc proche de la surface de la PNS va être favorable à SASI. En effet, en réduisant la distance entre le choc et la surface de la PNS, le temps d'advection est diminué, menant à une augmentation de la fréquence et du taux de croissance de l'instabilité (Foglizzo et al., 2007). L'instabilité est donc plus vigoureuse pour les plus petits rayons du choc. De plus, les perturbations d'entropie et de vorticité sont sensibles aux autres perturbations (convection, instabilité de Kelvin-Helmoltz, accrétion de l'interface Si/O,...) et peuvent être altérées, annihilant le développement de SASI (Guilet et al., 2010; Müller et al., 2017). Un choc plus proche pourrait aussi permettre de diminuer la probabilité d'altération de ces perturbations d'entropie/vorticité.

1.3.2.b SASI et rotation

La rotation dans le cœur des étoiles peut avoir un rôle très important dans le développement des instabilités. Par exemple, elle donne une direction privilégiée aux modes spiraux de SASI et augmente son intensité (Yamasaki and Foglizzo, 2008). Plusieurs études perturbatives (Yamasaki and Foglizzo, 2008; Walk et al., 2022) et simulations, idéalisées (Iwakami et al., 2014; Kazeroni et al., 2017; Blondin et al., 2017) ou non (Summa et al., 2018; Andresen et al., 2019), montrent une amplification des modes spiraux progrades de SASI. Cet effet est observable même à faible rotation. De plus, la rotation tend à modifier la taille de l'échelle dominante. Bien que tous les modes spiraux progrades SASI soient favorisés par la rotation, les modes de plus petite échelle sont plus favorisés. Ainsi, par la rotation, le mode le plus instable passe de $m = 1$   $m = 2$ (Yamasaki and Foglizzo, 2008; Blondin et al., 2017). Cependant, la plupart de ces études étant très idéalisées, l'effet de la rotation sur SASI en présence de chauffage est encore peu connu. Il faudrait une étude systématique de l'influence du chauffage et de la rotation afin de comprendre le comportement de SASI dans un cas plus réel, où le chauffage est pris en compte de manière systématique.

1.3.2.c La fontaine SWASI

Afin d'étudier l'instabilité SASI et ses paramètres de façon plus intuitive, complémentaire des simulations numériques, un modèle analogique de l'instabilité a été développé (Foglizzo et al., 2012) : «Shallow Water Analogue of a Shock Instability» (SWASI). Dans cette expérience, une fontaine circulaire est utilisée pour représenter le phénomène SASI en 2D. L'eau est injectée par la périphérie de la fontaine et s'écoule vers un trou dans un cylindre central. La forme du fond de la fontaine est l'analogue du potentiel gravitationnel, la profondeur d'eau représente la densité et les ondes de surface sont l'analogue des ondes sonores. L'obstacle que constitue le cylindre central crée un ressaut hydraulique qui se stabilise à un certain rayon dans la fontaine. Ce ressaut est similaire au choc devenant stationnaire dans le cas d'une supernova. Les équations de l'écoulement de l'eau dans la fontaine sont analogues aux équations hydrodynamiques dans le cas astrophysique pour un gaz isentropique d'indice adiabatique $\gamma = 2$ en géométrie cylindrique.

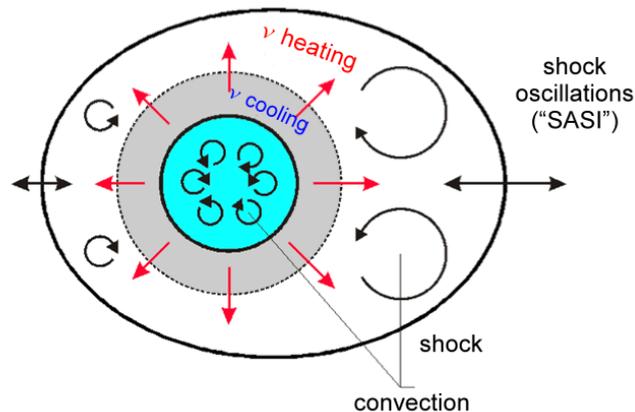


Figure I.18 – Illustration des instabilités présentes sans rotation. On observe la PNS en bleu et la convection interne. Hors de la PNS se trouve la zone de refroidissement puis la région de gain où se développe la convection due aux neutrinos. Enfin, le mode $l=1$ de SASI crée une déformation du choc qui oscille de gauche à droite sur ce schéma. Crédit : Müller (2020)

Les résultats de l'expérience semblent qualitativement cohérents avec les résultats obtenus par analyse linéaire et simulation.

I.3.3 SASI et convection

I.3.3.a Différences entre les deux instabilités

Les instabilités convective et SASI se développant dans la même zone, il est intéressant de les comparer. Tout d'abord, la valeur du rayon du choc influe différemment sur les deux instabilités. Un temps d'advection plus court est favorable à SASI et défavorable à la convection. Ensuite, contrairement à l'instabilité convective, SASI n'a pas besoin de chauffage par neutrinos pour pouvoir se développer. D'autre part, comme évoqué précédemment, ces deux instabilités agissent sur des échelles différentes. La convection a une échelle typique de l'ordre de la taille de la région de gain ou moins (Foglizzo et al., 2006), tandis que SASI n'est pas dépendante du chauffage et agit donc sur de plus grandes échelles ($l \simeq 1$) comme illustré en Fig. I.18. En particulier, l'échelle du mode le plus instable de SASI est déterminé par la taille de la région de couplage advectif/acoustique de l'instabilité. Les modes les plus instables correspondent aux modes basse fréquence et grande échelle (Foglizzo, 2009).

I.3.3.b Signaux multimessagers de l'instabilité convective et SASI

La convection

La signature de l'instabilité convective est subtile à détecter. Dans le signal en neutrinos, la convection mène à une oscillation de faible amplitude et haute fréquence du signal (Mirizzi et al., 2016). Dans le signal en ondes gravitationnelles, la trace d'une instabilité convective est aussi difficile à trouver et souvent indirecte. En effet, sa présence peut être déduite des observations d'autres phénomènes comme les oscillations du mode g (mode de gravité) à la surface de la PNS (Fig. I.19, droite) (Radice et al., 2019). Ce mode de surface de la PNS peut

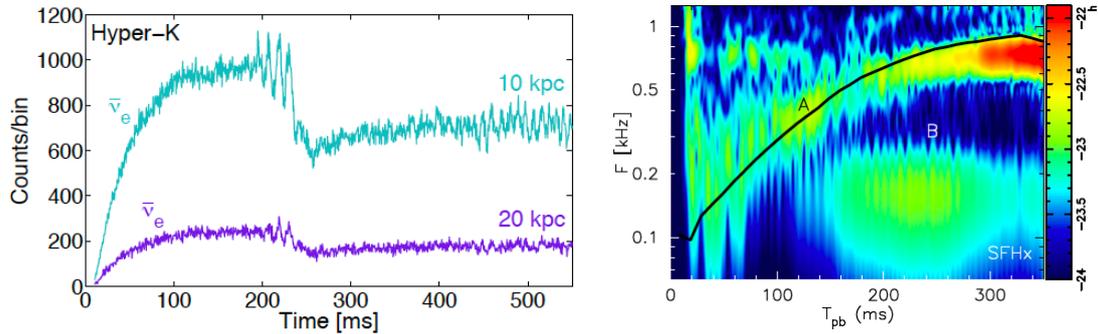


Figure I.19 – (gauche) Détections attendues en neutrinos en fonction du temps par le détecteur Hyper-Kamiokande pour une étoile de $27 M_{\odot}$ (Tamborra et al., 2013). (droite) Diagramme temps-fréquence du signal en ondes gravitationnelles prédit pour une étoile de $15 M_{\odot}$ sans rotation située à 10 kpc (Kuroda et al., 2016). La barre de couleur indique l'intensité de h , la signature caractéristique, en échelle logarithmique. En A le mode g de la PNS et en B la signature de SASI pour l'équation d'état « douce » SFHx ($M_{\text{PNS}}^{\text{max}} = 2.13 M_{\odot}$, Steiner et al., 2013). Dans les deux figures, l'échelle de temps commence au rebond marquant la formation de la PNS. Ces signatures fortes de SASI correspondent à un mode spiral.

être excité par la convection se développant au-dessus et en dessous de la surface de la PNS. Ce signal pourrait être détecté jusqu'à 17 kpc par LIGO/Virgo et 180 kpc par ET (Powell and Müller, 2019).

La seconde observation indirecte pourrait venir de la présence ou absence du signal d'une autre instabilité dans les signaux en ondes gravitationnelles. En effet, il est attendu que nous puissions détecter la signature de SASI autour de 100 Hz ainsi qu'une modulation périodique du signal en neutrinos. Si ces signaux ne sont pas observés, cela peut être le signe qu'un phénomène perturbe le développement de cette instabilité dans la zone choquée. Parmi les phénomènes possibles à faible rotation se trouve la convection (Müller, 2020).

SASI

SASI possède une fréquence propre produisant une modulation périodique du signal en neutrinos et une signature en ondes gravitationnelles (Fig. I.19). En ce qui concerne les ondes gravitationnelles, le lien entre la fréquence détectée et la fréquence de l'instabilité dépend du mode l . Pour les modes de degré 1, la fréquence détectée équivaut à deux fois la fréquence du mode. Pour les modes de degré 2, ces deux fréquences sont égales. La Figure I.19 montre la signature attendue de SASI en neutrinos et ondes gravitationnelles (Tamborra et al., 2013; Kuroda et al., 2016). SASI produit une modulation quasi-périodique du signal en neutrinos de plus grande amplitude (10 – 20%) que la convection, avec une fréquence de ~ 100 Hz suivant l'équation d'état et la taille de la région choquée. Cette modulation du signal n'a pas pu être identifiée en 1987 en raison d'un trop faible nombre de neutrinos détectés. Les améliorations des détecteurs laissent maintenant espérer une détection suffisante pour observer ces modulations à 10 kpc (Tamborra et al., 2013). La signature de SASI, autour de 100 Hz, peut aussi être vue dans le signal en ondes gravitationnelles sur la figure de droite de Fig. I.19. Sur la figure,

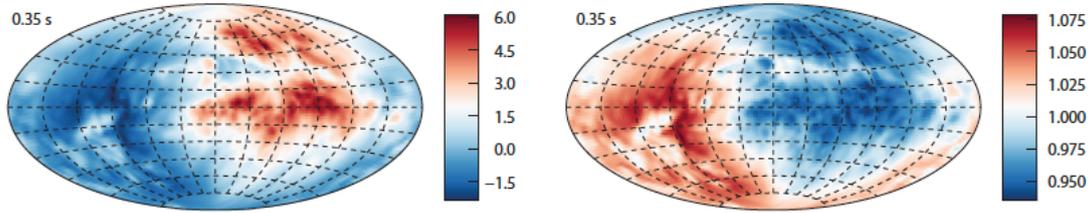


Figure 1.20 – (gauche) Carte du flux du nombre leptonique ($N_{\nu_e} - N_{\bar{\nu}_e}$), normalisé par sa moyenne sur la sphère, 350 ms après la création du choc. (droite) Carte du flux total d'énergie des neutrinos (e, μ, τ et leurs antiparticules), normalisé par sa moyenne sur la sphère, 350 ms après la création du choc. Crédit : [Janka et al. \(2016\)](#)

cela correspond au signal basse fréquence présent entre 150 et 300 ms après rebond. Il est attendu que cette signature en ondes gravitationnelles puisse, elle aussi, être observée jusqu'à 10 kpc avec les détecteurs actuels ([Kuroda et al., 2016](#); [Shibagaki et al., 2021](#)). Ce signal en ondes gravitationnelles peut être corrélé au signal obtenu en neutrinos ([Kuroda et al., 2017](#)). L'augmentation de SASI par la rotation rend cette instabilité plus forte et donc augmente le signal en ondes gravitationnelles ([Andresen et al., 2019](#)).

1.3.4 Asymétrie leptonique

Bien que la convection à l'intérieur de la PNS ne semble pas être le paramètre prédominant pour l'explosion de l'étoile, elle peut donner naissance à une autre instabilité d'asymétrie leptonique : LESA. Le phénomène LESA (« Lepton number Emission Self-sustained Asymmetry ») se manifeste dans les simulations par une asymétrie de la fraction électronique Y_e , correspondant à l'harmonique sphérique de degré $l = 1$, observée dans la zone convective de la PNS ([Tamborra et al., 2014](#)). La source de cette instabilité n'est cependant pas encore connue de façon sûre. Cette asymétrie pourrait être due à une asymétrie de la convection dans la PNS ([Powell and Müller, 2019](#); [Vartanyan et al., 2019](#)). Une plus forte convection dans une zone entraîne un meilleur transport des électrons d'une zone riche en leptons (zone interne) vers une zone de fraction électronique plus faible (zone externe) ([Janka et al., 2016](#)).

Cette instabilité pourrait avoir une répercussion sur le signal en (anti)neutrinos électroniques. L'asymétrie de fraction électronique dans la PNS peut en effet mener à une asymétrie des flux de neutrinos ν_e et $\bar{\nu}_e$ émis par la PNS et donc avoir une influence. Ce phénomène ayant été identifié dans plusieurs simulations utilisant diverses méthodes de transport des neutrinos, il semble robuste ([Glas et al., 2019a](#)). Il est attendu que les antineutrinos électroniques, émis préférentiellement par la partie de faible nombre leptonique, soient plus énergétiques ([Tamborra et al., 2014](#); [Janka, 2017](#)). Cette asymétrie d'énergie est illustrée dans la Fig. 1.20. En conséquence, l'absorption de ces neutrinos dans la région de gain est plus efficace pour chauffer la matière dans cette direction⁶. Cela pourrait donner une direction privilégiée à l'explosion et ainsi à la création du kick de la PNS.

Les premières études de simulations avec rotation semblent indiquer que la rotation tend à

6. La section efficace d'un neutrino augmente proportionnellement au carré de son énergie.

diminuer l'asymétrie du nombre leptonique (Walk et al., 2019).

Cette asymétrie est prédominante pour les (anti)neutrinos électroniques et peu présente pour les autres types. En l'absence d'oscillation des neutrinos (changement de type), elle se manifesterait par une forte asymétrie entre les détections de ν_e et $\bar{\nu}_e$ mais pas pour les autres types de neutrinos (Janka et al., 2016). Cette observation peut disparaître avec l'oscillation des neutrinos ainsi que selon l'angle d'observation de la supernova. De plus, les neutrinos ν_e et $\bar{\nu}_e$ étant absorbés respectivement par les neutrons et les protons, cette asymétrie d'émission des neutrinos peut mener à une asymétrie neutron/proton menant à différents produits de nucléosynthèse lors de l'explosion. Les implications en ondes gravitationnelles de cette asymétrie restent à déterminer (Powell and Müller, 2019).

1.3.5 L'instabilité low- $T/|W|$

Les instabilités décrites précédemment existent sans rotation et peuvent se trouver modifiées par cette dernière. Cependant, ce n'est pas le seul effet de la rotation. En effet, la rotation peut induire une instabilité due à la rotation différentielle dans l'étoile. Des modes d'instabilité $m = 1$ ou $m = 2$ peuvent apparaître sous l'effet de la rotation (Rampp et al., 1998; Shibata et al., 2000). Ces motifs sont observés dans les simulations numériques d'étoiles en rotation différentielle selon la valeur du rapport $\beta \equiv T/|W|$ où T est l'énergie cinétique de rotation et W l'énergie potentielle gravitationnelle. Il apparaît que les modes spiraux ($m = 1$) ou barres ($m = 2$), liés à la rotation différentielle, peuvent apparaître pour des valeurs de β de quelques pourcents ($\sim 6-8\%$) (Centrella et al., 2001; Shibata et al., 2002; Saijo et al., 2003; Ott et al., 2005), correspondant à des moments cinétiques spécifiques de l'ordre de $10^{15} - 10^{16} \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Ce résultat est surprenant car, pour des étoiles en rotation solide, le seuil d'apparition de ce type d'instabilité est plus élevé, de l'ordre de 27% (Ostriker and Tassoul, 1969). Il semble exister une relation entre l'existence d'un rayon de corotation dans la PNS⁷ et le développement de l'instabilité (Ott et al., 2005; Watts et al., 2005a; Passamonti and Andersson, 2015; Yoshida and Saijo, 2017; Shibagaki et al., 2020). Cependant, le seuil de rotation d'apparition de cette instabilité ainsi que le mécanisme physique à son origine nécessitent un approfondissement. D'autre part, pour obtenir cette instabilité, il est nécessaire d'inclure la PNS dans les simulations. En effet, elle se développe à partir d'un rayon d'environ 20 km. Lorsque la PNS n'est pas prise en compte, une instabilité différente de low- $T/|W|$ et liée à la corotation, peut apparaître dans la zone choquée (Kazeroni et al., 2017). Cependant, les bras spiraux de cette instabilité ne semblent pas apparaître systématiquement dans les simulations et cela nécessite un approfondissement sur une autre instabilité pouvant apparaître lorsque l'étoile est en rotation (Summa et al., 2018; Andresen et al., 2019).

Dans le cas d'une forte rotation initiale du cœur de fer ($\Omega \sim 2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$) il serait possible d'observer cette instabilité avec les détecteurs d'ondes gravitationnelles actuels (KAGRA-LIGO-Virgo) jusqu'à une distance de 10 kpc. Si cette instabilité se développait dans une supernova à 1 Mpc, seul le maximum d'émission serait observable par les détecteurs actuels, mais une grande partie du spectre serait observable par les deux futurs projets Einstein Telescope et Cosmic Explorer (Shibagaki et al., 2020, 2021).

7. Rayon pour lequel la fréquence de rotation d'un mode coïncide avec celle de la matière.

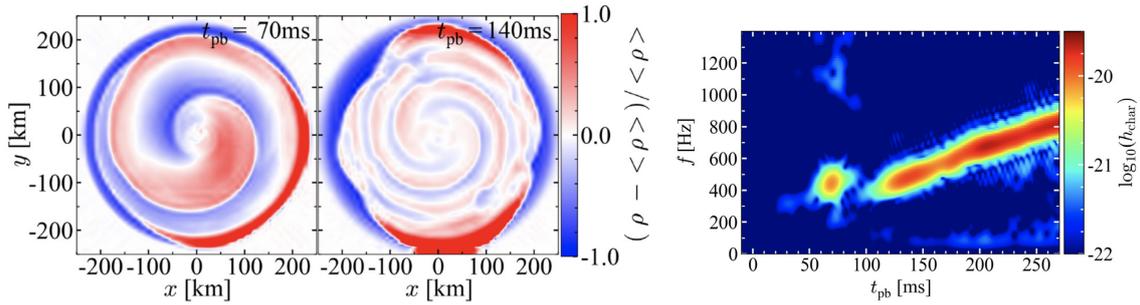


Figure I.21 – Contraste de densité dû à l’instabilité low- $T/|W|$ (gauche). Le mode $m = 1$ domine dans un premier temps puis le mode $m = 2$ prend le dessus. À droite, la signature en ondes gravitationnelles pour une étoile de $70 M_{\odot}$ située à 10 kpc. (Shibagaki et al., 2020)

Cependant, la prise en compte du champ magnétique dans ces études purement hydrodynamiques pourrait mener à une diminution de la vigueur de cette instabilité pour les fortes rotations, entraînant de plus forts champs magnétiques. En effet, l’instabilité est favorisée par une forte rotation différentielle, favorable aussi au développement de forts champs magnétiques. Ce champ magnétique peut permettre la redistribution du moment cinétique et donc être défavorable au développement de l’instabilité low- $T/|W|$. Cependant, des résultats contradictoires sont obtenus et des études plus poussées sont nécessaires afin de déterminer l’effet du champ magnétique sur l’instabilité, ainsi que les seuils d’apparition de ces effets (Muhlberger et al., 2014; Bugli et al., 2023).

I.3.6 Instabilités et simulations numériques

Les instabilités citées dans cette partie ont été découvertes au fur et à mesure des études et des simulations. Pour reproduire ces instabilités dans les simulations numériques, ces dernières doivent être multidimensionnelles ou utiliser une prescription ad hoc afin de prendre en compte les effets convectifs, intrinsèquement multidimensionnels, dans des simulations 1D. Le développement des simulations 3D utilisant des paramètres physiques de plus en plus réalistes (transport des neutrinos, équation d’état, structure de progéniteur, etc.) ont permis d’approfondir l’étude de ces instabilités. Cependant, leurs détails restent à étudier précisément afin de comprendre le comportement de chaque instabilité en fonction du progéniteur utilisé. De plus, les raisons et implications des phénomènes les plus récents (low- $T/|W|$ et LESA) sont encore peu étudiés en trois dimensions. Ainsi, les mécanismes précis des instabilités étant encore mal compris, des analyses linéaires sont nécessaires afin d’identifier les paramètres pertinents des instabilités. En effet, cet outil permet une meilleure compréhension des divers mécanismes en jeu que les simulations numériques. C’est dans le cadre de cette approche linéaire, complémentaire aux approches non-linéaires, que se place cette thèse.

I.4 Questions et enjeux de cette thèse

I.4.1 Les instabilités et leurs signaux

Si nous nous intéressons maintenant aux phénomènes internes à l'étoile, nous remarquons que beaucoup d'instabilités interviennent et peuvent mener à une explosion. En effet, nous avons montré précédemment que l'idée d'un simple rebond de la matière était insuffisant pour expliquer l'explosion et que le développement d'instabilités était nécessaire. Une fois que ces instabilités sont identifiées et bien comprises individuellement, il est nécessaire de comprendre dans quelles conditions elles vont pouvoir coexister et comment elles vont interagir et influencer les unes sur les autres. Ce dernier point est encore à l'étude, notamment dans la région de gain où convection et SASI peuvent se développer. Comprendre le comportement de ces instabilités est donc crucial pour comprendre le devenir de l'étoile.

Plusieurs approches complémentaires sont possibles pour ces études. Tout d'abord, les simulations numériques peuvent permettre de décrire les phénomènes dominant la dynamique au cœur de l'étoile. Ces études permettent des études de plus en plus réalistes en utilisant des simulations multi-dimensionnelles de l'effondrement de l'étoile. Cependant, ces simulations sont très coûteuses en temps de calcul et ne permettent donc pas une étude systématique de l'influence de chaque paramètre : rotation, métallicité, taux d'accrétion, luminosité des neutrinos, perturbations pré-effondrement du progéniteur. . . De plus, ces simulations ne donnent accès qu'aux modes les plus instables des différentes instabilités. Il n'est donc pas possible d'avoir accès à la stabilité marginale d'un mode précis. Enfin, plus le réalisme de ces simulations augmente, plus les résultats de simulations sont difficiles à analyser. Ces simulations nécessitent donc un premier travail en amont sur des modèles simplifiés et des études analytiques combinées à des études numériques.

Les études linéaires présentent des avantages et inconvénients complémentaires de cette approche réaliste. Les études linéaires, comme présentées dans cette thèse, sont des travaux simplifiés, n'incluant pas toute la physique (physique des neutrinos, équation d'état, relativité générale, magnétohydrodynamique, nucléosynthèse explosive, etc.). Cependant, elles permettent d'avoir une meilleure compréhension des différents mécanismes impliqués. Ce type d'analyse rend possible l'exploration quadrillée de l'espace des paramètres (rotation, dissociation, rayon du choc, etc.) et, ainsi, permet d'identifier les paramètres pertinents dont la variation peut mener aux résultats attendus (explosion, énergie, etc.). Pour cela, la définition linéaire de critères regroupant plusieurs de ces paramètres (ex. : χ), permet de réduire l'espace des paramètres et ainsi faciliter son exploration pour les simulations futures. C'est dans ce cadre d'études en amont des simulations que se place ma thèse.

Je me suis concentrée sur l'étude de deux instabilités hydrodynamiques dans la zone choquée : la convection due aux neutrinos et SASI. Dans le Chap. II, nous verrons les différents paramètres de notre étude, ainsi que ses limites. Nous avons ensuite repris le critère d'instabilité convective χ établi en 2006 afin de le rendre plus général à l'aide d'un modèle simple plan. Afin de compléter cette première étude simplifiée, nous avons étudié l'évolution de ce critère dans le cas d'un effondrement sphérique qui inclut l'instabilité SASI (Chap. III).

I.4.2 La rotation stellaire

L'étude des supernovæ peut être un moyen de poser des contraintes sur la rotation au cœur des étoiles pré-effondrement ainsi que sur les taux de rotation des objets compacts formés post-effondrement. Nous avons évoqué plus tôt que l'étude des effets de la rotation sur la dynamique de l'étoile était un enjeu à la fois pour les études de rotation stellaire et de population des objets compacts. Cependant, cet effet est encore peu étudié pour les rotations intermédiaires, sans champ magnétique. Des études linéaires sans chauffage ainsi que des simulations ont étudié son impact sur SASI. Des simulations à forte rotation ont montré l'émergence de l'instabilité $\text{low-T}/|W|$. Néanmoins, l'effet de la rotation sur la convection reste peu contraint lorsqu'on s'éloigne des pôles. Ainsi, nous nous intéressons, dans le Chap. IV, à l'effet de la rotation sur les instabilités SASI et convectives. En particulier, nous avons étudié l'influence de la rotation du cœur sur la transition d'un régime dominé par SASI à un régime dominé par la convection.

Chapitre II

Méthodes perturbatives

Sommaire

II.1 La physique commune	56
II.1.1 L'état stationnaire	56
II.1.2 Le flot perturbé	58
II.2 Méthodes	59
II.2.1 Géométrie plane	59
II.2.1.a Étude analytique en l'absence d'advection	59
II.2.1.b Code perturbatif avec advection	60
II.2.2 Géométrie sphérique	64
II.2.2.a Code numérique	64
II.2.2.b Analyse énergétique	66

Dans ce chapitre, nous allons décrire la démarche suivie afin d'étudier le développement des instabilités de convection et SASI dans le contexte d'explosion d'une étoile. Nous allons voir dans une première partie la physique générale prise en compte dans les modèles étudiés. Nous allons ensuite aborder plus en détail les études analytiques puis les codes numériques ayant permis cette étude. Ce chapitre décrit ces deux étapes pour deux modèles différents. Nous commençons par un modèle simplifié plan puis passons à l'étude d'un modèle sphérique plus adapté aux supernovæ.

II.1 La physique commune

L'hypothèse de condition initiale de notre approche est que nous avons un flot stationnaire. Cette hypothèse de stationnarité du fluide se justifie par l'évolution du rayon du choc. En effet, les simulations numériques montrent qu'au bout de ~ 50 ms, le rayon du choc moyen se stabilise autour de 200 km pendant quelques dizaines à quelques centaines de millisecondes selon les simulations effectuées (Burrows et al., 2012; Nakamura et al., 2019; Pan et al., 2021; Nagakura et al., 2020; Burrows and Vartanyan, 2021). L'écoulement stationnaire est ensuite soumis à des perturbations de faible amplitude afin de rester dans le régime linéaire. Le calcul de l'évolution dynamique ultime des instabilités, au-delà de l'approximation perturbative, nécessite des simulations numériques complexes. Malgré cette limitation, le calcul perturbatif est précieux car il prédit efficacement les fréquences observables dans le signal en ondes gravitationnelles. En effet, Torres-Forné et al. (2019b) a montré qu'une moyenne angulaire du flot hors équilibre pouvait servir de condition initiale à l'analyse linéaire et fournir des fréquences de modes cohérentes avec les fréquences directement extraites des simulations numériques. Ainsi, l'analyse linéaire des modes est un outil utile d'interprétation des futures observations d'ondes gravitationnelles.

II.1.1 L'état stationnaire

Pour toute cette étude, les grandeurs physiques considérées sont :

- la pression : P ,
- la vitesse du son : c ,
- la densité : ρ ,
- la vitesse du fluide : v ,
- l'entropie sans dimension : $S \equiv \frac{1}{\gamma-1} \log \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right)$.

Les trois premières grandeurs sont liées via l'équation d'état $P = \rho c^2 / \gamma$, où γ est l'indice adiabatique. Pour un gaz relativiste, comme c'est le cas au cœur de l'étoile, γ vaut $4/3$. Plus on se rapproche de la PNS, plus l'équation d'état se « durcit » et γ devient proche de 2.5 à l'intérieur de la PNS (Bethe et al., 1979; Fischer et al., 2011). Ce changement d'indice adiabatique n'est pas pris en compte dans notre étude et on utilise $\gamma = 4/3$.

Pour modéliser le chauffage et refroidissement de la matière via l'absorption et l'émission de neutrinos, nous introduisons une fonction de chauffage \mathcal{L}_h et une fonction de refroidissement \mathcal{L}_c . Ces deux termes de signes opposés constituent la fonction globale de chauffage/refroidissement non adiabatique $\mathcal{L} = \mathcal{L}_h + \mathcal{L}_c$.

Le lien entre les grandeurs pré-choc et post-choc est assuré par les relations de Rankine-

Hugoniot. Ces dernières assurent la conservation de la masse, de l'énergie et de la quantité de mouvement à travers le choc :

$$\rho_1 v_1 = \rho_{\text{sh}} v_{\text{sh}}, \quad (\text{II.1})$$

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{c_1^2}{\gamma - 1} = \frac{v_{\text{sh}}^2}{2} + \frac{c_{\text{sh}}^2}{\gamma - 1} + \varepsilon \frac{v_{\text{ff}}^2}{2}, \quad (\text{II.2})$$

$$P_1 + \rho_1 v_1^2 = P_{\text{sh}} + \rho_{\text{sh}} v_{\text{sh}}^2, \quad (\text{II.3})$$

où les indices « 1 » et « sh » se réfèrent respectivement à la matière au-dessus et juste en dessous du choc. ε est la fraction d'énergie cinétique spécifique de chute libre incidente au choc $v_{\text{ff}}^2/2$ (donnée Eq. (I.10)), utilisée pour dissocier les atomes de fer, avec

$$v_{\text{ff}}^2 = \frac{2GM}{r_{\text{sh}}}. \quad (\text{II.4})$$

Dans nos calculs, la valeur de ε est évaluée dans la situation où le chauffage et la rotation sont nuls. Lorsque ces derniers augmentent, le rayon du choc augmente, entraînant une diminution de la vitesse de chute libre au niveau du choc. Ainsi, la valeur effective de ε dépend de la valeur du rayon du choc et de sa variation par rapport à la situation sans rotation, chauffage ou dissociation.

L'évolution des grandeurs dans la zone choquée est déterminée via les équations de conservation de la masse, d'Euler et de conservation de l'énergie qui dépendent de la géométrie du système choisi.

Les éléments physiques qui ne sont pas pris en compte dans cette étude sont les réactions nucléaires, le champ magnétique, la relativité générale et la seule source de gravité considérée est la gravité due à la PNS. La dynamique convective de l'intérieur de la PNS, pouvant entraîner une légère augmentation de la luminosité des neutrinos (Buras et al., 2006a), n'est pas prise en compte. Nous négligeons aussi la déformation équatoriale par la force centrifuge et la diminution graduelle du rayon de la PNS par refroidissement.

Dans tout le Chap. III, la rotation de la matière n'est pas prise en compte. Ainsi, le champ magnétique généré dans cette situation est dû à la contraction de la matière et la turbulence. Cela ne semble pas impacter de façon significative la dynamique du choc (Endeve et al., 2012). Cependant, lorsque nous introduisons la rotation, ces résultats ne sont plus valides. Plusieurs arguments nous poussent alors à ne pas prendre en compte le développement du champ magnétique dans nos considérations. Tout d'abord, l'impact d'un champ magnétique modéré sur la dynamique au cœur de l'étoile est encore peu connu et à l'étude. Ensuite, les champs magnétiques initialement forts représentent une faible fraction de progéniteurs, ce qui limite notre étude à quelques types de supernovæ. Enfin, l'échelle de temps sur laquelle se développe un fort champ magnétique est mal connue et pourrait être supérieure aux temps de développement des instabilités convective et SASI, rendant précoce leur prise en compte dans la phase linéaire.

Nous négligeons l'autogravité de la matière hors de la PNS car, en supposant une densité moyenne de 10^9g.cm^{-3} dans la région post-choc (Mabanta et al., 2019), et des rayons $R_{\text{PNS}} = 50 \text{ km}$ et $R_{\text{sh}} = 200 \text{ km}$, on obtient une masse de $\sim 10^{-2} M_{\odot}$. Cette masse est donc négligeable devant les $\sim 1.4 M_{\odot}$ de la PNS.

La contraction de la PNS, liée aux différentes équations d'état pouvant être utilisées, est un effet non négligeable lorsque l'on veut prendre en compte l'énergie des neutrinos émis par cette PNS. En effet, une contraction plus forte de la PNS entraîne une température d'émission des neutrinos plus élevée et donc une plus grande énergie de ces derniers. D'après notre compréhension du phénomène d'explosion, cette augmentation de la luminosité des neutrinos favoriserait la relance du choc et donc l'explosion (Yasin et al., 2020). La prise en compte de la contraction de la PNS pourrait aussi avoir un effet sur SASI et la convection (Scheck et al., 2008). Ce résultat est cependant en partie dû à une augmentation du taux de chauffage par les neutrinos. Cette variation du taux de chauffage est prise en compte dans notre approche paramétrique de la région post-choc.

La luminosité des neutrinos est aussi affectée par la prise en compte de la relativité générale. En effet, cela induit la formation d'une PNS plus compacte et donc une luminosité de neutrinos plus élevée (Kuroda et al., 2012), favorable à l'explosion. Cette augmentation de la luminosité des neutrinos ($\sim 15\%$ pour les antineutrinos électroniques) induit une plus forte énergie cinétique spécifique non radiale dans la région de gain lorsque la relativité générale est prise en compte. Cela représente une augmentation de 100% de cette énergie dans la région de gain par rapport à une gravité newtonienne (Müller et al., 2012b). L'explosion est ainsi favorisée par la relativité générale.

II.1.2 Le flot perturbé

Nous souhaitons étudier les instabilités de façon analytique et numérique. Pour cela, nous nous concentrons sur la phase linéaire de développement des instabilités, valide tant que l'amplitude des perturbations reste petite devant les grandeurs de l'état stationnaire. Pendant cette phase, les différents modes n'interagissent pas entre eux et l'évolution temporelle des perturbations peut être décrite avec une exponentielle temporelle $\exp(-i\omega t)$. La fréquence propre ω est un nombre complexe qui caractérise la stabilité d'un mode. La partie réelle de la fréquence propre, ω_r , mesure la fréquence des perturbations de période $2\pi/\omega_r$:

- si $\omega_r > 0$ le mode est oscillant,
- si $\omega_r = 0$, le mode ne correspond pas à un phénomène oscillant.

La partie imaginaire ω_i de ω correspond au taux de croissance et renseigne sur le caractère instable du développement des perturbations :

- si $\omega_i < 0$, le système est stable,
- si $\omega_i = 0$, le système est à la limite entre stabilité et instabilité (stabilité marginale),
- si $\omega_i > 0$, les perturbations sont amplifiées, le système est instable.

Les grandeurs physiques perturbées sont exprimées avec la notation suivante :

- $P = P_0 + \delta P$,
- $\vec{v} = v_0 + \vec{\delta v}$,
- $c = c_0 + \delta c$,
- $\rho = \rho_0 + \delta \rho$.

II.2 Méthodes

Nous avons choisi d'étudier le problème du développement de la convection dans la région de gain d'un choc de supernova avec une physique de plus en plus réaliste. Nous avons commencé par étudier le problème en géométrie plane, qui permet de simplifier la dynamique convective en empêchant le développement d'une instabilité de type SASI. Nous avons ensuite étudié l'effet de la géométrie sphérique dans un cas proche de la physique des supernovæ où l'instabilité SASI peut se développer et où la rotation de l'étoile peut être prise en compte.

II.2.1 Géométrie plane

Dans un premier temps, l'approche en géométrie plane nous permet de développer une intuition physique du phénomène grâce à une étude simplifiée analytique. Nous avons utilisé, pour cette étude, deux approches complémentaires. Nous avons considéré numériquement l'évolution de la stabilité marginale de la convection ($\omega_i = 0$) en présence d'advection. Cette approche est complétée par une approche analytique de calcul du taux de croissance de l'instabilité quand l'advection n'est pas prise en compte. Cela permet de mieux interpréter les résultats numériques et déterminer le comportement dû à l'advection. Cela est utile afin de déterminer un critère de stabilité analytique.

Pour les deux approches, analytiques et numériques, nous supposons une absence de réflexion des ondes.

II.2.1.a Étude analytique en l'absence d'advection

Nous avons étudié analytiquement le taux de croissance de l'instabilité convective en l'absence d'advection afin de caractériser l'évolution de l'instabilité convective seule. Une hypothèse d'adiabaticité simplificatrice a été faite pour cette analyse. Notre étude se limite à la région de gain et ne considère pas la région de refroidissement se trouvant dessous. Bien que le chauffage soit pris en compte dans l'état stationnaire, les perturbations sont supposées adiabatiques $\delta(\mathcal{L}) = 0$. L'étude de la validité de cette hypothèse nécessite néanmoins un approfondissement. Cependant, il faut noter que les Eqs. (B10-B13) de [Kazeroni et al. \(2018\)](#) correspondent à un régime pour lequel l'évolution des perturbations est strictement adiabatique. Ces équations ont permis un calcul analytique du seuil de stabilité dans la limite d'un faible nombre de Mach, d'un faible chauffage et d'une faible gravité, en accord avec le calcul numérique. Le mécanisme responsable de la stabilisation advective de la convection est donc adiabatique au moins dans cette limite.

L'analyse du système et de ses fréquences propres, pour ces hypothèses, se trouve dans les annexes [A](#) et [B](#).

II.2.1.b Code perturbatif avec advection

Pour le code perturbatif plan, nous avons considéré un modèle proche du modèle utilisé dans [Kazeroni et al. \(2018\)](#). Dans ces travaux, les auteurs considèrent une échelle caractéristique pour leur modèle : H_g . Une fonction de chauffage est définie sur toute la région de leur calcul ($[-H_g, H_g]$). De plus, la gravité hors de cette région est négligée. Ils utilisent une fonction rampe $\psi(z)$, adaptée pour notre modèle, afin de déterminer les profils des fonctions de chauffage (indice S) et de gravité (indice g). Nous explicitons ici ψ utilisé par [Kazeroni et al. \(2018\)](#), que nous appelons ψ_g pour notre étude :

$$\psi_g \equiv \begin{cases} 1 & , \text{ si } |z| \leq x_g H_g, \\ \frac{H_g - |z|}{H_g(1 - x_g)} & , \text{ si } x_g H_g < |z| \leq H_g, \\ 0 & , \text{ si } H_g < |z|, \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

où le facteur x_g est un paramètre d'entrée et vaut 1/2 dans l'étude de [2018](#). Dans ce modèle, la région $[-H_g, H_g]$ correspond à la taille de la région de gain. On peut alors exprimer l'intensité adimensionnée de la gravité K_g dans cette région comme :

$$K_g \equiv \nabla \Phi \frac{H_g}{c_{\text{up}}^2} \psi_g(z), \quad (\text{II.6})$$

avec Φ le potentiel gravitationnel et l'indice « up » désignant les grandeurs à la borne supérieure de la région ($z = H_g$). Dans la suite de notre étude, les grandeurs du flot stationnaire seront notées x ou x_0 , de façon équivalente, et les valeurs perturbées δx . Dans notre travail, nous introduisons une nouvelle grandeur caractéristique H_S permettant de décrire l'échelle spatiale du chauffage. La fonction de chauffage dans notre modèle peut alors s'exprimer comme :

$$\mathcal{L} \equiv K_H \left(\frac{\rho_{\text{up}} \mathcal{M}_{\text{up}} c_{\text{up}}^3}{\gamma H_S} \right) \left(\frac{\rho}{\rho_{\text{up}}} \right) \psi_S(z) \quad (\text{II.7})$$

avec $K_H \equiv H_S \nabla S$ et S l'entropie. Dans l'Eq. (II.7), la fonction $\psi_S(z)$ est définie comme la fonction $\psi_g(z)$, en remplaçant les indices « g » de la gravité par l'indice « S » du chauffage. Ainsi, l'état stationnaire dans notre modèle correspond à la situation décrite en Fig. II.1. Nous reprenons donc la démarche de [Kazeroni et al. \(2018\)](#) en utilisant une zone de chauffage plus localisée que dans leur étude.

Avec cette fonction de chauffage et en considérant une vitesse d'advection de la matière selon z telle que $\vec{v} = \vec{v}_0 + \delta \vec{v}$, le système d'équations stationnaires s'écrit comme :

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho v) = 0, \quad (\text{II.8})$$

$$\frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\mathcal{L}}{Pv}, \quad (\text{II.9})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} + \Phi \right) = \frac{\mathcal{L}}{\rho v}. \quad (\text{II.10})$$

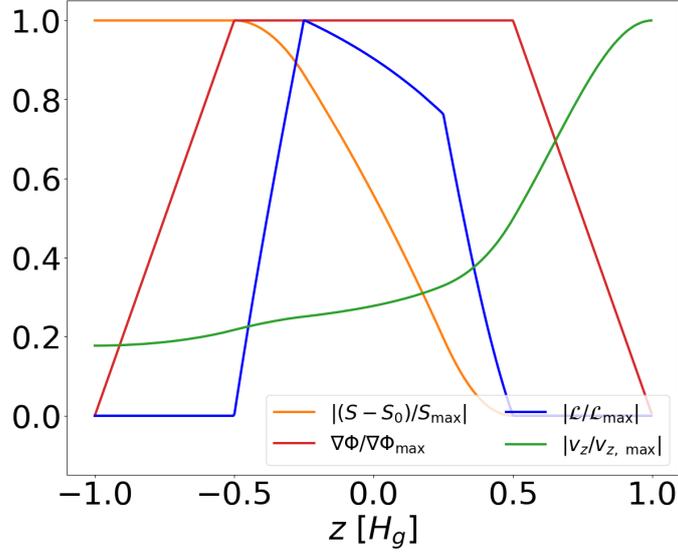


Figure II.1 – Profils des grandeurs pour $H_S = H_g/2$, $x_S = x_g = 1/2$, $K_H = 1$, $K_g = 3$ et $\mathcal{M}_{\text{up}} = 0.3$.

D'autre part, nous supposons que le système stationnaire est uniforme selon k_x , le nombre d'onde horizontal, et donc les perturbations peuvent s'écrire comme : $\exp(-i\omega t + ik_x x)$, avec $k_x > 0$.

Afin de simplifier le système d'équations à résoudre, nous effectuons un changement de variable pour résoudre l'état perturbé. Cela nous mène à considérer les variables δf , δh , δS et δK introduites dans Foglizzo et al. (2006) et définies par

$$\delta f \equiv v\delta v + \frac{2c}{\gamma - 1}\delta c - \delta q, \quad (\text{II.11})$$

$$\delta h \equiv \frac{\delta v}{v} + \frac{\delta \rho}{\rho}, \quad (\text{II.12})$$

$$\delta S \equiv \frac{2}{\gamma - 1} \frac{\delta c}{c} - \frac{\delta \rho}{\rho}, \quad (\text{II.13})$$

$$\delta K \equiv ivk_x\delta w_y + \frac{k_x^2 c^2}{\gamma}\delta S (= k_x^2\delta f_{\text{sh}} - \omega k_x\delta v_x). \quad (\text{II.14})$$

où δw_y est la perturbation de vorticité. Le système d'équations perturbées linéarisé au premier

ordre est donc :

$$\frac{\partial \delta f}{\partial z} = \frac{i\omega}{v_0(1-\mathcal{M}^2)} \left\{ v_0^2 \delta h - \delta f \mathcal{M}^2 + c^2 [1 + (\gamma - 1) \mathcal{M}^2] \frac{\delta S}{\gamma} \right\} + \delta \left(\frac{\mathcal{L}}{\rho v} \right), \quad (\text{II.15})$$

$$\frac{\partial \delta h}{\partial z} = \frac{i\omega}{vc^2(1-\mathcal{M}^2)} (\mu^2 \delta f - v_0^2 \delta h - c^2 \delta S) + i \frac{\delta K}{v_0 \omega}, \quad (\text{II.16})$$

$$\frac{\partial \delta S}{\partial z} = \frac{i\omega}{v_0} \delta S + \delta \left(\frac{\mathcal{L}}{Pv_0} \right), \quad (\text{II.17})$$

$$\frac{\partial \delta K}{\partial z} = \frac{i\omega}{v_0} \delta K + k_x^2 \delta \left(\frac{\mathcal{L}}{\rho v_0} \right), \quad (\text{II.18})$$

avec

$$\mu^2 \equiv 1 - \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2} (1 - \mathcal{M}^2) \quad (\text{II.19})$$

Dans le cas où la borne supérieure est un choc, les grandeurs perturbées sont initialisées afin de conserver les relations de Rankine-Hugoniot (Eqs. II.1-II.3) :

$$\delta f_{\text{sh}} = (v_{\text{sh}} - v_1) \Delta v + \Delta \zeta \left(\frac{\mathcal{L}_1}{\rho_1 v_1} - \frac{\mathcal{L}_{\text{sh}}}{\rho_{\text{sh}} v_{\text{sh}}} \right), \quad (\text{II.20})$$

$$\delta h_{\text{sh}} = \left(\frac{1}{v_{\text{sh}}} - \frac{1}{v_1} \right) \Delta v, \quad (\text{II.21})$$

$$\delta S_{\text{sh}} = \frac{\Delta \zeta}{c_{\text{sh}}^2} \left[\frac{\mathcal{L}_1}{\rho_1 v_1} - \frac{\mathcal{L}_{\text{sh}}}{\rho_{\text{sh}} v_{\text{sh}}} - G \left(1 - \frac{v_{\text{sh}}}{v_1} \right) \right] - \frac{v_1 \Delta v}{c_{\text{sh}}^2} \left(1 - \frac{v_{\text{sh}}}{v_1} \right)^2, \quad (\text{II.22})$$

$$\delta v_{x, \text{sh}} = ik_x \Delta \zeta (v_1 - v_{\text{sh}}) \quad (\text{II.23})$$

avec $\Delta \zeta$ la variation de position du choc et $\Delta v \equiv -i\omega \Delta \zeta$ la vitesse de déplacement du choc.

Dans le cas où la borne supérieure n'est pas un choc, on impose une condition d'onde sortante. C'est-à-dire que les ondes acoustiques peuvent sortir du domaine mais aucune onde acoustique ou perturbation ne peut entrer par la borne supérieure. Cela se traduit par

$$\delta f = 1, \quad (\text{II.24})$$

$$\delta h = -\frac{\mu}{\mathcal{M}c^2} \delta f, \quad (\text{II.25})$$

Pour la condition limite à la borne inférieure, on considère une condition d'onde acoustique sortante. Comme pour la borne supérieure sans choc, cela implique qu'aucune onde acoustique ou perturbation ne peut entrer par la borne inférieure. Cela revient à imposer l'Eq. (34) de [Foglizzo et al. \(2006\)](#) :

$$\frac{\mu}{\mathcal{M}c^2} \delta f - \left(1 + \frac{\mu}{\gamma \mathcal{M}} \frac{1 - \mathcal{M}^2}{1 + \mu \mathcal{M}} \right) \delta S + \frac{1 - \mathcal{M}^2}{\omega^2 (1 - \mu \mathcal{M})} \delta K - \delta h = 0 \quad (\text{II.26})$$

Dans ce code, nous utilisons la méthode de Newton-Raphson afin de déterminer numériquement le flot stationnaire ainsi que les perturbations satisfaisant les conditions limites imposées. Ce code nous permet d'étudier deux aspects de l'instabilité. Tout d'abord, nous pouvons calculer

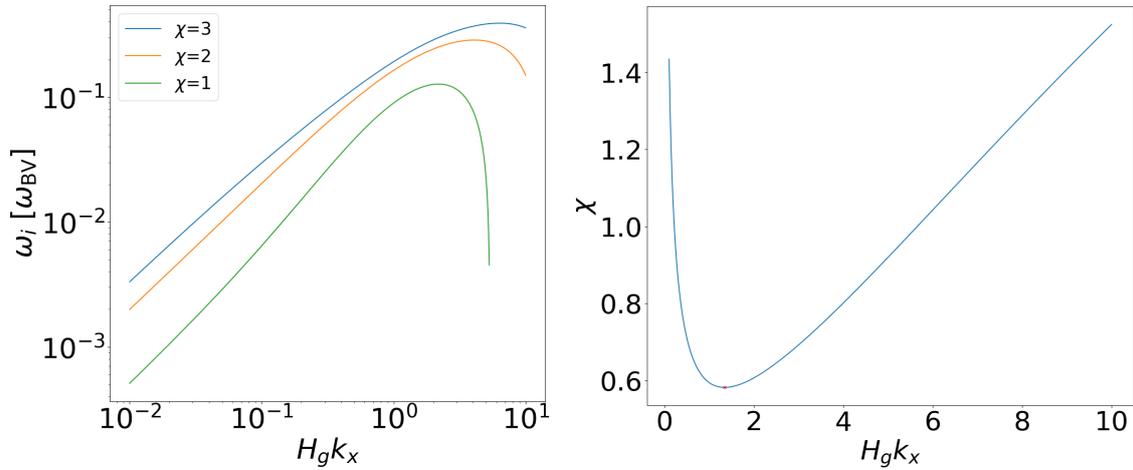


Figure II.2 – Évolution du taux de croissance et de χ marginal en fonction du nombre d'onde horizontal k_x , pour les paramètres $\mathcal{M}_1 = 0.3$, $\gamma = 4/3$, $K_g = 3$, $H_S = 0.1H_g$ et $H_g = 1$. Le taux de croissance est normalisé par la fréquence de Brunt-Väisälä ω_{BV} .

le taux de croissance de l'instabilité pour une valeur de χ fixée. L'autre étude possible à partir de ce code, et celle sur laquelle nous nous sommes concentrés, est le calcul du chauffage critique de stabilité marginale ($\omega_i = 0$) en fonction des longueurs d'onde horizontales considérées. Les paramètres d'entrée communs à ces deux approches du code sont :

- le nombre de Mach incident \mathcal{M}_1 ,
- la taille de la zone de chauffage H_S ,
- la taille de la zone de gravité H_g ,
- l'intensité de la gravité $K_g = gH_g/c^2$,
- l'indice adiabatique γ .

Si on souhaite étudier l'évolution de l'instabilité à un chauffage donné, un dernier paramètre doit être donné en entrée du code : la valeur souhaitée de χ . Si c'est la stabilité marginale qui est intéressante, alors $\omega_i = 0$ est fixé et la valeur de χ est adaptée par la méthode de Newton-Raphson. Ainsi, nous pouvons obtenir les deux figures données en Fig. II.2 avec l'évolution du taux de croissance ou de χ en fonction du nombre d'onde k_x considéré.

Les approches analytiques et numériques détaillées ici seront utiles dans le Chap. III où nous les utiliserons afin de démontrer la nécessité d'affiner le critère de développement de la convection établi par Foglizzo et al. (2006). Elles seront ensuite utilisées pour déterminer un nouveau critère, plus prédictif.

II.2.2 Géométrie sphérique

Bien que l'analyse plane permette une bonne compréhension des phénomènes physiques, il est nécessaire d'introduire une étude en géométrie sphérique afin de se rapprocher de la géométrie réelle de l'objet que l'on souhaite étudier : le cœur d'une étoile massive. Cette approche sphérique est utilisée pour deux études. Une première étude prend en compte toute la sphère à rotation nulle et la seconde étude se concentre sur l'évolution des instabilités dans le plan équatorial lorsque la rotation est prise en compte. Cette restriction au plan équatorial permet une description précise des forces centrifuge et de Coriolis et a été utilisée dans plusieurs travaux étudiant l'influence de la rotation sur SASI en géométrie cylindrique (Yamasaki and Foglizzo, 2008) ou sphérique (Blondin et al., 2017; Walk et al., 2022).

II.2.2.a Code numérique

Pour cette approche, un second code est utilisé. Cet outil nous permet de suivre l'évolution de plusieurs modes, correspondant chacun à une harmonique sphérique $Y_{l,m}$, et leurs harmoniques de fréquences supérieures, et ainsi voir l'émergence de différentes instabilités lorsque l'intensité du chauffage par les neutrinos est variée. La forme de la fonction de chauffage/refroidissement utilisée ici est différente du cas plan et s'exprime comme une fonction de chauffage \mathcal{L}_h et une fonction de refroidissement \mathcal{L}_c possédant chacune une intensité propre et pouvant agir séparément :

$$\mathcal{L}_h = A_h \frac{\rho}{r^2} \quad (II.27)$$

$$\mathcal{L}_c = -A_c \rho^{\beta-\alpha} P^\alpha, \quad (II.28)$$

où A_h et A_c sont les intensités respectives du chauffage et du refroidissement. Ces deux processus de chauffage/refroidissement sont pris en compte par une fonction globale $\mathcal{L} = \mathcal{L}_h + \mathcal{L}_c$.

Dans ce code, le système d'équations stationnaires est modifié par l'effet de convergence de la matière en géométrie sphérique :

$$\frac{\partial}{\partial r} (\rho v r^2) = 0, \quad (II.29)$$

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\mathcal{L}}{Pv}, \quad (II.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{J}{2r^2} + \frac{c^2}{\gamma-1} - \frac{GM}{r} \right) = \frac{\mathcal{L}}{\rho v}, \quad (II.31)$$

où J est le moment cinétique spécifique, G la constante gravitationnelle universelle et M la masse de la PNS. Dans un premier temps, nous avons étudié le cas $J = 0$.

Le système perturbé est, lui aussi, modifié par le changement de géométrie. Pour cette nouvelle approche perturbative, nous utilisons le système de variable utilisé par Yamasaki and

Foglizzo (2008) qui permet de simplifier les équations sous la forme :

$$\frac{d}{dr} \frac{\delta f}{\omega} = \frac{ic^2}{v(1-\mathcal{M}^2)} \left\{ \mathcal{M}^2 \left(\delta h - \frac{\omega'}{c^2} \frac{\delta f}{\omega} \right) + [1 + (\gamma - 1) \mathcal{M}^2] \frac{\delta S}{\gamma} - \frac{\delta q}{c^2} \right\}, \quad (\text{II.32})$$

$$\frac{d\delta h}{dr} = \frac{i\omega}{v(1-\mathcal{M}^2)} \left(\mu^2 \frac{\omega'}{c^2} \frac{\delta f}{\omega} - \mathcal{M}^2 \delta h - \delta S + \frac{\delta q}{c^2} \right), \quad (\text{II.33})$$

$$\frac{d\delta S}{dr} = \frac{i\omega'}{v} \delta S + \delta \left(\frac{\mathcal{L}}{\rho v} \right), \quad (\text{II.34})$$

$$\frac{d\delta q}{dr} = \frac{i\omega'}{v} \delta q + \delta \left(\frac{\mathcal{L}}{\rho v} \right), \quad (\text{II.35})$$

où les variables $(\delta f, \delta h, \delta S)$ sont les mêmes grandeurs que celles définies dans le système (II.11)–(II.13) avec une composante supplémentaire v_ϕ pour le vecteur vitesse. δq est définie dans Yamasaki and Foglizzo (2008) par :

$$\delta q \equiv \delta \left(\int \frac{\mathcal{L}}{\rho v} dr \right). \quad (\text{II.36})$$

Dans le système différentiel perturbé, on définit :

$$\omega' \equiv \omega - \frac{mJ}{r^2}, \quad (\text{II.37})$$

$$\mu^2 \equiv \begin{cases} 1 - \frac{l(l+1)}{r^2} \frac{c^2}{\omega'^2} (1 - \mathcal{M}^2), & \text{si } J = 0, \\ 1 - \frac{m^2}{r^2} \frac{c^2}{\omega'^2} (1 - \mathcal{M}^2), & \text{si } J \neq 0, \end{cases} \quad (\text{II.38})$$

où la grandeur ω' correspond à la pulsation du phénomène physique, déplacée par effet Doppler, et l et m le degré et l'ordre de l'harmonique sphérique $Y_{l,m}$ considérée. La transformation du terme $l(l+1)$ en m^2 vient du fait que seul le plan équatorial est considéré lorsque la rotation est introduite. La différence que ces deux formules de μ^2 induisent dans les courbes de taux de croissance sans rotation est représentée dans la Fig. II.3.

Comme précédemment, les conditions limites des perturbations au niveau du choc s'expriment grâce aux équations de conservation de Rankine-Hugoniot :

$$\frac{\delta f_{\text{sh}}}{\omega} = i v_1 \Delta \zeta \left(1 - \frac{v_{\text{sh}}}{v_1} \right), \quad (\text{II.39})$$

$$\delta h_{\text{sh}} = -i \frac{\omega'}{v_{\text{sh}}} \Delta \zeta \left(1 - \frac{v_{\text{sh}}}{v_1} \right), \quad (\text{II.40})$$

$$\delta S_{\text{sh}} = i \frac{\omega' v_1}{c_{\text{sh}}^2} \Delta \zeta \left(1 - \frac{v_{\text{sh}}}{v_1} \right)^2 - \frac{\mathcal{L}_{\text{sh}} - \mathcal{L}_1}{\rho_{\text{sh}} v_{\text{sh}}} \frac{\Delta \zeta}{c_{\text{sh}}^2} + \left(1 - \frac{v_{\text{sh}}}{v_1} \right) \frac{\Delta \zeta}{c_{\text{sh}}^2} \left(\frac{2v_1 v_{\text{sh}}}{r_{\text{sh}}} + \frac{J^2}{r_{\text{sh}}^3} + \frac{GM}{r_{\text{sh}}^2} \right), \quad (\text{II.41})$$

$$\delta q_{\text{sh}} = -\frac{\mathcal{L}_{\text{sh}} - \mathcal{L}_1}{\rho_{\text{sh}} v_{\text{sh}}} \Delta \zeta, \quad (\text{II.42})$$

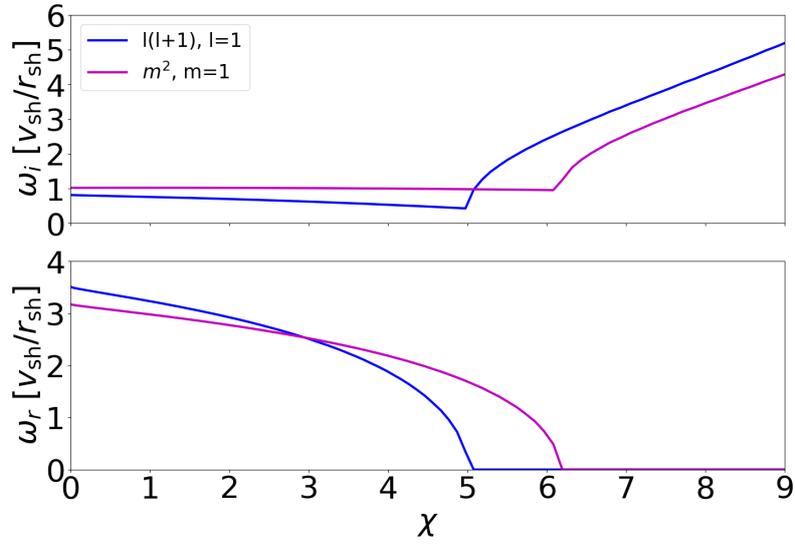


Figure II.3 – Différence de modes propres en fonction du chauffage pour les deux expressions de μ^2 (Eq.II.38).

où $\Delta\zeta$ est le déplacement du choc et les indices «1» et «sh» indiquent les valeurs respectivement au-dessus et en dessous du choc.

Comme précédemment, nous utilisons la méthode de Newton-Raphson afin de déterminer les paramètres permettant l'annulation de la vitesse radiale à la surface de la PNS tels que le taux de refroidissement ou le rayon du choc. Ainsi, lorsque le taux de chauffage augmente, le rayon du choc est adapté (augmente) afin de conserver la condition limite au bord interne. Nous adoptons alors la notation suivante :

- r_{sh} représente le rayon du choc dans les conditions précisées,
- r_{sh0} représente le rayon du choc sans chauffage, rotation et dissociation.

Ces analyses numériques en géométrie sphérique sont utilisées dans les Chaps. III et IV. Dans le premier de ces deux chapitres, ces calculs servent à déterminer un critère convectif en géométrie sphérique et sans rotation. Dans le second chapitre, les calculs avec rotation sont utilisés afin de déterminer l'effet de la rotation sur ce critère et sur les instabilités convective et SASI.

II.2.2.b Analyse énergétique

Dans cette section, nous décrivons une analyse des termes sources d'énergie cinétique dans le but d'aider à interpréter la physique des instabilités, notamment en présence de rotation. En utilisant le formalisme utilisé dans Mocák et al. (2014) pour l'étude d'un fluide compressible en géométrie sphérique, on définit la moyenne de Reynolds comme :

$$\bar{q}(r) = \frac{1}{\Delta\Omega} \int \int q(r, \theta, \phi) \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (II.43)$$

avec $\Delta\Omega$ l'angle solide sur lequel la moyenne est faite. Une quantité q du fluide peut alors être exprimée en fonction de cette moyenne \bar{q} et d'une déviation à cette moyenne q' comme :

$$q = \bar{q} + q'. \quad (II.44)$$

À partir de cette définition, on peut définir la moyenne de Favre qui est la moyenne de Reynolds pondérée par la masse volumique :

$$\tilde{q} = \frac{\overline{\rho q}}{\bar{\rho}}. \quad (II.45)$$

Dans ce cas, une quantité q du fluide peut être exprimée comme sa moyenne de Favre \tilde{q} et une perturbation à cette moyenne q'' :

$$q = \tilde{q} + q''. \quad (II.46)$$

Notons que ce formalisme est plus général que l'analyse linéaire détaillée précédemment en ce qu'il ne suppose pas que les perturbations soient infinitésimales.

