



HAL
open science

Intersection Algébrique sur les surfaces à petits carreaux

Smail Cheboui

► **To cite this version:**

Smail Cheboui. Intersection Algébrique sur les surfaces à petits carreaux. Géométrie algébrique [math.AG]. Université Montpellier; Université des Sciences et de la Technologie Houari-Boumediène (Algérie), 2021. Français. NNT: 2021MONT006 . tel-04324674

HAL Id: tel-04324674

<https://theses.hal.science/tel-04324674v1>

Submitted on 5 Dec 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

En Mathématiques

École doctorale : Information Structures Systèmes

Unité de recherche : Institut Montpellierain Alexander Grothendieck

En partenariat international avec l'université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, ALGÉRIE

INTERSECTION ALGEBRIQUE SUR LES SURFACES À PETITS CARREAUX

Présentée par Smail CHEBOUI

Le 25 / 05 / 2021

Sous la direction de Daniel MASSART
et Arezki KESSI

Devant le jury composé de

Mme. Tounsia BENZEKRI	Professeur	USTHB	Présidente
M. Daniel MASSART	Maître de conférence	Univ. Montpellier	Directeur de thèse
M. Arezki KESSI	Professeur	USTHB	Directeur de thèse
M. Pascal HUBERT	Professeur	Univ. Aix-Marseille	Rapporteur
M. Athanase PAPADOPOULOS	Directeur de recherche	CNRS, Univ. Strasbourg	Rapporteur
M. Ivan BABENKO	Professeur	Univ. Montpellier	Examineur
M. Mohamed MORSLI	Professeur	UMMTO	Invité
M. Toufik MOUSSAOUI	Professeur	ENS Kouba	Invité



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER

Cette thèse est préparée dans le cadre d'une cotutelle internationale entre l'université des sciences et de la technologie Houari Boumediene (USTHB, Algérie) et l'université de Montpellier (UM, France).

Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene.

Faculté de Mathématiques.

Département d'Analyse.

École doctorale : Systèmes dynamiques et Géométrie (SDG).

Laboratoire : Systèmes dynamiques.

BP 32 El Alia 16111, Bab Ezzouar, Alger-ALGERIE.

Université de Montpellier.

Faculté des sciences de Montpellier.

Département de Mathématiques.

École doctorale : Information, Structures, Systèmes (I2S).

Laboratoire : Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck (IMAG).

Place Eugène Bataillon 34090, Montpellier-FRANCE.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance à M.Kessi Arezki et M.Massart Daniel pour avoir accepté de m'encadrer tout au long de ces années de thèse, je les remercie de tout mon cœur pour leurs efforts, leur disponibilité, et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. C'est grâce à M. Massart, qui m'a expliqué plein de nouvelles notions, que j'ai découvert ce sujet passionnant et j'ai pu le comprendre, grâce à son aide et ses conseils j'ai pu effectuer et terminer ce travail. Merci M.Massart pour votre immense patience, pour votre gentillesse. Merci pour tout ce que vous avez fait pour moi. Merci mille fois !

Je remercie chaleureusement encore une fois M.Kessi qui m'a toujours aidé et encouragé pendant cette période et surtout ses explications et sa bienveillance à mon égard durant cette thèse. Du fond du cœur, merci !

Je remercie Madame Benzekri d'avoir accepté la présidence de mon jury de soutenance.

Mes remerciements s'adressent à M. Hubert et M. Papadopoulos d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse.

Je remercie également M. Babenko d'avoir accepté de juger mon travail en tant qu'examinateur de ma thèse.

Mes remerciement vont aussi à nos invités M. Moussaoui et M. Morsli.

Je remercie aussi M.Zeglaoui.

Mes remerciement vont aussi à mes collègues doctorants de l'USTHB et de l'université de Montpellier.

Je remercie aussi tous mes amis et surtout Abdou, Hichem, Othman, Abderahmene, Abbas, Abdallah, Yassine, Salah.

Mes remerciement vont aussi à Campus France.

Pour finir, merci infiniment à mes parents qui m'ont encouragé et soutenu tout le temps. Vous êtes une bénédiction dans ma vie. J'exprime aussi ma gratitude envers mes frères : Karim, Mohamed, Aymen, Islam.

Résumé

On étudie la quantité notée KVol définie par

$$\text{KVol}(X, g) = \text{Vol}(X, g) \sup_{\alpha, \beta} \frac{\text{Int}(\alpha, \beta)}{l_g(\alpha)l_g(\beta)}$$

où X est une surface compacte, connexe, orientée, $\text{Vol}(X, g)$ est le volume (l'aire) de la surface par rapport à la métrique g et α, β sont deux courbes simples fermées sur la surface X .

Les résultats principaux de cette thèse se trouvent dans les chapitres 3 et 4. Dans le chapitre 3 intitulé "Algebraic intersection for translation surfaces in the stratum $\mathcal{H}(2)$ " on s'intéresse à la suite des KVol des surfaces $L(n, n)$ et on montre que $\text{KVol}(L(n, n))$ tend vers 2 quand n tend vers l'infini. Dans le chapitre 4 intitulé "Algebraic intersection for translation surfaces in a family of Teichmüller disks" on s'intéresse au KVol d'une famille particulière de surfaces appartenant à la strate $\mathcal{H}(2s - 2)$ qui sont des revêtements ramifiés à n feuillettes d'un tore plat. On s'intéresse aussi aux surfaces $St(2s - 1)$ et on montre que $\text{KVol}(St(2s - 1)) = 2s - 1$ où s est le genre de la surface $St(2s - 1)$. On s'intéresse aussi au minimum du KVol sur le disque de Teichmüller de la surface $St(2s - 1)$. Le minimum en question vaut $(2s - 1)\sqrt{\frac{143}{144}}$, il est atteint aux deux points $(\pm \frac{9}{14}, \frac{\sqrt{143}}{14})$.

Mots clés : Surfaces de translation, surfaces à petits carreaux, intersection algébrique, groupe de Veech, disque de Teichmüller.

Abstract

We study the quantity denoted KVol defined by

$$\text{KVol}(X, g) = \text{Vol}(X, g) \sup_{\alpha, \beta} \frac{\text{Int}(\alpha, \beta)}{l_g(\alpha)l_g(\beta)}$$

where X is a compact, connected, oriented surface, $\text{Vol}(X, g)$ is the volume (area) of the surface with respect to the metric g , and α, β are two simple closed curves on the surface X .

The main results of this thesis can be found in Chapters 3 and 4. In Chapter 3, titled "Algebraic intersection for translation surfaces in the stratum $\mathcal{H}(2)$ ", we are interested in the sequence $\text{KVol}(L(n, n))$ and we prove that $\text{KVol}(L(n, n))$ converges to 2 when n goes to infinity. In Chapter 4, titled "Algebraic intersection for translation surfaces in a family of Teichmüller disks", we are interested in KVol for a surfaces belonging to the stratum $\mathcal{H}(2s - 2)$ which are n -fold ramified covers of a flat torus. We are also interested in the surfaces $St(2s - 1)$ and we show that

$\text{KVol}(St(2s-1)) = 2s-1$. We determine the minimum of KVol on the Teichmüller disk of the surface $St(2s-1)$, which is found to be $(2s-1)\sqrt{\frac{143}{144}}$, and is achieved at the two points $(\pm\frac{9}{14}, \frac{\sqrt{143}}{14})$.

Keywords : Translation surfaces, square-tiled surfaces, algebraic intersection, Veech group, Teichmüller disk.

Table des matières

<i>Introduction générale</i>	7
1. Rappels de quelques notions géométriques	13
1.1 Revêtement	13
1.1.1 Revêtement	13
1.1.2 Revêtement ramifié	14
1.1.3 Revêtement universel	15
1.2 Surface de Riemann	15
1.3 Premier groupe d'homologie	17
1.3.1 Premier groupe d'homologie du tore	20
1.4 Intersection algébrique	21
1.5 Actions de groupes	22
1.6 Un peu de géométrie hyperbolique	23
1.6.1 Inversions	23
1.6.2 \mathbb{H}^2 et ses géodésiques	25
1.6.3 Transformations de Möbus	25
1.6.4 Hyper-cycles	26
2. Surfaces de translation	27
2.1 Tore plat	27
2.2 Surfaces de translation	29
2.2.1 Surfaces de translation	29
2.2.2 Les polygones réguliers	34
2.2.3 Espace de Teichmüller et espace des modules	37
2.3 Surfaces à petits carreaux	45
2.3.1 Surfaces à petits carreaux	45
2.3.2 Quelques surfaces à petits carreaux	47
2.3.3 Surfaces primitives et réduites	49
2.3.4 $St(3)$ et $St(4)$ dans \mathbb{R}^3	51

3. Algebraic intersection for translation surfaces in the stratum	
$\mathcal{H}(2)$	58
3.1 Introduction	60
3.2 $L(n, n)$	61
3.2.1 Preliminaries	61
3.2.2 Estimation of $\text{KVol}(L(n, n))$	64
4. Algebraic intersection for translation surfaces in a family of Teichmüller disks	67
4.1 Introduction	69
4.1.1 Definitions	69
4.1.2 The Teichmüller disc \mathcal{T} of $St(2s - 1)$	70
4.1.3 Statement and discussion of the results	73
4.2 Preliminaries	75
4.2.1 $St(2s - 1)$	75
4.2.2 A short excursion into the Teichmüller space of flat tori	79
4.2.3 Saddle connections and intersection	81
4.3 Proof of Theorem 4.1.1	88
<i>Annexe</i>	95

INTRODUCTION GÉNÉRALE

On s'intéresse à la quantité suivante :

$$\text{KVol}(X, g) = \text{Vol}(X, g) \sup_{\alpha, \beta} \frac{\text{Int}(\alpha, \beta)}{l_g(\alpha)l_g(\beta)}$$

où X est une surface compacte, connexe, orientée, $\text{Vol}(X, g)$ est le volume (l'aire) de la surface par rapport à la métrique g , α et β sont deux courbes simples fermées sur la surface X et $\text{Int}(\cdot, \cdot)$ est l'intersection algébrique .

Cette quantité apparaît dans la comparaison entre deux normes définies sur $H_1(X, \mathbb{R})$, ces deux normes s'appellent la norme stable et la norme L^2 (voir [16]). Rappelons que pour un tore plat \mathbb{C}/Λ on a $\text{KVol}(X, g) \geq 1$ et l'égalité a lieu quand, et seulement quand, g est une métrique plate (voir [16]).

Nous voulons calculer cette quantité pour des surfaces à petits carreaux (revêtement du tore plat carré, ramifié au dessus d'un seul point), appartenant à la strate $\mathcal{H}(2s - 2)$ des surfaces de translation de genre deux, avec un seul point singulier. La raison qui nous pousse à intéresser à cette strate est qu'une géodésique issue d'un point singulier sera forcément fermée quand elle rencontre encore une fois la singularité, cette géodésique bien sûr ne change pas de direction, ce qui nous aide à calculer les longueurs des segments géodésiques. Quand il y a une singularité de plus, une géodésique issue d'un point singulier peut changer de direction quand elle rencontre un autre point singulier, ce qui rend le problème un peu plus compliqué. Le chapitre 1 contient quelques rappels de notions géométriques. Dans le chapitre 2 on parle des surfaces de translation et des surfaces à petits carreaux. Dans le chapitre 3, on s'intéresse à la surface $L(n, n)$ (voir figure 0.1). Cette surface a un seul point singulier.

Pourquoi la surface $L(n, n)$?

Notre motivation pour choisir cette surface est la conjecture de Daniel Massart :

Conjecture. *La borne inférieure du KVol sur la strate $\mathcal{H}(2)$ est 2, le KVol n'a pas de minimum sur cette strate.*

Nous voulons trouver une suite de surfaces qui permet de majorer par 2 la borne inférieure du KVol sur la strate $\mathcal{H}(2)$. La suite de surfaces $L(n, n)$ vérifie

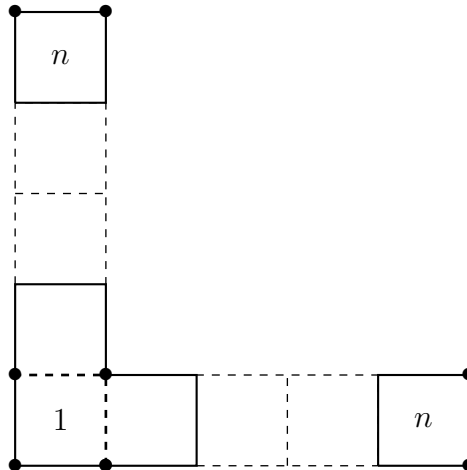


FIG. 0.1: La surface $L(n, n)$

bien cette propriété comme nous le verrons plus tard.

Le résultat principal dans ce chapitre est donné par la proposition suivante.

Proposition.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{KVol}(L(n+1, n+1)) = 2.$$

La borne supérieure n'est pas importante parce qu'il est facile de faire tendre le KVol vers l'infini (voir le chapitre 4).

On attire l'attention du lecteur sur le fait qu'il nous semble que sur la strate $\mathcal{H}(1, 1)$ le KVol a un minimum qui est 2. On pense que la surface $St(4)$ (voir figure 0.2) réalise cette valeur.

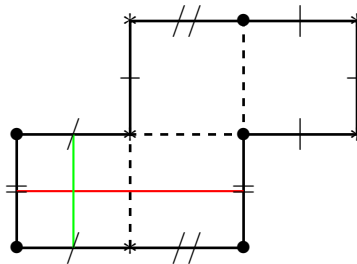


FIG. 0.2: La surface $St(4)$

Les courbes α et β s'intersectent en un seul point $\text{Int}(\alpha, \beta) = 1$, leurs longueurs sont respectivement 2 et 1, l'aire de la surface $St(4)$ est bien le nombre de carreaux

4, donc

$$\text{KVol}(St(4)) \geq 2.$$

Dans le chapitre 4, on s'intéresse au KVol de l'orbite de la surface $St(2s - 1)$ (voir figure 0.3) sous l'action du groupe $GL^+(2, \mathbb{R})$. Parmi les questions importantes, il y a celle de trouver le minimum du KVol dans le disque de Teichmüller de $St(2s - 1)$.

Rappelons que le disque de Teichmüller d'une surface est l'orbite de cette surface sous l'action de $GL^+(2, \mathbb{R})$ (voir définition 2.2.24).

Avant d'expliquer ce qu'on va faire au chapitre 4, on pose quelques questions concernant le KVol. Soit X un revêtement ramifié à n feuillets d'un tore plat appartenant à la strate $\mathcal{H}(2s - 2)$.

- 1- Sous quelles conditions la surface X satisfait-elle $\text{KVol}(X) \leq n$?
- 2- Quel est le KVol de la surface $St(2s - 1)$?
- 3- Quelles sont les surfaces dans le disque de Teichmüller de la surface $St(2s - 1)$ telles que l'on obtient $\text{KVol} \leq 2s - 1$ ou $\text{KVol} > 2s - 1$?
- 4- Quel est le minimum du KVol dans le disque de Teichmüller de la surface $St(2s - 1)$?

La réponse à ces questions est donnée par la suite.

Pour la première question, la réponse est donnée par le lemme suivant :

Lemme. *Soit $s \in \mathbb{N}^*$ et $X \in \mathcal{H}(2s-2)$. Supposons que X est un revêtement ramifié à n feuillets d'un tore. Alors $\text{KVol}(X) \leq n$, sauf s'il existe deux géodésiques α et β ayant la même direction, d'intersection algébrique non nulle, et telles que le produit de leurs longueurs est inférieur à $\text{Vol}(X)/n$.*

Nous allons voir que deux géodésiques ayant la même direction peuvent avoir une intersection non nulle, il s'agit alors de liens de selles qui ont la possibilité de s'intersecter en un point singulier. Bien sûr deux géodésiques régulières (c-à-d. ne passant pas par une singularité) de même direction ne s'intersectent pas.

Pour la deuxième question, on trouve que $\text{KVol}(St(2s - 1)) = 2s - 1$.

La surface $St(2s - 1)$ est représenté à la figure 0.3. Cette surface est de genre s , elle a un seul point singulier, donc elle appartient à la strate $\mathcal{H}(2s - 2)$.

Rappelons que le groupe de Veech d'une surface X est le stabilisateur de X sous l'action de $GL^+(2, \mathbb{R})$. On note le disque de Teichmüller de $St(2g - 1)$ par \mathcal{T}_s .

Le groupe de Veech de la surface $St(2s - 1)$ est engendré par les deux matrices T et R .

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

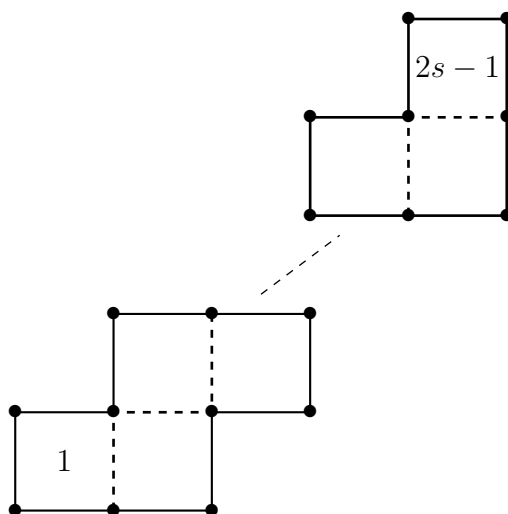


FIG. 0.3: La surface $St(2s - 1)$

On peut voir le disque de Teichmüller \mathcal{T}_s comme étant le quotient de \mathbb{H}^2 par le groupe de Veech de $St(2g - 1)$. Un domaine fondamental, noté \mathcal{D} , est représenté à la figure 0.4.

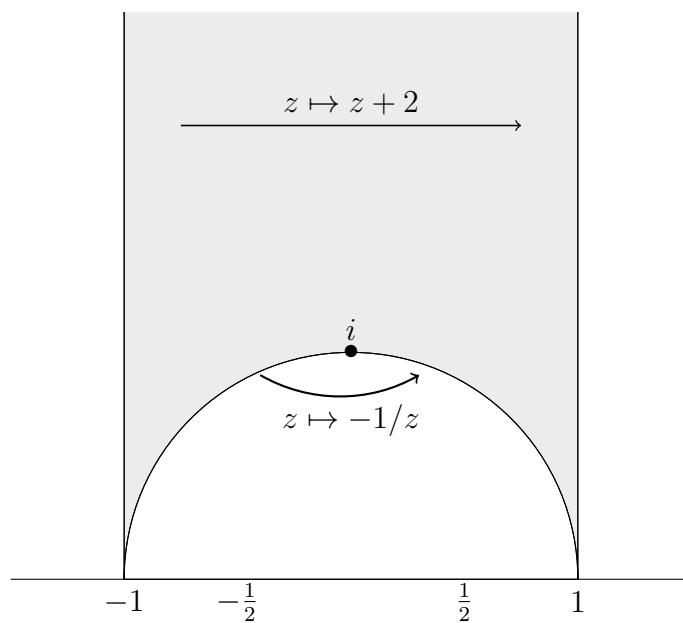


FIG. 0.4: Le domaine fondamental de \mathcal{T}_s

Cuspide (Cusp) : Soit Γ un groupe fuchsien et $z \in \partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Le point z est appelé un cuspide ou bien une pointe (en anglais, a cusp) de Γ s'il existe une matrice parabolique $M \in \Gamma$ satisfaisant $M.z = z$.

L'orbite de z sous l'action de Γ est appelée un cuspide de \mathbb{H}^2/Γ .

Le domaine fondamental dans la figure 0.4 a deux cuspides 1 et ∞ . les points 1 et -1 sont dans la même orbite.

Une surface dans le disque de Teichmüller \mathcal{T}_s sera notée par $X_s(x, y)$. Une telle surface est un revêtement ramifié à $2s - 1$ feuillets du tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}(1, 0) \oplus \mathbb{Z}(x, y)$, avec (x, y) dans le domaine fondamental. La réponse à la question 3 est donnée par le lemme suivant.

Lemme. Pour $(x, y) \in V_{\pm 1} \cap \mathcal{D}$, où $V_{\pm 1} = \{(x, y) : (x \pm 1)^2 + (y - 1/2)^2 < 1/4\}$ on a $\text{KVVol}(X_s(x, y)) > 2s - 1$. Pour tout (x, y) dans $\mathcal{D} \setminus V_{\pm 1}$, on a $\text{KVVol}(X_s(x, y)) \leq 2s - 1$. De plus, $\text{KVVol}(X_s(x, y))$ tend vers l'infini quand y tend vers zéro, et tend vers $2s - 1$ quand y tend vers ∞ tant que (x, y) reste dans \mathcal{D} .

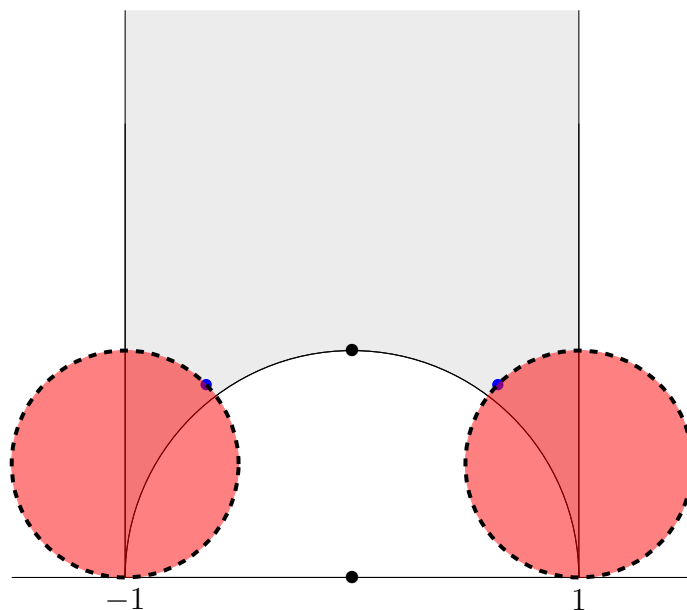


FIG. 0.5:

À la fin du chapitre 4 on trouve la réponse à la question 4. Le minimum du KVVol dans le disque de Teichmüller \mathcal{T}_s est $(2s - 1)\sqrt{\frac{143}{144}}$. Les deux surfaces $X_s(\pm \frac{9}{14}, \frac{\sqrt{143}}{14})$ réalisent le minimum (voir figure 0.5).

Donc le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant :

Théorème. *Pour tout $s \geq 2$ le minimum du KVol dans le disque de Teichmüller \mathcal{T}_s est $(2s - 1)\sqrt{\frac{143}{144}}$. Il est atteint aux deux points $(\pm \frac{9}{14}, \frac{\sqrt{143}}{14})$. Pour $(x, y) \in V_{\pm 1}$ on a $\text{KVol}(X_s(x, y)) > 2s - 1$, et $\text{KVol}(X_s(x, y))$ tend vers l'infini quand (x, y) tend vers $(\pm 1, 0)$. Hors du domaine $V_{\pm 1}$ on a $\text{KVol}(X_s(x, y)) \leq 2s - 1$, et $\text{KVol}(X_s(x, y)) = 2s - 1$ si et seulement si $(x, y) \in \mathcal{Z}$. De plus $\text{KVol}(X_s(x, y))$ tend vers $2s - 1$ quand $y \rightarrow \infty$ lorsque (x, y) reste dans \mathcal{D} .*

1. RAPPELS DE QUELQUES NOTIONS GÉOMÉTRIQUES

1.1 Revêtement

1.1.1 Revêtement

Définition 1.1.1. Soient X et Y deux espaces topologiques. On dit qu'une application $p : Y \rightarrow X$ est un revêtement si :

- (1) p est surjective et continue
- (2) pour tout point $x \in X$ il existe un voisinage U de x dans X , tel que $p^{-1}(U)$ admette une partition $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$ où les V_i sont des ouverts dans Y , tels que $p : V_i \rightarrow U$ est un homéomorphisme.

On dit aussi que Y est un revêtement de X mais l'application p est importante. L'application p s'appelle la projection, l'ensemble $p^{-1}\{x\}$ la fibre au-dessus de $x \in X$, l'espace Y l'espace total et l'espace X la base du revêtement. L'ouvert U est appelé ouvert élémentaire et les ouverts V_i les feuillettes de $p^{-1}(U)$ ou feuillettes au-dessus de U .

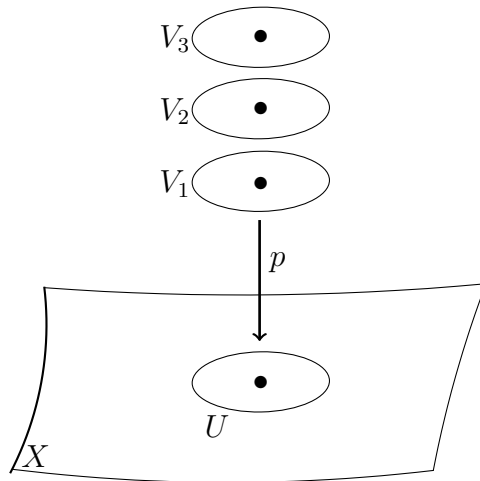


FIG. 1.1: Revêtement

Proposition 1.1.1 (voir [23]). Soient X et Y deux espaces topologiques, X connexe, et $p : Y \rightarrow X$ une projection de revêtement. Soient x_1, x_2 deux points quelconques de X . Les points x et y ont le même nombre d'antécédents dans Y par p

Remarque. Le nombre d'antécédents peut être infini. Lorsque ce nombre est fini, appelons-le $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que E est un revêtement de X à n feuillets.

Exemple. L'application $t \mapsto \exp(2i\pi t)$ de \mathbb{R} dans \mathbb{S}^1 est un revêtement.

Exemple. L'application π définie par :

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{T}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x - [x], y - [y]) \end{aligned}$$

où $[\cdot]$ est la fonction partie entière, est un revêtement du tore \mathbb{T}^2 .

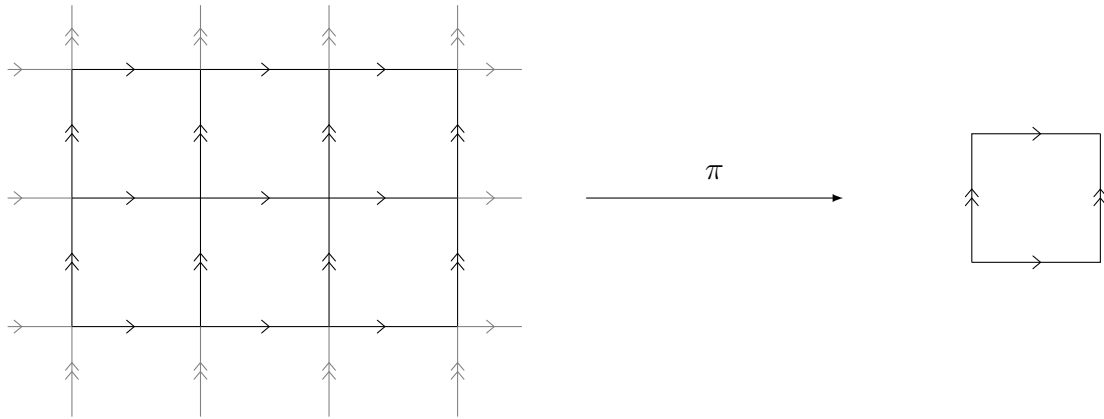


FIG. 1.2: Revêtement du tore \mathbb{T}^2

1.1.2 Revêtement ramifié

Définition 1.1.2. Un sous-ensemble A d'un espace topologique τ est dit discret si tout point $a \in A$ possède un voisinage ouvert V_a tel que $V_a \cap A = \{a\}$.

Définition 1.1.3. Soient X et Y deux espaces topologiques et $p : Y \rightarrow X$ une application. On dit que p est un revêtement ramifié s'il existe une partie discrète et fermée $F \subset Y$ pour laquelle :

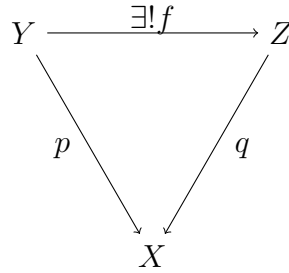
- 1- $p : Y \setminus p^{-1}(p(F)) \rightarrow X \setminus p(F)$ est un revêtement,
- 2- $p(F)$ est une partie discrète et fermée de X .

Les points de F sont appelés des points de ramification ou des points de branchement de l'application p .

Exemple. L'application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z^n$, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$, est un revêtement ramifié au point 0 , à n feuillets.

1.1.3 Revêtement universel

Définition 1.1.4. Soient X et Y deux espaces topologiques connexes. Un revêtement $p : Y \rightarrow X$ est appelé revêtement universel de X si la propriété universelle suivante est satisfaite : pour tout autre revêtement $q : Z \rightarrow X$ avec Z connexe, et pour tout choix de points $y_0 \in Y$ et $z_0 \in Z$ avec $p(y_0) = q(z_0) \in X$, il existe une et une seule application $f : Y \rightarrow Z$ préservant les fibres, i.e. satisfaisant $q \circ f = p$, telle que $f(y_0) = z_0$



Par conséquent, Y est un revêtement de tous les revêtements de X . Pour cette raison on dit que Y est un revêtement universel de X .

1.2 Surface de Riemann

Définition 1.2.1. Soit X une variété topologique de dimension 2. Une carte complexe sur X est un homéomorphisme $\varphi : U \rightarrow V$ d'un ouvert $U \subset X$ sur un ouvert $V = \varphi(U) \subset \mathbb{C}$. Deux cartes complexes $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$, $i = 1, 2$ sont dites holomorphiquement compatibles si l'application de transition (changement de cartes) :

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

est biholomorphe, c'est-à-dire holomorphe, bijective, et d'inverse $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ qui est lui aussi holomorphe.

