



**HAL**  
open science

# Propagation des ondes dans les guides partiellement enfouis : résolution du problème direct et imagerie par méthode de type échantillonnage

Jean-François Fritsch

► **To cite this version:**

Jean-François Fritsch. Propagation des ondes dans les guides partiellement enfouis : résolution du problème direct et imagerie par méthode de type échantillonnage. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Institut Polytechnique de Paris, 2023. Français. NNT : 2023IPPAE001 . tel-04416921

**HAL Id: tel-04416921**

**<https://theses.hal.science/tel-04416921v1>**

Submitted on 25 Jan 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT  
POLYTECHNIQUE  
DE PARIS

NNT : 2023IPPAE001

Thèse de doctorat



# Propagation des ondes dans les guides partiellement enfouis : résolution du problème direct et imagerie par méthode de type échantillonnage

Thèse de doctorat de l'Institut Polytechnique de Paris  
préparée à l'École Nationale Supérieure de Techniques Avancées (ENSTA Paris)

École doctorale n°574 : Mathématiques Hadamard (EDMH)  
Spécialité de doctorat : Mathématiques appliquées

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 20 juin 2023, par

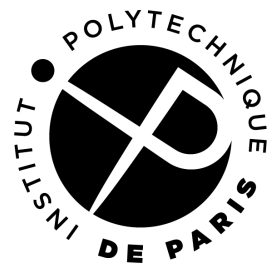
**Jean-François Fritsch**

## Composition du Jury :

Hélène Barucq Directrice de recherche, Inria (MAKUTU)	Présidente du jury
Andreas Kirsch Professeur, Karlsruhe Institute of Technology (Department of Mathematics)	Rapporteur
Fabien Treyssède Directeur de recherche, Université Gustave Eiffel / IFSTTAR (GERS-GeoEND)	Rapporteur
Lucas Chesnel Chargé de recherche, Inria / ENSTA Paris (IDEFIX)	Examineur
Frédérique Le Louër PRAG, Université de Technologie de Compiègne (LMAC)	Examinatrice
Laurent Bourgeois Professeur associé, ENSTA Paris (POEMS)	Directeur de thèse
Arnaud Recoquillay Ingénieur chercheur, CEA (LIST)	Co-encadrant de thèse
Christophe Hazard Chargé de recherche, CNRS / ENSTA Paris (POEMS)	Invité / Co-directeur



# Logos







# Remerciements

Ce travail de thèse n'aurait pas pu voir le jour, ni aboutir, sans certaines belles personnes qui m'ont enrichi personnellement et soutenu pendant ces quatre ans de thèse. Je souhaite dédier ces quelques pages liminaires à toutes ces personnes, afin de leur exprimer ma profonde gratitude.

## Jury

Pour commencer, je souhaite exprimer ma reconnaissance aux deux rapporteurs de ma thèse, pour avoir accepté de lire et d'évaluer ce manuscrit. Je suis honoré d'avoir eu pour rapporteurs Andreas Kirsch, le co-inventeur de la LSM que j'ai utilisée dans mes travaux, et Fabien Treyssède, spécialiste des guides d'ondes ouverts. Je ne pouvais espérer avoir des rapporteurs d'un tel niveau scientifique, recouvrant aussi bien, par leurs expertises, les différentes thématiques abordées dans mes travaux. Merci à tous les deux d'avoir fait l'effort de relire un si long manuscrit, avec une pensée particulière pour Andreas Kirsch, qui a accepté cet exercice bien que ce document ne soit pas rédigé dans sa langue maternelle qui est l'allemand.

De la même façon, je souhaite remercier les autres membres du jury, Héléne Barucq, Lucas Chesnel et Frédérique Le Louër, d'avoir pris de leur temps pour participer à mon jury de thèse et pour toute la richesse qu'ils y ont apportée par leurs expertises respectives. Je vous remercie aussi sincèrement d'avoir lu ce manuscrit et de m'avoir fait part de vos remarques sur celui-ci, qui m'ont permis d'en améliorer sa qualité.

## Encadrants

Les travaux présentés dans ce manuscrit sont le fruit d'un encadrement exceptionnel dont j'ai eu le privilège de bénéficier. C'est pourquoi, je veux maintenant remercier mes directeurs de thèse Laurent Bourgeois et Christophe Hazard, ainsi que mes encadrants industriels Arnaud Recoquillay et Vahan Baronian, qui ont grandement contribué à mon épanouissement au travail pendant ces années de thèse.

Pour commencer, je tiens à remercier très sincèrement Laurent de m'avoir fait confiance, lorsqu'il a accepté d'encadrer mon stage de fin d'étude en 2018, alors même que ma note à l'examen de son cours de problèmes inverses n'était pas très bonne... Bien qu'initialement intimidé par sa prestance d'ancien ingénieur de l'armement, j'ai rapidement découvert pendant ce stage une personne attentive à mon bien-être et très amicale. J'ai énormément appris de sa rigueur dans l'exercice des mathématiques. J'ai aussi beaucoup apprécié son suivi au quotidien, qui a été très précieux pour moi. Cette très bonne expérience m'a encouragé à prolonger ce stage par une thèse en collaboration avec le CEA. Laurent a ensuite été le vrai

chef d'orchestre de cette thèse, dirigeant et coordonnant au quotidien les travaux, toujours de sorte à me faciliter la tâche sur le plan organisationnel, afin de me permettre de me concentrer sur les questions scientifiques. Je lui en suis profondément reconnaissant.

Au moment de lancer la thèse, Christophe a rejoint le projet pour nous enrichir de sa connaissance des guides d'ondes ouverts et de son expertise en théorie spectrale. J'ai énormément bénéficié de ses connaissances pointues dans ces deux domaines, mais aussi de sa grande pédagogie, qui m'ont grandement aidé à rentrer dans le sujet et à comprendre de façon précise des concepts difficiles. Au-delà de l'aspect scientifique, j'ai beaucoup profité des qualités humaines de Christophe, toujours à l'écoute, y compris pour des sujets personnels. Merci pour tout !

Cette thèse financée par le CEA a pu naître grâce à Arnaud, qui a porté le montage administratif de celle-ci. Dès le début de la thèse, il a tout fait pour faciliter mon installation et mon intégration dans l'ex-DISC (Département d'Imagerie et de Simulation pour le Contrôle), ce qui m'a beaucoup aidé à m'y sentir bien. Arnaud a ensuite été remarquable en matière d'implication dans l'encadrement de mes travaux, que ce soit en venant aux nouvelles chaque fois que j'étais au DISC, en m'aidant à déboguer mes codes, ou enfin en prenant le temps de m'expliquer les tenants et aboutissants du contrôle non destructif du point de vue industriel. Pour trouver ce temps parmi tous les projets qu'il avait à mener en tant qu'ingénieur chercheur, Arnaud a parfois sacrifié de son temps personnel. Je tiens à le remercier vivement pour tout cela.

J'ai aussi eu la possibilité d'avoir des échanges très intéressants avec Vahan, notamment sur la question compliquée de l'approximation des modes de quasi-Scholte avec des PML. Je garderai de bons souvenirs de ces discussions, bien que nos conclusions aient été un peu désespérantes pendant un certain temps. Merci !

Je souhaite aussi remercier Sonia Fliss, avec qui nous avons eu le privilège de collaborer et qui a eu un rôle important dans l'obtention des résultats présentés au **chapitre 5** de ce manuscrit. J'ai eu la chance de profiter de ses grandes gentillesse et pédagogie avant ma thèse lorsque j'étais étudiant ingénieur ; cela a été tout aussi agréable de travailler avec elle en tant que doctorant.

Les travaux présentés dans ce manuscrit sont le fruit d'un vrai travail d'équipe, où chacun a apporté sa pierre à l'édifice. J'ai pris beaucoup de plaisir à travailler avec cette belle équipe !

## Vie à l'ENSTA Paris

Dès mon arrivée à l'UMA (Unité de Mathématiques Appliquées) de l'ENSTA Paris pour mon stage de fin d'étude, j'ai été extrêmement bien accueilli par l'ensemble de ses membres. Évoluer au quotidien dans cet environnement bienveillant, depuis ce moment jusqu'à la fin de ma thèse, a vraiment été une heureuse expérience.

En premier lieu, je tiens à remercier Corinne, qui est certainement l'une des personnes les plus importantes du laboratoire, pour son dévouement sans faille vis-à-vis de chacun, et en particulier vis-à-vis des doctorants. Merci pour ton aide et ton efficacité dans le traitement de nos démarches administratives, parfois méandreuses, mais aussi pour ton soutien et ton écoute lorsque nous rencontrons des difficultés dans nos vies mouvementées de doctorants.

Ensuite, j'aimerais exprimer ma reconnaissance à l'ensemble des ingénieurs informatique qui se sont succédé au fil des années et qui ont toujours œuvré pour me garantir un environnement informatique optimal, me permettant de travailler dans les meilleures conditions. Merci à Christophe M. pour son chaleureux accueil lors de mon arrivée, sa bonne humeur (se propageant souvent dans tout le labo par des éclats de rire mémorables) et la mise en place de tous mes outils informatiques. Je remercie aussi Maurice pour toutes les discussions informatiques que nous avons pu avoir et pour son plaisir à partager ses connaissances. Je souhaite aussi remercier Gregory pour son aide dans mes problèmes de batterie et enfin Abdelhamid pour ses dépannages et les moments d'échanges intéressants que nous avons pu avoir.

Je ne pourrais oublier de remercier l'équipe de développement du logiciel XLiFE++, sans qui je n'aurais probablement pas pu obtenir les résultats numériques présentés dans ce manuscrit. Je remercie Éric L. pour sa grande disponibilité lorsque je rencontrais des bugs, son efficacité pour les résoudre lorsqu'ils étaient avérés et sa patience lorsque j'avais simplement mal lu la documentation. Merci aussi à Colin pour son travail de l'ombre si important d'automatisation des tests. Je remercie profondément Nicolas de m'avoir aidé à rentrer dans XLiFE++ et de m'avoir secouru un nombre incalculable de fois lorsque je rencontrais des erreurs ou lorsque je ne savais pas coder quelque chose. Je lui suis aussi reconnaissant pour tous les dépannages liés aux serveurs de calculs, pour son incroyable connaissance du  $\text{\LaTeX}$  qu'il n'hésite pas à partager, et enfin pour toutes ses visites dans les bureaux des doctorants qui aident à décompresser. J'étais très content de te rencontrer et je te souhaite le meilleur pour la suite!

L'UMA a la chance de compter parmi ses membres Éliane, la directrice adjointe de l'EDMH (École Doctorale de Mathématiques Hadamard). Je voudrais la remercier pour sa grande disponibilité toutes les fois où je ne comprenais pas ce qu'on attendait de moi sur la plateforme ADUM (Accès Doctorat Unique et Mutualisé). Tu es si précieuse pour tous les doctorants!

Au sein de l'UMA, j'ai intégré l'équipe POEMS (Propagation des Ondes : Études Mathématique et Simulation) dirigée par Anne-Sophie. J'aimerais la remercier particulièrement pour la considération qu'elle a eu pour moi en proposant ma venue à la conférence Waves 2019 à la fin de mon stage de fin d'étude, mais aussi pour sa disponibilité lorsque j'avais des questions scientifiques à lui poser.

Je souhaite à présent remercier ceux avec qui j'ai clairement passé le plus de temps : mes collègues de bureau doctorants, dont la première équipe était constituée de Damien C., Othmane et Mahran. Ces moments passés avec vous ont été très riches en discussions mathématiques passionnantes et en débats mouvementés sur des sujets allant de la politique, à des questions sociétales jusqu'à des sujets spirituels. Mais le plus important est sûrement les amitiés qui se sont tissées entre nous. Merci Damien pour nos retours pédestres le soir par la petite forêt domaniale de Palaiseau qui permettaient d'oxygéner nos cerveaux en surchauffe, mais qui étaient aussi propices à de belles discussions autour de nos valeurs communes. Je te souhaite de trouver le bon sentier dans la voie que tu as empruntée. Merci à Mahran pour toutes nos discussions mathématiques de type Kondratiev-rie ou sur la sempiternelle question : « Peut-il y avoir des chaînes de Jordan ? ». J'ai beaucoup profité d'avoir côtoyé un chercheur comme toi, mais aussi une personne si gentille. Je te souhaite de trouver un poste qui te permettra pleinement de t'exprimer. Merci enfin à Othmane, pour cette belle

et inattendue rencontre. Merci d'avoir augmenté l'entropie de notre bureau lorsque tu y travaillais, puis lors de tes passages impromptus dans notre bureau après ton rapprochement de l'équipe OC. Je suis heureux d'avoir pu nouer une amitié avec toi malgré nos caractères si opposés. Je te souhaite de pouvoir continuer à développer ta nouvelle théorie avec le poste que tu as obtenu, mais aussi d'être comblé dans tous tes besoins personnels.

Je tiens aussi à remercier les plus jeunes occupants du bureau, qui ont été, par ordre chronologique, Louise, Thomas S. lors de son stage, Dongchen et enfin Adrian. Merci Louise pour la fraîcheur et l'énergie que tu as apportées au bureau, mais aussi pour les discussions que nous avons pu avoir à la fin de ma thèse. Merci Thomas S. pour les échanges interculturels intéressants que nous avons pu avoir. Merci Dongchen pour l'attention que tu as eue à mon égard le jour de mon départ au laboratoire, cela m'a beaucoup touché. Merci enfin à Adrian pour l'admirable courage dont tu fais preuve dans ce que tu traverses depuis un an et demi.

Je voudrais remercier aussi tous les autres stagiaires, doctorants et postdoctorants pour tous les bons moments que nous avons pu partager. Des plus anciens aux plus jeunes, je remercie Félix, Alicia, Florian, Sandrine P., Clément B., Maria, Veljko, Yohanes, Emile, Hajer, Damien M., Nidhal, Alan, Meryem, Akram, Amandine (pour nos échanges d'expériences au CEA), Cristian, Sara, Pierre A. (pour cette amitié qui remonte à notre cursus d'ingénieur), Laura (pour ton implication remarquable dans les activités d'enseignement), Alice N., Amond (pour toutes nos discussions XLiFE), Étienne P. (aussi pour toutes nos discussions XLiFE, et pour ton courage), Clara L., Alex, Zoé, Quentin G., Luca, Thibaut B., Alexis, David La., Rose-Chloé, Fabien P. (pour tous nos échanges sur la LSM), Dorian, Hadrien (pour ton soutien des jeunes de l'équipe IDEFIX), Anh, Zheyi, Natalia, Paul I., Corentin, Aziz, Labidi, Nouha, Morgane, Cédric, Aurélien et enfin Zoïs.

L'UMA est constituée de membres permanents qui donnent au laboratoire sa belle identité, naturellement sur le plan scientifique avec une recherche de très grande qualité, mais aussi et surtout sur le plan humain. Je souhaite remercier Marc Bo., Anne-Sophie, Laurent, Stéphanie, Colin, Patrick C., Luiz, Laure, Christophe H., Patrick P., Maryna, Pierre M., Jean-François M. (mon joyeux homonyme!), Axel M., Marc L., Zacharie, Benjamin, Maurice, Sourour, Frédéric, David Le., Jérôme (merci pour ton encadrement du FPT), Francesco, Andrea, Hasnaa, Lorenzo, Marcella, Lucas, Houssein et Jing-Rebecca. Ayant été étudiant ingénieur à l'ENSTA, j'ai connu la plupart de ces personnes dans leur rôle de professeur. Je souhaite ainsi profiter de ces remerciements pour témoigner qu'ils forment une équipe d'enseignants tout à fait exceptionnelle, que ce soit par leur grande pédagogie et leur souci de cohérence de la formation, ou par l'attention qu'ils prêtent à chacun des étudiants. Merci pour tout cela!

Pendant ma thèse, j'ai eu l'opportunité d'encadrer des travaux dirigés et projets des cours de première année MO102 (cours d'introduction à Matlab par un projet d'éléments finis pour mon groupe) et MA103 (cours d'introduction à la discrétisation des équations aux dérivées partielles). Je désire ici remercier tous mes élèves pour leur implication dans ces cours, qui a rendu ces expériences très agréables; j'en garderai de bons souvenirs!

## Vie au CEA List

Pour réaliser mes travaux de thèse, j'ai aussi été accueilli au sein de l'ex-DISC du CEA List. Je suis vraiment reconnaissant d'avoir pu être immergé dans ce milieu de recherche pour l'industrie, complétant ainsi mon expérience de recherche en milieu académique à l'UMA.

J'aimerais commencer par remercier Sandrine D., l'assistante administrative du département qui s'est occupée de toutes les démarches administratives du CEA au moment du début de ma thèse. Après son départ, Coralie qui l'a succédé s'est toujours rendue disponible pour traiter efficacement mes différents besoins administratifs ; je lui en suis très reconnaissant.

Je souhaite aussi remercier Daniel qui s'est occupé de mon installation au niveau informatique et qui me dépannait rapidement à chaque fois que je rencontrais un problème de cet ordre.

Ma hiérarchie directe formée par Steve et Pierre C. a toujours fait preuve de compréhension et de facilitation pour les questions découlant de la double tutelle de ma thèse : ENSTA et CEA. Je les en remercie sincèrement, cela a été précieux.

J'ai maintenant le plaisir de remercier mon seul et unique co-bureau de thèse au CEA : Arthur ! Je me souviens encore de notre premier échange, que je qualifierais de ... cordial. Mais nos pauses café, dont tu as été à l'initiative, et je t'en remercie, nous ont permis d'apprendre à nous connaître, de nous rencontrer dans nos univers respectifs et de tisser une amitié. Je te remercie aussi sincèrement pour les efforts que tu as faits pour essayer de comprendre les questions souvent capillotractées que je me posais dans le cadre de mes travaux de thèse, mais aussi pour m'aider à en trouver des éléments de réponse. Merci aussi pour tes qualités culinaires, dont j'ai pu profiter à de nombreuses occasions ! Étant régulièrement absent pour travailler à l'ENSTA, j'ai bien conscience que je n'ai pas été le co-bureau le plus présent, et j'en suis désolé. Toutefois, j'espère que nous garderons contact longtemps après la thèse. Je te souhaite sincèrement de t'épanouir dans la voie que tu choisiras d'emprunter.

Dès mon arrivée au DISC, j'ai été très bien accueilli par une belle équipe de jeunes docteurs et ingénieurs, qui s'est renouvelée tout au long de ma thèse. Je me suis senti intégré dans cette équipe et j'ai beaucoup apprécié toutes nos discussions, notamment pendant les pauses de midi. Approximativement, des plus anciens aux plus jeunes, je remercie Jordan (pour ce que tu fais en faveur de la cohésion du groupe), Valentin, Guillaume C., Tinh, Clément F., Tom, Olivier, Bastien, Edouard, Sanjay (for giving me the opportunity to practice my oral English and for your patience when we had misunderstandings), Georges, Patrick F., Maxance, Alexandre C., Imanol, Marc Ba. (pour le document que tu avais pris le temps de rédiger pour répondre à ma question « Pourquoi est-ce que le dirac n'est pas une distribution de  $L^2$  ? » en TD de MA102, cela m'avait marqué), Marie, Gerardo, André, Vivek, Victor, Célestine, Tzila, Camille, Thilakson, Romain V., Théo, Nouhayla, Axel T. (je garderai un bon souvenir de notre més(?)aventure avec ta moto!), Lauren et Yuto.

J'aimerais enfin remercier le personnel d'accueil de DIGITEO pour leur serviabilité et leur sourire.

## Formation

Pour en arriver à ce niveau d'études, j'ai bénéficié tout au long de ma scolarité d'enseignants dévoués et passionnés qui ont développé mon intérêt pour les sciences et qui m'ont encouragé à progresser dans cette voie.

En premier lieu, je souhaite remercier Mme Gleitz qui, dès le collège à Eschau, a indéniablement nourri mon intérêt pour les mathématiques. Ensuite, je voudrais remercier tous

les professeurs que j'ai pu avoir au lycée Kléber de Strasbourg. En particulier, je souhaite exprimer ma reconnaissance à Mr Suffrin et Mr Meier (nos thèses ont surprenamment un certain nombre de thématiques communes!) pour leur implication sans faille dans mes deux ans d'études avec eux, qui m'a grandement aidé à intégrer l'ENSTA. Je souhaite également remercier les professeurs de l'ENSTA Paris pour la qualité de leurs enseignements, qui m'ont bien préparé à cette thèse.

Il est enfin important pour moi de remercier Lise-Marie I-G. pour l'opportunité qu'elle m'a donné de faire mon stage de recherche avec elle aux États-Unis. Ce stage a été une expérience très enrichissante sur le plan personnel, mais aussi sur le plan scientifique. D'une certaine façon, les gros calculs analytiques que j'ai pu effectuer pour tenter de construire des ondes planes généralisées m'ont préparé à ceux que j'ai effectué dans ce manuscrit! Merci aussi de m'avoir encouragé à faire une thèse.

## Amis

Tout au long de ma thèse, j'ai eu la chance d'être entouré d'amis qui m'ont soutenu et avec qui j'ai pu partager de beaux moments.

Pour commencer, je souhaite remercier mes amis d'école Philip (tu as été un super binôme de projets et ami à l'ENSTA, bravo aussi pour ta thèse!), Alice M. (je me réjouis que tu aies trouvé une voie dans laquelle tu t'épanouisses), Martin L. (nous avons entamé nos pérégrinations scientifiques ensemble à l'ENSTA et te voilà docteur, félicitations à toi!), Mucia (merci pour toutes les discussions que nous avons pu avoir, et félicitations pour la thèse!), Adel (je suis tellement reconnaissant pour la tournure que prend ta vie!), Jahmal, Pierrick (j'étais très heureux de la façon dont nos chemins se sont recroisés l'année dernière, bon courage pour la thèse!) et Maxime F.

J'aimerais ensuite remercier Thibaut G. pour notre amitié qui remonte à nos années de classe préparatoire. Je suis reconnaissant pour cette amitié qui continue de se développer d'année en année et pour tous les partages que nous pouvons avoir. Merci aussi à Gabriel, que je suis heureux d'avoir rencontré et de compter pour ami. Merci aussi à Guillaume A. pour les beaux moments d'échanges que nous avons pu partager. Merci également à Christophe R. pour sa fidélité dans notre amitié.

Je souhaite également remercier Alan pour notre amitié (j'attends avec impatience les résultats de ton étude sur le sujet!) et toutes les réflexions stimulantes que nous avons pu avoir.

Pendant ma thèse, j'ai aussi eu l'occasion de faire des rencontres enrichissantes avec des doctorants extérieurs à mes laboratoires. Je remercie ainsi Pierre W. (qui dirige la foudre avec des lasers!), Angèle, Nhi, Gautier P., Matthieu B., Émilien, Eugénie et Iad.

Je tiens ici à remercier Nicolas B. et Timothée pour l'organisation des camps randonnées des Groupes Bibliques Universitaires auxquels j'ai pu participer pendant la thèse. Je remercie aussi tous les campeurs pour les belles discussions que nous avons eues au milieu de somptueux paysages. Ces moments ont été de grands bols d'air frais!

Je souhaite ensuite remercier mes amis de l'église chrétienne "Palaiseau Centre" qui m'ont considérablement soutenu tout au long de ma thèse. Mille mercis à Mamy (merci infiniment pour ton soutien et ta disponibilité quand j'en avais besoin) et Niarintsoa, Clément T. et Yuko, Jacques et Martine, Jeremy, Lydie, Nelson et Oriana, Jean-Louis, Marc-Henry et Patricia, François, Bruno et Françoise, Samuel et Véronique, Christophe et Florence, Jean, Jean de Dieu, Pierre B., Marie-Anne, Jon, Paul, Yves, Francelise, Daniel et Ginette, Dominique et Yolande, Jean-Pascal et Hélène, Lemaine, Charlotte, Sagesse, Robert et Gisèle, Jean-Marc et Nathalie, Marion, Clément V. et Katty, Joël (merci pour ce que tu as fait pour moi lorsque je suis arrivée sur le Plateau il y a sept ans, tu m'as apporté tant de choses), Henrique et Sofia, Ellen, Noé, Miantsa, Kenny, Meryl, Florent, Sylvain, Nathanaël, Hugo, Aurélie, Prisca, Christelle, Charlène, Alexandre Ma., et enfin Jeanne qui nous a quittés en fin d'année dernière, mais dont j'ai tant appris! L'espace me manque pour tous vous nommer, mais je vous suis à tous reconnaissant!

Je tiens maintenant à faire des remerciements spéciaux à mes amis de l'église "Palaiseau-Saclay" créée à la fin de ma première année de thèse. Nous n'étions au départ que six et le travail à réaliser était si important. Au lieu de nous faire abandonner le projet, les épreuves que nous avons traversées ensemble nous ont rapprochées et ont fait de nous une famille. Sans aucun doute, cela nous a donné la force de persévérer et de développer cette église, avec l'aide de Celui sans qui nous ne pouvons rien. Il est certain que je n'aurais pas pu soutenir cette thèse sans votre soutien exceptionnel tout au long des six derniers mois précédant ma soutenance. Pour cela, je remercie Mikaël et Isaline (merci pour tous les plats que vous m'avez apportés, ils m'ont fait du bien), Jean-Yves (mon partenaire de natation préféré, et bien plus) et Nadiège, Dinac et Claire, Nicolas K. (ta grande présence au moment où j'en avais besoin a été très précieuse, je t'en remercie sincèrement) et Émeline, Hanyu (merci pour la personne que tu es) et David.

Juste avant l'épisode du Covid, j'ai eu la joie de découvrir la "Mission" à la place Sainte-Marthe. Je souhaite remercier Éric G. et Vicky pour l'exemple qu'ils ont été dans le service des autres. Merci pour tout ce que vous m'avez transmis, mais aussi pour votre écoute dans les difficultés, notamment en lien avec cette thèse, que je pouvais rencontrer. Merci à tous les autres bénévoles que j'ai pu rencontrer samedi après samedi, tous de nationalités et de milieux sociaux si différents, mais œuvrant d'un même cœur pour la même cause. Je tiens à remercier particulièrement Nathalys, Danielle, Steven, Alexandre Mo., Johanna, Gilles et Séphora. Pour finir, mes remerciements les plus importants vont à tous nos invités. Vous m'avez fait grandir en me partageant vos trajectoires de vies si riches, mais aussi par la persévérance et la résilience dont vous faites preuve face aux si dures épreuves de la vie que vous rencontrez. Je retiendrai, parmi tant d'autres choses, l'image de vos sourires, dont certains ont été des plus beaux que j'ai pu voir!

Je souhaite enfin remercier Colombe L-A. pour son écoute et ses conseils avisés au cours des mois qui ont précédé ma soutenance.

## Famille

Je veux ici remercier ma famille, sans qui je ne serais pas qui je suis.

Je tiens à remercier sincèrement mes grands-parents, Papy et Mamie, Papinou et Maminou, qui m'ont toujours soutenu dans mes études et mes différents projets.



Je remercie aussi mes oncles, tantes, cousins et cousines qui se sont toujours intéressés à mes études et avec qui je passe toujours de bons moments. Je remercie donc Claudine et Jean-Baptiste, Quentin, Raphaël, Clara, Marie-Hélène, Etienne et Nelly, et Audrey.

Je tiens à remercier ma petite sœur, Aude, avec qui j'ai cheminé sur le sentier sinueux et souvent escarpé des études longues, et qui m'a soutenu tout au long de cette thèse. Je suis admiratif des sacrifices que tu as eus le courage de faire, in fine pour servir les autres. Je souhaite sincèrement que ta dernière année d'études de médecine se passe au mieux et que tu obtiennes à son terme un poste dans un environnement sain, te permettant de t'épanouir pleinement dans ton travail, mais aussi dans ta vie personnelle. Je suis très fier de toi!

Je tiens enfin à remercier tendrement mes parents Christiane et Benoît. Plus le temps passe, plus je réalise à quel point je suis privilégié d'avoir des parents comme vous. Vous avez fait preuve d'un soutien et d'un amour indéfectible depuis mon enfance. Je ne saurais assez vous remercier pour tous les sacrifices que vous avez faits pour moi. Sans votre grande présence tout au long de ma thèse, et particulièrement à la fin, je n'aurais pu réaliser un tel travail. Mes mots sont bien faibles pour vous exprimer toute ma gratitude. Je vous aime!

## **Dernier remerciement**

Pour finir, je remercie de tout mon cœur Jésus-Christ, mon Seigneur, mon Sauveur et mon Dieu. Par ton Esprit, tu m'as donné jour après jour l'énergie et l'intelligence nécessaires à la réalisation de ce travail. Par ta merveilleuse Parole, la Bible, tu m'as nourri quotidiennement tout au long de cette thèse. Mais enfin et surtout, par le don ta vie, tu m'as offert la Vie. Merci pour tout!





# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>I Ondes acoustiques dans une jonction de guides fermés</b>	<b>9</b>
<b>1 Analyse modale dans les guides acoustiques fermés</b>	<b>13</b>
1.1 Définition des modes . . . . .	13
1.2 Sur la racine carrée complexe . . . . .	15
1.3 Étude et classification des modes . . . . .	17
1.4 Sens de propagation des modes propagatifs . . . . .	18
1.5 Courbes de dispersion . . . . .	19
<b>2 Problème direct dans les jonctions de guides acoustiques fermés</b>	<b>21</b>
2.1 Jonction de deux guides fermés . . . . .	21
2.2 Réponse de la structure sans défaut à un mode . . . . .	22
2.3 Réponse de la structure perturbée par un défaut à un mode . . . . .	34
<b>3 Problème inverse dans les jonctions de guides acoustiques fermés</b>	<b>39</b>
3.1 Fonction de Green . . . . .	40
3.2 La Linear Sampling Method . . . . .	43
3.3 Formulation modale de la LSM . . . . .	47
3.4 Étude numérique . . . . .	51
<b>II Ondes acoustiques dans un guide partiellement enfoui</b>	<b>55</b>
<b>4 Analyse modale dans les guides acoustiques ouverts</b>	<b>61</b>
4.1 Le guide ouvert de la configuration réelle . . . . .	62
4.2 Le guide ouvert avec des PML infinies . . . . .	67
4.3 Le guide ouvert tronqué avec des PML finies . . . . .	79
4.4 Étude numérique . . . . .	89
<b>5 Problème direct dans les guides acoustiques partiellement enfouis</b>	<b>97</b>
5.1 Utilisation de la théorie de Kondratiev pour l'étude du guide ouvert rectiligne	99
5.2 Étude du problème direct dans la jonction . . . . .	110
5.3 Approximation de la solution à l'aide d'un opérateur DtN avec recouvrement	120
5.4 Mise en œuvre numérique des méthodes de résolution proposées . . . . .	130
<b>6 Problème inverse dans les guides acoustiques partiellement enfouis</b>	<b>137</b>
6.1 Fonction de Green . . . . .	139
6.2 Adaptation de la LSM modale . . . . .	150
6.3 Expériences numériques . . . . .	154

<b>III Ondes élastiques dans un guide partiellement immergé</b>	<b>161</b>
<b>7 Analyse modale dans les guides élastiques immergés</b>	<b>167</b>
7.1 Analyse modale dans les guides élastiques fermés . . . . .	168
7.2 Analyse modale d'un guide élastique immergé dans un fluide infini . . . . .	178
7.3 Analyse modale d'un guide élastique immergé dans un fluide avec des PML .	200
7.4 Approximation numérique des modes . . . . .	229
7.5 Annexes . . . . .	258
<b>8 Problème direct dans les guides élastiques partiellement immergés</b>	<b>269</b>
8.1 Écriture du problème . . . . .	270
8.2 Troncature longitudinale du domaine à l'aide de PML . . . . .	272
8.3 Troncature longitudinale du domaine à l'aide d'opérateurs YtX . . . . .	282
8.4 Annexe . . . . .	298
<b>9 Problème inverse dans les guides élastiques partiellement immergés</b>	<b>305</b>
9.1 Tenseur de Green . . . . .	307
9.2 Linear Sampling Method modale . . . . .	322
9.3 Expériences numériques . . . . .	331
9.4 Annexes . . . . .	337
<b>Conclusion générale</b>	<b>345</b>
<b>Annexes</b>	<b>349</b>
A Analyse fonctionnelle	350
B Théorie spectrale	353
<b>Liste des notations</b>	<b>357</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>361</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>367</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>369</b>

# **Introduction générale**

## Contexte industriel et académique de la thèse

Les techniques de Contrôle Non Destructif (CND) ont pour objectif la recherche et la caractérisation de défauts dans des pièces ou infrastructures sans porter atteinte à leur intégrité. Ces techniques sont très importantes dans de nombreux secteurs industriels, car elles contribuent à garantir le bon fonctionnement des installations, mais aussi à prévenir les risques liés à de potentielles dégradations de ces infrastructures. Elles sont utilisées dans la plupart des secteurs industriels, dont on peut citer à titre d'exemple :

- L'industrie navale : pour le contrôle des coques de bateaux ou des arbres moteurs des hélices ;
- L'industrie aéronautique : pour le contrôle des fuselages et des ailes d'avions ;
- L'industrie ferroviaire : pour le contrôle des rails ;
- L'industrie de l'énergie : pour le contrôle des barrages, des éoliennes, des gazoducs/o-léoducs, des câbles haute-tension ou des installations nucléaires ;
- Le génie civil : pour l'inspection des ponts ou des tunnels.

Une grande partie de ces méthodes se veut non intrusive afin de limiter les coûts des arrêts et démontages des installations, mais aussi les risques d'endommagement des structures dans le second cas. Par exemple, on peut émettre des ondes élastiques à la surface de la structure inspectée et chercher à obtenir des informations sur son état à partir des mesures de la réponse de la structure à ces ondes. Lorsque l'épaisseur de la structure inspectée est grande vis-à-vis de la longueur d'onde, on parle d'inspection par ondes de volumes. Ce type d'inspection requiert un scan, se traduisant par un déplacement des capteurs et des récepteurs sur la surface de la zone inspectée pouvant être fastidieux, mais se fait généralement à haute fréquence permettant ainsi une imagerie avec une grande résolution spatiale [Mar+22; MRL21; Rav+; Rod+23]. Lorsque ce n'est pas le cas pour au moins une direction, les réflexions multiples des ondes sur le bord de la structure dans cette direction donnent naissance à des ondes guidées pouvant se propager sans atténuation sur de longues distances. De telles structures, appelées *guides d'ondes*, peuvent être par exemple des câbles, des tuyaux, des plaques ou même des coques. Il est alors possible de tirer parti de ces ondes guidées pour inspecter ces structures sur de longues distances sans avoir à déplacer les capteurs et émetteurs, mais aussi d'inspecter des zones inaccessibles [Dru+19; Rec+20; DC09; Dem+04; Lov12]. Ce type d'inspection est particulièrement intéressant lorsque les guides d'ondes sont partiellement enfouis ou immergés. Deux difficultés se présentent dans ce contexte : il n'est possible d'accéder qu'à un seul côté de la zone que l'on cherche à inspecter et les ondes qui se propagent dans la partie enfouie de la structure fuient partiellement dans le milieu environnant. Il résulte de ces deux difficultés une perte d'information à notre disposition pour reconstruire des défauts par rapport au cas des guides d'ondes à l'air libre.

Les contraintes industrielles de coût, de temps et de performances sont souvent très fortes. La simulation permet de répondre à ces contraintes en aidant au développement et à la qualification de nouvelles méthodes d'inspection à moindre coût et temps. Le CEA LIST a depuis plusieurs années contribué à des avancées dans ce domaine avec le développement du logiciel CIVA de simulation pour le CND. Il permet de simuler de façon efficace et précise la propagation des ondes dans de nombreuses configurations, puis d'utiliser des mesures de champs diffractés découlant de ces simulations pour tester différentes méthodes d'imagerie. Depuis une dizaine d'années, le CEA LIST collabore avec l'équipe POEMS (Propagation des Ondes Étude Mathématique et Simulation) d'ENSTA Paris pour développer des méthodes

numériques de simulation toujours plus performantes [Bar09; Tja19; Met21], et plus récemment pour travailler sur une méthode d'imagerie [Rec18]. Le présent travail de thèse s'inscrit dans le cadre de cette collaboration entre le CEA LIST et l'équipe POEMS. Il porte sur la propagation des ondes élastiques dans les guides d'ondes partiellement enfouis et a deux objectifs principaux. Le premier est de développer de nouveaux outils de simulation permettant de décrire de façon précise et efficace la propagation des ondes dans ces milieux complexes. Le second est de proposer une méthode d'imagerie permettant de reconstruire des défauts dans la partie enfouie de la structure à partir de mesures de champs diffractés obtenues au niveau de sa partie accessible à l'air libre.



FIGURE I0.1: Exemples d'essais de CND réalisés au CEA LIST.

## Guides d'ondes fermés et ouverts

Dans toute la suite du manuscrit, nous appellerons *guides d'ondes fermés* les guides ayant une section bornée dans la direction transverse. C'est par exemple le cas de structures élancées à l'air libre. Dans de très nombreuses applications, la différence de propriétés mécaniques entre les matériaux qui composent la structure et l'air environnant nous permet d'approcher ce dernier par du vide. Les ondes sont confinées dans la structure et l'énergie ne fuit pas dans le milieu environnant. La propagation des ondes dans les guides d'ondes fermés présente un certain nombre de spécificités. Pour commencer, il existe à une fréquence donnée un ensemble dénombrable de solutions particulières du problème homogène appelées modes guidés du problème. Ce sont des solutions à variables séparées, qui s'écrivent comme le produit d'une fonction transverse de la variable transverse et d'un propagateur exponentiel faisant intervenir le nombre d'onde du mode et dépendant de la variable longitudinale. Toujours à fréquence fixée, il existe un ensemble fini de modes propagatifs, c'est-à-dire qui se propagent sans atténuation selon l'axe du guide, et un ensemble infini de modes évanescents, c'est-à-dire de modes exponentiellement décroissants ou croissants selon l'axe du guide.



En acoustique, les modes sont solutions d'un problème aux valeurs propres associé à un opérateur, dit transverse, qui est autoadjoint et à résolvante compacte. Cet opérateur peut être étudié à l'aide de la théorie spectrale des opérateurs autoadjoints. On montre en particulier que le spectre est discret et que les fonctions transverses forment une base complète orthonormale de l'espace des fonctions de carré intégrable dans la section transverse du guide. Cette propriété nous permet de décomposer les solutions sur les modes, ce qui s'avère très utile pour étudier les problèmes direct et inverse. En élasticité, les modes satisfont un problème spectral qui n'est plus associé à un opérateur autoadjoint. Il est cependant possible de montrer le caractère dénombrable de l'ensemble des modes. Une conséquence parmi d'autres de cette perte du caractère autoadjoint est que nous ne savons plus justifier la décomposition des ondes élastiques sur les modes. L'analyse mathématique des problèmes direct et inverse s'en trouve plus difficile. La propagation des ondes dans les guides fermés a fait l'objet d'un grand nombre de travaux, permettant une bonne compréhension mathématique [BS94; BBL04; Bar+16] et physique [Mar51; Lam17] de ces phénomènes.

Par opposition aux guides fermés, nous appellerons *guides d'ondes ouverts* les guides ayant une section non bornée dans la direction transverse. C'est par exemple le cas des structures enfouies ou immergées en mécanique, mais aussi des guides optiques en nanophotonique. Dans ce cas, la structure est composée d'un *cœur*, de section bornée dans la direction transverse, qui guide les ondes dans la direction longitudinale tout en laissant une partie s'échapper dans le milieu environnant appelé *gaine*. Ainsi, une partie de l'énergie des ondes fuit dans le milieu environnant. La description des ondes dans les guides ouverts est plus complexe que dans les guides fermés. Il existe en général un ensemble fini de modes confinés dans le cœur, au sens où ils sont exponentiellement décroissants dans la gaine selon la direction transverse. Ces modes, appelés *modes guidés*, peuvent être propagatifs ou évanescents le long de l'axe du guide. Ils correspondent au spectre discret de l'opérateur transverse. Outre ces modes, il y a aussi des *modes de radiation* correspondant à un continuum de nombres d'onde longitudinaux. Ces modes traduisant la fuite de l'énergie dans le milieu environnant sont oscillants à l'infini dans la direction transverse et propagatifs ou évanescents dans la direction axiale. D'un point de vue spectral, ils correspondent au spectre essentiel de l'opérateur transverse. La présence de spectre essentiel rend plus difficile l'écriture de décompositions modales, il est en effet nécessaire de recourir à des outils avancés tels que la transformée de Fourier généralisée [Gou10]. Les guides ouverts ont fait l'objet de plusieurs travaux mathématiques, dont on peut citer [Gou10; DGH11] en acoustique, [NTH15] en élasticité, [Dah01] en interaction fluide-structure et [JP95] en électromagnétisme.

Pour simuler la propagation des ondes dans les guides ouverts perturbés, nous avons besoin de nous ramener à un domaine borné dans la direction transverse. Une méthode classique consiste à tronquer la gaine dans la direction transverse avec des Perfectly Matched Layers (PML) bornées, comme cela est fait dans [Gou10; NTH15; NT15; Gal18; Kau18]. Le domaine de calcul peut alors être vu comme un guide fermé. D'un point de vue spectral, l'introduction de PML infinies a pour effet de faire pivoter le spectre essentiel dans le plan complexe, tout en révélant un ensemble dénombrable d'objets initialement non spectraux, mais physiques, appelés résonances du problème. Ces objets permettent de rendre compte de la fuite des ondes se propageant dans le cœur vers le milieu environnant. Les PML sont ensuite tronquées, ce qui a pour conséquence de discrétiser le spectre essentiel auquel on a appliqué la rotation. D'une certaine façon, les PML ont un rôle atténuant pour les ondes qui fuient dans la gaine. Cette atténuation est obtenue en introduisant un coefficient complexe dans les équations du problème. Dans le cas acoustique, il découle de la présence de ce

coefficient complexe une perte du caractère autoadjoint de l'opérateur transverse, qui reste néanmoins à résolvante compacte. Nous retrouvons donc un spectre discret, associé à des fonctions transverses qui ne forment a priori plus une base complète de l'espace des fonctions de carré intégrable de la section. Elles satisfont cependant des relations de biorthogonalité permettant d'écrire des décompositions modales formelles. Bien que l'analyse mathématique des problèmes de diffraction d'ondes dans les guides tronqués transversalement par des PML n'ait pas encore été abordée, plusieurs études numériques ont déjà été conduites dans ce cas [[Gou10](#); [NTH15](#); [Gal18](#)] et ont montré la validité de telles décompositions modales.

## Problèmes direct et inverse

Il est possible de tirer parti des modes dans les guides d'ondes fermés pour développer des outils de simulation performants. En acoustique, on peut tronquer le domaine de calcul dans la direction longitudinale à l'aide d'opérateurs Dirichlet-to-Neumann (DtN), qu'il est possible d'exprimer sous forme de séries à l'aide des modes [[BS94](#)]. En élasticité, cette troncature a été effectuée dans [[BBL10](#)] en introduisant des opérateurs Y-to-X (YtX) et X-to-Y (XtY) définis à l'aide des modes dans de nouvelles variables. Ces variables, dites X et Y, panachent les composantes du champ de déplacement et de la contrainte axiale. Pour les guides ouverts acoustiques tronqués transversalement par des PML finies, une adaptation de l'opérateur DtN a été proposée dans [[Gou10](#)]. Il n'existe cependant pas encore d'analogue pour les guides ouverts élastiques.

La résolution du problème inverse, qui consiste à retrouver un défaut à partir de la mesure des champs diffractés, est particulièrement difficile dans les guides d'ondes. En effet, nous avons vu ci-dessus qu'il existe plusieurs modes à une fréquence donnée. De plus, les modes sont généralement dispersifs vis-à-vis de la fréquence. Par conséquent, l'interprétation des signaux issus de mesures de champs diffractés est délicate. Cependant, travailler à basse fréquence permet d'avoir peu de modes et donc d'identifier un mode particulier dans les signaux mesurés. Il est alors possible de localiser les défauts en mesurant le temps de vol, c'est-à-dire la durée séparant l'émission d'un paquet d'onde par un transducteur et la réception du paquet d'onde réfléchi par un défaut. Cette méthode très simple nécessite de connaître la vitesse de groupe de l'onde émise et ne permet pas de caractériser le défaut. Du point de vue des mathématiques, deux grandes classes de méthodes de contrôle plus précises existent : les méthodes itératives et les méthodes de type échantillonnage. Les méthodes itératives consistent à optimiser la forme des défauts recherchés par itérations successives. Ces méthodes, dont le principe général est détaillé dans [[CKK98](#), Chapitre 5 - section 4], permettent de caractériser de façon quantitative les défauts. Elles requièrent cependant la résolution du problème direct à chaque itération, ce qui se traduit en pratique par l'inversion d'un système linéaire de grande taille. De plus, elles supposent a priori connues les propriétés du défaut, par exemple le type de condition aux limites sur le bord du défaut si celui-ci est non pénétrable. Les méthodes d'échantillonnage permettent quant à elles de reconstruire la forme des défauts, on parle alors de méthodes qualitatives. Elles sont basées sur la résolution d'un système linéaire de petite taille en chacun des points d'une grille d'échantillonnage qui recouvre la zone inspectée. De plus, elles ne nécessitent pas de connaissance a priori sur la nature des défauts recherchés, ce qui est un atout en pratique. Elles ont cependant l'inconvénient de reposer sur un grand nombre de données. Une des méthodes d'échantillonnage les plus connues est la Linear Sampling Method (LSM) introduite par l'article fondateur [[CK96](#)] et dont la justification a été complétée par [[Are03](#)]. Cette méthode d'imagerie a par la suite été améliorée avec la méthode de factorisation [[Kir98](#)],

permettant une identification totalement justifiée des défauts. Divers exemples d'applications de la méthode de factorisation sont donnés dans [CC05]. Une dernière amélioration de la LSM a été proposée par [AH14] avec le développement de la Generalized Sampling Method (GLSM). Récemment, une nouvelle méthode d'échantillonnage appelée Direct Sampling Method (DSM) a été introduite par [IJZ12] et a fait l'objet d'un nombre important de travaux [Liu17; HK19; Men21]. Elle a l'avantage de ne pas nécessiter la résolution d'un système linéaire en chacun des points de la grille d'échantillonnage, mais a un cadre de validité restreint par rapport à la LSM et ses variantes.

En ce qui concerne plus particulièrement le contrôle des guides d'ondes enfouis, il a été abordé à notre connaissance pour la première fois dans [Pav98], au sujet des tendons en acier rigidifiant certains ponts en béton. La méthode développée reposait sur une mesure de temps de vol. Des travaux expérimentaux ont par la suite permis l'identification de défauts dans des tuyaux enfouis ou immergés [NK02; Ros+09; LLC15]. Plus récemment, une méthode de type gradient topologique a été proposée dans [Gal18] pour localiser et caractériser des défauts dans des guides élastiques partiellement enfouis. Dans le contexte de l'industrie nucléaire, il a été prouvé dans [Kau+19b] qu'il est possible d'inspecter une plaque élastique immergée séparée de la cuve du réacteur par une couche de liquide de refroidissement, à partir de l'émission et de la réception d'ondes au niveau de la paroi extérieure de la cuve.

## Objectifs et structure du manuscrit

L'objectif de ce travail de thèse est de tenter d'obtenir de nouveaux résultats d'imagerie pour des guides d'ondes élastiques partiellement enfouis en adaptant la LSM à ce contexte. Nous chercherons à localiser et à caractériser des défauts dans la partie inaccessible de la structure à partir de mesures de champs diffractés effectuées au niveau de la partie accessible de la structure. Pour atteindre cet objectif, nous allons passer par trois étapes, dont chacune correspondra à une partie du manuscrit. Chacune de ces étapes nous rapprochera progressivement, du point de vue de la modélisation, d'une configuration réaliste.

**Remarque I0.1 (Important)** *Les trois parties sont rédigées de sorte à pouvoir être lues de façon indépendante. Cependant, le lecteur désireux de comprendre les détails de ce travail ainsi que les références croisées entre les parties est encouragé à lire les trois parties successivement.*

Nous avons mentionné plus haut la troncature des guides ouverts dans la direction transverse par des PML finies. Un guide partiellement enfoui peut alors être traité comme la jonction de deux guides fermés, dont la propagation des ondes est dans l'un des guides régie par une équation impliquant des coefficients complexes liés à la présence des PML. Ce constat nous amène à commencer par traiter dans la **Partie I**, le cas plus simple de la jonction de deux guides acoustiques fermés. Pour ce cas simple, nous proposerons une démarche de résolution du problème inverse adaptée aux jonctions de guides d'ondes fermés. Elle reposera d'une part sur l'introduction des *champs de référence*, qui sont les réponses de la structure totale sans défaut à un mode provenant d'un des deux demi-guides, et d'autre part sur l'utilisation de la relation de réciprocité de la fonction de Green de la structure sans défaut. Dans ce cas simple, nous tirerons parti de la complétude des modes des deux demi-guides pour analyser les problèmes direct et inverse. Ce travail a fait l'objet de la publication [BFR21]. Dans la **Partie II**, nous traiterons le cas d'un guide d'onde acoustique partiellement enfoui. Cette modélisation revient à limiter l'étude aux ondes Shear Horizontal (SH). La perte de complétude des modes dans le demi-guide tronqué transversalement avec

des PML nous amènera à étudier le problème direct à l'aide de la théorie de Kondratiev. Cette étude a fait l'objet de l'article [Bou+23]. Les outils introduits dans la première partie seront ensuite adaptés pour résoudre le problème inverse. Cette adaptation de la méthode d'imagerie a été publiée dans [BFR22]. Avec la **Partie III** de ce manuscrit, nous aborderons le cas plus réaliste, mais plus complexe, d'un guide élastique partiellement immergé dans un fluide. La complexité viendra d'une part des difficultés liées au traitement des équations de l'élasticité mentionnées plus haut, mais aussi de la prise en compte du couplage avec le fluide. Cette dernière partie, qui est la plus longue de ce manuscrit, comportera donc moins de justifications mathématiques que les deux premières. Nous développerons des outils de simulation particulièrement adaptés à ce contexte difficile et étendrons les outils développés précédemment pour résoudre le problème inverse.

Les trois parties du manuscrit suivront un même découpage en trois chapitres. Un premier chapitre sera consacré à l'étude modale des demi-guides composant la jonction. Cette étude permettra de mieux comprendre les phénomènes de propagation d'ondes et sera essentielle en vue de résoudre les problèmes direct et inverse. Un second chapitre sera dédié à l'étude du problème direct et au développement d'outils de simulation numérique. Une troncature du domaine de calcul dans la direction longitudinale sera effectuée à l'aide d'opérateurs de type Dirichlet-to-Neumann et le problème sera discrétisé par éléments finis. Un troisième chapitre aura pour objectif de proposer une formulation modale de la LSM. La méthode d'imagerie sera testée à l'aide de données synthétisées en résolvant le problème direct.

**Remarque I0.2** *Tous les résultats numériques présentés dans ce manuscrit ont été obtenus avec la librairie XLiFE++ [Cha+22]. Cette librairie développée au sein de l'équipe POEMS en C++ permet de réaliser des calculs FEM-BEM (éléments finis, équations intégrales et les deux couplés).*



## **Première partie**

# **Ondes acoustiques dans une jonction de guides fermés**

Dans cette première partie du mémoire, nous allons nous intéresser au cas de la jonction de guides acoustiques *fermés*, c'est-à-dire dont la section transverse est bornée. L'étude de ce cas simple nous permettra de rappeler des notions et outils nécessaires à l'étude mathématique et à la simulation de la propagation d'ondes acoustiques dans les guides d'ondes, mais aussi de développer une méthodologie d'imagerie reposant sur une formulation modale de la Linear Sampling Method. Cette étude constitue la première étape vers le traitement du cas réaliste, mais beaucoup plus complexe, des guides d'ondes élastiques partiellement immergés. Les travaux qui sont développés ici reprennent en grande partie ceux présentés dans [BFR21].

Pour introduire cette partie, commençons par rappeler le modèle acoustique que nous allons utiliser. On considère un fluide parfait, c'est-à-dire non visqueux, compressible et homogène de densité  $\rho_f$  et de premier coefficient de Lamé  $\lambda_f$  (le second coefficient de Lamé  $\mu_f$  correspondant aux phénomènes de cisaillement est nul pour un fluide). Le son se propage dans ce milieu à la vitesse  $c_f := \sqrt{\lambda_f/\rho_f}$ . On suppose que ce fluide est situé entre deux plaques rigides parallèles, il occupe alors le domaine  $W := \mathbb{R} \times \Sigma$ , où  $\Sigma := (-h_0, h_0)$  est appelé section du guide et  $h_0 > 0$  sa demi-épaisseur. Les coordonnées d'un point  $\mathbf{x}$  du domaine occupé par le fluide dans un système de coordonnées cartésiennes sont notées  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ , où  $x_1 \in \mathbb{R}$  sera appelée dans la suite du mémoire *variable axiale ou longitudinale*, et  $x_2 \in (-h_0, h_0)$  *variable transverse*. On note enfin le bord du guide  $\Gamma := \partial W$ .

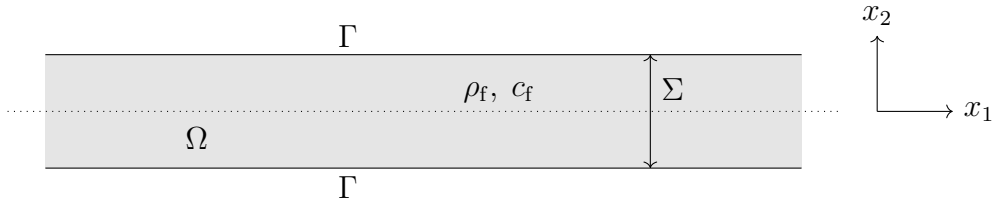


FIGURE I1.1: Géométrie d'un guide fermé 2D.

Une représentation de la géométrie 2D est proposée Figure I1.1. La propagation des ondes acoustiques peut être décrite par plusieurs quantités physiques telles que le champ de pression ou la vitesse du fluide. Nous faisons cependant le choix de faire cette description à l'aide du potentiel des vitesses  $\check{\varphi}$ , pour une raison qui sera expliquée dans la troisième partie de ce mémoire. Le potentiel est gouverné en régime temporel par l'équation des ondes :

$$\frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 \check{\varphi}}{\partial t^2} - \Delta \check{\varphi} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in W \times \mathbb{R}^+, \quad (\text{I1.1})$$

où  $\Delta := \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$  est l'opérateur Laplacien en coordonnées cartésiennes. On s'intéresse aux solutions harmoniques de l'équation des ondes, c'est-à-dire aux solutions s'écrivant sous la forme :

$$\check{\varphi}(\mathbf{x}, t) = \Re e(\varphi(\mathbf{x})e^{-i\omega t}), \quad (\text{I1.2})$$

pour une pulsation angulaire  $\omega$  réelle donnée. Injecter cette expression dans (I1.1) nous conduit à considérer l'équation de Helmholtz :

$$\Delta \varphi + k_f^2 \varphi = 0, \quad \mathbf{x} \in W, \quad (\text{I1.3})$$

où  $k_f := \omega/c_f$  est le nombre d'onde dans le fluide. Nous choisissons enfin d'imposer au niveau des deux plaques horizontales une condition de type Neumann homogène  $\partial_{x_2} \varphi = 0$  traduisant un bord rigide.

**Remarque I1.1** *Précisons à ce stade que le modèle acoustique retenu permet aussi de décrire la propagation d'ondes élastiques scalaires appelées ondes SH dans des plaques. Nous définirons rigoureusement ces ondes dans la troisième partie du manuscrit en partant des équations de l'élasticité.*

Maintenant que le modèle retenu pour décrire la propagation des ondes acoustiques est présenté, donnons le déroulé de cette partie. Le premier chapitre introduira, pour un guide fermé rectiligne, des solutions particulières de l'équation de Helmholtz homogène appelées modes. Ces solutions particulières seront d'une grande utilité pour comprendre comment se propagent les ondes dans des structures de type guides d'ondes, mais aussi pour développer des outils de simulation et proposer une méthode d'imagerie. Une fois cette analyse faite, un deuxième chapitre abordera l'étude des problèmes de diffraction dans des jonctions de deux guides fermés, aussi bien d'un point de vue théorique que numérique. Nous nous attacherons en particulier à montrer que les problèmes de diffraction considérés sont bien posés au sens d'Hadamard. Cette étude reposera en grande partie sur les modes des deux demi-guides introduits précédemment. Nous nous appuierons enfin sur ces deux premiers chapitres pour proposer dans un dernier chapitre une formulation modale de la Linear Sampling Method qui sera testée avec des données synthétisées numériquement.





# Chapitre 1

## Analyse modale dans les guides acoustiques fermés

### Sommaire

---

1.1	Définition des modes . . . . .	13
1.2	Sur la racine carrée complexe . . . . .	15
1.3	Étude et classification des modes . . . . .	17
1.4	Sens de propagation des modes propagatifs . . . . .	18
1.5	Courbes de dispersion . . . . .	19

---

Comme leur nom l'indique, les guides d'ondes sont des structures qui peuvent guider, par le moyen de réflexions multiples sur le bord de la structure, des ondes sur de longues distances. Cette propagation sur de plus ou moins longues distances peut être étudiée et décrite à l'aide d'objets appelés modes du guide. Ce sont des solutions harmoniques et à variables séparées de l'équation aux dérivées partielles homogène régissant la propagation des ondes. La séparation des variables est motivée par l'invariance des constantes du milieu ( $\lambda_f, \rho_f$ ) dans la direction axiale du guide. Leur étude mathématique fait appel à des outils de théorie spectrale. Pour l'équation de Helmholtz à coefficients réels posée dans un guide fermé, nous pouvons conduire une étude très complète des modes existant à l'aide de la théorie spectrale des opérateurs autoadjoints. Cette étude mathématique est importante, car elle permet de justifier un certain nombre d'outils et de techniques nécessaires à l'analyse et à la simulation du problème direct, mais aussi à la résolution du problème inverse qui seront abordés dans les deux prochains chapitres. Bien que cette étude modale soit classique, nous allons en rappeler les principaux éléments afin de pouvoir discuter les difficultés supplémentaires que nous rencontrerons lorsque nous conduirons l'analyse modale des guides enfouis ou immergés.

### 1.1 Définition des modes

Commençons d'emblée cette section en donnant la définition des modes.

**Définition 1.1**

On appelle *mode*, une solution à variables séparées s'écrivant  $\varphi(x_1, x_2) = \psi(x_1)\varphi(x_2)$  du problème de Helmholtz homogène :

$$\begin{cases} -\Delta\varphi - k_f^2\varphi = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_{x_2}\varphi = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (1.1)$$

On peut montrer facilement en injectant l'expression à variables séparées dans (1.1), qu'il existe un nombre complexe  $\lambda$  appelé nombre d'onde longitudinal ou axial tel que  $\psi(x_1) = e^{i\lambda x_1}$ , et une fonction non nulle  $\varphi$  appelée fonction transverse satisfaisant le problème :

$$\begin{cases} -d_{x_2}^2\varphi - k_f^2\varphi = \lambda^2\varphi & \text{dans } \Sigma \\ d_{x_2}\varphi = 0 & \text{sur } \partial\Sigma. \end{cases}$$

**Remarque 1.2** Dans la littérature relative aux ondes guidées, le nombre d'onde longitudinal d'un mode correspond généralement au nombre complexe  $\lambda$  satisfaisant  $\psi(x_1) = e^{i\lambda x_1}$ . Dans ce travail, nous faisons néanmoins le choix de définir le nombre d'onde longitudinal  $\lambda$  à un facteur  $i$  près pour des raisons qui apparaîtront dans la **Partie II**.

Dans le cas d'un guide à coefficients constants, on peut voir par le calcul qu'il existe un ensemble dénombrable de modes, dont les nombres d'onde longitudinaux et les fonctions transverses sont donnés explicitement par :

$$\lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{2h_0}\right)^2 - k_f^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1.2)$$

et :

$$\varphi_0(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2h_0}}, \quad \varphi_n(x_2) = \frac{1}{\sqrt{h_0}} \cos\left(\frac{n\pi}{2h_0}(x_2 + h_0)\right), \quad n \geq 1.$$

Pour étudier rigoureusement ce problème aux valeurs propres, on introduit l'opérateur  $L$  de  $L^2(\Sigma)$  défini par :

$$L\varphi := -d_{x_2}^2\varphi - k_f^2\varphi,$$

pour  $\varphi \in D(L) = \{\psi \in H^2(\Sigma) \mid d_{x_2}\psi = 0 \text{ sur } \partial\Sigma\}$ . On a le résultat très classique suivant.

**Lemme 1.3**

L'opérateur  $L$  est autoadjoint à résolvante compacte.

Le théorème spectral pour les opérateurs autoadjoints à résolvante compacte (voir le Théorème B.4) nous permet alors d'énoncer le résultat suivant.

**Théorème 1.4**

Le spectre de  $L$  est discret, constitué d'une suite de valeurs propres  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  réelles, supérieures à  $-k_f^2$  et qui tend vers  $+\infty$ . Les valeurs propres sont simples, et il existe une famille de fonctions propres notée  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  formant une base orthonormale complète de  $L^2(\Sigma)$ .

Puisque les fonctions propres forment une famille orthonormale de  $L^2(\Sigma)$ , elles satisfont la relation d'orthogonalité :  $(\varphi_n, \varphi_m)_{L^2(\Sigma)} = \delta_{nm}$  pour  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ . On déduit de cette analyse qu'il existe une famille dénombrable de modes, dont les nombres d'ondes longitudinaux  $\lambda$

sont reliés aux valeurs propres de  $L$  par la relation  $\lambda^2 = \xi$ . À ce stade, il est nécessaire de s'arrêter sur la définition de la fonction racine carrée que nous allons utiliser pour donner une expression de  $\lambda$  en fonction de  $\xi$ . En effet, comme  $\xi_0 = -k_f^2 < 0$ , il existe donc deux nombres complexes  $\pm ik_f$  dont le carré est égal à  $\xi_0$ . La fonction racine carrée usuelle n'est donc pas adaptée : d'une part, car elle n'est pas définie sur  $\mathbb{R}^-$ , d'autre part, car comme toutes les fonctions elle associe à chaque élément de son ensemble de départ un unique élément dans son ensemble d'arrivée. Nous allons voir que le premier point peut être résolu en choisissant ce qui est appelé en analyse complexe une *détermination de la racine carrée* adaptée, et que le second point peut être levé avec la notion de *fonction multivaluée*.

## 1.2 Sur la racine carrée complexe

Il est possible de définir une infinité de représentations de la racine carrée, appelées aussi déterminations de la racine carrée, en introduisant la notion de *coupure*.

### Définition 1.5

Soit  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ , on définit la fonction  ${}^{\alpha\mathbb{R}^+}\sqrt{\cdot}$  pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus (\alpha\mathbb{R}^+)$  par :

$${}^{\alpha\mathbb{R}^+}\sqrt{z} := \sqrt{|z|} e^{i \arg_{\alpha\mathbb{R}^+}(z)/2}, \quad \theta - 2\pi < \arg_{\alpha\mathbb{R}^+}(z) < \theta,$$

où  $\theta$  est l'argument du nombre complexe  $\alpha$  dans  $]0, 2\pi]$  et  $\sqrt{\cdot}$  représentera la racine carrée réelle.

La fonction  ${}^{\alpha\mathbb{R}^+}\sqrt{\cdot}$  est définie et holomorphe dans le plan complexe privé de la demi-droite  $\alpha\mathbb{R}^+$  appelée *coupure*, où elle n'est en particulier pas continue. En se donnant deux suites  $(z_n^1)_{n \geq 1}$  et  $(z_n^2)_{n \geq 1}$  de points symétriques par rapport à la coupure et convergeant vers le même point  $z$  sur la coupure, on remarque que les deux suites images par la fonction  ${}^{\alpha\mathbb{R}^+}\sqrt{\cdot}$  ont des limites distinctes. Pour s'en convaincre, on peut prendre par exemple pour coupure  $-\mathbb{R}^+$ . Considérons  $z \in \mathbb{R}^- \setminus \{0\}$  et les suites définies pour  $n > 0$  par  $z_n^1 := z - \frac{i}{n}$  et  $z_n^2 := z + \frac{i}{n}$ . On a alors dans ce cas  $\lim_{n \rightarrow \infty} {}^{-\mathbb{R}^+}\sqrt{z_n^1} = -i\sqrt{|z|}$  qui est différent de  $\lim_{n \rightarrow \infty} {}^{-\mathbb{R}^+}\sqrt{z_n^2} = i\sqrt{|z|}$ . Il est néanmoins important de souligner que ces difficultés sont purement techniques. Il est en effet possible de construire une fonction multivaluée, dont le graphe est une variété complexe de dimension un ne présentant plus de coupure, qu'on appelle *surface de Riemann*. Même si la définition théorique de cet ensemble dépasse le cadre de ce travail (voir par exemple [Weg12] pour cela), nous nous proposons de le construire à la main pour en transmettre l'intuition.

### Construction de la surface de Riemann de la racine carrée

Pour fixer les idées, prenons  $\alpha = -1$ , c'est-à-dire  $\mathbb{R}^- \setminus \{0\}$  pour coupure. Notons  $f_1$  la fonction  ${}^{-\mathbb{R}^+}\sqrt{\cdot}$  définie ci-dessus, et  $f_2$  son pendant en choisissant cette fois  $\theta < \arg_{-\mathbb{R}^+}(z) < \theta + 2\pi$ . Les domaines de départ et d'arrivée des deux fonctions sont représentés sur la Figure 1.1. Pour construire la surface de Riemann, on "colle" les demi-droites  $L_1^+$  et  $L_2^-$  ainsi que les demi-droites  $L_2^+$  et  $L_1^-$ . On a ainsi défini une superposition de deux plans complexes, appelés *feuilles de Riemann*, qui ne présente plus de coupure, et sur laquelle on a défini une fonction racine carrée continue, et même partout holomorphe sauf en 0. Cette surface est représentée sur la Figure 1.2. En réalité, nous avons réalisé un prolongement holomorphe des fonctions  $f_1$  et  $f_2$  au travers de la coupure. Nous reviendrons dans la seconde partie du

mémoire sur ce type de construction.

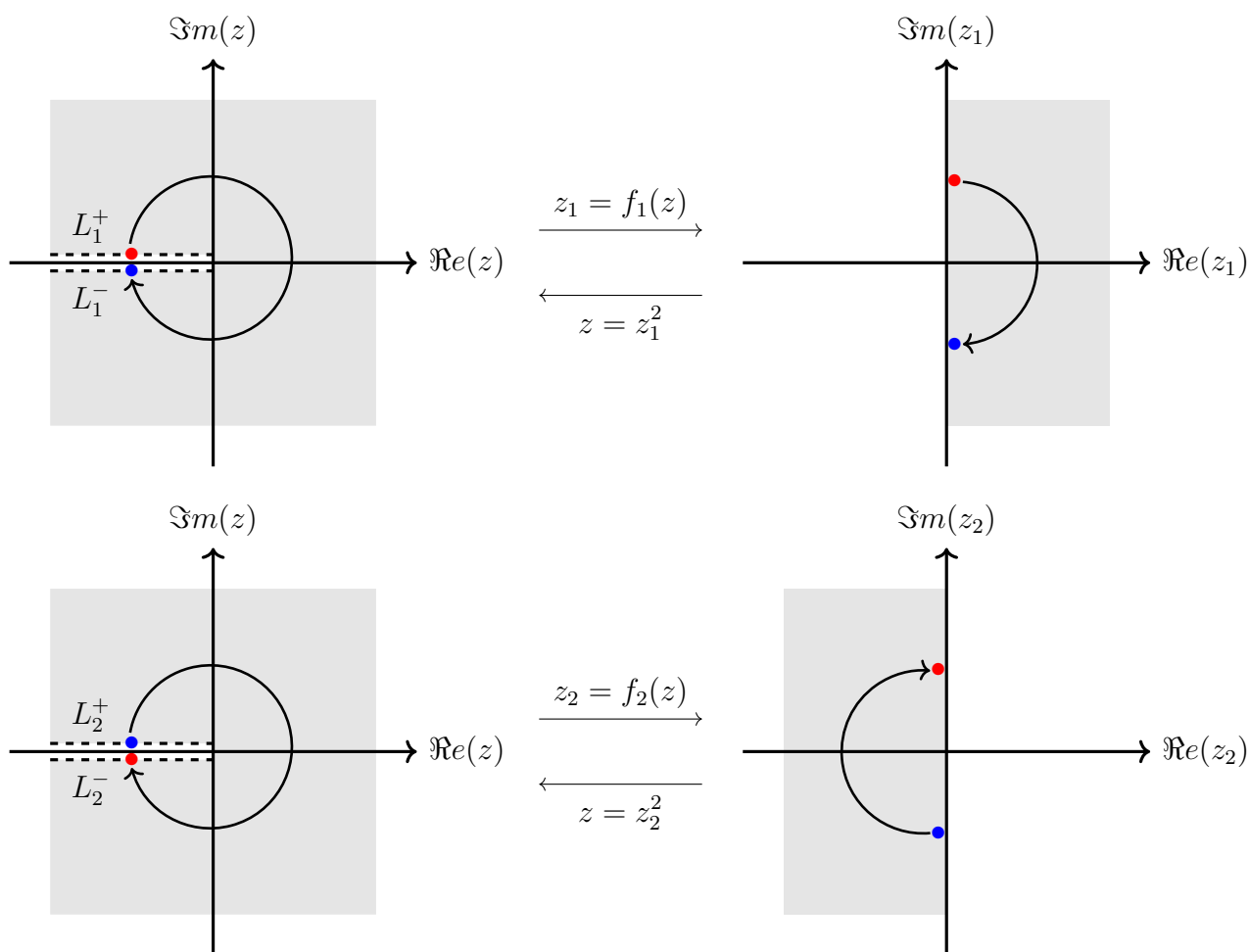


FIGURE 1.1: Deux feuillets de la surface de Riemann de la racine carrée.

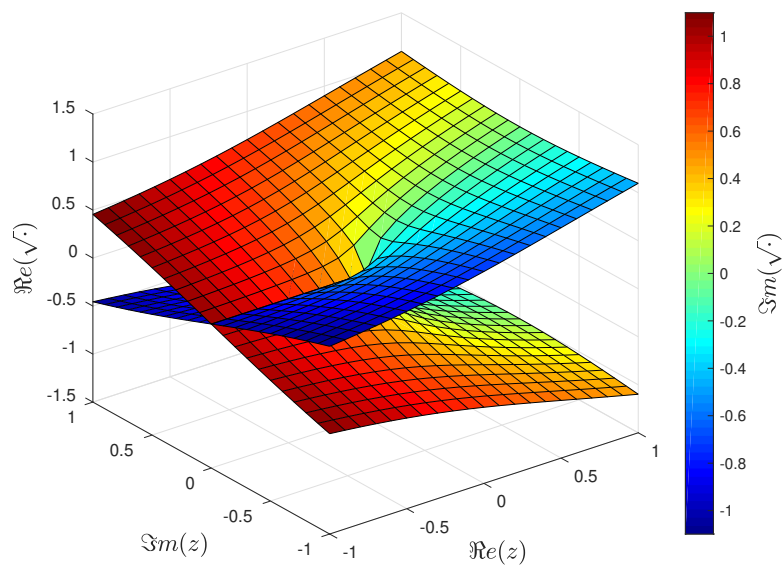


FIGURE 1.2: Représentation d'une surface de Riemann pour la racine carrée.

## 1.3 Étude et classification des modes

Puisque la racine carrée est une fonction bivaluée, l'équation  $\lambda^2 = \xi$  a deux solutions, une sur chacun des deux feuillet de la surface de Riemann introduite ci-dessus, et qui correspondent à deux modes différents. Faisons désormais l'hypothèse suivante sur  $k_f$ .

### Hypothèse 1.6

Le nombre  $k_f$  est tel que  $k_f \neq \frac{n\pi}{2h_0}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . On dit alors que la fréquence angulaire associée  $\omega$  n'est pas une *fréquence de coupure*.

Sous cette hypothèse,  $\xi_n \neq 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Notons alors  $N_p \in \mathbb{N}^*$  le nombre de valeurs  $\xi_n$  strictement négatives. L'équation  $\lambda^2 = \xi_n$  a deux solutions  $\pm\lambda_n$  où :

$$\lambda_n := -i\mathbb{R}^+ \sqrt{\xi_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.3)$$

Commentons cette expression. Premièrement, le choix de la détermination d'une coupure sur l'axe  $i\mathbb{R}^+$  permet de traiter toutes les valeurs propres de  $L$  simultanément. Précisons cependant que nous aurions très bien pu aussi prendre une coupure sur l'axe  $-i\mathbb{R}^+$  ou toute autre coupure différente de  $\pm\mathbb{R}^+$ . Deuxièmement, chaque valeur propre  $\xi_n$  de  $L$  permet de définir deux modes  $\varphi_{n,\pm}(x_1, x_2) := \varphi_n(x_2)e^{\pm\lambda_n x_1}$ . Avec la détermination choisie pour la racine carrée, nous avons  $\Im m(\lambda_n) \geq 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . On a donc  $\lambda_n \in i\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  pour  $0 \leq n < N_p$ , et alors le mode  $\varphi_{n,+}$ , respectivement  $\varphi_{n,-}$ , se propage sans atténuation vers la droite, respectivement vers la gauche. On dit que ces modes sont *propagatifs*. Pour  $n \geq N_p$ , on a en revanche  $\lambda_n \in \mathbb{R}^-$ , et le mode  $\varphi_{n,+}$ , respectivement  $\varphi_{n,-}$ , est alors exponentiellement décroissant vers la droite, respectivement vers la gauche. Ces modes sont dits *évanescents*. Un exemple de spectre est représenté Figure 1.3.

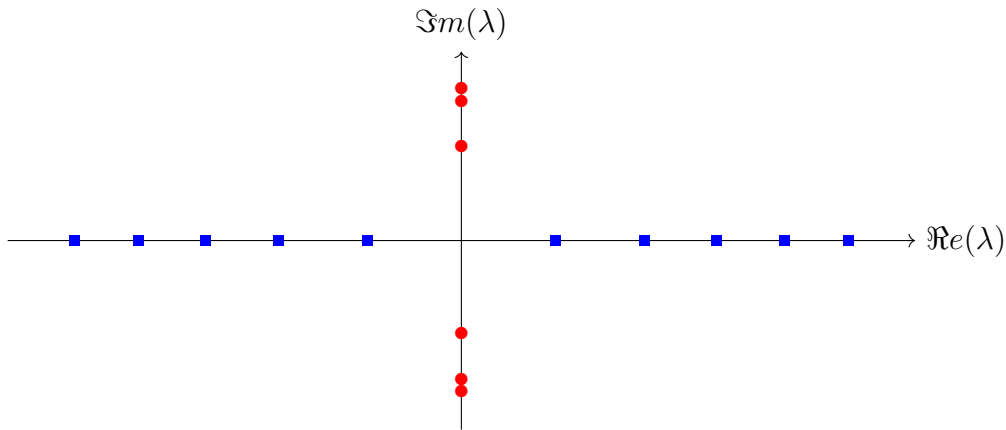


FIGURE 1.3: Exemple de représentation des nombres d'onde longitudinaux  $\pm\lambda_n$  dans le plan complexe. Ronds rouges : modes propagatifs, carrés bleus : modes évanescent.

**Remarque 1.7** Le sens de propagation des modes propagatifs est donné pour la convention de dépendance harmonique en temps choisie en (I1.2). En effet, pour  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $\Im m(\lambda) > 0$ , une onde proportionnelle à  $e^{-\lambda x_1 - i\omega t}$  (respectivement  $e^{\lambda x_1 - i\omega t}$ ) correspond sous cette convention à une onde progressive se déplaçant vers la gauche (respectivement vers la droite).

## 1.4 Sens de propagation des modes propagatifs

Nous venons d'expliquer que le caractère propagatif des modes et leur direction de propagation, le cas échéant, étaient déterminés par les parties réelles et imaginaires de leur nombre d'onde longitudinal. Dans ce cas simple, cette discussion est physiquement suffisante. Dans des cas plus complexes comme celui de l'élasticité que nous traiterons dans la **Partie III** de ce mémoire, cette analyse n'est en revanche plus suffisante. Afin de déterminer rigoureusement le sens de propagation physique d'une onde, et en particulier d'un mode, nous définissons trois quantités bien connues en physique ondulatoire : la *vitesse de phase*, la *vitesse de groupe* et la *vitesse d'énergie*.

### Vitesse de phase

La vitesse de phase définie par  $v^p := \omega / \Im m(\lambda)$  donne la vitesse d'une onde monochromatique de nombre d'onde  $\lambda$  et de pulsation angulaire  $\omega$ . Pour un mode propagatif, sa vitesse de phase est donnée par :

$$v_{n,\pm}^p = \frac{\omega}{\Im m(\pm\lambda_n)} = \pm \frac{\omega}{-i\mathbb{R}^+ \sqrt{k_f^2 - \left(\frac{n\pi}{2h_0}\right)^2}}.$$

### Vitesse de groupe

La vitesse de groupe définie par  $v^g := \partial\omega / \partial \Im m(\lambda)$  donne la vitesse d'un paquet d'onde composé d'ondes monochromatiques ayant un nombre d'onde proche de  $\lambda$  et dans une plage de fréquences proches de  $\omega$ . Pour un mode propagatif, on obtient sa vitesse de groupe en différenciant (1.2) par rapport à  $\omega$  :

$$v_{n,\pm}^g = \frac{\partial\omega}{\partial \Im m(\pm\lambda_n)} = \frac{c_f^2}{v_{n,\pm}^p}.$$

Avec ces deux définitions, on voit pour  $0 \leq n < N_p$  que les vitesses de phase et de groupe sont positives (respectivement négatives) pour le mode  $\varphi_{n,+}$  (respectivement  $\varphi_{n,-}$ ). Ainsi, les modes propagatifs se propagent vers la gauche quand  $\Im m(\lambda) < 0$  et vers la droite quand  $\Im m(\lambda) > 0$ . Généralement, on s'intéresse davantage à la vitesse de groupe qu'à la vitesse de phase pour déterminer le sens de propagation d'une onde. En effet, on génère en pratique un paquet d'onde d'extension finie dans le domaine temporel, mais d'extension infinie dans le domaine fréquentiel.

### Vitesse d'énergie

La vitesse d'énergie correspond à la vitesse de propagation de l'énergie d'une onde. Elle peut donner une information complémentaire sur la propagation des ondes, et en particulier des modes. Pour la définir, on introduit d'abord le flux d'énergie rayonné par un mode à travers une section  $\Sigma_a = \{a\} \times \Sigma$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , du guide :

$$J_a := \frac{\rho_f \omega}{2} \Im m \left( \int_{\Sigma_a} \bar{\varphi} \partial_{x_1} \varphi dx_2 \right),$$

puis l'énergie acoustique moyenne dans la section :

$$\mathcal{E}_a := \frac{\rho_f c_f^2}{2} \int_{\Sigma_a} |\varphi|^2 dx_2.$$

Pour un mode propagatif, on peut montrer facilement que ces quantités ne dépendent pas de l'abscisse  $a$  de la section choisie. La vitesse d'énergie est donnée par  $v^e := J/\mathcal{E}$ . Pour un mode propagatif, elle admet pour expression :

$$v_{n,\pm}^e = \frac{c_f^2}{v_{n,\pm}^p} = v_{n,\pm}^g.$$

Autrement dit, dans un guide acoustique fermé homogène, l'énergie se propage à la même vitesse et dans la même direction que le paquet d'onde associé.

## 1.5 Courbes de dispersion

Du point de vue de l'ingénieur, il est très intéressant de connaître les courbes de dispersion, c'est-à-dire les courbes  $\omega \rightarrow v_{n,+}^p(\omega)$  et  $\omega \rightarrow v_{n,+}^g(\omega)$ . Elles permettent d'interpréter les signaux mesurés, mais aussi de choisir les plages de fréquences utilisées selon l'application visée. Les courbes de dispersion associées aux deuxième et troisième modes sont représentées sur la Figure 1.4. Celle du premier mode est une courbe constante satisfaisant  $v_{0,+}^p = v_{0,+}^g = c_f$ .

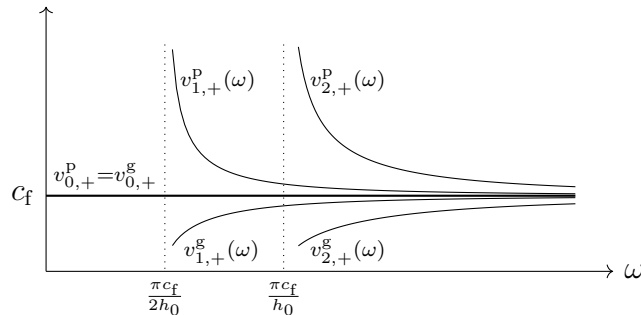


FIGURE 1.4: Représentation des courbes de dispersion pour les deuxième et troisième modes propagatifs.

Mentionnons aussi que le premier mode existe à toutes les fréquences avec des conditions de Neumann sur le bord. En revanche, on s'aperçoit sur la figure qu'un nouveau mode propagatif apparaît chaque fois que la fréquence dépasse une fréquence de coupure. En effet, pour un mode indexé par  $n$  fixé, dépasser la fréquence de coupure associée va le faire passer d'un mode évanescent à propagatif. Ce phénomène se comprend analytiquement avec le changement de signe de la valeur propre  $\xi_n$  associée. Ainsi, augmenter la fréquence va nous permettre d'augmenter le nombre de modes propagatifs qui peuvent exister dans la structure. Nous verrons dans le [chapitre 3](#) que cela permettra d'augmenter la quantité d'information à disposition pour imager en champ lointain. Les courbes de dispersion renseignent aussi sur le caractère dispersif des modes. On dit qu'un mode est *non dispersif* s'il existe une relation de dispersion linéaire reliant le nombre d'onde  $\lambda$  et la fréquence  $\omega$ . Il est *dispersif* dans le cas contraire. Dans notre cas, les modes sont dispersifs à basse fréquence, mais ils tendent vers un comportement non dispersif lorsque la fréquence augmente. Ce phénomène se traduit par la convergence haute fréquence des vitesses de groupe et de phase vers la vitesse constante  $c_f$ .





# Chapitre 2

## Problème direct dans les jonctions de guides acoustiques fermés

### Sommaire

---

2.1	Jonction de deux guides fermés . . . . .	21
2.2	Réponse de la structure sans défaut à un mode . . . . .	22
2.2.1	Prise en compte de la condition de radiation par un opérateur DtN .	23
2.2.2	Calcul à l'aide de la méthode de raccord modal . . . . .	26
2.2.3	Discrétisation des deux méthodes . . . . .	28
2.3	Réponse de la structure perturbée par un défaut à un mode . . . . .	34

---

La modélisation et la simulation numérique en acoustique, et en particulier dans les guides d'ondes fermés, fait encore l'objet d'un certain nombre de développements. La plupart d'entre eux reposent sur les modes, et visent à proposer des méthodes de calcul performantes et adaptées à des configurations toujours plus complexes. Par exemple, le cas des guides d'ondes à section variable a été abordé dans [MMP14; MMF14]; celui des guides avec des conditions d'impédance imposées sur un support compact dans [FMM15]; le cas des guides d'ondes périodiques avec [FJL21; FJ16]; et le cas des milieux anisotropes dans [Ton15]. On peut enfin citer [DL11] où une méthode originale est proposée pour pallier la perte du caractère creux des matrices éléments finis induite par un certain nombre de méthodes modales classiques. Le cas de la jonction de guides fermés a fait l'objet d'un nombre important de travaux dans la communauté de la modélisation pour l'électronique. En particulier, des techniques de raccordement modal appelées aussi mode-matching, ont été développées pour la nanophotonique ou l'électronique. Pour ces travaux, nous pouvons citer par exemple [Ele+94; Sud93; DG18; Mol+14]. Nous pouvons aussi citer [Til01] qui comporte une analyse mathématique rigoureuse de cette technique dans un contexte plus complexe de guide fermé débouchant sur un demi-espace. Dans ce chapitre, nous allons présenter simplement les éléments principaux de l'analyse des problèmes de diffraction dans les jonctions de deux guides fermés.

### 2.1 Jonction de deux guides fermés

On considère une jonction de deux demi-guides droits de même axe, de section  $\Sigma_- := (-h_-, h_-)$  pour le demi-guide gauche et  $\Sigma_+ := (-h_+, h_+)$  pour le demi-guide droit. Pour simplifier la présentation, nous ne considérons que le cas  $\Sigma_- \subset \Sigma_+$ , ce qui revient à supposer

que  $0 < h_- < h_+$ . Le demi-guide gauche, respectivement droit, est noté  $\Omega_- := (-\infty, 0) \times \Sigma_-$ , respectivement  $\Omega_+ := (0, +\infty) \times \Sigma_+$ . Les sections de contact sont notées  $\Sigma_{0\pm} := \{0\} \times \Sigma_{\pm}$  et la structure totale  $\Omega := \Omega_- \cup \Sigma_{0-} \cup \Omega_+$ . Le bord de la structure est enfin noté  $\Gamma := \partial\Omega$  et sa normale unitaire sortante  $\mathbf{n}$ . Le potentiel des vitesses dans la jonction  $\Omega$  est gouverné par l'équation de Helmholtz :

$$\Delta\varphi + \eta^2 k_f^2 \varphi = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

où  $\eta$  est un indice de réfraction constant par morceaux défini par :

$$\eta(x_1, x_2) := \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 < 0 \\ n_r & \text{si } x_1 > 0, \end{cases}$$

avec  $n_r > 0$ . Les nombres d'onde à gauche et à droite sont notés  $\kappa_- := k_f$  et  $\kappa_+ := n_r k_f$ . La structure considérée présente ainsi un changement abrupt de section en  $x_1 = 0$ , et de matériau lorsque  $n_r \neq 1$ . Le bord de la structure est supposé rigide, on y impose donc une condition de Neumann homogène. Une illustration d'une telle configuration est proposée Figure 2.1.

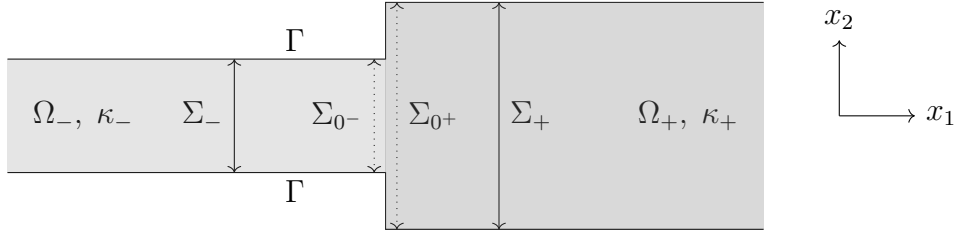


FIGURE 2.1: Exemple de jonction de deux guides fermés.

Les modes sont notés  $\tilde{\varphi}_{n,\pm}(x_1, x_2) = \tilde{\varphi}_n(x_2)e^{\pm\tilde{\lambda}_n x_1}$  à gauche et  $\varphi_{n,\pm}(x_1, x_2) = \varphi_n(x_2)e^{\pm\lambda_n x_1}$  à droite, pour  $n \in \mathbb{N}$ . Ils sont donnés par les solutions des problèmes aux valeurs propres :

$$\begin{cases} -d_{x_2}^2 \tilde{\varphi}_n - \kappa_-^2 \tilde{\varphi}_n = \tilde{\lambda}_n^2 \tilde{\varphi}_n & \text{dans } \Sigma_- \\ d_{x_2} \tilde{\varphi}_n = 0 & \text{sur } \partial\Sigma_-, \end{cases} \quad \begin{cases} -d_{x_2}^2 \varphi_n - \kappa_+^2 \varphi_n = \lambda_n^2 \varphi_n & \text{dans } \Sigma_+ \\ d_{x_2} \varphi_n = 0 & \text{sur } \partial\Sigma_+. \end{cases}$$

Le nombre de modes propagatifs à gauche (respectivement droite), est noté  $\tilde{N}_p$  (respectivement  $N_p$ ). Dans les sections suivantes, nous allons aborder dans un premier temps la diffraction d'un mode incident provenant de la gauche ou de la droite par la jonction sans défaut, puis dans un second temps par la structure avec un défaut.

## 2.2 Réponse de la structure sans défaut à un mode

On commence par définir la notion de *champ de référence* qui sera par la suite un outil important dans la méthode d'imagerie proposée. Pour cela, on introduit préalablement pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'extension à droite (respectivement à gauche) par 0 du mode  $\tilde{\varphi}_{n,+}$  (respectivement  $\varphi_{n,-}$ ). Ces extensions notées  $\varphi_{n,+}^0$  (respectivement  $\varphi_{n,-}^0$ ) s'écrivent donc :

$$\varphi_{n,+}^0(\mathbf{x}) := \begin{cases} \tilde{\varphi}_{n,+}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_- \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_+, \end{cases} \quad \text{et} \quad \varphi_{n,-}^0(\mathbf{x}) := \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_- \\ \varphi_{n,-}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_+. \end{cases} \quad (2.1)$$

**Définition 2.1**

On appelle *champ de référence gauche* (respectivement *droit*), la réponse en champ total de la structure sans défaut à un mode provenant du demi-guide gauche (respectivement droit). Plus précisément, pour  $n \in \mathbb{N}$ , le champ de référence gauche noté  $\varphi_{n,+}^r$  est solution du problème :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \varphi_{n,+}^r \in H_{\text{loc}}^1(\Omega) \text{ tel que} \\ & \begin{cases} \Delta \varphi_{n,+}^r + \eta^2 k_f^2 \varphi_{n,+}^r = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_{\mathbf{n}} \varphi_{n,+}^r = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \varphi_{n,+}^r - \varphi_{n,+}^0 & \text{est sortant,} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2)$$

et le champ de référence droit noté  $\varphi_{n,-}^r$  est solution du problème :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \varphi_{n,-}^r \in H_{\text{loc}}^1(\Omega) \text{ tel que} \\ & \begin{cases} \Delta \varphi_{n,-}^r + \eta^2 k_f^2 \varphi_{n,-}^r = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_{\mathbf{n}} \varphi_{n,-}^r = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \varphi_{n,-}^r - \varphi_{n,-}^0 & \text{est sortant.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3)$$

**Remarque 2.2** Dans cette définition, le champ  $\varphi_{n,\pm}^0$  joue le rôle de champ incident pour le champ total  $\varphi_{n,\pm}^r$  et  $\varphi_{n,\pm}^r - \varphi_{n,\pm}^0$  est alors un champ diffracté.

La condition d'onde sortante, aussi appelée *condition de radiation*, sélectionne la solution dont le champ diffracté se propage de la jonction vers l'infini. Dans l'espace libre, on peut utiliser la condition de radiation de Sommerfeld en 2D :

$$\sqrt{r}(\partial_r \varphi - ik_f \varphi) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0, \quad r := |\mathbf{x}|,$$

dont une revue est proposée dans [Sch92]. Cette condition n'est cependant pas adaptée aux guides d'ondes. La solution sortante peut être en revanche sélectionnée à l'aide du processus d'absorption limite justifié pour les guides d'ondes acoustiques fermés dans [SU19], qui équivaut à la condition modale suivante : il existe  $R > 0$  et des coefficients  $(a_n^\pm)_{n \in \mathbb{N}}$  complexes tels que :

$$\varphi(x_1, x_2) = \begin{cases} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^- \tilde{\varphi}_{n,-}(x_1, x_2), & x_1 \leq -R \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^+ \varphi_{n,+}(x_1, x_2), & x_1 \geq R. \end{cases} \quad (2.4)$$

Autrement dit, une onde est sortante si le champ acoustique peut se décomposer de part et d'autre de la jonction sur les modes qui se propagent ou décroissent vers l'infini. La question qui se pose alors est de savoir comment imposer en pratique cette condition de radiation modale.

### 2.2.1 Prise en compte de la condition de radiation par un opérateur DtN

Pour prendre en compte la condition de radiation (2.4), nous allons introduire des opérateurs *Dirichlet-to-Neumann* (DtN) que nous définissons pour un réel  $R > 0$  sur les sections  $\Sigma_{-R} := \{-R\} \times \Sigma_-$  et  $\Sigma_R := \{R\} \times \Sigma_+$ .

**Définition 2.3**

Soit  $R > 0$ , on appelle *opérateur DtN à gauche* l'opérateur  $T^- : H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}) \rightarrow \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R})$  défini pour  $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R})$  par :

$$T^- \varphi := \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\lambda}_n(\varphi, \tilde{\varphi}_n)_{L^2(\Sigma_{-R})} \tilde{\varphi}_n,$$

et *opérateur DtN à droite* l'opérateur  $T^+ : H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R) \rightarrow \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R)$  défini pour  $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)$  par :

$$T^+ \varphi := \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n(\varphi, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_R)} \varphi_n.$$

La condition de radiation (2.4) est alors équivalente à :

$$\partial_{x_1} \varphi = \begin{cases} -T^- \varphi & \text{sur } \Sigma_{-R} \\ T^+ \varphi & \text{sur } \Sigma_R. \end{cases} \quad (2.5)$$

Le passage de la condition de radiation (2.4) à (2.5) sera soigneusement justifié pour le cas moins classique développé dans la seconde partie du manuscrit. Mentionnons juste à ce stade que cette équivalence entre les deux conditions de radiation nécessite la complétude des modes. On est alors en mesure de montrer le résultat suivant.

**Lemme 2.4**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les problèmes (2.2) et (2.3) sont bien posés.

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ , nous n'allons montrer le résultat que pour (2.2), le second se traitant de façon analogue. On note pour commencer  $\Omega_{R,-} := (-R, 0) \times \Sigma_-$ ,  $\Omega_{R,+} := (0, R) \times \Sigma_+$ ,  $\Omega_R := \Omega_{R,-} \cup \Sigma_{0-} \cup \Omega_{R,+}$ , mais aussi  $\Gamma_R := \partial\Omega_R \setminus (\Sigma_{-R} \cup \Sigma_R)$ . À l'aide de la condition de radiation (2.5), on montre que (2.2) est équivalent au problème suivant posé dans un domaine borné :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \varphi_{n,+}^r \in H^1(\Omega_R) \text{ tel que} \\ & \begin{cases} \Delta \varphi_{n,+}^r + \eta^2 k_f^2 \varphi_{n,+}^r = 0 & \text{dans } \Omega_R \\ \partial_n \varphi_{n,+}^r = 0 & \text{sur } \Gamma_R \\ -\partial_{x_1} \varphi_{n,+}^r = T^- \varphi_{n,+}^r - 2\tilde{\lambda}_n \tilde{\varphi}_{n,+} & \text{sur } \Sigma_{-R} \\ \partial_{x_1} \varphi_{n,+}^r = T^+ \varphi_{n,+}^r & \text{sur } \Sigma_R. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Les deux dernières équations de (2.6) s'obtiennent en écrivant la décomposition modale (2.4) pour le champ diffracté  $\varphi_{n,+}^r - \varphi_{n,+}^0$ , en exprimant ensuite ses coefficients modaux  $(a_n^\pm)_{n \in \mathbb{N}}$  à l'aide de sa trace de Dirichlet sur les sections  $\Sigma_{-R}$  et  $\Sigma_R$  et en calculant enfin la dérivée partielle selon l'axe du guide de l'expression obtenue. On montre aisément que (2.6) admet la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \varphi_{n,+}^r \in H^1(\Omega_R) \text{ tel que} \\ & a_{\text{DtN}}(\varphi_{n,+}^r, \psi) = \ell(\psi), \quad \forall \psi \in H^1(\Omega_R), \end{aligned} \quad (2.7)$$

où :

$$a_{\text{DtN}}(\varphi, \psi) := \int_{\Omega_R} (\nabla \varphi \cdot \nabla \bar{\psi} - \eta^2 k_f^2 \varphi \bar{\psi}) d\mathbf{x} - \langle T^- \varphi, \bar{\psi} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R})} - \langle T^+ \varphi, \bar{\psi} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)}, \quad (2.8)$$

avec  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{\pm R}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{\pm R})}$  représentant le crochet de dualité entre les espaces  $\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{\pm R})$  et  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{\pm R})$ , et :

$$\ell(\psi) := -2\tilde{\lambda}_n \int_{\Sigma_{-R}} \tilde{\varphi}_{n,+} \bar{\psi} dx_2.$$

On remarque que la forme sesquilinéaire  $a_{\text{DtN}}$  se décompose en  $a_{\text{DtN}} = b + c$  où  $b$  et  $c$  sont définies par :

$$b(\varphi, \psi) := \int_{\Omega_R} (\nabla \varphi \cdot \nabla \bar{\psi} + \varphi \bar{\psi}) d\mathbf{x} - \langle T^- \varphi, \bar{\psi} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R})} - \langle T^+ \varphi, \bar{\psi} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)},$$

et :

$$c(\varphi, \psi) := - \int_{\Omega_R} (1 + \eta^2 k_f^2) \varphi \bar{\psi} d\mathbf{x},$$

de sorte que (2.7) est un problème de type Fredholm d'indice 0. En effet, on sait d'après l'expression (1.3) des nombres d'onde longitudinaux des modes que :

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_n &\in i\mathbb{R}^+, \quad 0 \leq n < \tilde{N}_p, & \tilde{\lambda}_n &\in \mathbb{R}^-, \quad n \geq \tilde{N}_p \\ \lambda_n &\in i\mathbb{R}^+, \quad 0 \leq n < N_p, & \lambda_n &\in \mathbb{R}^-, \quad n \geq N_p, \end{aligned}$$

et alors :

$$\begin{aligned} \Re(b(\varphi, \varphi)) &= \int_{\Omega_R} (|\nabla \varphi|^2 + |\varphi|^2) d\mathbf{x} - \sum_{n \geq \tilde{N}_p} \Re(\tilde{\lambda}_n) |(\varphi, \tilde{\varphi}_n)_{L^2(\Sigma_{-R})}|^2 - \sum_{n \geq N_p} \Re(\lambda_n) |(\varphi, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_R)}|^2 \\ &\geq \|\varphi\|_{H^1(\Omega_R)}^2, \end{aligned}$$

ce qui donne la coercivité de  $b$ . Quant à la forme sesquilinéaire  $c$ , elle est associée à un opérateur compact d'après le théorème de Rellich-Kondrachov. L'unicité de la solution implique alors son existence. Montrons maintenant l'unicité de la solution. Pour cela, donnons-nous deux solutions de (2.2) et notons  $w$  leur différence. Sa restriction à  $\Omega_-$  notée  $w^-$ , ainsi que sa restriction à  $\Omega_+$  notée  $w^+$ , satisfont un problème de Helmholtz homogène. Il est donc possible de les projeter sur les modes des demi-guides gauche et droit :

$$\begin{cases} w^-(\mathbf{x}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n \tilde{\varphi}_{n,-}(\mathbf{x}) + b_n \tilde{\varphi}_{n,+}(\mathbf{x})), & \mathbf{x} \in \Omega_- \\ w^+(\mathbf{x}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (c_n \varphi_{n,-}(\mathbf{x}) + d_n \varphi_{n,+}(\mathbf{x})), & \mathbf{x} \in \Omega_+. \end{cases}$$

Par linéarité de la condition de radiation,  $w^-$  et  $w^+$  sont aussi sortants et donc  $b_n = c_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ; ils s'expriment alors sous la forme :

$$w^-(x_1, x_2) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n e^{-\tilde{\lambda}_n x_1} \tilde{\varphi}_n(x_2) \quad \text{et} \quad w^+(\mathbf{x}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} d_n e^{\lambda_n x_1} \varphi_n(x_2). \quad (2.9)$$

Rappelons à ce stade qu'on a fait l'hypothèse simplificatrice, mais non limitante,  $\Sigma_- \subset \Sigma_+$ . En notant  $f := w|_{\Sigma_{0+}}^+ \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{0+})$ , on a  $d_n = (f, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_{0+})}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Ensuite, puisque  $w \in H_{\text{loc}}^1(\Omega)$ , sa trace est continue sur  $\Sigma_{0-} \subset \Sigma_{0+}$ , ce qui s'écrit  $w|_{\Sigma_{0-}}^- = f|_{\Sigma_{0-}}$ . Cela se traduit d'un point de vue modal par  $a_n = (f|_{\Sigma_{0-}}, \tilde{\varphi}_n)_{L^2(\Sigma_{0-})}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Parallèlement, comme  $\partial_{x_1} w^+ \in H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{0-})$  et s'annule sur  $\Sigma_{0+} \setminus \Sigma_{0-}$ , on a  $\partial_{x_1} w|_{\Sigma_{0+}}^+ \in \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{0+})$ . L'extension de  $\partial_{x_1} w|_{\Sigma_{0-}}^-$  à  $\Sigma_{0+}$  par 0, quant à

elle notée  $E(\partial_{x_1} w|_{\Sigma_{0-}^-})$ , est aussi dans  $\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{0+})$ . Puisque  $w$  satisfait l'équation de Helmholtz dans  $\Omega$ , sa trace de Neumann est continue, ce qui s'écrit :

$$E(\partial_{x_1} w|_{\Sigma_{0-}^-}) = \partial_{x_1} w|_{\Sigma_{0+}^+} \quad \text{sur } \Sigma_{0+}.$$

Il en découle que :

$$\begin{aligned} \left\langle \partial_{x_1} w|_{\Sigma_{0+}^+}, \bar{f} \right\rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{0+}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{0+})} &= \left\langle E(\partial_{x_1} w|_{\Sigma_{0-}^-}), \bar{f} \right\rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{0+}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{0+})} \\ &= \left\langle \partial_{x_1} w|_{\Sigma_{0-}^-}, \bar{f}|_{\Sigma_{0-}^-} \right\rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{0-}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{0-})}. \end{aligned}$$

À l'aide de (2.9), on peut réécrire cette égalité sous la forme modale suivante :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (-\tilde{\lambda}_n) a_n (\tilde{\varphi}_n, f|_{\Sigma_{0-}^-})_{L^2(\Sigma_{0-})} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n d_n (\varphi_n, f)_{L^2(\Sigma_{0+})},$$

puis enfin :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\lambda}_n |(\tilde{\varphi}_n, f|_{\Sigma_{0-}^-})_{L^2(\Sigma_{0-})}|^2 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n |(\varphi_n, f)_{L^2(\Sigma_{0+})}|^2 = 0. \quad (2.10)$$

Rappelons que  $\tilde{\lambda}_n \in i\mathbb{R}^+$  pour  $0 \leq n < \tilde{N}_p$  et  $\lambda_n \in i\mathbb{R}^+$  pour  $0 \leq n < N_p$ , mais aussi que  $\tilde{\lambda}_n \in \mathbb{R}^-$  pour  $n \geq \tilde{N}_p$  et  $\lambda_n \in \mathbb{R}^-$  pour  $n \geq N_p$ . En prenant successivement les parties réelles et imaginaires de (2.10) on obtient que  $a_n = (f|_{\Sigma_{0-}^-}, \tilde{\varphi}_n)_{L^2(\Sigma_{0-})} = 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  et  $d_n = (f, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_{0+})} = 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Autrement dit  $w = 0$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

En montrant le caractère bien posé des problèmes satisfaits par les champs de référence, on a introduit à l'aide des opérateurs DtN à gauche et à droite le problème (2.6) posé dans un domaine borné, problème que l'on peut résoudre de façon approchée par la méthode des éléments finis. Les questions relatives à cette discrétisation seront discutées plus loin.

## 2.2.2 Calcul à l'aide de la méthode de raccord modal

La technique de raccord modal, communément appelée *mode-matching*, est une technique qui tire parti du fait que l'on peut résoudre "explicitement" à l'aide des modes le problème de diffraction dans les deux demi-guides. Une fois cette résolution partielle obtenue, on raccorde les traces de Dirichlet puis de Neumann des deux solutions au niveau de la jonction pour obtenir un nouveau problème dont l'inconnue est la trace de Dirichlet de la solution sur la jonction. Une étude mathématique rigoureuse de cette méthode a été conduite dans [Til01] pour des problèmes de diffraction dans des jonctions de guides d'ondes, l'un des demi-guides pouvant être non borné et stratifié dans la direction transverse. Détaillons cette méthode pour notre configuration relativement plus simple. Au lieu de calculer les champs de référence  $\varphi_{n,+}^r$  (respectivement  $\varphi_{n,-}^r$ ) en résolvant une formulation variationnelle volumique dans  $H^1(\Omega_R)$ , on peut de façon alternative résoudre une formulation variationnelle surfacique dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{0+})$  dont les inconnues sont leur trace  $f_{n,+} := \varphi_{n,+}^r|_{\Sigma_{0+}}$  (respectivement  $f_{n,-} := \varphi_{n,-}^r|_{\Sigma_{0+}}$ ).

**Proposition 2.5**

La fonction  $f_{n,+}$  est l'unique solution du problème :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } f_{n,+} \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{0+}) \text{ tel que} \\ &a_{\Sigma}(f_{n,+}, g) = \ell_n^+(g), \quad \forall g \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{0+}), \end{aligned} \quad (2.11)$$

et  $f_{n,-}$  est l'unique solution du problème :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } f_{n,-} \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{0+}) \text{ tel que} \\ &a_{\Sigma}(f_{n,-}, g) = \ell_n^-(g), \quad \forall g \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{0+}), \end{aligned} \quad (2.12)$$

où :

$$\begin{aligned} a_{\Sigma}(f, g) &:= \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\lambda}_n (f|_{\Sigma_{0-}}, \tilde{\Phi}_n)_{L^2(\Sigma_{0-})} \overline{(g|_{\Sigma_{0-}}, \tilde{\Phi}_n)_{L^2(\Sigma_{0-})}} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n (f, \Phi_n)_{L^2(\Sigma_{0+})} \overline{(g, \Phi_n)_{L^2(\Sigma_{0+})}}, \\ \ell_n^+(g) &:= 2\tilde{\lambda}_n \overline{(g|_{\Sigma_{0-}}, \tilde{\Phi}_n)_{L^2(\Sigma_{0-})}} \quad \text{et} \quad \ell_n^-(g) := 2\lambda_n \overline{(g, \Phi_n)_{L^2(\Sigma_{0+})}}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Montrons le résultat pour  $f_{n,+}$ . Puisque  $\varphi_{n,+}^r - \tilde{\varphi}_{n,+}$  est sortant, il existe deux suites complexes  $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$  et  $(b_m)_{m \in \mathbb{N}}$  telles que :

$$\varphi_{n,+}^r(\mathbf{x}) = \begin{cases} \tilde{\varphi}_{n,+}(\mathbf{x}) + \sum_{m \in \mathbb{N}} a_m \tilde{\varphi}_{m,-}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_- \\ \sum_{m \in \mathbb{N}} b_m \varphi_{m,+}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_+. \end{cases} \quad (2.13)$$

Nous allons désormais raccorder mode par mode les traces de Dirichlet et Neumann à gauche et à droite afin d'obtenir la formulation attendue. Par définition, nous avons  $f_{n,+} := \varphi_{n,+}^r|_{\Sigma_{0+}}$  et alors  $a_m = (f_{n,+}|_{\Sigma_{0-}}, \tilde{\Phi}_m)_{L^2(\Sigma_{0-})} - \delta_{nm}$  et  $b_m = (f_{n,+}, \Phi_m)_{L^2(\Sigma_{0+})}$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$ . Il vient par suite :

$$\begin{cases} \partial_{x_1} \varphi_{n,+}^r|_{\Sigma_{0-}} = 2\tilde{\lambda}_n \tilde{\Phi}_n - \sum_{m \in \mathbb{N}} \tilde{\lambda}_m (f_{n,+}|_{\Sigma_{0-}}, \tilde{\Phi}_m)_{L^2(\Sigma_{0-})} \tilde{\Phi}_m \\ \partial_{x_1} \varphi_{n,+}^r|_{\Sigma_{0+}} = \sum_{m \in \mathbb{N}} \lambda_m (f_{n,+}, \Phi_m)_{L^2(\Sigma_{0+})} \Phi_m. \end{cases}$$

Comme dans la preuve du Lemme 2.4, on raccorde les traces de Neumann en introduisant le prolongement par zéro au bord du demi-guide droit dans  $\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{0+})$  :

$$E(\partial_{x_1} \varphi_{n,+}^r|_{\Sigma_{0-}}) = \partial_{x_1} \varphi_{n,+}^r|_{\Sigma_{0+}},$$

ce qui implique qu'on a pour tout  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{0+})$  :

$$\langle E(\partial_{x_1} \varphi_{n,+}^r|_{\Sigma_{0-}}), \bar{g} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{0+}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{0+})} = \langle \partial_{x_1} \varphi_{n,+}^r|_{\Sigma_{0+}}, \bar{g} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{0+}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{0+})},$$

c'est-à-dire exactement la formulation variationnelle attendue. En ce qui concerne le caractère bien posé du problème, il est donné par le Lemme de Lax-Milgram. La seule difficulté est de montrer la coercivité de la forme sesquilinéaire  $a_{\Sigma}$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{0+})$ . Il suffit pour cela de remarquer que pour  $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{0+})$ , on a :

$$2|a_{\Sigma}(f, f)| \geq |\Re e(a_{\Sigma}(f, f))| + |\Im m(a_{\Sigma}(f, f))|.$$



Rappelons dans le demi-guide gauche que les modes propagatifs sont caractérisés par  $\tilde{\lambda}_n \in i\mathbb{R}^+$ ,  $0 \leq n < \tilde{N}_p$  et les modes évanescents par  $\tilde{\lambda}_n \in \mathbb{R}^-$ ,  $n \geq \tilde{N}_p$ ; il en est de même dans le demi-guide droit. Ainsi :

$$\begin{aligned} \Re e(a_\Sigma(f, f)) &= - \sum_{n=0}^{\tilde{N}_p-1} |\tilde{\lambda}_n| |(\tilde{\varphi}_n, f)_{L^2(\Sigma_{0-})}|^2 - \sum_{n=0}^{N_p-1} |\lambda_n| |(\varphi_n, f)_{L^2(\Sigma_{0+})}|^2, \\ \Im m(a_\Sigma(f, f)) &= \sum_{n \geq \tilde{N}_p} |\tilde{\lambda}_n| |(\tilde{\varphi}_n, f)_{L^2(\Sigma_{0-})}|^2 + \sum_{n \geq N_p} |\lambda_n| |(\varphi_n, f)_{L^2(\Sigma_{0+})}|^2, \end{aligned}$$

et par suite :

$$2|a_\Sigma(f, f)| \geq \sum_{n \geq 0} |\lambda_n| |(f, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_{0+})}|^2.$$

Or, il est possible grâce au Lemme A.5 de munir  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{0+})$  de la norme :

$$\|f\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{0+})}^2 := \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(1 + \left(\frac{n\pi}{2h_+}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} |(f, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_{0+})}|^2,$$

ce qui nous permet de déduire avec l'expression des nombres d'ondes longitudinaux donnée par (1.2), qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$|a_\Sigma(f, f)| \geq C \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{0+})}^2.$$

La forme sesquilinéaire  $a_\Sigma$  est alors coercive. □

### 2.2.3 Discrétisation des deux méthodes

Nous avons proposé ci-dessus deux méthodes variationnelles pour calculer les champs de référence : l'une consiste à résoudre un problème volumique posé dans un domaine borné tronqué à l'aide d'opérateurs DtN (problème (2.6) pour les champs de référence gauche), et l'autre consiste à résoudre un problème posé sur la jonction ((2.11) pour les champs de référence gauche). La discrétisation de ces deux problèmes comporte deux étapes. Il faut premièrement tronquer les séries modales, puis rechercher la solution dans un sous-espace de dimension finie : c'est l'approximation par éléments finis. On se propose maintenant d'étudier ces deux étapes pour chacune des méthodes.

#### Troncature des séries modales

- Problème volumique avec DtN

La troncature des sommes intervenant dans les opérateurs DtN a été étudiée dans [BL21]. Il y est montré qu'en tronquant les séries en prenant en compte au minimum tous les modes propagatifs, le problème tronqué reste bien posé et la solution de ce problème se rapproche de la solution du problème de départ en norme  $H^1$  exponentiellement vite, à un taux augmentant avec l'ordre de troncature. Cette estimation d'erreur est valable dans un sous-domaine strict du domaine de départ  $\Omega_R$ . Plus précisément, notons  $\mathcal{A}_{\text{DtN}} \in \mathcal{L}(H^1(\Omega_R))$  l'opérateur borné défini à l'aide du théorème de représentation de Riesz pour tout  $(\varphi, \psi) \in (H^1(\Omega_R))^2$  par :

$$(\mathcal{A}_{\text{DtN}}\varphi, \psi)_{H^1(\Omega_R)} := a_{\text{DtN}}(\varphi, \psi),$$

où la forme sesquilinéaire  $a_{\text{DtN}}$  est donnée par (2.8). Introduisons aussi pour  $(\widetilde{M}, M) \in \mathbb{N}^2$ , les opérateurs DtN tronqués  $T^{-, \widetilde{M}} : H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}) \rightarrow \widetilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R})$  défini pour  $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R})$  par :

$$T^{-, \widetilde{M}} \varphi := \sum_{n=0}^{\widetilde{M}-1} \widetilde{\lambda}_n(\varphi, \widetilde{\Phi}_n)_{L^2(\Sigma_{-R})} \widetilde{\Phi}_n,$$

et  $T^{+, M} : H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R) \rightarrow \widetilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R)$  défini pour  $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)$  par :

$$T^{+, M} \varphi := \sum_{n=0}^{M-1} \lambda_n(\varphi, \Phi_n)_{L^2(\Sigma_R)} \Phi_n.$$

Le problème tronqué s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \varphi_{\widetilde{M}, M}^r \in H^1(\Omega_R) \text{ tel que} \\ & a_{\text{DtN}}^{\widetilde{M}, M}(\varphi_{\widetilde{M}, M}^r, \psi) = \ell(\psi), \quad \forall \psi \in H^1(\Omega_R), \end{aligned} \quad (2.14)$$

où :

$$\begin{aligned} a_{\text{DtN}}^{\widetilde{M}, M}(\varphi, \psi) := & \int_{\Omega_R} (\nabla \varphi \cdot \nabla \bar{\psi} - \eta^2 k_f^2 \varphi \bar{\psi}) d\mathbf{x} - \left\langle T^{-, \widetilde{M}} \varphi, \bar{\psi} \right\rangle_{\widetilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R})} \\ & - \left\langle T^{+, M} \varphi, \bar{\psi} \right\rangle_{\widetilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)}, \end{aligned}$$

et  $\ell$  varie selon qu'on considère un champ de référence gauche ou droit. Comme pour le problème initial, nous définissons l'opérateur  $\mathcal{A}_{\text{DtN}}^{\widetilde{M}, M} \in \mathcal{L}(H^1(\Omega_R))$  donné pour tout  $(\varphi, \psi) \in (H^1(\Omega_R))^2$  par :

$$(\mathcal{A}_{\text{DtN}}^{\widetilde{M}, M} \varphi, \psi)_{H^1(\Omega_R)} := a_{\text{DtN}}^{\widetilde{M}, M}(\varphi, \psi).$$

On peut alors énoncer les deux résultats suivants qui découlent directement du travail effectué dans [Hsi+11 ; BL21]. Les estimations d'erreur se font pour  $0 < R_0 < R$  dans un sous-domaine  $\Omega_{R_0} := \{(x_1, x_2) \in \Omega_R \mid -R_0 < x_1 < R_0\}$  fixé de  $\Omega_R$ .

**Lemme 2.6** [BL21, Lemme 5.4]

Il existe une constante  $C(\Omega_{R_0}) > 0$  telle que :

$$\left\| \mathcal{A}_{\text{DtN}}^{\widetilde{M}, M} - \mathcal{A}_{\text{DtN}} \right\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_{R_0}))} \leq C(\Omega_{R_0}) \max(e^{-2|\widetilde{\lambda}_{\widetilde{M}}|(R-R_0)}, e^{-2|\lambda_M|(R-R_0)}).$$

Ce Lemme nous permet de montrer le théorème garantissant la validité de la troncature des DtN.

**Théorème 2.7** [BL21, Théorème 5.6]

Il existe  $\widetilde{M}_0 \geq \widetilde{N}_p$ ,  $M_0 \geq N_p$  et une constante  $C(\Omega_{R_0}) > 0$  tels que pour  $\widetilde{M} \geq \widetilde{M}_0$  et  $M \geq M_0$ , le problème tronqué (2.14) est bien posé. De plus, on a l'estimation d'erreur :

$$\left\| \varphi^r - \varphi_{\widetilde{M}, M}^r \right\|_{H^1(\Omega_{R_0})} \leq C(\Omega_{R_0}) \left\| \mathcal{A}_{\text{DtN}}^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_{R_0}))} \max(e^{-2|\widetilde{\lambda}_{\widetilde{M}}|(R-R_0)}, e^{-2|\lambda_M|(R-R_0)}).$$

Nous sommes donc en mesure de garantir la validité de la troncature des séries modales pour cette méthode.

- Problème surfacique de mode-matching

Tronquer les séries modales dans les formulations variationnelles (2.11) et (2.12) conduit à résoudre une nouvelle formulation dont la forme sesquilinéaire devient :

$$a_{\Sigma}^{\widetilde{M},M}(f, g) := \sum_{n=0}^{\widetilde{M}-1} \tilde{\lambda}_n(f, E(\tilde{\varphi}_n))_{L^2(\Sigma_{0+})} \overline{(g, E(\tilde{\varphi}_n))_{L^2(\Sigma_{0+})}} + \sum_{n=0}^{M-1} \lambda_n(f, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_{0+})} \overline{(g, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_{0+})}},$$

où  $E(\tilde{\varphi}_n)$  est le prolongement par 0 de la fonction  $\tilde{\varphi}_n$  à  $\Sigma_{0+}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Or celle-ci n'est plus coercive dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{0+})$ . En effet, pour  $f \in L^2(\Sigma_{0+})$  non nul et orthogonal dans  $L^2(\Sigma_{0+})$  aux familles  $(E(\tilde{\varphi}_n))_{0 \leq n < \widetilde{M}}$  et  $(\varphi_n)_{0 \leq n < M}$  nous avons  $a_{\Sigma}^{\widetilde{M},M}(f, f) = 0$ . Le problème n'est plus bien posé. De plus, nous ne savons pas dire si l'opérateur linéaire associé à cette forme sesquilinéaire converge en norme d'opérateur vers l'opérateur associé au problème de départ comme pour la formulation volumique avec les DtN tronqués.

Une fois que la première étape d'approximation est réalisée, il faut en conduire une deuxième qui consiste à rechercher une solution approchée du problème tronqué dans un sous-espace  $V_h$  de  $H^1(\Omega_R)$  (respectivement  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{0+})$ ) de dimension finie notée  $N_h$  pour le problème volumique (respectivement surfacique) tronqué. À l'issue de cette deuxième étape de discrétisation, nous sommes amenés à résoudre un système linéaire de taille  $N_h \times N_h$ .

### Approximation par éléments finis

- Problème volumique avec DtN

L'approximation par éléments finis de ce problème a été détaillée dans [Hsi+11] pour un problème de diffraction dans l'espace libre. Il y est en particulier montré que le problème discrétisé devient bien posé pour une discrétisation suffisamment fine. Notons quand même que les blocs issus de la discrétisation des DtN tronqués sont pleins puisque les DtN sont des opérateurs non locaux.

- Problème surfacique de mode-matching

Puisque le problème tronqué continu a un noyau, il n'est pas garanti que le problème approché par éléments finis n'en ait pas. On se propose donc de déterminer sous quelle condition sur  $N_h$  le problème discret n'en a pas. Soit  $V_h \subset H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{0+})$  un espace élément finis dont les fonctions de base  $(w_k)_{1 \leq k \leq N_h}$  sont réelles (des éléments finis de Lagrange par exemple). La matrice éléments finis associée à la forme sesquilinéaire tronquée  $a_{\Sigma}^{\widetilde{M},M}$  est notée  $\mathbb{A}^{\widetilde{M},M} \in \mathbb{R}^{N_h \times N_h}$  et a pour coefficients, pour  $1 \leq k, l \leq N_h$  :

$$\mathbb{A}_{kl}^{\widetilde{M},M} := \sum_{n=0}^{\widetilde{M}-1} \tilde{\lambda}_n(w_k, E(\tilde{\varphi}_n))_{L^2(\Sigma_{0+})} (w_l, E(\tilde{\varphi}_n))_{L^2(\Sigma_{0+})} + \sum_{n=0}^{M-1} \lambda_n(w_k, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_{0+})} (w_l, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_{0+})}.$$

Pour étudier l'inversibilité de la matrice  $\mathbb{A}^{\widetilde{M},M}$ , nous avons besoin d'introduire les matrices  $\widetilde{\mathbb{E}} \in \mathbb{R}^{\widetilde{M} \times N_h}$  et  $\mathbb{E} \in \mathbb{R}^{M \times N_h}$  données par :

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbb{E}}_{nk} &:= (w_k, E(\tilde{\varphi}_{n-1}))_{L^2(\Sigma_{0+})}, & 1 \leq k \leq N_h, 1 \leq n \leq \widetilde{M}, \\ \mathbb{E}_{nk} &:= (w_k, \varphi_{n-1})_{L^2(\Sigma_{0+})}, & 1 \leq k \leq N_h, 1 \leq n \leq M. \end{aligned}$$

**Hypothèse 2.8**

L'espace d'approximation  $V_h$  est choisi de sorte que pour  $\widetilde{M} + M > N_h$  suffisamment grand, la matrice par blocs  $\begin{pmatrix} \widetilde{\mathbb{E}} & \mathbb{E} \end{pmatrix}^t$  ait un noyau réduit au singleton nul.

On peut alors énoncer le résultat suivant.

**Lemme 2.9**

Sous l'Hypothèse 2.8, la matrice  $\mathbb{A}^{\widetilde{M}, M}$  est inversible.

*Démonstration.* Pour simplifier les notations,  $\mathbb{A}^{\widetilde{M}, M}$  sera notée  $\mathbb{A}$  dans la preuve. On commence par remarquer que la matrice  $\mathbb{A}$  admet la décomposition :

$$\mathbb{A} = \mathbb{B}^t \Lambda \mathbb{B},$$

où les matrices  $\mathbb{B} \in \mathbb{R}^{(\widetilde{M}+M) \times N_h}$  et  $\Lambda \in \mathbb{C}^{(\widetilde{M}+M) \times (\widetilde{M}+M)}$  sont définies par blocs :

$$\mathbb{B} := \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbb{E}} \\ \mathbb{E} \end{pmatrix}, \quad \Lambda := \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbb{D}} & 0 \\ 0 & \mathbb{D} \end{pmatrix},$$

avec  $\widetilde{\mathbb{D}} := \text{diag}(\widetilde{\lambda}_0, \dots, \widetilde{\lambda}_{\widetilde{M}-1}) \in \mathbb{C}^{\widetilde{M} \times \widetilde{M}}$  et  $\mathbb{D} := \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{M-1}) \in \mathbb{C}^{M \times M}$ . Puisque  $\mathbb{A}$  est carrée, il suffit pour montrer qu'elle est inversible que son noyau soit réduit à 0. Soit  $X \in \mathbb{C}^{N_h}$  tel que  $\mathbb{A}X = 0$ , on a :

$$0 = (\mathbb{A}X, X) = (\mathbb{D}\mathbb{E}X, \mathbb{E}X) + (\widetilde{\mathbb{D}}\widetilde{\mathbb{E}}X, \widetilde{\mathbb{E}}X) \quad (2.15)$$

Puisqu'on a fait préalablement l'Hypothèse 1.6, nous avons  $\widetilde{\lambda}_n, \lambda_n \in (\mathbb{R}^- \cup i\mathbb{R}^+) \setminus \{0\}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , ce qui nous permet d'obtenir  $\mathbb{E}X = 0$  et  $\widetilde{\mathbb{E}}X = 0$  en prenant successivement la partie réelle est la partie imaginaire de (2.15). Sous l'Hypothèse 2.8, cela implique que  $X = 0$  ce qui donne le résultat escompté.  $\square$

Cette condition d'inversibilité de la matrice discrète est numériquement difficile à respecter si on veut un calcul suffisamment précis avec beaucoup de points de discrétisation, car cela nécessite d'évaluer des intégrales fortement oscillantes. Pour s'assurer que le problème totalement discrétisé a une unique solution, il est possible de le régulariser en ajoutant par exemple une matrice de masse pondérée par un paramètre  $\varepsilon > 0$  petit. Soit  $\mathbb{M} \in \mathbb{C}^{N_h}$  la discrétisation d'un second membre pour le problème de mode-matching, le problème régularisé discret s'écrit :

$$\mathbb{A}^{\widetilde{M}, M} X + \varepsilon \mathbb{M} X = \mathbb{L},$$

où  $\mathbb{M} \in \mathbb{R}^{N_h \times N_h}$  est la matrice de masse usuelle. On se propose maintenant de conduire une étude paramétrique de l'inversibilité de la matrice du système en regardant le module de sa plus petite valeur propre. Pour avoir un système de taille fixe, nous fixons la discrétisation en espace, et nous faisons varier les ordres de troncature. On considère une jonction définie par  $h_- = 0,25$ ,  $h_+ = 0,5$ ,  $k_f = 20$ ,  $n_r = 1$ . Dans ce cas, il y a  $\widetilde{N}_p = 4$  modes propagatifs à gauche et  $N_p = 7$  à droite. On discrétise la formulation variationnelle à l'aide d'éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}^1$  qui sont conformes dans  $H^1(\Sigma_{0+})$ ,

et donc a fortiori dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{0+})$ . La matrice du problème discrétisé est calculée en utilisant des quadratures de Gauss-Lobatto d'ordre 21 sur chaque maille afin d'évaluer correctement les intégrales faisant intervenir des fonctions très oscillantes pour  $\widetilde{M}$  et  $M$  grands.

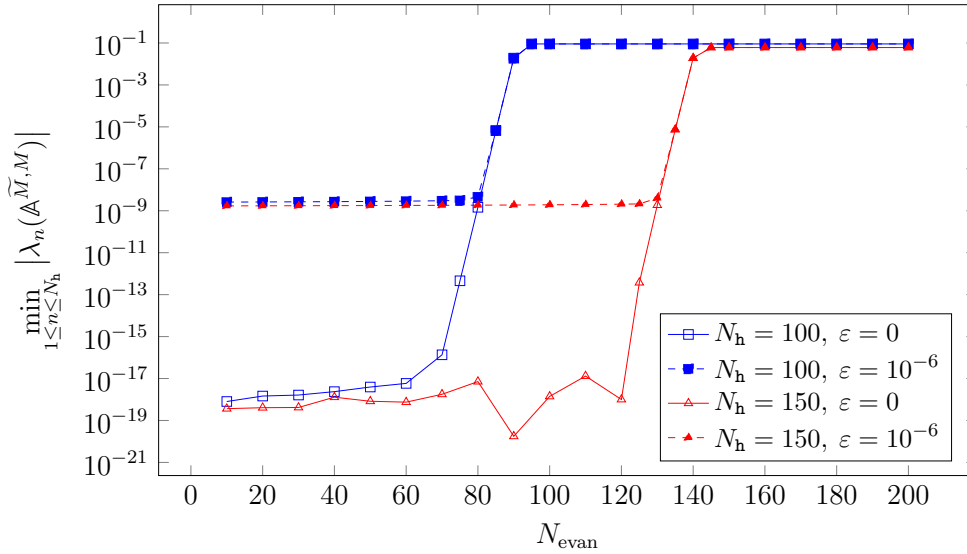


FIGURE 2.2: Plus petite valeur propre en module de la matrice discrétisée  $\mathbb{A}^{\widetilde{M}, M}$  avec  $\widetilde{M} = \widetilde{N}_p + N_{\text{evan}}$  et  $M = N_p + N_{\text{evan}}$ , pour différents nombres  $N_{\text{evan}}$  de modes évanescents pris en compte. Problème non régularisé :  $\varepsilon = 0$ , problème régularisé :  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

On peut observer Figure 2.2 que la matrice du système discrétisé devient inversible à partir d'un certain seuil correspondant à un très grand nombre de modes évanescents. De plus, ce seuil augmente lorsque la discrétisation de la jonction est plus précise. Cette observation numérique conforte l'Hypothèse 2.8.

Notons qu'on reconnaît aussi que la régularisation de Tikhonov agit comme un filtre passe-bas en augmentant sensiblement la plus petite valeur propre en module lorsqu'un même nombre de modes évanescents est pris en compte.

### Comparaison des deux méthodes

Pour comparer les résultats issus des deux méthodes, on considère à nouveau le calcul du champ de référence  $\varphi_{0,+}^r$  dans une jonction définie par  $h_- = 0,25$ ,  $h_+ = 0,5$ ,  $k_f = 20$  et  $n_r = 0,5$ . On approxime d'une part cette solution à l'aide d'opérateurs DtN tronqués à gauche et à droite utilisant 15 modes évanescents en plus des  $\widetilde{N}_p = N_p = 4$  modes propagatifs à gauche et à droite, sur un maillage de pas  $h = 10^{-2}$  avec  $R = 0,75$ , en utilisant des éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}^2$  bidimensionnels. Cette solution fait office de solution de référence. D'autre part, la solution est calculée à l'aide du mode-matching, avec un pas de discrétisation de  $h = 10^{-2}$  et des éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}^1$  unidimensionnels. Plusieurs solutions sont alors calculées : une solution du problème non régularisé avec  $N_{\text{evan}} = 80$ , et deux solutions du problème régularisé avec  $N_{\text{evan}} = 80$  et  $N_{\text{evan}} = 40$ . Lorsque le problème est régularisé, nous choisissons  $\varepsilon = 10^{-6}$ , mais nous ne savons pas justifier rigoureusement ce choix. Pour les solutions approchées obtenues par mode-matching, la solution est reconstituée dans le domaine volumique en propageant de façon semi-analytique les traces sur  $\Sigma_{0-}$  et  $\Sigma_{0+}$  mode par mode, ce qui revient par exemple à évaluer l'expression (2.13) pour les champs de référence gauches.

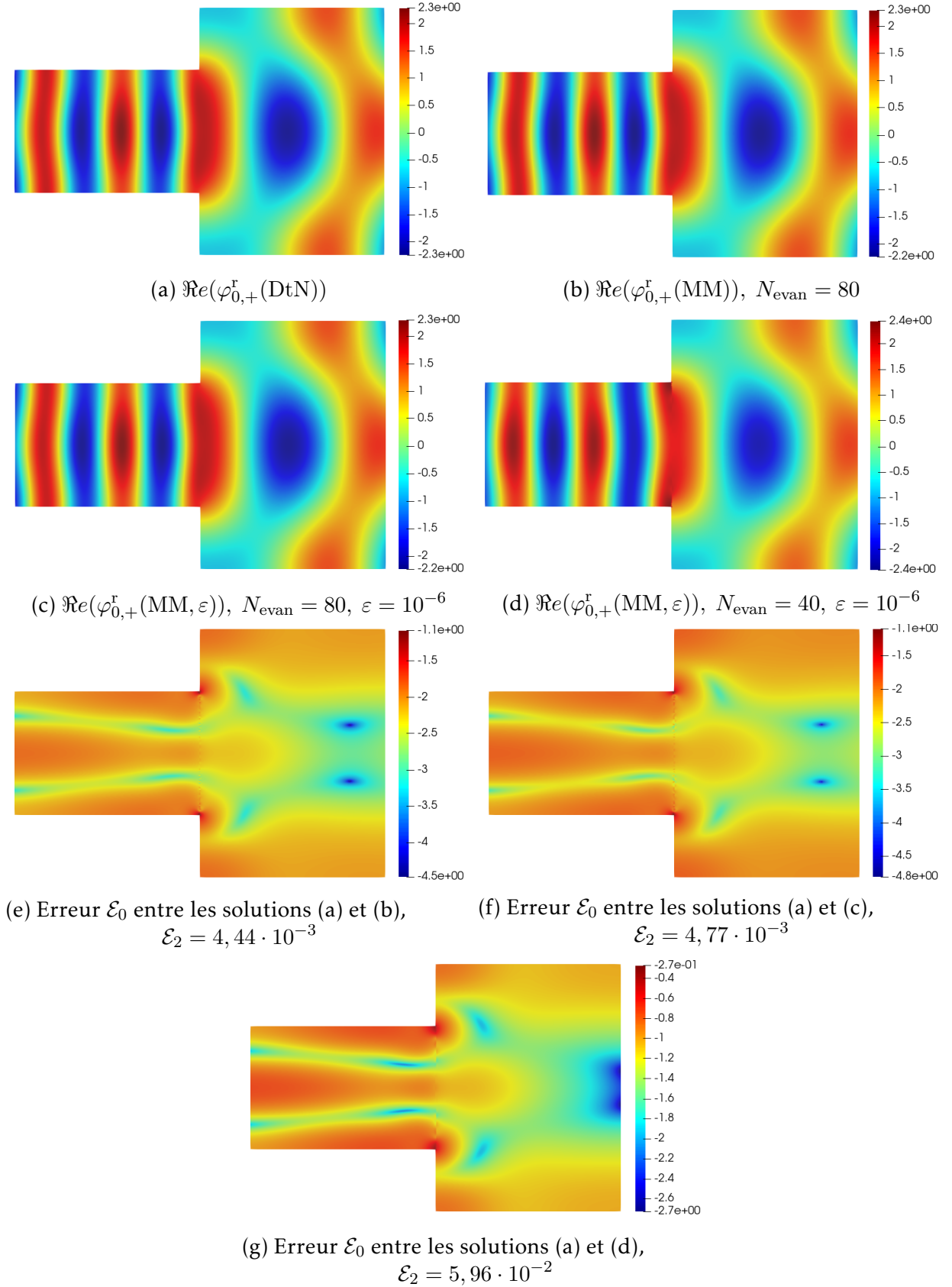


FIGURE 2.3: Partie réelle du champ de référence  $\varphi_{0,+}^r$  calculée avec des DtN (a) et la technique du mode-matching non régularisée (b) et régularisée (c,d).

Erreur ponctuelle  $\mathcal{E}_0 := \log \left( \frac{|\varphi_{0,+}^r(\text{DtN}) - \varphi_{0,+}^r(\text{MM})|}{\|\varphi_{0,+}^r(\text{DtN})\|_{L^\infty}} \right)$  entre la solution obtenue avec DtN (a) et celle obtenue avec le mode-matching (d,e,f).

Erreur  $L^2$  relative :  $\mathcal{E}_2 := \frac{\|\varphi_{0,+}^r(\text{DtN}) - \varphi_{0,+}^r(\text{MM})\|_{L^2}}{\|\varphi_{0,+}^r(\text{DtN})\|_{L^2}}$ .

Les résultats numériques présentés Figure 2.3 montrent que la méthode de mode-matching permet d'approximer correctement les champs de référence. La régularisation du problème de mode-matching permet d'obtenir une première approximation de la solution, grossière certes, mais à moindre coût (i.e. avec de petites valeurs de  $N_{\text{evan}}$ ).

Pour les questions théoriques encore en suspens soulevées lors de notre brève étude de la technique de mode-matching, nous choisirons dans la suite de ce travail de calculer les champs de référence en résolvant un problème volumique avec DtN, qui est lui totalement justifié pour les guides d'ondes fermés. Il est néanmoins important de souligner que le mode-matching permet une résolution beaucoup moins coûteuse de ce type de problèmes, en particulier pour des configurations 3D. Le lecteur souhaitant plus d'informations sur les techniques de mode-matching pourra consulter [Ele+94; PS13a; PS13b].

## 2.3 Réponse de la structure perturbée par un défaut à un mode

On s'intéresse maintenant à une jonction endommagée par un défaut occupant un domaine  $D$  ouvert, borné, à frontière Lipschitz. Il satisfait  $\overline{D} \subset \Omega$ , et est tel que  $\dot{\Omega} := \Omega \setminus \overline{D}$  soit un ouvert connexe. Nous ne considérerons dans la suite que des obstacles de Dirichlet, mais le travail développé s'applique aussi à des obstacles de Neumann. Avant de s'intéresser à la diffraction d'un mode incident par la structure perturbée, introduisons le problème générique suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \varphi \in H_{\text{loc}}^1(\dot{\Omega}) \text{ tel que} \\ & \begin{cases} \Delta\varphi + \eta^2 k_f^2 \varphi = 0 & \text{dans } \dot{\Omega} \\ \varphi = f & \text{sur } \partial D \\ \partial_{\mathbf{n}} \varphi = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \varphi \text{ est sortant,} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.16)$$

pour un terme source  $f$  donné.

### Lemme 2.10

Soit  $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ , le problème (2.16) est bien posé excepté pour un ensemble dénombrable de fréquences.

*Démonstration.* La preuve commence comme celle du Lemme 2.4. Soit  $R > 0$  suffisamment grand pour que  $\overline{D} \subset \Omega_R$ ; on écrit un problème équivalent posé dans le domaine borné  $\Omega_R := \Omega_R \setminus \overline{D}$  à l'aide d'opérateurs DtN comme on l'avait fait pour les champs de référence (2.6). Puisque  $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ , il existe  $\varphi_f \in H_{\text{loc}}^1(\dot{\Omega})$  à support compact strictement inclus dans  $\dot{\Omega}_R$  satisfaisant  $\varphi_f|_{\partial D} = f$ . On définit alors  $\varphi_0 := \varphi - \varphi_f$  qui s'annule sur  $\partial D$ , mais qui vérifie toujours la condition d'onde sortante. En introduisant l'espace  $H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R) := \{\varphi \in H^1(\dot{\Omega}_R) \mid \varphi = 0 \text{ sur } \partial D\}$ , on écrit ensuite la formulation variationnelle de ce nouveau problème :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \varphi_0 \in H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R) \text{ tel que} \\ & a(\varphi_0, \psi) = \ell(\psi), \quad \forall \psi \in H^1(\dot{\Omega}_R), \end{aligned} \quad (2.17)$$



où :

$$a(\varphi, \psi) := \int_{\dot{\Omega}_R} (\nabla \varphi \cdot \nabla \bar{\psi} - \eta^2 k_f^2 \varphi \bar{\psi}) d\mathbf{x} - \langle T^- \varphi, \bar{\psi} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R})} - \langle T^+ \varphi, \bar{\psi} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)}, \quad (2.18)$$

et :

$$\ell(\psi) = - \int_{\dot{\Omega}_R} (\nabla \varphi_f \cdot \nabla \bar{\psi} - \eta^2 k_f^2 \varphi_f \bar{\psi}) d\mathbf{x}.$$

À nouveau, on montre que ce problème est associé à un opérateur Fredholm d'indice 0. Mais contrairement aux problèmes satisfaits par les champs de référence, nous n'avons plus l'unicité de la solution pour toutes les fréquences, car il peut exister des solutions non nulles au problème homogène appelées modes piégés. Supposons en effet qu'il existe  $\varphi_0 \in H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R)$  tel que  $a(\varphi_0, \psi) = 0, \forall \psi \in H^1(\dot{\Omega}_R)$ . Prendre alors la partie imaginaire de  $a(\varphi_0, \varphi_0) = 0$  donne :

$$\sum_{n=0}^{\tilde{N}_p-1} |\tilde{\lambda}_n| |(\varphi_0, \tilde{\Phi}_n)_{L^2(\Sigma_{-R})}|^2 + \sum_{n=0}^{N_p-1} |\lambda_n| |(\varphi_0, \Phi_n)_{L^2(\Sigma_R)}|^2 = 0,$$

et par suite  $(\varphi_0, \tilde{\Phi}_n)_{\Sigma_{-R}} = 0, 0 \leq n < \tilde{N}_p$  et  $(\varphi_0, \Phi_n)_{\Sigma_R} = 0, 0 \leq n < N_p$ . L'étude du problème variationnel :  $a(\varphi_0, \psi) = 0, \forall \psi \in H^1(\dot{\Omega}_R)$ , est ainsi ramenée à celle du problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\mu, \varphi) \in \mathbb{C} \times H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R) \setminus \{0\} \text{ tel que} \\ & a(k_f; \varphi, \psi) = \mu \int_{\dot{\Omega}_R} \eta^2 \varphi \bar{\psi} d\mathbf{x}, \quad \forall \psi \in H^1(\dot{\Omega}_R), \end{aligned} \quad (2.19)$$

avec :

$$\begin{aligned} a(k_f; \varphi, \psi) := & \int_{\dot{\Omega}_R} \nabla \varphi \cdot \nabla \bar{\psi} d\mathbf{x} - \sum_{n \geq \tilde{N}_p} \tilde{\lambda}_n (\varphi_n, \tilde{\Phi}_n)_{L^2(\Sigma_{-R})} \overline{(\psi, \tilde{\Phi}_n)_{L^2(\Sigma_{-R})}} \\ & - \sum_{n \geq N_p} \lambda_n (\varphi_n, \Phi_n)_{L^2(\Sigma_R)} \overline{(\psi, \Phi_n)_{L^2(\Sigma_R)}}, \end{aligned}$$

où  $\tilde{\lambda}_n < 0, 0 \leq n < \tilde{N}_p$  et  $\lambda_n < 0, 0 \leq n < N_p$ . D'après la théorie spectrale des opérateurs autoadjoints à résolvante compacte, le problème (2.19) admet un nombre dénombrable de valeurs propres réelles positives notées :

$$\mu_0(k_f) \leq \mu_1(k_f) \leq \dots \leq \mu_n(k_f) \leq \dots,$$

qui tend vers  $+\infty$ . Les formules min-max nous donnent les expressions suivantes de ces valeurs propres :

$$\mu_n(k_f) = \min_{V_n \subset \mathcal{V}_n} \max_{\psi \in V_n \setminus \{0\}} \frac{a(k_f; \psi, \psi)}{\int_{\dot{\Omega}_R} \eta^2 |\psi|^2 d\mathbf{x}},$$

où  $\mathcal{V}_n$  représente l'ensemble des sous-espaces vectoriels  $V_n$  de  $H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R)$  de dimension  $n$ . Grâce à ces formules, on peut montrer que les fonctions  $k_f \rightarrow \mu_n(k_f)$  sont continues et décroissantes. L'équation  $\mu_n(k_f) = k_f^2$  a donc au plus une solution notée  $k_f^n$ . Si  $k_f \notin \{k_f^n, n \in \mathbb{N}\}$  alors  $\varphi_0 = 0$ , et (2.17) admet une unique solution.  $\square$



On s'intéresse maintenant à la diffraction d'un mode incident par la structure perturbée. Plus précisément, on considère les problèmes :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \varphi_{n,+}^p \in H_{\text{loc}}^1(\dot{\Omega}) \text{ tel que} \\ & \begin{cases} \Delta \varphi_{n,+}^p + \eta^2 k_f^2 \varphi_{n,+}^p = 0 & \text{dans } \dot{\Omega} \\ \varphi_{n,+}^p = 0 & \text{sur } \partial D \\ \partial_n \varphi_{n,+}^p = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \varphi_{n,+}^p - \varphi_{n,+}^0 & \text{est sortant,} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.20)$$

et :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \varphi_{n,-}^p \in H_{\text{loc}}^1(\dot{\Omega}) \text{ tel que} \\ & \begin{cases} \Delta \varphi_{n,-}^p + \eta^2 k_f^2 \varphi_{n,-}^p = 0 & \text{dans } \dot{\Omega} \\ \varphi_{n,-}^p = 0 & \text{sur } \partial D \\ \partial_n \varphi_{n,-}^p = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \varphi_{n,-}^p - \varphi_{n,-}^0 & \text{est sortant.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Les champs diffractés  $\varphi_{n,+}^d := \varphi_{n,+}^p - \varphi_{n,+}^r$  et  $\varphi_{n,-}^d := \varphi_{n,-}^p - \varphi_{n,-}^r$  sont solutions du problème (2.16) pour  $f = -\varphi_{n,+}^r|_{\partial D}$ , respectivement  $f = -\varphi_{n,-}^r|_{\partial D}$ . Les problèmes (2.20) et (2.21) sont donc bien posés excepté pour un ensemble dénombrable de fréquences en vertu du Lemme 2.10. Les champs perturbés peuvent ainsi être calculés en résolvant la formulation variationnelle :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \varphi_{n,\pm}^p \in H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R) \text{ tel que} \\ & a(\varphi_{n,\pm}^p, \psi) = \ell(\psi), \quad \forall \psi \in H^1(\dot{\Omega}_r), \end{aligned}$$

où la forme sesquilinéaire  $a$  est donnée par (2.18) et

$$\ell(\psi) = \begin{cases} -2\tilde{\lambda}_n \int_{\Sigma_{-R}} \tilde{\varphi}_{n,+} \bar{\psi} dx_2 & \text{pour } \varphi_{n,+}^p \\ 2\lambda_n \int_{\Sigma_R} \varphi_{n,-} \bar{\psi} dx_2 & \text{pour } \varphi_{n,-}^p. \end{cases}$$

Nous concluons enfin ce chapitre avec des illustrations numériques de champs perturbés. Pour une jonction dont les paramètres sont  $h_- = 0,25$ ,  $h_+ = 0,5$ ,  $k_f = 20$ ,  $n_r = 1$  avec un obstacle de Dirichlet qui est un disque centré en  $(0,6, 0,25)$  de rayon  $0,075$ , on calcule numériquement les champs perturbés  $\varphi_{1,-}^p$  et  $\varphi_{1,+}^p$ . On utilise pour cela des DtN positionnés de part et d'autre de la jonction en  $x_1 = \pm 1$ , avec 15 modes évanescents. Le problème est discrétisé par éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}^1$  avec un pas de  $h = 0,02$ . Les résultats obtenus sont présentés Figure 2.4.

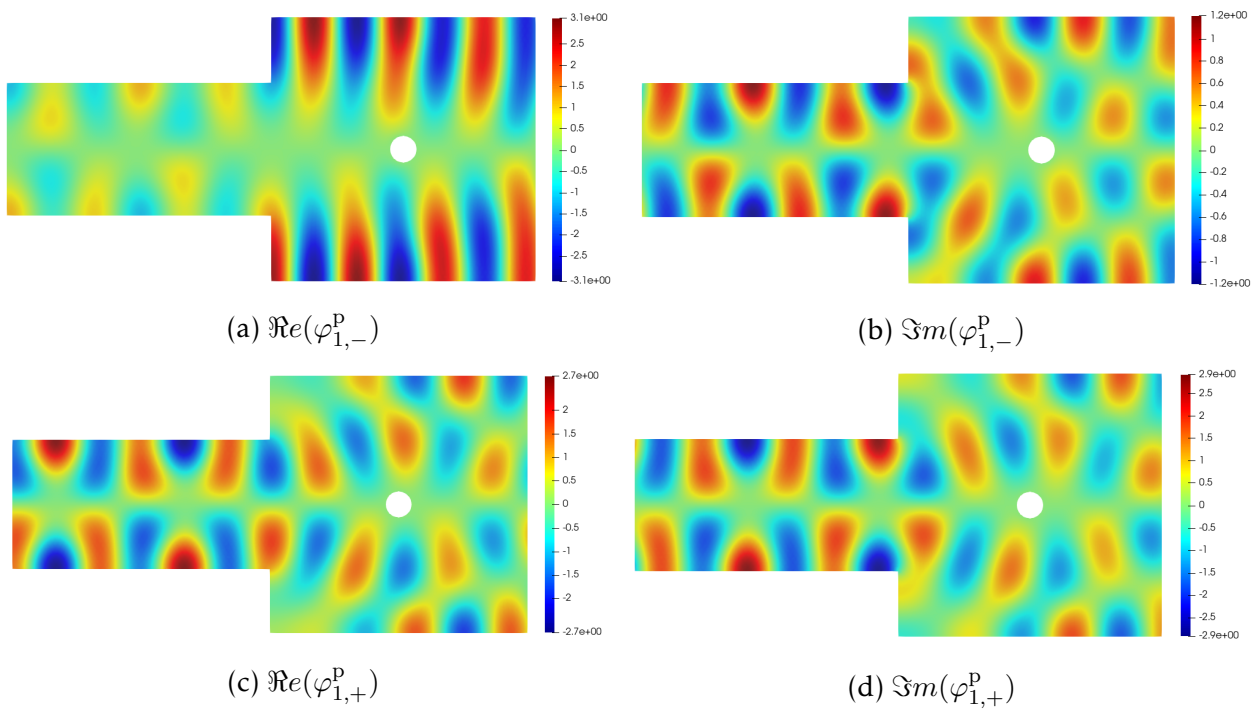


FIGURE 2.4: Parties réelle et imaginaire des champs  $\varphi_{1,-}^p$  et  $\varphi_{1,+}^p$  pour un obstacle de Dirichlet.



# Chapitre 3

## Problème inverse dans les jonctions de guides acoustiques fermés

### Sommaire

---

3.1	Fonction de Green . . . . .	40
3.2	La Linear Sampling Method . . . . .	43
3.2.1	Présentation de la méthode d'imagerie . . . . .	44
3.2.2	Justification de la méthode . . . . .	45
3.3	Formulation modale de la LSM . . . . .	47
3.4	Étude numérique . . . . .	51
3.4.1	Remarques préliminaires . . . . .	51
3.4.2	Résultats . . . . .	52

---

Dans le précédent chapitre, nous avons étudié le problème direct, c'est-à-dire que pour une configuration perturbée ou non donnée dont on connaît les paramètres géométriques et les constantes des matériaux, nous avons calculé sa réponse acoustique à un mode provenant de la gauche ou de la droite. Le problème inverse consiste quant à lui, pour une configuration perturbée par un défaut dont on n'a a priori aucune information, à identifier et caractériser ce défaut à l'aide des mesures des réponses acoustiques de la structure à plusieurs modes provenant des deux côtés de la jonction. Diverses techniques ont été proposées au cours des deux dernières décennies pour résoudre ce problème dans les guides d'ondes fermés. Un certain nombre d'entre elles sont des méthodes de type échantillonnage. Ces méthodes ont été introduites par [CK96], dans lequel une telle méthode est proposée et justifiée mathématiquement pour résoudre un *problème de scattering inverse* dans l'espace libre. Elles sont particulièrement intéressantes pour leur efficacité, mais aussi pour leur facilité de mise en œuvre. De plus, leur application ne dépend pas du type de défaut ou des conditions aux limites. Plusieurs de ces méthodes ont été adaptées aux guides d'ondes en tirant parti de la description modale des champs acoustiques dans la structure. On peut citer en particulier la méthode de factorisation [Cha+06; LR13; AGL11], la méthode de migration de Kirchhoff [TMP13; TMP16], les deux étant comparées dans [BM19], et enfin la Linear Sampling Method (LSM) dont une formulation modale a été pour la première fois proposée dans [BL08]. Cette dernière a fait l'objet d'un certain nombre d'adaptations à des configurations toujours plus complexes. Dans [BL12], la méthode a été adaptée pour identifier des défauts de type fissures. Ensuite, la LSM qui n'était initialement développée que pour des données fréquentielles avec des mesures dans la section du guide a été étendue à des mesures temporelles dans [MS16; BBR16], et des mesures de surface dans [BBR16]. Ces travaux ont permis l'utilisation de la

méthode avec des données expérimentales, produisant des résultats d'imagerie concluants. On peut enfin mentionner [BF14] qui a adapté la méthode d'imagerie aux guides périodiques.

La LSM consiste à se donner une grille d'échantillonnage recouvrant la zone à inspecter, et à résoudre pour chacun des points de cette grille une équation appelée *équation de champ proche*. Cette équation fait intervenir les mesures de champs diffractés par la structure perturbée, son second membre étant la fonction de Green de la structure sans défaut pour une source au point d'échantillonnage et un point de mesure dans la zone d'observation. À l'aide de la solution de ce système en chacun des points de la grille, on définit une fonction indicatrice dont les lignes de niveau nous permettent d'identifier les défauts existants.

Dans ce chapitre, on se propose d'adapter la LSM aux jonctions de guides fermés. Dans un premier temps, nous montrerons comment calculer la fonction de Green de la structure sans défaut à l'aide d'objets que nous avons appelés champs de référence. Ces objets, qui correspondent aux réponses en champ total de la structure sans défaut aux modes incidents des deux demi-guides, nous permettront alors d'évaluer à un moindre coût la fonction de Green de la jonction pour un grand nombre de points source. Dans un second temps, nous introduirons l'équation de champ proche et rappellerons les principaux éléments de la justification mathématique de la procédure d'échantillonnage. Une formulation modale de la LSM sera ensuite écrite et des résultats numériques d'imagerie seront enfin présentés.

**Remarque 3.1** Toutes les notations introduites dans le *chapitre 2* sont conservées.

### 3.1 Fonction de Green

Commençons par définir la fonction de Green de la jonction appelée aussi *solution fondamentale*. Pour  $\mathbf{y} \in \Omega$ , c'est la solution du problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y}) \in L_{\text{loc}}^2(\Omega) \text{ tel que} \\ \begin{cases} -\Delta \mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y}) - \eta^2 k_f^2 \mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y}) = \delta_{\mathbf{y}} & \text{dans } \Omega \\ \partial_n \mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y}) = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y}) \text{ est sortant,} \end{cases} \end{cases} \quad (3.1)$$

avec on le rappelle :

$$\eta(x_1, x_2) := \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 < 0 \\ n_r & \text{si } x_1 > 0. \end{cases}$$

Pour étudier ce problème, nous allons nous servir des fonctions de Green des deux guides uniformes associés aux deux demi-guides de notre jonction. Nous les appellerons parfois par abus de langage : fonctions de Green des guides gauche et droit.

Soit  $\widetilde{W} := \mathbb{R} \times (-h_-, h_-)$  le guide uniforme associé au demi-guide gauche, et  $\mathbf{y} \in \widetilde{W}$  un point source. La fonction de Green du guide gauche est la solution du problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \widetilde{G}(\cdot, \mathbf{y}) \in L_{\text{loc}}^2(\widetilde{W}) \text{ tel que} \\ \begin{cases} -\Delta \widetilde{G}(\cdot, \mathbf{y}) - k_f^2 \widetilde{G}(\cdot, \mathbf{y}) = \delta_{\mathbf{y}} & \text{dans } \widetilde{W} \\ \partial_n \widetilde{G}(\cdot, \mathbf{y}) = 0 & \text{sur } \partial \widetilde{W} \\ \widetilde{G}(\cdot, \mathbf{y}) \text{ est sortant,} \end{cases} \end{cases}$$

dont l'unique solution admet l'expression modale :

$$\widetilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e^{\tilde{\lambda}_n |x_1 - y_1|}}{2\tilde{\lambda}_n} \tilde{\varphi}_n(x_2) \tilde{\varphi}_n(y_2), \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \widetilde{W}^2. \quad (3.2)$$

De même, notons  $W := \mathbb{R} \times (-h_+, h_+)$  le guide uniforme associé au demi-guide droit et choisissons un point source  $\mathbf{y} \in W$ . La fonction de Green du guide droit est la solution du problème :

$$\text{Trouver } G(\cdot, \mathbf{y}) \in L_{\text{loc}}^2(W) \text{ tel que } \begin{cases} -\Delta G(\cdot, \mathbf{y}) - n_r^2 k_f^2 G(\cdot, \mathbf{y}) = \delta_{\mathbf{y}} & \text{dans } W \\ \partial_n G(\cdot, \mathbf{y}) = 0 & \text{sur } \partial W \\ G(\cdot, \mathbf{y}) \text{ est sortant,} \end{cases}$$

dont l'unique solution s'exprime sous forme de série :

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e^{\lambda_n |x_1 - y_1|}}{2\lambda_n} \varphi_n(x_2) \varphi_n(y_2), \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in W^2. \quad (3.3)$$

**Remarque 3.2** Comme mentionné dans [BL08], les expressions (3.2) et (3.3) peuvent être obtenues en utilisant le principe d'absorption limite (c'est-à-dire en remplaçant  $k_f$  par  $k_f + ik_{\text{al}}$  avec  $k_{\text{al}} > 0$ ), puis une transformée de Fourier dans la direction axiale. Une fois le problème transverse résolu, on applique le théorème des résidus pour calculer la transformée de Fourier inverse et passer enfin à la limite  $k_{\text{al}} \rightarrow 0$  nous donne les expressions attendues. Une démarche similaire sera appliquée dans la seconde partie du manuscrit pour une configuration plus complexe. De façon alternative, il est aussi possible de décomposer la fonction de Green sur les modes, puis de résoudre à l'aide de la formule des sauts l'équation 1D dans la variable axiale satisfaite par les coefficients modaux. La solution sortante est sélectionnée à l'aide de (2.4). Cette méthode sera utilisée dans la *Partie III* du manuscrit lorsque nous traiterons le cas de l'élasticité.

La fonction de Green de la jonction ne peut quant à elle pas être explicitement calculée à l'aide des modes. En revanche, on peut en donner une expression faisant intervenir les champs de référence et les fonctions de Green des guides gauche et droit.

### Proposition 3.3

Le problème (3.1) a une unique solution dans  $L_{\text{loc}}^2(\Omega)$  donnée par les expressions :

- pour  $\mathbf{y} \in \Omega_-$  et  $\mathbf{x} \in \Omega$  :

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\tilde{\lambda}_n} \tilde{\varphi}_{n,-}(\mathbf{y}) (\varphi_{n,+}^r(\mathbf{x}) - \tilde{\varphi}_{n,+}(\mathbf{x})) & \text{si } x_1 < y_1 \\ - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\tilde{\lambda}_n} \tilde{\varphi}_{n,-}(\mathbf{y}) \varphi_{n,+}^r(\mathbf{x}) & \text{si } x_1 > y_1, \end{cases}$$

- pour  $\mathbf{y} \in \Omega_+$  et  $\mathbf{x} \in \Omega$  :

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\lambda_n} \varphi_{n,+}(\mathbf{y}) \varphi_{n,-}^r(\mathbf{x}) & \text{si } x_1 < y_1 \\ G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\lambda_n} \varphi_{n,+}(\mathbf{y}) (\varphi_{n,-}^r(\mathbf{x}) - \varphi_{n,-}(\mathbf{x})) & \text{si } x_1 > y_1, \end{cases}$$

où les champs de référence gauche  $\varphi_{n,+}^r$  (respectivement droit  $\varphi_{n,-}^r$ ) sont solutions des problèmes (2.2) (respectivement (2.3)).

*Démonstration.* Montrons le résultat lorsque  $\mathbf{y} \in \Omega_-$ . Soit  $\tilde{G}_0(\cdot, \mathbf{y})$  le champ défini par :

$$\tilde{G}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{cases} \tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_- \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_+, \end{cases} \quad (3.4)$$

et  $\mathcal{G}^d(\cdot, \mathbf{y}) := \mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y}) - \tilde{G}_0(\cdot, \mathbf{y})$  le champ diffracté associé à  $\tilde{G}_0(\cdot, \mathbf{y})$ , qui joue le rôle de champ incident. Le champ diffracté  $\mathcal{G}^d(\cdot, \mathbf{y})$  satisfait le problème de transmission :

$$\text{Trouver } \mathcal{G}^d(\cdot, \mathbf{y}) \in H_{\text{loc}}^1(\Omega_- \cup \Omega_+) \text{ tel que } \begin{cases} \Delta \mathcal{G}^d(\cdot, \mathbf{y}) + \eta^2 k_f^2 \mathcal{G}^d(\cdot, \mathbf{y}) = 0 & \text{dans } \Omega_- \cup \Omega_+ \\ \partial_n \mathcal{G}^d(\cdot, \mathbf{y}) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus (\Sigma_{0+} \setminus \Sigma_{0-}) \\ \llbracket \mathcal{G}^d(\cdot, \mathbf{y}) \rrbracket = \tilde{G}(\cdot, \mathbf{y}) & \text{sur } \Sigma_{0-} \\ \llbracket \partial_{x_1} \mathcal{G}^d(\cdot, \mathbf{y}) \rrbracket = \partial_{x_1} \tilde{G}(\cdot, \mathbf{y}) & \text{sur } \Sigma_{0+} \\ \mathcal{G}^d(\cdot, \mathbf{y}) \text{ est sortant.} \end{cases} \quad (3.5)$$

Les différents domaines intervenant dans ce système sont représentés sur la Figure 3.1.

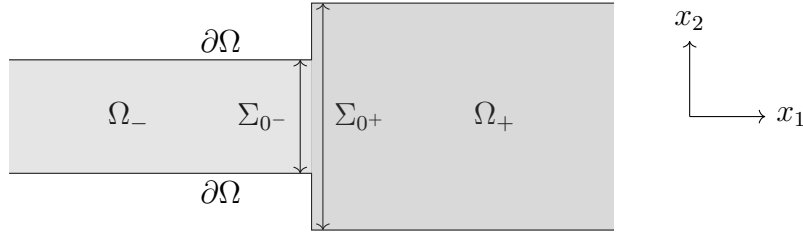


FIGURE 3.1: Jonction des deux guides fermés  $\Omega := \Omega_- \cup \Sigma_{0-} \cup \Omega_+$ .

Précisons que  $\llbracket \cdot \rrbracket$  représente dans ce problème le saut de la gauche vers la droite. La condition de saut sur la trace de Dirichlet est écrite dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{0-})$ . Pour que la seconde condition de saut ait un sens, il faut étendre  $\partial_{x_1} \mathcal{G}^d(\cdot, \mathbf{y})|_{\Sigma_{0-}}$  et  $\partial_{x_1} \tilde{G}(\cdot, \mathbf{y})|_{\Sigma_{0-}}$  par 0 à  $\Sigma_{0+} \setminus \Sigma_{0-}$ ; la condition de saut a alors un sens dans  $\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{0+})$ . En écrivant une formulation variationnelle similaire à (2.7) dans un domaine borné  $\Omega_R$ , on est en mesure de montrer par le lemme de Lax-Milgram que (3.5) admet une unique solution dans  $H_{\text{loc}}^1(\Omega_- \cup \Omega_+)$ . Ensuite, on remarque que le problème (2.2) satisfait par les champs de référence gauche peut aussi s'écrire sous la forme d'un problème de transmission. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $\varphi_{n,+}^{r,d} := \varphi_{n,+}^r - \varphi_{n,+}^0$  la partie diffractée du champ de référence gauche, où  $\varphi_{n,+}^0$  est le mode  $\tilde{\varphi}_{n,+}$  du guide gauche prolongé par zéro à droite défini par (2.1). Elle vérifie le problème de transmission :

$$\text{Trouver } \varphi_{n,+}^{r,d} \in H_{\text{loc}}^1(\Omega_- \cup \Omega_+) \text{ tel que } \begin{cases} \Delta \varphi_{n,+}^{r,d} + \eta^2 k_f^2 \varphi_{n,+}^{r,d} = 0 & \text{dans } \Omega_- \cup \Omega_+ \\ \partial_n \varphi_{n,+}^{r,d} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus (\Sigma_{0+} \setminus \Sigma_{0-}) \\ \llbracket \varphi_{n,+}^{r,d} \rrbracket = \tilde{\varphi}_{n,+} & \text{sur } \Sigma_{0-} \\ \llbracket \partial_{x_1} \varphi_{n,+}^{r,d} \rrbracket = \partial_{x_1} \tilde{\varphi}_{n,+} & \text{sur } \Sigma_{0+} \\ \varphi_{n,+}^{r,d} \text{ est sortant,} \end{cases}$$

dans lequel les conditions de saut sont à comprendre dans le même sens que pour le problème (3.5). Pour  $\mathbf{y} \in \Omega_-$  et  $\mathbf{x} \in \Sigma_{0-}$  nous avons  $x_1 > y_1$ , on peut alors écrire :

$$\tilde{G}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\tilde{\lambda}_n} \tilde{\varphi}_{n,-}(\mathbf{y}) \tilde{\varphi}_{n,+}(\mathbf{x}),$$

ce qui donne par linéarité du problème de transmission par rapport aux données de saut :

$$\mathcal{G}^d(\cdot, \mathbf{y}) = - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\tilde{\lambda}_n} \tilde{\varphi}_{n,-}(\mathbf{y}) \varphi_{n,+}^{r,d}(\mathbf{x}) = - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\tilde{\lambda}_n} \tilde{\varphi}_{n,-}(\mathbf{y}) (\varphi_{n,+}^r(\mathbf{x}) - \varphi_{n,+}^0(\mathbf{x})).$$

Il reste à revenir au champ total  $\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \tilde{G}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathcal{G}^d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , ce qui donne directement l'expression attendue lorsque  $\mathbf{x} \in \Omega_+$ , et  $\mathbf{x} \in \Omega_-$  avec  $x_1 < y_1$ . Lorsque  $\mathbf{x} \in \Omega_-$  avec  $y_1 < x_1$ , on a la simplification :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\tilde{\lambda}_n} \tilde{\varphi}_{n,-}(\mathbf{y}) (\varphi_{n,+}^r(\mathbf{x}) - \tilde{\varphi}_{n,+}(\mathbf{x})) \\ &= - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\tilde{\lambda}_n} \tilde{\varphi}_{n,-}(\mathbf{y}) \tilde{\varphi}_{n,+}(\mathbf{x}) - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\tilde{\lambda}_n} \tilde{\varphi}_{n,-}(\mathbf{y}) (\varphi_{n,+}^r(\mathbf{x}) - \tilde{\varphi}_{n,+}(\mathbf{x})) \\ &= - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\tilde{\lambda}_n} \tilde{\varphi}_{n,-}(\mathbf{y}) \varphi_{n,+}^r(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

ce qui est l'expression recherchée. Il reste enfin à montrer que la solution a bien la régularité  $L_{\text{loc}}^2(\Omega)$ . Introduisons dans ce but les fonctions  $G_{\pm}^{\infty}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\kappa_{\pm} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)$  dans lesquelles  $H_0^{(1)}$  représente la fonction de Hankel de première espèce d'ordre 0,  $\kappa_- := k_f$  et  $\kappa_+ := k_f n_r$ . La fonction  $G_-^{\infty}(\cdot, \mathbf{y})$  (respectivement  $G_+^{\infty}(\cdot, \mathbf{y})$ ) correspond à la fonction de Green de l'espace libre associée à  $\kappa_-$  (respectivement  $\kappa_+$ ). Supposons que  $\mathbf{y} \in \Omega_-$ , la fonction  $\mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y}) - G_-^{\infty}(\cdot, \mathbf{y})$  est dans son voisinage solution d'une équation de Helmholtz homogène. Par des résultats classiques de régularité des solutions des problèmes elliptiques, on en déduit que  $\mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y}) - G_-^{\infty}(\cdot, \mathbf{y})$  est localement  $\mathcal{C}^{\infty}$ . Et comme  $G_-^{\infty}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sim \frac{1}{2\pi} \ln(\kappa_- \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)$  lorsque  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ , on en conclut que  $\mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y}) \in L_{\text{loc}}^2(\Omega)$ . Lorsque  $\mathbf{y} \in \Omega_+$ , comparer  $\mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y})$  et  $G_+^{\infty}(\cdot, \mathbf{y})$  nous permet d'aboutir à la même conclusion.  $\square$

Nous finissons enfin l'étude de la fonction de Green de la jonction en mentionnant une propriété de réciprocité qui est particulièrement importante dans la résolution du problème inverse traitée dans la prochaine section.

#### Lemme 3.4

La fonction de Green de la jonction satisfait la relation de réciprocité :

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega^2, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$$

*Démonstration.* La preuve de ce résultat classique de réciprocité est donnée dans un cas acoustique plus complexe pour la Proposition 6.15.  $\square$

## 3.2 La Linear Sampling Method

On cherche à identifier un défaut  $D$  dans la structure  $\Omega$ . Nous allons pour cela faire les mêmes hypothèses sur celui-ci que dans le précédent chapitre. À savoir, on suppose que  $D$  est un ouvert borné à frontière Lipschitz tel que  $\overline{D} \subset \Omega$  et  $\tilde{\Omega} := \Omega \setminus \overline{D}$  est connexe. Dans cette section, nous allons dans un premier temps présenter la méthode d'imagerie, puis dans un second temps la justifier mathématiquement.



### 3.2.1 Présentation de la méthode d'imagerie

Pour  $\mathbf{y} \in \hat{\Omega}$ , on considère le problème :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \varphi(\cdot, \mathbf{y}) \in L^2_{\text{loc}}(\hat{\Omega}) \text{ tel que} \\ & \begin{cases} -\Delta\varphi(\cdot, \mathbf{y}) - \eta^2 k_f^2 \varphi(\cdot, \mathbf{y}) = \delta_{\mathbf{y}} & \text{dans } \hat{\Omega} \\ \varphi(\cdot, \mathbf{y}) = 0 & \text{sur } \partial D \\ \partial_{\mathbf{n}}\varphi(\cdot, \mathbf{y}) = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \varphi(\cdot, \mathbf{y}) \text{ est sortant.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Soit  $\varphi^d(\cdot, \mathbf{y}) := \varphi(\cdot, \mathbf{y}) - \mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y})$  où  $\mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y})$  est la solution de (3.1) jouant le rôle de champ incident. Le champ diffracté  $\varphi^d(\cdot, \mathbf{y})$  est solution du problème (2.16) avec  $f = -\mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y})|_{\partial D}$ ; ainsi (3.6) est bien posé excepté pour un ensemble dénombrable de fréquences d'après le Lemme 2.10. Nous pouvons désormais définir le problème inverse. Soit  $\hat{\Sigma}$  le support des mesures à partir desquelles nous essaierons de reconstituer le défaut. Deux configurations différentes seront considérées :

- $\hat{\Sigma} = \Sigma_{-R}$  : configuration dite de *back-scattering* ;
- $\hat{\Sigma} = \Sigma_{-R} \cup \Sigma_R$  : configuration dite de *full-scattering* ;

avec  $R > 0$  choisi suffisamment grand pour que  $D$  soit compris entre les sections  $\Sigma_{-R}$  et  $\Sigma_R$  de la jonction.

**Remarque 3.5** Dans le cadre du contrôle non destructif, on ne connaît pas l'emplacement des potentiels défauts, on considère pour cela  $R > 0$  grand. Nous proposerons par la suite une méthode d'imagerie qui sera discrétisée en extrayant le champ lointain des champs diffractés mesurés. Nous verrons alors que la qualité de la reconstruction sera indépendante de la valeur de  $R$  en l'absence d'atténuation.

Les données considérées pour la reconstruction sont  $\{\varphi^d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\hat{\Sigma})^2\}$ . On dit qu'elles sont *multistatistiques* car le support des sollicitations coïncide avec le support des mesures.

**Remarque 3.6** Remarquons que pour  $\mathbf{y} \in \Sigma_{-R}$ , le champ diffracté  $\varphi^d(\cdot, \mathbf{y}) = \varphi(\cdot, \mathbf{y}) - \mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y})$  peut se réécrire :

$$\varphi^d(\cdot, \mathbf{y}) = (\varphi(\cdot, \mathbf{y}) - \tilde{G}_0(\cdot, \mathbf{y})) - (\mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y}) - \tilde{G}_0(\cdot, \mathbf{y})),$$

où  $\tilde{G}_0(\cdot, \mathbf{y})$  défini par (3.4) est la fonction de Green du guide gauche prolongée par zéro à droite. Dans cette décomposition,  $\varphi(\cdot, \mathbf{y}) - \tilde{G}_0(\cdot, \mathbf{y})$  représente le champ diffracté du point source  $\tilde{G}_0(\cdot, \mathbf{y})$  simultanément par la jonction et l'obstacle  $D$ . Le champ  $\mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y}) - \tilde{G}_0(\cdot, \mathbf{y})$  représente quant à lui le champ diffracté  $\tilde{G}_0(\cdot, \mathbf{y})$  par la jonction seule. Il en est de même lorsque  $\mathbf{y} \in \Sigma_R$ . La donnée  $\varphi^d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\hat{\Sigma})^2$  peut donc être interprétée comme une mesure différentielle selon la terminologie introduite dans [AGH15].

Lorsque l'on développe une méthode d'imagerie, il est très important de s'assurer que les données utilisées sont suffisantes pour identifier les défauts de façon unique. Le théorème suivant nous le garantit pour les données multistatistiques considérées.

**Théorème 3.7** [Pot01, Corollaire 3.1.11]

Soient  $D_1$  et  $D_2$  deux défauts dont les champs diffractés pour un point source  $\mathbf{y} \in \widehat{\Sigma}$  sont notés respectivement  $\varphi_1^d(\cdot, \mathbf{y})$  et  $\varphi_2^d(\cdot, \mathbf{y})$ . Si pour tout  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\widehat{\Sigma})^2$  on a  $\varphi_1^d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi_2^d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , alors  $D_1 = D_2$ .

*Démonstration.* Le résultat est démontré pour le cas de l'espace libre dans [Pot01]. Il s'adapte aux guides d'ondes en écrivant la relation de réciprocité  $\varphi^d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi^d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  satisfaite pour  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$  dans  $\Omega$  (voir [BL08, Lemme 3]).  $\square$

La Linear Sampling Method est une méthode permettant d'identifier l'obstacle  $D$  dans le domaine imagé à partir des mesures de  $\varphi^d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ,  $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\widehat{\Sigma})^2$ . Elle repose sur l'opérateur de champ proche  $N : L^2(\widehat{\Sigma}) \rightarrow L^2(\widehat{\Sigma})$  défini pour  $\hat{h} \in L^2(\widehat{\Sigma})$  par :

$$(N\hat{h})(\mathbf{x}) = \int_{\widehat{\Sigma}} \varphi^d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \hat{h}(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \widehat{\Sigma},$$

où  $\varphi^d(\cdot, \mathbf{y})$  est la solution de (2.16) pour  $f = -\mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y})|_{\partial D}$ . Une fois l'opérateur de champ proche défini, on peut introduire pour  $\mathbf{z} \in \Omega$ , l'équation de champ proche :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \hat{h}(\cdot; \mathbf{z}) \in L^2(\widehat{\Sigma}) \text{ tel que} \\ &N\hat{h}(\cdot; \mathbf{z}) = \mathcal{G}(\cdot; \mathbf{z})|_{\widehat{\Sigma}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

La procédure d'imagerie consiste à se donner une grille d'échantillonnage  $\mathcal{G}^e \subset \Omega_R$  recouvrant la zone à imager, et pour chacun des points d'échantillonnage  $\mathbf{z} \in \mathcal{G}^e$  à essayer de résoudre l'équation de champ proche (3.7). Une telle configuration d'échantillonnage est représentée Figure 3.2. On visualise enfin les lignes de niveau de la fonction indicatrice  $\mathbf{z} \mapsto \text{Log}(1/\|\hat{h}(\cdot; \mathbf{z})\|_{L^2(\widehat{\Sigma})})$ , ce qui nous permet de mettre en évidence le défaut. Nous verrons en réalité par la suite que résoudre l'équation de champ proche revient à tester si la trace de la fonction de Green sur  $\widehat{\Sigma}$  est dans l'image de l'opérateur de champ proche. Si tel est le cas, la solution est bornée et le point d'échantillonnage se trouve dans l'obstacle, sinon la solution diverge et le point d'échantillonnage est en dehors de l'obstacle.

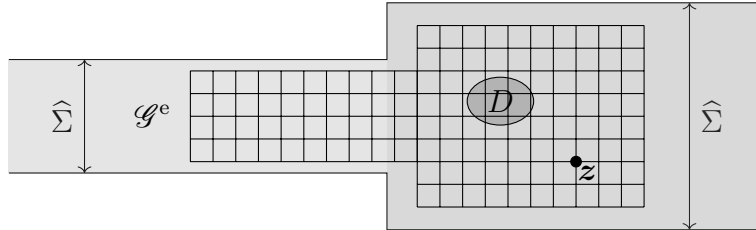


FIGURE 3.2: Échantillonnage en configuration full-scattering.

### 3.2.2 Justification de la méthode

La justification de la LSM repose sur une factorisation de l'opérateur de champ proche  $N$  à l'aide d'opérateurs intégraux que nous allons introduire. Cette justification a été entièrement détaillée dans [BL08] pour un guide fermé droit. Soit  $B : H^{\frac{1}{2}}(\partial D) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\widehat{\Sigma})$  l'opérateur défini pour  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$  par  $Bg := \varphi(g)|_{\widehat{\Sigma}}$ , où  $\varphi(g)$  est la solution du problème (2.16) pour  $f = g$ . On définit aussi l'opérateur  $\mathcal{H} : L^2(\widehat{\Sigma}) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$  vérifiant pour  $\hat{h} \in L^2(\widehat{\Sigma})$  :

$$(\mathcal{H}\hat{h})(\mathbf{x}) := \int_{\widehat{\Sigma}} \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \hat{h}(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \partial D,$$

puis l'opérateur  $\mathcal{F} : H^{-\frac{1}{2}}(\partial D) \rightarrow L^2(\widehat{\Sigma})$  s'écrivant pour  $\varphi \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$  :

$$(\mathcal{F}\varphi)(\mathbf{x}) := \int_{\partial D} \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})ds(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \widehat{\Sigma},$$

et enfin la restriction de l'opérateur de simple couche au bord de l'obstacle  $\mathcal{S} : H^{-\frac{1}{2}}(\partial D) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$  définie pour  $\varphi \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$  par :

$$(\mathcal{S}\varphi)(\mathbf{x}) := \int_{\partial D} \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})ds(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \partial D.$$

### Hypothèse 3.8

Le problème intérieur :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \varphi \in H^1(D) \text{ tel que} \\ &\begin{cases} \Delta\varphi + k_f^2\eta^2\varphi = 0 & \text{dans } D \\ \varphi = 0 & \text{sur } \partial D, \end{cases} \end{aligned}$$

a pour unique solution la solution triviale.

Sous cette hypothèse, on a le résultat de factorisation suivant.

### Lemme 3.9 [BL08]

Supposons que l'Hypothèse 3.8 soit satisfaite, on a alors les factorisations suivantes :

$$N = -B\mathcal{H}, \quad \mathcal{F} = B\mathcal{S}.$$

On a aussi le résultat suivant sur la restriction de l'opérateur de simple couche.

### Proposition 3.10 [BL08, Proposition 1]

Sous l'Hypothèse 3.8, l'opérateur  $\mathcal{S}$  est un isomorphisme.

Les factorisations du Lemme 3.9 ainsi que l'inversibilité de l'opérateur  $\mathcal{S}$  donnée par la Proposition 3.10 nous permettent d'écrire la factorisation de l'opérateur de champ proche :

$$N = -\mathcal{F}\mathcal{S}^{-1}\mathcal{H}. \tag{3.8}$$

Les opérateurs intervenant dans cette factorisation ont des propriétés particulières utiles à la justification de la méthode d'imagerie.

### Proposition 3.11 [BL08, Proposition 2]

Les opérateurs  $B, \mathcal{H}, \mathcal{F}$  et  $N$  sont compacts. Si de plus l'Hypothèse 3.8 est satisfaite, ils sont aussi injectifs et d'image dense. En outre, nous avons  $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{H}^*}$ .

*Démonstration.* La preuve donnée dans [BL08] pour montrer l'injectivité de  $\mathcal{H}$  dans le cas d'un guide uniforme ne s'adapte pas à notre jonction. Pour montrer ce résultat dans notre cas, on peut adapter la preuve donnée par [BF14, Lemme 3.4].  $\square$

Avec cette étude, il est possible de caractériser l'obstacle à l'aide de l'opérateur de champ proche et de la fonction de Green de la jonction.

**Proposition 3.12** [Rec18, Proposition 1.6]

Nous avons l'équivalence :  $z \in D \iff \mathcal{G}(\cdot, z)|_{\widehat{\Sigma}} \in \text{Im}(\mathcal{F})$ , où  $\text{Im}(\mathcal{F})$  représente l'image de l'opérateur  $\mathcal{F}$ .

Nous pourrions échantillonner directement en suivant la Proposition 3.12 en utilisant par exemple le test d'image de Picard (voir [CKK98, p 92]). Cette approche n'est pas utilisable en pratique, puisqu'elle requiert le calcul de l'opérateur  $\mathcal{F}$  qui dépend explicitement de l'obstacle qu'on cherche à reconstruire. Motivés par la factorisation (3.8), nous choisissons plutôt de résoudre l'équation de champ proche (3.7) qui ne fait pas intervenir explicitement l'obstacle. Il faut à ce stade noter deux choses. Premièrement, l'opérateur  $N$  est compact selon la Proposition 3.11, il n'est donc pas inversible. Pour réaliser un test proche de celui décrit par la Proposition 3.12, nous allons donc résoudre une version régularisée de l'équation de champ proche (3.7). Deuxièmement, nous avons  $\text{Im}(N) \neq \text{Im}(\mathcal{F})$  puisque l'opérateur  $\mathcal{H}$  n'est pas surjectif. Il ne semble donc pas, de prime abord, que le test avec l'opérateur de champ proche soit justifié. Nous avons néanmoins le Théorème 3.13 qui montre partiellement que les lignes de niveau de la solution de l'équation de champ proche régularisée nous permettent d'identifier le défaut.

**Théorème 3.13** [CC03, Théorème 2.2]

(i) Si  $z \in D$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\hat{h}_\varepsilon(\cdot; z) \in L^2(\widehat{\Sigma})$  tel que :

$$\|N\hat{h}_\varepsilon(\cdot; z) - \mathcal{G}(\cdot; z)\|_{L^2(\widehat{\Sigma})} \leq \varepsilon,$$

et  $\|\mathcal{H}\hat{h}_\varepsilon(\cdot; z)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial D)} \rightarrow 0$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . De plus, pour  $\varepsilon > 0$  fixé, nous avons aussi :

$$\lim_{z \rightarrow \partial D} \|\hat{h}_\varepsilon(\cdot; z)\|_{L^2(\widehat{\Sigma})} = +\infty, \quad \lim_{z \rightarrow \partial D} \|\mathcal{H}\hat{h}_\varepsilon(\cdot; z)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial D)} = +\infty.$$

(ii) Si  $z \in \Omega \setminus \overline{D}$ , alors pour toute famille de fonctions  $(\hat{h}_\varepsilon(\cdot; z))_\varepsilon$  de  $L^2(\widehat{\Sigma})$  vérifiant pour tout  $\varepsilon > 0$  l'inégalité :

$$\|N\hat{h}_\varepsilon(\cdot; z) - \mathcal{G}(\cdot; z)\|_{L^2(\widehat{\Sigma})} \leq \varepsilon,$$

on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\hat{h}_\varepsilon(\cdot; z)\|_{L^2(\widehat{\Sigma})} = +\infty, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathcal{H}\hat{h}_\varepsilon(\cdot; z)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial D)} = +\infty.$$

*Démonstration.* La preuve donnée dans [CC03] s'écrit de la même façon dans un contexte de guides d'ondes à l'aide des résultats énoncés précédemment.  $\square$

### 3.3 Formulation modale de la LSM

La LSM décrite ci-dessus peut s'appliquer à un très grand nombre de configurations. Mais dans [BL08], une formulation de la LSM tirant parti des spécificités modales des guides d'ondes, a été introduite pour la première fois. Cette formulation consistant à projeter l'équation de champ proche sur les modes des guides droit et gauche est intéressante, car elle

en permet une "régularisation physique". Les séries modales associées aux champs incidents et diffractés sont en effet tronquées en ne conservant que les termes associés aux modes propagatifs. Cela revient à sélectionner les données de champ lointain mentionnées dans la Remarque 3.5. Pour réaliser cela, nous avons besoin de la proposition suivante qui fait intervenir les composantes diffractées des champs perturbés  $\varphi_{n,+}^p$  (respectivement  $\varphi_{n,-}^p$ ) solutions du problème (2.20) (respectivement (2.21)).

**Proposition 3.14**

Le champ diffracté  $\varphi^d(\cdot, \mathbf{y}) := \varphi(\cdot, \mathbf{y}) - \mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y})$  associé au champ total  $\varphi(\cdot, \mathbf{y})$  solution de (3.6) s'écrit, excepté pour un ensemble dénombrable de fréquences :

$$\varphi^d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} -\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\tilde{\lambda}_n} \varphi_{n,+}^d(\mathbf{x}) \tilde{\varphi}_{n,-}(\mathbf{y}) & \text{pour } y_1 = -R, x_1 > -R \\ -\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\lambda_n} \varphi_{n,-}^d(\mathbf{x}) \varphi_{n,+}(\mathbf{y}) & \text{pour } y_1 = R, x_1 < R, \end{cases}$$

où  $\varphi_{n,+}^d$  et  $\varphi_{n,-}^d$  sont les solutions du problème (2.16) pour respectivement  $f = -\varphi_{n,+}^r|_{\partial D}$  et  $f = -\varphi_{n,-}^r|_{\partial D}$ .

*Démonstration.* Considérons le cas  $y_1 = -R$  et  $x_1 > -R$ , l'autre étant similaire. Pour cela on introduit :

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\tilde{\lambda}_n} \varphi_{n,+}^d(\mathbf{x}) \tilde{\varphi}_{n,-}(\mathbf{y}),$$

dont la trace sur  $\partial D$  s'écrit :

$$H(\cdot, \mathbf{y})|_{\partial D} = -\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\tilde{\lambda}_n} \varphi_{n,+}^d|_{\partial D} \tilde{\varphi}_{n,-}(\mathbf{y}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\tilde{\lambda}_n} \varphi_{n,+}^r|_{\partial D} \tilde{\varphi}_{n,-}(\mathbf{y}) = -\mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y})|_{\partial D},$$

où la dernière égalité est obtenue à l'aide de la Proposition 3.3. Par unicité de la solution du problème (2.16) en dehors d'un ensemble au plus dénombrable de fréquences, on en déduit que  $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi^d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  pour  $x_1 > y_1 = -R$ .  $\square$

À l'aide de la décomposition de  $\varphi^d(\cdot, \mathbf{y})$  sur les champs diffractés associés aux champs de référence donnée par la Proposition 3.14, nous sommes en mesure de décomposer l'opérateur de champ proche sur les modes.

**Lemme 3.15**

Pour  $\hat{h} = (\hat{h}^-, \hat{h}^+) \in L^2(\Sigma_{-R}) \times L^2(\Sigma_R)$ , l'opérateur de champ proche en configuration full-scattering s'écrit :

$$(N\hat{h})(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2\tilde{\lambda}_n} (S_n^+)_m^- h_n^- + \frac{e^{\lambda_n R}}{2\lambda_n} (S_n^-)_m^- h_n^+ \right) \tilde{\varphi}_m(x_2) & \text{si } \mathbf{x} \in \Sigma_{-R} \\ -\sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2\tilde{\lambda}_n} (S_n^+)_m^+ h_n^- + \frac{e^{\lambda_n R}}{2\lambda_n} (S_n^-)_m^+ h_n^+ \right) \varphi_m(x_2) & \text{si } \mathbf{x} \in \Sigma_R, \end{cases}$$

où les coefficients de la décomposition sont donnés par :

$$\hat{h}^- = \sum_{n \in \mathbb{N}} h_n^- \tilde{\varphi}_n, \quad \hat{h}^+ = \sum_{n \in \mathbb{N}} h_n^+ \varphi_n,$$

et :

$$\varphi_{n,\pm}^d(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sum_{m \in \mathbb{N}} (S_n^\pm)_m^- \tilde{\varphi}_m(x_2) & \text{si } \mathbf{x} \in \Sigma_{-R} \\ \sum_{m \in \mathbb{N}} (S_n^\pm)_m^+ \varphi_m(x_2) & \text{si } \mathbf{x} \in \Sigma_R. \end{cases}$$

**Remarque 3.16** Il est important de souligner qu'il est strictement équivalent :

- en full-scattering : de mesurer  $\varphi^d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ,  $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\Sigma_{-R} \cup \Sigma_R)^2$  et les projections modales des champs  $\varphi_{n,+}^d$  et  $\varphi_{n,-}^d$  sur  $\Sigma_{-R}$  et  $\Sigma_R$ ;
- en back-scattering : de mesurer  $\varphi^d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ,  $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\Sigma_{-R})^2$  et les projections modales des champs  $\varphi_{n,+}^d$  sur  $\Sigma_{-R}$ .

À l'aide de la Proposition 3.3 et du Lemme 3.4, on peut donner deux expressions de la fonction test  $\mathcal{G}(\cdot, \mathbf{z})|_{\hat{\Sigma}}$ .

**Lemme 3.17**

(i) Formules obtenues sans utiliser la réciprocity de la fonction de Green :

- pour  $\mathbf{x} \in \Sigma_{-R}$  et  $\mathbf{z} \in \Omega_R$  :

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \begin{cases} - \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e^{-\tilde{\lambda}_n z_1}}{2\tilde{\lambda}_n} (\varphi_{n,+}^r, \tilde{\varphi}_m)_{L^2(\Sigma_{-R})} \tilde{\varphi}_n(z_2) \tilde{\varphi}_m(x_2) \\ - \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\tilde{\lambda}_m} (e^{\tilde{\lambda}_m(R+z_1)} - e^{-\tilde{\lambda}_m(R+z_1)}) \tilde{\varphi}_m(z_2) \tilde{\varphi}_m(x_2) & \text{si } z_1 \in (-R, 0) \\ - \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e^{\lambda_n z_1}}{2\lambda_n} (\varphi_{n,-}^r, \tilde{\varphi}_m)_{L^2(\Sigma_{-R})} \varphi_n(z_2) \tilde{\varphi}_m(x_2) & \text{si } z_1 \in (0, R), \end{cases}$$

- pour  $\mathbf{x} \in \Sigma_R$  et  $\mathbf{z} \in \Omega_R$  :

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \begin{cases} - \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e^{-\tilde{\lambda}_n z_1}}{2\tilde{\lambda}_n} (\varphi_{n,+}^r, \varphi_m)_{L^2(\Sigma_R)} \tilde{\varphi}_n(z_2) \varphi_m(x_2) & \text{si } z_1 \in (-R, 0) \\ - \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e^{\lambda_n z_1}}{2\lambda_n} (\varphi_{n,-}^r, \varphi_m)_{L^2(\Sigma_R)} \varphi_n(z_2) \varphi_m(x_2) \\ - \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\lambda_m} (e^{\lambda_m(R-z_1)} - e^{-\tilde{\lambda}_m(R-z_1)}) \varphi_m(z_2) \varphi_m(x_2) & \text{si } z_1 \in (0, R). \end{cases}$$

(ii) Formules obtenues en utilisant la réciprocity de la fonction de Green :

- pour  $\mathbf{x} \in \Sigma_{-R}$  et  $\mathbf{z} \in \Omega_R$  :

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2\tilde{\lambda}_n} \varphi_{n,+}^r(\mathbf{z}) \tilde{\varphi}_n(x_2),$$

- pour  $\mathbf{x} \in \Sigma_R$  et  $\mathbf{z} \in \Omega_R$  :

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e^{\lambda_n R}}{2\lambda_n} \varphi_{n,-}^r(\mathbf{z}) \varphi_n(x_2).$$

Dans ces expressions,  $\varphi_{n,+}^r$  et  $\varphi_{n,-}^r$  sont les champs de référence solutions de respectivement (2.2) et (2.3).

*Démonstration.* Les formules (i) sans réciprocity s'obtiennent simplement des expressions de la fonction de Green données dans la Proposition 3.3, en y injectant les décompositions modales des traces des champs de référence sur  $\Sigma_{\pm R}$ . Les expressions (ii) s'obtiennent en écrivant la relation de réciprocity  $\mathcal{G}(x, z) = \mathcal{G}(z, x)$  donnée par le Lemme 3.4, puis en utilisant à nouveau les formules données dans la Proposition 3.3. On obtient dans ce cas une expression simplifiée.  $\square$

Avec les Lemmes 3.15 et 3.17, nous pouvons projeter facilement l'équation de champ proche (3.7) sur les modes des guides droit et gauche. Nous choisissons de projeter  $\mathcal{G}(\cdot, z)|_{\tilde{\Sigma}}$  sur les modes en utilisant les expressions (ii) données par le Lemme 3.17. Ce choix a en effet l'avantage de conduire à une projection sur les modes ne faisant pas intervenir de série, ce qui permet d'éviter les questions de troncature. Notons cependant que l'expression de la trace de la fonction de Green donnée par les expressions (i) ne fait intervenir que la trace des champs de référence sur la section des mesures. En configuration full-scattering, l'équation de champ proche s'écrit alors sous la forme du système infini :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (h_n^-)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{C}) \text{ et } (h_n^+)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{C}) \text{ tel que} \\ \forall m \in \mathbb{N}, \quad & \begin{cases} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2\tilde{\lambda}_n} (S_n^+)_m^- h_n^- + \frac{e^{\lambda_n R}}{2\lambda_n} (S_n^-)_m^- h_n^+ \right) = D_m^-(z) \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2\tilde{\lambda}_n} (S_n^+)_m^+ h_n^- + \frac{e^{\lambda_n R}}{2\lambda_n} (S_n^-)_m^+ h_n^+ \right) = D_m^+(z), \end{cases} \end{aligned} \quad (3.9)$$

où pour tout  $m \in \mathbb{N}$  :

$$D_m^-(z) = \frac{e^{\tilde{\lambda}_m R}}{2\tilde{\lambda}_m} \varphi_{m,+}^r(z), \quad D_m^+(z) = \frac{e^{\lambda_m R}}{2\lambda_m} \varphi_{m,-}^r(z). \quad (3.10)$$

À ce stade, rappelons que l'opérateur de champ proche est compact. L'équation de champ proche et a fortiori sa formulation modale équivalente (3.9) doit donc être régularisée. Une "régularisation physique" basée sur les modes a été proposée dans [BL08]. Puisqu'on fait l'hypothèse qu'on travaille avec des mesures en champ lointain (voir Remarque 3.5), on n'envoie pour champ incident que les modes propagatifs, et on ne mesure que les composantes propagatives des champs diffractés associés. Cela revient à ne conserver que les équations associées aux champs de référence induits par un mode propagatif, et à tronquer les séries en ne conservant que les  $\tilde{N}_p$  premiers termes pour les mesures sur  $\Sigma_{-R}$ , et les  $N_p$  premiers termes pour les mesures effectuées sur  $\Sigma_R$ . Le système infini est alors ramené au système matriciel carré :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (H^-, H^+) \in \mathbb{C}^{\tilde{N}_p} \times \mathbb{C}^{N_p} \text{ tel que} \\ & \begin{pmatrix} A^{+-} & A^{--} \\ A^{++} & A^{-+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H^- \\ H^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^-(z) \\ D^+(z) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

La matrice de ce système est appelée *matrice de scattering* et ses quatre blocs  $A^{+-} \in \mathbb{C}^{\tilde{N}_p \times \tilde{N}_p}$ ,  $A^{--} \in \mathbb{C}^{N_p \times \tilde{N}_p}$ ,  $A^{++} \in \mathbb{C}^{\tilde{N}_p \times N_p}$  et  $A^{-+} \in \mathbb{C}^{N_p \times N_p}$  sont définis par :

$$A_{mn}^{+-} = \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2\tilde{\lambda}_n} (S_n^+)_m^-, \quad A_{mn}^{--} = \frac{e^{\lambda_n R}}{2\lambda_n} (S_n^-)_m^-, \quad A_{mn}^{++} = \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2\tilde{\lambda}_n} (S_n^+)_m^+ \text{ et } A_{mn}^{-+} = \frac{e^{\lambda_n R}}{2\lambda_n} (S_n^-)_m^+, \quad (3.12)$$

les vecteurs solutions  $H^- \in \mathbb{C}^{\tilde{N}_p}$  et  $H^+ \in \mathbb{C}^{N_p}$  par :

$$H_n^- = h_n^- \text{ et } H_n^+ = h_n^+,$$



et enfin les vecteurs du second membre  $D^- \in \mathbb{C}^{\tilde{N}_p}$  et  $D^+ \in \mathbb{C}^{N_p}$  sont définis par (3.10). L'équation de champ proche tronquée (3.11) est désormais une *équation de champ lointain*, car elle ne prend plus en compte les modes évanescents. En back-scattering, l'équation matricielle (3.11) se simplifie en :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } H^- \in \mathbb{C}^{\tilde{N}_p} \text{ tel que} \\ &A^{+-}H^- = D^-(z). \end{aligned} \quad (3.13)$$

**Remarque 3.18** *Comme pour les autres méthodes de discrétisation de la LSM, nous ne savons pas démontrer d'analogue du Théorème 3.13 pour justifier la procédure d'imagerie utilisant l'équation (3.11). La pratique a cependant montré que celle-ci est fonctionnelle pour imager une grande variété de défauts avec des mesures de champ lointain.*

## 3.4 Étude numérique

Nous concluons cette partie en présentant quelques résultats numériques d'imagerie obtenus à l'aide de la formulation modale de la LSM proposée dans la section précédente.

### 3.4.1 Remarques préliminaires

Afin de tester la méthode d'imagerie proposée, il est nécessaire d'avoir des données de champs diffractés. Pour cela, nous synthétisons numériquement les données nécessaires en résolvant le problème direct à l'aide des outils présentés dans le chapitre 2. Plus précisément, les quatre blocs de la matrice de scattering  $A^{+-}$ ,  $A^{-+}$ ,  $A^{++}$  et  $A^{--}$  définis par (3.12) sont calculés par éléments finis dans un domaine borné à l'aide d'opérateurs DtN. La méthode d'imagerie sera testée avec des données bruitées pour se rapprocher de l'imagerie en conditions réelles. Ces données bruitées sont générées à partir des données simulées (exactes à l'erreur de discrétisation près), en suivant la procédure détaillée dans [BL08] que l'on rappelle. Soit  $\varphi_h^d$  la trace d'un champ diffracté sur la section des mesures  $\hat{\Sigma}$  calculée par éléments finis :

1. on simule un bruit Gaussien ponctuel noté  $b_h$  s'appuyant sur un maillage de  $\hat{\Sigma}$ ;
2. la donnée bruitée est alors définie par  $\varphi_h^{d,\delta} := \varphi_h^d + \alpha b_h$  où  $\alpha > 0$  est choisi de sorte que  $\|\varphi_h^{d,\delta} - \varphi_h^d\|_{L^2(\hat{\Sigma})} = \sigma \|\varphi_h^d\|_{L^2(\hat{\Sigma})}$  et  $0 \leq \sigma < 1$  est le bruit relatif imposé.

Lorsqu'on utilise des données bruitées et un nombre de modes propagatifs important, la régularisation physique proposée de l'équation de champ proche n'est pas suffisante dans certains cas. Pour  $z \in \mathcal{G}^e$ , l'équation de champ lointain (3.11) est notée de façon condensée :

$$AH = D(z), \quad (3.14)$$

avec  $A$  la matrice des données exactes. La matrice  $A_\delta$  des données bruitées calculée selon la procédure décrite ci-dessus vérifie  $\|A_\delta - A\| \leq \delta$  où  $\|\cdot\|$  représente la norme matricielle usuelle. En pratique, la quantité  $\delta$  est obtenue en évaluant numériquement la norme matricielle. La seconde régularisation consiste alors à résoudre l'équation de Tikhonov associée à (3.14) :

$$(A_\delta^* A_\delta) H_\varepsilon + \varepsilon H_\varepsilon = A_\delta^* D(z), \quad (3.15)$$

dans laquelle  $A_\delta^*$  est la conjuguée hermitienne de  $A_\delta$  et  $\varepsilon > 0$  est choisi selon le principe de Morozov détaillé dans [CPP97]. Cela consiste à dire que le paramètre de régularisation  $\varepsilon$  optimal pour le niveau de bruit considéré est l'unique racine de la fonction réelle :

$$\varepsilon \mapsto \mu(\varepsilon) := \|A_\delta H_\varepsilon - D(z)\|_2 - \delta^2 \|H_\varepsilon\|_2.$$



Si  $(\sigma_n, x_n, y_n)_{0 \leq n \leq M-1}$  est une décomposition en valeurs singulières de  $A_\delta$ , alors cette fonction s'écrit sous la forme :

$$\mu(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{M-1} \frac{\varepsilon^2 - \delta^2 \sigma_n^2}{(\sigma_n^2 + \varepsilon)^2} |(D(\mathbf{z}), y_n)|^2,$$

où  $M$  est égal à  $\tilde{N}_p$  en back-scattering et  $\tilde{N}_p + N_p$  en full-scattering. Le paramètre de régularisation  $\varepsilon$  peut donc être en pratique estimé à l'aide d'une simple dichotomie puisque  $\mu$  est monotone. Il ne reste plus qu'à calculer le second membre donné par les formules (3.10) faisant intervenir les champs de référence gauche et droit. Ils sont calculés numériquement dans un domaine borné tronqué avec des opérateurs DtN lors d'une phase préalable à l'imagerie. Lors de l'échantillonnage, il ne reste plus qu'à évaluer ces champs au point d'échantillonnage courant. Il est important de souligner que cette méthode de calcul de la fonction de Green est très intéressante, car elle permet un échantillonnage très peu coûteux en temps et en espace, en particulier si le domaine occupé par la jonction considéré est grand. En pratique, nous normalisons les seconds membres  $D(\mathbf{z})$  par leur norme infinie, ce qui ne change pas leur appartenance ou non à l'image de l'opérateur de champ proche, mais améliore un peu les résultats d'imagerie obtenus. Pour toutes les images montrées dans la suite, nous visualisons les lignes de niveau de la fonction indicatrice :

$$\mathcal{I} : \mathbf{z} \mapsto \text{Log}(1/\|H_\varepsilon(\mathbf{z})\|_2), \quad (3.16)$$

où  $H_\varepsilon(\mathbf{z})$  est la solution de (3.15) dont nous avons précisé la dépendance implicite au point d'échantillonnage  $\mathbf{z}$  et où  $\|\cdot\|_2$  est la norme  $L^2$  discrète. Au vu du Théorème 3.13, nous observerons que  $\mathcal{I}(\mathbf{z})$  prend des valeurs négatives grandes en module lorsque  $\mathbf{z} \notin D$ , ce qui signifie que les lignes de niveau de  $\mathcal{I}$  permettent d'identifier le défaut.

Précisons les paramètres utilisés pour résoudre les problèmes directs et inverses qui suivent. Les champs de référence et champs diffractés associés sont approximés par des éléments finis de la Lagrange  $\mathbb{P}^2$  avec au moins 15 points de discrétisation par longueur d'onde. La troncature des DtN se fait en conservant tous les modes propagatifs et en rajoutant 15 modes évanescents.

## 3.4.2 Résultats

### Impact de la fréquence et du bruit en full-scattering

On commence cette étude numérique en considérant un cas d'imagerie en configuration full-scattering. Pour cela on se donne une jonction de guides de demi-épaisseur  $h_- = 0,3$  et  $h_+ = 0,5$  dans laquelle on essaye d'imager deux obstacles de Dirichlet. Les mesures sont effectuées à une distance  $R = 1,2$  de la jonction. On commence par étudier l'impact de la fréquence sur la qualité de la reconstruction en présence d'un bruit ayant une amplitude de 1% (i.e.  $\sigma = 0,01$ ). Nous constatons Figure 3.3 qu'augmenter la fréquence, ce qui revient à augmenter le nombre de modes propagatifs, améliore la qualité de reconstruction : davantage de données sont à notre disposition. Cela met en évidence que la LSM est d'autant plus performante que la fréquence est élevée. De plus, on observe sur l'image de droite que seule la frontière de l'obstacle à droite est reconstruite. Cette reconstruction pourrait paraître au premier abord moins bonne que sur l'image de gauche, mais elle est en réalité meilleure dans le sens où elle est conforme à la théorie (voir le point (ii) du Théorème 3.13).

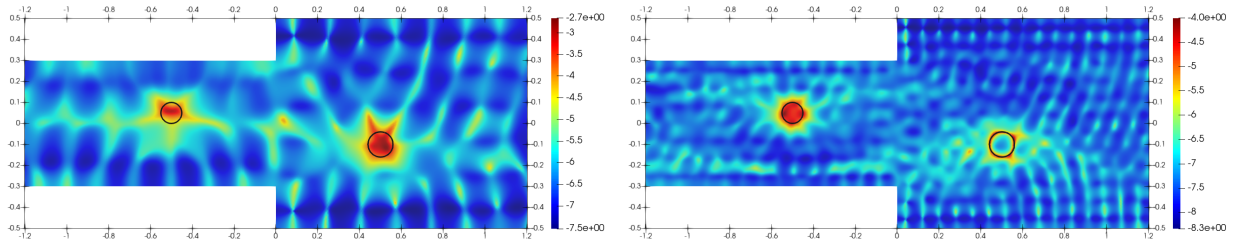


FIGURE 3.3: Full-scattering,  $\sigma = 0,01$ . Gauche :  $\kappa_- = \kappa_+ = 20$ ,  $\tilde{N}_p = 4$ ,  $N_p = 7$ . Droite :  $\kappa_- = \kappa_+ = 40$ ,  $\tilde{N}_p = 8$ ,  $N_p = 13$ .