En utilisant ce formalisme, [Mocák et al. \(2014\)](#) obtient l'équation d'évolution de l'énergie cinétique des perturbations sous la forme :

$$\widetilde{\rho D_t k} = -\nabla_r(f_k + f_P) - \widetilde{R_{ir}} \partial_r \tilde{u}_i + W_b + W_P + \mathcal{N}_k \quad (II.47)$$

où $\widetilde{D_t} = \partial_t + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla)$. Dans leur cas, \mathcal{N}_k représente un effet numérique que nous ne prenons pas en compte. Les autres éléments sont définis comme :

- ρ , la densité,
- $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_\phi)$, la vitesse,
- $\tilde{k} = \frac{1}{2} \overline{u_i'' u_i''}$, l'énergie cinétique des perturbations,
- $f_k = \frac{1}{2} \overline{\rho u_i'' u_i'' u_r''}$, le flux de l'énergie cinétique des perturbations (négligeable car d'ordre 3 en perturbation),
- $f_P = \overline{P' u_r'}$, le flux acoustique,
- $\widetilde{R_{ir}} = \overline{\rho u_i'' u_r''}$, le tenseur de Reynolds,
- $W_p = \overline{P' \nabla \mathbf{u}''}$, la pression de dilatation des perturbations,
- $W_p = \overline{\rho u_r'' g_r}$, la flottaison et g_r l'accélération de pesanteur.

Dans notre formalisme linéaire, une grandeur q du fluide est divisée entre son flot stationnaire q_0 et sa perturbation linéaire au flot stationnaire δq . On obtient les correspondances :

$$q_0 + \delta q + \delta^2 q = \bar{q} + q' = \tilde{q} + q'', \quad (II.48)$$

où le terme $\delta^2 q$ est un terme non-linéaire d'ordre plus élevé négligé dans l'analyse linéaire. Ce terme n'intervenant pas dans l'expression des différents termes source à l'ordre le bas (donnés ci-dessous), nous ne l'indiquerons plus dans les calculs ci-dessous.

En utilisant les relations entre les deux moyennes, on peut exprimer le terme de flottaison

comme :

$$W_b = \bar{\rho} \times \frac{\overline{\rho g} \overline{u'_r}}{\rho} \quad (II.49)$$

$$= -\overline{\rho g} \frac{\overline{\rho u'_r}}{\bar{\rho}} \quad (\text{car } \overline{q''} = -\frac{\overline{\rho q'}}{\bar{\rho}}) \quad (II.50)$$

$$= -\frac{\overline{g \rho}}{\bar{\rho}} \times \overline{\rho' u'_r} \quad (\text{car } \overline{p' q} = \overline{p' q'}) \quad (II.51)$$

$$W_b = -\overline{\tilde{g} \rho' u'_r}, \quad (II.52)$$

avec $g > 0$. On peut exprimer ρ' en fonction des variables du code :

$$\rho' = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho S' + \frac{P'}{c^2}, \quad (II.53)$$

donc, avec les données en sortie du code numérique où $g < 0$, on obtient :

$$W_b = -g \rho \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} S' - \frac{P'}{\gamma P} \right) u'_r. \quad (II.54)$$

En insérant les perturbations de notre formalisme linéaire, nous obtenons la formulation intégrale suivante où une intégration radiale a été effectuée entre le rayon de gain et le rayon du choc :

$$\delta E_{\text{kin}} = \pi \int r^2 \rho_0 (|\delta v_\phi|^2 + |\delta v_r|^2) dr, \quad (II.55)$$

$$\delta E_{\text{flow,kin}}(r) = \pi r^2 \rho_0 v_{r0} (|\delta v_\phi|^2 + |\delta v_r|^2), \quad (II.56)$$

$$f_{p\text{flow}}(r) = 2\pi r^2 \text{Re}(\delta P \delta \underline{v}_r), \quad (II.57)$$

$$R_{rr} = 2\pi \int r^2 \rho_0 \frac{\partial v_{r0}}{\partial r} \text{Re}(|\delta v_r|^2) dr, \quad (II.58)$$

$$(R_{\phi r}) \delta E_{\text{rot}} = 2\pi \int r^2 \Omega \rho_0 \text{Re}(\delta v_r \delta \underline{v}_\phi) dr, \quad (II.59)$$

$$(W_b) \delta E_{\text{buoy}} = 2\pi \int r^2 g \rho \left[-\frac{\gamma - 1}{\gamma} \text{Re}(\delta S \delta \underline{v}_r) + \frac{1}{\gamma P_0} \text{Re}(\delta P \delta \underline{v}_r) \right] dr, g < 0 \quad (II.60)$$

$$W_p = 2\pi \int r^2 \text{Re}(\delta P \underline{\nabla}_r \delta \underline{v}_r) dr + 2\pi \int r^2 \text{Re}(\delta P \underline{\nabla}_\phi \delta \underline{v}_\phi) dr, \quad (II.61)$$

où δx désigne l'amplitude complexe de la perturbation de la quantité x , et $\underline{\delta x}$ désigne le complexe conjugué δx .

Par ces considérations, on peut déduire l'évolution du taux de croissance à partir de l'analyse énergétique du système et en considérant des perturbations sous la forme $\exp(-i\omega t)$ et uniquement la partie réelle de l'équation finale. En effet, la partie réelle de la dérivée de l'énergie donne :

$$\tilde{D}_t \tilde{k} = 2\omega_i \tilde{k}. \quad (II.62)$$

Le terme de gauche de l'Eq. (II.47) peut s'écrire comme :

$$\int \bar{\rho} \tilde{D}_t \tilde{k} dr = 2\omega_i \delta E_{\text{kin}}. \quad (II.63)$$

Avec nos notations et une formulation intégrale, le terme de droite de l'Eq. (II.47) s'écrit :

$$- [\delta E_{\text{flow,kin}}(r_{\text{sh}}) - \delta E_{\text{flow,kin}}(r_{\text{g}})] - [f_{\text{pflow}}(r_{\text{sh}}) - f_{\text{pflow}}(r_{\text{g}})] - R_{rr} \partial_r v_r + \delta E_{\text{rot}} + \delta E_{\text{buoy}} + W_p. \quad (\text{II.64})$$

Finalement, on obtient une équation permettant de contraindre l'évolution du taux de croissance par l'évolution des différentes énergies :

$$\omega_i = \frac{1}{2\delta E_{\text{kin}}} \{ - [\delta E_{\text{flow,kin}}(r_{\text{sh}}) - \delta E_{\text{flow,kin}}(r_{\text{g}})] - [f_{\text{pflow}}(r_{\text{sh}}) - f_{\text{pflow}}(r_{\text{g}})] - R_{rr} \partial_r v_r + \delta E_{\text{rot}} + \delta E_{\text{buoy}} + W_p \}. \quad (\text{II.65})$$

Par cette étude énergétique, il est possible de prédire l'évolution du taux de croissance ainsi que le terme principal responsable de cette évolution. Cette étude nous sera utile dans le Chap. IV.

En résumé, nous avons présenté dans ce chapitre les différents outils qui seront utilisés dans la suite :

- une approche analytique et numérique plane afin de déterminer un nouveau critère de convection plus prédictif,
- une approche numérique sphérique sans rotation afin de tester ce critère,
- une approche numérique sphérique équatoriale avec rotation afin de voir l'impact de la rotation sur les instabilités,
- une approche énergétique afin d'expliquer la source des variations de taux de croissance en présence de rotation.

Chapitre III

Instabilités hydrodynamiques sans rotation

Sommaire

III.1 Géométrie plane et critère de convection	72
III.1.1 Critère $\chi_{\text{crit}} \sim 3$	72
III.1.1.a Un modèle simplifié...	72
III.1.1.b ... comportant des lacunes	74
III.1.2 Approche analytique	76
III.1.3 Approche numérique	79
III.1.4 Marche de gravité et instabilité artificielle	82
III.1.4.a Analyse énergétique	83
III.1.4.b Utilisation d'un potentiel hyperbolique	85
III.2 Géométrie sphérique	86
III.2.1 Impact du chauffage	86
III.2.1.a SASI	87
III.2.1.b Transition convective	88
III.2.2 Test de χ_{crit}	88
III.2.3 Évolution de l'échelle dominante	91
III.3 Conclusion sur le critère de stabilité	91

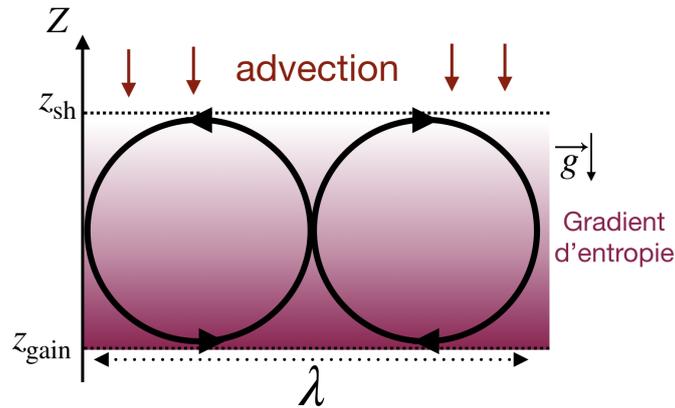


Figure III.1 – Schéma du modèle plan-parallèle utilisé par Foglizzo et al. (2006). Les cellules convectives sont supposées circulaires et la longueur d’onde (λ) est approximativement égale à quatre rayons des cellules.

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur le développement des instabilités en absence de rotation. Les instabilités que nous considérons sont la convection due aux neutrinos dans un premier temps, puis cette convection et SASI, ensemble, dans un second temps. Dans une première partie, nous souhaitons déterminer un critère général de développement d’une instabilité convective lorsque la matière est advectée à travers une région de chauffage. Nous souhaitons ensuite appliquer cette étude au cas plus réaliste d’une supernova en utilisant une géométrie sphérique et en prenant en compte la deuxième instabilité présente dans la région choquée en même temps que la convection : SASI.

III.1 Géométrie plane et critère de convection

Dans le but de construire une intuition physique sur ces instabilités, nous considérons dans un premier temps un modèle simplifié plan.

III.1.1 Critère $\chi_{\text{crit}} \sim 3$

III.1.1.a Un modèle simplifié...

Afin d’établir un critère de stabilité pour la convection dans la zone de gain, un modèle simplifié de la zone de gain a été développé par Foglizzo et al. (2006). Dans ce modèle, la physique du choc se limite à une coupure de gravité au-delà du choc et les conditions limites exposées dans le Chap. II. La matière n’est pas prise en compte avant son arrivée au niveau du choc autrement que via les relations de saut de Rankine-Hugoniot. De même, une coupure de gravité est introduite à la borne inférieure du domaine. Ainsi, la gravité n’est considérée que sur la zone de chauffage délimitée par $[-H_g; H_g]$. La zone de chauffage coïncide avec la zone de gravité non nulle. De plus, une condition limite imposée au bord inférieur permet aux ondes acoustiques de sortir du domaine, mais aucune onde acoustique ne peut entrer dans le domaine par ce bord.

Le chauffage/refroidissement de la matière par absorption/émission de neutrinos est pris en

compte via la fonction de chauffage/refroidissement \mathcal{L} similaire à celle de [Bethe and Wilson \(1985\)](#). Cette fonction s'écrit

$$\mathcal{L} = \frac{\bar{\mathcal{L}}\rho}{1-\beta} \left[1 - \beta \left(\frac{T}{T_{\text{sh}}} \right)^6 \right], \quad (\text{III.1})$$

où T_{sh} est la température au choc, β est le rapport refroidissement/chauffage au choc et $\bar{\mathcal{L}}$ l'intensité du chauffage. Dans cette fonction, le terme en température exprime l'intensité du refroidissement et l'autre terme de la parenthèse représente celle du chauffage. Le chauffage étant plus important que le refroidissement au niveau du choc lorsqu'il y a une région de gain, ceci implique $\beta < 1$. Hors de la région de gain, on néglige les processus non adiabatiques en imposant $\mathcal{L} = 0$.

Le critère χ (Eq. I.20) est établi pour une configuration plane de la région de gain (Fig. III.1). Il est fondé sur la comparaison de deux temps caractéristiques pour la convection : le temps typique de la convection τ_{buoy} associé à la fréquence de Brunt-Väisälä N et le temps passé par une particule dans la région de gain $\tau_{\text{adv}} \sim 2H_g/|v|$, avec v la vitesse moyenne de la particule sur la région. Dans le cas d'une vitesse uniforme, cette estimation du temps d'advection est exacte. Dans ce modèle, le taux de croissance local de Brunt-Väisälä est exprimé comme :

$$N = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} g \nabla S \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{III.2})$$

avec γ l'indice adiabatique de la matière, S l'entropie et g l'accélération de gravité. Dans cette étude, le temps caractéristique τ_{buoy} associé à la convection est $\tau_{\text{buoy}} = N^{-1}$. Le calcul perturbatif de [Foglizzo et al. \(2006\)](#) indique que si le temps passé dans la zone de chauffage est supérieur à environ $3\tau_{\text{buoy}}$ alors l'instabilité convective peut se développer dans une gamme limitée de longueurs d'onde. Dans ce modèle, le critère d'instabilité $\chi > \chi_{\text{crit}} \sim 3$ peut s'exprimer approximativement en utilisant une vitesse moyenne v sur la taille de la région de gain :

$$\chi = \frac{2H_g}{v} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} g \frac{\Delta S}{2H_g} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma v^2} 2gH_g \Delta S \right)^{\frac{1}{2}} \gtrsim \chi_{\text{crit}} \quad (\text{III.3})$$

en rappelant la définition de χ :

$$\chi = \int_{r_g}^{r_{\text{sh}}} \frac{\text{Im}(N)}{|v_r|} dr. \quad (\text{III.4})$$

En comparant les deux expressions Eq. (III.3) et Eq. (III.4), nous remarquons le passage de variables locales à des grandeurs globales. En particulier, le gradient d'entropie s'est simplifié par une grandeur prenant en compte seulement les valeurs initiale et finale de l'entropie via ΔS . Il faut alors prendre un compte une longueur typique du chauffage. Dans l'étude de [Foglizzo et al. \(2006\)](#), la longueur typique choisie pour établir le gradient d'entropie est H_g . L'équation (III.4) montre que la valeur locale de N est pondérée par le temps local d'advection $dr/|v_r|$. Plusieurs paramètres peuvent donc permettre le développement de l'instabilité (faible vitesse, grande zone de chauffage, forte gravité et fort gradient d'entropie).

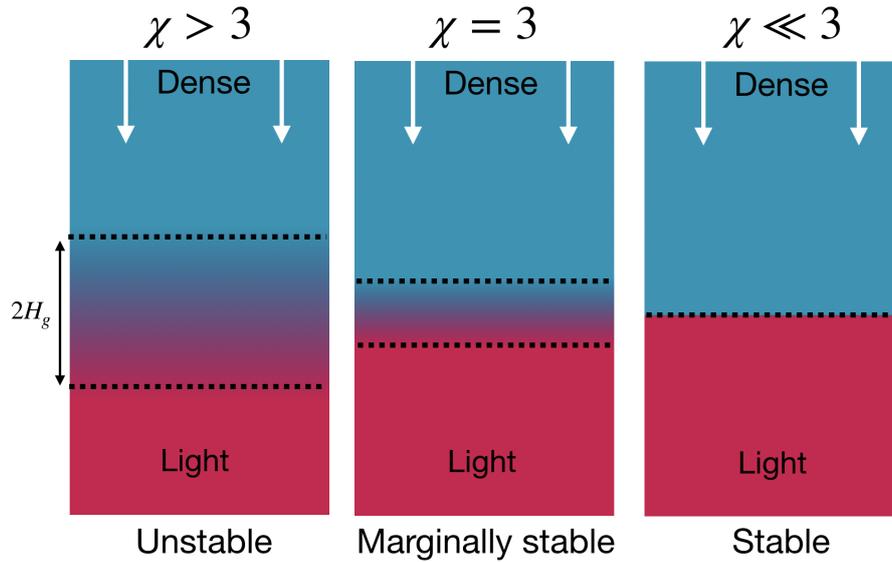


Figure III.2 – Évolution de la stabilité du système lorsque la taille de la région de chauffage diminue.

III.1.1.b ... comportant des lacunes

Démontrons une limite physique de ce modèle grâce à une expérience de pensée. Plaçons deux fluides d'entropies différentes dans une zone de gravité constante. Supposons maintenant que l'entropie du fluide supérieur est très faible devant l'entropie du fluide inférieur ($S_{\text{up}} \ll S_{\text{down}}$). Cette situation possède donc un très fort saut d'entropie $\Delta S \gg 1$ entre les deux fluides. On peut penser à de la vapeur d'eau, très chaude, placée sous de l'eau liquide froide, idéalisée ici comme un gaz de forte densité et de faible entropie. L'eau liquide incidente, par son passage dans la zone de chauffage, est vaporisée. Dans ces conditions, la vitesse et la taille de la région de chauffage sont déterminantes pour le développement de l'instabilité. Si le critère exprimé par Eq. (III.3) était correct, alors il existerait une vitesse critique v_{crit} au-delà de laquelle le système serait stable :

$$v_{\text{crit}} \sim \frac{1}{\chi_{\text{crit}}} \times \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} 2gH_g \Delta S \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{III.5})$$

Pour g et ΔS fixés, cette vitesse ne dépend plus que de la taille H_g de la zone de chauffage. Si le seuil $\chi_{\text{crit}} \sim 3$ était universel, on pourrait choisir H_g suffisamment petite pour que la vitesse v_{crit} soit négligeable. Ainsi, en gardant l'analogie de l'eau froide sur de la vapeur d'eau, ce critère établirait qu'une vitesse infiniment faible peut suffire à stabiliser le système malgré le fort saut d'entropie.

Pourtant, un simple argument d'énergie potentielle suffit à nous convaincre que l'équilibre d'une couche d'eau sur une couche de vapeur devrait être instable. Nous allons donc remettre en cause l'universalité du seuil $\chi_{\text{crit}} \sim 3$. D'après l'Eq. (III.5), la valeur de χ_{crit} peut être déduite de la relation entre v_{crit} et la taille de la région de chauffage. Nous introduisons une longueur

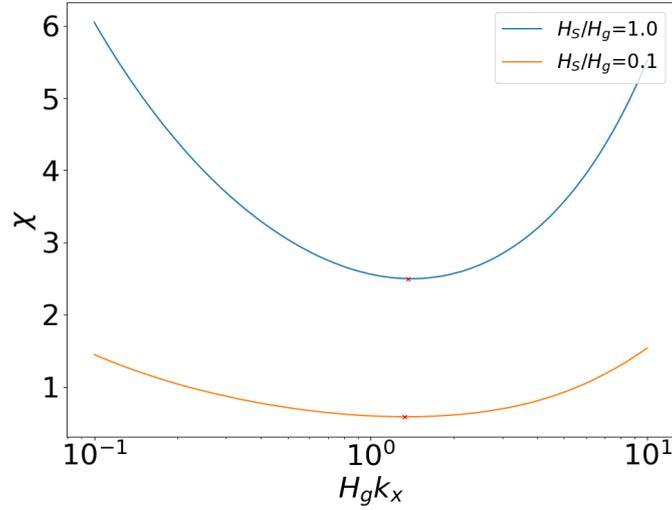


Figure III.3 – Effet de la distinction d'échelles sur la stabilité marginale. En rouge, le minimum de la courbe en dessous duquel le système est stable pour toutes les longueurs d'onde.

caractéristique supplémentaire dans le problème précédent, correspondant à la taille de la région de chauffage H_S , sur laquelle le gradient d'entropie est défini. L'expression approximative du gradient d'entropie n'est donc plus $\Delta S/H_g$ mais $\Delta S/H_S$, où l'indice S désigne les grandeurs se rapportant à l'entropie ou au chauffage.

Pour vérifier cette intuition physique, j'ai réutilisé le code numérique ayant mis en évidence le critère $\chi_{\text{crit}} \sim 3$, utilisé par [Kazeroni et al. \(2018\)](#). Afin de diminuer l'effet de la coupure de gravité aux bords, et d'étudier seulement l'influence de la taille de la région de chauffage H_S , nous utilisons une zone de chauffage inférieure à la zone de gravité H_g . Nous avons alors deux échelles distinctes :

- la zone de gravité non nulle $[-H_g; H_g]$,
- la zone de chauffage $[-H_S; H_S]$.

Si on place ces deux grandeurs dans l'équation III.3, on obtient une nouvelle expression :

$$\chi \sim \frac{2H_g}{v} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} g \frac{\Delta S}{2H_S} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{III.6})$$

De nouveau, cette expression est exacte pour une vitesse uniforme donc pour un faible saut d'entropie et une faible gravité. En termes de K_g et K_H introduits en Sect. II.2.1.b, cela se traduit par $K_g \ll 1$ et $K_H \ll 1$.

La Figure III.3 représente la stabilité marginale de la convection en fonction des longueurs d'onde considérées. Au-dessus de cette courbe, la convection est instable et peut se développer. En dessous de cette courbe, elle est stabilisée par l'advection. On peut remarquer que lorsque $H_S = H_g$, la courbe atteint un minimum pour $\chi \sim 3$. Ainsi, lorsqu'il n'y a qu'une échelle spatiale dans le modèle, on retrouve les résultats de [Foglizzo et al. \(2006\)](#) et [Kazeroni et al. \(2018\)](#). Cependant, lorsque $H_S < H_g$, on peut remarquer que le minimum de la courbe ne se trouve plus à $\chi \sim 3$. La valeur de χ_{crit} diminue lorsque l'extension verticale de la zone de

chauffage diminue. Cela signifie que lorsque le saut d'entropie est fort, sur une petite zone, la vitesse de stabilisation augmente plus vite que $H_S^{-\frac{1}{2}}$ correspondant au résultat de l'Eq. (III.6) si χ ne variait pas avec la taille de la région de gain.

Nous souhaitons donc déterminer un critère de stabilité de la convection, plus général, qui rende correctement compte des variations de χ_{crit} suivant les différents paramètres tels que H_S/H_g .

III.1.2 Approche analytique

Nous avons donc montré que le critère $\chi_{\text{crit}} \sim 3$ établi en 2006 avait des lacunes et n'était pas capable d'expliquer le développement de la convection dans toutes les situations. Un nouveau critère est donc nécessaire. Le but de ce nouveau critère est d'être applicable quelles que soient les échelles spatiales des différents phénomènes en jeu. En particulier, il devrait être applicable non seulement dans la configuration des supernovæ, mais plus généralement dans toutes les situations de fluide advecté dans une région potentiellement instable à la convection. Dans cette partie, nous cherchons donc à exprimer un nouveau critère prenant en compte les différentes échelles du problème.

Nous avons montré que la prise en compte de différentes échelles verticales était importante pour déterminer l'allure de la courbe de stabilité marginale dans le domaine $(\chi, H_g k_x)$. Nous allons donc distinguer trois longueurs caractéristiques :

- la zone de gravité non nulle $[-H_g; H_g]$,
- la zone de chauffage $[-H_S; H_S]$,
- l'échelle caractéristique de variation de la densité H_ρ .

Pour établir le critère χ , le temps de développement de la convection a été établi en utilisant la valeur locale du taux de croissance de Brunt-Väisälä. Cependant, ce taux de croissance concerne uniquement les perturbations de faible longueur d'onde (grand nombre d'onde) par rapport aux échelles caractéristiques du problème. Si les cellules convectives possèdent des diamètres de l'ordre de la taille de la région de gain, le taux de croissance N n'est pas approprié pour définir leur temps caractéristique de développement. Pour définir le nouveau critère, nous choisissons d'utiliser le taux de croissance hydrostatique ω_i de l'instabilité. Contrairement à N , ce taux de croissance est global. Il ne dépend donc pas du rayon considéré, mais dépend de la longueur d'onde du mode dont on cherche à déterminer la stabilité. On cherche donc à étudier la possibilité d'établir un critère de convection à partir de la grandeur $\Psi = \omega_i \tau_{\text{adv}}$. Dans cette formule, la vitesse et l'échelle spatiale à prendre en compte pour définir le temps d'advection sont à définir en fonction du problème considéré et des échelles spatiales pertinentes. Ce problème est abordé dans l'approche analytique qui suit.

Nous établissons dans un premier temps un modèle simplifié et hydrostatique comportant un fluide supérieur compressible, isotherme, stablement stratifié, reposant sur un fluide inférieur incompressible. Les deux fluides sont séparés par une interface au niveau de laquelle la densité du fluide supérieur est supérieure à la densité du fluide inférieur, donc potentiellement instable. L'utilisation d'un fluide compressible uniquement dans la partie supérieure de notre modèle est motivée par une recherche de simplicité et se justifie par le fait que ce fluide représente la masse dominante et donc est celui qui régira l'évolution de l'énergie du système. L'hypothèse

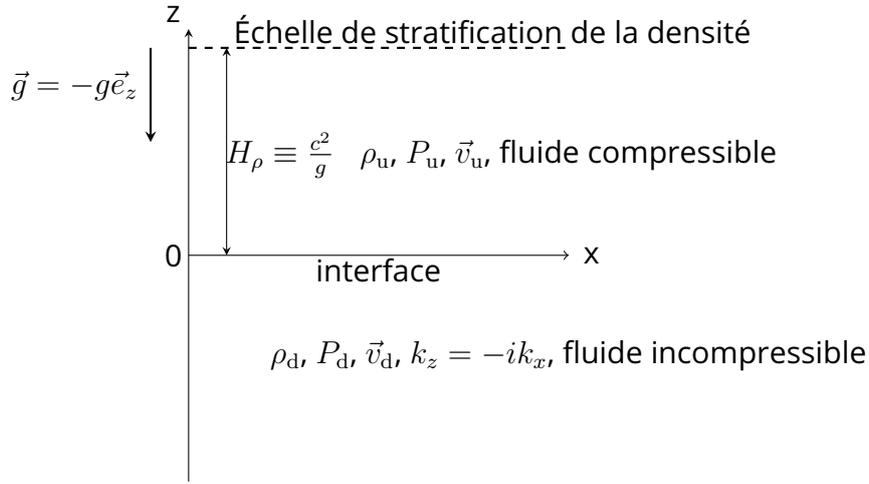


Figure III.4 – Modèle simplifié hydrostatique permettant de déterminer le taux de croissance hydrostatique de l'instabilité.

hydrostatique est permise par le caractère subsonique de la région post-choc. Elle est utilisée afin de simplifier le système et comprendre les mécanismes de la convection sans advection. Ce paramètre est pris en considération plus tard. Nous avons donc effectué des calculs analytiques pour la situation décrite dans la figure III.4. Le détail des calculs est disponible dans l'Annexe A.

Dans ce modèle, les indices « u » et « d » correspondent au fluide supérieur (« up ») et inférieur (« down »), respectivement. Les grandeurs ρ , P et v désignent, respectivement, la densité, la pression et la vitesse du fluide.

Dans le fluide supérieur isotherme, $P = \rho c^2$ avec c , la vitesse du son, uniforme dans le milieu. Dans la suite, l'indice $_0$ désigne la grandeur stationnaire des grandeurs du fluide supérieur, de sorte que :

$$P_u = P_0 + \delta P_u \quad (\text{III.7})$$

$$\rho_u = \rho_0 + \delta \rho_u. \quad (\text{III.8})$$

L'ordre zéro de l'équation d'Euler donne

$$\frac{\partial P_0}{\partial z} = -\rho_0 g, \quad (\text{III.9})$$

avec $g > 0$ tel que $\vec{g} = -g \vec{e}_z$. Cela permet d'établir l'équation différentielle vérifiée par la densité dans le fluide

$$c^2 \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = -\rho_0 g. \quad (\text{III.10})$$

Finalement :

$$\rho_0(z) = \bar{\rho}_0 \exp\left(-\frac{z}{H_\rho}\right) \quad (\text{III.11})$$

avec $H_\rho \equiv \frac{c^2}{g}$ et $\bar{\rho}_0$ la densité du fluide supérieur à l'interface.

On choisit le système de variables perturbées $\delta P_u/\sqrt{\rho_0}$ et $\sqrt{\rho_0}\delta v_{z,u}$, pour lequel les perturbations peuvent s'exprimer comme $\exp(-i\omega t + ik_x x + kz)$ où k est la valeur propre du système perturbé satisfaisant la condition limite d'évanescence des perturbations en $z \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire $\text{Re}(k_{\pm}) < 0$. On a donc :

$$k = \pm \sqrt{\frac{1}{4H_\rho^2} + k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (\text{III.12})$$

On définit le nombre d'Atwood comme :

$$A_t \equiv (\tilde{\rho}_0 - \tilde{\rho}_d) > 0, \quad (\text{III.13})$$

avec $\tilde{\rho}_0 = \bar{\rho}_0/(\bar{\rho}_0 + \rho_d)$ et $\tilde{\rho}_d = \rho_d/(\bar{\rho}_0 + \rho_d)$.

La fréquence ω des perturbations de longueur d'onde horizontale $2\pi/k_x$ est déduite de la condition limite de nullité des perturbations à l'infini :

- si $H_\rho k_x \gg 1$, alors $\omega^2 = -A_t g k_x$, où nous retrouvons le cas incompressible de l'instabilité de Rayleigh-Taylor,
- si $H_\rho k_x \ll 1$, alors $\omega^2 = -\frac{A_t k_x^2 c^2}{\tilde{\rho}_d}$, où la croissance des perturbations est plus lente.

En effet, dans ce cas, la compressibilité du fluide se fait davantage sentir et on peut avoir une limitation par la vitesse finie du son c .

Si nous nous plaçons de nouveau dans le cas d'une transition continue entre les fluides, avec une région de transition H_S très petite devant l'échelle de stratification de la densité H_ρ , on s'attend à ce que les résultats trouvés précédemment pour une discontinuité ne soient pas modifiés. Cependant, pour les plus petites longueurs d'onde, très inférieures à la taille de la zone de chauffage ($H_S k_x \gg 1$) on se rapproche du cas incompressible. Ainsi, en supposant les perturbations incompressibles et en se plaçant dans l'approximation Boussinesq consistant à négliger les perturbations de densité hors du terme de la force de flottaison dans l'équation d'Euler, on obtient le taux de croissance de l'instabilité

$$\omega^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} g \nabla S, \quad (\text{III.14})$$

qui correspond bien à la fréquence N de Brunt-Väisälä.

Ces attentes de dépendance du taux de croissance en fonction de l'échelle des perturbations sont résumées dans le tableau III.1.

Grâce à ces considérations, nous pouvons exprimer $\tau_{\text{buoy}} = \omega^{-1}$. Comme mentionné précédemment, pour exprimer le temps d'advection, il faut déterminer quelle échelle et quelle vitesse prendre en compte. Plusieurs choix sont a priori possibles pour l'échelle spatiale à prendre en compte. Nous faisons l'hypothèse physique que l'échelle de longueur appropriée correspond à l'étendue verticale des perturbations. Dans le cas incompressible, l'étendue verticale des perturbations correspond exactement à l'étendue horizontale de ces dernières. Ainsi, si nous nous plaçons dans un domaine de longueur d'onde où la stratification de la densité ne se fait pas sentir et où le taux de croissance est égal à celui obtenu pour des fluides incompressibles, alors nous pouvons considérer que l'étendue verticale des perturbations est similaire à leur extension horizontale. Nous choisissons donc d'utiliser l'échelle caractéristique des perturbations

Échelle des perturbations (λ_z)	ω^2 analytique	τ_{adv}	v_{crit}
$H_\rho \ll \lambda_z$	$\omega^2 = -\frac{A_t c^2 k_x^2}{\tilde{\rho}_d}$	$\frac{H_\rho}{v}$	$\propto k_x$
$H_S \ll \lambda_z \ll H_\rho$	$\omega^2 = -A_t g k_x$	$\frac{1}{k_x v}$	$\propto k_x^{-1/2}$
$\lambda_z \ll H_S$	$\omega^2 = \frac{\gamma-1}{\gamma} g \nabla S$	pas décisive	constante ou $1/k_x$

Table III.1 – Résumé des attentes analytiques concernant le taux de croissance suivant l'échelle caractéristique des perturbations.

$\lambda_x = 2\pi/k_x$ sur la zone dans laquelle la stratification de la densité se fait peu sentir ($\lambda_x \ll H_\rho$). Si les perturbations possèdent des longueurs d'onde supérieures à l'échelle de stratification de la densité, cette échelle devient limitante de ce mouvement et H_ρ est utilisée pour déterminer le temps d'advection. Sous ces conditions et avec l'hypothèse de départ que la stabilité marginale est définie par une valeur constante de $\Psi_{crit} = \omega\tau_{adv}$, on peut déterminer la dépendance de v_{crit} en k_x donnée par la table III.1.

En particulier, le profil de vitesse critique en fonction de k_x possède un maximum pour $k_x \sim 1/H_\rho$ (Fig. III.5), qu'on estime par les formules asymptotiques : $v_{crit} \propto (A_t c^2)^{1/2}$. Pour les vitesses supérieures à cette vitesse, le système est stable pour toutes les longueurs d'onde. En injectant ce résultat dans l'expression de χ de 2006, on devrait obtenir :

$$\chi_{crit} \propto \left[\frac{\Delta S}{\tanh\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}\Delta S\right)} \right]^{1/2} \times \sqrt{\frac{H_s}{H_\rho}} \quad (III.15)$$

avec $A_t = \tanh\left[\frac{\gamma-1}{2\gamma}\Delta S\right]$. Ainsi, sans choc et à H_ρ fixé, on a $\chi_{crit} \propto H_S^{1/2}$. De même, à H_S fixe, on s'attend à obtenir $\chi_{crit} \propto H_\rho^{-1/2}$.

III.1.3 Approche numérique

On utilise le code perturbatif présenté en section II.2.1.b du chapitre II afin de vérifier le comportement asymptotique de l'instabilité convective en présence d'advection. On veut aussi connaître son comportement entre les régimes asymptotiques.

En faisant varier séparément H_S et H_ρ , on obtient la Fig. III.6 qui confirme l'attente concernant la dépendance de χ_{crit} en H_S (Eq. III.15). Cependant, si H_S est fixé, la dépendance de χ_{crit} en $H_\rho^{-1/2}$ n'est pas vérifiée et semble plutôt être en $H_\rho^{0.1}$. D'après les définitions des grandeurs données dans l'Eq. II.6 et en supposant $\psi_g(z) = 1$ sur tout le domaine, on peut exprimer H_ρ en fonction de H_g et K_g :

$$H_\rho \equiv \frac{H_g}{K_g}. \quad (III.16)$$

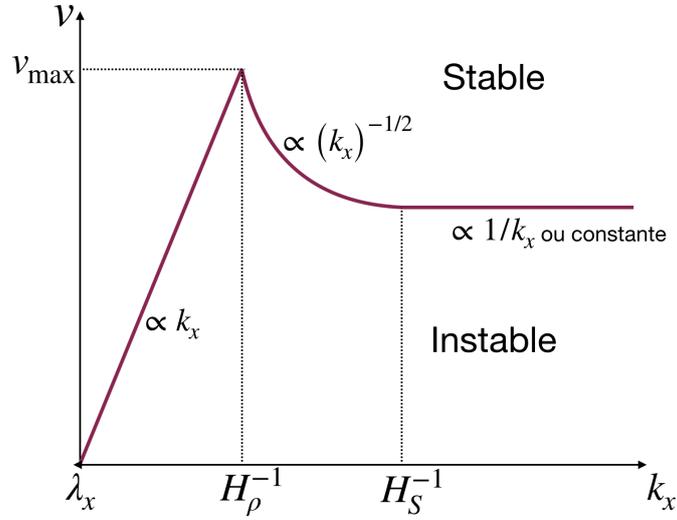


Figure III.5 – Allures des vitesses décrites dans la table III.1 en fonction du domaine de longueur d'onde considéré.

Ainsi, lorsque H_g est fixe, l'échelle de stratification de la densité ne dépend que de l'intensité de la gravité via K_g . Cela signifie que, numériquement, χ_{crit} dépendrait de $K_g^{-0.1}$.

Ces résultats s'expliquent par le fait que, contrairement à nos considérations analytiques, la longueur d'onde critique à laquelle la vitesse nécessaire pour stabiliser le système est la plus grande ne se trouve pas en $\lambda_x = H_\rho$. En effet, si c'était le cas, on devrait avoir la dépendance

$$k_x \propto \frac{1}{H_\rho}. \quad (\text{III.17})$$

Lorsque H_S varie, la valeur de $H_g k_{x,\text{crit}}$ varie effectivement très peu (Fig. III.7). Cependant, l'évolution de $k_{x,\text{crit}}$ lorsque H_ρ varie ne correspond pas à nos attentes, $H_\rho k_{x,\text{crit}}$ augmente avec H_ρ .

D'autre part, la Fig. III.6 montre que parmi les deux possibilités sur l'évolution de χ_{crit} en fonction du choix d'échelle pour H (l'échelle unique utilisée dans les études précédentes), obtenues dans l'Annexe A (instabilité de Rayleigh-Taylor entre un fluide compressible dense sur un fluide incompressible peu dense, dans le domaine des grandes longueurs d'onde) :

$$\chi \propto \begin{cases} \left(\frac{H_S}{H_\rho} \right)^{1/2} & \text{si } H = H_S, \\ \left(\frac{H_g^2}{H_\rho H_S} \right)^{1/2} & \text{si } H = H_g, \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

aucune n'est valide. Plusieurs causes pourraient expliquer cette différence entre les attentes analytiques et les attentes numériques, sans nécessairement remettre en doute le critère Ψ . Tout d'abord, les attentes numériques sont obtenues pour des cas asymptotiques ($\lambda_x \ll H_\rho$ ou $\lambda_x \gg H_\rho$) et nous avons extrapolé ces résultats à $\lambda_x \sim H_\rho$ pour déterminer la vitesse maximale

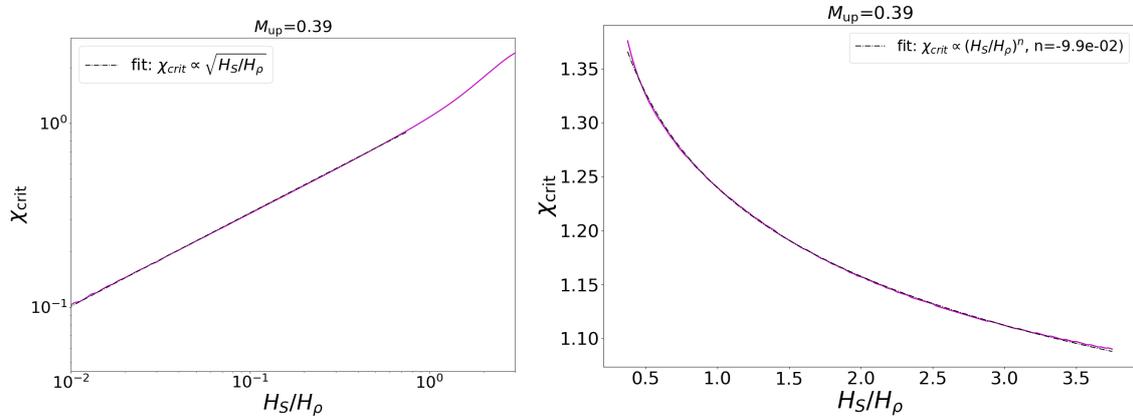


Figure III.6 – Dépendance de χ_{crit} , sans choc, en fonction de H_S/H_ρ pour $H_\rho = 1/3$ fixé (gauche) et $H_S = H_g/10$ fixé (droite). Les courbes en tirets noirs représentent les ajustements des courbes par des puissances.

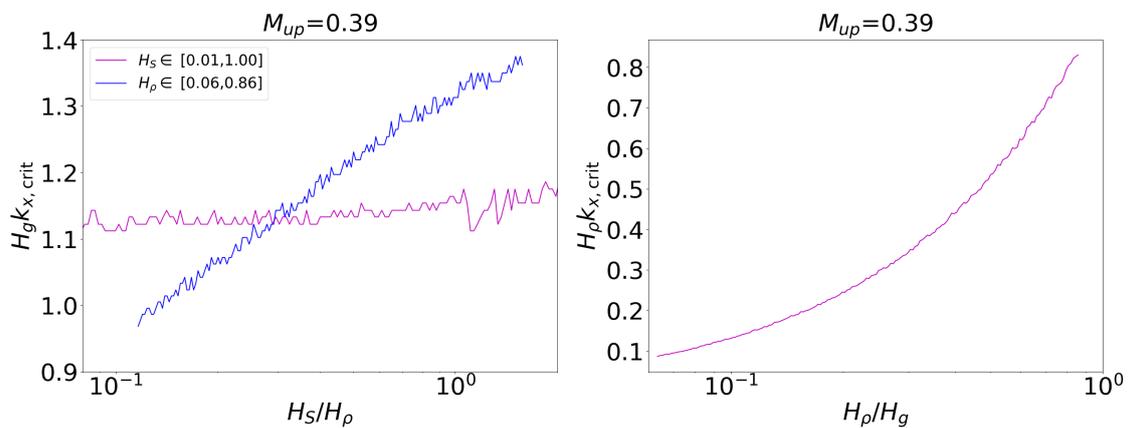


Figure III.7 – Évolution de l'échelle la plus instable suivant les différentes échelles de chauffage et de stratification de la densité considérées. À gauche, pour la courbe bleue, H_S est fixé à $H_g/10$ et H_ρ est fixé à $H_g/3$ pour la courbe magenta. À droite, l'évolution de $H_\rho k_x$ pour laquelle on s'attendait à avoir une droite horizontale.

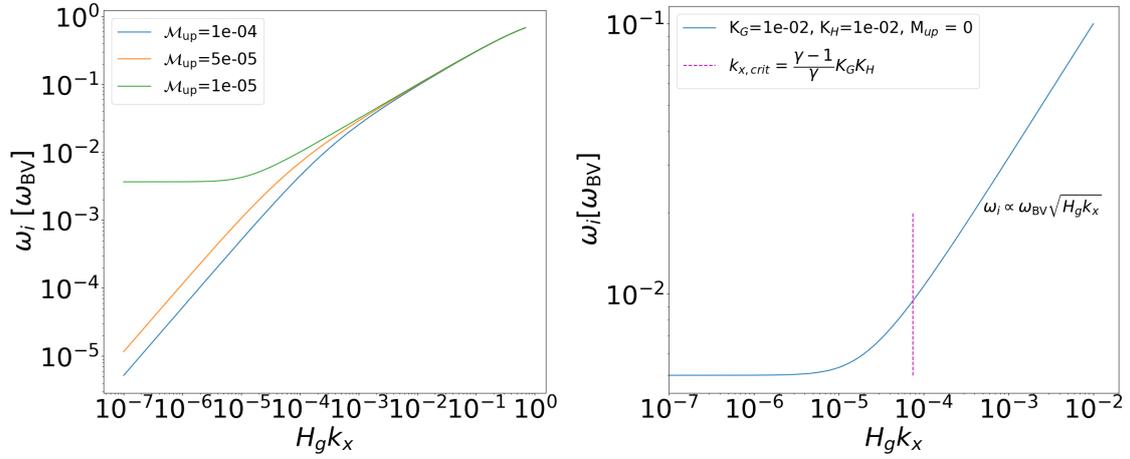


Figure III.8 – Évolution du taux de croissance en fonction du nombre d'onde $H_g k_x$ pour $H_S = H_g$, avec (gauche) et sans advection (droite). On illustre en magenta la limite de validité de la méthode WKB, avec $K_H = H_S \nabla S$ et $K_g = g H_g / c^2$.

nécessaire pour stabiliser la convection. Ensuite, nous supposons que le taux de croissance obtenu analytiquement sans advection est le même qu'obtenu numériquement. Cependant, le profil d'entropie peut être altéré par l'advection et produire un taux de croissance différent de celui considéré analytiquement. Enfin, le code numérique utilise une marche de gravité non prise en compte dans les calculs analytiques. La partie suivante montre que ce choix de modélisation peut avoir un impact sur les grandes longueurs d'onde.

III.1.4 Marche de gravité et instabilité artificielle

Nous avons étudié l'impact de la marche de gravité présente dans le code sur le développement de l'instabilité et donc sur la valeur de χ_{crit} . Les calculs analytiques détaillés sont exposés dans l'Annexe B, où nous utilisons l'approche WKB (Wentzel, Kramers et Brillouin) pour résoudre le système aux petites longueurs d'onde. Ces calculs sont valables pour les longueurs d'onde suffisamment petites. Si les nombres d'onde considérés sont trop petits et que la condition :

$$H_g k_x \gg \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{H_g H_S \nabla S}{H_\rho} \quad (\text{III.19})$$

n'est pas vérifiée, alors l'expression de la pulsation $\omega = \sqrt{H_g k_x} N$ n'est plus valable.

Pour ces grandes longueurs d'onde, l'approximation WKB n'est plus valide et l'analyse numérique montre l'émergence d'une instabilité dont le taux de croissance ne semble plus dépendre de la longueur d'onde, même dans la limite $k_x \rightarrow 0$. En particulier, on vérifie que cette instabilité existe à une dimension en imposant $k_x = 0$. Ce comportement est illustré dans la Fig. III.8 où l'on voit les deux domaines avec l'instabilité 1D ne dépendant pas de la longueur d'onde horizontale. Cela nous permet de confirmer que cette instabilité n'est pas liée à la convection, phénomène multidimensionnel par nature. Cette instabilité semble donc être artificielle, due à la présence d'une marche de gravité. En effet, il est possible que ce phénomène provienne de la coupure de gravité en H_g où l'on fait une approximation plate du

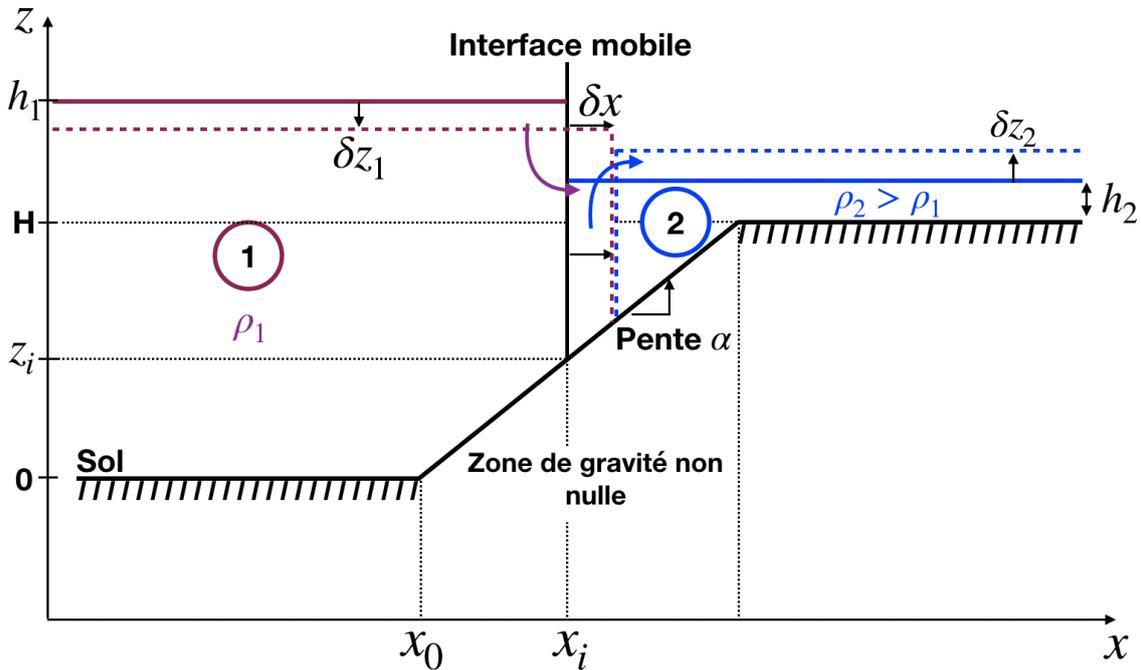


Figure III.9 – Présentation du système en eau peu profonde analogue. Les lignes continues illustrent l'état d'équilibre stationnaire tandis que les lignes pointillées illustrent l'état perturbé.

potentiel ($g=0$) alors que la forme réelle est en $1/R$. La partie qui suit illustre l'impact de cette différence.

Une analyse énergétique du phénomène 1D via l'analogie en eau peu profonde utilisée dans [Foglizzo et al. \(2012\)](#) permet de déterminer l'origine exacte de cette instabilité. En particulier, il est intéressant de savoir si cette instabilité est bien due à la coupure de gravité supérieure. Le détail des calculs analytiques est présenté dans l'Annexe C.

III.1.4.a Analyse énergétique

Afin d'étudier un système physique analogue au cas de deux coupures de gravité, nous étudions le modèle présenté Fig. III.9. Nous étudions un cas analogue à deux fluides non miscibles dont les densités ρ_1 et ρ_2 vérifient $\rho_1 < \rho_2$. Dans notre analogie, les deux fluides possèdent différentes profondeurs afin de rendre compte de leurs entropies différentes. Les deux fluides sont séparés par une interface verticale solide sans masse pouvant se déplacer librement au gré des perturbations.

Dans cette analogie, les correspondances des grandeurs physiques sont telles que :

- la dimension z devient x dans l'expérience analogue ;
- le potentiel gravitationnel gz est proportionnel à l'intensité g_l de la gravité du laboratoire et l'altitude z du fond : sol plat (gravité constante) suivi d'une montée linéaire $z = \alpha(x - x_0)$ (gravité croissante) puis à nouveau plat, Fig. III.9 ;
- la force analogue de gravité qui en découle correspond donc à αg_l ;
- la densité du gaz analogue ρ_g correspond à la densité surfacique $\rho_{1,2} h_{1,2}$ (avec $h_{1,2}$ la

- profondeur du fluide 1 ou 2 et $\rho_{1,2}$ sa densité) ;
- la vitesse du son c^2 correspond à $g_l h$;
 - l'indice adiabatique du gaz équivalent vaut $\gamma = 2$;
 - la pression du gaz analogue $P_g = \rho_g c^2 / \gamma$ correspond donc à $\frac{\rho_{1,2} g_l h_{1,2}^2}{2}$;
 - la variation d'entropie $S_1 - S_2 (>0)$ à l'interface des deux fluides s'exprime comme $\frac{1}{\gamma-1} \ln(\rho_2/\rho_1) = 2 \ln(L_1/L_2)$ avec les équivalences mentionnées, $S_1 = \ln(g/(2\rho_1))$, $L_{1,2}$ définis comme la profondeur du fluide 1, 2 au niveau de l'interface, à l'équilibre.
- Dans cette situation, l'équilibre des forces de pression donne alors $\rho_1 L_1^2 = \rho_2 L_2^2$.

On étudie les variations d'énergie potentielle ΔE_P et cinétique ΔE_k lors d'un déplacement horizontal infinitésimal de l'interface δx . Pour cela, on suppose que les fluides ne sont pas limités horizontalement et que les variations de hauteur de liquide $\delta z_{1,2}$ sont négligeables. Dans ce cas, la variation d'énergie potentielle totale lors d'un déplacement δx de l'interface vaut :

$$\Delta E_P = \frac{(\rho L^2)}{2} \alpha |\delta x|^2 g_l \times \left[\frac{1}{L_1} - \frac{1}{L_2} \right]. \quad (\text{III.20})$$

Si les variations de hauteur de liquide ne sont pas négligeables, alors la variation d'énergie potentielle s'exprime comme :

$$\Delta E_P = \frac{(\rho L^2)}{2} |\delta x| g_l \times \left[\frac{\delta z_1}{L_1} + \frac{\alpha |\delta x|}{L_1} + \frac{\delta z_2}{L_2} - \frac{\alpha |\delta x|}{L_2} \right] \quad (\text{III.21})$$

La condition d'instabilité $\Delta E_P < 0$ donne alors la contrainte d'instabilité :

$$\frac{\delta z_1}{|\delta x| L_1} + \frac{\delta z_2}{|\delta x| L_2} < \alpha \left(\frac{1}{L_2} - \frac{1}{L_1} \right). \quad (\text{III.22})$$

Si l'on introduit des bornes aux domaines telles que x_i est la position horizontale de l'interface, x_{PNS} correspond à la borne du domaine 1 (la surface de la PNS) et x_u correspond à la borne du domaine 2 placée à l'infini, la conservation du volume donne :

$$L_1 |\delta x| = \delta z_1 (x_i - x_{\text{PNS}}), \quad (\text{III.23})$$

$$L_2 |\delta x| = \delta z_2 (x_u - x_i). \quad (\text{III.24})$$

Dans ce cas, la condition d'instabilité devient :

$$\frac{1}{x_i - x_{\text{PNS}}} + \frac{1}{x_u - x_i} < \alpha \left(\frac{1}{L_2} - \frac{1}{L_1} \right). \quad (\text{III.25})$$

On note alors $X_{\text{PNS}} = x_i - x_{\text{PNS}}$ et $X_u = x_u - x_i$.

Pour trouver le taux de croissance de cette instabilité, nous utilisons l'équation $\Delta E_k = -\Delta E_P$. L'énergie cinétique s'exprime :

$$\Delta E_k = -\frac{\omega^2 \delta x^2}{2} (\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2), \quad (\text{III.26})$$

où $V_{1,2}$ est le volume du fluide concerné. Après simplification des termes communs, l'équilibre des énergies s'écrit :

$$\omega^2 \left(\frac{V_1}{L_1^2} + \frac{V_2}{L_2^2} \right) = g_l \times \left[\frac{1}{X_{\text{PNS}}} + \frac{1}{X_u} + \alpha \left(\frac{1}{L_1} - \frac{1}{L_2} \right) \right]. \quad (\text{III.27})$$

Cette équation permet d'obtenir le taux de croissance et donc de définir un domaine d'instabilité. En faisant l'analogie $z_{\min} = X_{\text{PNS}}$, $z_{\max} = X_u$, $g = \alpha g_l$, $c_{\text{up}}^2 = g_l L_2$ et $g_l H(x \rightarrow \infty) = \Phi$, avec c_{up}^2 la vitesse du son à l'interface dans le gaz supérieur et Φ la valeur du potentiel gravitationnel à l'infini :

$$\omega^2 = 8g c_{\text{up}}^2 \frac{\left(\frac{1}{z_{\min}} + \frac{1}{z_{\max}} \right) c_{\text{up}}^2 + g \left(e^{-\frac{\Delta S}{2}} - 1 \right)}{8g c_{\text{up}}^2 \left(z_{\min} e^{-\frac{\Delta S}{2}} + z_{\max} \right) + 4g\Phi \left(z_{\min} e^{-\Delta S} - z_{\max} \right) + 3\Phi^2 \left(1 - e^{-\Delta S} \right)}, \quad (\text{III.28})$$

en utilisant l'équilibre initial des forces $L_1^2 \rho_1 = L_2^2 \rho_2$ et $\Delta S = S_1 - S_2$.

Le dénominateur étant toujours positif tant que $L_2 > 2H$, on retrouve bien le critère de stabilité établi précédemment avec $\omega^2 < 0$ équivalent à

$$\left(\frac{1}{z_{\min}} + \frac{1}{z_{\max}} \right) c_{\text{up}}^2 + g \left(e^{-\frac{\Delta S}{2}} - 1 \right) < 0. \quad (\text{III.29})$$

On souhaite vérifier que cette instabilité est due à la présence de la marche de gravité. Pour cela, on étudie de la même façon d'autres formes de potentiels.

III.1.4.b Utilisation d'un potentiel hyperbolique

Si on considère un potentiel hyperbolique tel que :

$$z = -\frac{R^2}{x} = \alpha x, \quad (\text{III.30})$$

$$\alpha = \frac{\partial z}{\partial x}(x_i) = \frac{R^2}{x_i^2}, \quad (\text{III.31})$$

où $\frac{R^2}{x_i} = |z_i|$ est le niveau du sol à l'interface dans la position d'équilibre initial. Dans ce cas, la condition d'instabilité implique $L_2 < |z_i|$, illustré dans la Fig. III.10. Cela implique que la surface du fluide de droite rencontre le sol. En particulier, cela implique que le déplacement de matière dans le fluide (2) entraîne une variation de la profondeur du fluide. Si cette variation de profondeur entraîne une rencontre entre le fluide et le sol à l'infini, alors l'instabilité n'est pas possible. En effet, l'intégrale de $1/x$ étant divergente, cela entraînerait une masse infinie du fluide de droite via l'équation :

$$m_2 = \rho_0 \int_{x_i}^{\infty} \frac{dx}{x} \quad (\text{III.32})$$

Ainsi, l'instabilité n'est pas possible lorsqu'on considère un potentiel Newtonien.

Si l'on considère un potentiel en $1/x^n$, avec $n > 1$, alors l'instabilité redevient possible.

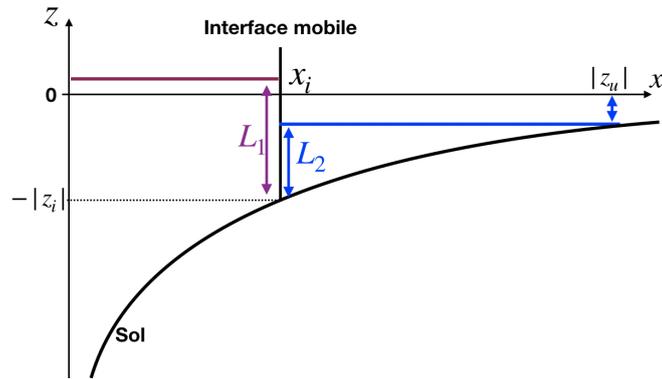


Figure III.10 – Description du système dans le cas d'un sol hyperbolique.

III.2 Géométrie sphérique

Par l'utilisation d'une géométrie sphérique, nous nous rapprochons du cas physique de la supernova. En particulier, nous pouvons prendre en compte l'effet géométrique de convergence de la matière lorsqu'on se déplace vers les petits rayons. Pour faire cela, on utilise le code de la partie II.2.2 du chapitre II. Par cette approche, on souhaite étudier l'évolution du paramètre χ correspondant à la stabilité marginale de la convection en fonction de plusieurs paramètres pertinents dans l'étude des supernovæ. Nous allons étudier l'influence de l'intensité du chauffage par les neutrinos via χ , du nombre de Mach de la matière incidente \mathcal{M}_1 , l'équation d'état via l'indice adiabatique γ , le rayon du choc r_{sh} et la dissociation au choc ε .

Afin de déterminer quel mode étudier, nous parcourons le domaine (ω_r, ω_i) pour chaque mode afin de déterminer quel harmonique est le plus instable. Nous sélectionnons ensuite le mode dont le taux de croissance ω_i est le plus élevé, qui se trouve être le mode de plus basse fréquence ω_r . Ainsi, nous avons étudié le comportement du mode fondamental en fonction des divers paramètres.

III.2.1 Impact du chauffage

Lorsque l'on modifie l'intensité du paramètre de chauffage, les propriétés des modes propres sont affectées. En particulier, sur la Fig. III.11 nous voyons apparaître deux comportements distincts en fonction du chauffage, déjà observés par [Yamasaki and Yamada \(2007\)](#) et [Fernández et al. \(2014\)](#). Pour les faibles valeurs de χ , on observe une instabilité oscillante (ω_r non nul), dominée par les petites valeurs de l : SASI. Pour les valeurs de χ les plus élevés, une instabilité non oscillante ($\omega_r = 0$) se développe : la convection.

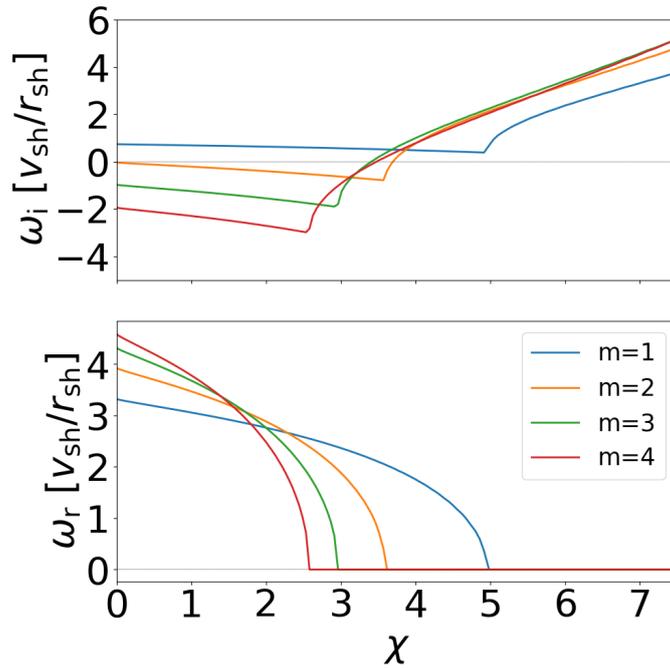


Figure III.11 – Évolution du taux de croissance et de la fréquence de plusieurs modes en fonction du chauffage. Deux régimes apparaissent, liées aux deux instabilités SASI, pour les faibles chauffages, et convective au-delà.

III.2.1.a SASI

Comme expliqué au chapitre I, l'instabilité liée au choc stationnaire est le résultat d'une interaction entre le choc et la zone de refroidissement au-dessus de la PNS. Elle implique deux temps caractéristiques :

- τ_{adv} , le temps mis par les perturbations d'entropie/vorticité pour être advectées du choc jusqu'à proximité de la surface de la PNS où elles produisent une rétroaction acoustique,
- τ_{ac} , le temps mis par la rétroaction acoustique pour atteindre le choc.