On dit que la carte (U_i, φ_i) est centrée en p si $\varphi(p) = 0$

Un atlas complexe sur X est un système $A = \{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i\}$ de telles cartes qui sont holomorphiquement compatibles et qui recouvrent X . Deux atlas complexes A et A' sont dit analytiquement équivalents si toute carte de A est holomorphiquement compatible avec toute carte de A' .

Définition 1.2.2. Une structure complexe sur une variété 2-dimensionnelle X est une classe d'équivalence d'atlas complexes sur X .

Une structure complexe sur X est donnée par le choix d'un atlas complexe. Toute structure complexe Σ sur X contient un unique atlas complexe maximal A^* défini comme suit : si A est un atlas arbitraire dans Σ , alors A^* consiste en toutes les cartes complexes sur X qui sont holomorphiquement compatibles avec chaque carte de A .

La classe d'équivalence d'un atlas A peut être représentée par son atlas maximal.

Définition 1.2.3. Une surface de Riemann est une paire $(X; \Sigma)$, où X est une variété connexe de dimension 2 et Σ est une structure complexe sur X .

Exemple (voir [5]). La sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$. Soit $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. On introduit la topologie suivante sur $\hat{\mathbb{C}}$. Ses ouverts sont tout d'abord les ouverts usuels $U \subset \mathbb{C}$ et ensuite les ensembles de la forme $V \cup \{\infty\}$ où $V \subset \mathbb{C}$ est le complémentaire d'un compact quelconque $K \subset \mathbb{C}$. Avec cette topologie, $\hat{\mathbb{C}}$ devient un espace topologique compact séparé, homéomorphe à la sphère \mathbb{S}^2 . Posons maintenant :

$$\begin{aligned} U_1 &= \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} = \mathbb{C} \\ U_2 &= \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\} \end{aligned}$$

et définissons deux applications $\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, 2$ comme suit : φ_1 est l'application identité, et

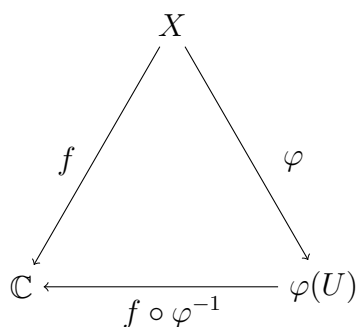
$$\varphi_2 = \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{pour } z \in \mathbb{C} \\ 0 & \text{pour } z = \infty \end{cases}$$

Chacune de ces deux applications est un homéomorphisme, donc $\hat{\mathbb{C}}$ est une variété de dimension 2. Puisque U_1 et U_2 sont connexes et sont d'intersection \mathbb{C}^* non vide, $\hat{\mathbb{C}}$ est aussi connexe. La structure complexe sur $\hat{\mathbb{C}}$ est alors définie par l'atlas constitué de ces deux cartes $\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, il reste encore à vérifier qu'elles sont holomorphiquement compatibles : on a $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^*$, et l'application de transition

$$\begin{aligned} \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} &: \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^* \\ z &\longmapsto 1/z \end{aligned}$$

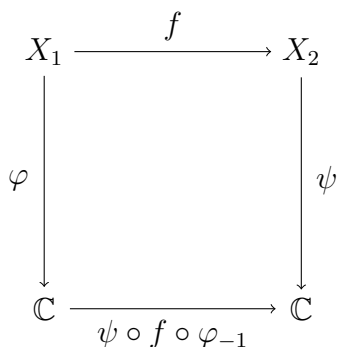
est clairement biholomorphe, donc $\hat{\mathbb{C}}$ est une surface de Riemann.

Définition 1.2.4. Soit X une surface de Riemann. Une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe si, pour toute carte $\varphi : U \longrightarrow V$ sur X , la fonction $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe.



Définition 1.2.5. Une application $f : X_1 \rightarrow X_2$ entre surfaces de Riemann est dite holomorphe si et seulement si pour toute carte φ de X_1 et ψ de X_2 , la fonction $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est holomorphe entre ouverts de \mathbb{C} .

L'application f est biholomorphe si elle est holomorphe, bijective et d'inverse holomorphe.

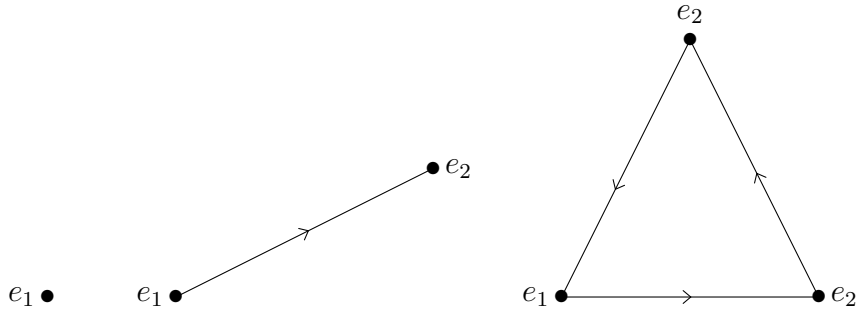


1.3 Premier groupe d'homologie

Définition 1.3.1. Une triangulation d'une surface X est la donnée d'une famille finie $\{T_1, \dots, T_n\}$ de fermés recouvrant X et d'homéomorphismes, $\phi_i : T'_i \rightarrow T_i$, où T'_i est un triangle de \mathbb{R}^2 . Les T_i sont appelés triangles, les images des points (sommets) et arêtes (côtés) des T'_i sont appelés sommets et arêtes (côtés) des T_i . Il est requis qu'étant donné deux triangles distincts T_i et T_j ,

- $T_i \cap T_j$ est vide, ou bien
- $T_i \cap T_j$ est un sommet, ou bien
- $T_i \cap T_j$ est une arête entière de T_i et T_j

Définition 1.3.2. Un 0-simplexe est un point, un 1-simplexe est une arête, et un 2-simplexe est un triangle.



Définition 1.3.3. *Considérons une surface de Riemann X que l'on munit d'une triangulation orientée τ .*

Une 0-chaîne (simpliciale) est une combinaison linéaire finie à coefficients entiers de points e_i

$$e = \sum_{i=1}^k n_i e_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}$$

Une 1-chaîne (simpliciale) est une combinaison linéaire finie à coefficients entiers d'arêtes

$$\gamma = \sum_{i=1}^k n_i \gamma_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}$$

Une 2-chaîne (simpliciale) est une combinaison linéaire finie à coefficients entiers de triangles D_i

$$D = \sum_{i=1}^k n_i D_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}$$

Notons $(e_i)_{i \in I}$ les sommets de la triangulation. Chaque arête γ de τ dont les sommets adjacents sont e_i, e_j avec $i \neq j$ est notée $[e_i, e_j]$ et l'ordre induit une orientation de l'arête. On convient que $-\gamma$ est l'opposée de γ c-à-d. $[e_j, e_i] = -[e_i, e_j]$. De même, chaque triangle D de sommets e_i, e_j, e_k , avec $i \neq j \neq k$ est noté $[e_i, e_j, e_k]$ et on convient que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ (groupe de permutation), $[e_{\sigma(i)}, e_{\sigma(j)}, e_{\sigma(k)}] = \epsilon(\sigma)[e_i, e_j, e_k]$.

L'ensemble des i -chaînes ($i = 0, 1, 2$) est un groupe abélien pour l'addition, on le note par $C_i(X)$, $i = 0, 1, 2$.

Définition 1.3.4. *L'opérateur bord est défini sur l'ensemble des arêtes par :*

$$\partial_1[e_i, e_j] = e_i - e_j$$

L'opérateur bord est défini sur l'ensemble des triangles par :

$$\partial_2[e_i, e_j, e_k] = [e_i, e_j] + [e_j, e_k] + [e_k, e_i]$$

On peut étendre l'opérateur bord par linéarité aux ensembles $C_1(X)$ et $C_2(X)$.

Définition 1.3.5. L'opérateur bord ∂_1 est défini sur $C_1(X)$ par :

$$\begin{aligned} \partial_1 : C_1(X) &\longrightarrow C_0(X) \\ \gamma &\longmapsto \sum_{i=1}^k n_i \partial_1 \gamma_i \end{aligned}$$

L'opérateur bord ∂_2 est défini sur $C_2(X)$ par :

$$\begin{aligned} \partial_2 : C_2(X) &\longrightarrow C_1(X) \\ D &\longmapsto \sum_{i=1}^k n_i \partial_2 D_i \end{aligned}$$

Définition 1.3.6. L'image de l'application ∂_2 :

$$B_1(X) = \text{Im}(\partial_2)$$

est appelé le groupe des 1-bords sur X .

Le noyau de l'application ∂_1 :

$$Z_1(X) = \text{Ker}(\partial_1)$$

est appelé le groupe des 1-cycles sur X .

Le groupe $C_1(X)$ contient deux sous-groupes : le sous-groupe des 1-bords $B_1(X)$ et le sous-groupe des 1-cycles $Z_1(X)$, et on vérifie facilement que $\partial_1 \circ \partial_2 = 0$ donc $B_1(X)$ est un sous-groupe de $Z_1(X)$, alors on peut introduire une relation d'équivalence entre les éléments de $C_1(X)$. Deux 1-chaînes sont homologues si leur différence est un bord :

$$\gamma_1 \sim \gamma_2, \gamma_1, \gamma_2 \in C_1(X) \Leftrightarrow \gamma_1 - \gamma_2 \in B_1(X).$$

Deux courbes fermées simples et disjointes γ_1 et γ_2 sont homologues sur la surface X si en coupant X le long de γ_1 et γ_2 , la surface se décompose en deux morceaux. On en déduit que deux courbes fermées homotopes sont forcément homologues mais l'inverse en général n'est pas vrai.

Dans la figure 1.3, la courbe α est homologue à 0 mais n'est pas homotope à 0 (à un point), les courbes γ_1 , γ_2 et γ_3 coupent la surface en deux morceaux donc $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ est homologue à 0, on peut orienter ces courbes de telle sorte que $\gamma_1 + \gamma_2$ soit homologue à γ_3 .

Définition 1.3.7. Le groupe quotient :

$$H_1(X, \mathbb{Z}) = Z_1(X) / B_1(X).$$

est appelé le premier groupe d'homologie.

Exemple. Le premier groupe d'homologie de la sphère \mathbb{S}^2 est $H_1(X, \mathbb{Z}) = \{0\}$.

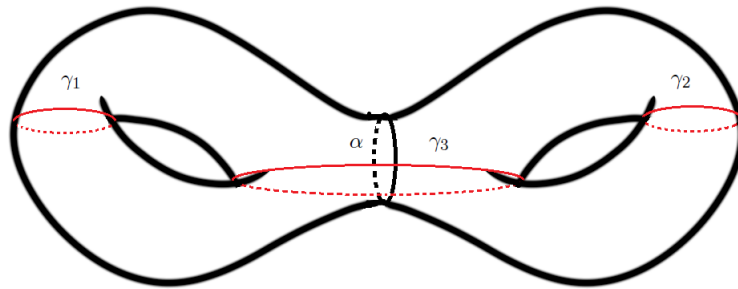
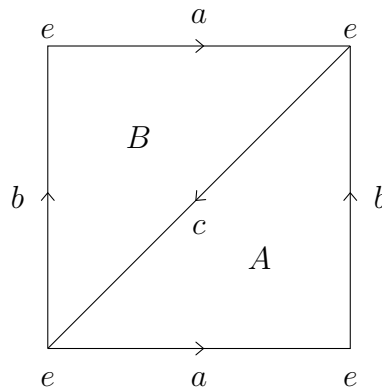


FIG. 1.3: $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ homologue à 0

1.3.1 Premier groupe d'homologie du tore

Rappelons que le tore unitaire est le quotient de \mathbb{R}^2 par \mathbb{Z}^2 (voir tore plat 2.1).
On a $H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$



$$C_2(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{\partial_2} C_1(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\mathbb{T}^2)$$

On a

$$C_0(\mathbb{T}^2) = \langle e \rangle, \quad C_1(\mathbb{T}^2) = \langle a, b, c \rangle \quad \text{et} \quad C_2(\mathbb{T}^2) = \langle A, B \rangle$$

Par définition on a

$$\partial_2(C_2(\mathbb{T}^2)) = p\partial_2(A) + q\partial_2(B) = (p+q)(a+b+c)$$

Donc $B_1(\mathbb{T}^2)$ est engendré par $a+b+c$.

On a aussi

$$\partial_1(C_1(\mathbb{T}^2)) = \alpha\partial_1(a) + \beta\partial_1(b) + \gamma\partial_1(c) = 0$$

Donc $Z_1(\mathbb{T}^2)$ est engendré par a, b, c qui est aussi $a, b, a + b + c$, alors

$$H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) = Z_1(\mathbb{T}^2)/B_1(\mathbb{T}^2) = \langle a, b, a+b+c \rangle / \langle a+b+c \rangle = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$$

D'une façon générale, pour toute surface compacte X de genre g on a :

$$H_1(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g}$$

$$H_1(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{2g}$$

1.4 Intersection algébrique

On introduit maintenant l'intersection algébrique entre deux éléments du premier groupe d'homologie. Soient γ_1 et γ_2 deux courbes s'intersectant transversalement au point P . On associe à ce point le nombre $\text{Int}_P(\gamma_1, \gamma_2) = \pm 1$, le signe est déterminé par l'orientation de γ_1 et γ_2 .

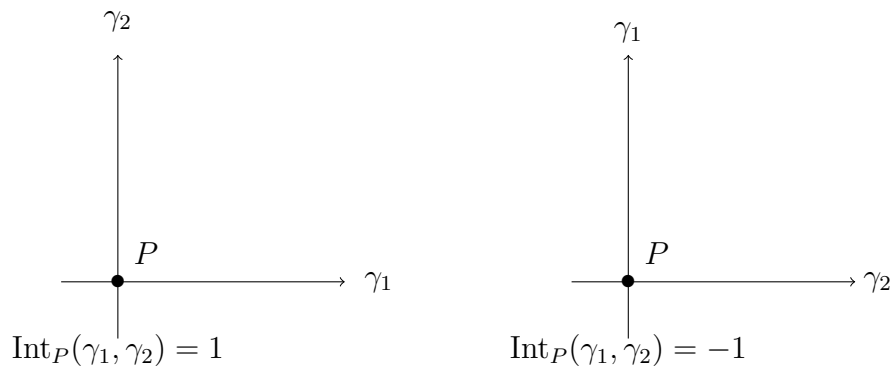


FIG. 1.4: intersection au point P

Définition 1.4.1. Soient γ_1 et γ_2 deux courbes simples de classe C^1 s'intersectant transversalement en un ensemble fini de points A , l'intersection algébrique de ces deux courbes est définie par :

$$\text{Int}(\gamma_1, \gamma_2) = \sum_{P \in A} \text{Int}_P(\gamma_1, \gamma_2)$$

On peut étendre cette définition au premier groupe d'homologie $H_1(X, \mathbb{R})$, car l'intersection algébrique ne dépend que de la classe d'homologie.

Théorème 1.4.1. *L'intersection algébrique :*

$$\begin{aligned} \text{Int} : H_1(X, \mathbb{R}) \times H_1(X, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ([\alpha], [\beta]) &\longmapsto \text{Int}([\alpha], [\beta]) \end{aligned}$$

est une forme symplectique (i.e. bilinéaire, antisymétrique, non dégénérée)

Soit X une surface de genre g , on munit l'espace $H_1(X, \mathbb{R})$, qui est de dimension $2g$, d'une base $\{a_1, \dots, a_{2g}\}$. Comme la forme $\text{Int}(\cdot, \cdot)$ est non dégénérée, l'homologie entre deux courbes peut être définie comme suit : γ_1 est homologue à γ_2 si et seulement si

$$\text{Int}(\alpha, a_i) = \text{Int}(\beta, a_i), \quad i = 1, \dots, 2g$$

Définition 1.4.2. *Soit $\mathfrak{B} = \{a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g\}$ une base de $H_1(X, \mathbb{R})$, où X est une surface de genre g . On dit que \mathfrak{B} est une base symplectique si elle vérifie les identités : $\forall i, j \in \{1, \dots, g\}$,*

$$\text{Int}(a_i, a_j) = \text{Int}(b_i, b_j) = 0$$

et

$$\text{Int}(a_i, b_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

On en déduit que l'intersection algébrique entre deux classes écrites dans la base symplectique $[\alpha] = \sum_{i=1}^g x_i \cdot a_i + y_i \cdot b_i$ et $[\beta] = \sum_{j=1}^g x'_j \cdot a_j + y'_j \cdot b_j$ est donnée par :

$$\text{Int}([\alpha], [\beta]) = \sum_{i=1}^g x_i \cdot y'_i - x'_i \cdot y_i, \quad i = 1, \dots, g$$

1.5 Actions de groupes

Définition 1.5.1. *Soit G un groupe (noté multiplicativement, d'élément neutre 1) et soit E un ensemble non vide. Une action (opération) à gauche de G sur E est la donnée d'une application :*

$$\begin{aligned} G \times E &\longrightarrow E \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

satisfaisant aux deux conditions suivantes :

- (1) $\forall (g_1, g_2) \in G \times G, \forall x \in E \quad (g_1 g_2) \cdot x = g_1 (g_2 \cdot x)$
- (2) $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$

Remarque. *On définit de façon analogue une opération à droite de G sur E . On dit aussi que G agit sur E .*

Définition 1.5.2. Soient G un groupe agissant sur un ensemble E et $x \in E$. L'ensemble $G.x = \{g.x \mid g \in G\}$ est un sous-ensemble de X appelé orbite de x . On le note aussi $\text{Orb}(x)$.

Une action est dite transitive si elle a une seule orbite, c'est-à-dire si $G.x = E$. L'ensemble $G_x = \{g \in G \mid g.x = x\}$ est un sous-groupe de G appelé sous-groupe d'isotropie ou stabilisateur de x . On le note aussi $\text{Stab}(x)$.

Définition 1.5.3. Un groupe Fuchsien est un sous-groupe discret de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

1.6 Un peu de géométrie hyperbolique

1.6.1 Inversions

Définition 1.6.1. Soit $C = C(a, r)$ le cercle de \mathbb{C} de centre a et de rayon r . L'inversion (symétrie ou réflexion) par rapport au cercle C est une application de $\mathbb{C} - \{a\}$ dans lui-même, qui à un point z associe le point z^* tel que :

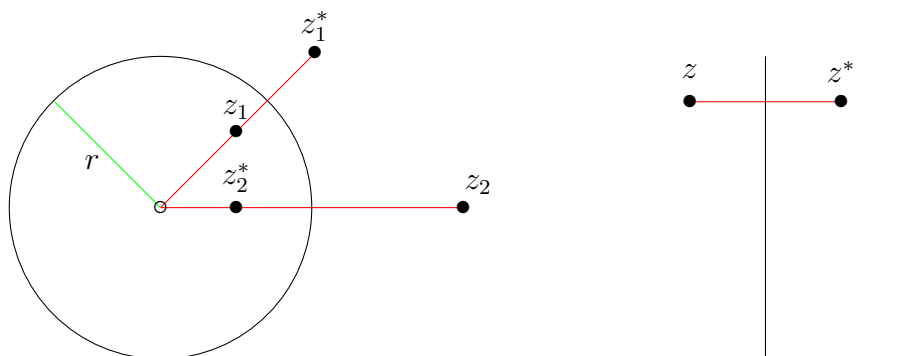
- 1- z^* est situé sur la demi-droite issue de a passant par z .
- 2- $|z^* - a||z - a| = r^2$

L'écriture complexe de l'inversion I_C est :

$$I_C(z) = \frac{r^2}{z - a} + a$$

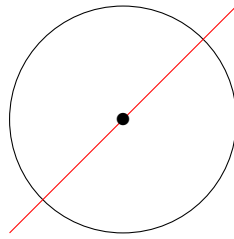
On peut prolonger I_C à $\mathbb{C} \cup \infty$, en posant $I_C(a) = \infty$.

Si C est une droite, I_C est la symétrie orthogonale par rapport à C .



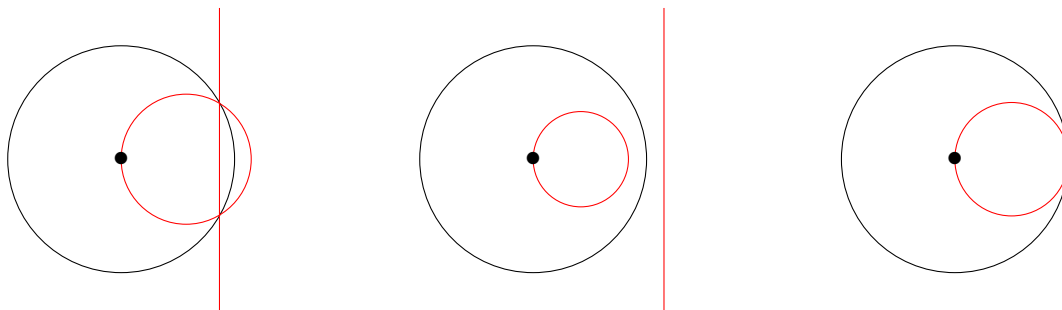
L'inversion transforme les cercles et les droites en cercles et droites. Plus précisément (voir [20]) :

- 1- Une droite passant par l'origine est envoyée sur elle-même.

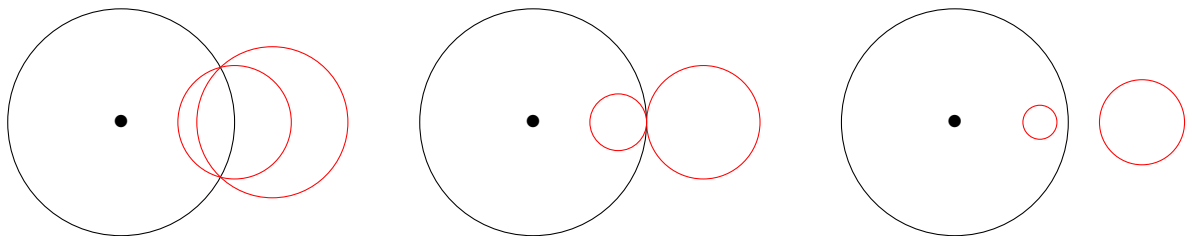


2- Une droite ne passant pas par l'origine est envoyée sur un cercle passant par l'origine.

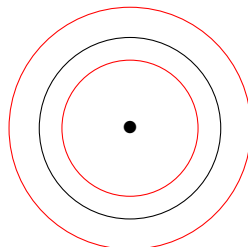
3- Un cercle passant par l'origine est envoyé sur une droite ne passant pas par l'origine.



4- Un cercle ne passant pas par l'origine est envoyé sur un cercle ne passant pas par l'origine.



5- Un cercle centré à l'origine est envoyé sur un cercle centré en l'origine.



Une bissectrice de l'angle formé par la droite (le cercle) et son inversion (quand ils s'intersectent) est tangente au cercle d'inversion.

1.6.2 \mathbb{H}^2 et ses géodésiques

Considérons le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$. Soit $T_{z_0\mathbb{H}^2}$ l'espace tangent de \mathbb{H}^2 au point z_0 . Considérons le produit scalaire défini en chaque point $z_0 \in \mathbb{H}^2$ par :

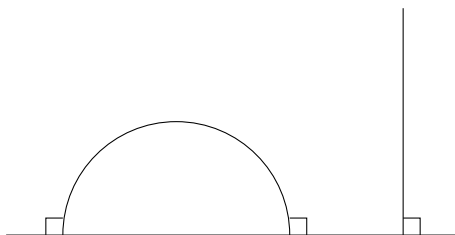
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathbb{H}^2} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\text{Im}^2(z_0)}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien de \mathbb{R}^2 .

Définition 1.6.2. La métrique hyperbolique sur \mathbb{H}^2 est définie par

$$g_{\mathbb{H}^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{|dz|^2}{\text{Im}^2(z)}$$

Théorème 1.6.1 (voir [23]). Dans \mathbb{H}^2 , les géodésiques sont les demi-droites verticales et les demi-cercles centrés sur l'axe réel.



1.6.3 Transformations de Möbius

Définition 1.6.3. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$. On appelle transformation de Möbius, la fonction complexe définie sur $\mathbb{C} \cup \infty$ par :

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

Toute transformation de Möbius est une composition des transformations suivantes :

$$T_u(z) = z + u \quad h_\lambda(z) = \lambda z \quad I(z) = -\frac{1}{z}$$

où $u, \lambda \in \mathbb{C}$

Plus précisément :

Si $c \neq 0$ on a :

$$f(z) = (T_{a/c} \circ h_{(ad-bc)/c^2} \circ I \circ T_{d/c})(z)$$

Si $c = 0$ on a :

$$f(z) = (T_{b/d} \circ h_{a/d})(z)$$

Théorème 1.6.2. *Le groupe des isométries de \mathbb{H}^2 , $Isom(\mathbb{H}^2)$ est engendré par :*

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$$

et

$$z \mapsto -\bar{z}.$$

1.6.4 Hyper-cycles

Définition 1.6.4. *On dit qu'une géodésique est complète si ses extrémités sont sur le bord à l'infini de \mathbb{H}^2 .*

Proposition 1.6.1 (voir [23]). *Soit γ une géodésique complète de \mathbb{H}^2 et soit d un réel strictement positif.*

Si γ est une demi-droite verticale, l'ensemble des points de \mathbb{H}^2 se trouvant à une distance hyperbolique ρ de γ est constitué des deux demi-droites issues du même point asymptotique réel que γ et faisant un angle non orienté θ avec γ , où $\theta \in]0, \pi/2[$ vérifie la relation : $\sin(\theta) = th(\rho)$.

Si γ est un demi-cercle orthogonal à l'axe réel, l'ensemble des points se trouvant à une distance hyperbolique ρ de γ est constitué des deux arcs de cercles issus des mêmes extrémités réelles que γ et faisant en ces points un angle non orienté θ avec γ , où $\theta \in]0, \pi/2[$ vérifie la relation : $\sin(\theta) = th(\rho)$.

Les deux demi-droites (deux arcs) s'appellent hyper-cycles.



2. SURFACES DE TRANSLATION

On introduit dans ce chapitre les surfaces de translation et les surfaces à petits carreaux. En introduisant le tore plat qui est la surface de translation (à petits carreaux) triviale, on va voir que les changements de cartes dans le tore sont des translations, ce qui suggère la notion de surface de translation. Par la suite on donne d'autres définitions équivalentes des surfaces de translation. Les surfaces à petits carreaux sont des surfaces de translation particulières qui sont des revêtements du tore unitaire.

2.1 Tore plat

Cette présentation s'inspire de [5].

Un tore plat (complexe) est le quotient de \mathbb{C} par un réseau Λ , \mathbb{C}/Λ , où $\Lambda = \omega_1\mathbb{Z} \oplus \omega_2\mathbb{Z} = \{m\omega_1 + n\omega_2, m, n \in \mathbb{Z}\}$ avec ω_1 et ω_2 deux complexes \mathbb{R} -linéairement indépendants.

Soit $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ la projection canonique. On définit le parallélogramme fondamental par

$$\{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 \in \mathbb{C} : \lambda, \mu \in [0, 1]\}.$$

L'espace topologique \mathbb{C}/Λ est séparé, connexe, et l'application π est continue. De plus \mathbb{C}/Λ est compact, puisqu'il est l'image par π d'un compact contenant le parallélogramme fondamental.

L'application π est ouverte car $\pi(V)$ est un ouvert pour tout ouvert $V \subset \mathbb{C}$, en effet, on a :

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{\omega \in \Lambda} (\omega + V),$$

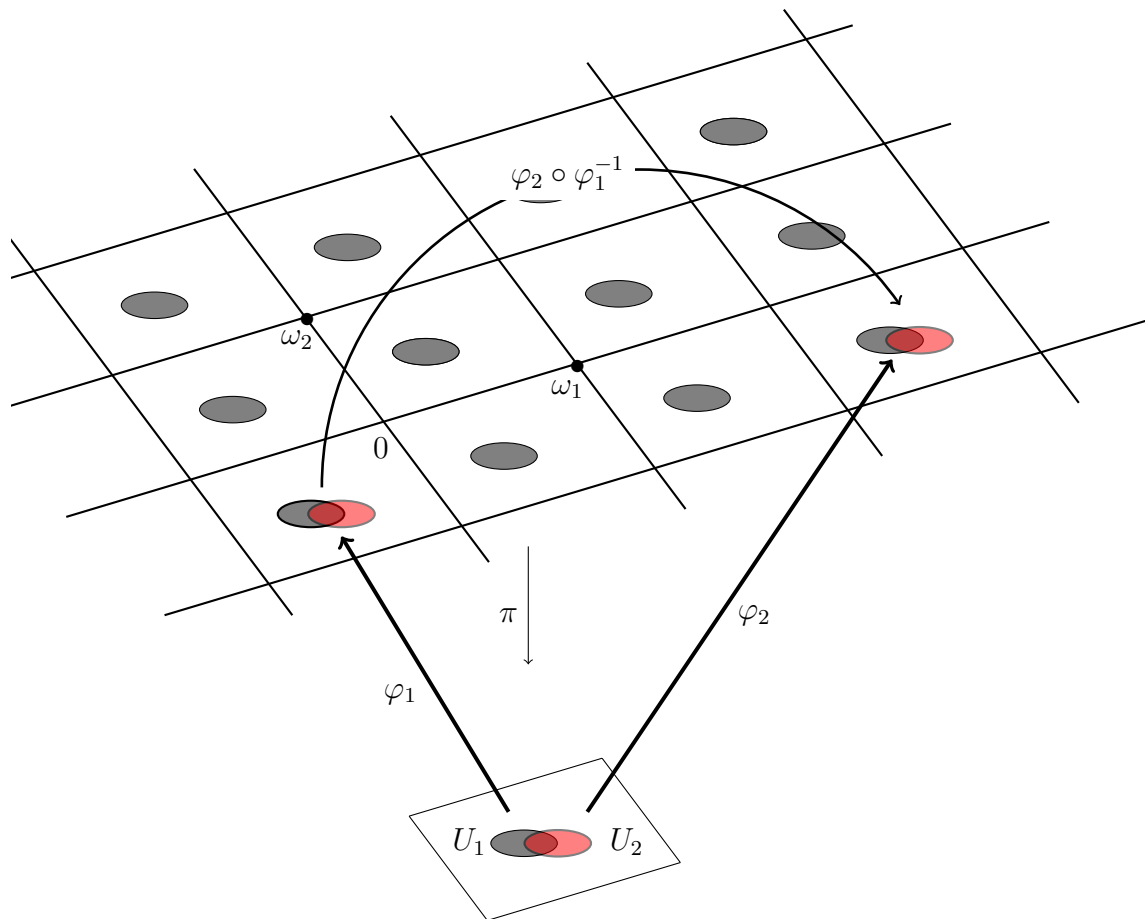
où $(\omega + V)$ est l'ouvert V translaté par ω , qui est ouvert, donc $\pi^{-1}(\pi(V))$ est un ouvert de \mathbb{C} , par définition de la topologie quotient on en déduit que $\pi(V)$ est un ouvert.