Ensuite, il est important en vue des applications d'étudier la robustesse de la méthode par rapport au niveau de bruit. Pour cela, on choisit  $\kappa_- = \kappa_+ = 30$ , ce qui conduit à  $\tilde{N}_p = 6$  et  $N_p = 10$ . La détérioration de la qualité de reconstruction avec le bruit est légèrement visible sur les résultats de la Figure 3.4, en particulier en regardant les valeurs prises par la fonction indicatrice, qui deviennent de moins en moins grandes en valeur absolue en dehors des défauts lorsque le bruit augmente. Cela réduit le contraste de l'image et pourrait rendre plus difficile l'identification des défauts pour des obstacles plus complexes. On peut toutefois dire que la méthode est relativement robuste au bruit. Ces conclusions restent valables en back-scattering.

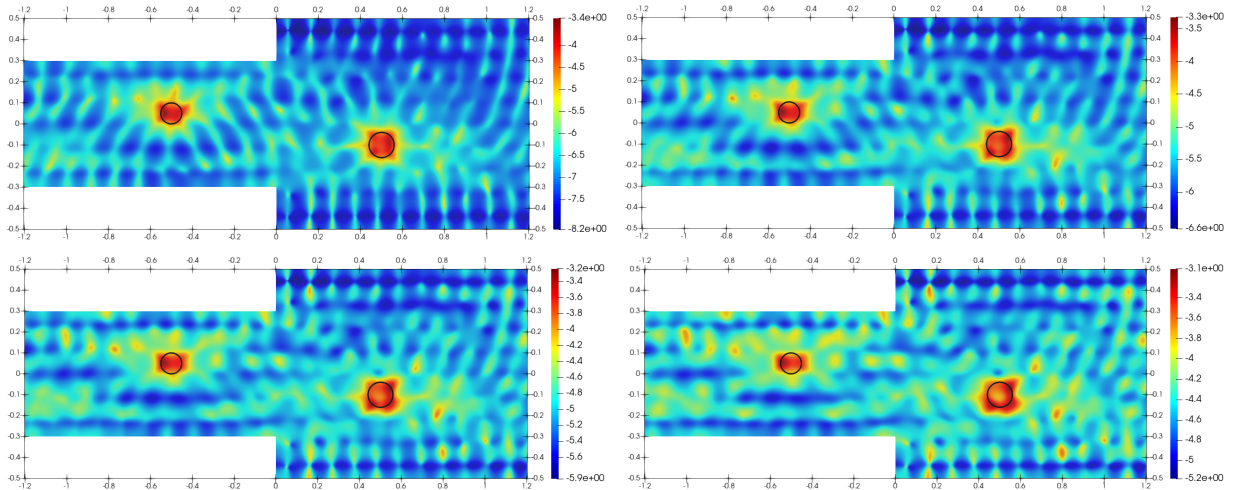


FIGURE 3.4: Full-scattering. Haut : gauche  $\sigma = 0,01$ , droite  $\sigma = 0,05$ . Bas : gauche  $\sigma = 0,1$ , droite  $\sigma = 0,2$ .

### Impact du nombre de modes en back-scattering

Nous poursuivons cette étude numérique par l'imagerie en configuration back-scattering. Pour cela, on ne considère plus qu'un obstacle de Dirichlet dans le demi-guide droit. Les mesures sont effectuées à gauche, toujours à une distance  $R = 1,2$  de la jonction. On travaille cette fois en présence de 5% de bruit. La demi-épaisseur du demi-guide droit est fixée à  $h_+ = 0,5$  et le nombre d'onde à droite à  $\kappa_+ = 40$ ; il y a dans ce cas  $N_p = 11$  modes propagatifs. Les résultats de la Figure 3.5 mettent en évidence la possibilité d'imager un obstacle à droite avec des mesures à gauche, mais d'une façon cependant dégradée par rapport à une configuration full-scattering. Cela s'explique par l'utilisation d'une quantité de données quatre fois inférieure lorsqu'on passe de (3.11) en full-scattering à (3.13) en back-scattering. Augmenter le nombre de modes propagatifs à gauche en augmentant soit la demi-épaisseur

du demi-guide, soit le nombre d'onde, permet d'améliorer la qualité de la reconstruction, mais d'une façon bien plus prononcée pour la première possibilité.

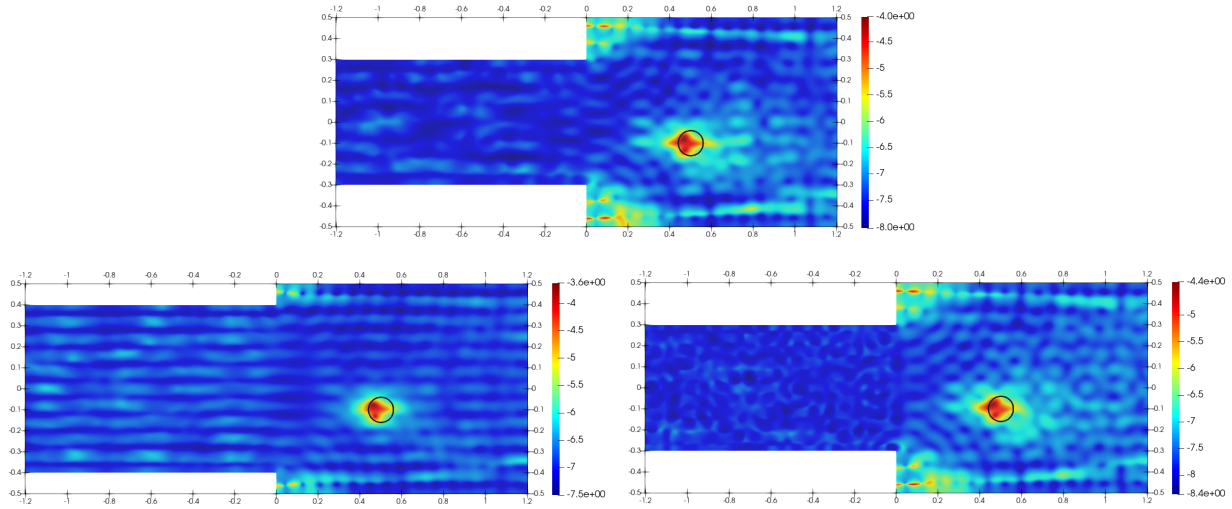


FIGURE 3.5: Back-scattering. Haut : gauche  $h_- = 0,3$  ,  $\kappa_- = 40$  ,  $\tilde{N}_p = 8$ . Bas : gauche  $h_- = 0,4$  ,  $\kappa_- = 40$  ,  $\tilde{N}_p = 11$ , droite  $h_- = 0,3$  ,  $\kappa_- = 55$  ,  $\tilde{N}_p = 11$ .

**Remarque 3.19** Des expériences numériques supplémentaires sont présentées dans [BFR21], en particulier pour la jonction de trois demi-guides.

## **Deuxième partie**

# **Ondes acoustiques dans un guide partiellement enfoui**

Dans la première partie de la thèse, nous nous sommes intéressés à la jonction de deux guides acoustiques fermés. Ce travail a permis de décrire par exemple la propagation des ultrasons dans la jonction de deux plaques à l'air libre (modélisé au premier ordre par du vide) de propriétés différentes. Rappelons qu'on parle de guides fermés, car les ondes acoustiques restent confinées dans la structure sans rayonner d'énergie dans le milieu environnant. Dans le **chapitre 1**, nous avons introduit et étudié des objets particuliers appelés modes des demi-guides. L'étude de ces objets est particulièrement intéressante pour avoir une bonne compréhension de la propagation des ondes dans ces structures. Nous nous sommes appuyés sur cette étude au cours du **chapitre 2** pour résoudre le problème direct afin d'être en mesure de synthétiser numériquement des mesures de champs perturbés par un défaut. Enfin, nous avons proposé dans le **chapitre 3** une résolution du problème inverse à l'aide d'une formulation modale de la Linear Sampling Method (LSM). Cette méthode a permis de reconstruire des défauts à l'aide de données simulées.

Nous proposons dans cette deuxième partie de nous intéresser à la propagation des ondes dans des structures plus complexes qu'on rencontre par exemple en génie civil. Il s'agit de structures élancées dont une partie est à l'air libre et une autre est enfouie dans un milieu environnant supposé infini ayant des propriétés différentes. Par exemple, il pourrait s'agir d'un câble ou d'une plaque d'acier partiellement enfoui dans du béton. La partie de la structure à l'air libre peut être vue comme un demi-guide fermé et celle enfouie comme un demi-guide ouvert. Nous disons demi-guide ouvert puisqu'une partie des ondes qui se propage dans la structure peut fuir dans le milieu environnant. La structure globale peut ainsi être interprétée comme la jonction d'un demi-guide fermé et d'un demi-guide ouvert, ce dernier étant constitué du prolongement du demi-guide fermé appelé *cœur* et du milieu environnant parfois appelé *gaine*. Formalisons le modèle choisi pour décrire de telles structures dans une configuration 2D. On considère un demi-guide fermé gauche occupant le domaine  $\Omega_- := (-\infty, 0) \times \Sigma_-$  où la section est donnée par  $\Sigma_- = (-h_0, h_0)$  avec  $h_0 > 0$  et un demi-guide ouvert  $\Omega_+ := (0, \infty) \times \mathbb{R}$  de section infinie. On note  $\Omega^\infty := \Omega_- \cup \Sigma_{0-} \cup \Omega_+$  le domaine entier avec  $\Sigma_{0-} := \{0\} \times \Sigma_-$ . Le bord extérieur de la structure est noté  $\Gamma^\infty := \partial\Omega^\infty$ . Les coordonnées cartésiennes d'un point  $x$  du domaine  $\Omega^\infty$  sont notées  $x = (x_1, x_2)$ .

Afin de simplifier notre étude, nous allons comme dans la première partie considérer un modèle scalaire pouvant décrire par exemple la propagation des ondes dites SH (Shear Horizontal) en élasticité antiplane. L'obtention de ce modèle scalaire à partir des équations de l'élasticité sera détaillée dans la **Partie III** du mémoire. On suppose que le *coefficient de cisaillement*  $\mu$  ainsi que la densité  $\rho$  des matériaux sont constants par morceaux :

$$\mu(x_1, x_2) = \begin{cases} \mu_0 & \text{si } |x_2| < h_0 \\ \mu_\infty & \text{si } |x_2| > h_0, \end{cases} \quad \rho(x_1, x_2) = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } |x_2| < h_0 \\ \rho_\infty & \text{si } |x_2| > h_0, \end{cases}$$

avec des constantes  $\mu_0$ ,  $\mu_\infty$ ,  $\rho_0$  et  $\rho_\infty$  strictement positives.

**Remarque I2.1** *Nous aurions très bien pu considérer un milieu environnant ayant des propriétés mécaniques différentes de part et d'autre du cœur, mais nous ne traitons pas ce cas pour simplifier la présentation. Le cas des coefficients variables dans la direction transverse peut aussi être traité en faisant les hypothèses qu'ils sont bornés inférieurement et supérieurement par des constantes strictement positives et de plus constants à l'infini dans la direction transverse.*

La vitesse  $c$  des ondes SH donnée par  $c = \sqrt{\mu/\rho}$  est par conséquent constante par morceaux : on note  $c_0$  sa valeur dans le cœur de la structure et  $c_\infty$  celle dans le milieu

environnant. Le champ de déplacement associé aux ondes SH a une seule composante non nulle notée  $\tilde{u}$  qui est gouvernée en régime temporel par l'équation :

$$\rho \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\mu \nabla \tilde{u}) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega^\infty \times \mathbb{R}^+, \quad (\text{I2.1})$$

où  $\nabla$  et  $\operatorname{div}$  sont les opérateurs gradient et divergence. On s'intéresse à des solutions harmoniques de (I2.1) ayant la dépendance temporelle :

$$\tilde{u}(\mathbf{x}, t) = \Re e(u(\mathbf{x})e^{-i\omega t}), \quad (\text{I2.2})$$

où  $\omega \in \mathbb{R}$  est la fréquence angulaire. Le nombre d'onde donné par  $k := \omega/c$  est tout comme les autres constantes physiques constant par morceaux : sa valeur dans le cœur est notée  $k_0$  et celle dans le milieu environnant  $k_\infty$ . En injectant l'Ansatz (I2.2) dans (I2.1) puis en utilisant le fait que les coefficients du problème ne dépendent pas de la variable axiale, on trouve l'équation de Helmholtz :

$$\partial_{x_2}(\mu \partial_{x_2} u) + \mu \partial_{x_1}^2 u + \mu k^2 u = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega^\infty. \quad (\text{I2.3})$$

Une telle configuration est représentée Figure I2.1. L'étude des problèmes de diffraction

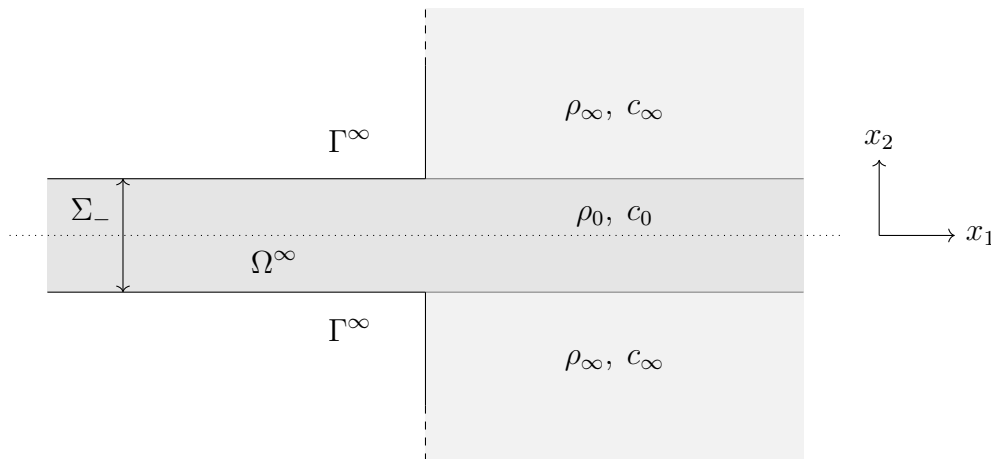


FIGURE I2.1: Géométrie 2D d'un guide partiellement enfoui.

gouvernés par (I2.3) dans la partie fermée de la structure a été conduite dans le chapitre 2 et celle dans la partie ouverte dans [Gou10]. Dans un premier temps, une analyse modale du guide ouvert a mis en évidence l'existence de plusieurs types de modes traduisant plusieurs aspects de la propagation des ondes dans les guides ouverts. Lorsque  $c_0 < c_\infty$ , il existe des modes appelés *modes guidés*, qui tout comme les modes propagatifs d'un guide fermé se propagent sans perte dans la direction axiale du guide, mais ont ici la particularité d'être confinés dans le cœur de la structure. Dans tous les cas, il existe aussi des modes appelés *modes de radiation*, qui sont oscillants à l'infini dans la direction transverse du guide et qui traduisent que les ondes peuvent se propager dans le milieu environnant. D'un point de vue numérique, il est nécessaire de se ramener à un domaine borné dans la direction transverse. La stratégie adoptée pour cela dans [Gou10] se décline en deux temps. Dans un premier temps, des *couches parfaitement adaptées*, en anglais *Perfectly Matched Layers* (PML), infinies sont introduites dans la direction transverse du guide ouvert. Cela revient à effectuer une dilatation analytique qui va transformer l'équation (I2.3) en l'équation :

$$\alpha \partial_{x_2}(\alpha \mu \partial_{x_2} u) + \mu \partial_{x_1}^2 u + \mu k^2 u = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega^\infty, \quad (\text{I2.4})$$



où  $\alpha(x_1, x_2)$  est un coefficient complexe égal à 1 lorsque  $|x_2| < h_1$  pour un réel  $h_1 > h_0$  et complexe lorsque  $|x_2| \geq h_1$ . L'effet de cette dilatation analytique est d'atténuer les ondes dans la direction transverse, au sens où elle transforme certaines fonctions exponentielles oscillantes en exponentielles décroissantes. Pour cette configuration, il existe toujours des modes guidés lorsque la condition sur les vitesses des ondes mentionnée précédemment est respectée. Les PML révèlent de nouveaux modes, appelés *modes à fuite*, qui sont simultanément décroissants dans les directions axiale et transverse du guide; ils traduisent la fuite d'une partie des ondes dans le milieu environnant. Enfin, il y est aussi mis en évidence l'existence de modes oscillants à l'infini dans la direction transverse des PML. Ces modes-là ne sont quant à eux pas intrinsèques au problème physique de départ puisqu'ils dépendent des paramètres non physiques  $h_1$  et  $\alpha$  des PML. Dans un second temps, les PML sont tronquées dans la direction transverse en  $|x_2| = h_2$  où  $h_2 > h_1$  est choisi suffisamment grand pour que les ondes soient suffisamment atténuées en bout de PML pour ne pas produire de réflexions parasites. On choisit d'imposer en bout de PML la condition de Neumann homogène :  $\partial_{x_2} u = 0$ . À l'issue de cette démarche en deux temps, le demi-guide ouvert droit est remplacé par un demi-guide fermé noté  $\Omega_+ := (0, +\infty) \times \Sigma_+$  avec  $\Sigma_+ = (-h_2, h_2)$  et la structure totale notée  $\Omega := \Omega_- \cup \Sigma_{0-} \cup \Omega_+$  peut donc être interprétée comme la jonction de deux guides fermés. Une telle configuration est décrite sur la Figure I2.2. Mais contrairement au cas traité dans la

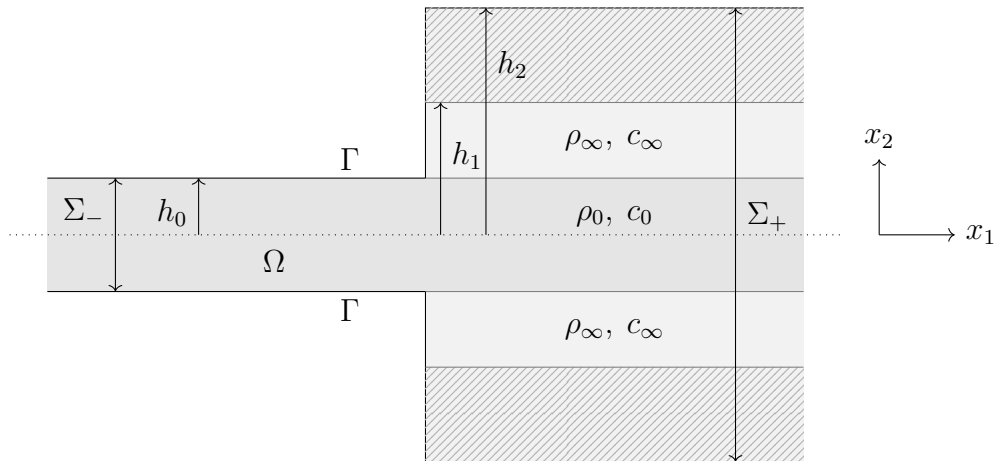


FIGURE I2.2: Géométrie 2D d'un guide partiellement enfoui tronqué dans la direction transverse par des PML bornées.

première partie du manuscrit, les coefficients du milieu à droite sont constants par morceaux dans la direction transverse et l'introduction de la PML fait apparaître un coefficient complexe. Le second point rend beaucoup plus difficile l'analyse des modes à droite, mais aussi l'étude des problèmes de diffraction.

Nous débuterons cette partie par une étude modale du demi-guide droit au [chapitre 4](#), en rappelant les principaux résultats obtenus dans [\[Gou10\]](#) pour le guide non borné dans la direction transverse, puis non borné, mais avec des PML infinies et enfin borné avec des PML finies. Quelques éléments d'analyse supplémentaires seront développés pour le guide tronqué avec des PML finies en vue de l'étude des problèmes direct et inverse. L'analyse modale du demi-guide gauche a quant à elle été abordée au [chapitre 1](#). Ensuite, nous nous intéresserons dans le [chapitre 5](#) aux problèmes de diffraction dans une jonction tronquée à droite dans la direction transverse par des PML. Nous étudierons le caractère bien posé de ces problèmes en utilisant la théorie de Kondratiev et introduirons un opérateur DtN avec recouvrement qui sera étudié théoriquement et numériquement. Nous aborderons enfin

le problème inverse au **chapitre 6** en expliquant comment adapter la méthode d'imagerie développée dans le **chapitre 3**.

Mentionnons enfin que le travail développé dans le **chapitre 5** a fait l'objet de l'article [Bou+23] et celui du **chapitre 6** de l'article [BFR22].





# Chapitre 4

## Analyse modale dans les guides acoustiques ouverts

### Sommaire

---

4.1	Le guide ouvert de la configuration réelle . . . . .	62
4.1.1	Détermination des modes à l'aide de la théorie spectrale . . . . .	63
4.1.2	Caractérisation du spectre à l'aide de la relation de dispersion . . . . .	65
4.2	Le guide ouvert avec des PML infinies . . . . .	67
4.2.1	Prolongement analytique de la résolvante dans l'espace libre au moyen de celui de la racine carrée . . . . .	69
4.2.2	Prolongement méromorphe de la résolvante du guide ouvert réel par l'introduction de PML . . . . .	71
4.2.3	Les modes à fuite : des résonances complexes du prolongement méromorphe de la résolvante dévoilées par les PML . . . . .	76
4.3	Le guide ouvert tronqué avec des PML finies . . . . .	79
4.3.1	Convergence du spectre du problème avec PML tronquées vers le spectre du problème avec PML infinies . . . . .	80
4.3.2	Propriétés supplémentaires du spectre en passant par un symbole . . . . .	85
4.4	Étude numérique . . . . .	89
4.4.1	Calcul des modes . . . . .	89
4.4.2	Pollution du spectre . . . . .	92
4.4.3	Filtrage des modes à fuite . . . . .	93
4.4.4	Sens de propagation des modes à fuite . . . . .	95

---

Nous avons vu dans la première partie du manuscrit que les modes sont nécessaires pour développer des outils de simulation dans les guides d'ondes, mais aussi pour proposer une formulation efficace de la Linear Sampling Method qui est la méthode d'imagerie retenue dans ce travail. Dans le cas d'un guide fermé à coefficients réels constants, nous avons pu conduire au [chapitre 1](#) une analyse modale complète à l'aide de la théorie spectrale des opérateurs autoadjoints. On a pu voir en particulier qu'il existe un ensemble dénombrable de modes qu'on peut classer en deux groupes : les modes propagatifs et les modes évanescents. Les premiers se propagent sur de longues distances tandis que les seconds sont exponentiellement décroissants dans la direction axiale du guide. Le cas considéré dans cette partie est beaucoup moins standard et conduit à une analyse modale plus compliquée, mais plus riche. On s'intéressera premièrement dans ce chapitre aux modes du guide ouvert de la configuration

réelle, c'est-à-dire non bornée dans la direction transverse. Dans une seconde section, nous définirons des objets appelés modes à fuite, qui ne sont pas des modes du problème initial, mais qui sont définis à partir de résonances complexes du système. Nous expliquerons comment ces modes, qui rendent compte de la fuite de l'énergie dans le milieu environnant, peuvent être révélés par l'introduction de PML infinies dans la direction transverse. Ensuite, nous tronquerons les PML introduites pour être en mesure de calculer les modes. Une analyse numérique du calcul de ces modes sera enfin conduite. Les résultats cités sans être démontrés sont directement issus de [Gou10].

## 4.1 Le guide ouvert de la configuration réelle

On considère un guide ouvert, c'est-à-dire non borné dans les directions transverse et longitudinale, occupant le plan  $\mathbb{R}^2$  et qui est de plus rectiligne. Il est constitué d'un *cœur* occupant le domaine  $\mathbb{R} \times (-h_0, h_0)$  avec  $h_0 > 0$  et d'une *gaine* qui occupe le domaine  $\mathbb{R} \times ((-\infty, -h_0) \cup (h_0, +\infty))$ . Les coefficients du problème sont constants par morceaux et donnés pour  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  par :

$$\mu(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mu_0 & \text{si } |x_2| < h_0 \\ \mu_\infty & \text{si } |x_2| > h_0, \end{cases} \quad c(\mathbf{x}) = \begin{cases} c_0 & \text{si } |x_2| < h_0 \\ c_\infty & \text{si } |x_2| > h_0, \end{cases} \quad k(\mathbf{x}) = \begin{cases} k_0 & \text{si } |x_2| < h_0 \\ k_\infty & \text{si } |x_2| > h_0, \end{cases}$$

où  $\mu_0, \mu_\infty, c_0, c_\infty, k_0$  et  $k_\infty$  sont des constantes strictement positives. Cette structure est représentée Figure 4.1. Comme dans le chapitre 1, on définit les modes comme des solutions

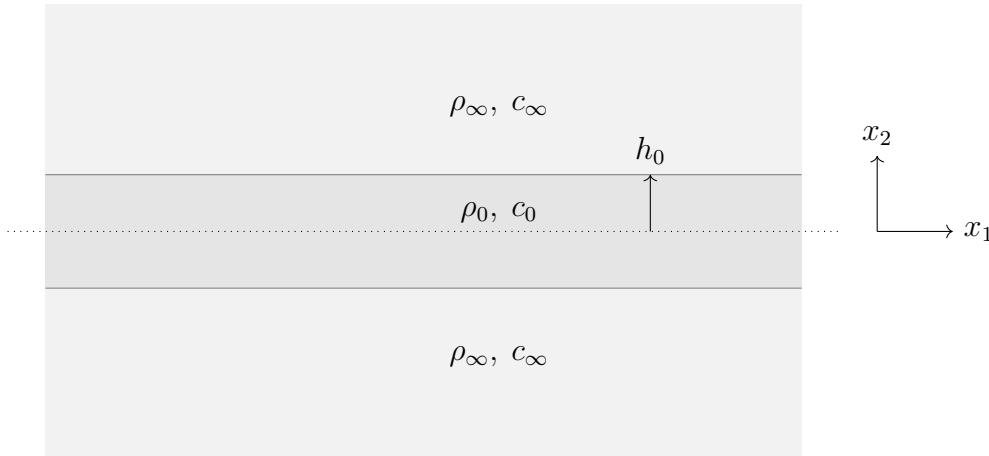


FIGURE 4.1: Géométrie 2D d'un guide ouvert.

à variables séparées  $u(x_1, x_2) = v(x_1)u(x_2)$  du problème homogène :

$$\partial_{x_2}(\mu \partial_{x_2} u) + \mu \partial_{x_1}^2 u + \mu k^2 u = 0, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Pour une telle solution, il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $v(x_1) = e^{\lambda x_1}$  et  $u$  non nulle solution du problème :

$$d_{x_2}(\mu d_{x_2} u) + \mu(k^2 + \lambda^2)u = 0, \quad x_2 \in \mathbb{R}.$$

De manière formelle, calculer un mode revient donc à résoudre le problème aux valeurs propres :

Trouver  $\xi \in \mathbb{C}$  et  $u$  non nulle tels que

$$-\frac{1}{\mu} d_{x_2}(\mu d_{x_2} u) - k^2 u = \xi u, \quad x_2 \in \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

puis à revenir au nombre d'onde longitudinal avec la relation  $\lambda^2 = \xi$ .

### 4.1.1 Détermination des modes à l'aide de la théorie spectrale

Pour étudier mathématiquement le problème (4.1), on introduit l'opérateur à domaine  $L_0$  de  $L^2(\mathbb{R})$  défini par :

$$L_0 u := -\frac{1}{\mu} d_{x_2}(\mu d_{x_2} u) - k^2 u, \quad (4.2)$$

pour  $u \in D(L_0) = \{v \in H^1(\mathbb{R}) \mid d_{x_2}(\mu d_{x_2} v) \in L^2(\mathbb{R})\}$ . L'étude des modes du guide ouvert est donc ramenée à celle du spectre de l'opérateur  $L_0$  qu'on appellera par la suite *opérateur transverse* du guide ouvert. Cette étude a été conduite de façon exhaustive dans [Gou10] pour un guide enfoui 3D, mais reste valable pour le cas 2D plus simple que nous traitons. Rappelons maintenant les principaux résultats qui y sont démontrés.

**Proposition 4.1** [Gou10, Proposition 1.2]

$L_0$  est un opérateur fermé à domaine dense dans  $L^2(\mathbb{R})$ . Il est de plus autoadjoint pour le produit scalaire  $(\mu \cdot, \cdot)_{L^2(\mathbb{R})}$ .

Notons  $\Lambda(L_0)$  le spectre de l'opérateur  $L_0$  et posons  $k_{\max} := \max(k_0, k_\infty)$ .

**Proposition 4.2** [Gou10, Proposition 1.3]

Le spectre de  $L_0$  satisfait :  $\Lambda(L_0) \subset [-k_{\max}^2, +\infty[$ .

Puisque  $L_0$  est autoadjoint, son spectre peut être décomposé en deux ensembles disjoints : le spectre discret noté  $\Lambda_d(L_0)$  et le spectre essentiel noté  $\Lambda_e(L_0)$ . On a alors :

$$\Lambda(L_0) = \Lambda_d(L_0) \cup \Lambda_e(L_0).$$

**Proposition 4.3** [Gou10, Proposition 1.4]

Le spectre essentiel est donné par  $\Lambda_e(L_0) = [-k_\infty^2, +\infty[$ .

La borne inférieure du spectre essentiel dépend donc du nombre d'onde dans la gaine, mais pas de celui dans le cœur. Ceci met en évidence que le spectre essentiel rend compte du comportement à l'infini des ondes, ce sur quoi nous reviendrons plus tard.

**Proposition 4.4** [Gou10, Proposition 1.5]

Il n'existe pas de fonction propre  $u \in D(L_0)$  satisfaisant  $L_0 u = \xi u$  pour tout  $\xi > -k_\infty^2$ .

En d'autres termes, ce résultat nous garantit qu'il ne peut pas y avoir de valeurs propres plongées dans le spectre essentiel.

**Proposition 4.5** [Gou10, Proposition 1.6]

Le spectre discret est un ensemble fini de valeurs propres. Il satisfait de plus :  $\Lambda_d(L_0) \subset ]-k_{\max}^2, -k_\infty^2[$ .

Ce résultat permet de donner une condition nécessaire et suffisante sur les vitesses dans le cœur et la gaine pour que le spectre discret soit non vide.

**Proposition 4.6** [Gou10, Proposition 1.8]

$\Lambda_d(L_0)$  est non vide si et seulement si  $c_0 < c_\infty$ .

Le spectre qui vient d'être décrit précédemment est représenté sur la Figure 4.2.

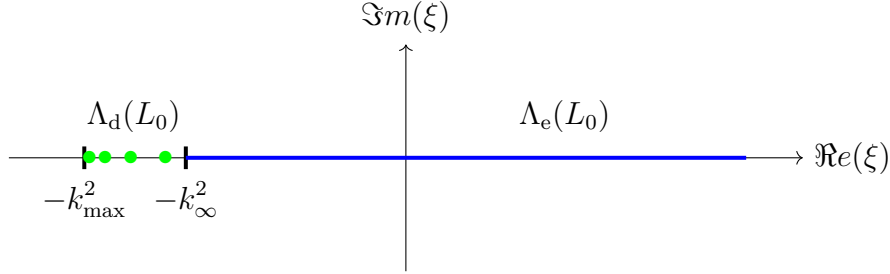


FIGURE 4.2: Représentation dans le plan complexe d'un exemple de spectre de l'opérateur  $L_0$  pour des matériaux satisfaisant  $c_0 < c_\infty$ . Ronds verts : spectre discret, demi-droite bleue : spectre essentiel.

Maintenant que le spectre de l'opérateur  $L_0$  est caractérisé, on revient aux modes et en particulier aux nombres d'ondes longitudinaux  $\lambda$  qui sont reliés aux éléments du spectre  $\xi$  par la relation  $\lambda^2 = \xi$ . Pour  $\xi \in \Lambda(L_0)$ , cette équation a deux solutions notées  $\pm\lambda$ . Regardons ensuite le comportement des modes dans les directions longitudinale et transverse en distinguant les cas  $\xi \in \Lambda_d(L_0)$  et  $\xi \in \Lambda_e(L_0)$ . On rappelle préalablement que les modes s'écrivent sous la forme  $u(x_1, x_2) = u(x_2)e^{\pm\lambda x_1}$  pour  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .

Si  $\xi \in \Lambda_d(L_0)$ , la Proposition 4.5 nous donne  $\xi \in ]-k_{\max}^2, -k_\infty^2[$ , ce qui donne par suite  $\pm\lambda \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Soit  $u \in D(L_0)$  un vecteur propre non nul associé à  $\xi$ . Puisque  $(\xi, u)$  est solution de (4.1), il existe des coefficients  $C^\pm, D^\pm$  complexes tels que :

$$u(x_2) = \begin{cases} C^- e^{-\gamma_\infty(\xi)x_2} + D^- e^{\gamma_\infty(\xi)x_2} & \text{si } x_2 < -h_0 \\ C^+ e^{-\gamma_\infty(\xi)x_2} + D^+ e^{\gamma_\infty(\xi)x_2} & \text{si } x_2 > h_0, \end{cases}$$

où on a défini :

$$\gamma_\infty(\xi) := \sqrt{-k_\infty^2 - \xi}.$$

Et comme  $u \in L^2(\mathbb{R})$ , on a nécessairement  $C^- = D^+ = 0$ . Ceci met en évidence le fait que le spectre discret est associé à des modes qui se propagent sans perte dans la direction axiale et qui sont localisés dans le cœur du guide, au sens où ils sont exponentiellement décroissants en dehors du cœur. Nous dirons dans la suite que ce sont des *modes guidés*. Dans les applications en génie civil, les matériaux qui constituent le cœur sont souvent plus rigides que ceux de la gaine. On peut penser par exemple à un cœur d'acier dans du béton. Ces configurations satisfont donc  $c_0 > c_\infty$ . Dans ce cas, la Proposition 4.6 nous donne  $\Lambda_d(L_0) = \emptyset$  et alors il n'y a pas de modes guidés dans la structure. Cela signifie que toutes les ondes qui se propagent dans la structure fuient dans la gaine : l'imagerie sur de longues distances en sera d'autant plus complexe.

Si  $\xi \in \Lambda_e(L_0)$ , nous savons par la Proposition 4.1.1 que  $\xi \in [-k_\infty^2, +\infty[$ . Deux sous-cas doivent être traités. Lorsque  $\xi < 0$ , on a  $\pm\lambda \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$  et alors le mode associé est propagatif. Quand on a en revanche  $\xi \geq 0$ , le nombre d'onde longitudinal satisfait  $\pm\lambda \in \mathbb{R}$  et alors le mode associé est dans la direction axiale du guide exponentiellement croissant ou décroissant

selon le sens dans lequel on regarde. Puisque  $\xi$  est dans le spectre essentiel, on ne peut pas construire de solution  $u$  de (4.1) qui soit dans  $D(L_0)$ . En revanche, on peut construire une solution algébrique s'écrivant dans la gaine :

$$u(x_2) = \begin{cases} C^- e^{-i\beta_\infty(\xi)x_2} + D^- e^{i\beta_\infty(\xi)x_2} & \text{si } x_2 < -h_0 \\ C^+ e^{-i\beta_\infty(\xi)x_2} + D^+ e^{i\beta_\infty(\xi)x_2} & \text{si } x_2 > h_0, \end{cases}$$

en ayant défini cette fois :

$$\beta_\infty(\xi) := \sqrt{k_\infty^2 + \xi},$$

puisque  $k_\infty^2 + \xi \geq 0$ . La solution construite est ainsi oscillante à l'infini dans la direction transverse. Elle n'est cependant plus dans  $L^2(\mathbb{R})$ , mais dans  $L^\infty(\mathbb{R})$  : c'est ce qu'on appelle une *fonction propre généralisée* (voir [Gou10] pour plus de détails). Cette oscillation traduit la radiation d'une partie des ondes dans la gaine du guide ouvert. Pour résumer, les modes correspondants au spectre essentiel sont oscillants à l'infini dans la direction transverse du guide et peuvent être propagatifs ou évanescents dans la direction longitudinale. Ils sont appelés *modes de radiation*.

### 4.1.2 Caractérisation du spectre à l'aide de la relation de dispersion

Nous venons de définir de façon abstraite les modes guidés du guide ouvert à l'aide d'outils de théorie spectrale des opérateurs autoadjoints. Dans ce cas simple où la section transverse est 1D et les coefficients du milieu sont constants par morceaux, il est alors possible de montrer que les valeurs propres de  $L_0$  (c'est-à-dire les éléments du spectre discret) qui correspondent aux modes guidés sont les racines réelles d'une équation appelée *relation de dispersion*. On rappelle que l'objectif est de déterminer les solutions du problème :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } (\xi, u) \in \mathbb{C} \times D(L_0) \setminus \{0\} \text{ tel que} \\ &-\frac{1}{\mu} d_{x_2}(\mu d_{x_2} u) - k^2 u = \xi u, \quad x_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pour cela on introduit comme dans [Gou10] les fonctions :

$$c^0(\xi; x_2) := \cos\left(\alpha^{\mathbb{R}^+} \sqrt{k_0^2 + \xi x_2}\right) \quad \text{et} \quad s^0(\xi; x_2) := \frac{1}{\alpha^{\mathbb{R}^+} \sqrt{k_0^2 + \xi}} \sin\left(\alpha^{\mathbb{R}^+} \sqrt{k_0^2 + \xi x_2}\right) \quad (4.3)$$

où  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Étant donné que les fonctions  $z \mapsto \cos(z)$  et  $z \mapsto \sin(z)/z$  peuvent s'écrire sous la forme de séries entières qui ne font intervenir que les puissances paires de  $z$ , les racines carrées disparaissent et on en déduit que ces fonctions ne dépendent pas du choix de la coupure.

#### Lemme 4.7

Soit  $\xi \in \Lambda_d(L_0)$ , alors  $\xi$  est une solution dans l'intervalle  $] -k_{\max}^2, -k_\infty^2[$  de la relation de dispersion :

$$f_{0,s}(\xi) \cdot f_{0,a}(\xi) = 0, \quad (4.4)$$

avec :

$$\begin{aligned} f_{0,s}(\xi) &:= \mu_\infty \gamma_\infty(\xi) c^0(\xi; h_0) - \mu_0 \beta_0^2(\xi) s^0(\xi; h_0), \\ f_{0,a}(\xi) &:= \mu_\infty \gamma_\infty(\xi) s^0(\xi; h_0) + \mu_0 c^0(\xi; h_0). \end{aligned}$$

Dans ces expressions, nous avons :

$$\beta_0(\xi) := \sqrt{k_0^2 + \xi} \quad \text{et} \quad \gamma_\infty(\xi) := \sqrt{-k_\infty^2 - \xi}.$$

La multiplicité géométrique de  $\xi$  est de plus égale à 1. Et enfin, si  $\xi$  est un zéro de  $f_{0,s}$  (respectivement  $f_{0,a}$ ), alors le vecteur propre associé est symétrique (respectivement antisymétrique) vis-à-vis de  $x_2 = 0$ .

*Démonstration.* Soit  $\xi \in \Lambda_d(L_0)$ , il existe alors  $u \in D(L_0)$  non nul tel que :

$$\frac{1}{\mu} d_{x_2}(\mu d_{x_2} u) + (k^2 + \xi)u = 0, \quad x_2 \in \mathbb{R}.$$

Puisque les coefficients de cette équation différentielle d'ordre deux sont constants par morceaux, on peut donner une expression simple de la solution dans chacun des sous-domaines. Il existe en effet des coefficients complexes  $A, B, A^\pm, B^\pm$  tels que :

$$u(x_2) = \begin{cases} A^- e^{\gamma_\infty(\xi)x_2} & + B^- e^{-\gamma_\infty(\xi)x_2} & \text{si } x_2 < -h_0 \\ A c^0(\xi; x_2) & + B s^0(\xi; x_2) & \text{si } -h_0 \leq x_2 \leq h_0 \\ A^+ e^{-\gamma_\infty(\xi)x_2} & + B^+ e^{\gamma_\infty(\xi)x_2} & \text{si } x_2 > h_0, \end{cases} \quad (4.5)$$

où  $\gamma_\infty(\xi) := \sqrt{-k_\infty^2 - \xi}$  est bien défini puisque nous savons d'après la Proposition 4.5 que  $\xi \in ]-k_0^2, -k_\infty^2[$ . Le choix de coupure retenu nous permet donc de bien définir  $\gamma_\infty(\xi)$  sur cet intervalle et de garantir que  $\Re(\gamma_\infty(\xi)) > 0$ . Puisque  $u \in L^2(\mathbb{R})$ , on a nécessairement  $B^- = B^+ = 0$ . En écrivant les conditions de raccord de  $u$  et  $\mu d_{x_2} u$  en  $x_2 = \pm h_0$ , on obtient le système matriciel :

$$\begin{cases} c^0(\xi; h_0)A & + s^0(\xi; h_0)B & = & e^{-\gamma_\infty(\xi)h_0} A^+ \\ c^0(\xi; h_0)A & - s^0(\xi; h_0)B & = & e^{-\gamma_\infty(\xi)h_0} A^- \\ -\mu_0 \beta_0^2(\xi) s^0(\xi; h_0)A & + \mu_0 c^0(\xi; h_0)B & = & -\mu_\infty \gamma_\infty(\xi) e^{-\gamma_\infty(\xi)h_0} A^+ \\ \mu_0 \beta_0^2(\xi) s^0(\xi; h_0)A & + \mu_0 c^0(\xi; h_0)B & = & \mu_\infty \gamma_\infty(\xi) e^{-\gamma_\infty(\xi)h_0} A^- \end{cases} \quad (4.6)$$

Ce système a une solution non nulle si et seulement si son déterminant s'annule, ce qui donne après calculs :

$$\underbrace{(\mu_\infty \gamma_\infty(\xi) c^0(\xi; h_0) - \mu_0 \beta_0^2(\xi) s^0(\xi; h_0))}_{:= f_{0,s}(\xi)} \cdot \underbrace{(\mu_\infty \gamma_\infty(\xi) s^0(\xi; h_0) + \mu_0 c^0(\xi; h_0))}_{:= f_{0,a}(\xi)} = 0,$$

ce qui est la relation de dispersion attendue. En faisant quelques manipulations supplémentaires sur les lignes de ce système linéaire, on peut se ramener à un système de taille 2 ne faisant intervenir plus que les inconnues  $A$  et  $B$ . L'espace des solutions est donc de dimension 1, c'est-à-dire que la multiplicité géométrique de  $\xi$  est égale à 1. Soulignons que la structure considérée est symétrique par rapport à l'axe longitudinal, ce qui se traduit par la parité des coefficients physiques dans la variable transverse. On s'attend donc à ce que les modes aient aussi une certaine symétrie. Supposons qu'on recherche un mode symétrique. On a nécessairement  $B = 0$  dans (4.5), mais aussi  $A^+ = A^-$ . Le système matriciel (4.6) à résoudre se simplifie en :

$$\begin{cases} c^0(\xi; h_0)A & - e^{-\gamma_\infty(\xi)h_0} A^+ & = & 0 \\ \mu_0 \beta_0^2(\xi) s^0(\xi; h_0)A & - \mu_\infty \gamma_\infty(\xi) e^{-\gamma_\infty(\xi)h_0} A^+ & = & 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

dont l'annulation du déterminant s'écrit :

$$0 = \mu_\infty \gamma_\infty(\xi) c^0(\xi; h_0) - \mu_0 \beta_0^2(\xi) s^0(\xi; h_0) = f_{0,s}(\xi).$$

Un raisonnement analogue peut être conduit pour les modes antisymétriques. Cela montre que les valeurs propres associées aux modes symétriques (respectivement antisymétriques) sont des racines de  $f_{0,s}(\xi)$  (respectivement de  $f_{0,a}(\xi)$ ). Et puisque que le raisonnement décrit est une succession d'équivalences, nous avons la réciproque ce qui permet de conclure la preuve.  $\square$

**Remarque 4.8** *Les fonctions  $f_{0,s}$  et  $f_{0,a}$  sont analytiques en dehors du spectre essentiel sur lequel on a placé la coupure de  $\gamma_\infty$ . Dans la suite, nous utiliserons parfois une réécriture méromorphe pour deux raisons. D'une part, car cette réécriture est plus simple à manipuler pour conduire des calculs. D'autre part, car les fonctions trigonométriques qui interviennent dans cette nouvelle formulation n'ont pas un comportement exponentiellement croissant à l'infini, ce qui facilite leur traitement numérique. La relation de dispersion deviendra alors :*

$$\hat{f}_{0,s}(\xi) \cdot \hat{f}_{0,a}(\xi) = 0,$$

avec :

$$\begin{aligned}\hat{f}_{0,s}(\xi) &:= \mu_\infty \gamma_\infty(\xi) - \mu_0 \beta_0(\xi) \tan(\beta_0(\xi) h_0), \\ \hat{f}_{0,a}(\xi) &:= \mu_\infty \gamma_\infty(\xi) + \mu_0 \beta_0(\xi) \cotan(\beta_0(\xi) h_0).\end{aligned}$$

**Remarque 4.9** *Lorsque  $c_0 > c_\infty$ , le spectre discret est vide et alors (4.4) n'a pas de racines réelles.*

## Résumé de la section 4.1

Pour résumer cette section, il peut exister dans le guide ouvert réel deux types de modes :

- Des modes guidés, lorsque  $c_0 < c_\infty$ , qui correspondent au spectre discret de l'opérateur transverse. Ils sont exponentiellement décroissants dans la direction transverse du guide et sont propagatifs dans la direction axiale.
- Des modes de radiation qui correspondent au spectre essentiel de l'opérateur transverse. Ils oscillent en restant bornés dans la direction transverse, mais peuvent être propagatifs ou évanescents dans la direction axiale du guide.

Au cours de la première partie du manuscrit, nous avons vu pour un guide fermé, qu'il est possible de décomposer toute fonction de carré intégrable de la section sur les modes. Pour un guide ouvert, il a été montré dans [Haz09] qu'il est aussi possible d'écrire une telle décomposition faisant intervenir une somme finie sur les modes guidés du spectre discret, ainsi qu'une intégrale sur les modes radiatifs du spectre essentiel. Cependant, cette décomposition est compliquée à utiliser en pratique pour conduire des calculs. Pour pallier ce problème, nous allons expliquer comment nous ramener à un domaine borné sur lequel nous pourrions effectuer des calculs plus facilement.

## 4.2 Le guide ouvert avec des PML infinies

Nous avons vu précédemment que si  $c_0 < c_\infty$ , il peut exister dans les guides ouverts des modes guidés localisés dans le cœur de la structure qui ne rayonnent pas d'énergie dans la gaine. Il existe aussi inconditionnellement des modes dits de rayonnement qui oscillent sans décroître à l'infini dans la direction transverse, traduisant la propagation de l'énergie dans le milieu environnant. La non-décroissance des modes de radiation nous empêche de tronquer



le domaine de calcul sans précautions supplémentaires, cela induirait en effet des réflexions qui perturberaient la solution à l'intérieur du domaine. Plusieurs techniques peuvent être utilisées pour se ramener à un domaine borné dans la direction transverse. Il serait possible d'introduire un opérateur DtN, mais l'opérateur ainsi défini serait non local, ce qui rendrait la troncature dans la direction longitudinale plus compliquée pour le problème direct traité dans le prochain chapitre. Nous pourrions aussi penser à utiliser des conditions d'impédance, mais elles sont peu précises. C'est pourquoi les couches parfaitement adaptées (PML) ont été retenues dans [Gou10] pour tronquer le domaine dans la direction transverse.

Les PML ont été introduites initialement par Bérenger [Ber94] en 1994 pour résoudre des problèmes de diffraction en domaines non bornés. En un certain sens, elles permettent d'atténuer les ondes sortantes au domaine sans introduire de réflexions parasites à l'interface avec le milieu physique, d'où l'appellation "Perfectly Matched". Par la suite, les PML ont été aussi utilisées pour calculer des résonances dans des domaines non bornés (voir par exemple [KP09]). Rigoureusement, les résonances sont définies comme étant des pôles complexes du prolongement méromorphe de la résolvante au travers du spectre essentiel de l'opérateur étudié. Ces objets, qui ne sont pas dans le spectre de l'opérateur, sont particulièrement intéressants, car ils permettent de décrire le comportement des solutions des problèmes de diffraction en milieux non bornés. Pour une introduction aux résonances, le lecteur désireux d'en savoir plus pourra se tourner vers [Zwo99; Zwo17].

On rappelle que la résolvante de l'opérateur  $L_0$  est pour  $\xi \in \rho(L_0) := \mathbb{C} \setminus \Lambda(L_0)$ , l'opérateur de  $L^2(\mathbb{R})$  défini par :

$$R_{L_0}(\xi) := (L_0 - \xi I)^{-1}.$$

D'après [Kat13, Chapitre 3 - §6.5], la résolvante peut s'écrire sous la forme :

$$R_{L_0}(\xi) = - \sum_{\xi_n \in \Lambda_d(L_0)} \frac{P_{\xi_n}}{\xi - \xi_n} + H_0(\xi), \quad \xi \in \rho(L_0),$$

où  $P_{\xi_n}$  est le projecteur spectral sur  $\text{Ker}(L_0 - \xi_n I)$  et  $H_0$  est une fonction holomorphe. On voit bien avec cette expression que la résolvante est analytique dans son ensemble résolvant. Dans [Gou10, Proposition 1.1], une expression de la résolvante est donnée pour le cas plus simple d'un demi-guide dans la direction transverse, avec une condition de Dirichlet en  $x_2 = 0$  lorsque  $\mu_0 = \mu_\infty$ , mais  $k_0 \neq k_\infty$ . Cela revient à ne prendre en compte que les modes anti-symétriques. On voit dans ce travail que la résolvante est proportionnelle à l'inverse de  $f_{0,a}$  définie au Lemme 4.7, mais dans laquelle nous avons prolongé la racine carrée réelle à tout le plan complexe privé d'une coupure sur le demi-axe  $\mathbb{R}^-$ . Autrement dit, nous avons désormais :

$$\gamma_\infty(\xi) := \sqrt[{\mathbb{R}^-}]{-k_\infty^2 - \xi}.$$

Même si nous n'avons pas conduit les mêmes calculs pour le guide total, nous nous attendons à ce que la résolvante  $R_{L_0}$  du guide complet puisse s'exprimer de façon analogue à l'aide des fonctions  $f_{0,s}$  et  $f_{0,a}$ . Ceci nous permet de comprendre que tout comme  $\gamma_\infty$ , la résolvante est discontinue au travers du spectre essentiel donné par  $\Lambda_e(L_0) = [-k_\infty^2, +\infty[$ . Cela montre aussi qu'il est possible de réaliser le prolongement méromorphe de la résolvante au travers du spectre essentiel mentionné ci-dessus, et dont les pôles complexes sont les résonances du problème, via celui de la racine carrée  $\gamma_\infty$ .

Dans cette section, nous allons donc commencer par étudier le prolongement analytique de la résolvante pour le problème plus simple posé dans l'espace libre 1D par l'intermédiaire

de celui de la racine carrée. Même s'il n'existe pas de résonances dans ce cas, cette étude nous permettra de comprendre la démarche généralement adoptée pour effectuer de tels prolongements. Dans le cas plus compliqué du guide ouvert, nous réaliserons le prolongement méromorphe, cette fois de la résolvante de l'opérateur  $L_0$ , au moyen de PML. Nous nous intéresserons enfin aux pôles complexes du prolongement de la résolvante qu'on appellera *modes à fuite* (ou *leaky modes* en anglais). Les résonances situées sur le demi-plan complexe  $\Im m(\xi) < 0$ , appelées *modes à fuite sortants*, joueront un rôle crucial dans l'étude des problèmes direct et inverse. On montrera en particulier qu'ils sont des racines complexes d'une relation de dispersion qu'on donnera.

### 4.2.1 Prolongement analytique de la résolvante dans l'espace libre au moyen de celui de la racine carrée

La résolvante est analytique en dehors du spectre, c'est-à-dire en dehors du spectre discret et du spectre essentiel pour un opérateur autoadjoint. Rappelons que le spectre essentiel décrit précédemment rend compte du comportement des ondes à l'infini dans la direction transverse. Pour comprendre comment se comporte la résolvante au voisinage du spectre essentiel, nous allons regarder le cas plus simple du problème posé dans l'espace libre pour lequel  $\mu(x_2) = \mu_\infty$ ,  $\rho(x_2) = \rho_\infty$  et  $c(x_2) = c_\infty$  pour tout  $x_2 \in \mathbb{R}$ . Introduisons pour cela l'opérateur  $L_\infty$  de  $L^2(\mathbb{R})$  défini pour  $u \in D(L_\infty) = H^2(\mathbb{R})$  par :

$$L_\infty u := -d_{x_2}^2 u - k_\infty^2 u.$$

Il est bien connu que le spectre de cet opérateur n'est constitué que de spectre essentiel égal à  $\Lambda_e(L_\infty) = [-k_\infty^2, +\infty[$  correspondant exactement au spectre essentiel de l'opérateur  $L_0$ . Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$  et  $\xi \in \rho(L_\infty) := \mathbb{C} \setminus \Lambda_e(L_\infty)$ , nous partons de l'équation de la résolvante  $u = R_{L_\infty}(\xi)f$ , qui s'écrit de façon développée :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u \in L^2(\mathbb{R}) \text{ tel que} \\ &-d_{x_2}^2 u - (k_\infty^2 + \xi)u = f, \quad x_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pour résoudre cette équation, nous introduisons la fonction de Green, appelée aussi parfois solution fondamentale, de l'équation de Helmholtz. Pour  $y_2 \in \mathbb{R}$ , c'est la solution du problème :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } g_\xi(\cdot, y_2) \in L^2(\mathbb{R}) \text{ tel que} \\ &-d_{x_2}^2 g_\xi(\cdot, y_2) - (k_\infty^2 + \xi)g_\xi(\cdot, y_2) = \delta_{y_2}, \quad x_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dans ce cas simple, la fonction de Green peut être obtenue explicitement, soit :

$$g_\xi(x_2, y_2) = \frac{i}{2\gamma_\infty(\xi)} e^{-\gamma_\infty(\xi)|x_2 - y_2|}, \quad (4.8)$$

avec  $\gamma_\infty(\xi) := \sqrt{-k_\infty^2 - \xi}$  satisfaisant  $\Re(\gamma_\infty(\cdot)) > 0$  sur l'ensemble du plan complexe en dehors de la coupure. La solution de l'équation de la résolvante peut s'exprimer en fonction de  $g_\xi$  par le moyen d'une convolution :

$$R_{L_\infty}(\xi)f(x_2) = \int_{\mathbb{R}} g_\xi(x_2, y_2)f(y_2)dy_2, \quad x_2 \in \mathbb{R}.$$

On voit alors qu'étudier la fonction de Green nous donnera directement des informations sur le comportement de la résolvante.

Pour  $y_2 \in \mathbb{R}$  fixé et  $\xi \in \rho(L_\infty)$ , la fonction de Green a un comportement exponentiellement décroissant lorsque  $|x_2| \rightarrow +\infty$ . Elle présente de plus une discontinuité au niveau du spectre essentiel. En effet, nous avons mis en évidence dans la [section 1.2](#) du [chapitre 1](#), que pour  $z_0 \in \mathbb{R}^- \setminus \{0\}$  nous avons :

$$\lim_{z \rightarrow z_0, \Im m(z) > 0} \sqrt[{\mathbb{R}}]{z} = i\sqrt{-z_0} \quad \text{et} \quad \lim_{z \rightarrow z_0, \Im m(z) < 0} \sqrt[{\mathbb{R}}]{z} = -i\sqrt{-z_0}.$$

Il en découle que pour  $\xi_0 \in ]-k_\infty^2, +\infty[$  on a :

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0, \Im m(\xi) > 0} g_\xi(x_2, y_2) = -\frac{1}{2\sqrt{k_\infty^2 + \xi_0}} e^{i\sqrt{k_\infty^2 + \xi_0}|x_2 - y_2|} \quad (4.9)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0, \Im m(\xi) < 0} g_\xi(x_2, y_2) = \frac{1}{2\sqrt{k_\infty^2 + \xi_0}} e^{-i\sqrt{k_\infty^2 + \xi_0}|x_2 - y_2|}. \quad (4.10)$$

L'étude du passage à la limite réalisé est appelé *absorption limite*. La fonction de Green n'est plus exponentiellement décroissante, mais oscillante à l'infini. Avec la convention de dépendance harmonique en temps (I.2.2), on voit que le passage à la limite par le demi-plan complexe supérieur  $\Im m(\xi) > 0$  conduit à une solution sortante tandis qu'il conduit à une solution entrante quand on part du demi-plan complexe inférieur  $\Im m(\xi) < 0$ . Comme nous avons vu au [chapitre 1](#) que la racine carrée complexe peut être prolongée au travers de la coupure en une fonction analytique sur une surface de Riemann à deux feuillets, nous pouvons aussi prolonger analytiquement la fonction de Green au travers du spectre essentiel sur une telle surface. Posons pour cela :

$$\check{g}_\xi(x_2, y_2) = -\frac{i}{2\gamma_\infty(\xi)} e^{\gamma_\infty(\xi)|x_2 - y_2|}. \quad (4.11)$$

L'expression (4.9) peut être prolongée analytiquement dans le demi-plan complexe  $\Im m(\xi) < 0$  par l'expression (4.11). De même, on peut prolonger analytiquement l'expression (4.10) dans le demi-plan complexe  $\Im m(\xi) > 0$  par (4.11). En faisant ce prolongement analytique, nous sommes passés sur le deuxième feuillet d'une surface de Riemann qui en compte deux. Sur ce deuxième feuillet, la fonction de Green est cette fois exponentiellement croissante à l'infini dans la variable  $x_2$ . Nous appellerons *domaine physique* (respectivement *domaine non physique*) le feuillet sur lequel la fonction de Green est exponentiellement décroissante (respectivement croissante). On appellera aussi *feuillet sortant*, la réunion des demi-plans  $\Im m(\xi) \geq 0$  du domaine physique et  $\Im m(\xi) < 0$  du domaine non physique. Le *feuillet entrant* est quant à lui défini par la réunion des demi-plans  $\Im m(\xi) \leq 0$  du domaine physique et  $\Im m(\xi) > 0$  du domaine non physique. Les domaines et feuillets introduits sont représentés sur la [Figure 4.3](#).

Revenons désormais à la résolvante. Pour  $\xi$  dans le domaine physique et  $f \in L^2(\mathbb{R})$  elle s'écrit :

$$R_{L_\infty}(\xi)f(x_2) = \int_{\mathbb{R}} g_\xi(x_2, y_2)f(y_2)dy_2, \quad x_2 \in \mathbb{R}.$$

Nous voyons que l'analyticité de la résolvante en dehors de la coupure de la racine carrée, qui correspond au spectre essentiel de l'opérateur autoadjoint  $L_\infty$ , peut se retrouver avec celle de  $g_\xi$  (voir pour cela l'expression (4.8)). Grâce au prolongement analytique de la fonction de Green réalisé ci-dessus, il est aussi possible de prolonger analytiquement la résolvante au travers du spectre essentiel. En revanche, elle ne peut plus être considérée comme un opérateur de  $L^2(\mathbb{R})$  sur le domaine non physique du fait de la croissance exponentielle de la fonction de Green. On prolonge alors cette résolvante en un opérateur de  $L_{\text{comp}}^2(\mathbb{R})$  dans  $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R})$  (qui est l'espace dual de  $L_{\text{comp}}^2(\mathbb{R})$ ). Ce prolongement méromorphe est justifié rigoureusement dans [[Zwo17](#)] pour le Laplacien dans  $\mathbb{R}^3$ .

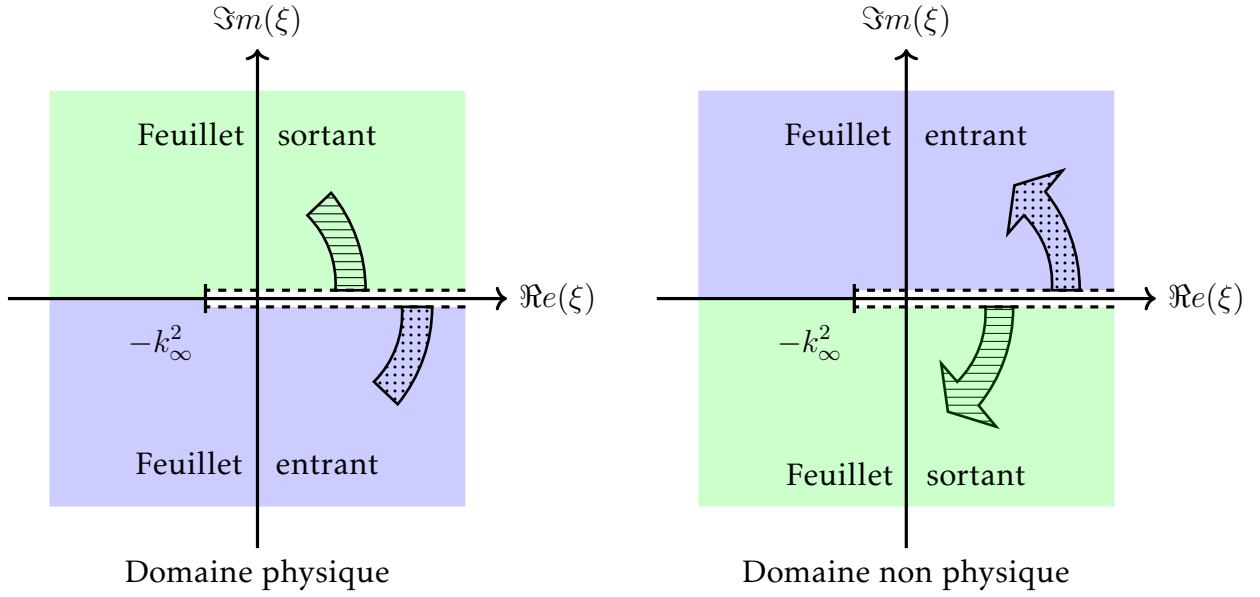


FIGURE 4.3: Représentation des feuillets entrant et sortant sur les domaines physique et non physique. La flèche remplie de traits horizontaux (respectivement de points) symbolise le prolongement analytique sur le feuillet sortant (respectivement entrant).

#### 4.2.2 Prolongement méromorphe de la résolvante du guide ouvert réel par l'introduction de PML

Nous venons de voir, dans le cas plus simple de l'espace libre, que la résolvante peut se prolonger de façon analytique au travers du spectre essentiel par un calcul explicite. Pour le guide ouvert que nous considérons, la fonction de Green est plus difficile à calculer. Nous allons voir qu'il est néanmoins possible de réaliser un prolongement méromorphe de la résolvante par l'intermédiaire d'un prolongement analytique dans la variable spatiale  $x_2$ , qui est appelé dans la littérature *dilatation analytique* ou bien *complex-stretching*. On expliquera que cette opération revient à introduire des PML infinies dans la direction transverse. Le point de départ de cette construction est pour  $\xi \in \rho(L_0)$  et  $f \in L^2(\mathbb{R})$  l'équation de la résolvante  $u := R_{L_0}(\xi)f$  qui s'écrit aussi :

$$-\frac{1}{\mu}d_{x_2}(\mu u) - (k_\infty^2 + \xi)u = f, \quad x_2 \in \mathbb{R}. \quad (4.12)$$

On a mis en évidence dans le cas de l'espace libre que le prolongement de la résolvante est une application de  $L_{\text{comp}}^2(\mathbb{R})$  dans  $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R})$ . On suppose alors que  $\text{supp}(f) \subset (-h_1, h_1)$  pour un réel  $h_1 > h_0 > 0$ . L'équation de la résolvante s'écrit alors pour  $|x_2| > h_1$  :

$$-d_{x_2}^2 u - (k_\infty^2 + \xi)u = 0.$$

Puisque  $u \in D(L_0)$ , il existe des constantes complexes  $C^\pm$  telles que  $u(x_2) = C^+ e^{-\gamma_\infty(\xi)x_2}$  pour  $x_2 \geq h_0$  et  $u(x_2) = C^- e^{\gamma_\infty(\xi)x_2}$  pour  $x_2 \leq -h_0$ , où on rappelle que  $\gamma_\infty(\xi) := \sqrt{-k_\infty^2 - \xi}$ . On voit alors que la fonction  $u$  est analytique dans la variable  $x_2$  pour  $|x_2| > h_1$ . On réalise alors un prolongement analytique, noté  $w$ , dans la variable désormais complexe  $z$ . Comme  $w(z) = C^+ e^{-\gamma_\infty(\xi)z}$  pour  $\Re(z) \geq h_1$  et  $w(z) = C^- e^{\gamma_\infty(\xi)z}$  pour  $\Re(z) \leq -h_1$ , le prolongement est solution de l'équation :

$$-\frac{d^2 w}{dz^2} - (k_\infty^2 + \xi)w = 0, \quad (4.13)$$

dans le demi-plan  $|\Re(z)| > h_1$ , où la dérivation est cette fois à comprendre au sens de la variable complexe. La prochaine étape est de considérer la restriction de  $w$  à une courbe du plan complexe paramétrée par un réel, afin de se ramener à une équation posée sur un domaine réel. Choisissons pour cela une courbe paramétrée du plan complexe  $y_2 \mapsto \mathcal{C}(y_2)$ , où  $y_2$  est un paramètre réel. Posons  $z = \mathcal{C}(y_2)$  et imposons à la courbe de vérifier  $\mathcal{C}(y_2) = y_2$  pour  $|y_2| \leq h_1$ . Posons  $v(y_2) := w(\mathcal{C}(y_2))$ . La condition imposée sur  $\mathcal{C}$  nous assure que  $v(y_2) = u(y_2)$  pour  $|y_2| < h_1$ . Pour écrire l'équation satisfaite par  $v$  dans la variable  $y_2$ , remarquons que :

$$\frac{d}{dz} = \frac{dy_2}{dz} \frac{d}{dy_2} = \frac{1}{\mathcal{C}'(y_2)} \frac{d}{dy_2},$$

et rappelons-nous que  $w(z) = v(y_2)$ . L'équation (4.13) se réécrit alors :

$$-\alpha d_{y_2}(\alpha d_{y_2} v) - (k_\infty^2 + \xi)v = 0, \quad |y_2| > h_1,$$

avec :

$$\alpha(y_2) := \frac{1}{\mathcal{C}'(y_2)}.$$

Sachant que  $\mathcal{C}(y_2) = y_2$  pour  $|y_2| < h_1$  nous avons  $\alpha(y_2) = 1$  pour  $|y_2| < h_1$ . La fonction  $v$  est alors solution de l'équation :

$$-\alpha d_{y_2}(\alpha \mu d_{y_2} v) - \mu(k^2 + \xi)v = f, \quad y_2 \in \mathbb{R}. \quad (4.14)$$

On reviendra à la variable  $x_2$  dans la suite par souci de cohérence des notations. La nouvelle configuration est représentée sur la Figure 4.4. Détaillons maintenant les différents choix de

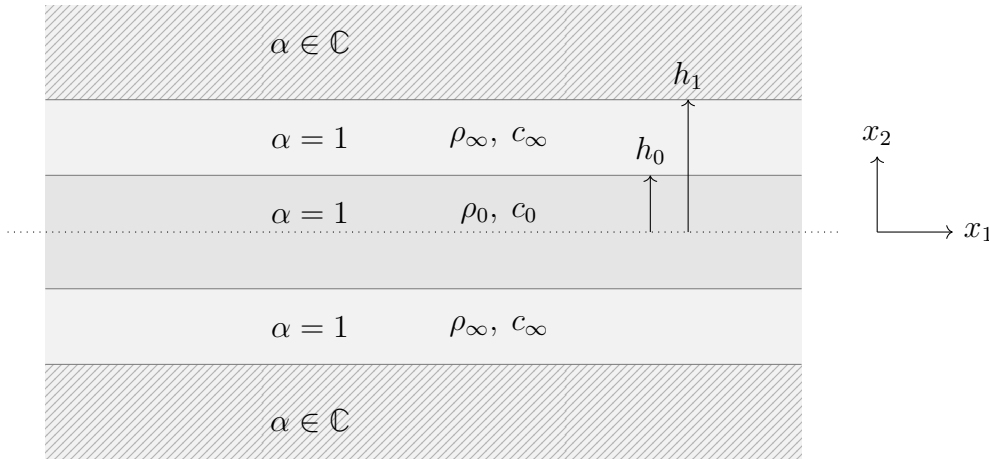


FIGURE 4.4: Géométrie 2D d'un guide ouvert avec des PML infinies

fonction  $\mathcal{C}$ , et donc de  $\alpha$ , que nous considérerons dans le cadre de ce travail. Puisque le guide ouvert a une symétrie axiale, nous allons considérer une courbe  $\mathcal{C}$  impaire, ce qui implique que  $\alpha = 1/\mathcal{C}'$  est paire. Dans le cas où les matériaux dans la gaine seraient différents de part et d'autre du cœur, nous pourrions être amenés à choisir des fonctions différentes. Mais ce cas ne sera pas traité dans ce travail. Deux classes de courbes  $\mathcal{C}$  différentes seront considérées, qui correspondront à deux types de profils de PML.

#### Définition 4.10

Soit  $\alpha_\infty \in \mathbb{C}$  satisfaisant  $\Im m(\alpha_\infty) < 0$  et  $\Re e(\alpha_\infty) > 0$ . On considère aussi une fonction  $\mathcal{C}_\infty$  de classe  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  satisfaisant  $\mathcal{C}_\infty(\pm h_1) = \pm h_1$ ,  $\mathcal{C}'_\infty(\pm h_1) = 1$  et  $\mathcal{C}'_\infty(x_2) = 1/\alpha_\infty$  pour  $|x_2| > H$

avec  $H > h_1$ . On suppose aussi que  $C'_\infty$  est paire, et bornée en module inférieurement et supérieurement par des constantes strictement positives, puis enfin que ses parties réelle et imaginaire sont strictement croissantes. On définit deux types de profil de PML :

- un *profil abrupt* par :

$$C(x_2) := \begin{cases} -h_1 + \frac{x_2 + h_1}{\alpha_\infty} & \text{si } x_2 < -h_1 \\ x_2 & \text{si } |x_2| \leq h_1 \\ h_1 + \frac{x_2 - h_1}{\alpha_\infty} & \text{si } x_2 > h_1, \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \alpha(x_2) := \begin{cases} 1 & \text{si } |x_2| \leq h_1 \\ \alpha_\infty & \text{si } |x_2| > h_1. \end{cases}$$

Ce profil  $\alpha$  est discontinu en  $x_2 = \pm h_1$ .

- un *profil doux* par :

$$C(x_2) := \begin{cases} x_2 & \text{si } |x_2| \leq h_1 \\ C_\infty(x_2) & \text{si } |x_2| > h_1, \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \alpha(x_2) := \begin{cases} 1 & \text{si } |x_2| \leq h_1 \\ 1/C'_\infty(x_2) & \text{si } |x_2| > h_1. \end{cases}$$

Ce profil  $\alpha$  est continu en  $x_2 = \pm h_1$ .

**Remarque 4.11** Les hypothèses faites sur  $\alpha_\infty$  et  $C_\infty$  nous permettent de garantir que  $-\pi/2 < \arg_{\mathbb{R}^-}(\alpha(x_2)) < 0$  pour tout  $x_2 \in \mathbb{R}$  tel que  $|x_2| > h_1$ . Nous allons voir qu'avec ce choix, nous pourrions atteindre les résonances sortantes situées sur le demi-plan complexe  $\Im m(\xi) < 0$ . Les résonances situées sur le demi-plan complexe  $\Im m(\xi) > 0$ , appelées résonances entrantes, peuvent quant à elle être atteintes en remplaçant  $\alpha$  par  $\bar{\alpha}$ .

Regardons maintenant comment les solutions de l'équation de la résolvante (4.12) sont affectées par la dilatation analytique. Pour  $\xi \in \rho(L_0)$ , on avait :

$$u(x_2) = \begin{cases} C^- e^{\gamma_\infty(\xi)x_2} & \text{si } x_2 < -h_1 \\ C^+ e^{-\gamma_\infty(\xi)x_2} & \text{si } x_2 > h_1, \end{cases}$$

ce qui est une solution exponentiellement décroissante. Lorsque  $\xi \in \Lambda_e(L_0) = [-k_\infty^2, +\infty[$ , l'équation (4.12) n'admet plus de solution dans  $D(L_0)$ , mais il est toutefois possible de construire une solution oscillante à l'infini s'écrivant :

$$u(x_2) = \begin{cases} C^- e^{-i\beta_\infty(\xi)x_2} + D^- e^{i\beta_\infty(\xi)x_2} & \text{si } x_2 < -h_1 \\ C^+ e^{-i\beta_\infty(\xi)x_2} + D^+ e^{i\beta_\infty(\xi)x_2} & \text{si } x_2 > h_1, \end{cases}$$

avec  $\beta_\infty(\xi) := \sqrt{k_\infty^2 + \xi} \in \mathbb{R}^+$ . La solution du problème dilaté (4.14) s'écrit quant à elle suffisamment loin du cœur :

$$v(x_2) = \begin{cases} C^- e^{\frac{\gamma_\infty(\xi)}{\alpha_\infty}x_2} & \text{si } x_2 < -h_1 \\ C^+ e^{-\frac{\gamma_\infty(\xi)}{\alpha_\infty}x_2} & \text{si } x_2 > h_1. \end{cases}$$

Soit  $D_{\alpha_\infty} := \{\xi \in \mathbb{C} \mid 2 \arg_{\mathbb{R}^-}(\alpha_\infty) - \pi < \arg_{\mathbb{R}^-}(k_\infty^2 + \xi) < 2 \arg_{\mathbb{R}^-}(\alpha_\infty) + \pi\}$ , nous remarquons ensuite que si  $\xi \in D_{\alpha_\infty}$ , alors  $-\pi/2 < \arg_{\mathbb{R}^-}(\gamma_\infty(\xi)/\alpha_\infty) < \pi/2$  et par conséquent  $\Re e(\gamma_\infty(\xi)/\alpha_\infty) > 0$ . La solution de l'équation de la résolvante dilatée est alors exponentiellement décroissante dans la direction transverse. C'est en particulier le cas pour  $\xi \in \Lambda_e(L_0)$  :

les PML ont alors pour effet de transformer un comportement oscillant à l'infini en un comportement exponentiellement décroissant traduisant ainsi une atténuation des ondes dans les PML. Il est alors possible d'interpréter l'introduction des PML comme le choix d'un matériau atténuant dont les paramètres sont complexes. De façon intéressante, on retrouve un comportement oscillant lorsque  $\arg_{\mathbb{R}^-}(k_\infty^2 + \xi) = 2 \arg_{\mathbb{R}^-}(\alpha_\infty) + \pi$ . En effet, la solution de l'équation de la résolvante dilatée s'écrit dans ce cas :

$$v(x_2) = \begin{cases} C^- e^{-i \frac{\beta_\infty(\xi)}{\alpha_\infty} x_2} + D^- e^{i \frac{\beta_\infty(\xi)}{\alpha_\infty} x_2} & \text{si } x_2 < -h_1 \\ C^+ e^{-i \frac{\beta_\infty(\xi)}{\alpha_\infty} x_2} + D^+ e^{i \frac{\beta_\infty(\xi)}{\alpha_\infty} x_2} & \text{si } x_2 > h_1, \end{cases}$$

où la racine carrée :

$$\beta_\infty(\xi) := i^{\mathbb{R}^+} \sqrt{k_\infty^2 + \xi},$$

a été prolongée dans le plan complexe privé d'une coupure sur le demi-axe  $i\mathbb{R}^+$ .

Pour poursuivre l'analyse du problème dilaté (4.14), il est naturel d'introduire l'opérateur  $L_1$  de  $L^2(\mathbb{R})$  défini par :

$$L_1 u := -\frac{\alpha}{\mu} d_{x_2}(\alpha \mu d_{x_2} u) - k^2 u,$$

pour  $u \in D(L_1)$  où le domaine est donné par :

$$D(L_1) = \{v \in H^1(\mathbb{R}) \mid d_{x_2}(\alpha \mu d_{x_2} u) \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

Avant d'expliquer en quoi la résolvante de l'opérateur  $L_1$  est en un certain sens un prolongement méromorphe de celle de l'opérateur  $L_0$ , nous allons citer des résultats démontrés dans [Gou10] qui décrivent le spectre de l'opérateur  $L_1$ . À ce stade, il est important de souligner un point crucial qui aura des répercussions sur toute la suite du manuscrit. Le paramètre  $\alpha(x_2)$  est complexe pour  $|x_2| > h_1$ ; il en découle que contrairement à  $L_0$ , l'opérateur  $L_1$  n'est plus autoadjoint. Il n'est donc plus possible d'utiliser les résultats de la théorie spectrale des opérateurs autoadjoints. Parmi les conséquences de la perte du caractère autoadjoint de l'opérateur, on peut mentionner que le spectre de  $L_1$ , noté  $\Lambda(L_1)$ , peut contenir des valeurs complexes. En outre, la définition du spectre essentiel n'est plus aussi standard. Il en existe en effet plusieurs définitions dans la littérature (voir par exemple [Kat13, Chapitre 4 - §5.6] ou [GW69]), mais elles coïncident pour notre problème de guide ouvert.

**Théorème 4.12** [Gou10, Théorème 2.1]

1. Les 8 définitions du spectre essentiel considérées dans [Gou10, p 230] coïncident pour l'opérateur  $L_1$ , le spectre essentiel est alors noté de façon unique  $\Lambda_e(L_1)$ . On a en particulier  $\Lambda_e(L_1) = \Lambda(L_1) \setminus \Lambda_d(L_1)$ .
2. Le spectre essentiel est donné par  $\Lambda_e(L_1) = -k_\infty^2 + \alpha_\infty^2 \mathbb{R}^+$ .

Ce résultat est vrai pour les profils abrupt et doux de PML.

De la même façon que nous avons défini des modes de radiation à partir du spectre essentiel du guide réel, il est aussi possible de définir des modes de radiation pour le spectre essentiel en présence de PML, qui sont oscillants dans la direction transverse des PML et propagatifs ou évanescents dans la direction axiale. Ces modes ne sont en revanche pas intrinsèques au problème physique de départ puisqu'ils dépendent du profil de PML retenu.



**Théorème 4.13** [Gou10, Théorème 2.2]

Le spectre discret de l'opérateur admet la décomposition :  $\Lambda_d(L_1) = \Lambda_d(L_0) \cup \Lambda_f(L_1)$  où :

- $\Lambda_d(L_0)$  est le spectre discret de l'opérateur  $L_0$  inclus dans l'intervalle  $] -k_{\max}^2, -k_{\infty}^2[$ ;
- $\Lambda_f(L_1)$  est un ensemble dénombrable de valeurs propres de multiplicité géométrique finie, isolées et incluses dans le secteur  $S_\alpha := \{\xi \in \mathbb{C} \mid 2 \arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty) < \arg_{i\mathbb{R}^+}(k_\infty^2 + \xi) < 0\}$ . Pour  $\xi \in \Lambda_f(L_1)$  et  $u \in \text{Ker}(L_1 - \xi I)$ , on a :

$$u(x_2) \propto \begin{cases} e^{i\beta_\infty(\xi) \frac{x_2}{\alpha_\infty}} & , \quad x_2 \rightarrow +\infty \\ e^{-i\beta_\infty(\xi) \frac{x_2}{\alpha_\infty}} & , \quad x_2 \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

où nous rappelons que  $\beta_\infty(\xi) = \sqrt{i\mathbb{R}^+ k_\infty^2 + \xi}$  et  $\propto$  est le symbole de proportionnalité.

*Démonstration.* Ce résultat est démontré dans [Gou10] avec l'inégalité large  $\arg_{i\mathbb{R}^+}(k_\infty^2 + \xi) \leq 0$  pour  $\xi \in \Lambda_f$ . Nous précisons ici que l'inégalité est en réalité stricte. En effet, supposons qu'on ait  $\arg_{i\mathbb{R}^+}(k_\infty^2 + \xi) = 0$ . Pour  $u \in \text{Ker}(L_1 - \xi I)$ , on peut écrire :

$$-d_{x_2}(\alpha \mu d_{x_2} u) = \frac{\mu}{\alpha} (k^2 + \xi) u,$$

puis multiplier par  $\bar{u}$  et intégrer par parties donne :

$$\int_{\mathbb{R}} \alpha \mu |d_{x_2} u|^2 dx_2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu}{\alpha} (k^2 + \xi) |u|^2 dx_2. \quad (4.15)$$

Étant donné que  $\Im m(\alpha) < 0$  et donc  $\Im m(1/\alpha) > 0$  pour  $|x_2| > h_1$ , prendre la partie imaginaire de (4.15) donne  $u(x_2) = 0$  pour tout  $|x_2| > h_1$  puisque les deux intégrandes sont de signes opposés. Par un argument de prolongement unique on a  $u = 0$ , et donc  $\xi \notin \Lambda(L_1)$ .  $\square$

**Remarque 4.14** L'ensemble des résonances dévoilées par la PML est noté par anticipation  $\Lambda_f(L_1)$ , car il permettra de définir des modes à fuite.

La Figure 4.5 illustre le Théorème 4.12 affirmant que l'introduction de PML a eu pour conséquence de faire tourner le spectre essentiel de l'opérateur  $L_0$  autour du point  $(-k_\infty^2, 0)$  et d'un angle de  $-2 \arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty)$ . De plus, le Théorème 4.13 indique que le spectre discret de ce dernier n'a pas été modifié par les PML. Un élément très important est l'apparition d'un ensemble dénombrable de valeurs propres complexes dans le secteur  $S_\alpha$ , balayé par le spectre essentiel lors de cette rotation, qu'on appelle résonances du problème. Nous reviendrons plus en détails sur ce point après. Pour comprendre cela, revenons à la notion de prolongement méromorphe de la résolvante. Nous sommes partis de l'équation de la résolvante  $u := R_{L_0}(\xi)f$  pour  $\xi \in \rho(L_0)$  et une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$  à support dans le cœur du guide, c'est-à-dire satisfaisant :  $\text{supp}(f) \subset (-h_1, h_1)$ . On a ensuite prolongé analytiquement la fonction  $u$  vis-à-vis de la variable transverse  $x_2$  dans la gaine pour  $|x_2| \geq h_1$ , de telle sorte que la fonction prolongée analytiquement coïncide avec la fonction de départ dans le domaine  $|x_2| < h_1$ . À l'issue de cette opération, on a introduit un nouvel opérateur  $L_1$  associé au problème dilaté dans la variable complexe, dont la résolvante vérifie d'après ce qu'on vient de dire, pour  $\xi \in \rho(L_0) \cap \rho(L_1)$  satisfaisant  $\Im m(\xi) > 0$  :

$$R_{L_1}(\xi)f|_{(-h_1, h_1)} = R_{L_0}(\xi)f|_{(-h_1, h_1)}. \quad (4.16)$$

En dehors du spectre essentiel, la résolvante de l'opérateur  $L_1$  est donc méromorphe. Nous pouvons alors dire que  $R_{L_1}(\xi)$  est un prolongement méromorphe de  $R_{L_0}(\xi)$  au travers du



spectre essentiel de  $L_0$ . Ce n'est plus un opérateur de  $L^2(\mathbb{R})$ , mais un opérateur de  $L^2_{\text{comp}}(\mathbb{R})$  dans  $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  qui est son espace dual.

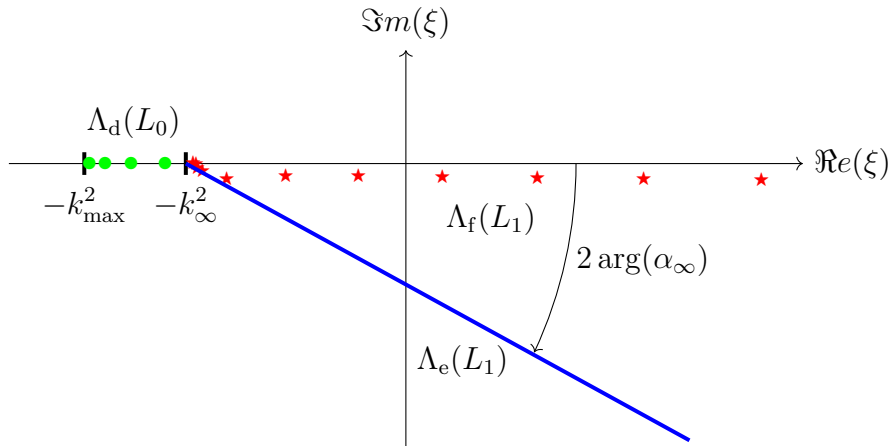


FIGURE 4.5: Représentation dans le plan complexe d'un exemple de spectre de l'opérateur  $L_1$  pour des matériaux satisfaisant  $c_0 < c_\infty$ . Ronds verts :  $\Lambda_d(L_0)$ , étoiles rouges :  $\Lambda_f(L_1)$  et demi-droite bleue :  $\Lambda_e(L_1)$ .

Penchons-nous maintenant sur la partie complexe du spectre discret de l'opérateur  $L_1$  dévoilée par les PML.

### 4.2.3 Les modes à fuite : des résonances complexes du prolongement méromorphe de la résolvante dévoilées par les PML

Nous venons de construire un prolongement méromorphe de la résolvante de l'opérateur  $L_0$  au travers de son spectre essentiel. Plus précisément, en reprenant les concepts introduits dans le cas de l'espace libre, on peut dire que nous sommes partis de la résolvante dans le domaine physique et l'avons prolongée de façon méromorphe à une partie du demi-espace inférieur du domaine non physique (tout le demi-espace inférieur est obtenu lorsque  $\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty) = -\pi/2$ ). En dévoilant une partie du feuillet sortant sur le domaine non physique, nous avons fait apparaître des valeurs propres complexes de multiplicité géométrique finie de l'opérateur dilaté. Ce sont donc des pôles complexes du prolongement de la résolvante : ces objets sont appelés dans la littérature *résonances* du problème. Il serait naturel de penser que ces objets dépendent des paramètres de la PML choisie, mais il n'en est rien, car ce sont des objets physiques qui existent indépendamment des PML. Le résultat suivant nous en donne une caractérisation.

#### Lemme 4.15 [Gou10, Corollaire 2.1]

Soit  $S_\alpha := \{\xi \in \mathbb{C} \mid 2 \arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty) < \arg_{i\mathbb{R}^+}(k_\infty^2 + \xi) < 0\}$  le secteur dévoilé par les PML. Nous avons les trois équivalences caractérisant les résonances dévoilées :

1.  $\xi \in \Lambda_f(L_1)$ ;
2.  $\xi \in S_\alpha$  et il existe une fonction  $u$  non nulle telle que :

$$\begin{cases} d_{x_2}(\mu d_{x_2} u) + \mu(k^2 + \lambda^2)u = 0 & , \quad x_2 \in \mathbb{R}. \\ u(x_2) \propto e^{i\beta_\infty(\xi)x_2} & , \quad x_2 \rightarrow +\infty \\ u(x_2) \propto e^{-i\beta_\infty(\xi)x_2} & , \quad x_2 \rightarrow -\infty; \end{cases}$$

3.  $\xi \in S_\alpha$  et  $\xi$  est une racine de la relation de dispersion :

$$f_{1,s}(\xi) \cdot f_{1,a}(\xi) = 0, \quad (4.17)$$

avec :

$$\begin{aligned} f_{1,s}(\xi) &:= i\mu_\infty\beta_\infty(\xi)c^0(\xi; h_0) + \mu_0\beta_0^2(\xi)s^0(\xi; h_0), \\ f_{1,a}(\xi) &:= i\mu_\infty\beta_\infty(\xi)s^0(\xi; h_0) - \mu_0c^0(\xi; h_0). \end{aligned}$$

De plus,  $\xi \in \Lambda_f(L_1)$  est une valeur propre simple qui est associée à un mode symétrique (respectivement antisymétrique) si et seulement si  $\xi$  est un zéro de  $f_{1,s}$  (respectivement  $f_{1,a}$ ).

*Démonstration.* L'équivalence entre les deux premiers points est prouvée dans [Gou10]. Montrons l'équivalence entre les deuxième et troisième points. Soient  $\xi$  et  $u$  satisfaisant le second point. Il existe des coefficients complexes  $A, B, A^\pm$  tels que :

$$u(x_2) = \begin{cases} A^- e^{-i\beta_\infty(\xi)x_2} & , \quad x_2 < -h_0 \\ Ac^0(\xi; x_2) + Bs^0(\xi; x_2) & , \quad -h_0 \leq x_2 \leq h_0 \\ A^+ e^{i\beta_\infty(\xi)x_2} & , \quad x_2 > h_0, \end{cases} \quad (4.18)$$

où  $\beta_\infty(\xi) := \sqrt{k_\infty^2 + \xi}$  et les quantités  $c^0(\xi; x_2)$  et  $s^0(\xi; x_2)$  sont définies par (4.3). En écrivant les conditions de raccord de  $u$  et  $\mu d_{x_2} u$  en  $x_2 = \pm h_0$  on obtient le système matriciel :

$$\begin{cases} c^0(\xi; h_0)A + s^0(\xi; h_0)B = e^{i\beta_\infty(\xi)h_0} A^+ \\ c^0(\xi; h_0)A - s^0(\xi; h_0)B = e^{i\beta_\infty(\xi)h_0} A^- \\ -\mu_0\beta_0^2(\xi)s^0(\xi; h_0)A + \mu_0c^0(\xi; h_0)B = i\mu_\infty\beta_\infty(\xi)e^{i\beta_\infty(\xi)h_0} A^+ \\ \mu_0\beta_0^2(\xi)s^0(\xi; h_0)A + \mu_0c^0(\xi; h_0)B = -i\mu_\infty\beta_\infty(\xi)e^{i\beta_\infty(\xi)h_0} A^- \end{cases} \quad (4.19)$$

Puisque ce système a une solution non nulle, son déterminant est nul, ce qui donne :

$$\underbrace{(i\mu_\infty\beta_\infty(\xi)c^0(\xi; h_0) + \mu_0\beta_0^2(\xi)s^0(\xi; h_0))}_{:=f_{1,s}(\xi)} \cdot \underbrace{(i\mu_\infty\beta_\infty(\xi)s^0(\xi; h_0) - \mu_0(\xi)c^0(\xi; h_0))}_{:=f_{1,a}(\xi)} = 0.$$

Puisque chaque étape du raisonnement précédent est une équivalence, on a bien l'équivalence entre les points 2 et 3. La dernière assertion se démontre comme pour le Lemme 4.7.  $\square$

**Remarque 4.16** La relation de dispersion (4.17) peut s'obtenir plus directement en prolongeant de façon méromorphe la relation de dispersion (4.4) donnant les modes guidés. En effet, comme nous l'avons vu en sous-section 4.2.1, la fonction  $\xi \mapsto -\gamma_\infty(\xi)$  définie dans le demi-plan  $\Im m(\xi) > 0$  peut se prolonger de façon analytique au travers de sa coupure dans le demi-plan  $\Im m(\xi) < 0$  en la fonction  $\xi \mapsto \gamma_\infty(\xi)$  qui y est égale à la fonction  $\xi \mapsto i\beta_\infty(\xi)$ .

**Remarque 4.17** Les fonctions  $f_{1,s}$  et  $f_{1,a}$  sont analytiques en dehors du spectre essentiel sur lequel on a placé la coupure de  $\beta_\infty$ . Dans la suite, nous utiliserons une réécriture de l'équation de dispersion faisant intervenir des fonctions méromorphes pour la clarté des calculs. On écrira alors :

$$\hat{f}_{1,s}(\xi) \cdot \hat{f}_{1,a}(\xi) = 0,$$

avec :

$$\begin{aligned}\hat{f}_{1,s}(\xi) &:= i\mu_\infty\beta_\infty(\xi) + \mu_0\beta_0(\xi)\tan(\beta_0(\xi)h_0), \\ \hat{f}_{1,a}(\xi) &:= i\mu_\infty\beta_\infty(\xi) - \mu_0\beta_0(\xi)\cotan(\beta_0(\xi)h_0).\end{aligned}$$

Le Lemme 4.15 nous dit plusieurs choses. Premièrement, les résonances sont des objets qui ne dépendent pas du profil de PML  $\alpha$  choisi : elles sont donc intrinsèques au problème physique de départ. Deuxièmement, les fonctions propres associées aux résonances sont exponentiellement croissantes à l'infini dans la direction transverse. Ce comportement traduit la fuite de l'énergie du cœur dans la gaine et son accumulation à l'infini en régime harmonique. L'introduction de PML a pour effet de transformer ce comportement exponentiellement croissant en un comportement exponentiellement décroissant. En effet, pour  $\xi \in \Lambda_f(L_1)$  et  $u \in \text{Ker}(L_1 - \xi I)$ , on peut voir facilement que :

$$u(x_2) \propto \begin{cases} e^{i\frac{\beta_\infty(\xi)}{\alpha_\infty}x_2} & , \quad x_2 \rightarrow +\infty \\ e^{-i\frac{\beta_\infty(\xi)}{\alpha_\infty}x_2} & , \quad x_2 \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

ce qui correspond à une décroissance exponentielle puisque  $\Im m(\beta_\infty(\xi)/\alpha_\infty) > 0$  dans le secteur  $S_\alpha$  dévoilé par les PML. Pour le voir, il suffit de remarquer qu'on a dans ce secteur  $2 \arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty) < \arg_{i\mathbb{R}^+}(k_\infty^2 + \xi) < 0$ , ce qui se réécrit  $0 < \arg_{i\mathbb{R}^+}(\beta_\infty(\xi)/\alpha_\infty) < \pi/2$  en utilisant le fait que  $-\pi/2 < \arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty) < 0$ . On peut désormais définir les modes associés à ces résonances qui sont appelés dans la littérature *modes à fuite* (ou *leaky modes* en anglais). Selon [Oli84], le concept de leaky est historiquement apparu dans les années 1930 dans un contexte d'électromagnétisme, mais a été formalisé de façon rigoureuse plus tard avec [Mar56]. Il a ensuite été repris pour décrire la propagation des ondes dans des guides ouverts dans de nombreuses autres applications telles que l'optique (se référer par exemple à [HM09]).

#### Définition 4.18

Soit  $\xi \in \Lambda_f(L_1)$  et  $u \in \text{Ker}(L_1 - \xi I)$ . On appelle *modes à fuite sortants*, les fonctions à variables séparées  $u(x_1, x_2) = u(\mathcal{C}^{-1}(x_2))e^{\pm\lambda x_1}$  où  $\lambda = -\mathbb{R}^-\sqrt{\xi}$ , de telle sorte que  $\Re e(\lambda) < 0$  et  $\Im m(\lambda) > 0$ .

**Remarque 4.19** *Il serait possible de définir de la même façon les modes à fuite entrants en remplaçant  $\alpha$  par  $\bar{\alpha}$ . Cela reviendrait à révéler la partie du feuillet entrant du domaine non physique.*

Les modes à fuite sont donc des objets exponentiellement croissants dans la direction transverse en l'absence de PML et décroissants en présence de PML. Par ailleurs, ils oscillent en décroissant exponentiellement dans la direction longitudinale du guide dans leur sens de propagation. Ce comportement traduit une atténuation qui est d'autant plus importante que  $|\Re e(\lambda)|$  est grand. On dit qu'ils sont sortants puisqu'ils correspondent à des résonances localisées sur le feuillet sortant : ce sont des objets qui rayonnent de l'énergie du cœur vers la gaine. Pour le voir, il suffit d'écrire que les fonctions transverses de ces modes sont proportionnelles à  $e^{\pm i\beta_\infty(\xi)x_2}$  pour  $\pm x_2 > h_0$ . Or, ils satisfont  $\Re e(\beta_\infty(\xi)) > 0$  puisque  $\Im m(\xi) < 0$ . Par conséquent, ils correspondent bien à des ondes qui se propagent du cœur vers la gaine pour la convention de dépendance temporelle (I2.2).

## Résumé de la section 4.2

Pour résumer l'analyse modale du guide ouvert avec des PML infinies on rappelle qu'il existe :

- Des modes guidés du problème sans PML, si  $c_0 < c_\infty$ . Ils sont toujours propagatifs dans la direction axiale et exponentiellement décroissants dans la direction transverse.
- Des modes associés au spectre essentiel : ils oscillent sans décroître dans la direction transverse du guide et peuvent être propagatifs ou évanescents dans la direction axiale; ils ne correspondent pas à des objets intrinsèques du problème de départ puisqu'ils dépendent du profil de PML choisi.

Les modes intrinsèques au problème de départ (modes à fuite et modes guidés) sont exponentiellement décroissants dans la direction transverse du guide, on peut donc espérer tronquer le domaine suffisamment loin du cœur sans que des réflexions significatives soient introduites en bout de PML.

## 4.3 Le guide ouvert tronqué avec des PML finies

La troncature des PML est effectuée en  $|x_2| = h_2$  pour  $h_2 > h_1$  suffisamment grand. Par la suite, on appellera *épaisseur des PML* la quantité  $(h_2 - h_1)$ . Nous choisissons d'imposer en bout de PML une condition de Neumann homogène (une condition de Dirichlet ou de Fourier pourrait aussi tout à fait convenir). Le guide ouvert est maintenant transformé en un guide fermé noté  $W := \mathbb{R} \times \Sigma$  de section donnée par  $\Sigma := (-h_2, h_2)$  et de bord extérieur noté  $\Gamma := \partial W$ . Cette approximation de la structure réelle sur laquelle nous allons désormais nous concentrer est représentée Figure 4.6. Les modes sont maintenant des fonctions  $u(x_1, x_2) = u(x_2)e^{\lambda x_1}$

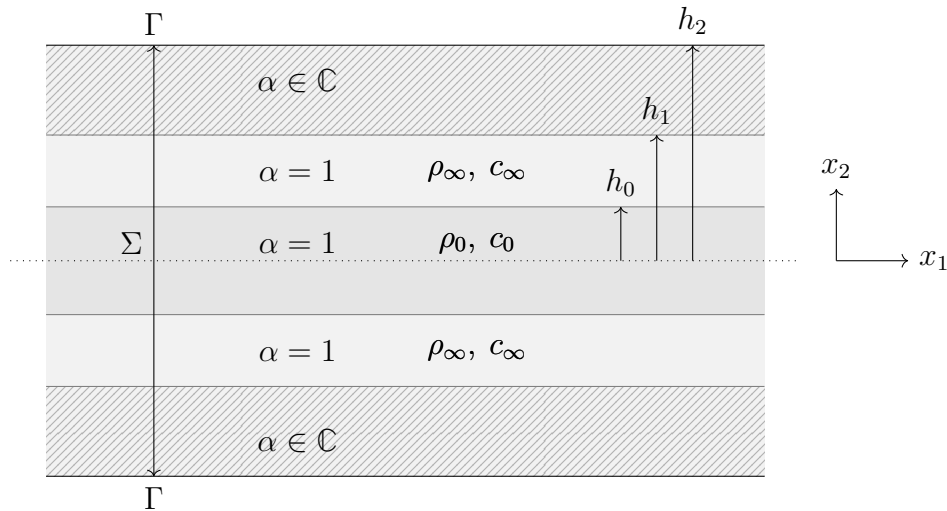


FIGURE 4.6: Géométrie 2D d'un guide ouvert tronqué avec des PML finies noté  $W$ .

solutions du problème spectral :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \xi \in \mathbb{C} \text{ et } u \text{ non nulle tels que} \\ & \begin{cases} -\frac{\alpha}{\mu} d_{x_2}(\alpha \mu d_{x_2} u) - k^2 u = \xi u & \text{dans } \Sigma \\ d_{x_2} u = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.20)$$

avec  $\lambda^2 = \xi$ . Comme précédemment, l'étude de ce problème nécessite l'introduction d'un opérateur transverse  $L_2$  de  $L^2(\Sigma)$  défini par :

$$L_2 u := -\frac{\alpha}{\mu} d_{x_2}(\alpha \mu d_{x_2} u) - k^2 u, \quad (4.21)$$

pour  $u \in D(L_2) = \{v \in H^1(\Sigma) \mid d_{x_2}(\alpha \mu d_{x_2} v) \in L^2(\Sigma), d_{x_2} v(-h_2) = d_{x_2} v(h_2) = 0\}$ . En utilisant la compacité de l'injection de  $H^1(\Sigma)$  dans  $L^2(\Sigma)$ , il est possible de montrer le résultat suivant.

**Proposition 4.20** [Gou10, Théorème 3.1]

L'opérateur  $L_2$  est à résolvante compacte.

Cette propriété garantit que le spectre de  $L_2$  noté  $\Lambda(L_2)$  est purement discret et qu'il est constitué d'un ensemble dénombrable de valeurs propres notées  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui tendent en module vers l'infini.

### 4.3.1 Convergence du spectre du problème avec PML tronquées vers le spectre du problème avec PML infinies

Les éléments de  $\Lambda(L_2)$  correspondent aux zéros d'une relation de dispersion. Pour obtenir cette relation, on introduit les fonctions entières  $c^\infty(\xi; x_2)$  et  $s^\infty(\xi; x_2)$  définies de la même façon que  $c^0(\xi; x_2)$  et  $s^0(\xi; x_2)$  données par (4.3), mais en remplaçant  $k_0$  par  $k_\infty$ .

**Lemme 4.21**

On a l'équivalence entre :

1.  $\xi \in \Lambda(L_2)$ ;
2.  $\xi \in \mathbb{C}$  est une racine de la relation de dispersion :

$$f_{2,s}(\xi) \cdot f_{2,a}(\xi) = 0, \quad (4.22)$$

avec :

$$\begin{aligned} f_{2,s}(\xi) &:= \mu_\infty \beta_\infty^2(\xi) s^\infty(\xi; \eta(h_2)) c^0(\xi; h_0) + \mu_0 \beta_0^2(\xi) s^0(\xi; h_0) c^\infty(\xi; \eta(h_2)) \\ f_{2,a}(\xi) &:= \mu_\infty \beta_\infty^2(\xi) s^\infty(\xi; \eta(h_2)) s^0(\xi; h_0) - \mu_0 c^0(\xi; h_0) c^\infty(\xi; \eta(h_2)), \end{aligned}$$

où :

$$\eta(x_2) := \int_{h_0}^{x_2} \alpha^{-1}(t) dt, \quad x_2 > h_0. \quad (4.23)$$

En outre,  $\xi \in \Lambda(L_2)$  est une valeur propre simple qui est associée à un mode symétrique (respectivement antisymétrique) si et seulement si  $\xi$  est un zéro de  $f_{1,s}$  (respectivement  $f_{1,a}$ ).

*Démonstration.* Ce résultat se démontre de la même façon que les Lemmes 4.7 et 4.15. Nous détaillons néanmoins l'équivalence du fait de la présence d'un coefficient non constant par morceaux dans le cas général. Soit  $\xi \in \Lambda(L_2)$  et  $u \in \text{Ker}(L_2 - \xi I)$  non nul. Le couple  $(\xi, u)$  satisfait (4.20), il existe donc des coefficients  $A_i, B_i, i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$  tels que :

$$u(x_2) = \begin{cases} A_1 e^{i\beta_\infty(\xi) \int_{h_1}^{x_2} \alpha^{-1}(t) dt} + B_1 e^{-i\beta_\infty(\xi) \int_{h_1}^{x_2} \alpha^{-1}(t) dt} & \text{si } h_1 < x_2 < h_2 \\ A_2 e^{i\beta_\infty(\xi)x_2} + B_2 e^{-i\beta_\infty(\xi)x_2} & \text{si } h_0 < x_2 < h_1 \\ A_3 e^{i\beta_0(\xi)x_2} + B_3 e^{-i\beta_0(\xi)x_2} & \text{si } -h_0 < x_2 < h_0 \\ A_4 e^{i\beta_\infty(\xi)x_2} + B_4 e^{-i\beta_\infty(\xi)x_2} & \text{si } -h_1 < x_2 < -h_0 \\ A_5 e^{i\beta_\infty(\xi) \int_{-h_1}^{x_2} \alpha^{-1}(t) dt} + B_5 e^{-i\beta_\infty(\xi) \int_{-h_1}^{x_2} \alpha^{-1}(t) dt} & \text{si } -h_2 < x_2 < -h_1. \end{cases}$$

Écrire les conditions aux limites  $d_{x_2}u = 0$  en  $x_2 = \pm h_2$  ainsi que la continuité de  $u$  et de  $\alpha \mu d_{x_2}u$  en  $x_2 = \pm h_0$  et  $x_2 = \pm h_1$ , donne après quelques opérations élémentaires le système linéaire :

$$\begin{cases} e^{i\beta_0(\xi)h_0} A_3 + e^{-i\beta_0(\xi)h_0} B_3 - 2e^{i\beta_\infty(\xi)\eta(h_2)} c^\infty(\xi; \eta(h_2)) A^1 = 0 \\ e^{i\beta_0(\xi)h_0} A_3 - e^{-i\beta_0(\xi)h_0} B_3 + 2T(\xi)\beta_\infty(\xi) e^{i\beta_\infty(\xi)\eta(h_2)} s^\infty(\xi; \eta(h_2)) A^1 = 0 \\ e^{-i\beta_0(\xi)h_0} A_3 + e^{i\beta_0(\xi)h_0} B_3 - 2e^{-i\beta_\infty(\xi)\eta(h_2)} c^\infty(\xi; \eta(h_2)) A^5 = 0 \\ e^{-i\beta_0(\xi)h_0} A_3 - e^{i\beta_0(\xi)h_0} B_3 - 2T(\xi)\beta_\infty(\xi) e^{-i\beta_\infty(\xi)\eta(h_2)} s^\infty(\xi; \eta(h_2)) A^5 = 0, \end{cases} \quad (4.24)$$

où  $T(\xi) := i \frac{\mu_\infty \beta_\infty(\xi)}{\mu_0 \beta_0(\xi)}$ . Ce système a une solution non nulle, l'annulation de son déterminant donne alors la relation de dispersion attendue. La dernière assertion se démontre comme au Lemme 4.7 en remarquant que la recherche séparée des modes symétriques et antisymétriques nous conduit à calculer le noyau d'un système linéaire de taille 2.  $\square$

**Remarque 4.22** Comme avec la relation de dispersion donnant les modes à fuite exacts, on en donne une version méromorphe plus simple à manipuler :

$$\hat{f}_{2,s}(\xi) \cdot \hat{f}_{2,a}(\xi) = 0,$$

avec :

$$\begin{aligned} \hat{f}_{2,s}(\xi) &:= \mu_\infty \beta_\infty(\xi) \tan(\beta_\infty(\xi)\eta(h_2)) + \mu_0 \beta_0(\xi) \tan(\beta_0(\xi)h_0), \\ \hat{f}_{2,a}(\xi) &:= \mu_\infty \beta_\infty(\xi) \tan(\beta_\infty(\xi)\eta(h_2)) - \mu_0 \beta_0(\xi) \cotan(\beta_0(\xi)h_0). \end{aligned}$$

Une question importante qu'il est naturel de se poser est la suivante : le problème avec PML tronquées est-il une approximation du problème de départ ? La réponse comporte deux éléments : montrer que le spectre de l'opérateur  $L_2$  converge vers celui de l'opérateur  $L_1$ , mais aussi montrer que la solution de problèmes de scattering dans le domaine tronqué converge vers la solution du problème non borné de départ. Ces deux points ont été traités dans [KP10; KP09] pour un problème de scattering à l'aide d'outils d'analyse fonctionnelle avancés. Nous proposons dans ce cas simple 1D de tirer parti des relations de dispersion pour montrer la convergence de  $\Lambda(L_2)$  vers  $\Lambda(L_1)$  lorsque l'épaisseur de la PML tend vers l'infini.

#### Proposition 4.23

Pour  $\xi_0 \in \mathbb{C}$  et  $\varepsilon > 0$ , on définit  $B(\xi_0, \varepsilon) := \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi - \xi_0| < \varepsilon\}$ . On a les deux résultats suivants.

1. Soit  $\xi_0 \in \Lambda_d(L_1)$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, il existe  $H > 0$  tel que pour tout  $h_2 > H$ ,  $B(\xi_0, \varepsilon)$  contient un unique élément de  $\Lambda(L_2)$ .
2. Soit  $\xi_0 \in \rho(L_1)$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, il existe  $H > 0$  tel que pour tout  $h_2 > H$ ,  $B(\xi_0, \varepsilon) \cap \Lambda(L_2) = \emptyset$ .

*Démonstration.* Nous allons appliquer le théorème de Rouché pour montrer que les relations de dispersion donnant les modes exactes et les modes approchés (c'est-à-dire avec PML tronquées) ont le même nombre de racines au voisinage d'une valeur propre exacte.

1.  $\xi_0 \in \Lambda_d(L_1)$

Rappelons que le spectre discret de  $L_1$  admet la décomposition  $\Lambda_d(L_1) = \Lambda_d(L_0) \cup \Lambda_f(L_1)$ .

Si  $\xi_0 \in \Lambda_f(L_1)$ , alors c'est d'après le Lemme 4.15 une solution de la relation de dispersion  $\hat{f}_{1,s}(\xi) \cdot \hat{f}_{1,a}(\xi) = 0$ , où :

$$\begin{aligned}\hat{f}_{1,s}(\xi) &= i\mu_\infty\beta_\infty(\xi) + \mu_0\beta_0(\xi)\tan(\beta_0(\xi)h_0), \\ \hat{f}_{1,a}(\xi) &= i\mu_\infty\beta_\infty(\xi) - \mu_0\beta_0(\xi)\cotan(\beta_0(\xi)h_0).\end{aligned}$$

Traisons le cas où  $\hat{f}_{1,s}(\xi_0) = 0$ , le cas  $\hat{f}_{1,a}(\xi_0) = 0$  s'abordant de façon analogue. Comme cette fonction est méromorphe en dehors de la coupure de  $\beta_\infty$ , on peut se donner  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit tel que  $B(\xi_0, \varepsilon)$  ne contienne pas de pôles et ne contienne pour racine que  $\xi_0$ . La fonction  $\xi \mapsto |\hat{f}_{1,s}(\xi)|$ , qui est continue sur  $\partial B(\xi_0, \varepsilon)$ , est alors minorée par une constante  $c_{\hat{f}_{1,s}} > 0$ . Pour appliquer le théorème de Rouché, il faut chercher à contrôler :

$$g_{1,s}(\xi; h_2) := |\hat{f}_{1,s}(\xi) - \hat{f}_{2,s}(\xi)| = \mu_\infty|\beta_\infty(\xi)||i - \tan(\beta_\infty(\xi)\eta(h_2))|,$$

par  $|\hat{f}_{1,s}(\xi)|$  sur  $\partial B(\xi_0, \varepsilon)$ . Puisque  $\tan(z) = -i\frac{1 - e^{-2iz}}{1 + e^{-2iz}}$ , il existe  $C_1(\xi_0, \varepsilon) > 0$  telle qu'on a pour tout  $\xi \in B(\xi_0, \varepsilon)$  :

$$g_{1,s}(\xi; h_2) \leq C_1(\xi_0, \varepsilon) \left| \frac{2}{1 + e^{-2i\beta_\infty(\xi)\eta(h_2)}} \right|. \quad (4.25)$$

Avec les hypothèses faites sur  $\alpha$  (voir Définition 4.10), on a  $\alpha(x_2) = \alpha_\infty$  pour  $|x_2|$  suffisamment grand et alors il existe une constante  $\eta_0 \in \mathbb{C}$ , indépendante de  $h_2$ , telle que  $\eta(h_2) = h_2/\alpha_\infty + \eta_0$  pour  $h_2$  suffisamment grand. Par conséquent :

$$|e^{-2i\beta_\infty(\xi)\eta(h_2)}| = e^{2\Im m\left(\frac{\beta_\infty(\xi)}{\alpha_\infty}h_2 + \beta_\infty(\xi)\eta_0\right)} \leq C_0(\xi_0, \varepsilon)e^{2\Im m\left(\frac{\beta_\infty(\xi)}{\alpha_\infty}\right)h_2},$$

où :

$$C_0(\xi_0, \varepsilon) := \sup_{\xi \in \partial B(\xi_0, \varepsilon)} e^{2\Im m(\beta_\infty(\xi)\eta_0)} > 0.$$

Ensuite, comme  $0 < \arg(\beta_\infty(\xi_0)/\alpha_\infty) < \pi/2$  d'après le Lemme 4.15, nous avons pour  $\varepsilon$  suffisamment petit l'existence d'une constante  $c(\xi_0, \varepsilon) > 0$  telle que  $\Im m(\beta_\infty(\xi)/\alpha_\infty) > c(\xi_0, \varepsilon)$ ,  $\forall \xi \in \overline{B(\xi_0, \varepsilon)}$ . Il en découle que :

$$|e^{-2i\beta_\infty(\xi)\eta(h_2)}| \xrightarrow{h_2 \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Par suite, on peut écrire pour  $h_2$  suffisamment grand et pour tout  $\xi \in \partial B(\xi_0, \varepsilon)$  :

$$g_{1,s}(\xi; h_2) \leq 3C_1(\xi_0, \varepsilon)|e^{2i\beta_\infty(\xi)\eta(h_2)}| \leq C_2(\xi_0, \varepsilon)e^{-2\Im m\left(\frac{\beta_\infty(\xi)}{\alpha_\infty}\right)h_2} \leq C_2(\xi_0, \varepsilon)e^{-2\Im m\left(\frac{\beta_\infty(\xi^*(\varepsilon))}{\alpha_\infty}\right)h_2}, \quad (4.26)$$

avec  $C_2(\xi_0, \varepsilon) := 3C_1(\xi_0, \varepsilon)C_0(\xi_0, \varepsilon)$  et :

$$\xi^*(\varepsilon) := \operatorname{argmin}_{\xi \in \partial B(\xi_0, \varepsilon)} \Im m\left(\frac{\beta_\infty(\xi)}{\alpha_\infty}\right).$$



Cette inégalité est une majoration de  $g_{1,s}(\xi; h_2)$ , uniforme par rapport à  $\xi$  sur  $\partial B(\xi_0, \varepsilon)$ . Pour  $h_2$  suffisamment grand, le majorant est strictement inférieur à  $c_{\hat{f}_{1,s}}$  et donc :

$$g_{1,s}(\xi; h_2) < |\hat{f}_{1,s}(\xi)|, \quad \forall \xi \in \partial B(\xi_0, \varepsilon).$$

D'après le théorème de Rouché, le nombre de zéros (comptés avec leur multiplicité dans la relation de dispersion) de  $\hat{f}_{1,s}$  et de  $\hat{f}_{2,s}$  dans  $B(\xi_0, \varepsilon)$  sont égaux. Et puisque  $\hat{f}_{2,s}$  est méromorphe,  $B(\xi_0, \varepsilon)$  ne contient pour  $\varepsilon$  suffisamment petit qu'une racine de  $\hat{f}_{2,s}$  dont la multiplicité est égale à celle de  $\xi_0$ . Le résultat s'en déduit directement, car les racines de  $\hat{f}_{2,s}$  correspondent aux éléments de  $\Lambda(L_2)$  d'après le Lemme 4.21.

Si  $\xi_0 \in \Lambda_d(L_0)$ , alors c'est aussi d'après le Lemme 4.7 une racine de la relation de dispersion  $\hat{f}_{0,s}(\xi) \cdot \hat{f}_{0,a}(\xi) = 0$ . Traitons à nouveau le cas  $\hat{f}_{0,s}(\xi_0) = 0$ . Étant donné que la relation de dispersion (4.22) peut s'écrire à l'aide de séries ne faisant intervenir que les puissances paires de  $\beta_\infty(\xi)$ , il est possible de changer de détermination pour la racine carrée de  $k_\infty^2 + \xi$ . On peut ainsi remplacer  $\beta_\infty(\xi)$  par  $i\gamma_\infty(\xi)$  dans l'expression de  $\hat{f}_{2,s}$ . On cherche alors à contrôler :

$$g_{0,s}(\xi; h_2) := |\hat{f}_{0,s}(\xi) - \hat{f}_{2,s}(\xi)| = \mu_\infty |\gamma_\infty(\xi)| |1 + i \tan(i\gamma_\infty(\xi)\eta(h_2))|,$$

sur le bord de la boule  $B(\xi_0, \varepsilon)$  dont le rayon  $\varepsilon > 0$  est choisi suffisamment petit pour qu'elle ne contienne pas de pôles de  $\hat{f}_{0,s}$  ni d'autres racines que  $\xi_0$ . Comme précédemment, on montre qu'il existe une constante  $C_1(\xi_0, \varepsilon) > 0$  telle que :

$$g_{0,s}(\xi; h_2) \leq C_1(\xi_0, \varepsilon) \left| \frac{2}{1 + e^{2\gamma_\infty(\xi)\eta(h_2)}} \right|.$$

De plus, il existe aussi une constante  $\eta_0 \in \mathbb{C}$  telle que  $\eta(h_2) = h_2/\alpha_\infty + \eta_0$  pour  $h_2$  suffisamment grand. Ainsi :

$$|e^{2\gamma_\infty(\xi)\eta(h_2)}| = e^{2\Re(\frac{\gamma_\infty(\xi)}{\alpha_\infty} h_2 + \gamma_\infty(\xi)\eta_0)} \leq C_0(\xi_0, \varepsilon) e^{2\Re(\frac{\gamma_\infty(\xi)}{\alpha_\infty}) h_2},$$

où :

$$C_0(\xi_0, \varepsilon) := \sup_{\xi \in \partial B(\xi_0, \varepsilon)} e^{2\Re(\gamma_\infty(\xi)\eta_0)}.$$

Puisque  $\xi_0 \in \Lambda_d(L_0)$ , nous savons d'après le Lemme 4.7 que  $\xi_0 \in ]-k_0^2, -k_\infty^2[$  et par suite que  $\gamma_\infty(\xi_0) \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ . On en déduit que pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, il existe une constante  $c(\xi_0, \varepsilon) > 0$  telle que  $\Re(\gamma_\infty(\xi)/\alpha_\infty) > c(\xi_0, \varepsilon)$ ,  $\forall \xi \in \overline{B(\xi_0, \varepsilon)}$ . On obtient alors le pendant de (4.26) :

$$g_{0,s}(\xi; h_2) \leq C_2(\xi_0, \varepsilon) e^{-2\Re(\frac{\gamma_\infty(\xi^*(\varepsilon))}{\alpha_\infty}) h_2},$$

où  $C_2(\xi_0, \varepsilon) > 0$  et :

$$\xi^*(\varepsilon) := \operatorname{argmin}_{\xi \in \partial B(\xi_0, \varepsilon)} \Re\left(\frac{\gamma_\infty(\xi)}{\alpha_\infty}\right).$$

On peut alors conclure comme dans le premier cas.

## 2. $\xi_0 \in \rho(L_1)$

Le résultat se démontre en suivant la même démarche que précédemment, mais en appliquant cette fois le théorème de Rouché dans un ouvert qui ne contient pas de zéros des



relations de dispersion donnant les modes guidés et à fuite exacts. Nous définissons de façon préalable les domaines  $D_\alpha^i$ ,  $i = 1, 2$  donnés par :

$$\begin{aligned} D_\alpha^1 &:= \{\xi \in \mathbb{C} \mid 2 \arg_{\mathbb{R}^-}(\alpha_\infty) < \arg_{\mathbb{R}^-}(k_\infty^2 + \xi) < \pi\} \setminus (-k_\infty^2 + i\mathbb{R}^+), \\ D_\alpha^2 &:= \{\xi \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg_{\mathbb{R}^+}(k_\infty^2 + \xi) < 2\pi + 2 \arg_{\mathbb{R}^-}(\alpha_\infty)\}, \end{aligned}$$

et représentés sur la Figure 4.7.

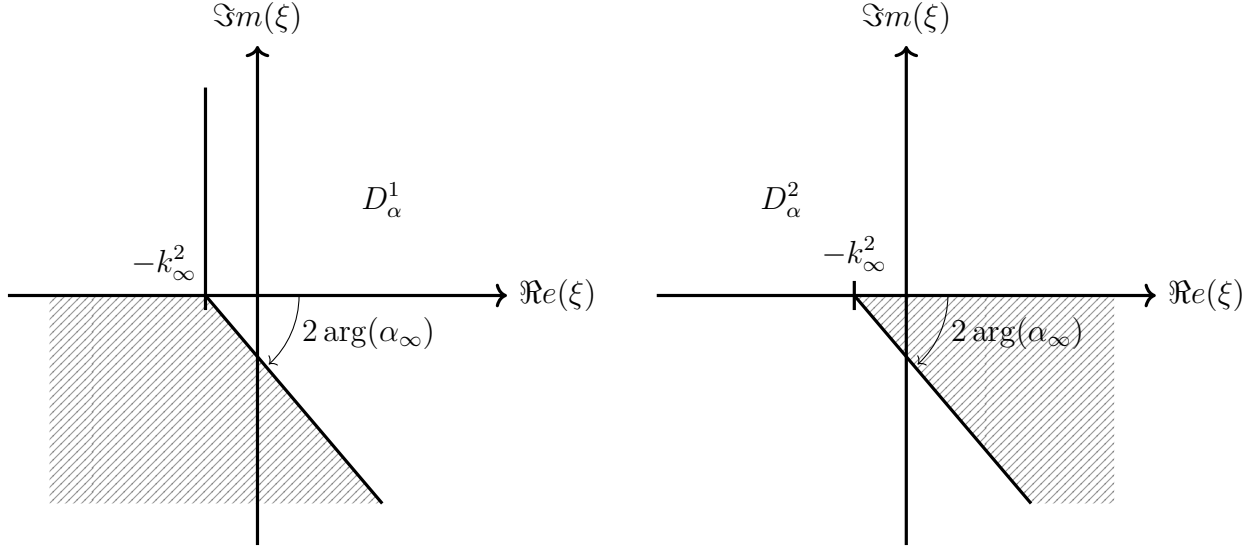


FIGURE 4.7: Représentation des domaines  $D_\alpha^i$   $i = 1, 2$ .

Commençons par traiter le cas  $\xi_0 \in D_\alpha^1$ . On a dans ce cas,  $0 < \arg_{\mathbb{R}^-}(\beta_\infty(\xi)/\alpha_\infty) < \pi$ , ce qui donne  $\Im m(\beta_\infty(\xi)/\alpha_\infty) > 0$ . De plus, puisque  $\xi_0 \in \rho(L_1)$ , on a en particulier  $\hat{f}_{1,s}(\xi_0) \neq 0$  et  $\hat{f}_{1,a}(\xi_0) \neq 0$ . Il existe alors pour ces deux fonctions un réel  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(\xi_0, \varepsilon)$  soit inclus dans  $D_\alpha^1$ , ne contienne pas de racines et contienne au plus un pôle. On peut alors montrer en reprenant les calculs du cas  $\xi_0 \in \Lambda_f(L_1)$  développés pour prouver le premier point que les fonctions  $\hat{f}_{2,s}$  et  $\hat{f}_{2,a}$  n'ont dans  $B(\xi_0, \varepsilon)$  aucune racine et au plus un pôle pour  $h_2$  suffisamment grand.

Pour le cas  $\xi_0 \in D_\alpha^2$ , il faut remarquer que :

$$\begin{aligned} D_\alpha^2 &:= \{\xi \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg_{\mathbb{R}^+}(k_\infty^2 + \xi) < 2\pi + 2 \arg_{\mathbb{R}^-}(\alpha_\infty)\} \\ &= \{\xi \in \mathbb{C} \mid -\pi < \arg_{\mathbb{R}^-}(-k_\infty^2 - \xi) < \pi + 2 \arg_{\mathbb{R}^-}(\alpha_\infty)\}. \end{aligned}$$

Nous avons cette fois  $-\pi/2 < \arg_{\mathbb{R}^-}(\gamma_\infty(\xi_0)/\alpha_\infty) < \pi/2$ , ce qui implique  $\Re e(\gamma_\infty(\xi_0)/\alpha_\infty) > 0$ . Puisque  $\xi_0 \in \rho(L_0)$ , on utilise cette fois le fait que  $\hat{f}_{0,s}(\xi_0) \neq 0$  et  $\hat{f}_{0,a}(\xi_0) \neq 0$ . Il existe à nouveau un réel  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(\xi_0, \varepsilon)$  soit inclus dans  $D_\alpha^2$  ne contienne pas de racine et contienne au plus un seul pôle. Des calculs analogues au cas  $\xi_0 \in \Lambda_d(L_0)$  du premier point permettent de prouver que les fonctions  $\hat{f}_{2,s}$  et  $\hat{f}_{2,a}$  n'ont dans  $B(\xi_0, \varepsilon)$  pas de racines et au plus un pôle pour  $h_2$  suffisamment grand.

Nous venons de montrer le résultat pour  $\xi_0 \in \rho(L_1) \cap (D_\alpha^1 \cup D_\alpha^2)$ . Or  $D_\alpha^1 \cup D_\alpha^2 = \mathbb{C} \setminus (-k_\infty^2 + \alpha_\infty^2 \mathbb{R}^+) = \mathbb{C} \setminus \Lambda_e(L_1)$ . Par conséquent,  $\rho(L_1) \cap (D_\alpha^1 \cup D_\alpha^2) = \rho(L_1)$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

Ce résultat montre que l'ensemble du spectre discret de l'opérateur  $L_1$  est approché par le spectre de  $L_2$ . En d'autres termes, les modes à fuite et modes guidés, quand ils existent, sont

correctement approchés avec des PML suffisamment épaisses. De plus, la convergence de l'ensemble résolvant de l'opérateur  $L_2$  vers celui de l'opérateur  $L_1$  garantit que l'opération de troncature n'introduit pas de valeurs propres parasites. En revanche, ce résultat ne nous donne pas d'information sur l'approximation du spectre essentiel de  $L_1$ . En fait, la troncature agit sur lui en le discrétisant. En utilisant encore les relations de dispersion, on peut mettre en évidence qu'une partie des valeurs propres de l'opérateur  $L_2$  est asymptotiquement distribuée le long du spectre essentiel de  $L_1$ . Nous appellerons les modes associés à ces valeurs propres *modes de PML*. Tout comme les modes correspondant au spectre essentiel de l'opérateur  $L_1$ , ces objets sont localisés dans la PML et y oscillent. Un exemple de spectre est représenté Figure 4.8.

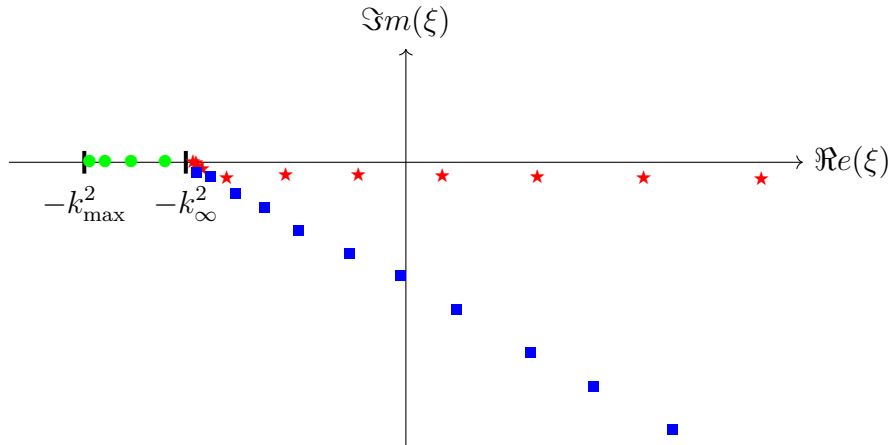


FIGURE 4.8: Représentation dans le plan complexe d'un exemple de spectre de l'opérateur  $L_2$  pour des matériaux satisfaisant  $c_0 < c_\infty$ . Ronds verts : approximation de  $\Lambda_d(L_0)$ , étoiles rouges : approximation de  $\Lambda_f(L_1)$  et carrés bleu : approximation de  $\Lambda_e(L_1)$ .

**Proposition 4.24** [Gou10, Proposition 3.2]

Les éléments de  $\Lambda(L_2)$  sont asymptotiquement distribués sur deux branches :

- une première branche correspondant aux modes à fuite :

$$\begin{cases} \Re e(\xi_n) \sim \frac{n^2 \pi^2}{h_0^2}, & \Im m(\xi_n) \sim -\frac{n\pi}{2h_0^2} \ln\left(\left|\frac{\mu_\infty + \mu_0}{\mu_\infty - \mu_0}\right|\right) & \text{si } \mu_0 \neq \mu_\infty \\ \Re e(\xi_n) \sim \frac{n^2 \pi^2}{h_0^2}, & \Im m(\xi_n) \sim -\frac{n\pi}{h_0^2} \ln(n\pi) & \text{si } \mu_0 = \mu_\infty, k_0 \neq k_\infty; \end{cases}$$

- une seconde branche correspondant aux modes à PML :  $-k_\infty^2 + \eta(h_2)\mathbb{R}^+$ , où  $\eta(\cdot)$  est défini par (4.23).

### 4.3.2 Propriétés supplémentaires du spectre en passant par un symbole

Nous venons de conduire une première étude du spectre de l'opérateur  $L_2$ . Pour la poursuivre, nous introduisons le symbole  $\mathcal{L}(\lambda) : H^1(\Sigma) \rightarrow H^1(\Sigma)^*$  défini par :

$$\langle \mathcal{L}(\lambda)u, v \rangle_{H^1(\Sigma)^*, H^1(\Sigma)} := \int_{\Sigma} (\alpha \mu d_{x_2} u d_{x_2} v - \frac{\mu}{\alpha} (k^2 + \lambda^2) uv) dx_2, \quad \forall (u, v) \in (H^1(\Sigma))^2. \quad (4.27)$$

Nous reconnaissons que l'introduction de ce symbole non linéaire en  $\lambda$  peut sembler artificielle à ce stade. Mais ce choix est en fait motivé par la théorie de Kondratiev faisant

intervenir des pencils d'opérateurs que nous utiliserons dans le prochain chapitre pour étudier le problème direct. Il est toutefois intéressant de remarquer que le symbole  $\mathcal{L}(\lambda)$  est un opérateur symétrique, ce qui n'est pas le cas de l'opérateur  $L_2$ . L'utilisation du symbole va ainsi permettre de simplifier légèrement l'obtention des résultats supplémentaires sur le spectre. Pour effectuer ce changement d'approche, nous définissons tout d'abord le spectre du symbole par :

$$\Lambda(\mathcal{L}) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists u \in H^1(\Sigma) \setminus \{0\}, \mathcal{L}(\lambda)u = 0\}.$$

On remarque alors qu'étudier le spectre de  $L_2$  revient à étudier celui de  $\mathcal{L}$ . En effet, il est très facile de voir qu'on a l'équivalence entre les deux points suivants :

1.  $(\xi, u) \in \mathbb{C} \times D(L_2) \setminus \{0\}$  satisfait  $L_2 u = \xi u$ ;
2.  $(\xi, u) \in \mathbb{C} \times H^1(\Sigma) \setminus \{0\}$  satisfait  $\mathcal{L}(\lambda)u = 0$  avec  $\lambda^2 = \xi$ .

D'après cette équivalence,  $\Lambda(\mathcal{L})$  est tout comme  $\Lambda(L_2)$  un ensemble dénombrable de valeurs qui tendent vers l'infini.

**Remarque 4.25** Les éléments de  $\Lambda(\mathcal{L})$  correspondent aux nombres d'ondes longitudinaux des modes du guide tronqué.

**Lemme 4.26**

1. Si  $c_0 < c_\infty$ , on a :

$$\Lambda(\mathcal{L}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C}, \Im m(\lambda) = 0\} = \emptyset.$$

2. Si  $c_0 > c_\infty$ , on a :

$$\Lambda(\mathcal{L}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C}, \Re e(\lambda)\Im m(\lambda) = 0\} = \emptyset.$$

*Démonstration.* Soit  $\lambda \in \Lambda(\mathcal{L})$ . Il existe  $u \in H^1(\Sigma) \setminus \{0\}$  tel que :

$$\langle \mathcal{L}(\lambda)u, v \rangle_{H^1(\Sigma)^*, H^1(\Sigma)} = 0, \quad \forall v \in H^1(\Sigma).$$

En prenant  $v = \bar{u}$  cette égalité devient :

$$\int_{\Sigma} (\alpha \mu |d_{x_2} u|^2 - \frac{\mu}{\alpha} (k^2 + \lambda^2) |u|^2) dx_2 = 0. \quad (4.28)$$

Raisonnons par l'absurde.

Supposons que  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Cela implique que  $k^2 + \lambda^2 > 0$  dans  $\Sigma$ . En prenant la partie imaginaire de (4.28) on obtient :

$$\int_{\Sigma} \left( \Im m(\alpha) \mu |d_{x_2} u|^2 + \mu \Im m\left(-\frac{1}{\alpha}\right) (k^2 + \lambda^2) |u|^2 \right) dx_2 = 0.$$

Pour  $h_1 < |x_2| < h_2$ , on a  $\Im m(\alpha) < 0$  et  $\Im m(-1/\alpha) < 0$ . L'intégrande est donc nulle dans le domaine  $h_1 < |x_2| < h_2$ , ce qui donne par suite  $u = 0$  dans ce domaine. On conclut que  $u = 0$  dans tout  $\Sigma$  par un argument de prolongement unique, ce qui est absurde. Ce raisonnement est valable quel que soit le signe de  $(c_0 - c_\infty)$ .

Supposons maintenant que  $\lambda \in i\mathbb{R}$ . On peut alors écrire  $\lambda^2 = -|\lambda|^2$ . Si  $c_0 > c_\infty$ , le nombre d'onde satisfait  $k_0 < k_\infty$ .

- Si  $|\lambda| < k_0$  : on a  $k^2 + \lambda^2 > 0$  dans  $\Sigma$  et on peut conclure comme pour le cas  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- Si  $k_0 \leq |\lambda| < k_\infty$  : l'équation (4.28) se réécrit :

$$\begin{aligned} & \int_{-h_1}^{h_1} (\mu |d_{x_2} u|^2 - \mu(k^2 - |\lambda|^2) |u|^2) dx_2 \\ & + \int_{\Sigma \cap \{|x_2| > h_1\}} (\alpha \mu_\infty |d_{x_2} u|^2 - \frac{\mu_\infty}{\alpha} (k^2 - |\lambda|^2) |u|^2) dx_2 = 0. \end{aligned}$$

La première intégrale étant purement réelle, prendre la partie imaginaire de l'identité ci-dessus en utilisant le fait que  $|\lambda| < k_\infty$  nous permet de conclure comme précédemment.

- Si  $k_\infty \leq |\lambda|$  : en repartant à nouveau de (4.28) et en prenant cette fois sa partie réelle, on décompose l'intégrale en :

$$\begin{aligned} & \int_{-h_0}^{h_0} (\mu_0 |d_{x_2} u|^2 - \mu_0(k_0^2 - |\lambda|^2) |u|^2) dx_2 \\ & + \int_{\Sigma \cap \{|x_2| > h_0\}} (\Re(\alpha) \mu_\infty |d_{x_2} u|^2 - \mu_\infty \Re\left(\frac{1}{\alpha}\right) (k_\infty^2 - |\lambda|^2) |u|^2) dx_2 = 0. \end{aligned}$$

Les deux intégrales étant positives puisque  $k_\infty \geq |\lambda|$ ,  $\Re(\alpha) > 0$  et  $\Re(1/\alpha) > 0$ . On en déduit que  $u = 0$  dans  $(-h_0, h_0)$  et par suite dans tout  $\Sigma$  par un argument de prolongement unique. Ceci est une contradiction.  $\square$

**Remarque 4.27** Dans le cas  $c_0 < c_\infty$ , le fait que  $\mathcal{L}(\lambda) \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$  traduit l'existence de modes guidés (cf. Proposition 4.6).

Introduisons les notions de *multiplicités géométrique et algébrique* d'un élément du spectre d'un symbole données dans [Koz+97]. Soit  $\lambda \in \Lambda(\mathcal{L})$ , on appelle multiplicité géométrique de  $\lambda$ , la quantité  $\dim(\text{Ker}(\mathcal{L}(\lambda)))$ . La multiplicité algébrique de  $\lambda$  fait appel à la notion de *chaîne de Jordan*. Soit  $\lambda$  une valeur propre simple (i.e. de multiplicité géométrique égale à 1) et  $u$  un vecteur propre associé. S'il existe une famille ordonnée  $(w_1, \dots, w_k)$  telle que :

$$\sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{i!} \frac{d^i \mathcal{L}}{d\lambda^i}(\lambda) w_{j-i} + \frac{1}{j!} \frac{d^j \mathcal{L}}{d\lambda^j}(\lambda) u = 0, \quad 1 \leq j \leq k,$$

alors les éléments de cette famille sont appelés *vecteurs propres généralisés* pour la valeur propre  $\lambda$ , et la famille  $(u, w_1, \dots, w_k)$  chaîne de Jordan de longueur  $k+1$  pour la valeur propre  $\lambda$ . La multiplicité algébrique de la valeur propre  $\lambda$  est la longueur maximale d'une chaîne de Jordan. Ces quantités peuvent aussi être plus généralement définies pour une valeur propre de multiplicité géométrique supérieure à 1 (voir pour cela [Koz+97, Chapitre 5 - §5.1.1]).

#### Lemme 4.28

Soit  $\lambda \in \Lambda(\mathcal{L})$ , sa multiplicité géométrique est égale à 1. De plus, si on a pour  $u \in \text{Ker}(\mathcal{L}(\lambda)) \setminus \{0\}$  :

$$J(\lambda) := \int_{\Sigma} \frac{\mu}{\alpha} u^2 dx_2 \neq 0,$$

alors la multiplicité algébrique de  $\lambda$  est aussi égale à 1.

*Démonstration.* Soit  $\lambda \in \Lambda(\mathcal{L})$ . Puisque  $\text{Ker}(\mathcal{L}(\lambda)) = \text{Ker}(L_2 - \lambda^2 I)$ , on déduit du Lemme 4.21 que  $\dim(\text{Ker}(\mathcal{L}(\lambda))) = 1$ . En ce qui concerne la multiplicité algébrique, elle est égale à 1

si et seulement si toute chaîne de Jordan de  $\lambda$  est de longueur 1. Supposons dans un premier temps que  $J(\lambda) \neq 0$ . S'il existait une chaîne de Jordan de longueur supérieure à un, on aurait pour  $u \in \text{Ker}(\mathcal{L}(\lambda))$  l'existence de  $w_1 \in H^1(\Sigma) \setminus \{0\}$  tel que :

$$\mathcal{L}(\lambda)w_1 + \frac{d\mathcal{L}}{d\lambda}(\lambda)u = 0,$$

ce qui s'écrit variationnellement :

$$\langle \mathcal{L}(\lambda)w_1, v \rangle_{H^1(\Sigma)^*, H^1(\Sigma)} - 2\lambda \int_{\Sigma} \frac{\mu}{\alpha} uv dx_2 = 0, \quad \forall v \in H^1(\Sigma).$$

Prendre  $v = u$  dans cette expression annule le crochet de dualité puisque :

$$\langle \mathcal{L}(\lambda)w_1, u \rangle_{H^1(\Sigma)^*, H^1(\Sigma)} = \langle \mathcal{L}(\lambda)u, w_1 \rangle_{H^1(\Sigma)^*, H^1(\Sigma)} = 0.$$

Et comme  $\lambda \neq 0$  d'après le Lemme 4.26, il vient  $J(\lambda) = 0$ , ce qui est une contradiction.  $\square$

La présence de chaînes de Jordan à certaines fréquences correspond à des phénomènes rares de coalescence de plusieurs valeurs propres ; les points de rencontre sont appelés *exceptional points* (voir par exemple [DG11]). Leur présence complique l'analyse mathématique des problèmes de scattering, nous allons donc faire l'hypothèse dans la suite de notre travail que la fréquence est telle qu'il n'y ait pas de chaîne de Jordan.

Remarquons ensuite que si  $\lambda \in \Lambda(\mathcal{L})$  alors  $-\lambda \in \Lambda(\mathcal{L})$ , on écrit donc :

$$\Lambda(\mathcal{L}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{-\lambda_n, \lambda_n\}, \quad \dots \leq \Re(\lambda_{n+1}) \leq \Re(\lambda_n) \leq \dots \leq \Re(\lambda_0) \leq 0, \quad (4.29)$$

avec  $\Re(\lambda_0) < 0$  si  $c_0 > c_\infty$ , en vertu du Lemme 4.26. Puisque le symbole  $\mathcal{L}(\lambda)$  ne fait intervenir que des puissances paires de  $\lambda$ , on voit facilement que  $\text{Ker}(\mathcal{L}(-\lambda)) = \text{Ker}(\mathcal{L}(\lambda))$ .

#### Hypothèse 4.29

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les vecteurs propres  $u_n \in \text{Ker}(\mathcal{L}(\lambda_n))$  satisfont :

$$J_n := \int_{\Sigma} \frac{\mu}{\alpha} u_n^2 dx_2 \neq 0.$$

Pour le guide fermé traité dans la **Partie I**, on a vu à l'aide de la théorie spectrale des opérateurs autoadjoints que les fonctions propres de l'opérateur transverse sont orthogonales entre elles. Le guide ouvert tronqué avec des PML finies est associé à un opérateur transverse qui n'est quant à lui pas autoadjoint, ce qui ne nous permet plus d'écrire l'orthogonalité entre ses fonctions propres. Il est néanmoins possible de montrer une *relation de biorthogonalité*.

#### Proposition 4.30

Sous l'Hypothèse 4.29, pour tout  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ , les vecteurs propres  $u_n \in \text{Ker}(\mathcal{L}(\lambda_n))$  et  $u_m \in \text{Ker}(\mathcal{L}(\lambda_m))$  peuvent être normalisés de sorte à satisfaire la relation :

$$\int_{\Sigma} \frac{\mu}{\alpha} u_n u_m dx_2 = \delta_{nm}.$$

*Démonstration.* Sous l'hypothèse 4.29, on peut normaliser les vecteurs propres  $u_n$  de telle sorte que  $J_n = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Prenons maintenant  $n \neq m$  et deux vecteurs propres  $u_n \in \text{Ker}(\mathcal{L}(\lambda_n))$ ,  $u_m \in \text{Ker}(\mathcal{L}(\lambda_m))$ . Nous avons  $\langle \mathcal{L}(\lambda_n)u_n, u_m \rangle_{H^1(\Sigma)^*, H^1(\Sigma)} = 0$  qui s'écrit :

$$\int_{\Sigma} (\alpha \mu d_{x_2} u_n d_{x_2} u_m - \frac{\mu}{\alpha} (k^2 + \lambda_n^2) u_n u_m) dx_2 = 0,$$

et  $\langle \mathcal{L}(\lambda_m)u_m, u_n \rangle_{H^1(\Sigma)^*, H^1(\Sigma)} = 0$  qui s'écrit :

$$\int_{\Sigma} (\alpha \mu d_{x_2} u_m d_{x_2} u_n - \frac{\mu}{\alpha} (k^2 + \lambda_m^2) u_m u_n) dx_2 = 0.$$

Soustraire les deux identités donne :

$$(\lambda_n^2 - \lambda_m^2) \int_{\Sigma} \frac{\mu}{\alpha} u_n u_m dx_2 = 0.$$

Comme les valeurs propres sont simples,  $\lambda_n^2 \neq \lambda_m^2$  et donc :

$$\int_{\Sigma} \frac{\mu}{\alpha} u_n u_m dx_2 = 0,$$

ce qui est la relation attendue. □

Ce type de relation de biorthogonalité est très général. Nous montrerons pour un cas plus compliqué dans la **Partie III** qu'il s'agit en fait d'une orthogonalité entre les vecteurs propres de l'opérateur  $L_2$  et ceux de son opérateur adjoint  $L_2^*$ . Il a en effet été montré dans [Gou10, Théorème 3.2] que si on considère  $\xi_n \in \Lambda(L_2)$  et  $u_n \in \text{Ker}(L_2 - \xi_n I)$ , alors  $\bar{\xi}_n \in \Lambda(L_2^*)$  et  $u_n^* := (\mu/\bar{\alpha})\bar{u}_n \in \text{Ker}(L_2^* - \bar{\xi}_n I)$ . On peut alors voir facilement que :

$$(u_n, u_m^*)_{L^2(\Sigma)} = \int_{\Sigma} \frac{\mu}{\alpha} u_n u_m dx_2 = \delta_{nm}, \quad \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2.$$

## 4.4 Étude numérique

Nous venons de conduire une courte étude théorique des modes du guide ouvert sans et avec PML qui nous servira plus tard à résoudre les problèmes de diffraction direct et inverse. En vue de la résolution numérique de ces deux problèmes, il est important de nous intéresser à l'approximation numérique des modes. Pour simplifier cette étude, nous nous placerons dans le cas qui nous intéresse en pratique où  $c_0 > c_\infty$ , ce qui aura pour conséquence l'absence de modes guidés.

### 4.4.1 Calcul des modes

Contrairement au guide fermé, les modes du guide ouvert ne sont pas connus de manière explicite. Les modes guidés et les modes à fuite exacts du guide ouvert de départ peuvent être obtenus en cherchant les racines de la relation de dispersion (4.17). Pour le guide tronqué transversalement avec des PML, l'approximation des modes mentionnés ci-dessus, mais aussi les modes à PML, peuvent être calculées en cherchant les racines de la relation de dispersion (4.22). Plusieurs méthodes permettent de trouver les zéros complexes d'une fonction analytique  $z \mapsto f(z)$  dans un ouvert. Si on connaît une valeur  $z_0$  approchant un zéro, on peut espérer en obtenir une meilleure approximation de ce dernier à l'aide d'une méthode

de type Newton relaxée. On estime alors pour  $\epsilon \in (0, 1]$  successivement les termes de la suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :

$$z_n = \begin{cases} z_0 & , \quad n = 0 \\ (1 - \epsilon)z_{n-1} + \epsilon \left( z_{n-1} - \frac{f(z_{n-1})}{f'(z_{n-1})} \right) & , \quad n \geq 1, \end{cases}$$

jusqu'à atteindre un critère d'arrêt. La relaxation est importante lorsque  $f$  varie fortement au voisinage du zéro. Cette méthode est facile à mettre en œuvre, mais nécessite une valeur initiale assez proche de la valeur exacte. Pour trouver tous les zéros de la fonction analytique  $f$  dans un ouvert connexe  $O$  du plan complexe, nous pouvons aussi utiliser la méthode présentée dans [DL67], qui repose sur le principe de l'argument stipulant pour une fonction analytique  $f$  que :

$$\int_{\partial O} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z_f,$$

où  $Z_f$  est le nombre de zéros de  $f$  dans  $O$  comptés avec leur multiplicité. Tant que  $O$  contient un zéro, on le partitionne en sous-ouverts et on applique récursivement la procédure dans chacun des ouverts jusqu'à atteindre un critère d'arrêt. Ces deux méthodes permettent d'approcher facilement les nombres d'onde des modes qui sont racines d'une relation de dispersion. Elles ont en revanche l'inconvénient de reposer sur la relation de dispersion dont il n'est pas toujours possible d'avoir une expression (e.g. configurations 3D avec une section à géométrie complexe, matériaux à coefficients variables). Pour le guide ouvert tronqué avec des PML finies, il est également possible d'écrire une formulation variationnelle associée au problème spectral (4.20) qui s'écrit :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\lambda, u) \in \mathbb{C} \times H^1(\Sigma) \setminus \{0\} \text{ tel que} \\ & \langle \mathcal{L}(\lambda)u, v \rangle_{H^1(\Sigma)^*, H^1(\Sigma)} = 0, \quad \forall v \in H^1(\Sigma), \end{aligned}$$

où  $\mathcal{L}(\lambda)$  est donné par (4.27). En la discrétisant par éléments finis, nous sommes amenés à résoudre le problème aux valeurs propres généralisé matriciel :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\lambda_h, U_h) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{N_h} \setminus \{0\} \text{ tel que} \\ & \mathbb{A}_h U_h = \lambda_h^2 \mathbb{B}_h U_h, \end{aligned} \tag{4.30}$$

où nous avons approché l'espace  $H^1(\Sigma)$  par le sous-espace de dimension  $N_h$  engendré par des fonctions de Lagrange  $(w_n)_{1 \leq n \leq N_h}$ , et les matrices  $\mathbb{A}_h, \mathbb{B}_h \in \mathbb{C}^{N_h \times N_h}$  ont leurs coefficients donnés pour  $1 \leq i, j \leq N_h$  par :

$$\begin{aligned} (\mathbb{A}_h)_{ij} & := \int_{\Sigma} \left( \alpha \mu d_{x_2} w_j d_{x_2} w_i - \frac{\mu}{\alpha} k^2 w_j w_i \right) dx_2, \\ (\mathbb{B}_h)_{ij} & := \int_{\Sigma} \frac{\mu}{\alpha} w_j w_i dx_2. \end{aligned}$$

Ces matrices sont symétriques, mais non hermitiennes du fait du coefficient complexe  $\alpha$ . En revanche, la partie réelle de  $\mathbb{B}_h$  est définie positive et sa partie imaginaire positive. Elle est donc inversible et on peut se ramener à un problème aux valeurs propres standard qu'on peut résoudre facilement avec par exemple le solveur ARPACK. Cette méthode très générale permet de traiter relativement facilement des géométries complexes en 3D. Elle a aussi l'avantage de nous donner directement une approximation des fonctions transverses associées aux modes. C'est donc cette dernière méthode que nous retiendrons par la suite



pour calculer les modes. Les deux premières qui reposent sur la relation de dispersion nous serviront d'outils de validation de ce calcul. Nous finissons cette discussion en mentionnant le développement récent de la méthode FEAST (voir pour cela [Pol09; KPP16]) permettant de résoudre efficacement des problèmes aux valeurs propres généralisés de grande taille (par exemple lorsque  $N_h$  est très grand). Cette méthode a été utilisée récemment dans [GPV22] pour calculer des modes à fuite dans des fibres optiques à géométrie complexe.

Évaluons maintenant la méthode d'approximation des modes (4.30) sur un cas simple. On considère pour cela une plaque d'acier dans du béton homogène. On choisit  $h_0 = 5$  cm,  $h_1 = 7,5$  cm et  $h_2 = 12,5$  cm. Les paramètres de l'acier sont donnés par  $\rho_0 = 7,93 \cdot 10^3$  kg.m<sup>-3</sup> et  $\mu_0 = 84,3$  GPa et ceux du béton par  $\rho_\infty = 2,30 \cdot 10^3$  kg.m<sup>-3</sup> et  $\mu_\infty = 15,9$  GPa. Dans ce cas,  $c_0 > c_\infty$  et il n'y a pas de mode propagatif. La fréquence considérée est quant à elle  $\omega = 2\pi \cdot 10^5$  rad.Hz. Pour la PML, on choisit un profil abrupt avec  $\alpha_\infty = e^{-i\pi/3}$ . Le problème aux valeurs propres généralisé est discrétisé avec des éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}^1$  et un pas de maillage de  $h = 10^{-3}$  cm. Sur le résultat du calcul représenté Figure 4.9, nous avons aussi calculé des modes parasites qui ne correspondent pas à des valeurs propres de  $L_2$ , et donc de façon équivalente qui ne sont pas des racines de la relation de dispersion donnée par le Lemme 4.21. Pour les mettre en évidence, nous avons utilisé la méthode de type Newton mentionnée ci-dessus en partant de chacune des valeurs  $\lambda^0$  approximées. Si l'algorithme converge vers une valeur éloignée de la valeur de départ  $\lambda^0$  ou s'il diverge, on en déduit que  $\lambda^0$  ne correspond pas à un mode : en d'autres termes, c'est une valeur propre parasite.

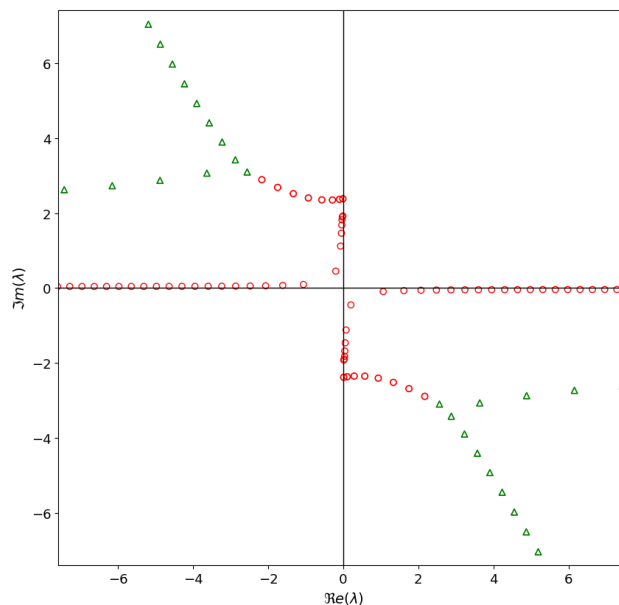


FIGURE 4.9: Nombres d'ondes longitudinaux  $\lambda$  dans le plan complexe pour un profil abrupt de PML avec  $\alpha_\infty = e^{-i\pi/3}$ . Cercles rouges : approximation de modes exacts, triangles verts : modes parasites.

Nous visualisons enfin Figure 4.10 deux modes dans le guide d'ondes en propageant de façon semi-analytique la fonction transverse le long de l'axe du guide (les modes ont pour forme  $u(x_1, x_2) = u(x_2)e^{\lambda x_1}$ ).



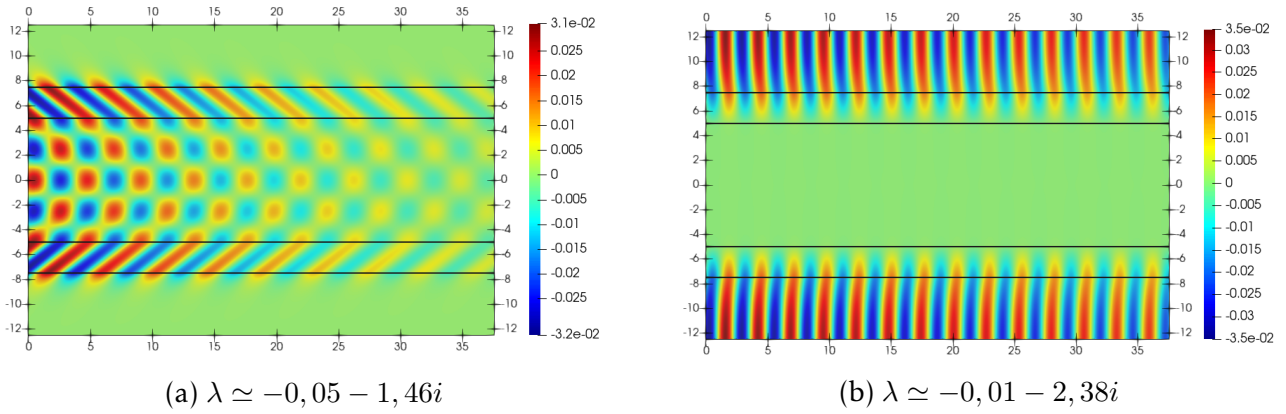


FIGURE 4.10: Représentation 2D de la partie réelle de l'approximation d'un mode à fuite (a) et d'un mode de PML (b).

#### 4.4.2 Pollution du spectre

La pollution du spectre mise en évidence sur la Figure 4.9 est purement liée à la discrétisation du problème aux valeurs propres généralisé. Réduire le pas de discrétisation permet d'éloigner les valeurs propres parasites de l'origine du plan complexe, mais nous avons remarqué qu'il faut en pratique réduire de façon très importante le pas de maillage pour éloigner le point d'apparition des modes parasites de l'origine, ce qui est numériquement coûteux. Ce phénomène peut s'expliquer en partie par la croissance exponentielle de la norme de la résolvante du problème transverse vis-à-vis du produit de la distance des PML au cœur ( $h_1 - h_0$ ) et de la partie imaginaire de  $\xi = \lambda^2$  (voir pour cela [Gou10, Théorème 3.3] ou [Zwo02] dans un cadre plus général). Nous cherchons en effet à estimer des résonances dans le domaine non physique sur le feuillet de Riemann sortant de la fonction de Green qui, comme nous l'avons vu sous-section 4.2.1 pour le cas de l'espace libre, est une portion du plan complexe dans laquelle elle est exponentiellement croissante à l'infini en l'absence de PML. Rapprocher la PML du cœur permet donc de réduire la zone dans laquelle elle est exponentiellement croissante, ce qui facilite le traitement numérique. Coller la PML au cœur permet ainsi de repousser le phénomène de pollution en dehors de la fenêtre de calcul considérée, ce que nous pouvons voir sur le spectre de gauche de la Figure 4.11 obtenu avec les mêmes paramètres physiques que sur la Figure 4.9. En ayant en tête l'application de ce travail au contrôle non destructif, nous voyons que cette solution n'est pas toujours possible, en particulier si on veut prendre en compte des défauts d'interface, voire des défauts dans la gaine. Changer de profil de PML peut aussi permettre d'éloigner les modes parasites de l'origine du plan complexe. Ce phénomène est illustré sur le spectre de droite de la Figure 4.11, qui est obtenu avec le profil parabolique utilisé dans [NTH15] et donné par :

$$\alpha(x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x_2| \leq h_1 \\ \left(1 + 3(\hat{\eta} - 1) \left(\frac{|x_2| - h_1}{h_2 - h_1}\right)^2\right)^{-1} & \text{si } |x_2| > h_1, \end{cases} \quad (4.31)$$

où on peut voir après un calcul simple que :

$$\hat{\eta} := \frac{1}{h_2 - h_1} \int_{h_1}^{h_2} \alpha^{-1}(x_2) dx_2 = \frac{\eta(h_2) - (h_1 - h_0)}{h_2 - h_1}.$$

On y retrouve la quantité  $\eta$  introduite en (4.23) qui, nous le verrons plus tard, donne une information sur l'atténuation moyenne des ondes dans la PML. Une dernière façon de ne pas

prendre en compte les modes parasites dans notre cas 2D consiste à ne conserver que les modes dont les nombres d'onde  $\lambda$  ont des petites parties imaginaires et réelles en module.

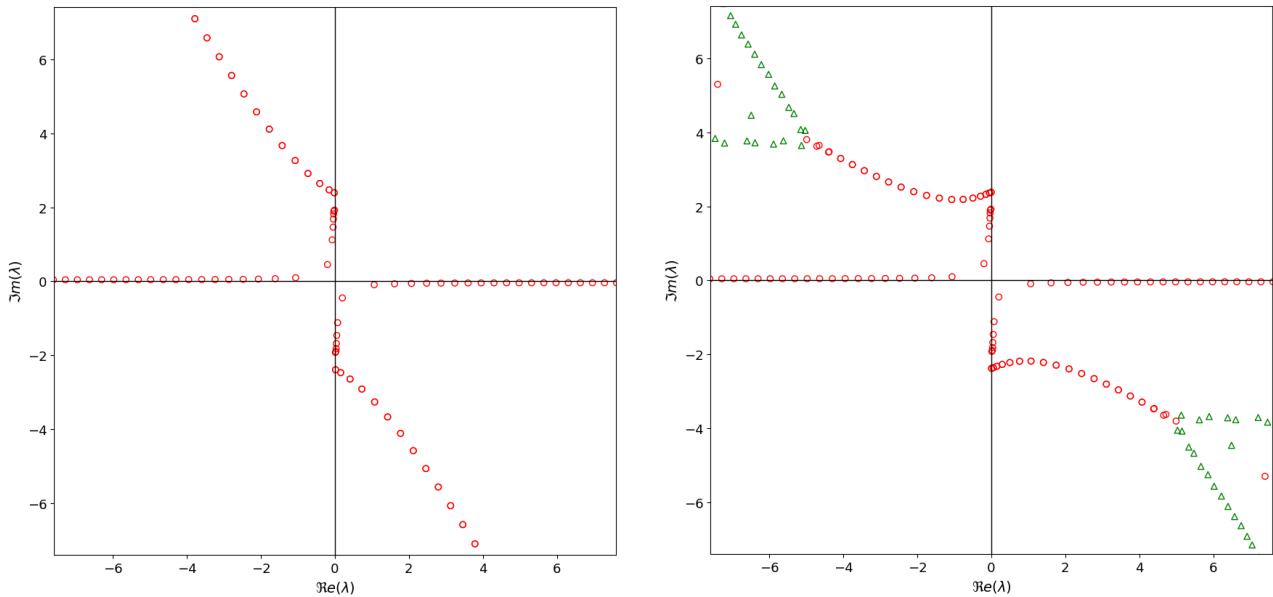


FIGURE 4.11: Nombres d'ondes longitudinaux  $\lambda$  dans le plan complexe. À gauche : profil abrupt de PML avec  $\alpha_\infty = e^{-i\pi/3}$  et la PML collée au cœur ( $h_1 = h_0 = 5$  et  $h_2 = 10$ ), à droite : profil parabolique de PML avec  $\hat{\eta} = 2 + 2i$  et la PML non collée au cœur ( $h_0 = 5$ ,  $h_1 = 7,5$  et  $h_2 = 12,5$ ). Cercles rouges : approximation de modes exacts, triangles verts : modes parasites.

Une étude plus fine du comportement des valeurs propres parasites vis-à-vis des différents paramètres du problème est compliquée. Le lecteur désireux d'en savoir plus sur cette question pourra se diriger vers [NW18]. Dans des configurations plus complexes pour lesquelles la relation de dispersion n'est pas connue, les résonances peuvent aussi être filtrées grâce à une méthode proposée par [AE17] faisant appel à une équation de Lippman-Schwinger et à la notion de pseudo-spectre, qui permet d'étudier les lignes de niveau de la norme de la résolvante.

### 4.4.3 Filtrage des modes à fuite

Nous venons de voir comment distinguer les modes parasites des approximations obtenues par éléments finis des modes du problème tronqué avec PML. Mais il est aussi important d'être en mesure de distinguer les modes à fuite qui traduisent un phénomène physique des modes à PML pour lequel ce n'est pas le cas. Partant du constat que l'énergie des modes à fuite est principalement localisée dans la partie physique du domaine (voir Figure 4.10.a) tandis que celle des modes à PML l'est surtout dans la PML (voir Figure 4.10.b), on utilise un critère se basant sur l'énergie cinétique moyenne dilatée des modes dans la section. Suivant [NTH15; Gal18], pour un mode donné, les énergies cinétiques dans toute la section, soit  $\Sigma = (-h_2, h_2)$ , et dans la partie occupée par les PML, soit  $\Sigma_{\text{PML}} := (-h_2, -h_1) \cup (h_1, h_2)$ , s'écrivent :

$$E_n^{\text{tot}} := \frac{\omega^2}{4} \int_{\Sigma} \frac{\rho}{\alpha} |u_n|^2 dx_2 \quad \text{et} \quad E_n^{\text{PML}} := \frac{\omega^2}{4} \int_{\Sigma_{\text{PML}}} \frac{\rho}{\alpha} |u_n|^2 dx_2.$$

Si le rapport  $r_E := |E_n^{\text{PML}}|/|E_n^{\text{tot}}| \leq \tau_E$ , pour  $\tau_E \in (0, 1)$  qui est à choisir en fonction de la PML utilisée, alors le mode considéré correspond à un mode à fuite. Dans le cas contraire,

c'est un mode de PML. En reprenant les mêmes paramètres physiques et de discrétisation qu'auparavant, on voit bien sur la Figure 4.12 la pertinence de ce filtrage et le fait qu'il est plus efficace dans le cas du profil parabolique de PML que dans le cas du profil abrupt.

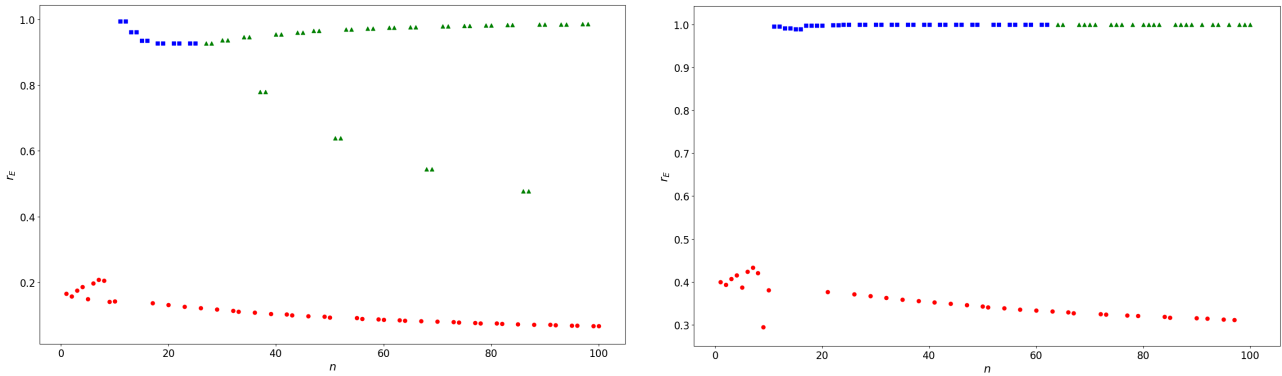


FIGURE 4.12: Valeurs du ratio  $r_E$  des modes (indexés par  $\lambda_n$  croissant). Disques rouges : modes à fuite, carrés bleus : modes de PML et triangles verts : modes parasites. Hauteurs :  $h_0 = 5$ ,  $h_1 = 6,5$  et  $h_2 = 11,5$ . Gauche : profil abrupt de PML avec  $\alpha_\infty = e^{-i\pi/3}$ , droite : profil parabolique de PML avec  $\hat{\eta} = 2 + 2i$ .

Nous sommes maintenant en mesure d'interpréter totalement le spectre calculé et présenté sur la Figure 4.13.

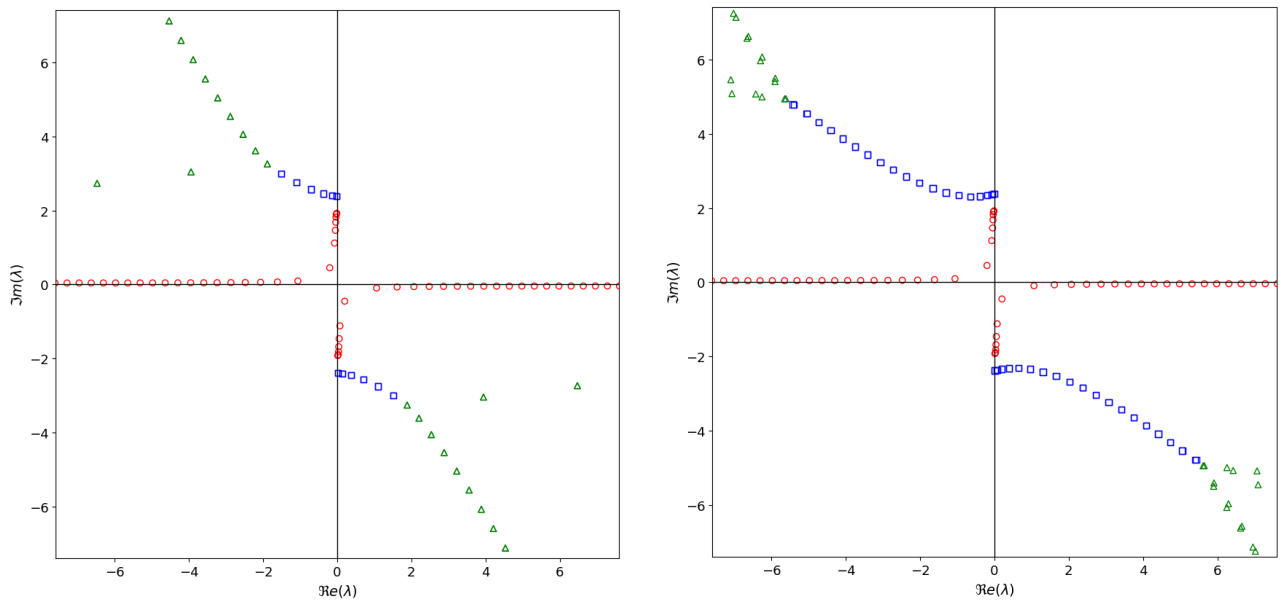


FIGURE 4.13: Nombres d'ondes longitudinaux dans le plan complexe pour. Cercles rouges : modes à fuite, carrés bleus : modes de PML et triangles verts : modes parasites. Hauteurs :  $h_0 = 5$ ,  $h_1 = 6,5$  et  $h_2 = 11,5$ . Gauche : profil abrupt de PML avec  $\alpha_\infty = e^{-i\pi/3}$ , droite : profil parabolique de PML avec  $\hat{\eta} = 2 + 2i$ .

Dans cette configuration simple en 2D, nous avons vu que les valeurs propres de l'opérateur  $L_2$  sont simples. On observe néanmoins numériquement que les valeurs propres correspondant aux modes de PML sont calculées par paires de deux valeurs très proches, l'une associée à un mode symétrique et l'autre à un mode antisymétrique. Ce constat donne une méthode alternative de séparation des modes à fuites des modes de PML dans ce cas particulier 2D.

#### 4.4.4 Sens de propagation des modes à fuite

Les modes du guide ouvert tronqué transversalement avec des PML finies sont les fonctions :

$$u_{n,\pm}(x_1, x_2) := e^{\pm\lambda_n x_1} u_n(x_2),$$

où  $\pm\lambda_n \in \Lambda(\mathcal{L})$ , pour lequel nous avons choisi arbitrairement  $\Re e(\lambda_n) < 0$ , et  $u_n \in \text{Ker}(\mathcal{L}(\lambda_n))$ . Nous voudrions répondre à la question suivante : quels modes doivent être pris en compte pour décrire une onde se propageant vers la droite ou la gauche ?

Soit  $\xi^0 \in \Lambda_f(L_1)$  une résonance associée à un mode à fuite sortant. On sait d'après le Théorème 4.13 qu'elle vérifie alors  $\Im m(\xi^0) < 0$ . D'après la Proposition 4.23, il existe  $H > 0$  et  $0 < \varepsilon < \Im m(\xi^0)$  tels que pour tout  $h_2 \geq H$ ,  $B(\xi^0, \varepsilon) \cap \Lambda(L_2)$  est réduit à un singleton. Pour  $h_2 > H$  fixé, on note alors  $B(\xi^0, \varepsilon) \cap \Lambda(L_2) = \{\xi_n\}$ . Posons alors  $\lambda_n = -i^{\mathbb{R}^+} \sqrt{\xi_n}$ . Puisque  $\Im m(\xi_n) < 0$ , on en déduit que  $\Re e(\lambda_n) < 0$  et  $\Im m(\lambda_n) > 0$ . On retrouve ainsi la convention (4.29) sur le signe de la partie réelle de  $\lambda_n$ . Rappelons maintenant que la vitesse de phase des modes  $u_{n,\pm}$  est donnée par  $v_{n,\pm}^p = \omega / \Im m(\pm\lambda_n)$ . Le mode  $u_{n,+}$  correspond donc à une onde progressive se déplaçant vers la droite ( $v_{n,+}^p > 0$ ) et évanescence vers la droite ( $\Re e(\lambda_n) < 0$ ). À contrario, le mode  $u_{n,-}$  correspond donc à une onde progressive se déplaçant vers la gauche ( $v_{n,-}^p < 0$ ) et évanescence vers la gauche ( $\Re e(\lambda_n) > 0$ ).



# Chapitre 5

## Problème direct dans les guides acoustiques partiellement enfouis

### Sommaire

---

5.1	Utilisation de la théorie de Kondratiev pour l'étude du guide ouvert rectiligne	99
5.1.1	Espaces de Sobolev à poids . . . . .	100
5.1.2	Réduction à des problèmes de dimension un . . . . .	104
5.1.3	Caractère bien posé du problème (5.1) . . . . .	107
5.1.4	Comportement asymptotique des solutions du problème (5.1) . . . . .	108
5.2	Étude du problème direct dans la jonction . . . . .	110
5.3	Approximation de la solution à l'aide d'un opérateur DtN avec recouvrement	120
5.4	Mise en œuvre numérique des méthodes de résolution proposées . . . . .	130
5.4.1	Le rôle du profil de PML . . . . .	130
5.4.2	Le rôle du recouvrement . . . . .	131

---

Le caractère bien posé des problèmes de diffraction dans les guides ouverts a fait l'objet d'un certain nombre de travaux utilisant des approches différentes. Le cas d'une jonction de deux guides ouverts a été traité dans [Til01] à l'aide d'une généralisation de la technique de mode-matching, initialement développée pour les guides d'ondes fermés (et que nous avons présentée succinctement au [chapitre 2](#)). Cette approche repose sur un outil appelé *transformée de Fourier généralisée* qui a été réutilisé entre autres dans [DGH11; Gou10] pour l'étude des problèmes de diffraction dans les guides ouverts acoustiques. La question de l'absence de modes piégés dans un guide ouvert avec une perturbation compacte a été abordée dans [Haz15], à nouveau à l'aide de la transformée de Fourier généralisée. Celle de l'existence d'une solution à ce problème a quant à elle été étudiée dans [CM08] au moyen d'une approche analytique reposant sur la connaissance de la fonction de Green du guide ouvert droit non perturbé. Enfin, pour ses nombreuses applications en photonique, le cas des guides ouverts périodiques a été étudié dans [Kir22; Fur20a].

Dans le [chapitre 4](#), nous avons vu qu'il est possible d'approcher le guide enfoui réel par un guide ouvert tronqué transversalement par des PML finies. Cette approximation permet de réduire le domaine à un domaine borné dans la direction transverse, ce qui est pertinent lorsqu'on s'intéresse à la diffraction des ondes par des défauts au voisinage du cœur. Ce choix de tronquer le domaine transversalement est aussi motivé par le souhait d'écrire une formulation modale simple de la LSM, ce que nous savons faire quand la fonction de Green se décompose sur un ensemble discret de modes (voir pour cela le [chapitre 3](#)). Nous avons pu montrer au [chapitre 2](#) que les problèmes de diffraction dans les guides fermés sont bien

posés grâce à la complétude des modes découlant du caractère autoadjoint du problème. Ici, l'introduction des PML nous fait perdre ce caractère, les techniques classiques ne sont donc plus adaptées. Plus précisément, nous ne savons pas si les fonctions transverses forment une base de Riesz de  $L^2(\Sigma)$ , ce qui nous empêche a priori de décomposer les différents champs sur les modes.

Pour y remédier, nous proposons de recourir à l'approche de Kondratiev. Cette approche a été introduite en 1967 par le mathématicien russe V.A. Kondratiev dans [Kon67] pour étudier la régularité des solutions de problèmes elliptiques au voisinage de singularités géométriques de type cônes au moyen d'espaces à poids. Un développement asymptotique de la solution au voisinage du cône faisant intervenir les pôles d'une fonction méromorphe y est donné. Cette approche a été généralisée dans les ouvrages de référence [Koz+97; Koz+01]. Parmi les récentes applications de cette approche, on peut citer les travaux [Che12; Rih22] portant sur l'étude de problèmes non elliptiques dans des métamatériaux avec des singularités géométriques de type coin, cône ou cusp, mais aussi [KN18] pour un travail en élasticité. Il s'avère que l'approche de Kondratiev permet aussi d'étudier des problèmes elliptiques posés dans des bandes et donc d'étudier en particulier des guides d'ondes. Par exemple, elle a été utilisée pour décrire la propagation des ondes dans des plaques élastiques (voir pour cela [Naz13; Naz14]). Cette application est particulièrement intéressante, car elle a permis de contourner une difficulté théorique résolue très récemment qui était l'absence de résultat de complétude des modes de Lamb (voir [Aki22a]). On peut enfin mentionner [BCF19] qui a traité le cas de la propagation des ondes dans une plaque mince avec un modèle de bilaplacien. Ces deux cas d'application de la théorie de Kondratiev sont d'une certaine façon liés. En effet, il est possible sous certaines hypothèses sur les coefficients du problème, de voir les guides d'ondes comme un cône et inversement à l'aide de la transformation géométrique  $(r, \theta) \mapsto (\ln(r), \theta)$  dont l'image d'un cône est un guide d'ondes. On peut alors voir que certains pôles mentionnés ci-dessus, correspondants à des objets localisés au voisinage d'un coin et appelés singularités propagatives ou bien ondes de trou noir, sont alors l'équivalent dans le domaine du guide d'ondes des modes propagatifs.

Une fois le caractère bien posé du problème direct de diffraction montré à l'aide de l'approche de Kondratiev, il est nécessaire de proposer une méthode numérique pour synthétiser des données dans le but de tester la méthode d'imagerie que nous proposerons au prochain chapitre. Il est d'autant plus important de pouvoir tester la méthode d'imagerie avec des données simulées que la configuration d'imagerie que nous considérons est complexe. Plusieurs méthodes numériques ont été récemment proposées pour résoudre des problèmes de scattering dans des milieux non bornés. Parmi elles, nous pouvons citer la *Windowed Green Function method* introduite avec [BGP17] pour résoudre spécifiquement des problèmes de diffraction dans des guides ouverts. Cette méthode est une méthode de type fenêtrage utilisant la fonction de Green de l'espace libre et des équations intégrales associées. Elle a la particularité de converger vers la solution exacte d'une façon super-algébrique vis-à-vis de l'épaisseur de la fenêtre (c'est-à-dire plus vite que n'importe quelle puissance négative de cette épaisseur). Une autre méthode qui s'appelle la *Half Space Matching Method* a été développée dans un premier temps dans [BFT18] pour résoudre des problèmes de diffraction en acoustique et en élasticité dans l'espace libre, mais pourrait aussi être adaptée aux jonctions de guides ouverts. Cette méthode couple un calcul par éléments finis volumiques dans un polyèdre qui contient les hétérogénéités et des équations intégrales aux bords de ce dernier. Puisque nous avons choisi dans ce travail de tronquer transversalement la partie enfouie de la structure avec des PML, nous souhaitons proposer une méthode numérique tirant parti de la structure de guide d'ondes qui en résulte. Nous allons donc essayer de tronquer le domaine dans la direction longitudinale en écrivant une condition de radiation modale.

Nous étudierons comment faire cela en introduisant un opérateur Dirichlet-to-Neumann pour le problème tronqué dans la direction transverse avec des PML. Ce type de méthode a l'avantage d'être facile à implémenter une fois les modes connus. De plus, elle peut aussi être étendue au cas de l'élasticité (contrairement aux PML longitudinales par exemple, qui ne fonctionnent plus correctement à certaines fréquences).

Le chapitre sera donc structuré comme suit. Nous commencerons par étudier le caractère bien posé du problème de Helmholtz dans un guide ouvert droit tronqué transversalement avec des PML à l'aide de la théorie de Kondratiev. Nous utiliserons ce résultat dans un second temps pour montrer que les problèmes de diffraction posés dans la jonction avec un obstacle sont bien posés. Ensuite, nous justifierons la convergence de la solution obtenue avec un DtN à droite décomposé sur un nombre fini de modes vers la solution exacte. Des illustrations numériques seront enfin données.

Dans un grand nombre d'applications en contrôle non destructif, les ondes acoustiques se propagent plus vite dans le cœur que dans la gaine (par exemple un cœur en acier dans du béton). Cela nous amène à faire l'hypothèse suivante pour toute la suite du chapitre.

### Hypothèse 5.1

Les vitesses des ondes acoustiques dans le cœur et la gaine satisfont  $c_0 > c_\infty$ .

**Remarque 5.2** Cette hypothèse n'est pas nécessaire pour l'analyse du problème direct que nous allons faire, mais elle permettra néanmoins de la simplifier significativement. En effet, on rappelle que sous cette hypothèse, il ne peut pas y avoir de modes guidés d'après la Proposition 4.6.

## 5.1 Utilisation de la théorie de Kondratiev pour l'étude du guide ouvert rectiligne tronqué transversalement par des PML

Nous commençons donc ce chapitre en nous intéressant au cas du guide ouvert rectiligne sans obstacle. En reprenant les notations du chapitre 4, on le note  $W := \mathbb{R} \times \Sigma$  où  $\Sigma := (-h_2, h_2)$  est la section du guide. Son bord extérieur est noté  $\Gamma := \partial W$ . Pour un terme source volumique  $f$  donné, on considère le problème suivant posé dans  $W$  :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \text{ tel que} \\ \left\{ \begin{array}{ll} -\partial_{x_2}(\alpha \mu \partial_{x_2} u) - \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1}^2 u - \frac{\mu}{\alpha} k^2 u = f & \text{dans } W \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \Gamma \\ u \text{ est sortant.} \end{array} \right. \end{cases} \quad (5.1)$$

Nous rappelons que les coefficients physiques  $\mu$  et  $k$  sont constants par morceaux :

$$\mu(x_1, x_2) = \begin{cases} \mu_0 & \text{si } |x_2| < h_0 \\ \mu_\infty & \text{si } |x_2| > h_0, \end{cases} \quad k(x_1, x_2) = \begin{cases} k_0 & \text{si } |x_2| < h_0 \\ k_\infty & \text{si } |x_2| > h_0, \end{cases}$$

et que le coefficient des PML satisfait  $\alpha(x_1, x_2) = 1$  pour  $|x_2| < 1$  et est complexe lorsque  $|x_2| \geq 1$ .



**Hypothèse 5.3**

Dans toute la suite, nous supposons que  $\alpha(x_1, x_2) = \alpha(x_2)$  pour tout  $(x_1, x_2) \in W$ . Autrement dit, le profil de PML est invariant le long de l'axe du guide. Nous noterons donc de façon indifférenciée la fonction dépendant des variables  $(x_1, x_2)$  et celle qui ne dépend que de la variable transverse  $x_2$ .

Sous l'Hypothèse 5.1, la condition de radiation filtrant les ondes sortantes se réduit à une simple condition de décroissance à l'infini, ce qui sera imposé en cherchant la solution  $u$  dans l'espace  $H^1(W)$ . En ayant en vue l'étude du caractère bien posé de (5.1) à l'aide de la théorie de Kondratiev, nous introduisons des espaces de Sobolev à poids.

**5.1.1 Espaces de Sobolev à poids**

Pour  $\beta \in \mathbb{R}$ , introduisons l'espace

$$K_\beta^1(W) := \{v \in D'(W) \mid e^{\beta x_1} v, e^{\beta x_1} \partial_{x_1} v, e^{\beta x_1} \partial_{x_2} v \in L^2(W)\},$$

où  $D'(W)$  est l'espace des distributions usuel. On munit cet espace de la norme :

$$\|v\|_{K_\beta^1(W)} := \left( \|e^{\beta x_1} v\|_{L^2(W)}^2 + \|e^{\beta x_1} \partial_{x_1} v\|_{L^2(W)}^2 + \|e^{\beta x_1} \partial_{x_2} v\|_{L^2(W)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarquons que pour  $\beta = 0$ , nous avons l'égalité  $K_0^1(W) = H^1(W)$ . Un exemple de telles

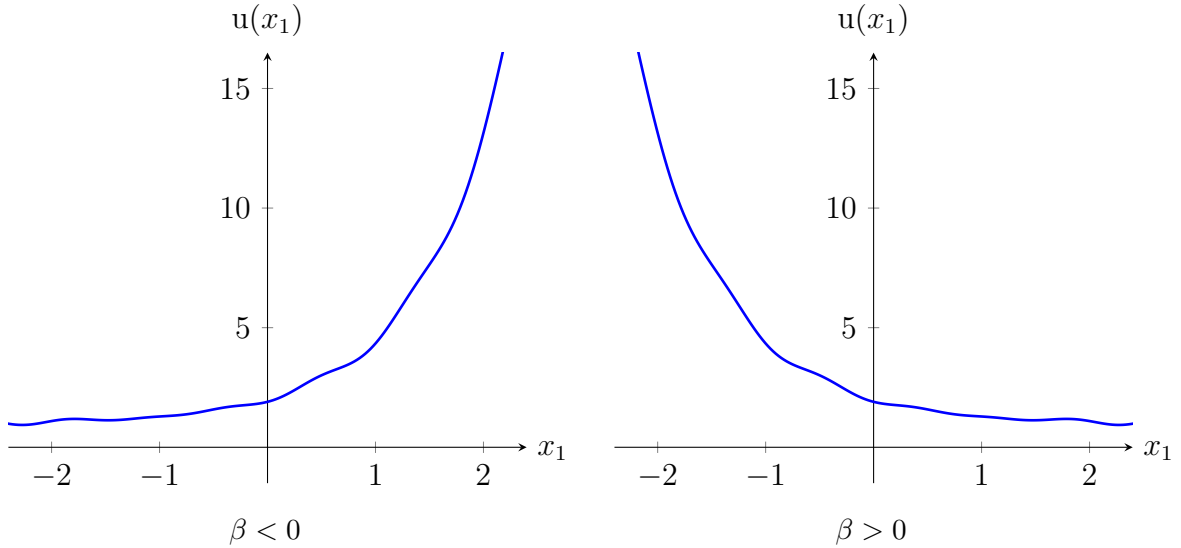


FIGURE 5.1: Représentation d'une fonction  $u \in K_\beta^1(\mathbb{R})$ .

fonctions est représenté Figure 5.1. L'espace dual topologique de  $K_\beta^1(W)$  est noté  $K_\beta^1(W)^\star$  et muni de la norme :

$$\|f\|_{K_\beta^1(W)^\star} := \sup_{v \in K_\beta^1(W) \setminus \{0\}} \frac{|\langle f, \bar{v} \rangle_{K_\beta^1(W)^\star, K_\beta^1(W)}|}{\|v\|_{K_\beta^1(W)}}.$$

Dans cette définition,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{K_\beta^1(W)^\star, K_\beta^1(W)}$  représente le crochet de dualité entre les espaces  $K_\beta^1(W)^\star$  et  $K_\beta^1(W)$ . Soit  $\beta \in \mathbb{R}$ , nous introduisons maintenant l'opérateur  $A_\beta : K_\beta^1(W) \rightarrow K_{-\beta}^1(W)^\star$  défini par :

$$\langle A_\beta u, v \rangle_{K_{-\beta}^1(W)^\star, K_{-\beta}^1(W)} := \int_W (\alpha \mu \partial_{x_2} u \partial_{x_2} v + \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} u \partial_{x_1} v - \frac{\mu}{\alpha} k^2 uv) dx. \quad (5.2)$$

**Lemme 5.4**

L'opérateur  $A_\beta$  est un opérateur linéaire borné de  $K_\beta^1(W)$  dans  $K_{-\beta}^1(W)^\star$ .

*Démonstration.* Soient  $u \in K_\beta^1(W)$  et  $v \in K_{-\beta}^1(W)$ , on a :

$$\begin{aligned} & | \langle A_\beta u, v \rangle_{K_{-\beta}^1(W)^\star, K_{-\beta}^1(W)} | \\ &= \left| \int_W (\alpha \mu e^{\beta x_1} \partial_{x_2} u e^{-\beta x_1} \partial_{x_2} v + \frac{\mu}{\alpha} e^{\beta x_1} \partial_{x_1} u e^{-\beta x_1} \partial_{x_1} v - \frac{\mu}{\alpha} k^2 e^{\beta x_1} u e^{-\beta x_1} v) d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \| \alpha \mu \|_{L^\infty(W)} \| e^{\beta x_1} \partial_{x_2} u \|_{L^2(W)} \| e^{-\beta x_1} \partial_{x_2} v \|_{L^2(W)} + \left\| \frac{\mu}{\alpha} \right\|_{L^\infty(W)} \| e^{\beta x_1} \partial_{x_1} u \|_{L^2(W)} \| e^{-\beta x_1} \partial_{x_1} v \|_{L^2(W)} \\ &\quad + \left\| \frac{\mu}{\alpha} k^2 \right\|_{L^\infty(W)} \| e^{\beta x_1} u \|_{L^2(W)} \| e^{-\beta x_1} v \|_{L^2(W)} \\ &\leq \max \left( \| \alpha \mu \|_{L^\infty(W)}, \left\| \frac{\mu}{\alpha} \right\|_{L^\infty(W)}, \left\| \frac{\mu}{\alpha} k^2 \right\|_{L^\infty(W)} \right) \| u \|_{K_\beta^1(W)} \| v \|_{K_{-\beta}^1(W)}. \end{aligned}$$

Puisque les coefficients  $\mu$  et  $k$  sont des constantes par morceaux strictement positives et que parmi les hypothèses faites sur la fonction  $\alpha$  avec la Définition 4.10, on a supposé qu'elle était bornée inférieurement et supérieurement en module par des constantes strictement positives, il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\| A_\beta u \|_{K_{-\beta}^1(W)^\star} \leq C \| u \|_{K_\beta^1(W)},$$

ce qui est le résultat attendu.  $\square$

Dans la suite, nous utiliserons la transformée de Fourier-Laplace  $\mathcal{F}$  qui est donnée, pour  $\lambda \in \mathbb{C}$  bien choisi, par :

$$(\mathcal{F}v)(\lambda) = \hat{v}(\lambda) := \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x_1} v(x_1) dx_1.$$

Rappelons quelques propriétés de base de la transformée de Fourier-Laplace découlant de celles des transformées de Fourier et de Laplace. En notant  $S'(\mathbb{R})$  l'espace usuel des distributions tempérées, on définit pour  $\beta \in \mathbb{R}$  l'espace  $S'_\beta(\mathbb{R}) := \{v \in D'(\mathbb{R}) \mid e^{\beta x_1} v \in S'(\mathbb{R})\}$ . Pour  $v \in S'_\beta(\mathbb{R})$ ,  $\hat{v}(\lambda)$  est bien défini pour n'importe quel  $\lambda \in \ell_{-\beta} := \{\lambda = -\beta + is, s \in \mathbb{R}\}$ . De plus, nous avons aussi pour  $v \in S'_\beta(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \ell_{-\beta}$  la formule :

$$\widehat{v'}(\lambda) = \lambda \hat{v}(\lambda). \quad (5.3)$$

Nous définissons aussi les espaces  $L_\beta^2(\mathbb{R}) := \{v \in D'(\mathbb{R}) \mid e^{\beta x_1} v \in L^2(\mathbb{R})\}$  et  $L^2(\ell_{-\beta})$  que nous munissons des normes :

$$\| v \|_{L_\beta^2(\mathbb{R})} := \| e^{\beta x_1} v \|_{L^2(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad \| \hat{v} \|_{L^2(\ell_{-\beta})} := \sqrt{\frac{1}{i} \int_{\ell_{-\beta}} |\hat{v}(\lambda)|^2 d\lambda}.$$

**Lemme 5.5**

La transformée de Fourier-Laplace satisfait les deux points suivants.

1. L'opérateur  $\mathcal{F}$  est un isomorphisme de  $L_\beta^2(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\ell_{-\beta})$  d'inverse :

$$(\mathcal{F}^{-1}\hat{v})(x_1) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\ell_{-\beta}} e^{\lambda x_1} \hat{v}(\lambda) d\lambda.$$

2. On a l'identité de Plancherel :

$$\|v\|_{L^2_\beta(\mathbb{R})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{v}\|_{L^2(\ell_{-\beta})}.$$

*Démonstration.* La preuve de ces deux points repose sur les propriétés très classiques de la transformée de Fourier notée  $\mathcal{F}$  et définie sur l'espace  $S(\mathbb{R})$  des fonctions à décroissance rapide. Elle est formellement reliée à  $\mathcal{F}$  par la relation  $(\mathcal{F}v)(s) = (\mathcal{F}v)(is)$  pour  $s \in \mathbb{R}$ . Soit  $v \in S_\beta(\mathbb{R}) := \{v \mid e^{\beta x_1} v \in S(\mathbb{R})\}$ , nous avons pour tout  $\lambda \in \ell_{-\beta}$  :

$$\hat{v}(\lambda) = (\mathcal{F}v)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-isx_1} e^{\beta x_1} v(x_1) dx_1 = (\mathcal{F}(e^{\beta \cdot} v(\cdot)))(s). \quad (5.4)$$

Sachant que  $x_1 \mapsto e^{\beta x_1} v(x_1)$  est dans  $S(\mathbb{R})$  et que  $\mathcal{F}$  est un isomorphisme de  $S(\mathbb{R})$  pour la variable  $x_1$  dans  $S(\mathbb{R})$  pour la variable  $\lambda$ , on a  $\hat{v} \in S(\ell_{-\beta})$  et on peut aussi écrire pour tout  $x_1 \in \mathbb{R}$  :

$$e^{\beta x_1} v(x_1) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{v}(-\beta + i \cdot))(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{isx_1} \hat{v}(-\beta + is) ds,$$

qui donne :

$$v(x_1) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\ell_{-\beta}} e^{\lambda x_1} \hat{v}(\lambda) d\lambda := (\mathcal{F}^{-1} \hat{v})(x_1).$$

Nous venons de montrer que la transformée de Fourier-Laplace est un isomorphisme de  $S_\beta(\mathbb{R})$  dans  $S(\ell_{-\beta})$ . On montre ensuite que c'est une isométrie en appliquant l'identité de Plancherel pour  $\mathcal{F}$  (i.e.  $\|\mathcal{F}v\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|v\|_{L^2(\mathbb{R})}$ ) dans (5.4) en se rappelant que  $d\lambda = i ds$  pour  $\lambda = -\beta + is \in \ell_{-\beta}$ . Le résultat attendu s'obtient finalement en prolongeant par densité la transformée de Fourier-Laplace en une isométrie de  $L^2_\beta(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\ell_{-\beta})$ .  $\square$

Enfin, pour  $\beta_1 < \beta_2$  réels et pour  $v \in S'_{\beta_1}(\mathbb{R}) \cap S'_{\beta_2}(\mathbb{R})$ , la fonction  $\lambda \mapsto \hat{v}(\lambda)$  est holomorphe dans la bande  $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid -\beta_2 < \Re e(\lambda) < -\beta_1\}$ ; ce résultat découle des propriétés d'holomorphic de la transformée de Laplace. Pour les fonctions des deux variables  $x_1$  et  $x_2$ , on peut définir la transformée de Fourier-Laplace partielle par rapport à la variable longitudinale  $x_1$ . On la note  $\mathcal{F}_{x_1}$  et elle est définie pour  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $x_2 \in \Sigma$  par :

$$(\mathcal{F}_{x_1} v)(\lambda, x_2) = \hat{v}(\lambda, x_2) := \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x_1} v(x_1, x_2) dx_1.$$

Puis pour  $\beta \in \mathbb{R}$ , on introduit aussi l'espace :

$$\hat{K}_\beta^1 := \left\{ \hat{v} \in L^2(\ell_{-\beta}, H^1(\Sigma)) \mid \frac{1}{i} \int_{\ell_{-\beta}} \|\hat{v}(\lambda, \cdot)\|_{H^1(\Sigma, |\lambda|)}^2 d\lambda < +\infty \right\},$$

où pour tout  $v \in H^1(\Sigma)$  :

$$\|v\|_{H^1(\Sigma, |\lambda|)} := \left( (1 + |\lambda|^2) \|v\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \|d_{x_2} v\|_{L^2(\Sigma)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.5)$$

Les normes  $\|\cdot\|_{H^1(\Sigma, |\lambda|)}$  et  $\|\cdot\|_{H^1(\Sigma)}$  sont équivalentes à  $\lambda$  fixé.

**Lemme 5.6**

La transformée de Fourier-Laplace partielle vis-à-vis de la variable  $x_1$  satisfait les deux points suivants.

1. L'opérateur  $\mathcal{F}_{x_1}$  est un isomorphisme de  $K_\beta^1(W)$  dans  $\widehat{K}_\beta^1$  d'inverse :

$$(\mathcal{F}_{x_1}^{-1}\hat{v})(x_1, x_2) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\ell_{-\beta}} e^{\lambda x_1} \hat{v}(\lambda, x_2) d\lambda. \quad (5.6)$$

2. On a l'identité de Plancherel :

$$\|v\|_{K_\beta^1(W)}^2 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\ell_{-\beta}} \|\hat{v}(\lambda, \cdot)\|_{H^1(\Sigma, |\lambda|)}^2 d\lambda =: \|\hat{v}\|_{\widehat{K}_\beta^1}^2. \quad (5.7)$$

*Démonstration.* Le résultat se montre à l'aide du Lemme 5.5. Nous n'en détaillons que le second point. Soit  $v \in K_\beta^1(W)$ , on écrit dans un premier temps :

$$\begin{aligned} \|\hat{v}\|_{L^2(\ell_{-\beta} \times \Sigma)}^2 &= \frac{1}{i} \int_{\ell_{-\beta}} \|\hat{v}(\lambda, \cdot)\|_{L^2(\Sigma)}^2 d\lambda \\ \|\widehat{\partial_{x_1} v}\|_{L^2(\ell_{-\beta} \times \Sigma)}^2 &= \frac{1}{i} \int_{\ell_{-\beta}} |\lambda|^2 \|\hat{v}(\lambda, \cdot)\|_{L^2(\Sigma)}^2 d\lambda \\ \|\widehat{\partial_{x_2} v}\|_{L^2(\ell_{-\beta} \times \Sigma)}^2 &= \frac{1}{i} \int_{\ell_{-\beta}} \|\partial_{x_2} \hat{v}(\lambda, \cdot)\|_{L^2(\Sigma)}^2 d\lambda, \end{aligned}$$

où la deuxième ligne est obtenue en utilisant (5.3). En sommant ces égalités, nous obtenons :

$$\|\hat{v}\|_{L^2(\ell_{-\beta} \times \Sigma)}^2 + \|\widehat{\partial_{x_1} v}\|_{L^2(\ell_{-\beta} \times \Sigma)}^2 + \|\widehat{\partial_{x_2} v}\|_{L^2(\ell_{-\beta} \times \Sigma)}^2 = \frac{1}{i} \int_{\ell_{-\beta}} \|\hat{v}(\lambda, \cdot)\|_{H^1(\Sigma, |\lambda|)}^2 d\lambda. \quad (5.8)$$

Ensuite, nous écrivons en utilisant l'identité de Plancherel démontrée pour  $\mathcal{F}$  au Lemme 5.5 :

$$\|\hat{v}\|_{L^2(\ell_{-\beta} \times \Sigma)}^2 = \int_{\Sigma} \|(\mathcal{F}v)(\cdot, x_2)\|_{L^2(\ell_{-\beta})}^2 dx_2 = 2\pi \int_{\Sigma} \|v(\cdot, x_2)\|_{L_\beta^2(\mathbb{R})}^2 dx_2 = 2\pi \|e^{\beta x_1} v\|_{L^2(W)}^2,$$

et de même  $\|\widehat{\partial_{x_j} v}\|_{L^2(\ell_{-\beta} \times \Sigma)}^2 = 2\pi \|e^{\beta x_1} \partial_{x_j} v\|_{L^2(W)}^2$  pour  $j = 1, 2$ , d'où :

$$\|\hat{v}\|_{L^2(\ell_{-\beta} \times \Sigma)}^2 + \|\widehat{\partial_{x_1} v}\|_{L^2(\ell_{-\beta} \times \Sigma)}^2 + \|\widehat{\partial_{x_2} v}\|_{L^2(\ell_{-\beta} \times \Sigma)}^2 = 2\pi \|v\|_{K_\beta^1(W)}^2. \quad (5.9)$$

Combiner (5.8) et (5.9) donne l'identité attendue.  $\square$

On finit par introduire  $\widehat{K}_\beta^{1*}$ , le dual topologique de  $\widehat{K}_\beta^1$  qui peut être caractérisé par :

$$\widehat{K}_\beta^{1*} = \left\{ \hat{g} \in L^2(\ell_\beta, H^1(\Sigma)^*) \mid \frac{1}{i} \int_{\ell_\beta} \|\hat{g}(\lambda, \cdot)\|_{H^1(\Sigma, |\lambda|)^*}^2 d\lambda < +\infty \right\},$$

avec :

$$\|g\|_{H^1(\Sigma, |\lambda|)^*} := \sup_{h \in H^1(\Sigma) \setminus \{0\}} \frac{|\langle g, \bar{h} \rangle_{H^1(\Sigma)^*, H^1(\Sigma)}|}{\|h\|_{H^1(\Sigma, |\lambda|)}}, \quad \forall g \in H^1(\Sigma)^*. \quad (5.10)$$

La transformée de Fourier-Laplace partielle peut être définie par dualité pour des distributions de  $K_\beta^1(W)^*$ . Il est en effet possible d'écrire pour  $f \in K_\beta^1(W)^*$  :

$$\langle \mathcal{F}_{x_1} f, \hat{v} \rangle_{\widehat{K}_\beta^{1*}, \widehat{K}_\beta^1} := \langle f, \mathcal{F}_{x_1}^{-1} \hat{v} \rangle_{K_\beta^1(W)^*, K_\beta^1(W)}, \quad \forall \hat{v} \in \widehat{K}_\beta^1. \quad (5.11)$$

On peut alors montrer le résultat suivant.

**Lemme 5.7**

La transformée de Fourier-Laplace partielle définie par dualité par (5.11) satisfait les deux points suivants.

1. C'est un isomorphisme de  $K_\beta^1(W)^*$  dans  $\widehat{K}_\beta^{1*}$  d'inverse :

$$(\mathcal{F}_{x_1}^{-1}\hat{v})(x_1, x_2) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\ell_{-\beta}} e^{\lambda x_1} \hat{v}(\lambda, x_2) d\lambda.$$

2. On a l'égalité de Plancherel :

$$\|f\|_{K_\beta^1(W)^*}^2 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\ell_\beta} \|\hat{f}(\lambda, \cdot)\|_{H^1(\Sigma, |\lambda|)^*} d\lambda := \|\hat{f}\|_{\widehat{K}_\beta^{1*}}^2. \quad (5.12)$$

*Démonstration.* La preuve de ce résultat repose intégralement sur la définition (5.11) et le Lemme 5.6.  $\square$

La transformée de Fourier-Laplace a été introduite. Nous allons maintenant l'utiliser pour ramener le problème (5.1), dont les coefficients ne dépendent pas de la variable longitudinale  $x_1$ , à une famille de problèmes 1D posés dans la section transverse  $\Sigma$  et paramétrée par un complexe  $\lambda$ . Nous résoudrons ensuite ces problèmes 1D, ce qui nous permettra de conclure quant au caractère bien posé du problème de départ 2D à l'aide de la transformée de Fourier-Laplace inverse.

### 5.1.2 Réduction à des problèmes de dimension un

Soit  $\beta \in \mathbb{R}$ , appliquer  $\mathcal{F}_{x_1}$  à l'équation  $A_\beta u = f$  pour  $f$  dans  $K_\beta^1(W)^*$  nous permet d'obtenir, à l'aide de la propriété de base (5.3), la famille d'équations monodimensionnelles posées dans la section  $\Sigma$  :

$$\mathcal{L}(\lambda)\hat{u}(\lambda, \cdot) = \hat{f}(\lambda, \cdot), \quad \forall \lambda \in \ell_{-\beta}. \quad (5.13)$$

Nous sommes donc naturellement amenés à étudier le symbole  $\mathcal{L}(\lambda)$  que nous avons introduit au chapitre 4 en (4.27). Dans le lemme suivant, nous étudions l'inversibilité du symbole pour  $\lambda \in i\mathbb{R}$  et obtenons un contrôle de la solution de (5.13) dans les normes à paramètre  $H^1(\Sigma, |\lambda|)$  et  $H^1(\Sigma, |\lambda|)^*$ .