Le taux de croissance et la fréquence de l'instabilité, sans chauffage, sont donc inversement proportionnels à la taille de la région choquée. Lorsque l'intensité du chauffage augmente, le rayon du choc augmente. On s'attend donc à ce que le taux de croissance et la fréquence de l'instabilité diminuent de façon proportionnelle à l'inverse de la taille de la région choquée $r_{sh} - r_{PNS}$.

Cependant, plus le chauffage augmente, plus la convection perturbe le développement de SASI. Ainsi, au-delà d'un certain chauffage, la fréquence de SASI décroît plus vite que ce qui peut être prédit par l'augmentation de la taille de la région choquée seule, jusqu'à devenir nulle. À partir de ce moment, l'instabilité liée au choc stationnaire est sous-dominante et la convection se développe. Dans un régime amorti pour les intensités de chauffage intermédiaires, puis instable pour les taux de chauffage les plus grands.

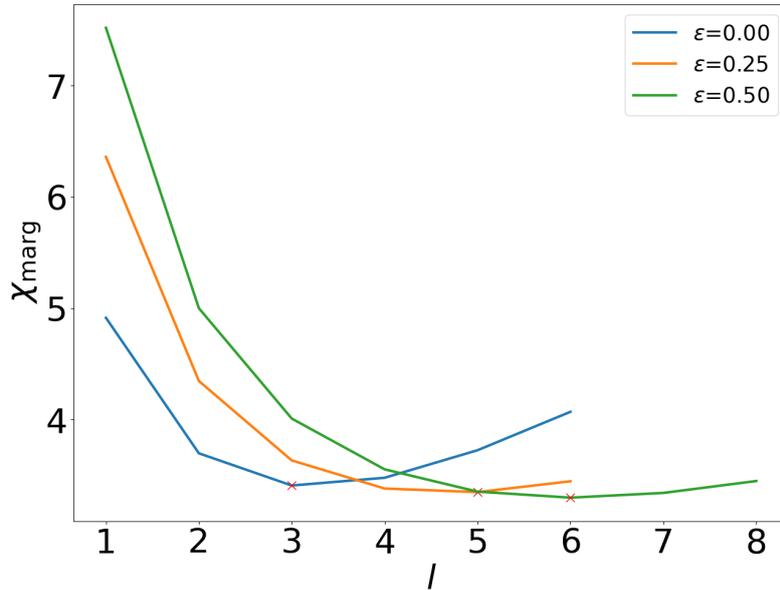


Figure III.12 – Évolution de la valeur de χ à la stabilité marginale pour différents taux de dissociation ε . La croix rouge au minimum de chaque courbe indique l'emplacement du χ_{crit} pour chaque taux de dissociation.

III.2.1.b Transition convective

Pour chaque mode de nombre d'onde azimutal m , il est possible de déterminer un seuil de stabilité marginale $\chi_{\text{marg},m}$ tel que $(\omega_r, \omega_i) = (0, 0)$ ¹. Ce seuil correspond à la transition vers une convection instable. Sa valeur est représentée dans la Fig. III.12 en fonction du mode considéré, pour plusieurs taux de dissociation. Si on considère tous les modes, nous pouvons définir un seuil critique global $\chi_{\text{crit}} \equiv \min(\chi_{\text{marg},m})$. Ce comportement est illustré dans la Fig. III.12.

Cette valeur critique d'apparition de l'instabilité convective est à comparer à la valeur $\chi_{\text{crit}} \sim 3$ établie en 2006. Nous allons nous intéresser à la variation de ce chauffage de transition lorsque les paramètres de dissociation ε , de nombre de Mach incident \mathcal{M}_1 , d'équation d'état γ et de rayon de choc r_{sh} sont variés.

III.2.2 Test de χ_{crit}

Lorsque l'on fait varier le paramètre de dissociation, une partie de l'énergie de la matière incidente est perdue pour dissocier les noyaux de fer. Les relations de Rankine-Hugoniot (Eqs. II.1-II.3) établissent que cette énergie incidente est transformée en énergie cinétique, thermique et est utilisée pour la dissociation des noyaux de fer. Une plus grande dissociation a donc deux effets. Tout d'abord, le support thermique sous le choc se trouve diminué, entraînant une récession du choc par équilibre des forces de pression. Ensuite, cela crée une diminution du nombre de Mach juste en dessous du choc \mathcal{M}_{sh} , la vitesse de la matière est diminuée et le refroidissement nécessaire pour atteindre une vitesse radiale nulle au bord interne est diminué

1. Dans les faits, cela n'est pas possible pour le mode $m = 1$, toujours instable. Pour ce mode particulier, la transition vers un mode convectif instable est définie par la condition $\omega_r = 0$.

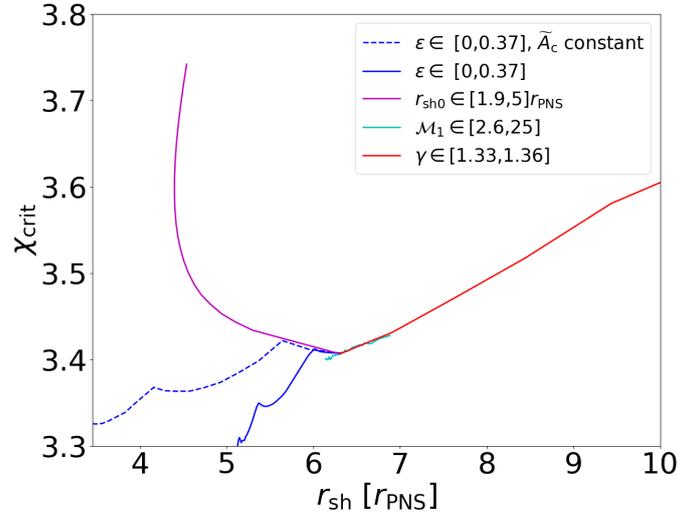


Figure III.13 – Évolution du taux de chauffage à la stabilité marginale de la convection en fonction des divers paramètres (ε en bleu, r_{sh0} en magenta, \mathcal{M}_1 en cyan, γ en rouge) en conservant le rayon du choc sans chauffage $r_{sh0} = 5 r_{PNS}$ et le nombre de Mach de la matière incidente $\mathcal{M}_1 = 5$ (sauf précisé autrement). En tirets bleus, l'évolution de χ_{crit} lorsque la microphysique est conservée constante et que le taux de dissociation varie.

lui aussi. Ainsi, lorsque la dissociation au choc est prise en compte, deux hypothèses de calcul peuvent être faites :

- la taille de la région choquée reste la même et l'intensité du refroidissement diminue,
- l'intensité du refroidissement reste la même et le rayon du choc diminue.

Ces deux possibilités permettent de diminuer le taux de refroidissement intégré sur la région choquée mais la première option supposerait une modification de la microphysique du refroidissement de la matière. À l'instar de [Fernández et al. \(2014\)](#), gardant le rayon du choc constant lorsque le taux de dissociation au choc est varié, nous choisissons de garder le rayon du choc et le nombre de Mach au-dessus du choc constants dans cette comparaison. Le refroidissement varie avec les paramètres tandis que le rayon sans chauffage est imposé. En effet, lorsqu'on impose le rayon du choc ou le nombre de Mach, c'est le refroidissement qui doit s'adapter afin de conserver la condition de vitesse nulle au bord interne. Nous acceptons donc de modifier la microphysique du refroidissement afin de pouvoir comparer tous les paramètres pour des situations initiales similaires. Pour l'étude plus approfondie de l'effet de la dissociation à venir, nous utiliserons une microphysique constante et laisserons varier le rayon du choc ainsi que le nombre de Mach associé.

Les variations induites par ces quatre paramètres (r_{sh0} , ε , \mathcal{M}_1 , γ) sont présentées sur la [Fig. III.13](#).

Grâce à cette analyse, on peut quantifier l'amplitude des variations de χ_{crit} dans l'espace des paramètres considérés. On remarque que ces variations ne sont pas négligeables mais restent restreintes dans l'intervalle $[3; 4]$, ce qui est compatible avec les résultats de [Glas et al. \(2019b\)](#). De plus, le paramètre ayant le plus d'influence sur la valeur de transition vers une instabilité

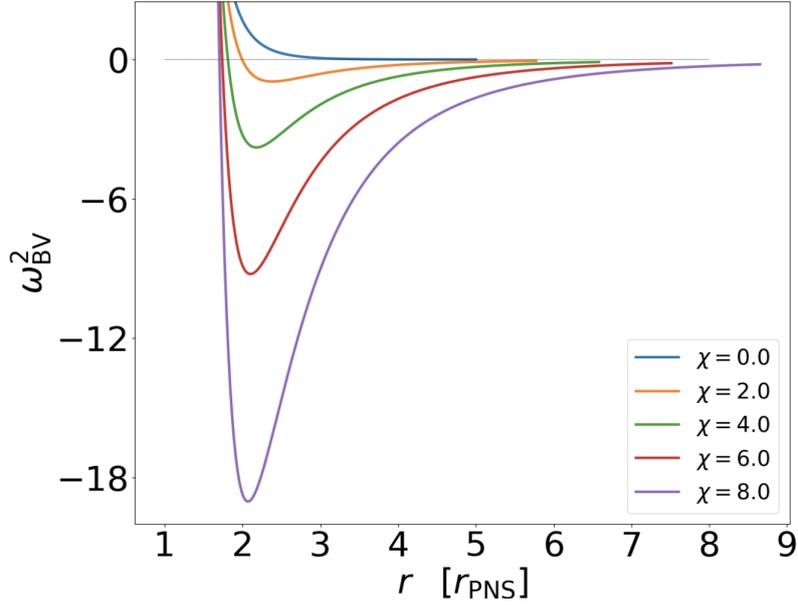


Figure III.14 – Profil du carré de la fréquence de Brunt-Väisälä ω_{BV}^2 en fonction du rayon pour différentes valeurs de χ .

convective semble être l'indice adiabatique γ . Des valeurs de γ plus grandes impliquent des transitions plus tardives, à des χ plus élevés. Cela est important car, pour le cas plus proche des conditions astrophysiques possédant un indice adiabatique $\gamma \gtrsim 4/3$, la valeur critique de χ tend vers 4. Contrairement aux résultats de l'analyse plane, nous n'obtenons pas une valeur de χ_{crit} très inférieure à 3 dans tout l'espace de paramètres. Au contraire, même pour des dissociations telles que $\varepsilon = 0.5$, la valeur du χ_{crit} reste supérieure à 3. Grâce à l'analogie du cas plan effectuée précédemment, cela s'explique partiellement via l'étude des échelles spatiales impliquées dans cette analyse sphérique. Dans le cas sphérique, la zone de chauffage se mesure via le profil de la fréquence de Brunt-Väisälä dans la zone de gain (Fig. III.14). En particulier, la largeur à mi-hauteur du pic de cette fréquence est l'analogue sphérique à H_S définie dans le cas plan. On remarque que le pic peut devenir étroit pour des grandes valeurs de χ mais que l'effet est très limité autour de $\chi \sim 3$. La diminution de la zone de chauffage dans le cas sphérique est donc moins importante que la diminution de H_S considérée précédemment, dans le modèle plan. Nous n'observons donc pas la décroissance de χ_{crit} obtenue dans la partie précédente.

Cet écart aux attentes planes pourrait s'expliquer par le développement de SASI pour les faibles valeurs de chauffage. En effet, cet effet était éliminé dans le cas plan par la condition limite d'onde sortante uniquement. Par ailleurs, cette instabilité semble affectée par la convection avant de disparaître. En effet, on peut voir dans le second graphique de la Fig. III.11 que la fréquence de SASI semble décroître de façon abrupte, proche de la transition vers une instabilité purement convective. Cela est sûrement dû à la présence sous-jacente de la poussée d'Archimède venant perturber l'évolution d'une instabilité purement SASI. Ainsi, il se pourrait qu'en l'absence de SASI, la convection instable puisse être observée pour des taux de chauffage inférieurs à $\chi = 3$, lorsque le rapport de taille des régions de chauffage et de gain est inférieur

à 1.

Ainsi, contrairement au cas plan où des valeurs faibles de χ_{crit} peuvent être atteinte par des petites zones de chauffage, le cas astrophysique est bien décrit par le modèle et le critère établis en 2006.

III.2.3 Évolution de l'échelle dominante

Une analyse plane de la taille des cellules convectives dominant l'instabilité menée par Chandrasekhar (1961), montre que ces cellules sont circulaires. La formule trouvée par Foglizzo et al. (2006) estime que la valeur du l dominant puisse s'exprimer comme :

$$l_{\text{dom}} = \frac{\pi r_{\text{sh}} + r_{\text{g}}}{2 r_{\text{sh}} - r_{\text{g}}}. \quad (\text{III.33})$$

Ainsi, pour les rayons de choc les plus petits, où la courbure de la sphère se fait le moins sentir, on s'attend à ce que l'échelle du mode le plus instable corresponde à des cellules convectives circulaires de rayon $(r_{\text{sh}} - r_{\text{g}})/2$.

La Fig. III.15 montre l'influence des paramètres (ε , r_{sh} , γ , \mathcal{M}_1) sur l'échelle dominante ainsi que l'écart à la valeur attendue par la formule donnée en Eq. III.33. On remarque que les valeurs et leurs variations sont bien prédites par cette formule, bien que nous puissions observer une sous-estimation presque systématique de l'échelle. L'écart à la valeur théorique est inférieur à 1 pour presque tous les cas. D'autre part, on peut noter que le paramètre ayant le plus d'influence sur la variation de la taille du mode le plus instable est la dissociation au choc. Ce paramètre sera donc conservé pour les futures études.

Nous proposons une interprétation à la différence presque systématique observée. Pour les plus grands rayons de choc, le phénomène de convergence est plus fort et l'estimation plane surestime donc la taille des cellules convectives. Il en est de même, lorsque les différents paramètres influant sur le rayon du choc sont variés. Nous nous attendons donc à ce qu'une augmentation de la dissociation au choc ou une diminution du nombre de Mach incident, augmentant le rayon du choc, mène à une estimation moins fiable de la taille des cellules convectives par l'Eq. III.33.

III.3 Conclusion sur le critère de stabilité

Le critère établi en 2006 dans des conditions simplifiées (Foglizzo et al., 2006; Kazeroni et al., 2018) a été remis en cause. Nous avons montré que dans le cas général, non astrophysique, ce critère n'était pas assez général et ne permettait pas de décrire correctement le développement de la convection en présence d'advection. Nous avons testé ici la possibilité d'un nouveau critère, dépendant des dimensions du problème et des longueurs d'onde considérées : Ψ . Ce critère est plus global et utilise le taux de croissance hydrostatique de l'instabilité convective. Les approches analytiques de ce critère ne sont cependant, pour le moment, pas totalement en accord avec les résultats numériques. Plusieurs paramètres restent à vérifier afin de s'assurer que cette différence ne provient pas d'une hypothèse invalide. Parmi ces paramètres se trouvent l'adiabaticité des perturbations et les échelles de longueurs utilisées pour définir les temps d'advection. Il semble que cette valeur soit cruciale pour déterminer la vitesse critique

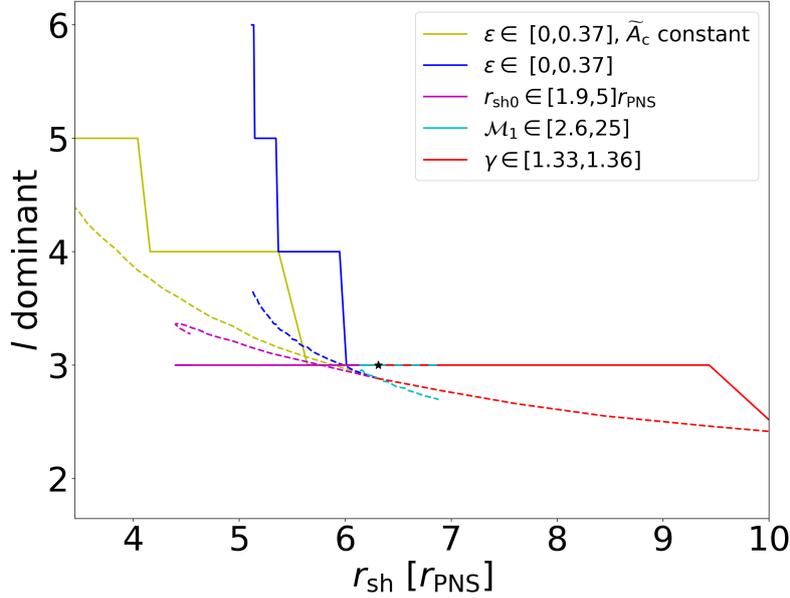


Figure III.15 – Évolution de la taille des cellules convectives en fonction du rayon du choc lorsque les paramètres $(\varepsilon, r_{\text{sh}0}, \gamma, \mathcal{M}_1)$ sont variés. En tirets sont représentées les valeurs attendues via l'Eq. (III.33). Le point noir désigne le point de départ commun tel que $\varepsilon = 0, r_{\text{sh}0} = 5 r_{\text{PNS}}, \gamma = 4/3, \mathcal{M}_1 = 5$.

de stabilisation de la convection. D'autre part, une piste en cours d'étude porte sur l'étude du taux de croissance hydrostatique et l'influence du profil d'entropie sur cette grandeur.

Bien que nous ayons démontré que le critère χ comporte des lacunes, nous avons pu déterminer que, dans le cas astrophysique de l'étude de la convection dans la zone de gain d'une supernova, ce critère restait approximativement valable et applicable. En effet, la valeur du paramètre χ à la stabilité marginale de la convection varie peu lorsque les différents paramètres d'entrée sont variés. Nous observons des transitions convectives sur le domaine $\chi_{\text{crit}} \in [3, 4]$. Cette variation, bien que faible, peut rendre la valeur de χ_{crit} trop imprécise pour être utilisée dans les simulations numériques 1D où il est nécessaire d'avoir un seuil précis pour déclencher les effets convectifs. Ce paramètre nécessite donc un affinement.

Les résultats obtenus en géométrie sphérique ne sont cependant pas totalement expliqués par le rapport de tailles des régions et motivent donc des études plus approfondies du phénomène. En effet, la valeur de χ_{crit} attendue par l'approche numérique plane serait de 1.5 dans le cas appliqué aux supernovæ. Cette différence entre le taux de chauffage critique attendu et celui obtenu dans les calculs appliqués aux supernovæ peuvent avoir plusieurs sources :

- Tout d'abord, nous avons considéré un modèle permettant de prendre en compte l'instabilité SASI, absente dans les calculs plans. Il est possible que l'advection des perturbations d'entropie et de vorticité retardent le développement de l'instabilité convective.
- Dans le modèle sphérique, nous prenons en compte une fonction de refroidissement, non prise en compte dans l'analyse plane.

Bien que le critère proposé par Foglizzo et al. (2006) semble rester valide dans le cas astrophy-

sique, des études restent à faire afin de développer un critère plus général, valable pour toutes les géométries et tailles de région de chauffage.

Chapitre IV

Impact de la rotation...

Sommaire

IV.1 ... sur le mode fondamental	96
IV.1.1 Résumé de l'article	96
IV.1.2 Introduction	98
IV.1.3 Methods	101
IV.1.3.a Numerical setup	101
IV.1.3.b Stationary flow	101
IV.1.3.c Perturbed flow	104
IV.1.4 Results	106
IV.1.4.a SASI and the convective instability without ro- tation	106
IV.1.4.b Influence of stellar rotation	107
IV.1.4.c Strong rotation-induced instability	120
IV.1.5 Expected consequences on the gravitational wave signature	121
IV.1.6 Conclusion and discussion	123
IV.1.7 Discussion du taux de dissociation	127
IV.2 ... sur les harmoniques et modes rétrogrades	127
IV.2.1 Fondamental et harmoniques	127
IV.2.2 Modes prograde et rétrograde	128
IV.3 Étude énergétique du taux de croissance	129
IV.4 Conclusion	132

Dans ce chapitre, nous étudions l'influence de la rotation sur les instabilités convective et SASI. Les modes fondamentaux, dominants en l'absence de rotation et dans une grande partie de l'espace des paramètres, sont décrits dans la section [IV.1](#) qui reproduit un article soumis pour publication. D'autres modes, d'importance moindre, sont discutés dans la section [IV.2](#) : les harmoniques à plus hautes fréquences d'une part, et les modes rétrogrades d'autre part. Enfin, nous présentons des résultats préliminaires de l'analyse énergétique permettant d'étudier l'origine des variations du taux de croissance liées à la rotation.

IV.1 ... sur le mode fondamental

La première partie de ce chapitre détaille l'étude de l'impact de la rotation sur les modes fondamentaux des instabilités convective et SASI dans le plan équatorial. Cette étude a été acceptée par le journal *Astronomy & Astrophysics* ([Buellet et al., 2023](#)). Le texte original en anglais est présenté dans cette partie, après un résumé en français.

IV.1.1 Résumé de l'article

Le développement des instabilités convectives et SASI au cœur de l'étoile est crucial afin de relancer le choc stationnaire et créer l'explosion et nous cherchons ici à savoir comment ce rôle est modifié lorsque la rotation est prise en compte. Nous savons que la rotation affecte SASI, même pour les petits taux de rotation ([Yamasaki and Foglizzo, 2008](#); [Blondin et al., 2017](#)). Cependant, l'effet de la rotation sur le développement de l'instabilité convective, due aux neutrinos, est encore méconnu. Cet article représente un premier pas vers l'identification de l'effet de la rotation sur les instabilités de la zone choquée, lorsque le chauffage est pris en compte. Pour les taux de chauffage les plus faibles, nous étudions l'impact de la rotation sur SASI. L'impact de la rotation sur la convection est étudié pour les taux de chauffage les plus élevés. La caractérisation de la fréquence du mode $m = 2$ est particulièrement importante pour interpréter le signal en ondes gravitationnelles d'une supernova.

Pour faire cela, nous utilisons une analyse linéaire, restreinte au plan équatorial. De plus, nous nous intéressons uniquement au gaz compris entre le choc et la PNS. La dynamique de la PNS n'est donc pas prise en compte. De plus, nous nous sommes concentrés sur les modes fondamentaux, négligeant les harmoniques. L'étude des harmoniques est abordée dans la Sect. [IV.2](#). Cette approche simplifiée nous permet de pouvoir explorer le domaine des paramètres tels que le taux d'accrétion, la luminosité des neutrinos et le moment cinétique. En effet, nous considérons des moments cinétiques de 0 à $1.5 \times 10^{16} \text{cm}^2/\text{s}$.

Par cette étude, nous avons pu démontrer que la nature de l'instabilité du mode non axisymétrique dominant dépend du taux de chauffage (via le paramètre χ) et du taux de rotation. Pour les forts taux de chauffage ($\chi > 5$), le taux de croissance des modes convectifs du plan équatorial est amoindri par la rotation différentielle. Cependant, pour les plus petits taux de chauffage, des modes mixtes SASI/convection tirent avantage de la rotation différentielle. Ces modes sont à grande échelle ($m = 1, 2, 3$) et deviennent dominants pour des rotations intermédiaires : 10% – 30% de la rotation Képlérienne au niveau de la surface de la PNS, où les effets centrifuges sont encore faibles. Pour les taux de rotation plus élevés, le taux de croissance et la fréquence du mode dominant dépendent peu du taux de chauffage. Cela met en

évidence l'émergence d'une nouvelle instabilité pour laquelle la convection n'intervient plus. En particulier, pour ce régime d'instabilité et dans les unités $v_{\text{sh}}/r_{\text{sh}}$, la fréquence du mode le plus instable semble ne plus dépendre du taux de chauffage et le mode $m = 2$ domine la dynamique du flot sur une grande partie du domaine exploré. Dans ce domaine de taux de rotation et avec ces unités, il existe une relation linéaire entre la fréquence d'oscillation du mode dominant et le taux de rotation du gaz accrété, valable pour toutes les intensités de chauffage par les neutrinos.

Finalement, cette étude nous a permis d'identifier trois régimes de rotation pour lesquels le comportement du mode dominant varie. Tout d'abord, pour les faibles taux de rotation ($< 10\%$ de la rotation Képlérienne au niveau de la surface de la PNS), la rotation a un effet linéaire, augmentant le taux de croissance de SASI. Selon le taux de chauffage, la rotation diminue ($\chi > 5$) ou augmente ($\chi < 5$) quadratiquement le taux de croissance de la convection. Pour les rotations intermédiaires ($10\% - 30\%$), des modes mixtes SASI/convection/rotation à grande échelle dominent la dynamique du gaz. Pour les taux de rotation les plus forts, la poussée d'Archimède ne joue plus de rôle dans l'instabilité et la fréquence et le taux de croissance du mode dominant ne dépendent pas ou peu de l'intensité du chauffage par les neutrinos.

IV.1.2 Introduction

The death of massive stars begins with the collapse of their iron core, which forms a proto-neutron star (PNS) for zero-age main sequence stellar masses in the range $[10, 60] M_{\odot}$ (Woosley et al., 2002; Woosley, 2017). The bounce creates a shock wave that propagates outwards and gradually loses energy, dissociating iron atoms until it stalls. The development of multi-dimensional instabilities during the stalled shock phase impacts both the revival of the shock (e.g. Herant et al., 1994; Janka and Mueller, 1996; Couch and O'Connor, 2014; Takiwaki et al., 2016) and the multi-messenger signature (e.g. Tamborra et al., 2013; Janka et al., 2016; Kuroda et al., 2016; Müller, 2020; Burrows and Vartanyan, 2021). The standing accretion shock instability (SASI; Blondin et al., 2003; Blondin and Mezzacappa, 2006) can generate shock oscillations and contributes to pushing the shock farther up (Scheck et al., 2008; Marek and Janka, 2009; Hanke et al., 2013). The magnitude of this effect depends on the concurrent growth of the neutrino-driven convection, which can generate turbulence in the post-shock region (Abdikamalov et al., 2015; Radice et al., 2016). Different paths to explosions dominated by either neutrino-driven convection or SASI may occur depending on the precise physical conditions determined by the progenitor structure (Müller et al., 2012a; Murphy et al., 2013; Fernández et al., 2014) and the magnitude of pre-collapse turbulence asymmetries (Couch and Ott, 2013; Müller et al., 2017).

The development of neutrino-driven convection and/or SASI leaves clear signatures in gravitational waves (GWs; Murphy et al., 2009; Kuroda et al., 2016; Andresen et al., 2017). The eigenfrequencies deduced from a perturbative analysis can be recognised in the GW signal (Torres-Forné et al., 2018, 2019b) and can be used to constrain parameters such as the PNS mass and radius or the shock radius (Torres-Forné et al., 2019a; Sotani and Takiwaki, 2020; Sotani et al., 2021). These asteroseismic properties can also help constrain the equation of state at nuclear densities (Kuroda et al., 2016; Sotani et al., 2017; Kuroda et al., 2022).

The neutrino signal is also a precious messenger, carrying direct information on the frequency of large-scale shock oscillations induced by SASI, and is currently detectable for galactic supernovae. In addition, the correlated detection of neutrino modulation and GWs could constrain the instability at work (Kuroda et al., 2017; Shibagaki et al., 2021).

A detailed understanding of the mechanism of each instability is necessary when interpreting the results of numerical simulations and in guiding the exploration of the parameter space. It is also useful for identifying potential numerical artefacts, for example on the competition between SASI and convection (Fryer and Warren, 2004; Hanke et al., 2013; Ott et al., 2013). SASI results from the interaction of pressure and advected perturbations of entropy and vorticity between the shock and the surface of the PNS (Foglizzo et al., 2007; Foglizzo, 2009; Fernández and Thompson, 2009a; Guilet and Foglizzo, 2012). The convective instability in the post-shock region is driven by neutrinos emitted by the cooling PNS : in the region where the absorption of neutrino energy exceeds the losses by neutrino emission, the heating by neutrino absorption creates a negative entropy gradient that is favourable to convection (Herant et al., 1992). The growth of this neutrino-driven convection requires neutrino heating to be strong enough that the buoyancy timescale is shorter than one-third of the advection timescale across this region (Foglizzo et al., 2006). Above a critical heating rate, the fundamental oscillatory mode of SASI

becomes the purely growing convective instability that dominates the dynamics of the flow (Yamasaki and Yamada, 2007; Fernández et al., 2014).

Most core-collapse simulations and theoretical work neglect the impact of rotation, which is therefore not well known. Rotation is, however, thought to play an important role in at least a small fraction of core-collapse supernovae with more extreme properties, such as super-luminous supernovae (Woosley, 2010; Inserra et al., 2013) or hypernovae and long gamma-ray bursts (Woosley, 1993; Metzger et al., 2011). It is furthermore possible that rotation plays a less extreme role in a larger fraction of core-collapse supernovae. Theoretical models of stellar evolution constrained by the efficient transport of angular momentum inferred from asteroseismic observations of red giants (Cantiello et al., 2014) and the observations of pulsar spins (Popov and Turolla, 2012) suggest that the majority of supernova explosions originate from slowly rotating stellar cores, and the rotation frequency, Ω , could be as low as 2×10^{-3} rad/s (Ma and Fuller, 2019).

Rotation rates of up to 2 rad/s are more exceptional but are commonly considered to explain extreme events such as hypernovae, super-luminous supernovae, and gamma-ray bursts. In this regime, the convective dynamo (e.g. Thompson and Duncan, 1993; Raynaud et al., 2020) and the magnetorotational instability (e.g. Akiyama et al., 2003; Guilet et al., 2022; Reboul-Salze et al., 2022) are expected to efficiently amplify the magnetic field of the PNS. Raynaud et al. (2020) hypothesise that magnetar-like magnetic fields can be generated by the strong field branch of the convective dynamo, which takes place at early times for specific angular momenta larger than 4×10^{15} cm²/s. This threshold corresponds to an angular frequency of 0.4 rad/s at 1000 km in the progenitor. The extraction of rotational energy with such a strong magnetic field can lead to strong magnetorotational explosions (e.g. Takiwaki et al., 2009; Kuroda et al., 2020; Bugli et al., 2021). The dynamo timescale being uncertain, the hydrodynamical approximation is often chosen for simplicity to model the majority of supernovae.

Beside the generation of magnetic fields, rotation can have several other effects on the shape of the neutrinosphere and on the development of instabilities. The centrifugal force diminishes the action of gravity and results in a larger radius of the neutrinosphere in the equatorial plane. The equatorial decrease in neutrino luminosity and neutrino mean energy is not favourable to the explosion according to axisymmetric simulations (Marek and Janka, 2009). The lower equatorial temperature favours neutrino heating in the polar region and a bipolar explosion (Suwa et al., 2010).

Stellar rotation can be favourable to the development of a vigorous, prograde, spiral SASI mode (Blondin and Mezzacappa, 2007a). The destabilising effect of differential rotation exists even for slow rotation with a negligible centrifugal contribution, as shown by perturbative analyses (Yamasaki and Foglizzo, 2008; Walk et al., 2022) and confirmed by numerical simulations (Kazeroni et al., 2017; Blondin et al., 2017), in which neutrino heating was neglected. However, the driving mechanism of this rotational destabilisation is not understood yet (Walk et al., 2022).

Classical studies of the effect of rotation on convection considered a rotation axis aligned with gravity. In a viscous fluid with thermal diffusion, the critical Rayleigh number defining the onset of thermal convection is increased by rotation (Chandrasekhar, 1961; Rossby, 1969;

Wedi et al., 2021). The studies of convection that considered the impact of differential rotation (Feudel and Feudel, 2021) did not involve radial advection, which is crucial in the supernova case. According to the Solberg-Høiland criterion, the development of axisymmetric convection can be stabilised by rotation if the specific angular momentum increases outwards (Endal and Sofia, 1978). In axisymmetric simulations of stellar core-collapse, this effect produces less vigorous convective motions in the equatorial plane and results in later-time explosions that are weaker at the equator than at the poles (Fryer and Heger, 2000). These 2D results seemed to be confirmed in 3D for the fastest spinning progenitors ($\Omega \sim 4.1$ rad/s at 1000 km; Fryer and Warren, 2004) in a regime where centrifugal effects can be dominant at reducing both the effective gravity and the neutrino luminosity in the equatorial plane, and thus producing a lower buoyancy than in the polar region.

Estimating the effect of modest rotation in the equatorial region of post-shock convection is less obvious when centrifugal effects are small, since inward accretion produces a uniform profile of specific angular momentum. With a rotation rate of $\Omega \sim 1.3$ rad/s at 1000 km, core-collapse simulations have shown an earlier onset of neutrino-driven convection that produced a stronger explosion in the equatorial plane, earlier than in the non-rotating case (Nakamura et al., 2014).

Even a modest amount of rotational kinetic energy, T , compared to the potential energy, $|W|$, can trigger a spiral instability known as ‘low- $T/|W|$ instability’ in the interior of isolated neutron stars (Shibata et al., 2002; Watts et al., 2005b; Passamonti and Andersson, 2015). The mechanism of this instability relies on the extraction of energy and angular momentum from internal regions rotating faster than the spiral pattern towards the external region, which is rotating more slowly (Cairns, 1979; Saijo and Yoshida, 2006). A similar instability has been observed in 3D simulations of stellar core-collapse, where it enhances the energy transport from the PNS to the shock and can lead to stronger explosions (Ott et al., 2005; Cerdá-Durán et al., 2007; Takiwaki et al., 2016, 2021).

The interplay of centrifugal effects, SASI, convection, and the low- $T/|W|$ instability can be difficult to disentangle in numerical simulations considering the diversity of progenitors and numerical approximations (Ott et al., 2008). Our current understanding relies on a very sparse sampling of this diversity. During the collapse of a $27M_{\odot}$ progenitor, the dynamic of the shock is driven by SASI and the convection for small rotation rates, and is dominated by the low- $T/|W|$ instability for high enough rotation rates ($\Omega = 2$ rad/s; Takiwaki et al., 2021). The enhancement of SASI by differential rotation can compensate for the loss of neutrino energy due to the centrifugal force during the collapse of a $15M_{\odot}$ progenitor (Summa et al., 2018). The GW analysis of these simulations can help us identify physical processes such as the enhancement of SASI for high rotation rates (Andresen et al., 2019). The 3D simulations of stationary accretion by Iwakami et al. (2014) consider a range of rotation rates, mass accretion rates, and neutrino luminosities. The structure of the dominant instability and the observed patterns are classified into three main categories: spiral, buoyant bubbles, or spiral and buoyant bubbles. However, the simultaneous variation in both rotation and neutrino luminosity make it difficult to disentangle their respective effects.

Previous studies of the impact of rotation on SASI (Yamasaki and Foglizzo, 2008; Blondin et al., 2017) did not consider the effect of heating. Conversely, perturbative studies on the effect

of heating on both SASI and the convective instability did not consider rotation (Yamasaki and Yamada, 2007; Fernández et al., 2014). To have a better understanding of the effect of each parameter on the growth of instabilities, we used a linear analysis, varying the rotation and the heating rate separately. Doing this, we were able to disentangle the effect of these parameters in the linear regime. By focusing on the accretion region above the surface of the PNS, we did not include the interaction with the low- $T/|W|$ and the convective instabilities developing inside the PNS. The aim of this paper is thus to study the impact of rotation on the onset of neutrino-driven convection and its interplay with SASI when both the neutrino heating and the rotation rate are varied. In Sect. IV.1.3 we detail the numerical setup and define the stationary and perturbed flows. We study in Sect. IV.1.4 the effect of rotation on SASI and convection as well as their interplay. Finally, we focus in Sect. IV.1.5 on the features that might be observable in a GW signal coming from an exploding supernova.

IV.1.3 Methods

IV.1.3.a Numerical setup

To study the growth of the convective and SASI instabilities, we numerically solved the system of perturbed equations corresponding to an idealised model of stationary accretion of a perfect gas, in spherical geometry restrained to the equatorial plane as in Walk et al. (2022), using the coordinates (r, ϕ) . Our setup is an adaptation of the linear analysis of Fernández et al. (2014) that includes rotation. The parameters we varied are : the reference shock radius (r_{sh0}) obtained without neutrino heating ; dissociation and rotation ; the rate of nuclear dissociation across the shock (ε) ; the neutrino luminosity ; and the specific angular momentum (J) that reaches the surface of the PNS.

IV.1.3.b Stationary flow

In spherical geometry, the system of stationary equations describing the conservation of mass, the entropy profile $S(r)$, the conservation of angular momentum, and the profile of the Bernoulli parameter in the equatorial plane is

$$\frac{\partial}{\partial r} (\rho v r^2) = 0, \quad (\text{IV.1})$$

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\mathcal{L}}{Pv}, \quad (\text{IV.2})$$

$$\frac{\partial J}{\partial r} = 0, \quad (\text{IV.3})$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{J}{2r^2} + \frac{c^2}{\gamma-1} - \frac{GM}{r} \right) = \frac{\mathcal{L}}{\rho v}, \quad (\text{IV.4})$$

where G is the universal gravity constant and M is the mass of the PNS, v the radial velocity and c the sound speed in the gas with pressure P and density ρ . The self-gravity of the infalling matter is neglected compared to that of the PNS. Non-adiabatic heating and cooling processes are described by a local function $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_h + \mathcal{L}_c$, as in Fernández et al. (2014). The cooling function \mathcal{L}_c used in Houck and Chevalier (1992) is a parametric function of P and ρ :

$$\mathcal{L}_c = -A_c \rho^{\beta-\alpha} P^\alpha. \quad (\text{IV.5})$$

We used $\alpha = 3/2$ and $\beta = 5/2$ as in [Blondin and Mezzacappa \(2006\)](#), [Foglizzo et al. \(2007\)](#), [Yamasaki and Foglizzo \(2008\)](#), [Fernández and Thompson \(2009a\)](#), [Fernández et al. \(2014\)](#), [Guilet and Foglizzo \(2012\)](#), and [Blondin et al. \(2017\)](#). Using a dimensional analysis, we express A_c as a function of the PNS radius, r_{PNS} , the surface gravity, GM/r_{PNS}^2 , and the mass accretion rate, \dot{M} :

$$A_c = \tilde{A}_c \times \dot{M}^{1-\beta} \left(\frac{GM}{r_{\text{PNS}}^2} \right)^{1-\alpha+\frac{\beta}{2}} r_{\text{PNS}}^{\frac{5\beta}{2}-2-\alpha}, \quad (\text{IV.6})$$

where \tilde{A}_c is a dimensionless quantity. The value of \tilde{A}_c sets the value of the shock radius r_{sh} without dissociation, rotation, or heating. \tilde{A}_c does not vary when these parameters are changed. The heating function \mathcal{L}_h is expressed as

$$\mathcal{L}_h = A_h \frac{\rho}{r^2}. \quad (\text{IV.7})$$

The normalisation constant A_h is proportional to the neutrino luminosities and the neutrino opacities per unit mass. It is varied as a free parameter in our model. The heating and cooling functions are effective in the post-shock region and are turned off above the shock, as in [Fernández et al. \(2014\)](#).

In order to study the influence of stellar rotation on the growth of the instabilities, we vary parametrically the specific angular momentum J . Its dimensionless measure j is defined using the Keplerian specific angular momentum at the PNS surface :

$$j \equiv \frac{J}{(GM r_{\text{PNS}})^{1/2}}. \quad (\text{IV.8})$$

We note that j^2 measures the ratio of the centrifugal and gravitational forces at the PNS radius :

$$\frac{J^2}{r_{\text{PNS}}^3} \frac{r_{\text{PNS}}^2}{GM} = j^2. \quad (\text{IV.9})$$

In our analysis, we varied j from 0 to 0.5, which corresponds to a maximum centrifugal force equal to 25% of the gravitational force at the PNS boundary. The angular momentum at 50% of the Keplerian rotation can be expressed as

$$J = 1.5 \times 10^{16} \text{ cm}^2/\text{s} \frac{j}{0.5} \left(\frac{r_{\text{PNS}}}{50 \text{ km}} \frac{M}{1.4 M_{\odot}} \right)^{1/2}, \quad (\text{IV.10})$$

which corresponds to an angular frequency $\Omega = 1.5 \text{ rad/s}$ at a reference radius $r = 1000 \text{ km}$ in the progenitor. For comparison, the strong dynamo branch described in [Raynaud et al. \(2020\)](#) could be generated for $j \gtrsim 0.13$. Our hydrodynamical study neglecting magnetic fields assumes that dynamo processes are too slow to interfere.

Angular momentum conservation leads to a uniform specific angular momentum in the stationary flow (Eq. [IV.3](#)). The profile of angular frequency is therefore

$$\Omega(r) = \frac{J}{r^2} = 150 \text{ rad/s} \frac{j}{0.5} \left(\frac{100 \text{ km}}{r} \right)^2. \quad (\text{IV.11})$$

In our model, the dissociation parameter ε corresponds to the fraction of specific kinetic energy of the incoming matter that is used to photo-dissociate the iron nuclei. ε is expressed in units of the specific kinetic energy $v_{\text{ff}0}^2/2$ associated with free-fall at the reference radius $r_{\text{sh}0}$. The Mach number is imposed so that $\mathcal{M}_1 = 5$ above the shock, without heating, rotation, or dissociation. The Bernoulli parameter is set to zero above the shock, and the adiabatic index is set to $\gamma = 4/3$. The default values of the shock radius and the dissociation rate are $r_{\text{sh}0} = 5r_{\text{PNS}}$ and $\varepsilon = 0$. For each figure, the value $r_{\text{sh}0} = 5r_{\text{PNS}}$ is used and the only exception is the use of $r_{\text{sh}0} = 3.2r_{\text{PNS}}$ for comparison in Figs. IV.1 and IV.5. This specific value is chosen such that the shock radius without heating coincides with the case with $(j, \varepsilon) = (0, 0.3)$ and $r_{\text{sh}0} = 5r_{\text{PNS}}$. The value of r_{sh} specified in each figure corresponds to the shock radius taking into account the neutrino heating, dissociation and rotation associated with the parameters $(A_{\text{h}}, \varepsilon, j)$. The shock radius decreases when dissociation increases. As the rotation or the heating rate A_{h} is increased, the shock radius increases (blue curve in Fig. IV.1) and the corresponding Mach number immediately above the shock decreases.

Distances are normalised with either the PNS radius r_{PNS} or the reference shock radius $r_{\text{sh}0}$. Densities are normalised with the density immediately above the shock ρ_{10} , and velocities with the free-fall velocity $v_{\text{ff}0}$ at $r_{\text{sh}0}$. These units are chosen for $(A_{\text{h}}, \varepsilon, j) = (0, 0, 0)$ and they do not vary when $(A_{\text{h}}, \varepsilon, j)$ are varied. With these units, the heating normalisation constant is written

$$A_{\text{h}} = \tilde{A}_{\text{h}} v_{\text{ff}0}^3 r_{\text{sh}0}, \quad (\text{IV.12})$$

where \tilde{A}_{h} is a dimensionless parameter characterising the heating rate. Another dimensionless measure of the heating rate is the convection parameter χ defined in Foglizzo et al. (2006) as

$$\chi \equiv \int_{r_{\text{g}}}^{r_{\text{sh}}} N(r) \frac{dr}{|v|}, \quad (\text{IV.13})$$

where r_{g} is the gain radius above which absorption of neutrino energy exceeds the losses by neutrino emission, and $N(r)$ is the local Brunt-Väisälä frequency :

$$N \equiv \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} g \nabla S \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{IV.14})$$

In this equation, the gravity term g was not corrected by the centrifugal force for the sake of simplicity, which is acceptable because of the low value of the ratio of those two forces in the parameter domain that we explore. Indeed, Eq. (IV.9) shows that even for the fastest rotation rate considered ($j = 0.5$), the ratio of those forces reaches only $\sim 7\%$ in the middle of the post-shock region.

We thus used $(r_{\text{sh}0}, \chi, \varepsilon, j)$ to explore the 4D parameter space associated with the mass accretion rate, neutrino luminosity, dissociation rate, and rotation.

Figure IV.1 illustrates the dependence on neutrino heating of the shock and gain radii for typical rotation and dissociation parameters. The gain radius is located near the shock for small values of χ , approaches twice the PNS radius for $\chi \sim 2$ and remains constant for $\chi \gg 2$ while the radius of the stationary shock is pushed further out by the strong heating of the matter.

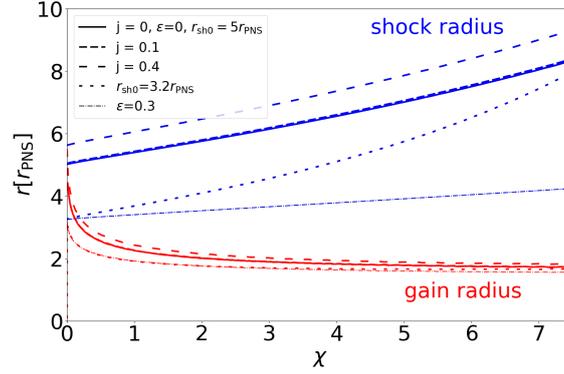


Figure IV.1 – Evolution of the shock (blue) and gain (red) radii as a function of the convection parameter, χ . Unless stated otherwise, the values of the parameters are $r_{\text{sh}0} = 5r_{\text{PNS}}$, $\varepsilon = 0$, and $j = 0$. The case $(j, \varepsilon) = (0, 0)$ and $r_{\text{sh}0} = 3.2r_{\text{PNS}}$ (dashed lines) is chosen so that the shock radius without heating coincides with the case with $(j, \varepsilon) = (0, 0.3)$ and $r_{\text{sh}0} = 5r_{\text{PNS}}$. As expected, the shock radius increases with χ and the introduction of rotation increases the shock radius when the cooling normalisation, A_c , is conserved. Note that for the moderate value of angular momentum $j = 0.1$, the stationary flow is almost unaffected by rotation.

The stronger the dissociation, the lower the energy after the shock. This leads to lower velocities of sound and matter than in the case without dissociation. As a result, the integrated intensity of the cooling function needed to decelerate across the shocked region is reduced. As \tilde{A}_c is determined with $\varepsilon = 0$, the size of the shocked region decreases when the dissociation rate increases, as observed in Fig. IV.1.

The centrifugal force increases the shock radius by $\simeq 15\%$ for the fast rotation rate $j = 0.4$. On the other hand, the impact of rotation is barely visible in this figure for a moderate rotation rate $j = 0.1$ because of the quadratic dependence of the centrifugal force with the rotation frequency as measured by Eq. (IV.9). With $j = 0.1$, we obtain a centrifugal effect of only $j^2 = 1\%$. However, we will see in the next section that this modest rotation is large enough to have significant effects on SASI and the convective instability.

IV.1.3.c Perturbed flow

For the perturbed system, we used the same set of perturbed variables as in [Yamasaki and Foglizzo \(2008\)](#). The terms δf , δh , δS , and δq are defined as follows :

$$\delta f \equiv v\delta v + \frac{J}{r}\delta v_\phi + \frac{2c}{\gamma-1}\delta c - \delta q, \quad (\text{IV.15})$$

$$\delta h \equiv \frac{\delta v}{v} + \frac{\delta \rho}{\rho}, \quad (\text{IV.16})$$

$$\delta S \equiv \frac{2}{\gamma-1} \frac{\delta c}{c} - \frac{\delta \rho}{\rho}, \quad (\text{IV.17})$$

$$\delta q \equiv \delta \left(\int \frac{\mathcal{L}}{\rho v} dr \right). \quad (\text{IV.18})$$

The time and angular dependence of the perturbations are assumed to follow the form $\exp(-i\omega t + im\phi)$. Their radial dependence is then governed by the same differential equations as Eqs. (6-11) in [Yamasaki and Foglizzo \(2008\)](#) with $k_z = 0$, despite the different geometry (spherical-equatorial instead of cylindrical) and the inclusion of neutrino heating in the local function \mathcal{L} :

$$\frac{d}{dr} \frac{\delta f}{\omega} = \frac{ic^2}{v(1-\mathcal{M}^2)} \left\{ \mathcal{M}^2 \left(\delta h - \frac{\omega'}{c^2} \frac{\delta f}{\omega} \right) + [1 + (\gamma - 1) \mathcal{M}^2] \frac{\delta S}{\gamma} - \frac{\delta q}{c^2} \right\}, \quad (\text{IV.19})$$

$$\frac{d\delta h}{dr} = \frac{i\omega}{v(1-\mathcal{M}^2)} \left(\mu^2 \frac{\omega'}{c^2} \frac{\delta f}{\omega} - \mathcal{M}^2 \delta h - \delta S + \frac{\delta q}{c^2} \right), \quad (\text{IV.20})$$

$$\frac{d\delta S}{dr} = \frac{i\omega'}{v} \delta S + \delta \left(\frac{\mathcal{L}}{Pv} \right), \quad (\text{IV.21})$$

$$\frac{d\delta q}{dr} = \frac{i\omega'}{v} \delta q + \delta \left(\frac{\mathcal{L}}{\rho v} \right), \quad (\text{IV.22})$$

where

$$\omega' \equiv \omega - \frac{mJ}{r^2}, \quad (\text{IV.23})$$

$$\mu^2 \equiv 1 - \frac{m^2 c^2}{r^2 \omega'^2} (1 - \mathcal{M}^2). \quad (\text{IV.24})$$

In these equations ω' corresponds to the Doppler-shifted value of ω and is thus a function of radius. We note that this effect of rotation is linear with respect to Ω , whereas the centrifugal force is proportional to Ω^2 as discussed above. A linear dependence allows for strong effects of slow rotation, as will be discussed later.

The boundary conditions at the shock are expressed using conservation laws across a perturbed shock :

$$\frac{\delta f_{\text{sh}}}{\omega} = iv_1 \Delta\zeta \left(1 - \frac{v_{\text{sh}}}{v_1} \right), \quad (\text{IV.25})$$

$$\delta h_{\text{sh}} = -i \frac{\omega'}{v_{\text{sh}}} \Delta\zeta \left(1 - \frac{v_{\text{sh}}}{v_1} \right), \quad (\text{IV.26})$$

$$\delta S_{\text{sh}} = i \frac{\omega' v_1}{c_{\text{sh}}^2} \Delta\zeta \left(1 - \frac{v_{\text{sh}}}{v_1} \right)^2 - \frac{\mathcal{L}_{\text{sh}} - \mathcal{L}_1}{\rho_{\text{sh}} v_{\text{sh}}} \frac{\Delta\zeta}{c_{\text{sh}}^2} + \left(1 - \frac{v_{\text{sh}}}{v_1} \right) \frac{\Delta\zeta}{c_{\text{sh}}^2} \left(\frac{2v_1 v_{\text{sh}}}{r_{\text{sh}}} + \frac{J^2}{r_{\text{sh}}^3} + \frac{GM}{r_{\text{sh}}^2} \right), \quad (\text{IV.27})$$

$$\delta q_{\text{sh}} = - \frac{\mathcal{L}_{\text{sh}} - \mathcal{L}_1}{\rho_{\text{sh}} v_{\text{sh}}} \Delta\zeta, \quad (\text{IV.28})$$

where $\Delta\zeta$ is the shock displacement. The indices '1' and 'sh' refer to the values above and below the shock, respectively. The only difference with the boundary conditions (12-15) in [Yamasaki and Foglizzo \(2008\)](#), who assumed a cylindrical symmetry, is the factor 2 implied by our choice of spherical-equatorial geometry, in the term $2v_1 v_{\text{sh}}/r_{\text{sh}}$ in Eq. (IV.27).

We used the same lower boundary condition as in [Yamasaki and Foglizzo \(2008\)](#) at the PNS surface, where the radial velocity vanishes. We used the Newton-Raphson method to find the eigenvalues of this system when ε , \mathcal{M}_1 , χ , and r_{sh} (or \tilde{A}_c) are given. This method determines the perturbation growth rate ω_i and frequency ω_r associated with the complex eigenfrequency $\omega \equiv \omega_r + i\omega_i$, for each azimuthal number, m .

In order to identify the effect of the four parameters ($r_{\text{sh}0}, \varepsilon, \chi, j$) on the growth of instabilities, we select a mode and follow its evolution when the parameters are varied. For a given value of m , studied the evolution of each harmonic without rotation and selected the overtone with the highest growth rate, which happens to be the fundamental mode as obtained by [Yamasaki and Yamada \(2007\)](#). We therefore follow the properties of this fundamental mode when the parameters ($r_{\text{sh}0}, \varepsilon, \chi, j$) are varied. When rotation exceeds $j \sim 0.15$, we noticed that some higher harmonics can be slightly more unstable than the fundamental mode, but this effect is marginal.

IV.1.4 Results

IV.1.4.a SASI and the convective instability without rotation

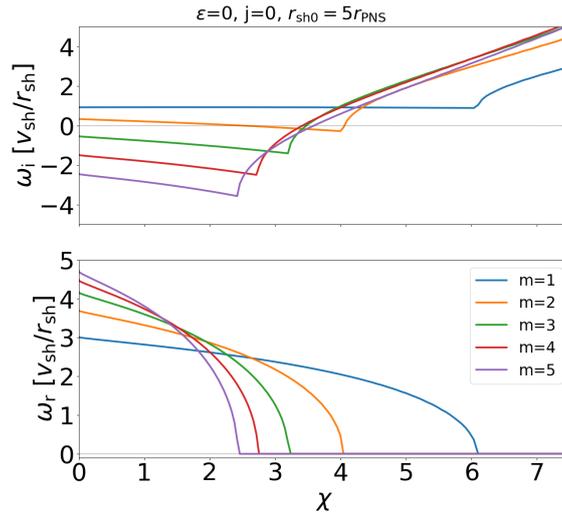


Figure IV.2 – Evolution of the growth rate (upper panel) and frequency (lower panel) of the fundamental modes as a function of the convection parameter, χ . Two instability domains can be identified : SASI ($\omega_r \neq 0$) for modest neutrino heating and the convective instability ($\omega_r = 0$) for stronger heating.

Figure IV.2 shows the effect of the heating parameter χ on the growth rate and the frequency of the fundamental mode corresponding to several azimuthal numbers $m = 1$ to 5. Similarly to [Yamasaki and Yamada \(2007\)](#) and [Fernández et al. \(2014\)](#), for each value of m , the instability is oscillatory (like SASI) for modest heating and purely growing (like the convective instability) for stronger heating. The most unstable perturbations in the oscillatory regime have a large angular scale corresponding to a small azimuthal number $m = 1$, as expected for SASI. For each mode, the SASI frequency decreases abruptly to zero when the heating rate is increased.

The transition to a mode with zero frequency corresponds to a steep increase of the growth rate. The azimuthal scale of the dominant convective modes is smaller (i.e. larger m , here $m = 4$) than SASI modes. The χ parameter corresponding to the transition between SASI and convection is $\sim 7\%$ smaller than expected from [Fernández et al. \(2014\)](#). This difference may be due to their use of an entropy cut-off in the heating/cooling function, $\exp - (S/S_{\min})^2$, where S_{\min} is the entropy at the PNS surface. Except for this small quantitative difference, the general behaviour is the same as in [Fernández et al. \(2014\)](#).

To illustrate the influence of the dissociation parameter ε on the growth of the convective instability, we fixed the value $\chi = 4$ such that the dominant mode is convective for every dissociation rate. Figure IV.3 compares the azimuthal number m_{num} corresponding to the most unstable mode obtained numerically (triangles), to the expected value estimated analytically by [Foglizzo et al. \(2006\)](#) (dotted line) :

$$m_{\text{ana}} = \frac{\pi r_{\text{sh}} + r_{\text{g}}}{2 r_{\text{sh}} - r_{\text{g}}}. \quad (\text{IV.29})$$

The analytical formula is in approximate agreement with m_{num} and reproduces reasonably well its increase with the dissociation parameter ε . This dependence on ε can therefore be understood using Eq. (IV.29), which is a geometric formula based on the assumption that convective cells have a circular shape, radially centred in the gain region. When dissociation is increased, the shock radius decreases while the gain radius is barely affected (see Fig. IV.1). The smaller radial size of the convective zone therefore leads to smaller-scale convective cells. Beyond the approximate agreement, Fig. IV.3 shows that the analytical formula tends to underestimate the value of m_{num} by 15 – 25%, which can be interpreted as follows. Eq. (IV.29) neglects the spherical geometry of the star and the fact that the local value of the Brunt-Väisälä frequency is highest near the gain radius such that the width of its radial profile is only a fraction of the gain region size. As a result, the limiting scale for the convective cells is smaller than the whole gain region and comparable to the size of the most buoyant region, as can be seen in Fig. IV.10. This can explain the offset between the blue triangles and the blue curve in Fig. IV.3, indicating that m_{ana} over-estimates the angular size of the dominant convective scale.

We also varied $r_{\text{sh}0}$ between 2 and 4.5 times the PNS radius by changing the cooling intensity \tilde{A}_{c} and adapting the pre-shock Mach number \mathcal{M}_1 such that $\mathcal{M}_1 = 5$ for $r_{\text{sh}} = 5r_{\text{PNS}}$, $\varepsilon = 0$. For this variable, the agreement between m_{num} and m_{ana} is similar to the one obtained in Fig. IV.3 without dissociation.

IV.1.4.b Influence of stellar rotation

In this section we characterise the dependence of the growth rate and the oscillation frequency on the rotation rate for both SASI and the convective instability. We highlight the existence of three rotation regimes, reflected by the properties of their eigenfrequencies and structures. For small rotation rates ($j \lesssim 0.1$, Sects. IV.1.4.a and IV.1.4.b), we identify the development of SASI or the convection, depending on the convection parameter. For intermediate rotation rates ($j \in [0.1, 0.3]$, Sect. IV.1.4.b), the distinction between the two instabilities is no longer possible and we observe the growth of mixed modes. For high rotation rates ($j \gtrsim 0.3$, Sect. IV.1.4.c), the effect of the χ parameter on both the frequency and the growth rate

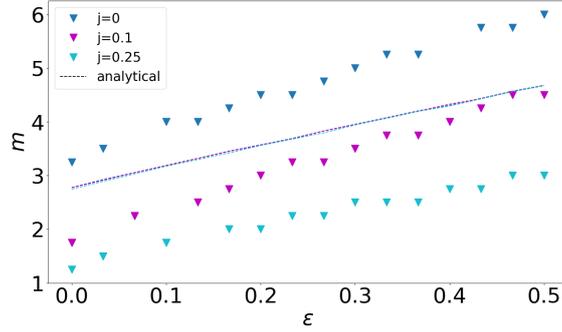


Figure IV.3 – Influence of the dissociation of nuclei across the shock on the azimuthal number of the most unstable fundamental mode, m_{num} (triangles), at $\chi = 4$ for three different values of the rotation rate. The numerical values of the most unstable modes (triangle) are compared to the analytical predictions of Eq. (IV.29) (dashed lines) as a function of the dissociation rate. We allow for quarter-integer values of m_{num} for an easier comparison with Eq. (IV.29).

becomes negligible and a rotational instability arises.

Effect of rotation and heating on SASI

The growth rate of SASI is expected to increase approximately linearly with the rotation rate, and the angular scale of the dominant mode is expected to diminish when the rotation rate increases. The corotation radius, defined as

$$r_{\text{corot}} \equiv \left(\frac{mJ}{\omega_r} \right)^{1/2}, \quad (\text{IV.30})$$

is also expected to increase with the rotation rate. These results were obtained without neutrino heating using a perturbative analysis and numerical simulations both in cylindrical geometry (Yamasaki and Foglizzo, 2008; Kazeroni et al., 2017) and in spherical geometry (Blondin et al., 2017; Walk et al., 2022).

Our perturbative analysis in spherical-equatorial geometry, shown in Fig. IV.4, confirms these results for $\chi = 0$ and measures the impact of neutrino heating for $\chi = 2$. The lower plot in Fig. IV.4 shows the same dependence of the corotation radius on the rotation rate as in Yamasaki and Foglizzo (2008) despite the different geometry. We note that increasing the rotation rate introduces a corotation radius $r_{\text{corot}} > r_{\text{PNS}}$ associated with the mode $m = 2$ for a lower rotation rate than the mode $m = 1$. This hierarchy is conserved when neutrino heating is taken into account. In addition, in Yamasaki and Foglizzo (2008), the frequencies for which $r_{\text{corot}} = r_{\text{PNS}}$ are $f_{p2} \sim 0.15$ kHz and $f_{p1} \sim 0.25$ kHz for $m = 2$ and $m = 1$, respectively. These values are very close to our spherical-equatorial results, where $f_{p2} \sim 0.17$ kHz and $f_{p1} \sim 0.28$ kHz.

As in Yamasaki and Foglizzo (2008), the growth rate of the mode $m = 1$, dominant without rotation, becomes inferior to the growth rate of the mode $m = 2$ for sufficiently fast rotation rates. We find that this behaviour is robust when neutrino heating is taken into account, as illustrated in Fig. IV.4 for $\chi = 2$.

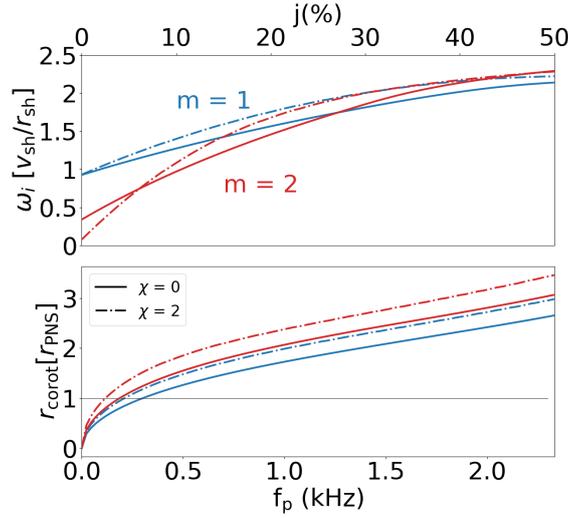


Figure IV.4 – Evolution of the growth rate, ω_i , in units of $v_{\text{sh}}/r_{\text{sh}}$ (top), and the corotation radius in units of r_{PNS} (bottom) as a function of the rotation rate, measured as in Yamasaki and Foglizzo (2008) with f_p , the pulsar frequency at 10 km. The azimuthal numbers $m = 1$ (blue) and $m = 2$ (red) are displayed for $\chi = 0$ (solid line) and $\chi = 2$ (dash dotted line). To allow for a comparison with Fig. 1 of Yamasaki and Foglizzo (2008), we considered the same parameter $r_{\text{sh}} = 5r_{\text{PNS}}$ with a strong adiabatic shock.