La structure complexe sur \mathbb{C}/Λ est définie comme suit. Soit $V \subset \mathbb{C}$ un ouvert dans lequel il n'existe pas deux points distincts équivalents *mod* Λ . Alors $U = \pi(V)$ est un ouvert et $\pi|_V : V \rightarrow U$ est un homéomorphisme. Son inverse $\varphi : U \rightarrow V$ est une carte complexe sur \mathbb{C}/Λ . Soit \mathcal{A} l'ensemble de toutes les cartes obtenues de cette

façon. On doit vérifier que deux telles cartes $\varphi_i : U_i \mapsto V_i$, $i = 1, 2$ appartenant à A sont holomorphiquement compatibles. Considérons l'application :

$$\psi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

Pour tout $z \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$, on a $\pi(\psi(z)) = \varphi_1^{-1}(z) = \pi(z)$, donc $\psi(z)$ et z ont même image par π , et donc $\psi(z) - z \in \Lambda$. Puisque Λ est discret et que ψ est continue, cela implique que $\psi(z) - z$ est constant sur chaque composante connexe de $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$, et ψ est biholomorphe. En conclusion, on équipe \mathbb{C}/Λ de la structure complexe définie par cet atlas A .



On vient de voir que les changements de cartes sont des translations $\psi(z) = z + c$, où $c \in \mathbb{C}$, pour cette raison on dit que le tore \mathbb{C}/Λ est une surface de translation.

Dans le cas où $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, on dit que $\mathbb{T}^2 = \mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est un tore unitaire dont un domaine fondamental est le carré unité (voir figure 1.2) et pour cette raison on dit que \mathbb{T}^2 est une surface à petits carreaux, l'élément trivial de l'ensemble des surface à petits carreaux.

Remarquons que le côté gauche du carré est identifié au côté droit par translation et le côté bas est identifié au côté haut par translation aussi. Si on collait ces côtés opposés deux à deux on obtiendrait un tore de dimension 2 dans \mathbb{R}^3 , et on voit que le genre de cette surface est égal à 1 (voir Fig 2.1).

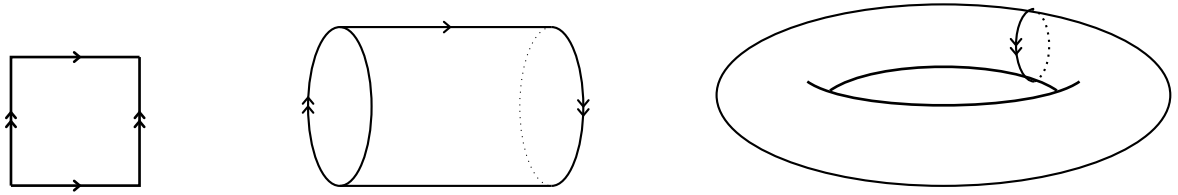


FIG. 2.1: Tore

2.2 Surfaces de translation

2.2.1 Surfaces de translation

Dans ce qui suit on donne trois définitions équivalents de la notion de surface de translation (voir [2], [17], [19], [26]).

Définition 2.2.1. Soit X une surface compacte orientable de genre g . On considère sur X un ensemble fini de points $\Sigma = \{p_1, \dots, p_n\}$ (appelés singularités) muni d'indices $\{d_1, \dots, d_n\} \in \mathbb{N}^n$ vérifiant la condition : $\sum_{i=1}^n d_i = 2g - 2$.

On définit une structure de surface de translation sur (X, Σ) par la donnée d'un atlas maximal A de cartes allant de $X \setminus \Sigma$ dans des ouvert de \mathbb{C} tel que :

1- les applications de transitions (changements de cartes) sont des translations, i.e. pour chaque carte $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$, et pour tout i, j avec $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, on a :

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(z) = z + c$$

avec $c \in \mathbb{C}$.

2- pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ il existe un voisinage U_i de p_i , un voisinage V_i de 0 dans \mathbb{C} , et un revêtement ramifié $p : (U_i, p_i) \rightarrow (V_i, 0)$ de degré $d_i + 1$ tel que chaque restriction injective de p est une carte de l'atlas A .

Remarque. Certains auteurs considèrent que la compacité de la surface n'est pas nécessaire, ce qui permet de voir \mathbb{C} comme une surface de translation. Notons aussi que l'ensemble des singularités peut être vide, par exemple le tore plat n'a aucune singularité. Dans notre cas on exige la compacité, ce qui entraîne que l'aire de la surface est finie.

Les changements de cartes de A sont biholomorphes car ce sont des translations, donc la structure de translation induite sur X est bien une structure de surface de Riemann.

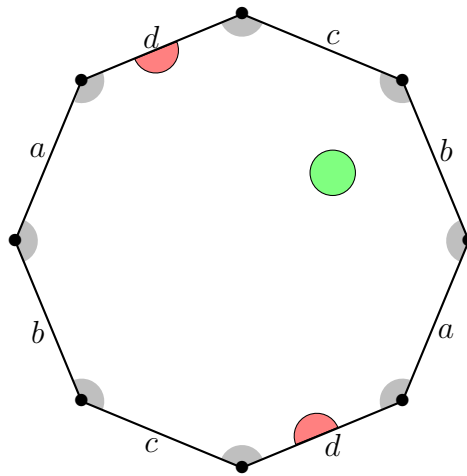


FIG. 2.2: L'octogone

Dans l'exemple de l'octogone (voir figure 2.2) les côtés sont identifiés par translation. L'octogone est une surface de translation de genre 2 à une singularité conique de degré 2. En effet, pour tout point différent des sommets, l'angle autour de ce point est 2π , dans ce cas on parle d'un point régulier (voir figure 2.2). Les sommets de l'octogone se rencontrent en un seul point, l'angle autour de ce point est $6\pi = 2\pi(2 + 1)$, dans ce cas on parle d'un point singulier conique de degré 2, d'après la formule de Gauss-Bonnet $2g - 2 = 2$ on trouve que $g = 2$.

On peut voir un voisinage du point singulier de degré d comme recollement de $2(d + 1)$ demi-disques euclidiens le long de rayons (voir figure 2.3).

La figure 2.4 montre le recollement de 6 demi-disques autour du point singulier de degré 2.

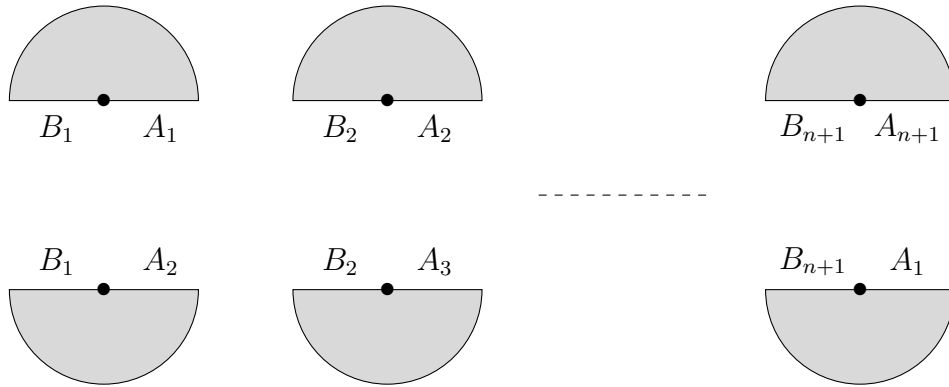


FIG. 2.3: Recollement des demi disques

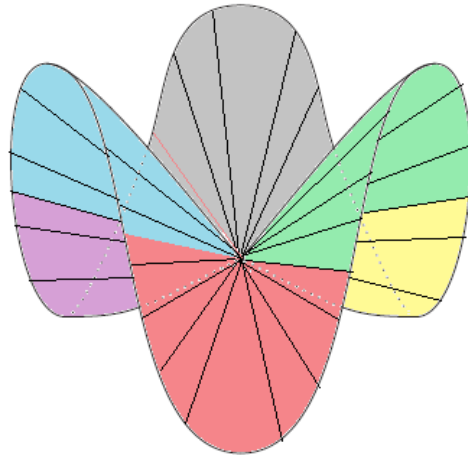


FIG. 2.4: Voisinage du point singulier de degré 2

Soit le cercle dans \mathbb{C} de centre 0 et de rayon ϵ i.e. $\epsilon e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Ce cercle se relève autour du point singulier par l'application $z \mapsto z^{n+1}$ à la courbe $\epsilon^{n+1} e^{(n+1)i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, donc il s'agit d'une courbe fermée qui fait $(n+1)$ tours autour du point singulier, donc l'angle autour de ce point est $2\pi(n+1)$.

Proposition 2.2.1 (voir [26]). *Soit X une surface de translation et ω une 1-forme holomorphe sur X . Si en un point ω ne s'annule pas, il existe une coordonnée locale au voisinage de ce point pour laquelle $\omega = dz$. Si ω admet un zéro d'ordre d , il existe une coordonnée locale au voisinage de ce zéro dans laquelle $\omega = z^d dz$.*

Définition 2.2.2. Une surface de translation est définie par la donnée d'un couple (X, ω) où X est une surface de Riemann compacte et ω une 1-forme holomorphe sur X .

Voici une troisième définition de surfaces de translation (voir [2], [26], [28]).

Définition 2.2.3. Une surface de translation X est une collection finie de polygones du plan, dont les côtés sont identifiés deux à deux par translation.

Définition 2.2.4. Soient X et Y deux surfaces de translation et soit $f : X \mapsto Y$ une application continue. On dit que f est une translation si pour toutes cartes (U, φ) sur X et (V, ψ) sur Y , satisfaisant $f(U) \subset V$ et pour tout point $x \in U$, il existe un voisinage ouvert $W \subset U$ de x tel que sur $\varphi(W)$ on a

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z + c, \quad c \in \mathbb{C}$$

Proposition 2.2.2. (Formule de Gauss-Bonnet). Soit X une surface de translation de genre g ayant n points singuliers coniques d'ordres respectifs d_i , $i = 1, \dots, n$, alors

$$2g - 2 = \sum_{i=1}^n d_i.$$

Démonstration. Considérons une triangulation d'une surface de genre g . Soient F le nombre de faces, A le nombre d'arêtes et S le nombre de sommets. On calcule la somme des angles des triangles par deux méthodes :

$$F \cdot \pi = \sum_{i=1}^n 2\pi(d_i + 1) + 2\pi(S - n)$$

d'autre part, chaque face a trois arêtes et chaque arête est sur le bord de deux faces, alors on trouve $3F = 2A$. Par la formule d'Euler, on obtient

$$2 - 2g = F + S - A = S - \frac{1}{2}F = - \sum_{i=1}^n d_i$$

d'où le résultat. □

La formule de Gauss-Bonnet montre que la seule surface compacte de translation qui n'a pas de singularité est le tore.

La surface dans la figure 2.5 est une collection de deux polygones identiques. Cette surface est de genre 2 car elle a deux points singuliers notés \bullet et $*$, chacun est d'angle 4π donc ces deux singularités sont de degré 1, par conséquent on a

$1 + 1 = 2g - 2$ donc $g = 2$.

Le nombre de points singuliers et leurs degrés dépendent de l'identification, si on change l'identification sur la surface dans la figure 2.5 on trouve une autre surface, à titre d'exemple on peut choisir une autre identification pour obtenir une surface de genre 1 (voir figure 2.6).

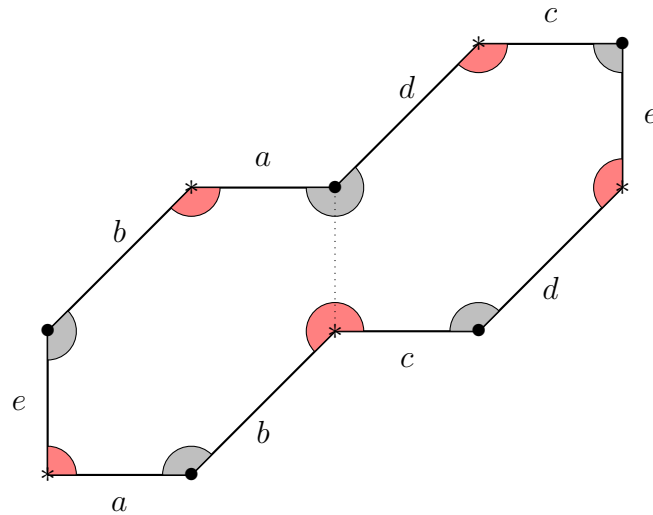


FIG. 2.5: Surface de genre 2

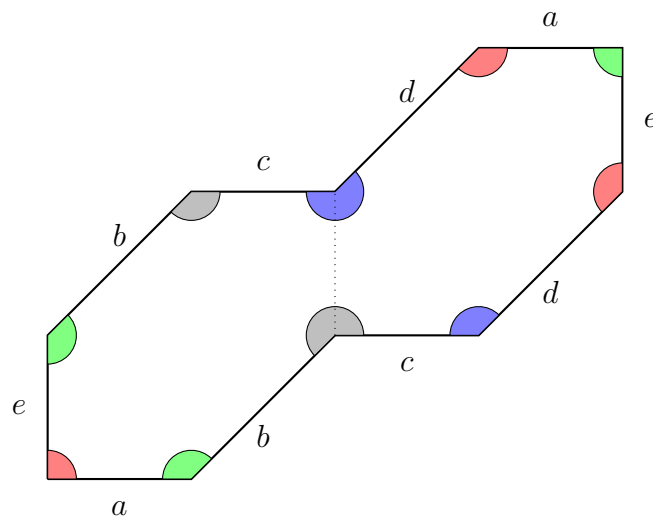


FIG. 2.6: Surface de genre 1

2.2.2 Les polygones réguliers

On a vu que l'octogone est une surface de genre 2 avec un seul point singulier conique de degré 2. Le décagone régulier est aussi une surface de translation de genre 2 mais avec deux points singuliers, chacun de degré 1, i.e. d'angle 4π (voir figure 2.7).

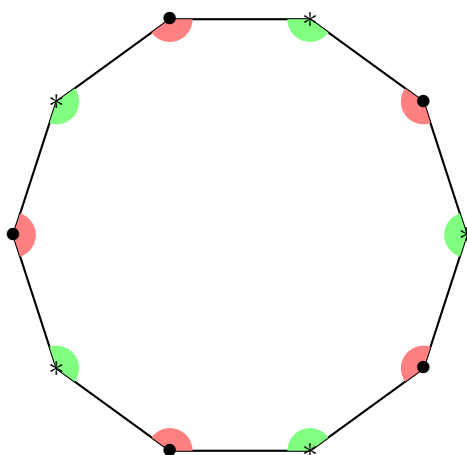


FIG. 2.7: Le décagone est de genre 2 à deux singularités

La famille des polygones réguliers à $2n$ côtés, avec $n \geq 4$, donne des surfaces de translation avec un ou deux points singuliers. Ces surfaces de translation sont obtenues en identifiant les côtés parallèles d'un polygone régulier à $2n$ côtés. On note ces surfaces X_{2n} .

Si n est pair on a un seul point singulier d'angle $2\pi(n-1)$ et si n est impair on a deux points singuliers, chacun d'angle $\pi(n-1)$, à l'aide de la formule de Gauss-Bonnet on obtient le genre de X_{2n} donné par (voir [7]).

$$g(X_{2n}) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ pair} \\ (n-1)/2 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} .$$

La représentation d'une surface comme un polygone avec les côtés deux à deux identifiés, n'est pas unique; on peut toujours découper la surface de façon à la développer en un autre polygone.

La figure 2.8 montre une surface de translation composée de deux octogones, cette surface a deux points singuliers, chacun de degré 2. On peut représenter la même surface sous forme d'une étoile en découpant un seul octogone (par exemple, à gauche) en huit triangles isocèles (voir figure 2.9). Le centre de l'octogone à gauche est un point régulier qui se répartit sur les sommets les plus éloignés du centre de l'étoile (voir [7]).

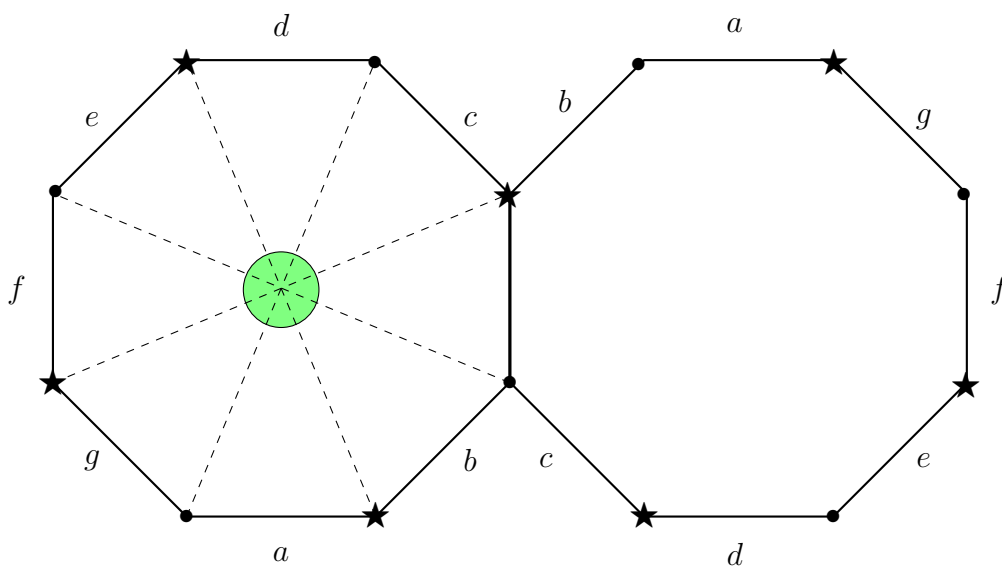


FIG. 2.8: Surface avec deux octogones de genre 2

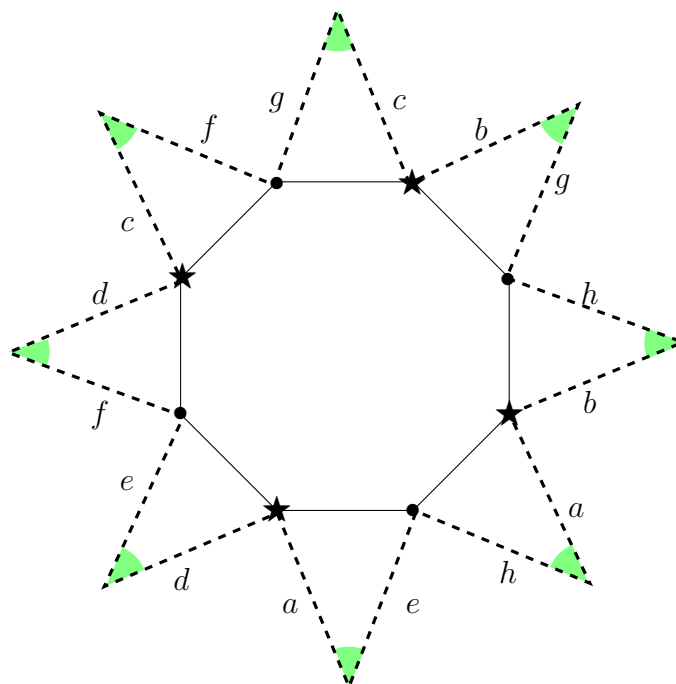


FIG. 2.9: Transformation de deux octogones en étoile

Définition 2.2.5. On appelle un lien de selle tout segment géodésique joignant deux singularités (distinctes ou non).

Définition 2.2.6. Une géodésique rencontrant une singularité est appelée une séparatrice.

D'après cette définition on en déduit qu'une séparatrice est une géodésique simple fermée.

Définition 2.2.7. Un cylindre est une réunion connexe maximale de géodésiques simples fermées homotopes.

Si le genre de la surface est plus grand que 1 alors chaque cylindre est bordé par des liens de selles.

Dans la figure 2.10, α est une séparatrice, β est un lien de selle et C est un cylindre.

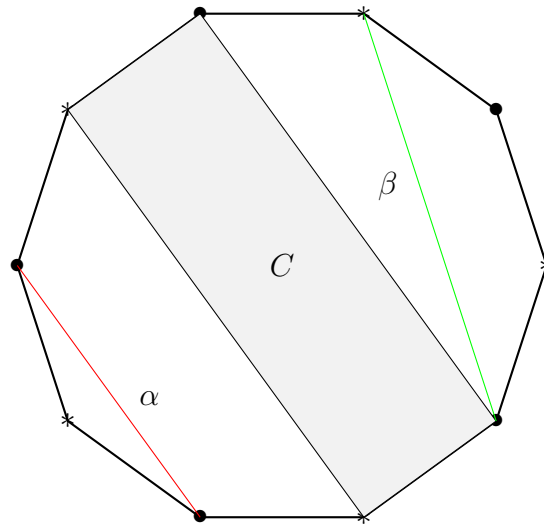


FIG. 2.10:

2.2.3 Espace de Teichmüller et espace des modules

On va introduire dans cette partie les notions d'espace de Teichmüller et d'espace des modules sur les surfaces de Riemann compactes de genre g .

Espace des modules

On définit une relation d'équivalence entre surfaces de Riemann en disant que deux surfaces de Riemann X et Y sont équivalentes si et seulement s'il existe une application biholomorphe entre X et Y , $f : X \mapsto Y$.

Définition 2.2.8. *On définit l'espace des modules comme étant l'ensemble de toutes les classes d'équivalence des surfaces de Riemann de genre g i.e.*

$$M_g = \{X \mid X \text{ est une surface de Riemann compact de genre } g\} / \sim$$

où $X \sim Y$ si et seulement s'il existe un biholomorphisme entre X et Y .

Espace de Teichmüller

Définition 2.2.9. *Soient $f, g : X \mapsto Y$ deux homéomorphismes. On dit que f et g sont isotopes s'il existe une application continue $H : X \times [0, 1] \mapsto Y$ telle que :*

- (1) $\forall x \in X, H(x, 0) = f(x)$.
- (2) $\forall x \in X, H(x, 1) = g(x)$.
- (3) *pour tout $t \in [0, 1]$, l'application*

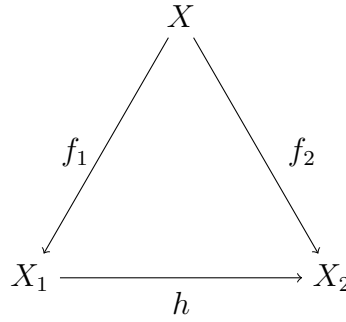
$$\begin{aligned} H : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto H(x, t) \end{aligned}$$

est un homéomorphisme.

On se fixe une surface de Riemann compacte X de genre g , appelée par la suite surface de référence.

Définition 2.2.10. *Une surface de Riemann marquée est un couple (X_1, f_1) où X_1 est une surface de Riemann et $f_1 : X \mapsto X_1$ est un difféomorphisme qui préserve l'orientation.*

On définit une relation d'équivalence entre surfaces marquées en disant que deux surfaces de Riemann marquées (X_1, f_1) et (X_2, f_2) de genre g sont équivalentes s'il existe une application $h : X_1 \mapsto X_2$ biholomorphe telle que $f_2 \circ f_1^{-1}$ soit isotope à h .



Définition 2.2.11. *L'espace de Teichmüller de X est l'ensemble des classes d'équivalence de surfaces de Riemann marquées*

$$T(X) = \{[X_i, f_i]\} / \sim .$$

Si deux surfaces de Riemann X et X' ont le même genre g , alors $T(X)$ et $T(X')$ sont en bijection. En tenant compte de cette bijection on donne la définition suivante.

Définition 2.2.12. *On définit l'espace de Teichmüller de genre g , noté T_g , comme étant l'ensemble $T(X)$, où X est une surface de Riemann compacte arbitraire de genre g .*

Définition 2.2.13. *Soit X une surface de Riemann compacte de genre g . Soient*

- (1) $Diff^+(X)$ *le groupe des difféomorphismes de X préservant l'orientation.*
- (2) $Diff^0(X)$ *le sous groupe de $Diff^+(X)$ formé des difféomorphismes isotopes à l'identité.*

Le quotient

$$Mod(X) = Diff^+(X) / Diff^0(X)$$

s'appelle le groupe modulaire.

On définit une action du groupe modulaire $Mod(X)$ sur l'espace de Teichmüller de $T(X)$ comme suit : soit $T(X)$ l'espace de Teichmüller de X . Soit $h \in Diff^+(X)$ et $[X_1, f_1]$ un point dans $T(X)$. On pose

$$h * [X_1, f_1] := [X_1, f_1 \circ h^{-1}]$$

On obtient un autre point $[X_1, f_1 \circ h^{-1}] \in T(X)$

De plus, pour tout élément $h \in Diff^0(X)$ on a $h * [X_1, f_1] = [X_1, f_1]$, et si h_1 et h_2 appartiennent à la même classe d'équivalence, on trouve que

$$[X_1, f_1 \circ h_1^{-1}] = [X_1, f_1 \circ h_2^{-1}].$$

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{h} & X \\
f_1 \searrow & & \nearrow f_1 \circ h^{-1} \\
& X_1 &
\end{array}$$

Donc $h * [X_1, f_1]$ dépend seulement de la classe d'équivalence de h , en outre on a

$$h_1 h_2 * [X_1, f_1] = h_1 (h_2 * [X_1, f_1])$$

On en déduit bien que le groupe $\text{Mod}(X)$ agit sur $T(X)$

$$\begin{array}{ccc}
\text{Mod}(X) \times T(X) & \longrightarrow & T(X) \\
([h], [X_i, f_i]) & \longmapsto & [X_1, f_i \circ h^{-1}].
\end{array}$$

L'espace des modules est isomorphe au quotient de l'espace de Teichmüller par l'action du groupe modulaire : $M_g = T_g / \text{Mod}_g$ (voir [24]).

Dans le cas des tores plats, l'espace de Teichmüller T_1 est isomorphe au demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$, et le groupe modulaire est $\text{Mod}_1 = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$, donc l'espace des modules des tores plats est $\mathbb{H}^2 / \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ (voir [24]).

Espace des modules des différentielles abéliennes

Définition 2.2.14. *On appelle différentielle abélienne une 1-forme différentielle holomorphe sur une surface de Riemann.*

Soient (X_1, f_1) et (X_2, f_2) deux surfaces de Riemann marquées, supposées équivalentes au sens de Teichmüller par une application $h : X_1 \rightarrow X_2$ biholomorphe, et soient ω_1 et ω_2 deux différentielles abéliennes sur X_1 et X_2 respectivement. On dit que (X_1, ω_1) et (X_2, ω_2) sont équivalentes si $\omega_1 = h^* \omega_2$.

Définition 2.2.15. *L'espace de Teichmüller des différentielles abéliennes de genre g est l'ensemble des classes d'équivalence (X, ω) . On le note ΩT_g .*

Définition 2.2.16. *L'espace des modules des différentielles abéliennes de genre g est le quotient de ΩT_g par l'action du groupe modulaire*

$$\Omega \mathcal{M}_g = \Omega T_g / \text{Mod}_g.$$

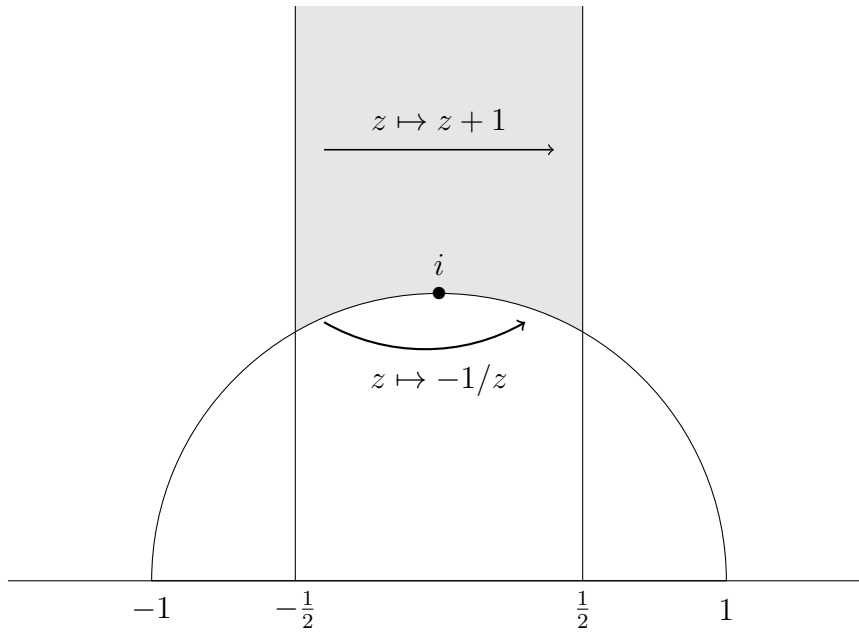


FIG. 2.11: Domaine fondamental

Strates

On a vu que l'octogone X_8 et le décagone X_{10} sont des surfaces de genre 2, avec un et deux points singuliers respectivement. Les différentielles abéliennes ω_1 et ω_2 sur X_8 et X_{10} ont respectivement un et deux zéros. On peut stratifier $\Omega\mathcal{M}_2$ en deux sous-espaces (on les appelle des strates) : un sous espace des différentielles abéliennes de genre 2 avec un seul zéro, noté $\mathcal{H}(2)$, et un sous espace des différentielles abéliennes de genre 2 avec deux zéros, noté $\mathcal{H}(1, 1)$. On a $\Omega\mathcal{M}_2 = \mathcal{H}(2) \sqcup \mathcal{H}(1, 1)$. D'une façon générale, on peut stratifier l'espace $\Omega\mathcal{M}_g$ en sous-espaces $\mathcal{H}(d_1, \dots, d_n)$, où $2g - 2 = \sum_{i=1}^n d_i$ et d_i est le degré d'un zéro de ω :

$$\Omega\mathcal{M}_g = \bigcup_{d_1 + \dots + d_n = 2g - 2} \mathcal{H}(d_1, \dots, d_n).$$

Définition 2.2.17. La strate $\mathcal{H}(d_1, \dots, d_n)$ est le sous-espace de $\Omega\mathcal{M}_g$ constitué des classes d'équivalences de couples (X, ω) , où ω a exactement n zéros de degrés d_1, \dots, d_n .