**Lemme 5.8**

Il existe  $\tau_0 > 0$  tel que pour  $\lambda = i\tau$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$  satisfaisant  $|\tau| \geq \tau_0$ ,  $\mathcal{L}(\lambda) : H^1(\Sigma) \rightarrow H^1(\Sigma)^*$  est un isomorphisme. De plus, si  $u \in H^1(\Sigma)$  satisfait  $\mathcal{L}(\lambda)u = f \in H^1(\Sigma)^*$ , alors on a l'estimation :

$$\|\mathcal{L}(\lambda)^{-1}f\|_{H^1(\Sigma, |\lambda|)} = \|u\|_{H^1(\Sigma, |\lambda|)} \leq C\|f\|_{H^1(\Sigma, |\lambda|)^*}, \quad (5.14)$$

où  $C$  est une constante strictement positive indépendante de  $f$  et  $\lambda$ .

*Démonstration.* Pour  $\lambda = i\tau$ , on a pour tout  $(u, v) \in (H^1(\Sigma))^2$  :

$$\langle \mathcal{L}(\lambda)u, \bar{v} \rangle_{H^1(\Sigma)^*, H^1(\Sigma)} := \int_{\Sigma} (\alpha \mu d_{x_2} u d_{x_2} \bar{v} + \frac{\mu}{\alpha} (\tau^2 - k^2) u \bar{v}) dx_2.$$

La preuve repose sur le lemme de Lax-Milgram. Nous savons que dans le guide d'ondes  $W$ , on a fait les hypothèses que  $\alpha$  vérifie  $-\frac{\pi}{2} < \arg(\alpha) < 0$  et est borné inférieurement et

supérieurement par des constantes strictement positives. Il existe donc une constante  $C > 0$  telle que :

$$\Re(\alpha) \geq C \quad \text{et} \quad \Re(1/\alpha) \geq C.$$

Si  $\tau \geq k_\infty$ , le fait que  $k_0 < k_\infty$  implique pour tout  $u \in H^1(\Sigma)$  :

$$\Re(\langle \mathcal{L}(\lambda)u, \bar{u} \rangle_{H^1(\Sigma)^*, H^1(\Sigma)}) \geq C \min(\mu_0, \mu_\infty) \int_{\Sigma} (|d_{x_2} u|^2 + (\tau^2 - k_\infty^2)|u|^2) dx_2.$$

Pour un  $\gamma \in (0, 1)$  donné, nous avons pour  $\tau$  suffisamment grand :  $\tau^2 - k_\infty^2 \geq \gamma(1 + \tau^2)$ . Plus précisément, cette inégalité est satisfaite pour  $\tau \geq \tau_0 := \sqrt{(k_\infty^2 + \gamma)/(1 - \gamma)}$ . On obtient ainsi pour tout  $u \in H^1(\Sigma)$  :

$$\Re(\langle \mathcal{L}(\lambda)u, \bar{u} \rangle_{H^1(\Sigma)^*, H^1(\Sigma)}) \geq C\gamma \min(\mu_0, \mu_\infty) \int_{\Sigma} (|d_{x_2} u|^2 + (1 + \tau^2)|u|^2) dx_2. \quad (5.15)$$

On peut donc appliquer le lemme de Lax-Milgram qui nous garantit que  $\mathcal{L}(\lambda)$  est un isomorphisme de  $H^1(\Sigma)$  dans son dual. L'estimation (5.14) s'obtient quant à elle à partir de (5.15) en utilisant le fait que  $\tau = |\lambda|$  et les définitions des normes des espaces  $H^1(\Sigma, |\lambda|)$  et  $H^1(\Sigma, |\lambda|)^*$  données par (5.5) et (5.10).  $\square$

Rappelons maintenant que nous avons défini au chapitre 4 le spectre  $\Lambda(\mathcal{L}) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists u \in H^1(\Sigma) \setminus \{0\}, \mathcal{L}(\lambda)u = 0\}$  du symbole  $\mathcal{L}(\lambda)$ . On peut montrer le résultat suivant découlant directement du Lemme 5.8 par l'alternative de Fredholm.

#### Corollaire 5.9

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\mathcal{L}(\lambda) : H^1(\Sigma) \rightarrow H^1(\Sigma)^*$  est un isomorphisme si et seulement si  $\lambda \notin \Lambda(\mathcal{L})$ .

**Remarque 5.10** On peut aussi obtenir en utilisant le théorème de Fredholm analytique donné dans [KM99, Proposition A.8.4] que l'ensemble  $\Lambda(\mathcal{L})$  est discret et ne présente pas de point d'accumulation dans  $\mathbb{C}$ , ce qui a déjà été démontré au chapitre 4 en remarquant que  $\Lambda(L_2) = \{\lambda^2, \lambda \in \Lambda(\mathcal{L})\}$ .

Afin de pouvoir utiliser la transformée de Fourier-Laplace inverse et la formule de Plancherel pour résoudre (5.13), il est nécessaire d'estimer  $\mathcal{L}(\lambda)^{-1}$  sur les droites  $\ell_\beta$ , avec  $\beta \in \mathbb{R}$  dans les normes à paramètre (5.5) et (5.10).

#### Lemme 5.11

Il existe des constantes réelles strictement positives  $\rho$  et  $\delta$  telles que pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  satisfaisant

$$|\lambda| > \rho \quad \text{et} \quad |\Re(\lambda)| < \delta |\Im(\lambda)|,$$

$\mathcal{L}(\lambda) : H^1(\Sigma) \rightarrow H^1(\Sigma)^*$  est un isomorphisme. De plus, si  $u \in H^1(\Sigma)$  vérifie  $\mathcal{L}(\lambda)u = f$ , alors on a encore l'inégalité (5.14), mais avec une constante  $C > 0$  différente.

*Démonstration.* Si  $\lambda \in i\mathbb{R}$ , le Lemme 5.8 nous garantit pour  $|\lambda| \geq \tau_0$ , avec  $\tau_0$  défini dans la preuve du Lemme 5.8, que  $\mathcal{L}(\lambda)$  est un isomorphisme et que nous avons l'inégalité (5.14). Considérons maintenant le cas  $\lambda \notin i\mathbb{R}$ . Nous écrivons  $\lambda = \pm i|\lambda|e^{i\theta}$  avec  $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Posons  $\tilde{\lambda} := \pm i|\lambda|$ . Étant donné que  $|\tilde{\lambda}| = |\lambda|$ , on a par définition de la norme à paramètre (5.5) l'égalité  $\|u\|_{H^1(\Sigma, |\tilde{\lambda}|)} = \|u\|_{H^1(\Sigma, |\lambda|)}$  pour tout  $u \in H^1(\Sigma)$ . Définissons  $\tilde{f} := \mathcal{L}(\tilde{\lambda})u$  pour

$u \in H^1(\Sigma)$  et supposons que  $|\lambda| \geq \tau_0$ . Dans ce cas, on peut se ramener à la première étape de la preuve qui nous donne :

$$\|u\|_{H^1(\Sigma, |\lambda|)} = \|u\|_{H^1(\Sigma, |\tilde{\lambda}|)} \leq C \|\tilde{f}\|_{H^1(\Sigma, |\tilde{\lambda}|)^*}. \quad (5.16)$$

Dans ce qui suit,  $C > 0$  sera une constante qui changera d'une ligne à l'autre, mais qui sera indépendante de  $\lambda$  et  $u$ . Maintenant, nous écrivons :

$$\|\tilde{f}\|_{H^1(\Sigma, |\tilde{\lambda}|)^*} = \|\tilde{f}\|_{H^1(\Sigma, |\lambda|)^*} \leq \|f\|_{H^1(\Sigma, |\lambda|)^*} + \|\tilde{f} - f\|_{H^1(\Sigma, |\lambda|)^*}. \quad (5.17)$$

Par ailleurs, on écrit pour  $v \in H^1(\Sigma)$  :

$$\langle \tilde{f} - f, \bar{v} \rangle_{H^1(\Sigma)^*, H^1(\Sigma)} = \langle \mathcal{L}(\tilde{\lambda})u - \mathcal{L}(\lambda)u, \bar{v} \rangle_{H^1(\Sigma)^*, H^1(\Sigma)} = (\lambda^2 - \tilde{\lambda}^2) \int_{\Sigma} \frac{\mu}{\alpha} u \bar{v} dx_2.$$

En partant de (5.10) et en utilisant le fait que  $|\lambda| \|v\|_{L^2(\Sigma)} \leq \|v\|_{H^1(\Sigma, |\lambda|)}$  on obtient :

$$\|\tilde{f} - f\|_{H^1(\Sigma, |\lambda|)^*} \leq C \frac{|\tilde{\lambda}^2 - \lambda^2|}{|\lambda|} \|u\|_{L^2(\Sigma)} \leq C |1 - e^{2i\theta}| \|u\|_{H^1(\Sigma, |\lambda|)}.$$

Ainsi, pour tout  $\nu > 0$ , il existe  $\delta$  suffisamment petit tel qu'on ait pour tout  $\lambda = \pm i|\lambda|e^{i\theta}$  satisfaisant  $|\theta| < \delta$  :

$$\|\tilde{f} - f\|_{H^1(\Sigma, |\lambda|)^*} \leq \nu \|u\|_{H^1(\Sigma, |\lambda|)}. \quad (5.18)$$

Regrouper les inégalités (5.16) et (5.17), puis utiliser (5.18) donne :

$$\|u\|_{H^1(\Sigma, |\lambda|)} \leq C \|f\|_{H^1(\Sigma, |\lambda|)^*} + C\nu \|u\|_{H^1(\Sigma, |\lambda|)}.$$

En prenant  $\nu$  suffisamment petit (par exemple  $\nu = 1/(2C)$ ), nous obtenons (5.14), ce qui est l'estimation recherchée.  $\square$

**Remarque 5.12** *Le Lemme 5.11 donne une information particulière sur la localisation des éléments de  $\Lambda(\mathcal{L})$ . Ce résultat est complémentaire à celui de la Proposition 4.24 donnant la répartition asymptotique des éléments de  $\Lambda(L_2)$  et donc a fortiori de ceux de  $\Lambda(\mathcal{L})$ .*

Comme nous pouvons le voir sur la Figure 5.2, le spectre est localisé dans un domaine géométrique en forme dite de nœud papillon.

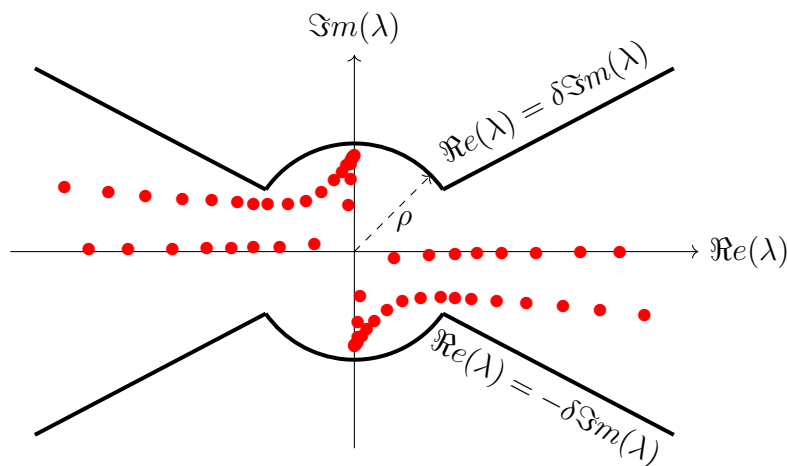


FIGURE 5.2: Localisation de  $\Lambda(\mathcal{L})$  donnée par le Lemme 5.11.

Maintenant que nous avons mis en évidence un domaine du plan complexe dans lequel le symbole  $\mathcal{L}(\lambda)$  est inversible avec une estimation de la norme de l'inverse dans les espaces dépendant du paramètre  $\lambda$ , nous pouvons revenir au problème 2D.

### 5.1.3 Caractère bien posé du problème (5.1)

En se servant des lemmes démontrés précédemment, nous pouvons obtenir le résultat suivant.

#### Théorème 5.13

Soit  $\beta \in \mathbb{R}$  tel que  $\Lambda(\mathcal{L})$  n'intersecte pas la droite  $\ell_{-\beta} = -\beta + i\mathbb{R}$ . Alors l'opérateur  $A_\beta : K_\beta^1(W) \rightarrow K_{-\beta}^1(W)^*$  défini par (5.2) est un isomorphisme.

*Démonstration.* Supposons que  $\mathcal{L}$  n'ait pas de valeurs propres sur  $\ell_{-\beta}$ . Commençons par considérer  $u \in K_\beta^1(W)$  tel que  $A_\beta u = 0$ . En appliquant la transformée de Fourier-Laplace partielle, nous obtenons :

$$\mathcal{L}(\lambda)\hat{u}(\lambda, \cdot) = 0, \quad \text{p.p. } \lambda \in \mathbb{C}.$$

D'après le Corollaire 5.9, il vient  $\hat{u}(\lambda, \cdot) = 0$  pour presque tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Comme la transformée de Fourier-Laplace partielle est un isomorphisme d'après le Lemme 5.6, on a  $u = 0$ . L'opérateur  $A_\beta$  est donc injectif. Donnons-nous maintenant  $f \in K_{-\beta}^1(W)^*$  et cherchons à trouver une solution de l'équation  $A_\beta u = f$ . Pour commencer, on applique la transformée de Fourier-Laplace et on obtient la famille d'équations  $\mathcal{L}(\lambda)\hat{u}(\lambda, \cdot) = \hat{f}(\lambda, \cdot)$  paramétrée par  $\lambda \in \mathbb{C}$ . L'opérateur  $\mathcal{L}(\lambda)$  est inversible pour tout  $\lambda \in \ell_{-\beta}$  d'après le Corollaire 5.9, on peut donc écrire  $\hat{u}(\lambda, \cdot) = \mathcal{L}(\lambda)^{-1}\hat{f}(\lambda, \cdot)$ . De plus, le Lemme 5.11 garantit qu'il existe des constantes  $M_\beta > 0$  et  $C > 0$  telles que pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  avec  $\Re(\lambda) = -\beta$  et  $|\Im(\lambda)| \geq M_\beta$  on a l'estimation :

$$\|\mathcal{L}(\lambda)^{-1}\hat{f}(\lambda, \cdot)\|_{\mathbb{H}^1(\Sigma, |\lambda|)} \leq C\|\hat{f}(\lambda, \cdot)\|_{\mathbb{H}^1(\Sigma, |\lambda|)^*}. \quad (5.19)$$

Lorsque  $\lambda \in -\beta + i[-M_\beta, M_\beta]$ , la continuité de  $\lambda \mapsto \mathcal{L}(\lambda)^{-1}$  assurée par le théorème de Fredholm analytique garantit que l'inégalité (5.19) est aussi valable dans l'ensemble compact  $-\beta + i[-M_\beta, M_\beta]$ . Par conséquent, l'estimation (5.19) peut être écrite pour tout  $\lambda \in \ell_{-\beta}$  avec une constante  $C > 0$  indépendante de  $\lambda$ . Puisque  $f \in K_{-\beta}^1(W)^*$ , le Lemme 5.7 nous donne :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\ell_{-\beta}} \|\hat{f}(\lambda, \cdot)\|_{\mathbb{H}^1(\Sigma, |\lambda|)^*} d\lambda < +\infty.$$

On en déduit à l'aide de (5.19) que  $\hat{u}(\lambda, \cdot) = \mathcal{L}(\lambda)^{-1}\hat{f}(\lambda, \cdot) \in \widehat{K}_\beta^1(W)$  pour presque tout  $\lambda \in \ell_{-\beta}$ . On peut donc définir par le Lemme 5.6 :

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\ell_{-\beta}} e^{\lambda x_1} \mathcal{L}(\lambda)^{-1}\hat{f}(\lambda, x_2) d\lambda \in K_\beta^1(W), \quad (5.20)$$

qui est solution de l'équation  $A_\beta u = f$ . Pour conclure, nous intégrons (5.19) sur  $\ell_{-\beta}$  et utilisons les formules de Plancherel (5.7) et (5.12) pour obtenir l'inégalité :

$$\|u\|_{K_\beta^1(W)} \leq C\|f\|_{K_{-\beta}^1(W)^*},$$

ce qui permet de conclure la preuve.  $\square$

Il a été prouvé dans le Lemme 4.26 que  $\Lambda(\mathcal{L}) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ . On peut donc prendre  $\beta = 0$  dans le Théorème 5.13 pour obtenir le corollaire suivant.



**Corollaire 5.14**

L'opérateur  $A_0$  est un isomorphisme de  $H^1(W)$  dans  $H^1(W)^*$ . Autrement dit, pour  $f \in H^1(W)^*$ , le problème (5.1) a une unique solution dans  $H^1(W)$ .

**5.1.4 Comportement asymptotique des solutions du problème (5.1)**

Nous venons de montrer que le problème (5.1) avec un terme source  $H^1(W)^*$  est bien posé dans  $H^1(W)$ , ce qui implique une décroissance de la solution à l'infini. Il serait intéressant de décrire précisément ce comportement traduisant une fuite de l'énergie dans le milieu environnant. Nous aimerions en effet savoir à quelle vitesse se fait cette décroissance, mais aussi s'il est possible de la traduire à l'aide des modes. Nous allons montrer qu'il est possible de décrire la solution à l'infini à l'aide des modes sans passer par un résultat de complétude. Dans la proposition suivante, nous comparons deux solutions  $u_1$  et  $u_2$  associées aux opérateurs  $A_{\beta_1}$  et  $A_{\beta_2}$  avec  $\beta_1 < \beta_2$ . On mentionne préalablement que d'après le Lemme 5.11, l'intersection de  $\Lambda(\mathcal{L})$  avec la bande  $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid -\beta_2 < \Re e(\lambda) < -\beta_1\}$  est un ensemble fini.

**Proposition 5.15**

Supposons l'Hypothèse 4.29 vérifiée. Soient  $\beta_1 < \beta_2$  deux réels tels que  $\Lambda(\mathcal{L}) \cap (\ell_{-\beta_1} \cup \ell_{-\beta_2}) = \emptyset$ . L'intersection de  $\Lambda(\mathcal{L})$  avec la bande  $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid -\beta_2 < \Re e(\lambda) < -\beta_1\}$  est supposée non vide et notée  $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N\}$ . Soit  $f \in K_{-\beta_1}^1(W)^* \cap K_{-\beta_2}^1(W)^*$ , on pose  $u_{\beta_1} := A_{\beta_1} f \in K_{\beta_1}^1(W)$  et  $u_{\beta_2} := A_{\beta_2} f \in K_{\beta_2}^1(W)$ . Il existe alors des complexes  $(c_j)_{1 \leq j \leq N}$  tels que :

$$u_{\beta_2} = \sum_{j=1}^N c_j u_j + u_{\beta_1},$$

où  $u_j(x_1, x_2) := e^{\mu_j x_1} u_j(x_2)$ , avec  $u_j \in \text{Ker}(\mathcal{L}(\mu_j)) \setminus \{0\}$ , est un mode du guide.

*Démonstration.* Puisque  $f \in K_{-\beta_1}^1(W)^* \cap K_{-\beta_2}^1(W)^*$ ,  $\lambda \mapsto \hat{f}(\lambda, \cdot)$  est holomorphe dans la bande  $B_{12} := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid -\beta_2 < \Re e(\lambda) < -\beta_1\}$ . Les seules singularités de la fonction  $\lambda \mapsto e^{\lambda x_1} \mathcal{L}(\lambda)^{-1} \hat{f}(\lambda, \cdot)$  dans  $B_{12}$  sont les pôles de  $\lambda \mapsto \mathcal{L}(\lambda)^{-1}$ , c'est-à-dire les éléments de  $\Lambda(\mathcal{L})$ . On se donne  $H$  suffisamment grand pour que :

$$(\Lambda(\mathcal{L}) \cap B_{12}) \subset \{\lambda \in B_{12} \mid |\Im m(\lambda)| < H\}.$$

En partant de (5.20) et en utilisant le théorème des résidus, nous obtenons :

$$\begin{aligned} u_{\beta_2}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2i\pi} \lim_{H \rightarrow +\infty} \int_{-\beta_2 - iH}^{-\beta_2 + iH} e^{\lambda x_1} \mathcal{L}(\lambda)^{-1} \hat{f}(\lambda, x_2) d\lambda \\ &= \frac{1}{2i\pi} \lim_{H \rightarrow +\infty} \left[ \int_{-\beta_1 - iH}^{-\beta_1 + iH} \dots d\lambda + \int_{-\beta_2 - iH}^{-\beta_1 - iH} \dots d\lambda - \int_{-\beta_2 + iH}^{-\beta_1 + iH} \dots d\lambda \right] \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \text{Res}(e^{\lambda x_1} \mathcal{L}(\lambda)^{-1} \hat{f}(\lambda, x_2), \mu_j), \end{aligned}$$

pour tout  $(x_1, x_2) \in W$ . La première intégrale tend vers  $u_1$  par (5.20). Pour les deuxième et troisième intégrales, il suffit d'invoquer [Koz+97, Lemme 5.4.1] pour voir que pour tout  $M > 0$  :

$$\left\| \int_{-\beta_2 \pm iH}^{-\beta_1 \pm iH} e^{\lambda x_1} \mathcal{L}(\lambda)^{-1} \hat{f}(\lambda, x_2) d\lambda \right\|_{L^2(W_M)} \xrightarrow{H \rightarrow +\infty} 0,$$

où  $W_M := \{(x_1, x_2) \in W \mid -M \leq x_1 \leq M\}$ . Pour calculer les résidus, on utilise aussi [Koz+97, Théorème 5.1.1]. Puisque les multiplicités algébrique et géométrique des valeurs propres  $\mu_j$  sont égales à 1 d'après les Lemmes 4.21 et 4.28, on peut écrire au voisinage de  $\mu_j$  d'après [Koz+97, Théorème 5.2.1] :

$$\mathcal{L}(\lambda)^{-1} = \frac{P_j}{\lambda - \mu_j} + H(\lambda).$$

Dans cette expression, les opérateurs  $P_j : H^1(\Sigma)^* \rightarrow H^1(\Sigma)$  sont les projecteurs sur  $\text{Ker}(\mathcal{L}(\mu_j)) = \text{Vect}(u_j)$  définis pour  $u \in H^1(\Sigma)$  par :

$$P_j f := \frac{1}{J_j} \langle f, u_j^* \rangle_{H^1(\Sigma)^*, H^1(\Sigma)},$$

où  $u_j^* := (\mu/\alpha)u_j$  et avec  $J_j = (u_j, u_j^*)_{L^2(\Sigma)}$  qui est non nul d'après l'Hypothèse 4.29. De plus,  $H : \lambda \mapsto H(\lambda)$  est une famille d'opérateurs de  $H^1(\Sigma)^*$  dans  $H^1(\Sigma)$ , holomorphe au voisinage de  $\mu_j$ . Le calcul du résidu se fait simplement et on obtient la décomposition attendue.  $\square$

**Remarque 5.16** Si l'Hypothèse 4.29 n'est pas satisfaite, c'est-à-dire s'il y a une chaîne de Jordan, il est toujours possible d'obtenir une telle décomposition asymptotique (voir [Koz+97, Théorème 5.4.1]). Celle-ci ne fera plus intervenir que des fonctions propres de  $\mathcal{L}(\lambda)$ , mais aussi des fonctions propres généralisées (définies à la sous-section 4.3.2).

Afin de quantifier la décroissance exponentielle de la solution lorsque  $x_1 \rightarrow \pm\infty$ , on introduit pour  $\beta \in \mathbb{R}$  les espaces :

$$\mathcal{K}_\beta^1(W) := \{v \in D'(W) \mid e^{-\beta|x_1|}v, e^{-\beta|x_1|}\partial_{x_1}v, e^{-\beta|x_1|}\partial_{x_2}v \in L^2(W)\}, \quad (5.21)$$

qu'on munit de la norme :

$$\|v\|_{\mathcal{K}_\beta^1(W)} := \left( \|e^{-\beta|x_1|}v\|_{L^2(W)}^2 + \|e^{-\beta|x_1|}\partial_{x_1}v\|_{L^2(W)}^2 + \|e^{-\beta|x_1|}\partial_{x_2}v\|_{L^2(W)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On peut remarquer qu'on a en particulier  $\mathcal{K}_0^1(W) = H^1(W)$ . Contrairement aux espaces  $\mathcal{K}_\beta^1(W)$  pour lesquels il n'y avait pas de valeur absolue dans le poids, nous avons grâce à cette dernière l'inclusion :

$$\beta_1 \leq \beta_2 \implies \mathcal{K}_{\beta_1}^1(W) \subset \mathcal{K}_{\beta_2}^1(W). \quad (5.22)$$

Introduisons l'espace dual topologique de  $\mathcal{K}_\beta^1(W)$  qu'on note  $\mathcal{K}_\beta^1(W)^*$  et que nous munissons de la norme :

$$\|f\|_{\mathcal{K}_\beta^1(W)^*} = \sup_{v \in \mathcal{K}_\beta^1(W) \setminus \{0\}} \frac{|\langle f, v \rangle_{\mathcal{K}_\beta^1(W)^*, \mathcal{K}_\beta^1(W)}|}{\|v\|_{\mathcal{K}_\beta^1(W)}},$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{K}_\beta^1(W)^*, \mathcal{K}_\beta^1(W)}$  représente le produit de dualité entre les espaces  $\mathcal{K}_\beta^1(W)^*$  et  $\mathcal{K}_\beta^1(W)$ . L'inclusion fonctionnelle (5.22) nous permet d'écrire l'inclusion fonctionnelle duale :

$$\beta_1 \leq \beta_2 \implies \mathcal{K}_{\beta_2}^1(W)^* \subset \mathcal{K}_{\beta_1}^1(W)^*.$$

Dans ce qui suit, nous introduisons des fonctions de troncature  $\chi^\pm \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$  égales à 1 pour  $\pm x_1 \geq 2L$  et égales à 0 pour  $\pm x_1 \leq L$  pour un  $L > 0$  donné. Nous avons le théorème suivant.

**Théorème 5.17**

Soit  $\beta > 0$  tel que  $\Lambda(\mathcal{L}) \cap \ell_{-\beta} = \emptyset$ . Supposons que l'ensemble  $\Lambda(\mathcal{L}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \mid -\beta < \Re e(\lambda) < 0\}$  soit non vide et noté  $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N_\beta-1}\}$ , où les  $\lambda_n$  sont définis par (4.29). Pour  $f \in \mathcal{K}_\beta^1(W)^* \subset H^1(W)^*$ , notons  $u \in H^1(W)$  l'unique solution du problème  $A_0 u = f$  donnée par le Corollaire 5.14. Il existe des nombres complexes  $(a_n^\pm)_{0 \leq n \leq N_\beta-1}$  et une fonction  $\check{u} \in \mathcal{K}_{-\beta}^1(W)$  tels que :

$$u = \chi^+ \sum_{n=0}^{N_\beta-1} a_n^+ u_{n,+} + \chi^- \sum_{n=0}^{N_\beta-1} a_n^- u_{n,-} + \check{u},$$

où  $u_{\pm,n}(x_1, x_2) = e^{\pm \lambda_n x_1} u_n(x_2)$  avec  $u_n \in \text{Ker}(\mathcal{L}(\pm \lambda_n))$ .

*Démonstration.* Puisque  $f \in \mathcal{K}_\beta^1(W)^* \subset K_{-\beta}^1(W)^*$ , il existe d'après le Théorème 5.13 un unique  $u_\beta \in K_{-\beta}^1(W)$  tel que  $A_\beta u_\beta = f$ . D'après la Proposition 5.15, il existe des nombres complexes  $(a_n^+)_{0 \leq n \leq N_\beta-1}$  tels que :

$$u = \sum_{n=0}^{N_\beta-1} a_n^+ u_{n,+} + u_\beta.$$

De façon similaire, comme  $f \in \mathcal{K}_\beta^1(W)^* \subset K_\beta^1(W)^*$ , il existe un unique  $u_{-\beta} \in K_{-\beta}^1(W)$  tel que  $A_{-\beta} u_{-\beta} = f$ . Sachant que l'ensemble  $\Lambda(\mathcal{L})$  est symétrique par rapport à l'axe  $\Re e(\lambda) = 0$ , on a  $\Lambda(\mathcal{L}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \mid 0 < \Re e(\lambda) < \beta\} = \{-\lambda_0, -\lambda_1, \dots, -\lambda_{N_\beta-1}\}$ , et il existe alors des coefficients  $(a_n^-)_{0 \leq n \leq N_\beta-1}$  tels que :

$$u = \sum_{n=0}^{N_\beta-1} a_n^- u_{n,-} + u_{-\beta}.$$

Il reste à écrire :

$$\begin{aligned} u &= \chi^+ u + \chi^- u + (1 - \chi^+ - \chi^-) u \\ &= \chi^+ \sum_{n=0}^{N_\beta-1} a_n^+ u_{n,+} + \chi^- \sum_{n=0}^{N_\beta-1} a_n^- u_{n,-} + \check{u}, \end{aligned}$$

où il est facile de vérifier que  $\check{u} = \chi^+ u_\beta + \chi^- u_{-\beta} + (1 - \chi^+ - \chi^-) u$  appartient à l'espace  $\mathcal{K}_{-\beta}^1(W)$ .  $\square$

**Remarque 5.18** *Ce résultat nous permet de voir en particulier que puisque  $\lambda_0$  a strictement la plus grande partie réelle parmi  $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N_\beta-1}\}$  (qui ont toutes une partie réelle négative),  $u$  se comporte asymptotiquement comme  $a_0^\pm e^{\pm \lambda_0 x_1} u_0(x_2)$  lorsque  $x_1 \rightarrow \pm\infty$ .*

Maintenant que le problème avec terme source dans le guide ouvert droit tronqué avec des PML a été étudié en détail, nous allons pouvoir nous pencher sur les problèmes de diffraction posés dans une jonction avec un guide fermé.

## 5.2 Étude du problème direct dans la jonction

Nous nous intéressons maintenant à la configuration plus réaliste, mais plus compliquée, de la jonction d'un guide fermé et d'un guide ouvert tronqué transversalement par des

PML finies. Le demi-guide fermé gauche occupe un domaine noté  $\Omega_- := (-\infty, 0) \times \Sigma_-$ , où sa section est donnée par  $\Sigma_- := (-h_0, h_0)$ . Le demi-guide ouvert droit occupe quant à lui le domaine  $\Omega_+ := (0, +\infty) \times \Sigma_+$ , où sa section  $\Sigma_+ := (-h_2, h_2)$  est bornée du fait de sa troncature avec des PML. On introduit aussi  $\Sigma_0 := \{0\} \times (-h_0, h_0)$  et le domaine complet  $\Omega := \Omega_- \cup \Sigma_0 \cup \Omega_+$  dont on note le bord  $\Gamma := \partial\Omega$ . Nous considérons dans ce domaine un obstacle  $D$  occupant un ouvert borné à frontière Lipschitz. On suppose plus précisément que  $\bar{D}$  est inclus soit dans  $\mathbb{R} \times (-h_0, h_0)$ , soit dans  $(0, +\infty) \times ((-h_1, h_0) \cup (h_0, h_1))$ , c'est-à-dire que le défaut est localisé dans le cœur ou dans la partie physique de la gaine. Nous excluons donc sa présence à l'interface entre le cœur et la gaine ou même dans les PML. On fait enfin l'hypothèse qu'il est compris entre les sections  $\Sigma_{-R_0} := \{-R_0\} \times \Sigma_-$  et  $\Sigma_R := \{R\} \times \Sigma_+$  de  $\Omega$  où  $R_0$  et  $R$  sont des réels strictement positifs. Nous notons  $\dot{\Omega} := \Omega \setminus \bar{D}$  le domaine privé de l'obstacle. Dans ce qui suit, nous allons étudier la réponse de  $\dot{\Omega}$  à une onde incidente provenant du demi-guide gauche. Cette étude fera intervenir les modes des demi-guides gauche (étudiés au [chapitre 1](#)) et droit (étudiés au [chapitre 4](#)). Ceux du demi-guide gauche sont notés  $\tilde{u}_{n,\pm}(x_1, x_2) = e^{\pm\tilde{\lambda}_n x_1} \tilde{u}_n(x_2)$  et ceux du demi-guide droit  $u_{n,\pm}(x_1, x_2) = e^{\pm\lambda_n x_1} u_n(x_2)$ . Ils sont solutions des problèmes aux valeurs propres :

$$\begin{cases} -d_{x_2}^2 \tilde{u}_n - k_0^2 \tilde{u}_n = \tilde{\lambda}_n^2 \tilde{u}_n & \text{dans } \Sigma_- \\ d_{x_2} \tilde{u}_n = 0 & \text{sur } \partial\Sigma_-, \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{\alpha}{\mu} d_{x_2}(\alpha \mu d_{x_2} u_n) - k^2 u_n = \lambda_n^2 u_n & \text{dans } \Sigma_+ \\ d_{x_2} u_n = 0 & \text{sur } \partial\Sigma_+. \end{cases}$$

Pour les modes du demi-guide gauche, nous rappelons (voir au [chapitre 1](#)) qu'il existe  $\tilde{N}_p \in \mathbb{N}$  non nul tel que  $\tilde{\lambda}_n \in i\mathbb{R}^+$  pour  $0 \leq n < \tilde{N}_p$  et  $\tilde{\lambda}_n \in \mathbb{R}^-$  pour  $n \geq \tilde{N}_p$ . Le premier groupe de modes correspond à des modes propagatifs et le second à des modes évanescents. On choisira en particulier les ondes incidentes  $u^i = \tilde{u}_{n,+}^0$  où :

$$\tilde{u}_{n,+}^0(\mathbf{x}) := \begin{cases} \tilde{u}_{n,+}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_- \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_+. \end{cases} \quad (5.23)$$

Nous avons vu au [chapitre 2](#) que l'étude du problème direct dans les guides fermés se fait dans  $H_{\text{loc}}^1$  du fait de la présence de modes propagatifs. Sous l'hypothèse  $c_0 > c_\infty$ , il est possible de travailler dans les guides ouverts tronqués avec des PML finies dans  $H^1$  (cf. Corollaire [5.14](#)) du fait de l'absence de modes propagatifs. Pour conduire l'étude dans la jonction, nous introduisons donc naturellement l'espace :

$$\tilde{H}_{\text{loc}}^1(\dot{\Omega}) := \{v \in D'(\dot{\Omega}) \mid \chi v \in H^1(\dot{\Omega}), \forall \chi \in \mathcal{T}_-\}, \quad (5.24)$$

où  $\mathcal{T}_-$  est l'ensemble des fonctions de troncature  $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$  telles que  $\chi(x_1, x_2) = 0$ ,  $x_1 < -L$  pour un réel  $L > 0$  et  $\chi(x_1, x_2) = 1$ ,  $x_1 > 0$ . Le problème de diffraction que nous considérons est le suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } u \in \tilde{H}_{\text{loc}}^1(\dot{\Omega}) \text{ tel que} \\ & \begin{cases} -\partial_{x_2}(\alpha \mu \partial_{x_2} u) - \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1}^2 u - \frac{\mu}{\alpha} k^2 u = 0 & \text{dans } \dot{\Omega} \\ u = 0 & \text{sur } \partial D \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \Gamma \\ u - u^i & \text{est sortant.} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.25)$$

**Remarque 5.19** De la même façon que nous avons étendu la définition des coefficients  $\mu$ ,  $k$  et  $\alpha$  d'une section 1D à un guide droit 2D sans en changer la notation, nous définissons maintenant ces trois coefficients pour la jonction d'un guide fermé et d'un guide ouvert sans changer de notation.

Nous aurons ainsi pour  $(x_1, x_2) \in \Omega_-$  :

$$\mu(x_1, x_2) = \mu_0, \quad k(x_1, x_2) = k_0 \quad \text{et} \quad \alpha(x_1, x_2) = 1.$$

Lorsque  $(x_1, x_2) \in \Omega_+$ , ces coefficients sont définis de la même façon que dans le guide rectiligne  $W$ .

La condition de radiation dans le demi-guide droit est contenue dans l'espace fonctionnel : la solution est cherchée dans  $H^1$ . La condition de radiation dans le demi-guide gauche consiste quant à elle à sélectionner les ondes diffractées qui se propagent ou décroissent exponentiellement de la droite vers la gauche. Afin d'étudier le caractère bien posé du problème (5.25), nous nous ramenons dans un premier temps à un domaine borné. Pour ce faire, nous introduisons des opérateurs Dirichlet-to-Neumann sur les sections  $\Sigma_{-R_0}$  et  $\Sigma_R$ . Commençons par définir l'opérateur  $T^-$  sur  $\Sigma_{-R_0}$ , où  $R_0 \geq 0$  est fixé dans toute la suite. Soit  $\Omega_{-\infty, -R_0} := (-\infty, -R_0) \times \Sigma_-$ , sa définition se fait à l'aide de la solution du problème de demi-guide définie pour  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0})$  par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^-(g) \in H_{\text{loc}}^1(\Omega_{-\infty, -R_0}) \text{ tel que} \\ \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u^- - k_0^2 u^- = 0 & \text{dans } \Omega_{-\infty, -R_0} \\ u^- = g & \text{sur } \Sigma_{-R_0} \\ \partial_n u^- = 0 & \text{sur } \partial\Omega_{-\infty, -R_0} \setminus \Sigma_{-R_0} \\ u^- \text{ est sortant.} \end{array} \right. \end{cases} \quad (5.26)$$

En suivant [LT88], le caractère bien posé de (5.26) peut être facilement obtenu en projetant  $g = u^-(g)|_{\Sigma_{-R_0}}$  sur les fonctions transverses  $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  formant une base complète de  $L^2(\Sigma_{-R_0})$  (voir aussi [BL08]). Il est alors possible de définir l'opérateur :

$$\begin{aligned} T^- : H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0}) &\rightarrow \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0}) \\ g &\mapsto -\mu_0 \partial_{x_1} u^-(g)|_{\Sigma_{-R_0}}, \end{aligned} \quad (5.27)$$

où  $u^-(g)$  est solution de (5.26). En décomposant  $u^-(g)$  sur les modes qui se propagent ou décroissent vers la gauche, on peut écrire de façon équivalente :

$$T^- g = \mu_0 \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\lambda}_n(g, \tilde{u}_n)_{L^2(\Sigma_{-R_0})} \tilde{u}_n. \quad (5.28)$$

Ensuite, nous cherchons aussi à définir l'opérateur  $T_R$  sur  $\Sigma_R$ . Pour cela, il faut tout comme pour l'opérateur  $T^-$  introduire un problème de demi-guide. En revanche, puisque nous ne savons pas si les fonctions transverses  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  forment une base complète de  $L^2(\Sigma_R)$ , il n'est pas possible de montrer aussi simplement le caractère bien posé de ce problème. Pour pallier cela, nous allons utiliser le caractère bien posé du problème (5.1) posé dans le guide rectiligne complet que nous avons montré avec le Corollaire 5.14.

### Lemme 5.20

Soit  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)$  et  $\Omega_{R, +\infty} := (R, +\infty) \times \Sigma_+$ . Le problème de demi-guide :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^+(g) \in H^1(\Omega_{R, +\infty}) \text{ tel que} \\ \left\{ \begin{array}{ll} -\partial_{x_2}(\alpha \mu \partial_{x_2} u^+) - \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1}^2 u^+ - \frac{\mu}{\alpha} k^2 u^+ = 0 & \text{dans } \Omega_{R, +\infty} \\ u^+ = g & \text{sur } \Sigma_R \\ \partial_n u^+ = 0 & \text{sur } \partial\Omega_{R, +\infty} \setminus \Sigma_R, \end{array} \right. \end{cases} \quad (5.29)$$

a une unique solution, et il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $g$  telle que :

$$\|u^+(g)\|_{H^1(\Omega_{R,+\infty})} \leq C \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)}, \quad \forall g \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R). \quad (5.30)$$

*Démonstration.* L'idée de la preuve est de déduire le résultat du Corollaire 5.14 en utilisant un argument de symétrie. Pour commencer, remarquons que pour n'importe quel  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)$ , il existe une fonction  $U_g^+ \in H^1(\Omega_{R,+\infty})$  telle que  $U_g^+|_{\Sigma_R} = g$  et  $\partial_n U_g^+|_{(\partial\Omega_{R,+\infty} \setminus \Sigma_R)} = 0$ . Ainsi, au lieu de chercher à résoudre (5.29), nous pouvons de façon équivalente chercher une fonction  $u_0^+ := u^+ - U_g^+ \in H^1(\Omega_{R,+\infty})$  satisfaisant :

$$\begin{cases} Pu_0^+ = -PU_g^+ & \text{dans } \Omega_{R,+\infty} \\ u_0^+ = 0 & \text{sur } \Sigma_R \\ \partial_n u_0^+ = 0 & \text{sur } \partial\Omega_{R,+\infty} \setminus \Sigma_R, \end{cases} \quad (5.31)$$

où :

$$P \cdot := -\partial_{x_2}(\alpha \mu \partial_{x_2} \cdot) - \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1}^2 \cdot - \frac{\mu}{\alpha} k^2 \cdot.$$

Ci-dessous, nous allons montrer grâce à la condition de Dirichlet homogène sur  $\Sigma_R$  que résoudre (5.31) revient à chercher des solutions de (5.1) antisymétriques par rapport à la section  $\Sigma_R$ . Il est pour cela nécessaire d'introduire quelques notations. Pour commencer, on note  $\Omega_{R,+\infty}^{\parallel}$  le symétrique du domaine  $\Omega_{R,+\infty}$  par rapport à  $\Sigma_R$ . On a ainsi  $W = \Omega_{R,+\infty}^{\parallel} \cup \Sigma_R \cup \Omega_{R,+\infty}$ . Pour  $v \in H^1(W)$ , ses parties symétrique et antisymétrique sont notées  $\mathcal{S}v$  et  $\mathcal{A}v$ , à savoir :

$$\mathcal{S}v := \frac{1}{2}(v + v^{\parallel}) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}v := \frac{1}{2}(v - v^{\parallel}) \quad \text{avec} \quad v^{\parallel}(x_1, x_2) := v(2R - x_1, x_2).$$

Les opérateurs  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{A}$  sont tous les deux des endomorphismes de  $H^1(W)$  et peuvent être étendus par dualité à des éléments  $w \in H^1(W)^*$ , par exemple :

$$\langle \mathcal{S}w, v \rangle_{H^1(W)^*, H^1(W)} := \langle w, \mathcal{S}v \rangle_{H^1(W)^*, H^1(W)}, \quad \forall v \in H^1(W).$$

Finalement,  $H_{0,R}^1(\Omega_{R,+\infty})$  représentera l'ensemble des fonctions de  $H^1(\Omega_{R,+\infty})$  s'annulant sur  $\Sigma_R$ . Considérons  $f_g^+ := -PU_g^+$  le second membre de la première équation de (5.31). Comme  $\partial_n U_g^+|_{(\partial\Omega_{R,+\infty} \setminus \Sigma_R)} = 0$ , on remarque que  $f_g^+$  appartient à l'espace dual  $H_{0,R}^1(\Omega_{R,+\infty})^*$  de  $H_{0,R}^1(\Omega_{R,+\infty})$ . Il est alors possible de définir  $f_g \in H^1(W)^*$  avec :

$$\langle f_g, v \rangle_{H^1(W)^*, H^1(W)} := 2 \left\langle f_g^+, (\mathcal{A}v)|_{\Omega_{R,+\infty}} \right\rangle_{H_{0,R}^1(\Omega_{R,+\infty})^*, H_{0,R}^1(\Omega_{R,+\infty})}, \quad \forall v \in H^1(W).$$

Notons que cette définition a un sens étant donné que  $(\mathcal{A}v)|_{\Omega_{R,+\infty}} \in H_{0,R}^1(\Omega_{R,+\infty})$ . La distribution  $f_g$  n'est rien d'autre que le prolongement antisymétrique de  $f_g^+$  à  $\Omega_{R,+\infty}^{\parallel}$ . En effet, il est d'une part clair que  $f_g$  est antisymétrique, car pour tout  $v \in H^1(W)$  :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{S}f_g, v \rangle_{H^1(W)^*, H^1(W)} &= \langle f_g, \mathcal{S}v \rangle_{H^1(W)^*, H^1(W)} \\ &= 2 \left\langle f_g^+, (\mathcal{A}\mathcal{S}v)|_{\Omega_{R,+\infty}} \right\rangle_{H_{0,R}^1(\Omega_{R,+\infty})^*, H_{0,R}^1(\Omega_{R,+\infty})} = 0. \end{aligned}$$

D'autre part, en notant  $v \in H^1(W)$  le prolongement par zéro à  $\Omega_{R,+\infty}^{\parallel}$  d'une fonction  $v^+ \in H_{0,R}^1(\Omega_{R,+\infty})$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \langle f_g|_{\Omega_{R,+\infty}}, v^+ \rangle_{H^1(\Omega_{R,+\infty})^*, H^1(\Omega_{R,+\infty})} &= \langle f_g, v \rangle_{H^1(W)^*, H^1(W)} \\ &= 2 \left\langle f_g^+, (\mathcal{A}v)|_{\Omega_{R,+\infty}} \right\rangle_{H_{0,R}^1(\Omega_{R,+\infty})^*, H_{0,R}^1(\Omega_{R,+\infty})} \\ &= \langle f_g^+, v^+ \rangle_{H^1(\Omega_{R,+\infty})^*, H^1(\Omega_{R,+\infty})}, \end{aligned}$$

où on a utilisé pour la dernière égalité :  $(\mathcal{A}v)|_{\Omega_{R,+\infty}} = v^+/2$ . On vient donc de montrer que  $f_g|_{\Omega_{R,+\infty}} = f_g^+$ . D'après le Corollaire 5.14, le problème (5.1) pour  $f = f_g$  a une unique solution  $u_0 := A_0^{-1}f_g \in H^1(W)$ . Vérifions que  $u_0^+ = u_0|_{\Omega_{R,+\infty}}$  est une solution de (5.31). Comme  $f_g|_{\Omega_{R,+\infty}} = f_g^+$ , la première et la troisième équations de (5.31) correspondent simplement à la première et à la troisième équation de (5.1) posées respectivement dans les sous-domaines  $\Omega_{R,+\infty}$  et  $\partial\Omega_{R,+\infty} \setminus \Sigma_R$  de  $W$  et  $\Gamma$ . Pour la deuxième équation, on utilise le fait que  $f_g$  est antisymétrique et que  $\mathcal{A}A_0 = A_0\mathcal{A}$  (ceci se montre en partant de la définition (5.2) de  $A_0$ ). Cela nous permet d'écrire :

$$f_g = \mathcal{A}f_g = \mathcal{A}A_0u_0 = A_0\mathcal{A}u_0.$$

Par injectivité de  $A_0$ , on a  $\mathcal{A}u_0 = u_0$ , ce qui traduit que  $u_0$  est antisymétrique. Par suite,  $u_0 = 0$  sur  $\Sigma_R$ . Pour l'unicité de la solution au problème (5.31), il faut à nouveau utiliser les mêmes arguments de symétrie et l'injectivité de  $A_0$ . Le problème (5.31) est donc bien posé.  $\square$

Grâce au Lemme 5.20, on peut définir l'opérateur :

$$\begin{aligned} T_R : H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R) &\rightarrow \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R) \\ g &\mapsto \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} u^+(g)|_{\Sigma_R}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

où  $u^+(g)$  est l'unique solution du problème (5.29). Il n'est plus possible d'obtenir une expression analogue à (5.28) du fait de l'absence de résultat de complétude des fonctions transverses.

Revenons maintenant au problème (5.25) posé dans la jonction. Dire que  $u - \tilde{u}_{n,+}^0$  est sortant du côté gauche revient à écrire  $-\mu_0 \partial_{x_1} (u - \tilde{u}_{n,+})|_{\Sigma_{-R_0}} = T^-(u|_{\Sigma_{-R_0}} - \tilde{u}_{n,+}|_{\Sigma_{-R_0}})$ , ce qui se réécrit :

$$-\mu_0 \partial_{x_1} u|_{\Sigma_{-R_0}} = T^-(u|_{\Sigma_{-R_0}}) - 2\mu_0 \tilde{\lambda}_n \tilde{u}_{n,+}|_{\Sigma_{-R_0}},$$

d'après l'expression de  $\tilde{u}_{n,+}$ . De plus, comme la solution est cherchée à droite dans  $H^1$ , on a aussi  $\frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} u|_{\Sigma_R} = T_R(u|_{\Sigma_R})$ . Il en résulte que le problème (5.25) posé dans  $\dot{\Omega}$  peut s'écrire de façon équivalente dans le domaine borné  $\dot{\Omega}_R$  de  $\dot{\Omega}$  délimité par les sections  $\Sigma_{-R_0}$  et  $\Sigma_R$ . Ce nouveau problème s'écrit :

Trouver  $u \in H^1(\dot{\Omega}_R)$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\partial_{x_2}(\alpha \mu \partial_{x_2} u) - \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1}^2 u - \frac{\mu}{\alpha} k^2 u = 0 & \text{dans } \dot{\Omega}_R \\ u = 0 & \text{sur } \partial D \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \partial \dot{\Omega}_R \setminus (\Sigma_{-R_0} \cup \Sigma_R \cup \partial D) \\ -\mu_0 \partial_{x_1} u = T^- u - 2\mu_0 \tilde{\lambda}_n \tilde{u}_{n,+} & \text{sur } \Sigma_{-R_0} \\ \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} u = T_R u & \text{sur } \Sigma_R. \end{array} \right. \quad (5.33)$$



Notons  $H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R)$  l'ensemble des fonctions de  $H^1(\dot{\Omega}_R)$  qui s'annulent sur  $\partial D$ . Une formulation variationnelle équivalente s'écrit :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } u \in H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R) \text{ tel que} \\ & a_R(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R), \end{aligned} \quad (5.34)$$

où la forme sesquilinéaire  $a_R$  est donnée par :

$$\begin{aligned} a_R(u, v) := & \int_{\dot{\Omega}_R} (\alpha \mu \partial_{x_2} u \partial_{x_2} \bar{v} + \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} u \partial_{x_1} \bar{v} - \frac{\mu}{\alpha} k^2 u \bar{v}) d\mathbf{x} - \langle T^- u, \bar{v} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0})} \\ & - \langle T_R u, \bar{v} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)}, \end{aligned} \quad (5.35)$$

et la forme antilinéaire  $\ell$  est donnée par :

$$\ell(v) := -2\mu_0 \tilde{\lambda}_n \int_{\Sigma_{-R_0}} \tilde{u}_{n,+} \bar{v} dx_2. \quad (5.36)$$

Nous sommes maintenant en mesure de montrer le caractère bien posé du problème (5.25) au sens de Fredholm, c'est-à-dire que l'unicité implique l'existence.

### Théorème 5.21

Si pour  $u^i = 0$  le problème (5.25) n'admet que la solution triviale  $u = 0$ , alors le problème (5.25) est bien posé pour tout  $u^i = \tilde{u}_{n,+}^0$ .

*Démonstration.* Comme nous avons par hypothèse l'unicité du problème (5.25), on a aussi celle du problème (5.33). Pour montrer le caractère bien posé des deux problèmes, il suffit de montrer que le problème équivalent (5.34) est Fredholm d'indice zéro. Soit  $\chi$  une fonction de troncature positive dans  $\mathcal{C}^\infty(\Omega_{R,+\infty})$  qui ne dépend que de  $x_1$ , égale à 1 pour  $R \leq x_1 \leq 3R/2$  et qui s'annule pour  $x_1 \geq 2R$ . Remarquons que pour  $(g, h) \in (H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R))^2$ , nous avons :

$$\langle T_R g, \bar{h} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)} = \left\langle \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} u^+(g), \overline{u^+(h)} \right\rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)},$$

où  $u^+(g)$  (respectivement  $u^+(h)$ ) est la solution dans  $\Omega_{R,+\infty}$  du problème (5.29) pour une donnée  $g$  (respectivement  $h$ ). Multiplier l'équation satisfaite par  $u^+(g)$  par  $\overline{\chi u^+(h)}$  et intégrer en utilisant la formule de Green donne :

$$\begin{aligned} & - \left\langle \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} u^+(g), \overline{u^+(h)} \right\rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)} \\ & = \int_{\Omega_{R,+\infty}} (\alpha \mu \chi \partial_{x_2} u^+(g) \overline{\partial_{x_2} u^+(h)} + \frac{\mu}{\alpha} \chi \partial_{x_1} u^+(g) \overline{\partial_{x_1} u^+(h)}) d\mathbf{x} \\ & \quad + \int_{\Omega_{R,+\infty}} \left( \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} \chi \partial_{x_1} u^+(g) \overline{u^+(h)} - \frac{\mu}{\alpha} k^2 \chi u^+(g) \overline{u^+(h)} \right) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Poser  $g = u|_{\Sigma_R}$  et  $h = v|_{\Sigma_R}$  nous permet de décomposer la forme sesquilinéaire  $a_R$  en  $a_R = c_R + b_R$ , avec pour  $(u, v) \in H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R)$  :

$$\begin{aligned} c_R(u, v) := & \int_{\dot{\Omega}_R} (\alpha \partial_{x_2} u \partial_{x_2} \bar{v} + \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} u \partial_{x_1} \bar{v}) d\mathbf{x} - \langle T^- u, \bar{v} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0})} \\ & + \int_{\Omega_{R,+\infty}} (\alpha \mu \chi \partial_{x_2} u^+(u|_{\Sigma_R}) \overline{\partial_{x_2} v^+(v|_{\Sigma_R})} + \frac{\mu}{\alpha} \chi \partial_{x_1} u^+(u|_{\Sigma_R}) \overline{\partial_{x_1} v^+(v|_{\Sigma_R})}) d\mathbf{x}, \end{aligned}$$



et :

$$b_R(u, v) := - \int_{\dot{\Omega}_R} \frac{\mu}{\alpha} k^2 u \bar{v} d\mathbf{x} + \int_{\Omega_{R,+\infty}} \left( \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} \chi \partial_{x_1} u^+(u|_{\Sigma_R}) \overline{u^+(v|_{\Sigma_R})} - \frac{\mu}{\alpha} k^2 \chi u^+(u|_{\Sigma_R}) \overline{u^+(v|_{\Sigma_R})} \right) d\mathbf{x}.$$

Par le théorème de représentation de Riesz, il existe deux opérateurs linéaires  $\mathcal{C}_R$  et  $\mathcal{B}_R$  de  $H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R)$  dans lui-même associés aux formes sesquilinéaires  $c_R$  et  $b_R$ . Il reste à montrer que  $\mathcal{C}_R$  est un isomorphisme et  $\mathcal{B}_R$  est compact. Commençons par la preuve du premier point. Nous avons pour  $u \in H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R)$  :

$$c_R(u, u) = \int_{\dot{\Omega}_R} \left( \alpha |\partial_{x_2} u|^2 + \frac{\mu}{\alpha} |\partial_{x_1} u|^2 \right) d\mathbf{x} - \langle T^- u, \bar{u} \rangle_{H^1(\Sigma_{-R_0})^*, H^1(\Sigma_{-R_0})} + \int_{\Omega_{R,+\infty}} \left( \alpha \mu \chi |\partial_{x_2} u^+(u|_{\Sigma_R})|^2 + \frac{\mu}{\alpha} \chi |\partial_{x_1} u^+(u|_{\Sigma_R})|^2 \right) d\mathbf{x}.$$

En utilisant (5.28), nous pouvons écrire en séparant les modes propagatifs et évanescents :

$$\begin{aligned} & - \langle T^- u, \bar{u} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0})} \\ &= -\mu_0 \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\lambda}_n |(u_{\Sigma_{-R_0}}, \tilde{u}_n)_{L^2(\Sigma_{-R_0})}|^2 \\ &= -i\mu_0 \sum_{n=0}^{\tilde{N}_p-1} |\tilde{\lambda}_n| |(u_{\Sigma_{-R_0}}, \tilde{u}_n)_{L^2(\Sigma_{-R_0})}|^2 + \mu_0 \sum_{n=0}^{\tilde{N}_p-1} |\tilde{\lambda}_n| |(u_{\Sigma_{-R_0}}, \tilde{u}_n)_{L^2(\Sigma_{-R_0})}|^2, \end{aligned}$$

ce qui permet de voir que  $\Re(-\langle T^- u, \bar{u} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0})}) \geq 0$ . Et comme de plus  $\chi \geq 0$  et  $\Re(\alpha)$  et  $\Re(1/\alpha)$  sont bornés inférieurement par une constante strictement positive, on obtient à l'aide de l'inégalité de Poincaré l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que :

$$|\Re(c_R(u, u))| \geq C \|u\|_{H^1(\dot{\Omega}_R)}^2.$$

Nous venons de prouver que la forme sesquilinéaire  $c_R$  est coercive et donc que  $\mathcal{C}_R$  est un isomorphisme. Montrons maintenant que l'opérateur  $\mathcal{B}_R$  est compact. Soit  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  une suite bornée de  $H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R)$ , on peut en extraire une sous-suite notée de la même façon qui converge faiblement vers un élément  $u$  dans  $H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R)$ ; nous avons par suite  $v_m := \mathcal{B}_R u_m \rightharpoonup \mathcal{B}_R u =: v$  dans  $H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R)$ . On rappelle que  $\mathcal{B}_R$  a été défini pour tout  $(u, v) \in H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R)$  par  $(\mathcal{B}_R u, v)_{H^1(\dot{\Omega}_R)} := b_R(u, v)$ , d'où :

$$\|\mathcal{B}_R(u_m - u)\|_{H^1(\dot{\Omega}_R)}^2 = b_R(u_m - u, v_m - v). \quad (5.37)$$

Les suites  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  et  $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$  sont bornées dans  $H^1(\dot{\Omega}_R)$  et le domaine  $\dot{\Omega}_R$  est borné, le théorème de Rellich nous assure qu'on peut en extraire deux sous-suites toujours notées identiquement telles que  $u_m \rightarrow u$  et  $v_m \rightarrow v$  dans  $L^2(\dot{\Omega}_R)$ . Ainsi :

$$\int_{\dot{\Omega}_R} \frac{\mu}{\alpha} k^2 u_m \bar{v}_m d\mathbf{x} \rightarrow \int_{\dot{\Omega}_R} \frac{\mu}{\alpha} k^2 u \bar{v} d\mathbf{x}.$$

En utilisant la continuité de la trace, une autre conséquence de  $u_m \rightharpoonup u$  dans  $H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R)$  est que  $u_m|_{\Sigma_R} \rightharpoonup u|_{\Sigma_R}$  dans  $L^2(\Sigma_R)$ . Puisque l'application  $g \mapsto u^+(g)$  définie par le Lemme 5.20

est continue de  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)$  dans  $\Omega_{R,+\infty}$  d'après (5.30), nous avons en outre  $u^+(u_{m|\Sigma_R}) \rightharpoonup u^+(u_{|\Sigma_R})$  et  $u^+(v_{m|\Sigma_R}) \rightharpoonup u^+(v_{|\Sigma_R})$  dans  $H^1(\Omega_{R,+\infty})$ . Puis en utilisant encore le théorème de Rellich, nous obtenons  $u^+(u_{m|\Sigma_R}) \rightarrow u^+(u_{|\Sigma_R})$  et  $u^+(v_{m|\Sigma_R}) \rightarrow u^+(v_{|\Sigma_R})$  dans  $L^2(\Omega_{R,2R})$  où  $\Omega_{R,2R} := (R, 2R) \times (-h_2, h_2)$ . L'annulation de la fonction de troncature  $\chi$  pour  $x_1 \geq 2R$  nous permet alors de conclure que :

$$\int_{\Omega_{R,+\infty}} \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} \chi \partial_{x_1} u^+(u_{m|\Sigma_R}) \overline{u^+(v_{m|\Sigma_R})} d\mathbf{x} \rightarrow \int_{\Omega_{R,+\infty}} \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} \chi \partial_{x_1} u^+(u_{|\Sigma_R}) \overline{u^+(v_{|\Sigma_R})} d\mathbf{x},$$

et :

$$\int_{\Omega_{R,+\infty}} \frac{\mu}{\alpha} k^2 \chi u^+(u_{m|\Sigma_R}) \overline{u^+(v_{m|\Sigma_R})} d\mathbf{x} \rightarrow \int_{\Omega_{R,+\infty}} \frac{\mu}{\alpha} k^2 \chi u^+(u_{|\Sigma_R}) \overline{u^+(v_{|\Sigma_R})} d\mathbf{x}.$$

Nous venons de montrer que  $b_R(u_m, v_m) \rightarrow b_R(u, v)$  et par suite à l'aide de (5.37) que  $\mathcal{B}_R u_m \rightarrow \mathcal{B}_R u$  dans  $H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R)$ , ce qui traduit que  $\mathcal{B}_R$  est compact. Le problème est alors Fredholm d'indice zéro, ce qui termine la preuve.  $\square$

**Remarque 5.22** *Il est important d'insister sur le fait que nous venons de démontrer le caractère bien posé du problème posé dans la jonction, principalement à l'aide de celui des problèmes de demi-guides. La complétude des fonctions transverses à gauche a permis d'obtenir le caractère bien posé du problème de demi-guide gauche, puis de décomposer l'opérateur  $T^-$  sur cette famille de fonctions. Les nombres d'onde longitudinaux étant purement réels ou imaginaires, nous avons pu contrôler (de la même façon que pour le Lemme 2.4) le signe du crochet de dualité faisant intervenir  $T^-$  pour montrer la coercivité. À droite de la jonction, l'absence de résultat de complétude des fonctions transverses a été contournée à l'aide de la théorie de Kondratiev, ce qui nous a permis de montrer que le problème de demi-guide droit est bien posé. Le contrôle du signe du crochet de dualité faisant intervenir  $T_R$  n'est plus possible de la même manière, car il n'est plus décomposable sur les fonctions transverses à droite. Même si c'était le cas, nous ne pourrions pas contrôler le signe des parties réelles ou imaginaires du crochet de dualité, les nombres d'onde longitudinaux étant complexes. Pour contourner cette difficulté, nous avons dû décomposer la forme sesquilinéaire  $a_R$  faisant intervenir  $T_R$  en la somme de deux formes sesquilinéaires, l'une étant associée à un isomorphisme et l'autre à un opérateur compact.*

Dans le but de préciser le comportement des solutions du problème (5.25) lorsque  $x_1 \rightarrow +\infty$ , on introduit le domaine  $\dot{\Omega}^+ := \Omega_+ \setminus \overline{D}$  puis pour  $\beta \in \mathbb{R}$  l'espace :

$$\mathcal{K}_\beta^1(\dot{\Omega}^+) := \{v \in \mathcal{K}_\beta^1(\dot{\Omega}^+) \mid v|_{\partial D} = 0\},$$

où  $\mathcal{K}_\beta^1(\dot{\Omega}^+)$  est défini par (5.21) en remplaçant  $W$  par  $\dot{\Omega}^+$ . Lorsque  $\beta = 0$ , l'espace  $\mathcal{K}_0^1(\dot{\Omega}^+)$  coïncide avec le sous-espace des fonctions de  $H^1(\dot{\Omega}^+)$  s'annulant sur  $\partial D$ . On introduit encore une fonction de troncature  $\chi^+$  de classe  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$  vérifiant  $\chi^+ = 1$  pour  $x_1 \geq 2R$  et  $\chi^+ = 0$  pour  $x_1 \leq R$ .

### Théorème 5.23

Supposons que pour  $u^i = 0$  le problème (5.25) n'ait que la solution triviale  $u = 0$ . Alors, la solution  $u$  du problème (5.25) pour  $u^i = \tilde{u}_{n,+}^0$  est telle que pour tout  $\beta > 0$  satisfaisant  $\Lambda(\mathcal{L}) \cap \ell_{-\beta} = \emptyset$  et :

$$\Lambda(\mathcal{L}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \mid -\beta < \Re e(\lambda) < 0\} = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N_\beta-1}\},$$

il existe des coefficients complexes  $(a_n^+)_{0 \leq n \leq N_\beta - 1}$  et une fonction  $\check{u}_\beta \in \mathring{\mathcal{K}}_{-\beta}^1(\dot{\Omega}^+)$  tels que :

$$u = \chi^+ \sum_{n=0}^{N_\beta - 1} a_n^+ u_{n,+} + \check{u}_\beta.$$

*Démonstration.* Tout d'abord, on observe que  $\chi^+ u \in H^1(W)$  (la distribution est prolongée par 0 à gauche pour  $|x_2| > h_0$ ) et donc  $f := A_0(\chi^+ u) \in H^1(W)^*$ . Puisque la distribution  $f$  est à support compact, on a  $f \in K_{-\beta}^1(W)^*$ . Il est donc possible de définir  $u_\beta := A_\beta^{-1} f \in K_\beta^1(W)$ . D'après la Proposition 5.15, il existe des coefficients complexes  $(a_n^+)_{0 \leq n \leq N_\beta - 1}$  tels que :

$$\chi^+ u = \sum_{n=0}^{N_\beta - 1} a_n^+ u_{n,+} + u_\beta.$$

Il est alors possible d'écrire :

$$u = (\chi^+)^2 u + (1 - (\chi^+)^2) u = \chi^+ \left( \sum_{n=0}^{N_\beta - 1} a_n^+ u_{n,+} + u_\beta \right) + (1 - (\chi^+)^2) u.$$

Pour conclure la preuve, il suffit de remarquer que la fonction :

$$\check{u}_\beta := \chi^+ u_\beta + (1 - (\chi^+)^2) u,$$

appartient à l'espace  $\mathring{\mathcal{K}}_{-\beta}^1(\dot{\Omega}^+)$ . □

Nous avons précédemment montré le caractère bien posé du problème (5.25) en passant par la formulation équivalente (5.33) posée dans un domaine borné à l'aide d'opérateurs DtN. En vue de l'approximation numérique de la solution, nous proposons une autre formulation équivalente faisant intervenir un opérateur DtN avec recouvrement. Cette proposition est motivée par des travaux dans les guides fermés qui ont montré les meilleures performances d'approximation numérique de la formulation avec recouvrement (voir par exemple [BL21]). Soit  $R' \geq R$ , on définit l'opérateur :

$$\begin{aligned} T_{R,R'} : H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R) &\rightarrow \widetilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'}) \\ g &\mapsto \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} u^+(g)|_{\Sigma_{R'}}, \end{aligned} \quad (5.38)$$

où  $u^+(g)$  est solution de (5.29). Lorsque  $R' = R$  on a  $T_{R,R'} = T_R$ , c'est-à-dire qu'on retrouve l'opérateur sans recouvrement. Ensuite, on introduit dans  $\dot{\Omega}_{R'}$  le problème :

Trouver  $u \in H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_{R'})$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\partial_{x_2}(\alpha \mu \partial_{x_2} u) - \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1}^2 u - \frac{\mu}{\alpha} k^2 u = 0 & \text{dans } \dot{\Omega}_{R'} \\ u = 0 & \text{sur } \partial D \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \partial \dot{\Omega}_{R'} \setminus (\Sigma_{-R_0} \cup \Sigma_{R'} \cup \partial D) \\ -\mu_0 \partial_{x_1} u = T^-(u|_{\Sigma_{-R_0}}) - 2\mu_0 \check{\lambda}_n \check{u}_{n,+} & \text{sur } \Sigma_{-R_0} \\ \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} u = T_{R,R'}(u|_{\Sigma_R}) & \text{sur } \Sigma_{R'}. \end{array} \right. \quad (5.39)$$

Résoudre (5.39) est équivalent à résoudre la formulation variationnelle :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } u \in H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_{R'}) \text{ tel que} \\ & a_{R,R'}(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_{R'}), \end{aligned} \quad (5.40)$$

où la forme sesquilinéaire  $a_{R,R'}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} a_{R,R'}(u, v) := & \int_{\dot{\Omega}_{R'}} \left( \alpha \mu \partial_{x_2} u \partial_{x_2} \bar{v} + \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} u \partial_{x_1} \bar{v} - \frac{\mu}{\alpha} k^2 u \bar{v} \right) dx \\ & - \langle T^- u, \bar{v} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0}), \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0})} - \langle T_{R,R'} u, \bar{v} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'}), \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'})}, \end{aligned}$$

et la forme antilinéaire  $\ell$  par (5.36). Prouvons maintenant que les problèmes (5.25) et (5.39) sont équivalents dans le sens suivant.

### Proposition 5.24

Si  $u$  satisfait le problème (5.25) dans  $\dot{\Omega}$ , alors  $u|_{\dot{\Omega}_{R'}}$  satisfait le problème (5.39) dans  $\dot{\Omega}_{R'}$ . Réciproquement, supposons que  $u_{R'}$  satisfasse le problème (5.39). Si  $u^-$  (respectivement  $u^+$ ) représente la solution du problème (5.26) pour  $g = u_{R'}|_{\Sigma_{-R_0}}$  (respectivement du problème (5.29) pour  $g = u_{R'}|_{\Sigma_R}$ ), alors les fonctions  $u_{R'}$  et  $u^+$  coïncident dans la boîte  $B_{R,R'} := (R, R') \times \Sigma_+$  et la fonction  $u$  définie par :

$$u = \begin{cases} u^- & \text{dans } \Omega_{-\infty, -R_0} \\ u_{R'} & \text{dans } \dot{\Omega}_{R'} \\ u^+ & \text{dans } \Omega_{R', +\infty}, \end{cases}$$

est solution de (5.25).

*Démonstration.* La première partie de la preuve est évidente. Pour la seconde partie, il suffit de vérifier que les deux fonctions  $u_{R'}$  et  $u^+$  coïncident dans  $B_{R,R'}$ . Posons  $w := u_{R'} - u^+$ . Par définition de  $u^+$ , on a  $w = 0$  sur  $\Sigma_R$ . De plus, nous avons aussi sur  $\Sigma_{R'}$  :

$$\frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} u_{R'} = T_{R,R'}(u_{R'}|_{\Sigma_R}) = T_{R,R'}(u^+|_{\Sigma_R}) = \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} u^+.$$

Il s'ensuit que  $(\mu/\alpha) \partial_{x_1} w = 0$  sur  $\Sigma_{R'}$ . Par conséquent,  $w$  satisfait le problème de boîte :

$$\begin{cases} \text{Trouver } w \in H^1(B_{R,R'}) \text{ tel que} \\ \left\{ \begin{array}{ll} -\partial_{x_2}(\alpha \mu \partial_{x_2} w) - \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1}^2 w - \frac{\mu}{\alpha} k^2 w = 0 & \text{dans } B_{R,R'} \\ \partial_n w = 0 & \text{sur } \partial B_{R,R'} \setminus (\Sigma_R \cup \Sigma_{R'}) \\ w = 0 & \text{sur } \Sigma_R \\ \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} w = 0 & \text{sur } \Sigma_{R'}. \end{array} \right. \end{cases} \quad (5.41)$$

Il reste à montrer que toute solution  $w \in H^1(B_{R,R'})$  de (5.41) est nulle. Remarquons que l'ensemble  $H_{0,\Sigma_R}^1(B_{R,R'})$  des fonctions de  $H^1(B_{R,R'})$  qui s'annulent sur  $\Sigma_R$  coïncide avec l'ensemble des fonctions :

$$w(x_1, x_2) = \sum_{n \in \mathbb{N}} w_n(x_2) \sin(\mu_n(x_1 - R)), \quad \mu_n := (2n + 1) \frac{\pi}{2(R' - R)}, \quad (5.42)$$

dont les coefficients satisfont :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} ((1 + n^2) \|w_n\|_{L^2(\Sigma_+)}^2 + \|d_{x_2} w_n\|_{L^2(\Sigma_+)}^2) < +\infty.$$

Ainsi, toute fonction  $u \in H^1(B_{R,R'})$  solution de (5.41) admet la décomposition de Fourier précédente. En injectant cette décomposition dans la première équation de (5.41) et en utilisant le fait que la famille de fonctions  $(x_1 \mapsto \sin(\mu_n(x_1 - R)))_{n \in \mathbb{N}}$  forme une base orthonormale de  $L^2((R, R'))$ , on trouve que les coefficients de Fourier sont solutions pour tout  $n \in \mathbb{N}$  des problèmes :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } w_n \in H^1(\Sigma_+) \text{ tel que} \\ &\mathcal{L}(i\mu_n)(w_n) = 0, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{L}(\lambda)$  est le symbole défini par (4.27) et utilisé pour l'analyse de Kondratiev conduite section 5.1. Nous savons d'après le Lemme 4.26 et le Corollaire 5.9 que  $\mathcal{L}(i\mu_n)$  est inversible pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Par suite,  $w_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et donc  $w = 0$ . La preuve est complète.  $\square$

**Remarque 5.25** *Dans les guides fermés sans dissipation, cette équivalence ne peut être montrée qu'à un ensemble dénombrable de fréquences près appelées fréquences de boîte (voir par exemple [Ton15]). Dans notre cas, c'est à nouveau l'absence de modes propagatifs et le caractère bien posé du problème dans  $H^1$  qui en découle qui nous permet d'obtenir un meilleur résultat. Quant au problème avec un DtN sans recouvrement, son équivalence avec le problème initial se montre de façon plus directe en utilisant le caractère bien posé du problème de demi-guide puisqu'il ne peut pas exister de modes de boîte (la boîte est restreinte à l'ensemble vide).*

Nous allons désormais nous intéresser à l'approximation numérique des problèmes (5.33) et (5.39).

### 5.3 Approximation de la solution à l'aide d'un opérateur DtN avec recouvrement

Comme pour le problème (2.16) dans le cas de la jonction de deux guides fermés, nous allons approcher les opérateurs abstraits  $T_R$  et  $T_{R,R'}$  définis par (5.32) et (5.38) par un opérateur de rang fini qu'on exprimera à l'aide d'un nombre fini de modes. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous définissons préalablement :

$$u_n^* := \frac{\mu}{\alpha} \bar{u}_n.$$

En nous inspirant de l'expression (5.28) dans le demi-guide fermé gauche, nous introduisons pour  $\beta > 0$  et  $R' \geq R$  l'opérateur :

$$\begin{aligned} T_{R,R'}^\beta : H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R) &\rightarrow \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'}) \\ g &\mapsto \sum_{n=0}^{N_\beta-1} \lambda_n e^{\lambda_n(R'-R)} (g, u_n^*)_{L^2(\Sigma_R)} u_n^*, \end{aligned} \quad (5.43)$$

où  $N_\beta := \#\{\lambda \in \Lambda(\mathcal{L}) \mid -\beta < \Re(\lambda) < 0\}$ . Notons que pour  $R' = R$ , on s'attend à ce que l'opérateur  $T_{R,R}^\beta$  approche l'opérateur DtN sans recouvrement  $T_R$ . En utilisant ce nouvel opérateur, on écrit un nouveau problème posé dans le domaine borné  $\dot{\Omega}_{R'}$ , qui est

l'analogue du problème (5.39) dans lequel l'opérateur  $T_{R,R'}$  a été remplacé par  $T_{R,R'}^\beta$ . Ce nouveau problème admet la formulation variationnelle équivalente :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u \in H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_{R'}) \text{ tel que} \\ &a_{R,R'}^\beta(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_{R'}), \end{aligned} \quad (5.44)$$

où la forme sesquilinéaire  $a_{R,R'}^\beta$  est donnée par :

$$a_{R,R'}^\beta(u, v) := b_{R'}(u, v) - \int_{\dot{\Omega}_{R'}} \frac{\mu}{\alpha} k^2 u \bar{v} d\mathbf{x} - \left\langle T_{R,R'}^\beta u, \bar{v} \right\rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'})},$$

avec  $b_{R'}$  qui est définie par :

$$b_{R'}(u, v) = \int_{\dot{\Omega}_{R'}} \left( \alpha \mu \partial_{x_2} u \partial_{x_2} \bar{v} + \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} u \partial_{x_1} \bar{v} \right) d\mathbf{x} - \left\langle T^- u, \bar{v} \right\rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0})},$$

et enfin la forme antilinéaire  $\ell$  qui a été donnée avec (5.36). On a la proposition suivante.

**Proposition 5.26**

Soit  $R' \geq R$ , si le problème (5.44) a au plus une solution, alors il est bien posé.

*Démonstration.* En utilisant les mêmes arguments que dans la preuve du Théorème 5.21, il est possible de montrer que la forme sesquilinéaire  $b_{R'}$  est associée par le théorème de Riesz à un opérateur inversible, tandis que la forme sesquilinéaire  $a_{R,R'}^\beta - b_{R'}$  est associée à un opérateur compact. En particulier, au vu de (5.43), la forme sesquilinéaire

$$\begin{aligned} &H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_{R'}) \times H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_{R'}) \rightarrow \mathbb{C} \\ &(u, v) \mapsto \left\langle T_{R,R'}^\beta u, \bar{v} \right\rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'})} \end{aligned}$$

est associée à un opérateur de rang fini. Nous avons donc montré que le problème (5.44) relève de l'alternative de Fredholm.  $\square$

Nous souhaitons maintenant prouver que la solution  $u_{R,R'}^\beta$  du problème (5.44) est une bonne approximation de la solution  $u_R$  du problème (5.34) quand ces deux problèmes sont bien posés. Dans le cas plus simple d'un guide fermé homogène, cela peut être prouvée en utilisant la complétude des vecteurs propres de l'opérateur transverse. Plus précisément, la vitesse de convergence de la solution approchée vers la solution exacte est exponentielle vis-à-vis de la distance entre la frontière artificielle et la perturbation, mais aussi vis-à-vis du nombre de modes pris en compte dans la série. La preuve est très proche de celle développée dans [BBL04] pour justifier l'approximation de la solution exacte à l'aide de PML longitudinales. Dans notre cas, il a déjà été rappelé que nous ne savons pas si les fonctions transverses à droite de la jonction forment une base complète de  $L^2(\Sigma_+)$ . Pour un DtN tronqué sans recouvrement, la question de la convergence de la solution approchée vers la solution exacte vis-à-vis du nombre de modes pris en compte demeure donc ouverte. En revanche, nous allons voir qu'il est possible d'exploiter la description de la solution à l'aide d'un nombre fini de modes et d'un reste exponentiellement décroissant pour obtenir une estimation d'erreur pour le DtN avec recouvrement. Le taux de convergence que nous obtiendrons sera exponentiel vis-à-vis de la longueur du recouvrement ( $R' - R$ ); le taux de convergence vis-à-vis de  $\beta$ , c'est-à-dire vis-à-vis du nombre de modes pris en compte dans la

série ne sera pas précisé. On peut mentionner qu'une estimation d'erreur du même type a été obtenue dans [Naz18] pour un guide périodique avec une condition artificielle analogue au DtN avec recouvrement qu'on considère ici.

Commençons le travail avec le lemme suivant spécifiant certaines propriétés des solutions du problème de demi-guide (5.29). Pour cela, on introduit pour  $\beta \in \mathbb{R}$  l'espace  $\mathcal{K}_\beta^1(\Omega_{R,+\infty})$  défini par (5.21) en remplaçant  $W$  par  $\Omega_{R,+\infty}$  et on le munit de la norme :

$$\|v\|_{\mathcal{K}_\beta^1(\Omega_{R,+\infty})} := \left( \|e^{\beta(R-x_1)}v\|_{L^2(\Omega_{R,+\infty})}^2 + \|e^{\beta(R-x_1)}\partial_{x_1}v\|_{L^2(\Omega_{R,+\infty})}^2 + \|e^{\beta(R-x_1)}\partial_{x_2}v\|_{L^2(\Omega_{R,+\infty})}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Lemme 5.27**

Soit  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)$ , notons  $u^+(g)$  la solution dans  $H^1(\Omega_{R,+\infty})$  du problème de demi-guide (5.29) donnée par le Lemme 5.20. Pour tout  $\beta > 0$  tel que  $\Lambda(\mathcal{L}) \cap \ell_{-\beta} = \emptyset$  avec :

$$\Lambda(\mathcal{L}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \mid -\beta < \Re(\lambda) < 0\} = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N_\beta-1}\},$$

il existe une unique famille de nombres complexes  $(a_n^+(g))_{0 \leq n \leq N_\beta-1}$  et une unique fonction  $\check{u}_\beta(g) \in \mathcal{K}_{-\beta}^1(\Omega_{R,+\infty})$  telles que :

$$u^+(g) = \sum_{n=0}^{N_\beta-1} a_n^+(g)u_{n,+} + \check{u}_\beta(g). \quad (5.45)$$

De plus, les coefficients  $(a_n^+(g))_{0 \leq n \leq N_\beta-1}$  sont donnés par :

$$a_n^+(g) = e^{-\lambda_n R}(g, u_n^*)_{L^2(\Sigma_R)}, \quad (5.46)$$

et il existe une constante  $C_\beta > 0$  telle qu'on ait pour tout  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)$  :

$$\sqrt{\sum_{n=0}^{N_\beta-1} |a_n^+(g)|^2 + \|\check{u}_\beta(g)\|_{\mathcal{K}_{-\beta}^1(\Omega_{R,+\infty})}^2} \leq C_\beta \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)}. \quad (5.47)$$

*Démonstration.* L'existence des coefficients  $(a_n(g))_{0 \leq n \leq N_\beta-1}$  et de la fonction  $\check{u}_\beta(g) \in \mathcal{K}_{-\beta}^1(\Omega_{R,+\infty})$  de la décomposition (5.45) est obtenue en suivant les mêmes étapes que celles de la preuve du Théorème 5.23. Afin d'alléger les notations, nous n'explicitons pas dans la preuve la dépendance de  $\check{u}_\beta$  vis-à-vis de la donnée  $g$ . Pour  $R' \geq R$ , nous définissons la forme bilinéaire :

$$q_{R'}(u, v) := \left\langle \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} u, v \right\rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'})} - \left\langle \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} v, u \right\rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'})},$$

lorsque les deux crochets de dualité sont bien définis. On remarque que si  $u$  et  $v$  dans  $H^1(\Omega_{R,+\infty})$  satisfont les équations :

$$\begin{cases} -\partial_{x_2}(\alpha \mu \partial_{x_2} w) - \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1}^2 w - \frac{\mu}{\alpha} k^2 w = 0 & \text{dans } \Omega_{R,+\infty} \\ \partial_{x_1} w = 0 & \text{sur } \partial\Omega_{R,+\infty} \setminus \Sigma_R, \end{cases} \quad (5.48)$$

alors on peut montrer en utilisant la formule de Green dans le domaine  $(R, R') \times \Sigma$  que la quantité  $q_{R'}(u, v)$  est bien définie pour  $R' \geq R$  et qu'elle ne dépend pas de la valeur de  $R'$ . Prouvons maintenant qu'on a :

$$a_n^+(g) = \frac{q_R(u^+(g), u_{n,-})}{2\lambda_n} \quad \text{et} \quad q_R(u^+(g), u_{n,+}) = 0. \quad (5.49)$$



Grâce à la décomposition (5.45), on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$q_R(u^+(g), u_{n,\pm}) = \sum_{m=0}^{N_\beta-1} a_m^+(g) q_R(u_{m,+}, u_{n,\pm}) + q_R(\check{u}_\beta, u_{n,\pm}). \quad (5.50)$$

Utiliser la définition des modes et la relation de biorthogonalité  $(u_m, u_n^*)_{L^2(\Sigma_R)} = \delta_{nm}$  donnée par la Proposition 4.30, donne pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$q_R(u_{m,+}, u_{n,+}) = 0 \quad \text{et} \quad q_R(u_{m,+}, u_{n,-}) = (\lambda_m + \lambda_n) \delta_{nm}. \quad (5.51)$$

Ensuite, prouvons que  $q_{R'}(\check{u}_\beta, u_{n,\pm}) = 0$  pour  $0 \leq n \leq N_\beta - 1$ . Les fonctions  $\check{u}_\beta$  et  $u_{n,\pm}$  satisfont toutes deux (5.48). Puisque  $\check{u}_\beta$  et  $u_{n,\pm}$  sont des solutions de (5.48), on peut montrer comme mentionné ci-dessus que  $q_{R'}(\check{u}_\beta, u_{n,\pm})$  est indépendant de  $R' \geq R$ . Quand  $R' > R$ , on a alors :

$$\begin{aligned} & q_R(\check{u}_\beta, u_{n,-}) \\ &= q_{R'}(\check{u}_\beta, u_{n,-}) \\ &= e^{-\lambda_n R'} \left\langle \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} \check{u}_\beta, u_n \right\rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'}), \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'})} + \lambda_n e^{-\lambda_n R'} \left\langle \frac{\mu}{\alpha} u_n, \partial_{x_1} \check{u}_\beta \right\rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'}), \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'})} \\ &= e^{-\lambda_n R'} e^{-\beta(R'-R)} \left( \left\langle e^{\beta(R'-R)} \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} \check{u}_\beta, u_n \right\rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'}), \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'})} + \lambda_n \left\langle \frac{\mu}{\alpha} u_n, e^{\beta(R'-R)} \check{u}_\beta \right\rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'}), \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'})} \right). \end{aligned}$$

La solution dans  $H^1(\Omega_{R',+\infty})$  du problème (5.29) pour  $g = u_n$  est simplement  $v_{R',n}(x_1, x_2) := u_{n,+}(x_1 - R', x_2)$ , utiliser à nouveau la formule de Green dans  $\Omega_{R',+\infty}$  donne ainsi :

$$\begin{aligned} & - \left\langle e^{\beta(R'-R)} \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} \check{u}_\beta, u_n \right\rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'}), \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'})} \\ &= - \left\langle e^{\beta(R'-R)} \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} \check{u}_\beta, v_{R',n} \right\rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'}), \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'})} \\ &= \int_{\Omega_{R',+\infty}} \left( \alpha \mu \partial_{x_2} \check{u}_\beta \partial_{x_2} v_{R',n} e^{\beta(x_1-R)} + \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} \check{u}_\beta \partial_{x_1} (e^{\beta(x_1-R)} v_{R',n}) - \frac{\mu}{\alpha} k^2 \check{u}_\beta v_{R',n} e^{\beta(x_1-R)} \right) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Par Cauchy-Schwarz, cela donne l'estimation :

$$\left| \left\langle e^{\beta(R'-R)} \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} \check{u}_\beta, u_n \right\rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'}), \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'})} \right| \leq C \max(1, \beta) \|\check{u}_\beta\|_{\mathcal{K}_{-\beta}^1(\Omega_{R,+\infty})} \|v_{R',n}\|_{H^1(\Omega_{R',+\infty})},$$

où  $C > 0$  est une constante indépendante de  $\beta$ . De façon similaire, on obtient :

$$\begin{aligned} & - \lambda_n \left\langle \frac{\mu}{\alpha} u_n, e^{\beta(R'-R)} \check{u}_\beta \right\rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'}), \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'})} \\ &= - \left\langle \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} v_{R',n}, e^{\beta(R'-R)} \check{u}_\beta \right\rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'}), \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'})} \\ &= \int_{\Omega_{R',+\infty}} \left( \alpha \mu \partial_{x_2} v_{R',n} \partial_{x_2} \check{u}_\beta e^{\beta(x_1-R)} + \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} v_{R',n} \partial_{x_1} (e^{\beta(x_1-R)} \check{u}_\beta) - \frac{\mu}{\alpha} k^2 v_{R',n} \check{u}_\beta e^{\beta(x_1-R)} \right) d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

qui donne l'estimation :

$$\left| \lambda_n \left\langle \frac{\mu}{\alpha} u_n, e^{\beta(R'-R)} \check{u}_\beta \right\rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'}), \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'})} \right| \leq C \max(1, \beta) \|\check{u}_\beta\|_{\mathcal{K}_{-\beta}^1(\Omega_{R,+\infty})} \|v_{R',n}\|_{H^1(\Omega_{R',+\infty})}.$$

Rassembler les deux estimations que nous venons de montrer et utiliser le fait que  $\|v_{R',n}\|_{H^1(\Omega_{R',+\infty})} = \|\tilde{u}_{n,+}\|_{H^1(\Omega_+)}$  est indépendant de  $R'$  nous fournit une dernière estimation :

$$|q_R(\check{u}_\beta, u_{n,-})| \leq C e^{\beta R} e^{-(\Re(\lambda_n) + \beta)R'} \max(1, \beta) \|\check{u}_\beta\|_{\mathcal{K}_{-\beta}^1(\Omega_{R,+\infty})}. \quad (5.52)$$



Puisque  $\Re(\lambda_n) > -\beta$  pour  $0 \leq n \leq N_\beta - 1$ , passer à la limite  $R \rightarrow +\infty$  dans (5.52) donne :

$$q_R(\check{u}_\beta, u_{n,-}) = 0, \quad \text{pour } 0 \leq n \leq N_\beta - 1. \quad (5.53)$$

Nous pourrions prouver de façon identique que  $q_R(\check{u}_\beta, u_{n,+}) = 0$  pour  $0 \leq n \leq N_\beta - 1$ . Utiliser les identités (5.51) et (5.53) dans (5.50) nous permet alors de montrer l'expression (5.49) des coefficients  $a_n^+(g)$ ,  $0 \leq n \leq N_\beta - 1$ . En repartant de (5.49), on observe par linéarité que :

$$a_n^+(g) = \frac{q_R(u^+(g), u_{n,-} - zu_{n,+})}{2\lambda_n}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

En choisissant  $z = e^{-2\lambda_n R}$  de sorte que  $u_{n,-} - zu_{n,+} = 0$  sur  $\Sigma_R$ , il vient :

$$a_n^+(g) = -\frac{1}{2\lambda_n} \left\langle \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} (u_{n,-} - e^{-2\lambda_n R} u_{n,+}), u^+(g) \right\rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R), \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)} = e^{-\lambda_n R} (g, u_n^*)_{L^2(\Sigma_R)},$$

ce qui est l'expression attendue pour les coefficients. En particulier, cela nous donne l'unicité des coefficients  $(a_n^+(g))_{0 \leq n \leq N_\beta - 1}$  et a fortiori aussi celle de la fonction  $\check{u}_\beta$ . Afin de prouver l'estimation de continuité (5.47), considérons pour  $\beta > 0$  l'espace de Hilbert  $V_{\text{aug}} := \mathbb{C}^{N_\beta} \times V_\beta$  avec :

$$V_\beta := \{v \in \mathcal{K}_{-\beta}^1(\Omega_{R,+\infty}) \mid Pv = 0 \text{ dans } \Omega_{R,+\infty} \text{ et } \partial_n v = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{R,+\infty} \setminus \Sigma_R\},$$

où :

$$Pv := -\partial_{x_2}(\alpha\mu\partial_{x_2}v) - \frac{\mu}{\alpha}\partial_{x_1}^2v - \frac{\mu}{\alpha}k^2v,$$

que nous munissons de la norme :

$$\|(b_0, b_1, \dots, b_{N_\beta-1}, \check{v}_\beta)\|_{V_{\text{aug}}}^2 := \sum_{n=0}^{N_\beta-1} |b_n|^2 + \|\check{v}_\beta\|_{\mathcal{K}_{-\beta}^1(\Omega_{R,+\infty})}^2.$$

On peut ainsi définir l'opérateur  $T_{\text{aug}} : V_{\text{aug}} \rightarrow \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)$  défini pour  $(b_0, b_1, \dots, b_{N_\beta-1}, \check{v}_\beta) \in V_{\text{aug}}$  par :

$$T_{\text{aug}}(b_0, b_1, \dots, b_{N_\beta-1}, \check{v}_\beta) = \left( \sum_{n=0}^{N_\beta-1} b_n u_{n,+} + \check{v}_\beta \right)_{|\Sigma_R}.$$

La première partie de la preuve garantit que  $T_{\text{aug}}$  est un isomorphisme. Son inverse est continu d'après le théorème de Banach. Ce dernier point se traduit exactement par (5.47).  $\square$

Nous souhaitons comparer la solution  $u_{R,R'}^\beta$  du problème approché (5.44) posé dans le domaine  $\dot{\Omega}_{R'}$  et la solution exacte  $u$  du problème de départ dont la restriction à  $\dot{\Omega}_R$  satisfait le problème (5.34). Pour comparer ces deux objets dans le domaine  $\dot{\Omega}_R$ , nous allons écrire un nouveau problème posé dans ce domaine satisfait par la restriction de  $u_{R,R'}^\beta$ . L'écriture de ce problème fera intervenir l'opérateur  $\Delta_{R,R'}^\beta := T_{R,R'} - T_{R,R'}^\beta$  ainsi qu'un opérateur Neumann-to-Neumann avec recouvrement  $N_{R,R'} : \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'}) \rightarrow \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R)$  défini à partir d'un problème de boîte posé dans le domaine  $B_{R,R'} := (R, R') \times \Sigma_+$  correspondant à la zone de recouvrement. Une estimation de la norme de ces deux opérateurs nous permettra alors de comparer  $u$  et la restriction de  $u_{R,R'}^\beta$  à  $\dot{\Omega}_R$ , ce qui nous donnera le résultat de convergence évoqué plus tôt.

Commençons par définir l'opérateur  $N_{R,R'}$  et à en donner une estimation de sa norme.

**Lemme 5.28**

Soit  $j \in \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'})$ , le problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } v \in H^1(B_{R,R'}) \text{ tel que} \\ \left\{ \begin{array}{ll} -\partial_{x_2}(\alpha \mu \partial_{x_2} v) - \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1}^2 v - \frac{\mu}{\alpha} k^2 v = 0 & \text{dans } B_{R,R'} \\ \partial_n v = 0 & \text{sur } \partial B_{R,R'} \setminus (\Sigma_R \cup \Sigma_{R'}) \\ v = 0 & \text{sur } \Sigma_R \\ \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} v = j & \text{sur } \Sigma_{R'}, \end{array} \right. \end{cases} \quad (5.54)$$

est bien posé. Soit  $N_{R,R'} : \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'}) \rightarrow \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R)$  l'opérateur Neumann-to-Neumann défini pour  $j \in \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'})$  par :

$$N_{R,R'} j := \left( \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} v_{R,R'}(j) \right)_{|\Sigma_R},$$

où  $v_{R,R'}(j)$  est la solution du problème (5.54) pour la donnée  $j$ . Pour tout  $\delta > 0$ , il existe une constante  $C_\delta > 0$  telle que :

$$\|N_{R,R'}\|_{\mathcal{L}(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'}), \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R))} \leq C_\delta, \quad \forall R' \geq R + \delta.$$

*Démonstration.* Soit  $H_{0,\Sigma_R}^1(B_{R,R'})$  l'espace des distributions de  $H^1(B_{R,R'})$  s'annulant sur  $\Sigma_R$ . Le problème (5.54) admet la formulation variationnelle :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } v \in H_{0,\Sigma_R}^1(B_{R,R'}) \text{ tel que} \\ & a_B(v, w) = \langle j, \bar{w} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'})}, \quad \forall w \in H_{0,\Sigma_R}^1(B_{R,R'}), \end{aligned} \quad (5.55)$$

avec :

$$a_B(v, w) := \int_{B_{R,R'}} \left( \alpha \mu \partial_{x_2} v \partial_{x_2} \bar{w} + \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} v \partial_{x_1} \bar{w} - \frac{\mu}{\alpha} k^2 v \bar{w} \right) d\mathbf{x}.$$

Par le théorème de représentation de Riesz, il existe un opérateur  $A_B : H_{0,\Sigma_R}^1(B_{R,R'}) \rightarrow H_{0,\Sigma_R}^1(B_{R,R'})^*$  et un terme source  $J \in H_{0,\Sigma_R}^1(B_{R,R'})^*$  définis pour tout  $(v, w) \in (H_{0,\Sigma_R}^1(B_{R,R'}))^2$  par :

$$\begin{aligned} \langle A_B v, \bar{w} \rangle_{H_{0,\Sigma_R}^1(B_{R,R'})^*, H_{0,\Sigma_R}^1(B_{R,R'})} &:= a_B(v, w) \\ \langle J, \bar{w} \rangle_{H_{0,\Sigma_R}^1(B_{R,R'})^*, H_{0,\Sigma_R}^1(B_{R,R'})} &:= \langle j, \bar{w} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'})}. \end{aligned}$$

Le problème variationnel (5.54) est alors équivalent à l'équation  $A_B v = J$ . La preuve de la Proposition 5.24 établit déjà que le problème (5.54) a une unique solution. Le caractère bien posé du problème découle du fait que l'opérateur  $A_B$  est Fredholm d'indice 0. L'opérateur  $N_{R,R'}$  est ainsi bien défini. Estimons désormais sa norme.

Pour cela, on utilise la décomposition de Fourier de  $v$  donnée par (5.42) ainsi qu'une décomposition analogue pour  $J$  s'écrivant :

$$J(x_1, x_2) = \sum_{n \in \mathbb{N}} j_n(x_2) \sin(\mu_n(x_1 - R)), \quad \mu_n := (2n + 1) \frac{\pi}{2(R' - R)}.$$

Par un calcul direct, les normes usuelles de  $H_{0,\Sigma_R}^1(B_{R,R'})$  et de son dual peuvent s'exprimer sous la forme de séries faisant intervenir la norme à poids définie par (5.5) :

$$\|v_{R,R'}\|_{H_{0,\Sigma_R}^1(B_{R,R'})}^2 = \frac{1}{2} (R' - R) \sum_{n \in \mathbb{N}} \|v_n\|_{H^1(\Sigma_+, \mu_n)}^2, \quad (5.56)$$

et :

$$\|J\|_{\mathbb{H}_{0,\Sigma_R}^1(B_{R,R'})^*}^2 = \frac{1}{2}(R' - R) \sum_{n \in \mathbb{N}} \|j_n\|_{\mathbb{H}^1(\Sigma_+, \mu_n)}^2. \quad (5.57)$$

De plus, l'équation  $A_B v_{R,R'} = J$  est équivalente à  $\mathcal{L}(i\mu_n)v_n = j_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Or, nous savons d'après la preuve du Théorème 5.13 que l'opérateur  $\mathcal{L}(i\mu_n) : \mathbb{H}^1(\Sigma_+, \mu_n) \rightarrow \mathbb{H}^1(\Sigma_+, \mu_n)^*$  est inversible et que son inverse est uniformément borné vis-à-vis de  $n$  (voir pour cela l'inégalité (5.19)). Autrement dit, il existe une constante  $c > 0$  indépendante de  $n$  telle que :

$$\|v_n\|_{\mathbb{H}^1(\Sigma_+, \mu_n)} \leq c \|j_n\|_{\mathbb{H}^1(\Sigma_+, \mu_n)^*}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Au regard de (5.56) et (5.57), cette inégalité conduit à :

$$\|v_{R,R'}\|_{\mathbb{H}_{0,\Sigma_R}^1(B_{R,R'})} \leq c \|J\|_{\mathbb{H}_{0,\Sigma_R}^1(B_{R,R'})^*}, \quad (5.58)$$

où il est important de noter que la constante  $c$  est indépendante de  $R'$ . Pour terminer la preuve, remarquons que pour tout  $\delta > 0$ , il existe une constante  $C_\delta$  indépendante de  $R'$  telle qu'on ait l'inégalité de trace :

$$\|w\|_{\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'})} \leq C_\delta \|w\|_{\mathbb{H}^1(B_{R'-\delta,R'})}, \quad \forall w \in \mathbb{H}_{0,\Sigma_R}^1(B_{R,R'}).$$

Cette inégalité implique qu'on a pour tout  $R' \geq R + \delta$  :

$$\|w\|_{\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'})} \leq C_\delta \|w\|_{\mathbb{H}_{0,\Sigma_R}^1(B_{R,R'})}, \quad \forall w \in \mathbb{H}_{0,\Sigma_R}^1(B_{R,R'}).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} & \|J\|_{\mathbb{H}_{0,\Sigma_R}^1(B_{R,R'})^*} \\ &= \sup_{w \in \mathbb{H}_{0,\Sigma_R}^1(B_{R,R'}) \setminus \{0\}} \frac{|\langle J, \bar{w} \rangle_{\mathbb{H}_{0,\Sigma_R}^1(B_{R,R'})^*, \mathbb{H}_{0,\Sigma_R}^1(B_{R,R'})}|}{\|w\|_{\mathbb{H}_{0,\Sigma_R}^1(B_{R,R'})}} = \sup_{w \in \mathbb{H}_{0,\Sigma_R}^1(B_{R,R'}) \setminus \{0\}} \frac{|\langle j, \bar{w} \rangle_{\tilde{\mathbb{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'}), \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'})}|}{\|w\|_{\mathbb{H}_{0,\Sigma_R}^1(B_{R,R'})}} \\ &\leq \|j\|_{\tilde{\mathbb{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'})} \sup_{w \in \mathbb{H}_{0,\Sigma_R}^1(B_{R,R'}) \setminus \{0\}} \frac{\|w\|_{\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)}}{\|w\|_{\mathbb{H}_{0,\Sigma_R}^1(B_{R,R'})}} \leq C_\delta \|j\|_{\tilde{\mathbb{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'})}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Par ailleurs, il existe par continuité de la trace normale une constante  $C'_\delta > 0$  (à nouveau indépendante de  $R'$ ) telle que pour  $R' \geq R + \delta$  :

$$\left\| \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} v_{R,R'} \right\|_{\tilde{\mathbb{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R)} \leq C'_\delta \|v_{R,R'}\|_{\mathbb{H}_{0,\Sigma_R}^1(B_{R,R'})}. \quad (5.60)$$

En effet, nous avons par définition :

$$\left\| \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} v_{R,R'} \right\|_{\tilde{\mathbb{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R)} = \sup_{g \in \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R) \setminus \{0\}} \frac{|\langle \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} v_{R,R'}, g \rangle_{\tilde{\mathbb{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R), \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)}|}{\|g\|_{\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)}}.$$

De plus, il existe un relèvement continu  $g \in \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R) \mapsto w \in \mathbb{H}^1(B_{R,R+\delta})$  tel que  $w|_{\Sigma_R} = g$  et  $w|_{\Sigma_{R+\delta}} = 0$ . En particulier, il existe une constante  $c_\delta > 0$  (indépendante de  $R'$ ) telle que :

$$\|w\|_{\mathbb{H}^1(B_{R,R+\delta})} \leq c_\delta \|g\|_{\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)}, \quad \forall g \in \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R).$$

En outre, puisque  $v_{R,R'}$  satisfait le problème (5.54), on a par intégrations par parties pour tout  $g \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)$  :

$$-\left\langle \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} v_{R,R'}, g \right\rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R), \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)} = \int_{B_{R,R+\delta}} (\alpha \mu \partial_{x_2} v_{R,R'} \partial_{x_2} w + \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} v_{R,R'} \partial_{x_1} w - \frac{\mu}{\alpha} k^2 v_{R,R'} w) dx.$$

Par conséquent, il existe une constante  $C > 0$  qui ne dépend ni de  $R'$  ni de  $\delta$ , telle que :

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} v_{R,R'}, g \right\rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R), \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)} \right| &\leq C \|v_{R,R'}\|_{H^1(B_{R,R+\delta})} \|w\|_{H^1(B_{R,R+\delta})} \\ &\leq C c_\delta \|v_{R,R'}\|_{H^1_{0,\Sigma_R}(B_{R,R'})} \|g\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)}, \end{aligned}$$

ce qui donne par suite (5.60) en prenant  $C'_\delta = C c_\delta$ . Regrouper (5.58), (5.59) et (5.60) permet de montrer qu'il existe une constante  $C''_\delta > 0$  indépendante de  $R'$  telle que pour tout  $j \in \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R)$ , on a :

$$\left\| \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} v_{R,R'} \right\|_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R)} \leq C''_\delta \|j\|_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'})},$$

où  $v_{R,R'}$  est la solution du problème (5.54). Cette expression se réécrit :

$$\|N_{R,R'} j\|_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R)} \leq C''_\delta \|j\|_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'})},$$

ce qui donne enfin l'estimation recherchée.  $\square$

Définissons rigoureusement l'opérateur  $\Delta_{R,R'}^\beta$ , puis estimons sa norme.

#### Lemme 5.29

Soit  $\Delta_{R,R'}^\beta : \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R) \rightarrow \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'})$  l'opérateur donné par  $\Delta_{R,R'}^\beta := T_{R,R'} - T_{R,R'}^\beta$ , où les opérateurs  $T_{R,R'}$  et  $T_{R,R'}^\beta$  sont donnés respectivement par (5.38) et (5.43). Il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $\beta$  et  $R'$  telle que :

$$\|\Delta_{R,R'}^\beta\|_{\mathcal{L}(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R), \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'}))} \leq C C_\beta \max(1, \beta) e^{-\beta(R'-R)},$$

où  $C_\beta$  est la constante de continuité dans (5.47).

*Démonstration.* Soit  $g \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)$  et  $u^+(g) \in H^1(\Omega_{R,+\infty})$  l'unique solution du problème de demi-guide (5.29) associée à  $g$ . D'après le Lemme 5.27, on a :

$$\frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} u^+(g)|_{\Sigma_{R'}} = \sum_{n=0}^{N_\beta-1} a_n^+(g) \lambda_n e^{\lambda_n R'} u_n^* + \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} \check{u}_\beta(g)|_{\Sigma_{R'}},$$

avec  $\check{u}_\beta(g) \in \mathcal{K}_{-\beta}^1(\Omega_{R,+\infty})$ . Utiliser l'expression (5.46) des coefficients de cette décomposition donne alors :

$$\Delta_{R,R'}^\beta g := T_{R,R'} g - T_{R,R'}^\beta g = \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} \check{u}_\beta(g)|_{\Sigma_{R'}}.$$

Soit  $h \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'})$  et  $v^+(h) \in H^1(\Omega_{R',+\infty})$  l'unique solution du problème (5.29), dans lequel  $g$  a été remplacé par  $h$  et  $R$  par  $R'$ . Étant donné que  $\check{u}_\beta(g)$  satisfait les équations du problème, on

obtient par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
 & - \left\langle e^{\beta(R'-R)} \Delta_{R,R'}^\beta g, h \right\rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'})} \\
 &= \int_{\Omega_{R',+\infty}} (\alpha \mu \partial_{x_2} \check{u}_\beta(g) \partial_{x_2} v^+(h) e^{\beta(x_1-R)} + \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} \check{u}_\beta(g) \partial_{x_1} (e^{\beta(x_1-R)} v^+(h)) \\
 & \quad - \frac{\mu}{\alpha} k^2 \check{u}_\beta(g) v^+(h) e^{\beta(x_1-R)}) d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

De plus, il existe d'après le Lemme 5.20 une constante  $C' > 0$  indépendante de  $R'$  telle que  $\|v^+(h)\|_{H^1(\Omega_{R',+\infty})} \leq C \|h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'})}$ . Et puisque  $\check{u}_\beta(g) \in \mathcal{K}_{-\beta}^1(\Omega_{R,+\infty})$ , il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $\beta$  et  $R'$  telle que :

$$\left| \left\langle e^{\beta(R'-R)} \Delta_{R,R'}^\beta g, h \right\rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'})} \right| \leq C \max(1, \beta) \|\check{u}_\beta(g)\|_{\mathcal{K}_{-\beta}^1(\Omega_{R,+\infty})} \|h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'})}.$$

On peut alors conclure en utilisant (5.47) que nous avons :

$$\|\Delta_{R,R'}^\beta\|_{\mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R), \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{R'}))} \leq C C_\beta \max(1, \beta) e^{-\beta(R'-R)}, \quad (5.61)$$

où  $C_\beta$  est la constante donnée par (5.47).  $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat principal de cette section.

### Théorème 5.30

Si le problème (5.25) est bien posé, alors le problème (5.44) avec  $R > 0$  fixé est bien posé pour  $R' > R$  suffisamment grand. De plus, si la solution de (5.25) est notée  $u$  et celle de (5.44) est notée  $u_{R,R'}^\beta$ , il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $\beta$  et de  $R'$  telle que :

$$\|u - u_{R,R'}^\beta\|_{H^1(\dot{\Omega}_R)} \leq C C_\beta \max(1, \beta) e^{-\beta(R'-R)} \|u\|_{H^1(\dot{\Omega}_{-R_0,+\infty})}, \quad (5.62)$$

où  $C_\beta$  est la constante indépendante de  $R'$  donnée dans (5.47).

*Démonstration.* L'idée de base consiste à trouver un problème posé dans le domaine fixe  $\dot{\Omega}_R$  satisfait par la solution  $u_{R,R'}^\beta$  du problème (5.44) posé dans le domaine  $\dot{\Omega}_{R'}$  lorsque ce dernier est bien posé. Pour cela, nous considérons la restriction de la fonction  $e_{R,R'}^\beta := u^+((u_{R,R'}^\beta)_{|\Sigma_R}) - u_{R,R'}^\beta$  au domaine  $B_{R,R'}$ , où  $u^+((u_{R,R'}^\beta)_{|\Sigma_R})$  est la solution du problème de demi-guide (5.29) dans lequel on a remplacé la donnée  $g$  par  $(u_{R,R'}^\beta)_{|\Sigma_R}$ . Il est possible d'observer par définition de l'opérateur  $T_{R,R'}$  que :

$$\left( \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} u^+((u_{R,R'}^\beta)_{|\Sigma_R}) \right)_{|\Sigma_{R'}} = T_{R,R'}((u_{R,R'}^\beta)_{|\Sigma_R}),$$

et par définition de  $u_{R,R'}^\beta$  que :

$$\left( \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} u_{R,R'}^\beta \right)_{|\Sigma_{R'}} = T_{R,R'}^\beta((u_{R,R'}^\beta)_{|\Sigma_R}).$$

Soustraire ces deux égalités nous donne :

$$\left( \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} e_{R,R'}^\beta \right)_{|\Sigma_{R'}} = \Delta_{R,R'}^\beta((u_{R,R'}^\beta)_{|\Sigma_R}),$$

ce qui nous permet de voir que  $e_{R,R'}^\beta$  est solution du problème de boîte (5.54) pour  $j = \Delta_{R,R'}^\beta \left( (u_{R,R'}^\beta)_{|\Sigma_R} \right)$ . Par conséquent, nous pouvons écrire par définition de l'opérateur  $N_{R,R'}$  l'identité :

$$\left( \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} e_{R,R'}^\beta \right)_{|\Sigma_R} = N_{R,R'} \left( \Delta_{R,R'}^\beta \left( (u_{R,R'}^\beta)_{|\Sigma_R} \right) \right). \quad (5.63)$$

Écrivons ensuite  $u_{R,R'}^\beta = u^+ \left( (u_{R,R'}^\beta)_{|\Sigma_R} \right) - e_{R,R'}^\beta$ ; nous avons grâce à la définition de l'opérateur  $T_R$  et l'identité (5.63) :

$$\left( \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} u_{R,R'}^\beta \right)_{|\Sigma_R} = T_R \left( (u_{R,R'}^\beta)_{|\Sigma_R} \right) - N_{R,R'} \left( \Delta_{R,R'}^\beta \left( (u_{R,R'}^\beta)_{|\Sigma_R} \right) \right).$$

Ainsi, la fonction  $u_{R,R'}^\beta$  est solution du problème suivant posé dans le domaine  $\dot{\Omega}_R$  :

Trouver  $v \in H^1(\dot{\Omega}_R)$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\partial_{x_2}(\alpha \mu \partial_{x_2} v) - \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1}^2 v - \frac{\mu}{\alpha} k^2 v = 0 & \text{dans } \dot{\Omega}_R \\ \partial_n v = 0 & \text{sur } \partial \dot{\Omega}_R \setminus (\Sigma_{-R_0} \cup \Sigma_R \cup \partial D) \\ v = 0 & \text{sur } \partial D \\ -\mu_0 \partial_{x_1} v = T^- v + f & \text{sur } \Sigma_{-R_0} \\ \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} v = \left( T_R - N_{R,R'} \Delta_{R,R'}^\beta \right) (v|_{\Sigma_R}) & \text{sur } \Sigma_R, \end{array} \right. \quad (5.64)$$

avec  $f := -2\mu_0 \tilde{\lambda}_n \tilde{u}_{n,+}$  pour un  $n \in \mathbb{N}$  donné. Nous définissons ensuite  $F \in H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R)^\star$  par :

$$\langle F, \bar{v} \rangle_{H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R)^\star, H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R)} := \int_{\Sigma_{-R_0}} f \bar{v} dx_2. \quad (5.65)$$

Nous introduisons aussi les opérateurs  $A_R$  et  $A_{R,R'}^\beta$  de  $H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R)$  dans son espace dual  $H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R)^\star$ , définis pour  $(v, w) \in (H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R))^2$  par :

$$\begin{aligned} \langle A_R v, \bar{w} \rangle_{H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R)^\star, H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R)} &:= a_R(v, w) \\ \langle A_{R,R'}^\beta v, \bar{w} \rangle_{H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R)^\star, H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R)} &:= a_R(v, w) + \left\langle N_{R,R'} \Delta_{R,R'}^\beta v, \bar{w} \right\rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)}, \end{aligned} \quad (5.66)$$

où la forme sesquilinéaire  $a_R$  est définie par (5.35). Au regard du problème (5.33) satisfait par la solution exacte  $u$  dans le domaine  $\dot{\Omega}_R$ , du problème (5.64) satisfait par la solution approchée  $u_{R,R'}^\beta$  dans le même domaine et de la définition des opérateurs associés (5.65) et (5.66), nous avons :

$$A_R u = F \quad \text{et} \quad A_{R,R'}^\beta u_{R,R'}^\beta = F. \quad (5.67)$$

En outre, nous pouvons écrire étant donné que l'opérateur  $A_R$  est inversible :

$$A_{R,R'}^\beta = A_R (I + A_R^{-1} (A_{R,R'}^\beta - A_R)). \quad (5.68)$$

Précisons à ce stade de la preuve que toutes les normes d'opérateurs qui interviendront par la suite seront notées  $\| \cdot \|$  par souci de lisibilité, mais leur sens dépendra des espaces en jeu. Il découle de (5.66) qu'on a pour  $(v, w) \in (H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R))^2$  :

$$\left\langle A_{R,R'}^\beta v, \bar{w} \right\rangle_{H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R)^\star, H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R)} = \langle A_R v, \bar{w} \rangle_{H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R)^\star, H_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_R)} + \left\langle N_{R,R'} \Delta_{R,R'}^\beta v, \bar{w} \right\rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)},$$

ce qui implique qu'il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $\beta$  et de  $R'$  telle que :

$$\left\| A_{R,R'}^\beta - A_R \right\| \leq C \|N_{R,R'}\| \left\| \Delta_{R,R'}^\beta \right\|.$$

D'après les Lemmes 5.28 et 5.29, il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $R'$  et  $\beta$  telle que :

$$\left\| A_{R,R'}^\beta - A_R \right\| \leq CC_\beta \max(1, \beta) e^{-\beta(R'-R)}, \quad (5.69)$$

où  $C_\beta > 0$  est la constante de continuité dans (5.47). Nous déduisons de (5.68) et (5.69) que l'opérateur  $A_{R,R'}^\beta$  est inversible pour  $R'$  suffisamment grand et que la norme de son inverse satisfait :

$$\left\| \left( A_{R,R'}^\beta \right)^{-1} \right\| \leq 2 \left\| \left( A_R \right)^{-1} \right\|. \quad (5.70)$$

Il reste à remarquer que nous obtenons avec (5.67) l'identité :

$$A_{R,R'}^\beta (u - u_{R,R'}^\beta) = \left( A_{R,R'}^\beta - A_R \right) u,$$

ce qui avec (5.69) et (5.70) nous donne pour  $R'$  suffisamment grand :

$$\|u - u_{R,R'}^\beta\|_{\mathbb{H}^1(\dot{\Omega}_R)} \leq CC_\beta \max(1, \beta) e^{-\beta(R'-R)} \|u\|_{\mathbb{H}^1(\dot{\Omega}_R)},$$

et conclut la preuve. □

**Remarque 5.31** *L'estimation d'erreur (5.62) montre que pour un  $\beta$  fixé, la quantité  $\|u - u_{R,R'}^\beta\|_{\mathbb{H}^1(\dot{\Omega}_R)}$  tend exponentiellement vers 0 lorsque l'épaisseur du recouvrement  $R' - R$  tend vers  $+\infty$ , avec un taux exponentiel égal à  $\beta$ . Cependant, il serait souhaitable de préciser la dépendance de la constante  $C_\beta$  de (5.62) (qui est égale à celle dans (5.47)) vis-à-vis de  $\beta$ . Par exemple, si nous pouvions montrer que  $C_\beta$  a un comportement polynomial par rapport à  $\beta$ , nous serions en mesure de montrer pour un  $R' > R$  fixé, que la quantité  $\|u - u_{R,R'}^\beta\|_{\mathbb{H}^1(\dot{\Omega}_R)}$  tend exponentiellement vers 0 lorsque  $\beta$  tend vers  $+\infty$ .*

## 5.4 Mise en œuvre numérique des méthodes de résolution proposées

Nous concluons ce chapitre en présentant quelques expériences numériques qui illustreront entre autres le Théorème 5.30. Nous choisissons les mêmes paramètres physiques et géométriques que pour l'étude numérique des modes du chapitre 4. On considère donc une plaque d'acier dans du béton homogène. Les différentes dimensions du guide sont données par  $h_0 = 5$  cm,  $h_1 = 7,5$  cm et  $h_2 = 12,5$  cm. Les paramètres de l'acier sont donnés par  $\rho_0 = 7,93 \cdot 10^3$  kg.m<sup>-3</sup> et  $\mu_0 = 84,3$  GPa, ceux du béton par  $\rho_\infty = 2,30 \cdot 10^3$  kg.m<sup>-3</sup> et  $\mu_\infty = 15,9$  GPa. Dans ce cas  $c_0 > c_\infty$  et il n'y a donc pas de modes propagatifs. La fréquence considérée est quant à elle  $\omega = 2\pi \cdot 10^5$  rad.Hz. Il y a donc  $\tilde{N}_p = 7$  modes propagatifs existant dans le demi-guide fermé gauche.

### 5.4.1 Le rôle du profil de PML

Pour commencer, nous voulons souligner l'importance du choix du profil de PML et des paramètres dans l'approximation de la solution du problème direct. Pour cela, on considère



l'approximation de la solution  $u$  du problème (5.25) sans défaut  $D$  dans tout le domaine  $\Omega$ , pour  $u^i = \tilde{u}_{0,+}^0$  défini par (5.23). En d'autres termes, on cherche à approcher la réponse en champ total de la jonction sans défaut au premier mode du demi-guide gauche, qui est en fait une onde plane, provenant de l'infini. Dans la Figure 5.3 sur laquelle nous avons représenté la partie réelle du champ total la solution  $u_{R,R'}^\beta$  du problème (5.44), nous comparons le profil de PML abrupt avec  $\alpha_\infty = e^{-i\pi/3}$  et le profil parabolique défini par (4.31) avec  $\hat{\eta} = 1, 16 + 0, 21i$ . Le calcul est effectué à l'aide d'éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}^2$ , avec un pas de maillage  $h = 0, 15$  cm. L'opérateur DtN à gauche  $T^-$  est discrétisé en prenant les 22 premiers termes de la série, ce qui correspond aux 7 modes propagatifs et aux 15 premiers modes évanescents. Il est placé en  $x_1 = -R_0$  avec  $R_0 = 15$  cm. À droite, l'opérateur DtN avec recouvrement  $T_{R,R'}^\beta$  est utilisé avec  $\beta = 1, 07$ ,  $R = 15$  cm et  $R' = 25$  cm.

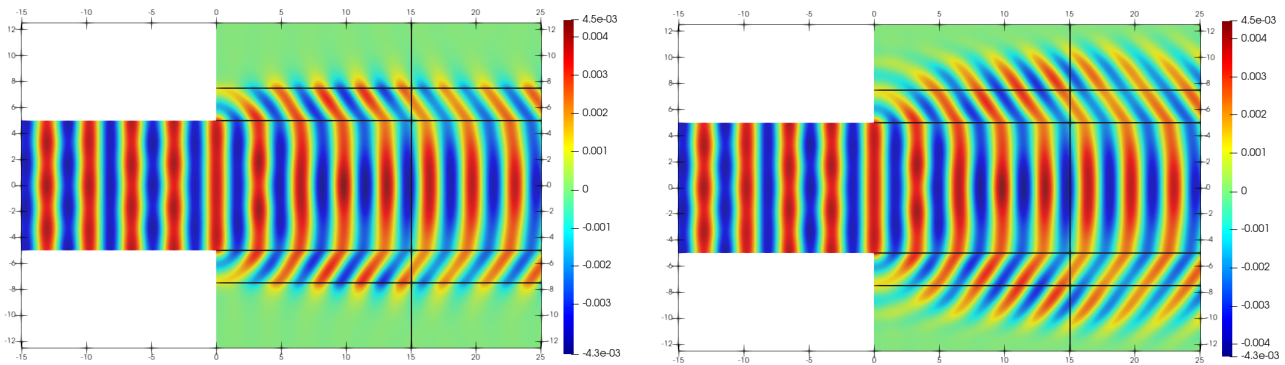


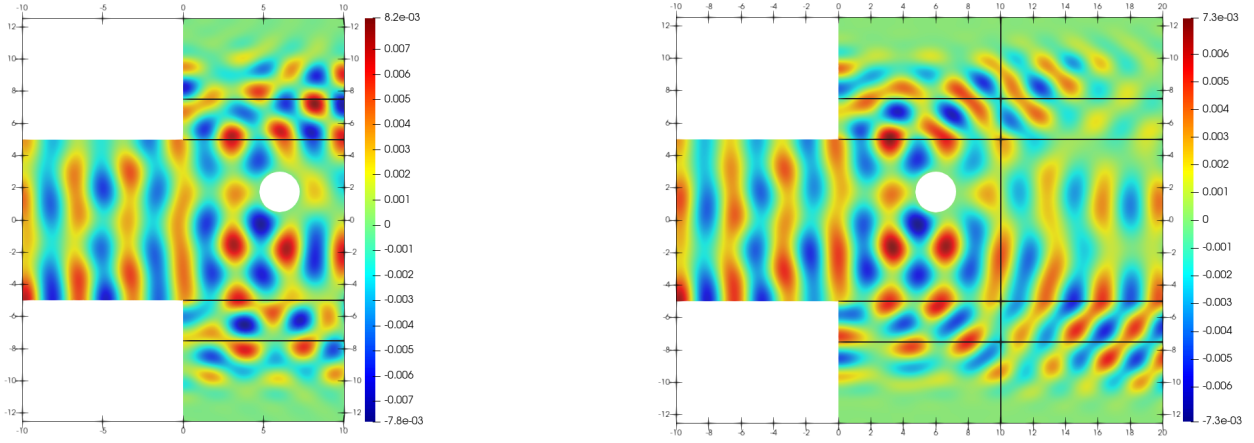
FIGURE 5.3:  $\Re(u_{R,R'}^\beta)$  pour un profil abrupt de PML à gauche et un profil parabolique à droite.

Pour les profils et paramètres particuliers de PML que nous avons choisis, nous remarquons pour le profil abrupt que la solution s'annule presque totalement dans la PML tandis que pour le profil parabolique considéré l'atténuation est plus progressive dans la direction transverse des PML. Choisir pour le profil parabolique une atténuation  $\hat{\eta}$  avec un module plus grand que celui considéré ici aurait permis d'avoir une atténuation plus rapide dans la PML. Il aurait aussi été possible de choisir un profil abrupt de PML induisant un taux de décroissance plus lent. L'avantage du profil de PML parabolique, mais plus généralement des profils de PML continus à l'interface avec la partie physique du domaine (en  $x_2 = \pm h_1$ ), est qu'ils réduisent les réflexions numériques d'une maille sur l'autre au niveau discret (voir par exemple [Jol12]).

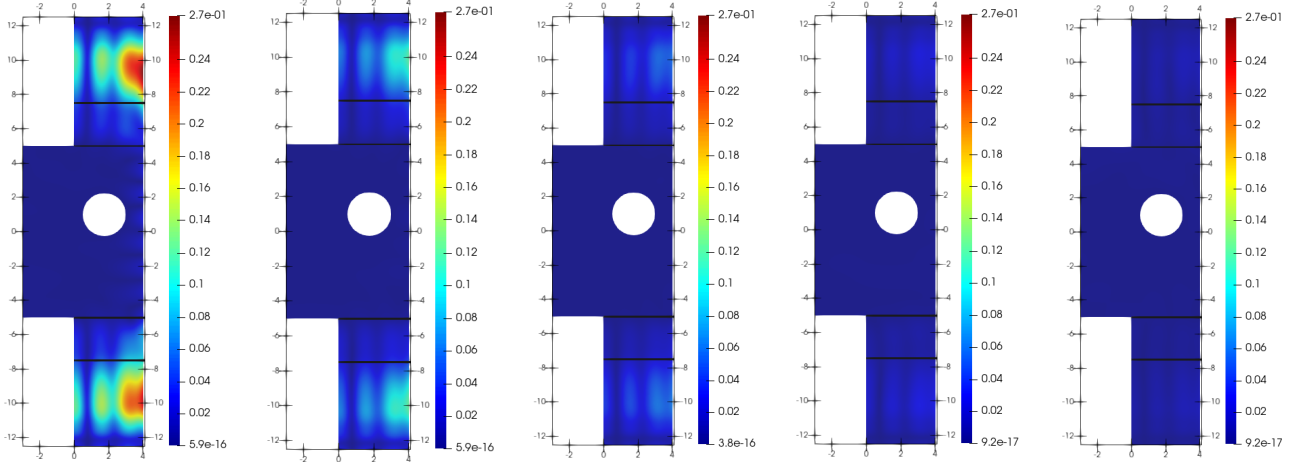
## 5.4.2 Le rôle du recouvrement

Nous voulons maintenant souligner l'importance du recouvrement dans l'opérateur DtN à droite  $T_{R,R'}^\beta$  dans l'approximation de la solution  $u_{R,R'}^\beta$  du problème (5.44) en présence d'un obstacle de Dirichlet formé par un disque centré au point  $(6 \text{ cm}, 1, 75 \text{ cm})$  de rayon  $1, 25$  cm. On considère le même champ incident  $u^i$  que ci-dessus, c'est-à-dire qu'on envoie le premier mode propagatif du guide fermé gauche. Nous représentons sur la Figure 5.4 la partie réelle du champ total de la solution  $u_{R,R'}^\beta$  pour un DtN fin ( $R = R' = 10$  cm) et pour un DtN épais ( $R = 10$  cm et  $R' = 20$  cm). Nous avons choisi ici le profil parabolique de PML utilisé ci-dessus et  $\beta = 0, 04$ . À nouveau, le calcul est effectué à l'aide d'éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}^2$ , avec un pas de maillage  $h = 0, 15$  cm et la même discrétisation de l'opérateur  $T^-$  que précédemment. Sur la Figure 5.4, il est possible de voir qualitativement quelques petites différences entre les deux solutions dans la partie physique du domaine.




 FIGURE 5.4:  $\Re(u_{R,R'}^\beta)$  avec un DtN fin à gauche et un DtN avec recouvrement à droite.

Pour raffiner notre étude, nous comparons la solution  $u_{R,R'}^\beta$  obtenue pour différentes valeurs de recouvrement (précisément  $R = 4$  et  $R' \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$ ) et  $\beta = 0, 21$  avec une solution de référence  $u_{\text{ref}} := u_{R,R'_{\text{ref}}}^{\beta_{\text{ref}}}$  obtenue avec de grandes valeurs  $\beta_{\text{ref}} = 1, 62$  et  $R'_{\text{ref}} = 14$ . Cette solution de référence est aussi approchée par des éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}^2$ , mais cette fois avec un maillage plus fin de pas  $h = 0,05$  cm, tandis que 37 modes sont pris en compte dans l'approximation de l'opérateur DtN à gauche  $T^-$  (les 7 modes propagatifs et 30 modes évanescents). Sur la Figure 5.5, nous avons représenté la quantité  $\mathcal{E}(R') := \|u_{R,R'}^\beta - u_{R,R'_{\text{ref}}}^{\beta_{\text{ref}}}\| / \|u_{R,R'_{\text{ref}}}^{\beta_{\text{ref}}}\|_{L^\infty}$  pour les différentes valeurs de  $R'$  mentionnées ci-dessus.


 FIGURE 5.5: Erreur relative  $\mathcal{E}(R')$  pour de gauche à droite  $R' = 4$ ,  $R' = 5$ ,  $R' = 6$ ,  $R' = 7$  et  $R' = 8$ .

On y observe que l'erreur relative décroît ponctuellement lorsque l'épaisseur ( $R' - R$ ) du recouvrement augmente, ce qui est une première illustration du Théorème 5.30.

Afin de réaliser une étude plus quantitative, nous testons numériquement l'estimation d'erreur (5.62), c'est-à-dire que nous traçons pour différentes valeurs de  $\beta$  les courbes :

$$\mathcal{E}_\beta : R' \mapsto \text{Log} \left( \frac{\|u_{R,R'}^\beta - u_{\text{ref}}\|_{H^1(\dot{\Omega}_R)}}{\|u_{\text{ref}}\|_{H^1(\dot{\Omega}_R)}} \right).$$

Dans le cas où la constante  $C_\beta$  définie par (5.47) ne dépendait pas de  $\beta$ , ces courbes devraient être contrôlées par des droites affines ayant dans le pire des cas une pente égale à  $-\beta$ .

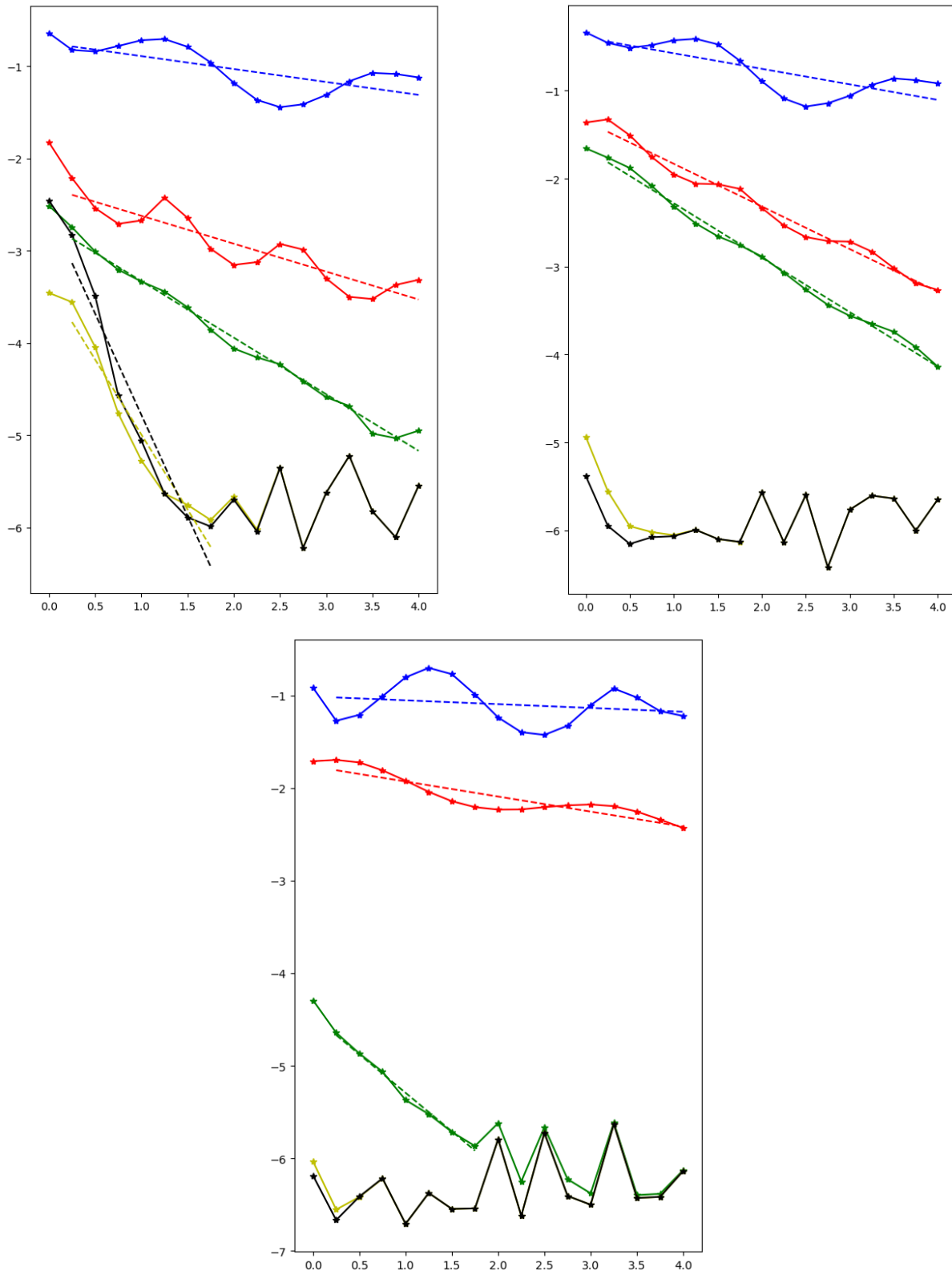


FIGURE 5.6: Estimation d'erreur  $\mathcal{E}_\beta$  en fonction de l'épaisseur du recouvrement  $(R' - R)$ . Bleu :  $\beta = 0,038$ , rouge :  $\beta = 0,073$ , vert :  $\beta = 0,21$ , jaune :  $\beta = 1,07$  et noir  $\beta = 1,62$ . En haut à gauche : profil de PML abrupt, en haut à droite : profil de PML parabolique et en bas : profil abrupt de PML collée au cœur.

Sur le graphique en haut à gauche de la Figure 5.6, nous avons tracé cette fonction dans le cas des PML abruptes pour différentes valeurs croissantes de  $\beta$ . Comme on peut le voir

dans la Table 5.1, augmenter la valeur de  $\beta$  revient à augmenter le nombre de modes  $N_\beta$  pris en compte dans la série (5.43). Sur cette table, nous y avons en particulier distingué le nombre de modes à fuite  $N_{\text{fuite}}$  du nombre de modes de PML  $N_{\text{PML}}$ , ce qui est intéressant pour interpréter plus finement les résultats de convergence.

$\beta$	PML abrupte		PML parabolique		PML abrupte collée	
	$N_{\text{fuite}}$	$N_{\text{PML}}$	$N_{\text{fuite}}$	$N_{\text{PML}}$	$N_{\text{fuite}}$	$N_{\text{PML}}$
0,038	3	2	3	4	3	2
0,073	6	2	6	6	5	2
0,21	7	4	7	8	7	4
1,07	8	10	8	12	8	8
1,62	9	12	9	14	9	12

TABLE 5.1: Nombre de modes à fuite  $N_{\text{fuite}}$  et de modes de PML  $N_{\text{PML}}$  pris en compte dans la Figure 5.6 pour différentes valeurs de  $\beta$ .

Nous observons sur la Figure 5.6 que lorsque  $\beta$  n'est pas trop grand, la courbe d'erreur ressemble au premier ordre à une droite ayant une pente qui augmente en module avec  $\beta$ . Si la constante  $C_\beta$  ne dépendait pas de  $\beta$ , on retrouverait alors bien le comportement prédit par l'estimation (5.62). Cependant, le module de ces pentes est en fait bien plus grand que  $\beta$ , qui est donc une estimation pessimiste. Il apparaît de plus, excepté pour  $\beta = 1,07$  et  $\beta = 1,62$  que l'erreur diminue avec  $\beta$ .

L'inversion des courbes correspondant à  $\beta = 1,07$  et  $\beta = 1,62$  pour les petites valeurs de recouvrement ( $R' - R$ ) est due à la mauvaise approximation des modes de PML dont les nombres d'onde ont des parties réelles  $\Re(\lambda_n)$  trop grandes en module : dans cette zone, le spectre commence à devenir pollué par des modes parasites qui n'existent pas pour le problème continu. Une conséquence de cela est que la prise en compte de ces modes détériore l'approximation de l'opérateur DtN à droite et par voie de conséquence aussi celle de la solution. Il a été observé dans la sous-section 4.4.2 qu'il est possible d'y remédier en choisissant d'autres profils de PML. Par exemple, nous avons utilisé un profil de PML parabolique (avec les mêmes paramètres que précédemment) pour le graphique en haut à droite. Sur la Figure 4.11, on peut en effet voir que les modes parasites apparaissent pour de plus grandes valeurs de  $|\Re(\lambda)|$  que pour le profil de PML abrupt dont le spectre est représenté Figure 4.9. Il est aussi possible de coller la PML abrupte au cœur de la structure, c'est-à-dire prendre  $h_1 = h_0$  tout en conservant la même épaisseur de PML, ce qui éloigne les modes parasites de l'origine du plan complexe d'après la Figure 4.11. Cette solution n'est cependant pas satisfaisante si on veut évaluer la solution dans le milieu environnant et non pas seulement dans le cœur. Nous pouvons observer sur les graphiques en haut à droite et en bas de la Figure 5.6 que l'inversion des courbes pour  $\beta = 1,07$  et  $\beta = 1,62$  mentionnée plus haut n'apparaît plus pour les deux profils que nous venons de mentionner.

Pour finir, notons que les courbes correspondant à  $\beta = 1,07$  et  $\beta = 1,62$  se superposent presque pour des grandes valeurs de ( $R' - R$ ), et ce quels que soient les profils de PML. Nous interprétons ce comportement comme un phénomène de saturation de l'erreur liée au fait que nous avons atteint l'erreur d'approximation par éléments finis.

Nous concluons cette étude numérique par la remarque suivante qui nous semble importante.

**Remarque 5.32** *Il ne faut pas conclure de nos résultats numériques que le profil de PML parabolique donne en général de meilleurs résultats que le profil abrupt. Notre expérience montre que ces résultats dépendent d'une façon complexe des propriétés de la fonction  $\alpha$  de la PML mais aussi des pas de maillages (1D et 2D). Une comparaison approfondie des différents types de PML n'est pas l'objet de ce travail. Nous affirmons seulement que prendre en compte les modes parasites détériore la qualité de l'approximation numérique avec DtN de la solution.*



# Chapitre 6

## Problème inverse dans les guides acoustiques partiellement enfouis

### Sommaire

---

6.1	Fonction de Green . . . . .	139
6.1.1	Fonction de Green associée au demi-guide droit . . . . .	140
6.1.2	Champs de référence . . . . .	145
6.1.3	Fonction de Green de la jonction . . . . .	146
6.2	Adaptation de la LSM modale . . . . .	150
6.3	Expériences numériques . . . . .	154
6.3.1	Choix de la fonction de Green . . . . .	155
6.3.2	Impact de la fréquence . . . . .	157
6.3.3	Impact du bruit . . . . .	157
6.3.4	Impact de la distance de l'obstacle à la jonction . . . . .	158
6.3.5	Défauts dans la gaine . . . . .	159

---

Ce nouveau chapitre s'inscrit dans le cadre du contrôle non destructif de structures élancées partiellement enfouies dans un solide supposé infini. De telles configurations d'imagerie peuvent concerner le génie civil, où on peut rencontrer par exemple des plaques ou des câbles métalliques enfouis partiellement dans du béton. Nous faisons comme au chapitre précédent l'hypothèse simplificatrice, mais non restrictive pour les applications considérées, que la vitesse des ondes dans le cœur de la structure est supérieure à la vitesse des ondes dans le milieu environnant, appelé gaine. L'objectif est d'inspecter la partie enfouie de la structure afin de détecter et caractériser des défauts comme des fissures ou de la corrosion, uniquement à partir de mesures effectuées sur la partie accessible de la structure, c'est-à-dire qui est à l'air libre. Plus précisément, nous voulons émettre des ondes incidentes  $w^i$  dans la partie accessible de la structure, mesurer les ondes diffractées  $w^d$  associées qui reviennent vers cette partie accessible et enfin essayer d'identifier les défauts  $D$  à l'aide de ces données multistatiques (voir Figure 6.1). La résolution de ce problème inverse est délicate pour deux raisons. La première est que cela correspond à une configuration d'imagerie en back-scattering : les émetteurs et les récepteurs sont situés d'un seul côté de la zone à inspecter. La seconde est que les ondes qui se propagent dans la partie enfouie du cœur fuient partiellement dans le milieu environnant. Ceci se traduit pour le problème inverse par une perte d'information. En effet, puisque la vitesse dans le cœur est supérieure à celle dans la gaine, il ne peut pas y exister de modes guidés qui se propagent sans perte (cf. Proposition 4.6).

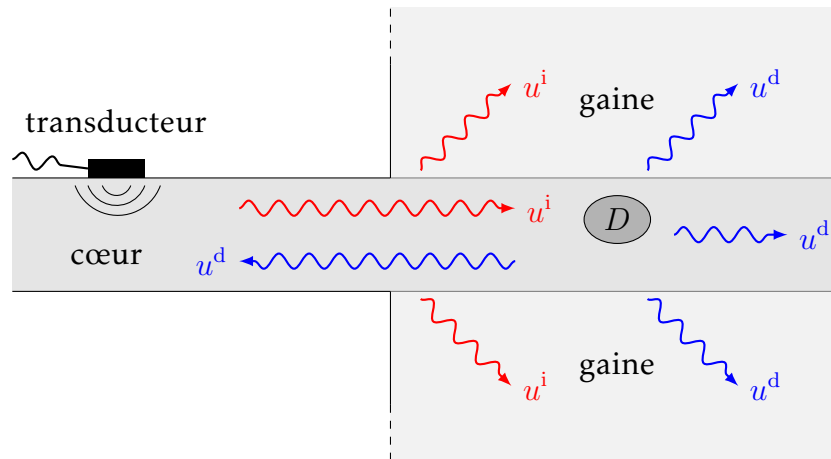


FIGURE 6.1: Configuration réelle d'inspection dans un guide partiellement enfoui.

Pour ces deux raisons, le problème que nous cherchons à résoudre est plus difficile que celui traité au [chapitre 3](#) pour la jonction de deux guides fermés.

Un tel problème a été abordé il y a vingt ans dans [PLC99] avec pour objectif d'identifier des défauts de corrosion dans des tubes d'acier, appelés tendons, disposés dans le béton constituant certains ponts pour les renforcer. Cette étude consistait en une étude de sensibilité du coefficient de réflexion des ondes par rapport au défaut considéré. Récemment, dans [Gal18], une méthode de gradient topologique utilisant un état adjoint a été mise en œuvre pour identifier des défauts dans un guide d'ondes élastique enfoui. Dans un cas purement acoustique, une méthode de type MUSIC a été développée dans [AIK05] pour identifier des inclusions de petites tailles dans un guide d'ondes ouvert 2D. Le problème de l'identification d'un défaut dans un guide ouvert périodique à partir de données de champ proche a été traité récemment par [Fur20b] à l'aide des méthodes de factorisation et de monotonie. Malgré les travaux que nous venons de citer, le problème complexe de l'identification de défauts dans les guides d'ondes ouverts mérite des investigations supplémentaires du fait de l'importance de ses applications.

Du point de vue de la modélisation, nous considérons comme dans les [chapitre 4](#) et [chapitre 5](#) un modèle 2D simplifié correspondant à de l'élasticité antiplane isotrope ; ainsi, seules les ondes SH sont prises en compte. Ensuite, nous nous limiterons à des défauts volumiques qui sont localisés soit dans le cœur, soit dans la gaine, c'est-à-dire qui ne seront pas à cheval sur les deux ou à leur interface. Nous rappelons que dans les deux précédents chapitres, nous avons borné transversalement la partie enfouie de la structure par des PML d'épaisseur finie. La structure considérée peut être donc vue comme la jonction de deux guides fermés, celui de droite étant caractérisé par des coefficients complexes (voir [Figure 6.2](#)). La résolution du problème direct (i.e. déterminer  $u^d$  à partir de la connaissance de  $u^i$  et  $D$ ) dans cette jonction a été traitée au précédent chapitre en utilisant la théorie de Kondratiev. Cette analyse nous a aussi permis de proposer et de justifier une méthode numérique de résolution du problème direct reposant sur l'introduction d'un opérateur DtN avec recouvrement. Pour le problème inverse, nous avons présenté au [chapitre 3](#) une formulation modale de LSM pour la jonction de deux guides fermés à coefficients réels. Nous consacrons ce chapitre au cas de la structure partiellement enfouie tronquée transversalement par des PML. Pour ce faire, nous allons à nouveau introduire les champs de référence qui nous permettent d'exprimer simplement la fonction de Green de la structure sans défaut. Ensuite, nous verrons qu'il est encore possible d'écrire et de justifier la LSM, puis d'en écrire une formulation modale. Enfin, nous réaliserons des expérimentations numériques d'imagerie qui démontreront la possibilité d'imager par cette nouvelle méthode.

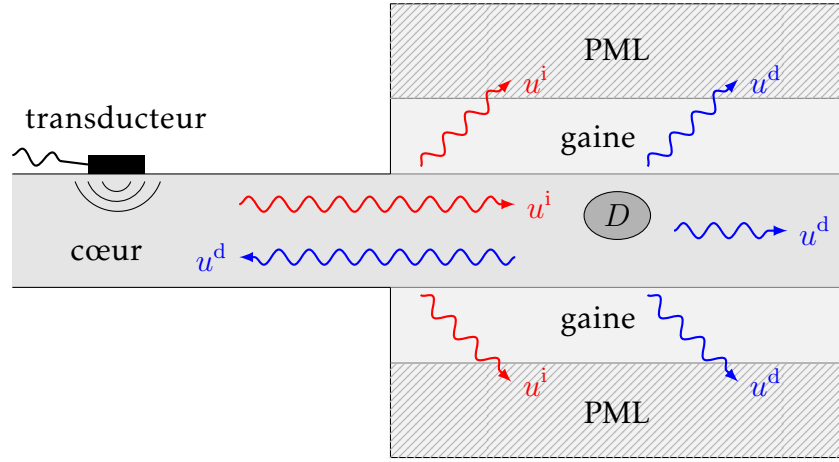


FIGURE 6.2: Configuration numérique d'inspection dans un guide partiellement enfoui.

**Remarque 6.1** La plupart des notations introduites au chapitre précédent seront conservées dans ce chapitre. Rappelons entre autres que  $\Omega_-$  désigne le demi-guide gauche,  $\Omega_+$  le demi-guide droit,  $\Sigma_0$  la section de raccord entre les deux et  $\Omega$  la réunion de ces trois ouverts, c'est-à-dire toute la jonction. De plus, la section transverse du demi-guide gauche est notée  $\Sigma_-$  et celle du droit  $\Sigma_+$ . Le guide rectiligne associé au demi-guide gauche (respectivement droit) est noté  $\widetilde{W}$  (respectivement  $W$ ). Enfin, les modes du demi-guide gauche sont notés  $\tilde{u}_{n,\pm}(\mathbf{x}) = e^{\pm\tilde{\lambda}_n x_1} \tilde{u}_n(x_2)$  et ceux du droit  $u_{n,\pm}(\mathbf{x}) = e^{\pm\lambda_n x_1} u_n(x_2)$ .

**Remarque 6.2** Nous signalons au préalable au lecteur que certains calculs seront conduits de façon formelle. En effet, l'absence de résultat de complétude pour les modes du guide enfoui nous empêchera de justifier rigoureusement la convergence de certaines séries, en particulier celles associées aux différentes fonctions de Green.

## 6.1 Fonction de Green

Avant d'introduire la fonction de Green de la jonction, dont il est primordial d'avoir une expression modale pour la LSM modale, nous donnons les expressions des fonctions de Green des guides rectilignes associés aux deux demi-guides. Pour  $\mathbf{y} \in \widetilde{W} = \mathbb{R} \times \Sigma_-$ , la fonction de Green associée au demi-guide gauche que nous considérons est la solution du problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \tilde{G}(\cdot, \mathbf{y}) \in L^2_{\text{loc}}(\widetilde{W}) \text{ tel que} \\ \left\{ \begin{array}{ll} -\mu_0(\Delta \tilde{G}(\cdot, \mathbf{y}) + k^2 \tilde{G}(\cdot, \mathbf{y})) = \delta_{\mathbf{y}} & \text{dans } \widetilde{W} \\ \partial_n \tilde{G}(\cdot, \mathbf{y}) = 0 & \text{sur } \partial \widetilde{W} \\ \tilde{G}(\cdot, \mathbf{y}) \text{ est sortant.} \end{array} \right. \end{cases} \quad (6.1)$$

Comme nous l'avons vu au [chapitre 3](#), la solution de ce problème est donnée par :

$$\tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\tilde{\lambda}_n \mu_0} e^{\tilde{\lambda}_n |x_1 - y_1|} \tilde{u}_n(x_2) \tilde{u}_n(y_2), \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \widetilde{W}^2.$$

L'étude de la fonction de Green associée au demi-guide droit est quant à elle plus complexe du fait de l'absence de résultat de complétude sur les fonctions transverses en présence de PML.



### 6.1.1 Fonction de Green associée au demi-guide droit

La fonction de Green du demi-guide droit est pour  $\mathbf{y} \in W = \mathbb{R} \times \Sigma_+$  solution du problème :

$$\text{Trouver } G(\cdot, \mathbf{y}) \text{ tel que} \quad \begin{cases} -\partial_{x_2}(\alpha\mu\partial_{x_2}G(\cdot, \mathbf{y})) - \frac{\mu}{\alpha}\partial_{x_1}^2G(\cdot, \mathbf{y}) - \frac{\mu}{\alpha}k^2G(\cdot, \mathbf{y}) = \delta_{\mathbf{y}} & \text{dans } W \\ \partial_n G(\cdot, \mathbf{y}) = 0 & \text{sur } \partial W. \end{cases} \quad (6.2)$$

Pour montrer que ce problème est bien posé dans un espace fonctionnel que nous préciserons, on introduit un problème auxiliaire. Soit  $f$  un terme source dans  $W$ , ce problème s'écrit :

$$\text{Trouver } u \text{ tel que} \quad \begin{cases} -\partial_{x_2}(\alpha\mu\partial_{x_2}u) - \frac{\mu}{\alpha}\partial_{x_1}^2u - \frac{\mu}{\alpha}k^2u = f & \text{dans } W \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \partial W. \end{cases} \quad (6.3)$$

Nous avons montré au chapitre précédent (Corollaire 5.14) que l'opérateur  $A_0 : H^1(W) \rightarrow H^1(W)^*$  défini pour  $(u, v) \in (H^1(W))^2$  par :

$$\langle A_0 u, v \rangle_{H^1(W)^*, H^1(W)} := \int_W (\alpha\mu\partial_{x_2}u\partial_{x_2}v + \frac{\mu}{\alpha}\partial_{x_1}u\partial_{x_1}v - \frac{\mu}{\alpha}k^2uv) dx,$$

est un isomorphisme. C'est-à-dire que pour  $f \in H^1(W)^*$ , le problème (6.3) admet une unique solution dans  $H^1(W)$ . Nous commençons par compléter cette assertion avec un résultat de régularité. Pour cela, nous allons à nouveau recourir à la transformée de Fourier-Laplace partielle  $\mathcal{F}_{x_1}$  définie pour des fonctions  $v$  dans  $W$  satisfaisant  $v(\cdot, x_2) \in S'(\mathbb{R})$  pour presque tout  $x_2 \in \mathbb{R}$ . Elle s'écrit alors pour  $\lambda \in i\mathbb{R}$  et  $x_2 \in \Sigma$  :

$$(\mathcal{F}_{x_1}v)(\lambda, x_2) = \hat{v}(\lambda, x_2) := \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x_1} v(x_1, x_2) dx_1.$$

Soient  $m \in \mathbb{N}$  puis  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  vérifiant  $a < b$  et  $\lambda \in i\mathbb{R}$ , nous pouvons montrer l'identité de Plancherel :

$$\|v\|_{H^m(\mathbb{R} \times (a, b))} = \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{i\mathbb{R}} \|\hat{v}(\lambda, \cdot)\|_{H^m((a, b), |\lambda|)}^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6.4)$$

où  $\|\cdot\|_{H^m(\mathbb{R} \times (a, b))}$  est la norme de Sobolev standard et :

$$\|v\|_{H^m((a, b), |\lambda|)}^2 := \sum_{0 \leq i+j \leq m} |\lambda|^{2i} \|d_{x_2}^j v\|_{L^2(a, b)}^2, \quad \forall v \in H^m(a, b). \quad (6.5)$$

Ce résultat a déjà été montré lorsque  $m = 1$  au chapitre 5 (cas  $\beta = 0$  du Lemme 5.6) et le cas  $m = 0$  est plus simple à montrer. Lorsque  $m \geq 2$ , l'identité s'obtient de façon identique en utilisant la propriété de dérivation  $\partial_\lambda \hat{v}(\lambda, \cdot) = \lambda \hat{v}(\lambda, \cdot)$  et l'identité de Plancherel classique pour les fonctions de  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Remarque 6.3** Dans [BFR22], nous n'avons pas utilisé la norme complète de  $H^m((a, b), |\lambda|)$  donnée par (6.5) et obtenue directement par transformée de Fourier-Laplace, mais une norme plus simple à manipuler donnée par :

$$\|v\|_{H^m((a, b), |\lambda|)}^2 = \|v\|_{H^m(a, b)}^2 + |\lambda|^{2m} \|v\|_{L^2(a, b)}^2.$$

Pour celle-ci, nous n'avons plus l'identité de Plancherel (6.4), mais il est toujours possible de montrer (voir pour cela [Koz+97, Lemme 5.2.4]) que les deux normes sont équivalentes. Par souci

de pédagogie, nous préférons considérer la norme (6.5) dans ce manuscrit.

Introduisons aussi l'espace  $H^2_{\#}(W)$  des fonctions  $v \in H^1(W)$  telles que pour  $j \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$ , on ait  $u|_{W_j} \in H^2(W_j)$  où  $W_{-2} := \mathbb{R} \times (-h_2, -h_1)$ ,  $W_{-1} := \mathbb{R} \times (-h_1, -h_0)$ ,  $W_0 := \mathbb{R} \times (-h_0, h_0) = \widetilde{W}$ ,  $W_1 := \mathbb{R} \times (h_0, h_1)$  et  $W_2 := \mathbb{R} \times (h_1, h_2)$ , et telle que  $\alpha \mu \partial_{x_2} u$  soit continu au travers des interfaces horizontales séparant les différentes bandes  $W_j$ ,  $j \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$ . Le cadre fonctionnel que nous venons de poser nous permet de montrer le résultat suivant.

**Proposition 6.4**

Pour  $f \in L^2(W)$ , le problème (6.3) admet une unique solution dans  $H^2_{\#}(W)$ .

*Démonstration.* Puisque  $f \in H^1(W)^*$ , on sait d'après le Corollaire 5.14 que le problème (6.3) admet une unique solution  $u \in H^1(W)$ . Pour montrer cela, nous étions partis de l'équation  $A_0 u = f$  à laquelle nous avons appliqué la transformée de Fourier-Laplace, ce qui nous avait conduit à étudier l'équation  $\mathcal{L}(\lambda) \hat{u}(\lambda, \cdot) = \hat{f}(\lambda, \cdot)$ ,  $\forall \lambda \in i\mathbb{R}$  où le symbole  $\mathcal{L}(\lambda)$  est défini au chapitre 4 par (4.27). Nous avons pu montrer avec le Lemme 5.8, qu'il existe  $\tau_0 > 0$  tel que pour  $\lambda = i\tau$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$  satisfaisant  $|\tau| \geq \tau_0$ , l'opérateur  $\mathcal{L}(\lambda) : H^1(\Sigma_+) \rightarrow H^1(\Sigma_+)^*$  est un isomorphisme et qu'il existe une constante  $C_1 > 0$  indépendante de  $\lambda$  et  $f$  telle que :

$$\|\hat{u}(\lambda, \cdot)\|_{H^1(\Sigma_+, |\lambda|)} \leq C_1 \|\hat{f}(\lambda, \cdot)\|_{H^1(\Sigma_+, |\lambda|)^*}, \quad (6.6)$$

où :

$$\|g\|_{H^1(\Sigma_+, |\lambda|)^*} = \sup_{h \in H^1(\Sigma_+) \setminus \{0\}} \frac{|\langle g, h \rangle_{H^1(\Sigma_+)^*, H^1(\Sigma_+)}|}{\|h\|_{H^1(\Sigma_+, |\lambda|)}}, \quad \forall g \in H^1(\Sigma_+)^*. \quad (6.7)$$

Puisque  $\Lambda(\mathcal{L}) \cap (i\mathbb{R}) = \emptyset$ , l'opérateur  $\mathcal{L}(\lambda)$  est injectif pour tout  $\lambda \in i\mathbb{R}$  et le théorème de Fredholm analytique nous avait permis de voir que l'estimation est valable pour tout  $\lambda \in i\mathbb{R}$ . Nous cherchons à montrer une régularité supplémentaire sur  $u$ . Montrons dans un premier temps que  $u|_{W_0} \in H^2(W_0)$ . Pour simplifier les notations, notons dans la suite de la preuve  $\hat{u} := \hat{u}(\lambda, \cdot)$  et  $\hat{f} := \hat{f}(\lambda, \cdot)$ . Nous allons chercher à contrôler  $\|\hat{u}\|_{H^2(\Sigma_-, |\lambda|)}$  par  $\|\hat{f}\|_{L^2(\Sigma_-)}$  (avec on rappelle  $\Sigma_- := (-h_0, h_0) \subset \Sigma_+ := (-h_2, h_2)$ ) ce qui nous permettra de conclure en utilisant l'identité de Plancherel (6.4). On commence par remarquer que :

$$\|\hat{u}\|_{H^2(\Sigma_-, |\lambda|)}^2 = \|\hat{u}\|_{H^1(\Sigma_-)}^2 + |\lambda|^2 \|\hat{u}\|_{H^1(\Sigma_-, |\lambda|)}^2 + \|d_{x_2}^2 \hat{u}\|_{L^2(\Sigma_+)}^2. \quad (6.8)$$

En partant de la définition (6.7) et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons :

$$|\lambda|^2 \|\hat{f}\|_{H^1(\Sigma_+, |\lambda|)^*}^2 \leq \|\hat{f}\|_{L^2(\Sigma_+)}^2. \quad (6.9)$$

L'équation (6.6) permet quant à elle d'écrire :

$$\|\hat{u}\|_{H^1(\Sigma_-, |\lambda|)}^2 \leq \|\hat{u}\|_{H^1(\Sigma_+, |\lambda|)}^2 \leq C_1^2 \|\hat{f}\|_{H^1(\Sigma_+, |\lambda|)^*}^2. \quad (6.10)$$

Combiner (6.9) et (6.10) donne alors :

$$|\lambda|^2 \|\hat{u}\|_{H^1(\Sigma_-, |\lambda|)}^2 \leq C_1^2 \|\hat{f}\|_{L^2(\Sigma_+)}^2, \quad (6.11)$$

ce qui est une majoration du deuxième terme de (6.8). Pour contrôler le premier terme de (6.8), nous repartons de (6.7) et écrivons encore à l'aide de Cauchy-Schwarz :  $\|\hat{f}\|_{H^1(\Sigma_+, |\lambda|)^*}^2 \leq \|\hat{f}\|_{L^2(\Sigma_+)}^2$ . En utilisant (6.10), il en découle que :

$$\|\hat{u}\|_{H^1(\Sigma_-)}^2 \leq \|\hat{u}\|_{H^1(\Sigma_-, |\lambda|)}^2 \leq C_1^2 \|\hat{f}\|_{L^2(\Sigma_+)}^2. \quad (6.12)$$

Pour majorer le dernier terme, nous utilisons le fait que  $\hat{u}$  est solution de l'équation :

$$-d_{x_2}^2 \hat{u} - (\lambda^2 + k_0^2) \hat{u} = \frac{\hat{f}}{\mu_0} \quad \text{sur } \Sigma_-.$$

Par suite, nous pouvons écrire qu'il existe des constantes  $C_2, C_3 > 0$  telles que :

$$\|d_{x_2}^2 \hat{u}\|_{L^2(\Sigma_-)}^2 \leq C_2(1 + |\lambda|^2) \|\hat{u}\|_{L^2(\Sigma_-)}^2 + C_3 \|\hat{f}\|_{L^2(\Sigma_+)}^2.$$

Sommer (6.10) et (6.11) permet d'obtenir l'estimation :

$$(1 + |\lambda|^2) \|\hat{u}\|_{L^2(\Sigma_-)}^2 \leq (1 + |\lambda|^2) \|\hat{u}\|_{H^1(\Sigma_-, |\lambda|)}^2 \leq 2C_1^2 \|\hat{f}\|_{L^2(\Sigma_+)}^2,$$

et par suite :

$$\|d_{x_2}^2 \hat{u}\|_{L^2(\Sigma_-)}^2 \leq \max(2C_1^2 C_2, C_3) \|\hat{f}\|_{L^2(\Sigma_+)}^2. \quad (6.13)$$

Regrouper (6.8), (6.11), (6.12) et (6.13) assure l'existence d'une constante  $C_4 > 0$  indépendante de  $\lambda$  et  $f$  telle que :

$$\|\hat{u}\|_{H^2(\Sigma_-, |\lambda|)}^2 \leq C_4 \|\hat{f}\|_{L^2(\Sigma_+)}^2,$$

soit en revenant aux notations de départ :

$$\|\hat{u}(\lambda, \cdot)\|_{H^2(\Sigma_-, |\lambda|)}^2 \leq C_4 \|\hat{f}(\lambda, \cdot)\|_{L^2(\Sigma_+)}^2.$$

Puisque  $f \in L^2(W)$ , intégrer sur  $i\mathbb{R}$  puis utiliser l'identité de Plancherel (6.4) donne  $u \in H^2(W_0)$ . Le résultat sur les autres bandes  $W_j$ ,  $j \in \{\pm 1, \pm 2\}$  se montre de façon analogue.  $\square$

La remarque suivante nous sera utile pour conclure quant au caractère bien posé du problème (6.2).

**Remarque 6.5** La démonstration du Lemme 5.8 sur lequel nous nous sommes appuyés pour démontrer la Proposition 6.4, reposait sur le choix dans la Définition 4.10 du profil de PML  $\alpha$ . En effet, nous l'avons choisi de sorte que  $-\pi/2 < \arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty) \leq 0$ , ce qui garantit qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $\Re(\alpha) \geq C$  et  $\Re(1/\alpha) \geq C$ . Puisque ces deux propriétés sont aussi satisfaites par  $\bar{\alpha}$ , la Proposition 6.4 reste vraie si on remplace  $\alpha$  par  $\bar{\alpha}$  dans (6.3).

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le caractère bien posé du problème (6.2).

### Théorème 6.6

Soit  $\mathbf{y} \in W$ , le problème (6.2) a une unique solution dans  $L^2(W)$ .

*Démonstration.* De la Proposition 6.4, on observe que la solution  $u$  du problème (6.3) est dans  $H^{1+\epsilon}(W)$  pour  $0 \leq \epsilon < \frac{1}{2}$ . En effet, puisque  $u \in H_{\#}^2(W)$ , on a en particulier  $u|_{W_j} \in H^{1+\epsilon}(W_j)$  pour  $j \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$  et ainsi  $\partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u \in H^\epsilon(W_j)$  pour  $j \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$ . Par le Théorème A.6, nous savons que pour  $0 \leq \epsilon < 1/2$ , le prolongement par 0 de  $W_j$  à  $W$  de n'importe quelle fonction de  $H^\epsilon(W_j)$  est dans  $H^\epsilon(W)$ . Il en découle que  $\partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u \in H^\epsilon(W)$  pour  $0 \leq \epsilon < 1/2$ . Par un théorème classique d'injection dans les espaces de Sobolev en dimension deux, les fonctions de  $H^{1+\epsilon}(W)$ ,  $0 < \epsilon < 1/2$  sont continues dans  $W$ . Nous venons donc de montrer que  $H_{\#}^2(W) \subset \mathcal{C}^0(W)$ , ce qui nous permet d'affirmer que pour tout  $\mathbf{y} \in W$ ,  $\delta_{\mathbf{y}} \in H_{\#}^2(W)^*$ . De plus, la Proposition 6.4 revient à dire que l'opérateur  $A_0 : H_{\#}^2(W) \rightarrow L^2(W)$  est un

isomorphisme. Prendre en compte la Remarque 6.5 nous permet de voir que l'adjoint formel (obtenu par simple conjugaison complexe)  $\bar{A}_0 : H_{\#}^2(W) \rightarrow L^2(W)$  est aussi un isomorphisme. Il en résulte que son adjoint  $\bar{A}_0^* : L^2(W) \rightarrow H_{\#}^2(W)^*$  est aussi un isomorphisme; puisque  $A_0$  est un opérateur symétrique (c'est-à-dire vérifiant  $\bar{A}_0^* = A_0$ ), nous en concluons que  $A_0$  est aussi un isomorphisme de  $L^2(W)$  dans  $H_{\#}^2(W)^*$ . Le fait que  $\delta_{\mathbf{y}} \in H_{\#}^2(W)^*$  conclut la preuve.  $\square$

**Remarque 6.7** *Il doit être souligné que le Théorème 6.6 est en particulier valide lorsque le point source  $\mathbf{y}$  est situé à l'interface entre deux strates  $W_j$ ,  $j \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$ .*

Nous rappelons que nous voulons développer une formulation modale de la LSM, il est donc important pour cela d'avoir une expression modale de la fonction de Green. Une telle expression a été donnée dans [Gou10, Section 3.3] pour une fonction de Green légèrement différente de celle que nous considérons. Elle a été obtenue de deux façons : d'une part en supposant la complétude des fonctions transverses, d'autre part en utilisant le théorème des résidus. Nous proposons ici d'obtenir l'expression modale de notre fonction de Green en utilisant le théorème des résidus. Nous allons proposer une preuve qui n'est pas complètement rigoureuse pour des raisons données avec la Remarque 6.9.

#### Lemme 6.8

La fonction de Green solution de (6.2) est donnée par :

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e^{\lambda_n |x_1 - y_1|}}{2\lambda_n J_n} u_n(x_2) u_n(y_2), \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in W^2, \quad (6.14)$$

où pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\lambda_n \in \{\lambda \in \Lambda(\mathcal{L}) \mid \Re e(\lambda) < 0\}$ ,  $u_n \in \text{Ker}(\mathcal{L}(\lambda_n))$  et  $J_n := \int_{\Sigma} \frac{\mu}{\alpha} u_n^2 dx_2$  est non nul selon l'Hypothèse 4.29.

*Démonstration.* Nous rappelons que rechercher les couples  $(\xi, u) \in \mathbb{C} \times H^1(\Sigma_+) \setminus \{0\}$  satisfaisant  $L_2 u = \xi u$ , revient à rechercher les couples  $(\xi, u) \in \mathbb{C} \times H^1(\Sigma_+) \setminus \{0\}$  solutions de  $\mathcal{L}(\lambda)u = 0$  avec  $\xi = \lambda^2$ . En revenant aux définitions (4.21) de l'opérateur transverse  $L_2$  et (4.27) du symbole  $\mathcal{L}(\lambda)$ , on voit qu'ils sont en effet reliés par la relation  $\mathcal{L}(\lambda) = (\mu/\alpha)(L_2 - \lambda^2)$ . L'inverse de  $\mathcal{L}(\lambda)$  et la résolvante de  $L_2$  définie par  $R_{L_2}(\xi) := (L_2 - \xi I)^{-1}$  sont ainsi reliés par la relation :

$$\mathcal{L}(\lambda)^{-1}(\cdot) = R_{L_2}(\lambda^2) \begin{pmatrix} \alpha \\ \mu \end{pmatrix} \cdot. \quad (6.15)$$

En utilisant [Kat13], et le fait que les multiplicités géométrique et algébrique des valeurs propres  $\xi_n = \lambda_n^2$  de  $L_2$  sont égales à un (cf. Lemmes 4.21 et 4.28), nous avons au voisinage de  $\xi_n = \lambda_n^2$  :

$$R_{L_2}(\xi) = -\frac{P_n}{\xi - \xi_n} + H_n(\xi), \quad (6.16)$$

où  $P_n$  est le projecteur sur la fonction propre  $u_n$  et  $H_n$  est une fonction holomorphe au voisinage de  $\xi_n$ . Regrouper alors (6.15) et (6.16) nous permet d'écrire au voisinage de  $\lambda_n$  :

$$\mathcal{L}(\lambda)^{-1}(\cdot) = -\frac{P_n \begin{pmatrix} \alpha \\ \mu \end{pmatrix} \cdot}{\lambda^2 - \lambda_n^2} + \mathcal{H}_n(\lambda)(\cdot), \quad (6.17)$$

où  $\mathcal{H}_n$  est une fonction holomorphe au voisinage de  $\lambda_n$ . Nous avons prouvé dans le Lemme

5.8 que le symbole  $\mathcal{L}(\lambda)$  est inversible pour tout  $\lambda \in i\mathbb{R}$ . Pour un terme source  $f$  donné dans  $W$  suffisamment régulier, nous avons montré avec (5.20) (prendre  $\beta = 0$ ) que l'unique solution du problème (6.3) est donnée par :

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2i\pi} \int_{i\mathbb{R}} e^{\lambda x_1} \mathcal{L}(\lambda)^{-1} \hat{f}(\lambda, x_2) d\lambda. \quad (6.18)$$

Appliquons formellement cette formule pour  $f = \delta_y$  et donc  $\hat{f}(\lambda, x_2) = \delta_{y_2}(x_2)$ . L'idée est maintenant d'évaluer la solution  $u$  en utilisant le théorème des résidus pour un contour bien choisi dans le plan complexe. Sans perte de généralité, nous faisons l'hypothèse que  $y_1 = 0$  sachant que le cas général se retrouve en effectuant une translation le long de l'axe longitudinal. Supposons que  $x_1 > 0$  et considérons pour  $H > 0$  le contour orienté  $\mathcal{C}_H := i[-H, H] \cup \mathcal{B}_H$  avec  $\mathcal{B}_H := \{He^{i\theta}, \theta \in [\pi/2, 3\pi/2]\}$  (voir Figure 6.3).

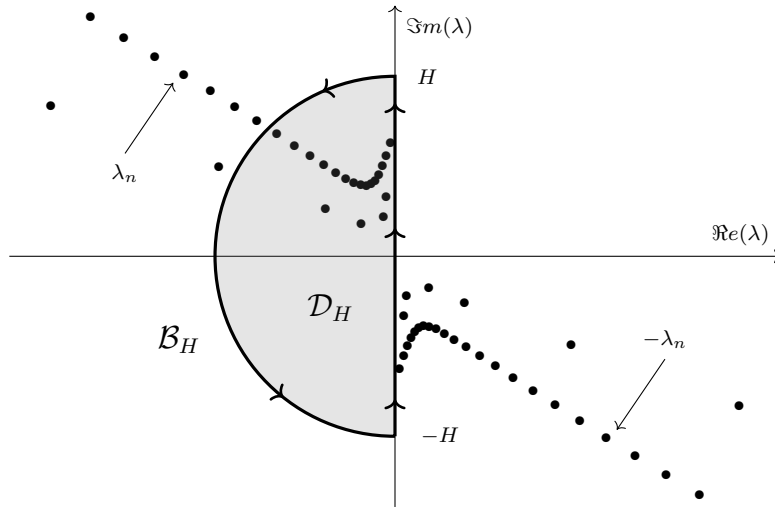


FIGURE 6.3: Contour d'intégration  $\mathcal{C}_H$  pour le théorème des résidus.

Étant donné que  $\lambda$  appartient à un domaine borné noté  $\mathcal{D}_H$  délimité par  $\mathcal{C}_H$  et dans lequel on a  $\Re(\lambda) < 0$ , nous obtenons :

$$u(x_1, x_2) = \lim_{H \rightarrow +\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_H} e^{\lambda x_1} \mathcal{L}(\lambda)^{-1} \hat{f}(\lambda, x_2) d\lambda.$$

Remarquons que pour  $x_1 > 0$  et  $x_2 \in \Sigma_+$ , la fonction  $F_{x_1, x_2} : \lambda \mapsto e^{\lambda x_1} \mathcal{L}(\lambda)^{-1} \hat{f}(\lambda, x_2)$  est méromorphe dans le demi-plan complexe  $\Re(\lambda) < 0$  et ses pôles correspondent aux valeurs propres  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{L}$  ayant une partie réelle négative. Par le théorème des résidus, on a donc :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_H} e^{\lambda x_1} \mathcal{L}(\lambda)^{-1} \hat{f}(\lambda, x_2) d\lambda = \sum_{\lambda_n \in \mathcal{D}_H} \text{Res}(F_{x_1, x_2}, \lambda_n).$$

Pour calculer le résidu, il nous reste à utiliser l'expression suivante des projecteurs  $P_n$  qu'on peut obtenir avec la relation de biorthogonalité donnée par la Proposition 4.30 :

$$P_n u = \frac{1}{J_n} \left( \int_{\Sigma_+} \frac{\mu}{\alpha} u_n u dx_2 \right) u_n, \quad \forall u \in L^2(\Sigma_+).$$

Utiliser (6.17) nous permet de calculer :

$$\text{Res}(F_{x_1, x_2}, \lambda_n) = -\frac{1}{2\lambda_n} e^{\lambda_n x_1} P_n \left( \frac{\alpha}{\mu} \delta_y \right) = -\frac{1}{2\lambda_n J_n} e^{\lambda_n x_1} u_n(y_2) u_n(x_2),$$

de sorte que pour tout  $\mathbf{y} \in W$  satisfaisant  $y_1 = 0$ , on a :

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\lambda_n J_n} e^{\lambda_n x_1} u_n(x_2) u_n(y_2).$$

Si  $y_1 > x_1$ , il suffit de remplacer  $x_1$  dans l'expression ci-dessus par  $x_1 - y_1$ . Pour  $y_1 < x_1$ , la même méthode s'applique, mais fera intervenir les valeurs propres  $(-\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{L}$  dans le demi-plan  $\Re(\lambda) > 0$ . On peut enfin conclure que la fonction de Green est donnée par :

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e^{\lambda_n |x_1 - y_1|}}{2\lambda_n J_n} u_n(x_2) u_n(y_2), \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in W^2.$$

□

**Remarque 6.9** Pour rendre la preuve totalement rigoureuse, il faudrait :

1. justifier l'obtention de la formule de représentation (6.18) lorsque le terme source est un dirac, ce qui n'a pas été fait au chapitre 5;
2. justifier que :

$$\lim_{H \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{B}_H} e^{\lambda x_1} \mathcal{L}(\lambda)^{-1} \hat{f}(\lambda, x_2) d\lambda = 0,$$

ce qui est intimement lié à la question de la convergence de la série.

**Remarque 6.10** D'après l'expression modale (6.14), la fonction de Green satisfait tout comme la fonction de Green du demi-guide gauche, la relation de réciprocité :  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ ,  $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in W^2$ .

Nous allons désormais pouvoir étudier la fonction de Green de la jonction. Pour cela, nous introduisons l'espace  $\tilde{H}_{\text{loc}}^1(\Omega)$  défini par (5.24) en remplaçant  $\dot{\Omega}$  par  $\Omega$ . Pour  $f$  un terme source à support dans  $\Omega$  que nous préciserons, nous introduisons aussi le problème générique suivant qui nous sera utile dans notre étude :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } u \in \tilde{H}_{\text{loc}}^1(\Omega) \text{ tel que} \\ & \begin{cases} -\partial_{x_2}(\alpha \mu \partial_{x_2} u) - \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1}^2 u - \frac{\mu}{\alpha} k^2 u = f & \text{dans } \Omega \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \Gamma \\ u \text{ est sortant.} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.19)$$

## 6.1.2 Champs de référence

Comme nous l'avons vu dans la **Partie I**, l'obtention de la fonction de Green de la jonction à partir des fonctions de Green des guides rectilignes associés aux deux demi-guides de la jonction n'est pas immédiate. Nous l'avons obtenue en utilisant les champs de référence gauches et droits, qui sont les réponses en champ total de la structure sans défaut à un mode incident provenant du demi-guide gauche ou droit. Définissons ces objets pour la configuration de guide partiellement enfoui. Nous avons en plus besoin d'introduire pour tout  $n \in \mathbb{N}$  l'extension à droite (respectivement gauche) par 0 du mode  $\tilde{u}_{n,+}$  (respectivement  $u_{n,-}$ ). Ces extensions notées  $\tilde{u}_{n,+}^0$  et  $u_{n,-}^0$  s'écrivent :

$$\tilde{u}_{n,+}^0(\mathbf{x}) := \begin{cases} \tilde{u}_{n,+}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_- \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_+, \end{cases} \quad \text{et} \quad u_{n,-}^0(\mathbf{x}) := \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_- \\ u_{n,-}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_+. \end{cases}$$

**Définition 6.11**

On appelle *champ de référence gauche* (respectivement *droit*), la réponse en champ total de la structure sans défaut à un mode provenant du demi-guide gauche (respectivement droit). Plus précisément, pour  $n \in \mathbb{N}$ , le champ de référence gauche noté  $u_{n,+}^r$  est solution du problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_{n,+}^r \in \tilde{H}_{\text{loc}}^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \left\{ \begin{array}{l} -\partial_{x_2}(\alpha\mu\partial_{x_2}u_{n,+}^r) - \frac{\mu}{\alpha}\partial_{x_1}^2u_{n,+}^r - \frac{\mu}{\alpha}k^2u_{n,+}^r = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \partial_n u_{n,+}^r = 0 \quad \text{sur } \Gamma \\ u_{n,+}^r - \tilde{u}_{n,+}^0 \text{ est sortant,} \end{array} \right. \end{cases} \quad (6.20)$$

et le champ de référence droit noté  $u_{n,-}^r$  est solution du problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_{n,-}^r \in \tilde{H}_{\text{loc}}^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \left\{ \begin{array}{l} -\partial_{x_2}(\alpha\mu\partial_{x_2}u_{n,-}^r) - \frac{\mu}{\alpha}\partial_{x_1}^2u_{n,-}^r - \frac{\mu}{\alpha}k^2u_{n,-}^r = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \partial_n u_{n,-}^r = 0 \quad \text{sur } \Gamma \\ u_{n,-}^r - u_{n,-}^0 \text{ est sortant.} \end{array} \right. \end{cases} \quad (6.21)$$

Nous avons le résultat suivant qui garantit que les champs de référence  $u_{n,+}^r$  et  $u_{n,-}^r$  sont bien définis, sous réserve d'unicité.

**Théorème 6.12**

Supposons que pour  $f = 0$ , le problème (6.19) n'admette que la solution triviale. Dans ce cas, les problèmes (6.20) et (6.21) sont bien posés.

*Démonstration.* Pour démontrer ce résultat, on procède presque de la même façon que pour le Théorème 5.21 : nous montrons que le problème est Fredholm d'indice zéro. L'unicité de la solution à ce problème implique donc l'existence d'une telle solution.  $\square$

**Remarque 6.13** *Il est intéressant de confronter ce résultat avec le Lemme 2.4, dans lequel nous avons réussi à montrer l'unicité des champs de référence pour la jonction de deux guides fermés, dans laquelle les ondes sont gouvernées par une équation de Helmholtz à coefficients réels. Ce résultat plus fort avait pu être montré en utilisant la complétude des fonctions transverses des deux demi-guides dans  $L^2$  de chacune des sections, ainsi que le fait que les valeurs propres des opérateurs transverses sont purement réelles ou imaginaires.*

### 6.1.3 Fonction de Green de la jonction

Maintenant que nous connaissons les fonctions de Green des guides rectilignes associés aux deux demi-guides, nous sommes en mesure d'introduire la fonction de Green de la jonction. Pour  $\mathbf{y} \in \Omega$ , c'est la solution du problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y}) \text{ tel que} \\ \left\{ \begin{array}{l} -\partial_{x_2}(\alpha\mu\partial_{x_2}\mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y})) - \frac{\mu}{\alpha}\partial_{x_1}^2\mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y}) - \frac{\mu}{\alpha}k^2\mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y}) = \delta_{\mathbf{y}} \quad \text{dans } \Omega \\ \partial_n \mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y}) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \\ \mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y}) \text{ est sortant,} \end{array} \right. \end{cases} \quad (6.22)$$



que nous allons chercher dans l'espace :

$$\tilde{L}_{\text{loc}}^2(\Omega) := \{v \in D'(\Omega) \mid \chi v \in L^2(\Omega), \forall \chi \in \mathcal{T}_-\}, \quad (6.23)$$

où  $\mathcal{T}_-$  est l'ensemble des fonctions de troncature  $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$  telles que  $\chi(x_1, x_2) = 0$ ,  $x_1 < -L$  pour un réel  $L > 0$  et  $\chi(x_1, x_2) = 1$ ,  $x_1 > 0$ . En utilisant les champs de référence, on peut montrer le résultat suivant.

**Proposition 6.14**

Si le problème (6.19) pour  $f = 0$  n'admet que la solution triviale, alors le problème (6.22) a une unique solution dans  $\tilde{L}_{\text{loc}}^2(\Omega)$ . Elle admet les expressions modales suivantes faisant intervenir les champs de référence solutions de (6.20) et (6.21) :

- pour  $\mathbf{y} \in \Omega_-$  et  $\mathbf{x} \in \Omega$  :

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \frac{1}{\mu_0} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\lambda_n} \tilde{u}_{n,-}(\mathbf{y})(u_{n,+}^r(\mathbf{x}) - \tilde{u}_{n,+}(\mathbf{x})) & \text{si } x_1 < y_1 \\ - \frac{1}{\mu_0} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\lambda_n} \tilde{u}_{n,-}(\mathbf{y})u_{n,+}^r(\mathbf{x}) & \text{si } x_1 > y_1, \end{cases}$$

- pour  $\mathbf{y} \in \Omega_+$  et  $\mathbf{x} \in \Omega$  :

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\lambda_n J_n} u_{n,+}(\mathbf{y})u_{n,-}^r(\mathbf{x}) & \text{si } x_1 < y_1 \\ G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\lambda_n J_n} u_{n,+}(\mathbf{y})(u_{n,-}^r(\mathbf{x}) - u_{n,-}(\mathbf{x})) & \text{si } x_1 > y_1. \end{cases}$$

*Démonstration.* La preuve suit exactement celle de la Proposition 3.3, nous n'en rappelons donc que les grandes lignes.

Si par exemple  $\mathbf{y} \in \Omega_-$ , on commence par introduire le champ incident  $\tilde{G}_0(\cdot, \mathbf{y})$  égal à gauche de la jonction à la fonction de Green du guide gauche et à droite de la jonction à 0. On définit ensuite le champ diffracté  $\mathcal{G}^d(\cdot, \mathbf{y}) := \mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y}) - \tilde{G}_0(\cdot, \mathbf{y})$  qui satisfait un problème de transmission avec pour termes sources les traces de Dirichlet et de Neumann de  $\tilde{G}(\cdot, \mathbf{y})$  sur l'interface entre les deux demi-guides. Ce problème de transmission est bien posé dans  $\tilde{H}_{\text{loc}}^1(\Omega)$  sous réserve que le problème (6.19) pour  $f = 0$  n'admette que la solution triviale. Le champ total  $\mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y})$  est par suite dans  $\tilde{L}_{\text{loc}}^2(\Omega)$ .

Pour la décomposition sur les champs de référence  $u_{n,+}^r$ , on commence par introduire les champs incidents  $\tilde{u}_{n,+}^0$  égaux à gauche de la jonction aux modes  $\tilde{u}_{n,+}$  et à droite à 0. La partie diffractée des champs de référence donnée par  $u_{n,+}^{r,d} := u_{n,+}^r - \tilde{u}_{n,+}^0$  satisfait le même problème de transmission que  $\mathcal{G}^d(\cdot, \mathbf{y})$ , mais les termes sources sont cette fois les traces de Dirichlet et de Neumann des modes  $\tilde{u}_{n,+}$  sur l'interface entre les deux demi-guides. Remarquer enfin que les termes sources associés à  $\mathcal{G}^d(\cdot, \mathbf{y})$  sont des séries faisant intervenir les termes sources associés aux champs  $u_{n,+}^{r,d}$  permet de conclure par linéarité du problème de transmission vis-à-vis des données.  $\square$

Nous donnons enfin une dernière propriété satisfaite par la fonction de Green qui nous sera utile pour résoudre le problème inverse.



**Proposition 6.15**

Soient  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega$  et  $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \Omega$  tels que  $x_2, y_2 \notin \{\pm h_0, \pm h_1\}$  et  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ . La fonction de Green de la jonction satisfait la relation de réciprocité :

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

*Démonstration.* Soit  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega^2$  avec  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ . Il existe  $R_0 > 0$  et  $R > 0$  suffisamment grands tels que les points  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  soient situés dans la partie de  $\Omega$  notée  $\Omega_R$  comprise entre les sections  $\Sigma_{-R_0}$  et  $\Sigma_R$ . Pour  $\mathbf{z} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ , le problème (6.22) est équivalent au problème suivant posé dans le domaine borné  $\Omega_R$  :

Trouver  $\mathcal{G}(\cdot, \mathbf{z}) \in H^1(\Omega_R)$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\partial_{x_2}(\alpha\mu\partial_{x_2}\mathcal{G}(\cdot, \mathbf{z})) - \frac{\mu}{\alpha}\partial_{x_1}^2\mathcal{G}(\cdot, \mathbf{z}) - \frac{\mu}{\alpha}k^2\mathcal{G}(\cdot, \mathbf{z}) = \delta_{\mathbf{z}} & \text{dans } \Omega_R \\ \partial_{\mathbf{n}}\mathcal{G}(\cdot, \mathbf{z}) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_R \setminus (\Sigma_{-R_0} \cup \Sigma_R) \\ -\mu_0\partial_{x_1}\mathcal{G}(\cdot, \mathbf{z}) = T^-\mathcal{G}(\cdot, \mathbf{z}) & \text{sur } \Sigma_{-R_0} \\ \frac{\mu}{\alpha}\partial_{x_1}\mathcal{G}(\cdot, \mathbf{z}) = T^+\mathcal{G}(\cdot, \mathbf{z}) & \text{sur } \Sigma_R. \end{array} \right. \quad (6.24)$$

Soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(\mathbf{z}, \varepsilon) \subset \Omega_R$  pour  $\mathbf{z} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ . Pour alléger les notations dans la preuve, on note  $\mathcal{G}_{\mathbf{z}} := \mathcal{G}(\cdot, \mathbf{z})$ . En introduisant le tenseur symétrique d'ordre 2 :

$$\underline{A} := \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\alpha} & 0 \\ 0 & \alpha\mu \end{pmatrix},$$

on remarque que l'équation satisfaite par  $\mathcal{G}_{\mathbf{z}}$  dans  $\Omega_R$  se réécrit :

$$-\operatorname{div}(\underline{A}\nabla\mathcal{G}_{\mathbf{z}}) - \frac{\mu}{\alpha}k^2\mathcal{G}_{\mathbf{z}} = \delta_{\mathbf{z}}. \quad (6.25)$$

La preuve repose principalement sur le fait que l'opérateur différentiel :

$$P\cdot := -\operatorname{div}(\underline{A}\nabla\cdot) - \frac{\mu}{\alpha}k^2\cdot,$$

est symétrique. Soit  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit pour que les boules  $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$  et  $B(\mathbf{y}, \varepsilon)$  soient dans  $\Omega_R$ , ne s'intersectent pas entre elles et n'intersectent pas les lignes horizontales de discontinuité des paramètres  $(\alpha, \mu, k)$ . On considère la fonction  $\tilde{g}_{\mathbf{y}}$  définie par :

$$\tilde{g}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) := \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{x} \in B(\mathbf{y}, \varepsilon) \\ -\mathcal{G}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \notin B(\mathbf{y}, \varepsilon), \end{cases}$$

ainsi que la fonction  $g_{\mathbf{y}} := \tilde{g}_{\mathbf{y}} + \mathcal{G}_{\mathbf{y}}$ . Pour  $v \in D(B(\mathbf{y}, 2\varepsilon))$ , on a au sens des distributions :

$$\langle P\tilde{g}_{\mathbf{y}}, v \rangle = \langle \tilde{g}_{\mathbf{y}}, Pv \rangle = - \int_{B(\mathbf{y}, 2\varepsilon) \setminus B(\mathbf{y}, \varepsilon)} \mathcal{G}_{\mathbf{y}}(Pv) d\mathbf{x},$$

grâce à la symétrie de l'opérateur  $P$ . À l'aide de la formule de Green, on montre alors que :

$$\langle P\tilde{g}_{\mathbf{y}}, v \rangle = \int_{\partial B(\mathbf{y}, \varepsilon)} (\underline{A}\nabla\mathcal{G}_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{n}) v ds(\mathbf{x}) - \int_{\partial B(\mathbf{y}, \varepsilon)} (\underline{A}\nabla v \cdot \mathbf{n}) \mathcal{G}_{\mathbf{y}} ds(\mathbf{x}), \quad (6.26)$$

où  $\mathbf{n}$  représente la normale unitaire sortante à  $B(\mathbf{y}, \varepsilon)$ . Or, nous avons :

$$\langle P\tilde{g}_{\mathbf{y}}, v \rangle = \langle Pg_{\mathbf{y}}, v \rangle - \langle P\mathcal{G}_{\mathbf{y}}, v \rangle = \langle Pg_{\mathbf{y}}, v \rangle - v(\mathbf{y}). \quad (6.27)$$

Nous prenons maintenant spécifiquement  $v = \theta\mathcal{G}_{\mathbf{x}}$ , avec  $\theta \in D(B(\mathbf{y}, 2\varepsilon))$  satisfaisant  $\theta = 1$  dans  $\overline{B(\mathbf{y}, \varepsilon)}$ . Pour ce choix particulier de  $v$ , nous avons étant donné que  $g_{\mathbf{y}}$  est à support dans  $\overline{B(\mathbf{y}, \varepsilon)}$  qui ne contient pas  $\mathbf{x}$  :

$$\langle Pg_{\mathbf{y}}, v \rangle = \langle g_{\mathbf{y}}, Pv \rangle = \langle g_{\mathbf{y}}, P\mathcal{G}_{\mathbf{x}} \rangle = 0. \quad (6.28)$$

Regrouper (6.26), (6.27) et (6.28) donne :

$$\mathcal{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \int_{\partial B(\mathbf{y}, \varepsilon)} (\underline{A}\nabla\mathcal{G}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n})\mathcal{G}_{\mathbf{y}}ds(\mathbf{z}) - \int_{\partial B(\mathbf{y}, \varepsilon)} (\underline{A}\nabla\mathcal{G}_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{n})\mathcal{G}_{\mathbf{x}}ds(\mathbf{z}). \quad (6.29)$$

En échangeant les rôles de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ , on obtient aussi :

$$\mathcal{G}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \int_{\partial B(\mathbf{x}, \varepsilon)} (\underline{A}\nabla\mathcal{G}_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{n})\mathcal{G}_{\mathbf{x}}ds(\mathbf{z}) - \int_{\partial B(\mathbf{x}, \varepsilon)} (\underline{A}\nabla\mathcal{G}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n})\mathcal{G}_{\mathbf{y}}ds(\mathbf{z}). \quad (6.30)$$

Notons  $\Omega_R^\varepsilon := \Omega_R \setminus (B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cup B(\mathbf{y}, \varepsilon))$ . Comme précédemment, nous multiplions l'équation (6.25) satisfaite par  $\mathcal{G}_{\mathbf{y}}$  par la fonction  $\mathcal{G}_{\mathbf{x}}$ , puis nous utilisons deux fois la formule de Green, mais cette fois dans le domaine  $\Omega_R^\varepsilon$ . Cela donne :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_R^\varepsilon} (\underline{A}\nabla\mathcal{G}_{\mathbf{y}} \cdot \nabla\mathcal{G}_{\mathbf{x}} - \frac{\mu}{\alpha}k^2\mathcal{G}_{\mathbf{y}}\mathcal{G}_{\mathbf{x}})dz - \int_{\partial B(\mathbf{y}, \varepsilon) \cup \partial B(\mathbf{x}, \varepsilon)} (\underline{A}\nabla\mathcal{G}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}')\mathcal{G}_{\mathbf{y}}ds(\mathbf{z}) \\ &\quad - \langle \underline{A}\nabla\mathcal{G}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}', \mathcal{G}_{\mathbf{y}} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0})} - \langle \underline{A}\nabla\mathcal{G}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}', \mathcal{G}_{\mathbf{y}} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)}, \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial B(\mathbf{y}, \varepsilon) \cup \partial B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \left( - (\underline{A}\nabla\mathcal{G}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}')\mathcal{G}_{\mathbf{y}}ds(\mathbf{z}) + (\underline{A}\nabla\mathcal{G}_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{n}')\mathcal{G}_{\mathbf{x}} \right) ds(\mathbf{z}) \\ &\quad - \langle \underline{A}\nabla\mathcal{G}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}', \mathcal{G}_{\mathbf{y}} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0})} - \langle \underline{A}\nabla\mathcal{G}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}', \mathcal{G}_{\mathbf{y}} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)} \\ &\quad + \langle \underline{A}\nabla\mathcal{G}_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{n}', \mathcal{G}_{\mathbf{x}} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0})} + \langle \underline{A}\nabla\mathcal{G}_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{n}', \mathcal{G}_{\mathbf{x}} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)}, \end{aligned} \quad (6.31)$$

où  $\mathbf{n}'$  est la normale sortante à  $\Omega_R^\varepsilon$ . Combiner les équations (6.31), (6.29) et (6.30) nous permet d'obtenir la relation :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) - \mathcal{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) &= - \langle \underline{A}\nabla\mathcal{G}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}', \mathcal{G}_{\mathbf{y}} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0})} - \langle \underline{A}\nabla\mathcal{G}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}', \mathcal{G}_{\mathbf{y}} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)} \\ &\quad + \langle \underline{A}\nabla\mathcal{G}_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{n}', \mathcal{G}_{\mathbf{x}} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0})} + \langle \underline{A}\nabla\mathcal{G}_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{n}', \mathcal{G}_{\mathbf{x}} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)}. \end{aligned}$$

En utilisant les définitions (5.27) de l'opérateur DtN à gauche  $T^-$  et (5.32) de l'opérateur DtN à droite  $T_R$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) - \mathcal{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) &= - \langle T^- \mathcal{G}_{\mathbf{x}}, \mathcal{G}_{\mathbf{y}} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0})} - \langle T_R \mathcal{G}_{\mathbf{x}}, \mathcal{G}_{\mathbf{y}} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)} \\ &\quad + \langle T^- \mathcal{G}_{\mathbf{y}}, \mathcal{G}_{\mathbf{x}} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0})} + \langle T_R \mathcal{G}_{\mathbf{y}}, \mathcal{G}_{\mathbf{x}} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Il est facile de voir avec (5.28) que l'opérateur  $T^-$  est symétrique, c'est-à-dire que pour tout  $g$  et  $h$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0})$  il satisfait  $\langle T^-g, h \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0})} = \langle T^-h, g \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R_0})}$ . Pour

voir que c'est aussi le cas pour l'opérateur  $T_R$ , nous devons revenir à sa définition à partir de la solution d'un problème de demi-guide. Pour  $g$  et  $h$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)$ , les solutions du problème de demi-guide (5.29) sont notées  $u^+(g)$  et  $u^+(h)$ . Multiplier l'équation satisfaite par  $u^+(g)$  dans le demi-guide  $\Omega_{R,+\infty} := (R, +\infty) \times \Sigma_+$  par  $u^+(h)$  puis intégrer par parties conduit à :

$$\begin{aligned} \langle T_R g, h \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)} &= \left\langle \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1} u^+(g), u^+(h) \right\rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)} \\ &= \int_{\Omega_{R,+\infty}} \left( (\underline{A} \nabla u^+(g)) \cdot \nabla u^+(h) - \frac{\mu}{\alpha} k^2 u^+(g) u^+(h) \right) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega_{R,+\infty}} \left( (\underline{A} \nabla u^+(h)) \cdot \nabla u^+(g) - \frac{\mu}{\alpha} k^2 u^+(h) u^+(g) \right) d\mathbf{x} \\ &= \langle T_R h, g \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)}, \end{aligned}$$

grâce à la symétrie du tenseur  $\underline{A}$ . Utiliser ces propriétés de symétrie des opérateurs DtN à gauche et à droite dans (6.32) nous donne  $\mathcal{G}_y(\mathbf{x}) = \mathcal{G}_x(\mathbf{y})$ , ce qui est le résultat attendu.  $\square$

**Remarque 6.16** *Nous insistons sur le fait que cette relation de réciprocité vient du choix particulier de notre fonction de Green, qui est associée à un problème symétrique. Par exemple, la fonction de Green définie par :*

$$-\frac{\alpha}{\mu} \partial_{x_2} (\alpha \mu \partial_{x_2} \mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y})) - \partial_{x_1}^2 \mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y}) - k^2 \mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y}) = \delta_{\mathbf{y}},$$

ne satisfait pas la relation de réciprocité que nous avons énoncé.

Nous venons d'obtenir toutes les propriétés sur la fonction de Green nécessaires à la formulation modale de la LSM que nous souhaitons obtenir.

## 6.2 Adaptation de la LSM modale

Revenons à la situation présentée au début de ce chapitre et illustrée avec la Figure 6.2. On considère un obstacle de Dirichlet occupant un domaine ouvert borné à frontière Lipschitz, noté  $D$  et satisfaisant  $\overline{D} \subset \Omega$ . Nous supposons en outre que l'obstacle est localisé soit dans le cœur, c'est-à-dire  $\overline{D} \subset \mathbb{R} \times (-h_0, h_0)$ , soit dans la gaine du guide, c'est-à-dire  $\overline{D} \subset \mathbb{R} \times ((-h_1, -h_0) \cup (h_0, h_1))$ . Le domaine privé du défaut est noté  $\dot{\Omega} := \Omega \setminus \overline{D}$  et est supposé connexe. Pour commencer, nous introduisons le problème générique suivant qui nous sera utile tout au long de cette section :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \tilde{H}_{\text{loc}}^1(\dot{\Omega}) \text{ tel que} \\ \left\{ \begin{array}{ll} -\partial_{x_2} (\alpha \mu \partial_{x_2} u) - \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1}^2 u - \frac{\mu}{\alpha} k^2 u = 0 & \text{dans } \dot{\Omega} \\ u = f & \text{sur } \partial D \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \\ u \text{ est sortant,} \end{cases} \quad (6.33)$$

où  $f$  est un terme source qui sera précisé le moment venu.

Soit  $\mathbf{y} \in \dot{\Omega}$ , nous considérons ensuite le problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u(\cdot, \mathbf{y}) \in \tilde{L}_{\text{loc}}^2(\dot{\Omega}) \text{ tel que} \\ \left\{ \begin{array}{l} -\partial_{x_2}(\alpha \mu \partial_{x_2} u(\cdot, \mathbf{y})) - \frac{\mu}{\alpha} \partial_{x_1}^2 u(\cdot, \mathbf{y}) - \frac{\mu}{\alpha} k^2 u(\cdot, \mathbf{y}) = \delta_{\mathbf{y}} \quad \text{dans } \dot{\Omega} \\ u(\cdot, \mathbf{y}) = 0 \quad \text{sur } \partial D \\ \partial_{\mathbf{n}} u(\cdot, \mathbf{y}) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \\ u(\cdot, \mathbf{y}) \text{ est sortant,} \end{array} \right. \end{cases} \quad (6.34)$$

où l'espace  $\tilde{L}_{\text{loc}}^2(\dot{\Omega})$  est défini par (6.23) en remplaçant  $\Omega$  par  $\dot{\Omega}$ . Le champ  $u(\cdot, \mathbf{y})$  peut être interprété comme un champ total ayant la décomposition  $u(\cdot, \mathbf{y}) = \mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y})|_{\dot{\Omega}} + u^{\text{d}}(\cdot, \mathbf{y})$ . Dans cette décomposition,  $\mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y})$  est la solution fondamentale de la jonction sans défaut, c'est-à-dire la solution du problème (6.22), et joue le rôle de champ incident. Le champ  $u^{\text{d}}(\cdot, \mathbf{y})$  est quant à lui le champ diffracté par le défaut associé à ce champ incident. Le champ  $u^{\text{d}}(\cdot, \mathbf{y})$  est solution du problème (6.33) pour  $f = -\mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y})|_{\partial D}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous aurons aussi besoin de considérer les solutions  $u_{n,+}^{\text{d}}$  du même problème (6.33) pour  $f = -u_{n,+}^{\text{r}}|_{\partial D}$ , où nous rappelons que  $u_{n,+}^{\text{r}}$  est un champ de référence gauche, c'est-à-dire la réponse de la structure saine sans défaut à un mode incident provenant du demi-guide gauche. Il est facile de voir que  $u_{n,+}^{\text{d}}$  est solution de ce problème si et seulement si le champ total  $(u_{n,+}^{\text{d}} + u_{n,+}^{\text{r}})$  est solution de (5.25) pour  $u^{\text{i}} = \tilde{u}_{n,+}^0$  dans  $\dot{\Omega}$ . Si le problème (5.25) avec  $u^{\text{i}} = 0$  n'admet pour solution que la solution triviale, alors le Théorème 5.21 nous assure que ce problème est bien posé. Cela implique que le problème (6.33) pour  $f = -u_{n,+}^{\text{r}}|_{\partial D}$  est aussi bien posé. Procéder de façon similaire nous permet de montrer que le problème (6.33) avec  $f = -\mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y})|_{\partial D}$  et par suite le problème (6.34) sont bien posés.

Nous sommes désormais en mesure de définir proprement le problème inverse. Le support des mesures est la section transverse  $\hat{\Sigma}_- := \{-R\} \times \Sigma_-$ , qui est une section du demi-guide gauche, avec  $R > 0$  choisi suffisamment grand pour que  $D$  soit localisé à droite de  $\hat{\Sigma}_-$ . Nous supposons que pour tout  $\mathbf{y} \in \hat{\Sigma}_-$ , nous mesurons  $u^{\text{d}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  pour tout  $\mathbf{x} \in \hat{\Sigma}_-$ . L'objectif du problème inverse est d'identifier l'obstacle  $D$  à partir de ces données qualifiées de multistatiques. Puisque le support des sources et des mesures est situé d'un seul côté du défaut, nos données peuvent être vues comme des données de back-scattering. Comme au chapitre 3, nous allons essayer d'identifier le défaut  $D$  à partir des données  $\{u^{\text{d}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\hat{\Sigma}_-)^2\}$  à l'aide de la Linear Sampling Method, qui repose sur l'opérateur de champ-proche  $N : L^2(\hat{\Sigma}_-) \rightarrow L^2(\hat{\Sigma}_-)$ , défini pour  $\hat{h} \in L^2(\hat{\Sigma}_-)$  par :

$$(N\hat{h})(\mathbf{x}) = \int_{\hat{\Sigma}_-} u^{\text{d}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \hat{h}(\mathbf{y}) \text{d}s(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \hat{\Sigma}_-,$$

où  $u^{\text{d}}(\cdot, \mathbf{y})$  est la solution de (6.33) pour  $f = -\mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y})|_{\partial D}$ . On définit aussi l'opérateur  $\mathcal{H} : L^2(\hat{\Sigma}_-) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$  s'écrivant pour tout  $\hat{h} \in L^2(\hat{\Sigma}_-)$  :

$$(\mathcal{H}\hat{h})(\mathbf{x}) = \int_{\hat{\Sigma}_-} \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \hat{h}(\mathbf{y}) \text{d}s(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \partial D.$$

La LSM est justifiée par le théorème suivant, dont les éléments de preuve sont semblables à ceux donnés dans la sous-section 3.2.2. Il permet de comprendre pourquoi la LSM consiste, pour chaque point  $\mathbf{z}$  d'une grille d'échantillonnage recouvrant la zone à inspecter, à résoudre l'équation de champ proche :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \hat{h}(\cdot; \mathbf{z}) \in L^2(\hat{\Sigma}_-) \text{ tel que} \\ N\hat{h}(\cdot; \mathbf{z}) = \mathcal{G}(\cdot, \mathbf{z})|_{\hat{\Sigma}_-}. \end{cases} \quad (6.35)$$

**Théorème 6.17**

L'opérateur de champ proche  $N$  est compact. Supposons ensuite que les problèmes extérieurs (6.33) soient bien posés, mais aussi que le problème intérieur :

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = 0 & \text{dans } D \\ v = 0 & \text{sur } \partial D, \end{cases}$$

n'admette que la solution triviale. On a dans ce cas l'alternative suivante.