In the absence of dissociation and heating (solid lines in Fig. IV.4), the observed transition with the mode $m = 2$ dominating the instability for $j \in [0.3, 0.5]$ is consistent with the results of Blondin et al. (2017) where the mode $m = 2$ dominates for $j \sim 0.36$ (corresponding to $h = 0.115$ in their units). When neutrino heating is taken into account, Fig. IV.4 shows that the transition from $m = 1$ to $m = 2$ requires a slightly larger amount of rotation. On the other hand, this transition requires a smaller amount of rotation when the shock radius is smaller or when dissociation is taken into account (Fig. IV.5). The influence of dissociation can be explained by its effect on the advection timescale. For a given shock radius (kept constant in Fig. IV.5), the matter velocity decreases with ε because of the larger compression through the shock. As a consequence, the advection timescale $r_{\text{sh}}/v_{\text{sh}}$ increases with ε and the frequency of the SASI modes decreases. A slower rotation is therefore sufficient to be comparable to the SASI frequency, which can explain the steeper effect of rotation. This interpretation is confirmed by the bottom panel of Fig. IV.5 where the rotation rate has been normalised using the advection timescale. This re-normalisation indeed collapsed the curves with and without dissociation, at least for the small rotation rates. We note, however, that this argument cannot explain the dependence on the shock radius of the rotational destabilisation of SASI, which remains mysterious.

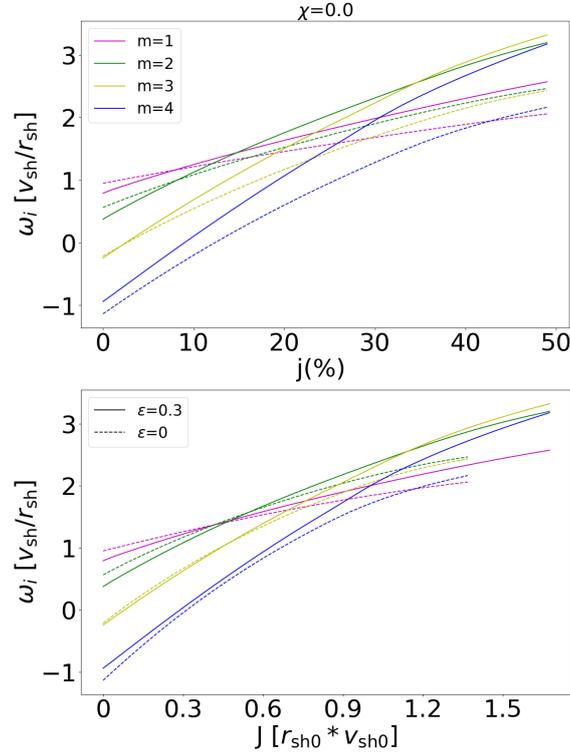


Figure IV.5 – Influence of rotation on the growth rate of SASI with dissociation (solid lines) and without dissociation (dashed lines). The bottom panel presents the rotation rate normalised with a proxy for the advection timescale from the shock to the PNS calculated for $(\chi, j) = (0, 0)$. Other parameters are $\chi = 0$ and $r_{\text{sh}}(j = 0) = 3.2r_{\text{PNS}}$.

Effect of rotation on the convective instability

We consider in Fig. IV.6 the effect of the convection parameter on the eigenfrequency of the mode $m = 4$ for different rotation rates. The mode $m = 4$ was chosen because it is the first mode exhibiting a convective instability when $j = 0$. The most striking feature regarding the oscillation frequency (lower plot in Fig. IV.6), compared to Fig. IV.2, is the loss of a sharp transition between an oscillatory instability for modest neutrino-heating and a purely growing instability for strong enough neutrino-heating. This effect blurs the distinction between SASI and convection. This distinction becomes difficult for $j \gtrsim 0.1$ as will be discussed in the next section. In this section we focus on the regime of slow rotation ($j \lesssim 0.1$), in which the two instabilities can still be distinguished.

Even with modest angular momentum, the differential nature of rotation implies that convective motions are sheared, in addition to being entrained in rotation with a frequency intermediate between the shock and PNS rotational frequency. The region most unstable to buoyant motions – namely, the radius r_{BV} corresponding to the largest Brunt-Väisälä frequency $N(r)$ (Eq. IV.14) – is expected to contribute most to defining the phase frequency of the convective mode (i.e. the rotation frequency of the frame in which the convective pattern is stationary). In Fig. IV.7 we compare r_{BV} with the corotation radius r_{corot} defined by Eq. (IV.30).

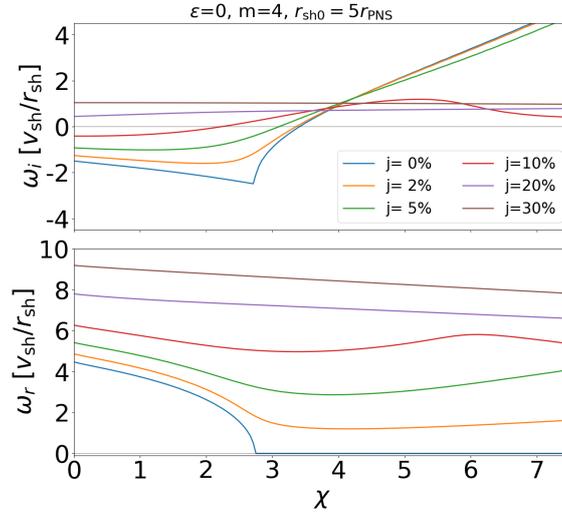


Figure IV.6 – Evolution as a function of χ of the growth rate, ω_i (top), and the frequency, ω_r (bottom), of the fundamental mode with an azimuthal number $m = 4$ for different values of the rotation rate.

For small rotation rates ($j \lesssim 0.1$), we remark that r_{corot} is close to r_{BV} as anticipated for a purely convective mode.

Figure IV.8 illustrates the effect of rotation on the growth rate of convective modes at $\chi = 6.5$, which is significantly larger than the marginal stability threshold of the most unstable mode ($\chi = 3.5 - 4$). For both dissociation rates considered ($\epsilon = 0$ and $\epsilon = 0.3$), the differential rotation reduces the growth rate of the convective instability, in particular for the smaller scale modes. The adverse effect on the convective instability is less abrupt for larger-scale modes, which we interpret as a smaller effect of the shear between the shock and the PNS. As a result, larger angular scales become dominant for high rotation rates. At the largest scales ($m = 1$ for $\epsilon = 0$, $m = 1 - 2$ for $\epsilon = 0.3$), the effect of rotation is an increase of the growth rate, which will be discussed in the next paragraph and section.

Figure IV.9 shows the effect of rotation on the convection parameter at marginal stability, referred to as χ_{marg} . This threshold for unstable convective modes decreases with rotation for all m considered, thus showing a destabilising effect on convection near its marginal stability. Such a destabilising effect is surprising and stands in striking contrast to the adverse effect of rotation at $\chi = 6.5$ discussed in the last paragraph. We interpret this effect as a consequence of the mixed nature of the modes near the transition between SASI and convection. In this interpretation, the destabilising effect of rotation on convection is a residual effect of the rotational destabilisation of SASI, which is well established numerically (Yamasaki and Foglizzo, 2008; Blondin et al., 2017; Walk et al., 2022) but has never been explained physically. The effect of rotation is thus expected to depend on how close the convection parameter is to the SASI–convection transition. This expectation is in agreement with Fig. IV.9, which shows that the convection parameter at marginal stability χ_{marg} decreases faster with rotation for modes with smaller m . In the absence of rotation, when m increases, the transitional χ_{trans} from SASI to convection

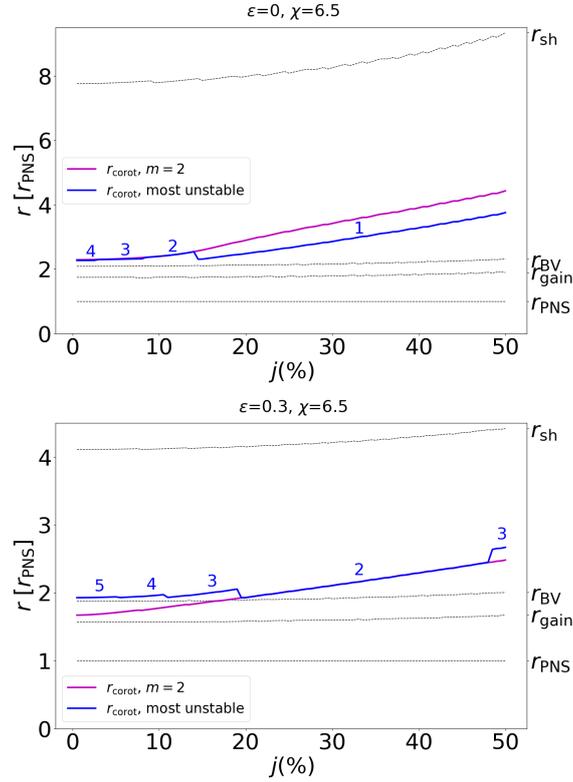


Figure IV.7 – Evolution of the corotation radius, r_{corot} , as a function of the rotation rate for $\varepsilon = 0$ (top) and $\varepsilon = 0.3$ (bottom). The corotation radius of the most unstable mode is represented with a blue line (numbers above the line specify the corresponding azimuthal number, m). For comparison, grey lines show the PNS radius, r_{PNS} , the gain radius, r_{gain} , the radius of the Brunt-Väisälä frequency maximum, r_{BV} , and the shock radius, r_{sh} . With both values of the dissociation, the corotation radius of the most unstable mode is close to r_{BV} for slow rotation and moves away for higher rotation rates ($j > 30\%$).

decreases (see Fig. IV.2) while the marginal stability χ_{marg} depends little on the azimuthal number. As a result, the difference $\Delta\chi \equiv \chi_{\text{trans}} - \chi_{\text{marg}}$ increases with m , and the residual effect of SASI decreases. This highlights the mixed SASI-convection nature of the modes near χ_{trans} for small rotation rates.

Mixed SASI-convective mode induced by rotation

For intermediate rotation rates ($0.1 < j < 0.3$), the behaviour of the modes is modified by rotation to such an extent that it becomes impossible to distinguish clearly between convective and SASI modes. As described in this section, the modes in this regime retain characteristics of both instabilities and are best understood as mixed SASI-convection-rotation modes.

In order to gain a deeper understanding of the transition between SASI dominated and buoyancy dominated regimes including rotation, we show in Fig. IV.10 the entropy structure of the eigenfunction for the modes $m = 1, 2, 4, 5$ for three values of the angular momentum $j = 0, 0.1$ and 0.4 and $\chi \sim 6$. Without rotation (first column in Fig. IV.10), the entropy structure

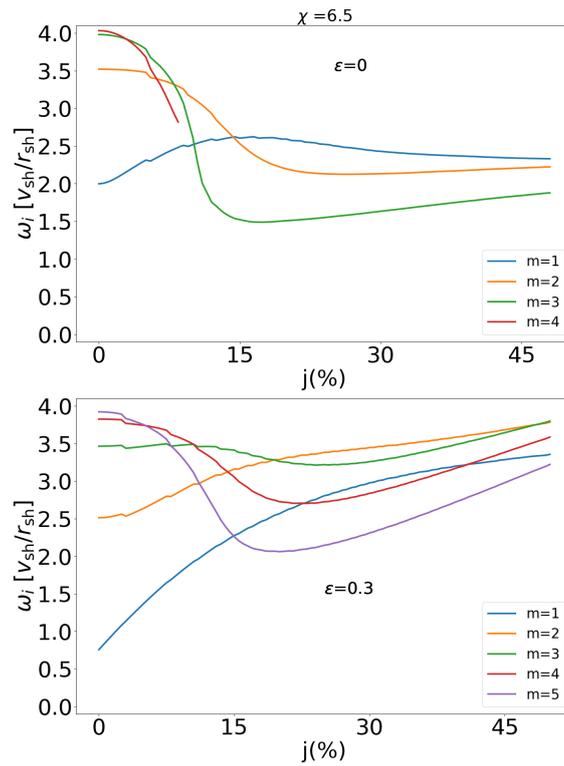


Figure IV.8 - Growth rate evolution depending on the rotation rate for several modes at $\chi = 6.5$ with $\epsilon = 0$ (top panel) and $\epsilon = 0.3$ (bottom panel). For $j = 0$, $r_{sh}(\epsilon = 0) = 7.8r_{PNS}$ and $r_{sh}(\epsilon = 0.3) = 4.1r_{PNS}$. For this convection parameter, non-axisymmetric convective modes are quenched by rotation. In the absence of rotation, all modes are above the transition from SASI to convection, except for the mode $m = 1$ in the bottom panel.

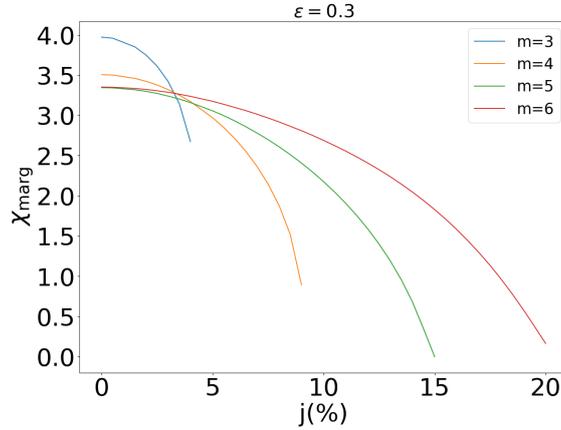


Figure IV.9 – Impact of rotation on the convection parameter at marginal stability, χ_{mag} . We consider several azimuthal numbers with $m > 3$, for which SASI is stable in the absence of rotation. The $m = 1$ and $m = 2$ are not shown because they are unstable to SASI, which prevents us from measuring χ_{mag} . The curves are cut when the mode is unstable for all convection parameters, in which case χ_{mag} does not exist anymore.

of SASI (first line) is uniformly spread in the radial direction as a spiral pattern. It is clearly distinct from the structure of convection, whose perturbations are more localised in the vicinity of the gain radius and do not display any spiral pattern. In the second column of this figure, we note that the $m = 1$ spiral SASI pattern is little affected by a moderate rotation with $j = 0.1$ (compare left and middle columns). This can be interpreted by the fact that for such moderate rotation, the corotation radius is close to the PNS surface. For the same rotation rate, the differential rotation shears the convective cells with $m = 2 - 5$. This leads to spiral structures that are smaller but similar to a SASI pattern. However, the convective nature of the mode is still visible by the localisation of the perturbations near the gain radius. These similar structures suggest that the mode is not purely convective, but a mixed SASI-convection-rotation regime.

A global panorama of the parameter space is shown in Fig. IV.11 where χ and j are varied for three values of the dissociation parameter $\varepsilon = 0, 0.3$ and 0.5 (upper to lower rows). The four columns represent the growth rate and oscillation frequency of the most unstable mode, its azimuthal number m and the corotation radius r_{corot} . A prominent effect of dissociation is a reduction in r_{sh} and thus the timescale of advection across the gain region.

For small values of j , a sharp jump in frequency and m is visible in Fig. IV.11 where neutrino heating exceeds the threshold $\chi \sim 4$, corresponding to the transition from SASI to the convective instability as the most unstable mode. However, as rotation increases, the frequency of the convective instability increases until it becomes similar to the SASI frequency. When the angular momentum reaches $j_{\text{crit}} \sim 0.08 - 0.12$, the jump disappears and it becomes impossible to distinguish clearly convective from SASI modes : this is the regime of mixed modes.

The occurrence of mixed modes can also be recognised in the evolution of the corotation radius shown in Fig. IV.7. Above a critical rotation rate, the corotation radius indeed moves away from the Brunt-Väisälä radius, where it is located for a convective mode. We remark

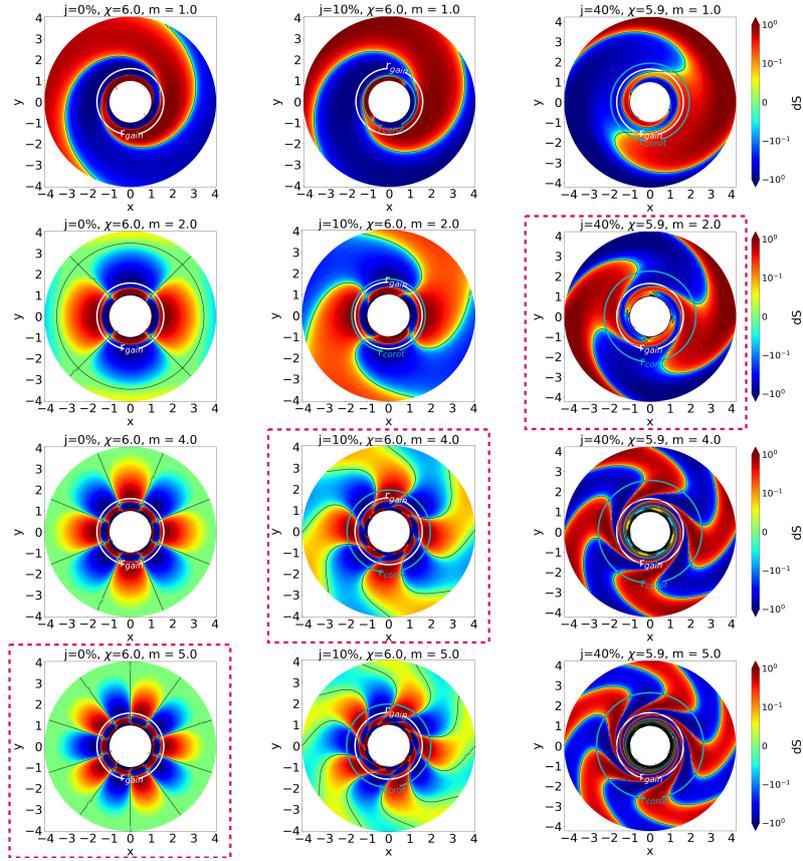


Figure IV.10 – Spatial structure of the eigenmode entropy perturbation in the equatorial plane, for $\varepsilon = 0.3$ and $\chi \sim 6$. Each row corresponds to a value of $m = (1, 2, 4, 5)$ (from top to bottom) and each column to a rotation rate with $j = (0, 0.1, 0.4)$ (from left to right). In magenta and cyan, we represent the gain and corotation radii, respectively. The diagonal sequence of framed plots corresponds to the most unstable modes. Coordinates x and y are expressed in r_{PNS} units. The deformation induced by rotation is stronger for smaller-scale modes.

that r_{corot} shifts outwards for rotation rates exceeding $j \sim 10\%$, indicating a lower frequency than expected for a purely convective mode. This slower oscillation frequency compared to the rotation rate of the most buoyant layer indicates that some physical process associated with rotation and/or SASI contributes significantly to the instability mechanism. However, the decrease of the azimuthal number of the dominant mode (see below) maintains the corotation close to the Brunt-Väisälä radius, indicating that convection still plays a role in the instability mechanism.

We remark in the third column of Fig. IV.11 that the azimuthal number m of the most unstable mode decreases with the rotation rate for $\chi > 4$, while it increases for $\chi < 4$. The change of dominant convective scale induced by rotation is not predicted by Eq. (IV.29) : comparing the magenta and blue triangles in Fig. IV.3 indicates a shift to larger angular scales induced by a moderate angular momentum $j = 0.1$, despite a negligible change in the size of

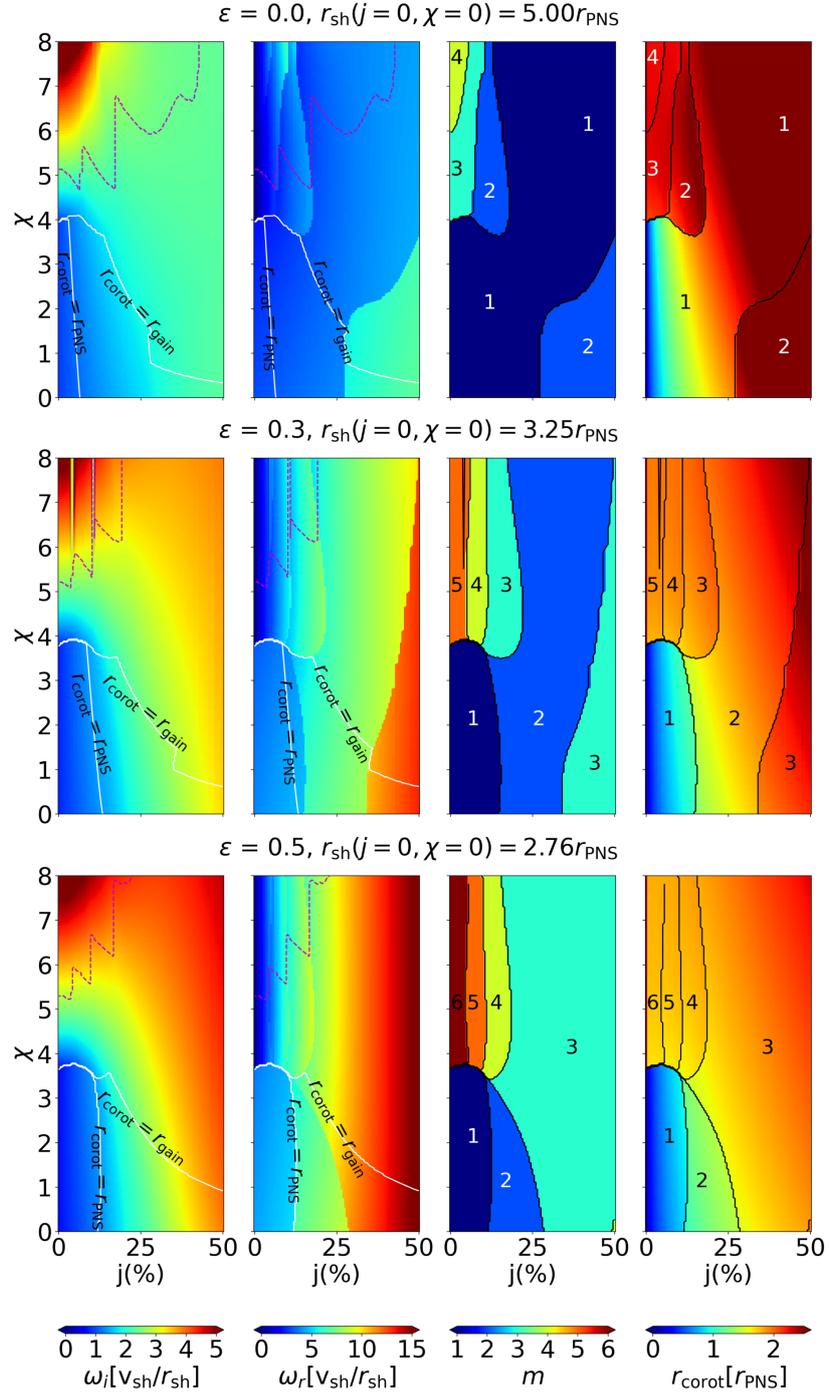


Figure IV.11 – From left to right, maps of the growth rate, ω_i , frequency, ω_r , azimuthal number, m , and corotation radius of the most unstable fundamental mode with three dissociation rates : $\varepsilon = 0$ (top row), 0.3 (middle row), and 0.5 (bottom row). Above the dashed magenta line, the growth rate of equatorial perturbations decreases with rotation. In the two left columns, the white lines show where the corotation radius equals r_{PNS} and r_{gain} . In the two right columns, the black lines highlight the variation in the dominant azimuthal number, m . The numbers in the third and fourth columns highlight the azimuthal number of the most unstable mode.

the gain region. For this small rotation rate, the shortcoming of Eq. (IV.29) is not surprising when considering the rotation-induced distortion of the convective cells in Fig. IV.10 and the residual influence of SASI. The rotational stabilisation of perturbations with a large azimuthal wave number m can be understood as a consequence of their strong shear (Eq. IV.23), which induces a short radial wavelength $2\pi v/\omega'$ for advected perturbations near the PNS, and thus a phase mixing particularly visible in the lower right corner of Fig. IV.10.

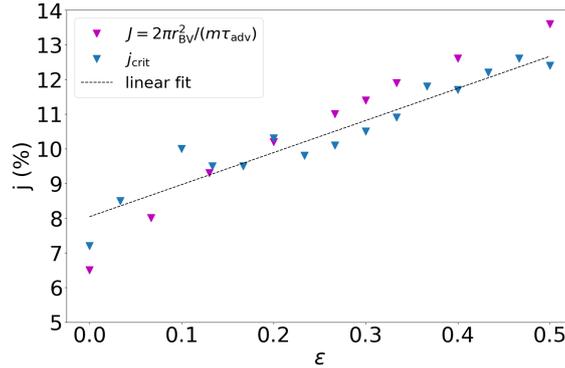


Figure IV.12 – Evolution of the critical rotation rate, j_{crit} , depending on the dissociation using two methods. This critical rotation corresponds to the apparition of the mixed modes. The higher the dissociation, the later the transition. For the blue points, we used the discontinuity end of the dominant m at $\chi \sim 4$. For the magenta points, we used the advection timescale, τ_{adv} , from the shock to the gain radius for $m = 4$ and $\chi \sim 4$.

The third column of Fig. IV.11 can be used to better constrain the domain of existence of these mixed modes. For small rotation rates, the azimuthal number contours converge to a line at $\chi \sim 4$. It corresponds to the transition from purely SASI modes to purely convective modes, across which the azimuthal number and frequency of the dominant mode is discontinuous. Above this boundary, the high m modes dominate, and their frequency depends linearly on the rotation rate. However, this frontier disappears for higher rotation rates, and the transition from small m to higher m is continuous. The value of the rotation rate j_{crit} when the frontier disappears slightly increases when the dissociation rate increases (blue points in Fig. IV.12). This behaviour can be quantitatively reproduced if we assume that mixed modes appear when the frequency of the convective mode $\simeq m\Omega(r_{\text{BV}})$ matches the frequency of the corresponding SASI mode in the absence of rotation or heating $\simeq 2\pi/\tau_{\text{adv}}$. This criterion defines a critical specific angular momentum,

$$J_{\text{mix}} \equiv \frac{2\pi r_{\text{BV}}^2}{m\tau_{\text{adv}}}, \quad (\text{IV.31})$$

which reproduces remarkably well the variation of j_{crit} when considering the mode $m = 4$ (magenta points in Fig. IV.12). This is the signature of the growth of mixed modes SASI-convection-rotation.

The first column in Fig. IV.11 shows the adverse effect of rotation on the growth rate of the convective instability for $\chi > 5$, as discussed in Sect. IV.1.4.b. For each rotation rate, the

magenta line highlights the value of χ above which rotation has an adverse effect on the growth of convection in the equatorial plane. In this region, the dynamic of the flow is dominated by axisymmetric convective modes in the plane (r, z) , which are expected to be little affected by rotation for $j \in [0, 0.3]$. This stands in contrast with the beneficial effect of rotation on the growth rate of SASI for $\chi < 3 - 4$, as discussed in Sect. IV.1.4.b, where spiral modes are therefore expected to dominate the dynamics. Interestingly, rotation has a beneficial effect on the growth rate of the dominant non-axisymmetric convective modes for moderate convection parameters $\chi \simeq 4 - 5$ (Fig. IV.11). The same behaviour can be observed for the $m = 4$ mode in the upper plot of Fig. IV.6, where the growth rate for $\chi \sim 3 - 4$ is significantly enhanced by rotation. It is also linked to the easier onset of convection with rotation shown by the decrease of χ_{marg} in Fig. IV.9, as discussed in Sect. IV.1.4.b. All these observations suggest that the perturbation of the shock induced by the convective instability produces an advective-acoustic cycle favourable to enhance the convective instability, as already suggested by the entropy structure in Fig. IV.10. The mode $m = 1$ in Fig. IV.8 calls for a particular attention, with a significant enhancement of the growth rate by rotation (this is also true for the $m = 2$ mode in the lower panel of the same figure) in a regime $\chi = 6.5$ a priori dominated by convection with an adverse effect of rotation. This peculiar behaviour of the $m = 1 - 2$ modes can also be explained by a mixed state of this mode, with the advective-acoustic cycle interacting constructively with the convective mode. Indeed, for these low values of m the transition from SASI to convection takes place at a rather large value of χ (e.g. $\chi \simeq 6$ for $m = 1$ in Fig. IV.2). As a consequence, mixed modes with a beneficial effect of rotation are expected for larger values of χ close to this transition.

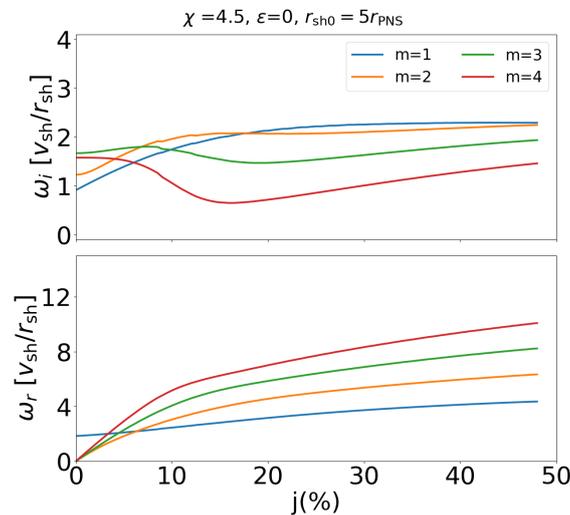


Figure IV.13 – Growth rate (top) and frequency (bottom) evolution of several modes depending on the rotation rate, j , for $\chi = 4.5$, $\varepsilon = 0$, and $r_{\text{sh}}(j = 0) = 6.8r_{\text{PNS}}$.

Figures IV.13 and IV.14 illustrate the effect of rotation on both instabilities in two configurations mainly differing by their shock radius, induced by different values of the dissociation parameter. The value $\chi = 4.5$ is chosen in the region where the most unstable mode is convec-

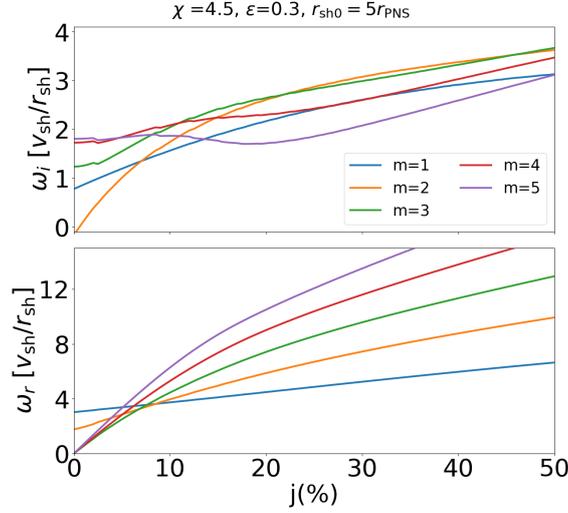


Figure IV.14 – Same as Fig. IV.13 but for $\varepsilon = 0.3$ and $r_{\text{sh}}(j = 0) = 3.9r_{\text{PNS}}$.

tive and the growth rate increases with rotation (below the magenta line of the first column in Fig. IV.11). In the bottom panel of these figures, the oscillation frequency without rotation ($j = 0$) reveals the convective ($\omega_r = 0$) or SASI ($\omega_r \neq 0$) nature of the modes. We can see that the convective frequency, enhanced by rotation, is similar to the SASI frequency for $j \in [0.02, 0.08]$. The top panels of this figure show that the effect of rotation varies depending on the nature of the instability. The growth rate of SASI modes is enhanced by rotation, as in Yamasaki and Foglizzo (2008) and Blondin et al. (2017). As mentioned in Sect. IV.1.4.b, for convective modes, the effect of rotation depends on the proximity of χ to the transition value χ_{trans} (defined in Sect. IV.1.4.b). The rotation can induce an increase of the growth rate, similar to the effect of rotation on SASI, if $\Delta\chi < 1$. Otherwise, the convective modes are quenched by rotation, as observed in Fig. IV.8.

Figure IV.15 illustrates the global complexity of the impact of rotation depending on the azimuthal number. The growth rate of SASI modes ($m = 1, 2$) is increased as seen on the left part of the plot. However, the effect of rotation on convective modes depends on both the rotation and the azimuthal number. For $m \sim 3$, the destabilising effect of rotation on the convective instability can be clearly seen in continuity with the increase of the SASI growth rate. For $m \in [3, 5]$, the effect of rotation on convection is similar to its effect on SASI, but with a smaller magnitude. For higher $m \gtrsim 6$ and low rotation rates, rotation has an adverse effect and leads to a decrease of the growth rate. The effect changes for high rotation rates and will be discussed in Sect. IV.1.4.c.

In summary, rotation smoothes the transition from SASI to convection, leading to a mixed mode regime. These mixed modes appear when the corotation radius moves away from the Brunt-Väisälä radius and exist up to $j \sim 30\%$ where the properties of the modes start to change to the regime induced by strong rotation.

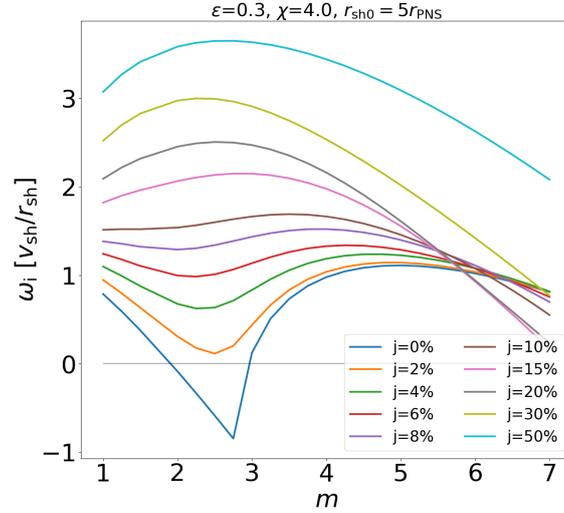


Figure IV.15 – Evolution of the growth rate depending on the azimuthal number, m , for several rotation rates and $\chi = 4.5$.

IV.1.4.c Strong rotation-induced instability

The mixed state of the modes seems to disappear when the rotation becomes too strong. When the rotation rate exceeds $j \sim 20\%$, Fig. IV.6 shows that both the frequency and the growth rate of the $m = 4$ mode, when expressed in units of v_{sh}/r_{sh} , become strikingly insensitive with respect to the convection parameter. Rotation also changes the behaviour of the most unstable mode m as a function of heating. While the dominant m increases with χ for small and intermediate rotations, it decreases slightly with heating for higher rotation rates. Rotation also diminishes the influence of the parameter χ on the frequency and growth rate of the most unstable mode for $j \gtrsim 0.3$ (Fig. IV.11). This suggests that the mode loses its convective nature and that the buoyancy driven by the entropy gradient no longer plays an important role in the strong rotation regime. Another indication comes from the fact that the corotation radius moves definitively away from the Brunt-Väisälä radius for high rotation rate $j \gtrsim 30\%$ (Fig. IV.7).

The right column of Fig. IV.10 illustrates the structure of the modes in the strong rotation regime. The localisation around the Brunt-Väisälä radius, a characteristic of the convective instability that was still visible at intermediate rotation, is absent in this regime. The radial profile of entropy perturbations suggests that it is driven by the deformations of the shock rather than by the region of maximum buoyancy. The spiral mode structure of SASI is also clearly perturbed by rotation due to the corotation radius, which is well inside the domain. The pattern is similar to the one obtained by Blondin et al. (2017) at high rotation rates without heating. In an adiabatic flow where entropy perturbations are simply advected, the entropy pattern would trace the flow lines and display a change of direction at the corotation radius since the pattern rotates faster than the outer flow and slower than the inner flow. In Fig. IV.10, a change in the direction of the spiral pattern is clearly visible in the strong rotation case (right column). The radial location of the pattern extrema is slightly above the corotation radius due to the non-adiabatic heating/cooling functions.

For these high rotation rates ($j > 0.3$), it seems that the modes are no longer mixed SASI-convection-rotation but result from a rotation-induced instability. Some characteristics of this instability can be inferred from the evolution of the growth rate. Comparing Figs. IV.13 and IV.14, we remark that when the modes properties do not depend on the χ parameter, the dependence of the modes on the rotation rate is stronger for increasing dissociation rates. In addition, the slope of this increase is approximately independent of the value of the azimuthal number. This behaviour of the mode for high rotation rates can also be seen in Fig. IV.15. We notice that the rotation enhances the growth rate of every mode. In particular, for initially convective modes, this effect is opposite to the rotation effect for low rotation rates.

IV.1.5 Expected consequences on the gravitational wave signature

The mode frequencies computed with a linear analysis of the PNS have been shown to reproduce well the frequencies present in the GWs spectra in non-linear numerical simulations (Torres-Forné et al., 2018, 2019b; Westernacher-Schneider et al., 2019; Westernacher-Schneider, 2020). Our work can thus be used to predict the frequency of GW emission. We first focus on the properties of the fundamental mode $m = 2$, which has a direct impact on the production of GWs according to the quadrupole formula. We include the effect of dissociation with $\varepsilon \sim 0.3$ (Fernández and Thompson, 2009a; Fernández et al., 2014; Huete et al., 2018) and consider the typical range of shock radius $r_{\text{sh}} \sim (3 - 7)r_{\text{PNS}}$.

Figure IV.7 (bottom) shows that the mode $m = 2$ is dominant in the high rotation regime $j \in [0.2, 0.5]$ for $\chi = 6.5$ and $\varepsilon = 0.3$. The modes $m = 2, 3$ are actually dominant over a large domain of the parameter space (j, χ) according to the third column in Fig. IV.11 for $\varepsilon = 0.3 - 0.5$.

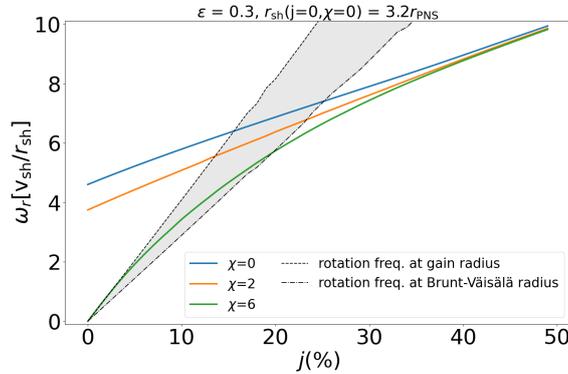


Figure IV.16 – Frequency of the $m = 2$ fundamental mode as a function of the specific angular momentum, j , for several values of χ . The grey-shaded region illustrates the frequency range corresponding to a corotation radius located between the gain radius, r_{gain} , and the radius, r_{BV} , that maximises the Brunt-Väisälä frequency. The frequency is expressed in units of the approximate inverse advection timescale, $v_{\text{sh}}/r_{\text{sh}}$.

Figure IV.16 shows the impact of rotation on the $m = 2$ mode frequency for different values of χ . In the case of SASI modes ($\chi = 0$ and $\chi = 2$), the frequency increases almost linearly with the rotation rate for j varying from 0 to 0.5. The convective mode corresponding to $\chi = 6$

has a more complex behaviour. For small rotation ($j \lesssim 0.1$), the frequency is approximately proportional to the rotation rate similarly to the convective modes in Figs. IV.13 and IV.14. This behaviour can be interpreted with an approximately constant corotation radius located between r_{gain} and r_{BV} (Fig. IV.7), as expected for the convective instability and visualised by the grey-shaded region in Fig. IV.16. At higher rotation rates $j > 0.2$, the frequency separates from this linear trend, corresponding to the corotation radius moving to larger radii (Fig. IV.7) when the mode takes a mixed nature. At still higher rotation frequencies ($j \gtrsim 0.3$), the frequencies expressed in units of $v_{\text{sh}}/r_{\text{sh}}$ converge towards a single linear trend that does not depend on the convection parameter. The effect of heating has been erased by rotation. This is consistent with the behaviour of the dominant modes seen earlier.

Assuming a PNS radius of 50 km, the inverse advection timescale without heating nor rotation is $v_{\text{sh}}/r_{\text{sh}} \sim 30$ Hz. With increasing rotation rates, this frequency decreases to ~ 25 Hz when $j = 0.5$. As a result, in Fig IV.16, the frequency of the mode $m = 2$, without heating, varies from ~ 120 Hz to 250 Hz. In the case $\chi = 6$, the frequency of the $m = 2$ mode is in the range [0,80] Hz. These frequencies overlap with the optimal detection frequency range of the current GW detectors.

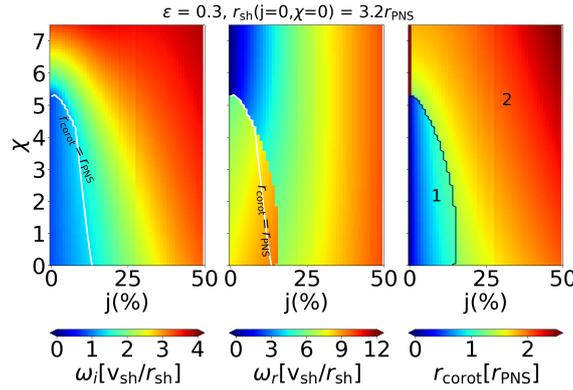


Figure IV.17 – Maps, for varying heating and rotation rates, of the growth rate, the frequency, and the corotation radius of the most unstable fundamental mode between modes $m = 1$ and $m = 2$. In the second panel, we plot $2\omega_r$ when $m = 1$ is dominant to account for the doubled frequency expected in the GW signal. In the third panel, the black line separates the regions dominated by the fundamental mode $m = 1$ or $m = 2$.

To account for the possible signature of a dominant mode $m = 1$ on the GW signal, we include in Fig. IV.17 the doubled frequency of the mode $m = 1$ when it is more unstable than the mode $m = 2$. We note that this frequency is higher than the frequency of the $m = 2$ mode. This remarkable property can be deduced from Figs. 5 and 6 in Foglizzo et al. (2007) where the frequency of the SASI mode $m = 2$ is always smaller than twice the frequency of the mode $m = 1$. We observe that the region of the parameter space dominated by the mode $m = 1$ is limited to moderate convection parameters $\chi < 5.2$ and modest rotation rates $j < 15\%$.

In the regime $j \geq 30\%$, an analytical form of the linear dependence illustrated by Fig. IV.16 would be useful to directly translate the frequency observed in the GW signal into a relation

between j and the advection frequency at the shock $v_{\text{sh}}/r_{\text{sh}}$.

IV.1.6 Conclusion and discussion

In this paper we study a spherical-equatorial toy model that considers the dynamics of the equatorial plane between the shock and the surface of the PNS. Thanks to a linear analysis, we computed unstable non-axisymmetric modes for varying rotation and heating rates and different dissociation energies through the shock. This led to several discoveries concerning the properties of the convective instability with rotation and its interplay with SASI and rotation-induced instabilities.

Relatively slow rotation rates (less than 10% of the Keplerian rotation at the PNS radius), for which centrifugal effects are very small, can have a strong and complex influence on both SASI and neutrino-driven convection :

- In the presence of rotation, convective modes have an oscillation frequency that corresponds to a corotation radius located close to the maximum of the Brunt-Väisälä frequency, where the convective engine is expected to be most powerful. The appearance of this non-vanishing oscillation frequency blurs somewhat the abrupt transition between SASI and convection.
- For large convection parameter values, $\chi \gtrsim 5$, rotation hampers the growth of non-axisymmetric convective modes. The decrease in growth rate is more pronounced for larger m modes, which can be interpreted from the greater stabilising effect of the shear due to differential rotation. In this regime, axisymmetric modes are expected to dominate the dynamics because they are only slightly affected by rotation.
- By contrast, for $\chi \lesssim 5$, where the advection has a strong influence on the growth of convection, rotation increases the growth rate of both SASI and the convective instability. The increase in the SASI growth rate with rotation is well known in the absence of heating (Yamasaki and Foglizzo, 2008; Kazeroni et al., 2017; Blondin et al., 2017) and is here shown to hold in the presence of neutrino heating. On the other hand, this behaviour was not expected for the convective instability, which was generally thought to be hampered by rotation. The destabilising effect of rotation on convection in this regime leads to a decrease in the value of χ which defines marginal stability. We interpret this effect as a residual influence of an advective-acoustic cycle that acts to reinforce convective motions close to the transition between convection and SASI.
- We observe two different effects of rotation on the dominant scale, depending on the instability mechanism that dominates without rotation. For SASI, the dominant m increases with rotation (as in Yamasaki and Foglizzo, 2008 and Blondin et al., 2017), while it decreases for the convective instability.

At moderate rotation rates (10% to 30% of the Keplerian rotation at the PNS surface), the modes are so modified by rotation that it becomes impossible to distinguish clearly between convective and SASI modes. When the heating rate is increased, the frequency and azimuthal number of the most unstable mode change smoothly, with no clear transition from one instability to the other. Modes retain characteristics of both instabilities and should therefore be understood as mixed SASI-convection-rotation modes. The dominant mixed modes have a relatively large angular scale with $m = 1 - 3$, and their growth rate increases with faster rotation.

This regime takes place above a critical angular momentum where the frequency of a convective mode (corotating with the radius of the maximum Brunt-Väisälä frequency) is comparable to the frequency of SASI. The non-oscillatory nature of convection and the low frequency associated with SASI both allow for the appearance of a corotation radius at moderate rotation rates. The corotation radius enables the extraction of energy and angular momentum from the interior region, which is rotating faster than the region exterior to the corotation (Cairns, 1979; Yoshida and Saijo, 2017; Saijo and Yoshida, 2006). For a PNS radius of $r_{\text{PNS}} = 50$ km, the mixed mode regime corresponds to an interval of specific angular momentum $3-9 \times 10^{15}$ cm²/s. Extrapolated to the radius ~ 12 km of a cold neutron star, this corresponds to relatively fast rotation periods of $\sim 1 - 3$ ms.

For high rotation rates (more than 30% of the Keplerian frequency at the PNS surface, i.e. $j \gtrsim 0.3$), the frequency and growth rate are independent of or only weakly dependent on the heating rate when they are expressed in terms of the advection timescale, $r_{\text{sh}}/v_{\text{sh}}$. Together with the significant deviation of the corotation radius from the most buoyant region, this suggests that the instability is dominated by rotational rather than buoyancy effects. The study of Walk et al. (2022), which does not include neutrino heating, detects the existence of a similar instability regime where the frequency of the dominant mode depends too little on the advection time to be explained by an advective-acoustic cycle. Our results suggest that their results, obtained without heating, are still valid when heating is taken into account. We note that the regime of rapid rotation appears for $j \sim 0.3$, which corresponds to a small ratio, ~ 0.03 , of the centrifugal force to the gravity at the corotation radius, even though the centrifugal displacement of the stationary shock is not negligible. A precise understanding of this strong rotation regime is still missing, but the corotation radius seems to play an important role in the instability mechanism.

A future detection of GWs is expected to provide information on the physical phenomena occurring during stellar core-collapse. Our identification of three different instability regimes depending on the rotation rate should help clarify the still poorly known influence of rotation on the GW signal. Non-axisymmetric convective modes become oscillatory in the presence of rotation. Their frequency could be identified in the low-frequency part of the GW spectrum. For low to moderate rotations, the corotation radius of the $m = 2$ convective-mixed mode is close to the gain or Brunt-Väisälä radius. The identification of the mode frequency would therefore give access to the rotation frequency at this radius. Non-axisymmetric equatorial modes with a large angular scale, $m = 1, 2$, are strongly destabilised by rotation and dominate the dynamics in a wide region of the parameter space for moderate to strong rotation, which should be favourable to a strong emission of GWs. In the regime of strong rotation, the frequency of the $m = 2$ mode becomes independent of the convection parameter and depends only on the advection timescale, $r_{\text{sh}}/v_{\text{sh}}$, and the angular momentum, j . This reduction of the parameter space should help us extract physical information from the measure of the mode frequency. These modes should be incorporated into future asteroseismic studies similar to Torres-Forné et al. (2018, 2019b), with non-axisymmetric perturbations taken into account.

Our results can be compared to previous 3D numerical simulations of core-collapse supernovae that include rotation. Simulations with the fastest rotating rates are difficult to compare

because they are often dominated by the low- $T/|W|$ instability growing rapidly inside the PNS (Ott et al., 2005; Cerdá-Durán et al., 2007; Kuroda et al., 2014; Takiwaki et al., 2016; Shibagaki et al., 2021; Takiwaki et al., 2021; Bugli et al., 2023), which is not included in our analysis. We focus our discussion on the simulations where the dynamics is dominated by post-shock instabilities. Some simulations focused on the GW signal (Westernacher-Schneider et al., 2019; Powell and Müller, 2020; Pan et al., 2021) do not contain a detailed enough description of the post-shock dynamics to allow for a significant comparison.

Fryer and Heger (2000) and Fryer and Warren (2004) found that convection was quenched by rotation, especially in the equatorial plane. For models A and B of Fryer and Warren (2004), this may be explained by the strong centrifugal effects for such strong rotation ($j^2 > 0.4$, Eq. IV.9). Convection in the slow rotating model C ($j \sim 0.03$) does not seem to be confined to the poles, which is consistent with our study, where a purely convective instability can be observed in the equatorial plane up to $j \sim 0.1$.

The setup of Iwakami et al. (2014) is similar to ours in that it did not involve the interior of the PNS and considered a similar range of rotation rates (corresponding to $j = 0 - 0.33$ in our units). In their models D, E, and F, as displayed in Fig. 5 of their study, for higher rotation and lower neutrino luminosity, the scale of entropy structures is larger and buoyant patterns become spiral ones. This structure change is consistent with the rotation-induced transformation of convective modes into mixed spiral modes with a larger angular scale. The precise interpretation of their results is, however, complicated by the fact that both rotation and the neutrino luminosity are changed, meaning it is difficult to disentangle their respective influences. In addition, we note that they identified a pattern referred to as a spiral motion with buoyant-bubble, which may be related to the mixed SASI-convection-rotation modes identified for moderate rotation rates.

The 3D simulations of Summa et al. (2018) show two models with specific angular momenta of $\sim 5 \times 10^{14} \text{ cm}^2/\text{s}$ and $\sim 10^{16} \text{ cm}^2/\text{s}$ at the shock ($\sim 150 \text{ km}$) during its stalled phase ($\sim 150 \text{ ms}$). These values correspond to $j \sim 1\%$ and $j \sim 33\%$, respectively. In the low rotation case, convection is observed in the stalled phase of the shock. This behaviour is consistent with our results, showing that a convective behaviour is possible for $j < 10\%$. For the fast rotating simulation, the large-scale ($l = 1$) instability associated with SASI, without a tightly wound spiral pattern, is consistent with the morphology of our eigenmode in the fast rotating regime (Fig. IV.10). Although Fig. IV.11 suggests that the fastest growing mode corresponds to $m = 2$ rather than $m = 1$ in this regime, Fig. 12 in Summa et al. (2018) shows a dominant $l = 2$ component in the turbulent energy spectrum and calls for a more detailed comparison of the $m = 1, 2$ components in the simulation.

To gain a better understanding of the processes at work at the onset of the shock revival, a non-linear analysis of the dynamics of the fluid would be necessary. It would shed light on how rotation acts on the saturation mechanism (Guilet et al., 2010) and show how the system evolves from the linear phase to the explosion. This last part would provide information on the signatures of linear phenomena that may remain observable in the multi-messenger signal.

One should keep in mind that our model is idealised in many respects. We assumed an ideal gas equation of state with $\gamma = 4/3$, dissociation was taken into account as a fixed energy

sink, and neutrinos were parameterised through analytical cooling and heating terms. We also did not describe the equatorial swelling of the PNS due to the centrifugal force. This effect increases the neutrinosphere radius, leading to cooler neutrinos and a lower heating rate in the equatorial plane. As discussed above, such a centrifugal effect is expected to be very small at low to intermediate rotation rates ($j < 0.3$) but can become significant for the fastest rotations considered in this analysis. Part of this complexity is avoided by displaying our results as a function of χ rather than the heating rate. We note that when χ is kept constant and the rotation increased, the heating constant, \tilde{A}_h , decreases in a qualitatively similar way as the expected impact of the neutrinosphere swelling.

The centrifugal force induces a deformation with respect to the spherical symmetry (Fujiwara et al., 2019), which is challenging to take into account in our formalism because it would couple different spherical harmonics. To avoid such a complexity, we restrained our analysis to the equatorial plane while keeping the effect of radial convergence in spherical geometry. As a result, our conclusions are limited to modes with spherical harmonic indices $m = \pm l$ and cannot describe the dynamics outside the equatorial plane, such as convective motions along the polar axis. The equatorial non-axisymmetric modes described here are nonetheless expected to dominate the dynamics in most of the parameter space, except at $\chi \gtrsim 5 - 5.5$, and slow to moderate rotation, where axisymmetric convective modes are expected to be more unstable.

The highest specific angular momentum considered in this study should lead to the development of the low- $T/|W|$ instability inside the PNS (Takiwaki et al., 2021; Bugli et al., 2023). Being restricted to the post-shock region without including the PNS interior, our linear analysis cannot describe the low- $T/|W|$ instability and may miss the most unstable mode in the regime of strong rotation. A linear stability analysis that includes both the post-shock region and the PNS interior is therefore an important next step. Previous linear mode calculations focused on the prediction of GW mode frequencies and included the post-shock region in addition to the PNS interior, but they were restricted to axisymmetric modes and assumed a hydrostatic equilibrium, neglecting advection (Torres-Forné et al., 2018, 2019b). To describe all unstable modes and their possible interactions, a linear stability analysis will have to face the challenge of combining the PNS in approximate hydrostatic equilibrium and the advection in the post-shock region.

Finally, the magnetic field neglected in this study is expected to play an important role for strong rotation. A strong magnetic field can, for example, quench the development of the low- $T/|W|$ instability (Bugli et al., 2023). Even in the absence of rotation, the magnetic field can have a complex influence on the post-shock dynamics because of the propagation of vorticity through Alfvén waves (Guilet and Foglizzo, 2010; Guilet et al., 2011), and a small-scale dynamo can amplify its strength (Endeve et al., 2012; Müller and Varma, 2020). The magnetic field should thus be taken into account in future studies of post-shock instabilities.

IV.1.7 Discussion du taux de dissociation

Dans l'article, le choix de $\varepsilon = 0.3$ semble en désaccord avec le résultat de l'Eq. (I.10), trouvant 68% de l'énergie cinétique de la matière utilisée pour dissocier les atomes de fer. Il faut cependant retenir que cette valeur de 30% que nous utilisons est établie pour un certain rayon de choc et sa valeur effective peut être différente lorsque le rayon du choc varie. En particulier, le rayon du choc augmente avec le chauffage et la rotation, menant à des taux de dissociation effectifs plus élevés.

La valeur de ε a été choisie en accord avec les travaux de [Fernández et al. \(2014\)](#). Cependant, les travaux de [Fernández and Thompson \(2009b\)](#) puis de [Huete et al. \(2018\)](#), basés sur des simulations 1D, suggèrent une valeur de ε proche de 0.6 pour une dissociation totale des atomes de fer. Cette valeur est en accord avec le résultat de l'Eq. (I.10).

Les résultats présentés dans l'article sont donc à nuancer en prenant en compte leur dépendance vis-à-vis du taux de dissociation au choc. En particulier, le mode le plus instable est augmenté lorsque la dissociation augmente. Ainsi, le mode le plus instable dans la partie des rotations intermédiaires à fortes n n'est plus $m = 2$ mais plutôt $m = 3$ pour une valeur plus réaliste du taux de dissociation au choc. Le taux de croissance du fondamental du mode $m = 2$ est néanmoins proche du taux de croissance du mode $m = 3$. Cependant, ce changement de mode dominant ne change pas le comportement de la fréquence du mode $m = 2$ lorsque la rotation augmente.

IV.2 ... sur les harmoniques et modes rétrogrades

IV.2.1 Fondamental et harmoniques

Si l'on ne considère plus uniquement le monde fondamental, mais que nous prenons aussi en compte les harmoniques, alors nous pouvons voir que les taux de croissance des modes les plus instables se trouvent légèrement modifiés. En effet, pour un mode m fixé, les harmoniques peuvent devenir plus instables que le mode fondamental. Si ce mode m était le mode dominant l'instabilité, alors le taux de croissance maximal, représenté dans la Fig. IV.11, se trouverait augmenté par la prise en compte des harmoniques.

Nous souhaitons donc vérifier l'influence de la prise en compte des harmoniques des modes sur les conclusions de la partie précédente. Sur la figure de gauche de la Fig. IV.18, nous pouvons remarquer que les différences entre le taux de croissance dominant des modes fondamentaux et le taux de croissance dominant en considérant tous les harmoniques sont faibles. De plus, cette valeur ne se trouve modifiée que pour les forts taux de rotation $j \gtrsim 0.35$. L'analyse des fréquences montre que les sauts vers un harmonique de rang supérieur se font pour des taux de croissance dépendants du mode m considéré. Pour le mode à plus grande échelle $m = 1$, le premier harmonique devient plus instable que le fondamental pour $j \sim 0.4$ alors que cette transition se produit dès $j \sim 0.1$ pour $m = 4$. De plus, on remarque que les petites échelles sont les plus impactées par le changement d'harmoniques. Cependant, l'analyse du taux de croissance montre que cela se produit lorsque ces échelles sont sous-dominantes. De plus, ces échelles restent sous-dominantes après les changements d'harmonique. Les conclusions établies précédemment restent donc valides. Cependant, une étude future, prenant en compte

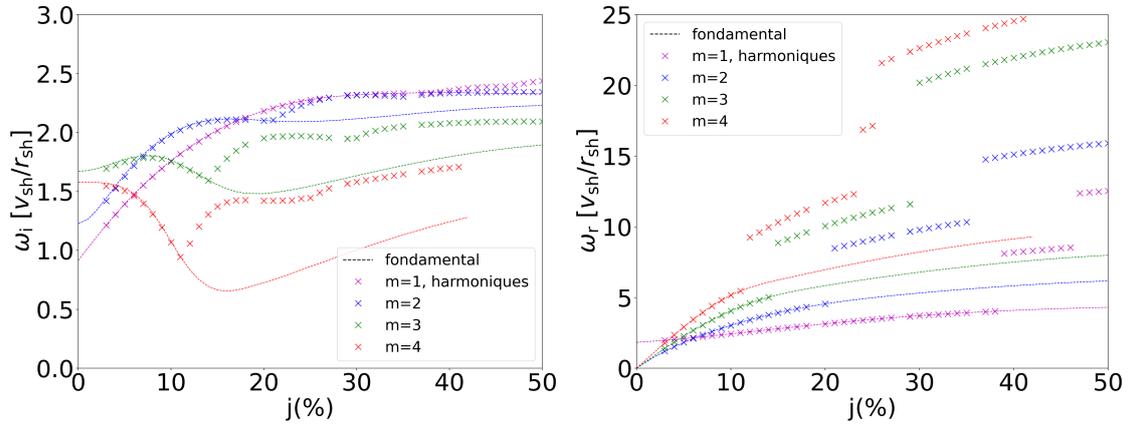


Figure IV.18 – Comparaison des taux de croissance (gauche) et fréquence (droite) des modes fondamentaux (tirets) et harmoniques les plus instables du mode m (croix). Les sauts de fréquence indiquent les changements d'harmonique le plus instable. Ces résultats sont obtenus pour $\varepsilon = 0$, $\chi = 4.5$ sans rotation et $\chi = 6.5$ à $j = 0.5$.

les harmoniques, permettrait des conclusions plus quantitatives.

En passant à des harmoniques de rang de plus en plus élevé, on s'éloigne de l'optimum de sensibilité des détecteurs d'ondes gravitationnelles. Ces différences de fréquences sont illustrées dans la Fig. IV.18 où v_{sh}/r_{sh} vaut 15 Hz sans rotation et 8 Hz à $j = 0.5$. En particulier, pour le mode $m = 2$ dont la fréquence varie de 0 à 15 v_{sh}/r_{sh} (figure de droite), cela donne une variation de fréquence entre 0 et 225 Hz en considérant les harmoniques. Si on ne considère que le fondamental du mode $m = 2$, on obtient plutôt une fréquence variant entre 0 et 75 Hz. Cette fréquence, aux fortes rotations, est légèrement plus favorable à la détection des ondes gravitationnelles par les détecteurs mentionnés en Sect. IV.1.5.