On peut dire aussi que $\mathcal{H}(d_1, \dots, d_n)$ est l'ensemble des surfaces de translation qui ont n points singuliers de degrés d_1, \dots, d_n . La strate $\mathcal{H}(1, \dots, 1)$ s'appelle la strate principale.

Notation : On note aussi la strate $\mathcal{H}(d_1, \dots, d_n)$ par $\Omega\mathcal{M}_g(d_1, \dots, d_n)$.
On a (voir [13])

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{H}(d_1, \dots, d_n) = 2g - 1 + n.$$

A titre d'exemple, $X_{2n} \in \mathcal{H}(n - 2)$ si n est pair, et $X_{2n} \in \mathcal{H}\left(\frac{n-3}{2}, \frac{n-3}{2}\right)$ si n est impair ($n \geq 4$)(voir [7]). La surface dans la figure 2.5 appartient à la strate $\mathcal{H}(2)$.

Groupe de Veech

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. On pose

$$A.z = (ax + by) + i(cx + dy).$$

avec $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Définition 2.2.18. Soient X et Y deux surfaces de translation. Une application continue $f : X \mapsto Y$ est dite affine si elle est localement affine, i.e. pour tout $x \in X$ il existe une carte (U, φ) sur X et une carte (V, ψ) sur Y , avec $x \in U$ et $f(U) \subset V$, telle que pour tout $z \in \varphi(U)$, il existe une matrice $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ et $t \in \mathbb{C}$ avec

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(z) = A.z + t.$$

Comme les changements de cartes sont des translations, la matrice A est indépendante des cartes.

Définition 2.2.19. Soit X une surface de translation et Σ l'ensemble de ses singularités. Un difféomorphisme affine sur X est une application $f : X \mapsto X$ telle que :

- (1) f est un difféomorphisme sur $X \setminus \Sigma$.
- (2) f est affine.
- (3) f préserve Σ .

Pour que f soit un difféomorphisme il faut que f soit bijective, donc f est un difféomorphisme si et seulement si la matrice $A \in GL(2, \mathbb{R})$. Si le difféomorphisme préserve l'orientation alors $A \in GL^+(2, \mathbb{R})$. Comme l'aire de la surface est finie, $A \in SL(2, \mathbb{R})$.

Définition 2.2.20. Soit X une surface de translation. Le groupe affine de X est :

$$\text{aff}^+ = \{f : X \mapsto X \mid f \text{ difféomorphisme affine préservant l'orientation}\}$$

Définition 2.2.21. On définit une application :

$$\begin{aligned} \text{der} : \text{aff}^+ &\longrightarrow SL(2, \mathbb{R}) \\ f &\longmapsto A \end{aligned}$$

appelée *dérivation*, en prenant pour $\text{der}(f) = A$ la dérivée de f .

L'application der est un morphisme de groupe.

Définition 2.2.22. Soit X une surface de translation. L'image du morphisme der , $\text{der}(\text{aff}^+(X))$ s'appelle le groupe de Veech de X , on le note $\Gamma(X)$.

Considérons l'action du groupe $SL(2, \mathbb{R})$ sur le plan complexe \mathbb{C} définie comme suit

$$\begin{aligned} SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (M, z) &\longmapsto M.z \end{aligned}$$

Cette action s'étend aux polygones. La matrice M envoie chaque paire de côtés parallèles et de même longueur sur une paire de côtés parallèles et de même longueur.

On donne une autre définition du groupe de Veech équivalente à la définition précédente (voir [2]).

Définition 2.2.23. Le groupe de Veech de X est le stabilisateur de X sous l'action de $SL(2, \mathbb{R})$.

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ stabilise la surface $L(2, 2)$ (voir figure 2.13). On fait agir la matrice A sur la surface $L(2, 2)$, on trouve une autre surface, on découpe cette dernière le long de α puis le long de β , on récupère notre surface $L(2, 2)$, donc la matrice A stabilise la surface $L(2, 2)$.

Reprenons la surface X_{2n} . Il est clair que si on fait une rotation de centre O où O est le centre de X_{2n} et d'angle π/n , la surface reste invariante, par conséquent la matrice de rotation $A = \begin{pmatrix} \cos(\pi/n) & -\sin(\pi/n) \\ \sin(\pi/n) & \cos(\pi/n) \end{pmatrix}$ stabilise X_{2n} , donc elle est dans le groupe de Veech de X_{2n} , $\Gamma(X_{2n})$.

Le groupe de Veech de X_{2n} est (voir [7])

$$\Gamma(X_{2n}) = \langle R^2, T, RTR^{-1} \rangle$$

où les générateurs sont donnés par

$$R = R(2n) = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2n) & -\sin(\pi/2n) \\ \sin(\pi/2n) & \cos(\pi/2n) \end{pmatrix}, \quad T = T(2n) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cot(\pi/2n) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

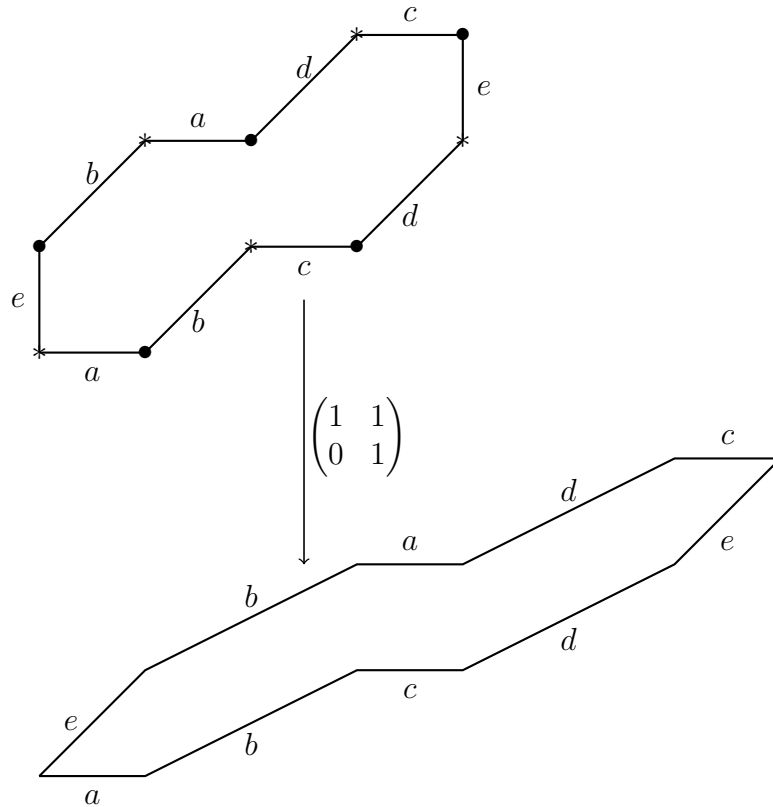


FIG. 2.12: Action sur une surface

Le groupe de Veech de \mathbb{T}^2 est $SL(2, \mathbb{Z})$. En effet, pour n'importe quelle matrice dans le groupe de Veech de \mathbb{T}^2 , cette matrice doit préserver le réseau \mathbb{Z}^2 , donc $\Gamma(\mathbb{T}^2)$ est un sous-groupe de $SL(2, \mathbb{Z})$. De plus les deux matrices

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

stabilisent \mathbb{T}^2 (voir figure 2.14), donc $SL(2, \mathbb{Z})$ est bien le groupe de Veech de \mathbb{T}^2 . Le groupe $GL(2, \mathbb{R})$ agit sur l'ensemble des surfaces de translation, en particulier sur les tores plats. Pour n'importe quel réseau $\Lambda = (a + ic)\mathbb{Z} + (b + id)\mathbb{Z}$, il existe une matrice qui transforme le réseau \mathbb{Z}^2 en le réseau Λ i.e. $\Lambda = A \cdot \mathbb{Z}^2$ où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$. On en déduit que les tores \mathbb{T}^2 et \mathbb{C}/Λ sont dans la même orbite pour cette action, donc le stabilisateur de \mathbb{C}/Λ est conjugué au stabilisateur de \mathbb{T}^2 , par la matrice $A : \Gamma(\mathbb{C}/\Lambda) = A \cdot SL(2, \mathbb{Z}) A^{-1}$.

Définition 2.2.24. Le disque de Teichmüller de (X, ω) est l'orbite dans $\Omega\mathcal{M}_g$ de (X, ω) sous l'action de $GL^+(2, \mathbb{R})$.

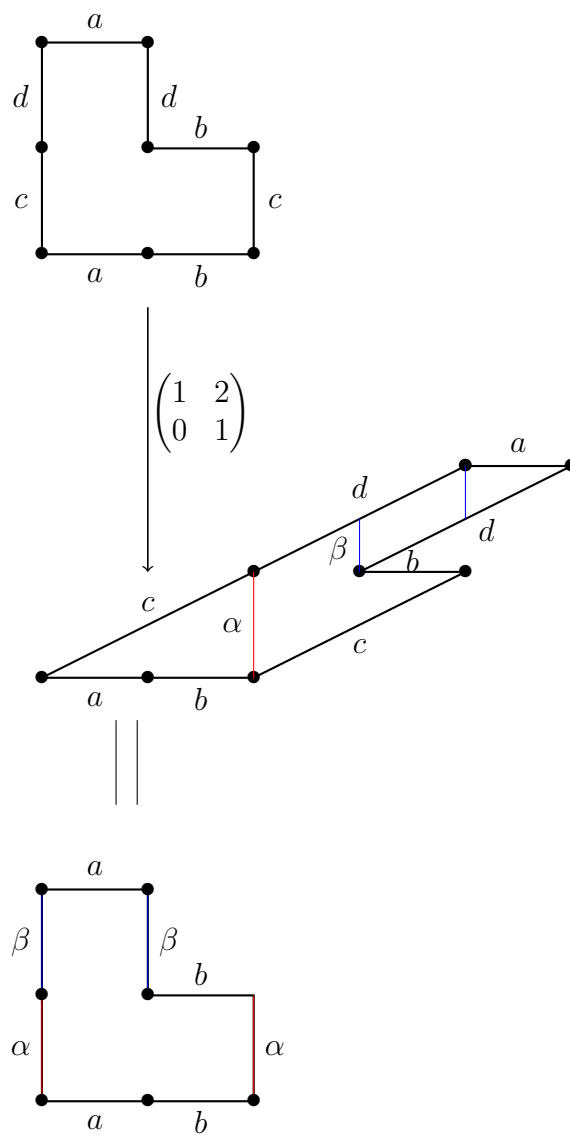
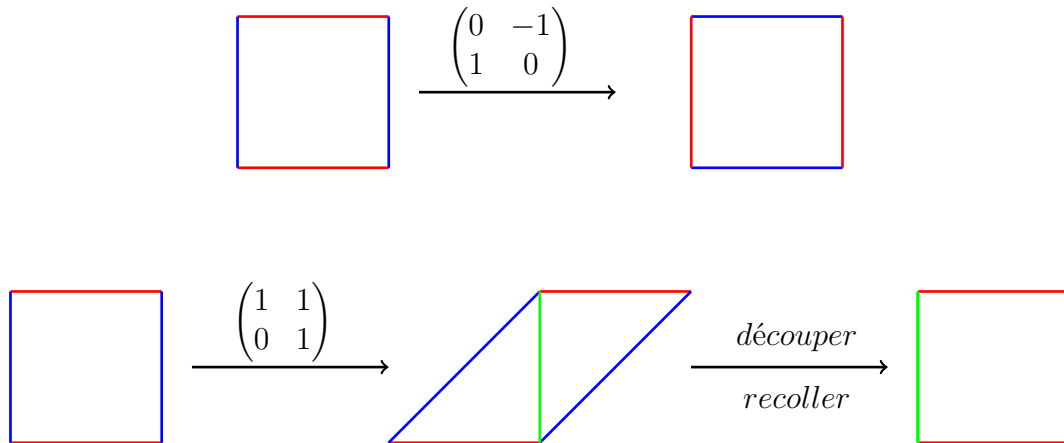


FIG. 2.13: La matrice A stabilise $L(2, 2)$

FIG. 2.14: Action de T et S sur tore \mathbb{T}^2

2.3 Surfaces à petits carreaux

2.3.1 Surfaces à petits carreaux

Dans cette partie on va donner les différentes définitions équivalentes d'une surface à petits carreaux, on va voir qu'une surface à petits carreaux (aussi appelée "origami") est un cas particulier de surface de translation. Pour avoir plus de détails sur les surfaces à petits carreaux on peut consulter [2], [27], [28]. Pour finir on donnera quelques exemples de surfaces à petits carreaux. On définira également les notions de surface primitive et réduite, et on précisera la relation entre ces dernières et les réseaux de périodes relatives et absolues.

Définition 2.3.1. Une surface à petits carreaux est un revêtement connexe fini $\pi : X \rightarrow \mathbb{T}^2$ non ramifié au dessus de $\mathbb{T}^2 - \{0\}$.

Les carreaux sont les composantes connexes de $\pi^{-1}(]0, 1[{}^2)$. La définition suivante est équivalente à la précédente (voir [28]).

Définition 2.3.2. Une surface à petits carreaux est un ensemble fini de copies du carreau unitaire euclidien qui sont collées en respectant les règles suivantes :

- (1) chaque côté droit est identifié par translation avec un et un seul côté gauche.
- (2) chaque côté haut est identifié par translation avec un et un seul côté bas.
- (3) la surface est connexe.

On a vu dans le sous chapitre précédent qu'une surface de translation est une collection finie de polygones du plan, dont les côtés sont identifiés deux à deux par translation. Dans le cas où les polygones sont des carrés on obtient une surface à

petits carreaux, donc il est clair qu'une surface à petits carreaux est un cas particulier de surfaces de translation.

On peut voir la définition précédente d'un point de vue combinatoire (voir [28]). Soit S_n le groupe symétrique sur l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. On numérote les carreaux de la surface par les entiers de 1 à n et, on définit les deux permutations $(\sigma, \tau) \in S_n \times S_n$ par :

$\sigma(i) = j$, si le côté droit du carreau i est collé au côté gauche du carreau j .

$\tau(i) = k$, si le côté haut du carreau i est collé au côté bas du carreau k .

On remarque que si la surface est connexe alors le sous-groupe engendré par $\{\sigma, \tau\} \subset S_n$ est transitif, inversement si $\{\sigma, \tau\} \subset S_n$ est transitif alors la surface est connexe, de sorte qu'il y a équivalence entre la connexité de la surface et la transitivité du groupe.

Soient les permutations suivantes : $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)(5)(6)$ et $\tau = (1)(2\ 3)(4\ 5\ 6)$.

Ces permutations définissent la surface représentée à la figure 2.15. Cette surface a un seul point singulier de degré 4, donc elle appartient à la strate $\mathcal{H}(4)$.

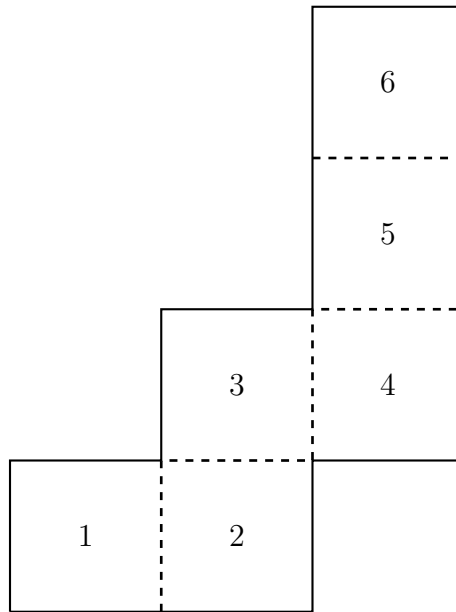


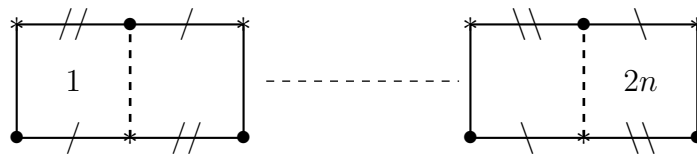
FIG. 2.15: Surface obtenue à partir d'une permutation.

2.3.2 Quelques surfaces à petits carreaux

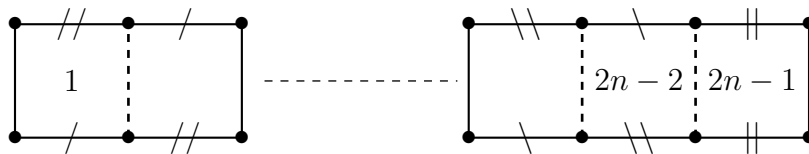
On donne quelques exemples de surfaces à petits carreaux connues. Pour ces surfaces, quand on ne précise pas les identifications, cela veut dire que les identifications se font par translation verticales (horizontales).

La surface "Tress $X(2n)$ " : cette surface est composée de $2n$ carreaux. Elle a deux points singuliers chacun de degré $n - 1$, ainsi elle appartient à la strate $\mathcal{H}(n - 1, n - 1)$.

Ses données combinatoires sont $\sigma = (1\ 2\ 3 \cdots 2n)$ et $\tau = (1\ 2)(3\ 4) \cdots (2n - 1\ 2n)$.

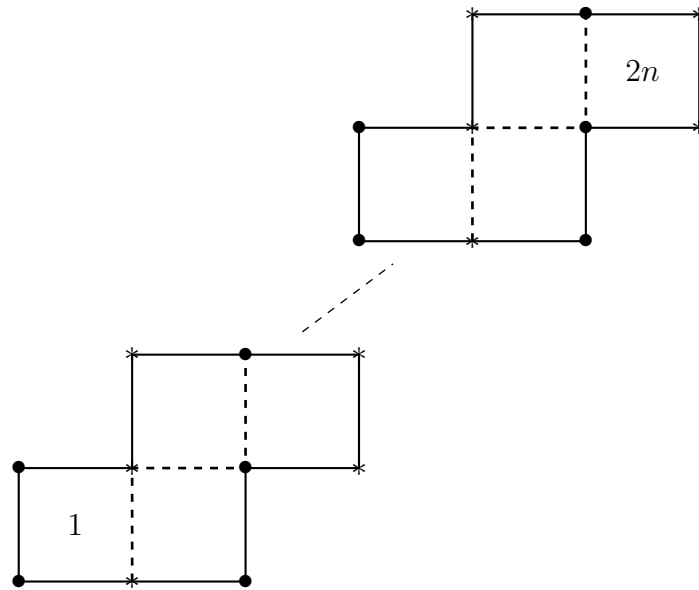


La surface "Tress $X(2n - 1)$ " : cette surface est composée de $2n - 1$ carreaux. Elle a un seul point singulier de degré $2n$, donc elle appartient à la strate $\mathcal{H}(2n)$. Ses données combinatoires sont $\sigma = (1\ 2\ 3 \cdots 2n - 1)$ et $\tau = (1\ 2)(3\ 4) \cdots (2n - 3\ 2n - 1)(2n - 1)$.

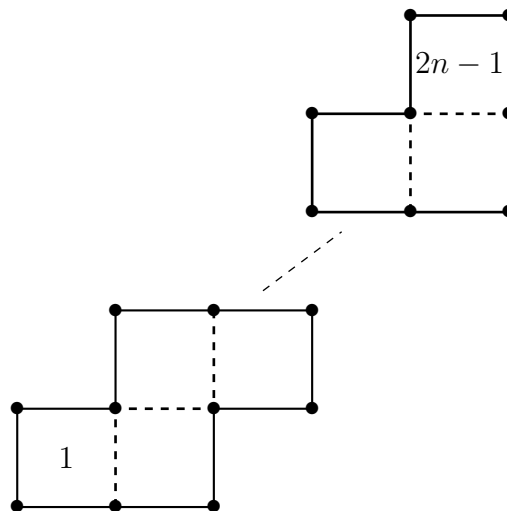


La surface "Stair $St(2n)$ " : cette surface est composée de $2n$ carreaux, elle a deux points singuliers chacun de degré $n - 1$, donc elle appartient à la strate $\mathcal{H}(n - 1, n - 1)$.

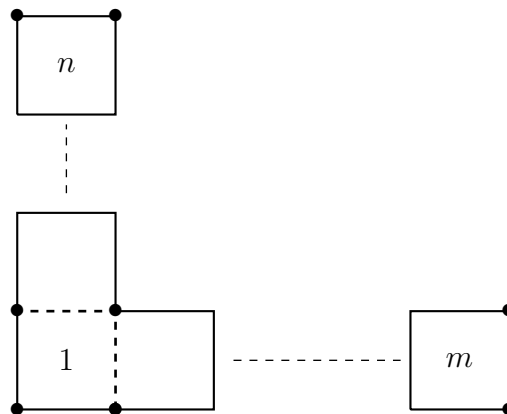
Ses données combinatoires sont $\sigma = (1\ 2)(3\ 4) \cdots (2n - 1\ 2n)$ et $\tau = (1)(2\ 3) \cdots (2n - 2\ 2n - 1)(2n)$.



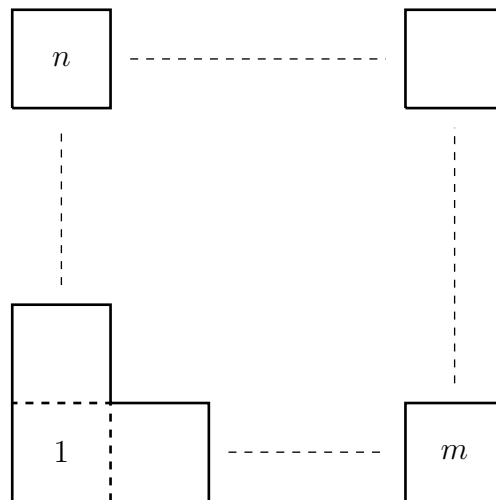
La surface "Stair $St(2n-1)$ " : cette surface est composée de $2n-1$ carreaux, elle a un seul point singulier de degré $2n$, et appartient à la strate $\mathcal{H}(2n-2)$. Ses données combinatoires sont $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)\cdots(2n-3\ 2n-2)(2n-1)$ et $\tau = (1)(2\ 3)\cdots(2n-2\ 2n-1)$.



La surface $L(m, n)$: cette surface est composée de $m+n-1$ carreaux. Elle a un seul point singulier de degré 2, elle appartient à la strate $\mathcal{H}(2)$.



La surface $T(m, n)$: cette surface est composée de $m \times n$ carreaux. Elle n'a aucun point singulier. C'est un tore.



2.3.3 Surfaces primitives et réduites

Définition 2.3.3. Soit ω une forme différentielle sur X . L'intégrale de ω le long d'un lien de selle est appelée une période relative de ω .

$$\int_{\gamma} \omega \in \mathbb{C}$$

Le sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$ engendré par les périodes relatives de ω s'appelle le réseau des périodes relative de ω . On le note $\text{RL}(X, \omega)$, ou bien $\text{RL}(X)$.

Comme les extrémités des liens de selles sont dans \mathbb{Z}^2 , $\text{R}\Lambda(X, \omega)$ est un sous-réseau de \mathbb{Z}^2 .

Définition 2.3.4. Soit ω une forme différentielle sur X . L'intégrale de ω le long d'un 1-cycle est appelée une période absolue de ω .

$$\int_{\gamma} \omega \in \mathbb{C}$$

Le sous-groupe engendré par les périodes absolues de ω s'appelle le réseau des périodes absolues de ω . On le note $\Lambda(X, \omega)$, ou bien $\Lambda(X)$.

$\Lambda(X, \omega)$ est un sous-réseau de \mathbb{Z}^2 .

On donne à présent les définitions de surface primitive et réduite (voir [2], [6]).

Définition 2.3.5. Une surface à petits carreaux X de genre $g \geq 2$ est primitive si $\Lambda(X, \omega) = \mathbb{Z}^2$.

Le réseau des période absolue de la surface $St(2n - 1)$ est $\Lambda(St(2n - 1)) = \mathbb{Z}^2$ donc elle est primitive.

Définition 2.3.6. Une surface à petits carreaux X de genre $g \geq 2$ est réduite si $\text{R}\Lambda(X, \omega) = \mathbb{Z}^2$.

Le réseau des périodes relatives et absolues de la surface de la figure 2.16 est $\text{R}\Lambda(X, \omega) = \Lambda(X, \omega) = 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$, par conséquent cette surface n'est ni primitive ni réduite.

Il est clair que $\Lambda(X, \omega) \subset \text{R}\Lambda(X, \omega)$. Donc une surface primitive est réduite, mais l'inverse n'est pas vrai en général.