(i) Si  $\mathbf{z} \in D$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\hat{h}_\varepsilon(\cdot; \mathbf{z}) \in L^2(\widehat{\Sigma}_-)$  tel que :

$$\|N\hat{h}_\varepsilon(\cdot; \mathbf{z}) - \mathcal{G}(\cdot; \mathbf{z})\|_{L^2(\widehat{\Sigma}_-)} \leq \varepsilon,$$

et  $\|\mathcal{H}\hat{h}_\varepsilon(\cdot; \mathbf{z})\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial D)} \rightarrow 0$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . De plus, pour  $\varepsilon > 0$  fixé, nous avons aussi :

$$\lim_{\mathbf{z} \rightarrow \partial D} \|\hat{h}_\varepsilon(\cdot; \mathbf{z})\|_{L^2(\widehat{\Sigma}_-)} = +\infty, \quad \lim_{\mathbf{z} \rightarrow \partial D} \|\mathcal{H}\hat{h}_\varepsilon(\cdot; \mathbf{z})\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial D)} = +\infty.$$

(ii) Si  $\mathbf{z} \in \Omega \setminus \overline{D}$ , alors pour toute famille de fonctions  $(\hat{h}_\varepsilon(\cdot; \mathbf{z}))_\varepsilon$  de  $L^2(\widehat{\Sigma}_-)$  vérifiant pour tout  $\varepsilon > 0$  l'inégalité :

$$\|N\hat{h}_\varepsilon(\cdot; \mathbf{z}) - \mathcal{G}(\cdot; \mathbf{z})\|_{L^2(\widehat{\Sigma}_-)} \leq \varepsilon,$$

on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\hat{h}_\varepsilon(\cdot; \mathbf{z})\|_{L^2(\widehat{\Sigma}_-)} = +\infty, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathcal{H}\hat{h}_\varepsilon(\cdot; \mathbf{z})\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial D)} = +\infty.$$

Puisque l'opérateur de champ proche est compact, la LSM consiste en pratique à résoudre une version régularisée de l'équation de champ proche (6.35) en tout point  $\mathbf{z}$  d'une grille d'échantillonnage. Nous allons maintenant pouvoir en proposer une formulation modale de la même façon que nous l'avons fait pour la jonction de deux guides fermés. Le caractère enfoui du demi-guide droit n'apparaîtra pas explicitement, mais il est encodé d'une part dans la fonction de Green de la structure et d'autre part dans les mesures de champs diffractés sur la section des mesures  $\widehat{\Sigma}_-$ . Pour obtenir cette formulation, nous projetons l'équation de champ proche sur les fonctions transverses  $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  formant une base complète de  $L^2(\widehat{\Sigma}_-)$ . Cela nous permet de proposer une "régularisation physique" qui consiste à remplacer les séries résultant de ces projections par la somme de leurs  $\tilde{N}_p$  premiers termes. Cela revient à ne garder, parmi toute l'information contenue dans les ondes incidentes et diffractées, que leur partie propagative, ou autrement dit de négliger les composantes évanescentes. Cette approximation est physiquement justifiée par le fait que la section des mesures est supposée éloignée de la jonction et du défaut. Détaillons succinctement ce que nous venons de présenter. Pour cela, nous aurons besoin pour tout  $n \in \mathbb{N}$  de la solution  $u_{n,+}^d \in \tilde{H}_{\text{loc}}^1(\dot{\Omega})$  du problème (6.19) pour  $f = -u_{n,+}^r|_{\partial D}$ . On peut alors énoncer le lemme suivant.

**Lemme 6.18**

Soit  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  et  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$  deux points de  $\hat{\Omega}$ . On a, pour  $\mathbf{y} \in \hat{\Sigma}_- = \Sigma_{-R}$  et  $x_1 > -R$ , la décomposition :

$$u^d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{\mu_0} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\tilde{\lambda}_n} u_{n,+}^d(\mathbf{x}) \tilde{u}_{n,-}(\mathbf{y}).$$

*Démonstration.* Par la Proposition 6.14, nous avons pour  $\mathbf{y} \in \Omega_-$  et  $x_1 > y_1$  la décomposition :

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{\mu_0} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\tilde{\lambda}_n} u_{n,+}^r(\mathbf{x}) \tilde{u}_{n,-}(\mathbf{y}).$$

Comme  $u^d(\cdot, \mathbf{y})$  est la solution de (6.19) pour  $f = -\mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y})|_{\partial D}$  et les champs diffractés  $u_{n,+}^d$  sont les solutions du même problème (6.19), mais pour  $f = -u_{n,+}^r|_{\partial D}$ , on en déduit la décomposition attendue par linéarité.  $\square$

Il est désormais possible de projeter l'équation de champ proche (6.35) sur la base complète  $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $L^2(\hat{\Sigma}_-)$ .

**Proposition 6.19**

Pour  $\hat{h} \in L^2(\hat{\Sigma}_-)$  et  $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \Omega$  avec  $z_1 > -R$ , l'opérateur de champ proche s'écrit :

$$N\hat{h} = -\frac{1}{\mu_0} \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2\tilde{\lambda}_n} (S_n^+)_m^- h_n \tilde{u}_n,$$

avec :

$$\hat{h} = \sum_{n \in \mathbb{N}} h_n \tilde{u}_n \quad \text{et} \quad u_{n,+}^d|_{\hat{\Sigma}_-} = \sum_{m \in \mathbb{N}} (S_n^+)_m^- \tilde{u}_m.$$

De plus, la trace de la fonction de Green sur  $\hat{\Sigma}_-$  peut s'écrire :

$$\mathcal{G}(\cdot, \mathbf{z})|_{\hat{\Sigma}_-} = \begin{cases} -\frac{1}{\mu_0} \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e^{-\tilde{\lambda}_n z_1}}{2\tilde{\lambda}_n} (u_{n,+}^r, \tilde{u}_m)_{L^2(\hat{\Sigma}_-)} \tilde{u}_n(z_2) \tilde{u}_m & \\ -\sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\tilde{\lambda}_m} (e^{\tilde{\lambda}_m(R+z_1)} - e^{-\tilde{\lambda}_m(R+z_1)}) \tilde{u}_m(z_2) \tilde{u}_m & \text{si } z_1 \in (-R, 0) \\ -\sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e^{\lambda_n z_1}}{2\lambda_n J_n} (u_{n,-}^r, \tilde{u}_m)_{L^2(\hat{\Sigma}_-)} u_n(z_2) \tilde{u}_m & \text{si } z_1 > 0, \end{cases}$$

ou alternativement :

$$\mathcal{G}(\cdot, \mathbf{z})|_{\hat{\Sigma}_-} = -\frac{1}{\mu_0} \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{e^{\tilde{\lambda}_m R}}{2\tilde{\lambda}_m} u_{m,+}^r(\mathbf{z}) \tilde{u}_m, \quad z_1 > -R.$$

*Démonstration.* L'expression modale de l'opérateur de champ proche découle directement du Lemme 6.18. Pour ce qui est de la fonction de Green, les décompositions modales s'obtiennent de la même façon que pour le Lemme 3.17 dans le cas du guide fermé en utilisant cette fois les Propositions 6.14 et 6.15.  $\square$

Grâce à la Proposition 6.19, on peut réécrire l'équation de champ proche (6.35) sous la

forme du système infini :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (h_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{C}) \text{ tel que} \\ & \frac{1}{\mu_0} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2\tilde{\lambda}_n} (S_n^+)_m^- h_n = D_m^-(\mathbf{z}), \quad \forall m \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (6.36)$$

avec :

$$D_m^-(\mathbf{z}) =: \begin{cases} -\frac{1}{\mu_0} \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{e^{-\tilde{\lambda}_p z_1}}{2\tilde{\lambda}_p} (u_{p,+}^r, \tilde{u}_m)_{L^2(\hat{\Sigma}_-)} \tilde{u}_p(z_2) \\ -\frac{1}{2\tilde{\lambda}_m} (e^{\tilde{\lambda}_m(R+z_1)} - e^{-\tilde{\lambda}_m(R+z_1)}) \tilde{u}_m(z_2) & \text{si } z_1 \in (-R, 0) \\ -\sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{e^{\tilde{\lambda}_p z_1}}{2\tilde{\lambda}_p J_p} (u_{p,-}^r, \tilde{u}_m)_{L^2(\hat{\Sigma}_-)} u_p(z_2) & \text{si } z_1 > 0, \end{cases}$$

ou :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (h_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{C}) \text{ tel que} \\ & \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2\tilde{\lambda}_n} (S_n^+)_m^- h_n = \frac{e^{\tilde{\lambda}_m R}}{2\tilde{\lambda}_m} u_{m,+}^r(\mathbf{z}), \quad \forall m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

**Remarque 6.20** *Il est important de remarquer que les deux formulations modales (6.36) et (6.37) de l'équation de champ proche font intervenir les champs de référence. En revanche, la formulation (6.37) ne fait intervenir que les champs de référence gauches, c'est-à-dire la réponse de la structure sans défaut à un mode incident provenant du demi-guide fermé gauche qui est accessible. La formulation (6.36) a l'inconvénient de faire intervenir aussi les champs de référence droits dont le sens physique est plus compliqué à trouver : en effet quel sens donner à l'envoi d'une onde provenant du demi-guide droit qui est enfoui ? De plus, cette formulation nécessite la troncature d'une série soulevant des questions supplémentaires.*

### 6.3 Expériences numériques

Dans cette dernière section, nous voulons évaluer numériquement la méthode d'imagerie développée sur des mesures synthétiques. Pour cela, nous choisissons un obstacle  $D$  et résolvons par éléments finis le problème direct (5.40) pour  $u^i = \tilde{u}_{n,+}^0$ . Afin de réduire le domaine de calcul à un domaine borné dans la direction longitudinale, nous utilisons les conditions transparentes étudiées au chapitre 5 de part et d'autre de l'obstacle  $D$ . Plus précisément nous utilisons dans le demi-guide gauche l'opérateur DtN fin  $T^-$  défini par (5.27) et dans le demi-guide droit l'opérateur DtN épais  $T_{R_0, R'_0}^\beta$  défini par (5.43). Les champs de référence qui sont les solutions de (6.20) et (6.21), sont approchés numériquement en utilisant la même méthode éléments finis et les mêmes conditions transparentes artificielles. Détaillons les paramètres de ces calculs. En ce qui concerne l'approximation par éléments finis, nous utilisons des éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}^2$  et un maillage suffisamment fin pour avoir 10 points de discrétisation par longueur d'onde dans le cœur et dans la gaine. Dans la partie enfouie, les couples  $(\lambda_n, u_m)_{n \in \mathbb{N}}$  solutions de (4.20) sont calculés en résolvant le problème aux valeurs propres généralisé (4.30) discrétisé avec des éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}^1$  sur un maillage très fin de pas  $h = 10^{-5}$  cm. Soit  $R_0 = 17$  cm, l'opérateur  $T^-$  à gauche est imposé en  $x_1 = -R_0$  et approximé en conservant les  $\tilde{N}_p$  modes propagatifs et 20 modes évanescents, ce qui est suffisant pour la plage de fréquences dans laquelle nous travaillerons



compte tenu de la vitesse de décroissance dans le domaine de calcul des modes qui ne sont pas pris en compte. L'opérateur  $T_{R_0, R'_0}^\beta$  à droite est quant à lui imposé en  $x_1 = R_0$  avec un recouvrement d'une épaisseur de 5 cm (i.e.  $R'_0 = 22$  cm). La valeur de  $\beta$  que nous choisirons dépendra quant à elle de la fréquence. En effet, il est nécessaire d'augmenter la valeur de  $\beta$  avec la fréquence pour capturer les plus petites longueurs d'ondes. Il faut toutefois être attentif à ne pas prendre  $\beta$  trop grand sous peine d'utiliser des modes parasites qui détérioreront l'approximation des solutions.

Pour les paramètres physiques de la jonction, on conserve ceux utilisés pour étudier le problème direct dans la [section 5.4](#). Pour rappel, nous y avons considéré une plaque d'acier de demi-épaisseur  $h_0 = 5$  cm partiellement enfouie dans du béton tronqué transversalement par une PML commençant à une demi-hauteur  $h_1 = 7,5$  cm et prenant fin à une demi-hauteur  $h_2 = 12,5$  cm.

Faisons à ce stade une remarque importante. La résolution du problème direct (i.e. le calcul des champs diffractés par le défaut  $u_{n,+}^d$ ) et celle du problème inverse (i.e. le calcul de la fonction de Green estimée à l'aide des champs de référence  $u_{n,+}^r$  et  $u_{n,-}^r$ ) font intervenir toutes les deux des PML. Pour ne pas effectuer ce qui pourrait s'apparenter à un crime inverse, nous choisissons d'utiliser deux profils de PML différents. Pour le problème direct (respectivement inverse), nous utilisons le profil parabolique (respectivement abrupt) de la [section 5.4](#). Pour se rapprocher le plus possible d'une configuration de contrôle non destructif réelle, nous bruitons les données simulées suivant la procédure décrite dans la [sous-section 3.4.1](#).

Expliquons maintenant comment discrétiser les systèmes (6.36) et (6.37) en vue de leur implémentation. On rappelle que ces deux systèmes ne peuvent pas être inversés directement puisque l'opérateur de champ proche sous-jacent  $N$  est compact. En pratique, il est naturel d'approcher les systèmes infinis (6.36) et (6.37) en restreignant  $n$  et  $m$  à  $\llbracket 0, \tilde{N}_p - 1 \rrbracket$ , ce qui signifie qu'on ne prend en compte que les  $\tilde{N}_p$  modes propagatifs du guide gauche. La troncature de la série indexée par  $p$  est quant à elle moins évidente puisque nous rappelons que nous sommes dans une configuration pour laquelle il n'y a pas de modes propagatifs. Nous faisons le choix physique de ne conserver dans la série indexée par  $p$  pour  $z_1 \in (-R, 0)$  que les  $\tilde{N}_p$  premiers termes correspondant aux modes propagatifs, et dans celle pour  $z_1 > 0$  que les  $\tilde{N}_p$  modes à fuite ayant les plus petites valeurs de  $|\Re(\lambda_p)|$ . Ce dernier choix est motivé par le fait que les premiers modes à fuite dans  $\Omega_+$  peuvent être interprétés comme les modes propagatifs dans  $\Omega_-$  perturbés par l'introduction du milieu environnant (se référer pour cela à [[Gou10](#), Section 2.1.3]). Nous ajoutons à cette régularisation modale physique une régularisation de type Tikhonov qui est importante à haute fréquence, et pour laquelle le paramètre de régularisation est choisi en fonction du niveau de bruit.

Nous concluons ces remarques préliminaires en mentionnant que nous visualiserons la même fonction indicatrice définie par (3.16) que pour la jonction de deux guides fermés.

### 6.3.1 Choix de la fonction de Green

On commence par ne considérer qu'un défaut localisé dans le cœur de la structure. La fréquence est ici  $\omega = 12,562 \cdot 10^5$  rad.Hz, ce qui correspond à  $\tilde{N}_p = 13$  modes propagatifs dans le demi-guide gauche. L'amplitude relative de bruit est de  $\sigma = 0,1$  (se référer à la [sous-section 3.4.1](#) pour plus de détails). Sur la Figure 6.4, nous visualisons la reconstruction de l'obstacle pour les deux équations de champ proche (6.36) et (6.37) résolues numériquement en suivant la procédure détaillée ci-dessus. On peut aussi y voir, à titre comparatif, un résultat d'imagerie obtenu en utilisant la fonction de Green du guide fermé gauche; il faut pour cela remplacer  $\mathcal{G}(\cdot, z)_{|\tilde{\Sigma}_-}$  par  $\tilde{G}(\cdot, z)_{|\tilde{\Sigma}_-}$  dans (6.35). Cela revient à négliger le milieu environnant dans la partie enfouie de la structure. Nous remarquons que les équations de



champ proche (6.36) et (6.37) donnent des images de qualités comparables, qui sont sans surprise de meilleure qualité que celle obtenue avec la mauvaise fonction de Green. On s'attend à ne plus du tout être en mesure de détecter de défaut avec cette dernière lorsque l'obstacle est enfoui loin de l'interface.

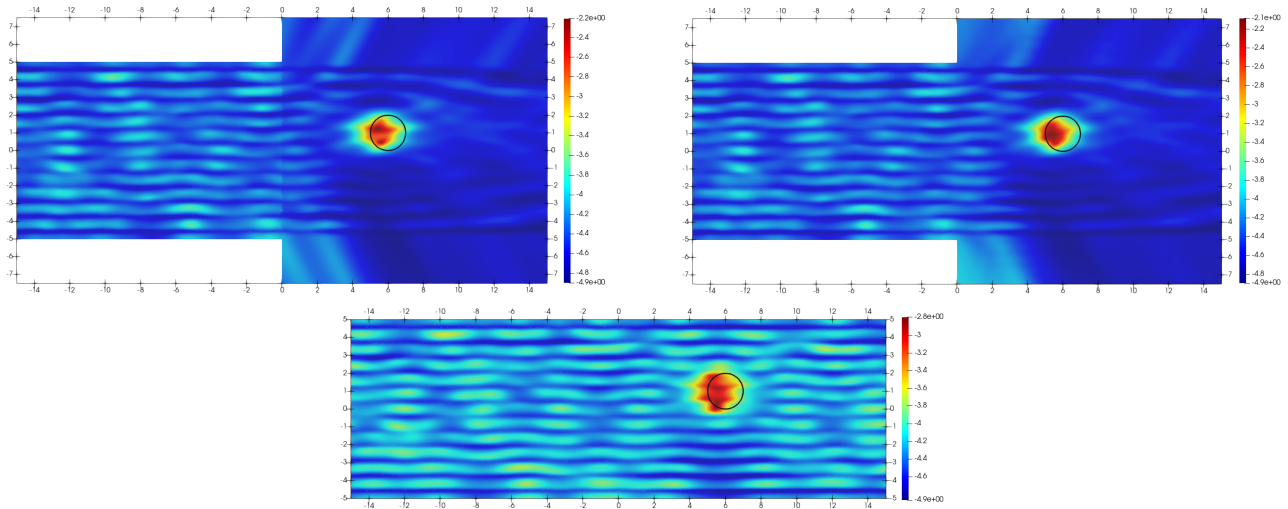


FIGURE 6.4: Choix de la fonction de Green. En haut à gauche : résolution de (6.36), en haut à droite (6.37) et en bas : résolution de l'équation de champ proche avec la fonction de Green  $\tilde{G}$  du guide fermé gauche.

Une autre question qui se pose pour l'équation de champ proche (6.36) est le choix du rang de troncature de la fonction de Green lorsque  $z_1 > 0$ . Nous avons précédemment expliqué qu'il était intuitif de ne conserver dans la série que les  $\tilde{N}_p$  termes associés aux premiers modes à fuite. Cette intuition est appuyée par la Figure 6.5 sur laquelle on voit que prendre un mode à fuite en moins (i.e. un mode à fuite associé à un mode propagatif du guide gauche n'est pas pris en compte) ou en plus (i.e. un mode à fuite associé à un mode évanescent du guide gauche est pris en compte) détériore la qualité de la reconstruction.

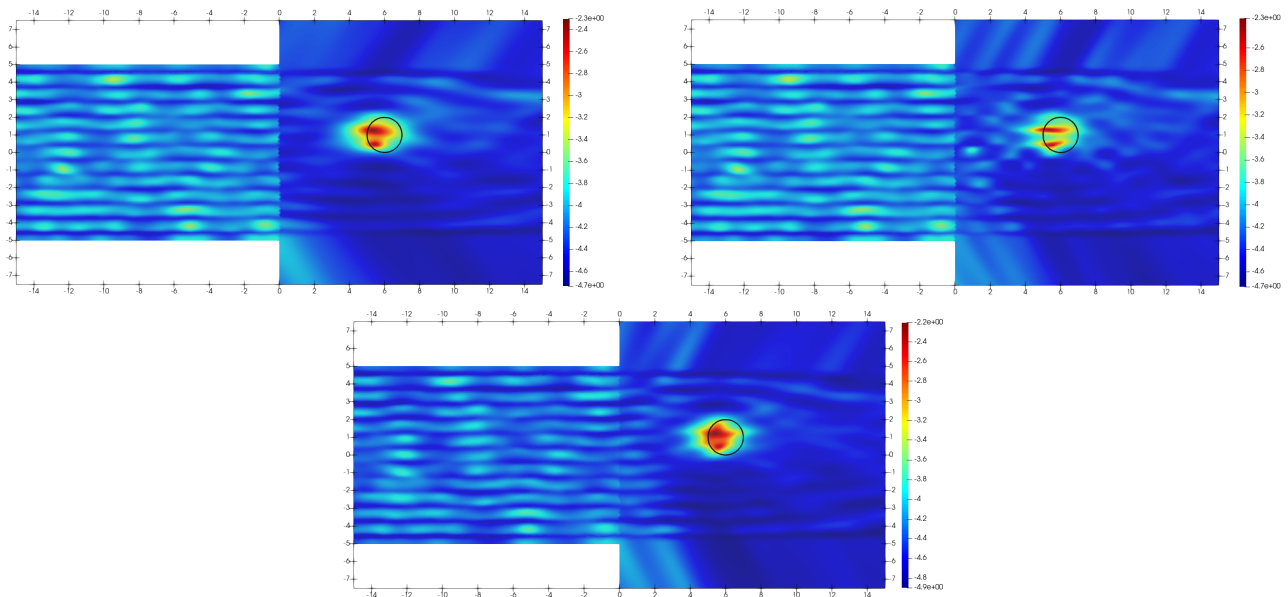


FIGURE 6.5: Troncature de la fonction de Green utilisée dans (6.36) pour  $z_1 > 0$ . Rang de troncature en haut à gauche :  $\tilde{N}_p - 1$ , en haut à droite :  $\tilde{N}_p + 1$  et en bas :  $\tilde{N}_p$ .

### 6.3.2 Impact de la fréquence

Nous analysons ensuite l'impact de la fréquence  $\omega$  sur la qualité de la reconstruction. On fixe le niveau de bruit relatif à  $\sigma = 0, 1$  et on compare sur la Figure 6.6 les résultats obtenus pour les fréquences  $\omega = 6, 28.10^5$  rad.Hz,  $\omega = 12, 56.10^5$  rad.Hz et enfin  $\omega = 25, 13.10^5$  rad.Hz correspondant à  $\tilde{N}_p = 7$ ,  $\tilde{N}_p = 13$  et  $\tilde{N}_p = 26$ . Nous faisons le même constat qu'au chapitre 3, à savoir que la qualité de reconstruction s'améliore lorsque la fréquence augmente, à condition que le maillage utilisé pour résoudre le problème direct et pour calculer les champs de référence soit suffisamment fin. De plus, on voit bien que la partie droite de l'obstacle est moins bien reconstruite que celle de gauche, ce qui est un effet d'imagerie connu en configuration de back-scattering (les mesures ne sont en effet effectuées qu'au niveau du demi-guide gauche).

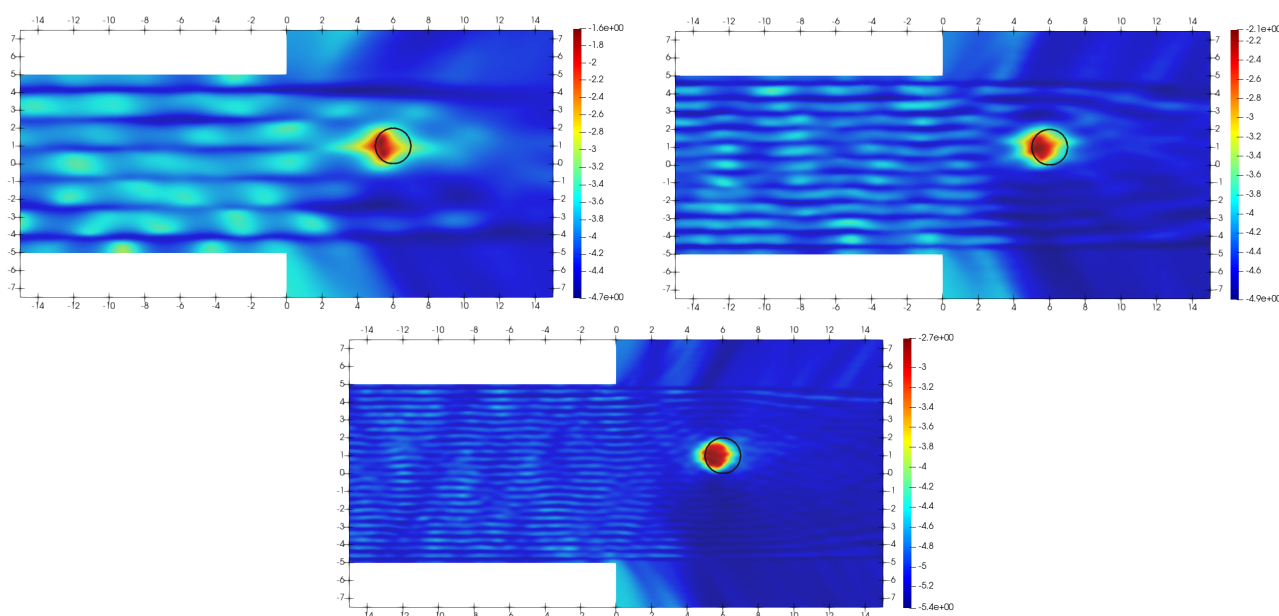


FIGURE 6.6: Impact de la fréquence. En haut à gauche :  $\tilde{N}_p = 7$ , en haut à droite :  $\tilde{N}_p = 13$  et en bas :  $\tilde{N}_p = 26$ .

### 6.3.3 Impact du bruit

Illustrons l'impact du niveau de bruit dans les mesures sur la qualité de l'imagerie. Pour  $\omega = 21, 99.10^5$  rad.Hz correspondant à  $\tilde{N}_p = 22$ , on teste différentes amplitudes de bruit : plus précisément 1%, 10% et enfin 20% de bruit. Les résultats d'imagerie sont montrés sur la Figure 6.7. Ils nous permettent de voir que la reconstruction donnée par la LSM est très robuste au bruit Gaussien ponctuel introduit, qui il faut le préciser, est relativement simple par rapport à ce qu'on peut rencontrer dans des applications réelles.

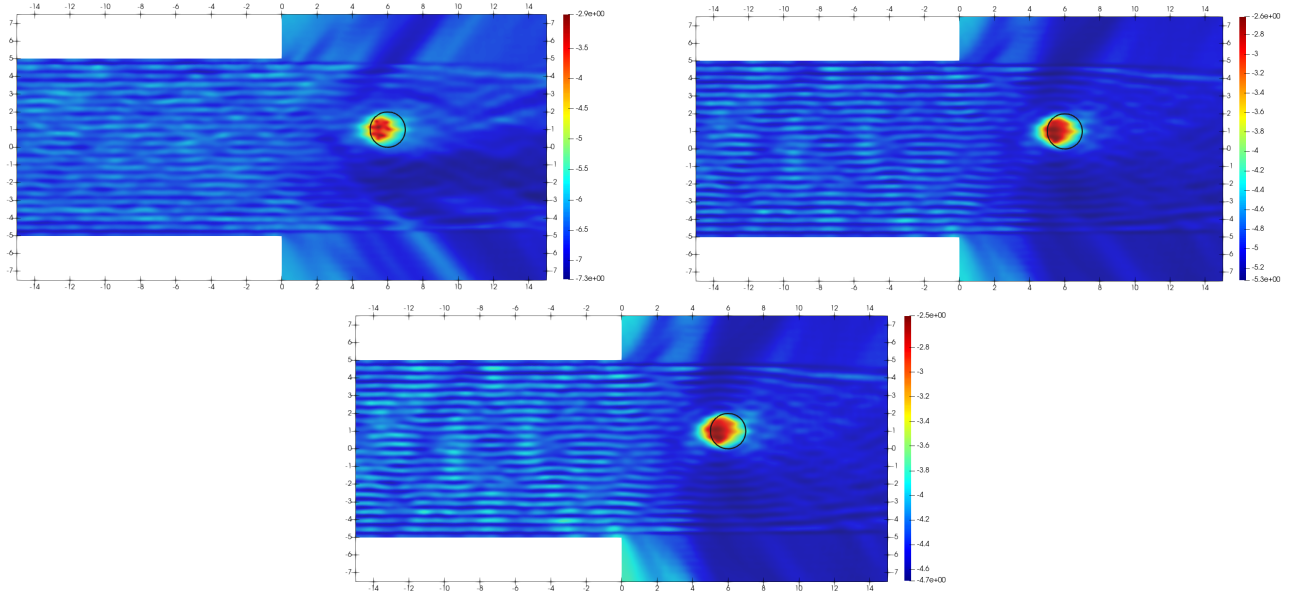


FIGURE 6.7: Impact du bruit. En haut à gauche :  $\sigma = 0,01$ , en haut à droite :  $\sigma = 0,1$  et en bas :  $\sigma = 0,2$ .

### 6.3.4 Impact de la distance de l'obstacle à la jonction

Du point de vue du contrôle non destructif des structures enfouies, il est d'une grande importance d'évaluer numériquement l'impact de la distance d'un défaut à la jonction sur sa qualité de reconstruction. Cette étude conditionnera en effet l'utilisation de la méthode proposée dans certaines applications. Rappelons que les champs diffractés  $u_{n,+}^d$  satisfont le problème (5.25) pour  $u^i = \tilde{u}_{n,+}^0$ . Selon le Théorème 5.23 et la propriété (4.29) sur les nombres d'ondes longitudinaux  $(\lambda)_{n \in \mathbb{N}}$ , les champs diffractés  $u_{n,+}^d$  sont exponentiellement décroissants lorsque  $x_1 \rightarrow +\infty$ . Ce phénomène dû à la fuite de l'énergie dans la gaine nous conduit à nous attendre à ce que la qualité de la reconstruction diminue lorsque la distance entre le défaut et la jonction augmente. Pour illustrer cette propriété, nous montrons avec la Figure 6.8 que cette distance a bien le rôle attendu sur la qualité de reconstruction pour un ou deux obstacles (avec un fixe dans le second cas). On prend  $\omega = 21,99 \cdot 10^5$  rad.Hz, c'est-à-dire  $\tilde{N}_p = 22$  et un niveau de bruit relatif égal à  $\sigma = 0,1$ . Sur la colonne de droite, on peut voir lorsqu'il y a deux obstacles que celui qui est le plus éloigné de l'interface entre les deux demi-guides est moins bien reconstruit que le premier. Le contraste de l'image au niveau de l'obstacle le plus éloigné de la jonction est en effet amoindri en présence d'un autre obstacle plus proche de la jonction. Il est donc plus difficile de le distinguer du milieu non endommagé environnant.

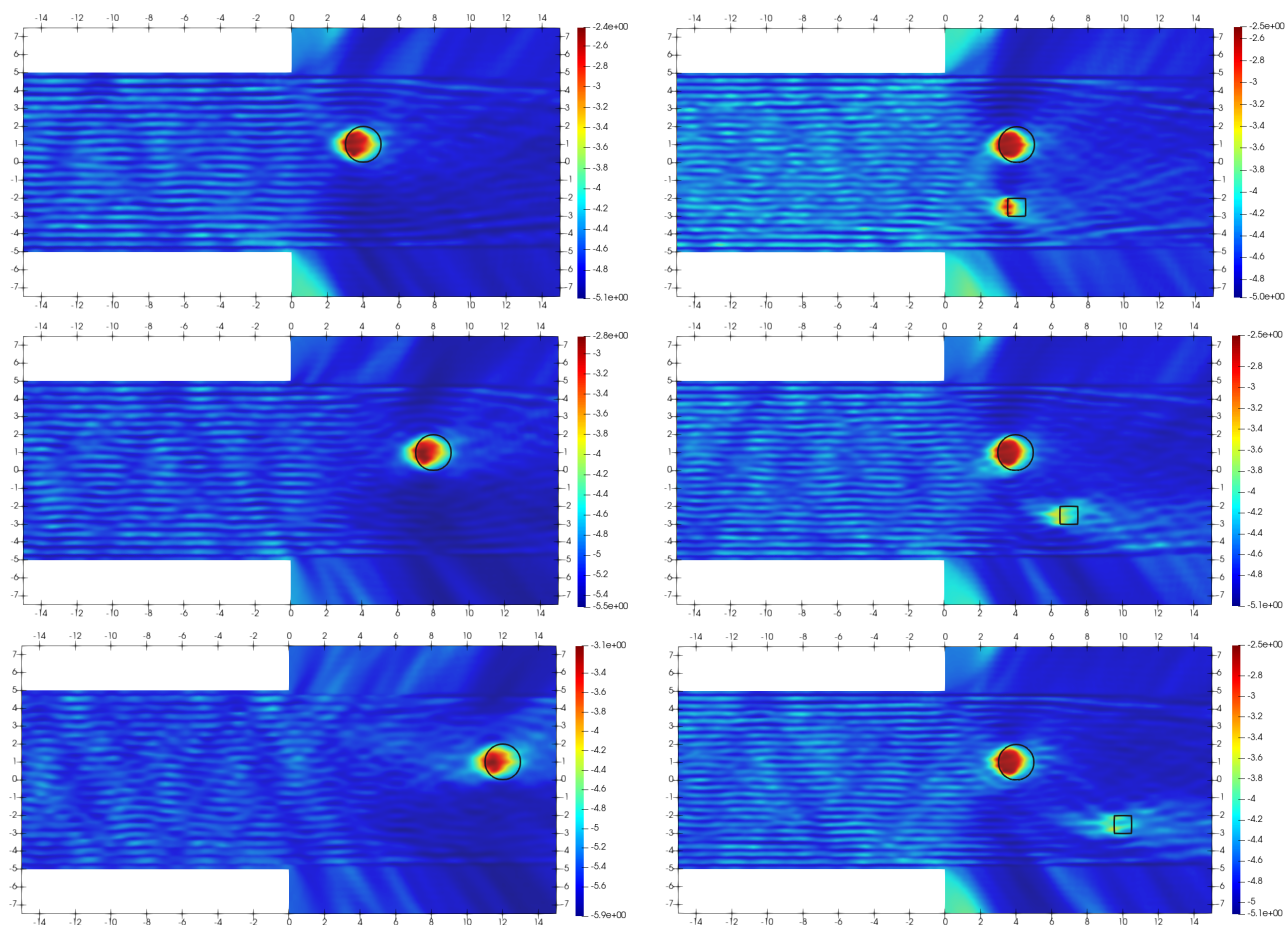


FIGURE 6.8: Influence de la distance entre les défauts et la jonction sur la qualité de reconstruction. Gauche : un défaut, droite : deux défauts, dont un est fixe.

### 6.3.5 Défauts dans la gaine

Nous concluons cette série d'expériences numériques en essayant de tester s'il est aussi possible de détecter et localiser des défauts dans la gaine de la partie enfouie de la structure. Pour  $\omega = 21,99 \cdot 10^5$  rad.Hz, c'est-à-dire  $\tilde{N}_p = 22$  et  $\sigma = 0,1$ , nous montrons sur la Figure 6.9 des résultats d'identification obtenus avec un ou deux obstacles, dont l'un au moins est localisé dans la gaine. Les obstacles situés dans la gaine ne sont pas aussi bien reconstruits que ceux dans le cœur. La raison pour cela est que lorsqu'un obstacle est situé dans le cœur, la reconstruction bénéficie des réflexions multiples des ondes avec l'interface entre la gaine et le cœur. Ces réflexions sont beaucoup moins nombreuses pour un obstacle dans la gaine, car une partie des ondes fuit directement à l'infini dans la direction transverse sans réflexion.

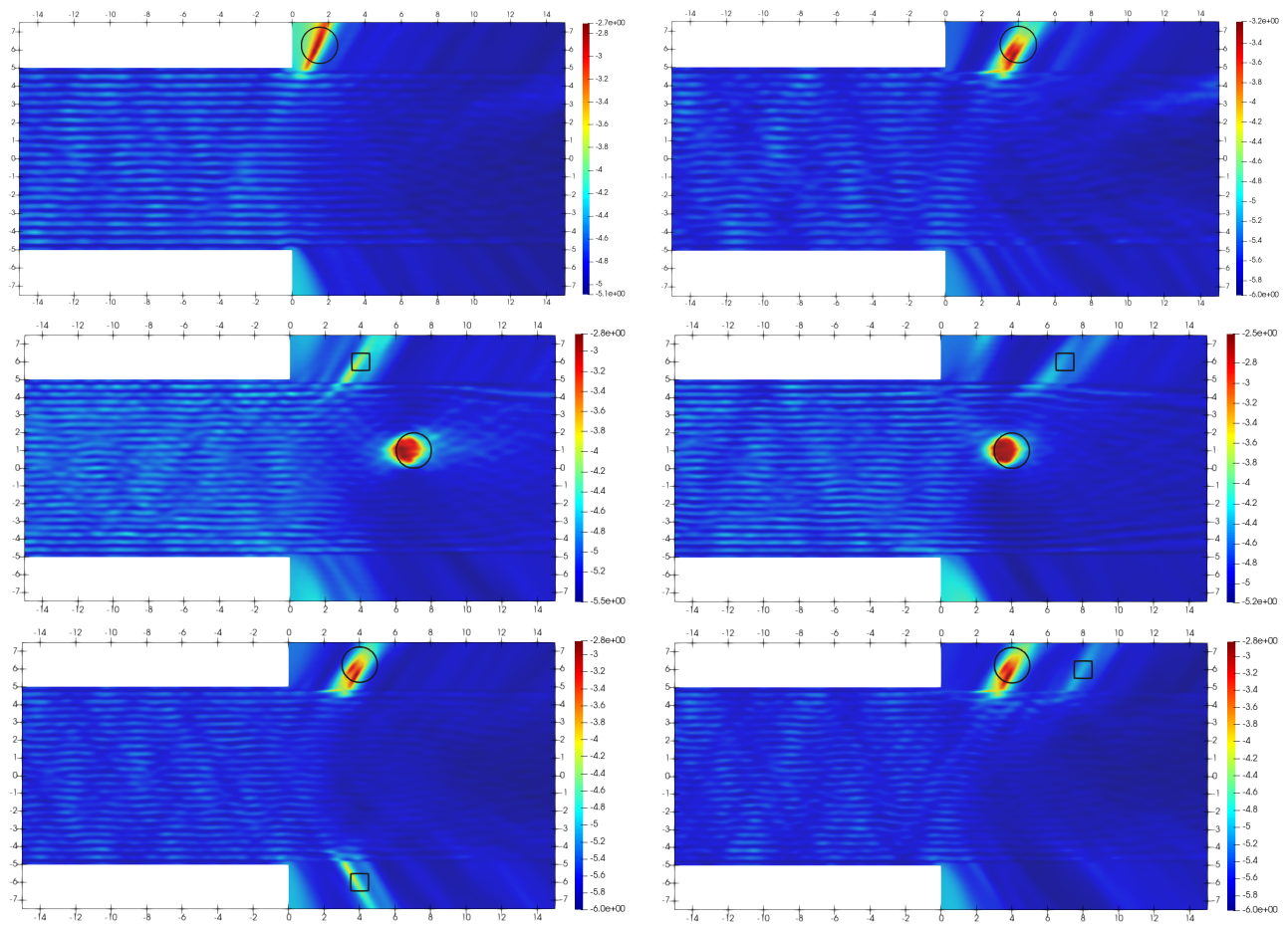


FIGURE 6.9: Haut : identification d'un défaut dans la gaine, milieu et bas : identification de deux défauts dont l'un au moins est dans la gaine.

## **Troisième partie**

# **Ondes élastiques dans un guide partiellement immergé**



Dans la seconde partie de ce manuscrit, nous nous sommes intéressés à la propagation des ondes acoustiques, pouvant représenter par exemple en élasticité les ondes scalaires SH, dans une structure élancée partiellement enfouie. Pour étudier ce problème, nous avons conduit dans un premier temps au [chapitre 4](#) une analyse modale de la partie enfouie de la structure (l'analyse modale de la partie à l'air libre ayant quant à elle été conduite au [chapitre 1](#)). Nous avons vu qu'il peut exister dans ces structures des modes guidés, qui se propagent dans la direction longitudinale sans pertes dans le milieu environnant. Il existe aussi d'autres modes, dits de radiation, qui se propagent ou décroissent exponentiellement dans la direction axiale tout en rayonnant de l'énergie. Du point de vue spectral, nous avons vu que les modes guidés correspondent au spectre discret, tandis que les modes de radiation au spectre essentiel. Dans un second temps, nous avons mis en évidence des objets appelés résonances du problème, qui nous ont permis de définir les modes à fuite, qui sont exponentiellement décroissants dans la direction longitudinale de la structure et exponentiellement croissants dans sa direction transverse. Cette croissance exponentielle dans la direction transverse, traduisant une accumulation de l'énergie à l'infini en régime harmonique, a pour conséquence que les résonances ne sont pas des objets spectraux sont donc difficiles à calculer. L'introduction de couches parfaitement adaptées (Perfectly Matched Layers) dans la direction transverse nous a permis ensuite de manipuler les résonances comme des objets spectraux, puisqu'elles ont pour effet de rendre les modes à fuite exponentiellement décroissants dans la direction transverse. Mentionnons que les PML ont de plus pour effet de faire tourner le spectre essentiel. Pour approcher tous les modes mentionnés ci-dessus, nous avons tronqué les PML initialement infinies et avons recherché les modes approchés en résolvant un problème aux valeurs propres généralisés. En acoustique, nous avons défini rigoureusement les modes à fuite à partir du problème avec PML infinies. Nous ne ferons pas ce travail particulièrement difficile dans ce nouveau cas encore plus complexe. Dans un second temps, nous nous sommes intéressés au [chapitre 5](#) à la résolution de problèmes de diffraction direct dans les structures partiellement enfouies tronquées avec des PML dans la direction transverse. Ce travail a consisté principalement en deux points. Le premier étant de montrer le caractère bien posé des problèmes de diffraction directs à l'aide de la théorie de Kondratiev. Le second étant d'approcher la solution en bornant le domaine dans la direction longitudinale à droite à l'aide d'un opérateur Dirichlet-to-Neumann avec recouvrement. Le problème de diffraction inverse a quant à lui été résolu au [chapitre 6](#) à l'aide d'une nouvelle formulation modale de la Linear Sampling Method, obtenue en décomposant la fonction de Green de la structure totale sur des objets que nous avons appelés champs de référence et en utilisant une propriété de symétrie satisfaite par la fonction de Green. Des résultats d'identification numériques ont enfin été présentés.

Dans cette dernière partie du manuscrit, nous souhaitons nous intéresser au cas plus complexe, mais plus réaliste, de la propagation des ondes élastiques dans un guide partiellement immergé. Par exemple, nous considérons une plaque, un tuyau ou un câble partiellement immergé dans un fluide. Comme dans la [Partie II](#), nous allons donc voir la structure totale comme la jonction de deux guides d'ondes. Plus précisément, nous considérons à gauche un demi-guide fermé élastique occupant le domaine  $\Omega_-^s := (-\infty, 0) \times \Sigma^s$  où  $\Sigma^s$  est un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^d$  avec  $d = 1$  en 2D ou  $d = 2$  en 3D. Le bord de ce demi-guide est noté  $\Gamma_-^s := (-\infty, 0) \times \partial\Sigma^s$ . À droite, nous avons un demi-guide ouvert  $\Omega_+^s = (0, +\infty) \times \mathbb{R}^d$  constitué d'un cœur élastique occupant le domaine  $\Omega_+^s := (0, +\infty) \times \Sigma^s$ , qui est le prolongement du demi-guide  $\Omega_-^s$ , et d'un milieu environnant fluide que nous appelons gaine occupant le domaine  $\Omega_+^{f,\infty} := (0, +\infty) \times \Sigma^{f,\infty}$ , où la section transverse  $\Sigma^{f,\infty} := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Sigma^s}$  est non bornée. L'interface entre le cœur élastique et la gaine fluide est noté  $\Gamma_+^{sf} := \partial\Omega_+^s \cap \partial\Omega_+^{f,\infty} = (0, +\infty) \times \partial\Sigma^s$ .

L'interface du fluide avec l'air libre à gauche est noté  $\Sigma_0^{f,\infty} := \{0\} \times \Sigma^{f,\infty}$ . Pour résumer, on a donc à droite  $\Omega_+^\infty = \Omega_+^s \cup \Gamma_+^{sf} \cup \Omega_+^{f,\infty}$ . Le domaine solide total sera noté  $W^s := \Omega_-^s \cup \Sigma_0^s \cup \Omega_+^s$ , avec  $\Sigma_0^s := \{0\} \times \Sigma^s$ . Un point  $\mathbf{x}$  de l'espace a enfin ses coordonnées notées  $\mathbf{x} = (x_1, \mathbf{x}_\Sigma)$  avec  $\mathbf{x}_\Sigma = x_2 \in \mathbb{R}$  en coordonnées cartésiennes 2D et  $\mathbf{x}_\Sigma = (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2$  en coordonnées cartésiennes 3D, et où  $x_1 \in \mathbb{R}$  représente l'abscisse du point dans la direction longitudinale de la structure. La configuration que nous venons de décrire est représentée dans un cas 2D sur la Figure I3.1.

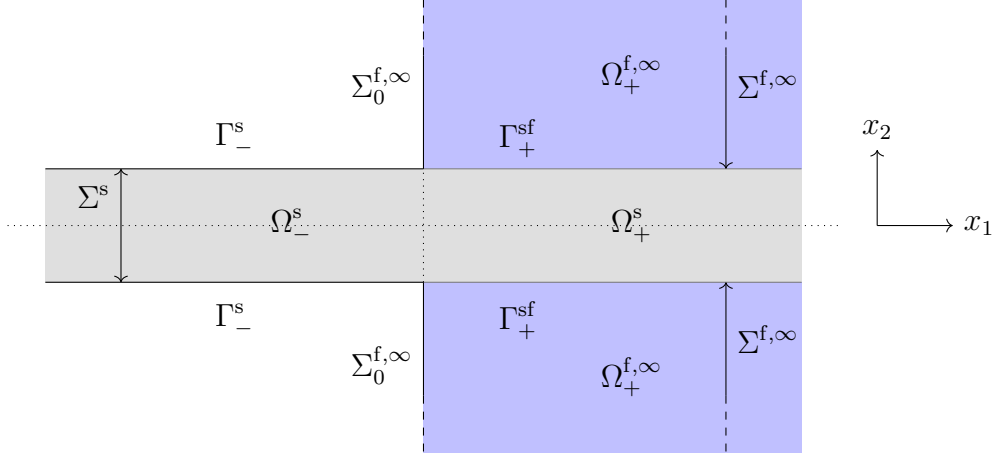


FIGURE I3.1: Géométrie 2D d'un guide partiellement immergé.

Le solide est supposé homogène, isotrope, de densité  $\rho_s$  et de coefficients de Lamé  $\lambda_s$  et  $\mu_s$ . Ceci nous permet de définir la vitesse des ondes de pression  $c_p := \sqrt{(\lambda_s + 2\mu_s)/\rho_s}$  et celle des ondes de cisaillement  $c_s := \sqrt{\mu_s/\rho_s}$ . Le milieu fluide est quant à lui supposé parfait, compressible et homogène de densité  $\rho_f$ . Les ondes acoustiques se propagent à la vitesse  $c_f := \sqrt{\lambda_f/\rho_f}$ , où  $\lambda_f$  est le premier coefficient de Lamé du fluide. Toutes ces constantes sont supposées strictement positives. On choisit de décrire une onde à l'aide de son champ de déplacement  $\hat{\mathbf{u}}$  dans la partie solide et à l'aide de son potentiel des vitesses  $\hat{\varphi}$  dans la partie fluide. Nous verrons plus tard que ce choix permet l'étude d'un problème symétrique qui simplifiera l'analyse du problème (se référer à [Dah01] pour une discussion plus précise de ce choix). Le champ de déplacement dans le solide est gouverné par l'équation :

$$\rho_s \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{u}}}{\partial t^2} - \text{div}(\underline{\sigma}(\hat{\mathbf{u}})) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in W^s \times \mathbb{R}^+,$$

où dans le cas d'un solide isotrope le tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}(\hat{\mathbf{u}})$  est donné par la loi de Hooke :

$$\underline{\sigma}(\hat{\mathbf{u}}) = \lambda_s \text{div}(\hat{\mathbf{u}}) \underline{\text{Id}} + 2\mu_s \underline{\epsilon}(\hat{\mathbf{u}}), \quad (\text{I3.1})$$

dans laquelle  $\underline{\text{Id}}$  est le tenseur identité et le tenseur des déformations linéarisé  $\underline{\epsilon}(\hat{\mathbf{u}})$  s'écrit :

$$\underline{\epsilon}(\hat{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} (\nabla \hat{\mathbf{u}} + \nabla \hat{\mathbf{u}}^t),$$

Le potentiel des vitesses est quant à lui gouverné dans le fluide par l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial t^2} - c_f^2 \Delta \hat{\varphi} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega_+^{f,\infty} \times \mathbb{R}^+.$$



Les champs  $\widehat{\mathbf{u}}$  et  $\widehat{\varphi}$  sont couplés sur l'interface entre le solide et le fluide par une condition dynamique de continuité de la contrainte normale :

$$\underline{\sigma}(\widehat{\mathbf{u}})\mathbf{n}_s = \rho_f \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial t} \mathbf{n}_s, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_+^{\text{sf}} \times \mathbb{R}^+,$$

ainsi qu'une condition cinématique de glissement :

$$\frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}_s = \nabla \widehat{\varphi} \cdot \mathbf{n}_s, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_+^{\text{sf}} \times \mathbb{R}^+,$$

où  $\mathbf{n}_s$  est la normale unitaire sortante à  $W^s$ . La normale unitaire sortante à  $\Omega_+^{\text{f},\infty}$  est quant à elle notée  $\mathbf{n}_f$ . Ces normales vérifient sur  $\Gamma_+^{\text{sf}}$  l'égalité  $\mathbf{n}_s = -\mathbf{n}_f$ . On se place maintenant en régime harmonique, ce qui signifie que les ondes sont recherchées sous la forme :

$$\widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \Re e(\mathbf{u}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}), \quad \widehat{\varphi}(\mathbf{x}, t) = \Re e(\varphi(\mathbf{x})e^{-i\omega t}),$$

pour une pulsation angulaire réelle  $\omega$  donnée. Le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  est alors gouverné par l'équation :

$$\text{div}(\underline{\sigma}(\mathbf{u})) + \omega^2 \rho_s \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in W^s, \quad (\text{I3.2})$$

et le potentiel des vitesses par :

$$\Delta \varphi + k_f^2 \varphi = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_+^{\text{f},\infty}, \quad (\text{I3.3})$$

où  $k_f := \omega/c_f$  est le nombre d'onde dans le fluide. Les conditions de couplage entre le solide et le fluide deviennent alors sur  $\Gamma_+^{\text{sf}}$  :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}_s &= -i\omega \rho_f \varphi \mathbf{n}_s \\ -i\omega(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s) &= \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_s. \end{aligned}$$

**Remarque I3.1** *Pour des raisons techniques que nous expliquerons le moment venu, nous serons parfois amenés à faire le changement de variable  $i\varphi \rightarrow \varphi$  pour faire disparaître le nombre imaginaire  $i$  des conditions de couplage. L'équation de Helmholtz homogène (I3.3) est inchangée, mais les équations de couplage se réécriront :*

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}_s &= -\omega \rho_f \varphi \mathbf{n}_s \\ \omega(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s) &= \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_s. \end{aligned}$$

Le bord extérieur du demi-guide élastique gauche est libre, ce qui s'écrit :

$$\underline{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}_s = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_-^s.$$

On impose enfin que le bord extérieur du domaine fluide soit rigide, ce qui se traduit sur le potentiel des vitesses par la condition :

$$\partial_{\mathbf{n}_f} \varphi = 0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_0^{\text{f},\infty}.$$

**Remarque I3.2** *Le cas plus réaliste d'une surface libre peut aussi être traité en imposant la condition de Dirichlet homogène  $\varphi = 0$  sur  $\Sigma_0^{\text{f},\infty}$ . Il faut alors prendre en compte cette condition essentielle dans les espaces fonctionnels que nous utiliserons pour étudier mathématiquement les problèmes de diffraction dans la structure considérée, ce que nous souhaitons éviter pour ne pas alourdir notre étude.*

**Remarque I3.3** Lorsque nous parlerons de configuration 2D, nous regarderons le cas de la propagation des ondes dans une plaque. En d'autres termes, nous supposons que les ondes ne se propagent pas dans la direction orthogonale au plan  $x_3 = 0$ , ce qui se traduit dans les équations par l'indépendance des champs vis-à-vis de  $x_3$ . Dans ce cas, on peut voir que les ondes polarisées selon  $x_3$ , dites ondes SH, sont découplées des autres. Par soucis d'exhaustivité et pour ne pas avoir à distinguer les cas 2D et 3D, nous prendrons quand même en compte ces ondes qui sont scalaires. Ainsi, le champ de déplacement sera en 2D et 3D un champ  $\mathbf{u} : W^s \rightarrow \mathbb{C}^3$ .

L'étude de la propagation des ondes dans un guide élastique fermé a fait l'objet d'une littérature très riche. Nous allons donc nous concentrer principalement dans cette partie sur l'étude de la propagation des ondes dans la partie immergée de la structure. En effet, une fraction de l'énergie transportée par les ondes élastiques qui se propagent dans le cœur de la structure fuit dans le milieu fluide environnant. Pour nous ramener à un domaine borné dans la direction transverse tout en prenant en compte cette fuite d'énergie, nous introduisons des PML dans la gaine, c'est-à-dire ici dans le fluide, de la même manière que dans la **Partie II**. Le fluide occupe alors désormais le domaine  $\Omega_+^f := (0, +\infty) \times \Sigma^f$  borné transversalement par la PML. On note alors  $\Sigma_0^f := \{0\} \times \Sigma^f$  la restriction de  $\Sigma_0^{f,\infty}$  à sa partie bornée par la PML et  $\Gamma_+^{\text{pml}} := (0, +\infty) \times (\partial\Sigma^f \setminus \partial\Sigma^s)$  le bord extérieur de la PML. La configuration approchée est représentée dans un cas 2D sur la Figure I3.2. L'équation de Helmholtz dilatée s'écrit de façon

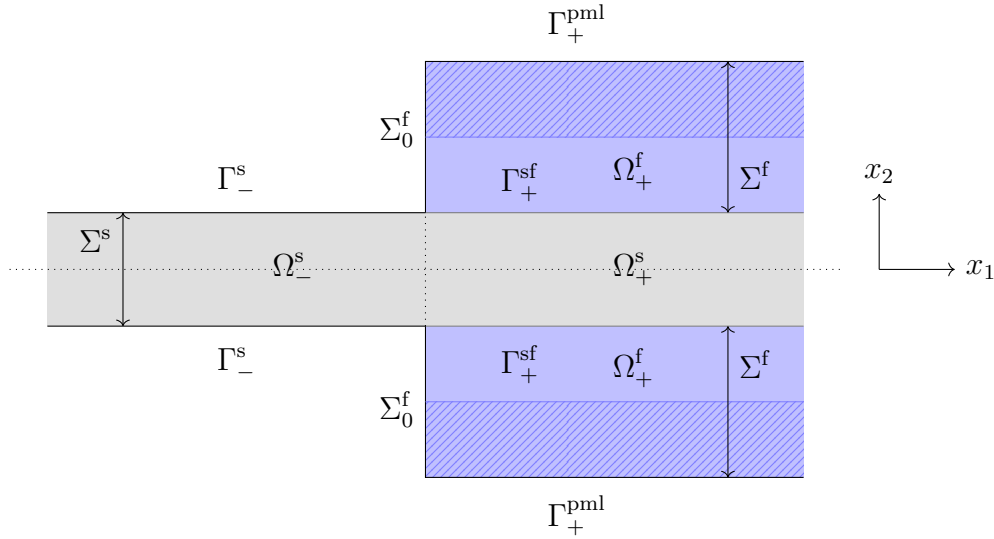


FIGURE I3.2: Géométrie 2D d'un guide partiellement immergé tronqué dans la direction transverse par des PML bornées.

différente selon la dimension et le type de profil de PML retenu. Nous verrons cependant dans la **section 7.3** qu'il est possible de l'écrire sous la forme générique :

$$\operatorname{div}(\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma} \nabla \varphi) + b^{\alpha\Sigma} k_f^2 \varphi = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_+^f,$$

où le tenseur  $\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma}$  et la fonction scalaire  $b^{\alpha\Sigma}$  dépendront de la dimension et du profil de PML. Dans tous les cas, nous imposerons en bout de PML la condition de Neumann homogène :

$$\partial_{\mathbf{n}_f} \varphi = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_+^{\text{pml}},$$

où  $\mathbf{n}_f$  représente cette fois la normale unitaire sortante au domaine  $\Omega_+^f$ .

**Remarque I3.4** *Il aurait été plus naturel d'imposer l'annulation de la dérivée conormale  $(\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma} \nabla \varphi) \cdot \mathbf{n}_f$  au bout de la PML. Cependant, les propriétés satisfaites par le tenseur  $\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma}$  (diagonal à coefficients qui ne s'annulent pas) ainsi que les types de PML retenus (cartésien ou radial) nous permettront de voir que l'annulation de celle-ci est équivalente à l'annulation de la dérivée normale. Nous préférons donc imposer l'annulation de cette dernière en bout de PML pour simplifier l'écriture du problème.*

Pour résumer, le couple  $(\mathbf{u}, \varphi)$  est gouverné dans la structure partiellement immergée tronquée transversalement par des PML par le système d'équations générique :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div}(\underline{\sigma}(\mathbf{u})) + \omega^2 \rho_s \mathbf{u} = 0 & \text{dans } W^s \\ \underline{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n}_s = 0 & \text{sur } \Gamma_-^s \\ \mathbf{div}(\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma} \nabla \varphi) + b^{\alpha\Sigma} k_f^2 \varphi = 0 & \text{dans } \Omega_+^f \\ \partial_{\mathbf{n}_f} \varphi = 0 & \text{sur } \Sigma_0^f \cup \Gamma_+^{\text{pml}} \\ \underline{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n}_s = -i\omega \rho_f \varphi \mathbf{n}_s & \text{sur } \Gamma_+^{\text{sf}} \\ -i\omega (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s) = \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_s & \text{sur } \Gamma_+^{\text{sf}}. \end{array} \right.$$

Cette partie aura la même structure que les deux premières de ce mémoire. Nous la débiterons en effet par une analyse modale de la partie immergée de la structure, conduite au [chapitre 7](#). Dans un premier temps, nous décrirons les modes du guide ouvert réel, c'est-à-dire sans PML. Comme au [chapitre 4](#) pour un guide ouvert acoustique, nous verrons qu'il existe des modes guidés, des modes de radiation et des modes à fuite qui sont des résonances du problème. Une analyse modale plus détaillée du guide ouvert tronquée avec des PML sera ensuite conduite. Celle-ci comprendra en particulier une extension du formalisme XY introduit par [PM04] pour un guide purement élastique ou acoustique, ce qui nous permettra de décomposer le champ  $(\mathbf{u}, \varphi)$  sur des modes fluide-solide. Nous nous pencherons enfin sur la question de l'approximation numérique des modes. Dans un second temps, nous utiliserons au [chapitre 8](#) différents outils pour résoudre de façon approchée les problèmes de diffraction directs dans la structure partiellement immergée tronquée transversalement par des PML. Nous montrerons en particulier comment tronquer le domaine à droite dans la direction longitudinale de la structure à l'aide d'un opérateur défini à l'aide des modes issus du formalisme XY. Dans un dernier temps, nous proposerons au [chapitre 9](#) une formulation modale efficace de la Linear Sampling Method qui nous permettra d'identifier des défauts dans la partie immergée de la structure à partir de mesures obtenues sur la partie de la structure à l'air libre.

# Chapitre 7

## Analyse modale dans les guides élastiques immergés

### Sommaire

---

7.1	Analyse modale dans les guides élastiques fermés . . . . .	168
7.1.1	Le cas général . . . . .	168
7.1.2	Le cas particulier d'une plaque . . . . .	176
7.2	Analyse modale d'un guide élastique immergé dans un fluide infini . . . . .	178
7.2.1	Analyse du cas général à l'aide du formalisme <b>XY</b> . . . . .	178
7.2.2	Le cas d'une plaque immergée . . . . .	194
7.3	Analyse modale d'un guide élastique immergé dans un fluide avec des PML	200
7.3.1	Écriture générique de l'équation de Helmholtz pour les différents types de PML . . . . .	201
7.3.2	Changement de variable et définition des modes . . . . .	203
7.3.3	Extension du formalisme <b>XY</b> . . . . .	203
7.3.4	Le cas de la plaque immergée . . . . .	226
7.4	Approximation numérique des modes . . . . .	229
7.4.1	La méthode SAFE-PML . . . . .	231
7.4.2	Résultats numériques avec la méthode SAFE-PML . . . . .	235
7.4.3	La méthode SAFE-PW . . . . .	240
7.4.4	Résultats numériques avec la méthode SAFE-PW . . . . .	243
7.4.5	Traitement des modes de quasi-Scholte . . . . .	246
7.5	Annexes . . . . .	258

---

Dans ce chapitre, nous allons donner quelques éléments d'analyse modale dans les guides élastiques immergés. Pour commencer, nous rappelons que les modes sont des solutions à variables séparées du système d'équations aux dérivées partielles homogène régissant la propagation des ondes. Dans les cas purement acoustiques traités dans les deux premières parties du mémoire, c'est un système de Helmholtz qui a pu être analysé à l'aide d'outils d'analyse fonctionnelle. Dans le cas que nous considérons dans ce chapitre, les modes satisfont un système plus complexe couplant les équations de l'élasticité et de l'acoustique. L'analyse mathématique de ce système est alors bien plus difficile : d'une part du fait des équations de l'élasticité qui nous amènent à résoudre un problème aux valeurs propres polynomial quadratique et d'autre part du fait du couplage entre les inconnues solides et fluides.

Pour aborder ce problème de façon progressive, nous commencerons par faire quelques rappels sur les modes dans un guide élastique à l'air libre. Ensuite, nous considérerons le cas

du guide immergé dans un fluide non borné dans la direction transverse. Dans ce cas, l'étude mathématique des modes guidés qui sont des modes localisés dans le cœur élastique et qui se propagent sans perte d'énergie, et des modes de radiation qui sont oscillants à l'infini dans la direction transverse, a été conduite dans [Dah01]. Après avoir rappelé brièvement le contenu de cette étude, nous adapterons le formalisme XY justifié mathématiquement dans [Bar09] pour un guide élastique fermé, ce qui nous permettra d'étudier les modes dans un guide élastique immergé dans un fluide infini. Nous définirons notamment les modes à fuite en nous appuyant sur une de leur caractérisation donnée au chapitre 4, à savoir leur croissance exponentielle dans le milieu environnant dans la direction transverse. Pour les cas d'un guide élastique fermé et d'un guide élastique immergé dans un fluide infini, nous regarderons le cas particulier d'une plaque élastique, qui est intéressant pour ses applications, mais aussi pour les calculs analytiques qu'il permet. Une fois cette analyse faite, nous introduirons des PML finies dans le fluide. Elles permettront d'une part de borner le domaine de calcul dans la direction transverse, ce qui est important pour la résolution des problèmes direct et inverse, mais aussi de calculer de façon approchée les modes, en particulier les modes à fuite. Pour cette configuration approchée, nous étendrons le formalisme XY à partir de l'adaptation de celui-ci, conduite pour un guide élastique immergé dans un fluide infini. Ce formalisme nous permettra de décomposer les couples de champ déplacement/potentiel des vitesses dans la partie immergée de la structure sur les modes. Nous conclurons enfin ce chapitre en montrant comment calculer les modes du guide immergé avec et sans PML, en nous penchant particulièrement sur les difficultés liées à l'approximation de certains modes guidés d'interface appelés modes de quasi-Scholte.

## 7.1 Analyse modale dans les guides élastiques fermés

Les modes des guides élastiques ont fait l'objet d'un très grand nombre de travaux depuis plus d'un siècle, avec notamment ceux pionniers de Rayleigh [Ray88] et Lamb [Lam17]. Le volume de cette littérature s'explique entre autres par la complexité de la propagation des ondes élastiques par rapport au cas acoustique. En effet, le caractère vectoriel du champ de déplacement entraîne que les ondes élastiques ont différentes polarisations possibles. Chacune de ces polarisations traduit un régime de propagation différent. Dans la suite, nous allons étudier ces modes de propagation dans des guides isotropes 2D ou 3D.

### 7.1.1 Le cas général

Considérons un guide élastique rectiligne occupant le domaine  $W^s := \mathbb{R} \times \Sigma^s$ , où sa section transverse  $\Sigma^s$  est un intervalle ouvert borné de  $\mathbb{R}$  en 2D et un ouvert borné connexe à frontière Lipschitz de  $\mathbb{R}^2$  en 3D. On suppose de plus que le matériau est homogène et isotrope et que la surface du guide est libre. Un mode est une solution à variables séparées :

$$\mathbf{u}(x_1, \mathbf{x}_\Sigma) = v(x_1)\mathbf{u}(\mathbf{x}_\Sigma), \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}_\Sigma \in \Sigma^s,$$

du problème homogène :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\underline{\sigma}(\mathbf{u})) + \omega^2 \rho_s \mathbf{u} = 0 & \text{dans } W^s \\ \underline{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n}_s = 0 & \text{sur } \partial W^s. \end{cases} \quad (7.1)$$

Il s'ensuit qu'il existe alors  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $v(x_1) = e^{\lambda x_1}$  et que  $\mathbf{u}$  est une solution non nulle du problème :

$$\begin{cases} \operatorname{div}^\lambda(\underline{\sigma}^\lambda(\mathbf{u})) + \omega^2 \rho_s \mathbf{u} = 0 & \text{dans } W^s \\ \underline{\sigma}^\lambda(\mathbf{u}) \mathbf{n}_s = 0 & \text{sur } \partial W^s, \end{cases} \quad (7.2)$$

où les opérateurs différentiels  $\mathbf{u} \mapsto \operatorname{div}^\lambda(\mathbf{u})$  et  $\mathbf{u} \mapsto \underline{\sigma}^\lambda(\mathbf{u})$  sont obtenus à partir des opérateurs  $\mathbf{u} \mapsto \operatorname{div}(\mathbf{u})$  et  $\mathbf{u} \mapsto \underline{\sigma}(\mathbf{u})$  en remplaçant  $\partial_{x_1}$  par  $\lambda I$ . L'étude directe du problème spectral (7.2) est difficile. Pour rechercher les modes du guide élastique, on adopte plutôt la démarche détaillée dans [Bar09] qui consiste à introduire de nouvelles variables appelées variables  $\mathbf{XY}$ . Ces nouvelles variables, qui panachent les composantes du champ de déplacement et du champ de contrainte suivant l'axe du guide, nous permettent de réécrire de façon équivalente le problème (7.1) sous la forme d'un problème d'évolution vis-à-vis de la variable axiale  $x_1$ . On va voir que rechercher les modes correspond à résoudre un problème aux valeurs propres linéaires.

### Réécriture sous la forme d'un problème d'évolution

Pour cela, il faut introduire préalablement quelques notations. Soit  $\mathbf{e}_1 = (1 \ 0 \ 0)^\top$  le vecteur unitaire selon l'axe du guide, on écrit :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \mathbf{u}_\Sigma \end{pmatrix}, \quad \underline{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} -t_1 \\ \mathbf{t}_\Sigma \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\sigma}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -t_1 & \mathbf{t}_\Sigma^\top \\ \mathbf{t}_\Sigma & \underline{\sigma}_\Sigma \end{pmatrix},$$

où l'on a en coordonnées cartésiennes :

$$\mathbf{u}_\Sigma := \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}_\Sigma := \begin{pmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix}, \quad \underline{\sigma}_\Sigma := \begin{pmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \quad \underline{\epsilon}_\Sigma := \begin{pmatrix} \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad t_1 := -\sigma_{11}.$$

Les quantités  $\mathbf{u}_\Sigma$ ,  $\mathbf{t}_\Sigma$ ,  $\underline{\sigma}_\Sigma$  et  $\underline{\epsilon}_\Sigma$  que nous venons d'introduire désignent respectivement les composantes transverses du champ de déplacement  $\mathbf{u}$ , de la contrainte longitudinale  $\underline{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{e}_1$ , du tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}(\mathbf{u})$  et du tenseur des déformations linéarisé  $\underline{\epsilon}(\mathbf{u})$ .

**Remarque 7.1** *En 2D, nous considérons que toutes les dérivées partielles selon la direction  $x_3$  sont nulles. Lorsqu'on est en 3D dans un système de coordonnées cylindriques  $(x_1, r, \theta)$ , on définit les quantités introduites ci-dessus de la même façon, mais en remplaçant les indices  $(2, 3)$  associés aux coordonnées  $(x_2, x_3)$  par les indices  $(r, \theta)$  correspondant aux coordonnées cylindriques de la section et en réécrivant tous les opérateurs différentiels dans ce nouveau système de coordonnées, ce que nous ne détaillerons pas ici.*

Les variables mixtes se définissent alors comme :

$$\mathbf{x}^s := \begin{pmatrix} \mathbf{t}_\Sigma \\ u_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{y}^s := \begin{pmatrix} \mathbf{u}_\Sigma \\ t_1 \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

Réécrivons les équations de l'élasticité (7.1) à l'aide de ces nouvelles variables. Tout d'abord, l'équation de la dynamique se réécrit dans  $W^s$  :

$$\begin{cases} \partial_{x_1} t_1 = \rho_s \omega^2 u_1 + \operatorname{div}_\Sigma(\mathbf{t}_\Sigma) \\ \partial_{x_1} \mathbf{t}_\Sigma = -\rho_s \omega^2 \mathbf{u}_\Sigma - \mathbf{div}_\Sigma(\underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{u})), \end{cases} \quad (7.4)$$

où l'on a dans un système de coordonnées cartésien :

$$\begin{cases} \mathbf{div}_\Sigma(\underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{u})) = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} \sigma_{22} + \partial_{x_3} \sigma_{23} \\ \partial_{x_2} \sigma_{32} + \partial_{x_3} \sigma_{33} \end{pmatrix} \\ \operatorname{div}_\Sigma(\mathbf{t}_\Sigma) = \partial_{x_2} \sigma_{12} + \partial_{x_3} \sigma_{13}. \end{cases} \quad (7.5)$$

Précisons à nouveau dans (7.5) que les dérivées partielles  $\partial_{x_3}$  sont nulles en 2D. Pour un milieu homogène et isotrope, la loi de comportement (I3.1) nous donne :

$$\begin{aligned} t_1 = -\sigma_{11}(\mathbf{u}) &= -\lambda_s(\partial_{x_1}u_1 + \operatorname{div}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma)) - 2\mu_s\partial_{x_1}u_1 \\ &= -\lambda_s\operatorname{div}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma) - (\lambda_s + 2\mu_s)\partial_{x_1}u_1, \end{aligned}$$

et donc :

$$\partial_{x_1}u_1 = -\frac{1}{\lambda_s + 2\mu_s}t_1 - \frac{\lambda_s}{\lambda_s + 2\mu_s}\operatorname{div}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma). \quad (7.6)$$

Par ailleurs :

$$\mathbf{t}_\Sigma = \mu_s \begin{pmatrix} \partial_{x_1}u_2 + \partial_{x_2}u_1 \\ \partial_{x_1}u_3 + \partial_{x_3}u_1 \end{pmatrix} = \mu_s\partial_{x_1}\mathbf{u}_\Sigma + \mu_s\nabla_\Sigma u_1, \quad (7.7)$$

où  $\nabla_\Sigma$  représentant le gradient dans le système de coordonnées de la section. De plus :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{u}) &= \lambda_s\operatorname{div}(\mathbf{u})\underline{\operatorname{Id}}_\Sigma + 2\mu_s\underline{\epsilon}_\Sigma(\mathbf{u}) \\ &= \lambda_s(\partial_{x_1}u_1 + \operatorname{div}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma))\underline{\operatorname{Id}}_\Sigma + 2\mu_s\underline{\epsilon}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma) \\ &= \lambda_s\left(\operatorname{div}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma) - \frac{1}{\lambda_s + 2\mu_s}t_1 - \frac{\lambda_s}{\lambda_s + 2\mu_s}\operatorname{div}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma)\right)\underline{\operatorname{Id}}_\Sigma + 2\mu_s\underline{\epsilon}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma), \end{aligned}$$

où  $\underline{\operatorname{Id}}_\Sigma$  désigne le tenseur identité des composantes transverses. Cela permet d'exprimer le tenseur  $\underline{\sigma}_\Sigma$  en fonction de la variable  $\mathbf{y}^s$  :

$$\underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{y}^s) = (\delta_s\operatorname{div}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma) - \alpha_s t_1)\underline{\operatorname{Id}}_\Sigma + 2\mu_s\underline{\epsilon}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma), \quad (7.8)$$

avec  $\delta_s := \frac{2\lambda_s\mu_s}{\lambda_s + 2\mu_s}$  et  $\alpha_s := \frac{\lambda_s}{\lambda_s + 2\mu_s}$ . Sur le bord du guide, la condition de surface libre s'écrit enfin :

$$0 = \underline{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_s \\ \underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{y}^s)\mathbf{e}_s \end{pmatrix}, \quad (7.9)$$

où le vecteur  $\mathbf{e}_s$  est défini comme étant la composante transverse de  $\mathbf{n}_s$ , c'est-à-dire  $\mathbf{n}_s = (0 \ \mathbf{e}_s)^\top$ . En réunissant les équations (7.4), (7.6), (7.7) et (7.9), on peut écrire de façon équivalente les équations de l'élasticité (7.1) sous la forme du problème d'évolution :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } (\mathbf{x}^s, \mathbf{y}^s) \text{ tel que} \\ &\begin{cases} \partial_{x_1} \begin{pmatrix} \mathbf{x}^s \\ \mathbf{y}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & F_{\mathbf{y}^s} \\ F_{\mathbf{x}^s} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}^s \\ \mathbf{y}^s \end{pmatrix} & \text{dans } W^s \\ \mathbf{t}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_s = 0 & \text{sur } \partial W^s \\ \underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{y}^s)\mathbf{e}_s = 0 & \text{sur } \partial W^s, \end{cases} \end{aligned} \quad (7.10)$$

où on a défini les opérateurs :

$$F_{\mathbf{y}^s}(\mathbf{y}^s) := \begin{pmatrix} -\operatorname{div}_\Sigma(\underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{y}^s)) - \rho_s\omega^2\mathbf{u}_\Sigma \\ -\alpha_s\operatorname{div}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma) - \frac{\alpha_s}{\lambda_s}t_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_{\mathbf{x}^s}(\mathbf{x}^s) := \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{t}_\Sigma}{\mu_s} - \nabla_\Sigma u_1 \\ \operatorname{div}_\Sigma(\mathbf{t}_\Sigma) + \rho_s\omega^2 u_1 \end{pmatrix}. \quad (7.11)$$

### Recherche des modes du problème d'évolution

Les modes en variables mixtes sont les solutions du problème (7.10) s'écrivant :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}^s(x_1, \mathbf{x}_\Sigma) \\ \mathbf{y}^s(x_1, \mathbf{x}_\Sigma) \end{pmatrix} = e^{\lambda x_1} \begin{pmatrix} \mathbf{X}^s(\mathbf{x}_\Sigma) \\ \mathbf{Y}^s(\mathbf{x}_\Sigma) \end{pmatrix},$$

ce qui nous amène naturellement à nous intéresser au problème aux valeurs propres linéaire :

$$\text{Trouver } (\lambda, \mathbf{X}^s, \mathbf{Y}^s) \text{ tel que}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} \mathbf{X}^s \\ \mathbf{Y}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & F_{\mathbf{Y}^s} \\ F_{\mathbf{X}^s} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}^s \\ \mathbf{Y}^s \end{pmatrix}, \quad (7.12)$$

où les opérateurs  $F_{\mathbf{X}^s}$  et  $F_{\mathbf{Y}^s}$  sont formellement définis de la même façon que  $F_{\mathbf{X}^s}$  et  $F_{\mathbf{Y}^s}$ , à la différence près qu'ils n'agissent que sur des fonctions de la variable transverse  $x_\Sigma$ . Pour étudier (7.12), il est nécessaire de préciser le cadre fonctionnel. Définissons pour cela les espaces de Hilbert :

$$\mathbf{V}_{\mathbf{X}^s} := (L^2(\Sigma^s))^2 \times H^1(\Sigma^s) \quad \text{et} \quad \mathbf{V}_{\mathbf{Y}^s} := (H^1(\Sigma^s))^2 \times L^2(\Sigma^s).$$

Les domaines des opérateurs  $F_{\mathbf{X}^s}$  et  $F_{\mathbf{Y}^s}$  sont alors donnés par :

$$D(F_{\mathbf{X}^s}) = \left\{ \mathbf{X}^s := (\mathbf{t}_\Sigma, u_1) \in \mathbf{V}_{\mathbf{X}^s} \mid \operatorname{div}_\Sigma(\mathbf{t}_\Sigma) \in L^2(\Sigma^s), \mathbf{t}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_s = 0 \text{ sur } \partial\Sigma^s \right\}$$

$$D(F_{\mathbf{Y}^s}) = \left\{ \mathbf{Y}^s := (\mathbf{u}_\Sigma, t_1) \in \mathbf{V}_{\mathbf{Y}^s} \mid \operatorname{div}_\Sigma(\underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{Y}^s)) \in (L^2(\Sigma^s))^2, \underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{Y}^s)\mathbf{e}_s = 0 \text{ sur } \partial\Sigma^s \right\}.$$

On définit aussi la forme bilinéaire (non hermitienne) :

$$(\mathbf{X}^s, \mathbf{Y}^s)_{\mathbf{H}^s} := \int_{\Sigma^s} (\mathbf{t}_\Sigma \cdot \mathbf{u}_\Sigma + u_1 t_1) d\mathbf{x}_\Sigma, \quad (7.13)$$

et l'espace  $\mathbf{L}^2(\Sigma^s) := (L^2(\Sigma^s))^3$ . Il est alors possible d'énoncer le résultat suivant.

**Théorème 7.2** [Bar09, Chapitre 2 - section 1]

Les opérateurs  $F_{\mathbf{X}^s}$  et  $F_{\mathbf{Y}^s}$  vérifient les propriétés suivantes.

1. Les domaines  $D(F_{\mathbf{X}^s})$  et  $D(F_{\mathbf{Y}^s})$  sont denses dans  $\mathbf{L}^2(\Sigma^s)$ .
2. Les opérateurs  $F_{\mathbf{X}^s}$  et  $F_{\mathbf{Y}^s}$  sont symétriques vis-à-vis de la forme bilinéaire  $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{H}^s}$ .
3. Excepté pour un ensemble dénombrable de fréquences  $\omega$ , les opérateurs  $F_{\mathbf{X}^s}$  et  $F_{\mathbf{Y}^s}$  sont autoadjoints.
4. Excepté pour un ensemble dénombrable de fréquences  $\omega$ , les opérateurs  $F_{\mathbf{X}^s}F_{\mathbf{Y}^s}$  et  $F_{\mathbf{Y}^s}F_{\mathbf{X}^s}$  sont à résolvante compacte.

Posons :

$$A^s := \begin{pmatrix} 0 & F_{\mathbf{Y}^s} \\ F_{\mathbf{X}^s} & 0 \end{pmatrix},$$

l'opérateur linéaire associé au problème aux valeurs propres (7.12). Le Théorème 7.2 ne nous permet pas de conclure que  $A^s$  est à résolvante compacte. Cependant, ce résultat nous donne que l'opérateur :

$$(A^s)^2 = \begin{pmatrix} F_{\mathbf{Y}^s}F_{\mathbf{X}^s} & 0 \\ 0 & F_{\mathbf{X}^s}F_{\mathbf{Y}^s} \end{pmatrix},$$

est à résolvante compacte. Il est donc naturel d'appliquer  $A^s$  au problème (7.12), ce qui nous conduit à considérer le problème aux valeurs propres :

$$\text{Trouver } (\lambda, \mathbf{X}^s, \mathbf{Y}^s) \text{ tel que}$$

$$\lambda^2 \begin{pmatrix} \mathbf{X}^s \\ \mathbf{Y}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{\mathbf{Y}^s}F_{\mathbf{X}^s} & 0 \\ 0 & F_{\mathbf{X}^s}F_{\mathbf{Y}^s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}^s \\ \mathbf{Y}^s \end{pmatrix}. \quad (7.14)$$



**Corollaire 7.3** [Bar09, Corollaire 2.1]

Excepté pour un ensemble dénombrable de fréquences  $\omega$ , l'opérateur  $(A^s)^2$  est à résolvante compacte. Le spectre de l'opérateur  $A^s$  est constitué d'un ensemble dénombrable de valeurs propres de multiplicité finie.

Le Corollaire 7.3 garantit ainsi que le guide élastique considéré admet un ensemble dénombrable de modes. Il est crucial de voir que l'opérateur  $A^s$  n'est pas autoadjoint, ce qui aura plusieurs conséquences sur les modes. Il en résulte premièrement que le spectre est complexe et donc que plusieurs types de modes peuvent a priori exister :

- les modes *propagatifs* : lorsque  $\lambda$  est purement imaginaire ;
- les modes *évanescents* : lorsque  $\lambda$  est purement réel ;
- les modes *inhomogènes* : dans tous les autres cas (i.e.  $\Re(\lambda) \neq 0$  et  $\Im(\lambda) \neq 0$ ).

Il est aussi facile de voir que le spectre de l'opérateur  $A^s$  est stable par conjugaison et par symétrie par rapport à l'origine du plan. Plus précisément, si  $(\lambda, \mathbf{X}^s, \mathbf{Y}^s)$  est une solution de (7.12), alors  $(-\lambda, -\mathbf{X}^s, \mathbf{Y}^s)$ ,  $(\bar{\lambda}, \bar{\mathbf{X}}^s, \bar{\mathbf{Y}}^s)$  et  $(-\bar{\lambda}, -\bar{\mathbf{X}}^s, \bar{\mathbf{Y}}^s)$  sont aussi des solutions de (7.12).

**Sens de propagation des modes**

Nous avons vu dans la section 1.4 en acoustique comment déterminer le sens de propagation des modes propagatifs à l'aide de trois quantités : les vitesses de phase, de groupe et d'énergie. Donnons une définition générale de ces trois quantités pour des modes ayant un nombre longitudinal  $\lambda$  complexe.

La vitesse de phase d'un mode est donnée comme en acoustique par :

$$v^p := \frac{\omega}{\Im(\lambda)}.$$

La vitesse de groupe est quant à elle donnée par :

$$v^g := \frac{\partial \omega}{\partial \Im(\lambda)} = \Im \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \omega} \right)^{-1}, \quad (7.15)$$

Précisons que la dernière égalité de (7.15) s'obtient en différenciant simplement les parties réelles et imaginaires de  $\lambda$  par rapport à la pulsation réelle  $\omega$ . Nous soulignons que cette définition de la vitesse de groupe pour des modes atténués, c'est-à-dire des modes satisfaisant  $\Re(\lambda) \neq 0$ , soulève encore des questions (voir par exemple [GS10]). Dans [Bar09], il a été montré que si  $(\lambda, \mathbf{X}^s, \mathbf{Y}^s)$  est solution de (7.12), la vitesse de groupe du mode associé peut se calculer en variables  $\mathbf{XY}$  avec la formule :

$$v^g = \Im \left( \frac{\rho_s \omega \int_{\Sigma^s} (u_1^2 - \mathbf{u}_\Sigma \cdot \mathbf{u}_\Sigma) d\mathbf{x}_\Sigma}{(\mathbf{X}^s, \mathbf{Y}^s)_{\mathbf{H}^s}} \right)^{-1}.$$

Pour un mode propagatif, il est possible de choisir  $\mathbf{X}^s$  (respectivement  $\mathbf{Y}^s$ ) prenant des valeurs purement imaginaires (respectivement réelles). Dans ce cas nous avons :

$$v^g = \frac{\Im((\mathbf{X}^s, \mathbf{Y}^s)_{\mathbf{H}^s})}{\rho_s \omega \int_{\Sigma^s} (|u_1|^2 + |\mathbf{u}_\Sigma|^2) d\mathbf{x}_\Sigma}, \quad (7.16)$$

ce qui nous permet de voir que la vitesse de groupe est finie pour les modes propagatifs.

Pour définir la vitesse d'énergie, il faut dans un premier temps introduire le vecteur de Poynting associé au champ de déplacement dans le solide :

$$\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}, t) := -\underline{\sigma}(\widehat{\mathbf{u}}) \frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}}{\partial t},$$

puis le flux d'énergie rayonné au travers de la section  $\Sigma_{x_1}^s := \{x_1\} \times \Sigma^s$  :

$$\mathbf{\Pi}^s(x_1, t) := \int_{\Sigma_{x_1}^s} \boldsymbol{\pi}((x_1, \mathbf{x}_\Sigma), t) \cdot \mathbf{n}_1 d\mathbf{x}_\Sigma,$$

avec  $\mathbf{n}_1 := (1 \ 0 \ 0)^t$ . Introduisons ensuite le flux d'énergie moyen rayonné au travers de cette section sur une durée  $T > 0$  :

$$\langle \mathbf{\Pi}^s(x_1) \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{\Pi}^s(x_1, t) dt.$$

En rappelant que nous recherchons des solutions physiques ayant un déplacement réel s'écrivant  $\widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \Re(\mathbf{u}(\mathbf{x})e^{-i\omega t})$ , on obtient après des calculs détaillés dans [Bar09, Annexe A] :

$$\langle \mathbf{\Pi}^s(x_1) \rangle = \Im m \left( \frac{\omega}{2} \int_{\Sigma_{x_1}^s} (\underline{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}_1) \cdot \bar{\mathbf{u}} d\mathbf{x}_\Sigma \right). \quad (7.17)$$

Dans un second temps, nous écrivons l'énergie pour un solide isotrope :

$$E^s(\mathbf{x}, t) = E_c(\mathbf{x}, t) + E_p(\mathbf{x}, t),$$

où les énergies cinétique  $E_c$  et potentielle  $E_p$  sont données par :

$$E_c(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho_s}{2} \frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}}{\partial t} \quad \text{et} \quad E_p(\mathbf{x}, t) = \frac{\lambda_s}{2} \text{div}(\widehat{\mathbf{u}})^2 + \mu_s \underline{\epsilon}(\widehat{\mathbf{u}}) : \underline{\epsilon}(\widehat{\mathbf{u}}).$$

L'énergie moyenne dans la section  $\Sigma_{x_1}^s$  sur une période temporelle donnée s'écrit après calculs :

$$\langle E^s(x_1) \rangle = \frac{\rho_s \omega^2}{4} \int_{\Sigma_{x_1}^s} |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x}_\Sigma + \frac{\lambda_s}{4} \int_{\Sigma^s} |\text{div}(\mathbf{u})|^2 d\mathbf{x}_\Sigma + \frac{\mu_s}{2} \int_{\Sigma^s} \underline{\epsilon}(\mathbf{u}) : \overline{\underline{\epsilon}(\mathbf{u})} d\mathbf{x}_\Sigma. \quad (7.18)$$

Étant donné que les modes s'écrivent sous la forme  $\mathbf{u}(x_1, \mathbf{x}_\Sigma) = e^{\lambda x_1} \mathbf{u}(\mathbf{x}_\Sigma)$  avec  $\lambda \in i\mathbb{R}$  lorsque le mode est propagatif, on montre aisément que les quantités  $\langle \mathbf{\Pi}_s(x_1) \rangle$  et  $\langle E^s(x_1) \rangle$  ne dépendent pas de  $x_1$ . Cela nous permet de définir la vitesse d'énergie d'un mode propagatif par :

$$v^e := \frac{\langle \mathbf{\Pi}^s \rangle}{\langle E^s \rangle}, \quad (7.19)$$

où les quantités  $\langle \mathbf{\Pi}^s \rangle$  (respectivement  $\langle E^s \rangle$ ) sont définies comme  $\langle \mathbf{\Pi}^s(x_1) \rangle$  (respectivement  $\langle E^s(x_1) \rangle$ ) en remplaçant  $\mathbf{u}$  par  $\mathbf{u}$  et  $\Sigma_{x_1}^s$  par  $\Sigma^s$ .

**Remarque 7.4** *En utilisant enfin le fait que les énergies cinétique et potentielle moyennes sont égales (principe de Rayleigh), on retrouve que les vitesses de groupe et d'énergie des modes propagatifs sont égales dans un guide élastique homogène isotrope, c'est-à-dire :*

$$v^g = v^e.$$

Dans le cas simple d'un guide acoustique homogène, le signe de ces trois quantités est le même et nous donne le sens de propagation physique de l'onde sans ambiguïté. En élasticité, cette question n'est en revanche pas aussi simple. Dans certaines configurations, il existe en effet des modes ayant des vitesses de phase et de groupe de signes opposés : on parle alors de *modes rétrogrades* ou de *backward modes* en anglais (voir pour cela [DCL14]). Nous utiliserons en élasticité les vitesses de groupe et d'énergie pour déterminer le sens de propagation physique d'un mode propagatif.

Il est maintenant possible de trier les modes en deux catégories :

- les modes notés  $(\lambda_n, \mathbf{X}_n^s, \mathbf{Y}_n^s)_{n \geq 1}$  qui sont *sortants à droite* : ils correspondent aux modes propagatifs vérifiant  $v^g > 0$  et aux modes évanescents et inhomogènes satisfaisant  $\Re(\lambda) < 0$ ,
- les modes notés  $(\lambda_{-n}, \mathbf{X}_{-n}^s, \mathbf{Y}_{-n}^s)_{n \geq 1} = (-\lambda_n, -\mathbf{X}_n^s, \mathbf{Y}_n^s)_{n \geq 1}$  qui sont *sortants à gauche* : ils correspondent aux modes propagatifs vérifiant  $v^g < 0$  et aux modes évanescents et inhomogènes satisfaisant  $\Re(\lambda) > 0$ .

### Décomposition modale

Nous souhaiterions décomposer les ondes qui sortent à gauche (respectivement sortent à droite) sur les modes qui sont sortants à gauche (respectivement sortants à droite). Comme l'opérateur  $A^s$  n'est pas autoadjoint, les modes en notation  $\mathbf{XY}$  ne satisfont a priori pas de relation d'orthogonalité classique. En revanche, ils satisfont une relation appelée *relation de Fraser* traduisant une biorthogonalité entre les modes qui se propagent dans le même sens.

#### Lemme 7.5 [Bar09, Lemme 2.4]

Soient  $(\lambda_n, \mathbf{X}_n^s, \mathbf{Y}_n^s)$  et  $(\lambda_m, \mathbf{X}_m^s, \mathbf{Y}_m^s)$  deux solutions de (7.12), avec  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$  non nuls. Ils satisfont la *relation de biorthogonalité* :

$$(\lambda_n^2 - \lambda_m^2)(\mathbf{X}_n^s, \mathbf{Y}_m^s)_{\mathbf{H}^s} = 0. \quad (7.20)$$

Si  $\lambda_n^2 \neq \lambda_m^2$ , les vecteurs propres satisfont alors la relation :

$$(\mathbf{X}_n^s, \mathbf{Y}_m^s)_{\mathbf{H}^s} = \delta_{nm} J_n^s, \quad (7.21)$$

où :

$$\begin{aligned} J_n^s &:= (\mathbf{X}_n^s, \mathbf{Y}_n^s)_{\mathbf{H}^s} \\ &= \int_{\Sigma^s} (\mathbf{u}_\Sigma^n \cdot \mathbf{t}_\Sigma^n + u_1^n t_1^n) d\mathbf{x}_\Sigma, \end{aligned} \quad (7.22)$$

est appelée *constante de Fraser*.

**Remarque 7.6** Le résultat se démontre aisément à l'aide des propriétés des opérateurs  $F_{\mathbf{X}^s}$  et  $F_{\mathbf{Y}^s}$  lorsque la dimension des sous-espaces propres est égale à 1. Quand ils sont en revanche de dimension supérieure à 1, il faut de plus utiliser le processus de Gram-Schmidt pour conserver la relation de biorthogonalité entre les vecteurs propres du sous-espace propre.

**Remarque 7.7** Il est très important de comprendre que la relation de biorthogonalité (7.21) n'est satisfaite que pour des modes qui sont sortants dans le même sens. En effet, si on prend  $m = -n$  cela implique que  $\lambda_m = -\lambda_n$ , et alors il n'est plus possible de déduire (7.21) de (7.20).

Nous faisons l'hypothèse suivante qui nous permettra de décomposer les ondes dans le guide sur les modes.

### Hypothèse 7.8

On suppose que les constantes de Fraser sont non nulles, c'est-à-dire :

$$J_n^s \neq 0, \quad \forall n \geq 1.$$

On choisira alors les vecteurs propres tels que  $J_n^s = 1$  pour tout  $n \geq 1$ .

Une autre conséquence du caractère non autoadjoint de l'opérateur  $A^s$  est l'absence de résultat de complétude des modes. Pour être en mesure d'écrire des décompositions modales, il est ainsi nécessaire de faire l'hypothèse de complétude suivante. La deuxième partie de cette hypothèse, traduisant le fait que les modes forment une base de Riesz, sera utilisée plus tard lors de l'étude du problème direct.

### Hypothèse 7.9

Soient  $\mathbf{X}^s = (\mathbf{t}_\Sigma, u_1) \in (\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma^s))^2 \times H^{\frac{1}{2}}(\Sigma^s)$  et  $\mathbf{Y}^s = (\mathbf{u}_\Sigma, t_1) \in (H^{\frac{1}{2}}(\Sigma^s))^2 \times \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma^s)$ , on peut écrire :

$$\mathbf{X}^s = \sum_{n \geq 1} (\mathbf{X}^s, \mathbf{Y}_n^s)_{\mathbf{H}^s} \mathbf{X}_n^s \quad \text{et} \quad \mathbf{Y}^s = \sum_{n \geq 1} (\mathbf{Y}^s, \mathbf{X}_n^s)_{\mathbf{H}^s} \mathbf{Y}_n^s.$$

Les coefficients de cette décomposition sont exprimés à l'aide de la relation de biorthogonalité (7.21). En outre, il existe des constantes  $C_\pm^s > 0$  telles que :

$$C_-^s \left( \|\mathbf{t}_\Sigma\|_{(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma^s))^2}^2 + \|u_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma^s)}^2 \right) \leq \sum_{n \geq 1} |(\mathbf{X}^s, \mathbf{Y}_n^s)_{\mathbf{H}^s}|^2 \leq C_+^s \left( \|\mathbf{t}_\Sigma\|_{(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma^s))^2}^2 + \|u_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma^s)}^2 \right),$$

$$C_-^s \left( \|\mathbf{u}_\Sigma\|_{(H^{\frac{1}{2}}(\Sigma^s))^2}^2 + \|t_1\|_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma^s)}^2 \right) \leq \sum_{n \geq 1} |(\mathbf{Y}^s, \mathbf{X}_n^s)_{\mathbf{H}^s}|^2 \leq C_+^s \left( \|\mathbf{u}_\Sigma\|_{(H^{\frac{1}{2}}(\Sigma^s))^2}^2 + \|t_1\|_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma^s)}^2 \right).$$

Sous cette hypothèse, on peut enfin décomposer les solutions de (7.10) sur les modes.

### Lemme 7.10 [BLL11, Lemme 2.8]

Soit  $(\mathbf{x}^s, \mathbf{y}^s)$  une solution du problème (7.10), il existe des coefficients complexes  $(a_n^\pm)_{n \geq 1}$  tels que :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}^s \\ \mathbf{y}^s \end{pmatrix} = \sum_{n \geq 1} \left( a_n^- \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{n,-}^s \\ \mathbf{y}_{n,-}^s \end{pmatrix} + a_n^+ \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{n,+}^s \\ \mathbf{y}_{n,+}^s \end{pmatrix} \right),$$

où les modes sont donnés pour tout  $n \geq 1$  par :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{n,\pm}^s \\ \mathbf{y}_{n,\pm}^s \end{pmatrix} (x_1, \mathbf{x}_\Sigma) := e^{\pm \lambda_n x_1} \begin{pmatrix} \pm \mathbf{X}_n^s(\mathbf{x}_\Sigma) \\ \mathbf{Y}_n^s(\mathbf{x}_\Sigma) \end{pmatrix}.$$

Nous verrons au moment de traiter les problèmes direct et inverse que ce résultat est crucial pour proposer des méthodes modales.

L'analyse modale que nous venons de présenter pour des guides homogènes, isotropes, 2D et 3D est très générale. Elle peut en effet par exemple s'étendre aux guides composés de différentes strates isotropes, voire à des matériaux orthotropes. Intéressons-nous désormais plus en détails à un cas simple dans lequel nous pouvons décrire plus précisément les modes.

### 7.1.2 Le cas particulier d'une plaque

On s'intéresse ici au cas particulier de la propagation des ondes dans une plaque homogène isotrope 3D, c'est-à-dire que la plaque occupe un domaine non borné dans les directions  $x_1$  et  $x_3$ , mais borné dans la direction  $x_2$ . Nous faisons l'hypothèse que les ondes ne se propagent pas dans la direction  $x_3$ , ce qui revient à écrire  $\partial_{x_3} = 0$  dans les opérateurs différentiels intervenant dans les équations de l'élasticité (7.1). Sous cette hypothèse, on ramène l'étude de la propagation des ondes dans la plaque à celle dans un domaine 2D inclus dans le plan  $(x_1, x_2)$ . Soit  $h_0 > 0$  la demi-épaisseur de la plaque. Le guide occupe alors le domaine  $W^s = \mathbb{R} \times \Sigma^s$ , avec  $\Sigma^s = (-h_0, h_0)$ . Les modes dans la plaque sont les solutions  $\mathbf{u}(x_1, x_2) = e^{\lambda x_1} (u_1 \ u_2 \ u_3)^t(x_2)$  du problème (7.1). Quelques calculs nous permettent de voir qu'ils sont alors solutions du système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda[\lambda_s(\lambda u_1 + d_{x_2} u_2) + 2\mu_s \lambda u_1] + d_{x_2}[\mu_s(\lambda u_2 + d_{x_2} u_1)] + \rho_s \omega^2 u_1 = 0 & \text{dans } \Sigma^s \\ \lambda[\mu_s(\lambda u_2 + d_{x_2} u_1)] + d_{x_2}[\lambda_s(\lambda u_1 + d_{x_2} u_2) + 2\mu_s d_{x_2} u_2] + \rho_s \omega^2 u_2 = 0 & \text{dans } \Sigma^s \\ \lambda[\mu_s(\lambda u_3)] + d_{x_2}[\mu_s d_{x_2} u_3] + \rho_s \omega^2 u_3 = 0 & \text{dans } \Sigma^s \\ \mu_s(\lambda u_2 + d_{x_2} u_1) = 0 & \text{sur } \partial\Sigma^s \\ \lambda_s(\lambda u_1 + d_{x_2} u_2) + 2\mu_s d_{x_2} u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Sigma^s \\ \mu_s d_{x_2} u_3 = 0 & \text{sur } \partial\Sigma^s. \end{array} \right. \quad (7.23)$$

On remarque que la composante  $u_3$  est découplée des composantes  $u_1$  et  $u_2$  dans le système (7.23). Cela nous permet de définir deux catégories de modes :

- les *modes SH* pour lesquels  $u_1 = u_2 = 0$ ;
- les *modes de Lamb* pour lesquels  $u_3 = 0$ .

Les modes SH (Shear Horizontal) correspondent à des ondes antiplanes, c'est-à-dire des ondes polarisées dans une direction orthogonale au plan de propagation. Physiquement, ils correspondent à des ondes de cisaillement. Les modes SH satisfont le système de Helmholtz :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\mu_s} d_{x_2}(\mu_s d_{x_2} u_3) + (\lambda^2 + k_s^2) u_3 = 0 & \text{dans } \Sigma^s \\ d_{x_2} u_3 = 0 & \text{sur } \partial\Sigma^s, \end{array} \right. \quad (7.24)$$

où  $k_s := \omega/c_s$  correspond au nombre d'onde des ondes de cisaillement. Le lecteur pourra reconnaître ici le système étudié dans la **Partie II** dans un contexte de guide enfoui, pour lequel le coefficient de cisaillement  $\mu_s$  était constant par morceaux. Ici, ce coefficient est supposé constant, ce qui permet une simplification de (7.24). De plus, le problème (7.24) peut être résolu à la main. On trouve alors que les nombres d'onde longitudinaux  $\lambda$  associés aux modes SH correspondent à l'ensemble :

$$\Lambda^{\text{SH}} := \left\{ \pm \lambda_n^{\text{SH}} = \mp \sqrt{i\mathbb{R}^+ \left( \left( \frac{n\pi}{2h_0} \right)^2 - k_s^2 \right)}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \right\}. \quad (7.25)$$

On voit alors qu'il y a un nombre fini de modes propagatifs et un ensemble infini de modes évanescents.

Les modes de Lamb peuvent quant à eux être subdivisés en deux groupes : les *modes SV* (Shear Vertical) correspondant à des ondes de cisaillement et les *modes PV* (Pressure Vertical) correspondant à des ondes de pression. Contrairement aux modes SH, ces modes ont une polarisation orientée dans le plan de propagation. De plus, les modes de Lamb ne sont pas connus de façon explicite, mais on peut les trouver à l'aide d'une équation de dispersion appelée relation de Rayleigh (voir par exemple [Bar09, Annexe B] pour son obtention) qui s'écrit :

$$f_a^R(\lambda) \cdot f_s^R(\lambda) = 0, \quad (7.26)$$

où :

$$\begin{aligned} f_a^R(\lambda) &:= s(\lambda)\tan(\beta_s(\lambda)h_0) + p(\lambda)\tan(\beta_p(\lambda)h_0) \\ f_s^R(\lambda) &:= s(\lambda)\cotan(\beta_s(\lambda)h_0) + p(\lambda)\cotan(\beta_p(\lambda)h_0), \end{aligned} \quad (7.27)$$

s'expriment à l'aide des nombres d'onde transverses :

$$\beta_s(\lambda) := \sqrt{\xi^{\mathbb{R}^+} k_s^2 + \lambda^2} \quad \text{et} \quad \beta_p(\lambda) := \sqrt{\xi^{\mathbb{R}^+} k_p^2 + \lambda^2},$$

ainsi que des quantités :

$$s(\lambda) := -\frac{4\mu_s \lambda^2 \beta_s(\lambda)}{k_s^2} \quad \text{et} \quad p(\lambda) := \mu_s \frac{(k_s^2 + 2\lambda^2)^2}{k_s^2 \beta_p(\lambda)}.$$

**Remarque 7.11** *Le choix de la coupure  $\xi^{\mathbb{R}^+}$  dans la définition des  $\beta_s$  et  $\beta_p$  n'est pas précisé, car il est possible d'écrire (7.26) de façon équivalente à l'aide de fonctions dont le développement en série entière ne fait intervenir que des puissances paires, ce qui fait disparaître les racines carrées (cf. sous-section 4.1.2).*

Les racines de  $f_a^R$ , respectivement  $f_s^R$ , correspondent à des modes antisymétriques, respectivement symétriques, vis-à-vis de l'axe du guide. À une fréquence donnée, on peut observer qu'il y a un nombre fini de modes de Lamb propagatifs associés à des nombres d'onde longitudinaux purement imaginaires et un ensemble infini de modes de Lamb inhomogènes, associés par définition à des nombres d'onde longitudinaux complexes. Un exemple de distribution des nombres d'ondes longitudinaux correspondant aux différents modes est donné sur la Figure 7.1.

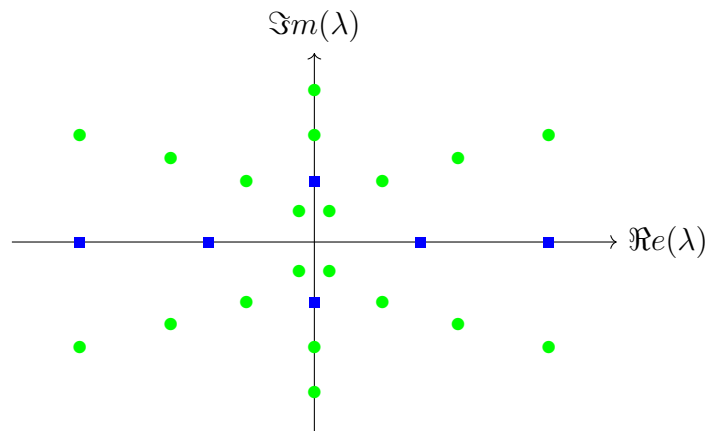


FIGURE 7.1: Représentation dans le plan complexe d'un exemple de spectre de l'opérateur  $A^s$ . Ronds verts : valeurs propres associées aux modes de Lamb, carrés bleus : valeurs propres associées aux modes SH.

On peut montrer que les nombres d'onde des modes de Lamb inhomogènes forment asymptotiquement quatre branches : une dans chacun des quadrants du plan complexe.

**Lemme 7.12** [ZCS11]

Les nombres d'onde longitudinaux des modes de Lamb inhomogènes ont un comportement asymptotique lorsque  $n \rightarrow +\infty$  donné :

- pour les modes dans le quadrant  $\Re(\lambda) < 0, \Im(\lambda) < 0$  par :

$$\Re(\lambda_n) \sim -\frac{\pi n}{h_0}, \quad \Im(\lambda_n) \sim -\frac{1}{2h_0} \text{Log}(n);$$

- pour les modes dans le quadrant  $\Re(\lambda) < 0, \Im(\lambda) > 0$  par :

$$\Re(\lambda_n) \sim -\frac{\pi n}{h_0}, \quad \Im(\lambda_n) \sim \frac{1}{2h_0} \text{Log}(n);$$

- pour les modes dans le quadrant  $\Re(\lambda) > 0, \Im(\lambda) < 0$  par :

$$\Re(\lambda_n) \sim \frac{\pi n}{h_0}, \quad \Im(\lambda_n) \sim -\frac{1}{2h_0} \text{Log}(n);$$

- pour les modes dans le quadrant  $\Re(\lambda) > 0, \Im(\lambda) > 0$  par :

$$\Re(\lambda_n) \sim \frac{\pi n}{h_0}, \quad \Im(\lambda_n) \sim \frac{1}{2h_0} \text{Log}(n).$$

La simplification des équations de l'élasticité dans le cas d'une plaque homogène isotrope a motivé plusieurs tentatives de preuves de résultat de complétude des modes de Lamb. Parmi elles, nous pouvons citer [Kir94] qui a constitué pendant longtemps la tentative la plus sérieuse. Mais selon certains, cette preuve présentait des failles. Récemment, Akian a proposé dans [Aki22a] une nouvelle preuve d'un résultat de complétude des modes de Lamb dans une plaque élastique isotrope.

Nous allons nous appuyer sur les éléments présentés dans la [section 7.1](#) pour étudier les modes lorsque le guide élastique est plongé dans un fluide infini.

## 7.2 Analyse modale d'un guide élastique immergé dans un fluide infini

### 7.2.1 Analyse du cas général à l'aide du formalisme XY

On s'intéresse désormais aux modes d'un guide élastique immergé dans un fluide parfait infini occupant le domaine  $W^{f,\infty} := \mathbb{R} \times \Sigma^{f,\infty}$  où  $\Sigma^{f,\infty} := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Sigma^s}$ , avec  $d = 1$  en 2D et  $d = 3$  en 3D, est la section transverse non bornée du domaine fluide. Nous notons  $\Gamma^{sf} := \mathbb{R} \times \gamma^{sf}$  l'interface entre le solide et le fluide avec  $\gamma^{sf} = \partial \Sigma^s$ . Un exemple 2D d'une telle configuration est représenté Figure 7.2. Les modes sont les solutions à variables séparées :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = e^{\lambda x_1} \mathbf{u}(\mathbf{x}_\Sigma), & \mathbf{x} \in W^s \\ \varphi(\mathbf{x}) = e^{\lambda x_1} \varphi(\mathbf{x}_\Sigma), & \mathbf{x} \in W^{f,\infty}, \end{cases} \quad (7.28)$$

du problème homogène :

Trouver  $(\mathbf{u}, \varphi)$  tel que

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\underline{\sigma}(\mathbf{u})) + \rho_s \omega^2 \mathbf{u} = 0 & \text{dans } W^s \\ \Delta \varphi + k_f^2 \varphi = 0 & \text{dans } W^{f,\infty} \\ \underline{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n}_s = -i \rho_f \omega \varphi \mathbf{n}_s & \text{sur } \Gamma^{sf} \\ -i \omega (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s) = \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_s & \text{sur } \Gamma^{sf}. \end{cases} \quad (7.29)$$

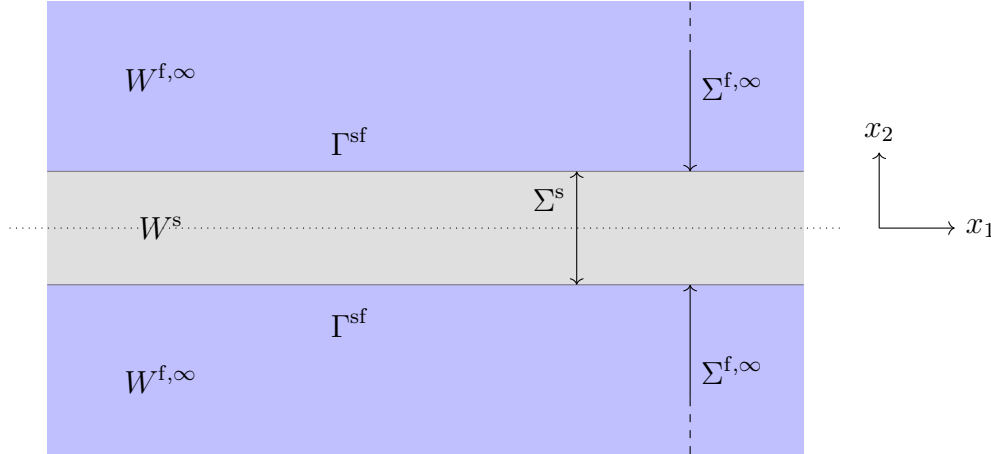


FIGURE 7.2: Géométrie 2D d'un guide élastique immergé.

En injectant (7.28) dans (7.29), on obtient le problème aux valeurs propres :

Trouver  $(\lambda, \mathbf{u}, \varphi)$  tel que

$$\begin{cases} \operatorname{div}^\lambda(\underline{\sigma}^\lambda(\mathbf{u})) + \rho_s \omega^2 \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Sigma^s \\ \Delta_\Sigma \varphi + (k_f^2 + \lambda^2) \varphi = 0 & \text{dans } \Sigma^{f,\infty} \\ \underline{\sigma}^\lambda(\mathbf{u}) \mathbf{n}_s = -i \rho_f \omega \varphi \mathbf{n}_s & \text{sur } \gamma^{sf} \\ -i \omega (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s) = \nabla_\Sigma \varphi \cdot \mathbf{e}_s & \text{sur } \gamma^{sf}, \end{cases} \quad (7.30)$$

où on rappelle que les dérivées partielles  $\partial_{x_1}$  ont été remplacées par la multiplication par  $\lambda$  dans les opérateurs différentiels indexés par  $\lambda$ . Tout comme dans le cas du guide élastique fermé traité ci-dessus, calculer les modes revient donc à résoudre un problème aux valeurs propres polynomial quadratique en  $\lambda$  dont l'étude n'est pas facile.

Le problème (7.30) a été étudié dans [Dah01] sous l'angle suivant : le nombre longitudinal  $\lambda$  est fixé et supposé imaginaire pur, tandis que la fréquence  $\omega$  est variable. Cela revient à chercher les fréquences  $\omega$  auxquelles il existe des modes propagatifs de nombre longitudinal  $\lambda$ . Grâce à cette approche, il est possible de ramener l'étude du problème aux valeurs propres (7.30) à celle du spectre d'un opérateur autoadjoint. En effet, le problème (7.29) y est reformulé sous la forme :

$$A(\omega, \lambda) \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \varphi \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad (7.31)$$

où  $A(\omega, \lambda)$  est un opérateur autoadjoint dépendant de façon polynomiale de  $\omega$  et  $\Im m(\lambda)$ . Le spectre essentiel est déterminé (voir [Dah01, Théorème 3.1]) et il est prouvé à l'aide des formules min-max que le spectre discret est constitué d'un ensemble fini de valeurs propres (voir [Dah01, Corollaire 3.8]). Dans le cas où  $c_s \leq c_f$ , il est précisé que le spectre discret est



constitué d'au moins deux valeurs propres (voir [Dah01, Corollaire 3.11]).

L'approche que nous allons adopter est différente. Étant donné que notre travail s'inscrit dans un contexte industriel de contrôle non destructif, nous souhaitons fixer la fréquence  $\omega$  et rechercher les modes pouvant exister à cette fréquence. Pour cela, nous allons suivre la démarche suivante. Dans un premier temps, nous allons tenter de réécrire le problème (7.29) comme un problème d'évolution en étendant le formalisme **XY** présenté en section 7.1 pour un guide élastique fermé. Ceci nous permettra de ramener l'étude des modes à celle d'un problème aux valeurs propres linéaire que nous étudierons dans un second temps.

### Réécriture du problème (7.29) sous la forme d'un problème d'évolution

Le formalisme **XY** a été introduit par [PM04] pour les équations de l'élasticité et de l'acoustique séparément. Nous souhaitons proposer ici une extension de ce formalisme couplant les variables mixtes solide et fluide. Pour commencer, on rappelle que les inconnues mixtes solides sont définies par :

$$\mathbf{x}^s := \begin{pmatrix} \mathbf{t}_\Sigma \\ u_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{y}^s := \begin{pmatrix} \mathbf{u}_\Sigma \\ t_1 \end{pmatrix},$$

avec  $\underline{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}_1 = (-t_1 \quad \mathbf{t}_\Sigma)^\dagger$ . Grâce à ces nouvelles variables, nous avons pu écrire les équations de l'élasticité sous la forme du problème d'évolution :

$$\partial_{x_1} \begin{pmatrix} \mathbf{x}^s \\ \mathbf{y}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & F_{\mathbf{y}^s} \\ F_{\mathbf{x}^s} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}^s \\ \mathbf{y}^s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} \in W^s,$$

avec :

$$F_{\mathbf{y}^s}(\mathbf{y}^s) := \begin{pmatrix} -\operatorname{div}_\Sigma(\underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{y}^s)) - \rho_s \omega^2 \mathbf{u}_\Sigma \\ -\alpha_s \operatorname{div}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma) - \frac{\alpha_s}{\lambda_s} t_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_{\mathbf{x}^s}(\mathbf{x}^s) := \begin{pmatrix} \frac{t_\Sigma}{\mu_s} - \nabla_\Sigma u_1 \\ \operatorname{div}_\Sigma(\mathbf{t}_\Sigma) + \rho_s \omega^2 u_1 \end{pmatrix}.$$

Les variables mixtes fluides sont définies de façon analogue par :

$$\mathcal{X}^f := \partial_{x_1} \varphi =: \zeta \quad \text{et} \quad \mathcal{Y}^f := \varphi.$$

Il est alors facile de voir, tout comme pour les équations de l'élasticité, que l'équation de Helmholtz se réécrit à l'aide de ces variables mixtes sous la forme du problème d'évolution :

$$\partial_{x_1} \begin{pmatrix} \mathcal{X}^f \\ \mathcal{Y}^f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & F_{\mathcal{Y}^f}^\infty \\ F_{\mathcal{X}^f}^\infty & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{X}^f \\ \mathcal{Y}^f \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} \in W^{f,\infty}, \quad (7.32)$$

où nous avons défini les opérateurs :

$$F_{\mathcal{Y}^f}^\infty(\mathcal{Y}^f) := -\Delta_\Sigma \mathcal{Y}^f - k_f^2 \mathcal{Y}^f \quad \text{et} \quad F_{\mathcal{X}^f}^\infty(\mathcal{X}^f) := \mathcal{X}^f, \quad (7.33)$$

avec  $\Delta_\Sigma$  désignant l'opérateur Laplacien dans la section transverse. Il nous reste aussi à réécrire les équations de couplage. En utilisant la symétrie du tenseur des contraintes, on voit que :

$$\underline{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_s \\ \underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{y}^s)\mathbf{e}_s \end{pmatrix},$$

ce qui nous permet d'écrire les conditions de couplage sur  $\Gamma^{\text{sf}}$  comme suit :

$$\begin{cases} \underline{\sigma}_{\Sigma}(\mathbf{y}^{\text{s}})\mathbf{e}_s = -i\rho_f\omega\varphi\mathbf{e}_s \\ \mathbf{t}_{\Sigma} \cdot \mathbf{e}_s = 0 \\ -i\omega(\mathbf{u}_{\Sigma} \cdot \mathbf{e}_s) = \nabla_{\Sigma}\varphi \cdot \mathbf{e}_s. \end{cases} \quad (7.34)$$

Nous introduisons maintenant les variables mixtes fluide-solide :

$$\mathbf{x}^{\text{sf}} := \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{\text{s}} \\ \mathbf{x}^{\text{f}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{y}^{\text{sf}} := \begin{pmatrix} \mathbf{y}^{\text{s}} \\ \mathbf{y}^{\text{f}} \end{pmatrix},$$

ainsi que les opérateurs associés :

$$F_{\mathbf{x}^{\text{sf}}}^{\infty} := \begin{pmatrix} F_{\mathbf{x}^{\text{s}}} & 0 \\ 0 & F_{\mathbf{x}^{\text{f}}}^{\infty} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_{\mathbf{y}^{\text{sf}}}^{\infty} := \begin{pmatrix} F_{\mathbf{y}^{\text{s}}} & 0 \\ 0 & F_{\mathbf{y}^{\text{f}}}^{\infty} \end{pmatrix}.$$

Il est alors possible de réécrire le problème homogène (7.29) sous la forme du problème d'évolution :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } (\mathbf{x}^{\text{sf}}, \mathbf{y}^{\text{sf}}) \text{ tel que} \\ &\begin{cases} \partial_{x_1} \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{\text{sf}} \\ \mathbf{y}^{\text{sf}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & F_{\mathbf{y}^{\text{sf}}}^{\infty} \\ F_{\mathbf{x}^{\text{sf}}}^{\infty} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{\text{sf}} \\ \mathbf{y}^{\text{sf}} \end{pmatrix} & \text{dans } W^{\text{s}} \times W^{\text{f},\infty} \\ \mathbf{t}_{\Sigma} \cdot \mathbf{e}_s = 0 & \text{sur } \Gamma^{\text{sf}} \\ \underline{\sigma}_{\Sigma}(\mathbf{y}^{\text{s}})\mathbf{e}_s = -i\rho_f\omega\varphi\mathbf{e}_s & \text{sur } \Gamma^{\text{sf}} \\ -i\omega(\mathbf{u}_{\Sigma} \cdot \mathbf{e}_s) = \nabla_{\Sigma}\varphi \cdot \mathbf{e}_s & \text{sur } \Gamma^{\text{sf}}. \end{cases} \end{cases} \quad (7.35)$$

### Recherche des modes du problème (7.35)

Les modes du problème (7.35) s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}^{\text{sf}}(x_1, \mathbf{x}_{\Sigma}) \\ \mathbf{y}^{\text{sf}}(x_1, \mathbf{x}_{\Sigma}) \end{pmatrix} = e^{\lambda x_1} \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{\text{sf}}(\mathbf{x}_{\Sigma}) \\ \mathbf{Y}^{\text{sf}}(\mathbf{x}_{\Sigma}) \end{pmatrix}.$$

On voit immédiatement qu'ils sont solution du problème aux valeurs propres linéaire :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } (\lambda, \mathbf{X}^{\text{sf}}, \mathbf{Y}^{\text{sf}}) \text{ tel que} \\ &\lambda \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{\text{sf}} \\ \mathbf{Y}^{\text{sf}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^{\infty} \\ F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}^{\infty} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{\text{sf}} \\ \mathbf{Y}^{\text{sf}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7.36)$$

où les opérateurs  $F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}^{\infty}$  et  $F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^{\infty}$  sont définis de la même façon que les opérateurs  $F_{\mathbf{x}^{\text{sf}}}^{\infty}$  et  $F_{\mathbf{y}^{\text{sf}}}^{\infty}$ , mais n'agissent que sur des fonctions de la variable transverse  $\mathbf{x}_{\Sigma}$ . Introduisons l'opérateur par bloc  $A^{\text{sf},\infty}$  associé à ce problème :

$$A^{\text{sf},\infty} := \begin{pmatrix} 0 & F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^{\infty} \\ F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}^{\infty} & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.37)$$

Pour préciser le domaine de cet opérateur, nous introduisons l'espace de Hilbert :

$$\mathbf{H}^{\text{sf},\infty} := (L^2(\Sigma^{\text{s}}))^3 \times L^2(\Sigma^{\text{f},\infty}),$$

ainsi que les sous-espaces :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}^{\infty} &:= (L^2(\Sigma^{\text{s}}))^2 \times H^1(\Sigma^{\text{s}}) \times L^2(\Sigma^{\text{f},\infty}), \\ \mathbf{V}_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^{\infty} &:= (H^1(\Sigma^{\text{s}}))^2 \times L^2(\Sigma^{\text{s}}) \times H^1(\Sigma^{\text{f},\infty}). \end{aligned}$$

Nous munissons  $\mathbf{H}^{\text{sf},\infty}$  de la norme  $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^{\text{sf},\infty}}$  associée au produit scalaire :

$$(\mathbf{X}^{\text{sf}}, \mathbf{Y}^{\text{sf}})_{\mathbf{H}^{\text{sf},\infty}} := \int_{\Sigma^s} (\mathbf{t}_\Sigma \cdot \bar{\mathbf{u}}_\Sigma + u_1 \bar{t}_1) d\mathbf{x}_\Sigma + \rho_f \int_{\Sigma^{f,\infty}} \zeta \bar{\varphi} d\mathbf{x}_\Sigma,$$

et les espaces  $\mathbf{V}_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}^\infty$  et  $\mathbf{V}_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^\infty$  des normes :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}^{\text{sf}}\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}^\infty}^2 &:= \|\mathbf{t}_\Sigma\|_{(L^2(\Sigma^s))^2}^2 + \|u_1\|_{H^1(\Sigma^s)}^2 + \rho_f \|\zeta\|_{L^2(\Sigma^{f,\infty})}^2 \\ \|\mathbf{Y}^{\text{sf}}\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^\infty}^2 &:= \|\mathbf{u}_\Sigma\|_{(H^1(\Sigma^s))^2}^2 + \|t_1\|_{L^2(\Sigma^s)}^2 + \rho_f \|\varphi\|_{H^1(\Sigma^{f,\infty})}^2. \end{aligned}$$

Les domaines des opérateurs  $F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}^\infty$  et  $F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^\infty$  sont ensuite donnés par :

$$\begin{aligned} D(F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}^\infty) &= \left\{ \mathbf{X}^{\text{sf}} := (\mathbf{t}_\Sigma, u_1, \zeta) \in \mathbf{V}_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}^\infty \mid \operatorname{div}_\Sigma(\mathbf{t}_\Sigma) \in L^2(\Sigma^s), \mathbf{t}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_s = 0 \text{ sur } \gamma^{\text{sf}} \right\} \\ D(F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^\infty) &= \left\{ \mathbf{Y}^{\text{sf}} := (\mathbf{u}_\Sigma, t_1, \varphi) \in \mathbf{V}_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^\infty \mid \operatorname{div}_\Sigma(\underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{Y}^s)) \in (L^2(\Sigma^s))^2, \Delta_\Sigma \varphi \in L^2(\Sigma^{f,\infty}), \right. \\ &\quad \left. \underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{Y}^s) \mathbf{e}_s = -i\rho_f \omega \varphi \mathbf{e}_s \text{ et } -i\omega(\mathbf{u}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_s) = \nabla_\Sigma \varphi \cdot \mathbf{e}_s \text{ sur } \gamma^{\text{sf}} \right\}. \end{aligned}$$

On a alors :

$$D(A^{\text{sf},\infty}) = D(F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}^\infty) \times D(F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^\infty).$$

Pour étudier le spectre de  $A^{\text{sf},\infty}$ , nous avons besoin de montrer au préalable que c'est un opérateur fermé de domaine dense dans  $\mathbf{H}^{\text{sf},\infty} \times \mathbf{H}^{\text{sf},\infty}$ .

Nous allons nous reposer pour cela sur quelques propriétés satisfaites par les opérateurs  $F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}^\infty$  et  $F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^\infty$ .

### Lemme 7.13

Les opérateurs  $F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}^\infty$  et  $F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^\infty$  sont symétriques pour le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{H}^{\text{sf},\infty}}$ . Cela s'écrit pour  $(\mathbf{X}^{\text{sf}}, \tilde{\mathbf{X}}^{\text{sf}}) \in (D(F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}^\infty))^2$  et  $(\mathbf{Y}^{\text{sf}}, \tilde{\mathbf{Y}}^{\text{sf}}) \in (D(F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^\infty))^2$  :

$$(F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}^\infty \mathbf{X}^{\text{sf}}, \tilde{\mathbf{X}}^{\text{sf}})_{\mathbf{H}^{\text{sf},\infty}} = (\mathbf{X}^{\text{sf}}, F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}^\infty \tilde{\mathbf{X}}^{\text{sf}})_{\mathbf{H}^{\text{sf},\infty}} \quad \text{et} \quad (F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^\infty \mathbf{Y}^{\text{sf}}, \tilde{\mathbf{Y}}^{\text{sf}})_{\mathbf{H}^{\text{sf},\infty}} = (\mathbf{Y}^{\text{sf}}, F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^\infty \tilde{\mathbf{Y}}^{\text{sf}})_{\mathbf{H}^{\text{sf},\infty}}.$$

*Démonstration.* Nous savons, d'après [Bar09, Lemme 2.1], que les opérateurs  $F_{\mathbf{X}^s}$  et  $F_{\mathbf{Y}^s}$  sont symétriques pour le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{H}^s}$  lorsqu'il n'y a pas de fluide environnant. Le résultat énoncé dans le cas d'un guide immergé se montre avec des calculs analogues en utilisant la symétrie de l'opérateur de Helmholtz mais aussi celle des termes de couplage. Ces calculs se déduisent aisément de ceux conduits plus tard pour démontrer le Lemme 7.47.  $\square$

**Remarque 7.14** *Le choix d'une formulation en déplacement dans le solide et potentiel des vitesses dans le fluide est important pour l'obtention de ce résultat. En effet, faire le choix d'une formulation en déplacement dans le solide et pression dans le fluide conduit à un terme de couplage qui n'est pas symétrique.*

Pour poursuivre l'étude de l'opérateur  $A^{\text{sf},\infty}$ , nous avons besoin du lemme technique suivant.

### Lemme 7.15

Soient  $C_\gamma^f : H^1(\Sigma^{f,\infty}) \rightarrow ((H^1(\Sigma^s))^2)^*$  et  $C_\gamma^s : (H^1(\Sigma^s))^2 \rightarrow H^1(\Sigma^{f,\infty})^*$  les opérateurs définis

pour  $(\mathbf{u}_\Sigma, \varphi) \in (H^1(\Sigma^s))^2 \times H^1(\Sigma^{f,\infty})$  par :

$$\begin{aligned} \langle C_\gamma^f \varphi, \bar{\mathbf{v}}_\Sigma \rangle_{((H^1(\Sigma^s))^2)^*, (H^1(\Sigma^s))^2} &:= i\rho_f \omega \int_{\gamma^{sf}} \varphi (\bar{\mathbf{v}}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_s) ds(\mathbf{x}_\Sigma), \quad \forall \mathbf{v}_\Sigma \in (H^1(\Sigma^s))^2 \\ \langle C_\gamma^s \mathbf{u}_\Sigma, \bar{\psi} \rangle_{H^1(\Sigma^{f,\infty})^*, H^1(\Sigma^{f,\infty})} &:= -i\rho_f \omega \int_{\gamma^{sf}} \bar{\psi} (\mathbf{u}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_s) ds(\mathbf{x}_\Sigma), \quad \forall \psi \in H^1(\Sigma^{f,\infty}). \end{aligned}$$

Les opérateurs  $C_\gamma^f$  et  $C_\gamma^s$  sont compacts et donc par conséquents continus. Si  $(\mathbf{u}_\Sigma^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de  $(H^1(\Sigma^s))^2$  qui converge faiblement vers  $\mathbf{u}_\Sigma$  dans  $(H^1(\Sigma^s))^2$  et  $(\varphi^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de  $H^1(\Sigma^f)$  qui converge faiblement vers  $\varphi$  dans  $H^1(\Sigma^{f,\infty})$ , on a alors :

$$\begin{aligned} \langle C_\gamma^f \varphi^n, \mathbf{u}_\Sigma^n \rangle_{((H^1(\Sigma^s))^2)^*, (H^1(\Sigma^s))^2} &\rightarrow \langle C_\gamma^f \varphi, \mathbf{u}_\Sigma \rangle_{((H^1(\Sigma^s))^2)^*, (H^1(\Sigma^s))^2} \\ \langle C_\gamma^s \mathbf{u}_\Sigma^n, \varphi^n \rangle_{H^1(\Sigma^{f,\infty})^*, H^1(\Sigma^{f,\infty})} &\rightarrow \langle C_\gamma^s \mathbf{u}_\Sigma, \varphi \rangle_{H^1(\Sigma^{f,\infty})^*, H^1(\Sigma^{f,\infty})}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Montrons de façon simultanée la compacité des deux opérateurs. Soit  $(\mathbf{u}_\Sigma^n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée dans  $(H^1(\Sigma^s))^2$  et  $(\varphi^n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée dans  $H^1(\Sigma^{f,\infty})$ . On peut en extraire deux sous-suites qui convergent faiblement vers  $\mathbf{u}_\Sigma$  dans  $(H^1(\Sigma^s))^2$  et  $\varphi$  dans  $H^1(\Sigma^{f,\infty})$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\Sigma^n &\rightharpoonup \mathbf{u}_\Sigma \quad \text{dans } (H^1(\Sigma^s))^2 \\ \varphi^n &\rightharpoonup \varphi \quad \text{dans } H^1(\Sigma^{f,\infty}). \end{aligned}$$

Par continuité de l'application trace il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\Sigma^n|_{\gamma^{sf}} &\rightharpoonup \mathbf{u}_\Sigma|_{\gamma^{sf}} \quad \text{dans } (H^{\frac{1}{2}}(\gamma^{sf}))^2 \\ \varphi^n|_{\gamma^{sf}} &\rightharpoonup \varphi|_{\gamma^{sf}} \quad \text{dans } H^{\frac{1}{2}}(\gamma^{sf}). \end{aligned}$$

Comme le domaine  $\gamma^{sf}$  est borné, l'injection continue de  $H^{\frac{1}{2}}(\gamma^{sf})$  dans  $L^2(\gamma^{sf})$  est compacte, d'où :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\Sigma^n|_{\gamma^{sf}} &\rightarrow \mathbf{u}_\Sigma|_{\gamma^{sf}} \quad \text{dans } (L^2(\gamma^{sf}))^2 \\ \varphi^n|_{\gamma^{sf}} &\rightarrow \varphi|_{\gamma^{sf}} \quad \text{dans } L^2(\gamma^{sf}). \end{aligned}$$

En revenant à la définition des opérateurs, on voit alors que :

$$\begin{aligned} \langle C_\gamma^f \varphi^n, \bar{\mathbf{v}}_\Sigma \rangle_{((H^1(\Sigma^s))^2)^*, (H^1(\Sigma^s))^2} &\rightarrow \langle C_\gamma^f \varphi, \bar{\mathbf{v}}_\Sigma \rangle_{((H^1(\Sigma^s))^2)^*, (H^1(\Sigma^s))^2} \\ \langle C_\gamma^s \mathbf{u}_\Sigma^n, \bar{\psi} \rangle_{H^1(\Sigma^{f,\infty})^*, H^1(\Sigma^{f,\infty})} &\rightarrow \langle C_\gamma^s \mathbf{u}_\Sigma, \bar{\psi} \rangle_{H^1(\Sigma^{f,\infty})^*, H^1(\Sigma^{f,\infty})}, \end{aligned}$$

ce qui donne la compacité des opérateurs. Le dernier point découle directement du fait que le produit de dualité d'une suite fortement convergente et d'une suite faiblement convergente est convergent.  $\square$

### Proposition 7.16

Les opérateurs  $F_{\mathbf{X}^{sf}}^\infty$  et  $F_{\mathbf{Y}^{sf}}^\infty$  sont à domaine dense dans  $\mathbf{H}^{sf,\infty}$  et autoadjoints excepté pour un ensemble dénombrable de fréquences.

*Démonstration.* Nous allons montrer ce résultat à l'aide de la Proposition A.4. Commençons par l'opérateur  $F_{\mathbf{Y}^{sf}}^\infty$ .

• **Caractère autoadjoint de  $F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^\infty$**

Soit  $S_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} : \mathbf{H}^{\text{sf},\infty} \rightarrow \mathbf{H}^{\text{sf},\infty}$  l'opérateur diagonal défini par blocs comme suit :

$$S_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} := \begin{pmatrix} \eta_s I_2^s & 0 & 0 \\ 0 & 0^s & 0 \\ 0 & 0 & \eta_f I^f \end{pmatrix},$$

où  $\eta_s := \rho_s \omega^2 + 1$ ,  $\eta_f := k_f^2 + 1$ ,  $I_2^s$  désigne l'application identité de  $(L^2(\Sigma^s))^2$ ,  $0^s$  désigne l'application nulle de  $L^2(\Sigma^s)$  et  $I^f$  désigne l'application identité de  $L^2(\Sigma^f)$ . Pour  $\mathbf{C}^{\text{sf}} = (\mathbf{C}^s, \mathbf{C}^f) \in \mathbf{H}^{\text{sf},\infty}$  avec  $\mathbf{C}^s = (\mathbf{C}_\Sigma, \mathbf{C}_1)$ , nous voulons montrer que le problème :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \mathbf{Y}^{\text{sf}} \in D(F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^\infty) \text{ tel que} \\ &F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^\infty \mathbf{Y}^{\text{sf}} + S_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} \mathbf{Y}^{\text{sf}} = \mathbf{C}^{\text{sf}}, \end{aligned} \quad (7.38)$$

est bien posé. Les équations de ce problème s'écrivent :

$$\begin{cases} -\text{div}_\Sigma(\underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{Y}^s)) + (\eta_s - \rho_s \omega^2) \mathbf{u}_\Sigma = \mathbf{C}_\Sigma & \text{sur } \Sigma^s \\ -\alpha_s \text{div}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma) - \frac{\alpha_s}{\lambda_s} t_1 = \mathbf{C}_1 & \text{sur } \Sigma^s \\ -\Delta_\Sigma \varphi + (\eta_f - k_f^2) \varphi = \mathbf{C}^f & \text{sur } \Sigma^{f,\infty}, \end{cases}$$

et se simplifient compte tenu du choix particulier de  $\eta_s$  et  $\eta_f$  en :

$$\begin{cases} -\text{div}_\Sigma(\underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{Y}^s)) + \mathbf{u}_\Sigma = \mathbf{C}_\Sigma & \text{sur } \Sigma^s \\ -\alpha_s \text{div}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma) - \frac{\alpha_s}{\lambda_s} t_1 = \mathbf{C}_1 & \text{sur } \Sigma^s \\ -\Delta_\Sigma \varphi + \varphi = \mathbf{C}^f & \text{sur } \Sigma^{f,\infty}, \end{cases} \quad (7.39)$$

Nous allons premièrement multiplier la première équation de (7.39) par  $\bar{\mathbf{v}}_\Sigma \in (H^1(\Sigma^s))^2$  et intégrer à l'aide de la formule de Green, remplacer deuxièmement  $\underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{Y}^s)$  par son expression (7.8), utiliser troisièmement l'égalité  $\delta_s = \lambda_s(1 - \alpha_s)$  et utiliser enfin la deuxième équation de (7.39). Ces opérations successives s'écrivent :

$$\begin{aligned} &\int_{\Sigma^s} \mathbf{C}_\Sigma \cdot \bar{\mathbf{v}}_\Sigma d\mathbf{x}_\Sigma \\ &= \int_{\Sigma^s} (-\text{div}_\Sigma(\underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{Y}^s)) \bar{\mathbf{v}}_\Sigma + \mathbf{u}_\Sigma \cdot \bar{\mathbf{v}}_\Sigma) d\mathbf{x}_\Sigma \\ &= \int_{\Sigma^s} (\underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{Y}^s) : \underline{\nabla}_\Sigma \bar{\mathbf{v}}_\Sigma + \mathbf{u}_\Sigma \cdot \bar{\mathbf{v}}_\Sigma) d\mathbf{x}_\Sigma - \int_{\gamma^{\text{sf}}} (\underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{Y}^s) \mathbf{e}_s) \cdot \bar{\mathbf{v}}_\Sigma ds(\mathbf{x}_\Sigma) \\ &= \int_{\Sigma^s} ((\delta_s \text{div}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma) - \alpha_s t_1) \text{div}_\Sigma(\bar{\mathbf{v}}_\Sigma) + 2\mu_s \underline{\epsilon}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma) : \underline{\nabla}_\Sigma \bar{\mathbf{v}}_\Sigma + \mathbf{u}_\Sigma \cdot \bar{\mathbf{v}}_\Sigma) d\mathbf{x}_\Sigma \\ &\quad - \int_{\gamma^{\text{sf}}} (\underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{Y}^s) \mathbf{e}_s) \cdot \bar{\mathbf{v}}_\Sigma ds(\mathbf{x}_\Sigma) \\ &= \int_{\Sigma^s} (\lambda_s \text{div}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma) \text{div}_\Sigma(\bar{\mathbf{v}}_\Sigma) + 2\mu_s \underline{\epsilon}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma) : \underline{\nabla}_\Sigma \bar{\mathbf{v}}_\Sigma + \lambda_s \mathbf{C}_1 \text{div}_\Sigma(\bar{\mathbf{v}}_\Sigma) + \mathbf{u}_\Sigma \cdot \bar{\mathbf{v}}_\Sigma) d\mathbf{x}_\Sigma \\ &\quad - \int_{\gamma^{\text{sf}}} (\underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{Y}^s) \mathbf{e}_s) \cdot \bar{\mathbf{v}}_\Sigma ds(\mathbf{x}_\Sigma). \end{aligned}$$

Puisque  $\underline{\epsilon}_\Sigma(\cdot)$  représente la partie symétrique de  $\underline{\nabla}_\Sigma \cdot$ , le tenseur  $\underline{\nabla}_\Sigma \cdot -\underline{\epsilon}_\Sigma(\cdot)$  est antisymétrique. Utiliser le fait que le produit doublement contracté d'un tenseur symétrique et d'un

tenseur antisymétrique est nul, donne alors  $\underline{\epsilon}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma) : \nabla_\Sigma \bar{\mathbf{v}}_\Sigma = \underline{\epsilon}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma) : \underline{\epsilon}_\Sigma(\bar{\mathbf{v}}_\Sigma)$ . De plus, multiplier la troisième équation de (7.39) par  $\rho_f \bar{\psi} \in H^1(\Sigma^{f,\infty})$  et intégrer par parties donne plus simplement :

$$\rho_f \int_{\Sigma^{f,\infty}} C^f \bar{\psi} d\mathbf{x}_\Sigma = \rho_f \int_{\Sigma^{f,\infty}} (\nabla_\Sigma \varphi \cdot \nabla_\Sigma \bar{\psi} + \varphi \bar{\psi}) d\mathbf{x}_\Sigma + \rho_f \int_{\gamma^{sf}} (\nabla_\Sigma \varphi \cdot \mathbf{e}_s) \bar{\psi} ds(\mathbf{x}_\Sigma).$$

En sommant les deux égalités que nous venons d'établir et en utilisant les conditions de couplage (7.34) sur  $\gamma^{sf}$ , nous obtenons que (7.38) est équivalent au problème :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{Y}^{sf} \in \mathbf{V}_{\mathbf{Y}^{sf}}^\infty \text{ tel que} \\ & \begin{cases} a_{\mathbf{Y}^{sf}}^\infty((\mathbf{u}_\Sigma, \varphi), (\mathbf{v}_\Sigma, \psi)) = \ell_{\mathbf{Y}^{sf}}^\infty(\mathbf{v}_\Sigma, \psi), & \forall (\mathbf{v}_\Sigma, \psi) \in (H^1(\Sigma^s))^2 \times H^1(\Sigma^{f,\infty}) \\ -\alpha_s \operatorname{div}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma) - \frac{\alpha_s}{\lambda_s} t_1 = C_1 & \text{sur } \Sigma^s, \end{cases} \end{aligned} \quad (7.40)$$

où :

$$a_{\mathbf{Y}^{sf}}^\infty := b_{\mathbf{Y}^{sf}}^\infty + c_{\mathbf{Y}^{sf}}^\infty,$$

avec :

$$\begin{aligned} b_{\mathbf{Y}^{sf}}^\infty((\mathbf{u}_\Sigma, \varphi), (\mathbf{v}_\Sigma, \psi)) & := \int_{\Sigma^s} (\lambda_s \operatorname{div}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma) \operatorname{div}_\Sigma(\bar{\mathbf{v}}_\Sigma) + 2\mu_s \underline{\epsilon}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma) : \underline{\epsilon}_\Sigma(\bar{\mathbf{v}}_\Sigma) + \mathbf{u}_\Sigma \cdot \bar{\mathbf{v}}_\Sigma) d\mathbf{x}_\Sigma \\ & \quad + \rho_f \int_{\Sigma^f} (\nabla_\Sigma \varphi \cdot \nabla_\Sigma \bar{\psi} + \varphi \bar{\psi}) d\mathbf{x}_\Sigma, \end{aligned}$$

$$c_{\mathbf{Y}^{sf}}^\infty((\mathbf{u}_\Sigma, \varphi), (\mathbf{v}_\Sigma, \psi)) := i\rho_f \omega \int_{\gamma^{sf}} (\varphi(\bar{\mathbf{v}}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_s) - \bar{\psi}(\mathbf{u}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_s)) ds(\mathbf{x}_\Sigma),$$

et :

$$\ell_{\mathbf{Y}^{sf}}^\infty(\mathbf{v}_\Sigma, \psi) := \int_{\Sigma^s} (C_\Sigma \cdot \bar{\mathbf{v}}_\Sigma - \lambda_s C_1 \operatorname{div}_\Sigma(\bar{\mathbf{v}}_\Sigma)) d\mathbf{x}_\Sigma + \rho_f \int_{\Sigma^{f,\infty}} C^f \bar{\psi} d\mathbf{x}_\Sigma.$$

Posons  $\mathbf{V} := (H^1(\Sigma^s))^2 \times H^1(\Sigma^{f,\infty})$ . On peut montrer que  $b_{\mathbf{Y}^{sf}}^\infty$  est une forme sesquilinéaire continue coercive sur  $\mathbf{V}$ . Pour montrer la coercivité, nous utilisons l'inégalité de Korn donnée par le Théorème A.8 pour contrôler l'intégrale sur  $\Sigma^s$ . On a alors l'existence d'une constante  $c_s > 0$  telle que :

$$b_{\mathbf{Y}^{sf}}^\infty((\mathbf{u}_\Sigma, \varphi), (\mathbf{u}_\Sigma, \varphi)) \geq c_s \|\mathbf{u}_\Sigma\|_{(H^1(\Sigma^s))^2}^2 + \rho_f \|\varphi\|_{H^1(\Sigma^{f,\infty})}^2.$$

D'après le lemme de Lax-Milgram, la forme sesquilinéaire  $b_{\mathbf{Y}^{sf}}^\infty$  est donc associée à un isomorphisme de  $\mathbf{V}$  dans son dual. Quant à la forme sesquilinéaire  $c_{\mathbf{Y}^{sf}}^\infty$ , elle est continue et associée à un opérateur compact de  $\mathbf{V}$  dans son dual d'après le Lemme 7.15. On remarque enfin que  $b_{\mathbf{Y}^{sf}}^\infty$  ne dépend pas de la pulsation  $\omega$  tandis que  $c_{\mathbf{Y}^{sf}}^\infty$  en dépend de façon analytique. Et comme  $a_{\mathbf{Y}^{sf}}^\infty$  correspond pour  $\omega = 0$  à un isomorphisme d'après le lemme de Lax-Milgram, il vient d'après le théorème de Fredholm analytique (voir le Théorème A.3) que le problème (7.40) est bien posé excepté pour un ensemble dénombrable de fréquences. Partant de (7.40), réaliser des intégrations par parties jusqu'au problème initial (7.38) pour des fonctions tests infiniment dérivables à support compact, puis raisonner par densité permet de montrer que la solution de (7.40) est bien dans le domaine de l'opérateur  $F_{\mathbf{Y}^{sf}}^\infty$ . Nous venons ainsi de prouver que :

$$\operatorname{Im}(F_{\mathbf{Y}^{sf}}^\infty + S_{\mathbf{Y}^{sf}}) = \mathbf{H}^{sf,\infty}.$$

Comme l'opérateur  $F_{\mathbf{Y}^{sf}}^\infty$  est en plus symétrique d'après le Lemme 7.13, on peut finalement appliquer la Proposition A.4 qui nous donne la densité de  $D(F_{\mathbf{Y}^{sf}}^\infty)$  dans  $\mathbf{H}^{sf,\infty}$  et que  $F_{\mathbf{Y}^{sf}}^\infty$  est autoadjoint excepté pour un ensemble dénombrable de fréquences. Montrons maintenant le

résultat pour l'opérateur  $-F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}^{\infty}$ .

• **Caractère autoadjoint de  $F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}^{\infty}$**

Nous introduisons cette fois l'opérateur borné  $S_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} : \mathbf{H}^{\text{sf},\infty} \rightarrow \mathbf{H}^{\text{sf},\infty}$  donné par blocs par :

$$S_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} := \begin{pmatrix} 0_2^{\text{s}} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{\text{s}} I^{\text{s}} & 0 \\ 0 & 0 & 0^{\text{f}} \end{pmatrix},$$

avec  $\eta_{\text{s}} := \rho_{\text{s}}\omega^2 + 1$ ,  $0_2^{\text{s}}$  qui désigne l'application nulle de  $(L^2(\Sigma^{\text{s}}))^2$ ,  $I^{\text{s}}$  qui désigne l'application identité de  $L^2(\Sigma^{\text{s}})$  et enfin  $0^{\text{f}}$  qui désigne l'application nulle de  $L^2(\Sigma^{\text{f}})$ . Soit  $\mathbf{B}^{\text{sf}} = (\mathbf{B}^{\text{s}}, \mathbf{B}^{\text{f}}) \in \mathbf{H}^{\text{sf},\infty}$  avec  $\mathbf{B}^{\text{s}} = (\mathbf{B}_{\Sigma}, \mathbf{B}_1)$ , nous souhaitons montrer que le problème :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \mathbf{X}^{\text{sf}} \in D(F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}^{\infty}) \text{ tel que} \\ &- F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}^{\infty} \mathbf{X}^{\text{sf}} + S_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} \mathbf{X}^{\text{sf}} = \mathbf{B}^{\text{sf}}, \end{aligned} \quad (7.41)$$

est bien posé. Les équations de ce problème s'écrivent :

$$\begin{cases} -\frac{1}{\mu_{\text{s}}} \mathbf{t}_{\Sigma} + \nabla_{\Sigma} u_1 = \mathbf{B}_{\Sigma} & \text{sur } \Sigma^{\text{s}} \\ -\text{div}_{\Sigma}(\mathbf{t}_{\Sigma}) + (\eta_{\text{s}} - \rho_{\text{s}}\omega^2)u_1 = \mathbf{B}_1 & \text{sur } \Sigma^{\text{s}} \\ -\zeta = \mathbf{B}^{\text{f}} & \text{sur } \Sigma^{\text{f},\infty}, \end{cases}$$

et se simplifient compte tenu du choix particulier de  $\eta_{\text{s}}$  en :

$$\begin{cases} -\frac{1}{\mu_{\text{s}}} \mathbf{t}_{\Sigma} + \nabla_{\Sigma} u_1 = \mathbf{B}_{\Sigma} & \text{sur } \Sigma^{\text{s}} \\ -\text{div}_{\Sigma}(\mathbf{t}_{\Sigma}) + u_1 = \mathbf{B}_1 & \text{sur } \Sigma^{\text{s}} \\ -\zeta = \mathbf{B}^{\text{f}} & \text{sur } \Sigma^{\text{f},\infty}. \end{cases} \quad (7.42)$$

Multiplions la deuxième équation de (7.42) par  $\bar{v}_1 \in H^1(\Sigma^{\text{s}})$ , puis intégrons-la par parties. En utilisant la condition satisfaite par  $\mathbf{t}_{\Sigma}$  sur  $\gamma^{\text{sf}}$  on a :

$$\int_{\Sigma^{\text{s}}} (\mathbf{t}_{\Sigma} \cdot \nabla_{\Sigma} \bar{v}_1 + u_1 \bar{v}_1) d\mathbf{x}_{\Sigma} = \int_{\Sigma^{\text{s}}} \mathbf{B}_1 \bar{v}_1 d\mathbf{x}_{\Sigma},$$

puis on obtient à l'aide de la première équation de (7.42) :

$$\int_{\Sigma^{\text{s}}} (\mu_{\text{s}} \nabla_{\Sigma} u_1 \cdot \nabla_{\Sigma} \bar{v}_1 + u_1 \bar{v}_1) d\mathbf{x}_{\Sigma} = \int_{\Sigma^{\text{s}}} (\mathbf{B}_1 \bar{v}_1 + \mu_{\text{s}} \mathbf{B}_{\Sigma} \cdot \nabla_{\Sigma} \bar{v}_1) d\mathbf{x}_{\Sigma}.$$

Le problème (7.38) est ainsi équivalent au problème :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \mathbf{X}^{\text{sf}} \in \mathbf{V}_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}^{\infty} \text{ tel que} \\ &\begin{cases} a_{\mathbf{X}^{\text{s}}}^{\infty}(u_1, v_1) = \ell_{\mathbf{X}^{\text{s}}}^{\infty}(v_1), & \forall v_1 \in H^1(\Sigma^{\text{s}}) \\ -\frac{1}{\mu_{\text{s}}} \mathbf{t}_{\Sigma} + \nabla_{\Sigma} u_1 = \mathbf{B}_{\Sigma} & \text{sur } \Sigma^{\text{s}} \\ -\zeta = \mathbf{B}^{\text{f}} & \text{sur } \Sigma^{\text{f},\infty}, \end{cases} \end{aligned} \quad (7.43)$$

où :

$$a_{\mathbf{X}^{\text{s}}}^{\infty}(u_1, v_1) := \int_{\Sigma^{\text{s}}} (\mu_{\text{s}} \nabla_{\Sigma} u_1 \cdot \nabla_{\Sigma} \bar{v}_1 + u_1 \bar{v}_1) d\mathbf{x}_{\Sigma},$$

et :

$$\ell_{\mathbf{X}^{\text{s}}}^{\infty}(v_1) := \int_{\Sigma^{\text{s}}} (\mathbf{B}_1 \bar{v}_1 + \mu_{\text{s}} \mathbf{B}_{\Sigma} \cdot \nabla_{\Sigma} \bar{v}_1) d\mathbf{x}_{\Sigma}.$$

Grâce au choix de  $\eta_s$ , la forme sesquilinéaire  $a_{\mathbf{X}^s}^\infty$  est coercive dans  $H^1(\Sigma^s)$ . Il en découle que le problème (7.43) est bien posé. Partant de (7.43), conduire des intégrations par parties jusqu'au problème initial (7.41) pour des fonctions tests infiniment dérivables à support compact, puis raisonner par densité, permet de montrer que la solution de (7.43) est dans le domaine de  $F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}^\infty$ . Ceci nous permet de conclure que le problème (7.41) est bien posé. Nous avons ainsi :

$$\text{Im}(-F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}^\infty + S_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}) = \mathbf{H}^{\text{sf},\infty}.$$

Sachant que l'opérateur  $-F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}^\infty$  est symétrique d'après le Lemme 7.13, il vient d'après la Proposition A.4 que  $-F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}^\infty$  est autoadjoint de domaine dense dans  $\mathbf{H}^{\text{sf},\infty}$ . Ceci nous permet de conclure la preuve de la Proposition 7.16.  $\square$

**Remarque 7.17** Dans la démonstration de la Proposition 7.16, le choix particulier des opérateurs  $S_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}$  et  $S_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$  a permis d'absorber dans les formulations variationnelles des termes ni coercifs ni compacts et par suite d'utiliser les théorèmes de Lax-Milgram et de Fredholm analytique.

### Corollaire 7.18

Les opérateurs  $F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}^\infty$  et  $F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^\infty$  sont fermés excepté pour un ensemble dénombrable de fréquences.

*Démonstration.* C'est une conséquence directe de leur caractère autoadjoint démontré avec la Proposition 7.16.  $\square$

Nous sommes alors en mesure d'énoncer le théorème suivant.

### Théorème 7.19

L'opérateur  $A^{\text{sf},\infty}$  est fermé de domaine dense dans  $\mathbf{H}^{\text{sf},\infty} \times \mathbf{H}^{\text{sf},\infty}$  excepté pour un ensemble dénombrable de fréquences.

*Démonstration.* Le résultat découle directement de la définition (7.37) de l'opérateur  $A^{\text{sf},\infty}$  et de la Proposition 7.16.  $\square$

Puisque nous savons désormais que l'opérateur  $A^{\text{sf},\infty}$  est fermé de domaine dense, on peut décomposer son spectre en la somme disjointe :

$$\Lambda(A^{\text{sf},\infty}) = \Lambda_p(A^{\text{sf},\infty}) \cup \Lambda_c(A^{\text{sf},\infty}) \cup \Lambda_r(A^{\text{sf},\infty}),$$

où  $\Lambda_p$  désigne le spectre ponctuel,  $\Lambda_c$  le spectre continu et enfin  $\Lambda_r$  le spectre résiduel.

Dans [Dah01], l'étude des valeurs propres imaginaires (correspondant aux modes propagatifs) du problème (7.36) repose sur les formules min-max qui ne sont pas valables pour des opérateurs non autoadjoints. Nous ne sommes donc pas en mesure de prouver facilement que le spectre ponctuel est non vide bien que nous verrons plus loin que ce sera le cas pour les configurations que nous étudierons. Nous observerons dans un cas particulier plus tard qu'il peut y avoir des valeurs propres purement réelles, purement imaginaires ou possédant simultanément des parties réelle et imaginaire non nulles. Dans ce cas, le spectre ponctuel présente la symétrie suivante.



**Proposition 7.20**

Soit  $\lambda \in \Lambda_p(A^{\text{sf},\infty})$  et  $(\mathbf{X}^{\text{sf}}, \mathbf{Y}^{\text{sf}}) \in \text{Ker}(A^{\text{sf},\infty} - \lambda I)$ , alors :

1.  $-\lambda \in \Lambda_p(A^{\text{sf},\infty})$  et  $(-\mathbf{X}^{\text{sf}}, \mathbf{Y}^{\text{sf}}) \in \text{Ker}(A^{\text{sf},\infty} + \lambda I)$ ;
2.  $\bar{\lambda} \in \Lambda_p(A^{\text{sf},\infty})$  et  $(\widehat{\mathbf{X}}^{\text{sf}}, \widehat{\mathbf{Y}}^{\text{sf}}) \in \text{Ker}(A^{\text{sf},\infty} - \bar{\lambda} I)$ ;
3.  $-\bar{\lambda} \in \Lambda_p(A^{\text{sf},\infty})$  et  $(-\widehat{\mathbf{X}}^{\text{sf}}, \widehat{\mathbf{Y}}^{\text{sf}}) \in \text{Ker}(A^{\text{sf},\infty} + \bar{\lambda} I)$ ;

avec :

$$\mathbf{X}^{\text{sf}} := \begin{pmatrix} \mathbf{t}_\Sigma \\ \mathbf{u}_1 \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}^{\text{sf}} := \begin{pmatrix} \mathbf{u}_\Sigma \\ \mathbf{t}_1 \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{X}}^{\text{sf}} := \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{t}}_\Sigma \\ \bar{\mathbf{u}}_1 \\ -\bar{\zeta} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \widehat{\mathbf{Y}}^{\text{sf}} := \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}_\Sigma \\ \bar{\mathbf{t}}_1 \\ -\bar{\varphi} \end{pmatrix}.$$

*Démonstration.* Pour montrer le premier point, il faut remarquer que :

$$\begin{pmatrix} 0 & F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^\infty \\ F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}^\infty & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathbf{X}^{\text{sf}} \\ \mathbf{Y}^{\text{sf}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^\infty \mathbf{Y}^{\text{sf}} \\ -F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}^\infty \mathbf{X}^{\text{sf}} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{\text{sf}} \\ -\mathbf{Y}^{\text{sf}} \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} -\mathbf{X}^{\text{sf}} \\ \mathbf{Y}^{\text{sf}} \end{pmatrix}.$$

Les conditions de couplage sur  $\gamma^{\text{sf}}$  sont encore satisfaites par le couple  $(-\mathbf{X}^{\text{sf}}, \mathbf{Y}^{\text{sf}})$ .

Pour le second point, nous commençons par conjuguer les équations de couplages :

$$\underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma)\mathbf{e}_s = -i\rho_f\omega\varphi\mathbf{e}_s \quad \text{et} \quad -i\omega(\mathbf{u}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_s) = \nabla_\Sigma\varphi \cdot \mathbf{e}_s \quad \text{sur} \quad \gamma^{\text{sf}},$$

ce qui nous donne :

$$\underline{\sigma}_\Sigma(\bar{\mathbf{u}}_\Sigma)\mathbf{e}_s = -i\rho_f\omega(-\bar{\varphi})\mathbf{e}_s \quad \text{et} \quad -i\omega(\bar{\mathbf{u}}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_s) = \nabla_\Sigma(-\bar{\varphi}) \cdot \mathbf{e}_s \quad \text{sur} \quad \gamma^{\text{sf}}.$$

De plus, conjuguer l'équation :

$$A^{\text{sf},\infty}(\mathbf{X}^{\text{sf}}, \mathbf{Y}^{\text{sf}})^t = \lambda(\mathbf{X}^{\text{sf}}, \mathbf{Y}^{\text{sf}})^t,$$

puis multiplier les équations dans le fluide par -1 donne compte tenu du fait que les coefficients de  $A^{\text{sf},\infty}$  sont réels :

$$A^{\text{sf},\infty}(\widehat{\mathbf{X}}^{\text{sf}}, \widehat{\mathbf{Y}}^{\text{sf}})^t = \bar{\lambda}(\widehat{\mathbf{X}}^{\text{sf}}, \widehat{\mathbf{Y}}^{\text{sf}})^t,$$

ce qui montre le résultat.

Le troisième point s'obtient enfin en combinant les deux premiers.  $\square$

Nous souhaitons ensuite décrire le spectre essentiel  $\Lambda_{e,W}$  défini en annexe par (B.1). Ce spectre essentiel correspond d'après la Proposition B.6 à l'ensemble des points du plan complexe pour lesquels il existe une suite de Weyl (voir la Définition B.5). Caractérisons-le. De façon préalable, nous considérons l'espace produit  $\mathbf{H}^{\text{sf},\infty} \times \mathbf{H}^{\text{sf},\infty}$ . C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire défini pour  $\mathbf{Z}^{\text{sf}} = (\mathbf{X}^{\text{sf}}, \mathbf{Y}^{\text{sf}})$  et  $\widetilde{\mathbf{Z}}^{\text{sf}} = (\widetilde{\mathbf{X}}^{\text{sf}}, \widetilde{\mathbf{Y}}^{\text{sf}})$  dans  $\mathbf{H}^{\text{sf},\infty} \times \mathbf{H}^{\text{sf},\infty}$  par :

$$(\mathbf{Z}^{\text{sf}}, \widetilde{\mathbf{Z}}^{\text{sf}})_{\mathbf{H}^{\text{sf},\infty} \times \mathbf{H}^{\text{sf},\infty}} := (\mathbf{X}^{\text{sf}}, \widetilde{\mathbf{X}}^{\text{sf}})_{\mathbf{H}^{\text{sf},\infty}} + (\mathbf{Y}^{\text{sf}}, \widetilde{\mathbf{Y}}^{\text{sf}})_{\mathbf{H}^{\text{sf},\infty}}.$$

On note  $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^{\text{sf},\infty} \times \mathbf{H}^{\text{sf},\infty}}$  la norme associée à ce produit scalaire. Il est possible de montrer l'inclusion suivante.

**Proposition 7.21**

On a l'inclusion :  $\mathbb{R} \cup i[-k_f, k_f] \subset \Lambda_{e,W}(A^{\text{sf},\infty})$ .

*Démonstration.* Montrons la preuve en 3D, celle 2D s'en déduira alors facilement. D'après la Proposition B.6 :  $\lambda \in \Lambda_{e,W}(A^{\text{sf},\infty})$  si et seulement il existe une suite de Weyl de  $A^{\text{sf},\infty}$  associée à la valeur  $\lambda$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R} \cup i[-k_f, k_f]$ , nous définissons :

$$\varphi_n(x_2, x_3) := \frac{1}{n\sqrt{\rho_f(1+|\lambda|^2)}} e^{i\beta_f(\lambda)x_2} \phi\left(\frac{x_2}{n}, \frac{x_3}{n}\right) \quad \text{et} \quad \zeta_n := \lambda\varphi_n(x_2, x_3),$$

avec  $\beta_f(\lambda) = \sqrt{k_f^2 + \lambda^2} \in \mathbb{R}^+$  et où  $\phi$  est une fonction de  $D(\mathbb{R}^2)$  ayant un support dans le complémentaire de  $\overline{B(0, R)}$ , avec  $R > 0$  choisi de telle sorte que  $\overline{\Sigma^s} \subset B(0, R)$ , et vérifiant  $\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1$ . On pose ensuite pour  $n \geq 1$  :

$$\mathbf{X}_n^{\text{sf}} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \zeta_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_n^{\text{sf}} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{Z}_n^{\text{sf}} := \begin{pmatrix} \mathbf{X}_n^{\text{sf}} \\ \mathbf{Y}_n^{\text{sf}} \end{pmatrix}.$$

Il est clair que  $\mathbf{Z}_n^{\text{sf}} \in D(A^{\text{sf},\infty})$ ,  $\forall n \geq 1$ . De plus, il est possible de vérifier à l'aide d'un changement de variable que :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Z}_n^{\text{sf}}\|_{\mathbf{H}^{\text{sf},\infty} \times \mathbf{H}^{\text{sf},\infty}}^2 &= \int_{\Sigma^{\text{f},\infty}} \frac{1}{n^2} \left| \phi\left(\frac{x_2}{n}, \frac{x_3}{n}\right) \right|^2 dx_2 dx_3 \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{n^2} \left| \phi\left(\frac{x_2}{n}, \frac{x_3}{n}\right) \right|^2 dx_2 dx_3 = \int_{\mathbb{R}^d} |\phi(x_2, x_3)|^2 dx_2 dx_3 = 1. \end{aligned}$$

Soit  $\tilde{\mathbf{Z}}^{\text{sf}} = (\tilde{\mathbf{X}}^{\text{sf}}, \tilde{\mathbf{Y}}^{\text{sf}})$  dans  $(D(\Sigma^s)^3 \times D(\Sigma^{\text{f},\infty}))^2$ , on a :

$$\begin{aligned} (\mathbf{Z}_n^{\text{sf}}, \tilde{\mathbf{Z}}^{\text{sf}})_{\mathbf{H}^{\text{sf},\infty} \times \mathbf{H}^{\text{sf},\infty}} &= \rho_f \int_{\Sigma^{\text{f},\infty}} (\zeta_n \tilde{\zeta} + \varphi_n \tilde{\varphi}) dx_2 dx_3 \\ &= \rho_f \int_{\Sigma^{\text{f},\infty}} \varphi_n (\lambda \tilde{\zeta} + \tilde{\varphi}) dx_2 dx_3 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

car il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ , l'intersection des supports de  $\mathbf{Z}_n^{\text{sf}}$  et de  $\tilde{\mathbf{Z}}^{\text{sf}}$  est nul. On en déduit par densité de  $D(\Sigma^{\text{f},\infty})$  (respectivement  $D(\Sigma^s)$ ) dans  $L^2(\Sigma^{\text{f},\infty})$  (respectivement  $L^2(\Sigma^s)$ ) que  $\mathbf{Z}_n^{\text{sf}} \rightharpoonup 0$  dans  $\mathbf{H}^{\text{sf},\infty}$ . Il reste enfin à vérifier que  $(A^{\text{sf},\infty} - \lambda I)\mathbf{Z}_n^{\text{sf}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Puisque les composantes élastiques de  $\mathbf{Z}_n^{\text{sf}}$ ,  $n \geq 1$  sont nulles, cela se résume à vérifier que :

$$\begin{cases} -\Delta_\Sigma \varphi_n - k_f^2 \varphi_n - \lambda \zeta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 & \text{dans } L^2(\Sigma^{\text{f},\infty}) \\ \zeta_n - \lambda \varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 & \text{dans } L^2(\Sigma^{\text{f},\infty}). \end{cases} \quad (7.44)$$

La seconde ligne se vérifie de façon immédiate, car  $\zeta_n = \lambda \varphi_n$ . En ce qui concerne la première ligne, nous écrivons  $\Delta_\Sigma = \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2$  en coordonnées cartésiennes et calculons :

$$\begin{aligned} \partial_{x_2}^2 \varphi_n &= \frac{1}{n\sqrt{\rho_f(1+|\lambda|^2)}} e^{i\beta_f(\lambda)x_2} \left( -\beta_f(\lambda)^2 \phi_n\left(\frac{x_2}{n}, \frac{x_3}{n}\right) + \frac{2i\beta_f(\lambda)}{n} \partial_{x_2} \phi_n\left(\frac{x_2}{n}, \frac{x_3}{n}\right) + \frac{1}{n^2} \partial_{x_2}^2 \phi_n\left(\frac{x_2}{n}, \frac{x_3}{n}\right) \right), \\ \partial_{x_3}^2 \varphi_n &= \frac{1}{n^3 \sqrt{\rho_f(1+|\lambda|^2)}} e^{i\beta_f(\lambda)x_2} \partial_{x_3}^2 \phi_n\left(\frac{x_2}{n}, \frac{x_3}{n}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} & -\Delta_{\Sigma}\varphi_n - k_f^2\varphi_n - \lambda\zeta_n \\ &= -\frac{1}{n\sqrt{\rho_f(1+|\lambda|^2)}}e^{i\beta_f(\lambda)x_2}\left(\frac{2i\beta_f(\lambda)}{n}\partial_{x_2}\Phi_n\left(\frac{x_2}{n},\frac{x_3}{n}\right) + \frac{1}{n^2}\partial_{x_2}^2\Phi_n\left(\frac{x_2}{n},\frac{x_3}{n}\right) + \frac{1}{n^2}\partial_{x_3}^2\Phi_n\left(\frac{x_2}{n},\frac{x_3}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

Comme  $\lambda \in \mathbb{R} \cup i[-k_f, k_f]$ , on a  $\beta_f(\lambda) \geq 0$  et l'exponentielle dans ces expressions est de norme 1. On en déduit alors la première ligne de (7.44).  $\square$

Nous avons aussi l'inclusion réciproque.

### Proposition 7.22

On a l'inclusion :  $\Lambda_{e,W}(A^{\text{sf},\infty}) \subset \mathbb{R} \cup i[-k_f, k_f]$ .

*Démonstration.* Soit  $\lambda \in \Lambda_{e,W}(A^{\text{sf},\infty})$ , il existe d'après la Proposition B.6 une suite de Weyl de  $A^{\text{sf},\infty}$  associée à  $\lambda$  notée  $(\mathbf{Z}_n^{\text{sf}})_{n \geq 1}$ . Cette suite à valeurs dans  $D(A^{\text{sf},\infty})$  vérifie les trois points suivants :

1.  $\|\mathbf{Z}_n^{\text{sf}}\|_{\mathbf{H}^{\text{sf},\infty} \times \mathbf{H}^{\text{sf},\infty}} = 1, n \geq 1$ ;
2.  $A^{\text{sf},\infty}\mathbf{Z}_n^{\text{sf}} - \lambda\mathbf{Z}_n^{\text{sf}} \rightarrow 0$  dans  $\mathbf{H}^{\text{sf},\infty} \times \mathbf{H}^{\text{sf},\infty}$ ;
3.  $\mathbf{Z}_n^{\text{sf}} \rightharpoonup 0$  dans  $\mathbf{H}^{\text{sf},\infty} \times \mathbf{H}^{\text{sf},\infty}$ .

Le deuxième point nous donne en particulier :

$$\begin{cases} -\text{div}_{\Sigma}(\underline{\sigma}_{\Sigma}(\mathbf{Y}_n^{\text{s}})) - \rho_s\omega^2\mathbf{u}_{\Sigma}^n - \lambda\mathbf{t}_{\Sigma}^n \rightarrow 0 & \text{dans } (L^2(\Sigma^{\text{s}}))^2 \\ -\Delta_{\Sigma}\varphi_n - k_f^2\varphi_n - \lambda\zeta_n \rightarrow 0 & \text{dans } L^2(\Sigma^{\text{f},\infty}) \\ \zeta_n - \lambda\varphi_n \rightarrow 0 & \text{dans } L^2(\Sigma^{\text{f},\infty}). \end{cases} \quad (7.45)$$

Nous cherchons à montrer que  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$  est bornée dans  $H^1(\Sigma^{\text{f},\infty})$  et que  $(\mathbf{u}_{\Sigma}^n)_{n \geq 1}$  est bornée dans  $(H^1(\Sigma^{\text{s}}))^2$ . Pour cela, nous remarquons que :

$$\begin{aligned} |(F_{Y^{\text{f}}}^{\infty}Y_n^{\text{f}} - \lambda X_n^{\text{f}}, Y_n^{\text{f}})_{L^2(\Sigma^{\text{f},\infty})}| &\leq \|F_{Y^{\text{f}}}^{\infty}Y_n^{\text{f}} - \lambda X_n^{\text{f}}\|_{L^2(\Sigma^{\text{f},\infty})} \|Y_n^{\text{f}}\|_{L^2(\Sigma^{\text{f},\infty})} \\ &\leq \|F_{Y^{\text{f}}}^{\infty}Y_n^{\text{f}} - \lambda X_n^{\text{f}}\|_{L^2(\Sigma^{\text{f},\infty})} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

grâce à la deuxième ligne de (7.45). Il s'ensuit qu'il existe une constante  $C_f > 0$  telle que :

$$|(F_{Y^{\text{f}}}^{\infty}Y_n^{\text{f}} - \lambda X_n^{\text{f}}, Y_n^{\text{f}})_{L^2(\Sigma^{\text{f},\infty})}| \leq C_f, \quad n \geq 1.$$

De même, en notant  $F_{\mathbf{u}_{\Sigma}}^{\infty}$  la première ligne de l'opérateur  $F_{\mathbf{Y}^{\text{s}}}^{\infty}$ , nous avons :

$$\begin{aligned} |(F_{\mathbf{u}_{\Sigma}}^{\infty}\mathbf{u}_{\Sigma}^n - \lambda\mathbf{t}_{\Sigma}^n, \mathbf{u}_{\Sigma}^n)_{(L^2(\Sigma^{\text{s}}))^2}| &\leq \|F_{\mathbf{u}_{\Sigma}}^{\infty}\mathbf{u}_{\Sigma}^n - \lambda\mathbf{t}_{\Sigma}^n\|_{(L^2(\Sigma^{\text{s}}))^2} \|\mathbf{u}_{\Sigma}^n\|_{(L^2(\Sigma^{\text{s}}))^2} \\ &\leq \|F_{\mathbf{u}_{\Sigma}}^{\infty}\mathbf{u}_{\Sigma}^n - \lambda\mathbf{t}_{\Sigma}^n\|_{(L^2(\Sigma^{\text{s}}))^2} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

en utilisant cette fois la première ligne de (7.45). Il existe donc aussi une constante  $C_s > 0$  telle que :

$$|(F_{\mathbf{u}_{\Sigma}}^{\infty}\mathbf{u}_{\Sigma}^n - \lambda\mathbf{t}_{\Sigma}^n, \mathbf{u}_{\Sigma}^n)_{(L^2(\Sigma^{\text{s}}))^2}| \leq C_s, \quad n \geq 1.$$

Nous avons par intégrations par parties et en utilisant les conditions de couplage satisfaites par  $\mathbf{Z}_n^{\text{sf}} \in D(A^{\text{sf},\infty})$ ,  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned} & \rho_f(F_{Y^{\text{f}}}^{\infty}Y_n^{\text{f}} - \lambda X_n^{\text{f}}, Y_n^{\text{f}})_{L^2(\Sigma^{\text{f},\infty})} + (F_{\mathbf{u}_{\Sigma}}^{\infty}\mathbf{u}_{\Sigma}^n - \lambda\mathbf{t}_{\Sigma}^n, \mathbf{u}_{\Sigma}^n)_{(L^2(\Sigma^{\text{s}}))^2} \\ &= \int_{\Sigma^{\text{s}}} (\lambda_s |\text{div}_{\Sigma}(\mathbf{u}_{\Sigma}^n)|^2 + 2\mu_s \underline{\epsilon}_{\Sigma}(\mathbf{u}_{\Sigma}^n) : \underline{\epsilon}_{\Sigma}(\bar{\mathbf{u}}_{\Sigma}^n) - \rho_s\omega^2 |\mathbf{u}_{\Sigma}^n|^2 - \lambda\mathbf{t}_{\Sigma}^n \cdot \bar{\mathbf{u}}_{\Sigma}^n) d\mathbf{x}_{\Sigma} \\ & \quad + \rho_f \int_{\Sigma^{\text{f},\infty}} (|\nabla_{\Sigma}\varphi_n|^2 - k_f^2 |\varphi_n|^2 - \lambda\zeta_n \bar{\varphi}_n) d\mathbf{x}_{\Sigma} + 2i\rho_f\omega \int_{\gamma^{\text{sf}}} \Re e((\mathbf{u}_{\Sigma}^n \cdot \mathbf{e}_s) \bar{\varphi}_n) ds(\mathbf{x}_{\Sigma}). \quad (7.46) \end{aligned}$$

Prendre la partie réelle de (7.46) fait disparaître le terme de couplage et nous donne l'inégalité :

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma^s} (\lambda_s |\operatorname{div}_{\Sigma}(\mathbf{u}_{\Sigma}^n)|^2 + 2\mu_s \epsilon_{\Sigma}(\mathbf{u}_{\Sigma}^n) : \epsilon_{\Sigma}(\bar{\mathbf{u}}_{\Sigma}^n)) d\mathbf{x}_{\Sigma} + \rho_f \int_{\Sigma^{f,\infty}} |\nabla_{\Sigma} \varphi_n|^2 d\mathbf{x}_{\Sigma} \\ & \leq C_s + \int_{\Sigma^s} (\rho_s \omega^2 |\mathbf{u}_{\Sigma}^n|^2 + |\Re(\lambda \mathbf{t}_{\Sigma}^n \cdot \bar{\mathbf{u}}_{\Sigma}^n)|) d\mathbf{x}_{\Sigma} + \rho_f C_f + \int_{\Sigma^{f,\infty}} (k_f^2 |\varphi_n|^2 + |\Re(\lambda \zeta_n \bar{\varphi}_n)|) d\mathbf{x}_{\Sigma}. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $\|\mathbf{Z}_n^{\text{sf}}\|_{\mathbf{H}^{\text{sf},\infty} \times \mathbf{H}^{\text{sf},\infty}} = 1$ ,  $n \geq 1$  et l'inégalité de Korn du Théorème A.8, on voit qu'il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $n \geq 1$  telle que :

$$\|\mathbf{u}_{\Sigma}^n\|_{(\mathbf{H}^1(\Sigma^s))^2}^2 + \rho_f \int_{\Sigma^{f,\infty}} |\nabla_{\Sigma} \varphi_n|^2 d\mathbf{x}_{\Sigma} \leq C.$$

Nous venons ainsi de montrer que  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$  est bornée dans  $H^1(\Sigma^{f,\infty})$ , mais aussi que  $(\mathbf{u}_{\Sigma}^n)_{n \geq 1}$  est bornée dans  $(H^1(\Sigma^s))^2$ . Ensuite, nous écrivons :

$$\begin{aligned} (F_{Y_f^f}^{\infty} Y_n^f, Y_n^f)_{L^2(\Sigma^{f,\infty})} &= (F_{Y_f^f}^{\infty} Y_n^f - \lambda X_n^f, Y_n^f)_{L^2(\Sigma^{f,\infty})} + \lambda (X_n^f, Y_n^f)_{L^2(\Sigma^{f,\infty})} \\ &= (F_{Y_f^f}^{\infty} Y_n^f - \lambda X_n^f, Y_n^f)_{L^2(\Sigma^{f,\infty})} + \lambda (X_n^f - \lambda Y_n^f, Y_n^f)_{L^2(\Sigma^{f,\infty})} + \lambda^2 \|Y_n^f\|_{L^2(\Sigma^{f,\infty})}^2. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Par des calculs analogues à ceux conduits plus haut, nous obtenons :

$$\rho_f (F_{Y_f^f}^{\infty} Y_n^f, Y_n^f)_{L^2(\Sigma^{f,\infty})} = \rho_f \int_{\Sigma^{f,\infty}} (|\nabla_{\Sigma} \varphi_n|^2 - k_f^2 |\varphi_n|^2) d\mathbf{x}_{\Sigma} + i\omega \int_{\gamma^{\text{sf}}} (\mathbf{u}_{\Sigma}^n \cdot \mathbf{e}_s) \bar{\varphi}_n ds(\mathbf{x}_{\Sigma}).$$

Par conséquent :

$$\rho_f (F_{Y_f^f}^{\infty} Y_n^f, Y_n^f)_{L^2(\Sigma^{f,\infty})} - i\omega \int_{\gamma^{\text{sf}}} (\mathbf{u}_{\Sigma}^n \cdot \mathbf{e}_s) \bar{\varphi}_n ds(\mathbf{x}_{\Sigma}) \geq -\rho_f k_f^2 \|\varphi_n\|_{L^2(\Sigma^{f,\infty})}^2. \quad (7.48)$$

Nous avons montré précédemment que  $(\mathbf{u}_{\Sigma}^n, \varphi_n)_{n \geq 1}$  est bornée dans  $(H^1(\Sigma^s))^2 \times H^1(\Sigma^{f,\infty})$ . Ainsi, nous pouvons extraire une sous-suite qui converge faiblement dans  $(H^1(\Sigma^s))^2 \times H^1(\Sigma^{f,\infty})$ . Or, cette suite converge faiblement vers  $(0, 0)$  dans  $(L^2(\Sigma^s))^2 \times L^2(\Sigma^f)$  par hypothèse. Par conséquent, la sous-suite  $(\mathbf{u}_{\Sigma}^n, \varphi_n)_{n \geq 1}$  converge faiblement vers  $(0, 0)$  dans  $(H^1(\Sigma^s))^2 \times H^1(\Sigma^{f,\infty})$ . D'après le Lemme 7.15, on obtient donc :

$$i\omega \int_{\gamma^{\text{sf}}} (\mathbf{u}_{\Sigma}^n \cdot \mathbf{e}_s) \bar{\varphi}_n ds(\mathbf{x}_{\Sigma}) \rightarrow 0.$$

Passer à la limite dans (7.47) nous donne à l'aide des deuxième et troisième lignes de (7.45) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (F_{Y_f^f}^{\infty} Y_n^f, Y_n^f)_{L^2(\Sigma^{f,\infty})} = \lambda^2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \|Y_n^f\|_{L^2(\Sigma^{f,\infty})}^2 \leq \lambda^2.$$

En passant aussi à la limite dans (7.48), nous obtenons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (F_{Y_f^f}^{\infty} Y_n^f, Y_n^f)_{L^2(\Sigma^{f,\infty})} \geq -k_f^2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \|Y_n^f\|_{L^2(\Sigma^{f,\infty})}^2 \geq -k_f^2,$$

ce qui nous donne enfin :

$$\lambda^2 \geq -k_f^2,$$

concluant ainsi la preuve.  $\square$

Les Propositions 7.21 et 7.22 nous permettent d'énoncer le théorème suivant.

**Théorème 7.23**

On a l'égalité :  $\Lambda_{e,W}(A^{\text{sf},\infty}) = \mathbb{R} \cup i[-k_f, k_f]$ .

**Remarque 7.24** Ce résultat est à mettre en regard avec la Proposition 4.1.1. En effet, le spectre essentiel dans le paramètre spectral  $\lambda^2$  du problème purement acoustique traité au chapitre 4 est donné par  $(\Lambda_{e,W}(A^{\text{sf},\infty}))^2 = [-k_f^2, +\infty[$ . Nous reconnaissons alors la structure du spectre essentiel du cas purement acoustique : une demi-droite de l'axe réel dont la borne inférieure est donnée par la vitesse des ondes dans le milieu environnant.

**Remarque 7.25** Nous soulignons que contrairement au cas purement acoustique, il peut y avoir des valeurs propres plongées dans le spectre essentiel. Par la suite, nous verrons par exemple en 2D que c'est le cas pour des valeurs propres associées à des modes de cisaillement ayant une polarisation antiplane (modes SH). Lorsque  $\Sigma^s$  est circulaire en 3D, cela peut aussi être le cas pour des valeurs propres associées à des modes de torsion (cf. [Dah01, §2.2.2]). Dans ces deux cas, les modes mentionnés n'interagissent pas avec le fluide parfait environnant.

Si nous arrivions à montrer que les deux composantes connexes de  $\mathbb{C} \setminus \Lambda_{e,W}(A^{\text{sf},\infty})$  contiennent au moins un élément de l'ensemble résolvant de  $A^{\text{sf},\infty}$ , nous pourrions alors appliquer la Proposition A.9 de [Gou10]. Utiliser ce résultat nous permettrait en effet d'obtenir que  $\Lambda_{e,W}(A^{\text{sf},\infty})$  est égal au spectre de  $A^{\text{sf},\infty}$  privé de son spectre discret, ce dernier correspondant aux éléments du spectre ponctuel de multiplicité finie et isolés dans le spectre. Dans ce cas,  $\Lambda_c(A^{\text{sf},\infty})$  serait égal à  $\Lambda_{e,W}(A^{\text{sf},\infty})$  privé des éléments de  $\Lambda_p(A^{\text{sf},\infty})$  qui y sont plongés.

Nous concluons l'étude du spectre de  $A^{\text{sf},\infty}$  en montrant que le spectre résiduel est vide.

**Proposition 7.26**

On a :  $\Lambda_r(A^{\text{sf},\infty}) = \emptyset$ .

*Démonstration.* Soit  $(A^{\text{sf},\infty})^*$  l'adjoint de l'opérateur  $A^{\text{sf},\infty}$ . Le spectre résiduel est donné selon le Lemme B.2 par :

$$\Lambda_r(A^{\text{sf},\infty}) = \overline{\Lambda_p((A^{\text{sf},\infty})^*)} \setminus \Lambda_p(A^{\text{sf},\infty}).$$

Nous avons montré dans la Proposition 7.16 que les opérateurs  $F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}^\infty$  et  $F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^\infty$  sont autoadjoints. Par conséquent :

$$(A^{\text{sf},\infty})^* = \begin{pmatrix} 0 & (F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^\infty)^* \\ (F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}^\infty)^* & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}^\infty \\ F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^\infty & 0 \end{pmatrix},$$

avec  $D((A^{\text{sf},\infty})^*) = D(F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^\infty) \times D(F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}^\infty)$ . Montrons que  $\Lambda_p((A^{\text{sf},\infty})^*) = \Lambda_p(A^{\text{sf},\infty})$ . Soit  $\lambda \in \Lambda_p(A^{\text{sf},\infty})$  et  $(\mathbf{X}^{\text{sf}}, \mathbf{Y}^{\text{sf}}) \in D(A^{\text{sf},\infty})$  tel que :

$$A^{\text{sf},\infty}(\mathbf{X}^{\text{sf}}, \mathbf{Y}^{\text{sf}})^t = \lambda(\mathbf{X}^{\text{sf}}, \mathbf{Y}^{\text{sf}})^t,$$

ce qui donne :

$$F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^\infty \mathbf{Y}^{\text{sf}} = \lambda \mathbf{X}^{\text{sf}} \quad \text{et} \quad F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}^\infty \mathbf{X}^{\text{sf}} = \lambda \mathbf{Y}^{\text{sf}}.$$

On remarque alors aisément que :

$$(A^{\text{sf},\infty})^*(\mathbf{Y}^{\text{sf}}, \mathbf{X}^{\text{sf}})^t = \lambda(\mathbf{Y}^{\text{sf}}, \mathbf{X}^{\text{sf}})^t,$$

avec  $(\mathbf{Y}^{\text{sf}}, \mathbf{X}^{\text{sf}}) \in D((A^{\text{sf},\infty})^*)$  et ainsi  $\lambda \in \Lambda_p((A^{\text{sf},\infty})^*)$ . Chaque étape de ce raisonnement est une équivalence, il y a donc l'égalité des deux spectres ponctuels. Ensuite, nous utilisons

la Proposition 7.20 qui nous donne l'égalité :  $\overline{\Lambda_p(A^{\text{sf},\infty})} = \Lambda_p(A^{\text{sf},\infty})$ . Cela nous permet de conclure que  $\Lambda_r(A^{\text{sf},\infty}) = \emptyset$ .  $\square$

La description du spectre de l'opérateur  $A^{\text{sf},\infty}$  apportée précédemment est résumée sur la Figure 7.3.

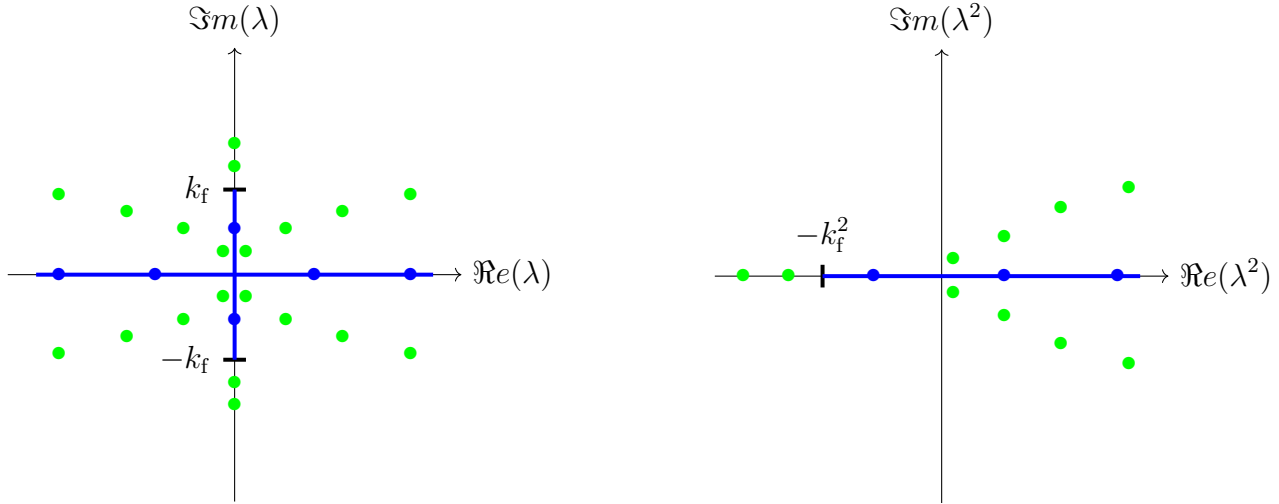


FIGURE 7.3: Représentation dans le plan complexe d'un exemple de spectre de l'opérateur  $A^{\text{sf},\infty}$  dans les paramètres  $\lambda$  à gauche et  $\lambda^2$  à droite. Ronds verts : éléments de  $\Lambda_p(A^{\text{sf},\infty})$  qui ne sont pas dans  $\Lambda_{e,W}(A^{\text{sf},\infty})$ , traits bleus :  $\Lambda_{e,W}(A^{\text{sf},\infty})$  (ronds bleus : éléments de  $\Lambda_p(A^{\text{sf},\infty})$  plongés dans le spectre essentiel).

### Recherche des résonances

Nous avons vu au chapitre 4 qu'il existe des objets non spectraux, appelés résonances du problème, permettant de décrire la fuite de l'énergie dans la gaine des ondes qui se propagent dans le cœur. Dans la section 4.2, nous avons expliqué que ces objets correspondent aux pôles complexes du prolongement méromorphe de la résolvante au travers du spectre essentiel. Plus précisément, nous avons considéré la résolvante du problème dans le demi-plan supérieur  $\Im m(\xi) > 0$ , avec  $\xi := \lambda^2$  qui correspondait au paramètre spectral, et l'avons prolongé au travers du spectre essentiel dans le demi-plan  $\Im m(\xi) < 0$ . Du fait de la linéarisation du problème aux valeurs propres (7.30) à l'aide du formalisme  $\mathbf{XY}$ , le paramètre spectral n'est plus  $\xi = \lambda^2$ , mais  $\lambda$ . Pour nous ramener au plan  $\xi = \lambda^2$  sur lequel le spectre de  $A^{\text{sf},\infty}$  est représenté à droite sur la Figure 7.3, nous introduisons une résolvante légèrement différente de celle introduite habituellement. Pour  $\xi \in \{z \in \mathbb{C} \mid \Im m(\xi) > 0\} \cap \rho(A^{\text{sf},\infty})$ , nous choisissons de la définir par :

$$R_{A^{\text{sf},\infty}}^+(\xi) := (A^{\text{sf},\infty} - {}^{-i\mathbb{R}^+}\sqrt{k_f^2 + \xi}I)^{-1},$$

qui est un opérateur de  $\mathbf{H}^{\text{sf}} \times \mathbf{H}^{\text{sf}}$  dans lui-même. Montrer rigoureusement que cette résolvante admet un prolongement méromorphe dans le demi-plan inférieur  $\Im m(\xi) < 0$  est difficile. Nous ne traiterons pas cette question dans ce travail. Dans le cas acoustique, ce prolongement méromorphe avait été réalisé via une dilatation analytique de la solution de l'équation de la résolvante dans la variable transverse. En pratique, cette dilatation a été effectuée en introduisant des PML infinies. On suppose qu'il est encore possible ici de réaliser un prolongement méromorphe de la résolvante en introduisant des PML infinies dans le fluide. Dans ce cas, on appelle *résonances sortantes* les valeurs complexes  $\xi_r := \xi + k_f^2$ , où  $\xi$  est un pôle

complexe du prolongement méromorphe de la résolvante  $R_{A^{\text{sf},\infty}}^+(\xi)$  du demi-plan complexe  $\Im m(\xi) > 0$  au demi-plan  $\Im m(\xi) < 0$ . L'ensemble des valeurs complexes  $\lambda$  telles que  $\lambda^2 = \xi_r$  est noté  $\Lambda_f(A^{\text{sf},\infty})$ .

**Remarque 7.27** Les résonances entrantes peuvent être définies de façon analogue en définissant la résolvante  $R_{A^{\text{sf},\infty}}^-(\xi) := (A^{\text{sf},\infty} - i\mathbb{R}^+ \sqrt{k_f^2 + \xi I})^{-1}$  dans le demi-plan inférieur  $\Im m(\xi) < 0$  et en la prolongeant de façon méromorphe au demi-plan supérieur  $\Im m(\xi) > 0$ .

### Classification des modes

La description du spectre que nous venons d'exposer nous permet une classification des modes qui sont les solutions du problème (7.36), équivalent au problème (7.30). On appelle :

- *modes guidés* : les solutions de (7.36) avec  $\lambda \in \Lambda_p(A^{\text{sf},\infty})$  et  $(\mathbf{X}^{\text{sf}}, \mathbf{Y}^{\text{sf}}) \in D(A^{\text{sf},\infty})$ ;
- *modes de radiation* : les solutions de (7.36) avec  $\lambda \in \Lambda_{e,W}(A^{\text{sf},\infty})$  et  $(\mathbf{X}^{\text{sf}}, \mathbf{Y}^{\text{sf}}) \notin D(A^{\text{sf},\infty})$ ;
- *modes à fuite sortants* : les solutions de (7.36) avec  $\lambda \in \Lambda_f(A^{\text{sf},\infty})$  (autrement dit les solutions de (7.36) avec  $\Im m(\lambda^2) < 0$  et  $(\mathbf{X}^{\text{sf}}, \mathbf{Y}^{\text{sf}}) \notin D(A^{\text{sf},\infty})$ ).

Les modes de radiation et modes à fuite que nous venons de définir ont un comportement dans les directions axiale et transverse de la structure analogue à celui du cas acoustique (se référer à la sous-section 4.1.1 pour les modes de radiation et à la sous-section 4.2.3 pour les modes à fuite). Les modes guidés sont toujours décroissants dans le fluide dans la direction transverse, mais ils peuvent être cette fois propagatifs ou évanescents dans la direction longitudinale tandis qu'ils ne pouvaient être que propagatifs dans le cas purement acoustique (voir pour cela la sous-section 4.1.1). Ces comportements vont être rappelés succinctement ci-dessous dans une configuration 2D.

### 7.2.2 Le cas d'une plaque immergée

Nous venons de donner une description générale des modes dans un guide élastique immergé. Penchons-nous plus en détails sur le cas 2D qui correspond à une plaque élastique immergée dans un fluide. Nous rappelons que dans ce cas, les dérivées partielles dans la direction antiplane sont nulles, c'est-à-dire :  $\partial_{x_3} = 0$ . De façon équivalente, cela revient à dire que les solutions du problème d'interaction fluide-structure (7.29) ne dépendent pas de la variable  $x_3$ , leurs composantes solides et fluides s'écrivent donc  $\mathbf{u}(x_1, x_2) = e^{\lambda x_1} (u_1 \ u_2 \ u_3)^t(x_2)$  et  $\varphi(x_1, x_2) = e^{\lambda x_1} \varphi(x_2)$ . En développant les opérateurs différentiels dans (7.30), on trouve que le problème aux valeurs propres se réécrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda[\lambda_s(\lambda u_1 + d_{x_2} u_2) + 2\mu_s \lambda u_1] + d_{x_2} [\mu_s(\lambda u_2 + d_{x_2} u_1)] + \rho_s \omega^2 u_1 = 0 & \text{dans } \Sigma^s \\ \lambda[\mu_s(\lambda u_2 + d_{x_2} u_1)] + d_{x_2} [\lambda_s(\lambda u_1 + d_{x_2} u_2) + 2\mu_s d_{x_2} u_2] + \rho_s \omega^2 u_2 = 0 & \text{dans } \Sigma^s \\ \lambda[\mu_s \lambda u_3] + d_{x_2} [\mu_s d_{x_2} u_3] + \rho_s \omega^2 u_3 = 0 & \text{dans } \Sigma^s \\ d_{x_2}^2 \varphi + (k_f^2 + \lambda^2) \varphi = 0 & \text{dans } \Sigma^{f,\infty} \\ \mu_s(\lambda u_2 + d_{x_2} u_1) = 0 & \text{sur } \gamma^{\text{sf}} \\ \lambda_s(\lambda u_1 + d_{x_2} u_2) + 2\mu_s d_{x_2} u_2 = -i\rho_f \omega \varphi & \text{sur } \gamma^{\text{sf}} \\ \mu_s d_{x_2} u_3 = 0 & \text{sur } \gamma^{\text{sf}} \\ -i\omega u_2 = d_{x_2} \varphi & \text{sur } \gamma^{\text{sf}}. \end{array} \right. \quad (7.49)$$

Précisons à l'aide de ce système le comportement des différents types de modes introduits dans le cas général.



## Description des modes

### • Modes de radiation

Les modes de radiation correspondent à des nombres longitudinaux  $\lambda$  dans le spectre essentiel de l'opérateur  $A^{\text{sf},\infty}$  qui d'après le Théorème 7.23 est égal à  $\Lambda_{e,W}(A^{\text{sf},\infty}) = \mathbb{R} \cup i[-k_f, k_f]$ . On peut voir dans (7.49) que la composante fluide satisfait une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 dans  $\Sigma^{\text{f},\infty}$ . En posant cette fois  $\beta_f(\lambda) := \sqrt[{\mathbb{R}^+}]{k_f^2 + \lambda^2}$ , on peut donc écrire :

$$\varphi(x_2) = \begin{cases} C^- e^{-i\beta_f(\lambda)x_2} + D^- e^{i\beta_f(\lambda)x_2} & \text{si } x_2 < -h_0 \\ C^+ e^{-i\beta_f(\lambda)x_2} + D^+ e^{i\beta_f(\lambda)x_2} & \text{si } x_2 > h_0, \end{cases} \quad (7.50)$$

où  $C^\pm$  et  $D^\pm$  sont des coefficients complexes à déterminer à l'aide des conditions de couplage et les conditions d'ondes sortantes ou entrantes à l'infini. Or  $\lambda \in \mathbb{R} \cup i[-k_f, k_f]$ , alors  $\beta_f(\lambda) \in \mathbb{R}^+$  et donc  $\varphi \in L^\infty(\Sigma^{\text{f},\infty})$ , mais  $\varphi \notin L^2(\Sigma^{\text{f},\infty})$ . Ainsi, tout comme dans le cas purement acoustique, les modes de radiation sont propagatifs ou évanescents dans la direction longitudinale du guide et oscillants à l'infini dans la direction transverse.

### • Modes guidés

Penchons-nous ensuite sur les modes guidés. Tout d'abord, on remarque que la composante  $u_3$  est découplée des autres composantes solides, et surtout de la composante fluide. Prendre alors  $u_1 = u_2 = \varphi = 0$  dans (7.49) nous permet de retrouver le système (7.24) obtenu pour une plaque élastique à l'air libre et dont les solutions définissent les modes SH. Dans ce cas, les nombres d'ondes longitudinaux correspondent alors à l'ensemble  $\Lambda^{\text{SH}}$  défini par (7.25). Les modes SH sont ici complètement découplés du fluide environnant. Ceci est une conséquence du choix de modèle de fluide parfait retenu dans ce travail pour décrire le fluide environnant. Les modes SH évanescents dans la direction longitudinale sont associés à des valeurs propres  $\lambda$  réelles, donc plongées dans le spectre essentiel de l'opérateur  $A^{\text{sf},\infty}$ . Quant aux modes SH propagatifs, ils peuvent aussi être associés à des valeurs propres  $\lambda$  imaginaires plongées dans le spectre essentiel.

Quand on impose en revanche  $u_3 = 0$ , on obtient des modes guidés ayant des composantes solides et fluides couplées. On observe alors deux sous-catégories de modes : les modes ayant un nombre d'onde longitudinal purement imaginaire, c'est-à-dire  $\Re(\lambda) = 0$ , appelés *modes de quasi-Scholte* (modes QS) et les modes ayant un nombre d'onde satisfaisant  $\Re(\lambda) \neq 0$  appelés *modes de Lamb inhomogènes*.

D'une manière générale, les *ondes de Scholte* sont des ondes se propageant le long d'une interface entre un solide et un fluide sans perte d'énergie. Dans [Vin13], il est montré qu'il existe une unique onde de Scholte à l'interface entre deux demi-espaces : l'un occupé par un solide homogène isotrope et l'autre par un fluide parfait homogène. Nous savons aussi par [BDÜ00] qu'il existe un unique mode de Scholte pour une plaque de Kirchhoff-Love en contact avec un demi-espace occupé par un fluide, mais aussi pour une coque cylindrique immergée dans un fluide. Dans notre cas, la plaque élastique présente deux interfaces avec le fluide environnant. Il existe alors deux ondes d'interface appelées ondes de quasi-Scholte. Ces ondes ont fait l'objet d'un certain nombre de travaux numériques et expérimentaux (voir [YT15; Öne17; Ans72]). Ces ondes sont dispersives à basse fréquence, mais ont un comportement non dispersif à haute fréquence ; plus précisément leur vitesse dans le fluide se



rapproche de  $c_f$  lorsque la fréquence augmente. Ces modes ont un nombre d'onde longitudinal  $\lambda$  purement imaginaire qui est de module strictement supérieur à  $k_f$ . Ils sont ainsi purement propagatifs dans la direction longitudinale. Posons  $\gamma_f(\lambda) := \sqrt{-k_f^2 - \lambda^2}$  satisfaisant en dehors de la coupure  $\Re(\gamma_f(\lambda)) > 0$ . La composante fluide du mode peut s'écrire sous la forme :

$$\varphi(x_2) = \begin{cases} C^- e^{-\gamma_f(\lambda)x_2} + D^- e^{\gamma_f(\lambda)x_2} & \text{si } x_2 < -h_0 \\ C^+ e^{-\gamma_f(\lambda)x_2} + D^+ e^{\gamma_f(\lambda)x_2} & \text{si } x_2 > h_0. \end{cases}$$

Comme  $\varphi$  est dans le formalisme XY une composante d'une fonction propre de  $A^{\text{sf},\infty}$ ,  $\varphi \in L^2(\Sigma^{\text{f},\infty})$  et alors  $C^- = D^+ = 0$ . Autrement dit, les modes de quasi-Scholte sont évanescents dans la direction transverse. Dans un contexte différent du nôtre, ces ondes ont été utilisées pour identifier des défauts dans une plaque [HF16] ou les propriétés du fluide environnant la plaque [Tak+13]. Dans un contexte applicatif encore différent, elles ont également été utilisées pour imager le plancher océanique [Kot06; Kug+07].

Les modes de Lamb inhomogènes ont, tout comme les modes de quasi-Scholte, une composante fluide qui s'écrit :

$$\varphi(x_2) = \begin{cases} D^- e^{\gamma_f(\lambda)x_2} & \text{si } x_2 < -h_0 \\ C^+ e^{-\gamma_f(\lambda)x_2} & \text{si } x_2 > h_0. \end{cases}$$

Ils sont donc évanescents dans la direction transverse. Pour préciser leur comportement, distinguons deux sous cas selon le signe pris par  $\Im m(\lambda^2) = 2\Re(\lambda)\Im m(\lambda)$ . Lorsque  $\Im m(\lambda^2) < 0$ , les parties réelle et imaginaire de  $\lambda$  sont de signes opposés, donc les modes décroissent longitudinalement dans le sens de propagation. Ils vérifient de plus  $\Im m(\gamma_f(\lambda)) > 0$ , ce qui correspond à des modes entrants dans la direction transverse. Ces modes sont alors appelés *modes de Lamb inhomogènes entrants*. Quand  $\Im m(\lambda^2) > 0$ , les parties réelle et imaginaire de  $\lambda$  sont de même signe, donc les modes associés sont dans la direction longitudinale, exponentiellement croissants dans le sens de propagation. Ces modes satisfont  $\Im m(\gamma_f(\lambda)) < 0$ , ce qui correspond à des modes sortants. Ces modes sont alors appelés *modes de Lamb inhomogènes sortants*.

- Modes à fuite

On s'intéresse enfin aux modes dont les nombres d'onde longitudinaux sont associés à des résonances du problème. Pour une plaque immergée, ils sont appelés dans la littérature *modes de Lamb à fuite*. Les résonances, et par voie de conséquence les modes à fuite associés, n'ont pas pu être définis de façon totalement rigoureuse dans le cas général traité ci-dessus. Il est néanmoins possible d'en donner une définition plus rigoureuse dans ce cas particulier 2D. En effet, nous avons vu en acoustique dans une configuration 2D que les modes à fuite ont la spécificité d'être exponentiellement croissants dans le fluide dans la direction transverse (voir le Lemme 4.15). Puisque la gaine du guide ouvert étudié dans ce chapitre est occupé par un fluide gouverné par l'équation d'Helmholtz, nous nous attendons à ce que les modes de Lamb à fuite présentent le même comportement.