IV.2.2 Modes prograde et rétrograde

L'introduction de la rotation modifie aussi le comportement du mode rétrograde de SASI. La rotation brise la symétrie fréquentielle entre mode prograde et rétrograde. Pour le taux de croissance de SASI, la Fig. IV.19 montre que la rotation lève la dégénérescence et fait apparaître deux comportements différents selon le sens de rotation du mode. Pour les faibles taux de chauffage ($\chi < 4$), le taux de croissance du mode rétrograde se trouve diminué de façon symétrique à l'augmentation du taux de croissance du mode prograde par rapport à leur valeur sans rotation. Ce comportement efface la bifurcation entre SASI et la convection, présente sans rotation. Pour les taux de chauffage plus importants, l'effet de la rotation devient identique sur les deux sens du mode et le taux de croissance se trouve diminué. La figure IV.19 montre donc que le mode prograde reste bien le mode le plus instable lorsque la rotation est augmentée. Cependant, le comportement fréquentiel est différent. En effet, la rotation augmente la fréquence des deux modes.

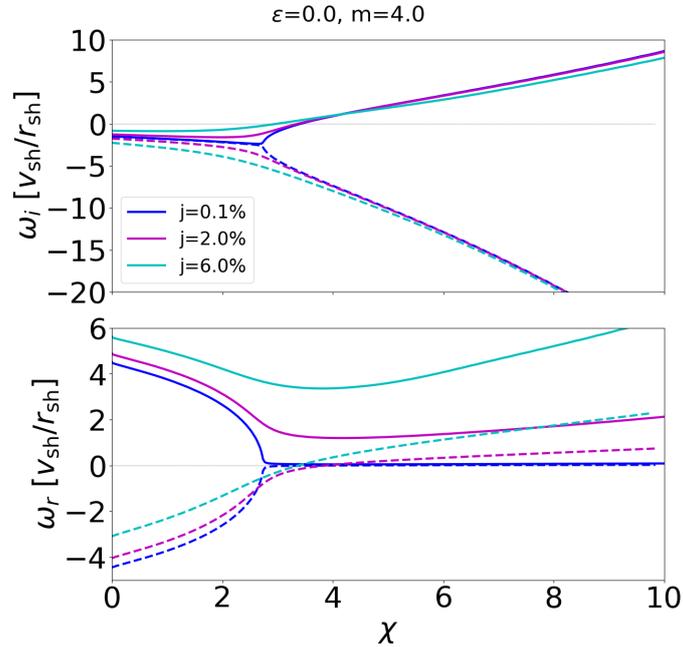


Figure IV.19 – Évolution des taux de croissance et fréquences avec rotation ($j = 0.001, 0.02, 0.06$) pour les modes progrades (traits pleins) et rétrogrades (tirets).

IV.3 Étude énergétique du taux de croissance

Dans cette partie, nous utilisons la méthode d'analyse énergétique présentée dans la Sect. II.2.2.b. La figure de droite de la Fig. IV.20 montre que cette approche décrit bien la tendance générale du taux de croissance. Cependant, l'égalité entre les deux grandeurs devrait être exacte et une étude plus approfondie est nécessaire afin de comprendre la source de l'écart entre la courbe de ω_i et la somme des énergies impliquées.

Le résultat de cette analyse est illustré dans les Figs. IV.20-IV.21 avec et sans rotation pour $m = 4$. On choisit $m = 4$ car il s'agit du mode pour lequel l'instabilité convective apparaît pour le plus petit taux de chauffage. Pour les petits taux de chauffage, où SASI est l'instabilité dominante, on remarque que ce sont les termes « autres » qui dominent. En particulier, les flux d'énergies acoustique et cinétique dominent dans cette région (Fig. IV.22). Nous pouvons voir dans cette figure que, conformément à ce qui est attendu pour l'instabilité convective, c'est le travail de la poussée d'Archimède qui domine le bilan d'énergie dans le domaine des forts chauffages. La poussée d'Archimède est donc la principale responsable de l'augmentation du taux de croissance avec le chauffage pour l'instabilité convective. Le mode oscillant stable de SASI domine tant que le travail de la force de flottaison reste du même ordre que les autres sources d'énergies impliquées.

Lorsque la rotation est prise en compte (Fig. IV.23), on peut observer deux comportements selon le taux de chauffage.

Lorsque le chauffage est faible (figure de gauche de la Fig. IV.23) et que l'instabilité SASI

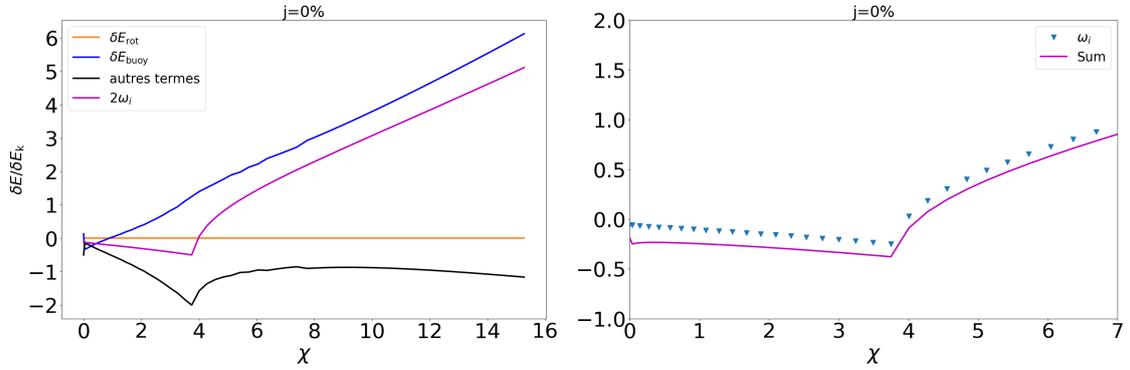


Figure IV.20 – Gauche : Évolution des taux d'injection d'énergie lorsque l'intensité du chauffage varie dans un cas sans rotation, avec $\varepsilon = 0.3$ et $m = 4$. Les taux d'injection d'énergie sont normalisés par l'énergie cinétique des perturbations afin d'obtenir la contribution de ces termes au taux de croissance. Droite : Comparaison du taux de croissance (symboles bleus) avec la prédiction obtenue par l'analyse énergétique (ligne magenta). Les unités utilisées en ordonnées sont $c_{sh}/[2(r_{sh} - r_{PNS})]$ à gauche et $c_{sh}/(r_{sh} - r_{PNS})$ à droite.

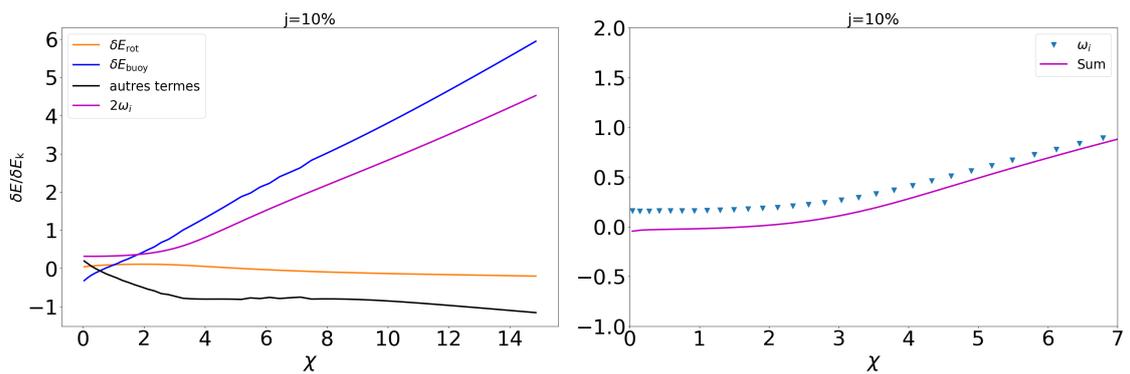


Figure IV.21 – Comme la Fig. IV.20, avec $j = 0.1$.

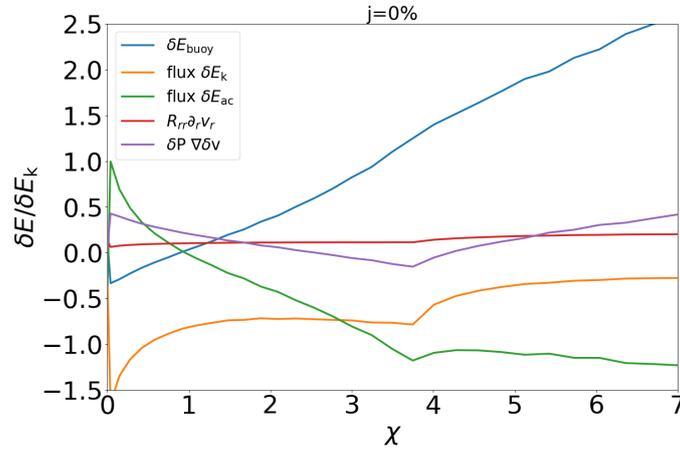


Figure IV.22 – Répartition des sources d'énergie sans rotation, avec $m = 4$ et $\varepsilon = 0.3$. L'unité utilisée en ordonnées est $c_{sh} / [2(r_{sh} - r_{PNS})]$.

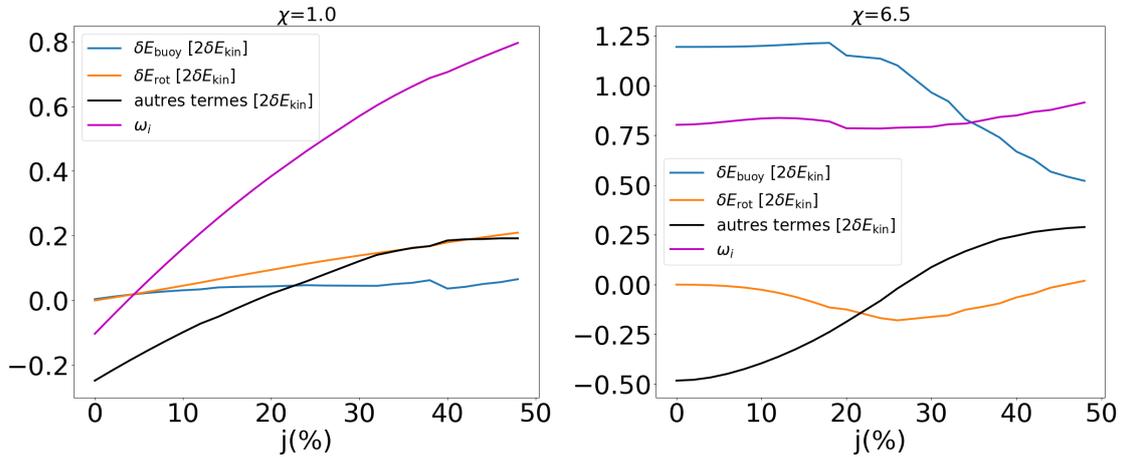


Figure IV.23 – Termes sources de l'énergie en fonction de la rotation pour $\chi = 1$ (gauche) et $\chi = 6.5$ (droite). Les différentes lignes représentent la flottaison (bleu), l'énergie de rotation (orange), la somme des autres termes (noir) ainsi que le taux de croissance (magenta).

est dominante, la rotation mène à une augmentation de tous les termes. Le fait que la rotation augmente l'injection d'énergie rotationnelle était attendue pour expliquer l'augmentation du taux de croissance de SASI avec la rotation. Cependant, bien que l'effet de la rotation sur le travail de la force de flottaison soit faible, cette augmentation de la flottaison n'était pas attendue.

Pour les taux de chauffage plus élevés (figure de droite de la Fig. IV.23) nous pouvons remarquer que l'importance du travail de la force de flottaison diminue à partir des rotations intermédiaires ($j \gtrsim 25\%$). Sur le même intervalle, le taux de croissance du mode augmente, illustrant la conclusion précédente : la flottaison n'est plus le seul moteur principal de l'instabilité. Cependant, la poussée d'Archimède reste la source d'énergie principale jusqu'à $j = 0.5$, alors que l'injection d'énergie rotationnelle est faible et négatif. Cela semble contredire les conclusions précédentes sur des modes pour lesquels le moteur d'instabilité est lié à la rotation. Cette tendance des sources d'énergie reste à approfondir afin d'expliquer plus précisément l'évolution du taux de croissance.

IV.4 Conclusion

L'étude du comportement du mode rétrograde lorsque la rotation est prise en compte nous permet d'affirmer que ce mode ne devient pas dominant. Ainsi, l'étude des mécanismes dominant l'instabilité au cœur de l'étoile ne nécessite pas de considérer ce mode.

D'autre part, l'étude des harmoniques a permis de déterminer que leur prise en compte ne changeait pas de façon significative l'étude menée sur les modes fondamentaux. Ainsi, des études considérant uniquement le fondamental du mode prograde, semblent rester valides.

Nous avons donc démontré que l'introduction de la rotation n'avait pas un effet trivial sur les instabilités dans la zone choquée. Nous retrouvons bien les résultats obtenus sans chauffage pour SASI : augmentation du taux de croissance et diminution de l'échelle dominante. Nous observons que ces résultats restent valides lorsque des taux de chauffage ($\chi \lesssim 3$) sont introduits. Pour la convection, nous observons un comportement dépendant du taux de chauffage. En particulier, la rotation provoque une mixité des modes entre SASI et la convection. Cet état existe pour des taux de chauffage proches de la transition entre SASI et convection pour les rotations faibles ($j \lesssim 0.1$). Son domaine d'existence semble ensuite augmenter et des modes avec des caractéristiques SASI et convection sont présents pour une large gamme de chauffages, jusqu'à $j \sim 0.3$. Pour les rotations fortes, un dernier régime, lié à la rotation, semble apparaître. En particulier, pour ces nouveaux modes, l'influence du taux de chauffage est très faible sur la fréquence et le taux de croissance.

Bien que l'étude en énergie nécessite un approfondissement afin d'avoir un accord parfait entre les taux de croissances obtenus par les deux méthodes, cette approche semble prometteuse. Pour l'instant, nous arrivons à reproduire le comportement général du taux de croissance par l'étude énergétique. Des points surprenants apparaissent avec ces résultats préliminaires. Tout d'abord, la poussée d'Archimède semble dominante même à fort taux de rotation. Cela ne semble pas en accord avec les résultats obtenus en considérant le taux de croissance de l'instabilité. De plus, l'énergie rotationnelle est faible et négative aux forts chauffages/fortes rotations. Ce

résultat est, lui aussi, en contradiction avec les résultats précédents qui montrent plutôt que la rotation est le moteur de l'instabilité dans ce régime. Cette étude reste à approfondir afin de mieux comprendre l'origine de l'évolution du taux de croissance des modes obtenus.

Conclusions et perspectives

Conclusions

Dans une première partie, nous avons démontré les lacunes comprises dans l'établissement du critère de développement de la convection établi par Foglizzo et al. (2006). Nous avons en effet démontré qu'une réduction du problème à une seule échelle caractéristique rendait l'analyse moins universelle que précédemment pensé. L'étude d'un modèle plan a notamment montré un exemple où la convection peut se développer pour de petites valeurs du paramètre de chauffage χ lorsque la région de chauffage est localisée. Nous avons ainsi entrepris de développer un critère plus général, pouvant être appliqué à toute situation de convection en présence d'advection. Par une approche analytique combinée à une approche numérique, nous avons démontré que le critère doit prendre en compte la taille de la région de chauffage. Cependant, son comportement en fonction des différentes échelles reste encore à éclaircir. Nous avons proposé un critère basé sur la comparaison du taux de croissance adiabatique d'un équilibre hydrostatique, dont le profil d'entropie serait le même qu'avec chauffage et advection, avec le temps d'advection à travers la région de gradient d'entropie négatif. Une première difficulté consiste à choisir l'échelle verticale de référence pour définir ce temps d'advection. Une seconde difficulté provient du choix du taux de croissance, adapté à la longueur d'onde horizontale des perturbations. Les résultats numériques que nous avons obtenus n'ont pas permis de valider ce nouveau critère pour la convection en géométrie plane.

Malgré la mise en défaut du critère d'instabilité $\chi \sim 3$ dans le modèle plan, nous avons montré, par une exploration des différents paramètres (ε , \mathcal{M}_1 , $r_{\text{sh}0}$, γ), que ce critère restait approximativement valable dans l'analyse des supernovæ grâce à la structure particulière de ce cas astrophysique proche de la géométrie supposée par Foglizzo et al. (2006). Plutôt qu'un seuil fixe $\chi \sim 3$ valable pour toutes les configurations, nous avons mis en évidence la présence d'une zone de seuil. L'exploration de l'espace des paramètres a montré que la transition vers une instabilité convective se faisait sur l'intervalle $\chi \in [3, 4]$. Le paramètre ayant le plus d'influence sur cette valeur dans notre approche est l'indice adiabatique γ .

Nous avons ensuite étudié, par une approche perturbative, l'impact de la rotation sur le développement de la convection dans le plan équatorial. L'évolution de cette instabilité en présence de rotation et d'advection a peu été étudiée, que ce soit par des simulations numériques ou des calculs perturbatifs. Pour les faibles taux de rotation, la rotation a deux effets sur l'instabilité convective. Tout d'abord, elle introduit une composante fréquentielle proportionnelle au taux de rotation, absente sans rotation. Nous avons ensuite étudié l'impact de la rotation sur le taux de croissance et sur la valeur du seuil χ_{marg} de chaque mode convectif. Nous montrons que pour tous les modes, la rotation tend à diminuer cette valeur seuil. La convection instable apparaît donc pour des taux de chauffage plus faibles lorsque le taux de rotation augmente. Cet effet dépend de l'échelle angulaire des perturbations considérées et est plus prononcé pour les plus grandes échelles. Ce premier résultat est surprenant car la rotation est

généralement considérée comme étant un frein au développement d'une instabilité convective. Ce comportement peut être expliqué par un effet résiduel de SASI sur les modes convectifs pour des chauffages proches du chauffage de transition entre ces deux instabilités. Pour les faibles taux de rotation, ce caractère mixte reste restreint à des valeurs de χ proches de la transition SASI/convection et permet l'augmentation du taux de croissance convectif par la rotation. Lorsque le paramètre χ est trop grand et dépasse cette région de transition, la rotation tend à diminuer le taux de croissance de la convection. Ce dernier résultat correspond aux attentes.

Les résultats précédents restent valides tant que le paramètre de rotation j , relatif à la rotation Képlérienne, vérifie $j \lesssim 0.1$. Pour les rotations plus fortes, un nouveau comportement des modes apparaît. Nous avons montré l'émergence de modes mixtes SASI/convection/rotation pour les rotations intermédiaires, dans une région plus étendue que la zone de transition de chaque mode, jusqu'à des valeurs du paramètre de chauffage $\chi \sim 5$. Dans ce régime, les modes possèdent des caractéristiques de SASI et de la convection. Le rayon de corotation se trouve près du rayon auquel la fréquence de Brunt-Väisälä est maximale (convection), le taux de croissance augmente avec la rotation (SASI) et les plus grandes échelles angulaires sont les plus instables (SASI).

Pour les taux de rotation encore plus élevés, nous avons pu identifier un domaine de rotation où le mécanisme d'instabilité semble changer de nature. En effet, pour ces rotations, l'intensité du chauffage a un impact minime sur la dynamique du flot. Le moteur de l'instabilité semble être la rotation. Cependant, notre analyse énergétique montre une faible énergie due à la rotation dans cette région. Ce régime nécessite donc une analyse plus approfondie, en particulier un développement plus exact de notre approche énergétique qui ne produit que des résultats qualitatifs pour l'instant. Lorsque cet outil d'analyse sera opérationnel, il pourra être utilisé dans plusieurs situations. En particulier, il pourrait permettre de comprendre l'origine énergétique permettant la rotation des modes SASI.

Nos résultats sont précieux dans la perspective d'une future détection d'ondes gravitationnelles provenant d'une supernova gravitationnelle. Nous avons montré que les modes à petite échelle angulaire étaient stabilisés par la rotation tandis que les modes $m = 1, 2$ pouvaient devenir dominants avec des taux de rotation plus élevés. Ces modes sont les modes détectés par les ondes gravitationnelles, ce qui laisse donc espérer une signature en ondes gravitationnelles. Pour les forts taux de rotation, la fréquence de ces modes ne dépend que de v_{sh} , r_{sh} et j . Cette propriété pourra être exploitée pour interpréter les futures détections en ondes gravitationnelles. De plus, pour les rotations faibles et intermédiaires, nous avons établi que le rayon de corotation du mode dominant est proche du rayon auquel la fréquence de Brunt-Väisälä est maximale. La mesure de la fréquence de ce mode, lors d'une future détection d'ondes gravitationnelles, pourrait donc permettre de contraindre le taux de rotation à ce rayon.

Perspectives dans le cadre théorique de cette thèse

Plusieurs travaux sont à faire afin d'affiner les résultats obtenus avec et sans rotation. Tout d'abord, pour l'approche de la convection sans rotation, deux possibilités peuvent expliquer les différences entre les résultats numériques et analytiques. Il est possible que le critère hydrostatique proposé ne convienne pas pour décrire l'apparition de l'instabilité convective en présence d'advection. Cependant, plusieurs pistes sont à explorer et des vérifications d'hypothèses sont nécessaires afin de vérifier si le critère, basé sur le taux de croissance hydrostatique de la convection, est pertinent pour décrire la convection en présence d'advection.

En effet, nous devons encore établir les limites de validité de l'hypothèse analytique de perturbations adiabatiques. D'autre part, nous n'avons pas encore vérifié le choix de l'échelle verticale pertinente pour définir le temps d'advection de la matière.

De plus, les taux de croissance hydrostatique et avec advection peuvent différer. En particulier, la piste actuellement à l'étude est l'influence du profil d'entropie établi avec et sans advection. En effet, le profil d'entropie utilisé dans les calculs analytiques, hydrostatiques, peut être différent de celui établi lorsque l'advection est prise en compte, bien que la région post-choc soit subsonique. Ainsi, nous utilisons dans notre approche un taux de croissance calculé pour un profil d'entropie différent de celui présent dans la matière lorsque l'advection est prise en compte.

Dans les travaux avec rotation présentés au Chap. IV, une première étude plus poussée est nécessaire afin d'explorer les taux de dissociation au choc plus élevés. En particulier, lorsque le rayon du choc varie, la valeur de $\varepsilon \sim 0.3$ que nous avons privilégiée peut ne pas être suffisante pour décrire les phénomènes au niveau du choc d'une supernova.

Enfin, une analyse plus poussée des calculs énergétiques est nécessaire afin de déterminer l'origine de la différence observée entre taux de croissance obtenu numériquement et taux de croissance obtenu énergétiquement.

Limitations du cadre théorique et perspectives

Tous les résultats présentés dans cette thèse sont obtenus par analyse linéaire, en ignorant la dynamique de la PNS centrale, les effets magnétiques ainsi que l'influence de la rotation hors du plan équatorial. Dans cette partie, nous allons revenir sur ces approximations en considérant les approximations pouvant avoir le plus d'influence en priorité.

Prise en compte de la PNS

Dans les analyses linéaires, l'inclusion de la PNS dans le plan équatorial peut mener à différents comportements impactant l'évolution de l'explosion ainsi que les signaux en ondes gravitationnelles et neutrinos. Un premier effort pour prendre en compte la PNS serait de considérer la variation de son rayon : contraction lorsque la PNS se refroidit et augmentation due à la force centrifuge. Ces variations peuvent amplifier ou défavoriser les instabilités convective et SASI. En effet, l'expansion du rayon de la PNS liée à la rotation mène à la diminution de la température des neutrinos émis dans le plan équatorial (et inversement pour la contraction de la PNS). Il y aurait donc deux tendances de variation du choc opposées lorsque la rotation est

prise en compte. D'autre part, nous avons montré que la rotation poussait le choc, augmentant la taille de la région de gain. Il y a donc trois effets favorisant/défavorisant l'explosion. D'une part, la rotation et le refroidissement permettraient un chauffage plus fort, dans une région de gain plus grande. D'autre part, la rotation diminuerait le taux de chauffage. Une prise en compte de la physique du rayon de la PNS permettrait de déterminer quel effet est dominant. Par ailleurs, si l'intérieur de la PNS est pris en compte, une instabilité convective se développe autour de 20 km. Si la rotation de cette PNS est prise en compte, l'instabilité low-T/|W| peut se développer avec un rayon de corotation lui aussi proche de 20 km.

La prise en compte simultanée de la région post-choc et de la PNS n'est cependant pas triviale pour un calcul de stabilité linéaire. En effet, la PNS est approximativement en équilibre hydrostatique alors que la région choquée est traversée par la matière. Cette région supérieure n'est donc pas à l'équilibre hydrostatique. Elle est cependant supposée stationnaire pour les besoins du calcul perturbatif. La juxtaposition des deux régions produirait donc une augmentation de la masse à l'interface entre une PNS hydrostatique et une région choquée stationnaire. Ces deux conditions sont compliquées à combiner et rendent difficile l'établissement d'un état stationnaire, nécessaire pour le développement d'une analyse linéaire.

Tous ces effets devraient être pris en compte dans le plan équatorial. Il faut aussi comprendre le comportement des instabilités hors du plan équatorial.

Structure poloïdale

Une étude de toute la sphère serait utile afin de déterminer l'influence de la rotation pour toutes les latitudes et les modes axisymétriques. En effet, le choix d'utiliser m^2 plutôt que $l(l+1)$ dans le plan équatorial peut avoir des conséquences sur les résultats obtenus. Nous avons montré dans la Sect. II.2.2 une différence de la valeur du seuil de chauffage χ_{marg} due à cette hypothèse simplificatrice, supposant qu'il n'y a pas de dépendance poloïdale dans nos considérations. Il est donc nécessaire d'avoir une description de la structure poloïdale. Cependant, plusieurs difficultés apparaissent lorsque toute la sphère est prise en compte.

Tout d'abord, pour les faibles taux de rotation, la décomposition des modes en harmoniques sphériques indépendantes n'est plus possible. En effet, la prise en compte exacte de la force de Coriolis affecte cette décomposition sur plusieurs harmoniques sphériques (Rieutord, 1987). Dans ce cas, les modes se décomposent sur plusieurs harmoniques sphériques. Il y a donc des couplages des $Y_{l,m}$.

Pour les plus forts taux de rotation, la déformation centrifuge de la PNS nécessite le développement de modèles 2D en géométrie non sphérique. Cela est techniquement compliqué à la fois pour le flot stationnaire et le flot perturbé.

Linéarité

L'analyse linéaire utilisée est globalement justifiée par les résultats de [Torres-Forné et al. \(2019b\)](#) montrant qu'une analyse linéaire peut prédire une grande partie des fréquences des modes observables dans le signal en ondes gravitationnelles des supernovæ. Une analyse non-linéaire plus poussée est tout de même nécessaire pour déterminer l'amplitude de ces ondes gravitationnelles.

Une analyse non-linéaire est aussi nécessaire pour déterminer comment les perturbations linéaires évoluent et lesquelles dominent au moment de l'explosion. C'est aussi indispensable pour déterminer l'origine exacte du spin et du kick des étoiles à neutrons, ainsi que leur alignement ([Johnston et al., 2005](#); [Noutsos et al., 2013](#)). Comme présenté précédemment, l'origine du spin des pulsars est un outil précieux pour contraindre la rotation au cœur des étoiles massives pour lesquelles la rotation est encore peu contrainte.

Champ magnétique

Enfin, un dernier paramètre semble important pour l'évolution finale de certaines étoiles : le champ magnétique. Plusieurs phénomènes peuvent mener à des champs magnétiques forts, pouvant avoir une influence sur le devenir de l'étoile.

Les processus de création d'un champ magnétique suffisant pour avoir un effet sur la dynamique des instabilités hydrodynamiques sont encore peu connus. Pour les progéniteurs dont le champ magnétique est initialement faible, il se peut que le champ magnétique ne se développe pas suffisamment rapidement pour avoir une influence quantitative dans la phase linéaire des instabilités hydrodynamiques de la région choquée. Cependant, ce champ magnétique pourrait avoir une influence pour des études futures, non seulement dans la phase linéaire mais aussi dans la phase non-linéaire via des phénomènes d'amplification dynamo. Cette piste est à l'étude ([Raynaud et al., 2020](#); [Bugli et al., 2021](#); [Reboul-Salze et al., 2021](#)).

Des études montrent que, sans rotation, la contraction de la PNS allée aux instabilités dans la région post-choc peuvent mener à l'amplification du champ magnétique jusqu'à 10^{14} G ([Endeve et al., 2012](#); [Obergaullinger et al., 2014](#); [Matsumoto et al., 2020](#); [Müller and Varma, 2020](#); [Varma et al., 2023](#)). Cependant, l'effet de ce champ magnétique sur la dynamique de l'explosion est encore peu connu. Des simulations suggéraient un champ magnétique sans impact sur la dynamique de l'explosion ([Endeve et al., 2012](#); [Obergaullinger et al., 2014](#)), tandis que des études récentes suggèrent que cet effet magnétique serait finalement à prendre en compte ([Müller and Varma, 2020](#); [Varma et al., 2023](#)). Ainsi, des analyses linéaires des instabilités hydrodynamiques avec champ magnétique pourraient être intéressantes. De plus, son influence peut être plus ou moins grande selon le champ magnétique du progéniteur ([Matsumoto et al., 2022](#)).

La prise en compte du champ magnétique semble plus importante pour les analyses avec forte rotation et prenant en compte la dynamique de la PNS, où le champ magnétique peut être amplifié par la rotation différentielle et des phénomènes de dynamo ([Raynaud et al., 2020](#)). Dans ces cas d'amplification du champ magnétique, l'issue de la supernova ne serait plus une simple étoile à neutrons mais un magnétar. Ainsi, le champ magnétique peut avoir un rôle non négligeable (redistribution du moment cinétique, création de jets, sursaut gamma).

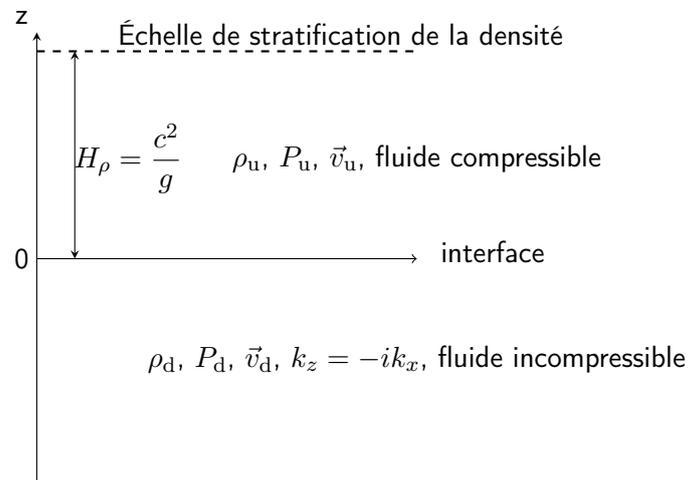
L'étude des instabilités magnétohydrodynamiques est donc nécessaire pour comprendre l'origine des champs magnétiques intenses des magnétars. En effet, ces objets possèdent des champs magnétiques cent fois plus importants que le champ magnétique d'une étoile à neutrons standard et pourraient être à l'origine des explosions les plus énergétiques (hypernova et SLSN).

Annexes

Annexe A.

Rayleigh Taylor compressible isotherme sur incompressible, sans advection

Dans cette annexe, nous allons développer les calculs analytiques d'une instabilité entraînée par la superposition de deux fluides de densités différentes. Ces calculs se rapportent aux systèmes présentés dans les Chaps. II-III en géométrie plane. Le fluide supérieur est dense et compressible. Le fluide supérieur est supposé incompressible et de densité inférieure à celle du fluide supérieur.



A.1 Notations

Les grandeurs perturbées, en absence d'advection, sont notées :

— pression : $P = P_0 + \delta P$,

— vitesse : $\vec{v} = \delta \vec{v}$,

— densité du fluide compressible : $\rho = \rho_0 + \delta \rho$,

— Relation utile : $P = \rho c^2$ et $\delta P = c^2 \delta \rho$

— forme des perturbations en temps et en x : $\exp(-i\omega t + ik_x x)$, avec $k_x > 0$.

Pour les conditions à l'infini, on impose un flux d'énergie sortant pour la borne supérieure et une onde évanescence pour la borne inférieure. De plus, les grandeurs à l'interface doivent vérifier la continuité de la composante verticale de la vitesse et la continuité de la pression à l'interface.

A.2 Dans le plan supérieur ($z > 0$)

A.2.1 Densité

On se trouve dans le cas isotherme donc on a $P = \rho c^2$ avec c la vitesse du son dans le milieu, supposée constante. D'autre part, l'ordre zéro de l'équation d'Euler donne :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g, \quad (\text{A.1})$$

avec $g > 0$ tel que $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. On a donc : $c^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho g$. Finalement :

$$\rho_0 = \bar{\rho}_0 \exp\left(-\frac{z}{H_\rho}\right) \quad (\text{A.2})$$

avec $H_\rho = \frac{c^2}{g}$, l'échelle de stratification de la densité dans le fluide supérieur.

A.2.2 Équation de continuité

L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \delta \vec{v} + \delta \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho_0 = 0. \quad (\text{A.3})$$

Avec l'expression exponentielle des perturbations, on peut réécrire cette expression comme :

$$-i\omega \delta \rho + \rho_0 \left(ik_x \delta v_x + \frac{\partial \delta v_z}{\partial z} \right) - \delta v_z \frac{\rho_0}{H_\rho} = 0 \quad (\text{A.4})$$

A.2.3 Équation d'Euler

L'équation d'Euler s'exprime comme

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} P + \rho \vec{\nabla} \Phi = 0 \quad (\text{A.5})$$

et peut donc être écrite à l'ordre 1 comme :

$$\text{sur } x : -i\omega \rho_0 \delta v_x + ik_x \delta P = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$\text{sur } z : -i\omega \rho_0 \delta v_z + \frac{\partial}{\partial z} \delta P + g \delta \rho = 0. \quad (\text{A.7})$$

A.2.4 Mise en équations

Nous voulons maintenant combiner ces équations afin d'obtenir l'expression de la pulsation de l'instabilité ω .

D'après l'Eq. (A.6), on a :

$$\delta v_x = \frac{k_x \delta P}{\rho_0 \omega}, \quad (\text{A.8})$$

et l'Eq. (A.7) donne :

$$\frac{\partial \delta P}{\partial z} = -g \frac{\delta P}{c^2} + i\omega \rho_0 \delta v_z. \quad (\text{A.9})$$

On peut intégrer ces expressions à l'Eq. (A.4). Dans ce cas, on obtient :

$$\frac{\partial \delta v_z}{\partial z} = \frac{i \delta P}{\rho_0} \left(\frac{\omega}{c^2} - \frac{k_x^2}{\omega} \right) + \frac{\delta v_z}{H_\rho}. \quad (\text{A.10})$$

On obtient alors un système sur $\frac{\delta P}{\sqrt{\rho_0}}$ et $\sqrt{\rho_0} \delta v_z$ du type $X' = AX$, avec

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2H_\rho} & i\omega \\ \frac{i\omega}{c^2} - \frac{ik_x^2}{\omega} & \frac{1}{2H_\rho} \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} \frac{\delta P}{\sqrt{\rho_0}} \\ \sqrt{\rho_0} \delta v_z \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

La matrice A a pour valeurs propres :

$$k_\pm = \pm \sqrt{\frac{1}{4H_\rho^2} + k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (\text{A.12})$$

Pour satisfaire la condition limite en $z \rightarrow +\infty$, on doit avoir $\text{Re}(k_\pm) < 0$. Soit k la valeur propre satisfaisant cette condition. On a alors les perturbations X qui s'expriment comme $\exp(-i\omega t + ik_x x + kz)$.

La continuité de la pression à l'interface donne alors :

$$\omega^2 = gk_x (\rho_d - \bar{\rho}_0) \left[\frac{2H_\rho k + 1}{(2H_\rho k + 1)\rho_d - 2H_\rho k_x \bar{\rho}_0} \right]. \quad (\text{A.13})$$

On pose alors :

- $\tilde{\rho}_0 = \frac{\rho_0}{\rho_d + \rho_0}$,
- $\tilde{\rho}_d = \frac{\rho_d}{\rho_d + \rho_0}$,
- le nombre d'Atwood : $A_t = (\tilde{\rho}_0 - \tilde{\rho}_d) > 0$,
- $(\tilde{\rho}_0^2 - \tilde{\rho}_d^2) = A$.

Alors l'Eq. (A.13) peut s'exprimer comme :

$$k = -\frac{1}{2H_\rho} + \frac{\tilde{\rho}_0 k_x}{\tilde{\rho}_d + \frac{A_t g k_x}{\omega^2}} \quad (\text{A.14})$$

Cependant, d'après l'Eq. (A.12), on a : $k^2 = \frac{1}{4H_\rho^2} + k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$.

En élevant au carré les Eqs. (A.12) et (A.14), on élimine k et on obtient le polynôme en ω^2 suivant :

$$\left(\frac{\omega^2}{gH_\rho} - k_x^2 \right) \left(\tilde{\rho}_d \omega^2 + A_t g k_x \right)^2 + k_x^2 \tilde{\rho}_0^2 \omega^4 = \frac{k_x \tilde{\rho}_0 \omega^2}{H_\rho} \left(\tilde{\rho}_d \omega^2 + A_t g k_x \right) \quad (\text{A.15})$$

Voyons le comportement du taux de croissance dans des cas asymptotiques de longueurs d'onde.

A.2.4.a Domaines des petites longueurs d'onde $H_\rho k_x \gg 1$

Dans ce cas, les termes en $1/H_\rho$ sont négligeables devant les termes en k_x et on obtient le polynôme :

$$\tilde{\rho}_0^2 \omega^4 = \left(\tilde{\rho}_d \omega^2 + A_t g k_x \right)^2 \quad (\text{A.16})$$

Ce qui donne :

$$\omega_\pm^2 = g k_x \left(\tilde{\rho}_d \pm \tilde{\rho}_0 \right). \quad (\text{A.17})$$

Si $\omega_+^2 = g k_x$, il s'agit d'un cas stable. Il faut vérifier si cette valeur de ω mène à une valeur de k satisfaisant la condition limite en $+\infty$. On est dans le cas $H_\rho k_x \gg 1$ donc $\frac{1}{2H_\rho k_x} \rightarrow 0$. À l'aide l'Eq. (A.14), cette valeur pour ω donne : $k \xrightarrow{H_\rho k_x \rightarrow +\infty} k_x > 0$. La condition n'est pas satisfaite.

Si $\omega_-^2 = -A_t g k_x$, il s'agit d'un cas instable. Comme précédemment, on vérifie que la condition limite est respectée. Dans ce cas, l'expression pour ω donne : $k \xrightarrow{H_\rho k_x \rightarrow +\infty} -k_x < 0$. La condition est satisfaite.

A.2.4.b Domaine des grandes longueurs d'onde $H_\rho k_x \ll 1$

Dans ce cas, les deux termes en k_x^2 sont négligeables et le polynôme de l'Eq. (A.13) peut s'exprimer comme :

$$\frac{\omega^2}{g H_\rho} \left(\tilde{\rho}_d \omega^2 + A_t g k_x \right)^2 = \frac{k_x \tilde{\rho}_0}{H_\rho} \left(\tilde{\rho}_d \omega^2 + A_t G k_x \right) \omega^2. \quad (\text{A.18})$$

Cette équation possède trois solutions pour ω :

$$\omega_1^2 = 0, \quad (\text{A.19})$$

$$\omega_2^2 = -\frac{A_t g k_x}{\tilde{\rho}_d}, \quad (\text{A.20})$$

$$\omega_3^2 = g k_x \quad (\text{A.21})$$

Si $\omega_1^2 = 0$, la valeur 0 n'est pas une racine du polynôme de départ (Eq. A.15). Certaines approximations faites étaient trop fortes. En particulier, si on prend $\omega_1^2 \propto H_\rho$, alors les termes en k_x ne sont plus négligeables face aux termes en ω/H_ρ et les termes en ω^4 sont négligeables :

$$\left(\frac{\omega^2}{g H_\rho} - k_x^2 \right) A_t^2 g^2 k_x^2 = \frac{k_x \tilde{\rho}_0 \omega^2}{H_\rho} \times A_t g k_x \quad (\text{A.22})$$

Cela donne la racine :

$$\omega_1^2 = -\frac{A_t g k_x^2 H_\rho}{\tilde{\rho}_d} \quad (\text{A.23})$$

On vérifie que cette racine satisfait la condition sur k à l'aide de l'Eq. (A.14). Le terme dominant est celui en $1/(2H_\rho)$ et on a bien $k < 0$.

Si $\omega_2^2 = -A_t g k_x / \tilde{\rho}_d$, l'expression de ω^2 mène à une division par zéro quand elle est introduite dans l'Eq. (A.14). Ainsi, on suppose qu'elle s'écrit réellement :

$$\omega_2^2 = -\frac{A_t g k_x}{\tilde{\rho}_d} + \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (\text{A.24})$$

où $\varepsilon = \varepsilon(H_\rho)$.

En injectant cette solution dans le polynôme de l'Eq. (A.15) et en tenant compte de l'hypothèse $H_\rho k_x \ll 1$, on obtient l'expression de ε suivante :

$$\varepsilon = -\frac{A_t g k_x^2 \tilde{\rho}_0}{\tilde{\rho}_d^2} H_\rho < 0 \quad (\text{A.25})$$

Cela donne une équation sur ω

$$\omega_2^2 = -\frac{A_t g k_x}{\tilde{\rho}_d} - \frac{A_t g k_x^2 \tilde{\rho}_0}{\tilde{\rho}_d^2} H_\rho. \quad (\text{A.26})$$

Ainsi, ω_2^2 est négatif, il s'agit donc d'un cas instable. On vérifie que cela satisfait la condition limite sur k . Le terme dominant reste $1/(H_\rho k_x)$ dans la limite $H_\rho k_x \ll 1$. Cette solution ne satisfait pas la condition limite car $k \xrightarrow{H_\rho k_x \rightarrow 0} +\infty$.

Si $\omega_3^2 = g k_x$, il s'agit d'un cas stable car ω_3 est réel. En injectant ce résultat dans l'Eq. (A.14) :

$$k \xrightarrow{H_\rho k_x \rightarrow 0} -\frac{1}{2H_\rho}. \quad (\text{A.27})$$

La condition limite sur k est satisfaite.

Si on ne garde que les solutions instables d'ondes évanescentes à l'infini, on a :

- si $H_\rho k_x \gg 1$, alors $\omega^2 = -A_t g k_x$ et on retrouve le cas incompressible de l'instabilité de Rayleigh-Taylor,
- si $H_\rho k_x \ll 1$, alors $\omega^2 = -\frac{A_t k_x^2 c^2}{\tilde{\rho}_d}$.

A.3 Conséquences pour χ

Si on se place dans le cas instable des grandes longueurs d'onde $H_\rho k_x \ll 1$ tel que $\omega^2 = -\frac{A_t c^2 k_x^2}{\tilde{\rho}_d}$, alors :

$$\tau_{adv} = \frac{1}{k_x v}, \quad (\text{A.28})$$

et

$$\tau_{buoy} = \frac{\sqrt{\tilde{\rho}_d}}{\sqrt{A_t k_x c}}, \quad (\text{A.29})$$

donc, avec un nouveau seuil tel que seuil = τ_{adv}/τ_{buoy} :

$$\frac{\sqrt{A_t}}{\mathcal{M}} \propto \text{seuil} \quad (\text{A.30})$$

avec $\mathcal{M} = \frac{v}{c}$ le nombre de Mach. En utilisant la fréquence de Brunt-Väisälä N , on exprime χ tel que définit en 2006 :

$$\chi = \frac{2NH}{v} = \frac{2HN}{\mathcal{M}c}, \quad (\text{A.31})$$

donc

$$\mathcal{M} = \frac{2HN}{c\chi}. \quad (\text{A.32})$$

En injectant ce résultat dans l'expression du seuil Eq. (A.30) :

$$\sqrt{A_t} \frac{\chi c}{2HN} \propto \text{seuil}. \quad (\text{A.33})$$

On approxime $A_t \simeq H\nabla S$ et $N \simeq \sqrt{g\nabla S}$, ce qui donne :

$$\frac{\chi c \sqrt{H\nabla S}}{2H\sqrt{g\nabla S}} = \frac{\chi c}{2\sqrt{gH}} \propto \text{seuil}. \quad (\text{A.34})$$

Finalement :

$$\chi = 2\sqrt{\frac{gH}{c^2}} \times \text{seuil} \propto \left(\frac{H}{H_\rho}\right)^{1/2}. \quad (\text{A.35})$$

Dans les calculs faits en 2006, la grandeur H se rapporte à la taille de la zone de chauffage ainsi qu'à la taille de la zone de gravité. Plusieurs expressions sont donc possibles en faisant la distinction des échelles. Tout d'abord, l'échelle caractéristique intervenant avec le gradient d'entropie ∇S est H_S donc on peut approximer le nombre d'Atwood par $A_t \simeq H_S\nabla S$. Deux possibilités apparaissent suivant le choix de H dans l'Eq. (A.31) :

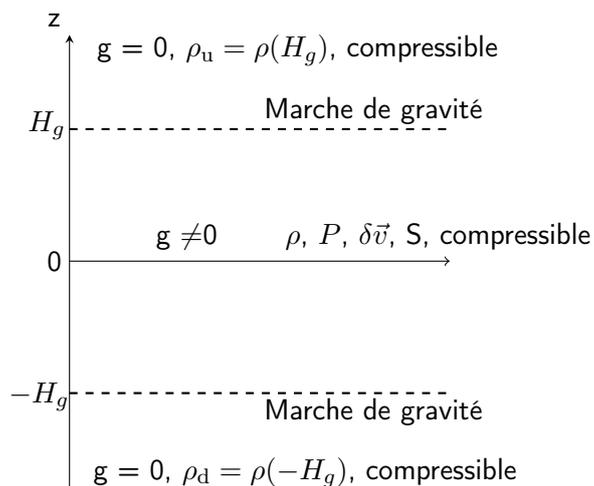
$$\chi \propto \begin{cases} \left(\frac{H_S}{H_\rho}\right)^{1/2} & \text{si } H = H_S, \\ \left(\frac{H_g^2}{H_\rho H_S}\right)^{1/2} & \text{si } H = H_g. \end{cases} \quad (\text{A.36})$$

Annexe B.

Rayleigh Taylor compressible, sans advection, avec marche de gravité et gradient d'entropie

Nous présentons ici une partie des calculs analytiques effectués pendant cette thèse. Ceux présentés dans cette partie correspondent à l'approche analytique du système présenté aux Chaps. II-III en géométrie plane. Ils présentent une étape plus poussée que les résultats de l'Annexe A car le gradient d'entropie est ici pris en compte.

Nous considérons un fluide compressible, au repos dans l'espace (x, z) , et une zone de gravité non nulle de taille $2H_g$, centrée sur $z = 0$ et infinie en x . En dehors de cette région, la gravité est négligée. En particulier, les densités à l'extérieur de la zone de gravité sont constantes et égales aux densités en $z = \pm H_g$.



B.1 Équations stationnaires

Nous considérons un cas sans advection donc $\vec{v} = \vec{0}$. Les grandeurs du flot stationnaire dans la zone de gravité sont donc :

$$\text{Pression : } P = \frac{\rho c^2}{\gamma}, \quad (\text{B.1})$$

$$\text{Euler : } \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g, \quad g > 0, \quad (\text{B.2})$$

$$\text{Entropie : } S = \frac{1}{\gamma - 1} \log \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right), \quad (\text{B.3})$$

avec P la pression, ρ la densité et S l'entropie dans la zone de gravité non nulle.

B.2 Équations perturbées

Si on se concentre sur le flot perturbé, les équations de continuité, d'Euler et d'entropie peuvent être exprimées à l'ordre 1.

La linéarisation de l'équation de continuité permet de déterminer l'équation vérifiée par la perturbation de vitesse verticale. Cela donne :

$$-i\omega\delta\rho + \delta v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + i\rho k_x \delta v_x + \rho \frac{\partial \delta v_z}{\partial z} = 0, \quad (\text{B.4})$$

donc :

$$\frac{\partial \delta v_z}{\partial z} = i\omega \frac{\delta\rho}{\rho} - \frac{\delta v_z}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} - ik_x \delta v_x. \quad (\text{B.5})$$

De même, l'équation d'Euler s'écrit comme :

$$-i\rho\omega\delta\vec{v} + \vec{\nabla}\delta P + \vec{g}\delta\rho = 0. \quad (\text{B.6})$$

En projetant sur x et z on obtient :

$$\text{Sur } x : i\rho\omega\delta v_x = ik_x\delta P, \quad (\text{B.7})$$

$$\text{Sur } z : i\rho\omega\delta v_z = g\delta\rho + \frac{\partial \delta P}{\partial z} \quad (\text{B.8})$$

avec $\vec{g} = -g\vec{u}_z$. On peut donc exprimer les équations de perturbations de vitesse horizontale et de pression :

$$\delta v_x = \frac{k_x \delta P}{\rho\omega}, \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial \delta P}{\partial z} = i\rho\omega\delta v_z - g\delta\rho. \quad (\text{B.10})$$

Enfin, on peut exprimer les perturbations d'entropie comme :

$$\delta S = \frac{1}{\gamma - 1} \left(\frac{\delta P}{P} - \frac{\gamma\delta\rho}{\rho} \right), \quad (\text{B.11})$$

et l'équation d'évolution de l'entropie comme :

$$-i\omega\delta S + \delta v_z \frac{\partial S}{\partial z} = 0. \quad (\text{B.12})$$

B.3 Structure des perturbations

Les équations du flot stationnaire et perturbé étant établies, nous pouvons déterminer la structure verticale des perturbations dans les différentes zones (gravité nulle ou non-nulle).

B.3.1 Dans la zone $g \neq 0$

Dans un premier temps, on souhaite déterminer l'équation d'évolution des perturbations de pression. D'après l'Eq (B.8) :

$$\frac{\partial \delta P}{\partial z} = i\rho\omega\delta v_z - g\delta\rho, \quad (\text{B.13})$$

et, d'après B.11 et B.12 :

$$\delta\rho = -\frac{\rho}{\gamma} \left((\gamma - 1) \delta S - \frac{\delta P}{P} \right), \quad (\text{B.14})$$

$$\delta S = \frac{\delta v_z}{i\omega} \frac{\partial S}{\partial z}, \quad (\text{B.15})$$

donc :

$$\delta\rho = -\frac{\rho}{\gamma} \left((\gamma - 1) \frac{\delta v_z}{i\omega} \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{\delta P}{P} \right). \quad (\text{B.16})$$

Finalement,

$$\frac{\partial \delta P}{\partial z} = i\omega\rho\delta v_z + g \times \frac{\rho}{\gamma} \left((\gamma - 1) \frac{\delta v_z}{i\omega} \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{\delta P}{P} \right). \quad (\text{B.17})$$

De même, nous souhaitons établir une équation sur les perturbations de vitesse verticale. D'après l'Eq. (B.4), on avait :

$$\frac{\partial \delta v_z}{\partial z} = i\omega \frac{\delta\rho}{\rho} - \frac{\delta v_z}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial z} - ik_x\delta v_x, \quad (\text{B.18})$$

donc, d'après l'Eq. (B.16) et l'Eq. (B.7) d'Euler sur x , on obtient :

$$\frac{\partial \sqrt{\rho}\delta v_z}{\partial z} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \sqrt{\rho}\delta v_z \frac{\partial S}{\partial z} + i\omega \frac{\delta P}{\sqrt{\rho}c^2} - \frac{\sqrt{\rho}\delta v_z}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial z} - i \frac{k_x^2 \delta P}{\sqrt{\rho}\omega} + \frac{\sqrt{\rho}\delta v_z}{2\rho} \frac{\partial\rho}{\partial z}. \quad (\text{B.19})$$

Ainsi, on obtient un système du type $X' = MX$ où :

$$M = \begin{pmatrix} -\left(\frac{g}{c^2} + \frac{1}{2\rho} \frac{\partial\rho}{\partial z}\right) & i\left(\omega - g \frac{\gamma - 1}{\omega\gamma} \frac{\partial S}{\partial z}\right) \\ i\left(\frac{\omega}{c^2} - \frac{k_x^2}{\omega}\right) & -\frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{1}{2\rho} \frac{\partial\rho}{\partial z} \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} \frac{\delta P}{\sqrt{\rho}} \\ \sqrt{\rho}\delta v_z \end{pmatrix}, \quad (\text{B.20})$$

où l'on a utilisé la relation $P = \rho c^2/\gamma$. L'expression de la matrice M peut être simplifiée en utilisant les relations établies pour l'état stationnaire :

$$N^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} g \frac{\partial S}{\partial z}, \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g, \quad (g > 0), \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial z} = \frac{1}{\gamma P} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\partial S}{\partial z}. \quad (\text{B.23})$$

avec N la fréquence de Brunt-Väisälä.

On peut donc ré-exprimer la matrice M sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{N^2}{2g} - \frac{g}{2c^2} & i\omega \left(1 - \frac{N^2}{\omega^2}\right) \\ i \left(\frac{\omega}{c^2} - \frac{k_x^2}{\omega}\right) & -\frac{N^2}{2g} + \frac{g}{2c^2} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.24})$$

Afin de déterminer la structure verticale des perturbations des perturbations $\delta P/\sqrt{\rho}$ et $\sqrt{\rho}\delta v_z$, on cherche les valeurs propres k_z de ce système, satisfaisant l'équation :

$$k_z^2 + \left(\frac{N^2}{2g} - \frac{g}{2c^2}\right) \left(-\frac{N^2}{2g} + \frac{g}{2c^2}\right) + \omega \left(1 - \frac{N^2}{\omega^2}\right) \left(\frac{\omega}{c^2} - \frac{k_x^2}{\omega}\right) = 0. \quad (\text{B.25})$$

Les deux valeurs propres possibles sont donc :

$$k_z = \pm \frac{1}{2} \sqrt{N^2 \left(\frac{2}{c^2} + \frac{N^2}{g^2} - \frac{4k_x^2}{\omega^2}\right) + \frac{g^2}{c^4} - \frac{4\omega^2}{c^2} + 4k_x^2}. \quad (\text{B.26})$$

La structure verticale des perturbations est donc établie dans cette première zone avec gravité. Il faut déterminer cette même structure dans les zones avec gravité et comment les deux structures se raccordent aux interfaces en $-H_g$ et H_g .

B.3.2 Dans la zone $g = 0$

Nous pouvons ensuite établir la structure verticale des perturbations dans la zone avec gravité. Les calculs sont les mêmes que ceux présentés précédemment, avec une simplification grâce à l'absence de gravité. On obtient un système du type $X' = MX$ où :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & i\omega \\ i \left(\frac{\omega}{c^2} - \frac{k_x^2}{\omega}\right) & 0 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} \frac{\delta P}{\sqrt{\rho}} \\ \sqrt{\rho}\delta v_z \end{pmatrix}. \quad (\text{B.27})$$

On cherche les valeurs propres de ce système :

$$K_{\pm} = \pm \sqrt{k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}, \quad (\text{B.28})$$

donc, en posant $K = \sqrt{k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$, on peut exprimer les perturbations dans la zone $z > 0$:

$$\frac{\delta P_u}{\sqrt{\rho_u}} = \frac{A}{\sqrt{\rho_u}} \exp(-Kz), \quad (\text{B.29})$$

$$\sqrt{\rho_u}\delta v_{zu} = \frac{-KA}{i\omega\sqrt{\rho_u}} \exp(-Kz), \quad (\text{B.30})$$

et dans la zone $z < 0$:

$$\frac{\delta P_d}{\sqrt{\rho_d}} = \frac{B}{\sqrt{\rho_d}} \exp(Kz), \quad (\text{B.31})$$

$$\sqrt{\rho_d}\delta v_{zd} = \frac{KB}{i\omega\sqrt{\rho_d}} \exp(Kz). \quad (\text{B.32})$$

$$(\text{B.33})$$

où A et B sont les amplitudes respectives des perturbations de δP_u et δP_d .

B.4 Méthode WKB

Afin de résoudre le système et déterminer la structure des perturbations dans la zone avec gravité, nous utilisons la méthode WKB (Wentzel, Kramers et Brillouin). Majoritairement utilisée en mécanique quantique pour résoudre l'équation de Schrödinger, cette méthode permet de simplifier un système lorsque les longueurs d'onde sont petites devant les échelles du problème. Ici, cela suppose des longueurs d'onde faibles comparées à H_g . On note les perturbations comme $X = \sqrt{\rho}\delta v_z$ et $Y = \frac{\delta P}{\sqrt{\rho}}$ et on suppose que g et N sont indépendants de la position z dans la zone avec gravité. Dans ce cas, on traduit les expressions obtenues Sect. B.3.1 avec la notation X, Y :

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y}{\partial z} &= \left(\frac{N^2}{2g} - \frac{g}{2c^2} \right) Y + i\omega \left(1 - \frac{N^2}{\omega^2} \right) X, \\ \frac{\partial X}{\partial z} &= i \left(\frac{\omega}{c^2} - \frac{k_x^2}{\omega} \right) Y + \left(-\frac{N^2}{2g} + \frac{g}{2c^2} \right) X.\end{aligned}\tag{B.34}$$

Cela donne l'expression de X :

$$X = \left[\frac{\partial Y}{\partial z} - \left(\frac{N^2}{2g} - \frac{g}{2c^2} \right) Y \right] \times \frac{i\omega}{(N^2 - \omega^2)}.\tag{B.35}$$

En utilisant cette expression dans la dérivée de la première équation du système B.34, avec g, ω et N constants par rapport à z , on obtient :

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} = Y \left[N^2 \left(\frac{1}{2c^2} + \frac{N^2}{4g^2} - \frac{k_x^2}{\omega^2} \right) + k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{g^2}{4c^4} + \frac{g}{c^3} \frac{\partial c}{\partial z} \right]\tag{B.36}$$

On pose alors $W(z)$ tel que $Y'' + W(z)Y = 0$, ce qui donne :

$$W(z) = N^2 \left(-\frac{1}{2c^2} - \frac{N^2}{4g^2} + \frac{k_x^2}{\omega^2} \right) - k_x^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{g^2}{4c^4} - \frac{g}{c^3} \frac{\partial c}{\partial z}.\tag{B.37}$$

On obtient donc

$$Y \propto \frac{1}{W^{1/4}} \exp(\pm i \int_0^z W^{1/2} dz).\tag{B.38}$$

On peut comparer $W(z)$ à k_z^2 , la valeur propre de la matrice M dans la zone de gravité, dans le cas où la vitesse du son ne dépend pas de z :

$$k_z^2 = \left(N^2 \left(\frac{1}{2c^2} + \frac{N^2}{4g^2} - \frac{k_x^2}{\omega^2} \right) + \frac{g^2}{4c^4} - \frac{\omega^2}{c^2} + k_x^2 \right) = -W(z) - \frac{g}{c^3} \frac{\partial c}{\partial z}\tag{B.39}$$

La méthode WKB est valide lorsque la condition $\frac{\partial W}{\partial z} \ll W^{3/2}$ est vérifiée. Ce critère donne donc la condition :

$$\begin{aligned}\left(\frac{N^2}{c^3} + \frac{g^2}{c^5} - \frac{2\omega^2}{c^3} + \frac{3g}{c^4} \frac{\partial c}{\partial z} \right) \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{g}{c^3} \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \ll \left[N^2 \left(-\frac{1}{2c^2} - \frac{N^2}{4g^2} + \frac{k_x^2}{\omega^2} \right) - k_x^2 \right. \\ \left. + \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{g^2}{4c^4} - \frac{g}{c^3} \frac{\partial c}{\partial z} \right]^{3/2}.\end{aligned}\tag{B.40}$$

Cette inégalité est vérifiée si $c \rightarrow \infty$ ou $\frac{\partial c}{\partial z} \rightarrow 0$, où $\frac{\partial c}{\partial z} = -\left(\frac{\gamma-1}{2c}g - \frac{N^2c}{2g}\right)$. En particulier, cela est vérifié dans une approximation incompressible ou isotherme.

B.5 Raccord des structures aux interfaces

B.5.1 Conditions limites en $\pm H_g$

Si g est non nul, on rappelle :

$$\delta v_x = \frac{k_x \delta P}{\rho \omega}, \quad (\text{B.41})$$

$$\delta \rho = \frac{\rho \delta P}{\gamma P} - \frac{\delta v_z N^2 \rho}{i \omega g}, \quad (\text{B.42})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = -\left(\frac{\rho^2 g}{\gamma P} + \frac{N^2 \rho}{g}\right), \quad (\text{B.43})$$

$$\delta v_{z_{g \neq 0}} = \frac{i \omega \delta P}{\rho (N^2 - \omega^2)} \times \left(k_z + \frac{g}{2c^2} - \frac{N^2}{2g}\right), \quad (\text{B.44})$$

avec $k_z = \pm |k_z|$ la structure verticale des perturbations ($\delta P / \sqrt{\rho}$, $\sqrt{\rho} \delta v_z$) dans la zone avec gravité. On rappelle aussi la notation A et B comme étant les amplitudes respectives des perturbations de δP_u et δP_d .