La surface $St(2n)$ est réduite mais n'est pas primitive, ses réseaux des périodes relatives et absolues sont respectivement $\text{R}\Lambda(X, \omega) = \mathbb{Z}^2$ et $\Lambda(X, \omega) = 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

La surface dans la figure 2.17 n'est pas réduite car son réseau des périodes relatives est $\text{R}\Lambda(X, \omega) = 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

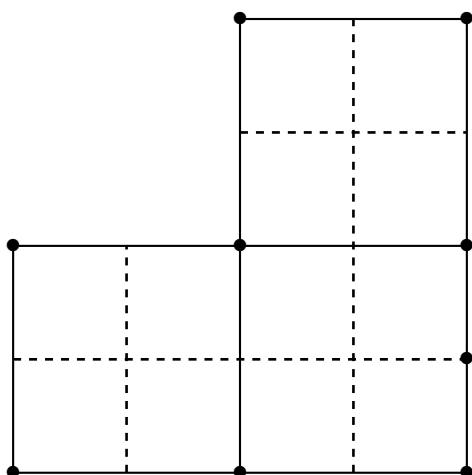


FIG. 2.16:

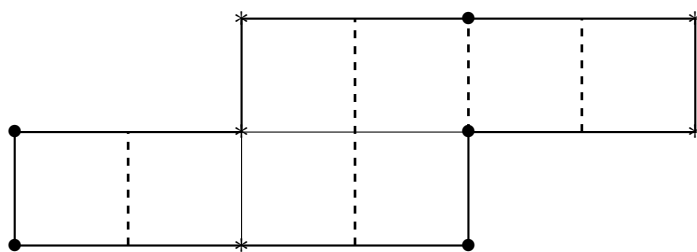
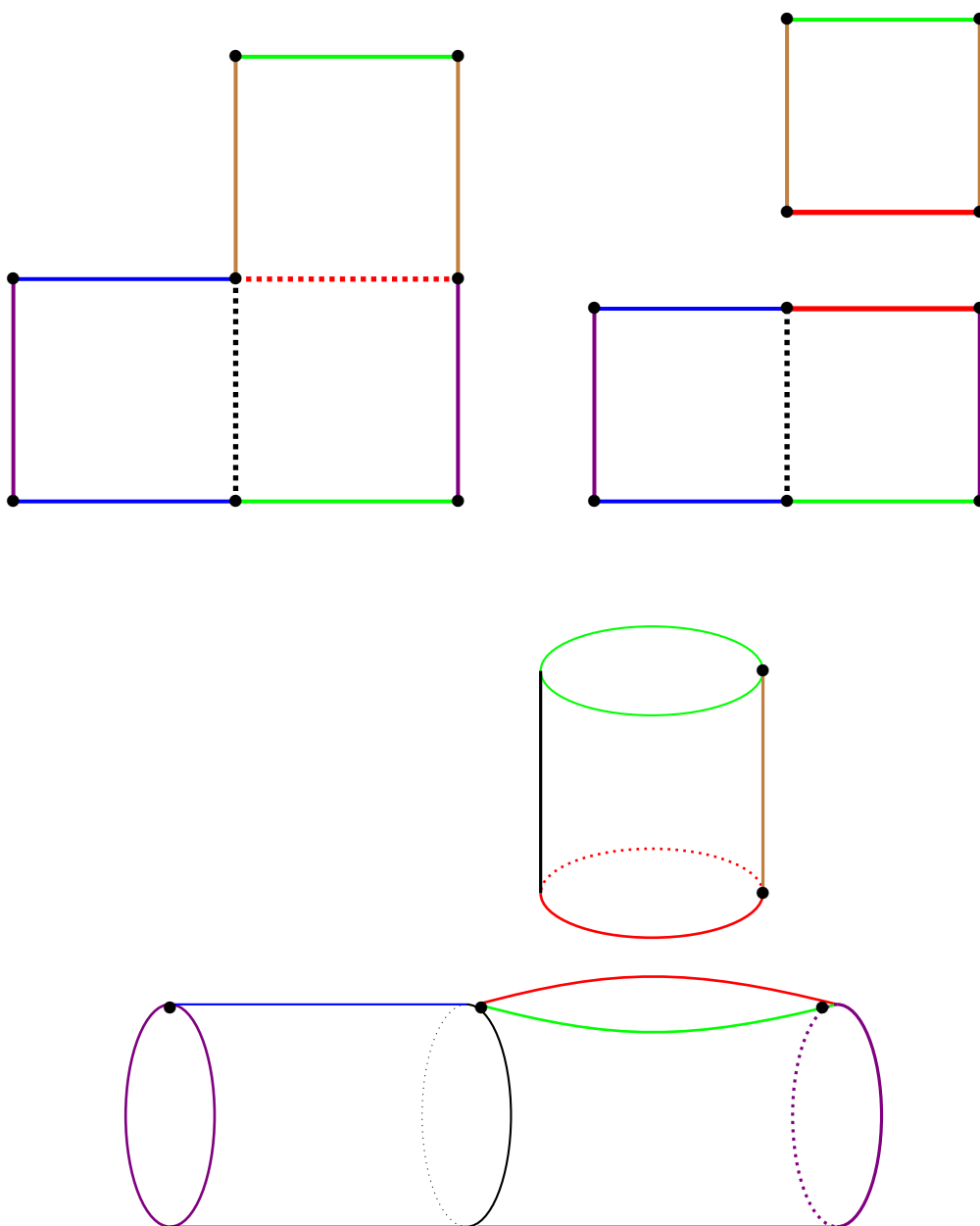


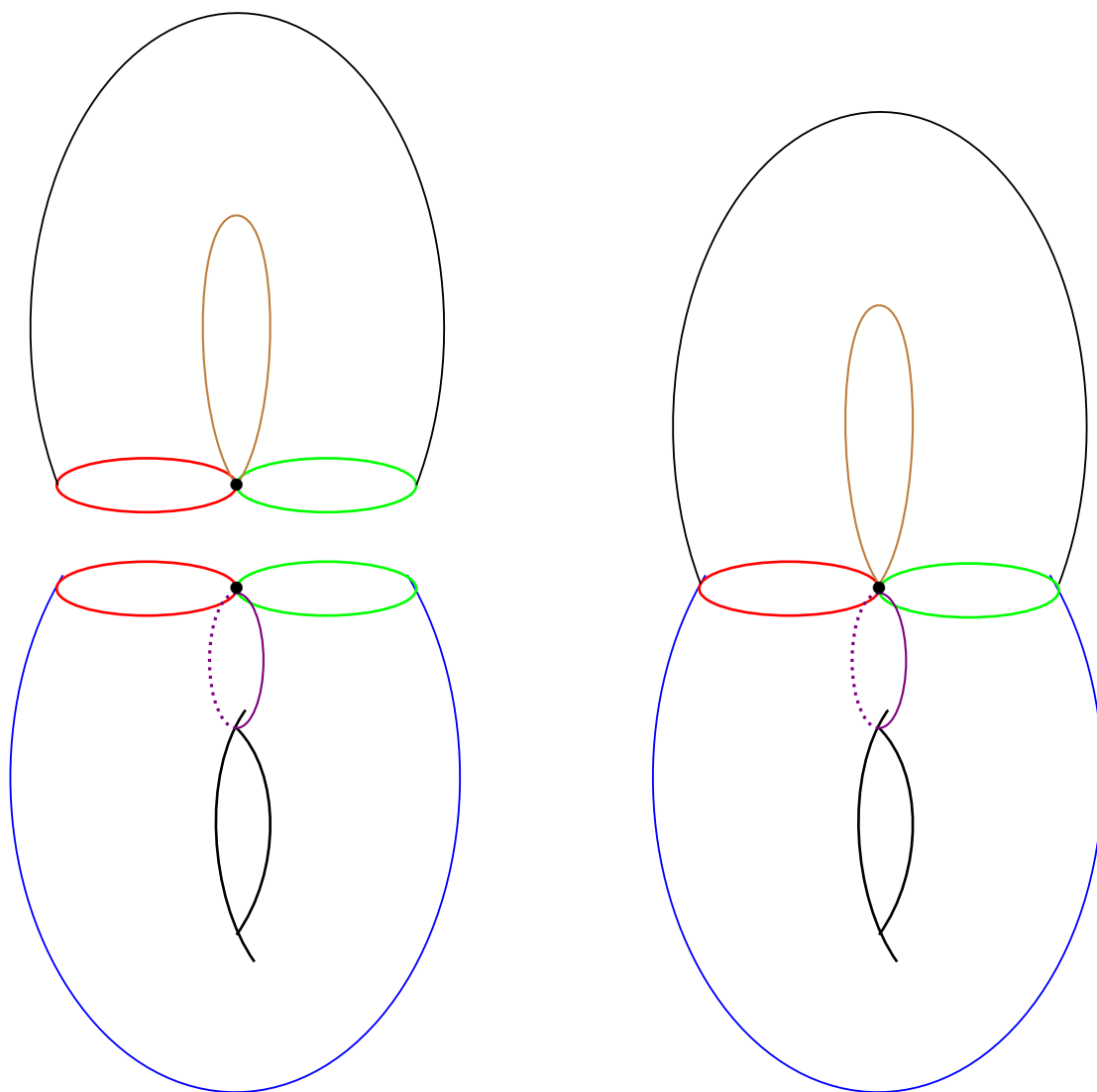
FIG. 2.17:

2.3.4 $St(3)$ et $St(4)$ dans \mathbb{R}^3

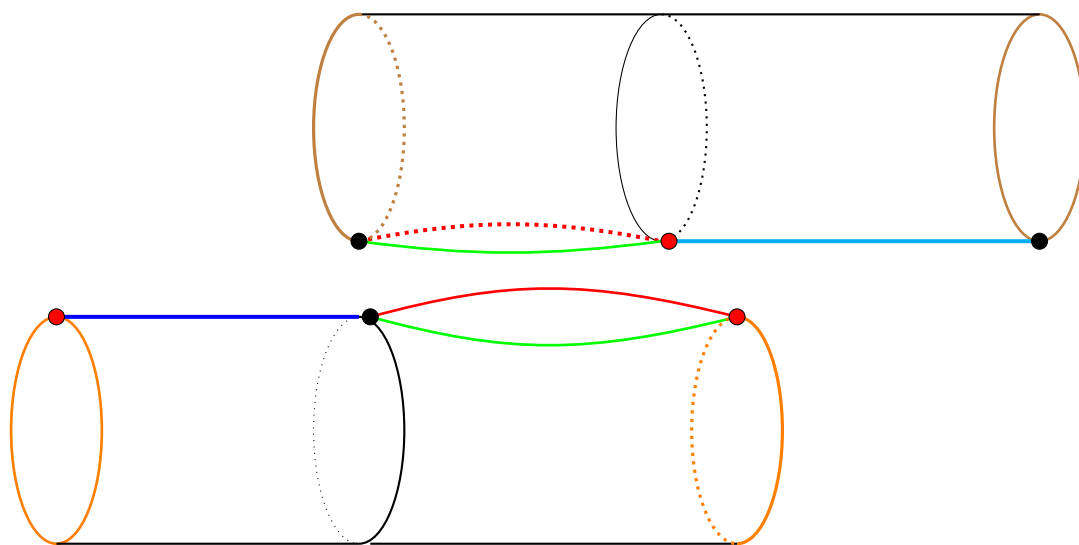
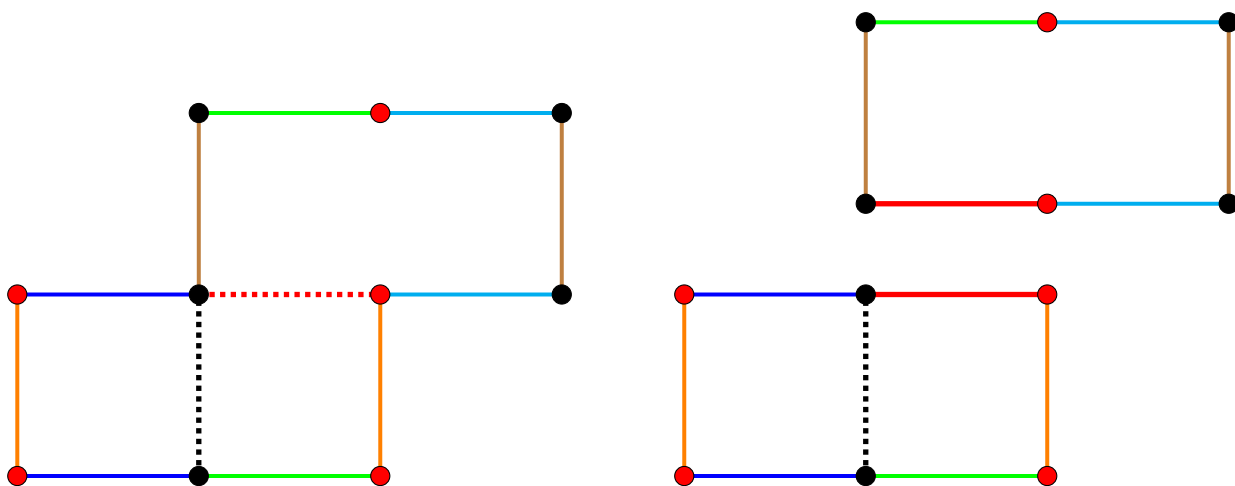
On va présenter quelques dessins qui montrent comment obtenir une surface de genre 2 dans \mathbb{R}^3 . On s'intéresse aux surfaces $St(3)$ et $St(4)$.

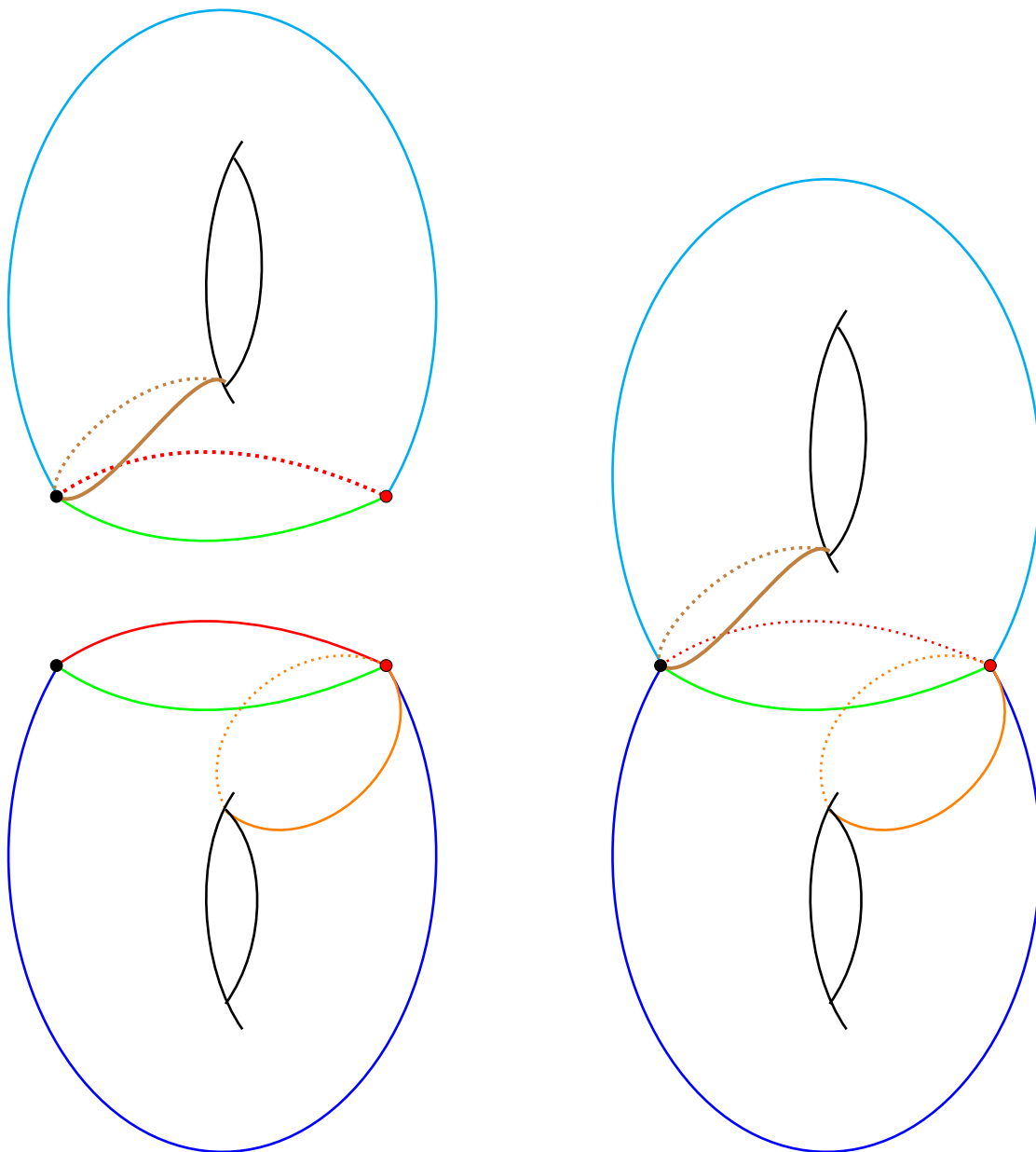
La surface $St(3)$.





La surface $St(4)$.





Bibliographie

- [1] A. Bobenko Computational approaches to Riemann surfaces(Introduction to compact Riemann Surfaces), Series : Lecture Notes in Mathematics, Springer, 2011.
- [2] J. Cabrol Origamis infinis : Groupe de Veech et flot linéaire. Thèse de doctorat, Aix-Marseille Université, 2012.
- [3] D. Chen Teichmüller dynamics in eyes of algebraic geometer, Algebraic Geometry, arxiv.org/abs/1602.02260.
- [4] F. Dal'Bo Trajectoires et géodésiques et horocycliques, savoirs actuels, CNRS éditions, EDP sciences, 2007.
- [5] F. De Marçay Surfaces de Riemann abstraites, Cours de Master 2, Université Paris-Sud, France.
- [6] E. Duryev Teichmüller curves in genus two : Square-tiled surfaces and modular curves, arxiv.org/abs/1905.09312.
- [7] M. Finster Veech Groups and Translation Coverings. Thèse de doctorat, Instituts für Technologie (KIT), 2013.
- [8] J. Gallier ; D. Xu A Guide to the Classification Theorem for Compact Surfaces, Series : Geometry and computing, Springer, 2013.
- [9] E. Goujard constantes de Siegel-Veech et volumes de strates d'espace de modules de différentielles quadratiques. Thèse de doctorat, Université de Rennes 1, 2014.
- [10] E. Goujard Revêtements cycliques à petits carreaux, Stage M2, 2011, w3.impa.br/ cmateus/files/elise.pdf.
- [11] A. Kappes On the equation of an origami of genus two with two cusps, Thèse de doctorat, Institut für Algebra und Geometrie, Universität Karlsruhe, 2007.
- [12] S. Katok Fuchsian groups. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, 1992.
- [13] E. Lanneau Promenade dynamique et combinatoire dans les espaces de Teichmüller. Thèse d'habilitation, Université Sud-Toulon-Var, 2010.

-
- [14] S. Lelièvre Surfaces de Veech arithmétiques en genre deux : disques de Teichmüller, groupes de Veech et constantes de Siegel–Veech. Thèse de doctorat, Université de Rennes 1, 2004.
- [15] O. Malouf Géométrie des surfaces munies de métriques plates à singularités coniques : paramètres, fonctions longueur et espaces des déformations. Thèse de doctorat, université de Strasbourg, 2011.
- [16] D. Massart ; B. Muetzel On the intersection form of surfaces. *Manuscripta Math.* 143 (2014), no. 1-2, 19-49.
- [17] H. Masur Ergodic Theory of Translation Surfaces, VOL. 1B Handbook of dynamical systems, Vol 1 part B, 527-547, Elsevier BV, 2006.
- [18] A. Randecker Geometry and topology of wild translation surfaces. Thèse de doctorat, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), 2016.
- [19] O. Rodriguez Familles à un paramètre de surfaces en genre 2. Thèse de doctorat, Université de Montpellier 2, 2010.
- [20] J. Préaux Introduction à la géométrie dans le plan Hyperbolique, Cours, docplayer.fr/44433026-Jean-philippe-preaux-introduction-a-la-geometrie-dans-le-plan-hyperbolique.html.
- [21] M. Schlichenmaier An Introduction to Riemann Surfaces, Algebraic Curves and Moduli Spaces, Theoretical and Mathematical Physics, Springer, Berlin, 2007.
- [22] G. Schmithüsen Examples for Veech groups of origamis. The geometry of Riemann surfaces and abelian varieties, 193–206, *Contemp. Math.*, 397, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [23] R. Sà Earp ; E. Toubiana Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann, Cassini, Paris, 2009.
- [24] M. Taniguchi ; I. Yoichi An Introduction to Teichmüller Spaces, Springer-Verlag, Tokyo, 1992.
- [25] M. Viana Dynamics of Interval Exchange Transformations and Teichmüller Flows, 2008, w3.impa.br/~viana/out/ietf.pdf.
- [26] A. Wright Translation surface and their orbit closures : An introduction for a broad audience, arxiv.org/abs/1411.1827.
- [27] J-C. Yoccoz Surfaces à petits carreaux. Cours du Collège de France, 2010-2011, www.college-de-france.fr/site/jean-christophe-yoccoz/course-2010-2011.htm.
- [28] D. Zmiaikou Origamis et groupes de permutation. Thèse de doctorat, Université Paris-sud 11, 2011.
- [29] A. Zorich Flat surfaces, *Frontiers in Number Theory, Physics, and Geometry. I*, 437–583, Springer, Berlin, 2006.

3. ALGEBRAIC INTERSECTION FOR TRANSLATION SURFACES IN THE STRATUM $\mathcal{H}(2)$

Cet article est rédigé par : Smail Cheboui, Arezki Kessi, Daniel Massart.

ABSTRACT

Nous étudions la quantité KVol définie par l'équation (3.1) sur la strate $\mathcal{H}(2)$ des surfaces de translation de genre 2, avec une singularité conique. Nous donnons une suite explicite de surfaces $L(n, n)$ telles que $\text{KVol}(L(n, n)) \rightarrow 2$ quand n tend vers l'infini, 2 étant l'infimum-conjectural-de KVol sur $\mathcal{H}(2)$.

We study the quantity KVol defined in Equation (3.1) on the stratum $\mathcal{H}(2)$ of translation surfaces of genus 2, with one conical point. We provide an explicit sequence $L(n, n)$ of surfaces such that $\text{KVol}(L(n, n)) \rightarrow 2$ when n goes to infinity, 2 being the conjectured infimum for KVol over $\mathcal{H}(2)$.

3.1 Introduction

Let X be a closed surface, that is, a compact, connected manifold of dimension 2, without boundary. Let us assume that X is oriented. Then the algebraic intersection of closed curves in X endows the first homology $H_1(X, \mathbb{R})$ with an antisymmetric, non degenerate, bilinear form, which we denote $\text{Int}(\cdot, \cdot)$.

Now let us assume X is endowed with a Riemannian metric g . We denote $\text{Vol}(X, g)$ the Riemannian volume of X with respect to the metric g , and for any piecewise smooth closed curve α in X , we denote $l_g(\alpha)$ the length of α with respect to g . When there is no ambiguity we omit the reference to g .

We are interested in the quantity

$$\text{KVol}(X, g) = \text{Vol}(X, g) \sup_{\alpha, \beta} \frac{\text{Int}(\alpha, \beta)}{l_g(\alpha)l_g(\beta)} \quad (3.1)$$

where the supremum ranges over all piecewise smooth closed curves α and β in X . The $\text{Vol}(X, g)$ factor is there to make KVol invariant to re-scaling of the metric g . See [5] as to why KVol is finite. It is easy to make KVol go to infinity, you just need to pinch a non-separating closed curve α to make its length go to zero. The interesting surfaces are those (X, g) for which KVol is small.

When X is the torus, we have $\text{KVol}(X, g) \geq 1$, with equality if and only if the metric g is flat (see [5]). Furthermore, when g is flat, the supremum in (3.1) is not attained, but for a negligible subset of the set of all flat metrics. In [5] KVol is studied as a function of g , on the moduli space of hyperbolic (that is, the curvature of g is -1) surfaces of fixed genus. It is proved that KVol goes to infinity when g degenerates by pinching a non-separating closed curve, while KVol remains bounded when g degenerates by pinching a separating closed curve.

This leaves open the question whether KVol has a minimum over the moduli space of hyperbolic surfaces of genus n , for $n \geq 2$. It is conjectured in [5] that for almost every (X, g) in the moduli space of hyperbolic surfaces of genus n , the supremum in (3.1) is attained (that is, it is actually a maximum).

In this paper we consider a different class of surfaces : translation surfaces of genus 2, with one conical point. The set (or stratum) of such surfaces is denoted $\mathcal{H}(2)$ (see [3]). By [6], any surface X in the stratum $\mathcal{H}(2)$ may be unfolded as shown in Figure 3.1, with complex parameters z_1, z_2, z_3, z_4 . The surface is obtained from the plane template by identifying parallel sides of equal length.

It is proved in [4] (see also [2]) that the systolic volume has a minimum in $\mathcal{H}(2)$, and it is achieved by a translation surface tiled by six equilateral triangles. Since the systolic volume is a close relative of KVol , it is interesting to keep the results of [4] and [2] in mind.

We have reasons to believe that KVol behaves differently in $\mathcal{H}(2)$, both from the systolic volume in $\mathcal{H}(2)$, and from KVol itself in the moduli space of hyperbolic

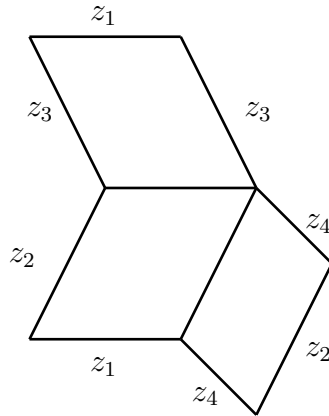


Fig. 3.1: Unfolding an element of $\mathcal{H}(2)$

surfaces of genus 2 ; that is, KVol does not have a minimum over $\mathcal{H}(2)$.

We also believe that the infimum of KVol over $\mathcal{H}(2)$ is 2. This paper is a first step towards the proof : we find an explicit sequence $L(n, n)$ of surfaces in $\mathcal{H}(2)$, whose KVol tends to 2 (see Proposition 3.2.1). These surfaces are obtained from very thin, symmetrical, L-shaped templates (see Figure 3.2).

In the companion paper [1] we study KVol as a function on the Teichmüller disk (the $SL_2(\mathbb{R})$ -orbit) of surfaces in $\mathcal{H}(2)$ which are tiled by three identical parallelograms (for instance $L(2, 2)$), and prove that KVol does have a minimum there, but is not bounded from above. Therefore KVol is not bounded from above as a function on $\mathcal{H}(2)$. In [1] we also compute KVol for the translation surface tiled by six equilateral triangles, and find it equals 3, so it does not minimize KVol , neither in $\mathcal{H}(2)$, nor even in its own Teichmüller disk.

3.2 $L(n, n)$

3.2.1 Preliminaries

Following [7], for any $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, we call $L(n+1, n+1)$ the $(2n+1)$ -square translation surface of genus two, with one conical point, depicted in Figure 3.2, where the upper and rightmost rectangles are made up with n unit squares. We call A (resp. B) the region in $L(n+1, n+1)$ obtained, after identifications, from the uppermost (resp. rightmost) rectangle, and C the region in $L(n+1, n+1)$ obtained, after identifications, from the bottom left square. Both A and B are annuli with a pair of points identified on the boundary, while C is a square with all four corners identified. We call e_1, e_2 , (resp. f_1, f_2) the closed curves in $L(n+1, n+1)$ obtained by gluing the endpoints of the horizontal (resp. vertical) sides of A and B . The

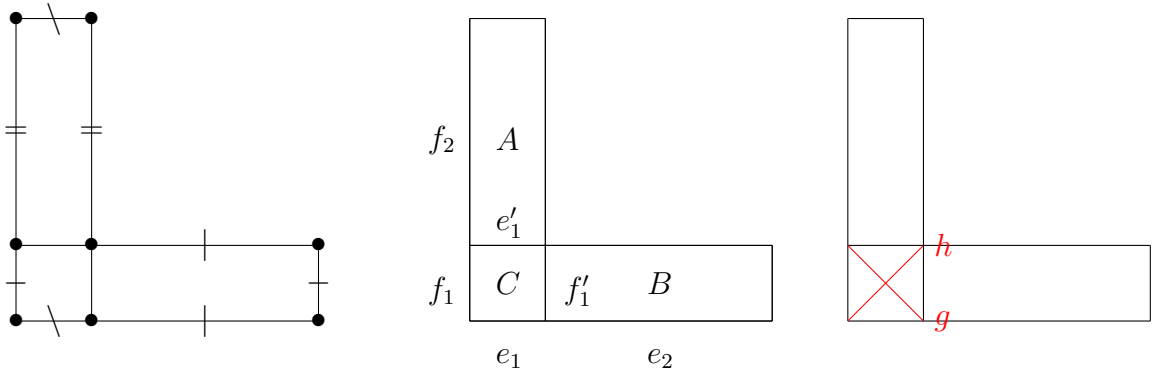


Fig. 3.2: $L(n + 1, n + 1)$

closed curve which sits on the opposite side of C from e_1 (resp. f_1) is called e'_1 (resp. f'_1), it is homotopic to e_1 (resp. f_1) in $L(n + 1, n + 1)$. The closed curves in $L(n + 1, n + 1)$ which correspond to the diagonals of the square C are called g and h .

Figure 4.6 shows a local picture of $L(n + 1, n + 1)$ around the singular (conical) point S , with angles rescaled so the 6π fit into 2π .

Since e_1, e_2, f_1, f_2 do not meet anywhere but at S , the local picture yields the algebraic intersections between any two of e_1, e_2, f_1, f_2 , summed up in the following matrix:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Int} & e_2 & f_1 & e_1 & f_2 \\
 e_2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
 f_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 e_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 f_2 & 1 & 0 & -1 & 0
 \end{array} \tag{3.2}$$

We call T_A (resp. T_B) the flat torus obtained by gluing the opposite sides of the rectangle made with the $n + 1$ leftmost squares (resp. with the $n + 1$ bottom squares), so the homology of T_A (resp. T_B) is generated by e_1 and the concatenation of f_1 and f_2 (resp. f_1 and the concatenation of e_1 and e_2).

Lemma 3.2.1. *The only closed geodesics in $L(n + 1, n + 1)$ which do not intersect e_1 nor f_1 are, up to homotopy, e_1, f_1, g , and h .*

Proof. Let γ be such a closed geodesic. It cannot enter, nor leave, A, B , nor C . If it is contained in A , and does not intersect e_1 , then it must be homotopic to e_1 , which is the soul of the annulus from which A is obtained by identifying two points on the boundary. Likewise, if it is contained in B , and does not intersect f_1 , then it must be homotopic to f_1 . Finally, if γ is not contained in A nor in B ,

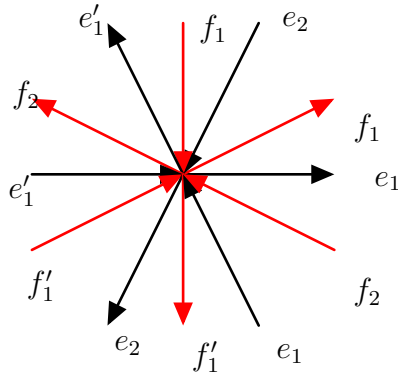


Fig. 3.3: Local picture around the conical point

it must be contained in C . The only closed geodesics contained in C are the sides and diagonals of the square from which C is obtained, which are e_1, e_1', f_1, f_1', g , and h . \square

Lemma 3.2.2. *For any closed geodesic γ in $L(n+1, n+1)$, we have $l(\gamma) \geq n|\text{Int}(\gamma, e_1)|$.*

Proof. For each intersection with e_1 , γ must go through A , from boundary to boundary. \square

Obviously a similar lemma holds with f_1 instead of e_1 . For g and h the proof is a bit different :

Lemma 3.2.3. *For any closed geodesic γ in $L(n+1, n+1)$, we have $l(\gamma) \geq n|\text{Int}(\gamma, g)|$.*

Proof. First, observe that between two consecutive intersections with g , γ must go through either A or B , unless γ is g itself, or h : indeed, the only geodesic segments contained in C with endpoints on g are segments of g , or h . Obviously $\text{Int}(g, g) = 0$, and from the intersection matrix (3.2), knowing that $[g] = [e_1] - [f_1]$, $[h] = [e_1] + [f_1]$, we see that $\text{Int}(g, h) = 0$.

Thus, either $\text{Int}(\gamma, g) = 0$, or each intersection must be paid for with a trek through A or B , of length at least n . \square

Obviously a similar lemma holds with h instead of g . Note that Lemmata 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 imply that the only geodesics in $L(n+1, n+1)$ which are shorter than n are e_1, f_1, g, h , and closed geodesics homotopic to e_1 or f_1 .