### Définition 7.28

On appelle *résonances sortantes*, les nombres complexes  $\lambda$  situés dans le demi-plan

$\Im m(\lambda^2) < 0$  tels que le problème :

Trouver  $(\lambda, \mathbf{u}, \varphi)$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}^\lambda(\underline{\sigma}^\lambda(\mathbf{u})) + \omega^2 \rho_s \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Sigma^s \\ \Delta_\Sigma \varphi + (k_f^2 + \lambda^2) \varphi = 0 \quad \text{dans } \Sigma^{f,\infty} \\ \underline{\sigma}^\lambda(\mathbf{u}) \mathbf{n}_s = -i \rho_f \omega \varphi \mathbf{n}_s \quad \text{sur } \gamma^{sf} \\ -i \omega (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s) = \nabla_\Sigma \varphi \cdot \mathbf{n}_s \quad \text{sur } \gamma^{sf} \\ \varphi(x_2) \propto e^{i\beta_f(\lambda)x_2}, \quad x_2 \rightarrow +\infty \\ \varphi(x_2) \propto e^{-i\beta_f(\lambda)x_2}, \quad x_2 \rightarrow -\infty, \end{array} \right.$$

ait une solution non nulle, où  $\beta_f(\lambda) := \sqrt[{}^{i\mathbb{R}^+}]{k_f^2 + \lambda^2}$  et  $\propto$  est le symbole de proportionnalité. Les *modes de Lamb à fuite sortants* sont les modes associés aux résonances sortantes.

Cette définition revient à chercher des nombres d'onde longitudinaux dans le demi-plan  $\Im m(\lambda^2) < 0$  correspondant à des modes qui ne sont pas bornés dans le fluide et qui sont sortants dans la direction transverse. En effet, de tels modes ont leur composante fluide qui s'écrit comme (7.50). Sachant que  $\Im m(\lambda^2) < 0$ , on a  $\Im m(\beta_f(\lambda)) < 0$  et  $\Re e(\beta_f(\lambda)) > 0$ . Puisque ces modes ne correspondent pas à des modes guidés, ils vérifient  $C^- \neq 0$  et  $D^+ \neq 0$ . De plus, puisque ces modes sont sortants dans la direction transverse, on a nécessairement  $D^- = C^+ = 0$ . Avec ce petit raisonnement, on retrouve bien la définition que nous venons de donner des modes de Lamb à fuite sortants. Dans la direction longitudinale, ils ont une amplitude exponentiellement décroissante dans le sens de propagation puisque  $\Im m(\lambda^2) = 2\Re e(\lambda)\Im m(\lambda) < 0$ . Le lecteur désireux d'en savoir plus sur les modes de Lamb à fuite peut se diriger vers [Mer64; Kie22; DK89].

### Relations de dispersion et comportement asymptotique des modes

On souhaite obtenir maintenant une relation de dispersion pour les modes de Lamb à fuite et les modes guidés. De façon préalable, nous rappelons l'expression des nombres d'ondes transverses dans le solide associés aux ondes de cisaillement et de pression :

$$\beta_s(\lambda) := \sqrt[{}^{i\mathbb{R}^+}]{k_s^2 + \lambda^2} \quad \text{et} \quad \beta_p(\lambda) := \sqrt[{}^{i\mathbb{R}^+}]{k_p^2 + \lambda^2},$$

avec  $k_s := \omega/c_s$  et  $k_p := \omega/c_p$ , puis la définition des quantités  $s(\lambda)$  et  $p(\lambda)$  qui interviennent dans l'équation de Rayleigh :

$$s(\lambda) := -\frac{4\mu_s \lambda^2 \beta_s(\lambda)}{k_s^2} \quad \text{et} \quad p(\lambda) := \mu_s \frac{(k_s^2 + 2\lambda^2)^2}{k_s^2 \beta_p(\lambda)}. \quad (7.51)$$

Commençons par la relation de dispersion des modes de Lamb à fuite sortants.

#### Lemme 7.29

Soit  $\lambda \in \Lambda_f(A^{sf,\infty})$  (i.e.  $\lambda$  est le nombre longitudinal d'un mode de Lamb à fuite sortant), alors  $\lambda$  est une racine dans le demi-plan complexe  $\Im m(\lambda^2) < 0$  de la relation de dispersion :

$$f_{0,s}^{\text{FS}}(\lambda) \cdot f_{0,a}^{\text{FS}}(\lambda) = 0, \quad (7.52)$$

avec :

$$f_{0,a}^{\text{FS}}(\lambda) := -i \frac{\omega^2 \rho_f}{\beta_f(\lambda)} - \left( s(\lambda) \tan(\beta_s(\lambda) h_0) + p(\lambda) \tan(\beta_p(\lambda) h_0) \right)$$

$$f_{0,s}^{\text{FS}}(\lambda) := -i \frac{\omega^2 \rho_f}{\beta_f(\lambda)} + \left( s(\lambda) \cotan(\beta_s(\lambda) h_0) + p(\lambda) \cotan(\beta_p(\lambda) h_0) \right).$$

Les racines de  $f_{0,a}^{\text{FS}}$ , respectivement  $f_{0,s}^{\text{FS}}$ , correspondent à des modes antisymétriques, respectivement symétriques. Ces racines sont simples.

*Démonstration.* La démonstration est donnée en annexe de ce chapitre (voir [sous-section 7.5.1](#)).  $\square$

Nous pouvons également obtenir une relation de dispersion pour les modes guidés.

### Lemme 7.30

Soit  $\lambda \in \Lambda_p(A^{\text{sf},\infty}) \setminus \Lambda^{\text{SH}}$  (i.e.  $\lambda$  est le nombre d'onde longitudinal d'un mode de quasi-Scholte ou d'un mode de Lamb inhomogène), alors  $\lambda$  est racine de la relation de dispersion :

$$f_{0,s}^{\text{G}}(\lambda) \cdot f_{0,a}^{\text{G}}(\lambda) = 0, \quad (7.53)$$

avec :

$$f_{0,a}^{\text{G}}(\lambda) := -\frac{\omega^2 \rho_f}{\gamma_f(\lambda)} - \left( s(\lambda) \tan(\beta_s(\lambda) h_0) + p(\lambda) \tan(\beta_p(\lambda) h_0) \right)$$

$$f_{0,s}^{\text{G}}(\lambda) := -\frac{\omega^2 \rho_f}{\gamma_f(\lambda)} + \left( s(\lambda) \cotan(\beta_s(\lambda) h_0) + p(\lambda) \cotan(\beta_p(\lambda) h_0) \right).$$

Les racines de  $f_{0,a}^{\text{G}}$ , respectivement  $f_{0,s}^{\text{G}}$ , correspondent à des modes antisymétriques, respectivement symétriques. Le spectre ponctuel de  $A^{\text{sf},\infty}$  est ainsi constitué de valeurs propres simples.

*Démonstration.* Le calcul découle directement de celui développé dans la preuve du Lemme 7.29 en conservant cette fois les exponentielles décroissantes dans le fluide au lieu des exponentielles croissantes. Cela revient à changer  $i\beta_f(\lambda)$  par  $-\gamma_f(\lambda)$  dans (7.53).  $\square$

**Remarque 7.31** *Lorsqu'on choisit  $\rho_f = 0$  dans les relations de dispersion des Lemmes 7.29 et 7.30, nous retrouvons l'équation de Rayleigh (7.26) pour une plaque sans fluide environnant. Lorsque le fluide environnant est léger ( $\rho_f$  petit par rapport à  $\rho_s$ ), on s'attend à ce que les solutions de (7.53) soient des perturbations des solutions de (7.26).*

Grâce à la relation de dispersion (7.52), nous allons pouvoir décrire davantage la répartition des modes de Lamb à fuite sortants dans le plan complexe avec le résultat suivant.

### Proposition 7.32

Le comportement asymptotique des modes de Lamb à fuite sortants dans la direction transverse lorsque  $n \rightarrow +\infty$  est donné :

- pour les modes sortants à gauche dans la direction longitudinale par :

$$\Re(\lambda_n) \sim \frac{\pi n}{h_0}, \quad \Im(\lambda_n) \sim -\frac{1}{2h_0} \text{Log}(n);$$

- pour les modes sortants à droite dans la direction longitudinale par :

$$\Re(\lambda_n) \sim -\frac{\pi n}{h_0}, \quad \Im(\lambda_n) \sim \frac{1}{2h_0} \text{Log}(n).$$

*Démonstration.* La démonstration est donnée en annexe de ce chapitre (voir [sous-section 7.5.2](#)).  $\square$

Il est de la même façon possible de décrire la distribution asymptotique des modes guidés, c'est-à-dire en l'occurrence celles des modes de Lamb inhomogènes.

### Proposition 7.33

Le comportement asymptotique des modes de Lamb inhomogènes lorsque  $n \rightarrow +\infty$  est donné :

- pour les modes entrants dans la direction transverse et sortants à gauche dans la direction longitudinale par :

$$\Re(\lambda_n) \sim \frac{\pi n}{h_0}, \quad \Im(\lambda_n) \sim -\frac{1}{2h_0} \text{Log}(n);$$

- pour les modes entrants dans la direction transverse et sortants à droite dans la direction longitudinale par :

$$\Re(\lambda_n) \sim -\frac{\pi n}{h_0}, \quad \Im(\lambda_n) \sim \frac{1}{2h_0} \text{Log}(n);$$

- pour les modes sortants dans la direction transverse et sortants à gauche dans la direction longitudinale par :

$$\Re(\lambda_n) \sim -\frac{\pi n}{h_0}, \quad \Im(\lambda_n) \sim -\frac{1}{2h_0} \text{Log}(n);$$

- pour les modes sortants dans la direction transverse et sortants à droite dans la direction longitudinale par :

$$\Re(\lambda_n) \sim \frac{\pi n}{h_0}, \quad \Im(\lambda_n) \sim \frac{1}{2h_0} \text{Log}(n).$$

**Remarque 7.34** *Il est intéressant de remarquer qu'au premier ordre, les nombres d'onde longitudinaux des modes de Lamb inhomogènes et de modes de Lamb à fuite ne dépendent asymptotiquement pas des paramètres élastiques du cœur et des propriétés du fluide environnant.*

**Remarque 7.35** *On constate grâce aux Propositions 7.32 et 7.33 que les modes de Lamb à fuite sortants, qui sont sur la partie du feuillet sortant du domaine non physique, et les modes de Lamb inhomogènes entrants, qui sont sur la partie du feuillet entrant du domaine physique, ont le même comportement asymptotique au premier ordre.*

### 7.3 Analyse modale d'un guide élastique immergé dans un fluide avec des PML

On souhaite maintenant introduire des PML transverses dans le fluide pour deux raisons.

Premièrement, nous souhaitons être en mesure de calculer de façon approchée les modes de la structure immergée et en particulier les modes à fuite. Ces modes sont des résonances complexes du problème, correspondant à des pôles complexes du prolongement méromorphe de la résolvante de l'opérateur transverse  $A^{\text{sf},\infty}$  au travers du spectre essentiel. Or, nous avons vu à la [sous-section 4.2.2](#) qu'un tel prolongement peut être obtenu en effectuant une dilatation analytique dans la variable transverse  $x_s$ , ce qui revient à introduire des PML infinies. En choisissant correctement les paramètres de la PML, les modes à fuite deviennent des objets spectraux, dans le sens où leur comportement initialement exponentiellement croissant dans la direction transverse à l'infini est transformé grâce aux PML en un comportement exponentiellement décroissant. Ces modes correspondent alors à des valeurs propres de l'opérateur dilaté. Une autre conséquence de l'introduction des PML est une rotation dans le plan complexe du spectre essentiel. Les modes peuvent ensuite être approximés en tronquant les PML, ce qui va avoir pour conséquence une discrétisation du spectre essentiel.

Deuxièmement, nous gardons en vue que nous voulons par la suite résoudre les problèmes direct et inverse, nous avons donc besoin de nous ramener à un domaine de calcul borné dans la direction transverse. Ceci peut s'opérer en introduisant des PML finies qui vont atténuer la partie des ondes fuyant dans le fluide environnant sans pour autant introduire de réflexions parasites significatives dans le domaine de calcul.

Cette section, consacrée à l'analyse modale du guide élastique immergé tronqué avec des PML finies, sera organisée en deux sous-parties. La première sera dédiée à l'extension du formalisme XY, introduit dans la [sous-section 7.2.1](#), à cette nouvelle configuration. En suivant [[Bar09](#)], nous déduisons du caractère borné de la structure dans la direction transverse des résultats supplémentaires par rapport au cas avec un fluide infini et établirons une relation de biorthogonalité entre les modes. La seconde partie de cette section sera dédiée à l'étude du cas particulier de la plaque immergée. Dans ce cas simple, nous décrirons plus précisément le spectre à l'aide de relations de dispersion.

Débutons l'analyse en écrivant le problème satisfait par les modes dans la structure fermée. Soit  $\Sigma^f \subset \Sigma^{f,\infty}$  la section transverse bornée du domaine fluide tronqué par les PML. On suppose que c'est un ouvert à frontière Lipschitz vérifiant  $\partial\Sigma^s \cap \partial\Sigma^f = \partial\Sigma^s$ , ce qui signifie que le fluide est collé à la gaine. En outre, nous imposons que  $\Sigma^f$  soit un domaine couronne. Le domaine fluide est noté  $W^f := \mathbb{R} \times \Sigma^f$ , l'interface avec le solide est toujours notée  $\Gamma^{\text{sf}} := \mathbb{R} \times \gamma^{\text{sf}}$  et enfin le bord extérieur de  $W^f$  est noté  $\Gamma^{\text{pml}} := \partial W^f \setminus \Gamma^{\text{sf}}$ . On peut aussi écrire ce dernier  $\Gamma^{\text{pml}} = \mathbb{R} \times \gamma^{\text{pml}}$  avec  $\gamma^{\text{pml}} := \partial\Sigma^f \setminus \gamma^{\text{sf}}$ . Un exemple 2D de cette configuration est représenté sur la [Figure 7.4](#).

Nous souhaitons ici traiter sans distinction les cas 2D et 3D, ce qui ne pose pas de problèmes pour les équations de l'élasticité. Dans le fluide, la dilatation analytique effectuée par l'introduction des PML modifie différemment l'équation de Helmholtz selon qu'on soit en 2D ou 3D, mais aussi selon le type de PML qu'on adopte dans le second cas (cartésien ou radial). Suivant [[Gou10](#)], écrivons les différents types de PML et proposons en une écriture générique.

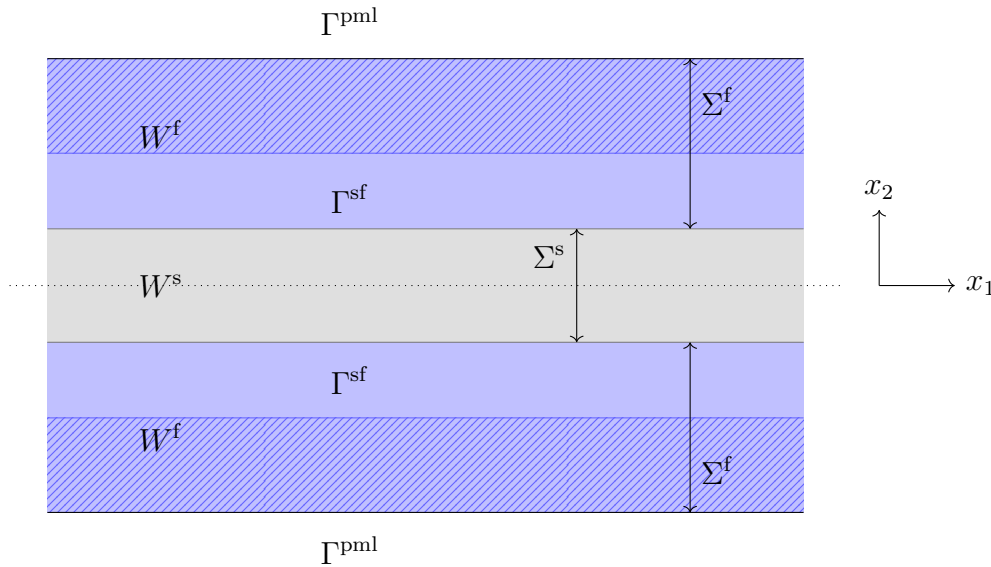


FIGURE 7.4: Géométrie 2D d'un guide élastique immergé tronqué avec des PML.

### 7.3.1 Écriture générique de l'équation de Helmholtz pour les différents types de PML

#### PML en 2D

On supposera pour simplifier la présentation que  $\Sigma^s = (-h_0, h_0)$  pour  $h_0 > 0$ . Nous introduisons les PML en  $x_2 = \pm h_1$  pour un réel  $h_1 > h_0$  et nous les tronquons en  $x_2 = \pm h_2$  pour  $h_2 > h_1$ . Dans ce cas, on a  $\Sigma^f = (-h_2, -h_0) \cup (h_0, h_2)$ . D'après la [sous-section 4.2.2](#), l'équation de Helmholtz devient alors :

$$\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \alpha_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + k_f^2 \varphi = 0, \quad \mathbf{x} \in W^f, \quad (7.54)$$

où  $\alpha_2$  est la fonction donnée par la Définition [4.10](#).

#### PML en 3D

Nous allons considérer deux types de PML utilisées dans [[Gou10](#)] : les PML cartésiennes et les PML radiales.

Pour les *PML cartésiennes*, nous supposons que  $\Sigma^s \subset (-R_{0,2}, R_{0,2}) \times (-R_{0,3}, R_{0,3})$  pour  $R_{0,i} > 0$ ,  $i = 2, 3$  suffisamment grands. Les PML cartésiennes se construisent alors en effectuant séparément une dilatation analytique dans les directions transverses  $x_2$  et  $x_3$ . Pour  $i = 2, 3$ , les PML sont introduites dans la direction  $x_i$  en  $x_i = \pm R_{1,i}$  pour  $R_{1,i} > R_{0,i}$  et sont tronquées en  $x_i = \pm R_{2,i}$  pour  $R_{2,i} > R_{1,i}$ . Dans ce cas,  $\Sigma^f = ((-R_{2,2}, R_{2,2}) \times (-R_{2,3}, R_{2,3})) \setminus \overline{\Sigma^s}$ . L'équation de Helmholtz s'écrit alors :

$$\alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \alpha_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \alpha_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + k_f^2 \varphi = 0, \quad \mathbf{x} \in W^f, \quad (7.55)$$

où pour  $i = 2, 3$ , la fonction  $\alpha_i$  est donnée comme en 2D par la Définition [4.10](#).

Pour les *PML radiales*, nous supposons que  $\Sigma^s \subset (-R_0, R_0)^2$  pour  $R_0 > 0$  suffisamment grand. Ce type de PML se construit cette fois en effectuant une dilatation analytique dans la variable radiale  $r := \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$ . Cette construction est détaillée dans [[Gou10](#), Chapitre 2

- §2.3]. La PML radiale est introduite en  $r = R_1$  pour  $R_1 > R_0$  et tronquée en  $r = R_2$  pour  $R_2 > R_1$ . Cette fois,  $\Sigma^f = B(0, R_2) \setminus \overline{\Sigma^s}$ . L'équation de Helmholtz s'écrit alors :

$$\frac{\gamma_r \alpha_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\alpha_r r}{\gamma_r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\gamma_r^2}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + k_f^2 \varphi = 0, \quad \mathbf{x} \in W^f, \quad (7.56)$$

où  $\gamma_r(r) := \frac{r}{\mathcal{C}(r)}$  et  $\alpha_r(r) := \frac{1}{\mathcal{C}'(r)}$ ,  $r \geq R_1$  avec pour un profil de PML abrupt :

$$\mathcal{C}(r) := \begin{cases} r & \text{si } r \leq R_1 \\ R_1 + \frac{r - R_1}{\alpha_\infty} & \text{si } r > R_1, \end{cases}$$

et pour un profil doux :

$$\mathcal{C}(r) := \begin{cases} r & \text{si } r \leq R_1 \\ \mathcal{C}_\infty(r) & \text{si } r > R_1, \end{cases}$$

où  $\alpha_\infty$  et  $\mathcal{C}_\infty$  satisfont les mêmes hypothèses que dans la Définition 4.10. Sans effectuer d'étude comparative précise de ces deux types de PML, nous pouvons simplement dire que les PML cartésiennes ont l'avantage d'être faciles à implémenter par rapport aux PML radiales, mais que ces dernières sont plus naturelles à utiliser en ce sens qu'elles imposent une décroissance radiale des ondes dans la direction transverse.

### Écriture générique de l'équation de Helmholtz

Nous pouvons remarquer que contrairement à l'équation de l'élasticité (I3.2), la forme des équations de Helmholtz (7.54), (7.55) et (7.56) change selon la dimension et le type de PML considéré. Pour éviter de devoir traiter séparément ces trois cas, nous choisirons d'écrire, lorsque nous ne considérerons pas explicitement le cas 2D, l'équation de Helmholtz sous la forme générique :

$$\operatorname{div}(\underline{\mathcal{A}}^{\alpha_\Sigma} \nabla \varphi) + b^{\alpha_\Sigma} k_f^2 \varphi = 0, \quad \mathbf{x} \in W^f, \quad (7.57)$$

où  $\underline{\mathcal{A}}^{\alpha_\Sigma}$  est un tenseur d'ordre 2 s'écrivant :

- en 2D :

$$\underline{\mathcal{A}}^{\alpha_\Sigma} := \begin{pmatrix} \alpha_2^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix},$$

- en 3D :

$$\underline{\mathcal{A}}^{\alpha_\Sigma} := \begin{pmatrix} (\gamma_r \alpha_r)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_r}{\gamma_r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma_r}{\alpha_r} \end{pmatrix} \quad (\text{radial}), \quad \underline{\mathcal{A}}^{\alpha_\Sigma} := \begin{pmatrix} (\alpha_2 \alpha_3)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_2}{\alpha_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \end{pmatrix} \quad (\text{cartésien}),$$

et où  $b^{\alpha_\Sigma}$  est une fonction scalaire donnée :

- en 2D par :

$$b^{\alpha_\Sigma} := \alpha_2^{-1},$$

- en 3D par :

$$b^{\alpha_\Sigma} := (\gamma_r \alpha_r)^{-1} \quad (\text{radial}), \quad b^{\alpha_\Sigma} := (\alpha_2 \alpha_3)^{-1} \quad (\text{cartésien}).$$



**Remarque 7.36** Il est important de préciser pour les PML radiales en 3D que les opérateurs différentiels intervenant dans (7.57) doivent être écrits dans le système de coordonnées cylindriques  $(x_1, r, \theta)$ .

**Remarque 7.37** Les hypothèses faites sur les coefficients des PML dans les trois cas décrits nous garantissent que les coefficients diagonaux de  $\underline{A}^{\alpha\Sigma}$  ont une partie réelle bornée inférieurement par des constantes strictement positives. Il en est de même pour la fonction scalaire  $b^{\alpha\Sigma}$ .

### 7.3.2 Changement de variable et définition des modes

Pour une raison qui apparaîtra lors de l'analyse modale avec le formalisme XY, nous voulons faire disparaître le nombre imaginaire  $i$  des équations de couplage :

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}_s &= -i\omega\rho_f\varphi\mathbf{n}_s \\ -i\omega(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s) &= \nabla\varphi \cdot \mathbf{n}_s.\end{aligned}$$

À cette fin, nous faisons simplement le changement de variable  $\varphi \rightarrow i\varphi$  dans le problème d'interaction fluide-structure homogène. Il laisse inchangé l'équation de Helmholtz (7.57). Le problème d'interaction fluide-structure homogène devient alors :

$$\begin{aligned}\text{Trouver } (\mathbf{u}, \varphi) \text{ tel que} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(\underline{\sigma}(\mathbf{u})) + \omega^2\rho_s\mathbf{u} = 0 & \text{dans } W^s \\ \operatorname{div}(\underline{A}^{\alpha\Sigma}\nabla\varphi) + b^{\alpha\Sigma}k_f^2\varphi = 0 & \text{dans } W^f \\ \underline{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}_s = -\rho_f\omega\varphi\mathbf{n}_s & \text{sur } \Gamma^{\text{sf}} \\ \omega(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s) = \nabla\varphi \cdot \mathbf{n}_s & \text{sur } \Gamma^{\text{sf}} \\ \partial_{\mathbf{n}_f}\varphi = 0 & \text{sur } \Gamma^{\text{pml}}, \end{array} \right. \quad (7.58)\end{aligned}$$

dans lequel on rappelle que  $\mathbf{n}_s$  (respectivement  $\mathbf{n}_f$ ) est la normale unitaire sortante à  $W^s$  (respectivement  $W^f$ ). Ces normales satisfont ainsi  $\mathbf{n}_s = -\mathbf{n}_f$  sur  $\Gamma^{\text{sf}}$ .

On peut alors définir les modes comme les solutions à variables séparées du problème (7.58) s'écrivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = e^{\lambda x_1}\mathbf{u}(\mathbf{x}_\Sigma), & \mathbf{x} \in W^s \\ \varphi(\mathbf{x}) = e^{\lambda x_1}\varphi(\mathbf{x}_\Sigma), & \mathbf{x} \in W^f. \end{array} \right.$$

### 7.3.3 Extension du formalisme XY

Comme précédemment, on utilise les variables mixtes définies par :

$$\mathbf{x}^s := \begin{pmatrix} t_\Sigma \\ u_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^s := \begin{pmatrix} \mathbf{u}_\Sigma \\ t_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^f := \partial_{x_1}\varphi := \zeta \quad \text{et} \quad \mathbf{y}^f := \varphi,$$

et on pose :

$$\mathbf{x}^{\text{sf}} := \begin{pmatrix} \mathbf{x}^s \\ \mathbf{x}^f \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{y}^{\text{sf}} := \begin{pmatrix} \mathbf{y}^s \\ \mathbf{y}^f \end{pmatrix}.$$

Ensuite, introduisons comme précédemment les opérateurs associés au cœur élastique :

$$F_{\mathbf{y}^s}(\mathbf{y}^s) := \begin{pmatrix} -\operatorname{div}_\Sigma(\underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{y}^s)) - \rho_s\omega^2\mathbf{u}_\Sigma \\ -\alpha_s\operatorname{div}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma) - \frac{\alpha_s}{\lambda_s}t_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_{\mathbf{x}^s}(\mathbf{x}^s) := \begin{pmatrix} \frac{t_\Sigma}{\mu_s} - \nabla_\Sigma u_1 \\ \operatorname{div}_\Sigma(t_\Sigma) + \rho_s\omega^2 u_1 \end{pmatrix},$$



puis ceux associés à la gaine fluide en présence de PML :

$$F_{\mathcal{Y}^f}(\mathcal{Y}^f) := -(b^{\alpha\Sigma})^{-1} \operatorname{div}_{\Sigma}(\underline{A}^{\alpha\Sigma} \nabla_{\Sigma} \mathcal{Y}^f) - k_f^2 \mathcal{Y}^f \quad \text{et} \quad F_{\mathcal{X}^f}(\mathcal{X}^f) := \mathcal{X}^f,$$

où  $\underline{A}^{\alpha\Sigma}$  s'obtient à partir de  $\underline{A}^{\alpha\Sigma}$  en supprimant la première ligne et la première colonne. Le système homogène (7.58) peut alors se réécrire sous la forme du problème d'évolution :

$$\text{Trouver } (\mathcal{X}^{\text{sf}}, \mathcal{Y}^{\text{sf}}) \text{ tel que} \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_{x_1} \begin{pmatrix} \mathcal{X}^{\text{sf}} \\ \mathcal{Y}^{\text{sf}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & F_{\mathcal{Y}^{\text{sf}}} \\ F_{\mathcal{X}^{\text{sf}}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{X}^{\text{sf}} \\ \mathcal{Y}^{\text{sf}} \end{pmatrix} \quad \text{dans } W^s \times W^f \\ \mathbf{t}_{\Sigma} \cdot \mathbf{e}_s = 0 \quad \text{sur } \Gamma^{\text{sf}} \\ \underline{\sigma}_{\Sigma}(\mathcal{Y}^{\text{sf}}) \mathbf{e}_s = -\rho_f \omega \varphi \mathbf{e}_s \quad \text{sur } \Gamma^{\text{sf}} \\ \omega(\mathbf{u}_{\Sigma} \cdot \mathbf{e}_s) = \nabla_{\Sigma} \varphi \cdot \mathbf{e}_s \quad \text{sur } \Gamma^{\text{sf}} \\ \partial_{n_f} \varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma^{\text{pml}}, \end{array} \right. \quad (7.59)$$

où :

$$F_{\mathcal{X}^{\text{sf}}} := \begin{pmatrix} F_{\mathcal{X}^s} & 0 \\ 0 & F_{\mathcal{X}^f} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_{\mathcal{Y}^{\text{sf}}} := \begin{pmatrix} F_{\mathcal{Y}^s} & 0 \\ 0 & F_{\mathcal{Y}^f} \end{pmatrix}.$$

Les modes en variables mixtes s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}^{\text{sf}}(x_1, \mathbf{x}_{\Sigma}) \\ \mathcal{Y}^{\text{sf}}(x_1, \mathbf{x}_{\Sigma}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{\text{sf}}(\mathbf{x}_{\Sigma}) \\ \mathbf{Y}^{\text{sf}}(\mathbf{x}_{\Sigma}) \end{pmatrix} e^{\lambda x_1}. \quad (7.60)$$

En injectant l'expression (7.60) dans (7.59), on se ramène au problème aux valeurs propres :

$$\text{Trouver } (\lambda, \mathbf{X}^{\text{sf}}, \mathbf{Y}^{\text{sf}}) \text{ tel que} \quad \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{\text{sf}} \\ \mathbf{Y}^{\text{sf}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} \\ F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{\text{sf}} \\ \mathbf{Y}^{\text{sf}} \end{pmatrix}, \quad (7.61)$$

où les opérateurs  $F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}$  et  $F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$  sont formellement définis de la même façon que  $F_{\mathcal{X}^{\text{sf}}}$  et  $F_{\mathcal{Y}^{\text{sf}}}$ , à la différence près qu'ils n'agissent que sur des fonctions des variables transverses. Pour étudier ce problème aux valeurs propres, nous introduisons l'opérateur :

$$A^{\text{sf}} := \begin{pmatrix} 0 & F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} \\ F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Précisons maintenant les domaines des opérateurs que nous venons d'introduire. On commence par introduire l'espace de Hilbert  $\mathbf{H}^{\text{sf}} := (L^2(\Sigma^s))^3 \times L^2(\Sigma^f)$  que nous munissons du produit scalaire :

$$(\mathbf{X}^{\text{sf}}, \mathbf{Y}^{\text{sf}})_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} := \int_{\Sigma^s} (\mathbf{t}_{\Sigma} \cdot \bar{\mathbf{u}}_{\Sigma} + u_1 \bar{t}_1) d\mathbf{x}_{\Sigma} + \rho_f \int_{\Sigma^f} \zeta \bar{\varphi} d\mathbf{x}_{\Sigma}. \quad (7.62)$$

La norme associée à ce produit scalaire est notée  $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^{\text{sf}}}$ . On introduit ensuite les espaces :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} &:= (L^2(\Sigma^s))^2 \times H^1(\Sigma^s) \times L^2(\Sigma^f), \\ \mathbf{V}_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} &:= (H^1(\Sigma^s))^2 \times L^2(\Sigma^s) \times H^1(\Sigma^f). \end{aligned}$$

que nous munissons des normes :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}^{\text{sf}}\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}}^2 &:= \|\mathbf{t}_{\Sigma}\|_{(L^2(\Sigma^s))^2}^2 + \|u_1\|_{H^1(\Sigma^s)}^2 + \rho_f \|\zeta\|_{L^2(\Sigma^f)}^2 \\ \|\mathbf{Y}^{\text{sf}}\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}}^2 &:= \|\mathbf{u}_{\Sigma}\|_{(H^1(\Sigma^s))^2}^2 + \|t_1\|_{L^2(\Sigma^s)}^2 + \rho_f \|\varphi\|_{H^1(\Sigma^f)}^2. \end{aligned}$$

Les domaines des opérateurs  $F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}$  et  $F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} D(F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}) &= \left\{ \mathbf{X}^{\text{sf}} := (\mathbf{t}_\Sigma, \mathbf{u}_1, \zeta) \in \mathbf{V}_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} \mid \operatorname{div}_\Sigma(\mathbf{t}_\Sigma) \in L^2(\Sigma^s), \mathbf{t}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_s = 0 \text{ sur } \gamma^{\text{sf}} \right\} \\ D(F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}) &= \left\{ \mathbf{Y}^{\text{sf}} := (\mathbf{u}_\Sigma, t_1, \varphi) \in \mathbf{V}_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} \mid \operatorname{div}_\Sigma(\underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{Y}^s)) \in (L^2(\Sigma^s))^2, \right. \\ &\quad (b^{\alpha_\Sigma})^{-1} \operatorname{div}_\Sigma(\underline{A}^{\alpha_\Sigma} \nabla_\Sigma \varphi) \in L^2(\Sigma^f), \partial_{\mathbf{e}_f} \varphi = 0 \text{ sur } \gamma^{\text{pml}}, \\ &\quad \left. \underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{Y}^s) \mathbf{e}_s = -\rho_f \omega \varphi \mathbf{e}_s \text{ et } \omega(\mathbf{u}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_s) = \nabla_\Sigma \varphi \cdot \mathbf{e}_s \text{ sur } \gamma^{\text{sf}} \right\}, \end{aligned} \quad (7.63)$$

où  $\mathbf{e}_f$  est la composante transverse de  $\mathbf{n}_f$ , c'est-à-dire  $\mathbf{n}_f = (0 \ \mathbf{e}_f)^t$ , et  $\partial_{\mathbf{e}_f} \varphi := \nabla_\Sigma \varphi \cdot \mathbf{e}_f$ . Le domaine de l'opérateur linéaire  $A^{\text{sf}} : \mathbf{H}^{\text{sf}} \rightarrow \mathbf{H}^{\text{sf}}$  est ainsi :

$$D(A^{\text{sf}}) = D(F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}) \times D(F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}).$$

On débute l'étude des propriétés de l'opérateur  $A^{\text{sf}}$  avec le résultat suivant.

**Lemme 7.38**

$A^{\text{sf}}$  est un opérateur à domaine dense dans  $\mathbf{H}^{\text{sf}} \times \mathbf{H}^{\text{sf}}$ .

*Démonstration.* Pour montrer cela, il suffit de prouver que les espaces :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_X &:= \{ (\mathbf{t}_\Sigma, \mathbf{u}_1, \zeta) \in (\mathcal{C}^\infty(\overline{\Sigma^s}))^3 \times \mathcal{C}^\infty(\overline{\Sigma^f}) \mid \mathbf{t}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_s = 0 \text{ sur } \gamma^{\text{sf}} \} \subset D(F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}) \\ \mathbf{K}_Y &:= \{ (\mathbf{u}_\Sigma, t_1, \varphi) \in (\mathcal{C}^\infty(\overline{\Sigma^s}))^3 \times \mathcal{C}^\infty(\overline{\Sigma^f}) \mid \underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{Y}^s) \mathbf{e}_s = -\rho_f \omega \varphi \mathbf{e}_s \text{ et} \\ &\quad \omega(\mathbf{u}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_s) = \nabla_\Sigma \varphi \cdot \mathbf{e}_s \text{ sur } \gamma^{\text{sf}}, \partial_{\mathbf{e}_f} \varphi = 0 \text{ sur } \gamma^{\text{pml}} \} \subset D(F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}), \end{aligned}$$

sont chacun denses dans  $\mathbf{H}^{\text{sf}}$ . Soit  $(\mathbf{u}_\Sigma, t_1, \varphi) \in \mathbf{H}^{\text{sf}}$ , il existe par densité de  $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Sigma^s})$  (respectivement  $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Sigma^f})$ ) dans  $L^2(\Sigma^s)$  (respectivement  $L^2(\Sigma^f)$ ), une suite  $(\mathbf{u}_\Sigma^n, t_1^n, \varphi^n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{C}^\infty(\overline{\Sigma^s}))^3 \times \mathcal{C}^\infty(\overline{\Sigma^f})$  qui converge vers  $(\mathbf{u}_\Sigma, t_1, \varphi)$  dans  $\mathbf{H}^{\text{sf}}$ . On se donne ensuite une suite de fonctions de troncature  $\chi_m^s : \Sigma^s \rightarrow [0, 1]$ ,  $m \geq 1$  et  $\chi_m^f : \Sigma^f \rightarrow [0, 1]$ ,  $m \geq 1$ , infiniment dérivables satisfaisant :

$$\chi_m^s(\mathbf{x}_\Sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } d(\mathbf{x}_\Sigma, \gamma^{\text{sf}}) \leq m^{-1} \\ 1 & \text{si } d(\mathbf{x}_\Sigma, \gamma^{\text{sf}}) \geq 2m^{-1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \chi_m^f(\mathbf{x}_\Sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } d(\mathbf{x}_\Sigma, \gamma^{\text{sf}} \cup \gamma^{\text{pml}}) \leq m^{-1} \\ 1 & \text{si } d(\mathbf{x}_\Sigma, \gamma^{\text{sf}} \cup \gamma^{\text{pml}}) \geq 2m^{-1}, \end{cases}$$

de sorte que pour tout  $m \geq 1$ , la suite  $(\chi_m^s \mathbf{u}_\Sigma^n, \chi_m^s t_1^n, \chi_m^f \varphi^n)_{n \geq 1}$  appartient bien à l'espace  $\mathbf{K}_Y$ . Grâce à l'inégalité triangulaire, nous avons :

$$\begin{aligned} &\|(\chi_m^s \mathbf{u}_\Sigma^n, \chi_m^s t_1^n, \chi_m^f \varphi^n) - (\mathbf{u}_\Sigma, t_1, \varphi)\|_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} \\ &\leq \|(\chi_m^s \mathbf{u}_\Sigma^n, \chi_m^s t_1^n, \chi_m^f \varphi^n) - (\mathbf{u}_\Sigma^n, t_1^n, \varphi^n)\|_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} + \|(\mathbf{u}_\Sigma^n, t_1^n, \varphi^n) - (\mathbf{u}_\Sigma, t_1, \varphi)\|_{\mathbf{H}^{\text{sf}}}. \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , on sait qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$  on a :

$$\|(\mathbf{u}_\Sigma^n, t_1^n, \varphi^n) - (\mathbf{u}_\Sigma, t_1, \varphi)\|_{\mathbf{H}^{\text{sf}}}^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Le deuxième terme tend donc vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Quant au premier terme, il s'écrit :

$$\begin{aligned} &\|(\chi_m^s \mathbf{u}_\Sigma^n, \chi_m^s t_1^n, \chi_m^f \varphi^n) - (\mathbf{u}_\Sigma^n, t_1^n, \varphi^n)\|_{\mathbf{H}^{\text{sf}}}^2 \\ &= \int_{\Sigma^s} |\chi_m^s \mathbf{u}_\Sigma^n - \mathbf{u}_\Sigma^n|^2 d\mathbf{x}_\Sigma + \int_{\Sigma^s} |\chi_m^s t_1^n - t_1^n|^2 d\mathbf{x}_\Sigma + \rho_f \int_{\Sigma^f} |\chi_m^f \varphi^n - \varphi^n|^2 d\mathbf{x}_\Sigma, \end{aligned} \quad (7.64)$$

On vérifie que chacun de ces termes tend vers 0 par application du théorème de convergence dominée vis-à-vis de  $m \rightarrow +\infty$  et à  $n \geq N$  fixé. Considérons par exemple l'intégrale sur  $\Sigma^f$ . L'intégrande tend vers 0 presque partout et on a la majoration :

$$|\chi_m^f \varphi^n - \varphi^n|^2 \leq |\varphi^n|^2.$$

Le majorant est indépendant de  $m$  et intégrable. Le théorème de convergence dominée nous donne alors l'existence de  $M \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $m \geq M$  :

$$\int_{\Sigma^f} |\chi_m^f \varphi^n - \varphi^n|^2 d\mathbf{x}_\Sigma \leq \frac{\varepsilon^2}{6}.$$

Les deux autres intégrales de (7.64) se traitent de façon similaire. Il vient alors qu'on a pour tout  $n \geq N$  et  $m \geq M$  :

$$\|(\chi_m^s \mathbf{u}_\Sigma^n, \chi_m^s t_1^n, \chi_m^f \varphi^n) - (\mathbf{u}_\Sigma^n, t_1^n, \varphi^n)\|_{\mathbf{H}^{\text{sf}}}^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2},$$

ce qui nous permet d'obtenir :

$$\|(\chi_m^s \mathbf{u}_\Sigma^n, \chi_m^s t_1^n, \chi_m^f \varphi^n) - (\mathbf{u}_\Sigma, t_1, \varphi)\|_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} \leq \varepsilon.$$

L'espace  $\mathbf{K}_Y$  est alors bien dense dans  $\mathbf{H}^{\text{sf}}$ . La densité de  $\mathbf{K}_X$  dans  $\mathbf{H}^{\text{sf}}$  se démontre de façon identique. □

Au lieu d'étudier directement les propriétés satisfaites par l'opérateur  $A^{\text{sf}}$ , nous allons nous attacher à étudier celles des opérateurs  $F_{X^{\text{sf}}}$  et  $F_{Y^{\text{sf}}}$ .

### Proposition 7.39

Les opérateurs  $F_{Y^{\text{sf}}}$  et  $F_{X^{\text{sf}}}$  sont inversibles excepté pour ensemble dénombrable de fréquences. Leur inverse est borné.

*Démonstration.* Commençons par montrer le résultat pour l'opérateur  $F_{X^{\text{sf}}}$ .

#### • Inversibilité de $F_{X^{\text{sf}}}$

Soit  $\mathbf{B}^{\text{sf}} = (\mathbf{B}_\Sigma, B_1, B^f) \in \mathbf{H}^{\text{sf}}$ , on cherche à résoudre le problème :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \mathbf{X}^{\text{sf}} \in D(F_{X^{\text{sf}}}) \text{ tel que} \\ &F_{X^{\text{sf}}} \mathbf{X}^{\text{sf}} = \mathbf{B}^{\text{sf}}. \end{aligned} \tag{7.65}$$

Une solution à ce problème satisfait alors le système d'équations :

$$\begin{cases} \mathbf{t}_\Sigma - \mu_s \nabla_\Sigma u_1 = \mu_s \mathbf{B}_\Sigma & \text{sur } \Sigma^s \\ \text{div}_\Sigma(\mathbf{t}_\Sigma) + \rho_s \omega^2 u_1 = B_1 & \text{sur } \Sigma^s \\ \zeta = B^f & \text{sur } \Sigma^f. \end{cases} \tag{7.66}$$

En multipliant la deuxième équation de (7.66) par  $\bar{v}_1 \in H^1(\Sigma^s)$  et en intégrant par parties, on obtient en utilisant la condition vérifiée au bord par  $\mathbf{t}_\Sigma$  :

$$\int_{\Sigma^s} (-\mathbf{t}_\Sigma \cdot \nabla_\Sigma \bar{v}_1 + \rho_s \omega^2 u_1 \bar{v}_1) d\mathbf{x}_\Sigma = \int_{\Sigma^s} B_1 \bar{v}_1 d\mathbf{x}_\Sigma,$$

ce qui devient en utilisant la première équation de (7.66) :

$$\int_{\Sigma^s} (\mu_s \nabla_{\Sigma} u_1 \cdot \nabla_{\Sigma} \bar{v}_1 - \rho_s \omega^2 u_1 \bar{v}_1) d\mathbf{x}_{\Sigma} = - \int_{\Sigma^s} (B_1 \bar{v}_1 + \mu_s \mathbf{B}_{\Sigma} \cdot \nabla_{\Sigma} \bar{v}_1) d\mathbf{x}_{\Sigma}. \quad (7.67)$$

Le problème associé à (7.67) est de type coercif plus compact et on sait montrer qu'on a l'unicité excepté pour un ensemble dénombrable de fréquences  $\omega$ . Notons que l'unicité de  $t_{\Sigma}$  découle de celle de  $u_1$  par la deuxième équation de (7.67). On a de plus à l'aide du théorème de Banach l'inégalité :

$$\|\mathbf{X}^{\text{sf}}\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}} \leq C_{F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}} \|\mathbf{B}^{\text{sf}}\|_{\mathbf{H}^{\text{sf}}}, \quad (7.68)$$

pour une constante  $C_{F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}} > 0$ . Réciproquement, il est facile de vérifier que la solution de la formulation faible (7.67) satisfait le système fort (7.65). Le problème (7.65) est donc bien posé excepté pour un ensemble dénombrable de fréquences, ce qui donne le résultat attendu.

• Inversibilité de  $F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$

Montrons désormais le résultat pour l'opérateur  $F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$ . Montrer que l'opérateur  $F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$  est inversible revient à montrer que le problème :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \mathbf{Y}^{\text{sf}} \in D(F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}) \text{ tel que} \\ &F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} \mathbf{Y}^{\text{sf}} = \mathbf{C}^{\text{sf}}, \end{aligned} \quad (7.69)$$

est bien posé pour  $\mathbf{C}^{\text{sf}} = (\mathbf{C}_{\Sigma}, C_1, C^f) \in \mathbf{H}^{\text{sf}}$ . Une solution de ce problème satisfait les équations :

$$\begin{cases} -\text{div}_{\Sigma}(\underline{\sigma}_{\Sigma}(\mathbf{Y}^{\text{sf}})) - \rho_s \omega^2 \mathbf{u}_{\Sigma} = \mathbf{C}_{\Sigma} & \text{sur } \Sigma^s \\ -\alpha_s \text{div}_{\Sigma}(\mathbf{u}_{\Sigma}) - \frac{\alpha_s}{\lambda_s} t_1 = C_1 & \text{sur } \Sigma^s \\ -\text{div}_{\Sigma}(\underline{A}^{\alpha\Sigma} \nabla_{\Sigma} \varphi) - b^{\alpha\Sigma} k_f^2 \varphi = b^{\alpha\Sigma} C^f & \text{sur } \Sigma^f. \end{cases} \quad (7.70)$$

Multiplier la première équation de (7.70) par  $\bar{v}_{\Sigma} \in (H^1(\Sigma^s))^2$  et intégrer par parties donne après calculs (détaillés au-dessus de (7.40) dans le cas d'un guide élastique immergé dans un fluide infini) :

$$\begin{aligned} &\int_{\Sigma^s} (\lambda_s \text{div}_{\Sigma}(\mathbf{u}_{\Sigma}) \cdot \text{div}_{\Sigma}(\bar{v}_{\Sigma}) + 2\mu_s \underline{\varepsilon}_{\Sigma}(\mathbf{u}_{\Sigma}) : \underline{\varepsilon}_{\Sigma}(\bar{v}_{\Sigma}) - \rho_s \omega^2 \mathbf{u}_{\Sigma} \cdot \bar{v}_{\Sigma}) d\mathbf{x}_{\Sigma} + \rho_f \omega \int_{\gamma^{\text{sf}}} \varphi(\bar{v}_{\Sigma} \cdot \mathbf{e}_s) ds(\mathbf{x}_{\Sigma}) \\ &= \int_{\Sigma^s} (\mathbf{C}_{\Sigma} \cdot \bar{v}_{\Sigma} - \lambda_s C_1 \text{div}_{\Sigma}(\bar{v}_{\Sigma})) d\mathbf{x}_{\Sigma}. \end{aligned} \quad (7.71)$$

Multiplier ensuite la troisième équation de (7.70) par  $\rho_f \bar{\psi} \in H^1(\Sigma^f)$  et intégrer par parties donne ensuite :

$$\begin{aligned} &\rho_f \int_{\Sigma^f} (\underline{A}^{\alpha\Sigma} \nabla_{\Sigma} \varphi \cdot \nabla_{\Sigma} \bar{\psi} - b^{\alpha\Sigma} k_f^2 \varphi \bar{\psi}) d\mathbf{x}_{\Sigma} + \rho_f \omega \int_{\gamma^{\text{sf}}} (\mathbf{u}_{\Sigma} \cdot \mathbf{e}_s) \bar{\psi} ds(\mathbf{x}_{\Sigma}) \\ &= \rho_f \int_{\Sigma^f} b^{\alpha\Sigma} C^f \bar{\psi} d\mathbf{x}_{\Sigma}. \end{aligned} \quad (7.72)$$

Sommer les équations (7.71) et (7.72) nous permet alors de voir que  $\mathbf{Y}^{\text{sf}}$  est solution du problème :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \mathbf{Y}^{\text{sf}} \in \mathbf{V}_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} \text{ tel que} \\ &\begin{cases} a_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}((\mathbf{u}_{\Sigma}, \varphi), (\mathbf{v}_{\Sigma}, \psi)) = \ell_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}(\mathbf{v}_{\Sigma}, \psi), & \forall (\mathbf{v}_{\Sigma}, \psi) \in (H^1(\Sigma^s))^2 \times H^1(\Sigma^f) \\ -\alpha_s \text{div}_{\Sigma}(\mathbf{u}_{\Sigma}) - \frac{\alpha_s}{\lambda_s} t_1 = C_1 & \text{sur } \Sigma^s, \end{cases} \end{aligned} \quad (7.73)$$

où la forme sesquilinéaire  $a_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}((\mathbf{u}_\Sigma, \varphi), (\mathbf{v}_\Sigma, \psi)) &:= \int_{\Sigma^{\text{s}}} (\lambda_{\text{s}} \operatorname{div}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma) \operatorname{div}_\Sigma(\bar{\mathbf{v}}_\Sigma) + 2\mu_{\text{s}} \underline{\epsilon}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma) : \underline{\epsilon}_\Sigma(\bar{\mathbf{v}}_\Sigma) - \rho_{\text{s}} \omega^2 \mathbf{u}_\Sigma \cdot \bar{\mathbf{v}}_\Sigma) d\mathbf{x}_\Sigma \\ &+ \rho_{\text{f}} \int_{\Sigma^{\text{f}}} (\underline{\mathbf{A}}^{\alpha_\Sigma} \nabla_\Sigma \varphi \cdot \nabla_\Sigma \bar{\psi} - b^{\alpha_\Sigma} k_{\text{f}}^2 \varphi \bar{\psi}) d\mathbf{x}_\Sigma \\ &+ \rho_{\text{f}} \omega \int_{\gamma^{\text{sf}}} (\varphi(\bar{\mathbf{v}}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_{\text{s}}) + \bar{\psi}(\mathbf{u}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_{\text{s}})) ds(\mathbf{x}_\Sigma), \end{aligned} \quad (7.74)$$

et la forme antilinéaire  $\ell_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$  est définie par :

$$\ell_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}(\mathbf{v}_\Sigma, \psi) = \int_{\Sigma^{\text{s}}} (\mathbf{C}_\Sigma \cdot \bar{\mathbf{v}}_\Sigma - \lambda_{\text{s}} C_1 \operatorname{div}_\Sigma(\bar{\mathbf{v}}_\Sigma)) d\mathbf{x}_\Sigma + \rho_{\text{f}} \int_{\Sigma^{\text{f}}} b^{\alpha_\Sigma} C^{\text{f}} \bar{\psi} d\mathbf{x}_\Sigma.$$

La forme sesquilinéaire  $a_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$  admet la décomposition :

$$a_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} = b_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} + c_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}},$$

où les deux nouvelles formes sesquilinéaires sont définies par :

$$\begin{aligned} b_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}((\mathbf{u}_\Sigma, \varphi), (\mathbf{v}_\Sigma, \psi)) &:= \int_{\Sigma^{\text{s}}} (\lambda_{\text{s}} \operatorname{div}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma) \operatorname{div}_\Sigma(\bar{\mathbf{v}}_\Sigma) + 2\mu_{\text{s}} \underline{\epsilon}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma) : \underline{\epsilon}_\Sigma(\bar{\mathbf{v}}_\Sigma) + \rho_{\text{s}} \mathbf{u}_\Sigma \cdot \bar{\mathbf{v}}_\Sigma) d\mathbf{x}_\Sigma \\ &+ \rho_{\text{f}} \int_{\Sigma^{\text{f}}} (\underline{\mathbf{A}}^{\alpha_\Sigma} \nabla_\Sigma \varphi \cdot \nabla_\Sigma \bar{\psi} + b^{\alpha_\Sigma} \varphi \bar{\psi}) d\mathbf{x}_\Sigma, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}((\mathbf{u}_\Sigma, \varphi), (\mathbf{v}_\Sigma, \psi)) &:= -\rho_{\text{s}}(1 + \omega^2) \int_{\Sigma^{\text{s}}} \mathbf{u}_\Sigma \cdot \bar{\mathbf{v}}_\Sigma d\mathbf{x}_\Sigma - \rho_{\text{f}} \left(1 + \frac{\omega^2}{c_{\text{f}}^2}\right) \int_{\Sigma^{\text{f}}} b^{\alpha_\Sigma} \varphi \bar{\psi} d\mathbf{x}_\Sigma \\ &+ \rho_{\text{f}} \omega \int_{\gamma^{\text{sf}}} (\varphi(\bar{\mathbf{v}}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_{\text{s}}) + \bar{\psi}(\mathbf{u}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_{\text{s}})) ds(\mathbf{x}_\Sigma), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la relation  $k_{\text{f}} = \omega/c_{\text{f}}$  pour faire apparaître la pulsation  $\omega$  de façon explicite. Grâce à cette décomposition, nous allons montrer que la forme sesquilinéaire  $a_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$  est associée à un opérateur Fredholm d'indice 0. Montrons pour commencer que  $b_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$  est coercive. À l'aide de l'inégalité de Korn, nous obtenons l'existence d'une constante  $C_{\text{s}} > 0$  telle que :

$$\int_{\Sigma^{\text{s}}} (\lambda_{\text{s}} |\operatorname{div}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma)|^2 + 2\mu_{\text{s}} \underline{\epsilon}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma) : \underline{\epsilon}_\Sigma(\bar{\mathbf{u}}_\Sigma) + \rho_{\text{s}} |\mathbf{u}_\Sigma|^2) d\mathbf{x}_\Sigma \geq C_{\text{s}} \|\mathbf{u}_\Sigma\|_{(\mathbf{H}^1(\Sigma^{\text{s}}))^2}^2,$$

ce qui nous donne la coercivité des termes associés à la partie solide de la structure. Le contrôle des termes associés à la partie fluide de la structure est plus subtil du fait de la présence des coefficients complexes de la PML impliqués dans le tenseur diagonal  $\underline{\mathbf{A}}^{\alpha_\Sigma}$  et la fonction scalaire  $b^{\alpha_\Sigma}$ . Il a été mentionné au début de cette section avec la Remarque 7.37 que les coefficients diagonaux de  $\underline{\mathbf{A}}^{\alpha_\Sigma}$ , et donc a fortiori ceux de  $\underline{\mathbf{A}}^{\alpha_\Sigma}$  qui est obtenu en ôtant la première ligne et la première colonne de  $\underline{\mathbf{A}}^{\alpha_\Sigma}$ , ont une partie réelle bornée inférieurement par des constantes strictement positives. Notons  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, d$  les coefficients diagonaux de  $\underline{\mathbf{A}}^{\alpha_\Sigma}$ , avec  $d = 1$  en 2D et  $d = 2$  en 3D. On a :

$$\Re \left( \int_{\Sigma^{\text{f}}} \underline{\mathbf{A}}^{\alpha_\Sigma} \nabla_\Sigma \varphi \cdot \nabla_\Sigma \bar{\varphi} d\mathbf{x}_\Sigma \right) = \Re \left( \int_{\Sigma^{\text{f}}} \sum_{i=1}^d a_i |\partial_{x_i} \varphi|^2 d\mathbf{x}_\Sigma \right) \geq \min_{1 \leq i \leq d} (\Re(a_i)) |\varphi|_{\mathbf{H}^1(\Sigma^{\text{f}})}^2,$$

où  $|\cdot|_{H^1(\Sigma^f)}$  désigne ici la semi-norme  $H^1(\Sigma^f)$ . Puisque  $b^{\alpha\Sigma}$  a aussi une partie réelle bornée inférieurement par une constante strictement positive, on en déduit qu'il existe une constante  $C_f > 0$  telle que :

$$\Re\left(\rho_f \int_{\Sigma^f} (\underline{A}^{\alpha\Sigma} \nabla_{\Sigma} \varphi \cdot \nabla_{\Sigma} \bar{\psi} + b^{\alpha\Sigma} \varphi \bar{\psi}) d\mathbf{x}_{\Sigma}\right) \geq C_f \|\varphi\|_{H^1(\Sigma^f)}^2.$$

Par suite, nous avons :

$$\Re(a_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}((\mathbf{u}_{\Sigma}, \varphi), (\mathbf{u}_{\Sigma}, \varphi))) \geq \min(C_s, C_f) (\|\mathbf{u}_{\Sigma}\|_{(H^1(\Sigma^s))^2}^2 + \|\varphi\|_{H^1(\Sigma^f)}^2),$$

ce qui traduit la coercivité de la forme sesquilinéaire  $b_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$  dans  $(H^1(\Sigma^s))^2 \times H^1(\Sigma^f)$ . D'après le lemme de Lax-Milgram,  $b_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$  est donc associée à un isomorphisme. Pour montrer la compacité de l'opérateur associé à la forme sesquilinéaire  $c_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$ , il faut utiliser d'une part la compacité des injections canoniques de  $H^1(\Sigma^s)$  dans  $L^2(\Sigma^s)$  et de  $H^1(\Sigma^f)$  dans  $L^2(\Sigma^f)$  (les domaines  $\Sigma^s$  et  $\Sigma^f$  sont bornés), et d'autre part le Lemme 7.15 (toujours valable lorsque la section infinie  $\Sigma^{f,\infty}$  est remplacée par la section bornée  $\Sigma^f$ ) qui nous donne la compacité de l'opérateur associé au terme de couplage. La forme sesquilinéaire  $a_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$  est bien associée à un opérateur Fredholm d'indice 0. Pour montrer que c'est un isomorphisme, il suffit donc de montrer son injectivité. Nous proposons pour cela deux preuves : une première indépendante de la dimension et une seconde spécifique au cas 2D d'une plaque immergée.

### Injectivité dans le cas général (2D et 3D)

L'opérateur  $\mathcal{B}$  associé à la forme sesquilinéaire  $b_{F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}}$  est un isomorphisme de  $(H^1(\Sigma))^2 \times H^1(\Sigma^f)$  dans son dual. De plus, l'opérateur  $\mathcal{C}(\omega)$  associé à  $c_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$  est un opérateur compact de  $(H^1(\Sigma))^2 \times H^1(\Sigma^f)$  dans son dual pour chaque fréquence  $\omega$ . L'étude de l'injectivité se ramène à l'étude du noyau du pencil :

$$\mathcal{A}(\omega) := \mathcal{B} + \mathcal{C}(\omega),$$

qui se ramène elle-même à l'étude du noyau de l'opérateur :

$$\mathcal{A}'(\omega) := I + \mathcal{B}^{-1}\mathcal{C}(\omega).$$

L'application  $\omega \mapsto \mathcal{B}^{-1}\mathcal{C}(\omega)$  est analytique dans  $\mathbb{C}$  et compacte pour tout  $\omega$ . Pour  $\omega_0 = i\tau$ ,  $\tau > 0$ , la forme sesquilinéaire  $a_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}((\mathbf{u}_{\Sigma}, \varphi), (\mathbf{v}_{\Sigma}, \psi)) &= \int_{\Sigma^s} (\lambda_s \operatorname{div}_{\Sigma}(\mathbf{u}_{\Sigma}) \operatorname{div}_{\Sigma}(\bar{\mathbf{v}}_{\Sigma}) + 2\mu_s \underline{\epsilon}_{\Sigma}(\mathbf{u}_{\Sigma}) : \underline{\epsilon}_{\Sigma}(\bar{\mathbf{v}}_{\Sigma}) + \rho_s \tau^2 \mathbf{u}_{\Sigma} \cdot \bar{\mathbf{v}}_{\Sigma}) d\mathbf{x}_{\Sigma} \\ &+ \rho_f \int_{\Sigma^f} (\underline{A}^{\alpha\Sigma} \nabla_{\Sigma} \varphi \cdot \nabla_{\Sigma} \bar{\psi} + b^{\alpha\Sigma} \frac{\tau^2}{c_f^2} \varphi \bar{\psi}) d\mathbf{x}_{\Sigma} \\ &+ i\rho_f \tau \int_{\gamma^{\text{sf}}} (\varphi(\bar{\mathbf{v}}_{\Sigma} \cdot \mathbf{e}_s) + \bar{\psi}(\mathbf{u}_{\Sigma} \cdot \mathbf{e}_s)) ds(\mathbf{x}_{\Sigma}). \end{aligned}$$

En prenant  $(\mathbf{v}_{\Sigma}, \psi) = (\mathbf{u}_{\Sigma}, \varphi)$ , on remarque que le terme de couplage est imaginaire pur, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \Re(a_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}((\mathbf{u}_{\Sigma}, \varphi), (\mathbf{v}_{\Sigma}, \psi))) &= \int_{\Sigma^s} (\lambda_s \operatorname{div}_{\Sigma}(\mathbf{u}_{\Sigma}) \operatorname{div}_{\Sigma}(\bar{\mathbf{v}}_{\Sigma}) + 2\mu_s \underline{\epsilon}_{\Sigma}(\mathbf{u}_{\Sigma}) : \underline{\epsilon}_{\Sigma}(\bar{\mathbf{v}}_{\Sigma}) + \rho_s \tau^2 \mathbf{u}_{\Sigma} \cdot \bar{\mathbf{v}}_{\Sigma}) d\mathbf{x}_{\Sigma} \\ &+ \Re\left(\rho_f \int_{\Sigma^f} (\underline{A}^{\alpha\Sigma} \nabla_{\Sigma} \varphi \cdot \nabla_{\Sigma} \bar{\psi} + b^{\alpha\Sigma} \frac{\tau^2}{c_f^2} k_f^2 \varphi \bar{\psi}) d\mathbf{x}_{\Sigma}\right). \end{aligned}$$

On conclut que  $a_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$  est coercive avec les mêmes arguments que ceux donnés pour montrer la coercivité de  $b_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$ . Par conséquent, l'opérateur  $\mathcal{A}(\omega_0)$  est un isomorphisme d'après le lemme de Lax-Milgram. Le théorème de Fredholm analytique nous permet de conclure que le pencil  $\mathcal{A}'(\omega)$  est un isomorphisme excepté pour un ensemble dénombrable de fréquences, ce qui nous donne en particulier son injectivité.

### Injectivité dans le cas 2D

Pour montrer que l'opérateur linéaire associé à la forme sesquilinéaire  $a_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$  est injectif, nous allons tirer parti de l'expression plus simple que prend le terme associé à la PML dans la forme sesquilinéaire  $a_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$ . Celle-ci s'écrit en effet :

$$\begin{aligned} a_{F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}}((\mathbf{u}_\Sigma, \varphi), (\mathbf{v}_\Sigma, \psi)) &= \int_{\Sigma^s} (\lambda_s \operatorname{div}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma) \operatorname{div}_\Sigma(\bar{\mathbf{v}}_\Sigma) + 2\mu_s \underline{\epsilon}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma) : \underline{\epsilon}_\Sigma(\bar{\mathbf{v}}_\Sigma) - \rho_s \omega^2 \mathbf{u}_\Sigma \cdot \bar{\mathbf{v}}_\Sigma) dx_2 \\ &\quad + \rho_f \int_{\Sigma^f} (\alpha_2 d_{x_2} \varphi d_{x_2} \bar{\psi} - \alpha_2^{-1} k_f^2 \varphi \bar{\psi}) dx_2 \\ &\quad + \rho_f \omega \int_{\gamma^{\text{sf}}} (\varphi(\bar{\mathbf{v}}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_s) + \bar{\psi}(\mathbf{u}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_s)) ds(x_2). \end{aligned}$$

Soit  $\Sigma^{\text{pml}} \subset \Sigma^f$  le domaine occupé par les PML. Prendre la partie imaginaire de l'équation  $a_{F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}}((\mathbf{u}_\Sigma, \varphi), (\mathbf{u}_\Sigma, \varphi)) = 0$  donne :

$$\int_{\Sigma^{\text{pml}}} (\Im m(\alpha_2) |d_{x_2} \varphi|^2 + \Im m(-\alpha_2^{-1}) k_f^2 |\varphi|^2) dx_2 = 0.$$

Par hypothèse sur le coefficient  $\alpha_2$  de la PML, on a  $\Im m(\alpha_2) < 0$  et  $\Im m(-\alpha_2^{-1}) < 0$  dans  $\Sigma^{\text{pml}}$ . Il en découle que  $\varphi = 0$  dans  $\Sigma^{\text{pml}}$ . Un argument de type prolongement unique pour l'équation de Helmholtz permet de déduire que  $\varphi = 0$  dans  $\Sigma^f$ . La résolution de (7.69) pour un second membre nul est ainsi ramenée à celle du problème :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \mathbf{u}_\Sigma \in (H^1(\Sigma^s))^2 \text{ tel que} \\ &\begin{cases} \operatorname{div}_\Sigma(\underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma)) + \rho_s \omega^2 \mathbf{u}_\Sigma = 0 & \text{dans } \Sigma^s \\ \underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma) \mathbf{e}_s = 0 & \text{sur } \partial \Sigma^s \\ \mathbf{u}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_s = 0 & \text{sur } \partial \Sigma^s. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.75)$$

D'une façon générale, le problème (7.75) peut avoir des solutions non triviales pour un ensemble dénombrable de fréquences qui correspond, au facteur multiplicatif  $\rho_s$  près, aux valeurs propres de l'opérateur autoadjoint  $\mathbf{u} \mapsto -\operatorname{div}_\Sigma(\underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma))$  dont le domaine prend en compte les deux conditions au bord de (7.75). De telles solutions (i.e. nulles dans le fluide, mais pas dans le solide) sont appelées *modes de Jones*. En dehors de ces fréquences particulières, nous avons l'injectivité de l'opérateur linéaire associé à  $a_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$ . Puisque c'est un opérateur Fredholm d'indice 0, c'est donc un isomorphisme.

Dans les deux cas abordés, le problème (7.73) est bien posé excepté pour un ensemble dénombrable de fréquences, ce qui donne par suite l'inversibilité de l'opérateur  $F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$  en dehors d'un ensemble dénombrable de fréquences. On a de plus grâce au théorème de Banach l'inégalité :

$$\|\mathbf{Y}^{\text{sf}}\|_{\mathbf{V}_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}} \leq C_{F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}} \|\mathbf{B}^{\text{sf}}\|_{\mathbf{H}^{\text{sf}}}, \quad (7.76)$$

pour une constante  $C_{F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}} > 0$ . □

**Remarque 7.40** Il est aussi possible d'écrire le problème (7.75) en 3D. Il a été montré dans [Har90] que ce problème n'admet pas de solutions pour presque tout corps élastique à frontière indéfiniment dérivable. Des travaux plus récents présentés dans [DNS19] ont montré de façon complémentaire que ces modes peuvent exister pour des solides immergés à frontière Lipschitz. Lorsque (7.75) a une solution non triviale  $\mathbf{u}_\Sigma$ , il est possible de construire une solution non triviale du problème homogène (7.73) en prenant  $\varphi = 0$ . Dans ce cas, le défaut d'injectivité est aussi lié à la présence de modes de Jones.

Il découle de ce résultat le caractère fermé de l'opérateur  $A^{\text{sf}}$ .

**Corollaire 7.41**

L'opérateur  $A^{\text{sf}}$  est fermé excepté pour un ensemble dénombrable de fréquences.

*Démonstration.* L'opérateur  $A^{\text{sf}}$  est inversible d'après la Proposition 7.39. Il est alors fermé.  $\square$

**Proposition 7.42**

Les opérateurs  $F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}$  et  $F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$  sont d'inverse compact. Autrement dit, la résolvante de ces opérateurs est compacte en 0.

*Démonstration.* Soit  $\omega$  une fréquence pour laquelle les opérateurs  $F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$  et  $F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}$  sont inversibles.

• Compacité de  $(F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}})^{-1}$

Soit  $(\mathbf{B}_n^{\text{sf}})_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée de  $\mathbf{H}^{\text{sf}}$ , puis  $\mathbf{X}_n^{\text{sf}} \in D(F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}})$  et  $\mathbf{Y}_n^{\text{sf}} \in D(F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}})$  les solutions des équations :

$$\begin{cases} F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} \mathbf{X}_n^{\text{sf}} = \mathbf{B}_n^{\text{sf}} \\ F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} \mathbf{Y}_n^{\text{sf}} = \mathbf{X}_n^{\text{sf}}. \end{cases}$$

Montrer que l'opérateur  $(F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}})^{-1}$  est compact revient à montrer qu'on peut extraire de  $(\mathbf{B}_n^{\text{sf}})_{n \in \mathbb{N}}$  une sous-suite, notée de façon identique, telle que la suite  $\mathbf{Y}_n^{\text{sf}} = (F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}})^{-1} \mathbf{B}_n^{\text{sf}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge dans  $\mathbf{V}_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$ . Commençons par prouver qu'on peut extraire de  $(\mathbf{B}_n^{\text{sf}})_{n \in \mathbb{N}}$  une sous-suite telle que  $(\mathbf{Y}_n^{\text{sf}})_{n \in \mathbb{N}}$  soit bornée dans  $\mathbf{H}^{\text{sf}}$ . D'après la Proposition 7.39, la suite  $\mathbf{X}_n^{\text{sf}} = (F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}})^{-1} \mathbf{B}_n^{\text{sf}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est bornée dans  $\mathbf{V}_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}$ , ce qui garantit que :

$$\begin{aligned} (\mathbf{t}_\Sigma^n)_{n \in \mathbb{N}} & \text{ est bornée dans } (L^2(\Sigma^{\text{s}}))^2 \\ (\mathbf{u}_1^n)_{n \in \mathbb{N}} & \text{ est bornée dans } H^1(\Sigma^{\text{s}}) \\ (\zeta^n)_{n \in \mathbb{N}} & \text{ est bornée dans } L^2(\Sigma^{\text{f}}). \end{aligned}$$

Le théorème de Rellich nous permet d'extraire de  $(\mathbf{u}_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$  une sous-suite convergente dans  $L^2(\Sigma^{\text{s}})$ . La limite de cette sous-suite est notée  $\mathbf{u}_1$ . Ensuite, la Proposition 7.39 nous assure à nouveau que la suite  $\mathbf{Y}_n^{\text{sf}} = (F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}})^{-1} \mathbf{X}_n^{\text{sf}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  est bornée dans  $\mathbf{V}_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$ , d'où :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_\Sigma^n)_{n \in \mathbb{N}} & \text{ est bornée dans } (H^1(\Sigma^{\text{s}}))^2 \\ (\mathbf{t}_1^n)_{n \in \mathbb{N}} & \text{ est bornée dans } L^2(\Sigma^{\text{s}}) \\ (\varphi^n)_{n \in \mathbb{N}} & \text{ est bornée dans } H^1(\Sigma^{\text{f}}). \end{aligned}$$

Le théorème de Rellich nous garantit à nouveau que les suites  $(\mathbf{u}_\Sigma^n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\varphi^n)_{n \in \mathbb{N}}$  admettent des sous-suites convergentes dans  $(L^2(\Sigma^{\text{s}}))^2$  et  $L^2(\Sigma^{\text{f}})$ . Les limites de ces suites sont notées



$\mathbf{u}_\Sigma$  et  $\varphi$ . De plus, puisque les suites  $(\mathbf{t}_\Sigma^n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\zeta^n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont bornées dans  $(L^2(\Sigma^s))^2$  et  $L^2(\Sigma^f)$ , on peut en extraire des sous-suites qui convergent faiblement dans les mêmes espaces. Ces limites faibles sont notées  $\mathbf{t}_\Sigma$  et  $\zeta$ . Le problème :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{Y}_n^{\text{sf}} \in D(F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}) \text{ tel que} \\ & F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} \mathbf{Y}_n^{\text{sf}} = \mathbf{X}_n^{\text{sf}}, \end{aligned}$$

peut s'écrire sous la forme variationnelle :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{Y}_n^{\text{sf}} \in \mathbf{V}_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} \text{ tel que} \\ & \begin{cases} a_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}((\mathbf{u}_\Sigma^n, \varphi^n), (\mathbf{v}_\Sigma, \psi)) = \ell_{\mathbf{Y}^{\text{sf}},n}(\mathbf{v}_\Sigma, \psi), & \forall (\mathbf{v}_\Sigma, \psi) \in (H^1(\Sigma^s))^2 \times H^1(\Sigma^f) \\ -\alpha_s \operatorname{div}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma^n) - \frac{\alpha_s}{\lambda_s} \mathbf{t}_1^n = \mathbf{u}_1^n & \text{sur } \Sigma^s, \end{cases} \end{aligned} \quad (7.77)$$

avec  $a_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$  qui a déjà été définie par (7.74) et  $\ell_{\mathbf{Y}^{\text{sf}},n}$  qui est donnée par :

$$\ell_{\mathbf{Y}^{\text{sf}},n}(\mathbf{v}_\Sigma, \psi) := \int_{\Sigma^s} (\mathbf{t}_\Sigma^n \cdot \bar{\mathbf{v}}_\Sigma - \lambda_s \mathbf{u}_1^n \operatorname{div}_\Sigma(\bar{\mathbf{v}}_\Sigma)) d\mathbf{x}_\Sigma + \rho_f \int_{\Sigma^f} b^{\alpha_\Sigma} \zeta^n \bar{\psi} d\mathbf{x}_\Sigma.$$

Puisque  $\mathbf{t}_\Sigma^n \rightharpoonup \mathbf{t}_\Sigma$  dans  $(L^2(\Sigma^s))^2$ ,  $\mathbf{u}_1^n \rightarrow \mathbf{u}_1$  dans  $L^2(\Sigma^s)$  et  $\zeta^n \rightharpoonup \zeta$  dans  $L^2(\Sigma^f)$ , nous avons :

$$\ell_{\mathbf{Y}^{\text{sf}},n}(\mathbf{v}_\Sigma, \psi) \rightarrow \ell_{\mathbf{Y}^{\text{sf}},\infty}(\mathbf{v}_\Sigma, \psi), \quad \forall (\mathbf{v}_\Sigma, \psi) \in (H^1(\Sigma))^2 \times H^1(\Sigma^f),$$

où la forme antilinéaire  $\ell_{\mathbf{Y}^{\text{sf}},\infty}$  s'obtient en remplaçant dans  $\ell_{\mathbf{Y}^{\text{sf}},n}$  les suites par leurs limites. Soit  $(\mathbf{u}_\Sigma, \varphi)$  la solution de la formulation variationnelle :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\mathbf{u}_\Sigma, \varphi) \in (H^1(\Sigma^s))^2 \times \Sigma^f \text{ tel que} \\ & a_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}((\mathbf{u}_\Sigma, \varphi), (\mathbf{v}_\Sigma, \psi)) = \ell_{\mathbf{Y}^{\text{sf}},\infty}(\mathbf{v}_\Sigma, \psi), \quad \forall (\mathbf{v}_\Sigma, \psi) \in (H^1(\Sigma^s))^2 \times H^1(\Sigma^f). \end{aligned}$$

Sachant que l'inverse de l'opérateur linéaire associé à la forme sesquilinéaire  $a_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$  est continu, nous avons la convergence de  $\mathbf{u}_\Sigma^n$  vers  $\mathbf{u}_\Sigma$  dans  $(H^1(\Sigma^s))^2$  ainsi que la convergence de  $\varphi^n$  vers  $\varphi$  dans  $H^1(\Sigma^f)$ . La deuxième équation de (7.77) nous permet enfin de déduire que  $(\mathbf{t}_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge aussi vers  $\mathbf{t}_1$  dans  $L^2(\Sigma^s)$ .

- Compacité de  $(F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}})^{-1}$

Soit  $(\mathbf{C}_n^{\text{sf}})_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée de  $\mathbf{H}^{\text{sf}}$ , puis  $\mathbf{X}_n^{\text{sf}} \in D(F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}})$  et  $\mathbf{Y}_n^{\text{sf}} \in D(F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}})$  les solutions des équations :

$$\begin{cases} F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} \mathbf{X}_n^{\text{sf}} = \mathbf{Y}_n^{\text{sf}} \\ F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} \mathbf{Y}_n^{\text{sf}} = \mathbf{C}_n^{\text{sf}}. \end{cases}$$

Montrer que l'opérateur  $(F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}})^{-1}$  est compact revient à montrer qu'on peut extraire de  $(\mathbf{C}_n^{\text{sf}})_{n \in \mathbb{N}}$  une sous-suite, notée de façon identique, telle que la suite  $\mathbf{X}_n^{\text{sf}} = (F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}})^{-1} \mathbf{C}_n^{\text{sf}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge dans  $\mathbf{V}_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}$ . Commençons par prouver qu'on peut extraire de  $(\mathbf{C}_n^{\text{sf}})_{n \in \mathbb{N}}$  une sous-suite telle que  $(\mathbf{X}_n^{\text{sf}})_{n \in \mathbb{N}}$  soit bornée dans  $\mathbf{H}^{\text{sf}}$ . D'après la Proposition 7.39, nous savons que la suite  $\mathbf{Y}_n^{\text{sf}} = (F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}})^{-1} \mathbf{C}_n^{\text{sf}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est bornée dans  $\mathbf{V}_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$ , ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_\Sigma^n)_{n \in \mathbb{N}} & \text{ est bornée dans } (H^1(\Sigma))^2 \\ (\mathbf{t}_1^n)_{n \in \mathbb{N}} & \text{ est bornée dans } L^2(\Sigma^s) \\ (\varphi^n)_{n \in \mathbb{N}} & \text{ est bornée dans } H^1(\Sigma^f). \end{aligned}$$

Grâce au théorème de Rellich, nous extrayons à nouveau des suites  $(\mathbf{u}_\Sigma^n)_{n \in \mathbb{N}}$  et de  $(\varphi^n)_{n \in \mathbb{N}}$  des sous-suites qui convergent dans  $(L^2(\Sigma^s))^2$  et  $L^2(\Sigma^f)$ . Les limites sont notées  $\mathbf{u}_\Sigma$  et  $\varphi$ . Comme

précédemment, nous en déduisons que la suite  $\mathbf{X}_n^{\text{sf}} = (F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}})^{-1} \mathbf{Y}_n^{\text{sf}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est bornée dans  $\mathbf{V}_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}$  :

$$\begin{aligned} (\mathbf{t}_\Sigma^n)_{n \in \mathbb{N}} & \text{ est bornée dans } (L^2(\Sigma^{\text{s}}))^2 \\ (\mathbf{u}_\Sigma^n)_{n \in \mathbb{N}} & \text{ est bornée dans } H^1(\Sigma^{\text{s}}) \\ (\zeta^n)_{n \in \mathbb{N}} & \text{ est bornée dans } L^2(\Sigma^{\text{f}}). \end{aligned}$$

En recourant à nouveau au théorème de Rellich, on extrait une sous-suite  $(\mathbf{u}_\Sigma^n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente dans  $L^2(\Sigma^{\text{s}})$ . Cette limite est notée  $\mathbf{u}_\Sigma$ . Comme la suite  $(\mathbf{t}_\Sigma^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $L^2(\Sigma^{\text{s}})$ , on peut en extraire une sous-suite faiblement convergente dans le même espace. Cette limite est notée  $\mathbf{t}_\Sigma$ . Le problème :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{X}_n^{\text{sf}} \in D(F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}) \text{ tel que} \\ & F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} \mathbf{X}_n^{\text{sf}} = \mathbf{Y}_n^{\text{sf}}, \end{aligned}$$

peut s'écrire de façon variationnelle sous la forme :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{X}_n^{\text{sf}} \in \mathbf{V}_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} \text{ tel que} \\ & \begin{cases} a_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}(\mathbf{u}_\Sigma, \mathbf{v}_\Sigma) = \ell_{\mathbf{X}^{\text{sf}},n}(\mathbf{v}_\Sigma), & \forall \mathbf{v}_\Sigma \in H^1(\Sigma^{\text{s}}) \\ \mathbf{t}_\Sigma^n = \mu_{\text{s}}(\mathbf{u}_\Sigma^n + \nabla_\Sigma \mathbf{u}_\Sigma^n) & \text{sur } \Sigma^{\text{s}} \\ \zeta^n = \varphi^n & \text{sur } \Sigma^{\text{f}}, \end{cases} \end{aligned} \quad (7.78)$$

avec :

$$a_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}(\mathbf{u}_\Sigma, \mathbf{v}_\Sigma) := \int_{\Sigma^{\text{s}}} (\mu_{\text{s}} \nabla_\Sigma \mathbf{u}_\Sigma \cdot \nabla_\Sigma \bar{\mathbf{v}}_\Sigma - \rho_{\text{s}} \omega^2 \mathbf{u}_\Sigma \bar{\mathbf{v}}_\Sigma) d\mathbf{x}_\Sigma,$$

et :

$$\ell_{\mathbf{X}^{\text{sf}},n}(\mathbf{v}_\Sigma) := - \int_{\Sigma^{\text{s}}} (\mathbf{t}_\Sigma^n \bar{\mathbf{v}}_\Sigma + \mu_{\text{s}} \mathbf{u}_\Sigma^n \nabla_\Sigma \bar{\mathbf{v}}_\Sigma) d\mathbf{x}_\Sigma.$$

Puisque  $\mathbf{t}_\Sigma^n \rightarrow \mathbf{t}_\Sigma$  dans  $L^2(\Sigma^{\text{s}})$  et  $\mathbf{u}_\Sigma^n \rightarrow \mathbf{u}_\Sigma$  dans  $(L^2(\Sigma^{\text{s}}))^2$ , nous avons :

$$\ell_{\mathbf{X}^{\text{sf}},n}(\mathbf{v}_\Sigma) \rightarrow \ell_{\mathbf{X}^{\text{sf}},\infty}(\mathbf{v}_\Sigma), \quad \forall \mathbf{v}_\Sigma \in H^1(\Sigma^{\text{s}}),$$

où la forme antilinéaire  $\ell_{\mathbf{X}^{\text{sf}},\infty}$  s'obtient en remplaçant dans  $\ell_{\mathbf{X}^{\text{sf}},n}$  les suites par leur limite. Soit  $\mathbf{u}_\Sigma$  la solution de la formulation variationnelle :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{u}_\Sigma \in H^1(\Sigma^{\text{s}}) \text{ tel que} \\ & a_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}(\mathbf{u}_\Sigma, \mathbf{v}_\Sigma) = \ell_{\mathbf{X}^{\text{sf}},\infty}(\mathbf{v}_\Sigma), \quad \forall \mathbf{v}_\Sigma \in H^1(\Sigma^{\text{f}}). \end{aligned}$$

Sachant que l'inverse de l'opérateur linéaire associé à  $a_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}$  est continu, nous avons la convergence de  $\mathbf{u}_\Sigma^n$  vers  $\mathbf{u}_\Sigma$  dans  $H^1(\Sigma^{\text{s}})$ . Les deuxième et troisième équations de (7.78) nous permettent enfin de déduire que  $(\mathbf{t}_\Sigma^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\mathbf{t}_\Sigma$  dans  $(L^2(\Sigma^{\text{s}}))^2$  et  $\zeta^n$  converge vers  $\zeta$  dans  $L^2(\Sigma^{\text{f}})$ .  $\square$

Nous allons nous servir de la Proposition 7.42 pour montrer que le spectre de l'opérateur  $A^{\text{sf}}$  est purement ponctuel. Pour cela, nous avons besoin de la propriété de symétrie suivante satisfaite par le spectre discret de  $A^{\text{sf}}$  que l'on note  $\Lambda_{\text{d}}(A^{\text{sf}})$ .

#### Lemme 7.43

On a l'équivalence entre :

1.  $\lambda \in \Lambda_{\text{d}}(A^{\text{sf}})$  pour le vecteur propre  $(\mathbf{X}^{\text{sf}}, \mathbf{Y}^{\text{sf}}) \in \text{Ker}(A^{\text{sf}} - \lambda I)$ ;
2.  $-\lambda \in \Lambda_{\text{d}}(A^{\text{sf}})$  pour le vecteur propre  $(-\mathbf{X}^{\text{sf}}, \mathbf{Y}^{\text{sf}}) \in \text{Ker}(A^{\text{sf}} + \lambda I)$ .

*Démonstration.* Il suffit de remarquer qu'on a :

$$\begin{pmatrix} 0 & F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} \\ F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathbf{X}^{\text{sf}} \\ \mathbf{Y}^{\text{sf}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} \mathbf{Y}^{\text{sf}} \\ -F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} \mathbf{X}^{\text{sf}} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{\text{sf}} \\ -\mathbf{Y}^{\text{sf}} \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} -\mathbf{X}^{\text{sf}} \\ \mathbf{Y}^{\text{sf}} \end{pmatrix}.$$

□

Nous sommes enfin en mesure de donner le résultat suivant.

#### **Théorème 7.44**

Le spectre de l'opérateur  $A^{\text{sf}}$ , noté  $\Lambda(A^{\text{sf}})$ , est constitué d'un ensemble discret de valeurs propres de multiplicité finie.

*Démonstration.* La preuve repose sur l'introduction de l'opérateur  $(A^{\text{sf}})^2$  de domaine :

$$D((A^{\text{sf}})^2) = \{(\mathbf{X}^{\text{sf}}, \mathbf{Y}^{\text{sf}}) \in D(A^{\text{sf}}), A^{\text{sf}}(\mathbf{X}^{\text{sf}}, \mathbf{Y}^{\text{sf}})^{\text{t}} \in D(A^{\text{sf}})\}.$$

Ceci est motivé par le fait que l'opérateur  $(A^{\text{sf}})^2$  s'écrit :

$$(A^{\text{sf}})^2 = \begin{pmatrix} F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} & 0 \\ 0 & F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} \end{pmatrix}.$$

En effet, nous savons d'après la Proposition 7.42, que la résolvante de cet opérateur est compacte en 0, ce qui n'est a priori pas le cas de l'opérateur  $A^{\text{sf}}$ . Montrons maintenant que cet opérateur est de plus fermé. Soit  $(\mathbf{X}_n^{\text{sf}}, \mathbf{Y}_n^{\text{sf}})_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $D((A^{\text{sf}})^2)$  qui converge vers  $(\mathbf{X}^{\text{sf}}, \mathbf{Y}^{\text{sf}})$  dans  $\mathbf{H}^{\text{sf}} \times \mathbf{H}^{\text{sf}}$  telle que :

$$(\mathbf{B}_n^{\text{sf}}, \mathbf{C}_n^{\text{sf}})^{\text{t}} := (A^{\text{sf}})^2(\mathbf{X}_n^{\text{sf}}, \mathbf{Y}_n^{\text{sf}})^{\text{t}}$$

converge aussi dans  $\mathbf{H}^{\text{sf}} \times \mathbf{H}^{\text{sf}}$  vers un élément noté  $(\mathbf{B}^{\text{sf}}, \mathbf{C}^{\text{sf}})^{\text{t}}$ . D'après la Proposition 7.39, les opérateurs  $F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}$  et  $F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$  sont inversibles. L'opérateur  $A^{\text{sf}}$  est par conséquent aussi inversible. Posons :

$$(\mathbf{D}_n^{\text{sf}}, \mathbf{E}_n^{\text{sf}})^{\text{t}} := (A^{\text{sf}})^{-1}(\mathbf{B}_n^{\text{sf}}, \mathbf{C}_n^{\text{sf}})^{\text{t}}.$$

Puisque  $(\mathbf{B}_n^{\text{sf}}, \mathbf{C}_n^{\text{sf}})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $(\mathbf{B}^{\text{sf}}, \mathbf{C}^{\text{sf}})_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathbf{H}^{\text{sf}}$  et que  $(A^{\text{sf}})^{-1}$  est borné d'après le théorème de Banach, la suite  $(\mathbf{D}_n^{\text{sf}}, \mathbf{E}_n^{\text{sf}})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers :

$$(\mathbf{D}^{\text{sf}}, \mathbf{E}^{\text{sf}})^{\text{t}} := (A^{\text{sf}})^{-1}(\mathbf{B}^{\text{sf}}, \mathbf{C}^{\text{sf}})^{\text{t}},$$

qui appartient à  $D(A^{\text{sf}})$ . Puisqu'on a aussi :

$$(\mathbf{D}_n^{\text{sf}}, \mathbf{E}_n^{\text{sf}})^{\text{t}} = A^{\text{sf}}(\mathbf{X}_n^{\text{sf}}, \mathbf{Y}_n^{\text{sf}})^{\text{t}},$$

et que l'opérateur  $A^{\text{sf}}$  est fermé, on en déduit que  $(\mathbf{X}^{\text{sf}}, \mathbf{Y}^{\text{sf}})^{\text{t}}$  appartient à  $D(A^{\text{sf}})$  et que

$$(\mathbf{D}^{\text{sf}}, \mathbf{E}^{\text{sf}})^{\text{t}} = A^{\text{sf}}(\mathbf{X}^{\text{sf}}, \mathbf{Y}^{\text{sf}})^{\text{t}}.$$

On a par suite :

$$(\mathbf{B}^{\text{sf}}, \mathbf{C}^{\text{sf}})^{\text{t}} = (A^{\text{sf}})^2(\mathbf{X}^{\text{sf}}, \mathbf{Y}^{\text{sf}})^{\text{t}},$$

ce qui montre que l'opérateur  $(A^{\text{sf}})^2$  est fermé dans  $\mathbf{H}^{\text{sf}} \times \mathbf{H}^{\text{sf}}$ . D'après le Théorème B.3, le spectre de  $(A^{\text{sf}})^2$  n'est constitué que de valeurs propres de multiplicité finie et sa résolvante est

compacte partout dans l'ensemble résolvant. Donnons-nous maintenant une valeur propre  $\lambda$  de l'opérateur  $A^{\text{sf}}$ . Le nombre complexe  $\lambda^2$  est alors une valeur propre de multiplicité finie de l'opérateur  $(A^{\text{sf}})^2$  et on en conclut donc que  $A^{\text{sf}}$  a un ensemble discret de valeurs propres de multiplicité finie noté  $\Lambda_p(A^{\text{sf}})$ . Autrement dit, nous venons de montrer que  $\lambda \in \Lambda_p(A^{\text{sf}}) \implies \lambda^2 \in \Lambda((A^{\text{sf}})^2)$ . Soit  $\lambda \notin \Lambda_p(A^{\text{sf}})$ , on a d'après le Lemme 7.43 que  $-\lambda \notin \Lambda_p(A^{\text{sf}})$ . Par conséquent, les opérateurs  $A^{\text{sf}} \pm \lambda I$  sont injectifs, ce qui implique par suite que  $(A^{\text{sf}})^2 - \lambda^2 I = (A^{\text{sf}} + \lambda I)(A^{\text{sf}} - \lambda I)$  est injectif. Étant donné que le spectre de  $(A^{\text{sf}})^2$  est purement ponctuel, on en déduit que  $\lambda^2$  n'est pas dans ce dernier. Il en résulte que  $(A^{\text{sf}})^2 - \lambda^2 I$  est surjectif. On en déduit que les opérateurs  $A^{\text{sf}} \pm \lambda I$  sont surjectifs et par suite que les complexes  $\pm\lambda$  ne sont pas dans le spectre de  $A^{\text{sf}}$ . Ceci nous permet finalement de conclure que le spectre de  $A^{\text{sf}}$  n'est composé que de valeurs propres de multiplicité finie.  $\square$

**Remarque 7.45** *Il découle du Théorème 7.44 que la propriété de symétrie donnée par le Lemme 7.43 est vérifiée par l'entière du spectre de  $A^{\text{sf}}$ . Mais contrairement aux cas du guide élastique fermé et du guide élastique immergé dans un fluide infini, le spectre de l'opérateur  $A^{\text{sf}}$  n'est pas stable par conjugaisons du fait des coefficients complexes des PML intervenant dans l'opérateur  $F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$ .*

Nous venons de montrer que le spectre de  $A^{\text{sf}}$  est ponctuel. Donnons en maintenant une description plus fine.

### Description du spectre de $A^{\text{sf}}$

L'opérateur  $A^{\text{sf}}$  peut être vu comme une approximation de l'opérateur  $A^{\text{sf},\infty}$  associé au problème avec un fluide environnant infini. On s'attend donc à ce que le spectre de  $A^{\text{sf}}$  approche celui de  $A^{\text{sf},\infty}$  en un certain sens. Pour rappel, ce dernier admet la décomposition :

$$\Lambda(A^{\text{sf},\infty}) = \Lambda_{e,W}(A^{\text{sf},\infty}) \cup \Lambda_d(A^{\text{sf},\infty}).$$

Voyons comment les différents éléments de  $\Lambda(A^{\text{sf},\infty})$ , mais aussi de  $\Lambda_f(A^{\text{sf},\infty})$ , sont approchés par des éléments de  $\Lambda(A^{\text{sf}})$ .

#### • Approximation de $\Lambda_d(A^{\text{sf},\infty})$

Le spectre ponctuel de  $A^{\text{sf},\infty}$  correspond à des modes guidés localisés dans le cœur du guide. On s'attendrait donc de prime abord à ce que pour chaque élément du spectre ponctuel de  $A^{\text{sf},\infty}$  il existe un élément du spectre de  $A^{\text{sf}}$  qui en soit proche. Par souci de clarté, nous conduisons la discussion dans le cas particulier 2D d'une plaque immergée. Dans ce cas, les modes associés à des valeurs propres sur la fermeture du feuillet sortant du domaine physique (i.e. sur le domaine  $\Im m(\lambda^2) \geq 0$ ) sont bien approchés avec les PML. En effet, l'introduction de PML ne change la nature des modes dans la direction transverse que dans la zone balayée par le spectre essentiel lors de sa rotation, qui est située dans le demi-plan inférieur du domaine physique. Introduisons ensuite le secteur :

$$S_\alpha := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid 2 \arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty) < \arg_{i\mathbb{R}^+}(k_f^2 + \lambda^2) < 0\}.$$

Il correspond à la région du feuillet entrant du domaine physique balayée par le spectre essentiel lors de sa rotation suite à l'introduction des PML. Les modes associés à des valeurs propres de  $A^{\text{sf},\infty}$  dans le secteur  $S_\alpha$  ne sont plus approchés par des modes associés à des

valeurs propres de l'opérateur  $A^{\text{sf}}$  puisqu'ils deviennent exponentiellement croissants dans la direction transverse. En effet, nous remarquons que pour  $\lambda \in S_\alpha$  on a la relation  $-i\beta_f(\lambda) = -\gamma_f(\lambda)$ , avec pour rappel  $\beta_f(\lambda) := \sqrt{k_f^2 + \lambda^2}$  et  $\gamma_f(\lambda) := \sqrt{-k_f^2 - \lambda^2}$ . Les modes associés à des valeurs propres  $\lambda \in S_\alpha$  s'écrivent alors en présence de PML (supposées abruptes pour fixer les idées) :

$$\varphi(x_2) \propto \begin{cases} e^{-i\frac{\beta_f(\lambda)}{\alpha_\infty}x_2} & \text{si } x_2 > h_1 \\ e^{i\frac{\beta_f(\lambda)}{\alpha_\infty}x_2} & \text{si } x_2 < -h_1. \end{cases}$$

Or, on a  $\Im m(\beta_f(\lambda)/\alpha_\infty) > 0$  pour tout  $\lambda \in S_\alpha$ , ce qui implique le comportement exponentiellement croissant annoncé.

Pour résumer, les PML introduites permettent d'approcher les modes de quasi-Scholte (vérifiant  $\lambda \in i\mathbb{R}$ ), les modes SH (vérifiant  $\lambda \in (i\mathbb{R}) \cup \mathbb{R}$ ) et les modes de Lamb inhomogènes sortants (vérifiant  $\Im m(\lambda^2) > 0$ ). L'approximation de ces modes guidés devrait avoir au premier ordre le même comportement que les modes originaux : dans la direction transverse exponentiellement décroissants en amplitude, et dans la direction longitudinale propagatifs ou exponentiellement décroissants en amplitude. Pour les modes propagatifs, il est cependant fort probable que les nombres d'onde associés à ces modes se déplacent légèrement en dehors de l'axe imaginaire lorsque les PML sont tronquées. Amoindrir cette perturbation pourra éventuellement conduire à des difficultés numériques que nous étudierons à la [sous-section 7.4.5](#). Enfin, les modes de Lamb inhomogènes entrants (vérifiant  $\Im m(\lambda^2) < 0$ ) situés dans le secteur  $S_\alpha$  ne sont plus approchés.

- Approximation de  $\Lambda_{e,W}(A^{\text{sf},\infty})$

Le spectre essentiel de  $A^{\text{sf},\infty}$  est donné dans le paramètre spectral  $\lambda^2$  par  $[-k_f^2, +\infty]$ . Il correspond à des modes de radiation oscillants à l'infini dans la direction transverse. Bien que nous n'avons pas étudié le spectre de l'opérateur avec des PML infinies, il est légitime par analogie avec le cas purement acoustique traité à la [Partie II](#), de penser que le spectre essentiel subisse suite à l'introduction de PML infinies une rotation autour du point  $(-k_f^2, 0)$  dans le plan  $\lambda^2$ . Le spectre de  $A^{\text{sf}}$  correspond au cas où ces PML sont tronquées. Le spectre essentiel tourné est alors discrétisé, formant un ensemble discret de valeurs propres que nous appelons *modes de PML*. Ces modes sont principalement localisés dans la PML où ils y sont oscillants. Ils sont décroissants en amplitude le long de l'axe du guide.

- Approximation de  $\Lambda_f(A^{\text{sf},\infty})$

Tout l'intérêt de l'introduction des PML est de pouvoir approcher l'ensemble  $\Lambda_f(A^{\text{sf},\infty})$  qui n'est pas dans le spectre de l'opérateur  $A^{\text{sf},\infty}$ . Cet ensemble correspond à des résonances sortantes du problème situées dans le demi-plan complexe  $\Im m(\lambda^2) < 0$  du domaine non physique. Les modes à fuite associés à ces résonances sont en l'absence de PML exponentiellement croissants dans la direction transverse (voir Définition 7.28). Or grâce aux PML infinies, ils s'écrivent (toujours dans le cas de PML abruptes pour fixer les idées) :

$$\varphi(x_2) \propto \begin{cases} e^{i\frac{\beta_f(\lambda)}{\alpha_\infty}x_2} & \text{si } x_2 > h_1 \\ e^{-i\frac{\beta_f(\lambda)}{\alpha_\infty}x_2} & \text{si } x_2 < -h_1, \end{cases}$$

ce qui correspond à un comportement exponentiellement décroissant lorsque  $\lambda \in S_\alpha$  puisque cela implique  $\Im m(\beta_f(\lambda)/\alpha_\infty) > 0$ . Par conséquent, les PML font passer les éléments de

$\Lambda_f(A^{\text{sf},\infty}) \cap S_\alpha$  dans le spectre ponctuel du nouvel opérateur transverse obtenu suite à l'introduction de PML infinies. Lorsque la troncature des PML est réalisée suffisamment loin du cœur, les modes à fuite associés aux éléments de  $\Lambda_f(A^{\text{sf},\infty}) \cap S_\alpha$  ont en bout de PML une amplitude proche de zéro. Ils sont alors correctement approximés. En d'autres termes, les éléments de  $\Lambda_f(A^{\text{sf},\infty}) \cap S_\alpha$  sont bien approximés par des éléments de  $\Lambda(A^{\text{sf}})$ . Tout comme les modes à fuite exacts, les modes à fuite approchés oscillent le long du guide avec une amplitude qui décroît exponentiellement dans la direction de propagation.

La discussion que nous venons de conduire est synthétisée sur la Figure 7.5 qui représente un exemple de spectre de l'opérateur  $A^{\text{sf}}$ .

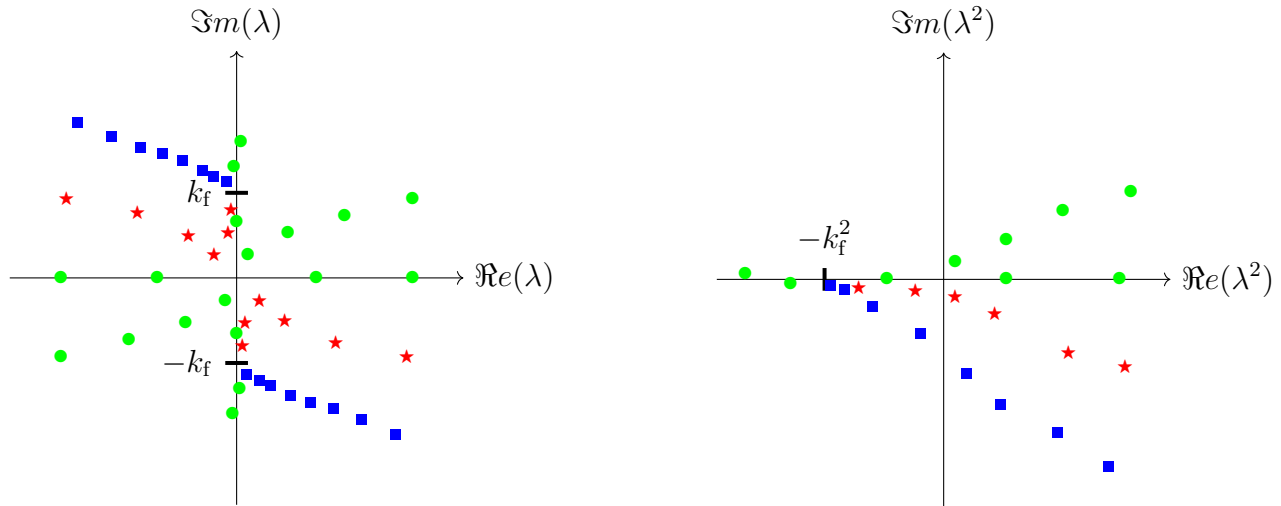


FIGURE 7.5: Représentation dans le plan complexe d'un exemple de spectre de l'opérateur  $A^{\text{sf}}$  dans les paramètres  $\lambda$  à gauche et  $\lambda^2$  à droite. Ronds verts : approximation des éléments de  $\Lambda_d(A^{\text{sf},\infty})$ , carrés bleus : approximation de  $\Lambda_{e,W}(A^{\text{sf},\infty})$  et étoiles rouges : approximation de  $\Lambda_f(A^{\text{sf},\infty})$ .

### Sens de propagation des modes

Nous voulons désormais distinguer les modes qui sont sortants à gauche de ceux qui sont sortants à droite. Nous avons vu dans la [sous-section 7.1.1](#) que pour une plaque fermée, il peut y avoir des modes propagatifs (i.e. tels que  $\lambda \in i\mathbb{R}$ ) ayant des vitesses de phase et de groupe (ou d'énergie) de signes opposés, appelées modes rétrogrades. Selon [NMK17], les modes de Lamb à fuite dans une plaque immergée peuvent avoir des vitesses de phase et d'énergie de signes opposés lorsque ces quantités sont intégrées sur la section solide. Les auteurs expliquent que le flux d'énergie au travers de la section fluide infinie est égal à l'opposé du flux d'énergie dans la section solide. Autrement dit, le flux d'énergie total est nul. En outre, ces modes violent le principe d'équipartition d'énergie de Rayleigh dans les guides d'ondes, principe stipulant que l'énergie cinétique moyenne totale est égale à l'énergie potentielle moyenne totale. Mais ces deux quantités sont par définition positives. L'énergie moyenne totale n'est alors pas nulle contrairement au flux d'énergie. Enfin, les modes particuliers que nous venons de mentionner ont des vitesses de groupe et d'énergie opposées. Il est important de noter que [NMK17] n'exhibe toutefois pas numériquement ou expérimentalement de tels modes. Il n'est donc pas aisé de conclure quant à la fréquence d'apparition de ces objets. Il a aussi été mis en évidence dans [BLD01], toujours pour une plaque immergée, que la vitesse de groupe peut prendre des valeurs non physiques. Les auteurs des deux articles cités dans

ce paragraphe concluent, pour des raisons un peu différentes, que la bonne quantité pour déterminer le sens de propagation physique d'un mode dans une plaque immergée est le flux d'énergie intégré sur la section solide seule. Comme cela est expliqué dans [Gal18] pour un guide élastique enfoui dans un solide, cette quantité n'est pas pertinente pour déterminer le sens de propagation des modes de PML qui sont principalement localisés dans le milieu environnant. Le sens de propagation de ces derniers sera déterminé par le signe de  $\Re(\lambda)$ . La vitesse d'énergie dans la section solide donnée par (7.19) sera désormais notée  $v_{\Sigma^s}^e$ .

Puisque nous avons tronqué transversalement le guide par des PML, il est plus naturel d'un point vue mathématique de considérer dans notre cas la vitesse d'énergie obtenue à partir du flux d'énergie intégré sur toute la section. Cependant, il n'est pas possible de construire ce flux d'énergie directement pour le problème avec PML tronquées, car les modes propagatifs approchés avec des PML tronquées ne sont plus parfaitement propagatifs. Pour pallier cette difficulté, nous proposons de construire dans un premier temps le flux d'énergie en l'absence de PML pour un guide infini dans la direction transverse. Dans un second temps, nous dilaterons de façon analytique la variable transverse dans l'expression du flux d'énergie obtenu pour prendre en compte la présence de PML, et tronquerons enfin l'intégrale dans le fluide pour se ramener au cas de PML bornées. Nous considérons pour commencer un mode propagatif du guide ouvert infini dans la direction transverse et sans PML :

$$\mathbf{u}(x_1, \mathbf{x}_\Sigma) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_\Sigma)e^{\lambda x_1}, \quad \varphi(x_1, \mathbf{x}_\Sigma) = \varphi(\mathbf{x}_\Sigma)e^{\lambda x_1},$$

caractérisé par  $\lambda \in i\mathbb{R}$  et  $\varphi \in L^2(\Sigma^{f,\infty})$ . En 2D, un tel mode correspond à un mode de quasi-Scholte. Soit  $B^s := (a, b) \times \Sigma^s$  et  $B^{f,\infty} := (a, b) \times \Sigma^{f,\infty}$  deux sous-domaines de  $W^s$  et  $W^{f,\infty}$  pour des réels  $a < b$ . On note  $\Gamma_B^{sf} := (a, b) \times \gamma^{sf}$  l'interface entre les deux domaines. Des intégrations par parties nous donnent :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B^s} (\operatorname{div}(\underline{\sigma}(\mathbf{u}))\bar{\mathbf{u}} + \rho_s \omega^2 |\mathbf{u}|^2) d\mathbf{x} + \rho_f \int_{B^{f,\infty}} (\Delta \varphi \bar{\varphi} + k_f^2 |\varphi|^2) d\mathbf{x} \\ &= - \int_{B^s} (\underline{\sigma}(\mathbf{u}) : \underline{\epsilon}(\bar{\mathbf{u}}) - \rho_s \omega^2 |\mathbf{u}|^2) d\mathbf{x} - \rho_f \int_{B^{f,\infty}} (|\nabla \varphi|^2 - k_f^2 |\varphi|^2) d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Gamma_B^{sf} \cup \Sigma_a^s \cup \Sigma_b^s} \underline{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n}_s \cdot \bar{\mathbf{u}} ds(\mathbf{x}) + \rho_f \int_{\Gamma_B^{sf} \cup \Sigma_a^{f,\infty} \cup \Sigma_b^{f,\infty}} \partial_{\mathbf{n}_f} \varphi \bar{\varphi} ds(\mathbf{x}) \\ &= - \int_{B^s} (\underline{\sigma}(\mathbf{u}) : \underline{\epsilon}(\bar{\mathbf{u}}) - \rho_s \omega^2 |\mathbf{u}|^2) d\mathbf{x} - \rho_f \int_{B^{f,\infty}} (|\nabla \varphi|^2 - k_f^2 |\varphi|^2) d\mathbf{x} \\ &\quad - \rho_f \omega \int_{\Gamma_B^{sf}} (\varphi(\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}_s) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s) \bar{\varphi}) ds(\mathbf{x}) \\ &\quad + \int_{\Sigma_a^s \cup \Sigma_b^s} \underline{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n}_s \cdot \bar{\mathbf{u}} ds(\mathbf{x}) + \rho_f \int_{\Sigma_a^{f,\infty} \cup \Sigma_b^{f,\infty}} \partial_{\mathbf{n}_f} \varphi \bar{\varphi} ds(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (7.79)$$

Prendre la partie imaginaire de (7.79) donne :

$$0 = \Im m \left( \int_{\Sigma_a^s \cup \Sigma_b^s} \underline{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n}_s \cdot \bar{\mathbf{u}} ds(\mathbf{x}) \right) + \rho_f \Im m \left( \int_{\Sigma_a^{f,\infty} \cup \Sigma_b^{f,\infty}} \partial_{\mathbf{n}_f} \varphi \bar{\varphi} ds(\mathbf{x}) \right). \quad (7.80)$$

Cette égalité nous conduit à introduire le flux d'énergie moyen rayonné au travers de la section  $\Sigma_{x_1}^s \cup \Sigma_{x_1}^{f,\infty}$  :

$$\langle \mathbf{\Pi}^{sf,\infty}(x_1) \rangle := \frac{\omega}{2} \Im m \left( \int_{\Sigma_{x_1}^s} \underline{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n}_1 \cdot \bar{\mathbf{u}} ds(\mathbf{x}) \right) + \frac{\omega \rho_f}{2} \Im m \left( \int_{\Sigma_{x_1}^{f,\infty}} \partial_{x_1} \varphi \bar{\varphi} ds(\mathbf{x}) \right), \quad (7.81)$$



avec on le rappelle  $\mathbf{n}_1 := (1 \ 0 \ 0)^t$ . Puisque  $\lambda \in i\mathbb{R}$ , l'exponentielle décrivant la dépendance axiale du mode disparaît dans (7.81), ce qui indique que le flux d'énergie moyen  $\langle \mathbf{\Pi}^{\text{sf},\infty}(x_1) \rangle$  ne dépend pas de l'abscisse  $x_1$ . On le note alors désormais  $\langle \mathbf{\Pi}^{\text{sf},\infty} \rangle$ . L'équation (7.80) traduit la conservation du flux d'énergie moyen entre les sections gauche et droite délimitant le domaine volumique. Effectuer une dilatation analytique vis-à-vis de la variable transverse  $\mathbf{x}_\Sigma$  et tronquer le domaine de calcul fluide nous amène à considérer le flux :

$$\langle \mathbf{\Pi}^{\text{sf}} \rangle := \frac{\omega}{2} \Im m \left( \int_{\Sigma^s} \underline{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n}_1 \cdot \bar{\mathbf{u}} d\mathbf{x}_\Sigma \right) + \frac{\omega \rho_f}{2} \Im m \left( \int_{\Sigma^f} b^{\alpha_\Sigma} \partial_{x_1} \varphi \bar{\varphi} d\mathbf{x}_\Sigma \right).$$

Pour définir la vitesse d'énergie, nous avons aussi besoin d'exprimer l'énergie du mode dans toute la section. Pour l'obtenir, il suffit de prendre :

$$\langle E^{\text{sf}} \rangle = \langle E^s \rangle + \langle E^f \rangle,$$

où  $\langle E^s \rangle$  est l'énergie élastique moyenne dans la section  $\Sigma^s$  donnée par (7.18) et  $\langle E^f \rangle$  est l'énergie acoustique moyenne dans la section  $\Sigma^f$  définie par :

$$\langle E^f \rangle = \frac{\rho_f}{2} \Re e \left( \int_{\Sigma^f} b^{\alpha_\Sigma} |\nabla \varphi|^2 d\mathbf{x}_\Sigma \right) + \frac{\rho_f \omega^2}{2c_f^2} \Re e \left( \int_{\Sigma^f} b^{\alpha_\Sigma} |\varphi|^2 d\mathbf{x}_\Sigma \right).$$

On peut alors définir la vitesse d'énergie d'un mode propagatif dans toute la section comme :

$$v_{|\Sigma^{\text{sf}}}^e := \frac{\langle \mathbf{\Pi}^{\text{sf}} \rangle}{\langle E^{\text{sf}} \rangle}.$$

Nous allons enfin utiliser cette vitesse d'énergie pour déterminer le sens de propagation des modes du guide avec PML tronquées approchant des modes propagatifs du guide ouvert infini dans la direction transverse et sans PML. Nous négligerons ainsi dans l'expression de  $v_{|\Sigma^{\text{sf}}}^e$  la partie réelle de la valeur propre approchant  $\lambda$ , en notation Kondratiev, associée au mode correspondant pour un fluide de section infinie.

Nous proposons de classer comme suit les modes d'un guide élastique immergé tronqué avec des PML selon leur sens de propagation ou de décroissance. Nous avons :

- les modes notés  $(\lambda_n, \mathbf{X}_n^s, \mathbf{Y}_n^s)_{n \geq 1}$  qui sont sortants à droite : ils correspondent aux approximations des modes guidés propagatifs satisfaisant  $v_{|\Sigma^{\text{sf}}}^e > 0$  (concerne en 2D les modes de quasi-Scholte) et des approximations des modes non propagatifs satisfaisant  $\Re e(\lambda) < 0$  (concerne en 2D les modes de Lamb à fuite, modes de Lamb inhomogènes et modes de PML);
- les modes notés  $(\lambda_{-n}, \mathbf{X}_{-n}^s, \mathbf{Y}_{-n}^s)_{n \geq 1} = (-\lambda_n, -\mathbf{X}_n^s, \mathbf{Y}_n^s)_{n \geq 1}$  qui sont sortants à gauche : ils correspondent aux approximations des modes guidés propagatifs satisfaisant  $v_{|\Sigma^{\text{sf}}}^e < 0$  (concerne en 2D les modes de quasi-Scholte) et des approximations des modes non propagatifs satisfaisant  $\Re e(\lambda) > 0$  (concerne en 2D les modes de Lamb à fuite, modes de Lamb inhomogènes et modes de PML).

**Remarque 7.46** Si nous souhaitions comparer les vitesses d'énergie et de groupe des modes, nous pourrions utiliser l'expression simple de la vitesse de groupe donnée en annexe de ce chapitre (voir la [sous-section 7.5.3](#)).



### Décomposition modale

Nous voulons désormais établir une relation de biorthogonalité entre les modes afin d'être en mesure d'écrire des décompositions modales. Pour cela, nous allons devoir considérer les adjoints des opérateurs  $F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}$  et  $F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$  que nous commençons par calculer.

#### Lemme 7.47

L'opérateur  $F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}$  est autoadjoint. L'adjoint de  $F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$  est l'opérateur donné pour  $\mathbf{Y}^{\text{sf}} \in D((F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}})^*)$  par :

$$(F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}})^* \mathbf{Y}^{\text{sf}} = \begin{pmatrix} -\text{div}_{\Sigma}(\underline{\sigma}_{\Sigma}(\mathbf{Y}^{\text{S}})) - \rho_s \omega^2 \mathbf{u}_{\Sigma} \\ -\alpha_s \text{div}_{\Sigma}(\mathbf{u}_{\Sigma}) - \frac{\alpha_s}{\lambda_s} t_1 \\ -\text{div}_{\Sigma}(\underline{A}^{\alpha\Sigma} \nabla_{\Sigma}((\overline{b^{\alpha\Sigma}})^{-1} \varphi)) - k_f^2 \varphi \end{pmatrix},$$

avec :

$$D((F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}})^*) = \left\{ \mathbf{Y}^{\text{sf}} := (\mathbf{u}_{\Sigma}, t_1, \varphi) \in \mathbf{V}_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} \mid \begin{aligned} &\text{div}_{\Sigma}(\underline{\sigma}_{\Sigma}(\mathbf{Y}^{\text{S}})) \in (L^2(\Sigma^{\text{S}}))^2, \\ &\text{div}_{\Sigma}(\underline{A}^{\alpha\Sigma} \nabla_{\Sigma}((\overline{b^{\alpha\Sigma}})^{-1} \varphi)) \in L^2(\Sigma^{\text{f}}), \\ &\underline{\sigma}_{\Sigma}(\mathbf{Y}^{\text{S}}) \mathbf{e}_s = -\rho_f \omega \varphi \mathbf{e}_s \text{ et } \omega(\mathbf{u}_{\Sigma} \cdot \mathbf{e}_s) = \nabla_{\Sigma} \varphi \cdot \mathbf{e}_s \text{ sur } \gamma^{\text{sf}}, \\ &(\underline{A}^{\alpha\Sigma} \nabla_{\Sigma}((\overline{b^{\alpha\Sigma}})^{-1} \varphi)) \cdot \mathbf{e}_f = 0 \text{ sur } \gamma^{\text{pml}} \end{aligned} \right\}.$$

#### Démonstration. • Adjoint de $F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}$

Soit  $\mathbf{X}^{\text{sf}} \in D(F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}})$  et  $\tilde{\mathbf{X}}^{\text{sf}} \in \mathbf{V}_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}$ , on a :

$$(F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} \mathbf{X}^{\text{sf}}, \tilde{\mathbf{X}}^{\text{sf}})_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} = \int_{\Sigma^{\text{S}}} \left( \frac{\mathbf{t}_{\Sigma}}{\mu_s} - \nabla_{\Sigma} u_1 \right) \cdot \overline{\tilde{\mathbf{t}}_{\Sigma}} d\mathbf{x}_{\Sigma} + \int_{\Sigma^{\text{S}}} (\text{div}_{\Sigma}(\mathbf{t}_{\Sigma}) + \rho_s \omega^2 u_1) \overline{\tilde{u}_1} d\mathbf{x}_{\Sigma} \\ + \rho_f \int_{\Sigma^{\text{f}}} \zeta \overline{\tilde{\zeta}} d\mathbf{x}_{\Sigma},$$

et la formule de Stokes :

$$\int_{\Sigma^{\text{S}}} \text{div}_{\Sigma}(\mathbf{t}_{\Sigma}) \overline{\tilde{u}_1} d\mathbf{x}_{\Sigma} = - \int_{\Sigma^{\text{S}}} \mathbf{t}_{\Sigma} \cdot \nabla_{\Sigma} \overline{\tilde{u}_1} d\mathbf{x}_{\Sigma} + \int_{\gamma^{\text{sf}}} (\mathbf{t}_{\Sigma} \cdot \mathbf{e}_s) \overline{\tilde{u}_1} ds(\mathbf{x}_{\Sigma}),$$

utilisée deux fois, donne compte tenu de la condition aux limites vérifiée par  $\mathbf{t}_{\Sigma}$  sur  $\gamma^{\text{sf}}$  :

$$(F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} \mathbf{X}^{\text{sf}}, \tilde{\mathbf{X}}^{\text{sf}})_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} = \int_{\Sigma^{\text{S}}} \mathbf{t}_{\Sigma} \cdot \overline{\left( \frac{\tilde{\mathbf{t}}_{\Sigma}}{\mu_s} - \nabla_{\Sigma} \tilde{u}_1 \right)} d\mathbf{x}_{\Sigma} + \int_{\Sigma^{\text{S}}} u_1 \overline{(\text{div}_{\Sigma}(\tilde{\mathbf{t}}_{\Sigma}) + \rho_s \omega^2 \tilde{u}_1)} d\mathbf{x}_{\Sigma} \\ + \rho_f \int_{\Sigma^{\text{f}}} \zeta \overline{\tilde{\zeta}} d\mathbf{x}_{\Sigma} - \int_{\gamma^{\text{sf}}} u_1 (\overline{\tilde{\mathbf{t}}_{\Sigma} \cdot \mathbf{e}_s}) ds(\mathbf{x}_{\Sigma}).$$

Si on prend  $\tilde{\mathbf{X}}^{\text{sf}} \in D(F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}})$ , l'intégrale sur  $\gamma^{\text{sf}}$  s'annule et on trouve :

$$(F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} \mathbf{X}^{\text{sf}}, \tilde{\mathbf{X}}^{\text{sf}})_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} = (\mathbf{X}^{\text{sf}}, F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} \tilde{\mathbf{X}}^{\text{sf}})_{\mathbf{H}^{\text{sf}}},$$

l'opérateur est donc autoadjoint.

#### • Adjoint de $F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$

Soit  $\mathbf{Y}^{\text{sf}} \in D(F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}})$  et  $\tilde{\mathbf{Y}}^{\text{sf}} \in \mathbf{V}_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$ , on a

$$\begin{aligned} (F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} \mathbf{Y}^{\text{sf}}, \tilde{\mathbf{Y}}^{\text{sf}})_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} &= - \int_{\Sigma^{\text{s}}} (\mathbf{div}_{\Sigma}(\underline{\sigma}_{\Sigma}(\mathbf{Y}^{\text{s}})) + \rho_{\text{s}} \omega^2 \mathbf{u}_{\Sigma}) \cdot \bar{\mathbf{u}}_{\Sigma} d\mathbf{x}_{\Sigma} - \int_{\Sigma^{\text{s}}} (\alpha_{\text{s}} \mathbf{div}_{\Sigma}(\mathbf{u}_{\Sigma}) + \frac{\alpha_{\text{s}}}{\lambda_{\text{s}}} t_1) \bar{t}_1 d\mathbf{x}_{\Sigma} \\ &\quad - \rho_{\text{f}} \int_{\Sigma^{\text{f}}} ((b^{\alpha_{\Sigma}})^{-1} \mathbf{div}_{\Sigma}(\underline{\mathbf{A}}^{\alpha_{\Sigma}} \nabla_{\Sigma} \varphi) + k_{\text{f}}^2 \varphi) \bar{\varphi} d\mathbf{x}_{\Sigma}. \end{aligned}$$

La formule de Stokes nous donne l'égalité :

$$\begin{aligned} &\int_{\Sigma^{\text{s}}} (\mathbf{div}_{\Sigma}(\underline{\sigma}_{\Sigma}(\mathbf{Y}^{\text{s}})) \cdot \bar{\mathbf{u}}_{\Sigma} + \alpha_{\text{s}} \mathbf{div}_{\Sigma}(\mathbf{u}_{\Sigma}) \bar{t}_1) d\mathbf{x}_{\Sigma} \\ &= - \int_{\Sigma^{\text{s}}} (\underline{\sigma}_{\Sigma}(\mathbf{Y}^{\text{s}}) : \underline{\epsilon}_{\Sigma}(\bar{\mathbf{u}}_{\Sigma}) - \alpha_{\text{s}} \mathbf{div}_{\Sigma}(\mathbf{u}_{\Sigma}) \bar{t}_1) d\mathbf{x}_{\Sigma} + \int_{\gamma^{\text{sf}}} (\underline{\sigma}_{\Sigma}(\mathbf{Y}^{\text{s}}) \mathbf{e}_{\text{s}}) \cdot \bar{\mathbf{u}}_{\Sigma} ds(\mathbf{x}_{\Sigma}), \end{aligned}$$

et on peut remarquer de plus à l'aide de (7.8) puis la symétrie du tenseur des déformations que :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_{\Sigma}(\mathbf{Y}^{\text{s}}) : \underline{\epsilon}_{\Sigma}(\bar{\mathbf{u}}_{\Sigma}) + \alpha_{\text{s}} \mathbf{div}_{\Sigma}(\bar{\mathbf{u}}_{\Sigma}) t_1 &= 2\mu_{\text{s}} \underline{\epsilon}_{\Sigma}(\mathbf{u}_{\Sigma}) : \underline{\epsilon}_{\Sigma}(\bar{\mathbf{u}}_{\Sigma}) + \delta_{\text{s}} \mathbf{div}_{\Sigma}(\mathbf{u}_{\Sigma}) \mathbf{div}_{\Sigma}(\bar{\mathbf{u}}_{\Sigma}) \\ &= 2\mu_{\text{s}} \underline{\epsilon}_{\Sigma}(\bar{\mathbf{u}}_{\Sigma}) : \underline{\epsilon}_{\Sigma}(\mathbf{u}_{\Sigma}) + \delta_{\text{s}} \mathbf{div}_{\Sigma}(\bar{\mathbf{u}}_{\Sigma}) \mathbf{div}_{\Sigma}(\mathbf{u}_{\Sigma}) \\ &= \underline{\sigma}_{\Sigma}(\tilde{\mathbf{Y}}^{\text{s}}) : \underline{\epsilon}_{\Sigma}(\mathbf{u}_{\Sigma}) + \alpha_{\text{s}} \mathbf{div}_{\Sigma}(\mathbf{u}_{\Sigma}) \bar{t}_1. \end{aligned}$$

Cette égalité nous permet d'obtenir après une nouvelle utilisation de la formule de Stokes :

$$\begin{aligned} &\int_{\Sigma^{\text{s}}} (\mathbf{div}_{\Sigma}(\underline{\sigma}_{\Sigma}(\mathbf{Y}^{\text{s}})) \cdot \bar{\mathbf{u}}_{\Sigma} + \alpha_{\text{s}} \mathbf{div}_{\Sigma}(\mathbf{u}_{\Sigma}) \bar{t}_1) d\mathbf{x}_{\Sigma} - \int_{\Sigma^{\text{s}}} (\mathbf{u}_{\Sigma} \cdot \mathbf{div}_{\Sigma}(\underline{\sigma}_{\Sigma}(\tilde{\mathbf{Y}}^{\text{s}})) + t_1 \alpha_{\text{s}} \mathbf{div}_{\Sigma}(\bar{\mathbf{u}}_{\Sigma})) d\mathbf{x}_{\Sigma} \\ &= \int_{\gamma^{\text{sf}}} ((\underline{\sigma}_{\Sigma}(\mathbf{Y}^{\text{s}}) \mathbf{e}_{\text{s}}) \cdot \bar{\mathbf{u}}_{\Sigma} - (\underline{\sigma}_{\Sigma}(\tilde{\mathbf{Y}}^{\text{s}}) \mathbf{e}_{\text{s}}) \cdot \mathbf{u}_{\Sigma}) ds(\mathbf{x}_{\Sigma}). \end{aligned}$$

Ensuite, nous avons simplement par deux applications successives de la formule de Green :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma^{\text{f}}} (b^{\alpha_{\Sigma}})^{-1} \mathbf{div}_{\Sigma}(\underline{\mathbf{A}}^{\alpha_{\Sigma}} \nabla_{\Sigma} \varphi) \bar{\varphi} d\mathbf{x}_{\Sigma} &= \int_{\Sigma^{\text{f}}} \varphi \mathbf{div}_{\Sigma}(\underline{\mathbf{A}}^{\alpha_{\Sigma}} \nabla_{\Sigma} ((b^{\alpha_{\Sigma}})^{-1} \bar{\varphi})) d\mathbf{x}_{\Sigma} \\ &\quad + \int_{\gamma^{\text{sf}} \cup \gamma^{\text{pml}}} (b^{\alpha_{\Sigma}})^{-1} ((\underline{\mathbf{A}}^{\alpha_{\Sigma}} \nabla_{\Sigma} \varphi) \cdot \mathbf{e}_{\text{f}}) \bar{\varphi} ds(\mathbf{x}_{\Sigma}) \quad (7.82) \\ &\quad - \int_{\gamma^{\text{sf}} \cup \gamma^{\text{pml}}} ((\underline{\mathbf{A}}^{\alpha_{\Sigma}} \nabla_{\Sigma} ((b^{\alpha_{\Sigma}})^{-1} \bar{\varphi})) \cdot \mathbf{e}_{\text{f}}) \varphi ds(\mathbf{x}_{\Sigma}). \end{aligned}$$

Les conditions de couplage sur  $\gamma^{\text{sf}}$  et de bord sur  $\gamma^{\text{pml}}$  vérifiées par les éléments de  $D(F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}})$ , donné par (7.63), donnent :

$$\begin{aligned} &(F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} \mathbf{Y}^{\text{sf}}, \tilde{\mathbf{Y}}^{\text{sf}})_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} \\ &= - \int_{\Sigma^{\text{s}}} \mathbf{u}_{\Sigma} \cdot (\mathbf{div}_{\Sigma}(\underline{\sigma}_{\Sigma}(\tilde{\mathbf{Y}}^{\text{s}})) + \rho_{\text{s}} \omega^2 \bar{\mathbf{u}}_{\Sigma}) d\mathbf{x}_{\Sigma} - \int_{\Sigma^{\text{s}}} t_1 (\alpha_{\text{s}} \mathbf{div}_{\Sigma}(\bar{\mathbf{u}}_{\Sigma}) + \frac{\alpha_{\text{s}}}{\lambda_{\text{s}}} \bar{t}_1) d\mathbf{x}_{\Sigma} \\ &\quad - \rho_{\text{f}} \int_{\Sigma^{\text{f}}} \varphi (\mathbf{div}_{\Sigma}(\underline{\mathbf{A}}^{\alpha_{\Sigma}} \nabla_{\Sigma} ((b^{\alpha_{\Sigma}})^{-1} \bar{\varphi})) + k_{\text{f}}^2 \bar{\varphi}) d\mathbf{x}_{\Sigma} + \rho_{\text{f}} \omega \int_{\gamma^{\text{sf}}} ((\bar{\mathbf{u}}_{\Sigma} \cdot \mathbf{e}_{\text{s}}) \varphi + (\mathbf{u}_{\Sigma} \cdot \mathbf{e}_{\text{s}}) \bar{\varphi}) ds(\mathbf{x}_{\Sigma}) \\ &\quad + \int_{\gamma^{\text{sf}}} (\underline{\sigma}_{\Sigma}(\tilde{\mathbf{Y}}^{\text{s}}) \mathbf{e}_{\text{s}}) \cdot \mathbf{u}_{\Sigma} ds(\mathbf{x}_{\Sigma}) + \rho_{\text{f}} \int_{\gamma^{\text{sf}} \cup \gamma^{\text{pml}}} ((\underline{\mathbf{A}}^{\alpha_{\Sigma}} \nabla_{\Sigma} ((b^{\alpha_{\Sigma}})^{-1} \bar{\varphi})) \cdot \mathbf{e}_{\text{f}}) \varphi ds(\mathbf{x}_{\Sigma}). \end{aligned}$$

Si  $\tilde{\mathbf{Y}}^{\text{sf}} \in D((F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}})^{\star})$ , l'intégrale sur  $\gamma^{\text{pml}}$  s'annule et celles sur  $\gamma^{\text{sf}}$  se compensent, et alors :

$$\begin{aligned} (F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} \mathbf{Y}^{\text{sf}}, \tilde{\mathbf{Y}}^{\text{sf}})_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} &= - \int_{\Sigma^{\text{s}}} \mathbf{u}_{\Sigma} \cdot (\mathbf{div}_{\Sigma}(\underline{\sigma}_{\Sigma}(\tilde{\mathbf{Y}}^{\text{s}})) + \rho_{\text{s}} \omega^2 \bar{\mathbf{u}}_{\Sigma}) d\mathbf{x}_{\Sigma} - \int_{\Sigma^{\text{s}}} t_1 (\alpha_{\text{s}} \mathbf{div}_{\Sigma}(\bar{\mathbf{u}}_{\Sigma}) + \frac{\alpha_{\text{s}}}{\lambda_{\text{s}}} \bar{t}_1) d\mathbf{x}_{\Sigma} \\ &\quad - \rho_{\text{f}} \int_{\Sigma^{\text{f}}} \varphi (\mathbf{div}_{\Sigma}(\underline{\mathbf{A}}^{\alpha_{\Sigma}} \nabla_{\Sigma} ((b^{\alpha_{\Sigma}})^{-1} \bar{\varphi})) + k_{\text{f}}^2 \bar{\varphi}) d\mathbf{x}_{\Sigma} \\ &=: (\mathbf{Y}^{\text{sf}}, (F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}})^{\star} \tilde{\mathbf{Y}}^{\text{sf}})_{\mathbf{H}^{\text{sf}}}, \end{aligned}$$

et nous obtenons l'expression de l'opérateur  $(F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}})^{\star}$ .  $\square$

**Proposition 7.48**

Soient  $(\lambda_n, \mathbf{X}_n^{\text{sf}}, \mathbf{Y}_n^{\text{sf}})$  et  $(\lambda_m, \mathbf{X}_m^{\text{sf}}, \mathbf{Y}_m^{\text{sf}})$  deux modes propres de  $A^{\text{sf}}$  pour  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$  non nuls. Ils vérifient la relation de biorthogonalité :

$$(\lambda_n^2 - \lambda_m^2)(\mathbf{X}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{Y}_m^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} = 0, \quad (7.83)$$

dans laquelle :

$$(\mathbf{Y}_m^{\text{sf}})^* = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}_\Sigma^m \\ \bar{t}_1^m \\ \bar{b}^{\alpha_\Sigma} \bar{\varphi}^m \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{Y}_m^{\text{sf}} := \begin{pmatrix} \mathbf{u}_\Sigma^m \\ t_1^m \\ \varphi^m \end{pmatrix}.$$

Si  $\lambda_n^2 \neq \lambda_m^2$ , les vecteurs propres satisfont alors la relation :

$$(\mathbf{X}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{Y}_m^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} = \delta_{nm} J_n^{\text{sf}},$$

où :

$$\begin{aligned} J_n^{\text{sf}} &:= (\mathbf{X}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} \\ &= \int_{\Sigma^s} (\mathbf{u}_\Sigma^n \cdot \mathbf{t}_\Sigma^n + u_1^n t_1^n) d\mathbf{x}_\Sigma + \rho_f \int_{\Sigma^f} b^{\alpha_\Sigma} \zeta^n \varphi^n d\mathbf{x}_\Sigma, \end{aligned}$$

est appelée constante de Fraser.

*Démonstration.* Commençons par remarquer qu'on peut vérifier à l'aide des expressions des opérateurs adjoints de  $F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}$  et de  $F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$  que si  $(\lambda_l, \mathbf{X}_l^{\text{sf}}, \mathbf{Y}_l^{\text{sf}})$  est un mode propre de l'opérateur  $A^{\text{sf}}$  avec :

$$\mathbf{X}_l^{\text{sf}} := \begin{pmatrix} \mathbf{t}_\Sigma^l \\ u_1^l \\ \zeta^l \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_l^{\text{sf}} := \begin{pmatrix} \mathbf{u}_\Sigma^l \\ t_1^l \\ \varphi^l \end{pmatrix},$$

alors  $(\bar{\lambda}_l, (\mathbf{Y}_l^{\text{sf}})^*, (\mathbf{X}_l^{\text{sf}})^*)$  est un mode propre de l'opérateur  $(A^{\text{sf}})^*$  où :

$$(\mathbf{X}_l^{\text{sf}})^* := \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{t}}_\Sigma^l \\ \bar{u}_1^l \\ \bar{b}^{\alpha_\Sigma} \bar{\zeta}^l \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{Y}_l^{\text{sf}})^* := \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}_\Sigma^l \\ \bar{t}_1^l \\ \bar{b}^{\alpha_\Sigma} \bar{\varphi}^l \end{pmatrix}. \quad (7.84)$$

Cela signifie que les égalités :

$$\lambda_l \mathbf{Y}_l^{\text{sf}} = F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} \mathbf{X}_l^{\text{sf}} \quad \text{et} \quad \lambda_l \mathbf{X}_l^{\text{sf}} = F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} \mathbf{Y}_l^{\text{sf}},$$

impliquent :

$$\bar{\lambda}_l (\mathbf{Y}_l^{\text{sf}})^* = (F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}})^* (\mathbf{X}_l^{\text{sf}})^* \quad \text{et} \quad \bar{\lambda}_l (\mathbf{X}_l^{\text{sf}})^* = (F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}})^* (\mathbf{Y}_l^{\text{sf}})^*.$$

Montrons la dernière égalité faisant intervenir l'opérateur  $(F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}})^*$ , celle faisant intervenir l'opérateur  $(F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}})^*$  se montrant de façon analogue. L'équation :

$$\lambda_l \mathbf{X}_l^{\text{sf}} = F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} \mathbf{Y}_l^{\text{sf}},$$

s'écrit :

$$\begin{cases} -\text{div}_\Sigma(\sigma_\Sigma(\mathbf{Y}_l^{\text{sf}})) - \rho_s \omega^2 \mathbf{u}_\Sigma^l = \lambda_l \mathbf{t}_\Sigma^l & \text{sur } \Sigma^s \\ -\alpha_s \text{div}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma^l) - \frac{\alpha_s}{\lambda_s} t_1^l = \lambda_l u_1^l & \text{sur } \Sigma^s \\ -(b^{\alpha_\Sigma})^{-1} \text{div}_\Sigma(\underline{A}^{\alpha_\Sigma} \nabla_\Sigma \varphi^l) - k_f^2 \varphi^l = \lambda_l \zeta^l & \text{sur } \Sigma^f, \end{cases}$$

ce qui se réécrit en conjuguant les trois équations et en multipliant la dernière par  $\overline{b^{\alpha\Sigma}}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}_{\Sigma}(\sigma_{\Sigma}(\overline{\mathbf{Y}}_l^s)) - \rho_s \omega^2 \overline{\mathbf{u}}_{\Sigma}^l = \overline{\lambda}_l \overline{\mathbf{t}}_{\Sigma}^l \quad \text{sur } \Sigma^s \\ -\alpha_s \operatorname{div}_{\Sigma}(\overline{\mathbf{u}}_{\Sigma}^l) - \frac{\alpha_s}{\lambda_s} \overline{\mathbf{t}}_1^l = \overline{\lambda}_l \overline{\mathbf{u}}_1^l \quad \text{sur } \Sigma^s \\ -\operatorname{div}_{\Sigma}(\overline{\mathbf{A}}^{\alpha\Sigma} \nabla_{\Sigma}((\overline{b^{\alpha\Sigma}})^{-1} \overline{b^{\alpha\Sigma}} \overline{\varphi}^l)) - k_f^2 \overline{b^{\alpha\Sigma}} \overline{\varphi}^l = \overline{\lambda}_l \overline{b^{\alpha\Sigma}} \overline{\zeta}^l \quad \text{sur } \Sigma^f, \end{array} \right.$$

c'est-à-dire exactement l'équation :

$$(F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}})^*(\mathbf{Y}_l^{\text{sf}})^* = \overline{\lambda}_l (\mathbf{X}_l^{\text{sf}})^*.$$

Ces relations nous permettent finalement d'établir la relation de biorthogonalité :

$$\begin{aligned} \lambda_n^2 (\mathbf{X}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{Y}_m^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} &= \lambda_n (F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} \mathbf{Y}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{Y}_m^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} \\ &= (F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} \mathbf{X}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{Y}_m^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} \\ &= (\mathbf{X}_n^{\text{sf}}, (F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}})^* (F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}})^* (\mathbf{Y}_m^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} \\ &= \lambda_m (\mathbf{X}_n^{\text{sf}}, (F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}})^* (\mathbf{X}_m^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} \\ &= \lambda_m^2 (\mathbf{X}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{Y}_m^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}}, \end{aligned}$$

ce qui est le résultat attendu. □

#### Hypothèse 7.49

On suppose que les constantes de Fraser sont non nulles, c'est-à-dire :

$$J_n^{\text{sf}} \neq 0, \quad \forall n \geq 1.$$

On choisira alors les vecteurs propres tels que  $J_n^{\text{sf}} = 1$  pour tout  $n \geq 1$ .

#### Proposition 7.50

Sous l'Hypothèse 7.49, les valeurs propres de  $A^{\text{sf}}$  ont une multiplicité algébrique égale à 1. En d'autres termes, il n'y a pas de chaînes de Jordan.

*Démonstration.* Nous introduisons le symbole  $\mathcal{L}_{\mathbf{XY}}(\lambda)$ . Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , c'est un opérateur linéaire de  $\mathbf{V}_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} \times \mathbf{V}_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$  dans  $(\mathbf{V}_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} \times \mathbf{V}_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}})^*$  défini par :

$$\mathcal{L}_{\mathbf{XY}}(\lambda) := A^{\text{sf}} - \lambda I.$$

Soit  $\lambda_n \in \Lambda(A^{\text{sf}})$  et  $\mathbf{Z}_n^{\text{sf}} := (\mathbf{X}_n^{\text{sf}}, \mathbf{Y}_n^{\text{sf}})$  un vecteur propre associé, on a :  $\mathcal{L}_{\mathbf{XY}}(\lambda) \mathbf{Z}_n^{\text{sf}} = 0$ . Supposons maintenant qu'il existe une chaîne de Jordan, nous avons alors l'existence de  $\widehat{\mathbf{Z}}_n^{\text{sf}} := (\widehat{\mathbf{X}}_n^{\text{sf}}, \widehat{\mathbf{Y}}_n^{\text{sf}})$  tel que :

$$\mathcal{L}_{\mathbf{XY}}(\lambda_n) \widehat{\mathbf{Z}}_n^{\text{sf}} + \frac{\mathcal{L}_{\mathbf{XY}}}{d\lambda}(\lambda_n) \mathbf{Z}_n^{\text{sf}} = 0,$$

ce qui s'écrit sous forme développée :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} \widehat{\mathbf{Y}}_n^{\text{sf}} - \lambda_n \widehat{\mathbf{X}}_n^{\text{sf}} - \mathbf{X}_n^{\text{sf}} = 0 \\ F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} \widehat{\mathbf{X}}_n^{\text{sf}} - \lambda_n \widehat{\mathbf{Y}}_n^{\text{sf}} - \mathbf{Y}_n^{\text{sf}} = 0. \end{array} \right. \quad (7.85)$$

Introduisons ensuite le vecteur propre  $(\mathbf{Z}_n^{\text{sf}})^* := ((\mathbf{X}_n^{\text{sf}})^*, (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}})^*)$  de l'opérateur  $(A^{\text{sf}})^*$  pour la valeur propre  $\overline{\lambda}_n$ . Il vérifie les équations :

$$\overline{\lambda}_n (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}})^* = (F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}})^* (\mathbf{X}_n^{\text{sf}})^* \quad \text{et} \quad \overline{\lambda}_n (\mathbf{X}_n^{\text{sf}})^* = (F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}})^* (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}})^*.$$

En faisant le produit scalaire de la première équation de (7.85) par  $(\mathbf{Y}_n^{\text{sf}})^*$  dans  $\mathbf{H}^{\text{sf}}$ , et celui de la seconde équation de (7.85) par  $(\mathbf{X}_n^{\text{sf}})^*$  dans  $\mathbf{H}^{\text{sf}}$ , on obtient :

$$\begin{cases} (F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} \widehat{\mathbf{Y}}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} - (\lambda_n \widehat{\mathbf{X}}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} = (\mathbf{X}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} \\ (F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} \widehat{\mathbf{X}}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{X}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} - (\lambda_n \widehat{\mathbf{Y}}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{X}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} = (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{X}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}}, \end{cases}$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} (\widehat{\mathbf{Y}}_n^{\text{sf}}, (F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}})^* (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} - (\widehat{\mathbf{X}}_n^{\text{sf}}, \bar{\lambda}_n (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} = (\mathbf{X}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} \\ (\widehat{\mathbf{X}}_n^{\text{sf}}, (F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}})^* (\mathbf{X}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} - (\widehat{\mathbf{Y}}_n^{\text{sf}}, \bar{\lambda}_n (\mathbf{X}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} = (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{X}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}}. \end{cases}$$

En sommant finalement ces deux équations, on a :

$$(\mathbf{X}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} + (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{X}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} = 0,$$

ce qui donne  $J_n^{\text{sf}} = 0$ , puisqu'on voit à l'aide de l'expression de  $(\mathbf{X}_n^{\text{sf}})^*$  et de  $(\mathbf{Y}_n^{\text{sf}})^*$  que :

$$(\mathbf{Y}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{X}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} = (\mathbf{X}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}}.$$

Ceci est impossible par hypothèse, il n'y a donc pas de chaîne de Jordan.  $\square$

Pour écrire des décompositions modales, il nous reste à faire l'hypothèse de complétude suivante.

#### Hypothèse 7.51

Pour chaque  $\mathbf{X}^{\text{sf}} = (\mathbf{t}_\Sigma, u_1, \zeta) \in (\widetilde{\mathbf{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma^{\text{s}}))^2 \times \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma^{\text{s}}) \times \widetilde{\mathbf{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma^{\text{f}})$  et  $\mathbf{Y}^{\text{sf}} = (\mathbf{u}_\Sigma, t_1, \varphi) \in (\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma^{\text{s}}))^2 \times \widetilde{\mathbf{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma^{\text{s}}) \times \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma^{\text{f}})$ , on a les décompositions :

$$\mathbf{X}^{\text{sf}} = \sum_{n \geq 1} (\mathbf{X}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} \mathbf{X}_n^{\text{sf}}, \quad \mathbf{Y}^{\text{sf}} = \sum_{n \geq 1} (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{X}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} \mathbf{Y}_n^{\text{sf}}, \quad (7.86)$$

et il existe des constantes  $C_{\pm}^{\text{sf}} > 0$  telles que :

$$\begin{aligned} C_-^{\text{sf}} \left( \|\mathbf{t}_\Sigma\|_{(\widetilde{\mathbf{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma^{\text{s}}))^2}^2 + \|u_1\|_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma^{\text{s}})}^2 + \|\zeta\|_{\widetilde{\mathbf{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma^{\text{f}})}^2 \right) &\leq \sum_{n \geq 1} |(\mathbf{X}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}}|^2, \\ \sum_{n \geq 1} |(\mathbf{X}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}}|^2 &\leq C_+^{\text{sf}} \left( \|\mathbf{t}_\Sigma\|_{(\widetilde{\mathbf{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma^{\text{s}}))^2}^2 + \|u_1\|_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma^{\text{s}})}^2 + \|\zeta\|_{\widetilde{\mathbf{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma^{\text{f}})}^2 \right), \\ C_-^{\text{sf}} \left( \|\mathbf{u}_\Sigma\|_{(\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma^{\text{s}}))^2}^2 + \|t_1\|_{\widetilde{\mathbf{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma^{\text{s}})}^2 + \|\varphi\|_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma^{\text{f}})}^2 \right) &\leq \sum_{n \geq 1} |(\mathbf{Y}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{X}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}}|^2, \\ \sum_{n \geq 1} |(\mathbf{Y}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{X}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}}|^2 &\leq C_+^{\text{sf}} \left( \|\mathbf{u}_\Sigma\|_{(\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma^{\text{s}}))^2}^2 + \|t_1\|_{\widetilde{\mathbf{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma^{\text{s}})}^2 + \|\varphi\|_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma^{\text{f}})}^2 \right). \end{aligned}$$

**Remarque 7.52** Nous avons choisi d'écrire l'hypothèse de décomposition modale ci-dessus avec les modes qui sont sortants à droite, mais on peut l'écrire de façon équivalente avec les modes qui sont sortants à gauche.

**Remarque 7.53** Il est important de préciser que lorsque les composantes des variables  $\mathbf{XY}$  associées aux contraintes ne sont pas  $L^2$  mais ont une régularité  $\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}$ , les intégrales intervenant dans le produit scalaire de  $\mathbf{H}^{\text{sf}}$  sont à lire comme des crochets de dualité :

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}^{\text{sf}}, \mathbf{Y}^{\text{sf}})_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} &= \langle \bar{\mathbf{t}}_{\Sigma}, \bar{\mathbf{u}}_{\Sigma} \rangle_{(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma^{\text{s}}))^2, (H^{\frac{1}{2}}(\Sigma^{\text{s}}))^2} + \langle \bar{\mathbf{t}}_1, \bar{\mathbf{u}}_1 \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma^{\text{s}}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma^{\text{s}})} \\ &\quad + \rho_f \langle \bar{\zeta}, \bar{\varphi} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma^{\text{f}}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma^{\text{f}})}, \\ (\mathbf{Y}^{\text{sf}}, \mathbf{X}^{\text{sf}})_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} &= \langle \bar{\mathbf{t}}_{\Sigma}, \bar{\mathbf{u}}_{\Sigma} \rangle_{(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma^{\text{s}}))^2, (H^{\frac{1}{2}}(\Sigma^{\text{s}}))^2} + \langle \bar{\mathbf{t}}_1, \bar{\mathbf{u}}_1 \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma^{\text{s}}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma^{\text{s}})} \\ &\quad + \rho_f \langle \bar{\zeta}, \bar{\varphi} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma^{\text{f}}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma^{\text{f}})}. \end{aligned}$$

Le problème ne se pose pas pour les modes puisque toutes les composantes, y compris celles associées aux contraintes, sont dans les domaines des opérateurs  $F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}$  et  $F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$  qui sont inclus dans  $L^2$ . En revanche, cette remarque sera importante dans l'analyse du problème direct abordé au prochain chapitre lorsque au moins un des deux vecteurs aura une régularité plus faible.

Sous l'Hypothèse 7.51, nous pouvons écrire le résultat de décomposition modale suivant.

**Proposition 7.54**

Soit  $(\mathbf{x}^{\text{sf}}, \mathbf{y}^{\text{sf}})$  une solution du problème (7.59), il existe des coefficients complexes  $(a_n^{\pm})_{n \geq 1}$  tels que :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}^{\text{sf}} \\ \mathbf{y}^{\text{sf}} \end{pmatrix} = \sum_{n \geq 1} \left( a_n^+ \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{n,+}^{\text{sf}} \\ \mathbf{y}_{n,+}^{\text{sf}} \end{pmatrix} + a_n^- \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{n,-}^{\text{sf}} \\ \mathbf{y}_{n,-}^{\text{sf}} \end{pmatrix} \right), \quad (7.87)$$

avec pour tout  $n \geq 1$  :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{n,\pm}^{\text{sf}} \\ \mathbf{y}_{n,\pm}^{\text{sf}} \end{pmatrix} (x_1, \mathbf{x}_{\Sigma}) := \begin{pmatrix} \pm \mathbf{X}_n^{\text{sf}}(\mathbf{x}_{\Sigma}) \\ \mathbf{Y}_n^{\text{sf}}(\mathbf{x}_{\Sigma}) \end{pmatrix} e^{\pm \lambda_n x_1}.$$

*Démonstration.* D'après l'hypothèse 7.51, les solutions admettent la décomposition suivante :

$$\mathbf{x}^{\text{sf}} = \sum_{n \geq 1} b_n(x_1) \mathbf{X}_n^{\text{sf}}(\mathbf{x}_{\Sigma}), \quad \mathbf{y}^{\text{sf}} = \sum_{n \geq 1} c_n(x_1) \mathbf{Y}_n^{\text{sf}}(\mathbf{x}_{\Sigma}).$$

L'équation (7.59) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \sum_{n \geq 1} b'_n(x_1) \mathbf{X}_n^{\text{sf}}(\mathbf{x}_{\Sigma}) &= \sum_{n \geq 1} c_n(x_1) F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} \mathbf{Y}_n^{\text{sf}}(\mathbf{x}_{\Sigma}) \\ \sum_{n \geq 1} c'_n(x_1) \mathbf{Y}_n^{\text{sf}}(\mathbf{x}_{\Sigma}) &= \sum_{n \geq 1} b_n(x_1) F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} \mathbf{X}_n^{\text{sf}}(\mathbf{x}_{\Sigma}), \end{cases}$$

et les équations satisfaites par les modes ainsi que les relations de biorthogonalité donnent :

$$\begin{cases} b'_n(x_1) &= \lambda_n c_n(x_1) \\ c'_n(x_1) &= \lambda_n b_n(x_1) \end{cases}, \quad \forall n \geq 1,$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} c''_n(x_1) &= \lambda_n^2 c_n(x_1) \\ c'_n(x_1) &= \lambda_n b_n(x_1) \end{cases}, \quad \forall n \geq 1.$$

Il existe alors des coefficients complexes  $(a_n^{\pm})_{n \geq 1}$  tels que :

$$\begin{cases} b_n(x_1) &= a_n^+ e^{\lambda_n x_1} - a_n^- e^{-\lambda_n x_1} \\ c_n(x_1) &= a_n^+ e^{\lambda_n x_1} + a_n^- e^{-\lambda_n x_1} \end{cases}, \quad \forall n \geq 1,$$

ce qui conclut la preuve.  $\square$

### 7.3.4 Le cas de la plaque immergée

Dans cette sous-section, nous revenons au cas 2D d'une plaque immergée qu'il est possible d'obtenir à partir du cas 3D en considérant  $\partial_{x_3} = 0$  dans les équations du problème. Tout d'abord, on remarque que les modes SH de la plaque fermée sont exactement des modes de la plaque fermée en présence de PML, ainsi  $\Lambda^{\text{SH}} \subset \Lambda(A^{\text{sf}})$ . Une fois cette observation faite, intéressons-nous aux autres modes qui ne sont pas connus analytiquement. Dans un premier temps, nous allons donner une relation de dispersion dont les solutions sont les éléments de  $\Lambda(A^{\text{sf}}) \setminus \Lambda^{\text{SH}}$ . Grâce à celle-ci, nous pourrions apporter des éléments de description supplémentaires sur la répartition des valeurs propres de  $A^{\text{sf}}$  dans le plan complexe.

#### Lemme 7.55

On a l'équivalence entre les deux points suivants :

1.  $\lambda \in \Lambda(A^{\text{sf}}) \setminus \Lambda^{\text{SH}}$  ;
2.  $\lambda \in \mathbb{C}$  est solution de la relation de dispersion :

$$f_{2,a}(\lambda) \cdot f_{2,s}(\lambda) = 0, \quad (7.88)$$

où :

$$\begin{aligned} f_{2,a}(\lambda) &:= \frac{\omega^2 \rho_f}{\beta_f(\lambda)} \cotan(\beta_f(\lambda)\eta(h_2)) - \left( s(\lambda)\tan(\beta_s(\lambda)h_0) + p(\lambda)\tan(\beta_p(\lambda)h_0) \right) \\ f_{2,s}(\lambda) &:= \frac{\omega^2 \rho_f}{\beta_f(\lambda)} \cotan(\beta_f(\lambda)\eta(h_2)) + \left( s(\lambda)\cotan(\beta_s(\lambda)h_0) + p(\lambda)\cotan(\beta_p(\lambda)h_0) \right), \end{aligned}$$

avec les coefficients  $s(\lambda)$  et  $p(\lambda)$  donnés par (7.51) et :

$$\eta(x_2) := \int_{h_0}^{x_2} \alpha_2(t)^{-1} dt, \quad x_2 > h_0.$$

Les racines de  $f_{2,a}$ , respectivement  $f_{2,s}$ , correspondent à des modes antisymétriques, respectivement symétriques. De plus, les valeurs propres de  $\Lambda(A^{\text{sf}})$  sont simples.

*Démonstration.* La preuve suit les mêmes lignes que celle du Lemme 7.29 modulo quelques ajustements. Il faut premièrement tronquer les domaines occupés par la partie physique du fluide, ce qui revient à redéfinir  $S_1 = (-h_1, -h_0)$  et  $S_3 = (h_0, h_1)$ . Ensuite, nous devons aussi introduire les domaines  $S_0 = (-h_2, -h_1)$  et  $S_4 = (h_1, h_2)$  occupés par les PML. De façon analogue à (7.110), on peut écrire de façon générale les potentiels  $\phi_2, \psi_2$  extraits du champ de déplacement et le potentiel des vitesses  $\varphi$  sous la forme :

$$\begin{cases} \varphi_{0,4}(x_2) &= A_{0,4} e^{i\beta_f(\eta(|x_2|)-\eta(h_1))} + B_{0,4} e^{-i\beta_f(\eta(|x_2|)-\eta(h_1))} \\ \varphi_{1,3}(x_2) &= A_{1,3} e^{i\beta_f x_2} + B_{1,3} e^{-i\beta_f x_2} \\ \phi_2(x_2) &= A_2(\phi) e^{i\beta_p x_2} + B_2(\phi) e^{-i\beta_p x_2} \\ \psi_2(x_2) &= A_2(\psi) e^{i\beta_s x_2} + B_2(\psi) e^{-i\beta_s x_2}, \end{cases}$$

où l'indice  $j \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$  indique que la décomposition est effectuée dans le domaine  $S_j$ . Contrairement au cas de la plaque immergée dans un fluide infini, il ne faut pas annuler certains des coefficients  $A_j$  et  $B_j$  pour prendre en compte le caractère sortant des ondes. Pour obtenir la relation de dispersion, il faut à nouveau écrire toutes les conditions de transmission et de couplage entre les domaines  $S_j$ , mais aussi utiliser la condition aux limites en bout de

PML. On obtient alors un système linéaire de taille 12 qu'il est possible de réduire, à l'aide de plusieurs manipulations sur les lignes du système, à un système de taille 2 admettant une solution non nulle si et seulement si son déterminant s'annule, ce qui nous donne la relation de dispersion. La symétrie des modes associés aux racines de  $f_{2,a}$  et  $f_{2,s}$  s'obtient comme pour le Lemme 7.29.  $\square$

**Remarque 7.56** La relation de dispersion (7.88) peut s'écrire à l'aide de fonctions analytiques. Par exemple, la fonction  $f_{2,a}$  peut être remplacée par la fonction :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{2,a}(\lambda) := & \eta(h_2)\omega^2\rho_f k_s^2 \cos(\beta_f(\lambda)h_0)\cos(\beta_s(\lambda)h_0)\cos(\beta_p(\lambda)h_0) \\ & - \left( -\frac{4\mu_s\lambda^2}{h_0}\beta_s(\lambda)h_0\sin(\beta_s(\lambda)h_0) + \mu_s(k_s^2 + 2\lambda^2)h_0\frac{\sin(\beta_p(\lambda)h_0)}{\beta_p(\lambda)h_0} \right) \beta_f(\lambda)\eta(h_2)\sin(\beta_f(\lambda)\eta(h_2)), \end{aligned}$$

dans laquelle il faut remarquer que les fonctions :

$$z \mapsto \frac{\sin(z)}{z}, \quad z \mapsto z\sin(z) \quad \text{et} \quad z \mapsto \cos(z),$$

sont entières pour la variable  $z^2$ . Le choix de la coupure est ainsi arbitraire.

Nous allons maintenant montrer qu'en dehors des modes SH, il ne peut pas y avoir de modes purement évanescents, ni de modes purement propagatifs ayant un nombre d'onde longitudinal inférieur à  $k_f$  en module.

**Lemme 7.57**

La relation de dispersion (7.88) n'admet pas de racines dans l'ensemble  $\mathbb{R} \cup i[-k_f, k_f]$ . Autrement dit :

$$(\Lambda(A^{sf}) \setminus \Lambda^{SH}) \cap (\mathbb{R} \cup i[-k_f, k_f]) = \emptyset.$$

*Démonstration.* Le résultat est montré pour la fonction  $f_{2,a}$  et le raisonnement est identique pour la fonction  $f_{2,s}$ . Supposons qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R} \cup (i\mathbb{R})$  racine de  $f_{2,a}$ , ce qui donne alors  $\beta_l(\lambda) \in \mathbb{R}^+ \cup (i\mathbb{R}^-)$  pour  $l \in \{s, p, f\}$ . On commence par s'intéresser aux termes solides de la relation de dispersion donnés par :

$$e_a(\lambda) := s(\lambda)\tan(\beta_s(\lambda)h_0) + p(\lambda)\tan(\beta_p(\lambda)h_0).$$

On voit clairement que  $e_a(\lambda) \in \mathbb{R}$  lorsque  $\beta_s(\lambda)$  et  $\beta_p(\lambda)$  sont réels. Lorsque l'une de ces deux racines carrées est imaginaire, la relation  $\tan(ix) = i\tanh(x)$  et les expressions de  $s(\lambda)$  et  $p(\lambda)$  données par (7.51) permettent de vérifier qu'on a toujours  $e_a(\lambda) \in \mathbb{R}$ . Notons pour la suite de la preuve  $\gamma := e_a(\lambda)/(\omega^2\rho_f)$ . Penchons-nous désormais sur la partie fluide de  $f_{2,a}$ . On peut d'abord vérifier que  $\beta_f(\lambda) \in \mathbb{R}$  lorsque  $\lambda \in \mathbb{R} \cup i[-k_f, k_f]$ . Ensuite, l'équation  $f_{2,a}(\lambda) = 0$  s'écrit :

$$\frac{\cotan(\beta_f(\lambda)\eta(h_2))}{\beta_f(\lambda)} = \gamma,$$

ce qui est équivalent à :

$$e^{2i\beta_f(\lambda)\eta(h_2)} = \frac{-i - \beta_f(\lambda)\gamma}{i - \beta_f(\lambda)\gamma}.$$

Prendre le logarithme complexe de cette équation donne :

$$2i\beta_f(\lambda)\eta(h_2) = \text{Log}\left(\left|\frac{-i - \beta_f(\lambda)\gamma}{i - \beta_f(\lambda)\gamma}\right|\right) + i\text{Arg}\left(\frac{-i - \beta_f(\lambda)\gamma}{i - \beta_f(\lambda)\gamma}\right) = i\text{Arg}\left(\frac{-i - \beta_f(\lambda)\gamma}{i - \beta_f(\lambda)\gamma}\right),$$



ce qui est absurde, puisqu'on impose au profil de PML de satisfaire  $\Im m(\alpha(x_2)) < 0$  pour  $h_1 < |x_2| \leq h_2$  (cf. Définition 4.10) et donc  $\Im m(\eta(h_2)) > 0$ . Une telle racine  $\lambda$  de  $f_{2,a}$  ne peut donc pas exister.  $\square$

Il est ensuite aussi possible de tirer parti de la relation de dispersion pour décrire le comportement asymptotique des valeurs propres de  $A^{\text{sf}}$  dans le plan complexe.

### Proposition 7.58

Les éléments de  $\Lambda(A^{\text{sf}}) \setminus \Lambda^{\text{SH}}$  sont asymptotiquement répartis de plusieurs façons dans le plan complexe. À savoir :

- les modes de PML sont asymptotiquement distribués sur l'union des deux courbes :

$$\left\{ \pm i^{\mathbb{R}^+} \sqrt{-k_f^2 + \eta(h_2)^{-2}t}, t \in \mathbb{R}^+ \right\};$$

- les modes approchant les modes de Lamb à fuite sortants ont un comportement asymptotique donné par la Proposition 7.32;
- les modes approchant les modes de Lamb inhomogènes sortants ont un comportement asymptotique donné par la Proposition 7.33.

*Démonstration.* Nous recherchons des suites de valeurs propres  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  de  $\Lambda(A^{\text{sf}}) \setminus \Lambda^{\text{SH}}$  dont le carré à un angle convergent, c'est-à-dire des suites de valeurs propres s'écrivant :

$$\lambda_n^2 = |\lambda_n^2| e^{i\theta_n},$$

avec  $|\lambda_n| \rightarrow +\infty$  et  $\theta_n \rightarrow \theta_0$ . Nous allons utiliser dans cette preuve le constat suivant. En écrivant :

$$\tan(z) = -i \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} \quad \text{et} \quad \cotan(z) = i \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1},$$

on voit que  $\tan(z) \rightarrow \pm i$  et  $\cotan(z) \rightarrow \mp i$  lorsque  $\Im m(z) \rightarrow \pm\infty$ . Deux cas doivent être désormais distingués selon le demi-plan complexe (pour la variable  $\lambda^2$ ) sur lequel se trouve asymptotiquement la suite.

- Cas  $\Im m(\lambda_n^2) < 0$

Puisque  $\beta_f$ ,  $\beta_s$ , et  $\beta_p$  sont définis avec une coupure sur  $i\mathbb{R}^+$ , on a  $\Im m(\beta_{f,s,p}(\lambda_n)) < 0$ . Or nous ne pouvons pas avoir simultanément  $|\Im m(\beta_f(\lambda_n)\eta(h_2))| \rightarrow +\infty$  et  $|\Im m(\beta_{s,p}(\lambda_n)h_0)| \rightarrow +\infty$ , puisque nous obtiendrions dans le cas contraire en passant à la limite dans la relation de dispersion (7.88) :

$$\pm \frac{\rho_f \omega^2}{\lambda_n} \sim \frac{8\mu_s \lambda_n^3}{k_s^2},$$

ce qui n'est pas possible.

Si  $|\Im m(\beta_f(\lambda_n)\eta(h_2))| \rightarrow +\infty$ , l'équation de dispersion :

$$f_{2,a}(\lambda_n) \cdot f_{2,s}(\lambda_n) = 0,$$

devient au premier ordre :

$$f_a^{\text{R}}(\lambda_n) \cdot f_s^{\text{R}}(\lambda_n) = 0,$$

qui est l'équation de Rayleigh (7.26) vérifiée par les modes de Lamb d'une plaque sans fluide environnant. Le comportement asymptotique de ces modes est donné par le Lemme 7.12. Et d'après la Proposition 7.32, cela correspond aussi au comportement asymptotique au premier ordre des modes de Lamb à fuite sortants que nous approchons grâce aux PML.

Si on a en revanche  $|\Im m(\beta_{\text{sp}}(\lambda_n)h_0)| \rightarrow +\infty$ , la suite vérifie nécessairement  $\arg(\beta_f(\lambda_n)\eta(h_2)) \rightarrow 0$  étant donné que celle-ci a un angle convergent. Par conséquent, il existe une suite réelle  $(A_n)_{n \geq 1}$  tendant vers  $+\infty$  telle que :

$$\beta_f(\lambda_n)\eta(h_2) \sim A_n,$$

ce qui donne :

$$\lambda_n^2 \sim -k_f^2 + \eta(h_2)^{-2}A_n^2.$$

Cela correspond à des valeurs propres, pour le paramètre  $\lambda^2$ , distribuées sur le demi-plan  $\Im m(\lambda^2) < 0$  le long de la demi-droite  $-k_f^2 + \eta(h_2)^{-2}\mathbb{R}^+$ . Pour le paramètre  $\lambda$ , cette demi-droite correspond à l'union de deux courbes. On comprend bien que ces valeurs propres correspondent aux modes de PML puisque les deux courbes mises en évidence ne dépendent pas des paramètres du cœur élastique.

- Cas  $\Im m(\lambda_n^2) > 0$

Dans ce cas, il faut remplacer la coupure sur le demi-axe  $i\mathbb{R}^+$  par une nouvelle sur le demi-axe  $i\mathbb{R}^-$  dans la définition des racines carrées  $\beta_{f,\text{s,p}}$ . Cela ne pose aucun problème sachant que la relation de dispersion peut s'écrire à l'aide de fonctions analytiques sur tout le plan complexe (voir Remarque 7.56).

Lorsque  $|\Im m(\beta_f(\lambda_n)\eta(h_2))| \rightarrow +\infty$ , on conduit le même raisonnement que dans le premier cas. Mais cette fois, on met en évidence le comportement des modes de Lamb inhomogènes sortants donné par la Proposition 7.33.

Le cas  $|\Im m(\beta_{\text{sp}}(\lambda_n)h_0)| \rightarrow +\infty$  est en revanche un peu différent. En effet, si une telle suite existait, on obtiendrait comme précédemment l'existence d'une suite réelle  $(A_n)_{n \geq 1}$  tendant vers  $+\infty$  telle que :

$$\beta_f(\lambda_n)\eta(h_2) \sim A_n.$$

On aurait alors :

$$\lambda_n^2 \sim -k_f^2 + \eta(h_2)^{-2}A_n^2.$$

Mais en prenant la partie imaginaire de cette dernière équation on obtient :

$$\Im m(\lambda_n^2) \sim \eta(h_2)^{-2}A_n^2.$$

Or la suite vérifie ici  $\Im m(\lambda_n^2) > 0$ . De plus, les PML retenues (cf. Définition 4.10) satisfont  $0 < \arg_{\mathbb{R}^-}(\eta(h_2)) < \pi/2$  et alors  $-\pi < \arg_{\mathbb{R}^-}(\eta(h_2)^{-2}) < 0$  ce qui implique  $\Im m(\eta(h_2)^{-2}) < 0$  et constitue une contradiction. Il n'y a donc pas de suites de valeurs propres ayant un angle convergent dans ce dernier cas.  $\square$

## 7.4 Approximation numérique des modes

Le calcul numérique des modes dans un guide élastique immergé ou enfoui représente un enjeu important dans le domaine du contrôle non destructif. Leur étude permet en effet de

mieux comprendre les caractéristiques des ondes qui se propagent dans ces structures afin d’être en mesure de développer des méthodes d’imagerie performantes (voir par exemple [Gal18]). La structure particulière de fonctions à variables séparées des modes permet de ramener le problème du calcul des modes, à celui de la résolution d’un problème aux valeurs propres polynomial posé dans la section qu’on résout par éléments finis. Cette étape est appelée dans la littérature *méthode SAFE* (Semi Analytical Finite Elements method). Mais dans notre cas, la section du milieu environnant est infinie, il n’est donc pas possible de résoudre directement le problème aux valeurs propres.

Un grand nombre de travaux propose de tronquer transversalement cette section par des PML. Cette approche a l’avantage de pouvoir être mise en œuvre quelle que soit la géométrie de la section transverse du cœur (voir [ZF17]) et d’être facile à implémenter dans des codes éléments finis existants. La discrétisation du problème aux valeurs propres obtenu par des éléments finis de Lagrange soulève plusieurs problèmes. Premièrement, la convergence des valeurs propres est polynomiale, ce qui nécessite la résolution d’un système de grande taille à hautes fréquences pour approcher correctement les valeurs propres. Plusieurs travaux ont ainsi proposé une discrétisation à l’aide d’éléments spectraux permettant une convergence exponentielle, ce qui garantit une précision bien plus importante et un coût de calcul moindre, ce dernier pouvant devenir rapidement rédhibitoire lorsque la section est 2D. Dans [SNN21], les auteurs proposent de discrétiser le problème avec des éléments finis d’ordre élevés définis à l’aide d’une base de B-spline non uniforme (NURBS) pour calculer les modes d’une plaque immergée. Les modes calculés avec cette méthode ont l’avantage de satisfaire de façon exacte la continuité du déplacement et de la contrainte à l’interface entre le cœur élastique et le fluide environnant, ce qui n’est en général pas satisfait pour des modes approchés à l’aide d’éléments finis de Lagrange. Le cas d’un guide axisymétrique élastique immergé ou enfoui a été traité dans [KMR18]. Les modes  $y$  sont approchés sur une base de polynômes de Lagrange associés à des nœuds de Gauss-Lobatto-Legendre. De plus, un profil de PML exponentiel dépendant des paramètres des matériaux et de la fréquence est proposé pour pallier deux limitations des PML : la bonne approximation des grandes longueurs d’ondes nécessite des PML épaisses, tandis que celle des petites longueurs d’ondes requiert une discrétisation très fine. Pour les travaux portant sur l’approximation des modes à l’aide de PML, nous pouvons mentionner enfin [AG17] qui propose une discrétisation originale et performante du problème aux valeurs propres à résoudre. Celle du domaine solide  $y$  est réalisée par la *Complex-length Finite Element method* (CFEM) et celle du fluide à l’aide de *Perfectly Matched Discrete Layers* (PMDL). Pour un guide enfoui, les PML peuvent être remplacées par des couches absorbantes (voir [CL08]) revenant à introduire des effets visqueux qui vont atténuer les ondes dans le milieu environnant et permettre de calculer les modes de façon approchée.

Une approche différente consiste à ne mailler que le cœur solide de la structure en tirant parti de la forme explicite, sous forme de mode sortant dans la direction transverse, du potentiel des vitesses dans le fluide permettant ainsi son élimination dans le problème transverse. Par exemple, la méthode dite des *ondes partielles* ou *partial waves* (PW) décrite dans [HI14] propose d’éliminer la composante fluide du problème aux valeurs propres satisfait par le mode à l’aide des conditions de couplage entre le fluide et le solide. Ceci permet d’écrire un problème aux valeurs propres d’ordre 3 vis-à-vis du paramètre spectral qui est le nombre d’onde transverse du mode au lieu de son nombre d’onde longitudinal. Le problème obtenu est enfin linéarisé et discrétisé à l’aide d’éléments de Lagrange. De façon légèrement différente, les auteurs de [Kie+19] n’éliminent pas totalement la composante fluide du mode, mais n’en conservent que son amplitude au niveau de l’interface avec la plaque élastique. Le problème aux valeurs propres obtenu fait intervenir à la fois les nombres d’ondes longitudinal et transverse. Un changement de variable spectrale bien choisi permet

alors d'écrire un problème polynomial d'ordre 4 qui est linéarisé puis discrétisé à l'aide d'une méthode de collocation spectrale de type Chebyshev. Il est aussi possible d'adapter ce type de techniques à des configurations 3D, comme cela a par exemple été fait dans [GBS14], en prenant en compte le fluide environnant grâce à une condition d'impédance dépendant de façon non linéaire du paramètre spectral. Le problème spectral qui en résulte est non linéaire et est résolu par une méthode itérative. Contrairement aux méthodes discrétisant le fluide environnant, ces méthodes permettent de traiter de façon indifférenciée les modes de Lamb à fuite exponentiellement croissants dans la direction transverse et les modes de Lamb inhomogènes et modes de quasi-Scholte qui sont eux exponentiellement décroissants dans la direction transverse. Elles permettent également un calcul plus précis et moins coûteux des modes de la plaque immergée qu'avec des PML. Elles ne permettent toutefois pas d'exploiter directement les modes calculés pour la résolution du problème direct lorsqu'on souhaite par exemple écrire des conditions transparentes faisant intervenir les modes dans la direction longitudinale.

En vue de la résolution des problèmes direct et inverse, nous choisissons de mailler une partie du fluide environnant, ce qui nous conduit à calculer les modes avec des PML. Cette approche a déjà été retenue dans [Gal18] pour résoudre les problèmes de diffraction direct et inverse dans la situation d'un guide élastique enfoui dans un autre milieu élastique. Nous allons donc dans un premier temps expliquer plus précisément comment procéder en pratique au calcul des modes dans le cas d'une plaque immergée. Cette méthode sera appelée *méthode SAFE-PML*. Dans un second temps, nous détaillerons la méthode des ondes partielles évoquée ci-dessus, ce qui nous permettra de valider les modes calculés en présence de PML. Cette méthode sera quant à elle appelée *méthode SAFE-PW*. Enfin, nous expliquerons enfin comment coupler la méthode SAFE-PML avec la méthode SAFE-PW pour calculer plus précisément les modes de quasi-Scholte, dont l'approximation avec des PML seules est compliquée.

**Remarque 7.59 (Important)** *Dans cette section, nous faisons le choix d'abandonner temporairement la convention de Kondratiev adoptée jusqu'à présent pour la convention usuelle dans la littérature mentionnée ci-dessus. Cela revient à décrire la propagation d'ondes dans la direction longitudinale à l'aide du propagateur  $e^{i\lambda x_1}$  au lieu du propagateur  $e^{\lambda x_1}$ .*

### 7.4.1 La méthode SAFE-PML

Les modes sont les solutions à variables séparées de la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = e^{i\lambda x_1} \check{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_\Sigma), & \mathbf{x} \in W^s \\ \varphi(\mathbf{x}) = e^{i\lambda x_1} \check{\varphi}(\mathbf{x}_\Sigma), & \mathbf{x} \in W^f, \end{cases}$$

du problème homogène :

Trouver  $(\mathbf{u}, \varphi)$  tel que

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\underline{\sigma}(\mathbf{u})) + \omega^2 \rho_s \mathbf{u} = 0 & \text{dans } W^s \\ \alpha_2 \partial_{x_2}(\alpha_2 \partial_{x_2} \varphi) + \partial_{x_1}^2 \varphi + k_f^2 \varphi = 0 & \text{dans } W^f \\ \underline{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n}_s = -i \rho_f \omega \varphi \mathbf{n}_s & \text{sur } \Gamma^{\text{sf}} \\ -i \omega (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s) = \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_s & \text{sur } \Gamma^{\text{sf}} \\ \partial_{\mathbf{n}_f} \varphi = 0 & \text{sur } \Gamma^{\text{pml}}, \end{cases} \quad (7.89)$$

où  $\mathbf{n}_s$  est la normale unitaire sortante à  $W^s$  et  $\mathbf{n}_f$  celle pour  $W^f$ . Posons  $\check{\mathbf{u}} := (\check{u}_1 \quad \check{u}_2 \quad \check{u}_3)^t$ , on a alors :

$$\underline{\sigma}(\mathbf{u}) = \lambda_s \operatorname{div}(\mathbf{u}) \underline{\mathbf{Id}} + 2\mu_s \underline{\epsilon}(\mathbf{u}),$$

avec :

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = (i\lambda\check{u}_1 + d_{x_2}\check{u}_2)e^{i\lambda x_1},$$

puis :

$$\underline{\epsilon}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} i\lambda\check{u}_1 & \frac{1}{2}(i\lambda\check{u}_2 + d_{x_2}\check{u}_1) & \frac{i\lambda}{2}\check{u}_3 \\ \frac{1}{2}(i\lambda\check{u}_2 + d_{x_2}\check{u}_1) & d_{x_2}\check{u}_2 & \frac{1}{2}d_{x_2}\check{u}_3 \\ \frac{i\lambda}{2}\check{u}_3 & \frac{1}{2}d_{x_2}\check{u}_3 & 0 \end{pmatrix} e^{i\lambda x_1}.$$

En notant le tenseur des contraintes :

$$\underline{\sigma}(\mathbf{u}) := \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix},$$

on peut écrire :

$$\operatorname{div}(\underline{\sigma}(\mathbf{u})) = \begin{pmatrix} i\lambda\sigma_{11}(\mathbf{u}) + d_{x_2}\sigma_{12}(\mathbf{u}) \\ i\lambda\sigma_{21}(\mathbf{u}) + d_{x_2}\sigma_{22}(\mathbf{u}) \\ i\lambda\sigma_{31}(\mathbf{u}) + d_{x_2}\sigma_{32}(\mathbf{u}) \end{pmatrix}.$$

Après calculs, on montre que le système d'équations (7.89) devient pour les modes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} i\lambda[\lambda_s(i\lambda\check{u}_1 + d_{x_2}\check{u}_2) + 2\mu_s i\lambda\check{u}_1] + d_{x_2}[\mu_s(i\lambda\check{u}_2 + d_{x_2}\check{u}_1)] + \rho_s\omega^2\check{u}_1 = 0 & \text{dans } \Sigma^s \\ i\lambda[\mu_s(i\lambda\check{u}_2 + d_{x_2}\check{u}_1)] + d_{x_2}[\lambda_s(i\lambda\check{u}_1 + d_{x_2}\check{u}_2) + 2\mu_s d_{x_2}\check{u}_2] + \rho_s\omega^2\check{u}_2 = 0 & \text{dans } \Sigma^s \\ i\lambda[\mu_s(i\lambda\check{u}_3)] + d_{x_2}[\mu_s d_{x_2}\check{u}_3] + \rho_s\omega^2\check{u}_3 = 0 & \text{dans } \Sigma^s \\ \alpha_2 d_{x_2}(\alpha_2 d_{x_2}\check{\varphi}) + (k_f^2 - \lambda^2)\check{\varphi} = 0 & \text{dans } \Sigma^f \\ \mu_s(i\lambda\check{u}_2 + d_{x_2}\check{u}_1) = 0 & \text{sur } \gamma^{\text{sf}} \\ \lambda_s(i\lambda\check{u}_1 + d_{x_2}\check{u}_2) + 2\mu_s d_{x_2}\check{u}_2 = -i\rho_f\omega\check{\varphi} & \text{sur } \gamma^{\text{sf}} \\ \mu_s d_{x_2}\check{u}_3 = 0 & \text{sur } \gamma^{\text{sf}} \\ -i\omega\check{u}_2 = d_{x_2}\check{\varphi} & \text{sur } \gamma^{\text{sf}} \\ d_{x_2}\check{\varphi} = 0 & \text{sur } \gamma^{\text{pml}}. \end{array} \right.$$

Comme dans [Dah01], nous effectuons les changements de variables  $\mathbf{u} = (u_1 \quad u_2 \quad u_3)^t := (i\check{u}_1 \quad \check{u}_2 \quad \check{u}_3)^t$  et  $\varphi := i\check{\varphi}$  pour faire disparaître les coefficients complexes autres que  $\lambda$  dans la partie physique du guide. Le système devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\lambda[\lambda_s(\lambda u_1 + d_{x_2}u_2) + 2\mu_s\lambda u_1] + d_{x_2}[\mu_s(-\lambda u_2 + d_{x_2}u_1)] + \rho_s\omega^2 u_1 = 0 & \text{dans } \Sigma^s \\ \lambda[\mu_s(-\lambda u_2 + d_{x_2}u_1)] + d_{x_2}[\lambda_s(\lambda u_1 + d_{x_2}u_2) + 2\mu_s d_{x_2}u_2] + \rho_s\omega^2 u_2 = 0 & \text{dans } \Sigma^s \\ \lambda[-\mu_s\lambda u_3] + d_{x_2}[\mu_s d_{x_2}u_3] + \rho_s\omega^2 u_3 = 0 & \text{dans } \Sigma^s \\ \alpha_2 d_{x_2}(\alpha_2 d_{x_2}\varphi) + (k_f^2 - \lambda^2)\varphi = 0 & \text{dans } \Sigma^f \\ \mu_s(-\lambda u_2 + d_{x_2}u_1) = 0 & \text{sur } \gamma^{\text{sf}} \\ \lambda_s(\lambda u_1 + d_{x_2}u_2) + 2\mu_s d_{x_2}u_2 = -\rho_f\omega\varphi & \text{sur } \gamma^{\text{sf}} \\ \mu_s d_{x_2}u_3 = 0 & \text{sur } \gamma^{\text{sf}} \\ \omega u_2 = d_{x_2}\varphi & \text{sur } \gamma^{\text{sf}} \\ d_{x_2}\varphi = 0 & \text{sur } \gamma^{\text{pml}}. \end{array} \right. \quad (7.90)$$

En définissant le tenseur des contraintes dépendant du paramètre spectral  $\lambda$  :

$$\underline{\sigma}^\lambda(\mathbf{u}) := \lambda_s \operatorname{div}^\lambda(\mathbf{u}) \underline{\mathbf{Id}} + 2\mu_s \underline{\epsilon}^\lambda(\mathbf{u}),$$

avec :

$$\operatorname{div}^\lambda(\mathbf{u}) := \lambda u_1 + d_{x_2} u_2,$$

et :

$$\underline{\epsilon}^\lambda(\mathbf{u}) := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\lambda u_1 & -\lambda u_2 + d_{x_2} u_1 & -\lambda u_3 \\ -\lambda u_2 + d_{x_2} u_1 & 2d_{x_2} u_2 & d_{x_2} u_3 \\ -\lambda u_3 & d_{x_2} u_3 & 0 \end{pmatrix},$$

puis :

$$\operatorname{div}^\lambda(\underline{\sigma}^\lambda(\mathbf{u})) := \begin{pmatrix} -\lambda \sigma_{11}^\lambda(\mathbf{u}) + d_{x_2} \sigma_{12}^\lambda(\mathbf{u}) \\ \lambda \sigma_{21}^\lambda(\mathbf{u}) + d_{x_2} \sigma_{22}^\lambda(\mathbf{u}) \\ \lambda \sigma_{31}^\lambda(\mathbf{u}) + d_{x_2} \sigma_{32}^\lambda(\mathbf{u}) \end{pmatrix},$$

le problème (7.90) se réécrit sous la forme compacte :

Trouver  $(\lambda, \mathbf{u}, \varphi)$  tel que

$$\begin{cases} \operatorname{div}^\lambda(\underline{\sigma}^\lambda(\mathbf{u})) + \rho_s \omega^2 \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Sigma^s \\ \alpha_2 d_{x_2}(\alpha_2 d_{x_2} \varphi) + (k_f^2 - \lambda^2) \varphi = 0 & \text{dans } \Sigma^f \\ \underline{\sigma}^\lambda(\mathbf{u}) \mathbf{n}_s = -\rho_f \omega \varphi \mathbf{n}_s & \text{sur } \gamma^{\text{sf}} \\ \omega(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s) = \nabla_2 \varphi \cdot \mathbf{n}_s & \text{sur } \gamma^{\text{sf}} \\ d_{x_2} \varphi = 0 & \text{sur } \gamma^{\text{pml}}, \end{cases} \quad (7.91)$$

où  $\nabla_2 \cdot := (0 \quad d_{x_2} \cdot \quad 0)^t$ .

**Remarque 7.60** Nous avons redéfini ici les opérateurs différentiels  $\operatorname{div}^\lambda$  et  $\underline{\epsilon}^\lambda$  par rapport au début de ce chapitre pour prendre en compte les changements de variables effectués.

### Formulation variationnelle du problème

Nous cherchons les solutions faibles non nulles du problème (7.91) dans  $\mathbf{V}^{\text{sf}} := (\mathbb{H}^1(\Sigma^s))^3 \times \mathbb{H}^1(\Sigma^f)$ . Pour cela, nous multiplions la première équation de (7.91) par  $\mathbf{v} \in (\mathbb{H}^1(\Sigma^s))^3$  et intégrons par parties :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Sigma^s} (\operatorname{div}^\lambda(\underline{\sigma}^\lambda(\mathbf{u})) + \rho_s \omega^2 \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} dx_2 \\ &= \int_{\Sigma^s} (-\lambda \sigma_{11}^\lambda(\mathbf{u}) + d_{x_2} \sigma_{12}^\lambda(\mathbf{u})) v_1 dx_2 + \int_{\Sigma^s} (\lambda \sigma_{21}^\lambda(\mathbf{u}) + d_{x_2} \sigma_{22}^\lambda(\mathbf{u})) v_2 dx_2 \\ &\quad + \int_{\Sigma^s} (\lambda \sigma_{31}^\lambda(\mathbf{u}) + d_{x_2} \sigma_{32}^\lambda(\mathbf{u})) v_3 dx_2 + \int_{\Sigma^s} \rho_s \omega^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx_2 \\ &= \lambda_s \int_{\Sigma^s} \operatorname{div}^\lambda(\mathbf{u}) (-\lambda v_1) dx_2 + 2\mu_s \int_{\Sigma^s} \epsilon_{11}^\lambda(\mathbf{u}) (-\lambda v_1) dx_2 - 2\mu_s \int_{\Sigma^s} \epsilon_{12}^\lambda(\mathbf{u}) d_{x_2} v_1 dx_2 \\ &\quad + [\sigma_{12}^\lambda(\mathbf{u}) v_1]_{x_2=-h_0}^{x_2=h_0} + 2\mu_s \int_{\Sigma^s} \epsilon_{21}^\lambda(\mathbf{u}) (\lambda v_2) dx_2 - \lambda_s \int_{\Sigma^s} \operatorname{div}^\lambda(\mathbf{u}) d_{x_2} v_2 dx_2 \\ &\quad - 2\mu_s \int_{\Sigma^s} \epsilon_{22}^\lambda(\mathbf{u}) d_{x_2} v_2 dx_2 + [\sigma_{22}^\lambda(\mathbf{u}) v_2]_{x_2=-h_0}^{x_2=h_0} + 2\mu_s \int_{\Sigma^s} \epsilon_{31}^\lambda(\mathbf{u}) (\lambda v_3) dx_2 \\ &\quad - 2\mu_s \int_{\Sigma^s} \epsilon_{32}^\lambda(\mathbf{u}) d_{x_2} v_3 dx_2 + [\sigma_{32}^\lambda(\mathbf{u}) v_3]_{x_2=-h_0}^{x_2=h_0} + \rho_s \omega^2 \int_{\Sigma^s} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx_2 \\ &= -\lambda_s \int_{\Sigma^s} \operatorname{div}^\lambda(\mathbf{u}) \operatorname{div}^\lambda(\mathbf{v}) dx_2 - 2\mu_s \int_{\Sigma^s} \underline{\epsilon}^\lambda(\mathbf{u}) : \underline{\epsilon}^\lambda(\mathbf{v}) dx_2 + \rho_s \omega^2 \int_{\Sigma^s} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx_2 \\ &\quad + \int_{\gamma^{\text{sf}}} (\underline{\sigma}^\lambda(\mathbf{u}) \mathbf{n}_s) \cdot \mathbf{v} ds(x_2), \end{aligned}$$

où on a utilisé la symétrie du tenseur  $\underline{\epsilon}^\lambda(\mathbf{u})$  pour obtenir la dernière ligne. On précise, compte tenu du fait que  $\gamma^{\text{sf}}$  est la réunion de deux parties, que nous avons la convention :

$$\int_{\gamma^{\text{sf}}} f \, ds(x_2) := f(-h_0) + f(h_0) \quad \text{et} \quad [f]_{x_2=-h_0}^{x_2=h_0} = f(h_0) - f(-h_0).$$

De même, multiplier la deuxième équation de (7.91) par  $\rho_f \frac{\psi}{\alpha_2}$  pour  $\psi \in H^1(\Sigma^f)$  et utiliser l'égalité  $\mathbf{n}_f = -\mathbf{n}_s$  sur  $\gamma^{\text{sf}}$  donne :

$$\begin{aligned} 0 &= \rho_f \int_{\Sigma^f} (d_{x_2}(\alpha_2 d_{x_2} \varphi) + \alpha_2^{-1}(k_f^2 - \lambda^2)\varphi)\psi \, dx_2 \\ &= \rho_f \int_{\Sigma^f} (-\alpha_2 d_{x_2} \varphi d_{x_2} \psi + \alpha_2^{-1}(k_f^2 - \lambda^2)\varphi\psi) \, dx_2 - \int_{\gamma^{\text{sf}}} \rho_f (\nabla_2 \varphi \cdot \mathbf{n}_s)\psi \, ds(x_2). \end{aligned}$$

En utilisant finalement les conditions de couplage entre le champ de déplacement et le potentiel des vitesses sur  $\gamma^{\text{sf}}$ , on aboutit à la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } (\lambda, \mathbf{u}, \varphi) \in \mathbb{C} \times (\mathbf{V}^{\text{sf}} \setminus \{0\}) \text{ tel que} \\ &a_\lambda((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)) = 0, \quad \forall (\mathbf{v}, \psi) \in \mathbf{V}^{\text{sf}}. \end{aligned} \quad (7.92)$$

La forme sesquilinéaire du problème peut être décomposée en trois termes :

$$a_\lambda((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)) := a_\lambda^s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a_\lambda^f(\varphi, \psi) + a^c((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)),$$

avec un terme associé au milieu solide défini par :

$$a_\lambda^s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \lambda_s \int_{\Sigma^s} \text{div}^\lambda(\mathbf{u}) \text{div}^\lambda(\mathbf{v}) \, dx_2 + 2\mu_s \int_{\Sigma^s} \epsilon_\lambda(\mathbf{u}) : \epsilon_\lambda(\mathbf{v}) \, dx_2 - \rho_s \omega^2 \int_{\Sigma^s} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx_2,$$

un terme associé au milieu fluide donné par :

$$a_\lambda^f(\varphi, \psi) := \rho_f \int_{\Sigma^f} (\alpha_2 d_{x_2} \varphi d_{x_2} \psi - \alpha_2^{-1}(k_f^2 - \lambda^2)\varphi\psi) \, dx_2,$$

et un terme de couplage s'écrivant :

$$a^c((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)) := \rho_f \omega \int_{\gamma^{\text{sf}}} (\varphi(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_s) + \psi(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s)) \, ds(x_2).$$

Développer chacun des termes de  $a^\lambda$  permet de mettre en évidence que (7.92) est un problème aux valeurs propres polynomial d'ordre 2 en  $\lambda$ , on a en effet :

$$a^\lambda((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)) = \lambda^2 a^2((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)) + \lambda a^1((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)) + a^0((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)), \quad (7.93)$$

avec :

$$\begin{aligned} a^2((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)) &:= (\lambda_s + 2\mu_s) \int_{\Sigma^s} u_1 v_1 \, dx_2 + \mu_s \int_{\Sigma^s} (u_2 v_2 + u_3 v_3) \, dx_2 + \rho_f \int_{\Sigma^f} \alpha_2^{-1} \varphi \psi \, dx_2, \\ a^1((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)) &:= -\mu_s \int_{\Sigma^s} (u_2 d_{x_2} v_1 + d_{x_2} u_1 v_2) \, dx_2 + \lambda_s \int_{\Sigma^s} (u_1 d_{x_2} v_2 + d_{x_2} u_2 v_1) \, dx_2, \\ a^0((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)) &:= (\lambda_s + 2\mu_s) \int_{\Sigma^s} d_{x_2} u_2 d_{x_2} v_2 \, dx_2 + \mu_s \int_{\Sigma^s} (d_{x_2} u_1 d_{x_2} v_1 + d_{x_2} u_3 d_{x_2} v_3) \, dx_2 \\ &\quad - \rho_s \omega^2 \int_{\Sigma^s} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx_2 + \rho_f \int_{\Sigma^f} (\alpha_2 d_{x_2} \varphi d_{x_2} \psi - \alpha_2^{-1} k_f^2 \varphi \psi) \, dx_2 \\ &\quad + \rho_f \omega \int_{\gamma^{\text{sf}}} (\varphi(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_s) + \psi(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s)) \, ds(x_2). \end{aligned}$$



### Discrétisation du problème

Comme nous l'avons expliqué en introduction de cette section, discrétiser de façon efficace et précise le problème aux valeurs propres peut nécessiter d'utiliser des éléments finis d'ordre élevé. Or, l'objectif de cette troisième partie du mémoire est avant tout de proposer une méthode d'imagerie de type échantillonnage dans les guides élastiques partiellement immergés. Nous faisons donc le choix de simplicité de discrétiser le problème à l'aide d'éléments finis de Lagrange. Soit  $\mathbf{V}_h^{\text{sf}} := \text{Vect}(\mathbf{w}_i)_{1 \leq i \leq N_h} \subset \mathbf{V}^{\text{sf}}$  un tel espace d'approximation. Nous cherchons ainsi  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $\mathbf{C}_h := (\mathbf{u}_h, \varphi_h) \in \mathbf{V}_h^{\text{sf}}$  non nul satisfaisant :

$$a^\lambda(\mathbf{C}_h, \mathbf{D}_h) = 0, \quad \forall \mathbf{D}_h \in \mathbf{V}_h^{\text{sf}}.$$

Pour  $l \in \{1, 2, 3\}$ , nous notons  $\mathbb{A}_l$  la matrice éléments finis associée à la forme bilinéaire  $a^l$ . Le problème spectral discrétisé peut alors s'écrire sous la forme d'un système matriciel :

$$(\lambda^2 \mathbb{A}_2 + \lambda \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_0) \mathbf{C}_h = 0. \quad (7.94)$$

Introduisons ensuite la variable auxiliaire  $\mathbf{E}_h := \lambda \mathbf{C}_h$  qui permet de transformer le problème quadratique (7.94) en un problème linéaire augmenté :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A}_0 & \mathbb{A}_1 \\ 0 & \mathbb{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_h \\ \mathbf{E}_h \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{A}_2 \\ \mathbb{M} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_h \\ \mathbf{E}_h \end{pmatrix},$$

où  $\mathbb{M}$  est la matrice de masse. Pour une plaque élastique libre, les deux lignes du système peuvent avantageusement être inversées, car cela permet en changeant ensuite le signe de la seconde ligne après inversion de se ramener à un second membre faisant intervenir une matrice hermitienne définie positive, facilitant ainsi la résolution du système à l'aide de solveurs classiques (cf. [Bar09]). Dans notre cas, la présence des PML ne permet pas d'obtenir une telle matrice hermitienne, mais elle est cependant symétrique. En pratique, on observera qu'elle est inversible, ce qui nous permet de nous ramener à un problème aux valeurs propres standard. Après ces manipulations, le problème s'écrit de façon équivalente :

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{M} \\ -\mathbb{A}_0 & -\mathbb{A}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_h \\ \mathbf{E}_h \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \mathbb{M} & 0 \\ 0 & \mathbb{A}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_h \\ \mathbf{E}_h \end{pmatrix}. \quad (7.95)$$

#### 7.4.2 Résultats numériques avec la méthode SAFE-PML

Avant de présenter des résultats numériques, il est important d'expliquer comment filtrer les modes, c'est-à-dire distinguer les différents modes dans une plaque immergée (se référer à la section 7.3.3 pour une description détaillée des modes). Nous suivons pour cela les étapes suivantes.

1. On commence par distinguer les modes SH des autres, ce qui est immédiat étant donné que ce sont les seuls modes ayant une composante  $u_3$  non nulle.
2. On observe que les modes de PML et les modes de quasi-Scholte ont un champ de déplacement dans le solide ayant une petite amplitude par rapport à celle du potentiel des vitesses dans le fluide. Les modes de Lamb ont quant à eux un champ de déplacement d'amplitude bien plus importante. Une comparaison des énergies dans le fluide et dans le solide semble alors pertinente pour séparer les deux catégories de modes. Nous définissons pour cela les énergies cinétiques dans les sections solides et fluides par :

$$E_c^s := \frac{\rho_s \omega^2}{4} \int_{\Sigma^s} |\mathbf{u}|^2 dx_2 \quad \text{et} \quad E_c^f := \frac{\rho_f \omega^2}{4c_f^2} \int_{\Sigma^f} \frac{1}{\alpha_2} |\varphi|^2 dx_2.$$



Si le rapport  $r_E := |E_c^f|/E_c^s$  satisfait  $r_E \leq \tau_E$  pour une tolérance  $\tau_E > 0$  à déterminer en fonction des paramètres du problème, alors le mode considéré est un mode de Lamb à fuite ou inhomogène sortant. Dans le cas contraire on considère que c'est un mode de PML ou un mode de quasi-Scholte.

3. Pour identifier enfin les modes de quasi-Scholte, nous nous basons sur deux propriétés que satisfont les modes exacts : ils sont purement propagatifs dans la direction longitudinale du guide et ont un nombre d'onde longitudinal qui est légèrement supérieur à  $k_f$  en module. De plus, les modes de quasi-Scholte se regroupent par 4 : un couple de modes symétrique et antisymétrique pour chaque sens de propagation longitudinale. Ainsi, parmi les modes satisfaisant  $|\Im m(i\lambda)| > k_f$ , les modes de quasi-Scholte correspondent à ceux pour lesquels la quantité  $|\Re e(i\lambda)|$  est la plus petite. Les modes restants correspondent à des modes de PML.
4. Les modes parasites peuvent enfin être sélectionnés parmi les modes de PML en faisant deux calculs avec des discrétisations différentes ([Qui16]). Contrairement aux autres modes, ils sont en effet très sensibles aux paramètres de discrétisation. Cette procédure est néanmoins coûteuse numériquement.

Précisons maintenant les paramètres choisis pour les calculs de modes que nous allons présenter. On considère une plaque élastique de demi-épaisseur  $h_0 = 1$  cm immergée dans un fluide tronqué par une PML occupant le domaine  $h_1 < |x_2| < h_2$  avec  $h_1 = 2$  cm et  $h_2 = 5$  cm. Plusieurs fluides et solides seront considérés, leurs paramètres mécaniques sont consignés dans la Table 7.1.

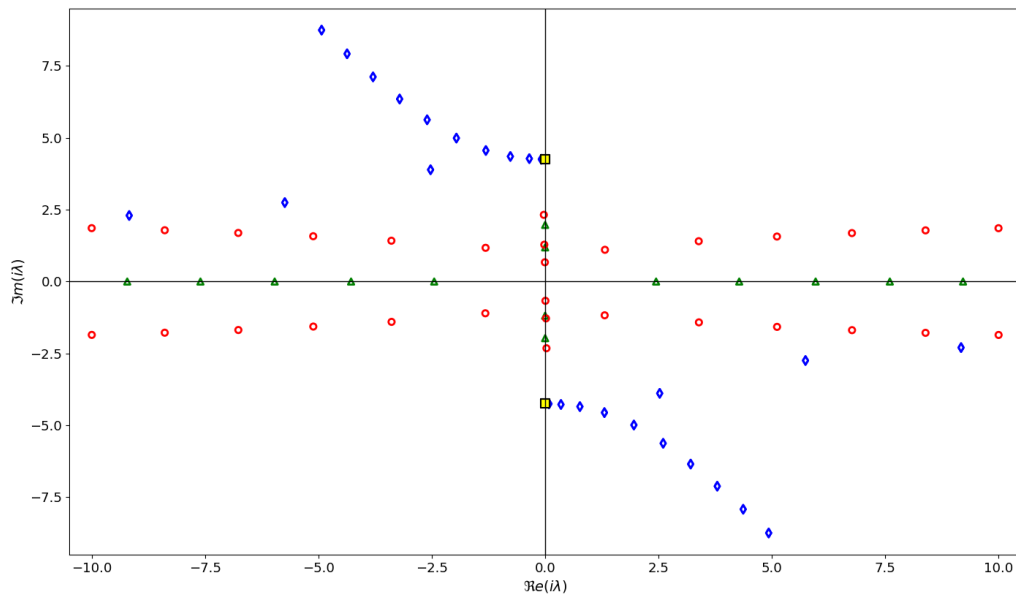
solide	$\lambda_s$ ( GPa)	$\mu_s$ ( GPa)	$\rho_s$ ( kg.m <sup>-3</sup> )
acier	121,15	80,77	$7,9 \cdot 10^3$
aluminium	59,80	26,81	$2,8 \cdot 10^3$
plexiglas	4,22	2,34	$1,19 \cdot 10^3$

fluide	$c_f$ ( m.s <sup>-1</sup> )	$\rho_f$ ( kg.m <sup>-3</sup> )
eau	$1,48 \cdot 10^3$	$1,0 \cdot 10^3$
sodium	$2,52 \cdot 10^3$	$0,93 \cdot 10^3$

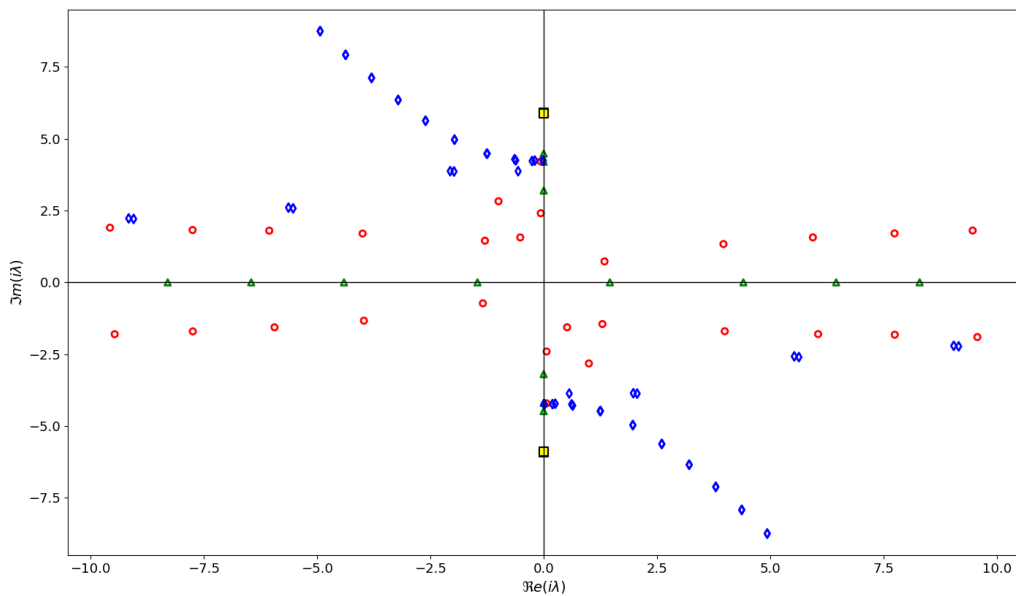
TABLE 7.1: Paramètres matériaux utilisés dans le système d'unités international.

Nous allons travailler à une fréquence de  $\omega = 2\pi \cdot 10^5$  rad.Hz. Le profil de PML considéré dans le fluide est de type abrupt avec  $\alpha_\infty = e^{-i\pi/3}$ . Quant aux paramètres de discrétisation du problème (7.95), on considère un pas de maillage de  $h = 10^{-3}$  cm et nous utilisons des éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}^1$ .

Un premier résultat de calcul est représenté sur la Figure 7.6. En suivant la procédure de filtrage détaillée ci-dessus, on arrive bien à retrouver toutes les catégories de modes attendues. Tout comme pour le cas purement acoustique, on observe un point de branchement au niveau des courbes représentant les modes de PML (voir la Proposition 7.3.4), ce qui indique l'apparition de modes parasites indésirés.



(a) solide : acier, fluide : eau



(b) solide : plexiglas, fluide : eau

FIGURE 7.6: Nombres d'ondes longitudinaux  $i\lambda$  dans le plan complexe. Ronds rouges : modes de Lamb à fuite et inhomogènes sortants, triangles verts : modes SH, carrés jaunes : modes de quasi-Scholte, losanges bleus : modes de PML et modes parasites.

Nous nous penchons ensuite sur le profil des fonctions transverses associées aux modes. Le comportement des différents types de modes dans la section transverse (solide et fluide) est représenté sur la Figure 7.7, qui mérite quelques commentaires.