La condition de continuité de la pression aux interfaces donne les égalités :

$$\text{en } z = +H_g : A \exp(-KH_g) = \delta P_{g \neq 0, +}, \quad (\text{B.45})$$

$$\text{en } z = -H_g : B \exp(-KH_g) = \delta P_{g \neq 0, -}. \quad (\text{B.46})$$

La condition de continuité de la vitesse verticale aux interfaces donne les égalités :

$$\text{en } z = +H_g : \delta v_{z_{g \neq 0, +}} = \delta v_{z_u} = \frac{-KA}{i \omega \rho_u} \exp(-KH_g), \quad (\text{B.47})$$

$$\text{en } z = -H_g : \delta v_{z_{g \neq 0, -}} = \delta v_{z_d} = \frac{KB}{i \omega \rho_d} \exp(-KH_g). \quad (\text{B.48})$$

Comme précédemment, on se place dans le cas où g et N ne dépendent pas de z . En utilisant les résultats de la partie B.4, avec $Y = \delta P / \sqrt{\rho}$, on peut exprimer les perturbations (δP , δv_z) :

$$\delta P = \frac{\sqrt{\rho}}{W^{1/4}} \left(\alpha e^{i f \sqrt{W}} + \beta e^{-i f \sqrt{W}} \right) \quad (\text{B.49})$$

$$\delta v_z = \frac{i \omega}{N^2 - \omega^2} \left[\left(\frac{g}{2c^2} - \frac{N^2}{2g} \right) \times \frac{1}{\sqrt{\rho} W^{1/4}} \left(\alpha e^{i f \sqrt{W}} + \beta e^{-i f \sqrt{W}} \right) + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial Y}{\partial z} \right] \quad (\text{B.50})$$

On avait d'après la dérivée de l'Eq. (B.38) :

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial Y}{\partial z} = -\frac{W'}{4W\sqrt{\rho}} \frac{1}{W^{1/4}} \left(\alpha e^{i f \sqrt{W}} + \beta e^{-i f \sqrt{W}} \right) + \frac{\sqrt{W}}{W^{1/4}\sqrt{\rho}} \left(i \alpha e^{i f \sqrt{W}} - i \beta e^{-i f \sqrt{W}} \right). \quad (\text{B.51})$$

En supposant le critère WKB $\frac{\partial W}{\partial z} \ll W^{3/2}$ valide, on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial Y}{\partial z} \sim \frac{iW^{1/4}}{\sqrt{\rho}} \left(\alpha e^{i f \sqrt{W}} - \beta e^{-i f \sqrt{W}} \right). \quad (\text{B.52})$$

Dans ce cas :

$$\delta v_z \sim \frac{i\omega}{N^2 - \omega^2} \left[\left(\frac{g}{2c^2} - \frac{N^2}{2g} \right) \times \frac{1}{\sqrt{\rho}W^{1/4}} \left(\alpha e^{i f \sqrt{W}} + \beta e^{-i f \sqrt{W}} \right) + \frac{iW^{1/4}}{\sqrt{\rho}} \left(\alpha e^{i f \sqrt{W}} - \beta e^{-i f \sqrt{W}} \right) \right] \quad (\text{B.53})$$

On se place dans le cas où l'approximation WKB est vérifiée et telle que la vitesse du son ne dépende pas de la position z . Sous ces hypothèses :

$$k_z^2 = N^2 \left(\frac{1}{2c^2} + \frac{N^2}{4g^2} - \frac{k_x^2}{\omega^2} \right) + \frac{g^2}{4c^4} - \frac{\omega^2}{c^2} + k_x^2 \sim -W(z). \quad (\text{B.54})$$

Les équations de continuité de la pression peuvent alors se réécrire en remplaçant $i\sqrt{W}(z)$ par k_z comme :

$$A \exp(-KH_g) = \frac{\sqrt{\rho_u}}{(-k_z^2)^{1/4}} \left(\alpha e^{k_z H_g} + \beta e^{-k_z H_g} \right), \quad (\text{B.55})$$

$$B \exp(-KH_g) = \frac{\sqrt{\rho_d}}{(-k_z^2)^{1/4}} \left(\alpha e^{-k_z H_g} + \beta e^{k_z H_g} \right). \quad (\text{B.56})$$

Pour la perturbation de vitesse verticale, on obtient :

$$\frac{KA}{\omega^2 \sqrt{\rho_u}} \exp(-KH_g) = \frac{1}{(N^2 - \omega^2) (-k_z^2)^{1/4}} \times \left[\left(\frac{g}{2c^2} - \frac{N^2}{2g} \right) \times \left(\alpha e^{k_z H_g} + \beta e^{-k_z H_g} \right) + k_z \times \left(\alpha e^{k_z H_g} - \beta e^{-k_z H_g} \right) \right] \quad (\text{B.57})$$

$$\frac{-KB}{\omega^2 \sqrt{\rho_d}} \exp(-KH_g) = \frac{1}{(N^2 - \omega^2) (-k_z^2)^{1/4}} \times \left[\left(\frac{g}{2c^2} - \frac{N^2}{2g} \right) \times \left(\alpha e^{-k_z H_g} + \beta e^{k_z H_g} \right) + k_z \times \left(\alpha e^{-k_z H_g} - \beta e^{k_z H_g} \right) \right] \quad (\text{B.58})$$

On peut alors mettre le système sous forme matricielle $MX = 0$ avec :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & e^{k_z H_g} & e^{-k_z H_g} \\ 0 & -1 & e^{-k_z H_g} & e^{k_z H_g} \\ -\frac{K}{\omega^2} & 0 & \frac{e^{k_z H_g}}{N^2 - \omega^2} \left(\frac{g}{2c^2} - \frac{N^2}{2g} + k_z \right) & \frac{e^{-k_z H_g}}{N^2 - \omega^2} \left(\frac{g}{2c^2} - \frac{N^2}{2g} - k_z \right) \\ 0 & \frac{K}{\omega^2} & \frac{e^{-k_z H_g}}{N^2 - \omega^2} \left(\frac{g}{2c^2} - \frac{N^2}{2g} + k_z \right) & \frac{e^{k_z H_g}}{N^2 - \omega^2} \left(\frac{g}{2c^2} - \frac{N^2}{2g} - k_z \right) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.59})$$

et

$$X = \begin{pmatrix} \frac{A \exp(-KH_g)}{\sqrt{\rho_u}} \\ \frac{B \exp(-KH_g)}{\sqrt{\rho_d}} \\ \frac{(-k_z^2)^{1/4}}{\beta} \\ \frac{(-k_z^2)^{1/4}}{\beta} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.60})$$

On suppose $\omega = \Lambda H_g N k_x$, $k_x H_g \ll 1$ et c constante. Dans ce cas, $\omega^2 \ll N^2$ et le déterminant de M devient :

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & e^{k_z H_g} & e^{-k_z H_g} \\ 0 & -1 & e^{-k_z H_g} & e^{k_z H_g} \\ -\frac{K}{\Lambda^2 H_g^2 N^2 k_x^2} & 0 & \frac{e^{k_z H_g}}{N^2} \left(\frac{g}{2c^2} - \frac{N^2}{2g} + k_z \right) & \frac{e^{-k_z H_g}}{N^2} \left(\frac{g}{2c^2} - \frac{N^2}{2g} - k_z \right) \\ 0 & \frac{K}{\Lambda^2 H_g^2 N^2 k_x^2} & \frac{e^{-k_z H_g}}{N^2} \left(\frac{g}{2c^2} - \frac{N^2}{2g} + k_z \right) & \frac{e^{k_z H_g}}{N^2} \left(\frac{g}{2c^2} - \frac{N^2}{2g} - k_z \right) \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{B.61})$$

On cherche à déterminer l'expression de Λ . Après le développement de ce déterminant, nous obtenons la relation entre Λ et k_z :

$$-\frac{k_z K}{\Lambda^2 H_g^2 k_x^2} + \frac{\tanh(2k_z H_g)}{2} \left[\left(\frac{N^2}{2g} - \frac{g}{2c^2} \right)^2 + k_z^2 + \frac{K^2}{\Lambda^4 H_g^4 k_x^4} \right] = 0 \quad (\text{B.62})$$

et l'expression de k_z

$$k_z^2 = N^2 \left(\frac{1}{2c^2} + \frac{N^2}{4g^2} - \frac{\Lambda^2 H_g^2 k_x^2}{c^2} \right) + \frac{g^2}{4c^4} - \frac{1}{\Lambda^2 H_g^2} + k_x^2. \quad (\text{B.63})$$

En utilisant $\partial c / \partial z \sim 0$ et en supposant $g/c^2 \ll 1/(H_g k_x)$ et $\Delta S \ll 1$, avec ΔS le saut d'entropie, cela se résume à :

$$k_z \sim \pm \frac{i}{\Lambda H_g}. \quad (\text{B.64})$$

On suppose que k_z correspond à la racine positive.

On peut injecter cette expression de k_z dans l'Eq. (B.62) afin de déterminer Λ :

$$-\frac{iK}{\Lambda^3 H_g^3 k_x^2} + \frac{\tanh(2i/\Lambda)}{2} \left[\left(\frac{N^2}{2g} - \frac{g}{2c^2} \right)^2 - \frac{1}{\Lambda^2 H_g^2} + \frac{K^2}{\Lambda^4 H_g^4 k_x^4} \right] = 0. \quad (\text{B.65})$$

Pour avoir cela, on a supposé que $\frac{\partial c}{\partial z} = -\left(\frac{\gamma-1}{2c} g - \frac{N^2 c}{2g} \right)$ était négligeable (hypothèse WKB), donc :

$$-\frac{iK}{\Lambda^3 H_g^3 k_x^2} + \frac{\tanh(2i/\Lambda)}{2} \left[-\frac{1}{\Lambda^2 H_g^2} + \frac{K^2}{\Lambda^4 H_g^4 k_x^4} \right] = 0 \quad (\text{B.66})$$

De plus, $H_g k_x \ll 1$ et $\tanh ix = i \tan x$, donc :

$$-i + i \tan(2i/\Lambda) \frac{K}{2\Lambda H_g k_x^2} = 0 \quad (\text{B.67})$$

$$1 - \tan(2/\Lambda) \frac{K}{2\Lambda H_g k_x^2} = 0 \quad (\text{B.68})$$

Or $K = \sqrt{k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$, $\Delta S \ll 1$ donc, sachant que $N^2 \propto g\Delta S/(2H_g)$, on obtient :

$$K \sim \pm k_x \quad (\text{B.69})$$

et

$$\tan\left(\frac{2}{\Lambda}\right) \frac{2}{\Lambda} = 4H_g k_x. \quad (\text{B.70})$$

On cherche le mode le plus instable donc la valeur la plus grande possible de Λ donc la plus petite de $1/\Lambda$.

Si $\Lambda \gg 1$:

On effectue un développement limité de la fonction tangente et on obtient une première expression pour Λ : $\Lambda = \frac{1}{\sqrt{H_g k_x}}$.

Nous cherchons à vérifier la validité de cette solution.

Les temps d'instabilité et acoustique horizontal s'expriment comme :

$$\omega_{\text{RT}}^{-1} = (A_t g k_x)^{-1/2}, \quad (\text{B.71})$$

$$\omega_{\text{ac}}^{-1} \equiv \frac{1}{k_x c}, \quad (\text{B.72})$$

avec A_t le nombre d'Atwood, faible quand ΔS l'est. L'hypothèse incompressible suppose $\omega_{\text{RT}} \ll \omega_{\text{ac}}$. Ainsi, si on se place dans la limite incompressible, on doit avoir $k_x \gg A_t g/c^2$. Dans notre cas, A_t et g/c^2 sont faibles par hypothèse. Ainsi, pour satisfaire l'hypothèse $H_g k_x \ll 1$, nous avons besoin que k_x soit petit et nous avons aussi besoin qu'il soit supérieur à $A_t g/c^2$ pour pouvoir satisfaire la limite de k_x dans le cas incompressible.

D'une part, on doit avoir $\omega = \Lambda H_g N k_x \ll k_x c$ donc $\Lambda \ll \frac{c}{H_g N}$.

D'autre part, on doit avoir $N \gg \omega$ donc $N \gg \Lambda N H_g k_x$ donc $\frac{1}{H_g k_x} \gg \Lambda$.

Ainsi, si $\Lambda = \frac{1}{\sqrt{H_g k_x}}$ alors $\omega = \sqrt{H_g k_x} N$. Cela n'est compatible avec l'hypothèse $\omega \ll k_x c$

que sur un faible domaine de nombre d'onde horizontal k_x . En effet, cela implique $\sqrt{H_g k_x} N \ll k_x c$. Cependant, lorsque k_x diminue, la fonction racine diminue moins vite que l'identité. Il existe donc un seuil en k_x en dessous duquel la condition $\sqrt{H_g k_x} N \ll k_x c$ n'est plus vérifiée. Cette première racine $\omega = \sqrt{H_g k_x} N$ ne convient donc pas sur tout le domaine. Nous considérons donc la racine suivante.

Les solutions suivantes de l'Eq. (B.70) en Λ correspondent à :

$$\frac{2}{\Lambda} = n\pi + y, \quad (\text{B.73})$$

avec $y \ll 1$. Dans le cas précédent, on avait $n = 0$. Si on prend $n = 1$, alors :

$$\tan(\pi + y) = \frac{4H_g k_x}{\pi + y} \quad (\text{B.74})$$

Deux solutions sur y existent :

$$y_+ = \frac{4H_g k_x}{\pi^2}, \quad (\text{B.75})$$

$$y_- = -\pi - \frac{4H_g k_x}{\pi^2}. \quad (\text{B.76})$$

Nous considérons dans un premier temps la validité de l'utilisation de y_+ . Dans ce cas, Λ s'exprime comme :

$$\Lambda_+ = \frac{2}{\pi} \quad (\text{B.77})$$

Dans ce cas, Λ ne dépend pas de k_x donc les conditions sont vérifiées. Cette solution est donc une solution acceptable à notre problème.

Cependant, si on considère la racine négative y_- , on a : $\Lambda_- = -\frac{2\pi^2}{H_g k_x} < 0$. Cela implique que $|\omega| > |N|$. Cette expression n'est donc pas solution du système que nous considérons.

B.6 Impact sur le seuil de stabilité

Nous partons de l'hypothèse que le critère pertinent pour l'étude de la stabilité marginale de l'instabilité convective s'exprime comme un rapport des temps d'advection de la matière et de flottaison obtenu sans advection. Ainsi, cela s'exprime :

$$\text{Seuil} = \frac{\tau_{\text{adv}}}{\tau_{\text{buoy}}} \sim 1, \quad (\text{B.78})$$

avec $\tau_{\text{adv}} = (k_c v)^{-1}$ et $\tau_{\text{buoy}} = \omega^{-1}$, avec ω la valeur trouvée dans la partie précédente : $\omega = 2H_g k_x N / \pi$. Ainsi, ce seuil peut être exprimé comme :

$$\text{Seuil} = \frac{\Lambda H_g N}{v}. \quad (\text{B.79})$$

Le critère χ établi par [Foglizzo et al. \(2006\)](#) peut s'exprimer comme :

$$\chi = \frac{2NH_g}{v}. \quad (\text{B.80})$$

En injectant ce résultat dans l'expression du seuil, on obtient :

$$\text{Seuil} = \frac{\Lambda \chi}{2}. \quad (\text{B.81})$$

Dans nos considérations, nous n'avons pas pris en compte le choc au bord supérieur. Ainsi, nos résultats ne sont pas à comparer à $\chi \sim 3$ obtenu en 2006 mais plutôt à $\chi \sim 2$ obtenu par [Kazeroni et al. \(2018\)](#) dans le cas sans choc avec faible gravité et faible saut d'entropie ($K_g \ll 1$ et $K_H \ll 1$). Dans ce cas, la valeur seuil de stabilité marginale de l'instabilité convective peut s'exprimer comme : $\text{Seuil} = \Lambda = \frac{2}{\pi}$.

B.7 Vérification numérique

Nous souhaitons vérifier que l'introduction d'une advection faible nous fournit le même résultat qu'attendu pour les mêmes conditions de faible saut d'entropie ($K_H \ll 1$) et faible gravité ($K_g \ll 1$). On s'attend donc à avoir $\omega = \sqrt{H_g k_x} N$ pour les valeurs de k_x les moins faibles puis voir l'apparition d'un régime $\omega = 2H_g k_x N / \pi$ pour les plus grandes longueurs d'onde.

Ces attentes ne sont pas totalement satisfaites dans l'approche numérique sous ces conditions, pour les plus faibles nombres de Mach. Dans la figure B.1, on remarque que pour $H_g k_x > 2.10^{-5}$, $\omega_i = a\sqrt{H_g k_x}$ avec $a \sim \omega_{BV} = N$. Nous remarquons donc l'apparition de la première attente de taux de croissance puis un régime de transition vers un autre comportement du taux de croissance pour les grandes longueurs d'onde. Ce nouveau comportement dépend cependant du nombre de Mach. Pour des nombres de Mach suffisamment grands, nous trouvons bien le comportement en $\omega \propto H_g k_x$ attendu. Cependant, pour les plus faibles nombres de Mach, qui devraient fournir les résultats les plus proches de nos attentes hydrostatiques, nous observons que le taux de croissance ne dépend plus de la taille des perturbations.

On a donc une instabilité 1D qui se développe dans ce modèle. Cette instabilité est inattendue car nous sommes à 2D, la convection devrait dominer et donc on devrait avoir un taux de croissance nul quand on tend vers $k_x = 0$. L'origine de cette instabilité est étudiée en détail dans l'Annexe C par une analogie en eau peu profonde.

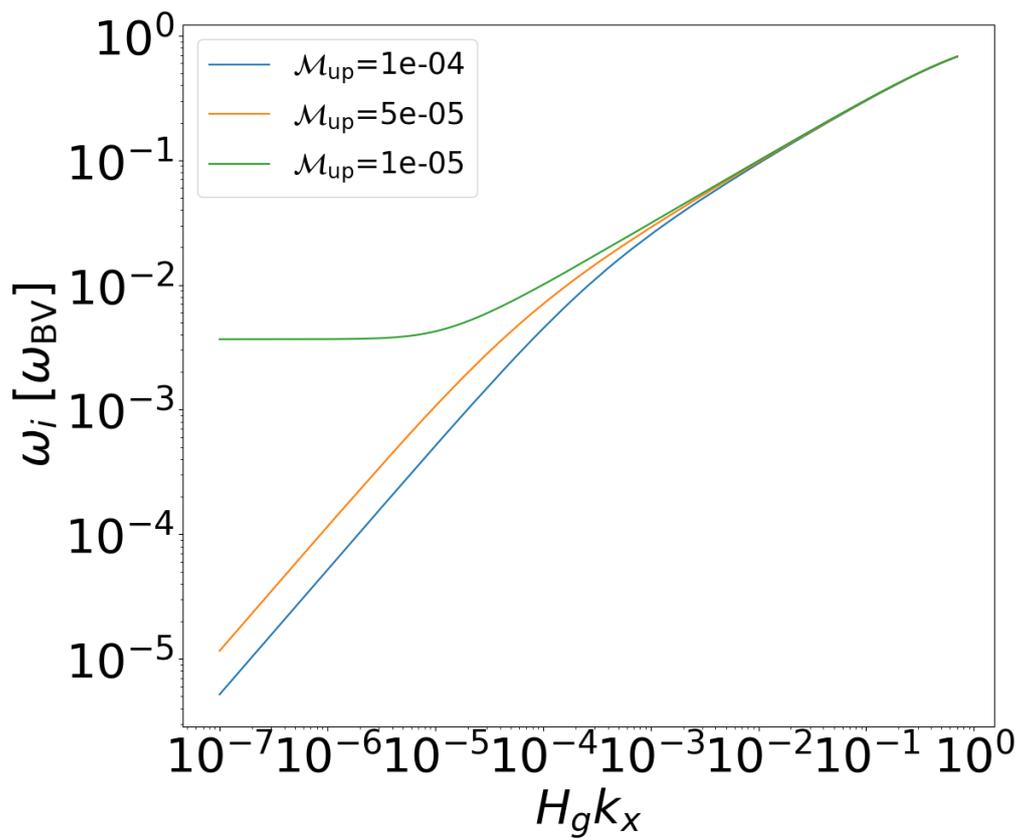


Figure B.1 – Profil de l'évolution de ω_i en fonction de k_x sans advection. Ce résultat est obtenu pour $K_H \ll 1$ et $K_g \ll 1$ afin de correspondre à nos hypothèses de faible gravité et faible saut d'entropie. ($\omega_{BV} = N$)

Annexe C.

Étude énergétique de l'instabilité 1D

Dans cette annexe, nous présentons le détail des calculs permettant d'établir le taux de croissance de l'instabilité 1D, apparaissant pour les grands nombres d'onde dans nos calculs numériques plans (Sect. III.1.4). Nous souhaitons aussi élucider son origine afin d'établir s'il s'agit d'une instabilité physique ou générée par notre modèle simplifié possédant des coupures de gravité. Pour cela, nous effectuons une analyse de variation de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. Nous remplaçons les gaz superposés par deux fluides de profondeur et de densité différente. Le fluide peu dense est profond et le fluide dense est peu profond.

Les notations utilisées sont rappelées dans la Fig. C.1.

Dans cette analogie, les correspondances des grandeurs physiques sont telles que :

- la dimension z devient x dans l'expérience analogique ;
- le potentiel gravitationnel gz est proportionnel à l'intensité g_l de la gravité du laboratoire et l'altitude z du fond : sol plat (gravité constante) suivi d'une montée linéaire $z = \alpha(x - x_0)$ (gravité croissante) puis à nouveau plat (Fig. III.9) ;
- la force analogique de gravité qui en découle correspond donc à αg_l ;
- la densité du gaz correspond à la densité surfacique des liquides $\rho_{1,2} h_{1,2}$ (avec $h_{1,2}$ la profondeur du fluide 1 ou 2 et $\rho_{1,2}$ sa densité) ;
- la vitesse du son c^2 correspond à $g_l h$;
- l'indice adiabatique du gaz équivalent vaut $\gamma = 2$;
- la pression du gaz $\rho c^2 / \gamma$ correspond donc à $\frac{1}{2} \rho_{1,2} g_l h_{1,2}^2$;
- la variation d'entropie positive à l'interface des deux fluides s'exprime comme $S_1 - S_2 = \frac{1}{\gamma-1} \ln(\rho_2/\rho_1) = 2 \ln(L_1/L_2)$ avec les équivalences mentionnées, $S_1 = \ln[g/(2\rho_1)]$, et $L_{1,2}$ définis comme la profondeur du fluide 1, 2 au niveau de l'interface, à l'équilibre. Dans cette situation d'équilibre des forces de pressions s'exprime par $\rho_1 L_1^2 = \rho_2 L_2^2$.

C.1 Expression de la pression

Dans un premier temps, nous présentons l'analogie permettant d'établir $\gamma = 2$ dans le modèle analogique. Afin de simplifier les notations, le signe \sim désigne les grandeurs dans notre analogie avec un gaz et les valeurs sans \sim correspondent aux grandeurs du liquide considéré. La pression locale dans le liquide vaut $P = \rho g_l z$. La pression moyenne du gaz équivalent s'exprime comme :

$$\tilde{P}(x) = \int_0^h \rho g_l z dz = \frac{\rho g_l h^2}{2}, \quad (\text{C.1})$$

où $c^2 = g_l h$ et h est la profondeur de fluide. Ainsi, $\tilde{P}(x) = \frac{\tilde{\rho} c^2}{2}$ avec $\tilde{\rho} = \rho h$. Ainsi, on a bien

$$\gamma = 2. \quad (\text{C.2})$$

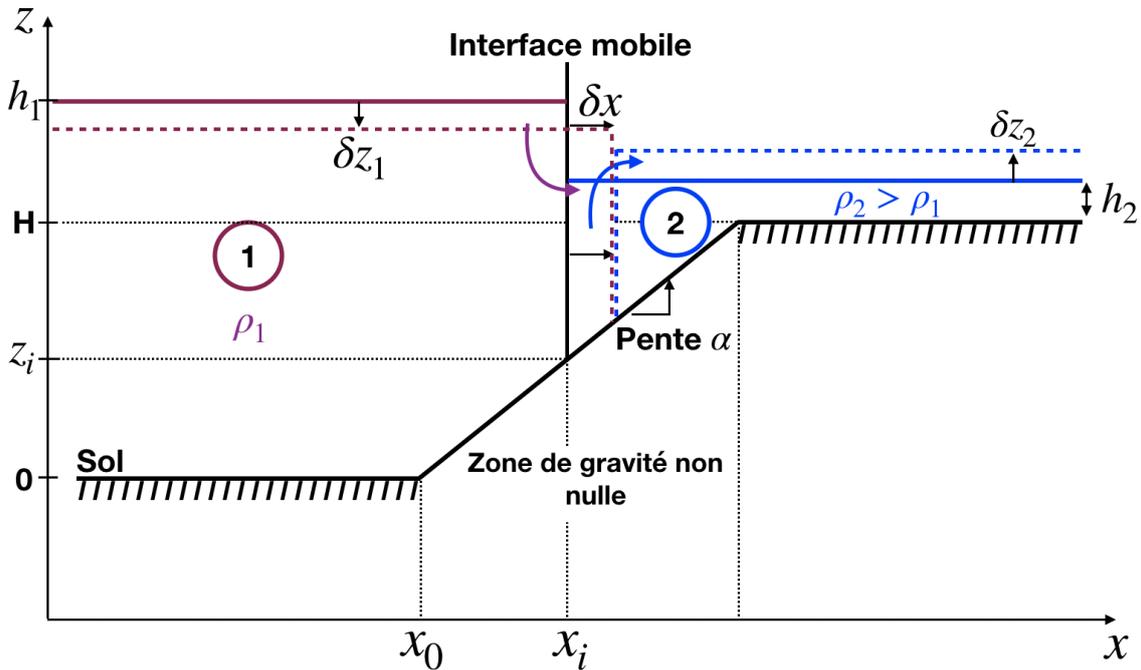


Figure C.1 – Illustration du dispositif étudié pour l'analogie en eau peu profonde.

C.2 Étude de la stabilité

Nous allons maintenant aborder les variations d'énergies lorsque l'interface entre les deux fluides est déplacée. Pour cela, nous commençons par étudier l'énergie potentielle.

C.2.1 Énergie potentielle

Pour étudier la variation d'énergie potentielle, nous étudions la variation de hauteur du barycentre de la matière déplacée. Lorsque l'interface est déplacée de δx , son point de rencontre avec le sol se trouve à une hauteur différente $\delta h = \alpha \delta x$, où α est la pente du sol. Cela nous permet de séparer le problème en deux masses déplacées : la masse d'un rectangle $(h - \delta h) \times \delta x$ et celle d'un triangle $(\delta h) \times \delta x$.

C.2.1.a Bilan d'énergie potentielle du fluide de gauche (1) :

La masse déplacée lors du mouvement de l'interface est donc

$$\delta m_1 = \delta m_{1r} + \delta m_{1t}, \quad (\text{C.3})$$

où

$$\delta m_{1r} = \rho_1 |\delta x| L_1 (\text{rectangle}), \quad (\text{C.4})$$

$$\delta m_{1t} = \rho_1 \delta x^2 \frac{\alpha}{2} (\text{rectangle}), \quad (\text{C.5})$$

et L_1 la profondeur du fluide (1) au niveau de l'interface à l'équilibre.

La variation de hauteur du centre de gravité peut s'exprimer en fonction de la profondeur de

fluide h et la variation de profondeur liée au déplacement de masse δz . Le centre de gravité initial s'exprime comme :

$$z_1 = h_1 + \frac{\delta z_1}{2}. \quad (\text{C.6})$$

Les centres de gravité finaux pour chacune de deux masses considérées peuvent s'exprimer comme :

$$z_{1r} = \frac{L_1}{2} + z_i = \frac{h_1 + z_i}{2}, \quad (\text{C.7})$$

$$z_{1t} = z_i + \frac{\alpha \delta x}{3}, \quad (\text{C.8})$$

où z_i est la hauteur à laquelle l'interface rencontre le sol à l'équilibre.

Ainsi, pour ces deux masses, nous pouvons établir la variation d'énergie potentielle en faisant la différence avec l'état initial :

$$\delta E_{P1r} = -\delta m_{1r} g l \times \left[h_1 + \frac{\delta z_1}{2} - \frac{h_1 + z_i}{2} \right] \quad (\text{C.9})$$

$$= -\delta m_{1r} g l \times \left[\frac{h_1}{2} + \frac{\delta z_1}{2} - \frac{z_i}{2} \right] \quad (\text{C.10})$$

$$= -\delta m_{1r} g l \times \left[\frac{L_1}{2} + \frac{\delta z_1}{2} \right] \quad (\text{C.11})$$

$$\delta E_{P1t} = -\delta m_{1t} g l \times \left[h_1 + \frac{\delta z_1}{2} - z_i - \frac{\alpha \delta x}{3} \right] \quad (\text{C.12})$$

$$= -\delta m_{1t} g l \times \left[L_1 + \frac{\delta z_1}{2} + \frac{\alpha |\delta x|}{3} \right] \quad (\text{C.13})$$

Finalement, la variation d'énergie potentielle dans le fluide (1) s'exprime :

$$\delta E_{P1} = \delta m_{1r} g l \times \left[\frac{L_1}{2} + \frac{\delta z_1}{2} \right] + \delta m_{1t} g l \times \left[L_1 + \frac{\delta z_1}{2} + \frac{\alpha |\delta x|}{3} \right] \quad (\text{C.14})$$

$$= \rho_1 |\delta x| L_1 g l \times \left[\frac{L_1}{2} + \frac{\delta z_1}{2} \right] + \rho_1 \delta x^2 \frac{\alpha}{2} g l \times \left[L_1 + \frac{\delta z_1}{2} + \frac{\alpha |\delta x|}{3} \right] \quad (\text{C.15})$$

$$= \rho_1 |\delta x| g l \times \left[\frac{L_1^2}{2} + \frac{L_1 \delta z_1}{2} + \frac{\alpha |\delta x|}{2} \left(L_1 + \frac{\delta z_1}{2} + \frac{\alpha |\delta x|}{3} \right) \right] \quad (\text{C.16})$$

$$= \rho_1 |\delta x| g l \times \left[\frac{L_1^2}{2} + \frac{L_1 \delta z_1}{2} + \frac{\alpha |\delta x|}{2} L_1 + \frac{\alpha |\delta x| \delta z_1}{4} + \frac{\alpha^2 |\delta x|^2}{6} \right]. \quad (\text{C.17})$$

C.2.1.b Bilan d'énergie potentielle du fluide de droite (2) :

La masse déplacée lors du mouvement de l'interface est :

$$\delta m_{2r} = \rho_2 |\delta x| (L_2 - \delta z_2), \quad (\text{C.18})$$

$$\delta m_{2t} = \rho_2 |\delta x| \frac{\alpha |\delta x|}{2}. \quad (\text{C.19})$$

où L_2 est la profondeur du fluide (2) au niveau de l'interface à l'équilibre.

Pour ces masses, le centre de gravité initial s'exprime comme :

$$z_{2r} = z_i + \frac{L_2 - \delta z_2}{2}, \quad (\text{C.20})$$

$$z_{2t} = z_i + \frac{\alpha|\delta x|}{3} \quad (\text{C.21})$$

La hauteur du centre de gravité final est

$$z_2 = h_2 + H - \frac{\delta z_2}{2} \quad (\text{C.22})$$

où H est la hauteur du sol dans la partie de droite.

Pour les deux masses, nous pouvons établir la variation d'énergie potentielle en faisant la différence avec l'état initial :

$$\delta E_{P2r} = -\delta m_{2r} g_l \times \left[z_i + \frac{L_2 - \delta z_2}{2} - h_2 - H + \frac{\delta z_2}{2} \right] \quad (\text{C.23})$$

$$= -\delta m_{2r} g_l \times \left[\frac{L_2}{2} - L_2 \right] \quad (\text{C.24})$$

$$= \delta m_{2r} g_l \times \left[\frac{L_2}{2} \right], \quad (\text{C.25})$$

$$\delta E_{P2t} = -\delta m_{2t} g_l \times \left[z_i + \frac{\alpha|\delta x|}{3} - h_2 - H + \frac{\delta z_2}{2} \right] \quad (\text{C.26})$$

$$= -\delta m_{2t} g_l \times \left[-L_2 + \frac{\alpha|\delta x|}{3} + \frac{\delta z_2}{2} \right]. \quad (\text{C.27})$$

Si nous faisons la somme de ces variations, nous obtenons :

$$\delta E_{P2} = \rho_2 |\delta x| g_l \times \left[-\frac{(L_2 - \delta z_2) L_2}{2} + \frac{\alpha|\delta x|}{2} \left(-L_2 + \frac{\alpha|\delta x|}{3} + \frac{\delta z_2}{2} \right) \right] \quad (\text{C.28})$$

$$= \frac{\rho_2 |\delta x| g}{2} \times \left[-L_2^2 + L_2 \delta z_2 - \alpha|\delta x| L_2 + \frac{\alpha^2 |\delta x|^2}{3} + \frac{\alpha|\delta x| \delta z_2}{2} \right]. \quad (\text{C.29})$$

C.2.1.c Variation d'énergie potentielle totale

L'équilibre des forces à l'équilibre s'exprime par $\rho_1 L_1^2 = \rho_2 L_2^2$. En ne gardant que les termes d'ordre 2 :

$$\Delta E_P = \delta E_{P1} + \delta E_{P2} \quad (\text{C.30})$$

$$= \rho_1 |\delta x| g_l \times \left[\frac{L_1^2}{2} + \frac{L_1 \delta z_1}{2} + \frac{\alpha|\delta x|}{2} L_1 + \frac{\alpha|\delta x| \delta z_1}{4} + \frac{\alpha^2 |\delta x|^2}{6} \right] \\ + \frac{\rho_2 |\delta x| g}{2} \times \left[-L_2^2 + L_2 \delta z_2 - \alpha|\delta x| L_2 + \frac{\alpha^2 |\delta x|^2}{3} + \frac{\alpha|\delta x| \delta z_2}{2} \right] \quad (\text{C.31})$$

$$= \frac{(\rho L^2)}{2} |\delta x| g_l \times \left[1 + \frac{\delta z_1}{L_1} + \frac{\alpha|\delta x|}{L_1} - 1 + \frac{\delta z_2}{L_2} - \frac{\alpha|\delta x|}{L_2} \right] \quad (\text{C.32})$$

$$= \frac{(\rho L^2)}{2} |\delta x| g_l \times \left[\frac{\delta z_1}{L_1} + \frac{\alpha|\delta x|}{L_1} + \frac{\delta z_2}{L_2} - \frac{\alpha|\delta x|}{L_2} \right] \quad (\text{C.33})$$

Dans le cas où les deux domaines sont infinis, on peut dire que les variations de hauteur des surfaces δz_1 et δz_2 sont nuls, donc on obtient :

$$\Delta E_P = \frac{(\rho L^2)}{2} \alpha |\delta x|^2 g_l \times \left[\frac{1}{L_1} - \frac{1}{L_2} \right] \quad (\text{C.34})$$

Le système est instable si la variation d'énergie potentielle est négative. C'est-à-dire que de l'énergie potentielle dans la position d'équilibre se transforme en énergie cinétique dans le système perturbé. Cela implique

$$\Delta E_P < 0 \Rightarrow \frac{\delta z_1}{L_1} + \frac{\alpha |\delta x|}{L_1} + \frac{\delta z_2}{L_2} - \frac{\alpha |\delta x|}{L_2} < 0, \quad (\text{C.35})$$

$$\Rightarrow \frac{\delta z_1}{L_1} + \frac{\delta z_2}{L_2} < \alpha |\delta x| \left(\frac{1}{L_2} - \frac{1}{L_1} \right), \quad (\text{C.36})$$

$$\Rightarrow \frac{\delta z_1}{|\delta x| L_1} + \frac{\delta z_2}{|\delta x| L_2} < \alpha \left(\frac{1}{L_2} - \frac{1}{L_1} \right). \quad (\text{C.37})$$

Si les fluides sont bornés par des murs à la position x_u à droite et la position x_s à gauche, alors la conservation du volume dans ce cas nous donne (au premier ordre) :

$$L_1 \delta x = \delta z_1 (x_i - x_s) \quad (\text{C.38})$$

$$L_2 \delta x = \delta z_2 (x_u - x_i) \quad (\text{C.39})$$

avec x_i la position de l'interface. Dans ce cas, la condition d'instabilité devient :

$$\frac{1}{x_i - x_s} + \frac{1}{x_u - x_i} < \alpha \left(\frac{1}{L_2} - \frac{1}{L_1} \right). \quad (\text{C.40})$$

Cette condition d'instabilité reste vraie en symétrie cylindrique où l'énergie potentielle est simplement multipliée par un facteur $2\pi r_i$ avec r_i le rayon auquel se trouve l'interface.

C.2.2 Taux de croissance

Maintenant que nous avons établi un critère d'instabilité, nous pouvons évaluer la valeur de la pulsation de l'instabilité à l'aide de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_k = -\frac{\omega^2 \delta x^2}{2} (\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2) \quad (\text{C.41})$$

avec

$$V_1 = L_1 X_{\text{PNS}} + \frac{H X_{\text{PNS}}}{2} - \frac{3H^2}{8\alpha} \quad (\text{C.42})$$

où $X_{\text{PNS}} \equiv x_i - x_{\text{PNS}}$ et H est la hauteur du sol à droite, et

$$V_2 = L_2 X_u - \frac{H X_u}{2} + \frac{3H^2}{8\alpha} \quad (\text{C.43})$$

où $X_u \equiv x_u - x_i$.

À l'aide de l'équation $\Delta E_k = -\Delta E_P$, on obtient :

$$\omega^2 \left[\left(X_{\text{PNS}} \frac{L_2}{L_1} + X_u \right) \frac{1}{g L_2} + \frac{H}{2 g_l L_2^2} \left(X_{\text{PNS}} \frac{L_2^2}{L_1^2} - X_u \right) + \frac{3H^2}{8\alpha L_2^2} \left(1 - \frac{L_2^2}{L_1^2} \right) \right] = \frac{1}{X_{\text{PNS}}} + \frac{1}{X_u} + \frac{\alpha}{L_2} \left(\frac{L_2}{L_1} - 1 \right) \quad (\text{C.44})$$

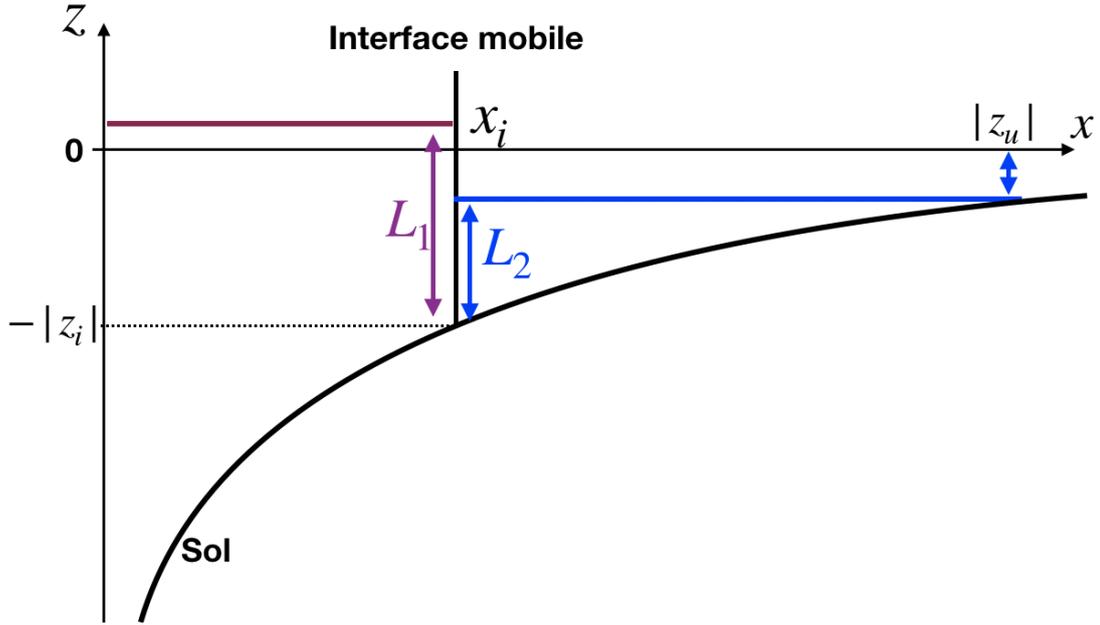


Figure C.2 – Illustration du dispositif avec un potentiel en $1/x$.

En faisant l'analogie $z_{min} = X_{PNS}$, $z_{max} = X_u$, $g_l = \alpha g_l$, $c_{up}^2 = g_l L_2$ et $g_l H(x \rightarrow \infty) = \Phi$, avec c_{up}^2 la vitesse du son à l'interface dans le gaz supérieur (du problème initial) et Φ la valeur du potentiel gravitationnel à l'infini :

$$\omega^2 = 8gc_{up}^2 \frac{\left(\frac{1}{z_{min}} + \frac{1}{z_{max}} \right) c_{up}^2 + g \left(e^{-\frac{\Delta S}{2}} - 1 \right)}{8gc_{up}^2 \left(z_{min} e^{-\frac{\Delta S}{2}} + z_{max} \right) + 4g\Phi \left(z_{min} e^{-\Delta S} - z_{max} \right) + 3\Phi^2 \left(1 - e^{-\Delta S} \right)}. \quad (C.45)$$

On retrouve bien le critère de stabilité établi précédemment avec

$$\omega^2 < 0 \iff \left(\frac{1}{z_{min}} + \frac{1}{z_{max}} \right) c_{up}^2 + g_* \left(e^{-\frac{\Delta S}{2}} - 1 \right) < 0. \quad (C.46)$$

C.3 Pour un potentiel en $1/x$

Si on ne considère plus un potentiel constant-rampe-constant mais en $1/x$ comme illustré dans la Fig. C.2, alors la condition d'instabilité s'exprime comme :

$$L_2 \left(\frac{1}{x_i - x_{PNS}} + \frac{1}{x_u - x_i} \right) < \alpha \left(1 - \frac{L_2}{L_1} \right), \quad (C.47)$$

avec $z = -\frac{R^2}{x} = \alpha x$ donc $\alpha = \frac{\partial z}{\partial x}(x_i) = \frac{R^2}{x_i^2}$. Ainsi, l'instabilité nécessite les relations d'ordre suivantes :

$$L_2 < L_2 \left(\frac{x_i}{x_i - x_{PNS}} + \frac{x_i}{x_u - x_i} \right) < \frac{R^2}{x_i} \left(1 - \frac{L_2}{L_1} \right) < \frac{R^2}{x_i} = |z_i| \quad (C.48)$$

donc : $|z_i| > L_2$. La surface du fluide de droite (2) est donc située sous l'asymptote de la courbe $-\frac{R^2}{x}$. Il existe donc un $|z_u|$ tel que $L_2 + |z_u| = |z_i| \Rightarrow L_2 = |z_i| - |z_u|$. Donc, d'après l'Eq. (C.47) :

$$|z_i| \left(1 - \frac{L_2}{L_1}\right) > (|z_i| - |z_u|) \left(\frac{x_i}{x_i - x_s} + \frac{x_i}{x_u - x_i}\right) \quad (\text{C.49})$$

Ce qui, en remplaçant $z_i = -R^2/x_i$ et $z_u = -R^2/x_u$, implique finalement $x_u < x_i$. Comme $x_u > x_i$ par définition, on en déduit que le critère d'instabilité (C.47) ne peut pas être satisfait si la forme du sol est en $1/x$.

Cette instabilité n'existe donc pas pour un potentiel gravitationnel réaliste. L'instabilité 1D observée dans notre étude en géométrie plane est donc créée artificiellement par l'introduction d'une coupure dans le profil de potentiel gravitationnel.

Bibliographie

doi:10.3847/2041-8213/abf2c4.

- J. Abadie, B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, M. Abernathy, T. Accadia, F. Acernese, C. Adams, R. Adhikari, C. Affeldt, M. Agathos, K. Agatsuma, P. Ajith, B. Allen, E. Amador Ceron, D. Amariutei, S. B. Anderson, W. G. Anderson, K. Arai, M. A. Arain, M. C. Araya, S. M. Aston, P. Astone, D. Atkinson, P. Aufmuth, C. Aulbert, B. E. Aylott, S. Babak, P. Baker, G. Ballardín, S. Ballmer, J. C. B. Barayoga, D. Barker, F. Barone, B. Barr, L. Barsotti, M. Barsuglia, M. A. Barton, I. Bartos, R. Bassiri, M. Bastarrika, A. Basti, J. Batch, J. Bauchowitz, T. S. Bauer, M. Bebronne, D. Beck, B. Behnke, M. Bejger, M. G. Beker, A. S. Bell, A. Belletoile, I. Belopolski, M. Benacquista, J. M. Berliner, A. Bertolini, J. Betzwieser, N. Beveridge, P. T. Beyersdorf, I. A. Bilenko, G. Billingsley, J. Birch, R. Biswas, M. Bitossi, M. A. Bizouard, E. Black, J. K. Blackburn, L. Blackburn, D. Blair, B. Bland, M. Blom, O. Bock, T. P. Bodiya, C. Bogan, R. Bondarescu, F. Bondu, L. Bonelli, R. Bonnand, R. Bork, M. Born, V. Boschi, S. Bose, L. Bosi, B. Bouhou, S. Braccini, C. Bradaschia, P. R. Brady, V. B. Braginsky, M. Branchesi, J. E. Brau, J. Breyer, T. Briant, D. O. Bridges, A. Brilliet, M. Brinkmann, V. Brisson, M. Britzger, A. F. Brooks, D. A. Brown, T. Bulik, H. J. Bulten, A. Buonanno, J. Burguet-Castell, D. Buskulic, C. Buy, R. L. Byer, L. Cadonati, G. Cagnoli, E. Calloni, J. B. Camp, P. Campsie, J. Cannizzo, K. Cannon, B. Canuel, J. Cao, C. D. Capano, F. Carbognani, L. Carbone, S. Caride, S. Caudill, M. Cavaglià, F. Cavalier, R. Cavalieri, G. Cella, C. Cepeda, E. Cesarini, O. Chaibi, T. Chalermongsak, P. Charlton, E. Chassande-Mottin, S. Chelkowski, W. Chen, X. Chen, Y. Chen, A. Chincarini, A. Chiummo, H. S. Cho, J. Chow, N. Christensen, S. S. Y. Chua, C. T. Y. Chung, S. Chung, G. Ciani, F. Clara, D. E. Clark, J. Clark, J. H. Clayton, F. Cleva, E. Coccia, P. F. Cohadon, C. N. Colacino, J. Colas, A. Colla, M. Colombini, A. Conte, R. Conte, D. Cook, T. R. Corbitt, M. Cordier, N. Cornish, A. Corsi, C. A. Costa, M. Coughlin, J. P. Coulon, P. Couvares, D. M. Coward, M. Cowart, D. C. Coyne, J. D. E. Creighton, T. D. Creighton, A. M. Cruise, A. Cumming, L. Cunningham, E. Cuoco, R. M. Cutler, K. Dahl, S. L. Danilishin, R. Dannenberg, S. D'Antonio, K. Danzmann, V. Dattilo, B. Daudert, H. Daveloza, M. Davier, E. J. Daw, R. Day, T. Dayanga, R. De Rosa, D. DeBra, G. Debreczeni, W. Del Pozzo, M. del Prete, T. Dent, V. Dergachev, R. DeRosa, R. DeSalvo, S. Dhurandhar, L. Di Fiore, A. Di Lieto, I. Di Palma, M. Di Paolo Emilio, A. Di Virgilio, M. Díaz, A. Dietz, F. Donovan, K. L. Dooley, M. Drago, R. W. P. Drever, J. C. Driggers, Z. Du, J. C. Dumas, S. Dwyer, T. Eberle, M. Edgar, M. Edwards, A. Effler, P. Ehrens, G. Endrőczy, R. Engel, T. Etzel, K. Evans, M. Evans, T. Evans, M. Factourovich, V. Fafone, S. Fairhurst, Y. Fan, B. F. Farr, D. Fazi, H. Fehrmann, D. Feldbaum, F. Feroz, I. Ferrante, F. Fidecaro, L. S. Finn, I. Fiori, R. P. Fisher, R. Flaminio, M. Flanigan, S. Foley, E. Forisi, L. A. Forte, N. Fotopoulos, J. D. Fournier, J. Franc, S. Frasca, F. Frasconi, M. Frede, M. Frei, Z. Frei, A. Freise, R. Frey, T. T. Fricke, D. Friedrich, P. Fritschel, V. V. Frolov, M. K. Fujimoto, P. J. Fulda, M. Fyffe, J. Gair, M. Galimberti, L. Gammaitoni, J. Garcia, F. Garufi, M. E. Gáspár, G. Gemme, R. Geng, E. Genin, A. Gennai, L. Á. Gergely,

S. Ghosh, J. A. Giaime, S. Giampanis, K. D. Giardino, A. Giazotto, S. Gil-Casanova, C. Gill, J. Gleason, E. Goetz, L. M. Goggin, G. González, M. L. Gorodetsky, S. Goßler, R. Gouaty, C. Graef, P. B. Graff, M. Granata, A. Grant, S. Gras, C. Gray, N. Gray, R. J. S. Greenhalgh, A. M. Gretarsson, C. Greverie, R. Grosso, H. Grote, S. Grunewald, G. M. Guidi, C. Guido, R. Gupta, E. K. Gustafson, R. Gustafson, T. Ha, J. M. Hallam, D. Hammer, G. Hammond, J. Hanks, C. Hanna, J. Hanson, J. Harms, A. Hardt, G. M. Harry, I. W. Harry, E. D. Harstad, M. T. Hartman, K. Haughian, K. Hayama, J. F. Hayau, J. Heefner, A. Heidmann, M. C. Heintze, H. Heitmann, P. Hello, M. A. Hendry, I. S. Heng, A. W. Heptonstall, V. Herrera, M. Hewitson, S. Hild, D. Hoak, K. A. Hodge, K. Holt, M. Holtrop, T. Hong, S. Hooper, D. J. Hosken, J. Hough, E. J. Howell, B. Hughey, S. Husa, S. H. Huttner, T. Huynh-Dinh, D. R. Ingram, R. Inta, T. Isogai, A. Ivanov, K. Izumi, M. Jacobson, E. James, Y. J. Jang, P. Jaranowski, E. Jesse, W. W. Johnson, D. I. Jones, G. Jones, R. Jones, L. Ju, P. Kalmus, V. Kalogera, S. Kandhasamy, G. Kang, J. B. Kanner, R. Kasturi, E. Katsavounidis, W. Katzman, H. Kaufer, K. Kawabe, S. Kawamura, F. Kawazoe, D. Kelley, W. Kells, D. G. Keppel, Z. Keresztes, A. Khalaidovski, F. Y. Khalili, E. A. Khazanov, B. K. Kim, C. Kim, H. Kim, K. Kim, N. Kim, Y. M. Kim, P. J. King, D. L. Kinzel, J. S. Kissel, S. Klimenko, K. Kokeyama, V. Kondrashov, S. Koranda, W. Z. Korth, I. Kowalska, D. Kozak, O. Kranz, V. Kringel, S. Krishnamurthy, B. Krishnan, A. Królak, G. Kuehn, R. Kumar, P. Kwee, P. K. Lam, M. Landry, B. Lantz, N. Lastzka, C. Lawrie, A. Lazzarini, P. Leaci, C. H. Lee, H. K. Lee, H. M. Lee, J. R. Leong, I. Leonor, N. Leroy, N. Letendre, J. Li, T. G. F. Li, N. Liguori, P. E. Lindquist, Y. Liu, Z. Liu, N. A. Lockerbie, D. Lodhia, M. Lorenzini, V. Lorette, M. Lormand, G. Losurdo, J. Lough, J. Luan, M. Lubinski, H. Lück, A. P. Lundgren, E. Macdonald, B. Machenschalk, M. MacInnis, D. M. Macleod, M. Mageswaran, K. Mailand, E. Majorana, I. Maksimovic, N. Man, I. Mandel, V. Mandic, M. Mantovani, A. Marandi, F. Marchesoni, F. Marion, S. Márka, Z. Márka, A. Markosyan, E. Maros, J. Marque, F. Martelli, I. W. Martin, R. M. Martin, J. N. Marx, K. Mason, A. Masserot, F. Matichard, L. Matone, R. A. Matzner, N. Mavalvala, G. Mazzolo, R. McCarthy, D. E. McClelland, S. C. McGuire, G. McIntyre, J. McIver, D. J. A. McKechnan, S. McWilliams, G. D. Meadors, M. Mehmet, T. Meier, A. Melatos, A. C. Melissinos, G. Mendell, R. A. Mercer, S. Meshkov, C. Messenger, M. S. Meyer, H. Miao, C. Michel, L. Milano, J. Miller, Y. Minkov, V. P. Mitrofanov, G. Mitselmakher, R. Middleton, O. Miyakawa, B. Moe, M. Mohan, S. D. Mohanty, S. R. P. Mohapatra, D. Moraru, G. Moreno, N. Morgado, A. Morgia, T. Mori, S. R. Morriss, S. Mosca, K. Mossavi, B. Mours, C. M. Mow-Lowry, C. L. Mueller, G. Mueller, S. Mukherjee, A. Mullavey, H. Müller-Ebhardt, J. Munch, D. Murphy, P. G. Murray, A. Mytidis, T. Nash, L. Naticchioni, V. Necula, J. Nelson, I. Neri, G. Newton, T. Nguyen, A. Nishizawa, A. Nitz, F. Nocera, D. Nolting, M. E. Normandin, L. Nuttall, E. Ochsner, J. O'Dell, E. Oelker, G. H. Ogin, J. J. Oh, S. H. Oh, B. O'Reilly, R. O'Shaughnessy, C. Osthelder, C. D. Ott, D. J. Ottaway, R. S. Ottens, H. Overmier, B. J. Owen, A. Page, G. Pagliaroli, L. Palladino, C. Palomba, Y. Pan, C. Pankow, F. Paoletti, M. A. Papa, M. Parisi, A. Pasqualetti, R. Passaquieti, D. Pasuello, P. Patel, M. Pedraza, P. Peiris, L. Pekowsky, S. Penn, A. Perreca, G. Persichetti, M. Phelps, M. Pichot, M. Pickenpack, F. Piergiovanni, M. Pietka, L. Pinard, I. M. Pinto, M. Pitkin, H. J. Pletsch, M. V. Plissi, R. Poggiani, J. Pöld, F. Postiglione, M. Prato, V. Pre-

doi, T. Prestegard, L. R. Price, M. Prijatelj, M. Principe, S. Privitera, R. Prix, G. A. Prodi, L. G. Prokhorov, O. Puncken, M. Punturo, P. Puppò, V. Quetschke, R. Quitzow-James, F. J. Raab, D. S. Rabeling, I. Rácz, H. Radkins, P. Raffai, M. Rakhmanov, B. Rankins, P. Rapagnani, V. Raymond, V. Re, K. Redwine, C. M. Reed, T. Reed, T. Regimbau, S. Reid, D. H. Reitze, F. Ricci, R. Riesen, K. Riles, N. A. Robertson, F. Robinet, C. Robinson, E. L. Robinson, A. Rocchi, S. Roddy, C. Rodriguez, M. Rodruck, L. Rolland, J. G. Rollins, J. D. Romano, R. Romano, J. H. Romie, D. Rosińska, C. Röver, S. Rowan, A. Rüdiger, P. Ruggi, K. Ryan, P. Sainathan, F. Salemi, L. Sammut, V. Sandberg, V. Sannibale, L. Santamaría, I. Santiago-Prieto, G. Santostasi, B. Sassolas, B. S. Sathyaprakash, S. Sato, P. R. Saulson, R. L. Savage, R. Schilling, R. Schnabel, R. M. S. Schofield, E. Schreiber, B. Schulz, B. F. Schutz, P. Schwinberg, J. Scott, S. M. Scott, F. Seifert, D. Sellers, D. Sentenac, A. Sergeev, D. A. Shaddock, M. Shaltev, B. Shapiro, P. Shawhan, D. H. Shoemaker, A. Sibley, X. Siemens, D. Sigg, A. Singer, L. Singer, A. M. Sintes, G. R. Skelton, B. J. J. Slagmolen, J. Slutsky, J. R. Smith, M. R. Smith, R. J. E. Smith, N. D. Smith-Lefebvre, K. Somiya, B. Sorazu, J. Soto, F. C. Speirits, L. Sperandio, M. Stefszky, A. J. Stein, L. C. Stein, E. Steinert, J. Steinlechner, S. Steinlechner, S. Steplewski, A. Stochino, R. Stone, K. A. Strain, S. E. Strigin, A. S. Stroeer, R. Sturani, A. L. Stuver, T. Z. Summerscales, M. Sung, S. Susmithan, P. J. Sutton, B. Swinkels, M. Tacca, L. Taffarello, D. Talukder, D. B. Tanner, S. P. Tarabrin, J. R. Taylor, R. Taylor, P. Thomas, K. A. Thorne, K. S. Thorne, E. Thrane, A. Thüring, K. V. Tokmakov, C. Tomlinson, A. Toncelli, M. Tonelli, O. Torre, C. Torres, C. I. Torrie, E. Tournefier, F. Travasso, G. Traylor, K. Tseng, E. Tucker, D. Ugolini, H. Vahlbruch, G. Vajente, J. F. J. van den Brand, C. Van Den Broeck, S. van der Putten, A. A. van Veggel, S. Vass, M. Vasuth, R. Vaulin, M. Vavoulidis, A. Vecchio, G. Vedovato, J. Veitch, P. J. Veitch, C. Veltkamp, D. Verkindt, F. Vetrano, A. Viceré, A. E. Villar, J. Y. Vinet, S. Vitale, H. Vocca, C. Vorvick, S. P. Vyatchanin, A. Wade, L. Wade, M. Wade, S. J. Waldman, L. Wallace, Y. Wan, M. Wang, X. Wang, Z. Wang, A. Wanner, R. L. Ward, M. Was, M. Weinert, A. J. Weinstein, R. Weiss, L. Wen, P. Wessels, M. West, T. Westphal, K. Wette, J. T. Whelan, S. E. Whitcomb, D. J. White, B. F. Whiting, C. Wilkinson, P. A. Willems, L. Williams, R. Williams, B. Willke, L. Winkelmann, W. Winkler, C. C. Wipf, A. G. Wiseman, H. Wittel, G. Woan, R. Wooley, J. Worden, I. Yakushin, H. Yamamoto, K. Yamamoto, C. C. Yancey, H. Yang, D. Yeaton-Massey, S. Yoshida, P. Yu, M. Yvert, A. Zadrożny, M. Zanolin, J. P. Zendri, F. Zhang, L. Zhang, W. Zhang, C. Zhao, N. Zotov, M. E. Zucker, and J. Zweizig. All-sky search for gravitational-wave bursts in the second joint LIGO-Virgo run. , 85(12) : 122007, June 2012. doi:[10.1103/PhysRevD.85.122007](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.122007).

R. Abbasi, Y. Abdou, T. Abu-Zayyad, M. Ackermann, J. Adams, J. A. Aguilar, M. Ahlers, M. M. Allen, D. Altmann, K. Andeen, J. Auffenberg, X. Bai, M. Baker, S. W. Barwick, V. Baum, R. Bay, J. L. Bazo Alba, K. Beattie, J. J. Beatty, S. Bechet, J. K. Becker, K. H. Becker, M. L. Benabderrahmane, S. Benzvi, J. Berdermann, P. Berghaus, D. Berley, E. Bernardini, D. Bertrand, D. Z. Besson, D. Bindig, M. Bissok, E. Blaufuss, J. Blumenthal, D. J. Boersma, C. Böhm, D. Bose, S. Böser, O. Botner, A. M. Brown, S. Buitink, K. S. Caballero-Mora, M. Carson, D. Chirkin, B. Christy, F. Clevermann, S. Cohen, C. Colnard, D. F. Cowen, A. H. Cruz Silva, M. V. D'Agostino, M. Danninger, J. Daughettee, J. C. Davis, C. de Clercq,

T. Degner, L. Demirörs, F. Descamps, P. Desiati, G. de Vries-Uiterweerd, T. Deyoung, J. C. Díaz-Vélez, M. Dierckxsens, J. Dreyer, J. P. Dumm, M. Dunkman, J. Eisch, R. W. Ellsworth, O. Engdegård, S. Euler, P. A. Evenson, O. Fadiran, A. R. Fazely, A. Fedynitch, J. Feintzeig, T. Feusels, K. Filimonov, C. Finley, T. Fischer-Wasels, B. D. Fox, A. Franckowiak, R. Franke, T. K. Gaisser, J. Gallagher, L. Gerhardt, L. Gladstone, T. Glüsenkamp, A. Goldschmidt, J. A. Goodman, D. Góra, D. Grant, T. Griesel, A. Groß, S. Grullon, M. Gurtner, C. Ha, A. Haj Ismail, A. Hallgren, F. Halzen, K. Han, K. Hanson, D. Heinen, K. Helbing, R. Hellauer, S. Hickford, G. C. Hill, K. D. Hoffman, B. Hoffmann, A. Homeier, K. Hoshina, W. Huelsnitz, J. P. Hülß, P. O. Hulth, K. Hultqvist, S. Hussain, A. Ishihara, E. Jakobi, J. Jacobsen, G. S. Japaridze, H. Johansson, K. H. Kampert, A. Kappes, T. Karg, A. Karle, P. Kenny, J. Kiryluk, F. Kislak, S. R. Klein, H. Köhne, G. Kohnen, H. Kolanoski, L. Köpke, S. Kopper, D. J. Koskinen, M. Kowalski, T. Kowarik, M. Krasberg, G. Kroll, N. Kurahashi, T. Kuwabara, M. Labare, K. Laihem, H. Landsman, M. J. Larson, R. Lauer, J. Lünemann, J. Madsen, A. Marotta, R. Maruyama, K. Mase, H. S. Matis, K. Meagher, M. Merck, P. Mészáros, T. Meures, S. Miarecki, E. Middell, N. Milke, J. Miller, T. Montaruli, R. Morse, S. M. Movit, R. Nahnhauser, J. W. Nam, U. Naumann, D. R. Nygren, S. Odrowski, A. Olivas, M. Olivo, A. O’Murchadha, S. Panknin, L. Paul, C. Pérez de Los Heros, J. Petrovic, A. Piegsa, D. Pieloth, R. Porrata, J. Posselt, P. B. Price, G. T. Przybylski, K. Rawlins, P. Redl, E. Resconi, W. Rhode, M. Ribordy, A. S. Richard, M. Richman, J. P. Rodrigues, F. Rothmaier, C. Rott, T. Ruhe, D. Rutledge, B. Ruzybayev, D. Ryckbosch, H. G. Sander, M. Santander, S. Sarkar, K. Schatto, T. Schmidt, A. Schönwald, A. Schukraft, L. Schulte, A. Schultes, O. Schulz, M. Schunck, D. Seckel, B. Sembrugg, S. H. Seo, Y. Sestayo, S. Seunarine, A. Silvestri, K. Singh, A. Slipak, G. M. Spiczak, C. Spiering, M. Stamatikos, T. Stanev, T. Stezelberger, R. G. Stokstad, A. Stößl, E. A. Strahler, R. Ström, M. Stüer, G. W. Sullivan, Q. Swillens, H. Taavola, I. Taboada, A. Tamburro, A. Tepe, S. Ter-Antonyan, S. Tilav, P. A. Toale, S. Toscano, D. Tosi, N. van Eijndhoven, J. Vandenbroucke, A. van Overloop, J. van Santen, M. Vehring, M. Voge, C. Walck, T. Waldenmaier, M. Wallraff, M. Walter, C. Weaver, C. Wendt, S. Westerhoff, N. Whitehorn, K. Wiebe, C. H. Wiebusch, D. R. Williams, R. Wischniewski, H. Wissing, M. Wolf, T. R. Wood, K. Woschnagg, C. Xu, D. L. Xu, X. W. Xu, J. P. Yanez, G. Yodh, S. Yoshida, P. Zarzhitsky, M. Zoll, and IceCube Collaboration. IceCube sensitivity for low-energy neutrinos from nearby supernovae. *Astronomy and Astrophysics*, 535 :A109, Nov. 2011. doi:[10.1051/0004-6361/201117810](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201117810).