Lemma 3.2.4. *Let I, J be positive integers, take $a_{ij}, i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J$ in \mathbb{R}_+ , and $b_1, \dots, b_I, c_1, \dots, c_J$ in \mathbb{R}_+^* . Then we have*

$$\frac{\sum_{i,j} a_{ij}}{\left(\sum_{i=1}^I b_i\right) \left(\sum_{j=1}^J c_j\right)} \leq \max_{i,j} \frac{a_{ij}}{b_i c_j}.$$

Proof. Re-ordering, if needed, the a_{ij}, b_i, c_j , we may assume

$$\frac{a_{ij}}{b_i c_j} \leq \frac{a_{11}}{b_1 c_1} \quad \forall i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J.$$

Then $a_{ij} b_1 c_1 \leq a_{11} b_i c_j \quad \forall i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J$, so

$$b_1 c_1 \sum_{i,j} a_{ij} \leq a_{11} \sum_{i,j} b_i c_j = a_{11} \left(\sum_{i=1}^I b_i\right) \left(\sum_{j=1}^J c_j\right).$$

□

3.2.2 Estimation of $\text{KVVol}(L(n, n))$

Proposition 3.2.1.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{KVVol}(L(n+1, n+1)) = 2.$$

Proof. First observe that $\text{Vol}(L(n+1, n+1)) = 2n+1$, $l(e_1) = 1$, $l(f_2) = n$, $\text{Int}(e_1, f_2) = 1$, so

$$\text{KVVol}(L(n+1, n+1)) \geq 2 + \frac{1}{n}.$$

To bound $\text{KVVol}(L(n+1, n+1))$ from above, we take two closed geodesics α and β ; by Lemmata 3.2.2, 3.2.3, if either α or β is homotopic to e_1, f_1, g , or h , then

$$\frac{\text{Int}(\alpha, \beta)}{l(\alpha)l(\beta)} \leq \frac{1}{n},$$

so from now on we assume that neither α or β is homotopic to e_1, f_1, g, h . We cut α and β into pieces using the following procedure: we consider the sequence of intersections of α with e_1, e'_1, f_1, f'_1 , in cyclical order, and we cut α at each intersection with e_1 or e'_1 which is followed by an intersection with f_1 or f'_1 , and at each intersection with f_1 or f'_1 which is followed by an intersection with e_1 or e'_1 . We proceed likewise with β . We call $\alpha_i, i = 1, \dots, I$, and $\beta_j, j = 1, \dots, J$, the pieces of α and β , respectively.

Note that

$$l(\alpha) = \sum_{i=1}^I l(\alpha_i), \quad l(\beta) = \sum_{j=1}^J l(\beta_j), \quad \text{and}$$

$$|\text{Int}(\alpha, \beta)| \leq \sum_{i,j} |\text{Int}(\alpha_i, \beta_j)|,$$

so Lemma 3.2.4 says that

$$\frac{|\text{Int}(\alpha, \beta)|}{l(\alpha)l(\beta)} \leq \max_{i,j} \frac{|\text{Int}(\alpha_i, \beta_j)|}{l(\alpha_i)l(\beta_j)}.$$

We view each piece α_i (resp. β_j) as a geodesic arc in the torus T_A (resp. T_B), with endpoints on the image in T_A (or T_B) of f_1 or f'_1 (resp. e_1 or e'_1), which is a geodesic arc of length 1, so we can close each α_i (resp. β_j) with a piece of f_1 or f'_1 (resp. e_1 or e'_1), of length ≤ 1 . We choose a closed geodesic $\hat{\alpha}_i$ (resp. $\hat{\beta}_j$) in T_A (resp. T_B) which is homotopic to the closed curve thus obtained. We have $l(\hat{\alpha}_i) \leq l(\alpha_i) + 1$, $l(\hat{\beta}_j) \leq l(\beta_j) + 1$, so

$$\frac{1}{l(\hat{\alpha}_i)l(\hat{\beta}_j)} \geq \frac{1}{(l(\alpha_i) + 1)(l(\beta_j) + 1)}.$$

Now recall that $l(\alpha_i), l(\beta_j) \geq n$, so $l(\alpha_i) + 1 \leq (1 + \frac{1}{n})l(\alpha_i)$, whence

$$\frac{1}{l(\hat{\alpha}_i)l(\hat{\beta}_j)} \geq \frac{1}{l(\alpha_i)l(\beta_j)} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2.$$

Next, observe that $|\text{Int}(\alpha_i, \beta_j)| \leq |\text{Int}(\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_j)| + 1$, because $\hat{\alpha}_i$ (resp. $\hat{\beta}_j$) is homologous to a closed curve which contains α_i (resp. β_j) as a subarc, and the extra arcs cause at most one extra intersection, depending on whether or not the endpoints of α_i and β_j are intertwined. So,

$$\frac{|\text{Int}(\alpha_i, \beta_j)|}{l(\alpha_i)l(\beta_j)} \leq \frac{|\text{Int}(\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_j)| + 1}{l(\hat{\alpha}_i)l(\hat{\beta}_j)} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \leq \left(\frac{|\text{Int}(\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_j)|}{l(\hat{\alpha}_i)l(\hat{\beta}_j)} + \frac{1}{n^2} \right) \left(\frac{n+1}{n} \right)^2,$$

where the last inequality stands because $l(\hat{\alpha}_i) \geq n$, $l(\hat{\beta}_j) \geq n$, since $\hat{\alpha}_i$ and $\hat{\beta}_j$ both have to go through a cylinder A or B at least once. Finally, since $\hat{\alpha}_i$ and $\hat{\beta}_j$ are closed geodesics on a flat torus of volume $n+1$, we have (see [5])

$$\frac{|\text{Int}(\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_j)|}{l(\hat{\alpha}_i)l(\hat{\beta}_j)} \leq \frac{1}{n+1}, \text{ so}$$

$$\frac{|\text{Int}(\alpha_i, \beta_j)|}{l(\alpha_i)l(\beta_j)} \leq \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n^2} \right) \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

which yields the result, recalling that $\text{Vol}(L(n+1, n+1)) = 2n+1$. \square

BIBLIOGRAPHY

- [1] S. Cheboui; A. Kessi; D. Massart Algebraic intersection for translation surfaces in a family of Teichmüller disks, <https://arxiv.org/abs/2007.10847>.
- [2] F. Herrlich; B. Muetzel; G. Schmithüsen Systolic geometry of translation surfaces, (2018) arXiv:1809.10327.
- [3] P. Hubert; S. Lelièvre Prime arithmetic Teichmüller discs in $\mathcal{H}(2)$. Israel J. Math. 151 (2006), 281-321.
- [4] C. Judge; H. Parlier The maximum number of systoles for genus two Riemann surfaces with abelian differentials. Comment. Math. Helv. 94 (2019), no. 2, 399–437.
- [5] D. Massart; B. Muetzel On the intersection form of surfaces. Manuscripta Math. 143 (2014), no. 1-2, 19-49.
- [6] C. McMullen Teichmüller curves in genus two: discriminant and spin. Math. Ann. 333 (2005), no. 1, 87–130.
- [7] G. Schmithüsen An algorithm for finding the Veech group of an origami. Experiment. Math. 13 (2004), no. 4, 459–472.

addresses :

Smaïl Cheboui : USTHB, Faculté de Mathématiques, Laboratoire de Systèmes Dynamiques, 16111 El-Alia BabEzzouar - Alger, Algérie,
email : smailsdgmth@gmail.com

Arezki Kessi : USTHB, Faculté de Mathématiques, Laboratoire de Systèmes Dynamiques, 16111 El-Alia BabEzzouar - Alger, Algérie,
email: arkessi@yahoo.fr

Daniel Massart : Institut Montpellierain Alexander Grothendick, CNRS Université de Montpellier, France
email : daniel.massart@umontpellier.fr (corresponding author)

4. ALGEBRAIC INTERSECTION FOR TRANSLATION SURFACES IN A FAMILY OF TEICHMÜLLER DISKS

Cet article est rédigé par : Smail Cheboui, Arezki Kessi, Daniel Massart.

ABSTRACT

We give a hyperbolic-geometric construction to compute the quantity KVol defined in Equation (4.1) in a family of Teichmüller disks of square-tiled surfaces.

4.1 Introduction

4.1.1 Definitions

Let X be a closed surface, that is, a compact, connected manifold of dimension 2, without boundary. Let us assume that X is oriented. If two C^1 closed curves α and β in X intersect transversally at a point $P \in X$, we set $\text{Int}_P(\alpha, \beta) = 1$ if β crosses α from right to left, and $\text{Int}_P(\alpha, \beta) = -1$ otherwise. Then the algebraic intersection $\text{Int}(\alpha, \beta)$ of α and β is the sum over all intersection points P of $\text{Int}_P(\alpha, \beta)$. The algebraic intersection endows the first homology $H_1(X, \mathbb{R})$ with a symplectic bilinear form. In particular $\text{Int}(\alpha, \beta)$ is finite, and only depends on the homology classes of α and β .

Now let us assume X is endowed with a Riemannian metric g . We denote $\text{Vol}(X, g)$ the Riemannian volume of X with respect to the metric g , and for any piecewise smooth closed curve α in X , we denote $l_g(\alpha)$ the length of α with respect to g . When there is no ambiguity we omit the reference to g .

We are interested in the quantity

$$\text{KVol}(X, g) = \text{Vol}(X, g) \sup_{\alpha, \beta} \frac{\text{Int}(\alpha, \beta)}{l_g(\alpha)l_g(\beta)} \quad (4.1)$$

where the supremum ranges over all piecewise smooth closed curves α and β in X . The $\text{Vol}(X, g)$ factor is there to make KVol invariant to re-scaling of the metric g . See [8] as to why KVol is finite. The quantity KVol comes up naturally when you want to compare the stable norm (a norm which measures the length of a homology class, with respect to the metric g) with the Hodge norm (or L^2 -norm) on $H_1(M, \mathbb{R})$ (see [8]). It is easy to make KVol go to infinity, you just need to pinch a non-separating closed curve α to make its length go to zero. The interesting surfaces are those (X, g) for which KVol is small.

When X is the torus, we have $\text{KVol}(X, g) \geq 1$, with equality if and only if the metric g is flat (see [8]). Furthermore, when g is flat, the supremum in (4.1) is not attained, but for a negligible subset of the set of all flat metrics. In [8] KVol is studied as a function of g , on the moduli space of hyperbolic (that is, the curvature of g is -1) surfaces of fixed genus. It is proved that KVol goes to infinity when g degenerates by pinching a non-separating closed curve, while KVol remains bounded when g degenerates by pinching a separating closed curve.

This leaves open the question whether KVol has a minimum over the moduli space of hyperbolic surfaces of genus n , for $n \geq 2$. It is conjectured in [8] that for almost every (X, g) in the moduli space of hyperbolic surfaces of genus n , the supremum in (4.1) is attained (that is, it is actually a maximum).

In this paper we consider a different class of surfaces : translation surfaces of genus s , with one conical point. The set (or stratum) of such surfaces is denoted

$\mathcal{H}(2s - 2)$ (see [5]). We consider the family of translation surfaces $St(2s - 1)$ (so named after [10]) depicted in Figure 4.1, for $s \in \mathbb{N}, s \geq 2$, obtained by gluing the opposite sides of a staircase-shaped template made of $2s - 1$ squares (see Figure 4.1).

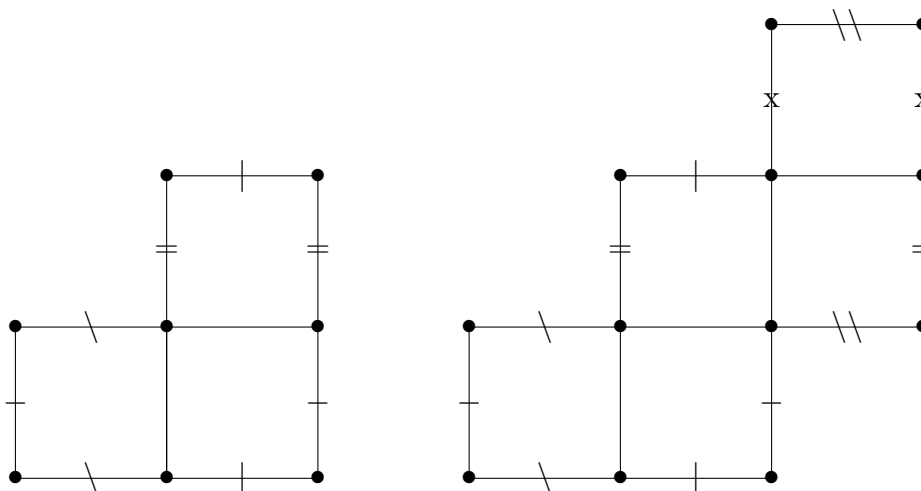


Fig. 4.1: $St(3)$ and $St(5)$

Our first result is (see Corollary 4.3.1)

$$\forall s \geq 2, \text{KVVol}(St(2s - 1)) = 2s - 1.$$

This is the first exact computation of KVVol, outside of flat tori.

Before stating our next result we need to elaborate a little bit on the Teichmüller disk of $St(2s - 1)$.

4.1.2 The Teichmüller disc \mathcal{T} of $St(2s - 1)$

Let us explain the terminology. Every translation surface may be viewed as a plane template with parallel sides of equal length pairwise identified. The group $GL_2^+(\mathbb{R})$ acts linearly on templates, preserving identifications, so it acts on translation surfaces. It may happen that for some template T and some element A of $GL_2^+(\mathbb{R})$, both T and $A.T$ are templates of the same translation surface X . Then we say that A lies in the Veech group of X , that is, the subgroup of $GL_2^+(\mathbb{R})$ which preserves X . Since the Veech group must preserve volumes, it is a subgroup of $SL_2(\mathbb{R})$, and it turns out to be a Fuchsian group (see [12]). The orbit of X under $GL_2^+(\mathbb{R})$ is called the Teichmüller disk of X . For the purpose of studying KVVol, it

is convenient to identify templates which are related by a similitude transformation (an isometry composed with a re-scaling). Recall that $GL_2^+(\mathbb{R})$ quotiented by similitudes is the hyperbolic plane \mathbb{H}^2 . The Teichmüller disk of X may thus be seen as the quotient of \mathbb{H}^2 by the Veech group of X , which is a Fuchsian group.

We denote by $\mathcal{T}(St(2s-1))$, or just \mathcal{T}_s if there is no ambiguity, the Teichmüller disc \mathcal{T} of $St(2s-1)$. The Veech group Γ of $St(2s-1)$ is generated, for any $s \geq 2$, by

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ and } R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

it is a subgroup of index 3 in $SL_2(\mathbb{Z})$ (see [11], or [3]). It has a fundamental domain \mathcal{D} in \mathbb{H}^2 comprised between the straight lines $x = \pm 1$, and the unit half-circle centered at the origin. The two vertical straight lines are identified by T , and the two halves of the unit half-circle are identified by R , with i as fixed point (see Figure 4.2).

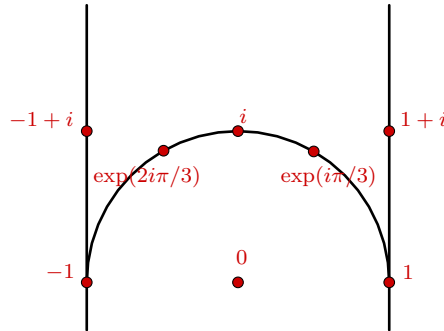


Fig. 4.2: A fundamental domain for the Teichmüller disk of $St(2s-1)$

Here is a convenient way to view the Teichmüller disk \mathcal{T}_s of $St(2s-1)$. Any element X of \mathcal{T}_s , such as the one depicted on the right in Figure 4.3, has a template made of $2s-1$ congruent parallelograms. Modulo some similitude, we may assume $b=1$. Then β lies in the fundamental domain depicted above, and completely determines X , together with the number $2s-1$ of squares. We shall often label the surface X by the complex number α , or the corresponding vector in \mathbb{R}^2 , and the integer s . For instance, $St(3)$ is $X_2(i) = X_2(0, 1)$, and $St(2s-1) = X_s(i)$ for all s . There are other interesting surfaces in \mathcal{T}_2 : $X_2(\pm 1 + i) = X_2(\pm 1, 1)$ is the only (other than $St(3)$) three-square surface of genus 2, while $X_2(\exp(i\pi/3)) = X_2(\exp(2i\pi/3))$ is the only translation surface of genus 2 tiled by 6 equilateral triangles. It turns out that $X_s(1, 1)$ and $X_s(\exp(i\pi/3))$ also have $KVol = 2s-1$.

For $(x, y) \in \mathbb{H}^2$, we denote $T(x, y)$ the flat torus

$$\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}(1, 0) \oplus \mathbb{Z}(x, y).$$

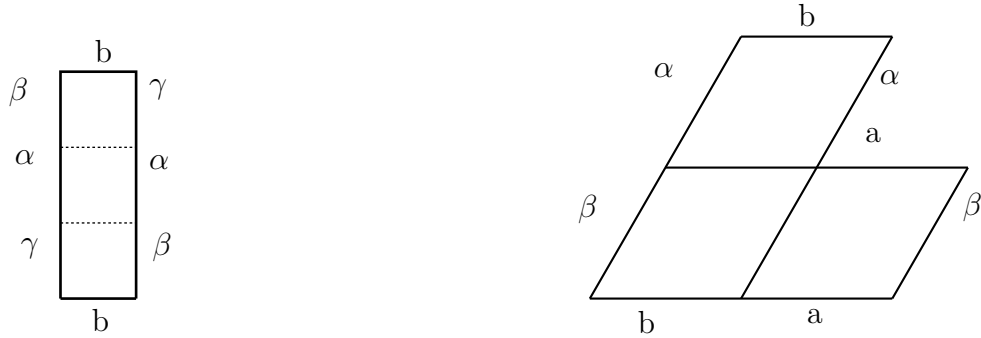


Fig. 4.3: $X_2(1, 1)$ and $X_2(\exp(i\pi/3))$

The translation surface $X_s(x, y)$ is a ramified, $(2s - 1)$ -fold, Riemannian cover of $T(x, y)$. For $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ with $p \wedge q = 1$, we say a geodesic segment in $T(x, y)$ has direction (p, q) if its lifts to the universal cover \mathbb{R}^2 of $T(x, y)$ are parallel to the vector $p(1, 0) + q(x, y)$. We say a geodesic segment in $X_s(x, y)$ has direction (p, q) if it projects to a geodesic segment of direction (p, q) in $T(x, y)$.

Beware this may cause a bit of confusion at first, because a geodesic segment in $T(x, y)$ with direction (p, q) may not lift, in \mathbb{R}^2 , to a segment parallel to (p, q) , unless $(x, y) = (0, 1)$. The upside is that this definition is independent of (x, y) . For instance, the algebraic intersection of two simple closed geodesics in $T(x, y)$, of respective directions (p, q) and (p', q') , is $pq' - p'q$, regardless of (x, y) .

This allows a neat formulation of the following property : given $p, q, p', q' \in \mathbb{Z}$ with $p \wedge q = p' \wedge q' = 1$, and $p/q \neq p'/q'$ in $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, the hyperbolic geodesic with endpoints p/q and p'/q' is the locus of the flat tori in which the geodesics with respective directions (p, q) and (p', q') are orthogonal. Since the covering $X(x, y) \rightarrow T(x, y)$ is Riemannian, the hyperbolic geodesic with endpoints p/q and p'/q' is also the locus of surfaces $X(x, y)$ in which the geodesics with respective directions (p, q) and (p', q') are orthogonal.

In the torus all directions are alike, because the group $SL_2(\mathbb{Z})$ of orientation-preserving, affine diffeomorphisms of \mathbb{T}^2 acts transitively on the set of directions. However (see [5]), the Veech group Γ of $St(2s - 1)$ has two orbits, that of $(0, 1)$, which comprises all directions (p, q) with $p \neq q \pmod{2}$, and that of $(1, 1)$, which comprises all directions (p, q) with $p = q = 1 \pmod{2}$. Note that $(p, q) = (1, 0)$ gives $p/q = \infty$, which is one of the points at infinity of the Teichmüller disk \mathcal{T} , while $(1, 1)$ gives 1, which is the other point at infinity of \mathcal{T} .

Simple closed geodesics on a translation surface in $\mathcal{H}(2s - 2)$ are of two kinds (see [5]): saddle connections, which go through the conical point, and non-singular closed geodesics, which do not. Since our surfaces have only one conical point, ev-

ery closed curve is homologous to a linear combination of closed saddle connections, so in the definition of KVol we may consider only closed saddle connections. Non-singular closed geodesics come in cylinders of parallel geodesics of equal length. In a translation surface in $\mathcal{H}(2s-2)$, for any direction, there are at most s such cylinders. If the translation surface lies in \mathcal{T}_s , the s -cylinder directions are precisely those in the orbit, under the Veech group Γ , of $(0, 1)$, and the other directions have only one cylinder.

For any direction (p, q) , denote $r = p/q$ and $l_r(x, y)$ the length, in the torus $T(x, y)$, of simple closed geodesics of direction (p, q) . The horocycles with point at infinity r are the level sets of the function l_r . We shall see (Lemma 4.2.5) that the saddle connections, in $X(x, y)$, of direction (p, q) , have the same length $l_r(x, y)$.

Therefore there are two ways of going to infinity in the Teichmüller disk \mathcal{T}_s : (x, y) may converge to $(1, 0)$, in which case there is a one-cylinder direction in $X(x, y)$ whose saddle connections become arbitrarily short; or $y \rightarrow \infty$, in which case there is an s -cylinder direction in $X(x, y)$ whose saddle connections become arbitrarily short.

4.1.3 Statement and discussion of the results

Let us call $V_{\pm 1}$ the open horocyclic neighborhood of the lower cusp depicted in Figure 4.4. Denote \mathcal{Z} the union in \mathbb{H}^2 of all hyperbolic geodesics with endpoints in $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, and their images under the Veech group Γ . Let us denote $\text{End}(\mathcal{Z})$ the set of pair of points at infinity of \mathbb{H}^2 which are endpoints of elements of \mathcal{Z} .

Theorem 4.1.1. *For every $s \geq 2$, the minimum of KVol over the Teichmüller disk \mathcal{T}_s is $(2s-1)\sqrt{\frac{143}{144}}$. It is achieved at the two points $(\pm\frac{9}{14}, \frac{\sqrt{143}}{14})$. For $(x, y) \in V_{\pm 1}$, we have $\text{KVol}(X_s(x, y)) > 2s-1$, and $\text{KVol}(X_s(x, y))$ goes to infinity when (x, y) tends to $(\pm 1, 0)$. Outside $V_{\pm 1}$, we have $\text{KVol}(X_s(x, y)) \leq 2s-1$, and $\text{KVol}(X_s(x, y)) = 2s-1$ if and only if $(x, y) \in \mathcal{Z}$. Furthermore $\text{KVol}(X_s(x, y))$ tends to $2s-1$ when $y \rightarrow \infty$ while (x, y) remains in \mathcal{D} .*

The idea of the proof of Theorem 4.1.1 is that $\text{KVol}(X_s(x, y))$, has a simple expression as a function of the hyperbolic distance between (x, y) and \mathcal{Z} . The minimum is achieved by those points of \mathcal{D} which are furthest away from \mathcal{Z} . Then the problem becomes a simple exercise in hyperbolic geometry.

Here is why the set \mathcal{Z} enters the picture: given two directions (p, q) and (p', q') , the saddle connections of respective directions (p, q) and (p', q') only have so much algebraic intersection to share between them all since they are lifted from closed curves on the torus. Thus, to realize KVol we must look for pairs of directions which have saddle connections which take up all the possible intersection. Those are the pairs of directions for which the invariant probability measures supported on the saddle connections are least equidistributed. By Theorem 1.2 of [9], those

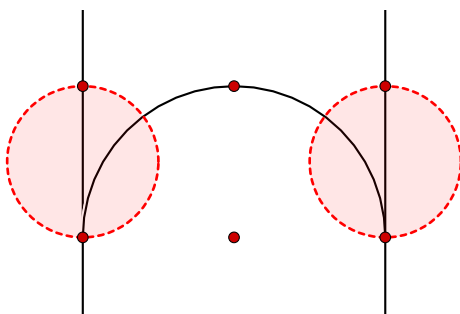


Fig. 4.4: The horocycle neighborhood $V_{\pm 1}$ of Theorem 4.1.1

pairs of directions correspond to those geodesics in \mathcal{T}_s which are the least recurrent, that is, the geodesics which exit the fastest towards the cusps of \mathcal{T}_s . Those are precisely the geodesics in \mathcal{Z} . The precise meaning of exiting fastest towards the cusp is that they bounce at most twice on the lower boundary of \mathcal{D} —that is, the semi-circle between 1 and -1 —before going straight to a cusp. Another way of defining \mathcal{Z} would be to say that the geodesic between p/q and p'/q' is in \mathcal{Z} if and only if $(p/q, p'/q')$ is in the orbit, under the Veech group, of $(\infty, p''/q'')$, where the continued fraction expansion of p''/q'' has length ≤ 2 . A quantitative version of Theorem 1.2 of [9] would be useful to generalize this work. In our proof, we use pedestrian arguments (Lemmata 4.2.6 and 4.2.7) instead.

It is proved in [6] (see also [4] and [1]) that $X_2(\exp(i\pi/3))$ minimizes the systolic volume in $\mathcal{H}(2)$. In the companion paper [2], we prove that $\inf \text{KVVol} \leq 2$ over $\mathcal{H}(2)$. Since the systolic volume is a close relative of KVVol , it is interesting to contrast the results of [6], [1] and [4] with ours. It is mildly surprising that the minimizers of KVVol in \mathcal{T}_s look, at first glance, pretty dull, while the interesting surfaces are (degenerate) local maxima in \mathcal{T}_s . This prompts several questions.

Question 4.1.1. *Is KVVol , as a function on $\mathcal{H}(2)$, differentiable at $St(3)$? Is it critical at $St(3)$?*

Question 4.1.2. *Is every square-tiled surface (ramified Riemannian covering of the square flat torus) in $\mathcal{H}(2)$, a local maximum of KVVol in its own Teichmüller disk? Are they critical points of KVVol in $\mathcal{H}(2)$?*

An easy consequence of Theorem 4.1.1 is that for every $X \in \mathcal{T}$, the supremum in (4.1) is actually a maximum, and furthermore we identify the maximizers. We speculate this might be the case for every square-tiled surface; since the union of the Teichmüller disks of all square-tiled surfaces is dense in $\mathcal{H}(2)$, could it be true in the whole $\mathcal{H}(2)$?

Question 4.1.3. *Is it true that for every $X \in \mathcal{H}(2)$, the supremum in (4.1) is actually a maximum ?*

This would be in sharp contrast, both with the known behavior for flat tori, and with the expected behavior for hyperbolic surfaces.

Acknowledgements The first author acknowledges the support of a Profas B+ 2017 grant from Campus France, during the course of his Ph.D. studies.

4.2 Preliminaries

4.2.1 $St(2s - 1)$

We call $e_1, \dots, e_s, e'_2, \dots, e'_s$, (resp. $f_1, \dots, f_s, f'_1, \dots, f'_{s-1}$) the horizontal (resp. vertical) closed curves of length 1 in $St(2s - 1)$ obtained by gluing the endpoints of the sides of the squares (see Figure 4.5). Note that e_i and e'_i (resp. f_i and f'_i) are homotopic since they bound a cylinder.

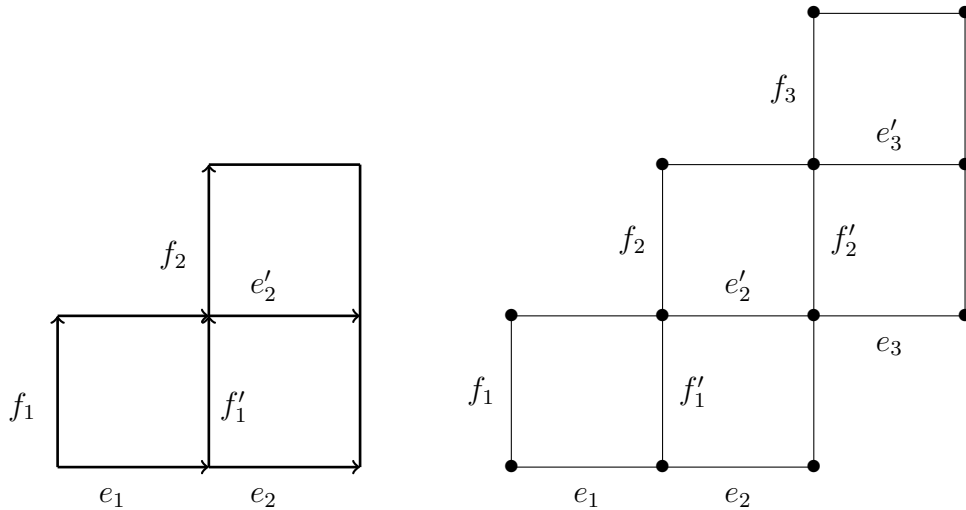


Fig. 4.5: the closed curves e_i, e'_i, f_i, f'_i

Figure 4.6 shows a local picture of $St(3)$ around the singular (conical) point S , with angles rescaled so the 6π fit into 2π .

The local picture at S in $St(2s - 1)$ may be obtained by induction : start from the local picture in $St(2s - 3)$, split f_{s-1} into f_{s-1} and f'_{s-1} , and insert, between f_{s-1} and f'_{s-1} , f_s, e_s , and e'_s , as shown in Figure 4.7.