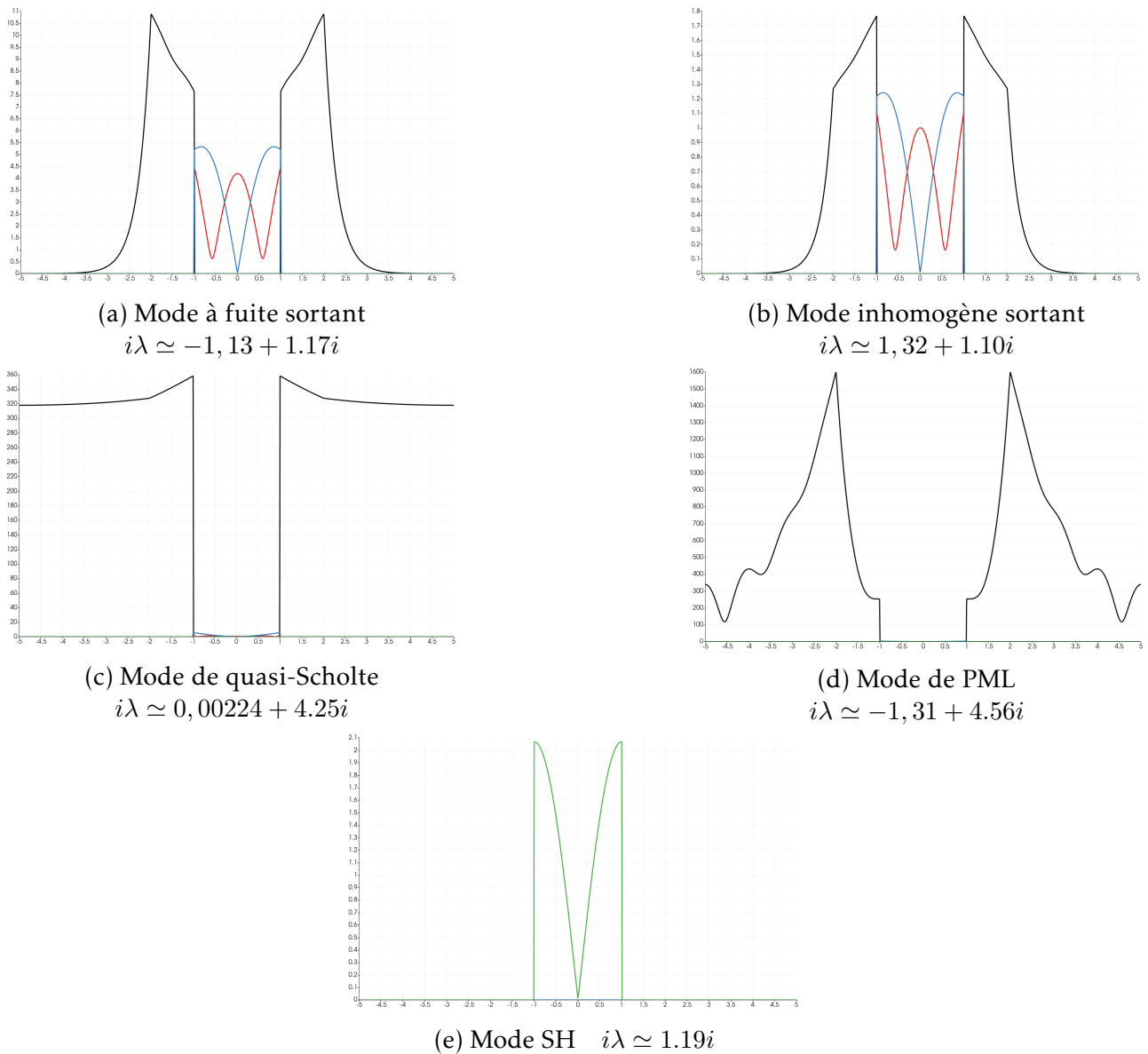


FIGURE 7.7: Représentation des différents types de modes dans la section. En noir :  $|\varphi|$ , en bleu :  $|u_1|$ , en rouge :  $|u_2|$  et en vert  $|u_3|$ .

Nous observons le comportement exponentiellement croissant des modes de Lamb à fuite (sous-figure (a)) dans la partie physique du fluide (c'est-à-dire le domaine  $1 < |x_2| < 2$ ) et exponentiellement décroissant dans les PML (occupant le domaine  $2 < |x_2| < 5$ ). A contrario, les modes de Lamb inhomogènes sortants (sous-figure (b)) ont un comportement exponentiellement décroissant dans la partie physique du fluide. Dans la PML, ce comportement naturellement exponentiellement décroissant est accéléré. On observe sur la sous-figure (c) un mode de quasi-Scholte. Il est de prime abord difficile de reconnaître un mode d'interface. On peut remarquer de façon surprenante que sa décroissance naturelle dans la partie physique du fluide semble ralentie dans les PML. L'amplitude du mode en bout de PML est ainsi importante, ce qui induit des réflexions en bout de PML et par voie de conséquence une mauvaise approximation du mode. Par exemple, on voit que le nombre d'onde longitudinal calculé a une partie réelle positive tandis que sa partie imaginaire est également positive. Il en résulte que le mode approché est exponentiellement croissant dans la direction de propagation. Ce problème sera traité dans la [sous-section 7.4.5](#). La sous-figure (d) montre un mode de PML qui est essentiellement localisé dans le fluide et qui ne présente pas une décroissance

monotone en amplitude dans la PML. Pour finir, un mode SH totalement découplé du fluide est représenté sur la sous-figure (e).

Du point de vue des applications, il est intéressant d'évaluer l'impact de la présence du fluide sur la propagation des ondes élastiques dans la plaque. Pour cela, nous avons comparé les modes d'une plaque isolée avec ceux de la même plaque immergée dans un fluide.

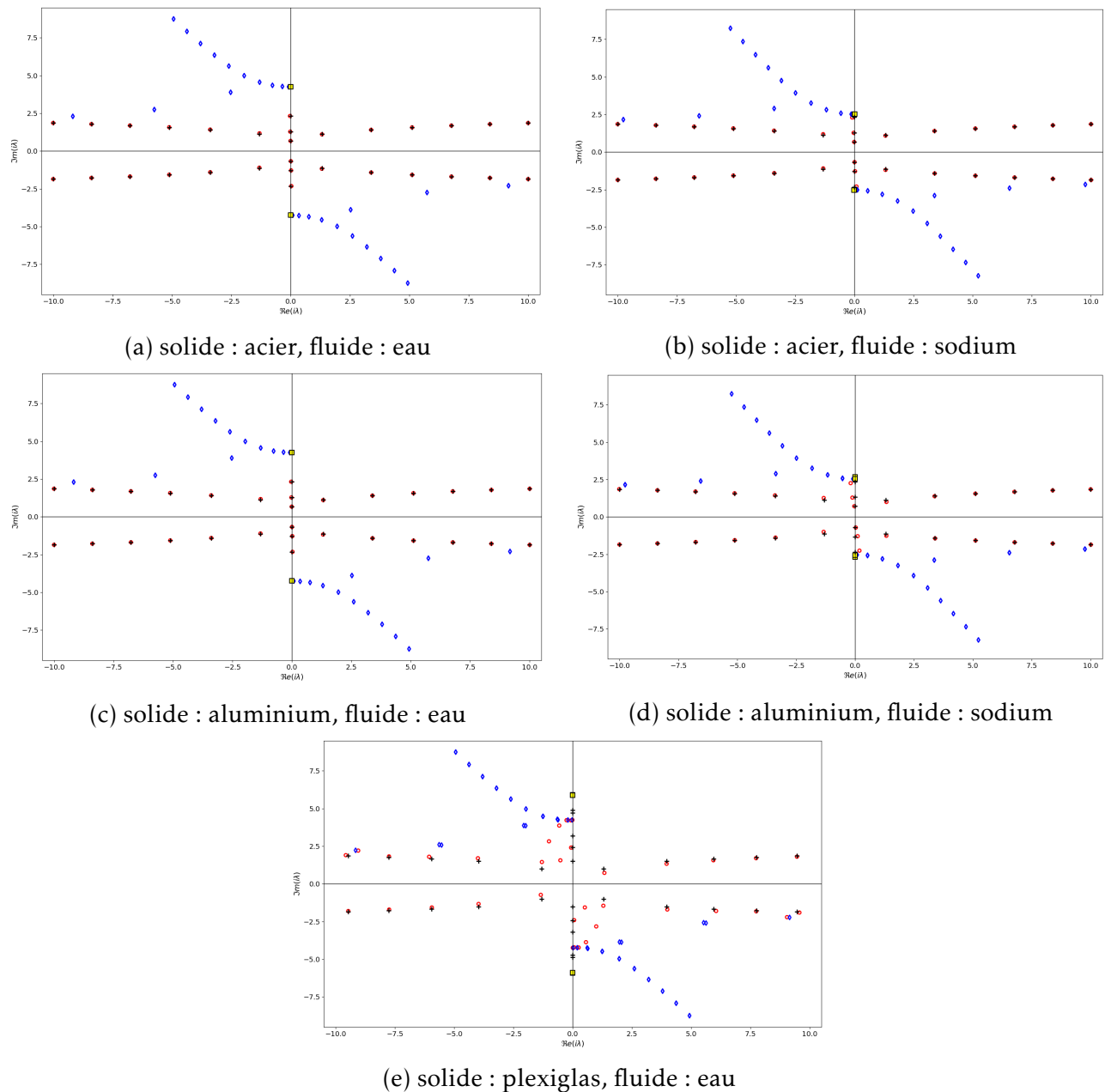


FIGURE 7.8: Comparaison des nombres d'ondes longitudinaux  $i\lambda$  des modes d'une plaque isolée (symboles + en noir) et de la même plaque immergée (autres symboles).

Comme nous pouvons le voir avec la Figure 7.8, l'importance du couplage entre le solide et le fluide varie en fonction des matériaux choisis. Par exemple, on peut observer que les nombres d'ondes longitudinaux des modes de Lamb à fuite et inhomogènes sortants d'une plaque en acier immergée dans de l'eau (sous-figure (a)) coïncident presque avec ceux des modes de Lamb inhomogènes de la plaque isolée. En particulier, les modes de Lamb propagatifs de cette dernière sont faiblement perturbés par la présence du fluide. Il existe

ainsi des modes de Lamb à fuite faiblement atténués qui vont nous permettre de propager des ondes dans la plaque sur de longues distances. A contrario, les modes de Lamb d'une plaque de plexiglas sont fortement perturbés par la présence d'eau (sous-figure (e)). Les modes de Lamb à fuite sont dans ce cas bien plus atténués dans la direction longitudinale.

### 7.4.3 La méthode SAFE-PW

La méthode des ondes partielles (Partial Waves) proposée dans [HI14] permet de calculer de façon très précise les valeurs propres associées aux modes de Lamb à fuite et aux modes de quasi-Scholte en ne discrétisant que la plaque élastique. Lorsque le fluide est infini, les modes guidés (i.e. les solutions exponentiellement décroissantes dans la direction transverse) ainsi que les modes à fuite (i.e. les solutions exponentiellement croissantes dans la direction transverse) sont purement sortants ou entrants dans la direction transverse dans le fluide. La composante fluide du mode s'écrit ainsi soit comme une onde plane provenant de l'infini dans le fluide vers la plaque, soit comme une onde plane se propageant de la plaque vers le fluide : l'onde est alors dite partielle. Comme pour la méthode SAFE-PML, les modes sont les solutions s'écrivant (après changement de variable) sous la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = e^{i\lambda x_1} \mathbf{u}(\mathbf{x}_\Sigma), & \mathbf{x} \in W^s \\ \varphi(\mathbf{x}) = e^{i\lambda x_1} \varphi(\mathbf{x}_\Sigma), & \mathbf{x} \in W^{f,\infty}, \end{cases}$$

du problème :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\lambda, \mathbf{u}, \varphi) \text{ tel que} \\ & \begin{cases} \operatorname{div}^\lambda(\underline{\sigma}^\lambda(\mathbf{u})) + \rho_s \omega^2 \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Sigma^s \\ d_{x_2}^2 \varphi + (k_f^2 - \lambda^2) \varphi = 0 & \text{dans } \Sigma^{f,\infty} \\ \underline{\sigma}^\lambda(\mathbf{u}) \mathbf{n}_s = -\rho_f \omega \varphi \mathbf{n}_s & \text{sur } \gamma^{\text{sf}} \\ \omega(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s) = \nabla_2 \varphi \cdot \mathbf{n}_s & \text{sur } \gamma^{\text{sf}}. \end{cases} \end{aligned}$$

Dans le fluide, les modes peuvent s'écrire :

$$\varphi(x_2) = \begin{cases} A^+ e^{i\beta(\lambda)x_2} & \text{si } x_2 > h_0 \\ A^- e^{-i\beta(\lambda)x_2} & \text{si } x_2 < -h_0, \end{cases}$$

où  $\beta(\lambda)$  a pour seule contrainte de satisfaire  $\beta(\lambda)^2 = k_f^2 - \lambda^2$ , ce qui est une différence majeure par rapport à tout ce que nous avons vu jusqu'à présent où nous choissions une détermination particulière de la racine carrée. On ne présuppose donc rien sur le comportement du mode dans la direction transverse. Nous souhaitons maintenant éliminer le potentiel des vitesses. À cette fin, on remarque que la condition de couplage cinématique s'écrit sur  $\gamma^{\text{sf}} = \{-h_0, h_0\}$  :

$$\omega(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s) = i\beta(\lambda)\varphi.$$

Lorsqu'on injecte cette expression dans l'équation de couplage dynamique on obtient :

$$\underline{\sigma}^\lambda(\mathbf{u}) \mathbf{n}_s = i \frac{\omega^2 \rho_f}{\beta(\lambda)} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s) \mathbf{n}_s.$$

On est donc ramené au problème suivant ne faisant plus intervenir de composante fluide :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\lambda, \mathbf{u}) \text{ tel que} \\ & \begin{cases} \operatorname{div}^\lambda(\underline{\sigma}^\lambda(\mathbf{u})) + \rho_s \omega^2 \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Sigma^s \\ \underline{\sigma}^\lambda(\mathbf{u}) \mathbf{n}_s = i \frac{\omega^2 \rho_f}{\beta(\lambda)} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s) \mathbf{n}_s & \text{sur } \gamma^{\text{sf}}, \end{cases} \end{aligned} \quad (7.96)$$

avec  $\beta(\lambda)^2 = k_f^2 - \lambda^2$ .

**Remarque 7.61** Il est intéressant de remarquer que l'ensemble des couples  $(\lambda, \beta(\lambda))$  de (7.96) présente une symétrie. En effet, si  $(\lambda, \beta(\lambda))$  est solution de (7.96), on montre par conjugaison des équations du problème que  $(\bar{\lambda}, -\bar{\beta}(\lambda))$  est aussi solution.

### Formulation variationnelle du problème

Par des calculs similaires à ceux détaillés à la sous-section 7.4.1, nous montrons que le problème (7.96) admet la formulation variationnelle :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\lambda, \mathbf{u}) \in \mathbb{C} \times ((H^1(\Sigma^s))^3 \setminus \{0\}) \text{ tel que} \\ & a_{PW}^\lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in (H^1(\Sigma^s))^3, \end{aligned}$$

où :

$$a_{PW}^\lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \lambda^2 a_{PW}^2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \lambda a_{PW}^1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a_{PW}^0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \frac{1}{\beta(\lambda)} a_{PW}^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

avec  $\beta(\lambda)^2 = k_f^2 - \lambda^2$  et :

$$\begin{aligned} a_{PW}^2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) & := (\lambda_s + 2\mu_s) \int_{\Sigma^s} u_1 v_1 dx_2 + \mu_s \int_{\Sigma^s} (u_2 v_2 + u_3 v_3) dx_2, \\ a_{PW}^1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) & := -\mu_s \int_{\Sigma^s} (u_2 d_{x_2} v_1 + d_{x_2} u_1 v_2) dx_2 + \lambda_s \int_{\Sigma^s} (u_1 d_{x_2} v_2 + d_{x_2} u_2 v_1) dx_2, \\ a_{PW}^0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) & := (\lambda_s + 2\mu_s) \int_{\Sigma^s} d_{x_2} u_2 d_{x_2} v_2 dx_2 + \mu_s \int_{\Sigma^s} (d_{x_2} u_1 d_{x_2} v_1 + d_{x_2} u_3 d_{x_2} v_3) dx_2 \\ & \quad - \rho_s \omega^2 \int_{\Sigma^s} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx_2, \\ a_{PW}^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) & := -i\omega^2 \rho_f \int_{\gamma^{sf}} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_s) ds(x_2). \end{aligned}$$

L'objectif est maintenant d'éliminer  $\lambda$  de cette formulation pour le remplacer par  $\beta(\lambda)$ . Remarquons pour cela que si  $(\lambda, \mathbf{u})$  est un mode avec  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ , alors  $(-\lambda, \mathbf{u}^-)$  l'est aussi pour  $\mathbf{u}^- := (-u_1, u_2, u_3)$  (voir pour cela la Proposition 7.20), ce qui s'écrit  $a_{PW}^{-\lambda}(\mathbf{u}^-, \mathbf{v}) = 0, \forall \mathbf{v} \in (H^1(\Sigma^s))^3$ . Nous avons alors d'une part :

$$\begin{aligned} 0 & = \frac{1}{2} (a_{PW}^\lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a_{PW}^{-\lambda}(\mathbf{u}^-, \mathbf{v})) \\ & = \lambda^2 [\mu_s \int_{\Sigma^s} (u_2 v_2 + u_3 v_3) dx_2] \\ & \quad + \lambda [-\mu_s \int_{\Sigma^s} d_{x_2} u_1 v_2 dx_2 + \lambda_s \int_{\Sigma^s} u_1 d_{x_2} v_2 dx_2] \\ & \quad + (\lambda_s + 2\mu_s) \int_{\Sigma^s} d_{x_2} u_2 d_{x_2} v_2 dx_2 + \mu_s \int_{\Sigma^s} d_{x_2} u_3 d_{x_2} v_3 dx_2 - \rho_s \omega^2 \int_{\Sigma^s} (u_2 v_2 + u_3 v_3) dx_2 \\ & \quad - i \frac{\omega^2 \rho_f}{\beta(\lambda)} \int_{\gamma^{sf}} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_s) ds(x_2), \end{aligned} \tag{7.97}$$

puis d'autre part :

$$\begin{aligned} 0 & = \frac{\lambda}{2} (a_{PW}^\lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - a_{PW}^{-\lambda}(\mathbf{u}^-, \mathbf{v})) \\ & = \lambda^3 [(\lambda_s + 2\mu_s) \int_{\Sigma^s} u_1 v_1 dx_2] \\ & \quad + \lambda^2 [-\mu_s \int_{\Sigma^s} u_2 d_{x_2} v_1 dx_2 + \lambda_s \int_{\Sigma^s} d_{x_2} u_2 v_1 dx_2] \\ & \quad + \lambda [\mu_s \int_{\Sigma^s} d_{x_2} u_1 d_{x_2} v_1 - \rho_s \omega^2 \int_{\Sigma^s} u_1 v_1 dx_2]. \end{aligned} \tag{7.98}$$

Sommer (7.97) et (7.98) conduit à :

$$\lambda^2 \tilde{a}_{PW}^2(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + \tilde{a}_{PW}^0(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + \frac{1}{\beta(\lambda)} \tilde{a}_{PW}^{-1}(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = 0,$$

où nous avons introduit  $\tilde{\mathbf{u}} := (\tilde{u}_1, u_2, u_3)$  avec  $\tilde{u}_1 := \lambda u_1$  et :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{PW}^2(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) &:= (\lambda_s + 2\mu_s) \int_{\Sigma^s} \tilde{u}_1 v_1 dx_2 + \mu_s \int_{\Sigma^s} (u_2 v_2 + u_3 v_3) dx_2 - \mu_s \int_{\Sigma^s} u_2 d_{x_2} v_1 dx_2 \\ &\quad + \lambda_s \int_{\Sigma^s} d_{x_2} u_2 v_1 dx_2, \\ \tilde{a}_{PW}^0(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) &:= \mu_s \int_{\Sigma^s} d_{x_2} \tilde{u}_1 d_{x_2} v_1 dx_2 - \rho_s \omega^2 \int_{\Sigma^s} \tilde{u}_1 v_1 dx_2 - \mu_s \int_{\Sigma^s} d_{x_2} \tilde{u}_1 v_2 dx_2 \\ &\quad + \lambda_s \int_{\Sigma^s} \tilde{u}_1 d_{x_2} v_2 dx_2 + (\lambda_s + 2\mu_s) \int_{\Sigma^s} d_{x_2} u_2 d_{x_2} v_2 dx_2 + \mu_s \int_{\Sigma^s} d_{x_2} u_3 d_{x_2} v_3 dx_2 \\ &\quad - \rho_s \omega^2 \int_{\Sigma^s} (u_2 v_2 + u_3 v_3) dx_2, \\ \tilde{a}_{PW}^{-1}(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) &:= -i\omega^2 \rho_f \int_{\gamma^{sf}} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_s) ds(x_2). \end{aligned}$$

En utilisant la relation  $\lambda^2 = k_f^2 - \beta(\lambda)^2$  on élimine le paramètre spectral  $\lambda$ , et on se ramène à un nouveau problème aux valeurs propres polynomial d'ordre 3 dans le paramètre  $\beta(\lambda)$  (noté désormais  $\beta$ ) :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } (\beta, \tilde{\mathbf{u}}) \in \mathbb{C} \times ((H^1(\Sigma^s))^3 \setminus \{0\}) \text{ tel que} \\ &-\beta^3 \tilde{a}_{PW}^2(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + \beta(\tilde{a}_{PW}^0(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + k_f^2 \tilde{a}_{PW}^2(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})) + \tilde{a}_{PW}^{-1}(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in (H^1(\Sigma^s))^3. \end{aligned} \quad (7.99)$$

### Discrétisation et linéarisation du problème

Le problème spectral (7.99) est un problème polynomial d'ordre 3 qu'on souhaite linéariser. Nous choisissons de le faire au niveau discret pour faire ressortir la structure matricielle du problème aux valeurs propres généralisés qui en résulte. Soit  $\mathbf{V}_h^s \subset (H^1(\Sigma^s))^3$  un espace de dimension finie engendré par des éléments finis de type Lagrange. Nous introduisons aussi pour  $l \in \{-1, 0, 2\}$  les matrices éléments finis  $\mathbb{A}_{PW}^l$  associées aux formes bilinéaires  $\tilde{a}_{PW}^l$ . Résoudre le problème aux valeurs propres (7.99) discrétisé revient donc à chercher  $\beta \in \mathbb{C}$  et  $\tilde{\mathbf{U}}_h \in \mathbf{V}_h^s \setminus \{0\}$  tels que :

$$(\beta^3 \mathbb{A}_{PW}^2 - \beta(\mathbb{A}_{PW}^0 + k_f^2 \mathbb{A}_{PW}^2) - \mathbb{A}_{PW}^{-1}) \tilde{\mathbf{U}}_h = 0.$$

En introduisant les inconnues auxiliaires  $\tilde{\mathbf{V}}_h := \beta \tilde{\mathbf{U}}_h$  et  $\tilde{\mathbf{W}}_h := \beta \tilde{\mathbf{V}}_h$  on écrit un problème aux valeurs propres généralisé augmenté :

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{A}_{PW}^0 + k_f^2 \mathbb{A}_{PW}^2 & \mathbb{A}_{PW}^{-1} \\ \mathbb{M} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{M} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{W}}_h \\ \tilde{\mathbf{V}}_h \\ \tilde{\mathbf{U}}_h \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{PW}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{M} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{W}}_h \\ \tilde{\mathbf{V}}_h \\ \tilde{\mathbf{U}}_h \end{pmatrix}, \quad (7.100)$$

dans lequel  $\mathbb{M}$  représente la matrice de masse éléments finis. Remarquons que seules les colonnes de  $\mathbb{A}_{PW}^{-1}$  associées aux composantes  $u_{2,h}(\pm h_0)$  de l'inconnue  $\tilde{\mathbf{U}}_h$  sont non nulles. En réordonnant les inconnues et en introduisant  $\tilde{\mathbf{X}}_h^t := \left( \tilde{\mathbf{W}}_h^t \quad \tilde{\mathbf{V}}_h^t \quad u_{2,h}(-h_0) \quad u_{2,h}(h_0) \right)^t$

ainsi que le vecteur  $\tilde{\mathbf{Y}}_h$  des inconnues de  $\tilde{\mathbf{U}}_h$  autres que  $u_{2,h}(\pm h_0)$ , nous pouvons réécrire le problème (7.100) sous une nouvelle forme par blocs :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{C}_{PW}^1 & 0 \\ \mathbb{C}_{PW}^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_h \\ \tilde{\mathbf{Y}}_h \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} \mathbb{D}_{PW}^1 & 0 \\ 0 & \mathbb{D}_{PW}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_h \\ \tilde{\mathbf{Y}}_h \end{pmatrix}. \quad (7.101)$$

Il est facile de voir que 0 est une valeur propre pour des vecteurs propres du type  $\begin{pmatrix} 0 & \tilde{\mathbf{Y}}_h^t \end{pmatrix}^t$  dont la multiplicité géométrique est égale à la taille de l'inconnue  $\tilde{\mathbf{Y}}_h$ . Cette valeur propre n'étant pas physique, on résout donc d'abord le problème :

$$\mathbb{C}_{PW}^1 \tilde{\mathbf{X}}_h = \beta \mathbb{D}_{PW}^1 \tilde{\mathbf{X}}_h,$$

pour obtenir des valeurs propres approchées  $\beta$  du problème initial, puis on résout le système suivant si on veut avoir accès aux différentes composantes du champ de déplacement associées aux modes :

$$\mathbb{D}_{PW}^2 \tilde{\mathbf{Y}}_h = \beta^{-1} \mathbb{C}_{PW}^2 \tilde{\mathbf{X}}_h.$$

Contrairement au calcul des modes utilisant des PML, nous n'imposons pas ici que l'onde soit sortante dans la direction transverse : nous calculons donc des modes sortants et entrants dans la direction transverse. Pour notre application, il faut alors isoler les modes satisfaisant  $\Re(\beta(\lambda)) > 0$  correspondant aux modes sortants dans la direction transverse.

#### 7.4.4 Résultats numériques avec la méthode SAFE-PW

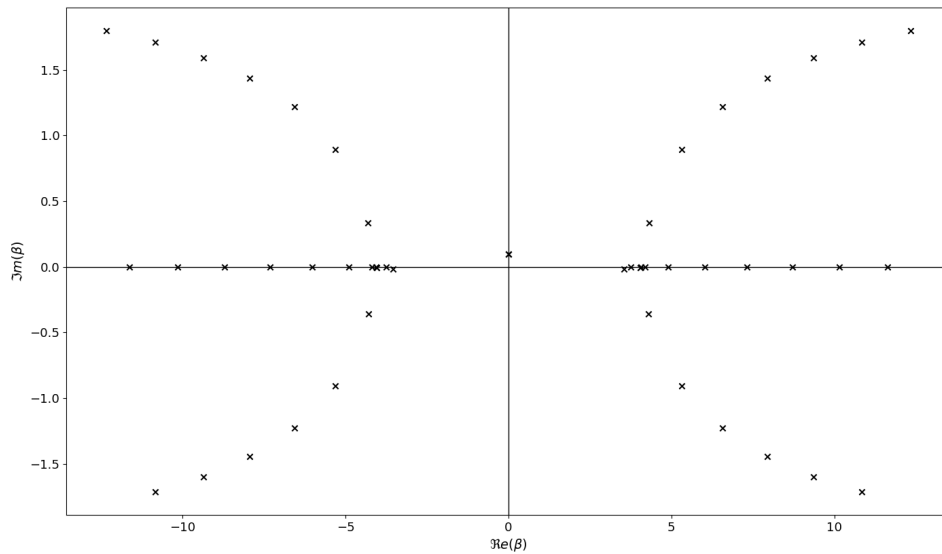
On présente ici des résultats numériques obtenus à l'aide de la méthode des ondes partielles. Les paramètres physiques ainsi que les paramètres de discrétisation sont les mêmes qu'à la [sous-section 7.4.2](#). Nous commençons par représenter sur la Figure 7.9 les valeurs des nombres d'ondes longitudinaux  $\beta$  calculés dans le plan complexe. Décrivons les différents résultats obtenus en détaillant chacune des parties du spectre. De façon préalable, nous rappelons que le comportement des modes dans la direction transverse est donné par :

$$\varphi(x_2) = \begin{cases} A^+ e^{i\beta(\lambda)x_2} & \text{si } x_2 > h_0 \\ A^- e^{-i\beta(\lambda)x_2} & \text{si } x_2 < -h_0. \end{cases}$$

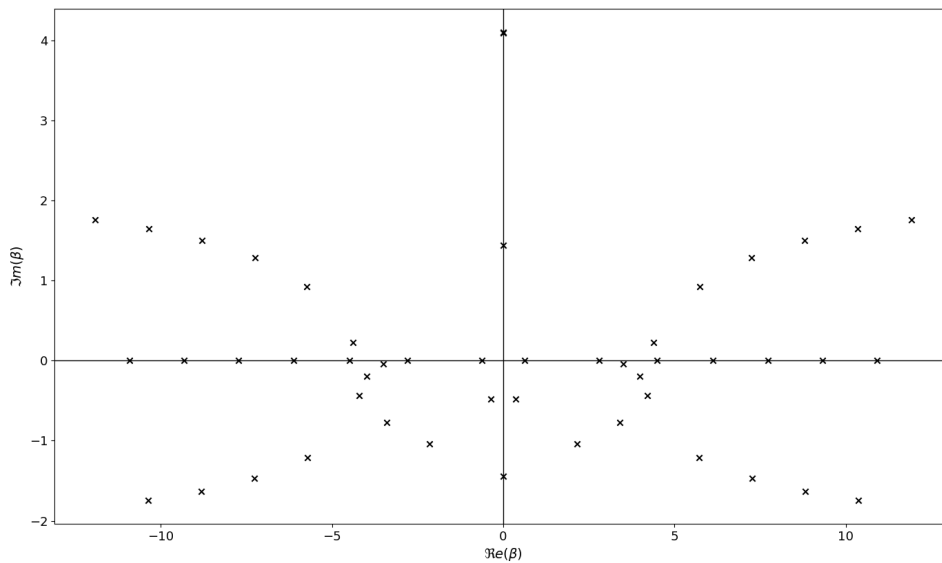
- Cas 1 :  $\Re(\beta)\Im(\beta) = 0$ . Les nombres d'ondes transverses et longitudinaux sont reliés par la relation  $\lambda^2 = k_f^2 - \beta(\lambda)^2 \in \mathbb{R}$ . Les modes associés ont donc des nombres d'onde longitudinaux  $\lambda$  purement réels ou imaginaires, ce qui correspond respectivement à des modes purement propagatifs (modes de quasi-Scholte ou SH) ou évanescents (modes SH).
- Cas 2 :  $\Re(\beta) < 0$  et  $\Im(\beta) < 0$ . Les modes associés sont exponentiellement croissants dans la direction transverse et entrants. Ce sont donc les modes de Lamb à fuite entrants qui sont approchés.
- Cas 3 :  $\Re(\beta) > 0$  et  $\Im(\beta) < 0$ . Les modes associés sont exponentiellement croissants dans la direction transverse et sortants. Ce sont donc les modes de Lamb à fuite sortants qui sont approchés.
- Cas 4 :  $\Re(\beta) < 0$  et  $\Im(\beta) > 0$ . Les modes associés sont exponentiellement décroissants dans la direction transverse et entrants. Ce sont donc les modes de Lamb inhomogènes entrants qui sont approchés.



- Cas 5 :  $\Re(\beta) > 0$  et  $\Im(\beta) > 0$ . Les modes associés sont exponentiellement décroissants dans la direction transverse et sortants. Ce sont donc les modes de Lamb inhomogènes sortants qui sont approchés.



(a) solide : acier, fluide : eau



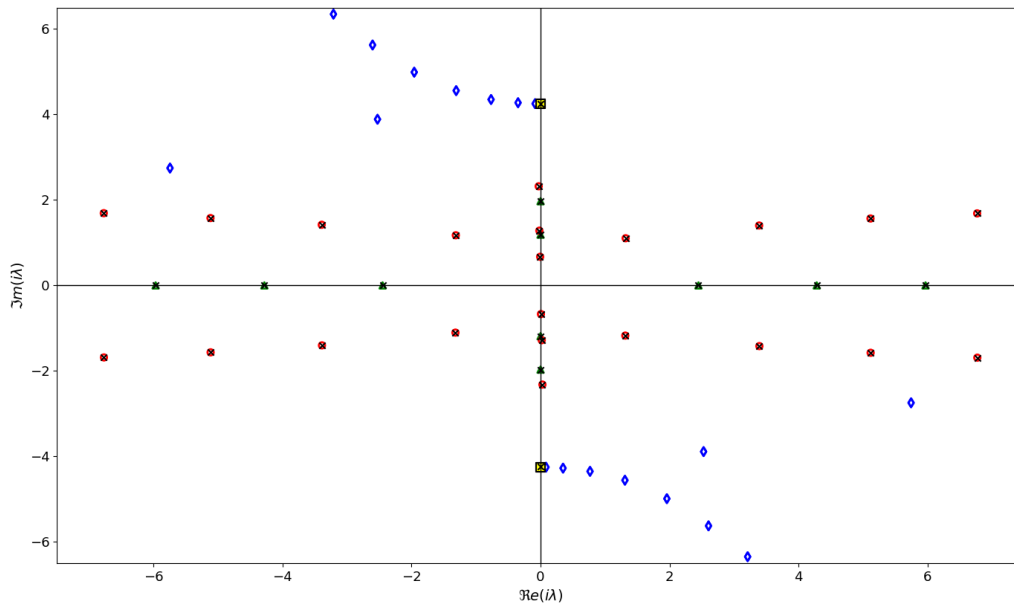
(b) solide : plexiglas, fluide : eau

 FIGURE 7.9: Représentation des nombres d'onde transverses  $\beta$  calculés par la méthode SAFE-PW pour différents matériaux. Paramètres :  $h_0 = 1$  cm,  $\omega = 2\pi \cdot 10^5$  rad.Hz et  $h = 10^{-2}$  cm.

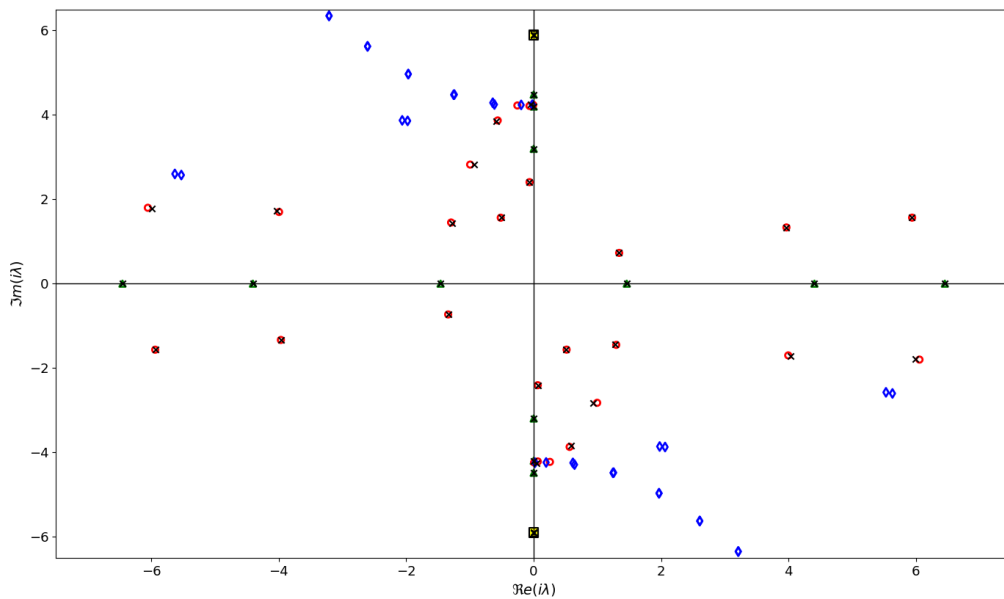
**Remarque 7.62** Si le spectre dans le plan  $\beta$  semble présenter une double symétrie pour une plaque d'acier immergée dans de l'eau (Figure 7.9 (a)), nous observons que ce n'est pas rigoureusement le cas pour le spectre d'une plaque de plexiglas immergée dans de l'eau (Figure 7.9 (b)). Toutefois, nous retrouvons bien la symétrie  $\beta \mapsto -\beta$  théoriquement attendue (cf. Remarque 7.4.3). Il y a en ce sens une certaine forme de dualité entre les modes de Lamb à fuite entrants et sortants, mais aussi entre les modes inhomogènes entrants et sortants.

Contrairement à la méthode SAFE-PML, la méthode SAFE-PW ne nécessite pas de mailler le fluide environnant. Cela permet d'une part de calculer tous les modes du problème indé-

pendamment de leur caractère entrant ou sortant, exponentiellement croissant ou décroissant, mais aussi d'éviter des erreurs d'approximation supplémentaires liées à la troncature du domaine fluide. Nous voulons enfin comparer les résultats obtenus par la méthode SAFE-PML à ceux donnés par la méthode SAFE-PW.



(a) solide : acier, fluide : eau



(b) solide : plexiglas, fluide : eau

FIGURE 7.10: Comparaison des nombres d'ondes longitudinaux  $i\lambda$  associés à des modes sortants donnés par les méthodes SAFE-PW (croix noires) et SAFE-PML (autres symboles colorés).

Comme la Figure 7.10 nous le montre, ces deux méthodes nous donnent des résultats proches pour une plaque d'acier dans de l'eau. La méthode SAFE-PW n'approxime naturellement pas les modes de PML dont la présence est intrinsèquement liée à celle des PML. Pour une plaque de plexiglas, les deux méthodes donnent des résultats sensiblement différents. Par exemple, il est possible de voir un écart d'approximation des modes à fuite sortants localisés

sur les quarts de plan  $\Re(i\lambda)\Im(i\lambda) < 0$ .

### 7.4.5 Traitement des modes de quasi-Scholte

Les expérimentations numériques conduites précédemment révèlent que les modes de quasi-Scholte sont mal calculés avec la méthode SAFE-PML. Nous souhaitons cependant tronquer transversalement le fluide par des PML en vue de la résolution du problème direct. En effet, nous voudrions proposer une méthode de résolution permettant de prendre en compte des hétérogénéités localisées à la surface de la plaque élastique. De plus, nous souhaitons développer une méthode modale pour tronquer le domaine dans la direction axiale du guide afin de résoudre le problème direct. Il est donc nécessaire d'utiliser des modes qui d'une part sont définis sur la totalité de la section (fluide et solide) et qui d'autre part satisfont une relation de biorthogonalité, ce que ne permet pas la méthode SAFE-PW.

Cette sous-section sera divisée en deux parties. Nous commencerons par expliquer la mauvaise approximation des modes de quasi-Scholte par la méthode SAFE-PML en nous appuyant sur leurs propriétés physiques. Dans un second temps, nous tenterons de montrer comment il est possible en 2D d'améliorer le calcul de ces modes avec une PML en la couplant avec la méthode SAFE-PW.

#### Mauvaise approximation des modes de quasi-Scholte par la méthode SAFE-PML

Commençons par considérer une interface entre deux demi-plans, l'un occupé par un solide et l'autre par un fluide. Il a été montré dans [Vin13] qu'il existe, quels que soient la fréquence et les matériaux considérés, un unique mode appelé mode de Scholte, se propageant sans atténuation le long de cette interface. De plus, ce mode se propage le long de l'interface à une vitesse légèrement inférieure à celle des ondes longitudinales acoustiques dans le fluide. Son nombre d'onde longitudinal vérifie alors  $i\lambda^{\text{QS}} \in i\mathbb{R}$ , avec  $|\lambda^{\text{QS}}| > k_f$ . Puisqu'une plaque immergée possède deux interfaces avec le fluide, il y a dans ce cas deux modes d'interfaces appelés modes de quasi-Scholte. Les modes de quasi-Scholte ont un comportement dispersif à basse fréquence devenant non dispersif à haute fréquence. Ce sont aussi des modes purement évanescents (c'est-à-dire exponentiellement décroissants) dans la direction transverse qui sont donc localisés dans le fluide sur quelques longueurs d'ondes de part et d'autre de la plaque. De plus, la décroissance exponentielle des modes de quasi-Scholte est d'autant plus rapide que la fréquence est élevée. Une description plus précise de la localisation de ces modes nécessite de distinguer plusieurs cas selon les vitesses des ondes dans le solide et dans le fluide (voir [NDL90]).

1. Lorsque  $c_f < c_s < c_p$  (ex : plaque d'acier dans de l'eau) : l'énergie de l'onde est essentiellement localisée dans le fluide et la décroissance du mode dans la direction transverse est relativement lente.
2. Lorsque  $c_s < c_f < c_p$  ou  $c_s < c_p < c_f$  (ex : plaque de plexiglas dans de l'eau) : l'énergie est principalement localisée dans le solide et décroît rapidement dans le fluide.

À haute fréquence, les comportements des modes de quasi-Scholte au voisinage des deux interfaces deviennent presque découplés. En effet, les deux modes de quasi-Scholte sont chacun, localement au voisinage des deux interfaces, quasiment identiques à un mode de Scholte en présence d'une seule interface entre un solide infini et un fluide infini. En particulier, lorsque les deux côtés de la plaque sont en contact avec des fluides de même nature, le couple de modes de quasi-Scholte tend vers un couple de modes se propageant presque à la vitesse du mode de Scholte associé au matériau élastique du cœur et au fluide environnant. D'après l'étude paramétrique conduite dans [Öne17], les modes de quasi-Scholte sont moins sensibles

aux variations du ratio  $\rho_s/\rho_f$  qu'à celles du ratio  $c_p/c_f$ . Ces modes peuvent être générés par la réflexion d'ondes de volume sur la surface du solide, ou par conversion d'un mode de Rayleigh dans une structure partiellement immergée (voir pour cela [NDL90]). Le lecteur désireux d'en savoir plus sur ces modes, en particulier sur les aspects expérimentaux liés à la façon de les exciter et de les mesurer, pourra se référer par exemple à [NDL90; Fav96; FR97; DQ83; YT15].

Plusieurs travaux ont récemment soulevé les difficultés d'approximation numérique des modes de quasi-Scholte par la méthode SAFE-PML, en particulier avec les mêmes paramètres de PML et de discrétisation que pour les modes de Lamb à fuite (voir [Neč18; AG17]). Deux solutions pour mieux approcher les modes de quasi-Scholte avec des PML (dont le profil est parabolique) sont proposées dans [Qui16, Chapitre 7]. La première est d'augmenter la fréquence, ce qui permet d'augmenter la localisation des modes de quasi-Scholte au voisinage des deux interfaces (voir Figure 7.11). Ceci n'est pas satisfaisant puisque nous souhaitons être en mesure de les approximer quelle que soit la fréquence.

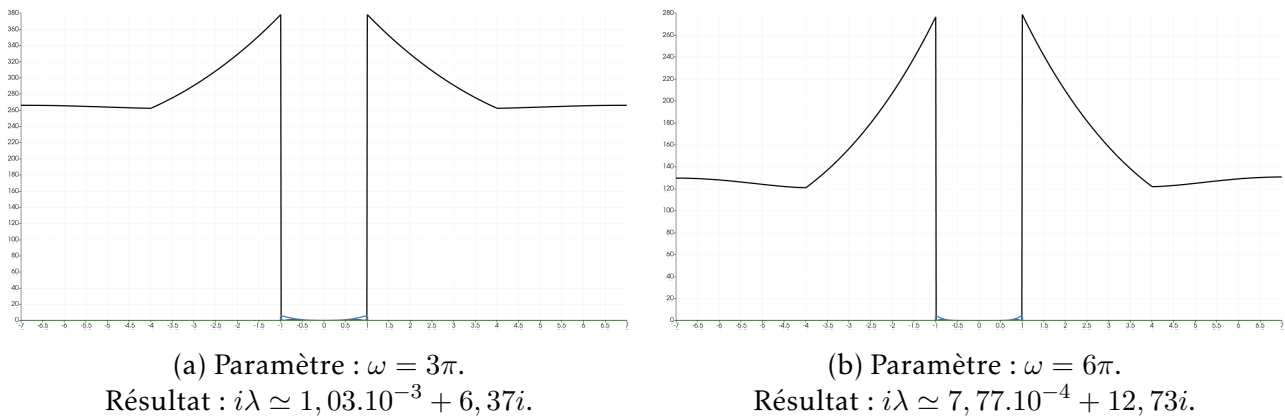


FIGURE 7.11: Représentation des modes de quasi-Scholte pour deux fréquences différentes. En noir :  $|\varphi|$ , en bleu :  $|u_1|$ , en rouge :  $|u_2|$  et en vert  $|u_3|$ . Paramètres :  $h_0 = 1$ ,  $h_1 = 4$   $h_2 = 7$ , PML abrupte avec  $\alpha_\infty = e^{-i\pi/3}$ .

Il est aussi proposé d'éloigner la PML de la plaque élastique pour tirer parti de la décroissance exponentielle naturelle des modes de quasi-Scholte qui semble ralentie dans la PML (voir Figure 7.12). Cette solution n'est pas non plus satisfaisante, car elle implique d'augmenter considérablement le domaine de calcul à basse fréquence. En outre, éloigner la PML de la plaque va favoriser l'apparition de modes parasites proches de l'origine du plan complexe (voir la Figure 4.11 pour une illustration de ce phénomène en acoustique) et détériorer l'approximation des modes de Lamb à fuite qui sont exponentiellement croissants dans la partie physique du domaine fluide (voir Figure 7.7 (a)).

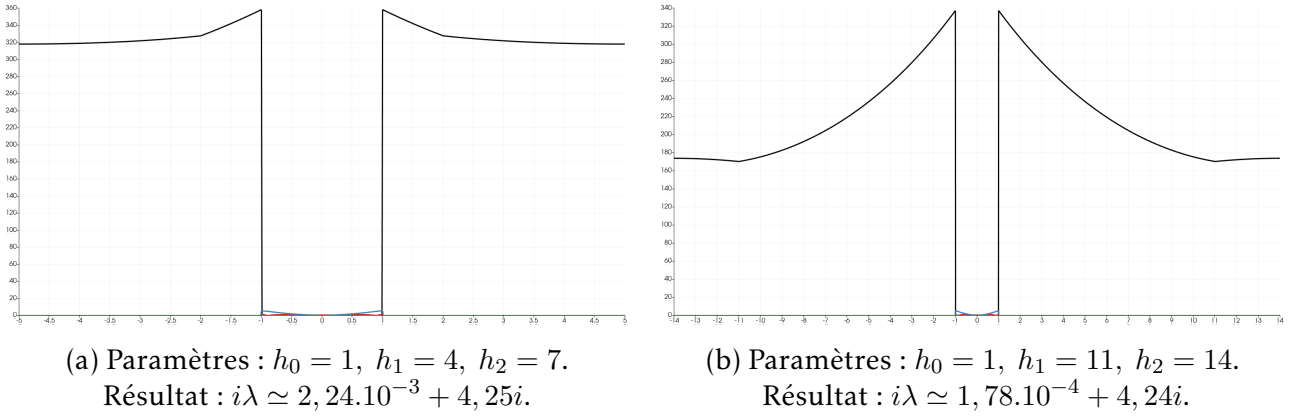


FIGURE 7.12: Représentation des modes de quasi-Scholte pour différentes distances plaque-PML. En noir :  $|\varphi|$ , en bleu :  $|u_1|$ , en rouge :  $|u_2|$  et en vert  $|u_3|$ . Paramètres :  $\omega = 2\pi$ , PML abrupte avec  $\alpha_\infty = e^{-i\pi/3}$ .

Expliquons maintenant par le calcul les observations que nous venons de faire. Considérons un mode de quasi-Scholte de nombre d'onde longitudinal  $i\lambda^{\text{QS}}$ . Puisque les modes de quasi-Scholte sont des modes guidés du problème de départ, ils peuvent s'écrire dans le fluide sous la forme :

$$\varphi^{\text{QS}}(x_2) = \begin{cases} A^- e^{\gamma_f(i\lambda^{\text{QS}})x_2} & \text{si } x_2 < -h_0 \\ A^+ e^{-\gamma_f(i\lambda^{\text{QS}})x_2} & \text{si } x_2 > h_0, \end{cases}$$

où  $\lambda^{\text{QS}} \in \mathbb{R}$  satisfait  $0 < k_f < |\lambda^{\text{QS}}| < k_f + \varepsilon$  pour un réel  $\varepsilon > 0$  petit, d'après les propriétés physiques intrinsèques des modes de quasi-Scholte, et dépendant a priori de tous les paramètres du problème. Ainsi,  $\gamma_f(i\lambda^{\text{QS}}) = \sqrt{(\lambda^{\text{QS}})^2 - k_f^2}$  est purement réel et satisfait  $0 < \gamma_f(i\lambda^{\text{QS}}) < \sqrt{\varepsilon(\varepsilon + 2k_f)}$ . Nous retrouvons ainsi la décroissance exponentielle lente des modes de quasi-Scholte dans la direction transverse à basse fréquence. Lorsqu'une PML infinie est introduite, la fonction transverse de ce mode de quasi-Scholte s'écrit :

$$\varphi^{\text{QS}}(x_2) = \begin{cases} A^- e^{-\gamma_f(i\lambda^{\text{QS}})\eta(-x_2)} & \text{si } x_2 < -h_0 \\ A^+ e^{-\gamma_f(i\lambda^{\text{QS}})\eta(x_2)} & \text{si } x_2 > h_0, \end{cases} \quad (7.102)$$

où on rappelle que :

$$\eta(x_2) := \int_{h_0}^{x_2} \alpha_2^{-1}(t) dt, \quad x_2 > h_0.$$

Cela nous permet de voir que la décroissance du mode en présence de PML dépend directement de  $\Re(\gamma_f(i\lambda^{\text{QS}})\eta(|x_2|))$ . Puisque  $\gamma_f(i\lambda^{\text{QS}})$  est un réel strictement positif fixé, une solution possible pour mieux approcher les modes de quasi-Scholte serait d'augmenter  $\Re(\eta(|x_2|))$ . Supposons pour fixer les idées que nous sommes en présence de PML présentant un profil abrupt, on a alors pour  $|x_2| > h_1$  :

$$\eta(|x_2|) = (h_1 - h_0) + \frac{|x_2| - h_1}{\alpha_\infty},$$

et par suite :

$$\Re(\eta(|x_2|)) = (h_1 - h_0) + (|x_2| - h_1)\Re(\alpha_\infty^{-1}).$$

Cette expression nous montre que les modes de quasi-Scholte peuvent être mieux approchés :

1. en augmentant  $h_1 - h_0$ , c'est-à-dire la distance entre la PML et la plaque ;
2. en augmentant  $|x_2| - h_1$ , ce qui revient à augmenter l'épaisseur de la PML ;
3. ou enfin en augmentant  $\Re(\alpha_\infty^{-1}) > 0$ .

Les deux premières options sont rédhibitoires du point de vue du coût de calcul. La troisième option revient à diminuer la partie réelle de  $\alpha_\infty$  à partie imaginaire fixe, ce qui semble être une meilleure solution. Pourtant, il faut garder à l'esprit que nous cherchons à approcher également les modes de Lamb à fuite sortants. Ces derniers s'écrivent en présence de PML :

$$\varphi^{\text{FS}}(x_2) = \begin{cases} A^- e^{i\beta_f(i\lambda^{\text{FS}})\eta(-x_2)} & \text{si } x_2 < -h_0 \\ A^+ e^{i\beta_f(i\lambda^{\text{FS}})\eta(x_2)} & \text{si } x_2 > h_0, \end{cases}$$

avec  $\beta_f(i\lambda^{\text{FS}}) = \sqrt{k_f^2 + (i\lambda^{\text{FS}})^2}$ . En développant l'expression du mode pour  $x_2 > h_1$ , on obtient :

$$\varphi^{\text{FS}}(x_2) = A^+ e^{-\left(\Re(\beta_f)\Im(\eta(x_2)) + \Im(\beta_f)\Re(\eta(x_2))\right)} e^{i\left(\Re(\beta_f)\Re(\eta(x_2)) - \Im(\beta_f)\Im(\eta(x_2))\right)}.$$

Or les modes de Lamb à fuite sortants satisfont  $\Im((i\lambda^{\text{FS}})^2) < 0$ , ainsi  $\Re(\beta_f(i\lambda^{\text{FS}})) > 0$  et  $\Im(\beta_f(i\lambda^{\text{FS}})) < 0$ . Augmenter  $\Re(\eta)$  à  $\Im(\eta)$  fixé a donc deux effets sur eux :

1. réduire la vitesse de décroissance transverse des modes à fuite, voire l'annuler ;
2. augmenter les oscillations de ces derniers, ce qui nécessite un maillage très fin pour continuer à les approcher correctement.

Il est donc particulièrement difficile d'imposer une décroissance exponentielle rapide de façon simultanée aux modes de Lamb à fuite et aux modes de quasi-Scholte en ne jouant que sur les paramètres de la PML et sans altérer leur approximation. Nous allons donc proposer une approche différente.

### Une proposition de stratégie pour traiter les modes de quasi-Scholte

Nous rappelons que l'objectif est d'approcher numériquement de façon précise et simultanée les modes de quasi-Scholte et les modes de Lamb. Nous voulons que la méthode proposée satisfasse les points suivants :

1. Les modes de Lamb à fuite et les modes de quasi-Scholte doivent être bien approchés, ce qui implique pour ces derniers :
  - une bonne détermination de leur nombre d'onde longitudinal  $i\lambda^{\text{QS}}$ , en particulier avec le bon signe de la partie réelle due à la troncature de la PML pour ne pas avoir une croissance exponentielle du mode dans la direction axiale du guide ;
  - l'absence de réflexion de ces modes en bout de PML.
2. Les modes calculés satisfont toujours une relation de biorthogonalité du type (7.83).

Pour satisfaire ces exigences, nous allons adopter une approche différente inspirée de [ZW18], initialement développée pour traiter des modes de Rayleigh se propageant à la surface d'une structure quasi-périodique ouverte. L'idée est la suivante : au lieu de jouer sur les paramètres de la PML pour forcer une décroissance rapide de ces modes dans la direction transverse, nous allons imposer en bout de PML une condition de Robin afin d'amoinrir les réflexions parasites des modes de quasi-Scholte. Puisque les modes de Lamb à fuite et inhomogènes sortants sont quant à eux fortement décroissants dans la PML, leur amplitude en bout de PML est négligeable et ils ne seront pas affectés par cette nouvelle condition aux

limites. Pour obtenir cette condition, nous calculons une première approximation  $i\lambda_0^{\text{QS}}$  du nombre d'onde longitudinal d'un mode de quasi-Scholte à l'aide d'une autre méthode plus précise et peu coûteuse comme la méthode SAFE-PW. Pour une plaque 2D, il existe deux modes de quasi-Scholte se propageant longitudinalement dans chaque sens du guide : un symétrique et un antisymétrique. Pour ne pas favoriser l'un des deux modes, nous choisissons par la suite  $i\lambda_0^{\text{QS}}$  comme la moyenne d'une approximation des nombres d'onde du mode symétrique et antisymétrique. On observe que les nombres d'onde longitudinaux de ces deux modes sont très proches, et ce d'autant plus que la fréquence est élevée. Ce constat nous conduit à traiter tous les modes de quasi-Scholte de la plaque de la même façon. On impose alors aux nouveaux modes approchés de satisfaire en bout de PML la condition :

$$d_{x_2}\varphi = \mp \frac{\gamma_0^{\text{QS}}}{\alpha_2(\pm h_2)}\varphi, \quad x_2 = \pm h_2, \quad (7.103)$$

avec  $\gamma_0^{\text{QS}} := \sqrt{\Re(\lambda_0^{\text{QS}})^2 - k_f^2}$ , qui d'après (7.102) est satisfaite par le mode de quasi-Scholte exact si  $\lambda_0^{\text{QS}} = \lambda_{\text{QS}}$ . Remplacer la condition de Neumann homogène précédemment utilisée par cette condition de Robin ajoute un nouveau terme dans le problème spectral (7.92) de la méthode SAFE-PML. Le nouveau problème s'écrit :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } (\lambda, \mathbf{u}, \varphi) \in \mathbb{C} \times (\mathbf{V}^{\text{sf}} \setminus \{0\}) \text{ tel que} \\ &a_\lambda^{\text{QS}}((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)) = 0, \quad \forall (\mathbf{v}, \psi) \in \mathbf{V}^{\text{sf}}, \end{aligned} \quad (7.104)$$

avec :

$$a_\lambda^{\text{QS}}((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)) := a_\lambda((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)) + \rho_f \gamma_0^{\text{QS}} \int_{\gamma^{\text{pml}}} \varphi \psi \, ds(x_2),$$

la forme bilinéaire  $a_\lambda$  étant définie par (7.93).

Présentons quelques résultats numériques obtenus grâce à cette méthode. Premièrement on considère les paramètres géométriques  $h_0 = 1$  cm,  $h_1 = 2$  cm et  $h_2 = 5$  cm. Pour ce qui est des matériaux, on considère que la plaque est en acier et que le fluide est de l'eau. L'approximation du nombre longitudinal  $i\lambda_0^{\text{QS}}$  des modes de quasi-Scholte est calculée à l'aide de la méthode SAFE-PW, discrétisée avec des éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}^1$  pour un pas de discrétisation de  $h = 10^{-2}$  cm. Le problème (7.104) est aussi discrétisé à l'aide d'éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}^1$  sur un maillage de pas  $h = 5, 0 \cdot 10^{-3}$ . La Figure 7.13 montre dans le cas de PML abruptes qu'utiliser la condition de Robin permet de mieux approcher le nombre longitudinal des modes de quasi-Scholte. En particulier, cela réduit significativement le module de  $\Re(i\lambda)$  tout en lui donnant le bon signe pour avoir une faible décroissance exponentielle dans le sens de propagation.

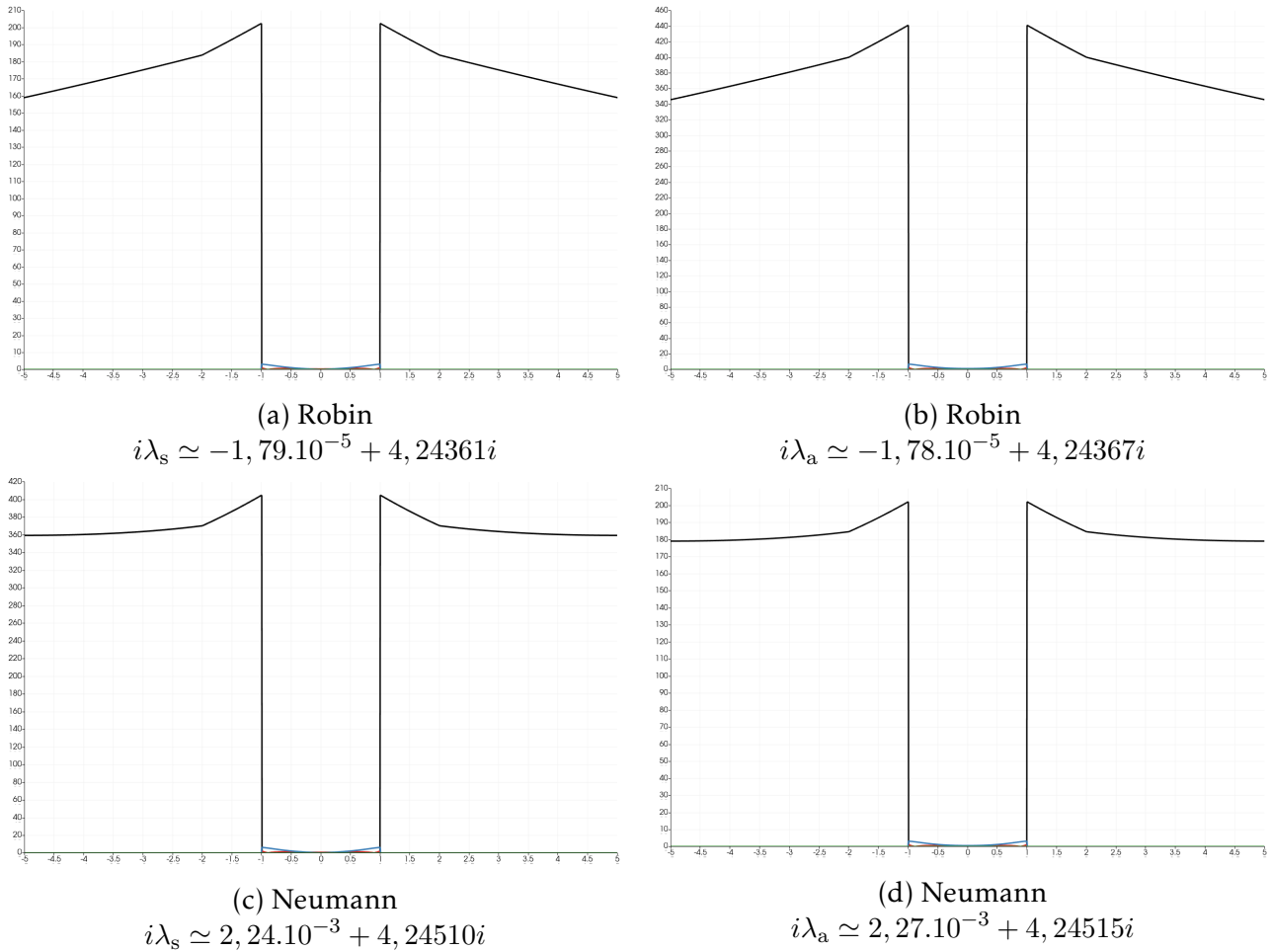


FIGURE 7.13: Représentation des modes de quasi-Scholte symétrique ( $\lambda_s$ ) et antisymétrique ( $\lambda_a$ ) calculés avec une condition de Neumann homogène ou la condition de Robin (7.103). En noir :  $|\varphi|$ , en bleu :  $|u_1|$ , en rouge :  $|u_2|$  et en vert  $|u_3|$ . Paramètres :  $\omega = 2\pi \cdot 10^5$  rad.Hz, profil abrupt de PML avec  $\alpha_\infty = e^{-i\pi/3}$ . Valeurs calculées par la méthode SAFE-PW :  $i\lambda_s \simeq 4,11 \cdot 10^{-18} + 4,24362i$  et  $i\lambda_a \simeq 2,31 \cdot 10^{-17} + 4,24366i$ .

Sur la Figure 7.14, on voit pour un profil parabolique de PML que la partie réelle du nombre d'onde longitudinal  $i\lambda$  est encore plus petite en module, bien qu'elle soit du mauvais signe pour le mode antisymétrique. On conserve en revanche la décroissance du mode dans la PML, ce qui n'était pas le cas avec une condition de Neumann.



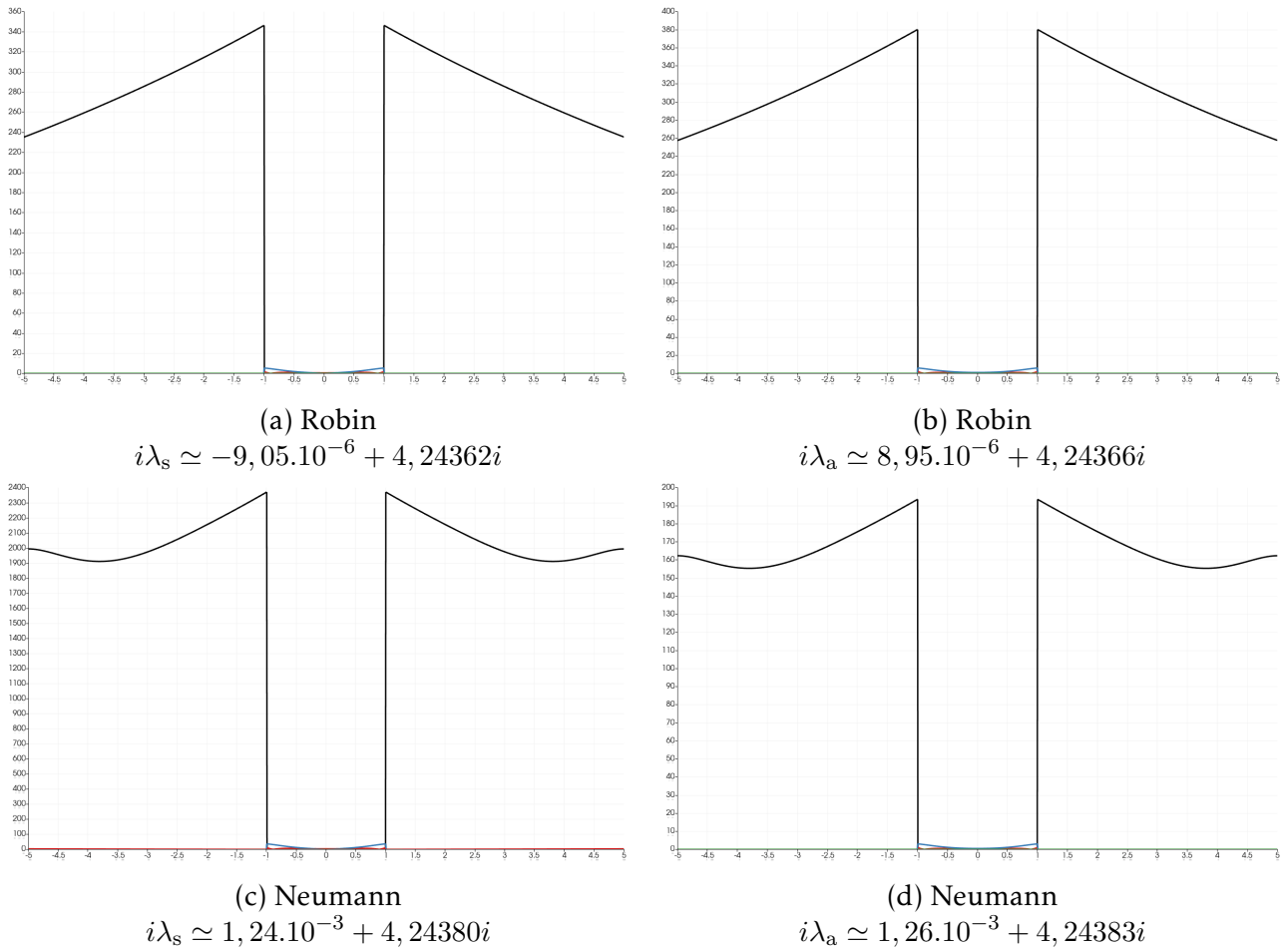


FIGURE 7.14: Représentation des modes de quasi-Scholte symétrique ( $\lambda_s$ ) et antisymétrique ( $\lambda_a$ ) calculés avec une condition de Neumann homogène ou la condition de Robin (7.103). En noir :  $|\varphi|$ , en bleu :  $|u_1|$ , en rouge :  $|u_2|$  et en vert  $|u_3|$ . Paramètres :  $\omega = 2\pi \cdot 10^5$  rad.Hz, profil parabolique de PML (4.31) avec  $\hat{\eta} = 1 + 2i$ . Valeurs calculées par la méthode SAFE-PW :  $i\lambda_s \simeq 4,11 \cdot 10^{-18} + 4,24362i$  et  $i\lambda_a \simeq 2,31 \cdot 10^{-17} + 4,24366i$ .

Nous poursuivons cette étude numérique en mettant en évidence les meilleures performances de la méthode à fréquence plus élevée. En effet, la Figure 7.15 nous montre à des fréquences plus élevées que le module de la partie réelle du nombre d'onde longitudinal est réduit de 6 ordres de grandeur avec la condition de Robin par rapport à la condition de Neumann homogène. Le mauvais signe obtenu dans le cas (b) ne semble ainsi plus un problème en pratique. Ce dernier constat nous conforte dans l'utilisation de cette solution pour mieux approcher les modes de quasi-Scholte étant donné que nous souhaitons adapter la Linear Sampling Method, qui est une méthode d'imagerie haute fréquence, aux guides partiellement immergés.

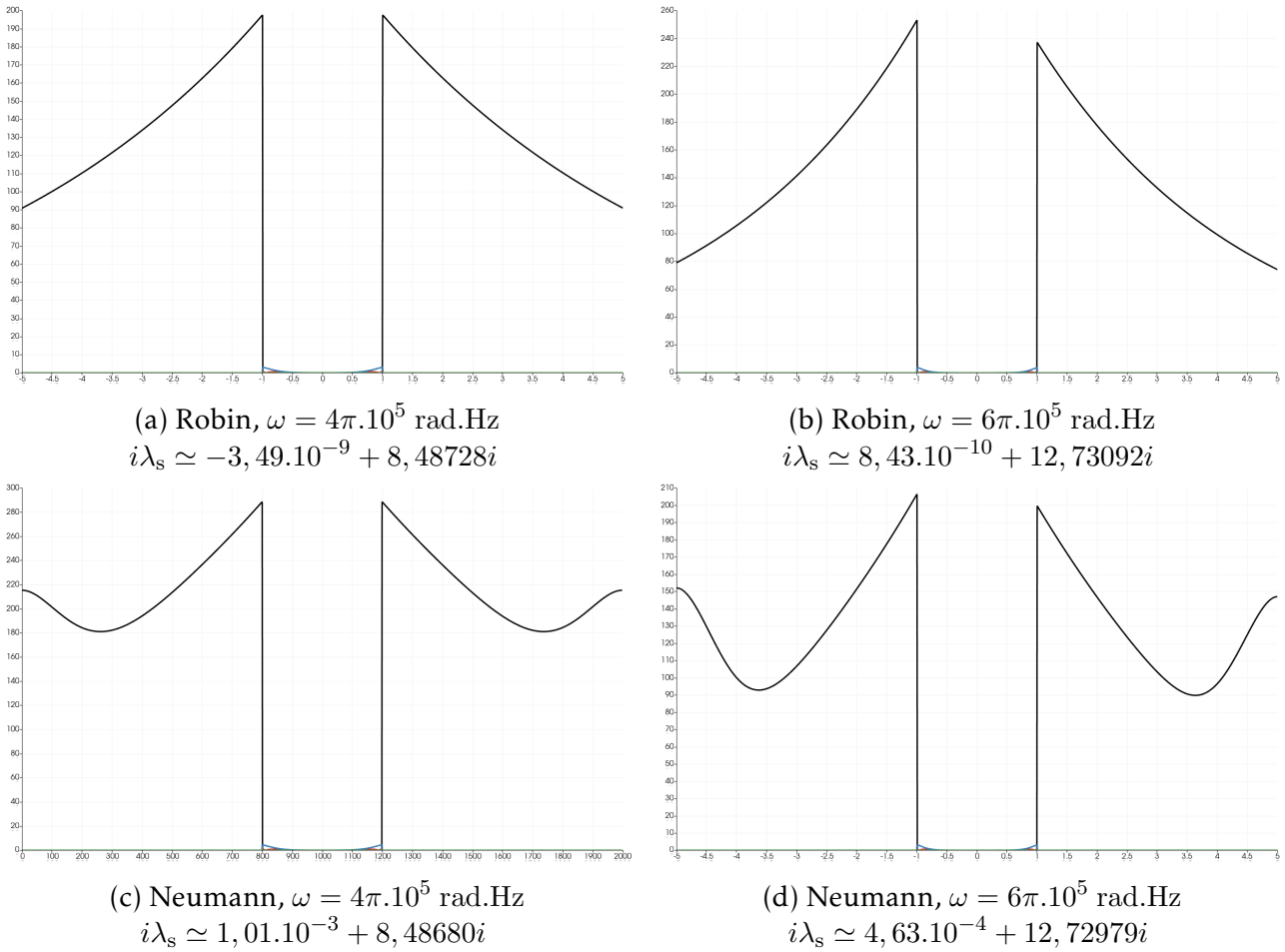


FIGURE 7.15: Représentation des modes de quasi-Scholte symétriques calculés avec une condition de Neumann homogène ou la condition de Robin (7.103) à différentes fréquences. En noir :  $|\varphi|$ , en bleu :  $|u_1|$ , en rouge :  $|u_2|$  et en vert  $|u_3|$ . Paramètres : profil parabolique de PML (4.31) avec  $\hat{\eta} = 1 + 2i$ . Valeurs calculées par la méthode SAFE-PW pour  $\omega = 4\pi \cdot 10^5$  rad.Hz :  $i\lambda_s \simeq -2,60 \cdot 10^{-17} + 8,48728i$ , et pour  $\omega = 6\pi \cdot 10^5$  rad.Hz :  $i\lambda_s \simeq 6,03 \cdot 10^{-18} + 12,73092i$ .

**Remarque 7.63** Il apparaît sur la Figure 7.15 que le mode de quasi-Scholte symétrique ne le soit plus tout à fait pour  $\omega = 6\pi \cdot 10^5$  rad.Hz. Ce constat peut s'expliquer par le découplage à haute fréquence des deux parois de la plaque et par le fait que les modes symétriques et antisymétriques correspondent à des valeurs presque identiques (on observe au voisinage de chaque interface un mode de Scholte). Le solveur utilisé pour résoudre le problème aux valeurs propres (7.104) n'est alors plus en mesure de distinguer correctement les modes de quasi-Scholte symétrique et antisymétrique.

Pour conclure cette étude numérique, nous constatons sur la Figure 7.16 que les modes de Lamb ne sont pas affectés par le changement de condition aux limites en bout de PML tandis que les modes de PML le sont très légèrement. Cela n'aura par la suite pas d'influence étant donné que les modes de PML ne participent pas à la description des ondes dans la partie physique du domaine.

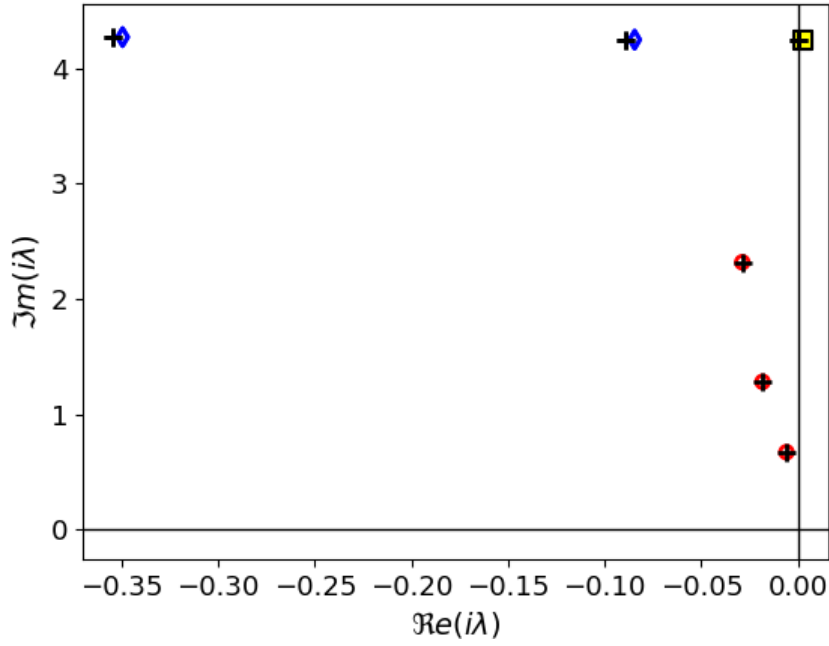


FIGURE 7.16: Premières valeurs propres calculées dans le quart de plan  $\Re(i\lambda) < 0$ ,  $\Im m(i\lambda) > 0$  avec une condition de Neumann et une condition de Robin. Symboles "+" noirs : modes calculés avec la condition de Robin. Autres symboles : modes calculés avec une condition de Neumann homogène (cercles rouges : modes de Lamb à fuite, losanges bleus : modes de PML et carrés jaunes : modes de quasi-Scholte). Paramètres :  $\omega = 2\pi \cdot 10^5$  rad.Hz, PML abrupte avec  $\alpha_\infty = e^{-i\pi/3}$ .

Il reste enfin à vérifier que les nouveaux modes calculés satisfont toujours une relation de biorthogonalité. Pour cela, il faut réécrire le formalisme  $\mathbf{XY}$  développé à la [sous-section 7.3.3](#) en prenant en compte la condition de Robin. Détaillons succinctement les changements qui apparaissent, en revenant à la convention de Kondratiev dans laquelle nous avons écrit au début de ce chapitre le formalisme  $\mathbf{XY}$ . Les nouveaux modes satisfont le problème spectral :

$$\text{Trouver } (\lambda, \mathbf{u}, \varphi) \text{ tel que} \quad \begin{cases} \mathbf{div}^\lambda(\underline{\sigma}^\lambda(\mathbf{u})) + \rho_s \omega^2 \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Sigma^s \\ \alpha_2 d_{x_2}(\alpha_2 d_{x_2} \varphi) + (k_f^2 + \lambda^2) \varphi = 0 & \text{dans } \Sigma^f \\ \underline{\sigma}^\lambda(\mathbf{u}) \mathbf{n}_s = -\rho_f \omega \varphi \mathbf{n}_s & \text{sur } \gamma^{\text{sf}} \\ \omega(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s) = \nabla_2 \varphi \cdot \mathbf{n}_s & \text{sur } \gamma^{\text{sf}} \\ \alpha_2 \partial_{\text{ef}} \varphi = -\gamma_0^{\text{QS}} \varphi & \text{sur } \gamma^{\text{pml}}, \end{cases} \quad (7.105)$$

où les opérateurs différentiels indexés par  $\lambda$  sont obtenus en remplaçant  $\partial_{x_1}$  par  $\lambda I$ ,  $\nabla_2 \cdot := (0 \quad d_{x_2} \quad 0)^t$  et enfin  $\gamma_0^{\text{QS}} := \sqrt{\Im m(\lambda_0^{\text{QS}})^2 - k_f^2} > 0$ , où  $\lambda_0^{\text{QS}}$  désigne ici une approximation du nombre longitudinal des modes de quasi-Scholte donnée par la méthode des ondes partielles, en notation Kondratiev. Le problème (7.105) peut se réécrire sous la forme du problème d'évolution :

$$\text{Trouver } (\lambda, \mathbf{X}^{\text{sf}}, \mathbf{Y}^{\text{sf}}) \text{ tel que} \quad \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{\text{sf}} \\ \mathbf{Y}^{\text{sf}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^{\text{QS}} \\ F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{\text{sf}} \\ \mathbf{Y}^{\text{sf}} \end{pmatrix}.$$

Dans ce nouveau problème d'évolution, l'opérateur  $F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}$  est inchangé par rapport à la [sous-section 7.3.3](#), tandis que l'opérateur  $F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^{\text{QS}}$  est défini comme  $F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$ , mais avec un domaine

modifié pour tenir compte de la condition de Robin en bout de PML :

$$D(F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^{\text{QS}}) = \left\{ \mathbf{Y}^{\text{sf}} := (\mathbf{u}_\Sigma, t_1, \varphi) \in \mathbf{V}_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} \mid \begin{aligned} &\text{div}_\Sigma(\underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{Y}^{\text{S}})) \in (L^2(\Sigma^{\text{S}}))^2, \\ &\alpha_2 d_{x_2}(\alpha_2 d_{x_2} \varphi) \in L^2(\Sigma^{\text{f}}), \alpha_2 \partial_{\mathbf{e}_f} \varphi = -\gamma_0^{\text{QS}} \varphi \text{ sur } \gamma^{\text{pml}}, \\ &\underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{Y}^{\text{S}}) \mathbf{e}_s = -\rho_f \omega \varphi \mathbf{e}_s \text{ et } \omega(\mathbf{u}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_s) = \nabla_\Sigma \varphi \cdot \mathbf{e}_s \text{ sur } \gamma^{\text{sf}} \end{aligned} \right\}.$$

Soit :

$$A_{\text{QS}}^{\text{sf}} := \begin{pmatrix} 0 & F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^{\text{QS}} \\ F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} & 0 \end{pmatrix},$$

l'opérateur de domaine  $D(A_{\text{QS}}^{\text{sf}}) = D(F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}) \times D(F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^{\text{QS}})$ . On a le résultat suivant en 2D.

### Théorème 7.64

Les résultats suivants sont vrais excepté pour un ensemble dénombrable de fréquences.

1.  $A_{\text{QS}}^{\text{sf}}$  est un opérateur fermé à domaine dense dans  $\mathbf{H}^{\text{sf}} \times \mathbf{H}^{\text{sf}}$ .
2. Les opérateur  $F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}$  et  $F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^{\text{QS}}$  sont inversibles.
3. Les opérateur  $F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^{\text{QS}}$  et  $F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^{\text{QS}} F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}$  sont d'inverse compact.
4. Le spectre de  $A_{\text{QS}}^{\text{sf}}$  est constitué d'un ensemble discret de valeurs propres de multiplicité finie.
5. Soient  $(\lambda_n, \mathbf{X}_n^{\text{sf}}, \mathbf{Y}_n^{\text{sf}})$  et  $(\lambda_m, \mathbf{X}_m^{\text{sf}}, \mathbf{Y}_m^{\text{sf}})$  deux modes propres de  $A_{\text{QS}}^{\text{sf}}$  pour  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$  non nuls. Ils vérifient la relation de biorthogonalité :

$$(\lambda_n^2 - \lambda_m^2)(\mathbf{X}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{Y}_m^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} = 0,$$

dans laquelle :

$$(\mathbf{Y}_m^{\text{sf}})^* = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}_\Sigma^m \\ \bar{t}_1^m \\ \bar{b}^{\alpha_\Sigma} \bar{\varphi}^m \end{pmatrix} \text{ avec } \mathbf{Y}_m^{\text{sf}} := \begin{pmatrix} \mathbf{u}_\Sigma^m \\ t_1^m \\ \varphi^m \end{pmatrix}.$$

*Démonstration.* • point 1 : adaptation de la preuve du Lemme 7.38

La preuve est identique pour ce qui est de la densité du domaine. Le caractère fermé découle du point 2.

• points 2 et 3 : adaptation des preuves des Propositions 7.39 et 7.42

Reprendre les intégrations par parties dans les preuves des Propositions 7.39 et 7.42, nous amène à voir qu'un nouveau terme de bord apparaît. Il faut alors remplacer la forme sesquilinéaire  $a_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$ , définie par (7.74) pour une condition de Neumann homogène en bout de PML, par :

$$\begin{aligned} a_{F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^{\text{QS}}}((\mathbf{u}_\Sigma, \varphi), (\mathbf{v}_\Sigma, \psi)) &:= \int_{\Sigma^{\text{S}}} (\lambda_s \text{div}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma) \text{div}_\Sigma(\bar{\mathbf{v}}_\Sigma) + 2\mu_s \underline{\epsilon}_\Sigma(\mathbf{u}_\Sigma) : \underline{\epsilon}_\Sigma(\bar{\mathbf{v}}_\Sigma) - \rho_s \omega^2 \mathbf{u}_\Sigma \cdot \bar{\mathbf{v}}_\Sigma) dx_2 \\ &+ \rho_f \int_{\Sigma^{\text{f}}} (\alpha_2 d_{x_2} \varphi d_{x_2} \bar{\psi} - \alpha_2^{-1} k_f^2 \varphi \bar{\psi}) dx_2 + \rho_f \gamma_0^{\text{QS}} \int_{\gamma^{\text{pml}}} \varphi \bar{\psi} ds(x_2) \\ &+ \rho_f \omega \int_{\gamma^{\text{sf}}} (\varphi(\bar{\mathbf{v}}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_s) + \bar{\psi}(\mathbf{u}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_s)) ds(x_2). \end{aligned}$$

Nous pouvons montrer que l'opérateur linéaire associé à la forme sesquilinéaire  $a_{F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^{\text{QS}}}$  est Fredholm d'indice 0 en utilisant la compacité de l'injection de  $H^1(\Sigma^{\text{f}})$  dans  $L^2(\gamma^{\text{pml}})$ . L'injectivité de cet opérateur se montre de la même façon que dans le cas 2D pour une condition de Neumann homogène en bout de PML en remarquant simplement que  $\gamma_0^{\text{QS}}$  est réel.

- point 4 : adaptation de la preuve du Théorème 7.44

La preuve est identique.

- point 5 : adaptation des preuves de du Lemme 7.47 et de la Proposition 7.48

Tout d'abord, il faut commencer par calculer l'adjoint de l'opérateur  $F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^{\text{QS}}$ . En reprenant les calculs du Lemme 7.47, nous pouvons voir que  $(F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^{\text{QS}})^*$  est défini formellement comme  $(F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}})^*$ , à la différence près que son domaine est donné par :

$$D((F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^{\text{QS}})^*) = \left\{ \mathbf{Y}^{\text{sf}} := (\mathbf{u}_\Sigma, t_1, \varphi) \in \mathbf{V}_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} \mid \begin{aligned} \mathbf{div}_\Sigma(\underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{Y}^{\text{s}})) &\in (L^2(\Sigma^{\text{s}}))^2, \\ d_{x_2}(\overline{\alpha_2} d_{x_2}(\overline{\alpha_2} \varphi)) &\in L^2(\Sigma^{\text{f}}), \partial_{\mathbf{e}_f}(\overline{\alpha_2} \varphi) = -\gamma_0^{\text{QS}} \varphi \text{ sur } \gamma^{\text{pml}}, \\ \underline{\sigma}_\Sigma(\mathbf{Y}^{\text{s}}) \mathbf{e}_s &= -\rho_f \omega \varphi \mathbf{e}_s \text{ et } \omega(\mathbf{u}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_s) = \nabla_\Sigma \varphi \cdot \mathbf{e}_s \text{ sur } \gamma^{\text{sf}} \end{aligned} \right\}.$$

Prouvons-le en ne détaillant que les calculs qui changent dans la preuve du Lemme 7.47. Soit  $\mathbf{Y}^{\text{sf}} \in D(F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^{\text{QS}})$  et  $\tilde{\mathbf{Y}}^{\text{sf}} \in \mathbf{V}_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$ . Les calculs dans  $\Sigma^{\text{s}}$  sont inchangés. Pour ce qui est des calculs dans  $\Sigma^{\text{f}}$ , repartons de l'équation (7.82) qui s'écrit en 2D :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma^{\text{f}}} \alpha_2 d_{x_2}(\alpha_2 d_{x_2} \varphi) \bar{\varphi} dx_2 &= \int_{\Sigma^{\text{f}}} \varphi d_{x_2}(\alpha_2 d_{x_2}(\alpha_2 \bar{\varphi})) dx_2 + \int_{\gamma^{\text{sf}} \cup \gamma^{\text{pml}}} \alpha_2^2 \partial_{\mathbf{e}_f} \varphi \bar{\varphi} ds(x_2) \\ &\quad - \int_{\gamma^{\text{sf}} \cup \gamma^{\text{pml}}} \alpha_2 \partial_{\mathbf{e}_f}(\alpha_2 \bar{\varphi}) \varphi ds(x_2). \end{aligned}$$

Utiliser les conditions de couplages sur  $\gamma^{\text{sf}}$  et de Robin sur  $\gamma^{\text{pml}}$  satisfaites par  $\varphi$  donne :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma^{\text{f}}} \alpha_2 d_{x_2}(\alpha_2 d_{x_2} \varphi) \bar{\varphi} dx_2 &= \int_{\Sigma^{\text{f}}} \varphi d_{x_2}(\alpha_2 d_{x_2}(\alpha_2 \bar{\varphi})) dx_2 - \gamma_0^{\text{QS}} \int_{\gamma^{\text{pml}}} \alpha_2 \varphi \bar{\varphi} ds(x_2) \\ &\quad - \omega \int_{\gamma^{\text{sf}}} (\mathbf{u}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_s) \bar{\varphi} dx_2 - \int_{\gamma^{\text{sf}} \cup \gamma^{\text{pml}}} \alpha_2 \partial_{\mathbf{e}_f}(\alpha_2 \bar{\varphi}) \varphi ds(x_2). \end{aligned}$$

Par conséquent, il vient :

$$\begin{aligned} &(F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^{\text{QS}} \mathbf{Y}^{\text{sf}}, \tilde{\mathbf{Y}}^{\text{sf}})_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} \\ &= - \int_{\Sigma^{\text{s}}} \mathbf{u}_\Sigma \cdot (\mathbf{div}_\Sigma(\underline{\sigma}_\Sigma(\tilde{\mathbf{Y}}^{\text{s}})) + \rho_s \omega^2 \tilde{\mathbf{u}}_\Sigma) dx_2 - \int_{\Sigma^{\text{s}}} t_1 (\alpha_s \mathbf{div}_\Sigma(\tilde{\mathbf{u}}_\Sigma) + \frac{\alpha_s}{\lambda_s} \tilde{t}_1) dx_2 \\ &\quad - \rho_f \int_{\Sigma^{\text{f}}} \varphi (d_{x_2}(\alpha_2 d_{x_2}(\alpha_2 \bar{\varphi})) + k_f^2 \bar{\varphi}) dx_2 + \rho_f \omega \int_{\gamma^{\text{sf}}} ((\tilde{\mathbf{u}}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_s) \varphi + (\mathbf{u}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_s) \bar{\varphi}) ds(x_2) \\ &\quad + \rho_f \gamma_0^{\text{QS}} \int_{\gamma^{\text{pml}}} \alpha_2 \varphi \bar{\varphi} ds(x_2) + \rho_f \int_{\gamma^{\text{sf}} \cup \gamma^{\text{pml}}} \alpha_2 \partial_{\mathbf{e}_f}(\alpha_2 \bar{\varphi}) \varphi ds(x_2) + \int_{\gamma^{\text{sf}}} (\underline{\sigma}_\Sigma(\tilde{\mathbf{Y}}^{\text{s}}) \mathbf{e}_s) \cdot \mathbf{u}_\Sigma ds(x_2). \end{aligned}$$

Si on choisit enfin  $\tilde{\mathbf{Y}}^{\text{sf}} \in D((F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^{\text{QS}})^*)$ , les intégrales sur  $\gamma^{\text{sf}}$  et  $\gamma^{\text{pml}}$  se compensent, et nous obtenons :

$$\begin{aligned} (F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^{\text{QS}} \mathbf{Y}^{\text{sf}}, \tilde{\mathbf{Y}}^{\text{sf}})_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} &= - \int_{\Sigma^{\text{s}}} \mathbf{u}_\Sigma \cdot (\mathbf{div}_\Sigma(\underline{\sigma}_\Sigma(\tilde{\mathbf{Y}}^{\text{s}})) + \rho_s \omega^2 \tilde{\mathbf{u}}_\Sigma) dx_2 - \int_{\Sigma^{\text{s}}} t_1 (\alpha_s \mathbf{div}_\Sigma(\tilde{\mathbf{u}}_\Sigma) + \frac{\alpha_s}{\lambda_s} \tilde{t}_1) dx_2 \\ &\quad - \rho_f \int_{\Sigma^{\text{f}}} \varphi (\overline{d_{x_2}(\alpha_2 d_{x_2}(\alpha_2 \bar{\varphi}))} + k_f^2 \bar{\varphi}) dx_2 \\ &=: (\mathbf{Y}^{\text{sf}}, (F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^{\text{QS}})^* \tilde{\mathbf{Y}}^{\text{sf}})_{\mathbf{H}^{\text{sf}}}. \end{aligned}$$

Une fois l'adjoint de l'opérateur  $F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^{\text{QS}}$  calculé, la relation de biorthogonalité s'obtient en suivant rigoureusement toutes les étapes de la démonstration de la Proposition 7.48 en remplaçant simplement  $F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}$  par  $F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}^{\text{QS}}$ .  $\square$

Nous venons donc de vérifier que la méthode proposée pour mieux approcher les modes de quasi-Scholte par la méthode SAFE-PML satisfait bien tous les critères énoncés précédemment.

Il est possible d'apporter des éléments de justification supplémentaires à la méthode proposée en utilisant la relation de dispersion satisfaite par les nouveaux modes.

#### Lemme 7.65

On a l'équivalence entre les deux points suivants :

1.  $\lambda$  est une solution de (7.105) ne correspondant pas à un mode SH;
2.  $\lambda$  est racine de la relation de dispersion :

$$f_{2,a}^{\text{QS}}(\lambda) \cdot f_{2,s}^{\text{QS}}(\lambda) = 0, \quad (7.106)$$

où :

$$f_{2,a}^{\text{QS}}(\lambda) := \frac{\omega^2 \rho_f \cos(\beta_f(\lambda)\eta(h_2)) - ir_0^{\text{QS}}(\lambda) \sin(\beta_f(\lambda)\eta(h_2))}{\beta_f(\lambda) \sin(\beta_f(\lambda)\eta(h_2)) + ir_0^{\text{QS}}(\lambda) \cos(\beta_f(\lambda)\eta(h_2))} - \left( s(\lambda) \tan(\beta_s(\lambda)h_0) + p(\lambda) \tan(\beta_p(\lambda)h_0) \right)$$

$$f_{2,s}^{\text{QS}}(\lambda) := \frac{\omega^2 \rho_f \cos(\beta_f(\lambda)\eta(h_2)) - ir_0^{\text{QS}}(\lambda) \sin(\beta_f(\lambda)\eta(h_2))}{\beta_f(\lambda) \sin(\beta_f(\lambda)\eta(h_2)) + ir_0^{\text{QS}}(\lambda) \cos(\beta_f(\lambda)\eta(h_2))} + \left( s(\lambda) \cotan(\beta_s(\lambda)h_0) + p(\lambda) \cotan(\beta_p(i\lambda)h_0) \right),$$

où  $r_0^{\text{QS}}$  est donné par :

$$r_0^{\text{QS}}(\lambda) := \frac{i\gamma_0^{\text{QS}}}{\beta_f(\lambda)}.$$

Les racines de  $f_{2,a}^{\text{QS}}$  (respectivement  $f_{2,s}^{\text{QS}}$ ) correspondent à des modes antisymétriques (respectivement symétriques).

*Démonstration.* Cette relation de dispersion s'obtient en adaptant les calculs développés pour prouver le Lemme 7.55.  $\square$

**Remarque 7.66** Pour valider l'expression (7.106), nous pouvons prendre  $\gamma_0^{\text{QS}} = 0$ , ce qui revient à imposer une condition de Neumann homogène au lieu d'une condition de Robin en bout de PML. Cette expression se simplifie alors directement en la relation de dispersion (7.88) obtenue précédemment pour une condition de Neumann homogène.

Nous nous plaçons à haute fréquence, de sorte que les nombres d'ondes longitudinaux des modes de quasi-Scholte symétrique et antisymétrique peuvent être considérés comme égaux. Supposons maintenant que nous avons pu calculer parfaitement le nombre d'onde longitudinal d'un mode de quasi-Scholte avec la méthode des ondes partielles. La quantité calculée, notée  $\lambda_0^{\text{QS}}$ , satisfait alors  $\Re e(\lambda_0^{\text{QS}}) = 0$  (les modes de quasi-Scholte exacts sont

purement propagatifs le long de l'axe du guide) et par suite  $r_0^{\text{QS}}(\lambda_0^{\text{QS}}) = -1$  par définition de  $r_0^{\text{QS}}$ . On obtient alors  $f_{2,a}^{\text{QS}}(\lambda_0^{\text{QS}}) = f_{0,a}^{\text{G}}(\lambda_0^{\text{QS}}) = 0$ , où la fonction  $f_{0,a}^{\text{G}}$  est donnée au Lemme 7.30. En effet, cette dernière admet pour racines les nombres d'ondes longitudinaux associés aux modes guidés antisymétriques du guide ouvert avec un fluide infini. On obtient de la même façon  $f_{2,s}^{\text{QS}}(\lambda_0^{\text{QS}}) = 0$ . Ainsi,  $\lambda_0^{\text{QS}}$  satisfait la relation de dispersion obtenue avec notre condition de Robin en bout de PML. Ce raisonnement nous permet de voir à haute fréquence, qu'avoir une première approximation idéalement parfaite du nombre d'onde longitudinal des modes de quasi-Scholte, permet de d'approximer de façon parfaite ces modes avec des PML ayant en leur bout notre condition de Robin.

**Remarque 7.67** *Pour étendre la méthode développée à des configurations 3D, il faut soit qu'il n'y ait qu'un seul mode de quasi-Scholte (ce qui est par exemple le cas d'une coque cylindrique immergée [BDÜ00]) ou bien que les différents modes de quasi-Scholte aient des nombres d'onde radiaux suffisamment proches, en particulier à haute fréquence.*

## 7.5 Annexes

### 7.5.1 Démonstration du Lemme 7.29

Pour commencer, nous introduisons les domaines  $S_1 := (-\infty, -h_0)$ ,  $S_2 := (-h_0, h_0)$  et  $S_3 := (h_0, +\infty)$ . Dans  $S_1$  et  $S_3$ , le potentiel des vitesses satisfait l'équation :

$$\Delta\varphi + k_f^2\varphi = 0.$$

Dans  $S_2$ , le champ de déplacement est gouverné par l'équation :

$$\text{div}(\underline{\sigma}(\mathbf{u})) + \rho_s\omega^2\mathbf{u} = 0. \quad (7.107)$$

Or on a :

$$\text{div}(\underline{\sigma}(\mathbf{u})) = (\lambda_s + \mu_s)\nabla(\text{div}(\mathbf{u})) + \mu_s\Delta\mathbf{u},$$

ce qui combiné avec l'identité vectorielle :

$$\text{rot}(\text{rot}(\mathbf{u})) = \nabla(\text{div}(\mathbf{u})) - \Delta\mathbf{u},$$

permet de réécrire l'équation (7.107) sous la forme :

$$(\lambda_s + 2\mu_s)\nabla(\text{div}(\mathbf{u})) - \mu_s\text{rot}(\text{rot}(\mathbf{u})) + \rho_s\omega^2\mathbf{u} = 0. \quad (7.108)$$

Le champ de déplacement admet la décomposition de Helmholtz (voir [Lan+86]) :

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \text{rot}(\boldsymbol{\psi}),$$

avec  $\text{div}(\boldsymbol{\psi}) = 0$ . Utiliser cette décomposition dans (7.108), nous donne :

$$\nabla((\lambda_s + 2\mu_s)\Delta\phi + \rho_s\omega^2\phi) - \text{rot}(\mu_s\text{rot}(\text{rot}(\boldsymbol{\psi})) - \rho_s\omega^2\boldsymbol{\psi}) = 0,$$

puis l'identité :

$$\text{rot}(\text{rot}(\boldsymbol{\psi})) = \nabla(\text{div}(\boldsymbol{\psi})) - \Delta\boldsymbol{\psi},$$

nous permet d'obtenir :

$$\begin{cases} (\lambda_s + 2\mu_s)\Delta\phi + \rho_s\omega^2\phi = 0 \\ \mu_s\Delta\boldsymbol{\psi} + \rho_s\omega^2\boldsymbol{\psi} = 0, \end{cases}$$

qui s'écrivent aussi :

$$\begin{cases} \Delta\phi + k_p^2\phi = 0 \\ \Delta\psi + k_s^2\psi = 0. \end{cases}$$

Ensuite, nous avons :

$$\text{rot}(\mathbf{u}) = \text{rot}(\text{rot}(\psi)) = -\Delta\psi = k_s^2\psi. \quad (7.109)$$

Étant ici dans l'hypothèse d'une plaque, nous avons  $\partial_{x_3} = 0$ . De plus, on ne s'intéresse pas ici aux modes SH, on prend alors  $u_3 = 0$ . Cela nous montre grâce à (7.109) que  $\text{rot}(\mathbf{u})$ , et par conséquent  $\psi$ , ont des composantes selon  $x_1$  et  $x_2$  nulles. Les modes vont alors être recherchés en potentiel sous la forme :

$$\begin{cases} \varphi(x_1, x_2) = \varphi(x_2)e^{\lambda x_1} \\ \phi(x_1, x_2) = \phi(x_2)e^{\lambda x_1} \\ \psi(x_1, x_2) = (0 \quad 0 \quad \psi(x_2))^t e^{\lambda x_1}. \end{cases}$$

Les fonctions transverses des potentiels satisfont alors les équations de Helmholtz :

$$\begin{cases} d_{x_2}^2\varphi + (k_f^2 + \lambda^2)\varphi = 0 \\ d_{x_2}^2\phi + (k_p^2 + \lambda^2)\phi = 0 \\ d_{x_2}^2\psi + (k_s^2 + \lambda^2)\psi = 0. \end{cases}$$

Pour écrire les conditions de couplage satisfaites par ces potentiels à l'interface entre le solide et le fluide, c'est-à-dire entre les domaines  $S_1$  et  $S_2$  d'une part, et  $S_2$  et  $S_3$  d'autre part, nous avons besoin de revenir au champ de déplacement. Il s'écrit :

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} d_{x_2}\psi + \lambda\phi \\ d_{x_2}\phi - \lambda\psi \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda x_1}.$$

Les conditions de couplage sur  $\Gamma^{\text{sf}}$  s'écrivent :

$$\begin{cases} \underline{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}_s = -i\rho_f\omega\varphi\mathbf{n}_s \\ -i\omega(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s) = \nabla\varphi \cdot \mathbf{n}_s. \end{cases}$$

Après quelques calculs, on a sur  $\Gamma^{\text{sf}}$  :

$$\underline{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}_s = \pm \begin{pmatrix} \mu_s(d_{x_2}u_1 + \lambda u_2) \\ \lambda_s(d_{x_2}u_2 + \lambda u_1) + 2\mu_s d_{x_2}u_2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda x_1}, \quad x_2 = \pm h_0,$$

ce qui permet de réécrire les conditions de couplage en  $x_2 = \pm h_0$  :

$$\begin{cases} d_{x_2}^2\psi - \lambda^2\psi + 2\lambda d_{x_2}\phi = 0 \\ (\lambda_s + 2\mu_s)d_{x_2}^2\phi + \lambda_s\lambda^2\phi - 2\mu_s\lambda d_{x_2}\psi = -i\rho_f\omega\varphi \\ -i\omega(d_{x_2}\phi - \lambda\psi) = d_{x_2}\varphi. \end{cases}$$

Les modes recherchés s'écrivent sous la forme générale :

$$\begin{cases} \varphi_{1,3}(x_2) = A_{1,3}e^{i\beta_f(\lambda)x_2} + B_{1,3}e^{-i\beta_f(\lambda)x_2} \\ \phi_2(x_2) = A_2(\phi)e^{i\beta_p(\lambda)x_2} + B_2(\phi)e^{-i\beta_p(\lambda)x_2} \\ \psi_2(x_2) = A_2(\psi)e^{i\beta_s(\lambda)x_2} + B_2(\psi)e^{-i\beta_s(\lambda)x_2}, \end{cases} \quad (7.110)$$



l'indice  $j \in \{1, 2, 3\}$  exprimant que le potentiel est considéré dans le domaine  $S_j$  et où  $\beta_l(\lambda) := \sqrt{k_l^2 + \lambda^2}$  pour  $l \in \{s, p, f\}$ . Nous devons maintenant distinguer deux cas selon que nous considérons un mode de Lamb à fuite sortant ou un mode de quasi-Scholte. Pour un mode de Lamb à fuite sortant, on a  $\Im m(\lambda^2) < 0$ , ce qui implique  $\Im m(\beta_f(\lambda)) < 0$  et par suite  $A_1 = B_3 = 0$  car les modes à fuite sont exponentiellement croissants à l'infini. En prenant en compte le fait que  $d_{x_2}^2 \phi = -(\lambda^2 + k_p^2)\phi$  et que  $d_{x_2}^2 \psi = -(\lambda^2 + k_s^2)\psi$ , on écrit les conditions de couplage en  $x_2 = -h_0$  :

$$-(2\lambda^2 + k_s^2)(A_2(\psi)e^{-i\beta_s h_0} + B_2(\psi)e^{i\beta_s h_0}) + 2i\lambda\beta_p(A_2(\phi)e^{-i\beta_p h_0} - B_2(\phi)e^{i\beta_p h_0}) = 0 \quad (7.111)$$

$$-(2\mu_s\beta_p^2 + \lambda_s k_p^2)(A_2(\phi)e^{-i\beta_p h_0} + B_2(\phi)e^{i\beta_p h_0}) - 2i\mu_s\lambda\beta_s(A_2(\psi)e^{-i\beta_s h_0} - B_2(\psi)e^{i\beta_s h_0}) = -i\rho_f\omega B_1 e^{i\beta_f h_0} \quad (7.112)$$

$$i\beta_p(A_2(\phi)e^{-i\beta_p h_0} - B_2(\phi)e^{i\beta_p h_0}) - \lambda(A_2(\psi)e^{-i\beta_s h_0} + B_2(\psi)e^{i\beta_s h_0}) = \omega^{-1}\beta_f B_1 e^{i\beta_f h_0}, \quad (7.113)$$

et celles en  $x_2 = h_0$  :

$$-(2\lambda^2 + k_s^2)(A_2(\psi)e^{i\beta_s h_0} + B_2(\psi)e^{-i\beta_s h_0}) + 2i\lambda\beta_p(A_2(\phi)e^{i\beta_p h_0} - B_2(\phi)e^{-i\beta_p h_0}) = 0 \quad (7.114)$$

$$-(2\mu_s\beta_p^2 + \lambda_s k_p^2)(A_2(\phi)e^{i\beta_p h_0} + B_2(\phi)e^{-i\beta_p h_0}) - 2i\mu_s\lambda\beta_s(A_2(\psi)e^{i\beta_s h_0} - B_2(\psi)e^{-i\beta_s h_0}) = -i\rho_f\omega A_3 e^{i\beta_f h_0} \quad (7.115)$$

$$i\beta_p(A_2(\phi)e^{i\beta_p h_0} - B_2(\phi)e^{-i\beta_p h_0}) - \lambda(A_2(\psi)e^{i\beta_s h_0} + B_2(\psi)e^{-i\beta_s h_0}) = -\omega^{-1}\beta_f A_3 e^{i\beta_f h_0}. \quad (7.116)$$

Introduisons les quantités :

$$a_{sp}(\lambda) := -(2\mu_s\beta_p^2(\lambda) + \lambda_s k_p^2)$$

$$a_s(\lambda) := -2i\mu_s\lambda\beta_s(\lambda)$$

$$b_s(\lambda) := -2\lambda^2 - k_s^2$$

$$a_p(\lambda) := -2i\lambda\beta_p(\lambda)$$

$$a_f(\lambda) := -i\rho_f\omega$$

$$b_f(\lambda) := \omega^{-1}\beta_f(\lambda).$$

Les équations (7.111) $e^{-i\beta_s h_0}$ –(7.114) $e^{i\beta_s h_0}$  et (7.111) $e^{i\beta_s h_0}$ –(7.114) $e^{-i\beta_s h_0}$  donnent :

$$\begin{cases} A_2(\psi) = \frac{a_p(\lambda)}{b_s(\lambda)\sin(2\beta_s h_0)} [\sin((\beta_p + \beta_s)h_0)A_2(\phi) + \sin((\beta_p - \beta_s)h_0)B_2(\phi)] \\ B_2(\psi) = -\frac{a_p(\lambda)}{b_s(\lambda)\sin(2\beta_s h_0)} [\sin((\beta_p - \beta_s)h_0)A_2(\phi) + \sin((\beta_p + \beta_s)h_0)B_2(\phi)], \end{cases}$$

ce qui permet de simplifier les équations (7.112), (7.113), (7.115) et (7.116) en :

$$\begin{cases} A_2(\phi)r_1(\lambda)e^{-i\beta_p h_0} + B_2(\phi)r_2(\lambda)e^{i\beta_p h_0} = a_f(\lambda)e^{i\beta_f h_0}B_1 \\ A_2(\phi)r_2(\lambda)e^{i\beta_p h_0} + B_2(\phi)r_1(\lambda)e^{-i\beta_p h_0} = a_f(\lambda)e^{i\beta_f h_0}A_3 \\ A_2(\phi)\eta(\lambda)e^{-i\beta_p h_0} - B_2(\phi)\eta(\lambda)e^{i\beta_p h_0} = b_f(\lambda)e^{i\beta_f h_0}B_1 \\ A_2(\phi)\eta(\lambda)e^{i\beta_p h_0} - B_2(\phi)\eta(\lambda)e^{-i\beta_p h_0} = -b_f(\lambda)e^{i\beta_f h_0}A_3, \end{cases} \quad (7.117)$$

où :

$$\eta(\lambda) := i(\beta_p(\lambda) + i\lambda\frac{a_p(\lambda)}{b_s(\lambda)})$$

$$r_1(\lambda) := a_{sp}(\lambda) - i\frac{a_s(\lambda)a_p(\lambda)}{b_s(\lambda)\sin(2\beta_s h_0)}(e^{2i\beta_p h_0} - \cos(2\beta_s h_0))$$

$$r_2(\lambda) := a_{sp}(\lambda) + i\frac{a_s(\lambda)a_p(\lambda)}{b_s(\lambda)\sin(2\beta_s h_0)}(e^{-2i\beta_p h_0} - \cos(2\beta_s h_0)).$$

L'annulation du déterminant du système (7.117) pour les modes propres s'écrit après calculs :

$$\begin{aligned} & \left[ i \frac{\omega^2 \rho_f}{\beta_f(\lambda)} + \left( s(\lambda) \tan(\beta_s(\lambda) h_0) + p(\lambda) \tan(\beta_p(\lambda) h_0) \right) \right] \\ \times & \left[ i \frac{\omega^2 \rho_f}{\beta_f(\lambda)} - \left( s(\lambda) \cotan(\beta_s(\lambda) h_0) + p(\lambda) \cotan(\beta_p(\lambda) h_0) \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (7.118)$$

ce qui est la relation attendue. Nous allons maintenant voir qu'un des deux termes correspond aux modes symétriques tandis que l'autre est associé aux modes antisymétriques. Le champ de déplacement s'écrit :

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} i\beta_s(A_2(\psi)e^{i\beta_s x_2} - B_2(\psi)e^{-i\beta_s x_2}) + \lambda(A_2(\phi)e^{i\beta_p x_2} + B_2(\phi)e^{-i\beta_s x_2}) \\ i\beta_p(A_2(\phi)e^{i\beta_p x_2} - B_2(\phi)e^{-i\beta_p x_2}) - \lambda(A_2(\psi)e^{i\beta_s x_2} + B_2(\psi)e^{-i\beta_s x_2}) \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda x_1},$$

et le potentiel des vitesses dans les domaines  $S_1$  et  $S_3$  :

$$\varphi_1(x_1, x_2) = B_1 e^{-i\beta_f x_2} e^{\lambda x_1}, \quad \varphi_3(x_1, x_2) = A_3 e^{i\beta_f x_2} e^{\lambda x_1}.$$

Un mode est symétrique si et seulement si la composante longitudinale  $u_1$  du champ de déplacement est symétrique et sa composante transverse  $u_2$  est antisymétrique. Il est antisymétrique si et seulement si c'est le contraire. En d'autres termes, le mode est symétrique si et seulement si  $B_2(\psi) = -A_2(\psi)$ ,  $B_2(\phi) = A_2(\phi)$  et  $B_1 = A_3$ . A contrario, un mode est antisymétrique si et seulement si  $B_2(\psi) = A_2(\psi)$ ,  $B_2(\phi) = -A_2(\phi)$  et  $B_1 = -A_3$ . Pour un mode symétrique, le système (7.117) se réduit en :

$$\begin{cases} (r_1(\lambda)e^{-i\beta_p h_0} + r_2(\lambda)e^{i\beta_p h_0})A_2(\phi) = a_f(\lambda)e^{i\beta_f h_0}B_1 \\ \eta(\lambda)(e^{-i\beta_p h_0} - e^{i\beta_p h_0})A_2(\phi) = b_f(\lambda)e^{i\beta_f h_0}B_1, \end{cases}$$

qui est aussi équivalent à :

$$\begin{cases} \left( 2a_{sp}(\lambda)\cos(\beta_p h_0) + 2\frac{a_s(\lambda)a_p(\lambda)}{b_s(\lambda)\sin(2\beta_s h_0)}\sin(\beta_p h_0)(1 + \cos(2\beta_s h_0)) \right) A_2(\phi) = a_f(\lambda)e^{i\beta_f h_0}B_1 \\ -2i\sin(\beta_p h_0)\eta(\lambda)A_2(\phi) = b_f(\lambda)e^{i\beta_f h_0}B_1. \end{cases}$$

L'annulation du déterminant de ce système s'écrit :

$$i \frac{a_f(\lambda)}{b_f(\lambda)} + \frac{1}{\eta(\lambda)} \left( a_{sp}(\lambda)\cotan(\beta_p h_0) + \frac{a_s(\lambda)a_p(\lambda)}{b_s(\lambda)\sin(2\beta_s h_0)}(1 + \cos(2\beta_s h_0)) \right) = 0,$$

ou sous forme plus compacte :

$$0 = i \frac{\omega^2 \rho_f}{\beta_f(\lambda)} - \left( s(\lambda)\cotan(\beta_s(\lambda)h_0) + p(\lambda)\cotan(\beta_p(\lambda)h_0) \right) =: f_{0,s}^{\text{FS}}(\lambda).$$

Un raisonnement analogue montre que si un mode est antisymétrique, alors il vérifie :

$$0 = i \frac{\omega^2 \rho_f}{\beta_f(\lambda)} - \left( s(\lambda)\tan(\beta_s(\lambda)h_0) + p(\lambda)\tan(\beta_p(\lambda)h_0) \right) =: f_{0,a}^{\text{FS}}(\lambda).$$

### 7.5.2 Démonstration de la Proposition 7.32

Nous adaptons la preuve proposée dans [ZCS11] pour le cas d'une plaque viscoélastique dans le vide, en justifiant en plus la fin de la preuve sur le plan mathématique. Pour faciliter l'écriture de cette preuve, nous abandonnons la convention de Kondratiev utilisée jusqu'à présent dans ce manuscrit pour la convention standard utilisée dans [ZCS11]. Nous écrivons alors que les modes ont une dépendance vis-à-vis de la variable axiale  $x_1$  en  $e^{i\lambda x_1}$ , au lieu d'une dépendance en  $e^{\lambda x_1}$ . La preuve repose sur la relation de dispersion (7.52) qui a été écrite pour des modes en notation Kondratiev. Pour obtenir cette relation de dispersion dans la convention standard, il suffit de remplacer  $\lambda$  par  $i\lambda$ . Nous commençons par montrer le résultat pour les modes antisymétriques. Dans la convention standard, ils sont racines de l'équation :

$$\begin{aligned} -i \frac{\omega^2 \rho_f k_s^2 \beta_p}{4\mu_s \beta_f \lambda^4 (1 - \frac{k_s^2}{2\lambda^2})^2} \cos(\beta_s h_0) \cos(\beta_p h_0) \\ = \frac{\beta_s \beta_p \lambda^2}{\lambda^4 (1 - \frac{k_s^2}{2\lambda^2})^2} \sin(\beta_s h_0) \cos(\beta_p h_0) + \sin(\beta_p h_0) \cos(\beta_s h_0). \end{aligned}$$

Nous introduisons les quantités :

$$r_{p,s,f} := \sqrt[{\mathbb{R}^+}]{1 - \left(\frac{k_{p,s,f}}{\lambda}\right)^2} \quad \text{et} \quad R := \frac{r_s r_p}{(1 - \frac{k_s^2}{2\lambda^2})^2},$$

qui permettent de réécrire l'équation (7.119) :

$$\begin{aligned} -\frac{\omega^2 \rho_f k_s^2 r_p}{4\mu_s r_f \lambda^4 (1 - \frac{k_s^2}{2\lambda^2})^2 (1 - R)} \cosh(\lambda r_s h_0) \cosh(\lambda r_p h_0) \\ = \sinh(\lambda(r_p + r_s)h_0) + \frac{1 + R}{1 - R} \sinh(\lambda(r_p - r_s)h_0). \end{aligned}$$

Posons aussi  $r_0 := \lambda(r_p + r_s - 2)$  ainsi que :

$$E(\lambda) := \frac{1 + R}{1 - R} e^{-r_0 h_0} \frac{\sinh(\lambda(r_p - r_s)h_0)}{\lambda} \quad \text{et} \quad F(\lambda) := e^{-2r_0 h_0},$$

qui nous permettent de réécrire (7.119) sous la forme compacte :

$$-\frac{\omega^2 \rho_f k_s^2 r_p}{2\mu_s r_f \lambda^4 (1 - \frac{k_s^2}{2\lambda^2})^2 (1 - R)} \cosh(\lambda r_s h_0) \cosh(\lambda r_p h_0) e^{-r_0 h_0} = e^{2\lambda h_0} + 2\lambda E(\lambda) - F(\lambda) e^{-2\lambda h_0}.$$

Ensuite, nous calculons :

$$\begin{aligned} \cosh(\lambda r_s h_0) \cosh(\lambda r_p h_0) e^{-r_0 h_0} &= \frac{1}{2} (\cosh(\lambda(r_p + r_s)h_0) + \cosh(\lambda(r_p - r_s)h_0)) e^{-r_0 h_0} \\ &= \frac{1}{2} (e^{2\lambda h_0} + e^{-2\lambda h_0} F(\lambda) + \cosh(\lambda(r_p - r_s)h_0) e^{-r_0 h_0}). \end{aligned}$$

En introduisant les quantités :

$$G(\lambda) := \frac{\omega^2 \rho_f k_s^2 r_p}{2\mu_s r_f \lambda^4 (1 - \frac{k_s^2}{2\lambda^2})^2 (1 - R)} \quad \text{et} \quad H(\lambda) := \frac{\cosh(\lambda(r_p - r_s)h_0)}{\lambda} e^{-r_0 h_0},$$

nous pouvons enfin écrire l'équation de dispersion sous la forme :

$$e^{2\lambda h_0} (1 + G(\lambda)) + \lambda (2E(\lambda) + H(\lambda)) - F(\lambda) e^{-2\lambda h_0} (1 - G(\lambda)) = 0. \quad (7.119)$$

Les coefficients qui interviennent dans cette expression admettent les développements limités suivants en fonction du paramètre  $\frac{1}{\lambda} \rightarrow 0$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{p,s,f} = 1 - \frac{k_{p,s,f}^2}{2\lambda^2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \\ F(\lambda) = 1 - h_0 \rho_s \omega^2 \frac{\lambda_s + 3\mu_s}{\mu_s(\lambda_s + 2\mu_s)} \frac{1}{\lambda^2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \\ R = 1 + \frac{1}{2\lambda^2} (k_s^2 - k_p^2) + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \\ \frac{1+R}{1-R} = -\frac{1}{k_s^2 - k_p^2} - 1 + o(1) \\ \frac{\sinh(\lambda(r_p - r_s)h_0)}{\lambda} = \frac{h_0 \rho_s \omega^2}{2\lambda^2} \frac{\lambda_s + \mu_s}{\mu_s(\lambda_s + 2\mu_s)} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \\ E(\lambda) = -2h_0 - \frac{h_0^2 \omega^2 \rho_s}{\lambda} \frac{\lambda_s + 3\mu_s}{\mu_s(\lambda_s + 2\mu_s)} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ H(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + \frac{h_0 \rho_s \omega^2}{2\lambda^2} \frac{\lambda_s + 3\mu_s}{\mu_s(\lambda_s + 2\mu_s)} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \\ G(\lambda) = \frac{\omega^2 \rho_f k_s^2}{\mu_s(k_p^2 - k_s^2)} \frac{1}{\lambda^2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \end{array} \right.$$

Prendre les termes dominants dans chacun des développements limités écrits dans (7.119) nous donne l'équation :

$$e^{2\lambda h_0} = 4\lambda h_0 + e^{-2\lambda h_0}.$$

Un calcul similaire nous donne pour les modes symétriques :

$$e^{2\lambda h_0} = -4\lambda h_0 + e^{-2\lambda h_0},$$

ce qui nous permet d'écrire l'équation générale :

$$e^{2\lambda h_0} = 4\tau \lambda h_0 + e^{-2\lambda h_0}, \quad (7.120)$$

avec  $\tau = 1$  pour les modes antisymétriques et  $\tau = -1$  pour les modes symétriques. Prendre le logarithme complexe de cette équation donne une infinité d'équations correspondant à ses différentes branches :

$$\lambda_n = \frac{1}{2h_0} \text{Log}(4\tau \lambda_n h_0 + e^{-2\lambda_n h_0}) + \frac{i\pi n}{h_0}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (7.121)$$

où  $\text{Log}(\cdot)$  est la détermination principale du logarithme. Les équations (7.121) peuvent se réécrire comme des problèmes de points fixes :

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } \lambda_n \in \mathbb{C} \text{ tel que} \\ \lambda_n = g_n(\lambda_n), \end{array}$$

où :

$$\begin{aligned} g_n(z) &:= \frac{1}{2h_0} \text{Log}(4\tau z h_0 + e^{-2z h_0}) + \frac{i\pi n}{h_0} \\ &= \frac{1}{2h_0} \text{Log}(|4\tau z h_0 + e^{-2z h_0}|) + i\left(\frac{\pi n}{h_0} + \frac{1}{2h_0} \text{Arg}(4\tau z h_0 + e^{-2z h_0})\right), \end{aligned}$$

avec  $-\pi < \text{Arg}(z) < \pi$ ,  $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ . Les fonctions  $g_n$  sont analytiques dans tout le plan complexe à l'exception des points  $z$  satisfaisant  $4\tau z h_0 + e^{-2z h_0} = 0$ . En posant  $\tilde{z} = 2z h_0$ , cela revient à chercher les complexes  $\tilde{z}$  solutions de l'équation :

$$\tilde{z} e^{\tilde{z}} = -\frac{1}{2\tau}.$$

Cette équation a un ensemble dénombrable de solutions  $\tilde{z}_k = \text{LambertW}(-\frac{1}{2\tau}, k)$ , dans lesquelles  $\text{LambertW}(\cdot, k)$  est la  $k$ -ème détermination de la fonction de Lambert ( $k \in \mathbb{Z}$ ) qui est la fonction réciproque de l'application  $\tilde{z} \mapsto \tilde{z}e^{\tilde{z}}$ . Un certain nombre de propriétés de cette fonction sont présentées dans [CJK97]. En particulier, elle est équivalente pour  $|z|$  ou bien  $|k|$  petits ou grands à :

$$\text{LambertW}(z, k) \sim \text{Log}(z) + 2ik\pi - \text{Log}(\text{Log}(z) + 2ik\pi).$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \tilde{z}_k &\underset{|k| \rightarrow +\infty}{\sim} \text{Log}\left(\left|-\frac{1}{2\tau}\right|\right) + i\left(\text{Arg}\left(-\frac{1}{2\tau}\right) + 2k\pi\right) \\ &\quad - \text{Log}\left(\text{Log}\left(\left|-\frac{1}{2\tau}\right|\right) + i\left(\text{Arg}\left(-\frac{1}{2\tau}\right) + 2k\pi\right)\right) \\ &= \text{Log}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\text{Log}\left(\text{Log}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\text{Arg}\left(-\frac{1}{2\tau}\right) + 2k\pi\right)^2\right) \\ &\quad + i\left(\text{Arg}\left(-\frac{1}{2\tau}\right) + 2k\pi\right) - i\text{Arg}\left(\text{Log}\left(\frac{1}{2}\right) + i\left(\text{Arg}\left(-\frac{1}{2\tau}\right) + 2k\pi\right)\right), \end{aligned}$$

et donc :

$$\Re(\tilde{z}_k) \underset{|k| \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\text{Log}\left(\text{Log}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\text{Arg}\left(-\frac{1}{2\tau}\right) + 2k\pi\right)^2\right) < 0.$$

On introduit l'ensemble  $Z := \left\{\frac{\tilde{z}_k}{2h_0}, k \in \mathbb{Z}\right\}$  des singularités de la fonction  $g_n$  et la demi-bande :

$$B_n := \left\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \geq 0, \frac{\pi n}{h_0} - \frac{\pi}{2h_0} \leq \Im(z) \leq \frac{\pi n}{h_0} + \frac{\pi}{2h_0}\right\}.$$

Pour  $|n|$  suffisamment grand, nous avons  $B_n \cap Z = \emptyset$  et alors la fonction  $g_n$  est analytique dans  $B_n$  de dérivée :

$$g'_n(z) = \frac{4\tau h - 2he^{-2zh_0}}{4\tau zh + e^{-2zh_0}}.$$

Pour  $z \in B_n$ , nous avons  $\Re(z) \geq 0$ , mais aussi  $|z| \geq \min\left(\left|\frac{\pi n}{h_0} - \frac{\pi}{2h_0}\right|, \left|\frac{\pi n}{h_0} + \frac{\pi}{2h_0}\right|\right)$ . Si on prend  $|n|$  suffisamment grand, on a donc  $|g'_n(z)| \leq \frac{1}{2}$ ,  $\forall z \in B_n$ . Il vient alors que  $g_n$  est contractante sur  $B_n$ . Pour s'en convaincre, introduisons pour  $(z_1, z_2) \in (B_n)^2$  le chemin  $\gamma_{12} : [0, 1] \mapsto B_n$  joignant les points  $z_1$  et  $z_2$  défini par :

$$\gamma_{12}(t) := tz_1 + (1-t)z_2, \quad \forall t \in [0, 1].$$

On a alors :

$$\begin{aligned} |g_n(z_1) - g_n(z_2)| &= \left| \int_{\gamma_{12}(0)}^{\gamma_{12}(1)} g'_n(t) dt \right| = \left| \int_0^1 g'_n(\gamma_{12}(t)) \gamma'_{12}(t) dt \right| \leq \max_{t \in [0, 1]} |g'_n(\gamma_{12}(t))| |z_1 - z_2| \\ &\leq \frac{1}{2} |z_1 - z_2|. \end{aligned}$$

De plus, la demi-bande  $B_n$  est stable par  $g_n$ . En effet, on a pour  $z \in B_n$  :

$$\Im(g_n(z)) = \frac{\pi n}{h_0} + \frac{1}{2h_0} \text{Arg}(4\tau zh + e^{-2zh_0}) \in \left] \frac{\pi n}{h_0} - \frac{\pi}{2h_0}, \frac{\pi n}{h_0} + \frac{\pi}{2h_0} \right[ ,$$

et :

$$\Re(g_n(z)) = \frac{1}{2h_0} \text{Log}(|4\tau zh + e^{-2zh_0}|) > 0,$$

et ce à nouveau pour  $|n|$  suffisamment grand. La demi-bande  $B_n$  est donc bien stable par  $g_n$ . Nous rentrons ainsi dans le cadre du théorème de point fixe, donné avec le Théorème A.2 qui nous garantit que  $g_n$  a un unique point fixe  $\lambda_n$  dans  $B_n$ . Autrement dit, les équations (7.121) admettent une unique solution pour  $|n|$  suffisamment grand. Cette équation de point fixe ne peut être résolue de façon exacte, mais on peut néanmoins construire une suite définie par récurrence qui va approcher de mieux en mieux le point fixe  $\lambda_n$ . Cette suite indexée par  $m \geq 1$  est donnée par :

$$\begin{cases} \lambda_n^1 &= \frac{i\pi n}{h_0} \\ \lambda_n^{m+1} &= g_n(\lambda_n^m), \quad \forall m \geq 1. \end{cases}$$

Nous avons en particulier le deuxième terme de la suite qui nous donne un développement au premier ordre des parties réelles et imaginaires des valeurs propres :

$$\lambda_n^2 = \frac{i\pi n}{h_0} + \frac{1}{2h_0} \text{Log}(|n|) + \frac{1}{2h_0} \left( \text{Log}\left(\left|4\tau i\pi + \frac{1}{n}\right|\right) + i \text{Arg}(4\tau i\pi n + 1) \right),$$

qui implique :

$$\lambda_n \underset{|n| \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{i\pi n}{h_0} + \frac{1}{2h_0} \text{Log}(|n|), \quad (7.122)$$

ce qui correspond au comportement asymptotique des valeurs propres dans le demi-plan complexe droit. Le comportement asymptotique des valeurs propres dans le demi-plan complexe gauche correspondant aux parties réelles négatives peut s'obtenir directement par symétrie puisque la relation de dispersion de départ est paire en  $\lambda$ . Il est aussi possible de réécrire (7.120) comme :

$$e^{-2\lambda h_0} = -4\tau \lambda h + e^{2\lambda h_0},$$

et de mener le même raisonnement. On trouve alors :

$$\lambda_n \underset{|n| \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{i\pi n}{h_0} - \frac{1}{2h_0} \text{Log}(|n|). \quad (7.123)$$

Les équations (7.122) et (7.123) mettent en évidence 4 comportements asymptotiques. Parmi ces distributions asymptotiques des modes de Lamb à fuite, il nous reste à déterminer lesquelles correspondent aux modes à fuite sortants. Posons  $\xi_n = (i\lambda_n)^2$ , où nous rappelons que  $i\lambda_n$  correspond au nombre d'onde en notation Kondratiev. Nous avons vu à la [sous-section 7.2.2](#) que les modes à fuite sortants correspondent aux racines satisfaisant  $\Im m(\xi_n) < 0$ . Lorsque  $\lambda_n$  est donné par (7.122), on a :

$$\Im m(\xi_n) \underset{|n| \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\pi n}{h_0^2} \text{Log}(|n|),$$

qui est négatif pour  $n \geq 0$  suffisamment grand. Quand  $\lambda_n$  est donné par (7.123), nous avons :

$$\Im m(\xi_n) \underset{|n| \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi n}{h_0^2} \text{Log}(|n|),$$

qui est aussi négatif lorsque  $n \leq 0$ . Par conséquent, les modes de Lamb à fuite sortants ont un comportement asymptotique donné soit par (7.122) pour  $n \geq 0$ , soit par (7.123) pour  $n \leq 0$ . La preuve se conclut en réécrivant les nombres d'onde en notation Kondratiev.

### 7.5.3 Vitesse de groupe du guide immergé avec PML en variables XY

Il est possible de calculer la vitesse de groupe des modes dans un guide élastique immergé tronqué transversalement par des PML bornées à l'aide des variables mixtes.

**Proposition 7.68**

Soit  $(\lambda_n, \mathbf{X}_n^{\text{sf}}, \mathbf{Y}_n^{\text{sf}})$ ,  $|n| \geq 1$  un mode. Sa vitesse de groupe définie par (7.15) est donnée par la relation :

$$\tilde{v}_g^n = \Im m \left( \frac{\rho_s \omega \int_{\Sigma^s} ((u_1^n)^2 - (\mathbf{u}_\Sigma^n)^2) d\mathbf{x}_\Sigma - \rho_f k_f^2 \int_{\Sigma^f} b^{\alpha\Sigma} (\varphi^n)^2 d\mathbf{x}_\Sigma}{(\mathbf{X}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}}} \right)^{-1}, \quad (7.124)$$

où :

$$\mathbf{X}_n^{\text{sf}} := \begin{pmatrix} \mathbf{t}_\Sigma^n \\ u_1^n \\ \zeta^n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}})^* := \begin{pmatrix} \bar{u}_\Sigma^n \\ \bar{t}_1^n \\ \frac{1}{b^{\alpha\Sigma}} \bar{\varphi}^n \end{pmatrix}.$$

*Démonstration.* Soit  $(\lambda_n, \mathbf{X}_n^{\text{sf}}, \mathbf{Y}_n^{\text{sf}})$  un mode, il vérifie alors :

$$\begin{cases} F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}(\omega) \mathbf{Y}_n^{\text{sf}}(\omega) = \lambda_n(\omega) \mathbf{X}_n^{\text{sf}}(\omega) \\ F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}(\omega) \mathbf{X}_n^{\text{sf}}(\omega) = \lambda_n(\omega) \mathbf{Y}_n^{\text{sf}}(\omega), \end{cases} \quad (7.125)$$

où nous avons précisé la dépendance en  $\omega$  à la fois du mode et des opérateurs. Ensuite, puisque les opérateurs  $F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}(\omega)$  et  $F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}(\omega)$  sont linéaires nous avons les identités :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \omega} (F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}(\omega) \mathbf{Y}_n^{\text{sf}}(\omega)) = \frac{\partial F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}}{\partial \omega} \mathbf{Y}_n^{\text{sf}} + F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} \frac{\partial \mathbf{Y}_n^{\text{sf}}}{\partial \omega} \\ \frac{\partial}{\partial \omega} (F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}(\omega) \mathbf{X}_n^{\text{sf}}(\omega)) = \frac{\partial F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}}{\partial \omega} \mathbf{X}_n^{\text{sf}} + F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} \frac{\partial \mathbf{X}_n^{\text{sf}}}{\partial \omega}. \end{cases}$$

Par ailleurs, il découle de (7.125) les égalités :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \omega} (F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}(\omega) \mathbf{Y}_n^{\text{sf}}(\omega)) = \frac{\partial \lambda_n}{\partial \omega} \mathbf{X}_n^{\text{sf}} + \lambda_n \frac{\partial \mathbf{X}_n^{\text{sf}}}{\partial \omega} \\ \frac{\partial}{\partial \omega} (F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}(\omega) \mathbf{X}_n^{\text{sf}}(\omega)) = \frac{\partial \lambda_n}{\partial \omega} \mathbf{Y}_n^{\text{sf}} + \lambda_n \frac{\partial \mathbf{Y}_n^{\text{sf}}}{\partial \omega}. \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} \frac{\partial F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}}{\partial \omega} \mathbf{Y}_n^{\text{sf}} + F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}} \frac{\partial \mathbf{Y}_n^{\text{sf}}}{\partial \omega} = \frac{\partial \lambda_n}{\partial \omega} \mathbf{X}_n^{\text{sf}} + \lambda_n \frac{\partial \mathbf{X}_n^{\text{sf}}}{\partial \omega} \\ \frac{\partial F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}}{\partial \omega} \mathbf{X}_n^{\text{sf}} + F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}} \frac{\partial \mathbf{X}_n^{\text{sf}}}{\partial \omega} = \frac{\partial \lambda_n}{\partial \omega} \mathbf{Y}_n^{\text{sf}} + \lambda_n \frac{\partial \mathbf{Y}_n^{\text{sf}}}{\partial \omega}. \end{cases} \quad (7.126)$$

Prendre le produit scalaire dans  $\mathbf{H}^{\text{sf}}$  de la première équation de (7.126) contre  $(\mathbf{Y}_n^{\text{sf}})^*$ , le produit scalaire de la deuxième équation de (7.126) contre  $(\mathbf{X}_n^{\text{sf}})^*$ , ainsi que les relations :

$$(F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}})^* (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}})^* = \bar{\lambda}_n (\mathbf{X}_n^{\text{sf}})^* \quad \text{et} \quad (F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}})^* (\mathbf{X}_n^{\text{sf}})^* = \bar{\lambda}_n (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}})^*,$$

prouvées dans la preuve de la Proposition 7.48, permet d'obtenir les égalités :

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}}{\partial \omega} \mathbf{Y}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}})^* \right)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} + \lambda_n \left( \frac{\partial \mathbf{Y}_n^{\text{sf}}}{\partial \omega}, (\mathbf{X}_n^{\text{sf}})^* \right)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} = \frac{\partial \lambda_n}{\partial \omega} (\mathbf{X}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} + \lambda_n \left( \frac{\partial \mathbf{X}_n^{\text{sf}}}{\partial \omega}, (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}})^* \right)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} \\ \left( \frac{\partial F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}}{\partial \omega} \mathbf{X}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{X}_n^{\text{sf}})^* \right)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} + \lambda_n \left( \frac{\partial \mathbf{X}_n^{\text{sf}}}{\partial \omega}, (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}})^* \right)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} = \frac{\partial \lambda_n}{\partial \omega} (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{X}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} + \lambda_n \left( \frac{\partial \mathbf{Y}_n^{\text{sf}}}{\partial \omega}, (\mathbf{X}_n^{\text{sf}})^* \right)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}}. \end{cases} \quad (7.127)$$

Dans ces expressions, nous avons :

$$\frac{\partial F_{\mathbf{Y}^{\text{sf}}}}{\partial \omega} \mathbf{Y}_n^{\text{sf}} = \begin{pmatrix} -2\rho_s \omega \mathbf{u}_\Sigma^n \\ 0 \\ \frac{\omega}{c_f^2} \varphi^n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F_{\mathbf{X}^{\text{sf}}}}{\partial \omega} \mathbf{X}_n^{\text{sf}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\rho_s \omega u_1^n \\ 0 \end{pmatrix},$$

et les modes des opérateurs adjoints sont donnés par (7.84). Sommer les deux équations de (7.127) nous donne après simplifications :

$$\frac{\partial \lambda_n}{\partial \omega} \left( (\mathbf{X}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} + (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{X}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} \right) = 2\rho_s \omega \int_{\Sigma^s} ((u_1^n)^2 - (\mathbf{u}_\Sigma^n)^2) d\mathbf{x}_\Sigma - 2\rho_f \frac{\omega}{c_f^2} \int_{\Sigma^f} b^{\alpha_\Sigma} (\varphi^n)^2 d\mathbf{x}_\Sigma. \quad (7.128)$$

Étant donné que  $(\mathbf{X}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} = (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{X}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}}$ , l'égalité (7.128) se simplifie en :

$$\frac{\partial \lambda_n}{\partial \omega} (\mathbf{X}_n^{\text{sf}}, (\mathbf{Y}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} = \rho_s \omega \int_{\Sigma^s} ((u_1^n)^2 - (\mathbf{u}_\Sigma^n)^2) d\mathbf{x}_\Sigma - \rho_f k_f^2 \int_{\Sigma^f} b^{\alpha_\Sigma} (\varphi^n)^2 d\mathbf{x}_\Sigma,$$

pour donner par suite le résultat escompté. □





# Chapitre 8

## Problème direct dans les guides élastiques partiellement immergés

### Sommaire

---

8.1	Écriture du problème . . . . .	270
8.2	Troncature longitudinale du domaine à l'aide de PML . . . . .	272
8.2.1	Formulation variationnelle . . . . .	274
8.2.2	Résultats numériques . . . . .	277
8.3	Troncature longitudinale du domaine à l'aide d'opérateurs YtX . . . . .	282
8.3.1	Opérateur YtX pour le demi-guide élastique fermé gauche . . . . .	283
8.3.2	Opérateur YtX pour le demi-guide élastique immergé à droite . . . . .	284
8.3.3	Formulation variationnelle . . . . .	285
8.3.4	Résultats numériques . . . . .	291
8.4	Annexe . . . . .	298

---

Après avoir conduit au [chapitre 7](#) une analyse modale des guides élastiques immergés de section transversale tronquée par des PML, nous allons aborder dans ce chapitre la résolution numérique du problème direct dans des guides élastiques partiellement immergés. Cette étape est importante dans le processus de développement d'une méthode d'imagerie, car elle permet en effet de synthétiser des mesures de champs diffractés. Dans notre cas, elle est aussi importante pour résoudre le problème inverse via l'évaluation efficace de la solution fondamentale.

Les problèmes de diffraction en interaction fluide-structure ont fait l'objet de plusieurs travaux. En particulier, le cas de la diffraction d'une onde incidente acoustique par un corps élastique borné immergé dans un fluide infini a été traité dans [[BDE14](#); [EHR08](#); [HKR00](#); [MS09](#)]. Le caractère bien posé du problème est montré soit en supposant que le corps élastique est constitué d'un matériau atténuant [[HKR00](#); [MS09](#)], soit en l'absence d'atténuation en ayant recours à un opérateur DtN permettant d'écrire un problème équivalent posé dans un domaine fluide borné contenant le corps élastique [[BDE14](#); [EHR08](#)]. La seconde approche est intéressante parce qu'elle permet aussi d'obtenir une méthode de résolution numérique de ces problèmes de diffraction. Une discrétisation par éléments finis discontinus de ce problème a été proposée dans [[Est13](#)].

La résolution de problèmes de diffraction dans des guides élastiques immergés a quant à elle été moins abordée. Elle présente une difficulté supplémentaire qui est le caractère

non borné du domaine élastique. Cette question a été abordée dans [Kau18; Kau+19a] en vue du contrôle non destructif de structures de réacteurs nucléaires immergées dans du sodium liquide. Le domaine fluide  $y$  est tronqué dans la direction transverse par des PML, et il en est de même pour le cœur élastique dans la direction longitudinale. Les PML axiales ont l'avantage d'être faciles à implémenter, mais elles sont défaillantes en élasticité en présence des modes rétrogrades (voir [DCL14]). Pour pallier ce problème, des conditions transparentes reposant sur le formalisme **XY** ont été développées pour des guides élastiques fermés dans [Bar09] avec l'introduction des opérateurs  $YtX$  (Y-to-X) et  $XtY$  (X-to-Y), puis dans [Ton15] avec l'introduction des opérateurs avec recouvrement  $YtR$  (Y-to-Robin) et  $TtR$  (Transparent-to-Robin).

Ensuite, l'étude du caractère bien posé des problèmes de diffraction dans les guides élastiques fermés a fait l'objet de contributions récentes. Parmi elles, nous pouvons citer [Nic22] qui a proposé une démonstration du caractère bien posé des équations de l'élasticité avec un terme source dans un guide élastique 2D. Cette preuve repose sur le récent résultat de complétude des modes de Lamb donné dans [Aki22a]. Dans [Naz13; Aki22b], c'est l'approche de Kondratiev introduite au chapitre 5 qui est utilisée pour montrer le caractère bien posé du problème avec terme source dans un guide élastique uniforme, mais aussi dans un demi-guide. Cette seconde approche pourrait peut-être être mise en œuvre pour étudier notre configuration.

Le présent chapitre sera structuré comme suit. Nous commencerons par écrire le problème de diffraction que l'on cherche à résoudre numériquement. Dans un second temps, nous expliquerons comment tronquer le domaine de calcul avec des PML longitudinales pour avoir une solution de référence. Nous supposerons le caractère bien posé du problème initial, mais montrerons en annexe que le problème approché en présence de PML est bien posé sous certaines conditions sur les profils de PML longitudinales. Nous montrerons enfin comment utiliser le formalisme **XY** présenté dans la sous-section 7.3.3 pour écrire une condition transparente faisant intervenir un opérateur  $YtX$ .

**Remarque 8.1** *Sauf mention contraire, nous reprendrons les notations introduites au chapitre 7.*

## 8.1 Écriture du problème

On considère un guide élastique occupant le domaine  $W^s := \mathbb{R} \times \Sigma^s$  de section transverse  $\Sigma^s \subset \mathbb{R}^{d-1}$ ,  $d = 2, 3$ . Il est supposé être à l'air libre (modélisé au premier ordre par le vide) pour  $x_1 < 0$ , et immergé dans un fluide pour  $x_1 > 0$ . Ce dernier est tronqué dans la direction transverse par des PML et occupe le domaine  $\Omega_+^f := (0, +\infty) \times \Sigma^f$ . Nous faisons les mêmes hypothèses qu'au chapitre 7 sur les sections  $\Sigma^s$  et  $\Sigma^f$ . On considère dans le cœur élastique un obstacle occupant un ouvert borné  $D$  simplement connexe, à frontière Lipschitz et satisfaisant  $\overline{D} \subset W^s$ . Le cœur privé du défaut est noté  $\dot{\Omega}^s := W^s \setminus \overline{D}$ . Il serait tout aussi bien possible de considérer un obstacle dans le fluide, c'est-à-dire vérifiant  $\overline{D} \subset \Omega_+^f$ , mais nous ne le ferons pas pour ne pas alourdir le propos. De plus, nous choisissons de considérer un obstacle de type Dirichlet. On note ensuite  $\Gamma_-^s := (-\infty, 0) \times \gamma^s$  le bord de la partie à l'air libre du cœur avec  $\gamma^s := \partial\Sigma^s$ . L'interface entre le fluide et le cœur solide est notée  $\Gamma_+^{sf} := (0, +\infty) \times \gamma^{sf}$  où on a  $\gamma^{sf} := \partial\Sigma^s$ . La surface du fluide en contact avec l'aire est notée  $\Sigma_0^f := \{0\} \times \Sigma^f$  et le bord extérieur de la PML est noté  $\Gamma_+^{pml} := (0, +\infty) \times (\partial\Sigma^f \setminus \gamma^{sf})$ . Nous choisissons d'imposer une condition de Neumann homogène sur  $\Sigma_0^f$  et  $\Gamma_+^{pml}$ . La normale unitaire sortante à  $\dot{\Omega}^s$  est notée  $n_s$  et celle à  $\Omega_+^f$  est notée  $n_f$ .

Pour un ouvert générique  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ , nous noterons  $\mathbf{L}^2(\Omega) := (\mathbf{L}^2(\Omega))^3$  et :

$$\mathbf{H}^1(\Omega) := \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \partial_{x_j} u_i \in \mathbf{L}^2(\Omega), 1 \leq i, j \leq 3\}.$$

Nous munissons ces espaces fonctionnels des normes :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} := \left( \sum_{i=1}^3 \|u_i\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} := \left( \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \|\partial_{x_j} u_i\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (8.1)$$

**Remarque 8.2** *Tout comme au chapitre 7, le cas 2D correspondra au cas d'une plaque. On aura alors  $\partial_{x_3} = 0$ .*

Le problème de diffraction considéré s'écrit alors :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}, \varphi) \in \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\dot{\Omega}^s) \times \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\Omega_+^f) \text{ tel que} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div}(\underline{\sigma}(\mathbf{u})) + \rho_s \omega^2 \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \dot{\Omega}^s \\ \mathbf{div}(\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma} \nabla \varphi) + b^{\alpha\Sigma} k_f^2 \varphi = 0 & \text{dans } \Omega_+^f \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \partial D \\ \underline{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n}_s = 0 & \text{sur } \Gamma_-^s \\ \underline{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n}_s = -\omega \rho_f \varphi \mathbf{n}_s & \text{sur } \Gamma_+^{\text{sf}} \\ \omega(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s) = \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_s & \text{sur } \Gamma_+^{\text{sf}} \\ \partial_{\mathbf{n}_f} \varphi = 0 & \text{sur } \Gamma_+^{\text{pml}} \cup \Sigma_0^f \\ \mathbf{u} - \mathbf{u}^i \text{ est sortant} \\ \varphi \text{ est sortant,} \end{array} \right. \end{cases} \quad (8.2)$$

où  $\mathbf{u}^i$  est une onde incidente à support dans le demi-guide gauche. En pratique, nous prendrons les ondes incidentes particulières  $\mathbf{u}^i = \tilde{\mathbf{u}}_{n,+}^0$  avec :

$$\tilde{\mathbf{u}}_{n,+}^0(x_1, \mathbf{x}_\Sigma) := \begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}_{n,+}(x_1, \mathbf{x}_\Sigma) & \text{si } x_1 < 0 \\ 0 & \text{si } x_1 > 0, \end{cases}$$

et où  $\tilde{\mathbf{u}}_{n,+}$  est un mode du guide gauche sortant à droite. Nous rappelons de plus que le tenseur  $\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma}$  et la fonction scalaire  $b^{\alpha\Sigma}$  décrivant les PML transverses sont définis dans la sous-section 7.3.1. Le problème décrit est représenté sur la Figure 8.1 dans une configuration 2D.

**Remarque 8.3** *Notons que nous avons encore fait dans ce chapitre le changement de variable  $i\varphi \rightarrow \varphi$  pour faciliter certains éléments d'analyse par la suite.*

Nous concluons cette section introductive par l'hypothèse suivante.

#### Hypothèse 8.4

Le problème (8.2) est bien posé excepté pour un ensemble dénombrable de fréquences.

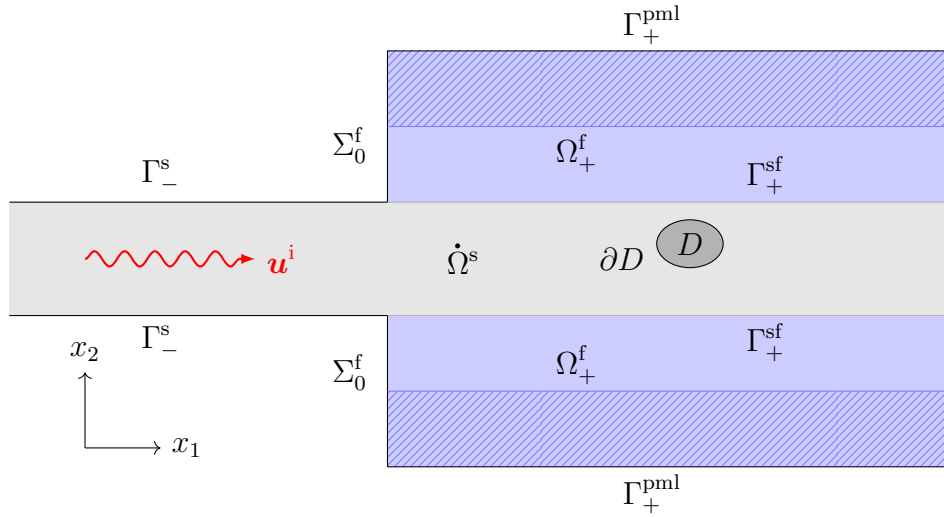


FIGURE 8.1: Schéma illustrant le problème (8.2) en 2D.

## 8.2 Troncature longitudinale du domaine à l'aide de PML

Cette section est dédiée à la troncature du domaine de calcul à l'aide de PML longitudinales. On fait l'hypothèse que l'obstacle  $D$  est localisé dans la partie du cœur élastique comprise entre les sections  $\Sigma_{-R}^s := \{-R\} \times \Sigma^s$  et  $\Sigma_R^s := \{R\} \times \Sigma^s$  pour un réel  $R > 0$  choisi suffisamment grand.

Il a été expliqué dans la sous-section 4.2.2, que l'introduction de PML peut se faire par le moyen d'une dilatation analytique. Nous avons alors vu en 2D qu'une dilatation analytique dans la direction transverse de la structure se traduit dans les équations du problème par la multiplication des dérivées partielles  $\partial_{x_2}$  par la fonction  $\alpha_2$ , égale à 1 dans la partie physique du domaine et complexe dans la zone occupée par la PML. La fonction  $\alpha_2$  est donnée par la Définition 4.10. Nous choisissons maintenant d'introduire des PML longitudinales en  $x_1 = \pm R$ . De la même façon que pour les PML transverses en 2D, cela se traduit dans les équations du problème (8.2) par le remplacement de l'opérateur différentiel  $\partial_{x_1}$  par l'opérateur  $\alpha_1 \partial_{x_1}$ , où  $\alpha_1$  est une fonction complexe dépendant du profil de PML. Précisons un premier choix de cette fonction en rappelant auparavant qu'un point de la structure est noté  $\mathbf{x} = (x_1, \mathbf{x}_\Sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$ ,  $d = 2, 3$ .

### Définition 8.5

Soit  $\tilde{\alpha}_\infty \in \mathbb{C}$  satisfaisant  $\Im m(\tilde{\alpha}_\infty) < 0$  et  $\Re e(\tilde{\alpha}_\infty) > 0$ . On considère aussi une fonction  $\tilde{\mathcal{C}}_\infty : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  suffisamment régulière vérifiant :

$$\tilde{\mathcal{C}}_\infty(\pm R, \mathbf{x}_\Sigma) = \pm R, \quad \partial_{x_1} \tilde{\mathcal{C}}_\infty(\pm R, \mathbf{x}_\Sigma) = 1 \quad \text{et} \quad \partial_{x_1} \tilde{\mathcal{C}}_\infty(\mathbf{x}) = 1/\alpha_\infty \quad \text{pour} \quad |x_1| > \tilde{R},$$

avec  $\tilde{R} > R$ . On suppose aussi que  $\partial_{x_1} \tilde{\mathcal{C}}_\infty$  est bornée en module inférieurement et supérieurement par des constantes strictement positives, et par soucis de simplification qu'elle est paire vis-à-vis de  $x_1$ . Enfin, les parties réelle et imaginaire de  $\partial_{x_1} \tilde{\mathcal{C}}_\infty$  sont choisies strictement croissantes vis-à-vis de la variable  $x_1$ . On définit deux types de profil de PML :

- un *profil abrupt* par :

$$\tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) := \begin{cases} -R + \frac{x_1 + R}{\widetilde{\alpha_\infty}} & \text{si } x_1 < -R \\ x_1 & \text{si } |x_1| \leq R \\ R + \frac{x_1 - R}{\widetilde{\alpha_\infty}} & \text{si } x_1 > R, \end{cases} \quad \text{et} \quad \alpha_1(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \text{si } |x_1| \leq R \\ \widetilde{\alpha_\infty} & \text{si } |x_1| > R. \end{cases}$$

Ce profil  $\alpha_1$  est discontinu en  $x_1 = \pm R$ .

- un *profil doux* par :

$$\tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) := \begin{cases} x_1 & \text{si } |x_1| \leq R \\ \widetilde{\mathcal{C}_\infty}(\mathbf{x}) & \text{si } |x_1| > R \end{cases} \quad \text{et} \quad \alpha_1(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \text{si } |x_1| \leq R \\ 1/\partial_{x_1} \widetilde{\mathcal{C}_\infty}(\mathbf{x}) & \text{si } |x_1| > R. \end{cases}$$

Ce profil  $\alpha_1$  est continu en  $x_1 = \pm R$ .

Pour nous ramener à un domaine borné dans la direction longitudinale, nous tronquons les PML des deux côtés de la jonction en  $x_1 = \pm R'$  avec  $R' > \widetilde{R} > R$ . Nous faisons le choix d'imposer en bout de PML une condition de Neumann homogène. Introduisons alors  $\dot{\Omega}_{-R,R'}^s := ((-R, R') \times \Sigma^s) \setminus \overline{D}$ , puis  $\Omega_{0,R'}^f := (0, R') \times \Sigma^f$  ainsi que la boîte  $B_-^s := (-R', -R) \times \Sigma^s$ . Les différentes sections qui vont intervenir sont notées  $\Sigma_{-R}^s := \{-R\} \times \Sigma^s$  et  $\Sigma_{R'}^f := \{R'\} \times \Sigma^f$ . Nous introduisons enfin les domaines  $\Gamma_{-R,0}^s := (-R, 0) \times \gamma^s$ ,  $\Gamma_{0,R'}^{sf} := (0, R') \times \gamma^{sf}$  et  $\Gamma_{0,R'}^{\text{pml}} := (0, R') \times \gamma^{\text{pml}}$ .

Nous noterons désormais  $\mathbf{u}_+$  le champ total dans  $\dot{\Omega}_{-R,R'}^s$  et  $\mathbf{u}_-$  celui dans  $B_-^s$ . Les équations de l'élasticité dilatées dans le domaine  $B_-^s$  occupé à gauche par la PML longitudinale ne s'appliquent pas au champ total  $\mathbf{u}_-$ , mais à son champ diffracté  $\mathbf{u}_-^d := \mathbf{u}_- - \mathbf{u}^i$ . Puisque l'onde incidente est à support dans le demi-guide gauche, le champ total  $\mathbf{u}_+$  est sortant à droite, et alors les équations de l'élasticité dilatées à droite s'appliquent à celui-ci. Par conséquent, nous sommes amenés à écrire le problème de transmission suivant satisfait par le champ diffracté  $\mathbf{u}_-^d$  dans  $B_-^s$  et le champ total  $\mathbf{u}_+$  dans le domaine  $\dot{\Omega}_{-R,R'}^s$  :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\mathbf{u}_-^d, \mathbf{u}_+, \varphi) \in \mathbf{H}^1(B_-^s) \times \mathbf{H}^1(\dot{\Omega}_{-R,R'}^s) \times \mathbf{H}^1(\Omega_{0,R'}^f) \quad \text{tel que} \\ & \left\{ \begin{array}{ll} \text{div}_{\alpha_1}(\underline{\sigma}^{\alpha_1}(\mathbf{u}_-^d)) + \rho_s \omega^2 \mathbf{u}_-^d = 0 & \text{dans } B_-^s \\ \text{div}_{\alpha_1}(\underline{\sigma}^{\alpha_1}(\mathbf{u}_+)) + \rho_s \omega^2 \mathbf{u}_+ = 0 & \text{dans } \dot{\Omega}_{-R,R'}^s \\ \text{div}_{\alpha_1}(\underline{\mathcal{A}}^{\alpha_\Sigma} \nabla_{\alpha_1} \varphi) + b^{\alpha_\Sigma} k_f^2 \varphi = 0 & \text{dans } \Omega_{0,R'}^f \\ \mathbf{u}_-^d + \mathbf{u}^i = \mathbf{u}_+ & \text{sur } \Sigma_{-R}^s \\ \underline{\sigma}^{\alpha_1}(\mathbf{u}_-^d + \mathbf{u}^i) \mathbf{n}_1 = \underline{\sigma}^{\alpha_1}(\mathbf{u}_+) \mathbf{n}_1 & \text{sur } \Sigma_{-R}^s \\ \underline{\sigma}^{\alpha_1}(\mathbf{u}_+) \mathbf{n}_s = -\omega \rho_f \varphi \mathbf{n}_s & \text{sur } \Gamma_{0,R'}^{sf} \\ \omega(\mathbf{u}_+ \cdot \mathbf{n}_s) = \nabla_{\alpha_1} \varphi \cdot \mathbf{n}_s & \text{sur } \Gamma_{0,R'}^{sf} \\ \mathbf{u}_+ = 0 & \text{sur } \partial D \\ \underline{\sigma}^{\alpha_1}(\mathbf{u}_+) \mathbf{n}_s = 0 & \text{sur } \Gamma_{-R,0}^s \cup \Sigma_{R'}^s \\ \underline{\sigma}^{\alpha_1}(\mathbf{u}_-^d) \mathbf{n}_s = 0 & \text{sur } \partial B_-^s \setminus \Sigma_{-R}^s \\ \partial_{\mathbf{n}_f} \varphi = 0 & \text{sur } \Sigma_0^f \cup \Gamma_{0,R'}^{\text{pml}} \cup \Sigma_{R'}^f, \end{array} \right. \quad (8.3) \end{aligned}$$

où  $\mathbf{n}_1 = (n_1 \ 0 \ 0)^t$  avec  $n_1 = \pm 1$  en  $x_1 = \pm R$  et  $x_1 = \pm R'$ . Dans (8.3), les indices et exposants  $\alpha_1$  indiquent qu'on a remplacé  $\partial_{x_1}$  par  $\alpha_1 \partial_{x_1}$  dans les opérateurs différentiels.

Toutes les notations introduites sont regroupées sur la Figure 8.2.

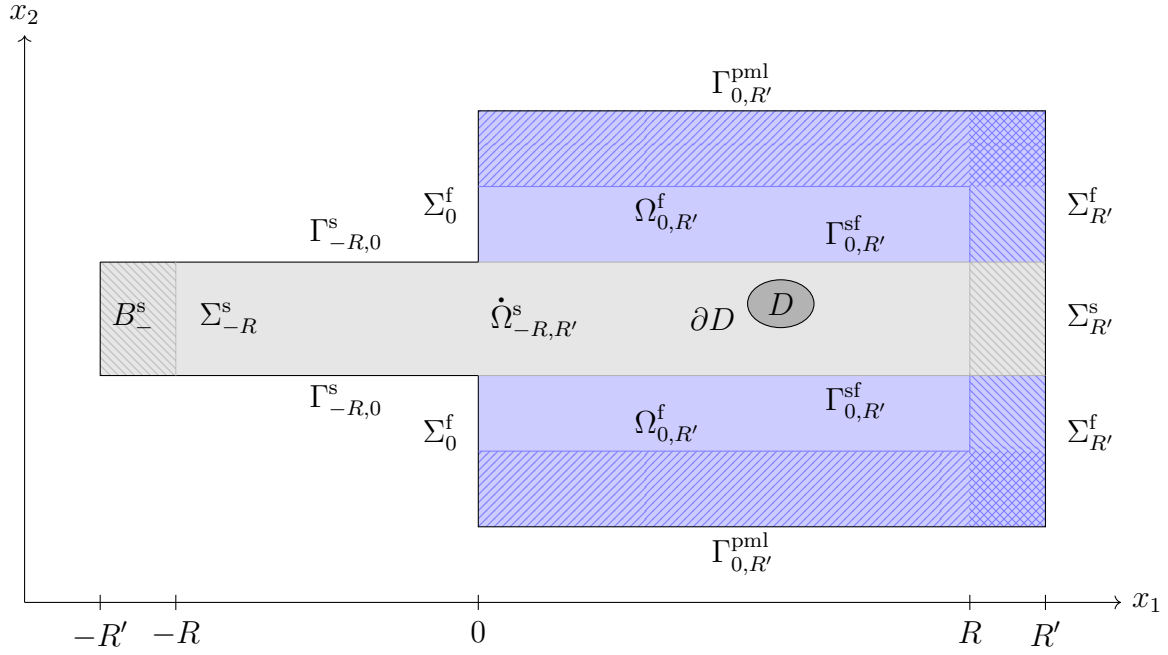


FIGURE 8.2: Schéma illustrant le problème (8.3) en 2D.

### 8.2.1 Formulation variationnelle

Nous allons maintenant chercher à écrire une formulation variationnelle de (8.3) en détaillant les calculs en coordonnées cartésiennes. En 2D, il faudra prendre dans ces calculs  $\partial_{x_3} = 0$ . Précisons pour commencer l'expression des opérateurs différentiels dilatés dans la direction  $x_1$ . Ils s'écrivent :

$$\mathbf{div}_{\alpha_1}(\underline{\sigma}^{\alpha_1}(\mathbf{v})) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \partial_{x_1} \sigma_{11}^{\alpha_1} + \partial_{x_2} \sigma_{12}^{\alpha_1} + \partial_{x_3} \sigma_{13}^{\alpha_1} \\ \alpha_1 \partial_{x_1} \sigma_{21}^{\alpha_1} + \partial_{x_2} \sigma_{22}^{\alpha_1} + \partial_{x_3} \sigma_{23}^{\alpha_1} \\ \alpha_1 \partial_{x_1} \sigma_{31}^{\alpha_1} + \partial_{x_2} \sigma_{32}^{\alpha_1} + \partial_{x_3} \sigma_{33}^{\alpha_1} \end{pmatrix},$$

avec :

$$\underline{\sigma}^{\alpha_1}(\mathbf{v}) = \lambda_s \mathbf{div}_{\alpha_1}(\mathbf{v}) \mathbf{Id} + 2\mu_s \underline{\epsilon}^{\alpha_1}(\mathbf{v}).$$

La divergence dilatée est donnée par  $\mathbf{div}_{\alpha_1}(\mathbf{v}) := \alpha_1 \partial_{x_1} v_1 + \mathbf{div}_{\Sigma}(\mathbf{v}_{\Sigma})$ , où  $\mathbf{v}_{\Sigma} \mapsto \mathbf{div}_{\Sigma}(\mathbf{v}_{\Sigma})$  est l'opérateur divergence dans la section transverse. Le tenseur des déformations linéarisé dilaté se décompose en  $\underline{\epsilon}^{\alpha_1}(\mathbf{v}) := \alpha_1 \underline{\epsilon}^1(\mathbf{v}) + \underline{\epsilon}_{\Sigma}(\mathbf{v})$ , avec :

$$\underline{\epsilon}^1(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\partial_{x_1} v_1 & \partial_{x_1} v_2 & \partial_{x_1} v_3 \\ \partial_{x_1} v_2 & 0 & 0 \\ \partial_{x_1} v_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\epsilon}_{\Sigma}(\mathbf{v}) := \underline{\epsilon}(\mathbf{v}) - \underline{\epsilon}^1(\mathbf{v}). \quad (8.4)$$

Pour obtenir une formulation variationnelle de (8.3), il faut conduire des intégrations par parties des équations dans les domaines  $\dot{\Omega}_{-R,R}^s$ ,  $B_-$  et  $\Omega_{0,R'}^f$ , puis utiliser les conditions de couplage et de transmission entre les inconnues de ces différents domaines.

- Dans  $\dot{\Omega}_{-R,R}^s$

Soit  $\mathbf{H}_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_{-R,R}^s)$  l'ensemble des distributions de  $\mathbf{H}^1(\dot{\Omega}_{-R,R}^s)$  qui s'annulent sur  $\partial D$ .

Multiplier la deuxième équation de (8.3) par  $\bar{\mathbf{v}}/\alpha_1$ , avec  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_{-R,R'}^s)$ , donne après intégration par parties :

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\dot{\Omega}_{-R,R'}^s} \alpha_1^{-1} (\mathbf{div}_{\alpha_1}(\underline{\sigma}^{\alpha_1}(\mathbf{u}_+)) + \rho_s \omega^2 \mathbf{u}_+) \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\dot{\Omega}_{-R,R'}^s} \sum_{i=1}^3 \left( \partial_{x_1} \sigma_{i1}^{\alpha_1}(\mathbf{u}_+) + \alpha_1^{-1} \sum_{j=2}^3 \partial_{x_j} \sigma_{ij}^{\alpha_1}(\mathbf{u}_+) + \rho_s \omega^2 \alpha_1^{-1} u_{+,i} \right) \bar{v}_i \, d\mathbf{x} \\
 &= - \int_{\dot{\Omega}_{-R,R'}^s} \sum_{i=1}^3 \left( \sigma_{i1}^{\alpha_1}(\mathbf{u}_+) \partial_{x_1} \bar{v}_i + \alpha_1^{-1} \sum_{j=2}^3 \sigma_{ij}^{\alpha_1}(\mathbf{u}_+) \partial_{x_j} \bar{v}_i - \rho_s \omega^2 \alpha_1^{-1} u_{+,i} \bar{v}_i \right) d\mathbf{x} \\
 &\quad + \int_{\Sigma_{-R}^s \cup \Sigma_{R'}^s} \sum_{i=1}^3 \sigma_{i1}^{\alpha_1}(\mathbf{u}_+) n_{1i} \bar{v}_i \, ds(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_{-R,0}^{sf} \cup \Gamma_{0,R'}^{sf}} \alpha_1^{-1} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=2}^3 \sigma_{ij}^{\alpha_1}(\mathbf{u}_+) n_j \bar{v}_i \, ds(\mathbf{x}) \\
 &= - \int_{\dot{\Omega}_{-R,R'}^s} \alpha_1^{-1} \sum_{i=1}^3 \left( \sigma_{i1}^{\alpha_1}(\mathbf{u}_+) (\alpha_1 \partial_{x_1} \bar{v}_i) + \sum_{j=2}^3 \sigma_{ij}^{\alpha_1}(\mathbf{u}_+) \partial_{x_j} \bar{v}_i - \rho_s \omega^2 u_{+,i} \bar{v}_i \right) d\mathbf{x} \\
 &\quad + \int_{\Sigma_{-R}^{sf}} (\underline{\sigma}^{\alpha_1}(\mathbf{u}_+) \mathbf{n}_1) \cdot \bar{\mathbf{v}} \, ds(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_{0,R'}^{sf}} \alpha_1^{-1} (\underline{\sigma}^{\alpha_1}(\mathbf{u}_+) \mathbf{n}_s) \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} \\
 &= - \int_{\dot{\Omega}_{-R,R'}^s} \alpha_1^{-1} (\underline{\sigma}^{\alpha_1}(\mathbf{u}_+) : \underline{\nabla}^{\alpha_1}(\bar{\mathbf{v}}) - \rho_s \omega^2 \mathbf{u}_+ \cdot \bar{\mathbf{v}}) \, d\mathbf{x} \\
 &\quad + \int_{\Sigma_{-R}^s} (\underline{\sigma}^{\alpha_1}(\mathbf{u}_+) \mathbf{n}_1) \cdot \bar{\mathbf{v}} \, ds(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_{0,R'}^{sf}} \alpha_1^{-1} (\underline{\sigma}^{\alpha_1}(\mathbf{u}_+) \mathbf{n}_s) \cdot \bar{\mathbf{v}} \, ds(\mathbf{x}),
 \end{aligned}$$

où nous avons introduit le tenseur :

$$\underline{\nabla}^{\alpha_1}(\mathbf{v}) := \begin{pmatrix} \alpha_1 \partial_{x_1} v_1 & \partial_{x_2} v_1 & \partial_{x_3} v_1 \\ \alpha_1 \partial_{x_1} v_2 & \partial_{x_2} v_2 & \partial_{x_3} v_2 \\ \alpha_1 \partial_{x_1} v_3 & \partial_{x_2} v_3 & \partial_{x_3} v_3 \end{pmatrix},$$

et  $n_2$  et  $n_3$  sont définis à l'aide de la normale unitaire sortante  $\mathbf{n}_s := (n_1 \ n_2 \ n_3)^t$  au domaine solide  $\dot{\Omega}_{-R,R'}^s$ . Au regard de la symétrie du tenseur  $\underline{\sigma}^{\alpha_1}(\mathbf{u}_+)$ , décomposer le tenseur  $\underline{\nabla}^{\alpha_1}$  en la somme de sa partie symétrique (qui est le tenseur  $\underline{\epsilon}^{\alpha_1}$ ) et de sa partie antisymétrique, nous pouvons réécrire l'équation comme suit :

$$\begin{aligned}
 &\int_{\dot{\Omega}_{-R,R'}^s} \alpha_1^{-1} (\underline{\sigma}^{\alpha_1}(\mathbf{u}_+) : \underline{\epsilon}^{\alpha_1}(\bar{\mathbf{v}}) - \rho_s \omega^2 \mathbf{u}_+ \cdot \bar{\mathbf{v}}) \, d\mathbf{x} \\
 &\quad - \int_{\Sigma_{-R}^s} (\underline{\sigma}^{\alpha_1}(\mathbf{u}_+) \mathbf{n}_1) \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x}_\Sigma + \omega \rho_f \int_{\Gamma_{0,R'}^{sf}} \alpha_1^{-1} \varphi(\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}_s) \, d\mathbf{x} = 0.
 \end{aligned} \tag{8.5}$$

• Dans  $B_-^s$

Nous effectuons le même calcul que dans  $\dot{\Omega}_{-R,R'}^s$ , mais avec la première équation de (8.3) et  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(B_-^s)$ . On trouve :

$$\int_{B_-^s} \alpha_1^{-1} (\underline{\sigma}^{\alpha_1}(\mathbf{u}_-^d) : \underline{\epsilon}^{\alpha_1}(\bar{\mathbf{v}}) - \rho_s \omega^2 \mathbf{u}_-^d \cdot \bar{\mathbf{v}}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Sigma_{-R}^s} (\underline{\sigma}^{\alpha_1}(\mathbf{u}_-^d) \mathbf{n}_1) \cdot \bar{\mathbf{v}} \, ds(\mathbf{x}) = 0. \tag{8.6}$$



• Dans  $\Omega_{0,R'}^f$

Nous commençons par rappeler que  $\nabla_{\alpha_1} := (\alpha_1 \partial_{x_1} \quad \nabla_{\Sigma})^t$ , où  $\nabla_{\Sigma}$  est l'opérateur gradient dans la section transverse. Ensuite, nous multiplions la troisième équation de (8.3) par  $\bar{\psi}/\alpha_1$  pour  $\psi \in H^1(\Omega_{0,R'}^f)$ , puis intégrons par parties en utilisant les différentes conditions aux bords. Cela donne :

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\Omega_{0,R'}^f} \alpha_1^{-1} (\alpha_1 \partial_{x_1} (\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma} \nabla_{\alpha_1} \varphi)_1 + \operatorname{div}_{\Sigma} ((\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma} \nabla_{\alpha_1} \varphi)_{\Sigma}) + b^{\alpha\Sigma} k_f^2 \varphi) \bar{\psi} d\mathbf{x} \\
 &= - \int_{\Omega_{0,R'}^f} ((\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma} \nabla_{\alpha_1} \varphi)_1 \partial_{x_1} \bar{\psi} + \alpha_1^{-1} (\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma} \nabla_{\alpha_1} \varphi)_{\Sigma} \cdot \nabla_{\Sigma} \bar{\psi} - \alpha_1^{-1} b^{\alpha\Sigma} k_f^2 \varphi \bar{\psi}) d\mathbf{x} \\
 &\quad + \int_{\Gamma_{0,R'}^{\text{sf}} \cup \Gamma_{0,R'}^{\text{pml}}} \alpha_1^{-1} (\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma} \nabla_{\alpha_1} \varphi)_{\Sigma} \cdot \mathbf{e}_f ds(\mathbf{x}) + \int_{\Sigma_0^f \cup \Sigma_{R'}^f} (\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma} \nabla_{\alpha_1} \varphi)_1 n_1 \bar{\psi} ds(\mathbf{x}) \\
 &= - \int_{\Omega_{0,R'}^f} ((\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma} \nabla_{\alpha_1} \varphi) \cdot (\alpha_1^{-1} \nabla_{\alpha_1} \bar{\psi}) - \alpha_1^{-1} b^{\alpha\Sigma} k_f^2 \varphi \bar{\psi}) d\mathbf{x} \\
 &\quad + \int_{\Gamma_{0,R'}^{\text{sf}} \cup \Gamma_{0,R'}^{\text{pml}}} \alpha_1^{-1} (\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma} \nabla_{\alpha_1} \varphi)_{\Sigma} \cdot \mathbf{e}_f ds(\mathbf{x}) + \int_{\Sigma_0^f \cup \Sigma_{R'}^f} (\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma} \nabla_{\alpha_1} \varphi)_1 n_1 \bar{\psi} ds(\mathbf{x}),
 \end{aligned}$$

où  $n_1$  et  $\mathbf{e}_f$  sont définis à partir de la normale unitaire sortante  $\mathbf{n}_f := (n_1 \quad \mathbf{e}_f)^t$  au domaine fluide  $\Omega_{0,R'}^f$ . Utiliser les différentes conditions aux bords, les conditions de couplage et le fait que  $\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma}$  est égal à la matrice identité de  $\mathbb{C}^{d \times d}$  sur  $\Gamma_{0,R'}^{\text{sf}}$  conduit à :

$$\rho_f \int_{\Omega_{0,R'}^f} ((\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma} \nabla_{\alpha_1} \varphi) \cdot (\alpha_1^{-1} \nabla_{\alpha_1} \bar{\psi}) - \alpha_1^{-1} b^{\alpha\Sigma} k_f^2 \varphi \bar{\psi}) d\mathbf{x} + \omega \rho_f \int_{\Gamma_{0,R'}^{\text{sf}}} \alpha_1^{-1} (\mathbf{u}_+ \cdot \mathbf{n}_s) \bar{\psi} ds(\mathbf{x}) = 0. \quad (8.7)$$

• Formulation globale

Soit  $\dot{\Omega}_{-R',R'}^s := B_-^s \cup \Sigma_{-R}^s \cup \dot{\Omega}_{-R,R'}^s$  et  $\mathbf{H}_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_{-R',R'}^s)$  l'ensemble des distributions de  $\mathbf{H}^1(\dot{\Omega}_{-R',R'}^s)$  qui s'annulent sur  $\partial D$ . Pour obtenir la formulation globale, nous sommes les équations (8.5), (8.6) et (8.7) et nous obtenons finalement le problème variationnel :

Trouver  $(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-^d, \varphi) \in \mathbf{H}_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_{-R,R'}^s) \times \mathbf{H}^1(B_-^s) \times H^1(\Omega_{0,R'}^f)$  tel que

$$\left\{ \begin{aligned}
 &\int_{\dot{\Omega}_{-R,R'}^s} \alpha_1^{-1} (\underline{\sigma}^{\alpha_1}(\mathbf{u}_+) : \underline{\epsilon}^{\alpha_1}(\bar{\mathbf{v}}) - \rho_s \omega^2 \mathbf{u}_+ \cdot \bar{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + \int_{B_-^s} \alpha_1^{-1} (\underline{\sigma}^{\alpha_1}(\mathbf{u}_-^d) : \underline{\epsilon}^{\alpha_1}(\bar{\mathbf{v}}) - \rho_s \omega^2 \mathbf{u}_-^d \cdot \bar{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} \\
 &+ \rho_f \int_{\Omega_{0,R'}^f} ((\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma} \nabla_{\alpha_1} \varphi) \cdot (\alpha_1^{-1} \nabla_{\alpha_1} \bar{\psi}) - \alpha_1^{-1} b^{\alpha\Sigma} k_f^2 \varphi \bar{\psi}) d\mathbf{x} \\
 &+ \omega \rho_f \int_{\Gamma_{0,R'}^{\text{sf}}} \alpha_1^{-1} (\varphi (\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}_s) + (\mathbf{u}_+ \cdot \mathbf{n}_s) \bar{\psi}) d\mathbf{x}_{\Sigma} = \int_{\Sigma_{-R}^s} (\underline{\sigma}^{\alpha_1}(\mathbf{u}^i) \mathbf{n}_1) \cdot \bar{\mathbf{v}} ds(\mathbf{x}), \\
 &\quad \forall (\mathbf{v}, \psi) \in \mathbf{H}_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_{-R',R'}^s) \times H^1(\Omega_{0,R'}^f) \\
 &\text{et} \\
 &\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-^d = \mathbf{u}^i \quad \text{sur} \quad \Sigma_{-R}^s,
 \end{aligned} \right. \quad (8.8)$$

pour un champ incident  $\mathbf{u}^i$  dont nous préciserons plus tard la régularité.

**Remarque 8.6** En 2D, le tenseur  $\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma}$  et la fonction scalaire  $b^{\alpha\Sigma}$  sont donnés par :

$$\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma} = \begin{pmatrix} \alpha_2^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b^{\alpha\Sigma} = \alpha_2^{-1}.$$

Dans le problème (8.8), l'intégrale sur domaine  $\Omega_{0,R'}^f$  s'écrit alors de façon plus simple :

$$\rho_f \int_{\Omega_{0,R'}^f} \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \partial_{x_1} \varphi \partial_{x_1} \bar{\psi} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \partial_{x_2} \varphi \partial_{x_2} \bar{\psi} - (\alpha_1 \alpha_2)^{-1} k_f^2 \varphi \bar{\psi} \right) d\mathbf{x}.$$

**Remarque 8.7** Comme mentionné dans [DCL14] dans le contexte de l'étude de PML dans un guide élastique fermé, prouver le caractère bien posé de ce type de problème n'est pas chose aisée. Il est néanmoins possible de montrer que le problème (8.8) est bien posé pour des profils réguliers de PML longitudinales tels que  $|\Im(\alpha_1)|$  est petit. La démonstration de ce résultat est présentée en annexe de ce chapitre à la section 8.4.

## 8.2.2 Résultats numériques

Présentons maintenant quelques résultats numériques issus de la discrétisation du problème (8.8) pour une configuration 2D. Plus précisément, nous considérons une plaque élastique de demi-épaisseur  $h_0 = 1$  cm à l'air libre pour les abscisses négatives (i.e.  $x_1 < 0$ ) et immergée pour les abscisses positives (i.e.  $x_1 > 0$ ). Le domaine fluide est tronqué transversalement par des PML occupant le domaine  $h_1 < |x_2| < h_2$  avec  $h_1 = 2$  cm et  $h_2 = 5$  cm. Nous choisissons pour ces PML transverses le profil parabolique (4.31) avec  $\hat{\eta} = 1 + 2i$ . La structure est aussi tronquée dans la direction longitudinale par des PML. Puisque nous nous intéressons principalement au comportement des ondes dans la partie immergée de la structure, cette troncature se fera de façon asymétrique, contrairement à ce qui a été écrit précédemment pour alléger l'écriture du problème. Les PML occuperont donc à gauche le domaine  $-7,5 \text{ cm} < x_1 < -5 \text{ cm}$  et à droite le domaine  $7,5 \text{ cm} < x_1 < 10 \text{ cm}$ . Plusieurs profils seront testés pour ces PML longitudinales. Le problème est discrétisé à l'aide d'éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}^2$  avec un pas de maillage de  $h = 0,08$  cm. Ce choix de pas de maillage nous garantira d'avoir au moins 15 points de discrétisation par longueur d'onde dans le fluide et dans le solide, avec cette condition satisfaite par les ondes de cisaillement et de pression dans le second cas. Nous choisissons pour onde incidente le mode de Lamb propagatif  $A_0$  du demi-guide gauche, qui est le premier mode antisymétrique du demi-guide gauche. Il est calculé à l'aide de la méthode SAFE, la section  $\Sigma^s$  étant discrétisée avec des éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}^1$  pour un pas de maillage  $h = 0,005$  cm.

La représentation des solutions du problème d'interaction fluide-structure est plus difficile qu'en acoustique du fait du caractère vectoriel de la solution dans le solide. Pour faciliter la lecture et l'interprétation des résultats, nous choisissons de représenter la composante transverse  $u_2$  du champ de déplacement dans le solide et la quantité  $v_2/\omega$  dans le fluide, où  $v_2 := \partial_{x_2} \varphi$  est la composante transverse de la vitesse. Le champ  $v_2$  sera évalué lors d'une phase de post-traitement par dérivation discrète du potentiel des vitesses  $\varphi$ . Ce choix de représentation aura l'avantage de permettre la visualisation de la condition de couplage dynamique  $u_2 = v_2/\omega$  satisfaite à l'interface entre le solide et le fluide. Il est important de noter pour comprendre les résultats numériques à venir, que la solution est représentée en champ total pour  $x_1 > -5$  cm, mais en champ diffracté dans la PML de gauche, c'est-à-dire pour  $x_1 < -5$  cm.

Dans ce qui suit, nous présenterons tout d’abord des résultats en l’absence d’obstacle, puis des résultats en présence d’obstacle.

### Choix du profil de PML longitudinal

Il est difficile de déterminer en pratique l’ensemble des profils de PML longitudinaux admissibles pour garantir le caractère bien posé du problème (8.8). Nous observons cependant numériquement que la matrice issue de la discrétisation par éléments finis du problème (8.8) est inversible pour les profils de PML abrupt et parabolique choisis. Considérons une plaque d’acier partiellement immergée dans de l’eau (se référer à la Table 7.1 pour les paramètres physiques associés) et travaillons à la fréquence  $\omega = 3,14 \cdot 10^5$  rad.Hz. Sur la Figure 8.3, nous avons considéré deux profils de PML longitudinale : un abrupt et un parabolique légèrement moins atténuant. Dans les deux cas, les PML semblent qualitativement atténuer la solution dans le solide et le fluide sans introduire de réflexions parasites.

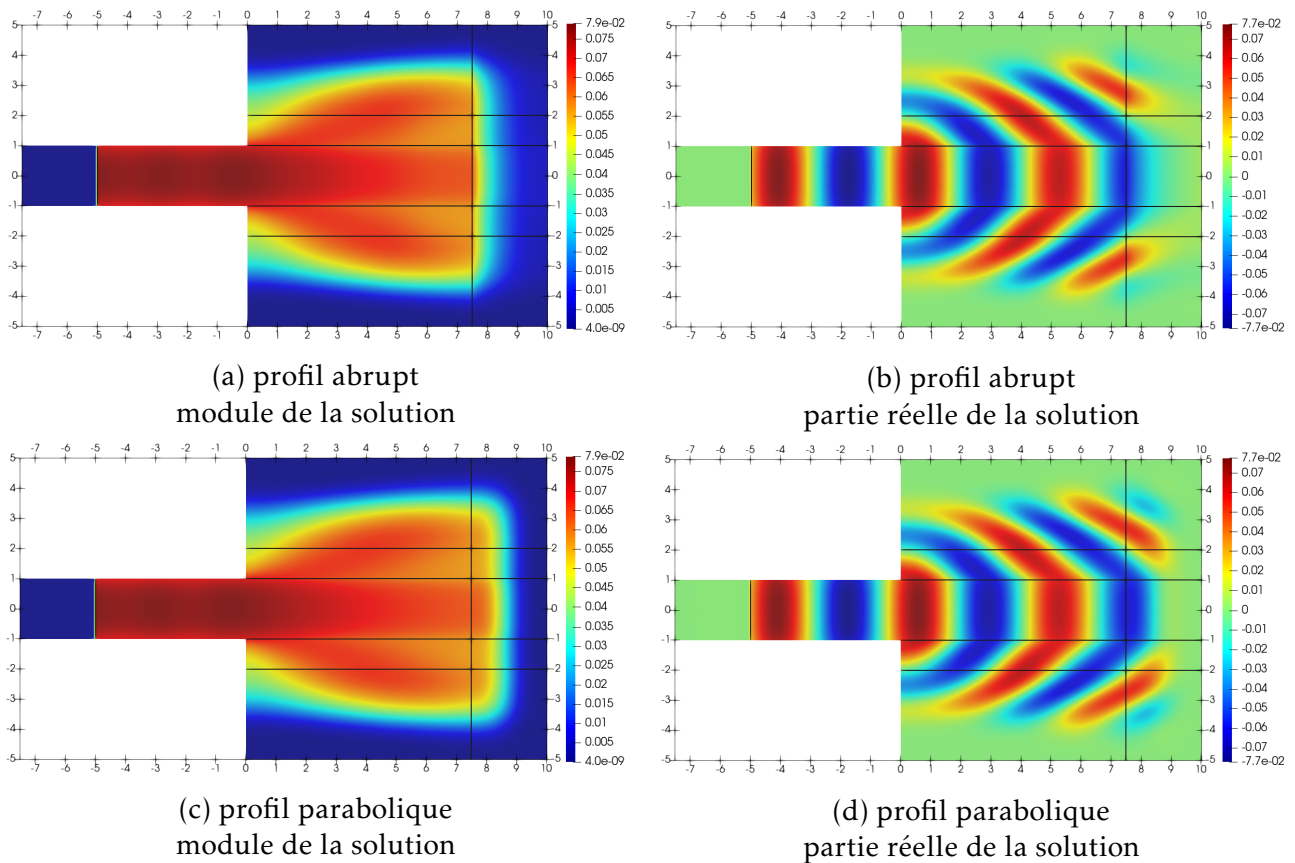


FIGURE 8.3: Solution approchée du problème (8.8) obtenue en haut : avec un profil de PML longitudinal abrupt, en bas : avec le profil de PML longitudinal parabolique (4.31). Paramètres :  $\alpha_\infty = e^{-i\pi/3}$  pour le profil abrupt et  $\hat{\eta} = 1 + 2i$  pour le profil parabolique.

### Impact des matériaux solide et fluide sur la propagation des ondes

Maintenant que nous sommes en mesure de résoudre de façon approchée le problème (8.8) pour certains types de profil de PML longitudinales, nous nous intéressons à l'impact du choix des matériaux sur la propagation des ondes dans la structure partiellement immergée que nous considérons. Nous fixons la fréquence angulaire à  $\omega = 6,28 \cdot 10^5$  rad.Hz et choisissons de retenir le profil de PML parabolique (4.31) avec  $\hat{\eta} = 1 + 2i$  pour tronquer longitudinalement le domaine de calcul. Sur la Figure 8.4, nous observons que les ondes se propagent de façon similaire dans une plaque d'acier ou d'aluminium partiellement immergée dans de l'eau. Les ondes sont cependant atténuées plus rapidement dans une plaque d'aluminium que dans une plaque d'acier. Les impédances acoustiques (voir [Bha02]) des ondes de cisaillement (respectivement de pression) données par  $Z_s := \rho_s c_s$  (respectivement  $Z_p := \rho_s c_p$ ) sont en effet près de trois fois plus grandes pour l'aluminium que pour l'acier. Par conséquent, le couplage avec l'eau sera plus important pour l'aluminium que pour l'acier. Il en résultera une plus grande perte d'énergie dans le fluide dans le premier cas.

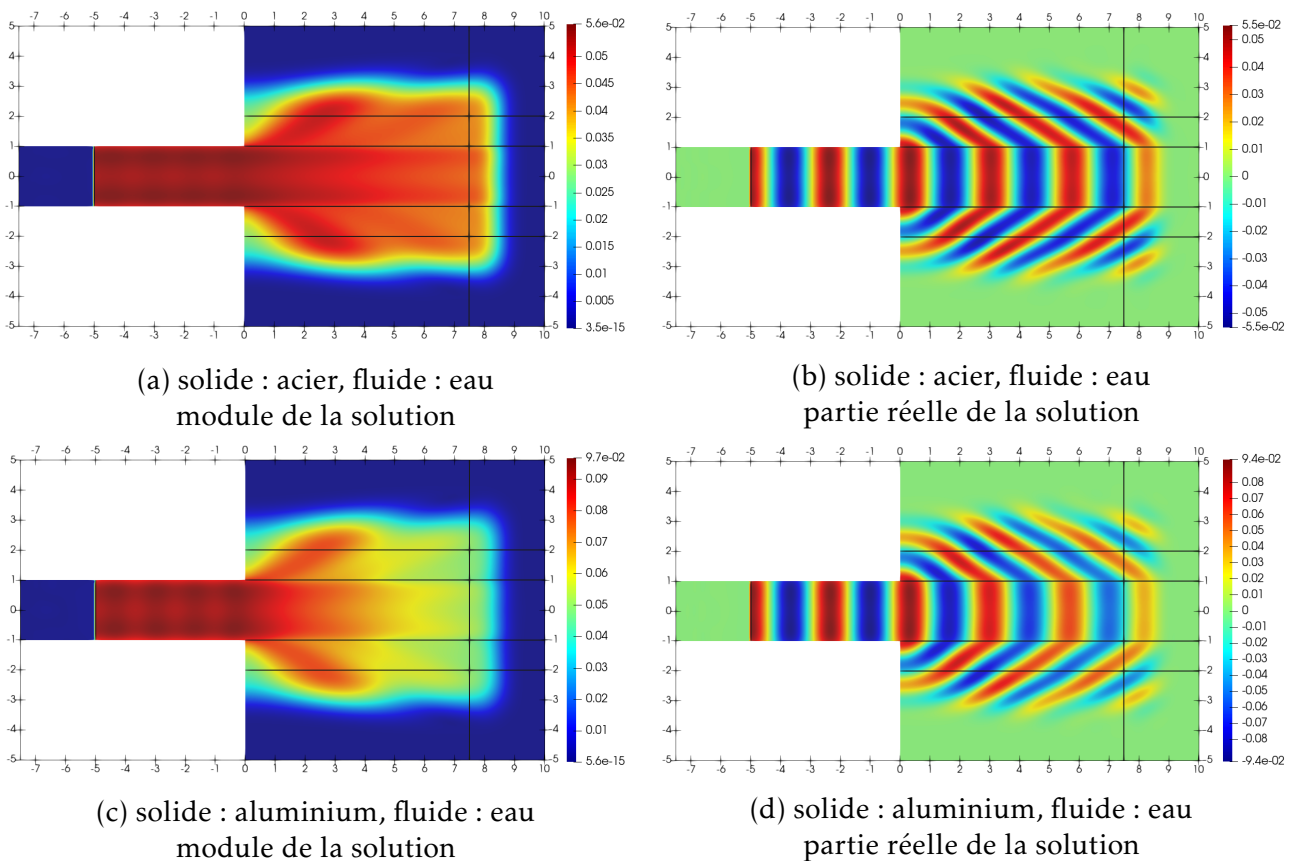


FIGURE 8.4: Solution approchée du problème (8.8) obtenue avec deux matériaux solides différents partiellement immergés dans de l'eau.

Il est ensuite possible de voir, avec la Figure 8.5, que remplacer l'eau par du sodium liquide modifie la forme des ondes qui se propagent dans la partie immergée de la structure. Une comparaison avec les résultats de la Figure 8.4 montre de plus que l'onde générée par le mode de Lamb incident  $A_0$  provenant du demi-guide gauche est plus atténuée quand la plaque est immergée dans du sodium liquide que lorsqu'elle l'est dans de l'eau. Cette observation s'explique par le fait que l'impédance acoustique  $Z_f := \rho_f c_f$  du sodium est plus grande que celle de l'eau.

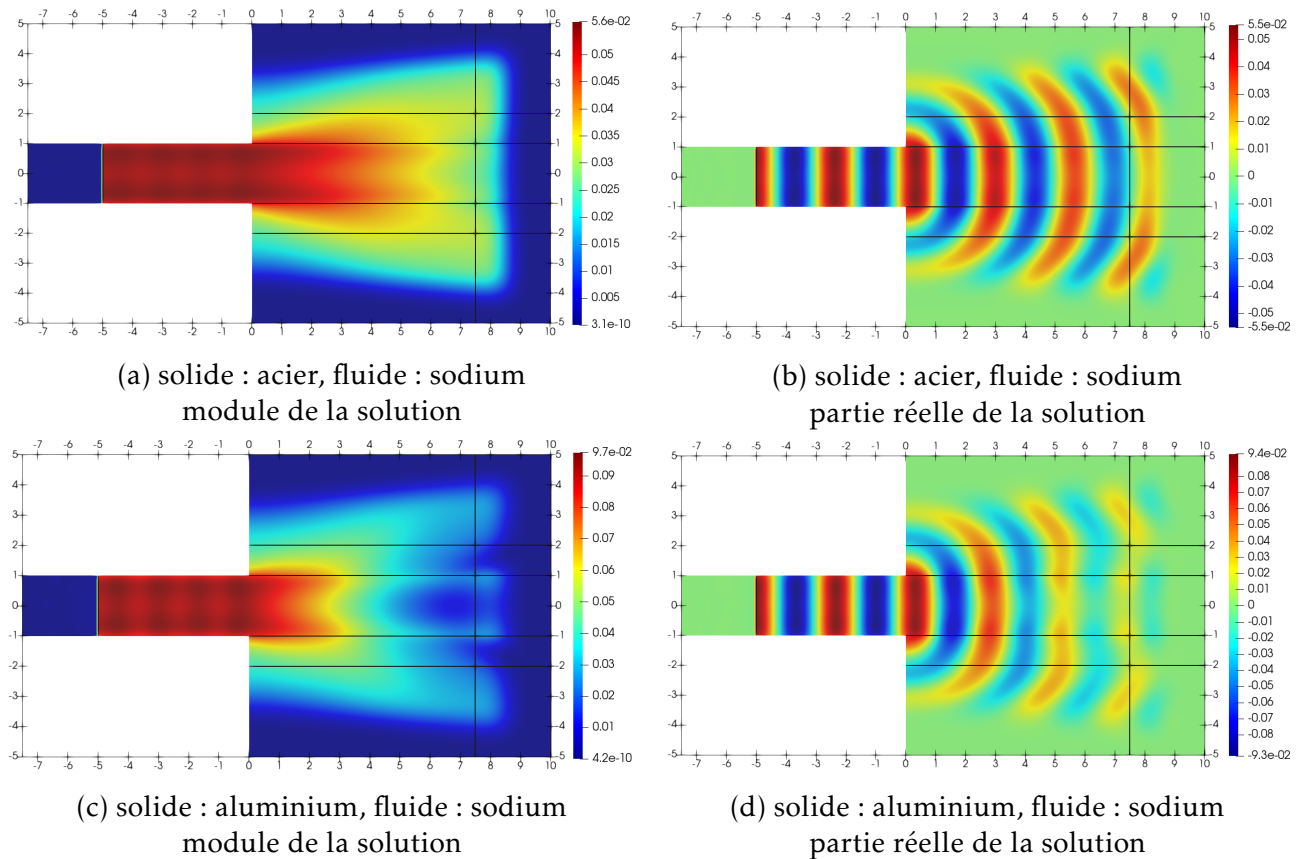


FIGURE 8.5: Solution approchée du problème (8.8) obtenue avec deux matériaux solides différents partiellement immergés dans du sodium liquide.

### Diffraction par des obstacles

Nous concluons cette partie numérique en prenant maintenant en compte deux types de défauts dans la partie immergée dans la structure. Dans un premier temps, nous allons considérer des défauts volumiques de type Dirichlet dans le solide et dans le fluide. Dans un second temps, nous prendrons en compte des défauts consistant en une perturbation localisée de la partie immergée du cœur élastique. Cette deuxième catégorie de défauts peut se rapprocher d'un défaut de corrosion ou d'un dépôt métallique (de la même nature, ce qui s'apparente alors à une surépaisseur).

Pour les paramètres des simulations, nous considérons une plaque d'aluminium dans de l'eau et nous travaillons toujours à la fréquence de  $\omega = 6,28 \cdot 10^5$  rad.Hz. Nous retenons à nouveau le profil parabolique de PML longitudinales, mais cette fois avec  $\hat{\eta} = 4 + 3i$  pour garantir une atténuation suffisamment importante dans le solide. Les autres paramètres géométriques et de discrétisation sont inchangés. Pour des obstacles de Dirichlet impénétrables, nous pouvons voir sur la Figure 8.6 que la propagation des ondes est davantage affectée lorsque l'obstacle est situé dans le cœur solide que dans le fluide environnant.

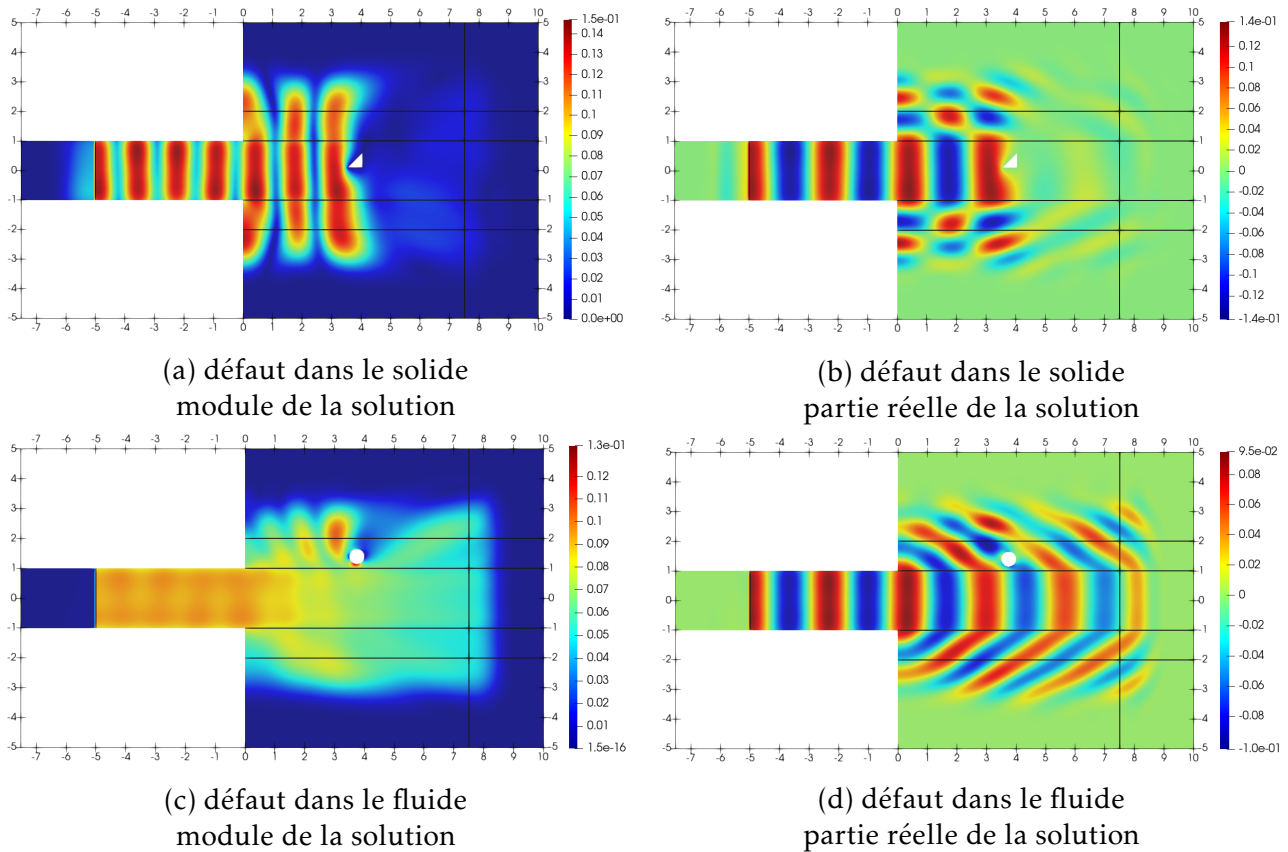


FIGURE 8.6: Solution approchée du problème (8.8) obtenue en haut : pour un obstacle de Dirichlet en forme de triangle dans le solide, en bas : pour un obstacle de Dirichlet en forme de disque dans le fluide.

Sur la Figure 8.7, nous pouvons voir que les défauts considérés de type corrosion ou dépôt situés sur la surface de la partie immergée du cœur élastique perturbent la propagation de l'onde produite par le champ incident  $A_0$ . Cette perturbation est cependant moindre par rapport à celle induite par un obstacle de Dirichlet dans le solide. On remarque dans ce cas ce qui s'apparente à des artefacts dans le fluide au voisinage des angles formés par le défaut. Pour comprendre ce phénomène, il faut se rappeler que nous représentons dans le fluide la quantité  $v_2/\omega$  obtenue par dérivation discrète à partir du potentiel  $\varphi$ . L'instabilité de l'opération de dérivation discrète rend difficile l'approximation correcte de  $v_2$  au voisinage des coins, car la solution  $\varphi$  y est moins bien approchée par éléments finis.



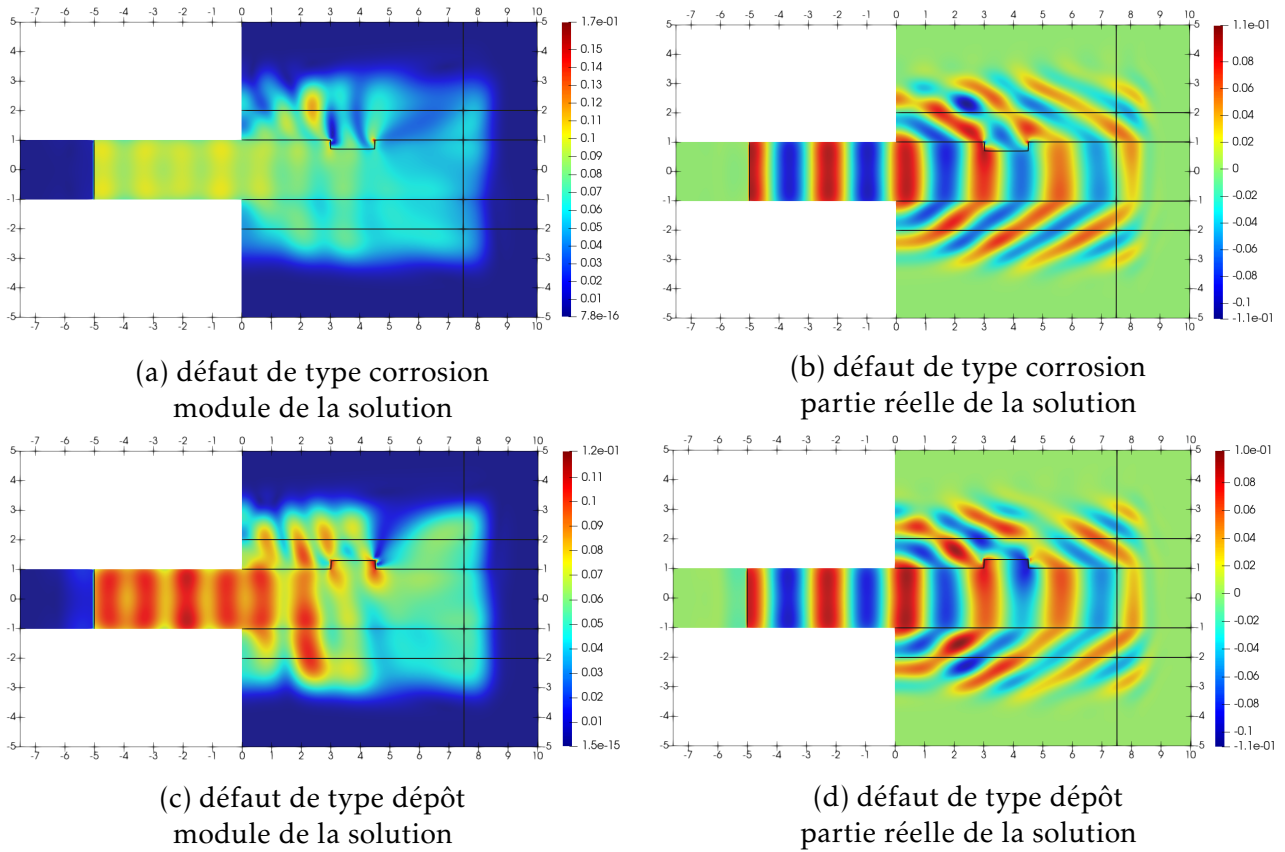


FIGURE 8.7: Solution approchée du problème (8.8) obtenue en haut : pour un défaut de type corrosion du cœur élastique, en bas : pour un défaut de type dépôt sur le cœur élastique.