B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, S. Abraham, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, V. B. Adya, C. Affeldt, M. Agathos, K. Agatsuma, N. Aggarwal, O. D. Aguiar, L. Aiello, A. Ain, P. Ajith, G. Allen, A. Allocca, M. A. Aloy, P. A. Altin, A. Amato, S. Anand, A. Ananyeva, S. B. Anderson, W. G. Anderson, S. V. Angelova, S. Antier, S. Appert, K. Arai, M. C. Araya, J. S. Areeda, M. Arène, N. Arnaud, S. M. Aronson, S. Ascenzi, G. Ashton, S. M. Aston, P. Astone, F. Aubin, P. Aufmuth, K. AultONeal, C. Austin, V. Avendano, A. Avila-Alvarez, S. Babak, P. Bacon, F. Badaracco, M. K. M. Bader, S. Bae, J. Baird, P. T. Baker, F. Baldaccini, G. Ballardín, S. W. Ballmer, A. Bals, S. Banagiri, J. C. Barayoga, C. Barbieri, S. E. Barclay, B. C. Barish, D. Barker, K. Barkett, S. Barnum, F. Barone, B. Barr, L. Barsotti, M. Barsuglia, D. Barta, J. Bartlett, I. Bartos, R. Bassiri, A. Basti, M. Bawaj,

J. C. Bayley, M. Bazzan, B. Bécsy, M. Bejger, I. Belahcene, A. S. Bell, D. Beniwal, M. G. Benjamin, G. Bergmann, S. Bernuzzi, C. P. L. Berry, D. Bersanetti, A. Bertolini, J. Betzwieser, R. Bhandare, J. Bidler, E. Biggs, I. A. Bilenko, S. A. Bilgili, G. Billingsley, R. Birney, O. Birnholtz, S. Biscans, M. Bisch, S. Biscoveanu, A. Bisht, M. Bitossi, M. A. Bizouard, J. K. Blackburn, J. Blackman, C. D. Blair, D. G. Blair, R. M. Blair, S. Bloemen, F. Bobba, N. Bode, M. Boer, Y. Boetzel, G. Bogaert, F. Bondu, R. Bonnand, P. Booker, B. A. Boom, R. Bork, V. Boschi, S. Bose, V. Bossilkov, J. Bosveld, Y. Bouffanais, A. Bozzi, C. Bradaschia, P. R. Brady, A. Bramley, M. Branchesi, J. E. Brau, M. Breschi, T. Briant, J. H. Briggs, F. Brighenti, A. Brillet, M. Brinkmann, P. Brockill, A. F. Brooks, J. Brooks, D. D. Brown, S. Brunett, A. Buikema, T. Bulik, H. J. Bulten, A. Buonanno, D. Buskulic, C. Buy, R. L. Byer, M. Cabero, L. Cadonati, G. Cagnoli, C. Cahillane, J. C. Bustillo, T. A. Callister, E. Calloni, J. B. Camp, W. A. Campbell, M. Canepa, K. C. Cannon, H. Cao, J. Cao, G. Carapella, F. Carbognani, S. Caride, M. F. Carney, G. Carullo, J. C. Diaz, C. Casentini, S. Caudill, M. Cavaglià, F. Cavalier, R. Cavalieri, G. Cella, P. Cerdá-Durán, E. Cesarini, O. Chaibi, K. Chakravarti, S. J. Chamberlin, M. Chan, S. Chao, P. Charlton, E. A. Chase, E. Chassande-Mottin, D. Chatterjee, M. Chaturvedi, B. D. Cheeseboro, H. Y. Chen, X. Chen, Y. Chen, H. P. Cheng, C. K. Cheong, H. Y. Chia, F. Chiadini, A. Chincarini, A. Chiummo, G. Cho, H. S. Cho, M. Cho, N. Christensen, Q. Chu, S. Chua, K. W. Chung, S. Chung, G. Ciani, M. Cieřlar, A. A. Ciobanu, R. Ciolfi, F. Cipriano, A. Cirone, F. Clara, J. A. Clark, P. Clearwater, F. Cleva, E. Coccia, P. F. Cohadon, D. Cohen, M. Colleoni, C. G. Collette, C. Collins, M. Colpi, L. R. Cominsky, M. Constancio, L. Conti, S. J. Cooper, P. Corban, T. R. Corbitt, I. Cordero-Carrión, S. Corezzi, K. R. Corley, N. Cornish, D. Corre, A. Corsi, S. Cortese, C. A. Costa, R. Cotesta, M. W. Coughlin, S. B. Coughlin, J. P. Coulon, S. T. Countryman, P. Couvares, P. B. Covas, E. E. Cowan, D. M. Coward, M. J. Cowart, D. C. Coyne, R. Coyne, J. D. E. Creighton, T. D. Creighton, J. Cripe, M. Croquette, S. G. Crowder, T. J. Cullen, A. Cumming, L. Cunningham, E. Cuoco, T. D. Canton, G. Dálya, B. D'Angelo, S. L. Danilishin, S. D'Antonio, K. Danzmann, A. Dasgupta, C. F. D. S. Costa, L. E. H. Datrier, V. Dattilo, I. Dave, M. Davier, D. Davis, E. J. Daw, D. DeBra, M. Deenadayalan, J. Degallaix, M. De Laurentis, S. Deléglise, W. Del Pozzo, L. M. DeMarchi, N. Demos, T. Dent, R. De Pietri, R. De Rosa, C. De Rossi, R. DeSalvo, O. de Varona, S. Dhurandhar, M. C. Díaz, T. Dietrich, L. Di Fiore, C. DiFronzo, C. Di Giorgio, F. Di Giovanni, M. Di Giovanni, T. Di Girolamo, A. Di Lieto, B. Ding, S. Di Pace, I. Di Palma, F. Di Renzo, A. K. Divakarla, A. Dmitriev, Z. Doctor, F. Donovan, K. L. Dooley, S. Doravari, I. Dorrington, T. P. Downes, M. Drago, J. C. Driggers, Z. Du, J. G. Ducoin, P. Dupej, O. Durante, S. E. Dwyer, P. J. Easter, G. Eddolls, T. B. Edo, A. Effler, P. Ehrens, J. Eichholz, S. S. Eikenberry, M. Eisenmann, R. A. Eisenstein, L. Errico, R. C. Essick, H. Estelles, D. Estevez, Z. B. Etienne, T. Etzel, M. Evans, T. M. Evans, V. Fafone, S. Fairhurst, X. Fan, S. Farinon, B. Farr, W. M. Farr, E. J. Fauchon-Jones, M. Favata, M. Fays, M. Fazio, C. Fee, J. Feicht, M. M. Fejer, F. Feng, A. Fernandez-Galiana, I. Ferrante, E. C. Ferreira, T. A. Ferreira, F. Fidecaro, I. Fiori, D. Fiorucci, M. Fishbach, R. P. Fisher, J. M. Fishner, R. Fittipaldi, M. Fitz-Axen, V. Fiumara, R. Flaminio, M. Fletcher, E. Floden, E. Flynn, H. Fong, J. A. Font, P. W. F. Forsyth, J. D. Fournier, F. H. Vivanco, S. Frasca, F. Frasconi, Z. Frei, A. Freise, R. Frey,

V. Frey, P. Fritschel, V. V. Frolov, G. Fronzè, P. Fulda, M. Fyffe, H. A. Gabbard, B. U. Gadre, S. M. Gaebel, J. R. Gair, L. Gammaitoni, S. G. Gaonkar, C. García-Quirós, F. Garufi, B. Gateley, S. Gaudio, G. Gaur, V. Gayathri, G. Gemme, E. Genin, A. Gennai, D. George, J. George, L. Gergely, S. Ghonge, A. Ghosh, A. Ghosh, S. Ghosh, B. Giacomazzo, J. A. Giaime, K. D. Giardino, D. R. Gibson, K. Gill, L. Glover, J. Gniesmer, P. Godwin, E. Goetz, R. Goetz, B. Goncharov, G. González, J. M. G. Castro, A. Gopakumar, S. E. Gossan, M. Gosselin, R. Gouaty, B. Grace, A. Grado, M. Granata, A. Grant, S. Gras, P. Grassia, C. Gray, R. Gray, G. Greco, A. C. Green, R. Green, E. M. Gretarsson, A. Grimaldi, S. J. Grimm, P. Groot, H. Grote, S. Grunewald, P. Gruning, G. M. Guidi, H. K. Gulati, Y. Guo, A. Gupta, A. Gupta, P. Gupta, E. K. Gustafson, R. Gustafson, L. Haegel, O. Halim, B. R. Hall, E. D. Hall, E. Z. Hamilton, G. Hammond, M. Haney, M. M. Hanke, J. Hanks, C. Hanna, M. D. Hannam, O. A. Hannuksela, T. J. Hansen, J. Hanson, T. Harder, T. Hardwick, K. Haris, J. Harms, G. M. Harry, I. W. Harry, R. K. Hasskew, C. J. Haster, K. Haughian, F. J. Hayes, J. Healy, A. Heidmann, M. C. Heintze, H. Heitmann, F. Hellman, P. Hello, G. Hemming, M. Hendry, I. S. Heng, J. Hennig, M. Heurs, S. Hild, T. Hinderer, S. Hochheim, D. Hofman, A. M. Holgado, N. A. Holland, K. Holt, D. E. Holz, P. Hopkins, C. Horst, J. Hough, E. J. Howell, C. G. Hoy, Y. Huang, M. T. Hübner, E. A. Huerta, D. Huet, B. Hughey, V. Hui, S. Husa, S. H. Huttner, T. Huynh-Dinh, B. Idzkowski, A. Iess, H. Inchauspe, C. Ingram, R. Inta, G. Intini, B. Irwin, H. N. Isa, J. M. Isac, M. Isi, B. R. Iyer, T. Jacqmin, S. J. Jadhav, K. Jani, N. N. Janthapur, P. Jaranowski, D. Jariwala, A. C. Jenkins, J. Jiang, D. S. Johnson, A. W. Jones, D. I. Jones, J. D. Jones, R. Jones, R. J. G. Jonker, L. Ju, J. Junker, C. V. Kalaghatgi, V. Kalogera, B. Kamai, S. Kandhasamy, G. Kang, J. B. Kanner, S. J. Kapadia, S. Karki, R. Kashyap, M. Kasprzack, S. Katsanevas, E. Katsavounidis, W. Katzman, S. Kaufer, K. Kawabe, N. V. Keerthana, F. Kéfélian, D. Keitel, R. Kennedy, J. S. Key, F. Y. Khalili, I. Khan, S. Khan, E. A. Khazanov, N. Khetan, M. Khursheed, N. Kijbunchoo, C. Kim, J. C. Kim, K. Kim, W. Kim, W. S. Kim, Y. M. Kim, C. Kimball, P. J. King, M. Kinley-Hanlon, R. Kirchhoff, J. S. Kissel, L. Kleybolte, J. H. Klika, S. Klimenko, T. D. Knowles, P. Koch, S. M. Koehlenbeck, G. Koekoek, S. Koley, V. Kondrashov, A. Kontos, N. Koper, M. Korobko, W. Z. Korth, M. Kovalam, D. B. Kozak, C. Krämer, V. Kringel, N. Krishnendu, A. Królak, N. Krupinski, G. Kuehn, A. Kumar, P. Kumar, R. Kumar, R. Kumar, L. Kuo, A. Kutynia, S. Kwang, B. D. Lackey, D. Laghi, K. H. Lai, T. L. Lam, M. Landry, B. B. Lane, R. N. Lang, J. Lange, B. Lantz, R. K. Lanza, A. Lartaux-Vollard, P. D. Lasky, M. Laxen, A. Lazzarini, C. Lazzaro, P. Leaci, S. Leavey, Y. K. Leconte, C. H. Lee, H. K. Lee, H. M. Lee, H. W. Lee, J. Lee, K. Lee, J. Lehmann, A. K. Lenon, N. Leroy, N. Letendre, Y. Levin, A. Li, J. Li, K. J. L. Li, T. G. F. Li, X. Li, F. Lin, F. Linde, S. D. Linker, T. B. Littenberg, J. Liu, X. Liu, M. Llorens-Montegudo, R. K. L. Lo, L. T. London, A. Longo, M. Lorenzini, V. Lorette, M. Lormand, G. Losurdo, J. D. Lough, C. O. Lousto, G. Lovelace, M. E. Lower, H. Lück, D. Lumaca, A. P. Lundgren, R. Lynch, Y. Ma, R. Macas, S. Macfoy, M. MacInnis, D. M. Macleod, A. Macquet, I. M. Hernandez, F. Magaña-Sandoval, R. M. Magee, E. Majorana, I. Maksimovic, A. Malik, N. Man, V. Mandic, V. Mangano, G. L. Mansell, M. Manske, M. Mantovani, M. Mapelli, F. Marchesoni, F. Marion, S. Márka, Z. Márka, C. Markakis, A. S. Markosyan, A. Markowitz, E. Maros, A. Marquina, S. Marsat, F. Martelli, I. W. Mar-

tin, R. M. Martin, V. Martinez, D. V. Martynov, H. Masalehdan, K. Mason, E. Massera, A. Masserot, T. J. Massinger, M. Masso-Reid, S. Mastrogiovanni, A. Matas, F. Matichard, L. Matone, N. Mavalvala, J. J. McCann, R. McCarthy, D. E. McClelland, S. McCormick, L. McCuller, S. C. McGuire, C. Mclsaac, J. Mclver, D. J. McManus, T. McRae, S. T. McWilliams, D. Meacher, G. D. Meadors, M. Mehmet, A. K. Mehta, J. Meidam, E. M. Villa, A. Melatos, G. Mendell, R. A. Mercer, L. Mereni, K. Merfeld, E. L. Merilh, M. Merzougui, S. Meshkov, C. Messenger, C. Messick, F. Messina, R. Metzдорff, P. M. Meyers, F. Meylahn, A. Miani, H. Miao, C. Michel, H. Middleton, L. Milano, A. L. Miller, M. Millhouse, J. C. Mills, M. C. Milovich-Goff, O. Minazzoli, Y. Minenkov, A. Mishkin, C. Mishra, T. Mistry, S. Mitra, V. P. Mitrofanov, G. Mitselmakher, R. Mittleman, G. Mo, D. Moffa, K. Mogushi, S. R. P. Mohapatra, M. Molina-Ruiz, M. Mondin, M. Montani, C. J. Moore, D. Moraru, F. Morawski, G. Moreno, S. Morisaki, B. Mours, C. M. Mow-Lowry, F. Muciaccia, A. Mukherjee, D. Mukherjee, S. Mukherjee, S. Mukherjee, N. Mukund, A. Mullavey, J. Munch, E. A. Muñiz, M. Muratore, P. G. Murray, I. Nardecchia, L. Naticchioni, R. K. Nayak, B. F. Neil, J. Neilson, G. Nelemans, T. J. N. Nelson, M. Nery, A. Neunzert, L. Nevin, K. Y. Ng, S. Ng, C. Nguyen, P. Nguyen, D. Nichols, S. A. Nichols, S. Nissanke, F. Nocera, C. North, L. K. Nuttall, M. Obergaulinger, J. Oberling, B. D. O'Brien, G. Oganessian, G. H. Ogin, J. J. Oh, S. H. Oh, F. Ohme, H. Ohta, M. A. Okada, M. Oliver, P. Oppermann, R. J. Oram, B. O'Reilly, R. G. Ormiston, L. F. Ortega, R. O'Shaughnessy, S. Ossokine, D. J. Ottaway, H. Overmier, B. J. Owen, A. E. Pace, G. Pagano, M. A. Page, G. Pagliaroli, A. Pai, S. A. Pai, J. R. Palamos, O. Palashov, C. Palomba, H. Pan, P. K. Panda, P. T. H. Pang, C. Pankow, F. Pannarale, B. C. Pant, F. Paoletti, A. Paoli, A. Parida, W. Parker, D. Pascucci, A. Pasqualetti, R. Passaquieti, D. Passuello, M. Patil, B. Patricelli, E. Payne, B. L. Pearlstone, T. C. Pechsiri, A. J. Pedersen, M. Pedraza, R. Pedurand, A. Pele, S. Penn, A. Perego, C. J. Perez, C. Périgois, A. Perreca, J. Petermann, H. P. Pfeiffer, M. Phelps, K. S. Phukon, O. J. Piccinni, M. Pichot, F. Piergiovanni, V. Pierro, G. Pillant, L. Pinard, I. M. Pinto, M. Pirello, M. Pitkin, W. Plastino, R. Poggiani, D. Y. T. Pong, S. Ponrathnam, P. Popolizio, E. K. Porter, J. Powell, A. K. Prajapati, J. Prasad, K. Prasai, R. Prasanna, G. Pratten, T. Prestegard, M. Principe, G. A. Prodi, L. Prokhorov, M. Punturo, P. Puppo, M. Pürerer, H. Qi, V. Quetschke, P. J. Quinonez, F. J. Raab, G. Raaijmakers, H. Radkins, N. Radulesco, P. Raffai, S. Raja, C. Rajan, B. Rajbhandari, M. Rakhmanov, K. E. Ramirez, A. Ramos-Buades, J. Rana, K. Rao, P. Rapagnani, V. Raymond, M. Razzano, J. Read, T. Regimbau, L. Rei, S. Reid, D. H. Reitze, P. Rettegno, F. Ricci, C. J. Richardson, J. W. Richardson, P. M. Ricker, G. Riemenschneider, K. Riles, M. Rizzo, N. A. Robertson, F. Robinet, A. Rocchi, L. Rolland, J. G. Rollins, V. J. Roma, M. Romanelli, R. Romano, C. L. Romel, J. H. Romie, C. A. Rose, D. Rose, K. Rose, D. Rosińska, S. G. Rosofsky, M. P. Ross, S. Rowan, A. Rüdiger, P. Ruggi, G. Rutins, K. Ryan, S. Sachdev, T. Sadecki, M. Sakellariadou, O. S. Salafia, L. Salconi, M. Saleem, A. Samajdar, L. Sammut, E. J. Sanchez, L. E. Sanchez, N. Sanchis-Gual, J. R. Sanders, K. A. Santiago, E. Santos, N. Sarin, B. Sassolas, O. Sauter, R. L. Savage, P. Schale, M. Scheel, J. Scheuer, P. Schmidt, R. Schnabel, R. M. S. Schofield, A. Schönbeck, E. Schreiber, B. W. Schulte, B. F. Schutz, J. Scott, S. M. Scott, E. Seidel, D. Sellers, A. S. Sengupta, N. Sennett, D. Sentenac, V. Sequino, A. Sergeev, Y. Setyawati, D. A. Shaddock, T. Shaf-

fer, M. S. Shahriar, M. B. Shaner, A. Sharma, P. Sharma, P. Shawhan, H. Shen, R. Shink, D. H. Shoemaker, D. M. Shoemaker, K. Shukla, S. ShyamSundar, K. Siellez, M. Sieniawska, D. Sigg, L. P. Singer, D. Singh, N. Singh, A. Singhal, A. M. Sintes, S. Sitmukhambetov, V. Skliris, B. J. J. Slagmolen, T. J. Slaven-Blair, J. R. Smith, R. J. E. Smith, S. Somala, E. J. Son, S. Soni, B. Sorazu, F. Sorrentino, T. Souradeep, E. Sowell, A. P. Spencer, M. Spera, A. K. Srivastava, V. Srivastava, K. Staats, C. Stachie, M. Standke, D. A. Steer, M. Steinke, J. Steinlechner, S. Steinlechner, D. Steinmeyer, S. P. Stevenson, D. Stocks, R. Stone, D. J. Stops, K. A. Strain, G. Stratta, S. E. Strigin, A. Strunk, R. Sturani, A. L. Stuver, V. Sudhir, T. Z. Summerscales, L. Sun, S. Sunil, A. Sur, J. Suresh, P. J. Sutton, B. L. Swinkels, M. J. Szczepańczyk, M. Tacca, S. C. Tait, C. Talbot, D. B. Tanner, D. Tao, M. Tápai, A. Tapia, J. D. Tasson, R. Taylor, R. Tenorio, L. Terkowski, M. Thomas, P. Thomas, S. R. Thondapu, K. A. Thorne, E. Thrane, S. Tiwari, S. Tiwari, V. Tiwari, K. Toland, M. Tonelli, Z. Tornasi, A. Torres-Forné, C. I. Torrie, D. Töyrä, F. Travasso, G. Traylor, M. C. Tringali, A. Tripathee, A. Trovato, L. Trozzo, K. W. Tsang, M. Tse, R. Tso, L. Tsukada, D. Tsuna, T. Tsutsui, D. Tuyenbayev, K. Ueno, D. Ugolini, C. S. Unnikrishnan, A. L. Urban, S. A. Usman, H. Vahlbruch, G. Vajente, G. Valdes, M. Valentini, N. van Bakel, M. van Beuzekom, J. F. J. van den Brand, C. Van Den Broeck, D. C. Vander-Hyde, L. van der Schaaf, J. V. VanHeijningen, A. A. van Veggel, M. Vardaro, V. Varma, S. Vass, M. Vasúth, A. Vecchio, G. Vedovato, J. Veitch, P. J. Veitch, K. Venkateswara, G. Venugopalan, D. Verkindt, F. Vetrano, A. Viceré, A. D. Viets, S. Vinciguerra, D. J. Vine, J. Y. Vinet, S. Vitale, T. Vo, H. Vocca, C. Vorvick, S. P. Vyatchanin, A. R. Wade, L. E. Wade, M. Wade, R. Walet, M. Walker, L. Wallace, S. Walsh, H. Wang, J. Z. Wang, S. Wang, W. H. Wang, Y. F. Wang, R. L. Ward, Z. A. Warden, J. Warner, M. Was, J. Watchi, B. Weaver, L. W. Wei, M. Weinert, A. J. Weinstein, R. Weiss, F. Wellmann, L. Wen, E. K. Wessel, P. Weßels, J. W. Westhouse, K. Wette, J. T. Whelan, B. F. Whiting, C. Whittle, D. M. Wilken, D. Williams, A. R. Williamson, J. L. Willis, B. Willke, W. Winkler, C. C. Wipf, H. Wittel, G. Woan, J. Woehler, J. K. Wofford, J. L. Wright, D. S. Wu, D. M. Wysocki, S. Xiao, R. Xu, H. Yamamoto, C. C. Yancey, L. Yang, Y. Yang, Z. Yang, M. J. Yap, M. Yazback, D. W. Yeeles, H. Yu, H. Yu, S. H. R. Yuen, A. K. Zadrožny, A. Zadrožny, M. Zanolin, T. Zelenova, J. P. Zendri, M. Zevin, J. Zhang, L. Zhang, T. Zhang, C. Zhao, G. Zhao, M. Zhou, Z. Zhou, X. J. Zhu, M. E. Zucker, J. Zweizig, T. W. S. Holoiien, C. S. Kochanek, J. L. Prieto, B. J. Shappee, K. Z. Stanek, J. Haislip, V. Kouprianov, D. E. Reichart, D. J. Sand, L. Tartaglia, S. Valenti, S. Wyatt, S. Yang, F. Salemi, LIGO Scientific Collaboration, and Virgo Collaboration. Optically targeted search for gravitational waves emitted by core-collapse supernovae during the first and second observing runs of advanced LIGO and advanced Virgo. , 101(8) : 084002, Apr. 2020. doi:[10.1103/PhysRevD.101.084002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.101.084002).

E. Abdikamalov, C. D. Ott, D. Radice, L. F. Roberts, R. Haas, C. Reisswig, P. Mösta, H. Klion, and E. Schnetter. Neutrino-driven Turbulent Convection and Standing Accretion Shock Instability in Three-dimensional Core-collapse Supernovae. *The Astrophysical Journal*, 808 (1) :70, July 2015. doi:[10.1088/0004-637X/808/1/70](https://doi.org/10.1088/0004-637X/808/1/70).

E. Abdikamalov, G. Pagliaroli, and D. Radice. Gravitational Waves from Core-Collapse Super-

novae. In *Handbook of Gravitational Wave Astronomy*. Edited by C. Bambi, page 21. 2022. doi:10.1007/978-981-15-4702-7_21-1.

K. Abe, P. Adrich, H. Aihara, R. Akutsu, I. Alekseev, A. Ali, F. Ameli, I. Anghel, L. H. V. Anthony, M. Antonova, A. Araya, Y. Asaoka, Y. Ashida, V. Aushev, F. Ballester, I. Bandac, M. Barbi, G. J. Barker, G. Barr, M. Batkiewicz-Kwasniak, M. Bellato, V. Berardi, M. Bergevin, L. Bernard, E. Bernardini, L. Berns, S. Bhadra, J. Bian, A. Blanchet, F. d. M. Blaszczyk, A. Blondel, A. Boiano, S. Bolognesi, L. Bonavera, N. Booth, S. Borjabad, T. Boschi, D. Bose, S. B. Boyd, C. Bozza, A. Bravar, D. Bravo-Berguño, C. Bronner, L. Brown, A. Burbak, A. Buchowicz, M. Buizza Avanzini, F. S. Cafagna, N. F. Calabria, J. M. Calvo-Mozota, S. Cao, S. L. Cartwright, A. Carroll, M. G. Catanesi, S. Cebrià, M. Chabera, S. Chakraborty, C. Checchia, J. H. Choi, S. Choubey, M. Cicerchia, J. Coleman, G. Collazuol, L. Cook, G. Cowan, S. Cuen-Rochin, M. Danilov, G. Daz Lopez, E. De la Fuente, P. de Perio, G. De Rosa, T. Dealtry, C. J. Densham, A. Dergacheva, N. Deshmukh, M. M. Devi, F. Di Lodovico, P. Di Meo, I. Di Palma, T. A. Doyle, E. Drakopoulou, O. Drapier, J. Dumarchez, P. Dunne, M. Dziewiecki, L. Eklund, S. El Hedri, J. Ellis, S. Emery, A. Esmaili, R. Esteve, A. Evangelisti, M. Feely, S. Fedotov, J. Feng, P. Fernandez, E. Fernández-Martinez, P. Ferrario, B. Ferrazzi, T. Feusels, A. Finch, C. Finley, A. Fiorentini, G. Fiorillo, M. Fitton, K. Frankiewicz, M. Friend, Y. Fujii, Y. Fukuda, G. Galinski, J. Gao, C. Garde, A. Garfagnini, S. Garode, L. Gialanella, C. Giganti, J. J. Gomez-Cadenas, M. Gonin, J. González-Nuevo, A. Gorin, R. Gornea, V. Gousy-Leblanc, F. Gramegna, M. Grassi, G. Grella, M. Guigue, P. Gumplinger, D. R. Hadley, M. Harada, B. Hartfiel, M. Hartz, S. Hassani, N. C. Hastings, Y. Hayato, J. A. Hernando-Morata, V. Herrero, J. Hill, K. Hiraide, S. Hirota, A. Holin, S. Horiuchi, K. Hoshina, K. Hultqvist, F. Jacob, A. K. Ichikawa, W. Idrissi Ibsalih, T. Iijima, M. Ikeda, M. Inomoto, K. Inoue, J. Insler, A. Ioannian, T. Ishida, K. Ishidoshiro, H. Ishino, M. Ishitsuka, H. Ito, S. Ito, Y. Itow, K. Iwamoto, A. Izmaylov, N. Izumi, S. Izumiyama, M. Jakkapu, B. Jamieson, H. I. Jang, J. S. Jang, S. J. Jenkins, S. H. Jeon, M. Jiang, H. S. Jo, P. Jonsson, K. K. Joo, T. Kajita, H. Kakuno, J. Kameda, Y. Kano, P. Kalaczynski, D. Karlen, J. Kasperek, Y. Kataoka, A. Kato, T. Katori, N. Kazarian, E. Kearns, M. Khabibullin, A. Khotjantsev, T. Kikawa, M. Kikec, J. H. Kim, J. Y. Kim, S. B. Kim, S. Y. Kim, S. King, T. Kinoshita, J. Kisiel, A. Klekotko, T. Kobayashi, L. Koch, M. Koga, L. Koerich, N. Kolev, A. Konaka, L. L. Kormos, Y. Koshio, A. Korzenev, Y. Kotsar, K. A. Kouzakov, K. L. Kowalik, L. Kravchuk, A. P. Kryukov, Y. Kudenko, T. Kumita, R. Kurjata, T. Kutter, M. Kuze, K. Kwak, M. La Commara, L. Labarga, J. Lagoda, M. Lamers James, M. Lamoureux, M. Laveder, L. Lavitola, M. Lawe, J. G. Learned, J. Lee, R. Leitner, V. Lezaun, I. T. Lim, T. Lindner, R. P. Litchfield, K. R. Long, A. Longhin, P. Loverre, X. Lu, L. Ludovici, Y. Maekawa, L. Magaletti, K. Magar, K. Mahn, Y. Makida, M. Malek, M. Malinský, T. Marchi, L. Maret, C. Mariani, A. Marinelli, K. Martens, L. Marti, J. F. Martin, D. Martin, J. Marzec, T. Matsubara, R. Matsumoto, S. Matsuno, M. Matusiak, E. Mazzucato, M. McCarthy, N. McCauley, J. McElwee, C. McGrew, A. Mefodiev, A. Medhi, P. Mehta, L. Mellet, H. Menjo, P. Mermoud, C. Metelko, M. Mezzetto, J. Migenda, P. Migliozi, P. Mijakowski, S. Miki, E. W. Miller, H. Minakata, A. Minamino, S. Mine, O. Mineev, A. Mitra, M. Miura, R. Moharana, C. M. Mollo, T. Mondal, M. Mongelli, F. Monrabal, D. H. Moon, C. S. Moon, F. J. Mora,

S. Moriyama, T. A. Mueller, L. Munteanu, K. Murase, Y. Nagao, T. Nakadaira, K. Nakagiri, M. Nakahata, S. Nakai, Y. Nakajima, K. Nakamura, K. Nakamura, H. Nakamura, Y. Nakano, T. Nakaya, S. Nakayama, K. Nakayoshi, L. Nascimento Machado, C. E. R. Naseby, B. Navarro-Garcia, M. Needham, T. Nicholls, K. Niewczas, Y. Nishimura, E. Noah, F. Nova, J. C. Nugent, H. Nunokawa, W. Obrebski, J. P. Ochoa-Ricoux, E. O'Connor, N. Ogawa, T. Ogitsu, K. Ohta, K. Okamoto, H. M. O'Keefe, K. Okumura, Y. Onishchuk, F. Orozco-Luna, A. Oshlianskyi, N. Ospina, M. Ostrowski, E. O'Sullivan, L. O'Sullivan, T. Ovsianikova, Y. Oyama, H. Ozaki, M. Y. Pac, P. Paganini, V. Palladino, V. Paolone, M. Pari, S. Parsa, J. Pasternak, C. Pastore, G. Pastuszek, D. A. Patel, M. Pavin, D. Payne, C. Peña-Garay, C. Pidcott, E. Pinzon Guerra, S. Playfer, B. W. Pointon, A. Popov, B. Popov, K. Porwit, M. Posiadala-Zezula, J. M. Poutissou, J. Pozimski, G. Pronost, N. W. Prouse, P. Przewlocki, B. Quilain, A. A. Quiroga, E. Radicioni, B. Radics, P. J. Rajda, J. Renner, M. Rescigno, F. Retiere, G. Ricciardi, C. Riccio, B. Richards, E. Rondio, H. J. Rose, B. Roskovec, S. Roth, C. Rott, S. D. Rountree, A. Rubbia, A. C. Ruggeri, C. Ruggles, S. Russo, A. Rychter, D. Ryu, K. Sakashita, S. Samani, F. Sánchez, M. L. Sánchez, M. C. Sanchez, S. Sano, J. D. Santos, G. Santucci, P. Sarmah, I. Sashima, K. Sato, M. Scott, Y. Seiya, T. Sekiguchi, H. Sekiya, J. W. Seo, S. H. Seo, D. Sgalaberna, A. Shaikhiev, Z. Shan, A. Shaykina, I. Shimizu, C. D. Shin, M. Shinoki, M. Shiozawa, G. Sinnis, N. Skrobova, K. Skwarczynski, M. B. Smy, J. Sobczyk, H. W. Sobel, F. J. P. Soler, Y. Sonoda, R. Spina, B. Spisso, P. Spradlin, K. L. Stankevich, L. Stawarz, S. M. Stellacci, K. Stopa, A. I. Studenikin, S. L. Suárez Gómez, T. Suganuma, S. Suvorov, Y. Suwa, A. T. Suzuki, S. Y. Suzuki, Y. Suzuki, D. Svirida, R. Svoboda, M. Taani, M. Tada, A. Takeda, Y. Takemoto, A. Takenaka, A. Taketa, Y. Takeuchi, V. Takhistov, H. Tanaka, H. A. Tanaka, H. I. Tanaka, M. Tanaka, T. Tashiro, M. Thiesse, L. F. Thompson, J. Toledo, A. K. Tomatani-Sánchez, G. Tortone, K. M. Tsui, T. Tsukamoto, M. Tzanov, Y. Uchida, M. R. Vagins, S. Valder, V. Valentino, G. Vasseur, A. Vijayvargi, C. Vilela, W. G. S. Vinning, D. Vivolo, T. Vladislavjevic, R. B. Vogelaar, M. M. Vyalkov, T. Wachala, J. Walker, D. Wark, M. O. Wascko, R. A. Wendell, R. J. Wilkes, M. J. Wilking, J. R. Wilson, S. Wronka, J. Xia, Z. Xie, T. Xin, Y. Yamaguchi, K. Yamamoto, C. Yanagisawa, T. Yano, S. Yen, N. Yershov, D. N. Yeum, M. Yokoyama, M. Yonenaga, J. Yoo, I. Yu, M. Yu, T. Zakrzewski, B. Zaldivar, J. Zalipska, K. Zaremba, G. Zarnecki, M. Ziemicki, K. Zietara, M. Zito, S. Zsoldos, and Hyper-Kamiokande Collaboration. Supernova Model Discrimination with Hyper-Kamiokande. *The Astrophysical Journal*, 916(1) : 15, July 2021. doi:[10.3847/1538-4357/abf7c4](https://doi.org/10.3847/1538-4357/abf7c4).

D. R. Aguilera-Dena, N. Langer, J. Antoniadis, and B. Müller. Precollapse Properties of Superluminous Supernovae and Long Gamma-Ray Burst Progenitor Models. *The Astrophysical Journal*, 901(2) :114, Oct. 2020. doi:[10.3847/1538-4357/abb138](https://doi.org/10.3847/1538-4357/abb138).

S. Aiello, A. Albert, S. A. Garre, Z. Aly, A. Ambrosone, F. Ameli, M. Andre, G. Androulakis, M. Anghinolfi, M. Anguita, G. Anton, M. Ardid, S. Ardid, J. Aublin, C. Bagatelas, B. Baret, S. B. d. Pree, M. Bendahman, F. Benfenati, E. Berbee, A. M. v. d. Berg, V. Bertin, S. Biagi, M. Bissinger, M. Boettcher, M. B. Cabo, J. Boumaaza, M. Bouta, M. Bouwhuis, C. Bozza, H. Brânzaş, R. Bruijn, J. Brunner, E. Buis, R. Buompane, J. Busto, B. Caiffi, D. Calvo,

- A. Capone, V. Carretero, P. Castaldi, S. Celli, M. Chabab, N. Chau, A. Chen, S. Cherubini, V. Chiarella, T. Chiarusi, M. Circella, R. Cocimano, J. A. B. Coelho, A. Coleiro, M. C. Molla, R. Coniglione, P. Coyle, A. Creusot, G. Cuttone, R. Dallier, B. De Martino, M. De Palma, M. Di Marino, I. Di Palma, A. F. Díaz, D. Diego-Tortosa, C. Distefano, A. Domi, C. Donzaud, D. Dornic, M. Dörr, D. Drouhin, T. Eberl, A. Eddyamoui, T. van Eeden, D. van Eijk, I. El Bojaddaini, D. Elsaesser, A. Enzenhöfer, V. Espinosa, P. Fermani, G. Ferrara, M. D. Filipović, F. Filippini, L. A. Fusco, O. Gabella, T. Gal, A. G. Soto, F. Garufi, Y. Gallet, N. Geißelbrecht, L. Gialanella, E. Giorgio, S. R. Gozzini, R. Gracia, K. Graf, D. Grasso, G. Grella, D. Guderian, C. Guidi, J. Haefner, H. Hamdaoui, H. van Haren, A. Heijboer, A. Hekalo, L. Hennig, J. J. Hernández-Rey, J. Hofestädt, F. Huang, W. I. Ibnsalih, G. Illuminati, C. W. James, M. de Jong, P. de Jong, B. J. Jung, M. Kadler, P. Kalaczyński, O. Kalekin, U. F. Katz, N. R. K. Chowdhury, G. Kistauri, F. van der Knaap, P. Kooijman, A. Kouchner, M. Kreter, V. Kulikovskiy, R. Lahmann, M. Lamoureux, G. Larosa, R. Le Breton, S. Le Stum, O. Leonardi, F. Leone, E. Leonora, N. Lessing, G. Levi, M. Lincetto, M. L. Clark, T. Lipreau, F. Longhitano, D. Lopez-Coto, L. Maderer, J. Mańczak, K. Mannheim, A. Margiotta, A. Marinelli, C. Markou, L. Martin, J. A. Martínez-Mora, A. Martini, F. Marzaioli, S. Mastroianni, S. Mazzou, K. W. Melis, G. Miele, P. Migliozi, E. Migneco, P. Mijakowski, L. S. Miranda, C. M. Mollo, M. Morganti, M. Moser, A. Moussa, R. Muller, M. Musumeci, L. Nauta, S. Navas, C. A. Nicolau, B. Ā. . Fearraigh, M. O'Sullivan, M. Organokov, A. Orlando, J. P. González, G. Papalashvili, R. Papaleo, G. Passaro, C. Pastore, A. M. Păun, G. E. Pāvālaš, C. Pellegrino, M. Perrin-Terrin, V. Pestel, P. Piattelli, C. Pieterse, K. Pikounis, O. Pisanti, C. Poirè, V. Popa, T. Pradier, G. Pühlhofer, S. Pulvirenti, O. Rabyang, F. Raffaelli, N. Randazzo, S. Razzaque, D. Real, S. Reck, G. Riccobene, S. Rivoire, A. Romanov, A. Rovelli, F. S. Greus, D. F. E. Samtleben, A. S. Losa, M. Sanguineti, A. Santangelo, D. Santonocito, P. Sapienza, J. Schnabel, M. F. Schneider, J. Schumann, H. M. Schutte, J. Seneca, I. Sgura, R. Shanidze, A. Sharma, F. Simeone, A. Sinopoulou, B. Spisso, M. Spurio, D. Stavropoulos, S. M. Stellacci, M. Taiuti, Y. Tayalati, E. Tenllado, T. Thakore, H. Thiersen, S. Tingay, V. Tsourapis, E. Tzamariudaki, D. Tzanetatos, T. Unbehau, V. Van Elewyck, G. Vannoye, G. Vasileiadis, F. Versari, S. Viola, D. Vivolo, G. de Wasseige, J. Wilms, R. Wojaczyński, E. de Wolf, S. Zavatarelli, A. Zegarelli, D. Zito, J. D. Zornoza, J. Zúñiga, and N. Zywučka. The KM3NeT potential for the next core-collapse supernova observation with neutrinos. *European Physical Journal C*, 81(5) :445, May 2021. doi:[10.1140/epjc/s10052-021-09187-5](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-021-09187-5).
- S. Akiyama, J. C. Wheeler, D. L. Meier, and I. Lichtenstadt. The Magnetorotational Instability in Core-Collapse Supernova Explosions. *The Astrophysical Journal*, 584 :954–970, Feb. 2003. doi:[10.1086/344135](https://doi.org/10.1086/344135).
- H. Andresen, B. Müller, E. Müller, and H. T. Janka. Gravitational wave signals from 3D neutrino hydrodynamics simulations of core-collapse supernovae. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 468(2) :2032–2051, June 2017. doi:[10.1093/mnras/stx618](https://doi.org/10.1093/mnras/stx618).
- H. Andresen, E. Müller, H. T. Janka, A. Summa, K. Gill, and M. Zanolin. Gravitational waves from 3D core-collapse supernova models : The impact of moderate progenitor rota-

- tion. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 486(2) :2238–2253, June 2019. doi:[10.1093/mnras/stz990](https://doi.org/10.1093/mnras/stz990).
- W. Baade and F. Zwicky. Cosmic Rays from Super-novae. *Proceedings of the National Academy of Science*, 20(5) :259–263, May 1934a. doi:[10.1073/pnas.20.5.259](https://doi.org/10.1073/pnas.20.5.259).
- W. Baade and F. Zwicky. On Super-novae. *Proceedings of the National Academy of Science*, 20(5) :254–259, May 1934b. doi:[10.1073/pnas.20.5.254](https://doi.org/10.1073/pnas.20.5.254).
- B. C. Barish and R. Weiss. LIGO and the detection of gravitational waves. *Physics Today*, 52 (10) :44–50, Oct. 1999. doi:[10.1063/1.882861](https://doi.org/10.1063/1.882861).
- P. G. Beck, J. De Ridder, C. Aerts, T. Kallinger, S. Hekker, R. A. García, B. Mosser, and G. R. Davies . Constraining the core-rotation rate in red-giant stars from Kepler space photometry. *Astronomische Nachrichten*, 333(10) :967, Dec. 2012. doi:[10.1002/asna.201211787](https://doi.org/10.1002/asna.201211787).
- P. Beniamini, K. Hotokezaka, A. van der Horst, and C. Kouveliotou. Formation rates and evolution histories of magnetars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 487 (1) :1426–1438, July 2019. doi:[10.1093/mnras/stz1391](https://doi.org/10.1093/mnras/stz1391).
- H. A. Bethe. Supernova mechanisms. *Reviews of Modern Physics*, 62(4) :801–866, Oct. 1990. doi:[10.1103/RevModPhys.62.801](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.62.801).
- H. A. Bethe and J. R. Wilson. Revival of a stalled supernova shock by neutrino heating. *The Astrophysical Journal*, 295 :14–23, Aug. 1985. doi:[10.1086/163343](https://doi.org/10.1086/163343).
- H. A. Bethe, G. E. Brown, J. Applegate, and J. M. Lattimer. Equation of state in the gravitational collapse of stars. *Nuclear Physics A*, 324(2-3) :487–533, July 1979. doi:[10.1016/0375-9474\(79\)90596-7](https://doi.org/10.1016/0375-9474(79)90596-7).
- H. A. Bethe, G. E. Brown, and J. Cooperstein. Convection in Supernova Theory. *The Astrophysical Journal*, 322 :201, Nov. 1987. doi:[10.1086/165715](https://doi.org/10.1086/165715).
- H. Beuther, A. Ahmadi, J. C. Mottram, H. Linz, L. T. Maud, T. Henning, R. Kuiper, A. J. Walsh, K. G. Johnston, and S. N. Longmore. High-mass star formation at sub-50 au scales. *Astronomy and Astrophysics*, 621 :A122, Jan. 2019. doi:[10.1051/0004-6361/201834064](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201834064).
- J. M. Blondin and A. Mezzacappa. The Spherical Accretion Shock Instability in the Linear Regime. *The Astrophysical Journal*, 642(1) :401–409, May 2006. doi:[10.1086/500817](https://doi.org/10.1086/500817).
- J. M. Blondin and A. Mezzacappa. Pulsar spins from an instability in the accretion shock of supernovae. *Nature*, 445(7123) :58–60, Jan. 2007a. doi:[10.1038/nature05428](https://doi.org/10.1038/nature05428).
- J. M. Blondin and A. Mezzacappa. Pulsar spins from an instability in the accretion shock of supernovae. *Nature*, 445(7123) :58–60, Jan. 2007b. doi:[10.1038/nature05428](https://doi.org/10.1038/nature05428).

- J. M. Blondin, A. Mezzacappa, and C. DeMarino. Stability of Standing Accretion Shocks, with an Eye toward Core-Collapse Supernovae. *The Astrophysical Journal*, 584(2) :971–980, Feb. 2003. doi:[10.1086/345812](https://doi.org/10.1086/345812).
- J. M. Blondin, E. Gipson, S. Harris, and A. Mezzacappa. The Standing Accretion Shock Instability : Enhanced Growth in Rotating Progenitors. *The Astrophysical Journal*, 835(2) : 170, Feb. 2017. doi:[10.3847/1538-4357/835/2/170](https://doi.org/10.3847/1538-4357/835/2/170).
- R. Bollig, N. Yadav, D. Kresse, H.-T. Janka, B. Müller, and A. Heger. Self-consistent 3D Supernova Models From -7 Minutes to +7 s : A 1-bethe Explosion of a 19 M_{\odot} Progenitor. *The Astrophysical Journal*, 915(1) :28, July 2021. doi:[10.3847/1538-4357/abf82e](https://doi.org/10.3847/1538-4357/abf82e).
- S. W. Bruenn and A. Mezzacappa. Prompt Convection in Core Collapse Supernovae. *The Astrophysical Journal Letters*, 433 :L45, Sept. 1994. doi:[10.1086/187544](https://doi.org/10.1086/187544).
- S. W. Bruenn, J. R. Buchler, and M. Livio. Rayleigh-Taylor convective overturn in stellar collapse. *The Astrophysical Journal Letters*, 234 :L183–L186, Dec. 1979. doi:[10.1086/183135](https://doi.org/10.1086/183135).
- A. C. Buellet, T. Foglizzo, J. Guilet, and E. Abdikamalov. Effect of stellar rotation on the development of post-shock instabilities during core-collapse supernovae. *arXiv e-prints*, art. arXiv :2301.01962, Jan. 2023. doi:[10.48550/arXiv.2301.01962](https://doi.org/10.48550/arXiv.2301.01962).
- M. Bugli, J. Guilet, and M. Obergaulinger. Three-dimensional core-collapse supernovae with complex magnetic structures - I. Explosion dynamics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 507(1) :443–454, Oct. 2021. doi:[10.1093/mnras/stab2161](https://doi.org/10.1093/mnras/stab2161).
- M. Bugli, J. Guilet, T. Foglizzo, and M. Obergaulinger. Three-dimensional core-collapse supernovae with complex magnetic structures - II. Rotational instabilities and multimessenger signatures. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 520(4) :5622–5634, Apr. 2023. doi:[10.1093/mnras/stad496](https://doi.org/10.1093/mnras/stad496).
- R. Buras, H. T. Janka, M. Rampp, and K. Kifonidis. Two-dimensional hydrodynamic core-collapse supernova simulations with spectral neutrino transport. II. Models for different progenitor stars. *Astronomy and Astrophysics*, 457(1) :281–308, Oct. 2006a. doi:[10.1051/0004-6361:20054654](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20054654).
- R. Buras, M. Rampp, H. T. Janka, and K. Kifonidis. Two-dimensional hydrodynamic core-collapse supernova simulations with spectral neutrino transport. I. Numerical method and results for a 15 M_{\odot} star. *Astronomy and Astrophysics*, 447(3) :1049–1092, Mar. 2006b. doi:[10.1051/0004-6361:20053783](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20053783).
- A. Burrows. Convection and the Mechanism of Type II Supernovae. *The Astrophysical Journal Letters*, 318 :L57, July 1987. doi:[10.1086/184937](https://doi.org/10.1086/184937).
- A. Burrows and B. A. Fryxell. A Convective Trigger for Supernova Explosions. *The Astrophysical Journal Letters*, 418 :L33, Nov. 1993. doi:[10.1086/187109](https://doi.org/10.1086/187109).

- A. Burrows and J. Goshy. A Theory of Supernova Explosions. *The Astrophysical Journal Letters*, 416 :L75, Oct. 1993. doi:[10.1086/187074](https://doi.org/10.1086/187074).
- A. Burrows and J. M. Lattimer. Neutrinos from SN 1987A. *The Astrophysical Journal Letters*, 318 :L63, July 1987. doi:[10.1086/184938](https://doi.org/10.1086/184938).
- A. Burrows and J. M. Lattimer. Convection, Type II supernovae, and the early evolution of neutron stars. *Physics Reports*, 163(1) :51–62, Jan. 1988. doi:[10.1016/0370-1573\(88\)90035-X](https://doi.org/10.1016/0370-1573(88)90035-X).
- A. Burrows and D. Vartanyan. Core-collapse supernova explosion theory. *Nature*, 589(7840) : 29–39, Jan. 2021. doi:[10.1038/s41586-020-03059-w](https://doi.org/10.1038/s41586-020-03059-w).
- A. Burrows, J. C. Dolence, and J. W. Murphy. An Investigation into the Character of Pre-explosion Core-collapse Supernova Shock Motion. *The Astrophysical Journal*, 759(1) :5, Nov. 2012. doi:[10.1088/0004-637X/759/1/5](https://doi.org/10.1088/0004-637X/759/1/5).
- R. A. Cairns. The role of negative energy waves in some instabilities of parallel flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 92 :1–14, May 1979. doi:[10.1017/S0022112079000495](https://doi.org/10.1017/S0022112079000495).
- M. Cantiello, C. Mankovich, L. Bildsten, J. Christensen-Dalsgaard, and B. Paxton. Angular Momentum Transport within Evolved Low-mass Stars. *The Astrophysical Journal*, 788(1) : 93, June 2014. doi:[10.1088/0004-637X/788/1/93](https://doi.org/10.1088/0004-637X/788/1/93).
- C. Y. Cardall and R. D. Budiardja. Stochasticity and Efficiency in Simplified Models of Core-collapse Supernova Explosions. *The Astrophysical Journal Letters*, 813(1) :L6, Nov. 2015. doi:[10.1088/2041-8205/813/1/L6](https://doi.org/10.1088/2041-8205/813/1/L6).
- J. M. Centrella, K. C. B. New, L. L. Lowe, and J. D. Brown. Dynamical Rotational Instability at Low T/W . *The Astrophysical Journal Letters*, 550(2) :L193–L196, Apr. 2001. doi:[10.1086/319634](https://doi.org/10.1086/319634).
- P. Cerdá-Durán, V. Quilis, and J. A. Font. AMR simulations of the low $T/|W|$ bar-mode instability of neutron stars. *Computer Physics Communications*, 177(3) :288–297, Aug. 2007. doi:[10.1016/j.cpc.2007.04.001](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2007.04.001).
- S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. 1961.
- R. A. Chevalier and N. Soker. Asymmetric Envelope Expansion of Supernova 1987A. *The Astrophysical Journal*, 341 :867, June 1989. doi:[10.1086/167545](https://doi.org/10.1086/167545).
- S. A. Colgate. Supernova mass ejection and core hydrodynamics. , 49 :399–416, Sept. 1978.
- S. A. Colgate and R. H. White. The Hydrodynamic Behavior of Supernovae Explosions. *The Astrophysical Journal*, 143 :626, Mar. 1966. doi:[10.1086/148549](https://doi.org/10.1086/148549).

- J. M. Comella, H. D. Craft, R. V. E. Lovelace, and J. M. Sutton. Crab Nebula Pulsar NP 0532. *Nature*, 221(5179) :453–454, Feb. 1969. doi:[10.1038/221453a0](https://doi.org/10.1038/221453a0).
- S. M. Couch and E. P. O'Connor. High-resolution Three-dimensional Simulations of Core-collapse Supernovae in Multiple Progenitors. *The Astrophysical Journal*, 785(2) :123, Apr. 2014. doi:[10.1088/0004-637X/785/2/123](https://doi.org/10.1088/0004-637X/785/2/123).
- S. M. Couch and C. D. Ott. Revival of the Stalled Core-collapse Supernova Shock Triggered by Precollapse Asphericity in the Progenitor Star. *The Astrophysical Journal Letters*, 778(1) : L7, Nov. 2013. doi:[10.1088/2041-8205/778/1/L7](https://doi.org/10.1088/2041-8205/778/1/L7).
- DarkSide-20k Collaboration, P. Agnes, S. Albergo, I. F. M. Albuquerque, T. Alexander, A. Alici, A. K. Alton, P. Amaudruz, S. Arcelli, M. Ave, I. C. Avetissov, R. I. Avetisov, O. Azzolini, H. O. Back, Z. Balmforth, V. Barbarian, A. Barrado Olmedo, P. Barrillon, A. Basco, G. Batignani, A. Bondar, W. M. Bonivento, E. Borisova, B. Bottino, M. G. Boulay, G. Buccino, S. Busino, J. Busto, A. Buzulutskov, M. Cadeddu, M. Cadoni, A. Caminata, N. Canci, G. Cappello, M. Caravati, M. Cárdenas-Montes, M. Carlini, F. Carnesecchi, P. Castello, S. Catalanotti, V. Cataudella, P. Cavalcante, S. Cavuoti, S. Cebrian, J. M. Cela Ruiz, B. Celano, S. Chashin, A. Chepurinov, E. Chyhyrnyets, C. Cicalò, L. Cifarelli, D. Cintas, F. Coccetti, V. Cocco, M. Colocci, E. Conde Vilda, L. Consiglio, S. Copello, J. Corning, G. Covone, P. Czudak, S. D'Auria, M. D. Da Rocha Rolo, O. Dadoun, M. Daniel, S. Davini, A. De Candia, S. De Cecco, A. De Falco, G. De Filippis, D. De Gruttola, G. De Guido, G. De Rosa, M. Della Valle, G. Dellacasa, S. De Pasquale, A. V. Derbin, A. Devoto, L. Di Noto, C. Dionisi, P. Di Stefano, G. Dolganov, F. Dordei, L. Doria, M. Downing, T. Erjavec, M. Fernandez Diaz, G. Fiorillo, A. Franceschi, D. Franco, E. Frolov, N. Funicello, F. Gabriele, C. Galbiati, M. Garbini, P. Garcia Abia, A. Gendotti, C. Ghiano, R. A. Giampaolo, C. Giganti, M. A. Giorgi, G. K. Giovanetti, V. Goicoechea Casanueva, A. Gola, R. Graciani Diaz, G. Y. Grigoriev, A. Grobov, M. Gromov, M. Guan, M. Guerzoni, M. Gulino, C. Guo, B. R. Hackett, A. Hallin, M. Haranczyk, S. Hill, S. Horikawa, F. Hubaut, T. Hugues, E. V. Hungerford, A. Ianni, V. Ippolito, C. C. James, C. Jillings, P. Kachru, A. A. Kemp, C. L. Kendziora, G. Keppel, A. V. Khomyakov, S. Kim, A. Kish, I. Kochanek, K. Kondo, G. Korga, A. Kubankin, R. Kugathasan, M. Kuss, M. Kuźniak, M. La Commara, M. Lai, S. Langrock, M. Leyton, X. Li, L. Lidey, M. Lissia, G. Longo, I. N. Machulin, L. Mapelli, A. Marasciulli, A. Margotti, S. M. Mari, J. Maricic, M. Martínez, A. D. Martinez Rojas, C. J. Martoff, A. Masoni, A. Mazzi, A. B. McDonald, J. McLaughlin, A. Messina, P. D. Meyers, T. Miletic, R. Milincic, A. Moggi, A. Moharana, S. Moiola, J. Monroe, S. Morisi, M. Morrocchi, E. N. Mozhevitina, T. Mróz, V. N. Muratova, C. Muscas, L. Musenich, P. Musico, R. Nania, T. Napolitano, A. Navrer Agasson, M. Nessi, I. Nikulin, J. Nowak, A. Oleinik, V. Olynykov, L. Pagani, M. Pallavicini, L. Pandola, E. Pantic, E. Paoloni, G. Paternoster, P. A. Pegoraro, K. Pelczar, L. A. Pellegrini, C. Pellegrino, F. Perotti, V. Pesudo, E. Picciau, F. Pietropaolo, C. Pira, A. Pocar, D. M. Poehlmann, S. Pordes, S. S. Poudel, P. Pralavorio, D. Price, F. Raffaelli, F. Ragusa, A. Ramirez, M. Razeti, A. Razeto, A. L. Renshaw, S. Rescia, M. Rescigno, F. Resnati, F. Retiere, L. P. Rignanese, C. Ripoli, A. Rivetti, J. Rode, L. Romero, M. Rossi, A. Rubbia, P. Salatino, O. Samoylov, E. Sánchez

- García, E. Sandford, S. Sanfilippo, D. Santone, R. Santorelli, C. Savarese, E. Scapparone, B. Schlitzer, G. Scioli, D. A. Semenov, B. Shaw, A. Shchagin, A. Sheshukov, M. Simeone, P. Skensved, M. D. Skorokhvatov, O. Smirnov, B. Smith, A. Sokolov, A. Steri, S. Stracka, V. Strickland, M. Stringer, S. Sulis, Y. Suvorov, A. M. Szcl, R. Tartaglia, G. Testera, T. N. Thorpe, A. Tonazzo, S. Torres-Lara, A. Tricomi, E. V. Unzhakov, G. Usai, T. Vallivilayil John, T. Viant, S. Viel, A. Vishneva, R. B. Vogelaar, M. Wada, H. Wang, Y. Wang, S. Westerdale, R. J. Wheadon, L. Williams, M. M. Wojcik, M. Wojcik, X. Xiao, C. Yang, Z. Ye, A. Zani, A. Zichichi, G. Zuzel, and M. P. Zykova. Sensitivity of future liquid argon dark matter search experiments to core-collapse supernova neutrinos. , 2021(3) :043, Mar. 2021. doi:[10.1088/1475-7516/2021/03/043](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2021/03/043).
- S. E. de Mink, N. Langer, R. G. Izzard, H. Sana, and A. de Koter. The Rotation Rates of Massive Stars : The Role of Binary Interaction through Tides, Mass Transfer, and Mergers. *The Astrophysical Journal*, 764(2) :166, Feb. 2013. doi:[10.1088/0004-637X/764/2/166](https://doi.org/10.1088/0004-637X/764/2/166).
- L. Dessart, A. Burrows, E. Livne, and C. D. Ott. Multidimensional Radiation/Hydrodynamic Simulations of Proto-Neutron Star Convection. *The Astrophysical Journal*, 645(1) :534–550, July 2006. doi:[10.1086/504068](https://doi.org/10.1086/504068).
- L. Dessart, D. J. Hillier, R. Waldman, E. Livne, and S. Blondin. Superluminous supernovae : ^{56}Ni power versus magnetar radiation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 426(1) :L76–L80, Oct. 2012. doi:[10.1111/j.1745-3933.2012.01329.x](https://doi.org/10.1111/j.1745-3933.2012.01329.x).
- A. S. Endal and S. Sofia. The evolution of rotating stars. II. Calculations with time-dependent redistribution of angular momentum for 7 and 10 M sun stars. *The Astrophysical Journal*, 220 :279–290, Feb. 1978. doi:[10.1086/155904](https://doi.org/10.1086/155904).
- E. Endeve, C. Y. Cardall, R. D. Budiardja, S. W. Beck, A. Bejnood, R. J. Toedte, A. Mezzacappa, and J. M. Blondin. Turbulent Magnetic Field Amplification from Spiral SASI Modes : Implications for Core-collapse Supernovae and Proto-neutron Star Magnetization. *The Astrophysical Journal*, 751(1) :26, May 2012. doi:[10.1088/0004-637X/751/1/26](https://doi.org/10.1088/0004-637X/751/1/26).
- R. I. Epstein. Lepton-driven convection in supernovae. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 188 :305–325, Aug. 1979. doi:[10.1093/mnras/188.2.305](https://doi.org/10.1093/mnras/188.2.305).
- T. Ertl, H. T. Janka, S. E. Woosley, T. Sukhbold, and M. Ugliano. A Two-parameter Criterion for Classifying the Explodability of Massive Stars by the Neutrino-driven Mechanism. *The Astrophysical Journal*, 818(2) :124, Feb. 2016. doi:[10.3847/0004-637X/818/2/124](https://doi.org/10.3847/0004-637X/818/2/124).
- R. Fernández and C. Thompson. Dynamics of a Spherical Accretion Shock with Neutrino Heating and Alpha-Particle Recombination. *The Astrophysical Journal*, 703(2) :1464–1485, Oct. 2009a. doi:[10.1088/0004-637X/703/2/1464](https://doi.org/10.1088/0004-637X/703/2/1464).
- R. Fernández and C. Thompson. Stability of a Spherical Accretion Shock with Nuclear Dissociation. *The Astrophysical Journal*, 697(2) :1827–1841, June 2009b. doi:[10.1088/0004-637X/697/2/1827](https://doi.org/10.1088/0004-637X/697/2/1827).