Since e_1, e_2, f_1, f_2 do not meet anywhere but at S , the local picture yields the algebraic intersections between any two of e_1, e_2, f_1, f_2 , summed up in the following

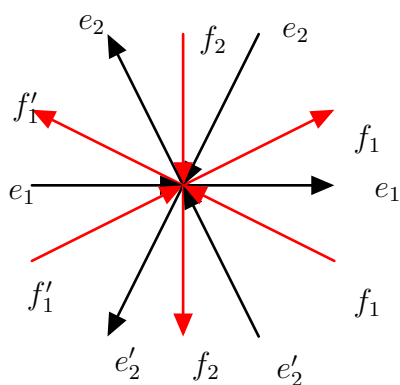


Fig. 4.6: Local picture around the conical point

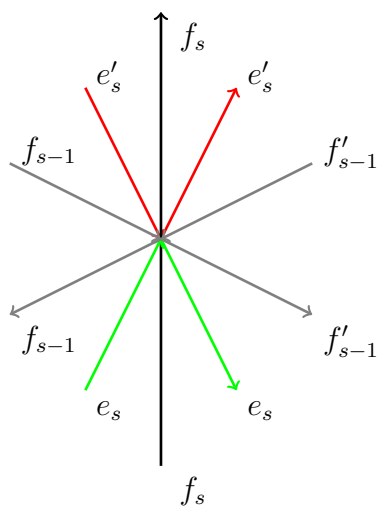


Fig. 4.7: Insertion of f_s, e_s, e'_s

matrix:

Int	e_1	f_1	e_2	f_2
e_1	0	1	0	-1
f_1	-1	0	0	0
e_2	0	0	0	1
f_2	1	0	-1	0

Let us call $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ (resp. β_1, \dots, β_s) the closed, non-singular horizontal (resp. vertical) geodesics depicted in Figure 4.8.

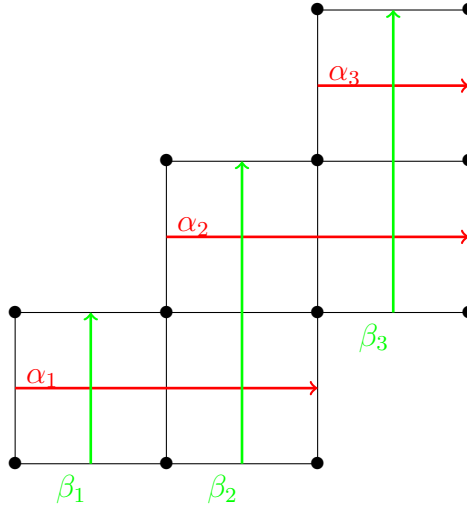


Fig. 4.8: The non-singular geodesics $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2, 3$

Lemma 4.2.1. For $i, j = 1, \dots, s$ we have :

$$\text{Int}(e_i, f_j) = \begin{cases} (-1)^{j-i} & \text{if } j \geq i \\ 0 & \text{if } j < i \end{cases}$$

and

$$\text{Int}(e_i, e_j) = \text{Int}(f_i, f_j) = 0$$

Proof. Observe that the closed, non-singular vertical geodesic β_1 is homotopic to f_1 and for each $j = 2, \dots, s$, β_j are homotopic to $f_j + f_{j-1}$. We observe that

$$\text{Int}(e_i, \beta_j) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

Then we have :

For $j = 1$, $\text{Int}(e_1, f_1) = 1$ and for $i > 1$, $\text{Int}(e_i, f_1) = 0$.

For $j \geq 2$ we have three cases:

1) if $i > j$ we have $\text{Int}(e_i, \beta_j) = 0$ which implies $\text{Int}(e_i, f_j) = -\text{Int}(e_i, f_{j-1})$, by induction we deduce

$$\text{Int}(e_i, f_j) = (-1)^{i-j} \text{Int}(e_i, f_1) = 0$$

2) if $i = j$ we have

$$\text{Int}(e_i, f_i) + \text{Int}(e_i, f_{i-1}) = 1$$

but by the first case $\text{Int}(e_i, f_{i-1}) = 0$, so

$$\text{Int}(e_i, f_i) = 1$$

3) if $i < j$ we have

$$\text{Int}(e_i, f_j) = -\text{Int}(e_i, f_{j-1})$$

By induction and using the second case, we obtain

$$\begin{aligned} \text{Int}(e_i, f_j) &= (-1)^{j-i} \text{Int}(e_i, f_i) \\ &= (-1)^{j-i}. \end{aligned}$$

Observe that the closed, non-singular horizontal geodesic α_s , is homotopic to e_s and for each $j = 1, \dots, s-1$, α_j are homotopic to $e_j + e_{j+1}$. Then for $i = 1, \dots, s$, $\text{Int}(e_i, e_s) = 0$ and for $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, s-1$ $\text{Int}(e_i, \alpha_j) = 0$. Finally, we obtain

$$\begin{aligned} \text{Int}(e_i, e_j) &= -\text{Int}(e_i, e_{j+1}) \\ &= (-1)^{s-j} \text{Int}(e_i, e_s) = 0. \end{aligned}$$

In an analogous way we have $\text{Int}(f_i, f_j) = 0$. □

For $s > 2$, the intersection matrix is, in the basis $e_1, f_1, \dots, e_s, f_s$ (in this example $s = 4$):

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Since the determinant of the intersection matrix is not zero, we get for free the fact that e_i, f_i , $i = 1, \dots, s$ form a basis of $H_1(\text{St}(2s-1), \mathbb{R})$. From now on we always refer to homology classes in $H_1(\text{St}(2s-1), \mathbb{R})$ by their coordinates $\epsilon_1, \dots, \epsilon_s, \phi_1, \dots, \phi_s$ in the basis e_i, f_i .

Observe that the homology classes of $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, \alpha_s$ are $[e_1] + [e_2], \dots, [e_{s-1}] + [e_s], [e_s]$, while the homology classes of $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ are $[f_1], [f_1] + [f_2], \dots, [f_{s-1}] + [f_s]$.

Thus, using the intersection matrix, we see that, for any homology class h with coordinates $\epsilon_1, \dots, \epsilon_s, \phi_1, \dots, \phi_s$, we have

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= \text{Int}(h, [\beta_i]) \\ \phi_i &= -\text{Int}(h, [\alpha_i]). \end{aligned}$$

4.2.2 A short excursion into the Teichmüller space of flat tori

Recall that the Teichmüller space of flat tori is the hyperbolic plane ; one way to see that is to fix a homology class of simple closed curves, then every flat torus is biholomorphic to

$$T(x, y) = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}(1, 0) \oplus \mathbb{Z}(x, y)$$

where $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ and the biholomorphism sends a simple closed curve in the homology class h to the image in $T(x, y)$ of $(0, 1)$.

Now take $p, q, p', q' \in \mathbb{Z}$ such that $p \wedge q = p' \wedge q' = 1$, set $r = p/q, r' = p'/q'$, r (resp. r') being understood as the point at infinity if $q = 0$ (resp. $q' = 0$). Let $\gamma_{r,r'}$ be the hyperbolic geodesic with endpoints r and r' . Recall that $\gamma_{r,r'}$ is the locus, in the Teichmüller space, of the flat tori in which the closed geodesics with respective directions (p, q) and (p', q') are orthogonal.

Denote by $d_{r,r'} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ the distance function to the geodesic $\gamma_{r,r'}$. Call $E_{r,r'}(d)$ the d -level set of $d_{r,r'}$, for any $d \geq 0$. Pick (x, y) in \mathbb{H}^2 , let $d = d_{r,r'}(x, y)$, and let $\theta_{r,r'}(x, y)$ be the angle between $E_{r,r'}(d)$ and $\gamma_{r,r'}$ (see Figure 4.9).

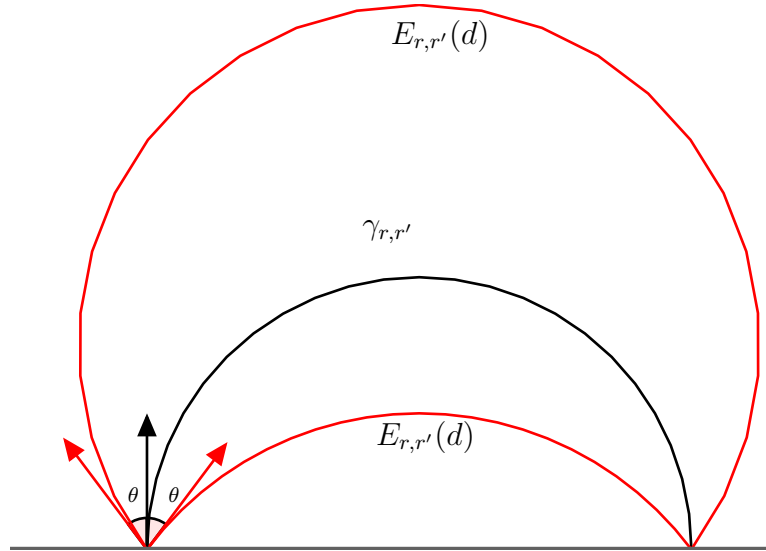


Fig. 4.9: A banana neighborhood

Denote $l_r(x, y)$ the length, in the flat torus $T(x, y)$, of the closed geodesics with direction (p, q) . Set

$$K_{r,r'}(x, y) = \text{Vol}(T(x, y)) \frac{pq' - p'q}{l_r(x, y)l_{r'}(x, y)}.$$

This definition is tailored so

$$\text{KVol}(T(x, y)) = \sup_{r, r'} K_{r, r'}(x, y).$$

Lemma 4.2.2. *For any $g \in SL_2(\mathbb{Z})$, we have*

$$K_{r, r'}(g(x, y)) = K_{g(r), g(r')}(x, y).$$

Proof. First, $pq' - p'q$ and $\text{Vol}(T(x, y))$ are invariant under the orientation- and volume-preserving diffeomorphism g . Second, $l_r(g(x, y)) = l_{g(r)}(x, y)$. \square

Lemma 4.2.3. *For any $(x, y) \in \mathbb{H}^2$ and $p, q, p', q' \in \mathbb{Z}$ such that $p \wedge q = p' \wedge q' = 1$, we have, setting $r = p/q, r' = p'/q'$,*

$$K_{r, r'}(x, y) = \cos \theta_{r, r'}(x, y).$$

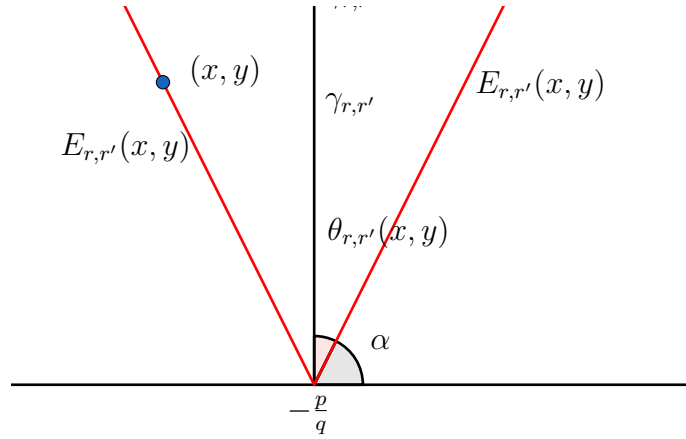


Fig. 4.10: $\alpha = \pi/2 - \theta_{r, r'}(x, y)$

Proof. By Lemma 4.2.2, acting by some element of $SL_2(\mathbb{Z})$ if we need to, we may assume that $p' = 1, q' = 0$, that is, $\gamma_{r, r'}$ is vertical. Then $l_{r'}(x, y) = 1$, $l_r(x, y) = \sqrt{(p + qx)^2 + (qy)^2}$, $pq' - p'q = q$, and $\text{Vol}(T(x, y)) = y$, so

$$K_{r, r'}(g(x, y)) = \frac{qy}{\sqrt{(p + qx)^2 + (qy)^2}}.$$

Take radial coordinates (ρ, α) with origin at $-r$, so $x + p/q = \rho \cos \alpha$ and $y = \rho \sin \alpha$. Then

$$K_{r, r'}(g(x, y)) = \frac{\rho \sin \alpha}{\rho} = \sin \alpha.$$

Now observe on Figure 4.10 that $\alpha = \pi/2 - \theta_{r, r'}(x, y)$. This concludes the proof. \square

4.2.3 Saddle connections and intersection

Recall that a saddle connection is a closed geodesic which contains a cone point. Saddle connections on surfaces in the Teichmüller disk of $St(2s - 1)$ have a special property :

Lemma 4.2.4. *If $X \in \mathcal{T}_s$ and γ is a saddle connection on X , then the projection $\Pi : X \rightarrow \mathbb{T}^2$, restricted to γ , is 1-to-1.*

Proof. Parametrize γ at unit speed by $[0, l(\gamma)]$, so that $\gamma(0) = \gamma(l(\gamma)) = S$, S being the cone point of X . Assume $\Pi(\gamma(t_1)) = \Pi(\gamma(t_2))$ for $t_1, t_2 \in [0, l(\gamma)]$, with $t_1 \neq t_2$. Then $\Pi(\gamma)([t_1, t_2])$ is a closed subarc of $\Pi(\gamma)([0, l(\gamma)])$, parametrized at unit speed, so it must contain all of $\Pi(\gamma)([0, l(\gamma)])$. Therefore there exists $t_3 \in [t_1, t_2]$ such that $\Pi(\gamma)(t_3) = (0, 0) = \Pi(S)$. Now recall that S is the only pre-image of $(0, 0)$ (this is where surfaces in \mathcal{T}_s are special), and the only pre-images of S by the chosen parametrization of γ are 0 and $l(\gamma)$, so $t_3 = 0$ or $t_3 = l(\gamma)$. Then $\Pi(\gamma)(t_1) = \Pi(\gamma)(t_2) = (0, 0)$, whence $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) = S$, which proves that $t_1 = 0, t_2 = l(\gamma)$, and the lemma. \square

The conical point is the only pre-image of the ramification point, unlike the case of the surface $L(n, n)$ (see [2]), so by Lemma 4.2.4 a closed geodesic of direction (p, q) projects 1-to-1 to a closed geodesic in the flat torus. Therefore a saddle connection of direction (p, q) is exactly $\sqrt{(p + qx)^2 + (qy)^2}$ -long. For future reference we state this fact as a lemma.

Lemma 4.2.5. *Given $(x, y) \in \mathbb{H}^2$ and $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ with $p \wedge q = 1$, for any saddle connection α with direction (p, q) in the translation surface $X_s(x, y)$, we have, using the notation of Subsection 4.2.2, $l(\alpha) = l_r(x, y)$.*

Here is why Subsection 4.2.2 is relevant to the determination of $KVol$ in \mathcal{T}_s . For $(x, y) \in \mathbb{H}^2$, and for $p, q, p', q' \in \mathbb{Z}$ such that $p \wedge q = p' \wedge q' = 1$, setting $r = p/q, r' = p'/q'$, and calling $\alpha_i, i = 1, \dots, 2s - 1$ (resp. $\beta_i, i = 1, \dots, 2s - 1$) the saddle connections with direction (p, q) (resp. (p', q')) in the translation surface $X_s(x, y)$, we have $l(\alpha_i) = l_r(x, y)$ and $l(\beta_i) = l_{r'}(x, y)$ for $i = 1, \dots, 2s - 1$, and $\text{Vol}(X_s(x, y)) = (2s - 1)\text{Vol}(T(x, y))$, since $X_s(x, y)$ is a $(2s-1)$ -fold ramified Riemannian cover of $T(x, y)$. Hence

$$KVol(X_s(x, y)) \geq \sup_{r \neq r'} \sup_{i, j} \text{Vol}(X_s(x, y)) \frac{\text{Int}(\alpha_i, \beta_j)}{l(\alpha_i)l(\beta_j)} \quad (4.2)$$

$$= (2s - 1) \sup_{r \neq r'} \sup_{i, j} \frac{\text{Int}(\alpha_i, \beta_j)}{pq' - p'q} K_{r, r'}(x, y). \quad (4.3)$$

The reason why there is a \geq instead of $=$ in the inequality above is that there could be saddle connections with the same direction, i.e. $r = r'$, and non-zero

intersection, in which case $pq' - p'q = 0$ and the formula above does not apply ; more on that in subsection 4.2.3. For the time being, we set

$$I_{r,r'}(x, y) = \sup_{i,j} \frac{\text{Int}(\alpha_i, \beta_j)}{pq' - p'q}$$

and study $I_{r,r'}(x, y)$ as a function of r and r' . Note that actually $I_{r,r'}(x, y)$ does not depend on (x, y) , so from now on we shall denote it $I_{r,r'}$.

Intersections and $I_{r,r'}$

Recall from [5] that the action on \mathbb{Z}^2 of the Veech group Γ of $St(2s - 1)$ has two orbits, that of $(1, 0)$, which consists of vectors whose coordinates are not equal modulo 2, and that of $(1, 1)$, which consists of vectors whose coordinates are equal modulo 2. Therefore, since Γ acts by orientation-preserving diffeomorphisms, for $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, with $p \not\equiv q \pmod 2$, the saddle connections in $St(2s - 1)$ with direction (p, q) are the images under some diffeomorphism of $e_1, e_i, e'_i, i = 2, \dots, s$, so they have zero mutual intersection.

On the other hand, for $p, q \in \mathbb{Z}$ both odd, the saddle connections in $St(2s - 1)$ with direction (p, q) are the images under some diffeomorphism of $g_i, g'_i, g_s, i = 1, \dots, s - 1$ depicted in Figure 4.11.

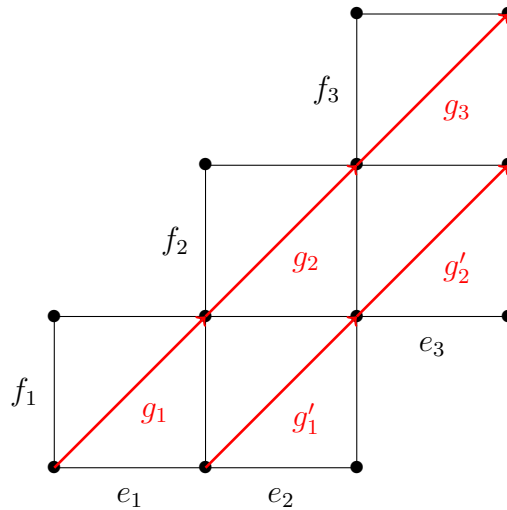


Fig. 4.11: the saddle connections of direction $(1, 1)$

The homology classes of $g_1, g_i, g'_{i-1}, i = 2, \dots, s$ are, in the basis $\{e_1, \dots, e_s, f_1, \dots, f_s\}$, $g_1 = e_1 + f_1$, and $g_i = e_i + f_i, g'_{i-1} = e_i + f_{i-1}$, so using the intersection matrix we see that

$$\text{Int}(g_i, g_j) = \text{Int}(g'_{j-1}, g'_{i-1}) = \begin{cases} (-1)^{j-i} & \text{if } j > i \\ -(-1)^{i-j} & \text{if } j < i \end{cases}$$

and for any $i = 1, \dots, s$, $j = 2, \dots, s$, $\text{Int}(g_i, g'_{j-1}) = -(-1)^{j-i}$.

Since the game is to find curves which intersect a lot, our next task is to maximize $I_{r,r'}$ as a function of r, r' . The next two lemmas are the reason why the geodesics in \mathcal{Z} are special.

Lemma 4.2.6. *For any $(r, r') \in \text{End}(\mathcal{Z})$, we have $I_{r,r'} = 1$.*

Proof. Let $(p, q), (p', q') \in \mathbb{Z}^2$ be such that $p \wedge q = p' \wedge q' = 1$, and $p/q = r, p'/q' = r'$. We want to prove that for any surface $X_s(x, y) \in \mathcal{T}_s$, there exist saddle connections γ, γ' , with respective directions (p, q) and (p', q') , such that $\text{Int}(\gamma, \gamma') = pq' - p'q$. By the definition of $\text{End}(\mathcal{Z})$, there exists $V \in \Gamma$ such that $(V(r), V(r')) \in \mathbb{Z}^2 \cup \{\infty\}$, where $V(r)$ is understood as the projective action of Γ on the projective line. Since Γ has two orbits in \mathbb{Q} , that of ∞ (or 0), which corresponds to $p \not\equiv q \pmod{2}$, and that of 1, which corresponds to $p \equiv q \pmod{2}$, we may assume $V(r) = \infty$ (or 0) or $V(r) = 1$.

First case : $V(r) = 0$, that is, $V(p, q) = (0, 1)$ (where $V(p, q)$ is understood as the linear action of Γ on \mathbb{R}^2). Since $V(r') \in \mathbb{Z}$, there exists $n \in \mathbb{Z}$ such that $V(p', q') = (-n, 1)$. Then (recall that $R^3 = -R$), $R^3 \circ V(p', q') = (1, n)$ and $R^3 \circ V(p, q) = (1, 0)$. Since Γ is a subgroup of $SL_2(\mathbb{R})$, we have $n = pq' - p'q$. Since $I_{r,r'}$ does not depend on (x, y) , we might as well assume $(x, y) = (0, 1)$, that is, $X_s = St(2s - 1)$. Observe (in Figure 4.12) that there exists a saddle connection γ_1 with direction $(1, n)$, whose homology class is $[e_1] + n[f_1]$, so $\text{Int}(e_1, \gamma_1) = n$, hence $I_{r,r'} = 1$.

Second case : $V(r) = 1$, that is, $V(p, q) = (1, 1)$. Since $V(r') \in \mathbb{Z}$, there exists $n \in \mathbb{Z}$ such that $V(p', q') = (-n, 1)$. Since $I_{r,r'}$ does not depend on (x, y) , we might as well assume $(x, y) = (-1, 1)$. The surface $X_s(-1, 1)$ has a $(2s - 1)$ -square template depicted in Figure 4.13, and there exists a saddle connection γ_1 with direction $(-n, 1)$, whose homology class is $-n[e_s] + [g_s]$, so $\text{Int}(g_s, \gamma_1) = n$, hence $I_{r,r'} = 1$. □

Lemma 4.2.7. *For $r, r' \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, with $(r, r') \notin \text{End}(\mathcal{Z})$, we have $I_{r,r'} < 9/10$.*

Proof. Let $p, q, p', q' \in \mathbb{Z}$ be such that $p \wedge q = p' \wedge q' = 1$, $p/q = r$, $p'/q' = r'$.

First case : p, q, p', q' are not all odd.

Multiplying (p, q) and (p', q') by some element of the Veech group, and swapping (p, q) and (p', q') if necessary, we may assume $(p', q') = (1, 0)$, that is, $r' = \infty$, and $|p| < |q|$, so $pq' - p'q = q$. Furthermore by the symmetries of $St(2s - 1)$, we only

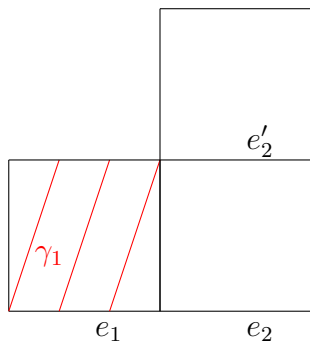


Fig. 4.12: the saddle connection γ_1 , with $s = 2$ and $n = 3$, in the two-cylinder case

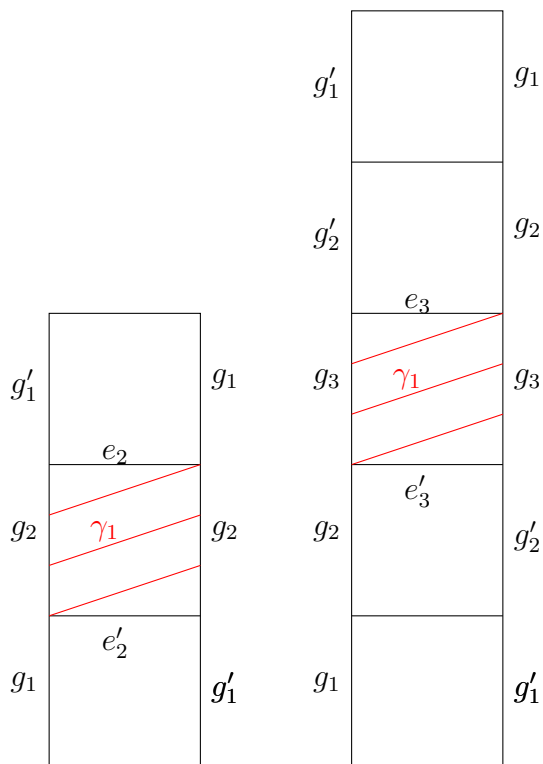


Fig. 4.13: the saddle connection γ_1 , for $s = 2$, and $s = 3$, and $n = 3$, in the one-cylinder case

need consider the case when $0 < p < q$. Note that we then have $q \geq 2$, otherwise p is 0 and in that case we have $(r, r') \in \text{End}(\mathcal{Z})$. Let γ be a saddle connection with direction (p, q) . We want to show that

$$\begin{aligned} \text{Int}(e_i, \gamma) &= \text{Int}(e'_i, \gamma) < \frac{9q}{10} \text{ for } i = 2, \dots, s \\ \text{Int}(e_1, \gamma) &< \frac{9q}{10}. \end{aligned}$$

The projection Π restricted to γ is injective by Lemma 4.2.4, so the $q - 1$ intersections of (p, q) with $(1, 0)$ in $\mathbb{T}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ lift to $q - 1$ intersections of γ with the singular cycle $e_1 + e_2 + e'_2 + \dots + e_s + e'_s$. Let us consider the sequence S_{int} of all intersections of γ with e_1, e_i, e'_i , for $i = 2, \dots, s$, in cyclical order along γ , with the intersection at the conical point S set apart. Denote $\#S_{int}(e_i)$ (resp. $\#S_{int}(e'_i)$) the number of e_i 's (resp. e'_i 's) in the sequence S_{int} . We have

$$\text{Int}(e, \gamma) \leq \#S_{int}(e) + 1 \text{ for } e = e_1, \dots, e_s, \text{ and } e = e'_2, \dots, e'_s,$$

where the +1 accounts for the intersection at S . Observe that in the sequence S_{int} there are never two consecutive e_i or e'_i , for $i = 2, \dots, s$: each e'_i is followed by e_i or e'_{i+1} , and each e_i is followed by e'_i or e_{i-1} . So the proportion of e_i or e'_i in S_{int} , for $i = 2, \dots, s$ is at most $1/2$ (only possible when $s = 2$). Therefore, since $q \geq 2$,

$$\text{Int}(e_i, \gamma) = \text{Int}(e'_i, \gamma) \leq \frac{q-1}{2} + 1 \leq \frac{3}{4}q.$$

Intersections with e_1 must be treated separately, with a case-by-case analysis :

Case 1.1: $p < q < 2p$. Observe that each block of e_1 has length at most 2, and is followed by at least an e'_2 , so the proportion of e_1 in the sequence S_{int} is at most $2/3$, so

$$\text{Int}(e_1, \gamma) \leq \frac{2(q-1)}{3} + 1 \leq \frac{9q}{10}.$$

Case 1.2: $2p < q < 3p$ (see Figure 4.14). Then a block of e_1 has length at most 3, and is followed by at least an e'_2 and an e_2 , so as previously, the proportion of e_1 in the sequence S_{int} is at most $3/5$, so

$$\text{Int}(e_1, \gamma) \leq \frac{3(q-1)}{5} + 1 \leq \frac{9q}{10}.$$

Case 1.3: $3p < q$. Intersections with e_1 come in blocks of length at most $\lceil q/p \rceil$, because two consecutive (along γ) intersections are exactly p/q apart along e_1 (see Figure 4.14). Each block of e_1 's is followed by a block of $e'_2 e_2$ (this is where

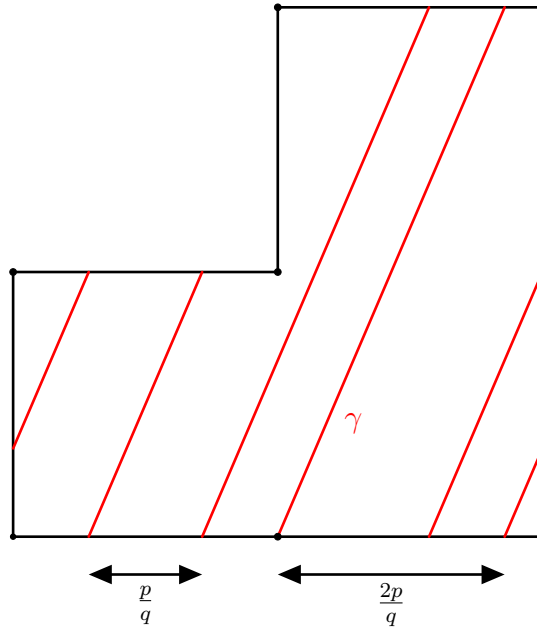


Fig. 4.14: $(p, q) = (3, 7)$

we use the fact that $(r, r') \notin \text{End}(\mathcal{Z})$, of length at least $\lfloor q/2p \rfloor$. Recall that $2\lfloor q/2p \rfloor \geq \lceil q/p \rceil - 2$. So the proportion of e_1 in \mathcal{S}_{int} is at most

$$\frac{\lceil q/p \rceil}{\lceil q/p \rceil + 2\lfloor q/2p \rfloor} \leq \frac{\lceil q/p \rceil}{2\lceil q/p \rceil - 2} \leq \frac{3}{4}$$

where the last inequality stands because $3 < q/p$. Then

$$\text{Int}(e_1, \gamma) \leq \frac{3(q-1)}{4} + 1 \leq \frac{9q}{10}.$$

This finishes the first case.

Remark. There is numerical evidence that $I_{r,\infty} \leq 2/3$ for all $r \in \mathbb{Q}$ such that $(r, \infty) \notin \text{End}(\mathcal{Z})$, except when $r = 3/7$, in which case $I_{r,\infty} = 5/7$.