### 8.3 Troncature longitudinale du domaine à l'aide d'opérateurs YtX

Nous venons de décrire une méthode permettant de résoudre le problème direct en tronquant longitudinalement le domaine de calcul à l'aide de PML. Cette méthode a l'avantage d'être relativement facile à implémenter, mais a l'inconvénient de ne pas être robuste. En effet, elle ne permet pas d'approcher correctement la solution du problème initial (8.2) en présence de modes rétrogrades dans l'un des deux demi-guides. Nous souhaitons donc recourir à une méthode modale pour tronquer le domaine de calcul. Elle sera plus difficile à implémenter, puisqu'elle va requérir le calcul et le tri des modes des deux demi-guides, mais elle sera applicable en présence de modes rétrogrades.

Nous faisons le choix de reprendre l'opérateur YtX introduit dans [Bar09] pour résoudre des problèmes de diffraction dans des guides d'ondes élastiques fermés. Cet opérateur avait été construit de façon similaire à l'opérateur DtN dans un guide d'onde acoustique, à la différence qu'il tirait parti du formalisme XY présenté pour les guides élastiques fermés à la sous-section 7.1.1. Dans notre cas, il prendra aussi en compte le couplage entre le solide et le fluide ainsi que la présence des PML. Sa construction reposera sur l'extension du formalisme XY à ce nouveau contexte conduite à la sous-section 7.3.3.

Détaillons premièrement l'obtention de l'opérateur YtX dans le cas connu d'un guide élastique fermé, puis dans le nouveau cas d'un guide élastique immergé.

### 8.3.1 Opérateur YtX pour le demi-guide élastique fermé gauche

Soit  $R > 0$  choisi tel que le défaut  $D$  soit situé dans la portion du cœur élastique délimitée par les sections  $\Sigma_{-R}^s$  et  $\Sigma_R^s$ . On introduit le demi-guide gauche  $\Omega_{-\infty, -R}^s := (-\infty, -R) \times \Sigma^s$  ainsi que le domaine situé à sa droite  $\dot{\Omega}_{-R, +\infty}^s := \dot{\Omega}^s \setminus \overline{\Omega_{-\infty, -R}^s}$ . Le problème initial (8.2) est équivalent au problème de transmission :

$$\text{Trouver } (\mathbf{u}_-, \mathbf{u}, \varphi) \in \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\Omega_{-\infty, -R}^s) \times \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\dot{\Omega}_{-R, +\infty}^s) \times \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\Omega_+^f) \quad \text{tel que}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\underline{\sigma}(\mathbf{u}_-)) + \rho_s \omega^2 \mathbf{u}_- = 0 \quad \text{dans } \Omega_{-\infty, -R}^s \\ \underline{\sigma}(\mathbf{u}_-) \mathbf{n}_s = 0 \quad \text{sur } (-\infty, -R) \times \gamma^s \\ \mathbf{u}_- - \mathbf{u}^i \text{ est sortant} \\ \\ \text{div}(\underline{\sigma}(\mathbf{u})) + \rho_s \omega^2 \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \dot{\Omega}_{-R, +\infty}^s \\ \text{div}(\underline{A}^{\alpha\Sigma} \nabla \varphi) + b^{\alpha\Sigma} k_f^2 \varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega_+^f \\ \mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \partial D \\ \underline{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n}_s = -\omega \rho_f \varphi \mathbf{n}_s \quad \text{sur } \Gamma_+^{\text{sf}} \\ \omega(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s) = \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_s \quad \text{sur } \Gamma_+^{\text{sf}} \\ \partial_{\mathbf{n}_f} \varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_+^{\text{pml}} \cup \Sigma_0^f \\ \mathbf{u} \text{ est sortant} \\ \varphi \text{ est sortant} \\ \\ \mathcal{X}_-^s = \mathcal{X}^s \quad \text{sur } \Sigma_{-R}^s \\ \mathcal{Y}_-^s = \mathcal{Y}^s \quad \text{sur } \Sigma_{-R}^s, \end{array} \right. \quad (8.9)$$

où  $\mathcal{X}_-^s$  et  $\mathcal{Y}_-^s$  représentent les variables mixtes associées à  $\mathbf{u}_-$ , et  $\mathcal{X}^s$  et  $\mathcal{Y}^s$  celles associées à  $\mathbf{u}$ . L'équivalence entre les problèmes (8.2) et (8.9) s'obtient en utilisant la continuité des variables  $\mathcal{X}^s$  et  $\mathcal{Y}^s$  sur  $\Sigma_{-R}^s$ . Ces conditions nous donnent en effet la continuité du champ de déplacement, ce qui garantit que le champ de déplacement est dans  $\mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\dot{\Omega}^s)$ , mais aussi la continuité de la contrainte longitudinale, ce qui garantit que les équations de l'élasticité sont satisfaites dans  $\dot{\Omega}^s$ . Considérons la trace de Dirichlet de  $\mathcal{Y}^s$  comme une donnée pour le problème de demi-guide :

$$\text{Trouver } \mathbf{u}_- \in \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\Omega_{-\infty, -R}^s) \text{ tel que}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\underline{\sigma}(\mathbf{u}_-)) + \rho_s \omega^2 \mathbf{u}_- = 0 \quad \text{dans } \Omega_{-\infty, -R}^s \\ \underline{\sigma}(\mathbf{u}_-) \mathbf{n}_s = 0 \quad \text{sur } (-\infty, -R) \times \gamma^s \\ \mathcal{Y}_-^s = \mathcal{Y}^s \quad \text{sur } \Sigma_{-R}^s \\ \mathbf{u}_- - \mathbf{u}^i \text{ est sortant.} \end{array} \right. \quad (8.10)$$

Pour résoudre ce problème, nous allons exprimer d'un point de vue modal le caractère sortant du champ diffracté  $\mathbf{u}_-^d := \mathbf{u}_- - \mathbf{u}^i$ . Introduisons pour cela les variables mixtes  $\mathcal{X}^{s,i}$  et  $\mathcal{Y}^{s,i}$  associées au champ incident  $\mathbf{u}^i$ , puis les variables mixtes  $\mathcal{X}_-^{s,d} := \mathcal{X}_-^s - \mathcal{X}^{s,i}$  et  $\mathcal{Y}_-^{s,d} := \mathcal{Y}_-^s - \mathcal{Y}^{s,i}$  associées au champ diffracté  $\mathbf{u}_-^d$ . Les modes du guide gauche sortants à droite sont notés ici  $(\tilde{\lambda}_n, \tilde{\mathbf{X}}^s, \tilde{\mathbf{Y}}^s)_{n \geq 1}$ , et ceux sortants à gauche  $(-\tilde{\lambda}_n, -\tilde{\mathbf{X}}^s, \tilde{\mathbf{Y}}^s)_{n \geq 1}$  (voir [section 7.1.1](#)). Sous l'Hypothèse 7.9 de complétude des modes en variables mixtes, il existe d'après le Lemme 7.10 des coefficients complexes  $(a_n^\pm)_{n \geq 1}$  tels que :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}_-^{s,d}(\mathbf{x}) \\ \mathcal{Y}_-^{s,d}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \sum_{n \geq 1} \left( a_n^- \begin{pmatrix} -\tilde{\mathbf{X}}_n^s(\mathbf{x}_\Sigma) \\ \tilde{\mathbf{Y}}_n^s(\mathbf{x}_\Sigma) \end{pmatrix} e^{-\tilde{\lambda}_n x_1} + a_n^+ \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_n^s(\mathbf{x}_\Sigma) \\ \tilde{\mathbf{Y}}_n^s(\mathbf{x}_\Sigma) \end{pmatrix} e^{\tilde{\lambda}_n x_1} \right).$$

Puisque  $\mathbf{u}_-^d$  est sortant à gauche, on a  $a_n^+ = 0$  pour tout  $n \geq 1$ . La relation de biorthogonalité donnée par le Lemme 7.5 permet ensuite d'exprimer les coefficients  $(a_n^-)_{n \geq 1}$  en fonction de la



trace de  $\mathbf{y}_-^{\text{s,d}}$  sur  $\Sigma_{-R}^{\text{s}}$ , ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_-^{\text{s,d}}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{y}_-^{\text{s,d}}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \sum_{n \geq 1} (\mathbf{y}_-^{\text{s,d}}|_{\Sigma_{-R}^{\text{s}}}, \tilde{\mathbf{X}}_n^{\text{s}})_{\mathbf{H}^{\text{s}}} \begin{pmatrix} -\tilde{\mathbf{X}}_n^{\text{s}}(\mathbf{x}_\Sigma) \\ \tilde{\mathbf{Y}}_n^{\text{s}}(\mathbf{x}_\Sigma) \end{pmatrix} e^{-\tilde{\lambda}_n(x_1+R)}.$$

Puisque  $\mathbf{y}_-^{\text{s}} = \mathbf{y}^{\text{s}}$  sur  $\Sigma_{-R}^{\text{s}}$ , le champ total est alors donné pour  $x_1 \leq -R$  par :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_-^{\text{s}}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{y}_-^{\text{s}}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} &= \sum_{n \geq 1} (\mathbf{y}^{\text{s}}|_{\Sigma_{-R}^{\text{s}}}, \tilde{\mathbf{X}}_n^{\text{s}})_{\mathbf{H}^{\text{s}}} \begin{pmatrix} -\tilde{\mathbf{X}}_n^{\text{s}}(\mathbf{x}_\Sigma) \\ \tilde{\mathbf{Y}}_n^{\text{s}}(\mathbf{x}_\Sigma) \end{pmatrix} e^{-\tilde{\lambda}_n(x_1+R)} \\ &\quad - \sum_{n \geq 1} (\mathbf{y}^{\text{s,i}}|_{\Sigma_{-R}^{\text{s}}}, \tilde{\mathbf{X}}_n^{\text{s}})_{\mathbf{H}^{\text{s}}} \begin{pmatrix} -\tilde{\mathbf{X}}_n^{\text{s}}(\mathbf{x}_\Sigma) \\ \tilde{\mathbf{Y}}_n^{\text{s}}(\mathbf{x}_\Sigma) \end{pmatrix} e^{-\tilde{\lambda}_n(x_1+R)} + \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{\text{s,i}}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{y}^{\text{s,i}}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

La formule (8.11) montre que le problème de demi-guide (8.10) possède une unique solution qui s'exprime à l'aide de la donnée  $\mathbf{y}^{\text{s}}|_{\Sigma_{-R}^{\text{s}}}$ . Utiliser ensuite l'égalité  $\mathbf{x}_-^{\text{s}} = \mathbf{x}^{\text{s}}$  sur  $\Sigma_{-R}^{\text{s}}$  nous permet d'éliminer l'inconnue  $\mathbf{u}_-$  et d'obtenir sur  $\Sigma_{-R}^{\text{s}}$  :

$$\mathbf{x}^{\text{s}} = - \sum_{n \geq 1} (\mathbf{y}^{\text{s}}|_{\Sigma_{-R}^{\text{s}}}, \tilde{\mathbf{X}}_n^{\text{s}})_{\mathbf{H}^{\text{s}}} \tilde{\mathbf{X}}_n^{\text{s}} + \sum_{n \geq 1} (\mathbf{y}^{\text{s,i}}|_{\Sigma_{-R}^{\text{s}}}, \tilde{\mathbf{X}}_n^{\text{s}})_{\mathbf{H}^{\text{s}}} \tilde{\mathbf{X}}_n^{\text{s}} + \mathbf{x}^{\text{s,i}}.$$

Il est désormais possible de définir l'opérateur  $\text{YtX}$  à gauche.

#### Définition 8.8

Soient  $\mathbf{H}_{\mathbf{X}}^{\text{s}} := (\tilde{\mathbf{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^{\text{s}}))^2 \times \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^{\text{s}})$  et  $\mathbf{H}_{\mathbf{Y}}^{\text{s}} := (\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^{\text{s}}))^2 \times \tilde{\mathbf{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^{\text{s}})$ . L'opérateur  $\text{YtX}$  à gauche est l'opérateur  $T_{\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}}^- : \mathbf{H}_{\mathbf{Y}}^{\text{s}} \rightarrow \mathbf{H}_{\mathbf{X}}^{\text{s}}$  défini pour  $\mathbf{y}^{\text{s}} \in \mathbf{H}_{\mathbf{Y}}^{\text{s}}$  par :

$$T_{\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}}^- \mathbf{y}^{\text{s}} := - \sum_{n \geq 1} (\mathbf{y}^{\text{s}}, \tilde{\mathbf{X}}_n^{\text{s}})_{\mathbf{H}^{\text{s}}} \tilde{\mathbf{X}}_n^{\text{s}}.$$

C'est un opérateur continu sous l'Hypothèse 7.9 que les modes forment une base de Riesz.

La résolution du problème (8.9) est ainsi ramenée à celle d'un problème posé dans un domaine borné à gauche :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}, \varphi) \in \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\dot{\Omega}_{-R,+\infty}^{\text{s}}) \times \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\Omega_+^{\text{f}}) \quad \text{tel que} \\ \left. \begin{array}{l} \text{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) + \rho_s \omega^2 \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \dot{\Omega}_{-R,+\infty}^{\text{s}} \\ \text{div}(\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma} \nabla \varphi) + b^{\alpha\Sigma} k_{\text{f}}^2 \varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega_+^{\text{f}} \\ \mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \partial D \\ \underline{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u}) \mathbf{n}_s = -\omega \rho_{\text{f}} \varphi \mathbf{n}_s \quad \text{sur } \Gamma_+^{\text{sf}} \\ \omega(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s) = \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_s \quad \text{sur } \Gamma_+^{\text{sf}} \\ \partial_{\mathbf{n}_{\text{f}}} \varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_+^{\text{pml}} \cup \Sigma_0^{\text{f}} \\ \mathbf{x}^{\text{s}} = T_{\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}}^- \mathbf{y}^{\text{s}} + (\mathbf{x}^{\text{s,i}} - T_{\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}}^- \mathbf{y}^{\text{s,i}}) \quad \text{sur } \Sigma_{-R}^{\text{s}} \\ \mathbf{u} \text{ est sortant} \\ \varphi \text{ est sortant.} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (8.12)$$

### 8.3.2 Opérateur $\text{YtX}$ pour le demi-guide élastique immergé à droite

Nous venons de tronquer le domaine de calcul à gauche à l'aide d'une condition transparente faisant intervenir l'opérateur  $T_{\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}}^-$ . Il est possible de procéder de façon analogue à

droite grâce à l'analyse modale conduite à la [section 7.3](#). Sous l'Hypothèse [7.51](#) de complétude des modes à droite, la Proposition [7.54](#) nous permet de décomposer les champs sortants à droite sur les modes du guide droit sortants à droite. Ces modes sont notés  $(\lambda_n, \mathbf{X}_n^{\text{sf}}, \mathbf{Y}_n^{\text{sf}})_{n \geq 1}$ . La relation de biorthogonalité donnée Proposition [7.48](#) permet quant à elle d'exprimer les coefficients des décompositions modales en variables mixtes à l'aide des traces des variables mixtes sur  $\Sigma_R^{\text{sf}} := \Sigma_R^{\text{s}} \cup \Sigma_R^{\text{f}}$ . On peut alors définir l'opérateur YtX à droite.

### Définition 8.9

Soient  $\mathbf{H}_X^{\text{sf}} := (\tilde{\mathbf{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^{\text{s}}))^2 \times \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^{\text{s}}) \times \tilde{\mathbf{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^{\text{f}})$  et  $\mathbf{H}_Y^{\text{sf}} := (\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^{\text{s}}))^2 \times \tilde{\mathbf{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^{\text{s}}) \times \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^{\text{f}})$ . L'opérateur YtX à droite est l'opérateur  $T_{Y \rightarrow X}^+ : \mathbf{H}_Y^{\text{sf}} \rightarrow \mathbf{H}_X^{\text{sf}}$  défini pour  $\mathcal{Y}^{\text{sf}} \in \mathbf{H}_Y^{\text{sf}}$  par :

$$T_{Y \rightarrow X}^+ \mathcal{Y}^{\text{sf}} := \sum_{n \geq 1} (\mathcal{Y}^{\text{sf}}, (\mathbf{X}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}_Y^{\text{sf}}} \mathbf{X}_n^{\text{sf}}.$$

C'est un opérateur continu sous l'Hypothèse [7.51](#) que les modes forment une base de Riesz.

Introduisons le domaine solide  $\dot{\Omega}_{-R,R}^{\text{s}} := ((-R, R) \times \Sigma^{\text{s}}) \setminus \overline{D}$ , le domaine fluide  $\Omega_{0,R}^{\text{f}} := (0, R) \times \Sigma^{\text{f}}$ , l'interface de couplage  $\Gamma_{0,R}^{\text{sf}} := (0, R) \times \gamma^{\text{sf}}$  et enfin l'extrémité de la PML  $\Gamma_{0,R}^{\text{pml}} := (0, R) \times \gamma^{\text{pml}}$ . La résolution du problème [\(8.12\)](#) est finalement ramenée à celle d'un problème posé dans un domaine borné :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}, \varphi) \in \mathbf{H}^1(\dot{\Omega}_{-R,R}^{\text{s}}) \times \mathbf{H}^1(\Omega_{0,R}^{\text{f}}) \text{ tel que} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(\underline{\sigma}(\mathbf{u})) + \rho_s \omega^2 \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \dot{\Omega}_{-R,R}^{\text{s}} \\ \operatorname{div}(\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma} \nabla \varphi) + b^{\alpha\Sigma} k_f^2 \varphi = 0 & \text{dans } \Omega_{0,R}^{\text{f}} \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \partial D \\ \underline{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n}_s = -\omega \rho_f \varphi \mathbf{n}_s & \text{sur } \Gamma_{0,R}^{\text{sf}} \\ \omega(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s) = \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_s & \text{sur } \Gamma_{0,R}^{\text{sf}} \\ \partial_{\mathbf{n}_f} \varphi = 0 & \text{sur } \Gamma_{0,R}^{\text{pml}} \cup \Sigma_0^{\text{f}} \\ \mathcal{X}^{\text{s}} = T_{Y \rightarrow X}^- \mathcal{Y}^{\text{s}} + (\mathcal{X}^{\text{s},i} - T_{Y \rightarrow X}^- \mathcal{Y}^{\text{s},i}) & \text{sur } \Sigma_{-R}^{\text{s}} \\ \mathcal{X}^{\text{sf}} = T_{Y \rightarrow X}^+ \mathcal{Y}^{\text{sf}} & \text{sur } \Sigma_R^{\text{sf}} \end{array} \right. \end{cases} \quad (8.13)$$

### 8.3.3 Formulation variationnelle

Le problème [\(8.13\)](#) est posé dans un domaine borné, nous allons maintenant en proposer une formulation variationnelle en vue d'une résolution par éléments finis. Pour cela, nous avons d'abord besoin de décrire plus précisément les opérateurs  $T_{Y \rightarrow X}^-$  et  $T_{Y \rightarrow X}^+$ .

#### Écriture par blocs des opérateurs $T_{Y \rightarrow X}^{\pm}$

Commençons par remarquer que pour  $\mathbf{Y}^{\text{s}} \in \mathbf{H}_Y^{\text{s}}$ , on a pour tout  $n \geq 1$  :

$$(\mathbf{Y}^{\text{s}}, \tilde{\mathbf{X}}_n^{\text{s}})_{\mathbf{H}_Y^{\text{s}}} = \langle \mathbf{u}_{\Sigma}, \tilde{\mathbf{t}}_{\Sigma}^n \rangle_{(L^2(\Sigma_{-R}^{\text{s}}))^2} + \langle \mathbf{t}_1, \tilde{\mathbf{u}}_1^n \rangle_{\tilde{\mathbf{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^{\text{s}}), \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^{\text{s}})},$$

où pour simplifier les notations  $\langle \mathbf{u}_{\Sigma}, \mathbf{t}_{\Sigma} \rangle_{(L^2(\Sigma_{-R}^{\text{s}}))^2} := (\mathbf{u}_{\Sigma}, \overline{\mathbf{t}}_{\Sigma})_{(L^2(\Sigma_{-R}^{\text{s}}))^2}$ . L'opérateur YtX à gauche admet alors la décomposition :

$$T_{Y \rightarrow X}^- = \begin{pmatrix} T_{\mathbf{u}_{\Sigma} \rightarrow \mathbf{t}_{\Sigma}}^- & T_{\mathbf{t}_1 \rightarrow \mathbf{t}_{\Sigma}}^- \\ T_{\mathbf{u}_{\Sigma} \rightarrow \mathbf{u}_1}^- & T_{\mathbf{t}_1 \rightarrow \mathbf{u}_1}^- \end{pmatrix},$$

avec :

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{u}_\Sigma \rightarrow \mathbf{t}_\Sigma}^- \mathbf{u}_\Sigma &:= - \sum_{n \geq 1} \langle \mathbf{u}_\Sigma, \tilde{\mathbf{t}}_\Sigma^n \rangle_{(L^2(\Sigma_{-R}^s))^2} \tilde{\mathbf{t}}_\Sigma^n, & T_{\mathbf{t}_1 \rightarrow \mathbf{t}_\Sigma}^- \mathbf{t}_1 &:= - \sum_{n \geq 1} \langle \mathbf{t}_1, \tilde{\mathbf{u}}_1^n \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s)} \tilde{\mathbf{t}}_\Sigma^n, \\ T_{\mathbf{u}_\Sigma \rightarrow \mathbf{u}_1}^- \mathbf{u}_\Sigma &:= - \sum_{n \geq 1} \langle \mathbf{u}_\Sigma, \tilde{\mathbf{t}}_\Sigma^n \rangle_{(L^2(\Sigma_{-R}^s))^2} \tilde{\mathbf{u}}_1^n, & T_{\mathbf{t}_1 \rightarrow \mathbf{u}_1}^- \mathbf{t}_1 &:= - \sum_{n \geq 1} \langle \mathbf{t}_1, \tilde{\mathbf{u}}_1^n \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s)} \tilde{\mathbf{u}}_1^n. \end{aligned}$$

De la même façon, on développe pour  $\mathbf{Y}^{\text{sf}} \in \mathbf{H}_Y^{\text{sf}}$  et  $n \geq 1$  :

$$(\mathbf{Y}^{\text{sf}}, (\mathbf{X}_n^{\text{sf}})^*)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}} = \langle \mathbf{u}_\Sigma, \mathbf{t}_\Sigma^n \rangle_{(L^2(\Sigma_R^s))^2} + \langle \mathbf{t}_1, \mathbf{u}_1^n \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s)} + \rho_f \langle \varphi, b^{\alpha_\Sigma} \zeta_n \rangle_{L^2(\Sigma_R^f)},$$

où pour simplifier les notations  $\langle \varphi, \zeta \rangle_{L^2(\Sigma_R^f)} := (\varphi, \bar{\zeta})_{L^2(\Sigma_R^f)}$ . L'opérateur  $\mathbf{YtX}$  à droite admet alors la décomposition :

$$T_{\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}}^+ = \begin{pmatrix} T_{\mathbf{u}_\Sigma \rightarrow \mathbf{t}_\Sigma}^+ & T_{\mathbf{t}_1 \rightarrow \mathbf{t}_\Sigma}^+ & T_{\varphi \rightarrow \mathbf{t}_\Sigma}^+ \\ T_{\mathbf{u}_\Sigma \rightarrow \mathbf{u}_1}^+ & T_{\mathbf{t}_1 \rightarrow \mathbf{u}_1}^+ & T_{\varphi \rightarrow \mathbf{u}_1}^+ \\ T_{\mathbf{u}_\Sigma \rightarrow \zeta}^+ & T_{\mathbf{t}_1 \rightarrow \zeta}^+ & T_{\varphi \rightarrow \zeta}^+ \end{pmatrix},$$

avec :

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{u}_\Sigma \rightarrow \mathbf{t}_\Sigma}^+ \mathbf{u}_\Sigma &:= \sum_{n \geq 1} \langle \mathbf{u}_\Sigma, \mathbf{t}_\Sigma^n \rangle_{(L^2(\Sigma_R^s))^2} \mathbf{t}_\Sigma^n, & T_{\mathbf{t}_1 \rightarrow \mathbf{t}_\Sigma}^+ \mathbf{t}_1 &:= \sum_{n \geq 1} \langle \mathbf{t}_1, \mathbf{u}_1^n \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s)} \mathbf{t}_\Sigma^n, \\ T_{\varphi \rightarrow \mathbf{t}_\Sigma}^+ \varphi &:= \rho_f \sum_{n \geq 1} \langle \varphi, b^{\alpha_\Sigma} \zeta_n \rangle_{L^2(\Sigma_R^f)} \mathbf{t}_\Sigma^n, \\ T_{\mathbf{u}_\Sigma \rightarrow \mathbf{u}_1}^+ \mathbf{u}_\Sigma &:= \sum_{n \geq 1} \langle \mathbf{u}_\Sigma, \mathbf{t}_\Sigma^n \rangle_{(L^2(\Sigma_R^s))^2} \mathbf{u}_1^n, & T_{\mathbf{t}_1 \rightarrow \mathbf{u}_1}^+ \mathbf{t}_1 &:= \sum_{n \geq 1} \langle \mathbf{t}_1, \mathbf{u}_1^n \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s)} \mathbf{u}_1^n, \\ T_{\varphi \rightarrow \mathbf{u}_1}^+ \varphi &:= \rho_f \sum_{n \geq 1} \langle \varphi, b^{\alpha_\Sigma} \zeta_n \rangle_{L^2(\Sigma_R^f)} \mathbf{u}_1^n, \\ T_{\mathbf{u}_\Sigma \rightarrow \zeta}^+ \mathbf{u}_\Sigma &:= \sum_{n \geq 1} \langle \mathbf{u}_\Sigma, \mathbf{t}_\Sigma^n \rangle_{(L^2(\Sigma_R^s))^2} \zeta_n, & T_{\mathbf{t}_1 \rightarrow \zeta}^+ \mathbf{t}_1 &:= \sum_{n \geq 1} \langle \mathbf{t}_1, \mathbf{u}_1^n \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s)} \zeta_n, \\ T_{\varphi \rightarrow \zeta}^+ \varphi &:= \rho_f \sum_{n \geq 1} \langle \varphi, b^{\alpha_\Sigma} \zeta_n \rangle_{L^2(\Sigma_R^f)} \zeta_n. \end{aligned}$$

### Obtention d'une formulation variationnelle du problème (8.13)

La principale difficulté dans l'écriture d'une formulation variationnelle de (8.13) réside dans la prise en compte des conditions de radiation faisant intervenir les variables mixtes par l'intermédiaire des opérateurs  $T_{\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}}^-$  et  $T_{\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}}^+$ . Nous allons voir qu'une partie de ces conditions de radiation peut être traitée de façon naturelle, dans le sens où nous pourrions les prendre en compte simplement à l'aide d'intégrations par parties. Une autre partie de ces conditions de radiation devra être traitée de façon essentielle, dans le sens où leur prise en compte se fera de façon variationnelle à la main. Nous verrons que les équations associées à ces conditions de radiation imposées de façon essentielles feront intervenir une composante de la contrainte longitudinale qui n'aura pas été éliminée lors des intégrations par parties mentionnées précédemment. Cette composante de la contrainte longitudinale sera alors traitée comme un multiplicateur de Lagrange. La formulation variationnelle que nous obtiendrons aura pour inconnues toutes les composantes du champ de déplacement, le potentiel des vitesses ainsi que le multiplicateur de Lagrange associé à la composante de la contrainte non éliminée. Commençons donc par multiplier les deux premières équations de (8.13) puis les intégrer par parties.

• Intégration dans  $\dot{\Omega}_{-R,R}^s$

Soit  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_{-R,R}^s)$ , on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\dot{\Omega}_{-R,R}^s} (\operatorname{div}(\underline{\sigma}(\mathbf{u})) \cdot \bar{\mathbf{v}} + \rho_s \omega^2 \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} \\ &= - \int_{\dot{\Omega}_{-R,R}^s} (\underline{\sigma}(\mathbf{u}) : \underline{\epsilon}(\bar{\mathbf{v}}) - \rho_s \omega^2 \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + \int_{\Sigma_{-R}^s \cup \Sigma_R^s} (\underline{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n}_1) \cdot \bar{\mathbf{v}} ds(\mathbf{x}) \\ &\quad + \int_{\Gamma_{0,R}^{\text{sf}}} (\underline{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n}_s) \cdot \bar{\mathbf{v}} ds(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

La condition de couplage dynamique sur  $\Gamma_{0,R}^{\text{sf}}$  donne :

$$\int_{\Gamma_{0,R}^{\text{sf}}} (\underline{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n}_s) \cdot \bar{\mathbf{v}} ds(\mathbf{x}) = -\omega \rho_f \int_{\Gamma_{0,R}^{\text{sf}}} \varphi(\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}_s) ds(\mathbf{x}).$$

Pour traiter les intégrales sur les sections  $\Sigma_{\pm R}^s$ , on écrit  $\underline{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n}_1 = n_1 (-t_1 \quad \mathbf{t}_\Sigma)^t$ , où  $n_1 = \pm 1$  en  $x_1 = \pm R$ . On peut écrire par suite :

$$\begin{aligned} &\int_{\Sigma_{-R}^s \cup \Sigma_R^s} (\underline{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n}_1) \cdot \bar{\mathbf{v}} ds(\mathbf{x}) \\ &= \langle t_1, \bar{\mathbf{v}}_1 \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s)} - \langle \mathbf{t}_\Sigma, \bar{\mathbf{v}}_\Sigma \rangle_{(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s))^2, (H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s))^2} - \langle t_1, \bar{\mathbf{v}}_1 \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s)} \\ &\quad + \langle \mathbf{t}_\Sigma, \bar{\mathbf{v}}_\Sigma \rangle_{(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s))^2, (H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s))^2}. \end{aligned}$$

La condition transparente  $\mathcal{X}^s = T_{\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}}^- \mathcal{Y}^s + (\mathcal{X}^{s,i} - T_{\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}}^- \mathcal{Y}^{s,i})$  imposée à gauche sur  $\Sigma_{-R}^s$  donne :

$$\mathbf{t}_\Sigma = T_{\mathbf{u}_\Sigma \rightarrow \mathbf{t}_\Sigma}^- \mathbf{u}_\Sigma + T_{t_1 \rightarrow \mathbf{t}_\Sigma}^- t_1 + (\mathbf{t}_\Sigma^i - T_{\mathbf{u}_\Sigma \rightarrow \mathbf{t}_\Sigma}^- \mathbf{u}_\Sigma^i - T_{t_1 \rightarrow \mathbf{t}_\Sigma}^- t_1^i).$$

La condition transparente  $\mathcal{X}^{\text{sf}} = T_{\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}}^+ \mathcal{Y}^{\text{sf}}$  imposée à droite sur  $\Sigma_R^{\text{sf}}$  donne quant à elle :

$$\mathbf{t}_\Sigma = T_{\mathbf{u}_\Sigma \rightarrow \mathbf{t}_\Sigma}^+ \mathbf{u}_\Sigma + T_{t_1 \rightarrow \mathbf{t}_\Sigma}^+ t_1 + T_{\varphi \rightarrow \mathbf{t}_\Sigma}^+ \varphi.$$

Pour résumer, on a obtenu l'égalité :

$$\begin{aligned} &\int_{\dot{\Omega}_{-R,R}^s} (\underline{\sigma}(\mathbf{u}) : \underline{\epsilon}(\bar{\mathbf{v}}) - \rho_s \omega^2 \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + \omega \rho_f \int_{\Gamma_{0,R}^{\text{sf}}} \varphi(\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}_s) ds(\mathbf{x}) \\ &- \left( \langle t_1, \bar{\mathbf{v}}_1 \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s)} - \langle T_{\mathbf{u}_\Sigma \rightarrow \mathbf{t}_\Sigma}^- \mathbf{u}_\Sigma, \bar{\mathbf{v}}_\Sigma \rangle_{(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s))^2, (H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s))^2} \right. \\ &\quad \left. - \langle T_{t_1 \rightarrow \mathbf{t}_\Sigma}^- t_1, \bar{\mathbf{v}}_\Sigma \rangle_{(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s))^2, (H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s))^2} \right) \\ &+ \left( \langle t_1, \bar{\mathbf{v}}_1 \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s)} - \langle T_{\mathbf{u}_\Sigma \rightarrow \mathbf{t}_\Sigma}^+ \mathbf{u}_\Sigma, \bar{\mathbf{v}}_\Sigma \rangle_{(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s))^2, (H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s))^2} \right. \\ &\quad \left. - \langle T_{t_1 \rightarrow \mathbf{t}_\Sigma}^+ t_1, \bar{\mathbf{v}}_\Sigma \rangle_{(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s))^2, (H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s))^2} - \langle T_{\varphi \rightarrow \mathbf{t}_\Sigma}^+ \varphi, \bar{\mathbf{v}}_\Sigma \rangle_{(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^{\text{sf}}))^2, (H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^{\text{sf}}))^2} \right) \\ &= - \left( \langle \mathbf{t}_\Sigma^i, \bar{\mathbf{v}}_\Sigma \rangle_{(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s))^2, (H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s))^2} - \langle T_{\mathbf{u}_\Sigma \rightarrow \mathbf{t}_\Sigma}^- \mathbf{u}_\Sigma^i, \bar{\mathbf{v}}_\Sigma \rangle_{(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s))^2, (H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s))^2} \right. \\ &\quad \left. - \langle T_{t_1 \rightarrow \mathbf{t}_\Sigma}^- t_1^i, \bar{\mathbf{v}}_\Sigma \rangle_{(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s))^2, (H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s))^2} \right). \end{aligned} \tag{8.14}$$

• Intégration dans  $\Omega_{0,R}^f$

Soit  $\psi \in H^1(\Omega_{0,R}^f)$ , nous avons :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_{0,R}^f} (\operatorname{div}(\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma} \nabla \varphi) \bar{\psi} + b^{\alpha\Sigma} k_f^2 \varphi \bar{\psi}) d\mathbf{x} \\ &= - \int_{\Omega_{0,R}^f} ((\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma} \nabla \varphi) \cdot \nabla \bar{\psi} - b^{\alpha\Sigma} k_f^2 \varphi \bar{\psi}) d\mathbf{x} + \int_{\Sigma_R^f} (\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma} \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_1) \bar{\psi} ds(\mathbf{x}) \\ &\quad + \int_{\Gamma_{0,R}^{\text{sf}}} (\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma} \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_f) \bar{\psi} ds(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

La condition de couplage cinématique sur  $\Gamma_{0,R}^{\text{sf}}$  donne :

$$\int_{\Gamma_{0,R}^{\text{sf}}} (\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma} \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_f) \bar{\psi} ds(\mathbf{x}) = -\omega \int_{\Gamma_{0,R}^{\text{sf}}} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s) \bar{\psi} ds(\mathbf{x}).$$

Le traitement de l'intégrale sur la section  $\Sigma_R^f$  est plus simple que dans le domaine élastique, on a en effet en utilisant les définitions de  $\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma}$  et  $b^{\alpha\Sigma}$  données à la **sous-section 7.3.1** :

$$\int_{\Sigma_R^f} (\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma} \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_1) \bar{\psi} ds(\mathbf{x}) = \int_{\Sigma_R^f} b^{\alpha\Sigma} \partial_{x_1} \varphi \bar{\psi} ds(\mathbf{x}) = \langle \zeta, b^{\alpha\Sigma} \bar{\psi} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^f), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^f)}.$$

Or, la condition transparente  $\mathcal{X}^{\text{sf}} = T_{\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}}^+ \mathcal{Y}^{\text{sf}}$  imposée à droite sur  $\Sigma_R^{\text{sf}}$  donne :

$$\zeta = T_{\mathbf{u}_\Sigma \rightarrow \zeta}^+ \mathbf{u}_\Sigma + T_{t_1 \rightarrow \zeta}^+ t_1 + T_{\varphi \rightarrow \zeta}^+ \varphi.$$

On obtient ainsi l'égalité :

$$\begin{aligned} &\rho_f \int_{\Omega_{0,R}^f} ((\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma} \nabla \varphi) \cdot \nabla \bar{\psi} - b^{\alpha\Sigma} k_f^2 \varphi \bar{\psi}) d\mathbf{x} + \omega \rho_f \int_{\Gamma_{0,R}^{\text{sf}}} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s) \bar{\psi} ds(\mathbf{x}) \\ &- \rho_f \left( \langle T_{\mathbf{u}_\Sigma \rightarrow \zeta}^+ \mathbf{u}_\Sigma, b^{\alpha\Sigma} \bar{\psi} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^f), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^f)} + \langle T_{t_1 \rightarrow \zeta}^+ t_1, b^{\alpha\Sigma} \bar{\psi} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^f), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^f)} \right. \\ &\quad \left. + \langle T_{\varphi \rightarrow \zeta}^+ \varphi, b^{\alpha\Sigma} \bar{\psi} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^f), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^f)} \right) = 0. \end{aligned} \quad (8.15)$$

• Traitement des conditions de radiation restantes

Il nous reste à prendre en compte de façon variationnelle les équations :

$$\begin{cases} u_1 = T_{\mathbf{u}_\Sigma \rightarrow u_1}^- \mathbf{u}_\Sigma + T_{t_1 \rightarrow u_1}^- t_1^- + (u_1^i - T_{\mathbf{u}_\Sigma \rightarrow u_1}^- \mathbf{u}_\Sigma^i - T_{t_1 \rightarrow u_1}^- t_1^i) & \text{sur } \Sigma_{-R}^s \\ u_1 = T_{\mathbf{u}_\Sigma \rightarrow u_1}^+ \mathbf{u}_\Sigma + T_{t_1 \rightarrow u_1}^+ t_1^+ + T_{\varphi \rightarrow u_1}^+ \varphi & \text{sur } \Sigma_R^s \end{cases} \quad (8.16)$$

où  $t_1^- := t_1|_{\Sigma_{-R}^s}$ , respectivement  $t_1^+ := t_1|_{\Sigma_R^s}$ , est la trace à gauche, respectivement droite, de la composante  $t_1$  de la contrainte axiale. Comme expliqué plus haut, les traces  $t_1^-$  et  $t_1^+$  joueront dans notre problème le rôle de multiplicateurs de Lagrange. Les fonctions tests associées à ces multiplicateurs sont notées  $q_1^- \in \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s)$  et  $q_1^+ \in \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s)$ . Les équations (8.16) peuvent

alors s'écrire de façon variationnelle comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle q_1^-, u_1 \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s)} \\ = \langle q_1^-, T_{\mathbf{u}_\Sigma \rightarrow \mathbf{u}_1}^- \mathbf{u}_\Sigma \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s)} + \langle q_1^-, T_{t_1 \rightarrow u_1}^- t_1^- \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s)} \\ + \left( \langle q_1^-, u_1^i \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s)} - \langle q_1^-, T_{\mathbf{u}_\Sigma \rightarrow \mathbf{u}_1}^- \mathbf{u}_\Sigma^i \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s)} \right. \\ \left. - \langle q_1^-, T_{t_1 \rightarrow u_1}^- t_1^i \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s)} \right), \\ \\ \langle q_1^+, u_1 \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s)} \\ = \langle q_1^+, T_{\mathbf{u}_\Sigma \rightarrow \mathbf{u}_1}^+ \mathbf{u}_\Sigma \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s)} + \langle q_1^+, T_{t_1 \rightarrow u_1}^+ t_1^+ \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s)} \\ + \langle q_1^+, T_{\varphi \rightarrow u_1}^+ \varphi \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s)}. \end{array} \right. \quad (8.17)$$

• Formulation variationnelle globale

Posons  $\mathbf{W}_{YX} := \mathbf{H}_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_{-R,R}^s) \times H^1(\Omega_{0,R}^f) \times \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s) \times \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s)$  l'espace dans lequel nous cherchons notre solution. En combinant les équations (8.14), (8.15) et (8.17), on obtient le théorème suivant.

**Théorème 8.10**

Le problème (8.13) admet la formulation variationnelle :

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}, \varphi, t_1^-, t_1^+) \in \mathbf{W}_{YX} \text{ tel que} \\ a_{YX}((\mathbf{u}, \varphi, t_1^-, t_1^+), (\mathbf{v}, \psi, q_1^-, q_1^+)) = \ell_{YX}(\mathbf{v}, \psi, q_1^-, q_1^+), \quad \forall (\mathbf{v}, \psi, q_1^-, q_1^+) \in \mathbf{W}_{YX}, \end{array} \quad (8.18)$$

où la forme sesquilinéaire  $a_{YX}$  se décompose suivant :

$$a_{YX} := b_{YX} + c_{YX}^- + c_{YX}^+,$$

avec :

$$\begin{aligned} b_{YX}((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)) &:= \int_{\dot{\Omega}_{-R,R}^s} (\underline{\sigma}(\mathbf{u}) : \underline{\epsilon}(\bar{\mathbf{v}}) - \rho_s \omega^2 \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + \rho_f \int_{\Omega_{0,R}^f} ((\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma} \nabla \varphi) \cdot \nabla \bar{\psi} - b^{\alpha\Sigma} k_f^2 \varphi \bar{\psi}) d\mathbf{x} \\ &+ \omega \rho_f \int_{\Gamma_{0,R}^{sf}} (\varphi(\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}_s) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s) \bar{\psi}) ds(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{YX}^-((\mathbf{u}, t_1^-), (\mathbf{v}, q_1^-)) &:= - \left( \langle t_1^-, \bar{v}_1 \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s)} - \langle T_{\mathbf{u}_\Sigma \rightarrow \mathbf{t}_\Sigma}^- \mathbf{u}_\Sigma, \bar{\mathbf{v}}_\Sigma \rangle_{(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s))^2, (H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s))^2} \right. \\ &- \left. \langle T_{t_1 \rightarrow \mathbf{t}_\Sigma}^- t_1^-, \bar{\mathbf{v}}_\Sigma \rangle_{(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s))^2, (H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s))^2} \right) + \left( \langle q_1^-, u_1 \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s)} \right. \\ &- \left. \langle q_1^-, T_{\mathbf{u}_\Sigma \rightarrow \mathbf{u}_1}^- \mathbf{u}_\Sigma \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s)} - \langle q_1^-, T_{t_1 \rightarrow u_1}^- t_1^- \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s)} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & c_{YX}^+((\mathbf{u}, \varphi, t_1^+), (\mathbf{v}, \psi, q_1^+)) \\
 & := \left( \langle t_1^+, \bar{v}_1 \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s)} - \langle T_{\mathbf{u}_\Sigma \rightarrow \mathbf{t}_\Sigma}^+ \mathbf{u}_\Sigma, \bar{\mathbf{v}}_\Sigma \rangle_{(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s))^2, (H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s))^2} \right. \\
 & \quad - \langle T_{t_1^+ \rightarrow \mathbf{t}_\Sigma}^+ t_1^+, \bar{\mathbf{v}}_\Sigma \rangle_{(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s))^2, (H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s))^2} - \langle T_{\varphi \rightarrow \mathbf{t}_\Sigma}^+ \varphi, \bar{\mathbf{v}}_\Sigma \rangle_{(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^f))^2, (H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^f))^2} \left. \right) \\
 & \quad - \rho_f \left( \langle T_{\mathbf{u}_\Sigma \rightarrow \zeta}^+ \mathbf{u}_\Sigma, b^{\alpha_\Sigma} \bar{\psi} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^f), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^f)} + \langle T_{t_1^+ \rightarrow \zeta}^+ t_1^+, b^{\alpha_\Sigma} \bar{\psi} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^f), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^f)} \right. \\
 & \quad \left. + \langle T_{\varphi \rightarrow \zeta}^+ \varphi, b^{\alpha_\Sigma} \bar{\psi} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^f), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^f)} \right) + \left( \langle q_1^+, u_1 \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s)} \right. \\
 & \quad - \langle q_1^+, T_{\mathbf{u}_\Sigma \rightarrow u_1}^+ \mathbf{u}_\Sigma \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s)} - \langle q_1^+, T_{t_1^+ \rightarrow u_1}^+ t_1^+ \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s)} \\
 & \quad \left. - \langle q_1^+, T_{\varphi \rightarrow u_1}^+ \varphi \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s)} \right),
 \end{aligned}$$

et enfin :

$$\begin{aligned}
 & \ell_{YX}(\mathbf{v}, \psi, q_1^-, q_1^+) \\
 & := - \langle \mathbf{t}_\Sigma^i, \bar{\mathbf{v}}_\Sigma \rangle_{(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s))^2, (H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s))^2} + \langle T_{\mathbf{u}_\Sigma \rightarrow \mathbf{t}_\Sigma}^- \mathbf{u}_\Sigma^i, \bar{\mathbf{v}}_\Sigma \rangle_{(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s))^2, (H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s))^2} \\
 & \quad + \langle T_{t_1^+ \rightarrow \mathbf{t}_\Sigma}^- t_1^i, \bar{\mathbf{v}}_\Sigma \rangle_{(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s))^2, (H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s))^2} + \left( \langle q_1^-, u_1^i \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s)} \right. \\
 & \quad \left. - \langle q_1^-, T_{\mathbf{u}_\Sigma \rightarrow u_1}^- \mathbf{u}_\Sigma^i \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s)} - \langle q_1^-, T_{t_1^+ \rightarrow u_1}^- t_1^i \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s)} \right).
 \end{aligned}$$

**Remarque 8.11** Les formes sesquilinéaires  $c_{YX}^\pm$  s'expriment à l'aide de séries :

$$\begin{aligned}
 & c_{YX}^-((\mathbf{u}, t_1^-), (\mathbf{v}, q_1^-)) \\
 & = - \langle t_1^-, \bar{v}_1 \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s)} - \sum_{n \geq 1} \langle \mathbf{u}_\Sigma, \tilde{\mathbf{t}}_\Sigma^n \rangle_{(L^2(\Sigma_{-R}^s))^2} \langle \bar{\mathbf{v}}_\Sigma, \tilde{\mathbf{t}}_\Sigma^n \rangle_{(L^2(\Sigma_{-R}^s))^2} \\
 & \quad - \sum_{n \geq 1} \langle t_1^-, \tilde{u}_1^n \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s)} \langle \bar{\mathbf{v}}_\Sigma, \tilde{\mathbf{t}}_\Sigma^n \rangle_{(L^2(\Sigma_{-R}^s))^2} + \langle q_1^-, u_1 \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s)} \\
 & \quad + \sum_{n \geq 1} \langle \mathbf{u}_\Sigma, \tilde{\mathbf{t}}_\Sigma^n \rangle_{(L^2(\Sigma_{-R}^s))^2} \langle q_1^-, \tilde{u}_1^n \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s)} \\
 & \quad + \sum_{n \geq 1} \langle t_1^-, \tilde{u}_1^n \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s)} \langle q_1^-, \tilde{u}_1^n \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s)},
 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 & c_{YX}^+((\mathbf{u}, \varphi, t_1^+), (\mathbf{v}, \psi, q_1^+)) \\
 & = \langle t_1^+, \bar{v}_1 \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s)} - \sum_{n \geq 1} \langle \mathbf{u}_\Sigma, \mathbf{t}_\Sigma^n \rangle_{(L^2(\Sigma_R^s))^2} \langle \bar{\mathbf{v}}_\Sigma, \mathbf{t}_\Sigma^n \rangle_{(L^2(\Sigma_R^s))^2} \\
 & \quad - \sum_{n \geq 1} \langle t_1^+, u_1^n \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s)} \langle \bar{\mathbf{v}}_\Sigma, \mathbf{t}_\Sigma^n \rangle_{(L^2(\Sigma_R^s))^2} - \rho_f \sum_{n \geq 1} \langle \varphi, b^{\alpha_\Sigma} \zeta_n \rangle_{L^2(\Sigma_R^f)} \langle \bar{\mathbf{v}}_\Sigma, \mathbf{t}_\Sigma^n \rangle_{(L^2(\Sigma_R^s))^2} \\
 & \quad - \rho_f \sum_{n \geq 1} \langle \mathbf{u}_\Sigma, \mathbf{t}_\Sigma^n \rangle_{(L^2(\Sigma_R^s))^2} \langle \bar{\psi}, b^{\alpha_\Sigma} \zeta_n \rangle_{L^2(\Sigma_R^f)} - \rho_f \sum_{n \geq 1} \langle t_1^+, u_1^n \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s)} \langle \bar{\psi}, b^{\alpha_\Sigma} \zeta_n \rangle_{L^2(\Sigma_R^f)} \\
 & \quad - \rho_f^2 \sum_{n \geq 1} \langle \varphi, b^{\alpha_\Sigma} \zeta_n \rangle_{L^2(\Sigma_R^f)} \langle \bar{\psi}, b^{\alpha_\Sigma} \zeta_n \rangle_{L^2(\Sigma_R^f)} + \langle q_1^+, u_1 \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s)} \\
 & \quad - \sum_{n \geq 1} \langle \mathbf{u}_\Sigma, \mathbf{t}_\Sigma^n \rangle_{(L^2(\Sigma_R^s))^2} \langle q_1^+, u_1^n \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s)} - \sum_{n \geq 1} \langle t_1^+, u_1^n \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s)} \langle q_1^+, u_1^n \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s)} \\
 & \quad - \rho_f \sum_{n \geq 1} \langle \varphi, b^{\alpha_\Sigma} \zeta_n \rangle_{L^2(\Sigma_R^f)} \langle q_1^+, u_1^n \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R^s)}.
 \end{aligned}$$

Lorsque le champ incident  $\mathbf{u}^i = \tilde{\mathbf{u}}_{n,+}$  correspond à un mode du guide gauche sortant à droite, la forme antilinéaire  $\ell_{YX}$  se simplifie en utilisant les relations de biorthogonalité :

$$\begin{aligned} & \ell_{YX}(\mathbf{v}, \psi, q_1^-, q_1^+) \\ &= - \langle \tilde{\mathbf{t}}_\Sigma^n, \tilde{\mathbf{v}}_\Sigma \rangle_{(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s))^2, (H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s))^2} - \langle \tilde{\mathbf{u}}_\Sigma^n, \tilde{\mathbf{t}}_\Sigma^n \rangle_{(L^2(\Sigma_{-R}^s))^2} \langle \tilde{\mathbf{v}}_\Sigma, \tilde{\mathbf{t}}_\Sigma^n \rangle_{(L^2(\Sigma_{-R}^s))^2} \\ & \quad - \langle \tilde{\mathbf{t}}_1^n, \tilde{\mathbf{u}}_1^n \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s)} \langle \tilde{\mathbf{v}}_\Sigma, \tilde{\mathbf{t}}_\Sigma^n \rangle_{(L^2(\Sigma_{-R}^s))^2} + \langle q_1^-, \tilde{\mathbf{u}}_1^n \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s)} \\ & \quad + \langle \tilde{\mathbf{u}}_\Sigma^n, \tilde{\mathbf{t}}_\Sigma^n \rangle_{(L^2(\Sigma_{-R}^s))^2} \langle q_1^-, \tilde{\mathbf{u}}_1^n \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s)} \\ & \quad + \langle \tilde{\mathbf{t}}_1^n, \tilde{\mathbf{u}}_1^n \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s)} \langle q_1^-, \tilde{\mathbf{u}}_1^n \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{-R}^s)}. \end{aligned}$$

**Remarque 8.12** Nous ne savons pas montrer que le problème (8.18) est bien posé. En effet, du fait des séries infinies associées aux opérateurs YtX, il semble difficile de montrer le caractère Fredholm du problème. Nous pourrions cependant vouloir regarder le caractère bien posé du problème avec des opérateurs YtX tronqués. Même dans ce cas, la présence des crochets de dualité faisant intervenir  $t_1^\pm \in \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{\pm R}^s)$  associés à des opérateurs non compacts de  $L^2(\Sigma_{\pm R}^s)$  nous empêche de montrer ce caractère Fredholm.

### 8.3.4 Résultats numériques

Dans cette sous-section, nous allons présenter des résultats numériques issus d'une approximation par éléments finis de la formulation variationnelle (8.18) pour le cas particulier d'une plaque immergée. Nous ne prendrons plus en compte les modes SH qui sont totalement découplés des autres modes et dont la propagation dans les plaques élastiques est très bien connue.

#### Troncature des opérateurs YtX

Pour résoudre de façon approchée la formulation variationnelle (8.18), il faut tout d'abord tronquer les séries associées aux opérateurs YtX à gauche et à droite. La troncature de l'opérateur  $T_{Y \rightarrow X}^-$  à gauche ne pose pas de problème particulier. Elle se fait en prenant en compte les  $\tilde{N}_p$  modes de Lamb propagatifs et en rajoutant un nombre de modes de Lamb inhomogènes d'autant plus important que le demi-guide gauche comporte des défauts proches de la section de troncature  $\Sigma_{-R}^s$ . La troncature de l'opérateur  $T_{Y \rightarrow X}^+$  à droite est plus compliquée et soulève des questions proches de celle de la troncature du DtN avec recouvrement étudié dans la section 5.4 du chapitre 4 en acoustique.

Nous avons observé numériquement au chapitre 7 que les seuls modes propagatifs existant dans une plaque élastique immergée, excepté les modes SH, sont les modes de quasi-Scholte. Cependant, nous avons aussi observé dans la sous-section 7.4.5 que ces modes ne sont en général plus parfaitement propagatifs lorsqu'ils sont approchés à l'aide de PML transverses bornées. L'approximation de leur nombre d'onde longitudinal a en effet une petite partie réelle traduisant une légère croissance ou décroissance du mode dans la direction longitudinale. Il peut arriver que cette partie réelle ait un mauvais signe : par exemple qu'elle soit positive pour un mode de quasi-Scholte sortant à droite. En conclusion, nous allons restreindre la série en conservant les modes de quasi-Scholte se propageant vers la droite (leur sens de propagation est déterminé à partir du signe de leur vitesse d'énergie même si la partie réelle est du mauvais signe), ainsi que les modes de Lamb à fuite et modes de PML satisfaisant  $-\beta < \Re(\lambda) < 0$  pour un réel  $\beta > 0$ . Nous notons  $I_\beta$  l'ensemble de ces modes et  $N_\beta := \#I_\beta$  le



cardinal de  $I_\beta$ . On écrit alors :

$$N_\beta = N_{\text{QS}} + N_{\text{L}} + N_{\text{PML}},$$

où  $N_{\text{QS}}$  est le nombre de modes de quasi-Scholte,  $N_{\text{L}}$  le nombre de modes de Lamb à fuite et inhomogènes, et  $N_{\text{PML}}$  le nombre de modes de PML (incluant potentiellement des modes parasites pour des grandes valeurs de  $\beta$ ).

**Remarque 8.13** *Une question qui peut se poser à la lecture du paragraphe ci-dessus est la suivante : pourquoi n'avoir pas utilisé la condition de Robin proposée dans la sous-section 7.4.5 pour traiter correctement les modes de quasi-Scholte avec des PML dans la direction transverse ? Ce choix de ne pas la prendre en compte dans ce chapitre est motivé d'une part par la volonté de ne pas alourdir la présentation, d'autre part par le fait que nous n'avons pas rencontré de situation où la solution ne décroît pas dans la direction transverse. Ceci semble indiquer que les modes de quasi-Scholte n'ont pas, ou très peu été excités dans les configurations que nous avons considérées.*

Nous nous attendons naturellement à ce que le résultat soit de plus en plus précis lorsque  $\beta$  augmente. Cependant, la présence de modes parasites, issus de la discrétisation du problème aux valeurs propres satisfait par les modes de la plaque immergée avec PML, détériorera l'approximation dans la partie du domaine fluide occupée par les PML.

Il est important d'étudier la convergence de la solution approchée du problème (8.18) avec des opérateurs YtX tronqués vis-à-vis du paramètre de troncature  $\beta$  vers la solution du problème initial (8.2). Pour conduire qualitativement cette étude, nous comparerons les solutions obtenues à une solution de référence calculée à l'aide de PML longitudinales dans une configuration où il n'y a pas de modes rétrogrades.

### Paramètres des simulations

Les simulations présentées seront conduites dans une plaque d'acier partiellement immergée dans de l'eau (voir la Table 7.1 pour les paramètres physiques). La fréquence considérée est donnée par  $\omega = 6,28.10^5$  rad.Hz. Le cœur a une demi-épaisseur de  $h_0 = 1$  cm et le fluide environnant est tronqué par des PML occupant le domaine  $h_1 < |x_2| < h_2$  avec  $h_1 = 2$  cm et  $h_2 = 5$  cm. Le profil des PML transverses retenu est parabolique avec  $\hat{\eta} = 1 + 2i$ . Le domaine est tronqué avec des opérateurs YtX à gauche en  $x_1 = -5$  cm et à droite en  $x_1 = 7,5$  cm. Quant à la solution de référence, elle est obtenue en tronquant longitudinalement le domaine de calcul avec des PML paraboliques de paramètre  $\hat{\eta} = 4 + 3i$ . Ces PML occupent le domaine  $-7,5$  cm  $< x_1 < -5$  cm à gauche et le domaine  $7,5$  cm  $< x_1 < 10$  cm à droite.

De plus, les modes des guides gauche et droit sont calculés avec des éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}^1$  sur un maillage ayant un pas de  $h = 0.005$  cm. Les plus petites valeurs propres  $\lambda$ , en notation Kondratiev, calculées sont représentées sur la Figure 8.8. Le problème (8.18) est quant à lui discrétisé à l'aide d'éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}^2$  sur un maillage de pas  $h = 0.08$  cm.

Dans les résultats ci-dessous, on représente dans le solide la composante transverse  $u_2$  du champ de déplacement et dans le fluide la quantité  $v_2/\omega$ .

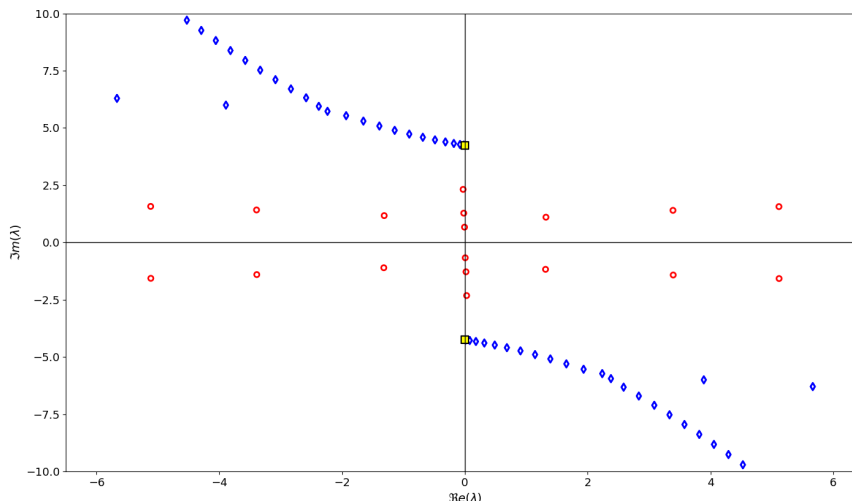


FIGURE 8.8: Nombres d'onde longitudinaux  $\lambda$  en notation Kondratiev des modes dans une plaque d'acier immergée dans de l'eau. Cercles rouges : modes de Lamb à fuite et inhomogènes, losanges bleus : modes de PML et modes parasites, carrés jaunes : modes de quasi-Scholte. Paramètres :  $h_0 = 1$  cm,  $h_1 = 2$  cm,  $h_2 = 5$  cm,  $\omega = 6, 28.10^5$  rad.Hz, profil de PML parabolique avec  $\hat{\eta} = 4 + 3i$ .

### Diffraction du mode de Lamb $A_0$ sans obstacle

Nous commençons cette étude en calculant la réponse de la structure partiellement immergée au mode de Lamb  $A_0$  (le premier mode de Lamb antisymétrique) provenant du demi-guide gauche. Il est visible sur la Figure 8.9 représentant le module de la solution, que rajouter quelques modes pour des petites valeurs de  $\beta$  améliore la qualité de la solution (passage de (a) à (b)). Cependant, prendre des valeurs de  $\beta$  plus importantes détériore la qualité de la solution dans la partie du fluide occupée par les PML. Nous interprétons cela par la prise en compte de modes de PML moins bien approchés, voire de modes parasites. On peut observer sur la Figure 8.10 représentant la partie réelle de la solution, que de légères réflexions sont produites dans les PML au voisinage de la section de troncature. La prise en compte de ces modes moins bien approchés ne semble néanmoins pas détériorer la qualité de la solution dans la plaque élastique et dans le domaine fluide non occupé par les PML.

### Diffraction du mode de Lamb $S_0$ avec obstacle

Nous serons amenés par la suite à chercher à réduire au maximum la taille du domaine de calcul pour réduire le coût des simulations. Il est alors important d'être en mesure de tronquer le domaine de calcul au plus proche des défauts et hétérogénéités.

Pour étudier la robustesse de l'approximation de la solution avec des opérateurs YtX, nous calculons la réponse de la structure perturbée par un défaut proche de la section droite de troncature au mode de Lamb  $S_0$  (le premier mode de Lamb symétrique) provenant du demi-guide gauche. Les résultats présentés sur les Figures 8.11 et 8.12 permettent de tirer les mêmes conclusions que dans le cas sans obstacle traité ci-dessus. Ici, il est de plus possible d'observer une légère amélioration de la qualité de la solution lorsqu'un mode de Lamb supplémentaire est pris en compte dans les séries intervenant dans l'opérateur  $T_{\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}}^+$  (voir pour cela le passage de (b) à (c) sur la Figure 8.11).

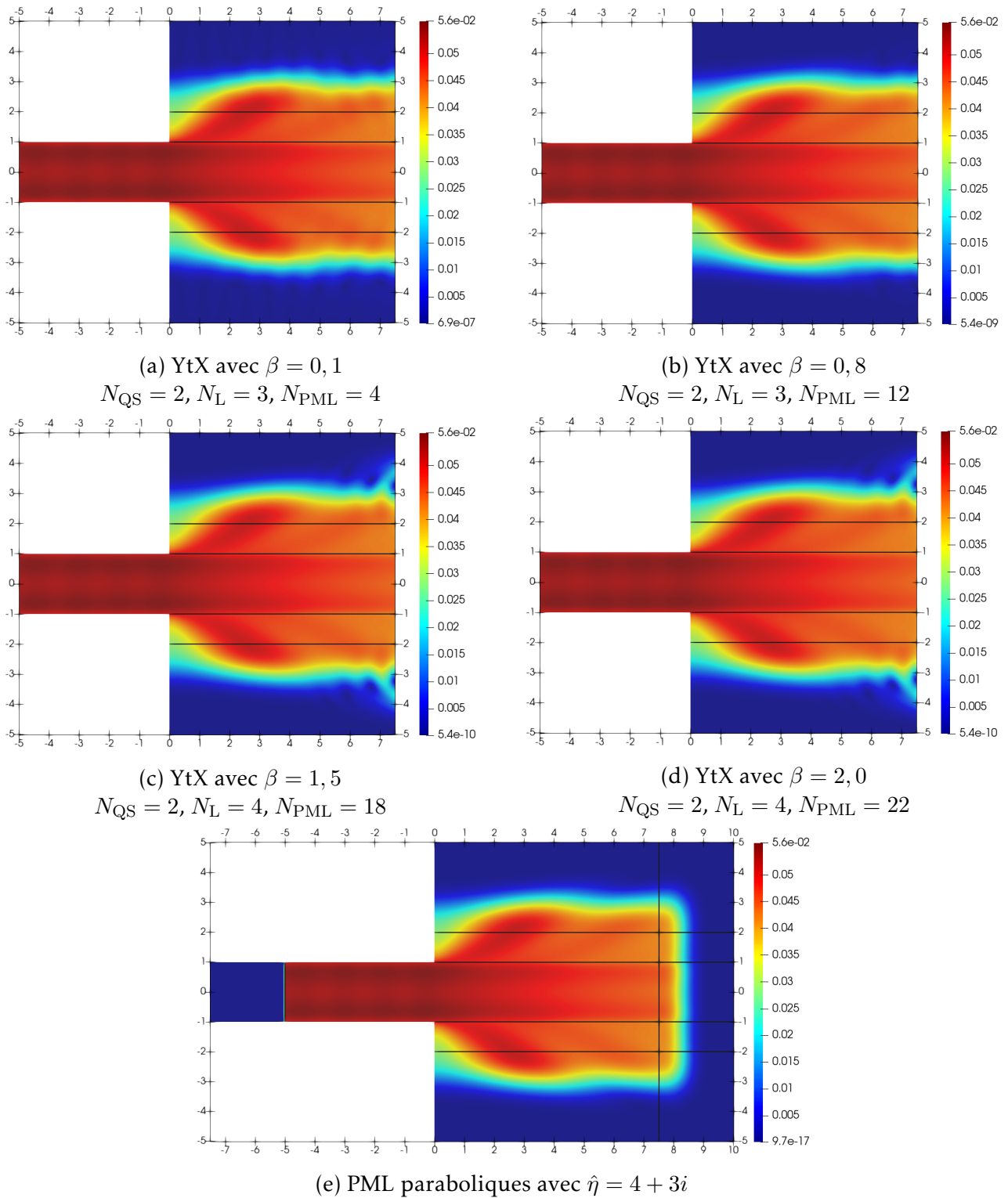


FIGURE 8.9: (a-d) Module de la solution approchée du problème (8.18) sans obstacle avec des opérateurs YtX pour différents ordres de troncature  $\beta$  à droite. (e) Module de la solution approchée du problème (8.8) avec PML longitudinales. Onde incidente : mode  $A_0$ .

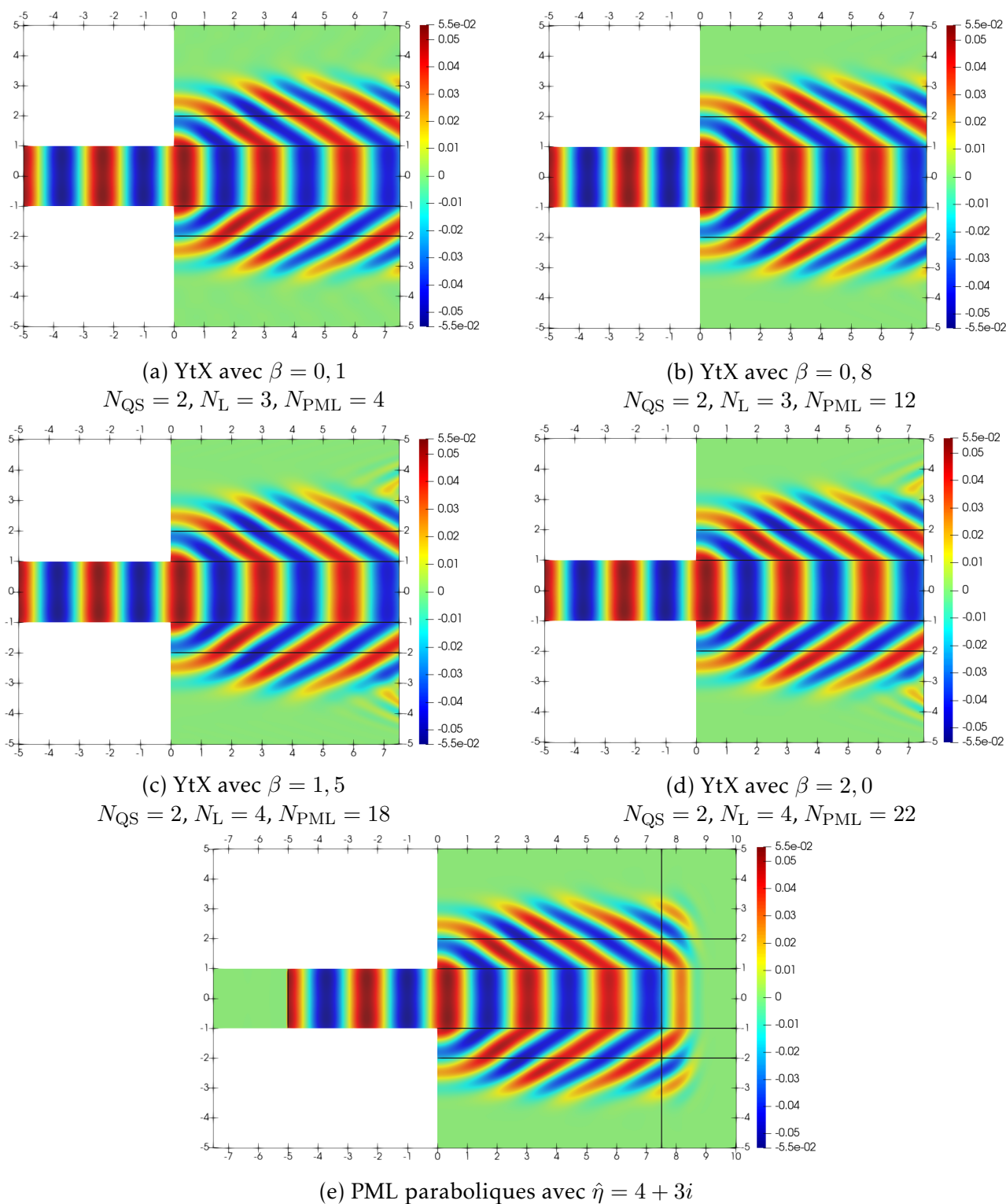


FIGURE 8.10: (a-d) Partie réelle de la solution approchée du problème (8.18) sans obstacle avec des opérateurs YtX pour différents ordres de troncature  $\beta$  à droite. (e) Partie réelle de la solution approchée du problème (8.8) avec PML longitudinales. Onde incidente : mode  $A_0$ .

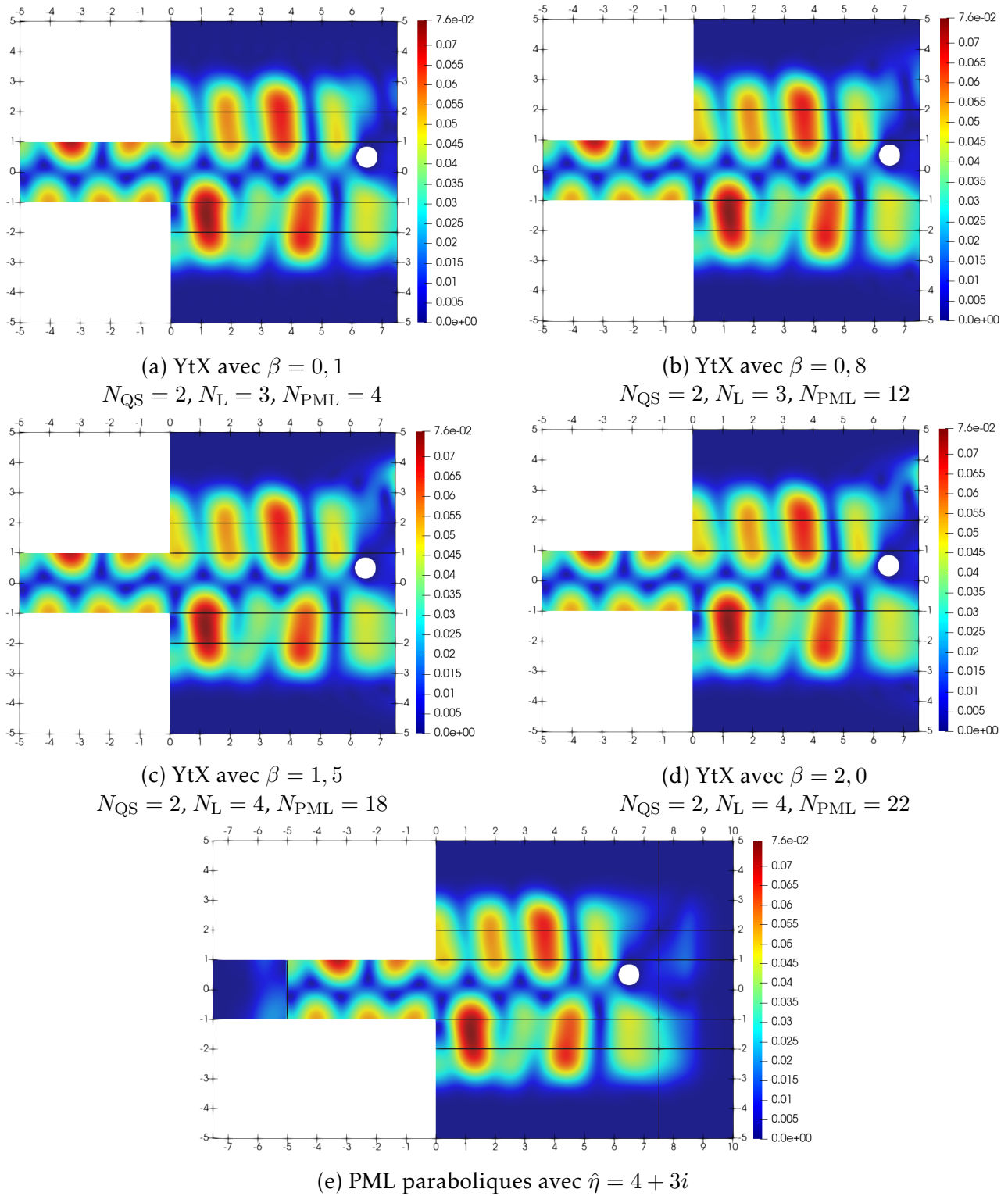


FIGURE 8.11: (a-d) Module de la solution approchée du problème (8.18) en présence d'un obstacle de Dirichlet avec des opérateurs YtX pour différents ordres de troncature  $\beta$  à droite. (e) Module de la solution approchée du problème (8.8) avec PML longitudinales. Onde incidente : mode  $S_0$ .



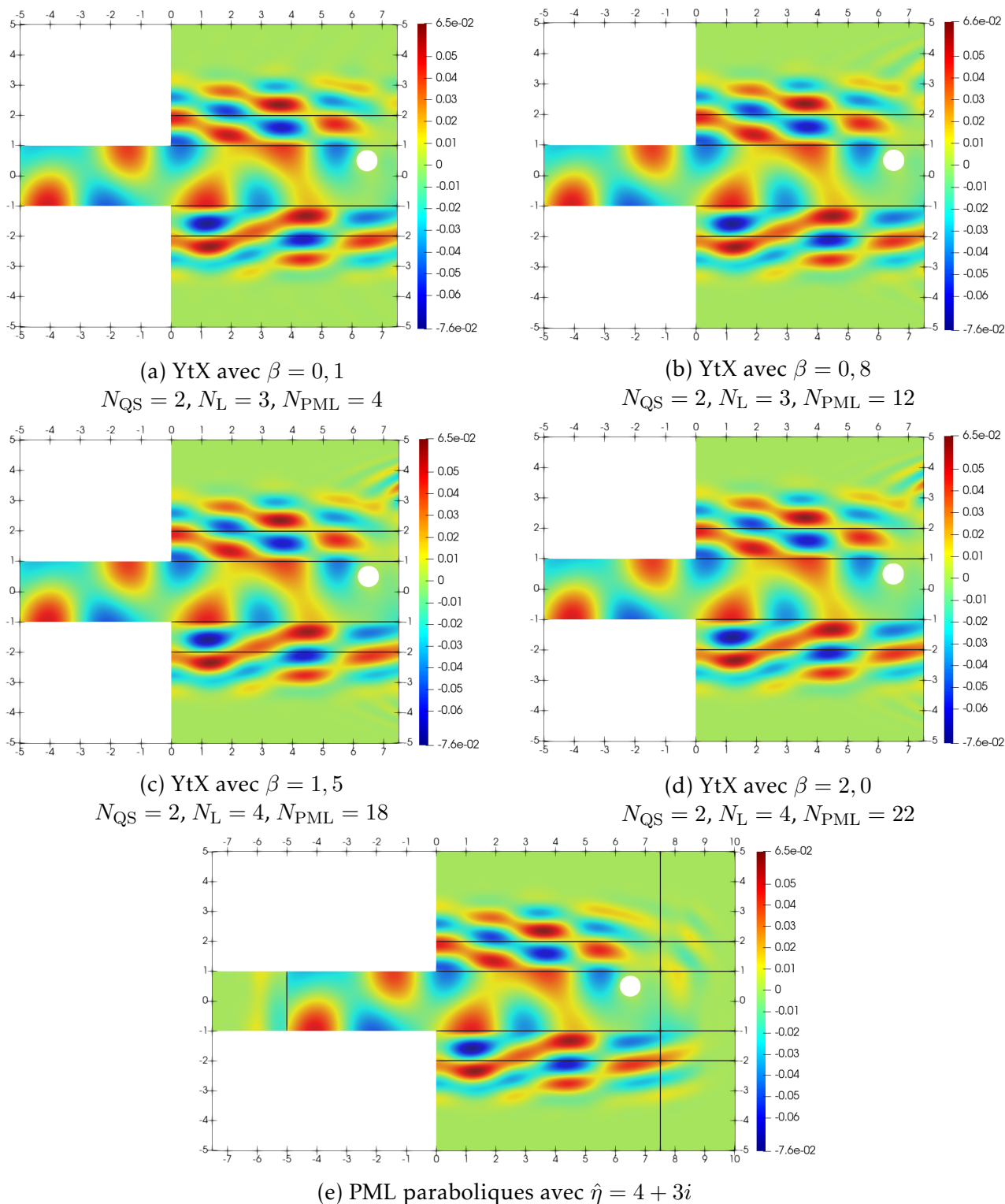


FIGURE 8.12: (a-d) Partie réelle de la solution approchée du problème (8.18) en présence d'un obstacle de Dirichlet avec des opérateurs YtX pour différents ordres de troncature  $\beta$  à droite. (e) Partie réelle de la solution approchée du problème (8.8) avec PML longitudinales. Onde incidente : mode  $S_0$ .

**Remarque 8.14** *Les observations que nous venons de faire sont purement qualitatives. De plus, les faibles modifications de la solution lorsqu'on rajoute des modes dans les séries intervenant dans la définition de l'opérateur  $T_{\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}}^+$  peuvent indiquer que ces modes sont peu excités à droite pour les problèmes de diffractions considérés. Il serait donc intéressant de considérer des champs incidents correspondant à des modes de Lamb d'ordre plus élevé et de quantifier les erreurs obtenues avec la solution obtenue à l'aide de PML.*

## 8.4 Annexe

Cette annexe est dédiée à la démonstration du caractère bien posé du problème (8.8). Nous allons montrer que ce problème, qui est posé dans un domaine tronqué longitudinalement par des PML, est bien posé pour des PML longitudinales dont les profils ont une petite partie imaginaire en valeur absolue. Pour cela, nous aurons besoin de l'inégalité de Korn à poids suivante que nous montrons dans le cas 3D. Le résultat en 2D pourra facilement s'en déduire.

### Lemme 8.15

Soit  $\Omega$  un ouvert borné Lipschitz de  $\mathbb{R}^3$  et  $f \in W^{2,\infty}(\Omega)$  une fonction bornée inférieurement et supérieurement par des constantes strictement positives. On note  $\underline{\mathbf{L}}^2(\Omega)$  l'espace des tenseurs d'ordre 2 réels, symétriques, dont les composantes sont dans  $L^2(\Omega)$ , et nous le munissons de la norme :

$$\|\underline{\epsilon}\|_{\underline{\mathbf{L}}^2(\Omega)} := \left( \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \|\epsilon_{ij}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il existe une constante  $C = C(\Omega, f) > 0$  telle que pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ , on a l'inégalité de type Korn :

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C (\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\underline{\epsilon}^f(\mathbf{v})\|_{\underline{\mathbf{L}}^2(\Omega)}), \quad (8.19)$$

où les normes  $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$  et  $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$  sont données par (8.1) et :

$$\underline{\epsilon}^f(\mathbf{v}) := f \underline{\epsilon}^1(\mathbf{v}) + \underline{\epsilon}_{\Sigma}(\mathbf{v}),$$

où  $\underline{\epsilon}^1(\mathbf{v})$  est défini par (8.4) et  $\underline{\epsilon}_{\Sigma}(\mathbf{v}) := \underline{\epsilon}(\mathbf{v}) - \underline{\epsilon}^1(\mathbf{v})$ .

*Démonstration.* Nous adaptons la preuve proposée dans [Cia10] en l'absence de poids. Introduisons premièrement l'espace :

$$\mathbf{E}_f(\Omega) := \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \underline{\epsilon}^f(\mathbf{v}) \in \underline{\mathbf{L}}^2(\Omega)\}.$$

On peut montrer que cet espace, muni de la norme  $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{E}_f(\Omega)} := (\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|\underline{\epsilon}^f(\mathbf{v})\|_{\underline{\mathbf{L}}^2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}}$ , est un espace de Hilbert. Ensuite, il est clair que  $\mathbf{H}^1(\Omega) \subset \mathbf{E}_f(\Omega)$ . Pour montrer l'inclusion réciproque, on se donne  $\mathbf{v} \in \mathbf{E}_f(\Omega)$  et on remarque, pour  $1 \leq i, k \leq 3$ , que nous avons  $\partial_{x_k} v_i \in H^{-1}(\Omega)$  puisque  $v_i \in L^2(\Omega)$ . De plus, il est facile de vérifier que nous avons les égalités :

$$\partial_{x_j}(\partial_{x_k} v_i) = \partial_{x_j} \epsilon_{ik} + \partial_{x_k} \epsilon_{ij} - \partial_{x_i} \epsilon_{jk}, \quad 1 \leq i, j, k \leq 3. \quad (8.20)$$

Posons  $\partial_{i,f} := f_i \partial_{x_i}$  avec :

$$f_1 := f, \quad f_2 := 1 \quad \text{et} \quad f_3 := 1.$$

Nous avons alors :

$$\epsilon_{ij}^f = \frac{1}{2}(\partial_{i,f}v_j + \partial_{j,f}v_i), \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

Dans le cas  $f$  constant, nous déduisons directement de (8.20) les relations :

$$\partial_{j,f}(\partial_{k,f}v_i) = \partial_{j,f}\epsilon_{ik}^f + \partial_{k,f}\epsilon_{ij}^f - \partial_{i,f}\epsilon_{jk}^f, \quad 1 \leq i, j, k \leq 3. \quad (8.21)$$

Lorsque  $f$  est variable, nous avons pour  $1 \leq i, j, k \leq 3$  :

$$\partial_{j,f}(\partial_{k,f}v_i) = f_j f_k \partial_{x_j x_k}^2 v_i + f_j (\partial_{x_j} f_k) \partial_{x_k} v_i, \quad (8.22)$$

et :

$$\begin{cases} \partial_{j,f}\epsilon_{ik}^f &= \frac{1}{2}(f_j f_i \partial_{x_j x_i}^2 v_k + f_j f_k \partial_{x_j x_k}^2 v_i + f_j (\partial_{x_j} f_i) \partial_{x_i} v_k + f_j (\partial_{x_j} f_k) \partial_{x_k} v_i) \\ \partial_{k,f}\epsilon_{ij}^f &= \frac{1}{2}(f_k f_i \partial_{x_k x_i}^2 v_j + f_k f_j \partial_{x_k x_j}^2 v_i + f_k (\partial_{x_k} f_i) \partial_{x_i} v_j + f_k (\partial_{x_k} f_j) \partial_{x_j} v_i) \\ -\partial_{i,f}\epsilon_{jk}^f &= -\frac{1}{2}(f_i f_j \partial_{x_i x_j}^2 v_k + f_i f_k \partial_{x_i x_k}^2 v_j + f_i (\partial_{x_i} f_j) \partial_{x_j} v_k + f_i (\partial_{x_i} f_k) \partial_{x_k} v_j). \end{cases} \quad (8.23)$$

En utilisant (8.23) puis (8.22), nous avons ainsi pour  $1 \leq i, j, k \leq 3$  :

$$\begin{aligned} & \partial_{j,f}\epsilon_{ik}^f + \partial_{k,f}\epsilon_{ij}^f - \partial_{i,f}\epsilon_{jk}^f \\ &= \frac{1}{2} \left( f_j (\partial_{x_j} f_i) \partial_{x_i} v_k + f_k (\partial_{x_k} f_i) \partial_{x_i} v_j + f_k (\partial_{x_k} f_j) \partial_{x_j} v_i \right. \\ & \quad \left. - f_i (\partial_{x_i} f_j) \partial_{x_j} v_k - f_i (\partial_{x_i} f_k) \partial_{x_k} v_j \right) + f_j f_k \partial_{x_j x_k}^2 v_i + \frac{1}{2} f_j (\partial_{x_j} f_k) \partial_{x_k} v_i \\ &= \frac{1}{2} \left( f_j (\partial_{x_j} f_i) \partial_{x_i} v_k + f_k (\partial_{x_k} f_i) \partial_{x_i} v_j + f_k (\partial_{x_k} f_j) \partial_{x_j} v_i \right. \\ & \quad \left. - f_i (\partial_{x_i} f_j) \partial_{x_j} v_k - f_i (\partial_{x_i} f_k) \partial_{x_k} v_j - f_j (\partial_{x_j} f_k) \partial_{x_k} v_i \right) + \partial_{j,f}(\partial_{k,f}v_i). \end{aligned}$$

Réarranger cette expression donne pour  $1 \leq i, j, k \leq 3$  :

$$\begin{aligned} \partial_{j,f}(\partial_{k,f}v_i) &= \left( \partial_{j,f}\epsilon_{ik}^f + \partial_{k,f}\epsilon_{ij}^f - \partial_{i,f}\epsilon_{jk}^f \right) \\ & \quad - \frac{1}{2} \left( f_j (\partial_{x_j} f_i) \partial_{x_i} v_k + f_k (\partial_{x_k} f_i) \partial_{x_i} v_j + f_k (\partial_{x_k} f_j) \partial_{x_j} v_i \right. \\ & \quad \left. - f_i (\partial_{x_i} f_j) \partial_{x_j} v_k - f_i (\partial_{x_i} f_k) \partial_{x_k} v_j - f_j (\partial_{x_j} f_k) \partial_{x_k} v_i \right). \end{aligned} \quad (8.24)$$

Montrons que  $\partial_{j,f}(\partial_{k,f}v_i) \in H^{-1}(\Omega)$  pour  $1 \leq i, j, k \leq 3$ . On a d'une part  $\epsilon^f \in \underline{\mathbf{L}}^2(\Omega)$  et donc  $\partial_{x_k} \epsilon_{ij}^f \in H^{-1}(\Omega)$  pour  $1 \leq i, j, k \leq 3$ . On a d'autre part  $v_i \in L^2(\Omega)$ , ce qui implique que  $\partial_{x_j} v_i \in H^{-1}(\Omega)$  pour  $1 \leq i, j \leq 3$ . Par ailleurs, nous avons  $f \in W^{2,\infty}(\Omega)$  et alors  $f_i (\partial_{x_j} f_k) \in W^{1,\infty}(\Omega)$  pour  $1 \leq i, j, k \leq 3$ . Or, le produit d'une distribution de  $H^{-1}(\Omega)$  et d'une distribution de  $W^{1,\infty}(\Omega)$  reste une distribution de  $H^{-1}(\Omega)$  (voir pour cela le Lemme A.9). Il vient alors  $\partial_{j,f}\epsilon_{ik}^f \in H^{-1}(\Omega)$  et  $f_j (\partial_{x_j} f_i) \partial_{x_i} v_k \in H^{-1}(\Omega)$  pour  $1 \leq i, j, k \leq 3$ . Nous pouvons alors déduire de l'identité (8.24) que  $\partial_{j,f}(\partial_{k,f}v_i) \in H^{-1}(\Omega)$  pour  $1 \leq i, j, k \leq 3$ . Comme pour  $1 \leq i \leq 3$  les coefficients  $f_i$  ne s'annulent pas et sont dans  $W^{2,\infty}(\Omega)$ , l'identité (8.22) nous permet de voir que  $\partial_{x_j x_k}^2 v_i \in H^{-1}(\Omega)$  pour  $1 \leq i, j, k \leq 3$ . Par application du Lemme de Lions A.7, on en déduit que  $\partial_{x_j} v_i \in L^2(\Omega)$  pour  $1 \leq i, j \leq 3$ . Nous avons donc montré que  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  et donc par suite l'inclusion  $\mathbf{E}_f(\Omega) \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$ .

Notons maintenant  $I$  l'injection de  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ , muni de la norme  $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$ , dans  $\mathbf{E}_f(\Omega) \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$ , muni de la norme  $\|\cdot\|_{\mathbf{E}_f(\Omega)}$ . C'est une application linéaire bijective car  $\mathbf{E}_f(\Omega) = \mathbf{H}^1(\Omega)$ . Le théorème de Banach nous assure que  $I^{-1}$  est continue, ce qui nous donne l'inégalité de type Korn recherchée.  $\square$



**Remarque 8.16** Il est facile de montrer l'analogue du Lemme 8.15 en 2D pour une plaque. Pour cela, on prend  $\underline{\epsilon}^f(\mathbf{v}) := f \underline{\epsilon}^1(\mathbf{v}) + \underline{\epsilon}^2(\mathbf{v})$  avec  $\underline{\epsilon}^2(\mathbf{v})$  défini par (8.4). La preuve s'adapte alors en considérant cette fois  $\partial_{x_3} = 0$  avec  $f_3 = 0$ . Au moment d'utiliser le Lemme de Lions A.7, il faut enfin prendre dans son énoncé  $d = 2$ .

Il est désormais possible de montrer en 2D que le problème (8.8) est bien posé pour des profils de PML longitudinales  $\alpha_1$  ayant une petite partie imaginaire en valeur absolue.

**Proposition 8.17**

Soit  $\Omega_-^s := (-\infty, 0) \times \Sigma^s$  et  $\mathbf{u}^i \in \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\Omega_-^s)$  un champ incident. On considère un profil de PML longitudinal  $\alpha_1 := a_1 + ib_1$  avec  $a_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $b_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que la partie réelle  $a_1$  du profil de PML vérifie les points suivants :

1.  $a_1 \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^2)$ , (hypothèse Korn)
2.  $\exists c_1^\pm > 0$  tels que  $c_1^- \leq a_1(x_1, x_2) \leq c_1^+$ ,  $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , (hypothèse Korn et PML)
3.  $a_1(x_1, x_2) = a_1(x_1)$ ,  $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , (hypothèse géométrique)
4.  $a_1(-x_1, x_2) = a_1(x_1, x_2)$ ,  $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , (hypothèse géométrique)
5.  $a_1(x_1, x_2) = 1$ ,  $|x_1| \leq R$ . (hypothèse PML).

Quant à la partie imaginaire  $b_1$  du profil de PML, on suppose qu'elle satisfait :

6.  $b_1 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$ , (hypothèse PML)
7.  $b_1(x_1, x_2) < 0$ ,  $|x_1| > R$ , (hypothèse PML)
8.  $b_1(x_1, x_2) = b_1(x_1)$ ,  $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , (hypothèse géométrique)
9.  $b_1(-x_1, x_2) = b_1(x_1, x_2)$ ,  $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , (hypothèse géométrique)
10.  $b_1(x_1, x_2) = 0$ ,  $|x_1| \leq R$ , (hypothèse PML).

Excepté pour un ensemble dénombrable de fréquences, il existe  $\varepsilon(a_1, \omega) > 0$  tel que si  $\sup |b_1| \leq \varepsilon(a_1, \omega)$ , alors le problème (8.8) est bien posé.

*Démonstration.* Nous allons conduire cette preuve en deux temps. Dans un premier temps, nous montrerons pour  $\alpha_1 = a_1$ , c'est-à-dire pour des profils de PML réels, que le problème (8.8) est bien posé excepté pour un ensemble dénombrable de fréquences noté  $\mathcal{P}(a_1)$ . Pour  $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{P}(a_1)$ , nous en déduirons dans un second temps par un argument de perturbation que le problème (8.8) est bien posé lorsque  $\alpha_1 = a_1 + ib_1$  a une partie imaginaire  $b_1$  petite en valeur absolue.

Introduisons pour commencer les espaces suivants qui nous permettront de prendre en compte les conditions de transmission sur  $\Sigma_{-R}^s$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &:= \left\{ (\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_-, \psi) \in \mathbf{H}_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_{-R,R'}^s) \times \mathbf{H}^1(B_-^s) \times \mathbf{H}^1(\Omega_{0,R'}^f) \mid \mathbf{v}_+|_{\Sigma_{-R}^s} - \mathbf{u}^i|_{\Sigma_{-R}^s} = \mathbf{v}_-|_{\Sigma_{-R}^s} \right\}, \\ \mathbf{V}_0 &:= \left\{ (\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_-, \psi) \in \mathbf{H}_{0,\partial D}^1(\dot{\Omega}_{-R,R'}^s) \times \mathbf{H}^1(B_-^s) \times \mathbf{H}^1(\Omega_{0,R'}^f) \mid \mathbf{v}_+|_{\Sigma_{-R}^s} = \mathbf{v}_-|_{\Sigma_{-R}^s} \right\}. \end{aligned}$$

Soit  $a_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction partie réelle satisfaisant les hypothèses 1. à 5. et  $b_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction partie imaginaire satisfaisant les hypothèses 6. à 10. Pour un profil de PML  $\alpha_1 = a_1 + ib_1$  général, le problème (8.8) s'écrit :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } (\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-, \varphi) \in \mathbf{V} \text{ tel que} \\ &a((\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-, \varphi), (\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_-, \psi)) = \ell_{\text{pml}}(\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_-, \psi), \quad \forall (\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_-, \psi) \in \mathbf{V}_0, \end{aligned} \quad (8.25)$$

où :

$$\begin{aligned}
a((\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-^d, \varphi), (\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_-, \psi)) &:= \int_{\dot{\Omega}_{-R,R'}^s} \alpha_1^{-1} (\underline{\sigma}^{\alpha_1}(\mathbf{u}_+) : \underline{\epsilon}^{\alpha_1}(\overline{\mathbf{v}}_+) - \rho_s \omega^2 \mathbf{u}_+ \cdot \overline{\mathbf{v}}_+) \, d\mathbf{x} \\
&+ \int_{B_-^s} \alpha_1^{-1} (\underline{\sigma}^{\alpha_1}(\mathbf{u}_-^d) : \underline{\epsilon}^{\alpha_1}(\overline{\mathbf{v}}_-) - \rho_s \omega^2 \mathbf{u}_-^d \cdot \overline{\mathbf{v}}_-) \, d\mathbf{x} \\
&+ \rho_f \int_{\Omega_{0,R'}^f} \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \partial_{x_1} \varphi \partial_{x_1} \bar{\psi} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \partial_{x_2} \varphi \partial_{x_2} \bar{\psi} - (\alpha_1 \alpha_2)^{-1} k_f^2 \varphi \bar{\psi} \right) \, d\mathbf{x} \\
&+ \omega \rho_f \int_{\Gamma_{0,R'}^{sf}} \alpha_1^{-1} (\varphi(\overline{\mathbf{v}}_+ \cdot \mathbf{n}_s) + (\mathbf{u}_+ \cdot \mathbf{n}_s) \bar{\psi}) \, ds(\mathbf{x}),
\end{aligned} \tag{8.26}$$

et :

$$\ell_{\text{pml}}(\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_-, \psi) := \int_{\Sigma_{-R}^s} (\underline{\sigma}^{\alpha_1}(\mathbf{u}^i) \mathbf{n}_1) \cdot \overline{\mathbf{v}}_+ \, ds(\mathbf{x}).$$

Nous cherchons à appliquer le théorème de Fredholm analytique. Dans cette perspective, nous devons modifier la formulation (8.25), la solution étant cherchée dans un espace affine tandis que les fonctions tests vivent dans l'espace vectoriel associé. Plus précisément, nous allons écrire dans  $B_-^s$  une formulation en champ total  $\mathbf{u}_- := \mathbf{u}_-^d + \mathbf{u}^i$ . La formulation variationnelle (8.25) est équivalente au problème :

$$\begin{aligned}
&\text{Trouver } (\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-, \varphi) \in \mathbf{V}_0 \text{ tel que} \\
&a((\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-, \varphi), (\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_-, \psi)) = \hat{\ell}_{\text{pml}}(\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_-, \psi), \quad \forall (\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_-, \psi) \in \mathbf{V}_0,
\end{aligned} \tag{8.27}$$

avec le second membre qui est modifié en :

$$\hat{\ell}_{\text{pml}}(\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_-, \psi) := \ell_{\text{pml}}(\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_-, \psi) + \int_{B_-^s} \alpha_1^{-1} (\underline{\sigma}^{\alpha_1}(\mathbf{u}^i) : \underline{\epsilon}^{\alpha_1}(\overline{\mathbf{v}}_-) - \rho_s \omega^2 \mathbf{u}^i \cdot \overline{\mathbf{v}}_-) \, d\mathbf{x}.$$

Puisque  $\mathbf{u}^i \in \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\Omega_-^s)$ , il est facile de voir que  $\hat{\ell}_{\text{pml}}$  est une forme antilinéaire continue sur  $\mathbf{V}_0$ . Ensuite,  $a$  est une forme sesquilinéaire continue sur  $\mathbf{V}_0 \times \mathbf{V}_0$  pouvant se décomposer en  $a = b + c$ , où :

$$\begin{aligned}
b((\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-, \varphi), (\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_-, \psi)) &:= \int_{\dot{\Omega}_{-R,R'}^s} \alpha_1^{-1} (\underline{\sigma}^{\alpha_1}(\mathbf{u}_+) : \underline{\epsilon}^{\alpha_1}(\overline{\mathbf{v}}_+) + \rho_s \mathbf{u}_+ \cdot \overline{\mathbf{v}}_+) \, d\mathbf{x} \\
&+ \int_{B_-^s} \alpha_1^{-1} (\underline{\sigma}^{\alpha_1}(\mathbf{u}_-) : \underline{\epsilon}^{\alpha_1}(\overline{\mathbf{v}}_-) + \rho_s \mathbf{u}_- \cdot \overline{\mathbf{v}}_-) \, d\mathbf{x} \\
&+ \rho_f \int_{\Omega_{0,R'}^f} \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \partial_{x_1} \varphi \partial_{x_1} \bar{\psi} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \partial_{x_2} \varphi \partial_{x_2} \bar{\psi} + (\alpha_1 \alpha_2)^{-1} \varphi \bar{\psi} \right) \, d\mathbf{x},
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
c((\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-, \varphi), (\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_-, \psi)) &:= -\rho_s (\omega^2 + 1) \int_{\dot{\Omega}_{-R,R'}^s} \alpha_1^{-1} \mathbf{u}_+ \cdot \overline{\mathbf{v}}_+ \, d\mathbf{x} - \rho_s (\omega^2 + 1) \int_{B_-^s} \alpha_1^{-1} \mathbf{u}_- \cdot \overline{\mathbf{v}}_- \, d\mathbf{x} \\
&- \rho_f \left( \frac{\omega^2}{c_f^2} + 1 \right) \int_{\Omega_{0,R'}^f} (\alpha_1 \alpha_2)^{-1} \varphi \bar{\psi} \, d\mathbf{x} + \omega \rho_f \int_{\Gamma_{0,R'}^{sf}} \alpha_1^{-1} (\varphi(\overline{\mathbf{v}}_+ \cdot \mathbf{n}_s) + (\mathbf{u}_+ \cdot \mathbf{n}_s) \bar{\psi}) \, ds(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Par le théorème de représentation de Riesz, on peut définir les opérateurs linéaires  $\mathcal{A}(\alpha_1, \omega)$ ,  $\mathcal{B}(\alpha_1)$  et  $\mathcal{C}(\alpha_1, \omega)$  de  $\mathbf{V}_0$  dans  $(\mathbf{V}_0)^*$  associés aux formes sesquilinéaires  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

• Cas  $\alpha_1$  réel

On suppose dans un premier temps que  $\alpha_1$  est réel, on écrit alors  $\alpha_1 = a_1$ . Montrons alors que l'opérateur  $\mathcal{B}(a_1)$  est un isomorphisme. Pour cela, il suffit de montrer que la forme sesquilinéaire  $b$  est coercive, ce qui permettra de conclure avec le lemme de Lax-Milgram. Tout d'abord, puisque  $a_1$  et  $\Re(\alpha_2)$  sont bornées inférieurement et supérieurement par des constantes strictement positives, il existe une constante  $C(\Omega_{0,R'}^f) > 0$  telle que :

$$\Re\left(\rho_f \int_{\Omega_{0,R'}^f} \left(\frac{a_1}{\alpha_2} |\partial_{x_1} \varphi|^2 + \frac{\alpha_2}{a_1} |\partial_{x_2} \varphi|^2 + (a_1 \alpha_2)^{-1} |\varphi|^2\right) d\mathbf{x}\right) \geq C(\Omega_{0,R'}^f) \|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_{0,R'}^f)}^2.$$

Pour contrôler les termes élastiques, nous développons d'abord :

$$a_1^{-1} \underline{\sigma}^{a_1}(\mathbf{u}_+) : \underline{\epsilon}^{a_1}(\overline{\mathbf{u}}_+) = \lambda_s a_1^{-1} |\operatorname{div}_{a_1}(\mathbf{u}_+)|^2 + 2\mu_s a_1^{-1} \underline{\epsilon}^{a_1}(\mathbf{u}_+) : \underline{\epsilon}^{a_1}(\overline{\mathbf{u}}_+).$$

Il en résulte par application de l'inégalité de Korn à poids (8.19) (prendre  $f = \alpha_1$  qui satisfait en particulier les hypothèses 1. et 2., qu'il existe  $C(\dot{\Omega}_{-R,R'}^s) > 0$  telle que :

$$\begin{aligned} & \int_{\dot{\Omega}_{-R,R'}^s} a_1^{-1} (\underline{\sigma}^{a_1}(\mathbf{u}_+) : \underline{\epsilon}^{a_1}(\overline{\mathbf{u}}_+) + \rho_s \mathbf{u}_+ \cdot \overline{\mathbf{u}}_+) d\mathbf{x} \\ & \geq \inf a_1^{-1} \left( \lambda_s \|\operatorname{div}_{a_1}(\mathbf{u}_+)\|_{\mathbf{L}^2(\dot{\Omega}_{-R,R'}^s)}^2 + 2\mu_s \|\underline{\epsilon}^{a_1}(\mathbf{u}_+)\|_{\mathbf{L}^2(\dot{\Omega}_{-R,R'}^s)}^2 + \rho_s \|\mathbf{u}_+\|_{\mathbf{L}^2(\dot{\Omega}_{-R,R'}^s)}^2 \right) \\ & \geq C(\dot{\Omega}_{-R,R'}^s) \|\mathbf{u}_+\|_{\mathbf{H}^1(\dot{\Omega}_{-R,R'}^s)}^2. \end{aligned}$$

L'intégrale sur  $B_-^s$  se traite de la même façon. Nous pouvons alors en conclure la coercivité de  $\Re(b)$ . Par conséquent, l'opérateur linéaire  $\mathcal{B}(a_1)$  associé à la forme sesquilinéaire  $b$  est un isomorphisme d'après le lemme de Lax-Milgram. L'opérateur  $\mathcal{C}(a_1, \omega)$  associé à la forme sesquilinéaire  $c$  est quant à lui compact pour chaque fréquence  $\omega$ . L'opérateur  $\mathcal{A}(a_1, \omega) := \mathcal{B}(a_1) + \mathcal{C}(a_1, \omega)$  est donc Fredholm d'indice zéro. Il reste à montrer que l'opérateur  $\mathcal{A}(a_1, \omega)$  est inversible pour au moins une fréquence  $\omega_0$  afin de pouvoir recourir au théorème de Fredholm analytique. Pour  $\omega_0 = i\tau$  avec  $\tau > 0$ , le terme de couplage de la forme sesquilinéaire  $a$  satisfait pour tout  $(\mathbf{u}_+, \varphi) \in \mathbf{H}^1(\dot{\Omega}_{-R,R'}^s) \times \mathbf{H}^1(\Omega_{0,R'}^f)$  :

$$\Re\left(\omega_0 \rho_f \int_{\Gamma_{0,R'}^{sf}} a_1^{-1} (\varphi(\overline{\mathbf{u}}_+ \cdot \mathbf{n}_s) + (\mathbf{u}_+ \cdot \mathbf{n}_s) \bar{\varphi}) ds(\mathbf{x})\right) = 0.$$

On a en outre  $\omega_0^2 = -\tau^2$ , ce qui donne en particulier  $k_f^2 = -\tau^2/c_f^2$  et  $\rho_s \omega^2 = -\rho_s \tau^2$ . Avec l'expression (8.26), on voit que  $\Re(a)$  est coercif en reprenant les arguments donnés pour prouver la coercivité de  $\Re(b)$ . Il s'ensuit par application du lemme de Lax-Milgram que  $\mathcal{A}(a_1, \omega_0)$  est un isomorphisme. D'après le Théorème A.3, on en déduit que  $\mathcal{A}(a_1, \omega)$  est un isomorphisme excepté pour un ensemble dénombrable de fréquences noté  $\mathcal{P}(a_1)$ .

• Cas  $\alpha_1$  complexe

Soit  $\omega \notin \mathcal{P}(a_1)$ . La dernière étape de la preuve consiste à montrer que l'opérateur  $\mathcal{A}(\alpha_1, \omega)$  est inversible lorsque  $\alpha_1 = a_1 + ib_1$  a une partie imaginaire  $b_1$  petite en module. Pour ce faire, on remarque d'abord qu'on a l'identité :

$$\mathcal{A}(\alpha_1, \omega) = \mathcal{A}(a_1, \omega) \left( \mathcal{I} + \mathcal{A}(a_1, \omega)^{-1} (\mathcal{A}(\alpha_1, \omega) - \mathcal{A}(a_1, \omega)) \right). \quad (8.28)$$

Nous voulons estimer la norme de  $\mathcal{A}(\alpha_1, \omega) - \mathcal{A}(a_1, \omega)$  pour déterminer sous quelles conditions l'opérateur  $\mathcal{A}(\alpha_1, \omega)$  est inversible. On calcule pour cela dans  $B_-^s$  et  $\dot{\Omega}_{-R, R'}^s$  :

$$\begin{aligned} & a_1^{-1} \left( \underline{\sigma}^{a_1}(\mathbf{u}) : \underline{\epsilon}^{a_1}(\bar{\mathbf{v}}) - \rho_s \omega^2 \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} \right) - \alpha_1^{-1} \left( \underline{\sigma}^{\alpha_1}(\mathbf{u}) : \underline{\epsilon}^{\alpha_1}(\bar{\mathbf{v}}) - \rho_s \omega^2 \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} \right) \\ &= \lambda_s \left( a_1^{-1} \operatorname{div}_{a_1}(\mathbf{u}) \operatorname{div}_{a_1}(\bar{\mathbf{v}}) - \alpha_1^{-1} \operatorname{div}_{\alpha_1}(\mathbf{u}) \operatorname{div}_{\alpha_1}(\bar{\mathbf{v}}) \right) \\ &\quad + 2\mu_s \left( a_1^{-1} \underline{\epsilon}^{a_1}(\mathbf{u}) : \underline{\epsilon}^{a_1}(\bar{\mathbf{v}}) - \alpha_1^{-1} \underline{\epsilon}^{\alpha_1}(\mathbf{u}) : \underline{\epsilon}^{\alpha_1}(\bar{\mathbf{v}}) \right) - \rho_s \omega^2 (a_1^{-1} - \alpha_1^{-1}) \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} \\ &= \lambda_s \left( (a_1 - \alpha_1) \partial_{x_1} u_1 \partial_{x_1} \bar{v}_1 + (a_1^{-1} - \alpha_1^{-1}) \partial_{x_2} u_2 \partial_{x_2} \bar{v}_2 \right) \\ &\quad + 2\mu_s \left( (a_1 - \alpha_1) \underline{\epsilon}^1(\mathbf{u}) : \underline{\epsilon}^1(\bar{\mathbf{v}}) + (a_1^{-1} - \alpha_1^{-1}) \underline{\epsilon}^2(\mathbf{u}) : \underline{\epsilon}^2(\bar{\mathbf{v}}) \right) - \rho_s \omega^2 (a_1^{-1} - \alpha_1^{-1}) \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}}, \end{aligned}$$

puis dans  $\Omega_{0, R'}^f$  :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{a_1}{\alpha_2} \partial_{x_1} \varphi \partial_{x_1} \bar{\psi} + \frac{\alpha_2}{a_1} \partial_{x_2} \varphi \partial_{x_2} \bar{\psi} - (a_1 \alpha_2)^{-1} k_f^2 \varphi \bar{\psi} \right) \\ & - \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \partial_{x_1} \varphi \partial_{x_1} \bar{\psi} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \partial_{x_2} \varphi \partial_{x_2} \bar{\psi} - (\alpha_1 \alpha_2)^{-1} k_f^2 \varphi \bar{\psi} \right) \\ &= (a_1 - \alpha_1) \alpha_2^{-1} \partial_{x_1} \varphi \partial_{x_1} \bar{\psi} + \alpha_2 (a_1^{-1} - \alpha_1^{-1}) \partial_{x_2} \varphi \partial_{x_2} \bar{\psi} - \alpha_2^{-1} (a_1^{-1} - \alpha_1^{-1}) k_f^2 \varphi \bar{\psi}, \end{aligned}$$

et enfin sur  $\Gamma_{0, R'}^{\text{sf}}$  :

$$\begin{aligned} & a_1^{-1} \left( \varphi(\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}_s) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s) \bar{\psi} \right) - \alpha_1^{-1} \left( \varphi(\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}_s) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s) \bar{\psi} \right) \\ &= (a_1^{-1} - \alpha_1^{-1}) \left( \varphi(\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}_s) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s) \bar{\psi} \right). \end{aligned}$$

On peut alors montrer par des calculs, que nous ne détaillons pas, qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour  $\mathbf{E} := (\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-, \varphi)$  et  $\mathbf{F} := (\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_-, \psi)$  dans  $\mathbf{V}_0$  :

$$\begin{aligned} & \left| \langle (\mathcal{A}(\alpha_1, \omega) - \mathcal{A}(a_1, \omega)) \mathbf{E}, \mathbf{F} \rangle_{\mathbf{V}_0^*, \mathbf{V}_0} \right| \\ &= |a(\mathbf{E}, \mathbf{F}; \alpha_1) - a(\mathbf{E}, \mathbf{F}; a_1)| \\ &\leq C \max \left( \sup |a_1 - \alpha_1|, \sup |a_1^{-1} - \alpha_1^{-1}| \right) \|\mathbf{E}\|_{\mathbf{V}_0} \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{V}_0}, \end{aligned}$$

où nous avons précisé la dépendance de la forme sesquilinéaire  $a$  vis-à-vis du paramètre de PML. Nous en déduisons alors que :

$$\|\mathcal{A}(\alpha_1, \omega) - \mathcal{A}(a_1, \omega)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_0^*)} \leq C \max \left( \sup |a_1 - \alpha_1|, \sup |a_1^{-1} - \alpha_1^{-1}| \right).$$

Il existe alors  $\varepsilon(a_1, \omega)$  tel que, si  $\alpha_1$  vérifie  $\sup |a_1 - \alpha_1| = \sup |b_1| \leq \varepsilon(a_1, \omega)$  dans la partie occupée par les PML, on a :

$$\|\mathcal{A}(\alpha_1, \omega) - \mathcal{A}(a_1, \omega)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_0^*)} < \|\mathcal{A}(a_1, \omega)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_0^*)}.$$

On en déduit finalement à partir de (8.28) que  $\mathcal{A}(\alpha_1, \omega)$  est inversible.  $\square$

**Remarque 8.18** *Il est fort probable que ce résultat ne soit pas optimal du point de vue du profil de PML longitudinal. Bien d'autres questions sont ouvertes. Par exemple, le problème avec PML longitudinales approche-t-il le problème de départ (8.2) sous réserve que ce dernier soit bien posé?*



# Chapitre 9

## Problème inverse dans les guides élastiques partiellement immergés

### Sommaire

---

9.1	Tenseur de Green . . . . .	307
9.1.1	Tenseur de Green associé au guide élastique gauche . . . . .	307
9.1.2	Tenseur de Green associé au guide élastique immergé droit . . . . .	310
9.1.3	Champs de référence en variables mixtes . . . . .	314
9.1.4	Tenseur de Green de la jonction . . . . .	316
9.2	Linear Sampling Method modale . . . . .	322
9.2.1	LSM avec des mesures de type $\mathcal{X}^s$ . . . . .	323
9.2.2	LSM avec des mesures de type $\mathcal{Y}^s$ . . . . .	329
9.3	Expériences numériques . . . . .	331
9.3.1	Choix de la polarisation . . . . .	333
9.3.2	Impact des matériaux sur la qualité de la reconstruction d'un obstacle volumique dans le solide . . . . .	334
9.3.3	Impact des matériaux sur la qualité de la reconstruction d'un obstacle de surface dans le solide . . . . .	335
9.3.4	Impact de la fréquence et identification simultanée de défauts dans le cœur et la gaine . . . . .	337
9.4	Annexes . . . . .	337

---

La résolution de problèmes inverses en interaction fluide-structure présente des difficultés supplémentaires par rapport à celle de problèmes inverses en acoustique, dont deux exemples ont été traité aux [chapitre 3](#) et [chapitre 6](#). Ces difficultés proviennent entre autre de la nature vectorielle du problème et de la prise en compte du couplage avec le fluide. De plus, lorsqu'il s'agit de guides d'ondes comme dans notre cas, la richesse des modes est plus grande en élasticité qu'en acoustique.

Le problème de la détermination de la forme d'un obstacle solide borné et immergé dans un fluide infini à partir de mesures du champ lointain du champ de pression acoustique a motivé plusieurs travaux. Parmi les méthodes développées pour résoudre ce problème, nous pouvons retrouver des méthodes itératives [[Est13](#) ; [EHR08](#)], mais aussi la Linear Sampling Method (LSM) [[MS09](#)].

Dans de nombreux secteurs industriels, ce n'est pas un obstacle solide borné qu'on cherche à caractériser, mais des défauts dans une structure élastique élançée immergée dans un fluide.

De tels cas de figure peuvent être rencontrés par exemple dans le secteur de l'énergie. Nous pouvons penser en effet au contrôle non destructif de la partie immergée des éoliennes offshore [Bre+18], mais aussi au contrôle non destructif d'éléments de structures immergées dans une cuve de réacteurs nucléaires [Baq+12]. Dans le second cas, les besoins de CND se sont récemment accrus avec le développement de nouveaux types de réacteurs complexes tels que les réacteurs à eau pressurisée ou à plus long terme les réacteurs nucléaires de quatrième génération. Parmi ces projets à plus long terme, on peut mentionner les réacteurs de type *Sodium-cooled Fast Reactor System* (SFR) qui pourraient utiliser du sodium liquide comme liquide de refroidissement. Le contrôle d'éléments de la structure du réacteur immergés dans la cuve à l'aide de capteurs immergés dans le sodium liquide pose un certain nombre de questions du fait des conditions de température pouvant dépasser les 200°C [Baq+12]. Une autre piste est d'effectuer des mesures en positionnant des capteurs sur la paroi extérieure de la cuve. Puisque le diamètre de certains de ces projets de réacteur est important (16 m pour le projet ASTRID), la paroi de la cuve peut être localement approximée par une plaque. Dans [Kau+19b], ce sont des modes de Lamb à fuite ayant une forte atténuation qui ont été générés depuis une plaque, dont une face est à l'air libre et une autre en contact avec le fluide, pour inspecter une ou deux plaques parallèles à la première et de même épaisseur immergées dans le fluide. L'émission de ces modes au niveau de la plaque accessible permet en effet de générer des modes de Lamb à fuite dans les plaques immergées. Ces travaux ont permis de montrer expérimentalement en condition de laboratoire que la mesure des temps de vol des modes de Lamb à fuite générés successivement dans les différentes plaques pourrait permettre de détecter la présence de défauts dans les plaques immergées. Plus récemment, une méthode de retournement temporel utilisant le mode de Lamb A1 a été proposée dans [Val+21] pour identifier des entailles dans une plaque immergée. Dans [Tak+17], ce sont enfin les modes de Lamb à fuite A1 et S1 peu atténués et générés par des capteurs multi-éléments qui ont été utilisés expérimentalement pour localiser des trous dans une plaque d'aluminium immergée dans de l'eau. La prise en compte du fluide environnant la plaque élastique dans toutes ces méthodes est importante, car elle permettrait une inspection des réacteurs en fonctionnement, ce qui aiderait à limiter leurs arrêts. Dans un contexte applicatif différent, le contrôle des structures immergées est aussi d'un grand intérêt dans l'industrie pétrolière [Nic18; Moh+17]. Les méthodes d'imagerie que nous venons de mentionner ont l'inconvénient d'utiliser peu de modes à basse fréquence. La résolution de l'imagerie s'en trouve alors limitée.

Nous souhaitons ici proposer une méthode permettant de localiser et de caractériser de façon précise des défauts dans des guides élastiques partiellement immergés. Pour cela, il semble nécessaire d'utiliser une méthode haute fréquence. Comme aux [chapitre 3](#) et [chapitre 6](#) pour des guides acoustiques, nous allons recourir à la LSM, qui est une méthode d'imagerie haute fréquence. Une formulation modale de la LSM a été proposée pour la première fois par [BLL11] dans un contexte de guide élastique fermé en régime harmonique avec des mesures effectuées sur la section transversale du guide. Ce travail a grandement tiré parti du formalisme XY et des relations de biorthogonalité qui en découlent. La méthode a été étendue dans [Bar+18] aux mesures de surface dans le domaine temporel. Une démonstration de cette procédure d'imagerie sur des données simulées puis expérimentales a été présentée dans le cas d'une plaque isotrope à l'air libre. Dans ce chapitre, nous allons adapter cette méthode d'imagerie à notre configuration de guide élastique partiellement immergé dans un fluide tronqué transversalement par des PML. Nous tirerons aussi parti de la méthodologie développée dans les deux premières parties du manuscrit pour traiter les jonctions de guides d'ondes, ainsi que l'extension du formalisme XY aux guides élastiques immergés conduite

au chapitre 7.

Le chapitre aura la structure suivante. Pour commencer, nous utiliserons le formalisme XY pour donner une expression modale du tenseur de Green du guide uniforme associé au demi-guide élastique immergé droit. Nous introduirons ensuite les champs de référence gauche et droit pour donner une expression modale du tenseur de Green de la jonction du demi-guide élastique gauche et du demi-guide élastique immergé droit. Dans un second temps, nous tirerons parti de cette décomposition modale du tenseur de Green pour proposer une formulation modale de la LSM dans une configuration de back-scattering. Autrement dit, nous écrirons une formulation de la LSM utilisant des mesures effectuées dans la section du demi-guide gauche en vue d'identifier des défauts dans la partie immergée de la structure, ce qui se rapproche des situations industrielles évoquées ci-avant.

## 9.1 Tenseur de Green

La Linear Sampling Method requiert la connaissance de la solution fondamentale du système d'équations aux dérivées partielles gouvernant la propagation des ondes dans le domaine considéré. Contrairement au cas acoustique, la solution fondamentale en élasticité n'est plus une fonction scalaire. En effet, plusieurs polarisations peuvent être considérées pour le terme source et la réponse à ces sollicitations est un champ vectoriel. La solution fondamentale est alors un champ tensoriel d'ordre 2 appelé *tenseur de Green*. En interaction fluide-structure, le tenseur est encore plus compliqué. En effet, il faut aussi considérer toutes les combinaisons de sollicitations dans le solide ou dans le fluide et de réponses dans le solide ou dans le fluide. Puisque nous souhaitons proposer une formulation modale de la LSM, nous avons besoin d'une expression modale de ce tenseur de Green. Suivant [BLL11], nous allons définir un tenseur de Green en variables XY que nous pourrions décomposer sur les modes en variables mixtes. Nous donnerons premièrement une expression modale des tenseurs de Green des deux guides uniformes associés aux deux demi-guides de la jonction. Dans un second temps, nous construirons une décomposition modale du tenseur de Green de la structure globale, c'est-à-dire de la jonction du demi-guide élastique fermé à gauche et du guide élastique immergé dans un fluide avec PML à droite.

### 9.1.1 Tenseur de Green associé au guide élastique gauche

Le tenseur de Green du guide élastique gauche est pour  $\mathbf{y} \in W^s$  la solution du problème :

$$\text{Trouver } \tilde{\underline{G}}_{[u,\sigma]}(\cdot, \mathbf{y}) : W^s \rightarrow \mathbb{C}^{3 \times 3} \text{ tel que} \quad (9.1)$$

$$\begin{cases} -\text{div}(\underline{\sigma}(\tilde{\underline{G}}_{[u,\sigma]}(\cdot, \mathbf{y}))) - \rho_s \omega^2 \tilde{\underline{G}}_{[u,\sigma]}(\cdot, \mathbf{y}) = \delta_{\mathbf{y}} \underline{\text{Id}}_3 & \text{dans } W^s \\ \underline{\sigma}(\tilde{\underline{G}}_{[u,\sigma]}(\cdot, \mathbf{y})) \mathbf{n}_s = 0 & \text{sur } \partial W^s \\ \tilde{\underline{G}}_{[u,\sigma]}(\cdot, \mathbf{y}) \text{ est sortant,} \end{cases}$$

où  $\underline{\text{Id}}_3$  est la matrice identité d'ordre 3.

**Remarque 9.1** Dans le problème (9.1), mais aussi dans tout le reste du chapitre, les opérateurs différentiels agissent colonne par colonne sur les tenseurs d'ordre 2.

**Remarque 9.2** La notation  $\tilde{\underline{G}}_{[u,\sigma]}(\cdot, \mathbf{y})$  retenue pour représenter le tenseur des contraintes traduit que les colonnes du tenseur correspondent aux différentes polarisations de la contrainte  $\sigma$  imposée



au point source  $\mathbf{y}$ , et que ses lignes correspondent aux différentes composantes du champ de déplacement  $\mathbf{u}$  dans le guide découlant de cette contrainte ponctuelle.

Pour obtenir une décomposition modale de  $\tilde{\underline{G}}_{[u,\sigma]}(\cdot, \mathbf{y})$ , nous allons passer par un tenseur de Green étendu en variables mixtes dont nous aurons besoin au moment d'écrire la LSM. Pour faciliter la lecture de ce qui suit, nous posons :

$$\mathbf{z}^s := \begin{pmatrix} \mathbf{x}^s \\ \mathbf{y}^s \end{pmatrix}.$$

Le tenseur de Green en variables mixtes est la solution du problème :

$$\text{Trouver } \tilde{\underline{G}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^s]}(\cdot, \mathbf{y}) : W^s \rightarrow \mathbb{C}^{6 \times 6} \text{ tel que } \begin{cases} -\partial_{x_1} \tilde{\underline{G}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^s]}(\cdot, \mathbf{y}) + \begin{pmatrix} 0 & F_{\mathbf{y}^s} \\ F_{\mathbf{x}^s} & 0 \end{pmatrix} \tilde{\underline{G}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^s]}(\cdot, \mathbf{y}) = \delta_{\mathbf{y}} \underline{\text{Id}}_6 & \text{dans } W^s \\ \underline{\sigma}_\Sigma(\tilde{\underline{G}}_{[\mathbf{y}^s, \mathbf{z}^s]}(\cdot, \mathbf{y})) \mathbf{e}_s = 0 & \text{sur } \partial W^s \\ \tilde{\underline{G}}_{[\mathbf{t}_\Sigma, \mathbf{z}^s]}(\cdot, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_s = 0 & \text{sur } \partial W^s \\ \tilde{\underline{G}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^s]}(\cdot, \mathbf{y}) \text{ est sortant,} \end{cases} \quad (9.2)$$

où  $\underline{\text{Id}}_6$  est la matrice identité d'ordre 6, et les opérateurs  $F_{\mathbf{x}^s}$  et  $F_{\mathbf{y}^s}$  ont été définis par (7.11).

**Remarque 9.3** Le tenseur  $\tilde{\underline{G}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^s]}$  a 6 colonnes puisqu'on considère des sollicitations dans les 3 composantes de  $\mathbf{x}^s$  et  $\mathbf{y}^s$ , mais aussi 6 lignes puisqu'on considère les réponses à ces sollicitations dans les trois variables de  $\mathbf{x}^s$  et  $\mathbf{y}^s$ . En suivant les calculs conduits à la sous-section 7.1.1, on peut montrer que (9.1) peut se réécrire sous la forme du problème d'évolution (9.2). Le tenseur  $\tilde{\underline{G}}_{[u,\sigma]}$  s'obtient donc à partir de  $\tilde{\underline{G}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^s]}$  en sélectionnant les colonnes associées à des sollicitations en contrainte (i.e.  $\boldsymbol{\sigma} = (-t_1, \mathbf{t}_\Sigma)$ ) et les lignes associées à des réponses en champ de déplacement (i.e.  $\mathbf{u} = (u_1, \mathbf{u}_\Sigma)$ ).

Les modes du guide fermé élastique gauche qui sont sortants à droite sont notés  $(\tilde{\lambda}_n, \tilde{\mathbf{X}}_n^s, \tilde{\mathbf{Y}}_n^s)_{n \geq 1}$  et ceux qui sont sortants à gauche  $(-\tilde{\lambda}_n, -\tilde{\mathbf{X}}_n^s, \tilde{\mathbf{Y}}_n^s)_{n \geq 1}$ . Pour rappel, ils sont les solutions du problème aux valeurs propres (7.12).

**Remarque 9.4** La condition de radiation de (9.2) doit se comprendre comme suit : les colonnes de  $\tilde{\underline{G}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^s]}(\cdot, \mathbf{y})$  se décomposent à gauche (respectivement droite) de  $\mathbf{y}$  sur les modes en variables  $\mathbf{XY}$  sortants à gauche (respectivement droite).

Sous l'Hypothèse 7.9 de complétude des modes en variables mixtes, la relation de biorthogonalité donnée par le Lemme 7.5 nous permet de décomposer le tenseur de Green en variables mixtes sur les modes.

**Proposition 9.5** [BLL11, Proposition 2.11]

Le tenseur de Green en variables  $\mathbf{XY}$  solution du problème (9.2) est donné par blocs :

$$\tilde{\underline{G}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^s]} = \begin{pmatrix} \tilde{\underline{G}}_{[\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^s]} & \tilde{\underline{G}}_{[\mathbf{x}^s, \mathbf{y}^s]} \\ \tilde{\underline{G}}_{[\mathbf{y}^s, \mathbf{x}^s]} & \tilde{\underline{G}}_{[\mathbf{y}^s, \mathbf{y}^s]} \end{pmatrix},$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{G}_{[\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x_1 - y_1) \sum_{n \geq 1} \tilde{\mathbf{X}}_n^s(\mathbf{x}_\Sigma) \otimes \tilde{\mathbf{Y}}_n^s(\mathbf{y}_\Sigma) e^{\tilde{\lambda}_n |x_1 - y_1|} \\ \tilde{G}_{[\mathbf{y}^s, \mathbf{x}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \tilde{\mathbf{Y}}_n^s(\mathbf{x}_\Sigma) \otimes \tilde{\mathbf{Y}}_n^s(\mathbf{y}_\Sigma) e^{\tilde{\lambda}_n |x_1 - y_1|} \\ \tilde{G}_{[\mathbf{x}^s, \mathbf{y}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \tilde{\mathbf{X}}_n^s(\mathbf{x}_\Sigma) \otimes \tilde{\mathbf{X}}_n^s(\mathbf{y}_\Sigma) e^{\tilde{\lambda}_n |x_1 - y_1|} \\ \tilde{G}_{[\mathbf{y}^s, \mathbf{y}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x_1 - y_1) \sum_{n \geq 1} \tilde{\mathbf{Y}}_n^s(\mathbf{x}_\Sigma) \otimes \tilde{\mathbf{X}}_n^s(\mathbf{y}_\Sigma) e^{\tilde{\lambda}_n |x_1 - y_1|}, \end{array} \right.$$

où  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  est la fonction signe définie par :

$$\operatorname{sgn}(z) := \begin{cases} 1 & \text{si } z \geq 0 \\ -1 & \text{si } z < 0. \end{cases}$$

Les expressions développées des différents blocs s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{G}_{[\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n \geq 1} \begin{pmatrix} \tilde{t}_2^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{u}_2^n(\mathbf{y}_\Sigma) & \tilde{t}_2^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{u}_3^n(\mathbf{y}_\Sigma) & \tilde{t}_2^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{t}_1^n(\mathbf{y}_\Sigma) \\ \tilde{t}_3^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{u}_2^n(\mathbf{y}_\Sigma) & \tilde{t}_3^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{u}_3^n(\mathbf{y}_\Sigma) & \tilde{t}_3^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{t}_1^n(\mathbf{y}_\Sigma) \\ \tilde{u}_1^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{u}_2^n(\mathbf{y}_\Sigma) & \tilde{u}_1^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{u}_3^n(\mathbf{y}_\Sigma) & \tilde{u}_1^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{t}_1^n(\mathbf{y}_\Sigma) \end{pmatrix} \tilde{p}_n(x_1, y_1) \\ \tilde{G}_{[\mathbf{y}^s, \mathbf{x}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n \geq 1} \begin{pmatrix} \tilde{u}_2^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{u}_2^n(\mathbf{y}_\Sigma) & \tilde{u}_2^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{u}_3^n(\mathbf{y}_\Sigma) & \tilde{u}_2^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{t}_1^n(\mathbf{y}_\Sigma) \\ \tilde{u}_3^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{u}_2^n(\mathbf{y}_\Sigma) & \tilde{u}_3^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{u}_3^n(\mathbf{y}_\Sigma) & \tilde{u}_3^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{t}_1^n(\mathbf{y}_\Sigma) \\ \tilde{t}_1^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{u}_2^n(\mathbf{y}_\Sigma) & \tilde{t}_1^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{u}_3^n(\mathbf{y}_\Sigma) & \tilde{t}_1^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{t}_1^n(\mathbf{y}_\Sigma) \end{pmatrix} \tilde{q}_n(x_1, y_1) \\ \tilde{G}_{[\mathbf{x}^s, \mathbf{y}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n \geq 1} \begin{pmatrix} \tilde{t}_2^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{t}_2^n(\mathbf{y}_\Sigma) & \tilde{t}_2^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{t}_3^n(\mathbf{y}_\Sigma) & \tilde{t}_2^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{u}_1^n(\mathbf{y}_\Sigma) \\ \tilde{t}_3^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{t}_2^n(\mathbf{y}_\Sigma) & \tilde{t}_3^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{t}_3^n(\mathbf{y}_\Sigma) & \tilde{t}_3^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{u}_1^n(\mathbf{y}_\Sigma) \\ \tilde{u}_1^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{t}_2^n(\mathbf{y}_\Sigma) & \tilde{u}_1^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{t}_3^n(\mathbf{y}_\Sigma) & \tilde{u}_1^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{u}_1^n(\mathbf{y}_\Sigma) \end{pmatrix} \tilde{q}_n(x_1, y_1) \\ \tilde{G}_{[\mathbf{y}^s, \mathbf{y}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n \geq 1} \begin{pmatrix} \tilde{u}_2^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{t}_2^n(\mathbf{y}_\Sigma) & \tilde{u}_2^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{t}_3^n(\mathbf{y}_\Sigma) & \tilde{u}_2^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{u}_1^n(\mathbf{y}_\Sigma) \\ \tilde{u}_3^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{t}_2^n(\mathbf{y}_\Sigma) & \tilde{u}_3^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{t}_3^n(\mathbf{y}_\Sigma) & \tilde{u}_3^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{u}_1^n(\mathbf{y}_\Sigma) \\ \tilde{t}_1^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{t}_2^n(\mathbf{y}_\Sigma) & \tilde{t}_1^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{t}_3^n(\mathbf{y}_\Sigma) & \tilde{t}_1^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{u}_1^n(\mathbf{y}_\Sigma) \end{pmatrix} \tilde{p}_n(x_1, y_1) \end{array} \right.$$

avec :

$$\tilde{q}_n(x_1, y_1) := -\frac{1}{2} e^{\tilde{\lambda}_n |x_1 - y_1|} \quad \text{et} \quad \tilde{p}_n(x_1, y_1) := \operatorname{sgn}(x_1 - y_1) \tilde{q}_n(x_1, y_1).$$

### Corollaire 9.6

Les blocs du tenseur de Green  $\tilde{G}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^s]}$  en variables mixtes satisfont pour tout couple de points  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (W^s)^2$  les relations de réciprocity :

1.  $\tilde{G}_{[\mathbf{y}^s, \mathbf{x}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( \tilde{G}_{[\mathbf{y}^s, \mathbf{x}^s]} \right)^t(\mathbf{y}, \mathbf{x});$
2.  $\tilde{G}_{[\mathbf{x}^s, \mathbf{y}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( \tilde{G}_{[\mathbf{x}^s, \mathbf{y}^s]} \right)^t(\mathbf{y}, \mathbf{x});$
3.  $\tilde{G}_{[\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( \tilde{G}_{[\mathbf{y}^s, \mathbf{y}^s]} \right)^t(\mathbf{y}, \mathbf{x});$
4.  $\tilde{G}_{[\mathbf{y}^s, \mathbf{y}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\left( \tilde{G}_{[\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^s]} \right)^t(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$

*Démonstration.* Ces relations découlent directement de la Proposition 9.5. □

Le tenseur de Green  $\tilde{\underline{G}}_{[u,\sigma]}(\cdot, \mathbf{y})$  se déduit alors facilement du tenseur de Green en variables mixtes  $\tilde{\underline{G}}_{[z^s, z^s]}(\cdot, \mathbf{y})$  en sélectionnant les colonnes associées aux sollicitations en contrainte et les lignes associées aux mesures en champ de déplacement.

**Proposition 9.7** [BLL11, Proposition 2.11]

Le tenseur de Green solution de (9.1) est donné par :

$$\tilde{\underline{G}}_{[u,\sigma]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n \geq 1} \begin{pmatrix} -\tilde{q}_n(x_1, y_1) \tilde{u}_1^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{u}_1^n(\mathbf{y}_\Sigma) & \tilde{p}_n(x_1, y_1) \tilde{u}_1^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{u}_2^n(\mathbf{y}_\Sigma) & \tilde{p}_n(x_1, y_1) \tilde{u}_1^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{u}_3^n(\mathbf{y}_\Sigma) \\ -\tilde{p}_n(x_1, y_1) \tilde{u}_2^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{u}_1^n(\mathbf{y}_\Sigma) & \tilde{q}_n(x_1, y_1) \tilde{u}_2^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{u}_2^n(\mathbf{y}_\Sigma) & \tilde{q}_n(x_1, y_1) \tilde{u}_2^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{u}_3^n(\mathbf{y}_\Sigma) \\ -\tilde{p}_n(x_1, y_1) \tilde{u}_3^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{u}_1^n(\mathbf{y}_\Sigma) & \tilde{q}_n(x_1, y_1) \tilde{u}_3^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{u}_2^n(\mathbf{y}_\Sigma) & \tilde{q}_n(x_1, y_1) \tilde{u}_3^n(\mathbf{x}_\Sigma) \tilde{u}_3^n(\mathbf{y}_\Sigma) \end{pmatrix}$$

avec :

$$\tilde{q}_n(x_1, y_1) := -\frac{1}{2} e^{\tilde{\lambda}_n |x_1 - y_1|} \quad \text{et} \quad \tilde{p}_n(x_1, y_1) := \text{sgn}(x_1 - y_1) \tilde{q}_n(x_1, y_1).$$

Il satisfait pour tout  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (W^s)^2$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ , la relation de réciprocité :

$$\tilde{\underline{G}}_{[u,\sigma]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( \tilde{\underline{G}}_{[u,\sigma]} \right)^t(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

### 9.1.2 Tenseur de Green associé au guide élastique immergé droit

Nous considérons désormais un guide élastique, occupant un domaine  $W^s$ , immergé dans un fluide tronqué transversalement par des PML, occupant un domaine  $W^f$ . Pour simplifier les notations, nous posons :

$$\mathbf{U}^{\text{sf}} := \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \varphi \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}^{\text{sf}} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \zeta \end{pmatrix},$$

où  $\boldsymbol{\sigma} := (-t_1, t_\Sigma)$  représente la contrainte longitudinale dans le solide et  $\zeta := \partial_{x_1} \varphi$  la dérivée axiale du potentiel des vitesses. Le tenseur de Green de cette configuration est pour  $\mathbf{y} \in W^s \cup W^f$  le tenseur :

$$\underline{G}_{[U^{\text{sf}}, V^{\text{sf}}]}(\cdot, \mathbf{y}) := \begin{pmatrix} \underline{G}_{[u, V^{\text{sf}}]}(\cdot, \mathbf{y}) \\ \underline{G}_{[\varphi, V^{\text{sf}}]}(\cdot, \mathbf{y}) \end{pmatrix} : W^s \times W^f \rightarrow \mathbb{C}^{4 \times 4},$$

solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{G}_{[u, V^{\text{sf}}]}(\cdot, \mathbf{y}) : W^s \rightarrow \mathbb{C}^{3 \times 4} \quad \text{et} \quad \underline{G}_{[\varphi, V^{\text{sf}}]}(\cdot, \mathbf{y}) : W^f \rightarrow \mathbb{C}^{1 \times 4} \quad \text{tel que} \\ \left\{ \begin{array}{ll} -\text{div}(\underline{\sigma}(\underline{G}_{[u, V^{\text{sf}}]}(\cdot, \mathbf{y}))) - \rho_s \omega^2 \underline{G}_{[u, V^{\text{sf}}]}(\cdot, \mathbf{y}) = \delta_{\mathbf{y}} \underline{\text{Id}}_{[u, V^{\text{sf}}]} & \text{dans } W^s \\ -\rho_f \left( \text{div}(\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma} \nabla \underline{G}_{[\varphi, V^{\text{sf}}]}(\cdot, \mathbf{y})) + b^{\alpha\Sigma} k_f^2 \underline{G}_{[\varphi, V^{\text{sf}}]}(\cdot, \mathbf{y}) \right) = \delta_{\mathbf{y}} \underline{\text{Id}}_{[\varphi, V^{\text{sf}}]} & \text{dans } W^f \\ \underline{\sigma}(\underline{G}_{[u, V^{\text{sf}}]}(\cdot, \mathbf{y})) \mathbf{n}_s = -\omega \rho_f \underline{G}_{[\varphi, V^{\text{sf}}]}(\cdot, \mathbf{y}) \mathbf{n}_s & \text{sur } \Gamma^{\text{sf}} \\ \omega (\underline{G}_{[u, V^{\text{sf}}]}(\cdot, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_s) = \partial_{\mathbf{n}_s} \underline{G}_{[\varphi, V^{\text{sf}}]}(\cdot, \mathbf{y}) & \text{sur } \Gamma^{\text{sf}} \\ \partial_{n_f} \underline{G}_{[\varphi, V^{\text{sf}}]}(\cdot, \mathbf{y}) = 0 & \text{sur } \Gamma^{\text{pml}} \\ \underline{G}_{[u, V^{\text{sf}}]}(\cdot, \mathbf{y}) \quad \text{est sortant} \\ \underline{G}_{[\varphi, V^{\text{sf}}]}(\cdot, \mathbf{y}) \quad \text{est sortant,} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (9.3)$$

où :

$$\underline{\text{Id}}_{[u, V^{\text{sf}}]} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\text{Id}}_{[\varphi, V^{\text{sf}}]} := (0 \ 0 \ 0 \ 1). \quad (9.4)$$

Les 3 premières colonnes du tenseur de Green  $\underline{G}_{[U^{sf}, V^{sf}]}(\cdot, \mathbf{y})$  correspondent aux trois polarisations possibles pour un point source vectoriel situé dans  $W^s$ , tandis que la quatrième colonne correspond à un point source scalaire situé dans  $W^f$ . Les trois premières lignes correspondent aux réponses à ces sollicitations en termes de champ de déplacement dans  $W^s$  et la dernière ligne à la réponse à ces sollicitations en termes de potentiel de vitesse dans  $W^f$ .

De la même façon qu'avec un guide élastique fermé, nous allons introduire un tenseur de Green étendu en variables mixtes. Posons :

$$\mathbf{z}^{sf} := \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{sf} \\ \mathbf{y}^{sf} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{x}^{sf} := \begin{pmatrix} \mathbf{x}^s \\ \mathbf{x}^f \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{y}^{sf} := \begin{pmatrix} \mathbf{y}^s \\ \mathbf{y}^f \end{pmatrix}.$$

Les composantes solides et fluides des modes définis par (7.60) dépendent de la même façon de la variable axiale  $x_1$ . Étant donné que nous souhaitons tirer parti du formalisme XY pour décomposer le tenseur de Green sur les modes, nous allons définir la fonction de Green sur le domaine  $W^{s \times f} := \mathbb{R} \times \Sigma^s \times \Sigma^f$ . Les points de  $W^{s \times f}$  sont notés  $\mathbf{x}^{sf} := (x_1, \mathbf{x}_\Sigma^{sf})$ , avec  $x_1 \in \mathbb{R}$  et  $\mathbf{x}_\Sigma^{sf} := (\mathbf{x}_\Sigma^s, \mathbf{x}_\Sigma^f) \in \Sigma^s \times \Sigma^f$ . Pour  $\mathbf{y}^{sf} \in W^{s \times f}$ , le tenseur de Green en variables mixtes est la solution du problème :

$$\text{Trouver } \underline{G}_{[\mathbf{z}^{sf}, \mathbf{z}^{sf}]}(\cdot, \mathbf{y}^{sf}) : W^{s \times f} \rightarrow \mathbb{C}^{8 \times 8} \quad \text{tel que} \quad \left\{ \begin{array}{l} -\partial_{x_1} \underline{G}_{[\mathbf{z}^{sf}, \mathbf{z}^{sf}]}(\cdot, \mathbf{y}^{sf}) + \begin{pmatrix} 0 & F \mathbf{y}^{sf} \\ F \mathbf{x}^{sf} & 0 \end{pmatrix} \underline{G}_{[\mathbf{z}^{sf}, \mathbf{z}^{sf}]}(\cdot, \mathbf{y}^{sf}) = \underline{\Delta}(\mathbf{y}^{sf}) \quad \text{dans } W^{s \times f} \\ \underline{\sigma}_\Sigma(\underline{G}_{[\mathbf{y}^s, \mathbf{z}^{sf}]}(\cdot, \mathbf{y}^{sf})) \mathbf{e}_s = -\omega \rho_f \underline{G}_{[\varphi, \mathbf{z}^{sf}]}(\cdot, \mathbf{y}^{sf}) \mathbf{e}_s \quad \text{sur } \Gamma^{sf} \\ \underline{G}_{[t_\Sigma, \mathbf{z}^{sf}]}(\cdot, \mathbf{y}^{sf}) \cdot \mathbf{e}_s = 0 \quad \text{sur } \Gamma^{sf} \\ \omega(\underline{G}_{[u, \mathbf{z}^{sf}]}(\cdot, \mathbf{y}^{sf}) \cdot \mathbf{n}_s) = \partial_{n_s} \underline{G}_{[\varphi, \mathbf{z}^{sf}]}(\cdot, \mathbf{y}^{sf}) \quad \text{sur } \Gamma^{sf} \\ \partial_{n_f} \underline{G}_{[\varphi, \mathbf{z}^{sf}]}(\cdot, \mathbf{y}^{sf}) = 0 \quad \text{sur } \Gamma^{pml} \\ \underline{G}_{[\mathbf{z}^{sf}, \mathbf{z}^{sf}]}(\cdot, \mathbf{y}^{sf}) \quad \text{est sortant,} \end{array} \right. \quad (9.5)$$

où :

$$\underline{\Delta}(\mathbf{y}^{sf}) := \delta_{y_1} \begin{pmatrix} \text{Id}_4^{\alpha_\Sigma}(\mathbf{y}_\Sigma^{sf}) & 0 \\ 0 & \underline{\text{Id}}_4^{\alpha_\Sigma}(\mathbf{y}_\Sigma^{sf}) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \underline{\text{Id}}_4^{\alpha_\Sigma}(\mathbf{y}_\Sigma^{sf}) := \begin{pmatrix} \delta_{\mathbf{y}_\Sigma^s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{\mathbf{y}_\Sigma^f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{\mathbf{y}_\Sigma^s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\rho_f b^{\alpha_\Sigma})^{-1} \delta_{\mathbf{y}_\Sigma^f} \end{pmatrix}, \quad (9.6)$$

où la fonction scalaire  $b^{\alpha_\Sigma}$  prenant en compte les coefficients des PML a été définie **sous-section 7.3.1**. Avec cette définition du tenseur de Green en variables mixtes, en particulier avec le choix de considérer des sollicitations dans le fluide pondérées par le facteur  $(\rho_f b^{\alpha_\Sigma})^{-1}$ , on peut montrer en reprenant les calculs détaillés à la **sous-section 7.3.3** que (9.3) se réécrit sous la forme du problème d'évolution (9.5).

Les modes du guide droit qui sont sortants à droite sont notés  $(\lambda_n, \mathbf{X}_n^{sf}, \mathbf{Y}_n^{sf})_{n \geq 1}$  et ceux qui sont sortants à gauche sont notés  $(-\lambda_n, -\mathbf{X}_n^{sf}, \mathbf{Y}_n^{sf})_{n \geq 1}$ . Pour rappel, ce sont les solutions du problème aux valeurs propres (7.61). Nous souhaitons décomposer le tenseur de Green en variables mixtes sur ces modes. Avec les coordonnées de  $W^{s \times f}$ , on peut écrire pour tout  $n \geq 1$  et  $\mathbf{x}_\Sigma^{sf} := (\mathbf{x}_\Sigma^s, \mathbf{x}_\Sigma^f)$  :

$$\mathbf{X}_n^{sf}(\mathbf{x}_\Sigma^{sf}) := \begin{pmatrix} \mathbf{X}_n^s(\mathbf{x}_\Sigma^s) \\ \mathbf{X}_n^f(\mathbf{x}_\Sigma^f) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{Y}_n^{sf}(\mathbf{x}_\Sigma^{sf}) := \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_n^s(\mathbf{x}_\Sigma^s) \\ \mathbf{Y}_n^f(\mathbf{x}_\Sigma^f) \end{pmatrix}.$$

Sous l'Hypothèse 7.51 de complétude des modes, on peut énoncer le résultat suivant.

**Proposition 9.8**

Le tenseur de Green en variables XY solution du problème (9.5) est donné par blocs :

$$\underline{G}_{[\mathbf{z}^{\text{sf}}, \mathbf{z}^{\text{sf}}]} = \begin{pmatrix} \underline{G}_{[\boldsymbol{x}^{\text{sf}}, \boldsymbol{x}^{\text{sf}}]} & \underline{G}_{[\boldsymbol{x}^{\text{sf}}, \boldsymbol{y}^{\text{sf}}]} \\ \underline{G}_{[\boldsymbol{y}^{\text{sf}}, \boldsymbol{x}^{\text{sf}}]} & \underline{G}_{[\boldsymbol{y}^{\text{sf}}, \boldsymbol{y}^{\text{sf}}]} \end{pmatrix},$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{G}_{[\boldsymbol{x}^{\text{sf}}, \boldsymbol{x}^{\text{sf}}]}(\boldsymbol{x}^{\text{sf}}, \boldsymbol{y}^{\text{sf}}) = -\frac{1}{2} \text{sgn}(x_1 - y_1) \sum_{n \geq 1} \mathbf{X}_n^{\text{sf}}(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{sf}}) \otimes \mathbf{Y}_n^{\text{sf}}(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{sf}}) e^{\lambda_n |x_1 - y_1|} \\ \underline{G}_{[\boldsymbol{y}^{\text{sf}}, \boldsymbol{x}^{\text{sf}}]}(\boldsymbol{x}^{\text{sf}}, \boldsymbol{y}^{\text{sf}}) = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \mathbf{Y}_n^{\text{sf}}(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{sf}}) \otimes \mathbf{Y}_n^{\text{sf}}(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{sf}}) e^{\lambda_n |x_1 - y_1|} \\ \underline{G}_{[\boldsymbol{x}^{\text{sf}}, \boldsymbol{y}^{\text{sf}}]}(\boldsymbol{x}^{\text{sf}}, \boldsymbol{y}^{\text{sf}}) = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \mathbf{X}_n^{\text{sf}}(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{sf}}) \otimes \mathbf{X}_n^{\text{sf}}(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{sf}}) e^{\lambda_n |x_1 - y_1|} \\ \underline{G}_{[\boldsymbol{y}^{\text{sf}}, \boldsymbol{y}^{\text{sf}}]}(\boldsymbol{x}^{\text{sf}}, \boldsymbol{y}^{\text{sf}}) = -\frac{1}{2} \text{sgn}(x_1 - y_1) \sum_{n \geq 1} \mathbf{Y}_n^{\text{sf}}(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{sf}}) \otimes \mathbf{X}_n^{\text{sf}}(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{sf}}) e^{\lambda_n |x_1 - y_1|}, \end{array} \right.$$

où  $\text{sgn}(\cdot)$  est la fonction signe définie par :

$$\text{sgn}(z) := \begin{cases} 1 & \text{si } z \geq 0 \\ -1 & \text{si } z < 0. \end{cases}$$

Les expressions développées s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{G}_{[\boldsymbol{x}^{\text{sf}}, \boldsymbol{x}^{\text{sf}}]}(\boldsymbol{x}^{\text{sf}}, \boldsymbol{y}^{\text{sf}}) = \sum_{n \geq 1} \begin{pmatrix} t_2^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) u_2^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & t_2^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) u_3^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & t_2^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) t_1^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & t_2^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) \varphi^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{f}}) \\ t_3^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) u_2^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & t_3^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) u_3^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & t_3^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) t_1^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & t_3^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) \varphi^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{f}}) \\ u_1^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) u_2^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & u_1^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) u_3^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & u_1^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) t_1^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & u_1^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) \varphi^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{f}}) \\ \zeta^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{f}}) u_2^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & \zeta^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{f}}) u_3^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & \zeta^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{f}}) t_1^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & \zeta^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{f}}) \varphi^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{f}}) \end{pmatrix} p_n(x_1, y_1) \\ \underline{G}_{[\boldsymbol{y}^{\text{sf}}, \boldsymbol{x}^{\text{sf}}]}(\boldsymbol{x}^{\text{sf}}, \boldsymbol{y}^{\text{sf}}) = \sum_{n \geq 1} \begin{pmatrix} u_2^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) u_2^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & u_2^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) u_3^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & u_2^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) t_1^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & u_2^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) \varphi^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{f}}) \\ u_3^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) u_2^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & u_3^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) u_3^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & u_3^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) t_1^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & u_3^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) \varphi^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{f}}) \\ t_1^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) u_2^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & t_1^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) u_3^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & t_1^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) t_1^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & t_1^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) \varphi^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{f}}) \\ \varphi^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{f}}) u_2^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & \varphi^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{f}}) u_3^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & \varphi^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{f}}) t_1^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & \varphi^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{f}}) \varphi^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{f}}) \end{pmatrix} q_n(x_1, y_1) \\ \underline{G}_{[\boldsymbol{x}^{\text{sf}}, \boldsymbol{y}^{\text{sf}}]}(\boldsymbol{x}^{\text{sf}}, \boldsymbol{y}^{\text{sf}}) = \sum_{n \geq 1} \begin{pmatrix} t_2^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) t_2^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & t_2^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) t_3^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & t_2^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) u_1^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & t_2^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) \zeta^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{f}}) \\ t_3^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) t_2^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & t_3^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) t_3^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & t_3^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) u_1^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & t_3^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) \zeta^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{f}}) \\ u_1^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) t_2^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & u_1^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) t_3^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & u_1^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) u_1^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & u_1^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) \zeta^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{f}}) \\ \zeta^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{f}}) t_2^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & \zeta^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{f}}) t_3^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & \zeta^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{f}}) u_1^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & \zeta^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{f}}) \zeta^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{f}}) \end{pmatrix} q_n(x_1, y_1) \\ \underline{G}_{[\boldsymbol{y}^{\text{sf}}, \boldsymbol{y}^{\text{sf}}]}(\boldsymbol{x}^{\text{sf}}, \boldsymbol{y}^{\text{sf}}) = \sum_{n \geq 1} \begin{pmatrix} u_2^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) t_2^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & u_2^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) t_3^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & u_2^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) u_1^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & u_2^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) \zeta^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{f}}) \\ u_3^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) t_2^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & u_3^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) t_3^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & u_3^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) u_1^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & u_3^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) \zeta^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{f}}) \\ t_1^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) t_2^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & t_1^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) t_3^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & t_1^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) u_1^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & t_1^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{s}}) \zeta^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{f}}) \\ \varphi^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{f}}) t_2^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & \varphi^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{f}}) t_3^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & \varphi^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{f}}) u_1^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{s}}) & \varphi^n(\boldsymbol{x}_\Sigma^{\text{f}}) \zeta^n(\boldsymbol{y}_\Sigma^{\text{f}}) \end{pmatrix} p_n(x_1, y_1) \end{array} \right.$$

avec :

$$q_n(x_1, y_1) := -\frac{1}{2} e^{\lambda_n |x_1 - y_1|} \quad \text{et} \quad p_n(x_1, y_1) := \text{sgn}(x_1 - y_1) q_n(x_1, y_1).$$

*Démonstration.* Nous allons calculer le tenseur de Green colonne par colonne, en ne détaillant que les calculs pour obtenir la quatrième colonne associée à une sollicitation de type  $\zeta$ . Introduisons le vecteur  $\mathbf{e}_4 := (0 \ 0 \ 0 \ 1)^t$ . L'Hypothèse 7.51 nous permet d'écrire pour

$(\mathbf{x}^{\text{sf}}, \mathbf{y}^{\text{sf}}) \in W^{\text{s} \times \text{f}} \times W^{\text{s} \times \text{f}}$  satisfaisant  $x_1 \neq y_1$  :

$$\begin{cases} \underline{G}_{[\mathbf{x}^{\text{sf}}, \mathbf{x}^{\text{sf}}]}(\mathbf{x}^{\text{sf}}, \mathbf{y}^{\text{sf}}) \mathbf{e}_4 = \sum_{n \geq 1} a_n^1(x_1) \mathbf{X}_n^{\text{sf}}(\mathbf{x}_\Sigma^{\text{sf}}) \\ \underline{G}_{[\mathbf{y}^{\text{sf}}, \mathbf{x}^{\text{sf}}]}(\mathbf{x}^{\text{sf}}, \mathbf{y}^{\text{sf}}) \mathbf{e}_4 = \sum_{n \geq 1} b_n^1(x_1) \mathbf{Y}_n^{\text{sf}}(\mathbf{x}_\Sigma^{\text{sf}}). \end{cases}$$

Injecter ces expressions dans (9.5) donne :

$$\begin{cases} \sum_{n \geq 1} \left( \frac{da_n^1}{dx_1}(x_1) - \lambda_n b_n^1(x_1) \right) \mathbf{X}_n^{\text{sf}}(\mathbf{x}_\Sigma^{\text{sf}}) = -(\rho_f b^{\alpha_\Sigma}(\mathbf{y}_\Sigma^{\text{sf}}))^{-1} \delta_{y_1}(x_1) \delta_{\mathbf{y}_\Sigma^{\text{sf}}}(\mathbf{x}_\Sigma^{\text{sf}}) \mathbf{e}_4 \\ \sum_{n \geq 1} \left( \frac{db_n^1}{dx_1}(x_1) - \lambda_n a_n^1(x_1) \right) \mathbf{Y}_n^{\text{sf}}(\mathbf{x}_\Sigma^{\text{sf}}) = 0. \end{cases} \quad (9.7)$$

Pour tout  $n \geq 1$ , prendre le produit scalaire dans  $\mathbf{H}^{\text{sf}}$  de la première équation de (9.7) par les  $(\mathbf{Y}_n^{\text{sf}})^*$ , et de la seconde équation de (9.7) par les  $(\mathbf{X}_n^{\text{sf}})^*$ , conduit à l'aide de la relation de biorthogonalité donnée par la Proposition 7.48 à :

$$\begin{cases} \frac{da_n^1}{dx_1}(x_1) - \lambda_n b_n^1(x_1) = -\varphi^n(\mathbf{y}_\Sigma^{\text{f}}) \delta_{y_1}(x_1) \\ \frac{db_n^1}{dx_1}(x_1) - \lambda_n a_n^1(x_1) = 0. \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi pour tout  $n \geq 1$  l'équation :

$$\frac{d^2 b_n^1}{dx_1}(x_1) - \lambda_n^2 b_n^1(x_1) = -\lambda_n \varphi^n(\mathbf{y}_\Sigma^{\text{f}}) \delta_{y_1}(x_1). \quad (9.8)$$

Les coefficients  $(b_n^1)_{n \geq 1}$  s'écrivent alors pour tout  $n \geq 1$  :

$$b_n^1(x_1) = \begin{cases} C_n^- e^{-\lambda_n x_1} + D_n^- e^{\lambda_n x_1} & \text{si } x_1 < y_1 \\ C_n^+ e^{-\lambda_n x_1} + D_n^+ e^{\lambda_n x_1} & \text{si } x_1 > y_1. \end{cases}$$

En utilisant les conditions de radiation, nous obtenons  $D_n^- = C_n^+ = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Les constantes restantes sont quant à elles déterminées à l'aide de (9.8) et de la formule des sauts :

$$\begin{cases} a_n^1(x_1) = -\text{sgn}(x_1 - y_1) \varphi^n(\mathbf{y}_\Sigma^{\text{f}}) e^{\lambda_n |x_1 - z_1|} \\ b_n^1(x_1) = -\varphi^n(\mathbf{y}_\Sigma^{\text{f}}) e^{\lambda_n |x_1 - z_1|}. \end{cases}$$

Les autres colonnes sont calculées de façon analogue. □

### Corollaire 9.9

Les blocs du tenseur de Green  $\underline{G}_{[\mathbf{z}^{\text{sf}}, \mathbf{z}^{\text{sf}}]}$  en variables mixtes satisfont pour tout couple de points  $(\mathbf{x}^{\text{sf}}, \mathbf{y}^{\text{sf}}) \in (W^{\text{s} \times \text{f}})^2$ ,  $\mathbf{x}^{\text{sf}} \neq \mathbf{y}^{\text{sf}}$  les relations de réciprocité :

1.  $\underline{G}_{[\mathbf{y}^{\text{sf}}, \mathbf{x}^{\text{sf}}]}(\mathbf{x}^{\text{sf}}, \mathbf{y}^{\text{sf}}) = \left( \underline{G}_{[\mathbf{y}^{\text{sf}}, \mathbf{x}^{\text{sf}}]} \right)^t(\mathbf{y}^{\text{sf}}, \mathbf{x}^{\text{sf}})$ ;
2.  $\underline{G}_{[\mathbf{x}^{\text{sf}}, \mathbf{y}^{\text{sf}}]}(\mathbf{x}^{\text{sf}}, \mathbf{y}^{\text{sf}}) = \left( \underline{G}_{[\mathbf{x}^{\text{sf}}, \mathbf{y}^{\text{sf}}]} \right)^t(\mathbf{y}^{\text{sf}}, \mathbf{x}^{\text{sf}})$ ;
3.  $\underline{G}_{[\mathbf{x}^{\text{sf}}, \mathbf{x}^{\text{sf}}]}(\mathbf{x}^{\text{sf}}, \mathbf{y}^{\text{sf}}) = \left( \underline{G}_{[\mathbf{y}^{\text{sf}}, \mathbf{y}^{\text{sf}}]} \right)^t(\mathbf{y}^{\text{sf}}, \mathbf{x}^{\text{sf}})$ ;

$$4. \underline{G}_{[U^{sf}, \mathbf{y}^{sf}]}(\mathbf{x}^{sf}, \mathbf{y}^{sf}) = -\left(\underline{G}_{[\mathbf{x}^{sf}, \mathbf{v}^{sf}]}\right)^t(\mathbf{y}^{sf}, \mathbf{x}^{sf}).$$

*Démonstration.* Ces relations découlent directement de la Proposition 9.8.  $\square$

On peut en déduire une expression modale du tenseur  $\underline{G}_{[U^{sf}, \mathbf{v}^{sf}]}(\cdot, \mathbf{y})$ .

### Corollaire 9.10

Les deux blocs du tenseur de Green solution de (9.3) sont donnés par :

$$\underline{G}_{[u, \mathbf{v}^{sf}]}(\mathbf{x}^{sf}, \mathbf{y}^{sf}) = \sum_{n \geq 1} \begin{pmatrix} -q_n(x_1, y_1) u_1^n(\mathbf{x}_\Sigma^s) u_1^n(\mathbf{y}_\Sigma^s) & p_n(x_1, y_1) u_1^n(\mathbf{x}_\Sigma^s) u_2^n(\mathbf{y}_\Sigma^s) & p_n(x_1, y_1) u_1^n(\mathbf{x}_\Sigma^s) u_3^n(\mathbf{y}_\Sigma^s) & p_n(x_1, y_1) u_1^n(\mathbf{x}_\Sigma^s) \varphi^n(\mathbf{y}_\Sigma^f) \\ -p_n(x_1, y_1) u_2^n(\mathbf{x}_\Sigma^s) u_1^n(\mathbf{y}_\Sigma^s) & q_n(x_1, y_1) u_2^n(\mathbf{x}_\Sigma^s) u_2^n(\mathbf{y}_\Sigma^s) & q_n(x_1, y_1) u_2^n(\mathbf{x}_\Sigma^s) u_3^n(\mathbf{y}_\Sigma^s) & q_n(x_1, y_1) u_2^n(\mathbf{x}_\Sigma^s) \varphi^n(\mathbf{y}_\Sigma^f) \\ -p_n(x_1, y_1) u_3^n(\mathbf{x}_\Sigma^s) u_1^n(\mathbf{y}_\Sigma^s) & q_n(x_1, y_1) u_3^n(\mathbf{x}_\Sigma^s) u_2^n(\mathbf{y}_\Sigma^s) & q_n(x_1, y_1) u_3^n(\mathbf{x}_\Sigma^s) u_3^n(\mathbf{y}_\Sigma^s) & q_n(x_1, y_1) u_3^n(\mathbf{x}_\Sigma^s) \varphi^n(\mathbf{y}_\Sigma^f) \end{pmatrix}$$

et :

$$\underline{G}_{[\varphi, \mathbf{v}^{sf}]}(\mathbf{x}^{sf}, \mathbf{y}^{sf}) = \sum_{n \geq 1} \begin{pmatrix} -p_n(x_1, y_1) \varphi^n(\mathbf{x}_\Sigma^f) u_1^n(\mathbf{y}_\Sigma^s) & q_n(x_1, y_1) \varphi^n(\mathbf{x}_\Sigma^f) u_2^n(\mathbf{y}_\Sigma^s) & q_n(x_1, y_1) \varphi^n(\mathbf{x}_\Sigma^f) u_3^n(\mathbf{y}_\Sigma^s) & q_n(x_1, y_1) \varphi^n(\mathbf{x}_\Sigma^f) \varphi^n(\mathbf{y}_\Sigma^f) \end{pmatrix}$$

avec :

$$q_n(x_1, y_1) := -\frac{1}{2} e^{\lambda_n |x_1 - y_1|} \quad \text{et} \quad p_n(x_1, y_1) := \text{sgn}(x_1 - y_1) q_n(x_1, y_1).$$

Pour  $(\mathbf{x}^{sf}, \mathbf{y}^{sf}) \in (W^{s \times f})^2$ ,  $\mathbf{x}^{sf} \neq \mathbf{y}^{sf}$ , le tenseur  $\underline{G}_{[U^{sf}, \mathbf{v}^{sf}]}$  satisfait la relation de réciprocité :

$$\underline{G}_{[U^{sf}, \mathbf{v}^{sf}]}(\mathbf{x}^{sf}, \mathbf{y}^{sf}) = \left(\underline{G}_{[U^{sf}, \mathbf{v}^{sf}]}\right)^t(\mathbf{y}^{sf}, \mathbf{x}^{sf}).$$

*Démonstration.* Ces expressions découlent directement de la Proposition 9.8. Il suffit de remarquer que les colonnes de  $\underline{G}_{[U^{sf}, \mathbf{v}^{sf}]}(\cdot, \mathbf{y}^{sf})$  correspondent aux réponses en déplacement et potentiel des vitesses à des contraintes de type  $-t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  dans le solide et  $\zeta$  dans le fluide. Sélectionner dans  $\underline{G}_{[\mathbf{z}^{sf}, \mathbf{z}^{sf}]}(\cdot, \mathbf{y}^{sf})$  les lignes correspondant à  $\mathbf{u}$  dans le solide et à  $\varphi$  dans le fluide et les colonnes correspondant aux contraintes mentionnées ci-dessus permet d'obtenir le tenseur de Green attendu. Les signes  $-$  dans la première colonne proviennent du fait que le terme source est polarisé selon  $t_1$  pour le tenseur de Green en variables mixtes et selon  $-t_1$  pour le tenseur de Green de départ.  $\square$

Nous venons de donner une expression modale du tenseur de Green en variables mixtes des guides gauche et droit de la jonction. Nous allons nous appuyer sur ces expressions pour obtenir une décomposition modale du tenseur de Green de la jonction sur les *champs de référence en variables mixtes* que nous allons définir.

### 9.1.3 Champs de référence en variables mixtes

Les champs de référence sont les réponses en champ total de la jonction aux champs incidents formés par les modes provenant du guide gauche ou droit. Ils ont été utilisés dans le contexte de l'acoustique aux [chapitre 3](#) et [chapitre 6](#). Ici, la configuration étudiée peut être interprétée comme la jonction d'un guide élastique fermé et d'un guide élastique immergé tronqué transversalement par des PML, ce qui nous permet de le considérer aussi comme un guide fermé. Le demi-guide gauche occupe le domaine  $\Omega_-^s := (-\infty, 0) \times \Sigma^s$  et le demi-guide

droit le domaine  $\Omega_+^{s \times f} := (0, +\infty) \times \Sigma^s \times \Sigma^f$ . Les modes dans le guide gauche sont notés pour  $\mathbf{x} = (x_1, \mathbf{x}_\Sigma) \in W^s$  :

$$\tilde{\mathcal{X}}_{n,\pm}^s(\mathbf{x}) := \pm \tilde{\mathbf{X}}_n^s(\mathbf{x}_\Sigma) e^{\pm \tilde{\lambda}_n x_1}, \quad \tilde{\mathcal{Y}}_{n,\pm}^s(\mathbf{x}) := \tilde{\mathbf{Y}}_n^s(\mathbf{x}_\Sigma) e^{\pm \tilde{\lambda}_n x_1} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{Z}}_{n,\pm}^s := \left( \tilde{\mathcal{X}}_{n,\pm}^s \quad \tilde{\mathcal{Y}}_{n,\pm}^s \right)^t.$$

Les modes dans le guide droit sont notés pour  $\mathbf{x}^{sf} = (x_1, \mathbf{x}_\Sigma^{sf}) \in W^{s \times f}$  :

$$\mathcal{X}_{n,\pm}^{sf}(\mathbf{x}^{sf}) := \pm \mathbf{X}_n^{sf}(\mathbf{x}_\Sigma^{sf}) e^{\pm \lambda_n x_1}, \quad \mathcal{X}_{n,\pm}^{sf}(\mathbf{x}^{sf}) := \mathbf{Y}_n^{sf}(\mathbf{x}_\Sigma^{sf}) e^{\pm \lambda_n x_1} \quad \text{et} \quad \mathcal{Z}_{n,\pm}^{sf} := \left( \mathcal{X}_{n,\pm}^{sf} \quad \mathcal{Y}_{n,\pm}^{sf} \right)^t.$$

### Définition 9.11

Pour  $n \geq 1$ , le champ de référence gauche en variables mixtes est le couple noté :

$$\mathcal{R}_n^+ := \left( \mathcal{R}_{[\mathcal{Z}^s, n]}^{[-, +]}, \mathcal{R}_{[\mathcal{Z}^{sf}, n]}^{[+, +]} \right),$$

solution du problème de transmission :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathcal{R}_{[\mathcal{Z}^s, n]}^{[-, +]} : \Omega_-^s \rightarrow \mathbb{C}^6 \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_{[\mathcal{Z}^{sf}, n]}^{[+, +]} : \Omega_+^{s \times f} \rightarrow \mathbb{C}^8 \quad \text{tel que} \\ \left\{ \begin{array}{l} -\partial_{x_1} \mathcal{R}_{[\mathcal{Z}^s, n]}^{[-, +]} + \begin{pmatrix} 0 & F \mathbf{y}^s \\ F \mathbf{x}^s & 0 \end{pmatrix} \mathcal{R}_{[\mathcal{Z}^s, n]}^{[-, +]} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_-^s \\ \sigma_\Sigma(\mathcal{R}_{[\mathcal{Y}^s, n]}^{[-, +]}) \mathbf{e}_s = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_-^s \\ \mathcal{R}_{[t_\Sigma, n]}^{[-, +]} \cdot \mathbf{e}_s = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_-^s \\ \mathcal{R}_{[\mathcal{Z}^s, n]}^{[-, +]} - \tilde{\mathcal{Z}}_{n,+}^s \quad \text{est sortant} \\ -\partial_{x_1} \mathcal{R}_{[\mathcal{Z}^{sf}, n]}^{[+, +]} + \begin{pmatrix} 0 & F \mathbf{y}^{sf} \\ F \mathbf{x}^{sf} & 0 \end{pmatrix} \mathcal{R}_{[\mathcal{Z}^{sf}, n]}^{[+, +]} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_+^{s \times f} \\ \sigma_\Sigma(\mathcal{R}_{[\mathcal{Y}^s, n]}^{[+, +]}) \mathbf{e}_s = -\omega \rho_f \mathcal{R}_{[\varphi, n]}^{[+, +]} \mathbf{e}_s \quad \text{sur} \quad \Gamma_+^{sf} \\ \mathcal{R}_{[t_\Sigma, n]}^{[+, +]} \cdot \mathbf{e}_s = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_+^{sf} \\ \omega(\mathcal{R}_{[u, n]}^{[+, +]} \cdot \mathbf{n}_s) = \partial_{n_s} \mathcal{R}_{[\varphi, n]}^{[+, +]} \quad \text{sur} \quad \Gamma_+^{sf} \\ \partial_{n_f} \mathcal{R}_{[\varphi, n]}^{[+, +]} = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_0^f \cup \Gamma_+^{\text{pml}} \\ \mathcal{R}_{[\mathcal{Z}^{sf}, n]}^{[+, +]} \quad \text{est sortant} \\ \mathcal{R}_{[\mathcal{Z}^s, n]}^{[-, +]} = \mathcal{R}_{[\mathcal{Z}^{sf}, n]}^{[+, +]} \quad \text{sur} \quad \Sigma_0^s, \end{array} \right. \quad (9.9) \end{array} \right.$$

où par soucis de ne pas alourdir les notations le champ incident  $\tilde{\mathcal{Z}}_{n,+}^s$  correspond ici au mode du guide gauche prolongé à droite par 0.

Pour  $n \geq 1$ , le champ de référence droit en variables mixtes est le couple noté :

$$\mathcal{R}_n^- := \left( \mathcal{R}_{[\mathcal{Z}^s, n]}^{[-, -]}, \mathcal{R}_{[\mathcal{Z}^{sf}, n]}^{[+, -]} \right),$$



solution du problème de transmission :

$$\begin{aligned}
 & \text{Trouver } \mathcal{R}_{[\mathcal{Z}^s, n]}^{[-, -]} : \Omega_-^s \rightarrow \mathbb{C}^6 \text{ et } \mathcal{R}_{[\mathcal{Z}^{\text{sf}}, n]}^{[+, -]} : \Omega_+^{\text{sf}} \rightarrow \mathbb{C}^8 \text{ tel que} \\
 & \left\{ \begin{array}{l}
 -\partial_{x_1} \mathcal{R}_{[\mathcal{Z}^s, n]}^{[-, -]} + \begin{pmatrix} 0 & F\mathcal{Y}^s \\ F\mathcal{X}^s & 0 \end{pmatrix} \mathcal{R}_{[\mathcal{Z}^s, n]}^{[-, -]} = 0 \text{ dans } \Omega_-^s \\
 \sigma_\Sigma(\mathcal{R}_{[\mathcal{Y}^s, n]}^{[-, -]}) \mathbf{e}_s = 0 \text{ sur } \Gamma_-^s \\
 \mathcal{R}_{[t_\Sigma, n]}^{[-, -]} \cdot \mathbf{e}_s = 0 \text{ sur } \Gamma_-^s \\
 \mathcal{R}_{[\mathcal{Z}^s, n]}^{[-, -]} \text{ est sortant} \\
 \\
 -\partial_{x_1} \mathcal{R}_{[\mathcal{Z}^{\text{sf}}, n]}^{[+, -]} + \begin{pmatrix} 0 & F\mathcal{Y}^{\text{sf}} \\ F\mathcal{X}^{\text{sf}} & 0 \end{pmatrix} \mathcal{R}_{[\mathcal{Z}^{\text{sf}}, n]}^{[+, -]} = 0 \text{ dans } \Omega_+^{\text{sf}} \\
 \sigma_\Sigma(\mathcal{R}_{[\mathcal{Y}^s, n]}^{[+, -]}) \mathbf{e}_s = -\omega \rho_f \mathcal{R}_{[\varphi, n]}^{[+, -]} \mathbf{e}_s \text{ sur } \Gamma_+^{\text{sf}} \\
 \mathcal{R}_{[t_\Sigma, n]}^{[+, -]} \cdot \mathbf{e}_s = 0 \text{ sur } \Gamma_+^{\text{sf}} \\
 \omega(\mathcal{R}_{[u, n]}^{[+, -]} \cdot \mathbf{n}_s) = \partial_{n_s} \mathcal{R}_{[\varphi, n]}^{[+, -]} \text{ sur } \Gamma_+^{\text{sf}} \\
 \partial_{n_f} \mathcal{R}_{[\varphi, n]}^{[+, -]} = 0 \text{ sur } \Sigma_0^{\text{f}} \cup \Gamma_+^{\text{pml}} \\
 \mathcal{R}_{[\mathcal{Z}^{\text{sf}}, n]}^{[+, -]} - \mathcal{Z}_{n, -}^{\text{sf}} \text{ est sortant} \\
 \\
 \mathcal{R}_{[\mathcal{Z}^s, n]}^{[-, -]} = \mathcal{R}_{[\mathcal{Z}^s, n]}^{[+, -]} \text{ sur } \Sigma_0^s,
 \end{array} \right. \quad (9.10)
 \end{aligned}$$

où par soucis de ne pas alourdir les notations le champ incident  $\mathcal{Z}_{n, -}^{\text{sf}}$  correspond au mode du guide droit prolongé à gauche par 0.

**Remarque 9.12** La continuité en  $\Sigma_0^s$  de la quantité  $\mathcal{Z}^s$  dans (9.9) et (9.10) traduit la continuité du champ de déplacement et de la contrainte longitudinale associés aux champs de référence.

**Remarque 9.13** La notation  $\mathcal{R}_{[A, n]}^{[a, b]}$  utilisée pour représenter les champs de référence doit se comprendre comme suit. On considère la grandeur  $A$  du côté gauche (respectivement droit) de la jonction si  $a = -$  (respectivement  $a = +$ ), associée au champ total produit par le champ incident formé par le mode d'indice  $n$  du guide gauche (respectivement droit) lorsque  $b = +$  (respectivement  $b = -$ ). On parle de champ de référence gauche (respectivement droit) lorsque  $b = +$  (respectivement  $b = -$ ).

#### Hypothèse 9.14

Les problèmes (9.9) et (9.10) sont bien posés.

### 9.1.4 Tenseur de Green de la jonction

Introduisons désormais le tenseur de Green de la jonction. Il y a 6 types de sollicitations possibles dans le demi-guide gauche et 8 dans le demi-guide droit. Cela nous amène à définir séparément les tenseurs de Green associés à des sources à gauche et à droite pour ne pas avoir à définir des tenseurs de taille qui varie selon la position du point source.

**Cas d'un point source à gauche**

Soit  $\mathbf{y} \in \Omega_-^s$ , le tenseur de Green de la jonction en variables mixtes noté :

$$\underline{\mathcal{G}}_{\mathbf{z}^s}^-(\cdot, \mathbf{y}) := \left( \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^s]}^{[-, -]}(\cdot, \mathbf{y}), \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^{sf}, \mathbf{z}^s]}^{[+, -]}(\cdot, \mathbf{y}) \right),$$

est la solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^s]}^{[-, -]}(\cdot, \mathbf{y}) : \Omega_-^s \rightarrow \mathbb{C}^{6 \times 6} \quad \text{et} \quad \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^{sf}, \mathbf{z}^s]}^{[+, -]}(\cdot, \mathbf{y}) : \Omega_+^{s \times f} \rightarrow \mathbb{C}^{8 \times 6} \quad \text{tel que} \\ \left. \begin{array}{l} -\partial_{x_1} \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^s]}^{[-, -]}(\cdot, \mathbf{y}) + \begin{pmatrix} 0 & F\mathbf{y}^s \\ F\mathbf{x}^s & 0 \end{pmatrix} \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^s]}^{[-, -]}(\cdot, \mathbf{y}) = \delta_{\mathbf{y}} \text{Id}_6 \quad \text{dans } \Omega_-^s \\ \underline{\sigma}_{\Sigma}(\underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}^s, \mathbf{z}^s]}^{[-, -]}(\cdot, \mathbf{y})) \mathbf{e}_s = 0 \quad \text{sur } \Gamma_-^s \\ \underline{\mathcal{G}}_{[t_{\Sigma}, \mathbf{z}^s]}^{[-, -]}(\cdot, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_s = 0 \quad \text{sur } \Gamma_-^s \\ \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^s]}^{[-, -]}(\cdot, \mathbf{y}) \quad \text{est sortant} \\ \\ -\partial_{x_1} \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^{sf}, \mathbf{z}^s]}^{[+, -]}(\cdot, \mathbf{y}) + \begin{pmatrix} 0 & F\mathbf{y}^{sf} \\ F\mathbf{x}^{sf} & 0 \end{pmatrix} \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^{sf}, \mathbf{z}^s]}^{[+, -]}(\cdot, \mathbf{y}) = 0 \quad \text{dans } \Omega_+^{s \times f} \\ \underline{\sigma}_{\Sigma}(\underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}^s, \mathbf{z}^s]}^{[+, -]}(\cdot, \mathbf{y})) \mathbf{e}_s = -\omega \rho_f \underline{\mathcal{G}}_{[\varphi, \mathbf{z}^s]}^{[+, -]}(\cdot, \mathbf{y}) \mathbf{e}_s \quad \text{sur } \Gamma_+^{sf} \\ \underline{\mathcal{G}}_{[t_{\Sigma}, \mathbf{z}^s]}^{[+, -]}(\cdot, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_s = 0 \quad \text{sur } \Gamma_+^{sf} \\ \omega(\underline{\mathcal{G}}_{[u, \mathbf{z}^s]}^{[+, -]}(\cdot, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_s) = \partial_{n_s} \underline{\mathcal{G}}_{[\varphi, \mathbf{z}^s]}^{[+, -]}(\cdot, \mathbf{y}) \quad \text{sur } \Gamma_+^{sf} \\ \partial_{n_f} \underline{\mathcal{G}}_{[\varphi, \mathbf{z}^s]}^{[+, -]}(\cdot, \mathbf{y}) = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0^f \cup \Gamma_+^{pml} \\ \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^{sf}, \mathbf{z}^s]}^{[+, -]}(\cdot, \mathbf{y}) \quad \text{est sortant} \\ \\ \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^s]}^{[-, -]}(\cdot, \mathbf{y}) = \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^s]}^{[+, -]}(\cdot, \mathbf{y}) \quad \text{sur } \Sigma_0^s. \end{array} \right. \quad (9.11)$$

**Remarque 9.15** La notation  $\underline{\mathcal{G}}_{[\mathcal{A}, \mathcal{B}]}^{[s, -]}$  traduit le fait qu'on considère des points source à gauche (signe  $-$ ) de polarisation  $\mathcal{B}$ , et qu'on regarde la réponse à ces points sources au travers de la grandeur  $\mathcal{A}$  à gauche (respectivement droite) de la jonction si  $s = -$  (respectivement  $s = +$ ).

Comme en acoustique pour un terme source à gauche (voir les Propositions 3.3 et 6.14), le tenseur de Green de la jonction se décompose sur les champs de référence gauches.

**Proposition 9.16**

Soit  $\mathbf{y} \in \Omega_-^s$ , le tenseur de Green solution de (9.11) admet la décomposition :

- pour  $\mathbf{x} \in \Omega_-^s$  :

$$\underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^s]}^{[-, -]} = \begin{pmatrix} \tilde{\underline{\mathcal{G}}}_{[\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^s]} & \tilde{\underline{\mathcal{G}}}_{[\mathbf{x}^s, \mathbf{y}^s]} \\ \tilde{\underline{\mathcal{G}}}_{[\mathbf{y}^s, \mathbf{x}^s]} & \tilde{\underline{\mathcal{G}}}_{[\mathbf{y}^s, \mathbf{y}^s]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^s]}^{[d, -]} & \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{x}^s, \mathbf{y}^s]}^{[d, -]} \\ \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}^s, \mathbf{x}^s]}^{[d, -]} & \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}^s, \mathbf{y}^s]}^{[d, -]} \end{pmatrix},$$

avec :

$$\begin{cases} \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^s]}^{[d, -]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \left( \mathcal{R}_{[\mathbf{x}^s, n]}^{[-, +]} - \tilde{\mathcal{X}}_{n, +}^s \right) (\mathbf{x}) \otimes \tilde{\mathcal{Y}}_{n, -}^s(\mathbf{y}) \\ \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}^s, \mathbf{x}^s]}^{[d, -]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \left( \mathcal{R}_{[\mathbf{y}^s, n]}^{[-, +]} - \tilde{\mathcal{Y}}_{n, +}^s \right) (\mathbf{x}) \otimes \tilde{\mathcal{Y}}_{n, -}^s(\mathbf{y}) \\ \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{x}^s, \mathbf{y}^s]}^{[d, -]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \left( \mathcal{R}_{[\mathbf{x}^s, n]}^{[-, +]} - \tilde{\mathcal{X}}_{n, +}^s \right) (\mathbf{x}) \otimes \tilde{\mathcal{X}}_{n, -}^s(\mathbf{y}) \\ \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}^s, \mathbf{y}^s]}^{[d, -]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \left( \mathcal{R}_{[\mathbf{y}^s, n]}^{[-, +]} - \tilde{\mathcal{Y}}_{n, +}^s \right) (\mathbf{x}) \otimes \tilde{\mathcal{X}}_{n, -}^s(\mathbf{y}), \end{cases}$$

où  $\tilde{\underline{\mathcal{G}}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^s]}$  est le tenseur de Green du guide uniforme gauche solution de (9.2),

- pour  $\mathbf{x}^{\text{sf}} \in \Omega_+^{\text{sf}}$  :

$$\underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^{\text{sf}}, \mathbf{z}^s]}^{[+, -]} = \begin{pmatrix} \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{x}^{\text{sf}}, \mathbf{x}^s]}^{[+, -]} & \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{x}^{\text{sf}}, \mathbf{y}^s]}^{[+, -]} \\ \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}^{\text{sf}}, \mathbf{x}^s]}^{[+, -]} & \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}^{\text{sf}}, \mathbf{y}^s]}^{[+, -]} \end{pmatrix},$$

avec :

$$\begin{cases} \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{x}^{\text{sf}}, \mathbf{x}^s]}^{[+, -]}(\mathbf{x}^{\text{sf}}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \mathcal{R}_{[\mathbf{x}^{\text{sf}}, n]}^{[+, +]}(\mathbf{x}^{\text{sf}}) \otimes \tilde{\mathcal{Y}}_{n, -}^s(\mathbf{y}) \\ \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}^{\text{sf}}, \mathbf{x}^s]}^{[+, -]}(\mathbf{x}^{\text{sf}}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \mathcal{R}_{[\mathbf{y}^{\text{sf}}, n]}^{[+, +]}(\mathbf{x}^{\text{sf}}) \otimes \tilde{\mathcal{Y}}_{n, -}^s(\mathbf{y}) \\ \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{x}^{\text{sf}}, \mathbf{y}^s]}^{[+, -]}(\mathbf{x}^{\text{sf}}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \mathcal{R}_{[\mathbf{x}^{\text{sf}}, n]}^{[+, +]}(\mathbf{x}^{\text{sf}}) \otimes \tilde{\mathcal{X}}_{n, -}^s(\mathbf{y}) \\ \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}^{\text{sf}}, \mathbf{y}^s]}^{[+, -]}(\mathbf{x}^{\text{sf}}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \mathcal{R}_{[\mathbf{y}^{\text{sf}}, n]}^{[+, +]}(\mathbf{x}^{\text{sf}}) \otimes \tilde{\mathcal{X}}_{n, -}^s(\mathbf{y}). \end{cases}$$

*Démonstration.* On commence par interpréter le tenseur :

$$\underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^s]}^{[d, -]}(\cdot, \mathbf{y}) := \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^s]}^{[-, -]}(\cdot, \mathbf{y}) - \tilde{\underline{\mathcal{G}}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^s]}(\cdot, \mathbf{y}),$$

comme étant la partie diffractée du champ total  $\underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^s]}^{[-, -]}(\cdot, \mathbf{y})$  associé au champ incident  $\tilde{\underline{\mathcal{G}}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^s]}(\cdot, \mathbf{y})$ . Compte tenu du fait que  $\tilde{\underline{\mathcal{G}}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^s]}(\cdot, \mathbf{y})$  est solution de (9.2), on peut réécrire le problème (9.11) sous la forme :

$$\begin{aligned}
 & \text{Trouver } \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^s]}^{[d, -]}(\cdot, \mathbf{y}) : \Omega_-^s \rightarrow \mathbb{C}^{6 \times 6} \text{ et } \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^{\text{sf}}, \mathbf{z}^s]}^{[+, -]}(\cdot, \mathbf{y}) : \Omega_+^{\text{sf}} \rightarrow \mathbb{C}^{8 \times 6} \text{ tel que} \\
 & \left\{ \begin{array}{l}
 -\partial_{x_1} \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^s]}^{[d, -]}(\cdot, \mathbf{y}) + \begin{pmatrix} 0 & F\mathbf{y}^s \\ F\mathbf{x}^s & 0 \end{pmatrix} \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^s]}^{[d, -]}(\cdot, \mathbf{y}) = 0 \text{ dans } \Omega_-^s \\
 \sigma_\Sigma(\underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}^s, \mathbf{z}^s]}^{[d, -]}(\cdot, \mathbf{y}))\mathbf{e}_s = 0 \text{ sur } \Gamma_-^s \\
 \underline{\mathcal{G}}_{[t_\Sigma, \mathbf{z}^s]}^{[d, -]}(\cdot, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_s = 0 \text{ sur } \Gamma_-^s \\
 \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^s]}^{[d, -]}(\cdot, \mathbf{y}) \text{ est sortant} \\
 \\
 -\partial_{x_1} \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^{\text{sf}}, \mathbf{z}^s]}^{[+, -]}(\cdot, \mathbf{y}) + \begin{pmatrix} 0 & F\mathbf{y}^{\text{sf}} \\ F\mathbf{x}^{\text{sf}} & 0 \end{pmatrix} \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^{\text{sf}}, \mathbf{z}^s]}^{[+, -]}(\cdot, \mathbf{y}) = 0 \text{ dans } \Omega_+^{\text{sf}} \\
 \sigma_\Sigma(\underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}^s, \mathbf{z}^s]}^{[+, -]}(\cdot, \mathbf{y}))\mathbf{e}_s = -\omega\rho_f \underline{\mathcal{G}}_{[\varphi, \mathbf{z}^s]}^{[+, -]}(\cdot, \mathbf{y})\mathbf{e}_s \text{ sur } \Gamma_+^{\text{sf}} \\
 \underline{\mathcal{G}}_{[t_\Sigma, \mathbf{z}^s]}^{[+, -]}(\cdot, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_s = 0 \text{ sur } \Gamma_+^{\text{sf}} \\
 \omega(\underline{\mathcal{G}}_{[u, \mathbf{z}^s]}^{[+, -]}(\cdot, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_s) = \partial_{n_s} \underline{\mathcal{G}}_{[\varphi, \mathbf{z}^s]}^{[+, -]}(\cdot, \mathbf{y}) \text{ sur } \Gamma_+^{\text{sf}} \\
 \partial_{n_f} \underline{\mathcal{G}}_{[\varphi, \mathbf{z}^s]}^{[+, -]}(\cdot, \mathbf{y}) = 0 \text{ sur } \Sigma_0^f \cup \Gamma_+^{\text{pml}} \\
 \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^{\text{sf}}, \mathbf{z}^s]}^{[+, -]}(\cdot, \mathbf{y}) \text{ est sortant} \\
 \\
 \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^s]}^{[+, -]}(\cdot, \mathbf{y}) - \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^s]}^{[d, -]}(\cdot, \mathbf{y}) = \tilde{\underline{\mathcal{G}}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^s]}(\cdot, \mathbf{y}) \text{ sur } \Sigma_0^s.
 \end{array} \right. \quad (9.12)
 \end{aligned}$$

Précisons que la dernière équation de ce système traduit la continuité du champ total au travers de la section de jonction  $\Sigma_0^s$ . Nous introduisons de façon analogue le champ :

$$\mathcal{R}_{[\mathbf{z}^s, n]}^{[d, +]} := \mathcal{R}_{[\mathbf{z}^s, n]}^{[-, +]} - \tilde{\mathcal{Z}}_{n, +}^s,$$

correspondant à la partie diffractée de la restriction à gauche  $\mathcal{R}_{[\mathbf{z}^s, n]}^{[-, +]}$  du champ de référence gauche pour le champ incident  $\tilde{\mathcal{Z}}_{n, +}^s$ . Le problème (9.9) se réécrit alors :

$$\begin{aligned}
 & \text{Trouver } \mathcal{R}_{[\mathbf{z}^s, n]}^{[d, +]} : \Omega_-^s \rightarrow \mathbb{C}^6 \text{ et } \mathcal{R}_{[\mathbf{z}^{\text{sf}}, n]}^{[+, +]} : \Omega_+^{\text{sf}} \rightarrow \mathbb{C}^8 \text{ tel que} \\
 & \left\{ \begin{array}{l}
 -\partial_{x_1} \mathcal{R}_{[\mathbf{z}^s, n]}^{[d, +]} + \begin{pmatrix} 0 & F\mathbf{y}^s \\ F\mathbf{x}^s & 0 \end{pmatrix} \mathcal{R}_{[\mathbf{z}^s, n]}^{[d, +]} = 0 \text{ dans } \Omega_-^s \\
 \sigma_\Sigma(\mathcal{R}_{[\mathbf{y}^s, n]}^{[d, +]})\mathbf{e}_s = 0 \text{ sur } \Gamma_-^s \\
 \mathcal{R}_{[t_\Sigma, n]}^{[d, +]} \cdot \mathbf{e}_s = 0 \text{ sur } \Gamma_-^s \\
 \mathcal{R}_{[\mathbf{z}^s, n]}^{[d, +]} \text{ est sortant} \\
 \\
 -\partial_{x_1} \mathcal{R}_{[\mathbf{z}^{\text{sf}}, n]}^{[+, +]} + \begin{pmatrix} 0 & F\mathbf{y}^{\text{sf}} \\ F\mathbf{x}^{\text{sf}} & 0 \end{pmatrix} \mathcal{R}_{[\mathbf{z}^{\text{sf}}, n]}^{[+, +]} = 0 \text{ dans } \Omega_+^{\text{sf}} \\
 \sigma_\Sigma(\mathcal{R}_{[\mathbf{y}^s, n]}^{[+, +]})\mathbf{e}_s = -\omega\rho_f \mathcal{R}_{[\varphi, n]}^{[+, +]}\mathbf{e}_s \text{ sur } \Gamma_+^{\text{sf}} \\
 \mathcal{R}_{[t_\Sigma, n]}^{[+, +]} \cdot \mathbf{e}_s = 0 \text{ sur } \Gamma_+^{\text{sf}} \\
 \omega(\mathcal{R}_{[u, n]}^{[+, +]} \cdot \mathbf{n}_s) = \partial_{n_s} \mathcal{R}_{[\varphi, n]}^{[+, +]} \text{ sur } \Gamma_+^{\text{sf}} \\
 \partial_{n_f} \mathcal{R}_{[\varphi, n]}^{[+, +]} = 0 \text{ sur } \Sigma_0^f \cup \Gamma_+^{\text{pml}} \\
 \mathcal{R}_{[\mathbf{z}^{\text{sf}}, n]}^{[+, +]} \text{ est sortant} \\
 \\
 \mathcal{R}_{[\mathbf{z}^s, n]}^{[+, +]} - \mathcal{R}_{[\mathbf{z}^s, n]}^{[d, +]} = \tilde{\mathcal{Z}}_{n, +}^s \text{ sur } \Sigma_0^s.
 \end{array} \right. \quad (9.13)
 \end{aligned}$$

Nous remarquons à l'aide de la Proposition 9.5, que les traces sur  $\Sigma_0^s$  des colonnes de  $\tilde{\underline{\mathcal{G}}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^s]}(\cdot, \mathbf{y})$  sont des combinaisons linéaires des modes  $\tilde{\mathcal{Z}}_{n, +}^s := \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{X}}_{n, +}^s & \tilde{\mathcal{Y}}_{n, +}^s \end{pmatrix}^t$ . En effet,

nous avons  $y_1 < x_1 = 0$  pour  $\mathbf{x} \in \Sigma_0^s$  et  $\mathbf{y} \in \Omega_-^s$ . Par conséquent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\underline{G}}_{[\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \tilde{\mathbf{X}}_n^s(\mathbf{x}_\Sigma) \otimes \tilde{\mathbf{Y}}_n^s(\mathbf{y}_\Sigma) e^{-\tilde{\lambda}_n y_1} = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \tilde{\mathbf{x}}_{n,+}^s(\mathbf{x}) \otimes \tilde{\mathbf{y}}_{n,-}^s(\mathbf{y}) \\ \tilde{\underline{G}}_{[\mathbf{y}^s, \mathbf{x}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \tilde{\mathbf{Y}}_n^s(\mathbf{x}_\Sigma) \otimes \tilde{\mathbf{Y}}_n^s(\mathbf{y}_\Sigma) e^{-\tilde{\lambda}_n y_1} = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \tilde{\mathbf{y}}_{n,+}^s(\mathbf{x}) \otimes \tilde{\mathbf{y}}_{n,-}^s(\mathbf{y}) \\ \tilde{\underline{G}}_{[\mathbf{x}^s, \mathbf{y}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \tilde{\mathbf{X}}_n^s(\mathbf{x}_\Sigma) \otimes \tilde{\mathbf{X}}_n^s(\mathbf{y}_\Sigma) e^{-\tilde{\lambda}_n y_1} = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \tilde{\mathbf{x}}_{n,+}^s(\mathbf{x}) \otimes \tilde{\mathbf{x}}_{n,-}^s(\mathbf{y}) \\ \tilde{\underline{G}}_{[\mathbf{y}^s, \mathbf{y}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \tilde{\mathbf{Y}}_n^s(\mathbf{x}_\Sigma) \otimes \tilde{\mathbf{X}}_n^s(\mathbf{y}_\Sigma) e^{-\tilde{\lambda}_n y_1} = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \tilde{\mathbf{y}}_{n,+}^s(\mathbf{x}) \otimes \tilde{\mathbf{x}}_{n,-}^s(\mathbf{y}). \end{array} \right.$$

Il en résulte que chaque colonne des données du problème de transmission (9.12), satisfait par la partie diffractée du tenseur de Green, est une combinaison linéaire des données du problème de transmission (9.13), satisfait par la partie diffractée du champ de référence gauche. On en déduit l'expression attendue par linéarité du problème de transmission vis-à-vis de ses données.  $\square$

### Cas d'un point source à droite

Soit  $\mathbf{y}^{\text{sf}} \in \Omega_+^{\text{sxf}}$ , le tenseur de Green de la jonction en variables mixtes noté :

$$\underline{\mathcal{G}}_{\mathbf{z}^{\text{sf}}}^+(\cdot, \mathbf{y}^{\text{sf}}) := \left( \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^{\text{sf}}]}^{[-,+]}(\cdot, \mathbf{y}^{\text{sf}}), \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^{\text{sf}}, \mathbf{z}^{\text{sf}}]}^{[+,+]}(\cdot, \mathbf{y}^{\text{sf}}) \right),$$

est la solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^{\text{sf}}]}^{[-,+]}(\cdot, \mathbf{y}^{\text{sf}}) : \Omega_-^s \rightarrow \mathbb{C}^{6 \times 8} \quad \text{et} \quad \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^{\text{sf}}, \mathbf{z}^{\text{sf}}]}^{[+,+]}(\cdot, \mathbf{y}^{\text{sf}}) : \Omega_+^{\text{sxf}} \rightarrow \mathbb{C}^{8 \times 8} \quad \text{tel que} \\ \left. \begin{array}{l} -\partial_{x_1} \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^{\text{sf}}]}^{[-,+]}(\cdot, \mathbf{y}^{\text{sf}}) + \begin{pmatrix} 0 & F_{\mathbf{y}^s} \\ F_{\mathbf{x}^s} & 0 \end{pmatrix} \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^{\text{sf}}]}^{[-,+]}(\cdot, \mathbf{y}^{\text{sf}}) = 0 \quad \text{dans } \Omega_-^s \\ \underline{\sigma}_\Sigma(\underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}^s, \mathbf{z}^{\text{sf}}]}^{[-,+]}(\cdot, \mathbf{y}^{\text{sf}})) \mathbf{e}_s = 0 \quad \text{sur } \Gamma_-^s \\ \underline{\mathcal{G}}_{[t_\Sigma, \mathbf{z}^{\text{sf}}]}^{[-,+]}(\cdot, \mathbf{y}^{\text{sf}}) \cdot \mathbf{e}_s = 0 \quad \text{sur } \Gamma_-^s \\ \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^{\text{sf}}]}^{[-,+]}(\cdot, \mathbf{y}^{\text{sf}}) \quad \text{est sortant} \\ -\partial_{x_1} \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^{\text{sf}}, \mathbf{z}^{\text{sf}}]}^{[+,+]}(\cdot, \mathbf{y}^{\text{sf}}) + \begin{pmatrix} 0 & F_{\mathbf{y}^{\text{sf}}} \\ F_{\mathbf{x}^{\text{sf}}} & 0 \end{pmatrix} \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^{\text{sf}}, \mathbf{z}^{\text{sf}}]}^{[+,+]}(\cdot, \mathbf{y}^{\text{sf}}) = \underline{\Delta}(\mathbf{y}^{\text{sf}}) \quad \text{dans } \Omega_+^{\text{sxf}} \\ \underline{\sigma}_\Sigma(\underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}^s, \mathbf{z}^{\text{sf}}]}^{[+,+]}(\cdot, \mathbf{y}^{\text{sf}})) \mathbf{e}_s = -\omega \rho_f \underline{\mathcal{G}}_{[\varphi, \mathbf{z}^{\text{sf}}]}^{[+,+]}(\cdot, \mathbf{y}^{\text{sf}}) \mathbf{e}_s \quad \text{sur } \Gamma_+^{\text{sf}} \\ \underline{\mathcal{G}}_{[t_\Sigma, \mathbf{z}^{\text{sf}}]}^{[+,+]}(\cdot, \mathbf{y}^{\text{sf}}) \cdot \mathbf{e}_s = 0 \quad \text{sur } \Gamma_+^{\text{sf}} \\ \omega(\underline{\mathcal{G}}_{[u, \mathbf{z}^{\text{sf}}]}^{[+,+]}(\cdot, \mathbf{y}^{\text{sf}}) \cdot \mathbf{n}_s) = \partial_{n_s} \underline{\mathcal{G}}_{[\varphi, \mathbf{z}^{\text{sf}}]}^{[+,+]}(\cdot, \mathbf{y}^{\text{sf}}) \quad \text{sur } \Gamma_+^{\text{sf}} \\ \partial_{n_f} \underline{\mathcal{G}}_{[\varphi, \mathbf{z}^{\text{sf}}]}^{[+,+]}(\cdot, \mathbf{y}^{\text{sf}}) = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0^f \cup \Gamma_+^{\text{pml}} \\ \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^{\text{sf}}, \mathbf{z}^{\text{sf}}]}^{[+,+]}(\cdot, \mathbf{y}^{\text{sf}}) \quad \text{est sortant} \\ \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^{\text{sf}}]}^{[-,+]}(\cdot, \mathbf{y}^{\text{sf}}) = \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^s, \mathbf{z}^{\text{sf}}]}^{[+,+]}(\cdot, \mathbf{y}^{\text{sf}}) \quad \text{sur } \Sigma_0^s, \end{array} \right. \quad (9.14)$$

où  $\underline{\Delta}(\mathbf{y}^{\text{sf}})$  est défini par (9.6).

**Remarque 9.17** La notation  $\underline{\mathcal{G}}_{[\mathcal{A}, \mathcal{B}]}^{[a,+]}$  traduit le fait qu'on considère des points source à droite (signe +) de polarisation  $\mathcal{B}$ , et qu'on regarde la réponse à ces points sources au travers de la grandeur  $\mathcal{A}$  à

gauche (respectivement droite) de la jonction si  $a = -$  (respectivement  $a = +$ ).

Comme en acoustique pour un terme source à droite (voir Propositions 3.3 et 6.14), le tenseur de Green de la jonction se décompose sur les champs de référence droits.