- R. Fernández, B. Müller, T. Foglizzo, and H.-T. Janka. Characterizing SASI- and convection-dominated core-collapse supernova explosions in two dimensions. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 440(3) :2763–2780, May 2014. doi:[10.1093/mnras/stu408](https://doi.org/10.1093/mnras/stu408).
- F. Feudel and U. Feudel. Bifurcations in rotating spherical shell convection under the influence of differential rotation. *Chaos*, 31(11) :113112, Nov. 2021. doi:[10.1063/5.0063113](https://doi.org/10.1063/5.0063113).
- T. Fischer, I. Sagert, G. Pagliara, M. Hempel, J. Schaffner-Bielich, T. Rauscher, F. K. Thielemann, R. Käppeli, G. Martínez-Pinedo, and M. Liebendörfer. Core-collapse Supernova Explosions Triggered by a Quark-Hadron Phase Transition During the Early Post-bounce Phase. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 194(2) :39, June 2011. doi:[10.1088/0067-0049/194/2/39](https://doi.org/10.1088/0067-0049/194/2/39).
- G. L. Fogli, E. Lisi, A. Mirizzi, and D. Montanino. Probing supernova shock waves and neutrino flavour transitions in next-generation water Cherenkov detectors. , 2005(4) :002, Apr. 2005. doi:[10.1088/1475-7516/2005/04/002](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2005/04/002).
- T. Foglizzo. A Simple Toy Model of the Advective-Acoustic Instability. I. Perturbative Approach. *The Astrophysical Journal*, 694(2) :820–832, Apr. 2009. doi:[10.1088/0004-637X/694/2/820](https://doi.org/10.1088/0004-637X/694/2/820).
- T. Foglizzo, L. Scheck, and H. T. Janka. Neutrino-driven Convection versus Advection in Core-Collapse Supernovae. *The Astrophysical Journal*, 652(2) :1436–1450, Dec. 2006. doi:[10.1086/508443](https://doi.org/10.1086/508443).
- T. Foglizzo, P. Galletti, L. Scheck, and H. T. Janka. Instability of a Stalled Accretion Shock : Evidence for the Advective-Acoustic Cycle. *The Astrophysical Journal*, 654(2) :1006–1021, Jan. 2007. doi:[10.1086/509612](https://doi.org/10.1086/509612).
- T. Foglizzo, F. Masset, J. Guilet, and G. Durand. Shallow Water Analogue of the Standing Accretion Shock Instability : Experimental Demonstration and a Two-Dimensional Model. *Physical Review Letters*, 108(5) :051103, Feb. 2012. doi:[10.1103/PhysRevLett.108.051103](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.051103).
- C. L. Fryer and A. Heger. Core-Collapse Simulations of Rotating Stars. *The Astrophysical Journal*, 541(2) :1033–1050, Oct. 2000. doi:[10.1086/309446](https://doi.org/10.1086/309446).
- C. L. Fryer and M. S. Warren. The Collapse of Rotating Massive Stars in Three Dimensions. *The Astrophysical Journal*, 601(1) :391–404, Jan. 2004. doi:[10.1086/380193](https://doi.org/10.1086/380193).
- K. Fujisawa, H. Okawa, Y. Yamamoto, and S. Yamada. Effects of Rotation and Magnetic Field on the Revival of a Stalled Shock in Supernova Explosions. *The Astrophysical Journal*, 872(2) :155, Feb. 2019. doi:[10.3847/1538-4357/aaffdd](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aaffdd).
- J. Fuller and W. Lu. The spins of compact objects born from helium stars in binary systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 511(3) :3951–3964, Apr. 2022. doi:[10.1093/mnras/stac317](https://doi.org/10.1093/mnras/stac317).

- A. Gal-Yam. Luminous Supernovae. *Science*, 337(6097) :927, Aug. 2012. doi:[10.1126/science.1203601](https://doi.org/10.1126/science.1203601).
- R. Giuffrida, M. Miceli, D. Caprioli, A. Decourchelle, J. Vink, S. Orlando, F. Bocchino, E. Greco, and G. Peres. The supernova remnant SN 1006 as a Galactic particle accelerator. *Nature Communications*, 13 :5098, Aug. 2022. doi:[10.1038/s41467-022-32781-4](https://doi.org/10.1038/s41467-022-32781-4).
- R. Glas, H. T. Janka, T. Melson, G. Stockinger, and O. Just. Effects of LESA in Three-dimensional Supernova Simulations with Multidimensional and Ray-by-ray-plus Neutrino Transport. *The Astrophysical Journal*, 881(1) :36, Aug. 2019a. doi:[10.3847/1538-4357/ab275c](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab275c).
- R. Glas, O. Just, H. T. Janka, and M. Obergaulinger. Three-dimensional Core-collapse Supernova Simulations with Multidimensional Neutrino Transport Compared to the Ray-by-ray-plus Approximation. *The Astrophysical Journal*, 873(1) :45, Mar. 2019b. doi:[10.3847/1538-4357/ab0423](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab0423).
- R. Glebocki and P. Gnacinski. VizieR Online Data Catalog : Catalog of Stellar Rotational Velocities (Glebocki+ 2005). *VizieR Online Data Catalog*, art. III/244, Mar. 2005.
- M. Gogilashvili and J. W. Murphy. A force explosion condition for spherically symmetric core-collapse supernovae. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 515(2) :1610–1623, Sept. 2022. doi:[10.1093/mnras/stac1811](https://doi.org/10.1093/mnras/stac1811).
- S. Goriely, A. Bauswein, and H.-T. Janka. r-process Nucleosynthesis in Dynamically Ejected Matter of Neutron Star Mergers. *The Astrophysical Journal Letters*, 738(2) :L32, Sept. 2011. doi:[10.1088/2041-8205/738/2/L32](https://doi.org/10.1088/2041-8205/738/2/L32).
- O. Graur, F. B. Bianco, and M. Modjaz. A unified explanation for the supernova rate-galaxy mass dependence based on supernovae detected in Sloan galaxy spectra. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 450(1) :905–925, June 2015. doi:[10.1093/mnras/stv713](https://doi.org/10.1093/mnras/stv713).
- B. W. Grefenstette, F. A. Harrison, S. E. Boggs, S. P. Reynolds, C. L. Fryer, K. K. Madsen, D. R. Wik, A. Zoglauer, C. I. Ellinger, D. M. Alexander, H. An, D. Barret, F. E. Christensen, W. W. Craig, K. Forster, P. Giommi, C. J. Hailey, A. Hornstrup, V. M. Kaspi, T. Kitaguchi, J. E. Koglin, P. H. Mao, H. Miyasaka, K. Mori, M. Perri, M. J. Pivovarov, S. Puccetti, V. Rana, D. Stern, N. J. Westergaard, and W. W. Zhang. Asymmetries in core-collapse supernovae from maps of radioactive ^{44}Ti in Cassiopeia A. *Nature*, 506(7488) :339–342, Feb. 2014. doi:[10.1038/nature12997](https://doi.org/10.1038/nature12997).
- J. Guilet and R. Fernández. Angular momentum redistribution by SASI spiral modes and consequences for neutron star spins. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 441(3) :2782–2798, July 2014. doi:[10.1093/mnras/stu718](https://doi.org/10.1093/mnras/stu718).

- J. Guilet and T. Foglizzo. Toward a Magnetohydrodynamic Theory of the Stationary Accretion Shock Instability : Toy Model of the Advective-Acoustic Cycle in a Magnetized Flow. *The Astrophysical Journal*, 711 :99–110, Mar. 2010. doi:[10.1088/0004-637X/711/1/99](https://doi.org/10.1088/0004-637X/711/1/99).
- J. Guilet and T. Foglizzo. On the linear growth mechanism driving the standing accretion shock instability. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 421(1) :546–560, Mar. 2012. doi:[10.1111/j.1365-2966.2012.20333.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.20333.x).
- J. Guilet, J. Sato, and T. Foglizzo. The Saturation of SASI by Parasitic Instabilities. *The Astrophysical Journal*, 713 :1350–1362, Apr. 2010. doi:[10.1088/0004-637X/713/2/1350](https://doi.org/10.1088/0004-637X/713/2/1350).
- J. Guilet, T. Foglizzo, and S. Fromang. Dynamics of an Alfvén Surface in Core Collapse Supernovae. *The Astrophysical Journal*, 729 :71, Mar. 2011. doi:[10.1088/0004-637X/729/1/71](https://doi.org/10.1088/0004-637X/729/1/71).
- J. Guilet, A. Reboul-Salze, R. Raynaud, M. Bugli, and B. Gallet. MRI-driven dynamo at very high magnetic Prandtl numbers. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 516 (3) :4346–4353, Nov. 2022. doi:[10.1093/mnras/stac2499](https://doi.org/10.1093/mnras/stac2499).
- F. Hanke, B. Müller, A. Wongwathanarat, A. Marek, and H.-T. Janka. SASI Activity in Three-dimensional Neutrino-hydrodynamics Simulations of Supernova Cores. *The Astrophysical Journal*, 770(1) :66, June 2013. doi:[10.1088/0004-637X/770/1/66](https://doi.org/10.1088/0004-637X/770/1/66).
- A. Heger and S. E. Woosley. The Nucleosynthetic Signature of Population III. *The Astrophysical Journal*, 567(1) :532–543, Mar. 2002. doi:[10.1086/338487](https://doi.org/10.1086/338487).
- A. Heger, N. Langer, and S. E. Woosley. Presupernova Evolution of Rotating Massive Stars. I. Numerical Method and Evolution of the Internal Stellar Structure. *The Astrophysical Journal*, 528(1) :368–396, Jan. 2000. doi:[10.1086/308158](https://doi.org/10.1086/308158).
- A. Heger, S. E. Woosley, and H. C. Spruit. Presupernova Evolution of Differentially Rotating Massive Stars Including Magnetic Fields. *The Astrophysical Journal*, 626(1) :350–363, June 2005. doi:[10.1086/429868](https://doi.org/10.1086/429868).
- M. Herant, W. Benz, and S. Colgate. Postcollapse Hydrodynamics of SN 1987A : Two-dimensional Simulations of the Early Evolution. *The Astrophysical Journal*, 395 :642, Aug. 1992. doi:[10.1086/171685](https://doi.org/10.1086/171685).
- M. Herant, W. Benz, W. R. Hix, C. L. Fryer, and S. A. Colgate. Inside the Supernova : A Powerful Convective Engine. *The Astrophysical Journal*, 435 :339, Nov. 1994. doi:[10.1086/174817](https://doi.org/10.1086/174817).
- W. Hillebrandt, K. Nomoto, and R. G. Wolff. Supernova explosions of massive stars - The mass range 8 to 10 solar masses. *Astronomy and Astrophysics*, 133(1) :175–184, Apr. 1984.
- D. Hiramatsu, D. A. Howell, S. D. Van Dyk, J. A. Goldberg, K. Maeda, T. J. Moriya, N. Tomimaga, K. Nomoto, G. Hosseinzadeh, I. Arcavi, C. McCully, J. Burke, K. A. Bostroem, S. Valenti, Y. Dong, P. J. Brown, J. E. Andrews, C. Bilinski, G. G. Williams, P. S. Smith,

- N. Smith, D. J. Sand, G. S. Anand, C. Xu, A. V. Filippenko, M. C. Bersten, G. Folatelli, P. L. Kelly, T. Noguchi, and K. Itagaki. The electron-capture origin of supernova 2018zd. *Nature Astronomy*, 5 :903–910, June 2021. doi:[10.1038/s41550-021-01384-2](https://doi.org/10.1038/s41550-021-01384-2).
- K. Hirata, T. Kajita, M. Koshiba, M. Nakahata, Y. Oyama, N. Sato, A. Suzuki, M. Takita, Y. Totsuka, T. Kifune, T. Suda, K. Takahashi, T. Tanimori, K. Miyano, M. Yamada, E. W. Beier, L. R. Feldscher, S. B. Kim, A. K. Mann, F. M. Newcomer, R. Van, W. Zhang, and B. G. Cortez. Observation of a neutrino burst from the supernova sn1987a. *Phys. Rev. Lett.*, 58 :1490–1493, Apr 1987. doi:[10.1103/PhysRevLett.58.1490](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.58.1490).
- S. Hocuk and M. Spaans. The thermodynamics of molecular cloud fragmentation. Star formation under non-Milky Way conditions. *Astronomy and Astrophysics*, 510 :A110, Feb. 2010. doi:[10.1051/0004-6361/200912236](https://doi.org/10.1051/0004-6361/200912236).
- J. C. Houck and R. A. Chevalier. Linear Stability Analysis of Spherical Accretion Flows onto Compact Objects. *The Astrophysical Journal*, 395 :592, Aug. 1992. doi:[10.1086/171679](https://doi.org/10.1086/171679).
- L. Hüdepohl, B. Müller, H. T. Janka, A. Marek, and G. G. Raffelt. Neutrino Signal of Electron-Capture Supernovae from Core Collapse to Cooling. *Physical Review Letters*, 104(25) : 251101, June 2010. doi:[10.1103/PhysRevLett.104.251101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.104.251101).
- C. Huete, E. Abdikamalov, and D. Radice. The impact of vorticity waves on the shock dynamics in core-collapse supernovae. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 475(3) : 3305–3323, Apr. 2018. doi:[10.1093/mnras/stx3360](https://doi.org/10.1093/mnras/stx3360).
- C. Inerra, S. J. Smartt, A. Jerkstrand, and et al. Super-luminous Type Ic Supernovae : Catching a Magnetar by the Tail. *The Astrophysical Journal*, 770 :128, June 2013. doi:[10.1088/0004-637X/770/2/128](https://doi.org/10.1088/0004-637X/770/2/128).
- W. Iwakami, H. Nagakura, and S. Yamada. Critical Surface for Explosions of Rotational Core-collapse Supernovae. *The Astrophysical Journal*, 793(1) :5, Sept. 2014. doi:[10.1088/0004-637X/793/1/5](https://doi.org/10.1088/0004-637X/793/1/5).
- K. Iwamoto, P. A. Mazzali, K. Nomoto, H. Umeda, T. Nakamura, F. Patat, I. J. Danziger, T. R. Young, T. Suzuki, T. Shigeyama, T. Augusteijn, V. Doublie, J. F. Gonzalez, H. Boehnhardt, J. Brewer, O. R. Hainaut, C. Lidman, B. Leibundgut, E. Cappellaro, M. Turatto, T. J. Galama, P. M. Vreeswijk, C. Kouveliotou, J. van Paradijs, E. Pian, E. Palazzi, and F. Frontera. A hypernova model for the supernova associated with the γ -ray burst of 25 April 1998. *Nature*, 395(6703) :672–674, Oct. 1998. doi:[10.1038/27155](https://doi.org/10.1038/27155).
- H. T. Janka. Conditions for shock revival by neutrino heating in core-collapse supernovae. *Astronomy and Astrophysics*, 368 :527–560, Mar. 2001. doi:[10.1051/0004-6361:20010012](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20010012).
- H.-T. Janka. Neutron Star Kicks by the Gravitational Tug-boat Mechanism in Asymmetric Supernova Explosions : Progenitor and Explosion Dependence. *The Astrophysical Journal*, 837(1) :84, Mar. 2017. doi:[10.3847/1538-4357/aa618e](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aa618e).

- H. T. Janka and E. Mueller. Neutrino heating, convection, and the mechanism of Type-II supernova explosions. *Astronomy and Astrophysics*, 306 :167, Feb. 1996.
- H. T. Janka, B. Müller, F. S. Kitaura, and R. Buras. Dynamics of shock propagation and nucleosynthesis conditions in O-Ne-Mg core supernovae. *Astronomy and Astrophysics*, 485 (1) :199–208, July 2008. doi:[10.1051/0004-6361 :20079334](https://doi.org/10.1051/0004-6361/20079334).
- H.-T. Janka, T. Melson, and A. Summa. Physics of Core-Collapse Supernovae in Three Dimensions : A Sneak Preview. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 66(1) :341–375, Oct. 2016. doi:[10.1146/annurev-nucl-102115-044747](https://doi.org/10.1146/annurev-nucl-102115-044747).
- J. A. Jawor and T. M. Tauris. Modelling spin evolution of magnetars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 509(1) :634–657, Jan. 2022. doi:[10.1093/mnras/stab2677](https://doi.org/10.1093/mnras/stab2677).
- D. J. Jeffery. The polarization spectrum of supernova 1987A interpreted in terms of shape asymmetry. *Nature*, 329(6138) :419–421, Oct. 1987. doi:[10.1038/329419a0](https://doi.org/10.1038/329419a0).
- A. Jerkstrand, A. Wongwathanarat, H. T. Janka, M. Gabler, D. Alp, R. Diehl, K. Maeda, J. Larsson, C. Fransson, A. Menon, and A. Heger. Properties of gamma-ray decay lines in 3D core-collapse supernova models, with application to SN 1987A and Cas A. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 494(2) :2471–2497, May 2020. doi:[10.1093/mnras/staa736](https://doi.org/10.1093/mnras/staa736).
- S. Johnston, G. Hobbs, S. Vigeland, M. Kramer, J. M. Weisberg, and A. G. Lyne. Evidence for alignment of the rotation and velocity vectors in pulsars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 364(4) :1397–1412, Dec. 2005. doi:[10.1111/j.1365-2966.2005.09669.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2005.09669.x).
- R. Kazeroni, J. Guilet, and T. Foglizzo. New insights on the spin-up of a neutron star during core collapse. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 456(1) :126–135, Feb. 2016. doi:[10.1093/mnras/stv2666](https://doi.org/10.1093/mnras/stv2666).
- R. Kazeroni, J. Guilet, and T. Foglizzo. Are pulsars spun up or down by SASI spiral modes? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 471(1) :914–925, Oct. 2017. doi:[10.1093/mnras/stx1566](https://doi.org/10.1093/mnras/stx1566).
- R. Kazeroni, B. K. Krueger, J. Guilet, T. Foglizzo, and D. Pomarède. The non-linear onset of neutrino-driven convection in two- and three-dimensional core-collapse supernovae. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 480(1) :261–280, Oct. 2018. doi:[10.1093/mnras/sty1742](https://doi.org/10.1093/mnras/sty1742).
- K. Kjær, B. Leibundgut, C. Fransson, A. Jerkstrand, and J. Spyromilio. The 3-D structure of SN 1987A’s inner ejecta. *Astronomy and Astrophysics*, 517 :A51, July 2010. doi:[10.1051/0004-6361/201014538](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201014538).
- K. Kotake, K. Sato, and K. Takahashi. Explosion mechanism, neutrino burst and gravitational wave in core-collapse supernovae. *Reports on Progress in Physics*, 69(4) :971–1143, Apr. 2006. doi:[10.1088/0034-4885/69/4/R03](https://doi.org/10.1088/0034-4885/69/4/R03).

- K. Kotake, N. Ohnishi, and S. Yamada. Gravitational Radiation from Standing Accretion Shock Instability in Core-Collapse Supernovae. *The Astrophysical Journal*, 655(1) :406–415, Jan. 2007. doi:[10.1086/509320](https://doi.org/10.1086/509320).
- A. Kozyreva, S. C. Yoon, and N. Langer. Explosion and nucleosynthesis of low-redshift pair-instability supernovae. *Astronomy and Astrophysics*, 566 :A146, June 2014. doi:[10.1051/0004-6361/201423641](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201423641).
- Y. Kudenko. Hyper-Kamiokande. *Journal of Instrumentation*, 15(7) :C07029, July 2020. doi:[10.1088/1748-0221/15/07/C07029](https://doi.org/10.1088/1748-0221/15/07/C07029).
- T. Kuroda, K. Kotake, and T. Takiwaki. Fully General Relativistic Simulations of Core-collapse Supernovae with an Approximate Neutrino Transport. *The Astrophysical Journal*, 755(1) : 11, Aug. 2012. doi:[10.1088/0004-637X/755/1/11](https://doi.org/10.1088/0004-637X/755/1/11).
- T. Kuroda, T. Takiwaki, and K. Kotake. Gravitational wave signatures from low-mode spiral instabilities in rapidly rotating supernova cores. *Physical Review D*, 89(4) :044011, Feb. 2014. doi:[10.1103/PhysRevD.89.044011](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.89.044011).
- T. Kuroda, K. Kotake, and T. Takiwaki. A New Gravitational-wave Signature from Standing Accretion Shock Instability in Supernovae. *The Astrophysical Journal Letters*, 829(1) :L14, Sept. 2016. doi:[10.3847/2041-8205/829/1/L14](https://doi.org/10.3847/2041-8205/829/1/L14).
- T. Kuroda, K. Kotake, K. Hayama, and T. Takiwaki. Correlated Signatures of Gravitational-wave and Neutrino Emission in Three-dimensional General-relativistic Core-collapse Supernova Simulations. *The Astrophysical Journal*, 851(1) :62, Dec. 2017. doi:[10.3847/1538-4357/aa988d](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aa988d).
- T. Kuroda, A. Arcones, T. Takiwaki, and K. Kotake. Magnetorotational Explosion of a Massive Star Supported by Neutrino Heating in General Relativistic Three-dimensional Simulations. *The Astrophysical Journal*, 896(2) :102, June 2020. doi:[10.3847/1538-4357/ab9308](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab9308).
- T. Kuroda, T. Fischer, T. Takiwaki, and K. Kotake. Core-collapse Supernova Simulations and the Formation of Neutron Stars, Hybrid Stars, and Black Holes. *The Astrophysical Journal*, 924(1) :38, Jan. 2022. doi:[10.3847/1538-4357/ac31a8](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ac31a8).
- P. Ledoux. Stellar Models with Convection and with Discontinuity of the Mean Molecular Weight. *The Astrophysical Journal*, 105 :305, Mar. 1947. doi:[10.1086/144905](https://doi.org/10.1086/144905).
- G.-X. Li, F. Wyrowski, and K. Menten. Revealing a spiral-shaped molecular cloud in our galaxy : Cloud fragmentation under rotation and gravity. *Astronomy and Astrophysics*, 598 :A96, Feb. 2017a. doi:[10.1051/0004-6361/201628251](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201628251).
- H.-B. Li, H. Jiang, X. Fan, Q. Gu, and Y. Zhang. The link between magnetic field orientations and star formation rates. *Nature Astronomy*, 1 :0158, Aug. 2017b. doi:[10.1038/s41550-017-0158](https://doi.org/10.1038/s41550-017-0158).

- L. Ma and J. Fuller. Angular momentum transport in massive stars and natal neutron star rotation rates. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 488(3) :4338–4355, Sept. 2019. doi:[10.1093/mnras/stz2009](https://doi.org/10.1093/mnras/stz2009).
- Q. A. Mabanta, J. W. Murphy, and J. C. Dolence. Convection-aided Explosions in One-dimensional Core-collapse Supernova Simulations. I. Technique and Validation. *The Astrophysical Journal*, 887(1) :43, Dec. 2019. doi:[10.3847/1538-4357/ab4bcc](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab4bcc).
- A. Maeder and G. Meynet. Stellar evolution with rotation and magnetic fields. II. General equations for the transport by Tayler-Spruit dynamo. *Astronomy and Astrophysics*, 422 : 225–237, July 2004. doi:[10.1051/0004-6361 :20034583](https://doi.org/10.1051/0004-6361/20034583).
- A. Marek and H. T. Janka. Delayed Neutrino-Driven Supernova Explosions Aided by the Standing Accretion-Shock Instability. *The Astrophysical Journal*, 694(1) :664–696, Mar. 2009. doi:[10.1088/0004-637X/694/1/664](https://doi.org/10.1088/0004-637X/694/1/664).
- Y. Masada, T. Takiwaki, and K. Kotake. Convection and Dynamo in Newly Born Neutron Stars. *The Astrophysical Journal*, 924(2) :75, Jan. 2022. doi:[10.3847/1538-4357/ac34f6](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ac34f6).
- J. Matsumoto, T. Takiwaki, K. Kotake, Y. Asahina, and H. R. Takahashi. 2D numerical study for magnetic field dependence of neutrino-driven core-collapse supernova models. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 499(3) :4174–4194, Dec. 2020. doi:[10.1093/mnras/staa3095](https://doi.org/10.1093/mnras/staa3095).
- J. Matsumoto, Y. Asahina, T. Takiwaki, K. Kotake, and H. R. Takahashi. Magnetic support for neutrino-driven explosion of 3D non-rotating core-collapse supernova models. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 516(2) :1752–1767, Oct. 2022. doi:[10.1093/mnras/stac2335](https://doi.org/10.1093/mnras/stac2335).
- B. D. Metzger, D. Giannios, T. A. Thompson, N. Bucciantini, and E. Quataert. The proto-magnetar model for gamma-ray bursts. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 413 :2031–2056, May 2011. doi:[10.1111/j.1365-2966.2011.18280.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.18280.x).
- A. Mezzacappa, A. C. Calder, S. W. Bruenn, J. M. Blondin, M. W. Guidry, M. R. Strayer, and A. S. Umar. An Investigation of Neutrino-driven Convection and the Core Collapse Supernova Mechanism Using Multigroup Neutrino Transport. *The Astrophysical Journal*, 495(2) :911–926, Mar. 1998. doi:[10.1086/305338](https://doi.org/10.1086/305338).
- A. Mezzacappa, P. Marronetti, R. E. Landfield, E. J. Lentz, K. N. Yakunin, S. W. Bruenn, W. R. Hix, O. E. B. Messer, E. Endeve, J. M. Blondin, and J. A. Harris. Gravitational-wave signal of a core-collapse supernova explosion of a 15 M_{\odot} star. , 102(2) :023027, July 2020. doi:[10.1103/PhysRevD.102.023027](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.023027).
- R. Minkowski. Spectra of Supernovae. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 53(314) :224, Aug. 1941. doi:[10.1086/125315](https://doi.org/10.1086/125315).

- J. A. Miralles, J. A. Pons, and V. Urpin. Anisotropic convection in rotating proto-neutron stars. *Astronomy and Astrophysics*, 420 :245–249, June 2004. doi:[10.1051/0004-6361 :20035924](https://doi.org/10.1051/0004-6361/20035924).
- A. Mirizzi, I. Tamborra, H. T. Janka, N. Saviano, K. Scholberg, R. Bollig, L. Hüdepohl, and S. Chakraborty. Supernova neutrinos : production, oscillations and detection. *Nuovo Cimento Rivista Serie*, 39(1-2) :1–112, Feb. 2016. doi:[10.1393/ncr/i2016-10120-8](https://doi.org/10.1393/ncr/i2016-10120-8).
- M. Mocák, C. Meakin, M. Viallet, and D. Arnett. Compressible Hydrodynamic Mean-Field Equations in Spherical Geometry and their Application to Turbulent Stellar Convection Data. *arXiv e-prints*, art. arXiv :1401.5176, Jan. 2014.
- C. J. Moore, R. H. Cole, and C. P. L. Berry. Gravitational-wave sensitivity curves. *Classical and Quantum Gravity*, 32(1) :015014, Jan. 2015. doi:[10.1088/0264-9381/32/1/015014](https://doi.org/10.1088/0264-9381/32/1/015014).
- B. Mosser, M. J. Goupil, K. Belkacem, J. P. Marques, P. G. Beck, S. Bloemen, J. De Ridder, C. Barban, S. Deheuvels, Y. Elsworth, S. Hekker, T. Kallinger, R. M. Ouazzani, M. Pinsonneault, R. Samadi, D. Stello, R. A. García, T. C. Klaus, J. Li, S. Mathur, and R. L. Morris. Spin down of the core rotation in red giants. *Astronomy and Astrophysics*, 548 :A10, Dec. 2012. doi:[10.1051/0004-6361/201220106](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201220106).
- C. D. Muhlberger, F. H. Nouri, M. D. Duez, F. Foucart, L. E. Kidder, C. D. Ott, M. A. Scheel, B. Szilágyi, and S. A. Teukolsky. Magnetic effects on the low-T $|W|$ instability in differentially rotating neutron stars. , 90(10) :104014, Nov. 2014. doi:[10.1103/PhysRevD.90.104014](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.90.104014).
- B. Müller. Hydrodynamics of core-collapse supernovae and their progenitors. *Living Reviews in Computational Astrophysics*, 6(1) :3, June 2020. doi:[10.1007/s41115-020-0008-5](https://doi.org/10.1007/s41115-020-0008-5).
- B. Müller and H. T. Janka. Non-radial instabilities and progenitor asphericities in core-collapse supernovae. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 448(3) :2141–2174, Apr. 2015. doi:[10.1093/mnras/stv101](https://doi.org/10.1093/mnras/stv101).
- B. Müller, H.-T. Janka, and A. Heger. New Two-dimensional Models of Supernova Explosions by the Neutrino-heating Mechanism : Evidence for Different Instability Regimes in Collapsing Stellar Cores. *The Astrophysical Journal*, 761(1) :72, Dec. 2012a. doi:[10.1088/0004-637X/761/1/72](https://doi.org/10.1088/0004-637X/761/1/72).
- B. Müller, H.-T. Janka, and A. Marek. A New Multi-dimensional General Relativistic Neutrino Hydrodynamics Code for Core-collapse Supernovae. II. Relativistic Explosion Models of Core-collapse Supernovae. *The Astrophysical Journal*, 756(1) :84, Sept. 2012b. doi:[10.1088/0004-637X/756/1/84](https://doi.org/10.1088/0004-637X/756/1/84).
- B. Müller, T. Melson, A. Heger, and H.-T. Janka. Supernova simulations from a 3D progenitor model - Impact of perturbations and evolution of explosion properties. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 472(1) :491–513, Nov. 2017. doi:[10.1093/mnras/stx1962](https://doi.org/10.1093/mnras/stx1962).

- J. W. Murphy and A. Burrows. Criteria for Core-Collapse Supernova Explosions by the Neutrino Mechanism. *The Astrophysical Journal*, 688(2) :1159–1175, Dec. 2008. doi:[10.1086/592214](https://doi.org/10.1086/592214).
- J. W. Murphy, C. D. Ott, and A. Burrows. A Model for Gravitational Wave Emission from Neutrino-Driven Core-Collapse Supernovae. *The Astrophysical Journal*, 707(2) :1173–1190, Dec. 2009. doi:[10.1088/0004-637X/707/2/1173](https://doi.org/10.1088/0004-637X/707/2/1173).
- J. W. Murphy, J. C. Dolence, and A. Burrows. The Dominance of Neutrino-driven Convection in Core-collapse Supernovae. *The Astrophysical Journal*, 771(1) :52, July 2013. doi:[10.1088/0004-637X/771/1/52](https://doi.org/10.1088/0004-637X/771/1/52).
- J. W. Murphy, Q. Mabanta, and J. C. Dolence. A comparison of explosion energies for simulated and observed core-collapse supernovae. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 489(1) :641–652, Oct. 2019. doi:[10.1093/mnras/stz2123](https://doi.org/10.1093/mnras/stz2123).
- B. Müller and V. Varma. A 3D simulation of a neutrino-driven supernova explosion aided by convection and magnetic fields. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 498 :L109–L113, Aug. 2020. ISSN 0035-8711. doi:[10.1093/mnras/slaa137](https://doi.org/10.1093/mnras/slaa137). URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2020MNRAS.498L.109M>.
- H. Nagakura, A. Burrows, D. Radice, and D. Vartanyan. A systematic study of proto-neutron star convection in three-dimensional core-collapse supernova simulations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 492(4) :5764–5779, Mar. 2020. doi:[10.1093/mnras/staa261](https://doi.org/10.1093/mnras/staa261).
- S. Nagataki, M.-a. Hashimoto, K. Sato, S. Yamada, and Y. S. Mochizuki. The High Ratio of $^{44}\text{Ti}/^{56}\text{Ni}$ in Cassiopeia A and the Axisymmetric Collapse-driven Supernova Explosion. *The Astrophysical Journal Letters*, 492(1) :L45–L48, Jan. 1998. doi:[10.1086/311089](https://doi.org/10.1086/311089).
- K. Nakamura, T. Kuroda, T. Takiwaki, and K. Kotake. Impacts of Rotation on Three-dimensional Hydrodynamics of Core-collapse Supernovae. *The Astrophysical Journal*, 793 (1) :45, Sept. 2014. doi:[10.1088/0004-637X/793/1/45](https://doi.org/10.1088/0004-637X/793/1/45).
- K. Nakamura, T. Takiwaki, and K. Kotake. Long-term simulations of multi-dimensional core-collapse supernovae : Implications for neutron star kicks. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 71(5) :98, Oct. 2019. doi:[10.1093/pasj/psz080](https://doi.org/10.1093/pasj/psz080).
- C. Y. Ng and V. M. Kaspi. High Magnetic Field Rotation-powered Pulsars. In E. Göğüş, T. Belloni, and Ü. Ertan, editors, *AstroPhysics of Neutron Stars 2010 : A Conference in Honor of M. Ali Alpar*, volume 1379 of *American Institute of Physics Conference Series*, pages 60–69, Sept. 2011. doi:[10.1063/1.3629486](https://doi.org/10.1063/1.3629486).
- M. Nicholl, S. J. Smartt, A. Jerkstrand, C. Inserra, M. McCrum, R. Kotak, M. Fraser, D. Wright, T. W. Chen, K. Smith, D. R. Young, S. A. Sim, S. Valenti, D. A. Howell, F. Bresolin, R. P. Kudritzki, J. L. Tonry, M. E. Huber, A. Rest, A. Pastorello, L. Tomasella, E. Cappellaro, S. Benetti, S. Mattila, E. Kankare, T. Kangas, G. Leloudas, J. Sollerman, F. Taddia, E. Berger, R. Chornock, G. Narayan, C. W. Stubbs, R. J. Foley, R. Lunnan, A. Soderberg, N. Sanders,

- D. Milisavljevic, R. Margutti, R. P. Kirshner, N. Elias-Rosa, A. Morales-Garoffolo, S. Taubenberger, M. T. Botticella, S. Gezari, Y. Urata, S. Rodney, A. G. Riess, D. Scolnic, W. M. Wood-Vasey, W. S. Burgett, K. Chambers, H. A. Flewelling, E. A. Magnier, N. Kaiser, N. Metcalfe, J. Morgan, P. A. Price, W. Sweeney, and C. Waters. Slowly fading superluminous supernovae that are not pair-instability explosions. *Nature*, 502(7471) :346–349, Oct. 2013. doi:[10.1038/nature12569](https://doi.org/10.1038/nature12569).
- A. Noutsos, D. H. F. M. Schnitzeler, E. F. Keane, M. Kramer, and S. Johnston. Pulsar spin-velocity alignment : kinematic ages, birth periods and braking indices. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 430(3) :2281–2301, Apr. 2013. doi:[10.1093/mnras/stt047](https://doi.org/10.1093/mnras/stt047).
- M. Obergaulinger, H. T. Janka, and M. A. Aloy. Magnetic field amplification and magnetically supported explosions of collapsing, non-rotating stellar cores. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 445(3) :3169–3199, Dec. 2014. doi:[10.1093/mnras/stu1969](https://doi.org/10.1093/mnras/stu1969).
- S. Orlando, A. Wongwathanarat, H. T. Janka, M. Miceli, M. Ono, S. Nagataki, F. Bocchino, and G. Peres. The fully developed remnant of a neutrino-driven supernova. Evolution of ejecta structure and asymmetries in SNR Cassiopeia A. *Astronomy and Astrophysics*, 645 : A66, Jan. 2021. doi:[10.1051/0004-6361/202039335](https://doi.org/10.1051/0004-6361/202039335).
- J. P. Ostriker and J. L. Tassoul. On the Oscillations and Stability of Rotating Stellar Models. II. Rapidly Rotating White Dwarfs. *The Astrophysical Journal*, 155 :987, Mar. 1969. doi:[10.1086/149927](https://doi.org/10.1086/149927).
- C. D. Ott, S. Ou, J. E. Tohline, and A. Burrows. One-armed Spiral Instability in a Low-T/|W| Postbounce Supernova Core. *The Astrophysical Journal Letters*, 625(2) :L119–L122, June 2005. doi:[10.1086/431305](https://doi.org/10.1086/431305).
- C. D. Ott, A. Burrows, L. Dessart, and E. Livne. Two-Dimensional Multiangle, Multigroup Neutrino Radiation-Hydrodynamic Simulations of Postbounce Supernova Cores. *The Astrophysical Journal*, 685(2) :1069–1088, Oct. 2008. doi:[10.1086/591440](https://doi.org/10.1086/591440).
- C. D. Ott, E. Abdikamalov, P. Mösta, R. Haas, S. Drasco, E. P. O’Connor, C. Reisswig, C. A. Meakin, and E. Schnetter. General-relativistic Simulations of Three-dimensional Core-collapse Supernovae. *The Astrophysical Journal*, 768(2) :115, May 2013. doi:[10.1088/0004-637X/768/2/115](https://doi.org/10.1088/0004-637X/768/2/115).
- R. M. Ouazzani, J. P. Marques, M. J. Goupil, S. Christophe, V. Antoci, S. J. A. J. Salmon, and J. Ballot. γ Doradus stars as a test of angular momentum transport models. *Astronomy and Astrophysics*, 626 :A121, June 2019. doi:[10.1051/0004-6361/201832607](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201832607).
- K.-C. Pan, M. Liebendörfer, S. M. Couch, and F.-K. Thielemann. Stellar Mass Black Hole Formation and Multimessenger Signals from Three-dimensional Rotating Core-collapse Supernova Simulations. *The Astrophysical Journal*, 914(2) :140, June 2021. doi:[10.3847/1538-4357/abfb05](https://doi.org/10.3847/1538-4357/abfb05).

- C. Papaliolios, M. Karovska, L. Koechlin, P. Nisenson, C. Standley, and S. Heathcote. Asymmetry of the envelope of supernova 1987A. *Nature*, 338(6216) :565–566, Apr. 1989. doi:[10.1038/338565a0](https://doi.org/10.1038/338565a0).
- A. Passamonti and N. Andersson. The intimate relation between the low T/W instability and the corotation point. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 446(1) :555–565, Jan. 2015. doi:[10.1093/mnras/stu2062](https://doi.org/10.1093/mnras/stu2062).
- M. G. Pedersen. Internal Rotation and Inclinations of Slowly Pulsating B Stars : Evidence of Interior Angular Momentum Transport. *The Astrophysical Journal*, 940(1) :49, Nov. 2022. doi:[10.3847/1538-4357/ac947f](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ac947f).
- S. B. Popov and R. Turolla. Initial spin periods of neutron stars in supernova remnants. *Astrophysics and Space Science*, 341(2) :457–464, Oct. 2012. doi:[10.1007/s10509-012-1100-z](https://doi.org/10.1007/s10509-012-1100-z).
- J. Powell and B. Müller. Gravitational wave emission from 3D explosion models of core-collapse supernovae with low and normal explosion energies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 487(1) :1178–1190, July 2019. doi:[10.1093/mnras/stz1304](https://doi.org/10.1093/mnras/stz1304).
- J. Powell and B. Müller. Three-dimensional core-collapse supernova simulations of massive and rotating progenitors. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 494(4) :4665–4675, June 2020. doi:[10.1093/mnras/staa1048](https://doi.org/10.1093/mnras/staa1048).
- T. Prasanna, M. S. B. Coleman, M. J. Raives, and T. A. Thompson. The early evolution of magnetar rotation - I. Slowly rotating 'normal' magnetars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 517(2) :3008–3023, Dec. 2022. doi:[10.1093/mnras/stac2651](https://doi.org/10.1093/mnras/stac2651).
- D. Radice, C. D. Ott, E. Abdikamalov, S. M. Couch, R. Haas, and E. Schnetter. Neutrino-driven Convection in Core-collapse Supernovae : High-resolution Simulations. *The Astrophysical Journal*, 820(1) :76, Mar. 2016. doi:[10.3847/0004-637X/820/1/76](https://doi.org/10.3847/0004-637X/820/1/76).
- D. Radice, V. Morozova, A. Burrows, D. Vartanyan, and H. Nagakura. Characterizing the Gravitational Wave Signal from Core-collapse Supernovae. *The Astrophysical Journal Letters*, 876(1) :L9, May 2019. doi:[10.3847/2041-8213/ab191a](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab191a).
- N. Rahman, H. T. Janka, G. Stockinger, and S. E. Woosley. Pulsational pair-instability supernovae : gravitational collapse, black hole formation, and beyond. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 512(3) :4503–4540, May 2022. doi:[10.1093/mnras/stac758](https://doi.org/10.1093/mnras/stac758).
- M. Rampp, E. Mueller, and M. Ruffert. Simulations of non-axisymmetric rotational core collapse. *Astronomy and Astrophysics*, 332 :969–983, Apr. 1998.
- R. Raynaud, J. Guilet, H.-T. Janka, and T. Gastine. Magnetar formation through a convective dynamo in protoneutron stars. *Science Advances*, 6(11) :eaay2732, Mar. 2020. doi:[10.1126/sciadv.aay2732](https://doi.org/10.1126/sciadv.aay2732).

- A. Reboul-Salze, J. Guilet, R. Raynaud, and M. Bugli. A global model of the magnetorotational instability in protoneutron stars. *Astronomy and Astrophysics*, 645 :A109, Jan. 2021. doi:[10.1051/0004-6361/202038369](https://doi.org/10.1051/0004-6361/202038369).
- A. Reboul-Salze, J. Guilet, R. Raynaud, and M. Bugli. MRI-driven $\alpha\Omega$ dynamos in protoneutron stars. *Astronomy and Astrophysics*, 667 :A94, Nov. 2022. doi:[10.1051/0004-6361/202142368](https://doi.org/10.1051/0004-6361/202142368).
- M. Rieutord. Linear theory of rotating fluids using spherical harmonics part I : Steady flows. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 39(3) :163–182, Jan. 1987. doi:[10.1080/03091928708208811](https://doi.org/10.1080/03091928708208811).
- L. F. Roberts, S. E. Woosley, and R. D. Hoffman. Integrated Nucleosynthesis in Neutrino-driven Winds. *The Astrophysical Journal*, 722(1) :954–967, Oct. 2010. doi:[10.1088/0004-637X/722/1/954](https://doi.org/10.1088/0004-637X/722/1/954).
- L. F. Roberts, G. Shen, V. Cirigliano, J. A. Pons, S. Reddy, and S. E. Woosley. Protoneutron Star Cooling with Convection : The Effect of the Symmetry Energy. *Physical Review Letters*, 108 (6) :061103, Feb. 2012. doi:[10.1103/PhysRevLett.108.061103](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.061103). [arXiv.1112.0335](https://arxiv.org/abs/1112.0335).
- V. Roma, J. Powell, I. S. Heng, and R. Frey. Astrophysics with core-collapse supernova gravitational wave signals in the next generation of gravitational wave detectors. , 99(6) :063018, Mar. 2019. doi:[10.1103/PhysRevD.99.063018](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.99.063018).
- H. T. Rossby. A study of Benard convection with and without rotation. *Journal of Fluid Mechanics*, 36 :309–335, Jan. 1969. doi:[10.1017/S0022112069001674](https://doi.org/10.1017/S0022112069001674).
- S. Rosswog. Neutron Star Mergers as r-Process Sources. In *Nuclei in the Cosmos XV*, volume 219, pages 105–110, Aug. 2019. doi:[10.1007/978-3-030-13876-9_17](https://doi.org/10.1007/978-3-030-13876-9_17).
- M. Saijo and S. Yoshida. Low $T/|W|$ dynamical instability in differentially rotating stars : diagnosis with canonical angular momentum. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 368(3) :1429–1442, May 2006. doi:[10.1111/j.1365-2966.2006.10229.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2006.10229.x).
- M. Saijo, T. W. Baumgarte, and S. L. Shapiro. One-armed Spiral Instability in Differentially Rotating Stars. *The Astrophysical Journal*, 595(1) :352–364, Sept. 2003. doi:[10.1086/377334](https://doi.org/10.1086/377334).
- E. E. Salpeter. The Luminosity Function and Stellar Evolution. *The Astrophysical Journal*, 121 :161, Jan. 1955. doi:[10.1086/145971](https://doi.org/10.1086/145971).
- H. Sana, S. E. de Mink, A. de Koter, N. Langer, C. J. Evans, M. Gieles, E. Gosset, R. G. Izzard, J. B. Le Bouquin, and F. R. N. Schneider. Binary Interaction Dominates the Evolution of Massive Stars. *Science*, 337(6093) :444, July 2012. doi:[10.1126/science.1223344](https://doi.org/10.1126/science.1223344).

- L. Scheck, K. Kifonidis, H. T. Janka, and E. Müller. Multidimensional supernova simulations with approximative neutrino transport. I. Neutron star kicks and the anisotropy of neutrino-driven explosions in two spatial dimensions. *Astronomy and Astrophysics*, 457(3) :963–986, Oct. 2006. doi:[10.1051/0004-6361 :20064855](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20064855).
- L. Scheck, H. T. Janka, T. Foglizzo, and K. Kifonidis. Multidimensional supernova simulations with approximative neutrino transport. II. Convection and the advective-acoustic cycle in the supernova core. *Astronomy and Astrophysics*, 477(3) :931–952, Jan. 2008. doi:[10.1051/0004-6361 :20077701](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20077701).
- K. Schwarzschild. On the equilibrium of the Sun's atmosphere. *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Klasse*, 195 :41–53, Jan. 1906.
- S. Shankar, P. Mösta, J. Barnes, P. C. Duffell, and D. Kasen. Proto-magnetar jets as central engines for broad-lined Type Ic supernovae. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 508(4) :5390–5401, Dec. 2021. doi:[10.1093/mnras/stab2964](https://doi.org/10.1093/mnras/stab2964).
- S. Shibagaki, T. Kuroda, K. Kotake, and T. Takiwaki. A new gravitational-wave signature of low- $T/|W|$ instability in rapidly rotating stellar core collapse. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 493(1) :L138–L142, Mar. 2020. doi:[10.1093/mnras/slaa021](https://doi.org/10.1093/mnras/slaa021).
- S. Shibagaki, T. Kuroda, K. Kotake, and T. Takiwaki. Characteristic time variability of gravitational-wave and neutrino signals from three-dimensional simulations of non-rotating and rapidly rotating stellar core collapse. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 502(2) :3066–3084, Apr. 2021. doi:[10.1093/mnras/stab228](https://doi.org/10.1093/mnras/stab228).
- M. Shibata, T. W. Baumgarte, and S. L. Shapiro. The Bar-Mode Instability in Differentially Rotating Neutron Stars : Simulations in Full General Relativity. *The Astrophysical Journal*, 542(1) :453–463, Oct. 2000. doi:[10.1086/309525](https://doi.org/10.1086/309525).
- M. Shibata, S. Karino, and Y. Eriguchi. Dynamical instability of differentially rotating stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 334(2) :L27–L31, Aug. 2002. doi:[10.1046/j.1365-8711.2002.05724.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2002.05724.x).
- H. Sotani and T. Takiwaki. Accuracy of the relativistic Cowling approximation in protoneutron star asteroseismology. , 102(6) :063025, Sept. 2020. doi:[10.1103/PhysRevD.102.063025](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.063025).
- H. Sotani, T. Kuroda, T. Takiwaki, and K. Kotake. Probing mass-radius relation of protoneutron stars from gravitational-wave asteroseismology. , 96(6) :063005, Sept. 2017. doi:[10.1103/PhysRevD.96.063005](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.063005).
- H. Sotani, T. Takiwaki, and H. Togashi. Universal relation for supernova gravitational waves. , 104(12) :123009, Dec. 2021. doi:[10.1103/PhysRevD.104.123009](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.104.123009).
- H. C. Spruit. Dynamo action by differential rotation in a stably stratified stellar interior. *Astronomy and Astrophysics*, 381 :923–932, Jan. 2002. doi:[10.1051/0004-6361 :20011465](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20011465).

- D. H. Staelin and I. Reifenstein, Edward C. Pulsating Radio Sources near the Crab Nebula. *Science*, 162(3861) :1481–1483, Dec. 1968. doi:[10.1126/science.162.3861.1481](https://doi.org/10.1126/science.162.3861.1481).
- A. W. Steiner, M. Hempel, and T. Fischer. Core-collapse Supernova Equations of State Based on Neutron Star Observations. *The Astrophysical Journal*, 774(1) :17, Sept. 2013. doi:[10.1088/0004-637X/774/1/17](https://doi.org/10.1088/0004-637X/774/1/17).
- A. Summa, H.-T. Janka, T. Melson, and A. Marek. Rotation-supported Neutrino-driven Supernova Explosions in Three Dimensions and the Critical Luminosity Condition. *The Astrophysical Journal*, 852(1) :28, Jan. 2018. doi:[10.3847/1538-4357/aa9ce8](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aa9ce8).
- Y. Suwa, K. Kotake, T. Takiwaki, S. C. Whitehouse, M. LiebendÄ-rfer, and K. Sato. Explosion Geometry of a Rotating $13M_{\odot}$ Star Driven by the SASI-Aided Neutrino-Heating Supernova Mechanism. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 62(6) :L49–L53, Dec. 2010. doi:[10.1093/pasj/62.6.L49](https://doi.org/10.1093/pasj/62.6.L49).
- Y. Suwa, S. Yamada, T. Takiwaki, and K. Kotake. The Criterion of Supernova Explosion Revisited : The Mass Accretion History. *The Astrophysical Journal*, 816(1) :43, Jan. 2016. doi:[10.3847/0004-637X/816/1/43](https://doi.org/10.3847/0004-637X/816/1/43).
- Y. Suwa, K. Sumiyoshi, K. Nakazato, Y. Takahira, Y. Koshio, M. Mori, and R. A. Wendell. Observing Supernova Neutrino Light Curves with Super-Kamiokande : Expected Event Number over 10 s. *The Astrophysical Journal*, 881(2) :139, Aug. 2019. doi:[10.3847/1538-4357/ab2e05](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab2e05).
- A. Suzuki and M. Koshiya. History of neutrino telescope/astronomy. *Experimental Astronomy*, 25(1-3) :209–224, Aug. 2009. doi:[10.1007/s10686-009-9162-9](https://doi.org/10.1007/s10686-009-9162-9).
- M. Szczepańczyk, J. Antelis, M. Benjamin, M. Cavaglià, D. Gondek-Rosińska, T. Hansen, S. Klimenko, M. Morales, C. Moreno, S. Mukherjee, G. Nurbek, J. Powell, N. Singh, S. Sitmukhambetov, P. Szewczyk, O. Valdez, G. Vedovato, J. Westhouse, M. Zanolin, and Y. Zheng. Detecting and reconstructing gravitational waves from the next galactic core-collapse supernova in the advanced detector era. *Physical Review D*, 104, 11 2021. doi:[10.1103/PhysRevD.104.102002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.104.102002).
- T. Takiwaki, K. Kotake, and K. Sato. Special Relativistic Simulations of Magnetically Dominated Jets in Collapsing Massive Stars. *The Astrophysical Journal*, 691 :1360–1379, Feb. 2009. doi:[10.1088/0004-637X/691/2/1360](https://doi.org/10.1088/0004-637X/691/2/1360).
- T. Takiwaki, K. Kotake, and Y. Suwa. A Comparison of Two- and Three-dimensional Neutrino-hydrodynamics Simulations of Core-collapse Supernovae. *The Astrophysical Journal*, 786 (2) :83, May 2014. doi:[10.1088/0004-637X/786/2/83](https://doi.org/10.1088/0004-637X/786/2/83).
- T. Takiwaki, K. Kotake, and Y. Suwa. Three-dimensional simulations of rapidly rotating core-collapse supernovae : finding a neutrino-powered explosion aided by non-axisymmetric

- flows. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 461(1) :L112–L116, Sept. 2016. doi:[10.1093/mnras/slw105](https://doi.org/10.1093/mnras/slw105).
- T. Takiwaki, K. Kotake, and T. Foglizzo. Insights into non-axisymmetric instabilities in three-dimensional rotating supernova models with neutrino and gravitational-wave signatures. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 508(1) :966–985, Nov. 2021. doi:[10.1093/mnras/stab2607](https://doi.org/10.1093/mnras/stab2607).
- I. Tamborra, F. Hanke, B. Müller, H.-T. Janka, and G. Raffelt. Neutrino Signature of Supernova Hydrodynamical Instabilities in Three Dimensions. *Physical Review Letters*, 111(12) :121104, Sept. 2013. doi:[10.1103/PhysRevLett.111.121104](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.121104).
- I. Tamborra, F. Hanke, H.-T. Janka, B. Müller, G. G. Raffelt, and A. Marek. Self-sustained Asymmetry of Lepton-number Emission : A New Phenomenon during the Supernova Shock-accretion Phase in Three Dimensions. *The Astrophysical Journal*, 792(2) :96, Sept. 2014. doi:[10.1088/0004-637X/792/2/96](https://doi.org/10.1088/0004-637X/792/2/96).
- N. Tetzlaff, R. Neuhäuser, and M. M. Hohle. The origin of the Guitar pulsar. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 400(1) :L99–L102, Nov. 2009. doi:[10.1111/j.1745-3933.2009.00774.x](https://doi.org/10.1111/j.1745-3933.2009.00774.x).
- N. Tetzlaff, R. Neuhäuser, M. M. Hohle, and G. Maciejewski. Identifying birth places of young isolated neutron stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 402(4) :2369–2387, Mar. 2010. doi:[10.1111/j.1365-2966.2009.16093.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.16093.x).
- C. Thompson and R. C. Duncan. Neutron star dynamos and the origins of pulsar magnetism. *The Astrophysical Journal*, 408 :194–217, May 1993. doi:[10.1086/172580](https://doi.org/10.1086/172580).
- T. A. Thompson, E. Quataert, and A. Burrows. Viscosity and Rotation in Core-Collapse Supernovae. *The Astrophysical Journal*, 620(2) :861–877, Feb. 2005. doi:[10.1086/427177](https://doi.org/10.1086/427177).
- A. Tolstov, K. Nomoto, S. Blinnikov, E. Sorokina, R. Quimby, and P. Baklanov. Pulsational Pair-instability Model for Superluminous Supernova PTF12dam : Interaction and Radioactive Decay. *The Astrophysical Journal*, 835(2) :266, Feb. 2017. doi:[10.3847/1538-4357/835/2/266](https://doi.org/10.3847/1538-4357/835/2/266).
- A. Torres-Forné, P. Cerdá-Durán, A. Passamonti, and J. A. Font. Towards asteroseismology of core-collapse supernovae with gravitational-wave observations - I. Cowling approximation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 474(4) :5272–5286, Mar. 2018. doi:[10.1093/mnras/stx3067](https://doi.org/10.1093/mnras/stx3067).
- A. Torres-Forné, P. Cerdá-Durán, M. Obergaulinger, B. Müller, and J. A. Font. Universal Relations for Gravitational-Wave Asteroseismology of Protoneutron Stars. *Physical Review Letters*, 123(5) :051102, Aug. 2019a. doi:[10.1103/PhysRevLett.123.051102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.051102).

- A. Torres-Forné, P. Cerdá-Durán, A. Passamonti, M. Obergaulinger, and J. A. Font. Towards asteroseismology of core-collapse supernovae with gravitational wave observations - II. Inclusion of space-time perturbations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 482(3) :3967–3988, Jan. 2019b. doi:[10.1093/mnras/sty2854](https://doi.org/10.1093/mnras/sty2854).
- V. Varma, B. Müller, and F. R. N. Schneider. 3D simulations of strongly magnetized non-rotating supernovae : explosion dynamics and remnant properties. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 518(3) :3622–3636, Jan. 2023. doi:[10.1093/mnras/stac3247](https://doi.org/10.1093/mnras/stac3247).
- D. Vartanyan, A. Burrows, and D. Radice. Temporal and angular variations of 3D core-collapse supernova emissions and their physical correlations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 489(2) :2227–2246, Oct. 2019. doi:[10.1093/mnras/stz2307](https://doi.org/10.1093/mnras/stz2307).
- L. Walk, I. Tamborra, H.-T. Janka, and A. Summa. Effects of the standing accretion-shock instability and the lepton-emission self-sustained asymmetry in the neutrino emission of rotating supernovae. , 100(6) :063018, Sept. 2019. doi:[10.1103/PhysRevD.100.063018](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.100.063018).
- L. Walk, T. Foglizzo, and I. Tamborra. Stalled Accretion Shock Instability in the Collapse of a Rotating Stellar Core. *arXiv e-prints*, art. arXiv :2212.07467, Dec. 2022.
- C. Wang, D. Lai, and J. L. Han. Spin-Kick Correlation in Neutron Stars : Alignment Conditions and Implications. *The Astrophysical Journal*, 656(1) :399–407, Feb. 2007. doi:[10.1086/510352](https://doi.org/10.1086/510352).
- A. L. Watts, N. Andersson, and D. I. Jones. The Nature of Low $T/|W|$ Dynamical Instabilities in Differentially Rotating Stars. *The Astrophysical Journal Letters*, 618(1) :L37–L40, Jan. 2005a. doi:[10.1086/427653](https://doi.org/10.1086/427653).
- A. L. Watts, N. Andersson, and D. I. Jones. The Nature of Low $T/|W|$ Dynamical Instabilities in Differentially Rotating Stars. *The Astrophysical Journal Letters*, 618(1) :L37–L40, Jan. 2005b. doi:[10.1086/427653](https://doi.org/10.1086/427653).
- M. Wedi, D. P. van Gils, E. Bodenschatz, and S. Weiss. Rotating turbulent thermal convection at very large rayleigh numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 912 :A30, 2021. doi:[10.1017/jfm.2020.1149](https://doi.org/10.1017/jfm.2020.1149).
- J. R. Westernacher-Schneider. Consistent perturbative modeling of pseudo-newtonian core-collapse supernova simulations. *Phys. Rev. D*, 101 :083021, Apr 2020. doi:[10.1103/PhysRevD.101.083021](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.101.083021). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.101.083021>.
- J. R. Westernacher-Schneider, E. O'Connor, E. O'Sullivan, I. Tamborra, M.-R. Wu, S. M. Couch, and F. Malmenbeck. Multimessenger asteroseismology of core-collapse supernovae. *Phys. Rev. D*, 100 :123009, Dec 2019. doi:[10.1103/PhysRevD.100.123009](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.100.123009). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.100.123009>.

- A. Wongwathanarat, H.-T. Janka, E. Müller, E. Pllumbi, and S. Wanajo. Production and Distribution of ^{44}Ti and ^{56}Ni in a Three-dimensional Supernova Model Resembling Cassiopeia A. *The Astrophysical Journal*, 842(1) :13, June 2017. doi:[10.3847/1538-4357/aa72de](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aa72de).
- S. E. Woosley. Gamma-ray bursts from stellar mass accretion disks around black holes. *The Astrophysical Journal*, 405 :273–277, Mar. 1993. doi:[10.1086/172359](https://doi.org/10.1086/172359).
- S. E. Woosley. Bright Supernovae from Magnetar Birth. *The Astrophysical Journal Letters*, 719 :L204–L207, Aug. 2010. doi:[10.1088/2041-8205/719/2/L204](https://doi.org/10.1088/2041-8205/719/2/L204).
- S. E. Woosley. Pulsational Pair-instability Supernovae. *The Astrophysical Journal*, 836(2) : 244, Feb. 2017. doi:[10.3847/1538-4357/836/2/244](https://doi.org/10.3847/1538-4357/836/2/244).
- S. E. Woosley, A. Heger, and T. A. Weaver. The evolution and explosion of massive stars. *Reviews of Modern Physics*, 74(4) :1015–1071, Nov. 2002. doi:[10.1103/RevModPhys.74.1015](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.74.1015).
- T. Yamasaki and T. Foglizzo. Effect of Rotation on the Stability of a Stalled Cylindrical Shock and Its Consequences for Core-Collapse Supernovae. *The Astrophysical Journal*, 679(1) : 607–615, May 2008. doi:[10.1086/587732](https://doi.org/10.1086/587732).
- T. Yamasaki and S. Yamada. Stability of the Accretion Flows with Stalled Shocks in Core-Collapse Supernovae. In S. Immler, K. Weiler, and R. McCray, editors, *Supernova 1987A : 20 Years After : Supernovae and Gamma-Ray Bursters*, volume 937 of *American Institute of Physics Conference Series*, pages 344–348, Oct. 2007. doi:[10.1063/1.3682927](https://doi.org/10.1063/1.3682927).
- H. Yasin, S. Schäfer, A. Arcones, and A. Schwenk. Equation of State Effects in Core-Collapse Supernovae. *Physical Review Letters*, 124(9) :092701, Mar. 2020. doi:[10.1103/PhysRevLett.124.092701](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.124.092701).
- S. Yoshida and M. Saijo. On the role of corotation radius in the low T/W dynamical instability of differentially rotating stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 466(1) : 600–612, Apr. 2017. doi:[10.1093/mnras/stw3064](https://doi.org/10.1093/mnras/stw3064).