Second case : p, q, p', q' are all odd. Multiplying (p, q) and (p', q') by some element of the Veech group, and swapping (p, q) and (p', q') if necessary, we may assume $(p', q') = (1, 1)$, that is, $r' = 1$, so $p q' - p' q = p - q$. Again multiplying by an element of the Veech group which stabilizes $(1, 1)$, we may assume $(p, q) = (p - q)(1, 0) + q(1, 1)$ satisfies $|p - q| > |q|$. Furthermore by the symmetries of $St(2s - 1)$, we only need consider the case when $0 < q < p - q$. Note that we then

have $p - q \geq 2$, otherwise $p = q$ and in that case we have $(r, r') \in \text{End}(\mathcal{Z})$. Let γ be a saddle connection with direction (p, q) . We want to show that

$$\begin{aligned} \text{Int}(\gamma, g_i) &< \frac{9(p-q)}{10} \text{ for } i = 1, \dots, s \\ \text{Int}(\gamma, g'_i) &< \frac{9(p-q)}{10} \text{ for } i = 1, \dots, s-1. \end{aligned}$$

The projection Π restricted to γ is injective by Lemma 4.2.4, so the $p - q - 1$ intersections of (p, q) with $(1, 1)$ in $\mathbb{T}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ lift to $p - q - 1$ intersections of γ with the singular cycle $g_1 + g'_1 + g_2 + g'_2 + \dots + g_s$. Let us consider the sequence S_{int} of all intersections of γ with g_1, g'_1, \dots, g_s , in cyclical order along γ , with the intersection at the conical point S set apart. Denote $\#S_{int}(g_i)$ (resp. $\#S_{int}(g'_i)$) the number of g_i 's (resp. g'_i 's) in the sequence S_{int} . We have

$$\text{Int}(g, \gamma) \leq \#S_{int}(g) + 1 \text{ for } g = g_1, \dots, g_s, \text{ and } g = g'_1, \dots, g'_{s-1},$$

where the +1 accounts for the intersection at S . Observe that in the sequence S_{int} there are never two consecutive g_i , for $i = 1, \dots, s-1$, or g'_i , for $i = 2, \dots, s-1$: each g'_i ($2 \leq i \leq s-1$) is followed by g_i or g_{i-1} , and each g_i ($1 \leq i \leq s-1$) is followed by g'_i or g'_{i+1} (see Figure 4.13). So the proportion of g_i or g'_i in S_{int} , for $i = 2, \dots, s$ is at most $1/2$ (only possible when $s = 2$). Therefore, since $p - q \geq 2$,

$$\text{Int}(g, \gamma) \leq \frac{p-q-1}{2} + 1 \leq \frac{3}{4}(p-q) \text{ for } g = g_1, \dots, g_{s-1}, \text{ or } g = g'_2, \dots, g'_{s-1}.$$

Intersections with g'_1 and g_s must be treated separately, with a case-by-case analysis. First we deal with g_s :

Case 2.1: $q < p - q < 2q$. Observe that each block of g_s has length at most 2, and is followed by at least a g_{s-1} , so the proportion of g_s in the sequence S_{int} is at most $2/3$, whence $\text{Int}(g_s, \gamma) \leq \frac{9(p-q)}{10}$.

Case 2.2: $2q < p - q < 3q$. Then a block of g_s has length at most 3, and is followed by at least a g_{s-1} and a g'_{s-1} , so so the proportion of g_s in the sequence S_{int} is at most $3/5$, whence $\text{Int}(g_s, \gamma) \leq \frac{9(p-q)}{10}$.

Case 2.3: $3q < p - q$. Intersections with g_s come in blocks of length at most $\lceil (p-q)/q \rceil$, because two consecutive (along γ) intersections are exactly $q/(p-q)$ apart along g_s (see Figure 4.13). Each block of g_s 's is followed by a block of $g_{s-1}g'_{s-1}$, of length at least $\lfloor (p-q)/2q \rfloor$. Recall that $2\lfloor (p-q)/2q \rfloor \geq \lceil (p-q)/q \rceil - 2$. So the proportion of g_s in S_{int} is at most

$$\frac{\lceil (p-q)/q \rceil}{\lceil (p-q)/q \rceil + 2\lfloor (p-q)/2q \rfloor} \leq \frac{\lceil (p-q)/q \rceil}{2\lceil (p-q)/q \rceil - 2} \leq \frac{3}{4}$$

where the last inequality stands because $3 < (p-q)/q$. Again, $\text{Int}(g_s, \gamma) \leq \frac{9(p-q)}{10}$.

Now we deal with g'_1 . In that case it is more convenient to write $(p, q) = (p - q)(2, 1) + (2q - p)(1, 1)$. Note that $2q - p < 0$ because $p - q > q$.

Case 2.4: $p - q < 2|2q - p|$, that is, $2q < p - q$. Observe that each block of g'_1 has length at most 2, and is followed by at least a g_1 , so the proportion of g'_1 in the sequence S_{int} is at most $2/3$, whence $\text{Int}(g'_1, \gamma) \leq \frac{9(p-q)}{10}$.

Case 2.5: $2|2q - p| < p - q < 3|2q - p|$, that is, $3q/2 < p - q < 3q$. Then a block of g'_1 has length at most 3, and is followed by at least a g_1 and a g'_2 , so the proportion of g_s in the sequence S_{int} is at most $3/5$, whence $\text{Int}(g_s, \gamma) \leq \frac{9(p-q)}{10}$.

Case 2.6: $p - q > 3|2q - p|$, that is, $q < p - q < 3q/2$. Intersections with g'_1 come in blocks of length at most $\lceil (p - q)/|2q - p| \rceil$, because two consecutive (along γ) intersections are exactly $|2q - p|/(p - q)$ apart along g'_1 (see Figure 4.13). Each block of g'_1 's is followed by a block of $g'_2 g_1$, of length at least $\lfloor (p - q)/2|2q - p| \rfloor$. Recall that $2\lfloor (p - q)/2|2q - p| \rfloor \geq \lceil (p - q)/|2q - p| \rceil - 2$. So the proportion of g'_1 in S_{int} is at most

$$\frac{\lceil (p - q)/|2q - p| \rceil}{\lceil (p - q)/|2q - p| \rceil + 2\lfloor (p - q)/2|2q - p| \rfloor} \leq \frac{\lceil (p - q)/|2q - p| \rceil}{2\lceil (p - q)/|2q - p| \rceil - 2} \leq \frac{3}{4}$$

where the last inequality stands because $3 < (p - q)/|2q - p|$. Again, $\text{Int}(g'_1, \gamma) \leq \frac{9(p-q)}{10}$. □

4.3 Proof of Theorem 4.1.1

Lemma 4.3.1. *Take $s \in \mathbb{N}^*$ and $X \in \mathcal{H}(2s - 2)$. Assume X is an n -fold ramified Riemannian cover of a flat torus. Then $\text{KVVol}(X) \leq n$, unless there exists a pair of closed geodesics α and β on X , which have the same direction, non-zero intersection, and such the product of their lengths is $< \text{Vol}(X)/n$.*

Proof. Assume, up to isometry and re-scaling, that the flat torus which X covers is $\mathbb{R}^2/(1, 0)\mathbb{Z} \oplus (a, b)\mathbb{Z}$, with $|a| \leq 1/2$ and $a^2 + b^2 \geq 1$. Then any closed geodesic on the torus is at least 1 long, and the volume of the torus is b , so the volume of X is nb .

Let α and β be simple closed geodesics in X . Since X has but one conical point, both α and β have a well-defined direction, say $\frac{p}{q}$ and $\frac{p'}{q'}$ in irreducible terms.

Remark. *If X had several conical points, α or β could be made up of several saddle connections of distinct directions.*

Let $\Pi : X \rightarrow \mathbb{T}^2$ be the projection of the ramified cover.

Then Π maps α (resp. β) to a closed geodesic of the torus, with homology class (p, q) (resp. (p', q')).

First case : $pq' - p'q \neq 0$.

Observe that $\Pi(\alpha)$ and $\Pi(\beta)$ intersect exactly $|pq' - p'q|$ times, and their intersections are equidistributed along $\Pi(\alpha)$, since the first return map to $\Pi(\alpha)$ of the linear flow with direction (p', q') , is a rotation of $\Pi(\alpha)$. Therefore, two consecutive intersections are exactly $\sqrt{(p + aq)^2 + b^2q^2}/|pq' - p'q|$ apart along $\Pi(\alpha)$.

Thus, two consecutive intersections of α and β cannot be less than $\frac{\sqrt{(p+aq)^2+b^2q^2}}{|pq'-p'q|}$ apart along α , since the restriction to α of Π is a local isometry. Hence denoting $l(\alpha)$ the length of α ,

$$\text{Int}(\alpha, \beta) \leq \frac{|pq' - p'q|}{\sqrt{(p + aq)^2 + b^2q^2}} l(\alpha).$$

Besides, since Π is 1-Lipschitz, we have $l(\beta) \geq \sqrt{(p' + aq')^2 + b^2q'^2}$, whence

$$\frac{\text{Int}(\alpha, \beta)}{l(\alpha)l(\beta)} \leq \frac{|pq' - p'q|}{\sqrt{(p + aq)^2 + b^2q^2} \sqrt{(p' + aq')^2 + b^2q'^2}} \leq K(\mathbb{T}^2) = \frac{1}{b}$$

where the last equality stems from [8].

Second case : $pq' - p'q = 0$. Then since α et β are simple, we have $p = p'$, $q = q'$. So the closed curves α and β , if they are distinct, cannot meet anywhere but at the conical point. Hence their algebraic intersection is 0 or ± 1 . Therefore

$$\frac{\text{Int}(\alpha, \beta)}{l(\alpha)l(\beta)} \leq \frac{1}{(p + aq)^2 + b^2q^2} \leq 1.$$

So we have $\text{KVol}(X) \leq \frac{1}{b}nb = n$, unless there exists a pair of closed geodesics α and β on X , which have the same direction (that is, $(p, q) = (p', q')$), non-zero intersection, and such that the product of their lengths is $< b$. \square

Corollary 4.3.1. *We have $\text{KVol}(St(2s - 1)) = 2s - 1$.*

Proof. Lemma 4.3.1 and the facts that any closed curve on $St(2s - 1)$ is at least 1 long, and that $\text{Vol}(St(2s - 1)) = 2s - 1$, entail that $\text{KVol}(St(2s - 1)) \leq 2s - 1$. On the other hand, we have $\text{Int}(e_1, f_2) = 1$, $l(e_1) = l(f_2) = 1$. \square

Now we want to know for which elements $X = X_s(x, y)$ of \mathcal{T}_s we have $\text{KVol}(X_s(x, y)) > 2s - 1$.

Lemma 4.3.2. *For $(x, y) \in V_{\pm 1} \cap \mathcal{D}$, where $V_{\pm 1} = \{(x, y) : (x \pm 1)^2 + (y - 1/2)^2 < 1/4\}$, we have $\text{KVol}(X_s(x, y)) > 2s - 1$. For any other (x, y) in \mathcal{D} , we have $\text{KVol}(X_s(x, y)) \leq 2s - 1$. Furthermore, $\text{KVol}(X_s(x, y))$ goes to infinity when y goes to zero, and goes to $2s - 1$ when y goes to ∞ while (x, y) remains in \mathcal{D} .*

Proof. By Lemma 4.3.1 and Subsubsection 4.2.3, finding which elements $X_s(x, y)$ of \mathcal{T}_s have $\text{KVVol}(X_s(x, y)) > 2s - 1$ amounts to finding all (x, y) in the fundamental domain \mathcal{D} such that there exist $p, q \in \mathbb{Z}$, coprime and both odd, such that

$$\frac{y}{(p + qx)^2 + (qy)^2} > 1 \tag{4.4}$$

$$\iff \left(x + \frac{p}{q}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2q^2}\right)^2 < \frac{1}{4q^4} \tag{4.5}$$

that is, (x, y) lies inside the open disk $D(p, q)$ of radius $1/2q^2$, centered at $(-p/q, 1/2q^2)$. As we shall see this only happens when $|p| = |q| = 1$. Indeed if $|p| > |q|$, the center of $D(p, q)$ lies at least $1/q$ apart from the vertical boundaries of \mathcal{D} , and since the radius of $D(p, q)$ is $< 1/q$, the whole $D(p, q)$ lies outside of \mathcal{D} . If $|p| < |q|$, the center of $D(p, q)$ lies below the half-circle $x^2 + y^2 = 1$, and the distance between the center of $D(p, q)$ and the half-circle $x^2 + y^2 = 1$ is greater than the radius of $D(p, q)$, because

$$1 - \sqrt{\frac{p^2}{q^2} + \frac{1}{4q^4}} > \frac{1}{2q^2},$$

so the whole $D(p, q)$ lies below the half-circle $x^2 + y^2 = 1$. Since p and q are coprime, the only remaining possibility is $p = \pm 1, q = 1$. So for any $X_s(x, y)$ in \mathcal{T}_s , we have $\text{KVVol}(X_s(x, y)) \leq 2s - 1$, unless (x, y) lies in the horocyclic neighborhood $V_{\pm 1}$ of the lower cusp of \mathcal{D} , bounded by the dotted circles depicted in Figure 4.4.

For (x, y) inside $V_{\pm 1}$, we have

$$\text{KVVol}(X_s(x, y)) \geq \max\left(\frac{(2s - 1)y}{\sqrt{(1 + x)^2 + y^2}}, \frac{(2s - 1)y}{\sqrt{(1 - x)^2 + y^2}}\right) > 2s - 1$$

and

$$\lim_{y \rightarrow 0} \text{KVVol}(X_s(x, y)) = +\infty.$$

Since $\text{KVVol}(X_s(1, y)) = 2s - 1$, KVVol is continuous as a function of (x, y) , and every (x, y) in \mathcal{D} is within distance $1/y$ of $(1, y)$, it follows that $\text{KVVol}(X_s(x, y))$ tends to $2s - 1$ when y goes to ∞ . \square

For $p, q \in \mathbb{Z}, p \wedge q = 1$, setting $r = p/q$, and for $(x, y) \in \mathbb{H}^2$, define

$$J_r(x, y) = \frac{y}{(p + qx)^2 + (qy)^2}.$$

Now, thanks to Lemmata 4.3.1 and 4.3.2, we can give a more precise version of Equation (4.3) :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}, \text{KVVol}(X_s(x, y)) = (2s - 1) \max\{J_1(x, y), J_{-1}(x, y), \sup_{r \neq r' \in \mathbb{Q}} I_{r, r'} K_{r, r'}(x, y)\}. \tag{4.6}$$

Lemma 4.3.3. For $(x, y) \in \mathcal{D}$, for all $(r, r') \in \text{End}(\mathcal{Z})$, we have

$$K_{r,r'}(x, y) \geq \sqrt{\frac{143}{144}}$$

and equality occurs if and only if $(x, y) = (\pm 9/14, \sqrt{143}/14)$.

Proof. By Lemma 4.2.6, we have $I_{r,r'} = 1$ whenever $(r, r') \in \text{End}(\mathcal{Z})$, and by Lemma 4.2.7, we have $I_{r,r'} \leq 9/10 < \sqrt{\frac{143}{144}}$ whenever $(r, r') \notin \text{End}(\mathcal{Z})$.

Elementary calculations show that the bisectors of the triangle T delimited by the geodesics $\gamma_{-1,1}$, $\gamma_{-2,1}$ and $\gamma_{0,2}$ intersect at the point $k = (\frac{9}{14}, \frac{\sqrt{143}}{14})$. For each $\gamma_{r,r'}$ different from the sides of T , $\gamma_{r,r'}$ does not pass through the interior of T , therefore the distance between the point k and $\gamma_{r,r'}$ is greater than the distance between k and the sides of the triangle T . Thus, for each $\gamma_{r,r'}$ different from $\gamma_{-1,1}$, $\gamma_{-2,1}$ and $\gamma_{0,2}$, we have $\theta_{r,r'}(k) > \theta_{-1,1}(k)$, so $\cos \theta_{r,r'}(k) < \cos \theta_{-1,1}(k)$, which entails:

$$\sup_{(r,r')} K_{r,r'}(k) = K_{-1,1}(k) = \sqrt{\frac{143}{144}}.$$

In all that follows, we call $V_{r,r'}$ the banana neighbourhood of the geodesic $\gamma_{r,r'}$ such that

$$\theta_{r,r'}(x, y) = \theta_{-1,1}\left(\frac{9}{14}, \frac{\sqrt{143}}{14}\right).$$

Let

$$C_n = C\left(\left(\frac{1-n}{2}, -\frac{1}{\sqrt{143}} \frac{1+n}{2}\right), \frac{1+n}{2} \sqrt{\frac{144}{143}}\right)$$

and

$$C^n = C\left(\left(\frac{1-n}{2}, \frac{1}{\sqrt{143}} \frac{1+n}{2}\right), \frac{1+n}{2} \sqrt{\frac{144}{143}}\right)$$

be the circles with centre respectively

$$\left(\frac{1-n}{2}, -\frac{1}{\sqrt{143}} \frac{1+n}{2}\right) \text{ and } \left(\frac{1-n}{2}, \frac{1}{\sqrt{143}} \frac{1+n}{2}\right)$$

and the same radius $\frac{1+n}{2} \sqrt{\frac{144}{143}}$, $n \geq 1$. The banana neighbourhood $V_{-n,1}$, for $n \geq 1$, is delimited by the maximal arcs of C_n and C^n , respectively, which are contained in \mathbb{H}^2 ; and the banana neighbourhood $V_{\frac{1}{2},\infty}$ is delimited by the two straight lines of equation $y = \sqrt{143}x + 1/2$ and $y = -\sqrt{143}x + 1/2$, respectively.

Let \mathcal{A} be the region delimited by $x = 1/2$, $x = 1$ and $\gamma_{-1,1}$. For all $n \geq 3$, $C_n \cap \mathcal{A}$, $C^n \cap \mathcal{A}$ is contained in the interior of, respectively, $V_{-n+1,1}$, and $V_{-n-1,1}$; and $C^2 \cap \mathcal{A}$ is contained in the interior of $V_{-3,1}$ (see Figure 4.15).

Also, the interiors of $V_{0,2}$, $V_{-1,1}$ and $V_{\frac{1}{2},\infty}$ cover the region delimited by C_2 , $\gamma_{-1,1}$ and $\gamma_{\frac{1}{2},\infty}$ except the point k (see Figure 4.15), so the interior of $V_{0,2}$, $V_{\frac{1}{2},\infty}$ and $V_{-n,1}$, $n \geq 1$, cover all the region \mathcal{A} except the point k .

Thus for $(x, y) \in \mathcal{A}$, $(x, y) \neq k$, we have $K_{r,r'}(x, y) > \sqrt{\frac{143}{144}}$. By symmetry with respect to $x = 1/2$, and afterwards by $x = 0$, we then deduce the lemma. \square

We are now set to finish the proof of Theorem 4.1.1. It is straightforward to check that

$$\max\{J_1(\frac{9}{14}, \frac{\sqrt{143}}{14}), J_{-1}(\frac{9}{14}, \frac{\sqrt{143}}{14})\} = \max\{J_1(-\frac{9}{14}, \frac{\sqrt{143}}{14}), J_{-1}(-\frac{9}{14}, \frac{\sqrt{143}}{14})\} = \sqrt{\frac{143}{144}}$$

so we have

$$\text{KVol}(X_s(\pm \frac{9}{14}, \frac{\sqrt{143}}{14})) = (2s - 1)\sqrt{\frac{143}{144}},$$

and for every $(x, y) \in \mathcal{D}$, we have $\text{KVol}(X_s(x, y)) \geq (2s - 1)\sqrt{\frac{143}{144}}$, with equality if and only if $(x, y) = (\pm 9/14, \sqrt{143}/14)$.

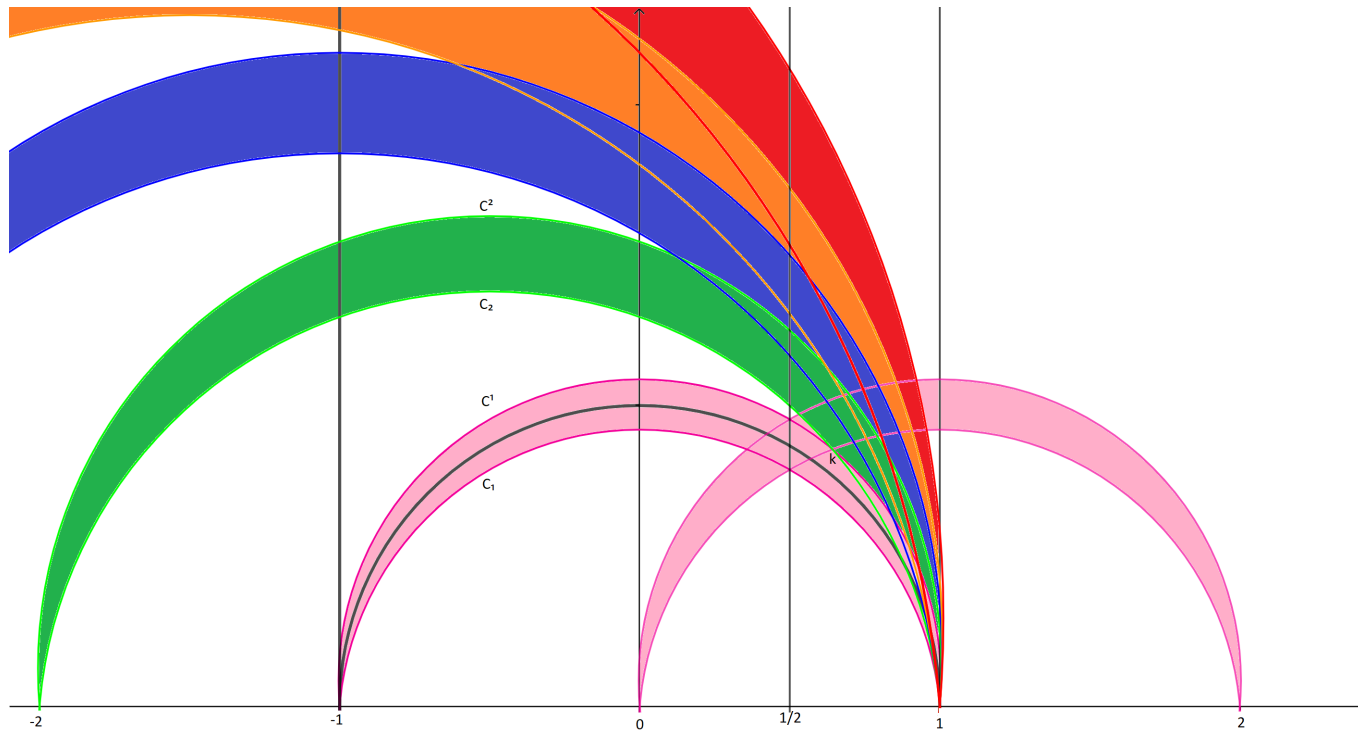


Fig. 4.15: covering by banana neighbourhoods

BIBLIOGRAPHY

- [1] C. Boissy, S. Geninska Systoles in translation surfaces, <https://arxiv.org/abs/1707.05060>.
- [2] S. Cheboui; A. Kessi; D. Massart Algebraic intersection for translation surfaces in the stratum $\mathcal{H}(2)$, *Comptes Rendus. Mathématique*, Tome 359 (2021) no. 1, pp. 65-70.
- [3] V. Delecroix et al., Surface Dynamics - SageMath package, Version 0.4.1, <https://doi.org/10.5281/zenodo.3237923>, 2019.
- [4] F. Herrlich; B. Muetzel; G.Schmithüsen : Systolic geometry of translation surfaces, (2018) arXiv:1809.10327.
- [5] P. Hubert; S. Lelièvre Prime arithmetic Teichmüller discs in $\mathcal{H}(2)$. *Israel J. Math.* 151 (2006), 281-321.
- [6] C. Judge ; H. Parlier The maximum number of systoles for genus two Riemann surfaces with abelian differentials. *Comment. Math. Helv.* 94 (2019), no. 2, 399–437.
- [7] S. Lelièvre Arithmetic Veech surfaces in genus two: Teichmüller discs, Veech groups, Siegel–Veech constants. Ph. D. thesis, Université Rennes 1, 2004.
- [8] D. Massart; B. Muetzel On the intersection form of surfaces. *Manuscripta Math.* 143 (2014), no. 1-2, 19-49.
- [9] C. McMullen Teichmüller dynamics and unique ergodicity via currents and Hodge theory, preprint.
- [10] G. Schmithüsen An algorithm for finding the Veech group of an origami. *Experiment. Math.* 13 (2004), no. 4, 459–472.
- [11] G. Schmithüsen Examples for Veech groups of origamis. *The geometry of Riemann surfaces and abelian varieties*, 193–206, *Contemp. Math.*, 397, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [12] W. Veech Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards. *Invent. Math.* 97 (1989), no. 3, 553–583.

Adresses :

Smaïl Cheboui : USTHB, Faculté de Mathématiques, Laboratoire de Systèmes Dynamiques, 16111 El-Alia BabEzzouar - Alger, Algérie,

email : scheboui@usthb.dz

Arezki Kessi : USTHB, Faculté de Mathématiques, Laboratoire de Systèmes Dynamiques, 16111 El-Alia BabEzzouar - Alger, Algérie,

email: akessi@usthb.dz

Daniel Massart : Institut Montpellierain Alexander Grothendieck, CNRS, Université de Montpellier, France,

email : daniel.massart@umontpellier.fr (corresponding author)

ANNEXE

Le programme suivant donne les liens de selles écrites dans la base $\{e_1, e_2, f_1, e_2\}$ (voir figure 4.16) pour une directions $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ donnée sur la surface $St(3) = L(2, 2)$.

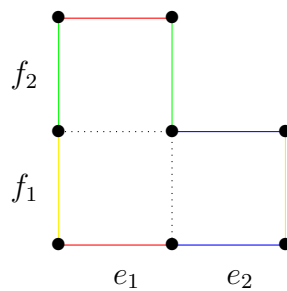


Fig. 4.16:

La fonction **separatrices**(**p,q**) donne les liens de selles de direction (p, q) .

La fonction **sepPasPrem**(**p,q**) donne les classes d'homologies.

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
@author: Smail Cheboui, Daniel Massart
"""
from numpy import*

A=array([[1,2],[0,1]])
invA=linalg.inv(A)
B=transpose(A)
invB=linalg.inv(B)
inter=array([[0,0,0,1],[0,0,1,-1],[0,-1,0,0],[-1,1,0,0]])
gen1=array([[1,0,1,2],[0,1,1,0],[0,0,1,0],[0,0,0,1]])
```

```

inv1=linalg.inv(gen1)
gen2=array([[1,0,0,0],[0,1,0,0],[1,2,1,0],[1,0,0,1]])
inv2=linalg.inv(gen2)
rot=array([[0,0,-1,0],[0,0,0,-1],[1,0,0,0],[0,1,0,0]])
def intersection(c1,c2):
    return dot(c1,dot(inter,c2))
def reduction(p,q):
    if gcd(p,q) !=1:
        print("erreur , pas premiers entre eux")
    else:
        vecteur=[p,q]
        mot=[]
        matHom=array([[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,1]])
        while (abs(vecteur[0])>1 or abs(vecteur[1])>1):
            if abs(vecteur[0]) > abs(vecteur[1]):
                if vecteur[0]*vecteur[1] >0:
                    mot.append("inv(A)")
                    matHom=dot(matHom, gen1)
                    vecteur=dot(invA, vecteur)
                elif vecteur[0]*vecteur[1] <0:
                    mot.append("A")
                    matHom=dot(matHom, inv1)
                    vecteur=dot(A, vecteur)
            if abs(vecteur[0]) < abs(vecteur[1]):
                if vecteur[0]*vecteur[1] >0:
                    mot.append("inv(B)")
                    matHom=dot(matHom, gen2)
                    vecteur=dot(invB, vecteur)
                elif vecteur[0]*vecteur[1] <0:
                    mot.append("B")
                    matHom=dot(matHom, inv2)
                    vecteur=dot(B, vecteur)
        return vecteur, mot, matHom
def separatrices(p,q):
    vecteur, mot, matHom =reduction(p,q)
    if list(vecteur)==[1,0]:
        sep1=dot(matHom, [1,0,0,0])
        sep2=dot(matHom, [1,0,0,0])
        sep3=dot(matHom, [0,1,0,0])
        sep=[sep1,sep2, sep3]

```

```

if list(vecteur)==[-1,0]:
    sep1=dot(matHom, [-1,0,0,0])
    sep2=dot(matHom, [-1,0,0,0])
    sep3=dot(matHom, [0,-1,0,0])
    sep=[sep1, sep2, sep3]
if list(vecteur)==[0,1]:
    sep1=dot(matHom, [0,0,1,0])
    sep2=dot(matHom, [0,0,1,0])
    sep3=dot(matHom, [0,0,0,1])
    sep=[sep1, sep2, sep3]
if list(vecteur)==[0,-1]:
    sep1=dot(matHom, [0,0,-1,0])
    sep2=dot(matHom, [0,0,-1,0])
    sep3=dot(matHom, [0,0,0,-1])
    sep=[sep1, sep2, sep3]
if list(vecteur)==[1,1]:
    sep1=dot(matHom, [1,0,1,0])
    sep2=dot(matHom, [0,1,1,0])
    sep3=dot(matHom, [1,0,0,1])
    sep=[sep1, sep2, sep3]
if list(vecteur)==[-1,-1]:
    sep1=dot(matHom, [-1,0,-1,0])
    sep2=dot(matHom, [0,-1,-1,0])
    sep3=dot(matHom, [-1,0,0,-1])
    sep=[sep1, sep2, sep3]
if list(vecteur)==[1,-1]:
    sep1=dot(matHom, [1,0,-1,0])
    sep2=dot(matHom, [0,1,-1,0])
    sep3=dot(matHom, [1,0,0,-1])
    sep=[sep1, sep2, sep3]
if list(vecteur)==[-1,1]:
    sep1=dot(matHom, [-1,0,1,0])
    sep2=dot(matHom, [0,-1,1,0])
    sep3=dot(matHom, [-1,0,0,1])
    sep=[sep1, sep2, sep3]
return sep
def sepPasPrem(p,q):
    pgcd=gcd(p,q)
    if pgcd==1:
        return separatrices(p,q)

```

```
else :
    p1=p//pgcd
    q1=q//pgcd
    sepa=separatrices (p1,q1)
    separa=[[pgcd*sepa[i][j] for j in range(4)] for i in range(3)]
    return separa
```