### Proposition 9.18

Soit  $\mathbf{y}^{\text{sf}} \in \Omega_+^{\text{s} \times \text{f}}$ , le tenseur de Green solution de (9.12) admet la décomposition :

- pour  $\mathbf{x} \in \Omega_-^{\text{s}}$  :

$$\underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^{\text{s}}, \mathbf{z}^{\text{sf}}]}^{[-,+]} = \begin{pmatrix} \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{x}^{\text{s}}, \mathbf{x}^{\text{sf}}]}^{[-,+]} & \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{x}^{\text{s}}, \mathbf{y}^{\text{sf}}]}^{[-,+]} \\ \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}^{\text{s}}, \mathbf{x}^{\text{sf}}]}^{[-,+]} & \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}^{\text{s}}, \mathbf{y}^{\text{sf}}]}^{[-,+]} \end{pmatrix},$$

avec :

$$\begin{cases} \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{x}^{\text{s}}, \mathbf{x}^{\text{sf}}]}^{[-,+]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{\text{sf}}) = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \mathcal{R}_{[\mathbf{x}^{\text{s}}, n]}^{[-,-]}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{y}_{n,+}^{\text{sf}}(\mathbf{y}^{\text{sf}}) \\ \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}^{\text{s}}, \mathbf{x}^{\text{sf}}]}^{[-,+]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{\text{sf}}) = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \mathcal{R}_{[\mathbf{y}^{\text{s}}, n]}^{[-,-]}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{y}_{n,+}^{\text{sf}}(\mathbf{y}^{\text{sf}}) \\ \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{x}^{\text{s}}, \mathbf{y}^{\text{sf}}]}^{[-,+]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{\text{sf}}) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \mathcal{R}_{[\mathbf{x}^{\text{s}}, n]}^{[-,-]}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{x}_{n,+}^{\text{sf}}(\mathbf{y}^{\text{sf}}) \\ \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}^{\text{s}}, \mathbf{y}^{\text{sf}}]}^{[-,+]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{\text{sf}}) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \mathcal{R}_{[\mathbf{y}^{\text{s}}, n]}^{[-,-]}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{x}_{n,+}^{\text{sf}}(\mathbf{y}^{\text{sf}}), \end{cases}$$

- pour  $\mathbf{x}^{\text{sf}} \in \Omega_+^{\text{s} \times \text{f}}$  :

$$\underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^{\text{s}}, \mathbf{z}^{\text{sf}}]}^{[+,+]} = \begin{pmatrix} \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{x}^{\text{sf}}, \mathbf{x}^{\text{sf}}]} & \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{x}^{\text{sf}}, \mathbf{y}^{\text{sf}}]} \\ \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}^{\text{sf}}, \mathbf{x}^{\text{sf}}]} & \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}^{\text{sf}}, \mathbf{y}^{\text{sf}}]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{x}^{\text{sf}}, \mathbf{x}^{\text{sf}}]}^{[\text{d},+]} & \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{x}^{\text{sf}}, \mathbf{y}^{\text{sf}}]}^{[\text{d},+]} \\ \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}^{\text{sf}}, \mathbf{x}^{\text{sf}}]}^{[\text{d},+]} & \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}^{\text{sf}}, \mathbf{y}^{\text{sf}}]}^{[\text{d},+]} \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{cases} \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{x}^{\text{sf}}, \mathbf{x}^{\text{sf}}]}^{[\text{d},+]}(\mathbf{x}^{\text{sf}}, \mathbf{y}^{\text{sf}}) = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \left( \mathcal{R}_{[\mathbf{x}^{\text{sf}}, n]}^{[+,-]} - \mathbf{x}_{n,-}^{\text{sf}} \right) (\mathbf{x}^{\text{sf}}) \otimes \mathbf{y}_{n,+}^{\text{sf}}(\mathbf{y}^{\text{sf}}) \\ \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}^{\text{sf}}, \mathbf{x}^{\text{sf}}]}^{[\text{d},+]}(\mathbf{x}^{\text{sf}}, \mathbf{y}^{\text{sf}}) = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \left( \mathcal{R}_{[\mathbf{y}^{\text{sf}}, n]}^{[+,-]} - \mathbf{y}_{n,-}^{\text{sf}} \right) (\mathbf{x}^{\text{sf}}) \otimes \mathbf{y}_{n,+}^{\text{sf}}(\mathbf{y}^{\text{sf}}) \\ \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{x}^{\text{sf}}, \mathbf{y}^{\text{sf}}]}^{[\text{d},+]}(\mathbf{x}^{\text{sf}}, \mathbf{y}^{\text{sf}}) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \left( \mathcal{R}_{[\mathbf{x}^{\text{sf}}, n]}^{[+,-]} - \mathbf{x}_{n,-}^{\text{sf}} \right) (\mathbf{x}^{\text{sf}}) \otimes \mathbf{x}_{n,+}^{\text{sf}}(\mathbf{y}^{\text{sf}}) \\ \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}^{\text{sf}}, \mathbf{y}^{\text{sf}}]}^{[\text{d},+]}(\mathbf{x}^{\text{sf}}, \mathbf{y}^{\text{sf}}) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \left( \mathcal{R}_{[\mathbf{y}^{\text{sf}}, n]}^{[+,-]} - \mathbf{y}_{n,-}^{\text{sf}} \right) (\mathbf{x}^{\text{sf}}) \otimes \mathbf{x}_{n,+}^{\text{sf}}(\mathbf{y}^{\text{sf}}), \end{cases}$$

où  $\underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^{\text{sf}}, \mathbf{z}^{\text{sf}}]}$  est le tenseur de Green du guide uniforme droit solution de (9.5),

*Démonstration.* La preuve se conduit de façon similaire à celle de la Proposition 9.16. Dans un premier temps, il faut introduire à droite de la jonction la partie diffractée du tenseur de Green associé au champ incident  $\underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{z}^{\text{sf}}, \mathbf{z}^{\text{sf}}]}(\cdot, \mathbf{y}^{\text{sf}})$  donné par la Proposition 9.8 et la partie diffractée du champ de référence droit associée au champ incident  $\mathbf{z}_{n,-}^{\text{sf}}$ . Écrire les problèmes de transmission satisfaits par ces deux champs diffractés nous permet de conclure par linéarité du problème vis-à-vis des données.  $\square$

Les décompositions du tenseur de Green de la jonction sur les champs de référence don-

nées par les Propositions 9.16 et 9.18 ne nous permettent pas de vérifier facilement l'analogie des relations de réciprocité données par les Corollaires 9.6 et 9.9 pour les guides uniformes gauche et droit. Nous conjecturons cependant qu'elles sont toujours satisfaites. Pour écrire, cette conjecture précisément, nous avons besoin d'introduire de nouvelles notations. Pour  $a \in \{-, +\}$ , nous notons :

$$\mathcal{Z}(a) := \begin{cases} \mathcal{Z}^s & \text{si } a = - \\ \mathcal{Z}^{\text{sf}} & \text{si } a = +. \end{cases}$$

De plus  $\mathbf{x}(a)$  et  $\mathbf{y}(a)$  désigneront un point de  $\Omega_-^s$  (respectivement de  $\Omega_+^{s \times \text{f}}$ ) si  $a = -$  (respectivement  $a = +$ ). Nous énonçons la conjecture suivante.

### Conjecture 9.19

Le tenseur de Green de la jonction satisfait, pour  $(a, b) \in \{-, +\}^2$  avec  $\mathbf{x}(a) \neq \mathbf{y}(b)$ , les relations de réciprocité :

1.  $\underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}(a), \mathbf{x}(b)]}^{[a, b]}(\mathbf{x}(a), \mathbf{y}(b)) = \left( \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}(b), \mathbf{x}(a)]}^{[b, a]} \right)^t(\mathbf{y}(b), \mathbf{x}(a)),$
2.  $\underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{x}(a), \mathbf{y}(b)]}^{[a, b]}(\mathbf{x}(a), \mathbf{y}(b)) = \left( \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{x}(b), \mathbf{y}(a)]}^{[b, a]} \right)^t(\mathbf{y}(b), \mathbf{x}(a)),$
3.  $\underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{x}(a), \mathbf{x}(b)]}^{[a, b]}(\mathbf{x}(a), \mathbf{y}(b)) = \left( \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}(b), \mathbf{y}(a)]}^{[b, a]} \right)^t(\mathbf{y}(b), \mathbf{x}(a)),$
4.  $\underline{\mathcal{G}}_{[U(a), \mathbf{y}(b)]}^{[a, b]}(\mathbf{x}(a), \mathbf{y}(b)) = - \left( \underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{x}(b), V(a)]}^{[b, a]} \right)^t(\mathbf{y}(b), \mathbf{x}(a)),$
5.  $\underline{\mathcal{G}}_{[U(a), V(b)]}^{[a, b]}(\mathbf{x}(a), \mathbf{y}(b)) = \left( \underline{\mathcal{G}}_{[U(b), V(a)]}^{[b, a]} \right)^t(\mathbf{y}(b), \mathbf{x}(a)).$

Nous noterons par la suite  $\underline{\mathcal{G}}_{[\cdot, \cdot]}(\cdot, \cdot)$  le tenseur de Green de la jonction. Il est défini pour un point source  $\mathbf{y} \in \Omega_-^s$  par  $\underline{\mathcal{G}}_{[\cdot, \mathcal{Z}^s]}(\cdot, \cdot) := \underline{\mathcal{G}}_{\mathcal{Z}^s}^-(\cdot, \mathbf{y})$  et pour un point source  $\mathbf{y}^{\text{sf}} \in \Omega_+^{s \times \text{f}}$  par  $\underline{\mathcal{G}}_{[\cdot, \mathcal{Z}^{\text{sf}}]}(\cdot, \mathbf{y}^{\text{sf}}) := \underline{\mathcal{G}}_{\mathcal{Z}^{\text{sf}}}^+(\cdot, \mathbf{y})$ . Ce n'est pas rigoureusement un champ tensoriel dans le sens où sa taille dépend de la position du terme source et du point d'observation.

## 9.2 Linear Sampling Method modale

Maintenant que nous avons obtenu une décomposition modale du tenseur de Green de la jonction, nous sommes en mesure de proposer une formulation modale de la LSM adaptée à ce nouveau contexte de guide élastique partiellement immergé. Nous allons pour cela nous appuyer sur [BLL11]. Il est important de noter que nous n'apporterons pas une justification complète de la méthode d'imagerie pour le guide élastique partiellement immergé. Une telle justification reposerait en effet fortement sur les relations de réciprocité exhibées dans la Conjecture 9.19, mais qui ne sont pas démontrées. Nous obtiendrons ainsi formellement une formulation modale de la LSM tout en donnant au fur et à mesure les ingrédients qui seraient nécessaires à sa justification rigoureuse.

Nous cherchons à identifier un défaut dans la structure à partir de mesures de champs diffractés obtenues sur la partie non immergée de la structure, c'est-à-dire dans le demi-guide gauche. Ce défaut occupe un ouvert borné à frontière Lipschitz noté  $D$ . Pour simplifier la présentation, on suppose de plus que l'obstacle est situé dans le cœur élastique de la structure, soit  $\overline{D} \subset W^s := \mathbb{R} \times \Sigma^s$ . Il pourrait cependant tout aussi bien être situé dans la partie du

fluide qui n'est pas occupée par les PML. On note  $\dot{\Omega}^s := \Omega^s \setminus \bar{D}$  le domaine solide privé du défaut. Pour commencer, on introduit pour un terme source  $\mathbf{f}$  à support sur  $\partial D$  le problème :

$$\text{Trouver } (\mathbf{u}, \varphi) \in \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\dot{\Omega}^s) \times H_{\text{loc}}^1(\Omega_+^f) \text{ tel que} \quad (9.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div}(\underline{\sigma}(\mathbf{u})) + \rho_s \omega^2 \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \dot{\Omega}^s \\ \mathbf{div}(\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma} \nabla \varphi) + b^{\alpha\Sigma} k_f^2 \varphi = 0 & \text{dans } \Omega_+^f \\ \mathbf{u} = \mathbf{f} & \text{sur } \partial D \\ \underline{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n}_s = 0 & \text{sur } \Gamma_-^s \\ \underline{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n}_s = -\omega \rho_f \varphi \mathbf{n}_s & \text{sur } \Gamma_+^{\text{sf}} \\ \omega(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s) = \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_s & \text{sur } \Gamma_+^{\text{sf}} \\ \partial_{\mathbf{n}_f} \varphi = 0 & \text{sur } \Gamma_+^{\text{pml}} \cup \Sigma_0^f \\ \mathbf{u} \text{ est sortant} & \\ \varphi \text{ est sortant.} & \end{array} \right.$$

### Hypothèse 9.20

Le problème (9.15) est bien posé pour tout terme source  $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ .

Nous pouvons définir les données que nous utiliserons dans la LSM. Deux choix sont possibles en élasticité du fait de la dualité des variables  $\mathbf{XY}$ .

#### 9.2.1 LSM avec des mesures de type $\mathcal{X}^s$

Soit  $\mathbf{y} \in \dot{\Omega}^s$ , on note  $(\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{y}^s}^{\text{d}}(\cdot, \mathbf{y}), \underline{\varphi}_{\mathbf{y}^s}^{\text{d}}(\cdot, \mathbf{y}))$  la solution de (9.15) pour le terme source  $\mathbf{f} = -\underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{u}, \mathbf{y}^s]}(\cdot, \mathbf{y})|_{\partial D}$ . Puisque le terme source est tensoriel, on a  $\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{y}^s}^{\text{d}}(\cdot, \mathbf{y}) \in (\mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\dot{\Omega}^s))^{3 \times 3}$  et  $\underline{\varphi}_{\mathbf{y}^s}^{\text{d}}(\cdot, \mathbf{y}) \in (H_{\text{loc}}^1(\Omega_+^f))^{1 \times 3}$ . Les colonnes de ces deux tenseurs correspondent alors aux réponses en champ diffracté aux trois sollicitations ponctuelles de type  $\mathbf{y}^s$  dans le solide. Introduisons l'opérateur linéaire  $\mathcal{P}_{\mathbf{u} \rightarrow \mathcal{X}^s} : \mathbf{H}^1(W^s) \rightarrow (L^2(W^s))^2 \times H^1(W^s)$  défini par :

$$\mathcal{P}_{\mathbf{u} \rightarrow \mathcal{X}^s}(\mathbf{u}) := \begin{pmatrix} \mathbf{t}_{\Sigma} \\ u_1 \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{pmatrix} -t_1 \\ \mathbf{t}_{\Sigma} \end{pmatrix} := \underline{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{e}_1.$$

On note alors :

$$\underline{\mathcal{X}}_{\mathbf{y}^s}^{\text{s,d}}(\cdot, \mathbf{y}) := \mathcal{P}_{\mathbf{u} \rightarrow \mathcal{X}^s}(\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{y}^s}^{\text{d}}(\cdot, \mathbf{y})).$$

Nous nous plaçons dans une configuration d'imagerie en back-scattering où nous n'avons accès qu'à des mesures de champs diffractés effectuées sur une section  $\Sigma_{-R}^s := \{-R\} \times \Sigma^s$  pour un réel  $R > 0$ , choisi de sorte que  $D$  soit à sa droite. Tout comme dans [BLL11] en configuration back-scattering, on choisit de chercher à résoudre le problème inverse à l'aide des données multistatistiques :

$$\mathcal{D}_{\mathcal{X}^s} := \left\{ \underline{\mathcal{X}}_{\mathbf{y}^s}^{\text{s,d}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\Sigma_{-R}^s)^2 \right\}. \quad (9.16)$$

**Remarque 9.21** Le choix de ces données est motivé par le fait que, pour un guide élastique fermé, nous avons le résultat d'unicité [BLL11, Théorème 3.1]. Il garantit que des obstacles distincts produisent des données  $\mathcal{D}_{\mathcal{X}^s}$  distinctes. Pour adapter la preuve du résultat à notre configuration de guide partiellement immergé, nous avons besoin :

1. d'une représentation intégrale de  $\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{y}^s}^{\text{d}}(\cdot, \mathbf{y})$  que nous avons réussi à établir (voir le Lemme 9.32 en annexe de ce chapitre);



2. de démontrer les relations de réciprocité 4. et 5. du tenseur de Green de la jonction données dans la Conjecture 9.19 (elles permettraient alors de prouver l'analogue de [BLL11, Lemme 2.15] qui serait utilisé dans la preuve de l'analogue de [BLL11, Théorème 3.1]).

L'opérateur de champ proche sur lequel repose la LSM est alors défini à l'aide de ces données. Plus précisément, c'est l'opérateur  $N_{\mathbf{x}^s} : \mathbf{L}^2(\Sigma_{-R}^s) \rightarrow \mathbf{L}^2(\Sigma_{-R}^s)$  défini pour  $\mathbf{h} \in \mathbf{L}^2(\Sigma_{-R}^s)$  par :

$$(N_{\mathbf{x}^s} \mathbf{h})(\mathbf{x}) := \int_{\Sigma_{-R}^s} \underline{\mathcal{X}}_{\mathbf{y}^s}^{\mathbf{s}, \mathbf{d}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{h}(\mathbf{y}) \mathrm{d}s(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_{-R}^s. \quad (9.17)$$

Comme nous l'avons expliqué au chapitre 3, la procédure d'imagerie avec la LSM consiste à tester, en chacun des points  $\mathbf{z}$  d'une grille d'échantillonnage recouvrant la zone à inspecter, si la trace sur  $\Sigma_{-R}^s$  de la solution fondamentale associée au point source  $\mathbf{z}$  est dans l'image de l'opérateur de champ proche. Mais contrairement à l'acoustique où la solution fondamentale est une distribution scalaire, la solution fondamentale en élasticité est tensorielle. Il est donc nécessaire de choisir une polarisation particulière dans l'équation de champ proche. Soit  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$  un tel vecteur de polarisation satisfaisant  $|\mathbf{p}| = 1$ . L'équation de champ proche s'écrit pour tout  $\mathbf{z} \in W^s \cup \Omega_+^f$  :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{h} \in \mathbf{L}^2(\Sigma_{-R}^s) \text{ tel que} \\ N_{\mathbf{x}^s} \mathbf{h} &= \begin{cases} (\underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{x}^s, \mathbf{y}^s]}(\cdot, \mathbf{z}) \mathbf{p})|_{\Sigma_{-R}^s} & \text{si } \mathbf{z} \in W^s \\ (\underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{x}^s, \varphi]}(\cdot, \mathbf{z}))|_{\Sigma_{-R}^s} & \text{si } \mathbf{z} \in \Omega_+^f. \end{cases} \end{aligned} \quad (9.18)$$

**Remarque 9.22** Nous ne savons plus justifier rigoureusement, comme dans [BLL11] pour un guide élastique rectiligne, que la résolution de l'équation de champ-proche (9.18) nous permet d'identifier des défauts. Cette justification reposait en effet sur une factorisation de l'opérateur de champ proche et sur l'étude des propriétés des opérateurs intégraux qui interviennent dans cette factorisation ([BLL11, Lemme 3.3] et [BLL11, Proposition 3.5]). Il nous semble possible d'adapter la majeure partie des preuves données dans cette référence. Cependant, une partie de ces preuves utilise la relation de réciprocité 4. de la Conjecture 9.19 du tenseur de Green que nous n'avons pas prouvée.

Nous souhaitons ensuite proposer une formulation modale de (9.18). La première étape est d'obtenir une décomposition modale du noyau  $\underline{\mathcal{X}}_{\mathbf{y}^s}^{\mathbf{s}, \mathbf{d}}(\cdot, \cdot)$  de l'opérateur de champ proche. Pour cela, nous notons pour tout  $n \geq 1$  les champs de référence gauches en composantes de déplacement dans le solide et potentiel des vitesses dans le fluide :

$$\mathbf{u}_{n,+}^r := \begin{cases} \mathcal{R}_{[\mathbf{u}, n]}^{[-, +]} & \text{si } x_1 < 0 \\ \mathcal{R}_{[\mathbf{u}, n]}^{[+, +]} & \text{si } x_1 > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \varphi_{n,+}^r := \mathcal{R}_{[\varphi, n]}^{[+, +]}.$$

Nous considérons ensuite pour tout  $n \geq 1$ , les couples  $(\mathbf{u}_{n,+}^d, \varphi_{n,+}^d)$  solutions de (9.15) pour  $\mathbf{f} = -(\mathbf{u}_{n,+}^r)|_{\partial D}$ . Ils correspondent à la réponse en champ diffracté de la structure perturbée par un défaut à un champ de référence considéré comme un champ incident. Ces définitions nous permettent d'écrire la décomposition modale suivante.

**Proposition 9.23**

Pour  $\mathbf{x} = (x_1, \mathbf{x}_\Sigma) \in \dot{\Omega}^s$  tel que  $x_1 > -R$  et  $\mathbf{y} \in \Sigma_{-R}^s$ , nous avons :

$$\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{y}^s}^d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \mathbf{u}_{n,+}^d(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{x}_{n,-}^s(\mathbf{y}).$$

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{y} \in \Sigma_{-R}^s$  et  $\mathbf{x} = (x_1, \mathbf{x}_\Sigma) \in W^s$  avec  $x_1 > -R$ . La Proposition 9.5 nous permet de voir que :

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{G}}_{[\mathbf{x}^s, \mathbf{y}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \tilde{\mathbf{x}}_{n,+}^s(\mathbf{x}) \otimes \tilde{\mathbf{x}}_{n,-}^s(\mathbf{y}) \\ \tilde{\underline{G}}_{[\mathbf{y}^s, \mathbf{y}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \tilde{\mathbf{y}}_{n,+}^s(\mathbf{x}) \otimes \tilde{\mathbf{x}}_{n,-}^s(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Ces deux expressions nous permettent de simplifier la décomposition modale du tenseur de Green donnée par la Proposition 9.16 pour  $x_1 < 0$ . Lorsque  $x_1 > 0$ , la décomposition modale donnée par la Proposition 9.16 n'a pas à être simplifiée. On obtient alors, après extraction des lignes du tenseur de Green associées au champ de déplacement et au potentiel des vitesses, les expressions modales :

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{G}}_{[u, \mathbf{y}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \mathbf{u}_{n,+}^r(\mathbf{x}) \otimes \tilde{\mathbf{x}}_{n,-}^s(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in W^s, x_1 > -R \\ \underline{\mathcal{G}}_{[\varphi, \mathbf{y}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \varphi_{n,+}^r(\mathbf{x}) \otimes \tilde{\mathbf{x}}_{n,-}^s(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_+^f, x_1 > -R. \end{aligned}$$

Posons ensuite :

$$\begin{aligned} \underline{H}_{[u, \mathbf{y}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &:= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \mathbf{u}_{n,+}^d(\mathbf{x}) \otimes \tilde{\mathbf{x}}_{n,-}^s(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in W^s, x_1 > -R \\ \underline{H}_{[\varphi, \mathbf{y}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &:= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \varphi_{n,+}^d(\mathbf{x}) \otimes \tilde{\mathbf{x}}_{n,-}^s(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_+^f, x_1 > -R. \end{aligned}$$

Pour tout  $n \geq 1$ , les couples  $(\mathbf{u}_{n,+}^d, \varphi_{n,+}^d)$  sont solutions de (9.15) pour  $\mathbf{f} = -(\mathbf{u}_{n,+}^r)_{|\partial D}$ . Il résulte alors directement de la linéarité du problème (9.15) que les colonnes du couple  $(\underline{H}_{[u, \mathbf{y}^s]}(\cdot, \mathbf{y}), \underline{H}_{[\varphi, \mathbf{y}^s]}(\cdot, \mathbf{y}))$  satisfont toutes les lignes de (9.15), hormis celle donnant la condition au bord de  $D$  qu'il reste à préciser. Pour  $\mathbf{x} \in \partial D$ , nous avons :

$$\underline{H}_{[u, \mathbf{y}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \mathbf{u}_{n,+}^d(\mathbf{x}) \otimes \tilde{\mathbf{x}}_{n,-}^s(\mathbf{y}) = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \mathbf{u}_{n,+}^r(\mathbf{x}) \otimes \tilde{\mathbf{x}}_{n,-}^s(\mathbf{y}) = -\underline{\mathcal{G}}_{[u, \mathbf{y}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Sous l'Hypothèse 9.20, le problème (9.20) a une unique solution. Nous avons par conséquent :

$$\underline{H}_{[u, \mathbf{y}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{y}^s}^d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x} \in \dot{\Omega}^s, x_1 > -R,$$

ce qui est la décomposition attendue.  $\square$

Nous introduisons enfin pour tout  $n \geq 1$  les quantités :

$$\underline{\mathbf{x}}_{n,+}^{s,d} := \mathcal{P}_{u \rightarrow \mathbf{x}^s}(\mathbf{u}_{n,+}^d).$$

Afin d'exploiter les données (9.16) du problème inverse, nous utilisons la Proposition 9.23 et la linéarité de l'opérateur  $\mathcal{P}_{u \rightarrow \mathcal{X}^s}$  pour obtenir pour  $\mathbf{y} \in \Sigma_{-R}^s$  la décomposition :

$$\underline{\mathcal{X}}_{\mathbf{y}}^{s,d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \underline{\mathcal{X}}_{n,+}^{s,d}(\mathbf{x}) \otimes \tilde{\mathcal{X}}_{n,-}^s(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \dot{\Omega}^s, x_1 > -R. \quad (9.19)$$

Autrement dit, il est équivalent de mesurer directement les données  $\mathcal{D}_{\mathcal{X}^s}$  ou de mesurer tous les champs diffractés  $(\underline{\mathcal{X}}_{n,+}^{s,d})_{n \geq 1}$  associés aux champs incidents formés par les modes provenant du demi-guide gauche. Forts de ce constat, nous sommes en mesure de projeter l'équation de champ proche (9.18) sur les modes du guide élastique gauche. Deux expressions différentes seront proposées pour le second membre : une première compliquée obtenue en utilisant directement l'expression du tenseur de Green donnée par la Proposition 9.16 et une seconde plus simple obtenue en utilisant en plus la relation de réciprocité 2. de la Conjecture 9.19. Préalablement, nous notons pour  $\mathcal{X}^s = \mathcal{X}^s(x_1, \mathbf{x}_\Sigma)$  et  $\mathbf{Y}^s = \mathbf{Y}^s(\mathbf{x}_\Sigma)$  :

$$(\mathcal{X}^s, \mathbf{Y}^s)_{\mathbf{H}^s(\Sigma_{-R}^s)} := (\mathcal{X}_{|\Sigma_{-R}^s}^s, \mathbf{Y}^s)_{\mathbf{H}^s},$$

où  $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{H}^s}$  a été défini par (7.13). Pour tout  $n \geq 1$ , nous posons aussi :

$$\mathcal{X}_{n,\pm}^{s,r} := \begin{cases} \mathcal{R}_{[\mathcal{X}^s, n]}^{[-, \pm]} & \text{si } x_1 < 0 \\ \mathcal{R}_{[\mathcal{X}^s, n]}^{[+, \pm]} & \text{si } x_1 > 0, \end{cases} \quad \mathcal{X}_{n,\pm}^{f,r} := \mathcal{R}_{[\mathcal{X}^f, n]}^{[+, \pm]} \quad \text{et} \quad \mathcal{X}_{n,\pm}^{sf,r} := \mathcal{R}_{[\mathcal{X}^{sf}, n]}^{[+, \pm]},$$

les champs de référence en variables  $\mathcal{X}^s$ ,  $\mathcal{X}^f$  et  $\mathcal{X}^{sf}$ .

### Proposition 9.24

Pour  $\mathbf{h} \in \mathbf{L}^2(\Sigma_{-R}^s)$  et  $\mathbf{z} = (z_1, \mathbf{z}_\Sigma) \in W^s \cup \Omega_+^f$  tel que  $z_1 > -R$ , l'opérateur de champ proche défini par (9.17) s'écrit :

$$N_{\mathcal{X}^s} \mathbf{h} = \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2} (S_n^+)_m^- h_n \tilde{\mathbf{X}}_m^s,$$

avec :

$$\mathbf{h} = \sum_{n \geq 1} h_n \tilde{\mathbf{Y}}_n^s \quad \text{et} \quad (\underline{\mathcal{X}}_{n,+}^{s,d})_{|\Sigma_{-R}^s} = - \sum_{m \geq 1} (S_n^+)_m^- \tilde{\mathbf{X}}_m^s. \quad (9.20)$$

La trace du tenseur de Green sur  $\Sigma_{-R}^s$  s'écrit :

- si  $\mathbf{z} \in W^s$  :

$$(\underline{\mathcal{G}}_{[\mathcal{X}^s, \mathbf{Y}^s]}(\cdot, \mathbf{z}) \mathbf{p})_{|\Sigma_{-R}^s} = \begin{cases} - \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} \frac{e^{-\tilde{\lambda}_n z_1}}{2} (\mathcal{X}_{n,+}^{s,r}, \tilde{\mathbf{Y}}_m^s)_{\mathbf{H}^s(\Sigma_{-R}^s)} (\tilde{\mathbf{X}}_n^s(\mathbf{z}_\Sigma) \cdot \mathbf{p}) \tilde{\mathbf{X}}_m^s \\ + \frac{1}{2} \sum_{m \geq 1} (e^{-\tilde{\lambda}_m(z_1+R)} - e^{\tilde{\lambda}_m(z_1+R)}) (\tilde{\mathbf{X}}_m^s(\mathbf{z}_\Sigma) \cdot \mathbf{p}) \tilde{\mathbf{X}}_m^s \\ \quad \text{si } z_1 \in (-R, 0) \\ \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} \frac{e^{\lambda_n z_1}}{2} (\mathcal{X}_{n,-}^{s,r}, \tilde{\mathbf{Y}}_m^s)_{\mathbf{H}^s(\Sigma_{-R}^s)} (\mathbf{X}_n^s(\mathbf{z}_\Sigma) \cdot \mathbf{p}) \tilde{\mathbf{X}}_m^s \\ \quad \text{si } z_1 > 0, \end{cases}$$

- si  $\mathbf{z} \in \Omega_+^f$  :

$$(\underline{\mathcal{G}}_{[\mathcal{X}^s, \varphi]}(\cdot, \mathbf{z}))_{|\Sigma_{-R}^s} = \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} \frac{e^{\lambda_n z_1}}{2} (\mathcal{X}_{n,-}^{s,r}, \tilde{\mathbf{Y}}_m^s)_{\mathbf{H}^s(\Sigma_{-R}^s)} X_n^f(\mathbf{z}_\Sigma) \tilde{\mathbf{X}}_m^s,$$

ou alternativement :

- si  $z \in W^s$  :

$$(\underline{\mathcal{G}}_{[\mathcal{X}^s, \mathcal{Y}^s]}(\cdot, z)\mathbf{p})|_{\Sigma_{-R}^s} = - \sum_{n \geq 1} \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2} (\mathcal{X}_{n,+}^{s,r}(z) \cdot \mathbf{p}) \tilde{\mathbf{X}}_n^s,$$

- si  $z \in \Omega_+^f$  :

$$(\underline{\mathcal{G}}_{[\mathcal{X}^s, \varphi]}(\cdot, z))|_{\Sigma_{-R}^s} = - \sum_{n \geq 1} \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2} \mathcal{X}_{n,+}^{f,r}(z) \tilde{\mathbf{X}}_n^s.$$

*Démonstration.* • **Expression modale de l'opérateur de champ proche**

Pour commencer, on injecte l'expression modale (9.19) des données dans l'opérateur de champ proche défini par (9.17). Cela nous donne pour  $\mathbf{x} \in \Sigma_{-R}^s$  :

$$(N_{\mathcal{X}^s} \mathbf{h})(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \int_{\Sigma_{-R}^s} (\mathcal{X}_{n,+}^{s,d}(\mathbf{x}) \otimes \tilde{\mathcal{X}}_{n,-}^s) \mathbf{h} ds(\mathbf{y}) = - \sum_{n \geq 1} \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2} \mathcal{X}_{n,+}^{s,d}(\mathbf{x}) \int_{\Sigma_{-R}^s} \tilde{\mathbf{X}}_n^s \cdot \mathbf{h} ds(\mathbf{y}).$$

Sous l'Hypothèse 7.9, on peut écrire les décompositions modales (9.20). Utiliser la relation de biorthogonalité (7.20) conduit alors à :

$$(N_{\mathcal{X}^s} \mathbf{h})(\mathbf{x}) = - \sum_{n \geq 1} \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2} \mathcal{X}_{n,+}^{s,d}(\mathbf{x}) h_n = \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2} (S_n^+)_m^{-1} h_n \tilde{\mathbf{X}}_m^s(\mathbf{x}_\Sigma).$$

• **Expression modale du tenseur de Green obtenue sans utiliser la réciprocité**

Soit  $\mathbf{z} = (z_1, \mathbf{z}_\Sigma) \in \Omega_-^s$  tel que  $z_1 > -R$ . Pour  $\mathbf{x} \in \Sigma_{-R}^s$ , on a d'après la Proposition 9.16 :

$$\underline{\mathcal{G}}_{[\mathcal{X}^s, \mathcal{Y}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \tilde{\mathcal{X}}_{n,-}^s(\mathbf{x}) \otimes \tilde{\mathcal{X}}_{n,+}^s(\mathbf{z}) + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (\mathcal{X}_{n,+}^{s,r} - \tilde{\mathcal{X}}_{n,+}^s)(\mathbf{x}) \otimes \tilde{\mathcal{X}}_{n,-}^s(\mathbf{z}).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{G}}_{[\mathcal{X}^s, \mathcal{Y}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \mathbf{p} &= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (e^{-\tilde{\lambda}_n(z_1+R)} - e^{\tilde{\lambda}_n(z_1+R)}) (\tilde{\mathbf{X}}_n^s(\mathbf{z}_\Sigma) \cdot \mathbf{p}) \tilde{\mathbf{X}}_n^s(\mathbf{x}_\Sigma) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} e^{-\tilde{\lambda}_n z_1} \mathcal{X}_{n,+}^{s,r}(\mathbf{x}) (\tilde{\mathbf{X}}_n^s(\mathbf{z}_\Sigma) \cdot \mathbf{p}). \end{aligned}$$

Décomposer  $\mathcal{X}_{n,+}^{s,r}$  sur les modes donne enfin :

$$\begin{aligned} (\underline{\mathcal{G}}_{[\mathcal{X}^s, \mathcal{Y}^s]}(\cdot, \mathbf{z}) \mathbf{p})|_{\Sigma_{-R}^s} &= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (e^{-\tilde{\lambda}_n(z_1+R)} - e^{\tilde{\lambda}_n(z_1+R)}) (\tilde{\mathbf{X}}_n^s(\mathbf{z}_\Sigma) \cdot \mathbf{p}) \tilde{\mathbf{X}}_n^s \\ &\quad - \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} \frac{e^{-\tilde{\lambda}_n z_1}}{2} (\mathcal{X}_{n,+}^{s,r}, \tilde{\mathbf{Y}}_m^s)_{\mathbf{H}^s(\Sigma_{-R}^s)} (\tilde{\mathbf{X}}_n^s(\mathbf{z}_\Sigma) \cdot \mathbf{p}) \tilde{\mathbf{X}}_m^s. \end{aligned}$$

Soit  $\mathbf{z}^{sf} = (z_1, \mathbf{z}_\Sigma^{sf}) \in \Omega_+^{s \times f}$ , la Proposition 9.18 donne pour  $\mathbf{x} \in \Sigma_{-R}^s$  :

$$\underline{\mathcal{G}}_{[\mathcal{X}^s, \mathcal{Y}^{sf}]}(\mathbf{x}, \mathbf{z}^{sf}) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \mathcal{X}_{n,-}^{s,r}(\mathbf{x}) \otimes \mathcal{X}_{n,+}^{sf}(\mathbf{z}^{sf}).$$

Décomposer  $\boldsymbol{\chi}_{n,-}^{\text{s},\text{r}}$  sur les modes donne :

$$\underline{\mathcal{G}}_{[\boldsymbol{\chi}^{\text{s}}, \boldsymbol{y}^{\text{sf}}]}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^{\text{sf}}) = \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} \frac{e^{\lambda_n z_1}}{2} (\boldsymbol{\chi}_{n,-}^{\text{s},\text{r}}, \tilde{\mathbf{Y}}_m^{\text{s}})_{\mathbf{H}^{\text{s}}(\Sigma_{-R}^{\text{s}})} \tilde{\mathbf{X}}_m^{\text{s}}(\boldsymbol{x}_\Sigma) \otimes \mathbf{X}_n^{\text{sf}}(\boldsymbol{z}_\Sigma^{\text{sf}}).$$

Séparer les composantes solides et fluide de  $\boldsymbol{y}^{\text{sf}} := (\boldsymbol{y}^{\text{s}} \ \boldsymbol{y}^{\text{f}})^{\text{t}}$  donne ainsi :

$$(\underline{\mathcal{G}}_{[\boldsymbol{\chi}^{\text{s}}, \boldsymbol{y}^{\text{sf}}]}(\cdot, \boldsymbol{z}) \boldsymbol{p})_{|\Sigma_{-R}^{\text{s}}} = \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} \frac{e^{\lambda_n z_1}}{2} (\boldsymbol{\chi}_{n,-}^{\text{s},\text{r}}, \tilde{\mathbf{Y}}_m^{\text{s}})_{\mathbf{H}^{\text{s}}(\Sigma_{-R}^{\text{s}})} (\mathbf{X}_n^{\text{s}}(\boldsymbol{z}_\Sigma) \cdot \boldsymbol{p}) \tilde{\mathbf{X}}_m^{\text{s}},$$

et :

$$(\underline{\mathcal{G}}_{[\boldsymbol{\chi}^{\text{s}}, \boldsymbol{y}^{\text{f}}]}(\cdot, \boldsymbol{z}))_{|\Sigma_{-R}^{\text{s}}} = \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} \frac{e^{\lambda_n z_1}}{2} (\boldsymbol{\chi}_{n,-}^{\text{s},\text{r}}, \tilde{\mathbf{Y}}_m^{\text{s}})_{\mathbf{H}^{\text{s}}(\Sigma_{-R}^{\text{s}})} \mathbf{X}_n^{\text{f}}(\boldsymbol{z}_\Sigma) \tilde{\mathbf{X}}_m^{\text{s}}.$$

• **Expression modale du tenseur de Green en utilisant la réciprocité**

Soit à nouveau  $\boldsymbol{z} = (z_1, \boldsymbol{z}_\Sigma) \in \Omega_-^{\text{s}}$  tel que  $z_1 > -R$  et  $\boldsymbol{x} \in \Sigma_{-R}^{\text{s}}$ . La relation de réciprocité 2. de la Conjecture 9.19 donne :

$$\underline{\mathcal{G}}_{[\boldsymbol{\chi}^{\text{s}}, \boldsymbol{y}^{\text{s}}]}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = (\underline{\mathcal{G}}_{[\boldsymbol{\chi}^{\text{s}}, \boldsymbol{y}^{\text{s}}]}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}))^{\text{t}}.$$

Or, la Proposition 9.16 donne :

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{G}}_{[\boldsymbol{\chi}^{\text{s}}, \boldsymbol{y}^{\text{s}}]}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \tilde{\boldsymbol{\chi}}_{n,+}^{\text{s}}(\boldsymbol{z}) \otimes \tilde{\boldsymbol{\chi}}_{n,-}^{\text{s}}(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (\boldsymbol{\chi}_{n,+}^{\text{s},\text{r}} - \tilde{\boldsymbol{\chi}}_{n,+}^{\text{s}})(\boldsymbol{z}) \otimes \tilde{\boldsymbol{\chi}}_{n,-}^{\text{s}}(\boldsymbol{x}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \boldsymbol{\chi}_{n,+}^{\text{s},\text{r}}(\boldsymbol{z}) \otimes \tilde{\boldsymbol{\chi}}_{n,-}^{\text{s}}(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

Il découle alors par transposition du produit tensoriel de deux tenseurs d'ordre 1 que :

$$\underline{\mathcal{G}}_{[\boldsymbol{\chi}^{\text{s}}, \boldsymbol{y}^{\text{s}}]}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \tilde{\boldsymbol{\chi}}_{n,-}^{\text{s}}(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{\chi}_{n,+}^{\text{s},\text{r}}(\boldsymbol{z}).$$

Il vient enfin :

$$(\underline{\mathcal{G}}_{[\boldsymbol{\chi}^{\text{s}}, \boldsymbol{y}^{\text{s}}]}(\cdot, \boldsymbol{z}) \boldsymbol{p})_{|\Sigma_{-R}^{\text{s}}} = - \sum_{n \geq 1} \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2} (\boldsymbol{\chi}_{n,+}^{\text{s},\text{r}}(\boldsymbol{z}) \cdot \boldsymbol{p}) \tilde{\mathbf{X}}_n^{\text{s}}.$$

Soit maintenant  $\boldsymbol{z}^{\text{sf}} \in \Omega_+^{\text{s},\text{f}}$ , la Proposition 9.16 donne :

$$\underline{\mathcal{G}}_{[\boldsymbol{\chi}^{\text{sf}}, \boldsymbol{y}^{\text{s}}]}(\boldsymbol{z}^{\text{sf}}, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \boldsymbol{\chi}_{n,+}^{\text{sf},\text{r}}(\boldsymbol{z}^{\text{sf}}) \otimes \tilde{\boldsymbol{\chi}}_{n,-}^{\text{s}}(\boldsymbol{x}) = - \sum_{n \geq 1} \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2} \boldsymbol{\chi}_{n,+}^{\text{sf},\text{r}}(\boldsymbol{z}^{\text{sf}}) \otimes \tilde{\mathbf{X}}_n^{\text{s}}(\boldsymbol{x}_\Sigma).$$

La relation de réciprocité 2. de la Conjecture 9.19 donne ainsi :

$$\underline{\mathcal{G}}_{[\boldsymbol{\chi}^{\text{s}}, \boldsymbol{y}^{\text{sf}}]}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^{\text{sf}}) = (\underline{\mathcal{G}}_{[\boldsymbol{\chi}^{\text{sf}}, \boldsymbol{y}^{\text{s}}]}(\boldsymbol{z}^{\text{sf}}, \boldsymbol{x}))^{\text{t}} = - \sum_{n \geq 1} \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2} \tilde{\mathbf{X}}_n^{\text{s}}(\boldsymbol{x}_\Sigma) \otimes \boldsymbol{\chi}_{n,+}^{\text{sf},\text{r}}(\boldsymbol{z}^{\text{sf}}).$$

Séparer les composantes solides et fluide de  $\boldsymbol{y}^{\text{sf}} := (\boldsymbol{y}^{\text{s}} \ \boldsymbol{y}^{\text{f}})^{\text{t}}$  donne alors :

$$(\underline{\mathcal{G}}_{[\boldsymbol{\chi}^{\text{s}}, \boldsymbol{y}^{\text{sf}}]}(\cdot, \boldsymbol{z}) \boldsymbol{p})_{|\Sigma_{-R}^{\text{s}}} = - \sum_{n \geq 1} \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2} (\boldsymbol{\chi}_{n,+}^{\text{s},\text{r}}(\boldsymbol{z}) \cdot \boldsymbol{p}) \tilde{\mathbf{X}}_n^{\text{s}},$$

et :

$$\left(\underline{\mathcal{G}}_{[\boldsymbol{\chi}^s, \varphi]}(\cdot, \boldsymbol{z})\right)|_{\Sigma_{-R}^s} = - \sum_{n \geq 1} \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2} \mathcal{X}_{n,+}^{f,r}(\boldsymbol{z}) \tilde{\mathbf{X}}_n^s.$$

□

Les décompositions modales de l'opérateur de champ proche et du tenseur de Green obtenues avec la Proposition 9.24 nous permettent d'écrire une formulation modale de l'équation de champ proche (9.18). En effet, prendre le produit scalaire de l'équation de champ proche avec les modes  $(\tilde{\mathbf{Y}}_m^s)_{m \geq 1}$  du guide gauche nous conduit, grâce aux relations de biorthogonalité, au système infini :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (h_n)_{n \geq 1} \in \ell^2(\mathbb{C}) \text{ tel que} \\ & \sum_{n \geq 1} \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2} (S_n^+)_m^- h_n = D_{m, \boldsymbol{\chi}^s}^-(\boldsymbol{z}), \quad \forall m \geq 1, \end{aligned} \quad (9.21)$$

avec :

$$D_{m, \boldsymbol{\chi}^s}^-(\boldsymbol{z}) := \begin{cases} - \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-\tilde{\lambda}_n z_1}}{2} (\boldsymbol{\chi}_{n,+}^{s,r}, \tilde{\mathbf{Y}}_m^s)_{\mathbf{H}^s(\Sigma_{-R}^s)} (\tilde{\mathbf{X}}_n^s(\boldsymbol{z}_\Sigma) \cdot \boldsymbol{p}) \\ \quad + \frac{1}{2} (e^{-\tilde{\lambda}_m(z_1+R)} - e^{\tilde{\lambda}_m(z_1+R)}) (\tilde{\mathbf{X}}_m^s(\boldsymbol{z}_\Sigma) \cdot \boldsymbol{p}) & \text{si } \boldsymbol{z} \in \Omega_-^s \text{ et } z_1 \in (-R, 0) \\ \sum_{n \geq 1} \frac{e^{\lambda_n z_1}}{2} (\boldsymbol{\chi}_{n,-}^{s,r}, \tilde{\mathbf{Y}}_m^s)_{\mathbf{H}^s(\Sigma_{-R}^s)} (\mathbf{X}_n^s(\boldsymbol{z}_\Sigma) \cdot \boldsymbol{p}) & \text{si } \boldsymbol{z} \in \Omega_+^s \\ \sum_{n \geq 1} \frac{e^{\lambda_n z_1}}{2} (\boldsymbol{\chi}_{n,-}^{s,r}, \tilde{\mathbf{Y}}_m^s)_{\mathbf{H}^s(\Sigma_{-R}^s)} X_n^f(\boldsymbol{z}_\Sigma) & \text{si } \boldsymbol{z} \in \Omega_+^f, \end{cases} \quad (9.22)$$

qui s'écrit de façon équivalente en utilisant la réciprocité du tenseur de Green :

$$D_{m, \boldsymbol{\chi}^s}^-(\boldsymbol{z}) = \begin{cases} - \frac{e^{\tilde{\lambda}_m R}}{2} (\boldsymbol{\chi}_{m,+}^{s,r}(\boldsymbol{z}) \cdot \boldsymbol{p}) & \text{si } \boldsymbol{z} \in W^s \text{ et } z_1 > -R \\ - \frac{e^{\tilde{\lambda}_m R}}{2} \mathcal{X}_{m,+}^{f,r}(\boldsymbol{z}) & \text{si } \boldsymbol{z} \in \Omega_+^f. \end{cases} \quad (9.23)$$

Symétriquement, on peut écrire une seconde équation de champ proche utilisant des mesures de champs diffractés en variables  $\boldsymbol{y}^s$ . Elle s'obtient de la même façon que celle utilisant des mesures de champs diffractés en variables  $\boldsymbol{\chi}^s$ .

### 9.2.2 LSM avec des mesures de type $\boldsymbol{y}^s$

Soit  $\boldsymbol{y} \in \hat{\Omega}^s$ , notons  $(\underline{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\chi}^s}^d(\cdot, \boldsymbol{y}), \underline{\varphi}_{\boldsymbol{\chi}^s}^d(\cdot, \boldsymbol{y}))$  la solution de (9.15) pour le terme source  $\boldsymbol{f} = -\underline{\mathcal{G}}_{[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\chi}^s]}(\cdot, \boldsymbol{y})|_{\partial D}$ . Il faut introduire ensuite l'opérateur linéaire  $\mathcal{P}_{\boldsymbol{u} \rightarrow \boldsymbol{y}^s} : \mathbf{H}^1(W^s) \rightarrow (\mathbf{H}^1(W^s))^2 \times L^2(W^s)$  défini par :

$$\mathcal{P}_{\boldsymbol{u} \rightarrow \boldsymbol{y}^s}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_\Sigma \\ t_1 \end{pmatrix}.$$

On note alors :

$$\underline{\mathbf{y}}_{\mathbf{x}^s}^{\text{s,d}}(\cdot, \mathbf{y}) := \mathcal{P}_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{y}^s}(\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}^s}^{\text{d}}(\cdot, \mathbf{y})),$$

ce qui nous permet de définir les données utilisées pour cette deuxième équation de champ proche :

$$\mathcal{D}_{\mathbf{y}^s} := \left\{ \underline{\mathbf{y}}_{\mathbf{x}^s}^{\text{s,d}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\Sigma_{-R}^s)^2 \right\}.$$

La connaissance parfaite de ces données permet de reconstruire l'obstacle de façon unique de la même façon qu'avec les données  $\mathcal{D}_{\mathbf{x}^s}$ . L'opérateur de champ proche avec des mesures en variables  $\mathbf{y}^s$  est alors l'opérateur  $N_{\mathbf{y}^s} : \mathbf{L}^2(\Sigma_{-R}^s) \rightarrow \mathbf{L}^2(\Sigma_{-R}^s)$  défini pour  $\mathbf{h} \in \mathbf{L}^2(\Sigma_{-R}^s)$  par :

$$(N_{\mathbf{y}^s} \mathbf{h})(\mathbf{x}) := \int_{\Sigma_{-R}^s} \underline{\mathbf{y}}_{\mathbf{x}^s}^{\text{s,d}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{h}(\mathbf{y}) \text{ds}(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_{-R}^s. \quad (9.24)$$

Cela nous conduit à considérer, pour  $\mathbf{z} \in W^s \cup \Omega_+^f$ , la seconde équation de champ proche :

Trouver  $\mathbf{h} \in \mathbf{L}^2(\Sigma_{-R}^s)$  tel que

$$N_{\mathbf{y}^s} \mathbf{h} = \begin{cases} (\underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}^s, \mathbf{x}^s]}(\cdot, \mathbf{z}) \mathbf{p})|_{\Sigma_{-R}^s} & \text{si } \mathbf{z} \in W^s \\ (\underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}^s, \zeta]}(\cdot, \mathbf{z}))|_{\Sigma_{-R}^s} & \text{si } \mathbf{z} \in \Omega_+^f. \end{cases}$$

Pour obtenir une formulation modale du nouvel opérateur de champ proche, nous avons besoin d'un résultat de décomposition modale de  $\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}^s}^{\text{d}}(\cdot, \mathbf{y})$  analogue à celui de la Proposition 9.23.

### Proposition 9.25

Pour  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \dot{\Omega}^s$  tel que  $x_1 > -R$  et  $\mathbf{y} \in \Sigma_{-R}^s$ , nous avons :

$$\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}^s}^{\text{d}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \mathbf{u}_{n,+}^{\text{d}}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{y}_{n,-}^s(\mathbf{y}).$$

*Démonstration.* La preuve est donnée en annexe de ce chapitre (voir sous-section 9.4.2).  $\square$

Cela nous permet de décomposer nos données sur des objets modaux. Introduisons en effet pour tout  $n \geq 1$ , comme pour la première formulation de l'équation de champ proche, les quantités :

$$\underline{\mathbf{y}}_{n,+}^{\text{s,d}} := \mathcal{P}_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{y}^s}(\mathbf{u}_{n,+}^{\text{d}}).$$

La Proposition 9.25 ainsi que la linéarité de l'opérateur  $\mathcal{P}_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{y}^s}$  nous permettent d'écrire pour  $\mathbf{y} \in \Sigma_{-R}^s$  et  $\mathbf{x} \in \dot{\Omega}^s$  satisfaisant  $x_1 > -R$  la décomposition :

$$\underline{\mathbf{y}}_{\mathbf{x}^s}^{\text{s,d}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \underline{\mathbf{y}}_{n,+}^{\text{s,d}}(\mathbf{x}) \otimes \tilde{\mathbf{y}}_{n,-}^s(\mathbf{y}). \quad (9.25)$$

On peut alors obtenir l'analogie de la Proposition 9.24 en se contentant cette fois de donner l'expression plus simple du second membre.

### Proposition 9.26

Pour  $\mathbf{h} \in \mathbf{L}^2(\Sigma_{-R}^s)$  et  $\mathbf{z} = (z_1, \mathbf{z}_\Sigma) \in W^s \cup \Omega_+^f$  tel que  $z_1 > -R$ , l'opérateur de champ proche

défini par (9.24) s'écrit :

$$N_{\mathbf{y}^s} \mathbf{h} = \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2} (S_n^+)_m^- h_n \tilde{\mathbf{Y}}_m^s,$$

avec :

$$\mathbf{h} = - \sum_{n \geq 1} h_n \tilde{\mathbf{X}}_n^s \quad \text{et} \quad (\underline{\mathbf{y}}_{n,+}^{s,d})_{|\Sigma_{-R}^s} = \sum_{m \geq 1} (S_n^+)_m^- \tilde{\mathbf{Y}}_m^s. \quad (9.26)$$

La trace du tenseur de Green sur  $\Sigma_{-R}^s$  s'écrit :

- si  $\mathbf{z} \in W^s$  :

$$(\underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}^s, \mathbf{x}^s]}(\cdot, \mathbf{z}) \mathbf{p})_{|\Sigma_{-R}^s} = - \sum_{n \geq 1} \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2} (\mathbf{y}_{n,+}^{s,r}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{p}) \tilde{\mathbf{Y}}_n^s,$$

- si  $\mathbf{z} \in \Omega_+^f$  :

$$(\underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}^s, \zeta]}(\cdot, \mathbf{z}))_{|\Sigma_{-R}^s} = - \sum_{n \geq 1} \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2} \mathcal{Y}_{n,+}^{f,r}(\mathbf{z}) \tilde{\mathbf{Y}}_n^s.$$

*Démonstration.* La preuve est donnée en annexe de ce chapitre (voir [sous-section 9.4.3](#)).  $\square$

Projeter l'équation de champ proche (9.24) sur les modes permet de nous ramener au système infini :

Trouver  $(h_n)_{n \geq 1} \in \ell^2(\mathbb{C})$  tel que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2} (S_n^+)_m^- h_n = D_{m,\mathbf{y}^s}^-(\mathbf{z}), \quad \forall m \geq 1, \quad (9.27)$$

$$D_{m,\mathbf{y}^s}^-(\mathbf{z}) := \begin{cases} -\frac{e^{\tilde{\lambda}_m R}}{2} (\mathbf{y}_{m,+}^{s,r}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{p}) & \text{si } \mathbf{z} \in W^s \text{ et } z_1 > -R \\ -\frac{e^{\tilde{\lambda}_m R}}{2} \mathcal{Y}_{m,+}^{f,r}(\mathbf{z}) & \text{si } \mathbf{z} \in \Omega_+^f. \end{cases} \quad (9.28)$$

**Remarque 9.27** Les décompositions modales (9.20) pour l'opérateur  $N_{\mathbf{x}^s}$  et (9.26) pour l'opérateur  $N_{\mathbf{y}^s}$  conduisent au même membre de gauche dans les formulations modales (9.21) et (9.27) des deux équations de champ proche. Pour le voir, il suffit de remarquer que pour tout  $n \geq 1$ , les couples  $(\underline{\mathbf{x}}_{n,+}^{s,d}, \underline{\mathbf{y}}_{n,+}^{s,d})$  sont sortants à gauche dans le demi-guide gauche, ils peuvent ainsi s'écrire pour  $x_1 \leq -R$  :

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{x}}_{n,+}^{s,d} \\ \underline{\mathbf{y}}_{n,+}^{s,d} \end{pmatrix}(\mathbf{x}) = \sum_{m \geq 1} (S_n^+)_m^- \begin{pmatrix} -\tilde{\mathbf{X}}_m^s(\mathbf{x}_\Sigma) \\ \tilde{\mathbf{Y}}_m^s(\mathbf{x}_\Sigma) \end{pmatrix} e^{-\tilde{\lambda}_n x_1}.$$

Il est alors facile de voir que  $(S_n^+)_m^- = (s_n^+)_m^- e^{-\tilde{\lambda}_m R}$ .

## 9.3 Expériences numériques

Dans cette dernière section, nous voulons vérifier numériquement qu'il est possible d'identifier des défauts dans une plaque élastique partiellement immergée à l'aide des deux formulations modales de la LSM proposées précédemment. Étant donné que les modes



SH sont découplés des autres modes et correspondent à un cas acoustique déjà traité au [chapitre 3](#), nous ne les prendrons ici pas en compte. Précisons dans un premier temps les différents paramètres de simulation.

Nous considérons dans nos expériences numériques une plaque élastique de demi-épaisseur  $h_0 = 1$  cm à l'air libre pour  $x_1 < 0$  et immergée dans un fluide pour  $x_1 > 0$ . À droite, le fluide est tronqué transversalement par des PML qui occupent le domaine  $h_1 < |x_2| < h_2$ , avec  $h_1 = 2$  cm et  $h_2 = 5$  cm. Par simplicité, nous faisons le choix de tronquer longitudinalement la partie immergée de la structure avec des PML. Ce choix s'explique par le fait que la résolution du problème direct à l'aide de l'opérateur YtX à droite a été accomplie en dernier parmi tous les travaux présentés dans ce manuscrit. Les simulations se feront donc à des fréquences où il n'y a pas de modes rétrogrades. Ces PML occupent le domaine  $5 \text{ cm} < x_1 < 7,5 \text{ cm}$ . La partie gauche de la structure est quant à elle tronquée longitudinalement à l'aide d'un opérateur YtX sur la section d'abscisse  $x_1 = -4$  cm. Tous les défauts considérés seront situés dans la bande  $-4 \text{ cm} < x_1 < 5 \text{ cm}$ . Rappelons qu'il est nécessaire de conduire des simulations pour synthétiser les mesures, ou autrement dit pour résoudre le problème direct en présence d'un obstacle, mais aussi pour calculer les champs de référence utilisés pour évaluer le tenseur de Green intervenant dans la résolution du problème inverse. Pour amoindrir le risque de crime inverse, nous choisissons des profils de PML distincts pour résoudre les problèmes direct et inverse. Pour le problème direct, nous choisirons les mêmes paramètres de PML que dans la [sous-section 8.2.2](#). Plus précisément, nous retenons pour la résolution du problème direct des PML transverses et longitudinales ayant un profil parabolique avec  $\hat{\eta} = 1 + 2i$  pour les premières et  $\hat{\eta} = 4 + 3i$  pour les secondes. Pour résoudre le problème inverse, nous choisissons d'utiliser pour les PML longitudinale et transverse un profil abrupt avec  $\alpha_\infty = e^{-i\pi/3}$ . Différents couples de solide / fluide seront étudiés. Les paramètres physiques les caractérisants sont indiqués dans la [Table 7.1](#).

Précisons ensuite les paramètres de discrétisation. Les champs diffractés pour le problème direct et les champs de référence pour le problème inverse sont approchés à l'aide d'éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}^2$ . Les pas de maillage  $h_f$  dans le fluide et  $h_s$  dans le solide sont donnés par :

$$h_f = \min(0,08 ; 2\pi/(8k_f)) \quad \text{et} \quad h_s = \min(0,08 ; 2\pi/(8k_s)),$$

garantissant au moins 8 points de discrétisation par longueurs d'ondes dans le fluide et dans le solide, et ce à la fois pour les ondes de cisaillement et pour les ondes de pression dans le second cas puisque  $k_p < k_s$ . Les modes utilisés pour calculer l'opérateur YtX à gauche sont approchés à l'aide d'éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}^1$  avec un pas de maillage de  $h = \min(0,005 ; h_s)$ . Nous tronquons la série définissant l'opérateur YtX à gauche en ne conservant que 40 modes. Cela permettra dans les simulations à venir de considérer tous les modes de Lamb propagatifs ainsi qu'une vingtaine de modes de Lamb inhomogènes.

L'étude conduite à la [sous-section 6.3.1](#) a montré, dans le cas acoustique, qu'il est plus simple d'utiliser les expressions du second membre de la LSM obtenues en utilisant la réciprocity de la solution fondamentale. Nous allons donc utiliser l'expression (9.23) (respectivement (9.28)) des seconds membres de la LSM modale pour des mesures de type  $\mathcal{X}^s$  (respectivement de type  $\mathcal{Y}^s$ ). De plus, les systèmes infinis (9.21) et (9.27), avec les seconds membres (9.23) et (9.28), sont tronqués en restreignant les indices  $n$  et  $m$  au nombre de modes propagatifs du guide élastique gauche noté  $\tilde{N}_p$ .

Enfin, les données obtenues numériquement seront bruitées avec un taux de bruit relatif égal à  $\sigma = 0,05$  correspondant donc à 5% de bruit. L'équation de champ proche est régularisée

en utilisant Tikhonov-Morozov selon la procédure détaillée à la sous-section 3.4.1.

### 9.3.1 Choix de la polarisation

Nous avons vu que le caractère tensoriel de la solution fondamentale en élasticité nécessite le choix d'une polarisation  $\mathbf{p}$  pour la résolution de l'équation de champ proche. Puisque nous ne prenons ici pas en compte les modes SH, nous avons  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ . Pour simplifier l'interprétation des résultats, nous choisirons  $\mathbf{p} = (1\ 0)^t$  ou  $\mathbf{p} = (0\ 1)^t$ . En outre, deux équations de champ proche ayant des seconds membres différents ont été proposées selon la nature des mesures ( $\mathcal{X}^s$  ou  $\mathcal{Y}^s$ ). Un choix important pour le second membre s'offre ainsi à nous. Ces choix ne sont pas tous équivalents, d'une part par ce qu'ils représentent physiquement, d'autre part par ce qu'ils impliquent des traitements numériques différents. Par exemple, nous n'avons pas directement accès aux polarisations qui correspondent à des contraintes dans le solide ou dans le fluide. En effet, les champs de référence sont calculés dans le volume en champ de déplacement dans le solide et en potentiel des vitesses dans le fluide. Pour obtenir les champs de référence en contraintes, il faut alors dériver numériquement les champs de référence évalués en champ de déplacement / potentiel des vitesses, ce qui en pratique se fait de façon variationnelle par éléments finis.

Dans les exemples qui suivent, on se place dans le cas d'une plaque d'acier partiellement immergée dans de l'eau à une fréquence angulaire donnée par  $\omega = 62,83 \cdot 10^5$  rad.Hz, à laquelle il y a  $\tilde{N}_p = 20$  modes propagatifs à gauche. On cherche à identifier un obstacle de Dirichlet en forme de triangle dans le solide ou un obstacle de Dirichlet en forme de disque dans le fluide.

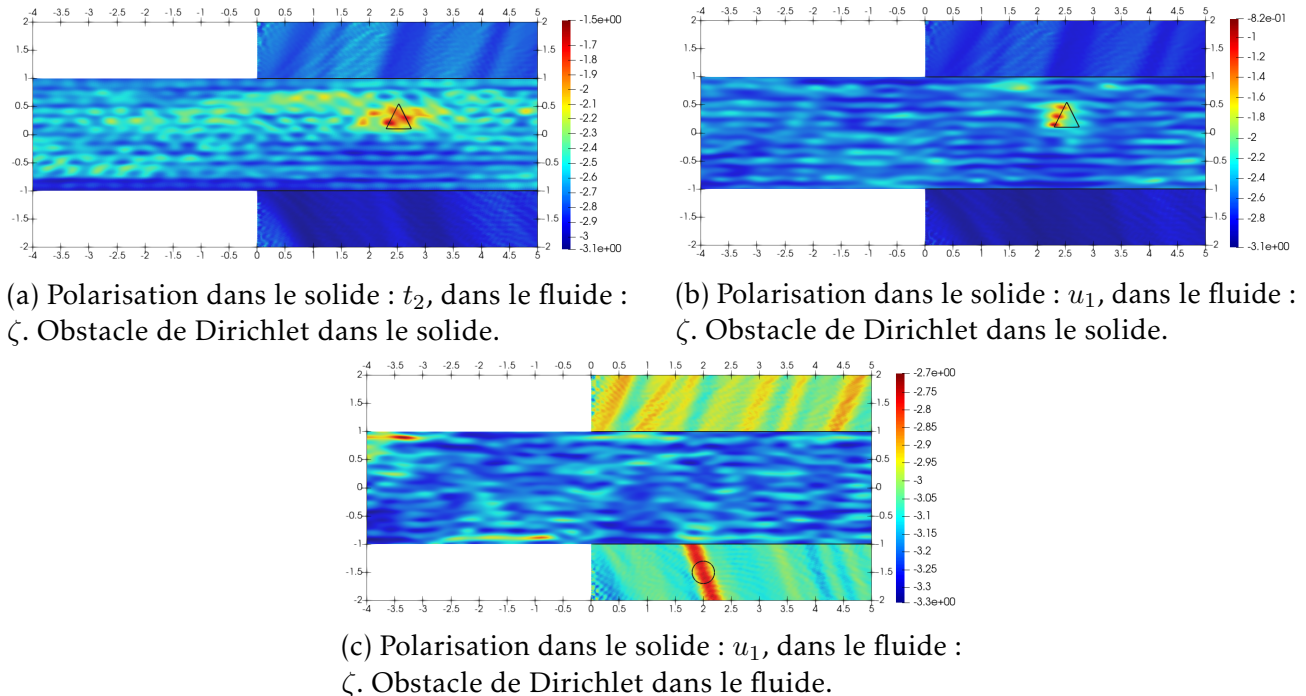


FIGURE 9.1: Choix de différentes polarisations du tenseur de Green en variables  $\mathcal{X}^{sf} = (t_2, u_1, \zeta)$ .

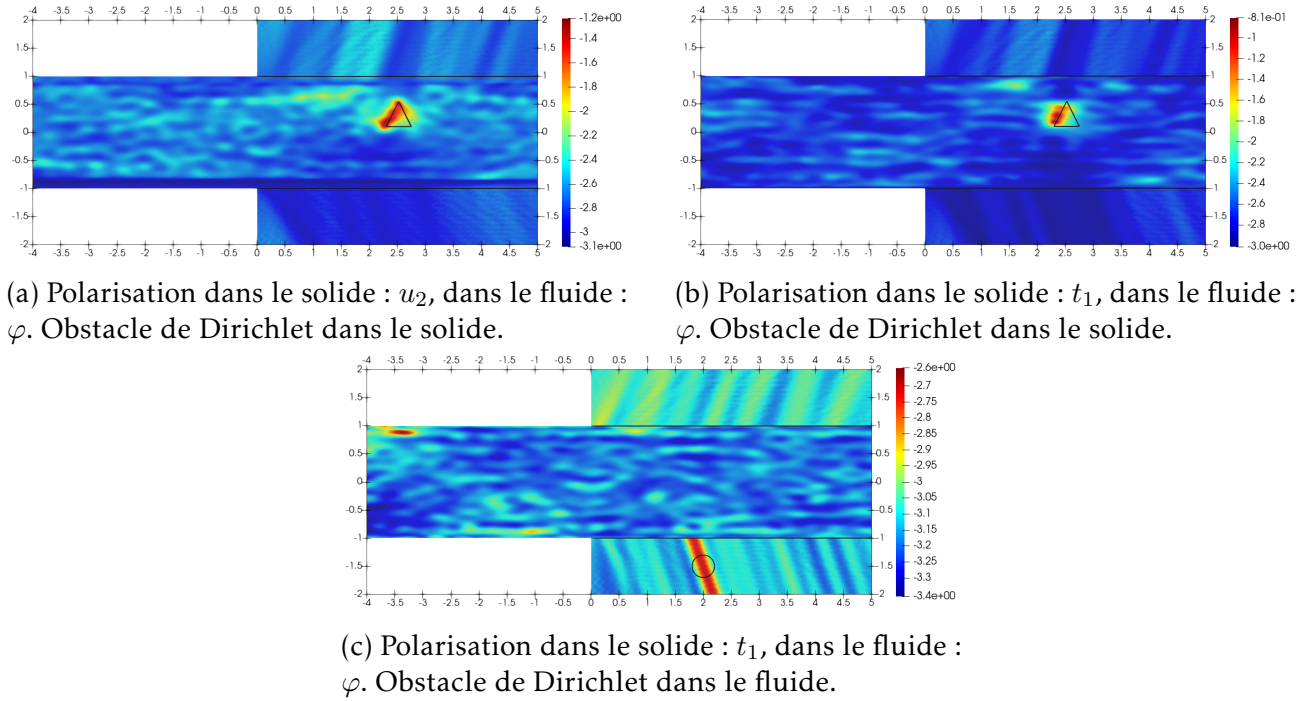


FIGURE 9.2: Choix de différentes polarisations du tenseur de Green en variables  $\mathcal{Y}^{\text{sf}} = (u_2, t_1, \varphi)$ .

Les résultats présentés sur les Figures 9.1 et 9.2 montrent que toutes les polarisations considérées permettent de détecter les défauts. Elles ne permettent cependant pas toutes d'obtenir des reconstructions de qualités équivalentes. Par exemple, la reconstruction d'un obstacle de Dirichlet dans le solide obtenue en utilisant la polarisation  $t_2$  est un peu moins bonne que celles obtenues avec les autres polarisations. Pour ce qui est de l'identification d'un obstacle de Dirichlet dans le fluide, elle est comme on pouvait s'y attendre moins bonne que pour un obstacle dans le solide. Bien qu'il soit moins bien caractérisé, on arrive néanmoins à le localiser sur une demi-bande partant de la plaque élastique. De plus, la polarisation  $\zeta$  donne des résultats qui sont légèrement moins bons qu'avec la polarisation  $\varphi$ .

Il est difficile de tirer des conclusions précises quant aux performances relatives des différentes polarisations à partir de ce seul exemple. Pour un guide fermé présentant une fissure, une procédure permettant de déterminer la polarisation optimale a été présentée dans [BL13]. Nous choisirons cependant pour la suite de ce travail la polarisation  $u_2$  dans le solide et  $\varphi$  dans le fluide associée à l'équation de champ proche (9.27). Ce choix est suggéré par les bons résultats qu'il a permis sur les figures ci-dessus, mais aussi par le fait qu'il ne nécessite pas la résolution d'un système linéaire supplémentaire pour calculer le champ de référence en contraintes.

### 9.3.2 Impact des matériaux sur la qualité de la reconstruction d'un obstacle volumique dans le solide

Il est intéressant d'un point de vue applicatif d'étudier l'impact des matériaux solide et fluide sur la qualité de reconstruction des défauts. Pour un obstacle de Dirichlet seul dans le solide, nous avons représenté sur la Figure 9.3 les résultats obtenus pour plusieurs couples de solides et fluides. Nous pouvons observer que les résultats d'imagerie sont légèrement moins bons dans une plaque d'aluminium que dans une plaque d'acier qui a une densité volumique plus importante. De plus, le cas de la plaque d'aluminium semble indiquer qu'il est un peu

plus difficile d’imager un défaut lorsque la plaque est immergée dans du sodium liquide par rapport à de l’eau. Pour interpréter ce résultat, on peut se référer à la Figure 7.8 présentant les nombres d’onde longitudinaux associés dans une plaque de même dimension, mais à une fréquence différente. Nous pouvons en effet y voir que le sodium induit une atténuation plus importante des modes de Lamb à fuite que l’eau. Ce phénomène est plus marqué pour une plaque d’aluminium que pour une plaque d’acier.

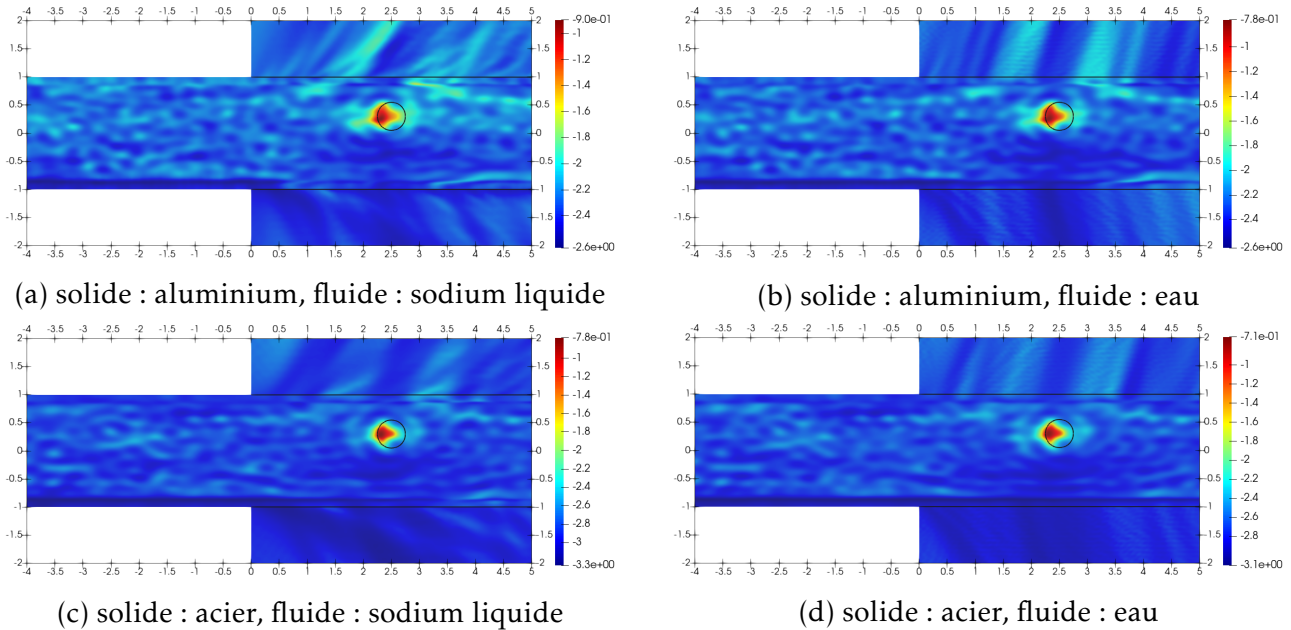


FIGURE 9.3: Identification d’un obstacle de Dirichlet en forme de disque pour différents choix de matériaux. Polarisation du tenseur de Green :  $u_2$  dans le solide et  $\varphi$  dans le fluide. Fréquence :  $\omega = 62.3.10^5$  rad.Hz. Nombre de modes propagatifs à gauche :  $\tilde{N}_p = 20$ .

### 9.3.3 Impact des matériaux sur la qualité de la reconstruction d’un obstacle de surface dans le solide

Jusqu’à présent, nous avons considéré des obstacles volumiques de type Dirichlet qui n’existent pas en pratique. Il est beaucoup plus intéressant de rechercher des défauts de type corrosion ou de type dépôt sur la surface de la partie immergée de la structure. Dans les deux cas, nous ne faisons que déformer localement l’interface  $\Gamma^{\text{sf}}$  entre le solide et le fluide. Pour s’approcher encore davantage d’un défaut réel dans le cas du dépôt, il faudrait aussi modifier les propriétés du volume solide supplémentaire. Sur les Figures 9.4 et 9.5, nous pouvons observer des résultats d’imagerie proches de ceux obtenus ci-dessus pour un obstacle de Dirichlet dans le fluide. Autrement dit, la position du défaut est correctement retrouvée par l’intermédiaire d’une demi-bande qui apparaît dans le fluide. Dans ce cas, l’origine de cette demi-bande sur la plaque coïncide avec l’emplacement du défaut. Pour le défaut de type corrosion, l’échantillonnage seul dans le volume occupé par la plaque non perturbée n’est pas suffisant pour localiser de façon précise le défaut. Une autre observation peut être effectuée pour les deux types de défauts : il est plus facile d’imager en présence d’eau qu’en présence de sodium liquide qui atténue davantage les ondes élastiques qui se propagent dans la plaque.



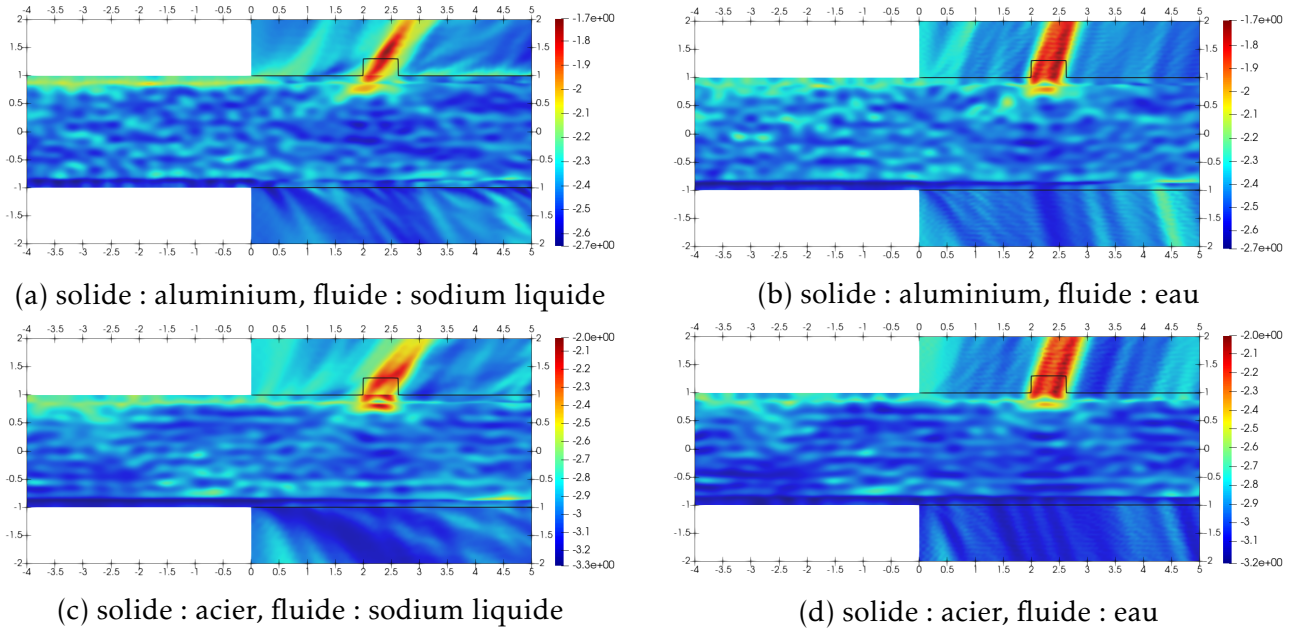


FIGURE 9.4: Identification d'un défaut de type dépôt de forme rectangulaire. Polarisation du tenseur de Green :  $u_2$  dans le solide et  $\varphi$  dans le fluide. Fréquence :  $\omega = 62.3 \cdot 10^5$  rad.Hz. Nombre de modes propagatifs à gauche :  $\tilde{N}_p = 20$ .

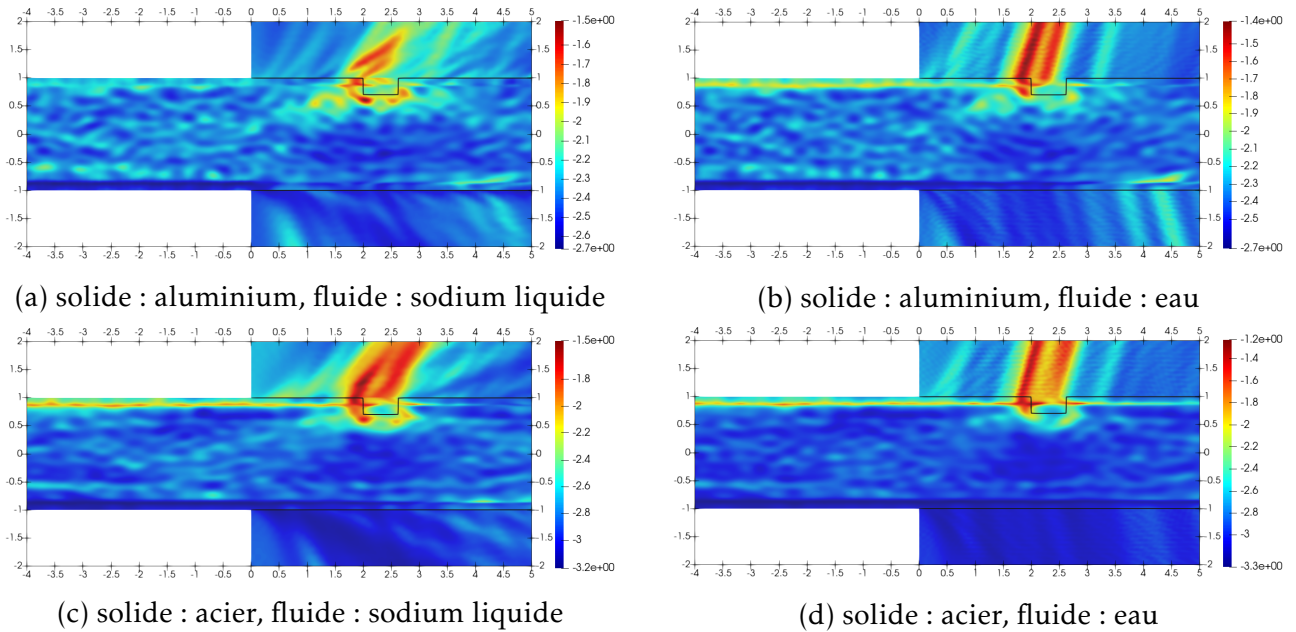


FIGURE 9.5: Identification d'un défaut de type corrosion de forme rectangulaire. Polarisation du tenseur de Green :  $u_2$  dans le solide et  $\varphi$  dans le fluide. Fréquence :  $\omega = 62.3 \cdot 10^5$  rad.Hz. Nombre de modes propagatifs à gauche :  $\tilde{N}_p = 20$ .

**Remarque 9.28** *La LSM n'a pas été justifiée dans ce manuscrit pour notre configuration de guide d'ondes élastique partiellement immergé. Cependant, nous avons des raisons de penser qu'il est possible de le faire dans le cas d'obstacles volumiques comme cela a été expliqué avec les Remarques 9.21 et 9.22. Mais ici, la justification de la LSM pour des déformations de l'interface entre le solide et le fluide semble encore moins évidente. Les résultats d'imagerie présentés ci-dessus doivent ainsi être regardés comme des résultats exploratoires.*

### 9.3.4 Impact de la fréquence et identification simultanée de défauts dans le cœur et la gaine

Pour conclure notre étude numérique, nous étudions simultanément deux choses : l'impact de la fréquence sur la qualité de la reconstruction des défauts et en même temps la possibilité d'imager simultanément un obstacle dans le solide et dans le fluide.

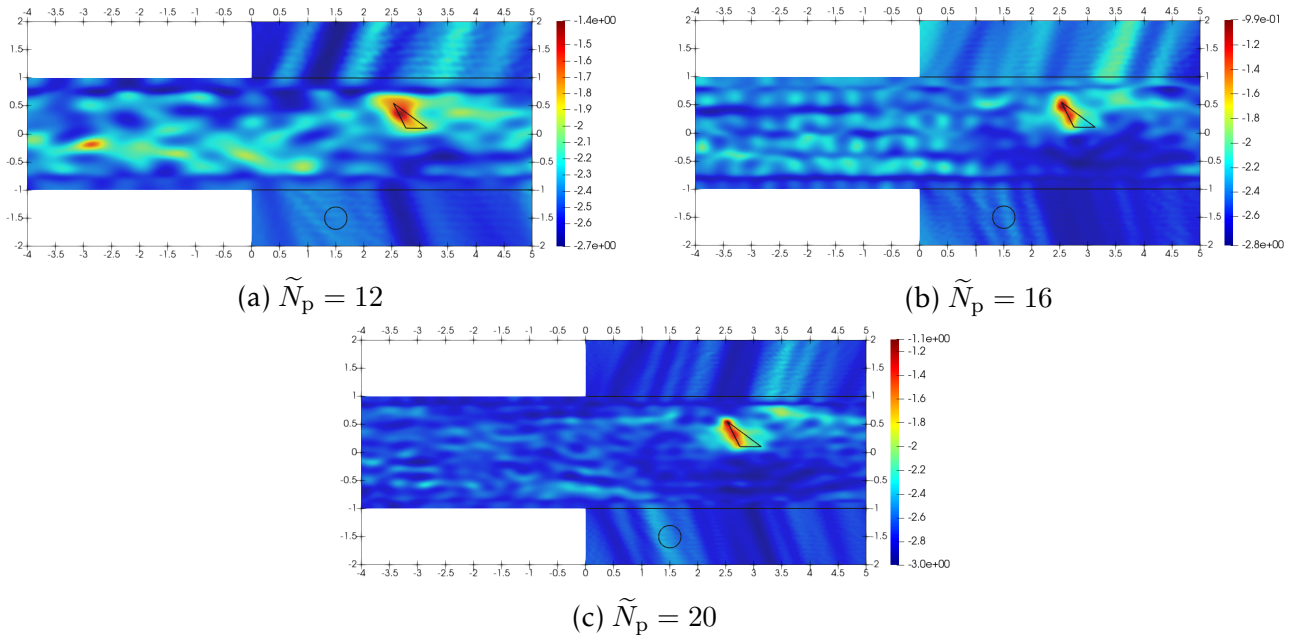


FIGURE 9.6: Identification simultanée d'un obstacle de Dirichlet en forme de triangle dans le solide et d'un obstacle de Dirichlet en forme de disque dans le fluide à différentes fréquences. Solide : acier, fluide : eau. Polarisation du tenseur de Green :  $u_2$  dans le solide et  $\varphi$  dans le fluide.

Tout d'abord, la Figure 9.6 montre qu'il n'est pas possible d'identifier un obstacle dans le fluide lorsqu'il y en a déjà un présent dans le solide. Il s'agit probablement d'un effet de contraste qui pourrait être traité en en proposant une méthode d'échantillonnage itérative (i.e. conduire un deuxième échantillonnage utilisant des champs de référence prenant en compte le premier obstacle détecté). Ensuite, on retrouve bien le comportement bien connu de la LSM vis-à-vis de la fréquence, à savoir : la qualité de reconstruction augmente avec la fréquence (ou de façon équivalente le nombre de modes propagatifs  $\tilde{N}_p$ ), sous réserve que le pas de discrétisation est suffisant.

## 9.4 Annexes

### 9.4.1 Représentation intégrale

Nous donnons ici une formule de représentation intégrale pour un guide élastique partiellement immergé qui aiderait à montrer l'unicité du problème inverse (voir la Remarque 9.21).

**Lemme 9.29**

Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $1 \leq d \leq 3$ , borné à frontière Lipschitz. Soit  $\underline{A} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^{d \times d}$  un tenseur ayant des composantes dans  $L^\infty(\Omega)$ . Alors pour  $\varphi$  et  $\psi$  dans  $H^1(\Omega)$  tels que  $\operatorname{div}(\underline{A}\nabla\varphi)$  et  $\operatorname{div}(\underline{A}\nabla\psi)$  sont dans  $L^2(\Omega)$ , on a :

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div}(\underline{A}\nabla\varphi)\psi - \operatorname{div}(\underline{A}\nabla\psi)\varphi) dx = \int_{\partial\Omega} ((\underline{A}\nabla\varphi)\mathbf{n}_f\psi - (\underline{A}\nabla\psi)\mathbf{n}_f\varphi) ds(\mathbf{x}),$$

où  $\mathbf{n}_f$  est la normale unitaire sortante à  $\Omega$ .

**Lemme 9.30**

Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $1 \leq d \leq 3$ , borné à frontière Lipschitz. Pour  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  appartenant à  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  tels que  $\operatorname{div}(\underline{\sigma}(\mathbf{u}))$  et  $\operatorname{div}(\underline{\sigma}(\mathbf{v}))$  sont dans  $L^2(\Omega)$ , on a :

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div}(\underline{\sigma}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} - \operatorname{div}(\underline{\sigma}(\mathbf{v})) \cdot \mathbf{u}) dx = \int_{\partial\Omega} (\underline{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{v} - \underline{\sigma}(\mathbf{v})\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{u}) ds(\mathbf{x}),$$

où  $\mathbf{n}_s$  est la normale unitaire sortante à  $\Omega$ .

**Remarque 9.31** Les intégrales surfaciques dans les Lemmes 9.29 et 9.30 sont à interpréter comme des crochets de dualité entre les espaces  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  et  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ .

**Lemme 9.32**

Soit  $(\mathbf{u}, \varphi)$  la solution de (9.15) associée à un terme source  $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ . On a les formules de représentation intégrale :

- pour  $\mathbf{x} \in \dot{\Omega}^s$  :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = - \int_{\partial D} \left( T_{\mathbf{y}}^s(\underline{\mathcal{G}}_{[u,\sigma]}(\mathbf{y}, \mathbf{x})) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}) - \underline{\mathcal{G}}_{[u,\sigma]}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot T_{\mathbf{y}}^s \mathbf{u}(\mathbf{y}) \right) ds(\mathbf{y}),$$

- pour  $\mathbf{x} \in \Omega_+^f$  :

$$\varphi(\mathbf{x}) = - \int_{\partial D} \left( T_{\mathbf{y}}^s(\underline{\mathcal{G}}_{[u,\zeta]}(\mathbf{y}, \mathbf{x})) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}) - \underline{\mathcal{G}}_{[u,\zeta]}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot T_{\mathbf{y}}^s \mathbf{u}(\mathbf{y}) \right) ds(\mathbf{y}).$$

Pour un ouvert borné  $O$  connexe à frontière régulière de normale entrante  $\mathbf{n}_O$ ,  $T_{\mathbf{z}}^s \cdot := \underline{\sigma}(\cdot)\mathbf{n}_O$  désigne l'opérateur différentiel de traction (vis-à-vis de la variable  $\mathbf{z}$ ) agissant sur les colonnes des tenseurs d'ordre 1 et 2.

*Démonstration.* Commençons par remarquer que la régularité du terme source garantit que  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\dot{\Omega}^s)$  et  $\varphi \in H_{\text{loc}}^1(\Omega_+^f)$ . Soit  $\mathbf{y} \in \dot{\Omega}^s$  et  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(\mathbf{y}, 2\varepsilon) \subset \dot{\Omega}^s$ . Pour  $1 \leq j \leq 3$ , nous introduisons les champs  $g_{\mathbf{y}}^j$  et  $\tilde{g}_{\mathbf{y}}^j$  définis par :

$$\tilde{g}_{\mathbf{y}}^j(\mathbf{x}) := \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{x} \in B(\mathbf{y}, \varepsilon) \\ -\underline{\mathcal{G}}_{[u,\sigma_j]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \text{si } \mathbf{x} \notin B(\mathbf{y}, \varepsilon), \end{cases}$$

et  $g_{\mathbf{y}}^j(\mathbf{x}) := \underline{\mathcal{G}}_{[u,\sigma_j]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \tilde{g}_{\mathbf{y}}^j(\mathbf{x})$ . On note  $\mathbf{P}^s \cdot := \operatorname{div}(\underline{\sigma}(\cdot)) + \rho_s \omega^2 \cdot$  l'opérateur de Navier. Pour  $\mathbf{v} \in (D(\dot{\Omega}^s))^3$ , on a par doubles intégrations par parties et en utilisant le fait que le tenseur

de Green satisfait les équations de l'élasticité homogène dans  $\dot{\Omega}^s \setminus B(\mathbf{y}, \varepsilon)$  :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P}^s \tilde{g}_{\mathbf{y}}^j, \mathbf{v} \rangle &= \langle \tilde{g}_{\mathbf{y}}^j, \mathbf{P}^s \mathbf{v} \rangle \\ &= - \int_{\dot{\Omega}^s \setminus B(\mathbf{y}, \varepsilon)} \underline{\mathcal{G}}_{[u, \sigma_j]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{div}(\underline{\sigma}(\mathbf{v})) + \rho_s \omega^2 \mathbf{v})(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\partial B(\mathbf{y}, \varepsilon)} \left( T_{\mathbf{x}}^s \underline{\mathcal{G}}_{[u, \sigma_j]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) - \underline{\mathcal{G}}_{[u, \sigma_j]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot T_{\mathbf{x}}^s \mathbf{v}(\mathbf{x}) \right) ds(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

où  $T_{\mathbf{x}}^s$  est défini à l'aide d'une normale dirigée vers l'intérieur de  $B(\mathbf{y}, \varepsilon)$ . On a ensuite :

$$\langle \mathbf{P}^s g_{\mathbf{y}}^j, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{P}^s \underline{\mathcal{G}}_{[u, \sigma_j]}(\cdot, \mathbf{y}), \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{P}^s \tilde{g}_{\mathbf{y}}^j, \mathbf{v} \rangle,$$

et puisque  $\langle \mathbf{P}^s \underline{\mathcal{G}}_{[u, \sigma_j]}(\cdot, \mathbf{y}), \mathbf{v} \rangle = - \langle \delta_{\mathbf{y}} \mathbf{e}_j, \mathbf{v} \rangle = -v_j(\mathbf{y})$ , on obtient l'expression :

$$\langle \mathbf{P}^s g_{\mathbf{y}}^j, \mathbf{v} \rangle = -v_j(\mathbf{y}) + \int_{\partial B(\mathbf{y}, \varepsilon)} \left( T_{\mathbf{x}}^s \underline{\mathcal{G}}_{[u, \sigma_j]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) - \underline{\mathcal{G}}_{[u, \sigma_j]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot T_{\mathbf{x}}^s \mathbf{v}(\mathbf{x}) \right) ds(\mathbf{x}).$$

Choisissons maintenant  $\mathbf{v} := \theta \mathbf{u}$ , pour  $\theta \in D(B(\mathbf{y}, 2\varepsilon))$  satisfaisant  $\theta = 1$  sur  $\overline{B(\mathbf{y}, \varepsilon)}$ . On peut voir par des arguments de régularité classiques pour les solutions de problèmes elliptiques, que  $\mathbf{u}$  et par suite  $\mathbf{v}$  a une régularité  $\mathcal{C}^\infty$  à l'intérieur de  $\dot{\Omega}^s$ . Comme  $\text{supp}(g_{\mathbf{y}}^j) \subset B(\mathbf{y}, \varepsilon)$  et  $\mathbf{P}^s \mathbf{u} = 0$  dans  $B(\mathbf{y}, \varepsilon)$ , on a l'égalité suivante :

$$\langle \mathbf{P}^s g_{\mathbf{y}}^j, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{P}^s g_{\mathbf{y}}^j, \theta \mathbf{u} \rangle = \langle g_{\mathbf{y}}^j, \mathbf{P}^s(\theta \mathbf{u}) \rangle = 0.$$

Ainsi :

$$u_j(\mathbf{y}) = \int_{\partial B(\mathbf{y}, \varepsilon)} \left( T_{\mathbf{x}}^s \underline{\mathcal{G}}_{[u, \sigma_j]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \underline{\mathcal{G}}_{[u, \sigma_j]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot T_{\mathbf{x}}^s \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right) ds(\mathbf{x}). \quad (9.29)$$

Soit  $R > 0$ , on note  $\dot{\Omega}_{-R, R}^s$  le sous-domaine de  $\dot{\Omega}^s$  compris entre les sections  $\Sigma_{-R}^s$  et  $\Sigma_R^s$ , ainsi que  $\Omega_{0, R}^f := (0, R) \times \Sigma^f$ . Définissons maintenant l'opérateur de Helmholtz  $P^f \cdot := \text{div}(\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma} \nabla \cdot) + b^{\alpha\Sigma} k_f^2 \cdot$ , et l'analogue acoustique  $T^f \cdot := (\underline{\mathcal{A}}^{\alpha\Sigma} \nabla \cdot) \mathbf{n}_f$  de l'opérateur  $T^s$ . On obtient en utilisant les Lemmes 9.29 et 9.30 :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\dot{\Omega}_{-R, R}^s \setminus B(\mathbf{y}, \varepsilon)} \left( \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{P}_x^s \underline{\mathcal{G}}_{[u, \sigma_j]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \underline{\mathcal{G}}_{[u, \sigma_j]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{P}_x^s \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x} \\ &\quad + \rho_f \int_{\Omega_{0, R}^f} \left( \varphi(\mathbf{x}) P_x^f \underline{\mathcal{G}}_{[\varphi, \sigma_j]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \underline{\mathcal{G}}_{[\varphi, \sigma_j]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) P_x^f \varphi(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\partial D \cup \partial B(\mathbf{y}, \varepsilon) \cup \Sigma_{\pm R}^s \cup \Gamma_{-R, 0}^s \cup \Gamma_{0, R}^{\text{sf}}} \left( T_{\mathbf{x}}^s \underline{\mathcal{G}}_{[u, \sigma_j]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \underline{\mathcal{G}}_{[u, \sigma_j]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot T_{\mathbf{x}}^s \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right) ds(\mathbf{x}) \\ &\quad + \rho_f \int_{\Sigma_0^f \cup \Gamma_{0, R}^{\text{pml}} \cup \Gamma_{0, R}^{\text{sf}} \cup \Sigma_R^f} \left( T_{\mathbf{x}}^f \underline{\mathcal{G}}_{[\varphi, \sigma_j]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}) - \underline{\mathcal{G}}_{[\varphi, \sigma_j]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) T_{\mathbf{x}}^f \varphi(\mathbf{x}) \right) ds(\mathbf{x}), \quad (9.30) \end{aligned}$$

la normale dans l'opérateur  $T_{\mathbf{x}}^s$ , respectivement  $T_{\mathbf{x}}^f$ , étant sortante à  $\dot{\Omega}_{-R, R}^s \setminus B(\mathbf{y}, \varepsilon)$ , respectivement  $\Omega_{0, R}^f$ . Les intégrales sur  $\Gamma_{-R, 0}^s$ ,  $\Sigma_0^f$  et  $\Gamma_{0, R}^{\text{pml}}$  sont nulles du fait des différentes conditions aux bords. On s'aperçoit ensuite que les intégrales sur  $\Gamma_{0, R}^{\text{sf}}$  se simplifient en utilisant les conditions de couplage.



En effet :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma_{0,R}^{\text{sf}}} \left( T_{\mathbf{x}}^{\text{s}} \underline{\mathcal{G}}_{[u,\sigma_j]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \underline{\mathcal{G}}_{[u,\sigma_j]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot T_{\mathbf{x}}^{\text{s}} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right) \text{d}\mathbf{s}(\mathbf{x}) \\
 & + \rho_{\text{f}} \int_{\Gamma_{0,R}^{\text{sf}}} \left( T_{\mathbf{x}}^{\text{f}} \underline{\mathcal{G}}_{[\varphi,\sigma_j]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}) - \underline{\mathcal{G}}_{[\varphi,\sigma_j]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) T_{\mathbf{x}}^{\text{f}} \varphi(\mathbf{x}) \right) \text{d}\mathbf{s}(\mathbf{x}) \\
 & = -\rho_{\text{f}} \omega \int_{\Gamma_{0,R}^{\text{sf}}} \left( \underline{\mathcal{G}}_{[\varphi,\sigma_j]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_{\text{s}}) - (\underline{\mathcal{G}}_{[u,\sigma_j]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_{\text{s}}) \varphi(\mathbf{x}) \right) \text{d}\mathbf{s}(\mathbf{x}) \\
 & \quad + \rho_{\text{f}} \omega \int_{\Gamma_{0,R}^{\text{sf}}} \left( (\underline{\mathcal{G}}_{[u,\sigma_j]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_{\text{f}}) \varphi(\mathbf{x}) - (\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_{\text{f}}) \underline{\mathcal{G}}_{[\varphi,\sigma_j]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) \text{d}\mathbf{s}(\mathbf{x}) \\
 & = 0,
 \end{aligned}$$

puisque  $\mathbf{n}_{\text{s}} = -\mathbf{n}_{\text{f}}$  sur  $\Gamma_{0,R}^{\text{sf}}$ . Montrons désormais que la somme des intégrales sur  $\Sigma_{-R}^{\text{s}}$  et  $\Sigma_R^{\text{f}}$  s'annule. L'annulation de l'intégrale sur  $\Sigma_{-R}^{\text{s}}$  ne sera pas montrée, car elle se montre de façon analogue et plus simple. Notons :

$$\mathbf{x}^{\text{s}} := (\mathbf{t}_{\Sigma} \quad u_1)^{\text{t}}, \quad \mathbf{y}^{\text{s}} := (\mathbf{u}_{\Sigma} \quad t_1)^{\text{t}}, \quad \mathcal{X}^{\text{f}} := \zeta \quad \text{et} \quad \mathcal{Y}^{\text{f}} := \varphi$$

les variables  $\mathbf{XY}$  associées à  $(\mathbf{u}, \varphi)$ , et pour  $1 \leq j \leq 3$  :

$$\mathbf{x}_j^{\text{s}} := (\mathbf{t}_{\Sigma}^j \quad u_1^j)^{\text{t}}, \quad \mathbf{y}_j^{\text{s}} := (\mathbf{u}_{\Sigma}^j \quad t_1^j)^{\text{t}}, \quad \mathcal{X}_j^{\text{f}} := \zeta^j \quad \text{et} \quad \mathcal{Y}_j^{\text{f}} := \varphi^j$$

celles associées à  $(\underline{\mathcal{G}}_{[u,\sigma_j]}(\cdot, \mathbf{y}), \underline{\mathcal{G}}_{[\varphi,\sigma_j]}(\cdot, \mathbf{y}))$ . On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Sigma_R^{\text{s}}} \left( T_{\mathbf{x}}^{\text{s}} \underline{\mathcal{G}}_{[u,\sigma_j]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \underline{\mathcal{G}}_{[u,\sigma_j]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot T_{\mathbf{x}}^{\text{s}} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right) \text{d}\mathbf{s}(\mathbf{x}) \\
 & + \rho_{\text{f}} \int_{\Sigma_R^{\text{f}}} \left( T_{\mathbf{x}}^{\text{f}} \underline{\mathcal{G}}_{[\varphi,\sigma_j]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}) - \underline{\mathcal{G}}_{[\varphi,\sigma_j]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) T_{\mathbf{x}}^{\text{f}} \varphi(\mathbf{x}) \right) \text{d}\mathbf{s}(\mathbf{x}) \\
 & = \int_{\Sigma_R^{\text{s}}} \left( (-t_1^j u_1 + \mathbf{t}_{\Sigma}^j \cdot \mathbf{u}_{\Sigma}) - (-u_1^j t_1 + \mathbf{u}_{\Sigma}^j \cdot \mathbf{t}_{\Sigma}) \right) \text{d}\mathbf{s}(\mathbf{x}) + \rho_{\text{f}} \int_{\Sigma_R^{\text{f}}} b^{\alpha_{\Sigma}} (\zeta^j \varphi - \varphi^j \zeta) \text{d}\mathbf{s}(\mathbf{x}) \\
 & = \int_{\Sigma_R^{\text{s}}} \left( (t_1 u_1^j + \mathbf{u}_{\Sigma} \cdot \mathbf{t}_{\Sigma}^j) - (t_1^j u_1 + \mathbf{u}_{\Sigma}^j \cdot \mathbf{t}_{\Sigma}) \right) \text{d}\mathbf{s}(\mathbf{x}) + \rho_{\text{f}} \int_{\Sigma_R^{\text{f}}} b^{\alpha_{\Sigma}} (\zeta^j \varphi - \varphi^j \zeta) \text{d}\mathbf{s}(\mathbf{x}) \\
 & = \left( \mathbf{x}_j^{\text{sf}}, \overline{b^{\alpha_{\Sigma}} \mathbf{y}^{\text{sf}}} \right)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}(\Sigma_R^{\text{sf}})} - \left( \mathbf{x}^{\text{sf}}, \overline{b^{\alpha_{\Sigma}} \mathbf{y}_j^{\text{sf}}} \right)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}(\Sigma_R^{\text{sf}})},
 \end{aligned}$$

où :

$$\left( \mathbf{x}^{\text{sf}}, \mathbf{y}^{\text{sf}} \right)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}(\Sigma_R^{\text{sf}})} := \left( \mathbf{x}_{|\Sigma_R^{\text{sf}}}^{\text{sf}}, \mathbf{y}_{|\Sigma_R^{\text{sf}}}^{\text{sf}} \right)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}}.$$

Puisque les champs considérés sont sortants, ils satisfont les conditions de radiations :

$$T_{\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}}^+(\mathbf{y}^{\text{sf}}) = \mathbf{x}^{\text{sf}} \quad \text{et} \quad T_{\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}}^+(\mathbf{y}_j^{\text{sf}}) = \mathbf{x}_j^{\text{sf}},$$

où l'opérateur  $T_{\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}}^+$  a été défini au [chapitre 8](#) par (8.9). À l'aide de la définition de  $T_{\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}}^+$ , on obtient l'égalité suivante qui traduit sa symétrie :

$$\begin{aligned}
 \left( \mathbf{x}_j^{\text{sf}}, \overline{b^{\alpha_{\Sigma}} \mathbf{y}^{\text{sf}}} \right)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}(\Sigma_R^{\text{sf}})} & = \left( T_{\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}}^+(\mathbf{y}_j^{\text{sf}}), \overline{b^{\alpha_{\Sigma}} \mathbf{y}^{\text{sf}}} \right)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}(\Sigma_R^{\text{sf}})} \\
 & = \sum_{n \geq 1} \left( \mathbf{y}_j^{\text{sf}}, (\mathbf{X}_n^{\text{sf}})^{\star} \right)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}(\Sigma_R^{\text{sf}})} \left( \mathbf{X}_n^{\text{sf}}, \overline{b^{\alpha_{\Sigma}} \mathbf{y}^{\text{sf}}} \right)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}(\Sigma_R^{\text{sf}})} \\
 & = \sum_{n \geq 1} \left( \mathbf{y}^{\text{sf}}, (\mathbf{X}_n^{\text{sf}})^{\star} \right)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}(\Sigma_R^{\text{sf}})} \left( \mathbf{y}_j^{\text{sf}}, (\mathbf{X}_n^{\text{sf}})^{\star} \right)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}(\Sigma_R^{\text{sf}})} \\
 & = \left( T_{\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}}^+(\mathbf{y}^{\text{sf}}), \overline{b^{\alpha_{\Sigma}} \mathbf{y}_j^{\text{sf}}} \right)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}(\Sigma_R^{\text{sf}})} = \left( \mathbf{x}^{\text{sf}}, \overline{b^{\alpha_{\Sigma}} \mathbf{y}_j^{\text{sf}}} \right)_{\mathbf{H}^{\text{sf}}(\Sigma_R^{\text{sf}})}.
 \end{aligned}$$

Cette égalité montre l'annulation de la somme des intégrales sur  $\Sigma_R^s$  et  $\Sigma_R^f$  pour  $1 \leq j \leq 3$ . Il ne reste alors dans (9.30) plus que les termes sur  $\partial B(\mathbf{y}, \varepsilon)$  et  $\partial D$ . Cela donne avec la formule de représentation (9.29) :

$$u_j(\mathbf{y}) = - \int_{\partial D} \left( T_x^s \underline{\mathcal{G}}_{[u, \sigma_j]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \underline{\mathcal{G}}_{[u, \sigma_j]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot T_x^s \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right) ds(\mathbf{x}).$$

En échangeant les rôles de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  on obtient :

$$u_j(\mathbf{x}) = - \int_{\partial D} \left( T_y^s \underline{\mathcal{G}}_{[u, \sigma_j]}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}) - \underline{\mathcal{G}}_{[u, \sigma_j]}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot T_y^s \mathbf{u}(\mathbf{y}) \right) ds(\mathbf{y}),$$

ce qui est l'expression attendue.

La formule de représentation de  $\varphi$  s'obtient de façon analogue. Pour  $\mathbf{y} \in \Omega_+^f$  et  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(\mathbf{y}, 2\varepsilon) \subset \Omega_+^f$ , il faut définir :

$$\tilde{g}_y(\mathbf{x}) := \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{x} \in B(\mathbf{y}, \varepsilon) \\ -\underline{\mathcal{G}}_{[\varphi, \zeta]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \text{si } \mathbf{x} \notin B(\mathbf{y}, \varepsilon), \end{cases}$$

et  $g_y(\mathbf{x}) := \underline{\mathcal{G}}_{[\varphi, \zeta]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \tilde{g}_y(\mathbf{x})$ . Pour  $\psi \in D(\Omega_+^f)$ , on montre alors que :

$$\langle P^f g_y, \psi \rangle = -\rho_f^{-1} \psi(\mathbf{y}) + \int_{\partial B(\mathbf{y}, \varepsilon)} \left( T_x^f \underline{\mathcal{G}}_{[\varphi, \zeta]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi(\mathbf{x}) - \underline{\mathcal{G}}_{[\varphi, \zeta]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) T_x^f \psi(\mathbf{x}) \right) ds(\mathbf{x}).$$

Choisir ensuite  $\psi := \theta \varphi$  donne  $\langle P^f g_y, \psi \rangle = 0$ , et par suite la formule :

$$\varphi(\mathbf{y}) = \rho_f \int_{\partial B(\mathbf{y}, \varepsilon)} \left( T_x^f \underline{\mathcal{G}}_{[\varphi, \zeta]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}) - \underline{\mathcal{G}}_{[\varphi, \zeta]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) T_x^f \varphi(\mathbf{x}) \right) ds(\mathbf{x}).$$

La suite des calculs se déduit aisément de ceux détaillés pour obtenir la représentation intégrale de  $\mathbf{u}$ . On obtient à leur terme :

$$\varphi(\mathbf{x}) = - \int_{\partial D} \left( T_y^s \underline{\mathcal{G}}_{[u, \zeta]}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}) - \underline{\mathcal{G}}_{[u, \zeta]}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot T_y^s \mathbf{u}(\mathbf{y}) \right) ds(\mathbf{y}),$$

ce qui est l'expression attendue. □

### 9.4.2 Démonstration de la Proposition 9.25

Soit  $\mathbf{y} \in \Sigma_{-R}^s$  et  $\mathbf{x} = (x_1, \mathbf{x}_\Sigma) \in W^s$  avec  $x_1 > -R$ . La Proposition 9.5 nous permet de voir que :

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{\mathcal{G}}}_{[\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \tilde{\mathbf{x}}_{n,+}^s(\mathbf{x}) \otimes \tilde{\mathbf{y}}_{n,-}^s(\mathbf{y}) \\ \tilde{\underline{\mathcal{G}}}_{[\mathbf{y}^s, \mathbf{x}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \tilde{\mathbf{y}}_{n,+}^s(\mathbf{x}) \otimes \tilde{\mathbf{y}}_{n,-}^s(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Ces deux expressions nous permettent de simplifier la décomposition modale du tenseur de Green donnée par la Proposition 9.16 pour  $x_1 < 0$ . Lorsque  $x_1 > 0$ , la décomposition modale donnée par la Proposition 9.16 n'a pas à être simplifiée. On obtient alors, après extraction des

lignes du tenseur de Green associées au champ de déplacement et au potentiel des vitesses, les expressions modales :

$$\begin{aligned}\underline{\mathcal{G}}_{[u, \mathbf{x}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \mathbf{u}_{n,+}^r(\mathbf{x}) \otimes \tilde{\mathbf{Y}}_{n,-}^s(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in W^s \\ \underline{\mathcal{G}}_{[\varphi, \mathbf{x}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \varphi_{n,+}^r(\mathbf{x}) \otimes \tilde{\mathbf{Y}}_{n,-}^s(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_+^f.\end{aligned}$$

Posons ensuite :

$$\begin{aligned}\underline{H}_{[u, \mathbf{x}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &:= -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \mathbf{u}_{n,+}^d(\mathbf{x}) \otimes \tilde{\mathbf{Y}}_{n,-}^s(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in W^s \\ \underline{H}_{[\varphi, \mathbf{x}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &:= -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \varphi_{n,+}^d(\mathbf{x}) \otimes \tilde{\mathbf{Y}}_{n,-}^s(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_+^f.\end{aligned}$$

Pour tout  $n \geq 1$ , les couples  $(\mathbf{u}_{n,+}^d, \varphi_{n,+}^d)$  sont solutions de (9.15) pour  $\mathbf{f} = -(\mathbf{u}_{n,+}^r)_{|\partial D}$ . Il résulte alors directement de la linéarité du problème (9.15) que les colonnes du couple  $(\underline{H}_{[u, \mathbf{x}^s]}(\cdot, \mathbf{y}), \underline{H}_{[\varphi, \mathbf{x}^s]}(\cdot, \mathbf{y}))$  satisfont toutes les lignes de (9.15) hormis celle donnant la condition au bord de  $D$  qu'il reste à préciser. Pour  $\mathbf{x} \in \partial D$ , nous avons :

$$\underline{H}_{[u, \mathbf{x}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \mathbf{u}_{n,+}^d(\mathbf{x}) \otimes \tilde{\mathbf{Y}}_{n,-}^s(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \mathbf{u}_{n,+}^r(\mathbf{x}) \otimes \tilde{\mathbf{Y}}_{n,-}^s(\mathbf{y}) = -\underline{\mathcal{G}}_{[u, \mathbf{x}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Avec l'Hypothèse 9.20, le problème (9.20) a une unique solution. Nous avons par conséquent :

$$\underline{H}_{[u, \mathbf{x}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}^s}^d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x} \in \dot{\Omega}^s, x_1 > -R,$$

ce qui est la décomposition attendue.

### 9.4.3 Démonstration de la Proposition 9.26

#### • Expression modale de l'opérateur de champ proche

Pour commencer, on injecte l'expression modale (9.25) des données dans l'opérateur de champ proche défini par (9.24). Cela nous donne pour  $\mathbf{x} \in \Sigma_{-R}^s$  :

$$(N_{\mathbf{y}^s} \mathbf{h})(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \int_{\Sigma_{-R}^s} (\mathbf{y}_{n,+}^{s,d}(\mathbf{x}) \otimes \tilde{\mathbf{Y}}_{n,-}^s) \mathbf{h} ds(\mathbf{y}) = -\sum_{n \geq 1} \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2} \mathbf{y}_{n,+}^{s,d}(\mathbf{x}) \int_{\Sigma_{-R}^s} \tilde{\mathbf{Y}}_n^s \cdot \mathbf{h} ds(\mathbf{y}).$$

Sous l'Hypothèse 7.9, on peut écrire les décompositions modales (9.26). Utiliser la relation de biorthogonalité (7.20) conduit alors à :

$$(N_{\mathbf{y}^s} \mathbf{h})(\mathbf{x}) = \sum_{n \geq 1} \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2} \mathbf{y}_{n,+}^{s,d}(\mathbf{x}) h_n = \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2} (S_n^+)_m^- h_n \tilde{\mathbf{Y}}_m^s(\mathbf{x}_\Sigma).$$

#### • Expression modale du tenseur de Green obtenue en utilisant la réciprocité

Soit  $\mathbf{z} = (z_1, \mathbf{z}_\Sigma) \in \Omega_-^s$  tel que  $z_1 > -R$  et  $\mathbf{x} \in \Sigma_{-R}^s$ . La relation de réciprocité 1. écrite dans la Conjecture 9.19 donne :

$$\underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}^s, \mathbf{x}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = (\underline{\mathcal{G}}_{[\mathbf{y}^s, \mathbf{x}^s]})^\dagger(\mathbf{z}, \mathbf{x}).$$

Or, on a d'après la Proposition 9.16 :

$$\begin{aligned}\underline{\mathcal{G}}_{[\mathcal{Y}^s, \mathcal{X}^s]}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) &= -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \tilde{\mathcal{Y}}_{n,+}^s(\mathbf{z}) \otimes \tilde{\mathcal{Y}}_{n,-}^s(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (\mathcal{Y}_{n,+}^{s,r} - \tilde{\mathcal{Y}}_{n,+}^s)(\mathbf{z}) \otimes \tilde{\mathcal{Y}}_{n,-}^s(\mathbf{x}) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \mathcal{Y}_{n,+}^{s,r}(\mathbf{z}) \otimes \tilde{\mathcal{Y}}_{n,-}^s(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Il découle alors par transposition du produit tensoriel de deux tenseurs d'ordre 1 que :

$$\underline{\mathcal{G}}_{[\mathcal{Y}^s, \mathcal{X}^s]}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \tilde{\mathcal{Y}}_{n,-}^s(\mathbf{x}) \otimes \mathcal{Y}_{n,+}^{s,r}(\mathbf{z}).$$

Il vient enfin :

$$(\underline{\mathcal{G}}_{[\mathcal{Y}^s, \mathcal{X}^s]}(\cdot, \mathbf{z})\mathbf{p})|_{\Sigma_{-R}^s} = -\sum_{n \geq 1} \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2} (\mathcal{Y}_{n,+}^{s,r}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{p}) \tilde{\mathbf{Y}}_n^s.$$

Soit  $\mathbf{z}^{\text{sf}} \in \Omega_+^{s \times f}$ , la Proposition 9.16 donne :

$$\underline{\mathcal{G}}_{[\mathcal{Y}^{\text{sf}}, \mathcal{X}^s]}(\mathbf{z}^{\text{sf}}, \mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \mathcal{Y}_{n,+}^{\text{sf},r}(\mathbf{z}^{\text{sf}}) \otimes \tilde{\mathcal{Y}}_{n,-}^s(\mathbf{x}) = -\sum_{n \geq 1} \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2} \mathcal{Y}_{n,+}^{\text{sf},r}(\mathbf{z}^{\text{sf}}) \otimes \tilde{\mathbf{Y}}_n^s(\mathbf{x}_\Sigma).$$

La relation de réciprocité 1. écrite dans la Conjecture 9.19 donne ainsi :

$$\underline{\mathcal{G}}_{[\mathcal{Y}^s, \mathcal{X}^{\text{sf}}]}(\mathbf{x}, \mathbf{z}^{\text{sf}}) = (\underline{\mathcal{G}}_{[\mathcal{Y}^{\text{sf}}, \mathcal{X}^s]})^t(\mathbf{z}^{\text{sf}}, \mathbf{x}) = -\sum_{n \geq 1} \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2} \tilde{\mathbf{Y}}_n^s(\mathbf{x}_\Sigma) \otimes \mathcal{Y}_{n,+}^{\text{sf},r}(\mathbf{z}^{\text{sf}}).$$

Séparer les composantes solides et fluide de  $\mathcal{X}^{\text{sf}} = (\mathcal{X}^s \quad \mathcal{X}^f)^t$  donne alors :

$$(\underline{\mathcal{G}}_{[\mathcal{Y}^s, \mathcal{X}^s]}(\cdot, \mathbf{z})\mathbf{p})|_{\Sigma_{-R}^s} = -\sum_{n \geq 1} \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2} (\mathcal{Y}_{n,+}^{s,r}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{p}) \tilde{\mathbf{Y}}_n^s,$$

et :

$$(\underline{\mathcal{G}}_{[\mathcal{Y}^s, \mathcal{X}^f]}(\cdot, \mathbf{z})\mathbf{p})|_{\Sigma_{-R}^s} = -\sum_{n \geq 1} \frac{e^{\tilde{\lambda}_n R}}{2} \mathcal{Y}_{n,+}^{f,r}(\mathbf{z}) \tilde{\mathbf{Y}}_n^s.$$



# **Conclusion générale**

Dans ce mémoire, nous avons proposé de nouveaux outils pour étudier mathématiquement la propagation des ondes dans les guides d'ondes partiellement enfouis, simuler ces phénomènes de propagation d'ondes et enfin identifier des défauts dans la partie inaccessible de ces structures à l'aide de mesures d'ondes diffractées. Cependant, un certain nombre de questions soulevées par ces travaux restent ouvertes. Nous en évoquons quelques-unes.

## Questions ouvertes

Pour nous ramener à un domaine borné dans la direction transverse, nous avons tronqué la partie enfouie de la structure par des PML finies. Il a résulté de cette opération la perte du caractère autoadjoint de l'opérateur transverse dont les valeurs et fonctions propres correspondent aux modes. Nous ignorons si les fonctions transverses forment une base de Riesz. Par conséquent, les décompositions modales écrites dans les **Partie II** et **Partie III** ne sont pas justifiées. À défaut de prouver cette propriété de complétude, il serait intéressant d'essayer de justifier les décompositions modales de la fonction de Green donnée par le Lemme 6.8 en acoustique et du tenseur de Green donné par la Proposition 9.8 en interaction fluide-structure. Cela nous permettrait par convolution de décomposer les solutions des équations du problème sur les modes.

Au **chapitre 5**, nous avons proposé de tronquer longitudinalement la partie enfouie du domaine à l'aide d'un opérateur DtN avec recouvrement. Cet opérateur a été approché avec un nombre fini de modes associés à des valeurs propres  $\lambda$  situées dans la bande  $-\beta < \Re(\lambda) < 0$  pour  $\beta > 0$  fixé. Avec le Théorème 5.30, nous avons pu montrer que la solution approchée avec cette méthode est exponentiellement proche de la solution exacte en norme  $H^1$  vis-à-vis de l'épaisseur du recouvrement. L'estimation d'erreur fait cependant intervenir une constante  $C_\beta > 0$  dont nous n'avons pas réussi à expliciter la dépendance en  $\beta$ , ce qui est important pour conclure précisément quant à la vitesse de convergence vis-à-vis de l'ordre de troncature  $\beta$ .

En ce qui concerne le problème direct pour un guide élastique partiellement immergé dans un fluide tronqué transversalement par des PML traité au **chapitre 8**, le caractère Fredholm du problème n'a pas été démontré. Adapter la théorie de Kondratiev présentée en acoustique au **chapitre 5** à ce contexte pourrait nous permettre de répondre à cette question.

Enfin, nous avons vu au **chapitre 9** que la justification de la Linear Sampling Method dans les guides élastiques partiellement immergés nécessite l'utilisation de certaines relations de réciprocité satisfaites par le tenseur de Green en variables  $\mathbf{XY}$ . Il est facile de voir à l'aide des décompositions modales explicites du tenseur de Green que ces relations de réciprocité sont satisfaites pour un guide rectiligne. Pour la jonction de deux guides, de telles décompositions modales explicites ne sont plus disponibles, et nous n'avons pas pu prouver que ces relations de réciprocité sont toujours valables. Démontrer ces relations données dans la Conjecture 9.19 permettrait alors de justifier mathématiquement la méthode d'imagerie retenue, qui par ailleurs donne de bons résultats numériques.

Outre les questions ouvertes que nous venons de mentionner, les travaux conduits dans ce mémoire laissent entrevoir plusieurs perspectives d'extensions.

## Extensions

Pour le problème direct en élasticité traité au **chapitre 8**, nous avons vu que la troncature longitudinale de la partie immergée de la structure à l'aide d'un opérateur  $YtX$  introduit

des réflexions dans la PML liées à la prise en compte de modes parasites. Développer une méthode approchée faisant intervenir un opérateur avec recouvrement permettrait de réduire ces réflexions et d'obtenir des résultats plus précis. Pour cela, on pourrait par exemple étendre l'opérateur YtR (Y-to-Robin) avec recouvrement introduit dans [Ton15] pour effectuer des calculs dans un guide élastique fermé.

En ce qui concerne le problème inverse, il est nécessaire d'effectuer des mesures à la surface du guide et non dans sa section pour se rapprocher davantage des configurations réelles de contrôle non destructif. Lorsque le capteur est situé au niveau de la partie accessible de la structure, il est possible de passer directement des mesures dans la section du guide à des mesures sur sa surface grâce à la procédure développée dans [Rec18]. Nous pourrions alors tester la méthode d'imagerie avec des données expérimentales. Il pourrait aussi être intéressant de considérer des capteurs à l'interface entre le cœur et la gaine de la partie inaccessible de la structure. Ces capteurs intégrés permettraient de prendre aussi en compte le cas de figure où on émet et mesure des champs diffractés dans la partie inaccessible de la structure. Le passage des mesures dans la section à des mesures ponctuelles serait alors plus complexe, mais toujours essentiel en vue de l'écriture d'une formulation modale de la LSM. Toujours dans cet objectif de se rapprocher davantage d'une configuration d'imagerie réaliste, nous pourrions étendre nos travaux à d'autres types d'obstacles comme des trous (obstacles de Neumann), des fissures ou même des obstacles pénétrables.

D'une façon générale, la plupart des outils que nous avons développés dans la **Partie III** pourraient être adaptés au cas d'un guide élastique partiellement enfoui dans un solide élastique isotrope constitué de matériaux différents (par exemple une plaque d'acier partiellement enfouie dans du béton) ayant déjà été abordé dans [Gal18], mais avec des techniques différentes. En particulier, il nous semble possible d'adapter le formalisme **XY** à ce contexte pour résoudre le problème direct à l'aide d'un opérateur de type YtX, mais aussi le problème inverse à l'aide d'une formulation modale de la LSM reposant sur ce formalisme. Toutefois, une analyse mathématique rigoureuse de ce problème serait bien plus difficile que dans notre cas d'interaction fluide-structure. Cette difficulté résiderait entre autres dans la nécessité de tronquer transversalement le domaine solide par des PML, ce qui est plus difficile en élasticité. L'étude du spectre, et en particulier l'approximation du spectre essentiel traduisant le comportement des ondes à l'infini, serait plus délicate du fait de la plus grande richesse des modes en élasticité. Enfin, la présence d'anisotropie dans le milieu environnant nécessiterait peut-être de tronquer transversalement le solide environnant autrement qu'avec des PML, par exemple à l'aide de la Half Space Matching Method [Béc+22].





# **Annexes**

# Annexe A

## Analyse fonctionnelle

Nous débutons cette annexe en rappelant le célèbre théorème de Rouché en analyse complexe ainsi qu'un théorème de point fixe.

### **Théorème A.1** (Théorème de Rouché)

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions méromorphes dans un ouvert  $O \subset \mathbb{C}$ , connexe et à frontière régulière, qui ne présentent ni pôle ni racine sur  $\partial O$ . Si ces fonctions vérifient :

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|, \quad \forall z \in \partial O,$$

alors  $Z_f - P_f = Z_g - P_g$ , où pour  $h \in \{f, g\}$ , la quantité  $Z_h$  désigne le nombre de zéros de  $h$  comptés avec leur multiplicité algébrique et la quantité  $P_h$  désigne le nombre de pôles de  $h$  comptés avec leur multiplicité algébrique.

### **Théorème A.2** [Bre10]

Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet et  $T : X \rightarrow X$  une application contractante, c'est-à-dire pour laquelle il existe  $0 \leq k < 1$  tel que :

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y), \quad \forall (x, y) \in X^2.$$

Alors  $T$  admet un unique point fixe dans  $X$ .

Nous donnons ensuite le théorème de Steinberg, aussi appelé théorème de Fredholm analytique, relatif aux familles analytiques d'opérateurs compacts.

### **Théorème A.3** (Théorème de Fredholm analytique) [Ste68]

Soit  $O$  un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$ ,  $E$  un espace de Banach et  $T : O \rightarrow \mathcal{L}(E)$  une famille analytique d'opérateurs  $T(\lambda)$  compacts pour tout  $\lambda \in O$ . Alors on a l'alternative suivante :

1.  $I - T(\lambda)$  n'est pas inversible pour tout  $\lambda \in O$ ;
2.  $(I - T(\lambda))^{-1}$  est méromorphe dans  $O$ , ce qui signifie que  $I - T(\lambda)$  est inversible excepté pour un ensemble dénombrable de  $\lambda$ .

Le résultat suivant est dans certains cas très pratique pour montrer qu'un opérateur est autoadjoint.

**Proposition A.4**

Soit  $H$  un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_H$  et  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur à domaine symétrique satisfaisant  $\text{Im}(A+S) = H$  pour un opérateur autoadjoint  $S : H \rightarrow H$ . Alors  $D(A)$  est dense dans  $H$  et  $A$  est autoadjoint.

*Démonstration.* • Densité du domaine

Montrer que  $D(A)$  est dense dans  $H$  revient à prouver que  $D(A)^\perp = \{0\}$ . Soit  $w \in D(A)^\perp$ . Puisque  $\text{Im}(A+S) = H$ , il existe  $u \in D(A)$  tel que  $w = Au + Su$ . On a donc en utilisant la symétrie de  $A$  et  $S$  :

$$0 = (w, v)_H = (Au + Su, v)_H = (u, Av + Sv)_H, \quad \forall v \in D(A).$$

Par conséquent,  $u \in \text{Im}(A+S)^\perp = \{0\}$ . On a donc  $u = 0$  et par suite  $w = 0$ .

• Caractère autoadjoint

Puisque  $A$  est symétrique, il suffit de montrer que  $D(A^*) \subset D(A)$ . Soit  $w \in D(A^*)$ , comme  $\text{Im}(A+S) = H$ , il existe  $u \in D(A)$  tel que  $A^*w + Sw = Au + Su$ . On a donc en utilisant le caractère autoadjoint de  $S$  et la symétrie de  $A$  :

$$(w, Av + Sv)_H = (A^*w + Sw, v)_H = (Au + Su, v)_H = (u, Av + Sv)_H, \quad \forall v \in D(A).$$

En utilisant l'égalité  $\text{Im}(A+S) = H$ , on obtient  $(w-u) \in H^\perp = \{0\}$ . Par conséquent :  $w = u \in D(A)$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

Dans le reste de cette annexe, nous rappelons différents résultats d'analyse fonctionnelle pour les espaces de Sobolev.

**Lemme A.5**

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $1 \leq d \leq 3$ , de frontière Lipschitz  $\partial\Omega$  et de normale unitaire sortante  $\mathbf{n}$ . Soit  $(\gamma_n, u_n)_{n \geq 0}$  les solutions, comptées avec leur ordre de multiplicité, du problème aux valeurs propres :

$$\text{Trouver } (\gamma, u) \in \mathbb{C} \times H^1(\Omega) \setminus \{0\} \text{ tel que}$$

$$\begin{cases} -\Delta u = \gamma u & \text{dans } \Omega \\ \partial_{\mathbf{n}} u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors, on a pour tout  $s \in \mathbb{R}$  :

$$H^s(\Omega) = \left\{ u \in D'(\Omega) \mid \sum_{n \geq 0} (1 + \gamma_n)^s |(u, u_n)_{L^2(\Omega)}|^2 < +\infty \right\}.$$

**Théorème A.6** [Gri92]

Soit  $\Omega$  un ouvert Lipschitz borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $1 \leq d \leq 3$ . On note  $H_0^s(\Omega)$  la fermeture de  $D(\Omega)$  dans  $H^s(\Omega)$ , puis  $H_e^s(\Omega)$  l'ensemble des fonctions  $u$  de  $\Omega$  telles que  $E(u) \in H^s(\mathbb{R}^d)$ , où  $E(u)$  désigne le prolongement de  $u$  par 0 en dehors de  $\Omega$ . Si  $s \geq 0$  n'est pas un entier, on a

l'égalité :

$$H_e^s(\Omega) = H_0^s(\Omega).$$

Si de plus  $0 \leq s < \frac{1}{2}$ , on a aussi :

$$H_e^s(\Omega) = H^s(\Omega) = H_0^s(\Omega).$$

**Théorème A.7** (Lemme de Lions)

Soit  $\Omega$  un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^d$ ,  $1 \leq d \leq 3$ , à frontière  $\Gamma$  Lipschitz continue et tel que  $\Omega$  soit localement d'un seul côté de  $\Gamma$ . Si  $v \in D'(\Omega)$  vérifie  $\partial_{x_i} v \in H^{-1}(\Omega)$  pour  $1 \leq i \leq d$ , alors  $v \in L^2(\Omega)$ .

**Théorème A.8** (Inégalité de Korn) [Cia10]

Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^d$ ,  $1 \leq d \leq 3$ . Il existe une constante  $C(\Omega) > 0$  telle que pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  :

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C(\Omega) (\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\underline{\epsilon}(\mathbf{v})\|_{\underline{\mathbf{L}}^2(\Omega)}),$$

où  $\mathbf{L}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^d$ ,  $\mathbf{H}^1(\Omega) = (H^1(\Omega))^d$  et  $\underline{\mathbf{L}}^2(\Omega)$  désigne l'ensemble des tenseurs symétriques d'ordre 2. Ces espaces sont munis en en coordonnées cartésiennes des normes :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &:= \left( \sum_{i=1}^d \|v_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} &:= \left( \sum_{i=1}^d \|v_i\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|\underline{\epsilon}\|_{\underline{\mathbf{L}}^2(\Omega)} &:= \left( \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \|\epsilon_{ij}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

**Lemme A.9**

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ ,  $1 \leq d \leq 3$ . S'il est borné dans une direction, on suppose que sa frontière est Lipschitz. Alors, pour  $u \in H^{-1}(\Omega)$  et  $f \in W^{1,\infty}(\Omega)$  on a  $fu \in H^{-1}(\Omega)$ .

*Démonstration.* Donnons la preuve dans le cas où  $\Omega$  est borné dans au moins une direction. On écrit pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$  :

$$\langle fu, v \rangle := \langle u, fv \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \tag{A.1}$$

Cette expression a un sens puisque  $fv \in L^2(\Omega)$  et  $\partial_{x_i}(fv) \in L^2(\Omega)$  pour  $1 \leq i \leq d$ . Ainsi,  $fv \in H^1(\Omega)$ . Il existe de plus une suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  de  $D(\Omega)$  qui tend vers  $f$  dans  $W^{1,\infty}(\Omega)$ . Or, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n v \in H_0^1(\Omega)$ . Puisque  $H_0^1(\Omega)$  est fermé, cela implique que  $fv \in H_0^1(\Omega)$ . On en conclut d'après (A.1) que  $fu \in H^{-1}(\Omega)$ .  $\square$

# Annexe B

## Théorie spectrale

Nous rappelons ici quelques éléments de théorie spectrale. On considère un espace de Hilbert  $H$ , muni d'un produit scalaire noté  $(\cdot, \cdot)_H$  et dont la norme associée sera notée  $\|\cdot\|_H$ . Nous allons considérer sur cet espace un opérateur  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  fermé ayant un domaine  $D(A)$  dense dans  $H$ .

### Définition B.1

On appelle *ensemble résolvant* de  $A$ , l'ensemble :

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda I \text{ est bijectif de } D(A) \text{ dans } H\}.$$

On définit alors la *résolvante* de  $A$  comme étant l'application  $R_A : \rho(A) \rightarrow \mathcal{L}(H)$  définie pour tout  $\lambda \in \rho(A)$  par  $R_A(\lambda) := (A - \lambda I)^{-1}$ .

On appelle enfin *spectre* de  $A$  l'ensemble :

$$\Lambda(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

En toute généralité, le spectre se décompose comme l'union disjointe :

$$\Lambda(A) = \Lambda_p(A) \cup \Lambda_c(A) \cup \Lambda_r(A),$$

où :

- $\Lambda_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}\}$  est appelé *spectre ponctuel* ;
- $\Lambda_c(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Ker}(A - \lambda I) = \{0\}, \text{Im}(A - \lambda I) \neq H \text{ et } \overline{\text{Im}(A - \lambda I)} = H\}$  est appelé *spectre continu* ;
- $\Lambda_r(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Ker}(A - \lambda I) = \{0\} \text{ et } \overline{\text{Im}(A - \lambda I)} \neq H\}$  est appelé *spectre résiduel*.

Les éléments de  $\Lambda_p(A)$  sont appelés *valeurs propres* de  $A$ . Pour  $\lambda \in \Lambda_p(A)$ , on appelle *fonction propre* ou *vecteur propre* associé à  $\lambda$  tout élément  $u \in \text{Ker}(A - \lambda I) \setminus \{0\}$ . On appelle *multiplicité géométrique* de  $\lambda$  la quantité  $\dim(\text{Ker}(A - \lambda I))$ , qui peut être finie ou non.

Le spectre résiduel peut être caractérisé à l'aide du spectre ponctuel de  $A$  et du spectre ponctuel de l'opérateur adjoint noté  $A^*$ .

**Lemme B.2**

On a l'équivalence :

$$\lambda \in \Lambda_r(A) \iff \lambda \in \overline{\Lambda_p(A^*)} \setminus \Lambda_p(A).$$

*Démonstration.* On a la succession d'équivalences :

$$\begin{aligned} & \lambda \in \Lambda_r(A) \\ \iff & \begin{cases} \text{Ker}(A - \lambda I) = \{0\} \\ \overline{\text{Im}(A - \lambda I)} \neq H \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \lambda \notin \Lambda_p(A) \\ \text{Ker}(A^* - \bar{\lambda}I)^\perp \neq H \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \lambda \notin \Lambda_p(A) \\ \text{Ker}(A^* - \bar{\lambda}I) \neq \{0\} \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \lambda \notin \Lambda_p(A) \\ \bar{\lambda} \in \Lambda_p(A^*), \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

Lorsqu'un opérateur est à résolvante compacte, il est possible de montrer que son spectre est purement ponctuel.

**Théorème B.3** [Kat13, Théorème 6.29]

Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur linéaire fermé tel que sa résolvante  $R_A(\lambda_0)$  est compacte pour un  $\lambda_0 \in \rho(A)$ . Alors, le spectre de  $A$  est entièrement constitué de valeurs propres isolées de multiplicité finie et la résolvante est compacte dans l'ensemble résolvant.

On considère maintenant un opérateur autoadjoint, c'est-à-dire vérifiant  $A^* = A$ . Dans ce cas, le spectre peut se décomposer comme l'union disjointe :

$$\Lambda(A) = \Lambda_d(A) \cup \Lambda_e(A),$$

où :

- $\Lambda_d(A)$  appelé *spectre discret* est l'ensemble des éléments de  $\Lambda_p(A)$  de multiplicité géométrique finie et isolés dans le spectre ;
- $\Lambda_e(A) := \Lambda(A) \setminus \Lambda_d(A)$  est appelé *spectre essentiel*.

On peut montrer que  $\Lambda(A) \subset \mathbb{R}$ , ce qui n'est en général pas le cas pour des opérateurs non autoadjoints. De plus, comme le spectre résiduel est vide pour un opérateur autoadjoint, on voit facilement qu'on a l'inclusion  $\Lambda_c(A) \subset \Lambda_e(A)$ .

Si la résolvante de l'opérateur est en plus compacte dans l'ensemble résolvant, on a le résultat suivant.

**Théorème B.4** (Théorème spectral)

Soit  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur autoadjoint à résolvante compacte (i.e.  $R_A(\lambda)$  est compacte pour tout  $\lambda \in \rho(A)$ ) pour lequel il existe une constante  $c \in \mathbb{R}$  telle que  $(Au, u)_H \geq c\|u\|_H^2$ ,  $\forall u \in D(A)$ . Alors, il existe une suite réelle  $(\lambda_n)_{n \geq 0}$  et une base orthonormale complète  $\{u_n \in D(A) \mid n \geq 0\}$  de  $H$  telles que :

$$\begin{cases} \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty \\ Au_n = \lambda_n u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Nous avons défini le spectre essentiel d'un opérateur autoadjoint comme étant le complémentaire du spectre discret, mais il est possible d'en donner d'autres définitions. Par exemple, on peut le définir comme étant la partie du spectre stable par perturbation compacte ou comme l'ensemble des éléments du plan complexe caractérisés par une suite appelée suite de Weyl. Lorsque l'opérateur n'est plus autoadjoint, ces définitions ne coïncident généralement plus. Parmi toutes les définitions données dans la littérature, nous donnons la suivante.

$$\Lambda_{e,W}(A) := \mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(A - \lambda I) \text{ est fermée et } \dim(\ker(A - \lambda I)) < +\infty\}. \quad (\text{B.1})$$

Pour caractériser cet ensemble, nous avons besoin d'introduire les objets suivants.

**Définition B.5**

Soit  $H$  un Hilbert et  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur fermé. On appelle *suite de Weyl* de  $A$  associée à  $\lambda \in \mathbb{C}$ , toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $D(A)$  vérifiant les points suivants :

1.  $\|u_n\|_H = 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ;
2.  $u_n \rightarrow 0$  dans  $H$ ;
3.  $(A - \lambda I)u_n \rightarrow 0$  dans  $H$ .

On a alors la caractérisation suivante.

**Proposition B.6** [EE18, Théorème IX.1.3]

Soit  $A$  un opérateur fermé de domaine dense. Nous avons l'équivalence entre les deux points suivants :

1.  $\lambda \in \Lambda_{e,W}(A)$ ;
2. il existe une suite de Weyl associée à  $A$ .





# Liste des notations

## Acronymes

PML	Perfectly Matched Layers
LSM	Linear Sampling Method
SAFE	Semi Analytical Finite Elements
DtN	Dirichlet-to-Neumann
YtX	Y-to-X
CEA	Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives
ENSTA	École Nationale Supérieure de Techniques Avancées

## Abréviations

i.e.	id est
e.g.	exempli gratia
cf.	confere

## Divers

$\Re(z)$	partie réelle d'un nombre complexe $z$
$\Im(z)$	partie imaginaire d'un nombre complexe $z$
$\text{Ker}(A)$	noyau d'un opérateur $A$
$\text{Im}(A)$	image d'un opérateur $A$
$D(A)$	domaine d'un opérateur $A$
$A^*$	adjoint d'un opérateur $A$
$\text{supp}(f)$	support d'une fonction ou d'une distribution
$\overline{X}$	adhérence d'une sous-partie $X$ d'un espace topologique
$f _X$	restriction d'une fonction ou d'une distribution $f$ à une sous-partie $X$ de son ensemble de définition
$I$	application identité
$\underline{M}^t$	transposée (non hermitienne) d'une matrice $\underline{M}$

### Ensembles

$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{R}$	ensemble des réels
$\mathbb{R}^+$	ensemble des réels positifs
$\mathbb{R}^-$	ensemble des réels négatifs
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes

### Espaces fonctionnels

$\Omega$	ouvert de $\mathbb{R}^d$ pour $1 \leq d \leq 3$
$\partial\Omega$	bord de $\Omega$
$\mathcal{C}^0(\Omega)$	espace des fonctions continues sur $\Omega$
$\mathcal{C}^k(\Omega)$	espace des fonctions $k$ fois différentiables sur $\Omega$ pour $k \in \mathbb{N}$
$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$	espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $\Omega$
$D(\Omega)$	espace des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact dans $\Omega$
$D'(\Omega)$	espace dual de $D(\Omega)$ (espace des distributions)
$S(\mathbb{R}^d)$	espace des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ à décroissance rapide (espace de Schwartz)
$S'(\mathbb{R}^d)$	espace dual de $S(\mathbb{R}^d)$ (espace des distributions tempérées)
$L^\infty(\Omega)$	espace des distributions bornées sur $\Omega$
$W^{m,\infty}(\Omega)$	$:= \{v \in D'(\Omega) \mid \partial_\alpha v \in L^\infty(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d \text{ tel que }  \alpha  \leq m\}$ pour $m \in \mathbb{N}$
$L^2(\Omega)$	$:= \left\{ v \in D'(\Omega) \mid \int_\Omega  u ^2 dx < +\infty \right\}$
$H^m(\Omega)$	$:= \{v \in D'(\Omega) \mid \partial_\alpha v \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d \text{ tel que }  \alpha  \leq m\}$ pour $m \in \mathbb{N}$
$H_0^1(\Omega)$	espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ ayant une trace nulle lorsque $\Omega$ est borné à frontière régulière
$H^{-1}(\Omega)$	espace dual de $H_0^1(\Omega)$ lorsque $\Omega$ est borné à frontière régulière
$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$	$:= \{u _{\partial\Omega} \mid u \in H^1(\Omega)\}$ lorsque $\Omega$ est borné à frontière régulière
$H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$	espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	$:= \{u _\Gamma \mid u \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\}$ lorsque $\Gamma$ est une partie ouverte de $\partial\Omega$ pour la topologie induite
$\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	$:= \{u \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \mid \text{supp}(u) \subset \bar{\Gamma}\}$ lorsque $\Gamma$ est une partie ouverte de $\partial\Omega$ pour la topologie induite
$\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	$:= \{u \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \mid \text{supp}(u) \subset \bar{\Gamma}\} = (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))^*$ lorsque $\Gamma$ est une partie ouverte de $\partial\Omega$ pour la topologie induite

---

$\ell^2(\mathbb{C})$	espace des suites à coefficients complexes de carré sommable
$V^*$	dual topologique d'un espace $V$
$\mathcal{L}(E, F)$	ensemble des opérateurs bornés de $E$ dans $F$ ( $E$ et $F$ sont des espaces de Banach)
$\mathcal{L}(E)$	$:= \mathcal{L}(E, E)$

**Opérateurs**

$\nabla u$	gradient d'un champ scalaire $u$
$\underline{\nabla} \mathbf{u}$	gradient d'un champ vectoriel $\mathbf{u}$
$\Delta$	opérateur Laplacien agissant sur des champs scalaires ou vectoriels
$\operatorname{div}(\mathbf{u})$	divergence d'un champ vectoriel
$\operatorname{rot}(\mathbf{u})$	rotationnel d'un champ vectoriel
$\underline{\epsilon}(\mathbf{u})$	$:= \frac{1}{2}(\underline{\nabla} \mathbf{u} + (\underline{\nabla} \mathbf{u})^t)$ tenseur des déformations linéarisé
$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$	$:= (u_i v_j)_{1 \leq i, j \leq d}$ : produit tensoriel de deux champs vectoriels
$\underline{A} : \underline{B}$	$:= \sum_{1 \leq i, j \leq d} A_{ij} B_{ji}$ : produit doublement contracté de tenseurs d'ordre 2
$(\cdot, \cdot)_H$	produit scalaire dans un espace de Hilbert $H$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produit de dualité au sens des distributions
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^*, V}$	produit de dualité entre les espaces $V^*$ et $V$



# Liste des figures

I0.1	Exemples d'essais de CND réalisés au CEA LIST. . . . .	3
I1.1	Géométrie d'un guide fermé 2D. . . . .	10
1.1	Deux feuillets de la surface de Riemann de la racine carrée. . . . .	16
1.2	Représentation d'une surface de Riemann pour la racine carrée. . . . .	16
1.3	Exemple de représentation des nombres d'onde longitudinaux $\pm\lambda_n$ dans le plan complexe. Ronds rouges : modes propagatifs, carrés bleus : modes évanescents. . . . .	17
1.4	Représentation des courbes de dispersion pour les deuxième et troisième modes propagatifs. . . . .	19
2.1	Exemple de jonction de deux guides fermés. . . . .	22
2.2	Plus petite valeur propre en module de la matrice discrétisée $\mathbb{A}^{\widetilde{M},M}$ avec $\widetilde{M} = \widetilde{N}_p + N_{\text{evan}}$ et $M = N_p + N_{\text{evan}}$ , pour différents nombres $N_{\text{evan}}$ de modes évanescents pris en compte. Problème non régularisé : $\varepsilon = 0$ , problème régularisé : $\varepsilon = 10^{-6}$ . . . . .	32
2.3	Partie réelle du champ de référence $\varphi_{0,+}^r$ calculée avec des DtN (a) et la technique du mode-matching non régularisé (b) et régularisée (c,d). reur ponctuelle $\mathcal{E}_0 := \log \left(  \varphi_{0,+}^r(\text{DtN}) - \varphi_{0,+}^r(\text{MM})  / \ \varphi_{0,+}^r(\text{DtN})\ _{L^\infty} \right)$ entre la solution obtenue avec DtN (a) et celle obtenue avec le mode-matching (d,e,f). Erreur $L^2$ relative : $\mathcal{E}_2 := \ \varphi_{0,+}^r(\text{DtN}) - \varphi_{0,+}^r(\text{MM})\ _{L^2} / \ \varphi_{0,+}^r(\text{DtN})\ _{L^2}$ . . . . .	33
2.4	Parties réelle et imaginaire des champs $\varphi_{1,-}^p$ et $\varphi_{1,+}^p$ pour un obstacle de Dirichlet. . . . .	37
3.1	Jonction des deux guides fermés $\Omega := \Omega_- \cup \Sigma_{0-} \cup \Omega_+$ . . . . .	42
3.2	Échantillonnage en configuration full-scattering. . . . .	45
3.3	Full-scattering, $\sigma = 0,01$ . Gauche : $\kappa_- = \kappa_+ = 20$ , $\widetilde{N}_p = 4$ , $N_p = 7$ . Droite : $\kappa_- = \kappa_+ = 40$ , $\widetilde{N}_p = 8$ , $N_p = 13$ . . . . .	53
3.4	Full-scattering. Haut : gauche $\sigma = 0,01$ , droite $\sigma = 0,05$ . Bas : gauche $\sigma = 0,1$ , droite $\sigma = 0,2$ . . . . .	53
3.5	Back-scattering. Haut : gauche $h_- = 0,3$ , $\kappa_- = 40$ , $\widetilde{N}_p = 8$ . Bas : gauche $h_- = 0,4$ , $\kappa_- = 40$ , $\widetilde{N}_p = 11$ , droite $h_- = 0,3$ , $\kappa_- = 55$ , $\widetilde{N}_p = 11$ . . . . .	54
I2.1	Géométrie 2D d'un guide partiellement enfoui. . . . .	57
I2.2	Géométrie 2D d'un guide partiellement enfoui tronqué dans la direction transverse par des PML bornées. . . . .	58
4.1	Géométrie 2D d'un guide ouvert. . . . .	62
4.2	Représentation dans le plan complexe d'un exemple de spectre de l'opérateur $L_0$ pour des matériaux satisfaisant $c_0 < c_\infty$ . Ronds verts : spectre discret, demi-droite bleue : spectre essentiel. . . . .	64

4.3	Représentation des feuillet entrant et sortant sur les domaines physique et non physique. La flèche remplie de traits horizontaux (respectivement de points) symbolise le prolongement analytique sur le feuillet sortant (respectivement entrant).	71
4.4	Géométrie 2D d'un guide ouvert avec des PML infinies	72
4.5	Représentation dans le plan complexe d'un exemple de spectre de l'opérateur $L_1$ pour des matériaux satisfaisant $c_0 < c_\infty$ . Ronds verts : $\Lambda_d(L_0)$ , étoiles rouges : $\Lambda_f(L_1)$ et demi-droite bleue : $\Lambda_e(L_1)$ .	76
4.6	Géométrie 2D d'un guide ouvert tronqué avec des PML finies noté $W$ .	79
4.7	Représentation des domaines $D_\alpha^i$ $i = 1, 2$ .	84
4.8	Représentation dans le plan complexe d'un exemple de spectre de l'opérateur $L_2$ pour des matériaux satisfaisant $c_0 < c_\infty$ . Ronds verts : approximation de $\Lambda_d(L_0)$ , étoiles rouges : approximation de $\Lambda_f(L_1)$ et carrés bleu : approximation de $\Lambda_e(L_1)$ .	85
4.9	Nombres d'ondes longitudinaux $\lambda$ dans le plan complexe pour un profil abrupt de PML avec $\alpha_\infty = e^{-i\pi/3}$ . Cercles rouges : approximation de modes exacts, triangles verts : modes parasites.	91
4.10	Représentation 2D de la partie réelle de l'approximation d'un mode à fuite (a) et d'un mode de PML (b).	92
4.11	Nombres d'ondes longitudinaux $\lambda$ dans le plan complexe. À gauche : profil abrupt de PML avec $\alpha_\infty = e^{-i\pi/3}$ et la PML collée au cœur ( $h_1 = h_0 = 5$ et $h_2 = 10$ ), à droite : profil parabolique de PML avec $\hat{\eta} = 2 + 2i$ et la PML non collée au cœur ( $h_0 = 5$ , $h_1 = 7, 5$ et $h_2 = 12, 5$ ). Cercles rouges : approximation de modes exacts, triangles verts : modes parasites.	93
4.12	Valeurs du ratio $r_E$ des modes (indexés par $\lambda_n$ croissant). Disques rouges : modes à fuite, carrés bleus : modes de PML et triangles verts : modes parasites. Hauteurs : $h_0 = 5$ , $h_1 = 6, 5$ et $h_2 = 11, 5$ . Gauche : profil abrupt de PML avec $\alpha_\infty = e^{-i\pi/3}$ , droite : profil parabolique de PML avec $\hat{\eta} = 2 + 2i$ .	94
4.13	Nombres d'ondes longitudinaux dans le plan complexe pour. Cercles rouges : modes à fuite, carrés bleus : modes de PML et triangles verts : modes parasites. Hauteurs : $h_0 = 5$ , $h_1 = 6, 5$ et $h_2 = 11, 5$ . Gauche : profil abrupt de PML avec $\alpha_\infty = e^{-i\pi/3}$ , droite : profil parabolique de PML avec $\hat{\eta} = 2 + 2i$ .	94
5.1	Représentation d'une fonction $u \in K_\beta^1(\mathbb{R})$ .	100
5.2	Localisation de $\Lambda(\mathcal{L})$ donnée par le Lemme 5.11.	106
5.3	$\Re(u_{R,R'}^\beta)$ pour un profil abrupt de PML à gauche et un profil parabolique à droite.	131
5.4	$\Re(u_{R,R'}^\beta)$ avec un DtN fin à gauche et un DtN avec recouvrement à droite.	132
5.5	Erreur relative $\mathcal{E}(R')$ pour de gauche à droite $R' = 4$ , $R' = 5$ , $R' = 6$ , $R' = 7$ et $R' = 8$ .	132
5.6	Estimation d'erreur $\mathcal{E}_\beta$ en fonction de l'épaisseur du recouvrement ( $R' - R$ ). Bleu : $\beta = 0, 038$ , rouge : $\beta = 0, 073$ , vert : $\beta = 0, 21$ , jaune : $\beta = 1, 07$ et noir $\beta = 1, 62$ . En haut à gauche : profil de PML abrupt, en haut à droite : profil de PML parabolique et en bas : profil abrupt de PML collée au cœur.	133
6.1	Configuration réelle d'inspection dans un guide partiellement enfoui.	138
6.2	Configuration numérique d'inspection dans un guide partiellement enfoui.	139
6.3	Contour d'intégration $\mathcal{C}_H$ pour le théorème des résidus.	144

6.4	Choix de la fonction de Green. En haut à gauche : résolution de (6.36), en haut à droite (6.37) et en bas : résolution de l'équation de champ proche avec la fonction de Green $\tilde{G}$ du guide fermé gauche. . . . .	156
6.5	Troncature de la fonction de Green utilisée dans (6.36) pour $z_1 > 0$ . Rang de troncature en haut à gauche : $\tilde{N}_p - 1$ , en haut à droite : $\tilde{N}_p + 1$ et en bas : $\tilde{N}_p$ . . . . .	156
6.6	Impact de la fréquence. En haut à gauche : $\tilde{N}_p = 7$ , en haut à droite : $\tilde{N}_p = 13$ et en bas : $\tilde{N}_p = 26$ . . . . .	157
6.7	Impact du bruit. En haut à gauche : $\sigma = 0,01$ , en haut à droite : $\sigma = 0,1$ et en bas : $\sigma = 0,2$ . . . . .	158
6.8	Influence de la distance entre les défauts et la jonction sur la qualité de reconstruction. Gauche : un défaut, droite : deux défauts, dont un est fixe. . . . .	159
6.9	Haut : identification d'un défaut dans la gaine, milieu et bas : identification de deux défauts dont l'un au moins est dans la gaine. . . . .	160
I3.1	Géométrie 2D d'un guide partiellement immergé. . . . .	163
I3.2	Géométrie 2D d'un guide partiellement immergé tronqué dans la direction transverse par des PML bornées. . . . .	165
7.1	Représentation dans le plan complexe d'un exemple de spectre de l'opérateur $A^s$ . Ronds verts : valeurs propres associées aux modes de Lamb, carrés bleus : valeurs propres associées aux modes SH. . . . .	177
7.2	Géométrie 2D d'un guide élastique immergé. . . . .	179
7.3	Représentation dans le plan complexe d'un exemple de spectre de l'opérateur $A^{sf,\infty}$ dans les paramètres $\lambda$ à gauche et $\lambda^2$ à droite. Ronds verts : éléments de $\Lambda_p(A^{sf,\infty})$ qui ne sont pas dans $\Lambda_{e,W}(A^{sf,\infty})$ , traits bleus : $\Lambda_{e,W}(A^{sf,\infty})$ (ronds bleus : éléments de $\Lambda_p(A^{sf,\infty})$ plongés dans le spectre essentiel). . . . .	193
7.4	Géométrie 2D d'un guide élastique immergé tronqué avec des PML. . . . .	201
7.5	Représentation dans le plan complexe d'un exemple de spectre de l'opérateur $A^{sf}$ dans les paramètres $\lambda$ à gauche et $\lambda^2$ à droite. Ronds verts : approximation des éléments de $\Lambda_d(A^{sf,\infty})$ , carrés bleus : approximation de $\Lambda_{e,W}(A^{sf,\infty})$ et étoiles rouges : approximation de $\Lambda_f(A^{sf,\infty})$ . . . . .	217
7.6	Nombres d'ondes longitudinaux $i\lambda$ dans le plan complexe. Ronds rouges : modes de Lamb à fuite et inhomogènes sortants, triangles verts : modes SH, carrés jaunes : modes de quasi-Scholte, losanges bleus : modes de PML et modes parasites. . . . .	237
7.7	Représentation des différents types de modes dans la section. En noir : $ \varphi $ , en bleu : $ u_1 $ , en rouge : $ u_2 $ et en vert $ u_3 $ . . . . .	238
7.8	Comparaison des nombres d'ondes longitudinaux $i\lambda$ des modes d'une plaque isolée (symboles + en noir) et de la même plaque immergée (autres symboles). . . . .	239
7.9	Représentation des nombres d'onde transverses $\beta$ calculés par la méthode SAFE-PW pour différents matériaux. Paramètres : $h_0 = 1$ cm, $\omega = 2\pi \cdot 10^5$ rad.Hz et $h = 10^{-2}$ cm. . . . .	244
7.10	Comparaison des nombres d'ondes longitudinaux $i\lambda$ associés à des modes sortants donnés par les méthodes SAFE-PW (croix noires) et SAFE-PML (autres symboles colorés). . . . .	245
7.11	Représentation des modes de quasi-Scholte pour deux fréquences différentes. En noir : $ \varphi $ , en bleu : $ u_1 $ , en rouge : $ u_2 $ et en vert $ u_3 $ . Paramètres : $h_0 = 1$ , $h_1 = 4$ $h_2 = 7$ , PML abrupte avec $\alpha_\infty = e^{-i\pi/3}$ . . . . .	247



7.12	Représentation des modes de quasi-Scholte pour différentes distances plaque-PML. En noir : $ \varphi $ , en bleu : $ u_1 $ , en rouge : $ u_2 $ et en vert $ u_3 $ . Paramètres : $\omega = 2\pi$ , PML abrupte avec $\alpha_\infty = e^{-i\pi/3}$ . . . . .	248
7.13	Représentation des modes de quasi-Scholte symétrique ( $\lambda_s$ ) et antisymétrique ( $\lambda_a$ ) calculés avec une condition de Neumann homogène ou la condition de Robin (7.103). En noir : $ \varphi $ , en bleu : $ u_1 $ , en rouge : $ u_2 $ et en vert $ u_3 $ . Paramètres : $\omega = 2\pi \cdot 10^5$ rad.Hz, profil abrupt de PML avec $\alpha_\infty = e^{-i\pi/3}$ . Valeurs calculées par la méthode SAFE-PW : 4, $11 \cdot 10^{-18} + 4, 24362i$ et $i\lambda_a \simeq 2, 31 \cdot 10^{-17} + 4, 24366i$ . . . . .	251
7.14	Représentation des modes de quasi-Scholte symétrique ( $\lambda_s$ ) et antisymétrique ( $\lambda_a$ ) calculés avec une condition de Neumann homogène ou la condition de Robin (7.103). En noir : $ \varphi $ , en bleu : $ u_1 $ , en rouge : $ u_2 $ et en vert $ u_3 $ . Paramètres : $\omega = 2\pi \cdot 10^5$ rad.Hz, profil parabolique de PML (4.31) avec $\hat{\eta} = 1 + 2i$ . Valeurs calculées par la méthode SAFE-PW : $i\lambda_s \simeq 4, 11 \cdot 10^{-18} + 4, 24362i$ et $i\lambda_a \simeq 2, 31 \cdot 10^{-17} + 4, 24366i$ . . . . .	252
7.15	Représentation des modes de quasi-Scholte symétriques calculés avec une condition de Neumann homogène ou la condition de Robin (7.103) à différentes fréquences. En noir : $ \varphi $ , en bleu : $ u_1 $ , en rouge : $ u_2 $ et en vert $ u_3 $ . Paramètres : profil parabolique de PML (4.31) avec $\hat{\eta} = 1 + 2i$ . Valeurs calculées par la méthode SAFE-PW pour $\omega = 4\pi \cdot 10^5$ rad.Hz : $i\lambda_s \simeq -2, 60 \cdot 10^{-17} + 8, 48728i$ , et pour $\omega = 6\pi \cdot 10^5$ rad.Hz : $i\lambda_s \simeq 6, 03 \cdot 10^{-18} + 12, 73092i$ . . . . .	253
7.16	Premières valeurs propres calculées dans le quart de plan $\Re(i\lambda) < 0$ , $\Im(i\lambda) > 0$ avec une condition de Neumann et une condition de Robin. Symboles "+" noirs : modes calculés avec la condition de Robin. Autres symboles : modes calculés avec une condition de Neumann homogène (cercles rouges : modes de Lamb à fuite, losanges bleus : modes de PML et carrés jaunes : modes de quasi-Scholte). Paramètres : $\omega = 2\pi \cdot 10^5$ rad.Hz, PML abrupte avec $\alpha_\infty = e^{-i\pi/3}$ . . . . .	254
8.1	Schéma illustrant le problème (8.2) en 2D. . . . .	272
8.2	Schéma illustrant le problème (8.3) en 2D. . . . .	274
8.3	Solution approchée du problème (8.8) obtenue en haut : avec un profil de PML longitudinal abrupt, en bas : avec le profil de PML longitudinal parabolique (4.31). Paramètres : $\alpha_\infty = e^{-i\pi/3}$ pour le profil abrupt et $\hat{\eta} = 1 + 2i$ pour le profil parabolique. . . . .	278
8.4	Solution approchée du problème (8.8) obtenue avec deux matériaux solides différents partiellement immergés dans de l'eau. . . . .	279
8.5	Solution approchée du problème (8.8) obtenue avec deux matériaux solides différents partiellement immergés dans du sodium liquide. . . . .	280
8.6	Solution approchée du problème (8.8) obtenue en haut : pour un obstacle de Dirichlet en forme de triangle dans le solide, en bas : pour un obstacle de Dirichlet en forme de disque dans le fluide. . . . .	281
8.7	Solution approchée du problème (8.8) obtenue en haut : pour un défaut de type corrosion du cœur élastique, en bas : pour un défaut de type dépôt sur le cœur élastique. . . . .	282
8.8	Nombres d'onde longitudinaux $\lambda$ en notation Kondratiev des modes dans une plaque d'acier immergée dans de l'eau. Cercles rouges : modes de Lamb à fuite et inhomogènes, losanges bleus : modes de PML et modes parasites, carrés jaunes : modes de quasi-Scholte. Paramètres : $h_0 = 1$ cm, $h_1 = 2$ cm, $h_2 = 5$ cm, $\omega = 6, 28 \cdot 10^5$ rad.Hz, profil de PML parabolique avec $\hat{\eta} = 4 + 3i$ . . . . .	293

8.9	(a-d) Module de la solution approchée du problème (8.18) sans obstacle avec des opérateurs YtX pour différents ordres de troncature $\beta$ à droite. (e) Module de la solution approchée du problème (8.8) avec PML longitudinales. Onde incidente : mode $A_0$ .	
8.10	(a-d) Partie réelle de la solution approchée du problème (8.18) sans obstacle avec des opérateurs YtX pour différents ordres de troncature $\beta$ à droite. (e) Partie réelle de la solution approchée du problème (8.8) avec PML longitudinales. Onde incidente : mode $A_0$ .	
8.11	(a-d) Module de la solution approchée du problème (8.18) en présence d'un obstacle de Dirichlet avec des opérateurs YtX pour différents ordres de troncature $\beta$ à droite. (e) Module de la solution approchée du problème (8.8) avec PML longitudinales. Onde incidente : mode $S_0$ .	296
8.12	(a-d) Partie réelle de la solution approchée du problème (8.18) en présence d'un obstacle de Dirichlet avec des opérateurs YtX pour différents ordres de troncature $\beta$ à droite. (e) Partie réelle de la solution approchée du problème (8.8) avec PML longitudinales. Onde incidente : mode $S_0$ .	297
9.1	Choix de différentes polarisations du tenseur de Green en variables $\mathcal{X}^{\text{sf}} = (t_2, u_1, \zeta)$ .	333
9.2	Choix de différentes polarisations du tenseur de Green en variables $\mathcal{Y}^{\text{sf}} = (u_2, t_1, \varphi)$ .	334
9.3	Identification d'un obstacle de Dirichlet en forme de disque pour différents choix de matériaux. Polarisation du tenseur de Green : $u_2$ dans le solide et $\varphi$ dans le fluide. Fréquence : $\omega = 62.3.10^5$ rad.Hz. Nombre de modes propagatifs à gauche : $\tilde{N}_p = 20$ .	335
9.4	Identification d'un défaut de type dépôt de forme rectangulaire. Polarisation du tenseur de Green : $u_2$ dans le solide et $\varphi$ dans le fluide. Fréquence : $\omega = 62.3.10^5$ rad.Hz. Nombre de modes propagatifs à gauche : $\tilde{N}_p = 20$ .	336
9.5	Identification d'un défaut de type corrosion de forme rectangulaire. Polarisation du tenseur de Green : $u_2$ dans le solide et $\varphi$ dans le fluide. Fréquence : $\omega = 62.3.10^5$ rad.Hz. Nombre de modes propagatifs à gauche : $\tilde{N}_p = 20$ .	336
9.6	Identification simultanée d'un obstacle de Dirichlet en forme de triangle dans le solide et d'un obstacle de Dirichlet en forme de disque dans le fluide à différentes fréquences. Solide : acier, fluide : eau. Polarisation du tenseur de Green : $u_2$ dans le solide et $\varphi$ dans le fluide.	337



# Liste des tableaux

5.1	Nombre de modes à fuite $N_{\text{fuite}}$ et de modes de PML $N_{\text{PML}}$ pris en compte dans la Figure 5.6 pour différentes valeurs de $\beta$ . . . . .	134
7.1	Paramètres matériaux utilisés dans le système d'unités international. . . . .	236



# Bibliographie

- [AE17] Juan Carlos ARAUJO-CABARCAS et Christian ENGSTRÖM. « On spurious solutions in finite element approximations of resonances in open systems ». In : *Computers & Mathematics with Applications* 74.10 (2017), p. 2385-2402.
- [AG17] Ali Vaziri ASTANEH et Murthy N GUDDATI. « Dispersion analysis of composite acousto-elastic waveguides ». In : *Composites Part B: Engineering* 130 (2017), p. 200-216.
- [AGH15] Lorenzo AUDIBERT, Alexandre GIRARD et Houssem HADDAR. « Identifying defects in an unknown background using differential measurements ». In : *Inverse Problems & Imaging* 9.3 (2015), p. 625.
- [AGL11] Tilo ARENS, DROSSOS GINTIDES et Armin LECHLEITER. « Direct and Inverse Medium Scattering in a Three-Dimensional Homogeneous Planar Waveguide ». In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 71.3 (2011), p. 753-772.
- [AH14] Lorenzo AUDIBERT et Houssem HADDAR. « A generalized formulation of the linear sampling method with exact characterization of targets in terms of farfield measurements ». In : *Inverse Problems* 30.3 (2014), p. 035011.
- [AIK05] Habib AMMARI, Ekaterina IAKOVLEVA et Hyeonbae KANG. « Reconstruction of a small inclusion in a two-dimensional open waveguide ». In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 65.6 (2005), p. 2107-2127.
- [Aki22a] Jean-Luc AKIAN. « A proof of the completeness of Lamb modes ». In : *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 45.3 (2022), p. 1402-1419.
- [Aki22b] Jean-Luc AKIAN. « Well-posedness of a time-harmonic elasticity problem in a half-strip ». In : *arXiv preprint arXiv:2206.11012* (2022).
- [Ans72] James H ANSELL. « The roots of the Stoneley wave equation for solid-liquid interfaces ». In : *pure and applied geophysics* 94.1 (1972), p. 172-188.
- [Are03] Tilo ARENS. « Why linear sampling works ». In : *Inverse problems* 20.1 (2003), p. 163.
- [Baq+12] François BAQUÉ et al. « Development of tools, instrumentation and codes for improving periodic examination and repair of SFRs ». In : *Science and Technology of Nuclear Installations* 2012 (2012).
- [Bar+16] Vahan BARONIAN et al. « Iterative methods for scattering problems in isotropic or anisotropic elastic waveguides ». In : *Wave Motion* 64 (2016), p. 13-33.
- [Bar+18] Vahan BARONIAN et al. « Linear sampling method applied to non destructive testing of an elastic waveguide: theory, numerics and experiments ». In : *Inverse Problems* 34.7 (2018), p. 075006.

- [Bar09] Vahan BARONIAN. « Couplage des méthodes modale et éléments finis pour la diffraction des ondes élastiques guidées - Application au Contrôle Non Destructif ». Thèse de doct. Nov. 2009.
- [BBL04] Eliane BÉCACHE, Anne-Sophie BONNET-BEN DHIA et Guillaume LEGENDRE. « Perfectly matched layers for the convected Helmholtz equation ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 42.1 (2004), p. 409-433.
- [BBL10] Vahan BARONIAN, Anne-Sophie BONNET-BEN DHIA et Eric LUNÉVILLE. « Transparent boundary conditions for the harmonic diffraction problem in an elastic waveguide ». In : *Journal of Computational and Applied Mathematics* 234.6 (2010), p. 1945-1952.
- [BBR16] Vahan BARONIAN, Laurent BOURGEOIS et Arnaud RECOQUILLAY. « Imaging an acoustic waveguide from surface data in the time domain ». In : *Wave Motion* 66 (2016), p. 68-87.
- [BCF19] Laurent BOURGEOIS, Lucas CHESNEL et Sonia FLISS. « On well-posedness of time-harmonic problems in an unbounded strip for a thin plate model ». In : *Communications in Mathematical Sciences* 17/6 (déc. 2019), p. 1487-1529.
- [BDE14] Hélène BARUCQ, Rabia DJELLOULI et Elodie ESTECAHANDY. « On the existence and the uniqueness of the solution of a fluid–structure interaction scattering problem ». In : *Journal of Mathematical Analysis and applications* 412.2 (2014), p. 571-588.
- [BDÜ00] BP BELINSKIY, JP DAUER et H ÜBERALL. « The reality of fluid-wave resonance frequencies on a cylindrical shell ». In : *Acta mechanica* 141.1 (2000), p. 117-123.
- [Béc+22] Eliane BÉCACHE et al. « The Half-Space Matching method for elastodynamic scattering problems in unbounded domains ». working paper or preprint. Sept. 2022.
- [Ber94] Jean-Pierre BERENGER. « A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves ». In : *Journal of computational physics* 114.2 (1994), p. 185-200.
- [BF14] Laurent BOURGEOIS et Sonia FLISS. « On the identification of defects in a periodic waveguide from far field data ». In : *Inverse Problems* 30.9 (2014), p. 095004.
- [BFR21] Laurent BOURGEOIS, Jean-François FRITSCH et Arnaud RECOQUILLAY. « Imaging junctions of waveguides ». In : *Inverse Problems and Imaging* 15.2 (2021), p. 285.
- [BFR22] Laurent BOURGEOIS, Jean-François FRITSCH et Arnaud RECOQUILLAY. « Scattering in a partially open waveguide: the inverse problem ». In : *Inverse Problems and Imaging* (2022).
- [BFT18] Anne-Sophie BONNET-BEN DHIA, Sonia FLISS et Antoine TONNOIR. « The Halfspace Matching Method: a New Method to Solve Scattering Problem in Infinite Media ». In : *JCAM* 338 (juil. 2018), p. 44-68.
- [BGP17] Oscar P BRUNO, Emmanuel GARZA et Carlos PÉREZ-ARANCIBIA. « Windowed Green function method for nonuniform open-waveguide problems ». In : *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 65.9 (2017), p. 4684-4692.
- [Bha02] Mahesh C BHARDWAJ. « Non-destructive evaluation ». In : *Encyclopedia of smart materials* 2 (2002), p. 690-714.
- [BL08] Laurent BOURGEOIS et Éric LUNÉVILLE. « The linear sampling method in a waveguide: a modal formulation ». In : *Inverse problems* 24.1 (2008), p. 015018.

- [BL12] Laurent BOURGEOIS et Éric LUNÉVILLE. « On the use of sampling methods to identify cracks in acoustic waveguides ». In : *Inverse Problems* 28.10 (2012), p. 105011.
- [BL13] Laurent BOURGEOIS et Éric LUNÉVILLE. « On the use of the linear sampling method to identify cracks in elastic waveguides ». In : *Inverse Problems* 29.2 (2013), p. 025017.
- [BL21] Anne-Sophie BONNET-BEN DHIA et Éric LUNÉVILLE. « Propagation dans les guides d'ondes ». Doctoral. Lecture. ENSTA Paris, France, 2021.
- [BLD01] A BERNARD, MJS LOWE et M DESCHAMPS. « Guided waves energy velocity in absorbing and non-absorbing plates ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 110.1 (2001), p. 186-196.
- [BLL11] Laurent BOURGEOIS, Frédérique LE LOUËR et Éric LUNÉVILLE. « On the use of Lamb modes in the linear sampling method for elastic waveguides ». In : *Inverse Problems* 27.5 (2011), p. 055001.
- [BM19] Liliana BORCEA et Shixu MENG. « Factorization method versus migration imaging in a waveguide ». In : *Inverse Problems* 35.12 (2019), p. 124006.
- [Bou+23] Laurent BOURGEOIS et al. « Scattering in a partially open waveguide: the forward problem ». In : *IMA Journal of Applied Mathematics* 88.1 (2023), p. 102-151.
- [Bre+18] CR BRETT et al. « Development of a technique for inspecting the foundations of offshore wind turbines ». In : *Insight-Non-Destructive Testing and Condition Monitoring* 60.1 (2018), p. 19-27.
- [Bre10] Haim BREZIS. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [BS94] Anne-Sophie BONNET-BEN DHIA et Felipe STARLING. « Guided waves by electromagnetic gratings and non-uniqueness examples for the diffraction problem ». In : *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 17.5 (1994), p. 305-338.
- [CC03] Fioralba CAKONI et David COLTON. « On the mathematical basis of the linear sampling method ». In : *Georgian Mathematical Journal* 10.3 (2003), p. 411-425.
- [CC05] Fioralba CAKONI et David COLTON. *Qualitative methods in inverse scattering theory: An introduction*. Springer Science & Business Media, 2005.
- [Cha+06] Antonios CHARALAMBOPOULOS et al. « The factorization method for an acoustic wave guide ». In : *Mathematical Methods In Scattering Theory And Biomedical Engineering*. World Scientific, 2006, p. 120-127.
- [Cha+22] Colin CHAMBEYRON et al. *Documentation de XLiFE++, v2.2-r330*. 24 fév. 2022. URL : <https://uma.ensta-paris.fr/soft/XLiFE++/doc/index.html>.
- [Che12] Lucas CHESNEL. « Étude de quelques problèmes de transmission avec changement de signe. Application aux métamatériaux. » Thèse de doct. Ecole Polytechnique X, 2012.
- [Cia10] Philippe G CIARLET. « On Korn's inequality ». In : *Chinese Annals of Mathematics, Series B* 31.5 (2010), p. 607-618.
- [CJK97] Robert M CORLESS, David J JEFFREY et Donald E KNUTH. « A sequence of series for the Lambert W function ». In : *Proceedings of the 1997 international symposium on Symbolic and algebraic computation*. 1997, p. 197-204.



- [CK96] David COLTON et Andreas KIRSCH. « A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region ». In : *Inverse problems* 12.4 (1996), p. 383.
- [CKK98] David L COLTON, Rainer KRESS et Rainer KRESS. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*. T. 93. Springer, 1998.
- [CL08] Michel CASTAINGS et Michael LOWE. « Finite element model for waves guided along solid systems of arbitrary section coupled to infinite solid media ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 123.2 (2008), p. 696-708.
- [CM08] Giulio CIRAIOLO et Rolando MAGNANINI. « Analytical results for 2-D non-rectilinear waveguides based on a Green's function ». In : *Mathematical methods in the applied sciences* 31.13 (2008), p. 1587-1606.
- [CPP97] David COLTON, Michele PIANA et Roland POTTHAST. « A simple method using Morozov's discrepancy principle for solving inverse scattering problems ». In : *Inverse Problems* 13.6 (1997), p. 1477.
- [Dah01] Lynda DAHI. « Guidage et diffraction d'ondes acoustiques : étude mathématique et analyse numérique ». These de doctorat. Paris 6, 2001.
- [DC09] Jacob DAVIES et Peter CAWLEY. « The application of synthetic focusing for imaging crack-like defects in pipelines using guided waves ». In : *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control* 56.4 (2009), p. 759-771.
- [DCL14] Anne-Sophie Bonnet-Ben DHIA, Colin CHAMBEYRON et Guillaume LEGENDRE. « On the use of perfectly matched layers in the presence of long or backward propagating guided elastic waves ». In : *Wave Motion* 51.2 (2014), p. 266-283.
- [Dem+04] Alessandro DEMMA et al. « The reflection of guided waves from notches in pipes: a guide for interpreting corrosion measurements ». In : *Ndt & E International* 37.3 (2004), p. 167-180.
- [DG11] Gilles DEMANGE et Eva-Maria GRAEFE. « Signatures of three coalescing eigenfunctions ». In : *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 45.2 (2011), p. 025303.
- [DG18] A DELITSYN et DS GREBENKOV. « Mode matching methods for spectral and scattering problems ». In : *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 71.4 (2018), p. 537-580.
- [DGH11] Anne-Sophie Bonnet-Ben DHIA, Benjamin GOURSAUD et Christophe HAZARD. « Mathematical analysis of the junction of two acoustic open waveguides ». In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 71.6 (2011), p. 2048-2071.
- [DK89] Vinay DAYAL et Vikram K KINRA. « Leaky Lamb waves in an anisotropic plate. I: An exact solution and experiments ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 85.6 (1989), p. 2268-2276.
- [DL11] Anne-Sophie Bonnet-Ben DHIA et Guillaume LEGENDRE. « An alternative to Dirichlet-to-Neumann maps for waveguides ». In : *Comptes Rendus Mathématique* 349.17-18 (2011), p. 1005-1009.
- [DL67] LM DELVES et JN LYNES. « A numerical method for locating the zeros of an analytic function ». In : *Mathematics of computation* 21.100 (1967), p. 543-560.
- [DNS19] Sebastián DOMÍNGUEZ, Nilima A NIGAM et Jiguang SUN. « Revisiting the Jones eigenproblem in fluid-structure interaction ». In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 79.6 (2019), p. 2385-2408.

- [DQ83] M DE BILLY et G QUENTIN. « Experimental study of the Scholte wave propagation on a plane surface partially immersed in a liquid ». In : *Journal of applied physics* 54.8 (1983), p. 4314-4322.
- [Dru+19] Tom DRUET et al. « Passive guided wave tomography for pipes inspection ». In : *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation* (2019).
- [EE18] David Eric EDMUNDS et W Desmond EVANS. *Spectral theory and differential operators*. Oxford University Press, 2018.
- [EHR08] Johannes ELSCHNER, George C HSIAO et Andreas RATHSFELD. « An inverse problem for fluid-solid interaction ». In : *Inverse Problems & Imaging* 2.1 (2008), p. 83.
- [Ele+94] George V ELEFThERIADES et al. « Some important properties of waveguide junction generalized scattering matrices in the context of the mode matching technique ». In : *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 42.10 (1994), p. 1896-1903.
- [Est13] Elodie ESTECAHANDY. « Contribution to the mathematical analysis and to the numerical solution of an inverse elasto-acoustic scattering problem ». Thèse de doct. Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2013.
- [Fav96] Nathalie FAVRETTO-ANRÈS. « Theoretical study of the Stoneley-Scholte wave at the interface between an ideal fluid and a viscoelastic solid ». In : *Acta Acustica united with Acustica* 82.6 (1996), p. 829-838.
- [FJ16] Sonia FLISS et Patrick JOLY. « Solutions of the time-harmonic wave equation in periodic waveguides: asymptotic behaviour and radiation condition ». In : *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 219.1 (2016), p. 349-386.
- [FJL21] Sonia FLISS, Patrick JOLY et Vincent LESCARRET. « A DtN approach to the mathematical and numerical analysis in waveguides with periodic outlets at infinity ». In : *Pure and Applied Analysis* (2021).
- [FMM15] Simon FÉLIX, Agnès MAUREL et Jean-François MERCIER. « Improved multimodal methods for the acoustic propagation in waveguides with finite wall impedance ». In : *Wave Motion* 54 (2015), p. 1-10.
- [FR97] Nathalie FAVRETTO-ANRÈS et Guy RABAU. « Excitation of the Stoneley-Scholte wave at the boundary between an ideal fluid and a viscoelastic solid ». In : *Journal of sound and vibration* 203.2 (1997), p. 193-208.
- [Fur20a] Takashi FURUYA. « Scattering by the local perturbation of an open periodic waveguide in the half plane ». In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 489.1 (2020), p. 124149.
- [Fur20b] Takashi FURUYA. « The factorization and monotonicity method for the defect in an open periodic waveguide ». In : *Journal of Inverse and Ill-posed Problems* 1.ahead-of-print (2020).
- [Gal18] Matthieu GALLEZOT. « Simulation numérique du contrôle non-destructif des guides d'ondes enfouis ». Theses. Ecole Centrale Nantes, 2018.
- [GBS14] Hauke GRAVENKAMP, Carolin BIRK et Chongmin SONG. « Numerical modeling of elastic waveguides coupled to infinite fluid media using exact boundary conditions ». In : *Computers & structures* 141 (2014), p. 36-45.
- [Gou10] Benjamin GOURSAUD. « Mathematical and numerical study of non uniform open waveguides, modal approach ». Theses. Ecole Polytechnique X, 2010.

- [GPV22] Jay GOPALAKRISHNAN, Benjamin Quannah PARKER et Pieter VANDENBERGE. « Computing leaky modes of optical fibers using a FEAST algorithm for polynomial eigenproblems ». In : *Wave Motion* 108 (2022), p. 102826.
- [Gri92] Pierre GRISVARD. *Singularities in boundary value problems*. T. 22. Springer, 1992.
- [GS10] Vladimir GERASIK et Marek STASTNA. « Complex group velocity and energy transport in absorbing media ». In : *Physical Review E* 81.5 (2010), p. 056602.
- [GW69] K GUSTAFSON et Joachim WEIDMANN. « On the essential spectrum ». In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 25.1 (1969), p. 121-127.
- [Har90] Thierry HARGÉ. « Valeurs propres d'un corps élastique ». In : *C.R. Acad. Sci Paris, t. 311, Série I* (1990), p. 857-859.
- [Haz09] Christophe HAZARD. « A distribution framework for the generalized Fourier transform associated with a Sturm–Liouville operator ». Thèse de doct. INRIA, 2009.
- [Haz15] Christophe HAZARD. « On the absence of trapped modes in locally perturbed open waveguides ». In : *IMA Journal of Applied Mathematics* 80.4 (2015), p. 1049-1062.
- [HF16] Takahiro HAYASHI et Rei FUJISHIMA. « Defect detection using quasi-scholte wave for plate loaded with water on single surface ». In : *Materials transactions* (2016), p. M2016204.
- [HI14] Takahiro HAYASHI et Daisuke INOUE. « Calculation of leaky Lamb waves with a semi-analytical finite element method ». In : *Ultrasonics* 54.6 (2014), p. 1460-1469.
- [HK19] Isaac HARRIS et Andreas KLEEFELD. « Analysis of new direct sampling indicators for far-field measurements ». In : *Inverse problems* 35.5 (2019), p. 054002.
- [HKR00] George C HSIAO, Ralph E KLEINMAN et Gary F ROACH. « Weak solutions of fluid–solid interaction problems ». In : *Mathematische Nachrichten* 218.1 (2000), p. 139-163.
- [HM09] Jonathan HU et Curtis R MENYUK. « Understanding leaky modes: slab waveguide revisited ». In : *Advances in Optics and Photonics* 1.1 (2009), p. 58-106.
- [Hsi+11] George C HSIAO et al. « Error analysis of the DtN-FEM for the scattering problem in acoustics via Fourier analysis ». In : *Journal of computational and applied mathematics* 235.17 (2011), p. 4949-4965.
- [IJZ12] Kazufumi ITO, Bangti JIN et Jun ZOU. « A direct sampling method to an inverse medium scattering problem ». In : *Inverse Problems* 28.2 (2012), p. 025003.
- [Jol12] Patrick JOLY. « An elementary introduction to the construction and the analysis of perfectly matched layers for time domain wave propagation ». In : *SeMA Journal* 57.1 (2012), p. 5-48.
- [JP95] Patrick JOLY et Christine POIRIER. « Mathematical analysis of electromagnetic open waveguides ». In : *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 29.5 (1995), p. 505-575.
- [Kat13] Tosio KATO. *Perturbation theory for linear operators*. T. 132. Springer Science & Business Media, 2013.

- [Kau+19a] Pierre KAUFFMANN et al. « Multi-modal leaky Lamb waves in two parallel and immersed plates: Theoretical considerations, simulations, and measurements ». In : *The Journal of The Acoustical Society of America* 145.2 (2019), p. 1018-1030.
- [Kau+19b] Pierre KAUFFMANN et al. « Non-destructive testing of nuclear structures behind screen using leaky lamb waves ». In : *AIP Conference Proceedings*. T. 2102. 1. AIP Publishing LLC. 2019, p. 050001.
- [Kau18] Pierre KAUFFMANN. « Étude de la propagation, réémission et transmission des ondes de Lamb en vue du Contrôle Non Destructif de structures de réacteurs nucléaires immergées en sodium liquide ». Thèse de doct. Aix-Marseille Université, 2018.
- [Kie+19] Daniel A KIEFER et al. « Calculating the full leaky Lamb wave spectrum with exact fluid interaction ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 145.6 (2019), p. 3341-3350.
- [Kie22] Daniel A. KIEFER. *Elastodynamic quasi-guided waves for transit-time ultrasonic flow metering*. FAU Forschungen, Reihe B, Medizin, Naturwissenschaft, Technik 42. Erlangen : FAU University Press, juil. 2022. ISBN : 978-3-96147-549-0.
- [Kir22] Andreas KIRSCH. « A scattering problem for a local perturbation of an open periodic waveguide ». In : *Mathematical Methods in the Applied Sciences* (2022).
- [Kir94] Pius KIRRMANN. « On the completeness of Lamb modes ». In : *Journal of elasticity* 37.1 (1994), p. 39-69.
- [Kir98] Andreas KIRSCH. « Characterization of the shape of a scattering obstacle using the spectral data of the far field operator ». In : *Inverse problems* 14.6 (1998), p. 1489.
- [KM99] Vladimir KOZLOV et Vladimir MAZ'YA. *Differential equations with operator coefficients: with applications to boundary value problems for partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 1999.
- [KMR18] Michał K KALKOWSKI, Jennifer M MUGGLETON et Emiliano RUSTIGHI. « Axisymmetric semi-analytical finite elements for modelling waves in buried/submerged fluid-filled waveguides ». In : *Computers & Structures* 196 (2018), p. 327-340.
- [KN18] VA KOZLOV et SA NAZAROV. « Waves and radiation conditions in a cuspidal sharpening of elastic bodies ». In : *Journal of Elasticity* 132.1 (2018), p. 103-140.
- [Kon67] Vladimir Aleksandrovich KONDRAT'EV. « Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points ». In : *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva* 16 (1967), p. 209-292.
- [Kot06] Cyril KOTENKOFF. « Détection d'objets enfouis sur le fond marin par ondes sismo-acoustiques de Scholte ». Thèse de doct. Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG, 2006.
- [Koz+01] Vladimir KOZLOV et al. *Spectral problems associated with corner singularities of solutions to elliptic equations*. 85. American Mathematical Soc., 2001.
- [Koz+97] Vladimir A KOZLOV et al. *Elliptic boundary value problems in domains with point singularities*. T. 52. American Mathematical Soc., 1997.
- [KP09] Seungil KIM et Joseph PASCIAK. « The computation of resonances in open systems using a perfectly matched layer ». In : *Math. Comput.* 78 (sept. 2009), p. 1375-1398.

- [KP10] Seungil KIM et Joseph PASCIAK. « Analysis of the spectrum of a Cartesian Perfectly Matched Layer (PML) approximation to acoustic scattering problems ». In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 361.2 (2010), p. 420-430.
- [KPP16] James KESTYN, Eric POLIZZI et Ping Tak PETER TANG. « FEAST eigensolver for non-Hermitian problems ». In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 38.5 (2016), S772-S799.
- [Kug+07] Simone KUGLER et al. « Scholte-wave tomography for shallow-water marine sediments ». In : *Geophysical Journal International* 168.2 (2007), p. 551-570.
- [Lam17] Horace LAMB. « On waves in an elastic plate ». In : *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character* 93.648 (1917), p. 114-128.
- [Lan+86] Lev Davidovich LANDAU et al. *Theory of elasticity: volume 7*. T. 7. Elsevier, 1986.
- [Liu17] Xiaodong LIU. « A novel sampling method for multiple multiscale targets from scattering amplitudes at a fixed frequency ». In : *Inverse Problems* 33.8 (2017), p. 085011.
- [LLC15] Eli LEINOV, Michael JS LOWE et Peter CAWLEY. « Investigation of guided wave propagation and attenuation in pipe buried in sand ». In : *Journal of Sound and Vibration* 347 (2015), p. 96-114.
- [Lov12] Philip W LOVEDAY. « Guided wave inspection and monitoring of railway track ». In : *Journal of Nondestructive Evaluation* 31.4 (2012), p. 303-309.
- [LR13] Armin LECHLEITER et Tobias RIENMÜLLER. « Factorization method for the inverse Stokes problem ». In : *Inverse Problems and Imaging* 7.4 (2013), p. 1271-1293.
- [LT88] Marc LENOIR et A TOUNSI. « The localized finite element method and its application to the two-dimensional sea-keeping problem ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 25.4 (1988), p. 729-752.
- [Mar+22] M MARMONIER et al. « Real-time 3D imaging with Fourier-domain algorithms and matrix arrays applied to non-destructive testing ». In : *Ultrasonics* 124 (2022), p. 106708.
- [Mar51] Nathan MARCUVITZ. *Waveguide handbook*. 21. Iet, 1951.
- [Mar56] Nathan MARCUVITZ. « On field representations in terms of leaky modes or eigenmodes ». In : *IRE transactions on antennas and propagation* 4.3 (1956), p. 192-194.
- [Men21] Shixu MENG. « A sampling type method in an electromagnetic waveguide ». In : *Inverse Problems & Imaging* 15.4 (2021), p. 745.
- [Mer64] LG MERKULOV. « Damping of normal modes in a plate immersed in a liquid ». In : *Sov. Phys. Acoust.* 10.2 (1964), p. 169-173.
- [Met21] Hajer METHENNI. « Modélisation mathématique et méthode numérique pour la simulation du contrôle santé intégré par ultrasons de plaques composites stratifiées ». Thèse de doctorat dirigée, Institut polytechnique de Paris 2021. Thèse de doct. 2021.
- [MMF14] Agnès MAUREL, Jean-François MERCIER et Simon FÉLIX. « Propagation in waveguides with varying cross section and curvature: A new light on the role of supplementary modes in multi-modal methods ». In : *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 470.2166 (2014), p. 20140008.

- [MMP14] Agnès MAUREL, Jean-François MERCIER et Vincent PAGNEUX. « Improved multimodal admittance method in varying cross section waveguides ». In : *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 470.2164 (2014), p. 20130448.
- [Moh+17] Ikhsan MOHAMED et al. « Ultrasonic NDE of thick polyurethane flexible riser stiffener material ». In : *Nondestructive Testing and Evaluation* 32.4 (2017), p. 343-362.
- [Mol+14] Miguel MOLERÓN et al. « Reduced Modal Modelling of Time-Domain Propagation in Complex Waveguide Networks ». In : *Acta Acustica united with Acustica* 100.3 (2014), p. 391-400.
- [MRL21] Corentin MENARD, Sebastien ROBERT et Dominique LESSELIER. « Ultrasonic array imaging of nuclear austenitic V-shape welds with Inhomogeneous and unknown anisotropic properties ». In : *Applied Sciences* 11.14 (2021), p. 6505.
- [MS09] Peter MONK et Virginia SELGAS. « An inverse fluid–solid interaction problem ». In : *Inverse Problems & Imaging* 3.2 (2009), p. 173.
- [MS16] Peter MONK et Virginia SELGAS. « An inverse acoustic waveguide problem in the time domain ». In : *Inverse Problems* 32.5 (2016), p. 055001.
- [Naz13] Serguey A NAZAROV. « The Mandelstam energy radiation conditions and the Umov–Poynting vector in elastic waveguides ». In : *Journal of Mathematical Sciences* 195.5 (2013), p. 676-729.
- [Naz14] Serguey A NAZAROV. « Umov-Mandelstam radiation conditions in elastic periodic waveguides ». In : *Sbornik: Mathematics* 205.7 (2014), p. 953.
- [Naz18] Serguey A NAZAROV. « Finite-Dimensional Approximations of the Steklov–Poincaré Operator for the Helmholtz Equation in Periodic Waveguides ». In : *Journal of Mathematical Sciences* 232.4 (2018), p. 461-502.
- [NDL90] Salah NASR, Jean DUCLOS et Michel LEDUC. « Scholte wave characterization and its decay for various materials ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 87.2 (1990), p. 507-512.
- [Neč18] Audrius NEČIŪNAS. « Algorithms of numerical simulation of elastic waves propagating in dissipative environments ». Thèse de doct. Kauno technologijos universitetas, 2018.
- [Nic18] Yann NICOLAS. « In-service Riser Inspection System IRIS ». In : *Offshore Technology Conference Asia*. OnePetro. 2018.
- [Nic22] Angèle NICLAS. « Inverse problems and local resonances in irregular mechanical waveguides ». Thèse de doct. Université de Lyon, 2022.
- [NK02] Won-Bae NA et Tribikram KUNDU. « Underwater pipeline inspection using guided waves ». In : *J. Pressure Vessel Technol.* 124.2 (2002), p. 196-200.
- [NMK17] IA NEDOSPASOV, VG MOZHAEV et IE KUZNETSOVA. « Unusual energy properties of leaky backward Lamb waves in a submerged plate ». In : *Ultrasonics* 77 (2017), p. 95-99.
- [NT15] K.L. NGUYEN et F. TREYSSÈDE. « Numerical investigation of leaky modes in helical structural waveguides embedded into a solid medium ». In : *Ultrasonics* 57 (2015), p. 125-134.

- [NTH15] Khac Long NGUYEN, Fabien TREYSSÈDE et Christophe HAZARD. « Numerical modeling of three-dimensional open elastic waveguides combining semi-analytical finite element and perfectly matched layer methods ». In : *Journal of Sound and Vibration* 344 (2015), p. 158-178.
- [NW18] Lothar NANNEN et Markus WESS. « Computing scattering resonances using perfectly matched layers with frequency dependent scaling functions ». In : *BIT Numerical Mathematics* 58.2 (2018), p. 373-395.
- [Oli84] AA OLINER. « Historical perspectives on microwave field theory ». In : *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 32.9 (1984), p. 1022-1045.
- [Öne17] Onursal ÖNEN. « Dispersion and sensitivity analysis of quasi-scholte wave liquid sensing by analytical methods ». In : *Journal of Sensors* 2017 (2017).
- [Pav98] Brian Nicholas PAVLAKOVIC. « Leaky guided ultrasonic waves in NDT. » Thèse de doct. Imperial College London (University of London), 1998.
- [PLC99] Brian PAVLAKOVIC, Mike LOWE et Peter CAWLEY. « Prediction of Reflection Coefficients from Defects in Embedded Bars ». In : *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation: Volume 18A–18B*. Sous la dir. de Donald O. THOMPSON et Dale E. CHIMENTI. Springer US, 1999, p. 207-214.
- [PM04] V PAGNEUX et A MAUREL. « Scattering matrix properties with evanescent modes for waveguides in fluids and solids ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 116.4 (2004), p. 1913-1920.
- [Pol09] Eric POLIZZI. « Density-matrix-based algorithm for solving eigenvalue problems ». In : *Physical Review B* 79.11 (2009), p. 115112.
- [Pot01] Roland POTTHAST. *Point sources and multipoles in inverse scattering theory*. Chapman et Hall/CRC, 2001.
- [PS13a] IV PETRUSENKO et Yuriy SIRENKO. « Generalized mode-matching technique in the theory of guided wave diffraction. Part 1: Fresnel formulas for scattering operators ». In : *Telecommunications and Radio Engineering* 72.5 (2013).
- [PS13b] IV PETRUSENKO et Yuriy SIRENKO. « Generalized mode-matching technique in the theory of guided wave diffraction. Part 2: convergence of projection approximations ». In : *Telecommunications and Radio Engineering* 72.6 (2013).
- [Qui16] Francisco Hernando QUINTANILLA. « Pseudospectral collocation method for viscoelastic guided wave problems in generally anisotropic media ». Thèse de doct. Imperial College London, 2016.
- [Rav+] Thilakson RAVEENDRA et al. « Inspection of Concrete/Steel/Concrete pipes by ultrasound methods affected by corrosion ». In : ().
- [Ray88] Lord RAYLEIGH. « On the free vibrations of an infinite plate of homogeneous isotropic elastic matter ». In : *Proceedings of the London Mathematical Society* 1.1 (1888), p. 225-237.
- [Rec+20] Arnaud RECOQUILLAY et al. « Guided wave imaging of composite plates using passive acquisitions by fiber Bragg gratings ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 147.5 (2020), p. 3565-3574.
- [Rec18] Arnaud RECOQUILLAY. « Méthodes d'échantillonnage appliquées à l'imagerie de défauts dans un guide d'ondes élastiques ». Thèse de doct. Université Paris-Saclay (ComUE), 2018.

- [Rih22] Mahran RIHANI. « Maxwell's equations in presence of metamaterials ». Theses. Institut Polytechnique de Paris, fév. 2022.
- [Rod+23] Samuel RODRIGUEZ et al. « Ultrasonic imaging of buried defects in rails ». In : *NDT & E International* 133 (2023), p. 102737.
- [Ros+09] Joseph L ROSE et al. « Guided wave testing of buried pipe ». In : *Materials evaluation* 67.12 (2009), p. 1387-1391.
- [Sch92] Steven H SCHOT. « Eighty years of Sommerfeld's radiation condition ». In : *Historia mathematica* 19.4 (1992), p. 385-401.
- [SNN21] Fakhraddin SEYFADDINI, Hung NGUYEN-XUAN et Vu-Hieu NGUYEN. « A semi-analytical isogeometric analysis for wave dispersion in functionally graded plates immersed in fluids ». In : *Acta Mechanica* 232.1 (2021), p. 15-32.
- [Ste68] Stanly STEINBERG. « Meromorphic families of compact operators ». In : *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 31.5 (1968), p. 372-379.
- [SU19] Ben SCHWEIZER et Maik URBAN. *On a Limiting Absorption Principle for Sesquilinear Forms with an Application to the Helmholtz Equation in a Waveguide*. Technische Universität Dortmund, Fakultät für Mathematik, 2019.
- [Sud93] A Sv SUDBO. « Film mode matching: a versatile numerical method for vector mode field calculations in dielectric waveguides ». In : *Pure and Applied Optics: Journal of the European Optical Society Part A* 2.3 (1993), p. 211.
- [Tak+13] AE TAKIY et al. « Theoretical analysis and experimental validation of the scholte wave propagation in immersed plates for the characterization of viscous fluids ». In : *2013 IEEE International Ultrasonics Symposium (IUS)*. Ieee. 2013, p. 1614-1617.
- [Tak+17] Aline E TAKIY et al. « Ultrasound imaging of immersed plates using high-order Lamb modes at their low attenuation frequency bands ». In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 96 (2017), p. 321-332.
- [Til01] Axel TILLEQUIN. « Une méthode de raccordement modal généralisée pour les problèmes de jonction de guides d'ondes ». Thèse de doct. Versailles-St Quentin en Yvelines, 2001.
- [Tja19] Yohanes TJANDRAWIDJAJA. « Some contributions to the analysis of the Half-Space Matching Method for scattering problems and extension to 3D elastic plates ». Thèse de doctorat, Université Paris-Saclay (ComUE) 2019. Thèse de doct. 2019.
- [TMP13] Chrysoula TSOGKA, Dimitrios A MITSOUDIS et Symeon PAPADIMITROPOULOS. « Selective imaging of extended reflectors in two-dimensional waveguides ». In : *SIAM Journal on Imaging Sciences* 6.4 (2013), p. 2714-2739.
- [TMP16] Chrysoula TSOGKA, Dimitrios A MITSOUDIS et Symeon PAPADIMITROPOULOS. « Partial-aperture array imaging in acoustic waveguides ». In : *Inverse Problems* 32.12 (2016), p. 125011.
- [Ton15] Antoine TONNOIR. « Conditions transparentes pour la diffraction d'ondes en milieu élastique anisotrope ». These. ENSTA ParisTech, juin 2015.
- [Val+21] Jean-Christophe VALLÉE et al. « Edge and Notch Detection in a Plate Using Time Reversal Process of Leaky Lamb Waves ». In : *Applied Sciences* 12.1 (2021), p. 228.
- [Vin13] Pham Chi VINH. « Scholte-wave velocity formulae ». In : *Wave Motion* 50.2 (2013), p. 180-190.



- [Weg12] Elias WEGERT. *Visual complex functions: an introduction with phase portraits*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [YT15] Lingyu YU et Zhenhua TIAN. « Case study of guided wave propagation in a one-side water-immersed steel plate ». In : *Case Studies in Nondestructive Testing and Evaluation* 3 (2015), p. 1-8.
- [ZCS11] Dmitry ZAKHAROV, Michel CASTAINGS et Dilbag SINGH. « Numerical and asymptotic approach for evaluating complex wavenumbers of guided modes in viscoelastic plates ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 130.2 (2011), p. 764-771.
- [ZF17] Peng Zuo et Zheng FAN. « SAFE-PML approach for modal study of waveguides with arbitrary cross sections immersed in inviscid fluid ». In : *Journal of Sound and Vibration* 406 (2017), p. 181-196.
- [ZW18] Weiqi ZHOU et Haijun WU. « An adaptive finite element method for the diffraction grating problem with PML and few-mode DtN truncations ». In : *Journal of Scientific Computing* 76.3 (2018), p. 1813-1838.
- [Zwo02] Maciej ZWORSKI. « Numerical linear algebra and solvability of partial differential equations ». In : *Communications in mathematical physics* 229.2 (2002), p. 293-307.
- [Zwo17] Maciej ZWORSKI. « Mathematical study of scattering resonances ». In : *Bulletin of Mathematical Sciences* 7.1 (2017), p. 1-85.
- [Zwo99] Maciej ZWORSKI. « Resonances in physics and geometry ». In : *Notices of the AMS* 46.3 (1999), p. 319-328.



**Titre :** Propagation des ondes dans les guides partiellement enfouis: résolution du problème direct et imagerie par méthode de type échantillonnage

**Mots clés :** guide d'ondes ouvert, jonction de guides, interaction fluide-structure, Perfectly Matched Layers (PML), méthode de Kondratiev, Linear Sampling Method (LSM)

**Résumé :** Ce travail de thèse porte sur le contrôle non destructif de structures élancées partiellement enfouies ou immergées, par exemple un câble d'acier partiellement enfoui dans du béton ou une plaque d'acier partiellement immergée dans du sodium liquide. Ces structures peuvent être vues comme la jonction d'un guide fermé et d'un guide ouvert. Pour effectuer des calculs, nous avons tronqué transversalement la partie ouverte de la structure avec des PML finies. Un guide partiellement enfoui peut alors être traité comme la jonction de deux guides fermés, dont la propagation des ondes dans l'un des guides est régie par une équation impliquant des coefficients complexes liés à la présence des PML. Ce constat nous a amené à commencer par traiter dans un premier temps le cas plus simple de la jonction de deux guides acoustiques fermés. Pour ce cas simple, nous avons proposé une démarche de résolution du problème inverse adaptée aux jonctions de guides d'ondes fermés. Elle repose d'une part sur l'introduction des champs de référence, qui sont les réponses de la structure totale sans défaut à un mode prove-

nant d'un des deux demi-guides, et d'autre part sur l'utilisation de la relation de réciprocité de la fonction de Green de la structure sans défaut. Suivant cette démarche, nous avons obtenu une formulation modale efficace de la LSM qui nous a permis d'identifier des défauts. Dans ce cas simple, nous avons tiré parti de la complétude des modes pour analyser les problèmes direct et inverse. Dans un second temps, nous avons traité le cas d'un guide acoustique partiellement enfoui. La perte de complétude des modes dans le demi-guide tronqué transversalement avec des PML nous a amenée à étudier le problème direct à l'aide de la théorie de Kondratiev. Les outils introduits pour la jonction de deux guides fermés ont été ensuite adaptés à la résolution du problème inverse. Dans un troisième temps, nous avons abordé le cas plus réaliste, mais plus complexe, d'un guide élastique partiellement immergé dans un fluide. Pour ce cas difficile, nous avons développé des outils de simulation adaptés et étendus les outils introduits précédemment pour résoudre le problème inverse.

**Title :** Propagation of waves in partially buried guides: resolution of the forward problem and imaging with a sampling type method

**Keywords :** open waveguides, junction of waveguides, fluid-structure interaction, Perfectly Matched Layers (PML), Kondratiev approach, Linear Sampling Method (LSM)

**Abstract :** This work is about the non destructive testing of partially buried or immersed slendered structures such as a steel cable partially buried in concrete or a steel plate partially immersed in liquid sodium. Such structures can be seen as the junction of two closed waveguides. In order to perform computing, the open part of the structure is truncated in the transverse direction with PMLs. As a result, a partially buried waveguide can be treated as the junction of two closed waveguides, in one of which the propagation of waves is governed by an equation involving complex coefficients due to the presence of the PMLs. This observation has lead us to tackle first the simpler case of the junction of two closed acoustic waveguides. For this simple case, we have proposed a strategy to solve the inverse problems based on the one hand on the introduction of the so-called reference fields, which are the total field response of the structure without defects to an incident field coming from both half-guides, and

on the other hand on the use of the reciprocity of the Green function of the structure without defect. Following this strategy, we have obtained an efficient modal formulation of the LSM which has enabled us to retrieve defects. In this simple case, we have taken advantage of the completeness of the modes to analyze the forward and inverse problems. The loss of the completeness of the modes in the half-guide truncated in the transverse direction with PMLs has led us to study the forward problem with Kondratiev theory. The tools introduced for the junction of two closed waveguides have been adapted to solve the inverse problem. Finally, we have tackled the more complex, but more realistic case of an elastic waveguide partially immersed in a fluid. For this difficult case, we have developed adapted computing tools adapted and extended the tools introduced before solving the inverse problem.